

& GETAL RUIMTE



Noordhoff Uitgevers

Getal & Ruimte

3 havo deel 2

Twaalfde editie, 2019

Noordhoff Uitgevers
Groningen

Auteurs

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse
M. Vos
B.W. van Laarhoven

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het deel 3h2

Het deel 3h2 is bestemd voor de tweede helft van het derde leerjaar havo. Na het doorwerken van dit deel zijn alle tussendoelen wiskunde onderbouw havo aan de orde geweest, en is een goede aansluiting op de wiskundevakken in de bovenbouw gewaarborgd. De hoeveelheid leerstof is gebaseerd op drie lesuren van 50 minuten per week.

De leerstof

In hoofdstuk 6 Kwadratische vergelijkingen en ongelijkheden komt de *abc*-formule aan bod. Vervolgens worden de overige methoden om kwadratische vergelijkingen op te lossen nog eens herhaald. In de laatste paragraaf wordt het oplossen van kwadratische ongelijkheden behandeld. Een groot deel van deze paragraaf is plus-stof, bedoeld voor leerlingen die overwegen wiskunde B te kiezen.

In hoofdstuk 7 Goniometrie worden de goniometrische verhoudingen behandeld. De laatste paragraaf is plus-stof. In deze paragraaf komen verschillende manieren voor om lijnstukken en hoeken te berekenen, en is er aandacht voor het berekenen van hoeken in ruimtefiguren.

Hoofdstuk 8 Allerlei verbanden begint met de behandeling van exponentiële groei, waarbij exponentiële groei tevens wordt afgezet tegen lineaire groei. Verder is er aandacht voor inter- en extrapoleren. Vervolgens komen periodieke verbanden, machtsverbanden en omgekeerd evenredige verbanden aan bod. Het oplossen van hogere machtsvergelijkingen is plus-stof, bedoeld voor leerlingen die overwegen wiskunde B te kiezen.

In hoofdstuk 9 Spreiding, tellen en kans komen typerende onderwerpen uit wiskunde A aan de orde. Met de behandeling van het begrip spreiding wordt een vervolg gegeven aan de centrummaten, die in hoofdstuk 6 van klas 2 aan de orde zijn geweest. Paragraaf 9.3 is als plus-stof aangemerkt, omdat het onderwerp 'spreidingsdiagram' niet als leerstof in de tussendoelen staat vermeld. Het is echter aan te bevelen dat leerlingen die overwegen wiskunde A te kiezen, deze paragraaf doorwerken. Bij telproblemen krijgen de leerlingen te maken met tellen met en zonder herhaling. Bij het berekenen van kansen worden de gunstige uitkomsten in een rooster aangegeven. Het hoofdstuk sluit af met een Excel-paragraaf. Het is aan te bevelen deze paragraaf door te werken omdat dataverwerking met Excel bij wiskunde A in de bovenbouw een rol speelt.

De basisstof van elk hoofdstuk wordt afgesloten met de Gemengde opgaven. Het maken van deze opgaven is een goede voorbereiding op het proefwerk. De Diagnostische toets, die na de Samenvatting staat, toetst de basiskennis en -vaardigheden van het hoofdstuk. Heeft een leerling moeite met een opgave van de Diagnostische toets, dan kan hij de bijbehorende opgave(n) van de Herhaling maken. Deze opgaven hebben meer tussenvragen of zijn van uitleg voorzien.

Differentiatie, uitdaging en vaardigheden

In de 3h-delen zijn voorzieningen aangebracht om de individuele leerling zoveel mogelijk op zijn eigen niveau te bedienen. Met de testopgaven, die nieuw zijn in deze editie, wordt in differentiatie voorzien. Verder wordt regelmatig plus-stof aangeboden. In plus-stof wordt dieper op een onderwerp ingegaan en hebben de opgaven een uitdagender karakter. Met plus-stof kan worden gedifferentieerd naar niveau. Dat betekent niet dat het dan automatisch om wiskunde B-stof gaat, want ook bij wiskunde A-stof kan niveaudifferentiatie plaatsvinden. Op de volgende bladzijden wordt een overzicht gegeven van stof die typerend is voor de vakken wiskunde A, B en D.

Naast de testopgaven zijn ook de denkopgaven nieuw. Een denkopgave biedt een probleem aan dat bij de behandelde theorie hoort, maar doet door een iets andere invalshoek of het ontbreken van tussenvragen een extra beroep op het denkvermogen van de leerling. Wiskundige denkactiviteiten maken onderdeel uit van de huidige examenprogramma's havo en vwo. Door het aanbieden van denkopgaven in de onderbouwboeken raken de leerlingen hiermee vertrouwd. Denkopgaven zijn bedoeld voor alle leerlingen.

Elk hoofdstuk sluit af met een Onderzoek. Hierin gaan de leerlingen op onderzoekende wijze aan de slag met een aan het hoofdstuk gerelateerd onderwerp. Met het Onderzoek wordt een vorm van tempodifferentiatie aangeboden.

Achterin het boek zijn de Wiskundige vaardigheden en de Algemene vaardigheden opgenomen. Door de Wiskundige vaardigheden te maken worden rekenvaardigheden en algebraïsche vaardigheden herhaald en verder ingeslepen. In de Algemene vaardigheden staat het systematisch oplossen van problemen centraal. Leerlingen kunnen de hierin opgedane vaardigheden gebruiken bij het maken van de wizBRAIN Kangoeroe-opgaven van 2017, die na de Algemene vaardigheden komen. Omdat deze wiskundige puzzeltjes niet gesorteerd zijn op onderwerp en ook niet gerelateerd zijn aan een hoofdstuk, wordt ook hiermee een extra beroep gedaan op de wiskundige creativiteit en het wiskundig denken van de leerling. Leerlingen die snel en gemakkelijk een hoofdstuk doorwerken, kunnen met deze Kangoeroe-opgaven extra worden uitgedaagd.

Ter voorbereiding op de bovenbouw komt in de derdeklasdelen het rekenmachine-icoon niet meer voor. De docent bepaalt of de rekenmachine mag worden ingezet.

Getal & Ruimte Online

Via een licentie krijgt een leerling toegang tot de digitale omgeving van Getal & Ruimte. Hierin wordt regelmatig een theorieblok uitgelegd in een instructievideo. Tevens kunnen alle opgaven digitaal gemaakt en nagekeken worden. In de digitale omgeving is er de mogelijkheid om te differentiëren omdat er adaptief kan worden gewerkt. Van elke leerling wordt de voortgang bijgehouden en voor de docent inzichtelijk gemaakt in een dashboard. Verder wordt bij elk hoofdstuk een uitgebreide studiewijzer en een digitaal RTTI-oefenproefwerk aangeboden. Daarnaast krijgen docenten, via de docentenlicentie, een aantal volledig uitgewerkte projecten en een grote hoeveelheid RTTI-gelabelde proefwerkopgaven waarmee een proefwerk samengesteld kan worden.

Opmerkingen van gebruikers stellen wij zeer op prijs.

Voorjaar 2019

Wiskunde in de bovenbouw van de havo

In de bovenbouw kies je een profiel. Binnen de profielen Economie en Maatschappij (E&M), Natuur en Gezondheid (N&G), en Natuur en Techniek (N&T) is wiskunde een verplicht vak. Bij het profiel Cultuur en Maatschappij (C&M) is wiskunde niet verplicht, maar kun je er in het vrije deel wel voor kiezen. Er zijn drie wiskundevakken in de bovenbouw, namelijk wiskunde A, B en D. Afhankelijk van het profiel zijn er verschillende mogelijkheden, zie de tabel. Wiskunde D kun je alleen kiezen in combinatie met wiskunde B.

Profiel	Welke wiskunde?
Cultuur en Maatschappij (C&M)	geen, A of B*
Economie en Maatschappij (E&M)	A of B*
Natuur en Gezondheid (N&G)	A of B*
Natuur en Techniek (N&T)	B

*Informeer of deze keuze op jouw school wordt aangeboden.
Een school is niet verplicht deze keuze aan te bieden.

Wiskunde A

Bij wiskunde A zijn de belangrijkste onderwerpen statistiek, analyse, en telproblemen. Bij *statistiek* worden gegevens gepresenteerd in tabellen, grafieken en diagrammen. Je gaat deze gegevens verwerken en analyseren om er uitspraken over te doen en typerende kenmerken van te beschrijven. Daarbij werk je ook met grote datasets in Excel. Bij *analyse* krijg je onder andere te maken met lineaire en exponentiële groei. Daarnaast oefen je algebraïsche vaardigheden, zoals het herleiden van formules. Verder onderzoek je grafieken door te werken met de bijbehorende formules, bijvoorbeeld om te berekenen wanneer de winst van een bedrijf maximaal is. Bij *telproblemen* bereken je bijvoorbeeld hoeveel verschillende pincodes er zijn van vier cijfers.

Kenmerkend voor wiskunde A:

- hoofdstuk 9

Verder komt terug bij wiskunde A:

- hoofdstuk 8: §8.1, §8.2, §8.3, §8.6

Wiskunde B

Wiskunde B kenmerkt zich door de onderwerpen analyse en meetkunde. Vergeleken met wiskunde A is wiskunde B abstracter. De focus ligt meer op wiskundige technieken en je krijgt minder verhaaltjessommen. Bij *analyse* krijg je veel te maken met algebraïsche vaardigheden, zoals het oplossen van vergelijkingen en het herleiden van formules. Verder onderzoek je bij functies de hellingen van grafieken. De *meetkunde* bestaat uit vlakke meetkunde en analytische meetkunde. Bij *vlakke meetkunde* krijg je te maken met hoeken, afstanden en gelijkvormigheid, maar ook met het opstellen van vergelijkingen in een meetkundige context. Bij de *analytische meetkunde* reken je aan meetkundige figuren in een assenstelsel. Je stelt bijvoorbeeld vergelijkingen op van lijnen en cirkels.

Kenmerkend voor wiskunde B:

- hoofdstuk 6
- hoofdstuk 7 inclusief het onderzoek
- hoofdstuk 8: §8.4, §8.5

Verder komt terug bij wiskunde B:

- hoofdstuk 8: §8.1, §8.2, §8.3, §8.6

Wiskunde D

Wiskunde D zorgt voor een verbreding en verdieping van je wiskundekennis en bevat enkele uitdagende onderwerpen. Als je overweegt een technische studie te kiezen, dan is wiskunde D aan te bevelen, want je komt in aanraking met onderwerpen waarvan je op het hbo veel profijt kunt hebben. Zo krijg je te maken met kansrekening, ruimtemeetkunde, groeiprocessen, en functies die bij wiskunde B niet worden behandeld.

Kenmerkend voor wiskunde D:

- hoofdstuk 7: §7.5 theorie B
- hoofdstuk 8: onderzoek
- hoofdstuk 9: §9.4, §9.5

Verder komt terug bij wiskunde D:

- hoofdstuk 6, 7, 8

Legenda

Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen die je paraat moet hebben.

Oriënterende opgave

Theorieblokken worden voorafgegaan door oriënterende opgaven.

[>>] Testopgave

Een testopgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld goed begrijpt, dan kun je de testopgave maken. Gaat dit foutloos, dan mag je verdergaan met de opgave die achter >> staat.

Gewone opgave

Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

Afsluitende opgave

Aan deze opgave zie je welk eindniveau verwacht wordt.

Denkopgave

Een denkopgave doet een extra beroep op je denkvermogen. De denkopgave hoort bij de behandelde theorie, maar vaak wordt een probleem op een iets andere manier gepresenteerd. Denkopgaven zijn bedoeld voor alle leerlingen.

Diagnostische toets

7,8 Met de diagnostische toets wordt gecontroleerd of je de basisstof beheerst. Per toetsvraag wordt verwezen naar een of meer opgaven uit de herhaling.

Plus-stof

Met plus-stof kan worden gedifferentieerd naar niveau.

Plus-paragraaf

Paragraaf waarmee kan worden gedifferentieerd naar niveau.

[\[> WERKBOEK\]](#)

Verwijzing naar het werkboek.



Paragraaf waarbij je met het computerprogramma Excel werkt.

Inhoud

6 Kwadratische vergelijkingen en ongelijkheden 8

Voorkennis	Ontbinden in factoren en kwadratische vergelijkingen oplossen	10
6.1	De <i>abc</i> -formule	12
6.2	De ligging van een parabool ten opzichte van de <i>x</i> -as	18
6.3	Oplossingsmethoden	20
6.4	Ongelijkheden en grafieken	23
6.5	Kwadratische ongelijkheden	28
	Gemengde opgaven	34
	Samenvatting	36
	Diagnostische toets	38
	Herhaling	40
Onderzoek	Het gulden getal	45

7 Goniometrie 48

Voorkennis	Kruisproducten en tangens	50
7.1	Berekeningen met de tangens	52
7.2	De sinus	57
7.3	Goniometrische verhoudingen	60
7.4	Berekeningen met goniometrie	66
+ 7.5	Lijnstukken en hoeken berekenen	70
	Gemengde opgaven	74
	Samenvatting	76
	Diagnostische toets	78
	Herhaling	80
Onderzoek	Driehoeksmeting	84

8 Allerlei verbanden 86

Voorkennis	Vermenigvuldigingsfactor, de formule van een lijn, en de vergelijking $x^2 = c$	88
8.1	Exponentiële groei	90
8.2	Procenten en groeifactoren	94
8.3	Tabellen en groei	97
8.4	Periodieke verbanden	103
8.5	Machtsfuncties	107
8.6	Omgekeerd evenredige verbanden	112
	Gemengde opgaven	114
	Samenvatting	116
	Diagnostische toets	118
	Herhaling	120
Onderzoek	Begrensde groei	124

9 Spreiding, tellen en kans 126

Voorkennis	Centrummaten	128
9.1	Spreidingsmaten	131
9.2	De boxplot	136
+ 9.3	Spreidingsdiagrammen	142
9.4	Telproblemen	145
9.5	Kans	152
+ 9.6	Spreiding met Excel	156
	Gemengde opgaven	158
	Samenvatting	160
	Diagnostische toets	162
	Herhaling	164
Onderzoek	Geheimschrift	167

Vaardigheden	170
Wiskundige vaardigheden	172
Algemene vaardigheden	182
Kangoeroe-opgaven	184
Trefwoordenregister	192
Verantwoording	194

Kwadratische vergelijkingen en ongelijkheden

Veel sporters doen aan intervaltraining om sneller te worden en hun uithoudingsvermogen te verbeteren. Bij intervaltraining deel je de training op in een aantal periodes, de intervallen, waarbij periodes van hoge en lage intensiteit worden afgewisseld. Omdat goed herstel belangrijk is, wordt intervaltraining vaak gecombineerd met minder intensieve trainingsvormen.

Wat leer je?

- Wat de *abc*-formule is, en hoe je hiermee kwadratische vergelijkingen kunt oplossen.
- Wat de discriminant van een kwadratische vergelijking is.
- Wat een interval is.
- Hoe je oplossingen van ongelijkheden uit grafieken afleest.
- Kwadratische ongelijkheden oplossen met grafieken.

6





Voorkennis Ontbinden in factoren en kwadratische vergelijkingen oplossen

Theorie A Ontbinden in factoren

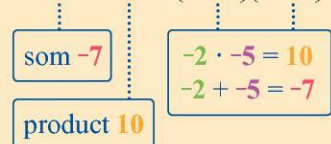
Ontbinden in factoren betekent schrijven als product.

Voorbeelden van ontbinden in factoren zijn

- $x^2 - 5x = x(x - 5)$

Hier is de gemeenschappelijke factor x buiten haakjes gebracht.

- $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$



Hier is de product-som-methode gebruikt. Je zoekt twee getallen met product 10 en som -7. In de tabel van 10 zie je dat je de getallen -2 en -5 moet hebben.

Uit de tabel van 10 volgt ook

- $x^2 + 11x + 10 = (x + 1)(x + 10)$
- $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$
- $x^2 - 11x + 10 = (x - 1)(x - 10)$

Uit de tabel van -10 volgt

- $x^2 - 9x - 10 = (x + 1)(x - 10)$
- $x^2 + 9x - 10 = (x - 1)(x + 10)$
- $x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$
- $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$

product 10		som
1	10	11
-1	-10	-11
2	5	7
-2	-5	-7

product -10		som
1	-10	-9
-1	10	9
2	-5	-3
-2	5	3

Ontbinden in factoren

product-som-methode	buiten haakjes brengen
$x^2 + 7x - 18 = (x - 2)(x + 9)$	$7x^2 - x = x(7x - 1)$
$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$	$5x^2 - 10x = x(5x - 10)$, maar
$x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6)$	ook $5x^2 - 10x = 5x(x - 2)$

$3x^2 + 9x = x(3x + 9)$,
maar ook
 $3x^2 + 9x = 3x(x + 3)$.



