LEERBOEK DEEL 1 | WISKUNDE | 12E EDITIE | 2 HAVO(VWO)

GETAL & RUIMTE

Noordhoff Uitgevers

Getal & Ruimte

2 havo(vwo) deel 1

Twaalfde editie, 2018

Noordhoff Uitgevers
Groningen

Auteurs

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Voorwoord

Aan de docent(e),

De delen 2h(v)1 en 2h(v)2
De delen 2h(v)1 en 2h(v)2 zijn bestemd voor de tweede klassen havo en gecombineerde tweede klassen havo/vwo. De delen sluiten aan op de brugklasdelen vmbo-t/havo, havo/vwo en vwo, en bereiden voor op zowel de delen voor 3 havo als 3 vwo.
Parallel aan de 2h(v)-delen verschijnen nog drie andere versies voor de tweede klassen, namelijk th-delen, vwo-delen en Engelstalige vwo-delen. Door dit royale aanbod kan binnen het tweede leerjaar vrijwel elke groepssamenstelling op maat bediend worden.
Elk van de tweedeklasdelen havo(vwo) bevat vier hoofdstukken. De hoeveelheid leerstof is gebaseerd op drie lesuren van 50 minuten per week.

De leerstof
In hoofdstuk 1 Letterrekenen wordt een vervolg gegeven aan de algebraïsche vaardigheden die in klas 1 aan de orde zijn geweest. Er wordt geoefend met het herleiden van breuken met letters, het herleiden van machten, en het wegwerken van haakjes, waarbij ook de merkwaardige producten een rol spelen.
In hoofdstuk 2 Vlakke meetkunde staat de meetkunde centraal, waarbij wordt ingegaan op de begrippen afstand en oppervlakte. In de eerste klas hebben de leerlingen al kennisgemaakt met de bijzondere lijnen middelloodlijn en bissectrice. In dit hoofdstuk wordt daar met de omgeschreven en de ingeschreven cirkel van een driehoek een vervolg aan gegeven. Tevens komen in dit hoofdstuk de formules voor het berekenen van de omtrek en de oppervlakte van een cirkel aan de orde. Daarnaast worden de formules voor het berekenen van de oppervlakte van een parallellogram en van een trapezium behandeld.
In klas 1 hebben de leerlingen al kennisgemaakt met lineaire formules, voornamelijk in de vorm van woordformules. In hoofdstuk 3 Lineaire formules en vergelijkingen wordt dit verder uitgebouwd. Nadat de leerlingen met de abstracte vorm $y = ax + b$ hebben gewerkt, komen lineaire verbanden in context aan bod. Verder wordt het oplossen van lineaire vergelijkingen met de balansmethode uitgebreid behandeld. Als plus-stof is hierbij het opstellen van vergelijkingen bij verschillende soorten problemen opgenomen.
In de eerste paragraaf van hoofdstuk 4 komen kwadratische formules aan bod, met de begrippen berg- en dalparabool. In de paragrafen daarna wordt uitgebreid geoefend met het berekenen en herleiden van wortels. In de laatste paragraaf maken de leerlingen kennis met rationale en irrationale getallen.
De basisstof van elk hoofdstuk wordt afgesloten met de Gemengde opgaven. Het maken van deze opgaven is een goede voorbereiding op het proefwerk. De Diagnostische toets, die na de Samenvatting staat, toetst de basiskennis en -vaardigheden van het hoofdstuk. Heeft een leerling moeite met een opgave van de Diagnostische toets, dan kan hij de bijbehorende opgave(n) van de Herhaling maken. Deze opgaven hebben meer tussenvragen of zijn van de nodige uitleg voorzien.

© Noordhoff Uitgevers

Differentiatie, uitdaging en vaardigheden

In de 2h(v)-delen zijn voorzieningen aangebracht om de individuele leerling zoveel mogelijk op zijn eigen niveau te bedienen. Met de testopgaven, die nieuw zijn in deze editie, wordt in differentiatie voorzien. Verder wordt regelmatig plus-stof aangeboden. In plus-stof wordt dieper op een onderwerp ingegaan en hebben de opgaven een uitdagender karakter. Met plus-stof kan worden gedifferentieerd naar vwo-niveau. Naast de testopgaven zijn ook de denkopgaven nieuw. Een denkopgave biedt een probleem aan dat bij de behandelde theorie hoort, maar doet door een iets andere invalshoek of het ontbreken van tussenvragen een extra beroep op het denkvermogen van de leerling. Wiskundige denkactiviteiten maken onderdeel uit van het huidige examenprogramma havo en vwo. Door het aanbieden van denkopgaven in de onderbouwboeken raken de leerlingen hiermee vertrouwd. In tegenstelling tot plus-stof zijn denkopgaven bedoeld voor alle leerlingen.

Elk hoofdstuk sluit af met een Onderzoek. Hierin gaan de leerlingen op onderzoekende wijze aan de slag met een aan het hoofdstuk gerelateerd onderwerp. Met het Onderzoek wordt een vorm van tempodifferentiatie aangeboden. In het onderzoek van hoofdstuk 2 staat construeren centraal. Dit onderwerp is in de tussendoelen van het SLO aangemerkt als stof voor vwo-leerlingen. Het is dan ook aan te bevelen dat toekomstige vwo-leerlingen dit onderzoek doorwerken.

Achterin het boek zijn de Wiskundige vaardigheden en de Algemene vaardigheden opgenomen. Door de Wiskundige vaardigheden te maken worden rekenvaardigheden en algebraïsche vaardigheden herhaald en verder ingeslepen. In de Algemene vaardigheden staat het systematisch oplossen van problemen centraal. Leerlingen kunnen de hierin opgedane vaardigheden gebruiken bij het maken van de wizBRAIN Kangoeroe-opgaven van 2014, die na de Algemene vaardigheden komen. Omdat deze wiskundige puzzeltjes niet gesorteerd zijn op onderwerp en ook niet gerelateerd zijn aan een hoofdstuk, wordt ook hiermee een extra beroep gedaan op de wiskundige creativiteit en het wiskundig denken van de leerling. Leerlingen die snel en gemakkelijk een hoofdstuk doorwerken, kunnen met deze Kangoeroe-opgaven extra worden uitgedaagd.

Getal & Ruimte Online

Via een licentie krijgt een leerling toegang tot de digitale omgeving van Getal & Ruimte. Hierin wordt regelmatig een theorieblok uitgelegd in een instructievideo. Tevens kunnen alle opgaven digitaal gemaakt en nagekeken worden. In de digitale omgeving is er de mogelijkheid om te differentiëren omdat er adaptief kan worden gewerkt. Van elke leerling wordt de voortgang bijgehouden en voor de docent inzichtelijk gemaakt in een dashboard. Verder wordt bij elk hoofdstuk een uitgebreide studiewijzer en een digitaal RTTI-oefenproefwerk aangeboden. Daarnaast krijgen docenten, via de docentenlicentie, een aantal volledig uitgewerkte projecten en een grote hoeveelheid RTTI-gelabelde proefwerkopgaven waarmee een proefwerk samengesteld kan worden.

Opmerkingen van gebruikers stellen wij zeer op prijs.

Voorjaar 2018

© Noordhoff Uitgevers

Legenda

1 Voorkennis
Kennis van enkele onderwerpen die je paraat moet hebben.

O 2 Oriënterende opgave
Theorieblokken worden voorafgegaan door oriënterende opgaven.

T 3 [» 5] Testopgave
Een testopgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld goed begrijpt, dan kun je de testopgave maken. Gaat dit foutloos, dan mag je verder met de opgave die achter » staat.

4 Gewone opgave
Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

A 5 Afsluitende opgave
Aan deze opgave zie je welk eindniveau verwacht wordt.

6 Denkopgave
Een denkopgave doet een extra beroep op je denkvermogen. De denkopgave hoort bij de behandelde theorie, maar vaak wordt een probleem op een iets andere manier gepresenteerd. Denkopgaven zijn bedoeld voor alle leerlingen.

7 Rekenmachine

Bij deze opgave mag je een rekenmachine gebruiken.

8 Diagnostische toets
8,9 Met de diagnostische toets wordt gecontroleerd of je de basisstof beheerst. Per toetsvraag wordt verwezen naar een of meer opgaven uit de herhaling.

Plus-stof
Met plus-stof kan worden gedifferentieerd naar vwo-niveau.

Plus-paragraaf
Paragraaf waarmee kan worden gedifferentieerd naar vwo-niveau.

[▸ WERKBOEK]
Verwijzing naar het werkboek.

© Noordhoff Uitgevers

Inhoud

1 Rekenen met letters 6

Voorkennis Breuken en letterrekenen 8
1.1 Haakjes wegwerken 12
1.2 Merkwaardige producten 15
1.3 Breuken optellen 17
1.4 Breuken vermenigvuldigen en delen 20
1.5 Herleiden van machten 23
1.6 De wetenschappelijke notatie 30
Gemengde opgaven 34
Samenvatting 36
Diagnostische toets 38
Herhaling 40
Onderzoek Bouwwerken en producten 44

2 Vlakke meetkunde 46

Voorkennis Oppervlakte en bijzondere lijnen 48
2.1 Afstanden 50
2.2 Middelloodlijn en omgeschreven cirkel 56
2.3 Bissectrice en ingeschreven cirkel 60
2.4 De omtrek van een cirkel 64
2.5 De oppervlakte van een cirkel 67
2.6 De oppervlakte van een parallellogram 70
+ 2.7 De oppervlakte van een trapezium 74
Gemengde opgaven 76
Samenvatting 78
Diagnostische toets 80
Herhaling 82
Onderzoek Construeren 86

3 Lineaire formules en vergelijkingen 90

Voorkennis Formules en grafieken 92
3.1 De grafiek van een lineaire formule 94
3.2 De formule van een lijn opstellen 97
3.3 Lineaire verbanden 101
3.4 De balansmethode 107
3.5 Vergelijkingen oplossen 114
Gemengde opgaven 122
Samenvatting 124
Diagnostische toets 126
Herhaling 128
Onderzoek Vergelijkingen bij klokkijken 132

4 Kwadraten en wortels 134

Voorkennis Kwadraten 136
4.1 Kwadratische formules 138
4.2 Rekenen met wortels 142
4.3 Wortelformules 146
4.4 Wortels herleiden 149
4.5 Soorten getallen 156
Gemengde opgaven 160
Samenvatting 162
Diagnostische toets 164
Herhaling 166
Onderzoek Wortels benaderen 170

Vaardigheden 172
Wiskundige vaardigheden 174
Algemene vaardigheden 182
Kangoeroe-opgaven 186
Trefwoordenregister 194
Verantwoording 196

© Noordhoff Uitgevers

Rekenen met letters

Wist je dat je tijdens het tandenpoetsen te maken kunt krijgen met nanotechnologie? Bij nanotechnologie wordt gewerkt met onvoorstelbaar kleine deeltjes. Een nanometer is namelijk een miljardste deel van een meter. In sommige tandpasta's zit een calciumzout dat als het ware een nieuw laagje tandglazuur op je gebit aanbrengt. Eén deeltje van dit zout is ongeveer 0,000 000 053 meter. Dit hele kleine getal schrijf je in de wetenschappelijke notatie als $5{,}3 \cdot 10^{-8}$.

Wat leer je?

- Hoe je haakjes wegwerkt in vormen als $(a + b)(c + d)$.
- De merkwaardige producten.
- Delen door een breuk.
- Rekenen met breuken waarin letters voorkomen.
- De wetenschappelijke notatie voor kleine getallen.
- Herleiden van machten.

1

© Noordhoff Uitgevers

© Noordhoff Uitgevers

Voorkennis Breuken en letterrekenen

Theorie A Breuken optellen

Gelijknamige breuken kun je direct optellen.

Dus $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$ en $\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

Niet-gelijknamige breuken maak je eerst gelijknamig.

Dus $\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{6}{15}+\frac{10}{15}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$ en $1\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{5}{3}-\frac{1}{6}=\frac{10}{6}-\frac{1}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

Afspraak bij breuken
Vereenvoudig breuken zo ver mogelijk en haal de helen eruit.

1 Bereken.

a $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ **b** $1\frac{1}{2}+\frac{5}{8}$ **c** $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$ **d** $2\frac{1}{3}-1\frac{1}{2}$ **e** $2\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$ **f** $2\frac{3}{5}-1\frac{1}{10}$ **g** $1\frac{2}{5}+3\frac{1}{3}$ **h** $3\frac{2}{3}+1\frac{5}{6}$

Theorie B Breuken vermenigvuldigen

Je weet dat breuk × breuk $=\frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$.

Dus $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{42}=\frac{5}{14}$ en $1\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{7}=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$.

Verder is $\frac{3}{8}\cdot 16=\frac{3}{8}\cdot\frac{16}{1}=\frac{48}{8}=6$.

$4\cdot\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$ mag zonder tussenstap.
En $\frac{3}{8}\cdot 16=\frac{48}{8}=6$.

2 Bereken.

a $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}$ **b** $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}$ **c** $2\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$ **d** $2\cdot\frac{3}{8}$ **e** $\frac{3}{5}\cdot 10$ **f** $1\frac{2}{5}\cdot 3\frac{1}{3}$

3 Bereken.

a $\frac{3}{7}\cdot 21$ **b** $2\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{5}$ **c** $4\frac{2}{3}\cdot 1\frac{1}{7}$ **d** $-5\cdot\frac{2}{7}$ **e** $1\frac{1}{4}\cdot -8$ **f** $3\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{5}$

© Noordhoff Uitgevers

Theorie C Vermenigvuldigen bij letterrekenen

Je kunt $4 \cdot 8k$ herleiden tot $32k$. En zo kun je ook $5x \cdot 7y$ herleiden. Je krijgt $5x \cdot 7y = 35xy$. Verder is $-3a \cdot 4b = -12ab$ en $-6q \cdot -8pr = 48pqr$.
Een bijzondere situatie heb je als de letters hetzelfde zijn, zoals bij $3p \cdot -2p = -6p^2$.
Verder is $8x \cdot 3xy = 24x^2y$.

Herleiden van producten
1 Vermenigvuldig de getallen en zet de uitkomst voorop.
2 Zet de letters er in alfabetische volgorde achter en laat vermenigvuldigingspunten weg.

4 Herleid.

a $6a \cdot 7b$
b $-3b \cdot 8a$
c $2y \cdot -5y$
d $r \cdot 2p \cdot q$
e $10u \cdot 0 \cdot 5v$
f $-3e \cdot 14d$
g $8p \cdot 6q$
h $-13a \cdot 6b$
i $2a \cdot 3b \cdot 4a$

Theorie D Optellen bij letterrekenen

In een optelling kun je gelijksoortige termen samennemen.
Zo is $2x + 6x = 8x$, $5a + a = 6a$ en $3pq + 7pq = 10pq$.
Maar $3a + 7b$ kun je niet korter schrijven, want $3a$ en $7b$ zijn niet gelijksoortig. Ook $3a + 7$ kun je niet herleiden.
Verder is $8y - 3y = 5y$ en $ab - 7ab = -6ab$.
Let op het verschil in herleiden bij optellen en vermenigvuldigen.

$\underbrace{2x}_{x+x} + \underbrace{3x}_{x+x+x} = 5x$

optellen	vermenigvuldigen
$5a + 3a = 8a$	$5a \cdot 3a = 15a^2$
$5a + 3b$ kan niet korter	$5a \cdot 3b = 15ab$
$5a - 5a = 0$	$5a \cdot -5a = -25a^2$

5 Herleid.

a $3x + 4x$
b $8y - 6y$
c $3p + 5p + 9p$
d $12pq - 5pq$
e $-3x + 7x - 3x$
f $-6p + 7p - p$

6 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $5xy + 4xy$
b $15ab + 40ac$
c $4m + 12$
d $-2abc + 18abc$
e $3def - 8de$
f $pq + pq$

7 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $6a - 5a$
b $6a \cdot 5b$
c $6a + 5b$
d $10x + 2x$
e $10x \cdot 2x$
f $10x - 2x$
g $8p \cdot 7q$
h $8p - 7q$
i $8p \cdot -7q$

© Noordhoff Uitgevers

Theorie E Gelijksoortige termen

Bij het herleiden van $3a + b + 6a + 5b$ neem je de gelijksoortige termen samen. Dus $3a + b + 6a + 5b = 9a + 6b$.
En zo is $3x + 8y - 7x + 5y = 3x - 7x + 8y + 5y = -4x + 13y$.

Voorbeeld

Herleid.

a $2a - 5 - 3a$
b $3a + 2b + 5a + 7b$
c $5x - 4y - x + 3y$
d $3p + q + 2q - 3p$

Uitwerking

a $2a - 5 - 3a = -a - 5$
b $3a + 2b + 5a + 7b = 8a + 9b$
c $5x - 4y - x + 3y = 4x - y$
d $3p + q + 2q - 3p = 3q$

8 Herleid.

a $4x - 5y + 7x + 3y$
b $4x - 5y - 7x - 3y$
c $-4x - 5y + 7x + 3y$
d $4a - 3ab + a + 3ab$
e $4a - 7 + 5a$
f $8x + 5ab - ab - 7x$
g $p^2 + 8qr - p^2 - 6qr$
h $-p + 8p - 2qr - 9p$

Theorie F Herleiden en de rekenvolgorde

Denk bij het herleiden van $2x \cdot 5y + 3x \cdot 6y$ aan de rekenvolgorde. Je moet eerst vermenigvuldigen, daarna neem je de gelijksoortige termen samen.
Je krijgt $2x \cdot 5y + 3x \cdot 6y = 10xy + 18xy = 28xy$.
En zo is $2a \cdot 3b + 4a \cdot -8b = 6ab - 32ab = -26ab$.

Voorbeeld

Herleid.

a $7a \cdot 2b + a \cdot 3b$
b $3p \cdot 2p - 4p \cdot 9p$
c $8x \cdot 3y - 5x \cdot -4y$
d $5 \cdot 2x + 2 \cdot 5y$

Uitwerking

a $7a \cdot 2b + a \cdot 3b = 14ab + 3ab = 17ab$
b $3p \cdot 2p - 4p \cdot 9p = 6p^2 - 36p^2 = -30p^2$
c $8x \cdot 3y - 5x \cdot -4y = 24xy + 20xy = 44xy$
d $5 \cdot 2x + 2 \cdot 5y = 10x + 10y$

9 Herleid.

a $2x \cdot 8y + 7x \cdot 3y$
b $3a \cdot 5b - 9b \cdot a$
c $4x \cdot 6 - 5 \cdot 2x$
d $-2p \cdot 3q - 3q \cdot 8p$
e $2p \cdot 3q - 3q \cdot 8p$
f $3a \cdot 8a + 12a \cdot 2a$
g $2x \cdot 3x - 3x \cdot -5x$
h $-4a \cdot 3b \cdot 2c + 25abc$

© Noordhoff Uitgevers

10 Herleid.

a $2a \cdot 7b + 3a \cdot 4b$
b $2a + 7b + 3a + 4b$
c $2 + a + 7 + b$
d $2a \cdot 7b - 3a \cdot 4b$
e $2a \cdot -7b - 3a \cdot -4b$
f $2a \cdot 7a + 3a \cdot 4a$
g $4 \cdot 3a + 8 \cdot 2a$
h $4 + 3a + 8 + 2a$
i $4 \cdot 3a + 8 + 2a$

Theorie G De regel $a(b + c) = ab + ac$

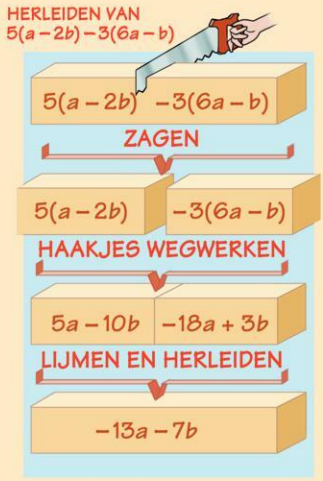
Je weet dat $3(a + b) = 3a + 3b$. Hierbij zijn de haakjes weggewerkt met de volgende regel.

$a(b + c) = ab + ac$

En zo is $2b(5a - 7) = 10ab - 14b$ en $a(2a + b) = 2a^2 + ab$.
Let op bij mintekens: $-(3p - 2q) = -3p + 2q$.

Soms kun je na het wegwerken van de haakjes nog gelijksoortige termen samennemen. Zo is

- $-8(a - 3) + 6a = -8a + 24 + 6a = -2a + 24$
- $8 - 3(2a - 6) = 8 - 6a + 18 = -6a + 26$
- $3(a + 2b) + 2(a - 3b) = 3a + 6b + 2a - 6b = 5a$.



11 Werk de haakjes weg.

a $5(a - 2b)$
b $x(2x - 3)$
c $-3(9pq - 4r)$
d $5x(4x + 2)$
e $-(4x - y)$
f $3(4m - 3n)$

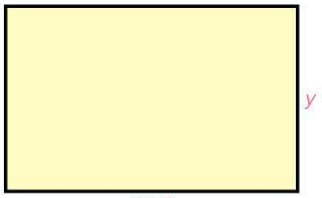
Bij het herleiden werk je eerst de haakjes weg en neem je vervolgens de gelijksoortige termen samen.

12 Herleid.

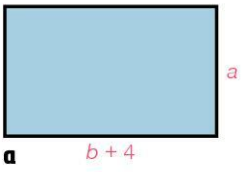
a $5(7x - 2) + 10$
b $5a - 4(2a - 8)$
c $-(4a - 2b) + 5a - 3b$
d $8(a + 2b) + 2(3a + b)$
e $2(x + 6y) - 3(2x - 3y)$
f $2p - 5q - 2(p + 4q)$

13 De oppervlakte van de rechthoek in figuur 1.1 is $y(x + 3) = xy + 3y$.
De omtrek van de rechthoek is $x + 3 + y + x + 3 + y = 2x + 2y + 6$.

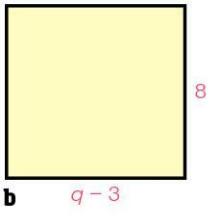
Geef de oppervlakte en de omtrek van de rechthoeken in figuur 1.2. Herleid je antwoorden.



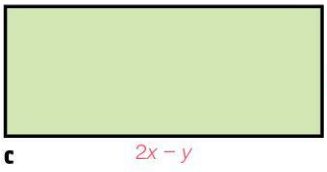
figuur 1.1



a



b



c

figuur 1.2

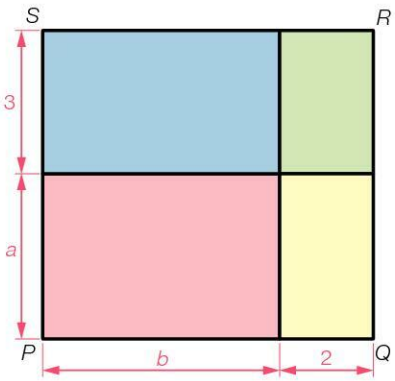
© Noordhoff Uitgevers

1.1 Haakjes wegwerken

O 1 De rechthoek $PQRS$ is opgedeeld in vier rechthoeken. Annemarie maakt een formule voor de oppervlakte van $PQRS$.
Ze begint als volgt.
oppervlakte rood = ab
oppervlakte geel = $2a$
oppervlakte blauw = …
oppervlakte groen = …

a Vul in.
De oppervlakte van $PQRS$ is $ab + 2a + \ldots + \ldots$

b Volgens Karin is de lengte van de rechthoek $PQRS$ gelijk aan $b + 2$ en de breedte gelijk aan $a + 3$.
Dus de oppervlakte van $PQRS$ is $(a + 3) \cdot (b + 2)$.
Heeft Karin gelijk?



figuur 1.3

Theorie A De regel $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

In opgave 1 kreeg Annemarie de formule
oppervlakte = $ab + 2a + 3b + 6$
en Karin kreeg
oppervlakte = $(a + 3)(b + 2)$.
Hieruit volgt $(a + 3)(b + 2) = ab + 2a + 3b + 6$.
Je hebt hiermee de haakjes weggewerkt in $(a + 3)(b + 2)$.

Je mag de vermenigvuldigingspunt tussen $(a + 3)$ en $(b + 2)$ weglaten.

Je kunt dit ook zonder oppervlakte berekenen.
Met boogjes geven we aan hoe dat gaat.

$$(a + 3)(b + 2) = ab + 2a + 3b + 6$$

product van twee factoren — som van vier termen

Soms kun je de uitkomst verder herleiden. Zo is
$(x + 3)(x + 7) = x^2 + 7x + 3x + 21 = x^2 + 10x + 21$.

$(a + 3)(a + 5) =$
$a^2 + 5a + 3a + 15 =$
$a^2 + 8a + 15$

De haakjes wegwerken in het product $(a + b)(c + d)$ gaat als volgt.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Herleid.

a $(a + 2)(b + 3)$ **c** $(x - 5)(x + 4)$

b $(p + 6)(p + 7)$ **d** $(a + 3)(a - 3)$

Uitwerking

a $(a + 2)(b + 3) = ab + 3a + 2b + 6$

b $(p + 6)(p + 7) = p^2 + 7p + 6p + 42 = p^2 + 13p + 42$

c $(x - 5)(x + 4) = x^2 + 4x - 5x - 20 = x^2 - x - 20$

d $(a + 3)(a - 3) = a^2 - 3a + 3a - 9 = a^2 - 9$

$(a - 2)(a + 6) =$
$a^2 + 6a - 2a - 12 =$
$a^2 + 4a - 12$

T **2** [▸▸5] Herleid.

a $(x - 1)(y + 1)$ **c** $(2p - q)(p + 4q)$

b $(4x - 1)(x + 3)$ **d** $(x + 3y)(x + 3y)$

3 Herleid.

a $(a + 7)(b + 9)$ **c** $(q + 4)(q - 5)$ **e** $(x + 6)(x - 1)$

b $(x + 7)(x + 9)$ **d** $(p + 8)(p + 8)$ **f** $(x - 1)(x - 9)$

4 Zie figuur 1.4. Als pijl I wijst naar $b - 1$ en pijl II wijst naar $a + 5$, dan hoort hierbij het product $(b - 1)(a + 5)$.
Schrijf alle mogelijke producten op die door de pijlen kunnen worden aangegeven.
Herleid telkens het product.

figuur 1.4

5 Het herleiden van $(a + 5)^2$ gaat als volgt.
$(a + 5)^2 = (a + 5)(a + 5) = a^2 + 5a + 5a + 25 = a^2 + 10a + 25$

Herleid.

a $(a + 1)^2$ **b** $(x - 3)^2$ **c** $(b - 5)^2$

6 Herleid.

a $(a - 4)^2$ **c** $(a - 3)(a + 2)$ **e** $(p - 7)^2$

b $(b - 4)(b + 4)$ **d** $(p - 8)(p + 7)$ **f** $(a + 3)^2$

7 Het kwadraat van $a + 7$ is $(a + 7)^2$.

a Werk de haakjes weg en herleid het antwoord.

Herleid bij de volgende vragen de antwoorden.

b Wat is het kwadraat van $a - 3$?

c Wat is de oppervlakte van een vierkant met zijde $a + 5$?

d Wat is de oppervlakte van een rechthoek met afmetingen $a + 3$ en $b - 1$?

Het kwadraat van $a + 7$ is $(a + 7)^2$. Denk aan de haakjes!

© Noordhoff Uitgevers

8 Een vierkant heeft als oppervlakte $a^2 + 8a + 16$.
Wat is de zijde van het vierkant?

A 9 Herleid.

a $(2a - 1)(2a + 1)$
b $(2a - 1)(a + 2)$
c $(3q - 10)^2$
d $(a + 3b)^2$
e $(3a - b)(2a + 3b)$
f $(4x - 9)(3y - 5)$

Theorie B Regels bij haakjes wegwerken

Voor het wegwerken van haakjes ken je twee regels.
- $a(b + c) = ab + ac$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Voorbeeld

Herleid.
a $2(a - 4) + 3a + 8$
b $(a + 2)(a - 7) - 2(a + 3)$

Uitwerking
a $2(a - 4) + 3a + 8 = 2a - 8 + 3a + 8 = 5a$
b $(a + 2)(a - 7) - 2(a + 3) = a^2 - 7a + 2a - 14 - 2a - 6 = a^2 - 7a - 20$

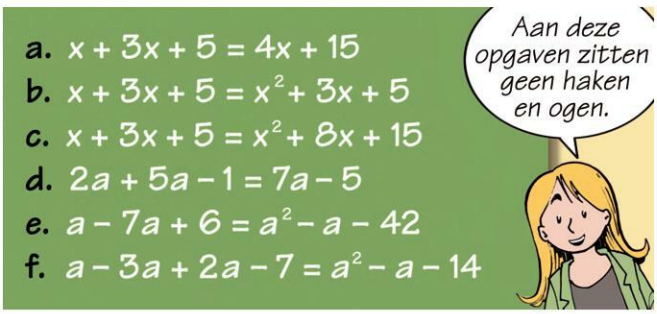
10 Herleid.

a $5(x - 2) + 3(x + 6)$
b $a + 3(a - 5) - 2a$
c $(a - 3)(a + 5) - a^2 - 3$
d $(a - 3)(a + 5) - 2(a^2 - 3)$

A 11 Herleid.

a $(a + 3)(a - 5) + 16a$
b $(a - 3b)(a + 5b) - (a^2 - 15ab)$
c $(5 + 2b)^2 - 5(4 - b)$
d $(3x + y)^2 + (3x - y)^2$

12 Op het schoolbord staan enkele herleidingen.
Voeg aan de linkerkant haakjes toe om ze kloppend te maken.



© Noordhoff Uitgevers

1.2 Merkwaardige producten

O 13 Herleid.

a $(x + 3)(x - 3)$ **b** $(p + 1)(p - 1)$ **c** $(5q - 4)(5q + 4)$

Theorie A Het merkwaardige product $(a + b)(a - b)$

Bij het herleiden van het product $(a + b)(a - b)$ gebeurt iets merkwaardigs. Er blijven maar twee termen over. Kijk maar.
$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Merkwaardig product $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Dus $(a + 4)(a - 4) = a^2 - 4^2 = a^2 - 16$.
Je mag bij herleidingen van merkwaardige producten het antwoord in één keer opschrijven. Zo is $(c - 3)(c + 3) = c^2 - 9$ en $(5x + 9)(5x - 9) = 25x^2 - 81$.

Het kwadraat van $5x$ is $(5x)^2 = 5x \cdot 5x = 25x^2$.

14 Herleid. Schrijf het antwoord in één keer op.

a $(x + y)(x - y)$ **c** $(b - 9)(b + 9)$ **e** $(5x - 6)(5x + 6)$
b $(a + 7)(a - 7)$ **d** $(3a + 2)(3a - 2)$ **f** $(8y + 1)(8y - 1)$

Theorie B De merkwaardige producten $(a + b)^2$ en $(a - b)^2$

Bij het berekenen van $(a + b)^2$ en $(a - b)^2$ houd je in het antwoord drie termen over.

- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$, dus $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2$, dus $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Omdat ab het product is van a en b heet $2ab$ het **dubbelproduct** van a en b.

Merkwaardige producten
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^2$ is a kwadraat plus dubbelproduct plus b kwadraat. Het dubbelproduct van a en b is $2ab$. Het dubbelproduct van a en 6 is $2 \cdot a \cdot 6 = 12a$.

$(a - b)^2$ is a kwadraat min dubbelproduct plus b kwadraat.

© Noordhoff Uitgevers

Bij het herleiden van merkwaardige producten mag je de tussenstappen weglaten. Je schrijft bijvoorbeeld in één keer op $(a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25$.

Het dubbelproduct van a en 5 is $2 \cdot a \cdot 5 = 10a$.

Voorbeeld

Herleid.

a $(a - 8)^2$
b $(3x + 5)^2$
c $(3a - 5b)^2$

Uitwerking

a $(a - 8)^2 = a^2 - 16a + 64$
het dubbelproduct van a en 8 is $2 \cdot a \cdot 8 = 16a$

b $(3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
$(3x)^2 = 9x^2$ en $2 \cdot 3x \cdot 5 = 30x$

c $(3a - 5b)^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2$
$(3a)^2 = 9a^2$, $2 \cdot 3a \cdot 5b = 30ab$ en $(5b)^2 = 25b^2$

Het kwadraat van $a + 5$ is $(a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25$, maar het kwadraat van $5a$ is $(5a)^2 = 5a \cdot 5a = 25a^2$.

15 Herleid.

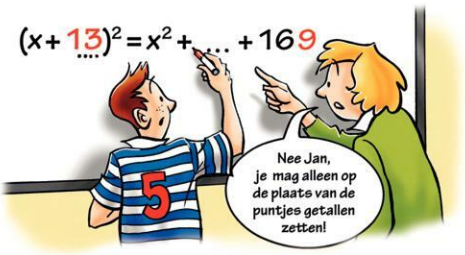
a $(a + 3)^2$
b $(b + 7)^2$
c $(2c + 3d)^2$
d $(e - 1)^2$
e $(3f + 5)^2$
f $(7g - 2)^2$

A 16 Herleid.

a $(4x + 9)^2$
b $(8x - 3)^2$
c $(7a + 2b)^2$
d $(5a + 1)(5a - 1)$
e $(3 - 5a)^2$
f $(x + 4y)^2$
g $(8x - y)(8x + y)$
h $(p - 5q)(p + 5q)$
i $(9m - 10n)^2$

17 Vul in zodat het klopt.

a $(x + \ldots)^2 = x^2 + \ldots + 16$
b $(x - \ldots)^2 = x^2 - 12x + \ldots$
c $(x + \ldots)^2 = x^2 + \ldots + 25z^2$
d $(a + \ldots)(a - \ldots) = a^2 - 9b^2$



18 Bereken. Gebruik merkwaardige producten.

a $21 \cdot 19$
b $43 \cdot 37$
c 39^2
d 53^2

© Noordhoff Uitgevers

1.3 Breuken optellen

O 19 De breuk $\frac{8}{12}$ kun je als volgt vereenvoudigen: $\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot \cancel{4}}{3 \cdot \cancel{4}} = \frac{2}{3}$.

Je hebt hierbij teller en noemer door 4 gedeeld.

En zo deel je bij $\frac{2a}{3a}$ teller en noemer door a.

Je krijgt $\frac{2a}{3a} = \frac{2 \cdot \cancel{a}}{3 \cdot \cancel{a}} = \frac{2}{3}$.

Vereenvoudig op dezelfde manier. Vul in.

a $\frac{15}{18} = \frac{3 \cdot \ldots}{3 \cdot \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$

b $\frac{3a}{5a} = \frac{3 \cdot a}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$

c $\frac{pq}{pr} = \frac{p \cdot q}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$

Theorie A Breuken vereenvoudigen

Ook breuken met letters vereenvoudig je zo ver mogelijk. Je kunt de breuk $\frac{7x}{11x}$ herleiden tot $\frac{7}{11}$ door teller en noemer door x te delen. En zo is $\frac{18bc}{24c} = \frac{3b}{4}$.

Je hebt teller en noemer door 6 en door c gedeeld.

Let op het verschil: $\frac{7x}{x} = \frac{7x}{1x} = 7$, maar $\frac{x}{7x} = \frac{1x}{7x} = \frac{1}{7}$.

Vereenvoudigen mag ook in stappen.
$\frac{18bc}{24c} = \frac{3b\cancel{c}}{4\cancel{c}} = \frac{3b}{4}$

Voorbeeld

Herleid.

a $\frac{20xy}{25xz}$

b $\frac{3ab}{b} + 5a$

Uitwerking

a $\frac{20xy}{25xz} = \frac{4y}{5z}$ deel teller en noemer door 5 en door x

b $\frac{3ab}{b} + 5a = 3a + 5a = 8a$ bedenk dat $\frac{3ab}{b} = \frac{3a}{1} = 3a$

20 Herleid.

a $\frac{7b}{7c}$

b $\frac{2p}{14p}$

c $\frac{21ab}{7a}$

d $\frac{-xy}{6xy}$

© Noordhoff Uitgevers

A 21 Herleid.

a $\frac{12a}{3} + 5a$ **c** $-\frac{ab}{b} - 2a$

b $\frac{6xy}{3y} - 2x$ **d** $\frac{15ac}{3c} - \frac{50ab}{5b}$

O 22 Je weet $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$.

Vul in.

a $\frac{2}{a} + \frac{3}{a} = \frac{\ldots}{\ldots}$ **b** $\frac{b}{7} + \frac{2b}{7} = \frac{\ldots}{\ldots}$

Theorie B Optellen van breuken met letters

Bij het optellen van gelijknamige breuken neem je de tellers samen; de noemer verandert niet.

Dus $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$ en $\frac{2}{x} + \frac{5}{x} = \frac{7}{x}$.

Verder is $\frac{a}{b} + \frac{3a}{b} = \frac{4a}{b}$ en $\frac{a}{b} + \frac{2c}{b} = \frac{a+2c}{b}$.

Je kunt $a + 2c$ niet herleiden, want a en $2c$ zijn niet gelijksoortig.

Om niet-gelijknamige breuken op te tellen, maak je ze eerst gelijknamig. Zo is $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15}{20} + \frac{4}{20} = \frac{19}{20}$,

De nieuwe noemer is $4 \cdot 5 = 20$.

$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{3y+x}{xy}$ en $\frac{a}{3b} + \frac{2}{b} = \frac{a}{3b} + \frac{6}{3b} = \frac{a+6}{3b}$

De nieuwe noemer is $x \cdot y = xy$.

De nieuwe noemer is $3b$.

Voorbeeld

Herleid.

a $\frac{5}{2a} + \frac{3}{2a}$ **b** $\frac{3}{a} + \frac{5}{b}$ **c** $5 + \frac{1}{a}$ **d** $\frac{6}{a} - \frac{3}{2a}$

Uitwerking

a $\frac{5}{2a} + \frac{3}{2a} = \frac{8}{2a} = \frac{4}{a}$

b $\frac{3}{a} + \frac{5}{b} = \frac{3b}{ab} + \frac{5a}{ab} = \frac{3b+5a}{ab}$

c $5 + \frac{1}{a} = \frac{5}{1} + \frac{1}{a} = \frac{5a}{a} + \frac{1}{a} = \frac{5a+1}{a}$

d $\frac{6}{a} - \frac{3}{2a} = \frac{12}{2a} - \frac{3}{2a} = \frac{9}{2a}$

© Noordhoff Uitgevers

23 Herleid.

a $\frac{4}{3a}+\frac{2}{3a}$

b $\frac{5}{2x}-\frac{7}{2x}$

c $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$

d $\frac{5}{a}-\frac{2}{b}$

e $4+\frac{3}{p}$

f $\frac{8}{q}-\frac{3}{2q}$

A 24 Herleid.

a $\frac{11}{2b}-\frac{3}{2b}$

b $x-\frac{2}{x}$

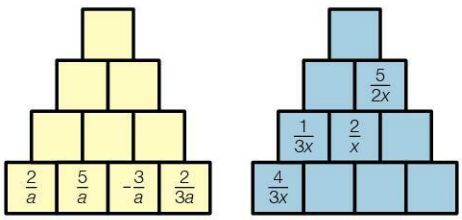
c $\frac{2b}{3b}+\frac{1}{b}$

d $\frac{5y}{x}-\frac{3}{2y}$

e $\frac{4a}{a}+6$

f $\frac{4}{a}-6$

A 25 [▸ WERKBOEK] In elk vakje van de optelpiramides in figuur 1.5 staat de som van de breuken uit de twee vakjes eronder.
Vul de piramides in. Herleid zo mogelijk de breuk.



figuur 1.5

26 Je kunt $\frac{3a}{5}+\frac{a-4}{3}$ herleiden tot $\frac{14a-20}{15}$. Dat gaat als volgt.

Denk aan de haakjes.

$$\frac{3a}{5}+\frac{a-4}{3}=\frac{3\cdot 3a}{15}+\frac{5(a-4)}{15}=\frac{9a+5a-20}{15}=\frac{14a-20}{15}$$

Herleid.

a $\frac{x}{2}+\frac{x+4}{3}$

b $\frac{a-7}{5}+\frac{2a}{3}$

c $\frac{5+a}{5}+\frac{6-a}{a}$

d $\frac{2a-3}{a}+\frac{8}{3}$

e $\frac{b+3}{b}+\frac{a-1}{a}$

f $\frac{x+y}{x}-\frac{x+y}{y}$

27 Vul in.

a $\frac{5}{2x}+\frac{3}{\ldots}=\frac{\ldots}{10xy}$

b $\frac{x}{\ldots}-\frac{1}{\ldots}=\frac{x^2-3}{\ldots}$

© Noordhoff Uitgevers

1.4 Breuken vermenigvuldigen en delen

O 28 Bereken.

a $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}$ **b** $\frac{-5}{8} \cdot \frac{8}{-5}$ **c** $7 \cdot \frac{1}{7}$

Theorie A Het omgekeerde van een getal

Je weet dat $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{35}{35} = 1$. De getallen $\frac{5}{7}$ en $\frac{7}{5}$ heten **elkaars omgekeerde**.

Twee getallen heten elkaars omgekeerde als hun product 1 is.

Zo is $\frac{7}{2}$ het omgekeerde van $\frac{2}{7}$, want $\frac{7}{2} \cdot \frac{2}{7} = 1$, en $\frac{1}{3}$ is het omgekeerde van 3, want $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$.
Het omgekeerde van $-2\frac{1}{3}$, dus van $-\frac{7}{3}$, is $-\frac{3}{7}$.

29 Schrijf het omgekeerde op.

a $\frac{13}{21}$ **c** 8 **e** 1 **g** $-3\frac{1}{3}$
b $-\frac{4}{5}$ **d** -3 **f** $2\frac{1}{5}$ **h** 0,5

30 **a** Waarom heeft 0 geen omgekeerde?

b Geef het omgekeerde van het omgekeerde van $-312\frac{1}{7}$.

O 31 Femke is jarig en viert dat met haar vriendinnen. Haar moeder heeft zes pizza's gehaald. Ieder kind krijgt een halve pizza.

a Hoeveel kinderen zijn er?

b Bij vraag a hoort de deling 6 : … = …
Vul de juiste getallen in.

Theorie B Delen door een breuk

In opgave 31 heb je gezien dat $6 : \frac{1}{2} = 12$. Je weet ook dat $6 \cdot 2 = 12$. Dus delen door $\frac{1}{2}$ komt op hetzelfde neer als vermenigvuldigen met 2.
Merk op dat 2 het omgekeerde is van $\frac{1}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers

En zo is $\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}} = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4}}{1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4}$.

Vermenigvuldig teller en noemer met het omgekeerde van de noemer.

Je ziet dat je in plaats van te delen door $\frac{4}{5}$ ook kunt vermenigvuldigen met $\frac{5}{4}$.

Algemeen geldt:

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Voorbeeld

Bereken.

a $\frac{3}{5} : \frac{7}{11}$

b $\frac{3}{8} : 6$

c $4 : -\frac{2}{3}$

d $2\frac{1}{2} : 1\frac{2}{3}$

Uitwerking

a $\frac{3}{5} : \frac{7}{11} = \frac{3}{5} \cdot \frac{11}{7} = \frac{33}{35}$

b $\frac{3}{8} : 6 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$

c $4 : -\frac{2}{3} = \frac{4}{1} \cdot -\frac{3}{2} = -\frac{12}{2} = -6$

d $2\frac{1}{2} : 1\frac{2}{3} = \frac{5}{2} : \frac{5}{3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

32 Bereken.

a $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$

b $-\frac{7}{11} : \frac{3}{4}$

c $-2\frac{1}{3} : \frac{6}{11}$

d $\frac{7}{8} : 3$

e $7\frac{2}{3} : 2\frac{2}{5}$

f $-3\frac{1}{7} : -11$

A 33 Bereken.

a $\frac{1}{6} : \frac{2}{3}$

b $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}$

c $\frac{1}{6} + \frac{2}{3}$

d $1\frac{1}{5} : \frac{2}{5}$

e $1\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5}$

f $1\frac{1}{5} - \frac{2}{5}$

g $15 : 1\frac{1}{4}$

h $15 \cdot 2\frac{1}{3}$

i $15 + 8\frac{2}{7}$

A 34 **a** Bij een zuivelfabrikant wordt per uur 800 liter drinkyoghurt gemaakt. De drinkyoghurt gaat in pakjes met een inhoud van $\frac{2}{5}$ liter.
Hoeveel pakjes worden er per uur gevuld?

b Van een schip wordt 16 ton zout overgeladen in containers. In een container past $\frac{4}{7}$ ton zout.
Hoeveel containers worden er gevuld?

© Noordhoff Uitgevers

Theorie C Vermenigvuldigen en delen bij breuken met letters

Ook bij het vermenigvuldigen van breuken waarin letters voorkomen gebruik je

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}.$$

Dus $\frac{3}{7} \cdot \frac{x}{y} = \frac{3x}{7y}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{2}{c} = \frac{2a}{bc}$ en $\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{3b}$.

Ook bij het delen van breuken waarin letters voorkomen gebruik je 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk'.

Dus $\frac{5}{a} : \frac{3}{b} = \frac{5}{a} \cdot \frac{b}{3} = \frac{5b}{3a}$ en $2 : \frac{6}{a} = 2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2}{1} \cdot \frac{a}{6} = \frac{2a}{6} = \frac{a}{3}$.

Breuken vereenvoudigen, dus teller en noemer delen door 2.

Voorbeeld

Herleid.

a $\frac{a}{6b} \cdot \frac{3}{c}$ **b** $\frac{5}{a} \cdot b$ **c** $\frac{3}{p} : \frac{9}{q}$

Uitwerking

a $\frac{a}{6b} \cdot \frac{3}{c} = \frac{3a}{6bc} = \frac{a}{2bc}$

b $\frac{5}{a} \cdot b = \frac{5}{a} \cdot \frac{b}{1} = \frac{5b}{a}$

c $\frac{3}{p} : \frac{9}{q} = \frac{3}{p} \cdot \frac{q}{9} = \frac{3q}{9p} = \frac{q}{3p}$

35 Herleid.

a $\frac{a}{6} \cdot \frac{4}{b}$ **c** $\frac{a}{6} \cdot \frac{3b}{c}$ **e** $\frac{3}{x} \cdot y$

b $\frac{a}{6} : \frac{4}{b}$ **d** $\frac{a}{6} : \frac{3b}{c}$ **f** $\frac{3}{x} : y$

A 36 Herleid.

a $\frac{2}{x} + \frac{4}{y}$ **c** $\frac{2}{x} : \frac{4}{y}$ **e** $\frac{1}{2a} : \frac{4}{b}$

b $\frac{2}{x} \cdot \frac{4}{y}$ **d** $\frac{1}{2a} - \frac{4}{b}$ **f** $\frac{3}{2x} + \frac{4}{3y}$

37 Herleid.

a $\frac{5x}{2y} - \frac{6x}{y}$ **c** $\frac{5x}{2y} : \frac{6x}{y}$ **e** $\frac{a-1}{5} \cdot \frac{a+3}{3}$

b $\frac{5x}{2y} \cdot \frac{6x}{y}$ **d** $\frac{a-1}{5} - \frac{a+3}{3}$ **f** $\frac{a-1}{5} : \frac{a+3}{3}$

© Noordhoff Uitgevers

1.5 Herleiden van machten

O 38 Je weet dat $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$ en $x^3 = x \cdot x \cdot x$.
Is $x^4 \cdot x^3$ gelijk aan x^7 of aan x^{12}?

Theorie A Het product van machten

Een product van gelijke factoren kun je schrijven als een macht. Zo is $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$ en $p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p = p^7$.
Een product van twee machten kun je soms herleiden.
Zo is $x^2 \cdot x^4 = \underbrace{x \cdot x}_{\text{2 factoren}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{4 factoren}} = x^6$.

In de macht a^6 is a het grondtal en 6 de exponent.
Er geldt $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

De exponent 6 krijg je door de exponenten 2 en 4 op te tellen.
En zo is $p^8 \cdot p^5 = p^{13}$ en $p \cdot p^9 = p^{10}$. Bedenk hierbij dat $p = p^1$.

Bij een product van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten op. Het grondtal blijft gelijk. Dus $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

Dus $a^3 \cdot a^2 = a^5$, $3a^5 \cdot 4a^3 = 12a^8$ en $7a^6 \cdot 2a = 14a^7$.
In $2a^3 \cdot 5b^4$ zijn de grondtallen niet hetzelfde. Je mag de exponenten dan niet optellen. Je krijgt $2a^3 \cdot 5b^4 = 10a^3b^4$.

Voorbeeld

Herleid.
a $2x^3 \cdot 4x^2$
b $2a^6 \cdot -3a$
c $-9p^5 \cdot -7p^3 \cdot -p^8$
d $7r^3 \cdot -q^2$

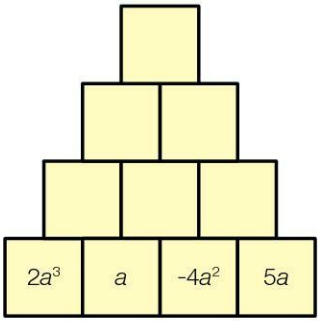
Uitwerking

a	$2x^3 \cdot 4x^2 = 8x^5$	bedenk dat $2 \cdot 4 = 8$ en $3 + 2 = 5$
b	$2a^6 \cdot -3a = -6a^7$	bedenk dat $a = a^1$
c	$-9p^5 \cdot -7p^3 \cdot -p^8 = -63p^{16}$	bedenk dat $-9 \cdot -7 \cdot -1 = -63$ en $5 + 3 + 8 = 16$
d	$7r^3 \cdot -q^2 = -7q^2r^3$	bedenk dat de grondtallen niet hetzelfde zijn

39 Herleid.
a $3p^6 \cdot 4p^8$
b $-5q \cdot 2q^2$
c $2x^5 \cdot 5x^2$
d $10y^3 \cdot -2y \cdot y^5$
e $-y \cdot -6y$
f $4x^3 \cdot -7y^2$

© Noordhoff Uitgevers

40 [▸ WERKBOEK] In elk vakje van de vermenigvuldigingspiramide hiernaast staat het product van de twee vakjes eronder. Vul de piramide in.



figuur 1.6

A 41 Herleid.

a $x^2 \cdot 3x^4 \cdot 5x^2$
b $-3a^6 \cdot a \cdot 2a^5$
c $-7p \cdot -p$
d $-7p - p$
e $3q \cdot -2q$
f $5a^3 \cdot -3b^7$

42 Je kunt $3x^2y^4 \cdot 2xy^5$ herleiden tot $6x^3y^9$. Want $3 \cdot 2 = 6$, $x^2 \cdot x = x^3$ en $y^4 \cdot y^5 = y^9$.

Herleid.

a $3a^2b^3 \cdot 5ab^4$
b $xy^4 \cdot 7x^5y^2$
c $-2p^3q^8 \cdot 4p^2q^4$
d $-9a^2b \cdot -6ab^2$
e $3p^7q^5 \cdot 7p^2q$
f $5p^6q^2 \cdot pq$

O 43 Je weet dat $3a^2 = a^2 + a^2 + a^2$ en $2a^2 = a^2 + a^2$.

Herleid.

a $3a^2 + 2a^2$
b $3a^2 \cdot 2a^2$

Theorie B Gelijksoortige termen

De termen $2a^3$ en $4a^3$ zijn gelijksoortig, want beide termen bestaan uit dezelfde letter met dezelfde exponent. Dus $2a^3 + 4a^3$ kun je herleiden tot $6a^3$. En zo is $5x^2y - 3x^2y = 2x^2y$. Maar $2a^3 + 4a^5$ kun je niet herleiden, want de termen zijn niet gelijksoortig. Ook bij $4a^3b + 3a^2b$ zijn de termen niet gelijksoortig en kun je dus niet herleiden.

Voorbeeld

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $4p^6 + 3p^6$
b $9a^5 - 3a^5$
c $2a^5 + 3a^6$
d $3a^2b + a^2b$
e $5x^2y^3 - 6x^2y^3$
f $2a^3b + 4ab^2$

Uitwerking

a $4p^6 + 3p^6 = 7p^6$
b $9a^5 - 3a^5 = 6a^5$
c $2a^5 + 3a^6$ kan niet
d $3a^2b + a^2b = 4a^2b$
e $5x^2y^3 - 6x^2y^3 = -x^2y^3$
f $2a^3b + 4ab^2$ kan niet

Bijzondere gevallen:
$a^5 + a^5 = 2a^5$
$a^5 - a^5 = 0$
$2a^5 - a^5 = a^5$
$a^5 \cdot a^5 = a^{10}$

© Noordhoff Uitgevers

44 Herleid.

a $8x^9 - 3x^9$ **c** $7a^3b + 5a^3b$ **e** $-2q^8 + 13q^8$

b $7a^4 + 6a^4$ **d** $8p^2 + p^2$ **f** $5x^2y^3 + 9x^2y^3$

A 45 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $4a^3 + 5a^3$ **d** $-3a^4 + 5a^4$ **g** $4a^3 + 5b^2$

b $4a^3 \cdot 5a^3$ **e** $-3a^4 \cdot 5a^4$ **h** $4a^3 \cdot 5b^2$

c $5a^3b + 2ab^3$ **f** $7a^3b - 8a^3b$ **i** $2a \cdot 3a \cdot 4a$

A 46 Vul in.

a $12x^6 = 6 \cdot \ldots$ **c** $12x^6 = 4x^6 - \ldots$ **e** $12x^6 = 2x \cdot \ldots$

b $12x^6 = 6x^6 \cdot \ldots$ **d** $12x^6 = -x^6 + \ldots$ **f** $12x^6 = -x^6 \cdot \ldots$

47 Je kunt $2x^3 \cdot 5x^2 + 3x^4 \cdot 4x$ als volgt herleiden.
$2x^3 \cdot 5x^2 + 3x^4 \cdot 4x = 10x^5 + 12x^5 = 22x^5$
Je weet: eerst vermenigvuldigen en dan pas optellen.

Herleid.

a $5x^2 \cdot 2x + 4x \cdot 3x^2$ **c** $6p^8 \cdot 3p^2 + 7p^4 \cdot 5p^6$ **e** $8x^4 \cdot 4x^4 + 5x^2 \cdot 10x^6$

b $7a^3 \cdot 2a^3 - 3a^2 \cdot a^4$ **d** $-8a^2 \cdot -3a^5 + a^6 \cdot -6a$ **f** $8ab^2 \cdot a^3b + 3a^2b \cdot 2a^2b^2$

48 Bij $3a^5(a^2 + 5a^4)$ kun je de haakjes wegwerken. Je krijgt
$3a^5(a^2 + 5a^4) = 3a^7 + 15a^9$, want $3a^5 \cdot a^2 = 3a^7$ en $3a^5 \cdot 5a^4 = 15a^9$.

Werk de haakjes weg.

a $a^3(a^2 + 2a)$ **c** $a^3b(3a^2b - ab)$ **e** $(3a^2 + 2)(a^2 - 5)$

b $3ab(2a - 3b)$ **d** $(a^2 + 1)(a^3 + 4)$ **f** $(a^5 + 1)^2$

ARTIKEL | BEROEP | GESCHIEDENIS | INFORMATIE

Algebra

In dit hoofdstuk leer je veel algebraïsche vaardigheden. Algebra zou je kunnen omschrijven als de taal van de wiskunde. Hoewel deze omschrijving niet volledig is, geeft het je toch een idee waar het in de algebra om gaat. In de algebra worden getallen voorgesteld door letters en bestaan er allerlei regels die aangeven hoe je met die letters rekent.
Bijvoorbeeld

- drie keer getal a wordt $3a$
- getal a keer getal a wordt a^2
- getal a vermeerderd met 6 wordt $a + 6$.

Het woord algebra komt uit het Arabisch. Rond het jaar 820 schreef de wiskundige Al-Khwarizmi een boek over letterrekenen, getiteld Al-Jabr Mugubalah. In Al-Jabr kun je het woord algebra herkennen.

© Noordhoff Uitgevers

O 49 Neem over en vul in.

a $(x^3)^4$ betekent $x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3$, dus $(x^3)^4 = x^{\cdots}$.

b $(x^6)^3$ betekent … , dus $(x^6)^3 = x^{\cdots}$.

Theorie C De macht van een macht

x^4 is een macht, dus $(x^4)^3$ is een **macht van een macht**.
$(x^4)^3$ betekent $x^4 \cdot x^4 \cdot x^4$, dus
$(x^4)^3 = x^4 \cdot x^4 \cdot x^4 = x^{4+4+4} = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$.
Je ziet dat je bij een macht van een macht de exponenten vermenigvuldigt.

Bij een macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten.
Dus $(a^p)^q = a^{pq}$.

Voorbeeld

Herleid.

a $(a^5)^3 \cdot 2a^6$

b $5(a^3)^6 - 6(a^9)^2$

c $(a^2)^3 \cdot 2a \cdot a^4$

Uitwerking

a $(a^5)^3 \cdot 2a^6 = a^{15} \cdot 2a^6 = 2a^{21}$

b $5(a^3)^6 - 6(a^9)^2 = 5a^{18} - 6a^{18} = -a^{18}$

c $(a^2)^3 \cdot 2a \cdot a^4 = a^6 \cdot 2a \cdot a^4 = 2a^{11}$

$(a^p)^q = a^{pq}$

50 Herleid.

a $(a^2)^3$

b $(a^5)^3$

c $(p^3)^3$

d $(p^{10})^2$

e $(x^2)^6 + (x^3)^4$

f $5x^{18} - 2(x^6)^3$

A 51 Herleid.

a $a^2 \cdot (a^7)^5$

b $(p^3)^4 \cdot (p^2)^6$

c $(p^3)^4 + 4(p^2)^6$

d $5x \cdot 3 \cdot (x^5)^4$

e $-2x^6 - 3(x^3)^2$

f $5(x^4)^3 - 7(x^2)^4$

52 **a** Schrijf 3^{21} als macht van 27.

b Schrijf 8^{12} als macht van 16.

O 53 Vul in.

a $(ab)^4 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab = \ldots$

b $(3a)^4 = 3a \cdot 3a \cdot 3a \cdot 3a = \ldots$

© Noordhoff Uitgevers

Theorie D De macht van een product

$(ab)^6$ is de zesde macht van het product ab. Je kunt de haakjes wegwerken:
$(ab)^6 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab = a^6b^6$.
$(ab)^6 = a^6b^6$ is een voorbeeld van de volgende regel.

Bij een macht van een product neem je elke factor tot die macht.
Dus $(ab)^p = a^pb^p$.

Voorbeeld

Herleid.
a $(pq)^3$
b $(-4p)^3$
c $(a^3b^2)^5$

Uitwerking
a $(pq)^3 = p^3q^3$
b $(-4p)^3 = (-4)^3 \cdot p^3 = -64p^3$
c $(a^3b^2)^5 = (a^3)^5 \cdot (b^2)^5 = a^{15}b^{10}$

54 Herleid.
a $(xy)^7$
b $(5x)^3$
c $(-10a)^2$
d $(-p)^6$
e $(-3p)^3$
f $(-2q)^4$

55 Herleid.
a $(-3x^2)^4$
b $(abc)^4$
c $(2ab)^3$
d $(-3xy)^3$
e $(-5xy^2)^2$
f $-(ab^2)^4$

A **56** Herleid.
a $(p^2q)^6$
b $6p \cdot 6q$
c $(6pq^3)^2$
d $(2p)^3 + p^3$
e $6(p^2)^6 - (p^4)^3$
f $(3p)^4 \cdot q^3$

57 Je kunt $-2(a^3)^4 \cdot (-2a^2)^4$ als volgt herleiden.
$-2(a^3)^4 \cdot (-2a^2)^4 = -2a^{12} \cdot 16a^8 = -32a^{20}$

Herleid.
a $(3xy)^2 + 5x^2y^2$
b $(5a^3)^2 - (a^2)^3$
c $(5a^3)^2 \cdot (a^2)^3$
d $3(2x^2y)^3 - (5xy)^3$
e $-5(x^4)^3 - (2x^6)^2$
f $(-5x^3)^4 \cdot (2x^4)^2$

© Noordhoff Uitgevers

O 58 **a** Vul in: $a^7 = a^{\cdots} \cdot a^3$.

b Vul in: $\frac{a^7}{a^3} = a^{\cdots}$.

c Wat hebben de exponenten 7 en 3 te maken met de exponent die je bij vraag b hebt ingevuld?

Theorie E Machten op elkaar delen

In opgave 58 heb je gezien dat je $\frac{a^7}{a^3} = a^4$. Dit kun ook als volgt verklaren.

$\frac{a^7}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$. ····· 7 − 3 = 4

En zo is $\frac{x^5}{x^2} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x}} = x \cdot x \cdot x = x^3$. ····· 5 − 2 = 3

Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af. Het grondtal blijft gelijk.
Dus $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.

Het herleiden van $\frac{12a^{10}}{4a^2}$ gaat als volgt.

$\frac{12a^{10}}{4a^2} = \frac{12}{4} \cdot \frac{a^{10}}{a^2} = 3a^8$

Schrijf voortaan in één keer op $\frac{12a^{10}}{4a^2} = 3a^8$.

Je weet dat $\frac{5}{5} = 1$ en $\frac{8a}{8a} = 1$, dus ook $\frac{a^3}{a^3} = 1$.

