

& GETAL RUIMTE



Noordhoff Uitgevers

Getal & Ruimte

2 havo(vwo) deel 2

Twaalfde editie, 2018

Noordhoff Uitgevers
Groningen

Auteurs

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het deel 2h(v)2

Het deel 2h(v)2 is bestemd voor de tweede helft van het tweede leerjaar havo en havo/vwo. Het boek bereidt voor op zowel de delen voor 3 havo als 3 vwo. Na het doorwerken van het deel 2h(v)2 is een groot aantal van de tussendoelen wiskunde onderbouw havo/vwo aan de orde geweest. De verdere behandeling van de tussendoelen vindt plaats in de boeken van de derde klas.

Het deel 2h(v)2 bevat vier hoofdstukken. De hoeveelheid leerstof is gebaseerd op drie lesuren van 50 minuten per week.

De leerstof

In hoofdstuk 5 wordt de stelling van Pythagoras behandeld. Nieuw hierbij is de uitgebreide stelling van Pythagoras voor het berekenen van lengten van lichaamsdiagonalen van balken. De *bach*-stelling en de *hpq*-stelling worden in dit hoofdstuk als plus-stof aangeboden.

In hoofdstuk 6 Procenten en diagrammen komen typerende onderwerpen uit wiskunde A aan de orde. Zo krijgt het rekenen met procenten, waarmee in hoofdstuk 5 van klas 1 een begin is gemaakt, een vervolg, worden verschillende typen diagrammen behandeld en is er aandacht voor de centrummaten. Het hoofdstuk sluit af met een Excel-paragraaf. Het is aan te bevelen deze paragraaf door te werken omdat dataverwerking met Excel bij wiskunde A in de Tweede Fase een belangrijke rol speelt.

In hoofdstuk 7 staat het ontbinden in factoren en het oplossen van kwadratische vergelijkingen centraal. Het oplossen van kwadratische vergelijkingen wordt onder andere ingezet om de coördinaten van de snijpunten van een parabool en een lijn te berekenen.

In hoofdstuk 8 krijgen de leerlingen te maken met de inhoud van ruimtefiguren en het begrip vergrotingsfactor.

De basisstof van elk hoofdstuk wordt afgesloten met de Gemengde opgaven. Het maken van deze opgaven is een goede voorbereiding op het proefwerk. De Diagnostische toets, die na de Samenvatting staat, toetst de basiskennis en -vaardigheden van het hoofdstuk. Heeft een leerling moeite met een opgave van de Diagnostische toets, dan kan hij de bijbehorende opgave(n) van de Herhaling maken. Deze opgaven hebben meer deelvragen of zijn van de nodige uitleg voorzien.

Differentiatie, uitdaging en vaardigheden

In de 2h(v)-delen zijn voorzieningen aangebracht om de individuele leerling zoveel mogelijk op zijn eigen niveau te bedienen. Met de testopgaven, die nieuw zijn in deze editie, wordt in differentiatie voorzien. Verder wordt regelmatig plus-stof aangeboden. In plus-stof wordt dieper op een onderwerp ingegaan en hebben de opgaven een uitdagender karakter. Met plus-stof kan worden gedifferentieerd naar vwo-niveau. Naast de testopgaven zijn ook de denkopgaven nieuw. Een denkopgave biedt een probleem aan dat bij de behandelde theorie hoort, maar doet door een iets andere invalshoek of

het ontbreken van deelvragen een extra beroep op het denkvermogen van de leerling. Wiskundige denkactiviteiten maken onderdeel uit van het huidige examenprogramma havo en vwo. Door het aanbieden van denkopgaven in de onderbouwboeken raken de leerlingen hiermee vertrouwd. In tegenstelling tot plus-stof zijn denkopgaven bedoeld voor alle leerlingen.

Elk hoofdstuk sluit af met een Onderzoek. Hierin gaan de leerlingen op onderzoekende wijze aan de slag met een aan het hoofdstuk gerelateerd onderwerp. Met het Onderzoek wordt een vorm van differentiatie aangeboden.

Achterin het boek zijn de Wiskundige vaardigheden en de Algemene vaardigheden opgenomen. Door de Wiskundige vaardigheden te maken worden rekenvaardigheden en algebraïsche vaardigheden herhaald en verder ingeslepen. In de Algemene vaardigheden staat het systematisch oplossen van problemen centraal. Leerlingen kunnen de hierin opgedane vaardigheden gebruiken bij het maken van de wizBRAIN Kangoeroe-opgaven van 2015, die na de Algemene vaardigheden komen. Omdat deze wiskundige puzzeltjes niet gesorteerd zijn op onderwerp en ook niet gerelateerd zijn aan een hoofdstuk, wordt ook hiermee een extra beroep gedaan op de wiskundige creativiteit en het wiskundig denken van de leerling. Leerlingen die snel en gemakkelijk een hoofdstuk doorwerken, kunnen met deze Kangoeroe-opgaven extra worden uitgedaagd.

Getal & Ruimte Online

Via een licentie krijgt een leerling toegang tot de digitale omgeving van Getal & Ruimte. Hierin wordt regelmatig een theorieblok uitgelegd in een instructievideo. Tevens kunnen alle opgaven digitaal gemaakt en nagekeken worden. In de digitale omgeving is er de mogelijkheid om te differentiëren omdat er adaptief kan worden gewerkt. Van elke leerling wordt de voortgang bijgehouden en voor de docent inzichtelijk gemaakt in een dashboard. Verder wordt bij elk hoofdstuk een uitgebreide studiewijzer en een digitaal RTTI-oefenproefwerk aangeboden. Daarnaast krijgen docenten, via de docentenlicentie, een aantal volledig uitgewerkte projecten en een grote hoeveelheid RTTI-gelabelde proefwerkopgaven waarmee een proefwerk samengesteld kan worden.

Opmerkingen van gebruikers stellen wij zeer op prijs.

Voorjaar 2018

Legenda

Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen die je paraat moet hebben.

Oriënterende opgave

Theorieblokken worden voorafgegaan door oriënterende opgaven.

[>>5] Testopgave

Een testopgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld goed begrijpt, dan kun je de testopgave maken. Gaat dit foutloos, dan mag je verdergaan met de opgave die achter >> staat.

Gewone opgave

Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

Afsluitende opgave

Aan deze opgave zie je welk eindniveau verwacht wordt.

Denkopgave

Een denkopgave doet een extra beroep op je denkvermogen. De denkopgave hoort bij de behandelde theorie, maar vaak wordt een probleem op een iets andere manier gepresenteerd. Denkopgaven zijn bedoeld voor alle leerlingen.

Rekenmachine



Bij deze opgave mag je een rekenmachine gebruiken.

Diagnostische toets

8,9

Met de diagnostische toets wordt gecontroleerd of de basisstof is begrepen. Per toetsvraag wordt verwezen naar een of meer opgaven uit de herhaling



Plus-stof

Met plus-stof kan worden gedifferentieerd naar vwo-niveau.



Plus-paragraaf

Paragraaf waarmee kan worden gedifferentieerd naar vwo-niveau.

[> WERKBOEK]

Verwijzing naar het werkboek.



Paragraaf waarbij je met het computerprogramma Excel werkt.

Inhoud

5 De stelling van Pythagoras

6

Voorkennis Kwadraten en wortels 8

5.1 Rechthoekige driehoeken 10

5.2 Zijden van rechthoekige driehoeken berekenen 13

5.3 De stelling van Pythagoras toepassen 20

5.4 Doorsneden 24

5.5 Pythagoras in de ruimte 28

+ 5.6 Stellingen in rechthoekige driehoeken 33

Gemengde opgaven 36

Samenvatting 38

Diagnostische toets 40

Herhaling 42

Onderzoek De stelling van Pythagoras bewijzen 46

6 Procenten en diagrammen

48

Voorkennis Procenten 50

6.1 Rekenen met procentuele toename en afname 52

6.2 Procentuele verandering 56

6.3 Beeld-, staaf- en lijndiagram 60

6.4 Cirkeldiagram 64

6.5 Histogram en steelladdiagram 67

6.6 Centrummaten 74

6.7 Tabellen en diagrammen met Excel 84

Gemengde opgaven 86

Samenvatting 88

Diagnostische toets 90

Herhaling 92

Onderzoek Een kwantitatief onderzoek uitvoeren 97

7 Kwadratische vergelijkingen

100

Voorkennis Haakjes wegwerken en vergelijkingen 102

7.1 De vergelijking $x^2 = c$ 104

7.2 Buiten haakjes brengen 108

7.3 De product-som-methode 113

7.4 Kwadratische vergelijkingen 117

7.5 Kwadratische vergelijkingen oplossen 121

Gemengde opgaven 126

Samenvatting 128

Diagnostische toets 130

Herhaling 132

Onderzoek De parabool 136

8 Inhoud en vergroten

138

Voorkennis Oppervlakten 140

8.1 Inhoud prisma en cilinder 142

8.2 Inhoud piramide en kegel 147

8.3 Vergroten en verkleinen 152

8.4 Oppervlakte bij vergroten 157

8.5 Inhoud bij vergroten 162

Gemengde opgaven 168

Samenvatting 170

Diagnostische toets 172

Herhaling 174

Onderzoek

Zelfgelijkvormigheid 178

Vaardigheden 180

Wiskundige vaardigheden 182

Algemene vaardigheden 190

Kangoeroe-opgaven 194

Trefwoordenregister 202

Verantwoording 204

De stelling van Pythagoras

Wat leer je?

- Hoe de stelling van Pythagoras luidt.
- Het berekenen van zijden van rechthoekige driehoeken.
- Hoe je kunt narekenen of een driehoek rechthoekig is.
- Hoe je in ruimtefiguren doorsneden tekent.
- De lengten van lijnstukken in ruimtefiguren berekenen.
- + - De *bach*-stelling en de *hpq*-stelling.

In het Zwitserse Luzern is in mei 2012 's werelds allereerste gondelbaan geopend waarbij de gondels een open dak hebben. De gondels brengen je van het basisstation op een hoogte van 711 meter naar de top van de Stanserhornberg op een hoogte van 1850 meter. Op een kaart is te zien dat de horizontale afstand tussen dal- en bergstation 2000 meter is. Met deze gegevens kun je met de beroemde stelling van de Griekse wiskundige Pythagoras (zesde eeuw voor Christus) de lengte van de gondelbaan berekenen.

5





Voorkennis Kwadraten en wortels

Theorie A Afronden

Hiernaast staat de uitkomst van een berekening op de rekenmachine.

83.2571283

- Bij het afronden op twee decimalen kijk je naar de derde decimaal.

De derde decimaal is 7, dus je rondt naar boven af. Je krijgt 83,26.

- Bij het afronden op drie decimalen kijk je naar de vierde decimaal.

De vierde decimaal is 1, dus je rondt naar beneden af. Je krijgt 83,257.

- Bij het afronden op één decimaal kijk je naar de tweede decimaal.

De tweede decimaal is 5, dus je rondt naar boven af. Je krijgt 83,3.

- 1 Rond 16,275831 af op

a drie decimalen

b twee decimalen

c gehele

- 2 Rond 6,9535 af op

a drie decimalen

b één decimaal

c gehele

Theorie B Kwadraten

Het kwadraat van 8 is $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$. En zo is $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$, $13^2 = 13 \cdot 13 = 169$ en $20^2 = 20 \cdot 20 = 400$.

Omdat $8^2 = 64$

is $80^2 = 6400$

en $0,8^2 = 0,64$.

Als een getal op één nul eindigt, dan eindigt het kwadraat op twee nullen.

- 3 Bereken de kwadraten van de getallen 1 tot en met 20, 25, 30, 40, 50 en 100.

Leer de kwadraten van opgave 3 uit het hoofd.

- 4 Bereken.

a $0,4^2$

c 120^2

e $0,12^2$

b 200^2

d $1,2^2$

f 250^2



Theorie C Wortels

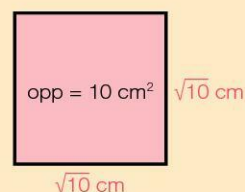
De wortel van 64 is $\sqrt{64} = 8$, want $8^2 = 64$ en 8 is niet negatief.

En zo is $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{169} = 13$ en $\sqrt{400} = 20$.

Verder zijn wortels zoals $\sqrt{7}$ te benaderen met de rekenmachine.

Afgerond op drie decimalen krijg je $\sqrt{7} \approx 2,646$.

Van een vierkant met oppervlakte 10 cm^2 is de lengte van een zijde $\sqrt{10} \text{ cm}$.



figuur 5.1

5 Bereken.

a $\sqrt{36}$

c $\sqrt{49}$

e $\frac{1}{2}\sqrt{144}$

b $\sqrt{169}$

d $2\sqrt{121}$

f $3\sqrt{16}$

6 Bereken. Rond af op twee decimalen.



a $\sqrt{8}$

c $\sqrt{160}$

e $\sqrt{50}$

b $\sqrt{21}$

d $\sqrt{99}$

f $\sqrt{200}$

7 a Vierkant $ABCD$ heeft een oppervlakte van $8,3 \text{ cm}^2$.



Bereken de lengte van een zijde in cm. Rond af op één decimaal.

b Vierkant $KLMN$ heeft een oppervlakte van 83 mm^2 .

Bereken de lengte van een zijde in cm. Rond af op één decimaal.

c Vierkant $PQRS$ heeft een oppervlakte van 600 dm^2 .

Bereken de omtrek van $PQRS$ in dm. Rond af op één decimaal.

8 Welke van de volgende berekeningen zijn juist?

a $3^2 + 4^2 = 5^2$

d $13^2 - 12^2 = 5^2$

g $12^2 + 14^2 = 16^2$

b $4^2 + 5^2 = 6^2$

e $17^2 - 15^2 = 8^2$

h $3^2 + 2^2 = 5^2$

c $10^2 - 8^2 = 6^2$

f $15^2 + 20^2 = 25^2$

i $12^2 + 16^2 = 20^2$

9 Hiernaast zie je hoe je de vergelijkingen

$x + 6^2 = 7^2$ en $5^2 + x = 9^2$ oplost.

Los op.

a $x + 5^2 = 6^2$

c $x = 7^2 + 4^2$

b $x = 8^2 - 2^2$

d $6^2 + x = 9^2$

$$x + 6^2 = 7^2$$

$$x + 36 = 49$$

$$-36 \quad -36$$

$$x = 13$$

$$5^2 + x = 9^2$$

$$25 + x = 81$$

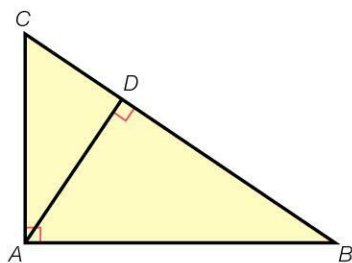
$$-25 \quad -25$$

$$x = 56$$

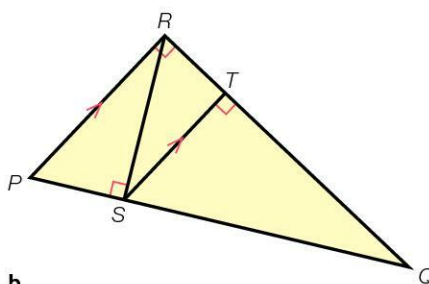
10 a Van $\triangle ABC$ in figuur 5.2a is $\angle A = 90^\circ$. Dus $\triangle ABC$ is een rechthoekige driehoek. Verder is AD de hoogtelijn uit A .

Welke rechthoekige driehoeken herken je nog meer in figuur 5.2a?

b Welke rechthoekige driehoeken herken je in figuur 5.2b?



a



b

figuur 5.2

5.1 Rechthoekige driehoeken

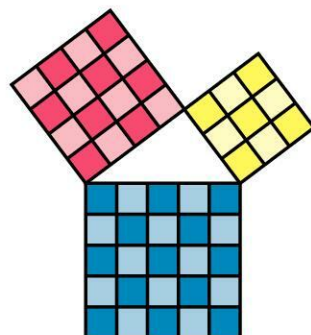


In dit hoofdstuk mag je de rekenmachine gebruiken.

0 1

In figuur 5.3 zie je drie vierkanten die uit allemaal even grote vierkantjes bestaan. De drie vierkanten sluiten een rechthoekige driehoek in.

- Uit hoeveel vierkantjes bestaat elk vierkant?
- Tel het aantal vierkantjes van de twee kleine vierkanten bij elkaar op. Wat valt je op?



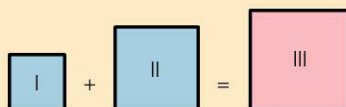
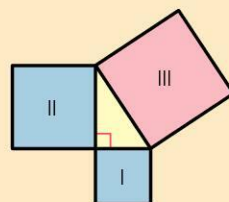
figuur 5.3

Theorie A De stelling van Pythagoras

Net als in figuur 5.3 kun je elke driehoek insluiten door drie vierkanten. Is de driehoek rechthoekig, dan is er iets bijzonders aan de hand. De som van de oppervlakten van de twee kleinste vierkanten is dan gelijk aan de oppervlakte van het grootste vierkant. Deze eigenschap gebruikten de Egyptenaren al zo'n 4600 jaar geleden bij de bouw van de piramides. De Griekse wiskundige Pythagoras was de eerste die bewees dat deze eigenschap voor elke rechthoekige driehoek klopt. Daarom spreken we van de **stelling van Pythagoras**.

DE STELLING VAN PYTHAGORAS

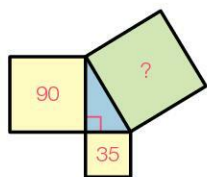
Bij elke rechthoekige driehoek is
oppervlakte I + oppervlakte II = oppervlakte III.



2

In figuur 5.4 zie je vier rechthoekige driehoeken die worden ingesloten door vierkanten. Van twee van die vierkanten is telkens de oppervlakte in mm^2 gegeven.

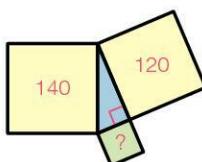
Bereken van elk groen vierkant de oppervlakte.



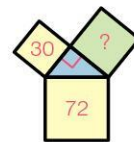
a



b



c



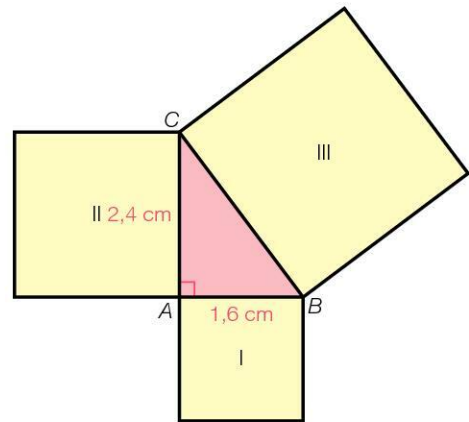
d

figuur 5.4

0 3

In figuur 5.5 zie je drie vierkanten die de rechthoekige driehoek ABC insluiten.

- Bereken van elk van de vierkanten de oppervlakte.
- Hoeveel cm is zijde BC ? Rond af op één decimaal.



figuur 5.5

ARTIKEL

BEROEP

GESCHIEDENIS

INFORMATIE



Pythagoras

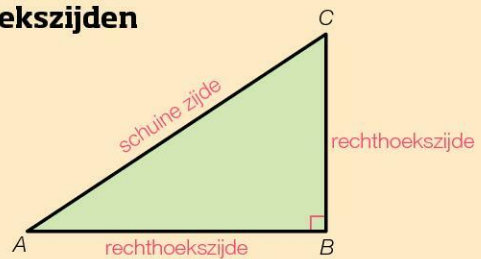
Het standbeeld op de foto hiernaast staat op het Griekse eiland Samos. Het stelt de beroemde wiskundige Pythagoras voor die omstreeks 580 voor Christus op het Griekse eiland Samos werd geboren. Als jongeman heeft hij veel gereisd. Tijdens deze reizen maakte hij kennis met de wiskunde van de Egyptenaren en de Babyloniërs. Volgens Pythagoras kun je door het bestuderen van getallen alles van het universum te weten komen. Van hem is de uitspraak *alles is getal*.



Theorie B Schuine zijde en rechthoekszijden

De zijden van een rechthoekige driehoek hebben speciale namen.

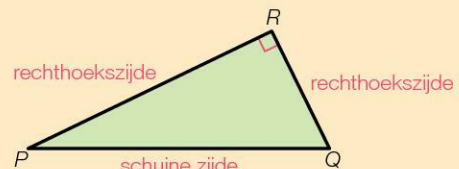
De zijde tegenover de rechte hoek heet de **schuine zijde**. In figuur 5.6 is AC de schuine zijde. De andere zijden zijn de benen van de rechte hoek. Daarom heten AB en BC de **rechthoekszijden**.



figuur 5.6

In figuur 5.7 ligt de zijde PQ tegenover de rechte hoek. Dus PQ is de schuine zijde. De zijden PR en QR zijn de rechthoekszijden.

De schuine zijde van een rechthoekige driehoek heet ook wel **hypotenusa**.

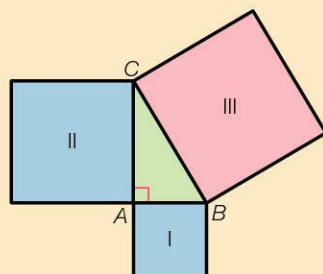


figuur 5.7 Zoals je ziet loopt de schuine zijde van een rechthoekige driehoek niet altijd schuin.

De oppervlakte van vierkant I met zijde AB in figuur 5.8 is gelijk aan $AB \cdot AB = AB^2$. En zo is de oppervlakte van vierkant II gelijk aan $AC \cdot AC = AC^2$ en de oppervlakte van vierkant III gelijk aan $BC \cdot BC = BC^2$.

Omdat opp I + opp II = opp III is $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

In $\triangle ABC$ zijn AB en AC de rechthoekszijden en is BC de schuine zijde. Je kunt de stelling van Pythagoras dus ook als volgt formuleren.



figuur 5.8

DE STELLING VAN PYTHAGORAS

In elke rechthoekige driehoek is

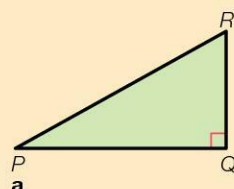
$$(\text{ene rechthoekszijde})^2 + (\text{andere rechthoekszijde})^2 = (\text{schuine zijde})^2.$$

In $\triangle PQR$ in figuur 5.9a is $\angle Q$ de rechte hoek.

De rechthoekszijden zijn PQ en QR .

De zijde PR is de schuine zijde.

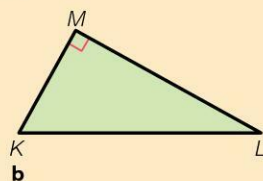
Volgens de stelling van Pythagoras is $PQ^2 + QR^2 = PR^2$.



a

In figuur 5.9b is volgens de stelling van Pythagoras

$$KM^2 + LM^2 = KL^2.$$



b

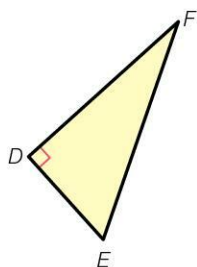
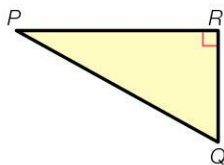
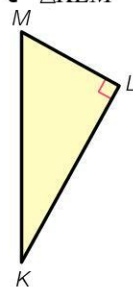
figuur 5.9

4 Zie figuur 5.10. Schrijf de stelling van Pythagoras op voor

a $\triangle DEF$

b $\triangle PQR$

c $\triangle KLM$



figuur 5.10

Denk eraan dat de stelling van Pythagoras alleen in rechthoekige driehoeken geldt.



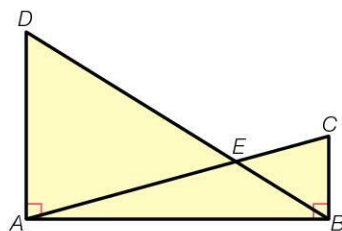
5 a Van $\triangle GHI$ is $\angle I = 90^\circ$.

Schrijf voor $\triangle GHI$ de stelling van Pythagoras op.

b Van $\triangle BCD$ is $\angle B = 90^\circ$.

Schrijf voor $\triangle BCD$ de stelling van Pythagoras op.

A 6 Schrijf voor elke rechthoekige driehoek in figuur 5.11 de stelling van Pythagoras op.



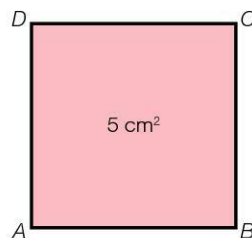
figuur 5.11

5.2 Zijden van rechthoekige driehoeken berekenen

- 0 7** Van het vierkant $ABCD$ in figuur 5.12 is de oppervlakte 5 cm^2 , dus $AB^2 = 5$. De zijde van het vierkant is $\sqrt{5} \text{ cm}$. Dus uit $AB^2 = 5$ volgt $AB = \sqrt{5} \approx 2,24$.

Vul in. Rond zo nodig af op twee decimalen.

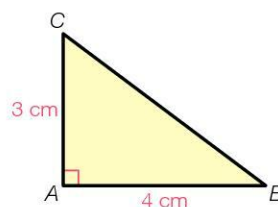
- a Uit $KL^2 = 10$ volgt $KL = \sqrt{\dots} \approx \dots$
- b Uit $PQ^2 = 49$ volgt $PQ = \sqrt{\dots} = \dots$
- c Uit $DE^2 = 8,4$ volgt $DE = \dots \approx \dots$



figuur 5.12

- 0 8** Van $\triangle ABC$ in figuur 5.13 is $AB = 4 \text{ cm}$, $AC = 3 \text{ cm}$ en $\angle A = 90^\circ$.

- a Schrijf voor $\triangle ABC$ de stelling van Pythagoras op.
- b Vul in het antwoord van vraag a in $AB = 4$ en $AC = 3$ en bereken BC^2 .
- c Hoe lang is BC ?



figuur 5.13

Theorie A De schuine zijde berekenen

Met de stelling van Pythagoras kun je van een rechthoekige driehoek de schuine zijde berekenen als de twee rechthoeks zijden gegeven zijn.

Voorbeeld

Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 90^\circ$, $AB = 10 \text{ cm}$ en $AC = 5 \text{ cm}$. Bereken BC in cm. Rond af op één decimaal.

Aanpak

Maak een schets van $\triangle ABC$.

Schrijf de stelling van Pythagoras op.

Vul AB en AC in en bereken hiermee BC^2 en BC .

Uitwerking

Zie de schets hiernaast.

$\angle A = 90^\circ$, dus $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$10^2 + 5^2 = BC^2$$

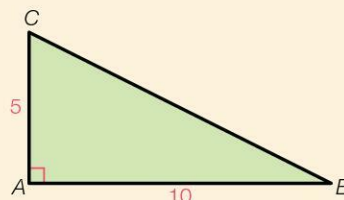
$$100 + 25 = BC^2$$

$$BC^2 = 125$$

$$BC = \sqrt{125} \approx 11,2 \text{ cm}$$



Zorg er in je schets voor dat $\angle A = 90^\circ$.



- 9 a** Van $\triangle PQR$ is $\angle R = 90^\circ$, $PR = 8$ cm en $QR = 15$ cm. Bereken PQ .
- b** Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 90^\circ$, $AB = 4$ cm en $AC = 7$ cm. Bereken BC in cm. Rond af op één decimaal.
- c** Van $\triangle KLM$ is $\angle M = 90^\circ$, $KM = LM = 7$ cm. Bereken KL in cm. Rond af op één decimaal.

- 10 a** Zie figuur 5.14a. Bereken KL in cm. Rond af op één decimaal.
- b** Zie figuur 5.14b. Bereken BC in cm. Rond af op één decimaal.

- 11 a** Van rechthoek $PQRS$ is $PQ = 8$ cm en $PS = 3,5$ cm. Bereken de lengte van diagonaal PR in cm. Rond af op twee decimalen.
- b** De zijde van vierkant $KLMN$ is $4,3$ cm. Bereken de lengte van diagonaal KM in cm. Rond af op twee decimalen.

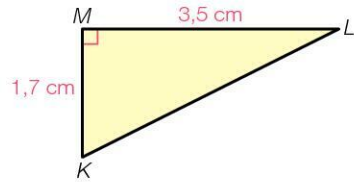
- A 12** Gegeven is $\triangle ABC$ in figuur 5.15. Bereken de omtrek van $\triangle ABC$ in cm. Rond af op één decimaal.

- 13** Gegeven zijn de punten $A(-3, -2)$ en $B(3, 6)$. Bereken de lengte van het lijnstuk AB .

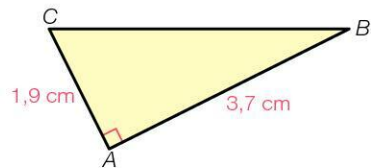
- 14** Van $\triangle PQR$ is gegeven dat $PR = QR$ en $PQ = 10$ cm. Verder is opp $\triangle PQR = 60$ cm². Bereken de omtrek van $\triangle PQR$.

- 15** In figuur 5.16 zie je een rij dominostenen waarvan de eerste drie stenen omgevallen en tot stilstand gekomen zijn. De derde steen raakt de vierde op een hoogte van $4,3$ cm. Bereken de lengte van een dominosteent in cm. Rond af op één decimaal.

- 16** Tijdens een hevige storm is een vlaggenmast op een hoogte van $5,6$ meter geknakt. De top van de vlaggenmast raakt de grond op een afstand van $3,85$ meter van de voet. Zie figuur 5.17. Hoeveel meter was de hoogte van de vlaggenmast? Rond af op twee decimalen.

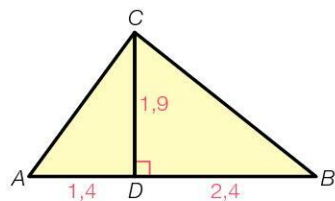


a

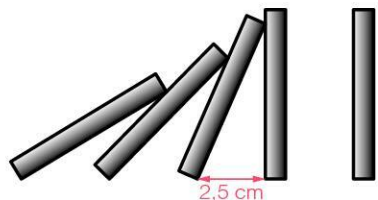


b

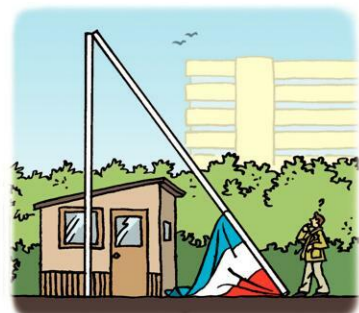
figuur 5.14



figuur 5.15 De afmetingen zijn in cm.

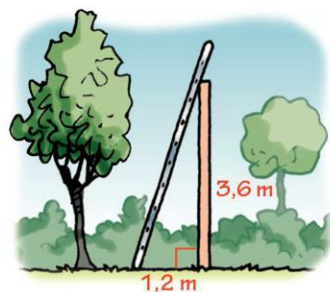


figuur 5.16



figuur 5.17

- A 17** Een ladder is 4,5 meter lang. De ladder rust tegen een 3,6 meter hoge schutting. De afstand van de voet tot de schutting is 1,20 meter. Zie figuur 5.18. Hoeveel cm van de ladder steekt boven de schutting uit? Rond af op gehelen.



figuur 5.18

- A 18** De Stanserhorn Cabrio in Luzern (Zwitserland) is 's werelds eerste gondelbaan waarbij de gondels een open dak hebben. Het dalstation bevindt zich op een hoogte van 711 meter en het bergstation op een hoogte van 1850 meter. De horizontale afstand tussen beide stations is 2000 meter. Bereken de lengte van de gondelbaan in meter. Rond af op gehelen. Ga ervan uit dat de gondelbaan in een rechte lijn omhoog gaat.



- A 19** Bij een verhuizing wil men een rechthoekig tafelblad van 122 cm bij 244 cm door een raam van 75 cm bij 1 meter naar binnen hijsen. Past het tafelblad door het raam? Licht je antwoord toe met een berekening.



figuur 5.19

- 20** In figuur 5.20 zie je een cilinder met een diameter van 9 cm en een hoogte van 21 cm. Rond de cilindermantel is een touwtje gespannen van A naar B . Het punt B ligt precies onder het punt A . Bereken de lengte van het touwtje in mm. Rond af op gehelen.



figuur 5.20

Theorie B Afstanden in een assenstelsel

De afstand tussen twee roosterpunten kun je met de stelling van Pythagoras berekenen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Bereken de afstand tussen de punten $A(2, 1)$ en $B(-3, -2)$ in twee decimalen nauwkeurig.

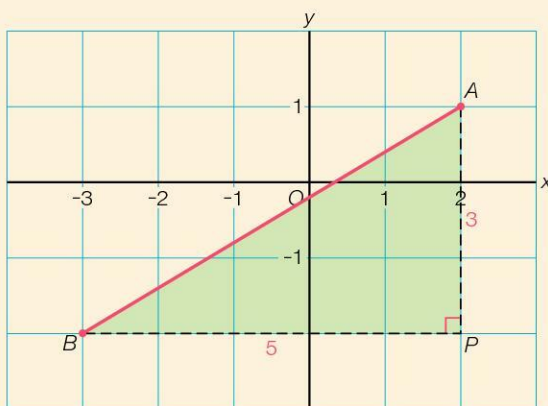
Aanpak

Gebruik de rechthoekige driehoek in figuur 5.21.

Uitwerking

$$\begin{aligned}\angle P &= 90^\circ, \text{ dus } AP^2 + BP^2 = AB^2 \\ 3^2 + 5^2 &= AB^2 \\ 9 + 25 &= AB^2 \\ AB^2 &= 34 \\ AB &= \sqrt{34} \approx 5,83\end{aligned}$$

Bij afstanden in een rooster zetten we geen lengte-eenheid.



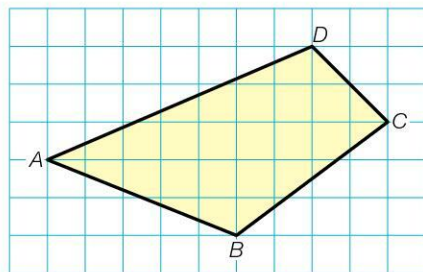
figuur 5.21

- 21** a Bereken de afstand tussen de punten $A(2, 1)$ en $B(6, 4)$.
 b Bereken de afstand tussen de punten $C(-3, 1)$ en $D(3, -2)$. Rond af op twee decimalen.
 c Bereken de afstand tussen de punten $E(1, -3\frac{1}{2})$ en $F(-5\frac{1}{2}, -5)$. Rond af op twee decimalen.

- A 22** Bereken in één decimaal nauwkeurig de omtrek van vierhoek $ABCD$ in figuur 5.22.



Rond pas in het eindantwoord af.

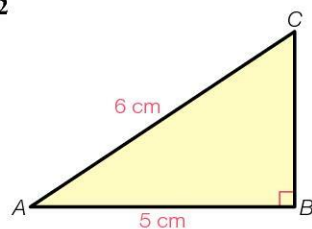


figuur 5.22

- O 23** In figuur 5.23 is een rechthoekige driehoek ABC getekend.

Van de volgende beweringen zijn er twee juist. Welke?

- a $BC^2 = 25 + 36$ d $BC^2 + 36 = 25$
 b $BC^2 + 25 = 36$ e $BC^2 = 36 - 25$
 c $BC^2 = 25 - 36$ f $BC^2 = AB^2 + AC^2$



figuur 5.23

Theorie C Rechthoekszijden berekenen

Tot nu toe heb je telkens van een rechthoekige driehoek de schuine zijde berekend. Maar je kunt met de stelling van Pythagoras ook een rechthoekszijde berekenen als je de andere rechthoekszijde en de schuine zijde weet.

Voorbeeld

Van $\triangle PQR$ is $\angle Q = 90^\circ$, $PR = 4$ cm en $QR = 2$ cm.
Bereken PQ in cm. Rond af op één decimaal.

Aanpak

Schets $\triangle PQR$ en schrijf de stelling van Pythagoras op.
Dus $PQ^2 + \dots = \dots$ en bereken hiermee PQ .

Uitwerking

Zie de schets hiernaast.

$$\angle Q = 90^\circ, \text{ dus } PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

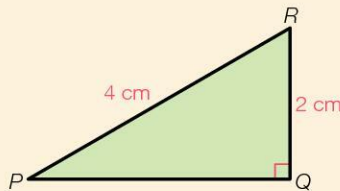
$$PQ^2 + 2^2 = 4^2$$

$$PQ^2 + 4 = 16$$

$$\quad - 4 \quad - 4$$

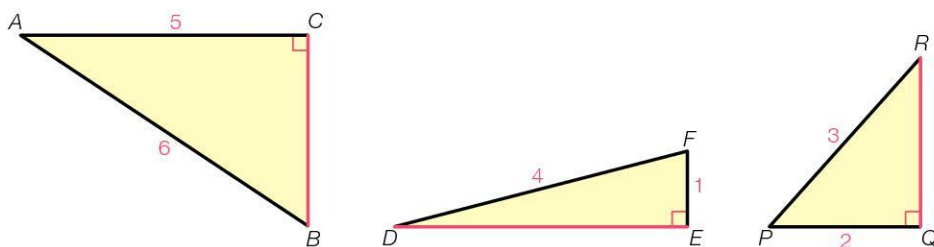
$$PQ^2 = 12$$

$$PQ = \sqrt{12} \approx 3,5 \text{ cm}$$



De schuine zijde is de langste zijde van een rechthoekige driehoek. Gebruik dat als controle. Zou je $PQ = 4,5$ cm krijgen, dan weet je zeker dat het fout is.

- 24** Bereken van elke rode zijde in figuur 5.24 de lengte in cm.
Rond af op één decimaal.



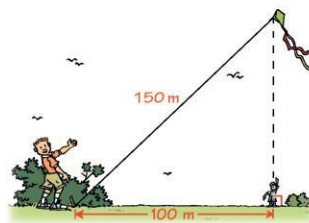
figuur 5.24 De afmetingen zijn in cm.

- 25** a Van $\triangle KLM$ is $\angle L = 90^\circ$, $KL = 4,6$ cm en $KM = 8,3$ cm.
Bereken LM in cm. Rond af op één decimaal.
b Van $\triangle PQR$ is $\angle R = 90^\circ$, $PQ = 8,2$ cm en $QR = 2,4$ cm.
Bereken PR in cm. Rond af op één decimaal.
c Van $\triangle DEF$ is $\angle D = 90^\circ$, $DE = 63$ cm en $EF = 65$ cm.
Bereken DF in cm.

Maak eerst een schets.

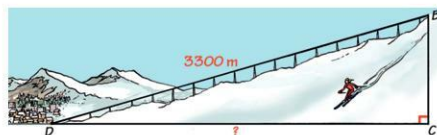


- A 26** Bertus en Jan-Willem zijn aan het vliegeren. Het vliegertouw is 150 meter lang. Als Jan-Willem op 100 meter afstand van Bertus staat, ziet hij de vlieger recht boven zich. Zie figuur 5.25. Hoe hoog staat de vlieger? Geef het antwoord in meter en rond af op één decimaal.



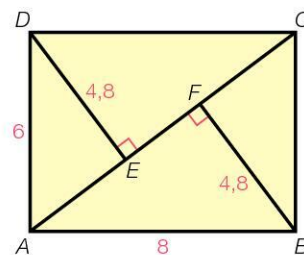
figuur 5.25

- A 27** In Arosa (Zwitserland) gaat een kabelbaan in een rechte lijn van het dalstation D (op 1750 meter hoogte) naar het bergstation B (op 2600 meter hoogte). De lengte van de kabel is 3300 meter. Bereken de horizontale afstand CD in meter. Rond af op tientallen.



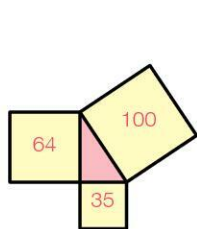
figuur 5.26

- 28** Gegeven is rechthoek $ABCD$ in figuur 5.27 met $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm en $DE = BF = 4,8$ cm. Bereken EF .

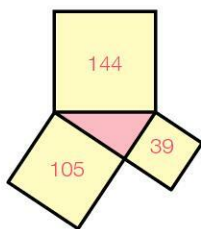


figuur 5.27

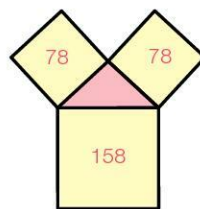
- O 29** In figuur 5.28 staat in elk vierkant telkens de oppervlakte in mm^2 . Welke van de rode driehoeken is rechthoekig? Licht je antwoord toe met een berekening.



a



b



c

figuur 5.28

Theorie D De omgekeerde stelling van Pythagoras

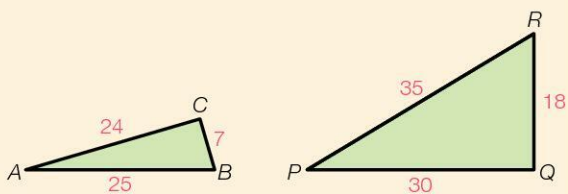
Zijn van een driehoek de lengten van de zijden gegeven, dan kun je narekenen of één van de hoeken 90° is. Je gebruikt dan de omgekeerde stelling van Pythagoras.

OMGEKEERDE STELLING VAN PYTHAGORAS

Als in een driehoek geldt $(\text{ene zijde})^2 + (\text{andere zijde})^2 = (\text{langste zijde})^2$, dan is de hoek tegenover de langste zijde een rechte hoek.

Voorbeeld

Onderzoek met een berekening of $\triangle ABC$ en $\triangle PQR$ in figuur 5.29 rechthoekig zijn. Noem in dat geval de rechte hoek.



figuur 5.29 De afmetingen zijn in mm.

Aanpak

De rechte hoek kan alleen maar tegenover de langste zijde liggen, dus ga na of $AC^2 + BC^2 = AB^2$ en of $PQ^2 + QR^2 = PR^2$.

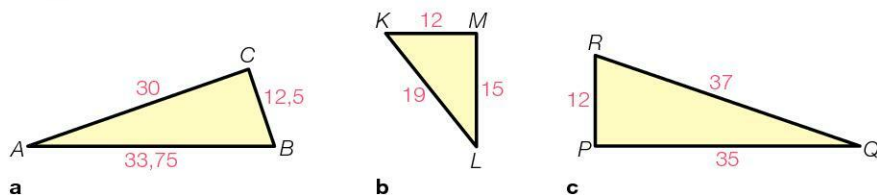
Uitwerking

- a $AC^2 + BC^2 = 24^2 + 7^2 = 625$
 $AB^2 = 25^2 = 625$ } $AC^2 + BC^2 = AB^2$, dus $\angle C = 90^\circ$.
- b $PQ^2 + QR^2 = 30^2 + 18^2 = 1224$
 $PR^2 = 35^2 = 1225$ } $PQ^2 + QR^2 \neq PR^2$, dus $\triangle PQR$ is niet rechthoekig.



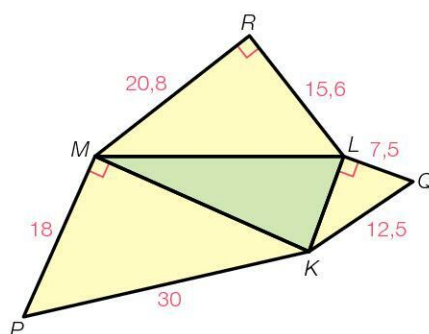
$\neq$ betekent 'is niet gelijk aan'.

- 30 Welke van de driehoeken in figuur 5.30 is rechthoekig? Noem in dat geval de rechte hoek.



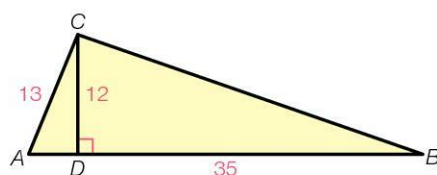
figuur 5.30 De afmetingen zijn in mm.

- A 31 Onderzoek met een berekening of $\triangle KLM$ in figuur 5.31 rechthoekig is.



figuur 5.31 De afmetingen zijn in mm.

- 32 Onderzoek met een berekening of $\triangle ABC$ in figuur 5.32 rechthoekig is.



figuur 5.32 De afmetingen zijn in mm.

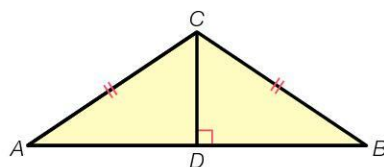
De stelling van Pythagoras

5.3 De stelling van Pythagoras toepassen

0 33 In de gelijkbenige driehoek ABC in figuur 5.33 is de hoogtelijn CD getekend.

Welke beweringen zijn waar?

- a $AC^2 + BC^2 = AB^2$
- b $AB^2 + BC^2 = AC^2$
- c $AD^2 + CD^2 = AC^2$
- d $BD^2 + CD^2 = BC^2$

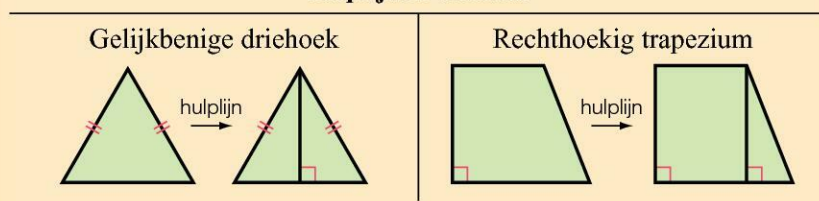


figuur 5.33

Theorie A Hulplijnen tekenen

Je mag de stelling van Pythagoras alleen gebruiken in rechthoekige driehoeken. Soms is het nodig om eerst een **hulplijn** te tekenen om een rechthoekige driehoek te krijgen. In een gelijkbenige driehoek en in een rechthoekig trapezium gebruik je vaak de volgende hulplijnen.

hulplijnen tekenen

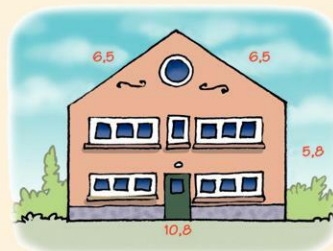


Voorbeeld

Bereken de hoogte van het huis hiernaast in meter. Rond af op één decimaal.

Aanpak

- Schets het driehoekige dakgedeelte en teken als hulplijn de hoogtelijn uit de top.
- Zet letters bij de hoekpunten en bereken de lengte van de hoogtelijn uit de top met de stelling van Pythagoras.



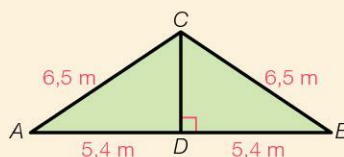
figuur 5.34 De afmetingen zijn in meter.

Uitwerking

Zie de schets hiernaast.

In $\triangle ADC$ is $\angle D = 90^\circ$, dus $AD^2 + CD^2 = AC^2$
 $5,4^2 + CD^2 = 6,5^2$
 $29,16 + CD^2 = 42,25$
 $CD^2 = 42,25 - 29,16 = 13,09$
 $CD = \sqrt{13,09} = 3,61\dots$

De hoogte van het huis is $3,61\dots + 5,8 \approx 9,4$ m.



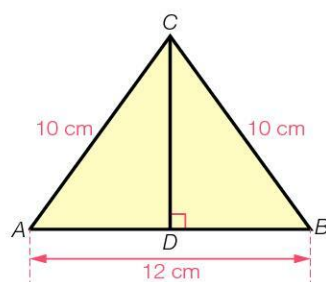
Bij het berekenen van lengten van lijnstukken gebruik je de volgende aanpak.

Werkschema: lengten van lijnstukken berekenen

- 1 Maak een schets van de situatie.
- 2 Zoek rechthoekige driehoeken. Teken zo nodig hulplijnen.
- 3 Verwerk de gegevens in de schets en zet letters bij belangrijke punten.
- 4 Bereken de gevraagde lengte met de stelling van Pythagoras.

- 34** Van de gelijkbenige driehoek ABC in figuur 5.35 zijn de benen 10 cm en is de basis 12 cm.

- a Bereken de hoogte CD .
- b Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.

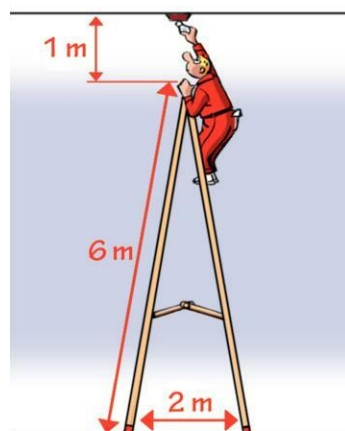


figuur 5.35

- 35** Van $\triangle PQR$ is $PQ = 4$ cm en $QR = PR = 6$ cm. Maak een schets en bereken de hoogte RS in cm. Rond af op één decimaal.

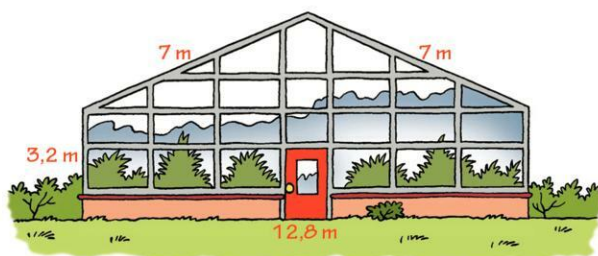
- 36** a Vierkant $ABCD$ heeft een diagonaal van 6 cm. Bereken de oppervlakte van het vierkant in cm^2 .
 b De gelijkzijdige driehoek PQR heeft zijden van 4 cm. Bereken de oppervlakte van $\triangle PQR$ in cm^2 . Rond af op twee decimalen.

- 37** Conciërge Erwin wil in de aula van de school een lamp vervangen. Het hoogste punt van de ladder zit één meter onder het plafond. Zie figuur 5.36. Bereken de hoogte van de aula in meter. Rond af op één decimaal.



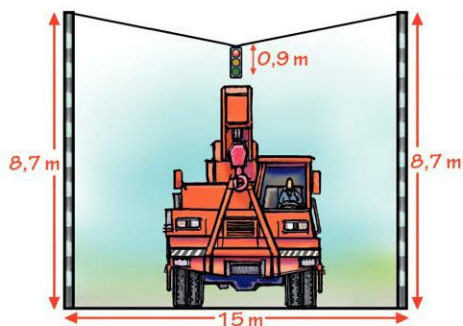
figuur 5.36

- 38** Hoeveel cm is de hoogte van de kas in figuur 5.37? Rond af op gehelen.



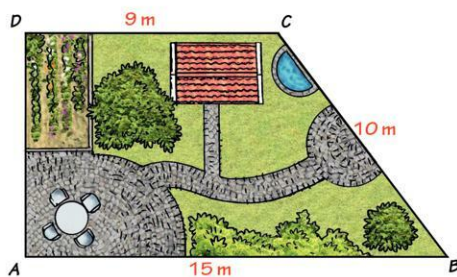
figuur 5.37

- A 39** Tussen twee 8,7 meter hoge palen hangt aan een 15,2 meter lange kabel een verkeerslicht. Zie figuur 5.38.
Onderzoek of een 6,5 meter hoge takelwagen onder het verkeerslicht door kan rijden.



figuur 5.38

- A 40** Zie de tuin in figuur 5.39 met $\angle A = \angle D = 90^\circ$. Verder is $AB = 15$ m, $BC = 10$ m en $CD = 9$ m.
Bereken de oppervlakte van de tuin.



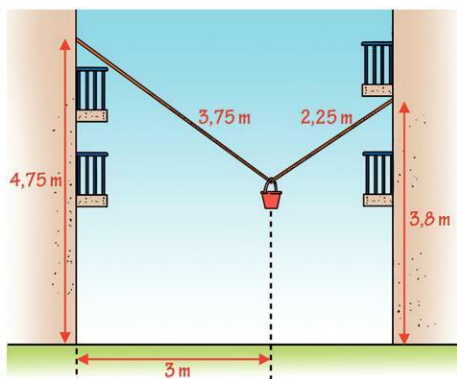
figuur 5.39

- A 41** In figuur 5.40 is in een bovenaanzicht het parcours van een prestatieloop getekend. Zoals je ziet ontbreekt bij één recht stuk van het parcours de afstand.
- Bereken de ontbrekende afstand in meter.
 - Mirjam loopt het parcours acht keer. Ze doet er 27 minuten en 40 seconden over. Met welke gemiddelde snelheid heeft Mirjam het parcours afgelegd? Geef je antwoord in km per uur en rond af op één decimaal.



figuur 5.40

- 42** Zie de figuur hiernaast.
Bereken de breedte van de steeg in meter. Rond af op twee decimalen.

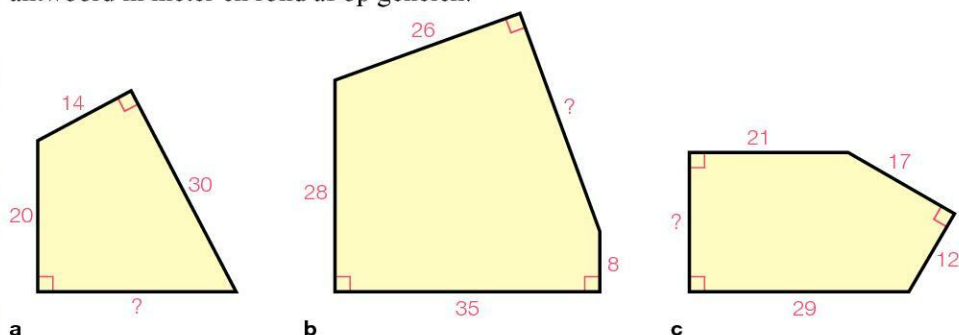


figuur 5.41

43

Zie figuur 5.42.

Bereken telkens de lengte van de onbekende zijde. Geef het antwoord in meter en rond af op gehelen.

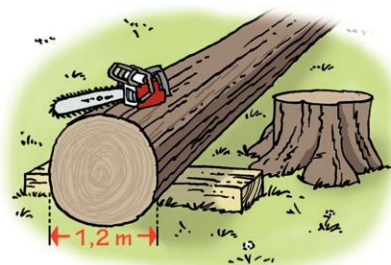


figuur 5.42 De afmetingen zijn in meter.

44

Een houtzager heeft een 10 meter lange ronde boomstam met een diameter van 1,2 meter. Hij wil hieruit een zo dik mogelijke balk zagen met een breedte van één meter.

Bereken uit hoeveel m^3 hout de balk bestaat. Rond af op twee decimalen.



figuur 5.43

45

Theo heeft een kast voor zijn slaapkamer gekocht.

De massief houten kast is 2,40 meter hoog, 1,80 meter breed en 80 cm diep.

De hoogte van de slaapkamer is 2,50 meter.

In verband met de hoogte van de slaapkamerdeur kan de kast alleen gekanteld naar binnen.

Onderzoek of het mogelijk is de gekantelde kast rechtop te zetten.



ARTIKEL

BEROEP

GESCHIEDENIS

INFORMATIE



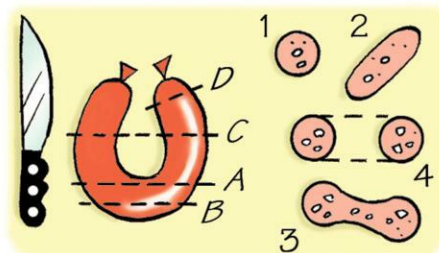
De beker van Pythagoras

Behalve wiskundige was Pythagoras ook een groot filosoof. Bescheidenheid vond hij een belangrijke eigenschap. Om gulzige mensen bescheidenheid aan te leren, ontwierp hij de beker van Pythagoras. Wordt deze beker te vol geschonken, dan loopt hij vanzelf leeg.



5.4 Doorsneden

- 46** Je kunt een rookworst op verschillende plaatsen doorsnijden. In figuur 5.44 geven de lijnen A, B, C, en D aan waar de worst wordt doorgesneden. Wat je na het doorsnijden krijgt, zie je rechts. Zoek bij elke snede de juiste figuur rechts.



figuur 5.44

Theorie A Doorsneden van voorwerpen

Snijd je een hardgekookt ei in de lengterichting door, dan zie je het snijvlak van figuur 5.45b. Bij een doorsnijding in de breedterichting zie je het snijvlak van figuur 5.45c.

Een snijvlak heet een **doorsnede**.



Een doorsnede is een stempelafdruk van het snijvlak. Er zit geen diepte in.



a



b

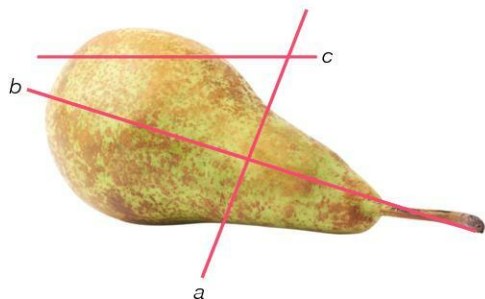


c

figuur 5.45

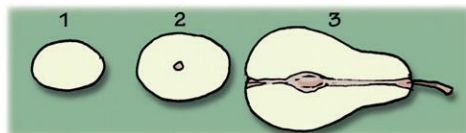
Een doorsnede van een voorwerp is de vlakke figuur die je krijgt als je het voorwerp doorsnijdt.

- 47** Een peer wordt op drie plaatsen doorgesneden. De rode lijnen in figuur 5.46a geven aan op welke plaatsen dat gebeurt. Zoek bij elke snede de juiste doorsnede in figuur 5.46b.



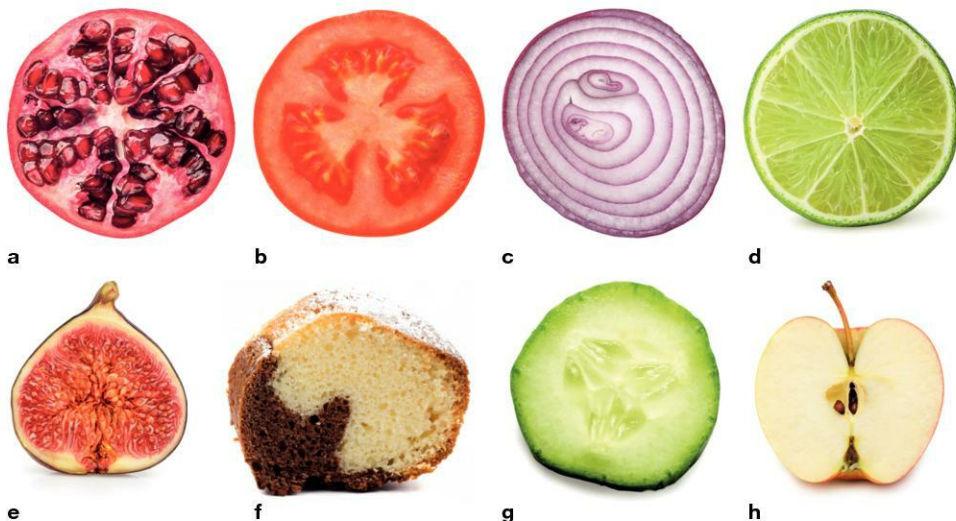
a

figuur 5.46



b

- 48** Hieronder zie je doorsneden van ui, tomaat, komkommer, cake, appel, granaatappel, vijg en limoen. Zeg bij elke doorsnede om welk eetbaar product het gaat.



figuur 5.47

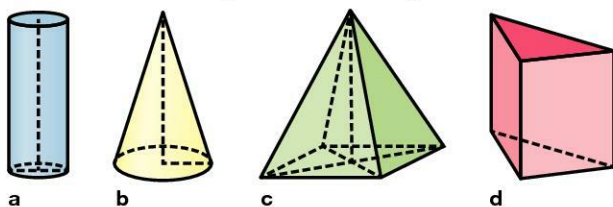
- 49** **a** Aart zaagt een houten kubus met ribben van 20 cm door. Hiernaast zie je hoe hij begint. Hij zaagt recht naar beneden.
Teken de doorsnede op schaal 1 : 5.
- b** Wouter begint op dezelfde plaats als Aart te zagen, maar hij zaagt een beetje scheef naar beneden. Welke vorm heeft de doorsnede van de kubus van Wouter?
- c** Gijs heeft ook een kubus doorgezaagd. Hij krijgt als doorsnede een driehoek. Leg uit hoe Gijs gezaagd heeft.



figuur 5.48

- A 50** Schrijf van elke ruimtefiguur in figuur 5.50 op welke van de onderstaande vlakke figuren als doorsnede kunnen voorkomen.

- driehoek
- rechthoek
- cirkel
- zeshoek
- trapezium
- vijfhoek



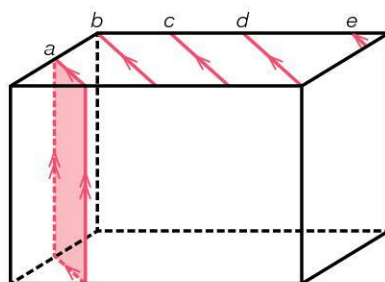
figuur 5.50



figuur 5.49

[▶ WERKBOEK] Zie de balk in figuur 5.51 met de evenwijdige lijnstukken a , b , c , d en e . Bij a is een doorsnede getekend die je krijgt door loodrecht naar beneden te snijden.

- Kleur de doorsnede die je krijgt door bij b loodrecht naar beneden te snijden. Denk aan de stippellijnen en aan de evenwijdigheidstekens.
- Kleur de doorsnede die je krijgt door bij c , d en e loodrecht naar beneden te snijden.
- Welke van de doorsneden hebben dezelfde afmetingen?



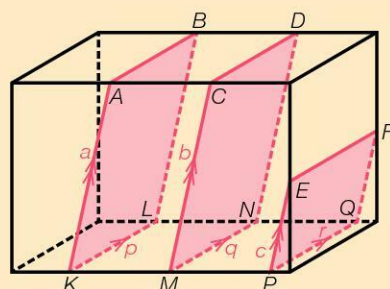
figuur 5.51

Theorie B Doorsneden tekenen

In opgave 51 heb je gezien dat de randen van de evenwijdige doorsneden in elk zijvlak evenwijdig zijn. En zo zijn van de evenwijdige doorsneden in figuur 5.52 de randen a , b en c in het voorvlak evenwijdig. Ook de randen p , q en r in het grondvlak zijn evenwijdig.