1 Ontbind in factoren.

- a $x^2 - 12x$
- b $x^2 + x$
- c $5x^2 - 3x$

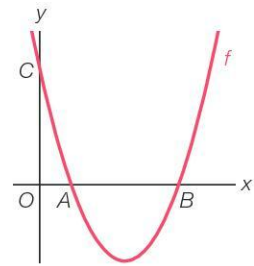
- d $8x^2 + 12x$
- e $16x^2 - 48x$
- f $5x^2 + 160x$

6.1 De abc-formule

- 0 1** a Hoe kun je aan de coördinaten van een punt zien of het op de x -as ligt? En hoe kun je aan de coördinaten zien of een punt op de y -as ligt?

Hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = x^2 - 6x + 5$, die de x -as snijdt in de punten A en B en de y -as in het punt C .

- b Bereken $f(0)$.
Van welk punt weet je nu de coördinaten?
- c Reken na dat $f(1) = 0$ en $f(5) = 0$.
Schrijf de coördinaten van A en B op.



figuur 6.1

Theorie A Snijpunten van grafieken met de coördinaatassen

Van een punt op de x -as is de y -coördinaat 0, en van een punt op de y -as is de x -coördinaat 0.

Dus voor het berekenen van de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van een functie f met de coördinaatassen gebruik je:

- Snijpunten met de x -as: De y -coördinaat is 0.
De x -coördinaat volgt uit $f(x) = 0$, dus los op $f(x) = 0$.
- Snijpunt met de y -as: De x -coördinaat is 0.
De y -coördinaat is $f(0)$, dus bereken $f(0)$.

Voorbeeld

De grafiek van de functie $f(x) = x^2 - x - 6$ snijdt de x -as in de punten A en B en de y -as in het punt C . Zie figuur 6.2. Bereken de coördinaten van A , B en C .

Uitwerking

$$f(0) = 0 - 0 - 6 = -6, \text{ dus } C(0, -6).$$

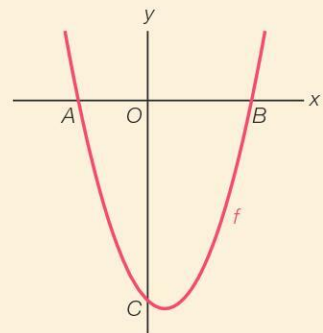
$$f(x) = 0 \text{ geeft } x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x + 2)(x - 3) = 0$$

$$x + 2 = 0 \vee x - 3 = 0$$

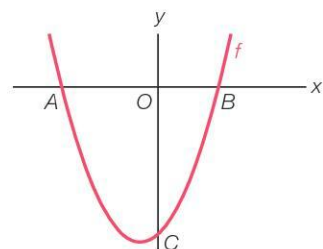
$$x = -2 \vee x = 3$$

Dus $A(-2, 0)$ en $B(3, 0)$.



figuur 6.2

- 2** De grafiek van de functie $f(x) = x^2 + 2x - 15$ snijdt de x -as in de punten A en B en de y -as in het punt C . Zie figuur 6.3. Bereken de coördinaten van A , B en C .



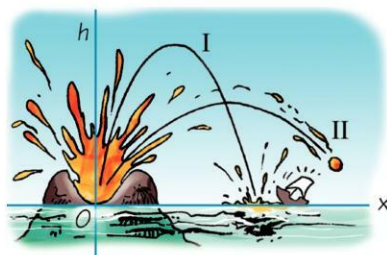
figuur 6.3

A 3 Bereken van de grafieken van de volgende functies de coördinaten van de snijpunten met de x -as en de y -as.

- a** $f(x) = 5x^2 - 10x$ **c** $h(x) = (2x - 8)(x - 3)$
b $g(x) = x^2 + 6x + 9$ **d** $k(x) = x^2 + 10x - 24$

4 In figuur 6.4 zie je een vulkaanuitbarsting. Bij de banen I en II van de rondvliegende stenen horen de formules $h_I = -0,00625x^2 + 1,5x$ en $h_{II} = -0,0015x^2 + 0,6x$. Hierin zijn x en h in meter.

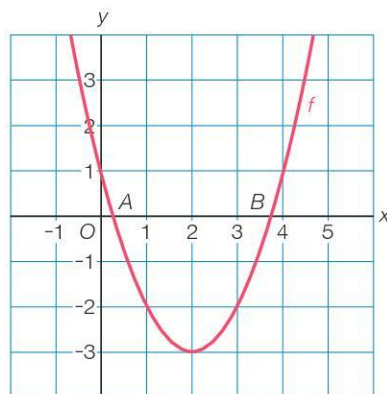
- a** Steen II komt verder van O in zee dan steen I. Hoeveel meter verder?
b Steen I komt hoger dan steen II. Hoeveel meter hoger?



figuur 6.4

5 In figuur 6.5 zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 4x + 1$. De grafiek snijdt de x -as in de punten A en B . De x -coördinaten van A en B zijn de oplossingen van de vergelijking $x^2 - 4x + 1 = 0$.

- a** Waarom kun je $x^2 - 4x + 1 = 0$ niet ontbinden in factoren met de product-som-methode?
b Toch heeft de vergelijking $x^2 - 4x + 1 = 0$ twee oplossingen. Lees de oplossingen af uit de figuur. Schat het antwoord in één decimaal nauwkeurig.



figuur 6.5

6 Elke kwadratische vergelijking is te schrijven in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$. In $3x^2 - 5x + 1 = 0$ is $a = 3$, $b = -5$ en $c = 1$.

Welke getallen zijn a , b en c in de volgende vergelijkingen?

- a** $3x^2 + 7x - 4 = 0$ **c** $-x^2 + 6x + 11 = 0$
b $-5x^2 + x - 2 = 0$ **d** $x^2 - x + 1 = 0$

7 Je kunt $2x^2 = 3x - 1$ schrijven in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ door $3x - 1$ naar het linkerlid te brengen. Je krijgt $2x^2 - 3x + 1 = 0$, dus $a = 2$, $b = -3$ en $c = 1$.

Schrijf in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ en vermeld welke getallen a , b en c zijn.

- a** $7x^2 = 2x + 8$ **c** $5 - x = x^2$
b $5x^2 + 8x = 8$ **d** $(x + 2)(x - 1) = 4$

Theorie B Oplossen met de abc -formule

Er zijn kwadratische vergelijkingen die je niet kunt oplossen met ontbinden in factoren. Je hebt hiervan in opgave 5 een voorbeeld gezien. Gelukkig is er een formule waarmee je van elke kwadratische vergelijking de oplossingen kunt berekenen. Deze formule heet de **abc -formule**.

Werkschema: kwadratische vergelijkingen oplossen met de abc-formule

- 1 Schrijf de vergelijking in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$.
- 2 Vermeld welke getallen a , b en c zijn.
- 3 Bereken $D = b^2 - 4ac$.
- 4 De oplossingen zijn $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ en $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

$D = b^2 - 4ac$ heet de **discriminant** van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$.
Van de vergelijking $3x^2 + 7x - 2 = 0$ bereken je de discriminant als volgt.

- $a = 3$, $b = 7$ en $c = -2$
- $D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot -2 = 73$

De abc-formule

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$

zijn $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ en $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, met $D = b^2 - 4ac$.

Voorbeeld

Los op $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Uitwerking

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$a = 2, b = 5 \text{ en } c = -3$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 49$$

$$x = \frac{-5 + \sqrt{49}}{4} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{49}}{4}$$

$$x = \frac{-5 + 7}{4} \vee x = \frac{-5 - 7}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \vee x = -3$$

Vermeld eerst a , b en c en bereken dan $D = b^2 - 4ac$.



Je kunt je antwoord controleren door de gevonden oplossingen in de oorspronkelijke vergelijking in te vullen.
Invullen van bijvoorbeeld $x = -3$ in $2x^2 + 5x - 3 = 0$ geeft
 $2 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot -3 - 3 = 2 \cdot 9 - 15 - 3 = 18 - 15 - 3 = 0$ en dat klopt. Dus $x = -3$ is inderdaad een oplossing van de vergelijking $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

T 8 [►►13] Los op.

a $3x^2 - 7 = 4x$

b $3 - 15x = 18x^2$

c $x = 4 - 5x^2$

9 Vermeld welke getallen a , b en c zijn, en bereken de discriminant D .

a $2x^2 + 3x + 1 = 0$

b $3x^2 - 7x - 1 = 0$

c $x^2 - x - 5 = 0$

10 Gegeven is de vergelijking $2x^2 - 5x - 7 = 0$.

a Vul in.

$2x^2 - 5x - 7 = 0$, dus $a = \dots$, $b = \dots$ en $c = \dots$

b Reken na dat $D = 81$.

c Los de vergelijking op met de abc -formule.

11 Los op.

a $3x^2 - 7x + 2 = 0$

c $10x^2 + 9x + 2 = 0$

e $2x^2 + 3x - 5 = 0$

b $5x^2 - x - 4 = 0$

d $4x^2 + 5x + 1 = 0$

f $7x^2 - 5x - 2 = 0$

12 Om $3x^2 + 3 = 10x$ op te lossen, schrijf je de vergelijking eerst in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$. Je krijgt $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

Vervolgens vermeld je welke getallen a , b en c zijn. Enzovoort.

Los op.

a $3x^2 + 3 = 10x$

c $4x^2 + 3 = 8x$

e $9x - 4 = 5x^2$

b $6x^2 + x = 2$

d $7x = 2x^2 + 5$

f $50x^2 + 1 = 15x$

A 13 In figuur 6.6 zie je de grafieken van de functies

$f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ en $g(x) = -2x + 1$.

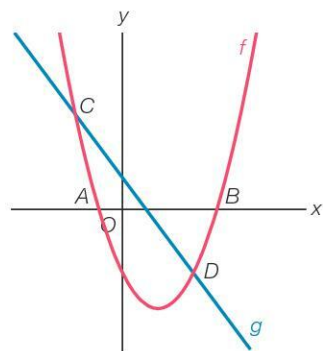
a De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A en B .

Bereken de coördinaten van A en B .

b De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten

C en D .

Bereken de coördinaten van C en D .



figuur 6.6

14 Van de vergelijking $3x^2 + bx = 5$ is $x = -1$ een oplossing. Bereken de andere oplossing.

ARTIKEL

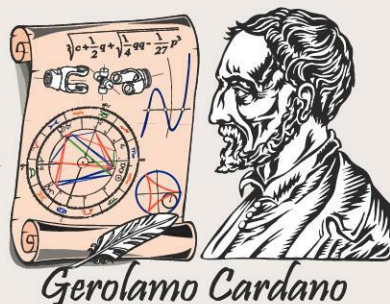
BEROEP

GESCHIEDENIS

INFORMATIE

Formules voor het oplossen van vergelijkingen

Kwadratische vergelijkingen worden ook wel tweedegraadsvergelijkingen genoemd. Met de abc -formule kun je dus tweedegraadsvergelijkingen oplossen. Voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen, dat zijn vergelijkingen van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, bestaat ook een formule. Deze formule werd voor het eerst beschreven door de Italiaanse wiskundige Gerolamo Cardano (1501-1576) in zijn boek *Ars Magna*. Ludovico Ferrari, een student van Cardano, ontdekte in 1540 hoe je vierdegraadsvergelijkingen kunt oplossen. De Noorse wiskundige Niels Henrik Abel bewees in 1824 dat het niet mogelijk is een formule te vinden voor het oplossen van vijfdegraadsvergelijkingen.



Gerolamo Cardano

Theorie C Oplossingen benaderen

Bij het toepassen van de abc -formule komt het regelmatig voor dat $\sqrt{D}$ een irrationaal getal is. Je kunt dan de rekenmachine gebruiken om de oplossingen te benaderen. Zie het volgende voorbeeld.

Voorbeeld

Los op $x^2 = 3x + 1$. Geef de oplossingen in twee decimalen nauwkeurig.

Uitwerking

$$x^2 = 3x + 1$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$a = 1, b = -3 \text{ en } c = -1$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 13$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x \approx 3,30 \vee x \approx -0,30$$

Een irrationaal getal is een getal dat je niet als breuk kunt schrijven. Zo zijn $\sqrt{5}$ en $\sqrt{17}$ irrationale getallen. Maar $\sqrt{9} = 3 = \frac{3}{1}$ is een rationaal getal.



T 15 [►►18] Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

a $7x^2 = 3x + 7$

b $5x = 6 - 11x^2$

16 Los op. Geef de oplossingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^2 + x - 4 = 0$

c $5x^2 - 3x - 3 = 0$

b $x^2 - 5x - 3 = 0$

d $-x^2 + 5x - 5 = 0$

A 17 Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

a $2x^2 + 4x + 1 = 0$

c $3x^2 = 2x + 8$

b $x^2 + x = 5$

d $x + 5 = 2x^2$

O 18 Gegeven is de vergelijking $5x^2 + 2x + 1 = 0$.

a Toon aan dat $D = -16$.

b Waarom heeft $5x^2 + 2x + 1 = 0$ geen oplossing?

Gegeven is de vergelijking $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

c Toon aan dat $D = 0$.

d Waarom heeft $9x^2 + 6x + 1 = 0$ maar één oplossing?

Theorie D Aantal oplossingen van een kwadratische vergelijking

De discriminant van een kwadratische vergelijking kan een negatief getal zijn. In de abc -formule krijg je dan de wortel van een negatief getal, maar zo'n wortel bestaat niet. Daarom is er bij $D < 0$ geen oplossing. Het kan ook voorkomen dat $D = 0$. In dat geval zijn beide oplossingen gelijk, dus is er maar één oplossing.

Het aantal oplossingen van $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ is

- twee als $D > 0$
- één als $D = 0$
- nul als $D < 0$.

Zo heeft de vergelijking $2x^2 + 3x + 7 = 0$ geen oplossing, want $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -47$, dus $D < 0$.

Voorbeeld

Los op.

a $x^2 + x + 2 = 0$

b $4x^2 - 20x + 25 = 0$

Uitwerking

a $x^2 + x + 2 = 0$

$a = 1, b = 1$ en $c = 2$

$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7$

$D < 0$, dus geen oplossing.

b $4x^2 - 20x + 25 = 0$

$a = 4, b = -20$ en $c = 25$

$D = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 0$

$x = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$

Bedenk dat $\frac{20 + \sqrt{0}}{8} = \frac{20 - \sqrt{0}}{8} = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$.

19 Bereken van de volgende vergelijkingen het aantal oplossingen.

a $x^2 + 6x + 6 = 0$

b $\frac{1}{16}x^2 - 10x + 400 = 0$

c $-3x^2 + 5x - 4 = 0$

d $2x^2 + x = 5x - 2$

20 Los op.

a $x^2 + 3x + 4 = 0$

b $9x^2 - 12x + 4 = 0$

c $-2x^2 + 5x - 2 = 0$

d $x^2 - x + 6 = 0$

Discriminant

Het woord discriminant heeft te maken met discrimineren. Dit betekent *onderscheid maken*. Door de discriminant te berekenen, kun je onderscheiden hoeveel oplossingen de vergelijking heeft.

Buiten de wiskunde heeft het begrip discrimineren een negatieve betekenis gekregen: onderscheid maken ten koste van anderen.

A 21 Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

a $25x^2 + 20x + 1 = 0$

d $8x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0$

b $3x + 1 = 2x^2$

e $2x^2 + 6 = x$

c $-2x^2 + 5x = 5$

f $x(5x - 7) = -2$

22 De vergelijking $3x^2 + c = 6x$ heeft één oplossing. Bereken deze oplossing.

6.2 De ligging van een parabool ten opzichte van de x-as

0 23 In figuur 6.7a zie je de grafiek van de functie

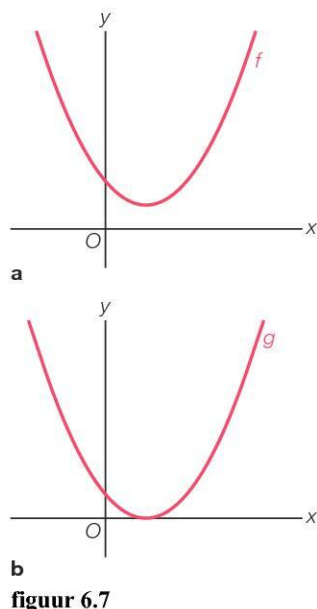
$$f(x) = x^2 - 2x + 2.$$

- a Bereken de discriminant van de vergelijking $x^2 - 2x + 2 = 0$.
- b Hoeveel oplossingen heeft $x^2 - 2x + 2 = 0$?
Hoe zie je dat in de figuur?

