

& GETAL & RUIMTE



Noordhoff Uitgevers

Getal & Ruimte

3 havo deel 1

Twaalfde editie, 2019

Noordhoff Uitgevers
Groningen

Auteurs

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse
M. Vos
B.W. van Laarhoven

Voorwoord

Aan de docent(e),

De delen 3h1 en 3h2

De delen 3h1 en 3h2 zijn bestemd voor de derde klassen havo. De delen sluiten aan op de tweedeklasdelen havo(vwo), en bieden een goede voorbereiding op het examenprogramma havo dat in het schooljaar 2015-2016 is ingevoerd. De delen 3h1 en 3h2 bevatten samen negen hoofdstukken. De hoeveelheid leerstof is gebaseerd op drie lesuren van 50 minuten per week.

De leerstof

Hoofdstuk 1 Lineaire problemen begint met de onderwerpen lineaire formules en lineaire verbanden. Vervolgens komt het oplossen van lineaire vergelijkingen en ongelijkheden met het overbrengen van termen aan bod. In de laatste paragraaf maken de leerlingen kennis met het begrip functie, en leren ze werken met functies van de vorm $f(x) = ax + b$. De eerste vier paragrafen van hoofdstuk 2 Gelijkvormigheid en hellingen staan in het teken van gelijkvormigheid. Er wordt aandacht besteed aan het aantonen van gelijkvormige driehoeken, en hoe met gelijkvormigheid lengten van lijnstukken kunnen worden berekend. In de laatste twee paragrafen komt het begrip helling aan de orde. Hierbij maken de leerlingen kennis met de tangens. Op deze manier wordt een begin gemaakt met de goniometrie, die in hoofdstuk 7 van 3h2 verder wordt behandeld. In hoofdstuk 3 Kwadratische problemen staan de kwadratische functies $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(x) = a(x - d)(x - e)$ en $f(x) = a(x - p)^2 + q$ centraal. Hierbij is er uitgebreid aandacht voor het berekenen van de toppen van de bijbehorende grafieken. Verder komt in dit hoofdstuk het oplossen van kwadratische vergelijkingen met ontbinden in factoren aan bod.

In hoofdstuk 4 Statistiek en procenten komen typerende onderwerpen uit de wiskunde A aan de orde. Er wordt een vervolg gegeven aan het rekenen met procenten, en de leerlingen krijgen te maken met het verwerken van gegevens uit artikelen, tabellen en diagrammen. Het hoofdstuk sluit af met een Excel-paragraaf. Het is aan te bevelen deze paragraaf door te werken omdat dataverwerking met Excel bij wiskunde A in de bovenbouw een belangrijke rol speelt.

Met hoofdstuk 5 Algebraïsche vaardigheden worden alle leerlingen goed voorbereid op de vaardigheden die in klas 4 van ze worden gevraagd. Er wordt geoefend met het wegwerken van haakjes, en met het herleiden van breuken, machten en wortels. Tevens wordt aandacht besteed aan het vrijmaken van variabelen bij lineaire vormen.

De basisstof van elk hoofdstuk wordt afgesloten met de Gemengde opgaven. Het maken van deze opgaven is een goede voorbereiding op het proefwerk. De Diagnostische toets, die na de Samenvatting staat, toetst de basiskennis en -vaardigheden van het hoofdstuk. Heeft een leerling moeite met een opgave van de Diagnostische toets, dan kan hij de bijbehorende opgave(n) van de Herhaling maken. Deze opgaven hebben meer tussenvragen of zijn van uitleg voorzien.

Differentiatie, uitdaging en vaardigheden

In de 3h-delen zijn voorzieningen aangebracht om de individuele leerling zoveel mogelijk op zijn eigen niveau te bedienen. Met de testopgaven, die nieuw zijn in deze

editie, wordt in differentiatie voorzien. Verder wordt regelmatig plus-stof aangeboden. In plus-stof wordt dieper op een onderwerp ingegaan en hebben de opgaven een uitdagender karakter. Met plus-stof kan worden gedifferentieerd naar niveau. Dat betekent niet dat het dan automatisch om wiskunde B-stof gaat, want ook bij wiskunde A-stof kan niveaudifferentiatie plaatsvinden. Op de volgende bladzijden wordt een overzicht gegeven van stof die typerend is voor de vakken wiskunde A, B en D.

Naast de testopgaven zijn ook de denkopgaven nieuw. Een denkopgave biedt een probleem aan dat bij de behandelde theorie hoort, maar doet door een iets andere invalshoek of het ontbreken van tussenvragen een extra beroep op het denkvermogen van de leerling. Wiskundige denkactiviteiten maken onderdeel uit van de huidige examenprogramma's havo en vwo. Door het aanbieden van denkopgaven in de onderbouwboeken raken de leerlingen hiermee vertrouwd. Denkopgaven zijn bedoeld voor alle leerlingen.

Elk hoofdstuk sluit af met een Onderzoek. Hierin gaan de leerlingen op onderzoekende wijze aan de slag met een aan het hoofdstuk gerelateerd onderwerp. Met het Onderzoek wordt een vorm van tempodifferentiatie aangeboden.

Achterin het boek zijn de Wiskundige vaardigheden en de Algemene vaardigheden opgenomen. Door de Wiskundige vaardigheden te maken worden rekenvaardigheden en algebraïsche vaardigheden herhaald en verder ingeslepen. In de Algemene vaardigheden staat het systematisch oplossen van problemen centraal. Leerlingen kunnen de hierin opgedane vaardigheden gebruiken bij het maken van de wizBRAIN Kangoeroe-opgaven van 2016, die na de Algemene vaardigheden komen. Omdat deze wiskundige puzzeltjes niet gesorteerd zijn op onderwerp en ook niet gerelateerd zijn aan een hoofdstuk, wordt ook hiermee een extra beroep gedaan op de wiskundige creativiteit en het wiskundig denken van de leerling. Leerlingen die snel en gemakkelijk een hoofdstuk doorwerken, kunnen met deze Kangoeroe-opgaven extra worden uitgedaagd.

Ter voorbereiding op de bovenbouw komt in de derdeklasdelen het rekenmachine-icoon niet meer voor. De docent bepaalt of de rekenmachine mag worden ingezet.

Getal & Ruimte Online

Via een licentie krijgt een leerling toegang tot de digitale omgeving van Getal & Ruimte. Hierin wordt regelmatig een theorieblok uitgelegd in een instructievideo. Tevens kunnen alle opgaven digitaal gemaakt en nagekeken worden. In de digitale omgeving is er de mogelijkheid om te differentiëren omdat er adaptief kan worden gewerkt. Van elke leerling wordt de voortgang bijgehouden en voor de docent inzichtelijk gemaakt in een dashboard. Verder wordt bij elk hoofdstuk een uitgebreide studiewijzer en een digitaal RTTI-oefenproefwerk aangeboden. Daarnaast krijgen docenten, via de docentenlicentie, een aantal volledig uitgewerkte projecten en een grote hoeveelheid RTTI-gelabelde proefwerkopgaven waarmee een proefwerk samengesteld kan worden.

Opmerkingen van gebruikers stellen wij zeer op prijs.

Najaar 2018

Wiskunde in de bovenbouw van de havo

In de bovenbouw kies je een profiel. Binnen de profielen Economie en Maatschappij (E&M), Natuur en Gezondheid (N&G), en Natuur en Techniek (N&T) is wiskunde een verplicht vak. Bij het profiel Cultuur en Maatschappij (C&M) is wiskunde niet verplicht, maar kun je er in het vrije deel wel voor kiezen. Er zijn drie wiskundevakken in de bovenbouw, namelijk wiskunde A, B en D. Afhankelijk van het profiel zijn er verschillende mogelijkheden, zie de tabel. Wiskunde D kun je alleen kiezen in combinatie met wiskunde B.

Profiel	Welke wiskunde?
Cultuur en Maatschappij (C&M)	geen, A of B*
Economie en Maatschappij (E&M)	A of B*
Natuur en Gezondheid (N&G)	A of B*
Natuur en Techniek (N&T)	B

*Informeer of deze keuze op jouw school wordt aangeboden.
Een school is niet verplicht deze keuze aan te bieden.

Wiskunde A

Bij wiskunde A zijn de belangrijkste onderwerpen statistiek, analyse, en telproblemen. Bij *statistiek* worden gegevens gepresenteerd in tabellen, grafieken en diagrammen. Je gaat deze gegevens verwerken en analyseren om er uitspraken over te doen en typerende kenmerken van te beschrijven. Daarbij werk je ook met grote datasets in Excel. Bij *analyse* krijg je onder andere te maken met lineaire en exponentiële groei. Daarnaast oefen je algebraïsche vaardigheden, zoals het herleiden van formules. Verder onderzoek je grafieken door te werken met de bijbehorende formules, bijvoorbeeld om te berekenen wanneer de winst van een bedrijf maximaal is. Bij *telproblemen* bereken je bijvoorbeeld hoeveel verschillende pincodes er zijn van vier cijfers.

Kenmerkend voor wiskunde A:

- hoofdstuk 4 inclusief het onderzoek

Verder komt terug bij wiskunde A:

- hoofdstuk 1 (behalve §1.4 theorie B, C en D en §1.5)
- hoofdstuk 2: §2.1
- hoofdstuk 5 (behalve §5.2 theorie C en §5.4 theorie D en E)

Wiskunde B

Wiskunde B kenmerkt zich door de onderwerpen analyse en meetkunde. Vergelijken met wiskunde A is wiskunde B abstracter. De focus ligt meer op wiskundige technieken en je krijgt minder verhaaltjessommen. Bij *analyse* krijg je veel te maken met algebraïsche vaardigheden, zoals het oplossen van vergelijkingen en het herleiden van formules. Verder onderzoek je bij functies de hellingen van grafieken. De *meetkunde* bestaat uit vlakke meetkunde en analytische meetkunde. Bij *vlakke meetkunde* krijg je te maken met hoeken, afstanden en gelijkvormigheid, maar ook met het opstellen van vergelijkingen in een meetkundige context. Bij *analytische meetkunde* reken je aan meetkundige figuren in een assenstelsel. Je stelt bijvoorbeeld vergelijkingen op van lijnen en cirkels.

Kenmerkend voor wiskunde B:

- hoofdstuk 1: §1.4 theorie B, C en D en §1.5
- hoofdstuk 2
- hoofdstuk 3
- hoofdstuk 5

Verder komt terug bij wiskunde B:

- hoofdstuk 1
- hoofdstuk 4 (alleen §4.3, §4.4, §4.5)

Wiskunde D

Wiskunde D zorgt voor een verbreding en verdieping van je wiskundekennis en bevat enkele uitdagende onderwerpen. Als je overweegt een technische studie te kiezen, dan is wiskunde D aan te bevelen, want je komt in aanraking met onderwerpen waarvan je op het hbo veel profijt kunt hebben. Zo krijg je te maken met kansrekening, ruimtemeetkunde, groeiprocessen, en functies die bij wiskunde B niet worden behandeld.

Kenmerkend voor wiskunde D:

- hoofdstuk 3: onderzoek
- hoofdstuk 5: onderzoek

Verder komt terug bij wiskunde D:

- hoofdstuk 1
- hoofdstuk 2
- hoofdstuk 3
- hoofdstuk 4 (alleen §4.3, §4.4, §4.5)
- hoofdstuk 5

Legenda

Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen die je paraat moet hebben.

Oriënterende opgave

Theorieblokken worden voorafgegaan door oriënterende opgaven.

[>>5] Testopgave

Een testopgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld goed begrijpt, dan kun je de testopgave maken. Gaat dit foutloos, dan mag je verdergaan met de opgave die achter >> staat.

Gewone opgave

Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

Afsluitende opgave

Aan deze opgave zie je welk eindniveau verwacht wordt.

Denkopgave

Een denkopgave doet een extra beroep op je denkvermogen. De denkopgave hoort bij de behandelde theorie, maar vaak wordt een probleem op een iets andere manier gepresenteerd. Denkopgaven zijn bedoeld voor alle leerlingen.

7 Diagnostische toets

7,8

Met de diagnostische toets wordt gecontroleerd of je de basisstof beheerst. Per toetsvraag wordt verwezen naar een of meer opgaven uit de herhaling.



Plus-stof

Met plus-stof kan worden gedifferentieerd naar niveau.

[\[> WERKBOEK\]](#)

Verwijzing naar het werkboek.



Paragraaf waarbij je met het computerprogramma Excel werkt.

Inhoud

1 Lineaire problemen 8

	Voorkennis Herleiden en vergelijkingen	10
1.1	Lineaire formules	12
1.2	Lineaire verbanden	17
1.3	Lineaire vergelijkingen	20
1.4	Lineaire ongelijkheden	26
1.5	Lineaire functies	30
	Gemengde opgaven	36
	Samenvatting	38
	Diagnostische toets	40
	Herhaling	42
	Onderzoek Hartslag en fitheid	46

2 Gelijkvormigheid en hellingen 48

	Voorkennis Rechthoekige driehoeken	50
2.1	Kruisproducten	52
2.2	Gelijkvormigheid	55
2.3	Gelijkvormigheid aantonen	59
+ 2.4	Een lengte x stellen	64
2.5	Hellingsgetal	66
2.6	Tangens	69
	Gemengde opgaven	74
	Samenvatting	76
	Diagnostische toets	78
	Herhaling	80
	Onderzoek Vergrotingen tekenen	84

3 Kwadratische problemen 86

	Voorkennis Kwadratische formules en haakjes wegwerken	88
3.1	Kwadratische functies	90
3.2	De top van de grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$	94
3.3	Kwadratische vergelijkingen	97
3.4	De functie $f(x) = a(x - d)(x - e)$	103
3.5	Grafieken veranderen	106
	Gemengde opgaven	112
	Samenvatting	114
	Diagnostische toets	116

Herhaling	118
Onderzoek Ontbinden voor gevorderden	122

4 Statistiek en procenten 124

	Voorkennis Procenten	126
4.1	Cijfermateriaal	127
4.2	Tabellen	131
4.3	Procentuele veranderingen	133
4.4	Vermenigvuldigingsfactor	136
4.5	Rekenen met procenten	140
4.6	Diagrammen en procenten	144
4.7	Rekenen met Excel	150
	Gemengde opgaven	152
	Samenvatting	154
	Diagnostische toets	156
	Herhaling	158
	Onderzoek Informatie zoeken	161

5 Algebraïsche vaardigheden 164

	Voorkennis Haakjes, breuken en wortels	166
5.1	Haakjes wegwerken	169
5.2	Breuken herleiden	171
5.3	Machten herleiden	178
5.4	Wortels herleiden	182
5.5	Vergelijkingen met twee variabelen	186
	Gemengde opgaven	188
	Samenvatting	190
	Diagnostische toets	192
	Herhaling	194
	Onderzoek Pythagoreïsche drietallen	197

Vaardigheden	198
Wiskundige vaardigheden	200
Algemene vaardigheden	206
Kangoeroe-opgaven	208
Trefwoordenregister	216
Verantwoording	218

Lineaire problemen

Steeds meer mensen maken gebruik van deelauto's. Je huurt dan een auto die in de buurt geparkeerd staat en zet de auto naderhand weer op dezelfde plek terug, klaar voor de volgende huurder. Autodelen zorgt voor minder auto's, is goed voor het milieu en is kostenbesparend.

Bedrijven hanteren verschillende tarieven voor het verhuren van deelauto's. Betaal je bij GreenCar een vast bedrag van 49 euro en per kilometer 32 cent en bij AutoShare een vast bedrag van 55 euro en per kilometer 24 cent, dan kun je door het oplossen van een vergelijking berekenen bij hoeveel kilometer GreenCar en AutoShare even duur zijn.

Wat leer je?

- Werken met lineaire formules en verbanden.
- Lineaire vergelijkingen oplossen met het overbrengen van termen.
- Lineaire ongelijkheden oplossen.
- Wat een functie is.
- Hoe je de coördinaten van snijpunten van grafieken van functies berekent.





Voorkennis Herleiden en vergelijkingen

Theorie A Herleiden

Herleiden betekent eenvoudiger schrijven.

Bij het herleiden van het product $5 \cdot 2x$ krijg je $5 \cdot 2x = 10x$.

En zo is $2x \cdot 3y = 6xy$ en $6x \cdot 4x = 24x^2$.

Bij het herleiden van de som $3x + 2x$ krijg je $3x + 2x = 5x$.

In $3x + 2x$ zijn $3x$ en $2x$ gelijksoortige termen.

Gelijksoortige termen kun je samennemen. Zo is

$3x + 5x = 8x$, $6y + y = 7y$ en $2z - 5z = -3z$.

Maar $3x + 5y$ kun je niet herleiden, want $3x$ en $5y$ zijn niet gelijksoortig. Ook $2a - 5$ kan niet herleid worden.

$$3x = x + x + x$$

$$2x = x + x$$

$$3x + 2x = x + x + x + x + x$$

$$\text{Dus } 3x + 2x = 5x.$$

Let op het verschil tussen vermenigvuldigen en optellen.

vermenigvuldigen

$$2x \cdot 5y = 10xy$$

$$2x \cdot 5x = 10x^2$$

optellen

$$2x + 5y \text{ kan niet korter}$$

$$2x + 5x = 7x$$

1 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $5x + 7x$

d $3x - 12x$

b $5x - x$

e $2x + y$

c $5x - 5x$

f $y + 2y$

2 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $5x \cdot 3y$

d $2x - 6x$

b $5x \cdot 3x$

e $5a \cdot 7$

c $2x \cdot -6y$

f $5a + 7$

Theorie B Gelijksoortige termen

Bij het herleiden van $3x + 8 - 2x - 6$ neem je de gelijksoortige termen samen. Je krijgt $3x + 8 - 2x - 6 = x + 2$.

En zo is $5x + 6 - 2x - 6 = 3x$ en $7a - 5 - a - 11 = 6a - 16$.

3 Herleid.

a $2x + 6 - 3x - 12$

d $3a - 8 - 2a + 8$

b $5a + 8 - 8a - 10$

e $5y - 3 - 3 - 5y$

c $2a - 6b - 2a - b$

f $-2a - 8 + 2a + 8$

Theorie C Haakjes wegwerken

Bij het wegwerken van haakjes gebruik je de volgende regels.

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Dus $3(x - 2) = 3x - 6$, $-3(2a - 7) = -6a + 21$ en

$$(a + 3)(a - 4) = a^2 - 4a + 3a - 12 = a^2 - a - 12.$$

Verder is $8 - 3(2a - 6) = 8 - 6a + 18 = 26 - 6a$.

$$-3 \cdot -6 = +18$$

Voorbeelden

$$3(x - 2) - 5(2x - 6) = 3x - 6 - 10x + 30 = -7x + 24$$

$$(a - 8)(3a + 1) = 3a^2 + a - 24a - 8 = 3a^2 - 23a - 8$$

4 Werk de haakjes weg.

a $6(5x - 1)$

c $-8(3x + 2)$

e $(x + 3)(y - 1)$

b $-3(5 - 2x)$

d $-(x - 5)$

f $(2x - y)(y - 6)$

5 Herleid.

a $5(x - 4) - 2(x - 10)$

c $5(x - 8) - 3(2x - 7)$

e $3x - 2(x - 3)$

b $3x - 7 - 3(6 + x)$

d $(2x - 3)(x - 1) - 5x + 2$

f $(3x - 2)(x - 3)$

Theorie D Eenvoudige vergelijkingen

Een voorbeeld van een vergelijking is $3x + 5 = 17$. In deze vergelijking is $3x + 5$ het linkerlid en 17 het rechterlid. In $3x + 5 = 17$ is x de variabele.

De oplossing van de vergelijking is het getal dat je voor x moet invullen, zodat het klopt. De oplossing vind je met de balansmethode.

$$3x + 5 = 17$$

$$\quad -5 \quad -5$$

$$3x = 12$$

$$\quad :3 \quad :3$$

$$x = 4$$

6 Los op.

a $5x + 2 = 12$

c $2x + 8 = 8$

e $4x - 8 = 8$

b $3x - 6 = 18$

d $3 - 5x = -27$

f $6x + 2 = 14$

7 Los op.

a $3x = 15$

d $7x = 35$

g $13x = 0$

b $3 + x = 15$

e $7 - x = 35$

h $13 + x = 0$

c $18 - 5x = 48$

f $x + 6 = -1$

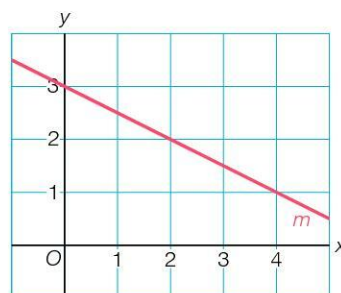
i $-2x + 17 = 3$

1.1 Lineaire formules

0 1 De lijn m in figuur 1.1 is de grafiek van $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Bij $x = 4$ hoort $y = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = -2 + 3 = 1$.

- a Bereken y bij $x = 2$.
- b Bereken y bij $x = 0$.
- c Welke informatie geeft het getal 3 in de formule over m ?
- d Welke informatie geeft het getal $-\frac{1}{2}$ over m ?



figuur 1.1

Theorie A De grafiek van een lineaire formule

De formule $y = -2x + 5$ is een voorbeeld van een lineaire formule. Er bestaat een lineair verband tussen x en y . Neem je $x = -1$, dan krijg je $y = -2 \cdot -1 + 5 = 7$. Dus het punt $(-1, 7)$ ligt op de grafiek van $y = -2x + 5$. De grafiek van $y = -2x + 5$ is de lijn l in figuur 1.2.

Afspraak

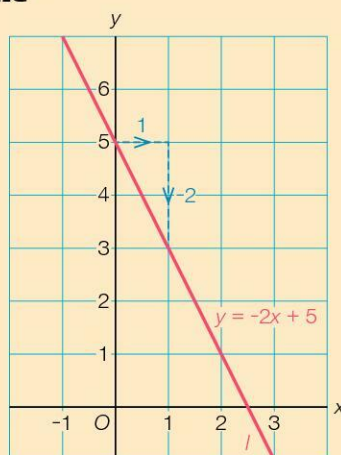
De lijn l met formule $y = -2x + 5$ noteren we als $l: y = -2x + 5$.

Om $l: y = -2x + 5$ te tekenen, maak je een tabel met de coördinaten van twee punten.

x	0	1
y	5	3

voor $x = 0$ is $y = -2 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 = 5$
 voor $x = 1$ is $y = -2 \cdot 1 + 5 = -2 + 5 = 3$

Voor lijn l geldt: ga je 1 naar rechts, dan ga je 2 omlaag oftewel -2 omhoog. Het getal -2 heet de richtingscoëfficiënt van l . Notatie: $rc_l = -2$. Een ander woord voor richtingscoëfficiënt is **helling**. De lijn l snijdt de y -as in het punt $(0, 5)$.



figuur 1.2 Uit de formule $y = -2x + 5$ lees je af dat $rc = -2$ en dat de grafiek de y -as snijdt in het punt $(0, 5)$.

Voorbeeld

Teken in één figuur de lijnen $l: y = \frac{1}{2}x + 2$ en $m: y = -x + 3$.

Uitwerking

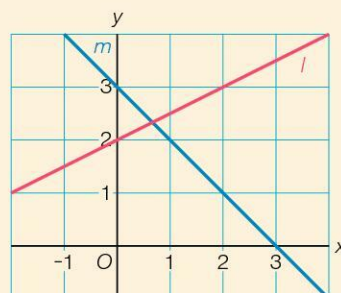
lijn l

x	0	2
y	2	3

lijn m

x	0	2
y	3	1

Zie de figuur hiernaast.



figuur 1.3 Zet bij elke lijn de juiste letter.

T 2 [►►6]

- a** Teken in één figuur de lijnen $l: y = -\frac{1}{2}x + 3$ en $m: y = 1\frac{1}{4}x - 4$.
- b** Schrijf de coördinaten op van het snijpunt S van l en m .
- c** Op m ligt het punt A waarvan de x -coördinaat -12 is.
Bereken de y -coördinaat van A .
- d** Onderzoek met een berekening of het punt $B(-22, -8)$ op l ligt.

- 3** Teken in één figuur de lijnen $l: y = 2x + 1$, $m: y = -3x + 5$,
 $n: y = \frac{1}{2}x - 3$ en $p: y = -1\frac{1}{2}x + 6$.

- 4** Teken in één figuur de lijnen $l: y = x + 1$, $m: y = -2x$, $n: y = -x + 4$
en $p: y = -\frac{1}{4}x - 1$.

- 5** Gegeven is de lijn $l: y = 8x - 13$.
Hiernaast zie je hoe je met een berekening kunt nagaan of het punt $P(5, 27)$ op l ligt.

- a** Ga na dat het punt $Q(7, 43)$ op l ligt.
- b** Ga na dat het punt $R(10, 93)$ niet op l ligt.
- c** Onderzoek welke van de volgende punten op l liggen.
 $A(6, 35)$, $B(-9, -59)$ en $C(2\frac{1}{2}, 8)$
- d** Het punt D ligt op l en de x -coördinaat van D is -4 .
Bereken de y -coördinaat van D .

Ligt het punt $P(5, 27)$ op de lijn $l: y = 8x - 13$?
Vul $x = 5$ in en controleer of $y = 27$.
Je krijgt
 $y = 8 \cdot 5 - 13 = 40 - 13 = 27$.
Dit klopt, dus P ligt op l .

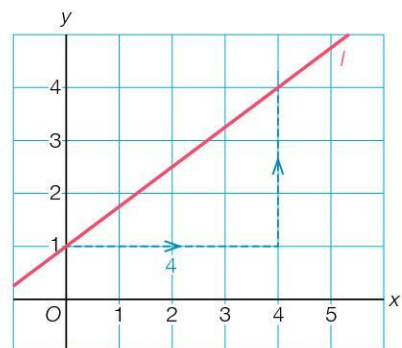
- A 6** **a** Teken in één figuur de lijnen $l: y = \frac{1}{2}x - 1$ en $m: y = -x + 2$.
b Schrijf de coördinaten op van het snijpunt S van l en m .
c Van het punt A op m is de x -coördinaat -9 .
Bereken de y -coördinaat van A .
d Onderzoek welke van de volgende punten op l liggen.
 $P(6, 2)$, $Q(-300, 149)$ en $R(25, 11\frac{1}{2})$

- O 7** De algemene vorm van een lineaire formule is $y = ax + b$.
Neem je $a = -2$ en $b = 5$, dan krijg je $y = -2x + 5$.
Welke getallen zijn a en b bij de volgende formules?

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| a $y = 6x + 20$ | d $y = -x + 10$ |
| b $y = -8x - 200$ | e $y = \frac{1}{3}x$ |
| c $y = x + 8$ | f $y = 4$ |

- O 8** Bij de lijn l in figuur 1.4 hoort de formule $y = ax + b$.

- a** Welk getal is b ?
- b** Vul in.
De grafiek gaat 4 naar rechts en ... omhoog
oftewel 1 naar rechts en ... omhoog,
dus $a = \dots$
- c** Schrijf de formule van l op.



figuur 1.4

Theorie B De formule $y = ax + b$

De algemene vorm van een lineaire formule is $y = ax + b$.

Voor $a = 3$ en $b = 2$ krijg je $y = 3x + 2$.

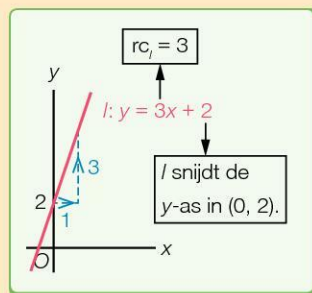
De bijbehorende lijn l snijdt de y -as in het punt $(0, 2)$.

De richtingscoëfficiënt van l is 3 . Uit $rc_l = 3$ volgt:

ga je 1 naar rechts, dan ga je 3 omhoog.

Van de lijn $y = ax + b$ is

- het snijpunt met de y -as het punt $(0, b)$
- $rc = a$, dus ga je 1 naar rechts dan ga je a omhoog.



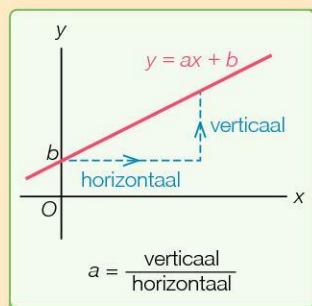
Voor $a = 0$ krijg je de formule $y = b$. De grafiek is een horizontale lijn op hoogte b . Er is sprake van een **constant verband**.

Voor $b = 0$ krijg je de formule $y = ax$. De grafiek is een lijn door de oorsprong. Er is sprake van een **recht evenredig verband**.

Voor het opstellen van de formule van een lijn gebruik je het volgende werkschema.

Werkschema: de formule van een lijn opstellen

- 1 Stel $y = ax + b$.
- 2 Zoek het snijpunt van de lijn met de y -as.
Daaruit volgt b .
- 3 Kies twee roosterpunten op de lijn.
Daaruit volgt $a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}}$.
- 4 Schrijf de formule op.



Voorbeeld

Stel de formule op van de lijn k in figuur 1.5.

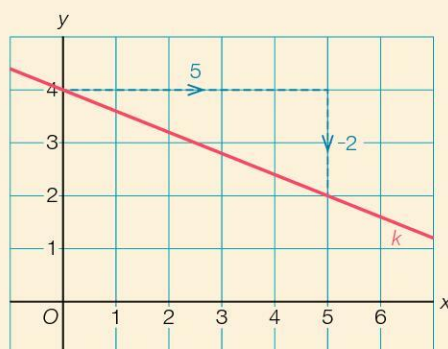
Uitwerking

Stel $k: y = ax + b$.

Door $(0, 4)$, dus $b = 4$.

$$a = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$$

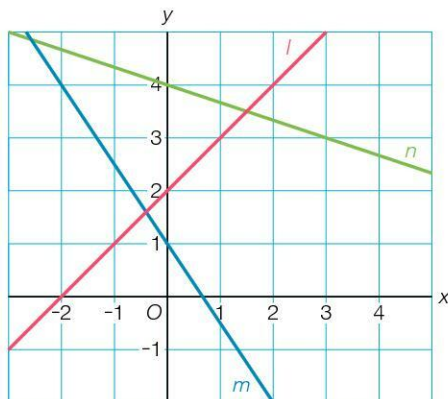
Dus $k: y = -\frac{2}{5}x + 4$.



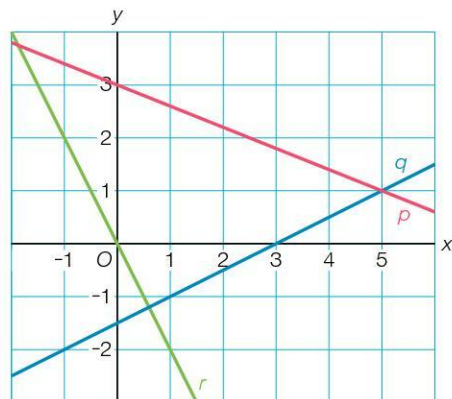
figuur 1.5

9 In figuur 1.6 zijn de lijnen l , m en n getekend.

- Stel van elk van deze lijnen de formule op.
- De lijn k is evenwijdig met n , en k gaat door het punt $R(0, -3)$. Schrijf de formule van k op.



figuur 1.6



figuur 1.7

A 10 Zie figuur 1.7.

- Stel de formules op van de lijnen p , q en r .
- Bij welke lijn is er sprake van een recht evenredig verband?

De lijn s hoort bij een constant verband. De lijnen s en p snijden de y -as in hetzelfde punt.

- Schrijf de formule van s op.

11 Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}x + b$.

- Voor $b = 3$ krijg je $y = \frac{1}{2}x + 3$. Teken de grafiek van deze formule.
- Teken in dezelfde figuur de grafiek van de formule die je krijgt voor $b = 1$.
- Janet kiest een getal voor b . De grafiek snijdt de y -as in het punt $(0, 8)$. Welk getal heeft Janet gekozen?

Bij $y = \frac{1}{2}x + b$ krijg je voor elke b een andere lijn. De lijnen zijn allemaal evenwijdig, want steeds is $rc = \frac{1}{2}$.



Theorie C Evenwijdige lijnen

In het vervolg is het van belang dat je de volgende vragen kunt beantwoorden.

- Waarom zijn de lijnen l : $y = 2x + 3$ en m : $y = 2x - 8$ evenwijdig?
Antwoord De lijnen zijn evenwijdig omdat ze dezelfde richtingscoëfficiënt hebben. Want $rc_l = rc_m = 2$.
- Waarom ligt het punt $A(8, -17)$ op de lijn p : $y = -2x - 1$?
Antwoord $x = 8$ invullen in de formule geeft $y = -2 \cdot 8 - 1 = -16 - 1 = -17$, dus $A(8, -17)$ ligt op p .

Voorbeeld

- a** Bereken b als het punt $A(4, -5)$ op de lijn $k: y = -3x + b$ ligt.
b Stel de formule op van de lijn l die evenwijdig is met de lijn $m: y = 5x - 1$ en die door het punt $B(3, 8)$ gaat.

Uitwerking

a $k: y = -3x + b$
 $A(4, -5)$ op k $\left\{ \begin{array}{l} -3 \cdot 4 + b = -5 \\ -12 + b = -5 \\ \quad +12 \quad +12 \\ \hline b = 7 \end{array} \right.$

$A(4, -5)$ op k , dus bereken b door $x = 4$ en $y = -5$ in te vullen in $y = -3x + b$.

b Stel $l: y = ax + b$.
 l is evenwijdig met m , dus $a = rc_l = rc_m = 5$.
 $l: y = 5x + b$
 $B(3, 8)$ op l $\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot 3 + b = 8 \\ 15 + b = 8 \\ \quad -15 \quad -15 \\ \hline b = -7 \end{array} \right.$

Dus $l: y = 5x - 7$.

- T 12** [►►16] De lijn $k: y = ax + b$ is evenwijdig met de lijn $l: y = 5x + 3$.

De lijn k gaat door het punt $P(1, 6)$.

Bereken a en b .

- 13** Het punt $A(8, 12)$ ligt op de lijn $l: y = 2x + b$.

Bereken b .

- 14** De lijn $m: y = -\frac{1}{2}x + b$ gaat door het punt $B(-5, 3)$.

Bereken b .

- 15** Van de lijn $q: y = ax + b$ is $rc_q = -4$. De lijn q gaat door het punt $P(-3, 21)$.

Bereken a en b .

- A 16** Stel de formule op van de lijn l met $rc_l = 5$ die door het punt $R(8, -16)$ gaat.

- A 17** De lijn p gaat door het punt $S(-5, -1)$ en is evenwijdig met de lijn $q: y = -2x - 1$.

Stel de formule van p op.

- 18** De lijn q gaat door de punten $C(1, -1)$ en $D(6, -3)$.

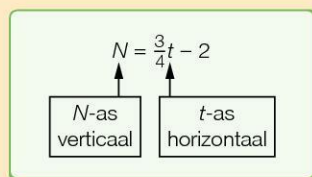
Stel de formule van q op.

1.2 Lineaire verbanden

- 19** Gegeven is de formule $N = \frac{3}{4}t - 2$.
Bereken N voor $t = 0$ en voor $t = 4$.

Theorie A Formules met andere letters dan x en y

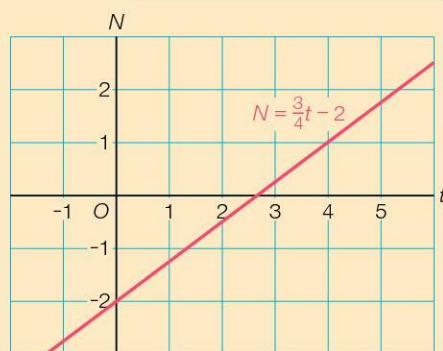
De formule $N = \frac{3}{4}t - 2$ hoort bij een lineair verband tussen t en N . Bij de grafiek hoort een horizontale t -as en een verticale N -as.



Om de grafiek van $N = \frac{3}{4}t - 2$ te tekenen, maak je eerst een tabel.

t	0	4
N	-2	1

Met de coördinaten van de twee punten uit de tabel teken je de grafiek. Zie figuur 1.8.



figuur 1.8

In het voorbeeld hieronder wordt de formule opgesteld bij een lineair verband tussen n en G . Merk op dat hierbij rekening is gehouden met de verschillende stapgrootten bij de assen.

Voorbeeld

Zie figuur 1.9.

Stel de formule van G op.

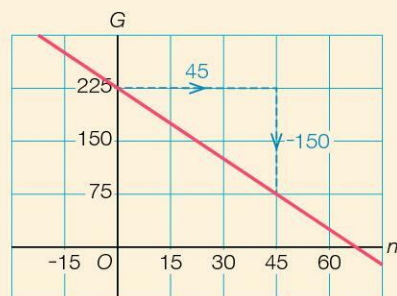
Uitwerking

Stel $G = an + b$.

Door $(0, 225)$, dus $b = 225$.

$$a = \frac{-150}{45} = -3\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } G = -3\frac{1}{3}n + 225.$$



figuur 1.9

- 20** Teken de grafieken van de volgende formules.

a $R = 3t - 5$

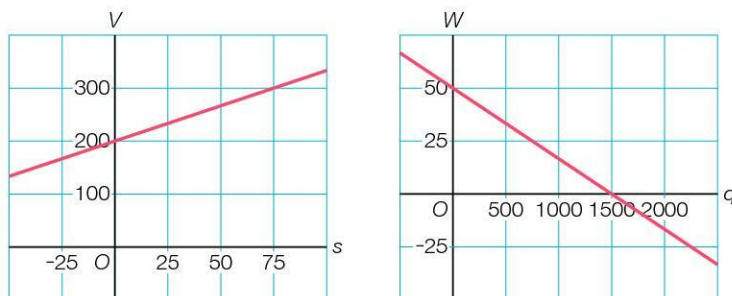
b $A = -2p + 6$

- 21** [▶ WERKBOEK] Teken de grafieken van de volgende formules.

a $N = -5t + 40$

b $R = 1\frac{1}{2}q + 1500$

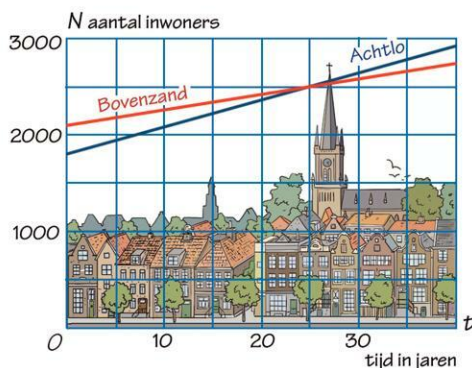
- 22** a Stel de formule van V op in figuur 1.10.
b Stel de formule van W op in figuur 1.10.



figuur 1.10

- 23** De aantallen inwoners van de plaatsen Achtlo en Bovenzand zijn gegeven door de formules $N = 18t + 2100$ en $N = 30t + 1800$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2015. Zie figuur 1.11.

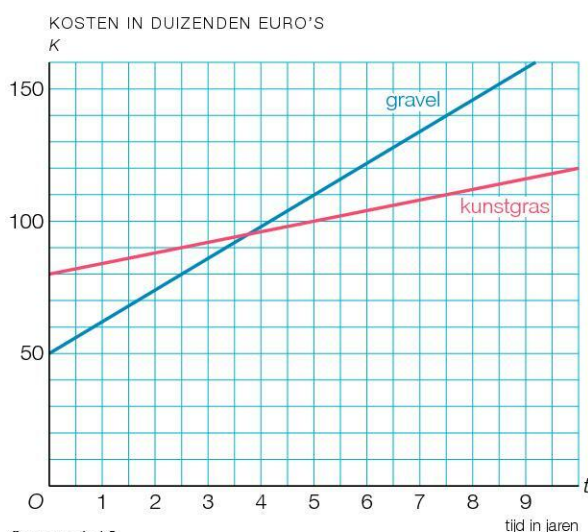
- a Welke formule hoort bij Achtlo?
Licht toe.
b Bereken met de formule het aantal inwoners van Bovenzand op 1 januari 2030.
c Op 1 januari van welk jaar hebben beide plaatsen evenveel inwoners?
d Op 1 januari van welk jaar zal het aantal inwoners van Achtlo zijn verdubbeld vergeleken met het aantal op 1 januari 2015?



figuur 1.11

- A 24** Een tennisvereniging heeft een gravel- en een kunstgrasbaan. In figuur 1.12 kun je aflezen hoeveel euro er na t jaar aan aanleg en onderhoud is uitgegeven.

- a Hoeveel kost het aanleggen van de kunstgrasbaan?
b Stel voor de kunstgrasbaan de formule van K op.
c Stel voor de gravelbaan de formule van K op.
d Hoeveel euro kost het jaarlijkse onderhoud van de kunstgrasbaan minder dan dat van de gravelbaan?
e Aan welke baan is na acht jaar het minste geld uitgegeven? Hoeveel minder?



figuur 1.12

25 Sommige lineaire formules volgen direct uit de tekst. Zie de voorbeelden hieronder.

I Een klusbedrijf rekent 15 euro per uur en 30 euro voorrijkosten.

De kosten K in euro's voor een klus van t uur zijn $K = 15t + 30$.

per uur voorrijkosten

II Het water in een vat staat 60 cm hoog.

Per minuut daalt het water met 10 cm.

De waterhoogte h in cm na t minuten is

$$h = 60 - 10t.$$

beginhoogte per minuut 10 cm lager

Stel formules op bij de volgende situaties.

Kies geschikte letters.

- a Een hoveniersbedrijf rekent 25 euro per uur en 15 euro voorrijkosten.
- b Een taxibedrijf rekent 3 euro per km en een starttarief van 8 euro.
- c Een dorp heeft 1850 inwoners. Dat aantal neemt jaarlijks met 150 af.
- d Een tennisvereniging laat een hardcourtbaan aanleggen voor 62 500 euro. De jaarlijkse onderhoudskosten zijn 2800 euro.
- e Een piloot zet vanaf een hoogte van 8,5 km de landing in. Hierbij daalt het vliegtuig 300 meter per minuut.

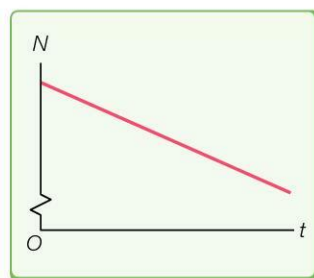


A 26 De tabel gaat over de oppervlakte aan bos in Nederland.

AANTAL HECTARE BOS IN NEDERLAND OP 1 JANUARI

jaar	2013	2014	2015	2016	2017
N	376 000	374 600	373 200	371 800	370 400

- a Waarom is er sprake van een lineair verband?
- b Met hoeveel hectare neemt de oppervlakte aan bos in Nederland jaarlijks af?
- c Hoeveel hectare aan bos was er op 1 januari 2010 in Nederland?
- d Schrijf de formule op van N , de oppervlakte aan bos in Nederland in hectare. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2010.
- e Informatie over de oppervlakte aan bos in Nederland kun je halen uit de tabel, de grafiek en de formule.
Waaruit haal je de informatie als je
 - de oppervlakte op 1 januari 2015 wilt weten
 - de oppervlakte op 1 januari 2020 wilt weten
 - het verloop van de oppervlakte wilt weten?



1.3 Lineaire vergelijkingen

0 27 Vul in.

- a $8x - 16 = 0$ geeft $8x = \dots$
- b $8x - 16 = 24$ geeft $8x = 24 + \dots$
- c $8x = 2x + 24$ geeft $8x - \dots = 24$

Theorie A Termen overbrengen

De vergelijking $10x - 4 = 7x + 20$ is een voorbeeld van een lineaire vergelijking. Bij het oplossen van een vergelijking vervang je de vergelijking stap voor stap door een eenvoudiger vergelijking. Je zorgt ervoor dat de variabele x alleen nog maar in het linkerlid voorkomt. Zie het voorbeeld hiernaast.

$$\begin{array}{rcl} 10x - 4 & = & 7x + 20 \\ -7x & & -7x \\ \hline 3x - 4 & = & 20 \\ +4 & & +4 \\ \hline 3x & = & 24 \\ :3 & & :3 \\ x & = & 8 \end{array}$$

Het begin van de uitwerking kun je ook als volgt opschrijven.

$$10x - 4 = 7x + 20 \quad \text{links en rechts } 7x \text{ aftrekken}$$

$$10x - 7x - 4 = 20 \quad \text{links en rechts 4 optellen}$$

$$10x - 7x = 20 + 4$$

Het is handig om voortaan in één keer van $10x - 4 = 7x + 20$ naar $10x - 7x = 20 + 4$ te gaan. We zeggen dat de termen $7x$ en -4 naar het andere lid zijn overgebracht.

Bij dat **overbrengen van termen** gebeurt iets opvallends.

- $7x$ is uit het rechterlid verdwenen en als $-7x$ in het linkerlid terechtgekomen.
- -4 is uit het linkerlid verdwenen en als $+4$ in het rechterlid terechtgekomen.

$$\begin{array}{l} 5x + 3 = 6x - 2 \\ 5x - 6x = -2 - 3 \end{array}$$



In een vergelijking mag je termen van het ene naar het andere lid overbrengen, maar dan moet je $-$ vervangen door $+$, en $+$ vervangen door $-$.

Dus ga je in één keer van $5x + 8 = -3x + 24$
naar $5x + 3x = 24 - 8$
van $5x + 7 = 6x$
naar $5x - 6x = -7$
van $8x = 6x - 13 - 2x$
naar $8x - 6x + 2x = -13$.

28 Vul in. Zorg er voor dat alle termen met x in het linkerlid staan.

- a $3x + 5 = -2x + 8$ geeft $3x + 2x = 8 - \dots$
- b $6x - 3 = 4x + 7$ geeft $6x - \dots = 7 + \dots$
- c $-8x - 13 = 5x$ geeft $\dots = \dots$
- d $3x - 12 = 5x + 8 - x$ geeft $\dots = \dots$

29 Gegeven zijn de vergelijkingen

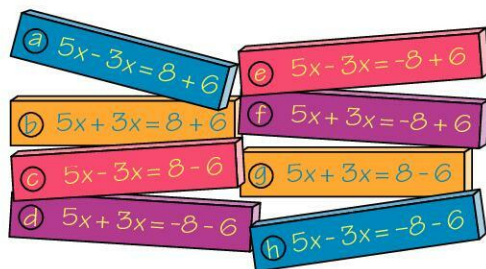
I $5x - 6 = 3x + 8$

II $5x + 6 = 3x - 8$

III $5x + 6 = -3x + 8$

IV $5x - 6 = -3x - 8$

Zoek bij elk van deze vergelijkingen de vergelijking die er bij hoort. Kies uit de mogelijkheden in figuur 1.13.



figuur 1.13

Theorie B Lineaire vergelijkingen oplossen

Met het overbrengen van termen gaat het oplossen van de lineaire vergelijking $5x + 8 = -3x + 24$ als volgt.

$$5x + 8 = -3x + 24$$

$$5x + 3x = 24 - 8$$

$$8x = 16$$

$$x = 2$$

breng $-3x$ naar het linkerlid en 8 naar het rechterlid

herleid beide leden

deel beide leden door het getal dat voor x staat

Voorbeeld

Los op.

a $6x - 12 = 8x + 3$

b $7a = -3a + 20$

Het oplossen van een vergelijking gaat snel met het overbrengen van termen.



Uitwerking

a $6x - 12 = 8x + 3$

$$6x - 8x = 3 + 12$$

$$-2x = 15$$

$$x = \frac{15}{-2} = -7\frac{1}{2}$$

b $7a = -3a + 20$

$$7a + 3a = 20$$

$$10a = 20$$

$$a = 2$$

breng $8x$ naar het linkerlid en -12 naar het rechterlid

herleid beide leden

deel beide leden door het getal dat voor x staat

breng $-3a$ naar het linkerlid

herleid het linkerlid

deel beide leden door het getal dat voor a staat

T 30 [►► 34] Los op.

a $1 - 3x = 2(1 - x)$

b $5(a + 3) = 7 - (3a - 8)$

c $2(x - 1) = 9 - 3(2x + 7)$

31 Los op. Gebruik het overbrengen van termen.

a $2x - 5 = 5x - 8$

c $4x - 4 = 8x + 6$

e $-y - 1 = -2y + 5$

b $7x + 3 = 6x + 8$

d $4x + 2x = -x - 14$

f $9a = a - 16$

O 32 Werk de haakjes weg en herleid zo mogelijk.

a $-2(6 - x)$

b $5 - 3(2x - 1)$

c $2x - 6(x - 5)$

Theorie C Lineaire vergelijkingen met haakjes

Staan er in een lineaire vergelijking haakjes, werk die dan eerst weg.
Gebruik bij het oplossen het volgende werkschema.

Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

- 1 Werk de haakjes weg.
- 2 Breng alle termen met x naar het linkerlid en de rest naar het rechterlid.
- 3 Herleid beide leden.
- 4 Deel beide leden door het getal dat voor x staat.

Voorbeeld

Los op.

- a $5(x - 2) = 9x + 20$
b $4(x - 2) + 3 = 8 - 7(x - 6)$

Uitwerking

- a $5(x - 2) = 9x + 20$ werk de haakjes weg
 $5x - 10 = 9x + 20$ termen met x naar links, de rest naar rechts
 $5x - 9x = 20 + 10$ herleid beide leden
 $-4x = 30$ deel beide leden door het getal dat voor x staat
 $x = \frac{30}{-4} = -7\frac{1}{2}$
- b $4(x - 2) + 3 = 8 - 7(x - 6)$ bedenk dat $-7 \cdot -6 = +42$
 $4x - 8 + 3 = 8 - 7x + 42$
 $4x + 7x = 8 + 42 + 8 - 3$
 $11x = 55$
 $x = 5$

33 Los op.

- a $5(x - 3) = 2x + 9$ d $3(x - 1) = -x + 12$
b $5a - 3 = 2(a + 9)$ e $2p - 6 = 3 - 3(p - 7)$
c $7x + 3 = 6(x - 1)$ f $9 + 3(x + 2) = 5(x - 3)$

A 34 Los op.

- a $3(2x - 1) + 3 = 18$ d $5(3k - 7) + 7 = 7(2k - 4)$
b $2(a - 2) = 3(a + 5)$ e $5(x - 1) = -2x + 3(x + 5)$
c $5 - 2x = 4 - 3(x + 8)$ f $8 - 3(5 - 2x) = 8(x - 1) - 11$

Theorie D Lineaire vergelijkingen met breuken

Komen in een vergelijking breuken voor, dan is het vaak handig de breuken weg te werken. Dit doe je door alle termen met een geschikt getal te vermenigvuldigen.

Bij de vergelijking $\frac{1}{3}x + 2 = \frac{1}{2}x$ is dat getal 6, want $6 \cdot \frac{1}{3} = 2$ en $6 \cdot \frac{1}{2} = 3$. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Los op $\frac{1}{3}x + 2 = \frac{1}{2}x$.

Uitwerking

$$\frac{1}{3}x + 2 = \frac{1}{2}x$$

$$6 \cdot \frac{1}{3}x + 6 \cdot 2 = 6 \cdot \frac{1}{2}x$$

$$2x + 12 = 3x$$

$$2x - 3x = -12$$

$$-x = -12$$

$$x = 12$$

werk de breuken weg

termen met x naar links, de rest naar rechts

herleid het linkerlid

deel beide leden door het getal dat voor x staat

35 Los op.

a $\frac{1}{4}x + 1 = -3$

c $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{3}x + 3$

b $\frac{1}{5}x = \frac{1}{2}x - 6$

d $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}x + 2$

A 36 Los op.

a $\frac{1}{4}x + 1 = -3 + \frac{1}{3}x$

c $\frac{1}{2}(x + 1) = \frac{1}{3}(x + 2)$

b $\frac{1}{5}x - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2}x$

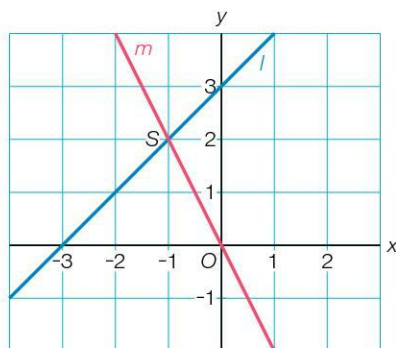
d $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(x - 2) + 2$

37 De derdeklassen havo van het Pythagoras College maken een tussentoets wiskunde. Vijf zesde deel van de leerlingen heeft een voldoende, een achtste deel moet herkansen en 14 leerlingen waren afwezig.

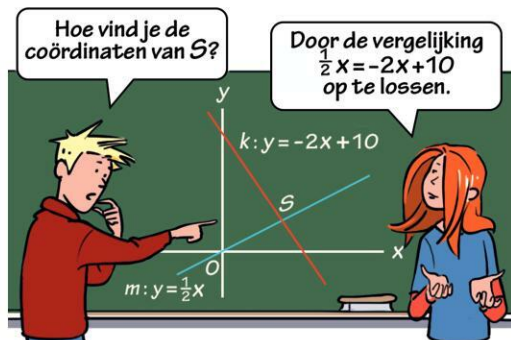
Noem het aantal derdeklassers x en bereken x .

38 In figuur 1.14 zijn de grafieken getekend van de formules $y = x + 3$ en $y = -2x$.

- Welke van de formules hoort bij lijn l ?
- Schrijf de coördinaten op van het snijpunt S van l en m .
- Los de vergelijking $x + 3 = -2x$ op.
- Wat heeft de oplossing van de vergelijking te maken met het punt S ?



figuur 1.14



Theorie E Lineaire formules vergelijken

In figuur 1.15 zijn de lijnen $l: y = -0,5x + 1$ en $m: y = 1,5x - 1$ getekend. De lijnen snijden elkaar in het punt S . De x -coördinaat van S is 1. Daarom is $x = 1$ de oplossing van de vergelijking $-0,5x + 1 = 1,5x - 1$.

Kijk maar.

$$-0,5x + 1 = 1,5x - 1$$

$$-0,5x - 1,5x = -1 - 1$$

$$-2x = -2$$

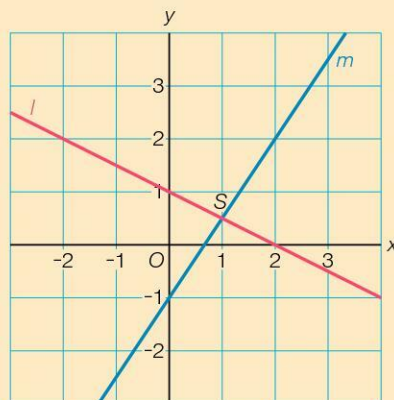
$$x = 1$$

De y -coördinaat van S krijg je door $x = 1$ in te vullen in één van de formules.

$x = 1$ invullen in de formule van l geeft

$$y = -0,5 \cdot 1 + 1 = 0,5.$$

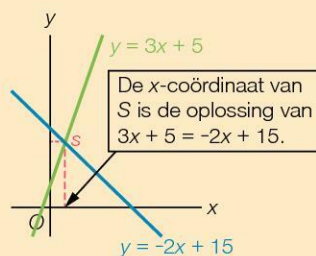
Dus $S(1; 0,5)$.



figuur 1.15

Snijpunten van grafieken

- De x -coördinaat van het snijpunt van de grafieken van $y = 3x + 5$ en $y = -2x + 15$ is de oplossing van de vergelijking $3x + 5 = -2x + 15$.
- De y -coördinaat krijg je door de gevonden oplossing in één van de formules in te vullen.



Voorbeeld

Zie figuur 1.16. De lijnen $l: y = 0,6x - 0,4$ en $m: y = -1,2x + 4,1$ snijden elkaar in het punt S . Bereken de coördinaten van S .

Uitwerking

$$0,6x - 0,4 = -1,2x + 4,1$$

$$0,6x + 1,2x = 4,1 + 0,4$$

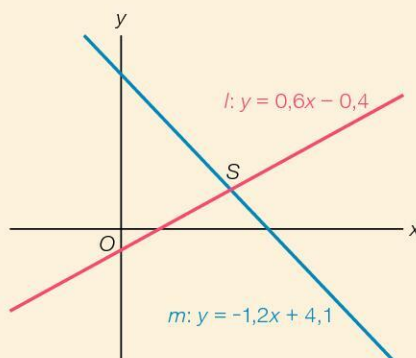
$$1,8x = 4,5$$

$$x = \frac{4,5}{1,8} = 2,5$$

$x = 2,5$ invullen bij $y = 0,6x - 0,4$ geeft

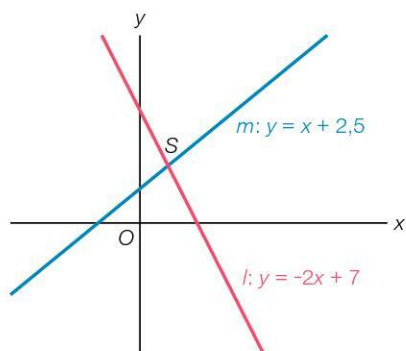
$$y = 0,6 \cdot 2,5 - 0,4 = 1,1.$$

Dus $S(2,5; 1,1)$.



figuur 1.16

- 39** Zie figuur 1.17. De lijnen $l: y = -2x + 7$ en $m: y = x + 2,5$ snijden elkaar in het punt S . Bereken de coördinaten van S .



figuur 1.17

- A 40** Bereken de coördinaten van
- het snijpunt A van de lijnen $k: y = -1,5x + 5$ en $l: y = 1,5x - 4$
 - het snijpunt B van de lijnen $k: y = -1,5x + 5$ en $m: y = 0,5x + 1$.
- 41** Met de formules $K_A = 0,24x + 55$ en $K_G = 0,32x + 49$ kun je berekenen hoeveel je bij de autodeelbedrijven AutoShare en GreenCar moet betalen als je een auto één dag huurt en daarbij x kilometer rijdt. Hierin zijn de kosten K in euro's.
- Meneer Pietersen heeft op een dag een auto nodig voor een rit van in totaal 100 kilometer. Welk bedrijf is voor hem het voordeligste?
 - Welke vergelijking moet je oplossen om te berekenen bij welk aantal gereden kilometers de bedrijven even duur zijn? Los die vergelijking op. Wat zijn de bijbehorende kosten?



- A 42** In een park staan bamboestengels.
- Op 1 augustus heeft stengel I een lengte van 4,2 meter. Deze stengel groeit 24 cm per dag. Stengel II is op 1 augustus 6,9 meter lang en groeit 9 cm per dag.
- Schrijf voor beide stengels de formule op van de lengte l in cm. Neem de tijd t in dagen met $t = 0$ op 1 augustus.
 - Bereken op welke datum de stengels even lang zijn.
 - Op welke datum is stengel I dertig centimeter langer dan stengel II?



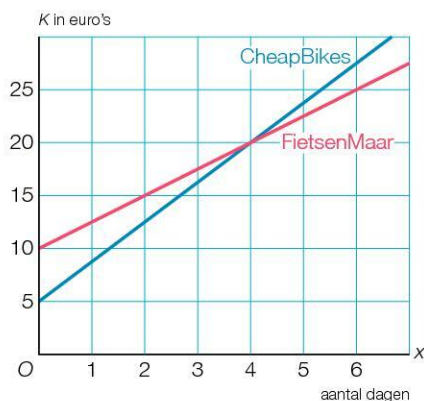
1.4 Lineaire ongelijkheden

O 43 De figuur hiernaast gaat over de kosten K in euro's voor het x dagen huren van een fiets bij de firma's FietsenMaar en CheapBikes.

- a** Marc wil zes dagen een fiets huren.
Bij welke firma is hij goedkoper uit?
- b** Roeland wil drie dagen een fiets huren.
Bij welke firma is hij goedkoper uit?

FietsenMaar gebruikt de formule $K_F = 2,5x + 10$, en CheapBikes de formule $K_C = 3,75x + 5$.

- c** In de figuur kun je zien dat bij vier dagen huren CheapBikes en FietsenMaar even duur zijn.
Welke vergelijking hoort hierbij?
- d** Bij welk aantal dagen huren is FietsenMaar voordeliger dan CheapBikes?



figuur 1.18

Theorie A Lineaire ongelijkheden oplossen met grafieken

In opgave 43d is de vraag:

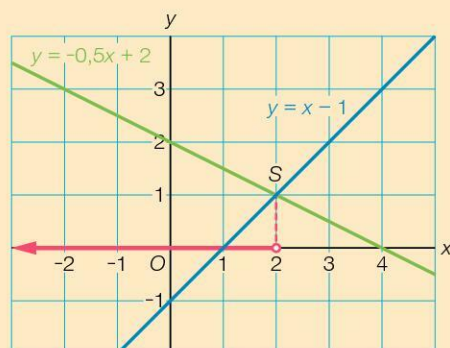
Bij welk aantal dagen huren is FietsenMaar voordeliger dan CheapBikes?

Je kunt ook vragen:

Voor welke x is $2,5x + 10 < 3,75x + 5$?

De vorm $2,5x + 10 < 3,75x + 5$ is een voorbeeld van een **lineaire ongelijkheid**. In figuur 1.18 lees je af dat $x = 5$ een oplossing van de ongelijkheid is, want voor $x = 5$ ligt de grafiek van FietsenMaar onder die van CheapBikes. Ook $x = 7$, $x = 19$, $x = 501$, ... zijn oplossingen. Elke x groter dan 4 is een oplossing van de ongelijkheid $2,5x + 10 < 3,75x + 5$. Notatie: $x > 4$.

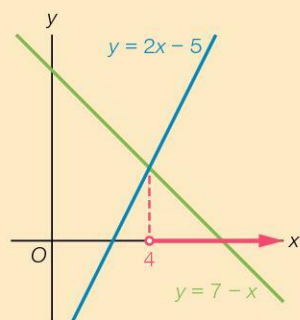
In figuur 1.19 zijn de grafieken van $y = -0,5x + 2$ en $y = x - 1$ getekend. De x -coördinaat van het snijpunt S is $x = 2$. Voor het oplossen van de ongelijkheid $-0,5x + 2 > x - 1$ kijk je waar de grafiek van $y = -0,5x + 2$ boven die van $y = x - 1$ ligt. Je ziet dat dit het geval is voor $x < 2$. In de figuur is dit aangegeven met een rode pijl. Het open bolletje waarmee de pijl begint, geeft aan dat $x = 2$ geen oplossing is.



figuur 1.19

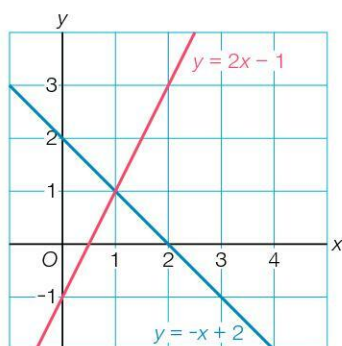
Lineaire ongelijkheden

- $7 - x < 2x - 5$ is een voorbeeld van een lineaire ongelijkheid.
- Je kunt de ongelijkheid oplossen met grafieken. Je kijkt voor welke waarden van x de grafiek van $y = 7 - x$ onder de grafiek van $y = 2x - 5$ ligt.
- Bij de opdracht los op $7 - x < 2x - 5$ is het antwoord $x > 4$. Dat betekent dat elk getal groter dan 4 een oplossing is.



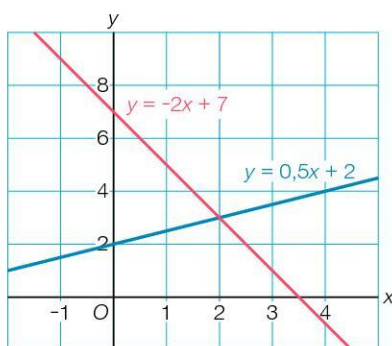
44 Los op. Gebruik figuur 1.20.

a $2x - 1 < -x + 2$



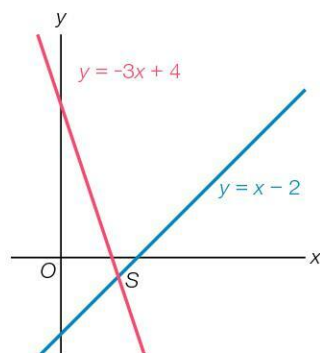
figuur 1.20

b $-2x + 7 > 0,5x + 2$



45 In figuur 1.21 zie je een schets van de grafieken van $y = -3x + 4$ en $y = x - 2$. De grafieken snijden elkaar in het punt S.

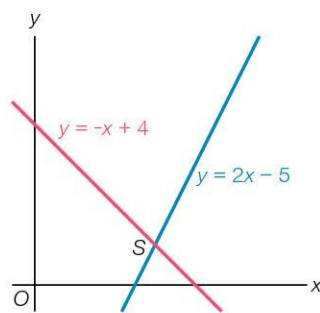
- a Bereken de x -coördinaat van S.
b Los op $-3x + 4 > x - 2$.



figuur 1.21

A 46 In figuur 1.22 zie je een schets van de grafieken van $y = -x + 4$ en $y = 2x - 5$.
Los op $-x + 4 < 2x - 5$.

47 Los op $x - 4 > 3x + 5$.



figuur 1.22

Theorie B Lineaire ongelijkheden oplossen zonder grafieken

Je kunt lineaire ongelijkheden ook zonder grafieken oplossen. Dat doe je door ze stap voor stap eenvoudiger te maken, net als bij lineaire vergelijkingen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Los op $4(a - 3) > 4 - 3(5 - a)$.

Uitwerking

$$4(a - 3) > 4 - 3(5 - a)$$

$$4a - 12 > 4 - 15 + 3a$$

$$4a - 3a > 4 - 15 + 12$$

$$a > 1$$

werk de haakjes weg

termen met a naar links, de rest naar rechts

herleid beide leden

48 Los op.

a $5x - 10 < 4x + 6$

c $4(x - 1) > 5 - 3(2 - x)$

b $4q > 3(7 + q)$

d $2(a + 5) < a - 100$

49 a Je weet dat $12 < 18$. Julie deelt links en rechts door 6.