$\left.\begin{array}{l} \frac{a^p}{a^p} = 1 \\ \frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0 \end{array}\right\} a^0 = 1$

Voorbeeld

Herleid.

a $\frac{a^{12}}{a^7}$ **b** $\frac{p^5}{p}$ **c** $\frac{x^8}{x^8}$ **d** $\frac{6a^5}{2a^2}$

Uitwerking

a $\frac{a^{12}}{a^7} = a^5$ **b** $\frac{p^5}{p} = p^4$ **c** $\frac{x^8}{x^8} = 1$ **d** $\frac{6a^5}{2a^2} = 3a^3$

© Noordhoff Uitgevers

59 Herleid.

a $\frac{x^9}{x^4}$ **b** $\frac{p^5}{p}$ **c** $\frac{7a^8}{7a^8}$ **d** $\frac{24x^{10}}{-8x^5}$ **e** $\frac{8y^4}{4y^3}$ **f** $\frac{25k^{25}}{5k^5}$

REKENREGELS VOOR MACHTEN

machtsverheffen	$(a^3)^5 = a^{15}$	exponenten vermenigvuldigen
vermenigvuldigen	$a^3 \cdot a^5 = a^8$	exponenten optellen
delen	$a^5 : a^3 = a^2$	exponenten aftrekken
optellen (1)	$a^5 + a^3$	kan niet korter
optellen (2)	$a^5 + a^5 = 2a^5$	

60 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $\frac{x^{10}}{x^3}$ **b** $x^{10} + x^3$ **c** $(10x)^3$ **d** $10x + 3x$ **e** $x^{10} \cdot x^3$ **f** $\frac{10x}{3x}$ **g** $10x^3 \cdot 3x^{10}$ **h** $10x^3 - 3x^3$ **i** $3(x^{10})^3 - 10(x^3)^{10}$

A **61** Herleid.

a $\frac{9p^8}{3p^6}$ **b** $p^8 \cdot (p^3)^4$ **c** $p^8 + 3(p^2)^4$ **d** $(2x)^6 - 8(x^3)^2$ **e** $14x^6 - 13x^6$ **f** $4x^7 \cdot -7x^4$ **g** $\frac{a^{12}}{(a^2)^6}$ **h** $-6b^6 \cdot 5a^7$ **i** $12a^5 - 2a^2 \cdot 3a^3$

62 Herleid.

a $\frac{12p^6q}{4p^5q}$ **b** $\frac{-8a^5b^2}{-4a^2b}$ **c** $\frac{3p^6q^2}{-p^5q^2}$

63 Herleid.

a $(a^2)^5 \cdot a^7$ **b** $a^2 - 5a^2$ **c** $\frac{(a^3)^4}{a^5}$ **d** $(-3a^2)^4$ **e** $a^3 \cdot 3a^5 - 4a^8$ **f** $\frac{3(a^5)^3 + 2a^7 \cdot a^8}{(a^3)^5}$ **g** $(5a^2)^4$ **h** $-(-a^2)^7 - a^{14}$ **i** $-a^2 \cdot a^7 - a^9$

64 Herleid $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) - (x^2)^4 \cdot (x^4)^2$.

© Noordhoff Uitgevers

1.6 De wetenschappelijke notatie

O 65 **a** Bereken $5{,}713 \cdot 10^3$, $5{,}713 \cdot 10^4$ en $5{,}713 \cdot 10^5$.
b Schrijf direct het antwoord op van $5{,}713 \cdot 10^7$.

Theorie A De wetenschappelijke notatie bij grote getallen

Je weet dat $8{,}62 \cdot 10^5 = 862\,000$. De komma schuift vijf plaatsen naar rechts. Omgekeerd is $862\,000 = 8{,}62 \cdot 10^5$. Hiermee is 862 000 in de wetenschappelijke notatie geschreven. In de wetenschappelijke notatie ligt het eerste getal tussen 1 en 10.

Het getal 835 700 000 schrijf je in de wetenschappelijke notatie als $8{,}357 \cdot 10^8$. De eerste factor ligt tussen 1 en 10.

gewone notatie	wetenschappelijke notatie
3 216 000 000 000	$3{,}216 \cdot 10^{12}$
21 830 000	$2{,}183 \cdot 10^7$

66 In de volgende zinnen komen grote getallen voor.
Schrijf die getallen in de wetenschappelijke notatie.

a In de kelder van het Londense Natural History Museum ontdekten wetenschappers het fossiel van de vermoedelijk oudste dinosaurus ter wereld, de nyasasaurus parringtoni.
Deze dino leefde 245 000 000 jaar geleden.

b Een supernova is een ster die op spectaculaire wijze is ontploft. Een opvallende supernova is SN 1987A. Deze bevindt zich op meer dan 1 520 000 000 000 000 000 000 km van de aarde, dat is ongeveer 160 000 lichtjaar.

c In juni 2016 stond het water in de Moldau erg hoog. Per uur stroomde er 11 556 miljoen liter door de Praagse rivier.

© Noordhoff Uitgevers

A 67 Geef de antwoorden in de wetenschappelijke notatie.
Rond het eerste getal af op twee decimalen.

a De muis van Jos heeft een gemiddelde hartslag van 498 slagen per minuut.
Hoeveel keer heeft het hart geslagen tot zijn derde verjaardag?

b De 14 500 kitesurfers in ons land surfen gemiddeld zeven keer per jaar. Per keer zijn ze gemiddeld twee uur op het water te vinden.
Hoeveel minuten brengen de kitesurfers per jaar op het water door?

c In 2015 waren er in Nederland 106 763 000 kippen.
Een kip legt gemiddeld vijf eieren per week.
Hoeveel eieren zijn er in 2015 door de kippen gelegd?

O 68 Je weet
$\underbrace{0{,}000\,000}_{\text{7 nullen}}\ 32 : 1\underbrace{0\,000}_{\text{4 nullen}} = \underbrace{0{,}000\,000\,000\,0}_{\text{11 nullen}}\ 32$

Schuif de komma 4 plaatsen naar links.

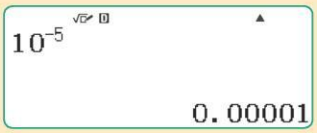
Deel je een decimaal getal door 1 000 000, dan schuift de komma zes plaatsen naar links.

a Maak deze berekening op je rekenmachine.
Wat is het resultaat?

b Bereken $\frac{1}{10^{14}}$ op je rekenmachine.
Wat staat er in het venster?

Theorie B De wetenschappelijke notatie bij kleine getallen

Bij $\frac{1}{10^{12}}$ geeft de rekenmachine 1×10^{-12}.
Je hebt hier een voorbeeld van een macht met een **negatieve exponent**. Dus $10^{-12} = \frac{1}{10^{12}}$.



En zo is $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$ en

$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000} = 0{,}00001$.

In plaats van nullen tellen kun je ook tellen hoeveel plaatsen de komma opschuift.

Afspraak
$10^{-1} = 0{,}1$, $10^{-2} = 0{,}01$, $10^{-3} = 0{,}001$
$10^{-4} = 0{,}0001$, enzovoort

© Noordhoff Uitgevers

Machten van 10 met een negatieve exponent worden gebruikt om kleine getallen in de wetenschappelijke notatie te noteren.
Zo is $0{,}000\,000\,5 = 5 \cdot \underbrace{0{,}000\,000}_{\text{7 nullen, dus } 10^{-7}}1 = 5 \cdot 10^{-7}$,

en $\underbrace{0{,}000\,000\,000}_{\text{10 nullen, dus } 10^{-10}}832 = 8{,}32 \cdot 10^{-10}$

gewone notatie	wetenschappelijke notatie
0,000 071 2	$7{,}12 \cdot 10^{-5}$
0,0351	$3{,}51 \cdot 10^{-2}$

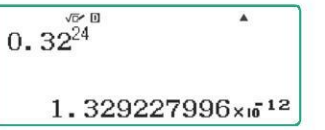
69 Schrijf in de wetenschappelijke notatie.

a 0,000 86 **b** 0,000 007 3 **c** 0,028 91

Schrijf in de gewone notatie.

d $3{,}67 \cdot 10^{-6}$ **e** $1{,}8 \cdot 10^{-12}$ **f** $9{,}318 \cdot 10^{-2}$

70 Hiernaast zie je de uitkomst van $0{,}32^{24}$.
Dus $0{,}32^{24} \approx 1{,}329 \cdot 10^{-12}$.



Bereken en schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie. Rond het eerste getal af op drie decimalen.

a $0{,}52^{18}$ **c** $8{,}71 \cdot 0{,}38^{17}$ **e** $0{,}9^6 : \left(\frac{1}{9}\right)^{13}$

b $0{,}027^{12}$ **d** $\left(\frac{3}{7}\right)^{11}$ **f** $0{,}527^8 : \left(1\frac{3}{7}\right)^5$

ARTIKEL | BEROEP | GESCHIEDENIS | INFORMATIE

Grote en kleine getallen

In het Nederlands heet

10^6 een miljoen	10^{12} een biljoen	10^{18} een triljoen
10^9 een miljard	10^{15} een biljard	10^{21} een triljard

Dit zijn zeer grote getallen. Om tot 1 miljard te tellen heb je zeker 30 jaar nodig, maar dan moet je wel dag en nacht tellen en elke seconde een tel verder komen.
Een nog veel groter getal is googol. Googol is een 1 gevolgd door 100 nullen. Deze vreemde naam is bedacht door een negenjarig neefje van de Amerikaanse wiskundige Kasner.

10^{-6} is een miljoenste en 10^{-9} is een miljardste.
In combinatie met een eenheid worden ook andere namen gebruikt.
1 nanometer = 1 miljardste meter
1 microliter = 1 miljoenste liter
1 milliseconde = 1 duizendste seconde

milli	10^{-3}
micro	10^{-6}
nano	10^{-9}
pico	10^{-12}

© Noordhoff Uitgevers

A 71 In de volgende zinnen komen kleine getallen voor. Schrijf die getallen in de wetenschappelijke notatie.

a De Mexicaanse griep veroorzaakte in 2009 een wereldwijde epidemie, ook wel pandemie genoemd. Het griepvirus heeft een doorsnede van 0,000 000 099 meter.

b Heb je vaak last van niesbuien en snotneuzen in het voorjaar? Dan heb je wellicht een graspollenallergie. Een graspol heeft een diameter van 0,000 031 9 meter.

c Een nanothermometer is 's werelds kleinste thermometer met een diameter van 0,000 000 075 meter. Toch registreert deze thermometer elke temperatuur tussen 50 °C en 500 °C heel nauwkeurig.

A 72 Geef de antwoorden in de wetenschappelijke notatie.

a Een zwerm sprinkhanen kan uit wel 250 miljard exemplaren bestaan. Zo'n zwerm is neergestreken op een oppervlakte van 0,5 km^2.
Hoeveel sprinkhanen zitten er op een m^2?

b Een zandkorrel heeft een gewicht van $2{,}8 \cdot 10^{-4}$ gram. In een zandbak zit 35 kg zand.
Bereken hoeveel zandkorrels er in de zandbak zitten.

c Bloedplaatjes spelen een belangrijke rol bij het stollen van bloed. Het volume van een bloedplaatje is 7 femtoliter (femto = 10^{-15}).
Het bloed van Petra bevat 300 miljard bloedplaatjes per liter. Petra heeft 4,5 liter bloed.
Bereken hoeveel liter aan bloedplaatjes er in het bloed van Petra zit.

d De Paardenkopnevel ligt op een afstand van 1600 lichtjaar van de aarde. Een lichtjaar is de afstand die het licht in een jaar aflegt.
Per seconde legt het licht 300 000 km af.
Hoeveel km is de Paardenkopnevel van ons verwijderd?

73 Bereken zonder rekenmachine. Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie.

a $\dfrac{(2 \cdot 10^7)^5}{(4 \cdot 10^5)^2}$

b $\dfrac{4 \cdot 10^{-5} + 3 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^3}$

© Noordhoff Uitgevers

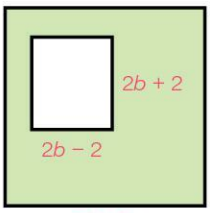
Gemengde opgaven

1 Herleid.

a $(2x - 3)(5x + 1)$
b $(2x + 3)(2x - 6)$
c $(x - 3y)(x + 2y) + 3(x + 7y)$
d $(x - 5)(x - 4) - (x^2 - 1)$
e $x - 5(x - 4) - (5 - 4x)$
f $(3x - 2)(x + y) - y(3x - y)$

2 **a** Geef de oppervlakte van het gekleurde gebied in figuur 1.7a. Herleid je antwoord.
b In figuur 1.7b zie je een vierkant met een gat. Geef de oppervlakte van het gekleurde gebied. Herleid je antwoord.

a



b

figuur 1.7

3 Herleid.

a $(x - 8)^2$
b $(5a + 1)^2$
c $(5a - 7)(5a + 7)$
d $(x + 3y)(x - 3y)$
e $(5x - 7y)^2$
f $(-5x - 3y)^2$

4 Herleid.

a $\frac{3}{a} + \frac{5}{a}$
b $\frac{3}{a} + \frac{5}{b}$
c $\frac{3}{a} \cdot \frac{5}{b}$
d $\frac{3}{a} : \frac{5}{b}$
e $-\frac{2a}{5b} + \frac{b}{2a}$
f $-\frac{2a}{5b} \cdot \frac{b}{2a}$
g $-\frac{2a}{5b} - \frac{a-1}{5b}$
h $-\frac{2a}{5b} : \frac{b}{2a}$
i $2 - \frac{1}{a^2}$

5 Herleid.

a $\frac{x+2}{y} + \frac{y}{x}$
b $\frac{a-3}{5} - \frac{a+1}{3}$
c $\frac{x+2}{y} \cdot \frac{y}{x}$
d $\frac{x+2}{y} : \frac{y}{x}$
e $\frac{x+2}{y} - \frac{x-1}{y}$
f $\frac{a-3}{a} + \frac{-3a+10}{3a}$

© Noordhoff Uitgevers

6 Herleid.

a $5a^3 \cdot 7a^6$

b $(-3a^3b)^4$

c $\dfrac{18a^{10}}{3a^2}$

d $5(a^3)^2 - (3a^2)^3$

e $3(-a^2)^6 + 3a^{12}$

f $\dfrac{4a^8 + 11a^8}{3a^3}$

g $(a^3)^4 \cdot 5a^{12}$

h $-(2a^2)^3 + 4a^6$

i $\dfrac{20a^{15}}{4a^3} - 3(2a^6)^2$

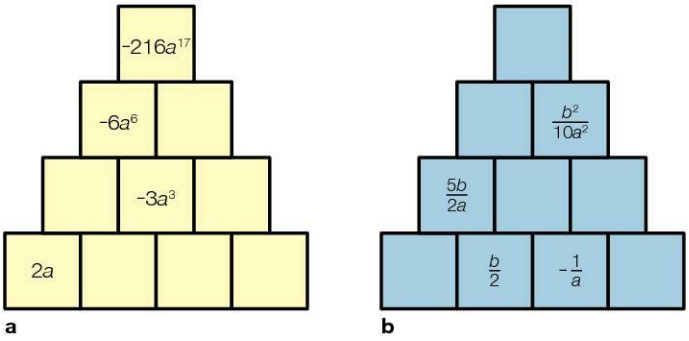
7 In de volgende zinnen maak je berekeningen met grote en kleine getallen. Geef de antwoorden in de wetenschappelijke notatie en rond zo nodig het eerste getal af op twee decimalen.

a Zuurstof is slecht oplosbaar in water. In 1 liter water kun je $39 \cdot 10^{-3}$ gram zuurstof oplossen.
Hoeveel gram zuurstof kun je oplossen in 3 mL water?

b 3 cL water bevat 10^{24} watermoleculen.
Bereken het volume van een watermolecuul in mL.

c Het gewicht van een korrel zout is $1 \cdot 10^{-4}$ gram. Noah koopt 2,5 kg strooizout.
Hoeveel zoutkorrels zijn dat?

8 [▸ WERKBOEK] Zie de vermenigvuldigingspiramides in figuur 1.8. In elk vakje staat het product van de getallen uit de twee vakjes eronder. Vul de piramides in.



a **b**

figuur 1.8

9 Herleid.

a $2(5x^3)^2 + (3x^2)^3$

b $(2 - 3x)(2x + y) - 4x(y - \frac{1}{2}x)$

c $(2x^3)^2 \cdot \dfrac{(-3x^4)^2}{x^2}$

d $\dfrac{4a^6b + 2a^6b}{12a^3b}$

e $(-5x^4)^3 - (10x^6)^2$

f $7(a^3)^4 \cdot (-2a^4)^3$

g $(3x^2 - 5y^3)^2$

h $\dfrac{-10a^3b^4 \cdot -2a^2b^3}{-5a^2b^7}$

© Noordhoff Uitgevers

Samenvatting

1.1 Haakjes wegwerken

blz 12 Met de regel $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ werk je de haakjes weg.
Zo is $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$.

$(a + b)(c + d) =$
$ac + ad + bc + bd$

blz 13 Nog enkele voorbeelden.
$(a - 3)(a + 2) = a^2 + 2a - 3a - 6 = a^2 - a - 6$
$(a - 3)^2 = (a - 3)(a - 3) = a^2 - 3a - 3a + 9 = a^2 - 6a + 9$

blz 14 $(a - 3)(a - 1) - 3(a + 2) = a^2 - a - 3a + 3 - 3a - 6 = a^2 - 7a - 3$

1.2 Merkwaardige producten

blz 15 Hiernaast staan de merkwaardige producten. Met de merkwaardige producten kun je de volgende herleidingen in één keer opschrijven.

$(7a + 3)(7a - 3) = 49a^2 - 9$ $\quad (7a)^2 = 49a^2$
$(a + 7)^2 = a^2 + 14a + 49$ $\quad 2 \cdot a \cdot 7 = 14a$
$(3a - 5)^2 = 9a^2 - 30a + 25$ $\quad (3a)^2 = 9a^2$

Merkwaardige producten
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

1.3 Breuken optellen

blz 17 Breuken met letters vereenvoudig je zo ver mogelijk.
Je kunt de breuk $\frac{8x}{13x}$ herleiden tot $\frac{8}{13}$ door teller en noemer door x te delen.
En zo is $\frac{28y}{4xy} = \frac{7}{x}$. deel teller en noemer door 4 en door y

Bij de breuk $\frac{3ab}{6a}$ kun je teller en noemer delen door 3 en door a.

blz 18 Gelijknamige breuken kun je direct optellen.
Zo is $\frac{2}{a} + \frac{3}{a} = \frac{5}{a}$ en $\frac{3}{2b} + \frac{5}{2b} = \frac{8}{2b} = \frac{4}{b}$.

Bij niet-gelijknamige breuken maak je de breuken eerst gelijknamig.
$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = \frac{y}{xy} + \frac{4x}{xy} = \frac{y + 4x}{xy}$ en $\frac{5}{a} - 3 = \frac{5}{a} - \frac{3}{1} = \frac{5}{a} - \frac{3a}{a} = \frac{5 - 3a}{a}$

blz 19 $\frac{2a}{5} + \frac{a - 3}{3} = \frac{3 \cdot 2a}{15} + \frac{5(a - 3)}{15} = \frac{6a + 5a - 15}{15} = \frac{11a - 15}{15}$

Denk aan de haakjes.

© Noordhoff Uitgevers

1.4 Breuken vermenigvuldigen en delen

blz 20 Twee getallen heten elkaars omgekeerde als hun product 1 is. Zo is $\frac{5}{6}$ het omgekeerde van $\frac{6}{5}$, en $-\frac{1}{4}$ het omgekeerde van -4.

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk. Dus $\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

blz 22 Vermenigvuldigen en delen van breuken met letters gaat als volgt.

$\frac{3}{a} \cdot \frac{6}{b} = \frac{18}{ab}$ en $\frac{3}{a} : \frac{6}{ab} = \frac{3}{a} \cdot \frac{ab}{6} = \frac{3ab}{6a} = \frac{b}{2}$

1.5 Herleiden van machten

blz 23 a^5 is een macht met grondtal a en exponent 5.
Voor het rekenen met machten gelden de regels hiernaast.
Uit regel (1) volgt $6a^3 \cdot 4a^4 = 24a^7$.

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Regels voor machten

(1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
(2) $(a^p)^q = a^{pq}$
(3) $(ab)^p = a^p \cdot b^p$
(4) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

blz 24 $6a^5 + 2a^5 = 8a^5$, want $6a^5$ en $2a^5$ zijn gelijksoortige termen. Maar $6a^5 + 2a^3$ kun je niet herleiden, want $6a^5$ en $2a^3$ zijn niet gelijksoortig.
Verder is $a^3 + a^3 = 2a^3$, $a^3 - a^3 = 0$, $2a^3 - a^3 = a^3$ en $a^3 \cdot a^3 = a^6$. Maar $a^3 + a^4$ kun je niet herleiden.

blz 26 Uit regel (2) volgt $(a^3)^4 = a^{12}$.

blz 27 Bij $(3a)^4 = 3^4 \cdot a^4 = 81a^4$ gebruik je regel (3).
Let goed op de mintekens bij $(-3a)^4 = (-3)^4 \cdot a^4 = 81a^4$ en $-(3a)^4 = -3^4 \cdot a^4 = -81a^4$.

blz 28 Uit regel (4) volgt $\frac{a^8}{a^2} = a^6$ en $\frac{8a^8}{2a^2} = 4a^6$.

blz 29 En zo is $\frac{27a^{12}b^6c^3}{9a^9b^6c} = 3a^3c^2$.

1.6 De wetenschappelijke notatie

blz 30 Hele grote en hele kleine getallen kun je in de wetenschappelijke notatie schrijven.

$389\,000\,000\,000 = 3{,}89 \cdot 10^{11}$ en $0{,}000\,000\,00871 = 8{,}71 \cdot 10^{-9}$

komma 11 plaatsen verschuiven

9 nullen, dus 10^{-9}

In de wetenschappelijke notatie ligt het eerste getal tussen 1 en 10.

© Noordhoff Uitgevers

Diagnostische toets

1.1 Haakjes wegwerken

1 1,2 Herleid.

a $(x+2)(y+3)$ **c** $(2a-3)(a-2)$ **e** $(2q-5)^2-5(5-4q)$

b $(a+4)(a-5)$ **d** $(a-3b)(2a-b)$ **f** $(a-7)(a+3)-a(a-1)$

1.2 Merkwaardige producten

2 3 Herleid. Schrijf het antwoord in één keer op.

a $(a-9)(a+9)$ **c** $(a-1)^2$ **e** $(3x+y)(3x-y)$

b $(a+9)^2$ **d** $(2x-5)^2$ **f** $(2a-3b)^2$

1.3 Breuken optellen

3 4 Herleid.

a $\dfrac{12xy}{3y}$ **b** $\dfrac{8ac}{2a}+6c$ **c** $\dfrac{12xy}{3y}-\dfrac{20xz}{5z}$

4 5,6 Herleid.

a $\dfrac{10}{3a}-\dfrac{4}{3a}$ **c** $\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}$ **e** $\dfrac{5}{3x}-\dfrac{2}{x}$

b $\dfrac{4a}{5b}+\dfrac{3a}{5b}$ **d** $3-\dfrac{2}{a}$ **f** $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{a}$

5 7 Herleid.

a $\dfrac{x}{3}+\dfrac{x-5}{2}$ **b** $\dfrac{a-3}{5}+\dfrac{a+1}{3}$ **c** $\dfrac{2a+b}{b}-\dfrac{a-1}{a}$

1.4 Breuken vermenigvuldigen en delen

6 8 Bereken.

a $\dfrac{2}{5}:\dfrac{3}{10}$ **b** $1\dfrac{2}{5}\cdot 2\dfrac{1}{7}$ **c** $-15:1\dfrac{2}{5}$

7 9 Herleid.

a $\dfrac{b}{5a}\cdot\dfrac{10}{c}$ **b** $\dfrac{12}{x}:\dfrac{6}{y}$ **c** $\dfrac{4}{a}:b$

8 10 Herleid.

a $\dfrac{8x}{3y}:\dfrac{3x}{y}$ **b** $\dfrac{a-3}{5}\cdot\dfrac{a-1}{3}$ **c** $\dfrac{a-3}{5}:\dfrac{a-1}{3}$

© Noordhoff Uitgevers

1.5 Herleiden van machten

9 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

11

a $3a^4 \cdot -5a^3$

b $3a^4 + 5a^4$

c $2x^5y - 5x^5y$

d $-2b^5 \cdot 3a^2$

e $2x^2 \cdot 3x^3 \cdot 4x^4$

f $2a^5 - 2b^5$

10 Herleid.

12, 13

a $6x^5 \cdot 3x + 3x \cdot 5x^5$

b $4ab^3 \cdot -a^3b^2 + 8a^2b \cdot 4a^2b^3$

c $4x^3(x^2 + 5x)$

d $(a^2 - 4)(2a^2 - 3)$

11 Herleid.

14

a $4a \cdot (a^3)^6$

b $(a^2)^8 + 3(a^4)^4$

c $3(a^4)^3 - 5(a^2)^6$

d $-2a^9 - 2(a^3)^3$

12 Herleid.

15

a $(5a)^3$

b $(-3x)^4$

c $(xyz)^3$

d $(-2x^4y)^2$

13 Herleid.

16

a $\dfrac{x^{18}}{x^6}$

b $\dfrac{15x^{10}}{3x^2}$

c $\dfrac{a^{15}}{(a^5)^3}$

14 Herleid.

17, 18

a $-2(a^3)^2 - (3a^2)^3$

b $(pq^3)^4 \cdot (p^2q)^3$

c $-3(a^4)^3 + (2a^4)^3$

d $\dfrac{-15p^4q^8}{5pq^4}$

e $(3a^5)^3 \cdot -2(a^4)^3$

f $\dfrac{16(a^3)^4 + (3a^6)^2}{5a^3}$

1.6 De wetenschappelijke notatie

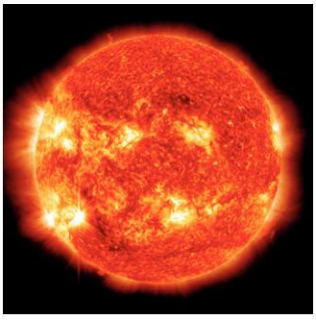
15 In de volgende zinnen komen grote en kleine getallen voor. Schrijf die getallen in de wetenschappelijke notatie.

19

a De zon heeft een diameter van 1 392 000 000 meter.

b Een eiwitmolecuul heeft een afmeting van 0,000 000 005 1 meter.

c In een aantal tandpasta's wordt titaniumoxide gebruikt. Deze stof wordt met nanotechnologie gemaakt. De afmeting van een molecuul titaniumoxide is 0,000 000 036 meter.



16 Twee liter water bestaat uit $6{,}69 \cdot 10^{25}$ watermoleculen. Bereken het gewicht van een watermolecuul in gram. Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie. Rond het eerste getal af op twee decimalen.

20

1 liter water weegt 1 kg.

© Noordhoff Uitgevers

Herhaling

1.1 Haakjes wegwerken

1 $(x+3)(x-2) = x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6$

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$(2a+3)^2 = (2a+3)(2a+3) =$
$4a^2 + 6a + 6a + 9 = 4a^2 + 12a + 9$

Herleid.

a $(a+5)(a-3)$
b $(b-7)(a+2)$
c $(x+3)^2$
d $(3a-8)(a+1)$
e $(2a-1)(3a+5)$
f $(3a+2)^2$

2 $(2a-1)(a+6) - 3(a+1) = 2a^2 + 12a - a - 6 - 3a - 3 = 2a^2 + 8a - 9$

Herleid.

a $(a+4)(a-1) - 3a(a-1)$
b $(a-5)^2 - a(a+2)$
c $(a+1)(a-2) - (a+2)$

1.2 Merkwaardige producten

3 Hiernaast staan de merkwaardige producten. Door de merkwaardige producten te gebruiken, krijg je in één keer

- $(a+7)^2 = a^2 + 14a + 49$
- $(a+7)(a-7) = a^2 - 49$
- $(3a-8)^2 = 9a^2 - 48a + 64$

$(3a)^2$ | $2 \cdot 3a \cdot 8$ | 8^2

Merkwaardige producten
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Herleid. Schrijf in één keer het antwoord op.

a $(a+5)^2$
b $(a+5)(a-5)$
c $(x-1)^2$
d $(4x-3)^2$
e $(7x-1)(7x+1)$
f $(3a+2b)^2$

1.3 Breuken optellen

4 $\frac{8ac}{6c} = \frac{4a}{3}$ deel teller en noemer door 2 en door c

Herleid.

a $\frac{12xy}{3y}$
b $\frac{18p}{12q}$
c $\frac{20ab}{2a} - 11b$
d $\frac{48xy}{3y} - \frac{32yz}{2z}$

$\frac{36pq}{4q} - 7p = 9p - 7p = 2p$

© Noordhoff Uitgevers

5 Bij het optellen van gelijknamige breuken neem je de tellers samen.
De noemer verandert niet.

Dus $\frac{6}{x}+\frac{3}{x}=\frac{9}{x}$ en $\frac{9}{2a}-\frac{5}{2a}=\frac{4}{2a}=\frac{2}{a}$.

Herleid.

a $\frac{4}{x}+\frac{7}{x}$ **b** $\frac{15}{4p}-\frac{7}{4p}$ **c** $\frac{3a}{5b}-\frac{2a}{5b}$

6 Niet-gelijknamige breuken maak je eerst gelijknamig voor je ze optelt.

Zo is $\frac{5}{a}-\frac{2}{b}=\frac{5b}{ab}-\frac{2a}{ab}=\frac{5b-2a}{ab}$.

Herleid.

a $\frac{5}{x}+\frac{2}{y}$ **b** $6-\frac{3}{a}$ **c** $\frac{3}{b}+\frac{5}{2b}$

7 $\frac{2a}{3}-\frac{a-7}{2}=\frac{2\cdot 2a}{6}-\frac{3(a-7)}{6}=\frac{2\cdot 2a-3(a-7)}{6}=\frac{4a-3a+21}{6}=\frac{a+21}{6}$

Herleid.

a $\frac{2x}{3}+\frac{2-x}{4}$ **b** $\frac{a-2}{a}-\frac{b-3}{b}$ **c** $\frac{5x-y}{x}-\frac{x-3}{y}$

1.4 Breuken vermenigvuldigen en delen

8 $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$ breuk × breuk = $\frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$

$\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$ delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk

Bereken.

a $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$ **c** $5\cdot 2\frac{1}{4}$ **e** $-3\cdot\frac{2}{9}$

b $\frac{3}{4}:\frac{2}{5}$ **d** $-5:1\frac{2}{3}$ **f** $1\frac{5}{7}:\frac{4}{5}$

9 $\frac{5}{a}\cdot\frac{2}{b}=\frac{10}{ab}$ en $\frac{5}{a}:\frac{2}{a}=\frac{5}{a}\cdot\frac{a}{2}=\frac{5a}{2a}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$

Deel teller en noemer door a.

Herleid.

a $\frac{5}{y}\cdot\frac{3}{2z}$ **b** $\frac{3x}{y}:\frac{6}{y}$ **c** $8:\frac{3}{a}$

© Noordhoff Uitgevers

10 $\frac{a+1}{5} : \frac{b+2}{3} = \frac{a+1}{5} \cdot \frac{3}{b+2} = \frac{3(a+1)}{5(b+2)} = \frac{3a+3}{5b+10}$

Herleid.

a $\frac{5a}{2b} : \frac{2a}{b}$ **b** $\frac{y-2}{3} : \frac{y+5}{2}$ **c** $\frac{y-2}{3} \cdot \frac{y+5}{2}$

1.5 Herleiden van machten

11 $3a^4b + 2a^4b = a^4b + a^4b + a^4b + a^4b + a^4b = 5a^4b$
$3a^4 + 2a^3$ kun je niet herleiden, want $3a^4$ en $2a^3$ zijn niet gelijksoortig.
Bij $a^3 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ tel je de exponenten 3 en 2 op.
En bij $3a^2 \cdot 4a^5 = 12a^7$ gebruik je dat $3 \cdot 4 = 12$ en $a^2 \cdot a^5 = a^7$.

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $5a^4 + 3a^4$ **c** $-3a^2 \cdot 2a^3$ **e** $2a \cdot a \cdot 3a^3$
b $5a^3 + 3a^4$ **d** $4p^2q^3 - 3p^2q^3$ **f** $3a^2 \cdot 2b^3$

12 $3a^5 \cdot 2a^4 - 8a^6 \cdot -3a^3 = 6a^9 + 24a^9 = 30a^9$

Herleid.

a $8a^4 \cdot 3a^6 - 2a^5 \cdot 4a^5$ **b** $7a \cdot -3a^8 - 9a^2 \cdot a^7$ **c** $4x^2y \cdot xy - 2xy^2 \cdot 3x^2$

13 $a^3(5a^4 - 6) = 5a^7 - 6a^3$ en
$(3x^2 - 5)(2x^2 - 2) = 6x^4 - 6x^2 - 10x^2 + 10 = 6x^4 - 16x^2 + 10$

Herleid.

a $p^2(4p^3 - 5)$ **c** $(a^2 - 1)(3a^4 - a^2)$
b $a^2b(3ab^2 + ab)$ **d** $(x^4 - 2)^2$

14 Uit de regel $(a^p)^q = a^{pq}$ volgt $(a^5)^3 = a^{15}$.
En $(a^4)^3 - 8(a^2)^6 = a^{12} - 8a^{12} = -7a^{12}$.

$(a^p)^q = a^{pq}$

Herleid.

a $3(a^5)^6 - (a^3)^{10}$ **c** $2(a^3)^4 - 15a^{12}$ **e** $(a^3)^2 \cdot 2a^3 - 4a^5 \cdot 2a^4$
b $(a^3)^4 \cdot 3(a^2)^5$ **d** $3(a^5)^2 + 8a^{10}$ **f** $12(a^3)^4 \cdot 4a^7$

15 $(-2a^2)^4 = (-2)^4 \cdot (a^2)^4 = 16a^8$

$(ab)^p = a^p b^p$

Herleid.

a $(4a)^3$ **c** $(2ab)^4$ **e** $3(a^2)^3 - 2(a^3)^2$
b $(-2x)^3$ **d** $(-5x^3y)^2$ **f** $8p^6 - 2(p^3)^2$

16 $\frac{6x^6}{2x^2} = 3x^4$, want $\frac{6}{2} = 3$ en $\frac{x^6}{x^2} = x^4$.

$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

Herleid.

a $\frac{x^{10}}{x^5}$ **b** $\frac{4x^{12}}{2x^4}$ **c** $\frac{(a^3)^4}{a^7}$

© Noordhoff Uitgevers

17 $-2(a^4)^3 - (-2a^3)^4 = -2a^{12} - 16a^{12} = -18a^{12}$

Herleid.

a $(-4a^3)^2 \cdot (2a^2)^3$
b $(-4a^3)^2 + (2a^2)^3$
c $(2a^4)^2 + 5(a^2)^4$
d $(3p^2)^4 \cdot 2p^3$
e $(-3x^3)^3 \cdot (x^3)^4$
f $(-3x^3)^4 - (x^4)^3$

18 Herleid.

a $\dfrac{15x^3y^{10}}{5x^3y^6}$
b $\dfrac{3x^6 + (3x^3)^2}{5x^3}$
c $\dfrac{-24p^8q^6}{3p^8q^2}$
d $\dfrac{5(a^3)^2 - (2a^2)^3}{3a^4}$

$\dfrac{4x^{10}}{x^4} = 4x^6$

$\dfrac{18x^{12}y^6}{3x^4y^6} = 6x^8$

1.6 De wetenschappelijke notatie

19 In de volgende zinnen komen grote en kleine getallen voor. Schrijf die getallen in de wetenschappelijke notatie.

a De diameter van een waterstofmolecuul is 0,000 000 126 mm.
b Een DNA-molecuul heeft een diameter van 0,000 000 000 002 5 meter.
c De aarde draait met een snelheid van 107 250 km per uur om de zon.
d In haar baan om de zon heeft de aarde sinds haar ontstaan een afstand van ruim 3 999 000 000 000 000 000 km afgelegd.

$837\,000\,000 = 8{,}37 \cdot 10^8$
Komma 8 plaatsen naar links, dus 10^8.

$\underbrace{0{,}000\,00}_{\text{6 nullen, dus } 10^{-6}}\ 62 = 6{,}2 \cdot 10^{-6}$

In het Eise Eisinga Planetarium in Franeker is een miniatuurversie van ons zonnestelsel te bewonderen.

20 Een ijzeratoom weegt $9{,}27 \cdot 10^{-26}$ kg.
Uit hoeveel atomen bestaat een ijzeren staaf van 700 gram?
Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie. Rond het eerste getal af op twee decimalen.

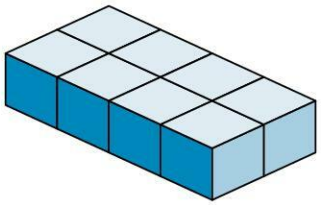
© Noordhoff Uitgevers

Onderzoek Bouwwerken en producten

In bouwwerken kunnen bijzondere eigenschappen verborgen zitten. In dit onderzoek ontdek je wat *a-bij-b-rechthoeken* te maken hebben met producten als $b(a + c)$ en $(a + 1)^2$. Je gaat hierbij werken met bouwwerken van één laag, zoals in figuur 1.9.
We spreken het volgende af.

- Een *a-bij-a-vierkant* bestaat uit a kubussen in de lengte en a kubussen in de breedte.
  We noemen *a* bij *a* de *afmeting* van het vierkant.
- Een *a-bij-b-rechthoek* bestaat uit *a* kubussen in de lengte en *b* kubussen in de breedte. De afmeting is *a* bij *b*.
- Een *a-bij-1-staaf* bestaat uit *a* kubussen in de lengte en 1 kubus in de breedte. De afmeting is *a* bij 1.

Voor *a* en *b* kies je steeds gehele positieve getallen, waarbij *a* en *b* ook gelijk mogen zijn.



figuur 1.9 Een 4-bij-2-rechthoek.

1 In figuur 1.9 zie je een 4-bij-2-rechthoek en in figuur 1.10 zie je een 4-bij-3-rechthoek.

a Hoe moet je deze rechthoeken samenvoegen om weer een rechthoek te krijgen? Welke afmeting krijg je?

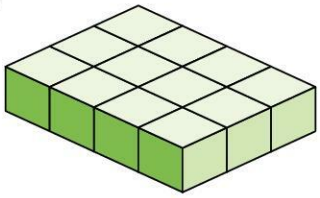
b Geef nog twee voorbeelden van rechthoeken die je samen kunt voegen tot een nieuwe rechthoek. Noem telkens de afmeting die je krijgt.

c Een 8-bij-3-rechthoek en een 3-bij-10-rechthoek zijn samen te voegen tot een nieuwe rechthoek. Welke afmeting krijg je?

d Onderzoek welke van de volgende tweetallen rechthoeken samen te voegen zijn tot een nieuwe rechthoek. Noem de afmeting van de nieuwe rechthoek.

1 *a* bij *b* en *a* bij *c*
2 *a* bij *b* en *c* bij *b*
3 *a* bij *c* en *b* bij *c*
4 *a* bij *b* en *c* bij *d*

e Licht toe dat 2 te maken heeft met $b(a + c) = ab + bc$. Wat hoort bij 1? En wat bij 3? En hoe zit het bij 4?



figuur 1.10 Een 4-bij-3-rechthoek.

2 **a** Onderzoek of je twee vierkanten kunt samenvoegen tot een nieuw vierkant. Licht toe.

b Wat weet je van de afmetingen van twee vierkanten als je ze samen kunt voegen tot een rechthoek? Noem in dat geval de afmeting van de rechthoek.

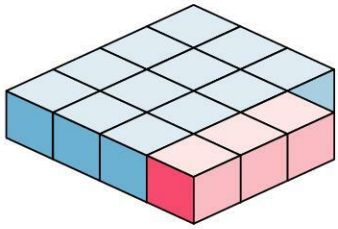
c Onderzoek of een *a*-bij-*b*-rechthoek en een *a*-bij-1-staaf samen te voegen zijn tot een nieuwe rechthoek. Zo ja, noem de afmeting.

d Onderzoek of een *a*-bij-*b*-rechthoek en een *b*-bij-1-staaf samen te voegen zijn tot een nieuwe rechthoek. Zo ja, noem de afmeting.

© Noordhoff Uitgevers

3 In figuur 1.11 is van een 4-bij-4-vierkant één kubusje bij een hoek weggenomen. Van dit bouwwerk wordt een staaf afgehaald. Van de zo ontstane stukken is een rechthoek gelegd. Zie figuur 1.12.

a Wat is de afmeting van de ontstane rechthoek?



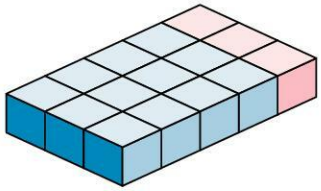
figuur 1.11

Neem een 10-bij-10-vierkant en haal er bij een hoekpunt een kubusje af. Door van het resterende bouwwerk een staaf af te breken krijg je twee stukken die zijn samen te voegen tot een rechthoek.

b Wat is de afmeting van die rechthoek?

c Wat is de afmeting van de rechthoek als je uitgaat van een a-bij-a-vierkant waarbij van een hoekpunt een kubusje is weggehaald?

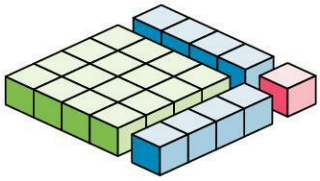
d Licht toe wat vraag c te maken heeft met het merkwaardige product $(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$.



figuur 1.12

4 Bij een a-bij-a-vierkant wordt bij een hoekpunt een 3-bij-3-vierkant weggenomen. Het resterende bouwwerk kun je in twee rechthoeken verdelen. Deze rechthoeken kun je samenvoegen tot een grotere rechthoek. Onderzoek welk merkwaardig product hiermee wordt uitgebeeld.

5 Tom heeft een 4-bij-4-vierkant, twee gelijke staven en een los kubusje (1-bij-1-vierkant). Zie de figuur hiernaast. Hij kan deze samenvoegen tot een nieuw vierkant.



figuur 1.13

a Esther voegt een 6-bij-6-vierkant, twee gelijke staven en een los kubusje samen tot een nieuw vierkant. Wat zijn de afmetingen van de staven en wat is de afmeting van het nieuwe vierkant?

b Floris voegt een a-bij-a-vierkant, twee gelijke staven en een los kubusje samen tot een nieuw vierkant. Wat weet je van de afmetingen van de staven? Wat is de afmeting van het nieuwe vierkant?

c Werk de haakjes weg in $(a + 1)^2$ en licht toe wat je antwoord met vraag b te maken heeft.

6 Onderzoek met welke twee vierkanten en welke twee rechthoeken je het merkwaardige product $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$ uit kunt beelden.

7 Onderzoek met welke twee vierkanten en welke twee rechthoeken je het merkwaardige product $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ uit kunt beelden.

© Noordhoff Uitgevers

Vlakke meetkunde

Ondanks de nauwkeurige navigatiesystemen van tegenwoordig, wordt voor navigatie op zee ook nog steeds op vuurtorens vertrouwd. Elke vuurtoren heeft zijn eigen lichtsignaal, zodat een schipper kan zien bij welke plaats hij in de buurt is. De oudste nog actieve vuurtoren in Nederland is de in 1594 gebouwde Brandaris op Terschelling. Het licht van de Brandaris bestrijkt bij goed weer een cirkelvormig gebied met een straal van wel vijftig kilometer. De afstand waarop het licht van een vuurtoren nog zichtbaar is, wordt naast de weersomstandigheden onder andere bepaald door de hoogte van de toren en de sterkte van het licht.

Wat leer je?

- Waar de punten liggen die een vaste afstand hebben tot een gegeven punt of een gegeven lijn.
- Werken met cirkels, evenwijdige lijnen, middelloodlijnen en bissectrices.
- Wat de omgeschreven cirkel en wat de ingeschreven cirkel van een driehoek is.
- De omtrek en de oppervlakte van een cirkel berekenen.
- De oppervlakte van een parallellogram berekenen.
- + De oppervlakte van een trapezium berekenen.

2

© Noordhoff Uitgevers

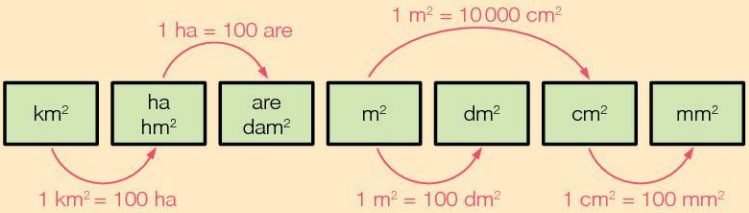
© Noordhoff Uitgevers

Voorkennis Oppervlakte en bijzondere lijnen

Theorie A Oppervlakte-eenheden

Hieronder staat een overzicht van de oppervlakte-eenheden.

OPPERVLAKTE-EENHEDEN



figuur 2.1

Elke stap naar rechts betekent × 100.
Zo is 5,8 m^2 = 580 dm^2 en 3,65 km^2 = 36 500 are.

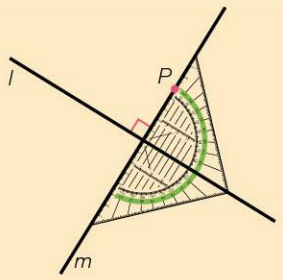
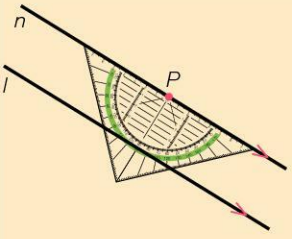
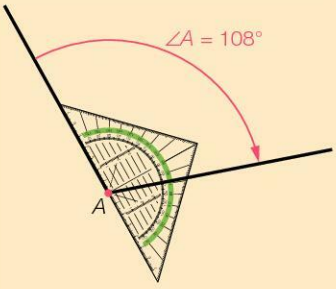
Elke stap naar links betekent : 100.
Zo is 25 mm^2 = 0,25 cm^2 en 820 cm^2 = 0,082 m^2.

1 Vul in.

a 8 cm^2 = ... mm^2
b 0,58 ha = ... m^2
c 75 mm^2 = ... cm^2
d 70 000 dm^2 = ... m^2
e 0,003 ha = ... cm^2
f 0,15 m^2 = ... mm^2
g 860 are = ... km^2
h 5,3 dam^2 = ... dm^2
i 250 m^2 = ... ha

Theorie B Loodlijnen, evenwijdige lijnen en hoeken

In figuur 2.2 zie je hoe je de geodriehoek gebruikt om loodlijnen en evenwijdige lijnen te tekenen en om hoeken te meten.

loodlijn m door P op l	lijn n door P evenwijdig met l	hoek A meten
		

figuur 2.2

© Noordhoff Uitgevers

2 **a** Teken in een assenstelsel de punten $A(-1, -3)$, $B(1, 4)$ en $C(2, -1)$, en teken de lijn l door A en B en de lijn m door B en C.
b Teken de lijn p door A die evenwijdig is met m.
c Teken de loodlijn q door A op m.
d Teken de lijn r door C zo, dat $r \perp l$.

3 **a** Teken de punten $A(-4, 1)$, $B(3, 4)$ en $C(4, -1)$, en teken $\triangle ABC$.
b Meet $\angle A$ en $\angle B$.
c Bereken $\angle C$. Controleer je antwoord door $\angle C$ te meten.

Theorie C De oppervlakte van een driehoek

De oppervlakte van een driehoek bereken je met de formule

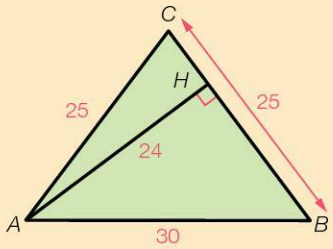
oppervlakte driehoek $= \frac{1}{2} \times$ zijde $\times$ bijbehorende hoogte

Om van $\triangle ABC$ in de figuur hiernaast de oppervlakte te berekenen, bedenk je dat alleen van zijde BC de bijbehorende hoogte bekend is. Dus

opp $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$ ofwel

opp $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 24 = 300$ mm^2.

In het voorbeeld zie je dat bij een stomphoekige driehoek de hoogte die bij een zijde hoort ook buiten de driehoek kan liggen.



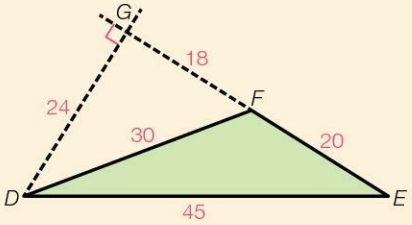
figuur 2.3 De afmetingen zijn in mm.

Voorbeeld

Bereken de oppervlakte van $\triangle DEF$ in figuur 2.4.

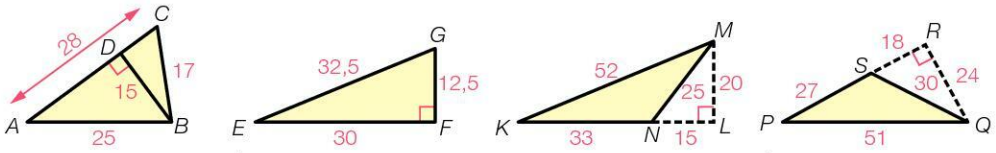
Aanpak
Gebruik dat de bij zijde EF behorende hoogte DG bekend is.

Uitwerking
opp $\triangle DEF = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 24 = 240$ mm^2



figuur 2.4 De afmetingen zijn in mm.

4 Bereken van elke driehoek in figuur 2.5 de oppervlakte.



figuur 2.5 De afmetingen zijn in mm.

© Noordhoff Uitgevers

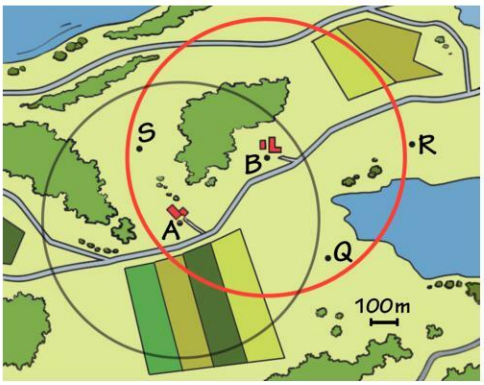
2.1 Afstanden

In dit hoofdstuk mag je de rekenmachine gebruiken.

O 1 [▸ WERKBOEK] In een landelijk gebied staan de boerderijen A en B. De gemeente wil in het gebied een windmolen plaatsen. Die mag niet binnen een straal van 500 meter van de boerderijen komen te staan. Zie figuur 2.6.

a Mag de windmolen in Q komen? En in R? En in S?

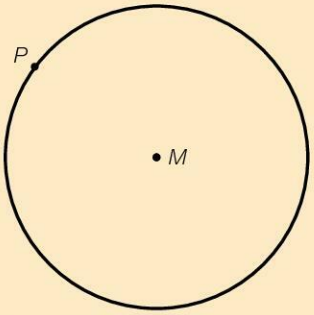
b Kleur het deel van het gebied waar de windmolen geplaatst mag worden.



figuur 2.6

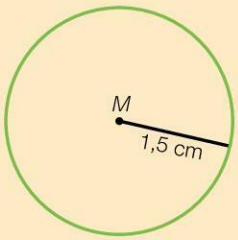
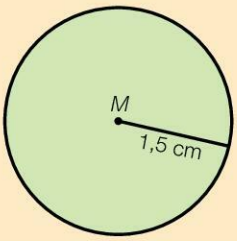
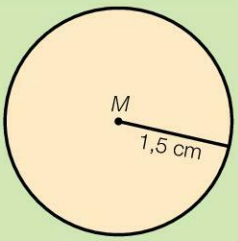
Theorie A Cirkels en afstanden

Hiernaast is een cirkel getekend met middelpunt M en met een straal van 2 cm. Notatie: $\odot(M, 2\text{ cm})$.
Elk punt van $\odot(M, 2\text{ cm})$ heeft een afstand van 2 cm tot M.
Voor elk punt P van de cirkel geldt dus $PM = 2$ cm.



figuur 2.7 $\odot(M, 2\text{ cm})$

Elk punt *binnen* de cirkel heeft een afstand tot M die kleiner is dan 2 cm. Dus voor elk punt P in het **binnengebied** geldt $PM < 2$ cm. Voor elk punt P in het **buitengebied** van $\odot(M, 2\text{ cm})$ geldt $PM > 2$ cm.

cirkel	binnengebied	buitengebied
		
alle punten op afstand 1,5 cm van M	alle punten op minder dan 1,5 cm afstand van M	alle punten op meer dan 1,5 cm afstand van M

figuur 2.8

Afspraak
In een assenstelsel laten we de lengte-eenheid vaak weg. $PM = 2$ betekent dat PM twee keer zo lang is als de zijde van een roostervierkantje.

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

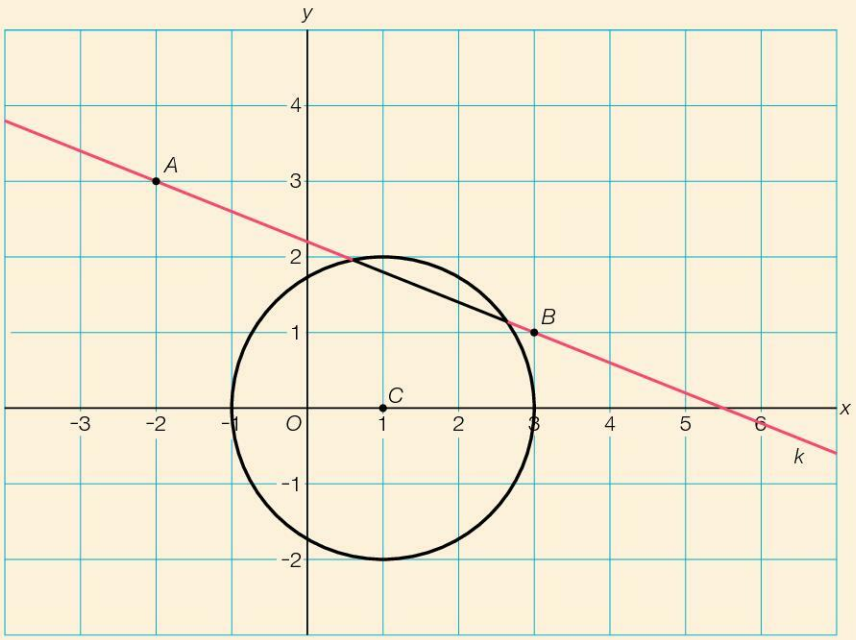
a Teken de punten $A(-2,3)$, $B(3,1)$ en $C(1,0)$, en de lijn k door A en B.
b Kleur alle punten van k rood waarvan de afstand tot C groter is dan 2.

Aanpak

- De afstand tot C is groter dan 2, dus buitengebied van $\odot(C,2)$.
- Kleur het gedeelte van k rood dat in het buitengebied van $\odot(C,2)$ ligt.

Uitwerking

a, b



T **2** [▸▸6]

a Teken de punten $A(-3,4)$, $B(7,0)$, $C(3,2)$ en $D(4,0)$, en de lijn k door A en B.
b Kleur alle punten van k rood waarvan de afstand tot C kleiner is dan 3.
c Kleur alle punten blauw waarvan de afstand tot C groter is dan 3 en de afstand tot D kleiner is dan 2.

3 **a** Teken de punten $A(0,-1)$, $B(5,-1)$ en $C(1,1)$, en teken $\odot(A,3)$ en de lijn k door B en C.
b Kleur alle punten van k rood waarvan de afstand tot A groter is dan 3.

4 **a** Teken de punten $D(3,-1)$ en $E(-1,1)$, en teken $\odot(D,2)$ en $\odot(E,4)$.
b Kleur alle punten van de y-as rood waarvan de afstand tot E groter is dan 4.
c De punten R en S liggen op afstand 2 van D en op afstand 4 van E. Teken de punten R en S.

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

a Teken de punten $A(-2, 1)$ en $B(1, -1)$.

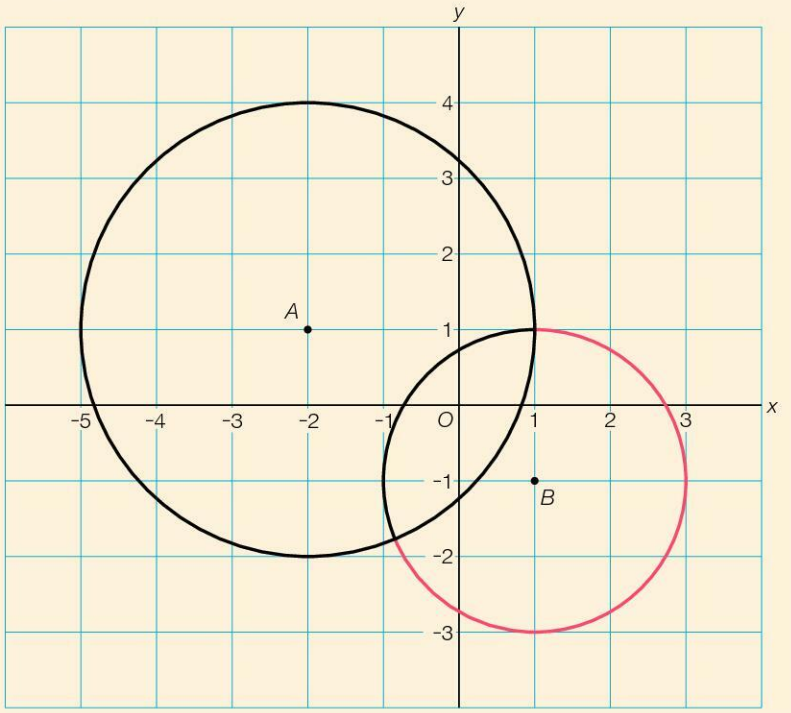
b Kleur alle punten rood waarvan de afstand tot A groter is dan 3 en de afstand tot B gelijk is aan 2.

Aanpak

- De afstand tot A is groter dan 3, dus buitengebied van $\odot(A, 3)$.
- De afstand tot B is 2, dus $\odot(B, 2)$.
- Kleur het gedeelte van $\odot(B, 2)$ dat in het buitengebied van $\odot(A, 3)$ ligt.

Uitwerking

a, b



5 **a** Teken de punten $D(2, 0)$ en $E(-1, 2)$.

b Kleur alle punten rood waarvan de afstand tot D groter is dan 4 en de afstand tot E gelijk is aan 3.

c Er zijn twee punten die op afstand 4 van D en op afstand 3 van E liggen. Kleur deze punten blauw.

A 6 **a** Teken de punten $Q(5, 2)$ en $R(1, 3)$.

b Kleur alle punten rood waarvan de afstand tot Q groter is dan 2 en de afstand tot R kleiner is dan 4.

c Kleur alle punten van de x-as blauw waarvan de afstand tot R kleiner is dan 4.

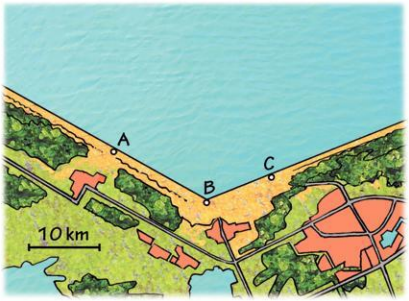
© Noordhoff Uitgevers

7 [▸ WERKBOEK] In figuur 2.9 zie je een kustlijn met de vuurtorens A, B en C. Het licht van de vuurtorens A en C is tot op een afstand van 30 km te zien en dat van vuurtoren B tot op een afstand van 20 km.

a Op zee vaart een schip dat het licht van vuurtoren B niet kan zien.
Kleur het gebied waar het schip kan zijn rood.

Een tanker op zee kan wel het licht van vuurtoren A, maar niet dat van vuurtoren C zien.

b Kleur het gebied waar de tanker kan zijn blauw.



figuur 2.9

A 8 [▸ WERKBOEK] Bij ernstige ongelukken wordt soms een traumahelikopter ingezet. Zo kan een medisch team snel hulp bieden. Er zijn op het ogenblik traumahelikopters in Amsterdam (bereik 100 km), Rotterdam (bereik 60 km), Groningen (bereik 80 km) en Nijmegen (bereik 100 km).

a Kleur het gebied van Nederland rood dat door geen enkele van deze traumahelikopters bereikt kan worden.

b Kleur het gebied blauw dat alleen door de traumahelikopter uit Nijmegen bereikt kan worden.

figuur 2.10

O 9 [▸ WERKBOEK] Ferry bevindt zich tijdens een training openwaterzwemmen in het punt F voor de kust. Hij besluit de kortste route naar het strand te zwemmen.

a Teken deze route en meet de afstand die Ferry nog moet zwemmen.

b Hoe groot is de hoek tussen de route en de kustlijn?

figuur 2.11 Schaal 1 : 15 000.

O 10 [▸ WERKBOEK] Windmolens mogen niet te dicht bij een weg staan. De afstand tot de weg moet minstens 30 meter zijn.
Een gemeente is van plan in de buurt van de weg in figuur 2.12 een windmolen te plaatsen.

a In welke van de punten A, B, C en D mag de windmolen komen te staan?

b Kleur het gebied waar de windmolen mag staan rood.

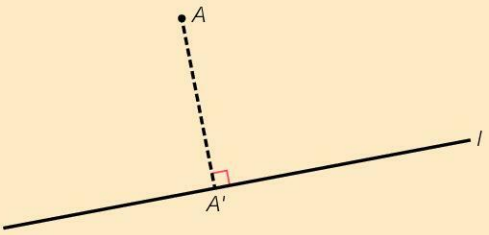
figuur 2.12

© Noordhoff Uitgevers

Theorie B Lijnen en afstanden

In opgave 9 heb je gezien dat de kortste route van Ferry naar de kust het verbindingslijnstuk is dat loodrecht op de kustlijn staat. De afstand van Ferry tot de kust is de lengte van deze route.

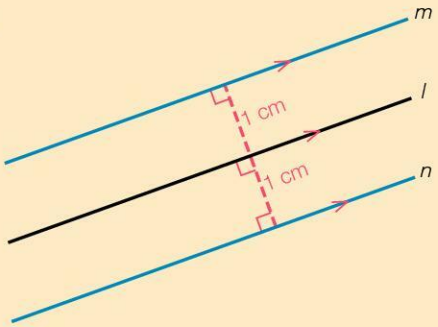
In de figuur hiernaast is de afstand van het punt A tot de lijn l gelijk aan de lengte van het kortste lijnstuk van A naar l. Dat lijnstuk staat loodrecht op l. De afstand van A tot l is dus gelijk aan de lengte van lijnstuk AA', waarbij A' de **loodrechte projectie** is van A op l.



figuur 2.13

De afstand van een punt tot een lijn is de afstand van het punt tot zijn loodrechte projectie op de lijn.