Dit zijn voorbeelden van de volgende eigenschap.

In elk zijvlak zijn de randen van evenwijdige doorsneden evenwijdig.



figuur 5.52

Verder heb je kunnen zien dat van iedere doorsnede de randen in het voor- en achtervlak evenwijdig zijn. Ook in het grond- en bovenvlak zijn de randen evenwijdig.

Dit zijn voorbeelden van de volgende eigenschap.

Van elke doorsnede zijn de randen in evenwijdige zijvlakken evenwijdig.

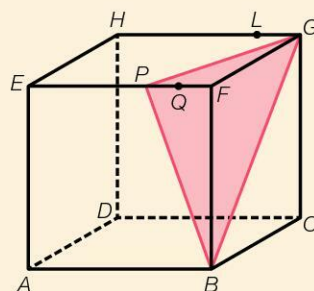
Voorbeeld

Zie de kubus in figuur 5.53.

- Teken de doorsnede door het punt Q die evenwijdig is met de doorsnede PBG .
- Teken de doorsnede door het punt L die evenwijdig is met de doorsnede PBG .

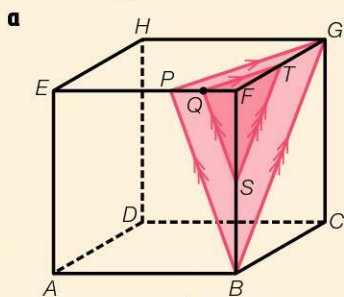
Aanpak

- Teken in het voorvlak de rand QS evenwijdig met PB .
 - Teken in het bovenvlak de rand QT evenwijdig met PG .
 - Teken de rand TS .
- Teken in het bovenvlak de rand LM evenwijdig met PG .
 - Teken in het voorvlak de rand MK evenwijdig met PB .
 - Teken in het achtervlak de rand LO evenwijdig met MK en PB .
 - Teken in het rechterzijvlak de rand ON evenwijdig met BG .
 - Teken de rand KN .

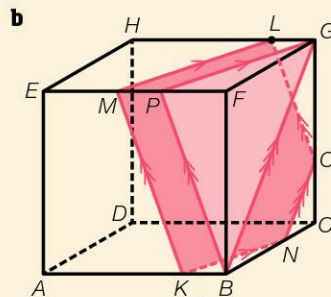


figuur 5.53

Uitwerking



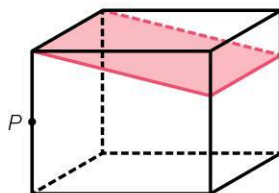
Geef met pijltjes aan welke randen evenwijdig zijn en stippel de lijnen die je niet ziet.



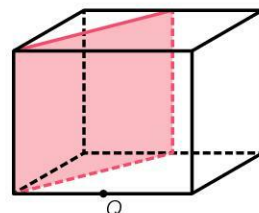
Een doorsnede is pas af als je over de randen in de zijvlakken kunt rondlopen.

52 [WERKBOEK]

- a** Zie de balk in figuur 5.54a. Teken de doorsnede door het punt P die evenwijdig is met de rode doorsnede.
- b** Zie de balk in figuur 5.54b. Teken de doorsnede door het punt Q die evenwijdig is met de rode doorsnede.

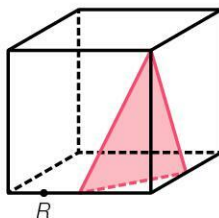


figuur 5.54

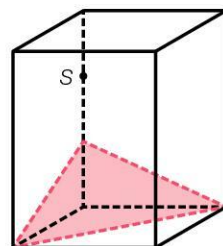


53 [WERKBOEK]

- a** Zie de balk in figuur 5.55a. Teken de doorsnede door het punt R die evenwijdig is met de rode doorsnede.
- b** Zie de balk in figuur 5.55b. Teken de doorsnede door het punt S die evenwijdig is met de rode doorsnede.

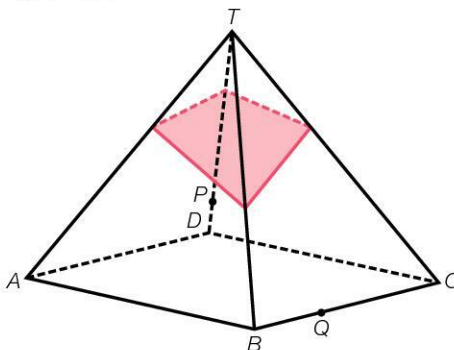


figuur 5.55



A 54 [WERKBOEK] Zie piramide $TABCD$ in figuur 5.56.

- a** Teken de doorsnede door het punt P die evenwijdig is met de rode doorsnede.
- b** Teken de doorsnede door het punt Q die evenwijdig is met de rode doorsnede.



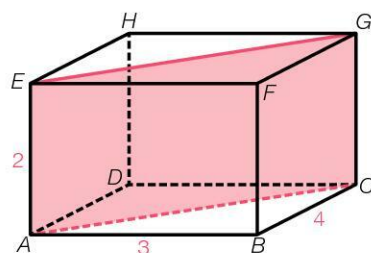
figuur 5.56

5.5 Pythagoras in de ruimte

O 55

In figuur 5.57 zie je de balk $ABCD EFGH$.

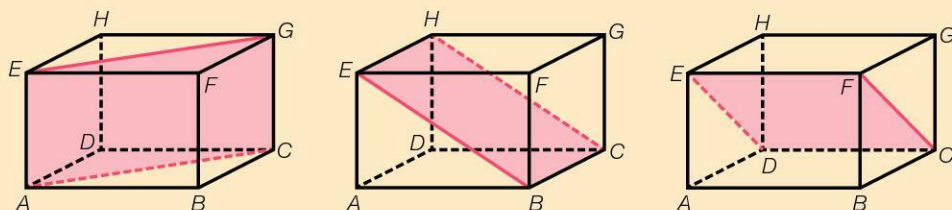
- Teken het grondvlak $ABCD$ op ware grootte en bereken de lengte van de diagonaal AC .
- In de balk is de vierhoek $ACGE$ getekend. Wat voor bijzondere vierhoek is $ACGE$? Hoe lang zijn de zijden van deze vierhoek? Teken deze vierhoek op ware grootte.
- Bereken AG in cm. Rond af op twee decimalen.



figuur 5.57 De afmetingen zijn in cm.

Theorie A Diagonaalvlakken en lichaamsdiagonalen

De zijvlakken van een balk zijn rechthoeken. Ook de doorsnede $ACGE$ in figuur 5.57 is een rechthoek. We noemen $ACGE$ een **diagonaalvlak** van de balk. Elk diagonaalvlak van een balk is een rechthoek. In figuur 5.58 zijn drie van de zes diagonaalvlakken van de balk $ABCD EFGH$ getekend.



figuur 5.58 Drie van de zes diagonaalvlakken.

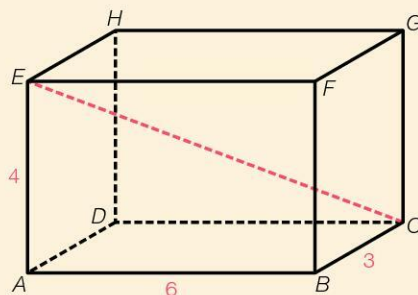
Een diagonaal van een diagonaalvlak is een **lichaamsdiagonaal**.

Van de balk $ABCD EFGH$ zijn de lichaamsdiagonalen AG , CE , BH en DF .

Voorbeeld

Zie de balk in figuur 5.59.

Bereken de lengte van de lichaamsdiagonaal CE in cm. Rond af op één decimaal.



figuur 5.59 De afmetingen zijn in cm.

Aanpak

CE ligt in diagonaalvlak $ACGE$.

CE is de schuine zijde van $\triangle ACE$. Je weet AC nog niet, dus bereken eerst AC via rechthoek $ABCD$.

Stap 1 Schets rechthoek $ABCD$ en bereken AC .

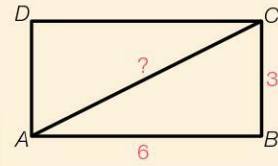
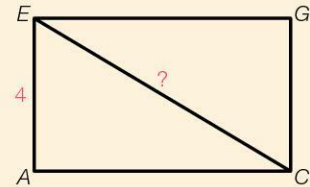
Stap 2 Schets rechthoek $ACGE$ en bereken CE .

Uitwerking

In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $AB^2 + BC^2 = AC^2$
 $36 + 9 = AC^2$
 $AC^2 = 45$

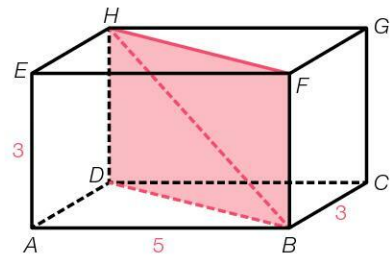
Je hoeft AC niet uit te rekenen, want je hebt AC^2 nodig.

In $\triangle ACE$ is $\angle A = 90^\circ$, dus $AC^2 + AE^2 = CE^2$
 $45 + 16 = CE^2$
 $CE^2 = 61$
 $CE = \sqrt{61} \approx 7,8 \text{ cm}$



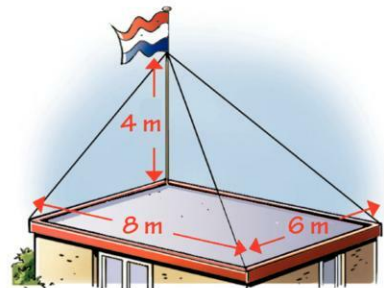
- 56** Zie de balk in figuur 5.60.
a Bereken BH in cm. Rond af op één decimaal.
b Hoe lang zijn de andere lichaamsdiagonalen?

- 57** Van een kubus met ribben van 4 cm zijn de lichaamsdiagonalen, afgerond op één decimaal, gelijk aan 6,9 cm.
 Toon dit aan. Maak eerst een schets van de kubus en zet letters bij de hoekpunten.



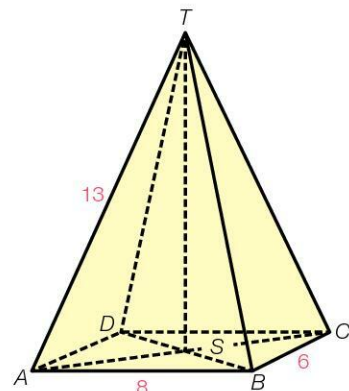
figuur 5.60 De afmetingen zijn in cm.

- A 58** Op een plat dak van 8 bij 6 meter staat een vlaggenmast met een hoogte van 6 meter. De vlaggenmast is door middel van drie draden verbonden met de hoekpunten van het dak. De draden zijn 2 meter van de bovenkant van de vlaggenmast vastgemaakt. Zie figuur 5.61. Bereken de lengte van de draden in meter. Rond af op twee decimalen.



figuur 5.61

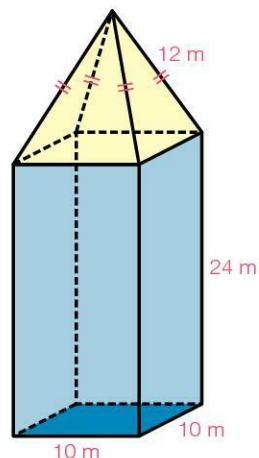
- 59** Het grondvlak $ABCD$ van piramide $TABCD$ in figuur 5.62 is een rechthoek van 8 bij 6 cm. Verder is $AT = BT = CT = DT = 13$ cm.
a Bereken AS .
b Schets $\triangle AST$ en bereken ST .



figuur 5.62 De afmetingen zijn in cm.

A 60 Bereken de hoogte van de toren in figuur 5.63. Geef het antwoord in meter en rond af op gehele.

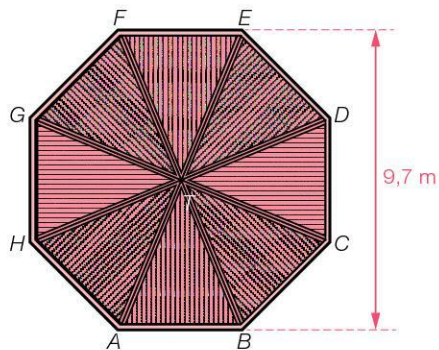
61 Van balk $ABCD EFGH$ is gegeven dat $BD = 16$ cm en $CE = 34$ cm.
Bereken de hoogte DH van de balk.



figuur 5.63

62 Op de foto hiernaast zie je een piramidevormig dak dat uit acht even grote driehoeken bestaat.
In figuur 5.64 is het bovenaanzicht getekend. De omtrek van de dakrand $ABCDEFGH$ is 32 meter. De afstand tussen de punten A en F is 9,7 meter. De onderkant van het dak is op 2,5 meter hoogte en de top is op 6 meter hoogte.

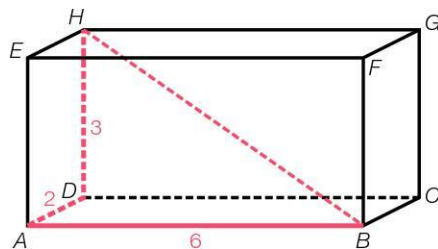
- Bereken in meter de lengte van de ribbe AT . Rond af op twee decimalen.
- Bereken in m^2 de totale oppervlakte van het dak. Rond af op twee decimalen.



figuur 5.64

63 Zie de balk in figuur 5.65.

- Schrijf de stelling van Pythagoras op voor $\triangle ABD$.
- Schrijf de stelling van Pythagoras op voor $\triangle BDH$.
- Licht toe dat $BH^2 = AB^2 + AD^2 + DH^2$ en bereken hiermee BH .



figuur 5.65 De afmetingen zijn in cm.

Theorie B De uitgebreide stelling van Pythagoras

Om van de balk hiernaast de lengte van lichaamsdiagonaal BH te berekenen, pas je twee keer de stelling van Pythagoras toe.

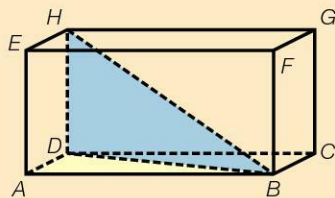
Zo krijg je in $\triangle ABD$ dat $BD^2 = AB^2 + AD^2$ en

in $\triangle BDH$ dat $BH^2 = BD^2 + DH^2$.

Hieruit volgt dat $BH^2 = AB^2 + AD^2 + DH^2$.

Van de balk is AB de lengte, AD de breedte en DH de hoogte. **figuur 5.66**

Je kunt $BH^2 = AB^2 + AD^2 + DH^2$ dus ook noteren als lichaamsdiagonaal² = lengte² + breedte² + hoogte².

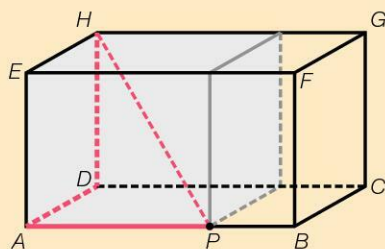


DE UITGEBREIDE STELLING VAN PYTHAGORAS

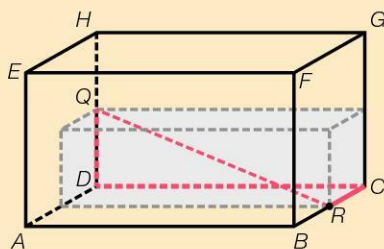
Voor een balk geldt

lichaamsdiagonaal² = lengte² + breedte² + hoogte².

Om in figuur 5.67 de lengte van HP te berekenen, bedenk je dat HP een lichaamsdiagonaal is van een kleinere balk. Dus bijvoorbeeld $HP^2 = HD^2 + DA^2 + AP^2$.



figuur 5.67



figuur 5.68

En zo bereken je QR in figuur 5.68 met bijvoorbeeld $QR^2 = QD^2 + DC^2 + CR^2$.

Voorbeeld

Zie de balk in figuur 5.69.

Bereken PQ . Rond af op één decimaal.

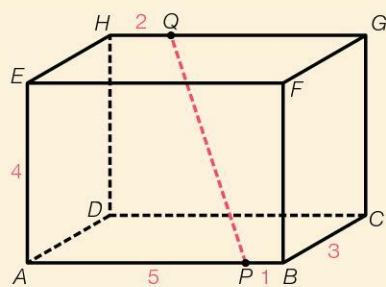
Aanpak

Schets in de gegeven balk een kleinere balk waarvan PQ een lichaamsdiagonaal is en zet letters bij belangrijke punten. Gebruik vervolgens de uitgebreide stelling van Pythagoras.

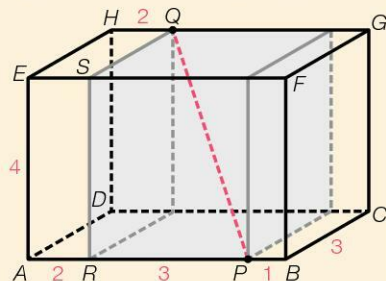
Uitwerking

$$PQ^2 = PR^2 + RS^2 + SQ^2 = 3^2 + 4^2 + 3^2 = 34$$

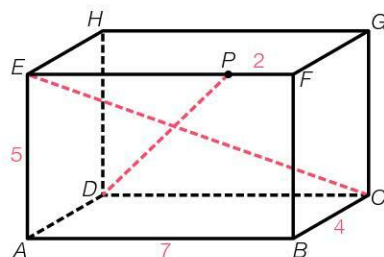
$$\text{Dus } PQ = \sqrt{34} \approx 5,8 \text{ cm.}$$



figuur 5.69 De afmetingen zijn in cm.



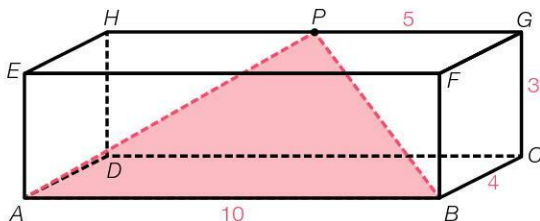
- 64** [▶ WERKBOEK] Zie de balk in figuur 5.70.
- Bereken CE in cm. Rond af op één decimaal.
 - Bereken DP in cm. Rond af op één decimaal.



figuur 5.70 De afmetingen zijn in cm.

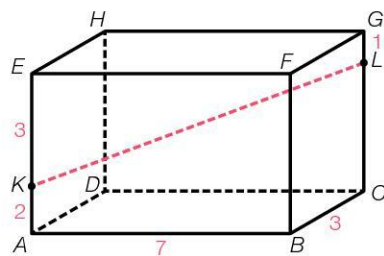
- A 65** [▶ WERKBOEK] Zie de balk in figuur 5.71.

- Bereken AP en BP in cm. Rond af op twee decimalen.
- Is $\triangle ABP$ rechthoekig? Licht je antwoord toe met een berekening.



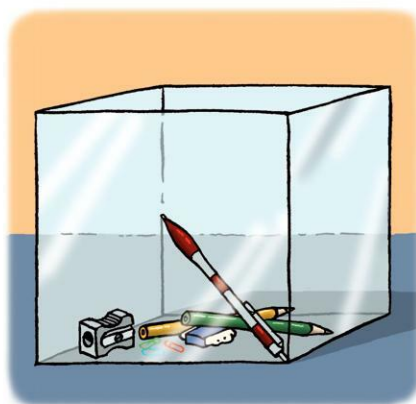
figuur 5.71 De afmetingen zijn in cm.

- A 66** [▶ WERKBOEK] Zie de balk in figuur 5.72.
- Bereken KL in cm. Rond af op één decimaal.



figuur 5.72 De afmetingen zijn in cm.

- A 67** [▶ WERKBOEK] Nienke heeft een pennenbakje in de vorm van een kubus met ribben van 10 cm. In het bakje legt ze een pen. Zie figuur 5.73. De punt van de pen zit op 4 cm hoogte. Bereken de lengte van de pen in mm. Rond af op gehelen.



figuur 5.73

- 68** Van kubus $ABCD EFGH$ is gegeven dat $AG = 12$ cm. Bereken de inhoud van de kubus in cm^3 . Rond af op gehelen.

5.6 Stellingen in rechthoekige driehoeken

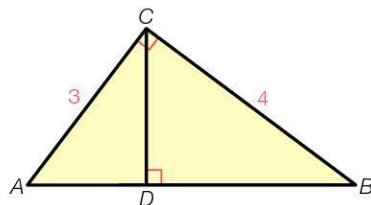
69 Van driehoek ABC is $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$ cm en $BC = 4$ cm.

a Bereken AB .

b Je weet dat $\text{opp } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD$,

maar ook $\text{opp } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$.

Bereken CD .



figuur 5.74 De afmetingen zijn in cm.

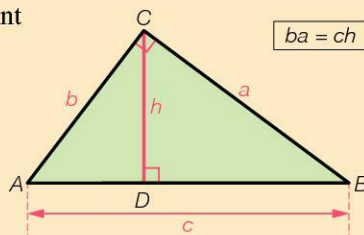
Theorie A De *bach*-stelling

Het is gebruikelijk in $\triangle ABC$ de zijde tegenover hoekpunt A met a aan te geven, de zijde tegenover hoekpunt B met b en de zijde tegenover hoekpunt C met c .

In de rechthoekige driehoek ABC hiernaast is

$\text{opp } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a$ en ook $\text{opp } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$.

Dus $\frac{1}{2} \cdot b \cdot a = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$ ofwel $b \cdot a = c \cdot h$.



figuur 5.75

DE *bach*-STELLING

In een rechthoekige driehoek is het product van de rechthoekszijden gelijk aan het product van de schuine zijde en de bijbehorende hoogte.

Voorbeeld

In $\triangle PQR$ in figuur 5.76 is $\angle P = 90^\circ$, $PR = 5$ cm en $QR = 13$ cm.

Bereken de hoogte PS in cm. Rond af op twee decimalen.

Aanpak

Bereken eerst PQ met de stelling van Pythagoras en pas daarna de *bach*-stelling toe.

Uitwerking

$\angle P = 90^\circ$, dus $PQ^2 + PR^2 = QR^2$

$$PQ^2 + 5^2 = 13^2$$

$$PQ^2 + 25 = 169$$

$$PQ^2 = 144$$

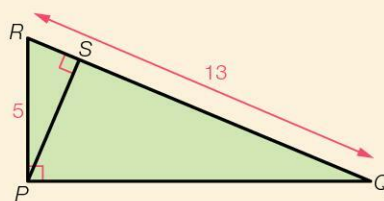
$$PQ = \sqrt{144} = 12$$

bach-stelling: $PQ \cdot PR = QR \cdot PS$

$$12 \cdot 5 = 13 \cdot PS$$

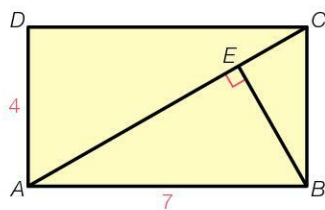
$$13 \cdot PS = 60$$

$$PS = \frac{60}{13} \approx 4,62 \text{ cm}$$



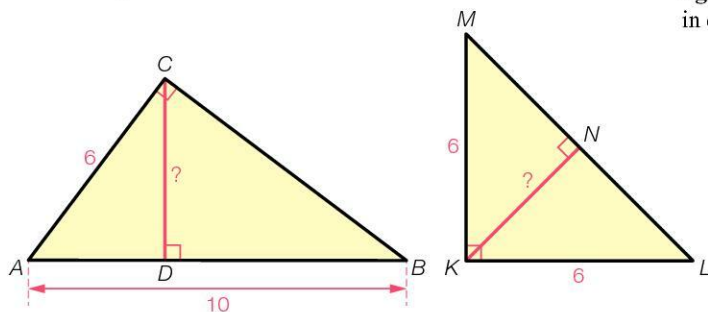
figuur 5.76 De afmetingen zijn in cm.

- 70** Van rechthoek $ABCD$ in figuur 5.77 is $AB = 7$ cm en $AD = 4$ cm.
Bereken BE in cm. Rond af op één decimaal.



figuur 5.77 De afmetingen zijn in cm.

- 71** Zie figuur 5.78.
Bereken telkens de lengte van het rode lijnstuk in cm.
Rond af op één decimaal.



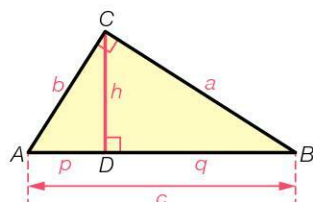
figuur 5.78 De afmetingen zijn in cm.

- A 72** Van vlieger $PQRS$ in figuur 5.79 is $\angle S = \angle Q = 90^\circ$, $RS = 20$ cm en $PS = 50$ cm.
Hoeveel cm zijn de latjes QS en PR samen? Rond in het antwoord af op één decimaal.



figuur 5.79 De afmetingen zijn in cm.

- O 73** Zie figuur 5.80.
- Volgens de stelling van Pythagoras is in $\triangle ABC$
 $\dots + \dots = c^2$
 - Volgens de stelling van Pythagoras is
in $\triangle ACD$ $h^2 + \dots = \dots$
in $\triangle BCD$ $h^2 + \dots = \dots$
 $\frac{h^2 + \dots}{2h^2 + \dots + \dots = \dots + \dots} +$
 - Uit de vragen a en b volgt $2h^2 + \dots + \dots = c^2$.
 - $c^2 = (p + q)^2 = \dots$
 - Leid uit de vragen c en d af dat $h^2 = pq$.



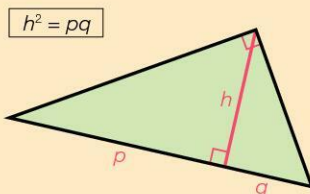
figuur 5.80

Theorie B De hpq-stelling

In opgave 73 heb je de hpq-stelling bewezen.

DE hpq-STELLING

Verdeelt in een rechthoekige driehoek de hoogte h de schuine zijde in de stukken p en q , dan is $h^2 = pq$.



Voorbeeld

Zie figuur 5.81.

Bereken de oppervlakte van $\triangle PQR$ in cm^2 . Rond af op één decimaal.

Aanpak

Bereken eerst RT met de *hpq*-stelling.

Uitwerking

hpq-stelling: $PT^2 = QT \cdot RT$

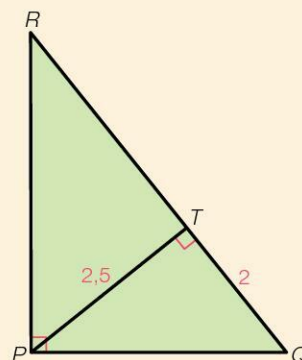
$$2,5^2 = 2 \cdot RT$$

$$6,25 = 2 \cdot RT$$

$$RT = \frac{6,25}{2} = 3,125 \text{ cm}$$

$$QR = 2 + 3,125 = 5,125 \text{ cm}$$

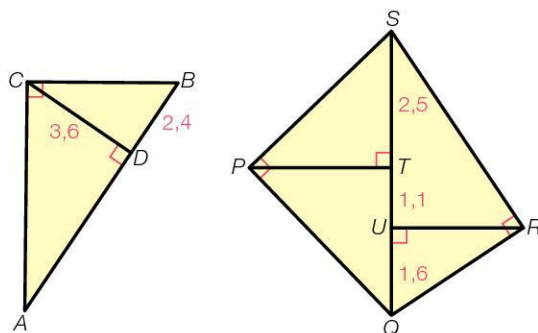
$$\text{Dus opp } \triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot PT = \frac{1}{2} \cdot 5,125 \cdot 2,5 \approx 6,4 \text{ cm}^2.$$



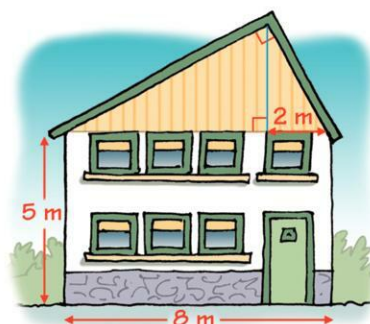
figuur 5.81 De afmetingen zijn in cm.

74 Zie figuur 5.82.

Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$ en van vierhoek PQRS. Geef de antwoorden in cm^2 en rond zo nodig af op één decimaal.



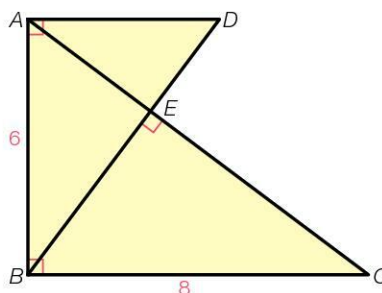
figuur 5.82 De afmetingen zijn in cm.



figuur 5.83

A 75 In figuur 5.83 is de voorgevel van een huis getekend. De beide dakdelen maken een rechte hoek met elkaar. Maak een schets van het huis en bereken de hoogte van het huis in meter. Rond af op één decimaal.

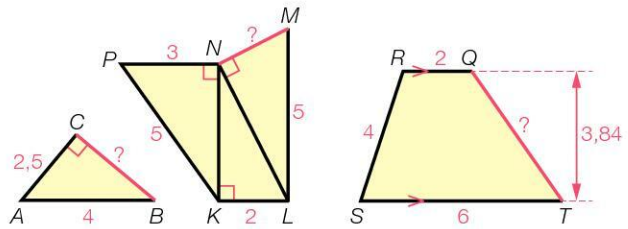
76 Zie figuur 5.84. Bereken AD .



figuur 5.84 De afmetingen zijn in cm.

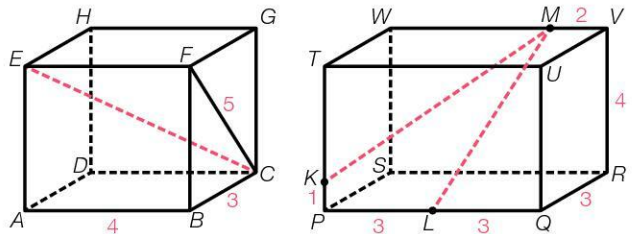
Gemengde opgaven

- 1** Zie figuur 5.85.
Bereken telkens de lengte van het rode lijnstuk in cm.
Rond af op één decimaal.



figuur 5.85 De afmetingen zijn in cm.

- 2** Zie de balken in figuur 5.86.
Bereken CE , KM en LM in cm.
Rond af op één decimaal.



figuur 5.86 De afmetingen zijn in cm.

- 3** Het huis hiernaast heeft een mansardedak. Zo'n dak is symmetrisch met naar buiten geknikte dakhellingen. Zie figuur 5.87 voor de afmetingen van het huis. Hoeveel meter is de hoogte van het huis? Rond af op één decimaal.



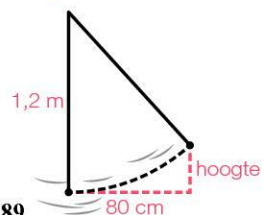
figuur 5.87

- 4** Op de gelijkmatige helling van de skipiste in figuur 5.88 gaat Jordy van B naar A .
- Bereken de lengte van deze route in meter. Rond af op gehelen.
 - Jacqueline loopt met een snelheid van 3 km per uur van A naar B . Hoe lang doet ze daarover?



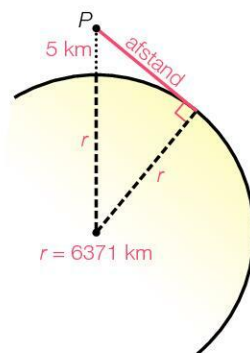
figuur 5.88

- 5** In figuur 5.89 zie je de maximale uitwijking van een 1,20 meter lange slinger.
Bereken de hoogte in cm. Rond af op gehelen.



figuur 5.89

- 6 Een piloot, in figuur 5.90 aangegeven met P , vliegt op 5 km hoogte. Met behulp van de figuur kun je berekenen hoe ver hij kan kijken. Bereken deze afstand in km. Rond af op gehele. Gebruik dat de straal r van de aarde 6371 km is.

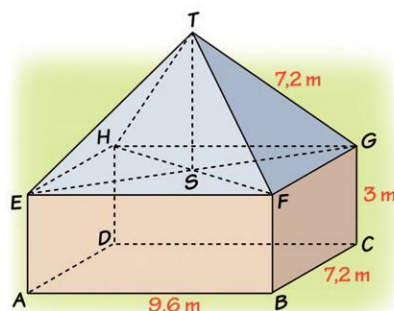


figuur 5.90

- 7 Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(2, 5)$, $B(5, 9)$ en $C(9, 6)$. Onderzoek met een berekening of $\triangle ABC$ rechthoekig is.

- 8 Het huis in figuur 5.91 bestaat uit een balk en een piramide met opstaande ribben van 7,2 meter.

- Bereken de lengte van de diagonaal EG in meter.
- Bereken de hoogte van het huis in meter. Rond af op één decimaal.
- Bereken de oppervlakte van het dakdeel TFG in m^2 . Rond af op één decimaal.

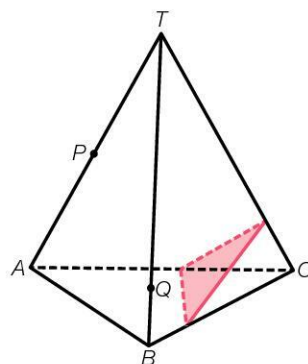


figuur 5.91

- 9 Van de vijfhoek $ABCDE$ is $\angle A = \angle B = \angle D = 90^\circ$, $AB = 6,9$ cm, $BC = 3,6$ cm, $DE = 5,2$ cm en $AE = 7,9$ cm. Bereken CD in cm. Rond af op één decimaal.

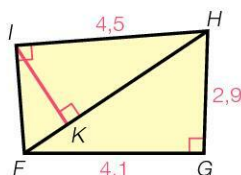
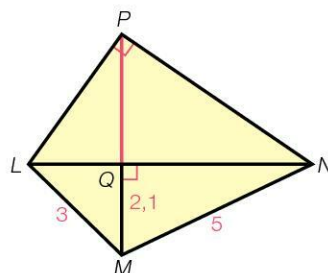
- 10 [WERKBOEK] In figuur 5.92 zie je de piramide $TABC$.

- Teken de doorsnede door P die evenwijdig is met de rode doorsnede.
- Teken de doorsnede door Q die evenwijdig is met de rode doorsnede.



figuur 5.92

- 11 Zie figuur 5.93. Bereken IK en PQ in cm. Rond af op één decimaal.

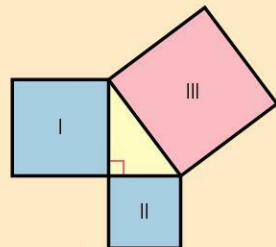


figuur 5.93 De afmetingen zijn in cm.

Samenvatting

5.1 Rechthoekige driehoeken

blz 10 Hiernaast is een rechthoekige driehoek ingesloten door drie vierkanten. Volgens de stelling van Pythagoras is opp I + opp II = opp III.

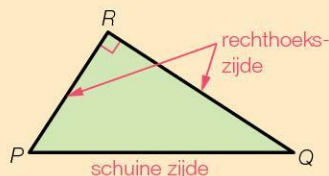


blz 11 In een rechthoekige driehoek heet de zijde tegenover de rechte hoek de schuine zijde. De andere zijden heten de rechthoekszijden.

Volgens de stelling van Pythagoras is

$$(\text{ene rechthoekszijde})^2 + (\text{andere rechthoekszijde})^2 = (\text{schuine zijde})^2.$$

In de figuur hiernaast is dus $PR^2 + QR^2 = PQ^2$.



5.2 Zijden van rechthoekige driehoeken berekenen

blz 13, 17 Weet je van een rechthoekige driehoek twee zijden, dan kun je met de stelling van Pythagoras de derde zijde berekenen.

de schuine zijde berekenen

$\angle A = 90^\circ$, dus

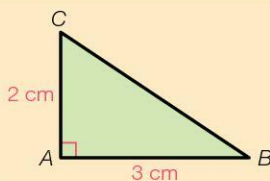
$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$3^2 + 2^2 = BC^2$$

$$9 + 4 = BC^2$$

$$BC^2 = 13$$

$$BC = \sqrt{13} \approx 3,6 \text{ cm}$$



een rechthoekszijde berekenen

$\angle F = 90^\circ$, dus

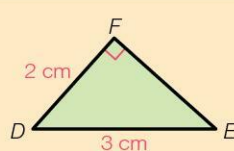
$$DF^2 + EF^2 = DE^2$$

$$2^2 + EF^2 = 3^2$$

$$4 + EF^2 = 9$$

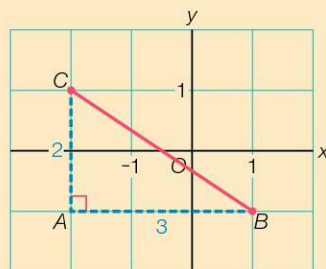
$$EF^2 = 5$$

$$EF = \sqrt{5} \approx 2,2 \text{ cm}$$



blz 16 Voor het berekenen van de afstand tussen de punten $B(1, -1)$ en $C(-2, 1)$ gebruik je een geschikte rechthoekige driehoek en pas je de stelling van Pythagoras toe. Je krijgt

$$BC^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13, \text{ dus } BC = \sqrt{13} \approx 3,61.$$

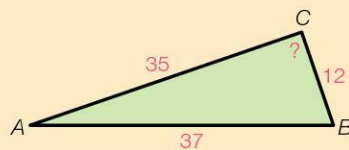


blz 18 Zijn van een driehoek de drie zijden gegeven, dan kun je narekenen of de driehoek een rechte hoek heeft.

Zo krijg je in de figuur hiernaast

$$\left. \begin{array}{l} AC^2 + BC^2 = 35^2 + 12^2 = 1369 \\ AB^2 = 37^2 = 1369 \end{array} \right\} AC^2 + BC^2 = AB^2$$

Dus $\angle C = 90^\circ$.



De afmetingen zijn in mm.

5.3 De stelling van Pythagoras toepassen

blz 20

Om van het trapezium hiernaast BC te berekenen, teken je eerst de hulplijn CP loodrecht op AB .

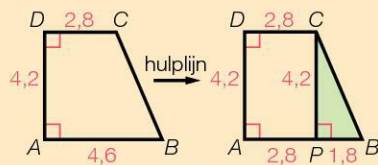
Dit geeft de rechthoekige driehoek BCP .

In $\triangle BCP$ is $\angle P = 90^\circ$, dus $BP^2 + CP^2 = BC^2$

$$1,8^2 + 4,2^2 = BC^2$$

$$BC^2 = 20,88$$

$$BC = \sqrt{20,88} \approx 4,6 \text{ cm}$$



De afmetingen zijn in cm.

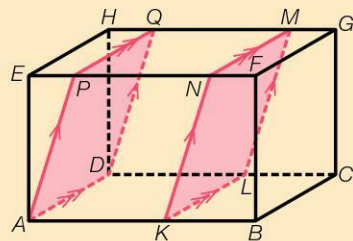
5.4 Doorsneden

blz 24

Een doorsnede van een voorwerp is de vlakke figuur die je krijgt als je het voorwerp doorsnijdt.

blz 26

In elk zijvlak zijn de randen van evenwijdige doorsneden evenwijdig. Zie de evenwijdige doorsneden in de balk hiernaast. In het bovenvlak is $PQ \parallel NM$ en in het voorvlak is $AP \parallel KN$.



5.5 Pythagoras in de ruimte

blz 28

De hoogte ST van de piramide $TABCD$ met rechthoekig grondvlak $ABCD$ in de figuur hiernaast bereken je als volgt.

In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$4^2 + 3^2 = AC^2$$

$$AC^2 = 25$$

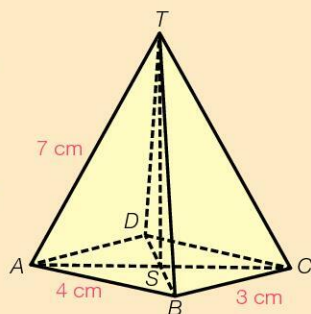
$$AC = \sqrt{25} = 5, \text{ dus } AS = 2,5 \text{ cm.}$$

In $\triangle AST$ is $\angle S = 90^\circ$, dus $AS^2 + ST^2 = AT^2$

$$2,5^2 + ST^2 = 7^2$$

$$ST^2 = 49 - 6,25 = 42,75$$

$$ST = \sqrt{42,75} \approx 6,54 \text{ cm}$$



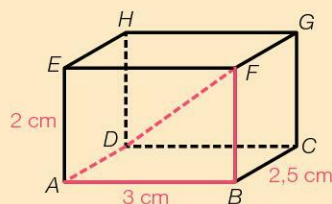
blz 31

In een balk geldt de uitgebreide stelling van Pythagoras **lichaamsdiagonaal² = lengte² + breedte² + hoogte²**.

De lengte van DF in de balk hiernaast kun je berekenen met $DF^2 = DA^2 + AB^2 + BF^2$.

Dit geeft $DF^2 = 2,5^2 + 3^2 + 2^2 = 19,25$, dus

$$DF = \sqrt{19,25} \approx 4,39 \text{ cm.}$$



5.6 Stellingen in rechthoekige driehoeken

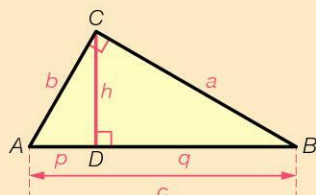
blz 33

In de rechthoekige driehoek ABC hiernaast geldt

$b \cdot a = c \cdot h$ (bach-stelling)

blz 34

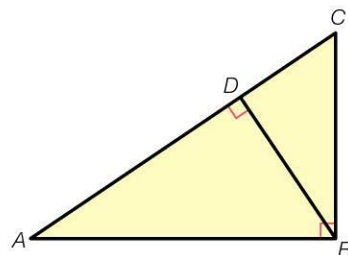
en $h^2 = p \cdot q$ (hpq-stelling).



Diagnostische toets

5.1 Rechthoekige driehoeken

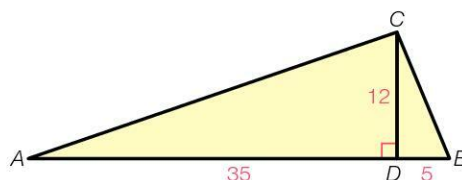
- 1 Schrijf voor elke rechthoekige driehoek in
1 figuur 5.94 de stelling van Pythagoras op.



figuur 5.94

5.2 Zijden van rechthoekige driehoeken berekenen

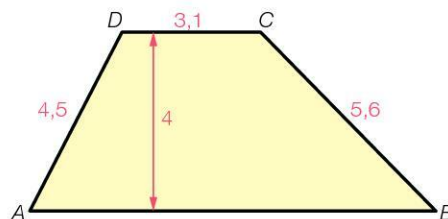
- 2 Van $\triangle PQR$ is $\angle P = 90^\circ$, $PQ = 30$ cm en $PR = 16$ cm.
2,3 Bereken QR .
- 3 Bereken de afstand tussen de punten $A(-3, 2)$ en $B(4, -1)$.
4 Rond af op twee decimalen.
- 4 Van $\triangle PQR$ is $\angle P = 90^\circ$, $PR = 2,3$ cm en $QR = 4,5$ cm.
5,6 Bereken PQ in cm. Rond af op één decimaal.
- 5 In figuur 5.95 staat CD loodrecht op AB .
7 Is $\triangle ABC$ rechthoekig? Licht je antwoord toe met een berekening.



figuur 5.95 De afmetingen zijn in cm.

5.3 De stelling van Pythagoras toepassen

- 6 Zie het trapezium in figuur 5.96.
8,9 Bereken de lengte van de zijde AB in cm.
Rond af op één decimaal.



figuur 5.96 De afmetingen zijn in cm.

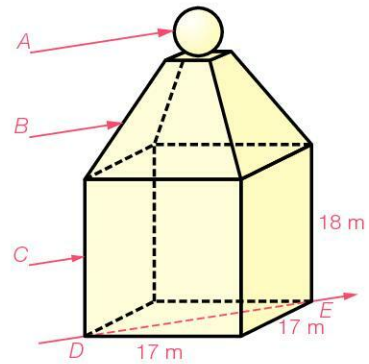
- 7 In figuur 5.97 zie je de voorgevel van
10 een hangar.
Bereken de hoogte van de hangar in meter. Rond af op één decimaal.



figuur 5.97

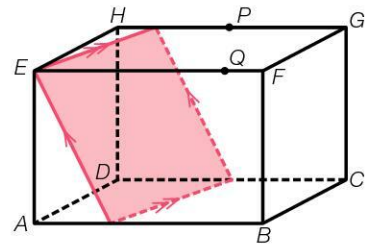
5.4 Doorsneden

- 8** Zie figuur 5.98.
- 11** a Welke vorm heeft de horizontale doorsnede van de toren op de plaatsen die met A , B en C zijn aangegeven?
- b Schets de verticale doorsnede die door de lijn DE gaat.
- c Kan een doorsnede de vorm hebben van een
1 driehoek 3 cirkel 5 zeshoek
2 rechthoek 4 trapezium 6 vijfhoek



figuur 5.98

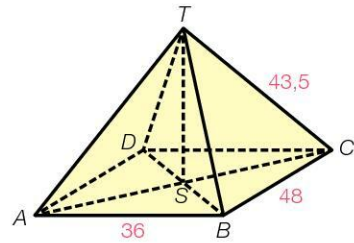
- 9** [▶ WERKBOEK] Zie de balk in figuur 5.99.
- 12** a Teken de doorsnede door het punt P die evenwijdig is met de rode doorsnede.
- b Teken de doorsnede door het punt Q die evenwijdig is met de rode doorsnede.



figuur 5.99

5.5 Pythagoras in de ruimte

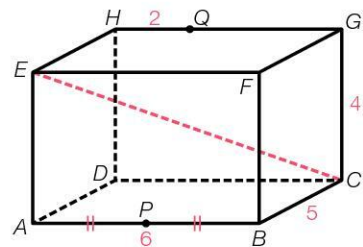
- 10** Van piramide $TABCD$ in figuur 5.100 is het grondvlak $ABCD$ een rechthoek van 36 bij 48 cm. De vier opstaande ribben zijn elk 43,5 cm.
- 13** a Bereken AC .
- b Bereken de hoogte ST .



figuur 5.100 De afmetingen zijn in cm.

- 11** Zie de balk in figuur 5.101.
- 14** Bereken CE in cm. Rond af op één decimaal.

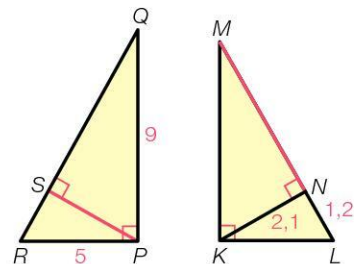
- 12** [▶ WERKBOEK] Zie de balk in figuur 5.101. Het punt P is het midden van de ribbe AB en het punt Q ligt op de ribbe GH zo, dat $HQ = 2$ cm.
- 15** a Bereken HP in cm. Rond af op één decimaal.
- b Bereken PQ in cm. Rond af op één decimaal.



figuur 5.101 De afmetingen zijn in cm.

5.6 Stellingen in rechthoekige driehoeken

- 13** Zie figuur 5.102 met de rechthoekige driehoek PQR . Bereken PS in cm. Rond af op één decimaal.
- 14** Zie figuur 5.102 met de rechthoekige driehoek KLM . Bereken MN in cm. Rond af op één decimaal.

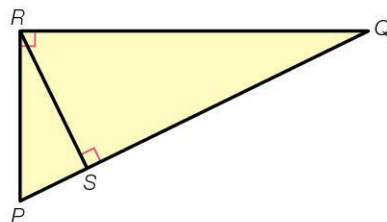


figuur 5.102 De afmetingen zijn in cm.

Herhaling

5.1 Rechthoekige driehoeken

- 1** In figuur 5.103 kun je drie rechthoekige driehoeken ontdekken. Eén van deze driehoeken is $\triangle PSR$. Volgens de stelling van Pythagoras geldt in deze driehoek $PS^2 + RS^2 = PR^2$. Schrijf voor de andere twee rechthoekige driehoeken in de figuur de stelling van Pythagoras op.

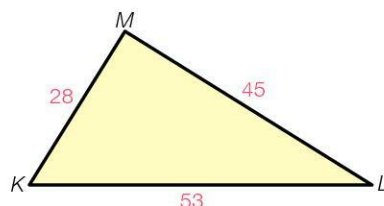


figuur 5.103

5.2 Zijden van rechthoekige driehoeken berekenen

- 2** a Schets een driehoek KLM met $\angle K = 90^\circ$ en schrijf voor deze driehoek de stelling van Pythagoras op.
b Bereken LM als gegeven is dat $KL = 20$ cm en $KM = 21$ cm.
- 3** Bereken zijde AC van $\triangle ABC$ met $\angle B = 90^\circ$, $AB = 9$ cm en $BC = 40$ cm.
- 4** Gegeven zijn de punten $A(-2, 3)$, $B(5, -1)$, $P(-4, 1)$ en $Q(2, -4)$.
a Teken de punten A en B in een assenstelsel.
b Teken de verticale lijn door A en de horizontale lijn door B . Noem het snijpunt C .
c Schrijf voor de rechthoekige driehoek ABC de stelling van Pythagoras op.
d Je ziet in de figuur dat $AC = 4$. Hoe lang is BC ?
e Bereken AB . Rond af op twee decimalen.
f Bereken PQ . Rond af op twee decimalen.
- 5** Van $\triangle ABC$ is $\angle C = 90^\circ$, $AB = 3$ cm en $AC = 2$ cm. Bereken BC in cm. Rond af op één decimaal. Ga daarbij als volgt te werk.
- Schets $\triangle ABC$. Denk er aan dat $\angle C = 90^\circ$.
 - Schrijf de stelling van Pythagoras op voor deze driehoek.
 - Vul de gegevens in, dus $AB = 3$ en $AC = 2$.
 - Bereken eerst BC^2 en daarna BC . Rond af op één decimaal.
- 6** Van $\triangle DEF$ is $\angle E = 90^\circ$, $EF = 6$ cm en $DF = 9$ cm. Bereken DE in cm. Rond af op twee decimalen.

- 7** Om te onderzoeken of $\triangle KLM$ in figuur 5.104 rechthoekig is, controleer je of de stelling van Pythagoras voor deze driehoek opgaat.
- a De twee kortste zijden zijn KM en LM . Bereken daarom $KM^2 + LM^2$.
- b Bereken KL^2 .
- c Is $KM^2 + LM^2 = KL^2$? Is $\triangle KLM$ rechthoekig?

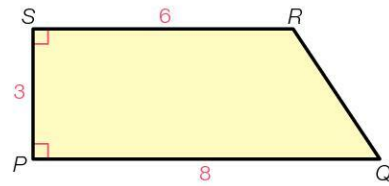


figuur 5.104 De afmetingen zijn in mm.

5.3 De stelling van Pythagoras toepassen

- 8** Om van het trapezium in figuur 5.105 zijde QR te berekenen, heb je eerst een rechthoekige driehoek nodig waarvan QR een zijde is. Je tekent daarom een hulplijn.

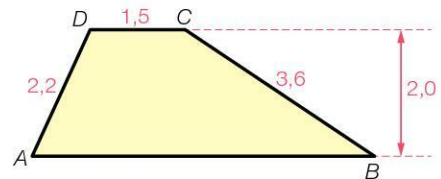
- Schets trapezium $PQRS$ in je schrift en teken de hulplijn RT met T op PQ zo, dat $\angle T = 90^\circ$.
- Bereken QR in cm. Rond af op één decimaal.
- Bereken de omtrek van trapezium $PQRS$ in cm. Rond af op één decimaal.



figuur 5.105 De afmetingen zijn in cm.

- 9** Zie het trapezium in figuur 5.106. Om de zijde AB te berekenen, teken je twee hulplijnen. De ene hulplijn gaat door D en staat loodrecht op AB . Deze hulplijn snijdt AB in het punt E .

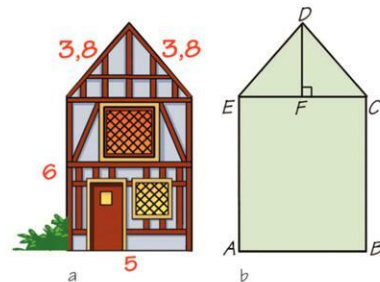
- Maak een schets en bereken AE in cm. Rond af op twee decimalen.
- Teken de hulplijn door C loodrecht op AB .
- Bereken AB in cm. Rond af op één decimaal.



figuur 5.106 De afmetingen zijn in cm.

- 10** Om de hoogte van de voorgevel van het huis in figuur 5.107a te berekenen, maak je een schets waarin je hulplijnen tekent. Zie figuur 5.107b.

- Hoe lang is EF ?
Bereken DF in meter. Gebruik $\triangle DEF$. Rond af op twee decimalen.
- Hoeveel cm is de hoogte van het huis?

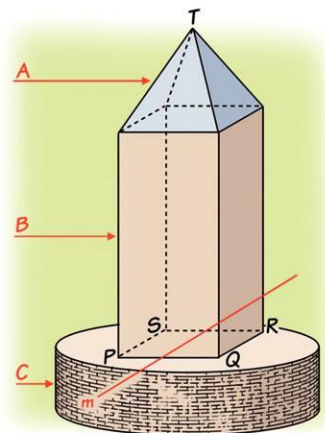


figuur 5.107 De afmetingen zijn in meter.

5.4 Doorsneden

- 11** Het bovenste deel van de toren in figuur 5.108 is een piramide, het middelste deel is een balk, waarbij $PQRS$ een vierkant is. Het onderste deel van de toren is een cilinder.

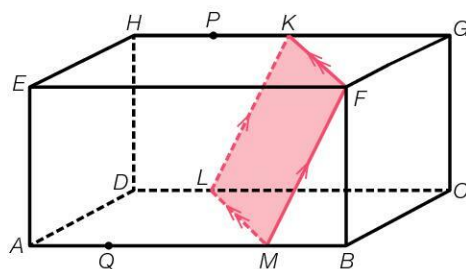
- Welke vorm heeft de horizontale doorsnede bij A ?
En welke vorm bij B en welke bij C ?
- Lijn m gaat door de middens van PQ en RS . Uit welke bekende vlakke figuren bestaat de verticale doorsnede door lijn m ?
- Zijn er verticale doorsneden van de toren te maken die uit slechts één rechthoek bestaan? Licht toe.



figuur 5.108

- 12** [▶ WERKBOEK] Zie de balk in figuur 5.109. Om door het punt G de doorsnede te tekenen die evenwijdig is met de rode doorsnede, bedenk je dat de zijde die je in het achtervlak van de balk wilt tekenen evenwijdig is met KL . En zo is de zijde in het grondvlak evenwijdig met LM .

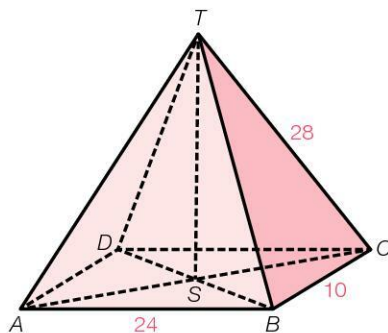
- Teken de doorsnede door G die evenwijdig is met de rode doorsnede.
- Teken de doorsnede door het punt P die evenwijdig is met de rode doorsnede.
- Teken de doorsnede door het punt Q die evenwijdig is met de rode doorsnede.



figuur 5.109

5.5 Pythagoras in de ruimte

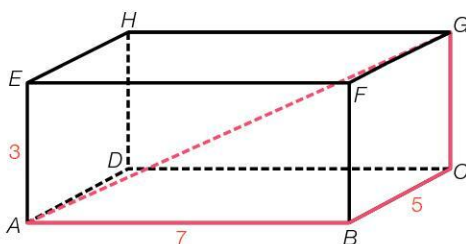
- 13** Van de piramide $TABCD$ in figuur 5.110 is het grondvlak $ABCD$ een rechthoek van 24 bij 10 cm. Verder is $AT = BT = CT = DT = 28$ cm.
- Schets rechthoek $ABCD$ en bereken AC .
 - Schets de gelijkbenige driehoek ACT met de lijn ST loodrecht op AC .
 - Van de rechthoekige driehoek AST weet je twee zijden. Welke?
 - Bereken ST in cm. Rond af op één decimaal.



figuur 5.110 De afmetingen zijn in cm.

- 14** Om de lichaamsdiagonaal AG van de balk $ABCD EFGH$ in figuur 5.111 te berekenen, gebruik je dat **lichaamsdiagonaal**² = **lengte**² + **breedte**² + **hoogte**².

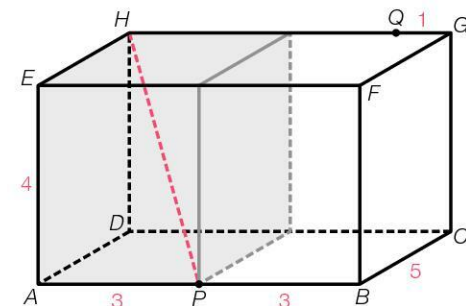
- Vul in.
 $AG^2 = AB^2 + \dots^2 + \dots^2$
- Bereken AG in cm. Rond af op één decimaal.



figuur 5.111 De afmetingen zijn in cm.

- 15** [▶ WERKBOEK] Zie de balk in figuur 5.112. Om HP te berekenen, bedenk je dat HP een lichaamsdiagonaal is van een balk met lengte 3 cm, breedte 5 cm en hoogte 4 cm.

- Bereken HP in cm. Rond af op één decimaal.
- Bereken PQ in cm. Rond af op één decimaal.
Schets eerst een balk waarvan PQ een lichaamsdiagonaal is en zet letters bij belangrijke hoekpunten.



figuur 5.112 De afmetingen zijn in cm.

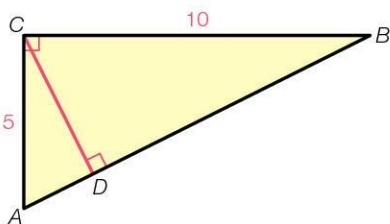
5.6 Stellingen in rechthoekige driehoeken

- 16** Zie de rechthoekige driehoek ABC in figuur 5.113. Weet je van drie van de vier lijnstukken a , b , c en h de lengte, dan kun je met de *bach*-stelling de lengte van het vierde lijnstuk berekenen.

Om in figuur 5.114 de hoogte PS te weten te komen, bereken je in $\triangle PQR$ eerst QR met de stelling van Pythagoras.

Daarna bereken je PS met de *bach*-stelling, dus in dit geval $PQ \cdot PR = QR \cdot PS$.

- Bereken PS in cm. Rond af op één decimaal.
- Bereken CD in figuur 5.115 in cm. Rond af op één decimaal.

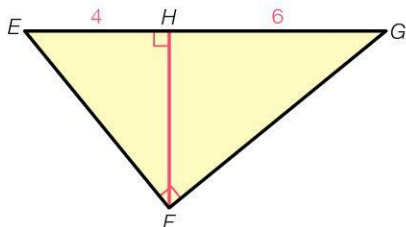


figuur 5.115 De afmetingen zijn in cm.

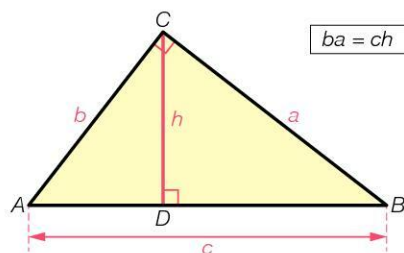
- 17** Zie de rechthoekige driehoek ABC in figuur 5.116. Weet je van twee van de drie lijnstukken p , q en h de lengte, dan kun je met de *hpq*-stelling de lengte van het derde lijnstuk berekenen.

Om in figuur 5.117 de lengte van het lijnstuk KN te weten te komen, gebruik je de *hpq*-stelling. Dus in dit geval $MN^2 = KN \cdot LN$.

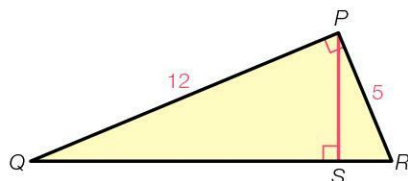
- Bereken KN in cm.
- Bereken FH in figuur 5.118 in cm. Rond af op één decimaal.



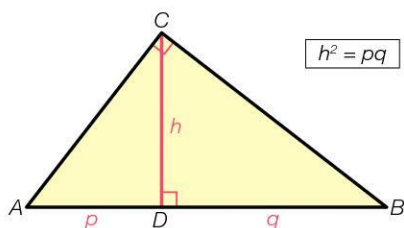
figuur 5.118 De afmetingen zijn in cm.



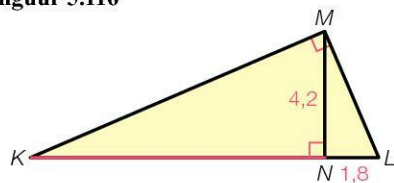
figuur 5.113



figuur 5.114 De afmetingen zijn in cm.



figuur 5.116

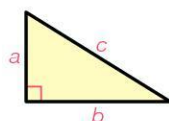


figuur 5.117 De afmetingen zijn in cm.

Onderzoek De stelling van Pythagoras bewijzen

Al vele eeuwen voor Pythagoras leefde, werd 'zijn' stelling gebruikt zonder dat men zich afvroeg waarom de regel klopt. Griekse wiskundigen uit de tijd van Pythagoras (6^e eeuw v. Chr.) namen hier geen genoegen mee. Zij wilden beredeneren dat regels zoals de stelling van Pythagoras algemeen geldig zijn. Zo'n redenering heet een **bewijs**. Een regel die je kunt bewijzen heet een **stelling**. Vandaar 'de stelling van Pythagoras'. Voor de stelling van Pythagoras zijn inmiddels al meer dan 360 verschillende bewijzen gevonden. In dit onderzoek ga je er zelf enkele geven.

De stelling van Pythagoras kom je vaak tegen in de vorm $a^2 + b^2 = c^2$. Hierbij ga je uit van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a en b en schuine zijde c . Zie figuur 5.119.