Ze krijgt $2 < 3$. Klopt dat?

b Je weet dat $-12 < 18$. Finn deelt links en rechts door -6 .

Hij krijgt $2 < -3$. Klopt dat?

c Je weet dat $-12 < -8$. Lisette deelt links en rechts door 4.

Ze krijgt $-3 < -2$. Klopt dat?

d Je weet dat $-12 < -8$. Malou deelt links en rechts door -4 .

Ze krijgt $3 < 2$. Klopt dat?

Theorie C Het omklappen van het ongelijkheidsteken

Je weet dat $-35 < 30$. Deel je links en rechts door 5, dan krijg je $-7 < 6$ en dat klopt. Maar deel je links en rechts door -5 , dan verander je $<$ in $>$ om het te laten kloppen. Je krijgt dus $7 > -6$. In plaats van 'verander $<$ in $>$ ' zeggen we 'klap het ongelijkheidsteken om'. Het **omklappen van het ongelijkheidsteken** is alleen nodig als je bij een ongelijkheid beide leden door een negatief getal deelt of met een negatief getal vermenigvuldigt.

Als je deelt door een negatief getal klap het ongelijkheidsteken om.

Zo krijg je

$$-4x > -12 \text{ geeft } x < 3$$

je deelt door -4 , dus $>$ klappt om

$$-\frac{1}{2}x < 20 \text{ geeft } x > -40$$

je vermenigvuldigt met -2 , dus $<$ klappt om

$$2x < -20 \text{ geeft } x < -10$$

je deelt door 2, dus $<$ klappt niet om



Je mag beide leden van een ongelijkheid door hetzelfde getal delen of met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Als dat getal negatief is, klap je het ongelijkheidsteken om.

50 Herleid tot een vorm met $x < \dots$ of $x > \dots$

a $3x < 18$

d $\frac{1}{3}x > -6$

g $-\frac{1}{2}x > 6$

b $-4x > 12$

e $-8x < -8$

h $-x < 0$

c $-2x < 26$

f $-6x < 0$

i $-x > -4$

Theorie D Lineaire ongelijkheden oplossen

Bij het oplossen van lineaire ongelijkheden volg je hetzelfde werkschema als bij het oplossen van lineaire vergelijkingen. Alleen bij de laatste stap klap je zo nodig het ongelijkheidsteken om.

Werkschema: lineaire ongelijkheden oplossen

- 1 Staan er haakjes? Werk ze weg.
- 2 Breng alle termen met x naar het linkerlid en de rest naar het rechterlid.
- 3 Herleid beide leden.
- 4 Deel beide leden door het getal dat voor x staat. Als dit getal negatief is, klap je het ongelijkheidsteken om.



Voorbeeld

Los op.

a $2x < 5x + 6$

b $3(x - 2) > 5(2 + x) - 16$

Uitwerking

a $2x < 5x + 6$

$2x - 5x < 6$

$-3x < 6$

$x > -2$

b $3(x - 2) > 5(2 + x) - 16$

$3x - 6 > 10 + 5x - 16$

$3x - 5x > 10 - 16 + 6$

$-2x > 0$

$x < 0$

51 Los op.

a $3x + 5 < 5x + 11$

c $-0,2x + 22 < 2x$

b $4x < 2x - 6$

d $-3(p - 2) > 9 - 3(1 - p)$

52 Los op.

a $4x > 5x - 7$

c $5x - 1 > 6x$

b $5(t - 3) > 5 - 3t$

d $-2(p - 1) < 8 - p$

A 53 Los op.

a $5x > 10x$

c $3(x - 2) < 3(x - 1) - 2x$

b $3(x - 1) > 5(x - 2)$

d $5 + 2(x - 1) < -(x - 3)$

54 Het organiseren van een schoolfeest kost 600 euro. Tijdens het feest wordt een loterij gehouden die 110 euro opbrengt. Er zijn x toegangskaartjes verkocht voor 3,50 euro per stuk. Volgens de feestcommissie is er winst gemaakt.

a Stel een ongelijkheid op bij deze gegevens, en los deze op.

b Wat weet je van het aantal bezoekers?

1.5 Lineaire functies

55 In de figuur hiernaast zie je een taximeter waarmee de ritprijs wordt berekend. Nadat de chauffeur het aantal kilometers van de rit heeft ingevoerd, verschijnt als uitkomst de ritprijs op het scherm.

- a Hoeveel kost een rit van 5 km?
- b Hoeveel kost een rit van 12 km?



figuur 1.23

Theorie A Functies

De taximeter uit opgave 55 berekent de ritprijs door een vast voorschrift te gebruiken. Het aantal gereden kilometers wordt gebruikt als invoer. Na het toepassen van het voorschrift ‘eerst keer 2, dan plus 3’ komt de ritprijs als uitvoer tevoorschijn. Dit noemen we een functie.

Een functie maakt volgens een vast voorschrift van een getal, de invoer, een ander getal, de uitvoer.

- 56** Zie de functie in figuur 1.24.
- a Neem als invoer 5 en bereken de uitvoer.
 - b Bereken de uitvoer die bij de invoer -4 hoort.

- 57** Een functie is gegeven door het voorschrift ‘vermenigvuldig met $\frac{1}{2}$ en tel er vervolgens 6 bij op’.

- a Welke uitvoer hoort er bij de invoer 18?
- b Vul de tabel in.

invoer	-3		5
uitvoer		6	10



figuur 1.24

- 58** Bram heeft een functie gemaakt met drie stappen.
- A Tel er 2 bij op.
 - B Trek er 6 van af.
 - C Vermenigvuldig met 3.
- ‘Bij een invoer van 10 hoort een uitvoer van 30’, stelt Bram.
- Geef de juiste volgorde van de stappen.

Theorie B Het functievoorschrift

We geven functies meestal een naam. De functie die bij figuur 1.25 hoort noemen we f . Bij deze functie f hoort bij een invoer van 4 een uitvoer van $2 \cdot 4 + 5 = 13$. We zeggen:

Bij de functie f is de **functiewaarde** van 4 gelijk aan 13. Notatie: $f(4) = 13$.

Op dezelfde wijze is de functiewaarde van 8 gelijk aan $2 \cdot 8 + 5 = 21$. Dus $f(8) = 21$. En de functiewaarde van x is gelijk aan $2x + 5$, dus $f(x) = 2x + 5$. We noemen $f(x) = 2x + 5$ het **functievoorschrift** van de functie f .



figuur 1.25

Bij een functie f en een invoer x hoort een uitvoer $f(x)$, de functiewaarde van x .

Bij de functie $f(x) = 3x + 7$ is $f(2) = 3 \cdot 2 + 7 = 13$.

De functiewaarde van 2 is 13.

En is de functie g gegeven door het functievoorschrift $g(x) = -3(x - 7)$, dan is $g(6) = -3(6 - 7) = 3$.

Voorbeeld

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = -5x + 2$ en $g(x) = 3x - 20$.

- a Bereken $f(4)$ en $g(4)$.
- b De functie h is gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.
Stel het functievoorschrift van h op. Herleid je antwoord.

Uitwerking

- a $f(4) = -5 \cdot 4 + 2 = -20 + 2 = -18$
 $g(4) = 3 \cdot 4 - 20 = 12 - 20 = -8$
- b $h(x) = f(x) + g(x) = -5x + 2 + 3x - 20 = -2x - 18$

Bij $f(x) = -5x + 2$ is
 $f(3) = -5 \cdot 3 + 2 = -13$,
 $f(0) = -5 \cdot 0 + 2 = 2$ en
 $f(-2) = -5 \cdot -2 + 2 = 12$.

59 De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = -4x + 9$ en $g(x) = -x$.

- a Bereken $f(-5)$, $f(3)$ en $f(8)$.
- b Bereken $g(-8)$, $g(7)$ en $g(0)$.
- c Bereken $f(5) + g(5)$.
- d De functie h is gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.
Stel het functievoorschrift van h op. Herleid je antwoord.

A 60 De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = -12x$ en $g(x) = 8 - 3x$.

- a Bereken $f(5)$ en $g(5)$.
- b Bereken $f(-3)$ en $g(-3)$.
- c Bereken bij de functie g de functiewaarde van -4 .
- d De functie h is gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.
Stel het functievoorschrift van h op. Herleid je antwoord.

Theorie C De functie $f(x) = ax + b$

Bij de functie $f(x) = 3x + 1$ hoort de formule $y = 3x + 1$. Dus functies en formules hangen nauw met elkaar samen. Net als bij een formule kun je bij een functie een tabel maken en een grafiek tekenen.

De grafiek van $f(x) = 3x + 1$ is de lijn met de formule $y = 3x + 1$.

Omdat $f(4) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$ ligt het punt $(4, 13)$ op de grafiek van f .

De functie $f(x) = 3x + 1$ is een voorbeeld van een **lineaire functie**.

Uit $f(4) = 13$ volgt: het punt $(4, 13)$ ligt op de grafiek van f .

Een functie f van de vorm $f(x) = ax + b$ is een lineaire functie. De grafiek van een lineaire functie is een lijn.



Bij de functie $f(x) = 3x + 1$ is $a = 3$ en $b = 1$.

Voor $a = -2$ en $b = 0$ krijg je de functie $f(x) = -2x$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

- Teken de grafiek van f .
- Onderzoek of het punt $A(48, 25)$ op de grafiek de f ligt.
- Van het punt B op de grafiek is de y -coördinaat $y_B = -17$. Bereken de x -coördinaat x_B van B .

x_P is de x -coördinaat van het punt P .
 y_P is de y -coördinaat van het punt P .

Uitwerking

a

x	0	2
$f(x)$	-1	0

Zie de grafiek hiernaast.

- b $f(48) = \frac{1}{2} \cdot 48 - 1 = 24 - 1 = 23 \neq 25$

Dus A ligt niet op de grafiek.

- c $y_B = -17$, dus $f(x) = -17$

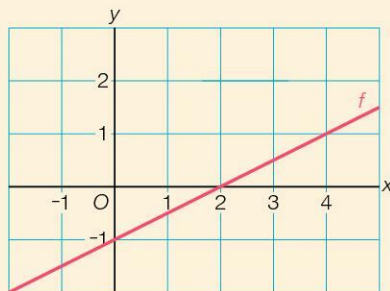
$$\frac{1}{2}x - 1 = -17$$

$$\frac{1}{2}x = -17 + 1$$

$$\frac{1}{2}x = -16$$

$$x = -32$$

Dus $x_B = -32$.



- 61 Gegeven is de functie $f(x) = -2x + 7$.

- Bereken $f(3)$ en $f(-2)$.
- Teken de grafiek van f .
- Onderzoek of het punt $A(-3, 13)$ op de grafiek van f ligt.
- Ligt het punt $B(80, -167)$ op de grafiek van f ? Licht toe.
- Het punt C met y -coördinaat $y_C = 21$ ligt op de grafiek van f . Bereken de x -coördinaat x_C van C .



x_R is de x -coördinaat van R .
 y_R is de y -coördinaat van R .
Dus van het punt $R(16, 29)$ is $x_R = 16$ en $y_R = 29$.

- 62** Teken in één figuur met verschillende kleuren de grafieken van de functies $f(x) = x - 2$, $g(x) = \frac{1}{3}x + 4$ en $h(x) = 3x$.

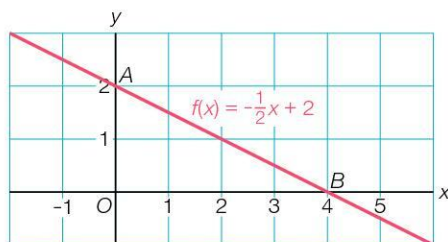
A 63 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x - 3$ en $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

- Teken de grafieken van f en g in één figuur.
- Onderzoek of het punt $A(12, 21)$ op de grafiek van f ligt.
- Onderzoek of het punt $B(-18, -28)$ op de grafiek van g ligt.
- Het punt P met $y_P = -8$ ligt op de grafiek van g .
Bereken x_P .
- Het punt Q met $y_Q = 0$ ligt op de grafiek van f .
Bereken x_Q .

- O 64** **a** Hoe kun je aan de coördinaten van een punt zien dat het op de x -as ligt? En hoe kun je zien dat een punt op de y -as ligt?

Hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

- Bereken $f(0)$. Schrijf de coördinaten op van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.
- Bereken $f(4)$. Schrijf de coördinaten op van het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.



figuur 1.26 A op de y -as, dus $x_A = 0$.
 B op de x -as, dus $y_B = 0$.

Theorie D Snijpunten met de x -as en de y -as

Gegeven is de functie $f(x) = -4x + 6$.

De grafiek van f snijdt de y -as in het punt B .

Dus de x -coördinaat van B is 0.

De y -coördinaat volgt uit

$$y_B = f(0) = -4 \cdot 0 + 6 = 6. \text{ Dus } B(0, 6).$$

De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A , dus de y -coördinaat van A is 0.

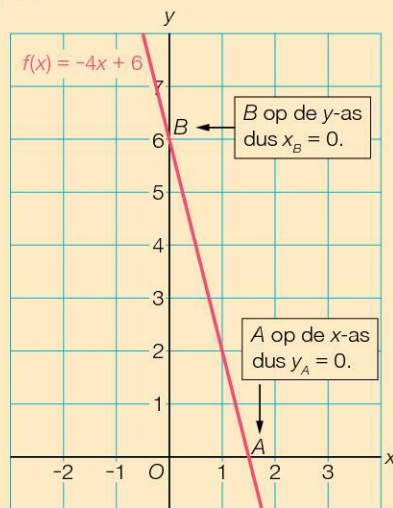
De x -coördinaat van A volgt uit $y_A = 0$, dus uit $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \text{ geeft } -4x + 6 = 0$$

$$-4x = -6$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

Dus $A(1\frac{1}{2}, 0)$.



figuur 1.27

Voor de grafiek van de functie f geldt

snijpunt met de x -as	de y -coördinaat is 0
	de x -coördinaat volgt uit $f(x) = 0$
snijpunt met de y -as	de x -coördinaat is 0
	de y -coördinaat is $f(0)$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -2x - 11$.

De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A en de y -as in het punt B .

Bereken de coördinaten van A en B .

Uitwerking

$$f(x) = 0 \text{ geeft } -2x - 11 = 0$$

$$-2x = 11$$

$$x = -5\frac{1}{2}$$

Dus $A(-5\frac{1}{2}, 0)$.

$$f(0) = -11, \text{ dus } B(0, -11).$$

65 Gegeven zijn de functies $f(x) = 5x - 20$ en $g(x) = -3(x - 7)$.

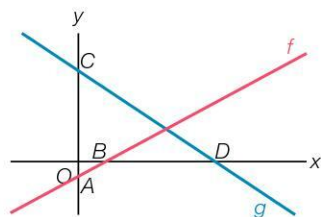
a De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A en de y -as in het punt B .

Bereken de coördinaten van A en B .

b De grafiek van g snijdt de x -as in het punt P en de y -as in het punt Q .

Bereken de coördinaten van P en Q .

A 66 Hiernaast zie je een schets van de grafieken van de functies $f(x) = 1,2x - 0,9$ en $g(x) = -1,8x + 6,3$. Bereken de coördinaten van de snijpunten A , B , C en D van de grafieken met de x -as en de y -as.



figuur 1.28

67 Gegeven zijn de functies $f(x) = -x + b$ en $g(x) = ax + 8$.

a De grafiek van f snijdt de x -as in het punt $A(8, 0)$.

Bereken b .

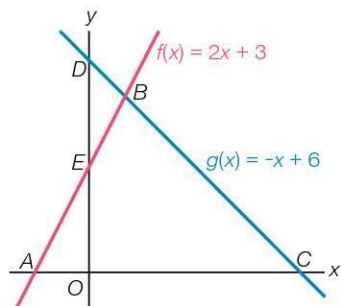
b De grafiek van g snijdt de x -as in het punt $B(-2, 0)$.

Bereken a .

O 68 Hiernaast zie je een schets van de grafieken van $f(x) = 2x + 3$ en $g(x) = -x + 6$.

a Bereken $f(1)$ en $g(1)$.

b Van welk van de punten A , B , C , D of E weet je nu de coördinaten? Schrijf die coördinaten op.



figuur 1.29

Theorie E Snijpunten van grafieken van functies

In figuur 1.30 zie je de grafieken van $f(x) = 2x - 3$ en $g(x) = -x + 3$. De grafieken snijden elkaar in het punt S . De x -coördinaat van S is de oplossing van de vergelijking $f(x) = g(x)$.

Je krijgt $2x - 3 = -x + 3$

$$2x + x = 3 + 3$$

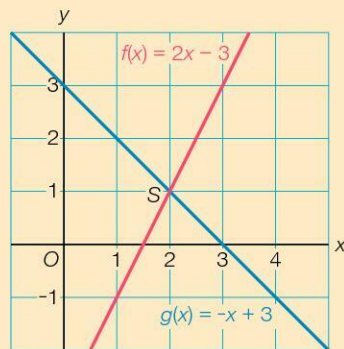
$$3x = 6$$

$$x = 2$$

De y -coördinaat van S volgt uit $y = g(2) = -2 + 3 = 1$.

Dus $S(2, 1)$.

Je kunt de y -coördinaat van S ook berekenen met $f(2)$.



figuur 1.30

De coördinaten van het snijpunt S van de grafieken van f en g krijg je als volgt.

- x_s volgt uit de vergelijking $f(x) = g(x)$.
- y_s krijg je door $f(x_s)$ of $g(x_s)$ te berekenen.

- 69** Gegeven zijn de functies $f(x) = 8x - 20$ en $g(x) = -2x$. Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken van f en g .

- 70** Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken van $f(x) = 0,8x - 3,7$ en $g(x) = -1,6x + 2,9$.

$f(x) = g(x)$ oplossen geeft de x -coördinaat van het snijpunt. Vervolgens invullen bij het functievoorschrift van f of g geeft de y -coördinaat.



- A 71** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3x - 1$ en $g(x) = x + 2$. De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A , de grafiek van g snijdt de y -as in het punt B , en de grafieken van f en g snijden elkaar in het punt C . Bereken de coördinaten van A , B en C .

- 72** Gegeven zijn de functies $f(x) = 1,5x + 9$ en $g(x) = -0,5x + 5$. De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt S . De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A . De grafiek van g snijdt de x -as in het punt B . Bereken de oppervlakte van $\triangle ABS$.

- 73** Gegeven is de functie $f(x) = ax + 8$. Bereken a als de grafiek van f
- door het punt $(-8, 80)$ gaat
 - evenwijdig is met de lijn $k: y = -5x + 6$
 - door het punt $(-5, a)$ gaat.

Als de grafiek van $f(x) = ax + 8$ door het punt $(-2, 40)$ gaat, dan is $f(-2) = 40$. Hieruit volgt $-2a + 8 = 40$. Oplossen geeft $a = -16$.

- 74** Bereken p en q in het geval de grafieken van $f(x) = px + q$ en $g(x) = qx + 4$ elkaar snijden in het punt $S(-1, 8)$.

Gemengde opgaven

1 Gegeven zijn de lijnen $l: y = -\frac{1}{2}x + 5$ en $m: y = \frac{1}{2}x - 1$.

- Teken l en m in één figuur.
- Onderzoek of het punt $A(24, -31)$ op l ligt.
- Onderzoek of het punt $B(-24, -11)$ op m ligt.
- Op l ligt het punt C met $y_C = 35$.
Bereken x_C .
- Bereken de coördinaten van het snijpunt S van l en m .
- De lijn n is de verticale lijn door het punt $D(-4, 0)$.
De lijn n snijdt l in het punt E en m in het punt F .
Bereken de lengte van het lijnstuk EF .

2 [▶ WERKBOEK] Teken de grafieken van de volgende formules.

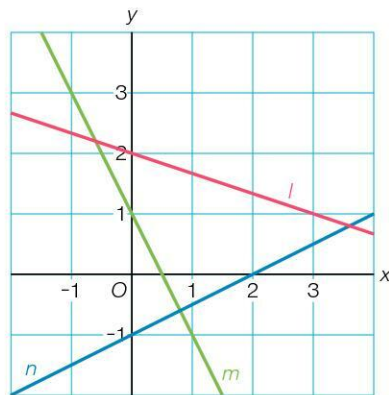
a $N = -\frac{1}{2}t + 5$

b $K = 1,5q + 350$

c $A = 150q + 350$

3 In figuur 1.31 zijn de lijnen l , m en n getekend.

- Stel van elk van deze lijnen de formule op.
- De lijn k is evenwijdig met n en gaat door het punt $P(0, -70)$.
Stel de formule van k op.



figuur 1.31

4 Los op.

- $5x - 3 = -x + 15$
- $9x - 1 = -x - 1$
- $3(2x - 1) = 3x - (5 - 4x)$
- $3(2x - 1) = 5 - 2x$
- $2x + 6x + 1 = -4(2 - 2x) - x$
- $5 + 3(x - 1) = 7 - 2x$
- $6(5 - 2x) + 8x = 5(2x + 6)$
- $8 - x = 9 + 3(2 - x) - 1$

5 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ en $g(x) = 3x - 2$.

- Bereken $f(8)$, $f(-8)$ en $g(10)$.
- De functie h is gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.
Stel het functievoorschrift van h op. Herleid je antwoord.
- Teken de grafieken van f en g in één figuur.
- De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A .
De grafiek van g snijdt de y -as in het punt B .
Bereken de lengte van lijnstuk AB . Rond af op één decimaal.
- De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt S .
Bereken de coördinaten van S .
- Het punt P met $x_P = -8$ ligt op de grafiek van g .
Bereken y_P .
- Het punt Q met $y_Q = 7$ ligt op de grafiek van f .
Bereken x_Q .

- 6** Het aantal landbouwbedrijven in Nederland neemt al jaren af. Zie de tabel. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2000 en L het aantal landbouwbedrijven. Neem in deze opgave aan dat er sprake is van een lineaire afname.

AANTAL LANDBOUWBEDRIJVEN IN NEDERLAND

t	0	5	10	15
L	97 000	84 500	72 000	59 500

- Stel de formule op van L .
- Met hoeveel neemt het aantal landbouwbedrijven in Nederland in de periode 2025-2028 naar verwachting af?
- In 2000 was de oppervlakte landbouwgrond in Nederland 1 976 000 ha. In 2017 was dat 1 790 000 ha. Was de gemiddelde oppervlakte landbouwgrond per landbouwbedrijf in 2017 groter of kleiner dan in 2000?

- 7** Los op.

- $-5x < 10$
- $-7x > 0$
- $6(4 - x) > 6x$
- $7(x - 1) < 16 - 4(3 + x)$

- 8** Los op.

- $1\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 1\frac{1}{2}x + 8$
- $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(x - 5) - 7$

- 9**
- Het punt $P(-3, 18)$ ligt op de lijn $l: y = 3x + b$. Bereken b .
 - Het punt $Q(2, -10)$ ligt op de lijn $m: y = ax + 8$. Bereken a .
 - Het punt $R(c, 4)$ ligt op de lijn $n: y = -2x + 10$. Bereken c .

- 10** De lijn m snijdt de x -as in het punt $A(-2, 0)$ en de y -as in het punt $B(0, 8)$. De lijn n is evenwijdig met m en gaat door het punt $C(-3, -1)$. Lijn n snijdt de y -as in het punt D . Bereken de coördinaten van D .

- 11** Tom laadt een aantal stenen op een kruiwagen. Elke steen weegt 4 kg en het gewicht van de lege kruiwagen is 40 kg. Tom duwt de kruiwagen met stenen over een houten plank die over een sloot ligt. De plank kan niet meer dan 320 kg dragen. Tom weegt 65 kg. De plank breekt. Stel het aantal stenen gelijk aan x .
- Stel een ongelijkheid op bij deze gegevens, en los deze op.
 - Wat weet je van het aantal stenen?



Samenvatting

1.1 Lineaire formules

blz 12 Een voorbeeld van een lineaire formule is $y = 2x - 1$.
Bij $x = 3$ hoort $y = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$.

De grafiek is een rechte lijn. Het snijpunt met de y -as is $(0, -1)$. De richtingscoëfficiënt is 2, dus ga je 1 naar rechts, dan ga je 2 omhoog.

Om de grafiek te tekenen, maak je eerst een tabel.

blz 13 Om te weten te komen of het punt $P(-8, -17)$ op de lijn $l: y = 2x - 1$ ligt, vul je $x = -8$ in en kijk je of je $y = -17$ krijgt: $y = 2 \cdot -8 - 1 = -16 - 1 = -17$.

Dit klopt, dus P ligt op l .

blz 14 Bij een lineair verband tussen x en y hoort een formule van de vorm $y = ax + b$.

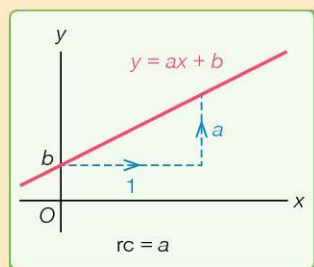
Voor $a = 0$ krijg je het constante verband $y = b$.

De grafiek is een horizontale lijn door $(0, b)$.

Voor $b = 0$ krijg je het recht evenredige verband $y = ax$.

De grafiek is een lijn door de oorsprong met $rc = a$.

x	0	2
y	-1	3



De formule van de lijn m in de figuur hiernaast stel je als volgt op.

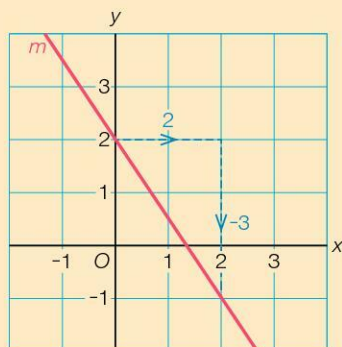
- Stel $m: y = ax + b$.
- Snijpunt met de y -as is $(0, 2)$, dus $b = 2$.
- $a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{-3}{2} = -1\frac{1}{2}$
- Je krijgt $m: y = -1\frac{1}{2}x + 2$.

blz 16 De lijn n is evenwijdig met m en gaat door het punt $A(-6, 5)$. De formule van n krijg je als volgt.

$n: y = ax + b$ en $n \parallel m$, dus $a = rc_n = rc_m = -1\frac{1}{2}$.

$A(-6, 5)$ op $n: y = -1\frac{1}{2}x + b$ geeft $-1\frac{1}{2} \cdot -6 + b = 5$ oftewel $9 + b = 5$, dus $b = -4$.

Dus $n: y = -1\frac{1}{2}x - 4$.



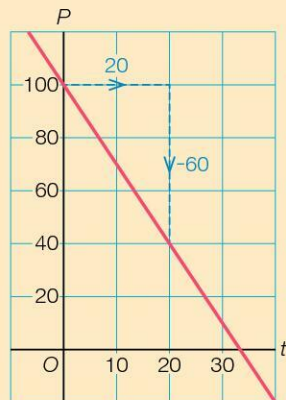
1.2 Lineaire verbanden

blz 17 In de figuur hiernaast zie je een horizontale t -as en een verticale P -as. De grafiek hoort bij een lineair verband tussen t en P . Er geldt $P = at + b$.

De lijn gaat door $(0, 100)$, dus $b = 100$.

$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{-60}{20} = -3$

Dus tussen t en P bestaat het verband $P = -3t + 100$.



1.3 Lineaire vergelijkingen

blz 20 De vergelijking $5x - 3 = 2x + 12$ is een voorbeeld van een lineaire vergelijking.

Bij het oplossen van een vergelijking mag je termen van het ene lid naar het andere lid overbrengen. Daarbij moet je $-$ vervangen door $+$, en $+$ vervangen door $-$.

Dus $5x - 3 = 2x + 12$ geeft $5x - 2x = 12 + 3$.

blz 22 Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

- | | |
|--|-----------------------------|
| 1 Werk de haakjes weg. | $2(x - 3) = 10 + 4(2x - 1)$ |
| 2 Breng alle termen met x naar het linkerlid en de rest naar het rechterlid. | $2x - 6 = 10 + 8x - 4$ |
| 3 Herleid beide leden. | $2x - 8x = 10 - 4 + 6$ |
| | $-6x = 12$ |
| 4 Deel beide leden door het getal voor x . | $x = -2$ |

blz 23 $+$ Bij het oplossen van $\frac{1}{4}x + 1 = \frac{1}{3}x$ werk je eerst de breuken weg. Je vermenigvuldigt daartoe alle termen met 12. Dit geeft $12 \cdot \frac{1}{4}x + 12 \cdot 1 = 12 \cdot \frac{1}{3}x$ oftewel $3x + 12 = 4x$. Enzovoort.

1.4 Lineaire ongelijkheden

blz 26 Een voorbeeld van een lineaire ongelijkheid is $2x - 6 < 7x + 9$.

blz 28 Hiernaast zie je hoe je deze ongelijkheid oplost. Omdat je beide leden door -5 deelt, klap je het ongelijkheidsteken om.

Uit $-6x < 12$ volgt $x > -2$.

Uit $-x < 3$ volgt $x > -3$.

Uit $3x > -3$ volgt $x > -1$. delen door 3, dus $>$ niet omklappen

$$2x - 6 < 7x + 9$$

$$2x - 7x < 9 + 6$$

$$-5x < 15$$

$$x > -3$$

Het ongelijkheidsteken is omgeklapt.

1.5 Lineaire functies

blz 30 Een functie maakt volgens een vast voorschrift van een getal, de invoer, een ander getal, de uitvoer.

blz 31 Bij een functie f en invoer x hoort de uitvoer $f(x)$, ook wel de functiewaarde van x genoemd.

blz 32 Neem je bij de lineaire functie f met functievoorschrift $f(x) = 2x - 8$ als invoer het getal 3, dan is de uitvoer $f(3) = 2 \cdot 3 - 8 = 6 - 8 = -2$. We zeggen dat bij de functie $f(x) = 2x - 8$ de functiewaarde van 3 gelijk is aan -2 . Omdat $f(3) = -2$ ligt het punt $(3, -2)$ op de grafiek van f .

blz 33 Snijpunt van de grafiek van f met de y -as: $x = 0$ en $y = f(0)$.

Snijpunt van de grafiek van f met de x -as: $y = 0$ en x volgt uit $f(x) = 0$.

blz 35 Snijpunt van de grafieken van f en g : x volgt uit $f(x) = g(x)$ en y krijg je door de gevonden x bij het functievoorschrift van f of g in te vullen.

$$f(x) = 2x - 8$$

$$\bullet f(0) = -8$$

Het snijpunt met de y -as is $(0, -8)$.

$$\bullet f(x) = 0 \text{ geeft } 2x - 8 = 0$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

Het snijpunt met de x -as is $(4, 0)$.

Diagnostische toets

1.1 Lineaire formules

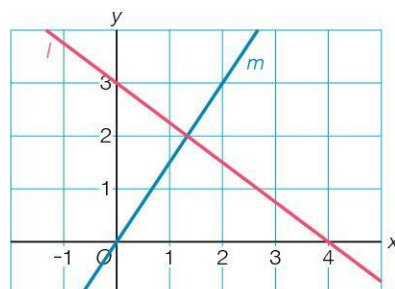
- 1** Teken in één figuur de lijnen $l: y = 1\frac{1}{2}x - 2$, $m: y = -3x$ en $n: y = -1\frac{1}{4}x + 2$.

- 2** Gegeven is de lijn $l: y = -8x + 13$.

- a** Op de lijn l ligt het punt B waarvan de x -coördinaat 11 is.
Bereken de y -coördinaat van B .
b Onderzoek of het punt $A(-6, 61)$ op l ligt.

- 3** In figuur 1.32 zijn de lijnen l en m getekend.

- a** Stel van elk van deze lijnen de formule op.
b Welke van deze twee lijnen hoort bij een recht evenredig verband? Licht toe.
c De lijn k is evenwijdig met l en gaat door het punt $S(0, -350)$.
Stel de formule van k op.



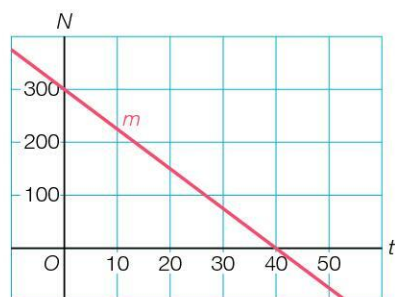
figuur 1.32

- 4** De lijn k gaat door het punt $R(-4, 20)$ en is evenwijdig met de lijn $l: y = 10x + 20$.
Stel de formule van k op.

1.2 Lineaire verbanden

- 5** [▶ WERKBOEK] Van een tropisch regenwoud is de oppervlakte A in km^2 te berekenen met de formule $A = -300t + 94\,000$. Hierin is de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1990.
a Hoeveel km^2 was de oppervlakte in 2005 groter dan in 2015?
b Met hoeveel km^2 neemt de oppervlakte jaarlijks af?
c Teken de grafiek van A .

- 6** Stel van de lijn m in figuur 1.33 de formule op.



figuur 1.33

1.3 Lineaire vergelijkingen

7 Los op.

- 9,10,11 **a** $5(x - 3) = 7x + 8$
b $-4a - 8 = -a - 8$
c $3 + 2(5 - x) = 6x - 2x - 5$
d $8 + 2(3x - 1) = x - 3(x - 14)$

8 Los op.

- 12 **a** $\frac{2}{3}x + 2 = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$
b $\frac{3}{4}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(x - 2) + 3$

9 Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen

13 $l: y = 0,4x + 1$ en $m: y = -1,2x + 3$.

1.4 Lineaire ongelijkheden

10 Los op.

- 14,15 **a** $5x - 3 < 6x - 8$ **c** $2 + 3(x - 5) > -(x - 2)$
b $3(a + 5) < a - 7$ **d** $3x > 5x$

1.5 Lineaire functies

11 Gegeven zijn de functies $f(x) = -2x + 5$ en $g(x) = 5x$.

- 16 **a** Bereken $f(5)$, $g(3)$ en $f(-1)$.
b Bereken bij de functie g de functiewaarde van -8 .
c De functie h is gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.
Stel het functievoorschrift van h op. Herleid je antwoord.

12 Gegeven is de functie $f(x) = 0,4x - 2$.

- 17 **a** Teken de grafiek van f .
b Onderzoek of het punt $A(-40, -18)$ op de grafiek van f ligt.
c Het punt B met $y_B = 20$ ligt op de grafiek van f .
Bereken x_B .

13 Gegeven zijn de functies $f(x) = -8x + 36$ en $g(x) = 3(5 - x) + 1$.

- 18 **a** De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A en de y -as in het punt B .
Bereken de coördinaten van A en B .
b De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt S .
Bereken de coördinaten van S .

14 Gegeven is de functie $f(x) = ax - 5$.

- 19 Bereken a als de grafiek van f
a evenwijdig is met de lijn $m: y = -7x + 2$
b door het punt $P(-3, 13)$ gaat
c door het punt $Q(1, 2a)$ gaat.

Herhaling

1.1 Lineaire formules

1 Om de lijn $l: y = -1\frac{1}{2}x + 4$ te tekenen, maak je eerst een tabel.

a Vul in. Voor $x = 0$ is $y = -1\frac{1}{2} \cdot 0 + 4 = 0 + 4 = 4$, en voor

$x = 2$ is $y = \dots$, dus bij l hoort de tabel

x	0	2
y	4	...

b Teken de lijn $l: y = -1\frac{1}{2}x + 4$.

c Teken in de figuur van vraag b ook de lijnen $m: y = 2x - 1$, $n: y = 3x$, en $p: y = \frac{1}{4}x - 1$.

2 Gegeven is de lijn $l: y = 5x - 6$.

a Op l ligt het punt P met x -coördinaat 3. De y -coördinaat van P krijg je door $x = 3$ in de formule in te vullen. Bereken de y -coördinaat van P .

b Om met een berekening na te gaan of het punt $A(8, 32)$ op l ligt, vul je $x = 8$ in en bereken je y . Je kijkt vervolgens of je $y = 32$ krijgt.

Ligt het punt $A(8, 32)$ op l ?

c Ligt het punt $B(-6, -36)$ op l ?

3 Bij de lijn l in figuur 1.34 hoort de formule $y = ax + b$.

a Welk getal is b ?

b Om a te berekenen, zoek je nog een roosterpunt op l .

Vul in: lijn l gaat door $(0, -2)$ en

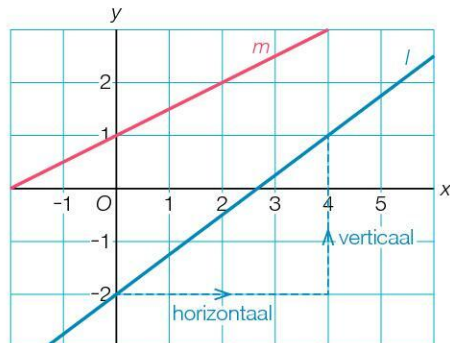
$(4, 1)$, dus $a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$

c Schrijf de formule van l op.

d Stel van de lijn m in figuur 1.34 de formule op.

e De lijn p gaat door het punt $A(0, 20)$ en is evenwijdig met m .

Stel de formule van p op.



figuur 1.34

4 De lijn $l: y = ax + b$ is evenwijdig met de lijn $k: y = 3x - 8$. Het punt $A(5, 20)$ ligt op l .

a Waarom is $a = 3$?

b Je weet nu dat $l: y = 3x + b$. Voor het berekenen van b gebruik je dat l door het punt $A(5, 20)$ gaat, dus $3 \cdot 5 + b = 20$.

Bereken b .

- 5 De lijn m : $y = ax + b$ gaat door het punt $B(-8, 20)$ en is evenwijdig met de lijn p : $y = 5x - 1$.
Bereken a en b .

1.2 Lineaire verbanden

- 6 [▶ WERKBOEK] Het aantal zzp'ers N in Nederland is te berekenen met de formule $N = 30\,000t + 400\,000$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1995.

Het aantal zzp'ers in 2003 bereken je als volgt.

Bij 2003 hoort $t = 2003 - 1995 = 8$, dus het aantal is

$$N = 30\,000 \cdot 8 + 400\,000 = 640\,000.$$

a Bereken het aantal zzp'ers in 2007.

b In 2015 waren er meer zzp'ers dan in 2011.

Hoeveel meer?

c Teken de grafiek van N . Vul eerst de tabel

t	0	10
N	...	...

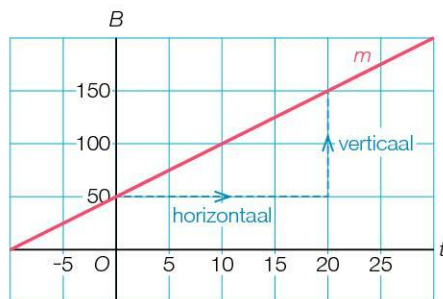
 in.

- 7 Bij de lijn m in figuur 1.35 hoort een formule van de vorm $B = at + b$.

a Welk getal is b ?

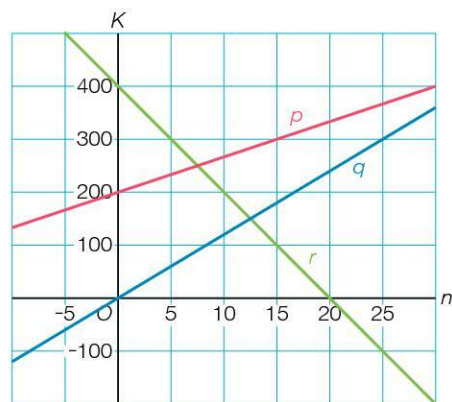
b Vul in: $a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$

c Schrijf de formule van m op.



figuur 1.35

- 8 Stel van de lijnen p , q en r in figuur 1.36 de formule op.



figuur 1.36

1.3 Lineaire vergelijkingen

- 9 Bij het oplossen van een vergelijking mag je termen van het ene naar het andere lid overbrengen. Daarbij moet je $-$ vervangen door $+$, en $+$ vervangen door $-$.

Dus $3x - 2 = 7x + 6$ geeft $3x - 7x = 6 + 2$.

Vul in. Zorg er voor dat alle termen met x in het linkerlid staan.

a $5x + 1 = 7x - 3$ geeft $5x - 7x = -3 \dots$

b $-2x - 8 = 3x + 2$ geeft $-2x \dots = 2 \dots$

c $-8x + 3 = -5x$ geeft $\dots = \dots$

d $5x - 2 = 6 - 3x + 8$ geeft $\dots = \dots$

- 10** Hiernaast zie je hoe je de vergelijking $3x + 7 = -2x - 3$ oplost. In de eerste stap ga je in één keer naar $3x + 2x = -3 - 7$.

Los op.

- a** $5x - 6 = 2x - 18$ **c** $-8x + 2 = -7x - 6$
b $3x - 1 = -x - 1$ **d** $7x = 2x + 25$

$$\begin{aligned} 3x + 7 &= -2x - 3 \\ 3x + 2x &= -3 - 7 \\ 5x &= -10 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

- 11** Hiernaast zie je hoe je de vergelijking $4x - 7 = 1 - 2(x - 8)$ oplost. Je ziet dat je eerst de haakjes wegwerkt.

Los op.

- a** $6(a - 1) = 7a - 8$ **c** $2a + 3(a - 1) = 27$
b $2(5 - 2x) = 4 - x$ **d** $3x - 4 = 5 - 4(x - 3)$

$$\begin{aligned} 4x - 7 &= 1 - 2(x - 8) \\ 4x - 7 &= 1 - 2x + 16 \\ 4x + 2x &= 1 + 16 + 7 \\ 6x &= 24 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

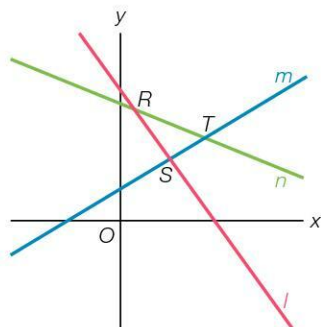
- 12** Om de vergelijking $\frac{2}{3}x - 2 = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$ op te lossen, vermenigvuldig je eerst alle termen met 15. Je krijgt $15 \cdot \frac{2}{3}x - 15 \cdot 2 = 15 \cdot \frac{1}{5}x - 15 \cdot \frac{3}{5}$ oftewel $10x - 30 = \dots$

Los op.

- a** $\frac{2}{3}x - 2 = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$ **b** $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$

- 13** Hiernaast zie een schets van de lijnen $l: y = -1,4x + 3,5$, $m: y = 0,6x + 0,9$ en $n: y = -0,4x + 3,2$. De x -coördinaat van het snijpunt S van l en m volgt uit de vergelijking $-1,4x + 3,5 = 0,6x + 0,9$.

- a** Bereken de x -coördinaat van S .
b Bereken de y -coördinaat van S , en geef de coördinaten van S .
c Bereken de coördinaten van het snijpunt R van l en n .
d Bereken de coördinaten van het snijpunt T van m en n .



figuur 1.37

1.4 Lineaire ongelijkheden

- 14** Uit $-3x < 12$ volgt $x > -4$.

deel beide leden door -3 , dus
klap het ongelijkheidsteken om
Uit $3x > -12$ volgt $x > -4$.
delen door 3 , dus klap het
ongelijkheidsteken niet om

Los op.

- a** $-5x < 20$ **c** $-x < -8$ **e** $\frac{1}{2}x < -4$
b $5x < -20$ **d** $-\frac{1}{5}x < 1$ **f** $-x > 0$

- 15** Hiernaast zie je hoe je de ongelijkheid $2x - 4 < 5 - (2 - 3x)$ oplost. Eerst werk je de haakjes weg.

Los op.

- a** $3x < 7x + 6$ **c** $5 - (x - 1) < 4 - 2x$
b $4(x - 2) > 7(x + 1) + 3$ **d** $3(1 - x) < 2(1 + x)$

$$\begin{aligned} 2x - 4 &< 5 - (2 - 3x) \\ 2x - 4 &< 5 - 2 + 3x \\ 2x - 3x &< 5 - 2 + 4 \\ -x &< 7 \\ x &> -7 \end{aligned}$$

1.5 Lineaire functies

- 16** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3x - 2$ en $g(x) = -5x$.
Bij f is de functiewaarde van 6 gelijk aan $f(6) = 3 \cdot 6 - 2 = 16$.
- a** Bereken zowel bij f als bij g de functiewaarde van -1 .
 - b** Bereken $f(-5)$, $g(-5)$, $f(10)$ en $g(10)$.
 - c** De functie h is gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.
Vul in.
Het functievoorschrift van h is daarom $h(x) = 3x - 2 + \dots = \dots$

- 17** Gegeven is de functie $f(x) = -0,5x + 3$.
- a** Teken de grafiek van f .
 - b** Bereken $f(8)$ en vul in.
Omdat $f(8) = \dots$ ligt het punt $A(8, \dots)$ op de grafiek van f .
 - c** Waarom ligt het punt $B(10, -2)$ op de grafiek van f ?
 - d** Het punt C met $y_C = 20$ ligt op de grafiek van f .
De x -coördinaat van C volgt uit de vergelijking $f(x) = 20$,
dus uit $-0,5x + 3 = 20$.
Bereken x_C .



Van het punt $B(10, -2)$
is $x_B = 10$ en $y_B = -2$.

- 18** Gegeven zijn de functies $f(x) = 5x - 35$ en $g(x) = 3(x - 2) + 60$.
De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A . De x -coördinaat van A is de oplossing van de vergelijking $f(x) = 0$, dus van $5x - 35 = 0$.
- a** Los deze vergelijking op, en schrijf de coördinaten van A op.
 - b** Bereken $f(0)$ en schrijf de coördinaten op van het snijpunt B van de grafiek van f met de y -as.
 - c** De grafiek van g snijdt de x -as in het punt P en de y -as in het punt Q .
Bereken de coördinaten van P en Q .

De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt S . De x -coördinaat van S is de oplossing van $f(x) = g(x)$, dus van $5x - 35 = 3(x - 2) + 60$.

- d** Bereken de coördinaten van S .

- 19** Gegeven is de functie $f(x) = ax + 2$.
Bereken a als de grafiek van f
- a** evenwijdig is met de lijn k : $y = 5x - 3$
 - b** door het punt $P(6, -10)$ gaat
 - c** door het punt $Q(3, a)$ gaat.

De grafiek van $f(x) = ax + 2$ gaat
door $P(6, -10)$, dus $f(6) = -10$.
Dit geeft $6a + 2 = -10$.

Onderzoek **Hartslag en fitheid**

Veel fanatieke sporters gebruiken tijdens het trainen een hartslagmeter om hun hartslag in de gaten te houden. Ze werken hierbij vaak met trainingszones, waarbij de hartslag tussen een bepaalde onder- en bovengrens wordt gehouden. Op deze manier proberen ze een maximaal trainingseffect te bereiken. In dit onderzoek leer je hoe je een trainingszone berekent, en onderzoek je met de Harvard Step Test hoe fit je bent.

Trainingszones

Bij het bepalen van trainingszones is de maximale hartslag van belang. De maximale hartslag varieert van persoon tot persoon. Daarom laten topsporters hun maximale hartslag vaak in een laboratorium bepalen. In dit onderzoek gebruiken we echter de eenvoudige vuistregels hiernaast, waarmee je de maximale hartslag kunt schatten. In deze vuistregels is H de hartslag (het aantal slagen per minuut) en t de leeftijd in jaren.

- mannen: $H = 220 - t$
- vrouwen: $H = 230 - t$

- 1** a Hoeveel is volgens de vuistregels hierboven jouw maximale hartslag?
b Meet je hartslag nadat je enige tijd stil hebt gezeten, en bereken welk percentage de gemeten hartslag is van je maximale hartslag.
c Meet je hartslag direct nadat je een paar keer de trap op bent gerend, en bereken welk percentage van je maximale hartslag je hebt bereikt.

Er zijn gratis apps voor je smartphone waarmee je je hartslag kunt meten.



Het is niet verstandig lang door te trainen met een te hoge hartslag. Deskundigen adviseren tijdens een training een hartslag die tussen 65% en 85% van je maximale hartslag ligt. In dit onderzoek noemen we het gebied tussen deze onder- en bovengrens de trainingszone.

- 2** Tussen welke onder- en bovengrens moet volgens dit advies jouw hartslag liggen tijdens een training?

- 3** [▶ **WERKBOEK**] Voor mannen kun je met de formule $H_b = 187 - 0,85t$ de bovengrens van de trainingszone berekenen.

- Licht toe hoe deze formule volgt uit de vuistregel $H = 220 - t$.
- Stel de formule op van de ondergrens H_o van de trainingszone.
- Teken de grafieken van H_b en H_o , en kleur de trainingszone.
- Tijdens een training is van vier mannen de hartslag gemeten. Zie de tabel hiernaast. Wie traint er volgens jou het effectiefste? Licht toe.

naam	leeftijd	hartslag
Alex	55	130
Sem	28	170
Tim	36	160
Glenn	18	170

- e Stel de formules op van H_0 en H_b voor vrouwen.
- f Teken de trainingszone voor vrouwen.
- g Eva doet elke week een duurloop. Ze streeft ernaar een hartslag van 140 te hebben, want dan zit ze in haar trainingszone. Onderzoek hoe oud Eva kan zijn.

De Harvard Step Test

Hartslag en fitheid hebben met elkaar te maken. Hoe fitter je bent, hoe sneller je hartslag daalt na een inspanning. Een bekende test die gebruik maakt van dit verschijnsel, is de Harvard Step Test. Je kunt daarmee je fitheid meten door gedurende maximaal vijf minuten op een bankje of een trapje van ongeveer 45 cm hoog de oefening te doen die in figuur 1.38 is afgebeeld. Voor elke stap reken je twee seconden.



figuur 1.38

Na afloop van de oefening ga je direct zitten en meet je op drie momenten je hartslag: H_1 is de hartslag 1 minuut na beëindiging van de inspanning, H_2 de hartslag na 2 minuten en H_3 de hartslag na 3 minuten.

De fitheidsindex F bereken je met de formule $F = \frac{100s}{H_1 + H_2 + H_3}$.

Hierin is s de duur van de oefening in seconden. Rond F af op gehele.

- 4 a Jan doet de oefening 4 minuten. Hij meet $H_1 = 62$, $H_2 = 55$ en $H_3 = 50$. Bereken de fitheidsindex van Jan.
- b Anne doet de oefening 3 minuten. Haar fitheidsindex is 60. Wat weet je van $H_1 + H_2 + H_3$?
- c Dave doet de oefening 4 minuten. Zijn fitheidsindex is 75. Toevallig verschillen zowel H_1 en H_2 als H_2 en H_3 precies 5. Hoeveel is H_3 ?

FITHEIDSLINDEKS

boven 90	uistekend
80-90	goed
65-79	voldoende
55-64	matig
onder 55	slecht



- 5 Doe de Harvard Step Test met een aantal klasgenoten, en onderzoek wie het fitste is. Doe de oefening tot je het niet meer volhoudt, met een maximumtijd van 5 minuten.

Gelijkvormigheid en hellingen

De Piramide van Cheops is het enige van de zeven klassieke wereldwonderen dat tot op de dag van vandaag bewaard is gebleven. De piramide werd rond 2500 v.Chr. gebouwd. Het grondvlak is een vierkant met zijden van 230 meter en de hoogte van de piramide is 139 meter. Het meten van deze hoogte is niet eenvoudig, maar door gebruik te maken van gelijkvormigheid en lengten van schaduwen kun je de hoogte van de piramide berekenen.

Wat leer je?

- Dat bij een verhoudingstabel de kruisproducten gelijk zijn.
- Hoe je met kruisproducten rekent.
- Hoe je kunt aantonen dat twee driehoeken gelijkvormig zijn.
- Hoe je gelijkvormigheid van driehoeken gebruikt om lengten van lijnstukken te berekenen.
- Hoe de begrippen hellingsgetal, hellingspercentage en hellingshoek samenhangen.
- Wat de tangens van een hellingshoek is.
- Berekeningen met de tangens.

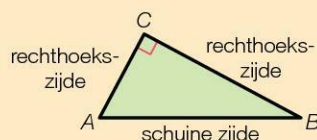




Voorkennis Rechthoekige driehoeken

Theorie A De stelling van Pythagoras

In figuur 2.1 is de rechthoekige driehoek ABC getekend. De zijde tegenover de rechte hoek heet de schuine zijde. In figuur 2.1 is AB de schuine zijde. De andere zijden zijn de benen van de rechte hoek. Daarom heten AC en BC de rechthoekszijden.



figuur 2.1

Vaak heb je bij berekeningen in rechthoekige driehoeken de stelling van Pythagoras nodig.

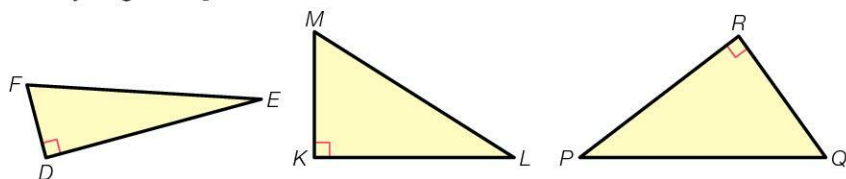
De stelling van Pythagoras

In elke rechthoekige driehoek geldt

$$(\text{ene rechthoekszijde})^2 + (\text{andere rechthoekszijde})^2 = (\text{schuine zijde})^2.$$

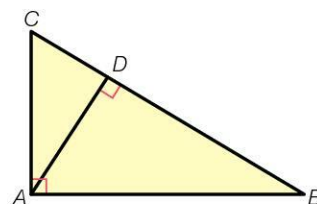
Dus in figuur 2.1 is $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

- 1 Schrijf voor elke rechthoekige driehoek in figuur 2.2 de stelling van Pythagoras op.



figuur 2.2

- 2 Schrijf voor elke rechthoekige driehoek in figuur 2.3 de stelling van Pythagoras op.



figuur 2.3

Theorie B Berekeningen met de stelling van Pythagoras

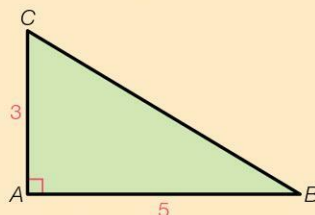
In figuur 2.4 bereken je BC als volgt.

$$\angle A = 90^\circ, \text{ dus } AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$5^2 + 3^2 = BC^2$$

$$BC^2 = 25 + 9 = 34$$

$$BC = \sqrt{34} \approx 5,83 \text{ cm}$$



figuur 2.4 De afmetingen zijn in cm.

Voorbeeld

Zie figuur 2.5.

Bereken QR in cm. Rond af op twee decimalen.

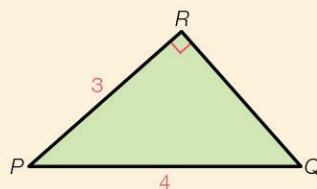
Uitwerking

$$\angle R = 90^\circ, \text{ dus } PR^2 + QR^2 = PQ^2$$

$$3^2 + QR^2 = 4^2$$

$$QR^2 = 16 - 9 = 7$$

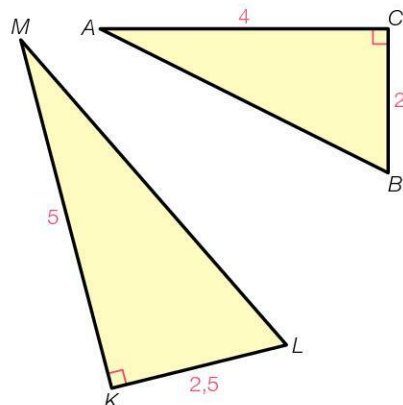
$$QR = \sqrt{7} \approx 2,65 \text{ cm}$$



figuur 2.5 De afmetingen zijn in cm.

3 Zie figuur 2.6.

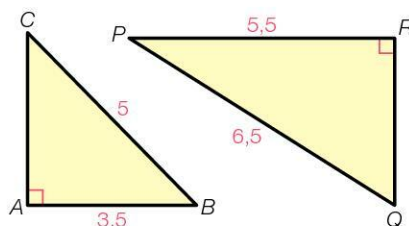
Bereken AB en LM in cm. Rond af op twee decimalen.



figuur 2.6 De afmetingen zijn in cm.

4 Zie figuur 2.7.

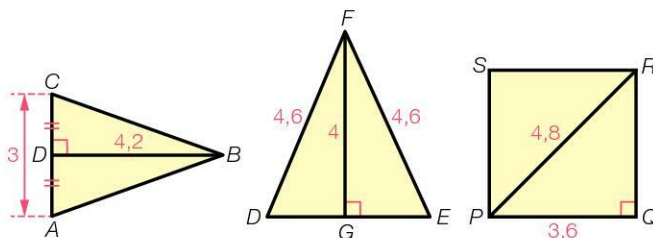
Bereken AC en QR in cm. Rond af op twee decimalen.



figuur 2.7 De afmetingen zijn in cm.

5 Zie figuur 2.8.

Bereken BC , DE en QR in cm. Rond af op twee decimalen.



figuur 2.8 De afmetingen zijn in cm.

6 a Van $\triangle PQR$ is $\angle R = 90^\circ$, $PQ = 8,3$ cm en $PR = 7,2$ cm.

Bereken QR in cm. Rond af op twee decimalen.

b Bereken van een rechthoek van 6 bij 4 cm de lengte van de diagonalen in cm. Rond af op twee decimalen.

2.1 Kruisproducten

- 0 1** Neem de verhoudingstabel hiernaast over en vul hem verder in. Rond niet af.

3	12	2	20	300
5	20	...	...	...

Red annotations: $\times 4$ (from 3 to 12), $: 6$ (from 2 to 12), and $\times 4$ (from 5 to 20).

figuur 2.9

- 0 2** Gegeven zijn de verhoudingstabellen $\frac{2}{10} \mid \frac{5}{25}$ en $\frac{10}{14} \mid \frac{15}{21}$.

Vermenigvuldig in beide tabellen het getal linksboven met het getal rechtsonder, en het getal linksonder met het getal rechtsboven. Wat valt je op?

Theorie A Kruislings vermenigvuldigen

Je kunt een verhoudingstabel controleren door kruislings te vermenigvuldigen. Zo zijn in de verhoudingstabel

$$\frac{2}{3} \mid \frac{10}{15} \text{ de producten } 2 \cdot 15 \text{ en } 3 \cdot 10 \text{ gelijk.}$$

De tabel vervangen door $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$ heet **kruislings vermenigvuldigen**. We noemen $2 \cdot 15$ en $3 \cdot 10$ **kruisproducten**.

$$\frac{2}{3} \mid \frac{10}{15}$$

$$2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$$

In een verhoudingstabel zijn de kruisproducten gelijk.

Bij berekeningen met verhoudingstabellen gebruik je kruisproducten. Zo volgt uit de verhoudingstabel

$$\frac{7}{4} \mid \frac{x}{11} \text{ dat } 4 \cdot x = 7 \cdot 11, \text{ dus } x = \frac{7 \cdot 11}{4} = 19,25.$$

Bij de verhoudingstabel $\frac{12}{x} \mid \frac{4}{3}$ bereken je x met $4 \cdot x = 3 \cdot 12$, dus $x = \frac{3 \cdot 12}{4} = 9$.

Voorbeeld

Bereken x in de volgende verhoudingstabellen.

a $\frac{18}{x} \mid \frac{24}{15}$

b $\frac{5}{x} \mid \frac{3}{x-6}$

Uitwerking

a $x = \frac{18 \cdot 15}{24} = 11,25$

$x = \frac{\text{kruisproduct}}{\text{overblijvend getal}}$

b $5(x-6) = 3x$ Denk aan de haakjes.
 $5x - 30 = 3x$
 $5x - 3x = 30$
 $2x = 30$
 $x = 15$

T 3 [►►6] Bereken x in de volgende verhoudingstabellen.

a $\frac{8}{15} \mid \frac{x}{96}$

b $\frac{2}{7} \mid \frac{x+1}{x-5}$

c $\frac{x}{4} \mid \frac{1,5-x}{2}$

4 Bereken x in de volgende verhoudingstabellen.

a $\frac{2}{4} \mid \frac{7}{x}$

b $\frac{2,3}{4} \mid \frac{x}{12}$

c $\frac{18}{x} \mid \frac{16}{20}$

5 Bereken x in de volgende verhoudingstabellen.

a $\frac{3}{5} \mid \frac{x-1}{x+3}$

b $\frac{3}{x-1} \mid \frac{4}{2x+1}$

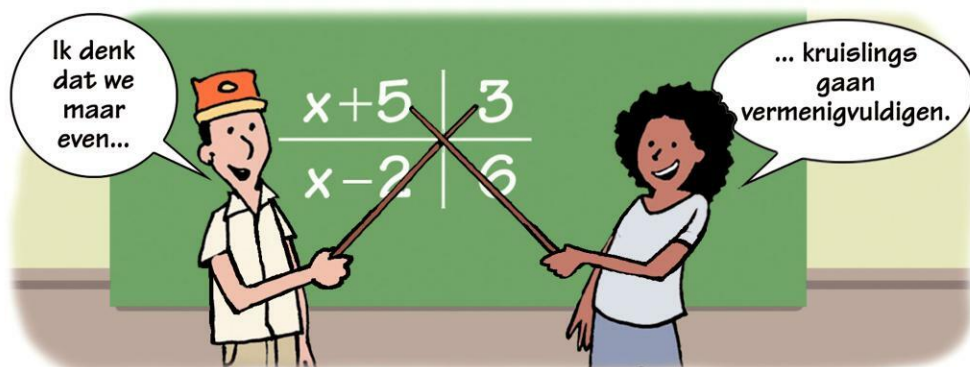
c $\frac{5}{x-1} \mid \frac{12}{7,2}$

A 6 Bereken x in de volgende verhoudingstabellen.

a $\frac{2}{7} \mid \frac{x+1}{x-5}$

b $\frac{x}{3x+2} \mid \frac{2,3}{7,9}$

c $\frac{15}{x} \mid \frac{4}{9}$



Theorie B Verhoudingstabellen met meer dan twee kolommen

Ook bij een verhoudingstabel met meer dan twee kolommen zijn de kruisproducten gelijk.

Zo kun je bij de verhoudingstabel $\frac{10}{15} \mid \frac{16}{24} \mid \frac{18}{27}$ op drie manieren

kruislings vermenigvuldigen. Zie hieronder.

1 ^e en 2 ^e kolom	2 ^e en 3 ^e kolom	1 ^e en 3 ^e kolom
$\begin{array}{c c c} 10 & 16 & 18 \\ \hline 15 & 24 & 27 \end{array}$	$\begin{array}{c c c} 10 & 16 & 18 \\ \hline 15 & 24 & 27 \end{array}$	$\begin{array}{c c c} 10 & 16 & 18 \\ \hline 15 & 24 & 27 \end{array}$
$10 \cdot 24 = 15 \cdot 16$	$16 \cdot 27 = 24 \cdot 18$	$10 \cdot 27 = 15 \cdot 18$

Voorbeeld

Bereken a en b in de verhoudingstabel $\frac{7}{6} \mid \frac{a}{19} \mid \frac{128}{b}$. Rond af op twee decimalen.

Aanpak

Splits de tabel in $\frac{7}{6} \mid \frac{a}{19}$ en $\frac{7}{6} \mid \frac{128}{b}$.

Uitwerking

$$\frac{7}{6} \mid \frac{a}{19} \text{ geeft } a = \frac{7 \cdot 19}{6} \approx 22,17$$

$$\frac{7}{6} \mid \frac{128}{b} \text{ geeft } b = \frac{6 \cdot 128}{7} \approx 109,71$$

- 7** Bereken p en q in de volgende verhoudingstabellen. Rond af op één decimaal.

a $\frac{5}{p} \mid \frac{11}{18} \mid \frac{q}{10}$

b $\frac{p}{5} \mid \frac{1,6}{2,1} \mid \frac{q}{1,5}$

c $\frac{16}{45} \mid \frac{p}{43} \mid \frac{59}{q}$

- 8** Gegeven is de verhoudingstabel $\frac{18}{23} \mid \frac{x}{17} \mid \frac{y}{53} \mid \frac{73}{z}$. Bereken x , y en z in twee decimalen nauwkeurig.

- A 9** Bereken x en y in de volgende verhoudingstabellen. Rond af op twee decimalen.

a $\frac{19}{6} \mid \frac{x}{11} \mid \frac{67}{y}$

b $\frac{8}{23} \mid \frac{x-2}{x} \mid \frac{y-1}{y+3}$

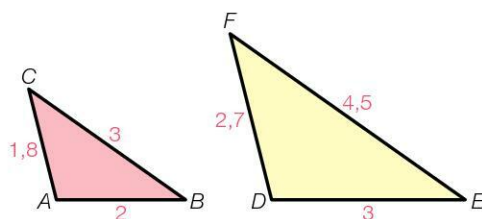
2.2 Gelijkvormigheid

O 10 Zie figuur 2.10.

a Leg uit waarom $\triangle DEF$ een vergroting is van $\triangle ABC$.

b Vul in.

Bij vergroten zijn de overeenkomstige hoeken van beeld en origineel gelijk, dus $\angle D = \angle \dots$, $\angle E = \angle \dots$ en $\angle F = \angle \dots$



figuur 2.10

Theorie A Gelijkvormigheid en verhoudingstabellen

In figuur 2.10 is $\triangle DEF$ een vergroting van $\triangle ABC$. De vergrotingsfactor is 1,5. De zijden van het beeld, $\triangle DEF$, zijn dus 1,5 keer zo lang als de overeenkomstige zijden van het origineel, $\triangle ABC$.

Dus $\frac{AB}{DE} \mid \frac{BC}{EF} \mid \frac{AC}{DF}$ is een verhoudingstabel.