De lijnen l, m en n in figuur 2.14 zijn evenwijdig. Elk punt van m heeft een afstand van 1 cm tot l. En ook elk punt van n heeft een afstand van 1 cm tot l.
Alle punten die een afstand van 1 cm tot l hebben vormen samen de lijnen m en n.



figuur 2.14

Alle punten met een afstand van 1 cm tot een lijn l liggen op twee lijnen evenwijdig met l.

Voorbeeld

a Teken de punten $A(1, 2)$, $B(4, 1)$ en $C(3, 2)$, en de lijn l door A en B.
b Kleur alle punten rood die de afstand 1 tot l hebben en waarvan de afstand tot C groter is dan 2.

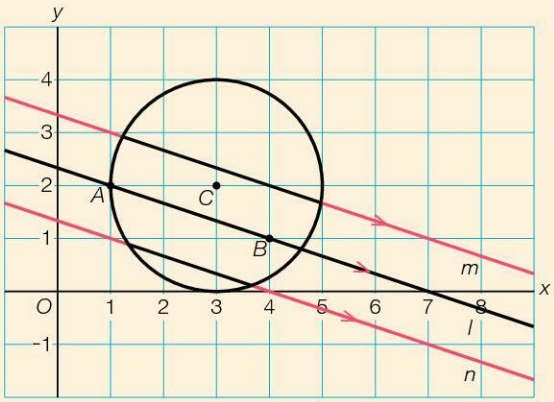
Aanpak

- De afstand tot l is 1, dus twee lijnen m en n evenwijdig met l op afstand 1 van l.
- De afstand tot C is groter dan 2, dus buitengebied van $\odot(C, 2)$.
- Kleur de delen van de lijnen m en n die in het buitengebied van $\odot(C, 2)$ liggen.

© Noordhoff Uitgevers

Uitwerking

a, b



11 **a** Teken de punten $D(-1, 1)$, $E(4, 2)$ en $F(1, 0)$, en teken $\odot(F, 2)$ en de lijn l door D en E.
b Kleur alle punten rood die de afstand 3 tot l hebben.
c Kleur alle punten blauw die op afstand 3 van l liggen en die bovendien op afstand 2 van F liggen.

12 **a** Teken de punten $A(-2, 3)$ en $B(1, -1)$, en teken de lijn l door A en B.
b Kleur alle punten rood die de afstand 2 tot l hebben.
c Kleur alle punten groen die op afstand 2 van l en op afstand 1 van de x-as liggen.

A **13** **a** Teken de punten $A(3, 1)$, $B(0, 1)$ en $C(5, 2)$, en de lijn l door B en C.
b Kleur alle punten rood die op afstand 2 van l liggen en waarvan de afstand tot A kleiner dan 3 is.

A **14** [▸ WERKBOEK] Zie figuur 2.15. Een schip vaart evenwijdig aan de kust. De afstand tot de kust is 30 km.
In A en B staan radiozenders. De zender in A is tot 60 km te ontvangen, die in B tot 120 km. Het schip kan de zender in A wel ontvangen, maar de zender in B niet.
Kleur het gebied waar het schip zich kan bevinden rood.

figuur 2.15

15 Gegeven is het punt $A(1, 3)$ en de lijn k met de formule $y = 0{,}5x + 2$.
Kleur alle punten rood waarvan de afstand tot k groter is dan 2 en de afstand tot A kleiner is dan 4.

© Noordhoff Uitgevers

2.2 Middelloodlijn en omgeschreven cirkel

O 16 [▸ WERKBOEK] In een advertentie wordt een vakantiewoning in de Provence in Frankrijk aangeboden. De woning ligt hemelsbreed even ver van Marseille als van Toulon.

a Zet een rode stip op de plek die 32 km van Marseille en 32 km van Toulon ligt.

b Teken nog drie punten die even ver van Marseille als van Toulon liggen.

c De plaatsen die even ver van Marseille als van Toulon liggen, liggen op een rechte lijn. Kleur deze lijn blauw.

d De vakantiewoning ligt aan de A8. Zet een groene stip bij de vakantiewoning.

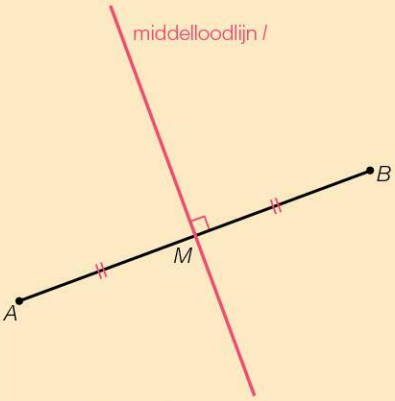
figuur 2.16

Theorie A Middelloodlijn en afstanden

De middelloodlijn van een lijnstuk gaat door het midden van het lijnstuk en staat er loodrecht op.

In figuur 2.17 is de **middelloodlijn** l van het lijnstuk AB getekend. De middelloodlijn van het lijnstuk AB is een symmetrieas van het lijnstuk. Uit de symmetrie volgt dat elk punt van l even ver van A als van B ligt.

Elk punt van de middelloodlijn van het lijnstuk AB ligt even ver van A als van B. Omgekeerd geldt dat alle punten die even ver van A als van B liggen, de middelloodlijn van het lijnstuk AB vormen.



figuur 2.17 Aan de rode streepjes kun je zien dat $AM = BM$, en aan het teken ⌝ dat l loodrecht op AB staat.

Voorbeeld

a Teken de punten $A(1, 2)$, $B(4, 1)$ en $C(4, 2)$.

b Kleur alle punten rood die even ver van A als van B liggen en waarvan de afstand tot C groter is dan 2.

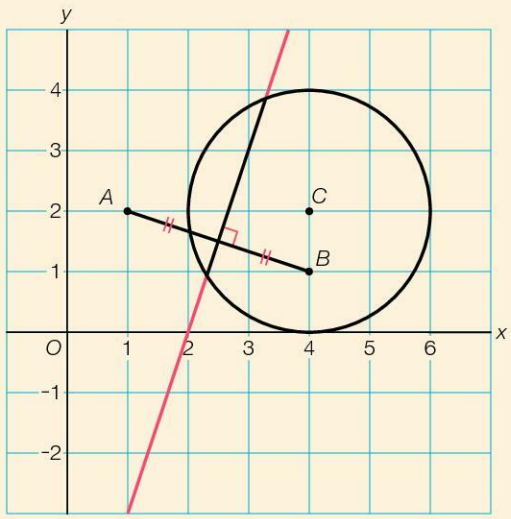
Aanpak

- Even ver van A als van B, dus middelloodlijn van AB.
- Afstand tot C groter dan 2, dus buitengebied van $\odot(C, 2)$.
- Kleur het gedeelte van de middelloodlijn rood dat in het buitengebied van $\odot(C, 2)$ ligt.

© Noordhoff Uitgevers

Uitwerking

a, b



T 17 [▸▸ 21]

a Teken de punten $A(0, 4)$, $B(2, -2)$, $C(-2, -2)$ en $D(2, 1)$, en teken de lijn l door C en D.

b Kleur alle punten rood die even ver van A als van B liggen en waarvan de afstand tot l gelijk is aan 1.

c Kleur alle punten blauw die even ver van A als van B liggen en waarvan de afstand tot D kleiner is dan 2.

18 **a** Teken de punten $D(-3, -2)$, $E(3, 4)$ en $F(-1, 2)$.

b Teken de middelloodlijn van het lijnstuk DE en teken $\odot(F, 4)$.

c Teken de punten Q en R die even ver van D als van E liggen en die bovendien op afstand 4 van F liggen.

19 **a** Teken de punten $A(0, 3)$, $B(4, 1)$ en $C(2, -1)$.

b Teken de middelloodlijn van het lijnstuk AB en teken $\odot(C, 2)$.

c Kleur alle punten rood die even ver van A als van B liggen en waarvan de afstand tot C groter is dan 2.

20 **a** Teken de punten $A(-1, 3)$, $B(3, 0)$ en $C(3, 2)$.

b Kleur alle punten rood die even ver van A als van B liggen en waarvan de afstand tot C kleiner is dan 3.

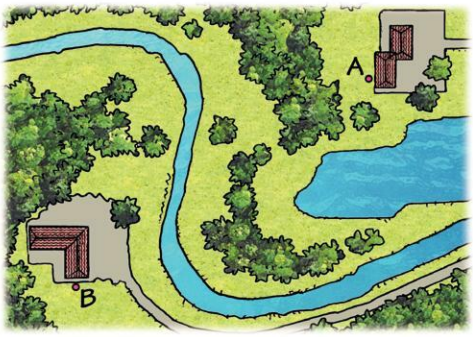
A 21 **a** Teken de punten $A(3, 0)$, $B(3, 3)$ en $C(-2, 2)$.

b Kleur alle punten rood die even ver van A als van B liggen en waarvan de afstand tot C groter is dan 3.

c Er is een punt Q dat even ver van A als van B ligt en dat bovendien even ver van C als van O ligt.
Teken Q.

© Noordhoff Uitgevers

A 22 [▸ WERKBOEK] Door een natuurgebied loopt een rivier. Bij A en B zijn restaurants. Natuurbeheer besluit een fietspad tussen A en B aan te leggen. Daarvoor moet er een bruggetje over de rivier komen. Dat bruggetje komt even ver van A als van B te liggen.
Teken de mogelijke plaatsen van het bruggetje.



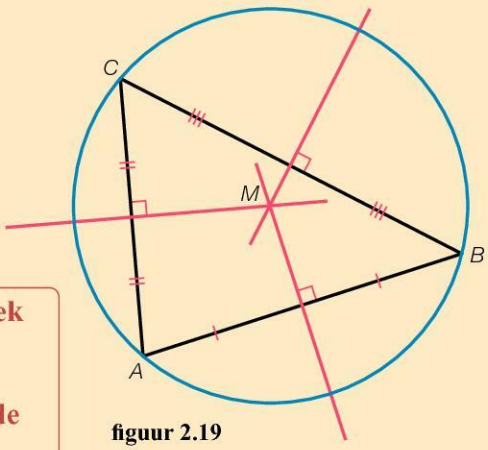
figuur 2.18

23 Gegeven zijn de punten $A(-2, 4)$ en $B(4, -1)$.
Kleur alle punten rood die dichter bij A dan bij B liggen en waarvan de afstand tot B kleiner is dan 5.

O 24
a Teken een willekeurige driehoek ABC.
b Teken de middelloodlijn m van zijde AB.
c Teken de middelloodlijn n van zijde BC.
d Teken het snijpunt M van m en n.
e Waarom is $MA = MB$? Waarom is $MB = MC$?
f Is $MA = MB = MC$?
Gaat de middelloodlijn van zijde AC ook door M?
g Teken de cirkel met middelpunt M die door A gaat.
Waarom gaat de cirkel ook door B en C?

Theorie B De omgeschreven cirkel van een driehoek

In opgave 24 heb je ontdekt dat de middelloodlijnen van de zijden van een driehoek door één punt gaan. Dat punt ligt even ver van de hoekpunten van de driehoek en is dus het middelpunt van de cirkel die door de hoekpunten gaat. Deze cirkel heet de **omgeschreven cirkel** van de driehoek.



figuur 2.19

De omgeschreven cirkel van een driehoek
- **gaat door de drie hoekpunten van de driehoek**
- **heeft als middelpunt het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden.**

© Noordhoff Uitgevers

25 **a** Teken $\triangle ABC$ met $AB = 4$ cm, $\angle A = 40°$ en $\angle B = 100°$.
b Teken de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Om het middelpunt te vinden, hoef je maar twee middelloodlijnen te tekenen!

A 26 **a** Teken $\triangle PQR$ met $\angle P = 90°$, $PQ = 6$ cm en $PR = 4$ cm.
b Teken de omgeschreven cirkel van $\triangle PQR$.
c Op welke zijde van $\triangle PQR$ ligt het middelpunt van de omgeschreven cirkel?

27 **a** Teken de punten $A(3, 0)$, $B(3, 3)$ en $C(-2, 2)$, en teken $\triangle ABC$.
b Teken de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.
c Teken vierhoek $OABC$.
Waarom heeft deze vierhoek geen omgeschreven cirkel?
d Teken op de x-as het punt D zo, dat vierhoek $ABCD$ een omgeschreven cirkel heeft.

28 [▸ WERKBOEK] Lees de informatie onderaan de bladzijde over de middelpuntzoeker.
Bedenk zelf een methode om het middelpunt van de ronde onderzetter hiernaast te bepalen en teken dit middelpunt.

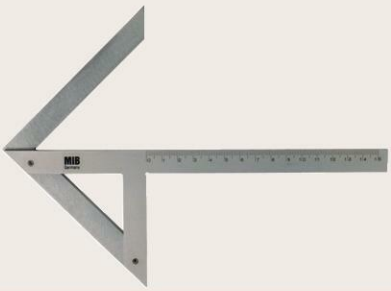
figuur 2.20

29 Van $\triangle ABC$ is $AB = 4$ cm en $AC = 2{,}5$ cm. De straal van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ is 3 cm.
Teken $\triangle ABC$.

ARTIKEL | BEROEP | GESCHIEDENIS | INFORMATIE

Middelpuntzoeker

Een doe-het-zelver wil van een rond metalen plaatje het middelpunt weten. Hij gebruikt daarvoor een middelpuntzoeker. In hobbyzaken zijn allerlei middelpuntzoekers te koop. Hieronder zie je er twee.

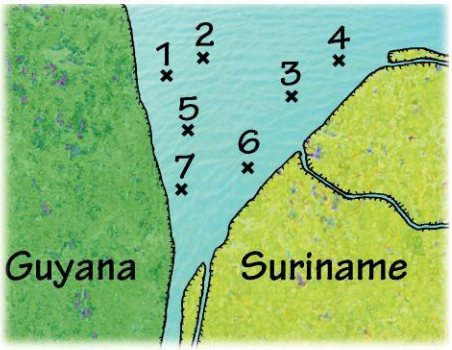


© Noordhoff Uitgevers

2.3 Bissectrice en ingeschreven cirkel

O 30 [▸ WERKBOEK] Guyana en Suriname zijn twee buurlanden in Zuid-Amerika. De grensrivier is de Corantijn die uitmondt in de Atlantische Oceaan. In verband met rijke oliebronnen bestond er jarenlang een conflict over de grens in het mondingsgebied van de rivier. In figuur 2.21 zijn zeven olievelden aangegeven.

a Welke olievelden liggen dichter bij Guyana dan bij Suriname?



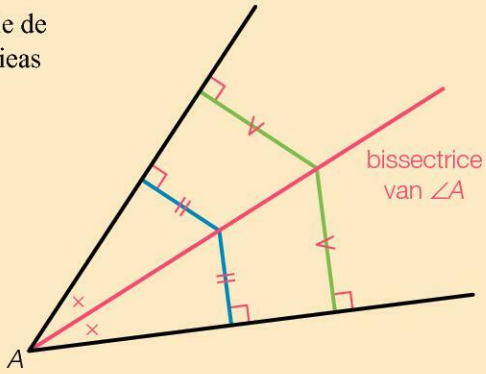
figuur 2.21

In 2007 is besloten dat het mondingsgebied van de Corantijn eerlijk verdeeld moest worden.

b Teken een rechte lijn die het mondingsgebied eerlijk verdeelt.

Theorie A Bissectrice en afstanden

De bissectrice van een hoek is de halve lijn die de hoek middendoor deelt en ligt op de symmetrieas van de hoek. Uit de symmetrie volgt dat elk punt van de bissectrice even ver van het ene als van het andere been van de hoek ligt.



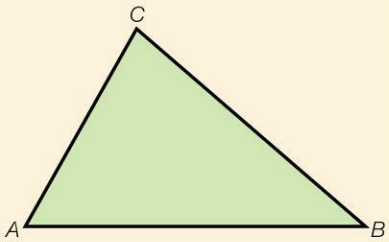
figuur 2.22 Aan de rode kruisjes kun je zien dat de hoeken gelijk zijn.

Elk punt van de bissectrice van een hoek ligt even ver van het ene als van het andere been.
Omgekeerd geldt dat alle punten binnen een hoek die even ver van het ene als van het andere been liggen, de bissectrice van de hoek vormen.

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ in figuur 2.23.
Kleur de punten binnen $\triangle ABC$ rood die even ver van de benen van hoek A liggen en waarvan de afstand tot C kleiner is dan 2 cm.

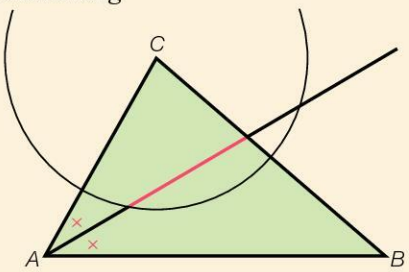


figuur 2.23

Aanpak

- Even ver van de benen van $\angle A$, dus bissectrice $\angle A$.
- Afstand tot C kleiner dan 2 cm, dus binnengebied van $\odot(C, 2\text{ cm})$.
- Kleur het gedeelte van de bissectrice rood dat in het binnengebied van $\odot(C, 2\text{ cm})$ ligt. Kleur alleen binnen de driehoek.

Uitwerking



31 **a** Teken de punten $A(-2, 0)$, $B(4, 1)$ en $C(1, 3)$, en teken $\triangle ABC$.
b Kleur alle punten binnen $\triangle ABC$ rood die even ver van de benen van $\angle C$ liggen.

32 **a** Teken de punten $A(3, 1)$ en $B(0, -3)$. Teken vervolgens $\angle A$, waarvan het ene been door B en het andere been door O gaat.
b Teken alle punten die even ver van de benen van $\angle A$ liggen.
c Kleur alle punten rood die even ver van de benen van $\angle A$ liggen en waarvan de afstand tot O groter dan 2 is.

- Op afstand 3 van punt A?
  Dan op $\odot(A, 3)$.
- Even ver van de punten A en B?
  Dan op de middelloodlijn van AB.
- Even ver van de benen van een hoek?
  Dan op de bissectrice van de hoek.

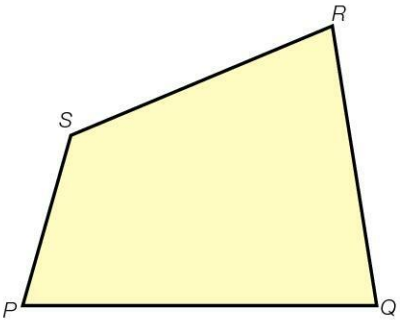
33 **a** Teken de punten $A(-2, 1)$, $B(4, 0)$ en $C(1, 4)$, en teken $\triangle ABC$.
b Teken binnen $\triangle ABC$ de punten rood die even ver van de benen van $\angle A$ liggen.
c Teken het punt Q dat even ver van de benen van $\angle A$ ligt en dat ook even ver van de punten A en C ligt.

© Noordhoff Uitgevers

A 34 [▸ WERKBOEK] Zie vierhoek $PQRS$ in figuur 2.24.

a Kleur de punten binnen de vierhoek rood die even ver van de benen van $\angle R$ liggen en waarvan de afstand tot P groter dan 3 cm is.

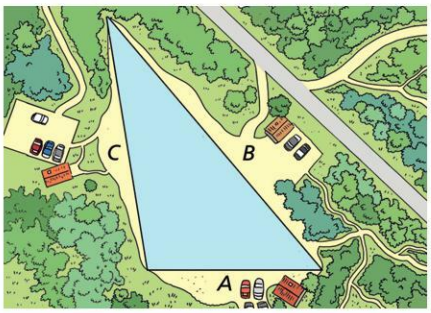
b Teken het punt T dat even ver van de benen van $\angle Q$ ligt en waarvan de afstand tot Q gelijk is aan de afstand tot R.



figuur 2.24

35 Van $\triangle ABC$ is $AB = 5$ cm en $\angle A = 58°$.
De bissectrice van $\angle A$ snijdt zijde BC in het punt D zo, dat $AD = 4$ cm.
Teken $\triangle ABC$.

36 [▸ WERKBOEK] Hiernaast zie je een driehoekig meer. Elk van de hengelsportverenigingen A, B en C bezit een van de oevers van het meer.
De leden van een vereniging mogen alleen op plaatsen vissen die dichter bij hun oever liggen dan bij de andere oevers.
Kleur de verdeling van het meer.

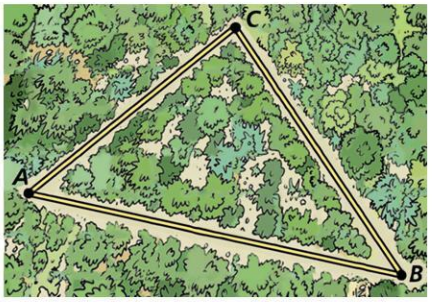


figuur 2.25

37 [▸ WERKBOEK] Zie figuur 2.26. John heeft in een driehoekig stuk bos een schat verstopt. Voor het vinden van de schat geeft John drie aanwijzingen, namelijk dat de schat

- dichter bij A dan bij B ligt
- op minder dan 40 meter van C ligt
- dichter bij bosrand AB dan bij bosrand BC ligt.

Kleur het gedeelte van het bos waar John de schat verstopt kan hebben.



figuur 2.26 Schaal 1 : 2000.

O 38

a Teken de punten $A(-4, 1)$, $B(2, 1)$ en $C(0, 6)$, en teken $\triangle ABC$.

b Teken de bissectrices van $\angle A$ en $\angle B$. Noem het snijpunt M.

c Waarom ligt M even ver van elk van de zijden van $\triangle ABC$?

d Waarom gaat de bissectrice van $\angle C$ ook door M?

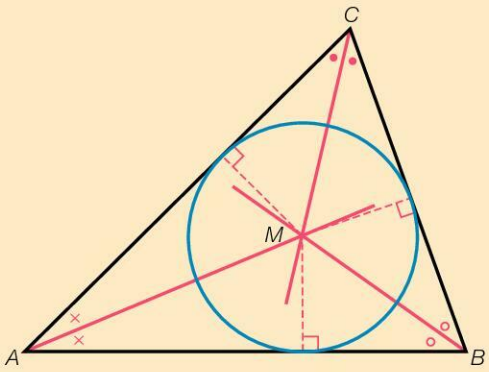
e Meet de afstand d van M tot zijde AB.

f Teken $\odot(M, d)$. Wat valt je op?

© Noordhoff Uitgevers

Theorie B De ingeschreven cirkel van een driehoek

In opgave 38 ligt het punt M even ver van de zijden van $\triangle ABC$. Daarom is M het middelpunt van de cirkel die de zijden van $\triangle ABC$ raakt. Deze cirkel heet de **ingeschreven cirkel** van de driehoek.



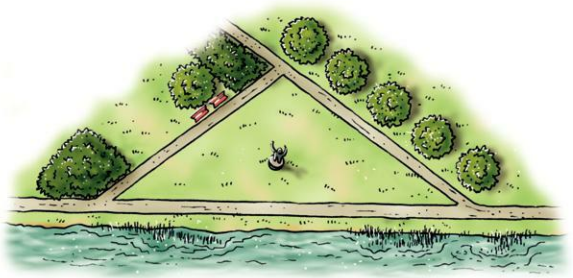
figuur 2.27

De ingeschreven cirkel van een driehoek
- **raakt de drie zijden van de driehoek**
- **heeft als middelpunt het snijpunt van de bissectrices van de hoeken.**

39 **a** Teken de punten $A(-3, -1)$, $B(4, -2)$ en $C(1, 5)$, en teken $\triangle ABC$.
b Teken de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

A 40 **a** Teken $\triangle ABC$ met $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm en $AC = 5$ cm.
b Teken de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.
c Teken de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

A 41 [▸ WERKBOEK] In een park sluiten de paden een driehoekig grasveld in. De gemeente besluit op het driehoekige grasveld een zo groot mogelijk rond bloemenperk aan te leggen.
Teken het bloemenperk.



figuur 2.28

42 **a** Teken een hoek P en een punt Q op één van de benen van $\angle P$.
b Teken de cirkel die beide benen raakt en die door Q gaat.

43 Van $\triangle ABC$ is $AB = 8$ cm en $\angle A = 60°$. De straal van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$ is 2 cm.
Teken $\triangle ABC$.

© Noordhoff Uitgevers

2.4 De omtrek van een cirkel

O 44 De omtrek van een rond voorwerp kun je opmeten met een draad of een touwtje. Zie de foto hiernaast.

a Licht dit toe.

b Meet op dezelfde manier de omtrek van je fietswiel en meet ook de diameter.

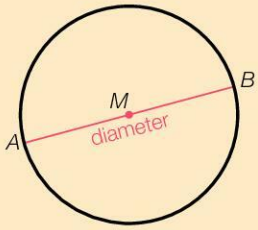
c Bereken het quotiënt $\frac{\text{omtrek}}{\text{diameter}}$ van je wiel.
Rond af op twee decimalen.

d Met welk getal moet je de diameter van je wiel vermenigvuldigen om de omtrek te krijgen?

figuur 2.29

Theorie A Omtrek cirkel

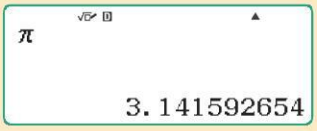
Hiernaast zie je een cirkel met middelpunt M en diameter AB.
Je hebt gezien dat bij een wiel de omtrek ongeveer 3,14 · diameter is. Dit geldt voor elke cirkel. In werkelijkheid is **omtrek cirkel = 3,141592653589793... · diameter**.



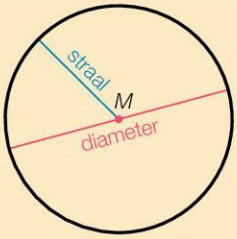
figuur 2.30

Voor het getal in de formule gebruiken we de Griekse letter π.
Dus π = 3,14159... Spreek π uit als pi.
Op de rekenmachine zit de toets π. Ga eens na hoeveel decimalen jouw rekenmachine van π laat zien.

Met π wordt de formule voor de omtrek van een cirkel dus **omtrek cirkel = π · diameter**.
Soms weet je van een cirkel de straal. De diameter bereken je met de formule **diameter = 2 · straal**.



omtrek cirkel = π · diameter
diameter = 2 · straal



Voorbeeld

Het voorwiel van de fiets van Ahmed heeft een straal van 23 cm.

a Bereken de omtrek van het wiel in cm in één decimaal nauwkeurig.

b Ahmed fietst met een snelheid van 18 km per uur naar school. Hij doet er 10 minuten over. Hoeveel keer is het wiel rondgedraaid?

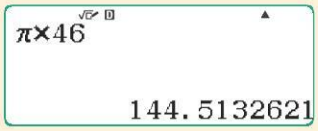
'Bereken in één decimaal nauwkeurig' betekent dat je het antwoord op één decimaal afrondt.

© Noordhoff Uitgevers

Uitwerking

a diameter = $2 \cdot 23 = 46$ cm
omtrek = $\pi \cdot 46 \approx 144{,}5$ cm

b 18 km per uur, dus 3 km per 10 minuten
3 km = 300 000 cm
$300\,000 : 144{,}51\ldots \approx 2076$ gebruik het onafgeronde antwoord van vraag a
Dus het wiel draait 2076 keer rond.



45 **a** Van een cirkel is de diameter 16 cm.
Bereken de omtrek in cm in één decimaal nauwkeurig.

b Van een cirkel is de straal 38,6 cm.
Bereken de omtrek in cm in twee decimalen nauwkeurig.

c Het achterwiel van de fiets van Nina heeft een diameter van 52 cm. Nina fietst in 20 minuten naar haar oma.
Ze rijdt 21 km per uur.
Hoeveel keer is het wiel rondgedraaid?

46 De ronde vijver in park Vijverzicht heeft een diameter van 91 meter.

a Hoe lang is de vijverrand? Geef het antwoord in meter in één decimaal nauwkeurig.

Om de vijver is een afrastering gemaakt die op 3 meter van de rand ligt.

b Bereken de lengte van de afrastering. Geef het antwoord in meter in één decimaal nauwkeurig.

c Melle wandelt in 5 minuten langs de afrastering.
Bereken zijn snelheid in km per uur.

Gebruik bij vraag c het onafgeronde antwoord van vraag b.

47 Een rond tafelblad heeft een diameter van 85 cm. Om het tafelblad komt een stootrand die € 1,95 per meter kost.
Hoeveel moet je voor de stootrand betalen?

48 Het achterwiel van de fiets van Matthijs heeft een diameter van 68 cm.

a Hoeveel meter heeft hij gefietst als het wiel één keer is rondgedraaid? Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

b Matthijs fietst 1500 meter naar school.
Hoeveel keer draait het wiel rond tijdens deze fietstocht?

c In het onderhoudsvoorschrift van zijn fiets leest Matthijs:
Het is aan te bevelen de lagers van de fiets regelmatig te oliën. Een vuistregel is om dit na elke 500 000 omwentelingen te doen.
Om de hoeveel kilometer moet Matthijs de lagers van zijn fiets oliën? Rond af op tientallen.

© Noordhoff Uitgevers

A 49 Het London Eye is een reuzenrad in Londen dat in 1999 is gebouwd. De diameter van het rad is 122 meter.
Vanuit het rad heb je een prachtig uitzicht op Londen.
Het rad draait met een snelheid van 26 cm per seconde.

a Bereken hoeveel minuten een rondje in het reuzenrad duurt. Rond af op gehelen.

In Las Vegas is in 2014 het reuzenrad High Roller gebouwd. Het rad is 176,6 meter hoog en heeft een diameter van 158,5 meter. Er zijn 28 gondels die elk 40 personen met een snelheid van 27,5 cm per seconde vervoeren.

b Hoeveel keer draait het rad in een uur rond?

c Bereken hoeveel mensen per uur kunnen genieten van het uitzicht op Las Vegas.

A 50 Op de foto hiernaast zie je een hoverboard waarvan de wielen een diameter van 16,5 cm hebben. De maximale snelheid is 18 km/uur.
Hoeveel keer per seconde draaien de wielen rond bij de maximale snelheid? Rond af op één decimaal.

51 Het ananasblik hiernaast heeft een hoogte van 13 cm en een diameter van 10 cm.
Bereken in cm^2 de oppervlakte van het etiket. Rond af op één decimaal.

figuur 2.31

52 De grote wijzer van een kerkklok is 1 meter lang.

a Hoeveel cm legt de punt van de wijzer af in een kwartier? Rond af op gehelen.

b Hoeveel meter legt de punt van de wijzer af in een week? Rond af op gehelen.

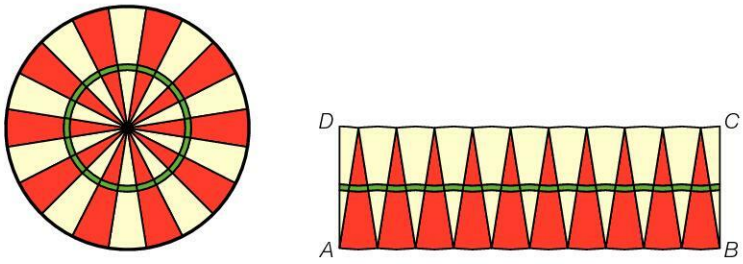
c In hoeveel dagen legt de punt van de wijzer 100 km af?

53 Van een kerkklok is de grote wijzer 3 meter lang en de kleine wijzer 2 meter. Op een gegeven moment heeft de punt van de kleine wijzer 100 meter afgelegd.
Bereken zonder rekenmachine hoeveel meter de punt van de grote wijzer in dezelfde tijd heeft afgelegd.

© Noordhoff Uitgevers

2.5 De oppervlakte van een cirkel

O 54 Hieronder zie je een dartbord zonder rand met 20 sectoren. Je kunt de sectoren los zagen en ze tegen elkaar leggen zoals in figuur 2.32. Je ziet dat één sector doormidden is gezaagd.



a b

figuur 2.32

a Welke bijzondere vierhoek herken je in $ABCD$?
b Is AD iets langer, iets korter of gelijk aan de straal van het dartbord?
c Volgens Femke is AB ongeveer even lang als de omtrek van het dartbord.
Ben je het met Femke eens? Licht toe.
d Volgens Femke is de oppervlakte van $ABCD$ ongeveer gelijk aan de oppervlakte van het dartbord.
Ben je het met Femke eens?

Theorie A Oppervlakte cirkel

In figuur 2.32 is een cirkel in stukken verdeeld. Met deze stukken is een figuur gelegd die vrijwel de rechthoek $ABCD$ is. Van deze rechthoek $ABCD$ is
- AD de straal van de cirkel
- AB ongeveer de halve omtrek van de cirkel, dus $AB \approx \pi \cdot$ straal
- opp $ABCD = AB \cdot AD \approx \pi \cdot$ straal $\cdot$ straal $= \pi \cdot$ straal^2.

Je kunt zo begrijpen dat
oppervlakte cirkel $= \pi \cdot$ straal^2.

Weet je van een cirkel de straal, dan kun je met deze formule de oppervlakte berekenen.

oppervlakte cirkel $= \pi \cdot$ straal^2

omtrek cirkel = $\pi \cdot$ diameter,
dus halve omtrek cirkel = $\pi \cdot$ halve diameter = $\pi \cdot$ straal.

Cirkel
Het is gebruikelijk de straal van een cirkel aan te geven met de letter r.
r komt van radius (straal).
Je krijgt dan
- diameter $= 2r$
- oppervlakte $= \pi r^2$
- omtrek $= 2\pi r$.

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Van een ronde tafel is de diameter 82,4 cm.
Bereken de oppervlakte van het tafelblad in cm^2 in gehelen nauwkeurig.

Aanpak

Bereken eerst de straal, want in de formule oppervlakte cirkel = $\pi \cdot straal^2$ komt de diameter niet voor.

Uitwerking

straal = 82,4 : 2 = 41,2 cm
oppervlakte = $\pi \cdot 41{,}2^2 \approx 5333$ cm^2 Tik in [π] [×] [4] [1] [.] [2] [x^2] [=].

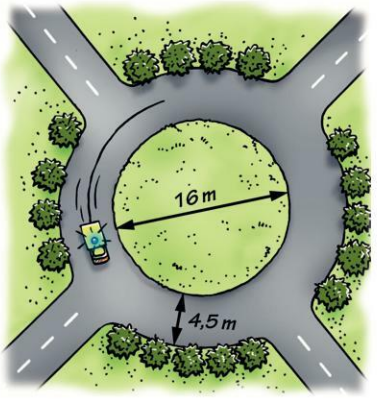
Let op de eenheden!

55 **a** Van een cirkel is de straal 8 cm.
Bereken de oppervlakte in cm^2 in één decimaal nauwkeurig.
b Van een cirkel is de diameter 27 cm.
Bereken de oppervlakte in cm^2. Rond af op twee decimalen.
c Bereken in m^2 de oppervlakte van een cirkel met diameter 173 dm. Rond af op gehelen.

56 Van een rond meer is de diameter 520 meter.
Bereken de oppervlakte van het meer in ha. Rond af op gehelen.

A 57 Bij een ongeluk met een olietanker stroomt olie de zee in.
Na één dag is er een ronde olievlek ontstaan met een straal van 1,2 km. Een dag later is de straal van de vlek vergroot tot 3,8 km.
a Bereken hoeveel ha de olievlek de tweede dag groter is geworden. Rond af op gehelen.
b Bereken hoeveel hm de omtrek van de olievlek de tweede dag groter is geworden. Rond af op gehelen.

A 58 Een rotonde bestaat uit een rijbaan met een breedte van 4,5 meter en een cirkelvormig binnengebied met een diameter van 16 meter.
a Om het binnengebied komt een hek.
Hoeveel meter is de lengte van het hek? Rond af op twee decimalen.
b Het binnengebied wordt ingezaaid met gras. Per m^2 is 25 gram graszaad nodig.
Bereken hoeveel kg graszaad nodig is voor het binnengebied. Rond af op één decimaal.
c Bereken de oppervlakte van de rijbaan op de rotonde in m^2. Rond af op één decimaal.
d Bij wegwerkzaamheden wordt midden op de rijbaan van de rotonde een witte lijn aangebracht.
De belijningswagen rijdt met een snelheid van 25 cm per seconde.
Hoeveel minuten duurt het aanbrengen van de lijn? Rond af op gehelen.

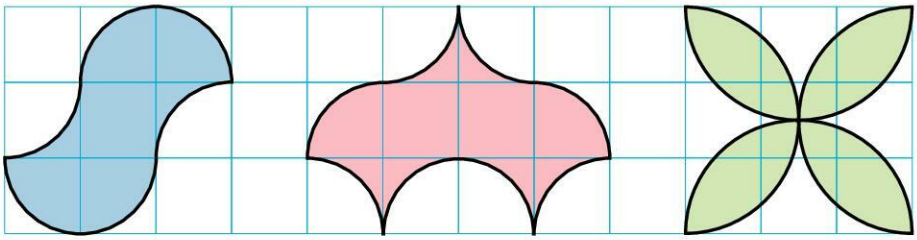


figuur 2.33

© Noordhoff Uitgevers

59 De omtrek van de middencirkel van een voetbalveld is 57,5 meter.
Bereken hoeveel m^2 de oppervlakte is. Rond af op gehelen.

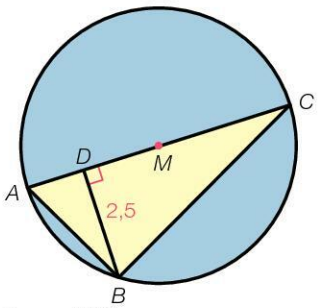
60 Bereken de oppervlakte in cm^2 van de gekleurde figuren hieronder.
Rond af op één decimaal.



a b c

figuur 2.34

61 In de figuur hiernaast zie je $\triangle ABC$ met zijn omgeschreven cirkel met middelpunt M. Verder is $BD = 2{,}5$ cm en opp $\triangle ABC = 7{,}5$ cm^2.
Bereken de oppervlakte van het blauwe gebied in cm^2.
Rond af op één decimaal.



figuur 2.35

ARTIKEL | BEROEP | GESCHIEDENIS | INFORMATIE

Benaderingen van π

Al duizenden jaren zijn mensen gefascineerd door het getal π. De oudst bekende schatting van π, $\frac{22}{7}$, komt uit Egypte en stamt uit ongeveer 26 eeuwen v.Chr.

Rond 250 v.Chr. toonde de Griekse wiskundige Archimedes aan dat de werkelijke waarde van π tussen $\frac{223}{71}$ ($\approx 3{,}14085$) en $\frac{22}{7}$ ($\approx 3{,}14286$) ligt.

De Nederlander Ludolph van Ceulen baarde in 1596 opzien door maar liefst 35 decimalen van π correct te berekenen, wat voor die tijd een enorme prestatie was. Hij was er zo trots op dat hij de decimalen in zijn grafsteen liet graveren. In 1874, nog voor de komst van de rekenmachines, stond het record op 527 decimalen. In 1882 bewees de Duitser Von Lindemann dat π oneindig veel decimalen heeft, zonder enige regelmaat.

Tegenwoordig kun je met een app als Calculate Pi duizenden decimalen van π berekenen. Geheugenkunstenaar Rick de Jong uit Oss heeft echter geen app nodig. Op 1 april 2015 werd hij Europees recordhouder door foutloos de eerste 22 612 decimalen van π op te noemen.

© Noordhoff Uitgevers

2.6 De oppervlakte van een parallellogram

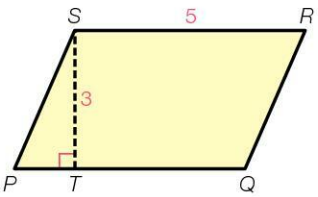
O 62 [▸ WERKBOEK] In figuur 2.36 zie je parallellogram $PQRS$.

a Teken diagonaal QS. Waarom kun je van $\triangle PQS$ de oppervlakte berekenen?

b Bereken de oppervlakte van $\triangle PQS$.

c Waarom is opp $\triangle PQS$ = opp $\triangle QRS$?

d Geef de oppervlakte van parallellogram $PQRS$.



figuur 2.36 De afmetingen zijn in cm.

Theorie A Oppervlakte parallellogram

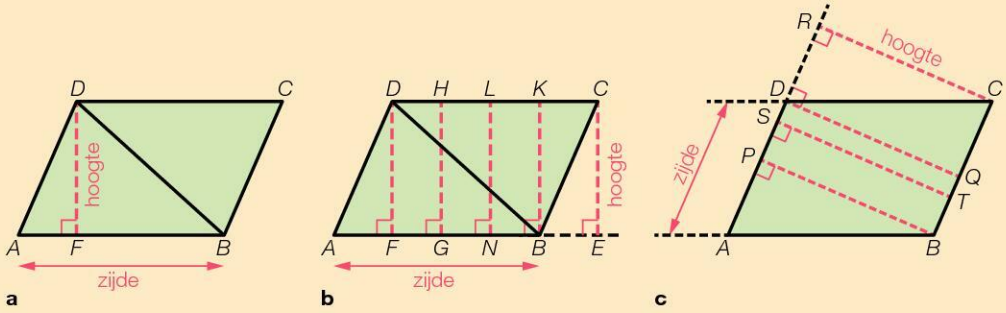
De diagonaal BD verdeelt parallellogram $ABCD$ in figuur 2.37a in twee driehoeken met dezelfde oppervlakte.

Een parallellogram is een puntsymmetrische vierhoek waarvan
- de overstaande zijden evenwijdig zijn
- de overstaande zijden even lang zijn
- de overstaande hoeken even groot zijn
- de diagonalen elkaar middendoor delen.

opp $\triangle ABD = \frac{1}{2} \times$ zijde $\times$ bijbehorende hoogte,

dus opp $ABCD$ = zijde $\times$ bijbehorende hoogte.

oppervlakte parallellogram = zijde × bijbehorende hoogte



figuur 2.37

De bij zijde AB behorende hoogte kun je op vele plaatsen tekenen.
Kijk maar in figuur 2.37b. Je kunt als hoogte DF nemen, maar je kunt ook CE, HG, … als hoogte nemen.
Je kunt ook uitgaan van zijde AD. Zie figuur 2.37c.
De bij zijde AD behorende hoogte is BP, maar ook DQ, CR, ST, …

Een zijde en de bijbehorende hoogte staan loodrecht op elkaar.

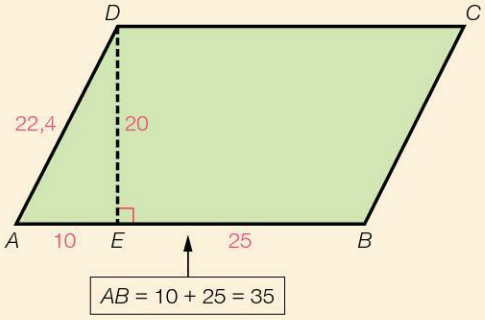
© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Bereken de oppervlakte van parallellogram *ABCD* in figuur 2.38.

Aanpak
Je weet de hoogte die bij zijde *AB* hoort.
Die hoogte is *DE*.
Gebruik dus opp *ABCD* = *AB* · *DE*.

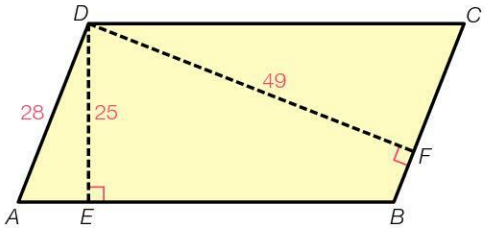
Uitwerking
opp *ABCD* = 35 · 20 = 700 mm²



figuur 2.38 De afmetingen zijn in mm.

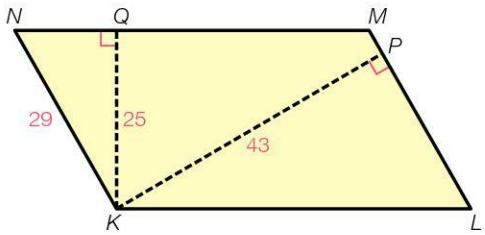
63 Zie parallellogram *ABCD* in figuur 2.39.

- **a** Hoeveel mm is de hoogte die bij zijde *AB* hoort?
- **b** Hoeveel mm is de hoogte die bij zijde *AD* hoort?
- **c** Hoeveel mm is de hoogte die bij zijde *CD* hoort?
- **d** Volgens Albert hoort bij zijde *AB* de hoogte *BC*.
  Waarom is dit fout?
- **e** Bereken de oppervlakte van *ABCD*.



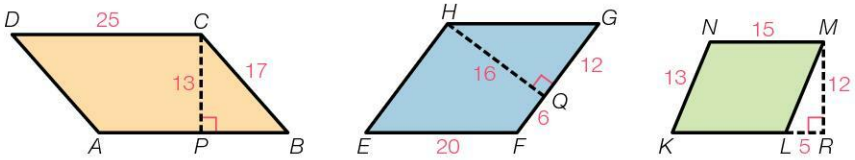
figuur 2.39 De afmetingen zijn in mm.

64 Zie de figuur hiernaast.
Bereken de oppervlakte van parallellogram *KLMN*.



figuur 2.40 De afmetingen zijn in mm.

65 Zie figuur 2.41.
Bereken van elk parallellogram de oppervlakte.



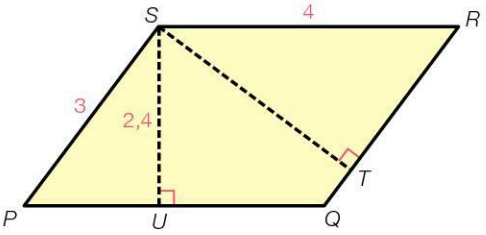
figuur 2.41 De afmetingen zijn in mm.

© Noordhoff Uitgevers

66 **a** Teken de punten $A(-1, -1)$, $B(4, -1)$, $C(6, 2)$ en $D(1, 2)$, en teken parallellogram $ABCD$.
b Kleur een hoogte rood die bij zijde AB hoort.
c Kleur een hoogte blauw die bij zijde BC hoort.
d Met welke zijde kun je de oppervlakte van dit parallellogram het gemakkelijkst berekenen? Bereken de oppervlakte van $ABCD$.

A 67 Gegeven zijn de punten $A(-2, 1)$, $B(3, -1)$ en $C(3, 2)$.
a A, B en C zijn hoekpunten van parallellogram $ABCD$. Geef de coördinaten van D en bereken de oppervlakte van $ABCD$.
b A, B en C zijn hoekpunten van parallellogram $AEBC$. Geef de coördinaten van E en bereken de oppervlakte van $AEBC$.

68 Zie het parallellogram in figuur 2.42. Bereken ST.

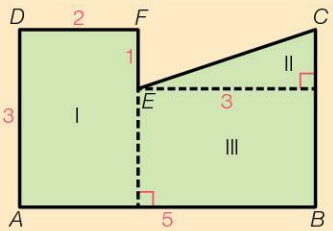


figuur 2.42 De afmetingen zijn in cm.

Theorie B De oppervlakte van allerlei vlakke figuren

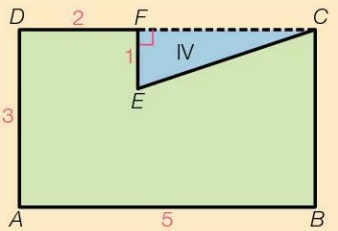
De oppervlakte van een vlakke figuur kun je soms berekenen door de figuur te splitsen in bijvoorbeeld driehoeken of rechthoeken. Het kan ook handig zijn juist een stukje aan de figuur toe te voegen.

Splitsen



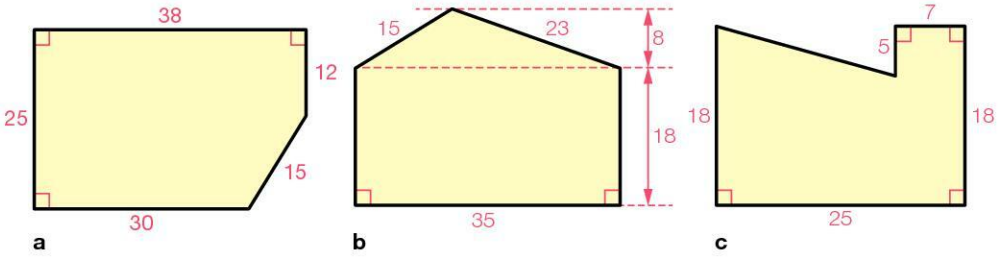
opp = opp I + opp II + opp III
$= 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 3 + 3 \times 2 = 13\frac{1}{2}$ cm^2

Stukje erbij



opp = opp $ABCD$ − opp IV
$= 5 \times 3 - \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = 13\frac{1}{2}$ cm^2

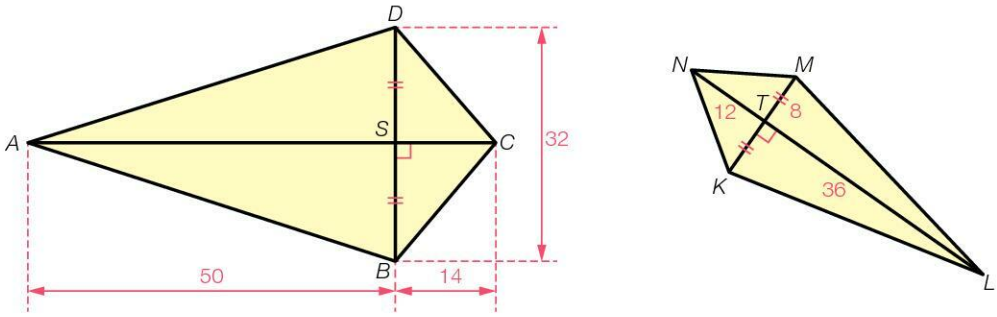
69 Bereken de oppervlakte van de figuren hieronder.



figuur 2.43 De afmetingen zijn in mm.

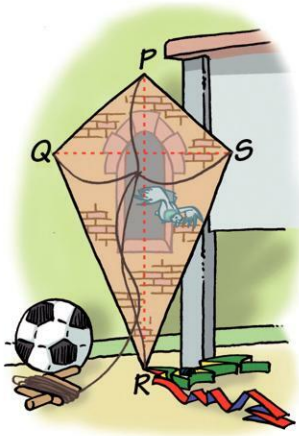
© Noordhoff Uitgevers

70 Bereken de oppervlakte van de vliegers *ABCD* en *KLMN* in figuur 2.44.



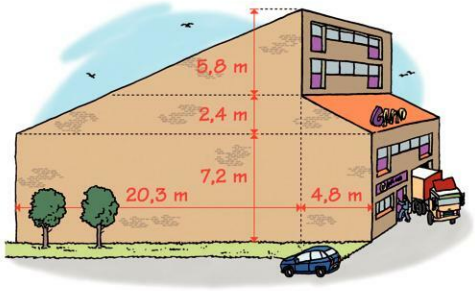
figuur 2.44 De afmetingen zijn in mm.

A **71** De diagonalen van de vlieger *PQRS* hiernaast zijn 96 cm en 44 cm lang.
Bereken de oppervlakte van de vlieger.



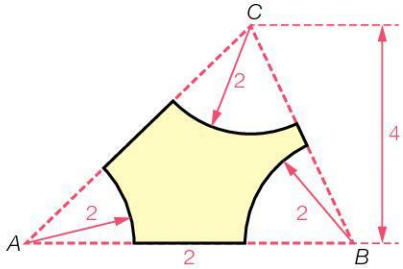
figuur 2.45

A **72** In figuur 2.46 zie je de zijgevel van een gebouw. De zijgevel wordt geverfd. Per m^2 is 160 mL verf nodig. Vijf liter verf kost € 60,20.
Hoeveel gaat het verven van de zijgevel aan verf kosten?



figuur 2.46

73 Zie figuur 2.47.
De punten *A*, *B* en *C* zijn middelpunten van cirkels met een straal van 2 cm.
Bereken de oppervlakte van het gele gebied in cm^2. Rond af op één decimaal.



figuur 2.47 De afmetingen zijn in cm.

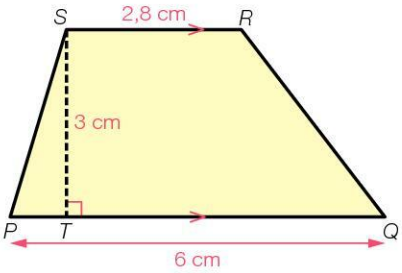
© Noordhoff Uitgevers

2.7 De oppervlakte van een trapezium

O 74 [▸ WERKBOEK] In figuur 2.48 zie je trapezium $PQRS$.

a Teken diagonaal QS en bereken opp $\triangle PQS$ en opp $\triangle QRS$.

b Geef de oppervlakte van trapezium $PQRS$.



figuur 2.48

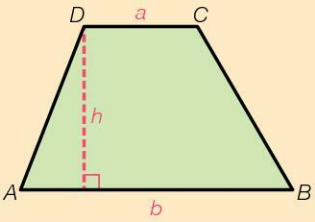
Theorie A Oppervlakte trapezium

Een trapezium is een vierhoek met minstens één paar evenwijdige zijden. In figuur 2.49 zie je trapezium $ABCD$. Twee keer trapezium $ABCD$ geeft een parallellogram, zie figuur 2.50. Hiermee kun je een formule afleiden voor de oppervlakte van $ABCD$.

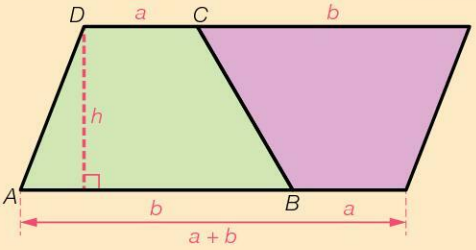
Omdat opp parallellogram $= (a + b) \cdot h$

is opp $ABCD = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$.

Twee keer trapezium ABCD geeft een parallellogram.



figuur 2.49

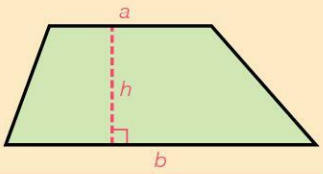


figuur 2.50

opp trapezium $= \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$, ofwel

opp trapezium =

$\frac{1}{2}$ × som van de evenwijdige zijden × hoogte

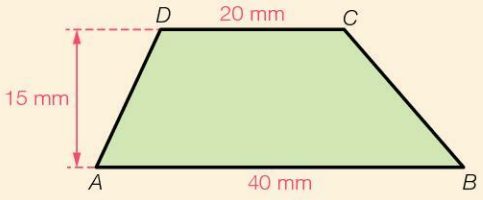


Voorbeeld

Bereken de oppervlakte van trapezium $ABCD$ in figuur 2.51.

Uitwerking

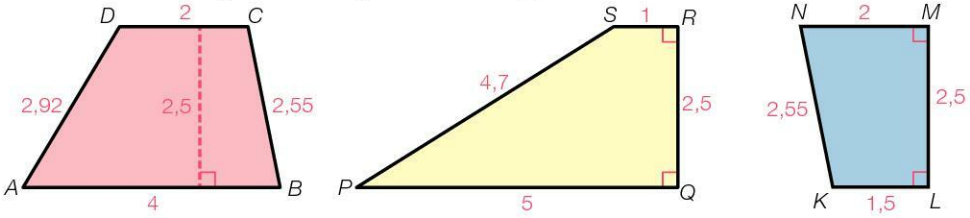
opp $ABCD = \frac{1}{2}(20 + 40) \cdot 15 = 450$ mm^2



figuur 2.51

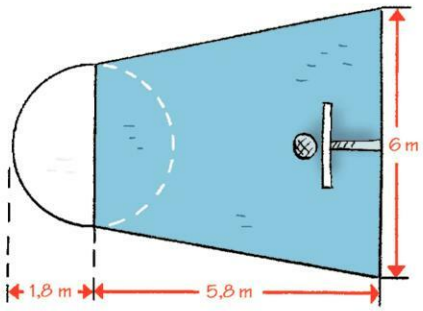
© Noordhoff Uitgevers

75 Bereken van elk trapezium in figuur 2.52 de oppervlakte.



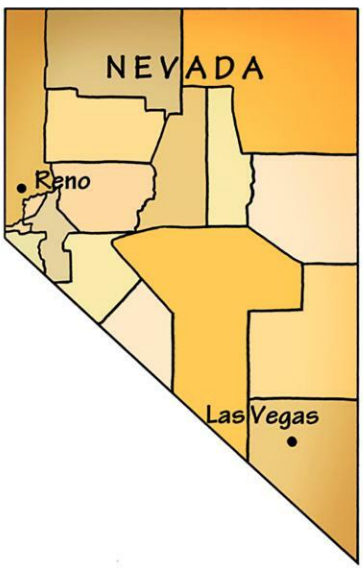
figuur 2.52 De afmetingen zijn in cm.

76 Basketbal is een sport die in 1891 in Amerika is ontstaan. Op het basketbalveld is onder elke basket de bucket aangegeven. De bucket is een gebied waarbinnen een aanvallende speler slechts drie seconden mag verblijven. Tot 2010 was de bucket trapeziumvormig. Op de kop van de bucket zie je ook nog een halve cirkel. Bereken de oppervlakte van de bucket.



figuur 2.53

A 77 Een van de staten van de VS is Nevada. De vorm van Nevada is vrijwel een trapezium. Zie figuur 2.54. Bereken de oppervlakte van Nevada in km^2. Meet hiertoe geschikte afmetingen en gebruik dat de schaal 1 : 11 000 000 is. Rond je antwoord af op duizendtallen.



figuur 2.54 Schaal 1 : 11 000 000.

© Noordhoff Uitgevers

Gemengde opgaven

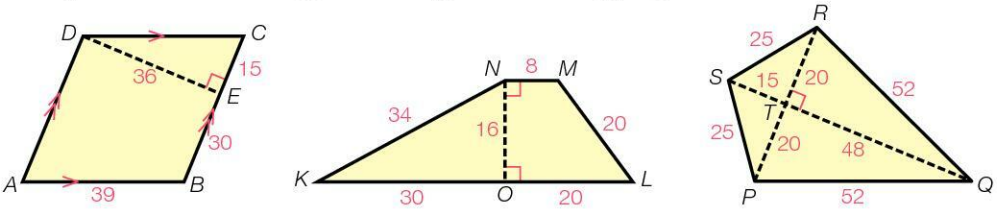
1 **a** Teken de punten $A(-2,-3)$, $B(6,1)$, $C(2,1)$ en $D(6,-3)$, en teken de lijn l door A en B.
b Kleur alle punten rood die op afstand 1 van l liggen en waarvan de afstand tot C groter is dan 3.
c Kleur alle punten blauw die even ver van A als van B liggen en die op afstand 4 van D liggen.

2 [▸ WERKBOEK] In de oudheid beschouwden de Grieken Delphi als het hart van de wereld. Delphi ligt even ver van twee belangrijke oude Griekse steden, namelijk Athene en Olympia. Ook ligt Delphi even ver van de twee heiligdommen Dion en Dodoni. Zie de kaart in figuur 2.55.
Teken de ligging van Delphi.

figuur 2.55

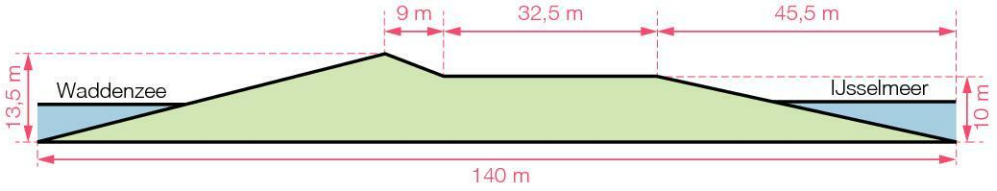
3 **a** Teken $\triangle KLM$ met $KL = 5$ cm, $KM = 4$ cm en $\angle K = 62°$.
b Kleur alle punten P binnen $\triangle KLM$ rood die even ver van de zijden KL en KM liggen.
c Teken het punt Q dat even ver van de benen van $\angle M$ ligt en ook even ver van de punten K en M.

4 Zie figuur 2.56. Bereken opp $ABCD$, opp $KLMN$ en opp $PQRS$.



figuur 2.56 De afmetingen zijn in mm.

5 [▸ WERKBOEK] In figuur 2.57 zie je een doorsnede van de Afsluitdijk.
Bereken de oppervlakte van de doorsnede.

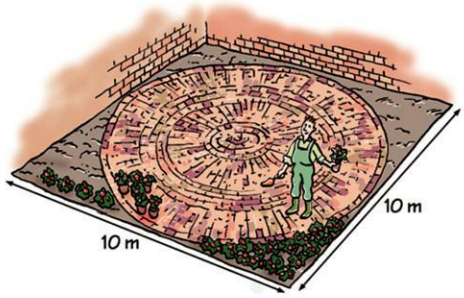


figuur 2.57 De provincies Noord-Holland en Friesland zijn door de Afsluitdijk met elkaar verbonden. De Afsluitdijk scheidt de Waddenzee van het IJsselmeer.

© Noordhoff Uitgevers

6 **a** Teken $\triangle ABC$ met $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm en $BC = 7$ cm.
b Teken de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.
c Teken de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

7 Een hotel heeft een binnenplaats van 10 bij 10 meter. De eigenaar wil een zo groot mogelijk rond stuk laten bestraten. In de stukken die overblijven plant hij rozen.
a Hoeveel m^2 wordt bestraat? Rond af op één decimaal.
b Hoeveel m^2 blijft er over voor de rozen? Rond af op één decimaal.