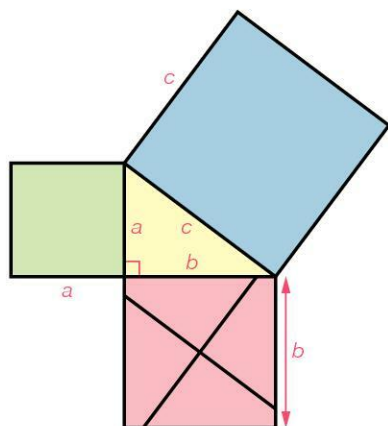


figuur 5.119

De legpuzzel

1 [►WERKBOEK] In figuur 5.120 sluiten het groene, rode en blauwe vierkant een rechthoekige driehoek in met zijden a , b en c . Het rode vierkant is in vier gelijke stukken verdeeld.

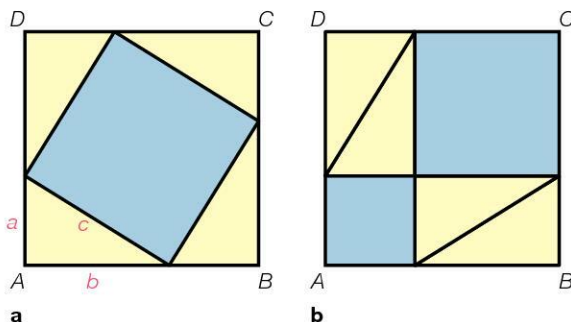
- Knip deze vier stukken en het groene vierkant uit.
- Onderzoek hoe je hiermee het blauwe vierkant kunt bedekken.
- Licht toe dat hieruit volgt $a^2 + b^2 = c^2$.



figuur 5.120

Driehoeken leggen

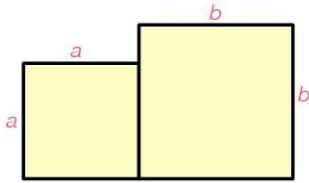
2 [►WERKBOEK] In figuur 5.121a is vierkant $ABCD$ bedekt met vier rechthoekige driehoeken met zijden a , b en c en een vierkant. In figuur 5.121b is hetzelfde vierkant $ABCD$ bedekt met dezelfde vier rechthoekige driehoeken en twee vierkanten. Onderzoek hoe je met deze figuren kunt bewijzen dat $a^2 + b^2 = c^2$.



figuur 5.121

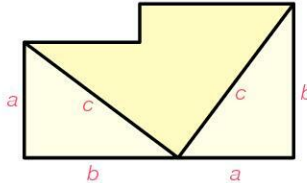
Twee vierkanten omvormen tot één vierkant

- 3** [► WERKBOEK] In figuur 5.122a zie je een vierkant met zijde a en een vierkant met zijde b . Door figuur 5.122a op te delen zoals in figuur 5.122b en om te vormen, ontstaat het vierkant in figuur 5.122c.

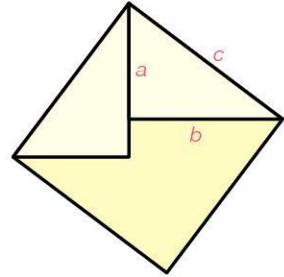


a

figuur 5.122



b



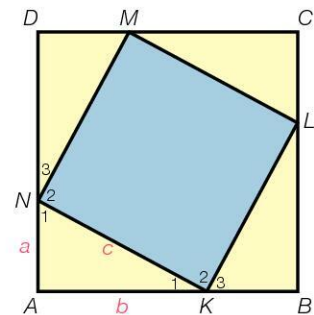
c

- a** Onderzoek deze omvorming en licht deze toe.
b Licht toe dat hieruit volgt $a^2 + b^2 = c^2$.

Het bewijs met het grote vierkant

- 4** Het grote vierkant $ABCD$ in figuur 5.123 ontstaat door een rechthoekige driehoek met zijden a , b en c drie keer een kwartslag te draaien en met de punten tegen elkaar te leggen.

- a** Licht toe dat $\angle N_1 + \angle K_1 = 90^\circ$ en toon aan dat $KLMN$ een vierkant is.
b Licht toe dat opp $ABCD = 4 \cdot \text{opp } \triangle AKN + \text{opp } KLMN$ en onderzoek hoe je hiermee kunt bewijzen dat $a^2 + b^2 = c^2$.

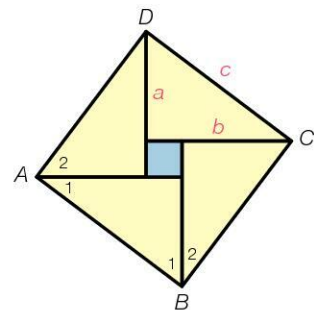


figuur 5.123

Het bewijs met het kleine vierkant

- 5** Door vier rechthoekige driehoeken met zijden a , b en c tegen elkaar te leggen, ontstaat de grote vierhoek $ABCD$ in figuur 5.124.

- a** Licht toe dat $\angle A_{12} = 90^\circ$ en dat hieruit volgt dat vierhoek $ABCD$ een vierkant is.
b Toon aan dat de oppervlakte van het kleine vierkant gelijk is aan $a^2 - 2ab + b^2$.
c Onderzoek hoe je met deze figuur kunt bewijzen dat $a^2 + b^2 = c^2$.



figuur 5.124

Procenten en diagrammen

Het elektrische vervoer is in ons land bezig aan een flinke opmars. Waren er op 31 december 2015 nog 122 563 elektrische voertuigen in Nederland, een jaar later was dat aantal met bijna 30 000 toegenomen tot 151 752. Dat komt neer op een toename van ongeveer 24%. Op 31 december 2016 reden er in Nederland 3775 elektrische bromfietsen rond. Dat is een kleine 3% van het totale aantal elektrische voertuigen.

Elektrisch vervoer speelt een belangrijke rol bij het reduceren van de CO₂-uitstoot en het verbeteren van de luchtkwaliteit.

Wat leer je?

- Rekenen met procenten.
- Omgaan met allerlei diagrammen zoals staaf-, lijn- en cirkeldiagrammen.
- Wat frequentietabellen zijn en hoe je gegevens uit een frequentietabel in een histogram verwerkt.
- Wat een steel-bladdiagram is.
- Wat een klassenindeling is.
- De centrummaten gemiddelde, mediaan en modus berekenen.





Voorkennis Procenten

Theorie A Rekenen met procenten

In figuur 6.1 zijn 23 van de 100 vierkantjes rood gekleurd. Je kunt ook zeggen dat 23% van de vierkantjes rood is.

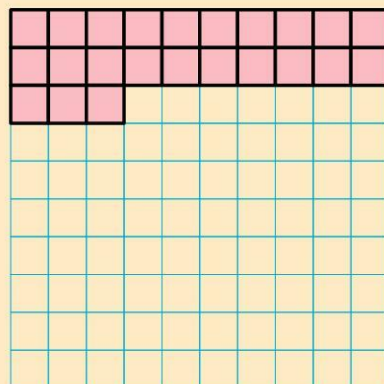
23% betekent 23 van de 100.

37% van 385 betekent het $\frac{37}{100}$ deel van 385.

In plaats van $\frac{37}{100}$ kun je ook schrijven 0,37.

Dus 37% van 385 is $0,37 \times 385 = 142,45$.

34% van 870 is $0,34 \times 870 = 295,8$.



figuur 6.1

1 Bereken.



a 8% van 620

c 89,6% van 5700

e 0,07% van 880

b 2,3% van 80

d 0,9% van 250

f 49,3% van 700

2



a Er zijn in Nederland 1650 fitnesscentra. In 39,4% hiervan is een kantine aanwezig.

In hoeveel fitnesscentra is een kantine?

b Fitnesscentrum Enjoy Health Club heeft 1084 leden. Hiervan is 41,9% vrouw.

Hoeveel mannen zijn lid van Enjoy Health Club?



Theorie B Percentages berekenen

Van de 1584 musea in Nederland zijn er 86 in Amsterdam. Om te berekenen hoeveel procent dat is, bedenk je het volgende.

$$\begin{array}{lcl} : 1584 & \left(\begin{array}{l} 1584 \text{ musea is } 100\% \\ 1 \text{ museum is } \frac{1}{1584} \times 100\% \end{array} \right) & : 1584 \\ \times 86 & \left(\begin{array}{l} 86 \text{ musea is } \frac{86}{1584} \times 100\% \end{array} \right) & \times 86 \end{array}$$

Dus 86 van 1584 is $\frac{86}{1584} \times 100\% \approx 5,4\%$.

Rond percentages af op één decimaal.

17 van 53 is $\frac{17}{53} \times 100\% \approx 32,1\%$.



3 Hoeveel procent is

a 12 van 57

b 51 van 83

c 3,7 van 18

d 1,7 van 2

e 813 van 10815

f 183 van 185



4 **a** Van de 1584 musea in Nederland zijn er 37 in Rotterdam.
Hoeveel procent is dat?

b De Museumkaart geeft onbeperkt toegang tot 440 van de 1584 musea in Nederland.
Hoeveel procent is dat?

Let op het verschil.

26% van 105 is $0,26 \times 105 = 27,3$.

26 van 105 is $\frac{26}{105} \times 100\% \approx 24,8\%$.



5 In Nederland zijn 411 strandpaviljoens.

a Van de strandpaviljoens is 39,9% in Zuid-Holland.
Hoeveel strandpaviljoens zijn er in Zuid-Holland?

b Er zijn 70 strandpaviljoens in Zeeland.
Hoeveel procent van de strandpaviljoens is in Zeeland?

c Van de strandpaviljoens is 94,2% in de vijf kustprovincies te vinden.
Hoeveel strandpaviljoens staan niet in een kustprovincie?

d Van de strandpaviljoens is 30,7% in Noord-Holland.
Van de strandpaviljoens in Noord-Holland heeft Bergen er de meeste, namelijk 23.

Hoeveel procent van de strandpaviljoens in Noord-Holland is in Bergen?

e Van de 70 strandpaviljoens in Zeeland is 38,6% in de gemeente Veere.
Hoeveel procent van de strandpaviljoens in Nederland is in de gemeente Veere?



6.1 Rekenen met procentuele toe- en afname



In dit hoofdstuk mag je de rekenmachine gebruiken.

- 0 1** Een weekend in een vierpersoonsbungalow kost 325 euro.
In het hoogseizoen betaal je 20% meer.

- a** Hoeveel euro betaal je meer?
- b** Hoeveel betaal je in het hoogseizoen voor een weekend in de bungalow?

Theorie A Rekenen met procentuele toename

Sportschool Fit For All verhoogt de contributie met 5%.
Dennis betaalde voor zijn lidmaatschap 40 euro per maand.
Om te berekenen wat de nieuwe prijs is, bereken je eerst 5% van 40.
Je krijgt

- 5% van 40 is $0,05 \times 40 = 2$.
- De nieuwe prijs is $40 + 2 = 42$ euro per maand.

Op de rekenmachine tik je dit in één keer in.

4 0 + 0 . 0 5 × 4 0 =

40+0.05*40 DEG ↵ 42

**Bij een toename van 12% is de nieuwe hoeveelheid
NIEUW = OUD + 0,12 × OUD.**

Voorbeeld

Een iPod Shuffle van 54,95 euro wordt 8,5% in prijs verhoogd.
Bereken de nieuwe prijs.

Uitwerking

De nieuwe prijs is $54,95 + 0,085 \times 54,95 \approx 59,62$ euro.

Rond geldbedragen af op centen.

54.95+0.085*54.95 DEG ↵ 59.62075

- T 2** [▶▶] Van handbalvereniging ENO zijn 327 mannen en 433 vrouwen lid. ENO verlaagt de jaarlijkse contributie van 185 euro met 8,2%. Mede hierdoor neemt het aantal leden met 3,7% toe.

- a** Bereken het nieuwe ledenaantal.
- b** Hoeveel is de nieuwe jaarlijkse contributie?

- 3** **a** Een pak koffie van 500 gram kost € 5,45. De volgende week wordt de prijs met 15% verhoogd.
Bereken de nieuwe prijs.
- b** Een pakje groene thee van € 2,49 wordt 6,4% duurder.
Bereken de nieuwe prijs.

- 4 a In 2016 zaten er 1278 leerlingen op het Pascal College. In 2017 was dat 3,6% meer. Bereken hoeveel leerlingen er in 2017 op het Pascal College zaten.
- b De prijs van een fles olijfolie van € 3,09 wordt met 5,2% verhoogd. Bereken de nieuwe prijs.
- c Een 3,5 meter hoge boom groeit in een jaar 5,7%. Bereken de nieuwe lengte in cm. Rond af op gehelen.

Let op bij het afronden.

- Rond geldbedragen af op centen.
- Rond aantallen leerlingen af op gehelen.



- 0 5 Een elektrische scooter kost 1750 euro. Tijdens een actieweek krijg je 30% korting.
- a Hoeveel euro korting krijg je?
- b Hoeveel betaal je tijdens de actieweek voor de scooter?

DE LAAGSTE PRIJS OOIT

RYCO

Elektrische scooter

Nooit meer schakelen,
alleen gas geven
geen CO₂-uitstoot of
benzinegeur
op te laden via het
stopcontact, nooit
meer tanken



30%

korting

Theorie B Rekenen met procentuele afname

Ter gelegenheid van vaderdag geeft een juwelier 15% korting op alle herenhorloges. Een herenhorloge kostte € 128.

De nieuwe prijs krijg je als volgt.

- 15% van 128 is $0,15 \times 128$.
- De nieuwe prijs is $128 - 0,15 \times 128 = 108,80$ euro.

Bij een afname van 12% is de nieuwe hoeveelheid
NIEUW = OUD - $0,12 \times$ OUD.

Voorbeeld

In een fietsenzaak krijg je 27,5% korting op alle elektrische fietsen.

Dennis koopt een elektrische fiets die normaal € 899,50 kost.

Bereken hoeveel hij nu voor de fiets betaalt.

Uitwerking

Hij betaalt nu $899,50 - 0,275 \times 899,50 \approx 652,14$ euro.

899.5-0.275*899.5
652.1375

- 6** a Een spaarlamp van € 8,95 wordt 14% in prijs verlaagd.
Bereken de nieuwe prijs.
- b In 2016 had sportvereniging Hercules 854 leden. In 2017 was dat 4,8% minder.
Hoeveel leden had Hercules in 2017?
- 7** a Op een scanner van € 59,75 krijg je 8,4% korting.
Bereken de nieuwe prijs.
- b Ziggo verhoogt de prijs van een standaardabonnement met 4,2%.
De prijs was 17,95 euro per maand.
Hoeveel betaal je nu per maand voor een standaardabonnement bij Ziggo?
- c In 2015 waren er 558 vuurwerkslachtoffers in Nederland. In 2016 was dat 14% minder.
Bereken hoeveel vuurwerkslachtoffers er in 2016 waren.
- d Op 31 december 2015 waren er 268 elektrische motorfietsen in Nederland. Een jaar later was dat aantal met 17,9% toegenomen.
Hoeveel elektrische motorfietsen waren er op 31 december 2016 in Nederland?

ARTIKEL	BEROEP	GESCHIEDENIS	INFORMATIE
---------	--------	--------------	------------

De STORM Wave

Studenten van de Technische Universiteit Eindhoven hebben een elektrische motorfiets ontwikkeld die afstanden van wel 500 kilometer zonder opladen kan afleggen. Met het prototype van deze motor, STORM Wave genaamd, hebben de studenten in 2016 een reis rond de wereld gemaakt waarbij ze in 80 dagen 23 000 kilometer hebben afgelegd. Met deze actie heeft het studententeam wereldwijd de aandacht weten te vestigen op de mogelijkheden van elektrisch vervoer.



- A 8** a Bijouterie Remi koopt zijn riemen in voor € 68,80 per doos. In een doos zitten 20 riemen. De riemen worden 55% duurder verkocht.
Karen koopt vijf riemen.
Hoeveel moet zij betalen?
- b Tijdens een actieweek krijg je bij de SportShop 12,5% korting op alle artikelen. Marcel koopt hardloopschoenen die normaal € 179,95 kosten.
Hij betaalt met vier briefjes van 50 euro.
Hoeveel krijgt hij terug?
- c Op een school zitten 1296 leerlingen. Hiervan zitten er 623 in de onderbouw. Aan het begin van het nieuwe schooljaar is het aantal onderbouwleerlingen met 5,6% afgenomen. Het aantal bovenbouwleerlingen is daarentegen met 5,2% toegenomen.
Is het totale aantal leerlingen toe- of afgenomen?

- 9** a Rob is op maandag 0,4 uur aan het computeren. Op dinsdag besteedt hij 75% meer tijd aan computeren. Hoeveel minuten zit Rob op dinsdag achter zijn computer?

1 uur is 60 minuten, dus
0,3 uur is $0,3 \times 60 = 18$ minuten en
2,7 uur is 2 uur en $0,7 \times 60 = 42$ minuten.

- b Niels kijkt op zaterdag 3,5 uur televisie. Op zondag kijkt hij 30% korter televisie. Hoeveel uur en hoeveel minuten kijkt Niels op zondag televisie?

- A 10** a Irene doet op maandag 1,8 uur over het huiswerk. Op dinsdag doet ze er 30% langer over. Hoeveel uur en hoeveel minuten doet Irene op dinsdag over het huiswerk?
- b Lex besteedt op maandag 7,5% van de dag aan het huiswerk. Op dinsdag doet hij er 25% langer over. Hoeveel uur en hoeveel minuten besteedt Lex op dinsdag aan het huiswerk?
- c Mirte doet op een dag 2 uur en 50 minuten over het huiswerk. Hoeveel procent van die dag heeft Mirte aan het huiswerk besteed?
- d Frits fietst op maandag een trainingsronde in 3,25 uur. Op dinsdag heeft hij 40% meer tijd nodig. Hij vertrekt die dinsdag om 9:45 uur. Op welk tijdstip komt Frits dinsdag weer terug?

Spel Procentendomino

[► WERKBOEK] Procentendomino is een spel voor twee of meer spelers.

Knip de kaartjes van de dominostenen uit en speel het spel enkele keren.

Spelregels

- Bij vijf spelers krijgt elke speler vier stenen, bij vier spelers krijgt elke speler vijf stenen, bij drie spelers zijn dat er zes en bij twee spelers zijn dat er acht. De overige stenen liggen met de beeldzijde naar beneden op een stapel.
- De speler die begint, draait de bovenste steen van de stapel om en probeert eigen stenen aan te leggen. Alleen stenen met dezelfde waarde mag je aanleggen en je mag alleen stenen aan de uiteinden van de rij aanleggen.
- Elke speler mag in zijn beurt één of meerdere stenen aanleggen. Kan de speler geen enkele steen aanleggen, dan pakt hij de bovenste steen van de stapel. Deze steen mag direct, eventueel gevolgd door eigen stenen, worden aangelegd.
- Wie het eerst alle stenen kwijt is, is winnaar.



6.2 Procentuele verandering

0 11 De families Hieltjes en Kloosterman hebben allebei een abonnement bij MobileMax. De provider verhoogt de prijzen. De familie Hieltjes heeft een Alles-in-1 Abonnement waarvoor zij 62 euro per maand betaalden. Dat bedrag is nu 66 euro per maand. Ook het maandbedrag van de familie Kloosterman is met 4 euro verhoogd. Voorheen betaalden zij voor hun Internet Standaard Abonnement 35 euro per maand, nu is dat 39 euro per maand. Toch vindt de familie Kloosterman dat hun abonnement meer in prijs is gestegen dan het abonnement van de familie Hieltjes. Ben je het daarmee eens? Licht toe.



Theorie A Procentuele toename berekenen

Een kledingzaak verhoogt alle prijzen met 5 euro.



figuur 6.2

Beide kledingstukken zijn evenveel in prijs verhoogd. Maar in *verhouding tot de oorspronkelijke prijs* is de prijsverhoging bij het T-shirt groter dan bij het jack. Je kunt dat begrijpen door te berekenen hoeveel procent de toename is *vergeleken met de oude prijs*.

T-shirt toename = 5 euro en OUD = 18 euro
procentuele toename = $\frac{5}{18} \times 100\% \approx 27,8\%$

jack toename = 5 euro en OUD = 78 euro
procentuele toename = $\frac{5}{78} \times 100\% \approx 6,4\%$

$$\text{procentuele toename} = \frac{\text{toename}}{\text{OUD}} \times 100\%$$

Voorbeeld

Een e-reader van 79 euro kost met ingang van volgende week 87 euro.
Bereken hoeveel procent de e-reader duurder wordt.

Uitwerking

$$\text{toename} = 87 - 79 = 8$$

$$\text{procentuele toename} = \frac{8}{79} \times 100\% \approx 10,1\%$$

Deel door OUD en rond
procenten af op één
decimaal.



In plaats van toename spreken we ook van **absolute toename**.
En procentuele toename wordt wel **relatieve toename** genoemd.
Dus in het voorbeeld hierboven is de absolute prijsverhoging 8 euro
en de relatieve prijsverhoging, afgerond op één decimaal, 10,1%.

T 12 [►► 17]

- a De prijs van een liter diesel wordt met 7 cent verhoogd tot € 1,28.
Bereken hoeveel procent een liter diesel duurder is geworden.
- b Op een school zitten 613 jongens en 621 meisjes. Met ingang van het nieuwe schooljaar zitten er 598 jongens op deze school. Het aantal meisjes is toegenomen met 11.
Bereken de relatieve afname van het totale aantal leerlingen.

13 Bereken telkens hoeveel procent de prijsverhoging is.

- a Een computerspel is in prijs verhoogd van € 24,95 naar € 27,45.
- b Een laptop van 599 euro kost na een prijsverhoging 625 euro.
- c Een bioscoopkaartje van € 8,50 wordt één euro duurder.

14 a Een rekenmachine van € 18,99 wordt in prijs verhoogd en kost nu € 19,95.

Bereken de absolute en de relatieve prijsverhoging.

- b Op 31 december 2015 waren er in Nederland 18 251 openbaar toegankelijke laadpunten voor elektrische voertuigen. Een jaar later waren dat er 26 700.
Met hoeveel procent is het aantal openbaar toegankelijke laadpunten toegenomen?
- c Een liter magere kwark van € 1,55 wordt 18 cent duurder.
Bereken hoeveel procent de prijsverhoging is.



Theorie B Procentuele afname berekenen

Regelmatig kom je advertenties tegen waarin kortingen voorkomen.

Zo wordt een iPad van 459 euro aangeboden voor 399 euro.

De korting is $459 - 399 = 60$ euro.

In procenten is de korting $\frac{60}{459} \times 100\% \approx 13,1\%$.

Deel door de oude prijs, dus door 459.

$$\text{procentuele afname} = \frac{\text{afname}}{\text{OUD}} \times 100\%$$

Voorbeeld

Op 1 januari 2017 telde Nederland 388 gemeenten.

Op 1 januari 1970 waren dat er nog 913.

Bereken met hoeveel procent het aantal gemeenten is afgenomen in de periode van 1 januari 1970 tot 1 januari 2017.

Uitwerking

$$\text{afname} = 913 - 388 = 525$$

$$\text{procentuele afname} = \frac{525}{913} \times 100\% \approx 57,5\%$$



Deel door OUD, dus deel hier door het aantal op 1 januari 1970.

- 15** Het gaat niet goed met de Kievit. Waren er volgens tellingen in 1990 nog 375 000 broedparen, in 2016 was dit aantal nog maar 215 000. Bereken met hoeveel procent het aantal Kievitsbroedparen is afgenomen in de periode 1990-2016.



- 16** Aan het einde van het winterseizoen zijn er bij de Ski Shop aantrekkelijke aanbiedingen.



Bereken hoeveel procent korting je krijgt op de handschoenen en op de ski's.

- A 17** a Op 31 december 2015 waren er 122 563 elektrische voertuigen in Nederland. Hiervan was 71,4% personenauto. Op 31 december 2016 waren er 112 008 elektrische personenauto's in Nederland.
Is het aantal elektrische personenauto's toe- of afgenomen in de periode van 31 december 2015 tot 31 december 2016? Met hoeveel procent?
- b In de showroom van een autodealer staat een elektrische BMW i3 waarvan de prijs met 3500 euro is verlaagd. De auto staat nu te koop voor 32 000 euro.
Bereken hoeveel procent korting je op de i3 krijgt.
- c Op 31 december 2016 waren er 3775 elektrische bromfietsen in Nederland. Op 31 december 2015 waren dat er 165 minder. Bereken de relatieve toename van het aantal elektrische bromfietsen in de periode van 31 december 2015 tot 31 december 2016.

18 Hoeveel procent korting krijg je op de skibril hiernaast?



- 19** Broodjeszaak Panificio maakte in 2015 een winst van 12 000 euro. In 2016 nam de winst vergeleken met 2015 met 30% af en in 2017 nam de winst vergeleken met 2016 met 25% af.
- a In 2017 was de winst lager dan in 2015.
Hoeveel is de absolute afname?
- b Hoeveel procent was de winst in 2017 minder dan in 2015?

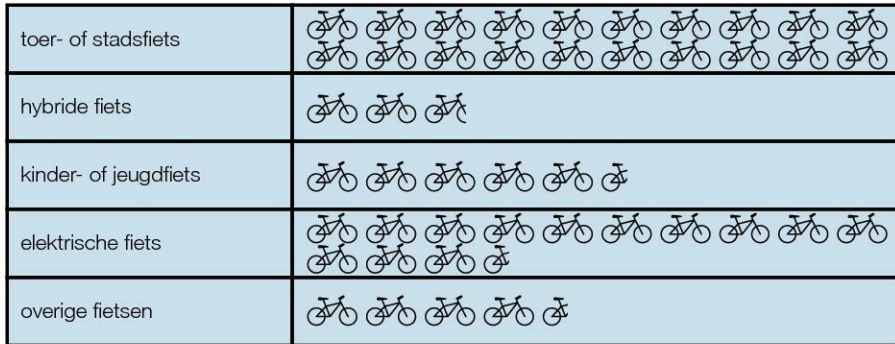
A 20 In 2015 had bloemisterij Fleur een omzet van 3,4 miljoen euro. In 2016 nam de omzet met 18% toe. In 2017 was er een afname van 22% ten opzichte van 2016.
Hoeveel procent was de omzet in 2017 lager dan in 2015?

- 21** Een boek van € 19,00 wordt 10% in prijs verhoogd. Twee maanden later wordt de prijs van het boek met 10% verlaagd.
- a Met hoeveel procent had de prijs van het boek verlaagd moeten worden om weer op € 19,00 uit te komen?
- b Met hoeveel procent moet je de prijs verlagen om na een verhoging met 15% weer op de oude prijs uit te komen?
- c Met hoeveel procent moet je de prijs verhogen om na een verlaging met 15% weer op de oude prijs uit te komen?
- d Met hoeveel procent moet je de prijs verlagen om na een verdubbeling van de prijs weer op de oorspronkelijke prijs uit te komen?

6.3 Beeld-, staaf- en lijndiagram

O 22 Het beelddiagram in figuur 6.3 geeft informatie over het aantal verkochte fietsen in Nederland in 2016.

AANTAL VERKOCHTE FIETSEN IN 2016



 = 20 000 fietsen

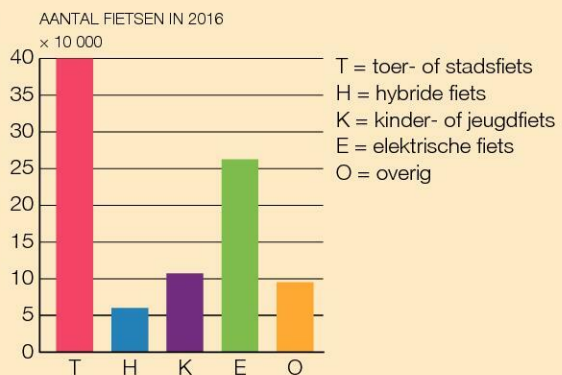
figuur 6.3

- Hoeveel fietsen werden in 2016 in totaal verkocht? Hoeveel procent hiervan was elektrisch?
- Van de verkochte overige fietsen was 48% racefiets. Hoeveel racefietsen werden in 2016 verkocht?

Theorie A Staafdiagram

Het verzamelen van cijfermateriaal is een onderdeel van de **beschrijvende statistiek**. Om cijfermateriaal overzichtelijk aan te bieden, gebruikt men tabellen en diagrammen.

Een voorbeeld van een diagram is het **beelddiagram** in figuur 6.3. Het zelf maken van een beelddiagram is tijdrovend. Het is handiger een **staafdiagram** te maken. Je krijgt dan figuur 6.4. De staven zijn hierin verticaal geplaatst, maar staafdiagrammen met horizontale staven komen ook voor. In een staafdiagram staan de staven los van elkaar.



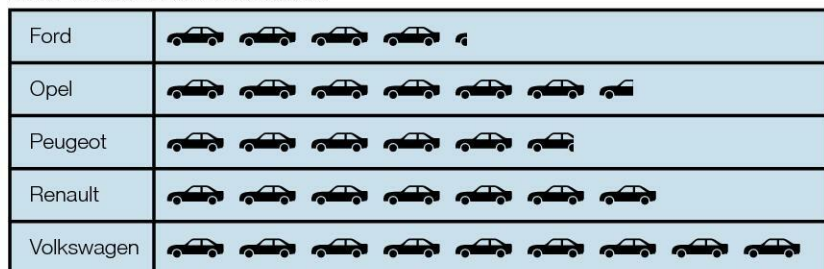
figuur 6.4

In een staafdiagram

- geeft de lengte van een staaf de hoeveelheid aan
- staat bij elke staaf waar het over gaat
- staan de staven los van elkaar.

- 23** Het beelddiagram in figuur 6.5 geeft informatie over de meest verkochte automerken in Nederland in 2016.

MEEST VERKOCHTE AUTOMERKEN IN 2016



= 5000 auto's

figuur 6.5

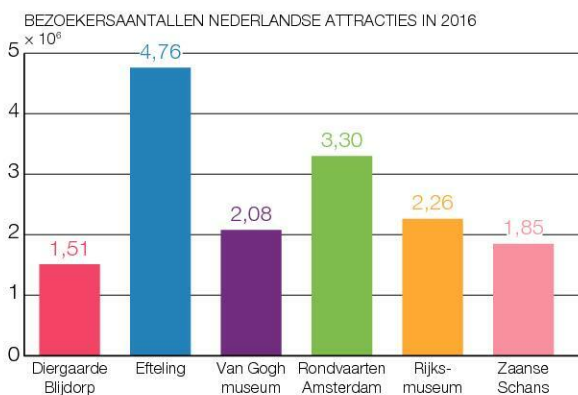
- a** Hoeveel Opels werden in 2016 verkocht?

In 2016 werden in totaal ruim 385 000 auto's verkocht. In 2015 waren dat er nog 452 000.

- b** Hoeveel procent minder auto's werd in 2016 verkocht vergeleken met 2015?
- c** Hoeveel procent van de in 2016 verkochte auto's was van het merk Renault?
- d** Maak een staafdiagram bij de gegevens van figuur 6.5. Neem op de verticale as 1 cm voor 5000 auto's.

- A 24** Het staafdiagram in figuur 6.6 geeft informatie over enkele veel bezochte attracties in Nederland in 2016.

- a** Hoeveel bezoekers trok het Rijksmuseum meer dan het Van Gogh Museum? Hoeveel procent is dat?
- b** Er gingen minder mensen naar Diergaarde Blijdorp dan naar de Zaanse Schans. Hoeveel procent minder?



figuur 6.6

- c** De Zaanse Schans is vooral populair bij toeristen uit het buitenland. In 2016 werd de Zaanse Schans door 1,5 miljoen buitenlandse toeristen bezocht. Hoeveel procent van het aantal bezoekers van de Zaanse Schans was Nederlander?
- d** In 2016 maakte de Efteling een winst van 22,4 miljoen euro. Hoeveel verdiende de Efteling in 2016 gemiddeld per bezoeker?

In het jeugdblad Girls staat het diagram hiernaast over het aantal exemplaren dat in een jaar verkocht is. De uitgever zegt: 'In 2016 zijn er vier keer zoveel exemplaren verkocht als in 2013.' Ben je het eens met de uitgever? Licht toe.



figuur 6.7

Theorie B Lijndiagram

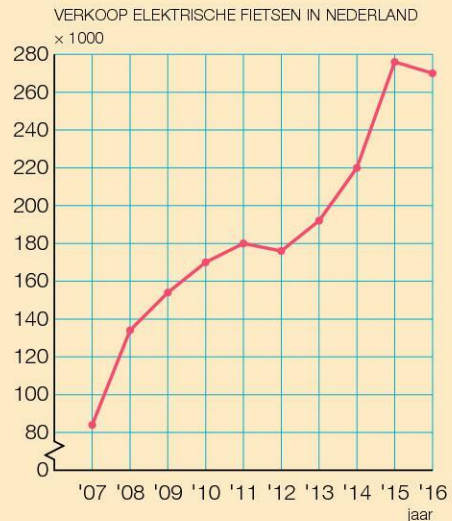
Een ander veelgebruikt diagram is het **lijndiagram**.

In het lijndiagram in figuur 6.8 zie je voor de periode 2007-2016 hoeveel elektrische fietsen er jaarlijks in Nederland zijn verkocht.

Bij het tekenen van het lijndiagram ga je als volgt te werk.

- Zet op de horizontale as de jaren en op de verticale as de aantallen verkochte elektrische fietsen.
- Geef boven elk jaar met een stip aan hoeveel elektrische fietsen er dat jaar zijn verkocht.
- Verbind de stippen door lijnstukken.

Om te voorkomen dat een lijndiagram te hoog wordt, kun je een stukje van de verticale as weglaten. Je gebruikt dan een **scheurlijn** zoals in figuur 6.8.



figuur 6.8

26 [▶ WERKBOEK] Zie het lijndiagram in figuur 6.8.

- Hoeveel elektrische fietsen werden in 2010 verkocht?
- In welke jaren werden er meer dan 180 000 elektrische fietsen verkocht?
- In welke twee opeenvolgende jaren was het verschil in aantallen verkochte elektrische fietsen het grootst?
- In 2016 werden er meer elektrische fietsen verkocht dan in 2010. Hoeveel procent meer?
- In 2012 werden er minder elektrische fietsen verkocht dan in 2011. Hoeveel procent minder?
- In 2015 werden in totaal 983 000 fietsen verkocht in Nederland. Hoeveel procent daarvan was elektrisch?

A 27 In de periode van 13 tot en met 31 augustus 2016 waren in Maastricht de dagelijkse maximumtemperaturen in °C achtereenvolgens 24, 23, 23, 24, 26, 25, 25, 24, 20, 24, 29, 32, 33, 31, 32, 27, 21, 24, 26.

- Teken een lijndiagram bij deze gegevens. Neem op de verticale as 1 cm voor 2 °C en gebruik een scheurlijn.
- Op welke twee achtereenvolgende dagen was het verschil tussen de maximumtemperaturen het grootst?
- Hoeveel procent van de dagen was een zomerse dag in de periode van 13 tot en met 31 augustus 2016?
- Was er in deze periode een hittegolf? Licht toe.

Het KNMI spreekt van een

- warme dag als de maximumtemperatuur 20 °C of hoger is
- zomerse dag als de maximumtemperatuur 25 °C of hoger is
- tropische dag als de maximumtemperatuur 30 °C of hoger is.

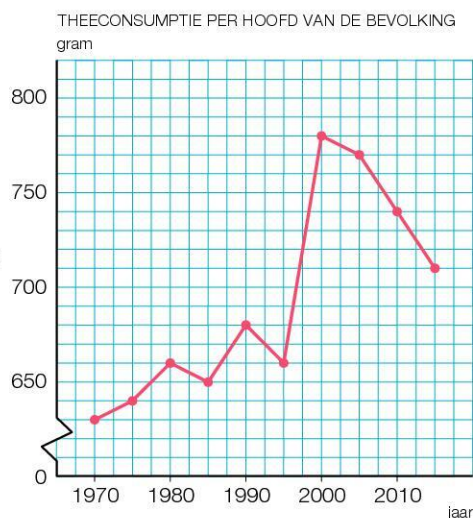
Bij een hittegolf gaat het om vijf achtereenvolgende zomerse dagen, waarvan er minstens drie tropisch zijn.

A 28 Figuur 6.9 gaat over het theeverbruik in Nederland per hoofd van de bevolking.

- Wat betekent 'per hoofd van de bevolking'?
- Hoeveel gram was het theeverbruik in 1970 per hoofd van de bevolking?
- Hoeveel gram was het theeverbruik per hoofd van de bevolking in 2010 minder dan in 2000? Hoeveel procent minder is dat?
- Volgens Rob was in 1998 de theeconsumptie per hoofd van de bevolking 720 gram. Geef commentaar.

Van 8 gram thee wordt gemiddeld 1 liter thee gezet.

- Hoeveel liter thee werd in 1980 per hoofd van de bevolking gedronken?



figuur 6.9

De inhoud van een theeglas is 0,2 liter.

- Hoeveel glazen thee dronk de Nederlander in 2015 gemiddeld per dag? Rond af op één decimaal.
- In 2015 telde Nederland 16,9 miljoen inwoners. Hoeveel glazen thee dronken alle Nederlanders samen in 2015?

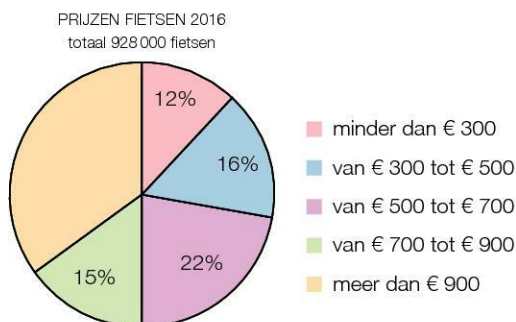


6.4 Cirkeldiagram

0 29

In figuur 6.10 staat informatie over de prijzen van fietsen die in 2016 in Nederland zijn verkocht.

- Hoeveel procent van de verkochte fietsen was duurder dan € 900?
- Hoeveel fietsen waren goedkoper dan € 500? Rond af op duizendtallen.



figuur 6.10

Theorie A Cirkeldiagram en sectoren

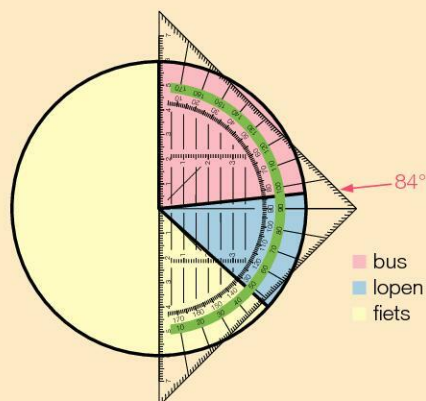
Het diagram in figuur 6.10 heet een **cirkeldiagram**. Dit cirkeldiagram is verdeeld in vijf **sectoren**. De sector die bij de prijzen van € 700 tot € 900 hoort, is groen gekleurd.

In een cirkeldiagram zijn de hoeken bij het middelpunt samen 360° . De sectoren zijn samen 100%. Weet je het percentage van een sector, dan kun je de hoek van die sector berekenen. Zo hoort bij een sector van 16% een hoek van $0,16 \times 360^\circ = 57,6^\circ$.

In klas 2F zitten 30 leerlingen. Van hen komen er 19 met de fiets naar school, zeven met de bus en vier lopen er naar school. Bij de sector 'bus' van het cirkeldiagram hoort een hoek van

$$\frac{7}{30} \times 360^\circ = 84^\circ.$$

HOE NAAR SCHOOL IN KLAS 2F?
totaal 30 leerlingen



figuur 6.11

Werkschema: een cirkeldiagram tekenen

- Bereken de hoeken van de sectoren.
- Teken een cirkel en de straal verticaal omhoog.
- Teken de hoeken van de sectoren met de klok mee en kleur de sectoren.
- Zet een opschrift en een legenda bij het cirkeldiagram.

Voorbeeld

In de tabel zie je hoe de Nederlanders in 2016 hun vakanties in het buitenland doorbrachten.

ACCOMMODATIE BUITENLANDSE VAKANTIES

accommodatie	hotel/pension	camping	bungalow	appartement	overig
aantal in miljoenen	7,7	2,9	2,7	1,7	2,9

Verwerk deze gegevens in een cirkeldiagram.

Uitwerking

$$\text{totaal} = 7,7 + 2,9 + 2,7 + 1,7 + 2,9 = 17,9$$

$$\text{hotel/pension} \quad \frac{7,7}{17,9} \times 360^\circ \approx 155^\circ$$

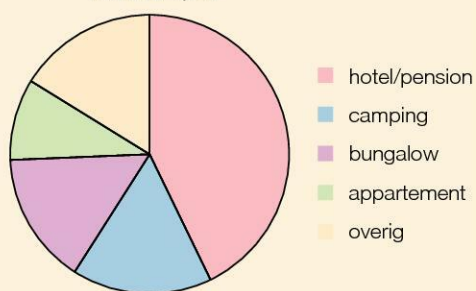
$$\text{camping} \quad \frac{2,9}{17,9} \times 360^\circ \approx 58^\circ$$

$$\text{bungalow} \quad \frac{2,7}{17,9} \times 360^\circ \approx 54^\circ$$

$$\text{appartement} \quad \frac{1,7}{17,9} \times 360^\circ \approx 34^\circ$$

$$\text{overig} \quad \frac{2,9}{17,9} \times 360^\circ \approx 58^\circ$$

ACCOMMODATIE BUITENLANDSE VAKANTIES 2016
totaal 17,9 miljoen



- 30** In de tabel staat informatie over de uitgaven van de familie Veerman in 2017.

UITGAVEN FAMILIE VEERMAN IN 2017

sector	voeding	woning	kleding en schoeisel	gezondheidszorg	ontspanning en verkeer	overig
percentage van het inkomen	16,2	31,4	7,6	7,8	34,5	...

De familie Veerman heeft een jaarinkomen van € 36 500.

- Hoeveel euro besteedt de familie Veerman aan kleding en schoeisel?
- Hoeveel euro besteedt de familie Veerman aan overig?
- Maak een cirkeldiagram bij de tabel.

- 31** Volgens de Europese Centrale Bank zijn bij de overgang naar de euro meer dan 14 miljard eurobiljetten gedrukt.

BILJETTEN BIJ INTRODUCTIE EURO

waarde	€ 5	€ 10	€ 20	€ 50	€ 100	€ 200	€ 500
aantal in miljoenen	2415	3013	3608	3674	1246	229	360

- Maak een cirkeldiagram bij de tabel.
- Van de gedrukte biljetten zijn er 4,5 miljard als reservevoorraad opgeslagen.
Hoeveel procent is dat van het totale aantal biljetten?
- Hoeveel miljard euro is de totale waarde van alle eurobiljetten?

- A 32** Jan maakt een cirkeldiagram van wat hij op een gewone doordeweekse dag doet. Eerst maakt hij de volgende tabel.

BESTEDING DOORDEWEEKSE DAG

besteding	eten	tv kijken	slapen	school	overig
tijd	1:30	1:30	8:50	7:10	5:00

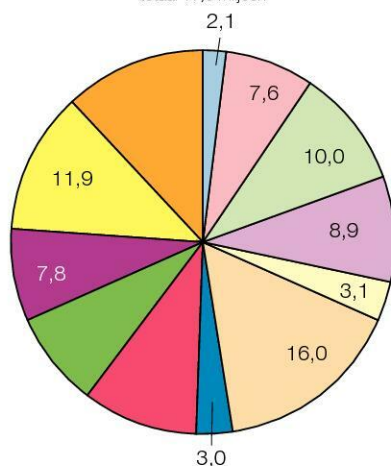
8:50 betekent
8 uur en 50 minuten.

- Maak een cirkeldiagram bij de tijdbesteding van Jan.
- Hoeveel procent van de tijd slaapt Jan?

- A 33** In het cirkeldiagram in figuur 6.12 staan percentages van het aantal binnenlandse vakanties in 2016.

- Hoeveel binnenlandse vakanties werden in 2016 in Gelderland doorgebracht?
- In 2016 werden 1 730 000 binnenlandse vakanties in Noord-Holland doorgebracht.
Bereken het percentage dat bij Noord-Holland hoort.
- In 2016 ging de Nederlander 1 410 000 keer op vakantie naar Zuid-Holland.
Bereken de hoek die bij de sector Zuid-Holland hoort.
- Bereken de hoek die bij de sector Limburg hoort.

BINNENLANDSE VAKANTIES 2016
totaal 17,6 miljoen



- Groningen
- Flevoland
- Zuid-Holland
- Friesland
- Gelderland
- Zeeland
- Drenthe
- Utrecht
- Noord-Brabant
- Overijssel
- Noord-Holland
- Limburg

figuur 6.12

6.5 Histogram en steel-bladdiagram

O 34

Huisarts De Boer heeft elke doordeweekse ochtend een inloopspreekuur. De afgelopen drie weken zijn achtereenvolgens 13, 18, 21, 19, 15, 16, 17, 22, 23, 14, 18, 12, 20, 19, 21 personen bij De Boer op het inloopspreekuur geweest.

- Op hoeveel van de dagen kwamen er meer dan 20 personen op het inloopspreekuur?
- Hoeveel personen zijn er de afgelopen drie weken in totaal op het inloopspreekuur geweest?
- Op hoeveel procent van de dagen kwamen er minder dan 15 personen op het inloopspreekuur?



Theorie A Frequentietabel en histogram

De trainer van een voetbalteam heeft een competitie lang bijgehouden hoeveel hoekschoppen zijn team per wedstrijd mocht nemen. De resultaten zijn

3 4 4 6 3 6 3 7 6 5 4 4 3 6 4 6 5 4

Om een goed overzicht te krijgen van deze gegevens, maak je een tabel.

In de eerste kolom zet je de **waarnemingsgetallen**, dus de aantallen hoekschoppen. Vervolgens ga je **turven**, zie de middelste kolom. Ten slotte zet je in de laatste kolom hoe vaak elk waarnemingsgetal voorkomt. Je ziet dat het waarnemingsgetal 4 wel 6 keer voorkomt. We zeggen dat het waarnemingsgetal 4 de **frequentie** 6 heeft.

HOEKSCHOPPEN PER WEDSTRIJD

aantal		frequentie
3		4
4		6
5		2
6		5
7		1



Een frequentie geeft aan hoe vaak een waarnemingsgetal voorkomt.

De tabel heet een **frequentietabel**.

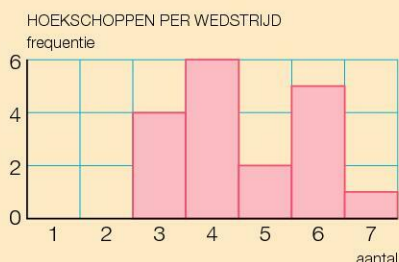
Je kunt de frequentietabel ook horizontaal zetten, zoals hiernaast.

HOEKSCHOPPEN PER WEDSTRIJD

aantal hoekschoppen	3	4	5	6	7
frequentie	4	6	2	5	1

Een frequentietabel bestaat uit een rij waarnemingsgetallen met de bijbehorende frequenties.

Bij de frequentietabel van de vorige bladzijde is het staafdiagram van figuur 6.13 gemaakt. Zo'n staafdiagram bij een frequentietabel heet **histogram**. Midden onder elke staaf staat het aantal hoekschoppen. De frequenties staan langs de verticale as.



figuur 6.13

Een histogram is een staafdiagram bij een frequentietabel. De staven staan tegen elkaar aan.

- 35** Hieronder zie je het aantal fietsen dat rijwielhandelaar Peerenboom in de maand mei dagelijks heeft verkocht.
- 1 0 0 2 0 1 0 1 2 1 0 2 3
 2 0 3 4 1 0 2 1 3 1 2 1 1
- Maak een frequentietabel bij deze gegevens.
 - Hoeveel dagen was Peerenboom in mei open?
 - Op hoeveel procent van de dagen werden er geen fietsen verkocht?
 - Maak een histogram bij de frequentietabel.

- 36** De bewoners van de Margrietlaan willen meer speelgelegenheid voor hun kinderen. Daarom dienen ze een verzoekschrift in bij het gemeentebestuur. Bij het verzoekschrift zit de volgende frequentietabel.

KINDEREN JONGER DAN 12 JAAR PER GEZIN

aantal kinderen	0	1	2	3	4	5
frequentie	7	10	12	6	3	4

- In de bovenste regel van de tabel komen geen getallen boven de 5 voor. Wat betekent dat?
- Hoeveel gezinnen wonen in de Margrietlaan?
- Hoeveel procent van de gezinnen heeft geen kinderen jonger dan 12 jaar?
- Hoeveel kinderen uit de Margrietlaan zijn jonger dan 12 jaar?

- A 37** Op weg naar zijn werk komt meneer Braamhaar langs een aantal verkeerslichten. In een periode kort na de zomervakantie heeft hij bijgehouden hoeveel verkeerslichten per dag op rood stonden.

ROOD OP ROUTE HUIS - WERK

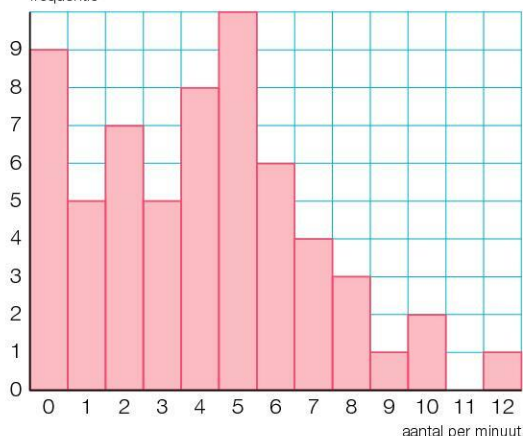
aantal keer rood	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	4	4	6	8	6	1	1

- De frequentie van het waarnemingsgetal 5 is 6.
Wat betekent dat?
- Op hoeveel dagen moest meneer Braamhaar meer dan zes keer voor een verkeerslicht wachten?
- Hoeveel weken heeft meneer Braamhaar geteld?
- Wat betekent het dat in de bovenste regel van de frequentietabel de getallen 0, 1 en 2 niet voorkomen?
- Teken een histogram bij de frequentietabel.
- Hoe vaak moest meneer Braamhaar in deze periode in totaal voor het rode licht stoppen?

- A 38** Een parkeergarage laat onderzoeken hoeveel auto's per minuut binnenrijden. Zie het histogram in figuur 6.14.

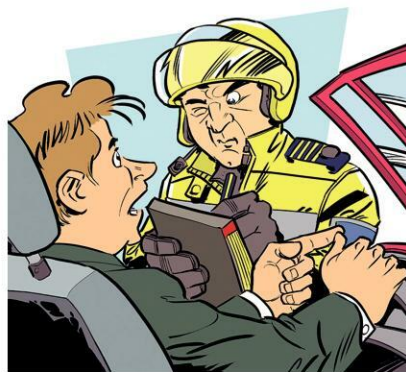
- Hoeveel keer zijn er meer dan acht auto's per minuut binnengereden?
- Hoe lang duurde het onderzoek?
- Hoeveel auto's zijn in totaal geteld?
- In hoeveel procent van de tijd kwamen er minder dan vijf auto's per minuut binnen?

AANTAL AUTO'S DAT PARKEERGARAGE BINNENRIJDT
frequentie



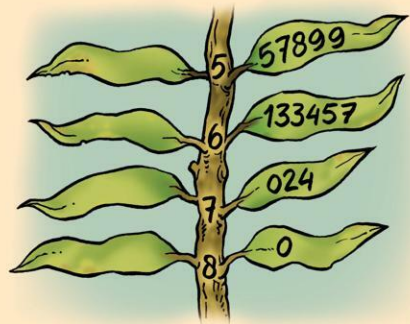
figuur 6.14

- O 39** Bij een snelheidscontrole heeft de politie vijftien bekeuringen uitgedeeld. De snelheden van de overtreders, in kilometer per uur, waren
72 63 59 58 80 74 65 57
59 55 67 64 63 70 61
Om een goed overzicht van deze gegevens te krijgen, is het niet zinvol een frequentietabel te maken.
Licht toe.



Theorie B Steel-bladdiagram

Bij de gegevens in opgave 39 is het niet verstandig een frequentietabel te maken. Je krijgt dan namelijk een lange tabel met alleen maar de frequenties 0, 1 en 2. Om de gegevens in opgave 39 toch op een overzichtelijke manier weer te geven, kun je een **steel-bladdiagram** maken. Je splitst daarbij elk waarnemingsgetal in twee stukken: het aantal tientallen en het aantal eenheden. Het aantal tientallen wordt de **steel** genoemd, en het aantal eenheden het **blad**. Zo krijg je bij 72 de steel 7 en het blad 2. De vijftien waarnemingsgetallen in opgave 39 verwerk je als volgt in een steel-bladdiagram.



stap 1

Maak twee kolommen.
Zet in de eerste kolom de stelen, dus 5, 6, 7 en 8.

5	
6	
7	
8	

tientallen eenheden

steel

blad

stap 2

Zet in de tweede kolom de bladen.
72 geeft blad 2 bij steel 7.
63 geeft blad 3 bij steel 6.

5	9 8 7 9 5
6	3 5 7 4 3 1
7	2 4 0
8	0

tientallen eenheden

stap 3

Zet de bladen op volgorde van grootte. Denk ook aan het opschrift.

SNELHEDEN

5	5 7 8 9 9
6	1 3 3 4 5 7
7	0 2 4
8	0

tientallen eenheden

In een steel-bladdiagram staan de bladen van klein naar groot.

In de steel hoeven niet altijd tientallen te staan. Bij grotere getallen zijn de stelen misschien wel honderdtallen en de bladen tientallen.

40 Een klas heeft een test gemaakt. Er zijn maximaal 50 punten te behalen. Van de scores is het steel-bladdiagram in figuur 6.15 gemaakt.

- Je ziet dat de score 15 één keer voorkomt. Hoeveel keer komt de score 17 voor? En hoeveel keer 21? En 23? En 28?
- Wat is de hoogst behaalde score?
- Hoeveel leerlingen hebben de test gemaakt?

SCORE TEST

0	5 6 6
1	3 5 7 7 8 8
2	1 1 3 3 3 5
3	4 7 7
4	0 1
tientallen	eenheden

figuur 6.15

- 41** Nico woont aan een buitenweg. Hij heeft 30 dagen lang geteld hoeveel auto's tussen 14:00 en 15:00 uur passeerden. Het resultaat is

21 28 31 30 17 8 9 10 18 43 51 27 20 44 28
16 11 38 30 25 6 17 15 16 39 38 16 15 15 15

- Maak een steel-bladdiagram bij deze gegevens.
- Op hoeveel procent van de dagen passeerden tussen 14:00 en 15:00 uur meer dan 30 auto's?

- A 42** Het steel-bladdiagram in figuur 6.16 gaat over de 19 langste rivieren op aarde. De lengte is in duizenden kilometers.

- Hoeveel km is de langste rivier? Weet je welke rivier dat is?
- De een na langste rivier is de Amazone. Hoeveel km is die lang?
- Op de ranglijst van de langste rivieren staat de Wolga op nummer 12. Hoe lang is de Wolga?

RIVIERLENGTE IN DUIZENDEN KM

3	1 2 3 7 7 9
4	1 1 2 2 3 5 7 7
5	5 6
6	2 3 7
eenheden	tienden

figuur 6.16

- A 43** In een klas is onderzocht hoeveel kwartier elke leerling in een week aan huiswerk besteedt. Hierbij is een **dubbel steel-bladdiagram** gemaakt.

AANTAL KWARTIER HUISWERK

meisjes		jongens
8 6	0	7 8 9
4 4 3	1	5 5 5 7 7
8 8 7 7	2	3 7 9
6 3 3 3 3 0	3	1 5
5 1	4	0
eenheden	tientallen	eenheden



- Hoeveel jongens hebben 27 kwartier aan hun huiswerk besteed? En hoeveel meisjes besteedden 27 kwartier aan hun huiswerk?
- Hoeveel jongens zaten meer dan 15 kwartier aan hun huiswerk? En hoeveel meisjes deden dat?
- Hoeveel leerlingen besteedden minder dan 12 kwartier aan hun huiswerk?
- Wie besteedden meer tijd aan het huiswerk, de jongens of de meisjes? Hoe kun je dat in één oogopslag zien?

44

In het dubbel steel-bladdiagram staat voor een aantal beroepen het gemiddelde uurloon.

GEMIDDELDE UURLOON IN EURO'S

mannen		vrouwen
	10	6
5	11	4 5 5 7
8 0 0	12	
5 1	13	0 1 5 6
9 8 7 6 2	14	1 8
	15	
	16	3
3 1	17	6
	18	
	19	8
9	20	
tienden	eenheden	tienden

- Van hoeveel beroepen is het uurloon in het steel-bladdiagram verwerkt?
- Bij mannen worden de beroepen van office-manager en arbeidsbemiddelaar gelijk betaald.
Welk uurloon hoort bij deze beroepen?
- Bij de meeste beroepen verdienen mannen meer dan vrouwen.
Zo verdient een mannelijke werkvoorbereider per uur € 0,60 meer dan zijn vrouwelijke collega.
Hoeveel is het uurloon van een mannelijke werkvoorbereider?
- Het enige beroep waarbij een vrouw meer verdient dan een man is hoofd facilitaire dienst: een vrouw verdient maar liefst 5 euro per uur meer dan haar mannelijke collega.
Hoeveel is het uurloon van een vrouwelijk hoofd facilitaire dienst?
- Hoeveel procent van de in het diagram verwerkte beroepen levert een vrouw in een week van 36 uur minder dan 525 euro op?

O 45

Joost is buschauffeur. 's Woensdags rijdt hij tussen het station en de diertuin. Op een woensdag heeft hij zowel op de ritten heen als op de ritten terug bijgehouden hoeveel passagiers er per rit zijn ingestapt. In het steel-bladdiagram zie je zijn resultaten.

- Hoeveel ritten waren er in totaal die woensdag?
- Welk waarnemingsgetal heeft de grootste frequentie?
- Joost wil deze resultaten verwerken in een histogram.
Tegen welk probleem loopt hij hierbij aan?

AANTAL INGESTAPTEN

0	2 6 8 9
1	2 2 3 3 3 6
2	7 8
3	1 2 5
4	0 1 7 8 9
5	1 2 3 3 3 3
tientalen	eenheden

figuur 6.17

Theorie C Klassenindeling

Om bij de gegevens van Joost in opgave 45 een histogram te tekenen, ga je de aantallen ingestapten indelen in groepen.

Deze groepen heten **klassen**.

Zo ontstaat de **klassenindeling** hiernaast.

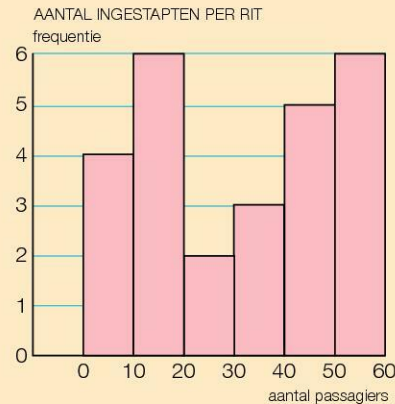
De klasse $30 \leq 40$ betekent vanaf 30 tot 40, dus 40 doet niet mee in deze groep. Van de klasse $30 \leq 40$ zijn 30 en 40 de **klassengrenzen** en is de **klassenbreedte** 10.

AANTAL INGESTAPTEN

klasse	frequentie
$0 \leq 10$	4
$10 \leq 20$	6
$20 \leq 30$	2
$30 \leq 40$	3
$40 \leq 50$	5
$50 \leq 60$	6

Bij de klassenindeling kun je vervolgens het histogram in figuur 6.18 tekenen. Op de horizontale as staan de klassengrenzen links- en rechtsonder bij de staven.

Een nadeel van een klassenindeling is dat je hieraan alleen maar kunt zien *hoeveel* getallen tot een klasse behoren, maar niet *welke* getallen.



figuur 6.18

- 46** Bij de ingang van een voetbalstadion is aan veertig toeschouwers de leeftijd gevraagd. Zie het steel-bladdiagram hiernaast.

- Maak een klassenindeling. Neem als klassen $0 \leq 10$, $10 \leq 20$, ...
- Teken een histogram bij de klassenindeling.
- Hoeveel procent van de ondervraagden was jonger dan 40 jaar?

LEEFTIJD TOESCHOUWERS

0	7
1	1 1 5 5 5 6 6 7 7 8 8
2	0 1 1 3 4 5 6 7 8 8 8
3	0 0 0 1 1 2 6 8
4	1 3 6 8
5	0 1 2 3 8
tientallen	eenheden

figuur 6.19

- A 47** Aan de leerlingen van klas H2C is gevraagd hoeveel kwartier ze de afgelopen week aan het huiswerk hebben besteed. Zie hiernaast.

- Maak een klassenindeling. Neem als klassen $0 \leq 5$, $5 \leq 10$, ...
- Teken hierbij een histogram.
- Hoeveel procent van de leerlingen heeft minder dan 15 kwartier aan het huiswerk besteed?
- Hoeveel procent van de leerlingen heeft meer dan 6 uur aan het huiswerk besteed?

AANTAL KWARTIER HUISWERK

0	4 7 8 8 8
1	1 2 2 2 3 5 6 6 6 7 7 8
2	0 1 1 3 3 5 8
3	0 1 2
tientallen	eenheden

figuur 6.20

6.6 Centrummaten

48 Op school wordt een actie voor Zip Your Lip gehouden. De klassen H2b en H2c halen lege flessen op die ze bij de supermarkt inwisselen voor geld. Elke klas wordt verdeeld in vijf groepen. Hiernaast zie je hoeveel elke groep heeft opgehaald.

- Bereken het gemiddelde bedrag per groep in klas H2b.
- Bereken het gemiddelde bedrag per groep in klas H2c.

Als de organisatie het gemiddelde bedrag van de klassen H2b en H2c ziet, is ze zeer enthousiast over de groepen in klas H2c.

- Vind jij ook dat de groepen van klas H2c het beter hebben gedaan dan de groepen van klas H2b? Licht toe.



H2b	H2c
48	8
52	22
37	14
28	10
55	256

Theorie A Gemiddelde, mediaan en modus

Het gemiddelde van een rij waarnemingsgetallen is de som van die getallen gedeeld door het aantal getallen.