Bij het vergroten van een figuur hebben origineel en beeld dezelfde vorm: $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ zijn **gelijkvormig**.

De hoeken van het beeld zijn gelijk aan de overeenkomstige hoeken van het origineel, dus $\angle D = \angle A$, $\angle E = \angle B$ en $\angle F = \angle C$.

Dat $\triangle ABC$ gelijkvormig is met $\triangle DEF$ noteren we als $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Het teken $\sim$ betekent 'is gelijkvormig met'. Aan de volgorde van de letters kun je zien welke hoeken overeenkomstige hoeken zijn.

$$\begin{array}{l} \triangle ABC \sim \triangle DEF \\ \angle A = \angle D \\ \angle B = \angle E \\ \angle C = \angle F \end{array}$$

Bij gelijkvormige driehoeken

- zijn de overeenkomstige hoeken gelijk
- kun je met de lengten van de zijden een verhoudingstabel maken.

De driehoeken in figuur 2.11 zijn gelijkvormig. Omdat $\angle P = \angle N$, $\angle Q = \angle M$ en $\angle R = \angle K$, geldt $\triangle PQR \sim \triangle NMK$.

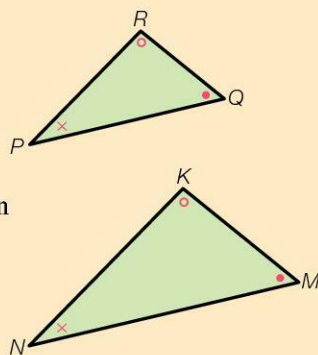
In de bijbehorende verhoudingstabel zet je overeenkomstige zijden in dezelfde kolom.

Uit de gelijkvormigheid $\triangle PQR \sim \triangle NMK$ volgt dat de zijden

PQ en NM , QR en MK , en PR en NK overeenkomstige zijden zijn.

Bij de gelijkvormigheid $\triangle PQR \sim \triangle NMK$ kun je dus de

volgende verhoudingstabel maken: $\frac{PQ}{NM} \mid \frac{QR}{MK} \mid \frac{PR}{NK}$.



figuur 2.11

- 11** De driehoeken in figuur 2.12 zijn gelijkvormig.

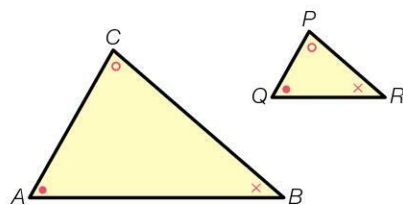
Neem over en vul in.

a $\angle A = \angle \dots$, $\angle B = \angle \dots$ en $\angle C = \angle \dots$

b $\triangle ABC \sim \dots$

c

AB	BC	AC
$\dots$	$\dots$	$\dots$



figuur 2.12

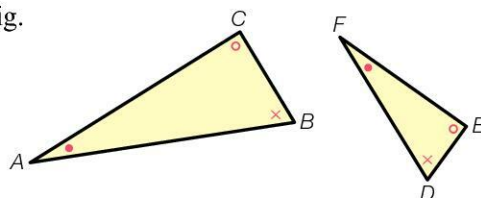
- 12** De driehoeken in figuur 2.13 zijn gelijkvormig.

Neem over en vul in.

a $\triangle ABC \sim \dots$

b

AB	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$



figuur 2.13

Theorie B Zijden berekenen bij gelijkvormigheid

Als twee driehoeken gelijkvormig zijn, kun je met behulp van gelijkvormigheid lengten van onbekende zijden berekenen. Je maakt hierbij gebruik van de verhoudingstabel die volgt uit de gelijkvormigheid. In het voorbeeld zie je hoe dat gaat.

Afspraak

Bij opgaven die niet over praktische situaties gaan, laten we de lengte-eenheid weg.

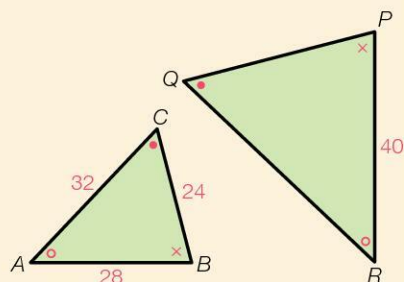
Voorbeeld

De driehoeken in figuur 2.14 zijn gelijkvormig.

a Vul in: $\triangle ABC \sim \dots$

b Schrijf de verhoudingstabel op.

c Bereken PQ en QR . Rond af op één decimaal.



figuur 2.14

Uitwerking

a $\triangle ABC \sim \triangle RPQ$

b

AB	BC	AC
RP	PQ	RQ

 geeft

28	24	32
40	PQ	RQ

c

28	24
40	PQ

 geeft $PQ = \frac{40 \cdot 24}{28} \approx 34,3$

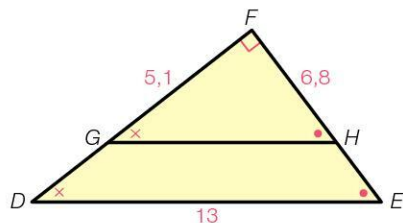
28	32
40	RQ

 geeft $QR = \frac{40 \cdot 32}{28} \approx 45,7$

$\triangle ABC \sim \triangle RPQ$, dus
onder **AB** hoort **RP**,
onder **BC** hoort **PQ** en
onder **AC** hoort **RQ**.

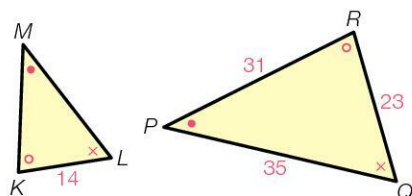
T 13 [►►18] In figuur 2.15 zie je twee gelijkvormige driehoeken.

- Vul in: $\triangle DEF \sim \dots$
- Bereken GH en EH .



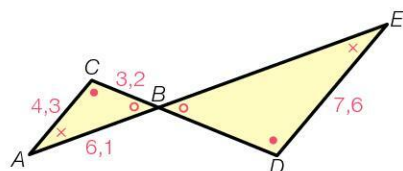
figuur 2.15

- 14** De driehoeken in figuur 2.16 zijn gelijkvormig.
- Vul in: $\triangle KLM \sim \dots$
 - Schrijf de verhoudingstabel op.
 - Bereken KM en LM . Rond af op één decimaal.



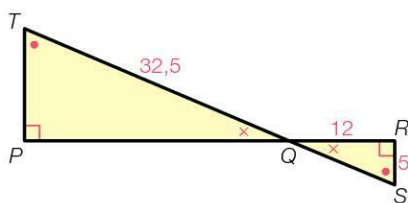
figuur 2.16

- 15** In figuur 2.17 zie je twee gelijkvormige driehoeken.
- Vul in: $\triangle ABC \sim \dots$
 - Schrijf de verhoudingstabel op.
 - Bereken BD en BE , beide in één decimaal nauwkeurig.



figuur 2.17

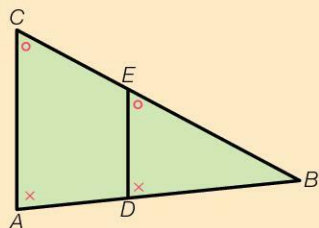
- 16** Hiernaast zie je twee gelijkvormige driehoeken.
- Vul in: $\triangle PQT \sim \dots$
 - Schrijf de verhoudingstabel op. Waarom lukt het niet om hiermee PQ te berekenen?
 - Bereken QS met de stelling van Pythagoras.
 - Bereken PQ en PT .



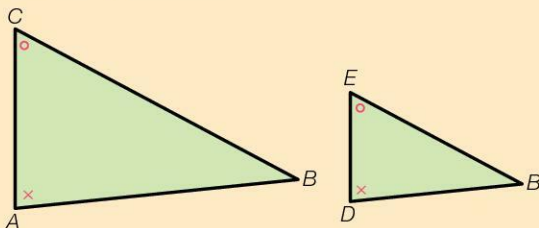
figuur 2.18

Theorie C Gelijkvormige driehoeken en gelijke hoeken

In een figuur kan het voorkomen dat twee gelijkvormige driehoeken op elkaar liggen. In figuur 2.19 ligt $\triangle BED$ op $\triangle ABC$.



figuur 2.19



figuur 2.20

Door de kleine driehoek in gedachten uit de grote driehoek te halen, krijg je figuur 2.20. Omdat $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle E$ en omdat $\angle B$ in beide driehoeken voorkomt, geldt $\triangle ABC \sim \triangle DBE$. In het voorbeeld op de volgende bladzijde gebruik je deze gelijkvormigheid.

Voorbeeld

In figuur 2.21 zie je twee gelijkvormige driehoeken.

- Vul in: $\triangle ABC \sim \dots$
- Bereken AB en BE .

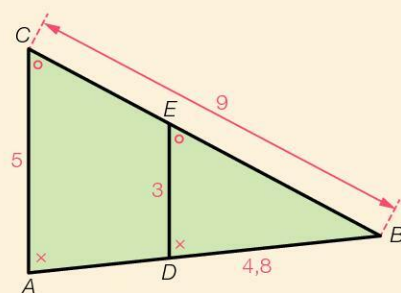
Uitwerking

- $\triangle ABC \sim \triangle DBE$

$$\frac{AB}{DB} \mid \frac{BC}{BE} \mid \frac{AC}{DE} \text{ geeft } \frac{AB}{4,8} \mid \frac{9}{BE} \mid \frac{5}{3}$$

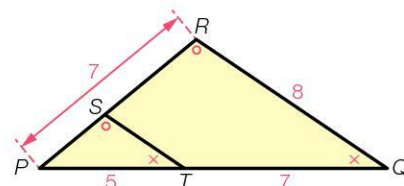
$$\frac{9}{BE} \mid \frac{5}{3} \text{ geeft } BE = \frac{9 \cdot 3}{5} = 5,4$$

$$\frac{AB}{4,8} \mid \frac{5}{3} \text{ geeft } AB = \frac{4,8 \cdot 5}{3} = 8$$



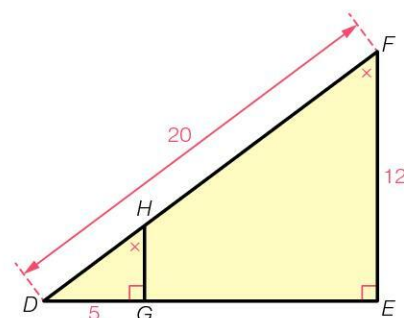
figuur 2.21

- In figuur 2.22 zie je twee gelijkvormige driehoeken.
 - Vul in: $\triangle PQR \sim \dots$
 - Bereken PS en ST . Rond af op één decimaal.



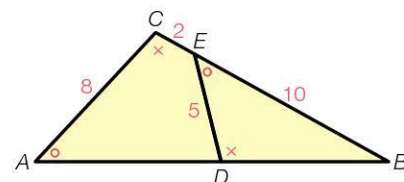
figuur 2.22

- In figuur 2.23 zie je twee gelijkvormige driehoeken.
 - Vul in: $\triangle DEF \sim \dots$
 - Bereken DE .
 - Bereken GH en DH .



figuur 2.23

- In figuur 2.24 zie je twee gelijkvormige driehoeken.
 - Vul in: $\triangle ABC \sim \dots$
 - Bereken AB , BD en AD .



figuur 2.24

2.3 Gelijkvormigheid aantonen

- 20** Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 80^\circ$ en $\angle B = 30^\circ$.
 Van $\triangle PQR$ is $\angle Q = 80^\circ$ en $\angle R = 30^\circ$.
 Waarom is $\angle C = \angle P$?

Theorie A Gelijkvormige driehoeken aantonen

Met gelijkvormigheid kun je lengten van lijnstukken berekenen. Maar als de gelijkvormigheid niet gegeven is, moet je deze eerst aantonen.

Als je in de ene driehoek twee hoeken kunt vinden die gelijk zijn aan twee hoeken in de andere driehoek, dan zijn de driehoeken gelijkvormig. Want uit de hoekensom van een driehoek volgt dat de resterende hoeken dan ook gelijk zijn.

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee paar gelijke hoeken hebben.

Voorbeeld

In figuur 2.25 is $\angle A_1 = \angle A_2$.
 Bereken AE , AD en CD .

Aanpak

- 1 Toon gelijkvormigheid aan door te zoeken naar twee paar gelijke hoeken.
- 2 Schrijf de gelijkvormige driehoeken op. Denk aan de volgorde van de letters.
- 3 Schrijf de verhoudingstabel op en vul deze in.
- 4 Bereken de gevraagde lengten.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A_2 \text{ (gegeven)} \\ \angle B = \angle E (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle AED$$

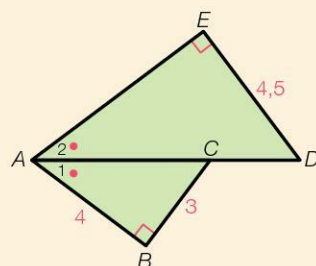
In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $AC^2 = AB^2 + BC^2$
 $AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$
 $AC = \sqrt{25} = 5$

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{ED} = \frac{AC}{AD} \text{ geeft } \frac{4}{AE} = \frac{3}{4,5} = \frac{5}{AD}$$

$$\frac{4}{AE} = \frac{3}{4,5} \text{ geeft } AE = \frac{4 \cdot 4,5}{3} = 6$$

$$\frac{3}{4,5} = \frac{5}{AD} \text{ geeft } AD = \frac{5 \cdot 4,5}{3} = 7,5$$

$$CD = AD - AC = 7,5 - 5 = 2,5$$



figuur 2.25

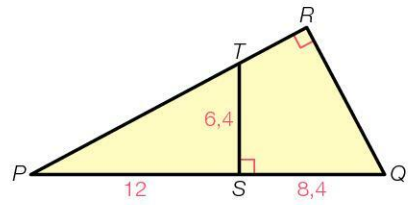
Om AD te berekenen, heb je AC nodig. AC bereken je met de stelling van Pythagoras.



T 21

[►►25] Zie figuur 2.26.

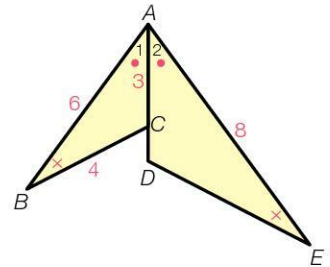
Bereken QR en RT . Denk eraan om eerst gelijkvormigheid aan te tonen.



figuur 2.26

22 Zie figuur 2.27.

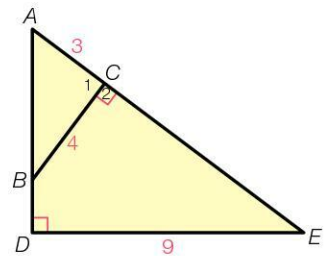
- a Neem over en vul in.
 $\angle A_1 = \angle \dots$ (gegeven)
 $\angle B = \angle \dots$ (gegeven) $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle A_1 = \angle \dots \\ \angle B = \angle \dots \end{array}} \right\} \triangle ABC \sim \dots$
- b Bereken AD , DE en CD . Rond zo nodig af op één decimaal.



figuur 2.27

23 Zie figuur 2.28 met $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$.

- a Neem over en vul in.
 $\angle A$ (in $\triangle ABC$) = $\angle A$ (in $\triangle ADE$)
 $\angle C_1 = \angle \dots$ (...) $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle A = \angle A \\ \angle C_1 = \angle \dots \end{array}} \right\} \triangle ABC \sim \dots$
- b Bereken AE en AD .



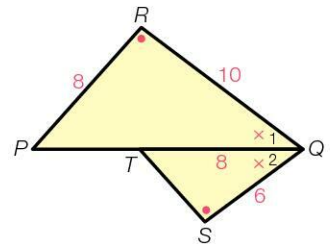
figuur 2.28

24 Zie figuur 2.29.

Bereken ST , PQ en PT in één decimaal nauwkeurig. Denk eraan om eerst gelijkvormigheid aan te tonen.



Als je gelijkvormigheid gebruikt, moet je deze eerst aantonen.

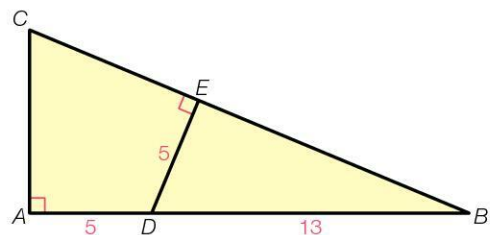


figuur 2.29

A 25

Zie figuur 2.30.

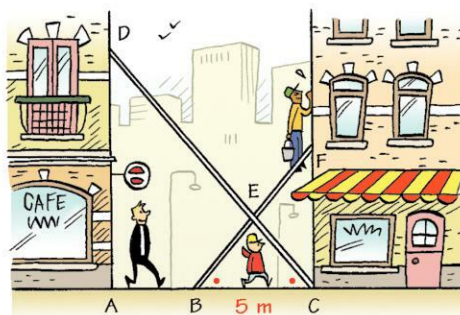
Bereken AC en BC .



figuur 2.30

A 26

In een 8 meter brede steeg staan de ladders BF en CD tegen de gevels van huizen. De ladders maken dezelfde hoek met de grond. Ladder BF is 7 meter lang. Zie figuur 2.31. Bereken de lengte van ladder CD in meter.



figuur 2.31

Theorie B Gelijke hoeken zoeken

Om gelijkvormigheid van driehoeken aan te tonen, heb je twee paar gelijke hoeken nodig. Bij het zoeken naar gelijke hoeken gebruik je de volgende eigenschappen.

Overstaande hoeken	Z-hoeken	F-hoeken
Bij snijdende lijnen zijn overstaande hoeken gelijk.	Bij evenwijdige lijnen horen gelijke Z-hoeken.	Bij evenwijdige lijnen horen gelijke F-hoeken.

Voorbeeld

In figuur 2.32 is $PQ \parallel TS$.

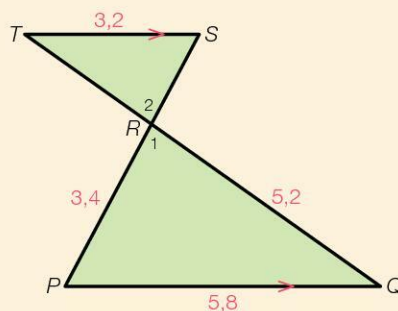
Bereken RS en RT in één decimaal nauwkeurig.

$PQ \parallel TS$ betekent
 PQ is evenwijdig met TS .

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} \angle P = \angle S \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle R_1 = \angle R_2 \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \triangle PQR \sim \triangle STR$$

Schrijf erbij waarom hoeken gelijk zijn.



figuur 2.32

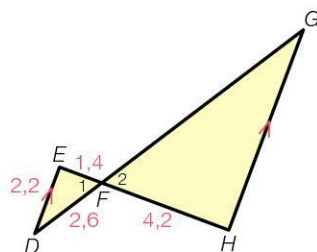
$$\frac{PQ}{ST} \mid \frac{QR}{TR} \mid \frac{PR}{SR} \text{ geeft } \frac{5,8}{3,2} \mid \frac{5,2}{TR} \mid \frac{3,4}{SR}$$

$$\frac{5,8}{3,2} \mid \frac{3,4}{SR} \text{ geeft } RS = \frac{3,2 \cdot 3,4}{5,8} \approx 1,9 \text{ en } \frac{5,8}{3,2} \mid \frac{5,2}{TR} \text{ geeft } RT = \frac{3,2 \cdot 5,2}{5,8} \approx 2,9$$

27 In figuur 2.33 is $DE \parallel HG$.

a Bereken HG en FG .

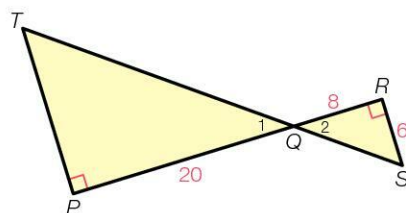
b Bereken DG .



figuur 2.33

28 Zie figuur 2.34.

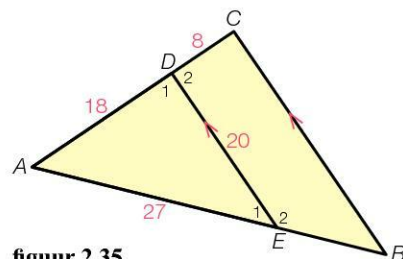
Bereken QS , PT en QT .



figuur 2.34

A 29 In figuur 2.35 is $DE \parallel BC$.

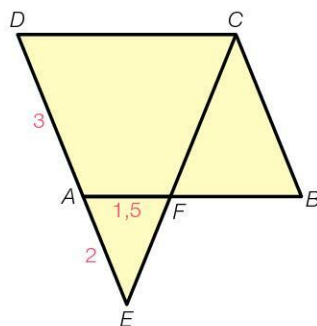
Bereken AB , BC en BE . Rond zo nodig af op twee decimalen.



figuur 2.35

30 Vierhoek $ABCD$ in figuur 2.36 is een parallellogram.

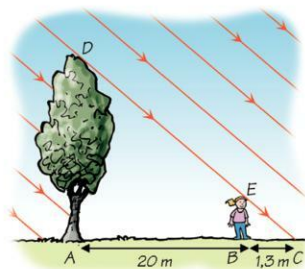
Bereken BF .



figuur 2.36

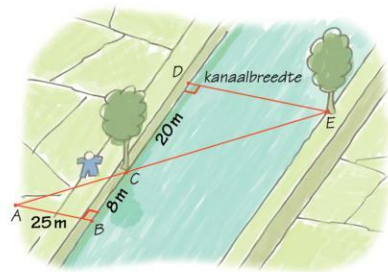
31 Larissa wil de hoogte van een boom weten. Ze staat 20 meter van de voet van de boom, en nog net in zijn schaduw. Zie figuur 2.37. Larissa is 1,75 meter lang en de lengte van haar schaduw is 1,30 meter.

Bereken de hoogte van de boom. Geef je antwoord in meter en rond af op één decimaal.



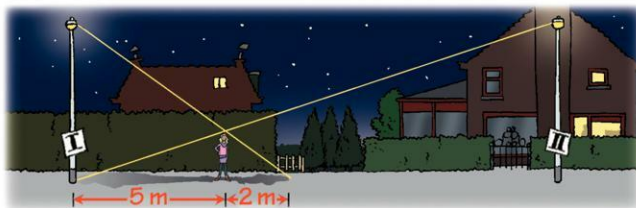
figuur 2.37

- A 32** Boris wil de breedte van een kanaal weten. Door gebruik te maken van de bomen bij C en E heeft Boris na wat meetwerk de tekening van figuur 2.38 gemaakt. Bereken de breedte van het kanaal.



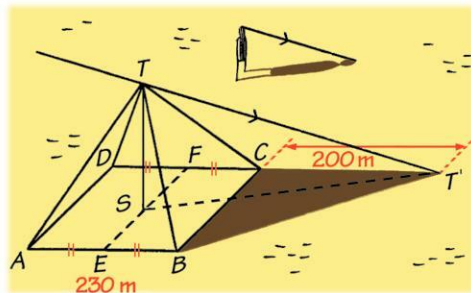
figuur 2.38

- A 33** Frederique is 1,60 meter lang. Zij staat tussen de twee even hoge lantaarnpalen I en II. De schaduw van Frederique, veroorzaakt door lantaarn I, is 2 meter lang. Lantaarn II zorgt voor een schaduw van 5 meter. Deze schaduw reikt tot de voet van lantaarn I. Zie figuur 2.39.
- Bereken de hoogte van de lantaarnpalen.
 - Bereken de afstand tussen de lantaarnpalen.



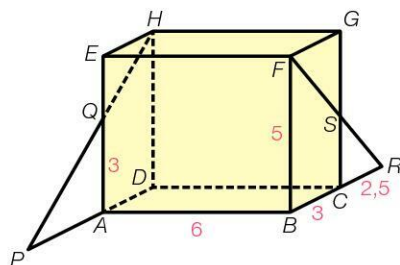
figuur 2.39

- 34** Bram wil de hoogte van de Piramide van Cheops berekenen. Hij weet inmiddels dat deze regelmatige piramide een vierkant grondvlak met zijden van 230 meter heeft. Hij wacht tot het moment dat de schaduw van de piramide zo valt, dat CD en CT' in elkaars verlengde liggen. Vervolgens meet hij dat $CT' = 200$ meter. Op datzelfde moment is de lengte van de schaduw van Bram 4,47 meter. Bram is 1,85 meter lang. Bereken de hoogte van de piramide in meter. Rond af op gehelen.



figuur 2.40

- 35** Zie de balk in figuur 2.41.
- Bereken AP .
 - Bereken CS . Rond af op twee decimalen.



figuur 2.41

+ 2.4 Een lengte x stellen

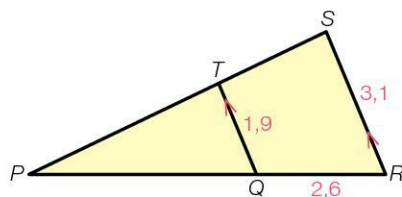
36 Zie figuur 2.42. Er geldt $\triangle PQT \sim \triangle PRS$.

a Licht toe dat hieruit de verhoudingstabel

$$\frac{PQ}{PR} \Big| \frac{QT}{RS} \text{ volgt.}$$

b Waarom lukt het niet PQ te berekenen met

$$PQ = \frac{PR \cdot QT}{RS}?$$



figuur 2.42

Theorie A Een lengte x stellen

Soms is het handig de lengte van een lijnstuk x te stellen. Stel je in opgave 36 het lijnstuk $PQ = x$, dan is $PR = x + 2,6$. Je kunt nu met kruislings vermenigvuldigen x berekenen.

De verhoudingstabel $\frac{PQ}{PR} \Big| \frac{QT}{RS}$ geeft $\frac{x}{x + 2,6} \Big| \frac{1,9}{3,1}$.

Hieruit volgt $3,1x = 1,9(x + 2,6)$ Denk aan de haakjes.

$$3,1x = 1,9x + 4,94$$

$$1,2x = 4,94$$

$$x = \frac{4,94}{1,2} \approx 4,1$$

Dus $PQ \approx 4,1$.

Schrijf alleen het deel van de verhoudingstabel op dat je nodig hebt.



Voorbeeld

In figuur 2.43 is $AD \parallel BC$, $AB = 10$, $AD = 5$ en $BC = 3$. Bereken AE .

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle B \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle D = \angle C \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ADE \sim \triangle BCE$$

Stel $AE = x$, dus $BE = 10 - x$.

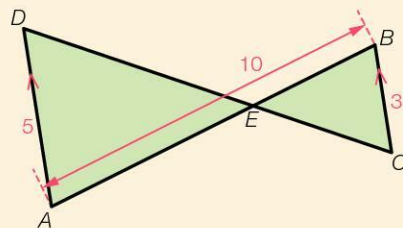
$$\frac{AD}{BC} \Big| \frac{AE}{BE} \text{ geeft } \frac{5}{3} \Big| \frac{x}{10 - x}$$

$$3x = 5(10 - x)$$

$$3x = 50 - 5x$$

$$8x = 50$$

$$x = \frac{50}{8} = 6,25, \text{ dus } AE = 6,25.$$

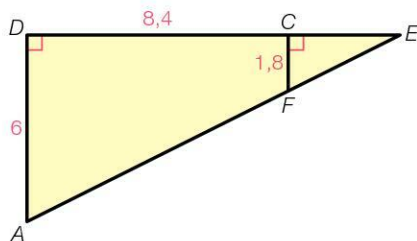


figuur 2.43

Om AE te berekenen, heb je slechts een deel van de verhoudingstabel

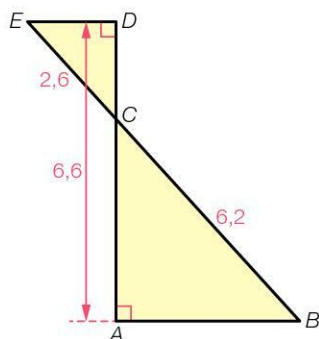
$$\frac{AD}{BC} \Big| \frac{DE}{CE} \Big| \frac{AE}{BE} \text{ nodig.}$$

- 37** Zie figuur 2.44.
- Bereken CE .
 - Bereken EF . Rond af op één decimaal.



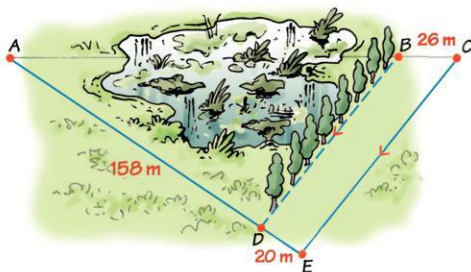
figuur 2.44

- 38** Zie figuur 2.45.
- Bereken AC .
 - Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$. Rond af op één decimaal.



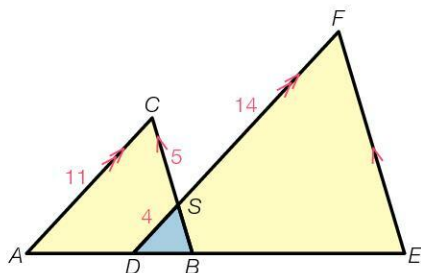
figuur 2.45

- A 39** Zie het landschap in figuur 2.46.
- Een landmeter wil de afstand van A tot B weten. Hij kan niet rechtstreeks meten, want tussen A en B ligt een moeras. Hij loopt daarom van A naar B via de punten D , E en C .
- Bereken AB .



figuur 2.46

- 40** Zie figuur 2.47.
- Bereken EF . Rond af op één decimaal.

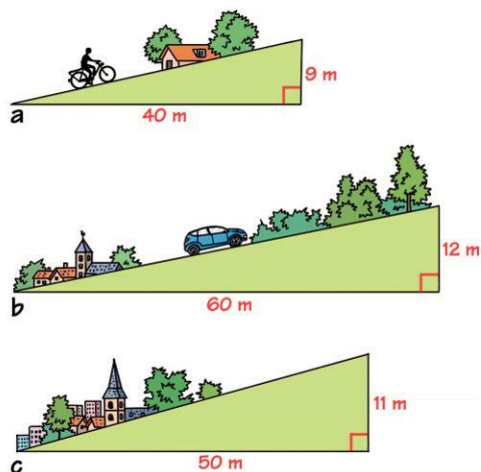


figuur 2.47

2.5 Hellingsgetal

O 41 Van de hellingen in figuur 2.48 zijn de horizontale en verticale verplaatsing gegeven.

- Zie figuur 2.48a.
Hoeveel is de verticale verplaatsing van de fietser bij een horizontale verplaatsing van één meter?
- Welke helling in figuur 2.48 is volgens jou het steilst? Licht toe.

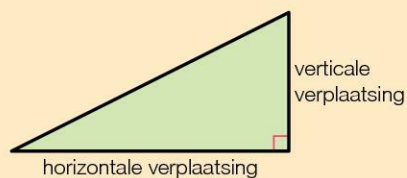


figuur 2.48

Theorie A Hellingsgetal berekenen

Bij een helling heb je met een horizontale en een verticale verplaatsing te maken. Het getal $\frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}}$ heet het **hellingsgetal**.

Hoe steiler de helling, hoe groter het hellingsgetal.

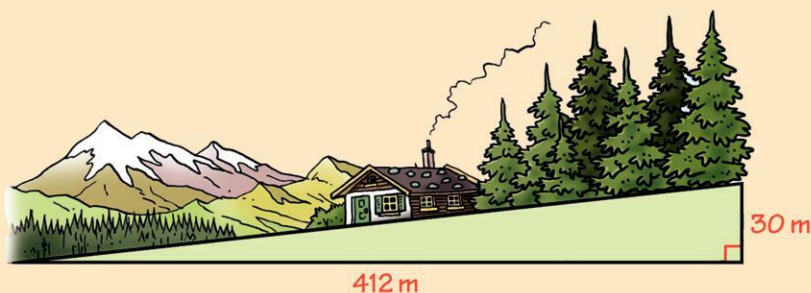


figuur 2.49

$$\text{hellingsgetal} = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}}$$

Bij de helling in figuur 2.50 is

$$\text{hellingsgetal} = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}} = \frac{30}{412} \approx 0,073.$$



figuur 2.50

Van de helling in figuur 2.51 is het hellingsgetal 0,18 en de verticale verplaatsing is 70 meter. De horizontale verplaatsing bereken je als volgt.

hellingsgetal = $\frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}}$
geeft de verhoudingstabel

0,18	70
1	horizontale verplaatsing

Dus horizontale verplaatsing = $\frac{70}{0,18} \approx 389$ meter.

In plaats van **hellingsgetal = 0,18**
zeggen we ook **hellingspercentage = 18%**.



figuur 2.51

Voorbeeld

Van een helling is het hellingspercentage 14% en de horizontale verplaatsing is 560 meter. Bereken de verticale verplaatsing.

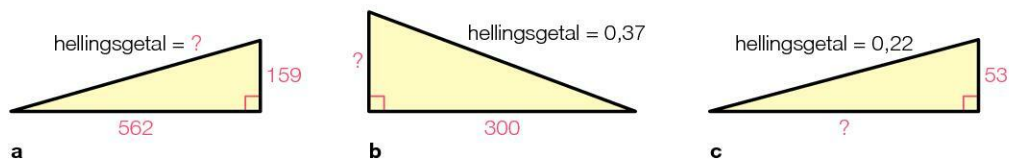
Uitwerking

hellingspercentage = 14%, dus hellingsgetal = 0,14.

verticale verplaatsing	0,14	verticale verplaatsing	0,14
horizontale verplaatsing	560		1

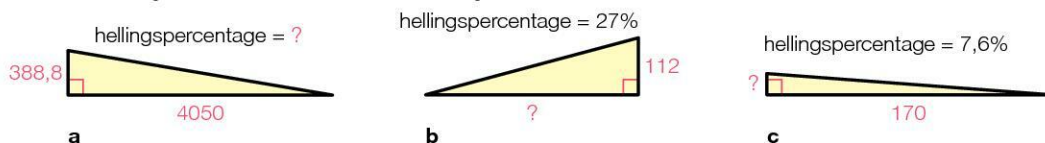
verticale verplaatsing = $0,14 \cdot 560 = 78,4$ meter

- 42 Bereken van de hellingen in figuur 2.52 het ontbrekende getal, zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.



figuur 2.52

- 43 Bereken van de hellingen in figuur 2.53 het ontbrekende getal, zo nodig in één decimaal nauwkeurig.

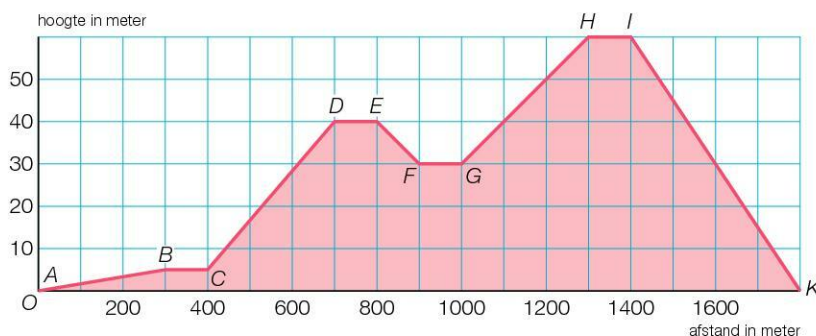


figuur 2.53

- 44** De belangrijkste wielervedstrijd in Nederland is de Amstel Gold Race. Een van de lastigste klimmen is de Eyserbosweg. Op het steilste stuk stijgt je 29,6 meter. Hierbij is de horizontale verplaatsing 185 meter.
Bereken het hellingspercentage op dit stuk.

- 45** Een steile skipiste in de Alpen is de Langer Zug bij Lech (Oostenrijk). De Oostenrijker Harry Egger vestigde op deze piste een snelheidsrecord van 248 km per uur. Op een deel van de piste overbrug je bij een hellingspercentage van 142% een hoogteverschil van 177,5 meter.
Bereken de horizontale verplaatsing.

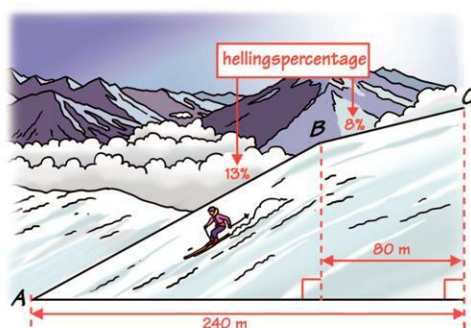
- A 46** In figuur 2.54 zie je het hoogteprofiel van het parcours van een mountainbikewedstrijd.



figuur 2.54

- Op het parcours zijn drie stijgende stukken.
Bereken van elk van deze stukken het hellingspercentage.
- De organisatie besluit op het laatste moment de wedstrijd in tegengestelde richting te houden.
Met welke hellingspercentages krijgen de mountainbikers nu op de stijgende stukken te maken?

- 47** In figuur 2.55 zie je het zijaanzicht van een skibaan.
Bereken hoeveel meter een skiër daalt die van C naar A skiet.



figuur 2.55

2.6 Tangens

48 De hoek die een helling maakt met een horizontale lijn heet **hellingshoek**. Zie figuur 2.56.

- Teken een hellingshoek van 31° . Kies een horizontale verplaatsing van 5 cm en meet de bijbehorende verticale verplaatsing. Bereken vervolgens het hellingsgetal in één decimaal nauwkeurig.
- Bereken het hellingsgetal nog een keer. Begin nu met een horizontale verplaatsing van 10 cm.
- Welk hellingsgetal krijg je bij een hellingshoek van 31° als je begint met een horizontale verplaatsing van 12 cm?



figuur 2.56

Theorie A De tangens van een hellingshoek

Bij een hellingshoek van 31° is $\frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}} \approx 0,6$.

Het hellingsgetal van een hellingshoek van 31° is dus 0,6.

In plaats van Het hellingsgetal van een hellingshoek van 31° is afgerond op één decimaal 0,6.

zeggen we De **tangens** van een hellingshoek van 31° is afgerond op één decimaal 0,6.

Notatie: $\tan(31^\circ) \approx 0,6$.

$$\tan(\text{hellingshoek}) = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}}$$

De tangens van een hellingshoek is het hellingsgetal.



Je rekenmachine heeft een **tan**-toets.

Berekenen van $\tan(31^\circ)$ geeft $\tan(31^\circ) = 0,6008606\dots$

Afgerond op twee decimalen is $\tan(31^\circ) \approx 0,60$.



De meeste rekenmachines zijn in te stellen op drie verschillende hoekeenheden: DEG, RAD en GRAD. Zorg ervoor dat je rekenmachine op DEG (graden) is ingesteld. DEG is een afkorting van 'degree', het Engelse woord voor graad.

49 Bereken telkens in twee decimalen nauwkeurig.

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| a $\tan(28^\circ)$ | d $\tan(15^\circ)$ |
| b $\tan(4^\circ)$ | e $\tan(1^\circ)$ |
| c $\tan(40^\circ)$ | f $\tan(89^\circ)$ |



50 Met $12 \tan(50^\circ)$ bedoelen we $12 \cdot \tan(50^\circ)$.
Je rekenmachine geeft $12 \tan(50^\circ) \approx 14,30$.

Bereken in twee decimalen nauwkeurig.

a $15 \tan(74^\circ)$ b $\frac{\tan(15^\circ)}{74}$ c $\frac{8,4}{\tan(9^\circ)}$

Theorie B Tangens en verhoudingstabel

In figuur 2.57 zijn de hellingshoek B en de horizontale verplaatsing AB bekend.

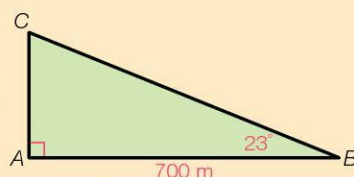
Je kunt hiermee de verticale verplaatsing AC berekenen.

Je weet $\tan(\text{hellingshoek}) = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}}$,

$$\text{dus } \tan(\angle B) = \frac{AC}{AB}.$$

Dit geeft de verhoudingstabel $\frac{\tan(23^\circ)}{1} \mid \frac{AC}{700}$.

Hieruit volgt $AC = 700 \tan(23^\circ) \approx 297$ meter.



figuur 2.57

Voorbeeld

Van een helling is de hellingshoek 19° en de verticale verplaatsing is 380 meter.

Bereken de lengte van de helling in meter. Rond af op gehelen.

Aanpak

- 1 Verwerk de gegevens in een schets.
- 2 Bereken de horizontale verplaatsing.
- 3 Gebruik de stelling van Pythagoras om de lengte van de helling te berekenen.

Uitwerking



$$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} \text{ geeft } \frac{\tan(19^\circ)}{1} \mid \frac{380}{AB}$$

$$AB = \frac{380}{\tan(19^\circ)} = 1103,6\dots$$

$$\angle B = 90^\circ, \text{ dus } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 1103,6\dots^2 + 380^2 = 1\,362\,333,2\dots$$

$$AC = \sqrt{1\,362\,333,2\dots} \approx 1167$$

Dus de lengte van de helling is ongeveer 1167 meter.

Gebruik het niet-afgeronde getal. Reken door met **ANS** op de rekenmachine.

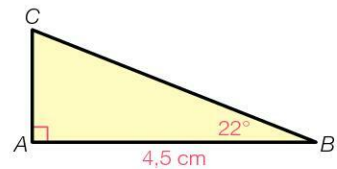
- 51** Van een helling is de hellingshoek 22° en de verticale verplaatsing 63 meter.
- Bereken de horizontale verplaatsing in meter. Rond af op één decimaal.
 - Bereken de lengte van de helling in meter. Rond af op gehelen.

Maak een schets.



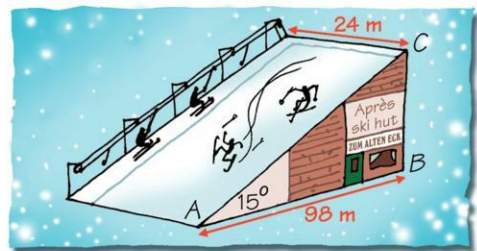
- 52** Van een helling is de hellingshoek 18° en de horizontale verplaatsing 450 meter.
Bereken de lengte van de helling in meter. Rond af op gehelen.

- 53** De rechthoekige driehoek ABC in figuur 2.58 kun je opvatten als een helling met een hellingshoek van 22° .
- Welke zijde is de verticale verplaatsing? En welke zijde is de horizontale verplaatsing?
 - Bereken AC in cm. Rond af op één decimaal.



figuur 2.58

- A 54** In figuur 2.59 zie je een skibaan met een hellingshoek van 15° .
- Bereken de lengte van BC in meter. Rond af op één decimaal.
 - Bereken de lengte AC van de piste in meter. Rond af op één decimaal.
 - Bereken de oppervlakte van de piste in m^2 . Rond af op gehelen.



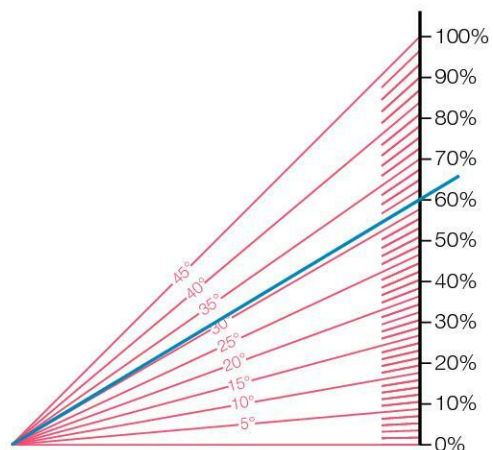
figuur 2.59

- 55** Bij de achtbaan Goliath ga je in 44 seconden onder een hoek van 70° naar het hoogste punt van de baan. Daarbij leg je in horizontale richting 16,75 meter af.
Bereken in km per uur de gemiddelde snelheid van de karretjes tijdens de klim. Rond af op één decimaal.

- O 56** [**WERKBOEK**] In figuur 2.60 kun je bij een gegeven hellingspercentage de bijbehorende hellingshoek aflezen. Zo zie je dat bij een hellingshoek van 31° een hellingspercentage van ongeveer 60% hoort, dus $\tan(31^\circ) \approx 0,6$.

Lees uit de figuur de hellingshoek af als

- $\tan(\text{hellingshoek}) = 0,7$
- $\tan(\text{hellingshoek}) = 0,2$
- $\tan(\text{hellingshoek}) = 1$
- $\tan(\text{hellingshoek}) = 0,1$.



figuur 2.60

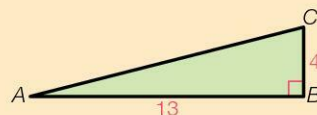
Theorie C Van hellingsgetal naar hellingshoek

Van de helling in figuur 2.61 is $\angle A$ de hellingshoek en is het hellingsgetal $\frac{4}{13}$, dus $\tan(\angle A) = \frac{4}{13}$.

Met je rekenmachine kun je de hellingshoek berekenen. Je gebruikt **2nd tan** (TI) of **SHIFT tan** (Casio).

Je krijgt $\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{4}{13}\right) \approx 17,1^\circ$.

Spreek $\tan^{-1}$ uit als inverse tangens. 'Inverse' betekent 'omgekeerde'.



figuur 2.61

$$\tan^{-1}(4 \div 13) \\ 17.10272897$$

$\tan(\text{hellingshoek}) = \text{hellingsgetal}$

$\tan^{-1}(\text{hellingsgetal}) = \text{hellingshoek}$



De notatie $\tan^{-1}$ lijkt op de notatie $10^{-1} = 0,1$, maar betekent iets anders. Bij $\tan^{-1}$ staat de -1 voor 'inverse' en is het geen exponent.



Afspraak

Hoeken bereken je in één decimaal nauwkeurig.

Bij een hellingspercentage van 42% bereken je de hellingshoek met $\tan^{-1}(0,42) \approx 22,8^\circ$.

Voorbeeld

Zie de helling hiernaast.

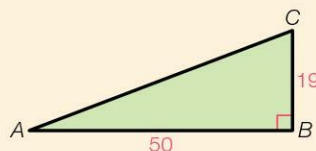
Bereken $\angle A$.

Aanpak

Bedenk dat AB de horizontale verplaatsing is en BC de verticale verplaatsing.

Uitwerking

$$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{19}{50} \text{ geeft } \angle A \approx 20,8^\circ$$



figuur 2.62

$$\tan^{-1}(19 \div 50) \\ 20.80679101$$

57 Bereken $\angle A$.

a $\tan(\angle A) = \frac{17}{9}$

b $\tan(\angle A) = 0,821$

c $\tan(\angle A) = 9,6$

d $\tan(\angle A) = 1$

e $\tan(\angle A) = \sqrt{3}$

f $\tan(\angle A) = 1\frac{3}{7}$

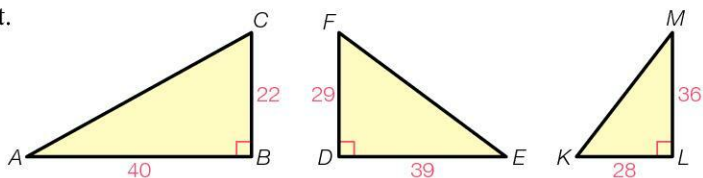
Met **$\tan^{-1}$** ga je van hellingsgetal naar hellingshoek.



- 58** Neem de volgende tabel over en vul hem verder in.
Rond af op één decimaal.

hellingshoek		17°		39°		79,5°
hellingsgetal	0,2		2,7		4,5	5,8

- 59** Zie de hellingen hiernaast.
Bereken $\angle A$, $\angle E$ en $\angle K$.

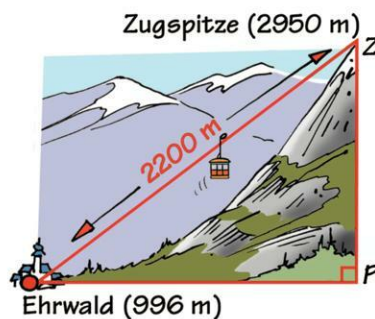


figuur 2.63

- 60** Een pistebully is een sneeuwvoertuig waarmee skipistes geprepareerd worden. Volgens een fabrikant is zijn pistebully in staat hellingen tot 50% te prepareren. Bereken de maximale hellingshoek die deze pistebully aankan.

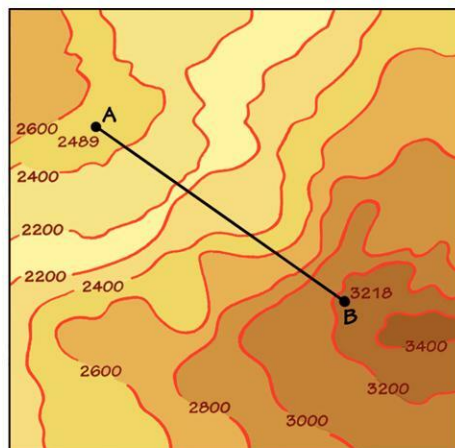


- A 61** Het Oostenrijkse plaatsje Ehrwald ligt op 996 meter hoogte. Van Ehrwald gaat in een rechte lijn een cabinelift naar de Zugspitze, die op 2950 meter hoogte ligt. De lengte van de kabellift is 2200 meter. Bereken de hellingshoek van de kabelbaan.



figuur 2.64

- 62** Zie het hoogtekartje in figuur 2.65 met de bijbehorende schaal. Een stoeltjeslift gaat in een rechte lijn van A naar B. Bereken de hellingshoek van de stoeltjeslift.



figuur 2.65 Schaal 1 : 20 000.

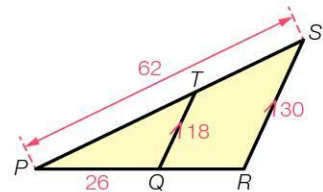
Gemengde opgaven

- 1** Gegeven zijn de verhoudingstabellen hieronder.
Bereken a , b , c en d in twee decimalen nauwkeurig.

a
$$\frac{11}{29} \mid \frac{a}{40} \mid \frac{3}{b}$$

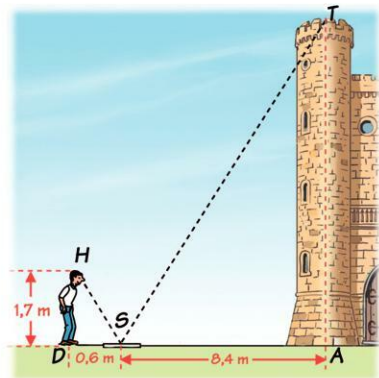
b
$$\frac{c+3}{c-7} \mid \frac{8}{5} \mid \frac{3d-11}{d+9}$$

- 2** Zie figuur 2.66.
Bereken PR , QR , PT en ST . Rond af op één decimaal.



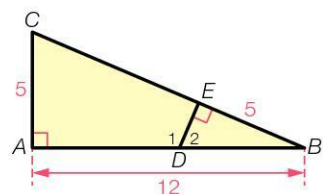
figuur 2.66

- 3** Daan wil de hoogte van de toren in figuur 2.67 weten. Hij legt een spiegeltje op de grond en gaat zo staan, dat hij in het spiegeltje de top T kan zien. Het spiegeltje ligt op 8,4 meter van het midden A van de toren. Zie figuur 2.67.
Bereken de hoogte van de toren.



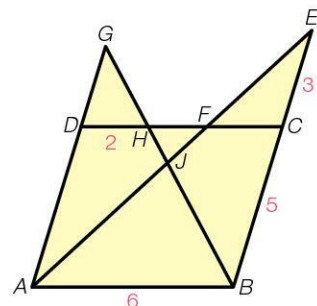
figuur 2.67

- 4** Van $\triangle ABC$ is $AB = 12$, $AC = 5$ en $\angle A = 90^\circ$.
Van $\triangle BED$ is $BE = 5$ en $\angle E = 90^\circ$.
Zie figuur 2.68.
a Bereken DE en AD . Rond af op twee decimalen.
b Bereken $\angle D_1$.



figuur 2.68

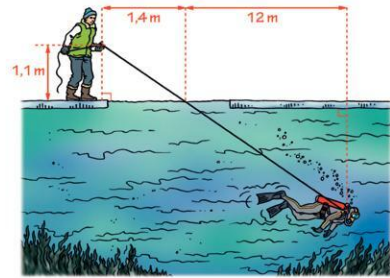
- 5** Vierhoek $ABCD$ in figuur 2.69 is een parallellogram.
 $AB = 6$, $BC = 5$, $CE = 3$ en $DH = 2$.
a Bereken CF .
b Bereken DG .



figuur 2.69

6 Bij ijsduiken wordt gebruik gemaakt van een veiligheidslijn. Met de lijn kan de duiker communiceren met de seinmeester, en kan de duiker gemakkelijk de weg naar het wak terugvinden. Zie figuur 2.70.

- Bereken de diepte van de duiker in meter. Rond af op één decimaal.
- Bereken de lengte van de veiligheidslijn in meter. Rond af op één decimaal.
- Bereken de hoek die de lijn met het water maakt.



figuur 2.70

7 De FS 24 Phoenix is een zweefvliegtuig met glijgetal 37. Dat betekent dat het toestel bij een daling van 1 meter horizontaal 37 meter aflegt.

- Bereken het hellingspercentage dat bij dit glijgetal hoort.
- Bereken de hellingshoek. Rond af op twee decimalen.



figuur 2.71

De Schleicher ASG 29 is een zweefvliegtuig dat daalt met een hellingshoek van $1,15^\circ$.

- Bereken het glijgetal van de ASG 29 in gehelen.

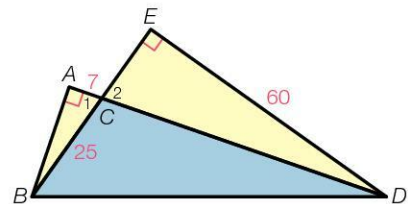
8 Een kubusvormige kist staat gekanteld tegen een muur en maakt een hoek van 41° met de grond. De kist raakt de grond 120 cm van de muur. Zie figuur 2.72.

- Bereken in gehele cm op welke hoogte de kist de muur raakt.
- Bereken de inhoud van de kist in liter. Rond af op gehelen.



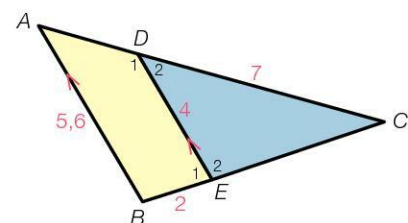
figuur 2.72

9 Zie figuur 2.73. Bereken BD . Rond af op één decimaal



figuur 2.73

10 Zie figuur 2.74. Bereken de omtrek van $\triangle ABC$.



figuur 2.74

Samenvatting

2.1 Kruisproducten

blz 52 In een verhoudingstabel zijn de kruisproducten gelijk.

blz 54 In de verhoudingstabel $\begin{array}{c|c|c} 3 & 5 & 2+q \\ \hline 4 & p & q \end{array}$ bereken je

p en q met kruislings vermenigvuldigen.

$$\begin{array}{c|c} 3 & 5 \\ \hline 4 & p \end{array} \text{ geeft } p = \frac{4 \cdot 5}{3} \approx 6,67$$

$$\begin{array}{c|c} 3 & 2+q \\ \hline 4 & q \end{array} \text{ geeft } 4(2+q) = 3q. \text{ Oplossen geeft } q = -8.$$

$$\begin{array}{c|c} 4 & 5 \\ \hline x & 18 \end{array}$$

$$5 \cdot x = 4 \cdot 18$$

$$x = \frac{4 \cdot 18}{5} = 14,4$$

2.2 Gelijkvormigheid

blz 55 Bij gelijkvormige driehoeken

- zijn de overeenkomstige hoeken gelijk
- kun je met de lengten van de zijden een verhoudingstabel maken.

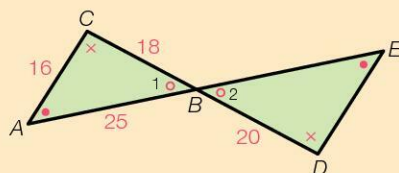
blz 56 In de figuur hiernaast is $\angle A = \angle E$, $\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle C = \angle D$, dus $\triangle ABC \sim \triangle EBD$. Hieruit volgt de

$$\text{verhoudingstabel } \begin{array}{c|c|c} AB & BC & AC \\ \hline EB & BD & ED \end{array}.$$

$$\text{Invullen geeft } \begin{array}{c|c|c} 25 & 18 & 16 \\ \hline EB & 20 & ED \end{array}.$$

$$\begin{array}{c|c} 25 & 18 \\ \hline EB & 20 \end{array} \text{ geeft } BE = \frac{20 \cdot 25}{18} \approx 27,8 \text{ en}$$

$$\begin{array}{c|c} 18 & 16 \\ \hline 20 & ED \end{array} \text{ geeft } DE = \frac{16 \cdot 20}{18} \approx 17,8.$$



2.3 Gelijkvormigheid aantonen

blz 59 Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee

paar gelijke hoeken hebben. Zo is hiernaast

$$\left. \begin{array}{l} \angle P \text{ (in } \triangle PQR) = \angle P \text{ (in } \triangle PST) \\ \angle R = \angle S (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle PQR \sim \triangle PST$$

Je berekent PT en ST met de verhoudingstabel

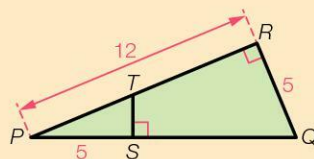
$$\begin{array}{c|c|c} PQ & QR & PR \\ \hline PT & TS & PS \end{array}. \text{ Dit geeft } \begin{array}{c|c|c} 13 & 5 & 12 \\ \hline PT & TS & 5 \end{array}.$$

Hierbij is PQ met de stelling van Pythagoras berekend:

$$PQ^2 = 12^2 + 5^2 = 169, \text{ dus } PQ = \sqrt{169} = 13.$$

$$\begin{array}{c|c} 13 & 12 \\ \hline PT & 5 \end{array} \text{ geeft } PT = \frac{13 \cdot 5}{12} \approx 5,4 \text{ en}$$

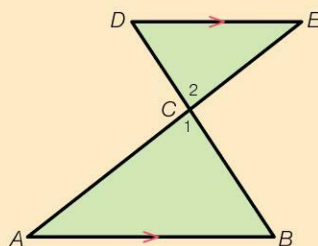
$$\begin{array}{c|c} 5 & 12 \\ \hline TS & 5 \end{array} \text{ geeft } ST = \frac{5 \cdot 5}{12} \approx 2,1.$$



blz 61 Bij het opsporen van gelijke hoeken kun je gebruik maken van overstaande hoeken, F-hoeken en Z-hoeken.

Zo is in de figuur hiernaast

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle E \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle C_1 = \angle C_2 \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle EDC$$



2.4 Een lengte x stellen

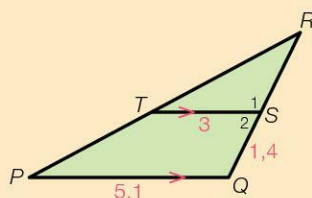
blz 64 Soms is het handig de lengte van een lijnstuk x te stellen. Het berekenen van RS in de figuur hiernaast gaat als volgt.

$$\left. \begin{array}{l} \angle R \text{ (in } \triangle RST) = \angle R \text{ (in } \triangle PQR) \\ \angle S_1 = \angle Q \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle RST \sim \triangle RQP$$

Stel $RS = x$, dus $QR = x + 1,4$.

$$\frac{RS}{RQ} = \frac{ST}{QP} \text{ geeft } \frac{x}{x + 1,4} = \frac{3}{5,1} \text{ dus } 5,1x = 3(x + 1,4).$$

Oplossen geeft $x = 2$.

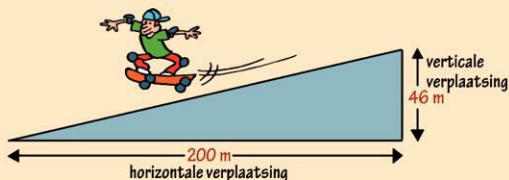


2.5 Hellingsgetal

blz 66 hellingsgetal = $\frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}}$

Hiernaast is hellingsgetal = $\frac{46}{200} = 0,23$.

blz 67 Bij een hellingsgetal van 0,23 hoort een hellingspercentage van 23%.



2.6 Tangens

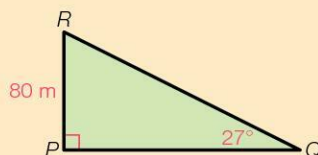
blz 69 Je rekenmachine geeft $\tan(35^\circ) \approx 0,7$. Dit betekent dat bij een hellingshoek van 35° een hellingsgetal van ongeveer 0,7 hoort.

hellingshoek = 13°
hellingsgetal = $\tan(13^\circ) \approx 0,23$
hellingspercentage $\approx 23\%$

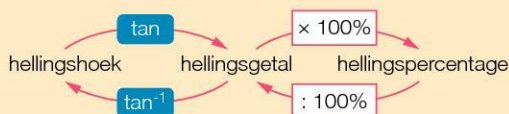
blz 70 Hiernaast zie je een helling met een hellingshoek Q van 27° en een verticale verplaatsing PR van 80 meter. De horizontale verplaatsing PQ bereken je met de

$$\text{verhoudingstabel } \frac{\tan(27^\circ)}{1} \mid \frac{80}{PQ}$$

$$\text{Dit geeft } PQ = \frac{80}{\tan(27^\circ)} \approx 157 \text{ m.}$$



blz 72 Weet je $\tan(\angle A)$, dan bereken je $\angle A$ met de inverse tangens. Is $\tan(\angle A) = \frac{6}{13}$, dan krijg je $\angle A \approx 24,8^\circ$.



$$\tan^{-1}(6 \div 13) = 24.77514057$$

Diagnostische toets

2.1 Kruisproducten

1 Bereken x en y in de volgende verhoudingstabellen.

1,2 Rond af op één decimaal.

a

6	x	17
13	17	y

b

13	$x - 6$	3
21	7	$2y - 1$

c

$x - 1$	$2x + 3$
5	4

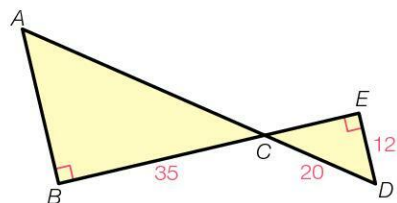
2.2 Gelijkvormigheid

2 In figuur 2.75 zie je twee gelijkvormige driehoeken.

3,4

a Vul in: $\triangle ABC \sim \dots$

b Bereken CE , AC en AB .



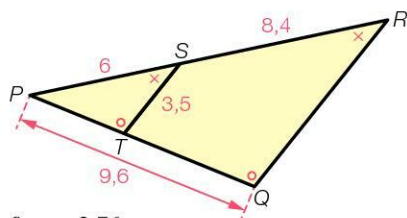
figuur 2.75

3 In figuur 2.76 zie je twee gelijkvormige driehoeken.

5

a Vul in: $\triangle PQR \sim \dots$

b Bereken PT en QR .

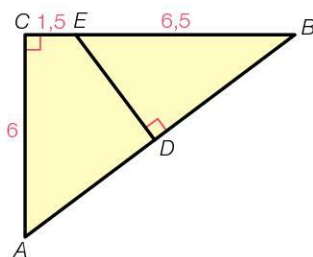


figuur 2.76

2.3 Gelijkvormigheid aantonen

4 Zie figuur 2.77.

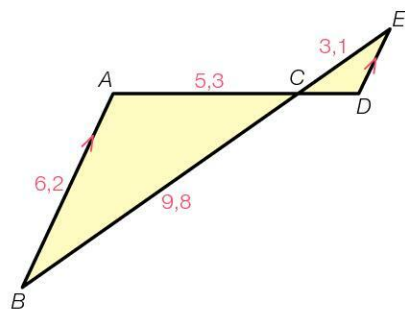
6 Bereken DE en BD .



figuur 2.77

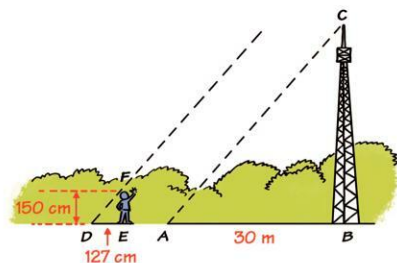
5 In figuur 2.78 is $DE \parallel AB$.

7,8,9 Bereken DE en AD . Rond af op één decimaal.



figuur 2.78

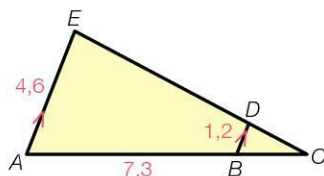
- 6** Op een zonnige dag meet Coen dat de schaduw van een zendmast een lengte van 30 meter heeft. De schaduw van Coen is op dat moment 127 cm. Coen is 150 cm lang. Zie figuur 2.79. Bereken de lengte van de zendmast in meter. Rond af op gehelen.



figuur 2.79

2.4 Een lengte x stellen

- 7** In figuur 2.80 is $AE \parallel BD$. Bereken BC in één decimaal nauwkeurig.



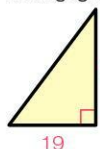
figuur 2.80

2.5 Hellingsgetal

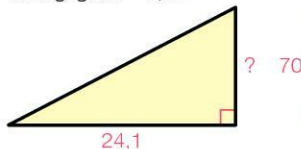
- 8** Bereken van de hellingen in figuur 2.81 het ontbrekende getal. Rond af op één decimaal.

hellingsgetal = ? hellingsgetal = 0,29

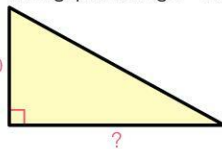
hellingspercentage = 57%



a



b

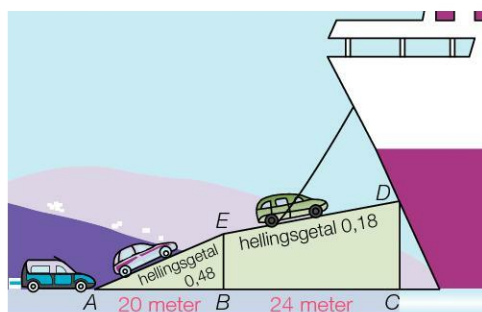


c

figuur 2.81

- 9** Bij het inschepen op een veerboot rijden auto's een helling op die uit twee delen bestaat. De auto's rijden bij D het schip binnen. Zie figuur 2.82.