In figuur 6.7b zie je de grafiek van de functie

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2.$$

- c Reken na dat van de vergelijking $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$ de discriminant gelijk is aan 0.
- d Hoeveel oplossingen heeft $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$?
Hoe kun je dat in de figuur zien?



Theorie A Parabool en discriminant

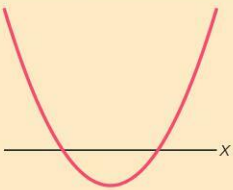
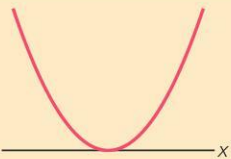
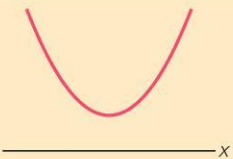
Om de coördinaten van de snijpunten van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ met de x-as te berekenen, los je de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ op. Het aantal oplossingen kan twee, één of nul zijn. Dat aantal hangt af van de discriminant. Dus het aantal snijpunten van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ met de x-as hangt af van D .

Bij $ax^2 + bx + c = 0$ kun je drie situaties onderscheiden.

- $D > 0$, dan zijn er twee oplossingen, dus de parabool heeft twee snijpunten met de x-as.
- $D = 0$, dan is er één oplossing, dus de parabool heeft één punt met de x-as gemeenschappelijk. De parabool raakt de x-as. Zo'n punt noemen we een **raakpunt**.
- $D < 0$, dan is er geen oplossing, dus de parabool heeft geen snijpunt met de x-as.

In het schema op de volgende bladzijde zie je in drie schetsen hoe de ligging van een parabool ten opzichte van de x-as afhangt van de discriminant. We beperken ons in de figuur tot dalparabolen, dus tot $y = ax^2 + bx + c$ met $a > 0$.

De parabool $y = ax^2 + bx + c$ met $a > 0$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
		
De parabool heeft twee snijpunten met de x -as.	De parabool heeft één snijpunt (raakpunt) met de x -as.	De parabool heeft geen snijpunt met de x -as.

Voorbeeld

Geef in een schets de ligging aan van de parabool $y = 2x^2 - 3x - 1$ ten opzichte van de x -as.

Uitwerking

$$y = 2x^2 - 3x - 1$$

$$a = 2, b = -3 \text{ en } c = -1$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 17$$

$D > 0$, dus er zijn twee snijpunten met de x -as.

$a > 0$, dus dalparabool.

Zie de schets hiernaast.



- 24** Onderzoek met de discriminant hoeveel snijpunten de volgende parabolen met de x -as hebben.

a $y = x^2 + 2x + 3$

c $y = x^2 + 9x + 20$

b $y = -x^2 - x + 1$

d $y = 4x^2 - 4x + 1$

- 25** Maak zelf een schema zoals hierboven, maar nu voor bergparabolen.

- A 26** Geef van de volgende parabolen in een schets de ligging aan ten opzichte van de x -as. Bereken telkens eerst de discriminant.

a $y = 2x^2 + 3x - 4$

c $y = 8x^2 - x + 1$

b $y = -x^2 + 6x + 1$

d $y = -3x^2 + 6x - 3$

- 27** Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 - 5x + p$.

a Toon aan dat $D = 25 - 8p$.

b Los op $D = 0$.

c Voor welke p raakt de grafiek van f de x -as?

- 28** Gegeven is de functie $f(x) = -3x^2 + 12x + p$.

a Voor welke p raakt de grafiek van f de x -as?

b Voor welke p ligt het punt $B(-5, 40)$ op de grafiek van f ?

c De grafiek van f snijdt de x -as in de punten $C(1, 0)$ en D .

Bereken de coördinaten van D .

6.3 Oplossingsmethoden

O 29

- a Het oplossen van de vergelijking $x^2 - 16 = 0$ gaat anders dan het oplossen van de vergelijking $x^2 - 16x = 0$. Licht dit toe.
- b Het oplossen van de vergelijking $x(x - 3) = 0$ gaat anders dan het oplossen van de vergelijking $x(x - 3) = 10$. Licht dit toe.

Theorie A Kwadratische vergelijkingen oplossen

Je kunt elke kwadratische vergelijking oplossen met de *abc*-formule, maar dat is lang niet altijd de handigste methode.

Hieronder staat een overzicht van de verschillende methoden die je hebt geleerd voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen.

I $x^2 = c$

Van de vergelijking $x^2 = 16$ schrijf je de oplossingen direct op. $x^2 = 16$ geeft $x = 4 \vee x = -4$

Bij $\frac{1}{2}x^2 + 16 = 0$ herleid je tot de vorm $x^2 = c$.

Je krijgt $\frac{1}{2}x^2 + 16 = 0$

$$\frac{1}{2}x^2 = -16$$

$$x^2 = -32$$

geen oplossing

$$x^2 = c$$

- $x^2 = 25$ geeft $x = 5 \vee x = -5$
- $x^2 = -25$ heeft geen oplossing

II Ontbinden in factoren

De kwadratische vergelijking $x^2 + 6x = 0$ los je op door de factor x buiten haakjes te brengen. Je krijgt $x^2 + 6x = 0$

$$x(x + 6) = 0$$

$$x = 0 \vee x + 6 = 0$$

$$x = 0 \vee x = -6$$

De vergelijking $x^2 + x - 2 = 0$ los je op met de product-som-methode. Je krijgt $x^2 + x - 2 = 0$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x - 1 = 0 \vee x + 2 = 0$$

$$x = 1 \vee x = -2$$

Ontbinden in factoren

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x - 2)(x - 6) = 0$$

$$x - 2 = 0 \vee x - 6 = 0$$

$$x = 2 \vee x = 6$$

Bij $(2x - 1)(3x + 2) = 0$ pas je direct toe $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$. Je krijgt $(2x - 1)(3x + 2) = 0$

$$2x - 1 = 0 \vee 3x + 2 = 0$$

$$2x = 1 \vee 3x = -2$$

$$x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{2}{3}$$

III *abc*-formule

De vergelijking $x^2 + 6x - 4 = 0$ los je op met de *abc*-formule, want ontbinden in factoren lukt niet.

De *abc*-formule

De *abc*-formule pas je alleen toe als de andere methoden niet werken.

Vuistregels voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen

- Ga na of je de vergelijking kunt herleiden tot de vorm $x^2 = c$.
- Ga na of je de vergelijking kunt oplossen met ontbinden in factoren.
- Gebruik de abc -formule alleen als het niet anders kan.

+ Ga eerst na of je de vergelijking kunt vereenvoudigen voor je begint met oplossen.

- Bij $15x^2 + 30x - 45 = 0$ deel je eerst alle termen door 15.
Je krijgt $x^2 + 2x - 3 = 0$, dus $(x - 1)(x + 3) = 0$, enzovoort.
- Bij $\frac{1}{3}x^2 + x - 6 = 0$ vermenigvuldig je eerst alle termen met 3.
Je krijgt $x^2 + 3x - 18 = 0$, dus $(x - 3)(x + 6) = 0$, enzovoort.
- Bij $\frac{1}{2}x^2 + x - 2 = 0$ vermenigvuldig je eerst alle termen met 2.
Je krijgt $x^2 + 2x - 4 = 0$. Omdat je hier niet kunt ontbinden in factoren, gebruik je de abc -formule.

30 Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^2 + 6x = 0$

c $x^2 + 6x + 7 = 0$

e $x^2 + 7 = 1$

b $x^2 + 6x = 7$

d $x^2 + 6x = 27$

f $x^2 - 7x - 6 = 0$

A 31 Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

a $2x^2 = 6x$

c $(2x - 1)(x - 5) = 0$

e $25x^2 - 10x + 1 = 0$

b $x^2 + 3x - 7 = 0$

d $(x - 2)(x - 3) = 20$

f $2x^2 - 12 = 8$

32 Los op.

a $6x^2 + 36x = 96$

c $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 12$

e $3x^2 - 7 = x^2 + 25$

b $4x^2 + 4x = 8x$

d $(x - 5)^2 = 49$

f $(x - 7)(3x + 7) = -3$

Theorie B Kwadratische vergelijkingen opstellen

Om een grasveld van 8 bij 10 meter ligt aan twee kanten een overal even breed pad met een oppervlakte van 40 m^2 . Zie figuur 6.8a. Je kunt de breedte van het pad berekenen door een kwadratische vergelijking op te stellen en deze vervolgens op te lossen.

Stel de breedte van het pad x meter, en verdeel het pad vervolgens in drie rechthoekige stukken. Zie figuur 6.8b.

De oppervlakte van het rode stuk is $x \cdot x = x^2$.

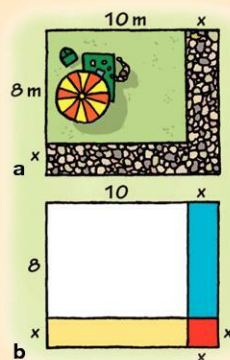
De oppervlakte van het gele stuk is $10 \cdot x = 10x$.

De oppervlakte van het blauwe stuk is $8 \cdot x = 8x$.

Dus de oppervlakte van het pad is $x^2 + 10x + 8x = x^2 + 18x$.

Er is gegeven dat de oppervlakte van het pad 40 m^2 is.

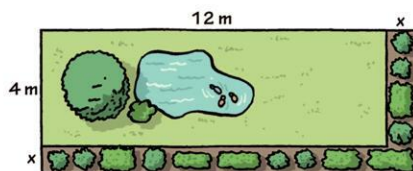
Hieruit volgt de vergelijking $x^2 + 18x = 40$. Oplossen geeft $x = 2$ en $x = -20$. De oplossing $x = -20$ kan niet, want de breedte kan niet negatief zijn. Dus de breedte is 2 meter.



figuur 6.8

33 Om het grasveld in figuur 6.9 ligt aan twee kanten een border met een breedte van x meter.

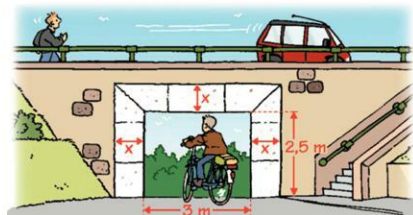
- Toon aan dat de oppervlakte van de border $x^2 + 16x \text{ m}^2$ is.
- De oppervlakte van de border is 57 m^2 . Welke vergelijking volgt uit de gegevens? Los de vergelijking op.
- Hoe breed is de border?



figuur 6.9

A 34 In figuur 6.10 zie je de ingang van een fietstunnel.

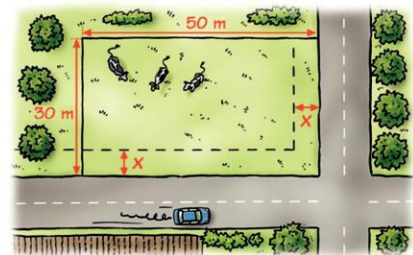
- Toon aan dat de oppervlakte van het witte gedeelte $2x^2 + 8x \text{ m}^2$ is.
- Het witte gedeelte heeft een oppervlakte van $4,5 \text{ m}^2$. Stel een vergelijking op bij de gegevens en bereken hiermee x .



figuur 6.10

35 De familie Vergouwen bezit een stuk weiland van 50 bij 30 meter bij een kruispunt van twee wegen. Ze verkopen een strook met een breedte van x meter aan de gemeente voor de aanleg van een trottoir. Zie figuur 6.11. De gemeente betaalt € 25 per m^2 . In totaal ontvangt de familie Vergouwen € 5775.

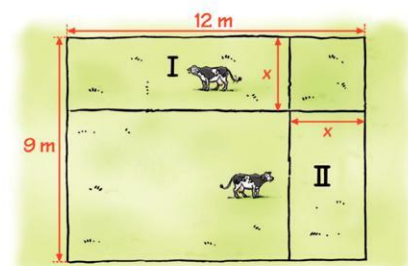
- Toon aan dat geldt $x^2 - 80x + 231 = 0$.
- Bereken de breedte van het trottoir.



figuur 6.11

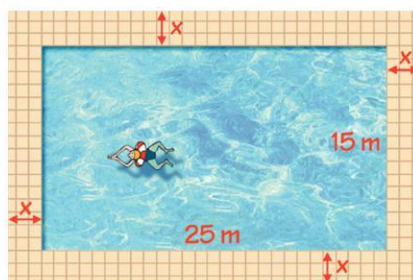
A 36 Mevrouw Abbing heeft een grasveld van 12 bij 9 meter. Ze besluit het grasveld te verdelen in een vierkant en drie rechthoekige stukken. Zie figuur 6.12.

De stukken I en II gaat ze beplanten, de andere twee stukken blijven grasveld. De oppervlakte van de twee stukken grasveld samen is 63 m^2 . Bereken de oppervlakte van het vierkante stuk grasveld.



figuur 6.12

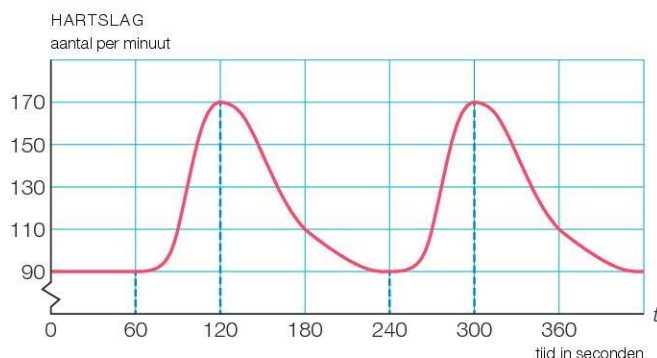
A 37 Om een zwembad van 25 bij 15 meter is een tegelpad aangelegd. Zie figuur 6.13. De oppervlakte van het pad is $\frac{3}{5}$ deel van de oppervlakte van het zwembad. Bereken de breedte van het tegelpad.



figuur 6.13

6.4 Ongelijkheden en grafieken

O 38 Lex doet aan intervaltraining. Periodes met hoge inspanning wisselt hij af met periodes van ontspanning. Met behulp van een hartslagmeter houdt hij de mate van inspanning bij. Zie de grafiek in figuur 6.14.



figuur 6.14 De hartslagfrequentie (het aantal slagen per minuut) schommelt tussen de 90 en 170.

- Hoeveel seconden duurt een periode met hoge inspanning?
- Na hoeveel seconden begint de tweede periode van inspanning?
En na hoeveel seconden eindigt die periode?
- Tussen welke tijdstippen is de hartslagfrequentie meer dan 130?

Theorie A Intervallen

In figuur 6.15 zijn de periodes van inspanning en ontspanning tijdens een andere intervaltraining aangegeven.



figuur 6.15

De eerste periode van inspanning is van $t = 80$ tot $t = 120$.
Voor t tussen 80 en 120 bestaat de notatie $80 < t < 120$.
Een aaneengesloten stuk van de getallenlijn heet een **interval**.
Bij de tweede periode van inspanning hoort het interval $200 < t < 240$.

In figuur 6.16 zijn boven de getallenlijn drie soorten intervallen getekend.

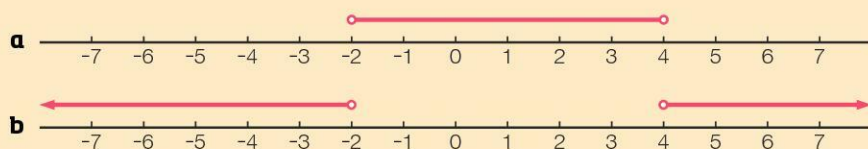


figuur 6.16

Met een 'open bolletje' geef je aan dat het betreffende getal niet bij het interval hoort.



In figuur 6.17a zie je één interval. Dat een getal x tot dit interval behoort, noteer je met $-2 < x < 4$.



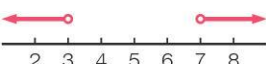
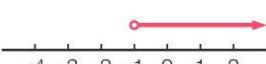
figuur 6.17

In figuur 6.17b zie je twee intervallen. Dat een getal x tot één van deze twee intervallen behoort, noteer je met $x < -2 \vee x > 4$.

39 Vul in.

- a** x ligt tussen -3 en 12 noteer je als ...
- b** x ligt tussen 5 en 17 noteer je als ...
- c** x is groter dan 8 noteer je als ...
- d** x is kleiner dan -3 noteer je als ...

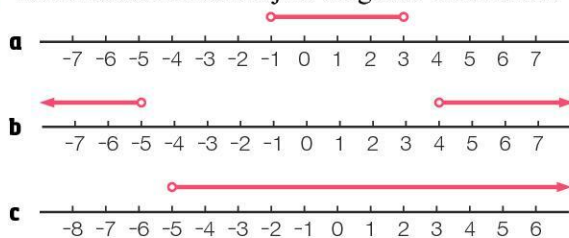
40 Vul in.