Het gemiddelde van de zes proefwerkcijfers 6,8 7,3 5,8 3,2 8,5 8,0 is dus gelijk aan

$$\frac{6,8 + 7,3 + 5,8 + 3,2 + 8,5 + 8,0}{6} = \frac{39,6}{6} = 6,6.$$

$$\text{gemiddelde} = \frac{\text{som van de waarnemingsgetallen}}{\text{aantal waarnemingsgetallen}}$$

Het gemiddelde geeft hier een goede indruk van de behaalde cijfers. Maar soms kan het gemiddelde een verkeerde suggestie wekken. Als de gemiddelde leeftijd van zeven personen 19 jaar is, vermoed je dat ze alle zeven al van de basisschool zijn. Aan een honderdjarige met zijn zes achterkleinkinderen denk je niet direct.

Als er een uitschieter bij de waarnemingsgetallen zit, geeft het gemiddelde geen goede indruk van die getallen. Het is dan beter om de **mediaan** te gebruiken.



figuur 6.21 De gemiddelde leeftijd is $\frac{100 + 1 + 3 + 4 + 6 + 9 + 10}{7} = 19$ jaar.

De mediaan van de getallen 10, 4, 6, 9, 1, 3 en 100 krijg je als volgt.

1 Schrijf de getallen in volgorde van klein naar groot.

1 3 4 **6** 9 10 100

2 Zoek het middelste getal op. Dat is hier 6.

De mediaan is 6.

Bij een even aantal getallen is er geen middelste. De mediaan is dan het gemiddelde van de middelste twee getallen.

Van de getallen 11, 16, 20, 4, 10, 19, 13 en 23 krijg je de mediaan als volgt.

1 Schrijf de getallen in volgorde van klein naar groot.

4 10 11 **13 16** 19 20 23

2 De middelste twee getallen zijn 13 en 16, dus de mediaan is $\frac{13 + 16}{2} = 14,5$.

De mediaan is het middelste getal van alle waarnemingsgetallen nadat deze van klein naar groot zijn gerangschikt.

Bij een even aantal waarnemingsgetallen is de mediaan het gemiddelde van de middelste twee getallen.

Soms geeft het waarnemingsgetal dat het meest voorkomt de beste indruk van een serie getallen. Dat getal heet de **modus**.

Komen er twee of meer getallen voor die dezelfde grootste frequentie hebben, dan is er geen modus.

De modus is het waarnemingsgetal met de grootste frequentie.

Gemiddelde, modus en mediaan heten **centrummaten**.

Voorbeeld

Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus van

9 6 4 7 6 10 9 3 6 7

Uitwerking

$$\text{gemiddelde} = \frac{9 + 6 + 4 + 7 + 6 + 10 + 9 + 3 + 6 + 7}{10} = 6,7$$

3 4 6 6 6 7 7 9 9 10 *getallen op volgorde*
 middelste twee

$$\text{mediaan} = \frac{6 + 7}{2} = 6,5$$

modus = 6 *het getal 6 komt het meest voor*

49 Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus van

8 1 6 1 12 13 1 9 12

- 50** Op een weg waar een snelheid van maximaal 50 km/uur is toegestaan, houdt de politie een snelheidscontrole. Agent Tadema noteert een kwartier lang de volgende snelheden.
- 45 49 50 60 73 48 52 54 53
55 49 60 70 40 44 50 59 48
- Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus.

- 51** Geef bij elk van de volgende rijen waarnemingsgetallen de centrummaat die de beste indruk van die getallen geeft. Bereken de gekozen centrummaat.
- a** Jan heeft voor zijn proefwerken wiskunde de cijfers 7, 6, 8, 6 en 6 gehaald.
 - b** De leerlingenraad van Scholengemeenschap Oost eist inspraak bij het vaststellen van de lengte van de ochtendpauze. Bij een enquête onder de 1000 leerlingen van de school kiezen er 258 voor een pauze van 10 minuten, 311 voor een pauze van 15 minuten, 405 voor een pauze van 20 minuten en de rest voor een pauze van 25 minuten.
 - c** Het bruto maandsalaris van de werknemers van een fabriek is als volgt. Vijf personen verdienen € 1800, vijf personen verdienen € 2200 en één persoon verdient € 13 000.

- 52** Tien speelsters van handbalvereniging Olympia doen mee aan een spelregtest. Ze behaalden de volgende scores.
- 6 9 12 12 14 15 16 16 16 18
- a** Bereken het gemiddelde, de modus en de mediaan.
 - b** Annet Peters, de trainster van Olympia, deed ook mee aan de spelregtest. Zou je haar score meetellen, dan wordt de mediaan 15. Wat weet je van de score van Annet?
 - c** Wat gebeurt er met het gemiddelde als je de score van Annet meetelt? Wordt dat lager, hoger of blijft het gelijk?



- A 53** Willem bestuurt een treintje in het Amstelpark. Eén ronde door het park is 2,75 km lang. Willem houdt op een donderdag bij hoeveel passagiers per rit in het treintje zitten. In het steelbladdiagram zie je de resultaten.

AANTAL PASSAGIERS PER RIT

0	3 4 6 6
1	2 8 8
2	0 0 2 2 2 8
3	0 2 7 7 9
4	3 3 5 5 5 5 5 5 5 5
tientallen	eenheden

- Bereken de modus, de mediaan en het gemiddelde aantal passagiers per rit. Rond zo nodig af op één decimaal.
- Het treintje rijdt 1 op 7, dat wil zeggen dat voor 7 km één liter benzine nodig is.
Hoeveel liter benzine heeft het treintje die donderdag verbruikt?

- 54** Van de getallen 7, 15, 12, x , 8, 16 en 10 is de mediaan 12. Welke getallen kan x zijn?

- 55** De mentor van klas H2A heeft een periode lang bijgehouden hoeveel leerlingen van zijn klas er dagelijks te laat komen. De resultaten zie je in de volgende frequentietabel.

TELAATKOMERS H2A

aantal leerlingen	0	1	2	3	4	5
frequentie	6	7	5	3	1	1

- Gedurende hoeveel dagen heeft de mentor van H2A het aantal telaatkomers genoteerd?
- Hoeveel leerlingen kwamen er in deze periode in totaal te laat?
- Bereken met de antwoorden van de vragen a en b het gemiddelde aantal telaatkomers per dag. Rond af op één decimaal.
- Op hoeveel procent van de dagen kwamen er geen leerlingen te laat?



Theorie B Gemiddelde bij een frequentietabel

John heeft onderzocht hoeveel e-mails hij dagelijks ontvangt.

ONTVANGEN E-MAILS PER DAG

aantal e-mails	3	4	5	6	7	8
frequentie	18	14	9	11	6	6

John heeft in totaal op $18 + 14 + 9 + 11 + 6 + 6 = 64$ dagen het aantal ontvangen e-mails geteld. We noemen 64 de **totale frequentie**.

De **absolute frequentie** van het waarnemingsgetal 5 is 9. Dat betekent dat John op 9 van de onderzochte dagen 5 e-mails heeft ontvangen.

De **relatieve frequentie** van het waarnemingsgetal 5 is $\frac{9}{64} \times 100\% \approx 14,1\%$. Dus op 14,1% van de onderzochte dagen heeft John 5 e-mails ontvangen.

$$\text{relatieve frequentie} = \frac{\text{absolute frequentie}}{\text{totale frequentie}} \times 100\%$$

Het gemiddelde aantal e-mails per dag krijg je door het totale aantal e-mails te delen door de totale frequentie. Het totale aantal e-mails is $18 \cdot 3 + 14 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 11 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 8$.

Dus het gemiddelde aantal e-mails per dag is

$$\frac{18 \cdot 3 + 14 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 11 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 8}{64} \approx 4,86.$$

ARTIKEL

BEROEP

GESCHIEDENIS

INFORMATIE



e-mail

De eerste e-mail over een computernetwerk werd in 1971 door Ray Tomlinson verzonden. Rond 1995 werd e-mailen populair bij het grote publiek toen het internet meer algemeen toegankelijk werd.

Voorgangers van e-mail zijn de brief, het telegram, de telex en de telefax. Tegenwoordig wordt de veel tragere briefpost ook wel gekscherend *snail mail*, Engels voor slakkenpost, genoemd. In tegenstelling tot briefpost besteedt de schrijver in een e-mail minder aandacht aan opmaak, zinsbouw en spelling. Hoewel e-mail hoofdzakelijk tekst bevat, ontstonden al snel mogelijkheden om andere data mee te sturen in de vorm van een bijlage, in het Engels *attachment* genoemd.

In 2015 ontving de Nederlander gemiddeld 96 e-mails per week. Dit komt neer op ruim 84 miljard e-mails per jaar voor alle Nederlanders samen.



Ray Tomlinson

Voorbeeld

Ronald heeft een weerstation. Hiermee meet hij gedurende de maand november elke dag om 12:00 uur de windkracht. Hij zet de resultaten in een frequentietabel.

WINDKRACHT IN NOVEMBER OM 12:00 UUR

windkracht	0	1	2	3	4	5	6	7	8
frequentie	1	2	4	7	10	4	0	1	1



- Bereken de gemiddelde windkracht in november om 12:00 uur. Rond af op één decimaal.
- Op hoeveel procent van de dagen was de windkracht om 12:00 uur groter dan het gemiddelde?
- Bereken de relatieve frequentie van het waarnemingsgetal 3.

Uitwerking

- totale frequentie = $1 + 2 + 4 + 7 + 10 + 4 + 0 + 1 + 1 = 30$

$$\text{gemiddelde} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 8}{30} \approx 3,5$$

- percentage = $\frac{10 + 4 + 0 + 1 + 1}{30} \times 100\% \approx 53,3\%$

- relatieve frequentie = $\frac{7}{30} \times 100\% \approx 23,3\%$

ARTIKEL

BEROEP

GESCHIEDENIS

INFORMATIE

De schaal van Beaufort

De schaal van Beaufort werd in 1805 opgesteld door de Ier Francis Beaufort om de kracht van de wind aan te duiden. Beaufort baseerde de windkracht op de hoeveelheid zeil die een groot schip kon voeren bij een zwakke bries, storm of orkaan. Hierbij werd de winddruk uitgedrukt in kilogram per vierkante meter.

Op initiatief van het International Meteorological Committee werd de schaal van Beaufort in 1946 gebaseerd op de gemiddelde windsnelheid gedurende 10 minuten op een hoogte van 10 meter boven de grond. Hiermee werd de windkracht-schaal van Beaufort veranderd in een windsnelheid-schaal. De schaal van Beaufort telt 13 waarden, zie de tabel.

kracht	snelheid (km/uur)	naam
0	< 1	stil
1	1-5	zeer zwak
2	6-11	zwak
3	12-19	vrij matig
4	20-28	matig
5	29-38	vrij krachtig
6	39-49	krachtig
7	50-61	hard
8	62-74	stormachtig
9	75-88	storm
10	89-102	zware storm
11	103-117	zeer zware storm
12	> 117	orkaan

- 56** Aan de leerlingen van klas 2HA is gevraagd welke schoenmaat zij hebben. De resultaten staan in de frequentietabel.

SCHOENMAAT LEERLINGEN KLAS 2HA

schoenmaat	36	37	38	39	40	41	42
frequentie	5	4	6	4	2	3	3

- Bereken de gemiddelde schoenmaat. Rond af op één decimaal.
- Van hoeveel procent van de leerlingen is de schoenmaat groter dan het gemiddelde?
- Bereken de relatieve frequentie van het waarnemingsgetal 37.

- 57** Een paddenstoelenwerkgroep heeft een natuurgebied op de Veluwe opgedeeld in percelen van één are. Van elk perceel is bijgehouden hoeveel paddenstoelen er in een jaar werden waargenomen.

PADDENSTOELEN PER PERCEEL

aantal paddenstoelen	18	19	20	21	22	23	24	25	26
frequentie	5	7	13	21	18	26	5	11	14

- Bereken het gemiddelde aantal paddenstoelen per perceel. Rond af op één decimaal.
- Bereken de relatieve frequentie van het waarnemingsgetal 23.
- Op hoeveel procent van de percelen was het aantal paddenstoelen minder dan 20?
- Hoeveel ha is de oppervlakte van het natuurgebied waarop paddenstoelen zijn geteld?

- A 58** De leerlingen van klas 2HV1 hebben een luistertoets Engels gemaakt. In de frequentietabel zie je het aantal fouten per leerling.

FOUTEN IN LUISTERTOETS ENGELS

aantal fouten	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
frequentie	1	0	2	2	1	3	5	2	9	2	1	0	1

- Bereken het gemiddelde aantal fouten per leerling. Rond af op één decimaal.
- Bereken de relatieve frequentie van het waarnemingsgetal 8.

Voor elke fout trekt de docent een halve punt af.

- Bereken het gemiddelde cijfer van klas 2HV1. Rond af op één decimaal.
- Hoeveel procent van de leerlingen had een 6 of hoger?

59

Bij de luistertoets van opgave 58 waren drie leerlingen afwezig. Toen deze leerlingen de toets hadden ingehaald, werd het gemiddelde cijfer precies een 7. Twee van deze leerlingen scoorden een 9 voor de toets.

Bereken het cijfer van de derde inhaler.



60

Klas H2d heeft een proefwerk wiskunde gemaakt. In de klassenindeling hiernaast zie je een overzicht van de resultaten. Om bij een klassenindeling een idee te krijgen van het gemiddelde, bereken je het gemiddelde van de **klassenmiddens**. Je neemt dan aan dat alle waarnemingsgetallen in een klasse gelijk zijn aan het klassenmidden van die klasse. Het klassenmidden van de klasse $4 < 5$ is 4,5. En van de klasse $7 < 8$ is 7,5 het klassenmidden.

- Bereken in één decimaal nauwkeurig het gemiddelde cijfer.
- Hoeveel procent van de leerlingen had een 6 of hoger?

PROEFWERK WISKUNDE

cijfer	frequentie
$3 < 4$	3
$4 < 5$	4
$5 < 6$	9
$6 < 7$	7
$7 < 8$	5
$8 < 9$	2

figuur 6.22

61

Simon zit in klas H2d van opgave 60. Hij beweert dat het gemiddelde van de klas, afgerond op één decimaal, een 6,5 is.

Onderzoek of Simon gelijk kan hebben.

A 62

Van een groep leerlingen is de lengte gemeten. Zie de klassenindeling hiernaast.

- Bereken de gemiddelde lengte in cm. Rond af op gehele.
- Hoeveel procent van de leerlingen is kleiner dan 1,55 meter?

LENGTE LEERLINGEN IN CM

klasse	frequentie
$140 < 145$	8
$145 < 150$	10
$150 < 155$	3
$155 < 160$	15
$160 < 165$	7
$165 < 170$	11
$170 < 175$	8

figuur 6.23

Theorie C Mediaan en modus bij een frequentietabel

In het volgende voorbeeld zie je hoe je bij een frequentietabel behalve het gemiddelde ook de mediaan en de modus berekent.

Voorbeeld

De bedrijfsleider van een bioscoop heeft op een avond iedere bezoeker gevraagd voor de hoeveelste keer hij of zij dit jaar een bioscoop bezoekt. Bij de antwoorden op deze vraag hoort de frequentietabel hieronder.

BIOSCOOPBEZOeken DIT JAAR

aantal bezoeken	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	6	14	31	25	16	8	2



- a** Bereken het gemiddelde aantal bioscoopbezoeken dit jaar.
Rond af op één decimaal.
- b** Bereken de mediaan en de modus.

$6 + 14 + 31 = 51$,
dus het 51^e getal is 5.

Uitwerking

- a** totale frequentie = $6 + 14 + 31 + 25 + 16 + 8 + 2 = 102$

$$\text{gemiddelde} = \frac{6 \cdot 3 + 14 \cdot 4 + 31 \cdot 5 + 25 \cdot 6 + 16 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 2 \cdot 9}{102} \approx 5,6$$

- b** totale frequentie = 102, dus mediaan = $\frac{51^{\text{e}} \text{ getal} + 52^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{5 + 6}{2} = 5,5$

modus = 5

het waarnemingsgetal 5 heeft de grootste frequentie

Staan de waarnemingsgetallen in volgorde van grootte, dan is

- bij 9 waarnemingsgetallen de mediaan het 5^e getal
- bij 10 waarnemingsgetallen de mediaan het gemiddelde van het 5^e en het 6^e getal.

En zo is

- bij 63 waarnemingsgetallen de mediaan het 32^e getal
- bij 64 waarnemingsgetallen de mediaan het gemiddelde van het 32^e en het 33^e getal.

63 Hoe bereken je de mediaan bij het volgende aantal waarnemingsgetallen?

- a** 18
b 97
c 1000
d 2387

- 64** Op een snelweg is gedurende een kwartier van elke passerende auto geteld hoeveel personen erin zitten. Het resultaat is in de volgende frequentietabel verwerkt.

INZITTENDEN PER AUTO

aantal personen	1	2	3	4	5	6
frequentie	58	33	16	21	9	13

- Bereken in twee decimalen nauwkeurig het gemiddelde aantal personen per auto.
- Bereken de mediaan en de modus.
- Hoeveel personen zijn er in totaal geteld?
- In hoeveel procent van de auto's zaten meer dan drie personen?



- A 65** De leerlingen van een klas hebben opgegeven hoeveel broers en zussen ieder heeft. Zie de frequentietabel.

GEZINSSAMENSTELLING

aantal broers en zussen	0	1	2	3	4
frequentie	12	10	2	5	3

- Hoeveel leerlingen zitten er in de klas?
- Bereken het gemiddelde aantal broers en zussen per leerling. Rond af op één decimaal.
- Bereken de mediaan.
- Bereken de relatieve frequentie van de modus.
- Volgens Willemijn hebben de leerlingen van deze klas samen 41 broers en zussen. Hoe komt Willemijn aan dit aantal? Waarom hoeft Willemijn niet gelijk te hebben?

- A 66** De kantinebeheerder bij sportvereniging MGR overweegt de blikjes frisdrank voortaan nog maar in één formaat in te kopen. Dat is voordeliger. Een onderzoek onder de bezoekers levert de volgende voorkeuren op.

VOORKEUR INHOUD BLIKJES FRISDRANK

inhoud in mL	100	200	330	500
frequentie	19	26	41	3

- Bereken zo nodig in één decimaal nauwkeurig het gemiddelde, de modus en de mediaan.
- Welke centrummaat zal de keuze van de kantinebeheerder bepalen? Waarom?

6.7 Tabellen en diagrammen met Excel

In deze paragraaf werk je met het databestand 'Leerlingen klas 2HV'. Zie de tabel hieronder.

In de opdrachten ga je met het computerprogramma Excel gegevens uit de tabel verwerken in frequentietabellen en in diagrammen. Ook ga je centrummaten berekenen.

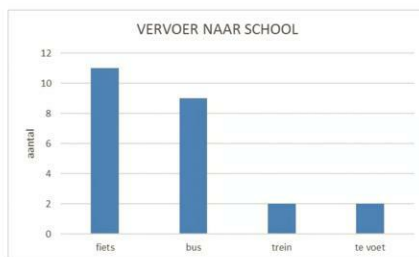
[> [WERKBOEK](#)] In het werkboek kun je nalezen hoe je met Excel frequentietabellen, cirkeldiagrammen en staafdiagrammen maakt en hoe je centrummaten berekent.

naam	m/v	lengte in cm	leeftijd	afstand huis- school in km	vervoer naar school*	aantal keer sporten per week	aantal uur huiswerk per week	aantal broers en zussen
Karel	m	150	12	2	f	2	2	1
Gerjan	m	145	12	3	f	1	4	2
Leen	m	160	12	2	f	2	5	3
Nelleke	v	146	13	13	b	1	4	1
Klaske	v	157	12	20	b	3	6	0
Timothy	m	171	14	23	t	1	4	0
Marlies	v	156	13	13	b	4	6	1
Shelley	v	145	12	13	b	0	7	1
Naomi	v	168	12	4	f	2	6	2
Kees	m	167	12	5	f	3	4	0
Kim	v	144	12	12	b	1	1	0
Roland	m	181	13	13	b	0	3	2
Henri	m	176	14	4	f	0	5	1
Patricia	v	156	13	3	f	2	6	1
Shan	v	147	12	3	f	3	4	1
Peter	m	160	12	2	f	1	5	0
Farouk	m	156	14	1	v	2	3	0
Sten	m	176	13	1	v	0	4	2
Irina	v	149	13	3	f	2	5	1
Sander	m	156	12	13	b	3	2	2
Mourad	m	167	12	13	b	1	1	1
Ben	m	156	12	20	t	0	3	5
Dina	v	140	12	12	b	2	4	1
Maartje	v	167	12	2	f	1	5	1
Jennifer	v	160	13	12	b	2	4	2
Aylin	v	156	12	3	f	2	4	1
Marco	m	168	13	4	f	3	5	1
Ko	m	160	12	5	f	2	4	1
Marieke	v	162	12	3	f	1	4	0
Klaas	m	164	13	8	f	1	5	2

* f = fiets, b = bus, t = trein, v = te voet

- 67** Open in Excel het bestand 'Leerlingen klas 2HV' en maak in Excel een frequentietabel van
- a** de leeftijden van de leerlingen
 - b** het aantal keer sporten per week
 - c** het aantal uur huiswerk per week
 - d** het aantal broers/zussen

- 68** **a** Maak het staafdiagram van figuur 6.24 waarin je kunt aflezen hoe vaak elke soort vervoer naar school voorkomt.
- b** Maak een staafdiagram waarin je de gegevens uit de kolom 'aantal uur huiswerk per week' verwerkt.
- c** Maak een staafdiagram waarin van de leerlingen van klas 2HV het aantal keer sporten per week is verwerkt.

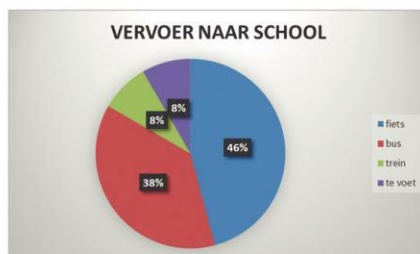


figuur 6.24

- 69** **a** Maak het cirkeldiagram van figuur 6.25 waarin de gegevens over het vervoer naar school zijn verwerkt.

Maak een cirkeldiagram bij de gegevens

- b** aantal keer sporten per week
- c** aantal uur huiswerk per week
- d** leeftijd.



figuur 6.25

- 70** **a** Zet de cursor in cel D36 en tik in Gemiddelde. Ga naar cel D37 en laat Excel de gemiddelde lengte van de leerlingen van 2HV in één decimaal nauwkeurig berekenen.
- b** Zet de cursor in cel D39 en tik in Mediaan. Ga naar cel D40 en laat Excel de mediaan van de lengtes berekenen.
- c** Ga naar cel D42, tik in Modus en laat Excel in cel D43 de modus van de lengtes zetten.

- 71** **a** Laat Excel op de manier van opgave 70 het gemiddelde, de mediaan en de modus berekenen van de afstand huis-school.
- b** Doe dat ook voor het aantal uur huiswerk per week.
- c** Doe dat ook voor het aantal keer sporten per week.

- 72** **a** Maak van je eigen klas een tabel zoals op bladzijde 84. Bedenk enkele nieuwe onderwerpen voor de kolommen.
- b** Verwerk de gegevens van vraag a in diagrammen en bereken centrummaten.

- 73** Organiseer met enkele klasgenoten een enquête en verwerk de resultaten met het programma Excel in frequentietabellen en diagrammen. Bereken van verschillende variabelen de centrummaten.

Gemengde opgaven

- 1** [▶ WERKBOEK] De maand januari van 2017 was koud in Nederland.

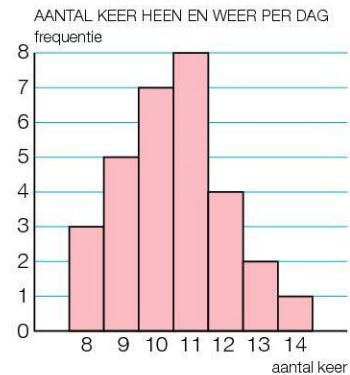
In Eelde werden achtereenvolgens de volgende minimumtemperaturen per dag in °C gemeten.

1 1 2 0 -7 -7 -3 1 1 2 4 0 0 -1 -5 -9
-10 -7 -6 -7 -3 -6 -5 0 -4 -4 -4 -1 3 2 2

- Teken een lijndiagram bij deze gegevens.
- Op hoeveel procent van de dagen vroor het?
- Brechje beweert dat het in deze periode niet warmer is geweest dan 4 °C.
Ben je het met haar eens? Licht toe.

- 2** Schipper Van der Vaart heeft werkdagen van 8:00 uur tot 17:00 uur. Een maand lang houdt hij bij hoeveel keer hij met zijn veerpont op een dag heen en weer vaart. De resultaten zijn verwerkt in het histogram in figuur 6.26.

- Bereken de modus, de mediaan en het gemiddelde.
- Bereken de relatieve frequentie van het waarnemingsgetal 10.
- Het duurt 4 minuten om van de ene naar de andere oever te varen.
Hoeveel procent van zijn werktijd is schipper Van der Vaart aan het varen?



figuur 6.26

- 3** In het dubbel steel-bladdiagram hiernaast staat voor de periode 2006-2016 informatie over het aantal zonuren in De Bilt. De aantallen zijn afgerond op tientallen.

- De zonnigste zomer was in 2010.
Hoeveel uren scheen de zon in de zomer van 2010?

Afgerond op tientallen uren waren de lentes van 2008 en 2016 even zonnig.

- Hoeveel zonuren telde de lente van 2016?
- De zomers van 2008 en 2012 waren even zonnig.
Weet je nu het aantal zonuren van de zomer van 2008? Licht toe.
- In 2011 had de lente 180 zonuren meer dan de zomer.
Hoeveel zonuren waren er in de zomer van 2011?
- Hoeveel procent van de in het diagram verwerkte zomers had minder dan 600 zonuren?

AANTAL ZONUREN IN DE BILT 2006-2016

lente		zomer
7	4	
8 7 6 6 1 0	5	1 6 8 8
9 4 2 1	6	1 4 4 7 8 9
	7	0
tientallen	honderdtallen	tientallen

figuur 6.27

- 4** In 2014 had sportvereniging ATC 388 leden. In 2015 nam het aantal leden vergeleken met 2014 met 7,2% af. In 2016 was er een toename van 5,6% ten opzichte van 2015. In 2017 nam het aantal leden weer toe, dit keer met 1,6% ten opzichte van het jaar ervoor.

Is het aantal leden van ATC toe- of afgenomen in de periode 2014-2017? Met hoeveel procent?

- 5** In figuur 6.28 zie je informatie over de wereldbevolking in 2016. Het aantal inwoners van Oceanië en Antarctica is verwaarloosbaar klein en is daarom niet in de figuur verwerkt.

- a** Van de Aziaten woont 30,8% in China.

Hoeveel inwoners telt China? Rond af op miljoenen.

- b** De hoek van de sector Europa is $36,4^\circ$.

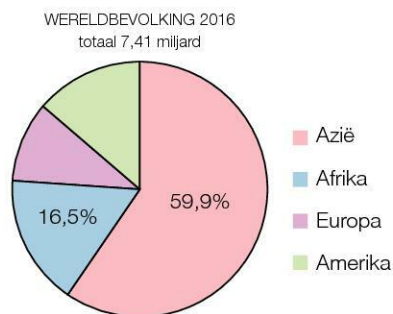
Bereken het aantal Europeanen. Rond af op miljoenen.

- c** Van de Amerikanen woont 57,9% in Noord-Amerika.

Bereken het aantal Noord-Amerikanen. Rond af op miljoenen.

- d** Geografen voorspellen dat in het jaar 2050 de bevolking van Afrika verdubbeld zal zijn ten opzichte van 2016 en dat dan één van de vier aardbewoners in Afrika woont.

Bereken met hoeveel procent de wereldbevolking in 2050 zal zijn toegenomen vergeleken met 2016.



figuur 6.28

- 6** Op het Pascal College zijn van het niet-onderwijsgevend personeel de volgende leeftijden genoteerd.

34 43 58 29 34 61 59 58 52 36 41 22 29 31
64 50 48 53 48 56 52 36 59 47 36 35 63 41

- a** Maak een steel-bladdiagram bij deze gegevens.

- b** Hoeveel procent van het niet-onderwijsgevend personeel is jonger dan 50 jaar?

- c** Bereken de gemiddelde leeftijd van het niet-onderwijsgevend personeel. Rond af op één decimaal.

- d** Maak een klassenindeling. Neem als klassen $20 < 30$, $30 < 40$, ...

- e** Bereken de gemiddelde leeftijd van het niet-onderwijsgevend personeel met behulp van de klassenindeling. Rond af op één decimaal.

Hoeveel procent wijkt het antwoord af van dat van vraag c?

- f** Teken een histogram bij de klassenindeling.

Samenvatting

6.1 Rekenen met procentuele toe- en afname

- blz 52 Een koffiezetapparaat van € 79,95 wordt 5,6% in prijs verhoogd.
De nieuwe prijs is $79,95 + 0,056 \times 79,95 \approx 84,43$ euro.
- blz 53 Op een school zitten 953 leerlingen. Een jaar later is dat aantal afgenomen met 2,3%. Op de school zitten dan $953 - 0,023 \times 953 \approx 931$ leerlingen.

Afronden

- Rond geldbedragen af op centen.
- Rond aantallen personen af op gehelen.
- Rond procenten af op één decimaal.

6.2 Procentuele verandering

- blz 56 De dierentuin in Emmen is in 2015 verhuisd en verbouwd. Voor de verhuizing kostte een ticket nog € 19,50, de huidige entreeprijs is € 27,50.
De toename is $27,50 - 19,50 = 8$ euro.

De procentuele toename is $\frac{8}{19,50} \times 100\% \approx 41,0\%$.

- blz 58 In 2015 waren er 642 middelbare scholen in Nederland. In 2016 waren dat er 635. De afname is $642 - 635 = 7$ middelbare scholen. De procentuele afname is $\frac{7}{642} \times 100\% \approx 1,1\%$.

In plaats van toename spreken we ook van absolute toename. En procentuele toename wordt ook wel relatieve toename genoemd.

6.3, 6.4 Beeld-, staaf-, lijn- en cirkeldiagram

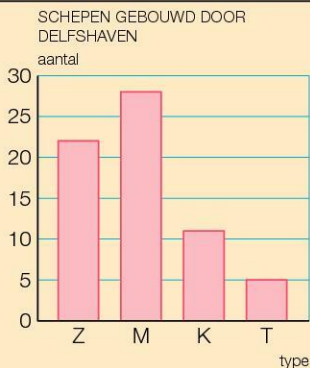
- blz 60 In de beschrijvende statistiek wordt cijfermateriaal verzameld en verwerkt in tabellen en diagrammen. In de tabel zie je de resultaten van een statistisch onderzoek.

SCHEPEN GEBOUWD DOOR SCHEEPSWERF DELFSHAVEN

type	zeiljacht (Z)	motorjacht (M)	kustvaarder (K)	tanker (T)
aantal	22	28	11	5

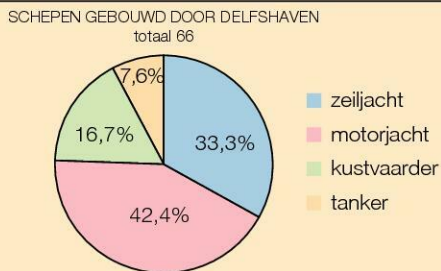
- blz 60, 62, 64 Bij deze tabel kun je allerlei diagrammen maken.

Staafdiagram



De staven staan los van elkaar.

Cirkeldiagram



Totaal $22 + 28 + 11 + 5 = 66$ schepen.

Percentage sector M is $\frac{28}{66} \times 100\% \approx 42,4\%$.

Hoek sector M is $\frac{28}{66} \times 360^\circ \approx 153^\circ$.

blz 60

blz 62

Op de horizontale as is de tijd uitgezet. In een lijndiagram zijn de gegevens als punten uitgezet en door lijnstukken verbonden.

6.5 Histogram en steel-bladdiagram

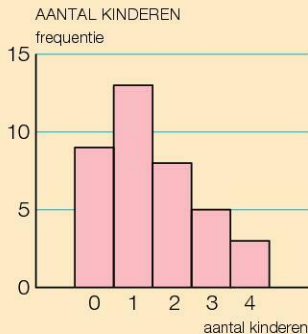
blz 67

aantal kinderen	0	1	2	3	4
frequentie	9	13	8	5	3

Bij de tabel hoort het histogram hiernaast.

In een histogram staan de staven tegen elkaar aan.

blz 70



hlz 73

LEEFTIJDEN	
2	3 4 6 6
3	1 1 2 4 9
4	0 1 5 6 6 6 7 9 9
5	0 0 3 3 4 4 6 7 8 8 9
tientallen	eenheden

6.6 Centrummaten

blz 74

De mediaan is het middelste getal in de van klein naar groot gerangschikte rij getallen of het gemiddelde van de middelste twee getallen in die rij bij een even aantal getallen.

De modus is het getal dat het vaakst voorkomt. DOELPUNTEN PSV 2016-2017

blz 78

De totale frequentie is
 $4 + 12 + 6 + 5 + 6 + 1 = 34$ wedstrijden.

De absolute frequentie van 2 is 6. Er waren dus 6 wedstrijden waarin PSV twee doelpunten scoorde.

De relatieve frequentie van 2 is

$$\frac{6}{34} \times 100\% \approx 17,6\%. \text{ Dus in } 17,6\% \text{ van}$$

de wedstrijden scoorde PSV twee doelpunten.

rij getallen: 3 5 5 **5 7** 8 9 9

gemiddelde = $\frac{3+5+5+5+7+8+9+9}{8} = \frac{51}{8} = 6,375$

modus = 5

mediaan = $\frac{5+7}{2} = 6$

aantal	0	1	2	3	4	5
frequentie	4	12	6	5	6	1

$$\begin{aligned}\text{gemiddelde} &= \frac{4 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + \dots + 1 \cdot 5}{34} = 2 \\ \text{mediaan} &= \frac{17^{\text{e}} + 18^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2 \\ \text{modus} &= 1\end{aligned}$$

Diagnostische toets

6.1 Rekenen met procentuele toe- en afname

- 1** **a** In 2015 werden er in Nederland 176 nieuwe windmolens gebouwd. In 2016 waren dat er 30,1% meer. Bereken hoeveel nieuwe windmolens er in 2016 in Nederland werden gebouwd.
- b** Een elektronicawinkel geeft deze week 18,5% korting op alle artikelen. Jetro koopt een e-reader die normaal € 125,65 kost. Wat moet hij deze week betalen?



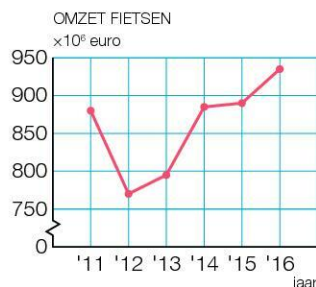
- 2** Frank fietst 's ochtends in 0,55 uur van huis naar school. 's Middags heeft hij 15% meer tijd nodig om van school naar huis te fietsen. Hoeveel minuten en hoeveel seconden is Frank 's middags onderweg?

6.2 Procentuele verandering

- 3** **a** In 2015 waren er 469 749 geiten in Nederland. In 2016 waren dat er 499 556. Bereken de relatieve toename.
- b** In 2016 telde ons land 783 906 schapen. In 2015 waren dat er nog 946 179. Met hoeveel procent is het aantal schapen afgenomen?

6.3 Beeld-, staaf- en lijndiagram

- 4** [**WERKBOEK**] Het lijndiagram hiernaast gaat over de omzet van nieuwe fietsen.
- a** In welke jaren was de omzet minder dan 800 miljoen euro?
- b** In welk jaar was de toename van de omzet ten opzichte van het voorgaande jaar het grootst? Hoeveel procent was die toename?
- c** In 2012 was de omzet minder dan in 2011. Hoeveel procent minder?
- d** In 2015 werden in totaal 983 000 fietsen verkocht. Wat kostte een fiets gemiddeld in 2015? Rond af op gehele euro's.
- e** Volgens Alfons was de omzet halverwege 2013 al 840 miljoen euro. Wat vind je hiervan?



figuur 6.29

6.4 Cirkeldiagram

- 5** De tabel geeft informatie over de favoriete sport van de leerlingen van klas H2c.

FAVORIETE SPORT KLAS H2C

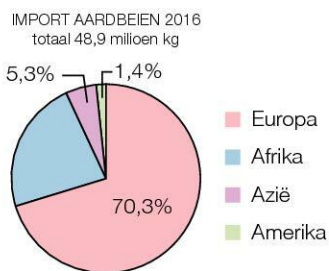
sport	voetbal	hockey	handbal	tennis	judo	overig
frequentie	4	3	4	12	3	5

Maak een cirkeldiagram bij de tabel.

- 6** Het cirkeldiagram hiernaast gaat over de aardbeienimport in Nederland in 2016. Je ziet dat de meeste aardbeien uit Europa kwamen.

10

- Bereken in gehele graden de hoek van de sector Europa.
- Hoeveel kg aardbeien kwam uit Afrika? Rond af op honderdduizendtallen.
- Van de import uit Europa kwam 12,2 miljoen kg uit Polen.
Hoeveel procent is dat van de totale import uit Europa?



figuur 6.30

6.5 Histogram en steel-bladdiagram

- 7** In de Parklaan is onderzoek gedaan naar het aantal computers per woning. De resultaten staan in de frequentietabel.

11,12

- Hoeveel woningen staan in de Parklaan?
- In hoeveel procent van de woningen zijn meer dan drie computers aanwezig?
- Teken een histogram bij de frequentietabel.

COMPUTERS PER WONING

aantal	0	1	2	3	4	5
frequentie	1	8	12	15	5	1

- 8** Het steel-bladdiagram hiernaast gaat over de grootste landen in Europa. Hierbij is Rusland niet meegerekend.

13,14

- Van hoeveel landen zijn de gegevens verzameld?
- De grootste oppervlakte hoort bij Oekraïne. Wat is de oppervlakte van Oekraïne?
- Groot-Brittannië en Roemenië zijn vrijwel even groot. Waarom kun je met het steel-bladdiagram niet de oppervlakte van deze landen te weten komen?
- Op de twaalfde plaats staat Griekenland. Hoeveel km² is de oppervlakte van Griekenland?

OPPERVLAKTE EUROPESE LANDEN
IN 100 000 KM²

0	7 8 8 8 9 9
1	0 1 3
2	1 4 4
3	0 1 2 4 6
4	5
5	0 5
6	0
eenheden	tienden

figuur 6.31

6.6 Centrummaten

- 9** De jongens van klas H2d hebben voor een proefwerk wiskunde de volgende cijfers behaald.

15

4,9 7,2 8,4 3,2 2,3 7,9 6,9 8,1 2,2 5,3 6,8 9,1 6,0
Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus. Rond zo nodig af op één decimaal.

- 10** Zie de frequentietabel van opgave 7 over het aantal computers per woning in de Parklaan.

16,17

- Bereken de relatieve frequentie van het waarnemingsgetal 1.
- Bereken het gemiddelde aantal computers per woning. Rond af op één decimaal.
- Bereken de mediaan en de modus.

Herhaling

6.1 Rekenen met procentuele toe- en afname

- 1** a In 2016 kostte een postzegel 73 cent.
In 2017 steeg deze prijs met 6,8%.
In 2017 kostte een postzegel $73 + 0,068 \times 73 \approx \dots$ cent.
- b Een blik kattenvoer van € 1,32 wordt 5,3% in prijs verhoogd.
Bereken de nieuwe prijs.
- c Het gaat weer goed met de tijger. Waren er in 2010 nog maar 3204 wilde tijgers, in 2016 was dat aantal gestegen met 21,6%.
Hoeveel wilde tijgers waren er in 2016?

Rond bedragen af op centen, rond aantallen af op gehelen.



- 2** a Een tent kost € 239,95.
Tijdens een actieweek gaat er 23,5% van de prijs af.
De nieuwe prijs is $239,95 - 0,235 \times 239,95 \approx \dots$ euro.
- b Een rugzak die normaal € 68,75 kost, wordt 18,2% in prijs verlaagd.
Bereken de nieuwe prijs.
- c Bij voetbalvereniging SKV blijft het aantal jeugdspelers maar toenemen. Had SKV in het seizoen 2016-2017 nog 358 jeugdspelers, het seizoen erop was dat aantal toegenomen met 5,9%.
Hoeveel jeugdspelers had voetbalvereniging SKV in het seizoen 2017-2018?

- 3** Koerier Peter brengt een pakket van Utrecht naar Enschede. Hij doet er 1,85 uur over.
Op de terugweg, van Enschede naar Utrecht, komt Peter in een file terecht. Daardoor duurt de terugweg 20% langer dan de heenweg.
Hoeveel uur en hoeveel minuten doet Peter over de terugweg?

1 uur is 60 minuten, dus
 $0,85 \text{ uur is } 0,85 \times 60 = \dots \text{ minuten.}$

6.2 Procentuele verandering

- 4** In 2011 waren er 378 strandpaviljoens in Nederland. In 2016 waren dat er 411.
De toename is $411 - 378 = 33$.

De procentuele toename is $\frac{33}{378} \times 100\% \approx 8,7\%$.

- a In 2007 waren er 438 ijssalons in Nederland.
In 2017 waren dat er 828.
Bereken de relatieve toename.
- b In 2016 kostte een entreebewijs voor de Efteling € 36.
In 2017 was dat € 37,50.
Bereken hoeveel procent de prijsstijging is.

$$\text{procentuele toename} = \frac{\text{toename}}{\text{OUD}} \times 100\%$$



Relatieve toename
is hetzelfde als
procentuele toename.

- 5** In 2015 waren er 7787 paarden in Zuid-Holland. In 2016 waren dat er 4509. De afname is $7787 - 4509 = 3278$.

$$\text{procentuele afname} = \frac{\text{afname}}{\text{OUD}} \times 100\%$$

De afname in procenten is $\frac{3278}{7787} \times 100\% \approx 42,1\%$.

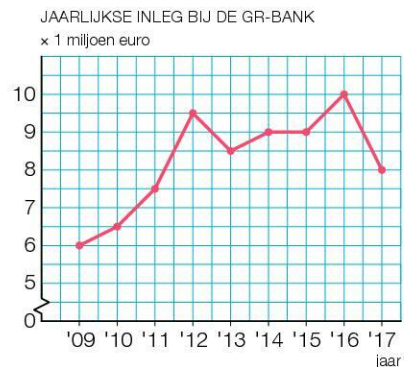
- a** In 2015 waren er 599 paardenbedrijven in Zuid-Holland. In 2016 waren dat er 381. Bereken de procentuele afname.
- b** Een boek van € 22,50 kost in de uitverkoop € 15,95. Bereken hoeveel procent korting je op het boek krijgt.

- 6** Astrid huurt een kamer. In 2015 was de huur 425 euro per maand. In 2016 ging de huur met 2,4% omhoog en in 2017 ging de huur met 3,3% omhoog, telkens ten opzichte van het voorgaande jaar.
- a** Hoeveel huur moest Astrid in 2016 per maand betalen?
 - b** Hoeveel huur moest Astrid in 2017 per maand betalen?
 - c** Hoeveel procent is de huur van de kamer van Astrid in 2017 hoger dan in 2015?

6.3 Beeld-, staaf- en lijndiagram

- 7** Zie figuur 6.32.

- a** In welk jaar werd het meeste geld ingelegd?
- b** Hoeveel euro was de inleg in 2013?
- c** In welk jaar was de inleg vergeleken met het voorgaande jaar het meest toegenomen? Hoeveel procent is die toename?
- d** Volgens Leon was de inleg in 2016 drie keer zo groot als in 2009. Welke fout maakt Leon?
- e** In 2018 verwacht de GR-Bank dat de inleg 8% lager is dan in 2017. Hoeveel inleg verwacht de GR-Bank in 2018?



figuur 6.32

- 8** In de tabel is af te lezen hoeveel huizen aannemer Kuijer de laatste jaren gebouwd heeft.

WOONHUIZEN OPGELEVERD DOOR KUIJER

jaar	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
aantal	120	160	140	200	200	240	180

- a** Wat is in de periode 2011-2017 het kleinste aantal door Kuijer per jaar gebouwde huizen?
- b** Als je bij deze gegevens een lijndiagram tekent met 1 cm voor 20 huizen, dan krijg je een lijndiagram dat 12 cm hoog is. Hoe kun je het lijndiagram 4 cm minder hoog krijgen en toch 1 cm voor 20 huizen nemen? Maak dit lijndiagram.

6.4 Cirkeldiagram

- 9** In de tabel zie je hoe de havo-leerlingen van het Oosthoek College over de leerjaren verdeeld zijn.

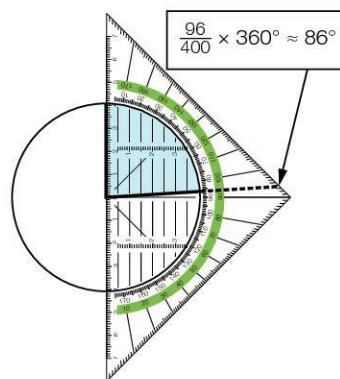
VERDELING LEERLINGEN HAVO

leerjaar	1	2	3	4	5
aantal	96	80	92	68	64

Om bij deze gegevens een cirkeldiagram te tekenen, bereken je eerst van elke sector de hoek. Dat gaat als volgt. Het totaal is $96 + 80 + 92 + 68 + 64 = 400$, dus

bij leerjaar 1 hoort een hoek van $\frac{96}{400} \times 360^\circ \approx 86^\circ$.

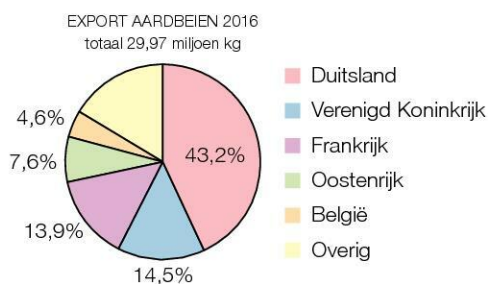
- Teken een cirkel met straal 4 cm, teken hierin de sector die bij leerjaar 1 hoort en kleur deze blauw.
- Bereken de hoeken van de overige sectoren.
- Maak het cirkeldiagram af. Geef elke sector zijn eigen kleur en maak een legenda. Denk aan het opschrift.



figuur 6.33

- 10** Zie het cirkeldiagram in figuur 6.34. In 2016 exporteerde Nederland 29,97 miljoen kg aardbeien naar andere landen in Europa. Daarvan werd 14,5% naar het Verenigd Koninkrijk geëxporteerd. Naar het Verenigd Koninkrijk werd dus $0,145 \times 29,97 \approx 4,35$ miljoen kg aardbeien geëxporteerd.

- Bereken hoeveel kg aardbeien naar Frankrijk werd geëxporteerd. Rond af op tienduizendtallen.
- Welk percentage hoort bij de sector Overig in figuur 6.34?
- Bereken hoeveel graden de hoek van de grootste sector is. Rond af op gehelen.
- In 2016 werd in totaal 31,7 miljoen kg aardbeien uit Nederland geëxporteerd. Hoeveel procent daarvan ging naar een land in Europa?



figuur 6.34



6.5 Histogram en steel-bladdiagram

- 11** Aan alle tweedeklassers van het Twickel College is gevraagd hoe ver ze van school wonen. Zie de onderstaande frequentietabel. Je ziet dat 26 leerlingen 4 km van school wonen.

AFSTAND HUIS-SCHOOL

afstand in km	2	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	16	11	26	12	9	12	9	18

Je kunt bij deze tabel een histogram maken. Een histogram is een staafdiagram waarbij de staven tegen elkaar aan staan.

Je gaat als volgt te werk.

- Zet op de horizontale as acht stukken van 1 cm af. Begin 1 cm rechts van de verticale as. Zet de getallen 2, 3, ..., 9 midden onder de stukjes.
- Zet op de verticale as de getallen 5, 10, 15, 20, 25 en 30. Neem 1 cm voor 5 leerlingen. Maak het histogram af.

- 12** Iris is een uitstekende handbalster. Elke wedstrijd is zij goed voor een aantal doelpunten.

Het aantal treffers van haar per wedstrijd in de competitie 2016-2017 was 6 4 8 9 4 6 8 9 8 1 5 8 6 9 9 4 8 9 5 8.

- In hoeveel wedstrijden heeft Iris vijf keer gescoord? Wat is dus de frequentie van 5?
- Maak de frequentietabel hieronder af.

aantal doelpunten	1	2	3	4	5	6	7	8	9
frequentie									

- Hoeveel competitiewedstrijden heeft Iris gespeeld?
- In hoeveel procent van de competitiewedstrijden scoorde Iris minstens zes keer?
- Maak een histogram bij de tabel. Denk aan het opschrift.

- 13** Het steel-bladdiagram gaat over de scores die behaald zijn bij een test.

- Hoe vaak komt de score 48 voor?
- Hoeveel personen hebben aan de test meegedaan?
- Wat is de hoogste score? En wat de laagste?
- Hoeveel scores waren lager dan 30? En hoeveel hoger dan 20?
- Welke score kwam het meest voor?

SCORES TEST

0	8 8 9
1	0 3 3 3 5 8
2	0 0 0 8 8 8 9
3	1 1 2 2 3 5 7 7 9
4	8 8 9 9
5	0 2 6 6 6
tientallen	eenheden

figuur 6.35

- 14** De leerlingen in een klas zijn nagegaan hoeveel seconden ieder van hen de adem kan inhouden. Maak bij de resultaten een steel-bladdiagram.

42 41 38 25 58 61 58 26 42 27 41 29 38 44
51 60 50 47 45 28 31 19 20 31 53 25 21 33

6.6 Centrummaten

15 Gegeven is de rij getallen 4 5 7 5 5 3 8 7 6 9 10.

- Bereken het gemiddelde. Rond af op één decimaal.
- Zet de getallen in volgorde van klein naar groot.
De mediaan is het middelste getal.
Welk getal is dus de mediaan?
- De modus is het getal dat het vaakst voorkomt.
Welk getal is dus de modus?

16 Bij een enquête onder 30 gezinnen is gevraagd naar het aantal fietsen in het gezin. Daarbij is de frequentietabel hiernaast gemaakt.

FIETSEN IN EEN GEZIN

aantal	0	1	2	3	4	5
frequentie	2	4	5	12	4	3

- Door de frequenties op te tellen, krijg je de totale frequentie.
Bereken de totale frequentie.
- De relatieve frequentie is de frequentie in procenten.
Bereken de relatieve frequentie van 3.
- De modus is het waarnemingsgetal met de grootste frequentie.
Welk aantal is de modus?
- De mediaan krijg je door de getallen in volgorde van grootte te zetten.
De rij begint met 0 0 1 1 1 1. Dat zijn er al zes van de dertig. Bij een even aantal getallen is de mediaan het gemiddelde van de middelste twee getallen in de rij.
Maak de rij af totdat je de middelste twee getallen weet. Welk getal is de mediaan?
- Om het gemiddelde te berekenen, moet je het totale aantal fietsen weten. Dat aantal is

$$2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + \dots + \dots + \dots + 3 \cdot 5 = \dots$$
 Daarna deel je door de totale frequentie, dus door 30.
Bereken het gemiddelde aantal fietsen per gezin.

17 Op een politiebureau houdt men nauwkeurig het aantal gemelde inbraken per dag bij. Voor de maand maart levert dit de volgende tabel op.

GEMELDE INBRAKEN IN MAART

aantal inbraken	0	1	2	3	4	5	6	7	8
frequentie	5	8	5	4	4	2	1	1	1

- Bereken de relatieve frequentie van 5.
- Hoeveel inbraken zijn er in maart gemeld?
- Bereken in één decimaal nauwkeurig het gemiddelde aantal gemelde inbraken per dag. Bereken ook de mediaan en de modus.



Onderzoek Een kwantitatief onderzoek uitvoeren

'Mag ik u enkele vragen stellen?' Wie kent niet de enquêteur op straat met in zijn handen een vragenlijst? Enquêtes en interviews worden afgenomen om informatie over de meest uiteenlopende zaken te verkrijgen. Een dagblad wil bijvoorbeeld weten of de lezer tevreden is met de bezorging van de krant en een wasmiddelenfabrikant onderzoekt zo de naamsbekendheid van een wasmiddel. Veel gegevens die bij een onderzoek verzameld worden, zijn uit te drukken in een getal. We spreken dan van **kwantitatieve gegevens** (kwantiteit = hoeveelheid). Bijvoorbeeld het gemiddelde aantal uren per dag dat Thijs tv kijkt of het aantal sportverenigingen waarvan Mathilde lid is.

In dit onderzoek ga je met enkele klasgenoten een kwantitatief onderzoek uitvoeren. Onderdeel van het onderzoek is het opstellen en afnemen van een enquête. Het gaat er om dat je gegevens verzamelt die je vervolgens op een overzichtelijke wijze presenteert. Ga te werk volgens het onderstaande stappenschema. Neem voor elke stap de nodige tijd, want een goede voorbereiding is de basis van elk geslaagd onderzoek.

Het opzetten van een onderzoek

Stap 1 Formuleer een onderzoeksvraag

Overleg in je groepje over welk onderwerp je een onderzoeksvraag gaat opstellen. Heb je een onderwerp, maak dan een lijstje met geschikte onderzoeksvragen, bespreek ze in je groepje en kies er één.

Voorbeeld

Onderwerp Tijdsbesteding van scholieren.

Onderzoeksvraag Wat valt er te zeggen over de tijdsbesteding van de leerlingen van de school?

Een onderzoeksvraag kun je niet met een kort antwoord afdoen. Je hebt te maken met een complex geheel. Om tot de kern van de zaak door te dringen, stel je enkele deelvragen.

Stap 2 Formuleer deelvragen

Stel in je groepje een lijst met deelvragen op. Vraag je af welke gegevens allemaal nodig zijn om de onderzoeksvraag te kunnen beantwoorden.

Voorbeeld

Deelvraag 1 Besteden de leerlingen met bijbaantjes minder tijd aan het huiswerk?

Deelvraag 2 Kijken de leerlingen die veel sporten minder naar de tv dan gemiddeld?

Deelvraag 3 Wie kijken gemiddeld meer naar de tv, de jongens of de meisjes?

Bij het opstellen van de vragen zorg je er voor dat verschillende kanten van de onderzoeksvraag belicht worden.

1 Bedenk nog enkele deelvragen bij de onderzoeksvraag hierboven.

Stap 3 Het enquêteformulier opstellen

Om de deelvragen te beantwoorden, stel je een aantal duidelijk geformuleerde enquêtevragen op.

Voorbeeld

Om deelvraag 1 te beantwoorden, zul je moeten weten hoeveel uur een leerling aan het huiswerk besteedt en druk is met zijn bijbaantje. Je zou dus de volgende enquêtevragen kunnen opstellen.

Enquêtevraag 1

Hoeveel uur per week besteed je aan je huiswerk?

Enquêtevraag 2

Hoeveel uur per week besteed je aan je bijbaantje?

2

Bedenk enkele enquêtevragen om de deelvragen 2 en 3 te kunnen beantwoorden. Doe het zo, dat deze deelvragen kort en bondig te beantwoorden zijn.

Zorg bij enquêtevragen voor eenduidigheid door bijvoorbeeld een aantal keuzeantwoorden aan te bieden. Formuleer de vragen zo, dat de antwoorden verwerkt kunnen worden in een databestand.

Begin op het enquêteformulier met een korte uitleg over de bedoeling van het onderzoek. Laat de voorlopige versie van de vragenlijst door anderen lezen. Je kunt dan nagaan of de vragen goed geformuleerd zijn.

Stap 4 De enquête afnemen

De enquêteformulieren worden verspreid onder de personen op wie het onderzoek betrekking heeft. We spreken in de statistiek van **doelgroep**. Om de onderzoeksvraag goed te kunnen beantwoorden, moet het aantal ingevulde enquêteformulieren niet te klein zijn.

Voorbeeld

Doelgroep

Wil je in het antwoord op de onderzoeksvraag de leeftijd van de leerlingen betrekken, dan moet je het enquêteformulier door leerlingen van verschillende leerjaren laten invullen.

Aanwijzingen bij het afnemen van een enquête

- Wees altijd beleefd.
- Vertel wie je bent en leg uit wat je aan het doen bent.
- Ondervraag minimaal 25 willekeurige personen van de doelgroep.



Stap 5 De gegevens invoeren op de computer

Voer de gegevens in op de computer. Het programma Excel is hiervoor goed te gebruiken.

Stap 6 Presentatie van de resultaten

Voor het presenteren van de onderzoeksresultaten heb je de volgende mogelijkheden.

Een verslag

Bij een verslag hoort in elk geval

- een voorkant met de titel en de namen van de makers
- een inhoudsopgave
- een voorwoord
- een inleiding met de onderzoeksvraag en de deelvragen
- de grafische verwerking van de resultaten van de enquête
- de conclusies en aanbevelingen
- de gebruikte bronnen zoals boeken en internetsites
- de bijlagen zoals het enquêteformulier.

In een voorwoord schrijf je

- hoe je het onderzoek ervaren hebt
- hoe het is gegaan
- hoe de taakverdeling was
- wat je ervan hebt opgestoken
- een bedankje aan mensen die bij het onderzoek hebben geholpen.

Een poster

Een poster moet aan de volgende eisen voldoen.

- Op een poster staat de titel met grote letters.
- Gebruik duidelijke letters, zodat de poster op een afstand leesbaar is.
- Gebruik illustraties zoals grafieken, diagrammen, foto's en tekeningen.
- Zorg voor een mooie lay-out. Kom tot korte duidelijke conclusies.
- Vermeld de namen van de makers.

Een PowerPoint presentatie

Een PowerPoint presentatie bevat in elk geval

- een duidelijke titel en de namen van de makers
- een inleiding waarin wordt verteld waarover het onderzoek gaat
- de onderzoeksvraag en de deelvragen
- grafieken, tabellen en afbeeldingen
- conclusies en aanbevelingen.

Andere vormen van presenteren

Er zijn nog meer manieren om je resultaten te presenteren. Je kunt denken aan een spreekbeurt, een filmverslag, een toneelspel, een kunstwerk en misschien heb je zelf nog een beter idee.

Onderwerpen die je voor een onderzoek zou kunnen kiezen zijn televisieprogramma's en kijkgedrag, criminaliteit en veiligheid in je woonplaats, vakanties en het uitgavenpatroon van jongeren.



Kwadratische vergelijkingen

Parachutespringen is een sport voor waaghalzen. Om te ervaren hoe het is om met duizelingwekkende snelheid naar beneden te vallen, kun je op diverse plaatsen in Nederland een tandemsprong maken. Bij een tandemsprong word je aan een instructeur gekoppeld, die samen met jou uit een vliegtuig springt. Het eerste gedeelte van de sprong, tot een hoogte van 800 meter, maak je een vrije val. Door het oplossen van een kwadratische vergelijking kun je berekenen hoeveel seconden de vrije val duurt.

Wat leer je?

- Het oplossen van vergelijkingen zoals $3x^2 + 11 = 59$.
- Wat priemgetallen zijn.
- Wat ontbinden in factoren is.
- Twee manieren om te ontbinden in factoren.
- Kwadratische vergelijkingen oplossen met ontbinden in factoren.
- Hoe je de coördinaten van de snijpunten van een parabool en een lijn berekent.
- + - Kwadratische vergelijkingen oplossen waarin haakjes voorkomen.





Voorkennis Haakjes wegwerken en vergelijkingen

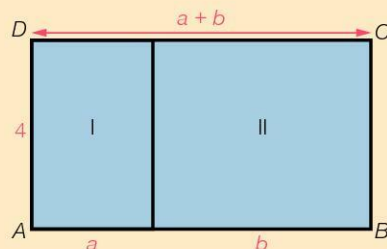
Theorie A De regel $a(b + c) = ab + ac$

De oppervlakte van de rechthoek $ABCD$ in figuur 7.1 is lengte $\times$ breedte $= 4(a + b)$.

De oppervlakte van rechthoek I is $4a$.

De oppervlakte van rechthoek II is $4b$.

Hieruit volgt $\overbrace{4(a + b)}^{\text{opp hele rechthoek}} = \underbrace{4a}_{\text{opp I}} + \underbrace{4b}_{\text{opp II}}$



figuur 7.1

Je hebt hier een voorbeeld van de regel

$$a(b + c) = ab + ac$$

Zo is $2(3x - 5) = 6x - 10$, $-6(5 - 7x) = -30 + 42x$
en $x(2x - 3) = 2x^2 - 3x$.

1 Werk de haakjes weg.

a $7(a + 8)$

d $8(3 - x)$

g $-3(5x + 7)$

b $-3(a - b)$

e $x(x - 3y)$

h $5a(2a - 3)$

c $x(2x + 5)$

f $-(5x + 6)$

i $3x(5x - 6)$

2 Vul in.

a $4(\dots + 3) = 8x + 12$

d $\dots(x - 3) = 6x^2 - 18x$

b $x(\dots + \dots) = x^2 + 5x$

e $5x(\dots + \dots) = 5x^2 + 20x$

c $\dots(x - 7) = x^2 - 7x$

f $\dots(2x - \dots) = 8x^2 - 20x$

Theorie B De regel $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

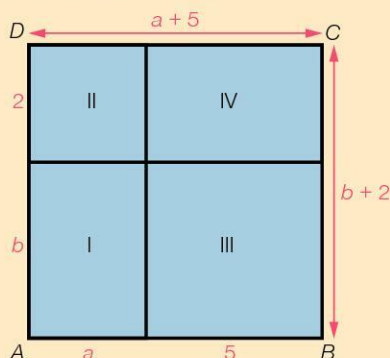
De oppervlakte van de rechthoek $ABCD$ in figuur 7.2 is lengte $\times$ breedte $= (a + 5)(b + 2)$.

Verder is opp I $= ab$, opp II $= 2a$, opp III $= 5b$ en opp IV $= 10$.