- Bereken BE in meter. Rond af op één decimaal.
- Bereken CD in meter. Rond af op één decimaal.

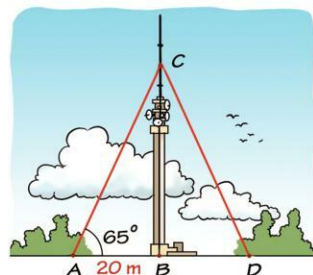


figuur 2.82

2.6 Tangens

- 10** Een zendmast is verstevigd met kabels. Zie figuur 2.83.

- Bereken in meter op welke hoogte de kabel AC aan de zendmast is bevestigd. Rond af op één decimaal.
- Bereken de lengte van de kabel AC in meter. Rond af op één decimaal.



figuur 2.83

- 11**
 - Een helling heeft een hellingsgetal van 0,27. Bereken de hellingshoek.
 - Een helling heeft een hellingshoek van 27° . Bereken het hellingspercentage.

Herhaling

2.1 Kruisproducten

- 1** In de verhoudingstabel $\begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & y \\ \hline 7 & x & 5 \end{array}$ bereken je x en y met kruislings vermenigvuldigen.

$$\begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & \\ \hline 7 & x & \end{array} \text{ geeft } x = \frac{7 \cdot 2}{3} \approx 4,7 \text{ en}$$

$$\begin{array}{c|c|c} 3 & & y \\ \hline 7 & 5 & \end{array} \text{ geeft } y = \frac{3 \cdot 5}{7} \approx 2,1.$$

Bereken x en y in de volgende verhoudingstabellen.
Rond zo nodig af op één decimaal.

a $\begin{array}{c|c|c} 6 & 3,5 & 17 \\ \hline 9 & x & y \end{array}$

b $\begin{array}{c|c|c} 5 & x & y \\ \hline 2,1 & 9 & 7 \end{array}$

c $\begin{array}{c|c|c} x & 6,1 & 2 \\ \hline 44 & 58 & y \end{array}$



$$3 \cdot x = 7 \cdot 2$$

$$x = \frac{7 \cdot 2}{3}$$

- 2** In de verhoudingstabel $\begin{array}{c|c} x-3 & 5 \\ \hline 2x+5 & 9 \end{array}$ bereken je x met kruislings vermenigvuldigen. Je krijgt $9(x-3) = 5(2x+5)$. Hiernaast zie je dat $x = -52$.

Bereken x en y in de volgende verhoudingstabellen.
Rond af op één decimaal.

a $\begin{array}{c|c} 3x-2 & x+4 \\ \hline 4 & 7 \end{array}$

b $\begin{array}{c|c|c} 3 & 5+x & 7 \\ \hline 11 & 8x-2 & 2y-3 \end{array}$

$$9(x-3) = 5(2x+5)$$

$$9x - 27 = 10x + 25$$

$$9x - 10x = 25 + 27$$

$$-x = 52$$

$$x = -52$$

2.2 Gelijkvormigheid

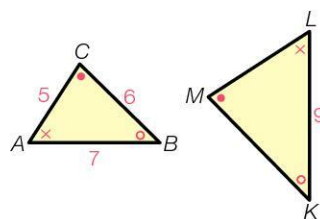
- 3** De driehoeken in figuur 2.84 zijn gelijkvormig.

- a** Neem over en vul in.

Omdat $\angle A = \angle L$, $\angle B = \angle \dots$ en $\angle C = \angle \dots$ is $\triangle ABC \sim \triangle L \dots$. Hieruit volgt de verhoudingstabel

$$\begin{array}{c|c|c} AB & BC & AC \\ \hline L \dots & \dots & L \dots \end{array}$$

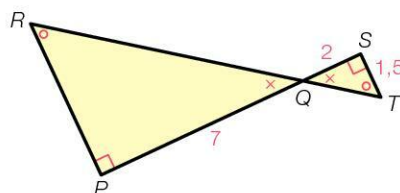
- b** Vul de bekende lengten van de zijden in de verhoudingstabel in, en bereken KM en LM . Rond af op één decimaal.



figuur 2.84

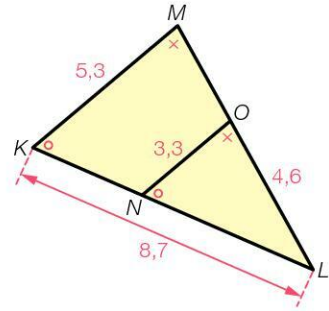
- 4** De driehoeken in figuur 2.85 zijn gelijkvormig.

- a** In $\triangle QTS$ is $\angle S = 90^\circ$, dus volgens de stelling van Pythagoras is $QT^2 = QS^2 + ST^2$. Bereken QT .
b Vul in: $\triangle PQR \sim \dots$
c Schrijf de verhoudingstabel op.
d Bereken PR en QR .



figuur 2.85

- 5** In figuur 2.86 zie je twee gelijkvormige driehoeken.
- Vul in: $\triangle KLM \sim \dots$
 - Schrijf de verhoudingstabel op.
 - Bereken LN en KN . Bedenk dat $KN = KL - LN$. Rond af op één decimaal.
 - Bereken MO . Rond af op één decimaal.

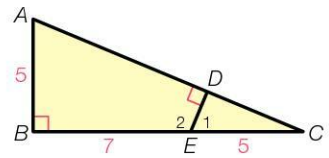


figuur 2.86

2.3 Gelijkvormigheid aantonen

- 6** Zie figuur 2.87.
- Bereken AC met de stelling van Pythagoras.
 - Vul in.

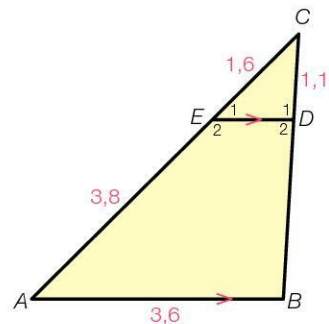
$$\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle \dots (\dots) \\ \angle C \text{ (in } \triangle ABC) = \angle C \text{ (in } \triangle CDE) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \dots$$
 - Schrijf de verhoudingstabel op.
 - Bereken DE en CD , beide in één decimaal nauwkeurig.



figuur 2.87

- 7** Bij evenwijdige lijnen horen gelijke F-hoeken. Daarom zijn in figuur 2.88 de hoeken A en E_1 gelijk.
- Welke hoek is gelijk aan $\angle B$?
 - Neem over en vul in.

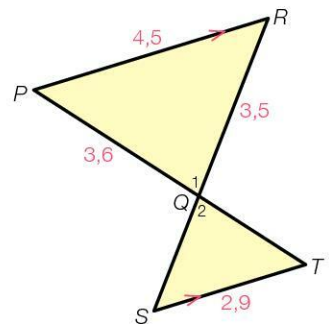
$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle E_1 \text{ (F-hoeken)} \\ \angle B = \angle \dots (\dots) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle E\dots$$
 - Schrijf de verhoudingstabel op.
 - Bereken DE , BC en BD . Rond af op één decimaal.



figuur 2.88

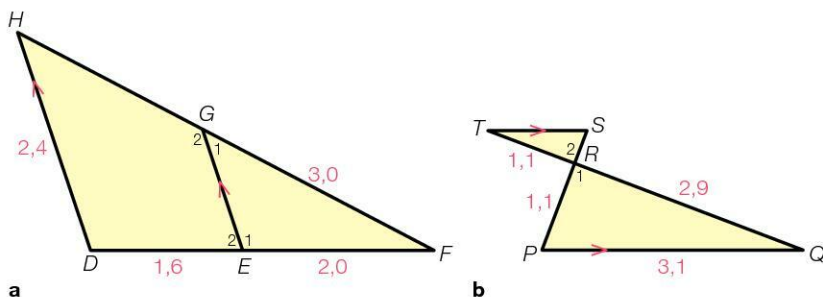
- 8** Bij evenwijdige lijnen horen gelijke Z-hoeken. Daarom zijn in figuur 2.89 de hoeken P en T gelijk.
- Neem over en vul in.

$$\left. \begin{array}{l} \angle P = \angle T \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle Q_1 = \angle \dots \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \triangle PQR \sim \triangle T\dots$$
 - Schrijf de verhoudingstabel op.
 - Bereken QS en RS . Rond af op één decimaal.
 - Bereken PT . Rond af op één decimaal.



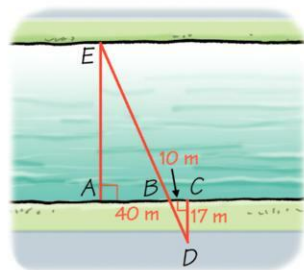
figuur 2.89

- 9 a** Zie figuur 2.90a.
Bereken EG en GH in één decimaal nauwkeurig.
- b** Zie figuur 2.90b.
Bereken ST en PS in één decimaal nauwkeurig.



figuur 2.90

- 10** Om de breedte AE van een kanaal te berekenen, heeft Yasmina de tekening hiernaast gemaakt.
- a** Toon aan dat $\triangle ABE \sim \triangle CBD$.
- b** Bereken de breedte van het kanaal.



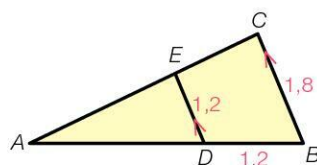
figuur 2.91

2.4 Een lengte x stellen

- 11** In figuur 2.92 is $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, dus $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$ is een verhoudingstabel. Invullen geeft $\frac{AB}{AD} = \frac{1,8}{1,2}$.

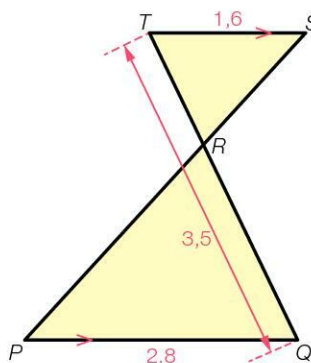
Om AD te berekenen, stel je $AD = x$.

- a** Vul in: $AB = x + \dots$
- b** Vul in: $\frac{\dots}{x} = \frac{1,8}{1,2}$ is een verhoudingstabel.
- c** Bereken x .
- d** Bereken AB .



figuur 2.92

- 12** Zie figuur 2.93.
- a** Toon aan dat $\triangle PQR \sim \triangle STR$.
- b** Bereken QR . Stel eerst $QR = x$. Rond af op één decimaal.
- c** Bereken RT . Rond af op één decimaal.



figuur 2.93

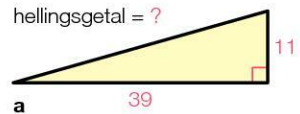
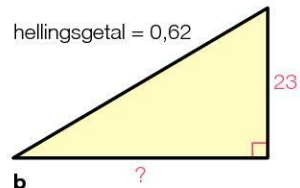
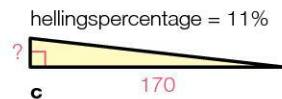
2.5 Hellingsgetal

- 13** Bij het berekenen van de ontbrekende getallen in figuur 2.94 gebruik je $\text{hellingsgetal} = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}}$, dus

$$\frac{\text{hellingsgetal}}{1} \mid \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}} \text{ is een}$$

verhoudingstabel.

Bereken de ontbrekende getallen, zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

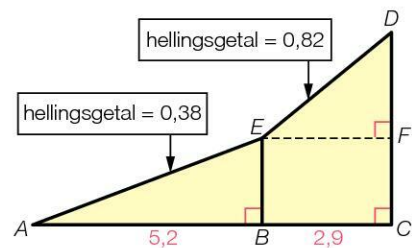


figuur 2.94

- 14** Om de hoogte CD in figuur 2.95 te berekenen, ga je als volgt te werk.

- Bereken BE in $\triangle ABE$.
- Teken het hulplijnstuk EF .
- Bereken DF in $\triangle DEF$.
- Bedenk dat $CD = BE + DF$.

Bereken CD .

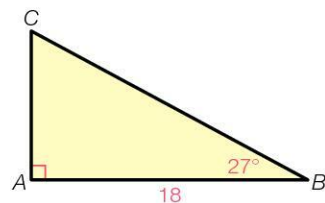


figuur 2.95

2.6 Tangens

- 15** Hiernaast is $\tan(\angle B) = \frac{AC}{AB}$, dus $\frac{\tan(27^\circ)}{1} \mid \frac{AC}{18}$ is een verhoudingstabel.

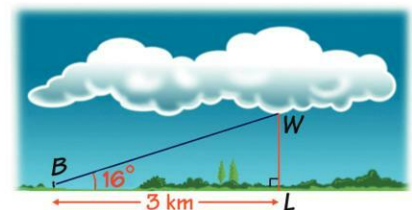
Bereken de verticale verplaatsing AC . Rond af op één decimaal.



figuur 2.96

- 16** In figuur 2.97 schijnt vanuit punt L een laserstraal recht omhoog. De laserstraal treft het dichte wolkendek in het punt W . Bilal staat op 3 km van L . Hij ziet W onder een hoek van 16° .

- a** Bereken LW in meter. Rond af op gehelen.
b Bereken de afstand van Bilal tot W in meter. Rond af op gehelen.



figuur 2.97

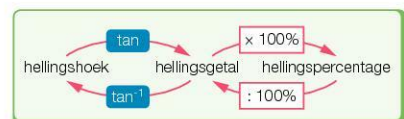
- 17** Hoeveel graden is $\angle A$ als
a $\tan(\angle A) = 0,1$ **b** $\tan(\angle A) = 11,1$

Hoeveel graden is de hellingshoek die hoort bij een hellingpercentage van

- c** 7% **d** 37%

Bereken het hellingpercentage bij een hellingshoek van

- e** $12,7^\circ$ **f** 56°

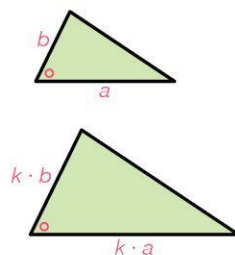


Onderzoek Vergrotingen tekenen

Bij het vergroten van een figuur zijn origineel en beeld gelijkvormig.
Om een vergroting te tekenen, kun je gebruik maken van gelijkvormigheid.
In de volgende opgaven ga je enkele vergrotingstechnieken onderzoeken.

Gelijkvormigheidskenmerken

Je hebt geleerd dat twee driehoeken gelijkvormig zijn als ze twee paar gelijke hoeken hebben. Je hebt hierbij te maken met het **gelijkvormigheidskenmerk** *hh*. Er bestaan nog andere gelijkvormigheidskenmerken. Zo zijn twee driehoeken bijvoorbeeld ook gelijkvormig als ze een hoek en de verhouding van de omliggende zijden gelijk hebben. Zie figuur 2.98, waarin k de vergrotingsfactor is. Dit gelijkvormigheidskenmerk noteren we met *zhz*.

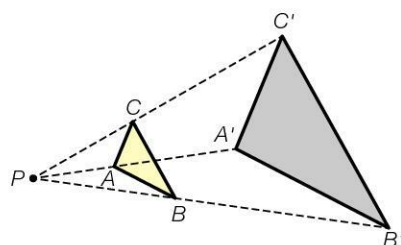


figuur 2.98

- 1** [**WERKBOEK**] In figuur 2.99 is van $\triangle ABC$ een vergroting getekend door de lengten PA' , PB' en PC' zo te kiezen, dat $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB} = \frac{PC'}{PC} = 2,5$.

Het **centrum** P is een willekeurig gekozen punt.

- a** Licht toe dat $\triangle PAC \sim \triangle PA'C'$. Gebruik *zhz*.
- b** Licht toe dat $\triangle A'B'C'$ een vergroting is van $\triangle ABC$.
- c** Teken vanuit P de vergroting van $\triangle ABC$ met vergrotingsfactor 4.

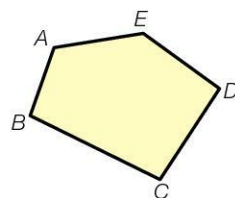


figuur 2.99

Bij het tekenen van een vergroting is het centrum een willekeurig punt. De keuze van het centrum bepaalt de plaats van het beeld.
De keuze van de vergrotingsfactor bepaalt de grootte van het beeld.

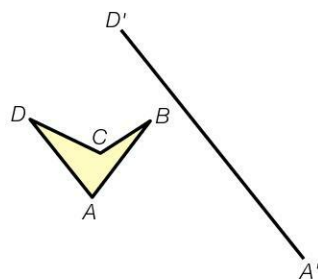
- 2** [**WERKBOEK**] Zie figuur 2.100 met vijfhoek $ABCDE$.

- a** Onderzoek hoe de vijfhoek wordt vergroot als je het centrum in één van de hoekpunten kiest en vergrotingsfactor 2 neemt.
- b** Onderzoek hoe de vijfhoek wordt vergroot als je het centrum in het binnengebied van de vijfhoek kiest en vergrotingsfactor 3 neemt.



figuur 2.100

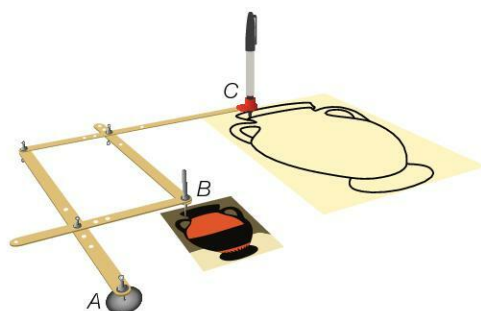
- 3 [► WERKBOEK] Zie figuur 2.101 met vierhoek $ABCD$ en een gedeelte van de vergroting $A'B'C'D'$. Maak de vergroting af.



figuur 2.101

De pantograaf

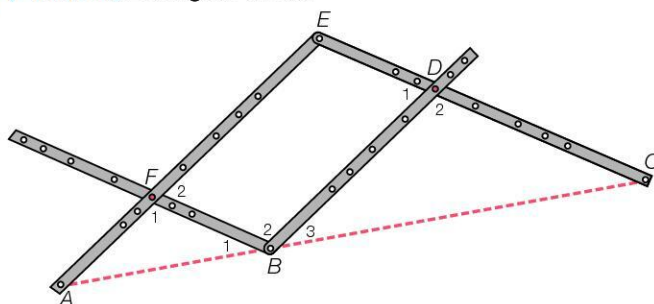
Tegenwoordig kun je met een computer of printer een tekening eenvoudig vergroten of verkleinen. Ooit was dit een tijdrovende klus die met de hand werd uitgevoerd. In 1603 vond Christoph Scheiner een instrument uit om vergrotingen en verkleiningen te tekenen: de pantograaf, ook wel tekenaap genoemd. Hiernaast zie je hoe je met een pantograaf een vergroting kunt tekenen. Een pantograaf bestaat uit een vast punt, een volgpunt en een tekenpunt.



figuur 2.102 Pantograaf met vast punt A , volgpunt B en tekenpunt C .

- 4 a Onderzoek hoe een pantograaf werkt.
b Leg uit hoe je met een pantograaf een verkleining kunt tekenen.

- 5 [► WERKBOEK] Zie figuur 2.103.



figuur 2.103

In een pantograaf is vierhoek $BDEF$ altijd een parallellogram.

- a Onderzoek hoe hieruit volgt dat $\triangle ABF \sim \triangle ACE$.
b Van de pantograaf in figuur 2.103 is punt A het vaste punt. Bereken de vergrotingsfactor van deze pantograaf als je
- punt B als volgpunt en punt C als tekenpunt neemt
 - punt C als volgpunt en punt B als tekenpunt neemt.

- 6 Maak een pantograaf, en gebruik deze om een zelfgekozen figuur te vergroten of te verkleinen.

Kwadratische problemen

De Golden Gate Bridge is een hangbrug in de Verenigde Staten die het schiereiland van San Francisco verbindt met Marin County. De brug, die in 1937 in gebruik werd genomen, dankt zijn naam aan de zeestraat Golden Gate die hij overspant. De totale lengte van de brug is meer dan 2,5 kilometer. Het wegdek hangt zeventig meter boven het water, aan twee enorme draagkabels die bevestigd zijn aan pijlers van 230 meter hoog. De draagkabels hebben de vorm van een parabool. Omdat het in de omgeving van de brug vaak mistig is, hebben de architecten gekozen voor een rood-oranje kleur zodat de brug goed zichtbaar is.

Wat leer je?

- Werken met kwadratische functies van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(x) = a(x - d)(x - e)$ en $f(x) = a(x - p)^2 + q$.
- Kwadratische vergelijkingen oplossen.
- Het berekenen van de coördinaten van de snijpunten van een parabool met de x-as en de y-as.
- Hoe de formule van een parabool verandert bij verschuiven of vermenigvuldigen.
- De coördinaten van de top van een parabool berekenen.





Voorkennis Kwadratische formules en haakjes wegwerken

Theorie A Kwadraten

Het kwadraat van 5 is $5 \cdot 5 = 25$. Notatie: $5^2 = 25$.

Het kwadraat van -5 is $-5 \cdot -5 = 25$. Dus $(-5)^2 = 25$,.....

Denk aan de haakjes.

Let op het verschil tussen $(-7)^2 = 49$ en $-7^2 = -49$.

Kwadrateren gaat voor vermenigvuldigen en delen.

Dus $3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$ en $27 : 3^2 = 27 : 9 = 3$.

Maar $(3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225$ en $(27 : 3)^2 = 9^2 = 81$.

Verder is $3 + 5^2 = 3 + 25 = 28$ en $(3 + 5)^2 = 8^2 = 64$.

1 Bereken uit het hoofd.

a 3^2

e 20^2

i 14^2

b -8^2

f $(-12)^2$

j -25^2

c $(-6)^2$

g -13^2

k $-(-5)^2$

d $-(-10)^2$

h $-(-7)^2$

l -1^2

2 Bereken.

a $5 \cdot 4^2$

e $-3 \cdot (-4)^2$

i $-7^2 - 4 \cdot 7$

b $5 \cdot (-3)^2$

f $-3 \cdot 1^2 - 6$

j $6 - 4^2$

c $5 \cdot 4^2 - 52$

g $5 - 3^2$

k $6 \cdot -4^2$

d $-3 \cdot 5^2$

h $18 - (-5)^2$

l $(6 - 4)^2 \cdot -2$

Zorg dat je de kwadraten van 1 tot en met 15 uit het hoofd kent.



Theorie B Kwadratische formules

De formule $y = 3x^2 - 8$ is een kwadratische formule.

Bij $x = 5$ hoort $y = 3 \cdot 5^2 - 8 = 3 \cdot 25 - 8 = 75 - 8 = 67$.

Bij $x = -4$ hoort $y = 3 \cdot (-4)^2 - 8 = 3 \cdot 16 - 8 = 48 - 8 = 40$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $y = -x^2 + 7$.

Bereken y voor

a $x = 6$

b $x = 0$

c $x = -5$

Uitwerking

a $x = 6$ geeft $y = -6^2 + 7 = -36 + 7 = -29$

b $x = 0$ geeft $y = -0^2 + 7 = 7$

c $x = -5$ geeft $y = -(-5)^2 + 7 = -25 + 7 = -18$

Let op het verschil.

$$-6^2 = -36$$

$$(-6)^2 = 36$$

$$-(-6)^2 = -36$$

- 3 Gegeven is de formule $y = x^2 + 3$.
Bereken y voor
- | | |
|------------|------------|
| a $x = 5$ | c $x = -1$ |
| b $x = -7$ | d $x = 0$ |

- 4 Gegeven is de formule $y = -x^2 - 8$.
Bereken y voor
- | | |
|------------|------------|
| a $x = 8$ | c $x = -8$ |
| b $x = -1$ | d $x = 2$ |

- 5 Gegeven is de formule $y = 2x^2 - 18$.
Bereken y voor
- | | |
|-----------|------------|
| a $x = 4$ | c $x = -3$ |
| b $x = 7$ | d $x = 10$ |

- 6 Gegeven is de formule $y = -\frac{1}{2}x^2 + 16$.
Bereken y voor
- | | |
|------------|------------|
| a $x = 6$ | c $x = -1$ |
| b $x = -6$ | d $x = 10$ |

Waarom wordt de invloed van deze sommen op mijn humeur nooit berekend?



Theorie C Haakjes wegwerken

Bij het wegwerken van haakjes gebruik je de volgende regels.

$$a(b + c) = ab + ac \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Zo is $x(x + 5) = x^2 + 5x$ en $3x(x - 2) = 3x^2 - 6x$.

$$\begin{aligned} \text{Verder is } (x + 1)(x + 6) &= x^2 + 6x + x + 6 = x^2 + 7x + 6 \\ (x + 3)(x - 4) &= x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12 \\ (x - 5)(x - 2) &= x^2 - 2x - 5x + 10 = x^2 - 7x + 10. \end{aligned}$$

Bij de opdracht 'herleid' in de opgaven 7 en 8 werk je haakjes weg en neem je gelijksoortige termen samen.

- 7 Herleid.
- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| a $x(x + 7)$ | d $7x(x + 7)$ | g $7x(x - 7)$ |
| b $(x + 1)(x + 7)$ | e $(x + 7)(x + 6)$ | h $(x - 7)(x - 1)$ |
| c $(x - 1)(x + 7)$ | f $(x - 1)(x + 1)$ | i $(x + 3)(x - 5)$ |
- 8 Herleid.
- | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|
| a $(x + 3)(x - 8)$ | d $(x + 8)(x - 8)$ | g $(2x - 5)(x + 6)$ |
| b $(2x - 1)(x + 8)$ | e $(3x - 8)(3x - 7)$ | h $-3x(2x - 7)$ |
| c $2x(x - 8)$ | f $(x - 3)(3x + 1)$ | i $(7 - 2x)(x + 3)$ |

3.1 Kwadratische functies

0 1 Bij de functie in figuur 3.1 hoort het voorschrift ‘neem eerst het kwadraat en tel vervolgens 3 bij de uitkomst op’. Bij de invoer 5 hoort de uitvoer $5^2 + 3 = 28$. Dus de functiewaarde van 5 is 28.

- a Bereken de functiewaarde van 4, van -4 en van 0.
- b Vul in.

Noemen we de functie f en de invoer x , dan is het functievoorschrift van f gegeven door $f(x) = \dots$



figuur 3.1

0 2 Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 8$.
De functiewaarde van 5 is $f(5) = 3 \cdot 5^2 + 8 = 3 \cdot 25 + 8 = 83$.
En zo is $f(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 8 = 3 \cdot 16 + 8 = 56$.

- a Bereken de functiewaarde van 3.
- b Bereken $f(-8)$, $f(0)$ en $f(1)$.

Theorie A Functiewaarden berekenen

De functie $f(x) = x^2 - 7$ is een voorbeeld van een **kwadratische functie**.

Bij -6 hoort de functiewaarde $f(-6) = (-6)^2 - 7 = 36 - 7 = 29$.

Denk hierbij aan de haakjes om -6.

Zo kun je bij elke x de bijbehorende y berekenen.

Bij de functie $f(x) = x^2 - 7$ hoort daarom de formule $y = x^2 - 7$.

functievoorschrift: $f(x) = x^2 - 7$

formule: $y = x^2 - 7$

Ook de functie $g(x) = 2x^2 - 3x + 5$ is een kwadratische functie.

Om $g(4)$ te berekenen, vervang je elke x door 4. Je krijgt

$g(4) = 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 5 = 2 \cdot 16 - 12 + 5 = 32 - 12 + 5 = 25$.

En zo is $g(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 5 = 2 \cdot 4 + 6 + 5 = 8 + 6 + 5 = 19$.



Schrijf bij het berekenen van functiewaarden tussenstappen op.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -2x^2 + 5x + 1$.

- a Bereken $f(3)$.
- b Bereken $f(-1)$.

Uitwerking

a $f(3) = -2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 1 = -2 \cdot 9 + 15 + 1 = -18 + 15 + 1 = -2$

b $f(-1) = -2 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 1 = -2 \cdot 1 - 5 + 1 = -2 - 5 + 1 = -6$

Denk aan de haakjes.

- 3 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 3x - 5$.
- Reken na dat $f(4) = 23$, en bereken $f(5)$ en $f(-3)$.
 - Schrijf de formule van f op.

- 4 Gegeven is de functie $g(x) = -x^2 + 4x + 1$.
- Reken na dat $g(-1) = -4$, en bereken $g(6)$ en $g(-2)$.
 - Schrijf de formule van g op.

- 5 Gegeven is de functie $h(x) = -2x^2 - 5x + 3$.
Bereken $h(-1)$, $h(2)$ en $h(-4)$.

- 0 6 De algemene vorm van een kwadratische functie is $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Voor $a = 3$, $b = -2$ en $c = 1$ krijg je de functie $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

Welke functie krijg je voor

- a** $a = 2$, $b = 6$ en $c = -3$ **b** $a = -1$, $b = 3$ en $c = 0$ **c** $a = 4$, $b = 0$ en $c = 2$

Welke getallen zijn a , b en c bij

- d** $f(x) = 5x^2 - x + 1$ **e** $f(x) = -x^2 + 8x$ **f** $f(x) = 3x^2 - 11$

Theorie B De functie $f(x) = ax^2 + bx + c$

De functies $f(x) = x^2 - 5x + 8$ en $g(x) = -2x^2 + 3x$ zijn voorbeelden van kwadratische functies.

Een functie f van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een kwadratische functie.

$a \neq 0$ betekent
 a is niet gelijk aan 0.

Neem je bij $f(x) = ax^2 + bx + c$

- $a = 1$, $b = -5$ en $c = 8$, dan krijg je $f(x) = x^2 - 5x + 8$
- $a = -6$, $b = 8$ en $c = 0$, dan krijg je $f(x) = -6x^2 + 8x$.

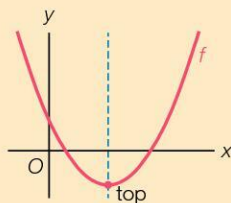
De grafiek van een kwadratische functie is een parabool. Aan het getal a dat voor x^2 staat, kun je zien wat voor parabool het is. Is a een positief getal, dan krijg je een dalparabool. Zo is de grafiek van $f(x) = x^2 - 5x + 8$ een dalparabool. Is a een negatief getal, dan krijg je een bergparabool. Zo is de grafiek van $f(x) = -6x^2 + 8x$ een bergparabool. Elke parabool is symmetrisch. Het punt van de parabool dat op de symmetrieas ligt, is de **top van de parabool**.



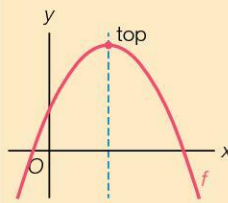
Het hoogste punt van een bergparabool heet de top. Ook bij een dalparabool heb je een top. Dat is het laagste punt van de parabool.

De grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$

Bij $a > 0$ hoort een dalparabool.



Bij $a < 0$ hoort een bergparabool.

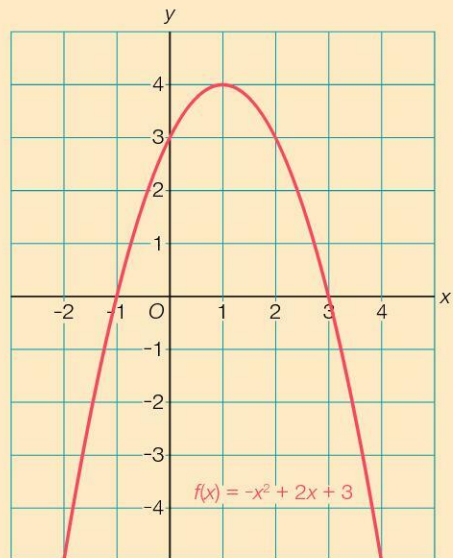


Om een parabool te tekenen, maak je een tabel met zeven punten. Weet je de x -coördinaat van de top van de parabool, dan gebruik je deze als middelste x -waarde bij het invullen van de tabel.

Bij de functie $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ is $f(0) = f(2) = 3$. Vanwege de symmetrie van de parabool ligt de x -coördinaat van de top midden tussen 0 en 2, dus $x_{\text{top}} = \frac{0+2}{2} = 1$.

Uit de symmetrie volgt ook dat $f(-1) = f(3)$ en $f(-2) = f(4)$. Dit gebruik je bij het invullen van de tabel.

	x_{top}						
	⋮						
x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-5	0	3	4	3	0	-5



In figuur 3.2 is de grafiek van f getekend.

figuur 3.2

T 7 [►►10] Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$.

- Reken na dat $f(1) = f(3)$.
- Teken de grafiek van f en schrijf de coördinaten van de top op.
- Onderzoek of het punt $P(-8, 21)$ op de grafiek ligt.

8 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 4x$.

- Is de grafiek van f een berg- of een dalparabool? Licht toe.
- Reken na dat $f(1) = f(3)$. Welke x_{top} volgt hieruit?
- Teken de grafiek van f . Waarom is het verstandig om de tabel van $x = -1$ tot en met $x = 5$ te nemen?
- Schrijf de coördinaten van de top op.



Maak bij het invullen van de tabel gebruik van symmetrie.

9 De functie g is gegeven door $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

- Is de grafiek van g een berg- of een dalparabool? Licht toe.
- Reken na dat $g(-4) = g(0)$.
- Teken de grafiek van g en schrijf de coördinaten van de top op.
- Onderzoek of het punt $A(10, 31)$ op de grafiek ligt.

Ligt het punt $A(10, 31)$ op de grafiek van g ?
Ga na of $g(10) = 31$.

A 10 Gegeven is de functie $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$.

- Reken na dat $h(-3) = h(1)$.
- Teken de grafiek van h en schrijf de coördinaten van de top op.
- Onderzoek of het punt $P(-10, -36)$ op de grafiek ligt.

Theorie C Toepassingen van kwadratische functies

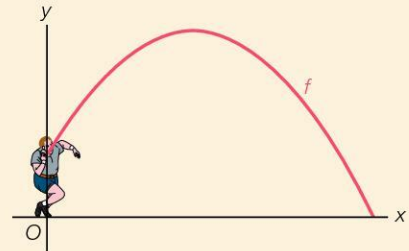
Bij kwadratische functies gebruik je soms je rekenmachine om functiewaarden te berekenen. Bij $f(x) = -0,3x^2 + 2,4x + 8$ krijg je $f(-5) = -0,3 \cdot (-5)^2 + 2,4 \cdot -5 + 8 = -11,5$.

Tik in $(-)$ 0 $.$ 3 $\times$ $(-)$ 5 $\times$ x^2 $+$ 2 $.$ 4 $\times$ $(-)$ 5 $+$ 8 $=$.

Voorbeeld

Bij het kogelstoten legt de kogel een paraboolvormige baan af. Hiernaast zie je zo'n baan. De hoogte van de kogel is gegeven door de functie $f(x) = -0,043x^2 + 0,76x + 2,08$. Hierbij zijn de hoogte $f(x)$ en de horizontale afstand x van de kogel tot de atleet in meter.

- Bereken de hoogte bij $x = 10$.
- Onderzoek of de kogel verder dan 20 meter wordt gestoten.



figuur 3.3

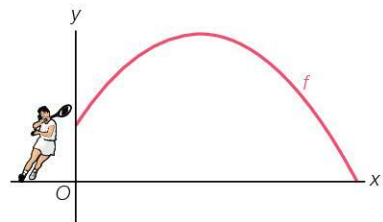
Uitwerking

- $x = 10$ geeft
 $f(10) = -0,043 \cdot 10^2 + 0,76 \cdot 10 + 2,08 = 5,38$ meter
- $x = 20$ geeft
 $f(20) = -0,043 \cdot 20^2 + 0,76 \cdot 20 + 2,08 = 0,08$
 Bij $x = 20$ is de kogel nog boven de grond, dus de stoot is verder dan 20 meter.

Bij de opdracht 'onderzoek' maak je de resultaten met een berekening duidelijk.

- 11** Bianca doet aan tennis. Bij een van haar slagen wordt de hoogte van de tennisbal gegeven door de functie $f(x) = -0,06x^2 + 0,72x + 2,1$. Hierbij zijn de hoogte $f(x)$ en de horizontale afstand x van de bal tot Bianca in meter.

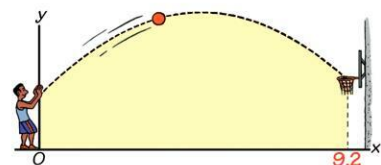
- Bereken de hoogte van de bal bij $x = 4$.
- Toon aan dat de hoogte bij $x = 2$ gelijk is aan die bij $x = 10$.
- Bereken de maximale hoogte van de bal.
- Onderzoek of de bal meer of minder dan 14 meter van Bianca op de grond komt.



figuur 3.4

- A 12** Tom gaat basketballen. Hiernaast zie je een van zijn worpen. De bal beweegt langs de grafiek van de functie $f(x) = -0,14x^2 + 1,4x + 2$, met x en $f(x)$ in meter.

- Reken na dat $f(4) = f(6)$.
- Bereken de maximale hoogte van de bal.
- Op welke hoogte laat Tom de bal los?
- Tom staat op 9,2 meter van de basket. Op welke hoogte hangt de basket?

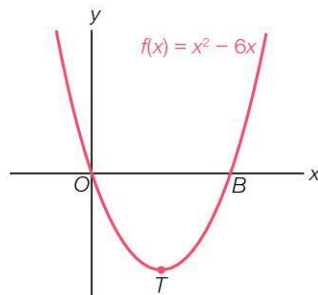


figuur 3.5

3.2 De top van de grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$

O 13 In figuur 3.6 zie je een schets van de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 6x$.

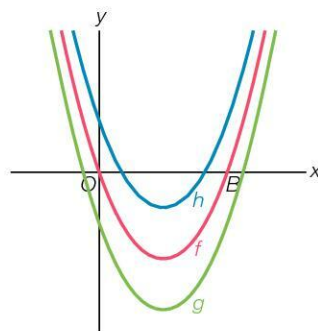
- Reken na dat $f(0) = f(6) = 0$.
- De grafiek snijdt de x -as in de punten O en B . Welk getal is x_B , de x -coördinaat van B ?
- De grafiek heeft de top $T(x_{\text{top}}, y_{\text{top}})$. Hoe volgt x_{top} uit x_B ?
- Bereken x_{top} en y_{top} .



figuur 3.6

In figuur 3.7 zie je nogmaals de grafiek van f , en ook de grafieken van $g(x) = x^2 - 6x - 3$ en $h(x) = x^2 - 6x + 4$.

- Door de grafiek van f omlaag te schuiven, ontstaat de grafiek van g . Hoe groot is deze verschuiving?
- Welke verschuiving van de grafiek van f geeft de grafiek van h ?
- Geef de x -coördinaten van de toppen van de grafieken van g en h .



figuur 3.7

Theorie A Het berekenen van x_{top} en y_{top}

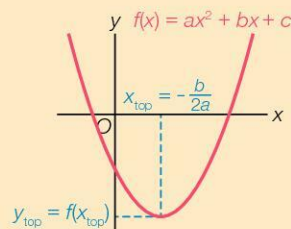
In de vorige opgave heb je de x -coördinaat van de top van de grafiek van $h(x) = x^2 - 6x + 4$ berekend. Je hebt daarbij de snijpunten O en B van de grafiek van $f(x) = x^2 - 6x$ met de x -as gebruikt. Deze methode om x_{top} te berekenen is omslachtig. Gelukkig bestaat er een eenvoudige manier om de top van de grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$ te berekenen.

Er geldt namelijk $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$.

Bij $h(x) = x^2 - 6x + 4$ is $a = 1$ en $b = -6$, dus $x_{\text{top}} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$.

De y -coördinaat van de top krijg je door de x -coördinaat van de top in te vullen in het functievoorschrift. Dit geeft $y_{\text{top}} = h(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 4 = 9 - 18 + 4 = -5$.

Dus de top van de grafiek van h is het punt $(3, -5)$.



figuur 3.8

**Van de grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$ is $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$.
Verder is $y_{\text{top}} = f(x_{\text{top}})$.**

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van $f(x) = -1,8x^2 + 9x + 8$.

Uitwerking

$$a = -1,8 \text{ en } b = 9, \text{ dus } x_{\text{top}} = -\frac{9}{2 \cdot -1,8} = 2,5.$$

$$y_{\text{top}} = f(2,5) = -1,8 \cdot 2,5^2 + 9 \cdot 2,5 + 8 = 19,25$$

Dus de top is $(2,5; 19,25)$.

- 14** Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van
a $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **b** $g(x) = 1,2x^2 - 8,4x + 1$ **c** $h(x) = -x^2 + 2x + 10$

- A 15** Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van
a $k(x) = -x^2 - x$ **b** $m(x) = 0,02x^2 + 6x + 8$ **c** $n(x) = -0,8x^2 + 16x - 170$

Theorie B De regel $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$ toepassen

In het voorbeeld zie je hoe je de regel $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$ gebruikt om de hoogte van de tunnel in figuur 3.9 te berekenen.

Voorbeeld

Bij de tunnel in figuur 3.9 hoort de formule $h = -0,8x^2 + 5,6x - 6,9$. Hierin zijn x en h in meter.

- a** Bereken de hoogte van de tunnel.
b Anderhalve meter rechts van het midden is een wand aangebracht.
Bereken de hoogte van de wand.

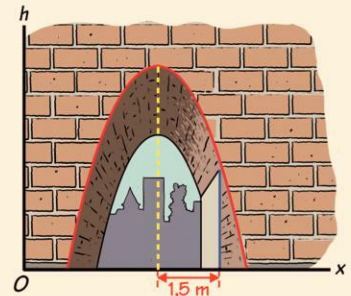
Uitwerking

a $a = -0,8$ en $b = 5,6$, dus $x_{\text{top}} = -\frac{5,6}{2 \cdot -0,8} = 3,5$.

$$x_{\text{top}} = 3,5 \text{ geeft } h_{\text{top}} = -0,8 \cdot 3,5^2 + 5,6 \cdot 3,5 - 6,9 = 2,9$$

Dus de hoogte van de tunnel is 2,9 meter.

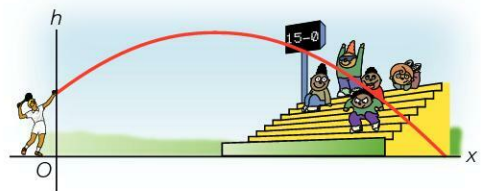
- b** $x = 3,5 + 1,5 = 5$ geeft $h = -0,8 \cdot 5^2 + 5,6 \cdot 5 - 6,9 = 1,1$
De hoogte van de wand is 1,1 meter.



figuur 3.9

- T 16** [►► 20] Robin tennist. Bij een van zijn slagen wordt de hoogte van de bal gegeven door de formule $h = -0,03x^2 + 0,48x + 2$, met x en h in meter.

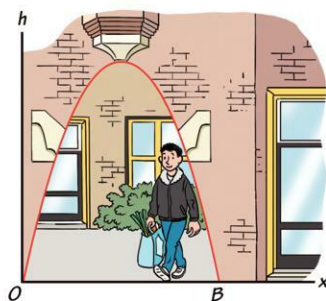
- a** Op welke hoogte raakt Robin de bal?
b Bereken hoe hoog de bal maximaal komt.
c Onderzoek of de bal meer of minder dan 16 meter van Robin op de grond komt.



figuur 3.10

17 Bij de parabolvormige doorgang in figuur 3.11 hoort de formule $h = -2,5x^2 + 6x$, met x en h in meter.

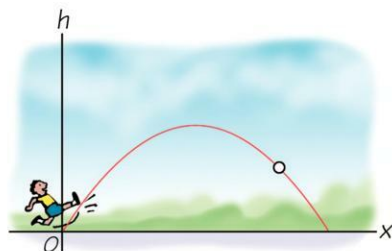
- Bereken de hoogte van de doorgang.
- Om zijn hoofd niet te stoten, moet Oscar minstens 35 cm links van punt B onder de boog doorlopen. Wat weet je van de lengte van Oscar?



figuur 3.11

18 Wesley trapt een bal weg vanuit het punt O . In figuur 3.12 zie je langs welke parabool de bal beweegt. De formule is $h = -0,025x^2 + x$, met x en h in meter.

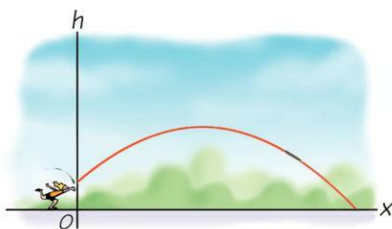
- Bereken de coördinaten van de top van de parabool.
- Geef de maximale hoogte van de bal.
- Onderzoek of Wesley de bal meer of minder dan 45 meter wegtrapt.



figuur 3.12

A 19 Anne doet aan speerwerpen. In figuur 3.13 zie je een van haar worpen. Bij de worp hoort de formule $h = -0,03x^2 + 1,2x + 2$. Hierin zijn x en h in meter.

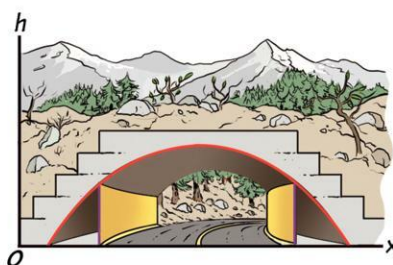
- Op welke hoogte laat Anne de speer los?
- Bereken hoe hoog de speer maximaal komt.
- Onderzoek of Anne de speer meer of minder dan 36 meter ver werpt.



figuur 3.13

A 20 Bij de tunnel in figuur 3.14 hoort de formule $h = -0,1x^2 + 1,5x - 2,025$. Hierin zijn x en h in meter. De tunnel is 20 meter lang.

- Bereken de hoogte van de tunnel.
- Op 4 meter links en rechts van het midden zijn twee kunststofwanden geplaatst om daarachter onderhoudswerkzaamheden uit te voeren. De wanden kosten € 120 per m². Bereken de totale kosten van de wanden.



figuur 3.14

21 Van de grafiek van $f(x) = x^2 + 4x + p$ is $y_{\text{top}} = 12$.

- Bereken x_{top} .
- Bereken p .

22 a Van de grafiek van $g(x) = -2x^2 - 6x + p$ is $y_{\text{top}} = -8$. Bereken p .

- De grafiek van $h(x) = 2x^2 + px + 10$ gaat door het punt $A(2, -6)$. Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van h .

3.3 Kwadratische vergelijkingen

O 23 Je weet dat $x(x - 8) = x^2 - 8x$.

Omgekeerd is $x^2 - 8x = x(x - 8)$. Je hebt nu $x^2 - 8x$ ontbonden in factoren.

Vul in.

- a $x^2 + 4x = x(x + \dots)$
- b $x^2 - 3x = x(x - \dots)$
- c $x^2 - x = x(\dots)$
- d $3x^2 + 6x = 3x(\dots)$

‘Ontbinden in factoren’ betekent ‘schrijven als product’.

O 24 Je weet dat $(x - 3)(x - 5) = x^2 - 5x - 3x + 15 = x^2 - 8x + 15$. Omgekeerd is $x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$. Je zoekt bij deze ontbinding twee getallen met product 15 en som -8. In de tabel van 15 zie je dat je -3 en -5 moet hebben.

Vul in.

- a $x^2 + 8x + 15 = (x + \dots)(x + \dots)$
- b $x^2 + 16x + 15 = (x + \dots)(x + \dots)$
- c $x^2 - 16x + 15 = \dots$

product 15		som
1	15	16
-1	-15	-16
3	5	8
-3	-5	-8

Theorie A Ontbinden in factoren

Je kunt de som $x^2 + 5x$ schrijven als het product van de factoren x en $x + 5$, dus $x^2 + 5x = x(x + 5)$. Een som schrijven als een product heet ontbinden in factoren.

Bij $x^2 + 5x = x(x + 5)$ is de gemeenschappelijke factor x buiten haakjes gebracht.

En zo is $x^2 - 9x = x(x - 9)$ en $3x^2 - x = x(3x - 1)$.

$$x^2 = x \cdot x$$

$$5x = 5 \cdot x$$

gemeenschappelijke factor x

Om $x^2 + 7x + 12$ te ontbinden in factoren, gebruik je de product-som-methode. Je zoekt twee getallen met **product 12** en **som 7**. In de tabel van 12 zie je dat je 3 en 4 moet hebben.

Dus $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$.

7 is de som van 3 en 4.

12 is het product van 3 en 4.

product 12		som
1	12	13
-1	-12	-13
2	6	8
-2	-6	-8
3	4	7
-3	-4	-7

Uit de tabel van 12 volgt ook dat

$$x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6) \text{ en } x^2 + 13x + 12 = (x + 1)(x + 12).$$

-8 is de som van -2 en -6.

12 is het product van -2 en -6.

13 is de som van 1 en 12.

12 is het product van 1 en 12.

Ontbinden in factoren

De gemeenschappelijke factor buiten haakjes brengen

$$x^2 - 5x = x(x - 5)$$

$$6x^2 + x = x(6x + 1)$$

$$3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$$

De product-som-methode

Uit de tabel van 8 volgt:

$$x^2 + 9x + 8 = (x + 1)(x + 8)$$

$$x^2 - 9x + 8 = (x - 1)(x - 8)$$

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$$

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$$

Uit de tabel van -2 volgt:

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$$

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

product 8		som
1	8	9
-1	-8	-9
2	4	6
-2	-4	-6

product -2		som
1	-2	-1
-1	2	1

T 25 [►► 29] Ontbind in factoren.

a $x^2 - 4x - 12$

c $x^2 + x - 2$

e $9x^2 + 15x$

b $x^2 - 4x$

d $x^2 - 21x + 20$

f $x^2 - 6x - 16$

26 Ontbind in factoren.

a $x^2 + 7x$

d $8x^2 + 16x$

b $x^2 + x$

e $x^2 - 0,3x$

c $5x^2 - 2x$

f $3x^2 + 27x$

27 Hiernaast staan de tabellen van 18 en -18.

a Neem de tabellen over en vul ze verder in.

Ontbind in factoren.

b $x^2 + 19x + 18$

f $x^2 - 17x - 18$

c $x^2 + 9x + 18$

g $x^2 + 7x - 18$

d $x^2 + 11x + 18$

h $x^2 - 3x - 18$

e $x^2 - 9x + 18$

i $x^2 - 18x$

28 **a** Maak de tabellen van -6 en 6.

Om $x^2 + x - 6$ te ontbinden in factoren, bedenk je dat $x^2 + x - 6 = x^2 + 1x - 6$. Je zoekt dus twee getallen met product -6 en som 1.

b Ontbind $x^2 + x - 6$ in factoren.

Ontbind in factoren.

c $x^2 + 7x + 6$

e $x^2 - 5x + 6$

g $x^2 - x - 6$

d $x^2 + 5x - 6$

f $x^2 - 5x$

h $x^2 - 7x + 6$

A 29 Ontbind in factoren.

a $x^2 + 7x + 10$

c $x^2 - 9x + 14$

e $18x^2 - 8x$

b $3x^2 + 11x$

d $x^2 + 3x - 18$

f $x^2 - x - 30$

product 18		som
1	18	19
-1	-18	-19
2	...	...
-2	...	...
...	...	...
...	...	...

product -18		som
1	-18	-17
-1	18	17
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...

Theorie B Kwadratische vergelijkingen oplossen

Om de kwadratische vergelijking $x^2 - 7x - 18 = 0$ op te lossen, ontbind je eerst het linkerlid in factoren.

Vervolgens pas je toe: $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

Je krijgt $x^2 - 7x - 18 = 0$

ontbind in factoren

$$(x+2)(x-9) = 0$$

pas toe $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$

$$x+2 = 0 \vee x-9 = 0$$

$$x = -2 \vee x = 9$$

$\vee$ betekent 'of'

Gebruik bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen het volgende werkschema.

Werkschema: kwadratische vergelijkingen oplossen

1 Maak het rechterlid nul.

2 Ontbind het linkerlid in factoren.

3 Gebruik $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

Voorbeeld

Los op.

a $x^2 - 4x = 12$

b $3a^2 = 8a$

Uitwerking

a $x^2 - 4x = 12$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x+2)(x-6) = 0$$

$$x+2 = 0 \vee x-6 = 0$$

$$x = -2 \vee x = 6$$

b $3a^2 = 8a$

$$3a^2 - 8a = 0$$

$$a(3a - 8) = 0$$

$$a = 0 \vee 3a - 8 = 0$$

$$a = 0 \vee 3a = 8$$

$$a = 0 \vee a = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$x^2 - 4x = 12$ geeft

$$x^2 - 4x - 12 = 0.$$

Je brengt hierbij 12 van het rechter- naar het linkerlid.

Daarbij verandert 12 in -12.



T 30 [**►► 35**] Los op.

a $x(x+3) = 4x + 90$

b $q(q+4) - 5q = q + 3$

c $(a+5)(a-3) = 5a + 3$

31 Los op.

a $x^2 - 7x + 10 = 0$

d $p^2 + p - 20 = 0$

g $x^2 = -7x + 8$

b $5x^2 - 20x = 0$

e $(x+1)(x-3) = 0$

h $2x^2 = 7x$

c $a^2 - 8a - 20 = 0$

f $x^2 + 5 = 6x$

i $a^2 - 0,1a = 0,2a$

A 32 Los op.

a $x^2 = 4x - 4$

c $n^2 - 7n - 18 = 0$

e $-x^2 = 12x$

b $(2x-6)(x+5) = 0$

d $k^2 - 16k = 36$

f $a^2 - 3 = 5a - 7$

O 33 In de vergelijking $x(x+4) = 12$ komen haakjes voor. Bij het oplossen werk je deze eerst weg. Dus van $x(x+4) = 12$ maak je $x^2 + 4x = 12$.

a Los op $x(x+4) = 12$.

b Waarom is het niet slim om bij het oplossen van $x(x+4) = 0$ eerst de haakjes weg te werken?

Theorie C Kwadratische vergelijkingen met haakjes

Om de vergelijking $x(x + 2) = 15$ op te lossen, werk je eerst de haakjes weg. Vervolgens ga je te werk volgens het werkschema van de vorige bladzijde. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Los op.

a $x(x + 2) = 15$

b $x(x - 3) = 7x - 24$

Uitwerking

a $x(x + 2) = 15$

$$x^2 + 2x = 15$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x - 3)(x + 5) = 0$$

$$x - 3 = 0 \vee x + 5 = 0$$

$$x = 3 \vee x = -5$$

b $x(x - 3) = 7x - 24$

$$x^2 - 3x = 7x - 24$$

$$x^2 - 3x - 7x + 24 = 0$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$(x - 4)(x - 6) = 0$$

$$x - 4 = 0 \vee x - 6 = 0$$

$$x = 4 \vee x = 6$$

werk de haakjes weg
maak het rechterlid 0
herleid het linkerlid
ontbind het linkerlid in factoren
 $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$

34 Los op.

a $x(x + 3) = 10$

b $a(a - 1) = 4a$

c $x(x + 3) = 2x + 6$

d $x(x + 4) = -4$

e $p^2 = 3(p + 6)$

f $(q - 7)(q + 3) = 24$

A 35 Los op.

a $x(x + 1) = 2x + 2$

b $(x - 1)(x + 2) = 10$

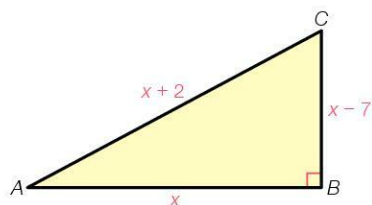
c $(x + 3)^2 = 2x + 9$

d $(3x - 1)(2x + 6) = 0$

e $(3p - 1)(2p + 6) = -6$

f $(t + 1)(t - 8) = 22$

36 Zie de rechthoekige driehoek ABC in figuur 3.15. Bereken x .



figuur 3.15

Theorie D Kwadratische vergelijkingen vereenvoudigen

Bij het oplossen van de kwadratische vergelijking

$3x^2 + 15x - 18 = 0$ heeft het geen zin twee getallen te zoeken met product -18 en som 15 , want er staat $3x^2$ en niet x^2 .

Je vereenvoudigt daarom eerst de vergelijking door alle termen door 3 te delen. Daarna pas je de product-som-methode toe.

Je krijgt $3x^2 + 15x - 18 = 0$

deel alle termen door 3

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x - 1)(x + 6) = 0$$

$$x - 1 = 0 \vee x + 6 = 0$$

$$x = 1 \vee x = -6$$



De product-som-methode kan alleen bij de vorm $x^2 + \dots x + \dots = 0$.

Bij de vergelijking $\frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0$ vermenigvuldig je eerst alle termen met 4. Je krijgt

$$\frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0$$

vermenigvuldig alle termen met 4

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x + 2)(x - 6) = 0$$

$$x + 2 = 0 \vee x - 6 = 0$$

$$x = -2 \vee x = 6$$

Bij $-x^2 + 7x - 10 = 0$ vermenigvuldig je eerst alle termen met -1. Je krijgt $x^2 - 7x + 10 = 0$, enzovoort.

Voorbeeld

Los op $-5x^2 + 10 = 5x$.

Uitwerking

$$-5x^2 + 10 = 5x$$

$$-5x^2 - 5x + 10 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x - 1 = 0 \vee x + 2 = 0$$

$$x = 1 \vee x = -2$$

maak het rechterlid 0

deel alle termen door -5

ontbind het linkerlid in factoren

$A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$

37 Los op.

a $4x^2 + 8x - 12 = 0$

c $-a^2 + 3a + 10 = 0$

b $\frac{1}{2}x^2 + 8 = 5x$

d $-0,5x^2 + 0,5x + 6 = 0$

A 38 Los op.

a $100k^2 - 4900k = 5000$

d $(2x - 1)(2x + 5) = 0$

b $(x - 2)(2x - 5) = x + 2$

e $(3x + 1)(x - 6) = 3x^2$

c $(x - 5)^2 = 4 - 2(3 - x)$

f $-\frac{1}{3}x^2 = x - 6$

O 39 **a** Hoe kun je aan de coördinaten van een punt zien of het op de x-as ligt? En hoe kun je aan de coördinaten zien of een punt op de y-as ligt?

Hiernaast zie je de grafiek van de functie

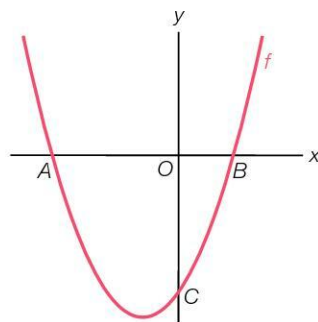
$$f(x) = x^2 + 2x - 8.$$

b Bereken $f(0)$. Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de y-as.

c Reken na dat $f(2) = 0$. Van welk van de punten A, B of C weet je nu de coördinaten?

d Bereken $f(-4)$. Welke informatie heb je nu over de grafiek?

e Welke vergelijking los je op om de x-coördinaten van de punten A en B te berekenen?



figuur 3.16

Theorie E Snijpunten met de coördinaatassen

Voor het berekenen van de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van de functie f met de x -as en de y -as ken je de volgende regels.

- | | |
|--|---|
| Snijpunten met de x-as | De y -coördinaat is 0.
De x -coördinaat volgt uit $f(x) = 0$, dus los op $f(x) = 0$. |
| Snijpunt met de y-as | De x -coördinaat is 0.
De y -coördinaat is $f(0)$, dus bereken $f(0)$. |

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 8x - 9$.

De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A en B en de y -as in het punt C . Zie figuur 3.17.

Bereken de coördinaten van A , B en C .

Uitwerking

$$f(0) = 0 - 0 - 9 = -9, \text{ dus } C(0, -9).$$

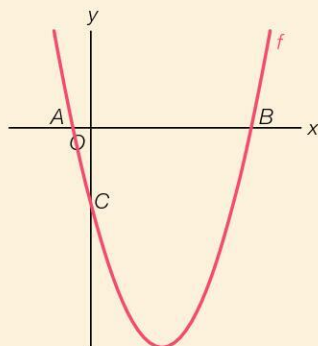
$$f(x) = 0 \text{ geeft } x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$(x + 1)(x - 9) = 0$$

$$x + 1 = 0 \vee x - 9 = 0$$

$$x = -1 \vee x = 9$$

Dus $A(-1, 0)$ en $B(9, 0)$.



figuur 3.17

- 40** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 5x - 6$.
Bereken de coördinaten van
- de snijpunten van de grafiek van f met de x -as
 - het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.

- A 41** De grafiek van de functie $g(x) = x^2 + 8x - 20$ snijdt de x -as in de punten A en B en de y -as in het punt C .
Bereken de coördinaten van A , B en C .

- 42** Bereken van de grafieken van de volgende functies de coördinaten van de snijpunten met de x -as en de y -as.

a $f(x) = -x^2 - x + 12$

b $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

- A 43** Bij de hoogte van de doorgang van de brug in figuur 3.18 hoort de formule

$$h = -0,125x^2 + 2x - 6 \text{ met } x \text{ en } h \text{ in meter.}$$

- Bereken de afstand tussen de punten A en B .
- Het dak van een rondvaartboot is 4 meter breed en steekt 1,40 meter boven het wateroppervlak uit.
Onderzoek of de boot onder de brug door kan varen.



figuur 3.18

3.4 De functie $f(x) = a(x - d)(x - e)$

O 44 Gegeven is de functie $f(x) = (x - 5)(x + 7)$.

- a Werk de haakjes weg in $(x - 5)(x + 7)$.
- b Je kunt het functievoorschrift van f schrijven in de vorm

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Welke getallen zijn a , b en c ?

Theorie A De functie $f(x) = a(x - d)(x - e)$

In opgave 44 heb je gezien dat het functievoorschrift van de functie $f(x) = (x - 5)(x + 7)$ te schrijven is als $f(x) = x^2 + 2x - 35$.

Dus $f(x) = (x - 5)(x + 7)$ is een kwadratische functie en de grafiek van f is een parabool.

Ook $f(x) = -4(x + 1)(x - 6)$ is een kwadratische functie.

Door in $f(x) = -4(x + 1)(x - 6)$ de haakjes weg te werken, is het functievoorschrift van f te schrijven in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Je weet dat $(x + 1)(x - 6) = x^2 - 6x + x - 6$, dus

$$f(x) = -4(x + 1)(x - 6) = -4(x^2 - 6x + x - 6) = -4(x^2 - 5x - 6) = -4x^2 + 20x + 24.$$

Dus $a = -4$, $b = 20$ en $c = 24$.

$$\begin{aligned}\text{En zo is } f(x) &= 5(x - 2)(x - 4) = 5(x^2 - 4x - 2x + 8) = \\ &= 5(x^2 - 6x + 8) = 5x^2 - 30x + 40.\end{aligned}$$

Dus bij het herleiden van $f(x) = 5(x - 2)(x - 4)$ tot de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ vind je $a = 5$, $b = -30$ en $c = 40$.

Functies zoals $f(x) = -4(x + 1)(x - 6)$ en $f(x) = 5(x - 2)(x - 4)$ zijn kwadratische functies die gegeven zijn in de vorm

$$f(x) = a(x - d)(x - e).$$

In $f(x) = -4(x + 1)(x - 6)$ is $a = -4$, $d = -1$ en $e = 6$.

In $f(x) = 5(x - 2)(x - 4)$ is $a = 5$, $d = 2$ en $e = 4$.

45 Gegeven is de functie $f(x) = 2(x + 3)(x - 6)$.

- a Het functievoorschrift heeft de vorm $f(x) = a(x - d)(x - e)$.

Geef a , d en e .

- b Schrijf het functievoorschrift in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ en geef a , b en c .

46 Gegeven is de functie $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x + 6)$.

- a Het functievoorschrift heeft de vorm $g(x) = a(x - d)(x - e)$.

Geef a , d en e .

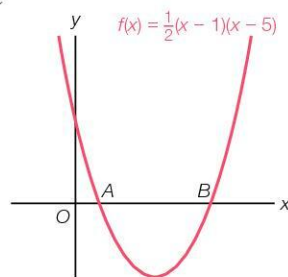
- b Schrijf het functievoorschrift in de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$ en geef a , b en c .

47 Gegeven is de functie $h(x) = 3x(x - 5)$.

- a** Het functievoorschrift heeft de vorm $h(x) = a(x - d)(x - e)$. Geef a , d en e .
- b** Schrijf het functievoorschrift in de vorm $h(x) = ax^2 + bx + c$ en geef a , b en c .

O 48 De grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 5)$ snijdt de x -as in de punten A en B . Zie figuur 3.19.

- a** Voor $x = 1$ is de functiewaarde van f gelijk aan 0. Licht dit toe.
- b** Voor welke andere waarde van x is de functiewaarde ook gelijk aan 0?
- c** Geef de coördinaten van A en B .



figuur 3.19

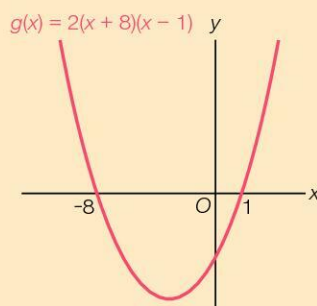
Theorie B Bijzondere punten van de grafiek van $f(x) = a(x - d)(x - e)$

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van $f(x) = -5(x - 3)(x - 7)$ met de x -as zijn direct te geven. Dat zijn $(3, 0)$ en $(7, 0)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= -5(x - 3)(x - 7) \\ f(3) &= -5(3 - 3)(3 - 7) \\ &= -5 \cdot 0 \cdot -4 = 0 \\ f(7) &= -5(7 - 3)(7 - 7) \\ &= -5 \cdot 4 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

En zo snijdt de grafiek van $g(x) = 2(x + 8)(x - 1)$ de x -as in de punten $(-8, 0)$ en $(1, 0)$. Zie figuur 3.20.