- a** Bij  hoort de notatie $\dots < x < \dots$
- b** Bij  hoort de notatie $x < \dots \vee x > \dots$
- c** Bij  hoort de notatie $\dots$
- d** Bij  hoort de notatie $\dots$

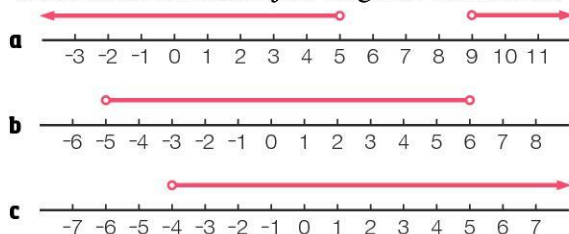
Bij twee gebieden krijg je twee x -en in het antwoord.



41 Welke notaties horen bij de volgende intervallen?

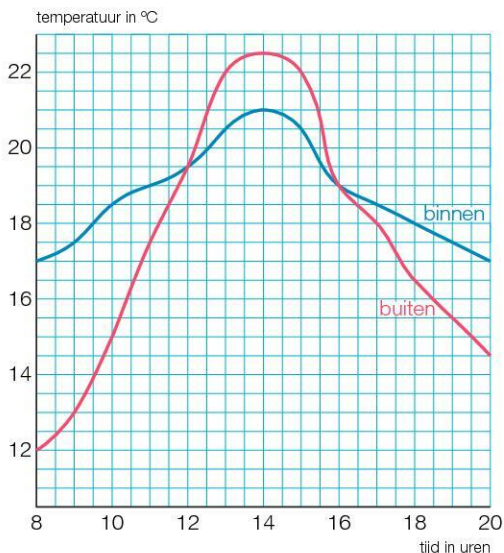


A 42 Welke notaties horen bij de volgende intervallen?



O 43 De familie Hoekzema heeft op een zonnige dag de binnen- en buitentemperatuur bijgehouden. Zie figuur 6.18.

- In welk tijdsinterval was het buiten warmer dan binnen?
- Op welk tijdstip is het binnen vier graden warmer dan buiten?
- Gedurende hoeveel uur is het temperatuurverschil tussen binnen en buiten meer dan $1,5^\circ\text{C}$?



figuur 6.18

O 44 In figuur 6.19 zie je de grafieken van de functies f en g . Op de grafiek van f ligt het punt $A(5, 10)$, dus $f(5) = 10$.

- Vul in.
Op de grafiek van g ligt het punt $B(5, 4)$, dus $g(5) = \dots$
- Lees af uit de figuur en vul in.
 $f(0) = \dots$, $g(0) = \dots$, $f(1) = \dots$,
 $g(1) = \dots$, $f(2) = \dots$ en $g(2) = \dots$

Bij $x = 5$ ligt de grafiek van f **boven** de grafiek van g , dus $f(5) > g(5)$.

- Vul eerst **boven** of **onder** in en vervolgens $<$ of $>$.

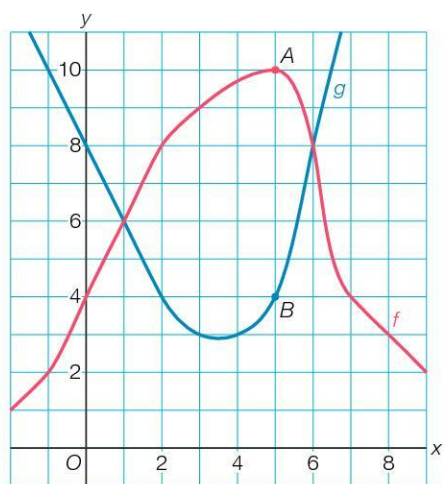
Bij $x = 2$ ligt de grafiek van f ... de grafiek van g , dus $f(2) \dots g(2)$.

Bij $x = 4$ ligt de grafiek van f ... de grafiek van g , dus $f(4) \dots g(4)$.

Bij $x = 7$ ligt de grafiek van f ... de grafiek van g , dus $f(7) \dots g(7)$.

- Van de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ is $x = 4$ een oplossing. Waarom?
- Is $x = 3$ een oplossing van $f(x) > g(x)$?
En is $x = 8$ een oplossing?
- Vul in.

De getallen tussen ... en ... zijn de oplossingen van $f(x) > g(x)$. Notatie: ...



figuur 6.19

Ik hoef $f(5)$ en $g(5)$ niet precies af te lezen om te zien dat $f(5) > g(5)$.



Theorie B Ongelijkheden en grafieken

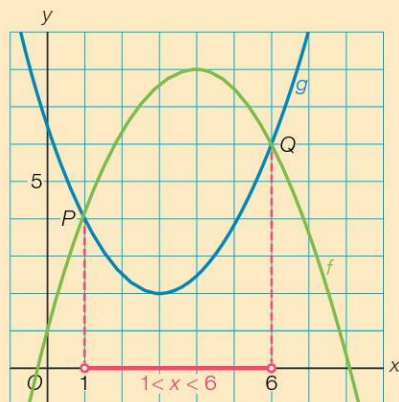
Snijden de grafieken van de functies f en g elkaar in de punten $P(1, 4)$ en $Q(6, 6)$, dan zijn $x = 1$ en $x = 6$ de oplossingen van de vergelijking $f(x) = g(x)$.

Hiernaast zijn de grafieken van de functies f en g getekend. Om de **ongelijkheid** $f(x) > g(x)$ op te lossen, vraag je je af: voor welke x ligt de grafiek van f boven die van g ?

Het antwoord is met rood op de x -as aangegeven.

Het zijn alle getallen tussen 1 en 6.

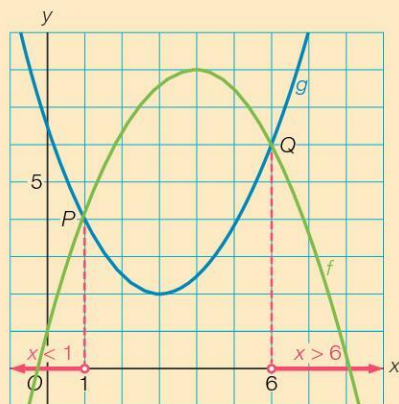
Dus $f(x) > g(x)$ geeft $1 < x < 6$.



Om de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ op te lossen, vraag je je af: voor welke x ligt de grafiek van f onder die van g ?

Hiernaast is het antwoord met rood op de x -as aangegeven. Het zijn alle getallen kleiner dan 1 en alle getallen groter dan 6.

Dus $f(x) < g(x)$ geeft $x < 1 \vee x > 6$.



figuur 6.21

Bij de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ kijk je waar de grafiek van f onder die van g ligt.

Bij de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ kijk je waar de grafiek van f boven die van g ligt.

Bij het oplossen van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ ga je als volgt te werk.

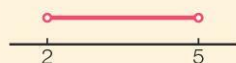
- 1 Lees uit de figuur af voor welke x geldt $f(x) = g(x)$.
- 2 Geef de oplossingen van $f(x) = g(x)$ aan op een getallenlijn, en kleur het gedeelte dat bij $f(x) < g(x)$ hoort.
- 3 Schrijf de oplossingen van de ongelijkheid op.

Voorbeeld

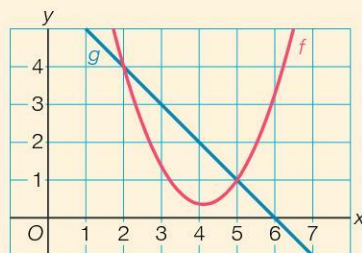
Zie de figuur hiernaast. Los op $f(x) < g(x)$.

Uitwerking

$f(x) = g(x)$ geeft $x = 2 \vee x = 5$



$f(x) < g(x)$ geeft $2 < x < 5$



figuur 6.22

In het voorbeeld op de vorige bladzijde is op de getallenlijn één interval aangegeven en krijg je in het antwoord één x .

Bij de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ krijg je:



$f(x) > g(x)$ geeft $x < 2 \vee x > 5$.

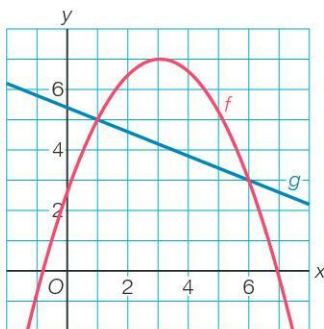
In dit geval heb je op de getallenlijn twee intervallen en krijg je in het antwoord twee x -en.

één interval,
dan één x in het antwoord

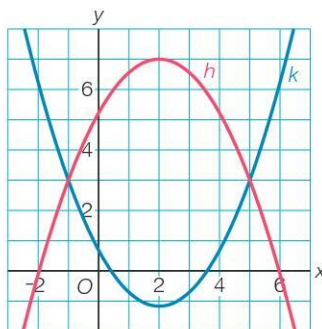
twee intervallen,
dan twee x -en in het antwoord

45 Zie figuur 6.23. Los op.

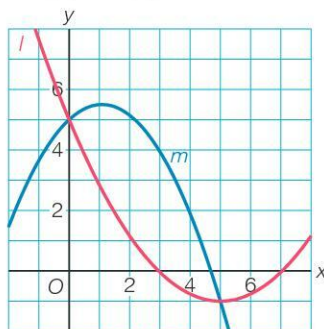
a $f(x) < g(x)$



b $h(x) > k(x)$



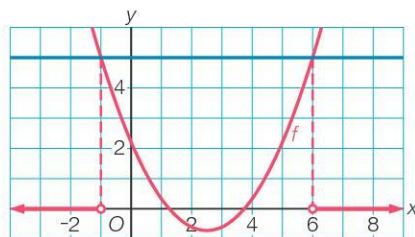
c $l(x) > m(x)$



figuur 6.23

46 Bij de horizontale lijn op hoogte 5 in figuur 6.24 hoort de formule $y = 5$. De oplossingen van de ongelijkheid $f(x) > 5$ zijn op de x -as aangegeven. Je ziet: $f(x) > 5$ geeft $x < -1 \vee x > 6$.

Los op $f(x) < 5$.

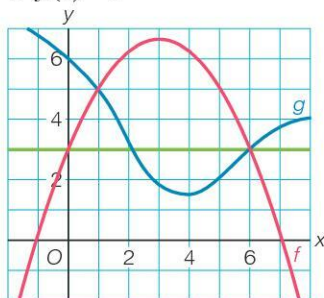


figuur 6.24

A 47 Zie figuur 6.25. Los op.

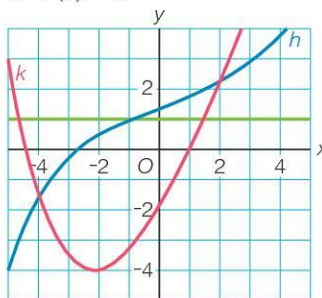
a $f(x) < g(x)$

b $f(x) > 3$



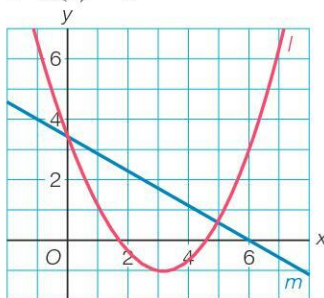
c $h(x) > k(x)$

d $h(x) > 1$



e $l(x) < m(x)$

f $m(x) < 0$

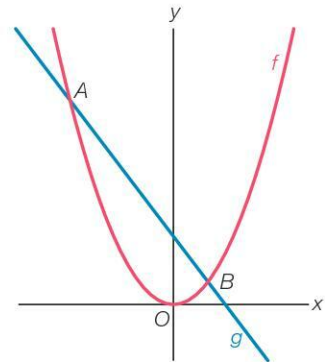


figuur 6.25

6.5 Kwadratische ongelijkheden

O 48 In figuur 6.26 zie je een schets van de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = -2x + 3$.

- Los op $f(x) = g(x)$.
- Schrijf de x -coördinaten op van de snijpunten A en B .
- Los op $f(x) < g(x)$.

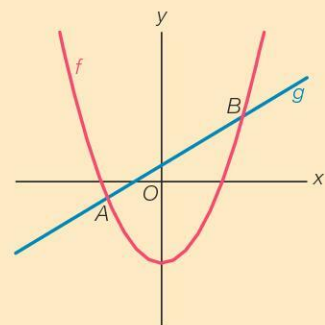


figuur 6.26

Theorie A Kwadratische ongelijkheden oplossen

De ongelijkheid $x^2 - 5 < x + 1$ is een voorbeeld van een **kwadratische ongelijkheid**. Bij het oplossen gebruik je een schets van de grafieken van $f(x) = x^2 - 5$ en $g(x) = x + 1$. Zie figuur 6.27.

Het oplossen van $x^2 - 5 < x + 1$ gaat in drie stappen. Zie het volgende werkschema.



figuur 6.27

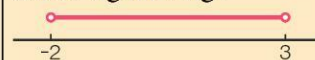
Werkschema: kwadratische ongelijkheden oplossen

- 1 Los de bijbehorende vergelijking op.

$$\begin{aligned} x^2 - 5 &= x + 1 \\ x^2 - x - 6 &= 0 \\ (x + 2)(x - 3) &= 0 \\ x + 2 = 0 \vee x - 3 &= 0 \\ x = -2 \vee x &= 3 \end{aligned}$$

- 2 Lees uit de figuur de oplossingen van de ongelijkheid af, en geef deze aan op een getallenlijn.

Uit de figuur volgt



- 3 Schrijf de oplossingen van de ongelijkheid op.

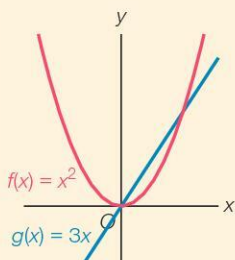
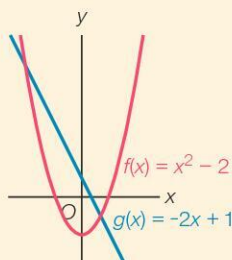
$$x^2 - 5 < x + 1 \text{ geeft } -2 < x < 3$$

Voorbeeld

Los op. Gebruik de grafieken in figuur 6.28.

a $x^2 > 3x$

b $x^2 - 2 < -2x + 1$



figuur 6.28

Uitwerking

a $x^2 = 3x$

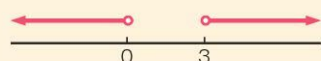
$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \vee x - 3 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

Uit de figuur volgt



$$x^2 > 3x \text{ geeft } x < 0 \vee x > 3$$

b $x^2 - 2 = -2x + 1$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x - 1)(x + 3) = 0$$

$$x - 1 = 0 \vee x + 3 = 0$$

$$x = 1 \vee x = -3$$

Uit de figuur volgt



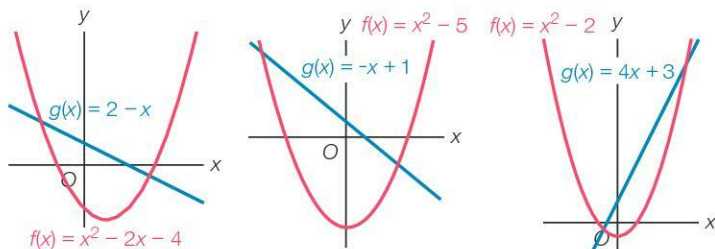
$$x^2 - 2 < -2x + 1 \text{ geeft } -3 < x < 1$$

49 Los op. Gebruik de grafieken in figuur 6.29.

a $x^2 - 2x - 4 < 2 - x$

b $x^2 - 5 > -x + 1$

c $x^2 - 2 > 4x + 3$



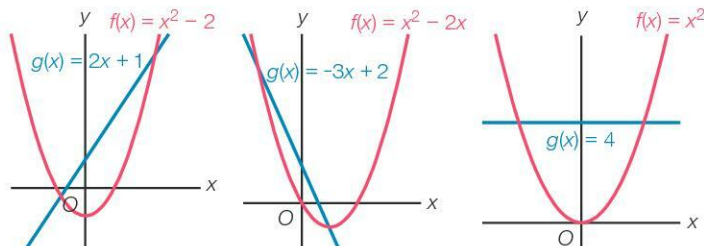
figuur 6.29

A 50 Los op. Gebruik de grafieken in figuur 6.30.

a $x^2 - 2 > 2x + 1$

b $x^2 - 2x < -3x + 2$

c $x^2 > 4$



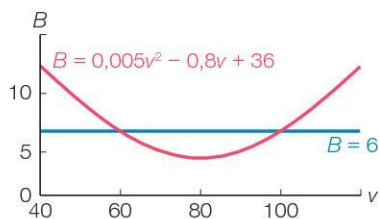
figuur 6.30

51 Los op $x^2 - 6x > -2x + 5$.

52 Het benzineverbruik van een auto is te berekenen met de formule $B = 0,005v^2 - 0,8v + 36$. Hierin is B het verbruik in liter per 100 km en v de snelheid in km per uur. In de figuur hiernaast zie je een schets van de grafiek van B .