Hieruit volgt $(a + 5)(b + 2) = ab + 2a + 5b + 10$.

Je hebt hier een voorbeeld van de regel

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$



figuur 7.2

Voorbeeld

Herleid.

a $(x+2)(x-7)$

b $(x-1)(x-5)$

Uitwerking

a $(x+2)(x-7) = x^2 - 7x + 2x - 14 = x^2 - 5x - 14$

b $(x-1)(x-5) = x^2 - 5x - x + 5 = x^2 - 6x + 5$

3 Herleid.

a $(x+4)(x+3)$

d $(x-5)(x-7)$

g $x(3x-8)$

b $(x+2)(x-6)$

e $(x+4)(x+4)$

h $2x(x+7)$

c $(x-3)(x+4)$

f $(x-3)(x+5)$

i $(x+7)(x-6)$

4 Vul in.

a $(x+2)(x-\dots) = x^2 - 4x - 12$

b $(x-2)(x-\dots) = x^2 - 6x + 8$

c $(x-\dots)(x+4) = x^2 + 3x - 4$

d $(x+\dots)(x+3) = x^2 + 5x + 6$

Theorie C Vergelijkingen

Een voorbeeld van een *vergelijking* is $3x + 7 = 22$.

Hierin is x de *variabele*. De x waarvoor het klopt, heet de *oplossing* van de vergelijking.

Bij het oplossen van de vergelijking $3x + 7 = 22$ maak je de vergelijking stap voor stap eenvoudiger.

$3x + 7 = 22$ zorg ervoor dat de term met de variabele

$-7 \quad -7$ links staat en de rest rechts

$3x = 15$ deel door het getal dat voor x staat

$:3 \quad :3$

$x = 5$

$$\begin{array}{rcl} 7x + 14 & = & 0 \\ -14 & -14 & \\ \hline 7x & = & -14 \\ :7 & :7 & \\ \hline x & = & -2 \end{array}$$

5 Los op.

a $3x + 7 = 19$

c $-2x + 8 = 0$

e $5x = 0$

b $5x - 3 = 7$

d $x - 3 = 0$

f $3 - x = 0$

6 Los op.

a $\frac{1}{4}a = 8$

c $\frac{1}{4}a = 0$

e $\frac{1}{3}a - 9 = 0$

b $a - 7 = 0$

d $2a + 80 = 0$

f $3a + 9 = 0$

7.1 De vergelijking $x^2 = c$

- 0 1**
- a Van welke twee getallen is het kwadraat 49? Welke getallen zijn dus de oplossingen van de vergelijking $x^2 = 49$?
 - b Schrijf de twee oplossingen op van de vergelijking $x^2 = 25$.
 - c Schrijf de oplossing op van de vergelijking $x^2 = 0$.
 - d Waarom heeft de vergelijking $x^2 = -25$ geen oplossing?

Theorie A Vergelijkingen van de vorm $x^2 = c$

De vergelijking $x^2 = 16$ heeft twee oplossingen. Je kunt de oplossingen direct opschrijven, namelijk $x = 4$ en $x = -4$.

Ook $x^2 = 10$ heeft twee oplossingen, namelijk $x = \sqrt{10}$ en $x = -\sqrt{10}$, ofwel $x \approx 3,16$ en $x \approx -3,16$.

De vergelijking $x^2 = -25$ heeft geen oplossing, want een kwadraat is niet negatief. Er is dus geen enkel getal x waarvoor $x^2 = -25$.

De vergelijking $x^2 = 0$ heeft één oplossing, namelijk $x = 0$.

$x = -4$ is een oplossing van de vergelijking $x^2 = 16$, want $(-4)^2 = 16$. Denk aan de haakjes.

De vergelijking $x^2 = c$

$c > 0$ twee oplossingen	$c = 0$ één oplossing	$c < 0$ geen oplossing
$x^2 = 16$ geeft $x = 4$ of $x = -4$	$x^2 = 0$ geeft $x = 0$	$x^2 = -16$ heeft geen oplossing
$x^2 = 3$ geeft $x = \sqrt{3}$ of $x = -\sqrt{3}$ $x \approx 1,73$ of $x \approx -1,73$		$x^2 = -3$ heeft geen oplossing

De vergelijking $x^2 + 5 = 9$ los je op door te herleiden tot de vorm $x^2 = c$.

Je krijgt $x^2 + 5 = 9$

$$\begin{array}{rcl}
 & -5 & -5 \\
 x^2 & + 5 & = 9 \\
 x^2 & & = 4 \\
 x & = 2 \text{ of } x = -2
 \end{array}$$

Hiernaast zie je dat je goed moet opletten bij het herleiden van een vergelijking. Bij de eerste vergelijking **deel** je beide kanten **door 3**, bij de tweede **trek** je er aan beide kanten **3 van af**.

Let op.

$3x^2 = 12$	$x^2 + 3 = 12$
$\div 3 \quad \div 3$	$-3 \quad -3$
$x^2 = 4$	$x^2 = 9$
$x = 2 \text{ of } x = -2$	$x = 3 \text{ of } x = -3$

Voorbeeld

Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $x^2 + 16 = 0$

b $2x^2 = 30$

c $x^2 + 5 = 41$

Uitwerking

a $x^2 + 16 = 0$

$-16 \quad -16$

$x^2 = -16$

geen oplossing

b $2x^2 = 30$

$:2 \quad :2$

$x^2 = 15$

$x = \sqrt{15}$ of $x = -\sqrt{15}$

$x \approx 3,87$ of $x \approx -3,87$

c $x^2 + 5 = 41$

$-5 \quad -5$

$x^2 = 36$

$x = 6$ of $x = -6$

2 Los op.

a $x^2 = 25$

b $x^2 = -25$

c $x^2 = 121$

d $x^2 = 0$

e $x^2 = 36$

f $x^2 = 1$

g $x^2 = 169$

h $x^2 = -9$

i $x^2 = 0,25$

3 Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.



a $x^2 - 11 = 0$

b $2x^2 = 50$

c $\frac{1}{5}x^2 = 20$

d $x^2 + 11 = 20$

e $3x^2 = -48$

f $0,02x^2 = 8$

g $x^2 + 5 = 20$

h $-3x^2 = 0$

i $x^2 + \frac{1}{4} = 0$

4 Er bestaat een manier om de hoogte van een



toren te weten te komen. Je laat een steen van de toren vallen en meet na hoeveel seconden t de steen op de grond valt. De hoogte h van de toren in meter vind je vervolgens met de formule $h = 5t^2$.

Evelien laat een steen van een hoge toren vallen. Na 3,2 seconde valt de steen op de grond.

a Bereken de hoogte van de toren.

De Domtoren in Utrecht is 112 meter hoog. Om te weten te komen hoeveel seconden een steen er over doet om op de grond te vallen, los je de vergelijking $5t^2 = 112$ op.

b Los deze vergelijking op. Rond af op één decimaal.

c Na hoeveel seconden valt de steen op de grond?



A 5

De remweg van de ICE International, de hogesnelheidstrein die dagelijks van Amsterdam naar Basel rijdt, is te berekenen met de formule $r = 0,042v^2$. Hierin is r de remweg in meter en v de snelheid in km per uur.

- a** Bereken de remweg bij een snelheid van 320 km per uur.

De machinist krijgt voortdurend informatie over de remweg. Op een gegeven moment verschijnt de mededeling dat de remweg 2625 meter is.

- b** Welke vergelijking hoort hierbij?
c Bereken de snelheid van de trein.
d Bereken de snelheid van de ICE in het geval de remweg 3 km is. Rond af op één decimaal.



Theorie B Vergelijkingen zoals $5x^2 - 4 = 16$

In het voorbeeld zie je hoe je de vergelijking $5x^2 - 4 = 16$ oplost. Je begint met aan beide kanten 4 op te tellen.

Voorbeeld

Los op.

a $5x^2 - 4 = 16$

b $-4x^2 + 3 = 11$

c $3x^2 - 8 = 40$

Uitwerking

a $5x^2 - 4 = 16$

$$\quad +4 \quad +4$$

$$5x^2 = 20$$

$$:5 \quad :5$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ of } x = -2$$

b $-4x^2 + 3 = 11$

$$\quad -3 \quad -3$$

$$-4x^2 = 8$$

$$:-4 \quad :-4$$

$$x^2 = -2$$

geen oplossing

c $3x^2 - 8 = 40$

$$\quad +8 \quad +8$$

$$3x^2 = 48$$

$$:3 \quad :3$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \text{ of } x = -4$$

6

Los op.

a $5x^2 - 1 = 4$

c $2x^2 + 33 = 1$

e $3x^2 - 31 = -4$

b $2x^2 = 200$

d $x^2 - 3 = 22$

f $4x^2 = 324$

A 7

Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $7x^2 - 10 = -10$

d $6x^2 = 0$

g $4x^2 - 9 = 35$

b $2x^2 + 2 = 8$

e $-4x^2 + 100 = 0$

h $-2x^2 + 8 = 0$

c $3x^2 + 1 = 76$

f $x^2 - 8 = 4$

i $5x^2 + 0,2 = 0$

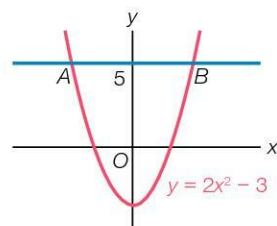
A 8 Kristel maakt bij het Paracentrum Texel een parachutesprong. Op een hoogte van 1000 meter springt zij uit een vliegtuig en maakt ze eventjes een vrije val. Hierbij hoort de formule $h = -4t^2 + 1000$, met h de hoogte in meter na t seconden. Op een hoogte van 800 meter opent zij de parachute.



- Welke vergelijking hoort hierbij?
- Hoeveel seconden duurde de vrije val? Rond af op gehelen.
- Bereken de gemiddelde snelheid in kilometer per uur tijdens de vrije val. Rond af op gehelen.

9 Om de coördinaten van de snijpunten A en B van de grafiek van $y = 2x^2 - 3$ en de horizontale lijn op hoogte 5 te berekenen, los je de vergelijking $2x^2 - 3 = 5$ op. Zie figuur 7.3.

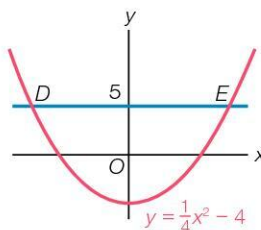
Los deze vergelijking op en schrijf de coördinaten van A en B op.



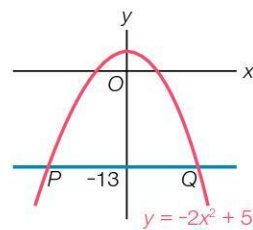
figuur 7.3

A 10 In figuur 7.4a is DE de horizontale lijn op hoogte 5 en in figuur 7.4b is PQ de horizontale lijn op hoogte -13.

- Bereken de coördinaten van de punten D en E .
- Bereken de coördinaten van de punten P en Q .



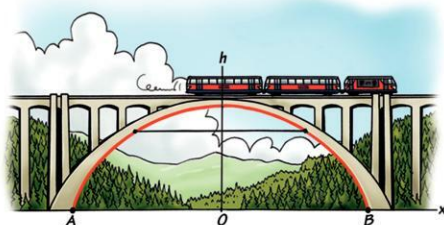
a



b

figuur 7.4

A 11 In de figuur hiernaast zie je een schets van het Langwiesviaduct in Zwitserland. Bij de rode boog hoort de formule $h = -0,0045x^2 + 100$. Hierin zijn x en h in meter. De x -as ligt in het dal. Op een hoogte van 80 meter is een kabel gespannen.



figuur 7.5

- Welke vergelijking kun je bij dit gegeven opstellen?
- Los de vergelijking op.
- Hoe lang is de kabel? Geef het antwoord in meter en rond af op gehelen.

De boog is bij de punten A en B in de grond verankerd.

- Bereken in meter de afstand AB door een vergelijking op te lossen. Rond af op gehelen.

7.2 Buiten haakjes brengen

O 12 Kunnen 48 pennen eerlijk verdeeld worden over

a 2 leerlingen

c 5 leerlingen

e 16 leerlingen

b 3 leerlingen

d 8 leerlingen

f 18 leerlingen

Theorie A Delers en veelvouden

De getallen 0, 1, 2, 3, 4, ... zijn de **natuurlijke getallen**.

Er is geen grootste natuurlijk getal. Ook 512 is een natuurlijk getal, evenals 983007.

Het getal 6 is een deler van 48, want de deling $48 : 6$ komt mooi uit, dat wil zeggen dat de uitkomst een natuurlijk getal is.

We zeggen

- 48 is **deelbaar** door 6
- 6 is een **deler** van 48.

$$10 : 1 = 10$$

$$10 : 2 = 5$$

$$10 : 5 = 2$$

$$10 : 10 = 1$$

De delers van 10 zijn 1, 2, 5 en 10.

De delers van 48 zijn 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16 en 48.

Omdat $48 = 8 \cdot 6$, heet 48 een **veelvoud** van 6.

De veelvouden van 6 zijn 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ...

De veelvouden van 15 zijn 15, 30, 45, 60, 75, 90, ...

13 Schrijf alle delers op van

a 12

b 20

c 23

d 48

14 Schrijf alle veelvouden op

a van 5 die tussen 40 en 60 liggen

b van 3 die tussen 45 en 65 liggen

c van 6 die tussen 80 en 100 liggen.

Tussen 40 en 60, dus 40 en 60 doen niet mee.



15 Welke beweringen zijn waar?

a 217 is een veelvoud van 7.

b 8 is een deler van 44.

c 9 is een deler van 189.

d 41 heeft twee delers.

e 5 heeft precies tien veelvouden.

f 1 is een deler van elk natuurlijk getal.

g Elk veelvoud van 6 is ook veelvoud van 3.

h Elk veelvoud van 3 is ook veelvoud van 6.

O 16 Schrijf alle getallen tussen 10 en 20 op die precies twee delers hebben.

Theorie B Priemgetallen

Het getal 13 heeft twee delers, namelijk 1 en 13. Het getal 13 is een voorbeeld van een **priemgetal**. Andere priemgetallen zijn 2, 5, 23 en 67.

Een natuurlijk getal met precies twee delers is een priemgetal.

Elk natuurlijk getal dat geen priemgetal is, is te schrijven als product van priemgetallen.

Hiernaast zie je dat $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. We zeggen ook wel dat 60 als product van **priemfactoren** is geschreven.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 60} \\ 2 \overline{) 30} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

Dus $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

17 Onderzoek welke van de volgende getallen priemgetallen zijn.



32 59 97 143 159 1001

- 18**
- a Waarom is 18 geen priemgetal?
 - b Schrijf het enige even priemgetal op.
 - c Schrijf alle priemgetallen op die kleiner zijn dan 30.
 - d Schrijf het eerste priemgetal op dat groter is dan 50.
 - e Hoeveel priemgetallen liggen tussen 190 en 200?
 - f Schrijf 80 als product van priemfactoren.

19 Lucas zegt: 'Elk natuurlijk getal dat deelbaar is door 1 en door zichzelf is een priemgetal.'

Ben je het met Lucas eens? Licht toe.

A 20 Schrijf de getallen 12, 18, 72, 90, 150 en 405 als product van priemfactoren.

ARTIKEL

BEROEP

GESCHIEDENIS

INFORMATIE



Periodieke cicaden

Van de vele soorten insecten behoren er ongeveer 40 000 tot de cicaden. Zeven van deze 40 000 soorten zijn heel bijzonder. Het zijn de periodieke cicaden die in Noord-Amerika voorkomen. Ze leven daar onder de grond waar ze zich voeden met sappen uit boomwortels. Periodieke cicaden worden zo genoemd omdat ze na een periode van 13 of 17 jaar allemaal tegelijk uit de grond tevoorschijn komen om zich voort te planten. De vrouwtjes verstoppert de bevruchte eitjes in bomen. Kort na de voortplanting sterft de soort massaal. De larven die uit de uitgekomen eitjes op de grond vallen, graven zich direct in de bodem in om daar weer gedurende een periode van 13 of 17 jaar te wachten tot het volgende voortplantingsritueel. Van de zeven soorten periodieke cicaden komen er vier eens per 13 jaar boven de grond en drie eens per 17 jaar. Er bestaan verschillende theorieën waarom de periode met priemgetallen te maken heeft.



- 0 21** Door te schrijven $24a^2b = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b$ heb je $24a^2b$ in zoveel mogelijk factoren ontbonden.

Ontbind in zoveel mogelijk factoren.

- a** $12pq$ **c** $11xy^2$
b $20pq^2$ **d** $25x^2y$

- 0 22** Je weet $5(3x - 2) = 15x - 10$ en $x(x + 3) = x^2 + 3x$.

Herleid.

- a** $x(x - 5)$ **c** $a(3a - 2b)$
b $3(x + 11)$ **d** $3a(5a + 1)$

- 0 23** Vul in.

- a** $b(8a + \dots) = 8ab + 9b$ **c** $a(3b + \dots) = 3ab + a$
b $x(\dots + \dots) = 2x^2 + x$ **d** $x(\dots - \dots) = 5x^2 - 3x$

Theorie C Ontbinden in factoren

Bij de herleiding $x(x + 7) = x^2 + 7x$ maak je van het product $x(x + 7)$ de som $x^2 + 7x$.



Het omgekeerde kan ook. Je vervangt de som $x^2 + 7x$ door het product $x(x + 7)$.

Schrijven als een product heet **ontbinden in factoren**.



Ontbinden in factoren betekent schrijven als een product.

Bij $x^2 + 7x = x(x + 7)$ is de factor x buiten haakjes gebracht. Dat kan omdat x een factor is van x^2 en ook van $7x$. Daarom heet x de **gemeenschappelijke factor** van x^2 en $7x$.

$$\begin{aligned} x^2 &= x \cdot x \\ 7x &= 7 \cdot x \\ \text{gemeenschappelijke factor } x \end{aligned}$$

Ook $15ab + 6c$ is te ontbinden in factoren. Van $15ab$ en $6c$ is 3 de gemeenschappelijke factor. Daarom breng je 3 buiten haakjes. Je krijgt $15ab + 6c = 3(5ab + 2c)$.

$$\begin{aligned} 15ab &= 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b \\ 6c &= 2 \cdot 3 \cdot c \\ \text{gemeenschappelijke factor } 3 \end{aligned}$$

Je ontbindt $2x^2 - 7x$ in factoren door de gemeenschappelijke factor x buiten haakjes te brengen.
Je krijgt $2x^2 - 7x = x(2x - 7)$.

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 2 \cdot x \cdot x \\ 7x &= 7 \cdot x \\ \text{gemeenschappelijke factor } x \end{aligned}$$

Voorbeeld

Ontbind in factoren.

a $6a + 10b$

b $2ab - b$

c $5x^2 - 2x$

Uitwerking

a $6a + 10b = 2(3a + 5b)$

$$6a = 2 \cdot 3 \cdot a$$

$$10b = 2 \cdot 5 \cdot b$$

gemeenschappelijke factor 2

b $2ab - b = b(2a - 1)$

Controle van vraag b:

$$b(2a - 1) = 2ab - b$$

Dit klopt.

$$2ab = 2 \cdot a \cdot b$$

$$b = 1 \cdot b$$

gemeenschappelijke factor b

c $5x^2 - 2x = x(5x - 2)$

$$5x^2 = 5 \cdot x \cdot x$$

$$2x = 2 \cdot x$$

gemeenschappelijke factor x



24 Ontbind in factoren.

a $4x + 6y$

b $4x - xy$

c $x^2 + 18x$

d $2p - 6$

e $pq + pr$

f $x^2 - 5x$

g $3x^2 + 5x$

h $7xy - 20x$

i $8ab - 3b$

25 Ontbind in factoren.

a $ab - 6bc$

b $a^2 + a$

c $a^2b - 3b$

d $7x - xyz$

e $14p - 8q$

f $18x^2 + 10yz$

26 Vul in.

a $6pq - 30p = p(\dots - \dots)$

b $6pq - 30p = 6(\dots - \dots)$

c $6pq - 30p = 2p(\dots - \dots)$

d $6pq - 30p = 6p(\dots - \dots)$

Theorie D Zoveel mogelijk factoren buiten haakjes brengen

Soms is er meer dan één gemeenschappelijke factor, zoals bij $3ab + 6a$.

Je kunt de factor 3 buiten haakjes brengen, je kunt de factor a buiten haakjes brengen en je kunt ook beide factoren buiten haakjes brengen.

$$3ab + 6a = 3(ab + 2a),$$

$$3ab + 6a = a(3b + 6) \text{ en}$$

$$3ab + 6a = 3a(b + 2).$$

Ook $6pq - 30p$ kun je op verschillende manieren ontbinden in factoren.

Zo is $6pq - 30p = 2(3pq - 15p)$

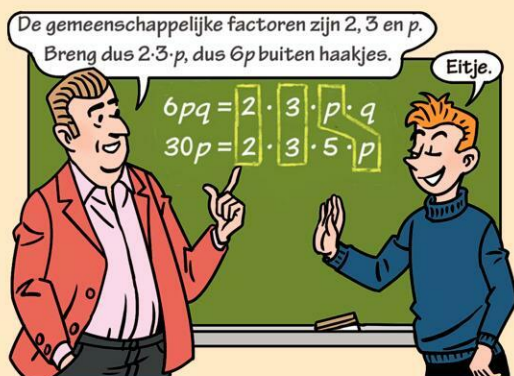
$$6pq - 30p = 3(2pq - 10p)$$

$$6pq - 30p = p(6q - 30)$$

$$6pq - 30p = 3p(2q - 10)$$

$$6pq - 30p = 6p(q - 5)$$

In het laatste geval heb je met 2, 3 en p , dus met $6p$, alle gemeenschappelijke factoren buiten haakjes gebracht.



Voorbeeld

Ontbind in zoveel mogelijk factoren.

a $3xy + 21x$

b $15x^2 - 30x$

c $2x^3 - 8x^2 + 10x$

Uitwerking

a $3xy + 21x = 3x(y + 7)$

$$\left. \begin{array}{l} 3xy = 3 \cdot x \cdot y \\ 21x = 3 \cdot 7 \cdot x \end{array} \right\} 3 \cdot x, \text{ dus } 3x \text{ buiten haakjes brengen}$$

b $15x^2 - 30x = 15x(x - 2)$

$$\left. \begin{array}{l} 15x^2 = 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \\ 30x = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \end{array} \right\} 3 \cdot 5 \cdot x, \text{ dus } 15x \text{ buiten haakjes brengen}$$

c $2x^3 - 8x^2 + 10x = 2x(x^2 - 4x + 5)$

$$\left. \begin{array}{l} 2x^3 = 2 \cdot x \cdot x \cdot x \\ 8x^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \\ 10x = 2 \cdot 5 \cdot x \end{array} \right\} 2 \cdot x, \text{ dus } 2x \text{ buiten haakjes brengen}$$

A 27 Ontbind in zoveel mogelijk factoren.

a $3ab + 9a$

d $3a^2 - 6b$

g $12xyz - 16xy$

b $12ab - 9b$

e $3ab - 3a$

h $2xy + 8xz$

c $3a^2 + 6a$

f $3ab - 9ac$

i $5x^2 - 15x^3$

28 Ontbind in zoveel mogelijk factoren.

a $6x^3 - 12x$

d $6x^4 - 3x^2$

g $4x^2y + xy - xy^2$

b $25x^2 - 30x$

e $18a^2bc + 12ab^2c$

h $12x^8 + 18x^6 - 16x^5$

c $10x^2 + 5x^2y$

f $x^4 - x^3 + x^2$

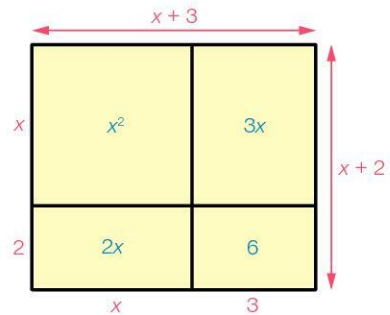
i $9p^3q^2r - 6pq^2r^3$

7.3 De product-som-methode

- O 29** Met de rechthoek in figuur 7.6 kun je verklaren dat $(x+3)(x+2) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$.

Herleid de volgende producten.

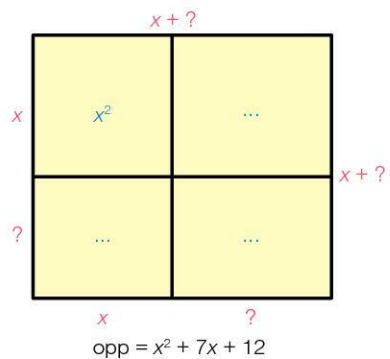
- a** $(x+5)(x+3)$ **d** $(x+1)(x+2)$
b $(x-2)(x+6)$ **e** $(x+4)(x-4)$
c $(x-4)(x-7)$ **f** $(x-5)(x+3)$



figuur 7.6

- O 30** De oppervlakte van de rechthoek in figuur 7.7 is $x^2 + 7x + 12$.

- a** Volgens Rob zijn de zijden van de rechthoek $(x+5)$ en $(x+2)$.
 Waarom is dit niet juist?
b Volgens Anita zijn de zijden $(x+6)$ en $(x+2)$.
 Klopt dit?
c Zoek eens uit wat de zijden zijn van de rechthoek in figuur 7.7.



figuur 7.7

- O 31** Julia heeft een vraag voor Stan. Zie hiernaast. Julia heeft nog meer vragen voor Stan. Geef de antwoorden.

- a** Van welke twee getallen is het product 20 en de som 9?
b Van welke twee getallen is het product 20 en de som 21?
c Van welke twee getallen is het product 20 en de som 12?
d Van welke twee getallen is het product 20 en de som -12?



Theorie A Een som van drie termen ontbinden in factoren

Je weet $(x+3)(x+5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$.

$$(x+3)(x+5) = x^2 + 8x + 15$$

8 is de som
van 3 en 5.

15 is het product
van 3 en 5.

Omgekeerd kun je $x^2 + 8x + 15$ schrijven als het product $(x + 3)(x + 5)$. Om de ontbinding $x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$ zelf te maken, gaat het erom de getallen 3 en 5 te vinden. Die krijg je door twee getallen te zoeken met

- product 15 en
- som 8.

Dat zoeken gaat handig met de **tabel van 15**. In die tabel zet je alle manieren om 15 als product van twee gehele getallen te schrijven. Het is handig daarbij achter elk tweetal factoren de som te schrijven. Je ziet dat je 3 en 5 moet hebben.

product 15		som
1	15	16
-1	-15	-16
3	5	8
-3	-5	-8

De ontbinding van $x^2 + 9x + 14$ krijg je als volgt.

$$x^2 + 9x + 14 = (x + \dots)(x + \dots)$$



In de tabel van 14 zie je dat je de getallen 2 en 7 moet hebben. Je krijgt $x^2 + 9x + 14 = (x + 2)(x + 7)$.

product 14		som
1	14	15
-1	-14	-15
2	7	9
-2	-7	-9

De ontbinding van $x^2 + 7x - 8$ krijg je als volgt.

$$x^2 + 7x - 8 = (x - \dots)(x + \dots)$$



In de tabel van -8 zie je dat je de getallen -1 en 8 moet hebben. Je krijgt $x^2 + 7x - 8 = (x - 1)(x + 8)$.

product -8		som
1	-8	-7
-1	8	7
2	-4	-2
-2	4	2

Deze methode van ontbinden heet de **product-som-methode**.

De product-som-methode

Bij het ontbinden van $x^2 + 5x - 14$ ga je als volgt te werk.

- Je hebt twee getallen nodig met product -14 en som 5.
- Maak de tabel van -14. Je vindt -2 en 7.
- Schrijf de ontbinding op.

Je krijgt $x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$.

product -14		som
1	-14	-13
-1	14	13
2	-7	-5
-2	7	5

T 32 [►►40] Ontbind in factoren zonder een tabel op te schrijven.

a $x^2 + 5x + 4$

d $x^2 - 2x - 35$

g $x^2 + 13x - 30$

b $x^2 + 4x - 5$

e $x^2 - 29x + 100$

h $x^2 + 5x - 50$

c $x^2 - 14x + 49$

f $x^2 - 2x - 80$

i $x^2 + 10x - 39$

33 Hiernaast staat de tabel van 8. In de tabel staan de getallen 2 en 4. De som van 2 en 4 is 6. Dus $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$.

Gebruik bij het beantwoorden van de volgende vragen de tabel van 8.

a De som van ... en ... is 9, dus

$$x^2 + 9x + 8 = (x + \dots)(x + \dots).$$

b De som van ... en ... is -6, dus

$$x^2 - 6x + 8 = (x - \dots)(x - \dots).$$

product 8		som
1	8	9
-1	-8	-9
2	4	6
-2	-4	-6

34 Hiernaast staat de tabel van -10. In de tabel staan de getallen 2 en -5. De som van 2 en -5 is -3. Dus $x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$.

Ontbind in factoren. Gebruik de tabel van -10.

a $x^2 - 9x - 10$

b $x^2 + 3x - 10$

product -10		som
1	-10	-9
-1	10	9
2	-5	-3
-2	5	3

35 Hiernaast staat de tabel van 20.

a Neem de tabel over en vul hem verder in.

Ontbind in factoren. Gebruik de tabel van 20.

b $x^2 + 12x + 20$

d $x^2 - 21x + 20$

c $x^2 - 9x + 20$

e $x^2 - 12x + 20$

product 20		som
1	20	21
-1	-20	...
2	...	...
-2	...	...
4	...	...
-4	...	...

36 **a** Neem de tabel van -20 over en vul hem verder in.

Ontbind in factoren. Gebruik de tabel van -20.

b $x^2 - 8x - 20$

d $x^2 + 8x - 20$

c $x^2 + 19x - 20$

e $x^2 - 19x - 20$

product -20		som
1	-20	-19
-1	20	...
2	...	...
-2	...	...
4	...	...
-4	...	...

37 **a** Maak de tabel van 12.

Ontbind in factoren. Gebruik de tabel van 12.

b $x^2 + 8x + 12$

e $x^2 - 7x + 12$

c $x^2 - 8x + 12$

f $x^2 + 13x + 12$

d $x^2 + 7x + 12$

g $x^2 - 13x + 12$

38 Ontbind in factoren. Maak telkens eerst een tabel.

a $x^2 + 10x + 16$

c $x^2 + 15x - 16$

e $x^2 + 5x + 6$

b $x^2 - 6x - 16$

d $x^2 - 4x - 12$

f $x^2 - 7x + 10$

39 Ontbind in factoren. Probeer het uit je hoofd, dus zonder eerst een tabel op te schrijven.

a $x^2 - 10x + 21$

d $x^2 - 9x - 22$

g $x^2 - 9x - 10$

b $x^2 + 22x + 21$

e $x^2 - 8x - 33$

h $x^2 - 2x - 15$

c $x^2 + 13x + 22$

f $x^2 - 11x + 10$

i $x^2 + 9x + 14$

40 Je kunt $x^2 - x - 20$ schrijven als $x^2 - 1x - 20$, dus om $x^2 - x - 20$ te ontbinden, zoek je twee getallen met product -20 en som -1 . Die getallen zijn 4 en -5 . Dus $x^2 - x - 20 = (x + 4)(x - 5)$.

$x^2 - x - 20 = (x + 4)(x - 5)$,
maar je mag ook schrijven
 $x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$.

Ontbind in factoren.

a $x^2 + x - 20$

d $x^2 - x - 90$

b $x^2 + x - 6$

e $x^2 + x - 110$

c $x^2 - x - 12$

f $x^2 - x - 2$



Theorie B Twee manieren om in factoren te ontbinden

Je kent twee manieren om in factoren te ontbinden.

Ontbinden in factoren

Breng de gemeenschappelijke factor buiten haakjes.

$$x^2 + 9x = x(x + 9)$$

$$12x^2 - 3x = 3x(4x - 1)$$

Gebruik de product-som-methode.

$$x^2 + 8x - 9 = (x - 1)(x + 9)$$

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)(x - 5)$$

A 41 Ontbind in factoren.

a $x^2 + 15x + 26$

d $x^2 - 6x - 160$

g $x^2 - x - 42$

b $x^2 - 27x + 26$

e $x^2 - 14x - 32$

h $2x^2 + 10x$

c $x^2 - 27x$

f $14x^2 + x$

i $x^2 - 8x - 48$

A 42 Ontbind in factoren.

a $x^2 - 17x - 60$

d $x^2 - 20x + 100$

g $6x^2 - 32x$

b $x^2 + 15x + 54$

e $x^2 + 16x$

h $x^2 - x - 110$

c $x^2 + 18x - 63$

f $x^2 - 21x + 68$

i $x^2 - 9x - 36$

7.4 Kwadratische vergelijkingen

- O 43** Hiernaast zie je hoe je de vergelijkingen $2x - 5 = 0$ en $x + 5 = 0$ oplost.

Los op.

- a** $3x + 12 = 0$ **d** $x + 8 = 0$
b $x - 11 = 0$ **e** $5x - 20 = 0$
c $5x = 0$ **f** $-3x = 0$

$2x - 5 = 0$	$x + 5 = 0$
$+5 \quad +5$	$-5 \quad -5$
$2x = 5$	$x = -5$
$:2 \quad :2$	
$x = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$	

- O 44** Gegeven is de vergelijking $(x - 4)(x + 3) = 0$.

- a** Om te controleren of $x = 4$ een oplossing is, vervang je x door 4. Je krijgt $(4 - 4)(4 + 3) = 0$ ofwel $0 \cdot 7 = 0$. Klopt dit? Is $x = 4$ een oplossing?
b Waarom is $x = 3$ geen oplossing?
c Is $x = -3$ een oplossing? Waarom?

- O 45** Julia vermenigvuldigt twee getallen met elkaar. De uitkomst is 0. Wat kun je van die getallen zeggen?



Theorie A Product is nul

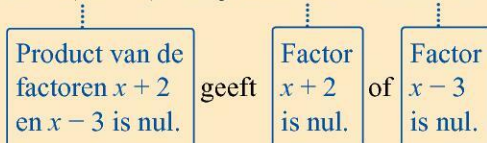
Is het product van twee factoren nul, dan is de ene factor nul of de andere factor is nul. Dus uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$. Hierin vervangen we het woordje 'of' door het symbool $\vee$.

PRODUCT IS NUL

Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0 \vee B = 0$.

Met deze regel kun je de vergelijking $(x + 2)(x - 3) = 0$ oplossen.

$(x + 2)(x - 3) = 0$ geeft $x + 2 = 0 \vee x - 3 = 0$



$\vee$ betekent of



Het oplossen van $(x + 2)(x - 3) = 0$ noteer je als volgt.

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 3) &= 0 & A \cdot B &= 0 \\ x + 2 = 0 \vee x - 3 & & A = 0 \vee B &= 0 \\ x = -2 \vee x = 3\end{aligned}$$

Hiernaast zie je hoe je de vergelijking $x(2x - 3) = 0$ oplost.

$$\begin{aligned}x(2x - 3) &= 0 \\ x = 0 \vee 2x - 3 &= 0 \\ x = 0 \vee 2x &\stackrel{+3}{=} \stackrel{+3}{=} 3 \\ &\stackrel{:2}{=} \stackrel{:2}{=} 1\frac{1}{2} \\ x = 0 \vee x &= 1\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Doe dit uit het hoofd.

Voorbeeld

Los op.

a $(x + 1)(2x - 3) = 0$ **b** $3x(x + 2) = 0$

Uitwerking

a $(x + 1)(2x - 3) = 0$ **b** $3x(x + 2) = 0$
 $x + 1 = 0 \vee 2x - 3 = 0$ $3x = 0 \vee x + 2 = 0$
 $x = -1 \vee 2x = 3$ $x = 0 \vee x = -2$
 $x = -1 \vee x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

46 Los op.

a $(x + 3)(x - 9) = 0$ **c** $(x - 1)(2x + 15) = 0$ **e** $(x + 3)(x - 3) = 0$
b $2x(x + 5) = 0$ **d** $a(a - 10) = 0$ **f** $3x(x + 3) = 0$

47 Om de vergelijking $x^2 + 6x = 0$ op te lossen, ontbind je eerst het linkerlid in factoren. Hiernaast zie je hoe het oplossen gaat.

Los op dezelfde manier de vergelijking $x^2 - 10x = 0$ op.

$$\begin{aligned}x^2 + 6x &= 0 \\ x(x + 6) &= 0 \\ x = 0 \vee x + 6 &= 0 \\ x = 0 \vee x &= -6\end{aligned}$$

Theorie B Oplossen met ontbinden

De vergelijking $x^2 - 6x + 8 = 0$ is een voorbeeld van een **kwadratische vergelijking**. Dat zie je aan de term x^2 .

Om de vergelijking $x^2 - 6x + 8 = 0$ op te lossen, schrijf je eerst het linkerlid als een product. Daarna pas je toe

$A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

Je krijgt $x^2 - 6x + 8 = 0$ gebruik de tabel van 8

$$\begin{aligned}(x - 2)(x - 4) &= 0 \\ x - 2 = 0 \vee x - 4 &= 0 \\ x = 2 \vee x &= 4\end{aligned}$$

product 8		som
1	8	9
-1	-8	-9
2	4	6
-2	-4	-6

Voorbeeld

Los op.

a $x^2 - x - 20 = 0$

b $3a^2 + 9a = 0$

Uitwerking

a $x^2 - x - 20 = 0$

$(x + 4)(x - 5) = 0$

$x + 4 = 0 \vee x - 5 = 0$

$x = -4 \vee x = 5$

b $3a^2 + 9a = 0$

$3a(a + 3) = 0$

$3a = 0 \vee a + 3 = 0$

$a = 0 \vee a = -3$

Bij het ontbinden in factoren gebruik je in voorbeeld a

- de product-som-methode en in voorbeeld b

- het buiten haakjes brengen van de gemeenschappelijke factor.



T 48 [►►52] Los op.

a $x^2 + 15x + 44 = 0$

c $q^2 - 10q + 21 = 0$

e $p^2 + 3p - 28 = 0$

b $a^2 - a - 90 = 0$

d $4x^2 + 20x = 0$

f $x - 2x^2 = 0$

49 Neem over en vul in.

a $x^2 + 5x - 14 = 0$

$(x - 2)(x + \dots) = 0$

$x - 2 = 0 \vee \dots$

$x = 2 \vee \dots$

b $2x^2 - 8x = 0$

$2x(x - \dots) = 0$

$2x = 0 \vee \dots$

$x = \dots \vee \dots$

c $x^2 - x - 42 = 0$

$(x + 6)(x - \dots) = 0$

$x + 6 = 0 \vee \dots$

$\dots \vee \dots$

50 Los op.

a $x^2 + 3x + 2 = 0$

c $x^2 + 50x = 0$

e $x^2 - x - 2 = 0$

b $x^2 - 12x = 0$

d $x^2 - 5x - 6 = 0$

f $x^2 + x - 6 = 0$

51 Los op.

a $x^2 + 7x + 12 = 0$

c $a^2 - 10a - 24 = 0$

e $3x^2 - x = 0$

b $a^2 - a - 12 = 0$

d $x^2 - 10x + 24 = 0$

f $5x^2 - 15x = 0$

A 52 Los op.

a $y^2 - 9y + 20 = 0$

c $3a^2 + 12a = 0$

e $5t - t^2 = 0$

b $p^2 + 2p - 35 = 0$

d $x^2 + x - 12 = 0$

f $q^2 + 16q + 63 = 0$

53 Vul in.

a Van de vergelijking $(x + 3)(x \dots) = 0$ zijn $x = \dots$ en $x = 5$ de oplossingen.

b Van de vergelijking $5x(2x \dots) = 0$ zijn $x = \dots$ en $x = -6$ de oplossingen.

c Van de vergelijking $(\dots x + 2)(5x - 12) = 0$ zijn $x = -4$ en $x = \dots$ de oplossingen.



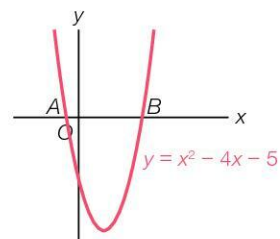
De vergelijking $x^2 + ax - 8b = 0$ heeft als oplossingen $x = -4$ en $x = 6$.

Bereken a en b .

55 Hiernaast zie je de grafiek van $y = x^2 - 4x - 5$.

De grafiek snijdt de x -as in de punten A en B . De x -as is de horizontale lijn op hoogte 0. Daarom los je voor het berekenen van de x -coördinaten van de punten A en B de vergelijking $x^2 - 4x - 5 = 0$ op.

- Los deze vergelijking op.
- Schrijf de coördinaten van A en B op.

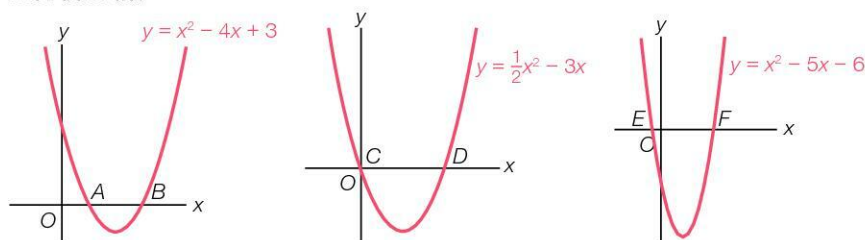


figuur 7.8

A 56

Hieronder zie je drie grafieken.

Bereken van elke grafiek de coördinaten van de snijpunten met de x -as.



figuur 7.9



De parabool $y = x^2 - 5x + c$ snijdt de x -as in de punten $A(-2, 0)$ en B .

Bereken de lengte van het lijnstuk AB .

ARTIKEL

BEROEP

GESCHIEDENIS

INFORMATIE



Het teken =

In elke vergelijking staat het teken $=$. (Spreek uit: ‘het is-gelijk-teken’.) Dit teken is voor het eerst gebruikt door de Engelsman Robert Recorde. Hij kwam omstreeks 1550 op het idee om met twee even lange evenwijdige streepjes aan te geven dat twee dingen gelijk zijn. ‘Immers’, zo verklaarde hij, ‘no two things can be more equal’. In zijn boek *The Whetstone Of Witte* maakte hij de streepjes veel langer dan wij tegenwoordig gewend zijn.



7.5 Kwadratische vergelijkingen oplossen

O 58

Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0 \vee B = 0$. Maar je mag niet zeggen dat uit $A \cdot B = 12$ volgt $A = 12 \vee B = 12$.

Licht dat toe met enkele getallenvoorbeelden.

Theorie A Het rechterlid nul maken

Om de vergelijking $x^2 + 4x = 12$ op te lossen, maak je eerst het rechterlid nul. Dat doe je door van het linker- en rechterlid 12 af te trekken. Daarna ontbind je het linkerlid in factoren.

Je krijgt $x^2 + 4x = 12$

maak het rechterlid 0

$$\quad -12 \quad -12$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

ontbind het linkerlid in factoren

$$(x-2)(x+6) = 0$$

pas toe $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$

$$x-2 = 0 \vee x+6 = 0$$

$$x = 2 \vee x = -6$$

Ook bij de vergelijking $x^2 - 6 = 5x$ maak je eerst het rechterlid nul. Dus trek je van beide leden $5x$ af.

Je krijgt $x^2 - 6 = 5x$

$$\quad -5x \quad -5x$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x+1)(x-6) = 0$$

$$x+1 = 0 \vee x-6 = 0$$

$$x = -1 \vee x = 6$$

$$x^2 - 6 = 5x$$

$$\quad -5x \quad -5x$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

Zet $-5x$ tussen x^2 en -6 .
Dan zie je sneller hoe je kunt ontbinden.

Werkschema: kwadratische vergelijkingen oplossen

- 1 Maak het rechterlid nul.
- 2 Ontbind het linkerlid in factoren.
- 3 Pas toe $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

Voorbeeld

Los op.

a $x^2 - 12 = x$

b $x^2 = 6x$

c $x^2 + 2x + 8 = 16$

Uitwerking

a $x^2 - 12 = x$

$$\quad -x \quad -x$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x+3)(x-4) = 0$$

$$x+3 = 0 \vee x-4 = 0$$

$$x = -3 \vee x = 4$$

b $x^2 = 6x$

$$\quad -6x \quad -6x$$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x-6) = 0$$

$$x = 0 \vee x-6 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 6$$

c $x^2 + 2x + 8 = 16$

$$\quad -16 \quad -16$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x-2)(x+4) = 0$$

$$x-2 = 0 \vee x+4 = 0$$

$$x = 2 \vee x = -4$$

T 59 [▶▶ 63] Los op.

a $x^2 + 5x = 2x + 4$

b $x^2 - 7x - 7 = 3 - 4x$

c $2x^2 - 2x + 1 = x^2 + 3x - 5$

60 Los op.

a $x^2 + 3x = 10$

b $x^2 - x = 12$

c $x^2 = 5x$

d $x^2 - 5 = 4x$

e $x^2 + 18 = 19x$

f $x^2 - 3x = 18$

61 Los op.

a $x^2 + 3x = 4$

b $x^2 - 3x = -2$

c $x^2 = 8x$

d $x^2 - 6 = x$

e $x^2 + 10x = 0$

f $(x - 7)(x - 3) = 0$

62 Los op.

a $x^2 + 3x = 5x$

b $x^2 + 4 = 9x - 4$

c $3x(x - 1) = 0$

d $x^2 = x + 2$

e $x^2 + 5x + 6 = 6$

f $x^2 + 3x + 1 = 29$

Om $x^2 + 4 = 9x - 4$ op te lossen, doe je eerst aan beide kanten **+ 4** en vervolgens **- 9x**.

A 63 Los op.

a $x^2 - 7x = 18$

b $x^2 - 7x = 2x$

c $x^2 = 30 + 13x$

d $(x - 7)(2x - 1) = 0$

e $x^2 - 5x + 2 = 10 + 2x$

f $x^2 + 3x - 14 = 10x + 16$

64 Van de vergelijking $x^2 + bx - 7 = 3 - 4x$ is $x = -5$ een oplossing. Bereken de andere oplossing.

Theorie B Oplosmethoden

Je kent twee manieren om kwadratische vergelijkingen op te lossen.

Methode 1

Gebruik $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

Bij deze methode zorg je er eerst voor dat het rechterlid 0 is en dat het linkerlid in factoren ontbonden is.

Methode 2

Herleid de vergelijking tot de vorm $x^2 = c$.

Voorbeeld

Los op.

a $x^2 - 25x = 0$

b $x^2 - 25 = 0$

c $x^2 - 25x = 26$

Uitwerking

a $x^2 - 25x = 0$

$$x(x - 25) = 0$$

$$x = 0 \vee x - 25 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 25$$

Met ontbinden in factoren.

b $x^2 - 25 = 0$

$$+25 \quad +25$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \vee x = -5$$

Herleiden tot $x^2 = c$.

c $x^2 - 25x = 26$

$$-26 \quad -26$$

$$x^2 - 25x - 26 = 0$$

$$(x + 1)(x - 26) = 0$$

$$x + 1 = 0 \vee x - 26 = 0$$

$$x = -1 \vee x = 26$$

Met ontbinden in factoren.

- 65** Welke methode gebruik je bij het oplossen van de volgende vergelijkingen? Kies uit

I $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$

II Herleid tot de vorm $x^2 = c$.

a $x^2 - 12x = 0$

b $x^2 - 12 = 0$

c $x^2 - 12x - 28 = 0$

A 66 Los op.

a $x^2 + 9x = 0$

d $x^2 + 9x = 10$

g $2x^2 + 72 = 0$

b $x^2 - 9 = 0$

e $2x^2 = 72x$

h $x^2 + 2x = 48$

c $x^2 + 9 = 0$

f $2x^2 = 72$

i $x^2 = 50x - 400$

A 67 Los op.

a $x^2 + 8 = 9x$

d $x^2 + 7x = x + 7$

g $x^2 + 4 = 4x$

b $x^2 + 9x = 3x$

e $x^2 + 3x = 33 - 5x$

h $x^2 + 4 = 4$

c $x^2 + 9 = 10$

f $9x^2 - 19 = 17$

i $x^2 + 4 = 7x - 6$

- 68** Om een zwembad van 5 bij 10 meter ligt aan twee kanten een tegelpad met een breedte van x meter.

Zie figuur 7.10.

De oppervlakte van I is

$$\text{lengthe} \times \text{breedte} = 5 \cdot x = 5x.$$

- a** Geef de oppervlakte van de stukken II en III.

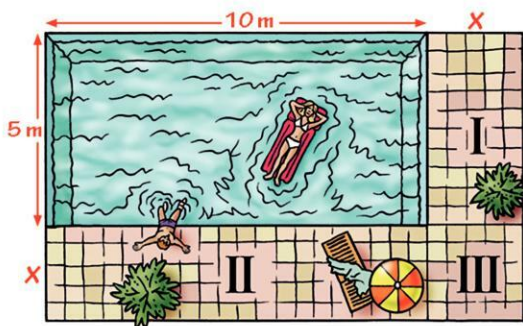
- b** Verklaar dat **opp tegelpad** $= x^2 + 15x$.

De oppervlakte van het tegelpad is 34 m^2 .

Hieruit volgt de vergelijking $x^2 + 15x = 34$.

- c** Los de vergelijking op.

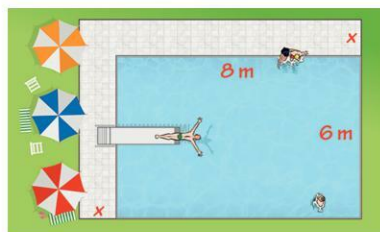
- d** Hoe breed is het tegelpad?



figuur 7.10

- 69** Om een zwembad van 6 bij 8 meter ligt aan twee kanten een tegelpad met een oppervlakte van 32 m^2 . De breedte van het pad is x meter. Zie figuur 7.11.

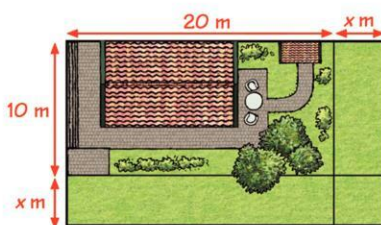
- Verklaar dat de oppervlakte van het tegelpad $x^2 + 14x$ is.
- Bereken de breedte van het tegelpad door een vergelijking op te lossen.



figuur 7.11

- A 70** De familie Van Dijk heeft een stuk grond van 10 bij 20 meter. Ze kopen van de gemeente er aan twee kanten een even brede strook van x meter bij. Zie figuur 7.12. De totale oppervlakte van hun stuk grond komt daarmee op 336 m^2 .

- Verklaar dat $x^2 + 30x = 136$.
- Bereken hoe breed de stroken zijn die de familie Van Dijk van de gemeente koopt door een vergelijking op te lossen.



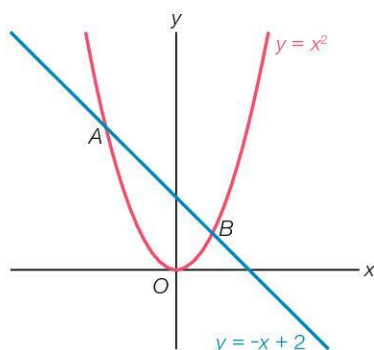
figuur 7.12

- 71** Hiernaast zie je de grafieken van $y = x^2$ en $y = -x + 2$. Om de x -coördinaten van de snijpunten A en B te berekenen, los je de vergelijking $x^2 = -x + 2$ op.

- Bereken de x -coördinaten van A en B .

Om de y -coördinaten van A en B te berekenen, vul je de gevonden x -coördinaten in een van de formules in.

- Bereken de y -coördinaten van A en B .

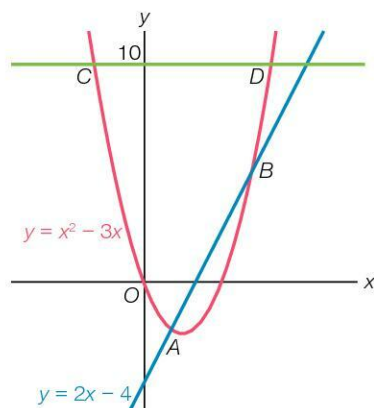


figuur 7.13

- 72** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van $y = x^2 - 3$ en $y = 2x$.

- A 73** Hiernaast zie je de grafieken van $y = x^2 - 3x$ en $y = 2x - 4$.

- De grafieken snijden elkaar in de punten A en B . Bereken de coördinaten van A en B .
- De horizontale lijn op hoogte 10 snijdt de grafiek van $y = x^2 - 3x$ in de punten C en D . Bereken de lengte van het lijnstuk CD .



figuur 7.14

- 74** De grafieken van $y = x^2 + 2x$ en $y = ax + 5$ snijden elkaar in de punten A en B . De x -coördinaat van A is 1. Bereken de coördinaten van B .

75 Om de oplossingen te vinden van een vergelijking zoals $x(x - 6) = 7$ werk je eerst de haakjes weg.

a Los op $x(x - 6) = 7$.

b Waarom is het niet slim om bij $x(x - 6) = 0$ eerst de haakjes weg te werken?

Theorie C Kwadratische vergelijkingen met haakjes

Om de vergelijking $(x - 2)(x + 5) = 8$ op te lossen, werk je eerst de haakjes weg. Vervolgens maak je het rechterlid nul en daarna ga je het linkerlid ontbinden in factoren.

Voorbeeld

Los op $(x - 2)(x + 5) = 8$.

Uitwerking

$$(x - 2)(x + 5) = 8$$

$$x^2 + 5x - 2x - 10 = 8$$

$$x^2 + 3x - 10 = 8$$

$$\quad -8 \quad -8$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$(x - 3)(x + 6) = 0$$

$$x - 3 = 0 \vee x + 6 = 0$$

$$x = 3 \vee x = -6$$

werk de haakjes weg

herleid het linkerlid

maak het rechterlid nul

ontbind in factoren

Bij $(x - 2)(x + 5) = 8$ werk je eerst de haakjes weg. Maar bij $(x - 2)(x + 5) = 0$ krijg je direct $x - 2 = 0 \vee x + 5 = 0$.



76 Los op.

a $x(x + 6) = 16$

b $x(x + 6) = 5x$

c $(x + 3)(x - 8) = 0$

d $(x + 1)(x + 5) = 5$

e $(x + 1)(x - 3) = 12$

f $(2x + 1)(x - 1) = 0$

A 77 Los op.

a $(x - 2)(x + 2) = 3x$

b $(x + 3)(x - 1) = 32$

c $(x + 3)^2 = 16x$

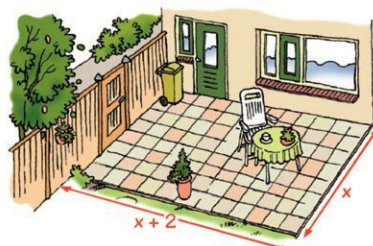
d $x(x - 5) = 14$

e $(3x + 9)(x - 2) = 0$

f $(x - 4)^2 = 9$

78 Van een rechthoekig terras met een oppervlakte van 24 m^2 is de lengte 2 meter meer dan de breedte. Stel je de breedte x meter, dan is de lengte $x + 2$ meter.

Bereken de afmetingen van het terras door een vergelijking op te lossen.



figuur 7.15

A 79 In een dierentuin zwemmen pinguïns in een rechthoekig bassin met een oppervlakte van 126 m^2 . De lengte is 5 meter meer dan de breedte. Bereken de afmetingen van het bassin door een vergelijking op te lossen.

Gemengde opgaven

- 1** a Onderzoek of de som van de eerste tien priemgetallen een priemgetal is.



- b Ontbind de getallen 2025 en 14400 in priemfactoren.

- 2** Ontbind in zoveel mogelijk factoren.

a $5x^2 - 6x$

d $5ax - 25bx$

g $x^2 - 3x + 2$

b $x^2 - 6x + 5$

e $16x^2 + 4x$

h $2x - x^2$

c $x^2 - 5x - 6$

f $x^2 - x - 12$

i $x^2 - 2x - 80$

- 3** Los op.

a $x^2 = 81$

d $x^2 + 81x + 80 = 0$

g $(x + 1)(x - 81) = 0$

b $x^2 + 81 = 0$

e $x^2 - 80x - 81 = 0$

h $x(x + 81) = 0$

c $x^2 + 81x = 0$

f $x^2 - 18x + 81 = 0$

i $x^2 - 18x + 18 = 81$

- 4** Los op.

a $(2x - 1)(6x + 3) = 0$

d $p^2 + 21 = 10p - 4$

g $x^2 + 40 = 3x + 50$

b $a(0,5a - 12) = 0$

e $q^2 = q$

h $a^2 = 3a + 4$

c $5a^2 - 20a = 0$

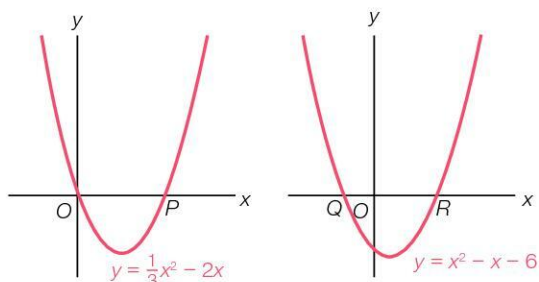
f $p^2 + 14p = 32$

i $3p^2 - 2 = 1$

- 5** Zie figuur 7.16 met de grafieken van $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x$ en $y = x^2 - x - 6$.

- a De grafiek van $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x$ snijdt de x -as in de punten O en P . Bereken de lengte van het lijnstuk OP .

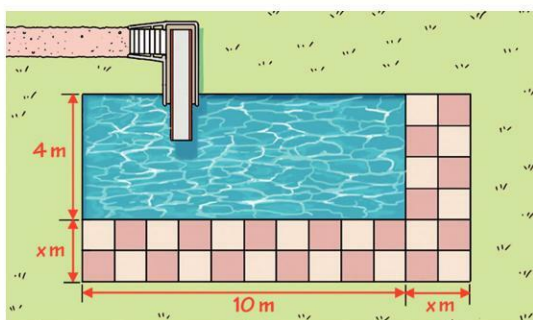
- b De grafiek van $y = x^2 - x - 6$ snijdt de x -as in de punten Q en R . Bereken de lengte van het lijnstuk QR .



figuur 7.16

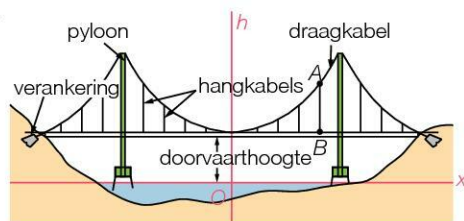
- 6** Om een zwembad van 4 bij 10 meter is aan twee kanten een tegelpad aangelegd met een oppervlakte van 51 m^2 . Het tegelpad is overal even breed. Zie figuur 7.17.

- a Verklaar dat de oppervlakte van het tegelpad $x^2 + 14x \text{ m}^2$ is.
- b Bereken de breedte van het tegelpad door een vergelijking op te lossen.



figuur 7.17

- 7** In figuur 7.18 zie je een schets van de Humber Bridge in Engeland. De brug overspant de rivier de Humber bij Hull. In de schets is het assenstelsel zo getekend, dat de x -as samenvalt met het wateroppervlak. De afstand h van de draagkabel tot het wateroppervlak kun je berekenen met de formule $h = 0,00025x^2 + 40$. Hierin zijn x en h in meter.



figuur 7.18

- a** Hoeveel meter is het wegdek boven het wateroppervlak?

De pylonen steken 162,5 meter boven het water uit.

- b** Welke vergelijking hoort hierbij? Los de vergelijking op.

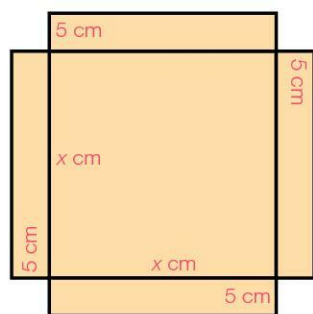
- c** Hoeveel meter staan de pylonen uit elkaar?

- d** Actievoerders hebben 80 meter boven het wegdek een spandoek gespannen.

Bereken hoe breed het spandoek is door een vergelijking op te lossen.

- 8** In figuur 7.19 zie je de uitslag van een doosje zonder deksel. Het grondvlak is een vierkant met zijden van x cm. De hoogte van het doosje is 5 cm.

- a** Licht toe dat de oppervlakte van het doosje $x^2 + 20x$ cm² is.
b De oppervlakte van het doosje is 15 dm².
 Bereken de inhoud van het doosje in cm³.



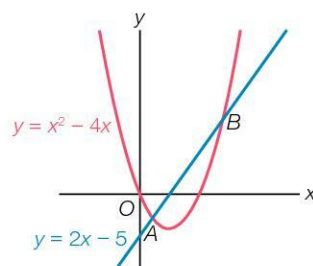
figuur 7.19

- 9** Hiernaast zie je de grafieken van $y = x^2 - 4x$ en $y = 2x - 5$. De grafieken snijden elkaar in de punten A en B.

- a** Bereken de coördinaten van A en B.

De horizontale lijn door A snijdt de grafiek van $y = x^2 - 4x$ ook nog in het punt C.

- b** Bereken de lengte van het lijnstuk AC.



figuur 7.20

- 10** Los op.

- a** $x(x + 8) = 20$ **d** $(3x - 1)(x + 3) = 0$
b $(x + 3)(x - 7) = 11$ **e** $5x(2x - 15) = 30x$
c $(x - 5)^2 = 16$ **f** $(x - 5)^2 = 16x$

- 11** Het doosje in figuur 7.21 heeft een inhoud van 88 cm³.

Stel een vergelijking op en bereken de afmetingen van het doosje.



figuur 7.21

Samenvatting

7.1 De vergelijking $x^2 = c$

blz 104

Van vergelijkingen zoals $x^2 = 49$, $x^2 = 8$ en $x^2 = -16$ schrijf je de oplossingen eenvoudig op.