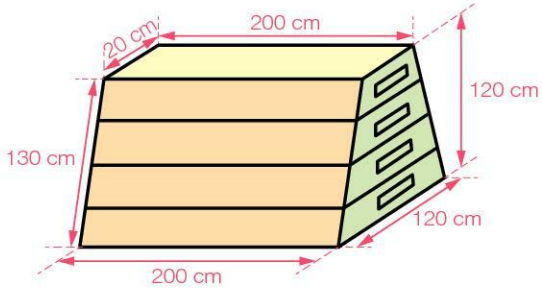


figuur 2.58

Op de binnenplaats komen ronde tafeltjes met een diameter van 90 cm. Daarop liggen ronde tafelkleedjes die 10 cm over de rand hangen.
c De randen van de tafelkleedjes worden afgewerkt met sierband.
Hoeveel cm sierband is nodig voor één tafelkleed? Rond af op één decimaal.

8 In de foto hiernaast zie je een groot loopwiel. Het loopwiel heeft een diameter van 6,80 meter en een breedte van 3,20 meter.
a John wil in het wiel een marathon lopen. Een marathon heeft een lengte van 42,195 km. Hoeveel keer draait het wiel rond tijdens de marathon? Rond af op gehelen.
b Bereken hoeveel m^2 de oppervlakte van het loopwiel is. Rond af op twee decimalen.

9 In figuur 2.59 zie je een springkast. De onderkant van de kast is open.
a Bereken de oppervlakte van de voorkant in dm^2.
b Bereken de totale oppervlakte van de springkast.



figuur 2.59

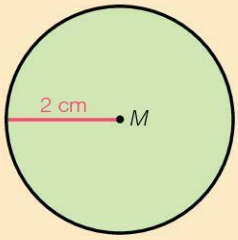
10 **a** Teken de punten $A(-3, 0)$, $B(4, 0)$, $C(2, 5)$ en $D(-2, 3)$, en teken vierhoek $ABCD$.
b Teken de punten binnen de vierhoek rood die dichter liggen bij B dan bij A, en dichter liggen bij AB dan bij BC, en waarvan de afstand tot C kleiner is dan 4.

© Noordhoff Uitgevers

Samenvatting

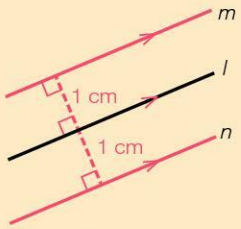
2.1 Afstanden

blz 50 $\odot(M, 2\text{ cm})$ is de cirkel met middelpunt M en straal 2 cm. Alle punten op minder dan 2 cm van M vormen het binnengebied van de cirkel. Dat is het groene gebied in figuur 2.60. Alle punten op meer dan 2 cm van M vormen het buitengebied van de cirkel.



figuur 2.60

blz 54 Alle punten op een afstand van 1 cm van lijn l liggen op twee lijnen evenwijdig met l. Zie figuur 2.61.

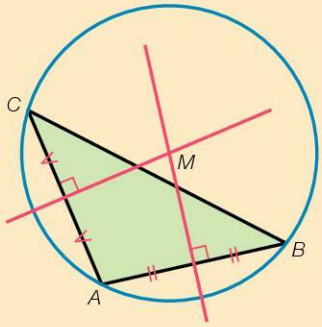


figuur 2.61

2.2 Middelloodlijn en omgeschreven cirkel

blz 56 De middelloodlijn van het lijnstuk AB gaat door het midden van AB en staat loodrecht op AB.
In figuur 2.62 zijn de middelloodlijnen van de lijnstukken AB en AC getekend.
Elk punt van de middelloodlijn van AB ligt even ver van A als van B. Omgekeerd liggen de punten die even ver van A als van B liggen op de middelloodlijn van AB.

blz 58 De omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ gaat door de drie hoekpunten van de driehoek. Het middelpunt M is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden. Je hoeft maar twee middelloodlijnen te tekenen om het middelpunt te vinden.

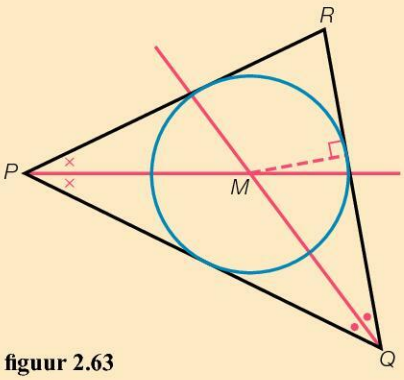


figuur 2.62

2.3 Bissectrice en ingeschreven cirkel

blz 60 De bissectrice van een hoek deelt de hoek middendoor. In figuur 2.63 zijn de bissectrices van $\angle P$ en $\angle Q$ getekend.
Elk punt van de bissectrice van een hoek ligt even ver van het ene als van het andere been van de hoek. Omgekeerd ligt elk punt dat even ver van de benen van een hoek ligt, op de bissectrice van de hoek.

blz 63 De ingeschreven cirkel van een driehoek is de cirkel die de drie zijden raakt. Het middelpunt M is het snijpunt van de bissectrices van de hoeken. Je hoeft maar twee bissectrices te tekenen om het middelpunt te vinden.

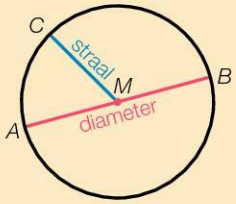


figuur 2.63

© Noordhoff Uitgevers

2.4 De omtrek van een cirkel

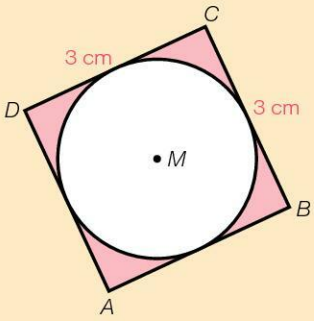
blz 64 Van de cirkel in figuur 2.64 is AB de diameter en is de straal MC ($= MA = MB$).
Dus **diameter = 2 · straal**.
Verder is **omtrek cirkel = π · diameter**.
Afgerond op twee decimalen is π gelijk aan 3,14.
Bij berekeningen met π op de rekenmachine gebruik je de π-toets.



figuur 2.64

2.5 De oppervlakte van een cirkel

blz 67 Voor de oppervlakte van een cirkel geldt de formule
opp cirkel = π · straal².
Van een cirkel met diameter 3 cm is de straal 1,5 cm,
dus omtrek = π · diameter = π · 3 ≈ 9,42 cm en
opp cirkel = π · $1{,}5^2$ ≈ 7,07 cm².
De oppervlakte van het rode gebied in figuur 2.65 is
opp vierkant − opp cirkel = $3^2 - \pi \cdot 1{,}5^2 \approx 1{,}93$ cm².

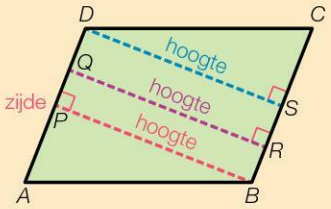


figuur 2.65

2.6 De oppervlakte van een parallellogram

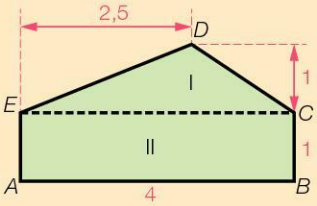
blz 70 **opp parallellogram = zijde × bijbehorende hoogte**
Bij elke zijde van een parallellogram hoort een hoogte.
De hoogte staat loodrecht op de zijde en kun je op vele plaatsen tekenen. Zie figuur 2.66.

blz 72 De oppervlakte van een figuur zoals $ABCDE$ hieronder kun je berekenen door de figuur te splitsen of door stukjes aan de figuur toe te voegen.
Hieronder zijn de afmetingen in cm.



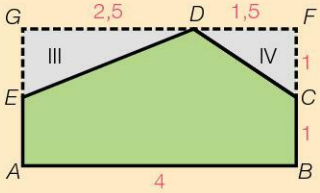
figuur 2.66

Splitsen



opp = opp I + opp II
$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 6$ cm²

Stukjes erbij

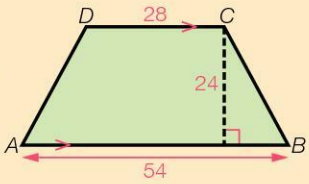


opp = opp $ABFG$ − opp III − opp IV
$= 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 1 = 6$ cm²

2.7 De oppervlakte van een trapezium

blz 74 **opp trapezium = $\frac{1}{2}$ × som van evenwijdige zijden × hoogte**

De oppervlakte van het trapezium in figuur 2.67 is
opp $ABCD = \frac{1}{2}(28 + 54) \cdot 24 = 984$ mm².



figuur 2.67 De afmetingen zijn in mm.

© Noordhoff Uitgevers

Diagnostische toets

2.1 Afstanden

1 **a** Teken de punten $D(-3, 2)$, $E(5, -1)$ en $F(3, 1)$, en de lijn k door D en E.
1 **b** Kleur alle punten op k rood waarvan de afstand tot F groter is dan 3.

2 **a** Teken de punten $A(1, 1)$ en $B(6, 6)$.
2 **b** Kleur alle punten rood waarvan de afstand tot A groter is dan 5 en waarvan de afstand tot B gelijk is aan 3.

3 **a** Teken de punten $D(-3, 0)$, $E(5, -4)$ en $F(2, -1)$, en de lijn l door D en E.
3 **b** Kleur alle punten rood die op afstand 2 van l liggen en waarvan de afstand tot F kleiner is dan 4.

2.2 Middelloodlijn en omgeschreven cirkel

4 **a** Teken de punten $A(2, 0)$, $B(-2, 2)$ en $C(-1, 0)$.
4, 5 **b** Kleur alle punten rood die even ver van A als van B liggen en waarvan de afstand tot C kleiner is dan 3.

5 **a** Teken $\triangle PQR$ met $PQ = 4$ cm, $QR = 3$ cm en $PR = 6$ cm.
6 **b** Teken de omgeschreven cirkel van $\triangle PQR$.

2.3 Bissectrice en ingeschreven cirkel

6 **a** Teken $\triangle DEF$ met $\angle D = 110°$, $DE = 6$ cm en $\angle E = 30°$.
7 **b** Kleur alle punten binnen $\triangle DEF$ rood die even ver van de benen van $\angle E$ liggen.

7 **a** Teken de punten $P(-3, -2)$, $Q(3, 0)$ en $R(0, 3)$, en teken $\triangle PQR$.
8 **b** Teken het punt A dat even ver van de benen van $\angle Q$ ligt, en dat ook even ver van P en R ligt.

8 **a** Teken $\triangle ABC$ met $AB = 8$ cm, $\angle A = 70°$ en $\angle B = 40°$.
9 **b** Teken de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

2.4 De omtrek van een cirkel

9 In een park ligt een ronde vijver met een diameter
10, 11 van 85 meter. Om de vijver is een voetpad met een breedte van 2 meter aangelegd. Aan beide kanten van het pad is een hek geplaatst. Zie figuur 2.68.

a Bereken de lengte van het buitenste hek in meter. Rond af op twee decimalen.

b Meneer Boomstra wandelt met een snelheid van 5 km per uur gedurende een kwartier zo dicht mogelijk langs de vijver. Hoeveel hele rondjes heeft hij gemaakt?

figuur 2.68

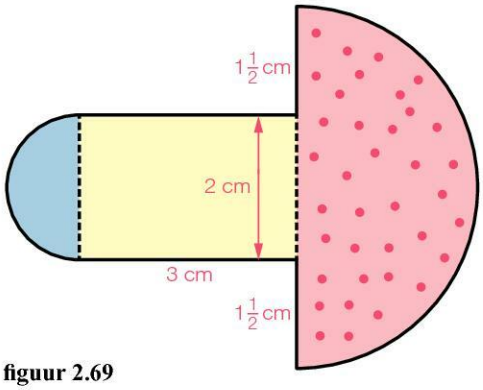
© Noordhoff Uitgevers

2.5 De oppervlakte van een cirkel

10 12, 13 De figuur hiernaast bestaat uit een rechthoek en twee halve cirkels.

a Bereken hoeveel mm de omtrek van de figuur is. Rond af op gehelen.

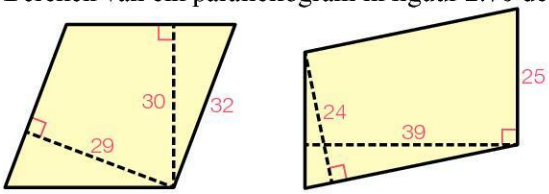
b Bereken hoeveel mm^2 de oppervlakte van de figuur is. Rond af op gehelen.



figuur 2.69

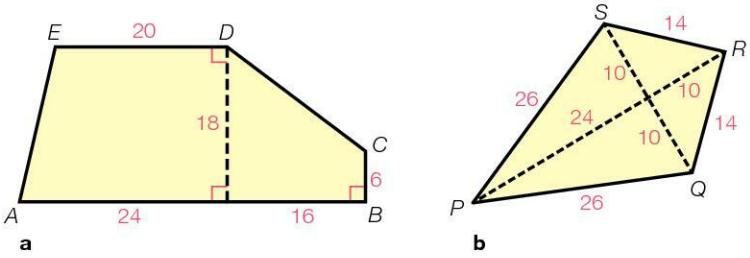
2.6 De oppervlakte van een parallellogram

11 14 Bereken van elk parallellogram in figuur 2.70 de oppervlakte.



figuur 2.70 De afmetingen zijn in mm.

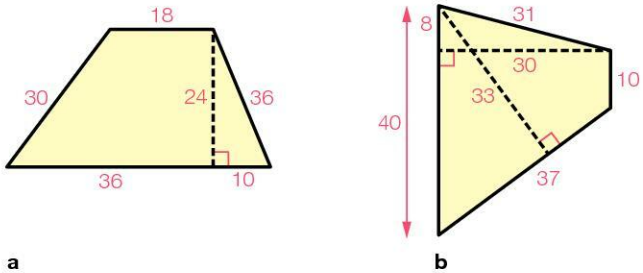
12 15 Zie vijfhoek *ABCDE* en vlieger *PQRS* in figuur 2.71.
Bereken van deze figuren de oppervlakte.



figuur 2.71 De afmetingen zijn in mm.

2.7 De oppervlakte van een trapezium

13 16 Bereken van elk trapezium in figuur 2.72 de oppervlakte.



figuur 2.72 De afmetingen zijn in mm.

© Noordhoff Uitgevers

Herhaling

2.1 Afstanden

1 **a** Teken de punten $D(-2, 4)$, $E(3, 2)$ en $F(1, 1)$, en teken de lijn m door D en E.

b Teken $\odot(F, 3)$, dus de cirkel met middelpunt F en straal 3. Straal 3 wil zeggen dat de straal 3 roostervierkantjes lang is.

$\odot(A, 3\text{ cm})$ is de cirkel met middelpunt A en straal 3 cm.

c Waar liggen de punten waarvan de afstand tot F groter is dan 3?

d Kleur alle punten op de lijn m rood waarvan de afstand tot F groter is dan 3.

2 **a** Teken de punten $A(-3, 1)$ en $B(3, -2)$, en teken $\odot(A, 3)$.

b Waar liggen alle punten waarvan de afstand tot A groter is dan 3?

c Waar liggen alle punten waarvan de afstand tot B gelijk is dan 5?

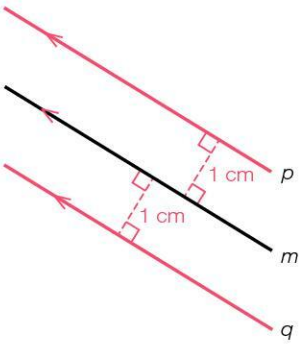
d Kleur alle punten rood waarvan de afstand tot A groter is dan 3 en de afstand tot B gelijk is aan 5.

3 **a** Teken de lijn l door de punten $D(-2, 3)$ en $E(4, 1)$.

b Alle punten op afstand 2 van l liggen op twee lijnen die evenwijdig zijn met l.
Teken deze lijnen. Denk aan de evenwijdigheidstekens.

c Teken het punt $A(2, 1)$ en $\odot(A, 5)$.

d Kleur alle punten rood die op afstand 2 van l liggen en waarvan de afstand tot A kleiner is dan 5.



figuur 2.73 Alle punten op 1 cm afstand van lijn m vormen de lijnen p en q.

2.2 Middelloodlijn en omgeschreven cirkel

4 **a** Teken de punten $A(-2, -2)$ en $B(4, 2)$ en het lijnstuk AB.

b Teken de middelloodlijn van lijnstuk AB.

De middelloodlijn van lijnstuk AB gaat door het midden van AB en staat loodrecht op AB.

c Kies een willekeurig punt op de middelloodlijn. Wat weet je van de afstand van dat punt tot A en B?

d Op de y-as ligt het punt Q dat even ver van A als van B ligt.
Teken Q.

© Noordhoff Uitgevers

5 **a** Teken de punten $A(6, 0)$, $B(0, 4)$ en $C(2, 1)$, en teken het lijnstuk AB en $\odot(C, 3)$.
b Er zijn twee punten die even ver van A als van B liggen en waarvan de afstand tot C gelijk is aan 3.
Kleur die punten rood.
c Kleur alle punten blauw die even ver van A als van B liggen en waarvan de afstand tot C groter is dan 3.

6 **a** Teken de punten $A(3,4)$, $B(3,-2)$ en $C(-1,2)$, en teken $\triangle ABC$.
b Teken de middelloodlijnen van de zijden van $\triangle ABC$.
c Als je nauwkeurig getekend hebt, gaan de drie middelloodlijnen door één punt. Noem dat punt S.
d Teken de lijnstukken SA, SB en SC. Is $SA = SB = SC$?
e Teken de cirkel met middelpunt S die door A, B en C gaat.
f Hoe heet deze cirkel?

2.3 Bissectrice en ingeschreven cirkel

7 **a** Teken de punten $K(-4, 2)$, $L(3, 0)$ en $M(4, 4)$, en teken $\triangle KLM$.
b Teken de bissectrice van $\angle K$, dat is de halve lijn die $\angle K$ in twee gelijke hoeken verdeelt. Geef met twee kruisjes aan dat die hoeken gelijk zijn.
c Alle punten waarvan de afstand tot het ene been van $\angle K$ gelijk is aan de afstand tot het andere been van $\angle K$ vormen een halve lijn. Welke halve lijn is dat?
d Kleur alle punten binnen $\triangle KLM$ die even ver van de benen van $\angle K$ liggen rood.

8 **a** Teken de punten $D(1,-2)$, $E(6,0)$ en $F(2,4)$, en teken $\triangle DEF$.
b Teken op de x-as het punt A dat even ver van de benen van $\angle D$ ligt.
c Van het punt S is gegeven dat
- S even ver van D ligt als van E
- S even ver van de benen van $\angle E$ ligt.

Teken S.

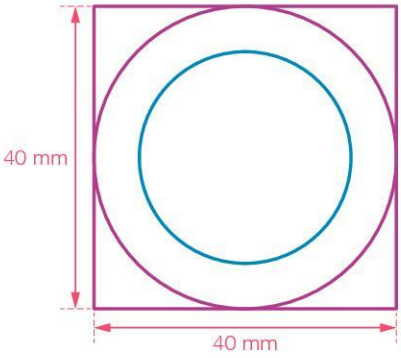
9 **a** Teken $\triangle ABC$ met $AB = 9$ cm, $\angle A = 60°$ en $\angle B = 50°$.
b Teken de bissectrices van de hoeken van $\triangle ABC$.
c De bissectrices gaan door één punt. Noem dat punt M.
d Wat weet je van de afstand van M tot de zijden van $\triangle ABC$?
e Teken de lijn l door M die loodrecht op de zijde AB staat.
Het snijpunt van l en AB is N.
f Teken de cirkel met middelpunt M en straal MN.
g Als je nauwkeurig getekend hebt, raakt de cirkel de drie zijden van $\triangle ABC$.
Hoe heet deze cirkel?

© Noordhoff Uitgevers

2.4 De omtrek van een cirkel

10 De omtrek van een cirkel bereken je met de formule **omtrek cirkel = π · diameter**.
Zie figuur 2.74.

- **a** Hoeveel mm is de diameter van de paarse cirkel?
- **b** Bereken hoeveel mm de omtrek van de paarse cirkel is. Rond af op één decimaal.
- **c** De blauwe cirkel bevindt zich overal 6 mm van de paarse cirkel.
  Hoeveel mm is de diameter van de blauwe cirkel?
- **d** Hoeveel mm is de omtrek van de blauwe cirkel? Rond af op één decimaal.



figuur 2.74

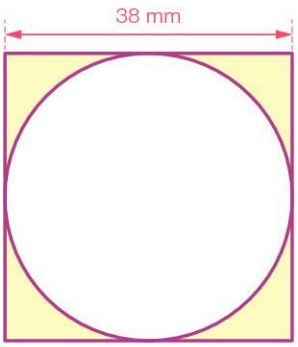
11 Een ronde vijver heeft een diameter van 120 meter.
Er loopt een pad op 8 meter van de vijverrand.

- **a** Bereken de lengte van het pad in meter. Rond af op gehelen.
- **b** Tim loopt met een snelheid van 6 km per uur op het pad.
  Hij loopt 30 minuten over het pad.
  Hoeveel gehele ronden heeft hij gemaakt?

2.5 De oppervlakte van een cirkel

12 De oppervlakte van een cirkel bereken je met de formule **opp cirkel = π · straal²**.
Zie figuur 2.75.

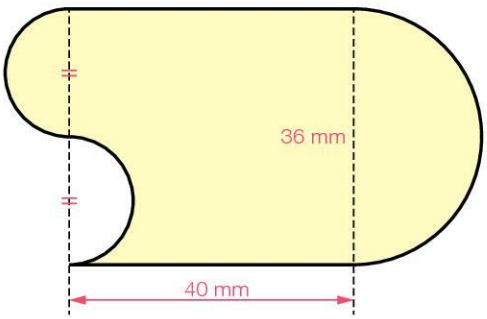
- **a** Hoeveel mm is de straal van de cirkel?
- **b** Bereken hoeveel mm^2 de oppervlakte van de cirkel is. Rond af op één decimaal.
- **c** Hoeveel mm^2 is de oppervlakte van één van de vier gele gebieden? Rond af op één decimaal.



figuur 2.75

13 In figuur 2.76 zie je een rechthoek en drie halve cirkels.

- **a** Hoeveel mm is de diameter van de grote cirkel? En hoeveel mm is de diameter van de kleine cirkels?
- **b** Bereken de omtrek van de figuur in mm. Rond af op één decimaal.
- **c** Bereken de oppervlakte van de figuur in mm^2. Rond af op één decimaal.



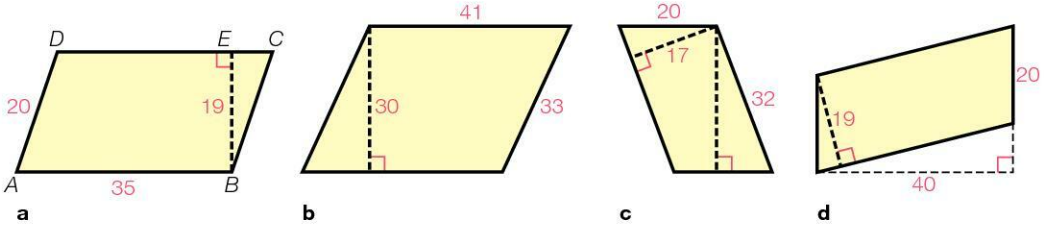
figuur 2.76

© Noordhoff Uitgevers

2.6 De oppervlakte van een parallellogram

14 De oppervlakte van een parallellogram bereken je met de formule **opp parallellogram = zijde × bijbehorende hoogte**.
In figuur 2.77a hoort bij de zijde AB de hoogte BE, dus
opp $ABCD = 35 \cdot 19 = 665$ mm^2.

Bereken van de andere parallellogrammen in figuur 2.77 de oppervlakte.

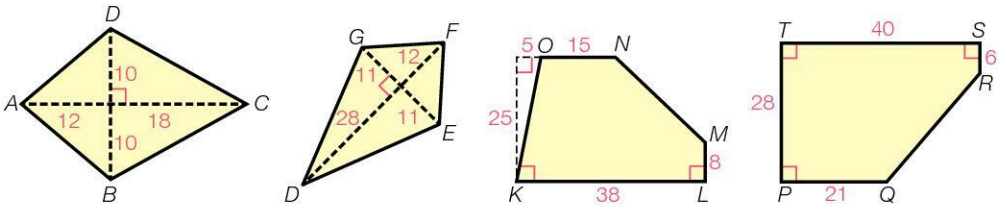


figuur 2.77 De afmetingen zijn in mm.

15 In figuur 2.78 zie je vlieger $ABCD$.

a Om de oppervlakte van vlieger $ABCD$ te berekenen, deel je de vierhoek op in driehoeken.
Bereken opp $ABCD$.

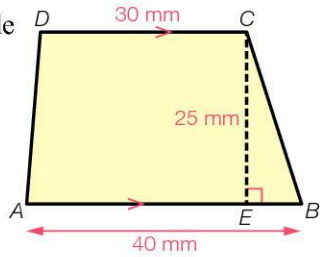
b Bereken opp $DEFG$, opp $KLMNO$ en opp $PQRST$.



figuur 2.78 De afmetingen zijn in mm.

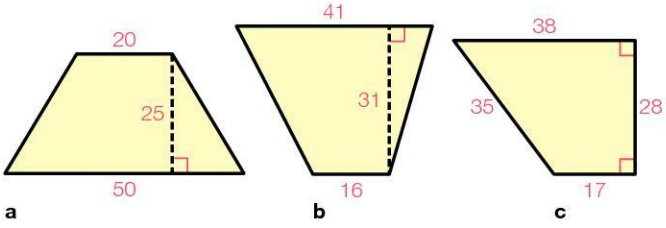
2.7 De oppervlakte van een trapezium

16 De oppervlakte van een trapezium bereken je met de formule **opp trapezium** $= \frac{1}{2} \times$ **som evenwijdige zijden × hoogte**.
Van het trapezium hiernaast zijn de evenwijdige zijden $DC = 30$ mm en $AB = 40$ mm. De hoogte is $CE = 25$ mm.
opp $ABCD = \frac{1}{2}(30 + 40) \cdot 25 = 875$ mm^2



figuur 2.79

Bereken van elk trapezium in figuur 2.80 de oppervlakte.

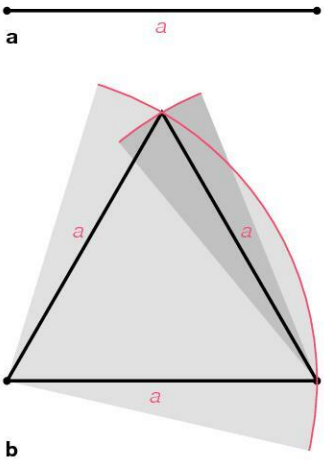


figuur 2.80 De afmetingen zijn in mm.

© Noordhoff Uitgevers

Onderzoek Construeren

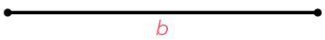
In figuur 2.81a zie je een lijnstuk met lengte a.
Met behulp van dit lijnstuk is de gelijkzijdige driehoek in figuur 2.81b getekend. Daarbij zijn een potlood, een passer en een rechte lat gebruikt. Deze manier van tekenen wordt **construeren** genoemd. Bij construeren mag je een geodriehoek of een liniaal alleen gebruiken om lijnen te trekken, maar niet om afstanden te meten.
In dit onderzoek ontdek je hoe je meetkundige figuren zoals de middelloodlijn van een lijnstuk en de bissectrice van een hoek construeert.



figuur 2.81 Constructie gelijkzijdige driehoek met zijde met lengte a.

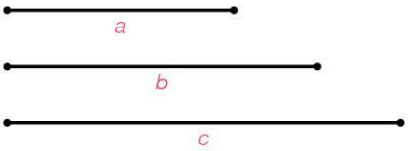
Driehoeken construeren

1 [▸ WERKBOEK] In figuur 2.82 zie je een lijnstuk met lengte b.
Construeer een gelijkzijdige driehoek waarvan de zijden lengte b hebben. Construeren, dus meet het lijnstuk op met de passer.



figuur 2.82

2 [▸ WERKBOEK] Zie figuur 2.83.
Construeer $\triangle ABC$ waarvan zijde AB lengte c heeft, zijde BC lengte a en zijde AC lengte b.



figuur 2.83

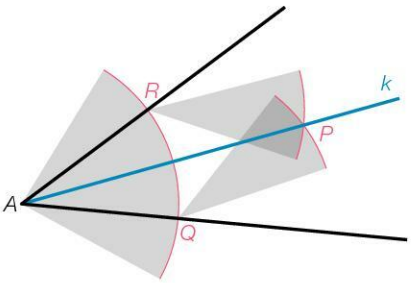
Bissectrices construeren

3 [▸ WERKBOEK] In figuur 2.84 is de bissectrice k van $\angle A$ geconstrueerd.

a Onderzoek hoe het punt P geconstrueerd is.

b Teken de lijnstukken PQ en PR.
Waarom is vierhoek $AQPR$ een ruit?

c Uit welke eigenschap van de ruit volgt dat k de bissectrice van $\angle A$ is?

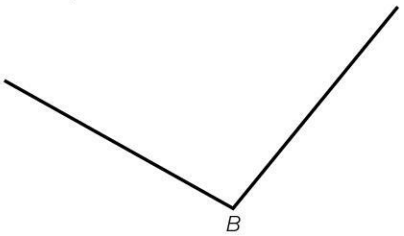


figuur 2.84 Constructie bissectrice van $\angle A$.

Eigenschappen ruit
- De overstaande zijden zijn even lang.
- De overstaande hoeken zijn even groot.
- De diagonalen delen de hoeken middendoor.
- De diagonalen delen elkaar middendoor.
- De diagonalen staan loodrecht op elkaar.

Zie figuur 2.85.

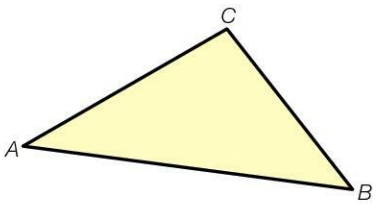
d Construeer de bissectrice van $\angle B$.



figuur 2.85

© Noordhoff Uitgevers

4 [▸ WERKBOEK] Gegeven is $\triangle ABC$ in figuur 2.86.
Construeer het middelpunt M van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.



figuur 2.86

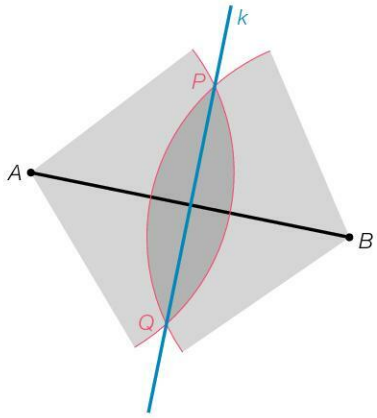
Middelloodlijnen construeren

5 [▸ WERKBOEK] In figuur 2.87 is de middelloodlijn k van lijnstuk AB geconstrueerd.

a Onderzoek hoe de punten P en Q zijn geconstrueerd.

b Teken vierhoek $APBQ$.
Waarom is vierhoek $APBQ$ een ruit?

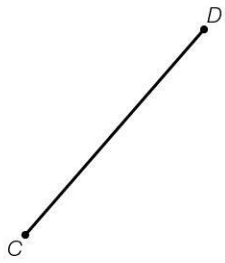
c Uit welke eigenschappen van de ruit volgt dat k de middelloodlijn van lijnstuk AB is?



figuur 2.87 Constructie middelloodlijn van lijnstuk AB.

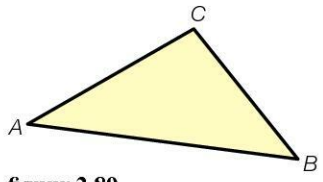
Zie figuur 2.88.

d Construeer de middelloodlijn van lijnstuk CD.



figuur 2.88

6 [▸ WERKBOEK] Gegeven is $\triangle ABC$ in figuur 2.89.
Construeer de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.



figuur 2.89

7 [▸ WERKBOEK] Zie nogmaals figuur 2.89 met $\triangle ABC$.
Onderzoek hoe je het zwaartepunt Z van $\triangle ABC$ kunt construeren en voer deze constructie uit.

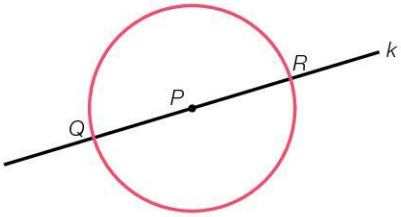
Een zwaartelijn van een driehoek gaat door een hoekpunt en door het midden van de overstaande zijde.
De zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt, het zwaartepunt van de driehoek.

© Noordhoff Uitgevers

Loodlijnen construeren

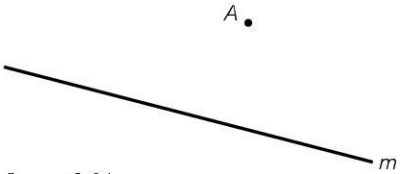
Door de constructie van een middelloodlijn op een handige manier te gebruiken kun je loodlijnen construeren. In de volgende opgaven ontdek je hoe dat gaat.

8 [▸ WERKBOEK] In figuur 2.90 ligt het punt P op de lijn k. Construeer de lijn m door P loodrecht op k. Maak hierbij gebruik van de snijpunten Q en R van een cirkel met middelpunt P en de lijn k.



figuur 2.90

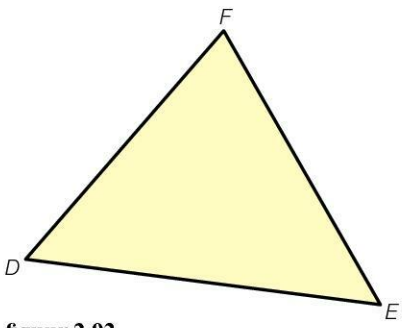
9 [▸ WERKBOEK] Zie figuur 2.91.
Onderzoek hoe je de lijn n door het punt A loodrecht op de lijn m kunt construeren en voer deze constructie uit.



figuur 2.91

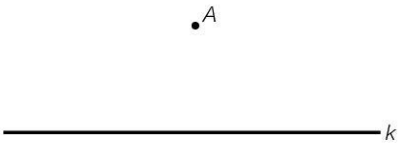
10 [▸ WERKBOEK] Zie figuur 2.92 met $\triangle DEF$.
Onderzoek hoe je het hoogtepunt H van $\triangle DEF$ kunt construeren en voer deze constructie uit.

> Een hoogtelijn van een driehoek gaat door een hoekpunt en staat loodrecht op de overstaande zijde. De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt, het hoogtepunt van de driehoek.



figuur 2.92

11 [▸ WERKBOEK] Zie figuur 2.93.
Onderzoek hoe je de lijn m door het punt A evenwijdig met de lijn k kunt construeren en voer deze constructie uit.

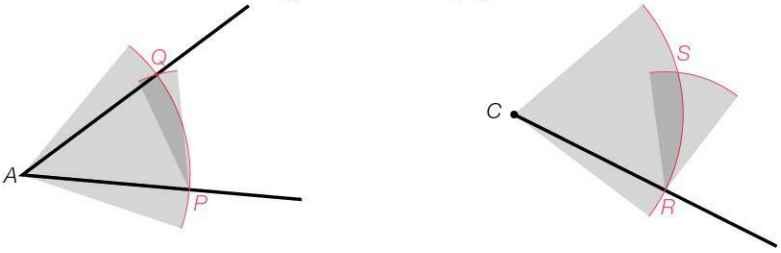


figuur 2.93

© Noordhoff Uitgevers

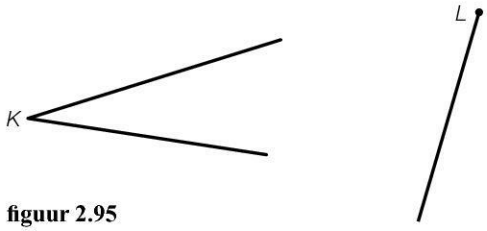
Hoeken construeren

12 [▸ WERKBOEK] In figuur 2.94 is een begin gemaakt met het construeren van een hoek C die even groot is als de gegeven hoek A.



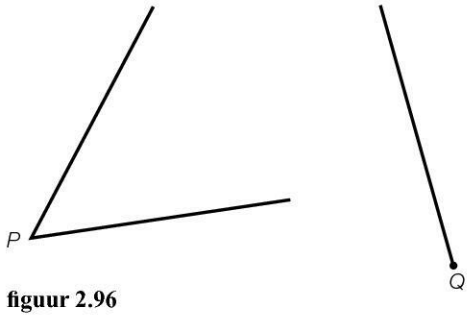
figuur 2.94 Constructie van hoek C waarvoor geldt $\angle C = \angle A$.

Onderzoek de constructie in figuur 2.94 en construeer een hoek L die even groot is als de gegeven hoek K in figuur 2.95.



figuur 2.95

13 [▸ WERKBOEK] Zie figuur 2.96.
Construeer een hoek Q die twee keer zo groot is als de gegegeven hoek P.



figuur 2.96

14 Onderzoek hoe je een hoek van 75 graden construeert en voer deze constructie uit.

© Noordhoff Uitgevers

Lineaire formules en vergelijkingen

De hoogte waarop een vliegtuig vliegt, hangt af van de grootte van het vliegtuig en de afstand die het vliegtuig moet afleggen. De meeste passagiersvliegtuigen vliegen op een hoogte tussen zeven en dertien kilometer.
Een piloot zet tijdens een vlucht zijn daling in op een hoogte van tien kilometer, waarbij hij per minuut 350 meter daalt. Met de lineaire formule $H = 10 - 0{,}35t$ is de hoogte H in kilometer te berekenen als het vliegtuig t minuten aan het dalen is.

Wat leer je?

- Grafieken van lineaire formules tekenen.
- Dat bij een lineair verband tussen x en y een formule van de vorm $y = ax + b$ hoort.
- De formule van een lijn opstellen.
- Werken met lineaire verbanden.
- Som- en verschilgrafieken tekenen.
- Lineaire vergelijkingen oplossen.
- De coördinaten van het snijpunt van twee lijnen berekenen.
- Problemen oplossen met vergelijkingen.

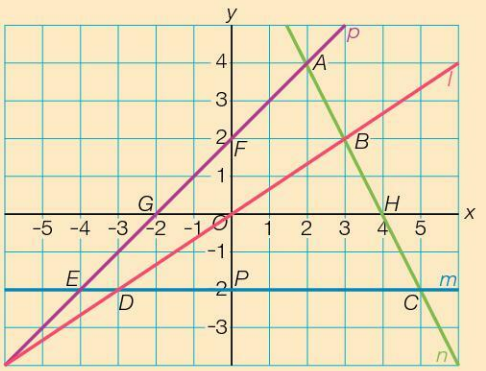
© Noordhoff Uitgevers

© Noordhoff Uitgevers

Voorkennis Formules en grafieken

Theorie A Punten en lijnen

In figuur 3.1 zie je de lijnen l, m, n en p. De lijnen l en m snijden elkaar in het punt $D(-3, -2)$. Dus van het snijpunt D is de x-coördinaat -3 en de y-coördinaat -2. En zo is $P(0, -2)$ met x-coördinaat 0 en y-coördinaat -2 het snijpunt van lijn m met de y-as.



figuur 3.1

1 Zie figuur 3.1.
Schrijf de coördinaten op van het snijpunt

a C van de lijnen m en n
b E van de lijnen m en p
c G van lijn p met de x-as
d B van de lijnen l en n

2 Zie figuur 3.1.

a Op lijn p liggen tussen A en G drie roosterpunten.
Schrijf de coördinaten van deze punten op.
b Op lijn m ligt een punt met x-coördinaat 1.
Geef de y-coördinaat van dat punt.
c Op lijn l ligt een punt met y-coördinaat 4.
Geef de x-coördinaat van dat punt.

3 Zie figuur 3.1.

a Welke lijn snijdt de x-as in het punt $(4, 0)$?
b Welke lijnen snijden elkaar in het punt $(2, 4)$?
c De lijn door O en A noemen we q.
Schrijf de coördinaten op van het snijpunt van m en q.

4 **a** De lijn l in figuur 3.1 is stijgend.
Welke lijn in figuur 3.1 is ook stijgend? En welke lijn is dalend?
b Is de lijn door de punten C en F in figuur 3.1 stijgend of dalend? En de lijn door de punten D en G?

5 Zie figuur 3.1.

a Schrijf de coördinaten op van twee roosterpunten op lijn l, die rechts van het punt B liggen.
b Licht toe dat het punt $K(15, -22)$ op lijn n ligt.
c Van welk roosterpunt op l is de y-coördinaat 18?

© Noordhoff Uitgevers

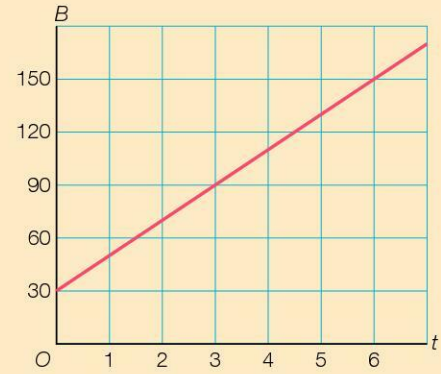
Theorie B Formule, tabel en grafiek

Klusbedrijf Jobstra is gespecialiseerd in klussen rond het huis.
Jobstra berekent het bedrag B in euro's voor een klus van t uren met de formule $B = 20t + 30$.
Bij een klus van 2 uur is $t = 2$. Je betaalt dan
$B = 20 \cdot 2 + 30 = 40 + 30 = 70$ euro.
En voor een klus van 3,5 uur betaal je
$B = 20 \cdot 3{,}5 + 30 = 70 + 30 = 100$ euro.

Bij de formule hoort de volgende tabel.

t	0	1	2	3	4	5	6
B	30	50	70	90	110	130	150

Om de grafiek te tekenen gebruik je de tabel.
De grafiek gaat door de punten (0, 30), (1, 50), (2, 70), (3, 90), … Zie figuur 3.2.
De horizontale as hoort bij de bovenste rij van de tabel. Daarom staat bij de horizontale as t.
De verticale as hoort bij de onderste rij van de tabel. Daarom staat bij de verticale as B.



figuur 3.2

6 Taxibedrijf Kolthof berekent de prijs voor een rit van k km met de formule $P = 2k + 10$. Hierin is P de prijs in euro's.

a Hoeveel betaal je bij Kolthof voor een rit van 6 km?

b Neem de tabel over en vul hem in.

k	0	2	4	6	8	10	12
P							

c Teken de grafiek bij de formule van Kolthof. Neem op de verticale as 1 cm voor elke 4 euro.

Taxibedrijf Oosting gebruikt de formule $P = 2{,}5k + 5$.

d Teken in de figuur van vraag c de grafiek bij de formule van Oosting. Maak eerst een tabel.

e Meneer Huisman moet Oosting 20 euro betalen. Hoeveel km was de rit van meneer Huisman?

f Bij welk aantal kilometers zijn Kolthof en Oosting even duur?

7 Gegeven is de formule $y = 1{,}5x - 1$.
Voor $x = 4$ is $y = 1{,}5 \cdot 4 - 1 = 6 - 1 = 5$.

a Bereken y voor $x = -2$.

b Teken de grafiek van $y = 1{,}5x - 1$.
Maak eerst een tabel met $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, …, $x = 4$.

c Teken in de figuur van vraag b de grafiek van $y = -0{,}5x + 3$.

d Schrijf de coördinaten van het snijpunt van de grafieken op.

© Noordhoff Uitgevers

3.1 De grafiek van een lineaire formule

O 1 Gegeven is de formule $y = 2x - 3$.
Voor $x = 4$ is $y = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$.

a Bereken y voor $x = 1$.

b Vul de tabel in.

x	-1	0	1	2	3	4
y						5

c Uit de tabel volgen de punten $(-1, \ldots)$, $(0, \ldots)$, $(1, \ldots)$, …
Teken deze punten en teken door de punten de grafiek.

Theorie A De grafiek van een lineaire formule

De formule $y = -x + 2$ is een voorbeeld van een **lineaire formule**.
Er bestaat een **lineair verband** tussen x en y.

Andere lineaire formules zijn $y = 2x + 3$, $y = -\frac{2}{3}x + 8$ en $B = 20t + 30$.

De grafiek van een lineaire formule is een rechte lijn. Om een lijn te tekenen hoef je maar twee punten te weten. Daarom hoef je bij een lineaire formule maar twee punten in de tabel op te nemen.

- **De grafiek van een lineaire formule is een lijn.**
- **In de tabel van een lineaire formule zet je twee punten.**
- **Voorbeelden van lineaire formules zijn $y = 3x + 8$, $y = -5x + 7$ en $P = 2k + 10$.**

Voorbeeld

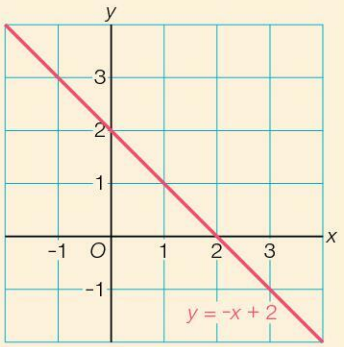
Teken de grafiek van $y = -x + 2$.

Uitwerking

x	0	4
y	2	-2

Bij $x = 4$ hoort $y = -4 + 2 = -2$.

Zie figuur 3.3.



figuur 3.3 Teken de lijn ook links van de y-as.

© Noordhoff Uitgevers

T 2 [▸▸ 6]

a Teken in één figuur de grafieken van $y = -\frac{1}{2}x + 2$ en $y = 4 - 1\frac{1}{2}x$.

b De grafieken snijden elkaar.
Schrijf de coördinaten van het snijpunt op.

3 **a** Teken de grafiek van $y = -2x + 4$ rood.

b Teken in dezelfde figuur de grafiek van $y = \frac{1}{2}x + 1$ blauw.

- Neem in de tabel in elk geval $x = 0$.
- Zet de tabel in de uitwerking.
- Zet de formule bij de grafiek.

4 Teken in één figuur met verschillende kleuren de grafieken van $y = 2x - 1$, $y = -\frac{1}{2}x - 2$ en $y = x + 1$.

5 Teken in één figuur met verschillende kleuren de grafieken van $y = 2x$, $y = x - 1$, $y = -x$ en $y = -2x + 1$.

A 6 **a** Teken in één figuur de grafieken van $y = 3 - 1\frac{1}{2}x$ en $y = x - 4\frac{1}{2}$.

b De grafieken snijden elkaar.
Schrijf de coördinaten van het snijpunt op.

A 7 [▸ WERKBOEK] De firma CompuService installeert en repareert computers. Het bedrag B in euro's dat je voor een klus van k kwartier betaalt, bereken je met de formule $B = 15k + 40$.

a Waarom mag je in de formule voor k geen negatief getal invullen?

b Teken de grafiek van B.

Het computerbedrijf C&R hanteert de formule $B = 20k + 10$.

c Teken in de figuur van vraag b de grafiek van de formule van C&R.

d Bij hoeveel minuten werken zijn CompuService en C&R even duur?

O 8 Gegeven is de formule $y = 3x - 1$.
Neem $x = 5$ en bereken y. Welk punt van de grafiek weet je nu?

Theorie B Punten op grafieken

De grafiek van $y = 3x - 7$ is een lijn. Je kunt narekenen of het punt $A(2, -1)$ op die lijn ligt. Je vult dan $x = 2$ in de formule in en controleert of je $y = -1$ krijgt.
$x = 2$ invullen geeft $y = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1$.
Dit klopt, dus het punt $A(2, -1)$ ligt op de lijn.

In plaats van
de grafiek van de formule $y = 3x - 7$
zeggen we ook wel
de lijn $y = 3x - 7$.

Het punt $B(-1, -4)$ ligt niet op de grafiek van $y = 3x - 7$.
Want $x = -1$ invullen geeft $y = 3 \cdot -1 - 7 = -3 - 7 = -10 \neq -4$.

$\neq$ betekent: is **niet** gelijk aan

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Gegeven is de formule $y = -4x + 7$.
Ga met een berekening na of het punt

a $A(3, -5)$ op de grafiek ligt
b $B(-20, 93)$ op de grafiek ligt.

Uitwerking

a $x = 3$ geeft $y = -4 \cdot 3 + 7 = -12 + 7 = -5$,
dus $A(3, -5)$ ligt op de grafiek.
b $x = -20$ geeft $y = -4 \cdot -20 + 7 = 80 + 7 = 87 \neq 93$,
dus $B(-20, 93)$ ligt niet op de grafiek.

9 Gegeven is de formule $y = 3x - 1$.

a Ga met een berekening na of het punt $A(5, 14)$ op de grafiek ligt.
b Ga met berekeningen na welke van de punten $B(9, 26)$, $C(30, 90)$ en $D(-3, -10)$ op de grafiek liggen.
c Op de grafiek van $y = 3x - 1$ ligt het punt E waarvan de x-coördinaat -5 is.
Bereken de y-coördinaat van E.

A 10 Gegeven is de formule $y = -\frac{3}{4}x + 1$.

a Ga telkens met een berekening na welke van de punten $P(4, -2)$, $Q(20, 16)$ en $R(-100, 76)$ op de grafiek liggen.
b Van het punt S op de grafiek is de x-coördinaat -8.
Bereken de y-coördinaat van S.

A 11 Voor een klus van t minuten berekent klusjesbedrijf Van Urk het bedrag B in euro's met de formule $B = 0{,}7t + 25$.

a Teken de grafiek van B. Laat de t-as lopen van 0 tot 50 en de B-as van 0 tot 60.
b Toon aan dat het punt (80, 81) op de grafiek ligt.
Wat is hiervan de praktische betekenis?

12 **a** Het punt $A(-4, p)$ ligt op de grafiek van $y = \frac{1}{4}x - 1$.
Bereken p.
b Het punt $B(5, q)$ ligt op de grafiek van $y = -3x + 8$.
Bereken q.
c Het punt $C(2, 8)$ ligt op de grafiek van $y = ax$.
Zoek uit welk getal a is.
d Het punt $D(-4, 18)$ ligt op de lijn $y = -2x + b$.
Zoek uit welk getal b is.

Ligt het punt $P(6, a)$ op de lijn $y = -3x + 17$, dan is $y = -3 \cdot 6 + 17 = -18 + 17 = -1$, dus $a = -1$.

© Noordhoff Uitgevers

3.2 De formule van een lijn opstellen

O 13 Formules zoals $y = 5x + 8$ en $y = -4x + 7$ zijn van de vorm $y = ax + b$. Door $a = -3$ en $b = 2$ te nemen krijg je $y = -3x + 2$.
Welke formule krijg je als je bij $y = ax + b$ neemt

a $a = 15$ en $b = 20$

b $a = -2$ en $b = 7$?

Theorie A De formule $y = ax + b$

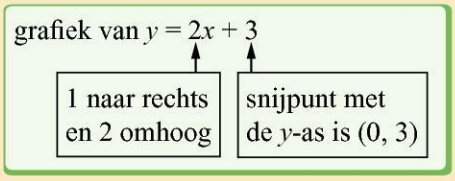
Bij een lineair verband tussen x en y hoort een formule van de vorm $y = ax + b$. Voor $a = -2$ en $b = 6$ krijg je de formule $y = -2x + 6$.
Voor $a = 3$ en $b = 0$ krijg je $y = 3x + 0$ ofwel $y = 3x$.

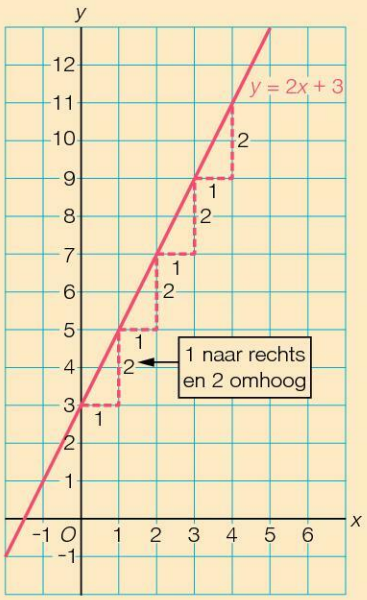
Bij een lineair verband tussen x en y hoort een formule van de vorm $y = ax + b$.

Bij de formule $y = 2x + 3$ hoort de volgende tabel.

	+1	+1	+1	+1	+1	+1	
x	-1	0	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9	11	13
	+2	+2	+2	+2	+2	+2	

Neemt x met 1 toe, dan neemt y met 2 toe. Dus voor de grafiek geldt: ga je 1 naar rechts, dan ga je 2 omhoog.
Het snijpunt van de grafiek met de y-as is (0, 3).





figuur 3.4

Bij de formule $y = -2x + 6$ hoort de tabel

	+1	+1	+1	+1	+1	+1	
x	-1	0	1	2	3	4	5
y	8	6	4	2	0	-2	-4
	−2	−2	−2	−2	−2	−2	

Voor de grafiek geldt: ga je 1 naar rechts, dan ga je 2 omlaag. Het snijpunt van de grafiek met de y-as is (0, 6).

© Noordhoff Uitgevers

De grafiek van $y = ax + b$ is een lijn.
Ga je 1 naar rechts, dan ga je a omhoog.
De lijn snijdt de y-as in het punt $(0, b)$.

Omdat het getal a de richting van de lijn $y = ax + b$ vastlegt, heet a de **richtingscoëfficiënt** van de lijn.

De grafieken van $y = 3x - 5$ en $y = 3x + 2$ hebben beide richtingscoëfficiënt 3. Notatie: rc = 3.
Voor beide grafieken geldt: ga je 1 naar rechts, dan ga je 3 omhoog. De twee lijnen zijn dus evenwijdig.

Lijnen met een positieve richtingscoëfficiënt zijn stijgend. Lijnen met een negatieve richtingscoëfficiënt zijn dalend.

14 Ga uit van de formule $y = ax + b$.
Welke getallen moet je voor a en b kiezen om de volgende formules te krijgen?

a $y = -0{,}3x + 2{,}6$
b $y = 5x - 1{,}4$
c $y = x + 8$
d $y = -x + 1$
e $y = x$
f $y = -4x$
g $y = 2$
h $y = 3 + 2x$
i $y = -x - 9$

15 Gegeven is de formule $y = 3x + 2$.
a In welk punt snijdt de grafiek de y-as?
b Geef de richtingscoëfficiënt van de grafiek.
c Vul in.
Voor de grafiek geldt: ga je 1 naar rechts, dan ga je …

16 Gegeven is de formule $y = -\frac{1}{2}x - 4$.
a Geef de richtingscoëfficiënt van de grafiek en het snijpunt van de grafiek met de y-as.
b Vul in.
Voor de grafiek geldt: ga je 1 naar rechts, dan ga je …

17 Gegeven zijn de formules $y = \frac{1}{2}x - 3$, $y = 2x + 2$ en $y = \frac{1}{2}x + 2$.
a Van welke formules snijden de grafieken de y-as in hetzelfde punt? Hoe kun je dat aan de formules zien?
b Van welke formules zijn de grafieken evenwijdig? Hoe kun je dat aan de formules zien?

A **18** Gegeven zijn de formules

I $y = 5x + 7$
II $y = 4x + 3$
III $y = 5x + 3$
IV $y = -0{,}2x + 1$
V $y = 3 - 0{,}2x$
VI $y = -4x + 7$

a Van welke formules zijn de grafieken evenwijdig?
b Van welke formules hebben de grafieken hetzelfde snijpunt met de y-as?

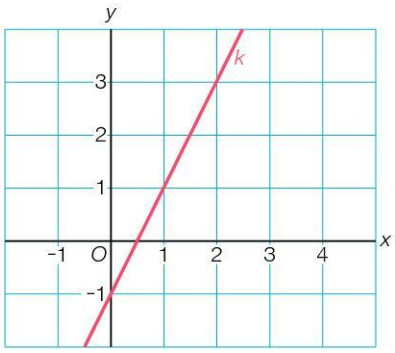
© Noordhoff Uitgevers

O 19 Bij de lijn k in figuur 3.5 hoort een formule van de vorm $y = ax + b$.

a Lijn k snijdt de y-as in het punt $(0, \ldots)$, dus $b = \ldots$

b Lijn k gaat 1 naar rechts en … omhoog, dus $a = \ldots$

c Vul in.
De formule van lijn k is $y = \ldots x + \ldots$



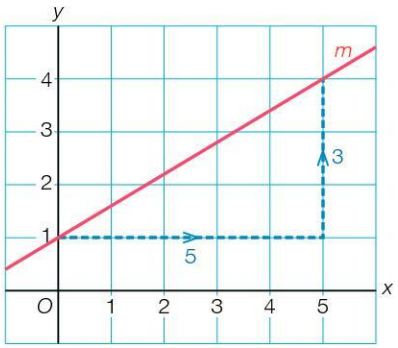
figuur 3.5

O 20 De formule van de lijn m in figuur 3.6 is van de vorm $y = ax + b$.

a Lijn m snijdt de y-as in het punt $(0, \ldots)$, dus $b = \ldots$

b Lijn m gaat 5 naar rechts en 3 omhoog, dus 1 naar rechts en … omhoog, dus $a = \ldots$

c Vul in.
De formule van lijn m is $y = \ldots x + \ldots$



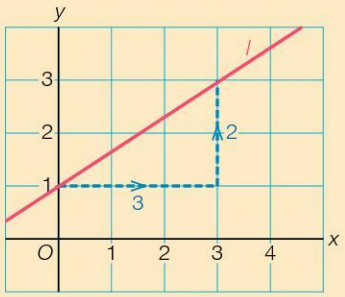
figuur 3.6

Theorie B De formule van een lijn opstellen

Van de lijn l in figuur 3.7 kun je de formule opstellen. Je gaat uit van $y = ax + b$. Je gebruikt twee roosterpunten die op l liggen om a te berekenen.
Bij de lijn hiernaast ga je 3 naar rechts en 2 omhoog, ofwel 1 naar rechts en $\frac{2}{3}$ omhoog. Dus $a = \frac{2}{3}$.

Je ziet: $a = \dfrac{\text{verplaatsing omhoog}}{\text{verplaatsing naar rechts}}$ ofwel

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}}.$$



figuur 3.7 $a = \text{rc} = \frac{2}{3}$

Bij een verplaatsing omhoog is verticaal positief, en bij een verplaatsing omlaag is verticaal negatief.
Verder snijdt l de y-as in het punt $(0, 1)$, dus $b = 1$.
De formule van l is $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Werkschema: de formule van een lijn opstellen

1 Stel $y = ax + b$.

2 Zoek het snijpunt van de lijn met de y-as. Daaruit volgt b.

3 Kies twee roosterpunten op de lijn. Daaruit volgt $a = \dfrac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}}$.

4 Schrijf de formule op.

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Stel de formule op van de lijn k in figuur 3.8.

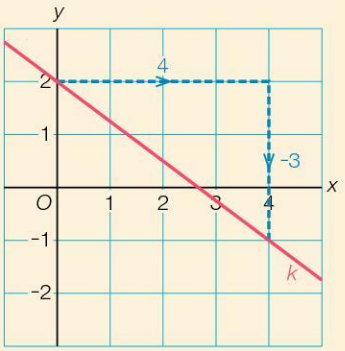
Uitwerking

1 Stel $y = ax + b$.

2 Door $(0, 2)$, dus $b = 2$.

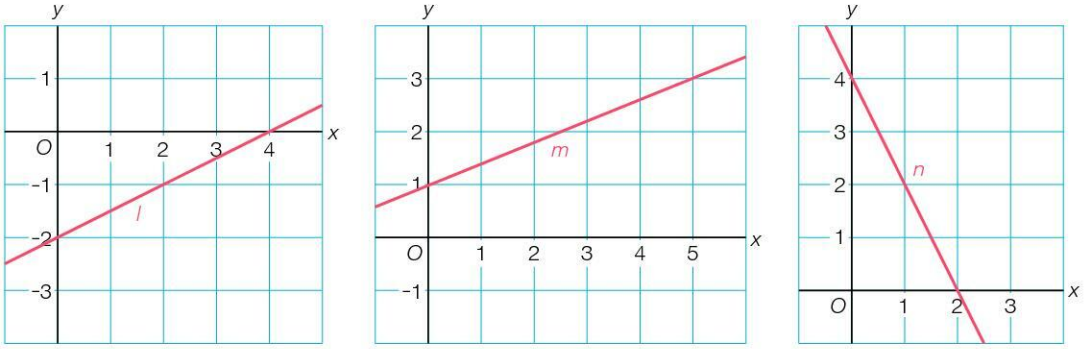
3 $a = \dfrac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \dfrac{-3}{4} = -\dfrac{3}{4}$

4 Dus $y = -\frac{3}{4}x + 2$.



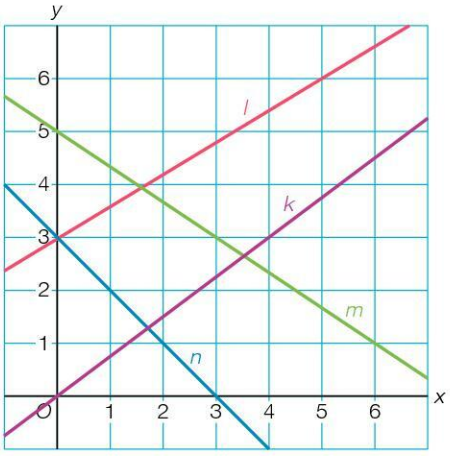
figuur 3.8

21 Zie de drie lijnen in figuur 3.9. Stel van elke lijn de formule op.



figuur 3.9

A 22 Stel van elke lijn in figuur 3.10 de formule op.



figuur 3.10

23 De lijn m gaat door de punten $(0, 8)$ en $(2, 0)$.
Stel de formule van m op.

© Noordhoff Uitgevers

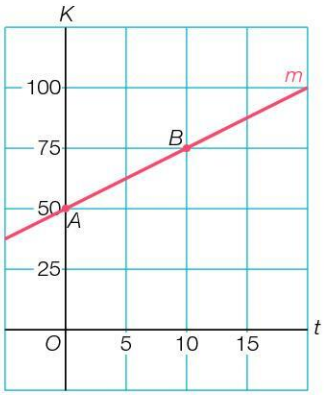
3.3 Lineaire verbanden

O 24 In figuur 3.11 is de lijn m getekend in een assenstelsel met een horizontale t-as en een verticale K-as.
Dus de formule van m is van de vorm $K = at + b$.

a Vul in.
De lijn m snijdt de K-as in het punt (…, …),
dus $b = \ldots$

b Vul in.
Van A naar B ga je 10 naar rechts en 25 omhoog,
dus $a = \dfrac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \dfrac{\ldots}{\ldots} = \ldots$

c Schrijf de formule van m op.