De grafiek van $f(x) = a(x - d)(x - e)$ snijdt de x -as in de punten $(d, 0)$ en $(e, 0)$.



figuur 3.20

In figuur 3.21 zie je de grafiek van $f(x) = (x + 1)(x - 5)$. De x -coördinaat van de top van de grafiek volgt uit de snijpunten van de grafiek met de x -as. De grafiek snijdt de x -as in de punten $A(-1, 0)$ en $B(5, 0)$. De x -coördinaat van de top is het getal midden tussen -1 en 5 . Dus

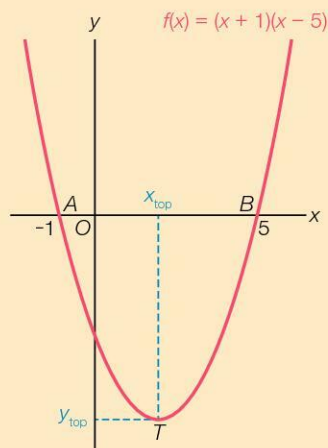
$$x_{\text{top}} = \frac{-1 + 5}{2} = 2. \text{ Daaruit volgt}$$

$$y_{\text{top}} = f(2) = (2 + 1)(2 - 5) = 3 \cdot -3 = -9.$$

Dus de top is het punt $T(2, -9)$.

Van de grafiek van $f(x) = a(x - d)(x - e)$ is

$$x_{\text{top}} = \frac{d + e}{2}. \text{ Verder is } y_{\text{top}} = f(x_{\text{top}}).$$



figuur 3.21

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x-8)$.

De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A en B en de y -as in het punt C . Zie figuur 3.22.

- Bereken de coördinaten van A , B en C .
- Bereken de coördinaten van de top T .

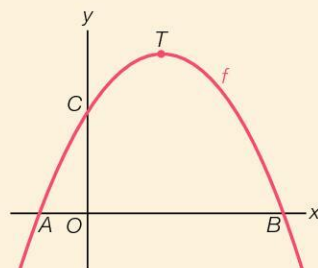
Uitwerking

- De snijpunten met de x -as zijn $A(-2, 0)$ en $B(8, 0)$.

$f(0) = -\frac{1}{4}(0+2)(0-8) = -\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot -8 = 4$, dus het snijpunt met de y -as is $C(0, 4)$.

- $x_{\text{top}} = \frac{-2+8}{2} = 3$

$y_{\text{top}} = f(3) = -\frac{1}{4}(3+2)(3-8) = -\frac{1}{4} \cdot 5 \cdot -5 = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$
Dus $T(3, 6\frac{1}{4})$.



figuur 3.22

- 49 Schrijf van de grafieken van de volgende functies uit het hoofd de coördinaten van de snijpunten met de x -as op.

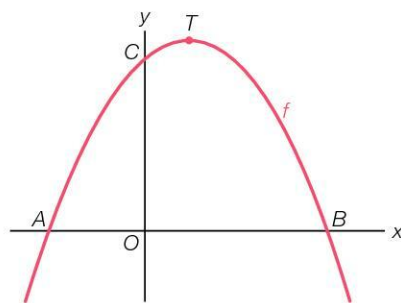
- $f(x) = 6(x-8)(x-20)$
- $h(x) = -3x(x-100)$
- $g(x) = -3(x+7)(x+15)$
- $k(x) = \frac{1}{2}(x-40)(x+80)$

- 50 Bereken van de grafieken van de volgende functies de coördinaten van de snijpunten met de x -as en de y -as, en bereken de coördinaten van de top.

- $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)(x-8)$
- $h(x) = 8x(x+12)$
- $g(x) = -5(x+7)(x-1)$
- $k(x) = -(x+12)(x+20)$

- A 51 In figuur 3.23 zie je een schets van de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{3}(x+3)(x-6)$.

- Bereken de coördinaten van de punten A , B , C en T .
- Van het punt D op de grafiek van f is $x_D = 5$. Bereken y_D .
- Schrijf het functievoorschrift in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.

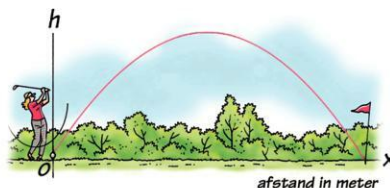


figuur 3.23

- A 52 Annet slaat een golfbal weg. Zie figuur 3.24.

Bij de baan van de bal hoort de formule $h = -0,02x(x-40)$, met x en h in meter.

- Hoe ver van Annet komt de bal op de grond?
- Hoe hoog komt de bal maximaal?



figuur 3.24

- 53 Waarom is niet elke kwadratische functie te schrijven in de vorm $f(x) = a(x-d)(x-e)$?

3.5 Grafieken veranderen

O 54 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 4x$ en $g(x) = 2(x^2 - 4x)$.

a Neem de tabel over en vul hem verder in. Wat valt je op?

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							
$g(x)$							

b Teken de grafieken van f en g in één figuur.

c Wat valt je op aan

- de snijpunten van de grafieken met de x -as
- de afstanden van de toppen tot de x -as?

Theorie A Vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as

In opgave 54 heb je de grafieken getekend van de functies $f(x) = x^2 - 4x$ en $g(x) = 2(x^2 - 4x)$. Je hebt daarbij gezien dat $g(0) = 2 \cdot f(0)$, $g(1) = 2 \cdot f(1)$, $g(2) = 2 \cdot f(2)$, enzovoort.

Vermenigvuldig je de y -coördinaat van een punt van de grafiek van f met 2, dan krijg je dus een punt van de grafiek van g .

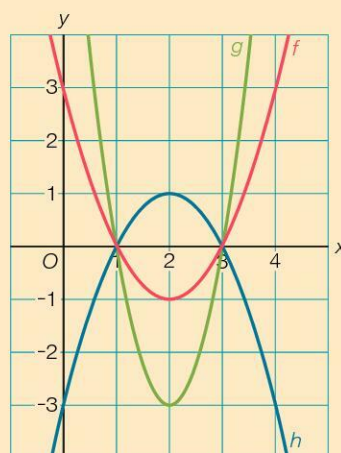
Door de grafiek van $f(x) = x^2 - 4x$ met 2 te **vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as**, ontstaat de grafiek van $g(x) = 2(x^2 - 4x)$.

Hierbij wordt de afstand van de punten van de grafiek tot de x -as twee keer zo groot. De snijpunten met de x -as blijven op hun plaats.

Door de grafiek van $f(x) = x^2 - 4x + 3$ in figuur 3.25 ten opzichte van de x -as

- met 3 te vermenigvuldigen, krijg je de grafiek van $g(x) = 3(x^2 - 4x + 3)$ oftewel $g(x) = 3x^2 - 12x + 9$
- met -1 te vermenigvuldigen, krijg je de grafiek van $h(x) = -(x^2 - 4x + 3)$ oftewel $h(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Merk op dat vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met -1 hetzelfde is als spiegelen in de x -as.

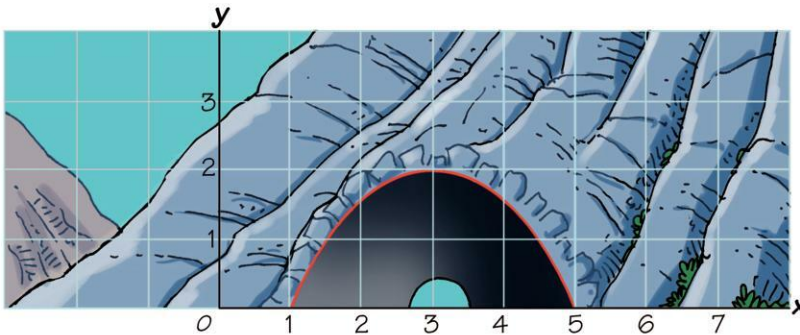


figuur 3.25

55 Stel telkens de formule op van de grafiek die ontstaat na een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as. Schrijf je antwoord in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

- a** De parabool $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ wordt met 6 vermenigvuldigd.
- b** De parabool $y = 2x^2 - 5x + 7$ wordt met -1 vermenigvuldigd.
- c** De parabool $y = -3(x + 2)(x + 5)$ wordt met 2 vermenigvuldigd.

A 56 [**WERKBOEK**] De tunnel in figuur 3.26 heeft de vorm van een parabool. De formule is $y = -0,5x^2 + 3x - 2,5$. Hierbij zijn x en y in meter. Nadat enkele ongelukken hebben plaatsgevonden door de geringe hoogte van de tunnel, besluit men deze te verhogen. De nieuwe tunnel ontstaat door de parabool met 1,5 te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.



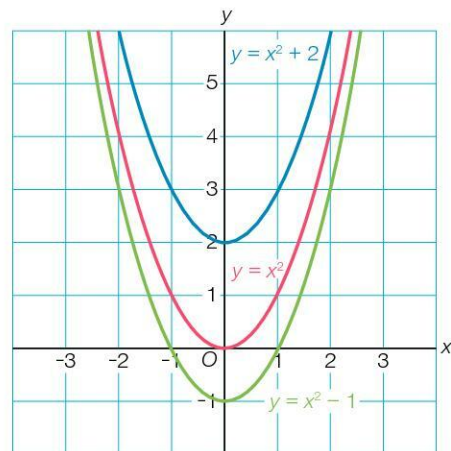
figuur 3.26

- a** Teken de nieuwe tunnel, en geef de formule die hierbij hoort.
- b** Onderzoek of een bestelauto met een breedte van 2 meter en een hoogte van 2,4 meter door de nieuwe tunnel kan.

57 De lijn k gaat door de punten $(0, 2)$ en $(2, 0)$. Lijn k wordt met 5 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as. Zo ontstaat lijn l . Stel de formule van l op.

58 In figuur 3.27 zie je de parabolen $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ en $y = x^2 - 1$.

- a** Je kunt de parabool $y = x^2$ zo verschuiven, dat deze op de parabool $y = x^2 + 2$ valt. Hoeveel moet je omhoog schuiven?
- b** Hoe moet je de parabool $y = x^2$ verschuiven om hem te laten samenvallen met de parabool $y = x^2 - 1$?



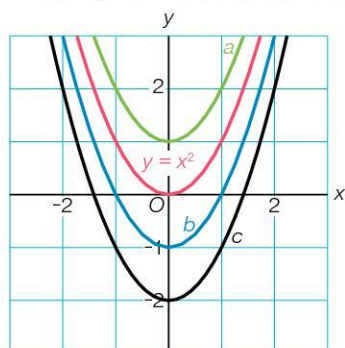
figuur 3.27

Theorie B Verticaal verschuiven

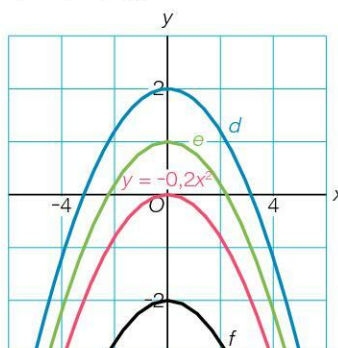
Door de grafiek van $y = 0,5x^2$

- 3 omhoog te schuiven, krijg je de grafiek van $y = 0,5x^2 + 3$
- 2 omlaag te schuiven, krijg je de grafiek van $y = 0,5x^2 - 2$.

- 59 a** Zie figuur 3.28a.
Schrijf formules op van de parabolen a , b en c .
- b** Zie figuur 3.28b.
Schrijf formules op van de parabolen d , e en f .



a



b

figuur 3.28

- 60 a** De grafiek van $y = -2x^2$ wordt 6 omhoog geschoven.
Schrijf de formule op van de grafiek die je dan krijgt.
- b** De grafiek van $y = \frac{1}{3}x^2$ wordt 4 omlaag geschoven.
Schrijf de formule op van de grafiek die je dan krijgt.

- 61** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = (x - 2)^2$.
- a** Neem de tabellen over en vul ze verder in. Wat valt je op?

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$						

x	2	3	4	5	6	7
$g(x)$						

- b** Je kunt narekenen dat $f(16) = 256$.
Voor welk positief getal x is $g(x) = 256$?
- c** Je kunt narekenen dat $f(25) = 625$.
Voor welk positief getal x is $g(x) = 625$?

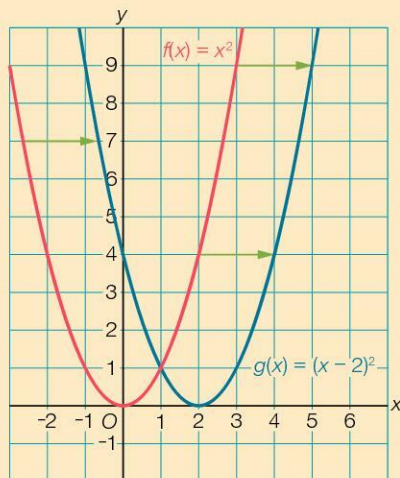


Theorie C Horizontaal verschuiven

In opgave 61 heb je gezien dat er een verband bestaat tussen de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = (x - 2)^2$, want $f(0) = g(2) = 0$, $f(1) = g(3) = 1$, $f(2) = g(4) = 4$, enzovoort. Ga je vanuit een punt van de grafiek van f dus 2 naar rechts, dan krijg je een punt van de grafiek van g .

Door de grafiek van $f(x) = x^2$ dus 2 naar rechts te schuiven, ontstaat de grafiek van $g(x) = (x - 2)^2$. En bij een verschuiving van de grafiek van $f(x) = x^2$

- van 5 naar rechts, krijg je de grafiek van $h(x) = (x - 5)^2$
- van 3 naar links, krijg je de grafiek van $k(x) = (x + 3)^2$.



figuur 3.29

Verschuiven van de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$

Verticaal $y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{4 \text{ omhoog}} y = \frac{1}{2}x^2 + 4$

$y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{6 \text{ omlaag}} y = \frac{1}{2}x^2 - 6$

Horizontaal $y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{8 \text{ naar rechts}} y = \frac{1}{2}(x - 8)^2$

$y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{7 \text{ naar links}} y = \frac{1}{2}(x + 7)^2$

8 naar rechts,
vervang dan x door $x - 8$.
7 naar links,
vervang dan x door $x + 7$.

Voorbeeld

- a** De grafiek van $f(x) = 0,3x^2 - 7$ wordt 5 naar links geschoven. Je krijgt de grafiek van de functie g . Stel het functievoorschrift van g op.
- b** De grafiek van $h(x) = \frac{1}{5}x^2 - 6$ wordt eerst 3 naar rechts geschoven en vervolgens 7 omlaag. Je krijgt de grafiek van de functie k . Stel het functievoorschrift van k op.

Uitwerking

a $y = 0,3x^2 - 7 \xrightarrow{5 \text{ naar links}} y = 0,3(x + 5)^2 - 7$
Dus $g(x) = 0,3(x + 5)^2 - 7$.

vervang x door $x + 5$

b $y = \frac{1}{5}x^2 - 6 \xrightarrow{3 \text{ naar rechts}} y = \frac{1}{5}(x - 3)^2 - 6$
 $\xrightarrow{7 \text{ omlaag}} y = \frac{1}{5}(x - 3)^2 - 6 - 7$

vervang eerst x door $x - 3$

trek er vervolgens 7 van af

Dus $k(x) = \frac{1}{5}(x - 3)^2 - 13$.

- 62** a De grafiek van $f(x) = 0,8x^2 + 2$ wordt 3 naar rechts geschoven. Je krijgt de grafiek van de functie g .
Stel het functievoorschrift van g op.
- b De grafiek van $h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ wordt eerst 5 naar links geschoven en vervolgens 3 omlaag. Je krijgt de grafiek van de functie k .
Stel het functievoorschrift van k op.

Bij deze opgaven mag je de haakjes in het antwoord laten staan.



- A 63** Stel de formule op van de parabool die ontstaat na een verschuiving van de parabool $y = -x^2 + 2$ van
- a 3 omlaag c 7 naar links en 4 omhoog
b 4 naar rechts d 2 naar links en 3 omlaag

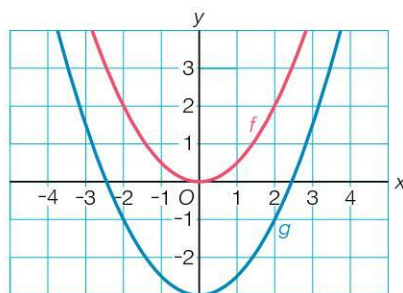
- A 64** a Geef de verschuiving van de grafiek van $f(x) = x^2$ waardoor de grafiek van $g(x) = (x - 2)^2 + 5$ ontstaat.
- b Geef de verschuiving van de grafiek van $h(x) = -2x^2$ waardoor de grafiek van $k(x) = -2(x + 1)^2 - 4$ ontstaat.

- 65** a Geef de verschuiving van de grafiek van $m(x) = 6(x + 1)^2 + 3$ waardoor de grafiek van $n(x) = 6(x - 3)^2 - 1$ ontstaat.
- b De grafiek van $q(x) = -2(x + 3)^2 - 8$ is ontstaan uit de grafiek van de functie p na een verschuiving van 11 omhoog en 7 naar links.
Stel het functievoorschrift van p op.

- O 66** In figuur 3.30 zie je de grafieken van $f(x) = 0,5x^2$ en $g(x) = 0,5x^2 - 3$.

De top van de grafiek van f is het punt $(0, 0)$.

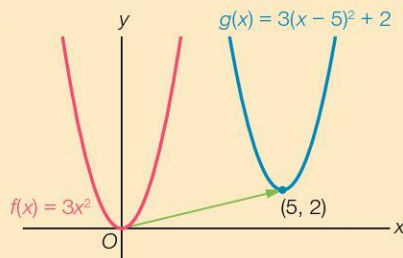
- a Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van f ?
Schrijf de coördinaten op van de top van de grafiek van g .
- b Schrijf de coördinaten op van de top van de grafiek van $h(x) = 0,5x^2 + 5$.



figuur 3.30

Theorie D De functie $f(x) = a(x - p)^2 + q$

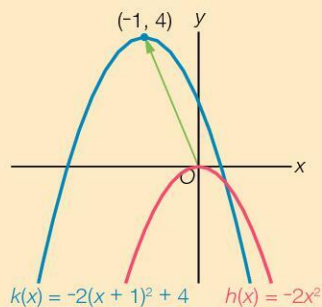
De top van de grafiek van $f(x) = 3x^2$ is het punt $(0, 0)$. Ook van de grafiek van $g(x) = 3(x - 5)^2 + 2$ kun je direct de coördinaten van de top opschrijven, want de grafiek ontstaat uit die van f door deze 5 naar rechts en 2 omhoog te schuiven. Zie figuur 3.31. De top is dus het punt $(5, 2)$.



figuur 3.31

De top van de grafiek van $h(x) = -2x^2$ is het punt $(0, 0)$, dus van de grafiek van $k(x) = -2(x + 1)^2 + 4$ is de top het punt $(-1, 4)$. Zie figuur 3.32.

De top van de grafiek van de functie $f(x) = a(x - p)^2 + q$ is het punt (p, q) .



figuur 3.32

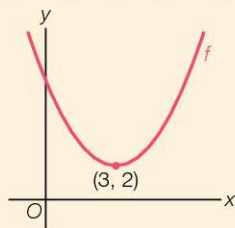
Voorbeeld

Schets de grafiek van $f(x) = 5(x - 3)^2 + 2$.

Uitwerking

$a = 5$, dus dalparabool.

De top is het punt $(3, 2)$.



Vermeld in je schets de coördinaten van de top.



67 Schets van elk van de volgende functies de grafiek.

a $f(x) = 7(x - 2)^2 - 3$

b $g(x) = -3(x + 2)^2 + 7$

c $k(x) = -2(x - 7)^2 + 3$

A 68 Schets van elk van de volgende functies de grafiek.

a $f(x) = -3x^2$

c $h(x) = (x - 3)^2$

e $p(x) = -3x^2 + 5$

b $g(x) = -3 + x^2$

d $k(x) = -(x + 3)^2 - 5$

f $q(x) = -3(x + 5)^2$

A 69 Hiernaast zie je een schets van de Golden Gate Bridge, een hangbrug in de Verenigde Staten. Bij de draagkabel tussen de twee pijlers hoort de formule $h = 0,00039(x - 640)^2 + 70$ met x en h in meter. Het laagste punt van de draagkabel ligt op gelijke hoogte met het wegdek.

a Bereken hoe hoog de pijlers boven het wegdek uitsteken. Geef je antwoord in meter en rond af op gehelen.

b Bereken de afstand tussen de twee pijlers.



figuur 3.33

70 Gegeven is de functie $f(x) = -2x^2 - 20x + 48$.

Het functievoorschrift is te schrijven in de vorm $f(x) = -2(x - p)^2 + q$.

Bereken p en q .

Gemengde opgaven

- 1** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.
- Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f .
 - Teken de grafiek van f .
 - Onderzoek of het punt $A(-10, -27)$ op de grafiek van f ligt.

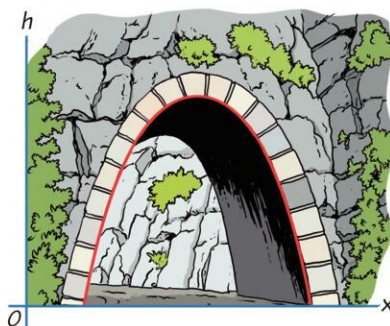
- 2** Los op.
- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a $x^2 - 9x - 10 = 0$ | g $x^2 + 8 = 9x$ |
| b $x^2 - 5 = 3x + 23$ | h $x^2 = 5x$ |
| c $3x^2 + 12x = 0$ | i $x(x + 7) = 18$ |
| d $x^2 = 6x - 9$ | j $(x - 8)(x - 2) = 16$ |
| e $x^2 - 10x + 9 = 0$ | k $x(x + 3) = 7x$ |
| f $(x + 3)(2x - 8) = 0$ | l $(x - 5)^2 = x + 1$ |

- 3** Los op.
- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a $\frac{1}{3}x^2 - 2x = -3$ | d $-\frac{1}{5}q^2 = q - 30$ |
| b $2p^2 + 5p = 8 - p$ | e $0,01a^2 + 0,2a - 3 = 0$ |
| c $(2x - 1)(x - 3) = x + 27$ | f $(5x + 3)(x - 1) = 5x^2$ |

- 4** Bereken van de volgende parabolen de coördinaten van de top.
- $y = -0,3x^2 + 1,8x + 7,2$
 - $y = -1,8(x - 1,7)(x - 8,3)$
 - $y = -0,7(x - 1,3)^2 + 8,1$

- 5** Gegeven is de functie $f(x) = -3x^2 + 12x + p$.
Bereken p als
- $y_{\text{top}} = 12$
 - de grafiek van f door het punt $A(-1, 4p)$ gaat
 - de top van de grafiek van f op de x -as ligt.

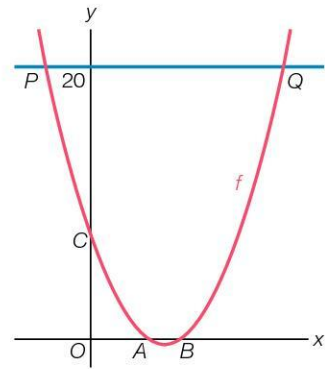
- 6** Bij de tunnel in figuur 3.34 hoort de formule $h = -0,8(x - 1,5)(x - 5,5)$. Hierin zijn x en h in meter. De tunnel is 6 meter lang.
- Bereken de breedte van de tunnel.
 - Bereken de hoogte van de tunnel.
 - Onderzoek of een camper met een breedte van 2 meter en een hoogte van 2,3 meter door de tunnel kan rijden.
 - Anderhalve meter links van het midden van de tunnel komt een scheidingswand. Bereken de oppervlakte van de wand.
 - Schrijf de formule van h in de vorm $h = ax^2 + bx + c$.



figuur 3.34

7 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

- a** De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A en B en de y -as in het punt C .
Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.
- b** Op de grafiek van f liggen de punten P en Q , beide met y -coördinaat 20.
Bereken de lengte van het lijnstuk PQ .



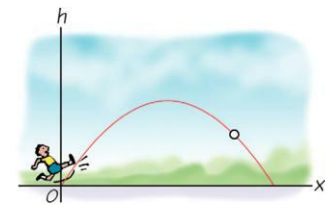
figuur 3.35

8 Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$, $g(x) = (x + 1)^2$ en $h(x) = -3(x - 2)^2 + 4$.

- a** Schets van elk van deze functies de grafiek.
- b** De grafiek van f wordt eerst 2 omlaag geschoven en vervolgens 8 naar rechts. Zo ontstaat de grafiek van de functie k .
Stel het functievoorschrift van k op.
- c** De grafiek van f wordt eerst met -4 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as en vervolgens 5 naar links geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie p .
Stel het functievoorschrift van p op.

9 Rob trapt een bal weg. Zie figuur 3.36. Bij de baan van de bal hoort de formule $h = -0,02(x - 15)^2 + 4,5$ met x en h in meter.

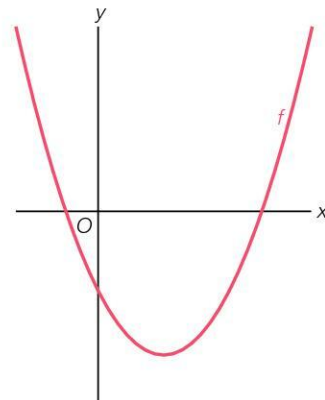
- a** Hoe hoog komt de bal maximaal?
- b** Hoe ver van Rob komt de bal weer op de grond?
- c** Maarten staat 22 meter van Rob. Op een gegeven moment ziet hij de bal recht boven zich.
Hoe hoog is de bal dan?



figuur 3.36

10 Welke van de onderstaande formules kunnen bij de parabool in de figuur hiernaast horen?

- I: $y = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 5)$
- II: $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 4$
- III: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2\frac{1}{2}$
- IV: $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 4$
- V: $y = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 5)$
- VI: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\frac{1}{2}$



figuur 3.37

Samenvatting

3.1 Kwadratische functies

blz 90 De functie $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$ is een voorbeeld van een kwadratische functie. Behalve met dit functievoorschrift kun je f ook noteren met de formule $y = 2x^2 - 5x + 4$.

Bij de functie f is

$$f(3) = 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 4 = 18 - 15 + 4 = 7 \text{ en}$$

$$f(-6) = 2 \cdot (-6)^2 - 5 \cdot -6 + 4 = 72 + 30 + 4 = 106.$$

$f(3) = 7$, dus het punt $(3, 7)$ ligt op de grafiek van f .

blz 91 Een functie f van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een kwadratische functie. Voor $a > 0$ is de grafiek een dalparabool en voor $a < 0$ is de grafiek een bergparabool.

Zo is de grafiek van $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$ een dalparabool.

Om de parabool te tekenen, maak je eerst een tabel met zeven punten. Bij het invullen van de tabel gebruik je de symmetrie van de parabool.

3.2 De top van de grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$

blz 94 Van de top van de grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\text{is } x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} \text{ en } y_{\text{top}} = f(x_{\text{top}}).$$

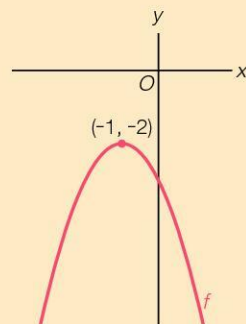
$f(x) = ax^2 + bx + c$
Van de grafiek van f is
 $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$ en $y_{\text{top}} = f(x_{\text{top}}).$

blz 95 Bij de grafiek van $f(x) = -x^2 - 2x - 3$ krijg je

$$x_{\text{top}} = -\frac{-2}{2 \cdot -1} = -1 \text{ en}$$

$$y_{\text{top}} = f(-1) = -(-1)^2 - 2 \cdot -1 - 3 = -2.$$

De top is het punt $(-1, -2)$.



3.3 Kwadratische vergelijkingen

blz 97 **Ontbinden in factoren**

De gemeenschappelijke factor buiten haakjes brengen.

$$x^2 + 7x = x(x + 7)$$

$$3x^2 - x = x(3x - 1)$$

De product-som-methode.

$$x^2 + 17x - 18 = (x - 1)(x + 18)$$

$$x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$$

blz 99 **Werkschema: kwadratische vergelijkingen oplossen**

1 Maak het rechterlid nul.

$$x^2 - 18 = 3x$$

2 Ontbind het linkerlid in factoren.

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

3 Pas toe: uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0 \vee B = 0$.

$$(x + 3)(x - 6) = 0$$

$$x + 3 = 0 \vee x - 6 = 0$$

$$x = -3 \vee x = 6$$

blz 102

Bij de functie $f(x) = x^2 - 3x - 18$ vind je bij het oplossen van $f(x) = 0$ de oplossingen $x = -3$ en $x = 6$. Zie onderaan de vorige bladzijde. Dus de grafiek van f snijdt de x -as in de punten $(-3, 0)$ en $(6, 0)$. Verder is $f(0) = -18$, dus de grafiek snijdt de y -as in het punt $(0, -18)$.

3.4 De functie $f(x) = a(x - d)(x - e)$

blz 103

$$x_{\text{top}} = \frac{d+e}{2} \text{ en } y_{\text{top}} = f(x_{\text{top}}).$$

$f(x) = a(x - d)(x - e)$
Van de grafiek van f is

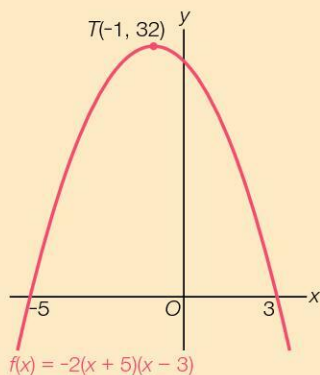
$$x_{\text{top}} = \frac{d+e}{2} \text{ en } y_{\text{top}} = f(x_{\text{top}}).$$

blz 104

$$x_{\text{top}} = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \text{ en}$$

$$y_{\text{top}} = f(-1) = -2(-1 + 5)(-1 - 3) = -2 \cdot 4 \cdot -4 = 32.$$

De top is het punt $(-1, 32)$.



3.5 Grafieken veranderen

blz 106

blz 108

Verticaal $y = 3x^2 \xrightarrow{5 \text{ omhoog}} y = 3x^2 + 5$

$$y = 3x^2 \xrightarrow{4 \text{ omlaag}} y = 3x^2 - 4$$

Horizontaal $y = 3x^2 \xrightarrow{6 \text{ naar rechts}} y = 3(x - 6)^2$

$$y = 3x^2 \xrightarrow{7 \text{ naar links}} y = 3(x + 7)^2$$

blz 111

Dus de top van de grafiek van $f(x) = (x + 4)^2 + 7$ is het punt $(-4, 7)$.

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

Van de grafiek van f is $x_{\text{top}} = p$ en $y_{\text{top}} = q$.

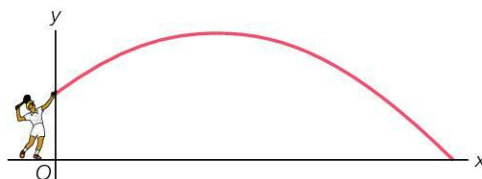
Diagnostische toets

3.1 Kwadratische functies

- 1** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.
- Schrijf de formule van f op.
 - Reken na dat $f(0) = f(4)$.
 - Teken de grafiek van f en geef de coördinaten van de top.
 - Onderzoek of het punt $A(-8, 17)$ op de grafiek van f ligt.

- 2** Kiki zit op tennis. Bij een van haar opslagen wordt de hoogte van de tennisbal gegeven door de functie $f(x) = -0,04x^2 + 0,48x + 1,8$. Hierbij zijn x en $f(x)$ in meter.

- Bereken de hoogte van de bal bij $x = 10$.
- Reken na dat $f(4) = f(8)$.
- Bereken de maximale hoogte van de bal.
- Op welke hoogte raakt Kiki de bal?
- Onderzoek of de bal meer of minder dan 12 meter van Kiki op de grond komt.



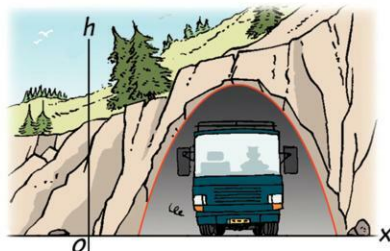
figuur 3.38

3.2 De top van de grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$

- 3** Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van
- $f(x) = 2x^2 - 12x + 1$
 - $g(x) = -0,1x^2 + 2x - 8$

- 4** Bij de tunnel in figuur 3.39 hoort de formule $h = -0,75x^2 + 4,5x - 3,75$. Hierin zijn x en h in meter.

- Bereken de hoogte van de tunnel.
- Op 1,8 meter links van het midden van de tunnel wordt een wand aangebracht. Bereken de hoogte van de wand.



figuur 3.39

3.3 Kwadratische vergelijkingen

- 5** Los op.

5,6,7 **a** $x^2 - 2x - 15 = 0$

b $2x^2 - 18x = 0$

c $x^2 + 4x - 12 = 0$

d $x^2 = 6x$

e $x^2 - 2x = 48$

f $x^2 - 6 = x$

g $x(x - 5) = 14$

h $(2x - 3)(x + 9) = 0$

i $x(x + 2) = 5x + 40$



Los op.

a $-x^2 - x + 30 = 0$

d $-3a^2 + 30a = 27$

b $0,25x^2 - x - 8 = 0$

e $(x - 6)(2x - 6) = 20x$

c $(x - 4)^2 = 9 - 2(x - 1)$

f $(3x - 5)(x + 5) = 3x^2$

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 8x - 20$.

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as en de y -as.

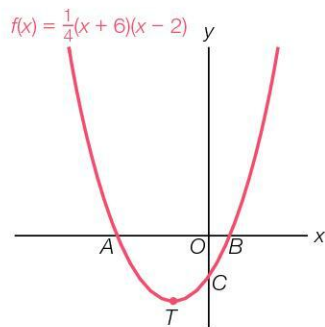
3.4 De functie $f(x) = a(x - d)(x - e)$

Zie de grafiek van de functie

$f(x) = \frac{1}{4}(x + 6)(x - 2)$ in de figuur hiernaast.

a Bereken de coördinaten van de punten A , B en C .

b Bereken de coördinaten van de top T .



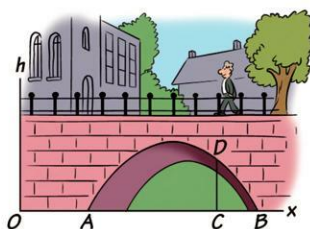
figuur 3.40

Bij de tunnel in figuur 3.41 hoort de formule

$h = -0,25(x - 2,4)(x - 9,2)$ met x en h in meter.

a Bereken de breedte en de hoogte van de tunnel.

b In de tunnel is een scheidingswand met hoogte CD geplaatst op 1,8 meter afstand van het punt B . De tunnel heeft een lengte van 12 meter. Bereken de oppervlakte van de scheidingswand.



figuur 3.41

3.5 Grafieken veranderen

Stel de formule op van de parabool die ontstaat als je de parabool

$y = -2x^2 + 3$ met -5 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as.

De parabool $y = -2x^2 + 3$ wordt verschoven.

Stel de formule op van de parabool die ontstaat na de verschuiving

a 2 omlaag

c 1 naar links en 8 omhoog

b 7 naar rechts

d 4 naar rechts en 3 omlaag

Schets van de volgende functies de grafiek.

a $f(x) = 5(x + 2)^2 - 7$

c $h(x) = -6x^2 - 4$

b $g(x) = -3(x - 1)^2 + 16$

d $k(x) = -6(x - 4)^2$

Herhaling

3.1 Kwadratische functies

1 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$.
 $f(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 3 \cdot (-4) + 2 = \frac{1}{2} \cdot 16 - 12 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2$

- Schrijf de formule van f op.
- Toon met een berekening aan dat $f(-6) = f(0)$.
- De x -coördinaat x_{top} van de top van de grafiek van f is het getal midden tussen -6 en 0 .
Bereken x_{top} en vervolgens y_{top} .
- Teken de grafiek van f . Maak een tabel met zeven punten. Zet x_{top} als middelste x -waarde in de tabel.
- Om te controleren of het punt $A(10, 82)$ op de grafiek van f ligt, ga je na of $f(10) = 82$.
Bereken $f(10)$. Ligt A op de grafiek van f ?

Geldt bij een kwadratische functie dat $f(-6) = f(0)$, dan is

$$x_{\text{top}} = \frac{-6 + 0}{2}.$$

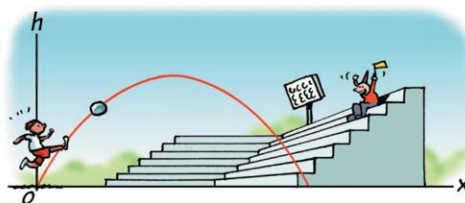
Gebruik x_{top} als middelste x -waarde bij het maken van de tabel.

2 Virgil heeft een bal weggetrapt. De hoogte van de bal wordt gegeven door de functie $f(x) = -0,03x^2 + 1,5x$. Hierbij zijn de hoogte $f(x)$ en de horizontale afstand x van de bal tot Virgil in meter.

Bij $x = 15$ is de hoogte van de bal

$$f(15) = -0,03 \cdot 15^2 + 1,5 \cdot 15 = 15,75 \text{ meter.}$$

- Bereken de hoogte van de bal bij $x = 20$.
- Reken na dat de hoogte van de bal bij $x = 35$ gelijk is aan die bij $x = 15$.
- Hoe volgt uit vraag b dat de hoogte van de bal maximaal is bij $x = 25$? Bereken de maximale hoogte van de bal.
- Bereken $f(50)$. Hoe ver van Virgil komt de bal op de grond?



figuur 3.42

3.2 De top van de grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$

3 De x -coördinaat van de top van de grafiek van

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ bereken je met } x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}.$$

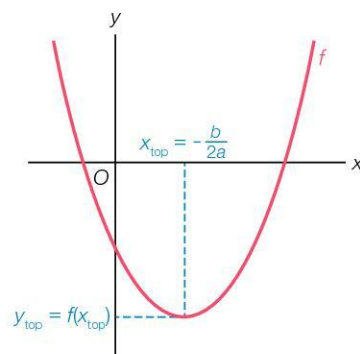
Bij $f(x) = 1,2x^2 - 7,2x + 4,8$ krijg je $x_{\text{top}} = -\frac{-7,2}{2 \cdot 1,2} = 3$.

Verder is $y_{\text{top}} = f(x_{\text{top}})$.

- Bereken y_{top} .

Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van

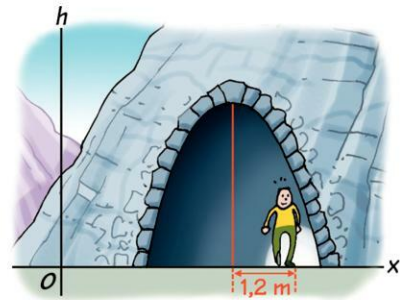
- $g(x) = 0,5x^2 - 2x - 2$
- $h(x) = -3,2x^2 + 16x - 8,3$
- $k(x) = 0,1x^2 + 5x - 20$.



figuur 3.43

- 4 Bij de tunnel in figuur 3.44 hoort de formule $h = -0,65x^2 + 5,2x - 7,8$. Hierin zijn x en h in meter.

- a Bereken x_{top} en de hoogte van de tunnel.
 b Rob loopt zonder zijn hoofd te stoten 1,2 meter rechts van het midden door de tunnel.
 Welke x hoort hierbij? Wat weet je van de lengte van Rob?



figuur 3.44

3.3 Kwadratische vergelijkingen

- 5 Bij ontbinden in factoren komen twee situaties voor.

1 De gemeenschappelijke factor buiten haakjes brengen

$$x^2 - 8x = x(x - 8)$$

de gemeenschappelijke factor is x

2 De product-som-methode

$$x^2 - 5x - 14 = (x + 2)(x - 7)$$

zoek twee getallen met product -14 en som -5

Ontbind in factoren.

- a $x^2 - 5x$ d $x^2 + 5x - 24$
 b $3x^2 + x$ e $x^2 - x - 42$
 c $x^2 - 13x - 14$ f $x^2 - 11x + 30$

product -14		som
1	-14	-13
-1	14	13
2	-7	-5
-2	7	5

- 6 De vergelijking $x^2 - 5x - 14 = 0$ los je op door eerst het linkerlid te ontbinden in factoren. Daarbij gebruik je de tabel van -14.

Je krijgt $(x + 2)(x - 7) = 0$.

Vervolgens pas je toe: $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

Dus $x + 2 = 0 \vee x - 7 = 0$, oftewel $x = -2 \vee x = 7$.

Los op.

- a $x^2 - 5x - 14 = 0$ d $(2x + 6)(x - 4) = 0$
 b $x^2 + 3x + 2 = 0$ e $x^2 - 4x = 0$
 c $x^2 + x - 12 = 0$ f $5x^2 + x = 0$

- 7 De vergelijking $x(x - 3) = 40$ los je als volgt op.

$$x(x - 3) = 40$$

$$x^2 - 3x = 40$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$(x + 5)(x - 8) = 0$$

$$x + 5 = 0 \vee x - 8 = 0$$

$$x = -5 \vee x = 8$$

werk de haakjes weg

maak het rechterlid 0

ontbind het linkerlid in factoren

pas toe: $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$

Los op.

- a $x^2 = 8x$ d $(x - 1)(x + 3) = 21$
 b $x^2 = 2x + 15$ e $(x - 1)(x + 4) = 6x$
 c $x(x - 2) = 48$ f $3x^2 = 18x$

8

9

10

11

- a Om de vergelijking $3x^2 + 3x - 6 = 0$ op te lossen, deel je eerst alle termen door 3. Je krijgt $x^2 + x - 2 = 0$. Vervolgens kun je het linkerlid ontbinden in factoren. Los de vergelijking $3x^2 + 3x - 6 = 0$ op.
- b Los de vergelijking $-x^2 - 7x + 18 = 0$ op. Deel eerst alle termen door -1.

Los op.

- a $0,5x^2 - 3x - 20 = 0$
- b $-2x^2 - 6x + 8 = 0$
- c $(p - 5)(3p - 5) = p - 11$
- d $0,1a^2 + 2,4 = a$

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 6x - 7$.

- a $f(x) = 0$ geeft $x^2 - 6x - 7 = 0$.
Los deze vergelijking op en schrijf de coördinaten op van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
- b Bereken $f(0)$. In welk punt snijdt de grafiek van f de y -as?

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x -as en de y -as.

- a $f(x) = x^2 - 12x$
- b $g(x) = x^2 + 2x - 35$
- c $h(x) = x^2 - 2x - 48$
- d $k(x) = 3x^2 - 21x$

3.4 De functie $f(x) = a(x - d)(x - e)$

- 12 De grafiek van $f(x) = \frac{1}{5}(x + 8)(x - 2)$ hiernaast snijdt de x -as in de punten $A(-8, 0)$ en $B(2, 0)$.

Hieruit volgt $x_{\text{top}} = \frac{-8 + 2}{2} = -3$ en

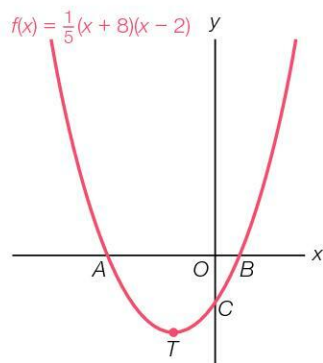
$$y_{\text{top}} = f(-3) = \frac{1}{5}(-3 + 8)(-3 - 2) = \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot -5 = -5.$$

Dus de top is het punt $T(-3, -5)$.

Omdat $f(0) = \frac{1}{5}(0 + 8)(0 - 2) = \frac{1}{5} \cdot 8 \cdot -2 = -3\frac{1}{5}$, snijdt de grafiek van f de y -as in het punt $C(0, -3\frac{1}{5})$.

Schrijf van de grafieken van de volgende functies uit het hoofd de coördinaten op van de snijpunten met de x -as, en bereken de coördinaten van de top en van het snijpunt met de y -as.

- a $f(x) = 5(x - 6)(x + 8)$
- b $g(x) = -(x + 3)(x + 15)$
- c $h(x) = -\frac{1}{8}(x - 6)(x + 20)$
- d $k(x) = 8x(x - 15)$



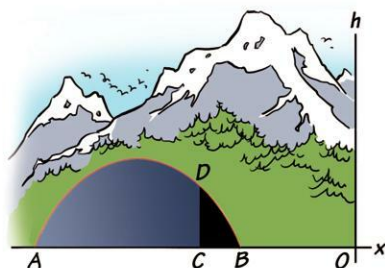
figuur 3.45

- 13** Bij de tunnel in figuur 3.46 hoort de formule $h = -0,2(x + 10,8)(x + 3,4)$. Hierin zijn x en h in meter.

- Schrijf de x -coördinaten op van de punten A en B . Hoe breed is de tunnel?
- Bereken x_{top} en bereken de hoogte van de tunnel in meter. Rond af op twee decimalen.

In de tunnel is een scheidingswand met hoogte CD aangebracht op 1,4 meter van het punt B .

- Waarom is $x_C = -4,8$?
- Bereken de hoogte CD van de scheidingswand.



figuur 3.46

3.5 Grafieken veranderen

- 14** Vermenigvuldig je de parabool $y = -2x^2 + 7$ ten opzichte van de x -as met 10, dan krijg je de parabool $y = 10(-2x^2 + 7)$ oftewel $y = -20x^2 + 70$.

- De parabool $y = 3x^2 - 7$ wordt met 5 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as.
Stel de formule op van de parabool die je dan krijgt.
- De parabool $y = -5x^2 + x - 3$ wordt met -1 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as.
Stel de formule op van de parabool die je dan krijgt.

- 15** Hieronder zie je hoe de formule van $y = 3x^2$ verandert bij het verschuiven van de grafiek.

$$y = 3x^2 \xrightarrow{6 \text{ omhoog}} y = 3x^2 + 6$$

$$y = 3x^2 \xrightarrow{6 \text{ naar rechts}} y = 3(x - 6)^2$$

$$y = 3x^2 \xrightarrow{6 \text{ naar links}} y = 3(x + 6)^2$$

Stel de formule op van de parabool die ontstaat na een verschuiving van de parabool $y = 5x^2$ van

- 6 omlaag
- 17 naar rechts
- 3 naar links en 4 omlaag
- 5 naar rechts en 2 omhoog

- 16** Van de grafiek van $f(x) = 4(x - 3)^2 - 9$ is de top het punt $(3, -9)$.
De grafiek is een dalparabool, want $a = 4$, dus $a > 0$.
Van de grafiek van $g(x) = -2(x + 1)^2 + 3$ is het punt $(-1, 3)$ de top.
De grafiek is een bergparabool, want $a = -2$, dus $a < 0$.

Schets van de volgende functies de grafiek. Denk aan het vermelden van de coördinaten van de top.

- $h(x) = 5(x - 7)^2 + 20$
- $k(x) = 0,1(x + 8)^2$
- $l(x) = 0,1x^2 + 8$
- $m(x) = -6(x + 3)^2 - 12$

Onderzoek Ontbinden voor gevorderden

Je weet dat je de kwadratische vergelijking $x^2 + 6x + 8 = 0$ kunt oplossen door het linkerlid te ontbinden in factoren met de product-som-methode. Je zoekt daarbij twee getallen met product 8 en som 6. Dat zijn 2 en 4. Zie de tabel van 8 hiernaast.

Je krijgt $(x + 2)(x + 4) = 0$, enzovoort.

Maar hoe ga je te werk bij een vergelijking als $x^2 - 2\frac{3}{4}x - 5 = 0$?

En hoe pak je vergelijkingen aan zoals $20x^2 - 12x + 1 = 0$ en $6x^2 + 17x + 5 = 0$? In dit onderzoek ontdek je dat je ook van deze vergelijkingen het linkerlid in factoren kunt ontbinden.

product 8		som
1	8	9
-1	-8	-9
2	4	6
-2	-4	-6

- 1** Je kunt de kwadratische vergelijking $x^2 + 3\frac{1}{3}x + 1 = 0$ oplossen door het linkerlid te ontbinden in factoren met de product-som-methode. Je zoekt twee getallen met product 1 en som $3\frac{1}{3}$. Dat zijn 3 en $\frac{1}{3}$. Zie de uitgebreide tabel van 1 hiernaast.

a Los de vergelijking $x^2 + 3\frac{1}{3}x + 1 = 0$ op.

Los op.

b $x^2 - 3\frac{1}{3}x + 1 = 0$

c $x^2 + 2\frac{1}{2}x + 1 = 0$

d $x^2 - 4\frac{1}{4}x + 1 = 0$

product 1		som
1	1	2
-1	-1	-2
2	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
-2	$-\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$
...	...	...

- 2** Los op. Maak eerst een uitgebreide tabel van -1.

a $x^2 + 1\frac{1}{2}x - 1 = 0$

b $x^2 + 2\frac{2}{3}x - 1 = 0$

c $x^2 - 3\frac{3}{4}x - 1 = 0$

- 3** Los op.

a $x^2 + 4\frac{1}{3}x + 4 = 0$

b $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$

c $x^2 - 2\frac{3}{4}x - 5 = 0$

- 4** Bij de kwadratische vergelijking $6x^2 + 5x + 1 = 0$ kun je het linkerlid ontbinden in factoren met een variant op de product-som-methode. Je krijgt $(2x + 1)(3x + 1) = 0$.

a Onderzoek hoe je aan deze ontbinding komt, en los de vergelijking $6x^2 + 5x + 1 = 0$ op.

Los op.

b $12x^2 + 7x + 1 = 0$

c $20x^2 - 12x + 1 = 0$

d $-35x^2 + 2x + 1 = 0$

+

In de vorige opgaven heb je varianten op de product-som-methode gebruikt om kwadratische vergelijkingen op te lossen. Maar lukt dat ook bij een vergelijking als $6x^2 + 17x + 5 = 0$? In de volgende opgaven ga je dit onderzoeken.

- 5 Lieke wil de kwadratische vergelijking $6x^2 + 17x + 5 = 0$ oplossen. Ze deelt daartoe eerst alle termen door 6, en probeert daarna het linkerlid te ontbinden in factoren met de product-som-methode. Tegen welk probleem loopt Lieke aan?

Er bestaat een **uitgebreide product-som-methode** waarmee je kwadratische vergelijkingen zoals die van Lieke in opgave 5 kunt oplossen. Om de uitgebreide product-som-methode te kunnen gebruiken, is het nodig dat je eerst uitdrukkingen als $2x(x+1) + 3(x+1)$ kunt ontbinden in factoren.

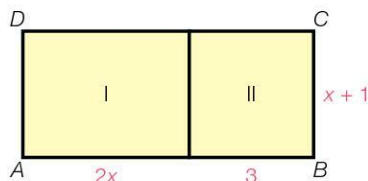
- 6 Zie rechthoek $ABCD$ in figuur 3.47. Rechthoek $ABCD$ is opgesplitst in de rechthoeken I en II.

a Hoe volgt uit de figuur dat

$$2x(x+1) + 3(x+1) = (2x+3)(x+1)?$$

Ontbind in factoren.

- b $2x(x-5) + 5(x-5)$ d $7x(2x+3) + 4(2x+3)$ figuur 3.47
c $2x(3x+4) - 5(3x+4)$ e $3x(4x-7) + 4x-7$



- 7 Hiernaast zie je hoe je $12x^2 + 6x + 5(2x+1)$ ontbindt in factoren.

Ontbind in factoren.

- a $6x^2 + 21x + 5(2x+7)$ c $x(5x-2) - 15x + 6$
b $2x - 1 - 5x(2x-1)$ d $4x(2x+1) - 2x - 1$

$$\begin{aligned} 12x^2 + 6x + 5(2x+1) &= \\ 6x(2x+1) + 5(2x+1) &= \\ (6x+5)(2x+1) \end{aligned}$$

- 8 Om $6x^2 + 17x + 5 = 0$ op te lossen met ontbinden in factoren, schrijf je $17x$ als $2x + 15x$. Zo krijg je $6x^2 + 17x + 5 = 0$

$$6x^2 + 2x + 15x + 5 = 0$$

$$2x(3x+1) + 5(3x+1) = 0$$

a Los de vergelijking verder op.

Als je $17x$ schrijft als $15x + 2x$ krijg je $6x^2 + 15x + 2x + 5 = 0$
 $3x(2x+5) + \dots = 0$

b Ga na dat je hiermee dezelfde oplossingen krijgt als bij vraag a.

In opgave 8 heb je de vergelijking $6x^2 + 17x + 5 = 0$ opgelost met ontbinden in factoren door $17x$ te schrijven als de som van $2x$ en $15x$. Hiernaast zie je hoe je aan de getallen 2 en 15 komt.

- 9 Los op met ontbinden in factoren.

- a $2x^2 + 11x + 5 = 0$
b $6x^2 - 19x + 15 = 0$
c $10x^2 + 11x - 6 = 0$
d $3x^2 - 16x - 35 = 0$

De uitgebreide product-som-methode

$$\begin{array}{c} 6x^2 + 17x + 5 = 0 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{som } 17 \\ \text{product } 6 \cdot 5 = 30 \end{array}$$

Zoek twee getallen met product 30 en som 17. Dat zijn de getallen 2 en 15.

Je krijgt $6x^2 + 17x + 5 = 0$

$$6x^2 + 2x + 15x + 5 = 0$$

$$2x(3x+1) + 5(3x+1) = 0$$

$$(2x+5)(3x+1) = 0$$

enzovoort

Statistiek en procenten

Van de vijf luchthavens in Nederland die passagiersvluchten verzorgen, is Schiphol veruit de grootste. In 1990 reisden 16 miljoen mensen via Schiphol, in 2000 waren dat er 23 miljoen meer, en in 2016 reisden zelfs vier keer zoveel mensen via Schiphol als in 1990. En dit aantal zal de komende jaren alleen nog maar toenemen.

Van een weiland in de Haarlemmermeerpolder waar in 1916 voor het eerst een vliegtuig landde, is Schiphol in honderd jaar uitgegroeid tot een luchthaven met 479 000 vluchten per jaar.

Wat leer je?

- Hoe je cijfermateriaal kunt combineren tot nieuwe informatie.
- Rekenen met grote getallen.
- Rekenen met procenten.
- Aflezen van en werken met gegevens uit tabellen en diagrammen.
- Dat diagrammen misleidend kunnen zijn.
- Rekenen met Excel.





es 2

Travel Clinic

Live life in the fast lane

PRISON

Baggage 12 13
Economy

16 | 1

Voorkennis Procenten

Theorie A Rekenen met procenten

27% betekent 27 van de 100.

Dus 27% van 813 betekent het $\frac{27}{100}$ deel van 813.

In plaats van $\frac{27}{100}$ kun je ook schrijven 0,27.

Dus 27% van 813 is $0,27 \times 813 = 219,51$.

Hoeveel is 16,8% van 720?

16,8% van 720 is $0,168 \times 720 = 120,96$.

- 1 Bereken.
- a 32% van 720 c 0,08% van 50 000
b 3,1% van 180 d 91,8% van 528 000
- 2 a In Nederland ligt 34 800 km fietspad. Hiervan ligt 14,5% in Noord-Brabant.
Hoeveel km fietspad ligt in Noord-Brabant? Rond af op honderdtallen.
b In 2016 ging 80,7% van de 17,0 miljoen Nederlanders op vakantie.
Van deze vakantiegangers ging 50,5% naar het buitenland.
Hoeveel Nederlanders gingen in 2016 naar het buitenland op vakantie? Rond af op duizendtallen.

Theorie B Percentages berekenen

Om te berekenen hoeveel procent 37 van 460 is, bedenk je het volgende.

460 is 100%, dus 1 is $\frac{1}{460} \times 100\%$ en 37 is $\frac{37}{460} \times 100\%$.

Dus 37 van 460 is $\frac{37}{460} \times 100\% \approx 8,0\%$.

Rond percentages af op één decimaal.



Hoeveel procent is 22,3 van 720?

22,3 van 720 is $\frac{22,3}{720} \times 100\% \approx 3,1\%$.

- 3 Hoeveel procent is
- a 92 van 305 c 0,3 van 17 e 832 van 7939
b 1,8 van 3,9 d 8 miljoen van 15 miljoen f 820 miljoen van 4 miljard
- 4 In het schooljaar 2015-2016 deden 35 828 leerlingen vwo-examen, 54 268 havo-examen en 108 016 vmbo-examen.
- a Hoeveel procent van deze examenkandidaten deed havo-examen?
b Van de havo-examenkandidaten slaagden er 48 067.
Hoeveel procent van de havo-examenkandidaten slaagde in 2015-2016 voor het examen?

4.1 Cijfermateriaal

0 1 Lees het artikel over Schiphol.

ARTIKEL

BEROEP

GESCHIEDENIS

INFORMATIE



Steeds meer mensen reizen via Schiphol

Er reizen steeds meer mensen via Schiphol. In 1985 werden er nog 11 miljoen passagiers via Schiphol vervoerd, in 1990 was dat aantal met 5 miljoen toegenomen. Ook in de periode 2000-2009 nam het aantal personen dat via Schiphol reisde met 5 miljoen toe, tot 44 miljoen. In 2016 reisden vier keer zoveel mensen via Schiphol als in 1990.



In het artikel komen veel getallen voor. Voor de overzichtelijkheid is het handig een tabel te maken.

a Neem de tabel over en vul hem verder in.

PASSAGIERS SCHIPHOL

jaar	1985	1990	2000	2009	2016
aantal in miljoenen					

- b Het aantal passagiers dat via Schiphol reisde, was in 2016 groter dan in 2000. Hoeveel scheelt het?
- c In 2016 waren er 479 000 vluchten van en naar Schiphol. Hoeveel passagiers werden er gemiddeld per vlucht van en naar Schiphol vervoerd?

Theorie A Informatie uit een artikel halen

Kranten staan vol artikelen waarin getallen een rol spelen. Door dit cijfermateriaal te combineren kun je vaak heel wat informatie uit zo'n artikel halen. Dat is echter lastig als de gegevens niet netjes geordend zijn. Het kan dan handig zijn de gegevens eerst in een tabel te zetten. Een tabel is overzichtelijker dan een stuk tekst.

In de volgende opgaven ga je naar aanleiding van een krantenartikel vragen beantwoorden. Ga daarbij als volgt te werk.

- Verdiep je in de situatie door het artikel aandachtig te lezen.
- Verwerk de gegevens op een ordelijke manier, bijvoorbeeld door een tabel te maken.
- Rond in het antwoord verstandig af. Kijk daarbij naar de nauwkeurigheid van de gegevens in het artikel.



2 Lees het artikel over de productie van olijven.

ARTIKEL

BEROEP

GESCHIEDENIS

INFORMATIE

Q

Productie olijven daalt

Vergeleken met 2016 is de wereldproductie van olijven in 2017 met 0,5 miljoen ton* gedaald tot 2,7 miljoen ton. Hiervan kwam 1,9 miljoen ton uit Europa. In 2016 kwam driekwart van de wereldproductie uit Europa. Van de Europese productie komt een groot deel uit Spanje. In 2017 produceerde Spanje 1,3 miljoen ton olijven. Dat was 0,1 miljoen ton minder dan in 2016. Italië produceerde in 2016 nog 0,5 miljoen ton olijven, een jaar later was dat gehalveerd.

*1 ton = 1000 kg



- a** Neem de tabel over en vul hem verder in.

PRODUCTIE OLIJVEN IN MILJOENEN TONNEN

jaar	wereld	Europa	Spanje	Italië
2016				
2017	2,7			

- b** Spanje produceerde in 2016 meer olijven dan Italië. Hoeveel ton meer?
- c** Kwam in 2017 meer of minder dan twee derde deel van de wereldproductie uit Europa?
- d** Om 1 liter olijfolie te maken, is 5 kg olijven nodig. Hoeveel liter olijfolie kan er met de wereldproductie van 2017 gemaakt worden?

3 Lees het volgende artikel uit de krant van 5 augustus 2018.

ARTIKEL

BEROEP

GESCHIEDENIS

INFORMATIE

Q

Profiel C&M in trek

Op Scholengemeenschap West kiezen maar liefst 41 van de 112 leerlingen (vorig jaar 116) het profiel C&M. Dat zijn er zes meer dan vorig jaar. Ook het profiel E&M scoort hoog, hoewel het dit jaar door drie leerlingen minder is gekozen dan vorig jaar. Voor de profielen N&G en N&T is minder belangstelling. Beide profielen zijn door 21 leerlingen gekozen. Voor het profiel N&T zijn dat er acht minder dan vorig jaar.

- a** Maak een tabel bij het artikel.
- b** Hoeveel leerlingen hebben in 2018 een maatschappijprofiel gekozen?
- c** Hoeveel leerlingen hebben in 2017 een natuurprofiel gekozen?

ARTIKEL	BEROEP	GESCHIEDENIS	INFORMATIE
---------	--------	--------------	------------

Recordomzet fietsenbranche

De omzet uit de verkoop van nieuwe fietsen is in 2017 voor het vijfde jaar op rij gestegen. In 2017 kwam de totale omzet van de fietsenbranche uit op 976 miljoen euro. Dat is 39 miljoen euro meer dan het jaar ervoor. De recordomzet is vooral te danken aan de populariteit van de e-bike. In 2017 werden er 294 duizend e-bikes verkocht, goed voor een omzet van 574 miljoen euro. In 2016 was deze omzet 40 miljoen euro minder. Er werden dat jaar 271 duizend e-bikes verkocht. Het totale aantal verkochte fietsen in 2017 was 957 duizend. Dat is een toename van 29 duizend vergeleken met 2016.

- Hoeveel fietsen werden er in 2016 in totaal verkocht?
- Hoeveel euro was de omzet van niet-elektrische fietsen in 2017?
- Was de gemiddelde verkoopprijs van een e-bike in 2017 hoger of lager dan in 2016? Hoeveel euro scheelt het?

Theorie B Rekenen met grote getallen

De getallen die in krantenartikelen voorkomen, zijn vaak zo groot dat ze niet in het venster van je rekenmachine passen. Je gebruikt dan de wetenschappelijke notatie. Zoals je weet is:

- duizend = $1000 = 10^3$ 3 nullen
- miljoen = $1\,000\,000 = 10^6$ 6 nullen
- miljard = $1\,000\,000\,000 = 10^9$ 9 nullen

Om 3,82 miljard op je rekenmachine in te voeren, gebruik je $3,82 \text{ miljard} = 3,82 \cdot 10^9$.

Om $8,5 \times 3,82$ miljard te berekenen, bereken je eerst $8,5 \times 3,82 = 32,47$. Dus $8,5 \times 3,82$ miljard = 32,47 miljard.

Bij berekeningen met grote getallen is de opdracht vaak ‘rond af op duizendtallen’, ‘rond af op miljoenen’ of ‘rond af op miljarden’.

- 83 617 afronden op duizendtallen geeft 84 000.
Je mag ook 84 duizend schrijven.
- 5 497 804 afronden op miljoenen geeft 5 000 000.
Je mag ook 5 miljoen schrijven.

Voorbeeld

- Bereken 325×214 miljoen. Rond af op miljarden.
2,4 miljard
- Bereken $\frac{2,4 \text{ miljard}}{30 \text{ miljoen}}$.

Uitwerking

- $325 \times 214 \text{ miljoen} = 69\,550 \text{ miljoen} = 69,55 \text{ miljard} \approx 70 \text{ miljard}$
- $\frac{2,4 \text{ miljard}}{30 \text{ miljoen}} = \frac{2400 \text{ miljoen}}{30 \text{ miljoen}} = 80$

38 275 afronden op duizendtallen geeft 38 duizend.
8 573 921 afronden op miljoenen geeft 9 miljoen.

- a** 45573 **c** 1622
b 987978 **d** 4678501

- a** 7462998 **c** 199938026
b 671224 **d** 199398620

- b** Bereken $\frac{7,6 \text{ miljard}}{8275}$. Rond af op duizendtallen.

- d** Bereken $\frac{8570 \text{ miljard}}{18.2 \text{ miljoen}}$. Rond af op duizendtallen.

- b** In 2015 dronken de 16,9 miljoen Nederlanders per dag gemiddeld 6,5 miljoen liter koffie. Hoeveel liter koffie dronk een Nederlander gemiddeld in 2015? Rond af op tientallen.

-
- A golden retriever dog is lying down on a light-colored floor, looking towards a white bowl. A grey and white cat is standing next to the dog, also looking at the bowl. In the background, there are white cabinets and a stack of colorful books.

- b** In de astronomie geeft men afstanden aan in lichtjaren. Een lichtjaar is de afstand die het licht in een jaar aflegt. De snelheid van het licht is 300 000 km/s. Hoeveel km is een lichtjaar? Rond af op miljarden.

- Wat was de gemiddelde wandelsnelheid tijdens een lange wandeling in 2016? Geef het antwoord in km per uur en rond af op één decimaal.

4.2 Tabellen

O 10 Zie de gegevens over het autogebruik in Nederland hiernaast. Door berekeningen te maken, krijg je nieuwe informatie.

- Bereken hoeveel miljard km alle Nederlandse auto's samen in 2016 hebben afgelegd.
- Bereken hoeveel km een Nederlandse auto in 2016 gemiddeld per dag heeft afgelegd.

Autogebruik in 2016

- Nederlandse auto's rijden gemiddeld 14 600 km per jaar.
- Er zijn 8,1 miljoen Nederlandse auto's.

Theorie A Informatie uit een tabel halen

In de tabel in het voorbeeld staan veel getallen. Door de gegevens uit de tabel te combineren, kun je de ontbrekende getallen berekenen. Soms kun je door het combineren van de gegevens uit een tabel nieuwe informatie verkrijgen.