$x^2 = 49$ $x = \sqrt{49}$ of $x = -\sqrt{49}$ $x = 7$ of $x = -7$	$x^2 = 8$ $x = \sqrt{8}$ of $x = -\sqrt{8}$ $x \approx 2,83$ of $x \approx -2,83$	$x^2 = -16$ geen oplossing
--	---	-------------------------------

blz 106

De vergelijking $3x^2 - 1 = 74$ los je op door eerst aan beide kanten 1 op te tellen. Vervolgens deel je beide kanten door 3. Zie hiernaast.

$$\begin{array}{rcl}
 3x^2 - 1 & = & 74 \\
 + 1 & + & 1 \\
 \hline
 3x^2 & = & 75 \\
 : 3 & & : 3 \\
 \hline
 x^2 & = & 25 \\
 x & = & 5 \text{ of } x = -5
 \end{array}$$

7.2 Buiten haakjes brengen

blz 108

De natuurlijke getallen zijn 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...
24 is deelbaar door 3, want de uitkomst van de deling $24 : 3$ is een natuurlijk getal.
3 is een deler van 24.

24 is een veelvoud van 3.

De veelvouden van 3 zijn 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...

blz 109

Een priemgetal is een natuurlijk getal met precies twee delers.

De priemgetallen zijn 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...
Elk natuurlijk getal dat geen priemgetal is, is te schrijven als een product van priemgetallen. Zo is $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Hiermee is 90 geschreven als product van priemfactoren.

Priemfactoren →

2	90
3	45
3	15
5	5
	1

$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

blz 110

Ontbinden in factoren betekent schrijven als een product. Zo is $4ab + ac = a(4b + c)$. Hier is de gemeenschappelijke factor a buiten haakjes gebracht.

Verder is $21pq + 15r = 3(7pq + 5r)$ en $3x^2 - 8x = x(3x - 8)$.

$$21pq = 3 \cdot 7 \cdot p \cdot q$$

$$15r = 3 \cdot 5 \cdot r$$

gemeenschappelijke factor 3

$$3x^2 = 3 \cdot x \cdot x$$

$$8x = 8 \cdot x$$

gemeenschappelijke factor x

blz 111

Soms kun je meer dan één factor buiten haakjes brengen. Zo is $9x^2 - 18x = 9x(x - 2)$. Immers

$$\left. \begin{array}{l} 9x^2 = \boxed{3} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{x} \cdot x \\ 18x = 2 \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{x} \end{array} \right\} 3 \cdot 3 \cdot x, \text{ dus } 9x \text{ buiten haakjes.}$$

7.3 De product-som-methode

blz 113 Om $x^2 - 6x + 8$ te ontbinden in factoren zoek je twee getallen met product 8 en som -6. In de tabel van 8 zie je dat je -2 en -4 moet hebben.

Dus $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$.

In de tabel van 8 lees je ook af dat

$x^2 + 9x + 8 = (x + 1)(x + 8)$. Want van de getallen 1 en 8 is het product 8 en de som 9.

blz 116 Er zijn twee manieren om te ontbinden in factoren.

1 Gemeenschappelijke factor buiten haakjes brengen

$$5x^2 - 3x = x(5x - 3)$$

$$x^2 + x = x(x + 1)$$

2 Product-som-methode

$$x^2 - 10x - 24 = (x + 2)(x - 12)$$

$$x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$$

product 8		som
1	8	9
-1	-8	-9
2	4	6
-2	-4	-6

7.4 Kwadratische vergelijkingen

blz 117 De vergelijking $(3x - 1)(x + 6) = 0$ is van de vorm $A \cdot B = 0$.

Om deze vergelijking op te lossen, gebruik je de regel

uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0 \vee B = 0$.

Je krijgt $(3x - 1)(x + 6) = 0$

$$3x - 1 = 0 \vee x + 6 = 0$$

$$3x = 1 \vee x = -6$$

$$x = \frac{1}{3} \vee x = -6$$

Het teken $\vee$ betekent 'of'.

$$5x(x - 2) = 0$$

$$5x = 0 \vee x - 2 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

blz 118 Om kwadratische vergelijkingen zoals $x^2 - 5x + 6 = 0$ op te lossen, ontbind je eerst het linkerlid in factoren. Vervolgens pas je toe $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$. Zie hiernaast.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x - 2 = 0 \vee x - 3 = 0$$

$$x = 2 \vee x = 3$$

7.5 Kwadratische vergelijkingen oplossen

blz 121 Bij het oplossen van de vergelijking $x^2 - 5 = 4x$ ga je als volgt te werk.

1 Maak het rechterlid nul.

2 Ontbind het linkerlid in factoren.

3 Pas toe $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

Zie hiernaast.

blz 124 Om de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van $y = x^2 - 2x$ en $y = x + 4$ te vinden, los je eerst de vergelijking $x^2 - 2x = x + 4$ op. De oplossingen $x = -1$ en $x = 4$ zijn de x -coördinaten van de snijpunten. De y -coördinaten krijg je door de gevonden waarden van x in één van de formules in te vullen.

$$x^2 - 5 = 4x$$

$$-4x \quad -4x$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x + 1)(x - 5) = 0$$

$$x + 1 = 0 \vee x - 5 = 0$$

$$x = -1 \vee x = 5$$

Diagnostische toets

7.1 De vergelijking $x^2 = c$



1 Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- 1 **a** $x^2 = 15$ **c** $2x^2 = 36$
b $3x^2 = 1200$ **d** $0,02x^2 = 50$

e $x^2 + 0,02 = 0$

f $x^2 - 3 = 0$

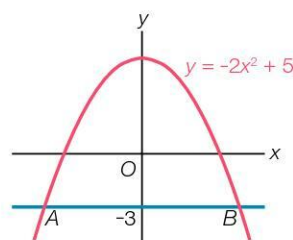


2 Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- 2 **a** $5x^2 + 12 = 17$ **b** $25 - x^2 = 16$

c $0,25x^2 - 1 = 16$

3 De grafiek van $y = -2x^2 + 5$ snijdt de horizontale lijn op hoogte -3 in de punten A en B. Zie hiernaast. Bereken de coördinaten van A en B.



figuur 7.22

7.2 Buiten haakjes brengen

4 Schrijf als product van priemfactoren.

- 4 **a** 24 **c** 225
b 56 **d** 1000

5 Ontbind in zoveel mogelijk factoren.

- 5 **a** $6x^2 + 9x$ **b** $8pq + 2p$

c $5x^2y - x$

6 Ontbind in zoveel mogelijk factoren.

- 6 **a** $36x^2 - 24xy$ **c** $5x^2y + xy - 2xy^2$
b $12x^6 - 4x^2$ **d** $x^4 - x^2 + x$

e $2a^6b^4c - 6ab^4c^2$

f $60abc - 12a^3c$

7.3 De product-som-methode

7 Ontbind in factoren.

- 7,8 **a** $x^2 + 10x + 21$ **c** $3x^2 - 4x$
b $x^2 + 10x - 24$ **d** $x^2 - 4x - 32$

e $x^2 - 8x - 48$

f $x^2 + x - 56$

7.4 Kwadratische vergelijkingen

8 Los op.

- 9 **a** $(x - 7)(2x + 8) = 0$ **b** $-5x(2x + 3) = 0$ **c** $(3x + 8)(x - 8) = 0$

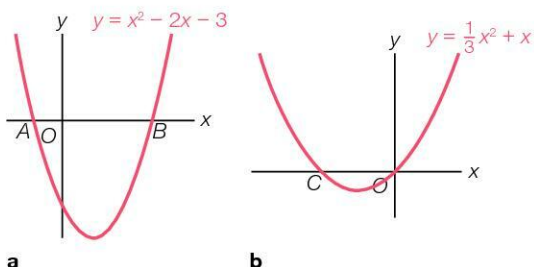
9 Los op.

- 10 **a** $x^2 + 9x + 14 = 0$ **c** $x^2 - 5x - 14 = 0$
b $x^2 - 6x = 0$ **d** $5x^2 - 20x = 0$

e $3x^2 + x = 0$

f $x^2 - x - 30 = 0$

- 10** Hiernaast zie je twee grafieken.
11 Bereken van elke grafiek de coördinaten van de snijpunten met de x -as.



a
figuur 7.23

b

7.5 Kwadratische vergelijkingen oplossen

- 11** Los op.
12 **a** $x^2 - 7x = 8$ **d** $x^2 - x = 2x$
b $x^2 = 7x$ **e** $(3x - 1)(x + 5) = 0$
c $x^2 = 4x + 5$ **f** $x^2 + 7x = 2x$

- 12** Om een terras van 4 bij 12 meter ligt aan twee kanten een grasveld met een breedte van x meter.

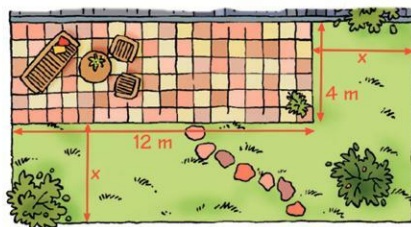
a Verklaar dat de oppervlakte van het grasveld gelijk is aan $x^2 + 16x \text{ m}^2$.

De oppervlakte van het grasveld is 80 m^2 .

b Welke vergelijking kun je nu opstellen?

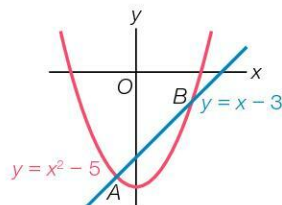
c Los de vergelijking op.

d Hoe breed is het grasveld?



figuur 7.24

- 13** De grafieken van $y = x^2 - 5$ en $y = x - 3$ snijden elkaar in de punten A en B .
14 Bereken de coördinaten van A en B .



figuur 7.25

- 14** Los op.
15 **a** $x(x - 2) = 8$ **d** $(x + 1)(x + 4) = x$
b $(x - 1)(x + 4) = 36$ **e** $5x(x - 8) = 20x$
c $(x - 5)^2 = 16x$ **f** $(x - 1)(2x + 1) = 0$

- 15** Van een rechthoek is de oppervlakte 84 cm^2 . De lengte is 5 cm meer dan de breedte.
16 Stel de breedte is $x \text{ cm}$.
 Bereken de afmetingen van de rechthoek door een vergelijking op te lossen.

Herhaling

7.1 De vergelijking $x^2 = c$

1 Bij de vergelijking $x^2 = c$ heb je drie mogelijkheden.



$c > 0$	$c = 0$	$c < 0$
$x^2 = 20$ $x = \sqrt{20}$ of $x = -\sqrt{20}$ $x \approx 4,47$ of $x \approx -4,47$	$x^2 = 0$ $x = 0$	$x^2 = -36$ geen oplossing
Er zijn twee oplossingen.	Er is één oplossing.	Er is geen oplossing.

Hiernaast zie je hoe je $x^2 - 15 = 0$ oplost.

Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- a** $x^2 = 81$ **e** $x^2 = 0$
b $x^2 = -10$ **f** $3x^2 = 39$
c $x^2 - 8 = 0$ **g** $5x^2 = 500$
d $x^2 + 16 = 0$ **h** $0,1x^2 = 40$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 15 &= 0 \\
 +15 &+15 \\
 x^2 &= 15 \\
 x &= \sqrt{15} \text{ of } x = -\sqrt{15} \\
 x &\approx 3,87 \text{ of } x \approx -3,87
 \end{aligned}$$

2 De vergelijking $3x^2 - 5 = 22$ herleid je tot de vorm $x^2 = c$.
 Hiernaast zie je dat de oplossingen $x = 3$ en $x = -3$ zijn.



Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

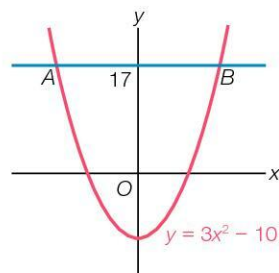
- a** $5x^2 + 4 = 84$ **d** $0,5x^2 - 2 = 17$
b $-3x^2 + 20 = 8$ **e** $8 + 0,2x^2 = 28$
c $7 - x^2 = 6$ **f** $0,1x^2 + 8 = 4$

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 5 &= 22 \\
 +5 &+5 \\
 3x^2 &= 27 \\
 :3 &:3 \\
 x^2 &= 9 \\
 x &= 3 \text{ of } x = -3
 \end{aligned}$$

3 Hiernaast zie je de grafiek van $y = 3x^2 - 10$ en de horizontale lijn op hoogte 17.

Om de coördinaten van de snijpunten A en B te berekenen, los je de vergelijking $3x^2 - 10 = 17$ op.

- a** Los de vergelijking op.
b Schrijf de coördinaten van A en B op.



figuur 7.26

7.2 Buiten haakjes brengen

4 Hiernaast zie je hoe je 150 schrijft als een product van priemfactoren. Je ziet $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.
 Schrijf als product van priemfactoren.

- a** 20 **c** 175
b 45 **d** 240

$$\begin{array}{r}
 150 \\
 2 \overline{) 150} \\
 \underline{75} \\
 75 \\
 3 \overline{) 75} \\
 \underline{25} \\
 25 \\
 5 \overline{) 25} \\
 \underline{5} \\
 5 \\
 5 \overline{) 5} \\
 \underline{5} \\
 0
 \end{array}$$

priemfactoren
 $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

- 5 De gemeenschappelijke factoren van $2ab$ en $6a$ zijn 2 en a , dus je kunt in $2ab + 6a$ de factor $2a$ buiten haakjes brengen. Je krijgt $2ab + 6a = 2a(b + 3)$. Je hebt hier een voorbeeld van ontbinden in zoveel mogelijk factoren.

$$2ab = 2 \cdot a \cdot b$$

$$6a = 2 \cdot 3 \cdot a$$

gemeenschappelijke factor $2a$

Ontbind in zoveel mogelijk factoren.

- a $9x + 15$ d $8abc + 3ac$
 b $6x + xy$ e $5x^2 + x$
 c $2p^2 - 8pq$ f $3xy - 12yz$

- 6 Bij $6x^5 + 30x^2$ kun je de factoren 6 en x^2 buiten haakjes brengen.

$$\left. \begin{array}{l} 6x^5 = \boxed{2} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{x} \cdot \boxed{x} \cdot x \cdot x \cdot x \\ 30x^2 = \boxed{2} \cdot \boxed{3} \cdot 5 \cdot \boxed{x} \cdot \boxed{x} \end{array} \right\} 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x = 6x^2 \text{ is gemeenschappelijke factor.}$$

$$\text{Dus } 6x^5 + 30x^2 = 6x^2(x^3 + 5).$$

$$\text{En zo is } 8x^3y + 12xy^2 = 4xy(2x^2 + 3y).$$

Ontbind in zoveel mogelijk factoren.

- a $5x^3 + 20x^2$ d $4a^8 - 3a + a^3$
 b $16p^2qr - 4pqr$ e $3x^3y - 6x^2y^2$
 c $12x^2y^3 + 8x^3y - 10xy^2$ f $12pq^2 - 30pq$

7.3 De product-som-methode

- 7 Hiernaast staat de tabel van -18 .

- a Maak de tabel af.

Om $x^2 - 17x - 18$ te ontbinden in factoren zoek je twee getallen met **product -18** en **som -17** .

In de tabel van -18 zie je dat je 1 en -18 moet hebben.

$$\text{Dus } x^2 - 17x - 18 = (x + 1)(x - 18).$$

- b Van welke twee getallen is het product -18 en de som 7?

$$\text{Ontbind } x^2 + 7x - 18.$$

- c Van welke twee getallen is het product -18 en de som 3?

$$\text{Ontbind } x^2 + 3x - 18.$$

product -18		som
1	-18	-17
-1	18	17
2	...	...
-2	...	...

- 8 Ontbind in factoren.

- a $x^2 - 10x + 16$ e $x^2 - 8x$
 b $x^2 - 15x - 16$ f $3x^2 - 18x$
 c $x^2 - 5x - 50$ g $x^2 - 16x - 36$
 d $x^2 + 8x + 16$ h $x^2 + 7x - 44$

Ontbinden in factoren betekent schrijven als een product.

1 gemeenschappelijke factor buiten haakjes brengen

$$3x^2 - 7x = x(3x - 7)$$

2 product-som-methode

$$x^2 - 5x - 14 = (x + 2)(x - 7)$$

7.4 Kwadratische vergelijkingen

9 Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0 \vee B = 0$.

Uit $(x-1)(2x-6) = 0$

volgt dus $x-1 = 0 \vee 2x-6 = 0$

$$x = 1 \vee 2x = 6$$

$$x = 1 \vee x = 3$$

Los op.

a $(x-1)(3x-9) = 0$

c $-5x(4x-7) = 0$

b $3x(x-8) = 0$

d $(2x-5)(6x+3) = 0$

$\vee$ betekent of



10 De vergelijking $x^2 - 3x - 10 = 0$ los je op door eerst het linkerlid te ontbinden in factoren. Daarna pas je toe: $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$. Zie hiernaast.

Los op.

a $x^2 - 4x + 3 = 0$

d $4x^2 - 8x = 0$

b $x^2 - 4x - 5 = 0$

e $x^2 - 4x - 60 = 0$

c $x^2 - 4x = 0$

f $x^2 + 4x - 12 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 10 &= 0 \\ (x+2)(x-5) &= 0 \\ x+2 &= 0 \vee x-5 = 0 \\ x &= -2 \vee x = 5 \end{aligned}$$

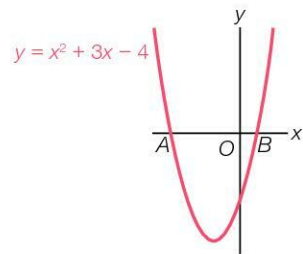
11 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $y = x^2 + 3x - 4$.

De grafiek snijdt de x -as in de punten A en B . De x -coördinaten van A en B zijn de oplossingen van de vergelijking $x^2 + 3x - 4 = 0$.

a Los op $x^2 + 3x - 4 = 0$.

b Vul in.

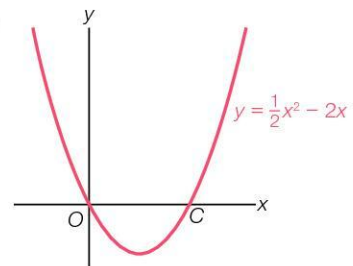
De coördinaten van A en B zijn $A(\dots, \dots)$ en $B(\dots, \dots)$.



figuur 7.27

De grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ snijdt de x -as in twee punten. Zie hiernaast.

c Bereken de coördinaten van deze snijpunten.



figuur 7.28

7.5 Kwadratische vergelijkingen oplossen

12 Het oplossen van kwadratische vergelijkingen met behulp van ontbinden in factoren gaat in drie stappen.

1 Maak het rechterlid 0.

2 Ontbind het linkerlid in factoren.

3 Pas toe: $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

Los op.

a $x^2 - 7x = 8$

d $x^2 = 7x$

b $x^2 - 7x = 8x$

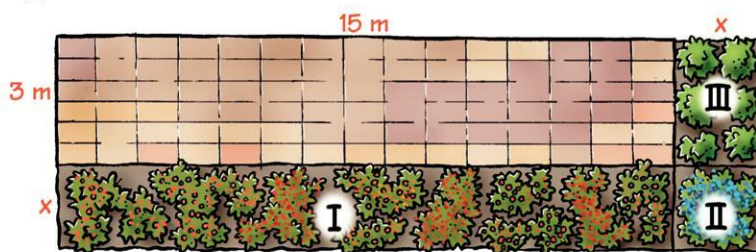
e $x^2 - 7x = 20 + x$

c $x^2 = 7x + 18$

f $x^2 + 7x + 4 = 22$

$$\begin{aligned} x^2 - 7 &= 4x - 2 \\ -4x &-4x \\ x^2 - 4x - 7 &= -2 \\ +2 &+2 \\ x^2 - 4x - 5 &= 0 \\ (x+1)(x-5) &= 0 \\ x+1 &= 0 \vee x-5 = 0 \\ x &= -1 \vee x = 5 \end{aligned}$$

- 13** Om een terras van 3 bij 15 meter ligt aan twee kanten een even brede border. De border is in drie stukken verdeeld. Zie figuur 7.29. De oppervlakte van I is $15x \text{ m}^2$.



figuur 7.29

- Hoeveel m^2 is de oppervlakte van II? En hoeveel m^2 de oppervlakte van III?
- Waarom is de oppervlakte van de border $x^2 + 18x \text{ m}^2$?

De border heeft een oppervlakte van 40 m^2 , dus $x^2 + 18x = 40$.

- Los deze vergelijking op.
- Je krijgt twee oplossingen. Welke van de oplossingen is de breedte van de border?

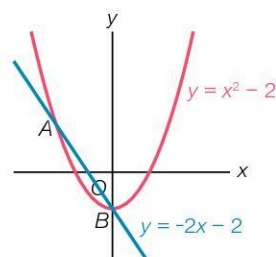
- 14** Hiernaast zie je de grafieken van $y = x^2 - 2$ en $y = -2x - 2$. Om de x -coördinaten van de snijpunten A en B te vinden, los je de vergelijking $x^2 - 2 = -2x - 2$ op.

- Los deze vergelijking op.

Je krijgt de oplossingen $x = 0$ en $x = -2$.

Bij $x = 0$ hoort $y = 0^2 - 2 = -2$, dus $B(0, -2)$.

- Bereken de y -coördinaat van A.



figuur 7.30

- 15** Los op.

- $(x + 3)(x + 5) = 0$
- $x(x + 8) = 33$
- $(x - 4)(x + 4) = 15x$
- $(5x - 2)(7x + 3) = 0$
- $2x(x - 8) = 20x$
- $(x + 3)^2 = 12x$

- 16** Van een rechthoek met een oppervlakte van 180 cm^2 is de lengte 8 cm meer dan de breedte.

Stel je de breedte $x \text{ cm}$, dan is de lengte $x + 8 \text{ cm}$.

Uit deze gegevens volgt de vergelijking $x(x + 8) = 180$.

- Licht dit toe.
- Los de vergelijking op.
- Wat zijn de afmetingen van de rechthoek?

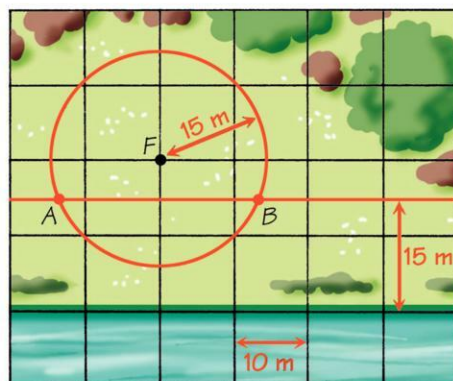
$$\begin{aligned}
 (x + 5)(x + 1) &= 21 \\
 x^2 + x + 5x + 5 &= 21 \\
 x^2 + 6x + 5 &= 21 \\
 &\quad -21 \quad -21 \\
 x^2 + 6x - 16 &= 0 \\
 (x - 2)(x + 8) &= 0 \\
 x - 2 = 0 \vee x + 8 = 0 \\
 x = 2 \vee x = -8
 \end{aligned}$$

Onderzoek De parabool

Je weet dat de grafiek van een kwadratische formule een parabool is. In dit onderzoek ontdek je een bijzonderheid van parabolen, en ga je zelf een parabool vouwen.

1 [► WERKBOEK] Langs een kanaal wordt een park aangelegd. In het park komt bij het punt F een fontein. Er wordt een pad aangelegd dat overall even ver van de fontein als van het kanaal ligt. In deze opgave ga je dat pad tekenen.

- Er is één punt in het park dat precies 10 meter van de fontein en ook 10 meter van het kanaal ligt. Teken dat punt.
- De punten A en B in figuur 7.31 liggen beide zowel 15 meter van het kanaal als 15 meter van de fontein. Licht dit toe.
- De punten C en D liggen beide zowel 20 meter van het kanaal als 20 meter van de fontein. Teken deze punten. Gebruik hierbij een cirkel met middelpunt F en een lijn evenwijdig met het kanaal.
- Teken op dezelfde manier de punten die tot de fontein en het kanaal de volgende afstanden hebben: 25, 30, 40, 50, 60, 70, 80 en 90 meter.
- Teken door de gevonden punten het gevraagde pad.
- Het getekende pad is de parabool met formule $y = 0,025x^2$. Teken in je figuur de x -as en de y -as. Welk bijzonder punt van dit assenstelsel heb je bij vraag a getekend?



figuur 7.31

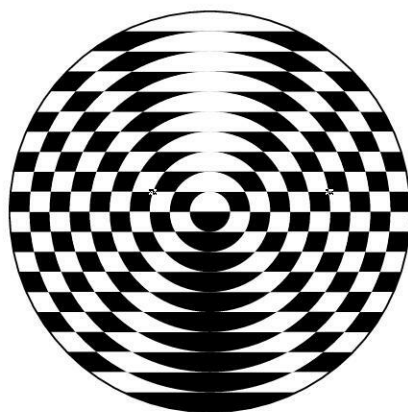
Elk punt van de parabool in opgave 1 heeft dezelfde bijzonderheid: de afstand tot de fontein F is gelijk aan de afstand tot het kanaal. Het punt F heet het **brandpunt** van de parabool.

Een parabool bestaat uit alle punten die dezelfde afstand hebben tot een punt F en een lijn l . Het punt F heet het brandpunt, de lijn l heet de richtlijn van de parabool.

In de volgende opgaven gebruik je deze eigenschap.

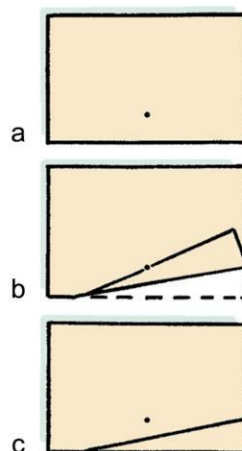
- 2** **a** Teken het punt $F(0, -\frac{1}{2})$ en de horizontale lijn l met formule $y = \frac{1}{2}$.
- b** De punten A en B hebben de afstand 2 tot l en tot F .
Teken op de manier van opgave 1 de punten A en B .
- c** Teken nog een flink aantal punten van de parabool met brandpunt F en richtlijn l , en teken door deze punten de parabool.
- d** De formule van de parabool is van de vorm $y = ax^2$.
Onderzoek welk getal a is.
- 3** De formule van de parabool met brandpunt $F(0, -2)$ en als richtlijn de x -as is van de vorm $y = ax^2 + b$.
Onderzoek welke getallen a en b zijn.

- 4** De figuur hiernaast is een voorbeeld van op-art, een richting in de schilderkunst die bekend werd in de jaren zestig van de vorige eeuw. Op-art is een afkorting van het Engelse optical art. In de figuur kun je allerlei parabolen ontdekken, hoewel deze niet zijn getekend. Onderzoek hoe deze parabolen tot stand zijn gekomen.



figuur 7.32

- 5** Op een rechthoekig vel papier is boven het midden van de onderkant een stip getekend. Zie figuur 7.33a.
- Je kunt het papier zo vouwen, dat de onderkant langs de stip valt. Zie figuur 7.33b.
- In figuur 7.33c is het papier weer opgevouwen en zie je de vouwlijn die zo is gemaakt.
- a** Onderzoek welke meetkundige figuur ontstaat als je een flink aantal keer op de manier van figuur 7.33 vouwt. Kleur deze figuur groen.
- b** Onderzoek door meten of de groene figuur inderdaad een parabool is.



figuur 7.33

Inhoud en vergroten

Het vliegtuig op de foto is een schaalmodel dat radiografisch bestuurbaar is. Zo'n model noem je een RC-model. RC staat voor Radio Control. Een RC-toestel is een verkleinde versie van het werkelijke toestel.

Zo is er van de 72 meter lange Airbus A380 een RC-model van 4,80 meter.

Het model is dus 15 keer zo klein als het werkelijke vliegtuig.

Het kan echt vliegen en verbruikt dan 1,2 liter brandstof per minuut.

Wat leer je?

- De formule voor de inhoud van prisma, cilinder, piramide en kegel.
- Dat je bij schaalmodellen met gelijkvormige figuren te maken hebt.
- Hoe je bij gelijkvormige figuren de vergrotingsfactor berekent.
- Dat bij vergrotingsfactor k de oppervlakte k^2 keer zo groot is en de inhoud k^3 keer zo groot.

A large white number 8 is superimposed on the background image. A small white RC airplane is flying through the right side of the number 8.



Voorkennis Oppervlakten

Theorie A Oppervlakte van vlakke figuren

Je kent de volgende formules voor het berekenen van oppervlakten.

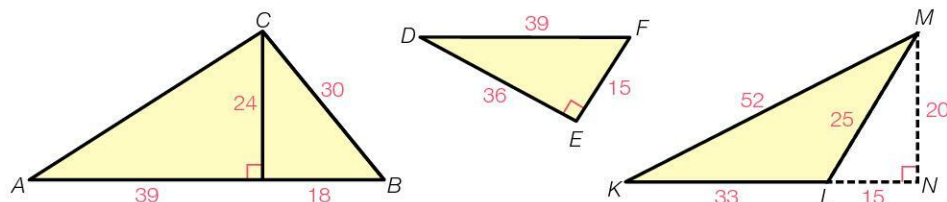
opp rechthoek = lengte $\times$ breedte

opp driehoek = $\frac{1}{2} \times$ zijde $\times$ bijbehorende hoogte

opp cirkel = $\pi \times$ straal²

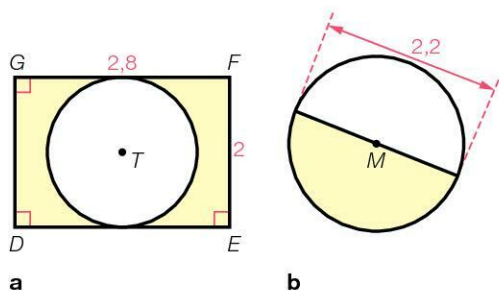
<p>opp $\triangle ABC =$ $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD =$ $\frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 1,2 = 0,84 \text{ cm}^2$</p>	<p>opp $\triangle PQR =$ $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot RS =$ $\frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 1,6 = 0,48 \text{ cm}^2$</p>	<p>diameter = 1,8 cm, dus straal = 0,9 cm opp cirkel = $\pi \cdot 0,9^2 \approx$ 2,54 cm²</p>

1 Bereken van elk van de driehoeken in figuur 8.1 de oppervlakte.



figuur 8.1 De afmetingen zijn in mm.

2 Bereken van elk geel gekleurd gebied in figuur 8.2 de oppervlakte in cm². Rond af op twee decimalen.



a

b

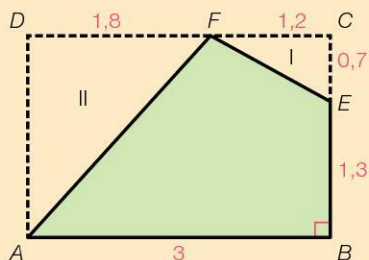
figuur 8.2 De afmetingen zijn in cm.

Theorie B Samengestelde figuren

De oppervlakte van ingewikkelde figuren krijg je door de figuur te splitsen in driehoeken of rechthoeken.

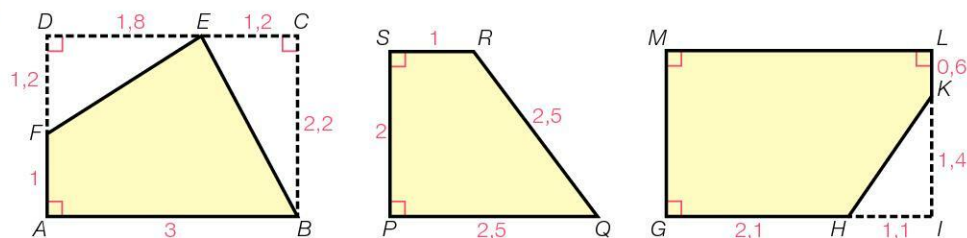
Soms is het handiger een stukje aan de figuur toe te voegen, zodat je een rechthoek krijgt. Zo is hiernaast opp $ABEF = \text{opp } ABCD - \text{opp I} - \text{opp II} =$

$$3 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot 1,2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,8 = 3,78 \text{ cm}^2.$$



figuur 8.3 De afmetingen zijn in cm.

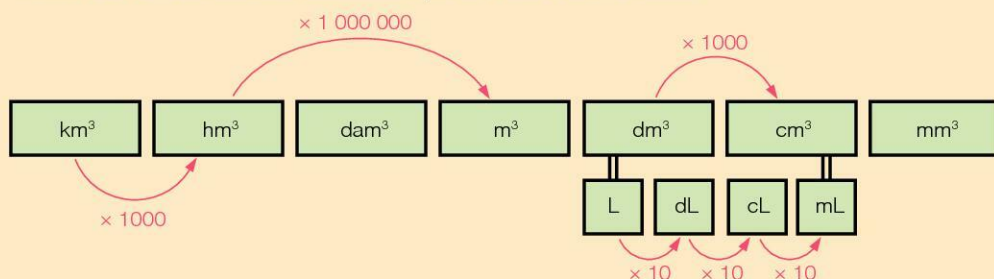
- 3 Bereken de oppervlakte van de geel gekleurde gebieden in figuur 8.4.



figuur 8.4 De afmetingen zijn in cm.

Theorie C Inhoudseenheden

Voorbeelden van inhoudseenheden zijn m^3 , dm^3 , cm^3 en mm^3 .



Een veelgebruikte inhoudseenheid is de liter (L).

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$$

Verder is $1 \text{ L} = 10 \text{ dL} = 100 \text{ cL} = 1000 \text{ mL} = 1000 \text{ cm}^3$.

- 4 Vul in.

a $1,2 \text{ m}^3 = \dots \text{ dm}^3$

b $325 \text{ cm}^3 = \dots \text{ dm}^3$

c $7000 \text{ mm}^3 = \dots \text{ cm}^3$

d $12 \text{ dm}^3 = \dots \text{ L}$

e $18 \text{ cm}^3 = \dots \text{ mL}$

f $4,5 \text{ L} = \dots \text{ dm}^3$

g $12 \text{ L} = \dots \text{ cL}$

h $0,7 \text{ L} = \dots \text{ dL}$

i $1,2 \text{ L} = \dots \text{ mL}$

- 5 Vul in.

a $7,3 \text{ m}^3 = \dots \text{ dm}^3 = \dots \text{ L}$

b $6800 \text{ cm}^3 = \dots \text{ dm}^3 = \dots \text{ L}$

c $50000 \text{ mm}^3 = \dots \text{ cm}^3 = \dots \text{ mL}$

d $5,2 \text{ dm}^3 = \dots \text{ L} = \dots \text{ dL}$

e $0,2 \text{ dm}^3 = \dots \text{ L} = \dots \text{ cL}$

f $350 \text{ cm}^3 = \dots \text{ mL} = \dots \text{ cL}$

8.1 Inhoud prisma en cilinder



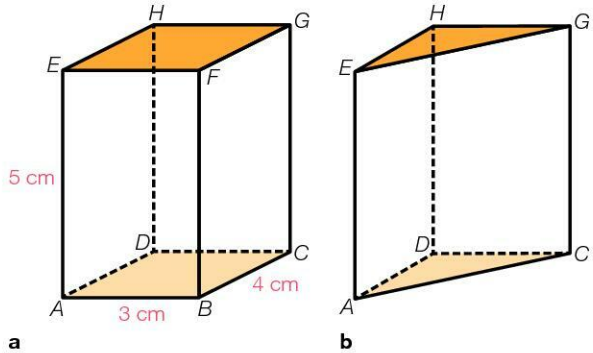
In dit hoofdstuk mag je de rekenmachine gebruiken.

0 1 De inhoud van een balk bereken je met de formule
inhoud balk = lengte $\times$ breedte $\times$ hoogte.

- a** Bereken de inhoud van de balk in figuur 8.5a. Denk aan het vermelden van de eenheid.

De balk wordt doormidden gezaagd. Daardoor ontstaan twee prisma's. Een van die prisma's zie je in figuur 8.5b.

- b** Hoeveel is de inhoud van dat prisma?
c Bereken de oppervlakte van het grondvlak ACD van het prisma.
d De hoogte van het prisma is AE . Geldt voor het prisma de formule
inhoud = opp grondvlak $\times$ hoogte?

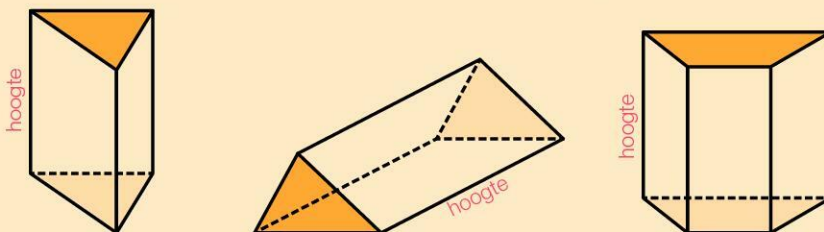


figuur 8.5

Theorie A De inhoud van een prisma

In figuur 8.6 zijn drie prisma's getekend. Elk prisma heeft twee evenwijdige zijvlakken: het grondvlak en het bovenvlak. De andere zijvlakken zijn rechthoeken.

Het grondvlak en het bovenvlak zijn gekleurd. Je ziet dat het grondvlak niet altijd aan de onderkant zit. De ribben die het grond- en bovenvlak verbinden, heten de **opstaande ribben**. De lengte van zo'n opstaande ribbe heet de **hoogte van het prisma**.



figuur 8.6

Net zoals bij een balk is elke doorsnede evenwijdig met het grondvlak gelijk aan het grondvlak. Vandaar dat ook voor de inhoud van een prisma geldt

$$\text{inhoud prisma} = \text{opp grondvlak} \times \text{hoogte}$$



De hoogte van een prisma is de afstand tussen grond- en bovenvlak.

Voorbeeld

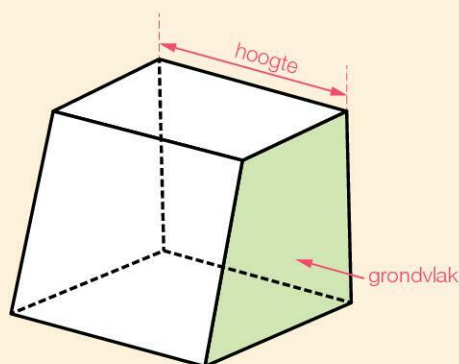
In figuur 8.7 zie je een nachtkastje.
Bereken de inhoud in liter.

Aanpak

Het nachtkastje heeft de vorm van een prisma.
Het grondvlak van het prisma is de zijkant.
Schets het grondvlak en bereken de oppervlakte.
Zet in de schets letters bij de hoekpunten en gebruik

de formules opp driehoek = $\frac{1}{2} \times \text{zijde} \times \text{hoogte}$ en

inhoud prisma = opp grondvlak $\times$ hoogte.



Uitwerking

Het grondvlak is vierhoek $ABCD$.

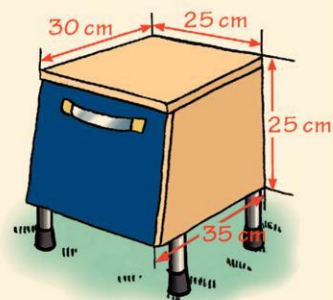
opp grondvlak = opp $\triangle AED$ + opp $EBCD$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 25 + 30 \cdot 25 = 812,5 \text{ cm}^2$$

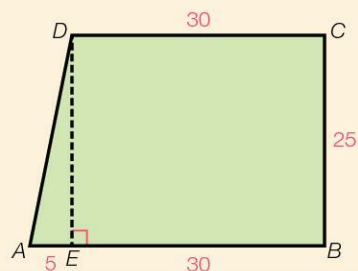
hoogte prisma = 20 cm

inhoud prisma = $812,5 \cdot 20 = 16\,250 \text{ cm}^3 = 16,25 \text{ L}$

Dus de inhoud van het nachtkastje is 16,25 liter.

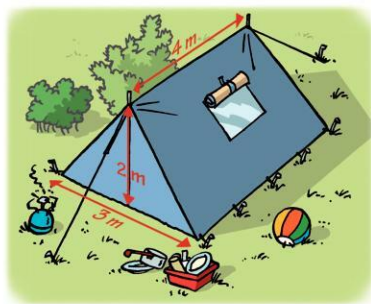


figuur 8.7



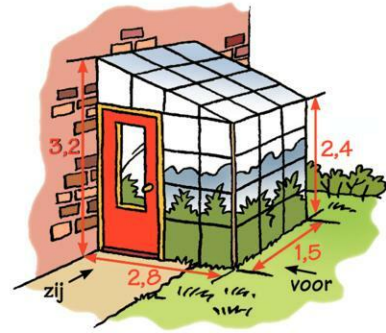
2 Het tentje in figuur 8.8 heeft de vorm van een prisma.

- Schets het grondvlak van het prisma. Zet letters bij de hoekpunten.
- Bereken de oppervlakte van het grondvlak.
- Bereken de inhoud van het tentje in m^3 .



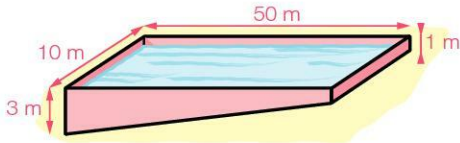
figuur 8.8

- 3** In figuur 8.9 zie je een groentekas.
Bereken de inhoud in m^3 . Rond af op één decimaal.



figuur 8.9 De afmetingen zijn in meter.

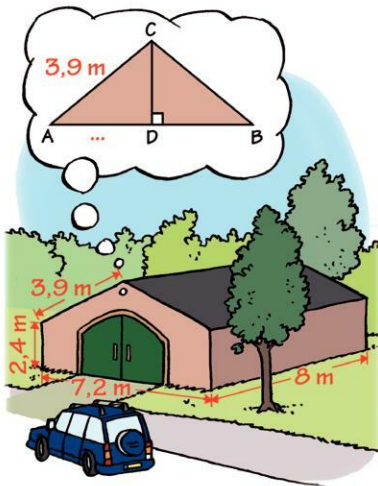
- A 4** Een zwembad is 50 meter lang en 10 meter breed. De diepte neemt toe van 1 meter tot 3 meter. Zie figuur 8.10.



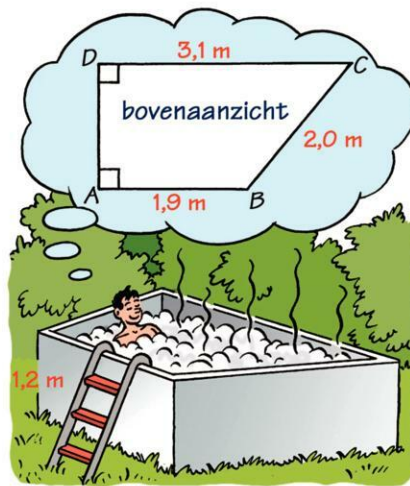
figuur 8.10 De afmetingen zijn in meter.

- Bereken hoeveel liter water in het zwembad kan.
- Bij het vullen van het zwembad komt er per minuut 225 liter water in het bad.
Hoeveel uur duurt het vullen? Rond af op gehele.

- 5** In figuur 8.11 zie je een garage.
- Bereken met de stelling van Pythagoras de lengte van CD .
 - Hoe hoog is de garage?
 - Bereken de inhoud van de garage.



figuur 8.11

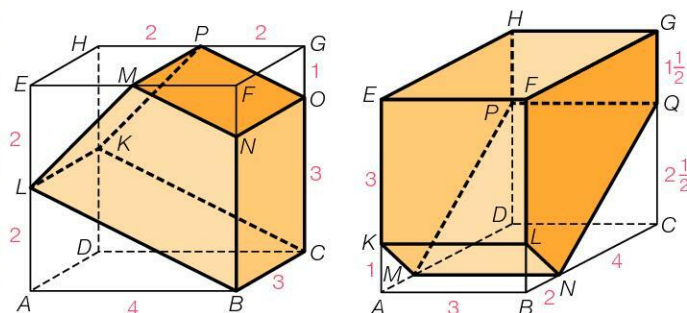


figuur 8.12

- A 6** In de tuin van de familie Schilderink is een prismavormige jacuzzi. Zie figuur 8.12.
- Hoeveel liter water zit er in de jacuzzi als deze tot de rand is gevuld?
 - De jacuzzi is aan de binnenkant geheel betegeld.
Bereken hoeveel m^2 betegeld is.

7

In figuur 8.13 is twee keer een prisma in een balk getekend. Bereken van beide prisma's de inhoud.



figuur 8.13 De afmetingen zijn in cm.

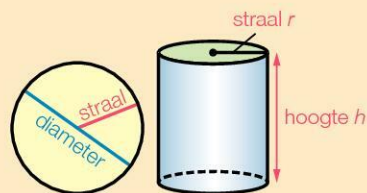
Theorie B De inhoud van een cilinder

Een cilinder heeft een grondvlak en een hoogte.

Net als bij een prisma geldt voor een cilinder
inhoud = opp grondvlak $\times$ hoogte.

Omdat de oppervlakte van een cirkel gelijk is aan
 $\pi \times \text{straal}^2$, krijg je

$$\text{inhoud cilinder} = \pi \times \text{straal}^2 \times \text{hoogte}$$



$$\text{opp cirkel} = \pi \times \text{straal}^2$$

$$\text{omtrek cirkel} = \pi \times \text{diameter}$$

$$\text{inhoud cilinder} = \pi r^2 h$$

Voorbeeld

De vaas in figuur 8.14 heeft de vorm van een cilinder. Bereken de inhoud van de vaas in liter. Rond af op één decimaal.

Uitwerking

$$\text{straal} = 18 : 2 = 9 \text{ cm}$$

$$\text{inhoud cilinder} = \pi \cdot 9^2 \cdot 25 = 6361,7... \text{ cm}^3 \approx 6,4 \text{ L}$$

Dus de inhoud van de vaas is 6,4 liter.



figuur 8.14

8

Van een grote verfbus is de diameter 18,2 cm en de hoogte 17,7 cm. Bereken de inhoud van de bus in liter. Rond af op één decimaal.

9

Chris koopt een blik soep. Op het etiket staat: inhoud 800 mL. Chris wil weten of dat klopt. Hij meet de diameter en de hoogte van het blik en vindt: diameter = 10 cm en hoogte = 10,3 cm.

a Laat met een berekening zien dat er 800 mL in het blik kan.

b Hoeveel gehele mL zou er nog bij kunnen?

A 10 Olijfolie is onderdeel geworden van een moderne leefstijl. Tegenwoordig zijn er in Nederland overal winkels speciaal voor olijfolie.

Het vat olijfolie in figuur 8.15 heeft een diameter van 30 cm en een hoogte van 54 cm.

a Restaurant Milano vult flessen van 0,3 L met Molise olijfolie uit het vat.

Hoeveel flessen kunnen er gevuld worden?

b Om het vat zitten strippen.

Hoeveel cm is de lengte van één zo'n strip? Rond af op één decimaal.



figuur 8.15

A 11 Soepblikken worden verpakt in dozen waarin precies 20 blikken passen. Elk blik heeft een diameter van 7,5 cm en een hoogte van 15 cm.

a Bereken de inhoud van een blik in cm^3 . Rond af op gehelen.

b Hoeveel cm^3 van de doos is niet gevuld? Rond af op gehelen.



A 12 In Berlijn staat het AquaDom, een groot cilindervormig aquarium met meer dan 50 soorten vissen. Het aquarium heeft een hoogte van 16 meter en een diameter van 11 meter. In het midden zit een cilindervormige glazen lift met een diameter van 3,5 m.

a Bereken de inhoud van het aquarium in m^3 . Rond af op gehelen.

Het vullen van het aquarium duurde 3 volle dagen.

b Bereken met welke snelheid het aquarium werd gevuld. Geef het antwoord in liter per minuut. Rond af op gehelen.

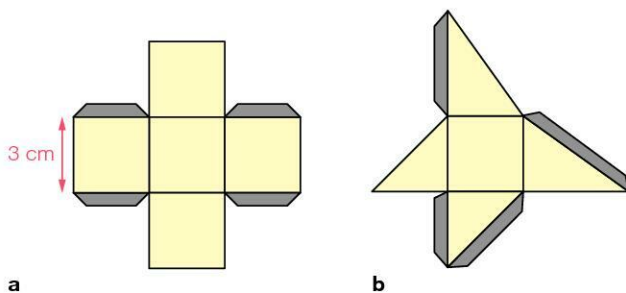


8.2 Inhoud piramide en kegel

O 13 [▶ WERKBOEK] In figuur 8.16

zie je een bouwplaat van een kubusvormig doosje zonder deksel en een bouwplaat van een piramide.

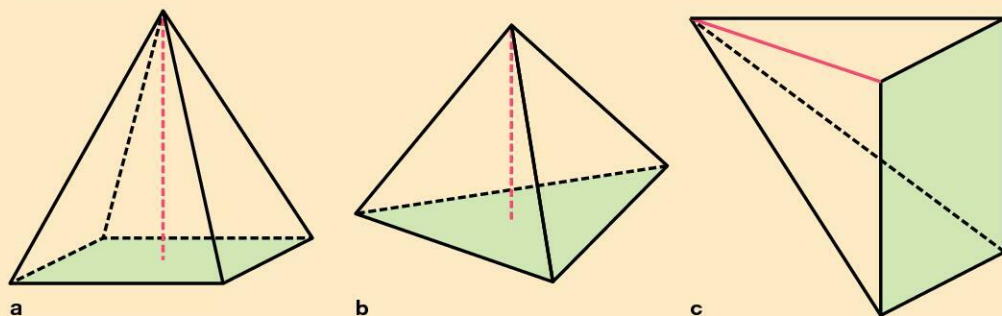
- Knip de bouwplaat van het doosje uit en zet het doosje in elkaar.
- Knip de drie bouwplaten van de piramide uit en maak de drie piramides.
- Leg de drie piramides zo in de kubus dat ze er precies in passen.
- Bereken de inhoud van de kubus.
Hoeveel cm^3 is dus de inhoud van één piramide?



a
figuur 8.16

Theorie A De inhoud van een piramide

In figuur 8.17 zie je enkele piramides. Elke piramide heeft een grondvlak, een top en een hoogte. Steeds is het grondvlak groen en de hoogte rood gekleurd. De hoogte is de afstand van de top tot het grondvlak.



a
figuur 8.17

In opgave 13 heb je gezien dat de inhoud van elke in elkaar geplakte piramide precies het derde deel is van de inhoud van de kubus met hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte.

Omdat $\text{inhoud kubus} = \text{opp grondvlak} \times \text{hoogte}$ krijg je

$$\text{inhoud piramide} = \frac{1}{3} \times \text{opp grondvlak} \times \text{hoogte}.$$

Deze formule geldt voor elke piramide.

$$\text{inhoud piramide} = \frac{1}{3} \times \text{opp grondvlak} \times \text{hoogte}$$

Voorbeeld

Van de piramidevormige kaars in figuur 8.18 is het grondvlak een vierkant met zijden van 8 cm. De hoogte is 15 cm. Bereken de inhoud van de kaars.

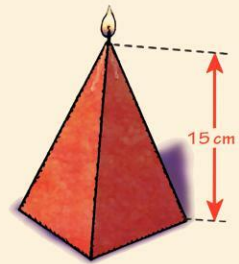
Uitwerking

$$\text{opp grondvlak} = 8 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^2$$

$$\text{hoogte piramide} = 15 \text{ cm}$$

$$\text{inhoud piramide} = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 15 = 320 \text{ cm}^3$$

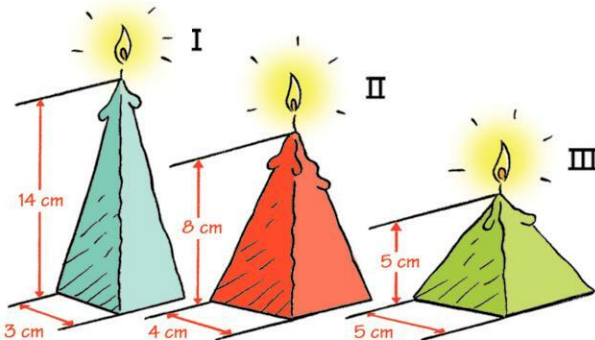
Dus de inhoud van de kaars is 320 cm^3 .



figuur 8.18

- 14** Van de wigwam in figuur 8.19 is het grondvlak een vierkant met zijden van 1,5 meter. De hoogte is 1,8 meter. Bereken de inhoud van de wigwam.

- 15** Van de drie piramidevormige kaarsen in figuur 8.20 zijn de grondvlakken vierkanten.



figuur 8.20

- a** Bereken van elke kaars de inhoud.

Een brandende kaars verbruikt 13 cm^3 was per uur. Tim steekt de kaarsen één voor één aan, elke volgende nadat de vorige is opgebrand. De eerste kaars steekt Tim om 13:00 uur aan.

- b** Hoe laat is de laatste kaars opgebrand? Geef het antwoord in minuten nauwkeurig.

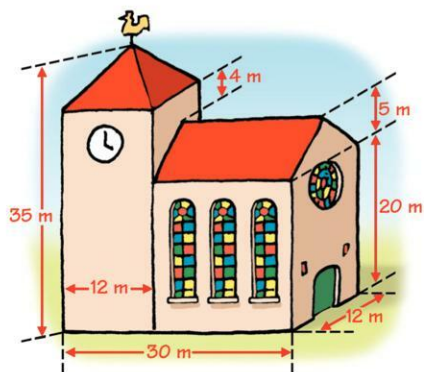


figuur 8.19

$$\begin{aligned} 0,3 \text{ uur} &= \\ 0,3 \cdot 60 \text{ minuten} &= \\ 18 \text{ minuten} \end{aligned}$$

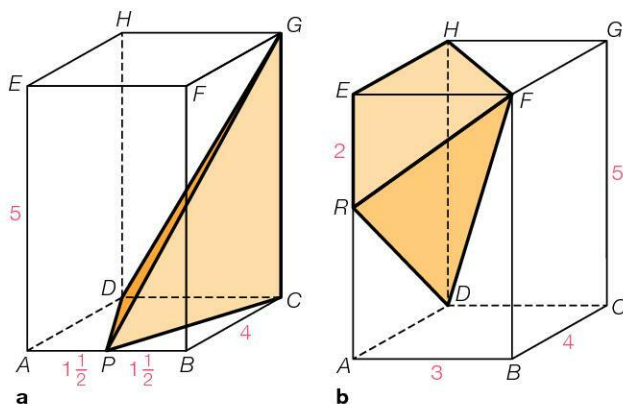
- A 16** Kaarsenmakerij Waks heeft 20 liter vloeibaar kaarsvet in een vat zitten. Hiervan worden piramidevormige kaarsen gemaakt. Elke kaars heeft een hoogte van 9 cm. Het grondvlak is een vierkant van 3 bij 3 cm. Hoeveel kaarsen kan Waks van het kaarsvet maken?

- A 17** Zie figuur 8.21.
Bereken de inhoud van de kerk in m^3 .



figuur 8.21

- 18** In figuur 8.22 is twee keer een piramide in een balk getekend.
Bereken de inhoud van beide piramides.



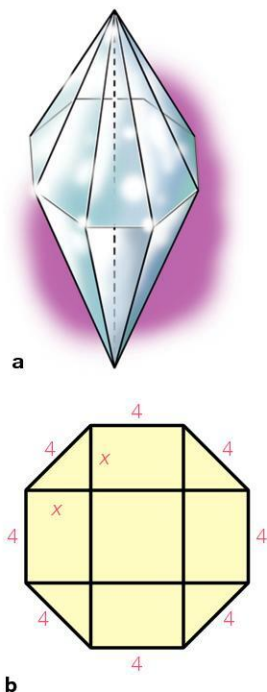
figuur 8.22 De afmetingen zijn in cm.

- 19** De diamant in figuur 8.23a bestaat uit twee piramides. De bovenste piramide heeft een hoogte van 6 mm en de onderste van 8 mm. Het grondvlak van beide piramides is een regelmatige achthoek met zijden van 4 mm. Zie figuur 8.23b.

- Toon met de stelling van Pythagoras aan dat $x = \sqrt{8}$.
- Toon aan dat de oppervlakte van de achthoek, afgerond op twee decimalen, gelijk is aan $77,25 \text{ mm}^2$.
- Bereken de inhoud van de diamant in mm^3 . Rond af op één decimaal.

De grootte van een diamant wordt weergegeven in karaat.
Eén karaat komt overeen met 200 milligram.
Diamant weegt $3,51 \text{ mg}$ per mm^3 .

- Bereken hoeveel karaat de diamant is.
Rond af op gehele.



b

figuur 8.23

Theorie B De inhoud van een kegel

Een kegel heeft een grondvlak en een hoogte.

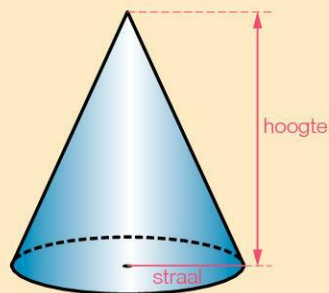
Het grondvlak is een cirkel.

Net als bij de piramide geldt

inhoud kegel = $\frac{1}{3} \times \text{opp grondvlak} \times \text{hoogte}$.

Omdat opp grondvlak = $\pi \times \text{straal}^2$, krijg je

$$\text{inhoud kegel} = \frac{1}{3} \times \pi \times \text{straal}^2 \times \text{hoogte}$$



figuur 8.24

Voorbeeld

In een winkel mag je voor 2,50 euro een puntzak met snoep tot aan de rand vullen.

Bereken de inhoud van de zak in cm^3 . Rond af op één decimaal.

Uitwerking

straal = $12 : 2 = 6 \text{ cm}$

inhoud kegel = $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 25 \approx 942,5 \text{ cm}^3$

Dus de inhoud van de zak is $942,5 \text{ cm}^3$.



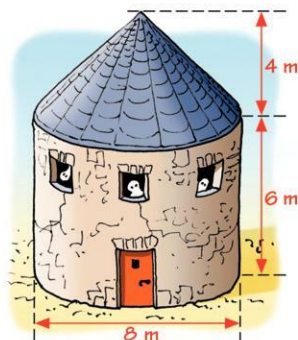
figuur 8.25

- 20 Zie het kegelvormige glas in figuur 8.26.
Bereken hoeveel jus d'orange er in het glas kan. Geef het antwoord in cm^3 en rond af op één decimaal.



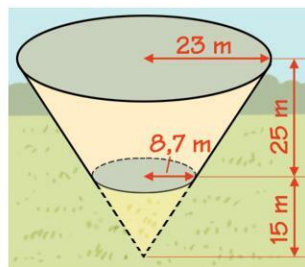
figuur 8.26

- 21 In figuur 8.27 zie je een toren die bestaat uit een cilinder en een kegel.
Bereken de inhoud van de toren in m^3 . Rond af op gehele.



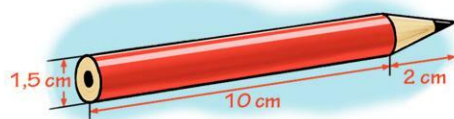
figuur 8.27

- 22** De kegelvormige watertoren hiernaast is gedeeltelijk in de grond ingebouwd. De top van de kegel bevindt zich 15 meter onder de grond. Het deel dat 25 meter boven de grond uitsteekt is het waterreservoir. Hoeveel m^3 water kan het reservoir bevatten? Rond af op gehelen.



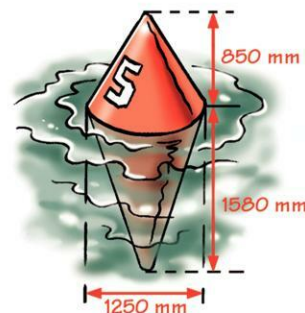
figuur 8.28

- A 23** **a** Bereken de inhoud van het potlood in figuur 8.29. Geef het antwoord in cm^3 en rond af op twee decimalen.
b Het potlood is gemaakt van hout dat $0,9 \text{ gram per cm}^3$ weegt. De stift is $2,3 \text{ cm}^3$ en weegt $1,2 \text{ gram per cm}^3$. Hoeveel gram weegt het potlood? Rond af op één decimaal.



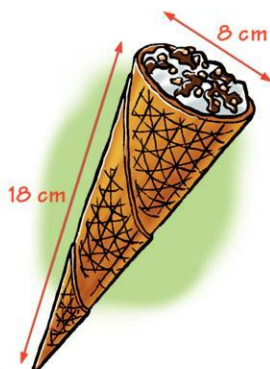
figuur 8.29

- A 24** Met behulp van boeien worden gevaarlijke plaatsen in het water aangegeven. In figuur 8.30 zie je een boei waarvan een gedeelte onder water en een gedeelte boven water zit.
a Bereken de inhoud van de boei in liter. Rond af op gehelen.
b Hoeveel procent van de boei zit boven water?

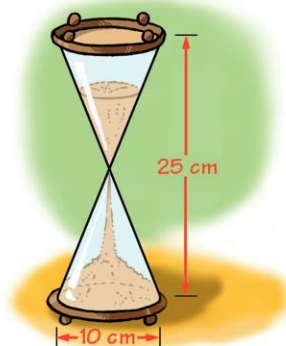


figuur 8.30

- 25** Het hoorntje in figuur 8.31 is tot de rand gevuld met ijs. Het ijs weegt $650 \text{ gram per liter}$. Bereken hoeveel gram ijs er in het hoorntje zit. Rond af op gehelen.



figuur 8.31



figuur 8.32

- 26** In figuur 8.32 zie je een zandloper die uit twee even grote kegels bestaat. De onderste kegel is geheel gevuld met zand dat $1,5 \text{ kg per dm}^3$ weegt. Na het omdraaien van de zandloper duurt het 5 minuten tot het zand in de andere kegel is gelopen. Bereken hoeveel gram zand er per seconde door de opening van de zandloper stroomt. Rond af op twee decimalen.

8.3 Vergroten en verkleinen

O 27

De Airbus A380 is het grootste passagiersvliegtuig. Het vliegtuig kan maximaal 868 passagiers vervoeren en is volledig tweedeks. De spanwijdte van het toestel is 79,8 meter. Voor een RC-model wordt een schaalmodel gebruikt met een spanwijdte van 5,32 meter.



a Vul de tabel in.