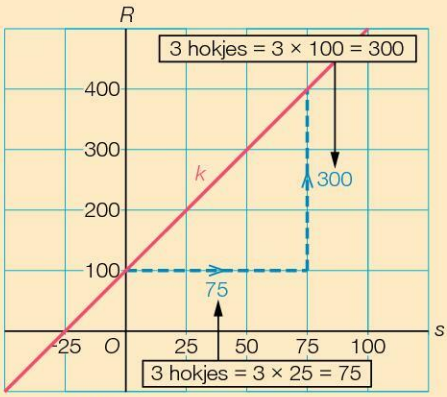
figuur 3.11

Theorie A Formules zoals $K = aq + b$ en $R = as + b$

In figuur 3.12 is de lijn k getekend in een assenstelsel met een horizontale s-as en een verticale R-as. Daarom hoort bij de lijn k een formule van de vorm $R = as + b$.
Er bestaat een lineair verband tussen s en R.
Omdat k de verticale as snijdt in (0, 100) is $b = 100$.

Verder is $a = \dfrac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \dfrac{300}{75} = 4$.

Dus de formule van k is $R = 4s + 100$.



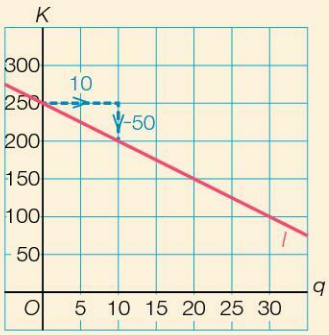
figuur 3.12

Voorbeeld

Stel de formule op van de lijn l in figuur 3.13.

Aanpak
De horizontale as is de q-as en de verticale as is de K-as, dus de formule is van de vorm $K = aq + b$.
Voor het berekenen van a ga je
- 2 hokjes naar rechts, dus horizontaal $= 2 \cdot 5 = 10$
- 1 hokje omlaag, dus verticaal $= 1 \cdot -50 = -50$.

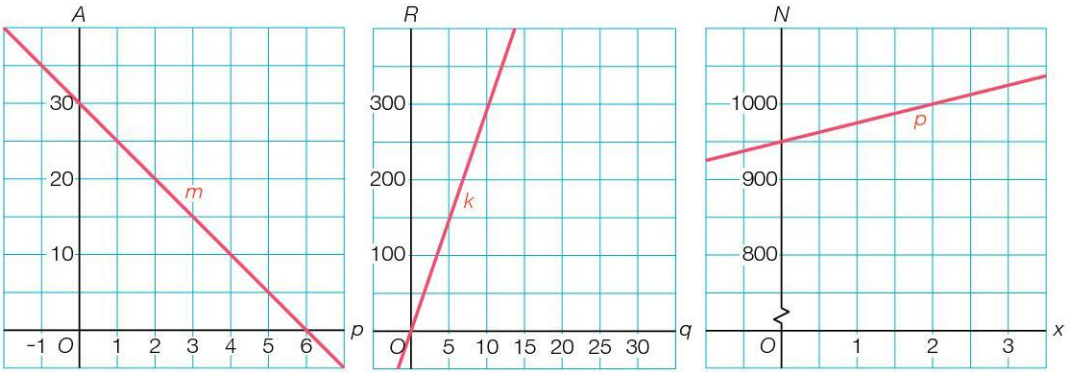
Uitwerking
1 Stel $K = aq + b$.
2 Door (0, 250), dus $b = 250$.
3 $a = \dfrac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \dfrac{-50}{10} = -5$
4 Dus $K = -5q + 250$.



figuur 3.13

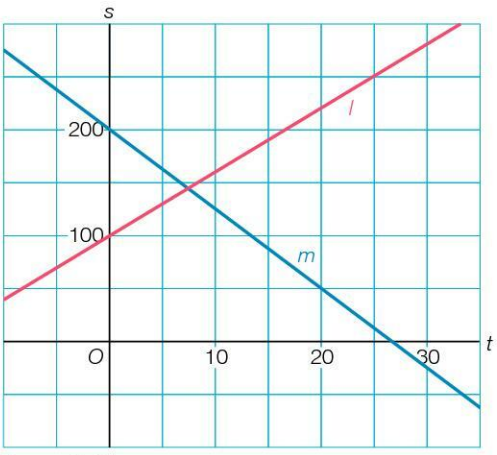
© Noordhoff Uitgevers

25 Stel van elk van de volgende lijnen de formule op. Let goed op de letters en de getallen bij de assen.



figuur 3.14

A 26 Stel van de lijnen l en m in figuur 3.15 de formule op.



figuur 3.15

27 Een piloot laat zijn vliegtuig dalen volgens de formule $H = -0{,}4t + 10$. Hierin is H de hoogte in km en t het aantal minuten dat het vliegtuig aan het dalen is.

a Geef de praktische betekenis van de getallen in de formule.

b Teken de grafiek van H.

c Hoelang duurt de daling?

Bij een volgende vlucht krijgt de piloot op 9 km hoogte de opdracht om zijn daling in te zetten. Per minuut daalt hij 300 meter.

d Stel de formule op van de hoogte H in km die bij deze daling hoort. Neem hierin de tijd t die het vliegtuig aan het dalen is in minuten.

e Teken in de figuur van vraag b de grafiek van de formule van vraag d.

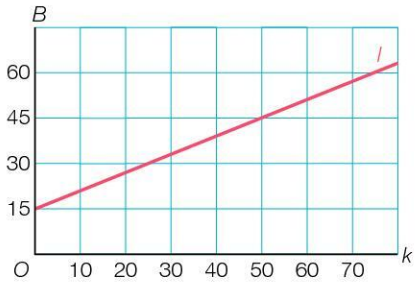
© Noordhoff Uitgevers

A 28 Koeriersdienst Eulink bezorgt gegarandeerd op de dag van verzending pakketten op elk adres in Nederland. Het bedrag B in euro's hangt af van het aantal kilometers k dat Eulink moet rijden. Zie figuur 3.16.

a Stel de formule van B op. Welke informatie geven de twee getallen in de formule?

b Eulink verhoogt het vaste bedrag met 10 euro. Wat wordt de nieuwe formule?

c Een jaar later verhoogt Eulink de kilometerprijs met 10 cent. Wat wordt de nieuwe formule?



figuur 3.16

29 Bij de formule $K = at + b$ hoort de tabel

t	0	1	2	3	4
K	5	8	11	14	17

a Met hoeveel neemt K toe als t met 1 toeneemt? Wat weet je dus van a?

b In welk punt snijdt de grafiek de K-as? Wat weet je dus van b?

c Schrijf de formule op die bij de tabel hoort.

30 Het aantal bouwmarkten in Nederland neemt al jaren af. Zie de tabel. Hierin is D het aantal bouwmarkten en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2011.

AANTAL BOUWMARKTEN IN NEDERLAND

t	0	1	2	3	4
B	745	730	715	700	685

a Met hoeveel neemt het aantal bouwmarkten jaarlijks af?

b Bij de tabel hoort een formule van de vorm $B = at + b$. Welke getallen zijn a en b? Geef de formule van B.

c Bereken met de formule van vraag b het aantal bouwmarkten in 2020.

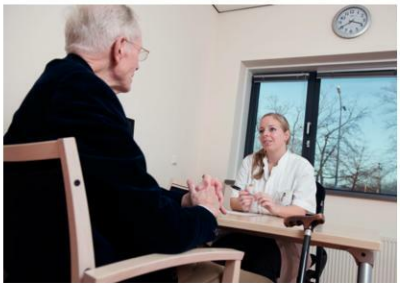
d Het aantal bouwmarkten neemt naar verwachting in de periode 2016-2018 af. Bereken met hoeveel.

© Noordhoff Uitgevers

A 31 Door de bevolkingsgroei en de vergrijzing neemt de zorgvraag toe. Daardoor zijn er steeds meer artsen nodig. In de tabel is A het aantal artsen in Nederland en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2000.

AANTAL ARTSEN IN NEDERLAND

t	0	3	6	9	12
A	39000	43500	48000	52500	57000



a Met hoeveel neemt het aantal artsen jaarlijks toe?

b Uit vraag a volgt dat er sprake is van een lineair verband.
Stel de formule op van A.

c Bereken met de formule van vraag b het aantal artsen in 2016.

d Hoeveel artsen zullen er naar verwachting in de periode 2012-2020 bij komen?

32 Lees het volgende krantenartikel.

ARTIKEL | BEROEP | GESCHIEDENIS | INFORMATIE

Minder bewoners per woning

Amsterdam – In Nederland komen steeds meer woningen, maar het gemiddelde aantal personen per woning neemt af. Woonden er in 1950 nog gemiddeld 4,2 personen in een woning, in 2000 was dat afgenomen tot 2,4. Onderzoekers van de Vrije Universiteit van Amsterdam verwachten dat deze ontwikkeling zich nog lange tijd zal voortzetten.

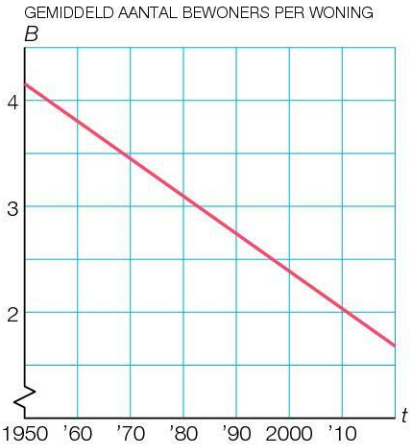
Bij het krantenartikel hoort de grafiek van figuur 3.17. B is het gemiddelde aantal bewoners per woning in Nederland en t is de tijd in jaren met $t = 0$ in 1950.

a Stel de formule van B op.

b In 1980 telde Nederland ongeveer 4,5 miljoen woningen.
Bereken met de formule van vraag a het gemiddelde aantal bewoners per woning in 1980. Gebruik dit getal om het aantal inwoners van Nederland in 1980 te berekenen.

c In 2002 telde Nederland 16,1 miljoen inwoners. Hoeveel woningen waren er toen in ons land?

d Welke B hoort bij het jaar 2045? Kan dit in werkelijkheid? Licht toe.



figuur 3.17

© Noordhoff Uitgevers

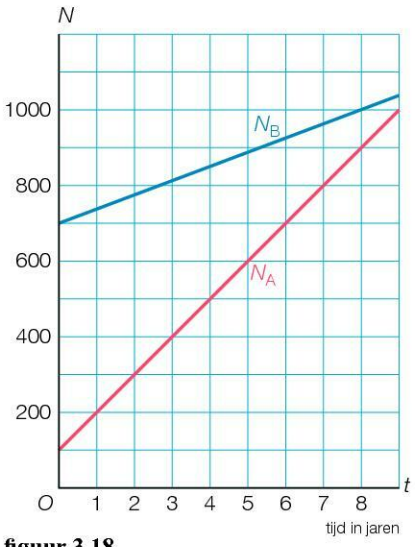
O 33 [▸ WERKBOEK] Een bedrijf heeft de vestigingen A en B. De grafieken in figuur 3.18 gaan over het aantal werknemers per vestiging: N_A is het aantal werknemers van vestiging A en N_B is het aantal werknemers van vestiging B.

a Vul de tabel verder in.

jaar	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N_A	100								
N_B	700								
$N_A + N_B$	800								

b Teken de grafiek van $N_A + N_B$.

c Is de grafiek van $N_A + N_B$ een lijn? Welke informatie geeft deze grafiek?



figuur 3.18

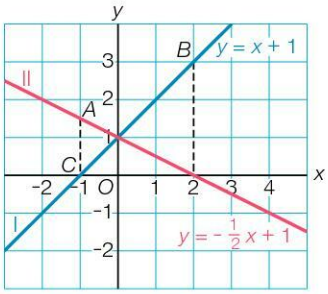
O 34 [▸ WERKBOEK] In figuur 3.19 zie je de grafieken van $y = x + 1$ en $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Grafiek I snijdt de x-as in het punt C. Recht boven C ligt het punt A op grafiek II.

a Waarom gaat de grafiek van I + II door A?

b Waarom gaat de grafiek van I + II ook door het punt B?

c Teken de grafiek van I + II.



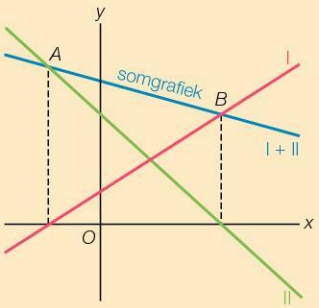
figuur 3.19

Theorie B Som- en verschilgrafieken bij lijnen

In opgave 33 heb je uit twee grafieken door optellen een nieuwe grafiek gemaakt. Deze nieuwe grafiek heet de **somgrafiek**. Je hebt daarbij eerst een tabel gemaakt en daarna de grafiek getekend. De somgrafiek van de twee lijnen in figuur 3.18 is weer een lijn.

Je kunt ook zonder een tabel te maken de somgrafiek van twee lijnen tekenen. Je zoekt dan twee punten van de somgrafiek. Het is daarbij handig de snijpunten van de lijnen met de x-as te gebruiken. In figuur 3.20 zie je hoe je de somgrafiek van de lijnen I en II krijgt met behulp van de snijpunten van I en II met de x-as. Het punt A ligt op grafiek II recht boven het snijpunt van grafiek I met de x-as. De somgrafiek I + II gaat door het punt A.

Het punt B ligt op grafiek I recht boven het snijpunt van II met de x-as. De somgrafiek I + II gaat ook door B.

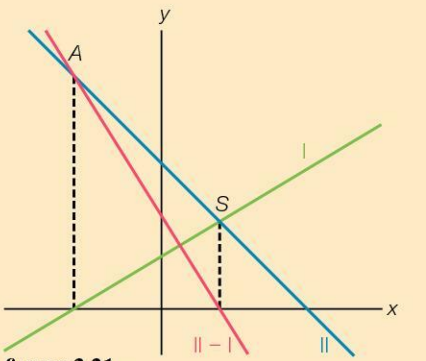


figuur 3.20

De somgrafiek van twee lijnen is een lijn.

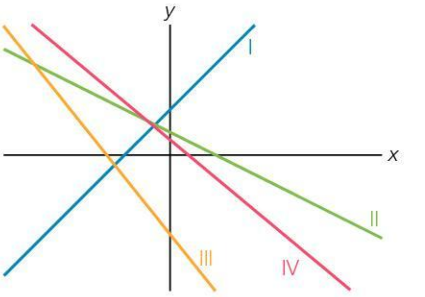
© Noordhoff Uitgevers

Ook de **verschilgrafiek** van twee lijnen is een lijn. In figuur 3.21 zie je hoe je de verschilgrafiek II − I krijgt.
Je gebruikt daarvoor het snijpunt van de grafieken, en het snijpunt van grafiek I met de x-as.



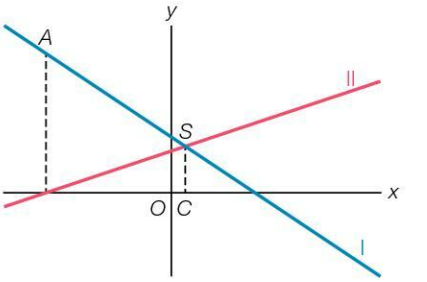
figuur 3.21

35 [▸ WERKBOEK] Zie figuur 3.22.
a Teken de somgrafiek van I en II.
b Teken de somgrafiek van III en IV.



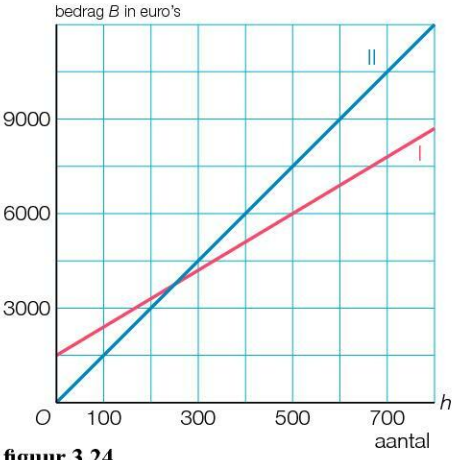
figuur 3.22

36 [▸ WERKBOEK] Gegeven zijn de grafieken I en II in figuur 3.23. In deze opgave gaat het om de verschilgrafiek I − II.
a Het punt A op grafiek I ligt precies boven het snijpunt van grafiek II met de x-as.
Waarom gaat de verschilgrafiek door A?
b Het punt C op de x-as ligt precies onder het snijpunt S van de grafieken I en II.
Waarom gaat de verschilgrafiek door C?
c Teken de verschilgrafiek I − II.



figuur 3.23

A **37** [▸ WERKBOEK] In een fabriek worden hoofdtelefoons gemaakt. Bij de fabricage zijn er kosten. Zie grafiek I in figuur 3.24. Grafiek II gaat over de opbrengst van de hoofdtelefoons.
a Teken de verschilgrafiek II − I.
b Geef de praktische betekenis van de verschilgrafiek II − I.
c Vanaf welke h maakt de fabrikant winst?
d Bij de verschilgrafiek II − I hoort een formule van de vorm $B = ah + b$.
Stel de formule op van de verschilgrafiek II − I.



figuur 3.24

© Noordhoff Uitgevers

3.4 De balansmethode

O 38 Een autoverhuurbedrijf berekent het bedrag B in euro's voor het x dagen huren van een auto met de formule $B = 25x + 30$.

a Mevrouw Amsing huurt acht dagen een auto.
Hoeveel moet ze betalen?

b Mevrouw Borggreve huurt een auto. Ze moet 180 euro betalen.
Zoek uit hoeveel dagen ze de auto heeft gehuurd.

Theorie A De oplossing van een vergelijking

In de formule $B = 25x + 30$ kun je bij elke x het bedrag B berekenen. Bij $x = 3$ krijg je $B = 25 \cdot 3 + 30 = 105$.
Weet je omgekeerd het bedrag B, dan kun je je afvragen hoeveel x is. Bij $B = 130$ is dan de vraag: voor welke x is $25x + 30 = 130$? Na wat proberen vind je $x = 4$.
Want $25 \cdot 4 + 30 = 130$ klopt.

$25x + 30 = 130$
iets $+ 30 = 130$
dus iets $= 100$

Een vorm als $25x + 30 = 130$ heet een **vergelijking**.
Het getal x waarvoor de vergelijking klopt heet de **oplossing** van de vergelijking. Dus $x = 4$ is de oplossing van de vergelijking $25x + 30 = 130$.
Van de vergelijking $2x - 1 = 13$ is $x = 7$ de oplossing, want $2 \cdot 7 - 1 = 13$.

$2x - 1 = 13$
iets $- 1 = 13$
dus iets $= 14$

In elke vergelijking komt een letter voor. Vaak is dat de letter x, maar het kan ook een andere letter zijn. De letter in een vergelijking heet de **variabele**.
In $3t + 2 = 17$ is t de variabele. De oplossing is $t = 5$, want $3 \cdot 5 + 2 = 17$.

- vergelijking $5x + 2 = 32$
- x is de variabele
- $x = 6$ is de oplossing, want $5 \cdot 6 + 2 = 32$

De oplossing van een vergelijking is een getal dat je voor de variabele invult zo, dat de vergelijking klopt.

39 Sommige vergelijkingen kun je uit het hoofd oplossen.
Zie hiernaast.

Schrijf van de volgende vergelijkingen de oplossing op.

a $x + 7 = 10$
b $10 - x = -5$
c $-2x = 14$
d $0{,}25x = 20$
e $5x = 0$
f $x + 1 = 0$

© Noordhoff Uitgevers

40 Schrijf van de volgende vergelijkingen de oplossing op.

a $5x = 15$	**c** $3x = 21$	**e** $-2a = 18$
b $5x + 2 = 17$	**d** $3x - 1 = 20$	**f** $-2a + 8 = 26$

41 Van welke van de volgende vergelijkingen is $x = 4$ de oplossing?

a $8x = 32$	**c** $0{,}5x = 8$	**e** $-x - 1 = -5$
b $20 - x = 16$	**d** $-2x + 10 = 2$	**f** $-6 - x = -2$

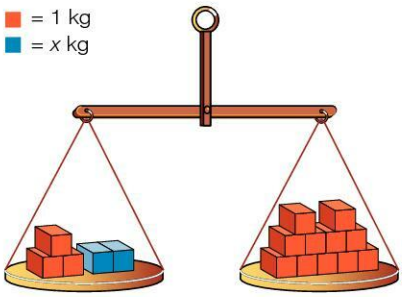
42 Voor het repareren van wasmachines gebruikt de firma Wassenaar de formule $B = 20x + 25$. Hierin is B het bedrag in euro's en x het aantal uren dat de reparatie duurt.
De familie Ottenhof moet voor een reparatie 125 euro betalen.

a Welke vergelijking hoort hierbij?
b Schrijf de oplossing van de vergelijking op.
c Hoeveel uur duurde de reparatie?

O 43 **a** De balans in figuur 3.25 is in evenwicht.
Bij deze situatie hoort een vergelijking.
Welke? Kies uit

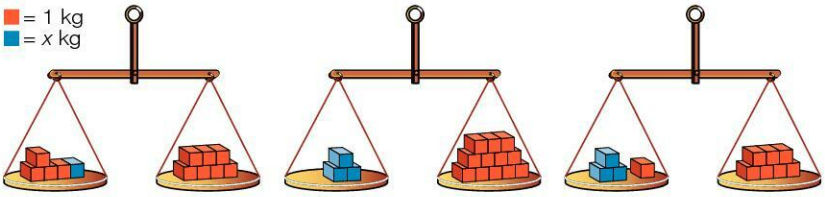
I $3x + 2 = 11$	III $2x + 3 = 11$
II $5x = 11$	IV $2x = 3 + 11$

b Zoek eens uit hoeveel een blauw blokje weegt.



figuur 3.25

O 44 In figuur 3.26 zie je drie balansen. Ze zijn alle drie in evenwicht.
Schrijf bij elke balans een vergelijking op en geef telkens de oplossing.



figuur 3.26

ARTIKEL | BEROEP | GESCHIEDENIS | INFORMATIE

Balans

Een balans is een soort weegschaal. Een balans is in evenwicht als er links en rechts hetzelfde gewicht op ligt. In het stadje Oudewater in de provincie Utrecht staat een beroemde balans, de zogenaamde heksenwaag. In 'waag' herken je het woord wegen. Oudewater bezat een keizerlijk privilege om personen te wegen. Wanneer het lichaamsgewicht goed overeenstemde met het postuur werd een certificaat overhandigd. Dit was belangrijk in de tijd van de heksenvervolgingen, want iemand die een certificaat bezat, kon niet voor hekserij veroordeeld worden.

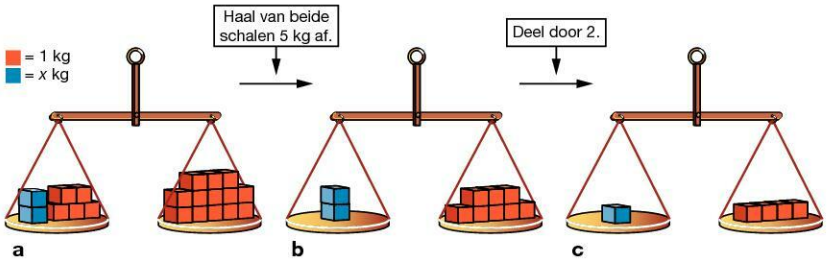
© Noordhoff Uitgevers

O 45 De balans in figuur 3.27a is in evenwicht.

a Vul in. Bij figuur 3.27a hoort de vergelijking $2x + 5 = \ldots$

b Astrid haalt van beide schalen vijf gewichten van 1 kg af. Welke vergelijking hoort bij de nieuwe situatie?

c Vervolgens haalt Astrid van beide schalen de helft van de blokjes weg. Hoeveel is x dus?

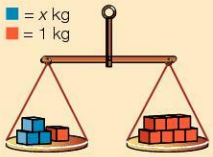
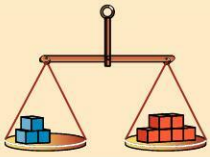


figuur 3.27

Theorie B Vergelijkingen stap voor stap vereenvoudigen

Van lang niet elke vergelijking is de oplossing uit het hoofd op te schrijven. Daarom leer je een methode om vergelijkingen stap voor stap op te lossen. Die methode heet de **balansmethode**.

Bij een balans in evenwicht mag je er aan beide kanten even zware gewichten bij zetten of af halen. De balans blijft dan in evenwicht. En zo mag je aan beide kanten van een vergelijking hetzelfde getal optellen of aftrekken. Ook mag je beide kanten van een vergelijking door hetzelfde getal delen of met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Hieronder zie je hoe het oplossen van de vergelijking $3x + 1 = 7$ met de balansmethode gaat.

$3x + 1 = 7$	
$-1 \quad -1$	Haal van beide schalen 1 kg af.
$3x \quad = 6$	
$:3 \quad :3$	Zorg dat je op beide schalen het derde deel overhoudt, dus deel door 3.
$x \quad = 2$	

© Noordhoff Uitgevers

Bij de balansmethode vervang je de vergelijking stap voor stap door een eenvoudigere vergelijking. Bij $5x + 4 = 39$ gaat dat als volgt.

	$5x + 4 = 39$	
Stap 1 Trek er links en rechts 4 af.	$-4 \quad -4$	
	$5x = 35$	
Stap 2 Deel links en rechts door 5.	$:5 \quad :5$	
	$x = 7$	

Controle: $x = 7$ invullen in $5x + 4 = 39$ geeft
$5 \cdot 7 + 4 = 39$
$35 + 4 = 39$
$39 = 39$

Een vergelijking los je op door hem stap voor stap eenvoudiger te maken. Je mag aan beide kanten van de vergelijking
- **hetzelfde getal optellen of aftrekken**
- **door hetzelfde getal delen of met hetzelfde getal vermenigvuldigen.**

Voorbeeld

Los op.

a $7x + 25 = 39$ **b** $-3x + 1 = 10$

Uitwerking

a
$7x + 25 = 39$
$-25 \quad -25$
$7x = 14$
$:7 \quad :7$
$x = 2$

b
$-3x + 1 = 10$
$-1 \quad -1$
$-3x = 9$
$:-3 \quad :-3$
$x = -3$

Schrijf de uitwerking stap voor stap onder elkaar op.

T **46** [▸▸53] Los op.

a $-5x + 8 = 53$
b $10x - 12 = -12$
c $-16x = -4$
d $14x + 3 = 2$
e $-6 - a = -4$
f $\frac{1}{2} - 4a = 4\frac{1}{2}$

47 Schrijf over en vul in.

a
$5x + 7 = 42$
$-7 \quad -7$
$5x = \ldots$
$:5 \quad :\ldots$
$x = \ldots$

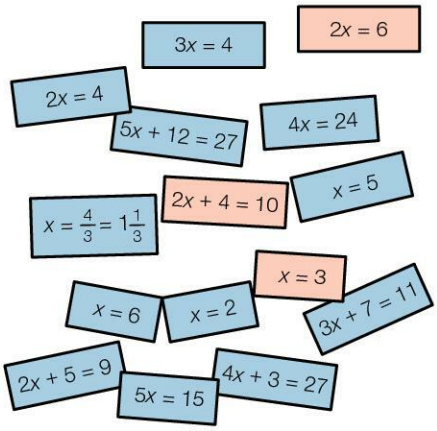
b
$-6x + 2 = -16$
$-2 \quad -2$
$-6x = \ldots$
$:\ldots \quad :\ldots$
$x = \ldots$

48 Los op.

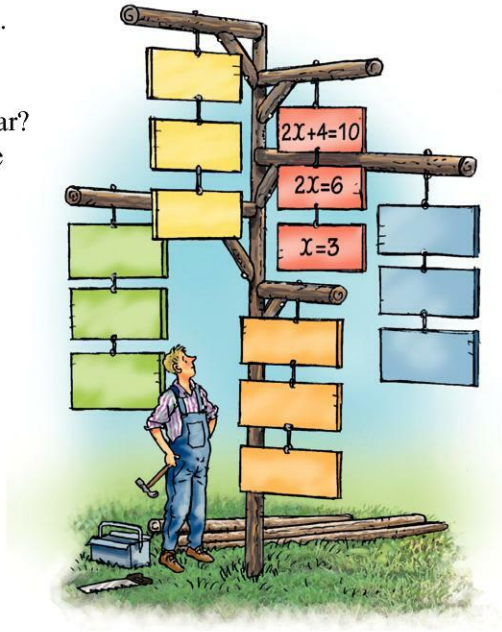
a $4x + 17 = 29$
b $-3x + 1 = 16$
c $7x + 1 = 8$
d $x + 6 = 23$
e $6x + 24 = 0$
f $9x + 8 = 8$
g $3x + 5 = 23$
h $2x + 8 = -20$
i $-5x + 7 = 17$
j $2x + \frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers

49 [▸ WERKBOEK] Bij het oplossen van de vergelijking $2x + 4 = 10$ krijg je achtereenvolgens de vergelijkingen $2x + 4 = 10$, $2x = 6$ en $x = 3$.
Dus $2x + 4 = 10$, $2x = 6$ en $x = 3$ horen bij elkaar.
Welke bordjes in figuur 3.28 horen bij elkaar?
Hang ze in figuur 3.29 in de juiste volgorde op.



figuur 3.28



figuur 3.29

50 Zie het voorbeeld hiernaast.
Los op.

a $4x = 20$
b $x + 4 = 20$
c $4x = 3$
d $x + 4 = 3$
e $2a = -20$
f $a + 2 = -20$
g $a + 8 = -9$
h $8a = -80$

Let op!

$x + 3 = 12$	$3x = 12$
$-3 \quad -3$	$:3 \quad :3$
$x = 9$	$x = 4$

51 Hiernaast zie je hoe je de vergelijking $8 + 3x = 29$ oplost. Eerst trek je van beide kanten 8 af.
Los op.

a $8 + 5x = 28$
b $2 + 3x = 2$
c $25 + x = 15$
d $25x = 15$

$8 + 3x = 29$
$-8 \quad -8$
$3x = 21$
$:3 \quad :3$
$x = 7$

Theorie C Vergelijkingen zoals $3x - 8 = 13$

Om de vergelijking $3x - 8 = 13$ op te lossen, tel je er eerst aan beide kanten 8 bij op.
Je krijgt $3x - 8 = 13$

$+8 \quad +8$
$3x = 21$
$:3 \quad :3$
$x = 7$

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Los op.

a $-3x - 2 = 4$

b $-8 - x = -17$

$-x$ betekent $-1 \cdot x$.

Uitwerking

a
$$\begin{array}{rl} -3x - 2 &= 4 \\ +2 & +2 \\ -3x &= 6 \\ :-3 & :-3 \\ x &= -2 \end{array}$$

b
$$\begin{array}{rl} -8 - x &= -17 \\ +8 & +8 \\ -x &= -9 \\ :-1 & :-1 \\ x &= 9 \end{array}$$

52 Neem over en vul in.

a
$$\begin{array}{rl} 4x - 17 &= -9 \\ +17 & +17 \\ 4x &= \ldots \\ :4 & :4 \\ x &= \ldots \end{array}$$

b
$$\begin{array}{rl} -8x - 1 &= -9 \\ +1 & +1 \\ -8x &= \ldots \\ :-8 & :-8 \\ x &= \ldots \end{array}$$

c
$$\begin{array}{rl} -5 + 2x &= 17 \\ +5 & +5 \\ 2x &= \ldots \\ :2 & :2 \\ x &= \ldots \end{array}$$

53 Los op.

a $-9 - x = 11$

b $4x - 8 = -20$

c $-3x = 12$

d $15x + 35 = 65$

e $8x - 18 = 30$

f $22 + 16x = 70$

A 54 Los op.

a $3x - 6 = -9$

b $2x - 7 = 23$

c $6 - 3x = 27$

d $5x + 8 = 53$

e $5a - 6 = -6$

f $-8a = -2$

g $-8 - 6a = 4$

h $-8 - a = -2$

i $7x + 18 = 60$

A 55 Bij Foto-Online kun je digitale foto's laten afdrukken. Foto-Online berekent met de formule $B = 0{,}15x + 2{,}25$ het bedrag in euro's dat je moet betalen voor x foto's van 13 × 18 cm.

a Dorien moet € 7,05 betalen.
Maak een vergelijking en bereken hoeveel foto's Dorien heeft laten afdrukken.

b Floor wil ook foto's laten afdrukken bij Foto-Online. Ze wil niet meer dan tien euro uitgeven.
Hoeveel foto's kan Floor laten afdrukken?

© Noordhoff Uitgevers

56 Bij een wandeling in de bergen schat Dirk het aantal minuten M dat de wandeltocht duurt met de formule $M = 15k + 15h + 30$. Hierin is k de afstand in km en h het aantal keer dat Dirk 100 meter stijgt.
Tijdens een tocht van $4\frac{1}{2}$ uur stijgt Dirk 600 meter.

Uit de gegevens volgt de vergelijking $15k + 15 \cdot 6 + 30 = 270$.

a In de vergelijking staan de getallen 6 en 270.
Licht deze getallen toe.

b Los de vergelijking op. Hoeveel km was de wandeltocht?

Nick gebruikt voor een wandeling in de bergen dezelfde formule als Dirk. Tijdens een tocht van zes uur en een kwartier heeft Nick 18 km afgelegd.

c Welke vergelijking volgt uit deze gegevens? Los de vergelijking op.

d Wat ben je in vraag c te weten gekomen over de wandeltocht van Nick?

57 Karen houdt van wandelen en fietsen. De tijd t in minuten die ze op een vakantiedag onderweg is, bereken je met de formule $t = 15w + 3f + 15$. Hierin is w het aantal km dat ze wandelt en f het aantal km dat ze fietst.

a Op maandag wandelt Karen 10 km en fietst ze 40 km.
Hoeveel minuten is ze die dag onderweg?

b Dinsdag is Karen 165 minuten onderweg. Daarbij heeft ze 30 km gefietst.
Bereken door een vergelijking op te lossen hoeveel km Karen die dag heeft gewandeld.

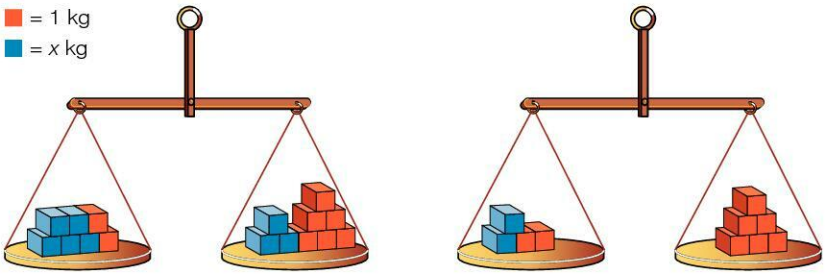
c Op woensdag is Karen 3 uur onderweg. Ze heeft alleen gewandeld.
Hoeveel km was de wandeling?

© Noordhoff Uitgevers

3.5 Vergelijkingen oplossen

O 58 De balans in figuur 3.30a hoort bij de vergelijking $5x + 2 = 3x + 6$. Om de vergelijking op te lossen, haal je er eerst links en rechts 3 blokjes x af.
Je krijgt $2x + 2 = 6$. Zie figuur 3.30b.
Los de vergelijking verder op.

$5x + 2 = 3x + 6$
$-3x \quad -3x$
$2x + 2 = 6$
enzovoort



a b

figuur 3.30

Theorie A Aanpak voor het oplossen van vergelijkingen

Van de vergelijking $8x - 5 = 11x + 22$ heet $8x - 5$ het **linkerlid** en $11x + 22$ het **rechterlid**.
Om de vergelijking op te lossen, zorg je ervoor dat de term $11x$ uit het rechterlid verdwijnt. Dat doe je door van het linker- en rechterlid $11x$ af te trekken.
Je krijgt

Zorg dat de variabele uit het rechterlid verdwijnt.

$8x - 5$	$=$	$11x + 22$	
$-11x$		$-11x$	rechts $11x$ wegwerken, dus links en rechts $-11x$
$-3x - 5$	$=$	22	
$+5$		$+5$	links -5 wegwerken, dus links en rechts $+5$
$-3x$	$=$	27	
$:-3$		$:-3$	x overhouden, dus links en rechts $:-3$
x	$=$	-9	

Aanpak voor het oplossen van vergelijkingen
1 Zorg ervoor dat de term met x uit het rechterlid verdwijnt.
2 Zorg ervoor dat in het linkerlid alleen x overblijft.

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Los op.

a $5x - 12 = 8 - 3x$ **b** $8x = 11x + 21$ **c** $7a + 30 = 30 - 10a$

Uitwerking

a
$5x - 12 = 8 - 3x$
$+ 3x \quad + 3x$
$8x - 12 = 8$
$+ 12 \quad + 12$
$8x = 20$
$: 8 \quad : 8$
$x = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$

b
$8x = 11x + 21$
$- 11x \quad - 11x$
$-3x = 21$
$: -3 \quad : -3$
$x = -7$

c
$7a + 30 = 30 - 10a$
$+ 10a \quad + 10a$
$17a + 30 = 30$
$- 30 \quad - 30$
$17a = 0$
$: 17 \quad : 17$
$a = 0$

T 59 [▸▸ 62] Los op.

a $7 + 3x = 4x - 5$ **b** $7t + 12 = 3t$ **c** $9a + 80 = 15 - 6a$

60 Neem over en vul in.

a
$7x - 15 = 5x + 5$
$- 5x \quad - 5x$
$2x - 15 = \ldots$
$+ 15 \quad + 15$
$2x = \ldots$
$: 2 \quad : 2$
$x = \ldots$

b
$-3x + 18 = x + 26$
$- x \quad - x$
$-4x + 18 = \ldots$
$- 18 \quad - 18$
$-4x = \ldots$
$: -4 \quad : -4$
$x = \ldots$

c
$8a - 15 = 3a$
$- 3a \quad - 3a$
$5a - 15 = \ldots$
$+ 15 \quad + 15$
$5a = \ldots$
$: 5 \quad : 5$
$a = \ldots$

61 Los op.

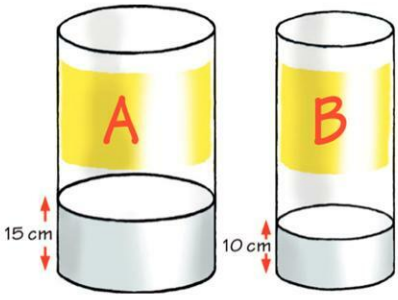
a $3x + 7 = 2x - 6$
b $-5y - 3 = 2y - 3$
c $8 - 3x = 15 - x$
d $17 + 5x = 2x + 5$
e $7x = 8 - x$
f $7 + 2t = 9 - 2t$

A 62 Los op.

a $4 + 2x = x + 3$
b $-5x + 17 = -4 - 2x$
c $21 = 7q - 35$
d $21d + 4 = 19d - 34$
e $14x - 11 = 11x + 14$
f $17 - x = -9 + x$

63 In vat A staat het water 15 cm hoog. Elke minuut stijgt het water 0,5 cm. In vat B staat het water 10 cm hoog. Elke minuut stijgt het water 1,5 cm.
Hans vraagt zich af na hoeveel minuten het water in beide vaten even hoog staat. Daarbij hoort de vergelijking $10 + 1{,}5t = 15 + 0{,}5t$.

a Hoort bij vat A het linker- of het rechterlid van de vergelijking?
b Los de vergelijking op.
c Na hoeveel minuten staat het water in beide vaten even hoog?
Hoe hoog staat het water dan?



figuur 3.31

© Noordhoff Uitgevers

A 64 Er zijn vele soorten abonnementen voor mobiel internetten. Hieronder zie je er twee. De tarieven zijn in euro's.

- Always Online: kosten per maand = 2,50 + 0,05 · aantal MB
- Internet Idols: kosten per maand = 4,75 + 0,02 · aantal MB

a Sjoerd heeft een abonnement bij Always Online. In maart heeft hij 400 MB verbruikt. Hoeveel moet hij die maand betalen?

b Isa heeft een abonnement bij Internet Idols. Ze moet in maart € 14,75 betalen. Hierbij hoort de vergelijking $4{,}75 + 0{,}02a = \ldots$ waarin a het aantal verbruikte MB is. Los de vergelijking op. Hoeveel MB heeft Isa in maart verbruikt?

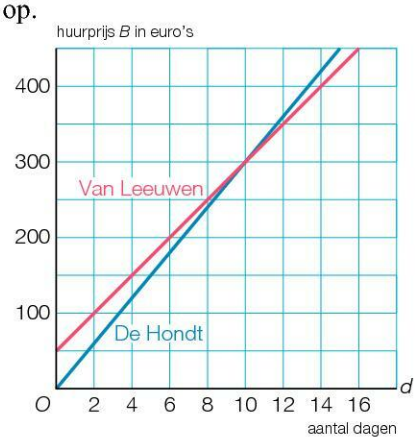
c Los de vergelijking $2{,}50 + 0{,}05a = 4{,}75 + 0{,}02a$ op. Welke informatie geeft de oplossing?

65 De grafieken in figuur 3.32 gaan over de autoverhuurbedrijven Van Leeuwen en De Hondt. Bij de grafieken horen de formules $B = 30d$ en $B = 25d + 50$.

a Tessa wil zes dagen een auto huren. Welk bedrijf is het goedkoopst? Hoe zie je dat in de figuur?

b Lees uit de figuur af bij hoeveel dagen huren de bedrijven even duur zijn.

c Je kunt het antwoord van vraag b ook zonder grafieken vinden. Bij gelijke huurprijzen is $30d = 25d + 50$. Los deze vergelijking op. Klopt het antwoord met dat van vraag b?



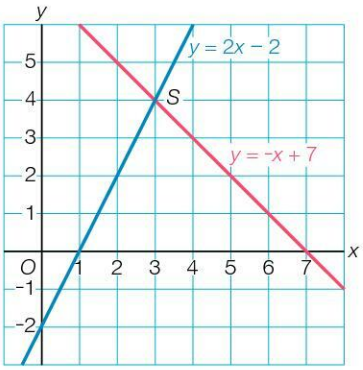
figuur 3.32

66 In figuur 3.33 zie je de grafieken van $y = 2x - 2$ en $y = -x + 7$. De grafieken snijden elkaar in het punt S.

a Schrijf de coördinaten van S op.

b Los de vergelijking $2x - 2 = -x + 7$ op.

c Wat heeft de oplossing van de vergelijking te maken met het snijpunt S?

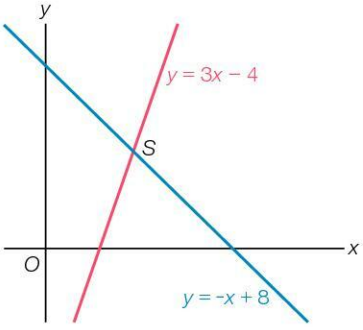


figuur 3.33

A 67 Hiernaast zie je een schets van de grafieken van $y = 3x - 4$ en $y = -x + 8$. De grafieken snijden elkaar in het punt S.

a Bereken de x-coördinaat van S door een vergelijking op te lossen.

b Bereken de y-coördinaat van S.



figuur 3.34

© Noordhoff Uitgevers

O 68 Met de regel $a(b + c) = ab + ac$ werk je haakjes weg.
Werk de haakjes weg.

a $5(x + 8)$
b $5(-2x + 1)$
c $3(2x - 9)$
d $-3(9x - 2)$
e $-2(3x - 1)$
f $-(4 - 5x)$

$3(x + 2) = 3x + 6$
$5(2x - 1) = 10x - 5$
$-3(5x - 2) = -15x + 6$

Theorie B Vergelijkingen met haakjes

Staan in een vergelijking haakjes, dan werk je die eerst weg.
Dus $5(x + 1) = 2x + 14$

$5x + 5 = 2x + 14$
$-2x \quad -2x$
$3x + 5 = 14$
$-5 \quad -5$
$3x = 9$
$:3 \quad :3$
$x = 3$

Werkschema: het oplossen van vergelijkingen

1. Staan er haakjes? Werk ze weg.
2. Herleid zo nodig het linker- en rechterlid.
3. Zorg ervoor dat de term met x alleen in het linkerlid voorkomt en de term zonder x alleen in het rechterlid.
4. Deel door het getal dat voor x staat.

Voorbeeld

Los op $3(x - 2) + 5 = x - 8$.

Uitwerking

$3(x - 2) + 5 = x - 8$		werk de haakjes weg
$3x - 6 + 5 = x - 8$		herleid en werk uit het rechterlid
$-x$	$-x$	x weg
$2x - 1 = -8$		werk uit het linkerlid -1 weg
$+1$	$+1$	
$2x = -7$		
$:2$	$:2$	
$x = -3\frac{1}{2}$		links x overhouden

Bij $3x - 6 + 5 = x - 8$ herleid je eerst het linkerlid.
Je krijgt $3x - 1 = x - 8$.

69 Los op.

a $5(x - 1) = 2x + 4$
b $3(x - 4) + 2 = 5x + 1$
c $-3(a + 1) - 7 = 2a$
d $4x + 2x = x + 7$
e $5(x - 2) = 3(2x + 2) + 2$
f $4 - 3p = 5 - (p - 2)$

A 70 Los op.

a $2(x - 3) = 3(2x + 10)$
b $3(x + 6) = 6(x - 3) + x$
c $-2(4 - x) + 1 = 9x$
d $6x - 3 + 2x = 21$
e $-3(a - 2) = 2(a + 8{,}5)$
f $4 - (p + 7) = 2$

© Noordhoff Uitgevers

71 De vergelijking $3(x - a) = 6(x - 3)$ heeft als oplossing $x = -2$.
Bereken a.

72 Los op.

a $5(x - 1) - 3x = 3(x - 5)$

b $4(2a - 1) - (3a - 1) = -3$

c $12 - 3(5 - 4x) = 14x - 7$

d $9(4 - 6x) = -22 - 4(2 - 3x)$

e $15(y - 2) - 5(3 - y) = 7(2 - 3y)$

f $(x - 3)(x + 2) + 5 = x(x - 4) + 11$

O 73 Joris wil de vergelijking $\frac{2}{5}x = 6$ oplossen.
Volgens het werkschema op bladzijde 117 moet hij het linker- en rechterlid delen door $\frac{2}{5}$. Hij krijgt dus $x = \frac{6}{\frac{2}{5}}$.

a Bereken x.

Ellen lost de vergelijking op door eerst beide leden met 5 te vermenigvuldigen. Zie het begin van de uitwerking hiernaast.

b Los de vergelijking verder op.

c Welke methode heeft je voorkeur, die van Joris of die van Ellen?

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{5}x &= 6 \\ \times 5 \quad &\times 5 \\ 5 \cdot \tfrac{2}{5}x &= 5 \cdot 6 \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

Theorie C Vergelijkingen met breuken

Om de vergelijking $\frac{3}{4}x = 9$ op te lossen, is het verstandig eerst de breuk $\frac{3}{4}$ weg te werken. Dat gaat door het linker- en het rechterlid met 4 te vermenigvuldigen.

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4}x &= 9 \\ \times 4 \quad &\times 4 \\ 3x &= 36 \\ :3 \quad &:3 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

$$\text{noemer} \times \frac{\text{teller}}{\text{noemer}} = \text{teller}$$

Dus $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$, $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$ en $8 \cdot \frac{5}{8} = 5$.

Voorbeeld

Los op.

a $\frac{2}{7}x = -6$ **b** $\frac{1}{5}x + 8 = -3$

Uitwerking

a
$$\begin{aligned} \tfrac{2}{7}x &= -6 \\ \times 7 \quad &\times 7 \\ 2x &= -42 \\ :2 \quad &:2 \\ x &= -21 \end{aligned}$$

b
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{5}x + 8 &= -3 \\ -8 \quad &-8 \\ \tfrac{1}{5}x &= -11 \\ \times 5 \quad &\times 5 \\ x &= -55 \end{aligned}$$

Bij de vergelijking $\frac{3}{5}x = 6$ vermenigvuldig je eerst het linker- en rechterlid met 5. Dan verdwijnt de breuk. Je krijgt $5 \cdot \frac{3}{5}x = 5 \cdot 6$ ofwel $3x = 30$.

© Noordhoff Uitgevers

74 Los op.

a $\frac{1}{3}x = 5$ **c** $x - \frac{1}{3}x = 4$ **e** $\frac{1}{3}x + 7 = 4$

b $\frac{3}{5}x = -9$ **d** $2x + \frac{1}{2} = 5$ **f** $\frac{1}{2}x + 4x = -9$

A 75 Los op.

a $\frac{1}{3}x + 1 = 5$ **c** $1\frac{1}{2}x + 21 = 0$ **e** $1\frac{1}{4}x = 10$

b $\frac{2}{3}x - 2 = 6$ **d** $\frac{3}{7}x - 2 = 4$ **f** $7 - \frac{1}{6}x = x$

Theorie D Vergelijkingen met meerdere breuken

Ook bij het oplossen van de vergelijking $\frac{1}{4}x - 7 = \frac{2}{3}x + 3$ is het verstandig eerst de breuken weg te werken. Dat lukt door alle termen met $4 \cdot 3 = 12$ te vermenigvuldigen. Dan verdwijnen de breuken, want $12 \cdot \frac{1}{4} = 3$ en $12 \cdot \frac{2}{3} = \frac{24}{3} = 8$. Je krijgt

$12 \cdot \frac{1}{4}x - 12 \cdot 7 = 12 \cdot \frac{2}{3}x + 12 \cdot 3$

$3x - 84 = 8x + 36$

$-8x \quad\quad -8x$

$-5x - 84 = 36$

$+84 \quad\quad +84$

$-5x = 120$

$:-5 \quad\quad :-5$

$x = -24$

Voorbeeld

Los op $\frac{1}{6}x - 2 = \frac{3}{8}x + 1$.

Uitwerking

$\frac{1}{6}x - 2 = \frac{3}{8}x + 1$

$24 \cdot \frac{1}{6}x - 24 \cdot 2 = 24 \cdot \frac{3}{8}x + 24 \cdot 1$

$4x - 48 = 9x + 24$

$-9x \quad\quad -9x$

$-5x - 48 = 24$

$+48 \quad\quad +48$

$-5x = 72$

$:-5 \quad\quad :-5$

$x = -14\frac{2}{5}$

Vermenigvuldig niet met $6 \cdot 8 = 48$, want met 24 lukt het ook.

76 Los op.

a $\frac{1}{4}x - 2 = \frac{1}{2}x + 6$ **c** $\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}x + 4$

b $\frac{1}{4}x - 2 = \frac{1}{3}x + 6$ **d** $\frac{1}{3}x + 6 = 2\frac{1}{6}$

© Noordhoff Uitgevers

A 77 Los op.

a $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(x-2)$

b $1\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{6}(x-12)$

c $\frac{1}{3}(x-1) = \frac{1}{4}(x-2)$

d $2 - \frac{1}{3}(x-1) = \frac{1}{4}x - 2$

e $\frac{1}{7}x - \frac{1}{5} = 1$

f $\frac{1}{5}x - 7 = \frac{1}{4}(x+2)$

g $\frac{2}{3}(1-x) = \frac{3}{4}(x-3)$

h $\frac{3}{4}(\frac{1}{5}x + 7) + 1 = 0$

O 78

Zie de strip hierboven met Frits en Marianne.

a Welke vergelijking krijgt Marianne?

b Welk getal had Frits in gedachten?

Theorie E Vergelijkingen opstellen

Er zijn heel wat problemen die je met vergelijkingen kunt oplossen. Het probleem hiernaast los je als volgt op.

- Noem het getal x.
- Delen door 4 geeft $\frac{1}{4}x$.
- Er 12 bij optellen geeft $\frac{1}{4}x + 12$.
- Je krijgt het oorspronkelijke getal, dus je hebt de vergelijking $\frac{1}{4}x + 12 = x$.

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{4}x + 12 & = x \\ 4 \cdot \frac{1}{4}x + 4 \cdot 12 & = 4 \cdot x \\ x + 48 & = 4x \\ -4x & \quad -4x \\ -3x + 48 & = 0 \\ -48 & \quad -48 \\ -3x & = -48 \\ :-3 & \quad :-3 \\ x & = 16 \end{array}$$

Het getal is 16.

© Noordhoff Uitgevers

79 Als je een getal met 3 vermenigvuldigt en van de uitkomst 45 aftrekt, dan krijg je de helft van het oorspronkelijke getal.

a Noem het getal x. Welke vergelijking kun je opstellen?

b Welk getal is x?

80 Rob heeft een getal in gedachten. Als hij dat getal met 3 vermeerdert en de uitkomst verdubbelt, krijgt hij hetzelfde resultaat als wanneer hij het oorspronkelijke getal met 3 vermenigvuldigt en van de uitkomst 7 aftrekt. Stel een vergelijking op en bereken het getal dat Rob in gedachten had.

A **81** Tante Annie zegt: 'Over 12 jaar ben ik drie keer zo oud als 48 jaar geleden'. Stel een vergelijking op en bereken hoe oud tante Annie is.

82 Van $\triangle ABC$ is $\angle A = x$ graden, $\angle B = 2x - 1$ graden en $\angle C = 3x - 5$ graden. Bereken $\angle A$, $\angle B$ en $\angle C$.

83 Van drie opeenvolgende oneven getallen is de som 171. Om welke getallen gaat het?

Creatief Getallenvierkant

In het 9 × 9 getallenvierkant hiernaast zijn veel T-figuren aan te wijzen.
Je ziet de T-figuur met *basis* 49. De som van de getallen in deze T-figuur is 182.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81

a De som van de getallen in één van de T-figuren is 282. Je kunt de basis van deze T-figuur vinden door de vergelijking $5x - 63 = 282$ op te lossen.
Licht toe hoe je aan deze vergelijking komt.
Welk getal is x?

b Van een T-figuur is de som van de getallen 202. Stel een vergelijking op en bereken de basis.

c Van geen enkele T-figuur is de som van de getallen 117.
Waarom niet?

In het getallenvierkant is ook een L-figuur getekend.
De *top* van deze L-figuur is 52.

d Van een L-figuur is de som van de getallen 130.
Stel een vergelijking op en bereken de top van deze L-figuur.

Van de U-figuur in het getallenvierkant is de *rechtertop* gelijk aan 58.

e Van een U-figuur is de som van de getallen 275.
Stel een vergelijking op en bereken de rechtertop van die U-figuur.

© Noordhoff Uitgevers

Gemengde opgaven

1 [▸ WERKBOEK] Hoveniersbedrijf Harkema berekent het bedrag B in euro's voor t uur werken met de formule $B = 20t + 30$.

a Waarom mag je in de formule voor t geen negatief getal invullen?

b Teken de grafiek bij de formule van Harkema.

Hoveniersbedrijf Tuinstra berekent het bedrag B met de formule $B = 25t + 10$.

c Teken in de figuur van vraag b de grafiek van de formule van Tuinstra.

d Bij hoeveel uur werken zijn de hoveniersbedrijven even duur?

2 Gebouwen moeten brandveilig zijn. Elk jaar controleert de brandweer op brandveiligheid. Is alles in orde, dan verstrekt de gemeente een gebruiksvergunning. Het bedrag B dat je in Wageningen voor zo'n vergunning betaalt, bereken je met de formule $B = 0{,}20x + 130$. Hierin is B in euro's en de vloeroppervlakte x in m^2.

a Het gebouw van de firma Patent heeft een vloeroppervlakte van 450 m^2. Hoeveel kost de gebruiksvergunning?

b Het gebouw van de firma Anker heeft een vloeroppervlakte van 480 m^2 en bij het gebouw van de firma Boerman is dat 650 m^2. Hoeveel euro betaalt Boerman meer voor een vergunning dan Anker?

De firma Evers betaalt 299 euro.

c Welke vergelijking hoort hierbij?

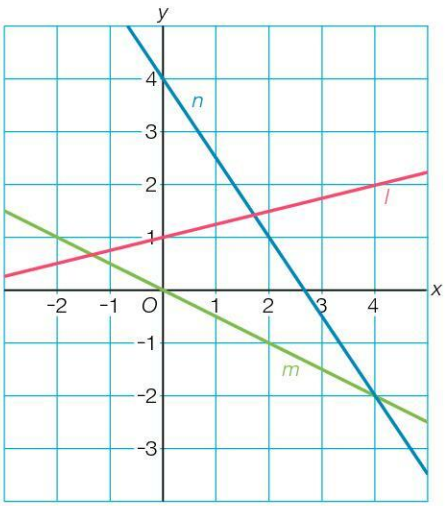
d Los de vergelijking op. Hoeveel m^2 is de vloeroppervlakte van het gebouw van Evers?

3 Zie figuur 3.35.

a Stel van de lijnen l, m en n de formule op.

b De lijn p gaat door het punt $P(0, 75)$ en is evenwijdig met l. Stel de formule op van p.

c De lijn q snijdt de y-as in hetzelfde punt als n. De richtingscoëfficiënt van q is -1. Stel de formule op van q.



figuur 3.35

4 Los op.

a $\frac{2}{3}x = -12$

b $2p - 6 = 6 - p$

c $5(x - 3) = -2x + 6$

d $1\frac{1}{3}x - 7 = 11$

e $-3(2a - 4) = 4(5 - 2a) + 8$

f $3(2q - 1) + 5 = 2 - (q - 14)$

g $1\frac{1}{2}t + 2t = -21$

h $-2(5 - 2x) = 5(2x - 1) - 5$

© Noordhoff Uitgevers

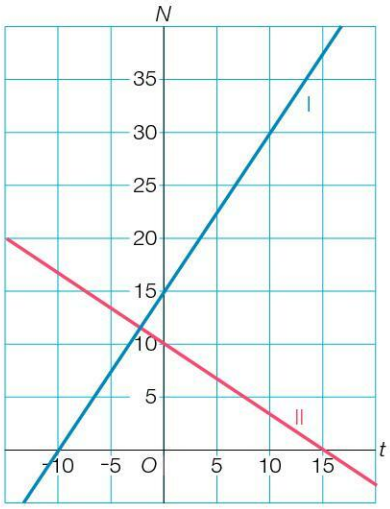
5 [▸ WERKBOEK] Zie figuur 3.36.

a Stel de formule van I op.

b Stel de formule van II op.

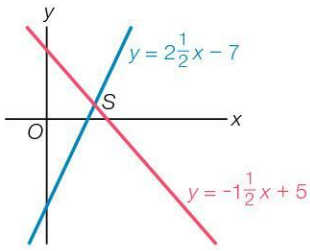
c Teken de somgrafiek I + II.

d Teken de verschilgrafiek I − II.



figuur 3.36

6 In figuur 3.37 zie je een schets van de grafieken van $y = -1\frac{1}{2}x + 5$ en $y = 2\frac{1}{2}x - 7$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S.



figuur 3.37

7 Los op.

a $1\frac{1}{3}x + 3 = \frac{1}{6}(x - 3)$

b $\frac{1}{3}x - 2 = \frac{1}{4}x + 5$

c $x(x + 3) + 7 = (x + 1)^2 + 4x$

d $(x - 1)(x + 4) + 8 = x(x + 2) + 3$

e $\frac{2}{5}x - \frac{3}{7} = \frac{1}{2}\left(x + 1\frac{1}{7}\right)$

f $\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}x + 5\right) + \frac{5}{6}x = -\frac{1}{2}$

8 Ellen is acht jaar ouder dan Tom. Over twee jaar is Ellen twee keer zo oud als Tom.
Bereken de leeftijd van Tom door een vergelijking op te lossen.

9 Kinderen krijgen kleinere hoeveelheden medicijnen voorgeschreven dan volwassenen.
Stel dat een volwassene van een bepaald medicijn a mg per dag mag innemen. Een kind van t jaar mag dan y mg per dag van dat medicijn innemen. Hierbij is $y = \frac{1}{24}(t + 1)a$.

a Jan is vijf jaar. Zijn vader mag van een medicijn per dag 4 mg. Hoeveel mg mag Jan op een dag innemen?

b Fred mag per dag 3 mg van een medicijn innemen. Fred is 11 jaar. Hoeveel mg mag een volwassene per dag van dat medicijn?

c Carla mag per dag 4 mg van een medicijn innemen. Haar moeder, die vier keer zo oud is, mag per dag 12 mg van dat medicijn innemen. Welke vergelijking volgt uit deze gegevens? Los de vergelijking op. Hoe oud is Carla? En hoe oud is haar moeder?

© Noordhoff Uitgevers

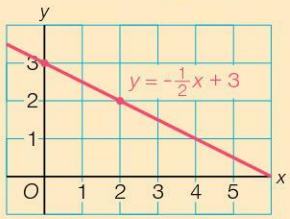
Samenvatting

3.1 De grafiek van een lineaire formule

blz 94 Een voorbeeld van een lineaire formule is $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
De grafiek is een lijn. Om de lijn te tekenen maak je eerst een tabel met twee punten. Zie hiernaast.

x	0	2
y	3	2

blz 95 Om na te gaan of het punt $A(20, -7)$ op de grafiek van $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ligt, vul je $x = 20$ in de formule in en controleer je of je $y = -7$ krijgt.
$x = 20$ invullen geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot 20 + 3 = -10 + 3 = -7$ en dit klopt. Dus het punt $A(20, -7)$ ligt op de grafiek.