Voorbeeld

In de tabel staat informatie over bioscopen in enkele provincies in 2015.

BIOSCOPEN IN 2015

provincie	aantal bioscopen	bioscoopdichtheid*	aantal inwoners
Drenthe	4	0,82	...
Gelderland	...	0,89	2 031 000
Limburg	13	...	1 118 000

*bioscoopdichtheid = aantal bioscopen per 100 000 inwoners

- Bereken het aantal inwoners van Drenthe in 2015.
- Bereken het aantal bioscopen in Gelderland in 2015.
- Bereken de bioscoopdichtheid van Limburg in 2015.

Uitwerking

- 0,82 bioscopen per 100 000 inwoners en 4 bioscopen, dus $\frac{4}{0,82} \cdot 100\,000 \approx 488\,000$ inwoners in Drenthe.
- 0,89 bioscopen per 100 000 inwoners en 2 031 000 inwoners, dus $\frac{0,89}{100\,000} \cdot 2\,031\,000 \approx 18$ bioscopen in Gelderland.
- 13 bioscopen per 1 118 000 inwoners, dus per 100 000 inwoners $\frac{13}{1\,118\,000} \cdot 100\,000 \approx 1,16$ bioscopen.

Je kunt ook een verhoudingstabel gebruiken. Bij vraag a krijg je

0,82	4
100 000	aantal
Dit geeft aantal = $\frac{4 \cdot 100\,000}{0,82}$.	

11 Zie de tabel met informatie over bioscopen in enkele provincies in 2015.

BIOSCOPEN IN 2015

provincie	aantal bioscopen	bioscoopdichtheid*	aantal inwoners
Groningen	4	0,69	...
Utrecht	...	1,10	1 268 000
Noord-Brabant	22	...	2 495 000

*bioscoopdichtheid = aantal bioscopen per 100 000 inwoners

- Bereken het aantal inwoners van Groningen in 2015.
- Bereken het aantal bioscopen in Utrecht in 2015.
- Bereken de bioscoopdichtheid van Noord-Brabant in 2015.

12 Zie de tabel met informatie over fietstochten in Nederland.

FIETSTOCHTEN IN NEDERLAND

jaar	fietskilometers* in miljarden	aantal fietstochten per persoon per dag	aantal inwoners in miljoenen
2005	14,4	0,82	16,3
2010	13,7	0,88	...
2015	15,0	0,72	16,9

*Met fietskilometers bedoelen we het totale aantal km dat alle Nederlanders samen in een jaar fietsen.

- Hoeveel kilometer fietste een Nederlander gemiddeld in 2015?
Rond af op gehelen.
- Hoeveel fietstochten maakten de Nederlanders samen in 2005?
Rond af op miljoenen.
- In 2010 was het totale aantal fietstochten van alle inwoners samen 5,33 miljard.
Bereken het aantal inwoners van Nederland in 2010. Rond af op honderdduizendtallen.

A 13 Zie de tabel hieronder.

BUNGALOWPARKEN IN 2017

provincie	aantal overnachtingen	aantal overnachtingen per gast	aantal gasten per park
Overijssel	2 155 000	4,6	2919
Noord-Holland	4 137 000	5,1	4358
Zuid-Holland	3 129 000	4,7	7264

- Bereken het totale aantal gasten van bungalowparken in Overijssel in 2017. Rond af op duizendtallen.
- Bereken het aantal parken in Noord-Holland in 2017.
- Bereken het gemiddelde aantal overnachtingen per park in Zuid-Holland in 2017. Rond af op duizendtallen.

4.3 Procentuele veranderingen

O 14 Bioscoop MovieManiac heeft zijn prijzen verhoogd. Vorig jaar betaalde je nog € 8,50 voor een bioscoopkaartje, dit jaar is dat toegenomen tot € 9,25.

- a Met hoeveel euro is de prijs van een bioscoopkaartje bij MovieManiac toegenomen vergeleken met vorig jaar?
- b Met hoeveel procent is de prijs van een bioscoopkaartje bij MovieManiac toegenomen vergeleken met vorig jaar?



Rond percentages af op één decimaal.

Theorie A Procentuele verandering

Bij subtropisch zwemparadijs De Dolfijn betaalde je vorig jaar € 15,95 voor een dagkaart. Dit jaar is dat € 16,75. Om te berekenen hoeveel procent de prijs is gestegen *vergeleken met de oude prijs*, bedenk je het volgende: OUD = 15,95, NIEUW = 16,75 en de toename is NIEUW – OUD = 16,75 – 15,95 = 0,80. Dit geeft

$$\text{procentuele prijsstijging} = \frac{0,80}{15,95} \times 100\% \approx 5,0\%.$$



Hoeveel is de verandering in procenten?

$$\text{procentuele verandering} = \frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\%$$

Bij een procentuele afname geeft deze formule een negatieve uitkomst. Wordt een jas van 130 euro aangeboden voor 98 euro,

$$\text{dan krijg je } \frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\% = \frac{98 - 130}{130} \times 100\% \approx -24,6\%.$$

Je vergelijkt met de oude prijs, dus je deelt door 130.

Aan het minteken zie je dat er een afname is. In het antwoord laat je dit minteken weg. Dus de procentuele afname is 24,6%.

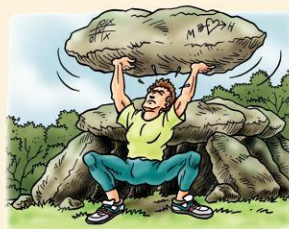
Voorbeeld

Fitness is een populaire sport die door jong en oud wordt beoefend. In 2017 waren er 1696 fitnesscentra in Nederland, waarvan 55 in Drenthe. In 2008 telde ons land 1463 fitnesscentra. Hiervan was 4,4% in Drenthe.

- a Met hoeveel procent is het aantal fitnesscentra in Nederland toegenomen in de periode 2008-2017?
- b Hoeveel procent van de fitnesscentra was in 2017 in Drenthe?
- c Is het aantal fitnesscentra in Drenthe toe- of afgenomen in de periode 2008-2017? Met hoeveel procent?

Uitwerking

- a $\frac{1696 - 1463}{1463} \times 100\% \approx 15,9\%$, dus de toename is 15,9%.
- b percentage = $\frac{55}{1696} \times 100\% \approx 3,2\%$
- c aantal in 2008 = $0,044 \times 1463 \approx 64$
 $\frac{55 - 64}{64} \times 100\% \approx -14,1\%$, dus afgenomen met 14,1%.



- 15 In 2017 telde ons land 1696 fitnesscentra, waarvan 198 in Gelderland. In 2011 waren er in totaal 1652 fitnesscentra, waarvan 12,7% in Gelderland.
 - a Met hoeveel procent is het aantal fitnesscentra in Nederland toegenomen in de periode 2011-2017?
 - b Hoeveel procent van de fitnesscentra was in 2017 in Gelderland?
 - c Is het aantal fitnesscentra in Gelderland toe- of afgenomen in de periode 2011-2017? Met hoeveel procent?

- 16 Op een school zaten voor de zomervakantie 1480 leerlingen, waarvan 828 in de onderbouw en de rest in de bovenbouw. Na de zomervakantie had de school 1569 leerlingen, waarvan 1012 in de onderbouw.

- a Hoeveel procent van de leerlingen zat na de zomervakantie in de onderbouw?
- b Met hoeveel procent is het totale aantal leerlingen toegenomen?
- c Bereken de relatieve afname van het aantal bovenbouwleerlingen.

In plaats van procentuele verandering zeg je ook wel relatieve verandering.



- A 17 In 2017 waren er in Nederland 799 000 schapen. In 2000 waren dat er nog 1 305 000.
 - a Hoeveel procent is de afname in deze 17 jaar?

In dezelfde periode nam het aantal bedrijven met schapen af met 9140. Na deze afname waren er nog 8434 over.

- b Met hoeveel procent is het aantal bedrijven met schapen afgenomen in 2017 vergeleken met 2000?
- c Is het gemiddelde aantal schapen per bedrijf toe- of afgenomen in de periode 2000-2017? Met hoeveel procent?

- A 18** De tabel gaat over de vijf luchthavens in Nederland die passagiersvluchten verzorgen.

AANTALLEN PASSAGIERS LUCHTHAVENS NEDERLAND

vliegveld	2015	2016
Luchthaven Schiphol	58 245 291	63 526 363
Eindhoven Airport	4 331 658	4 736 205
Rotterdam The Hague Airport	1 692 406	1 683 863
Maastricht Aachen Airport	195 180	176 562
Groningen Airport Eelde	180 879	152 451

- Met hoeveel procent is het aantal passagiers op Eindhoven Airport toegenomen?
- Met hoeveel procent is het aantal passagiers op Maastricht Aachen Airport afgenomen?
- Hoeveel procent van de passagiers in 2016 reisde via Luchthaven Schiphol?
- Bereken de absolute en de relatieve toename van het totale aantal passagiers.

- 19** Bij de verkiezingen van 2017 kreeg het CDA 12,4% van de stemmen en de SP 9,1%. Het CDA kreeg dus $\frac{12,4 - 9,1}{9,1} \times 100\% \approx 36,3\%$ meer stemmen dan de SP.

In 2017 kreeg de VVD 21,2% van de stemmen. Bij de verkiezingen van 2012 was dit nog 26,6%. Mark zegt: 'Dat is een procentuele afname van 5,4%'. Geert is het hier niet mee eens. Volgens hem is de procentuele afname 20,3%.

- Wie heeft er gelijk? Licht toe.

Om verwarring te voorkomen, werkt men bij het vergelijken van percentages met **procentpunten**. In het voorbeeld hierboven is het aandeel van de VVD met 5,4 procentpunt gedaald.

In 2012 haalde GroenLinks 2,3% van de stemmen. Bij de verkiezingen van 2017 steeg dit aandeel met 6,8 procentpunt.

- Bereken de procentuele toename.

In 2012 waren er 12,7 miljoen stemgerechtigden. De opkomst was toen 74,6%. In 2017 waren er 12,9 miljoen stemgerechtigden en was de opkomst 81,3%.

- Bereken de procentuele toename van het aantal stemmen voor GroenLinks.
- In 2012 stemden 950 000 mensen op de PVV en in 2017 waren dat er 1,36 miljoen.
Met hoeveel procentpunt is het aandeel van de PVV gestegen?

4.4 Vermenigvuldigingsfactor

0 20 Een hoeveelheid van 5000 wordt 1,38 keer zo groot.

- a Bereken de nieuwe hoeveelheid.
- b Bereken de procentuele toename. Wat valt je op?

Een hoeveelheid van 3000 neemt toe met 26%.

- c Met welk getal moet je 3000 vermenigvuldigen om de nieuwe hoeveelheid te krijgen?

Theorie A Vermenigvuldigingsfactor

Procentuele toename

Een ledlamp van € 7,25 wordt 16% in prijs verhoogd.

De nieuwe prijs is $7,25 + 0,16 \times 7,25 = 8,41$ euro.

Je kunt deze berekening korter maken.

$$\underbrace{100\% + 16\%}_{\text{oude prijs} \quad \text{toename} \quad \text{nieuwe prijs}} = 116\%, \text{ dus } \times 1,16.$$

$$\text{Dus NIEUW} = 1,16 \times \text{OUD}.$$

Het getal 1,16 heet de **vermenigvuldigingsfactor** bij een procentuele toename van 16%. En zo hoort bij een procentuele toename van 5,3% de vermenigvuldigingsfactor 1,053.

Omgekeerd hoort bij de vermenigvuldigingsfactor 1,132 een procentuele toename van 13,2%.

$$\begin{aligned} &5,3\% \text{ erbij geeft} \\ &100\% + 5,3\% = 105,3\% \\ &\text{dus } \times 1,053. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times 1,132, \text{ dus } 113,2\% \\ &113,2\% - 100\% = 13,2\% \end{aligned}$$

Procentuele afname

Neemt een hoeveelheid met 12% af, dan houd je

$$100\% - 12\% = 88\% \text{ over, dus } \times 0,88.$$

$$\text{Dus NIEUW} = 0,88 \times \text{OUD}.$$

Bij een afname van 12% hoort dus de vermenigvuldigingsfactor 0,88. En bij een afname van 2,3% hoort de vermenigvuldigingsfactor 0,977.

Omgekeerd hoort bij de vermenigvuldigingsfactor 0,75 een procentuele afname van 25%. En bij de vermenigvuldigingsfactor 0,952 hoort een procentuele afname van 4,8%.

$$\begin{aligned} &2,3\% \text{ eraf geeft} \\ &100\% - 2,3\% = 97,7\% \\ &\text{dus } \times 0,977. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times 0,952, \text{ dus } 95,2\% \\ &100\% - 95,2\% = 4,8\% \end{aligned}$$

Bij een toename van 8% hoort de vermenigvuldigingsfactor 1,08, dus NIEUW = 1,08 × OUD.

Bij een afname van 3% hoort de vermenigvuldigingsfactor 0,97, dus NIEUW = 0,97 × OUD.

Houd je bij de opgaven aan de volgende vuistregels.

Vuistregels bij procentberekeningen

- Rond percentages af op één decimaal.
- Geef NIEUW en OUD in dezelfde nauwkeurigheid.

Voorbeeld

- a** In 2010 waren er in Nederland 12,8 miljoen saunabezoeken. In 2016 was dat 22,7% meer. Bereken het aantal saunabezoeken in Nederland in 2016.
- b** In 2010 ging een saunabezoeker gemiddeld 10,3 keer naar de sauna. In 2016 was dat 13,6% minder. Bereken hoeveel keer een saunabezoeker in 2016 gemiddeld naar de sauna ging.



Uitwerking

- a** 22,7% toename, dus $\times 1,227$.
Het aantal saunabezoeken in Nederland in 2016 was $1,227 \times 12,8 \approx 15,7$ miljoen.

Geef NIEUW in dezelfde nauwkeurigheid als OUD.

- b** 13,6% afname, dus $\times 0,864$.
In 2016 ging een saunabezoeker gemiddeld $0,864 \times 10,3 \approx 8,9$ keer naar de sauna.

$$100\% - 13,6\% = 86,4\%$$

21 Geef de vermenigvuldigingsfactor bij een procentuele

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a toename van 15% | e afname van 51% | i afname van 0,53% |
| b toename van 43% | f toename van 0,5% | j afname van 25% |
| c afname van 15% | g afname van 5,1% | k toename van 125% |
| d toename van 4,3% | h toename van 100% | l toename van 400% |

22 Geef de procentuele verandering bij de volgende vermenigvuldigingsfactoren.

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| a 1,518 | e 0,946 | i 0,5 |
| b 1,027 | f 0,086 | j 0,05 |
| c 3,8 | g 1,5 | k 0,1 |
| d 0,46 | h 5 | l 1,004 |

- 23 a** In 2017 kostte een digitale camera € 205,80. Een jaar later was de prijs met 28% gedaald. Hoeveel was de prijs in 2018?
- b** Op 1 juli 2017 telde klimvereniging KlimKracht 173 leden. Een jaar later was dat aantal toegenomen met 6,9%. Bereken het aantal leden op 1 juli 2018.
- c** Mo koopt een nieuwe auto van 23 750 euro. Een jaar later is de waarde van de auto met 9,5% gedaald. Hoeveel is de auto een jaar na de aankoop nog waard?

Rond geldbedragen af op centen. Rond aantallen af op gehelen.



- A 24** a Op 31 december 2015 waren er 9368 elektrische auto's in Nederland. Een jaar later waren dat er 39,9% meer.

Bereken het aantal elektrische auto's op 31 december 2016.

- b Mede vanwege de nadelige gevolgen is de aardgaswinning in Nederland de laatste jaren teruggebracht. Werd in 2014 nog 69,7 miljard m³ aardgas gewonnen, een jaar later was dat 24,8% minder.

Hoeveel m³ aardgas werd in 2015 gewonnen in Nederland?



De winning van aardgas in de provincie Groningen heeft een toename van het aantal aardbevingen in het gebied veroorzaakt.

- A 25** In 2014 was de wereldproductie van koffie 8,94 miljoen ton. In 2017 was dat 6,6% meer. Brazilië is het grootste koffieproducerende land ter wereld. In 2014 werd 35,1% van de koffie in Brazilië geproduceerd, in 2017 was dat 32,4%. Met hoeveel procent is de koffieproductie van Brazilië in 2017 afgenomen vergeleken met 2014?

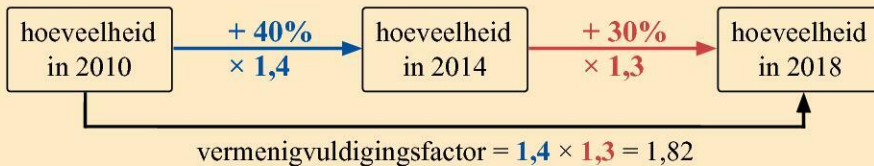
- O 26** In 1995 ondervonden 200 000 Nederlandse huishoudens geluidshinder. Uit onderzoek blijkt dat het aantal huishoudens dat geluidshinder ondervond zowel in de periode 1995-2005 als in de periode 2005-2015 met 50% toenam. Volgens Irma is het aantal in de periode 1995-2015 dan met 100% toegenomen.

Welke fout maakt Irma?



Theorie B Procent op procent

Neemt een hoeveelheid in de periode 2010-2014 met 40% toe en in de periode 2014-2018 met 30%, dan bereken je de procentuele verandering in de periode 2010-2018 als volgt.



Omdat $1,4 \times 1,3 = 1,82$ is de procentuele toename in de periode 2010-2018 gelijk aan 82%.

En zo krijg je bij een afname van 40% gevolgd door een afname van 30% de vermenigvuldigingsfactor $0,6 \times 0,7 = 0,42$. Dus de totale procentuele afname is 58%.

Voorbeeld

Vergeleken met 2014 nam het aantal leden van de Nederlandse Boksbond in 2015 met 5,1% af. Een campagne zorgde ervoor dat het aantal leden in 2016 toenam met maar liefst 45,4% vergeleken met 2015. Bereken de procentuele verandering van het aantal leden in de periode 2014-2016.



Uitwerking

5,1% afname, dus $\times 0,949$.

45,4% toename, dus $\times 1,454$.

Bij de periode 2014-2016 hoort de factor $0,949 \times 1,454 = 1,3798...$

Dus de procentuele toename is 38,0%.

- 27** a In de periode 2009-2013 is een artikel 18,3% duurder geworden. In de periode 2013-2018 was de prijstoename 33,6%. Bereken de procentuele toename in de periode 2009-2018.
- b In de periode 2010-2012 is een artikel 8,3% goedkoper geworden. In de periode 2012-2017 was de prijsafname 42,6%. Bereken de procentuele afname in de periode 2010-2017.

- 28** a In 2015 werd door de Nederlandse binnenvaart 2,8% minder goederen aangevoerd dan in het jaar ervoor. In 2016 was de aanvoer met 3,8% toegenomen vergeleken met 2015. Bereken de procentuele verandering in de periode 2014-2016.
- b Het aantal landbouwbedrijven neemt in Nederland al jaren af. In 2015 waren er nog 63 913 landbouwbedrijven in ons land. Een jaar later was dat aantal afgenomen met 12,9%. In 2017 was de afname 1,5% vergeleken met 2016. Bereken het aantal landbouwbedrijven in Nederland in 2017.

- A 29** a In 2014 vonden er 6 489 000 toeristische overnachtingen door Nederlanders op de Veluwe plaats. In 2015 waren dat er 14,8% meer. Van de overnachtingen in 2014 werd 11,1% in een hotel doorgebracht. Een jaar later was dat 12,3%. Met hoeveel procent is het aantal toeristische overnachtingen door Nederlanders in een hotel op de Veluwe in 2015 toegenomen, vergeleken met 2014?
- b Zie de tabel.

AFNAME WINKELS IN NEDERLAND

periode	2008-2010	2010-2012	2012-2014	2014-2016
afname	1,7%	1,5%	2,9%	3,8%

Bereken met hoeveel procent het aantal winkels in Nederland is afgenomen in de periode 2008-2016.

4.5 Rekenen met procenten

0 30 In de periode 1995-2015 is het aantal woningen in Amersfoort met 50% toegenomen tot 65 000. Volgens Rob waren er in 1995 dus 50% minder woningen dan in 2015, dus volgens hem is het aantal woningen in 1995 de helft van dat in 2015. Welke fout maakt Rob?



Theorie A OUD berekenen bij procentuele toe- of afname

Een fiets wordt 12% duurder. De nieuwe prijs is 588 euro.

Om de oude prijs te berekenen, bedenk je dat

$$1,12 \times \text{OUD} = \text{NIEUW}$$

$$1,12 \times \text{OUD} = 588$$

$$\text{OUD} = \frac{588}{1,12} = 525, \text{ dus de fiets kostte 525 euro.}$$

Let goed op het verschil tussen de volgende berekeningen.

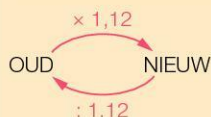
Procentuele toename van 12%

Je weet OUD.

Je krijgt NIEUW met $\text{NIEUW} = 1,12 \times \text{OUD}$.

Je weet NIEUW.

Je krijgt OUD met $\text{OUD} = \frac{\text{NIEUW}}{1,12}$.



Een fototoestel wordt 8% goedkoper. De nieuwe prijs is 230 euro.

Om de oude prijs te berekenen, bedenk je dat

$$0,92 \times \text{OUD} = \text{NIEUW}$$

$$0,92 \times \text{OUD} = 230$$

$$\text{OUD} = \frac{230}{0,92} = 250, \text{ dus het fototoestel kostte 250 euro.}$$

Procentuele afname van 8%

Je weet OUD.

Je krijgt NIEUW met $\text{NIEUW} = 0,92 \times \text{OUD}$.

Je weet NIEUW.

Je krijgt OUD met $\text{OUD} = \frac{\text{NIEUW}}{0,92}$.



Voorbeeld

Een boek wordt in de uitverkoop met 30% korting aangeboden voor € 14,70.

Hoeveel kostte het boek eerst?

Aanpak



Je weet NIEUW, dus gebruik $OID = \frac{NIEUW}{0,7}$.

Uitwerking

30% korting, dus factor 0,7.

De oude prijs is $\frac{14,70}{0,7} = 21$ euro.

- 31**
- a** Een artikel wordt 8% duurder en kost nu € 36.
Bereken de oude prijs.
 - b** Een artikel van € 25 wordt 8% duurder.
Hoeveel is de nieuwe prijs?
 - c** Een rekenmachine kost € 54 inclusief 21% btw.
Hoeveel is de prijs exclusief btw?
 - d** Een computer wordt 12% in prijs verlaagd.
De nieuwe prijs is € 1750.
Hoeveel is de oude prijs?



- 32**
- a** Het aantal discotheken in Nederland is sinds 2012 met 23% gedaald tot 174 in 2017.
Bereken het aantal in 2012.
 - b** De omzet van webwinkels in 2017 was 22,5 miljard euro.
Dit was 13% meer dan in 2016.
Bereken de omzet van webwinkels in 2016.
 - c** In 2017 werden 62 400 nieuwbouwwoningen opgeleverd.
Dat waren er 13,8% meer dan in 2016.
Hoeveel nieuwbouwwoningen werden er in 2016 opgeleverd?
 - d** In 2016 was de Nederlandse export van quinoa 3,5 miljoen kg. Dat was een toename van 150% vergeleken met 2012.
Bereken de Nederlandse export van quinoa in 2012.
 - e** Het aantal leden van de Nederlandse Bowling Federatie is in vier jaar tijd met 19,5% gedaald.
In 2016 had de Nederlandse Bowling Federatie 9928 leden.
Bereken het aantal leden in 2012.



A 33 In 2016 trokken de Nederlanders er 35,5 miljoen keer op uit voor een korte of lange vakantie. Dat is een toename van 16,4% vergeleken met het jaar 2000.

Het aantal vakanties in eigen land nam in de periode 2000-2016 met 6,0% toe. In 2000 brachten de Nederlanders 16,6 miljoen vakanties door in eigen land.

- a** Hoeveel keer gingen de Nederlanders in 2000 in totaal op vakantie?
- b** Hoeveel keer gingen de Nederlanders in 2016 op vakantie naar het buitenland?

A 34 Het aantal autovakanties naar het buitenland steeg in de periode 1990-2000 met 15,2%. In de periode 2000-2016 nam het aantal autovakanties naar het buitenland met 27,6% toe, tot 9,7 miljoen.

- a** Bereken het aantal autovakanties naar het buitenland in 1990.

In 1990 was de gemiddelde duur van een buitenlandse vakantie 12,7 dagen. In de periode 1990-2000 nam die duur met 7,1% af. In de periode 2000-2016 was de afname 5,9%.

- b** Bereken de gemiddelde vakantieduur van een buitenlandse vakantie in 2016.

In de periode 1990-2000 nam het aantal vliegvakanties met maar liefst 88,8% toe. In de periode 2000-2016 was de toename 62,0%.

- c** In 2016 waren er meer vliegvakanties dan in 1990. Hoeveel procent meer?

35 John heeft in aandelen belegd. Hij heeft berekend dat zijn aandelen over vijf jaar 3000 euro waard zijn, bij een jaarlijks rendement van 3,7%.

Welk bedrag heeft John belegd? Rond af op honderdtallen.

O 36 Van de fietspaden in Nederland ligt 8,1% in de provincie Overijssel. Dat komt overeen met 2800 km.

Onderzoek of er in totaal meer of minder dan 35000 km fietspad in Nederland ligt.



Theorie B Van DEEL naar TOTAAL

Op het Gauss College komen 307 leerlingen met het openbaar vervoer naar school. Dat is 23% van alle leerlingen.

Om het totale aantal leerlingen te berekenen, gebruik je 23% van het TOTAAL is 307.

$$0,23 \times \text{TOTAAL} = 307$$

$$\text{TOTAAL} = \frac{307}{0,23} \approx 1335$$

Van DEEL naar TOTAAL

18% van het TOTAAL is 153.

$$\text{TOTAAL} = \frac{153}{0,18} = 850$$

Een DEEL is 23% van het TOTAAL

Je weet TOTAAL.

Je krijgt DEEL met $\text{DEEL} = 0,23 \times \text{TOTAAL}$.

Je weet DEEL.

Je krijgt TOTAAL met $\text{TOTAAL} = \frac{\text{DEEL}}{0,23}$.



- 37 a** Op een dag vertrokken van Schiphol 147 KLM-toestellen. Dat was 40,5% van alle toestellen die opstegen. Hoeveel toestellen vertrokken die dag van Schiphol?
- b** De familie Jol krijgt een huurverhoging van € 15,30 per maand. Ze betalen nu 3,4% meer dan voorheen. Bereken de oude en de nieuwe huurprijs.
- 38 a** In 2017 was er 56 000 ha biologische landbouwgrond in Nederland. Dat was 3,2% van de totale landbouwgrond. Hoeveel ha landbouwgrond was er in 2017 in Nederland?
- b** In 2016 werden 271 000 nieuwe elektrische fietsen verkocht. Dat was 29,2% van het totale aantal verkochte nieuwe fietsen. Hoeveel nieuwe fietsen werden er in 2016 verkocht?

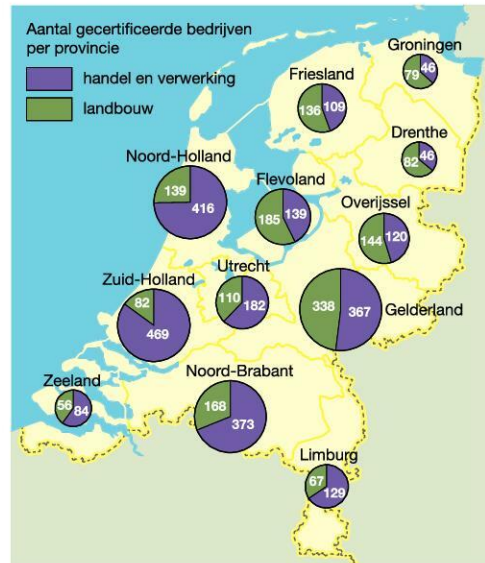
A 39 Van de Nederlandse vaarwegen ligt 42,3% in West-Nederland. Dat komt overeen met 2613 km. Van alle Nederlandse vaarwegen ligt 13,8% in de provincie Noord-Holland. Hoeveel km vaarweg ligt in Noord-Holland?

A 40 In 2016 waren er 92 vuurwerkslachtoffers minder dan in 2015. Dit is een afname van 15,8%. Bereken het aantal vuurwerkslachtoffers in 2016.

4.6 Diagrammen en procenten

O 41 Figuur 4.1 geeft informatie over het aantal biologische boerenbedrijven per Nederlandse provincie in 2016.

- Bereken in gehele graden de hoek van de sector landbouw van het cirkeldiagram dat hoort bij Friesland.
- De cirkeldiagrammen zijn in verschillende groottes getekend. Waarom is dat gedaan, denk je?
- Stefan maakt bij de gegevens van Limburg een staafdiagram. Uit hoeveel staven bestaat dit diagram?



figuur 4.1

Theorie A Grafische verwerking

Er zijn allerlei manieren om cijfermateriaal overzichtelijk in een figuur weer te geven. Hieronder staat een overzicht van de diagrammen die je in klas 2 hebt leren kennen.

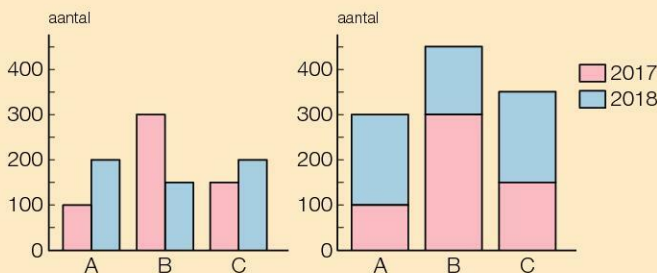
Beelddiagram

In een beelddiagram zijn de hoeveelheden aangegeven met figuurtjes.

Staafdiagram

Met een staafdiagram kun je onderzoeksresultaten onderling snel vergelijken. De staven staan los van elkaar.

In een **samengesteld staafdiagram** zijn er als het ware twee of meer staafdiagrammen in één figuur getekend. Daarbij kunnen de staven van de verschillende diagrammen zowel naast elkaar als op elkaar getekend zijn. Als de staven op elkaar zijn getekend, spreken we ook wel van een **stapeldiagram**. In het stapeldiagram hier rechtsonder kun je in één oogopslag de totalen van 2017 en 2018 met elkaar vergelijken.



Cirkeldiagram

Een cirkeldiagram geeft een goed beeld van een verdeling.

Lijndiagram

Een lijndiagram laat zien hoe een verschijnsel zich in de tijd heeft ontwikkeld.

Histogram

Een histogram is een staafdiagram bij een frequentietabel met waarnemingsgetallen. De staven staan tegen elkaar aan.

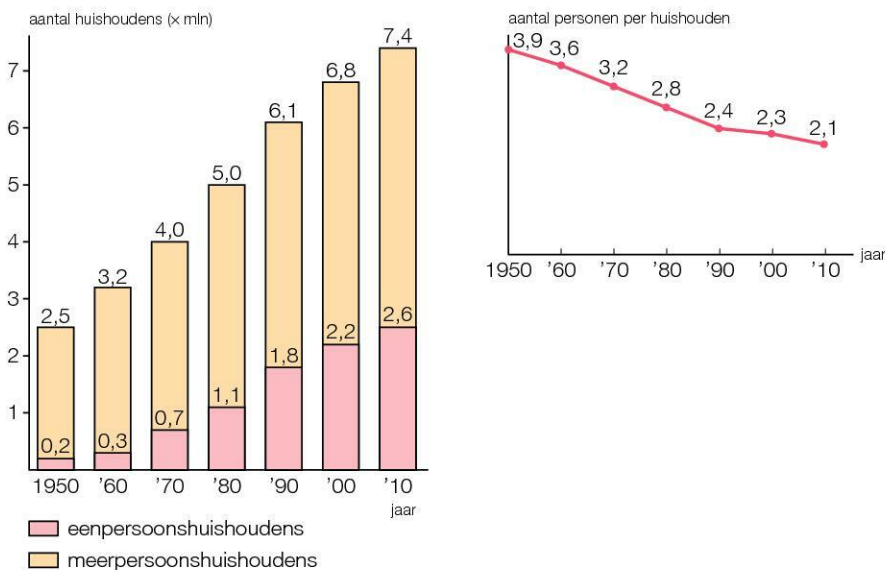
Steel-bladdiagram

In een steel-bladdiagram zijn alle waarnemingsgetallen overzichtelijk verwerkt. In het steel-bladdiagram hiernaast komt de leeftijd 65 drie keer voor.

LEEFTIJD

steel	blad
5	1 3
6	2 2 5 5 5 7
7	1 1 3 4 8 9
8	0 4 4 6
9	0 1 1 2
tientallen	eenheden

42 Figuur 4.2 geeft informatie over de Nederlandse bevolking.



figuur 4.2

- Welke soorten diagrammen zijn in figuur 4.2 getekend?
- Hoeveel meerpersoonshuishoudens waren er in 1990? En hoeveel in 2010?
- Met hoeveel procent is het aantal eenpersoonshuishoudens toegenomen in de periode 1980-2010?
- Hoeveel procent van de huishoudens bestond in 2010 uit één persoon?
- Met hoeveel procent is het aantal personen per huishouden afgenomen in de periode 1960-2010?
- Bereken het aantal inwoners van Nederland in 1970.

43 Welke manier van grafische verwerking kun je het best gebruiken bij de volgende onderzoeksresultaten? In sommige gevallen is er meer dan één mogelijkheid.

- a Het benzineverbruik van vijf merken auto's.
- b De jaarlijkse Nederlandse export naar Frankrijk in de afgelopen tien jaar.
- c De melkproductie van de landen van de EU in 2018.
- d De lengte die je ouders jaarlijks vanaf je geboorte op je verjaardag hebben gemeten.
- e De samenstelling van de Tweede Kamer in 2018 onderverdeeld naar politieke partijen.
- f De leeftijd van de docenten van je school.
- g De staatsuitgaven onderverdeeld naar ministerie.
- h De onderverdeling naar leeftijd van de leerlingen van je school.
- i Het aantal inwoners van Nederland in 1900, 1910, ..., 2010.
- j Het aantal fouten van de leerlingen van je klas in een toets bestaande uit 50 vierkeuzevragen.

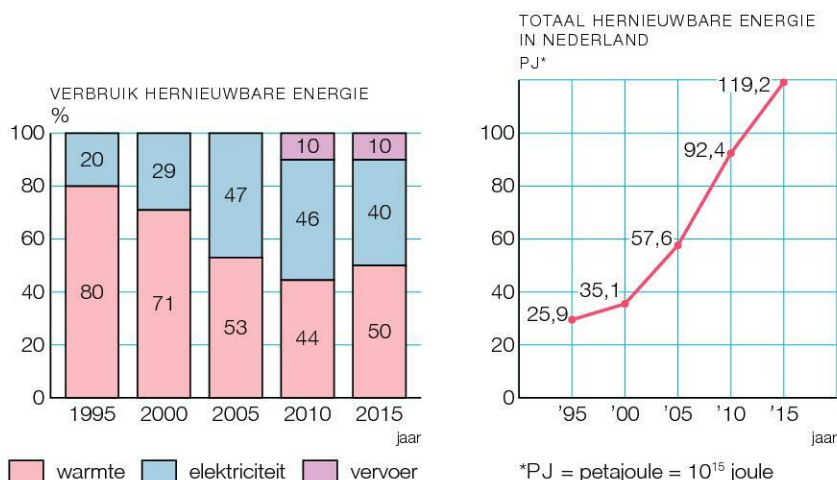
A 44 [**WERKBOEK**] De figuur hiernaast geeft informatie over bioscoopbezoek in Nederland.

- a Met hoeveel procent is het totale aantal bioscoopbezoeken gestegen in 2015 vergeleken met 2011?
- b Met hoeveel procent is het aantal bezoekers van een Nederlandse film in 2016 afgenomen vergeleken met 2014?
- c De lijndiagrammen hebben drie snijpunten. Waarom hebben deze snijpunten geen betekenis?
- d In 2014 zorgden de Nederlandse films voor een opbrengst uit kaartverkoop van 49,3 miljoen euro. Dat was 19,7% van de totale opbrengst uit kaartverkoop. Kostte in 2014 een kaartje voor een Nederlandse film gemiddeld meer of minder dan een kaartje voor een buitenlandse film?



figuur 4.3

A 45 Hernieuwbare energie is energie afkomstig van natuurlijke bronnen die praktisch onuitputbaar zijn, zoals windenergie, zonne-energie en waterkracht. De eenheid van energie is joule. Figuur 4.4 geeft informatie over hernieuwbare energie in Nederland.

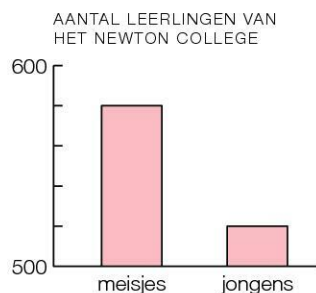


figuur 4.4

- Werd in 2010 meer of minder hernieuwbare energie verbruikt voor warmte dan in 2000? Hoeveel scheelt het?
- In 2015 was het aandeel van hernieuwbare energie in het totale energieverbruik in Nederland 5,84%. Hoeveel energie werd in 2015 in Nederland verbruikt?
- In 2005 werd meer hernieuwbare energie verbruikt voor elektriciteit dan in 2000. Hoeveel procent meer?
- Licht toe dat de volgende twee beweringen beide te verdedigen zijn.
 - Het verbruik van hernieuwbare energie voor elektriciteit was in 2015 meer dan in 2010.
 - Het verbruik van hernieuwbare energie voor elektriciteit was in 2015 minder dan in 2010.

O 46 Zie figuur 4.5. Hilco zegt dat op het Newton College vier keer zoveel meisjes als jongens zitten.

- Hoe komt Hilco bij deze uitspraak?
- Welke fout maakt hij?



figuur 4.5

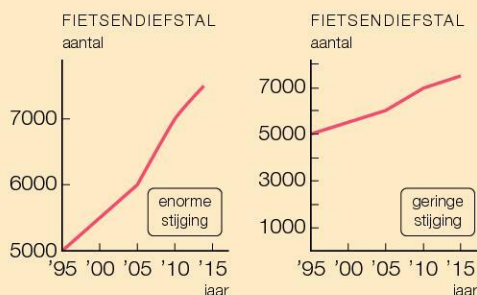
Theorie B Misleidende diagrammen

Een diagram maakt vaak meer duidelijk dan veel woorden en cijfers. Vandaar dat je in allerlei artikelen en verslagen diagrammen aantreft. Maar van diagrammen kan ook een misleidende indruk uitgaan. Kijk maar naar figuur 4.6.

Door in de linker grafiek een deel van de verticale as weg te laten, krijg je het idee dat er een enorme toename is van het aantal diefstallen. En kijk je in de rechter grafiek, dan lijkt het wel mee te vallen met die toename.

Vraag je bij het beoordelen van diagrammen steeds het volgende af.

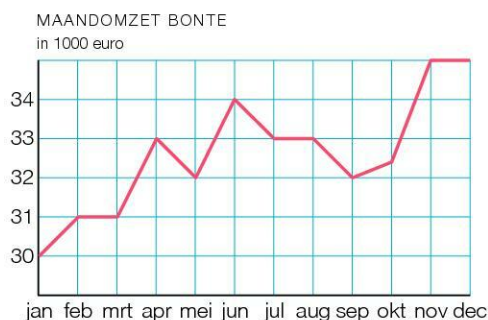
- Staat er een duidelijk opschrift bij het diagram, zodat goed zichtbaar is waarover het diagram gaat?
- Staat er langs de assen voldoende informatie, zodat goed zichtbaar is welke resultaten zijn uitgezet?
- Geeft de schaalverdeling langs de assen de juiste indruk? Het gebruik van een scheurlijn kan hierbij belangrijk zijn.



figuur 4.6 De grafieken geven een nogal verschillende indruk van de diefstal van fietsen.

47 In figuur 4.7 is de maandelijkse omzet in 2018 van melkhandel Bonte verwerkt.

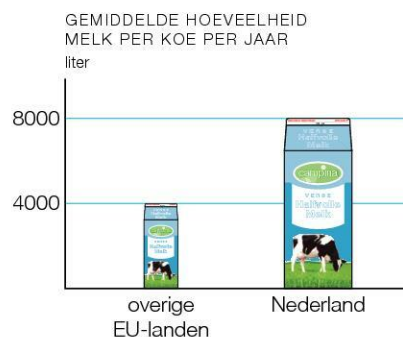
- Hoeveel is de omzet in oktober?
- Hoeveel procent is de omzet in juni meer dan in mei?
- Waarom is dit lijndiagram misleidend?



figuur 4.7

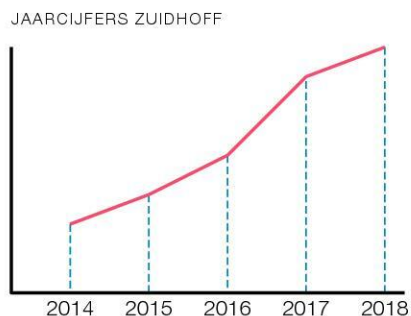
48 Zie figuur 4.8.

- Een koe in Nederland levert gemiddeld meer melk dan een koe in overige EU-landen. Hoeveel keer zoveel?
- Hoeveel keer zo hoog is het rechter melkpak als het linker? En hoeveel keer zo groot is de oppervlakte?
- Welk bezwaar kun je tegen het beelddiagram inbrengen?



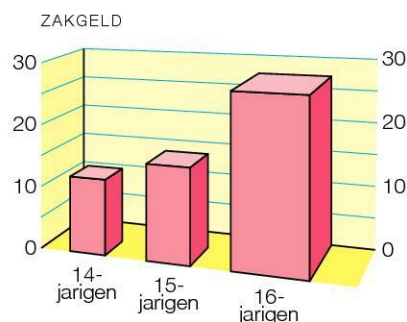
figuur 4.8

- 49** Kijkend naar figuur 4.9 concludeert Rogier dat het goed gaat met de firma Zuidhoff.
Lever commentaar.



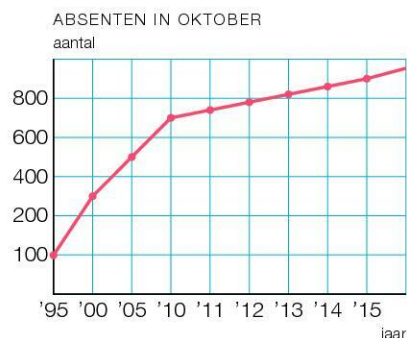
figuur 4.9

- A 50** Een onderzoek op een school naar het zakgeld per leerling levert het diagram van figuur 4.10 op.
Lever commentaar op deze grafische weergave.



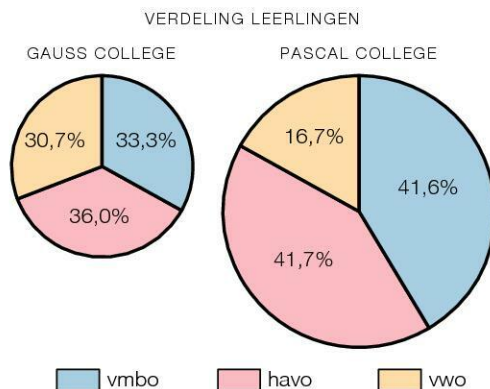
figuur 4.10

- A 51** In figuur 4.11 zie je hoeveel absents er telkens op een school waren in de maand oktober.
Volgens de directeur neemt dat aantal de laatste jaren minder snel toe.
Geef commentaar.



figuur 4.11

- A 52** Figuur 4.12 gaat over de verdeling van de leerlingen over vmbo, havo en vwo op het Gauss College en op het Pascal College.
Lucas beweert: 'Op het Gauss College zit 30,7% van de leerlingen op het vwo, op het Pascal College is dat 16,7%. Dus het Gauss College telt meer vwo-leerlingen dan het Pascal College.'
Geef commentaar op de redenering van Lucas.



figuur 4.12

4.7 Rekenen met Excel

In deze paragraaf ga je met het computerprogramma Excel rekenen met de gegevens uit de bestanden **Topscorers**, **Bevolkingsdichtheid** en **Filedruk**. In het [WERKBOEK](#) staat informatie over het werken en rekenen met Excel.

- 53** a Open het bestand **Topscorers** in Excel. Je krijgt een tabel met topscorers van Oranje, waarvan je in figuur 4.13 een gedeelte ziet. De gegevens dateren van november 2017.
- b Robin van Persie is topscorer aller tijden van Oranje. Hoeveel doelpunten heeft hij gemiddeld per interland gescoord?
- c Zet in cel D1 **gemiddelde** en in cel D2 de formule `=AFRONDEN(B2/C2;2)`. Denk daarbij aan het = teken. Sluit af met enter, en controleer je antwoord van vraag b.
- d Om het gemiddelde aantal doelpunten per interland van de andere spelers te berekenen, kopieer je de formule van cel D2 naar de andere cellen van kolom D.
- e Wie heeft de meeste doelpunten per interland gemaakt?
- f Rangschik de topscorers van hoogste naar laagste gemiddelde. Welke positie neemt Robin van Persie in op de nieuwe ranglijst?

	A	B	C
1	Topscorers van Oranje	Doelpunten	Interlands
2	Robin van Persie	50	102
3	Klaas-Jan Huntelaar	42	76
4	Patrick Kluivert	40	79
5	Dennis Bergkamp	37	79
6	Arjen Robben	37	96
7	Faas Wilkes	35	38
8	Ruud van Nistelrooy	35	70
9	Abe Lenstra	33	47
10	Johan Crujff	33	48
11	Wesley Sneijder	31	132
12	Beb Bakhuys	28	23
13	Kick Smit	26	29
14	Rafael van der Vaart	25	109
15	Marco van Basten	24	58
16	Dirk Kuijt	24	104
17	Leen Vente	19	21
18	Mannes Francken	17	22
19	Tonny van de Linden	17	24
20	John Bosman	17	30
21	Wim Tap	17	33
22	Johan Neeskens	17	49
23	Ruud Gullit	17	66
24	Marc Overmars	17	86

figuur 4.13 Topscorers van Oranje.

- 54** a Open het bestand **Bevolkingsdichtheid** in Excel. Je krijgt een tabel met informatie over landen van de Europese Unie in 2017, waarvan je in figuur 4.14 een gedeelte ziet.
- b Laat Excel in kolom D voor elk land het gemiddelde aantal inwoners per km² berekenen. Rond af op gehelen.
- c Rangschik de landen aflopend van grootste naar kleinste aantal inwoners per km².
- d Welk land is het dunst bevolkt? Hoeveel inwoners per km² heeft dat land gemiddeld?
- e Welke positie neemt Nederland in? Hoeveel mensen wonen er in Nederland gemiddeld per vierkante kilometer?

	A	B	C
1	land	aantal inwoners in duizenden	oppervlakte in duizenden km ²
2	België	11491	30.5
3	Bulgarije	7102	110.9
4	Cyprus	1222	9.3
5	Denemarken	5657	44.5
6	Duitsland	80594	357.0
7	Estland	1252	45.2
8	Finland	5518	338.1
9	Frankrijk	67106	643.8
10	Griekenland	10768	132.0
11	Hongarije	9851	93.0
12	Ierland	5011	70.3
13	Italië	62138	301.3
14	Kroatië	4292	56.6
15	Letland	1945	64.6
16	Litouwen	2824	65.3
17	Luxemburg	594	2.6
18	Malta	416	0.3
19	Nederland	17085	41.5
20	Oostenrijk	8754	83.9
21	Polen	38476	312.7
22	Portugal	10840	92.1
23	Roemenië	21530	238.4

figuur 4.14 Landen van de Europese Unie in 2017.

Op de ochtend van dinsdag 15 januari 2013 stond er op de Nederlandse snelwegen voor het eerst meer dan 1000 km file. Op een aantal plaatsen stond het verkeer uren vast. Een maat voor de drukte is de filedruk. De filedruk wordt berekend door de lengte van de file in km te vermenigvuldigen met de tijdsduur van de file in minuten. Een file die eerst 10 minuten een lengte van 5 km heeft en daarna gedurende 5 minuten 3 km lang is, heeft een filedruk van $5 \cdot 10 + 3 \cdot 5 = 65$ kmmin.



In het bestand **Filedruk** staat informatie over de 50 drukste wegen van Nederland in 2016 (bron: VerkeersInformatieDienst).

- a Open dit bestand met Excel. Je ziet dat de filedruk in 2016 op de A4 van Den Haag naar Amsterdam bij koplocatie Zoeterwoude-Dorp het grootst was met 222 787 kmmin.
- b Op welke plek was de filedruk in 2015 het grootst? Hoe groot was die filedruk?
- c Voer in cel F2 in $=B2-A2$ en kopieer deze formule naar de cellen F3 tot en met F51.
- d Rangschik de tabel van grootste naar kleinste absolute toename. Op welke plek is de absolute toename in filedruk het grootst? Hoe groot is deze toename?
- e Bereken in kolom G de procentuele toenames. Zorg voor een afronding op één decimaal.
- f Rangschik de tabel van grootste naar kleinste procentuele toename. Op welke plek is de procentuele toename het grootst? Hoeveel procent is die toename? Op welke plek is de procentuele afname het grootst? Hoe groot is die afname?
- g Op welke plek is de toename in procentpunten het grootst? Hoe groot is deze toename? Op welke plek is de afname in procentpunten het grootst? Hoe groot is deze afname?



In opgave 19 is het begrip 'procentpunt' uitgelegd.

Gemengde opgaven

- 1 Lees het artikel over telefoons in Nederland.

ARTIKEL

BEROEP

GESCHIEDENIS

INFORMATIE

Vaste telefoon houdt stand

Ook al heeft tegenwoordig vrijwel iedereen een mobiele telefoon, toch blijft de vaste telefoon standhouden. Dat heeft onder andere te maken met de pakketten die worden aangeboden. Wie bij een provider televisie en internet afneemt, krijgt de vaste telefoon er bijna gratis bij. In 2015 waren er 6,3 miljoen vaste telefoons in Nederland, waarmee gemiddeld 42 miljoen minuten per dag werd gebeld. Dat jaar telde ons land 19,2 miljoen mobiele telefoons, verdeeld over 7,7 miljoen huishoudens. In 2015 werd er per mobiele telefoon gemiddeld 1400 minuten gebeld.

- a Hoeveel jaar werd er in 2015 gemiddeld per dag met vaste telefoons gebeld? Rond af op gehelen.
- b Hoeveel uur belde een huishouden in 2015 gemiddeld met mobiele telefoons? Rond af op gehelen.
- c In 2015 werden meer mobiele dan vaste belminuten gemaakt. Hoeveel scheelt het?

- 2 De politie had het in 2017 druk met de diefstal van voertuigen.

- a Vergeleken met 2016 nam het aantal voertuigdiefstallen met 9,7% af tot 23 595.
Bereken het aantal voertuigdiefstallen in 2016.
- b In 2016 werden er 9179 personenauto's gestolen. In 2017 waren dat er 8257.
Bereken de relatieve afname.
- c In 2017 werden er 1631 motorfietsen gestolen, 52 meer dan in het jaar ervoor.
Bereken de procentuele verandering.
- d In 2016 werden 12 698 bromfietsen gestolen. In 2017 waren dat er 10,4% minder.
Hoeveel bromfietsen werden er in 2017 gestolen?
- e In 2017 werd 23,3% van de gestolen aanhangers en opleggers teruggevonden. Dat waren er 162. In 2016 werden 750 aanhangers en opleggers gestolen.
Werden er in 2017 meer of minder aanhangers en opleggers gestolen dan in 2016? Hoeveel procent scheelt het?

VERKOOPPRIJS BESTAANDE
KOOPWONINGEN

periode	procentuele verandering
2008-2010	-6,0%
2010-2012	-5,4%
2012-2014	-2,0%
2014-2016	+9,7%

- 3 De tabel hiernaast gaat over de ontwikkeling van de gemiddelde verkoopprijs van bestaande koopwoningen. In 2016 was de gemiddelde verkoopprijs van een bestaande koopwoning 243 800 euro.
Bereken de gemiddelde verkoopprijs in 2008.

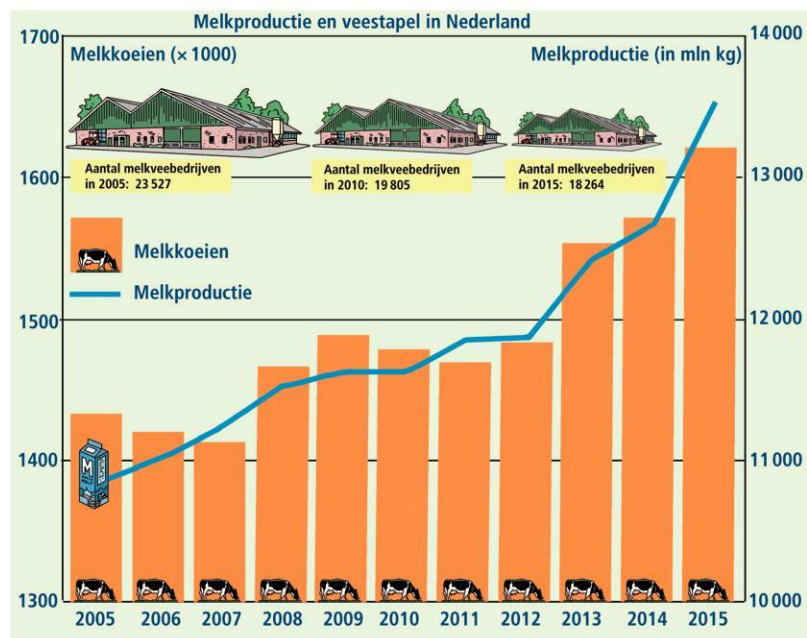
4 Zie de tabel met informatie over drogisterijen in Nederland.

DROGISTERIJEN IN NEDERLAND

jaar	omzet in miljoenen euro's	omzet per winkel in duizenden euro's	omzet in euro's per personeelslid	omzet in euro's per m ²
2014	3138	1127	110 587	5638
2015	3257	1184	112 719	5846
2016	3332	1286	111 081	6098

- Hoeveel drogisterijen waren er in 2016?
- In 2016 werkten er meer mensen in drogisterijen dan in 2015. Hoeveel scheelt het?
- In welk jaar was de gemiddelde vloeroppervlakte per winkel het grootst?

5 Figuur 4.15 geeft informatie over de melkproductie en de melkveestapel in Nederland.



figuur 4.15

- Met hoeveel procent is de melkproductie toegenomen in de periode 2005-2015?
- Onderzoek of in 2015 de melkproductie per melkkoe groter of kleiner was dan in 2014. Hoeveel procent scheelt het?
- Bereken het gemiddelde aantal melkkoeien per melkveebedrijf in 2015.
- Onderzoek of in de periode 2010-2015 de melkproductie per melkveebedrijf is toegenomen of afgenomen. Met hoeveel procent?

Samenvatting

4.1, 4.2 Cijfermateriaal en tabellen

blz 127 Verwerk bij het halen van cijfermateriaal uit een artikel de gegevens op een ordelijke manier, bijvoorbeeld in een tabel.

blz 129 $69 \times 85 = 5865$, dus
 69×85 miljoen = 5865 miljoen = 5,865 miljard.

Verder is $\frac{56 \text{ miljard}}{1,5 \text{ miljoen}} = \frac{56000 \text{ miljoen}}{1,5 \text{ miljoen}} = \frac{56000}{1,5} \approx 37333$.

Afgerond op duizendtallen is het antwoord 37000, ook wel 37 duizend.

blz 131 Door gegevens uit een tabel te combineren, kun je extra informatie verkrijgen.

1 miljoen = 1 000 000
1 miljard = 1 000 000 000
1 miljard = 1000 miljoen

4.3 Procentuele veranderingen

blz 133 **procentuele verandering** = $\frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\%$

Een hoeveelheid neemt toe van 83 tot 196.

De procentuele toename is $\frac{196 - 83}{83} \times 100\% \approx 136,1\%$.

Een hoeveelheid neemt af van 817 tot 720.

$\frac{720 - 817}{817} \times 100\% \approx -11,9\%$, dus de procentuele afname is 11,9%.

Rond percentages af op één decimaal.

4.4 Vermenigvuldigingsfactor

blz 136 **NIEUW berekenen bij een procentuele toename**

Neemt een hoeveelheid met 17,5% toe,
dan is $\text{NIEUW} = 1,175 \times \text{OUD}$.

Bij een toename van 17,5% is de vermenigvuldigingsfactor 1,175.

NIEUW berekenen bij een procentuele afname

Neemt een hoeveelheid met 8,3% af,
dan is $\text{NIEUW} = 0,917 \times \text{OUD}$.

Bij een afname van 8,3% is de vermenigvuldigingsfactor 0,917.

Bij de vermenigvuldigingsfactor 1,039 hoort een toename van 3,9%.

Bij de vermenigvuldigingsfactor 0,746 hoort een afname van 25,4%.

17,5% erbij geeft
 $100\% + 17,5\% = 117,5\%$,
dus $\times 1,175$.

8,3% eraf geeft
 $100\% - 8,3\% = 91,7\%$,
dus $\times 0,917$.

$\times 1,039$, dus 103,9%
 $103,9\% - 100\% = 3,9\%$
 $\times 0,746$, dus 74,6%
 $100\% - 74,6\% = 25,4\%$

blz 138 Neemt een hoeveelheid in de periode 2010-2014 met 3,9% toe, en in de periode 2014-2018 met 25,4% af, dan is de vermenigvuldigingsfactor die hoort bij de periode 2010-2018 gelijk aan $1,039 \times 0,746 \approx 0,775$. De bijbehorende procentuele afname is 22,5%.

4.5 Rekenen met procenten

blz 140 **OUD berekenen bij een procentuele toename**

Een hoeveelheid neemt met 17,5% toe tot 604.

$$\text{Dus } 1,175 \times \text{OUD} = 604 \text{ oftewel } \text{OUD} = \frac{604}{1,175} \approx 514.$$

OUD berekenen bij een procentuele afname

Een hoeveelheid neemt met 8,3% af tot 1251.

$$\text{Dus } 0,917 \times \text{OUD} = 1251 \text{ oftewel } \text{OUD} = \frac{1251}{0,917} \approx 1364.$$

Geef OUD en NIEUW in dezelfde nauwkeurigheid.

blz 143 **Van DEEL naar TOTAAL**

Als 8,3% van het totaal gelijk is aan 387, dan is

$$0,083 \times \text{TOTAAL} = 387, \text{ dus } \text{TOTAAL} = \frac{387}{0,083} \approx 4663.$$

4.6 Diagrammen en procenten

blz 144 **Methoden van grafische verwerking**

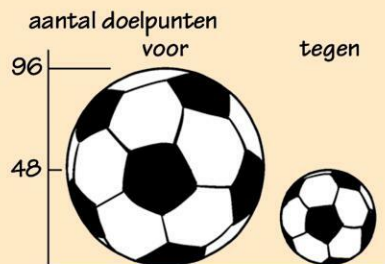
- beelddiagram
- lijndiagram
- staafdiagram
- histogram
- cirkeldiagram
- steel-bladdiagram

blz 148 **Oppassen voor misleiding**

Bij grafische verwerking moet uit het opschrift en uit de tekst bij de assen duidelijk worden waar het diagram over gaat.

Een diagram kan misleidend zijn, dus let er bijvoorbeeld op of de scheurlijn is weggelaten en of er niet is gesjoemeld met de getallen langs de assen. Ook diagrammen waarin oppervlakten en inhouden zijn verwerkt, kunnen een verkeerde suggestie wekken. Zie het voorbeeld hieronder.

Voetbalvereniging ESA heeft in een seizoen twee keer zo veel doelpunten gescoord als tegen gekregen. Het diagram hiernaast geeft hiervan een misleidende voorstelling. Het diagram suggereert namelijk dat het aantal doelpunten voor, 4 keer zo groot is als het aantal doelpunten tegen. Want bij een 2 keer zo grote straal hoort een $2^2 = 4$ keer zo grote oppervlakte.



Diagnostische toets

4.1 Cijfermateriaal

- 1 Lees het artikel over zonnepanelen.

1

ARTIKEL **BEROEP** **GESCHIEDENIS** **INFORMATIE**

Aantal zonnepanelen blijft toenemen

De wereldwijde groei van het aantal zonnepanelen zet flink door. In 2016 is wereldwijd 75 GW (1 Gigawatt = 1 miljoen kilowatt) aan zonnepanelen in gebruik genomen. Dat komt neer op 300 miljoen zonnepanelen, anderhalf keer zoveel als in 2015. China is niet alleen de grootste producent van zonnepanelen, maar ook de grootste afzetmarkt. In 2016 was het aandeel van China 34 GW. In Nederland komen er de laatste jaren 2 miljoen zonnepanelen per jaar bij. Het merendeel daarvan nemen particuliere consumenten voor hun rekening door zonnepanelen op het dak van hun woning te plaatsen. Inmiddels telt Nederland 2 GW aan zonnestroomcapaciteit.

- a Hoeveel zonnepanelen werden in 2015 in gebruik genomen?
- b Bereken het gemiddelde vermogen van een zonnepaneel dat in 2016 in gebruik is genomen.
- c Hoe groot is het aandeel in gebruik genomen zonnepanelen in Nederland in 2016? Geef je antwoord in kilowatt.

- 2 a Wereldwijd gebruiken 1,5 miljard mensen WhatsApp. Gemiddeld verzendt een WhatsApp-gebruiker vier berichten per dag. Hoeveel WhatsApp-berichten worden er jaarlijks verzonden?
- 2 b Jaarlijks voert de Rijn 73,5 miljard m³ water af. Hoeveel liter water voert de Rijn gemiddeld per seconde af? Rond af op duizendtallen.

4.2 Tabellen

- 3 In de tabel zie je informatie over fitnesscentra.

3

FITNESSCENTRA IN 2016

land	aantal fitnesscentra	aantal fitnesscentra per 100 000 inwoners	aantal leden per fitnesscentrum
Duitsland	8300	10,04	1140
Frankrijk	3800	5,68	1370
Groot-Brittannië	6300	...	1400

- a Bereken het aantal leden in Frankrijk. Rond af op honderdduizendtallen.
- b Bereken het aantal inwoners van Duitsland. Rond af op honderdduizendtallen.
- c In 2016 had Groot-Brittannië 65,6 miljoen inwoners. Bereken het ontbrekende getal in de tabel.

4.3 Procentuele veranderingen

- 4** In 2016 waren er 2662 bedrijven met geiten in Nederland.
 4 In 2010 waren dat er 1057 meer.
a Met hoeveel procent is het aantal bedrijven met geiten afgenomen in de periode 2010-2016?

In dezelfde periode nam het gemiddelde aantal geiten per bedrijf toe van 95 tot 188.

- b** Bereken de relatieve toename van het gemiddelde aantal geiten per bedrijf.
c Is het totale aantal geiten in Nederland toe- of afgenomen in de periode 2010-2016? Met hoeveel procent?

4.4 Vermenigvuldigingsfactor

- 5** Het aantal 65-plussers nam in de periode 2010-2017 met
 5,6 24,5% toe. De verwachting is dat in 2040 het aantal met maar liefst 54,1% zal zijn toegenomen in vergelijking met 2017. Bereken de procentuele toename in de periode 2010-2040.

4.5 Rekenen met procenten

- 6** **a** Vergeleken met 2015 nam in 2016 de suikerbietenproductie in Nederland met 11,6% toe tot 5,5 miljoen ton.
 7,8 Bereken de suikerbietenproductie in 2015.
b De suikerbietenproductie per hectare landbouwgrond nam in 2016 met 6,6% af tot 77,8 ton. Bereken de suikerbietenproductie per hectare landbouwgrond in 2015.

- 7** In 2016 waren er 49 000 sportongevallen minder dan
 9 in 2000. Dat komt neer op een afname van 28,8%. Bereken het aantal sportongevallen in 2016.

4.6 Diagrammen en procenten

- 8** Zie figuur 4.16 over de autoverkoop in Nederland.

- 10** **a** Hoeveel Renaults werden in 2014 verkocht?
b Hebben de snijpunten van de lijndiagrammen betekenis? Licht toe.
c Werden er in 2013 meer of minder Renaults verkocht dan in 2012? Hoeveel procent scheelt het?
d Oscar maakt een cirkeldiagram bij het aandeel van de automerken in de autoverkoop van 2016. Bereken de hoek van de sector Renault.

- 9** Het aantal webshops is de laatste jaren fors gestegen.
 11 Zie figuur 4.17.
 Welke suggestie wekt de figuur? Geef commentaar.



figuur 4.16



figuur 4.17

Herhaling

4.1 Cijfermateriaal

- 1 Lees het artikel over bioscoopbezoek.

ARTIKEL **BEROEP** **GESCHIEDENIS** **INFORMATIE**

Nederlanders massaal naar de bioscoop

Het gaat goed met de Nederlandse bioscoopsector. In 2016 verwelkomden de Nederlandse bioscopen en filmtheaters in totaal 34,2 miljoen bezoekers. Dat waren er 1,2 miljoen meer dan het jaar ervoor. Sinds 1965, toen 35,3 miljoen keer naar de film werd gegaan, is het aantal bioscoopbezoeken niet meer zo groot geweest. Na een dip aan het einde van de vorige eeuw, vertoont het aantal bioscoopbezoeken de laatste jaren een stijgende trend. In 2009 werd 27,2 miljoen keer een bioscoop bezocht, een verdubbeling van het aantal in 1992.