Airbus A380	model	werkelijkheid
spanwijdte vleugels	5,32 meter	79,8 meter
lengte vliegtuig	4,80 meter	...
hoogte vliegtuig	...	24,6 meter

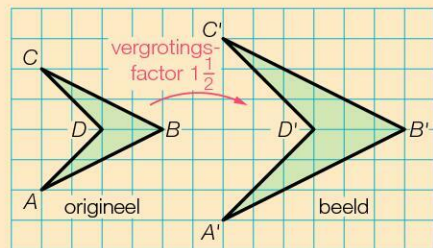
b Op welk schaal is het model gemaakt?

Theorie A Vergrotingsfactor

Bij het schaalmodel van de Airbus A380 hoort de schaal 1 : 15. De werkelijke afmetingen zijn dus 15 keer zo groot als die van het model. We zeggen dat de **vergrotingsfactor** 15 is.

In figuur 8.33 zie je vierhoek $ABCD$ en de vergroting $A'B'C'D'$. Alle zijden zijn $1\frac{1}{2}$ keer zo lang. De vergrotingsfactor is $1\frac{1}{2}$.

De figuur waarvan je uitgaat, heet het **origineel**. De figuur die je krijgt, heet het **beeld**.



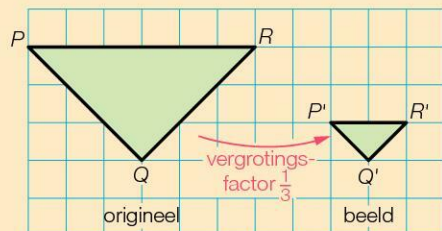
figuur 8.33

In figuur 8.34 zie je het origineel $\triangle PQR$ en het beeld $\triangle P'Q'R'$. De zijden van $\triangle P'Q'R'$ zijn 3 keer zo klein als die van $\triangle PQR$.

Je kunt ook zeggen: elke zijde is $\frac{1}{3}$ keer zo lang.

De vergrotingsfactor is $\frac{1}{3}$.

Ook bij een verkleining hoort dus een vergrotingsfactor. Deze factor is kleiner dan 1. Zo is de vergrotingsfactor bij het schaalmodel van de Airbus A380 in opgave 27 gelijk aan $\frac{1}{15}$.



figuur 8.34

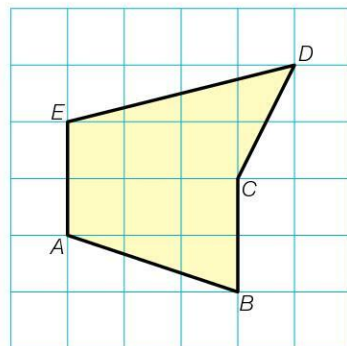
Bij vergrotingen en verkleiningen hebben het origineel en het beeld dezelfde vorm. We zeggen: origineel en beeld zijn **gelijkvormig**.



Van de 828 meter hoge Burj Khalifa in Dubai zijn miniaturen te koop die 10000 keer zo klein zijn als het origineel. De vergrotingsfactor is dus $\frac{1}{10000} = 0,0001$. Zo'n miniatuur is dus $0,0001 \cdot 828 = 0,0828$ meter = 8,28 cm hoog.

28 Gegeven is vijfhoek $ABCDE$ in figuur 8.35.

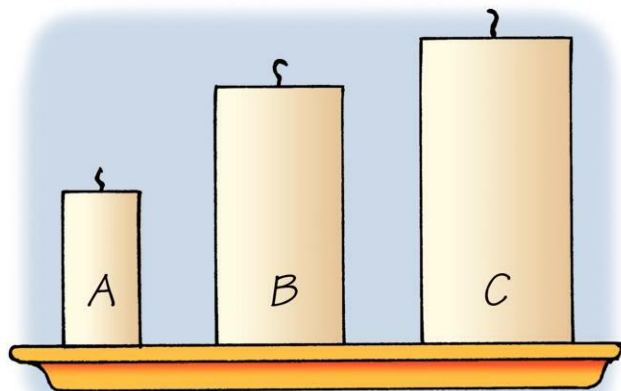
- Teken met vergrotingsfactor 3 het beeld $A'B'C'D'E'$ van vijfhoek $ABCDE$. Waar je het beeld tekent doet er niet toe.
- Teken met vergrotingsfactor 0,5 het beeld $A''B''C''D''E''$ van vijfhoek $ABCDE$.



figuur 8.35

29 Hieronder zie je drie kaarsen.

- Meet hoeveel keer zo groot de hoogte van kaars B is vergeleken met die van kaars A . En hoeveel keer zo groot is de breedte?
- Kaars B is een vergroting van kaars A . Geef de vergrotingsfactor.
- Kaars C is een vergroting van kaars A . Geef de vergrotingsfactor.



figuur 8.36

Theorie B Vergrotingsfactor berekenen

In een winkel in New York zijn miniatures van het Empire State Building te koop. Miniatuur B is een vergroting van miniatuur A.

Om de vergrotingsfactor te weten te komen, meet je overeenkomstige afmetingen. Meet bijvoorbeeld de hoogte.

Je krijgt

- hoogte miniatuur A is 3,2 cm
- hoogte miniatuur B is 5,6 cm.

De vergrotingsfactor is

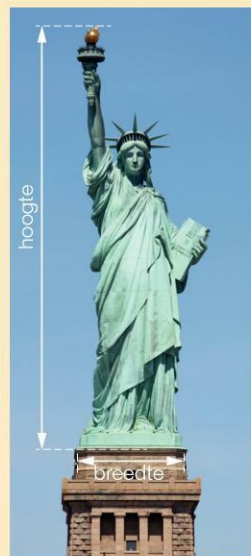
$$k = \frac{\text{hoogte B}}{\text{hoogte A}} = \frac{5,6}{3,2} = 1,75.$$

Meet je niet de hoogte maar een andere afmeting, dan krijg je dezelfde k . Neem je bijvoorbeeld de breedte, dan krijg je

$$k = \frac{\text{breedte B}}{\text{breedte A}} = \frac{1,4}{0,8} = 1,75.$$



A



B

figuur 8.37

Voor de vergrotingsfactor k geldt

$$k = \frac{\text{afmeting beeld}}{\text{overeenkomstige afmeting origineel}}$$

De vergrotingsfactor geven we aan met k .



Voorbeeld

In figuur 8.38 zie je de scooters I en II. Scooter II is een vergroting van scooter I. Zoals je ziet is van de vergroting slechts een gedeelte zichtbaar.

- Bereken de vergrotingsfactor.
- Bereken in cm de lengte van de scooter in de vergroting.

Aanpak

- Meet een afmeting in het origineel en de overeenkomstige afmeting in het beeld. Neem bijvoorbeeld de lijnstukken PQ en $P'Q'$.

Uitwerking

- Het origineel is scooter I en het beeld is scooter II. Opmeten geeft $PQ = 1,9$ cm en $P'Q' = 3,8$ cm.

$$\text{Dus } k = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{3,8}{1,9} = 2.$$

- lengte origineel = 3,2 cm
lengte beeld = $k \cdot \text{lengte origineel} = 2 \cdot 3,2 = 6,4$ cm



figuur 8.38

In figuur 8.39 is Xbox controller II een verkleining van Xbox controller I. Dus I is origineel en II is beeld.

De vergrotingsfactor is $k = \frac{\text{breedte beeld}}{\text{breedte origineel}} = \frac{3,0}{3,6} \approx 0,8$.

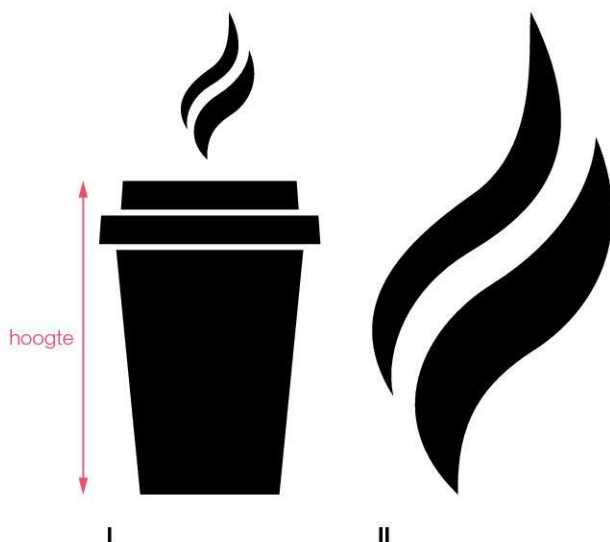
Advies

Let bij het berekenen van de vergrotingsfactor k op wat het origineel is en wat het beeld. Zet dat er in de uitwerking bij.



30 In figuur 8.40 zie je een koffiebeker en een deel van een vergroting.

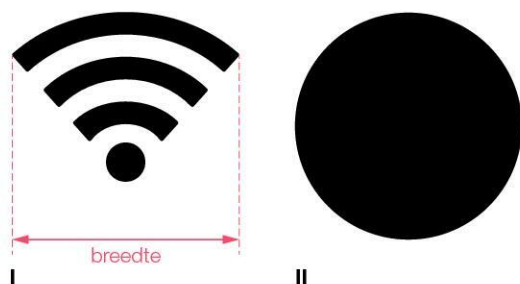
- Bereken de vergrotingsfactor. Rond af op één decimaal.
- Bereken de hoogte van de beker in de vergroting.



figuur 8.40

31 In figuur 8.41 zie je het wifi icoon en een deel van een vergroting.

- Bereken de vergrotingsfactor. Rond af op één decimaal.
- Bereken de breedte van het wifi icoon in de vergroting.



figuur 8.41

32 In figuur 8.42 zie je de ramen van de eerste verdieping van een kleurplaat van een huis. Daaronder staat een verkleining van de kleurplaat.

- a** Bereken de vergrotingsfactor. Rond af op twee decimalen.
- b** Bereken de hoogte van het huis op de kleurplaat.



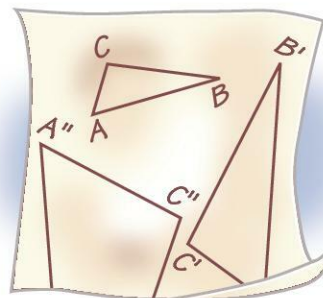
figuur 8.42

A 33 In figuur 8.43 zie je $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ en $\triangle A''B''C''$. Van twee driehoeken is slechts een gedeelte zichtbaar. $\triangle A'B'C'$ is een vergroting van $\triangle ABC$.

- a** Bereken de vergrotingsfactor. Rond af op één decimaal.
- b** Bereken de lengte van de zijde $A'C'$.

$\triangle A''B''C''$ is een vergroting van $\triangle ABC$.

- c** Bereken de vergrotingsfactor. Rond af op één decimaal.
- d** Bereken de lengte van de zijde $B''C''$.



figuur 8.43

34 Van een foto met een lengte van 15 cm en een breedte van 10 cm wordt een poster gemaakt. De breedte van de poster is 88 cm.

- a** Bereken de vergrotingsfactor.
- b** Bereken de lengte van de poster.

A 35 Sem heeft een foto van 18 bij 12 cm van Messi. Hij wil de foto vergroten tot een poster om in te lijsten voor zijn kamer. Hij heeft lijsten van 80 bij 60 cm, 81 bij 54 cm, 100 bij 66 cm en 109 bij 72 cm. Sem wil de foto zo vergroten, dat de vergroting precies een lijst vult. Welke van de vier lijsten moet Sem gebruiken?



8.4 Oppervlakte bij vergroten

36 In het fotoalbum van een iPad staat een foto van 2 bij 2,5 cm van een waterval in Nepal. Door de foto te vergroten met een factor 8 bedekt de vergroting het gehele scherm van 16 bij 20 cm van de iPad.

- Hoeveel kleine foto's heb je nodig om het scherm van de iPad precies te bedekken?
- Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de vergroting als van de kleine foto?



figuur 8.44

Theorie A Van vergroting naar oppervlakte

In figuur 8.45 is rechthoek II een vergroting van rechthoek I. De vergrotingsfactor is 4.

Rechthoek I past 4 keer in de lengte en 4 keer in de breedte van rechthoek II.

Dus rechthoek I past $4 \cdot 4 = 4^2$ keer in rechthoek II.

Je kunt op deze manier begrijpen

- is de vergrotingsfactor 4, dan wordt de oppervlakte 4^2 keer zo groot
- is de vergrotingsfactor 7, dan wordt de oppervlakte 7^2 keer zo groot
- is de vergrotingsfactor 0,34, dan wordt de oppervlakte $0,34^2$ keer zo groot.

Deze regel geldt niet alleen voor rechthoeken, maar voor alle figuren.

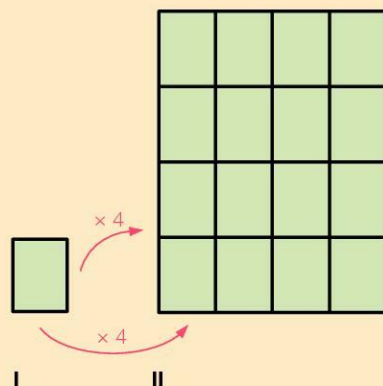
Bij vergrotingsfactor k wordt de oppervlakte k^2 keer zo groot.

In figuur 8.46 is II een vergroting van I met vergrotingsfactor 2,4.

Gegeven is dat opp I = $1,8 \text{ cm}^2$.

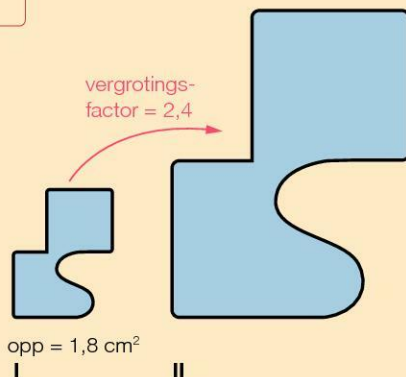
Je kunt opp II berekenen:

opp II = $2,4^2 \cdot \text{opp I} = 2,4^2 \cdot 1,8 = 10,368 \text{ cm}^2$.



figuur 8.45

Bij vergrotingsfactor k is oppervlakte beeld = $k^2 \cdot \text{oppervlakte origineel}$.



figuur 8.46

Voorbeeld

Bij vliegen met modelvliegtuigen maak je gebruik van radiosignalen.

Het symbool voor radiosignalen is icoon I hiernaast.

Icoon II is een vergroting van icoon I.

De oppervlakte van icoon I is $1,8 \text{ cm}^2$.

Bereken de oppervlakte van icoon II in cm^2 . Rond af op één decimaal.

Aanpak

Meet in origineel en beeld overeenkomstige afmetingen, bijvoorbeeld AB en $A'B'$.

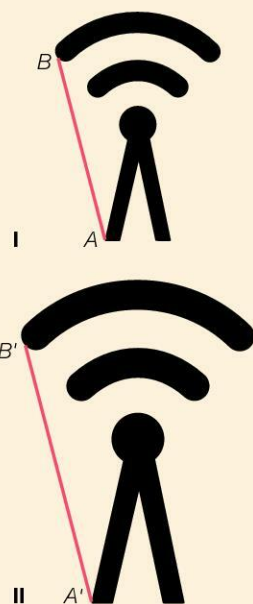
Bereken de vergrotingsfactor $k = \frac{A'B'}{AB}$.

Uitwerking

I is origineel en II is beeld.

$AB = 2,5 \text{ cm}$ en $A'B' = 3,5 \text{ cm}$, dus $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{3,5}{2,5} = 1,4$.

opp II = $k^2 \cdot \text{opp I} = 1,4^2 \cdot 1,8 \approx 3,5 \text{ cm}^2$



figuur 8.47

- 37** Hiernaast zie je twee plakplaatjes van een dolfijn.

Dolfijn II is een vergroting van dolfijn I.

Dolfijn I heeft een oppervlakte van $3,92 \text{ cm}^2$.

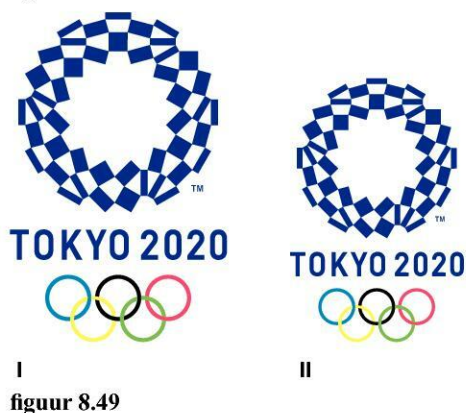
Bereken de oppervlakte van dolfijn II in cm^2 .

Rond af op twee decimalen.



figuur 8.48

- A 38** In figuur 8.49 zie je het logo van de Olympische Spelen van 2020 in Tokio (Japan). Logo II is een verkleining van logo I. Logo I heeft een oppervlakte van $10,2 \text{ cm}^2$. Bereken in cm^2 de oppervlakte van logo II. Rond af op één decimaal.



figuur 8.49

- 39** Een driehoekige postzegel heeft een oppervlakte van $4,2 \text{ cm}^2$. In een catalogus wordt de zegel vergroot afgebeeld. De vergrotingsfactor is 2,5. Bereken de oppervlakte van de postzegel in de catalogus in cm^2 .

- A 40** Voor het schilderen van een muur van 4,2 bij 1,2 meter heeft een schilder 0,9 liter verf nodig. Van een andere soortgelijke muur zijn de afmetingen drie keer zo groot. Hoeveel liter verf heeft hij voor deze muur nodig?

- A 41** Hieronder zie je op schaal 1 : 250 de plattegrond van een tuin met een vijver erin. De oppervlakte van de vijver op de plattegrond is 8 cm^2 .

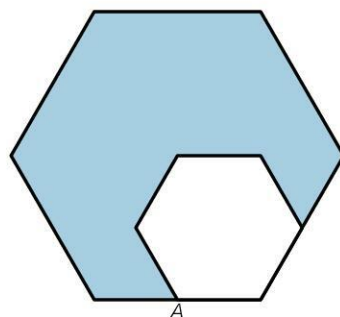


figuur 8.50

- a** De werkelijke tuin is een vergroting van figuur 8.50. Hoeveel is de vergrotingsfactor?
- b** Hoeveel m^2 is de oppervlakte van de vijver in werkelijkheid?
- c** Hoe lang en hoe breed is de hele tuin?

- 42** Ronald heeft een model van de Boeing 737. Het model heeft een lengte van 90 cm en een spanwijdte van 85 cm. De vleugeloppervlakte van het model is 1000 cm^2 . De echte Boeing 737 heeft een vleugeloppervlakte van 160 m^2 . Bereken de lengte en de spanwijdte van de echte Boeing 737.

- 43** De grote zeshoek hiernaast is een vergroting van de kleine zeshoek. Het punt A is het midden van een zijde van de grote zeshoek. Het blauwe gebied heeft een oppervlakte van 15 cm^2 . Bereken de oppervlakte van de kleine zeshoek.



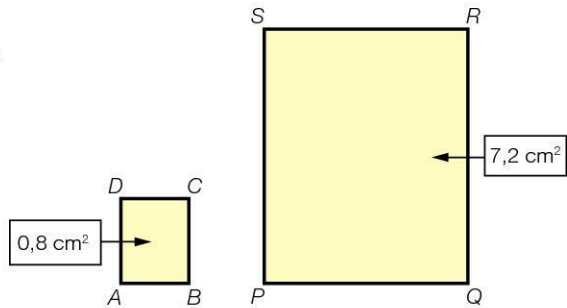
figuur 8.51

44 Rechthoek $PQRS$ is een vergroting van rechthoek $ABCD$. Zie figuur 8.52.

a Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van $PQRS$ als die van $ABCD$?

b Wat is de vergrotingsfactor? Kies uit

$k = \frac{1}{9}$, $k = 3$, $k = 9$ en $k = 81$.



figuur 8.52

Theorie B Van oppervlakte naar vergrotingsfactor

Je weet dat bij vergrotingsfactor 6 de oppervlakte van de vergroting $6^2 = 36$ keer zo groot is.

Dus omgekeerd: is bij een vergroting de oppervlakte 36 keer zo groot, dan zijn de afmetingen $\sqrt{36}$, dus 6 keer zo groot.

De vergrotingsfactor is dus 6.

opp beeld = $8 \times$ opp origineel,
dan $k = \sqrt{8}$.

Zo geldt algemeen

Is bij een vergroting de oppervlakte p keer zo groot, dan is de vergrotingsfactor $\sqrt{p}$.

Voorbeeld

Van een foto van 9 bij 6 cm wordt een vergroting gemaakt.

Je krijgt een drie keer zo grote oppervlakte.

Bereken de afmetingen van de vergroting in cm. Rond af op één decimaal.

Uitwerking

opp beeld = $3 \cdot$ opp origineel, dus $k = \sqrt{3}$.

lengte vergroting = $\sqrt{3} \cdot 9 \approx 15,6$ cm

breedte vergroting = $\sqrt{3} \cdot 6 \approx 10,4$ cm

45 Van een foto van 15 bij 10 cm worden twee vergrotingen gemaakt.

a De eerste vergroting heeft een acht keer zo grote oppervlakte. Bereken in cm de afmetingen van deze vergroting. Rond af op één decimaal.

b Van de tweede vergroting is de langste zijde 25 cm. Bereken de oppervlakte van deze vergroting in cm^2 . Rond af op gehele.

- 46** In een tuin zijn twee cirkelvormige vijvers. De oppervlakte van de grootste is vijf keer zo groot als de oppervlakte van de kleinste. De diameter van de kleinste vijver is 2,4 meter. Bereken de diameter van de grote vijver in meter. Rond af op twee decimalen.

- A 47** Een fabrikant maakt rechthoekige fotolijstjes in drie formaten. De oppervlakte van lijst *A* is 150 cm^2 , de oppervlakte van lijst *C* is 1350 cm^2 . Van lijst *B* zijn de afmetingen 20 bij 30 cm.

- a** Lijst *C* is een vergroting van lijst *B*. Bereken de afmetingen van lijst *C*.
- b** Lijst *A* is een verkleining van lijst *B*. Bereken de afmetingen van lijst *A*.



- 48** Het grootzeil van een zeilboot van het type Flying Dutchman heeft de vorm van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 2 meter en 4,8 meter.

Er worden van dit type ook kleinere boten gemaakt die een grootzeil hebben met een oppervlakte van $2,8 \text{ m}^2$.

Bereken de afmetingen van het grootzeil van de kleine zeilboot in meter. Rond af op twee decimalen.



- 49** Het grootste passagiersvliegtuig ter wereld, de Airbus A380, heeft een lengte van 72,7 meter. Het vleugeloppervlak is 845 m^2 , dat is meer dan de oppervlakte van vijf volleybalvelden.

Voor een windtunneltest wordt een schaalmodel gemaakt met een vleugeloppervlak van $0,338 \text{ m}^2$.

- a** Bereken de lengte van het schaalmodel.

Om te voorkomen dat de windtunnel de luchtstroming rond het vliegtuig beïnvloedt, mag de spanwijdte van een model hoogstens 60% van de breedte van de windtunnel zijn. De spanwijdte van de werkelijke Airbus A380 is 79,8 meter en de windtunnel heeft een breedte van 5 meter.

- b** Bereken in m^2 de maximale vleugeloppervlakte van een schaalmodel dat aan de testeisen voldoet. Rond af op twee decimalen.

8.5 Inhoud bij vergroten

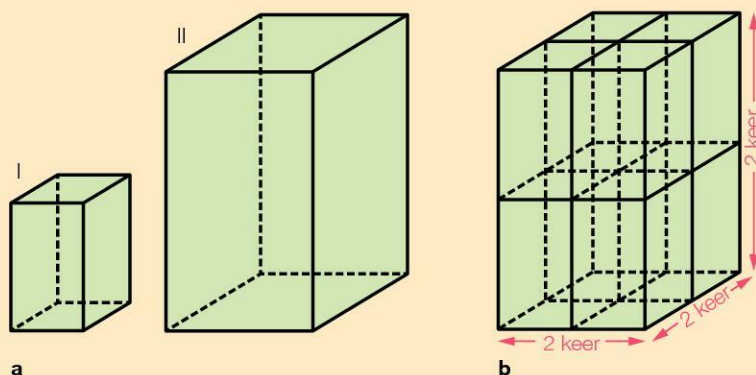
O 50

In een kadoshop zijn kartonnen kubussen met ribben van 2 cm en met ribben van 6 cm te koop. Monique koopt een grote kubus en een heleboel kleine kubussen. Ze gaat de grote kubus opvullen met zoveel mogelijk kleine kubussen.

- a Hoeveel kleine kubussen passen op de bodem van de grote kubus?
- b Hoeveel lagen kan ze op elkaar stapelen in de grote kubus?
- c Hoeveel kleine kubussen passen in de grote kubus?

Theorie A Van vergrotingsfactor naar inhoud

In figuur 8.53a is balk II een vergroting van balk I. De vergrotingsfactor is 2. In figuur 8.53b kun je zien hoeveel keer zo groot de inhoud dan wordt. Balk I past twee keer in de lengte en twee keer in de breedte, dus balk I past $2 \cdot 2$ keer op de bodem. Verder past balk I twee keer in de hoogte. Dus balk I past $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ keer in balk II.



figuur 8.53

Je ziet dat bij vergrotingsfactor 2 de inhoud 2^3 keer zo groot wordt. En zo kun je ook begrijpen:

- is de vergrotingsfactor 5, dan wordt de inhoud 5^3 keer zo groot
 - is de vergrotingsfactor 0,6, dan wordt de inhoud $0,6^3$ keer zo groot.
- Deze regel geldt niet alleen voor balken, maar voor alle ruimtefiguren.

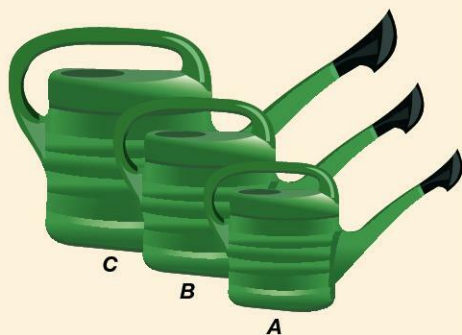
Bij vergrotingsfactor k wordt de inhoud k^3 keer zo groot.

Bij vergrotingsfactor k is

- afmeting in beeld = $k \cdot$ overeenkomstige afmeting in origineel
- oppervlakte beeld = $k^2 \cdot$ oppervlakte origineel
- inhoud beeld = $k^3 \cdot$ inhoud origineel.

Voorbeeld

Zie de gieters *A*, *B* en *C* in figuur 8.54.
 Gieter *B* heeft een inhoud van 6250 cm^3 , een hoogte van 25 cm en de ovaalvormige onderkant heeft een oppervlakte van 250 cm^2 .
 Gieter *C* is een vergroting van gieter *B* met vergrotingsfactor 1,2.
 Gieter *A* is een verkleining van gieter *B* met vergrotingsfactor 0,8.



- Bereken de inhoud van gieter *C* in liter.
- Bereken van gieter *A* de hoogte, de oppervlakte van de onderkant en de inhoud. **figuur 8.54**

Uitwerking

- Gieter *B* is origineel en gieter *C* is beeld.
 $k = 1,2$ geeft
 $\text{inhoud } C = 1,2^3 \cdot \text{inhoud } B = 1,2^3 \cdot 6250 = 10800 \text{ cm}^3 = 10,8 \text{ L}$
- Gieter *B* is origineel en gieter *A* is beeld.
 $k = 0,8$ geeft
 - hoogte $A = 0,8 \cdot \text{hoogte } B = 0,8 \cdot 25 = 20 \text{ cm}$
 - opp onderkant $A = 0,8^2 \cdot \text{opp onderkant } B = 0,8^2 \cdot 250 = 160 \text{ cm}^2$
 - inhoud $A = 0,8^3 \cdot \text{inhoud } B = 0,8^3 \cdot 6250 = 3200 \text{ cm}^3$.

Vergrotingsfactor k ,
 dan hoogte $\times k$
 oppervlakte $\times k^2$
 inhoud $\times k^3$.



- Vat II is een vergroting van vat I. De vergrotingsfactor is 1,8. De inhoud van vat I is 45 liter en de hoogte van vat I is 4,5 dm. De oppervlakte van de bodem van vat I is 10 dm^2 .

- Bereken de inhoud van vat II in gehele liter.
- Bereken de oppervlakte van de bodem van vat II in dm^2 .
- Bereken de hoogte van vat II in dm.



figuur 8.55 Bij vergrotingsfactor 1,8 wordt de inhoud bijna 6 keer zo groot.

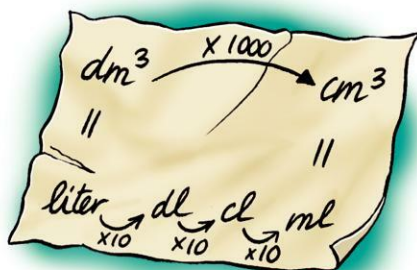
- Kopje II in figuur 8.56 is een verkleining van kopje I. Kopje I is 5,5 cm hoog en heeft een inhoud van 110 mL. Kopje II is 2,8 cm hoog. Bereken de inhoud van kopje II in mL. Rond af op gehele.



figuur 8.56

53 In een flesje kan 75 mL eau de toilette. Als het flesje leeg is, kun je het bij de drogist laten navullen uit een grote fles. Van die grote fles zijn de afmetingen vijf keer zo groot als van het kleine flesje.

- Hoeveel mL kan er in de grote fles? Is dat meer of minder dan 10 liter?
- De grote fles is voor 80% gevuld. Hoeveel kleine flesjes kun je hiermee vullen?



54 De flessen in figuur 8.57 hebben dezelfde vorm, dus fles II is een vergroting van fles I.

- Bereken de vergrotingsfactor. Meet eerst geschikte afmetingen.
- De inhoud van fles I is 0,75 liter. Bereken de inhoud van fles II in liter. Rond af op één decimaal.
- De oppervlakte van het etiket op fles I is 168 cm^2 . Bereken de oppervlakte van het etiket op fles II in cm^2 . Rond af op gehelen.



figuur 8.57

55 In *Gullivers Reizen*, een bekend boek van Jonathan Swift, komt Gulliver in het land Lilliput. De bewoners van dat land zijn 12 keer zo klein als Gulliver. Volgens een keizerlijk decreet, uitgevaardigd door de keizer van Lilliput in samenspraak met de hofwiskundige, moeten de bewoners Gulliver een hoeveelheid voedsel verstrekken die overeenkomt met de behoefte van 1728 inwoners.

Hoe komt de hofwiskundige aan het getal 1728?



A 56 In een drogisterij is zachte crème in drie tubes verkrijgbaar. De tubes hebben dezelfde vorm. Ze zijn 9, 12 en 15 cm lang.

Tube II heeft een inhoud van 45 cm^3 . De oppervlakte van tube II is 60 cm^2 .

- Tube III is een verkleining van tube II. Bereken de vergrotingsfactor.
- Hoeveel mL is de inhoud van tube III? Rond af op gehelen.
- Hoeveel mL is de inhoud van tube I? Rond af op gehelen.
- Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van tube I?



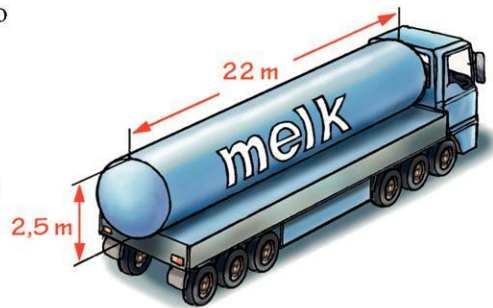
figuur 8.58

- A 57** Hiernaast zie je op schaal 1 : 35 een model van een Airbus A380. Hieronder staat informatie over het model. Geef overeenkomstige informatie over het echte vliegtuig. Geef je antwoorden zo mogelijk in meter, in m^2 of in m^3 en rond af op één decimaal.
- Het model is 205,7 cm lang.
 - De brandstoftanks hebben een inhoud van $7463,6 \text{ cm}^3$.
 - Het vleugeloppervlak is $69,0 \text{ dm}^2$.
 - De spanwijdte is 22,8 dm.
 - De vleugels maken een hoek van $56,5^\circ$ met de romp.



figuur 8.59

- 58** De inhoud van de volledig gevulde melkauto hiernaast wordt overgepompt in kleinere melkauto's. De afmetingen van de kleine melkauto's zijn 0,65 keer de afmetingen van de grote auto.
- Bereken hoeveel kleine melkauto's nodig zijn om alle melk over te pompen.



figuur 8.60

Er wordt 10 liter melk per seconde overgepompt.
Het wisselen van de kleine melkauto's neemt telkens 10 minuten in beslag.
Om 14:30 uur is de eerste kleine melkauto aangesloten en begint het overpompen.

- Hoe laat is de laatste druppel melk overgepompt?

- 59** Een Matroeskja is een holle pop met daarin een reeks verkleiningen van de grootste pop.
De inhoud van de grootste pop op de foto is 500 cm^3 .
De inhoud van de kleinste pop is 4 cm^3 .
Zoek uit wat de vergrotingsfactor is.



figuur 8.61

- O 60** Piramide B is een vergroting van piramide A .
De inhoud van B is acht keer zo groot als de inhoud van A .
Welke vergrotingsfactor hoort hierbij?
Kies uit 2, $\sqrt{8}$, 8, 64 en 8^3 .

Bij kwadrateren hoort worteltrekken. Zo is $\sqrt{25} = 5$, want $5^2 = 25$.
 Bij **tot de derde macht verheffen** hoort de **derdemachtswortel**.
 Omdat $5^3 = 125$ is de derdemachtswortel van 125 gelijk aan 5.

Notatie: $\sqrt[3]{125} = 5$.

a Bereken $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{1}$ en $\sqrt[3]{1000}$.

Op de rekenmachine krijg je $\sqrt[3]{\dots}$ met **3** **2nd** **x³**
 of met **SHIFT** **$\sqrt[3]{}$** .

Zo is $\sqrt[3]{53} \approx 3,76$.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig

$\sqrt[3]{17}$, $\sqrt[3]{84}$, $\sqrt[3]{875}$ en $\sqrt[3]{0,86}$.

$$\sqrt[3]{125} = 5, \text{ want } 5^3 = 125$$

Je krijgt $\sqrt[3]{53}$ door in te tikken

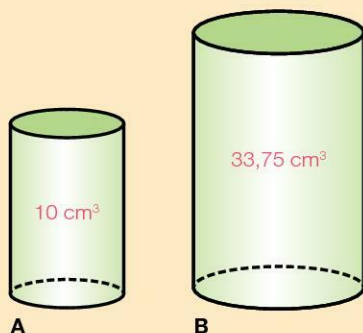
TI **3** **2nd** **x³** **5** **3** **enter**

Casio **SHIFT** **$\sqrt[3]{}$** **5** **3** **=**

Theorie B Van inhoud naar vergrotingsfactor

Is cilinder B met een inhoud van $33,75 \text{ cm}^3$ een
 vergroting van cilinder A met een inhoud van 10 cm^3 ,
 dan is de inhoud van cilinder B $\frac{33,75}{10} = 3,375$ keer de
 inhoud van cilinder A, dus $k^3 = 3,375$.
 Dus $k = \sqrt[3]{3,375} = 1,5$.

**Is bij een vergroting de inhoud p keer zo
 groot, dan is de vergrotingsfactor $\sqrt[3]{p}$.**



figuur 8.62

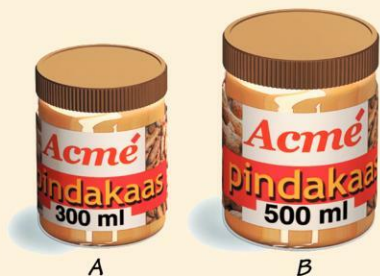
Is inhoud beeld = $12 \cdot$ inhoud origineel,
 dan is $k = \sqrt[3]{12} \approx 2,29$.



Voorbeeld

Van de potten pindakaas van Acme bestaan twee
 formaten. Pot B is een vergroting van pot A.

- a** Bereken de vergrotingsfactor. Rond af op één
 decimaal.
- b** Het deksel van pot A heeft een oppervlakte van
 $50,3 \text{ cm}^2$.
 Bereken de oppervlakte van het deksel van pot B
 in cm^2 . Rond af op één decimaal.



figuur 8.63

Uitwerking

a $k^3 = \frac{\text{inhoud pot B}}{\text{inhoud pot A}} = \frac{500}{300} = \frac{5}{3}$, dus $k = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} = 1,18\dots \approx 1,2$.

b opp deksel B = $k^2 \cdot$ opp deksel A = $1,18\dots^2 \cdot 50,3 \approx 70,7 \text{ cm}^2$.

- 62** Van de pannen I en II is de inhoud gegeven. Pan II is een verkleining van pan I.

- Bereken de vergrotingsfactor in twee decimalen nauwkeurig.
- De oppervlakte van de bodem van pan I is $141,3 \text{ cm}^2$.
Bereken de oppervlakte van de bodem van pan II in cm^2 . Rond af op één decimaal.



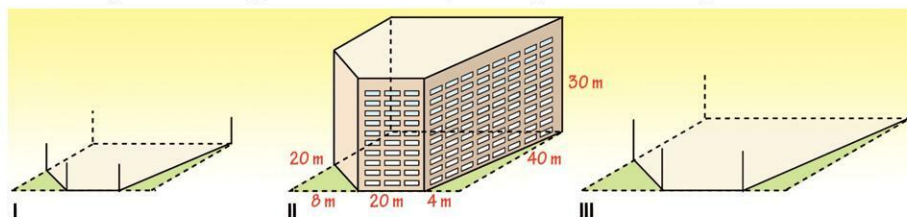
figuur 8.64

- 63** Tent II is een vergroting van tent I.

De inhoud van tent I is $1,8 \text{ m}^3$, die van tent II is $3,0 \text{ m}^3$.

- Bereken de vergrotingsfactor in één decimaal nauwkeurig.
- Voor tent I is $1,52 \text{ m}^2$ tentdoek gebruikt.
Hoeveel m^2 tentdoek is in tent II verwerkt? Rond af op twee decimalen.
- Tent I is 85 cm hoog.
Bereken de hoogte van tent II in cm . Rond af op één decimaal.

- A 64** Een projectontwikkelaar heeft op een rechthoekig stuk grond van 40 bij 32 meter appartementencomplex II gebouwd. Zie figuur 8.65.



figuur 8.65

- Bereken de inhoud van complex II in m^3 .

De projectontwikkelaar bouwt aan weerszijden van complex II nog twee appartementencomplexen. Complex I is een verkleining van complex II met een twee keer zo kleine inhoud als complex II.

- Bereken in m^2 de oppervlakte van het rechthoekige stuk grond dat nodig is voor de bouw van complex I. Rond af op gehelen.

Appartementencomplex III is een vergroting van complex II.

De oppervlakte van het grondstuk dat nodig is voor complex III is twee keer zo groot als de oppervlakte van het stuk grond waarop complex II is gebouwd.

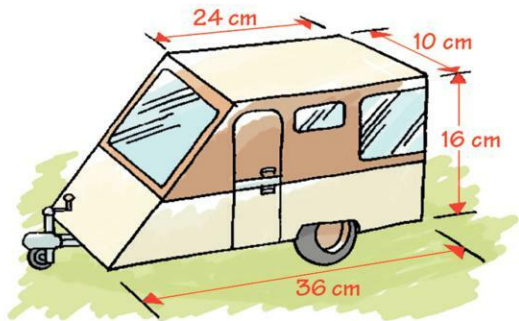
- Bereken de inhoud van complex III.

Complex III is ook een vergroting van complex I.

- Bereken de vergrotingsfactor. Rond af op één decimaal.

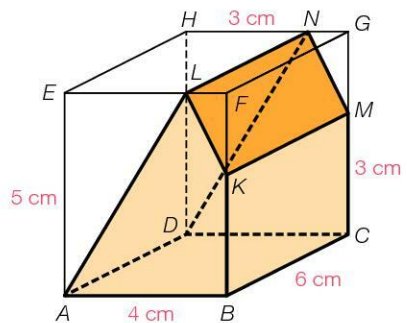
Gemengde opgaven

- 1 In figuur 8.66 zie je een tekening van het ontwerp van een speelgoedcaravan. Bereken de inhoud van de caravan in cm^3 .



figuur 8.66

- 2 In de balk van figuur 8.67 is een prisma getekend.
- Bereken de inhoud van het prisma.
 - Bereken de inhoud van piramide $EABCD$.
 - Bereken de inhoud van piramide $EKMFG$.
 - Joost plaatst in een balk van 4 bij 5 bij 6 cm een zo groot mogelijke cilinder. Bereken de inhoud van die cilinder in cm^3 . Rond af op één decimaal.



figuur 8.67

- 3 In het Branitzter Park in het Duitse Cottbus ligt in het meer een piramide. Het meer en de piramide zijn in opdracht van Prins Hermann von Pückler gemaakt. De piramide is gebruikt als graf voor de Prins en zijn vrouw. De piramide heeft een hoogte van 20 meter en een vierkant grondvlak met zijden van 40 meter. Bij het graven van het meer en de bouw van de piramide is in totaal $90\,000 \text{ m}^3$ aarde verplaatst. Bereken hoeveel m^3 aarde verplaatst is voor de aanleg van het meer. Rond af op duizendtallen.



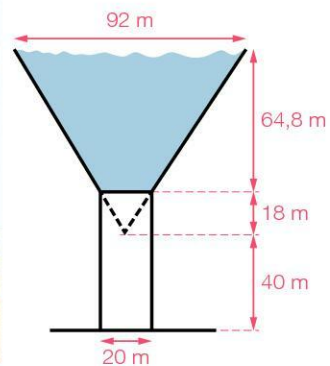
figuur 8.68

- 4 Wie langs de westkust van Frankrijk fietst, kan de watertoren van Marsilly al van verre zien. In figuur 8.69 staan enkele afmetingen bij de watertoren.

- Bereken in gehele m^3 de inhoud van de cilindervormige pijler waarop het waterreservoir rust.
- Bereken hoeveel m^3 in het reservoir past. Rond af op gehelen.

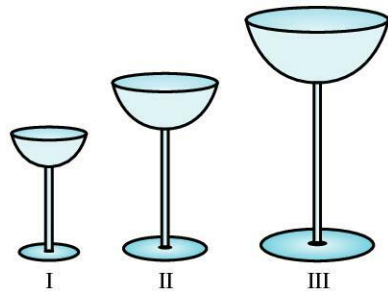


figuur 8.69



- 5 In deze opgave gaat het om de glazen I, II en III. De glazen II en III zijn vergrotingen van glas I. Glas I is 6 cm hoog en glas II is 8,4 cm hoog. De oppervlakte van het voetje van glas I is 9 cm^2 . De inhoud van glas I is 70 mL. De oppervlakte van het voetje van glas III is 36 cm^2 .

- Bereken de oppervlakte van het voetje van glas II.
- Bereken de inhoud van glas II.
- Bereken de hoogte van glas III.
- Bereken de inhoud van glas III.

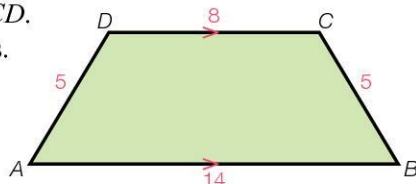


figuur 8.70

- 6 In figuur 8.71 zie je het gelijkbenige trapezium $ABCD$.
a Toon aan dat de hoogte van het trapezium 4 cm is.

Vierhoek $PQRS$ is een vergroting van $ABCD$.
De vergrotingsfactor is 4,5.

- Bereken de oppervlakte van vierhoek $PQRS$.
- Ook vierhoek $EFGH$ is een vergroting van $ABCD$. De oppervlakte van $EFGH$ is $297,44 \text{ cm}^2$. Bereken van elke zijde van vierhoek $EFGH$ de lengte.



figuur 8.71 De afmetingen zijn in cm.

- 7 a Een rechthoekig raam A is 80 cm hoog en heeft een oppervlakte van 4000 cm^2 . Raam B is een verkleining van raam A. De oppervlakte van B is 250 cm^2 . Bereken de hoogte en de breedte van raam B.
- b Een schilder verft twee muren. Muur A is 3,2 bij 3,8 meter. Muur B is een vergroting van muur A. Voor muur A heeft de schilder 2,6 liter verf nodig, voor muur B is dat 16,25 liter. Bereken de afmetingen van muur B.



- 8 Kees heeft een mooie ronde sneeuwbal in zijn hand. Na een tijdje is een deel van de sneeuwbal gesmolten. De inhoud van de sneeuwbal is met 75% afgenomen. Met hoeveel procent is de straal van de sneeuwbal afgenomen?

Samenvatting

8.1 Inhoud prisma en cilinder

blz 142

inhoud prisma = opp grondvlak $\times$ hoogte

blz 143

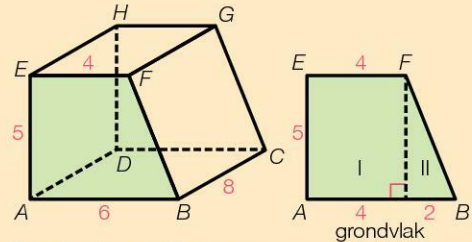
Van het prisma hiernaast is vierhoek $ABFE$ het grondvlak.

opp grondvlak = opp I + opp II =

$$4 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$$

hoogte is $BC = 8 \text{ cm}$

Dus inhoud = $25 \cdot 8 = 200 \text{ cm}^3$.



De afmetingen zijn in cm.

blz 145

inhoud cilinder = $\pi \times \text{straal}^2 \times \text{hoogte}$

De inhoud van een cilinder met diameter

4 cm en hoogte 5 cm is gelijk aan $\pi \cdot 2^2 \cdot 5 \approx 62,8 \text{ cm}^3$.

8.2 Inhoud piramide en kegel

blz 147

inhoud piramide = $\frac{1}{3} \times \text{opp grondvlak} \times \text{hoogte}$

Van de piramide hiernaast is rechthoek $ABCD$ het grondvlak.

opp grondvlak = $3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2$

hoogte is $TE = 6 \text{ cm}$

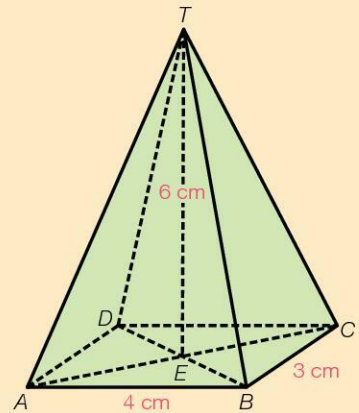
Dus inhoud = $\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^3$.

blz 150

inhoud kegel = $\frac{1}{3} \times \pi \times \text{straal}^2 \times \text{hoogte}$

Van een kegel met diameter 4 cm en hoogte 5 cm

is de inhoud gelijk aan $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 5 \approx 20,9 \text{ cm}^3$.



8.3 Vergroten en verkleinen

blz 152

In de figuur hiernaast is mand II een

vergroting van mand I. Mand I is het

origineel en mand II is het beeld.

blz 154

Om de vergrotingsfactor k te berekenen, meet je overeenkomstige afmetingen in origineel en beeld.

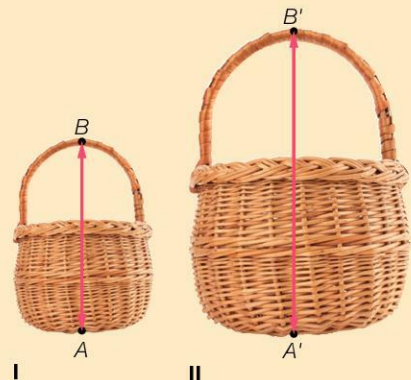
Je meet hoogte I = $AB = 2,5 \text{ cm}$ en

hoogte II = $A'B' = 4 \text{ cm}$.

afmeting beeld

$$k = \frac{\text{afmeting beeld}}{\text{overeenkomstige afmeting origineel}}$$

$$= \frac{A'B'}{AB} = \frac{4}{2,5} = 1,6$$



blz 155

Rechthoek $P'Q'R'S'$ hiernaast is een verkleining van rechthoek $PQRS$.

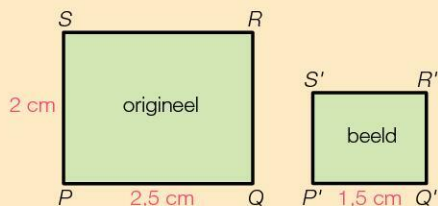
De vergrotingsfactor is $k = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6$.

Elke afmeting in het beeld is dus 0,6 keer zo lang als de overeenkomstige afmeting in het origineel.

Dus $P'S' = 0,6 \cdot PS = 0,6 \cdot 2 = 1,2$ cm.

Is $k > 1$, dan is het beeld een vergroting van het origineel.

Is $k < 1$, dan is het beeld een verkleining van het origineel.



8.4 Oppervlakte bij vergroten

blz 157

Bij vergrotingsfactor k is **opp beeld** = $k^2 \times$ **opp origineel**.

Zo is in de figuur hierboven

$\text{opp } P'Q'R'S' = 0,6^2 \cdot \text{opp } PQRS = 0,6^2 \cdot 5 = 1,8 \text{ cm}^2$.

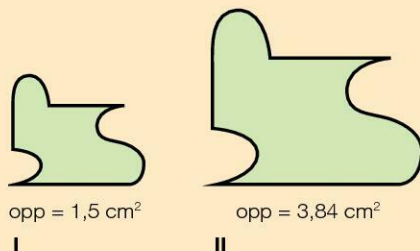
blz 160

Is bij een vergroting de oppervlakte van het beeld p keer zo groot als de oppervlakte van het origineel, dan is de vergrotingsfactor $\sqrt{p}$.

In de figuur hiernaast is II een vergroting van I.

Omdat $\frac{\text{opp II}}{\text{opp I}} = \frac{3,84}{1,5} = 2,56$ is de

vergrotingsfactor $k = \sqrt{2,56} = 1,6$.



8.5 Inhoud bij vergroten

blz 162

Bij vergrotingsfactor k is

inhoud beeld = $k^3 \times$ **inhoud origineel**.

De afvalemmer A in de figuur hiernaast heeft een inhoud van 8 liter. Afvalemmer B is een vergroting van A met

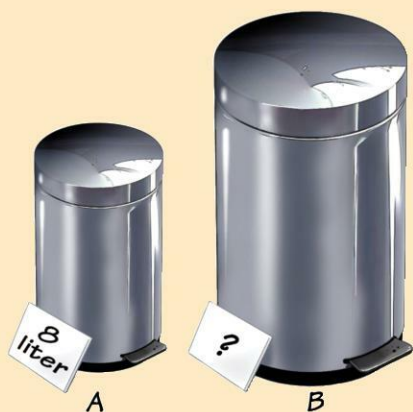
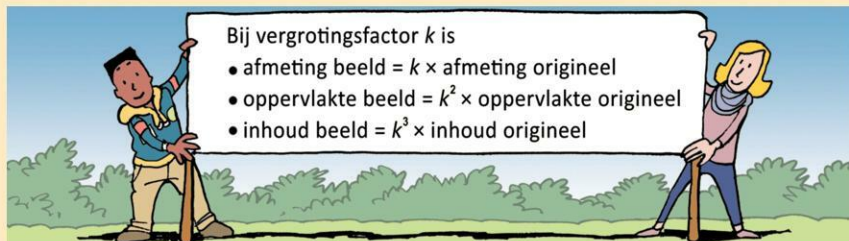
vergrotingsfactor $k = 1,5$.

Dus inhoud B = $1,5^3 \cdot$ inhoud A =

$1,5^3 \cdot 8 = 27$ liter.

blz 166

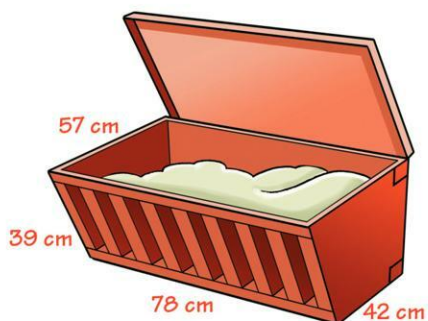
Is bij een vergroting de inhoud van het beeld p keer zo groot als de inhoud van het origineel, dan is de vergrotingsfactor $\sqrt[3]{p}$.



Diagnostische toets

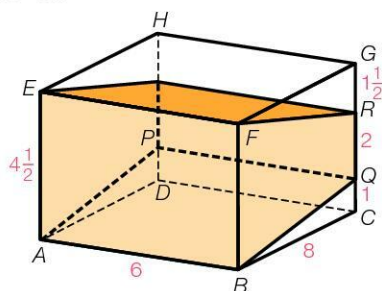
8.1 Inhoud prisma en cilinder

- 1** Om gladheid op wegen snel te kunnen bestrijden, heeft de gemeente Rijnwoude een aantal strooibakken laten plaatsen. In een strooibak wordt een mengsel van zout en strooizand bewaard. In figuur 8.72 zie je zo'n prismavormige bak. Bereken de inhoud van de bak in liter.



figuur 8.72

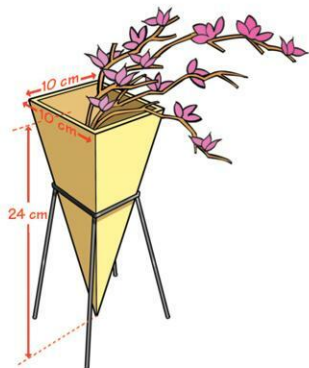
- 2** In de balk in figuur 8.73 is een prisma getekend. Bereken de inhoud van dat prisma.
- 3** In Frankfurt staat de Westhafen Tower. Het 112,3 meter hoge cilindervormige gebouw heeft een doorsnede van 37,5 meter. Bereken de inhoud van dit gebouw in gehele m^3 .



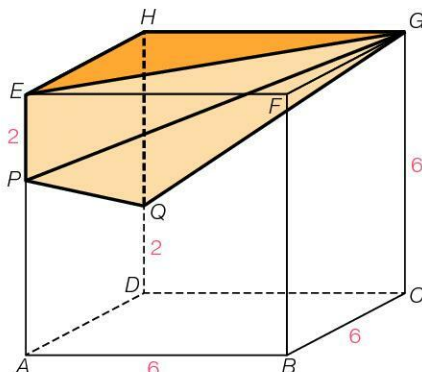
figuur 8.73 De afmetingen zijn in cm.

8.2 Inhoud piramide en kegel

- 4** De piramidevormige vaas in figuur 8.74 is 24 cm hoog. De opening aan de bovenkant is een vierkant van 10 bij 10 cm. Hoeveel cL water gaat er in de vaas?



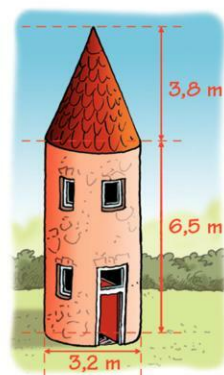
figuur 8.74



figuur 8.75 De afmetingen zijn in cm.

- 5** In de kubus in figuur 8.75 zie je de piramide $G-PQHE$. Bereken de inhoud van de piramide.

- 6** Bereken de inhoud van de toren in figuur 8.76 in m^3 .
 6,7 Rond af op één decimaal.



figuur 8.76

8.3 Vergroten en verkleinen

- 7** De vazen II en III in figuur 8.77 zijn vergrotingen van vaas I.
 8

- a** Bereken de vergrotingsfactoren in één decimaal nauwkeurig.
b De hoogte van vaas I is in werkelijkheid 18,6 cm.
 Bereken de werkelijke hoogte van vaas II en ook van vaas III.



figuur 8.77

8.4 Oppervlakte bij vergroten

- 8** Hotel Noordzeezicht bestelt bij Posterdirect drie formaten zeefdrukken, A, B en C, van het schilderij Irissen van de schilder Van Gogh.
 9, 10 De oppervlakte van formaat B is $1,11 \text{ m}^2$.

- a** Formaat C is een vergroting van formaat B. De vergrotingsfactor is 1,15.
 Bereken de oppervlakte van formaat C in dm^2 . Rond af op gehelen.
b Formaat A is een verkleining van formaat B. De oppervlakte van formaat A is $0,84 \text{ m}^2$.
 Bereken de vergrotingsfactor in twee decimalen nauwkeurig.

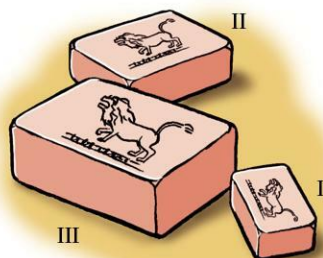


figuur 8.78

8.5 Inhoud bij vergroten

- 9** Een fabrikant maakt vlakgum in drie groottes. Van gum I is de langste zijde 2,5 cm en de inhoud 2 cm^3 .
 11, 12, 13

- a** Van gum II zijn alle afmetingen 1,8 keer zo groot als die van gum I.
 Bereken de inhoud van gum II in cm^3 . Rond af op één decimaal.
b De inhoud van gum III is 24 cm^3 . Gum III is een vergroting van gum I. Bereken de vergrotingsfactor in twee decimalen nauwkeurig.



figuur 8.79

Herhaling

8.1 Inhoud prisma en cilinder

- 1** Om de inhoud van een prisma te berekenen, gebruik je de formule
inhoud prisma = opp grondvlak $\times$ hoogte.
 Het grondvlak en het bovenzvlak van een prisma zijn evenwijdig.
a Bereken de inhoud van prisma $PQR\ STU$ in figuur 8.80.

Zie figuur 8.81.

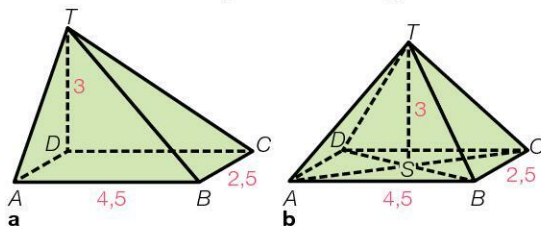
- b** Bereken CP met de stelling van Pythagoras.
c Bereken de oppervlakte van $ABCD$.
d Bereken de inhoud van prisma $ABCD\ EFGH$.

- 2** In de balk in figuur 8.82 is een prisma getekend. Het grondvlak van het prisma is vierhoek $AKNE$.
a Schets vierhoek $AKNE$ en bereken de oppervlakte van deze vierhoek.
b Bereken de inhoud van het prisma.

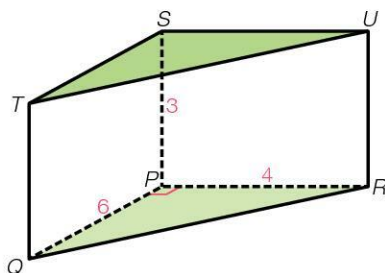
- 3** De inhoud van een cilinder bereken je met de formule **inhoud = $\pi \times \text{straal}^2 \times \text{hoogte}$.**
a Een cilinder heeft een diameter van 28,2 cm en een hoogte van 56,3 cm. Bereken de inhoud in cm^3 . Rond af op gehele. Hoeveel liter is dat?
b Een cilindervormige regenton met een hoogte van 1,20 m heeft een diameter van 90 cm. De regenton is voor 80% gevuld met water. Bereken hoeveel liter water er in de regenton zit. Rond af op gehele.

8.2 Inhoud piramide en kegel

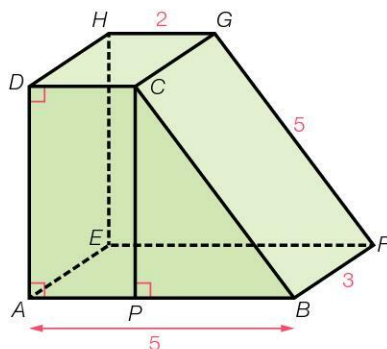
- 4** Om de inhoud van een piramide te berekenen, gebruik je de formule
inhoud piramide = $\frac{1}{3} \times \text{opp grondvlak} \times \text{hoogte}$.
 Bereken van beide piramides in figuur 8.83 de inhoud.



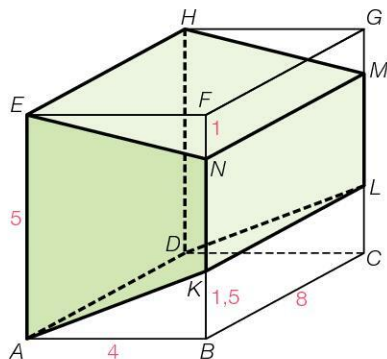
figuur 8.83 De afmetingen zijn in cm.



figuur 8.80 De afmetingen zijn in cm.



figuur 8.81 De afmetingen zijn in cm.

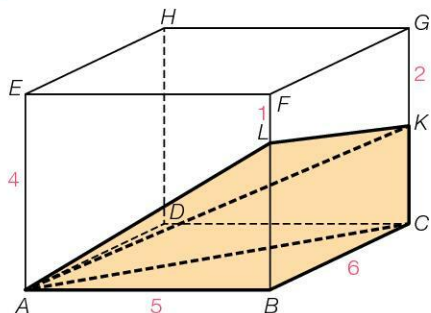


figuur 8.82 De afmetingen zijn in cm.

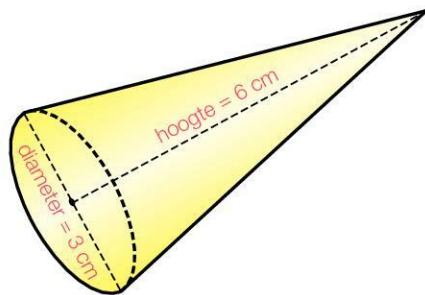
5

In de balk in figuur 8.84 is een piramide getekend.

- Schets het grondvlak $BCKL$ en bereken de oppervlakte van deze vierhoek.
- Bereken de inhoud van piramide $A BCKL$.



figuur 8.84 De afmetingen zijn in cm



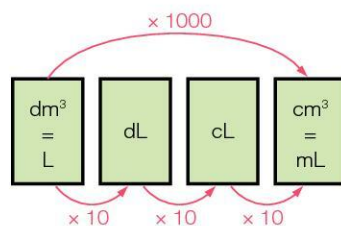
figuur 8.85

6

De inhoud van een kegel bereken je met de formule

$$\text{inhoud kegel} = \frac{1}{3} \times \pi \times \text{straal}^2 \times \text{hoogte}.$$

- Bereken de inhoud van de kegel in figuur 8.85 in cm^3 . Rond af op één decimaal.
- Van een kegel is de hoogte 42 cm en de diameter van het grondvlak is 18 cm. Bereken de inhoud in liter. Rond af op twee decimalen.