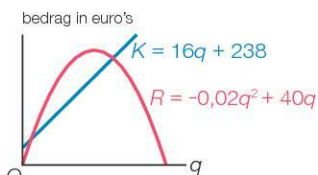
Om te weten te komen bij welke snelheden het benzineverbruik minder is dan 6 liter per 100 km, los je de ongelijkheid $0,005v^2 - 0,8v + 36 < 6$ op.

- Van de vergelijking $0,005v^2 - 0,8v + 36 = 6$ zijn de oplossingen $v = 60$ en $v = 100$.
Toon dit aan.
- Los op $0,005v^2 - 0,8v + 36 < 6$.
- Bij welke snelheden is het benzineverbruik minder dan 6 liter per 100 km?



figuur 6.31

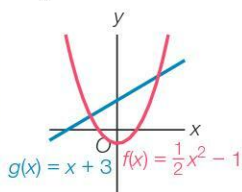
A 53 De opbrengst R van een bedrijf is gegeven door de formule $R = -0,02q^2 + 40q$. De kosten K zijn gegeven door de formule $K = 16q + 238$. Hierbij zijn R en K in euro's en is q het aantal verkochte artikelen. Bereken door een ongelijkheid op te lossen bij welke aantallen verkochte artikelen het bedrijf winst maakt.



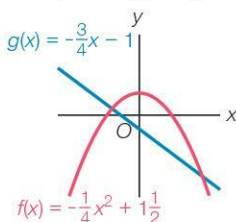
figuur 6.32

54 Los op. Gebruik de grafieken in figuur 6.33.

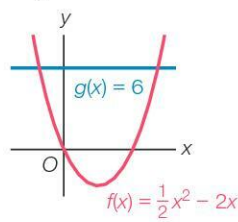
a $\frac{1}{2}x^2 - 1 < x + 3$



b $-\frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2} < -\frac{3}{4}x - 1$



c $\frac{1}{2}x^2 - 2x < 6$



figuur 6.33

O 55 In figuur 6.34 zie je een schets van de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

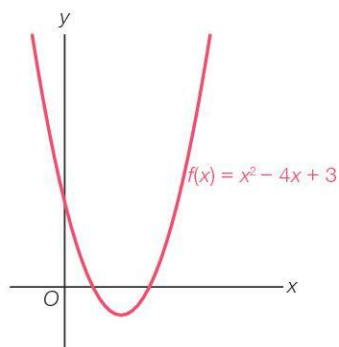
a Vul $>$, $<$ of $=$ in.

$f(-3) \dots 0$	$f(1) \dots 0$	$f(3) \dots 0$
$f(0) \dots 0$	$f(2) \dots 0$	$f(5) \dots 0$

b Vul *onder* of *boven* in.

Bij $f(x) > 0$ hoort het gedeelte van de grafiek dat ... de x -as ligt.

Bij $f(x) < 0$ hoort het gedeelte van de grafiek dat ... de x -as ligt.



figuur 6.34

Theorie B De ongelijkheden $f(x) > 0$ en $f(x) < 0$

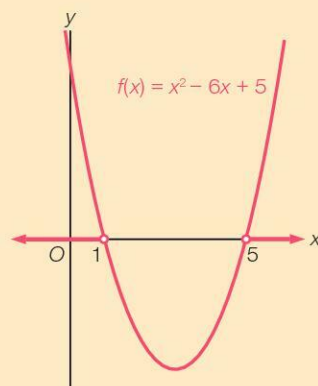
De ongelijkheid $x^2 - 6x + 5 > 0$ is van de vorm $f(x) > 0$.

Bij de ongelijkheid $f(x) > 0$ vraag je je af: voor welke x ligt de grafiek van f boven de x -as?

In figuur 6.35 lees je af: $f(x) > 0$ geeft $x < 1 \vee x > 5$.

Bij $f(x) < 0$ kijk je waar de grafiek van f onder de x -as ligt.

Bij $f(x) > 0$ kijk je waar de grafiek van f boven de x -as ligt.



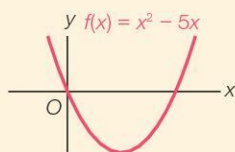
figuur 6.35

Bij het oplossen van de ongelijkheden $f(x) > 0$ en $f(x) < 0$ heb je de snijpunten van de grafiek met de x -as nodig. Je begint dus met het oplossen van $f(x) = 0$.

Voorbeeld

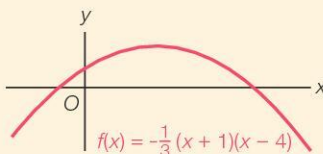
Los op. Gebruik de grafieken in figuur 6.36.

a $x^2 - 5x > 0$



figuur 6.36

b $-\frac{1}{3}(x+1)(x-4) > 0$



Uitwerking

a $x^2 - 5x = 0$

$$x(x-5) = 0$$

$$x = 0 \vee x - 5 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 5$$

Uit de figuur volgt



$$x^2 - 5x > 0 \text{ geeft } x < 0 \vee x > 5$$

b $-\frac{1}{3}(x+1)(x-4) = 0$

$$x+1 = 0 \vee x-4 = 0$$

$$x = -1 \vee x = 4$$

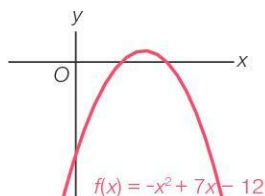
Uit de figuur volgt



$$-\frac{1}{3}(x+1)(x-4) > 0 \text{ geeft } -1 < x < 4$$

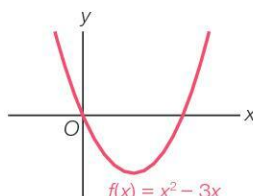
56 Los op. Gebruik de grafieken in figuur 6.37.

a $-x^2 + 7x - 12 < 0$

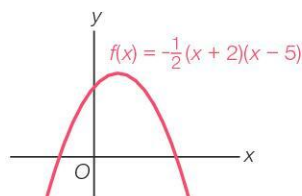


figuur 6.37

b $x^2 - 3x < 0$

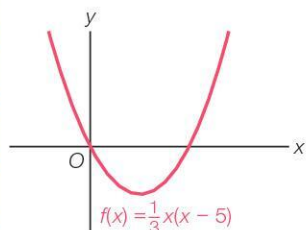


c $-\frac{1}{2}(x+2)(x-5) > 0$

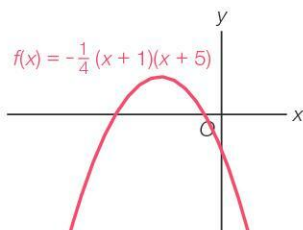


A 57 Los op. Gebruik de grafieken in figuur 6.38.

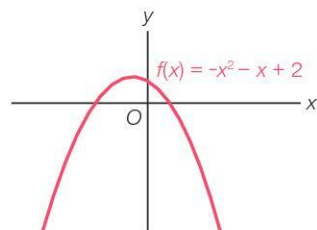
a $\frac{1}{3}x(x-5) > 0$



b $-\frac{1}{4}(x+1)(x+5) > 0$



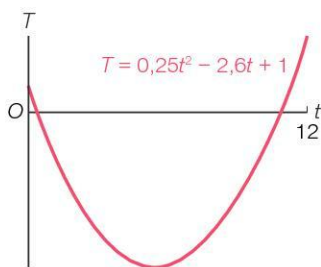
c $-x^2 - x + 2 < 0$



figuur 6.38

A 58 Op een winterse nacht is de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ gegeven door de formule $T = 0,25t^2 - 2,6t + 1$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 12 uur 's nachts. In figuur 6.39 zie je een schets van de grafiek van T . Je ziet dat het een aantal uur vriest.

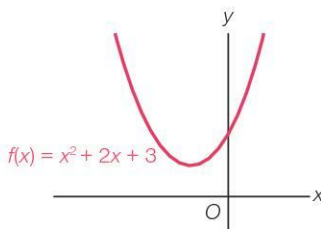
- Welke ongelijkheid hoort hierbij? Los de ongelijkheid op.
- Hoe lang vriest het?
- Onderzoek of het kouder wordt dan -5°C .



figuur 6.39

O 59 In figuur 6.40 zie je een schets van de grafiek van $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

- Waarom heeft de vergelijking $f(x) = 0$ geen oplossing?
- Hoe volgt uit de schets dat elke x oplossing is van de ongelijkheid $x^2 + 2x + 3 > 0$?



figuur 6.40

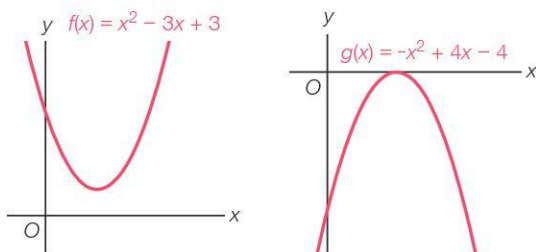
Theorie C Bijzondere situaties

Hieronder zie je enkele bijzondere situaties die kunnen optreden bij kwadratische ongelijkheden.

$f(x) < 0$ voor $x \neq 3$	$f(x) < 0$ voor elke x	$f(x) < 0$ voor geen enkele x	$f(x) < 0$ voor geen enkele x
$f(x) > 0$ voor geen enkele x	$f(x) > 0$ voor geen enkele x	$f(x) > 0$ voor elke x	$f(x) > 0$ voor $x \neq 3$

T 60 [► 64] Zie figuur 6.41 en los op.

- a $x^2 - 3x + 3 < 0$
- b $x^2 - 3x + 3 > 0$
- c $x^2 - 3x + 3 < -2$
- d $-x^2 + 4x - 4 < 0$
- e $-x^2 + 4x - 4 > 0$
- f $-x^2 + 4x - 4 < 5$

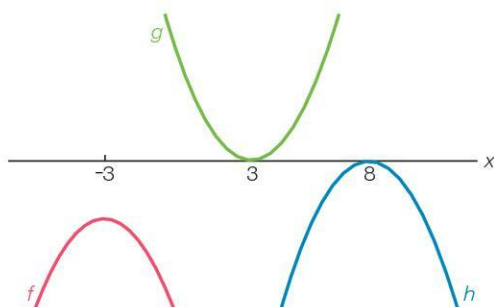


figuur 6.41

61 In figuur 6.42 zie je schetsen van de grafieken van f , g en h .

Los op.

- | | |
|--------------|---------------|
| a $f(x) < 0$ | e $g(x) > 0$ |
| b $f(x) > 0$ | f $g(x) < -3$ |
| c $f(x) < 3$ | g $h(x) < 0$ |
| d $g(x) < 0$ | h $h(x) > 0$ |

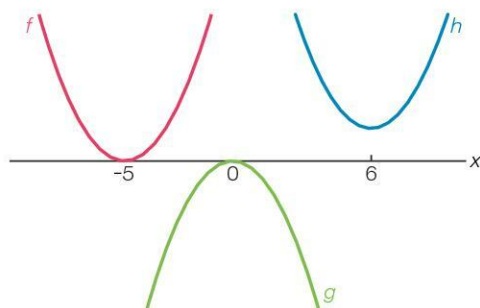


figuur 6.42

62 In figuur 6.43 zie je schetsen van de grafieken van f , g en h .

Los op.

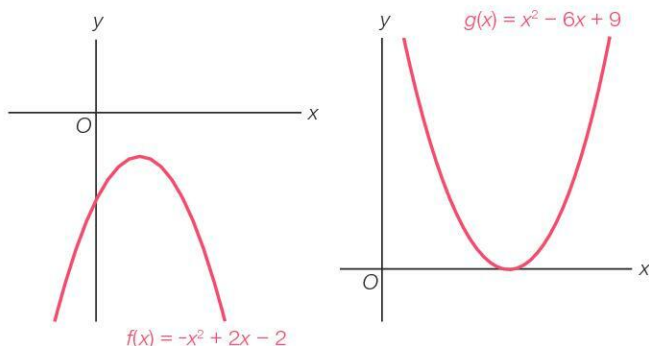
- | | |
|---------------|---------------|
| a $f(x) < 0$ | f $g(x) > 2$ |
| b $f(x) > 0$ | g $h(x) < 0$ |
| c $f(x) > -5$ | h $h(x) > 0$ |
| d $g(x) < 0$ | i $h(x) < -3$ |
| e $g(x) > 0$ | j $h(x) > -6$ |



figuur 6.43

A 63 Zie figuur 6.44. Los op.

- a $-x^2 + 2x - 2 < 0$
- b $-x^2 + 2x - 2 > 0$
- c $-x^2 + 2x - 2 > 2$
- d $x^2 - 6x + 9 > 0$
- e $x^2 - 6x + 9 < 0$
- f $x^2 - 6x + 9 > -20$



figuur 6.44

64 Los op.

- a $x^2 + 2x + 3 > 0$
- b $-x^2 + 4x - 5 > 0$
- c $3x^2 - x + 1 < 0$
- d $-2x^2 + x + 1 > 0$

Gemengde opgaven

1 Los op.

a $x^2 + 11x - 60 = 0$

c $3x^2 - 10x + 3 = 0$

e $3x^2 - 5x + 2 = 0$

b $12x^2 - 18x = 0$

d $x^2 + 6x + 9 = 0$

f $5x^2 - 7x + 2 = 0$

2 Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

a $2x^2 + 3x + 1 = 0$

d $x^2 + 7 = 2$

g $3x^2 - x + 4 = 0$

b $2x^2 + 3x = 1$

e $(x + 7)(3x - 10) = 0$

h $3x^2 - 1 = 26$

c $x^2 - 5 = 2x$

f $4x^2 + 1 = 4x$

i $(x + 2)(x - 3) = -4$

3 Geef van de volgende parabolen in een schets de ligging aan ten opzichte van de x -as.

a $y = x^2 + 5x + 6$

c $y = 16x^2 + 8x + 1$

e $y = -2x^2 - 1$

b $y = -x^2 + 5x + 6$

d $y = -2x^2 - x$

f $y = -2x^2 - x - 1$

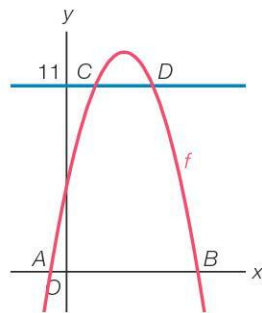
4 Gegeven is de functie $f(x) = -2x^2 + 8x + 5$.

a De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A en B . Zie figuur 6.45.

Bereken de lengte van het lijnstuk AB in twee decimalen nauwkeurig.

b De horizontale lijn $y = 11$ snijdt de grafiek van f in de punten C en D .

Bereken de coördinaten van C en D .



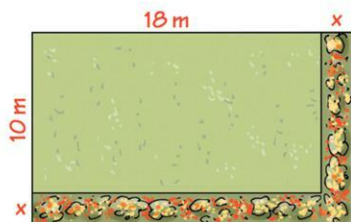
figuur 6.45

5 Om een grasveld van 18 bij 10 meter is aan twee kanten een bloemenborder met een breedte van x meter aangelegd. Zie de figuur hiernaast.

De totale oppervlakte van het grasveld en de bloemenborder samen is $224,25 \text{ m}^2$.

a Toon aan dat hieruit de vergelijking $x^2 + 28x - 44,25 = 0$ volgt.

b Bereken de breedte van de bloemenborder.



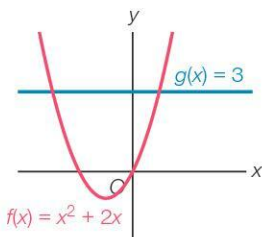
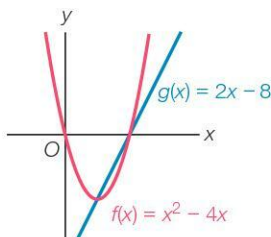
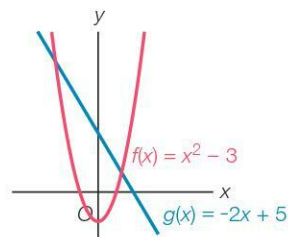
figuur 6.46

6 Los op. Gebruik de grafieken in figuur 6.47.

a $x^2 + 2x > 3$

b $x^2 - 4x < 2x - 8$

c $x^2 - 3 < -2x + 5$



figuur 6.47

7

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 6x + p$.