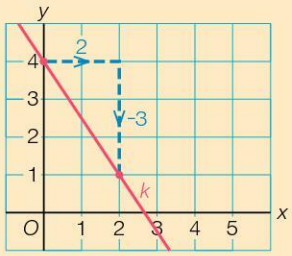
figuur 3.38

3.2 De formule van een lijn opstellen

blz 97 Bij een lineair verband tussen x en y hoort een formule van de vorm $y = ax + b$. De grafiek van $y = ax + b$ is een lijn met richtingscoëfficiënt a (dus ga je 1 naar rechts, dan ga je a omhoog) die de y-as snijdt in het punt $(0, b)$.

blz 98 De grafieken van $y = 3x + 1$ en $y = 3x - 4$ zijn evenwijdig, want ze hebben allebei richtingscoëfficiënt 3.
De grafieken van $y = 3x + 1$ en $y = -5x + 1$ hebben hetzelfde snijpunt met de y-as, namelijk het punt $(0, 1)$.

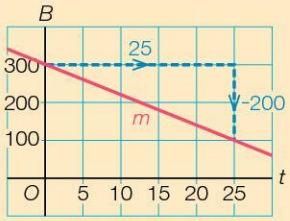
blz 99 De formule van de lijn k in figuur 3.39 vind je als volgt.
1 Stel $y = ax + b$.
2 Door $(0, 4)$, dus $b = 4$.
3 $a = \dfrac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \dfrac{-3}{2} = -1\frac{1}{2}$
4 Dus $y = -1\frac{1}{2}x + 4$.



figuur 3.39

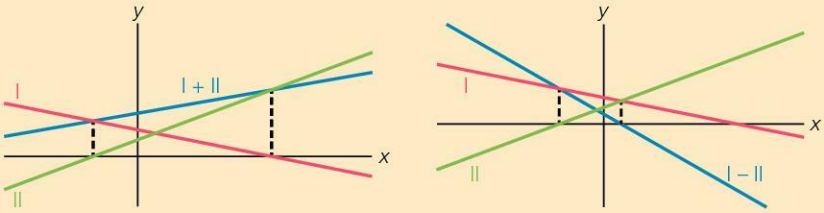
3.3 Lineaire verbanden

blz 101 De lijn m in figuur 3.40 is getekend in een assenstelsel met een horizontale t-as en een verticale B-as. Dus de formule van m is van de vorm $B = at + b$.
Door $(0, 300)$, dus $b = 300$.
$a = \dfrac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \dfrac{-200}{25} = -8$
De formule van m is dus $B = -8t + 300$.



figuur 3.40

blz 105 Hieronder zie je hoe je van de grafieken I en II de somgrafiek I + II en de verschilgrafiek I − II tekent.



figuur 3.41

© Noordhoff Uitgevers

3.4 De balansmethode

blz 107 Een voorbeeld van een vergelijking is $5x - 3 = 37$.
In deze vergelijking is x de variabele.
De oplossing van de vergelijking is $x = \mathbf{8}$, want
$5 \cdot \mathbf{8} - 3 = 40 - 3 = 37$.

blz 109 Deze oplossing bereken je met de balansmethode, waarbij je de vergelijking stap voor stap eenvoudiger maakt. Zie hiernaast.

$$\begin{aligned} 5x - 3 &= 37 \\ +3 \quad &+3 \\ 5x &= 40 \\ :5 \quad &:5 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

3.5 Vergelijkingen oplossen

blz 114 In de vergelijking $6x - 15 = 8x - 7$ heet $6x - 15$ het linkerlid en $8x - 7$ het rechterlid. Bij het oplossen van deze vergelijking ga je als volgt te werk.

- Zorg ervoor dat de term met x uit het rechterlid verdwijnt.
- Zorg ervoor dat in het linkerlid alleen x overblijft.
- Hiernaast zie je hoe je stap voor stap bij de oplossing $x = -4$ uitkomt.

$$\begin{aligned} 6x - 15 &= 8x - 7 \\ -8x \quad &-8x \\ -2x - 15 &= -7 \\ +15 \quad &+15 \\ -2x &= 8 \\ :-2 \quad &:-2 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

blz 117 Bij de vergelijking $3(2x - 6) + 3 = 8x - 7$ werk je eerst de haakjes weg. Daarna herleid je het linkerlid.
Je krijgt $6x - 18 + 3 = 8x - 7$, dus $6x - 15 = 8x - 7$.
Vervolgens ga je op dezelfde manier als hierboven te werk.

blz 118 Om de vergelijking $1\frac{3}{7}x = 20$ op te lossen, werk je eerst de breuk weg. Je vermenigvuldigt links en rechts met 7. Zie hiernaast.

$$\begin{aligned} 1\tfrac{3}{7}x &= 20 \\ \tfrac{10}{7}x &= 20 \\ \times 7 \quad &\times 7 \\ 10x &= 140 \\ :10 \quad &:10 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

blz 119 Een vergelijking zoals $1\frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$ los je op door alle termen met 6 te vermenigvuldigen.
Je krijgt
$1\frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$
$\mathbf{6} \cdot 1\frac{2}{3}x - \mathbf{6} \cdot 1 = \mathbf{6} \cdot \frac{1}{2}x + \mathbf{6} \cdot \frac{1}{6}$
$10x - 6 = 3x + 1$, enzovoort.

blz 120 Het probleem hiernaast los je op met een vergelijking.

- Het getal dat je zoekt, noem je x.
- Vermenigvuldigen met 3 geeft $3x$.
- Er 36 van aftrekken geeft $3x - 36$.
- Je krijgt het oorspronkelijke getal, dus $3x - 36 = x$.
- Oplossen van de vergelijking geeft $x = 18$.

Als je een getal met 3 vermenigvuldigt en van de uitkomst 36 aftrekt, krijg je het oorspronkelijke getal terug.
Welk getal is dat?

© Noordhoff Uitgevers

Diagnostische toets

3.1 De grafiek van een lineaire formule

1 1 Teken in één figuur met verschillende kleuren de grafieken van

a $y = 2\frac{1}{2}x - 5$ **b** $y = -x + 4$ **c** $y = -0{,}4x$

2 2 Gegeven is de formule $y = -2x - 5$.

a Ga telkens met een berekening na welke van de punten $A(5, -15)$, $B(50, -50)$ en $C(12\frac{1}{2}, -30)$ op de grafiek liggen.

b Van het punt D op de grafiek is de x-coördinaat -11. Bereken de y-coördinaat van D.

3.2 De formule van een lijn opstellen

3 3 Gegeven zijn de volgende formules.

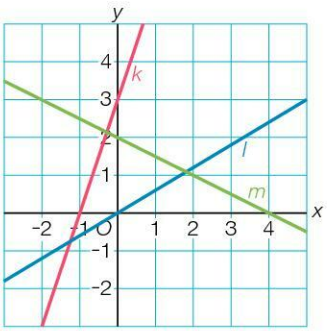
I $y = 2x - 7$ III $y = 2x + 2$ V $y = -2x + 2$

II $y = \frac{1}{2}x + 7$ IV $y = \frac{1}{2}x - 7$ VI $y = \frac{1}{7}x + 2$

a Van welke formules zijn de grafieken evenwijdig?

b Van welke formules hebben de grafieken hetzelfde snijpunt met de y-as?

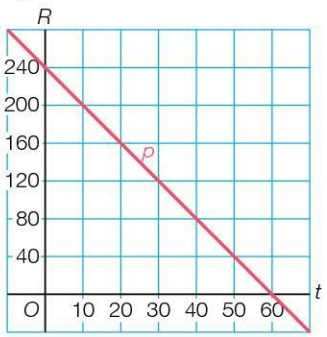
4 4,5 Stel van de lijnen k, l en m in figuur 3.42 de formule op.



figuur 3.42

3.3 Lineaire verbanden

5 6 Stel de formule op van de lijn p in figuur 3.43.



figuur 3.43

6 7 [▸ WERKBOEK] Een bad stroomt leeg. De hoogte h in cm van het water na t minuten is gegeven door de formule $h = -2{,}5t + 40$.

a Teken de grafiek van h.

b Hoe hoog staat het water na 90 seconden?

c Na hoeveel minuten is het bad leeg?

d Welke informatie geven de getallen in de formule?

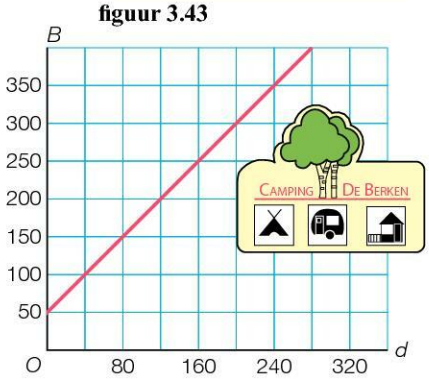
7 8 Op camping De Berken kun je een plaats voor een caravan huren. Het bedrag B in euro's hangt af van het aantal dagen d dat je de plaats huurt. Verder betaal je een vast bedrag. Zie figuur 3.44.

a Stel de formule op die bij de grafiek hoort.

b Welke informatie geven de twee getallen in de formule?

c De directie van de camping verhoogt het vaste bedrag met € 25. Wat wordt de nieuwe huurformule?

d De directie verhoogt een jaar later ook nog de prijs per dag met € 0,25. Wat wordt nu de formule?



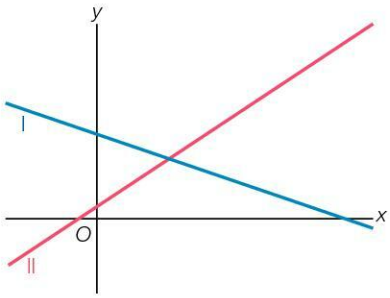
figuur 3.44

© Noordhoff Uitgevers

8 9 [▸ WERKBOEK] Zie figuur 3.45.

a Teken de somgrafiek I + II.

b Teken de verschilgrafiek I − II.



figuur 3.45

3.4 De balansmethode

9 10, 11 Los op.

a $-2x - 6 = 16$

b $-x + 3 = 23$

c $5x = 2$

d $5 + 3x = 26$

e $-8x = 0$

f $-x - 8 = 0$

10 12 Elke zaterdag verkoopt Cindy op de markt oude boeken en tijdschriften. De winst W in euro's die ze op een dag maakt, berekent ze met de formule $W = 2B + 0{,}5T - 35$. Hierin is B het aantal verkochte boeken en T het aantal verkochte tijdschriften.

a Op een dag verkoopt ze 40 boeken en 32 tijdschriften. Bereken Cindy's winst.

b Op een zaterdag verkoopt ze 37 boeken en heeft ze een winst van 58 euro.
Welke vergelijking volgt uit de gegevens? Los de vergelijking op. Hoeveel tijdschriften heeft Cindy deze zaterdag verkocht?

3.5 Vergelijkingen oplossen

11 13 Los op.

a $3x - 9 = 5x - 4$

b $5x - x = 3x - 2$

c $7 - 5x = -3x + 7$

d $-2 + 3x = 5x - 8$

e $-4a - 1 = -1 + 7a$

f $3 - 4x = -3x + 15$

12 14 Los op.

a $3(2x - 7) = -5x + 8$

b $5 - (x - 3) = 6 - 2x$

c $11b - 35 = 5 + 7(b - 8)$

d $5(1 - t) = -4(3 - t) - 1$

13 15 Los op.

a $\frac{3}{7}x = 6$

b $\frac{1}{3}x - 5 = -7$

c $-2\frac{1}{3}x = 14$

d $\frac{1}{3}x - 2x = -10$

14 16, 17 Los op.

a $3 - 5(8 - 4t) = -1 - 4t$

b $1\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(x + 5) - 9$

c $(x + 5)(x - 3) + 6 = x(x - 3) + 11$

d $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}x + 4\right) - 6 = 0$

15 18 Opa Bart zegt: 'Over 18 jaar ben ik vier keer zo oud als 48 jaar geleden.'
Neem aan dat opa Bart x jaar is.
Stel een vergelijking op en bereken hoe oud opa Bart is.

© Noordhoff Uitgevers

Herhaling

3.1 De grafiek van een lineaire formule

1 Een voorbeeld van een lineaire formule is $y = -1\frac{1}{2}x + 4$. De grafiek van een lineaire formule is een lijn. Heb je twee punten van de lijn, dan kun je de grafiek tekenen.

a Vul de tabel hiernaast in en teken de grafiek.

b Teken in één figuur de grafieken van $y = x - 3$, $y = -\frac{1}{2}x + 2$ en $y = -x$. Zet bij elke grafiek de juiste formule.

$y = -1\frac{1}{2}x + 4$

x	0	2
y		0

Voor $x = 2$ is $y = -1\frac{1}{2} \cdot 2 + 4 = -3 + 4 = 1$.

2 Je kunt narekenen of het punt $A(2, -1)$ op de grafiek van $y = 4x - 9$ ligt. Je vult $x = 2$ in de formule in en controleert of je $y = -1$ krijgt. $x = 2$ invullen geeft $y = 4 \cdot 2 - 9 = 8 - 9 = -1$, dus het punt $A(2, -1)$ ligt op de grafiek van $y = 4x - 9$.

a Ga met een berekening na of de punten $B(30, 101)$ en $C(-5, -29)$ op de grafiek liggen.

b Van het punt D op de grafiek van $y = 4x - 9$ is de x-coördinaat $12\frac{1}{2}$.
Bereken de y-coördinaat van D.

3.2 De formule van een lijn opstellen

3 De grafieken van $y = 3x + 5$ en $y = 3x - 2$ zijn evenwijdige lijnen, want beide lijnen hebben richtingscoëfficiënt 3.
De grafieken van $y = 2x - 4$ en $y = \frac{1}{2}x - 4$ snijden de y-as in hetzelfde punt, namelijk in $(0, -4)$.

Voor de lijn $y = ax + b$ geldt
- ga je 1 naar rechts, dan ga je a omhoog
- het snijpunt met de y-as is het punt $(0, b)$.

Gegeven zijn de formules I: $y = 4x - 5$, II: $y = \frac{1}{4}x + 5$, III: $y = \frac{1}{5}x - 4$, IV: $y = \frac{1}{4}x - 5$ en V: $y = -4x - \frac{1}{5}$.

a Van welke formules zijn de grafieken evenwijdig?

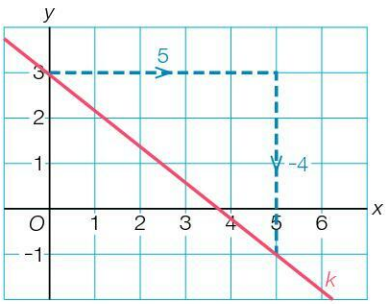
b Van welke formules hebben de grafieken hetzelfde snijpunt met de y-as?

4 Bij het opstellen van de formule van de lijn k in figuur 3.46 ga je uit van $y = ax + b$.

a Kijk in welk punt k de y-as snijdt. De y-coördinaat van dit punt is b. Welk getal is b?

b Twee roosterpunten op k zijn $(0, 3)$ en $(5, -1)$. Om van $(0, 3)$ in $(5, -1)$ te komen, ga je 5 naar rechts en 4 omlaag.
Dus $a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \ldots$

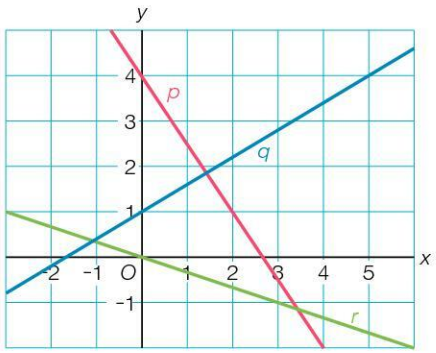
c Schrijf de formule op die bij k hoort.



figuur 3.46

© Noordhoff Uitgevers

5 Stel van elk van de lijnen p, q en r in figuur 3.47 de formule op.



figuur 3.47

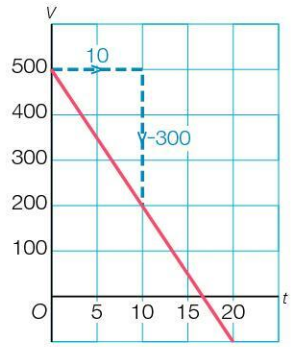
3.3 Lineaire verbanden

6 Omdat in figuur 3.48 bij de assen de letters t en V staan, ga je bij het opstellen van de formule uit van $V = at + b$. Let op de eenheden bij de assen.

a Welk getal is b?

b De lijn gaat door de punten (0, 500) en (10, 200), dus $a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \ldots$

c Schrijf de formule van V op.



figuur 3.48

7 [▸ WERKBOEK] Een aquarium wordt leeggepompt. De hoogte h in cm van het water na t minuten is gegeven door de formule $h = -3{,}75t + 30$.
Na 2 minuten is de hoogte
$h = -3{,}75 \cdot 2 + 30 = 22{,}5$ cm.

a Hoe hoog staat het water na 6 minuten?

b Teken de grafiek van h.

c Hoe hoog staat het water na 30 seconden?

d Na hoeveel minuten is het aquarium leeg?

e Hoeveel cm daalt het water per minuut? Welk getal in de formule hoort hierbij?

8 Een loodgieter rekent voor zijn werkzaamheden met het tarief $B = 35t + 40$. Hierin is B het bedrag in euro's per klus en t de tijd in uren die aan de klus is gewerkt.

a De loodgieter rekent een bedrag per uur en voorrijkosten. Voor $t = 0$ krijg je de voorrijkosten. Hoeveel zijn de voorrijkosten?

b Welk getal in de formule geeft het bedrag dat de loodgieter per uur rekent?

c De loodgieter verandert op 1 januari het tarief. Per uur rekent hij € 2 extra en de voorrijkosten verhoogt hij met € 5. Geef de formule die bij het nieuwe tarief hoort.

d Op 1 juli verandert hij het tarief opnieuw. Per uur rekent hij € 50, maar de voorrijkosten vervallen. Van welke formule gaat hij dan uit?

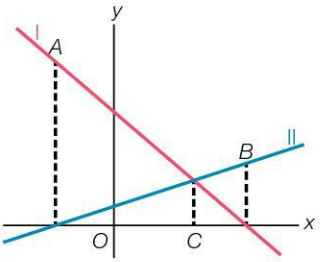
© Noordhoff Uitgevers

9 [▸ WERKBOEK] In figuur 3.49 zie je de grafieken I en II.

a Door welke van de punten A, B en C gaat de somgrafiek I + II? Teken de somgrafiek.

b Door welke van de punten A, B en C gaat de verschilgrafiek I − II? Teken de verschilgrafiek I − II.

c Teken de verschilgrafiek II − I.



figuur 3.49

3.4 De balansmethode

10 Een vergelijking lijkt op een balans. Je mag aan beide kanten van een vergelijking hetzelfde getal optellen of aftrekken om de balans in evenwicht te houden. Ook mag je beide kanten van de vergelijking door hetzelfde getal delen of met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Om een vergelijking op te lossen, maak je de vergelijking stap voor stap eenvoudiger.
Hiernaast zie je hoe dat bij $5x - 7 = -32$ gaat.

$$\begin{array}{l} 5x - 7 = -32 \\ \quad +7 \quad +7 \\ 5x = -25 \\ :5 \quad :5 \\ x = -5 \end{array}$$

Los op. Schrijf de uitwerking op zoals hiernaast.

a $-6x - 3 = 15$ **c** $7x - 1 = 6$

b $-4a = 28$ **d** $a - 4 = 28$

11 Je weet dat $-x = -1 \cdot x$. Daarom deel je bij het oplossen van de vergelijking $-8 - x = -12$ in de laatste stap door -1. Zie hiernaast.

$$\begin{array}{l} -8 - x = -12 \\ +8 \quad +8 \\ -x = -4 \\ :-1 \quad :-1 \\ x = 4 \end{array}$$

Los op.

a $5 - x = -12$ **c** $-x = 12$

b $-x + 8 = 8$ **d** $-1 - x = -10$

12 Gegeven is de formule $A = 3x + 5y + 20$.

a Neem $x = 3$ en $y = 2$ en bereken A.

b Voor $A = 55$ en $y = 4$ krijg je $3x + 5 \cdot 4 + 20 = 55$, dus $3x + 40 = 50$.
Los deze vergelijking op.

c Neem $A = 72$ en $x = 4$.
Bereken y door een vergelijking op te lossen.

3.5 Vergelijkingen oplossen

13 Hiernaast zie je hoe je de vergelijking $5x - 7 = 2x + 8$ oplost. Zorg er eerst voor dat x alleen in het linkerlid voorkomt. Daarna tel je bij het linker- en rechterlid 7 op. Enzovoort.

$$\begin{array}{l} 5x - 7 = 2x + 8 \\ -2x \quad -2x \\ 3x - 7 = 8 \\ \quad +7 \quad +7 \\ 3x = 15 \\ :3 \quad :3 \\ x = 5 \end{array}$$

Los op.

a $6x - 2 = 2x + 4$ **d** $-5x - 8 = -x + 12$

b $5 - x = 4x - 60$ **e** $7y - 2 = 8 - 3y$

c $3x + 8 = -4x + 8$ **f** $7p - 2p = 8 - 3p$

© Noordhoff Uitgevers

14 Staan er haakjes in een vergelijking, dan werk je die eerst weg.
Dus van $4(x - 8) + 6 = 3x - 1$ maak je eerst $4x - 32 + 6 = 3x - 1$.
Daarna ga je op de bekende manier verder.

Los op.

a $4(x - 8) + 6 = 3x - 1$
b $2(-3x + 1) + 8 = 24$
c $-2(3 - 2y) = 5y - 6$
d $5t - 8 = 3(t - 1) - 1$

15 Om de vergelijking $1\frac{3}{4}x = 21$ op te lossen, vermenigvuldig je eerst het linker- en rechterlid met 4. Daardoor verdwijnt de breuk.

Los op.

a $\frac{3}{4}x = 9$
b $\frac{2}{7}a + 1 = 15$
c $1\frac{2}{3}x = 15$
d $-1 + \frac{1}{3}p = -3$

$$\begin{aligned} 1\tfrac{3}{4}x &= 21 \\ \tfrac{7}{4}x &= 21 \\ \times 4 \quad & \times 4 \\ 7x &= 84 \\ :7 \quad & :7 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

16 Hiernaast zie je hoe je de vergelijking $2x - 3(4x - 8) = 5$ oplost. Eerst werk je de haakjes weg.

Los op.

a $2x - 3(3x - 8) = 5$
b $3x - (8x - 3) = 13$
c $(x + 3)(x + 5) = x(x - 3) - 7$
d $5(a - 1) + 3(2 - 7a) = a - (a - 33)$

$$\begin{aligned} 2x - 3(4x - 8) &= 5 \\ 2x - 12x + 24 &= 5 \\ -10x + 24 &= 5 \\ -24 \quad & -24 \\ -10x &= -19 \\ :-10 \quad & :-10 \\ x &= 1{,}9 \end{aligned}$$

17 Om de vergelijking $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}x - 1$ op te lossen vermenigvuldig je eerst alle termen met 8. Daardoor verdwijnen de breuken. Zie hiernaast.

Los op.

a $-\frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$
b $\frac{1}{2}(3x - 1) - \frac{1}{3} = x + \frac{1}{6}$
c $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{6}x + 3$
d $\frac{3}{5}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}$

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}x - 1 \\ 8 \cdot & \tfrac{1}{4}x + 8 \cdot \tfrac{1}{2} = 8 \cdot \tfrac{1}{8}x - 8 \cdot 1 \\ & 2x + 4 = x - 8 \\ & -x \quad\quad -x \\ & x + 4 = -8 \\ & -4 \quad\quad -4 \\ & x = -12 \end{aligned}$$

18 Zie de cartoon hiernaast met oom Frans.
Om zijn vraag te beantwoorden, stel je een vergelijking op. Eerst noem je de leeftijd van oom Frans x.

a Vul in.
- Over 15 jaar is oom Frans $x + 15$ jaar.
- Hij was 25 jaar geleden $x -$ ... jaar.
- Je krijgt de vergelijking $x + 15 = 5(x -$ ...$)$.

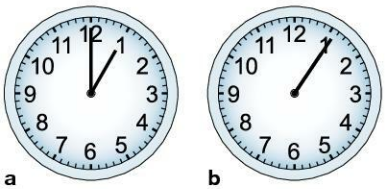
b Los de vergelijking op. Hoe oud is oom Frans?

© Noordhoff Uitgevers

Onderzoek Vergelijkingen bij klokkijken

In dit onderzoek mag je de rekenmachine gebruiken.

In figuur 3.50 zie je twee keer dezelfde klok.
Op de linker klok is het één uur. Op de rechter klok staan de wijzers op elkaar. Het is dan ruim vijf minuten over één. Maar hoe laat het precies is weet je niet.
In dit onderzoek bereken je met vergelijkingen hoe laat het is als de wijzers van een klok op elkaar staan. Rond bij de opgaven zo nodig af op hele seconden.



figuur 3.50 Hoe laat is het als de wijzers op elkaar staan?

1 De grote wijzer van een klok draait in een minuut over 6°.

a Licht dit toe.

b Over hoeveel graden draait de grote wijzer in vijf minuten?

c Stel x is het aantal minuten na één uur.
Over hoeveel graden draait de grote wijzer in x minuten?

De kleine wijzer van een klok draait in een uur over 30°.

d Licht dit toe.

e Over hoeveel graden draait de kleine wijzer in een minuut?

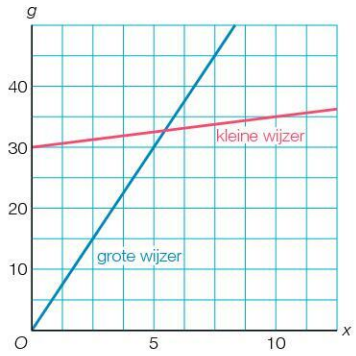
f Over hoeveel graden draait de kleine wijzer in vijf minuten?

g Ten opzichte van de verticale stand maakt de kleine wijzer x minuten na één uur een hoek van $30 + \frac{1}{2}x$ graden.
Licht dit toe.

Zie de grafieken in figuur 3.51. Hierin is g de hoek in graden die elk van de wijzers x minuten na één uur maakt met de verticale stand.
De x-coördinaat van het snijpunt van de twee grafieken is de oplossing van de vergelijking $6x = 30 + \frac{1}{2}x$.

h Licht dit toe en los de vergelijking op.

i Hoe laat is het in figuur 3.50b?

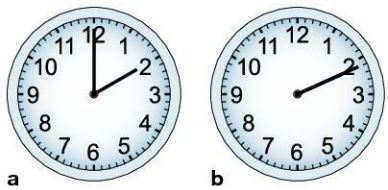


figuur 3.51

2 Om ruim tien minuten over twee staan de wijzers van een klok op elkaar. Zie de figuur hiernaast.

a Geef de formules die bij de grote en bij de kleine wijzer horen. Neem hierbij x het aantal minuten na twee uur en g het aantal graden dat de wijzer is gedraaid ten opzichte van de verticale stand.

b Bereken hoe laat het is in figuur 3.52b.



figuur 3.52 Om ruim tien minuten over twee staan de wijzers van een klok op elkaar.

© Noordhoff Uitgevers

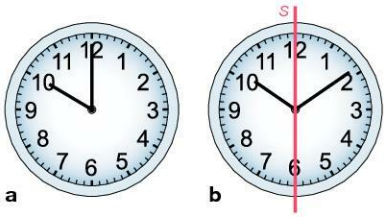
3 Om ruim kwart over drie staan de wijzers van een klok op elkaar. Onderzoek hoe laat het in dat geval is.

4 Onderzoek hoeveel keer per dag de wijzers van een klok op elkaar staan en hoe laat het dan is.

5 In figuur 3.53b staan de wijzers symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn s.
Stel dat x het aantal minuten na tien uur is en g de hoek in graden die de wijzer maakt met s.
Bij de kleine wijzer hoort de formule $g = 60 - \frac{1}{2}x$.

a Licht dit toe.

b Onderzoek hoe laat het is in figuur 3.53b.



figuur 3.53 Op welk tijdstip staan de wijzers symmetrisch ten opzichte van lijn s?

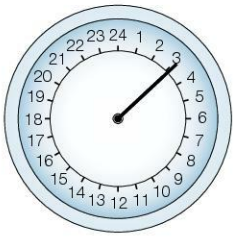
6 Om ongeveer kwart over negen staan de wijzers symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn s. Zie figuur 3.54.
Onderzoek hoe laat het dan is.

figuur 3.54

7 Om ongeveer kwart voor drie staan de wijzers symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn s. Zie figuur 3.55.
Onderzoek hoe laat het in dat geval is.

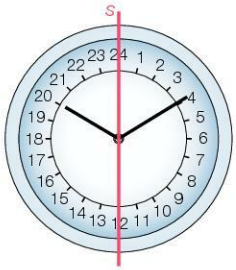
figuur 3.55

8 Bij de 24-uurs klok in figuur 3.56 staan de wijzers op elkaar.
Onderzoek hoe laat het dan is.



figuur 3.56

9 Bij de 24-uurs klok in figuur 3.57 staan de wijzers symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn s.
Onderzoek hoe laat het in dat geval is.



figuur 3.57

© Noordhoff Uitgevers

Kwadraten en wortels

Je hebt vast weleens op een mooie zomerdag vanaf een duin over de zee uitgekeken. Je ziet dan in de verte de horizon. Maar hoe ver weg is die eigenlijk? Met de wortelformule $d = 3{,}6\sqrt{h}$ kun je berekenen hoe ver je bij helder weer kunt kijken als je oog zich op een hoogte van h meter boven de zeespiegel bevindt. Vanaf de hoogste duinen van Nederland kun je dan de horizon op een afstand van meer dan 25 kilometer zien.

Wat leer je?

- Dat de grafiek van een kwadratische formule een dalparabool of een bergparabool is.
- Rekenen met wortels.
- Werken met wortelformules.
- Wortels herleiden.
- Wat rationale en irrationale getallen zijn.

4

© Noordhoff Uitgevers

Voorkennis Kwadraten

Theorie A Basisberekeningen met kwadraten

Het kwadraat van 8 is $8 \cdot 8 = 64$. Notatie: $8^2 = 64$.
Je spreekt 8^2 uit als acht-kwadraat of als acht-tot-de-tweede.
En zo is $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$, $13^2 = 13 \cdot 13 = 169$ en $20^2 = 20 \cdot 20 = 400$.
Omdat $12^2 = 144$
is $120^2 = 14\,400$
en $1{,}2^2 = 1{,}44$.

Als een getal op één nul eindigt, eindigt het kwadraat op twee nullen.

1 **a** Bereken de kwadraten van de gehele getallen 1 tot en met 20.
b Bereken 25^2, 30^2, 50^2 en 100^2.

2 Bereken.

a 50^2	**c** 300^2	**e** 130^2	**g** $0{,}13^2$
b $0{,}5^2$	**d** $0{,}3^2$	**f** $1{,}3^2$	**h** $0{,}25^2$

3 Het kwadraat van $2\frac{1}{2}$ is $\left(2\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$.
Bereken.

a $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$	**c** $\left(5\frac{1}{2}\right)^2$	**e** $\left(2\frac{4}{5}\right)^2$	**g** $\left(3\frac{3}{4}\right)^2$
b $\left(2\frac{1}{3}\right)^2$	**d** $\left(\frac{1}{4}\right)^2$	**f** $\left(\frac{3}{5}\right)^2$	**h** $\left(5\frac{1}{3}\right)^2$

Theorie B Rekenvolgorde

Het kwadraat van -7 is $(-7)^2 = -7 \cdot -7 = 49$. Denk hierbij aan de haakjes om -7. Maar $-7^2 = -7 \cdot 7 = -49$.
In berekeningen gaat kwadrateren voor vermenigvuldigen en delen.
Dus $3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$, $4 \cdot (-3)^2 - 8 = 4 \cdot 9 - 8 = 36 - 8 = 28$ en $8^2 : 4 = 64 : 4 = 16$.
Maar je werkt eerst binnen de haakjes.
Dus $(3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225$ en $4 \cdot (3^2 - 8) = 4 \cdot (9 - 8) = 4 \cdot 1 = 4$.

Let op!
$8^2 = 64$
$(-8)^2 = 64$
$-8^2 = -64$

Rekenvolgorde
1 binnen de haakjes
2 machtsverheffen
3 vermenigvuldigen en delen van links naar rechts
4 optellen en aftrekken van links naar rechts

© Noordhoff Uitgevers

4 Bereken.

a 9^2 **d** $6 \cdot 3^2$ **g** $-3 \cdot (-1)^2$

b $(-9)^2$ **e** $-2 \cdot 9^2$ **h** $9 \cdot -2^2$

c -9^2 **f** $(5 \cdot -2)^2$ **i** $-2 \cdot -8^2$

5 Bereken.

a $5 \cdot 2^2 + 8$ **d** $-3^2 - (-1)^2$ **g** $2 \cdot 12^2 - 3 \cdot 9^2$

b $5 \cdot (2^2 + 8)$ **e** $-2 \cdot 4^2 - (-5)^2$ **h** $-2 \cdot 8^2 + (-3)^2$

c $(5 \cdot 2)^2 + 8$ **f** $3^2 - (5 - 4^2)$ **i** $3 \cdot (5 - 7)^2 - (-2)^2$

Theorie C Kwadratische formules

Bij de kwadratische formule $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ kun je voor x elk getal invullen.

Voor $x = 6$ krijg je $y = \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 2 = \frac{1}{2} \cdot 36 - 2 = 18 - 2 = 16$.

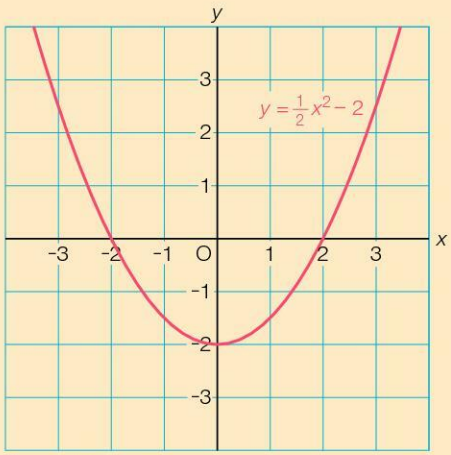
Voor $x = -10$ krijg je $y = \frac{1}{2} \cdot (-10)^2 - 2 = \frac{1}{2} \cdot 100 - 2 = 50 - 2 = 48$.

Om de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ te tekenen,
maak je eerst een tabel met zeven punten.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$2\frac{1}{2}$	0	$-1\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{2}$

Reken niet te veel uit. Bijvoorbeeld -2 en 2 hebben hetzelfde kwadraat.

Teken vervolgens door de punten $\left(-3, 2\frac{1}{2}\right)$, $(-2, 0)$, … uit de tabel een vloeiende kromme. Zet de formule bij de grafiek. Zie figuur 4.1.



figuur 4.1

6 Gegeven is de formule $y = 2x^2 - 5$.
Bereken y voor

a $x = 3$ **b** $x = 0$ **c** $x = -4$

7 Gegeven is de formule $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$.
Bereken y voor

a $x = 6$ **b** $x = 0$ **c** $x = -12$

8 **a** Teken de grafiek van de formule $y = x^2 - 4$.

b Teken de grafiek van de formule $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$.

© Noordhoff Uitgevers

4.1 Kwadratische formules

O 1 Gegeven is de formule $y = -x^2 + 5$.

a Bij $x = 3$ hoort $y = -4$. Reken dit na.

b Welke y hoort bij $x = -3$?

c Vul de tabel in.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

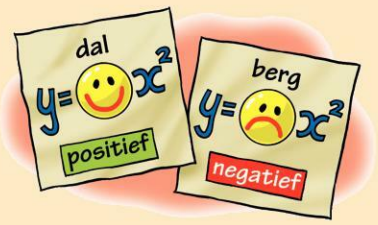
d Teken de grafiek van $y = -x^2 + 5$ en zet de formule bij de grafiek.

e Heeft de grafiek een hoogste of een laagste punt?

Theorie A Bergparabolen en dalparabolen

De formule $y = -x^2 + 5$ uit opgave 1 is een voorbeeld van een kwadratische formule. Er bestaat een **kwadratisch verband** tussen x en y. De grafiek van een kwadratische formule heet een parabool.
De grafiek van $y = -x^2 + 5$ heeft een hoogste punt. Zo'n parabool heet een **bergparabool**. Naast bergparabolen zijn er ook dalparabolen. Een **dalparabool** heeft een laagste punt.

- **Bergparabool**
  Een bergparabool heeft een hoogste punt.
  In de formule staat een negatief getal voor x^2.
  Voorbeelden zijn $y = -x^2 + 5$ en $y = -\frac{1}{3}x^2 - 1$.
- **Dalparabool**
  Een dalparabool heeft een laagste punt.
  In de formule staat een positief getal voor x^2.
  Voorbeelden zijn $y = 2x^2 - 5$ en $y = \frac{1}{2}x^2 + 8$.



Voorbeeld

Gegeven is de formule $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$.

a Is de grafiek een dal- of een bergparabool? Licht toe.

b Op de grafiek ligt het punt A met x-coördinaat 8.
Bereken de y-coördinaat van A.

c Onderzoek met een berekening of het punt $B(-6, 22)$ op de grafiek ligt.

Uitwerking

a $-\frac{1}{2} < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.

b $x = 8$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot 8^2 + 4 = -\frac{1}{2} \cdot 64 + 4 = -32 + 4 = -28$,
dus de y-coördinaat van A is -28.

c $x = -6$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot (-6)^2 + 4 = -\frac{1}{2} \cdot 36 + 4 = -18 + 4 = -14 \neq 22$,
dus $B(-6, 22)$ ligt niet op de grafiek.

© Noordhoff Uitgevers

2 Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$.

a Is de grafiek een dal- of een bergparabool? Licht toe.

b Op de grafiek ligt het punt A met x-coördinaat 10.
Bereken de y-coördinaat van A.

c Onderzoek met een berekening of het punt $B(-8, -35)$ op de grafiek ligt.

3 Gegeven is de formule $y = -x^2 - 2$.

a Is de grafiek een dal- of een bergparabool? Licht toe.

b Welke van de volgende punten liggen op de grafiek?
Licht je antwoord toe met berekeningen.
$P(8, -66)$ $Q(-8, 62)$ $R(-12, -146)$

4 Gegeven zijn de formules $y = -2x^2 + 3$ en $y = -2x - 1$.

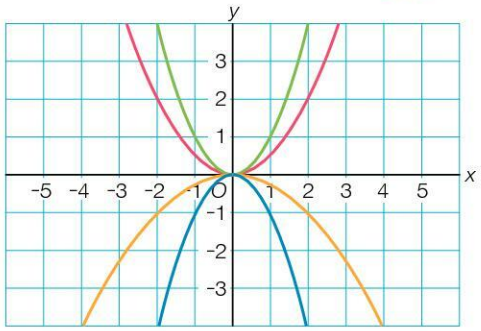
a Van welke formule is de grafiek een parabool? Wat weet je van de grafiek van de andere formule?

b Teken de grafieken in één figuur met verschillende kleuren.

c De grafieken hebben twee snijpunten.
Schrijf de coördinaten van die punten op.

5 **a** In figuur 4.2 zie je de grafieken van $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -x^2$ en $y = -\frac{1}{4}x^2$.
Geef bij elke formule de kleur van de grafiek.

b Bij welke van de volgende formules hoort een dalparabool? En bij welke een bergparabool?
I $y = -5x^2 + 8$
II $y = 6x^2$
III $y = -0{,}2x^2$
IV $y = \frac{1}{3}x^2 - 7$



figuur 4.2

A **6** Gegeven is de formule $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

a Is de grafiek een dal- of een bergparabool? Licht toe.

b De grafiek snijdt de y-as in het punt A.
Bereken de coördinaten van A.

c Welke van de punten $B\left(7, 11\frac{1}{4}\right)$, $C\left(10, 5\frac{1}{4}\right)$ en $D(-8, 15)$ liggen op de grafiek? Licht je antwoord toe met berekeningen.

7 Op de grafiek van $y = 2x^2 - 8$ ligt het punt P met y-coördinaat 280.
Onderzoek wat de x-coördinaat van P kan zijn.

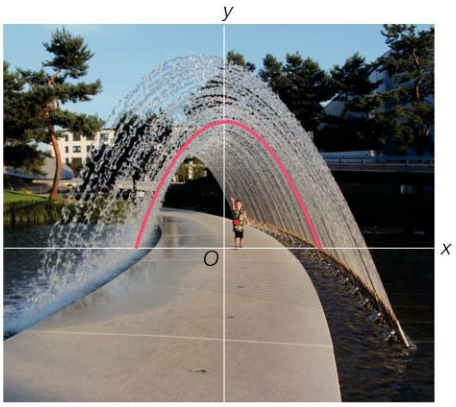
© Noordhoff Uitgevers

8 Zie hiernaast.
Hoe weet Sophie dat het punt A niet op de grafiek ligt?

9
a Het punt $E(-4, p)$ ligt op de grafiek van $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.
Bereken p.
b Het punt $F(5, q)$ ligt op de grafiek van $y = -3x^2 + 8$.
Bereken q.
c Het punt $G(2, 8)$ ligt op de grafiek van $y = ax^2$.
Bereken a.
d Het punt $H(-4, 18)$ ligt op de grafiek van $y = -x^2 + b$.
Bereken b.

10 In het Autopark in Wolfsburg kun je onder fonteinen doorlopen zonder nat te worden. De waterstralen hebben de vorm van een parabool.
De formule die bij een van de waterstralen in figuur 4.3 hoort is $y = -0{,}85x^2 + 3{,}4$. Hierbij zijn x en y in meter, met y de hoogte boven het pad.
Voor $x = 0{,}5$ is $y = -0{,}85 \cdot 0{,}5^2 + 3{,}4 = 3{,}1875$.
Tik in op je rekenmachine

(−) 0 . 8 5 × 0 . 5 x^2 + 3 . 4 =



figuur 4.3

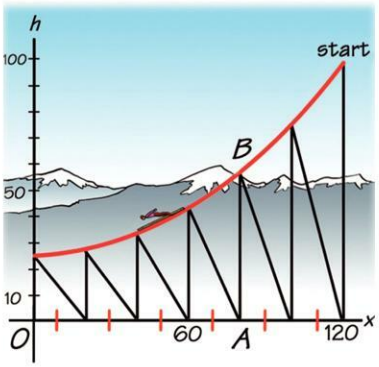
a Vul de tabel in.

x	−2	−1	−0,5	0	0,5	1	2
y							

b Hoe hoog komt de waterstraal boven het pad?
c Franka staat 0,4 meter van het midden van het pad.
Hoe ver komt het water daar boven het pad?

© Noordhoff Uitgevers

11 Omstreeks de jaarwisseling vindt het Vierschansentoernooi plaats. Het toernooi begint op de skischans van het Zuid-Duitse Oberstdorf. Een model van de skibaan in Oberstdorf zie je in figuur 4.4.
Bij het rode deel van de schans hoort de formule $h = 0{,}005x^2 + 25$ met x en h in meter.



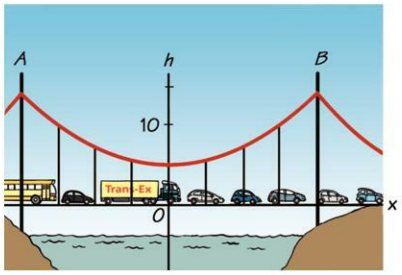
figuur 4.4

a Vul de tabel in.

x	0	30	60	90
h				

b Hoeveel meter is het laagste punt boven de x-as?
c Hoeveel meter is het hoogteverschil tussen het hoogste en laagste punt van de schans?
d Bereken de lengte van de stalen balk AB.

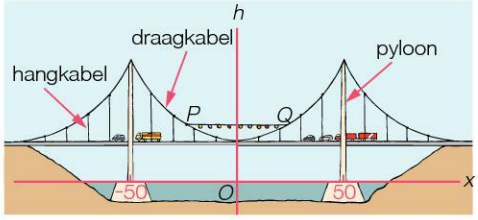
A 12 De Glienicker Brücke is een bekende brug in Berlijn. Tijdens de Koude Oorlog in de tweede helft van de vorige eeuw gebruikten de Sovjet-Unie en Amerika deze brug om spionnen uit te wisselen.
Bij de rode kabel tussen de palen A en B in figuur 4.5 hoort de formule $h = 0{,}00625x^2 + 5$, waarin x en h in meter zijn.
De x-as ligt langs het wegdek. De afstand tussen de palen A en B is 80 meter.
Het wateroppervlak van de rivier de Havel ligt 4 meter onder het wegdek.



figuur 4.5

a Hoeveel meter is het laagste punt van de rode kabel boven het wateroppervlak?
b Op welke hoogte boven het wegdek is de rode kabel aan paal B bevestigd?
c Tussen het wegdek en de kabel zitten zeven verticale balken.
De balken staan op gelijke afstand van elkaar.
Bereken de totale lengte van deze balken.

13 Bij de draagkabel van de hangbrug in figuur 4.6 hoort de formule $h = 0{,}01x^2 + 7$. Hierin is x in meter en h de hoogte van de kabel boven het wateroppervlak in meter.



figuur 4.6

a Hoe hoog zijn de pylonen?
b Ter gelegenheid van de feestdagen is tussen de punten P en Q op de draagkabels een 45 meter lange horizontale draad met kerstverlichting gespannen.
Op welke hoogte hangen de lampjes boven de weg?
c Tussen de pylonen bevinden zich twee hangkabels met een lengte van 8,5 meter.
Is de afstand tussen deze kabels meer of minder dan 50 meter?
Licht je antwoord toe met een berekening.

© Noordhoff Uitgevers

4.2 Rekenen met wortels

O 14 De oppervlakte van het vierkant $PQRS$ in figuur 4.7 is 8 cm^2.

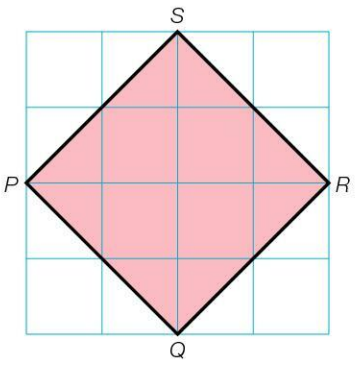
a Licht dit toe.

Floor vraagt zich af hoe lang zijde PQ is.
Ze meet 2,8 cm.

b Bereken $2{,}8^2$. Waarom is PQ niet precies 2,8 cm?

c Britt beweert dat PQ 2,82 cm is.
Waarom is de lengte niet precies 2,82 cm?

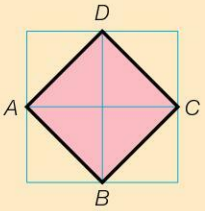
d Probeer een betere schatting van PQ te geven.



figuur 4.7

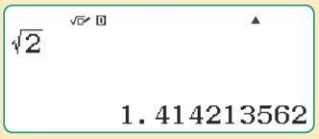
Theorie A Wortels op de rekenmachine

Vierkant $ABCD$ in figuur 4.8 bestaat uit vier halve roostervierkanten, dus de oppervlakte van dit vierkant is 2 cm^2.
Door te meten krijg je een schatting van zijde AB. Je vindt $AB = 1{,}41$ cm, maar deze schatting is te laag want $1{,}41^2 = 1{,}9881$.
Maar de schatting 1,42 cm is te hoog, want $1{,}42^2 = 2{,}0164$.
Bij $AB = 1{,}414$ krijg je $1{,}414^2 = 1{,}999396$ en dat is bijna 2. Maar hoeveel decimalen je ook neemt, het kwadraat is nooit precies 2.



figuur 4.8

Met de toets $\sqrt{\ }$ kun je snel veel decimalen van AB berekenen. Tik in $\sqrt{\ }$ 2 =. Aflezen geeft 1,414213562.



We noteren de lengte van de zijde van vierkant $ABCD$ als $\sqrt{2}$ Spreek uit: **wortel** twee.

$\sqrt{2}$ is de lengte van de zijde van een vierkant waarvan de oppervlakte 2 is.

$\sqrt{2}$ is afgerond op drie decimalen 1,414.
Notatie: $\sqrt{2} \approx 1{,}414$.
Afgerond op één decimaal is $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.
Aan het teken $\approx$ kun je zien dat 1,414 en 1,4 benaderingen zijn.

$\sqrt{5}$ is de lengte van de zijde van een vierkant waarvan de oppervlakte 5 is.
Met de rekenmachine kun je een benadering van $\sqrt{5}$ vinden.
Afgerond op drie decimalen is $\sqrt{5} \approx 2{,}236$.

15 Rond $\sqrt{279}$ af op

a één decimaal
b twee decimalen
c drie decimalen
d vier decimalen
e gehelen
f zes decimalen

© Noordhoff Uitgevers

16 Rond af op drie decimalen.

a $\sqrt{17}$ **c** $\sqrt{62}$ **e** $\sqrt{1{,}82}$

b $\sqrt{28}$ **d** $\sqrt{0{,}03}$ **f** $\sqrt{38\,759}$

17 **a** Van een vierkant is de oppervlakte 20 dm^2.
De zijden van dat vierkant zijn dus $\sqrt{20}$ dm.
Bereken hoeveel dm de zijde is. Rond af op één decimaal.

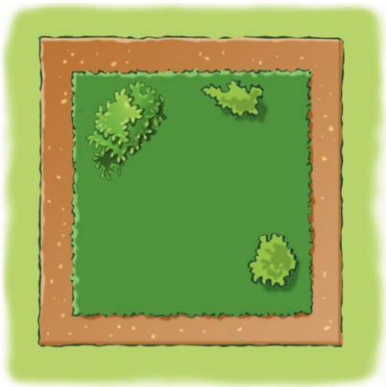
b Bereken de afmetingen van een vierkante winkelruit met een oppervlakte van 8 m^2. Geef het antwoord in meter en rond af op twee decimalen.

A **18** In de tuin van de familie Hendriks ligt een vierkant grasveld met een oppervlakte van 500 m^2. Om het grasveld komt een hek. Het hek kost € 4,50 per meter.
Hoeveel gaat het hek de familie Hendriks kosten?

19 Om een vierkant grasveld van 80 m^2 is een overal even breed pad aangelegd. Zie figuur 4.9.

a Bereken hoeveel meter de afmetingen van het grasveld zijn. Rond af op twee decimalen.

b De oppervlakte van het grasveld en het pad samen is 95 m^2.
Bereken hoeveel meter de breedte van het pad is. Rond af op één decimaal.



figuur 4.9

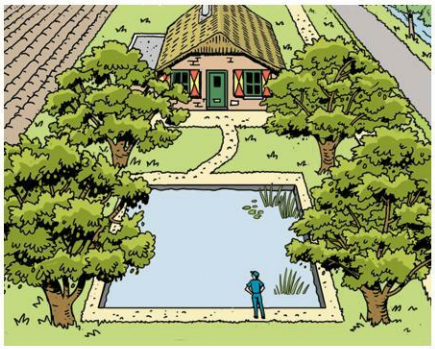
A **20** Een schaakbord bestaat uit 64 velden en een rand. De oppervlakte van de 64 velden samen is 14 dm^2.

a Bereken de afmetingen van één veld in dm. Rond af op twee decimalen.

b De oppervlakte van de rand is 2 dm^2.
Hoeveel dm is de breedte van de rand? Rond af op twee decimalen.

figuur 4.10

21 In een tuin ligt een vierkante vijver met een oppervlakte van 100 m^2. De eigenaar wil de vijver vergroten. De nieuwe vijver moet ook vierkant zijn, met een twee keer zo grote oppervlakte als de oppervlakte van de oude vijver. Verder blijven de eeuwenoude eiken staan.
Maak met een schets duidelijk hoe dit probleem kan worden opgelost.



figuur 4.11

© Noordhoff Uitgevers

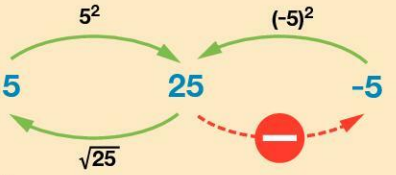
O 22 Vul een positief getal in.

a Het kwadraat van … is 64, dus $\sqrt{64} = ...$

b Het kwadraat van … is 144, dus $\sqrt{144} = ...$

Theorie B Worteltrekken

Sommige wortels moet je zonder rekenmachine kunnen berekenen. Zo is $\sqrt{25} = 5$, want $5^2 = 25$ en 5 is niet negatief. En $\sqrt{169} = 13$, want $13^2 = 169$. Verder is $\sqrt{16900} = 130$. Maar $\sqrt{1690} = 41{,}109...$



Het berekenen van wortels noemen we **worteltrekken**.
In de rekenvolgorde komt worteltrekken voor vermenigvuldigen en delen, maar eerst werk je binnen de haakjes.
$\sqrt{64 + 36}$ betekent $\sqrt{(64 + 36)}$, dus $\sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$.
En $\sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$.
$4\sqrt{9}$ betekent $4 \cdot \sqrt{9}$, dus $4\sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$.

Voorbeeld

Bereken.

a $\sqrt{9} + 16$

b $\sqrt{9 + 16}$

c $4\sqrt{9} + 3\sqrt{16}$

d $\sqrt{14400 + 2500}$

Uitwerking

a $\sqrt{9} + 16 = 3 + 16 = 19$

b $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

c $4\sqrt{9} + 3\sqrt{16} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 12 + 12 = 24$

d $\sqrt{14400 + 2500} = \sqrt{16900} = 130$

23 Bereken.

a $\sqrt{100}$ **b** $\sqrt{81}$ **c** $\sqrt{1}$ **d** $\sqrt{121}$ **e** $\sqrt{900}$ **f** $\sqrt{225}$ **g** $\sqrt{196}$ **h** $\sqrt{169}$

24 Bereken. Denk aan de tussenstappen.

a $\sqrt{36} - \sqrt{16}$ **b** $\sqrt{49} + 9$ **c** $\sqrt{100 - 36}$ **d** $3\sqrt{25} + 5\sqrt{1}$ **e** $5\sqrt{4} - 3\sqrt{9}$ **f** $2\sqrt{49} - \sqrt{144}$ **g** $\sqrt{196} - \sqrt{169}$ **h** $64\sqrt{4}$

A 25 Bereken.

a $\sqrt{400} - \sqrt{900}$

b $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} + \sqrt{196} - 9\sqrt{16}$

c $3\sqrt{16} - 2\sqrt{25} + 4\sqrt{36}$

d $-5\sqrt{36} + 2\sqrt{81}$

e $3\sqrt{16900 - 14400}$

f $5\sqrt{289} - 3\sqrt{225}$

© Noordhoff Uitgevers

26 Jan denkt dat $\sqrt{-9}$ gelijk is aan -3.

a Bereken $-3 \cdot -3$. Waarom heeft Jan ongelijk?

b Wat krijg je als je $\sqrt{-9}$ op je rekenmachine intikt?

c Waarom kun je geen wortel trekken uit een negatief getal?

$\sqrt{-16}$ bestaat niet, maar $-\sqrt{16} = -4$.

De wortel van een negatief getal bestaat niet.

A 27 Bereken of zet *kan niet*.

a $\sqrt{49}$

b $\sqrt{-49}$

c $\sqrt{-1 \cdot -49}$

d $-\sqrt{49}$

e $-\sqrt{-49}$

f $\sqrt{\frac{1}{49}}$

g $\sqrt{(-7)^2}$

h $\sqrt{-7^2}$

i $\sqrt{7 \cdot -7}$

j $-4\sqrt{-9}$

k $-\sqrt{0}$

l $\sqrt{-9 \cdot 0}$

28 Zie hiernaast. Bereken.

a $\sqrt{\frac{9}{25}}$

b $\sqrt{2\frac{1}{4}}$

c $8\sqrt{\frac{9}{64}} + \sqrt{7\frac{1}{9}}$

d $\sqrt{0{,}36}$

e $10\sqrt{1\frac{11}{25}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{100}}$

f $\sqrt{\frac{44}{99}}$

g $\sqrt{-3 \cdot -\frac{1}{75}}$

h $\sqrt{1{,}96}$

$\sqrt{6\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

$\sqrt{0{,}16} = \sqrt{\frac{16}{100}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

ARTIKEL | BEROEP | GESCHIEDENIS | INFORMATIE

Het wortelteken

De Italiaanse koopman Leonardo van Pisa (ca. 1170-1250), ook wel Fibonacci genoemd, kwam op zijn reizen vaak in Egypte en Arabië. Met de daar opgedane kennis schreef hij in 1202 een groot handboek over rekenen, dat Liber Abaci heet. Bij worteltrekken gebruikte Leonardo het teken ℞, dat lijkt op de hoofdletter R. Het is afkomstig van radix, het Latijnse woord voor wortel.
Het wortelteken $\sqrt{\ }$ zoals we dat tegenwoordig gebruiken, is afgeleid van de kleine letter r.

© Noordhoff Uitgevers

4.3 Wortelformules

O 29 Gegeven is de formule $y = \sqrt{x}$.
- **a** Bereken y voor $x = 9$. En ook voor $x = 16$.
- **b** Waarom mag je niet $x = -9$ invullen?

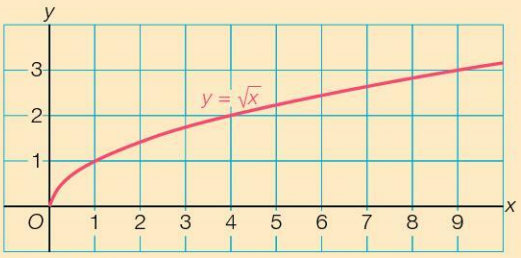
Theorie A Formules met wortels

Formules als $y = \sqrt{x}$, $y = 5 + \sqrt{x}$ en $s = 3\sqrt{t}$ zijn voorbeelden van **wortelformules**. Omdat de wortel van een negatief getal niet bestaat, mag je bij deze formules voor x en t geen negatieve getallen invullen.

Om de grafiek van $y = \sqrt{x}$ te tekenen maak je eerst een tabel. Je begint bij $x = 0$. Zo nodig rond je af op één decimaal.

x	0	1	2	3	4	5	9
y	0	1	1,4	1,7	2	2,2	3

Het beginpunt is (0, 0).



figuur 4.12

Hieronder staan drie wortelformules. Telkens is y berekend voor $x = 9$. Zo nodig is op één decimaal afgerond.

- $y = 4 + 2\sqrt{x}$
  $x = 9$ geeft $y = 4 + 2\sqrt{9} = 4 + 2 \cdot 3 = 4 + 6 = 10$
- $y = 5\sqrt{4x}$
  $x = 9$ geeft $y = 5\sqrt{4 \cdot 9} = 5\sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30$
- $y = 2\sqrt{x + 5}$
  $x = 9$ geeft $y = 2\sqrt{9 + 5} = 2\sqrt{14} \approx 7{,}5$

30 Gegeven is de formule $y = 5 + 3\sqrt{x}$.
Bereken y of zet *kan niet.*
- **a** $x = 16$
- **b** $x = 0$
- **c** $x = -16$

31 Gegeven is de formule $y = 4\sqrt{0{,}2x}$.
Bereken y of zet *kan niet.*
- **a** $x = 125$
- **b** $x = 0$
- **c** $x = -5$

32 Gegeven is de formule $y = 4\sqrt{x + 28}$.
Bereken y of zet *kan niet.*
- **a** $x = 8$
- **b** $x = -12$
- **c** $x = -32$

© Noordhoff Uitgevers

A 33 Gegeven is de formule $y = 2 + \sqrt{x}$.

a Vul de tabel in. Rond zo nodig af op één decimaal.

x	0	1	2	3	4	5	9
y	2	3					

b De grafiek is een vloeiende kromme.
Teken de grafiek.

c Schrijf de coördinaten op van het beginpunt van de grafiek.

d Op de grafiek ligt het punt P met x-coördinaat 2500.
Bereken de y-coördinaat van P.

e Onderzoek met een berekening of het punt $Q\left(110\frac{1}{4}, 12\frac{1}{2}\right)$ op de grafiek ligt.

f Licht zonder berekening toe dat het punt $R(15, 6)$ niet op de grafiek ligt.

34 Op de grafiek van $y = 5\sqrt{x + 9}$ ligt het punt A met y-coördinaat 30.
Onderzoek wat de x-coördinaat van A is.

35 Met de vuistregel $d = 3{,}6\sqrt{h}$ kun je berekenen hoe ver je kunt kijken als je bij helder weer aan het strand over de zee uitkijkt. Hierin is d de kijkafstand in km en h de hoogte in meter waarop je oog zich boven de zeespiegel bevindt. Ga in deze opgave uit van helder weer.

a Noëlle kijkt vanaf een duin over de zee uit. Haar ooghoogte is 51,5 meter.
Is het zicht meer of minder dan 25 kilometer? Geef een berekening.

b Laurens staat op het strand en kijkt uit over de zee. Zijn ooghoogte is 175 cm.
Hoe ver kan Laurens kijken? Geef je antwoord in km en rond af op één decimaal.

c Carlijn beweert: 'Ga je twee keer zo hoog staan, dan kun je twee keer zo ver kijken'.
Ben je het met haar eens? Licht toe.

© Noordhoff Uitgevers

A 36

Februari 2012 begon met een vorstperiode met temperaturen van wel −20 °C. Zou het ijs dik genoeg worden om de Elfstedentocht te houden? Volgens de weerkundige Erwin is met de formule $d = 2 + 3{,}6\sqrt{t}$ de dikte van het ijs in cm te berekenen na t dagen.
Hierbij hoort $t = 0$ bij 1 februari om 0:00 uur.
Rond bij de vragen a en b zo nodig af op één decimaal.

a Hoeveel cm dik was het ijs op 5 februari om 12:00 uur?

b Maak een tabel en teken de grafiek. Ga tot $t = 10$.

c Schrijf de coördinaten op van het beginpunt van de grafiek. Welke informatie geeft dit punt?

d Voor een Elfstedentocht is een ijsdikte van 15 cm nodig. Op 13 februari viel de dooi in. Was de benodigde ijsdikte bereikt?