- a Hoeveel bioscoopbezoeken waren er in 1992?
- b Hoeveel bioscoopbezoeken waren er in 1965 meer dan in 2016?
- c In 2016 was de totale omzet uit kaartverkoop 287,6 miljoen euro. Hoeveel kostte een bioscoopkaartje gemiddeld in 2016?

- 2 a De rivier de Nijl voert gemiddeld 2800 m^3 water per seconde af.
Hoeveel m^3 water voert de Nijl jaarlijks af? Rond af op miljoenen.
- b In 2017 werden er door de 46,5 miljoen leghennen in Nederland 10,1 miljard eieren geproduceerd.
Hoeveel eieren zijn dat gemiddeld per leghen?

1 jaar = 365 dagen
1 dag = 24 uur
1 uur = 60 minuten
1 minuut = 60 seconden

1 miljard = 1000 miljoen

4.2 Tabellen

- 3 Zie de tabel met informatie over boekwinkels.

BOEKWINKELS IN NEDERLAND

jaar	verkoop in miljoenen euro's	verkoop per winkel in euro's	verkoop per personeelslid in euro's	totale vloeroppervlakte in m^2
2014	377	499 000	81 600	106 000
2016	319	441 000	77 000	119 000

- a Bereken het aantal boekwinkels in 2016.
- b Bereken het aantal personeelsleden van boekwinkels in 2016.
Hoeveel zijn dat er gemiddeld per boekwinkel? Rond af op gehelen.
- c Bereken in euro's de verkoop per m^2 vloeroppervlakte in 2014.
Rond af op gehelen.
- d Was de gemiddelde vloeroppervlakte van een boekwinkel in 2016 groter of kleiner dan in 2014? Hoeveel gehele m^2 is het verschil?

4.3 Procentuele veranderingen

4
$$\text{procentuele verandering} = \frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\%$$

Bij een procentuele afname geeft deze formule een negatieve uitkomst.

Het aantal bedrijven met kippen is in Nederland in de periode 2010-2016 afgenomen van 2431 tot 1965.

a Bereken de relatieve afname.

In dezelfde periode nam het gemiddelde aantal kippen per bedrijf toe van 41 649 tot 53 750.

b Met hoeveel procent is het gemiddelde aantal kippen per bedrijf toegenomen?

c Is het totale aantal kippen in Nederland in de periode 2010-2016 toegenomen of afgenomen? Met hoeveel procent?

In plaats van procentuele verandering zeg je ook wel relatieve verandering.



4.4 Vermenigvuldigingsfactor

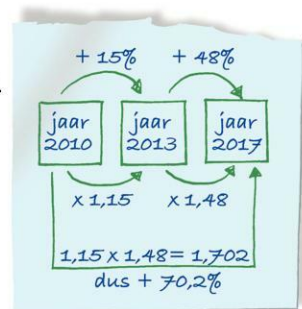
- 5 Bij 18% toename hoort de vermenigvuldigingsfactor 1,18. Bij de vermenigvuldigingsfactor 1,24 hoort 24% toename. Bij 13% afname hoort de vermenigvuldigingsfactor 0,87. Bij de vermenigvuldigingsfactor 0,65 hoort 35% afname.

13% eraf geeft
 $100\% - 13\% = 87\%$,
 dus $\times 0,87$.

Vul de tabel in.

procentuele verandering	+3,6%	-18,1%	+0,8%	-88,7%	+103%
verm. factor	1,176	0,325	2,63	0,085	0,979

- 6 a In de periode 2008-2012 nam een hoeveelheid met 38% toe, en in de periode 2012-2017 met 21%. Bereken de procentuele toename in de periode 2008-2017.
- b In de periode 2008-2012 nam een hoeveelheid met 18% af, en in de periode 2012-2017 met 7,8%. Bereken de procentuele afname in de periode 2008-2017.
- c In 2017 waren er in Nederland 27,0% meer elektrische auto's dan in 2016. Vergeleken met 2015 was in 2016 de toename maar liefst 95,2%. Bereken de procentuele toename van het aantal elektrische auto's in Nederland in de periode 2015-2017.



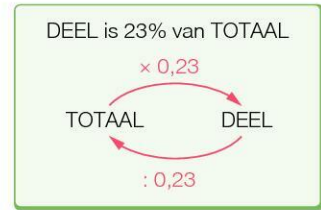
4.5 Rekenen met procenten

- 7 In het eerste kwartaal van 2017 werd 140 000 keer het theorie-examen rijvaardigheid afgenomen. Dat was 2,8% meer dan in het eerste kwartaal van 2016. Bereken hoeveel keer het theorie-examen rijvaardigheid in het eerste kwartaal van 2016 werd afgenomen.

Toename 32%

- Weet je OUD, dan bereken je $\text{NIEUW} = 1,32 \times \text{OUD}$.
- Weet je NIEUW, dan bereken je $\text{OUD} = \frac{\text{NIEUW}}{1,32}$.

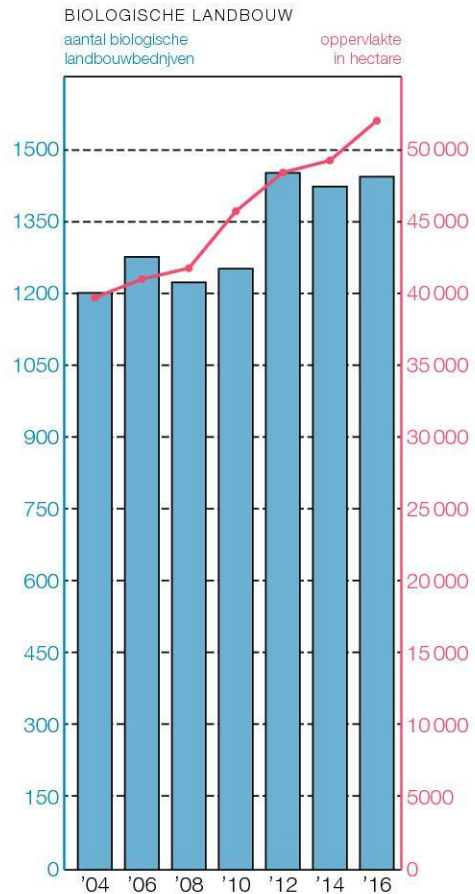
- 8** In het tweede kwartaal van 2017 slaagden 56 000 personen voor het theorie-examen rijvaardigheid. Dat was 6,1% minder dan in het eerste kwartaal van 2017. Hoeveel geslaagden waren er in het eerste kwartaal van 2017?



- 9 a** In het tweede kwartaal van 2017 slaagden 5556 personen voor het praktijkexamen bromfiets. Dat was 81,7% van het totale aantal deelnemers. Hoeveel personen namen in het tweede kwartaal van 2017 deel aan het praktijk-examen bromfiets?
- b** Het totale aantal theorie-examens bromfiets was in het tweede kwartaal van 2017 met 19,3% toegenomen vergeleken met het eerste kwartaal van 2017. Dat was een toename van 2432. Bereken het aantal theorie-examens bromfiets dat in het tweede kwartaal van 2017 werd afgenomen.

4.6 Diagrammen en procenten

- 10** Figuur 4.18 gaat over de biologische landbouw in Nederland.
- a** Met hoeveel procent is het aantal biologische landbouwbedrijven toegenomen in de periode 2004-2016?
- b** Met hoeveel procent is de oppervlakte van de biologische landbouwbedrijven toegenomen in de periode 2004-2016?
- c** Wat was de gemiddelde oppervlakte van een biologisch landbouwbedrijf in 2010? Geef je antwoord in hectare en rond af op gehele.
- d** In 2014 werd op 2,7% van de totale landbouwgrond biologische landbouw bedreven. Bereken in hectare de totale oppervlakte landbouwgrond in Nederland in 2014. Rond af op honderdtallen.



figuur 4.18

- 11** Tussen 29 oktober 2017 en 16 december 2017 steeg de waarde van de bitcoin fors. Welke suggestie gaat uit van de figuur? Geef commentaar.



figuur 4.19

Onderzoek Informatie zoeken

De foto hieronder stond in de Volkskrant.



Je kunt hierbij allerlei vragen stellen, zoals:

- Waar zijn de vleugels van het vliegtuig?
- Waar gaat het transport naar toe?
- Hoe zwaar is het vliegtuig?
- Wat zijn de afmetingen?
- Waar is de foto gemaakt?

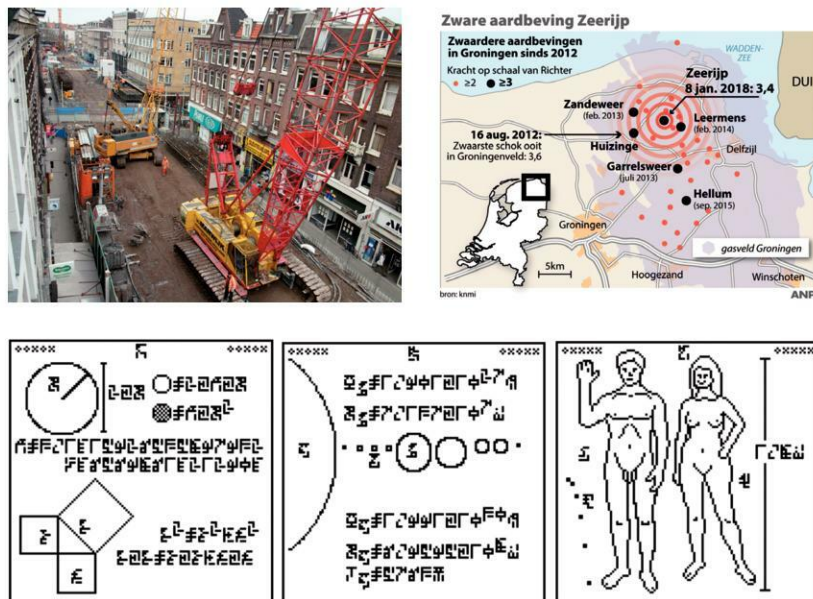
Op deze vragen is maar één correct antwoord te geven, want het gaat om feiten. Maar er kunnen ook vragen gesteld worden waarbij meerdere antwoorden mogelijk zijn. Bijvoorbeeld:

- Vind je het transport wel toelaatbaar in verband met de veiligheid van de weggebruikers?
- Is politiebegeleiding wel nodig bij dit soort transporten?
- Wat gebeurt er met afgedankte vliegtuigen?

Vaak wordt bij het beantwoorden van dit soort vragen een mening of een argumentatie verlangd. Daarom geeft zo'n vraag meer discussie en mogelijkheden voor eigen inbreng.

In dit onderzoek ga je vragen stellen en beantwoorden. Je zoekt daarbij informatie op het internet.

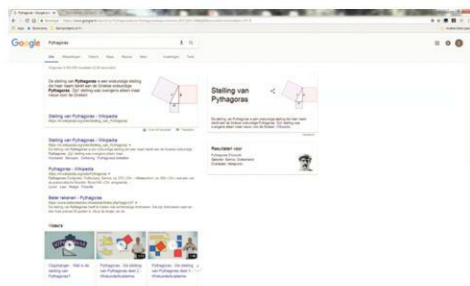
- 1** In figuur 4.20 zie je drie afbeeldingen:
- de in aanbouw zijnde Noord/Zuidlijn in Amsterdam
 - een kaartje van de provincie Groningen met informatie over aardbevingen
 - drie digitale bladzijden van de hand van Yvan Dutil.



figuur 4.20

- a** Stel bij elke afbeelding vier vragen die op verschillende aspecten van het onderwerp betrekking hebben. Zorg er voor dat er minstens
- één keer naar een feit gevraagd wordt
 - één keer naar een mening gevraagd wordt
 - één vraag bij is waarin wiskunde een rol speelt.
- b** Beantwoord de vragen die je hebt bedacht. Gebruik het internet.

In opgave 1b heb je waarschijnlijk een zoekmachine zoals Google gebruikt. Hoe algemener het trefwoord is dat je invoert, des te meer resultaten je krijgt. Zo levert het zoekwoord *Pythagoras* bij Google bijna 10 miljoen hits op. Je kunt je zoekopdracht verfijnen door meer zoektermen toe te voegen. Je krijgt zo minder hits, maar ze komen beter overeen met wat je zoekt.



- 2** Je kunt in Google ook geavanceerd zoeken. Onderzoek hoe dat gaat.

- 3** Zoek met een zoekmachine antwoorden op de volgende vragen.
- a** Wanneer leefde Leonhard Euler?
 - b** Op welke datum valt Pasen in het jaar 2030?
 - c** Hoeveel kilometer file staat er dagelijks gemiddeld op de Nederlandse wegen?
 - d** Wat is een Hamiltonpad?
 - e** Met welke formule bereken je de inhoud van een bol?
 - f** Hoe laat is het vandaag hoogwater in Den Helder?
 - g** Hoeveel mm regen viel er de vorige maand in De Bilt?
 - h** Wat is een binair getal?
 - i** Hoe luidt de laatste stelling van Fermat?
- 4** Bedenk zelf enkele wiskundige vragen en zoek de antwoorden met een zoekmachine.
- 5** Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) verzamelt allerlei gegevens over de Nederlandse samenleving. Je kunt deze gegevens vinden door de zoekterm CBS toe te voegen aan je zoekopdracht.
- a** Hoeveel scholen voor voortgezet onderwijs zijn er momenteel?
 - b** Zijn de totale overheidsuitgaven voor het onderwijs toe- of afgenomen in de periode 2000-2016? Met hoeveel procent?
 - c** Zijn de overheidsuitgaven voor studietoelagen toe- of afgenomen in de periode 1990-2010? Met hoeveel procent?
 - d** Welk percentage van de bevolking beschikte in 2016 over een 'zeer goede gezondheid'?
 - e** Hoeveel personen bezochten in 2016 de huisarts?
- 6** De volgende opdrachten gaan over Nederland.
- a** Onderzoek hoeveel procent van de middelbare scholieren het afgelopen schooljaar slaagde voor het eindexamen.
 - b** Onderzoek welk percentage van de levendgeborenen in het afgelopen kalenderjaar eerste kind was.
 - c** Onderzoek of het afgelopen jaar de emigratie de immigratie overtrof of omgekeerd, en met welk aantal.
 - d** Onderzoek hoeveel procent van de totale woningvoorraad het afgelopen jaar koopwoning was.
- 7** De site van het CBS bevat veel gegevens over jongeren. Hiermee kun je een antwoord vinden op de vraag 'Hoeveel tijd besteden middelbare scholieren aan een bijbaantje?'
- a** Beantwoord deze vraag. Houd daarbij rekening met
 - het verschil tussen vmbo-, havo- en vwo-leerlingen
 - het verschil tussen jongens en meisjes
 - de ontwikkeling in de afgelopen 20 jaar.
 - b** Bedenk zelf enkele vragen over jongeren, en beantwoord ze. Houd bij het beantwoorden rekening met bovengenoemde aspecten.

Algebraïsche vaardigheden

Halverwege de vorige eeuw waren variétevoorstellingen populair. In deze vorm van theater vermaakten goochelaars, hypnotiseurs, waarzeggers en acrobaten het publiek. Ook snelrekenaars stonden vaak op het toneel. In de jaren vijftig was de Nederlander Willem Klein een wereldberoemd rekenwonder, en tegenwoordig blinkt Willem Bouman voor Nederland uit op internationale rekenwedstrijden. In 2009 werd Bouman derde bij het wereldkampioenschap hoofdrekenen in Londen, en in 2014 won hij een prestigieuze prijs bij de Mental Calculation World Cup in Dresden. Bouman wist toen als enige het getal 278 353 657 als een product van drie priemfactoren te schrijven. Bij sommige rekentrucs kun je handig gebruikmaken van de merkwaardige producten.

Wat leer je?

- Haakjes wegwerken.
- Breuken, machten en wortels herleiden.
- Werken met vergelijkingen met twee variabelen.
- Variabelen vrijmaken.

5





Voorkennis Haakjes, breuken en wortels

Theorie A Haakjes wegwerken

Voor het wegwerken van haakjes ken je de volgende regels.

$$a(b + c) = ab + ac \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$\begin{aligned}\text{Zo is } 3(a + 9) &= 3a + 27 \\ -5(a - 3) &= -5a + 15 \\ (a + 3)(b + 1) &= ab + a + 3b + 3.\end{aligned}$$

Vaak kun je na het wegwerken van de haakjes gelijksoortige termen samennemen.

$$\begin{aligned}\text{Zo is } 7a - 2(3a - 5) &= 7a - 6a + 10 = a + 10 \\ \text{en } (3a + 2)(a - 2) &= 3a^2 - 6a + 2a - 4 = 3a^2 - 4a - 4.\end{aligned}$$

1 Herleid.

a $x(2x - 5)$

b $3x(x + 8)$

c $(x - 1)(x + 6)$

d $(x + 5)(x - 5)$

e $(x + 7)(x + 7)$

f $-x(x + 7)$

g $(2x - 1)(x + 7)$

h $-9x(x - 1)$

i $(x - 5)(y - 2)$

2 Herleid.

a $4(a + 2) + 3a$

b $4a + 2(a + 3)$

c $4a - 2(a + 3)$

d $(4a + 2)(a + 3)$

e $(4a - 2)(a + 3)$

f $3(a - 2) - 5a$

g $3a - 2(a - 5)$

h $(3a + 2)(a - 5)$

i $(3a - 2)(a - 5)$

Theorie B Merkwaardige producten

Bij het wegwerken van haakjes kunnen de merkwaardige producten van pas komen.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Hiermee schrijf je in één keer op:

$$(a + 7)^2 = a^2 + 14a + 49$$

Het dubbelproduct van a en 7 is $2 \cdot a \cdot 7 = 14a$.

$$(3x + 5)(3x - 5) = 9x^2 - 25$$

Het kwadraat van $3x$ is $(3x)^2 = 3x \cdot 3x = 9x^2$.

$2ab$ heet het dubbelproduct van a en b .



$$(ab)^2 = a^2b^2$$

Voorbeeld

Herleid.

a $(x + 11)^2$

b $(2a + 3)(2a - 3)$

c $(5p - 4q)^2$

Uitwerking

a $(x + 11)^2 = x^2 + 22x + 121$

het dubbelproduct van x en 11 is $2 \cdot x \cdot 11 = 22x$

b $(2a + 3)(2a - 3) = 4a^2 - 9$

$(2a)^2 = 4a^2$

c $(5p - 4q)^2 = 25p^2 - 40pq + 16q^2$

$(5p)^2 = 25p^2$, $2 \cdot 5p \cdot 4q = 40pq$ en $(4q)^2 = 16q^2$

3 Herleid. Schrijf het antwoord in één keer op.

a $(a + 4)(a - 4)$

c $(3a + 2)(3a - 2)$

e $(2a + b)(2a - b)$

b $(x - 6)(x + 6)$

d $(5y - 1)(5y + 1)$

f $(3m - 5n)(3m + 5n)$

4 Herleid. Schrijf het antwoord in één keer op.

a $(x + 4)^2$

c $(2c + 9)^2$

e $(5a + x)^2$

b $(b - 6)^2$

d $(3p - 7)^2$

f $(4v - 5z)^2$

5 Herleid. Schrijf het antwoord in één keer op.

a $(3x + 8)^2$

c $(8x + 3)(8x - 3)$

e $(6b - 5k)^2$

b $(8 - 3x)^2$

d $(5a - z)(5a + z)$

f $(4x + 11y)(4x - 11y)$

Theorie C Rekenen met breuken

Breuken optellen

Gelijknamige breuken kun je direct optellen.

Dus $\frac{3}{11} + \frac{5}{11} = \frac{8}{11}$ en $\frac{13}{18} - \frac{5}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$.

vereenvoudigen

Niet-gelijknamige breuken maak je eerst gelijknamig.

Dus $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$ en $1\frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{3} - \frac{2}{5} = \frac{20}{15} - \frac{6}{15} = \frac{14}{15}$.

helen eruit halen

Breuken met dezelfde noemer zijn gelijknamig.



Breuken vermenigvuldigen

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

Dus $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$ en $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{3}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Breuken delen

Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Dus $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$ en $2\frac{2}{5} : 3 = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

6 Bereken.

a $\frac{1}{5} + \frac{3}{4}$

b $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}$

c $\frac{1}{5} : \frac{3}{4}$

d $3\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

e $3\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$

f $3\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$

g $1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2}$

h $1\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{2}$

i $1\frac{2}{3} : 2\frac{1}{2}$

Vereenvoudig breuken zo ver mogelijk en haal de helen eruit.



7 Bereken.

a $3\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}$

b $3\frac{1}{4} \cdot 2\frac{1}{2}$

c $3\frac{1}{4} : 2\frac{1}{2}$

d $2 - \frac{2}{3}$

e $2 \cdot \frac{2}{3}$

f $2 : \frac{2}{3}$

g $\frac{2}{3} - 2$

h $\frac{2}{3} \cdot 2$

i $\frac{2}{3} : 2$

Theorie D Wortels herleiden

Wortels vermenigvuldig je volgens de regel $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Dus $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, $5\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{10} = 35\sqrt{30}$
en $3\sqrt{2} \cdot -5\sqrt{8} = -15\sqrt{16} = -15 \cdot 4 = -60$.

Verder is $-2 \cdot 5\sqrt{3} = -10\sqrt{3}$.

De som van gelijksoortige wortels kun je herleiden.

Zoals $3a + 5a = 8a$, is $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Dus $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ en $3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = -4\sqrt{5}$.

$5\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ kun je niet herleiden, maar

$4\sqrt{36} - 3\sqrt{25} = 4 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 24 - 15 = 9$.

Let bij het herleiden van wortels op het verschil tussen vermenigvuldigen en optellen: $5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$, maar $5\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 20\sqrt{4} = 20 \cdot 2 = 40$.

$$5 \cdot \sqrt{3} \cdot 7 \cdot \sqrt{10} = 5 \cdot 7 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} &= 8\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} &= 15 \cdot 2 = 30 \\ 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} &\text{ kan niet korter} \\ 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} &= 15\sqrt{6} \end{aligned}$$

8 Herleid.

a $5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5}$

b $3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{5}$

c $5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}$

d $5\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{12}$

e $5\sqrt{9} \cdot 7$

f $3\sqrt{6} \cdot -2\sqrt{6}$

9 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $5\sqrt{2} + 8\sqrt{2}$

b $5\sqrt{2} - \sqrt{2}$

c $3\sqrt{5} - 7\sqrt{5}$

d $\sqrt{7} + \sqrt{7}$

e $\sqrt{36} - \sqrt{9}$

f $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

10 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $3\sqrt{2} + 5\sqrt{7}$

b $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{7}$

c $5\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7}$

d $5\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$

e $3\sqrt{25} - 5\sqrt{9}$

f $9\sqrt{2} \cdot -3\sqrt{8}$

5.1 Haakjes wegwerken

O 1 Herleid.

a $(3x)^2$

b $-p + 3(p - 4)$

c $(x + 2)(x - 3)$

Theorie A Regels om haakjes weg te werken

Voor het wegwerken van haakjes ken je de volgende regels.

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(ab)^2 = a^2b^2$$

Voorbeeld

Herleid.

a $4(x + 3)(x - 2)$

b $(4a)^2 - 2a(8a - 3)$

Uitwerking

a $4(x + 3)(x - 2) =$

b $(4a)^2 - 2a(8a - 3) =$
 $16a^2 - 16a^2 + 6a =$
 $6a$

Denk aan de haakjes.

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 2x + 3x - 6) &= \\ 4(x^2 + x - 6) &= \\ 4x^2 + 4x - 24 \end{aligned}$$

2 Herleid.

a $3(x + 1)(x + 4)$

e $3(2d + 1)(4 + d)$

b $-2(a + 3)(a - 5)$

f $-3(6x - 1)(1 + 2x)$

c $(5x)^2 + 4x(1 - 6x)$

g $2(x + 3)(x - 5)$

d $(2y)^2 - 4y(y - 5)$

h $5(n + 2)(n - 1) - 5n^2$

A 3 Herleid.

a $6(a + 5)(2a - 1)$

d $\frac{1}{2}(5e - 1)(e + 6)$

b $-4(1 + 3x)(3x - 1)$

e $8k + 2(4k - 1)(k + 4)$

c $(5c)^2 + 4(2c - 3)(c + 1)$

f $2(a + 2)(5 - a) - (3a)^2$

O 4 Zie de cartoon hiernaast.

Wie heeft gelijk, Sandra of Bob?
Licht toe.



Theorie B Haakjes wegwerken en merkwaardige producten

Bij het herleiden van merkwaardige producten mag je de tussenstappen weglaten.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Bij herleiden gaat machtsverheffen voor vermenigvuldigen.

Daarom bereken je bij het herleiden van $4(x + 3)^2$ eerst $(x + 3)^2$, daarna vermenigvuldig je alle termen met 4. Je krijgt

$$4(x + 3)^2 = 4(x^2 + 6x + 9) = 4x^2 + 24x + 36.$$

Voorbeeld

Herleid.

a $-(2c - 3)^2$

b $5(x + 2)(x - 2)$

Uitwerking

a $-(2c - 3)^2 =$

$$-(4c^2 - 12c + 9) =$$

$$-4c^2 + 12c - 9$$

b $5(x + 2)(x - 2) =$

$$5(x^2 - 4) =$$

$$5x^2 - 20$$

5 Herleid.

a $3(x + 5)(x - 5)$

b $-4(a + 1)^2$

c $2(c - 6)^2$

d $5(2y - 1)^2$

e $-3(6 - e)(6 + e)$

f $\frac{1}{2}(3x - 2)^2$

A 6 Herleid.

a $5(3x - 1)^2$

b $-(6x - 1)(6x + 1)$

c $5(2a - b)^2$

d $3(n + 2)^2 - 6(n - 1)$

e $-4(b + 5)(b - 5) + (2b)^2$

f $(1 - 4p)^2 - 8p(2p + 1)$

7 Herleid.

a $6p(3p - 2) - (p + 5)(p - 4)$

b $(5p + 1)^2 - (3p + 2)(p - 7)$

c $(2x - 3)^2 - 9(x - 1)(x - 8)$

d $(3x)^2 - 3(x + 5)(x - 2)$

e $(4x - 3)(5x + 8) - (3x - 2)^2$

f $(5p)^2 - (5p - 3)^2$

g $(5 - x)^2 - 5(x + 5)^2$

h $(2p + 5)^2 - (2p - 5)^2$

8 Herleid de volgende formules.

a $A = (3n + 7)^2 - 6(7n + 8)(7n - 8)$

b $B = 5t(t - 5)^2 + (5 - t)^2$

c $C = (5t)^2 - 3(2t - 4)^2$

d $D = 12pq + 2p(q - 3)^2$

9 $31 \cdot 29 = (30 + 1)(30 - 1) = 900 - 1 = 899$

Bereken zonder rekenmachine. Gebruik merkwaardige producten.

a $55 \cdot 65$

b $2\frac{1}{6} \cdot 1\frac{5}{6}$

c $101^2 - 99^2$

d $10 \cdot 99^2$

5.2 Breuken herleiden

O 10 Je weet dat $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$. Hierbij zijn teller en noemer door 3 gedeeld.

En zo is $\frac{7b}{11b} = \frac{7}{11}$. Hierbij zijn teller en noemer door b gedeeld.

Herleid.

a $\frac{3p}{7p}$

b $\frac{xy}{xz}$

c $\frac{14a}{20a}$

Theorie A Breuken herleiden

De breuk $\frac{5a}{8a}$ is te herleiden tot $\frac{5}{8}$ door teller en noemer door a

te delen. En zo is $\frac{7ab}{14ac} = \frac{b}{2c}$. Je hebt teller en noemer door 7 en door a gedeeld.

Verder is $\frac{16xy}{8x} = \frac{2y}{1} = 2y$. Je hebt teller en noemer door 8 en door x gedeeld.

Let op het verschil tussen $\frac{8a}{a} = \frac{8 \cdot a}{1 \cdot a} = \frac{8}{1} = 8$ en $\frac{a}{8a} = \frac{1 \cdot a}{8 \cdot a} = \frac{1}{8}$.

Het herleiden van $\frac{8xy}{y} - \frac{12xz}{2z}$ gaat als volgt:

$$\frac{8xy}{y} - \frac{12xz}{2z} = 8x - 6x = 2x.$$

T 11 [►► Theorie B] Herleid.

a $\frac{-24xz}{30xyz}$

b $-\frac{36abc}{18ac} + \frac{9bc}{3c}$

c $\frac{25pqs}{5p} - \frac{64qrs}{8r}$

12 Herleid.

a $\frac{5b}{13b}$

d $\frac{a}{25a}$

g $\frac{-20pqr}{25prs}$

b $\frac{5b}{15a}$

e $\frac{18xy}{24xz}$

h $\frac{17abc}{17ab}$

c $\frac{25a}{a}$

f $\frac{-21ab}{35abc}$

i $\frac{17ab}{17abc}$

13 Herleid.

a $\frac{18xy}{6x} - 5y$

b $\frac{-27xy}{9y} + 5x$

c $-\frac{8ab}{2b} + \frac{9ac}{3c}$

Theorie B Variabelen uit breuken halen

Je weet dat $\frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{2}{5}$. Dus $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} \cdot 2$.

Op dezelfde manier is $\frac{p}{5} = \frac{1}{5} \cdot p$, dus $\frac{p}{5} = \frac{1}{5}p$.

En zo is $\frac{a}{3} = \frac{1}{3}a$, $\frac{pq}{2} = \frac{1}{2}pq$ en $\frac{2x}{7} = \frac{2}{7}x$.

Hierbij zijn steeds de **variabelen uit de breuken gehaald**.

Bij het herleiden van $\frac{12p}{30}$ deel je teller en noemer door 6.

Vervolgens haal je de variabele p uit de breuk. Je krijgt

$$\frac{12p}{30} = \frac{2p}{5} = \frac{2}{5}p.$$

En zo is $\frac{15ab}{20a} = \frac{3b}{4} = \frac{3}{4}b$.

Voorbeeld

Herleid $\frac{2xy}{6y} + \frac{3ax}{a}$.

Uitwerking

$$\frac{2xy}{6y} + \frac{3ax}{a} = \frac{x}{3} + \frac{3x}{1} = \frac{1}{3}x + 3x = 3\frac{1}{3}x$$

T 14 [►►17] Herleid.

a $\frac{6abc}{9a}$

b $\frac{49pqr}{14qr}$

c $\frac{72xyz}{-6xz}$

15 Herleid.

a $\frac{7p}{28}$

c $\frac{21x}{35}$

e $\frac{8c}{-8}$

b $\frac{15a}{45}$

d $\frac{6q}{3}$

f $\frac{8y}{16}$

16 Herleid.

a $\frac{4xy}{8x}$

c $\frac{p}{7p}$

e $\frac{3xy}{-6x}$

b $\frac{6abc}{2ab}$

d $\frac{6pq}{3q}$

f $\frac{12abc}{-4ac}$

A 17 Herleid.

a $2a - \frac{3ab}{8b}$

b $\frac{3}{4}x + \frac{5xy}{10y}$

c $\frac{3abc}{ac} - \frac{6ab}{20a}$

O 18 In de breuk $\frac{a(a+b)}{5(a+b)}$ kun je teller en noemer delen door de

factor $(a+b)$. Je krijgt $\frac{a(a+b)}{5(a+b)} = \frac{a}{5} = \frac{1}{5}a$.

Herleid.

a $\frac{a(b+c)}{6(b+c)}$

b $\frac{4(p+q)}{2(p+q)}$

c $\frac{xy}{x(x+y)}$

Theorie C Breuken herleiden met ontbinden in factoren

Bij het herleiden van breuken moet je soms eerst ontbinden in factoren.

Zo is $\frac{3ab+4bc}{2ab} = \frac{b(3a+4c)}{2ab} = \frac{3a+4c}{2a}$.

deel teller en noemer door b

En $\frac{3a^2-3ab}{a-b} = \frac{3a(a-b)}{a-b} = \frac{3a}{1} = 3a$.

deel teller en noemer door $a-b$

Ook de formule $T = \frac{10a}{2ab+2ac}$ kun je herleiden.

Je krijgt $T = \frac{10a}{2ab+2ac} = \frac{10a}{2a(b+c)} = \frac{5}{b+c}$.

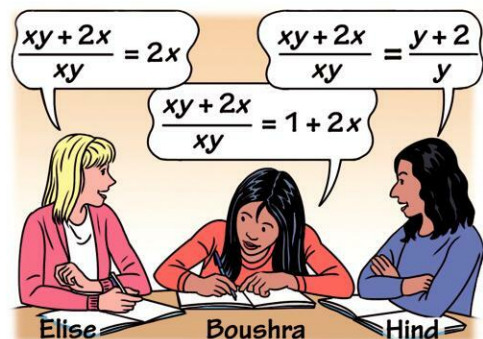
Bij het herleiden van de formule $y = \frac{x^2-4x+3}{2x-6}$

ontbind je eerst teller en noemer in factoren. Dit geeft

$$y = \frac{x^2-4x+3}{2x-6} = \frac{(x-1)(x-3)}{2(x-3)} = \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

En bij $N = \frac{a^2-9}{a^2+2a-3}$ krijg je $N = \frac{a^2-9}{a^2+2a-3} = \frac{(a+3)(a-3)}{(a+3)(a-1)} = \frac{a-3}{a-1}$.

19 Zie de cartoon hiernaast.
Wie heeft er gelijk? Licht toe.



20

Herleid.

$$\text{a } \frac{8a^2 - 16a}{4a}$$

$$\text{b } \frac{p + q}{5p + 5q}$$

$$\text{c } \frac{a^2 + 2a - 3}{2a + 6}$$

21

Herleid de volgende formules.

$$\text{a } T = \frac{5a + 10b}{5}$$

$$\text{b } y = \frac{x^2 - 3x}{10x}$$

$$\text{c } A = \frac{p^2 + 4p}{p^2 + 5p + 4}$$

A 22

Herleid de volgende formules.

$$\text{a } N = \frac{3t^2 + 6t}{6t}$$

$$\text{b } y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 5}$$

$$\text{c } p = \frac{q^2 - 4}{q^2 + 4q + 4}$$

O 23

Klas 3Ha bestaat voor vier zevende deel uit meisjes. Van deze meisjes heeft driekwart een bijbaantje. Dat zijn 12 leerlingen.
Bereken hoeveel leerlingen in klas 3Ha zitten.



Theorie D Breuken vermenigvuldigen en delen

Bij het vermenigvuldigen van breuken gebruik je de regel

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

$$\text{Dus } \frac{6}{5a} \cdot \frac{15}{4b} = \frac{90}{20ab} = \frac{9}{2ab}$$

Om $\left(\frac{2}{x}\right)$ te herleiden, werk je eerst de breuk uit de teller weg.

$$\text{Je gebruikt dat } \frac{\left(\frac{2}{x}\right)}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{x}. \text{ Dit geeft } \frac{\left(\frac{2}{x}\right)}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{x} = \frac{2}{5x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Zoals } \frac{a}{5} &= \frac{1}{5} \cdot a, \\ \left(\frac{2}{x}\right) & \\ \text{is } \frac{\left(\frac{2}{x}\right)}{5} &= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{x}. \end{aligned}$$



Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

$$\text{Dus } \frac{6}{a} : \frac{3}{b} = \frac{6}{a} \cdot \frac{b}{3} = \frac{6b}{3a} = \frac{2b}{a} \text{ en } 3 : \frac{15}{a} = \frac{3}{1} \cdot \frac{a}{15} = \frac{3a}{15} = \frac{a}{5} = \frac{1}{5}a.$$

Om $\frac{10}{\left(\frac{3}{x}\right)}$ te herleiden, werk je eerst de breuk uit de noemer weg.

Je gebruikt dat $\frac{10}{\left(\frac{3}{x}\right)}$ hetzelfde is als $10 : \frac{3}{x}$.

$$\text{Dit geeft } \frac{10}{\left(\frac{3}{x}\right)} = 10 \cdot \frac{x}{3} = \frac{10x}{3} = \frac{10}{3}x = 3\frac{1}{3}x.$$

Voorbeeld

Herleid.

a $\frac{8}{3x} : \frac{2y}{9x}$

b $\frac{\left(\frac{2x}{3}\right)}{5}$

c $\frac{10}{\left(\frac{3}{5x}\right)}$

Uitwerking

a $\frac{8}{3x} : \frac{2y}{9x} = \frac{8}{3x} \cdot \frac{9x}{2y} = \frac{72x}{6xy} = \frac{12}{y}$

b $\frac{\left(\frac{2x}{3}\right)}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{2x}{15} = \frac{2}{15}x$

c $\frac{10}{\left(\frac{3}{5x}\right)} = 10 \cdot \frac{5x}{3} = \frac{50x}{3} = \frac{50}{3}x = 16\frac{2}{3}x$

T 24 [►► 28] Herleid.

a $\frac{12a}{5c} : \frac{2}{3c}$

b $\frac{\left(\frac{4p}{3}\right)}{2}$

c $\frac{6}{\left(\frac{3}{2q}\right)}$

25 Herleid.

a $\frac{3}{2a} \cdot \frac{6}{a}$

b $-\frac{3}{x} \cdot \frac{-x}{3y}$

c $\frac{8}{3a} \cdot \frac{5}{2a}$

26 Herleid.

a $\frac{3}{2a} : \frac{6}{a}$

b $\frac{1}{2a} : \frac{6}{c}$

c $\frac{a}{9} : (3a)$

27 Herleid.

a $\frac{\left(\frac{3}{x}\right)}{8}$

b $\frac{9}{\left(\frac{3}{x}\right)}$

c $\frac{\left(\frac{2x}{5}\right)}{3}$

A 28 Herleid.

a $\frac{3}{2a} : \frac{3b}{a}$

c $9 : \frac{3}{5a}$

e $-6a : -\frac{2a}{3}$

b $\frac{\left(\frac{3}{2a}\right)}{4b}$

d $\frac{2a}{3} \cdot 6a$

f $\frac{9}{\left(\frac{6a}{5}\right)}$

O 29 Emmy reist elke dag van haar huis naar haar werk. Ze legt een zesde deel van de afstand op de fiets af, vier vijfde deel met de bus, en de rest lopend. Welk deel van de reisafstand loopt Emmy?



Theorie E Breuken optellen en aftrekken

Bij het optellen en aftrekken van gelijknamige breuken neem je de tellers samen, de noemer verandert niet.

Dus $\frac{9}{2x} - \frac{3}{2x} = \frac{6}{2x} = \frac{3}{x}$, $\frac{x}{y} + \frac{3x}{y} = \frac{4x}{y}$ en $\frac{x}{y} + \frac{3z}{y} = \frac{x+3z}{y}$.

vereenvoudigen

Om niet-gelijknamige breuken op te tellen, maak je ze eerst gelijknamig.

Zo is $\frac{5}{x} + \frac{2}{y} = \frac{5y}{xy} + \frac{2x}{xy} = \frac{5y+2x}{xy}$.

De nieuwe noemer wordt xy .

Voorbeeld

Herleid.

a $\frac{3}{x} - \frac{5}{4x}$

b $2 - \frac{6}{a}$

Uitwerking

a $\frac{3}{x} - \frac{5}{4x} = \frac{12}{4x} - \frac{5}{4x} = \frac{7}{4x}$

b $2 - \frac{6}{a} = \frac{2}{1} - \frac{6}{a} = \frac{2a}{a} - \frac{6}{a} = \frac{2a-6}{a}$

30 Herleid.

a $\frac{7p}{3q} - \frac{p}{3q}$

c $\frac{2}{3x} + \frac{5}{2x}$

e $\frac{4}{x} - 3$

b $\frac{3}{5a} - \frac{2}{a}$

d $\frac{2}{a} - \frac{3}{a^2}$

f $\frac{8}{3a} - \frac{3}{2b}$

A 31 Herleid.

a $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} \cdot \frac{2y}{7}$

b $\frac{3}{a} \div \frac{6}{b} - \frac{1}{4a}$

c $2p \cdot \frac{3}{10pq} - 1$

32 In een gebouw worden twee soorten tapijt gelegd. Type A kost € 60 per strekkende meter en type B kost € 40 per strekkende meter. Van zowel type A als type B wordt voor € 12 000 tapijt ingekocht.

- a** Licht met een berekening toe dat 200 strekkende meter van type A wordt ingekocht en 300 strekkende meter van type B.
b Laat met een berekening zien dat de gemiddelde prijs per strekkende meter € 48 is.

In een ander gebouw worden ook de tapijtsoorten A en B gelegd. Voor elk van beide soorten wordt b euro betaald. Het totale aantal strekkende meter l dat voor dit gebouw wordt ingekocht, is dan $l = \frac{b}{60} + \frac{b}{40}$.

- c** Licht dit toe en herleid de formule van l .
d De gemiddelde prijs per strekkende meter is $\frac{2b}{l}$.
Licht dit toe en bereken deze gemiddelde prijs.

33 $\frac{2x}{7} - \frac{2x-1}{3} = \frac{3 \cdot 2x}{3 \cdot 7} - \frac{7(2x-1)}{7 \cdot 3} = \frac{6x-7(2x-1)}{21} = \frac{6x-14x+7}{21} = \frac{-8x+7}{21}$

Herleid.

a $\frac{2a}{3} + \frac{a-7}{4}$

c $5 - \frac{3x-y}{y}$

e $\frac{b+3}{b} - \frac{a-1}{a}$

b $\frac{1}{2}a - \frac{2a+1}{3}$

d $\frac{2a-3}{a} + 2\frac{2}{3}$

f $\frac{x+y}{x} - \frac{x-y}{y}$

5.3 Machten herleiden

O 34 Hieronder staan twee beweringen, waarvan er één waar is. Welke?

I $a^3 + a^3 = a^6$

II $a^3 \cdot a^3 = a^6$

Theorie A Machten vermenigvuldigen en optellen

Het product van de machten a^3 en a^5 is te herleiden.

$$a^3 \cdot a^5 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ factoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5 \text{ factoren}} = a^8 \dots\dots\dots \boxed{3 + 5}$$

En zo is $a^4 \cdot a^9 = a^{13} \dots \boxed{4 + 9}$ en $a \cdot a^7 = a^8 \dots \boxed{1 + 7}$

Een product van machten met hetzelfde grondtal kun je herleiden tot één macht door de exponenten op te tellen. Het grondtal blijft gelijk. Dus $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

Dus $a^8 \cdot a^{11} = a^{19}$ en $5a^7 \cdot 3a^{12} = 15a^{19}$.

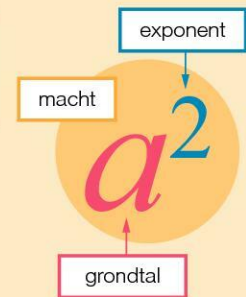
Verder is $4a^3 \cdot 5b^7 = 20a^3b^7$ en $5a^3b^2 \cdot 8a^7b^3 = 40a^{10}b^5$.

In $2a^3 + 5a^3$ zijn de termen $2a^3$ en $5a^3$ gelijksoortig, dus je kunt $2a^3 + 5a^3$ herleiden tot $7a^3$.

$$2a^3 + 5a^3 = \underbrace{a^3 + a^3}_{2 \text{ termen}} + \underbrace{a^3 + a^3 + a^3 + a^3}_{5 \text{ termen}} = 7a^3 \dots\dots\dots \boxed{\text{De exponent blijft gelijk.}}$$

En zo is $8a^6 + 12a^6 = 20a^6$.

De termen $7a^4$ en $4a^3$ zijn niet gelijksoortig. Daarom kun je $7a^4 + 4a^3$ niet herleiden.



$7a^4 + 4a^3$ kan niet korter
 $7a^4 \cdot 4a^3 = 28a^7$

Voorbeeld

Herleid.

a $3x^3y^2 \cdot -2xy^7$

b $3a^3 \cdot 5a^5 - 2a \cdot 3a^7$

Uitwerking

a $3x^3y^2 \cdot -2xy^7 = -6x^4y^9$

$3 \cdot -2 = -6$, $x^3 \cdot x = x^4$ en $y^2 \cdot y^7 = y^9$

b $3a^3 \cdot 5a^5 - 2a \cdot 3a^7 = 15a^8 - 6a^8 = 9a^8$

T 35 [►► 38] Herleid.

a $6a^4 + 2a^5 - 7a^4$

c $-3p^5 \cdot -p^3 - 5p \cdot -2p^7$

b $-3b^7c^2 \cdot 5bc^3$

d $5x^3 \cdot -2y^5 - 3x^4 \cdot 2y^4$

36 Herleid.

a $5a^7 \cdot 7a^6$

c $x^5y \cdot -6x^7y^3$

e $-8a^6x^3 \cdot -5a^3x^{11}$

b $2a^5b^2 \cdot 3a^2b$

d $-3a^9b^2 \cdot -5ab$

f $9m^7n^3 \cdot -2m^2n^5$

37 Herleid.

a $7x^8 + 3x^8$

b $5a^4 - 3b^4 + 2a^4$

c $4a^2 \cdot 3a^5 + 2a^4 \cdot a^3$

d $5x^4 \cdot 2x^6 - x^5 \cdot 2x^4$

e $2x^6 \cdot 3x^6 - 5x^9 \cdot 4x^3$

f $p^2 \cdot -3p^4 - 2p \cdot -4p^5$

A 38 Herleid.

a $5x^3 \cdot 2x^5 - 3x^4 \cdot 2x^4$

b $-3a^5b^3 \cdot -5a^2b^4$

c $m^4 \cdot 2m^3 + 4m^2 \cdot 3m^6$

d $4x^3 - 9y^2 + 5x^3$

e $4x^3 \cdot -9y^2 \cdot 5x^3$

f $4x^3 \cdot 9y^2 + x^3 \cdot -2y^2$

39 Herleid.

a $2a(3a^3 - 4a^5)$

b $5x^3(x^4 - 2x)$

c $a^3(a^2 + 2a) - a^4$

d $3ab(2a - 3b) + ab^2$

e $p^3(2p^2 - 1) - p(p^4 + p)$

f $(a^4 + 5)^2$

g $(4x^3 + 9y)^2 - x^3 \cdot 2y^2$

h $(4x^3 - 9y^2)(x^3 - 2y^2)$

i $4x^3 \cdot 9y^2 - (x^3 - 2y)^2$

Theorie B De macht van een macht en de macht van een product

x^4 is een macht, dus $(x^4)^3$ is een macht van een macht.

$(x^4)^3$ betekent $x^4 \cdot x^4 \cdot x^4$, dus $(x^4)^3 = x^4 \cdot x^4 \cdot x^4 = x^{4+4+4} = x^{12}$.

Je ziet dat je bij een macht van een macht de exponenten vermenigvuldigt.

Zo is $(a^5)^3 = a^{15}$ en $(x^2)^7 = x^{14}$.

Bij een macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten.
Dus $(a^p)^q = a^{pq}$.

$(ab)^6$ is de zesde macht van het product ab .

$(ab)^6 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab = a^6b^6$.

En zo is $(xyz)^5 = x^5y^5z^5$ en $(2p)^3 = 2^3 \cdot p^3 = 8p^3$.

Bij een macht van een product neem je elke factor tot die macht.
Dus $(ab)^p = a^p b^p$.

$(4x^5)^3$ is de derde macht van $4x^5$.

Herleiden geeft $(4x^5)^3 = 4^3 \cdot (x^5)^3 = 64x^{15}$.

Voorbeeld

Herleid.

a $(a^5)^3 \cdot 2a^6$

b $5(a^3)^6 - (6a^9)^2$

c $(-3a^6)^2 \cdot -2(a^3)^4$

Uitwerking

a $(a^5)^3 \cdot 2a^6 = a^{15} \cdot 2a^6 = 2a^{21}$

b $5(a^3)^6 - (6a^9)^2 = 5a^{18} - 36a^{18} = -31a^{18}$

c $(-3a^6)^2 \cdot -2(a^3)^4 = 9a^{12} \cdot -2a^{12} = -18a^{24}$

$(-3a^6)^2 = (-3)^2 \cdot (a^6)^2 = 9a^{12}$

40 Herleid.

a $(5p^3)^2$

b $-2(ab)^4$

c $(-3y^8)^4$

d $(a^3)^4 \cdot 5a^2$

e $3(x^2)^8 - 4(x^4)^4$

f $(2m^2)^3 \cdot 5(m^3)^3$

A 41 Herleid.

a $2(a^3)^2 + 3a^6$

b $(3a^3)^3 - 5a^9$

c $(a^4)^3 - 2(a^2)^6$

d $(5x^3)^2 \cdot 2x^4$

e $(-3p)^2 + 5p^2$

f $2(a^3)^4 + (2a^4)^3$

O 42 Vul in: $a^{\dots} \cdot a^3 = a^7$, dus $\frac{a^7}{a^3} = a^{\dots}$.

Theorie C Machten delen

Je kunt $\frac{a^7}{a^3}$ schrijven als een macht van a .

$$\frac{a^7}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$$

$$\text{En zo is } \frac{x^6}{x^2} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x}} = x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4.$$

Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af. Het grondtal blijft gelijk.

Dus $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.

Dus $\frac{a^8}{a^2} = a^6$ en $\frac{12a^{12}}{2a^2} = 6a^{10}$.

Verder is $\frac{a^3}{a^3} = 1$ en $\frac{8x^4y^{32}}{2x^4y^8} = 4y^{24}$.

$$\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0 \text{ en}$$

$$\frac{a^p}{a^p} = 1, \text{ dus } a^0 = 1.$$

Voorbeeld

Herleid.

a $\frac{x^{12}}{x^4}$

b $\frac{18a^{18}}{9a^9}$

c $\frac{3m^{11}}{3m^{11}}$

d $\frac{2a^3b^7}{6a^2b^7}$

Uitwerking

a $\frac{x^{12}}{x^4} = x^8$

b $\frac{18a^{18}}{9a^9} = 2a^9$

c $\frac{3m^{11}}{3m^{11}} = 1$

d $\frac{2a^3b^7}{6a^2b^7} = \frac{1}{3}a$

43 Herleid.

a $\frac{x^{10}}{x^2}$

b $\frac{x^8}{x^8}$

c $\frac{x^7}{x^6}$

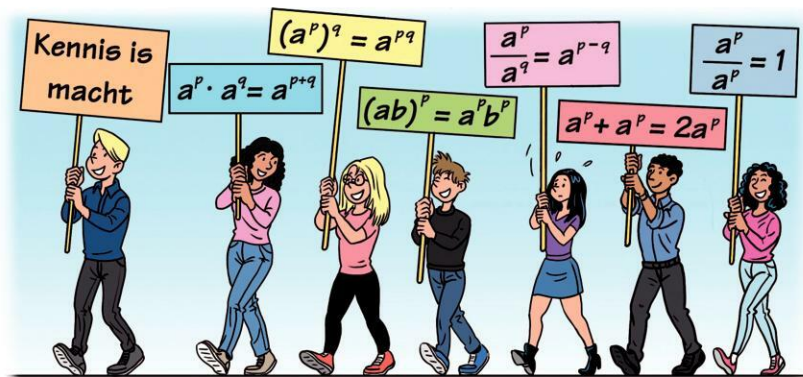
d $\frac{5x^{10}}{x^2}$

e $\frac{3x^7}{3x^3}$

f $\frac{12x^7}{6x^7}$

g $\frac{18x^3y^2}{-6xy^2}$

h $\frac{27x^3y^6}{9y^5}$



A 44 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $2a^3 \cdot 8a^6$

b $\frac{8a^6}{2a^3}$

c $2a^3 + 8a^6$

d $(2a^3)^4 + 5(a^6)^2$

e $\frac{2(a^3)^4}{8a^2}$

f $(5x^2)^4 - 125x^8$

g $\frac{21x^3 + 9x^3}{10x}$

h $16a^4 \cdot (-3a^3)^2$

i $3a \cdot a^7 - (a^4)^2$

j $\frac{40x^6y^8}{8x^6y^7}$

45 Herleid.

a $\frac{(x^4)^2 + 5(x^2)^4}{3x^5}$

b $3(x^3)^4 + (x^6)^2 - 2x \cdot x^{11}$

c $-5(x^4)^2 \cdot (-3x)^2 \cdot x^6$

d $\frac{(5x)^2 - x^2}{-6x}$

e $(5a^3)^2 - (-3a^2)^3 + a^6$

f $(6x^5)^2 \cdot 6x^3 + (-4x^3)^3 \cdot x^4$

46 Herleid.

a $x^3(x^2 + x^3) - x^2(x^3 - 1)$

b $3x^2(5x - 7) + 5x^2(x - 1)$

c $(2x^3 - 3)^2$

d $(5x^4 - 1)^2 - x^6(x^2 - 1)$

e $(x^3 + x^2)(3x + x^6)$

f $5x^4 - 3x^2(x^2 - 1)$

5.4 Wortels herleiden

O 47 Bereken $\sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$ en $\sqrt{4 \cdot 25}$. Wat valt je op?

Theorie A Een factor voor het wortelteken brengen

In opgave 47 heb je gezien dat $\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{4 \cdot 25}$.

Op dezelfde manier is $\sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{4 \cdot 6}$.

Dit zijn voorbeelden van de regel

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

Om bij $\sqrt{24}$ een factor voor het wortelteken te brengen, gebruik je deze regel omgekeerd. Je krijgt

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{En } 5\sqrt{18} = 5 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2}.$$

Om een factor voor het wortelteken te brengen, heb je een kwadraat nodig. Bij $\sqrt{42}$ lukt het niet om een factor voor het wortelteken te brengen, want $42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$ en bij de factoren 2, 3, 6, 7, 14, en 21 zit geen kwadraat.

Bij het herleiden van wortels breng je een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken. Dus

$$\sqrt{48} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}, \text{ en niet } \sqrt{48} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{12} = 2\sqrt{12}.$$

Ken je kwadraten!

$$4 = 2^2$$

$$81 = 9^2$$

$$9 = 3^2$$

$$100 = 10^2$$

$$16 = 4^2$$

$$121 = 11^2$$

$$25 = 5^2$$

$$144 = 12^2$$

$$36 = 6^2$$

$$169 = 13^2$$

$$49 = 7^2$$

$$196 = 14^2$$

$$64 = 8^2$$

$$225 = 15^2$$

Voorbeeld

Herleid.

a $\sqrt{80}$

b $3\sqrt{28}$

c $3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{10}$

Uitwerking

a $\sqrt{80} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

b $3\sqrt{28} = 3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = 3 \cdot 2\sqrt{7} = 6\sqrt{7}$

c $3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{10} = 18\sqrt{20} = 18 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 18 \cdot 2\sqrt{5} = 36\sqrt{5}$

$$3 \cdot 6 = 18 \text{ en } \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{20}$$

48 Herleid.

a $\sqrt{12}$

c $\sqrt{180}$

e $2\sqrt{45}$

b $\sqrt{75}$

d $3\sqrt{200}$

f $-3\sqrt{288}$

49 Herleid.

a $5\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{21}$

b $5\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2}$

c $5\sqrt{12} \cdot -3\sqrt{3}$

A 50 Herleid.

a $8\sqrt{5} \cdot -\sqrt{15}$

b $-3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{32}$

c $6\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{12}$

O 51 Vul in.

a $\frac{6}{2} = 3$, want $3 \cdot \dots = \dots$

b $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, want $\sqrt{3} \cdot \dots = \dots$

Theorie B Wortels delen

In opgave 51 heb je gezien dat $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$ oftewel $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}}$.

Dit is een voorbeeld van de volgende regel.

Voor het delen van wortels geldt $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Dus $\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{26}{2}} = \sqrt{13}$. Je mag in één keer opschrijven $\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}} = \sqrt{13}$.

En zo is $\frac{12\sqrt{20}}{4\sqrt{5}} = \frac{12}{4} \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$.

Voorbeeld

Herleid.

a $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$

c $\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

b $\frac{12\sqrt{15}}{5\sqrt{5}}$

d $\frac{5\sqrt{48}}{\sqrt{6}}$

Uitwerking

a $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \sqrt{7}$

c $\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

b $\frac{12\sqrt{15}}{5\sqrt{5}} = \frac{12}{5}\sqrt{3} = 2\frac{2}{5}\sqrt{3}$

d $\frac{5\sqrt{48}}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{8} = 5 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

52 Herleid.

a $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$

c $\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$

e $\frac{24\sqrt{18}}{18\sqrt{6}}$

b $\frac{12\sqrt{27}}{6\sqrt{3}}$

d $\frac{15\sqrt{7}}{25\sqrt{7}}$

f $\frac{\sqrt{24}}{3\sqrt{3}}$

Theorie C De wortel van een breuk

Bij het herleiden van de wortel van een breuk, gebruik

je de regel $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ van rechts naar links. Zo krijg je

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5} \text{ en } \sqrt{\frac{2}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{2}.$$

$$\text{Verder is } \sqrt{\frac{12}{49}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}}{7} = \frac{2\sqrt{3}}{7} = \frac{2}{7}\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Zoals } \frac{a}{5} &= \frac{1}{5}a, \\ \text{is } \frac{\sqrt{2}}{5} &= \frac{1}{5}\sqrt{2}. \end{aligned}$$



Voorbeeld

Herleid.

a $\sqrt{\frac{18}{25}}$

b $\sqrt{1\frac{1}{9}}$

Uitwerking

a $\sqrt{\frac{18}{25}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{2}$

b $\sqrt{1\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{10}$

53 Herleid.

a $\sqrt{\frac{3}{16}}$

b $\sqrt{\frac{45}{81}}$

c $\sqrt{1\frac{1}{4}}$

d $\sqrt{3\frac{24}{25}}$

A 54 Herleid.

a $\frac{15\sqrt{3}}{25}$

c $\frac{3\sqrt{12}}{12\sqrt{3}}$

e $\frac{2\sqrt{50}}{3}$

g $\frac{\sqrt{72}}{6\sqrt{6}}$

b $\sqrt{1\frac{11}{25}}$

d $\sqrt{3\frac{1}{9}}$

f $\sqrt{1\frac{21}{100}}$

h $\sqrt{2\frac{1}{16}}$

O 55 Laat zien dat je $\sqrt{18} + \sqrt{2}$ kunt herleiden door bij $\sqrt{18}$ een factor voor het wortelteken te brengen.

Theorie D Gelijksoortige wortels

De som van gelijksoortige wortels kun je herleiden. Zo is $3\sqrt{6} + 5\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$ en $8\sqrt{5} - \sqrt{5} = 7\sqrt{5}$. Maar $3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}$ kun je niet herleiden, want $3\sqrt{5}$ en $5\sqrt{3}$ zijn niet gelijksoortig.

Het lijkt alsof $\sqrt{48} + 5\sqrt{3}$ niet te herleiden is, maar door bij $\sqrt{48}$ een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken te brengen, zie je dat het wel lukt. Je krijgt

$$\sqrt{48} + 5\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$$

En zo is

$$4\sqrt{3} - 2\sqrt{27} = 4\sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2 \cdot 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = -2\sqrt{3}.$$

56

Herleid.

a $7\sqrt{2} - \sqrt{8}$

b $\sqrt{12} - \sqrt{3}$

c $2\sqrt{90} - 3\sqrt{40}$

A 57

Herleid.

a $3\sqrt{60} + 2\sqrt{135}$

c $\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{32} - \sqrt{150}$

e $\frac{20\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} - \sqrt{18} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $8\sqrt{3} \cdot \sqrt{21} - 2\sqrt{7}$

d $\sqrt{54} - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$

f $\frac{6\sqrt{40}}{3\sqrt{2}} - 5\sqrt{125}$

Theorie E Wortel wegwerken uit noemer

De breuk $\frac{6}{\sqrt{3}}$ is te herleiden tot een vorm waarbij de wortel uit de noemer verdwijnt. Je vermenigvuldigt daartoe teller en

noemer met $\sqrt{3}$. Dus $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

En zo is $\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

Verder is $\sqrt{1\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$.

Voorbeeld

Herleid.

a $\frac{6}{\sqrt{5}}$

b $\sqrt{1\frac{3}{7}}$

Uitwerking

a $\frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{6}{5}\sqrt{5} = 1\frac{1}{5}\sqrt{5}$

b $\sqrt{1\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{10}{7}} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{70}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{70}$

Bij het herleiden van wortels

- breng je een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken
- werk je een wortel uit de noemer van een breuk weg
- werk je een breuk onder het wortelteken weg.

58

Herleid.

a $\frac{10}{\sqrt{5}}$

c $\frac{21}{3\sqrt{7}}$

e $\frac{9}{2\sqrt{6}}$

b $\sqrt{4\frac{1}{6}}$

d $4\sqrt{\frac{1}{2}}$

f $\sqrt{3\frac{1}{3}}$

A 59

Herleid.

a $\frac{10}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{8}$

c $\sqrt{12\frac{1}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{2}}$

e $\sqrt{24} - \frac{12}{\sqrt{6}}$

b $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{32}}{12}$

d $\frac{2}{5}\sqrt{15} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{5}$

f $\sqrt{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt{\frac{1}{15}}$

5.5 Vergelijkingen met twee variabelen

60 Voor de introductiedagen doet de mentor van klas 3H1 inkopen bij bakker Verbeek. Hij koopt zes zakken krentenbollen en drie zakken bruine bollen voor in totaal 24 euro.

- a** Neem eens aan dat de bruine bollen € 4 per zak kosten.
Hoeveel kost dan een zak krentenbollen?
- b** Neem aan dat de bruine bollen € 2 per zak kosten.
Hoeveel kost dan een zak krentenbollen?
- c** Vul in.
Stel dat een zak krentenbollen x euro kost. Zes zakken krentenbollen kosten dan $6x$ euro.
Stel dat een zak bruine bollen y euro kost. Drie zakken bruine bollen kosten dan ...
Samen kosten ze 24 euro, dus $6x + \dots = \dots$

Theorie A Vergelijkingen met twee variabelen

In opgave 60 heb je de vergelijking $6x + 3y = 24$ opgesteld. Van deze vergelijking is $6x + 3y$ het linkerlid en 24 het rechterlid. In de vergelijking $6x + 3y = 24$ komen twee variabelen voor, namelijk x en y . Daarom heet $6x + 3y = 24$ een **vergelijking met twee variabelen**.

Je kunt de vergelijking $6x + 3y = 24$ herleiden tot de vorm $y = ax + b$. Dat gaat als volgt.

$$6x + 3y = 24$$

$$3y = -6x + 24$$

$$y = -2x + 8$$

breng $6x$ van het linker- naar het rechterlid
deel beide leden door 3

Hiermee heb je de **variabele y vrijgemaakt**.

Je ziet dat er een lineair verband bestaat tussen x en y , dus de grafiek van $6x + 3y = 24$ is een lijn. De richtingscoëfficiënt is -2 .

Voorbeeld

- a** Herleid $3x - y = 8$ tot de vorm $y = ax + b$.
- b** Maak y vrij bij $4x - 5y = 10$.

Uitwerking

a $3x - y = 8$

$$-y = -3x + 8$$

$$y = 3x - 8$$

b $4x - 5y = 10$

$$-5y = -4x + 10$$

$$y = \frac{4}{5}x - 2$$

61 Herleid tot de vorm $y = ax + b$.

a $2x + y = 7$

b $2x - y = -7$

c $3x + 2y = 8$

62 Maak y vrij.

a $3x - 4y = 12$

b $5x + 2y = 14$

c $6x - 4y = -12$

63 **a** Herleid $3x + 2y = 6$ tot de vorm $y = ax + b$.

b Geef de richtingscoëfficiënt van de lijn l : $3x + 2y = 6$.

A 64 Gegeven zijn de lijnen m : $5x - y = 10$ en n : $x + 2y = 13$.

a Bereken de richtingscoëfficiënten van m en n .

b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van m en n .

65 Stel een vergelijking op met de variabelen x en y .

a Een croissant kost x euro en een stokbrood kost y euro. Henk koopt 6 croissants en 4 stokbroden. Hij betaalt € 10,40.

b In een collectebus zitten x muntstukken van 1 euro en y muntstukken van twee euro. De totale waarde van de muntstukken is 85 euro.

Je koopt 6 mango's voor x euro per stuk en 4 ananassen voor y euro per stuk. Je betaalt 17 euro. Hierbij hoort de vergelijking $6x + 4y = 17$.

66 Zie de afbeelding hiernaast. Hans koopt x pakken melk en y flessen cola. Hij betaalt 28 euro. Hieruit volgt de vergelijking $1,5x + 2y = 28$.

a Stel dat Hans acht pakken melk koopt, dan is $x = 8$. Vul $x = 8$ in bij $1,5x + 2y = 28$, en los de ontstane vergelijking op. Welke informatie heb je nu?

b Stel dat Hans twaalf pakken melk koopt. Hoeveel flessen cola koopt hij in dat geval?

c Stel dat Hans twee flessen cola koopt. Hoeveel pakken melk koopt hij in dat geval?



A 67 In een schouwburg zijn x kaarten van € 12 en y kaarten van € 16 verkocht. De opbrengst van de kaartverkoop is € 5740.

a Stel een vergelijking op met de variabelen x en y .

b Bereken hoeveel kaarten van € 16 zijn verkocht als er 225 kaarten van € 12 zijn verkocht.

68 Bij bioscoop FilmFreak betalen jongeren € 7,50 en volwassenen € 10. In totaal zijn er 150 plaatsen. Op een avond zijn alle plaatsen bezet. De opbrengst van de kaartverkoop is 1300 euro. Er zijn die avond x jongeren en y volwassenen.

a Welke vergelijking volgt uit het gegeven dat de opbrengst 1300 euro is?

b Welke vergelijking volgt uit het gegeven dat alle 150 plaatsen bezet zijn?

c Bereken hoeveel jongeren en hoeveel volwassenen er die avond zijn.