- Voor welke p raakt de grafiek van f de x -as?
- Voor welke p ligt het punt $A(-6, 18)$ op de grafiek van f ?
- De grafiek van f snijdt de x -as in de punten $B(-8, 0)$ en C . Bereken de lengte van het lijnstuk BC .

8

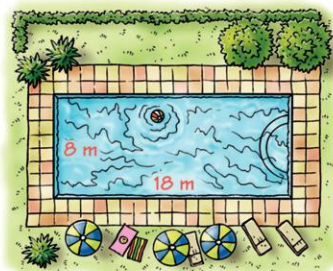
Los op.

- $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\frac{1}{2} = 0$
- $(2x + 1)^2 = 16$
- $(3x - 1)(2x + 1) = 6$
- $2x^2 = -16 - 12x$
- $(3x - 1)(2x + 8) = 6x^2$
- $x(x - 2) = -3$

9

Om een rechthoekig zwembad van 8 bij 18 meter is een tegelpad gelegd. De breedte van het pad is x meter. Zie de figuur hiernaast.

- Toon aan dat de oppervlakte van het pad gelijk is aan $4x^2 + 52x \text{ m}^2$.
- De oppervlakte van het tegelpad is $\frac{5}{6}$ deel van de oppervlakte van het zwembad. Welke vergelijking volgt hieruit?
- Bereken de breedte van het pad.



figuur 6.48

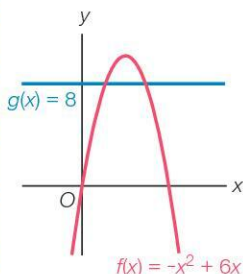
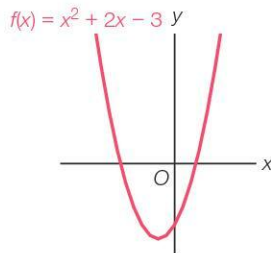
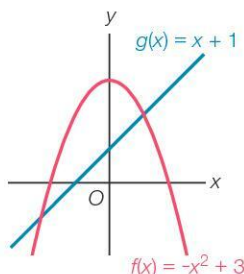
10

Los op. Gebruik de grafieken in figuur 6.49.

a $-x^2 + 6x > 8$

b $x^2 + 2x - 3 > 0$

c $-x^2 + 3 > x + 1$



figuur 6.49

11

Los op. Gebruik de grafieken in figuur 6.50.

a $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 > 0$

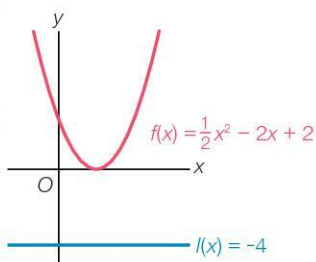
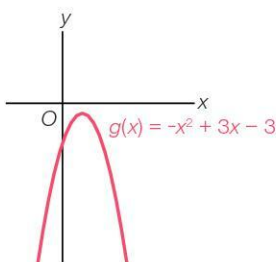
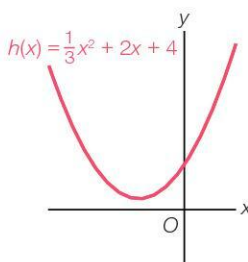
c $-x^2 + 3x - 3 < 0$

e $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4 > 0$

b $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 < -4$

d $-x^2 + 3x - 3 > 1$

f $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4 < -1$



figuur 6.50

Samenvatting

6.1 De *abc*-formule

blz 12 Snijpunten van de grafiek van een functie f met de x -as en de y -as.

Snijpunten met de x -as: De y -coördinaat is 0.

De x -coördinaat volgt uit $f(x) = 0$,
dus los op $f(x) = 0$.

Snijpunt met de y -as: De x -coördinaat is 0.

De y -coördinaat is $f(0)$, dus bereken $f(0)$.

blz 14 De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \text{ met } D = b^2 - 4ac.$$

$D = b^2 - 4ac$ is de discriminant van de vergelijking.

Bij $5x^2 - 8x - 21 = 0$ is $a = 5$, $b = -8$ en $c = -21$, dus

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-21) = 484.$$

$$\text{Je krijgt } x = \frac{8 + \sqrt{484}}{10} = 3 \vee x = \frac{8 - \sqrt{484}}{10} = -1\frac{2}{5}.$$

blz 16 Door de discriminant van een kwadratische vergelijking te berekenen, zie je hoeveel oplossingen er zijn.

Is $D > 0$, dan zijn er twee oplossingen.

Is $D = 0$, dan is er één oplossing.

Is $D < 0$, dan is er geen oplossing.

6.2 De ligging van een parabool ten opzichte van de x -as

blz 18 De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ en de parabool $y = ax^2 + bx + c$.

discriminant	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
vergelijking	twee oplossingen	één oplossing	geen oplossing
parabool	twee snijpunten met de x -as	één snijpunt (raakpunt) met de x -as	geen snijpunt met de x -as

6.3 Oplossingsmethoden

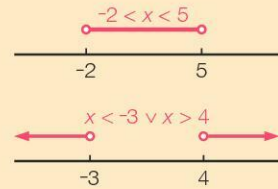
blz 20 Voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen bestaan verschillende methoden.

$x^2 = c$	ontbinden in factoren	<i>abc</i> -formule
$x^2 + 2 = 8$	$x^2 + 2x = 8$	$x^2 + 2x + 8 = 0$
$x^2 = 6$	$x^2 + 2x - 8 = 0$	$a = 1, b = 2, c = 8$
$x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$	$(x - 2)(x + 4) = 0$	$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -28$
$x \approx 2,45 \vee x \approx -2,45$	$x - 2 = 0 \vee x + 4 = 0$	$D < 0$, dus geen oplossing.
	$x = 2 \vee x = -4$	

6.4 Ongelijkheden en grafieken

blz 23 Een aaneengesloten stuk van de getallenlijn heet een interval.
Alle getallen x tussen -2 en 5 noteer je met $-2 < x < 5$.

Alle getallen x kleiner dan -3 of groter dan 4 noteer je met $x < -3 \vee x > 4$.



6.5 Kwadratische ongelijkheden

blz 28 Bij het oplossen van de kwadratische ongelijkheid $x^2 - x > x + 3$ gebruik je de schets van de grafieken van $f(x) = x^2 - x$ en $g(x) = x + 3$ hiernaast. Je zoekt uit waar de grafiek van f boven de grafiek van g ligt. Het oplossen gaat als volgt.

$$x^2 - x = x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

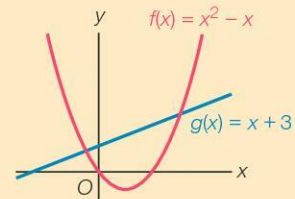
$$x + 1 = 0 \vee x - 3 = 0$$

$$x = -1 \vee x = 3$$

Uit de schets volgt



$x^2 - x > x + 3$ geeft $x < -1 \vee x > 3$



Bij $x^2 - x < x + 3$ krijg je



Dus $x^2 - x < x + 3$
geeft $-1 < x < 3$.

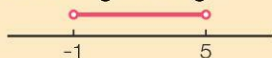
blz 31 Met behulp van de figuur hiernaast los je de kwadratische ongelijkheid $-\frac{1}{2}(x + 1)(x - 5) > 0$ als volgt op.

$$-\frac{1}{2}(x + 1)(x - 5) = 0$$

$$x + 1 = 0 \vee x - 5 = 0$$

$$x = -1 \vee x = 5$$

Uit de figuur volgt

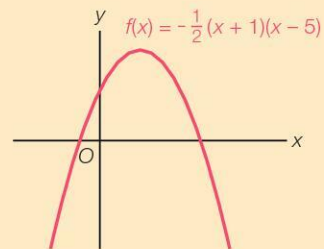
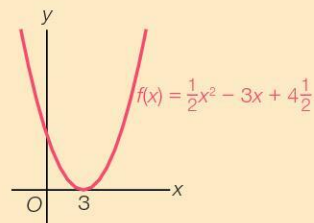


$-\frac{1}{2}(x + 1)(x - 5) > 0$ geeft $-1 < x < 5$

blz 32 Uit de figuur hiernaast volgt

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\frac{1}{2} > 0 \text{ voor } x \neq 3$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\frac{1}{2} < 0 \text{ voor geen enkele } x.$$

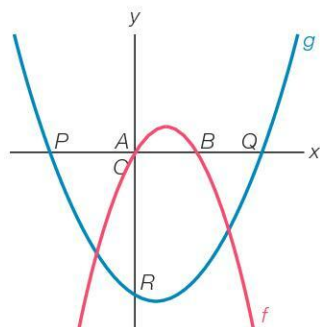


Diagnostische toets

6.1 De abc-formule

- 1** Gegeven zijn de functies $f(x) = -2x^2 + 6x$
 1,2 en $g(x) = x^2 - 2x - 24$.

- a** De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A en B .
 Bereken de coördinaten van A en B .
b De grafiek van g snijdt de x -as in de punten P en Q
 en de y -as in het punt R .
 Bereken de coördinaten van P , Q en R .



figuur 6.51

- 2** Los op.

3 **a** $2x^2 - 7x + 6 = 0$ **b** $2x^2 + 19x - 10 = 0$

- 3** Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee
 4,5,6 decimalen nauwkeurig.

a $2x^2 + 3x - 20 = 0$ **c** $6x = 7x^2 + 1$
b $8x^2 + 14x = 15$ **d** $5x = 7x^2 + 1$

6.2 De ligging van een parabool ten opzichte van de x-as

- 4** Schets van de volgende parabolen de ligging ten opzichte van de x -as.

7 **a** $y = 3x^2 + 4x + 1$ **c** $y = x^2 + 3x + 4$
b $y = -4x^2 + 3x + 1$ **d** $y = -2x^2 + 4x - 2$

- 5** Gegeven is de functie $f(x) = -3x^2 + 6x + p$.

- 8,9** **a** Voor welke p raakt de grafiek van f de x -as?
b Voor welke p ligt het punt $A(-5, 20)$ op de grafiek van f ?

6.3 Oplossingsmethoden

- 6** Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

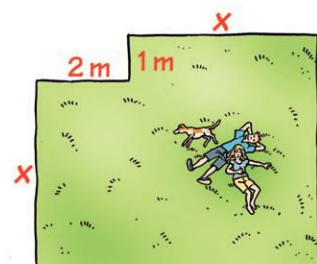
10 **a** $x^2 - 8x = 0$ **d** $x^2 + 8 = 0$ **g** $9x^2 - 6x + 1 = 0$
b $x^2 - 8x = 9$ **e** $3x^2 + 9x = 0$ **h** $9x^2 - 6 = 3$
c $x^2 - 8x + 9 = 0$ **f** $9x^2 - 5x - 4 = 0$ **i** $9x^2 - 6x = 3$

- 7** Los op.

11 **a** $2x^2 + 10 = 12x$ **b** $\frac{1}{4}x^2 + 2x = 5$ **c** $(2x - 3)(x + 10) = 70$

- 8** In de figuur hiernaast zie je een grasveld. De
 12 afmetingen zijn in meter.

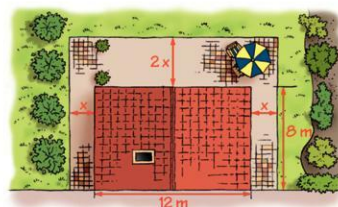
- a** Toon aan dat de oppervlakte van het grasveld
 $x^2 + 3x \text{ m}^2$ is.
b De oppervlakte van grasveld is 28 m^2 .
 Stel een vergelijking op bij de gegevens, en
 bereken hiermee x .



figuur 6.52

9
12
+

In de figuur hiernaast zie je het bovenaanzicht van het huis van de familie Doorzon. Langs het huis ligt aan drie kanten een tegelpad dat aan de achterkant twee keer zo breed is als aan de zijkant. De breedte van het pad aan de zijkant is x meter. De oppervlakte van het pad is 44 m^2 . Bereken de breedte van het pad.

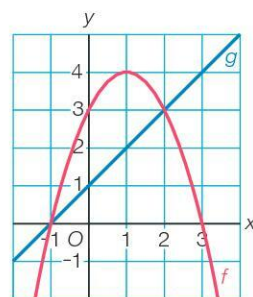


figuur 6.53

6.4 Ongelijkheden en grafieken

10 Zie figuur 6.54. Los op.

- 13,14 a $f(x) > g(x)$
b $f(x) < 3$
c $g(x) > 1$

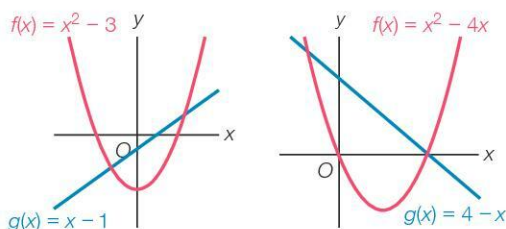


figuur 6.54

6.5 Kwadratische ongelijkheden

11 Los op. Gebruik de grafieken in figuur 6.55.

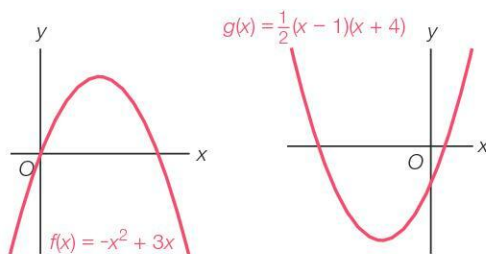
- a $x^2 - 3 < x - 1$
b $x^2 - 4x > 4 - x$



figuur 6.55

12 Los op. Gebruik de grafieken in figuur 6.56.

- a $-x^2 + 3x > 0$
b $\frac{1}{2}(x - 1)(x + 4) > 0$

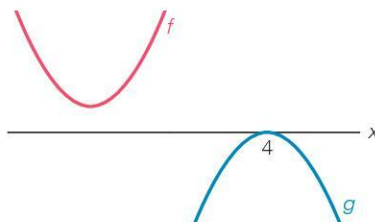


figuur 6.56

13 Zie de schetsen van de grafieken van f en g in figuur 6.57.

Los op.

- a $f(x) < 0$
b $f(x) > 0$
c $f(x) > -3$
d $g(x) < 0$
e $g(x) > 0$
f $g(x) > 3$



figuur 6.57

Herhaling

6.1 De *abc*-formule

- 1** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 8x + 12$.

Om de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as te vinden, los je de vergelijking $x^2 - 8x + 12 = 0$ op.

- a** Los de vergelijking op met de product-som-methode.
Zoek dus twee getallen met product 12 en som -8.
Zie de tabel van 12 hiernaast.
- b** Schrijf de coördinaten op van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.

product 12		som
1	12	13
-1	-12	-13
2	6	8
-2	-6	-8

- 2** Gegeven zijn de functies $g(x) = 3x^2 - 12x$ en $h(x) = x^2 - x - 20$.

Bereken de coördinaten van de snijpunten van

- a** de grafiek van g met de x -as en de y -as
b de grafiek van h met de x -as en de y -as.

$3x^2 - 12x = 0$ los je op door x of $3x$ buiten haakjes te brengen.

- 3** De vergelijking $2x^2 - 5x + 3 = 0$ kun je oplossen met de *abc*-formule.

- a** Neem over en vul in.
Van $2x^2 - 5x + 3 = 0$ is $a = 2$, $b = \dots$ en $c = \dots$,
dus $D = b^2 - 4ac = \dots$.

- b** In vraag a kreeg je $D = 1$, en hieruit volgt

$$x = \frac{5 + \sqrt{1}}{4} \text{ en } x = \frac{5 - \sqrt{1}}{4}.$$

Bereken de oplossingen.

- c** Los op $5x^2 + 7x + 2 = 0$.
d Los op $3x^2 + 10x + 8 = 0$.

De *abc*-formule

De oplossingen van

$ax^2 + bx + c = 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

met $D = b^2 - 4ac$.

- 4** Gegeven is de vergelijking $2x^2 + 6x - 1 = 0$.

- a** Toon aan dat de oplossingen van de vergelijking gelijk

$$\text{zijn aan } x = \frac{-6 + \sqrt{44}}{4} \text{ en } x = \frac{-6 - \sqrt{44}}{4}.$$

- b** Bereken de oplossingen van vraag a in twee decimalen nauwkeurig.
c Bereken de oplossingen van $3x^2 - 8x + 2 = 0$ in twee decimalen nauwkeurig.

- 5** **a** Gegeven is de vergelijking $x^2 - 5x + 8 = 0$.