A 37

Tot haar 18e verjaardag is de lengte van Heleen te berekenen met de formule $l = 45 + 20\sqrt{2t}$. Hierin is l de lengte in cm en t de tijd in jaren vanaf de geboorte.
Geef bij de vragen a, b en c het antwoord in cm en rond af op gehelen.

a Hoe lang is Heleen op haar 8e verjaardag?

b Hoe lang is Heleen als ze 8 jaar en 3 maanden is?

c Hoeveel neemt haar lengte toe van haar 10e tot haar 14e verjaardag?

d Op het moment dat Heleen de lengte van 1 meter bereikte, stak haar vader de vlag uit. Hoe oud was Heleen toen?

e Heleen vraagt zich af hoe lang ze op haar 50e verjaardag zal zijn. Ze vult daarom $t = 50$ in. Geef commentaar.

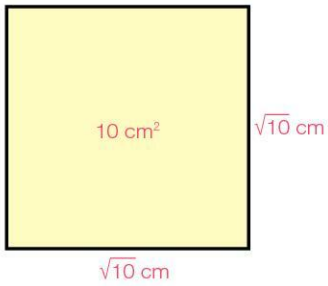
© Noordhoff Uitgevers

4.4 Wortels herleiden

O 38 Vul in.

a Van een vierkant met oppervlakte 10 cm^2 is de lengte van de zijde $\sqrt{10}$ cm, dus $(\sqrt{10})^2 = \ldots$

b Van een vierkant met oppervlakte 15 cm^2 is de lengte van de zijde $\sqrt{15}$ cm, dus $(\sqrt{15})^2 = \ldots$



figuur 4.13

O 39 Marleen wil $(\sqrt{5})^2$ berekenen. Ze zegt $\sqrt{5} \approx 2{,}24$, dus $(\sqrt{5})^2 \approx 2{,}24^2 = 5{,}0176$.

a Wat vind je hiervan? Wat komt er volgens jou uit $(\sqrt{5})^2$?

b Geef de uitkomsten van $(\sqrt{8})^2$, $(\sqrt{79})^2$, $(\sqrt{19\,500})^2$ en $(\sqrt{a})^2$.

Theorie A Het kwadraat van een wortel

Van een vierkant met oppervlakte 20 cm^2 is de lengte van de zijde $\sqrt{20}$ cm, dus $(\sqrt{20})^2 = 20$.

Het kwadraat van $\sqrt{a}$ is a, dus $(\sqrt{a})^2 = a$.

Je kunt dus uit het hoofd de uitkomst van $(\sqrt{58})^2$ opschrijven , namelijk $(\sqrt{58})^2 = 58$.

Omdat $(ab)^2 = a^2b^2$ is $(5\sqrt{2})^2 = 5^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50$.

En zo is $(-3\sqrt{5})^2 = (-3)^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5 = 45$, maar $-3(\sqrt{5})^2 = -3 \cdot 5 = -15$.

Verder is $3\sqrt{25} + (2\sqrt{5})^2 = 3 \cdot 5 + 2^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 15 + 4 \cdot 5 = 15 + 20 = 35$

en $(-4\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{4} = (-4)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2 = 16 \cdot 2 - 4 = 32 - 4 = 28$.

Voorbeeld

Bereken.

a $(5\sqrt{3})^2 - 8(\sqrt{2})^2$

b $(-5\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{49}$

Uitwerking

a $(5\sqrt{3})^2 - 8(\sqrt{2})^2 = 5^2 \cdot (\sqrt{3})^2 - 8 \cdot 2 = 25 \cdot 3 - 16 = 75 - 16 = 59$

b $(-5\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{49} = (-5)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 7 = 25 \cdot 2 - 14 = 50 - 14 = 36$

40 Bereken.

a $(3\sqrt{6})^2$

b $(-2\sqrt{7})^2$

c $5(\sqrt{3})^2$

d $-8(\sqrt{2})^2$

e $(\sqrt{11})^2 - 3^2$

f $(-\sqrt{10})^2$

$(\sqrt{a})^2 = a$
$(ab)^2 = a^2b^2$

© Noordhoff Uitgevers

A 41 Bereken.

a $(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{5})^2$

b $3\sqrt{9} + 7\sqrt{25}$

c $(-\sqrt{5})^2 - 5^2$

d $(5\sqrt{2})^2 - 3(\sqrt{6})^2$

e $-5\sqrt{81} - (3\sqrt{2})^2$

f $(-3\sqrt{2})^2 - 3(\sqrt{2})^2$

O 42

a Volgens Karin is $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ gelijk aan $\sqrt{8}$.
Controleer met je rekenmachine of ze gelijk heeft.

b Volgens Rianne is $\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$, maar volgens Theo is $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Wie heeft gelijk?

O 43

a Zoals $5a + 3a = 8a$, zo is $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = ...$

b Zoals $8a - 2a = 6a$, zo is $8\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = ...$

c Zoals $5a - a = ...$, zo is $5\sqrt{7} - \sqrt{7} = ...$

Theorie B Gelijksoortige wortels

Zoals je $3a + 5a$ kunt herleiden, zo kun je ook $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$ herleiden: $3a + 5a = 8a$, dus $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.
We noemen $3\sqrt{2}$ en $5\sqrt{2}$ **gelijksoortige wortels**.
Wortels zoals $3\sqrt{2}$ en $5\sqrt{3}$ zijn niet gelijksoortig.
Je kunt $3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ niet herleiden.
Ook $5 + \sqrt{2}$ kun je niet herleiden, maar $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

De som van gelijksoortige wortels kun je herleiden.
Zo is $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ en $\sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$.

Voorbeeld

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$

b $10\sqrt{11} - 6\sqrt{11}$

c $7\sqrt{3} - 11\sqrt{3}$

d $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

e $\sqrt{5} + \sqrt{5}$

f $3\sqrt{5} - \sqrt{5}$

Uitwerking

a $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$

b $10\sqrt{11} - 6\sqrt{11} = 4\sqrt{11}$

c $7\sqrt{3} - 11\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$

d $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ kan niet

e $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

f $3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

T 44 [▸▸ 47] Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $3\sqrt{17} - 5\sqrt{17}$

b $4\sqrt{7} + \sqrt{7}$

c $2\sqrt{11} + 2$

d $5\sqrt{5} - 6\sqrt{5}$

© Noordhoff Uitgevers

45 Herleid.

a $3\sqrt{7} + 5\sqrt{7}$
b $7\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$
c $7\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$
d $16\sqrt{7} - 9\sqrt{7}$
e $12\sqrt{2} + \sqrt{2}$
f $10\sqrt{10} - \sqrt{10}$

46 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $8\sqrt{6} + 7\sqrt{6}$
b $\sqrt{15} + \sqrt{15}$
c $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$
d $5\sqrt{7} - 9\sqrt{7}$
e $3\sqrt{6} + 3$
f $3\sqrt{6} - \sqrt{6}$

A 47 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $7\sqrt{13} + 13\sqrt{13}$
b $7\sqrt{13} - 13\sqrt{7}$
c $7\sqrt{13} - 7\sqrt{13}$
d $7\sqrt{13} - 13\sqrt{13}$
e $13\sqrt{13} + 13$
f $7\sqrt{7} - \sqrt{7}$

Op een bok

In Siddeburen was een bok
die machtsverhief en worteltrok.
Die bok heeft onlangs onverschrokken
de wortel uit zichzelf getrokken,
waarna hij zonder ongerief
zich weer in het kwadraat verhief.
Maar 't feit waardoor hij voort zal leven
is, dat hij achteraf nog even
de massa die hem huldigde
met vijf vermenigvuldigde.

De Dierkundige Dichtoefeningen
van Trijntje Fop
Uit Pennewips Nalatenschap
vergaard door Kees Stip.

O 48 Volgens Roeland is $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$ gelijk aan $\sqrt{15}$.
Controleer met je rekenmachine of Roeland gelijk heeft.

Theorie C Wortels vermenigvuldigen

Voor het vermenigvuldigen van wortels geldt de regel $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Wortels vermenigvuldig je volgens de regel $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Dus $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{21}$, $6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{5} = 12\sqrt{15}$ en $5\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = 5\sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30$.

Waarom is $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$?
Neem links en rechts het kwadraat.
Links: $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$
Rechts: $(\sqrt{ab})^2 = ab$
Het klopt.

$3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} =$
$3 \cdot \sqrt{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = 15\sqrt{6}$
$3 \cdot 5 = 15$
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

Let bij het herleiden van wortels op het verschil tussen optellen en vermenigvuldigen.

vermenigvuldigen	optellen
$3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{7} = 15\sqrt{14}$	$3\sqrt{2} + 5\sqrt{7}$ kan niet korter
$5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 15\sqrt{4} = 15 \cdot 2 = 30$	$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

Bij het herleiden van wortels laat je wortels als $\sqrt{13}$ en $5\sqrt{2}$ in het antwoord staan. Je gaat ze dus niet met je rekenmachine benaderen. Maar wortels als $\sqrt{36}$ en $7\sqrt{9}$ moet je vereenvoudigen, want $\sqrt{36} = 6$ en $7\sqrt{9} = 7 \cdot 3 = 21$.

© Noordhoff Uitgevers

Afspraak
Bij het herleiden laat je wortels zoals $\sqrt{38}$ en $5\sqrt{6}$ in het antwoord staan.
Maar wortels als $3\sqrt{25}$ moet je vereenvoudigen, want $3\sqrt{25} = 3 \cdot 5 = 15$.

Voorbeeld

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2}$ **c** $5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ **e** $5\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$

b $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ **d** $5\sqrt{3} - \sqrt{3}$ **f** $5\sqrt{11} - \sqrt{2}$

Uitwerking

a $2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{6}$ **d** $5\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

b $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ **e** $5\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30$

c $5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{9} = 5 \cdot 3 = 15$ **f** $5\sqrt{11} - \sqrt{2}$ kan niet

T 49 [▸▸ 52] Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{8}$ **c** $4\sqrt{5} \cdot 7\sqrt{7}$ **e** $5\sqrt{7} + 7\sqrt{5}$

b $3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$ **d** $3\sqrt{16} \cdot 2\sqrt{4}$ **f** $2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}$

50 Herleid.

a $2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{7}$ **c** $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ **e** $5\sqrt{8} \cdot 3\sqrt{8}$

b $2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3}$ **d** $5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{7}$ **f** $-5 \cdot 3\sqrt{10}$

51 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $7\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3}$ **d** $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ **g** $2\sqrt{9} - 3\sqrt{4}$

b $7\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ **e** $3\sqrt{11} - 11\sqrt{3}$ **h** $2\sqrt{9} \cdot 3\sqrt{4}$

c $7\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}$ **f** $3\sqrt{11} \cdot 11\sqrt{3}$ **i** $6\sqrt{7} - 7\sqrt{7}$

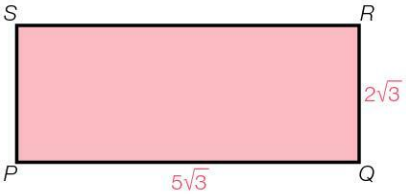
A 52 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $7\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$ **d** $3\sqrt{7} - \sqrt{7}$ **g** $5\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$

b $7\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ **e** $3\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7}$ **h** $6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

c $7\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3}$ **f** $(3\sqrt{7})^2$ **i** $6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{18}$

A 53 Zie de rechthoek *PQRS* in figuur 4.14. Geef de omtrek en de oppervlakte van de rechthoek. Herleid je antwoord.



figuur 4.14 De afmetingen zijn in cm.

© Noordhoff Uitgevers

54 Herleid.

a $8\sqrt{3} - \sqrt{3} + 6\sqrt{3}$

b $2\sqrt{7} - \sqrt{2} + \sqrt{7}$

c $3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$

d $3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10}$

e $(5\sqrt{2})^2 - 3\sqrt{16}$

f $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} - (-2\sqrt{3})^2$

O 55

a Bereken $(5\sqrt{2})^2$ en $(\sqrt{50})^2$.

b Is $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$?

c Bereken $(2\sqrt{6})^2$ en $(\sqrt{24})^2$.

d Is $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$?

Theorie D Factor voor het wortelteken brengen

In opgave 55 heb je gezien dat $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.
Je kunt dat ook als volgt begrijpen.
Je gebruikt dat $24 = 4 \cdot 6$.
Dus $\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.
En zo is $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.
We zeggen dat een **factor voor het wortelteken** is gebracht. Om een factor voor het wortelteken te brengen, heb je een kwadraat nodig.

Bij $\sqrt{30}$ lukt het niet om een factor voor het wortelteken te brengen. Want
$30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$ en bij de factoren 2, 3, 5, 6, 10 en 15 zit geen kwadraat.
Soms zijn er meerdere mogelijkheden zoals bij $\sqrt{32}$.
$32 = 4 \cdot 8$, dus $\sqrt{32} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$, maar ook is $32 = 16 \cdot 2$, dus $\sqrt{32} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
In het laatste geval is *een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken gebracht.*

Afspraak
Bij de opdracht 'herleid' breng je een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken.

Ken je kwadraten!

$4 = 2^2$	$81 = 9^2$
$9 = 3^2$	$100 = 10^2$
$16 = 4^2$	$121 = 11^2$
$25 = 5^2$	$144 = 12^2$
$36 = 6^2$	$169 = 13^2$
$49 = 7^2$	$196 = 14^2$
$64 = 8^2$	$225 = 15^2$

$\sqrt{24} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

kwadraat van 2

Om een factor voor het wortelteken te brengen, heb je een kwadraat nodig.

Voorbeeld

Herleid.

a $\sqrt{75}$

b $2\sqrt{48}$

Uitwerking

a $\sqrt{75} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

b $2\sqrt{48} = 2 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

© Noordhoff Uitgevers

T 56 [▸▸ 60] Herleid.

a $4\sqrt{90}$ **b** $\frac{1}{3}\sqrt{27}$ **c** $-2\sqrt{72}$

57 Herleid.

a $\sqrt{28} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = \ldots$ **c** $\sqrt{50} = \ldots$ **e** $\sqrt{27} = \ldots$

b $\sqrt{12} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{\ldots} = \ldots$ **d** $\sqrt{63} = \ldots$ **f** $\sqrt{45} = \ldots$

58 Herleid.

a $\sqrt{120}$ **c** $\sqrt{108}$ **e** $\sqrt{216}$

b $\sqrt{288}$ **d** $\sqrt{200}$ **f** $\sqrt{800}$

59 Herleid.

a $5\sqrt{18}$ **c** $2\sqrt{44}$ **e** $3\sqrt{90}$

b $\frac{1}{3}\sqrt{54}$ **d** $8\sqrt{60}$ **f** $-5\sqrt{12}$

A 60 Herleid.

a $7\sqrt{18}$ **d** $\frac{1}{2}\sqrt{64}$ **g** $4\sqrt{40}$

b $\sqrt{88}$ **e** $8\sqrt{63}$ **h** $4\sqrt{400}$

c $5\sqrt{40}$ **f** $4\sqrt{4}$ **i** $4\sqrt{4000}$

+

61 $\sqrt{12} + \sqrt{75} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

Herleid.

a $\sqrt{54} + \sqrt{24}$ **c** $\sqrt{8} + 3\sqrt{2}$ **e** $3\sqrt{20} - \sqrt{48}$

b $\sqrt{50} + \sqrt{32}$ **d** $\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{27}$ **f** $\sqrt{24} - 8\sqrt{6} + 2\sqrt{54}$

O 62 Vul in.

a Zoals $a(b + c) = ab + ac$, zo is $\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \sqrt{6} + \ldots$

b Zoals $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$, zo is
$(5 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{5}) = 15 + 5\sqrt{5} + \ldots + \ldots$

$\sqrt{2} \cdot 3 = 3\sqrt{2}$

Theorie E Haakjes wegwerken bij wortels

Uit $a(b + c) = ab + ac$ volgt $\sqrt{3}(2 + 5\sqrt{2}) = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{6}$.

Uit $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ volgt
$(1 + 3\sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{4} = 2 + 5\sqrt{2} - 6 = -4 + 5\sqrt{2}$.

Uit $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ volgt
$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$.

Uit $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ volgt
$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 =$
$3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$.

Merkwaardige producten
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Herleid.

a $2\sqrt{3}(5 - 4\sqrt{3})$

b $(3\sqrt{5} + 3)(3\sqrt{5} - 3)$

c $(8 + \sqrt{3})^2$

Uitwerking

a $2\sqrt{3}(5 - 4\sqrt{3}) = 10\sqrt{3} - 8\sqrt{9} = 10\sqrt{3} - 8 \cdot 3 = 10\sqrt{3} - 24$

b $(3\sqrt{5} + 3)(3\sqrt{5} - 3) = (3\sqrt{5})^2 - 3^2 = 9 \cdot 5 - 9 = 45 - 9 = 36$

c $(8 + \sqrt{3})^2 = 8^2 + 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 64 + 16\sqrt{3} + 3 = 67 + 16\sqrt{3}$

63 Herleid.

a $\sqrt{5}(3\sqrt{5} - \sqrt{2})$

b $2\sqrt{3}(\sqrt{2} - 2\sqrt{5})$

c $2\sqrt{5}(3\sqrt{2} - 4\sqrt{5})$

d $(5 + 2\sqrt{3})(6 - \sqrt{3})$

e $(2\sqrt{2} - 5)(2 - \sqrt{6})$

f $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{2} + 4\sqrt{3})$

64 Herleid. Gebruik de merkwaardige producten.

a $(5 + \sqrt{2})^2$

b $(5 - \sqrt{2})(5 + \sqrt{2})$

c $(3 - 2\sqrt{3})(3 + 2\sqrt{3})$

d $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{5})^2$

e $(5\sqrt{2} + 3)^2$

f $(\sqrt{6} - \sqrt{5})^2$

A 65 Herleid.

a $5\sqrt{3}(2\sqrt{6} - \sqrt{3})$

b $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$

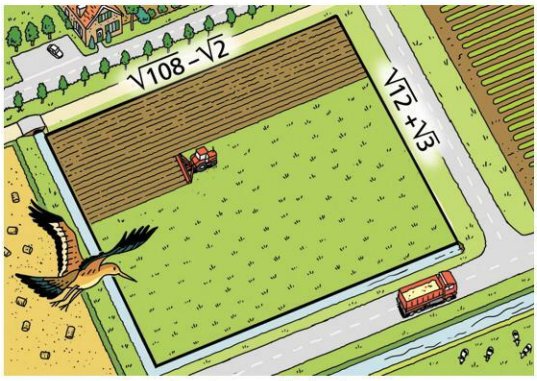
c $(3\sqrt{3} - \sqrt{6})(3\sqrt{3} + \sqrt{6})$

d $(6 + 5\sqrt{2})^2$

e $(3\sqrt{5} - 10)^2$

f $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$

A 66 Bereken de omtrek en de oppervlakte van het rechthoekige weiland in figuur 4.15. Herleid je antwoorden.



figuur 4.15 De afmetingen zijn in decameter.

© Noordhoff Uitgevers

4.5 Soorten getallen

O 67 Je kunt een breuk als een decimaal getal schrijven.
Zo is $\frac{3}{8} = 0{,}375$. Zie hiernaast.
Schrijf als een decimaal getal.

a $\frac{7}{20}$ **c** $\frac{50}{32}$

b $\frac{1}{25}$ **d** $3\frac{5}{16}$

```
8 / 3,000 \ 0,375
  24
   60
   56
    40
    40
     0
```

O 68 Hiernaast staat de staartdeling die bij $\frac{5}{6}$ hoort.
De staartdeling houdt nooit op. Je krijgt $\frac{5}{6} = 0{,}83333...$
Maak een staartdeling bij de volgende breuken en schrijf de eerste zes decimalen op.

a $\frac{2}{3}$ **b** $\frac{5}{11}$

```
6 / 5,000... \ 0,833...
  48
   20
   18
    20
    18
     20
     ⋮
```

Theorie A Repeterende breuken

De getallen 0, 1, 2, 3, 4, … zijn de **natuurlijke getallen**.
Dus ook 18 en 723 zijn natuurlijke getallen.
De getallen …, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, … zijn de **gehele getallen**.
En verder ken je nog de breuken. Een breuk bestaat uit een teller en een noemer. De teller en de noemer van een breuk zijn gehele getallen, waarbij de noemer niet 0 mag zijn.

Er zijn tien cijfers, namelijk 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9.

In de opgaven 67 en 68 heb je gezien hoe je een breuk kunt schrijven als een decimaal getal.
Bij $\frac{3}{8} = 0{,}375$ krijg je precies drie decimalen.
Maar bij $\frac{5}{6} = 0{,}8333...$ krijg je oneindig veel decimalen.
En zo is $\frac{22}{27} = 0{,}814814814...$ en $\frac{4}{11} = 0{,}363636...$
Een getal met een groepje decimalen dat zich steeds herhaalt, heet een **repeterende breuk**.

Voor $\frac{22}{27} = 0{,}814814814...$ bestaat de **streepnotatie** $\frac{22}{27} = 0{,}\overline{814}$.
Er staat een streep boven het rijtje decimalen dat zich steeds herhaalt.
En zo is $\frac{4}{11} = 0{,}363636... = 0{,}\overline{36}$ en $\frac{5}{6} = 0{,}8333... = 0{,}8\overline{3}$. Let op het verschil tussen $0{,}\overline{356} = 0{,}356356356...$ en $0{,}3\overline{56} = 0{,}356566...$

69 Schrijf als een decimaal getal. Gebruik de streepnotatie.

a $\frac{2}{9}$ **b** $\frac{17}{30}$ **c** $\frac{5}{7}$ **d** $\frac{17}{27}$

© Noordhoff Uitgevers

70 Wat betekent

a $0,\overline{5}$
b $0,0\overline{5}$
c $0,\overline{05}$
d $0,3\overline{52}$
e $0,\overline{352}$
f $0,42\overline{17}$
g $0,4\overline{217}$
h $0,\overline{4217}$

71 Hiernaast zie je hoe je $0,\overline{12}$ als een breuk kunt schrijven. Je ziet $0,\overline{12} = \frac{4}{33}$.

Schrijf als breuk.

a $0,\overline{52}$
b $1,\overline{5}$
c $0,\overline{45}$
d $3,1\overline{6}$

Stel $a = 0,\overline{12}$,
dus $a = 0,12\,12\,12\,12\ldots$
Dan is
$100a = 12,12\,12\,12\,12\ldots$
$a = \quad 0,12\,12\,12\,12\ldots$
$99a = 12$
$a = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

O 72 Met een computer zijn de eerste 100 decimalen van $\frac{1}{17}$ en $\sqrt{2}$ berekend.

$\frac{1}{17} = 0,05882352941176470588235294117647058823529411764705882352941176470588$

$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073247846210703885038753432764157273$

a Waarom is $\frac{1}{17}$ een repeterende breuk? Uit hoeveel decimalen bestaat het rijtje dat zich steeds herhaalt?
b Kun je bij de 100 decimalen van $\sqrt{2}$ een regelmaat ontdekken?

Theorie B Rationale en irrationale getallen

Getallen die te schrijven zijn als breuk, heten **rationale getallen**.
Zo is $\frac{1}{17}$ een rationaal getal. En ook $5\frac{1}{3}$ is een rationaal getal, want $5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$. Verder zijn 6 en -8 rationale getallen, want $6 = \frac{6}{1}$ en $-8 = \frac{-8}{1}$. Je ziet dat alle gehele getallen ook rationale getallen zijn.

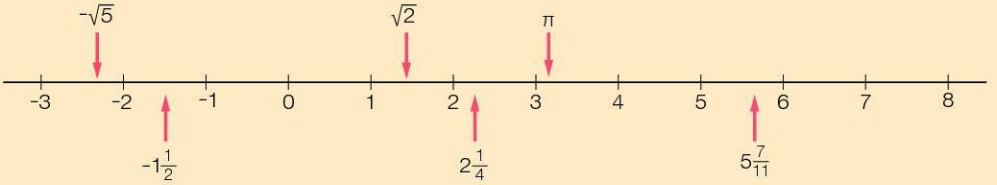
De rationale getallen zijn alle getallen die te schrijven zijn als breuk.

Er zijn ook getallen die niet te schrijven zijn als breuk. Van het getal $\sqrt{2}$ kun je de computer net zo veel decimalen laten berekenen als je wilt. Het merkwaardige is dat bij deze decimalen geen enkele regelmaat aanwezig is. Weet je de 100^e decimaal, dan is de 101^e decimaal volslagen onbekend. In de oneindig vele decimalen van $\sqrt{2}$ komt geen groepje voor dat repeteert. $\sqrt{2}$ is dus niet te schrijven als breuk, dus $\sqrt{2}$ is geen rationaal getal. $\sqrt{2}$ heet een **irrationaal getal**.

© Noordhoff Uitgevers

De irrationale getallen zijn alle getallen die niet te schrijven zijn als breuk.

Wortels zoals $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$ en $\sqrt{0{,}9}$ zijn voorbeelden van irrationale getallen. Een ander bekend irrationaal getal is π.
Alle irrationale en rationale getallen vormen samen de **reële getallen**.
Je hebt dan alle getallen die op de getallenlijn liggen.



73 **a** Is -12 een natuurlijk getal? En een geheel getal? En een rationaal getal?
b Is $\sqrt{9}$ een natuurlijk getal? En een geheel getal? En een rationaal getal?
c Is $2\frac{1}{5}$ een natuurlijk getal? En een geheel getal? En een rationaal getal?
d Is $\sqrt{5}$ een natuurlijk getal? En een geheel getal? En een rationaal getal?

$\sqrt{16}$ is een rationaal getal, want $\sqrt{16} = 4$. Maar $\sqrt{17}$ is irrationaal, want $\sqrt{17}$ kun je niet schrijven als breuk.

74 Gegeven zijn de getallen $5\frac{2}{3}$, $\frac{18}{6}$, $-\sqrt{49}$, $\sqrt{3}$, 2,847 en $\sqrt{\frac{1}{9}}$.
a Welke van deze getallen zijn natuurlijke getallen?
b Welke van deze getallen zijn gehele getallen?
c Welke van deze getallen zijn rationale getallen?
d Schrijf de getallen in volgorde van klein naar groot.

75 **a** Welke van de volgende getallen zijn rationaal en welke irrationaal?
$-5\frac{1}{4}$ $3\frac{2}{7}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{16}$ π $\sqrt{0{,}25}$ $\sqrt{0{,}9}$
b Zet de getallen van vraag a in volgorde van klein naar groot.

A **76** Neem de tabel over en vul *ja* of *nee* in.

	-3	$\sqrt{25}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{2\frac{1}{4}}$	$3{,}\overline{612}$	$\sqrt{0{,}4}$	$\sqrt{0{,}09}$
natuurlijk getal							
geheel getal							
rationaal getal							
irrationaal getal							
reëel getal							

© Noordhoff Uitgevers

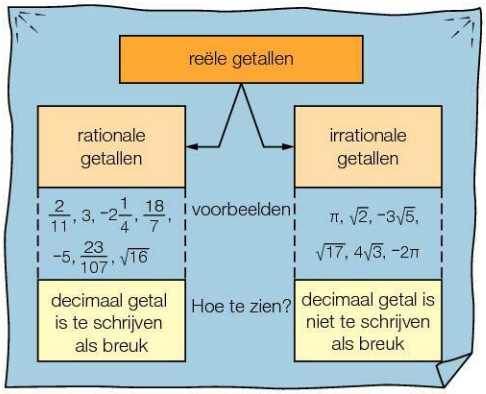
77 Gegeven is
$a = 2{,}01\ 001\ 0001\ 00001\ 000001\ \ldots$

a Welke regelmaat zit er in de decimalen?

b Repeteren de decimalen van a?

c Is a een irrationaal getal?

d Gea heeft de eerste 100 decimalen van a opgeschreven. Zij gaat verder en stopt zodra er een 1 staat.
Hoeveel decimalen moet Gea nog opschrijven?



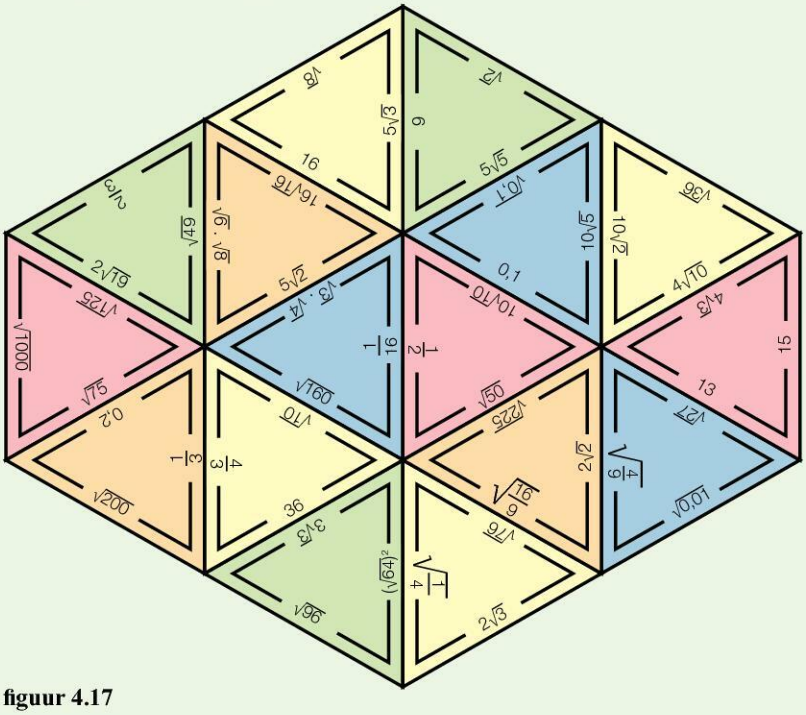
figuur 4.16

78 **a** Welke van de volgende getallen zijn irrationaal? Licht je antwoord toe.
$p = 0{,}12\ 13\ 14\ 15\ 16\ \ldots$
$q = 0{,}12\ 112\ 1112\ 11112\ \ldots$
$r = 0{,}121\ 121\ 121\ 121\ \ldots$

b Geef de 200e decimaal van het irrationale getal
$s = 0{,}1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ \ldots$

Creatief Puzzelen met wortels

[▸ WERKBOEK] De zeshoek in de figuur hieronder bestaat uit 16 gelijkzijdige driehoeken. Knip de driehoeken uit en leg er een grote driehoek mee. Doe het zo, dat de getallen bij aangrenzende zijden gelijk zijn. Plak de verkregen driehoek in je schrift.

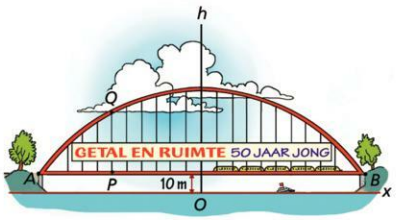


figuur 4.17

© Noordhoff Uitgevers

Gemengde opgaven

1 De Werkspoorbrug is een spoorbrug over het Amsterdam-Rijnkanaal in Utrecht. Zie figuur 4.18. De formule die bij de boog hoort is $h = -0{,}0032x^2 + 50$. Hierin zijn x en h in meter.



figuur 4.18

- **a** Hoeveel meter is het hoogste punt boven het wateroppervlak?
- **b** De ijzeren staaf PQ hoort bij $x = -80$. Bereken de lengte van de staaf.
- **c** Is de afstand tussen de punten A naar B meer of minder dan 260 meter? Licht je antwoord toe met een berekening.
- **d** Op 18 meter boven het spoor hangt een spandoek. Zoek eens uit hoe breed het spandoek is.

2
- **a** Onderzoek met een berekening of het punt $A\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ op de grafiek van $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ ligt.
- **b** Onderzoek met een berekening of het punt $B(8, 9)$ op de grafiek van $y = 3\sqrt{\frac{1}{2}x} + 5$ ligt.

3 Een dambord bestaat uit 100 velden en een rand. De oppervlakte van de 100 velden samen is 12 dm^2.
De oppervlakte van de rand is 2,5 dm^2.

- **a** Bereken in cm de afmetingen van één veld. Rond af op één decimaal.
- **b** Bereken in cm de breedte van de rand. Rond af op één decimaal.

4 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

- **a** $3\sqrt{9} + 5\sqrt{16}$
- **b** $(5\sqrt{20})^2 + 5(\sqrt{20})^2$
- **c** $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{8} - 7\sqrt{16}$
- **d** $8\sqrt{3} - \sqrt{3}$
- **e** $\sqrt{7} + \sqrt{7}$
- **f** $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{5}$
- **g** $(4\sqrt{3})^2 - (-2\sqrt{5})^2$
- **h** $-6\sqrt{36} - 8(\sqrt{3})^2$
- **i** $5\sqrt{10} + 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$
- **j** $3^2 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3}$
- **k** $\sqrt{(-4)^2} + (\sqrt{-4})^2$
- **l** $(-\sqrt{7})^2 - 2(\sqrt{7-2})^2$

5 Herleid.

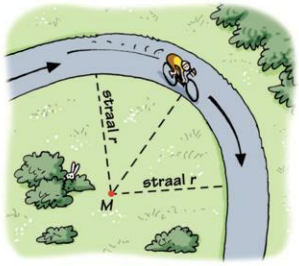
- **a** $\sqrt{300}$
- **b** $\sqrt{125}$
- **c** $2\sqrt{9000}$

6 Herleid.

- **a** $3\sqrt{2}(\sqrt{8} + \sqrt{10})$
- **b** $(2\sqrt{7} + 3)^2$
- **c** $(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5})(3\sqrt{3} - 5\sqrt{5})$
- **d** $\left(3\sqrt{\frac{1}{3}} + 2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(3\sqrt{\frac{1}{3}} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

© Noordhoff Uitgevers

7 Iedereen weet dat je niet te snel door een bocht moet fietsen, want dat kan vervelende valpartijen geven. De hoogste snelheid waarmee je een bocht met een straal van r meter nog probleemloos kunt nemen, heet de veilige snelheid. Met de formule $v = 3{,}5\sqrt{5r}$ is de veilige snelheid v in km per uur te berekenen.

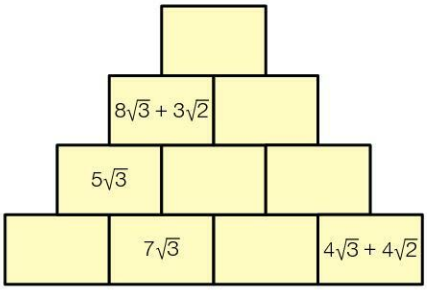


figuur 4.19

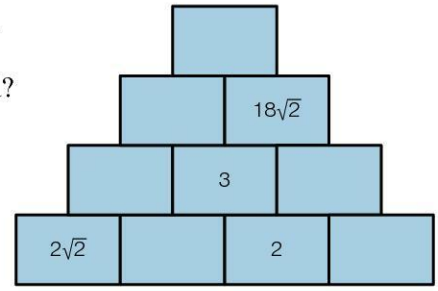
- **a** Een bocht heeft een straal van 15 meter.
  Bereken de veilige snelheid. Rond af op gehelen.
- **b** Aart fietst door een bocht met een straal van 12 meter en Ben fietst door een bocht met een twee keer zo grote straal.
  Onderzoek of bij de bocht van Ben een twee keer zo grote veilige snelheid hoort als bij de bocht van Aart.
- **c** Diana vliegt met een snelheid van 25 km per uur uit de bocht.
  Onderzoek of de straal van de bocht minder dan 10 meter is.
- **d** Cees neemt een bocht met een veilige snelheid van 21 km per uur.
  Onderzoek welke straal de bocht kan hebben.

8 [▸ WERKBOEK]

- **a** In de optelpiramide in figuur 4.20a staat in elk vakje de som van de getallen uit de twee vakjes eronder.
  Vul de piramide verder in.
- **b** In de vermenigvuldigingspiramide in figuur 4.20b staat in elk vakje het product van de getallen uit de twee vakjes eronder.
  Vul de piramide verder in.



a



b

figuur 4.20

9

- **a** Schrijf de getallen $\frac{6}{11}$ en $\frac{4}{13}$ als decimaal getal.
  Gebruik de streepnotatie.
- **b** Welke van de volgende getallen zijn irrationaal?
  $-2{,}3 \quad \sqrt{3{,}6} \quad \frac{1}{3}\pi \quad 8{,}\overline{37} \quad \sqrt{64}$

10

- **a** Het punt $A(-4, q)$ ligt op de parabool $y = \frac{3}{4}x^2 - 3$. Bereken q.
- **b** Het punt $B(2, 12)$ ligt op de grafiek van $y = ax^2 + 3$. Bereken a.
- **c** Het punt $C(18, 23)$ ligt op de grafiek van $y = 5 + p\sqrt{2x}$. Bereken p.

11 Herleid.

- **a** $\sqrt{28} + \sqrt{63}$
- **b** $\sqrt{40} + \sqrt{90}$
- **c** $-2\sqrt{5} + \sqrt{20}$
- **d** $\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{72}$
- **e** $-\sqrt{6} + \sqrt{24} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{48}$
- **f** $2\sqrt{27} - \sqrt{108} + 3\sqrt{12}$
- **g** $\sqrt{7\frac{1}{9}} - 1\frac{1}{3}$
- **h** $3\sqrt{5\frac{4}{9}} - (2\sqrt{2})^2$
- **i** $2\sqrt{20\frac{1}{4}} - 3\sqrt{\frac{32}{72}}$

© Noordhoff Uitgevers

Samenvatting

4.1 Kwadratische formules

blz 138

De grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ is een dalparabool, want het getal voor x^2 is positief.
De grafiek van $y = -3x^2 + 2$ is een bergparabool, want het getal voor x^2 is negatief.
Om na te gaan of het punt $P(-12, -73)$ op de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ ligt, vul je $x = -12$ in de formule in en controleer je of je $y = -73$ krijgt.
$x = -12$ invullen geeft $y = \frac{1}{2} \cdot (-12)^2 - 1 = \frac{1}{2} \cdot 144 - 1 = 72 - 1 = 71 \neq -73$,
dus P ligt niet op de grafiek.

4.2 Rekenen met wortels

blz 142

Van een vierkant met oppervlakte 8 is de lengte van de zijde $\sqrt{8}$.
Met de rekenmachine bereken je $\sqrt{8} \approx 2{,}83$.
We spreken af dat de wortel van een getal niet negatief is.

blz 144

Sommige wortels moet je zonder rekenmachine kunnen berekenen.
Zo is $\sqrt{1600} + \sqrt{900} = 40 + 30 = 70$.

En $\sqrt{1600 + 900} = \sqrt{2500} = 50$.

Verder is $5\sqrt{144} = 5 \cdot 12 = 60$.

blz 145

$\sqrt{-25}$ bestaat niet, want er is geen getal waarvan het kwadraat -25 is.

$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{2500} = 50$
$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$
$\sqrt{-25}$ bestaat niet

4.3 Wortelformules

blz 146

Een voorbeeld van een wortelformule is $y = 5 + 3\sqrt{x}$.
Bij $x = 16$ hoort $y = 5 + 3\sqrt{16} = 5 + 3 \cdot 4 = 5 + 12 = 17$.
Bij deze formule mag je voor x geen negatief getal invullen, want de wortel van een negatief getal bestaat niet.

Bij $x = 0$ hoort $y = 5 + 3\sqrt{0} = 5 + 3 \cdot 0 = 5 + 0 = 5$.
Het punt (0, 5) is het beginpunt van de grafiek.

4.4 Wortels herleiden

blz 149

$(\sqrt{a})^2 = a$, dus $(\sqrt{7})^2 = 7$.

$(ab)^2 = a^2b^2$

$(5\sqrt{2})^2 = 5^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50$ en $5(\sqrt{2})^2 = 5 \cdot 2 = 10$.

blz 150

De som van gelijksoortige wortels kun je herleiden. Zo is $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$, maar $3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ kan niet herleid worden.

In de som $3\sqrt{4} + 6\sqrt{9}$ zijn de wortels niet gelijksoortig, maar kun je de som wel herleiden:
$3\sqrt{4} + 6\sqrt{9} = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 6 + 18 = 24$.

© Noordhoff Uitgevers

blz 151 Een vermenigvuldiging van wortels kun je altijd herleiden.
Zo is $3\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} = 6\sqrt{49} = 6 \cdot 7 = 42$ en $6\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{7} = 30\sqrt{21}$.

blz 153 Omdat $54 = 9 \cdot 6$ is $\sqrt{54} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$. Hiermee is bij $\sqrt{54}$ de factor 3 voor het wortelteken gebracht.
Bij $\sqrt{32}$ kun je de factor 4 voor het wortelteken brengen:
$\sqrt{32} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
Bij $\sqrt{14}$ kun je geen factor voor het wortelteken brengen.
Bij de opdracht 'herleid' breng je een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken. Geef dus niet $\sqrt{12}$ als antwoord, maar $\sqrt{12} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Ook vormen als $\sqrt{49}$ en $5\sqrt{16}$ laat je niet in het antwoord staan, want $\sqrt{49} = 7$ en $5\sqrt{16} = 5 \cdot 4 = 20$.

blz 154
$5\sqrt{18} - 3\sqrt{8} = 5 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} =$
$5 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 15\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$
$\sqrt{3}(2 - 5\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{9} = 2\sqrt{3} - 5 \cdot 3 = 2\sqrt{3} - 15$
$(5\sqrt{2} - 3)(5\sqrt{2} + 3) = (5\sqrt{2})^2 - 3^2 = 50 - 9 = 41$
$(5 + \sqrt{3})^2 = 25 + 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + 3 = 28 + 10\sqrt{3}$

Merkwaardige producten
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

4.5 Soorten getallen

blz 156 Een breuk bestaat uit een teller en een noemer. De teller en de noemer van een breuk zijn gehele getallen, waarbij de noemer niet 0 mag zijn.
Elke breuk is te schrijven als een decimaal getal. Het decimale getal dat bij een breuk hoort
- heeft een eindig aantal decimalen, zoals $2\frac{3}{4} = 2{,}75$, of
- is repeterend, zoals $\frac{7}{22} = 0{,}318\,18\,18\,... = 0{,}3\overline{18}$.

blz 157 Getallen die te schrijven zijn als breuk heten rationale getallen. Voorbeelden van rationale getallen zijn $2\frac{1}{2}$, $\frac{6}{11}$, 0, 7, -19 en $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$.

Getallen die niet te schrijven zijn als breuk heten irrationale getallen. Voorbeelden zijn π en $\sqrt{13}$.

Maar $\sqrt{0{,}16}$ is rationaal want $\sqrt{0{,}16} = \sqrt{\frac{16}{100}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Alle rationale en irrationale getallen vormen samen de reële getallen.

© Noordhoff Uitgevers

Diagnostische toets

4.1 Kwadratische formules

1 Gegeven is de formule $y = -2x^2 + 6$.

1 **a** Is de grafiek een dal- of een bergparabool? Licht toe.

b Op de grafiek ligt het punt P met x-coördinaat 5.
Bereken de y-coördinaat van P.

c Onderzoek met een berekening of het punt $Q(-8, 134)$ op de grafiek ligt.

2 **a** Het punt $A(-6, p)$ ligt op de grafiek van $y = -4x^2 + 12$.
Bereken p.

2 **b** Het punt $B(8, -32)$ ligt op de grafiek van $y = ax^2$.
Bereken a.

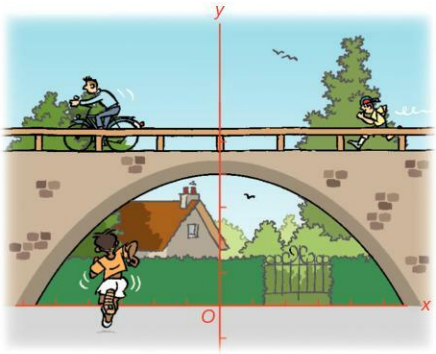
c Het punt $C(-2, -12)$ ligt op de grafiek van $y = -x^2 + b$.
Bereken b.

3 Bij de onderkant van het viaduct in figuur 4.21 hoort de formule $h = -0{,}125x^2 + 4$. Hierbij zijn h en x in meter.

3 **a** Bereken de grootste hoogte onder het viaduct.

b Een vrachtwagen is 3 meter breed en 3,75 meter hoog.
Onderzoek of de vrachtwagen onder het viaduct door kan rijden.

c Onderzoek met een berekening of het viaduct breder is dan 11 meter.



figuur 4.21

4.2 Rekenen met wortels

4 Een vierkant grasveld heeft een oppervlakte van 250 m^2. Om het grasveld loopt een voetpad met een breedte van 2,5 meter.
Bereken hoeveel m^2 de oppervlakte van het voetpad is. Rond af op twee decimalen.

4

5 Bereken.

5 **a** $\sqrt{81} + \sqrt{25}$

b $\sqrt{2500 - 900}$

c $5\sqrt{144} + 2\sqrt{9}$

d $\sqrt{225} + \sqrt{196}$

e $\sqrt{169 - 25}$

f $8\sqrt{9^2}$

6 Bereken.

6 **a** $3\sqrt{\frac{25}{36}} + \sqrt{\frac{1}{4}}$

b $6\sqrt{\frac{10}{1000}} - \sqrt{1\frac{24}{25}}$

© Noordhoff Uitgevers

4.3 Wortelformules

7 Gegeven is de formule $y = 5 + \sqrt{0{,}3x}$.
7 Bereken y voor $x = 30$.

b Gegeven is de formule $y = 8\sqrt{x + 11}$.
Bereken y voor $x = 25$.

8 Niels loopt op een loopband. De loopband kan op allerlei
8 snelheden worden ingesteld. Het aantal stappen N per minuut dat Niels zet bij een snelheid van v m/s is te berekenen met de formule $N = 120\sqrt{0{,}81v}$.

a Hoeveel stappen per minuut zet Niels bij een snelheid van 2,2 m/s? Rond af op gehelen.

b De band is ingesteld op een snelheid van 1,8 m/s. Niels loopt 10 minuten op de band. Bereken hoeveel stappen Niels zet.

c Volgens Niels zet hij twee keer zoveel stappen als hij zijn snelheid verdubbelt. Ben jij het met hem eens? Licht toe.

4.4 Wortels herleiden

9 Herleid.
9 **a** $(5\sqrt{3})^2$ **c** $-4(\sqrt{6})^2$ **e** $3(\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2$
b $6(\sqrt{2})^2$ **d** $(-3\sqrt{7})^2$ **f** $-3\sqrt{16} + (-2\sqrt{5})^2$

10 Herleid.
10, 11 **a** $5\sqrt{2} - \sqrt{2}$ **c** $3\sqrt{8} \cdot 5\sqrt{2}$ **e** $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$
b $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3}$ **d** $-8\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ **f** $\sqrt{5} + \sqrt{5}$

11 Herleid.
12 **a** $\sqrt{24}$ **b** $\sqrt{32}$ **c** $3\sqrt{500}$

12 Herleid.
13 **a** $\sqrt{500} + \sqrt{45}$ **b** $\sqrt{108} - 2\sqrt{27}$ **c** $3\sqrt{24} + 2\sqrt{54} - 5\sqrt{6}$

13 Herleid.
14 **a** $(3 + \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})$ **b** $(3 - 2\sqrt{2})^2$ **c** $(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$

4.5 Soorten getallen

14 Schrijf de getallen $\frac{5}{11}$ en $\frac{5}{27}$ als decimale getallen. Gebruik de
15 streepnotatie.

15 Gegeven zijn de getallen 3,62, π, $-\sqrt{49}$, 0, $\sqrt{2}$, $2\frac{1}{6}$, $2\sqrt{5}$ en $\frac{12}{3}$.
16 **a** Welke van deze getallen zijn rationaal? En welke zijn irrationaal?

b Schrijf de getallen in volgorde van klein naar groot.

© Noordhoff Uitgevers

Herhaling

4.1 Kwadratische formules

1 Gegeven is de formule $y = 2x^2 - 6$.

a Hoe zie je aan de formule dat de grafiek een dalparabool is?

b Op de grafiek ligt het punt A met x-coördinaat 6.
Om de y-coördinaat van A te berekenen, vul je $x = 6$ in de formule in.
Bereken de y-coördinaat van A.

c Om te controleren of het punt $B(-7, 92)$ op de grafiek ligt, vul je $x = -7$ in de formule in en kijk je of je $y = 92$ krijgt. Doe dat. Ligt B op de grafiek?

d Welke van de volgende punten liggen op de grafiek? Licht je antwoord steeds toe met een berekening.
$C\left(-\frac{1}{2}, -6\frac{1}{2}\right)$, $D(-5, -56)$, $E(-10, 194)$, $F(25, 1243)$

Het kwadraat van -7 is $(-7)^2 = 49$.
Denk aan de haakjes om -7.

2 Als je weet dat het punt $A(3, -18)$ op de grafiek van $y = ax^2$ ligt, dan kun je a berekenen. Je vult $x = 3$ en $y = -18$ in de formule in. Je krijgt $a \cdot 3^2 = -18$ ofwel $9a = -18$. Je ziet nu dat $a = -2$.

a Het punt $P(4, 48)$ ligt op de grafiek van $y = ax^2$.
Bereken a.

b Het punt $R(-3, 17)$ ligt op de grafiek van $y = x^2 + b$.
Bereken b.

c Bereken p als je weet dat het punt $S(8, p)$ op de grafiek van $y = -2x^2 + 7$ ligt.

3 In Valencia staat het grootste aquarium van Europa. Het gebouw, de Oceanogràfic, bestaat uit zes koepels die samen een waterlelie vormen. In de koepel op de foto is een parabool te herkennen. Bij deze parabool hoort de formule $h = -1{,}4x^2 + 12{,}6$. Hierin zijn x en h in meter.

a Neem $x = 0$ en bereken h. Hoe hoog is de koepel?

b Bereken h voor $x = -2$.

c Bereken h voor $x = 3$. Hoe breed is de koepel op de grond?

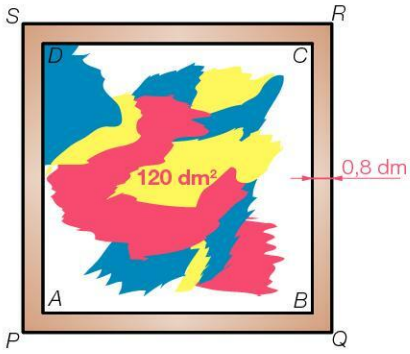
figuur 4.22

© Noordhoff Uitgevers

4.2 Rekenen met wortels

4 Om een vierkant schilderij met een oppervlakte van 120 dm^2 zit een lijst met een breedte van 0,8 dm. Zie figuur 4.23.
Uit opp = 120 dm^2 volgt $AB = \sqrt{120}$ dm.

a Bereken AB. Rond af op drie decimalen.
b Hoeveel dm is PQ? Rond af op twee decimalen.
c Hoeveel dm^2 is de oppervlakte van het vierkant $PQRS$? Rond af op twee decimalen.
d Hoeveel dm^2 is de oppervlakte van de lijst? Rond af op gehelen.



figuur 4.23

5 Sommige wortels moet je zonder rekenmachine kunnen berekenen. Hiernaast staan er enkele.

$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ eerst worteltrekken
$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ eerst 9 en 16 optellen

Verder is $3\sqrt{25} = 3 \cdot 5 = 15$.

$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{81} = 9$
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{100} = 10$

Bereken. Schrijf de tussenstappen op.

a $\sqrt{9 + 40}$
b $2\sqrt{9} + 40$
c $2\sqrt{36} + 64$
d $6\sqrt{400} - \sqrt{100}$

6 $\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$, want $\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$.

Verder is $\sqrt{3\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ en $\sqrt{\frac{12}{75}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$.

Bereken.

a $\sqrt{1\frac{13}{36}}$
b $\sqrt{\frac{3}{300}}$
c $3\sqrt{2\frac{7}{9}}$
d $\sqrt{\frac{8}{50}} - \sqrt{5\frac{19}{25}}$

4.3 Wortelformules

7 Een voorbeeld van een wortelformule is $y = 4 + \sqrt{5x}$.
Bij $x = 20$ hoort $y = 4 + \sqrt{5 \cdot 20} = 4 + \sqrt{100} = 4 + 10 = 14$.

a Gegeven is de formule $y = 3 + 2\sqrt{x}$.
Bereken y voor $x = 64$.
b Gegeven is de formule $y = 7 + \sqrt{3x}$.
Bereken y voor $x = 0$.
c Gegeven is de formule $y = 3\sqrt{x + 4}$.
Bereken y voor $x = 140$.

© Noordhoff Uitgevers

8 Als je in een waterput een steen laat vallen, hoor je even later een plons. Hoe dieper het water staat, des te langer duurt het tot je de plons hoort. Staat het water in de put d meter diep, dan duurt het t seconden voordat je de plons hoort. Met de formule $t = 1{,}5\sqrt{0{,}09d}$ kun je t berekenen.
Voor $d = 8$ is $t = 1{,}5\sqrt{0{,}09 \cdot 8} = 1{,}5\sqrt{0{,}72} \approx 1{,}27$.
Dus bij een diepte van 8 meter hoor je de plons na 1,27 seconden.

a Na hoeveel seconden hoor je de plons als het water in de put 30 meter diep staat? Rond af op gehelen.

b Marion beweert: 'Als het water twee keer zo diep staat, dan duurt het twee keer zo lang tot je de plons hoort'.
Onderzoek of Marion gelijk heeft.

4.4 Wortels herleiden

9 $(\sqrt{5})^2 = 5$ en $(3\sqrt{5})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5 = 45$.
Je gebruikt de regel $(ab)^2 = a^2b^2$.

Herleid.

a $(5\sqrt{6})^2$
b $3(\sqrt{2})^2$
c $(-7\sqrt{2})^2$
d $-9(\sqrt{2})^2$

10 $3\sqrt{2}$ en $5\sqrt{2}$ zijn gelijksoortige wortels. Daarom is $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$ te herleiden tot $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.
Maar $3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ kun je niet herleiden, want $\sqrt{2}$ en $\sqrt{3}$ zijn niet gelijksoortig.

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $9\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$
b $6\sqrt{5} - 8\sqrt{5}$
c $7\sqrt{2} + 2\sqrt{7}$
d $3\sqrt{25} - 2\sqrt{36}$
e $6\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$
f $2\sqrt{10} + 2\sqrt{6}$

11 Een vermenigvuldiging van wortels kun je altijd herleiden.
Zo is $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = 15\sqrt{6}$ en $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 15\sqrt{4} = 15 \cdot 2 = 30$.

Herleid.

a $3\sqrt{7} \cdot 7\sqrt{3}$
b $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{27}$
c $2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{3}$
d $3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$
e $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{12}$
f $6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{7}$

© Noordhoff Uitgevers

12 Omdat $75 = 25 \cdot 3$ is $\sqrt{75} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.
En omdat $48 = 4 \cdot 12$ is $\sqrt{48} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{12} = 2\sqrt{12}$.
Maar ook $48 = 16 \cdot 3$, dus $\sqrt{48} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
In het laatste geval is de grootst mogelijke factor voor het wortelteken gebracht.
Verder is $3\sqrt{50} = 3 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 15\sqrt{2}$.

Bij de opdracht 'herleid' breng je een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken.

Herleid.

a $\sqrt{54}$ **c** $4\sqrt{32}$
b $\sqrt{12}$ **d** $-3\sqrt{60}$

13 $2\sqrt{3} + \sqrt{27}$ herleid je als volgt.
$2\sqrt{3} + \sqrt{27} = 2\sqrt{3} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

Herleid.

a $\sqrt{50} + \sqrt{18}$ **d** $\sqrt{27} + \sqrt{75}$
b $3\sqrt{50} + 2\sqrt{18}$ **e** $2\sqrt{27} - \sqrt{75} + 6\sqrt{3}$
c $\sqrt{200} - 9\sqrt{2}$ **f** $8\sqrt{32} - \sqrt{162} + 5\sqrt{8}$

14 $a(b + c) = ab + ac$, dus $\sqrt{2}(3 + 5\sqrt{3}) = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{6}$.
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, dus $(\sqrt{3} + 5)^2 = 3 + 10\sqrt{3} + 25 = 28 + 10\sqrt{3}$.
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, dus $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = 5 - 4 = 1$.

Herleid.

a $5\sqrt{3}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$ **d** $(\sqrt{5} + 3)^2$
b $5\sqrt{2}(4 - 3\sqrt{2})$ **e** $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$
c $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$ **f** $(3\sqrt{2} - 4)(4\sqrt{2} - 3)$

4.5 Soorten getallen

15 Met de rekenmachine vind je $\frac{7}{33} = 0{,}21\,21\,21\,21\ldots$

Met de streepnotatie schrijf je $\frac{7}{33}$ als $0{,}\overline{21}$.

Schrijf de getallen $\frac{5}{6}$, $2\frac{8}{11}$ en $6\frac{3}{7}$ als decimaal getal. Gebruik de streepnotatie.

16 Getallen zoals 3, $\sqrt{25}$, $5\frac{1}{4}$ en $3\frac{2}{11}$ zijn rationale getallen. De decimale breuk is óf eindig, óf repeterend.
Getallen zoals $\sqrt{3}$, $2\sqrt{7}$ en π zijn irrationaal, want deze getallen kun je niet als breuk schrijven.
Welke van de getallen $\sqrt{2}$, $3\sqrt{16}$, 4π, $2\frac{3}{7}$, $\sqrt{0{,}16}$, $\sqrt{20}$, $5\sqrt{9}$ en $3{,}\overline{21}$ zijn rationaal? En welke irrationaal?

© Noordhoff Uitgevers

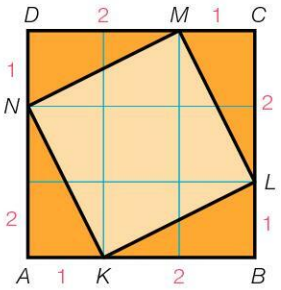
Onderzoek Wortels benaderen

Je weet dat $\sqrt{1} = 1$ en $\sqrt{4} = 2$. Dus $\sqrt{2}$ en $\sqrt{3}$ zijn beide groter dan 1 en kleiner dan 2.
Met de rekenmachine vind je $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ en $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.
In de tijd dat er nog geen rekenmachines en computers waren, lukte het wiskundigen al om dit soort wortels in meerdere decimalen nauwkeurig te benaderen.
In dit onderzoek ontdek je een manier waarbij je met je geodriehoek wortels kunt tekenen en zo in één decimaal nauwkeurig kunt meten. We beperken ons daarbij tot wortels van gehele getallen.

1 Gegeven is vierkant $ABCD$ met zijden van 3 cm. In $ABCD$ is vierkant $KLMN$ getekend met de punten K, L, M en N op de zijden van $ABCD$ zo, dat $AK = 1$ cm. Zie figuur 4.24.

De oppervlakte van $KLMN$ is 5 cm^2.

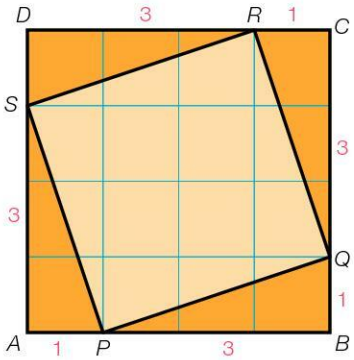
a Licht dit toe.
b Meet hoeveel mm KL is.
c Van welke wortel heb je nu een benadering in één decimaal nauwkeurig?



figuur 4.24 De afmetingen zijn in cm.

2 In deze opgave gebruik je een vierkant met zijden van 4 cm om twee wortels te benaderen. Zie figuur 4.25.

a Je kunt met de figuur $\sqrt{10}$ benaderen.
Leg uit hoe dit gaat en geef een benadering van $\sqrt{10}$ in één decimaal nauwkeurig.
b Door een ander vierkant in vierkant $ABCD$ te tekenen, kun je een benadering van $\sqrt{8}$ vinden.
Geef op deze manier een benadering van $\sqrt{8}$ in één decimaal nauwkeurig.



figuur 4.25 De afmetingen zijn in cm.

3 **a** Onderzoek welke wortels je met een vierkant met zijden van 5 cm kunt benaderen, en geef van elk van deze wortels een benadering in één decimaal nauwkeurig.
b Doe hetzelfde bij een vierkant met zijden van 6 cm.

Door vierkanten in vierkanten te tekenen, heb je wortels in één decimaal nauwkeurig kunnen meten. Met deze aanpak lukt het echter niet om van elk geheel getal een benadering van de wortel te vinden. Zo is het op deze manier bijvoorbeeld niet mogelijk om een lijnstuk met een lengte van $\sqrt{3}$ cm te tekenen.
In de volgende opgaven ontdek je een manier waarmee dat wel lukt.

© Noordhoff Uitgevers

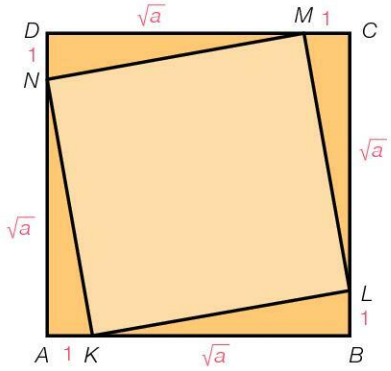
4 In figuur 4.26 zie je vierkant $ABCD$ met zijden van $\sqrt{a}+1$ cm. In $ABCD$ is vierkant $KLMN$ getekend met de punten K, L, M en N op de zijden van $ABCD$ zo, dat $AK = 1$ cm.

a Voor de oppervlakte van $ABCD$ geldt opp $ABCD = (\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+1) = a + 2\sqrt{a} + 1$ cm^2.
Licht dit toe.

b De oppervlakte van $\triangle KBL$ is $\frac{1}{2}\sqrt{a}$ cm^2.
Licht dit toe.

Uit de vragen a en b volgt $KL = \sqrt{a+1}$ cm.

c Toon dit aan.



figuur 4.26 De afmetingen zijn in cm.