Gemengde opgaven

1 Herleid.

- a $4(2n-1)^2 - (4n)^2$
- b $2(1-q)(q+2) - 2(3-q)$
- c $8(a-3b)(a+3b) - 4a \cdot 2a$
- d $3(5x-2y)^2 + 4y(15x-3y)$

2 Herleid de volgende formules.

- a $R = 4(a+1)(3a-4) - (2a+1)^2$
- b $y = \frac{-4x^2 - 6x}{10x + 15}$
- c $W = -(1-5p)(3+2p) - 4(3-p)^2$
- d $G = \frac{n^2 - 16}{n^2 - 7n + 12}$

3 Herleid.

- a $\frac{3}{2a} : \frac{1}{6a}$
- b $2\frac{3}{4} + \frac{4}{3a}$
- c $\frac{\left(\frac{4}{3x}\right)}{2x}$
- d $\frac{3x}{2y} - \frac{4}{y^2}$
- e $3x \cdot \frac{a}{12x} - \frac{12a^6}{4a^5}$
- f $\frac{4p^2}{\left(\frac{16p}{3}\right)} - \frac{pq}{2q}$

4 Herleid.

- a $(-3x^2)^3 \cdot 2(x^5)^2$
- b $6(x^2)^9 - (2x^6)^3$
- c $\frac{6q^5 - 4q^5}{(2q)^2}$
- d $-8a^2x^5 \cdot -3ax^2$
- e $3x^5 \cdot 2y^3 - xy^2 \cdot -4x^4y$
- f $\frac{6x^{24}y^5}{24x^6y^5}$

5 Herleid.

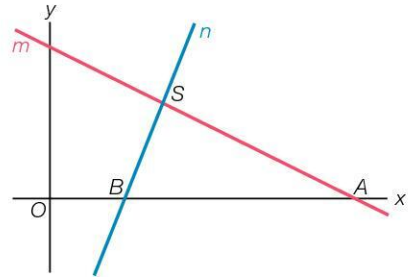
- a $\frac{\sqrt{84}}{3\sqrt{7}}$
- b $\frac{6\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{27}}{8\sqrt{3}}$
- c $3\sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$
- d $3\frac{1}{2}\sqrt[3]{2\frac{1}{49}}$

6 a Maak x vrij bij $2x + 7y = 15$.

b Maak y vrij bij $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

- 7 De lijn $m: x + 2y = 8$ snijdt de x -as in het punt A . De lijn $n: 5x - 2y = 10$ snijdt de x -as in het punt B . De lijnen m en n snijden elkaar in het punt S .

Bereken de oppervlakte van $\triangle ABS$.



figuur 5.1

- 8 Voor een concert zijn x kaarten van € 25 en y kaarten van € 35 verkocht. De opbrengst van de kaartverkoop is € 65 500.

- a Stel een vergelijking op met de variabelen x en y .
b Bereken hoeveel kaarten er in totaal zijn verkocht als er 1300 kaarten van € 35 zijn verkocht.



- 9 Herleid.

a $(-3a^3b)^3 \cdot \frac{1}{9(a^2b)^2}$

b $(x^3 + 2x)^2$

c $2p^6 \left(\frac{1}{p^5} - \frac{1}{p} \right)$

d $\frac{5\sqrt{63}}{15\sqrt{21}} + \sqrt{\frac{3}{4}}$

e $\frac{\sqrt{80}}{3\sqrt{8}}$

f $\frac{5}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{27}$

g $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{18}$

h $\frac{(-4a^4)^3 \cdot (b^3)^2}{2(a^2b^2)^2}$

i $(x^5 - x^4) \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right)$

j $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2}$

k $6 - \frac{3-5x}{x}$

l $\frac{4x^2}{4x^3 + 10x}$

Samenvatting

5.1 Haakjes wegwerken

blz 169

Regels voor het wegwerken van haakjes

- $a(b + c) = ab + ac$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- $(ab)^2 = a^2b^2$

Dus $(6x)^2 - 4x(9x - 5) = 36x^2 - 36x^2 + 20x = 20x$

en $3(2a - 1)(3 + a) = 3(6a + 2a^2 - 3 - a) = 3(5a + 2a^2 - 3) = 15a + 6a^2 - 9$.

Denk aan de haakjes.

blz 170

Merkwaardige producten

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Bij herleiden gaat machtsverheffen voor vermenigvuldigen.

Dus $2(x - 3y)^2 = 2(x^2 - 6xy + 9y^2) = 2x^2 - 12xy + 18y^2$.

5.2 Breuken herleiden

blz 171

Breuken vereenvoudig je zo ver mogelijk.

Dus $\frac{15xy}{18xz} = \frac{5y}{6z}$. Je hebt teller en noemer door 3 en door x gedeeld.

blz 172

Bij het herleiden van $\frac{8a}{12}$ deel je teller en noemer door 4. Vervolgens

haal je de variabele a uit de breuk. Je krijgt $\frac{8a}{12} = \frac{2a}{3} = \frac{2}{3}a$.

Verder is $\frac{6cz}{2c} - \frac{2xz}{6x} = \frac{3z}{1} - \frac{z}{3} = 3z - \frac{1}{3}z = 2\frac{2}{3}z$.

blz 173

Bij het herleiden van $\frac{2xy + 10yz}{6y^2}$ ontbind je de teller eerst in factoren.

Je krijgt $\frac{2xy + 10yz}{6y^2} = \frac{2y(x + 5z)}{6y^2} = \frac{x + 5z}{3y}$.

En zo is $\frac{a^2 - 4}{a^2 + a - 2} = \frac{(a + 2)(a - 2)}{(a + 2)(a - 1)} = \frac{a - 2}{a - 1}$.

blz 174

$\left(\frac{5}{3x}\right)$ is hetzelfde als $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3x}$. Dus $\frac{\left(\frac{5}{3x}\right)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3x} = \frac{5}{6x}$.

$\frac{3}{\left(\frac{2}{5a}\right)}$ is hetzelfde als $3 : \frac{2}{5a}$. Dus $\frac{3}{\left(\frac{2}{5a}\right)} = 3 : \frac{2}{5a} = 3 \cdot \frac{5a}{2} = \frac{15a}{2} = \frac{15}{2}a = 7\frac{1}{2}a$.

blz 176

Om breuken op te tellen, maak je ze eerst gelijknamig.

Dus $\frac{5}{2x} + \frac{6}{7y} = \frac{35y}{14xy} + \frac{12x}{14xy} = \frac{35y + 12x}{14xy}$.

5.3 Machten herleiden

blz 178 $3x^4 + 5x^4 = 8x^4$, maar $3x^3 + 5x^5$ kan niet korter.

Ook $3x^4 + 5y^4$ kan niet korter.

Nog een paar voorbeelden:

- $3x^3 \cdot 5x^5 = 15x^8$
- $(3x^4)^3 = 27x^{12}$
- $2(x^2)^6 - (-3x^4)^3 = 2x^{12} - -27x^{12} = 29x^{12}$

5.4 Wortels herleiden

blz 182 Bij het herleiden van wortels breng je een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken.

$$\text{Dus } 5\sqrt{72} = 5 \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot 6\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

$$\text{en } \sqrt{30} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{300} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

blz 183 Voor het delen van wortels geldt $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

$$\text{Dus } \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \sqrt{3} \text{ en } \frac{2\sqrt{50}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{25} = \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

blz 184 Om $\sqrt{\frac{12}{25}}$ te herleiden, gebruik je $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ van rechts

$$\text{naar links. Je krijgt } \sqrt{\frac{12}{25}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{3}.$$

+ De som van gelijksoortige wortels kun je herleiden.

$$\sqrt{48} - 2\sqrt{27} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2 \cdot 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

blz 185 Door bij de breuk $\frac{4}{\sqrt{5}}$ teller en noemer met $\sqrt{5}$ te vermenigvuldigen, verdwijnt de wortel uit de noemer.

$$\text{Je krijgt } \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}\sqrt{5}.$$

$$\text{Verder is } \sqrt{2\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{21}.$$

5.5 Vergelijkingen met twee variabelen

blz 186 $5x + 2y = 12$ is een voorbeeld van een vergelijking met twee variabelen. Van deze vergelijking is $5x + 2y$ het linkerlid en 12 het rechterlid.

Je kunt de vergelijking herleiden tot de vorm $y = ax + b$.

$$5x + 2y = 12 \quad \text{breng } 5x \text{ naar het rechterlid}$$

$$2y = -5x + 12 \quad \text{deel beide leden door 2}$$

$$y = -2\frac{1}{2}x + 6$$

De grafiek van $5x + 2y = 12$ is dus een lijn met richtingscoëfficiënt $-2\frac{1}{2}$.

Regels voor machten

$$a^p + a^p = 2a^p$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$\text{Zoals } \frac{2a}{5} = \frac{2}{5}a, \text{ is}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{3}.$$

Bij het herleiden tot de vorm $y = ax + b$ maak je de variabele y vrij.



Diagnostische toets

5.1 Haakjes wegwerken

1 Herleid.

1,2 a $5a + 3(2a - 1)(a + 2)$

c $2(5 - x)(4x + 3) - (2x)^2$

b $4(a - 1)^2 - (2a)^2$

d $-(3p - 2)(3p + 2)$

2 Herleid.

3 a $(p + 3q)^2 - (p - 3q)^2$

b $12(n - 1)^2 - 3(2n + 1)(2n - 1)$

5.2 Breuken herleiden

3 Herleid.

4,5 a $\frac{5a}{10} + \frac{12ac}{4c}$

b $\frac{4xyz}{2xz} - \frac{6yz}{10z}$

4 Herleid de volgende formules.

6 a $N = \frac{10t}{30t^2 - 5t}$

b $y = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2}$

5 Herleid.

7,8 a $\frac{\left(\frac{3}{a}\right)}{4}$

d $\frac{\left(\frac{5}{2c}\right)}{10}$

b $\frac{7}{10p} : \frac{2q}{5p}$

e $\frac{4}{\left(\frac{6}{5p}\right)}$

c $\frac{5}{3p} - \frac{7}{2q}$

f $\frac{3}{2a} - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4a}$

6 Herleid.

9 a $\frac{3 - 4x}{x} - 1\frac{1}{2}$

b $\frac{p + 5}{p} - \frac{q - 3}{q}$

5.3 Machten herleiden

7 Herleid.

10 a $2a^2 \cdot 5a^5 + 3a^4 \cdot -4a^3$

d $3p^6 - 4q^6 + 7p^6$

b $-6xy^5 \cdot -5x^3y^2$

e $3(n^2)^6 - 4(n^4)^3$

c $\frac{24m^7n^4}{8m^2n^3}$

f $\frac{(3x^3)^2}{27x}$

8 Herleid.

11 a $4x^2(x^4 - 3x) - (-2x^3)^2$

c $(2a^5 - 3b)^2 - 3a^2b \cdot -4a^3$

b $\frac{(2x^2)^5 - 2x^{10}}{3x^3}$

d $\frac{(6x^3)^2 - 9(x^2)^3}{6x^2}$

5.4 Wortels herleiden

9 Herleid.

12, 13, 14

a $2\sqrt{10} \cdot -5\sqrt{6}$

d $\frac{5\sqrt{24}}{\sqrt{2}}$

b $\frac{\sqrt{20}}{4\sqrt{5}}$

e $\sqrt{1\frac{7}{25}}$

c $\sqrt{1\frac{7}{9}}$

f $\frac{15\sqrt{108}}{24\sqrt{3}}$

10 Herleid.

15, 16

a $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} - 3\sqrt{8}$

d $\sqrt{10\frac{2}{3}} - \sqrt{2\frac{2}{3}}$

b $\sqrt{90} - 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{10}$

e $\sqrt{5} \cdot \sqrt{15} - \sqrt{\frac{1}{3}}$

c $\frac{3}{\sqrt{6}} - \sqrt{24}$

f $\frac{\sqrt{27} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

5.5 Vergelijkingen met twee variabelen

11 Gegeven zijn de lijnen k : $3x - y = 11$ en l : $x - 2y = 12$.

17

a Bereken de richtingscoëfficiënten van k en van l .

b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l .

12 Peter verkoopt op de markt x bakjes aardbeien en y bakjes frambozen. Een bakje aardbeien kost bij hem € 2,50, en een bakje frambozen € 2.

18

Op een dag is zijn opbrengst € 125.

a Stel een vergelijking op met de variabelen x en y .

b Bereken hoeveel bakjes frambozen Peter heeft verkocht als hij 18 bakjes aardbeien heeft verkocht.



Herhaling

5.1 Haakjes wegwerken

1 Herleid.

a $3(x+1)(x-3)$

b $-2(a-6)(1+2a)$

c $(2n)^2 + 2(3n-1)(2-n)$

d $(3p)^2 - 4p(2p-1)$

$$\begin{aligned} 3(2x-1)(4+x) &= \\ 3(8x+2x^2-4-x) &= \\ 3(7x+2x^2-4) &= \\ 21x+6x^2-12 \end{aligned}$$

2 Herleid.

a $4(x+1)^2$

b $-3(2p-5)^2$

c $-2(3a+1)(3a-1)$

d $-2(n+4)^2 - 4n(n-2)$

$$\begin{aligned} 3(2a-1)^2 &= \\ 3(4a^2-4a+1) &= \\ 12a^2-12a+3 \end{aligned}$$

3 Herleid.

a $(2n)^2 - (2-n)^2$

b $(a+3)^2 - 2(3-a)^2$

c $2(x-1)(2x+3) - 4(x-1)^2$

d $-3(2p+1)^2 - 6(2p+3)(1-p)$

5.2 Breuken herleiden

4 $\frac{15a}{6ac} = \frac{5}{2c}$ en $\frac{12xy}{16y} = \frac{3x}{4} = \frac{3}{4}x$

Herleid.

a $\frac{15x}{25xy}$

b $\frac{4x}{6}$

c $\frac{ab}{3a}$

d $\frac{24pq}{30pr}$

e $\frac{13km}{13klm}$

f $\frac{9abc}{15bc}$

Vereenvoudig breuken zo ver mogelijk.



5 $\frac{15ac}{5c} - \frac{5ab}{2b} = \frac{3a}{1} - \frac{5a}{2} = 3a - \frac{5}{2}a = 3a - 2\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a$

Herleid.

a $\frac{2xy}{4y} + 5x$

b $\frac{20pq}{5q} - \frac{3pr}{2r}$

c $\frac{6ab}{3a} + \frac{8bc}{12c}$

6 Herleid.

a $\frac{2ab}{2a^2+8a}$

b $\frac{3x^2-6x}{12x}$

c $\frac{n^2+3n}{n^2+5n+6}$

d $\frac{p^2-4p-5}{p^2-25}$

$$\begin{aligned} \frac{4xy}{2x^2-6x} &= \frac{4xy}{2x(x-3)} = \frac{2y}{x-3} \\ \frac{x^2+3x-28}{2x^2-8x} &= \frac{(x+7)(x-4)}{2x(x-4)} = \frac{x+7}{2x} \end{aligned}$$

7 $\frac{2}{a} - \frac{3}{2b} = \frac{2 \cdot 2b}{a \cdot 2b} - \frac{3 \cdot a}{2b \cdot a} = \frac{4b}{2ab} - \frac{3a}{2ab} = \frac{4b-3a}{2ab}$

Herleid.

a $\frac{1}{2x} + \frac{5}{3x}$

b $\frac{5}{3a} - \frac{2}{b}$

c $3 + \frac{5}{2p}$

$$8 \quad \frac{\left(\frac{2}{x}\right)}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{x} = \frac{2}{3x} \text{ en } \frac{3}{\left(\frac{2}{x}\right)} = 3 : \frac{2}{x} = 3 \cdot \frac{x}{2} = \frac{3x}{2} = \frac{3}{2}x = 1\frac{1}{2}x$$

Herleid.

$$a \quad \frac{2}{x} \cdot \frac{x}{4y}$$

$$b \quad \frac{5}{2a} : \frac{b}{4a}$$

$$c \quad \frac{\left(\frac{2}{x}\right)}{5}$$

$$d \quad \frac{4}{\left(\frac{3}{a}\right)}$$

$$e \quad \frac{\left(\frac{9}{2a}\right)}{3}$$

$$f \quad \frac{10}{\left(\frac{5}{2p}\right)}$$

$$9 \quad \frac{2x}{3} - \frac{2x-1}{5} = \frac{5 \cdot 2x}{5 \cdot 3} - \frac{3 \cdot (2x-1)}{3 \cdot 5} = \frac{10x - 3(2x-1)}{15} = \frac{10x - 6x + 3}{15} = \frac{4x + 3}{15}$$

Herleid.

$$a \quad \frac{3a}{5} + \frac{4a-1}{2}$$

$$b \quad \frac{x-1}{3} - \frac{x+3}{2}$$

$$c \quad 1\frac{1}{2} + \frac{a-4}{a}$$

5.3 Machten herleiden

10 Herleid.

$$a \quad x^2 \cdot x^5 + 2x^3 \cdot 5x^4$$

$$b \quad 2x^2 \cdot -3x^3 + 4x^4 \cdot x$$

$$c \quad 3x^2 \cdot y^5 \cdot -2x^7 \cdot 4x^4$$

$$d \quad \frac{20x^{20}}{5x^5}$$

$$e \quad x^4 \cdot 5y^3 - 2y^3 \cdot -3x^4$$

$$f \quad (3p^2)^3 + 3(p^3)^2$$

$$g \quad (-2a^5)^3 \cdot 3(a^2)^4$$

$$h \quad \frac{15x^8y^3}{3x^3y^3}$$

$$3x^5 + 5x^5 = 8x^5$$

$$4p^3q^2 \cdot 2pq^5 = 8p^4q^7$$

$$(-2p^3)^4 = (-2)^4 \cdot (p^3)^4 = 16p^{12}$$

$$\frac{12x^{12}}{3x^3} = 4x^9$$

11 Herleid.

$$a \quad 4x^2(x^2 + 2x) - (2x^2)^2$$

$$b \quad x^3(x^5 - 3x) - (2x^2)^3 \cdot x^2$$

$$c \quad \frac{(3x^5)^3 \cdot 2x^2}{3(x^3)^4}$$

$$d \quad -5(a^5)^3 \cdot a - (-4a^8)^2 + a^7 \cdot 3a^9$$

$$e \quad (5a^3)^4 - (-2a^5)^2 + a \cdot a^{11}$$

$$f \quad \frac{(4x^4)^3 - 28(x^2)^6}{12(x^3)^4}$$

5.4 Wortels herleiden

12 Bij het herleiden van wortels breng je een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken.

$$\bullet \quad 3\sqrt{200} = 3 \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 10\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

$$\bullet \quad 2\sqrt{15} \cdot 4\sqrt{5} = 8\sqrt{75} = 8 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 8 \cdot 5\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$$

$$2 \cdot 4 = 8 \text{ en } \sqrt{15} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{75}$$

Herleid.

$$a \quad 3\sqrt{48}$$

$$b \quad \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$$

$$c \quad 4\sqrt{12} \cdot 3\sqrt{6}$$

13 Uit $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ volgt $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{2}} = \sqrt{14}$ en $\frac{6\sqrt{78}}{2\sqrt{6}} = \frac{6}{2} \cdot \frac{\sqrt{78}}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{13}$.

Herleid.

a $\frac{12\sqrt{35}}{4\sqrt{7}}$

b $\frac{\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}$

c $\frac{15\sqrt{60}}{\sqrt{5}}$

14 $\sqrt{4\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{40}{9}} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{10}}{3} = \frac{2\sqrt{10}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$

Zoals $\frac{2x}{3} = \frac{2}{3}x$, is $\frac{2\sqrt{10}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$.

Herleid.

a $\sqrt{5\frac{5}{9}}$

b $\sqrt{6\frac{3}{4}}$

c $\sqrt{1\frac{13}{36}}$



15 $\sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Herleid.

a $\sqrt{24} + 3\sqrt{6}$

b $3\sqrt{125} - 2\sqrt{45}$

c $4\sqrt{27} - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$

16 $\frac{2}{\sqrt{7}}$ herleid je door teller en noemer met $\sqrt{7}$ te vermenigvuldigen.

Je krijgt $\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{2}{7}\sqrt{7}$.

Verder is $\sqrt{2\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$.

Herleid.

a $\frac{5}{\sqrt{6}}$

c $\frac{6}{\sqrt{3}}$

e $\frac{7}{\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{1}{7}}$

b $\sqrt{1\frac{1}{2}}$

d $\sqrt{11\frac{1}{4}}$

f $\frac{2}{\sqrt{8}} - \sqrt{4\frac{1}{2}}$

5.5 Vergelijkingen met twee variabelen

17 Om de richtingscoëfficiënt van de lijn $k: x + 3y = 6$ te weten te komen, herleid je de vergelijking $x + 3y = 6$ tot de vorm $y = ax + b$. Zie hiernaast.

$$\begin{aligned} x + 3y &= 6 \\ 3y &= -x + 6 \\ y &= -\frac{1}{3}x + 2 \end{aligned}$$

Bereken de richtingscoëfficiënt.

a $l: 3x + y = 7$

b $m: x - 2y = 8$

c $n: 2x - 5y = 10$

18 Petra verkoopt op de markt x bakjes druiven en y bakjes bramen. Een bakje druiven kost bij haar € 4, en een bakje bramen € 3. x bakjes druiven kosten $4x$ euro.

a Hoeveel kosten y bakjes bramen?

b Hoeveel kosten x bakjes druiven en y bakjes bramen samen?

Op een dag is de opbrengst van Petra 150 euro.

c Uit bovenstaande volgt de vergelijking $4x + \dots = \dots$

d Hoeveel bakjes bramen heeft zij die dag verkocht als $x = 18$?

Onderzoek Pythagoreïsche drietallen

Je weet dat in elke rechthoekige driehoek de stelling van Pythagoras geldt. Er zijn rechthoekige driehoeken waarvan de lengten van alle drie de zijden gehele getallen zijn. Deze driehoeken heten **Pythagoreïsche driehoeken**. Een bekend voorbeeld is de zogenaamde $[3, 4, 5]$ -driehoek. Dat is de rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 3 en 4 en een schuine zijde van 5. Het drietal $[3, 4, 5]$ wordt een **Pythagoreïsch drietal** genoemd. Ook $[5, 12, 13]$ is een Pythagoreïsch drietal, want $5^2 + 12^2 = 13^2$. In dit onderzoek ontdek je hoe je Pythagoreïsche drietallen kunt vinden.



1 In deze opgave zijn m en n positieve gehele getallen.

a Herleid.

$$(m^2 - n^2)^2 \quad \bullet \quad (2mn)^2 \quad \bullet \quad (m^2 + n^2)^2$$

b Toon aan dat $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$.

Algemeen geldt:

- Het product van twee gehele getallen is een geheel getal.
- De som van twee gehele getallen is een geheel getal.

Uit het bovenstaande volgt dat $[m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2]$ een Pythagoreïsch drietal is voor $m > n$.

c Licht dit toe.

d Welk Pythagoreïsch drietal krijg je voor $m = 4$ en $n = 2$?

e Onderzoek welke getallen je voor m en n moet nemen om

- het Pythagoreïsche drietal $[3, 4, 5]$ te krijgen
- het Pythagoreïsche drietal $[5, 12, 13]$ te krijgen.

f Onderzoek of er een Pythagoreïsch drietal bestaat waarvan

- het grootste getal 11 is
- het kleinste getal 11 is.

Een Pythagoreïsch drietal bestaat uit drie positieve gehele getallen.

2 In deze opgave nemen we $n = 1$. Je krijgt dan het Pythagoreïsche drietal $[m^2 - 1, 2m, m^2 + 1]$.

a Onderzoek voor welke m het getal $2m$ kleiner is dan het getal $m^2 - 1$.

b Zoek een Pythagoreïsch drietal waarvan

- het kleinste getal 30 is
- het grootste getal 37 is
- de som van de grootste twee getallen 800 is
- de som van de drie getallen 144 is.

3 Zoek een Pythagoreïsch drietal waarvan

- het grootste getal 25 is
- het kleinste getal 31 is.



Als ik $[50, 624, 626]$ heb gevonden, dan weet ik dat ook $[25, 312, 313]$ een Pythagoreïsch drietal is.

Vaardigheden

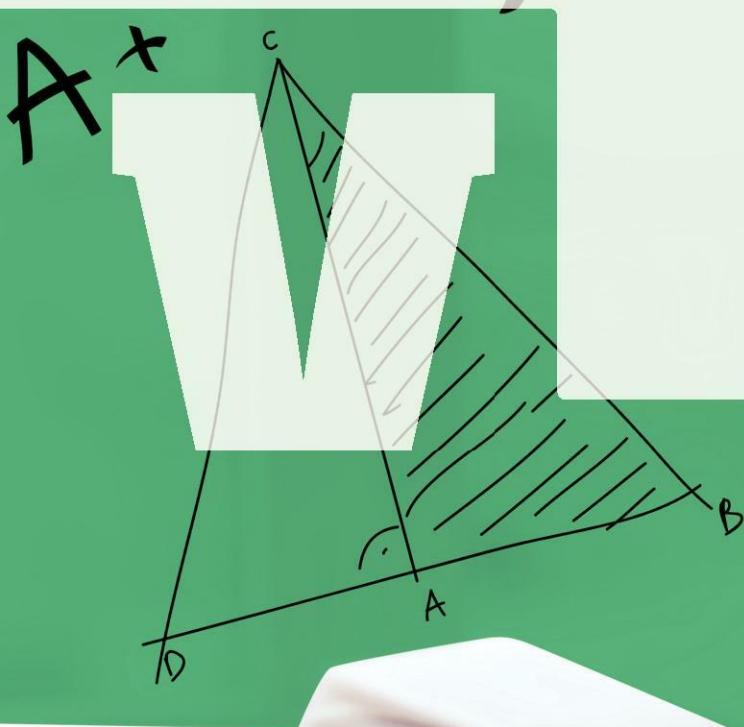
De Vaardigheden bestaan uit Wiskundige vaardigheden en Algemene vaardigheden.

In de Wiskundige vaardigheden worden rekenvaardigheden en algebraïsche vaardigheden herhaald en verder ingeslepen.

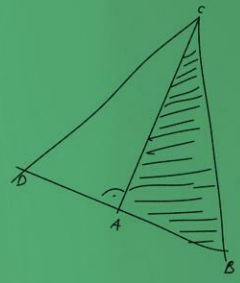
De Wiskundige vaardigheden in dit boek bestaan uit vijf lessen.

- 1 Rekenen
- 2 Letterrekenen
- 3 Wortels
- 4 Haakjes wegwerken
- 5 Letters door getallen vervangen

In de Algemene vaardigheden staat het systematisch oplossen van problemen centraal. In dit boek los je hierbij problemen op met de aanpak *Zoek een verwant probleem*.



$$\frac{65}{12}q = (1A + \frac{4}{8}) + (10 + \frac{2}{3}q)$$



$$2+2=4$$

$$\begin{aligned} \frac{65}{12}q &= (1A + \frac{4}{8}) + (10 + \frac{2}{3}q) \\ \frac{3}{4} &= P(48 + 13C)(35 - 18q) \\ q\frac{65}{P} &= \frac{3}{4}(\frac{P}{65} - \frac{C}{13})(188 + 122) \end{aligned}$$

$$\sqrt{3}$$



Wiskundige vaardigheden

1 Rekenen

Rekenvolgorde

1 Werk binnen de haakjes.

2 Machtsverheffen.

3 Vermenigvuldigen en delen van links naar rechts.

4 Optellen en aftrekken van links naar rechts.

$$720 : 3^2 - (18 - 7) \cdot 4 - 17 =$$

$$720 : 3^2 - 11 \cdot 4 - 17 =$$

$$720 : 9 - 11 \cdot 4 - 17 =$$

$$80 - 44 - 17 = 19$$

1 Bereken.

a $7 \cdot 3 - 18 : 9 - 2$

b $3 + 7 \cdot 9 : 3 - 18 : 2$

c $8^2 : 16 - 3 + 5 \cdot 3$

d $5 \cdot 3^2 - (2 - 3)^2 \cdot 5$

e $835 - 2000 : 4 - 7 \cdot 5$

f $125 \cdot 8 - 10\,000 : 20$

2 Bereken.

a $50 + 25 \cdot 40 - 350 : 7$

b $70 \cdot 4000 : 100 - 8 \cdot 1250 : 5$

c $120 : 8 \cdot 60 - 3216 : 8$

d $1818 : 9 \cdot 5 - 10^3$

e $(27 - 8) \cdot 23 + 9^2 \cdot 23$

f $7014 : 7 - (17 + 8) \cdot 40$

DEEL en TOTAAL

- Hoeveel is $\frac{2}{7}$ deel van 42?

$\frac{1}{7}$ deel van 42 is $42 : 7 = 6$, dus $\frac{2}{7}$ deel van 42 is $2 \cdot 6 = 12$.

- $\frac{2}{7}$ deel is 42. Hoeveel is het totaal?

$\frac{2}{7}$ deel is 42, dus $\frac{1}{7}$ deel is $42 : 2 = 21$, dus het totaal is $7 \cdot 21 = 147$.

3 Bereken.

a $\frac{4}{5}$ deel van 120

b $\frac{3}{8}$ deel van 160

c $\frac{3}{4}$ deel van 2800

d $\frac{5}{6}$ deel van 606

e $\frac{2}{9}$ deel van 918

f $\frac{3}{5}$ deel van 5005

g $\frac{1}{3}$ deel van 3009

h $\frac{2}{3}$ deel van 9003

i $\frac{8}{9}$ deel van 9009

4 Bereken het totaal.

a $\frac{3}{8}$ deel is 300

b $\frac{1}{3}$ deel is 808

c $\frac{3}{4}$ deel is 909

d $\frac{4}{5}$ deel is 808

e $\frac{2}{3}$ deel is 606

f $\frac{8}{9}$ deel is 16000

g $\frac{9}{11}$ deel is 990

h $\frac{1}{6}$ deel is 123

i $\frac{3}{20}$ deel is 3000

Breuken

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$$

$$1\frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{6}{5} - \frac{2}{15} = \frac{18}{15} - \frac{2}{15} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$$

$$1\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \quad \text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

$$2\frac{1}{2} : \frac{5}{6} = \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{30}{10} = 3$$

delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk

5 Bereken.

a $\frac{5}{6} - \frac{3}{5}$

b $\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2}$

c $\frac{4}{5} - 2\frac{1}{3}$

d $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

e $1\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

f $6\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

g $2\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - 1\frac{1}{9}$

h $\frac{2}{5} - 2\frac{1}{7}$

i $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5}$

Vereenvoudig breuken zo ver mogelijk en haal de helen eruit.



6 Bereken.

a $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}$

b $\frac{3}{5} : \frac{2}{7}$

c $\frac{8}{9} \cdot \frac{5}{12}$

d $\frac{8}{9} : \frac{5}{12}$

e $2\frac{1}{3} \cdot \frac{14}{15}$

f $2\frac{1}{3} : \frac{14}{15}$

7 Bereken.

a $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$

b $1 + \frac{1}{4} : \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{3}$

c $(5 - \frac{3}{4}) : 6 + 1\frac{2}{5}$

d $6 \cdot 1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} : 5$

e $8 - 1\frac{1}{2} : 3 - 6 : 1\frac{1}{2}$

f $7 - \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} - 3\frac{1}{6}$

Decimale getallen

$$7,3 + 1,45 = 8,75$$

$$7,3 - 0,06 = 7,24$$

$$7,3 - 1,44 = 5,86$$

$$0,4 \cdot 0,2 = 0,08$$

$$24 : 0,08 = 300$$

$$7,3 + 1,45 = 7,30 + 1,45$$

$$7,3 - 0,06 = 7,30 - 0,06$$

$$7,3 - 1,44 = 7,30 - 1,30 - 0,14$$

$$0,4 \cdot 0,2 = 4 \cdot 0,02$$

$$24 : 0,08 = 2400 : 8$$

8 Bereken.

a $5,3 + 0,6$

b $5,3 + 0,006$

c $6,9 - 0,02$

d $9,09 - 0,02$

e $9 - 0,03$

f $2,039 + 0,21$

g $2,09 - 0,21$

h $0,7 \cdot 0,03$

i $0,1 \cdot 0,9$

j $0,04 \cdot 0,08$

k $0,07 \cdot 90$

l $21 : 0,07$

m $210 : 0,003$

n $3,2 : 0,04$

o $4,2 : 6$

9 Vul in.

a $7,3 + \dots = 7,301$

b $5,69 + \dots = 6,1$

c $7 + \dots = 8,019$

d $0,7 \cdot 0,05 = \dots$

e $6,9 - 0,16 = \dots$

f $8,91 + \dots = 8,928$

g $7 - \dots = 2,39$

h $0,16 - \dots = 0,015$

i $0,05 \cdot 0,09 = \dots$

j $5,9 + 0,008 = \dots$

k $2,039 - \dots = 1,83$

l $2,69 - 0,91 = \dots$

m $16,0003 + \dots = 17,1$

n $42 : 0,07 = \dots$

o $3,2 : \dots = 0,4$

Vermenigvuldigen

$$2a \cdot 5b = 10ab$$

$$-5x \cdot -3z \cdot 2y = 30xyz$$

$$5x \cdot 3x = 15x^2$$

zet de letters in alfabetische volgorde

$$5 \cdot 3 = 15 \text{ en } x \cdot x = x^2$$

10 Herleid.

a $2x \cdot 3y$

b $-5a \cdot 7b$

c $-3c \cdot -8a$

d $2a \cdot -4a$

e $5a \cdot 3c \cdot 2b$

f $-x \cdot 2y \cdot x$

g $7a \cdot 2a \cdot 5$

h $4a \cdot 2b \cdot 3b$

i $-5 \cdot -3b \cdot -a$

Optellen

$$5x + 3x = 8x$$

$$7y - 5y = 2y$$

$$3a + 7b \text{ kan niet korter}$$

$$7a + 2b - 6a = a + 2b$$

11 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $3x + 7x$

b $2y + 11y$

c $5a - a$

d $3a + 2b$

e $5a - 3b + a$

f $7x - 3y + y$

g $5ab + 2ab$

h $3ab - ac + 6ac$

i $5xy - xy + 6xy$

Vermenigvuldigen en optellen door elkaar

$$3a \cdot 2b + 5a \cdot 4b = 6ab + 20ab = 26ab$$

eerst vermenigvuldigen, dan optellen

$$-2x \cdot 3y + 5x \cdot -2y = -6xy - 10xy = -16xy$$

$$2x \cdot 3y + 4x \cdot -z = 6xy - 4xz$$

12 Herleid.

a $5x \cdot 2y - 3x \cdot 5y$

b $2x \cdot 3z + x \cdot -2z$

c $3x \cdot 2x + 5x \cdot -2x$

d $-3a \cdot 2b + 5a \cdot -3b$

e $6p \cdot -q + 2p \cdot 3q$

f $-2a \cdot a + 5a \cdot 3c$

g $-x \cdot -y + -x \cdot -y$

h $5a \cdot 3c - 4a \cdot 4c$

i $5x \cdot 2x - 3x \cdot 6x$

13 Herleid.

a $5x + 2x$

b $5x \cdot 2x$

c $5x \cdot 2y$

d $5 + x + 2 + x$

e $5 + x + 2x$

f $3a - 5b + 6a$

g $3a \cdot -5b \cdot 6a$

h $3a \cdot -5 + 6a$

i $5xy - xy + xz$

j $5x \cdot -3 \cdot -x$

k $5x - 3 - x$

l $-5x \cdot -3x - x^2$

14 Herleid.

a $2x - 3y - 5x + 6y$

b $2x \cdot -3y - 5x \cdot 6y$

c $2x \cdot -3 \cdot -5x$

d $3p + 5q - q - 3p$

e $3 + p + 5 - 3p$

f $3p \cdot 5q - q \cdot -3p$

15 Herleid.

a $5x \cdot -2x + 4x^2$

b $5x^2 + 3x \cdot x - 4x^2$

c $3x \cdot 4y + 3y \cdot -x$

d $5x^2 - x^2 + 3x^2$

e $7x + 3y - 3x - y$

f $5x - 3 - 5 + 2x^2$

3 Wortels

Het kwadraat van een wortel

$$(\sqrt{7})^2 = 7$$

$$(-3\sqrt{5})^2 = (-3)^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5 = 45$$

$$-3(\sqrt{5})^2 = -3 \cdot 5 = -15$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{a})^2 &= a \\ (ab)^2 &= a^2 b^2\end{aligned}$$

16 Herleid.

a $(\sqrt{3})^2$

c $3(\sqrt{7})^2$

e $-10(\sqrt{2})^2$

b $(2\sqrt{5})^2$

d $(-3\sqrt{11})^2$

f $-(10\sqrt{10})^2$

Wortels vermenigvuldigen

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

$$2\sqrt{5} \cdot -3\sqrt{6} = -6\sqrt{30}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$$

$$-4 \cdot 3\sqrt{7} = -12\sqrt{7}$$

17 Herleid.

a $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$

c $2\sqrt{2} \cdot -3\sqrt{5}$

e $-2\sqrt{2 \cdot 50} \cdot \sqrt{2}$

b $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

d $-3 \cdot 6\sqrt{7}$

f $-\sqrt{3} \cdot 9\sqrt{2}$

Wortels optellen

$$2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = -2\sqrt{7}$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$6 + \sqrt{6} \text{ kan niet korter}$$

18 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $\sqrt{2} + \sqrt{2}$

c $\sqrt{6} - 4\sqrt{6}$

e $9 + 2\sqrt{9}$

b $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$

d $7 + 2\sqrt{7}$

f $\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$

19 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}$

d $2\sqrt{7} \cdot 5\sqrt{3}$

g $2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$

b $(5\sqrt{3})^2$

e $-5 \cdot 4\sqrt{5}$

h $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$

c $7\sqrt{5} - 5\sqrt{7}$

f $3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$

i $(-2\sqrt{3})^2 - 3(\sqrt{11})^2$

4 Haakjes wegwerken

Voorbeelden

$$8(3a + b) = 24a + 8b$$

$$a(3a + 9) = 3a^2 + 9a$$

$$2a(3a - 8) = 6a^2 - 16a$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

20 Werk de haakjes weg.

a $7(a - 2b)$

c $-4(x - 2y)$

e $6(-3p + q)$

b $3(p + 5q)$

d $-2(3a - b)$

f $-(-4x - 2y)$

21 Werk de haakjes weg.

a $6(2a + 3b)$

d $5a(a - 8)$

g $-2x(8 - x)$

b $a(3b + 8)$

e $x(x + 1)$

h $5(3 - x^2)$

c $2a(3a - 9)$

f $3x(x - 7)$

i $5x(6x - 8)$

Voorbeelden

$$8a + 3(a - 2) = 8a + 3a - 6 = 11a - 6$$

$$2a - 7(a - 1) = 2a - 7a + 7 = -5a + 7$$

$$5(x + 1) + 3(x - 2) = 5x + 5 + 3x - 6 = 8x - 1$$

22 Herleid.

a $2x + 3(x - 8)$

d $5(a - 3) + 8a$

b $5x - 2(x - 3)$

e $8p - 3(q + 1)$

c $8 - 3(a + 1)$

f $-8p(-p + 2) + 16p$

23 Herleid.

a $3(x - 1) + 5(x + 3)$

d $3(a + b) + 2(3a - b)$

b $5(2x - 1) + 2(3 - x)$

e $4(a + 2b) - 5(a - b)$

c $8(1 - x) - 3(x + 1)$

f $2(3a - b) + 3(-a + b)$

24 Herleid.

a $7 - 3(p + 6)$

d $2a^2 - 3a(a + 4)$

g $-(x - 5y) - 3(x - 4y)$

b $7p - 3p(p + 6)$

e $-3a(a + 1) - a \cdot -3a$

h $-2(x - 3y) + 3(2x - y)$

c $-7p - 3(p + 6)$

f $-2a \cdot a - 3a(a + 1)$

i $5(2x - y) - 4(x - y)$

Voorbeelden

$$(a - 4)(b + 2) = ab + 2a - 4b - 8$$

$$(x + 3)(x - 2) = x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6$$

$$(a - 5)(3a + 2) = 3a^2 + 2a - 15a - 10 = 3a^2 - 13a - 10$$

$$(x - 3y)(2x + y) = 2x^2 + xy - 6xy - 3y^2 = 2x^2 - 5xy - 3y^2$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

25 Herleid.

a $(a+8)(a-1)$

b $(p+2)(p+7)$

c $(x-3)(x-4)$

d $(a-3)(a+5)$

e $(p-1)(p+1)$

f $(x+5)(x-5)$

26 Herleid.

a $(a-2)(b+4)$

b $(3a-1)(2b+2)$

c $(a-2b)(3a+b)$

d $(4+p)(q-4)$

e $(2p-1)(3q+1)$

f $(p-4q)(-2p-q)$

5 Letters door getallen vervangen

Voorbeelden

Voor $a = 2$, $b = 3$ en $c = 4$ is $ab + c = 2 \cdot 3 + 4 = 10$.

Voor $a = -1$, $b = 2$ en $c = -5$ is $3a^2 - 4bc = 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 3 \cdot 1 + 40 = 43$.

27 Gegeven is $a = 5$, $b = -2$ en $c = 3$.

Bereken.

a $a + b + c$

b $ab - c$

c $b^2 + 3c - a$

d $5abc$

e $3b^2 - (ac)^2$

f $(2a - b)^2$

28 Gegeven is $a = -3$, $b = 5$ en $c = -4$.

Bereken.

a $ab - bc + b^2$

b $7ab - 2ac$

c $2a^2 + c^2$

d $abc - 2a$

e $ab^2 - a^2b$

f $(5a - c)^2$

29 Bereken $a - b^2 + 3c$ voor

a $a = 1$, $b = 1$ en $c = 1$

b $a = 2$, $b = -1$ en $c = 2$

c $a = -1$, $b = 0$ en $c = 3$

d $a = 4$, $b = 2$ en $c = 1$

e $a = 0$, $b = -4$ en $c = 0$

f $a = 7$, $b = -5$ en $c = 6$

30 Bereken $b^2 - 4ac$ voor

a $a = 0$, $b = 2$ en $c = 1$

b $a = -1$, $b = -3$ en $c = 2$

c $a = 1$, $b = 0$ en $c = -1$

d $a = 5$, $b = 7$ en $c = 2$

e $a = 3$, $b = -6$ en $c = 3$

f $a = -9$, $b = -12$ en $c = -3$

Algemene vaardigheden

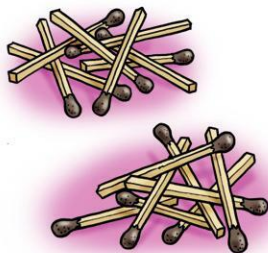
Probleemaanpak

Probleem A Lucifers pakken

spel voor twee personen

Er zijn twee stapeltjes van elk acht lucifers. Om de beurt pak je minstens één lucifer van één van de stapels. Wie de laatste lucifer pakt, is de winnaar.

Hoe is de winststrategie als je tegenstander begint met pakken?

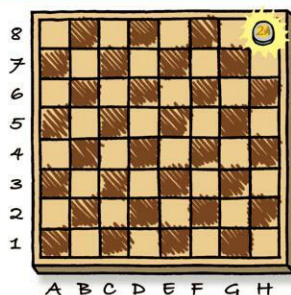


Probleem B Een geldstuk verschuiven

spel voor twee personen

Een geldstuk ligt op het veld H8 van een schaakbord. Om de beurt schuif je het geldstuk één of meer vakjes naar links of naar beneden. Per beurt mag je slechts in één richting schuiven. De speler die veld A1 bereikt, is de winnaar.

Hoe is de winststrategie als je tegenstander begint?



Verwante problemen

Bij het oplossen van problemen gebruik je het schema hiernaast. Misschien heb je ontdekt dat de problemen A en B op elkaar lijken, dus dat ze verwant zijn. De winnende strategieën komen feitelijk op hetzelfde neer.

Bij de lucifers pak je evenveel lucifers als je tegenstander, maar dan van de andere stapel. En bij het schuifspel ga je evenveel naar beneden als je tegenstander naar links is gegaan of evenveel naar links als je tegenstander naar beneden is gegaan. Ken je de strategie van het luciferspel, dan is het schuifspel eenvoudig op te lossen. Je gebruikt dan de aanpak *Zoek een verwant probleem*.

Je kent nu vijf strategieën voor het oplossen van problemen. In het schema hiernaast staan ze vermeld.

Schema probleemaanpak

- 1 Begrijp de vraag.
- 2 Zoek een geschikte aanpak.
- 3 Werk de aanpak uit.
- 4 Controleer je antwoord.
Reflecteer, dus kijk nog eens terug.

Strategieën probleemoplossen

- Probeer en test.
- Maak een schets.
- Zoek de regelmaat.
- Voer een variabele in.
- Zoek een verwant probleem.

1 A Lucifers pakken, spel voor twee personen

Er zijn twee stapels lucifers, één van acht en één van twaalf lucifers. De spelers nemen om beurten van een van beide stapels minstens één lucifer.

- a Wie de laatste lucifer pakt, is de winnaar.
Wat is de winnende strategie voor de speler die begint?
- b Wie de laatste lucifer pakt, is de verliezer.
Wat is de winnende strategie voor de speler die begint?

B Een geldstuk verschuiven, spel voor twee personen

Bij dit spel legt speler I een geldstuk op een van de velden van de bovenste rij (A8 tot en met H8) van een schaakbord. Vervolgens verschuiven de spelers, te beginnen met speler II, het geldstuk één of meer vakjes naar links of naar beneden (één richting per beurt). De speler die veld A1 bereikt, verliest het spel.

Wat is de winnende strategie voor speler I?

2 A Een dominospel

Ga uit van dominostenen die precies twee velden van een schaakbord bedekken. Van het schaakbord worden de velden A8 en H1 verwijderd.

Onderzoek of je de 62 resterende velden van het speelbord volledig met dominostenen kunt bedekken.

B Victor de vlo

In de figuur hiernaast zijn 25 geldstukken gerangschikt in de vorm van een vierkant. Victor de vlo landt op een van de geldstukken. Hij springt telkens naar een aangrenzend geldstuk in dezelfde rij of kolom.

Kan Victor altijd een route vinden waarbij hij precies één keer op elk geldstuk landt, ongeacht de plaats waar hij begint?



figuur AV.1

3 A Getallen met dezelfde som

Is het mogelijk de getallen 1 tot en met 14 in twee groepen te verdelen zo, dat de som van de getallen in elke groep gelijk is?

B Torens bouwen

Leo heeft 14 kubussen. De ribben zijn 1, 2, 3, ..., 14 cm. Kan Leo door de kubussen op elkaar te stapelen twee even hoge torens maken? Hij moet alle kubussen gebruiken.



Kangoeroe-opgaven

De Kangoeroe is een wereldwijde reken- en wiskundewedstrijd die jaarlijks wordt gehouden.

Er zijn opgaven voor

- de basisschool (wizFUN, wizKID en wizSMART)
- de klassen 1 en 2 havo/vwo en 3 havo (wizBRAIN)
- de klassen 4 en 5 havo en 3, 4, 5 en 6 vwo (wizPROF).

In dit boek staan de wizBRAIN opgaven van het jaar 2016.

De eerste tien opgaven zijn eenvoudig, de volgende tien opgaven zijn iets lastiger en de laatste tien opgaven zijn moeilijk.

Je mag geen rekenmachine gebruiken, maar wel kladpapier.





- 1 Hoeveel gehele getallen zitten er tussen de kommagetallen 3,17 en 20,16?

A 15 B 16 C 17 D 18 E 19

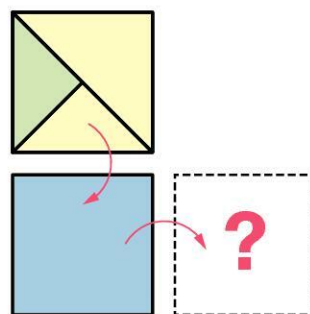
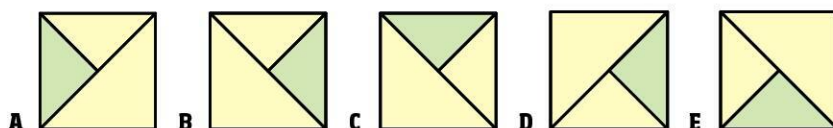
- 2 Welke van de volgende verkeersborden heeft het grootste aantal symmetrieassen?



- 3 Janny moet bij een getal 26 optellen. Per ongeluk heeft ze er 26 van afgetrokken. Haar antwoord was -14. Welk antwoord had Janny moeten krijgen?

A 28 B 32 C 36 D 38 E 42

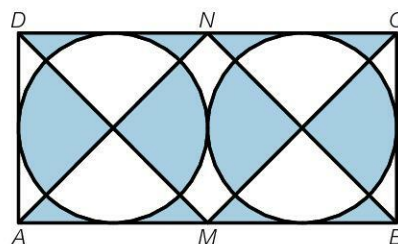
- 4 Zie de figuur hiernaast. Johan klappt de kaart om, om zijn onderste zijde. Daarna klappt hij de kaart om, om zijn rechterzijde. Wat krijgt Johan dan te zien?



- 5 60% van de leraren komt per fiets naar school. Dat zijn 45 leraren. 12% van de leraren komt met de auto naar school. Hoeveel leraren komen met de auto naar school?

A 4 B 6 C 9 D 10 E 12

- 6 $ABCD$ is een rechthoek. M en N zijn de middens van de zijden AB en CD . De cirkels raken de zijden van de rechthoek en ook elkaar. $AB = 20$ cm. Hoeveel cm^2 is blauw?



A 50 B 100 C 120 D 150 E 200

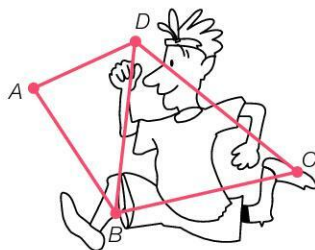
- 7** Alex heeft twee stukken touw, één van 1 meter en één van 2 meter. Hij gaat de touwen in een aantal stukken van allemaal dezelfde lengte knippen.

Welk aantal stukken kan hij zo niet maken?

A 8 **B** 9 **C** 12 **D** 15 **E** 18

- 8** Tussen de dorpen A , B , C en D lopen wegen zoals in de figuur. Er wordt een hardloophwedstrijd georganiseerd. De wedstrijd begint in B en eindigt in D . De lopers lopen precies één keer over elke weg.

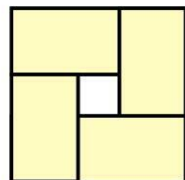
Hoeveel routes zijn er voor deze hardloophwedstrijd mogelijk?



A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 10

- 9** In een vierkant passen precies vier gelijke rechthoeken als in de figuur. De omtrek van iedere rechthoek is 16 cm. Hoeveel cm is de omtrek van het vierkant?

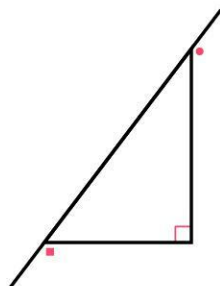
A 16 **B** 20 **C** 24 **D** 28 **E** 32



- 10** In de figuur zie je een rechthoekige driehoek en nog twee andere hoeken $\blacksquare$ en $\bullet$.

Hoe groot zijn de hoeken $\blacksquare$ en $\bullet$ samen?

A 150° **B** 180° **C** 270° **D** 320° **E** 360°



- 11** In een doos zaten 49 blauwe kralen en één rode. Petra heeft een aantal kralen uit de doos gepakt. Nu is 90% van de kralen in de doos blauw.

Hoeveel kralen heeft Petra gepakt?

A 4 **B** 10 **C** 29 **D** 39 **E** 40

- 12** Meryem heeft 555 stapels van negen stenen. Daarvan maakt ze één grote stapel. Daarna maakt ze van deze stapel kleine stapeltjes van elk vijf stenen.

Hoeveel stapeltjes heeft ze gemaakt?

A 45 **B** 111 **C** 555 **D** 900 **E** 999

- 13** De kangoeroes Skippy en Skappy beginnen tegelijk vanaf dezelfde plaats in dezelfde richting te springen. Ze maken beiden één sprong per seconde. Skippy maakt allemaal sprongen van 6 meter. Skappy begint met een sprong van 1 meter, daarna één van 2 meter, één van 3 meter, enzovoort. Skappy ligt dus vanaf het begin achter op Skippy, maar zal na een aantal sprongen weer naast Skippy komen.

Hoeveel sprongen heeft Skappy dan gemaakt?

A 10 **B** 11 **C** 12 **D** 13 **E** 14

- 14** Bij een tennistoernooi gaat de winnaar van een wedstrijd door naar de volgende ronde, de verliezer is uitgeschakeld.

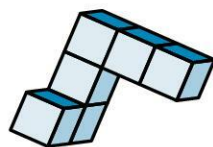
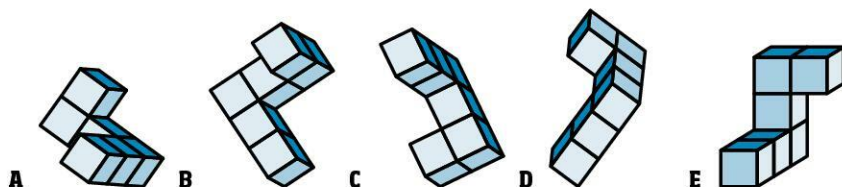
Acht tennissers spelen een toernooi. De uitslagen van de eerste twee ronden (niet in de juiste volgorde) zijn: Bart wint van Albert, Carel wint van Dirk, Gerard wint van Harm, Gerard wint van Evert, Carel wint van Bart en Evert wint van Frits.

Welke twee spelers speelden in de laatste ronde?

A Carel en Gerard **D** Gerard en Evert
B Carel en Dirk **E** Gerard en Harm
C Bart en Carel

- 15** Alisha heeft een aantal kubusjes aan elkaar gelijmd. Ze heeft daarmee het blok hiernaast gemaakt. Ze bekijkt dit blok vanuit verschillende richtingen.

Welke van de volgende plaatjes kan ze dan **niet** zien?



- 16** Femke, Floor en Fleur zijn een drieling. Hun tweelingbroertjes Jan en Joost zijn 3 jaar jonger.

Als je de leeftijden van de vijf kinderen optelt, wat kan dan je uitkomst zijn?

A 36 **B** 53 **C** 76 **D** 89 **E** 92

- 17** In een klas van 20 leerlingen zitten de kinderen in tweetallen naast elkaar. Een derde van de jongens zit naast een meisje. De helft van de meisjes zit naast een jongen.

Hoeveel jongens zitten er in de klas?

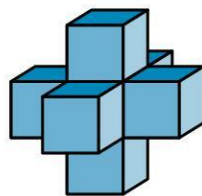
A 9 **B** 12 **C** 15 **D** 16 **E** 18

- 18** Welke van de volgende breuken ligt het dichtst bij $\frac{1}{2}$?

A $\frac{25}{79}$ **B** $\frac{27}{59}$ **C** $\frac{29}{57}$ **D** $\frac{52}{79}$ **E** $\frac{57}{92}$

- 19** Een gewone dobbelsteen heeft elk van de zes getallen 1 tot en met 6 op de zijvlakken staan. Zeven gewone dobbelstenen worden aan elkaar gelijmd zoals in de figuur. Hierbij hebben de zijvlakken die aan elkaar worden gelijmd hetzelfde aantal ogen. Hoeveel ogen zijn er in totaal te zien op het gelijmde voorwerp?

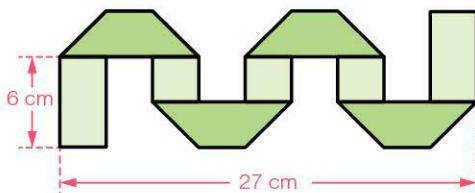
A 24 **B** 84 **C** 90 **D** 95 **E** 105



- 20** Een strook papier van 3 cm breed is lichtgroen aan de ene kant en donkergroen aan de andere kant. Mieke vouwt de strook zoals in de figuur. De donkergroene trapezia zijn allemaal gelijk.

Wat is de lengte van de strook?

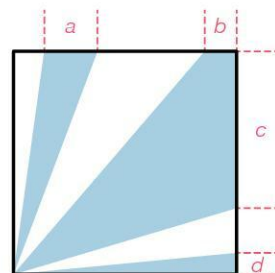
A 57 cm **B** 60 cm **C** 63 cm **D** 67 cm **E** 81 cm



- 21** Het vierkant heeft oppervlakte 36. De totale oppervlakte van de blauwe gebieden is 27.

Hoe lang zijn de lijnstukken a , b , c en d samen?

A 4 **B** 6 **C** 8 **D** 9 **E** 10



- 22** Theo denkt dat zijn horloge 5 minuten voorloopt, maar eigenlijk loopt het 10 minuten achter. Het horloge van Leo loopt wel 5 minuten voor, maar Leo denkt dat het 10 minuten achter loopt. Beiden kijken tegelijk op hun horloge. Volgens Theo is het 12:00 uur. Hoe laat is het volgens Leo?

A 11:30 uur **B** 11:45 uur **C** 12:00 uur **D** 12:30 uur **E** 12:45 uur

- 23** Twaalf meisjes gaan samen wat drinken en eten. Gemiddeld aten de meisjes 1,5 cupcakes. Geen van de meisjes at meer dan twee cupcakes en twee meisjes namen alleen maar een drankje. Hoeveel meisjes aten precies twee cupcakes?

A 2 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

- 24** Roodkapje gaat drie grootmoeders koekjes brengen. Roodkapje begint met een mand vol, maar telkens vlak voor ze bij een grootmoeder aankomt eet de Grote Boze Wolf de helft van de koekjes die nog in de mand zitten op. Als Roodkapje bij de derde grootmoeder weggaat, dan zijn alle koekjes op. Ieder van de grootmoeders heeft hetzelfde aantal koekjes gekregen.

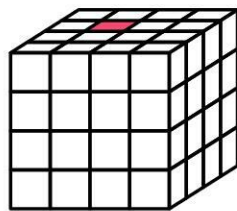
Door welk getal kan Roodkapje het aantal koekjes waar ze mee begon zeker delen?

A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 9

- 25** De kubus is gemaakt van 64 kleine kubusjes. Precies één van de kubusjes is rood. Op een dag worden alle buurkubusjes van een rood kubusje ook rood (twee kubusjes zijn burens als ze een gemeenschappelijk zijvlak hebben). De volgende dag gebeurt dit nog een keer.

Hoeveel rode kubusjes zijn er daarna?

A 11 **B** 13 **C** 15 **D** 16 **E** 17



- 26** Martin heeft een aantal verschillende positieve gehele getallen opgeschreven. Als hij de kleinste twee met elkaar vermenigvuldigt, dan is de uitkomst 16. Vermenigvuldigt hij de grootste twee met elkaar, dan is de uitkomst 225.

Wat krijgt Martin als hij alle getallen optelt?

A 42 **B** 44 **C** 58 **D** 72 **E** 243

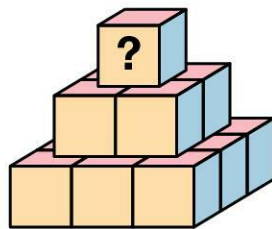
- 27** Een trein heeft vijf wagons. In elke wagon zit minstens één passagier. Twee passagiers worden reisgenoten genoemd als ze in dezelfde wagon of in twee opeenvolgende wagons zitten. Iedere passagier heeft precies vijf of precies tien reisgenoten. Hoeveel passagiers zitten er in de trein?

A 13 **B** 15 **C** 17 **D** 20 **E** kun je niet weten

- 28** Op elke van de kubussen van deze stapel heeft Harrie precies één positief geheel getal geschreven. De getallen zijn allemaal verschillend. Als je de getallen van de kubussen in de onderste laag optelt, dan krijg je 50. Het getal op een hogere kubus krijg je door de getallen op de vier kubussen eronder op te tellen.

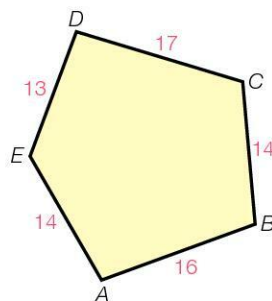
Wat is het grootste gehele getal dat op de bovenste kubus kan komen te staan?

A 80 **B** 98 **C** 104 **D** 110 **E** 118



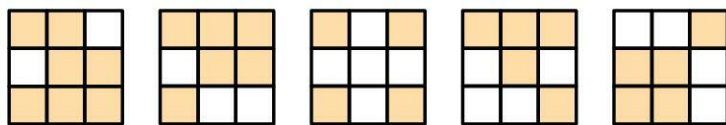
- 29** Aïssa wil vijf cirkels tekenen met als middelpunten de hoekpunten A , B , C , D en E van de vijfhoek. De cirkels moeten elkaar raken op de zijden van de vijfhoek. De lengtes van de zijden van de vijfhoek staan in de figuur.

Welke van de punten A , B , C , D en E is het middelpunt van de grootste cirkel die Aïssa gaat tekenen?

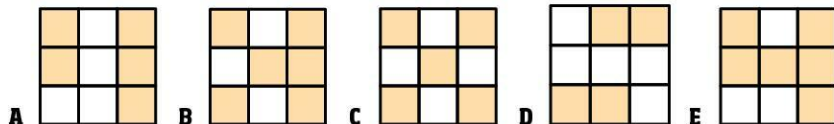


A A **B** B **C** C **D** D **E** E

- 30** Een kubus van 3 bij 3 bij 3 is gemaakt van kleine kubusjes, 15 oranje en 12 witte. Vijf van de zijvlakken van de grote kubus zien er als volgt uit.



Hoe ziet het zesde zijvlak er uit?



Trefwoordenregister

A

afronden bij grote
getallen 130

B

beelddiagram 144
bergparabool 91
breuken 167, 171

C

centrum 84
cirkeldiagram 145
constant verband 14

D

dalparabool 91
deel
van – naar totaal 143

E

evenwijdige lijnen 15
Excel 150

F

factor voor het wortelteken
brengen 182
F-hoeken 61
formule van een lijn
opstellen 14
functie 30
kwadratische – 90
lineaire – 32
functievoorschrift 31
functiewaarde 31
 $f(x) = a(x - d)(x - e)$ 103
 $f(x) = a(x - p)^2 + q$ 110
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 91

G

gelijksoortige termen 10
gelijkvormig 55
gelijkvormige
driehoeken 55
– aantonen 59

gelijkvormigheids-
kenmerk 84

H

haakjes wegwerken 11,
166, 169, 170
Harvard Step Test 47
helling 12
hellingsgetal 66
hellingshoek 69, 72
hellingspercentage 67
histogram 145
hoeken
F- 61
overstaande – 61
Z- 61

I

informatie
– uit artikel halen 127
– uit tabel halen 131
– zoeken 161

K

kruislings
vermenigvuldigen 52
kruisproduct 52
kwadratische functie 90
kwadratische vergelijking
– met haakjes 100
– oplossen 99
– vereenvoudigen 100

L

lengte x stellen 64
lijndiagram 145
lineair verband 17
lineaire functie 32
lineaire ongelijkheid 26
lineaire vergelijking
– met breuken 22
– met haakjes 22
– oplossen 21, 22

M

macht
– van een macht 179
– van een product 179
machten
product van – 178
delen van – 180
merkwaardige
producten 166, 170
misleidende
diagrammen 148

O

ongelijkheid
lineaire – 26
ongelijkheidsteken
omklappen 28
ontbinden in factoren 97,
122, 173
overbrengen van
termen 20
overstaande hoeken 61

P

pantograaf 85
parabool
top van een – 91, 94
probleemoplossen 206
procent op procent 138
procentpunt 135
procentuele
– afname 136
– toename 136
– verandering 133
product-som-methode 98
uitgebreide – 123
product van machten 178
Pythagoras
stelling van – 50
Pythagoreïsch drietal 197
Pythagoreïsche
driehoek 197

R

recht evenredig
verband 14

S

snijpunten
– met de x -as 33, 102
– met de y -as 14, 33, 102
– van grafieken 24, 35
staafdiagram 144
samengesteld – 144
stapeldiagram 144
steel-bladdiagram 145
stelling van Pythagoras 50

T

tangens 69
termen
– overbrengen 20
gelijksoortige – 10

top

– van een parabool 91, 94
– van de grafiek van de functie
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 94
– van de grafiek van de functie
 $f(x) = a(x - p)^2 + q$ 111

V

variabelen
– uit breuken halen 172
– vrijmaken 186
verband
lineair – 17
constant – 14
recht evenredig – 14
vergelijking met twee variabelen 186

verhoudingstabel 52
vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as 106
vermenigvuldigingsfactor 136
verschuiven
horizontaal – 109
verticaal – 108

W

wortels
delen van – 183
gelijksoortige – 184
– van een breuk 184
– wegwerken uit noemer 185

Z

Z-hoeken 61

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Haasart, Wim de Haas, Rhenen

Technisch tekenwerk: OKS, Chennai (India)

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: OKS, Chennai (India)

Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 8 (inzet), 8-9, 124-125, 127, 151

Shutterstock: p. 25 o, 48 (inzet), 48-49, 73 b, 86 (inzet), 86-87, 124 (inzet), 128, 130, 141, 198-199

ANP Foto, Den Haag: p. 138, 162 r, 164 (inzet)

Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 140, 142, 193

Associated Press / Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 161

Michael Jacobs / WFA: p. 162 l

Yvan Dutil & Stéphane Dumas / SETI: p. 162 m (3x)

Google.nl: p. 162 o

Peter Franken, Alphen aan den Rijn: p. 164-165

Getty Images: p. 208-209

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:

Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,

9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleenen.

0 / 19



© 2019 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-90083-0



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



Noordhoff Uitgevers



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-90083-0



9 789001 900830