Toon aan dat $D = -7$. Wat weet je nu van het aantal oplossingen van $x^2 - 5x + 8 = 0$?

- b** Los op $3x^2 - x + 7 = 0$.
c Los op $-5x^2 + 2x - 1 = 0$.

- 6** Om de vergelijking $2x^2 + 5x = 42$ op te lossen, maak je eerst het rechterlid 0. Je krijgt $2x^2 + 5x - 42 = 0$. Vervolgens gebruik je de *abc*-formule om de oplossingen te berekenen.

Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

- a** $2x^2 + 5x = 42$ **d** $2x^2 = 6 - 9x$
b $2x^2 + 6 = -7x$ **e** $10x^2 + 99x = 10$
c $2x^2 + 7x + 7 = 0$ **f** $2x^2 + 7x = 7$

6.2 De ligging van een parabool ten opzichte van de x-as

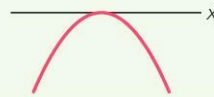
- 7** Schets van de volgende parabolen de ligging ten opzichte van de *x*-as. Bereken telkens eerst de discriminant.

- a** $y = -4x^2 + 20x - 28$
b $y = 4x^2 - 20x + 1$
c $y = 4x^2 - 20x + 25$
d $y = -4x^2 + 20x - 24$

Schets de ligging van de parabool $y = -0,5x^2 + 4x - 8$ ten opzichte van de *x*-as.

- $a = -0,5$, dus bergparabool
- $D = 4^2 - 4 \cdot -0,5 \cdot -8 = 0$, dus de parabool raakt de *x*-as.

Je krijgt



- 8** Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 + 6x + p$.

- a** Toon aan dat $D = 36 - 12p$.
b Los op $D = 0$.
c Voor welke p raakt de grafiek van f de *x*-as?

- 9** Gegeven is de functie $f(x) = -2x^2 + 3x + p$.

Op de grafiek van f ligt het punt $A(3, 12)$, dus $f(3) = 12$.
 Uit $f(3) = 12$ volgt $-2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + p = 12$.

- a** Bereken p .
b Bereken voor welke p het punt $B(-5, 16)$ op de grafiek van f ligt.

6.3 Oplossingsmethoden

- 10** Vraag je bij het oplossen van een kwadratische vergelijking eerst het volgende af:

- Kun je herleiden tot de vorm $x^2 = c$?
- Kun je ontbinden in factoren?

Gebruik de *abc*-formule alleen als het niet anders kan.

Los op.

- a** $x^2 - 7x = 0$ **e** $25x^2 + 10x + 1 = 0$
b $x^2 - 5x - 14 = 0$ **f** $x^2 + x + 2 = 0$
c $6x^2 - 7x + 2 = 0$ **g** $3x^2 + 6x = 0$
d $4x^2 = 36$ **h** $x^2 + 20 = 4$

Methoden om kwadratische vergelijkingen op te lossen

- $x^2 = c$
- ontbinden in factoren
- de *abc*-formule

Bij $x^2 - 7x = 0$ breng je x buiten haakjes.

Bij $x^2 - 5x - 14 = 0$ gebruik je de product-som-methode.

11

Bij het oplossen van $\frac{1}{3}x^2 + x - 6 = 0$ vermenigvuldig je eerst alle termen met 3. Zie hiernaast.

Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

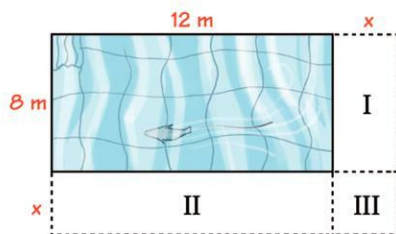
- a $\frac{1}{4}x^2 = 5$ d $6x^2 + 24x + 24 = 0$
 b $\frac{1}{4}x^2 + x = 3$ e $(x + 2)^2 = 9$
 c $5x^2 = 10x + 15$ f $(x + 2)(x + 3) = 9$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^2 + x - 6 &= 0 \\ x^2 + 3x - 18 &= 0 \\ (x - 3)(x + 6) &= 0 \\ \text{enzovoort} \end{aligned}$$

12

In een dierentuin is een van de zeehondenbassins een rechthoek van 12 bij 8 meter. De directie besluit het bassin aan twee kanten met x meter uit te breiden. Zie de figuur hiernaast.

- a Opp I = $8x$.
 Geef opp II en opp III.
 b Toon aan dat de oppervlakte van de stroken gelijk is aan $x^2 + 20x \text{ m}^2$.
 c De directie wil de oppervlakte van het bassin verdubbelen.
 Licht toe dat hieruit de vergelijking $x^2 + 20x = 96$ volgt.
 d Los de vergelijking $x^2 + 20x = 96$ op.
 e Wat zijn de afmetingen van het vergrote bassin?

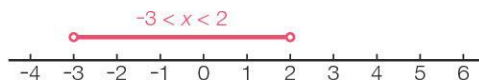


figuur 6.58

6.4 Ongelijkheden en grafieken

13

Voor x is een getal tussen -3 en 2 bestaat de notatie $-3 < x < 2$. Zie figuur 6.59.



figuur 6.59

Voor x is een getal kleiner dan -1 of groter dan 4 bestaat de notatie $x < -1 \vee x > 4$. Zie figuur 6.60.



figuur 6.60

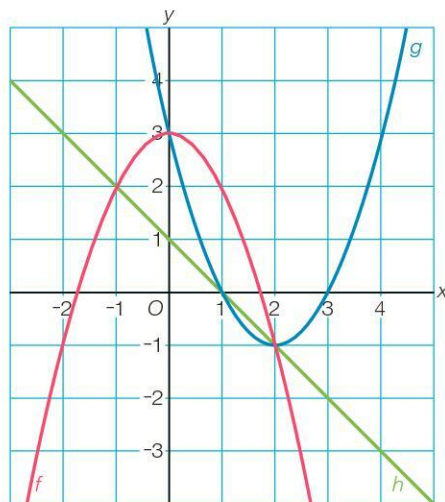
Welke notaties horen bij de intervallen hieronder?

- a
- b
- c
- d

- 14** Zie figuur 6.61. Bij het oplossen van de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ vraag je je af voor welke x de grafiek van f boven die van g ligt. Je leest af: voor x tussen 0 en 2, dus voor $0 < x < 2$.

Los op.

- a** $f(x) < g(x)$
- b** $f(x) > h(x)$
- c** $g(x) > h(x)$
- d** $f(x) < 2$



figuur 6.61

6.5 Kwadratische ongelijkheden

- 15** Bij het oplossen van de kwadratische ongelijkheid $x^2 + 5x > x - 3$ gebruik je de grafieken in figuur 6.62.

Het oplossen van de ongelijkheid gaat als volgt.

$$x^2 + 5x = x - 3$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x + 3)(x + 1) = 0$$

$$x + 3 = 0 \vee x + 1 = 0$$

$$x = -3 \vee x = -1$$

Uit de figuur volgt

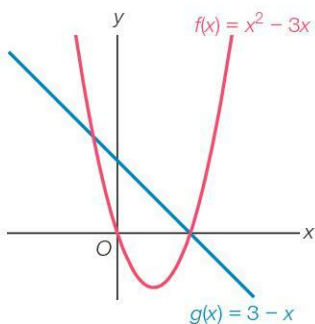


$x^2 + 5x > x - 3$ geeft $x < -3 \vee x > -1$

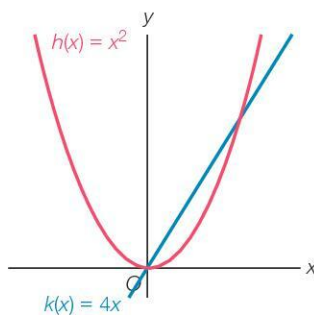
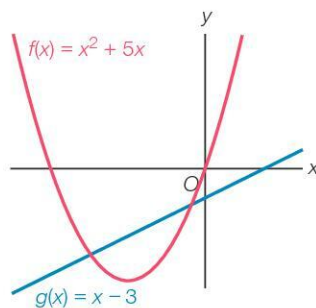
Los op. Gebruik de grafieken in figuur 6.63.

a $x^2 - 3x < 3 - x$

b $x^2 > 4x$



figuur 6.63



figuur 6.62

- 16** Bij het oplossen van de kwadratische ongelijkheid $x^2 - 2x - 8 > 0$ gebruik je de grafiek van $f(x) = x^2 - 2x - 8$ in figuur 6.64. Je onderzoekt voor welke x de grafiek boven de x -as ligt.

Het oplossen van de ongelijkheid gaat als volgt.

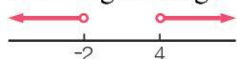
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x + 2)(x - 4) = 0$$

$$x + 2 = 0 \vee x - 4 = 0$$

$$x = -2 \vee x = 4$$

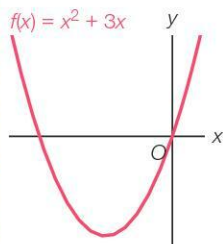
Uit de figuur volgt



$$x^2 - 2x - 8 > 0 \text{ geeft } x < -2 \vee x > 4$$

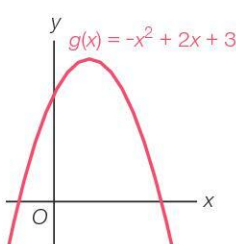
Los op. Gebruik de grafieken in figuur 6.65.

a $x^2 + 3x > 0$

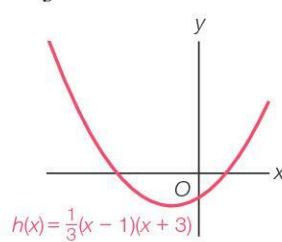


figuur 6.65

b $-x^2 + 2x + 3 > 0$



c $\frac{1}{3}(x - 1)(x + 3) > 0$

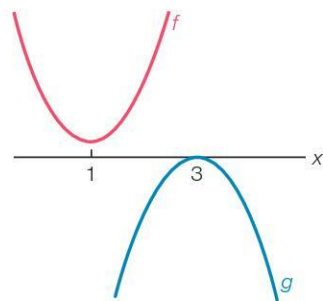


- 17** In figuur 6.66 ligt de grafiek van f geheel boven de x -as. Daaruit volgt:

- $f(x) > 0$ voor elke x
- $f(x) < 0$ voor geen enkele x .

En uit de ligging van de grafiek van g volgt

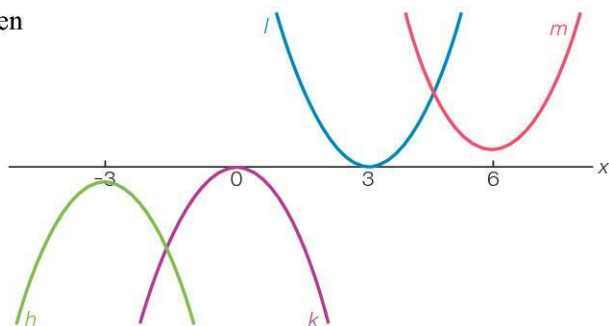
- $g(x) > 0$ voor geen enkele x
- $g(x) < 0$ voor $x \neq 3$.



figuur 6.66

Gebruik figuur 6.67 bij het oplossen van de volgende ongelijkheden.

- | | |
|---------------------|----------------------|
| a $h(x) > 0$ | g $l(x) > 0$ |
| b $h(x) < 0$ | h $l(x) < 0$ |
| c $h(x) < 2$ | i $l(x) > -3$ |
| d $k(x) < 0$ | j $m(x) > 0$ |
| e $k(x) > 0$ | k $m(x) < 0$ |
| f $k(x) < 2$ | l $m(x) < -3$ |



figuur 6.67

Onderzoek Het gulden getal

Naast het getal π zijn er ook andere bijzondere getallen in de wiskunde. Een voorbeeld is het **gulden getal**, dat wordt aangegeven met ϕ . Dit getal heeft opmerkelijke eigenschappen, waardoor het wiskundigen al meer dan tweeduizend jaar fascineert. Je kunt het gulden getal bovendien als verhouding terugvinden in werken van kunstenaars als Leonardo da Vinci (15^e eeuw) en Salvador Dalí (20^e eeuw).

ϕ is de Griekse letter phi.



In dit onderzoek leer je manieren om het gulden getal te benaderen. Vervolgens ga je de **exakte waarde** van ϕ berekenen. Tot slot onderzoek je op welke manier ontwerpers, architecten en kunstenaars het gulden getal gebruiken.

- 1 a** Teken op een leeg vel roosterpapier links bovenaan een vierkant met zijden van 1 cm.
- b** Teken tegen de rechterzijde van het vierkant nog een vierkant, zodat een rechthoek van 2 bij 1 cm ontstaat.
- c** Teken tegen een lange zijde van de rechthoek weer een vierkant, zodat een rechthoek van 3 bij 2 cm ontstaat.
- d** Teken op de manier van vraag c nog een aantal vierkanten, zodat steeds grotere rechthoeken ontstaan.
- e** Neem de tabel hiernaast over en vul hem verder in. Stop op het moment dat bij het berekenen van $\frac{\text{lange zijde}}{\text{korte zijde}}$ de eerste drie decimalen niet meer veranderen.
- f** Stel dat je in vraag a niet met een vierkant was begonnen, maar met een willekeurige rechthoek.

rechthoek	lange zijde	korte zijde	$\frac{\text{lange zijde}}{\text{korte zijde}}$
1	1	1	1
2	2	1	2
3	3	2	1,5
4	...	...	...
...	...	...	...

Onderzoek of je dan op den duur dezelfde verhouding $\frac{\text{lange zijde}}{\text{korte zijde}}$ had gekregen.

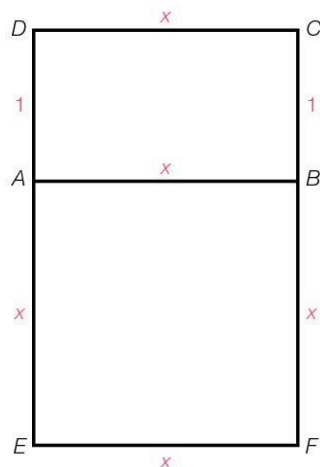
In opgave 1 heb je gezien dat de verhouding $\frac{\text{lange zijde}}{\text{korte zijde}}$ op den duur nauwelijks meer verandert. Dat betekent dat de rechthoeken dan bij benadering gelijkvormig zijn. Hoe meer rechthoeken je tekent, hoe dichter het getal $\frac{\text{lange zijde}}{\text{korte zijde}}$ nadert tot het gulden getal ϕ . In opgave 1 heb je ϕ in drie decimalen nauwkeurig benaderd. Maar er zijn nog andere manieren om een benadering van ϕ te krijgen.

- 2** Gegeven is de rij $B = \frac{1}{A} + 1$, $C = \frac{1}{B} + 1$, $D = \frac{1}{C} + 1$, ..., met A een positief geheel getal. Kies een getal A en onderzoek of je met deze rij dezelfde benadering van ϕ krijgt als in opgave 1. Geldt dat ook voor klasgenoten die met een ander getal A zijn begonnen?

Maak handig gebruik van **ANS** op je rekenmachine. Tik je gekozen getal A in en daarna **=**. Tik vervolgens in **1 ÷ ANS + 1 =** ...

- 3** Gegeven is de rij $B = \sqrt{A+1}$, $C = \sqrt{B+1}$, $D = \sqrt{C+1}$, ..., met A een positief geheel getal. Krijg je ook met deze rij dezelfde benadering van ϕ als in opgave 1?
- 4** Er geldt $\phi \approx 1,618$. Bereken ϕ^2 en $\frac{1}{\phi}$ in drie decimalen nauwkeurig. Welke vermoedens krijg je? Noteer deze als $\phi^2 = \dots$ en $\frac{1}{\phi} = \dots$

In figuur 6.68 is tegen de lange zijde van rechthoek $ABCD$ vierkant $AEFB$ getekend, zodat rechthoek $DEFC$ is ontstaan. Hierbij is de lengte van AB zo gekozen, dat de rechthoeken $ABCD$ en $DEFC$ gelijkvormig zijn. Met deze gelijkvormigheid krijg je de exacte waarde van ϕ .



figuur 6.68

- 5 a** Wat wordt er met de exacte waarde van ϕ bedoeld, denk je?
- b** Is 1,618 de exacte waarde van ϕ ?
- Zie figuur 6.67.
- c** Licht toe dat uit de gelijkvormigheid de verhoudingstabel $\frac{x}{1} \mid \frac{x+1}{x}$ volgt.
- d** Uit vraag c volgt een vergelijking. Welke?
- e** Toon aan dat $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ de oplossingen van de vergelijking van vraag d zijn.
- f** Een van de oplossingen van vraag e is de exacte waarde van ϕ . Welke? Licht toe.
- g** Onderzoek of de vermoedens van opgave 4 kloppen.