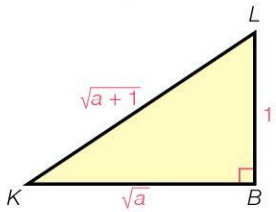
5 Hiernaast is de rechthoekige driehoek KBL uit figuur 4.26 nogmaals getekend. In opgave 4 heb je gezien dat $KL = \sqrt{a+1}$ cm.

a Neem $a = 4$.
Wat is nu de lengte van KB? Welke wortel kun je nu met $\triangle KBL$ benaderen?

b Neem $a = 49$.
Welke wortel kun je nu met $\triangle KBL$ benaderen?

c Teken een $\triangle KBL$ met $KL = \sqrt{65}$ cm.

d Kun je een driehoek tekenen die een zijde met een lengte van $\sqrt{3}$ cm heeft?



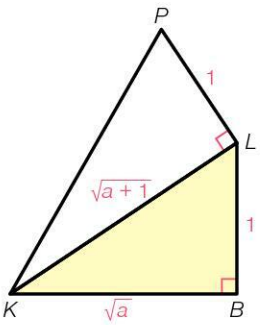
figuur 4.27 De afmetingen zijn in cm.

6 In figuur 4.28 zie je nogmaals $\triangle KBL$. Op zijde KL is de rechthoekige driehoek KLP getekend met $\angle L = 90°$ en $LP = 1$ cm.

a Onderzoek hoe je met deze figuur lijnstukken met lengte $\sqrt{2}$ cm en $\sqrt{3}$ cm kunt benaderen.

b Onderzoek hoe je met deze figuur een lijnstuk met lengte $\sqrt{11}$ cm kunt tekenen.

c Onderzoek hoe je deze figuur kunt gebruiken om een benadering van $\sqrt{28}$ te vinden, en geef deze benadering in één decimaal nauwkeurig.



figuur 4.28 De afmetingen zijn in cm.

7 Onderzoek hoe je door meten $\sqrt{24}$ kunt benaderen, en geef deze benadering in één decimaal nauwkeurig.

© Noordhoff Uitgevers

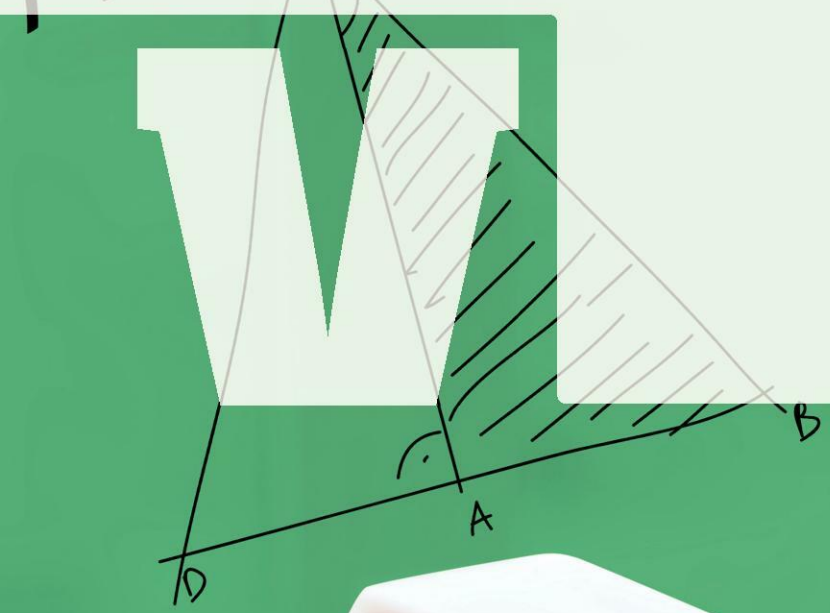
Vaardigheden

De Vaardigheden bestaan uit Wiskundige vaardigheden en Algemene vaardigheden.

In de Wiskundige vaardigheden worden rekenvaardigheden en algebraïsche vaardigheden herhaald en verder ingeslepen.
De Wiskundige vaardigheden in dit boek bestaan uit vijf lessen.

1 Rekenen met negatieve getallen
2 Breuken
3 Procenten
4 Eenheden
5 Letterrekenen

In de Algemene vaardigheden staat het systematisch oplossen van problemen centraal. In dit boek los je hierbij problemen op met de aanpak *Zoek de regelmaat*.



© Noordhoff Uitgevers

© Noordhoff Uitgevers

Wiskundige vaardigheden

1 Rekenen met negatieve getallen

1 Bereken.

a $-6 - -7$
b $-6 + -7$
c $6 - -7$
d $6 + -7$
e $13 + -9$
f $-9 - 13$
g $-9 - -13$
h $13 - 9$
i $-1 + 1$
j $1 - -1$
k $-1 + -1$
l $-1 - -1$

$5 - 8 = -3$
$5 - -8 = 5 + 8 = 13$
$-5 + -8 = -5 - 8 = -13$

2 Bereken.

a $-10 + 5 - -8$
b $-12 - -10 - 12$
c $20 + -11 - 11$
d $18 - -10 - 10$
e $25 + -10 - 15$
f $15 - 18 - -3$
g $18 - -15 - 3$
h $-15 + 18 - -3$
i $-8 + -8 - 12$
j $-6 - 6 - -6$
k $-10 - -6 + 10$
l $4 - -4 + 4$

Rekenvolgorde

1 Werk binnen de haakjes.
2 Vermenigvuldigen en delen van links naar rechts.
3 Optellen en aftrekken van links naar rechts.

Voorbeeld

$5 - 12 : (7 - 9) \cdot -3 =$ binnen de haakjes
$5 - 12 : -2 \cdot -3 =$ vermenigvuldigen en delen van links naar rechts
$5 - -6 \cdot -3 =$ negatief × negatief = positief
$5 - 18 = -13$

3 Bereken.

a $(3 + 4) : (-3 - 4)$
b $3 + 6 \cdot -8 : -4$
c $(3 + 6) \cdot -8 - 4$
d $-8 \cdot 3 : (4 - 6)$
e $14 - (5 + -7) \cdot -2$
f $((6 - 9) : 3 - 2) \cdot 4$
g $8 + -24 : (4 \cdot -3)$
h $-14 \cdot (-6 + 5) : -7$
i $9 \cdot -9 + 9 : -9$
j $8 : (-8 - 8) \cdot 8$
k $(12 - 3) : (-3 \cdot 3)$
l $(17 + -8 \cdot 3) : -1$

$+ \cdot + = +$
$+ \cdot - = -$
$- \cdot + = -$
$- \cdot - = +$

4 Bereken.

a $-100 - -14 \cdot (2 - -1)$
b $(5 + -3 \cdot 4) : -1 \cdot 10 - 70$
c $24 \cdot -3 + -13 : -13 - 7$
d $(-3 \cdot -4 + 8) : -10 + 3$
e $(9 - 4 - 7) \cdot (4 - 7)$
f $(9 \cdot -4 - 8) : -4 \cdot 7$
g $(9 \cdot -4 - 8) : (-4 \cdot 1)$
h $9 - 4 \cdot -7 + -4 - 7$
i $28 : (9 - 2) + 8 : (6 - 10)$
j $28 - 9 : 3 + 8 \cdot 10$
k $81 : -9 + 8 \cdot -2 + 10$
l $(81 - 9 - 2) : -10 - 8$

$+ : + = +$
$+ : - = -$
$- : + = -$
$- : - = +$

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeelden

$\frac{2}{15}+\frac{7}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ — breuken vereenvoudigen

$\frac{5}{6}+\frac{2}{7}=\frac{35}{42}+\frac{12}{42}=\frac{47}{42}=1\frac{5}{42}$ — eerst gelijknamig maken, neem als nieuwe noemer $6 \cdot 7$

$\frac{5}{6}+1\frac{3}{8}=\frac{5}{6}+\frac{11}{8}=\frac{20}{24}+\frac{33}{24}=\frac{53}{24}=2\frac{5}{24}$ — neem als nieuwe noemer niet $6 \cdot 8$, want met 24 lukt het ook

5 Bereken.

a $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$
b $\frac{7}{11}+1\frac{1}{2}$
c $3\frac{1}{7}+\frac{2}{3}$
d $3\frac{1}{4}+1\frac{1}{3}$
e $1\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$
f $2\frac{1}{6}+3\frac{1}{3}$
g $5\frac{2}{7}+3\frac{5}{7}$
h $9\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}$
i $8+3\frac{1}{5}$

Voorbeelden

$1\frac{3}{7}-2\frac{1}{3}=\frac{10}{7}-\frac{7}{3}=\frac{30}{21}-\frac{49}{21}=-\frac{19}{21}$

$-1\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=-\frac{5}{4}-\frac{1}{6}=-\frac{15}{12}-\frac{2}{12}=-\frac{17}{12}=-1\frac{5}{12}$

6 Bereken.

a $\frac{3}{7}-\frac{2}{3}$
b $-\frac{3}{11}-1\frac{1}{3}$
c $5\frac{1}{2}-8\frac{3}{4}$
d $7\frac{3}{11}-9\frac{1}{2}$
e $-5\frac{3}{4}+3\frac{1}{3}$
f $7\frac{3}{5}-2\frac{4}{7}$
g $1\frac{3}{4}-2\frac{1}{4}-3\frac{1}{3}$
h $2\frac{1}{4}-\left(3\frac{1}{5}-1\frac{1}{3}\right)$
i $5\frac{1}{2}-\left(5\frac{1}{3}+3\frac{1}{6}\right)$

Voorbeelden

$\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{7}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$

$2\frac{1}{3}\cdot 3\frac{1}{4}=\frac{7}{3}\cdot\frac{13}{4}=\frac{91}{12}=7\frac{7}{12}$

$-3\frac{1}{4}\cdot-\frac{2}{3}=-\frac{13}{4}\cdot-\frac{2}{3}=\frac{26}{12}=\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$

$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$

7 Bereken.

a $1\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{11}$
b $2\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{2}$
c $6\cdot\frac{3}{7}$
d $1\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{5}$
e $2\frac{3}{7}\cdot 2\frac{2}{3}$
f $-\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{7}$
g $-3\cdot-\frac{5}{7}$
h $-5\cdot 3\frac{1}{5}$
i $-1\frac{1}{2}\cdot 5\frac{1}{4}$

© Noordhoff Uitgevers

8 Bereken.

a $3\frac{1}{3}+2\frac{1}{4}$ **b** $3\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}$ **c** $3\frac{1}{3}-2\frac{1}{4}$

d $5+3\frac{5}{7}$ **e** $5-3\frac{5}{7}$ **f** $5\cdot 3\frac{5}{7}$

g $-\frac{2}{3}+1\frac{1}{6}$ **h** $-\frac{2}{3}-1\frac{1}{6}$ **i** $-\frac{2}{3}\cdot -1\frac{1}{6}$

Voorbeelden

$1\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=$
$\frac{6}{5}\cdot\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=$
$\frac{12}{45}+\frac{1}{3}=$
$\frac{12}{45}+\frac{15}{45}=\frac{27}{45}=\frac{3}{5}$

$3\frac{1}{9}-\frac{1}{2}\cdot 6\frac{2}{3}=$
$\frac{28}{9}-\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{3}=$
$\frac{28}{9}-\frac{20}{6}=$
$\frac{56}{18}-\frac{60}{18}=-\frac{4}{18}=-\frac{2}{9}$

9 Bereken.

a $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$ **b** $2\frac{1}{5}+1\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}$ **c** $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}+6\frac{2}{5}$

d $2\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{9}$ **e** $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$ **f** $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot 4\frac{1}{2}$

g $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot 3\frac{1}{2}$ **h** $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}-3\frac{1}{2}$ **i** $\frac{4}{7}\cdot 3\frac{1}{2}-5\frac{1}{9}$

10 Bereken.

a $\left(3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}\right)\cdot 1\frac{1}{4}$ **b** $3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{4}$ **c** $3\frac{1}{2}-\left(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{4}\right)$ **d** $8-\left(6\frac{5}{7}+1\frac{1}{2}\right)\cdot -2$ **e** $8-6\frac{5}{7}+1\frac{1}{2}\cdot -2\frac{3}{4}$

f $\left(8-6\frac{5}{7}\right)\cdot\left(1\frac{1}{2}-2\frac{3}{4}\right)$ **g** $8+6\cdot\frac{5}{7}\cdot -1\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{4}$ **h** $23-6\cdot\left(2\frac{1}{5}-1\frac{1}{3}\right)$ **i** $\left(23-6\frac{1}{5}\right)\cdot -1\frac{2}{3}$ **j** $\left(5\frac{1}{2}+2\frac{1}{5}\right)-\left(2\frac{1}{5}-5\right)$

$\left(3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}\right)\cdot 1\frac{5}{7}=$
$\left(\frac{7}{2}-\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{12}{7}=$
$\left(\frac{21}{6}-\frac{14}{6}\right)\cdot\frac{12}{7}=$
$\frac{7}{6}\cdot\frac{12}{7}=\frac{84}{42}=2$

3 Procenten

11 Bereken.

a $3{,}78\cdot 100$ **b** $3{,}78:100$ **c** $415\cdot 10000$ **d** $0{,}21:10$

e $100\cdot 0{,}000008$ **f** $3500:1000$ **g** $0{,}0018\cdot 100$ **h** $1:1000000$

× 100
twee nullen, dus de komma twee plaatsen naar rechts.

: 10 000
vier nullen, dus de komma vier plaatsen naar links.

© Noordhoff Uitgevers

Berekeningen met procenten

Op een school zitten 1250 leerlingen.
Hiervan gaat 64% naar de havo.
64% van 1250 is $0{,}64 \times 1250 = 800$.
Dus 800 leerlingen gaan naar de havo.

In een klas van 28 leerlingen hebben 23 leerlingen een voldoende voor een proefwerk wiskunde.
23 van 28 is $\frac{23}{28} \times 100\% \approx 82{,}1\%$.
Dus 82,1% van de leerlingen heeft een voldoende voor het proefwerk.

14% van 85 is
$0{,}14 \times 85 = 11{,}9$.

Let op het verschil.

14 van 85 is
$\frac{14}{85} \times 100\% \approx 16{,}5\%$.

12 Bereken. Rond niet af.

a 8% van 200
b 82% van 640
c 3% van 425
d 89,2% van 85
e 2,5% van 7
f 0,6% van 95
g 0,99% van 5000
h 1,01% van 10
i 0,07% van 188
j 18,8% van 0,07

13 Hoeveel procent is

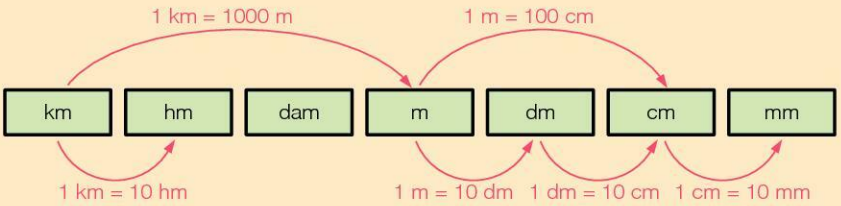
a 3 van 60
b 8 van 21
c 88 van 97
d 1002 van 1158
e 5005 van 6006
f 1 van 17
g 3,2 van 18,8
h 0,6 van 5
i 0,02 van 0,19

14 **a** De voetbalclub PSV werd kampioen van de Eredivisie in het seizoen 2015-2016. PSV won dat seizoen 26 van de 34 door hen gespeelde wedstrijden.
Hoeveel procent is dat?

b Tijdens het seizoen 2015-2016 werden in totaal 306 wedstrijden in de Eredivisie gespeeld. Hiervan eindigde 24,2% in een gelijkspel.
Hoeveel wedstrijden zijn dat?

© Noordhoff Uitgevers

Lengte-eenheden



7,2 dam = 720 dm — komma 2 plaatsen naar rechts
252 000 cm = 2,52 km — komma 5 plaatsen naar links

15 Vul in.

a 98 hm = … m
b 85 dam = … m
c 780 cm = … hm
d 8,72 dm = … mm
e 83 dm = … m
f 836 dam = … dm
g 38,4 mm = ... m
h 0,63 hm = … km
i 0,07 km = … m

16 Bereken.

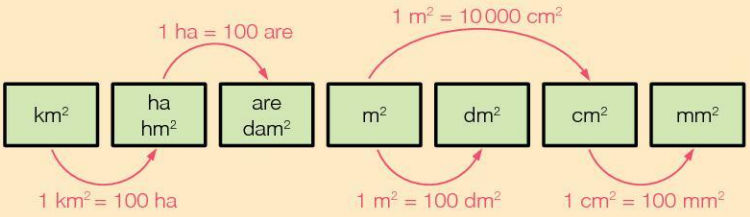
a 3 hm + 82 m = … m
b 68 cm + 29 mm = … mm
c 1,2 dam + 350 dm + 1600 cm = … m
d 2,85 m + 1300 mm + 1,2 dm = … cm

1,4 km + 300 m + 5,7 hm =
14 hm + 3 hm + 5,7 hm = 22,7 hm

17 Vul in.

a 68 cm + … dm = 1 m
b 9,6 dm + … cm = 1 m
c 4,5 m + … m = 1 dam
d 0,85 dm + … cm = 1 m
e 65 cm + … mm = 1 m
f 82 dam + … hm = 1 km

Oppervlakte-eenheden



2,5 ha = 25 000 m² — komma 4 plaatsen naar rechts
180 dm² = 0,018 dam² — komma 4 plaatsen naar links

18 Vul in.

a 4 dm² = … cm²
b 300 cm² = … dm²
c 180 dam² = … hm²
d 2,5 km² = … ha
e 40 000 m² = … ha
f 150 are = … ha
g 7,5 ha = ... are
h 1,2 m² = … dm²
i 82 mm² = … cm²

© Noordhoff Uitgevers

19 Bereken.

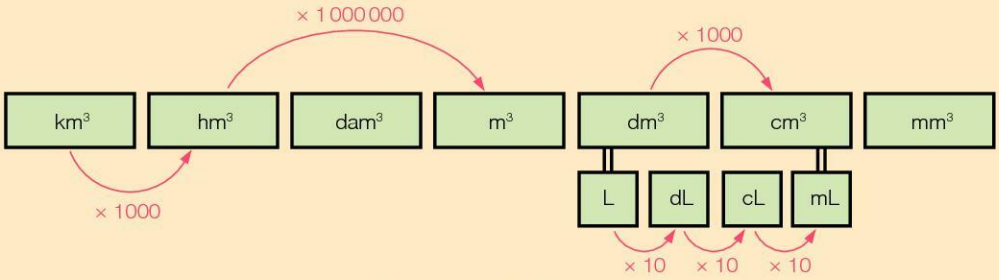
a $15\ dm^2 + 6{,}3\ m^2 = \ldots\ m^2$
b $820\ mm^2 + 5\ cm^2 = \ldots\ cm^2$
c $5800\ m^2 + 12\ ha = \ldots\ are$
d $30\ are + 9200\ m^2 = \ldots\ ha$
e $0{,}8\ km^2 + 17\,000\ m^2 + 3\ are = \ldots\ are$
f $4500\ mm^2 + 0{,}6\ m^2 + 19{,}1\ dm^2 = \ldots\ cm^2$

$520\ cm^2 + 0{,}3\ m^2 =$
$5{,}2\ dm^2 + 30\ dm^2 = 35{,}2\ dm^2$

20 Vul in.

a $20\ m^2 + \ldots\ dm^2 = 23{,}1\ m^2$
b $16\ are + \ldots\ ha = 2{,}5\ ha$
c $80\ m^2 + \ldots\ are = 15\,000\ dm^2$
d $2000\ are + \ldots\ ha = 1\ km^2$

Inhoudseenheden



$280\,000\ m^3 = 0{,}28\ hm^3$ komma 6 plaatsen naar links
$8{,}2\ L = 820\ cL$ komma 2 plaatsen naar rechts
$6{,}7\ m^3 = 67\,000\ dL$ komma 3 + 1 = 4 plaatsen naar rechts
$80\,000\ mm^3 = 0{,}8\ dL$ komma 3 + 2 = 5 plaatsen naar links

21 Vul in.

a $5\ km^3 = \ldots\ hm^3$
b $3\ L = \ldots\ cL$
c $4000\ m^3 = \ldots\ dam^3$
d $3\ m^3 = \ldots\ dL$
e $32\ dL = \ldots\ dm^3$
f $96\,000\ cL = \ldots\ m^3$
g $78\ dam^3 = \ldots\ km^3$
h $1{,}2\ mL = \ldots\ mm^3$
i $625\,000\ mm^3 = \ldots\ m^3$

22 Bereken.

a $500\ cm^3 + 3{,}7\ dm^3 = \ldots\ dm^3$
b $55\ cL + 2{,}8\ L = \ldots\ dL$
c $82\,000\ mm^3 + 0{,}6\ dm^3 = \ldots\ cm^3$
d $85\ dL + 600\ cm^3 = \ldots\ cL$
e $0{,}2\ m^3 + 700\,000\ mm^3 + 900\ mL = \ldots\ L$
f $80\ dL + 3\ dm^3 + 720\ cm^3 = \ldots\ cL$

$2{,}3\ dm^3 + 89\ cL =$
$2{,}3\ L + 89\ cL =$
$23\ dL + 8{,}9\ dL = 31{,}9\ dL$

23 Vul in.

a $20\ dm^3 + \ldots dL = 23\ L$
b $600\ mL + \ldots\ dL = 1\ dm^3$
c $820\,000\ cm^3 + \ldots\ L = 1{,}52\ m^3$
d $12\ cL + \ldots\ mm^3 = 127{,}3\ cm^3$

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeelden

$-5b \cdot 6c = -30bc$ $\quad -5 \cdot 6 = -30$

$-3q \cdot 2p \cdot -5r = 30pqr$ $\quad$ letters in alfabetische volgorde

$5a \cdot -2a = -10a^2$ $\quad a \cdot a = a^2$

24 Herleid.

a $3p \cdot 6q$
b $-8a \cdot 2b$
c $-7b \cdot -3b$
d $5b \cdot 3a \cdot -c$
e $-c \cdot 3a \cdot -c$
f $15q \cdot 2p \cdot -r$
g $-3a \cdot 2a \cdot -6$
h $-4a \cdot 2b \cdot 5b$
i $-\frac{1}{2}p \cdot -\frac{1}{3}q \cdot -6r$

Voorbeelden

$7a + 8a = 15a$ $\quad 5ab - ab = 4ab$

$6b - 2b = 4b$ $\quad 3a + 5b - 2a = a + 5b$

25 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $a + 8a$
b $8a - 2a$
c $7a - a$
d $8ab - 7ab$
e $3ac - 8ab$
f $-7c - 12c$
g $3ab - ac - ab$
h $8pq - 8p - 3pq$
i $q + 8q - 2pq$

Voorbeelden

$2a \cdot 3b + 5a \cdot 7b = 6ab + 35ab = 41ab$ $\quad$ eerst vermenigvuldigen, dan optellen

$-2p \cdot 3q + 6p \cdot -q = -6pq - 6pq = -12pq$

$-3a \cdot 2c + 5b \cdot 4c = -6ac + 20bc$

$2a - 3a \cdot 4b - a + 4ab = 2a - 12ab - a + 4ab = a - 8ab$

26 Herleid.

a $8a \cdot 3b - 7a \cdot 2b$
b $-a \cdot 3b - 5a \cdot b$
c $-8a \cdot -a + a \cdot 2a$
d $-5p \cdot 3q + 8p \cdot 5q$
e $6q \cdot -2p - 3p \cdot 5q$
f $-5a \cdot 3c + 5a \cdot 2b$
g $14p \cdot 3q - 16q \cdot 4p$
h $19p \cdot -3q - 4p \cdot 21q$
i $-18p \cdot -6q - 13q \cdot 11r$

27 Herleid.

a $8p - 3p$
b $3p \cdot -8q$
c $3p \cdot -8p$
d $8a - 3b + a$
e $8a \cdot -3b \cdot a$
f $8a \cdot 5 - 3a$
g $3ab - 2ac + ab$
h $2x - 5x - -7x$
i $2x \cdot -5 - 3 \cdot -2x$

28 Herleid.

a $-2x + 3y - -5x$
b $-2x \cdot 3y - 2y \cdot 3x$
c $-2x \cdot 6 - 3x \cdot -2$
d $8a - 9b - 7a - 2b$
e $8 + a - 9b - 7 + 2b$
f $8a \cdot -9b - 7a \cdot -2b$

29 Herleid.

a $-4x \cdot 2y - 3y \cdot 2x$
b $-4x + 2y - 3y + 2x$
c $-8 \cdot 2xy + 6 \cdot 3xy$
d $3a \cdot -2a + 7a - a$
e $5a \cdot 2a - 2a \cdot 5a$
f $-a \cdot 3b + 5b \cdot -a$

© Noordhoff Uitgevers

30 Vul in.

a $18ab = 2ab + \ldots$

b $18ab = -9a \cdot \ldots$

c $18ab = -ab + \ldots$

d $18ab = -2ab \cdot \ldots$

e $18ab = -\frac{1}{2}b \cdot \ldots$

f $18ab = -20ab + \ldots$

31 Vul in.

a $20a^2 = a^2 + \ldots$

b $20a^2 = -5a \cdot \ldots$

c $20a^2 = \frac{1}{2}a \cdot \ldots$

d $18a^2b = 2a^2 \cdot b + 2a \cdot \ldots$

e $18a^2b = 3a^2 \cdot \ldots - 6a \cdot 2ab$

f $18a^2b = -6b \cdot \ldots$

32 Herleid.

a $-5a \cdot 3ab - 5b \cdot 2a^2$

b $5ab \cdot 3ac - 5a \cdot b \cdot ac$

c $-5a^2 \cdot 7b - 3a^2 \cdot b$

d $5a + b - 3a - c - 5a - b - a + 2c$

e $-5a^2 + 7b - 3a^2 + b$

f $5a \cdot b - 3a \cdot c - 5a \cdot -b + a \cdot -2c$

Voorbeelden

$2(a^3)^2 - 3a^6 = 2a^6 - 3a^6 = -a^6$

$2a^3 \cdot a^2 - 6a^5 = 2a^5 - 6a^5 = -4a^5$

$4(p^3)^4 \cdot -3p^5 = 4p^{12} \cdot -3p^5 = -12p^{17}$

$2a^3 \cdot a^5 + 5a^2 \cdot a^3 = 2a^8 + 5a^5$

$2a^3 \cdot 4b - 6(a^5)^2 = 8a^3b - 6a^{10}$

$4(p^3)^4 - -3p^{12} = 4p^{12} + 3p^{12} = 7p^{12}$

33 Herleid.

a $4(a^3)^2 - 8a^6$

b $4(a^3)^2 \cdot -8a^6$

c $4 + (a^3)^2 - 8 + a^6$

d $4a \cdot (a^3)^2 - 8a \cdot a^6$

e $4(ab)^2 - 8ab$

f $7(p^2)^5 \cdot -3p^{10}$

g $7(p^2)^5 - 3p^{10}$

h $7 - (p^2)^5 + 3 - p^{10}$

i $7(pq)^2 \cdot -3p^2$

j $7(pq)^2 - 8p^2q^2$

34 Vul in.

a $12a^{16} = 4a^4 \cdot \ldots$

b $12a^{16} = 4a^4 \cdot a^{12} + \ldots$

c $16a^{12} = 4a^4 \cdot \ldots$

d $16a^{12} = 4a^{12} + \ldots$

e $16a^8 = 4a^4 \cdot 3a^{\cdots} + \ldots \cdot a^8$

f $10(a^5)^2 - \ldots \cdot 5a \cdot (a^2)^4 = 0$

© Noordhoff Uitgevers

Algemene vaardigheden

Bij deze Algemene vaardigheden mag je de rekenmachine gebruiken.

Probleemaanpak

1 Bekijk de getallenrij 8, 12, 16, 20, ...
Op welk cijfer eindigt het 400^{e} getal van deze rij?

Zoek de regelmaat

Hiernaast staan de vier stappen die bij het oplossen van een probleem een rol spelen. In de brugklas heb je al twee aanpakken geleerd waaruit je bij stap 2 kunt kiezen, namelijk *Probeer en test* en *Maak een schets*. Een derde aanpak bij het oplossen van problemen is *Zoek de regelmaat*. Het volgende probleem los je met deze aanpak op.

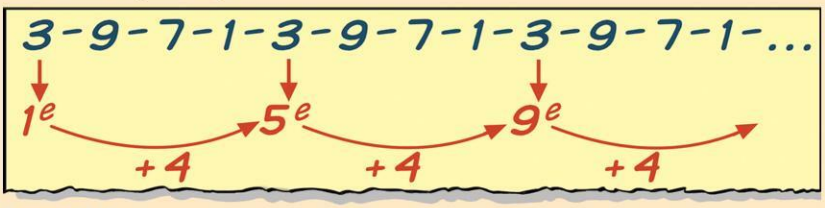
Probleemaanpak
1 Begrijp de vraag.
2 Zoek een geschikte aanpak.
3 Werk de aanpak uit.
4 Controleer je antwoord.

Probleem
Op welk cijfer eindigt 3^{25}?

Stap 1 Begrijp de vraag
- 3^{25} betekent $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times ... \times 3$ (25 factoren)
- De rekenmachine geeft de uitkomst $8{,}472886094 \cdot 10^{11}$.
- Het laatste cijfer van de uitkomst is op de rekenmachine niet af te lezen.

Stap 2 Zoek een geschikte aanpak
Zoek de regelmaat door te kijken naar het laatste cijfer van
3^1, 3^2, 3^3, 3^4, ...
Zit er een regelmaat in deze uitkomsten?

Stap 3 Werk de aanpak uit
$3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, $3^6 = 729$, $3^7 = 2187$
De laatste cijfers zijn



figuur AV.1

Het laatste cijfer is 3 bij 3^1, 3^5, 3^9, 3^{13}, 3^{17}, 3^{21}, 3^{25}, ...
Dus 3^{25} eindigt op 3.

© Noordhoff Uitgevers

Stap 4 Controleer je antwoord
De hoogste macht van 3 die de rekenmachine nog precies kan uitrekenen is 3^{20}. De rekenmachine geeft $3^{20} = 3486784401$. Verder is $3^5 = 243$. Omdat 3^{20} op een 1 eindigt en 3^5 op een 3, eindigt $3^{25} = 3^{20} \cdot 3^5$ op $1 \cdot 3 = 3$.
Dus het antwoord van stap 3 klopt.

Advies
Kijk na stap 4 nog eens terug op het probleem. Je kunt je afvragen of bij andere grondtallen ook een regelmaat optreedt.
- Kun je het laatste cijfer vinden van 6^{25} of van 8^{25}?
- Zijn er grondtallen waarvan alle machten op hetzelfde cijfer eindigen?
- Heeft het zin grondtallen groter dan 10 te bekijken?

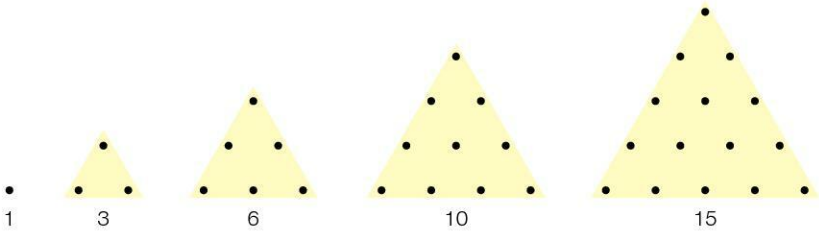
Los de volgende problemen op met de aanpak *Zoek de regelmaat*.

2 Op welk cijfer eindigt 2^{80}? En 4^{35}? En 6^{78}? En 9^{99}?

3 Het getal 10 kun je schrijven als de som van vier oneven getallen.
Bijvoorbeeld $10 = 5 + 3 + 1 + 1$. Ook is $10 = 5 + 1 + 3 + 1$, maar dat vinden we hetzelfde als $10 = 5 + 3 + 1 + 1$.
Op hoeveel manieren kan
a 10 als som van vier oneven getallen geschreven worden
b 20 als som van vier oneven getallen geschreven worden
c 20 als som van acht oneven getallen geschreven worden?

4 Hoeveel is de som van de eerste 50 oneven getallen?

5 Hieronder staan de eerste vijf driehoeksgetallen.



figuur AV.2

Wat is het honderdste driehoeksgetal?

6 In figuur AV.3 kun je onder andere de lijnstukken AC, DE, BE en AF aanwijzen.

figuur AV.3

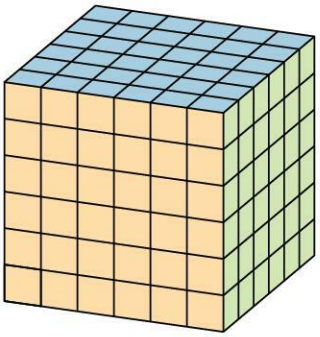
Hoeveel lijnstukken zijn er in totaal aan te wijzen?

© Noordhoff Uitgevers

7 **a** Hoeveel vierkanten kun je op een schaakbord aanwijzen?

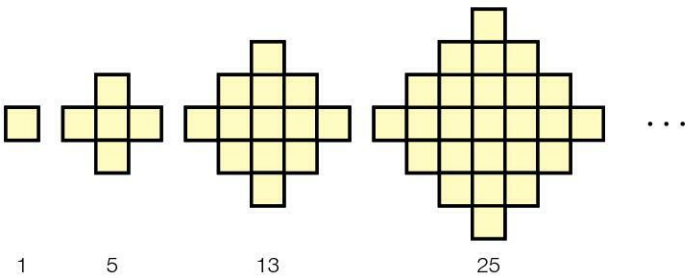
figuur AV.4 Een schaakbord heeft 64 velden.

b Hoeveel kubussen kun je aanwijzen in de kubus van figuur AV.5?



figuur AV.5

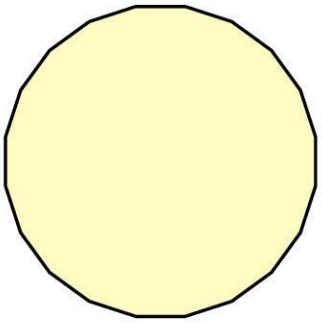
8 Bekijk de volgende rij figuren.



figuur AV.6

Uit hoeveel vierkanten bestaat de tiende figuur van de rij?

9 In figuur AV.7 zie je een regelmatige twintighoek. Hoeveel diagonalen heeft deze figuur?



figuur AV.7

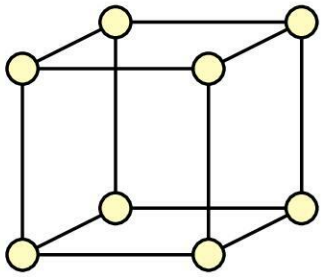
© Noordhoff Uitgevers

Zoek de juiste aanpak

Je kent nu drie manieren om een probleem aan te pakken.
- *Probeer en test.*
- *Maak een schets.*
- *Zoek de regelmaat.*

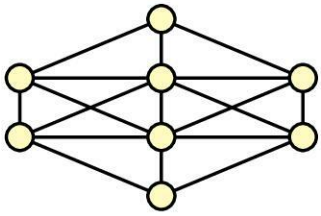
In de volgende opgaven komen ze door elkaar voor.

10 [▸ WERKBOEK] Zet de getallen 1 tot en met 8 in de open rondjes van figuur AV.8. Doe het zo, dat twee direct met elkaar verbonden getallen meer dan 1 verschillen.



figuur AV.8

11 [▸ WERKBOEK] Zet de getallen 1 tot en met 8 in de open rondjes van figuur AV.9. Doe het zo, dat in de rondjes die met een lijnstuk verbonden zijn geen opeenvolgende getallen staan.

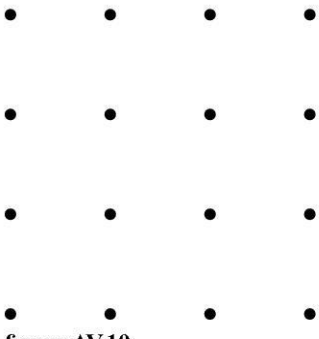


figuur AV.9

12 [▸ WERKBOEK] Teken door de 16 punten van figuur AV.10 zes lijnen zonder het potlood van het papier te halen.

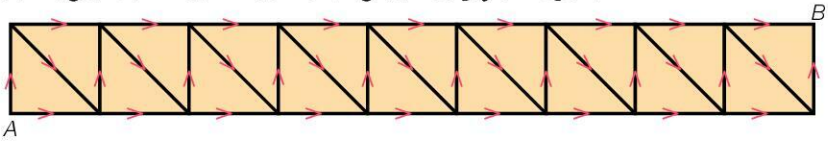
13 Hoeveel keer moet je zagen om een ijzeren stang in 37 stukken te verdelen?

14 Een grasveld van 17 bij 37 meter wordt langs één lange en één korte zijde van een hekwerk voorzien. De paaltjes worden om de meter geplaatst.
Hoeveel paaltjes zijn nodig?



figuur AV.10

15 Hoeveel routes zijn er in figuur AV.11 van A naar B?
Je mag alleen maar in de richting van de pijlen lopen.



figuur AV.11

© Noordhoff Uitgevers

Kangoeroe-opgaven

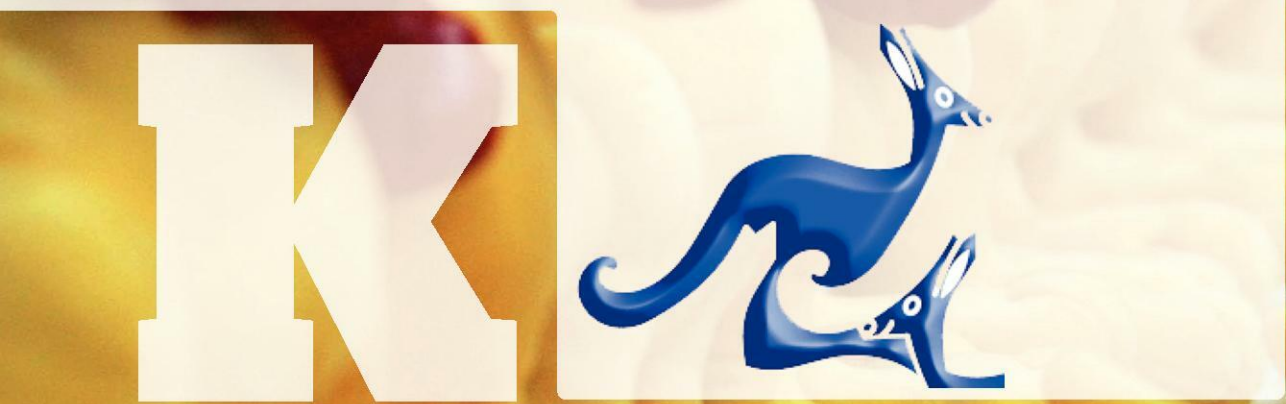
De Kangoeroe is een wereldwijde reken- en wiskundewedstrijd die jaarlijks wordt gehouden.

Er zijn opgaven voor
- de basisschool (wizFUN, wizKID en wizSMART)
- de klassen 1 en 2 havo/vwo en 3 havo (wizBRAIN)
- de klassen 4 en 5 havo en 3, 4, 5 en 6 vwo (wizPROF).

In dit boek staan de wizBRAIN opgaven van het jaar 2014.

De eerste tien opgaven zijn eenvoudig, de volgende tien opgaven zijn iets lastiger en de laatste tien opgaven zijn moeilijk.

Je mag geen rekenmachine gebruiken, maar wel kladpapier.

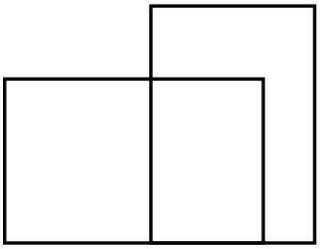


© Noordhoff Uitgevers

© Noordhoff Uitgevers

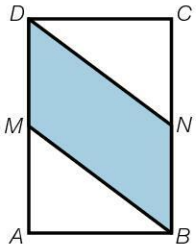
2014

1 In de figuur hiernaast is een aantal rechthoeken te zien.
Hoeveel?



A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

2 $ABCD$ is een rechthoek met oppervlakte 10.
M en N zijn de middens van de zijden AD en BC.
Wat is de oppervlakte van vierhoek $MBND$?

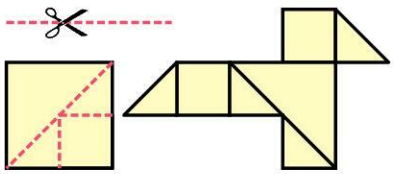


A 5 **B** 5,5 **C** 6 **D** 7 **E** 7,5

3 Van twee getallen is het volgende bekend:
Als je ze optelt, krijg je 37 en als je ze vermenigvuldigt 36.
Wat is het verschil van die twee getallen?

A 1 **B** 4 **C** 10 **D** 26 **E** 35

4 Fione heeft een aantal vierkante knipbladen, allemaal met oppervlakte 4. Ze knipt deze over de stippellijnen in vierkanten en in rechthoekige driehoeken, zoals in de linker figuur. Met een aantal van deze stukken maakt ze de 'vogel' zoals in de rechter figuur.
Wat is de oppervlakte van deze vogel?



A 4 **B** 4,5 **C** 5 **D** 6 **E** 8

5 Een emmer is voor de helft gevuld met water.
Als je er 2 liter bij gooit, dan is de emmer voor driekwart gevuld.
Hoeveel liter water kan er in de emmer?

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** 12 **E** 14

6 Ieder jaar is de Kangoeroewedstrijd op de derde donderdag van maart.
Wat is de laatst mogelijke datum van de Kangoeroewedstrijd?

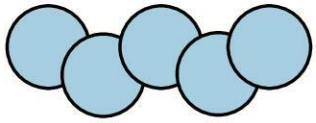
A 14 maart **B** 15 maart **C** 20 maart **D** 21 maart **E** 22 maart

7 Wat is de uitkomst van $2014 \times 2014 : 2014 - 2014$?

A 0 **B** 1 **C** 2013 **D** 2014 **E** 4028

© Noordhoff Uitgevers

8 Alle cirkels in de figuur hebben een oppervlakte van 8 cm^2. Het gemeenschappelijke deel van twee overlappende cirkels is telkens 1 cm^2.
Hoeveel cm^2 is de blauwe oppervlakte?

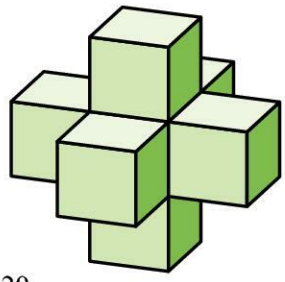


A 32 **B** 35 **C** 36 **D** 38 **E** 39

9 Jack heeft twee keer per week pianoles. Anna heeft één les per twee weken. De komende periode heeft Jack 15 lessen meer dan Anna.
Hoeveel weken duurt de periode?

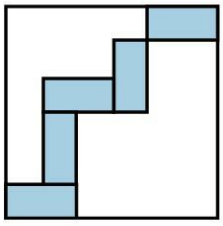
A 10 **B** 15 **C** 20 **D** 25 **E** 30

10 Met kubusjes van 1 bij 1 bij 1 heeft Daan het 'kruis' hiernaast gemaakt. Nu wil hij hier een grote kubus van 3 bij 3 bij 3 van gaan maken.
Hoeveel kubusjes heeft hij daarvoor nog nodig?



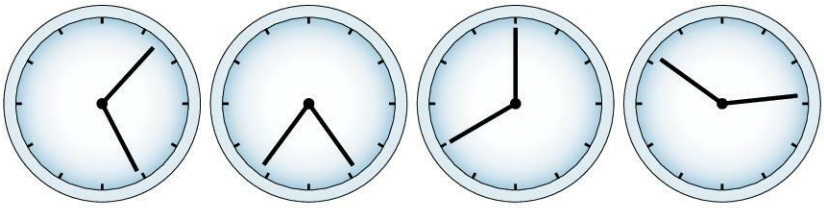
A 8 **B** 12 **C** 16 **D** 18 **E** 20

11 In een vierkant met zijde 24 cm zijn vijf gelijke rechthoeken getekend. Zie de figuur hiernaast.
Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van één zo'n rechthoek?



A 12 **B** 18 **C** 24 **D** 32 **E** 64

12 De minutenwijzers en de urenwijzers in de vier klokken hieronder zijn allemaal even lang. Hierdoor is de tijd moeilijk af te lezen.



Welke van de onderstaande tijden is zeker *niet* op een van de vier klokken te zien?

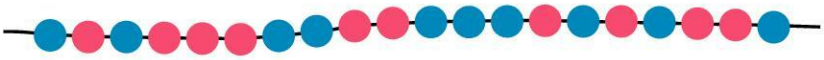
A 2:51 uur **B** 5:07 uur **C** 7:37 uur **D** 8:00 uur **E** 10:14 uur

13 Welke van de volgende vermenigvuldigingen heeft de grootste uitkomst?

A 44×777 **B** 55×666 **C** 77×444 **D** 88×333 **E** 99×222

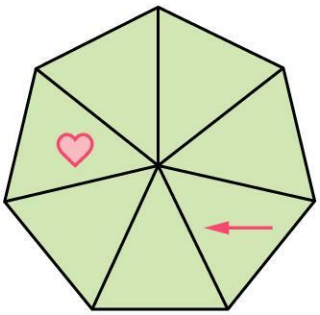
© Noordhoff Uitgevers

14 In de figuur hieronder zie je een ketting met blauwe en rode kralen. Timo wil zoveel mogelijk rode kralen pakken. Hij mag een aantal keren een kraal van één van de uiteinden halen (dit hoeft niet steeds hetzelfde uiteinde te zijn). Hij moet stoppen zodra hij een vijfde blauwe kraal heeft genomen.
Wat is het grootste aantal rode kralen dat Timo kan pakken?



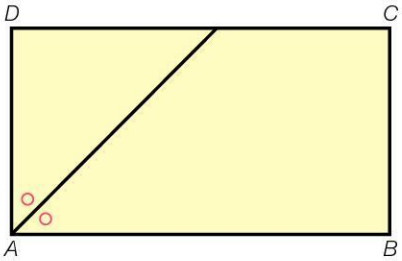
A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

15 In de figuur hiernaast worden het hartje en de pijl telkens tegelijk verzet. De pijl gaat iedere keer drie hokjes verder volgens de wijzers van de klok. Het hartje gaat vier hokjes verder, maar dan tegen de wijzers van de klok in.
Na hoeveel keer staan het hartje en de pijl voor de eerste keer in hetzelfde hokje?



A 7
B 8
C 9
D 10
E dit gebeurt nooit

16 Een rechthoek heeft zijden van 6 en 11 cm lang. De bissectrice van hoek A is getekend. Als je ook de bissectrice van hoek B tekent, dan wordt zijde CD in drie stukken verdeeld.
Hoeveel cm zijn deze drie stukken lang?

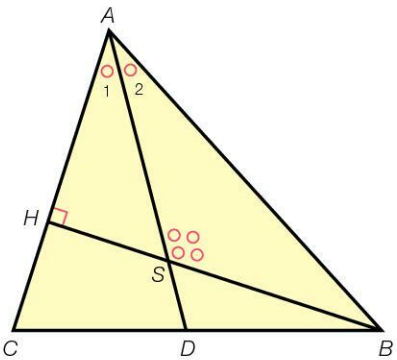


A 5, 1 en 5
B 4, 3 en 4
C 3, 5 en 3
D 2, 7 en 2
E 1, 9 en 1

17 Zes jongens wonen samen in een flat met twee badkamers. Elke morgen om 7:00 uur beginnen ze met douchen. Ze hebben hiervoor 8, 10, 12, 17, 21 en 22 minuten nodig. Er is nooit meer dan één jongen in een badkamer.
Hoe laat kunnen ze op zijn vroegst allemaal klaar zijn?

A 7:44 uur **B** 7:45 uur **C** 7:46 uur **D** 7:47 uur **E** 7:48 uur

18 In driehoek ABC staat BH loodrecht op AC en is AD de bissectrice van hoek A. De stompe hoek S tussen de lijnstukken BH en AD is vier keer zo groot als hoek A_2. Zie de figuur hiernaast.
Hoe groot zijn de hoeken A_1 en A_2 samen?



A 30°
B 45°
C 60°
D 75°
E 90°

© Noordhoff Uitgevers

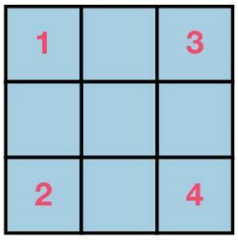
19 Kapitein Sparrow en zijn piraten hebben een aantal goudstukken opgegraven. Deze worden eerlijk verdeeld: iedereen krijgt er evenveel. Als er 50 goudstukken minder waren geweest, dan kreeg iedereen 5 goudstukken minder. Als er vier piraten minder waren geweest, dan kreeg iedereen 10 goudstukken meer.
Hoeveel goudstukken heeft de bende opgegraven?

A 80 **B** 100 **C** 120 **D** 150 **E** 250

20 Een oude weegschaal werkt niet goed meer. Een gewicht dat minder dan 1000 gram weegt, wordt goed gewogen. Maar is het 1000 gram of meer, dan geeft de weegschaal een of ander getal groter dan 1000.
Vijf gewichten A, B, C, D en E wegen elk minder dan 1000 gram. Als je ze in paren weegt, geeft de weegschaal het volgende:
B + D = 1200, C + E = 2100, B + E = 800, B + C = 900 en A + E = 700.
Welk gewicht is het zwaarst?

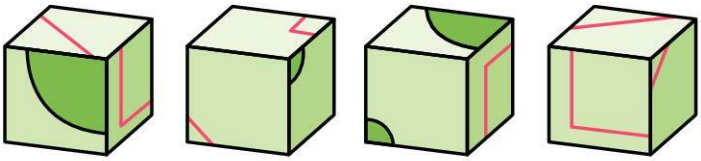
A A **B** B **C** C **D** D **E** E

21 Andrea schrijft de getallen 1, 2, 3, …, 9 in de vakjes van een 3 bij 3 tabel. De getallen 1, 2, 3 en 4 staan er al. Zie de figuur. Twee getallen worden 'buren' genoemd als hun vakjes een gemeenschappelijke rand hebben. Als Andrea alle getallen heeft opgeschreven en ze de buren van 9 optelt, krijgt ze 15. Wat krijgt ze als ze de buren van 8 optelt?



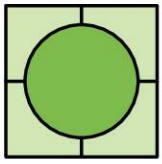
A 12 **B** 18 **C** 20 **D** 26 **E** 27

22 We hebben vier gelijke kubussen. Zie figuur 1.



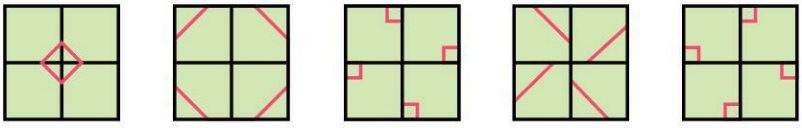
figuur 1

De kubussen worden aan elkaar gelegd, waardoor de bovenkant eruit ziet als in figuur 2.



figuur 2

Hoe ziet de onderkant er dan uit?



A **B** **C** **D** **E**

© Noordhoff Uitgevers

23 Het gemiddelde van twee positieve getallen is 30% kleiner dan het grootste getal.
Hoeveel procent is het gemiddelde groter dan het kleinste getal?

A 20 **B** 25 **C** 30 **D** 70 **E** 75

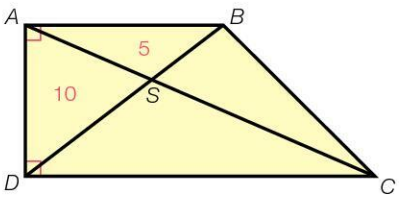
24 Hafida en Els doen mee aan een puzzelwedstrijd. Ze krijgen allebei dezelfde honderd puzzels. Degene die een puzzel als eerste oplost krijgt 4 punten. De andere kan ook nog 1 punt verdienen voor een goede oplossing. Zowel Hafida als Els heeft 60 puzzels goed opgelost. Samen hebben ze 312 punten gehaald.
Hoeveel van de honderd puzzels zijn zowel door Hafida als door Els goed opgelost?

A 53 **B** 54 **C** 55 **D** 56 **E** 57

25 David fietst van huis naar school. Hij wil precies om half negen op school zijn. In $\frac{2}{3}$ deel van de tijd reed hij $\frac{3}{4}$ deel van de afstand. Daarna ging hij langzamer fietsen, zodat hij precies op tijd aankwam.
Wat is de verhouding van de snelheid van het eerste en het tweede deel?

A 2 : 1 **B** 3 : 2 **C** 3 : 1 **D** 4 : 3 **E** 5 : 4

26 In de figuur hiernaast zijn de hoeken A en D recht, B en C niet. S is het snijpunt van BD en AC. De oppervlakte van driehoek ADS is 10 en die van driehoek ABS is 5.
Wat is de oppervlakte van vierhoek $ABCD$?



A 30 **B** 35 **C** 40 **D** 45 **E** 50

27 Een groep van 25 mensen bestaat uit ridders, knechten en jonkvrouwen. De ridders vertellen altijd de waarheid, knechten liegen altijd. Als een jonkvrouw een vraag met de waarheid beantwoordt, dan liegt ze bij de volgende vraag. En omgekeerd.
Aan ieder van hen werd gevraagd: 'Ben je een ridder?'
17 keer was het antwoord 'ja'. Daarna werd gevraagd: 'Ben je een jonkvrouw?' 12 keer was het antwoord 'ja'. Ten slotte werd gevraagd: 'Ben je een knecht?' 8 keer was het antwoord 'ja'.
Hoeveel ridders zijn er in de groep?

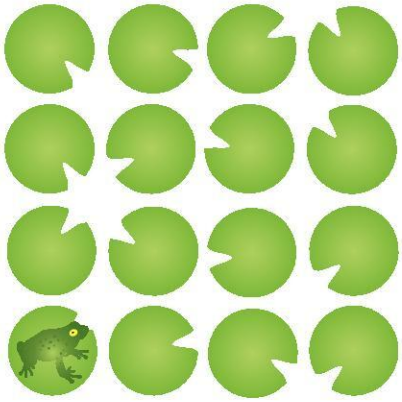
A 4 **B** 5 **C** 9 **D** 13 **E** 17

© Noordhoff Uitgevers

28 We willen een aantal verschillende positieve gehele getallen opschrijven. Precies twee daarvan moeten deelbaar zijn door 2, precies dertien moeten deelbaar zijn door 13. We willen ook dat het grootste van de getallen zo klein mogelijk is.
Wat moet dat grootste getal dan zijn?

A 169 **B** 260 **C** 273 **D** 299 **E** 325

29 In een vijver drijven 16 bladeren van waterlelies in een vierkant als in de figuur. Een kikker zit op een blad in een hoek. Daarna springt de kikker steeds van een blad naar een ander blad. Iedere sprong is naar voren, naar achteren, naar links of naar rechts. De kikker slaat iedere keer minstens één blad over en springt nooit op een blad waar hij al geweest is.
Wat is het grootste aantal bladeren waarop de kikker kan gaan zitten? (Het blad waar de kikker mee begint telt mee.)



A 6 **B** 12 **C** 14 **D** 15 **E** 16

30 25 tegels, zoals in de figuur hiernaast, worden aan elkaar gelegd tot een vierkant. Tegels kunnen alleen met dezelfde kleur tegen elkaar komen.
Wat is het kleinste aantal blauwe driehoeken dat aan de rand kan komen?

A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

© Noordhoff Uitgevers

Trefwoordenregister

A
afstand van punt tot lijn *54*
algebra *25*
Al-Jabr Mugubalah *25*
Al-Khwarizmi *25*

B
balans *108*
balansmethode *109*
bergparabool *138*
binnengebied van een cirkel *50*
bissectrice *60*
breuken
delen door – *20*
optellen van – *8, 18*
vereenvoudigen van – *17*
vermenigvuldigen van – *8, 22*
buitengebied van een cirkel *50*

C
Ceulen, Ludolph van *69*
cirkel
binnengebied van – *50*
buitengebied van – *50*
ingeschreven – *63*
omgeschreven – *58*
omtrek van – *64*
oppervlakte van – *67*
construeren *86*

D
dalparabool *138*
delen
– door breuken *20*
– van machten *28*
driehoek, oppervlakte van *49*
dubbelproduct *15*

E
evenwijdige lijnen tekenen *48*
exponent, negatieve *31*

F
factor voor het wortelteken brengen *153*
Fibonacci *145*
formule van een lijn opstellen *99*

G
gelijksoortige termen *9, 24*
gelijksoortige wortels *150*
getallen
gehele – *156*
irrationale – *157*
natuurlijke – *156*
rationale – *157*
reële – *158*
googol *32*
grafiek van een lineaire formule *94*

H
haakjes wegwerken *11, 12*
– bij wortels *154*
regels bij – *14*
herleiden *10*
– van wortels *150*
hoeken meten *48*
hoogtelijn *88*

I
ingeschreven cirkel *63*
irrationale getallen *157*

K
kleine getallen, wetenschappelijk notatie bij *31*
kwadraat van een wortel *149*
kwadraten *136*
kwadratisch verband *138*
kwadratische formules *137, 138*

L
Leonardo van Pisa *145*
letterrekenen
optellen bij – *9*
vermenigvuldigen bij – *8*
lineair verband *94*
lineaire formule *94*
grafiek van – *94*
linkerlid *114*
loodlijnen *48*
loodrechte projectie *54*

M
macht
– van een macht *26*
– van een product *25*
machten
delen van – *28*
product van – *23*
merkwaardige producten *15*
middelloodlijn *56*
middelpuntzoeker *59*

N
natuurlijke getallen *156*
negatieve exponent *31*

O
omgekeerde van een getal *20*
omgeschreven cirkel *58*
omtrek van een cirkel *64*

© Noordhoff Uitgevers

oplossen van een vergelijking *110, 114*
oplossing van een vergelijking *107*
oppervlakte
– van een cirkel *67*
– van een driehoek *49*
– van een parallellogram *70*
– van een trapezium *74*
oppervlakte-eenheden *48*
optellen
– bij letterrekenen *9*
– van breuken *8, 18*

P

parallellogram, oppervlakte van *70*
pi *64*
benaderingen van – *69*
Pisa, Leonardo van *145*
product
– van machten *23*
macht van – *27*
projectie, loodrechte *54*

R

rationale getallen *157*
rechterlid *114*
reële getallen *158*
regels bij haakjes wegwerken *14*
rekenvolgorde *136*
repeterende breuk *156*
richtingscoëfficiënt *98*
ruit, eigenschappen van *86*

S

somgrafiek *105*
streepnotatie *156*

T

termen, gelijksoortige *9, 24*
trapezium, oppervlakte van *74*

V

variabele *107*
verband, kwadratisch *138*
verband, lineair *94*
vereenvoudigen van breuken *17*
vergelijkingen *107*
– bij klokkijken *132*
– met breuken *118, 119*
– met haakjes *117*
– opstellen *120*
oplossen van – *110*
vermenigvuldigen
– bij letterrekenen *8*
– van breuken *8, 21*
– van wortels *151*
verschilgrafiek *106*

W

wetenschappelijke notatie *30*
wortel
– van een negatief getal *145*
kwadraat van – *149*
wortelformules *146*
wortels *142*
benaderen van – *170*
gelijksoortige – *150*
haakjes wegwerken bij – *154*
herleiden van – *150*
vermenigvuldigen van – *151*
wortelteken *145*
worteltrekken *144*

Z

zwaartelijn *87*

© Noordhoff Uitgevers

Verantwoording

Beeld
Illustraties: Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: OKS, Chennai (India)
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Colofon
Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: OKS, Chennai (India)

Imageselect, Wassenaar: p. 6-7, 46 inzet, 59 rb, 90 inzet, 113, 134 inzet, 145, 166
Getty Images: p. 6 inzet, 75, 112, 186-187
Shutterstock: p. 25, 31, 46-47, 66 b, 90-91, 172-173
Mark P. Witton / National History Museum, Londen: p. 30
Reuters / ANP Photo, Rijswijk: p. 33
NASA / SDO: p. 39
Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 43, 104, 108, 134-135, 147
Vynckier Tools *N.*V., Moeskroen (B): p. 59 lo, ro
Roeland Hiele, Utrecht: p. 64
Bigstock: p. 66 o
Novum / ANP Photo, Rijswijk: p. 77
Ferdinand ten Klooster, Zwolle: p. 140
ANP Photo, Rijswijk: p. 148, 160, 177
Gerrit te Vaarwerk, Lochem: 184

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189
FSC www.fsc.org

0 / 18

© 2018 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van (een) gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

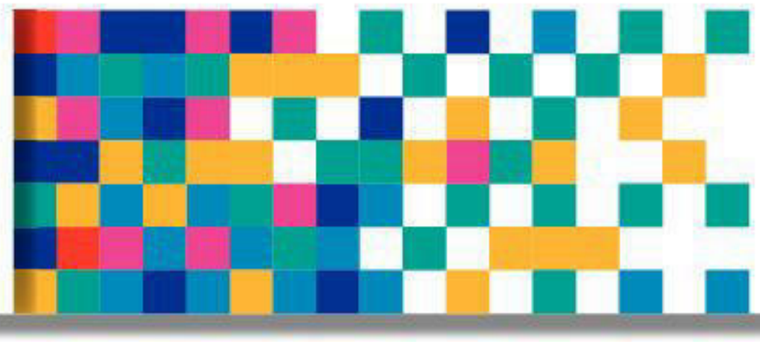
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without prior written permission of the publisher.

ISBN 978-90-01-88875-6

LEERBOEK DEEL 1 | WISKUNDE | 12E EDITIE | 2 HAVO(VWO)

Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving
met interactieve opdrachten in diverse leerroutes,
overzichtelijke dashboards en een uitgebreide toetsmodule.
Dit maakt gepersonaliseerd leren mogelijk.

Noordhoff Uitgevers



FSC
www.fsc.org
MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-88875-6