7

De Chocolate Hills zijn een belangrijke bezienswaardigheid op de Filippijnen. Op een gebied van ongeveer 50 km^2 staan 1268 vrijwel gelijkvormige kegelvormige heuvels met hoogtes tussen de 30 en 50 meter. De heuvels zijn genoemd naar hun chocoladekleur tijdens de droge jaargetijden. De grootste heuvel heeft een hoogte van 120 meter en een grondvlak met een diameter van 225 meter. Bereken de inhoud van de grootste heuvel in m^3 . Rond af op duizendtallen.



8.3 Vergroten en verkleinen

8

De puntmutsen II en III in figuur 8.86 zijn vergrotingen van puntmuts I. Om de vergrotingsfactor te berekenen meet je eerst overeenkomstige afmetingen. Neem bijvoorbeeld de hoogte.

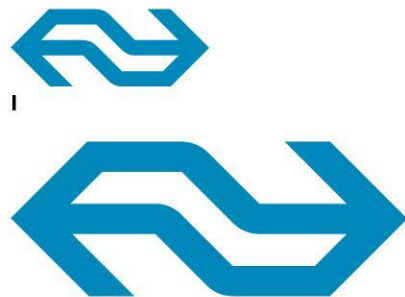
- Bereken de vergrotingsfactoren. Rond af op één decimaal.
- Puntmuts I heeft in werkelijkheid een hoogte van 23 cm. Bereken de werkelijke hoogten van de puntmutsen II en III in cm. Rond af op gehelen.



figuur 8.86

8.4 Oppervlakte bij vergroten

- 9** Bij een vergroting met vergrotingsfactor k wordt de oppervlakte k^2 keer zo groot.
In figuur 8.87 is logo II een vergroting van logo I. De oppervlakte van logo I is $1,2 \text{ cm}^2$.

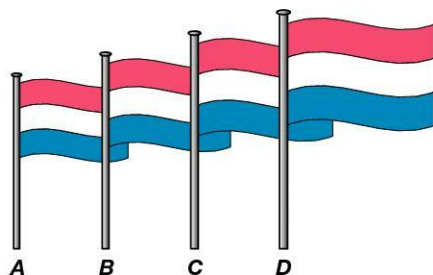


II
figuur 8.87

- Bereken de vergrotingsfactor. Meet daartoe overeenkomstige afmetingen. Rond af op één decimaal.
- Bereken de oppervlakte van logo II in cm^2 . Rond af op één decimaal.
- Logo III is een vergroting van logo I met vergrotingsfactor 3,4. Bereken de oppervlakte van logo III in cm^2 . Rond af op één decimaal.
- Logo IV is een vergroting van logo I. De oppervlakte van logo IV is $11,25 \text{ cm}^2$. Vul in. Rond zo nodig af op één decimaal.
De oppervlakte van logo IV is $\frac{11,25}{\dots}$ keer de oppervlakte van logo I, dus de vergrotingsfactor is $\sqrt{\frac{11,25}{\dots}} \approx \dots$
- Logo V is een vergroting van logo I. De oppervlakte van logo V is $4,05 \text{ cm}^2$. Bereken de vergrotingsfactor. Rond af op één decimaal.

- 10** Een atelier levert de Nederlandse vlag in verschillende formaten. De oppervlakte van vlag B is $4,6 \text{ m}^2$.

- Vlag C is een vergroting van vlag B met vergrotingsfactor 1,36. Bereken de oppervlakte van vlag C in dm^2 . Rond af op gehele.
- De oppervlakte van vlag A is $2,944 \text{ m}^2$. Bereken de vergrotingsfactor in het geval je vlag A als verkleining van vlag B beschouwt.
- Vlag D is een vergroting van vlag B. De oppervlakte van vlag D is $6,624 \text{ m}^2$. Bereken de vergrotingsfactor.



figuur 8.88

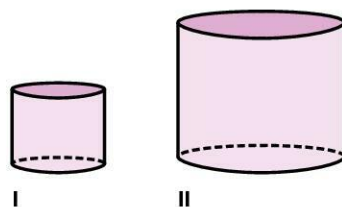
Oppervlakte p keer zo groot, dan vergrotingsfactor $\sqrt{p}$.



8.5 Inhoud bij vergroten

- 11** Bij een vergroting met vergrotingsfactor k wordt de inhoud k^3 keer zo groot. In figuur 8.89 is cilinder II een vergroting van cilinder I.

- Bereken de bijbehorende vergrotingsfactor in één decimaal nauwkeurig.
- De inhoud van cilinder I is 2 liter.
Bereken de inhoud van cilinder II in liter. Rond af op één decimaal.
- Cilinder III is een verkleining van cilinder I met vergrotingsfactor 0,8.
Bereken de inhoud van cilinder III in liter.



figuur 8.89

- 12** De firma Waxcandle maakt prismavormige kaarsen in de groottes I, II en III. Op de foto zie je grootte II. Deze is 10,5 cm hoog en bestaat uit 150 cm³ was. De oppervlakte van de driehoekige zijkant is 21 cm². Kaars I is een verkleining van kaars II en kaars I is 8 cm hoog.

- Uit hoeveel cm³ was bestaat kaars I? Rond af op gehelen.
- Hoeveel cm² is de oppervlakte van de zijkant van kaars I? Rond af op gehelen.

Kaars III is een vergroting van kaars II en kaars III is 14,7 cm hoog.

- Uit hoeveel cm³ was bestaat kaars III? Rond af op gehelen.
- Hoeveel cm² is de oppervlakte van de zijkant van kaars III? Rond af op gehelen.



figuur 8.90

- 13** Is bij een vergroting de inhoud p keer zo groot, dan is de vergrotingsfactor $\sqrt[3]{p}$. Is dus de inhoud 12 keer zo groot, dan is de vergrotingsfactor $\sqrt[3]{12} \approx 2,29$.

- Bij een vergroting is de inhoud 7 keer zo groot.
Bereken de vergrotingsfactor. Rond af op twee decimalen.
- Bij een verkleining is de inhoud 0,3 keer zo groot.
Bereken de vergrotingsfactor. Rond af op twee decimalen.
- Kaars II is een vergroting van kaars I. Kaars II weegt het dubbele van kaars I.
Bereken de vergrotingsfactor in twee decimalen nauwkeurig.
- Kaars IV is een vergroting van kaars III. Kaars IV bestaat uit 220 cm³ was en kaars III uit 80 cm³ was.
Bereken de vergrotingsfactor in twee decimalen nauwkeurig.

Je berekent $\sqrt[3]{12}$ met
3 | 2nd | x³ | 1 | 2 | , of
met SHIFT | $\sqrt[3]{}$ | 1 | 2



Onderzoek Zelfgelijkvormigheid

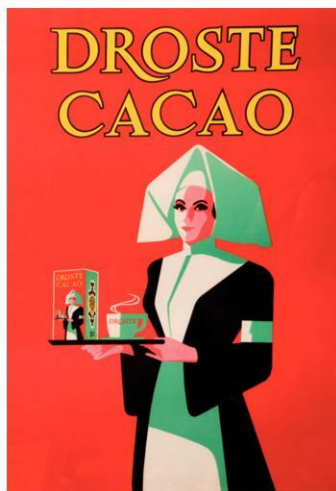
Je weet dat bij vergroten en verkleinen het beeld en origineel gelijkvormig zijn. In het varenblad hiernaast kun je een bijzondere vorm van gelijkvormigheid herkennen. Het varenblad is gelijkvormig met een gedeelte van het blad zelf. Dit is een voorbeeld van **zelfgelijkvormigheid**.

Een zelfgelijkvormige figuur is gelijkvormig met een gedeelte van de figuur zelf.

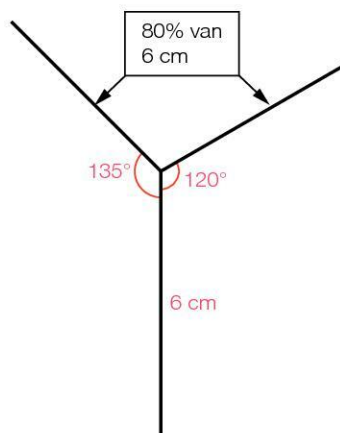
In dit onderzoek bekijk je enkele voorbeelden van zelfgelijkvormige figuren en ga je er zelf enkele tekenen.



- 1** a Een bloemkool is zelfgelijkvormig. Zoek een afbeelding van een bloemkool waaruit deze eigenschap blijkt.
- b De kunstenaar M.C. Escher heeft een aantal zelfgelijkvormige kunstwerken gemaakt. Zoek er enkele op en licht de zelfgelijkvormigheid toe.
- c De afbeelding hiernaast van het cacaoblik van Droste is een voorbeeld van zelfgelijkvormigheid. Licht de zelfgelijkvormigheid toe.
- d Zoek nog enkele voorbeelden van zelfgelijkvormigheid. Denk aan voorbeelden uit de natuur en uit de kunst.

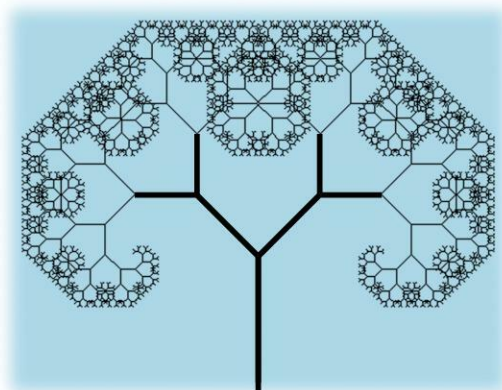


- 2** a Je kunt als volgt een zelfgelijkvormig varenblad tekenen.
 - Teken een verticaal lijnstuk van 6 cm onderaan een lege bladzijde.
 - Teken bij het bovenste uiteinde onder hoeken van 135° en 120° twee lijnstukken waarvan de lengtes 80% van 6 cm (dus 4,8 cm) zijn.
 - Teken bij de nieuwe uiteinden onder hoeken van 135° en 120° twee lijnstukken waarvan de lengtes 80% van 4,8 cm zijn.
 - Herhaal dit proces enkele keren.



figuur 8.91

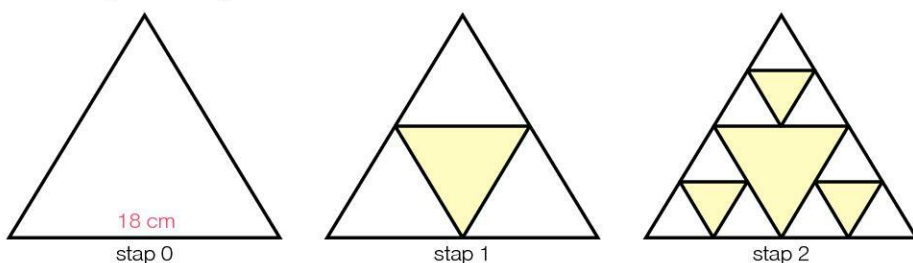
- b Onderzoek hoe het blad hiernaast is ontstaan.
- c Teken enkele zelfgelijkvormige varenbladen in je schrift.



figuur 8.92

3 Een beroemde zelfgelijkvormige figuur is de **driehoek van Sierpinski**, ontworpen door de Poolse wiskundige Sierpinski (1882-1969).

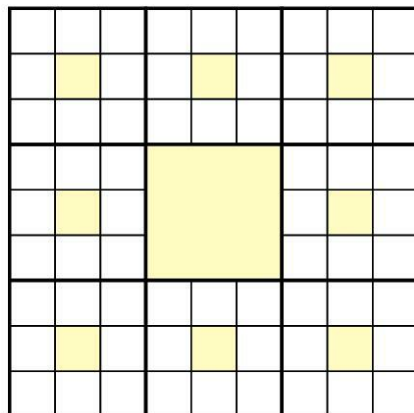
- a • Teken een gelijkzijdige driehoek met zijden van 18 cm.
- Verbind de middens van de drie zijden met elkaar. Kleur de middelste driehoek geel. Zie stap 1 in figuur 8.93.
- Verbind van elke witte driehoek de middens van de zijden met elkaar en kleur de middelste kleinere driehoeken geel. Zie stap 2 in figuur 8.93.
- Zet dit proces nog minstens drie keer voort.



figuur 8.93

- b Is er sprake van zelfgelijkvormigheid? Licht toe.
- c Hoeveel witte driehoeken zijn er in stap 2? En hoeveel in stap 6? En hoeveel in stap n ?

4 Hiernaast zie je stap 2 van het tekenen van het **tapijt van Sierpinski**. Onderzoek hoe het tapijt van Sierpinski ontstaat. Teken enkele stappen. Ga daarbij uit van een vierkant van 18 bij 18 cm.



figuur 8.94

5 Onderzoek wat er met de **sneeuwvlok-kromme van Von Koch** wordt bedoeld en teken hiervan de eerste drie stappen.

Vaardigheden

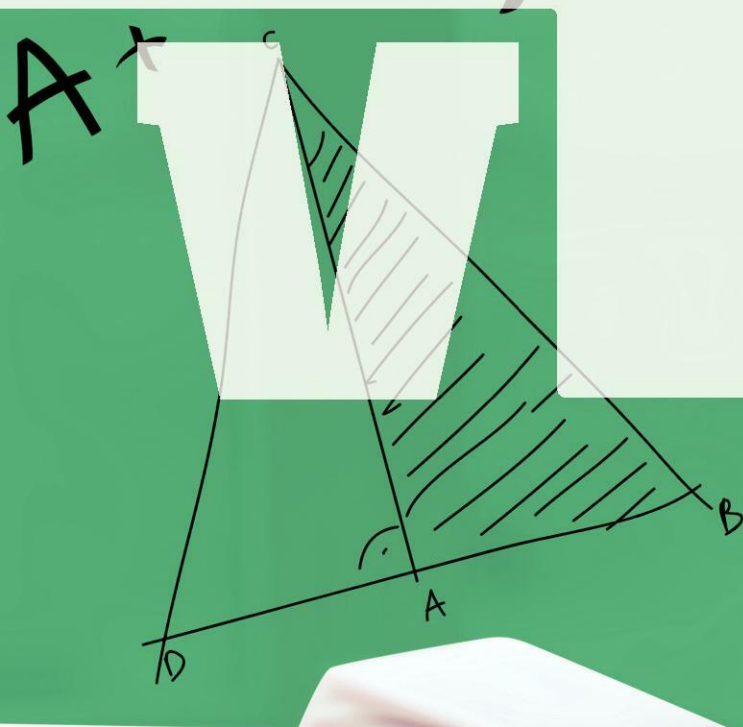
De vaardigheden bestaan uit Wiskundige vaardigheden en Algemene vaardigheden.

In de Wiskundige vaardigheden worden rekenvaardigheden en algebraïsche vaardigheden herhaald en verder ingeslepen.

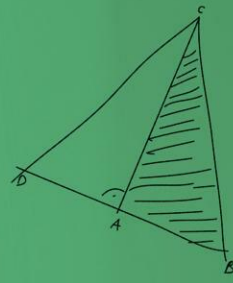
De Wiskundige vaardigheden in dit boek bestaan uit zes lessen.

- 1 Herleiden
- 2 Haakjes wegwerken
- 3 Breuken
- 4 Letterrekenen met breuken
- 5 Wortels
- 6 Vergelijkingen

In de Algemene vaardigheden staat het systematisch oplossen van problemen centraal. In dit boek los je hierbij problemen op met de aanpak *Voer een variabele in*.



$$\frac{65}{12}q = (1A + \frac{4}{8}) + (10 + \frac{2}{3}q)$$



$$2+2=4$$

$$\begin{aligned} \frac{65}{12}q &= (1A + \frac{4}{8}) + (10 + \frac{2}{3}q) \\ \frac{3}{4} &= P(48 + 13C)(35 - 18q) \\ q\frac{65}{P} &= \frac{3}{4}(\frac{P}{65} - \frac{C}{13})(188 + 122) \end{aligned}$$

$$\sqrt{3}$$



Wiskundige vaardigheden

1 Herleiden

Voorbeelden

$$5a \cdot 3b = 15ab$$

$$5a \cdot 3a = 15a^2$$

$$5a + 3b \text{ kan niet korter}$$

$$5a + 3a = 8a$$

$$5x + 2x = 7x$$

$$5x \cdot 2x = 10x^2$$

$$5x + 2y \text{ kan niet korter}$$

$$5x \cdot 2y = 10xy$$

1 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $5a \cdot 2a$

g $3x \cdot -2x$

b $5a + 2a$

h $-5x \cdot -2y$

c $5a \cdot 2b$

i $-3a - a$

d $5a + 2b$

j $-3a \cdot -a$

e $13x - 2x$

k $2a \cdot -5b$

f $5x - x$

l $2a - 5b$

Voorbeelden

$$2 \cdot 3x + 5 \cdot 7x = 6x + 35x = 41x \quad \text{eerst vermenigvuldigen, dan optellen}$$

$$3 \cdot 2x - 7 \cdot 2y = 6x - 14y \quad \text{dit kan niet korter, want de termen zijn niet gelijksoortig}$$

$$2x \cdot 3y + 5x \cdot y = 6xy + 5xy = 11xy$$

2 Herleid.

a $5 \cdot 2a + 7 \cdot 3a$

d $2a + 8 \cdot 3a$

b $3 \cdot 2a - 5 \cdot 3a$

e $5a \cdot 2b - 3a \cdot b$

c $5 \cdot 2a + 3 \cdot 6a$

f $3x - 2 \cdot 4y$

Voorbeelden

$$3x + 2y + 5x + 7y = 8x + 9y$$

$$3x + 5x = 8x \text{ en } 2y + 7y = 9y$$

$$2x + 7y - x - 5y = x + 2y$$

$$2x - x = x \text{ en } 7y - 5y = 2y$$

3 Herleid.

a $2a + 5b + a + 6b$

d $8a + 3b - 8a - b$

b $a + 7a + b + 8b$

e $17a - b - a - b$

c $9a + b - 6a + 7b$

f $3 \cdot 2a - 5 \cdot 2b + 3a$

4 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $4a + 2b$

g $15p \cdot -2p$

b $4a \cdot 2b$

h $15p \cdot -2q$

c $4a \cdot 3a$

i $15p - 3 \cdot 2p$

d $4a + 3a$

j $5 \cdot 3p - 3 \cdot 2q$

e $15p \cdot 3q$

k $5 + 3p - 3 + 2p$

f $15p + 3q$

l $5p + 3p - 2q$

2 Haakjes wegwerken

Voorbeelden

$$3(a + 2b) = 3a + 6b$$

$$-5(3x - 7) = -15x + 35$$

$$2(a + 3b) + 6(a - b) = 2a + 6b + 6a - 6b = 8a$$

$$4(x - 2y) - 3(x + y) = 4x - 8y - 3x - 3y = x - 11y$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

5 Herleid.

a $5(3x + 2y)$

d $-(8a + b)$

b $6(x - 3y)$

e $a(2a + 3)$

c $-7(2a - b)$

f $a(3a - 7)$

6 Herleid.

a $2(a + b) + 3(2a - b)$

d $p - q - (p + q)$

b $-2(x - 2y) - 3(2x + y)$

e $-(2a - 7) - 3(a - 6)$

c $2a - 3b - 3(a - b)$

f $5(a - 2b) + 2(a + 5b)$

Voorbeelden

$$(a + 5)(a + 3) = a^2 + 3a + 5a + 15 = a^2 + 8a + 15$$

$$(a - 6)(b + 2) = ab + 2a - 6b - 12$$

$$(a - 3)(a + 2) = a^2 + 2a - 3a - 6 = a^2 - a - 6$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

7 Herleid.

a $(a + 7)(a + 2)$

d $(b + 3)(c + 8)$

b $(a + 7)(a - 2)$

e $(b - 3)(b - 2)$

c $(a - 7)(a - 2)$

f $(c - 1)(c + 2)$

8 Herleid.

a $(2a + 1)(5a - 3)$

d $(5a - 2)(3 - a)$

b $(3a + 1)(b - 1)$

e $(4p + 1)(p - 9)$

c $(2a - 1)(a + 1)$

f $(2p + 5)(2p - 4)$

Voorbeelden

$$(a + 1)(a - 3) + 2(a + 5) = a^2 - 3a + a - 3 + 2a + 10 = a^2 + 7$$

$$(x + 5)(x + 1) - 3(2x - 1) = x^2 + x + 5x + 5 - 6x + 3 = x^2 + 8$$

9 Herleid.

a $(a + 2)(a - 5) - 3(a + 1)$

b $(a + 6)(a + 1) - 2(3a + 3)$

c $5a(a - 1) - 3(a + 2)$

d $(2a + 1)(3a - 1) - a(a + 1)$

e $3(5a - 6) - 9(2a + 2)$

f $(a - 9)(a + 8) + 72$

Voorbeelden

$$(a-8)(a+8) = a^2 - 64$$

$$(a+8)^2 = a^2 + 16a + 64$$

Het dubbelproduct van a en 8 is $2 \cdot a \cdot 8 = 16a$.

$$(3a-5)^2 = 9a^2 - 30a + 25$$

Het dubbelproduct van $3a$ en 5 is $2 \cdot 3a \cdot 5 = 30a$.

De merkwaardige producten

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

10 Herleid. Schrijf het antwoord in één keer op.

a $(a+7)^2$

c $(a-7)(a+7)$

e $(3p-4)^2$

b $(x-1)^2$

d $(2p+5)(2p-5)$

f $(9q+3)^2$

11 Herleid. Schrijf het antwoord in één keer op.

a $(5y-9)(5y+9)$

c $(-3x+1)^2$

e $(7a-b)^2$

b $(5x-7)^2$

d $(5x+1)(-5x+1)$

f $(4a+7b)^2$

3 Breuken

Breuken optellen

Gelijknamige breuken kun je direct optellen.

$$\text{Dus } \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \text{ en } \frac{13}{15} - \frac{7}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

vereenvoudigen

Niet-gelijknamige breuken maak je eerst gelijknamig.

$$\text{Dus } \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12} \text{ en } 1\frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{3} - \frac{2}{5} = \frac{20}{15} - \frac{6}{15} = \frac{14}{15}.$$

helen eruit halen

Breuken vermenigvuldigen

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

$$\text{Dus } \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21} \text{ en } 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{3}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Breuken delen

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

$$\text{Dus } \frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9} \text{ en } 2\frac{2}{5} : 3 = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

12 Bereken.

a $\frac{5}{11} + \frac{3}{11}$

c $\frac{5}{12} + \frac{1}{12}$

e $1\frac{1}{5} - \frac{3}{5}$

b $\frac{5}{7} - \frac{2}{7}$

d $\frac{11}{14} - \frac{3}{14}$

f $2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}$

13 Bereken.

a $\frac{2}{7} + \frac{1}{2}$

c $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$

e $\frac{5}{12} + \frac{3}{8}$

b $1\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

d $1\frac{2}{5} - 1\frac{1}{3}$

f $2\frac{1}{5} - \frac{3}{10}$

14 Bereken.

a $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$

c $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{11}$

e $4\frac{2}{3} - 1\frac{2}{7}$

b $1\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}$

d $5\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{7}$

f $4\frac{2}{3} \cdot 1\frac{2}{7}$

15 Bereken.

a $\frac{5}{7} : \frac{2}{3}$

d $5 : \frac{1}{7}$

g $1\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$

b $1\frac{1}{3} : \frac{3}{4}$

e $1\frac{1}{5} : \frac{5}{6}$

h $3\frac{1}{2} \cdot 3$

c $1\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$

f $\frac{1}{5} : 3$

i $1 : 6\frac{1}{2}$

16 Bereken.

a $5\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

d $1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2}$

g $\frac{2}{5} + 4$

b $5\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$

e $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$

h $\frac{2}{5} \cdot 4$

c $5\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$

f $1\frac{1}{3} : 1\frac{1}{2}$

i $\frac{2}{5} : 4$

17 Bereken.

a $3\frac{1}{5} + \frac{3}{4}$

d $3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}$

g $\frac{3}{8} + 6$

b $3\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}$

e $3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4}$

h $\frac{3}{8} \cdot 6$

c $3\frac{1}{5} : \frac{3}{4}$

f $3\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$

i $\frac{3}{8} : 6$

4 Letterrekenen met breuken

Voorbeelden

$$\frac{8a}{12b} = \frac{2a}{3b}$$

deel teller en noemer door 4

$$\frac{8ab}{4ac} = \frac{2b}{c}$$

deel teller en noemer door 4 en door a

18 Vereenvoudig.

a $\frac{12a}{15a}$

c $\frac{7a}{7}$

e $\frac{3x}{15x}$

b $\frac{5abc}{10ac}$

d $\frac{15x}{3x}$

f $\frac{15xyz}{15xy}$

Voorbeelden

$$\frac{3}{a} + \frac{5}{a} = \frac{8}{a}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{3}{b} = \frac{a-3}{b}$$

19 Herleid.

a $\frac{5}{x} + \frac{2}{x}$

c $\frac{7}{2a} + \frac{3}{2a}$

e $\frac{3ab}{a} + 2b$

b $\frac{3}{y} - \frac{x}{y}$

d $\frac{x}{6} - \frac{y}{6}$

f $\frac{5x}{x} - 3$

Voorbeelden

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2y}{xy} + \frac{3x}{xy} = \frac{2y+3x}{xy}$$

neem als nieuwe noemer $x \cdot y = xy$

$$5 - \frac{4}{x} = \frac{5}{1} - \frac{4}{x} = \frac{5x}{x} - \frac{4}{x} = \frac{5x-4}{x}$$

20 Herleid.

a $\frac{5}{a} + \frac{3}{b}$

c $6 + \frac{2}{a}$

e $\frac{5}{2x} - \frac{1}{y}$

b $\frac{1}{4} - \frac{3}{x}$

d $\frac{3}{2a} + \frac{5}{3b}$

f $\frac{3x}{y} - \frac{5x}{2y}$

Voorbeeld

$$\frac{3a}{b} \cdot \frac{2b}{5c} = \frac{6ab}{5bc} = \frac{6a}{5c}$$

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

21 Herleid.

a $\frac{2}{a} \cdot \frac{x}{y}$

c $\frac{5}{2x} \cdot \frac{4y}{3z}$

e $\frac{3}{2a} \cdot \frac{4}{3b}$

b $\frac{5}{x} \cdot \frac{3}{y}$

d $\frac{15}{x} \cdot 2y$

f $\frac{5a}{10x} \cdot \frac{2x}{5a}$

Voorbeelden

$$\frac{6}{a} \cdot \frac{2}{b} = \frac{6}{a} \cdot \frac{b}{2} = \frac{6b}{2a} = \frac{3b}{a}$$

$$\frac{3}{2a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{3}{2a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{3a}{2ab} = \frac{3}{2b}$$

delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van de breuk

22 Herleid.

a $\frac{12}{p} : \frac{3}{q}$
b $\frac{p}{q} : \frac{2p}{7}$

c $\frac{5}{a} : \frac{15}{4a}$
d $\frac{9}{a} : 3$

e $\frac{2a}{9b} : a$
f $\frac{6pq}{5r} : \frac{3p}{20qr}$

23 Herleid.

a $\frac{9}{2a} + \frac{3}{a}$
b $\frac{9}{2a} \cdot \frac{3}{a}$

c $\frac{9}{2a} : \frac{3}{a}$
d $\frac{5a}{2b} + 4a$

e $\frac{5a}{2b} \cdot 4a$
f $\frac{5a}{2b} : (4a)$

5 Wortels

Worteltrekken

$\sqrt{100} = 10$, want $10^2 = 100$ en 10 is niet negatief.

Verder is $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$. Maar $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$.

$3\sqrt{81}$ betekent $3 \cdot \sqrt{81}$, dus $3\sqrt{81} = 3 \cdot 9 = 27$.

De wortel van een
getal is niet negatief.



24 Bereken.

a $\sqrt{25} - \sqrt{9}$

b $\sqrt{25 - 9}$

c $\sqrt{25 \cdot 9}$

d $5\sqrt{16} - 7\sqrt{49}$

e $5\sqrt{36 + 64}$

f $5\sqrt{(-6)^2}$

g $-8\sqrt{(-3)^2} + 2(\sqrt{16})^2$

h $4\sqrt{(-4)^2} - 5\sqrt{(-5)^2} + 6\sqrt{(-6)^2}$

Het kwadraat van een wortel

$(\sqrt{a})^2 = a$, dus $(\sqrt{11})^2 = 11$.

Omdat $(ab)^2 = a^2b^2$ is $(-3\sqrt{5})^2 = (-3)^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5 = 45$.

Maar $-3(\sqrt{5})^2 = -3 \cdot 5 = -15$.

25 Bereken.

a $(5\sqrt{2})^2$

b $-5(\sqrt{2})^2$

c $(-5\sqrt{3})^2 - 6^2$

d $(6\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{6})^2$

e $(-\sqrt{10})^2 + 10$

f $(2\sqrt{3})^2 - 3\sqrt{9}$

Wortels vermenigvuldigen en optellen

Wortels vermenigvuldig je volgens de regel $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Dus $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$,

$$4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{7} = 8\sqrt{21}$$

$$4 \cdot 2 = 8 \text{ en } \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{21}$$

$$\text{en } -6\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = -6\sqrt{100} = -6 \cdot 10 = -60.$$

De som van gelijksoortige wortels kun je herleiden.

Zo is $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, $3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$ en $\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = -3\sqrt{5}$.

Maar $2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$ kun je niet herleiden, want $\sqrt{3}$ en $\sqrt{5}$ zijn niet gelijksoortig.

Ook $5 - 3\sqrt{5}$ kan niet herleid worden.

26 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $8\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$

d $2\sqrt{8} \cdot 9\sqrt{2}$

g $3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{32}$

b $8\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}$

e $8\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$

h $-6\sqrt{7} + 3 \cdot 2\sqrt{7}$

c $8\sqrt{2} - \sqrt{2}$

f $3\sqrt{2} + 2$

i $3 \cdot 2\sqrt{2} - 2 \cdot 3\sqrt{2}$

6 Vergelijkingen

Lineaire vergelijkingen oplossen

1 Staan er haakjes? Werk ze weg.

2 Herleid zo nodig het rechter- en linkerlid.

3 Zorg ervoor dat de term met x alleen in het linkerlid voorkomt
en de term zonder x alleen in het rechterlid.

4 Deel door het getal dat voor x staat.

Voorbeelden

$$3x + 1 = x + 9$$

$$\textcolor{red}{-x} \quad \textcolor{red}{-x}$$

$$2x + 1 = 9$$

$$\textcolor{red}{-1} \quad \textcolor{red}{-1}$$

$$2x = 8$$

$$\textcolor{red}{:2} \quad \textcolor{red}{:2}$$

$$x = 4$$

$$5x - 3 = 9 - x$$

$$\textcolor{red}{+x} \quad \textcolor{red}{+x}$$

$$6x - 3 = 9$$

$$\textcolor{red}{+3} \quad \textcolor{red}{+3}$$

$$6x = 12$$

$$\textcolor{red}{:6} \quad \textcolor{red}{:6}$$

$$x = 2$$

$$4(x + 1) = 2x + 9$$

$$4x + 4 = 2x + 9$$

$$\textcolor{red}{-2x} \quad \textcolor{red}{-2x}$$

$$2x + 4 = 9$$

$$\textcolor{red}{-4} \quad \textcolor{red}{-4}$$

$$2x = 5$$

$$\textcolor{red}{:2} \quad \textcolor{red}{:2}$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

27 Los op.

a $6x + 1 = 19$

e $7x - 3 = 2x - 22$

i $5 - (3 - x) = 8 - 3x$

b $4x - 3 = -2$

f $\frac{1}{2}x - 6 = -\left(6 + \frac{1}{2}x\right)$

j $\frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{3}x + 6$

c $7 + x = -x$

g $5(x - 2) = 0$

k $5(x - 6) = 3x$

d $5x + 3 = 2(x - 6)$

h $4x - 2 = 5x + 3$

l $-7x + 5 = 2x - 40$

Ontbinden in factoren

Ontbinden in factoren betekent schrijven als een product.

Bij $x^2 - 6x = x(x - 6)$ is de gemeenschappelijke factor x buiten haakjes gebracht.

Bij $4ab + 6a^2 = 2a(2b + 3a)$ zijn zoveel mogelijk factoren buiten haakjes gebracht.

Om $x^2 + 4x - 12$ in factoren te ontbinden, zoek je twee getallen met product -12 en som 4 .

In de tabel van -12 zie je dat je de getallen -2 en 6 moet hebben.

Dus $x^2 + 4x - 12 = (x - 2)(x + 6)$.

$$x^2 = x \cdot x$$

$$6x = 6 \cdot x$$

gemeenschappelijke factor x

$$4ab = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot b$$

$$6a^2 = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a$$

dus $2a$ buiten haakjes brengen.

product -12		som
1	-12	-11
-1	12	11
2	-6	-4
-2	6	4
3	-4	-1
-3	4	1

28 Ontbind in factoren.

a $x^2 + 15x + 50$

b $x^2 - 15x - 34$

c $x^2 + 15x$

d $x^2 - 7x - 30$

e $x^2 - x - 2$

f $x^2 + 9x + 20$

g $x^2 + 2x - 80$

h $6x^2y + 12xy^2$

i $x^2 - 17x + 72$

j $x^2 - x - 56$

k $x^2 - 38x + 72$

l $5x^2 + 5x$

Kwadratische vergelijkingen oplossen

Je kent twee manieren om kwadratische vergelijkingen op te lossen.

Methode 1 Gebruik $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

Bij deze methode zorg je er eerst voor dat het rechterlid 0 is en dat het linkerlid in factoren is ontbonden.

Methode 2 Herleid de vergelijking tot de vorm $x^2 = c$.

Voorbeelden

$$x^2 - 3x = 10$$

$$-10 \quad -10$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x + 2)(x - 5) = 0$$

$$x + 2 = 0 \vee x - 5 = 0$$

$$x = -2 \vee x = 5$$

$$6x^2 + 5 = 101$$

$$-5 \quad -5$$

$$6x^2 = 96$$

$$:6 \quad :6$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

29 Los op.

a $2x^2 - 32 = 0$

b $x^2 + 3x = 18$

c $x^2 - 2x = 8$

d $x^2 + x = 2$

e $x^2 + x = x + 16$

f $x^2 + 8x = 0$

g $(x + 8)(x - 1) = 0$

h $x^2 = x + 20$

i $x^2 = 4x + 21$

j $(2x - 4)(4x + 2) = 0$

k $x(x - 4) = 2x$

l $x^2 - x = 4 - x$

Algemene vaardigheden

Probleemaanpak

- 1** De som van een getal en zijn kwadraat is 72.
Onderzoek welk getal dat kan zijn.

Variabele invoeren

Veel problemen kun je oplossen door eerst een variabele in te voeren.

In de basisstof heb je daar al heel wat keren gebruik van gemaakt.

We noemen deze aanpak voortaan *Voer een variabele in*.

Probleem

Toen een vader 42 jaar was, was zijn zoon 8 jaar.

Nu is hij drie keer zo oud als zijn zoon.

Hoe oud is de zoon nu?

Dit probleem los je met de aanpak *Voer een variabele in* als volgt op.

Stap 1 Begrijp de vraag

- Neem eens aan dat de zoon nu 20 jaar is. Dan zou de vader nu 60 jaar moeten zijn, dus 40 jaar ouder dan zijn zoon. Dat klopt niet met het andere gegeven.
- Belangrijk is dat het leeftijdsverschil steeds 34 jaar is.

Stap 2 Zoek een geschikte aanpak

- Voer een variabele in.
Stel de leeftijd van de zoon nu gelijk aan x jaar.
De leeftijd van de vader nu is dan $x + 34$ jaar.

Stap 3 Werk de gekozen aanpak uit

- Stel de leeftijd van de zoon nu is x jaar.
De vader is nu $x + 34$ jaar.
- De leeftijd van de vader nu is
 $3 \times$ (de leeftijd van de zoon nu), dus los op $x + 34 = 3x$.
Zie hiernaast.
De zoon is nu 17 jaar.

Stap 4 Kijk nog eens terug

- Controle: de zoon is 17 jaar, dus de vader is
 $17 + 34 = 51$ jaar en $51 = 3 \cdot 17$. Klopt.

Los de volgende problemen op met de aanpak *Voer een variabele in*.

Schema probleemaanpak

- 1 Begrijp de vraag.
- 2 Zoek een geschikte aanpak.
- 3 Werk de aanpak uit.
- 4 Controleer je antwoord. Kijk nog eens terug (= reflectie).

$$\begin{array}{rcl} x + 34 & = & 3x \\ - 3x & - 3x & \\ \hline -2x + 34 & = & 0 \\ - 34 & - 34 & \\ \hline -2x & = & -34 \\ : -2 & : -2 & \\ \hline x & = & 17 \end{array}$$

2 Een vader is drie keer zo oud als zijn zoon. Over 15 jaar is de vader twee keer zo oud als zijn zoon.
Hoe oud is de zoon nu?

3 Marleen is nu 3 jaar ouder dan Jacco, maar 42 jaar geleden was zij anderhalf keer zo oud als Jacco.
Hoe oud is Jacco nu?

4 Piet vindt zijn vierkante grasperk niet mooi. Zijn vrouw zegt: 'Maak het 8 meter langer en 7 meter smaller. Dat is mooier en bovendien verandert de oppervlakte dan niet.'
Wat zijn de afmetingen van het vierkante grasveld?

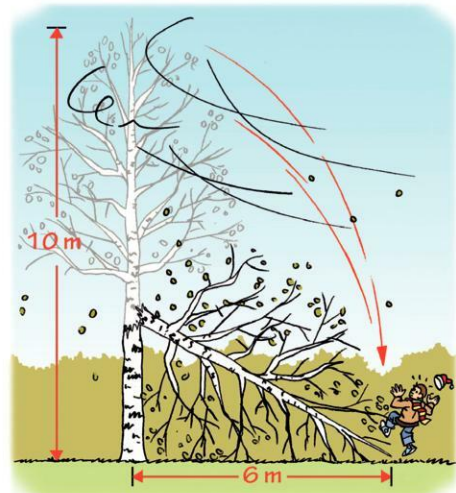


5 Frits heeft een getal in gedachten. Trekt hij er 4 van af en neemt hij van de uitkomst vervolgens het kwadraat, dan heeft hij 8 meer dan het oorspronkelijke getal.
Welk getal heeft Frits in gedachten?

6 Van een rechthoekige driehoek is de schuine zijde 8 cm langer dan de kortste zijde. De andere zijde is 1 cm korter dan de schuine zijde.
Hoeveel cm is de lengte van de schuine zijde?

7 Een steen weegt $\frac{9}{10}$ van zijn gewicht plus 0,9 kg.
Hoeveel weegt de steen?

8 Een oude, 10 meter hoge berk is tijdens een najaarsstorm geknakt. De top van de berk raakt de grond 6 meter van de stam.
Op welke hoogte bevindt zich de knak?



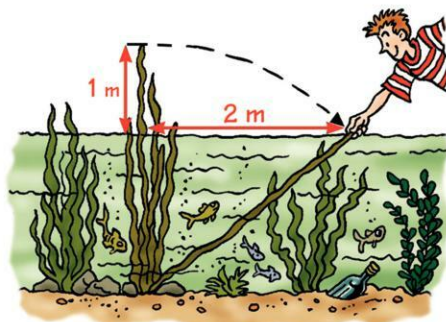
9 Rob en Cindy moeten twee getallen optellen. Helaas berekent Rob het verschil. Hij krijgt 10 als uitkomst. En Cindy berekent het product. Zij krijgt als uitkomst 651.
Om welke getallen gaat het?

- 10** Antoinette maakt een wandeltocht van acht dagen. Zij besluit elke dag 500 meter meer af te leggen dan de dag ervoor. In totaal legt ze tijdens deze tocht 154 km af.

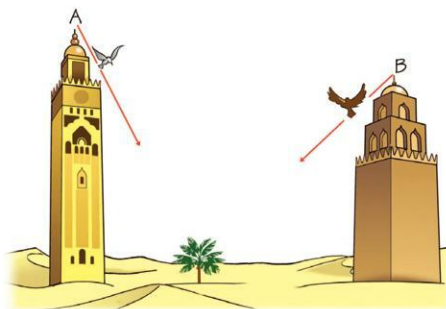
Hoeveel km legt Antoinette de eerste dag af?

- 11** Een rietstengel steekt 1 meter boven het wateroppervlak van een vijver uit. Peter trekt de rietstengel zo scheef, dat de top van de stengel het wateroppervlak raakt. De afstand tussen het punt waar de stengel oorspronkelijk boven het water kwam en de plaats van de top na het scheeftrekken is 2 meter.

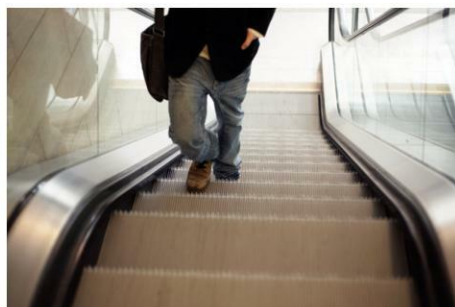
Hoe lang is de rietstengel?



- 12** Twee torens staan 50 meter van elkaar. Toren A is 45 meter hoog, toren B is 35 meter hoog. Tussen de torens staat een boom van 5 meter hoog. Tegelijkertijd vertrekken twee even snel vliegende vogels uit de torenspitsen naar de top van de boom. Ze komen op hetzelfde moment aan. Op hoeveel meter staat de boom van toren A?



- 13** Thomas gebruikt elke dag de roltrap in het station. Meestal loopt hij de roltrap op in een tempo waarbij hij 11 treden gebruikt. Als hij haast heeft, verdubbelt hij zijn snelheid. Hij gebruikt dan 14 treden. Hoeveel treden moet hij lopen als de roltrap stilstaat? Neem aan dat Thomas nooit treden overslaat.



- 14** Opa vertelt: 'Mijn zoon is 28 jaar jonger dan ik. Mijn zoon is 30 jaar ouder dan mijn kleinzoon. Mijn kleinzoon en ik zijn samen 150 jaar.' Hoe oud is opa?

Som van opeenvolgende gehele getallen

Ook bij het volgende probleem is de aanpak *Voer een variabele in* te gebruiken.

Probleem

Toon aan dat de som van drie opeenvolgende gehele getallen deelbaar is door 3.

Stap 1 Begrijp de vraag

- Drie opeenvolgende gehele getallen zijn bijvoorbeeld 7, 8 en 9 of 20, 21 en 22.
- De som van 7, 8 en 9 is $7 + 8 + 9 = 24$ en 24 is deelbaar door 3, want $24 : 3$ is een geheel getal.

Stap 2 Zoek een geschikte aanpak

- Voer een variabele in. Van de drie opeenvolgende gehele getallen stel je het kleinste getal gelijk aan x .
- De andere getallen zijn dan $x + 1$ en $x + 2$.

Stap 3 Werk de gekozen aanpak uit

- De kleinste van het drietal is x .
- De som van x , $x + 1$ en $x + 2$ is $x + x + 1 + x + 2 = 3x + 3$.
- Omdat $3x + 3 = 3(x + 1)$ is de som deelbaar door 3.

Stap 4 Kijk nog eens terug op het probleem

- Als je de som van drie opeenvolgende gehele getallen deelt door 3, krijg je het middelste van de drie getallen als uitkomst. Je had ook het middelste getal x kunnen noemen. Je krijgt dan het drietal $x - 1$, x en $x + 1$. Ga na dat de som deelbaar is door 3.
- Zou ook gelden dat de som van vier opeenvolgende gehele getallen deelbaar is door 4? En hoe zit het met vijf opeenvolgende gehele getallen?

- 15 De som van drie opeenvolgende even getallen is 462. Welke getallen zijn dat?

- 16 a Toon aan dat de som van vier opeenvolgende even getallen deelbaar is door 4.
b Toon aan dat de som van vijf opeenvolgende even getallen deelbaar is door 5.

- 17 Bij de aanleg van de waterleiding wordt gebruikgemaakt van buizen die òf 36 meter òf 40 meter lang zijn. Zouden er alleen buizen van 40 meter gebruikt worden, dan zijn er 26 minder nodig dan in het geval er alleen buizen van 36 meter gebruikt worden. Hoeveel meter is de waterleiding lang?



Kangoeroe-opgaven

De Kangoeroe is een wereldwijde reken- en wiskundewedstrijd die jaarlijks wordt gehouden.

Er zijn opgaven voor

- de basisschool (wizFUN, wizKID en wizSMART)
- de klassen 1 en 2 havo/vwo en 3 havo (wizBRAIN)
- de klassen 4 en 5 havo en 3, 4, 5 en 6 vwo (wizPROF).

In dit boek staan de wizBRAIN opgaven van het jaar 2015.

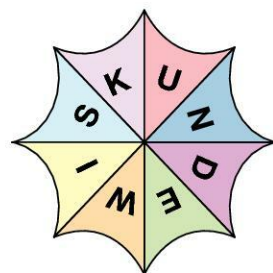
De eerste tien opgaven zijn eenvoudig, de volgende tien opgaven zijn iets lastiger en de laatste tien opgaven zijn moeilijk.

Je mag geen rekenmachine gebruiken, maar wel kladpapier.





- 1** Op een paraplu staat het woord WISKUNDE geschreven, zoals in de figuur hiernaast. Op welke van de volgende plaatjes zie je niet dezelfde paraplu?



A



B



C

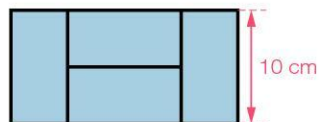


D



E

- 2** Met vier gelijke kleine rechthoeken is een grotere rechthoek gemaakt zoals hiernaast. De breedte van de grote rechthoek is 10 cm. Wat is de lengte van de grote rechthoek?

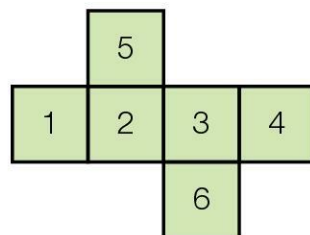


A 10 cm **B** 20 cm **C** 30 cm **D** 40 cm **E** 50 cm

- 3** Welk van de volgende getallen ligt het dichtste bij $2,015 \times 510,2$?

A 0,1 **B** 1 **C** 10 **D** 100 **E** 1000

- 4** Sabine vouwt van de uitslag hiernaast een kubus. Daarna telt ze van ieder paar tegenoverliggende zijanten de getallen op. Welke drie antwoorden krijgt Sabine?



A 4, 5, 12 **B** 4, 6, 11 **C** 5, 6, 10 **D** 5, 7, 9 **E** 5, 8, 8

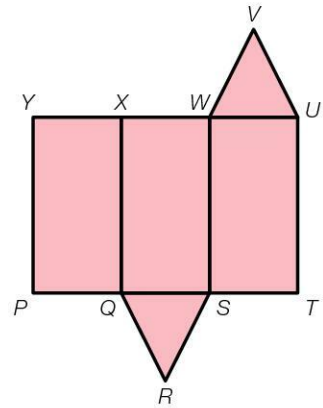
- 5** Een rit van Groningen naar Utrecht via Assen duurt met de auto van Gerrit 2 uur en 10 minuten. Van Groningen naar Assen duurt 35 minuten. Hoeveel minuten duurt de rit van Assen naar Utrecht?

A 95 **B** 105 **C** 115 **D** 165 **E** 175

- 6** Een bepaalde driehoek heeft zijden met lengten 6, 10 en 11. Tom tekent nu een gelijkzijdige driehoek met dezelfde omtrek als deze driehoek. Hoe lang is de zijde van de gelijkzijdige driehoek?

A 6 **B** 9 **C** 10 **D** 11 **E** 18

- 7 Nassim wil van de uitslag hiernaast een driehoekig prisma vouwen.
Welke zijde komt dan tegen de zijde UV aan?



- A QR B RS C WV D XW E XY

- 8 De eekhoorns Knabbel en Babbel willen beukennotjes rapen.
Op de grond gaan ze nooit verder dan 5 meter van de boom (G).
Ook blijven ze minstens 5 meter uit de buurt van het hok van Pluto (H).
Welke van de volgende plaatjes laat het gebied zien waar Knabbel en Babbel kunnen komen?



A



B



C



D



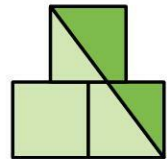
E

- 9 Welke van de volgende breuken is niet te schrijven als een geheel getal?

- A $\frac{2011}{1}$ B $\frac{2012}{2}$ C $\frac{2013}{3}$ D $\frac{2014}{4}$ E $\frac{2015}{5}$

- 10 Het bovenste vierkant staat precies in het midden op de twee onderste vierkanten. Alle vierkanten hebben zijden 1.
Wat is de oppervlakte van het donkere deel?

- A $\frac{3}{4}$ B $\frac{7}{8}$ C 1 D $1\frac{1}{4}$ E $1\frac{1}{2}$



- 11 Samira fietst met een snelheid van 5 meter per seconde.
Het voorwiel van haar fiets heeft een omtrek van 125 cm.
Hoeveel keer gaat het voorwiel van Samira's fiets rond in 5 seconden?

- A 4 B 5 C 10 D 20 E 25

- 12** In een klas is iets speciaals aan de hand: alle jongens zijn op verschillende dagen van de week jarig en alle meisjes zijn in verschillende maanden jarig. Morgen komt er een nieuwe leerling in de klas. We weten nu zeker dat er in de klas niets speciaals meer aan de hand zal zijn.

Hoeveel leerlingen zitten er vanaf morgen in de klas?

A 18 **B** 19 **C** 20 **D** 24 **E** 25

- 13** Door in $2 * 0 * 1 * 5 * 2 * 0 * 1 * 5 * 2 * 0 * 1 * 5 = 0$ elke $*$ te vervangen door een $+$ of een $-$ kun je een kloppende vergelijking maken.

Hoeveel keer moet je dan minstens een $*$ vervangen door een $+$?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

- 14** Tamara wil in de figuur van driehoeken elke zijde kleuren: rood, groen of blauw.

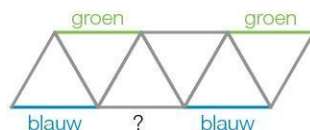
De zijden van elke driehoek moeten verschillend van kleur zijn.

Enkele zijden heeft Tamara al gekleurd.

Welke kleur moet de zijde met het vraagteken krijgen?

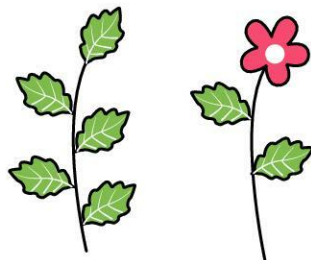
A blauw **B** groen **C** rood **D** rood of blauw

E Tamara kan de figuur niet meer helemaal kleuren.



- 15** In een bos bloemen van 10 takken heeft iedere tak óf alleen 5 blaadjes óf 2 blaadjes en 1 bloem.

Welke van de volgende getallen kan het aantal blaadjes in de bos bloemen zijn?



A 36 **B** 37 **C** 38 **D** 39 **E** 40

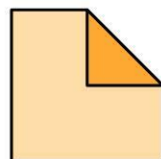
- 16** Bij een examen haalden de kandidaten een gemiddelde score van 6 punten. Precies 60% van de kandidaten is geslaagd. De geslaagde kandidaten hadden een gemiddelde score van 8 punten. Wat was de gemiddelde score van de kandidaten die niet geslaagd zijn?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

- 17** Van een vierkant vel papier wordt één hoekpunt naar het midden gevouwen. Zo ontstaat een onregelmatige vijfhoek, zie de figuur. De oppervlakten van de vijfhoek en het vierkant zijn opeenvolgende gehele getallen.

Wat is de oppervlakte van het vierkant?

A 2 **B** 4 **C** 8 **D** 16 **E** 32



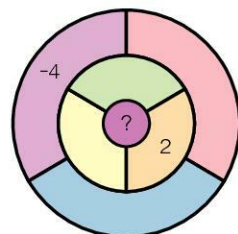
- 18** Tim heeft van een rechthoek de lengten van drie zijden opgeteld. Zijn uitkomst was 44 cm. Tom heeft van dezelfde rechthoek ook de lengten van drie zijden opgeteld. Zijn uitkomst was 40 cm. Hoeveel cm is de omtrek van de rechthoek?
A 42 **B** 56 **C** 64 **D** 84 **E** 112
- 19** Tijdens een plensbui viel er 15 liter water per vierkante meter. Hoeveel cm is het waterpeil in een zwembad tijdens die bui gestegen?
A 0,15 **B** 1,5 **C** 15 **D** 150
E Dat hangt af van de vorm van het zwembad.

- 20** Meneer Kei laat zijn 5 leerlingen raden hoeveel van hen het huiswerk hebben gemaakt. Ali antwoordt 0, Bert 1, Caroline 2, Desi 3 en Elsje 4. Meneer Kei merkt dat de niet-makers het fout hebben geraden en de makers het goed. Hoeveel leerlingen hebben het huiswerk gemaakt?



- A** 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

- 21** Roel wil in elk van de zeven gebieden van de figuur een getal schrijven. Het getal in een gebied moet de som zijn van alle getallen in de buurgebieden (twee gebieden zijn buren als ze aan elkaar grenzen). Roel heeft al twee getallen opgeschreven. Welk getal moet Roel schrijven in het gebied met het vraagteken?

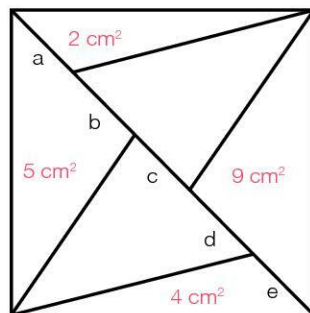


- A** -4 **B** -2 **C** 0 **D** 1 **E** 6

- 22** Van vijf kaarten is op elk een positief geheel getal geschreven (een getal mag vaker opgeschreven zijn). Van ieder mogelijk paar kaarten telt Peter de getallen op. Hij krijgt maar drie verschillende uitkomsten: 57, 70 en 83. Wat is het grootste getal dat op deze kaarten voorkomt?
A 35 **B** 42 **C** 48 **D** 53 **E** 82

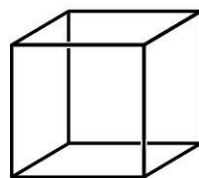
- 23** Van een groep kangoeroes wegen de twee lichtste dieren samen 25% van het totale gewicht van de groep. De drie zwaarste kangoeroes wegen samen 60% van het totale gewicht. Uit hoeveel kangoeroes bestaat de groep?
A 6 **B** 7 **C** 8 **D** 15 **E** 20

- 24** Een vierkant met oppervlakte 30 cm^2 is verdeeld in een aantal driehoeken zoals in de figuur. Van vier van deze driehoeken is de oppervlakte gegeven. Welk deel van de diagonaal is het langst?



A a **B** b **C** c **D** d **E** e

- 25** Igor heeft stukjes ijzerdraad van 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm en 7 cm lang. Van elke lengte heeft hij er één. Van een aantal van deze stukjes maakt hij een draadmodel van een kubus met zijde 1 cm. De stukjes overlappen elkaar niet.



Wat is het kleinste aantal stukjes dat hij hiervoor nodig heeft?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

- 26** Hiernaast zie je een voorbeeld van een trapezium. In een bepaald trapezium $PQRS$ met evenwijdige zijden PQ en SR is $\angle S = 120^\circ$ en $RS = SP = \frac{1}{3}PQ$.



Hoeveel graden is $\angle Q$?

A 25 **B** 30 **C** 40 **D** 45 **E** 60

- 27** Op een lijn zijn vijf punten getekend. Lionel gaat de afstand tussen elk mogelijk paar van deze punten meten. Hij meet, van klein naar groot, 2, 5, 6, 8, 9, k , 15, 17, 20 en 22.

Welk getal is k ?

A 10 **B** 11 **C** 12 **D** 13 **E** 14

- 28** Vorige week gaf mijn vriend Thomas uit Atlantis mij zijn telefoonnummer. Nu wil ik Thomas bellen, maar zie dat hij maar zes cijfers heeft opgeschreven.

In Atlantis hebben de telefoonnummers zeven cijfers. De nummers mogen, net als in Nederland, beginnen met een 0. Ik wil uitrekenen hoeveel telefoonnummers ik maximaal moet proberen om er zeker van te zijn Thomas te spreken.

Hoeveel telefoonnummers zijn dat?

A 55 **B** 60 **C** 64 **D** 70 **E** 80

- 29** Fatima heeft het getal 2015 gedeeld door elk van de getallen 1, 2, 3, enzovoort, tot en met 1000. Van elk van deze delingen heeft ze de rest opgeschreven.

Wat is de grootste rest die Fatima heeft opgeschreven?

A 15 **B** 215 **C** 671 **D** 1007 **E** geen van deze

30 We gaan de positieve gehele getallen kleuren volgens de volgende drie regels.

- (1) Elk getal is óf rood óf groen.
- (2) Elk getal dat je kunt krijgen door twee verschillende rode getallen op te tellen, is ook rood.
- (3) Elk getal dat je kunt krijgen door twee verschillende groene getallen op te tellen, is ook groen.

Op hoeveel verschillende manieren kunnen we de getallen kleuren?

- A** 0 **B** 2 **C** 4 **D** 6 **E** meer dan 6

Trefwoordenregister

A

absolute frequentie 78
absolute toename 57

B

Beaufort, schaal van 79
bach-stelling 33
beeld 152
beelddiagram 60
beker van Pythagoras 23
beschrijvende statistiek 60
bewijs 46
blad 70
bovenvlak van prisma 142
brandpunt 136

C

centrummaat 75
cilinder 145
cirkeldiagram 64

D

deelbaar 108
deler 108
derdemachtswortel 166
diagonaalvlak 28
doelgroep 98
doorsnede 24
driehoek van
 Sierpinski 179
Droste-effect 178
dubbel steel-
 bladdiagram 71

E

e-mail 78
enquête 97
Excel 84

F

frequentie 67
frequentietabel 67

G

gelijkvormig 152
gemeenschappelijke
 factor 110
gemiddelde 74
grondvlak van kegel 149
grondvlak van
 piramide 147
grondvlak van prisma 142

H

histogram 68
hoogte van kegel 149
hoogte van piramide 147
hoogte van prisma 142
hpq-stelling 34
hulplijn 20
hypotenusa 11

I

inhoud cilinder 145
inhoud kegel 149
inhoud piramide 147
inhoud prisma 142

K

kegel 149
klasse 73
klassenbreedte 73
klassengrens 73
klassenindeling 73
klassenmidden 81
kwadratische
 vergelijking 118
kwantitatieve
 gegevens 97

L

lichaamsdiagonaal 28
lijndiagram 62

M

mediaan 74
modus 75

N

natuurlijk getal 108

O

omgekeerde stelling van
 Pythagoras 18
ontbinden in factoren 110
opstaande ribbe 142
origineel 152

P

parabool 136
periodieke cicaden 109
piramide 147
priemfactor 109
priemgetal 109
prisma 141
procentendomino 55
procentuele afname 53, 58
procentuele toename 52,
 56
product-som-methode 114
Pythagoras 11

R

rechthoekszijde 11
relatieve frequentie 78
relatieve toename 57
richtlijn 136

S

scheurlijn 62
schuine zijde 11
sector 64
sneeuwvlokkromme van
 Von Koch 179
staafdiagram 60
steel 70
steel-bladdiagram 70
stelling 46
stelling van Pythagoras 10,
 12

T

tabel van getal 114
tapijt van Sierpinski 179
tot de derde macht
 verheffen 166
totale frequentie 78
turven 67

U

uitgebreide stelling van
 Pythagoras 31

V

veelvoud 108
vergrotingsfactor 152, 154

W

waarnemingsgetal 67

Z

zelfgelijkvormigheid 178

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Haasart, Wim de Haas, Rhenen

Technisch tekenwerk: OKS, Chennai (India)

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: OKS, Chennai (India)

Dreamstime: p. 6 inzet, 30, 107, 145, 175

Stanserhorn-Bahn/www.cabrio.ch: p. 6-7

Shutterstock: p. 11, 15, 25 a, b, 50, 58, 82,

90, 100 inzet, 109, 156, 165 b, o, 167, 170,

173, 180-181

123RF: p. 23, 24 o, 25 f

Merlijn Michon Fotografie, Amsterdam: p.

24 lb, mb, rb, 36

Thinkstock: p 25 c, d, e, g, h, 154 b, 177

Imageselect, Wassenaar: p. 48 inzet, 120,

161, 178 b, o, 179, 192

Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 48-49, 51,

57, 78, 106

STORM Eindhoven: p. 54

Ferdinand ten Klooster, Zwolle: p. 55

Gerrit de Jong, Middelburg: p. 63

ANP Photo, Rijswijk: p. 76

Alecto, 's-Hertogenbosch: p. 79

iStockphoto: p. 94, 153 l, 155 b, m, o

Roeland Hiele, Utrecht: p. 100-101

Gerrit te Vaarwerk, Lochem: p. 105

Getty Images: p. 138 inzet, 153 r, 194-195

Jan Trautmann / Flickr: p. 138-139

Picture-Alliance, Frankfurt: p. 146

Reinhard Oetken, Oldenburg: p. 152

Vespa: p. 154 o

Wikimedia Commons: p. 158, 176

Fotolia: p. 168, 169



0 / 18

© 2018 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van (een) gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without prior written permission of the publisher.

ISBN 978-90-01-88876-3



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving met interactieve opdrachten in diverse leerroutes, overzichtelijke dashboards en een uitgebreide toetsmodule. Dit maakt gepersonaliseerd leren mogelijk.



Noordhoff Uitgevers



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-88876-3



9 789001 888763