6

Uit opgave 5 volgt $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Hiermee krijg je $\varphi^3 = \varphi \cdot \varphi^2 = \varphi(\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1$.

a Toon aan dat $\varphi^4 = 3\varphi + 2$, en schrijf φ^5 en φ^6 in de vorm $a\varphi + b$.

b In de machten van φ zit regelmaat.

Gebruik deze regelmaat om φ^7 en φ^8 in één keer in de vorm $a\varphi + b$ te schrijven.

De verdeling van een lijnstuk in twee delen waarvan de verhouding gelijk is aan de verhouding van het hele lijnstuk tot het grootste deel, heet de **gouden snede**.

7

In figuur 6.69 is lijnstuk AB verdeeld volgens de gulden snede, dat wil zeggen dat $\frac{AC}{BC} \mid \frac{AB}{AC}$ een verhoudingstabel is.

Toon aan dat $\frac{AC}{BC}$ en $\frac{AB}{AC}$ gelijk zijn aan φ . Ga bij je berekening uit van $BC = 1$.



figuur 6.69

8

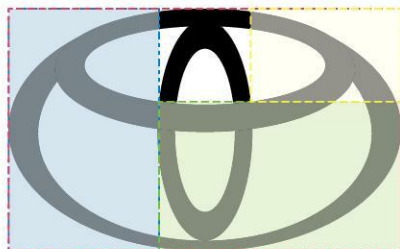
a Onderzoek wat **construeren** betekent, en hoe je de gulden snede kunt construeren.

b Voer zelf een constructie van de gulden snede uit.

Rechthoeken waarvoor geldt $\frac{\text{lange zijde}}{\text{korte zijde}} = \varphi$ worden

gulden rechthoeken genoemd. In figuur 6.68 op bladzijde 46 zijn $ABCD$ en $DEFC$ voorbeelden van gulden rechthoeken.

Gulden rechthoeken worden veel gebruikt door grafisch ontwerpers. Hiernaast zie je hoe de ontwerpers van het Toyota-logo gulden rechthoeken hebben gebruikt.



figuur 6.70

9

a Laat van een aantal andere logo's zien hoe bij het ontwerp gulden rechthoeken zijn gebruikt.

b Ontwerp zelf een logo waarbij je gulden rechthoeken gebruikt.

10

Onderzoek het gebruik van gulden rechthoeken en het getal φ in de kunst en de architectuur.

Goniometrie

De Niagarawatervallen liggen op de grens van de Verenigde Staten en Canada. Hangend aan een 670 meter lange zipline kun je deze watervallen op een spannende manier bewonderen. Hierbij daal je onder een hoek van 5° , waarbij je snelheid kan oplopen tot boven de 60 km per uur. Door gebruik te maken van goniometrie kun je met deze gegevens berekenen dat je tijdens de vlucht ruim 58 meter daalt.

Wat leer je?

- Wat de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens zijn.
- Hoe je met goniometrische verhoudingen lijnstukken en hoeken berekent in rechthoekige driehoeken.
- Hoe je in praktische situaties goniometrische verhoudingen gebruikt om afstanden en hoeken te berekenen.
- + - Dat je lengten van lijnstukken behalve met goniometrische verhoudingen ook op andere manieren kunt berekenen.
- + - Hoe je hoeken berekent in de ruimte.





Voorkennis Kruisproducten en tangens

Theorie A Kruisproducten

In de verhoudingstabel $\begin{array}{c|c} 7 & x \\ \hline 4 & 11 \end{array}$ bereken je x met $x = \frac{7 \cdot 11}{4} = 19,25$.

De verhoudingstabel $\begin{array}{c|c} 7 & 5 \\ \hline x & 1 \end{array}$ geeft $x = \frac{7}{5} = 1,4$.

De verhoudingstabel $\begin{array}{c|c} x & 5 \\ \hline 7 & 1 \end{array}$ geeft $x = 5 \cdot 7 = 35$.

$$x = \frac{\text{kruisproduct}}{\text{overblijvend getal}}$$

- 1 Bereken x in de volgende verhoudingstabellen. Rond zo nodig af op één decimaal.

a $\begin{array}{c|c} x & 5 \\ \hline 9 & 7 \end{array}$

b $\begin{array}{c|c} 3 & 7 \\ \hline x & 9 \end{array}$

c $\begin{array}{c|c} x & 3 \\ \hline 11 & 1 \end{array}$

d $\begin{array}{c|c} 0,32 & x \\ \hline 0,09 & 2 \end{array}$

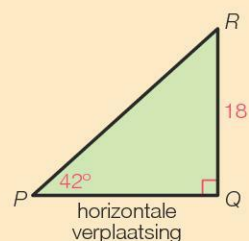
Theorie B De tangens van een hellingshoek

In figuur 7.1 zie je een helling met een hellingshoek van 42° en een verticale verplaatsing van 18 meter. Om de horizontale verplaatsing te berekenen, gebruik je

$$\tan(\text{hellingshoek}) = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}}$$

Dit geeft $\tan(\angle P) = \frac{QR}{PQ}$, dus $\begin{array}{c|c} \tan(42^\circ) & 18 \\ \hline 1 & PQ \end{array}$ is een

verhoudingstabel. Hieruit volgt $PQ = \frac{18}{\tan(42^\circ)} \approx 20,0$ meter.



figuur 7.1

Voorbeeld

Bereken de lengte van de helling in de figuur hiernaast. Geef je antwoord in meter en rond af op gehelen.

Uitwerking

$$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} \tan(16^\circ) & BC \\ \hline 1 & 270 \end{array}$$

$$BC = 270 \tan(16^\circ) = 77,4 \dots$$

$$\angle B = 90^\circ, \text{ dus } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 270^2 + 77,4 \dots^2 = 78\,894,0 \dots$$

$$AC = \sqrt{78\,894,0 \dots} \approx 281$$

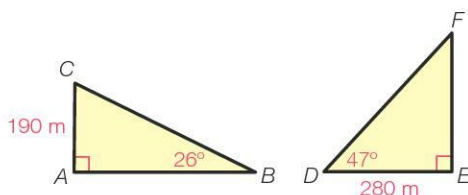
Dus de lengte van de helling is ongeveer 281 meter.



figuur 7.2

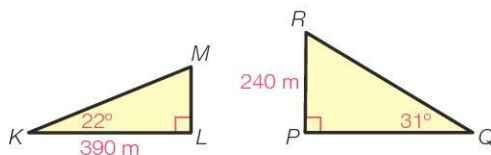
Reken op je rekenmachine verder met **ANS**.

- 2 Zie de hellingen in figuur 7.3.
Bereken de horizontale verplaatsing AB en de verticale verplaatsing EF . Rond af op gehele.



figuur 7.3

- 3 Zie figuur 7.4.
Bereken de lengte van de hellingen.
Rond af op gehele.



figuur 7.4

Theorie C Van hellingsgetal naar hellingshoek

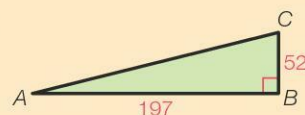
De rechthoekige driehoek ABC hiernaast kun je opvatten als een helling met horizontale verplaatsing AB en verticale verplaatsing BC . Bij de helling is

$$\text{hellingsgetal} = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}} = \frac{52}{197} \approx 0,26.$$

Hierbij hoort een hellingspercentage van ongeveer 26%.
Om de bijbehorende hellingshoek te berekenen, gebruik je

$$\begin{aligned} \tan(\text{hellingshoek}) &= \text{hellingsgetal} \\ \tan^{-1}(\text{hellingsgetal}) &= \text{hellingshoek} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \tan(\angle A) = \frac{52}{197} \text{ geeft } \angle A = \tan^{-1}\left(\frac{52}{197}\right) \approx 14,8^\circ.$$



figuur 7.5



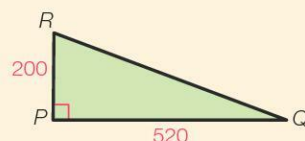
Voorbeeld

Zie de helling in figuur 7.6.
Bereken $\angle Q$.

Uitwerking

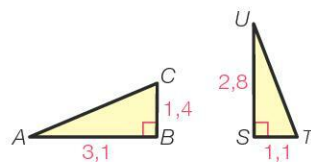
Rond hoeken af op één decimaal.

$$\tan(\angle Q) = \frac{PR}{PQ} = \frac{200}{520} \text{ geeft } \angle Q \approx 21,0^\circ$$



figuur 7.6

- 4 Zie de hellingen in figuur 7.7.
Bereken $\angle A$ en $\angle T$.
- 5 a Van een helling is het hellingspercentage 13%.
Bereken de hellingshoek.
b Van een helling is de hellingshoek 34° .
Bereken het hellingspercentage.

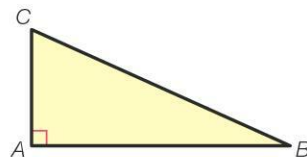


figuur 7.7

7.1 Berekeningen met de tangens

0 1 In figuur 7.8 is $\triangle ABC$ rechthoekig met $\angle A = 90^\circ$.

- Welke zijde van $\triangle ABC$ is de schuine zijde, en welke zijden zijn de rechthoekszijden?
- De schuine zijde ligt tegenover de rechte hoek. Welke rechthoekszijde ligt tegenover $\angle B$?
- De andere rechthoekszijde ligt aan $\angle B$, en is dus een been van $\angle B$. Welke rechthoekszijde is dit?



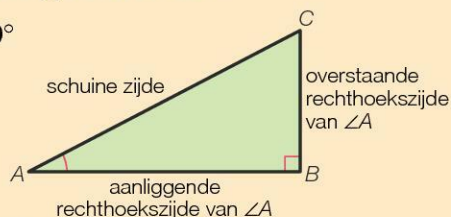
figuur 7.8

Theorie A De tangens in een rechthoekige driehoek

Van de rechthoekige driehoek ABC met $\angle B = 90^\circ$ in de figuur hiernaast is AC de schuine zijde en zijn AB en BC de rechthoekszijden.

BC is de **overstaande rechthoekszijde** van $\angle A$.

AB is de **aanliggende rechthoekszijde** van $\angle A$.



figuur 7.9

Je kunt BC opvatten als de verticale verplaatsing en AB als de horizontale verplaatsing bij een helling.

$$\text{Dus } \tan(\angle A) = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{BC}{AB}.$$

In woorden krijg je de formule

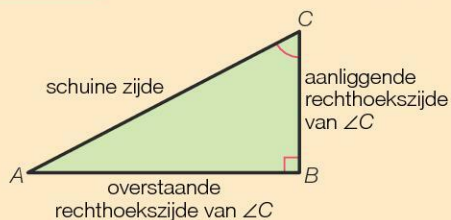
$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}$$

Om $\tan(\angle C)$ te schrijven als verhouding van twee zijden, bedenk je dat AB de overstaande rechthoekszijde van $\angle C$ is, en BC de aanliggende rechthoekszijde van $\angle C$.

$$\text{Dus } \tan(\angle C) = \frac{AB}{BC}.$$

Van de twee rechthoekszijden hierboven ligt

- AB **aan** $\angle A$
- BC **tegenover** $\angle A$.



figuur 7.10

Voorbeeld

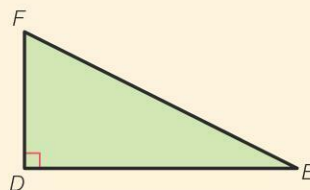
Zie figuur 7.11 met $\triangle DEF$.

- Schrijf $\tan(\angle E)$ als verhouding van twee zijden.
- Schrijf $\tan(\angle F)$ als verhouding van twee zijden.

Uitwerking

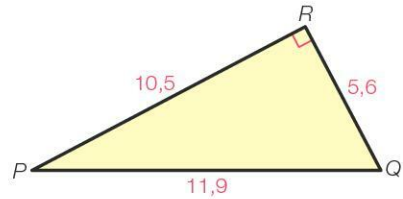
a $\tan(\angle E) = \frac{DF}{DE}$

b $\tan(\angle F) = \frac{DE}{DF}$



figuur 7.11

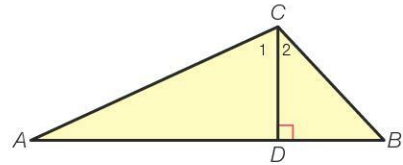
- T 2** [►►6] Zie figuur 7.12.
Bereken $\angle P$ en $\angle Q$.



figuur 7.12

- 3** Zie figuur 7.13.

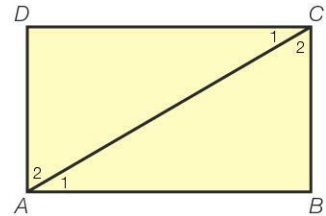
- Van welke rechthoekige driehoek is $\angle A$ een scherpe hoek? Schrijf $\tan(\angle A)$ als verhouding van twee zijden.
- Schrijf ook $\tan(\angle B)$, $\tan(\angle C_1)$ en $\tan(\angle C_2)$ als verhouding van twee zijden.



figuur 7.13

- A 4** Zie rechthoek ABCD met diagonaal AC in figuur 7.14.

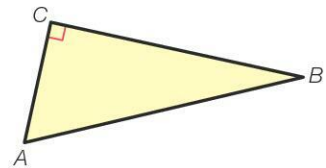
- Schrijf $\tan(\angle A_1)$ als verhouding van twee zijden.
- Schrijf $\tan(\angle A_2)$ als verhouding van twee zijden.
- Doe dit ook voor $\tan(\angle C_1)$ en $\tan(\angle C_2)$.



figuur 7.14

- O 5** Zie figuur 7.15 met $\triangle ABC$.

- Wat is de aanliggende rechthoekszijde van $\angle A$?
En wat is de overstaande rechthoekszijde van $\angle A$?
- Schrijf $\tan(\angle A)$ als verhouding van twee zijden.
- Schrijf $\tan(\angle B)$ als verhouding van twee zijden.



figuur 7.15

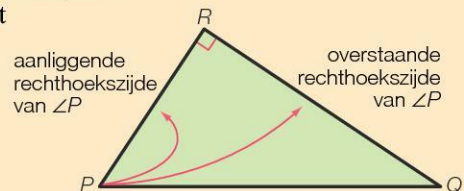
Theorie B Hoeken berekenen met de tangens

Ook als van een rechthoekige driehoek de rechthoekszijden niet horizontaal en verticaal zijn, kun je de tangens van een scherpe hoek schrijven als verhouding van twee rechthoekszijden.

Zo is in de rechthoekige driehoek PQR hiernaast QR de overstaande rechthoekszijde van $\angle P$ en PR de aanliggende rechthoekszijde van $\angle P$.

$$\text{Dus } \tan(\angle P) = \frac{QR}{PR}.$$

En zo is $\tan(\angle Q) = \frac{PR}{QR}$, want van $\angle Q$ is PR de overstaande rechthoekszijde en QR de aanliggende rechthoekszijde.



figuur 7.16

Weet je van een rechthoekige driehoek de lengten van de rechthoekszijden, dan kun je met de tangens de twee scherpe hoeken berekenen. In het voorbeeld op de volgende bladzijde zie je hoe dat gaat.

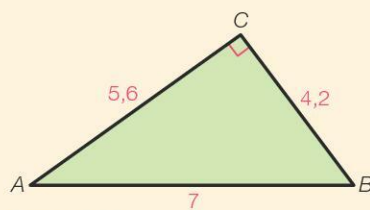
Voorbeeld

Van $\triangle ABC$ in figuur 7.17 is $\angle C = 90^\circ$, $BC = 4,2$, $AC = 5,6$ en $AB = 7$.
Bereken $\angle A$ en $\angle B$.

Uitwerking

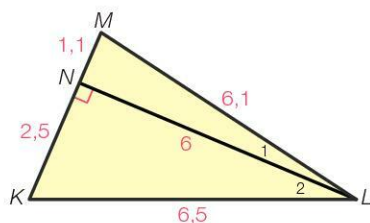
$$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AC} = \frac{4,2}{5,6} \text{ geeft } \angle A \approx 36,9^\circ$$

$$\angle B \approx 180^\circ - 90^\circ - 36,9^\circ = 53,1^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}$$

**figuur 7.17**

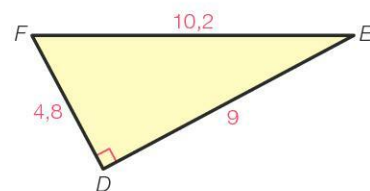
T 6 [►10] Zie figuur 7.18.

Bereken $\angle L_{12}$.

**figuur 7.18**

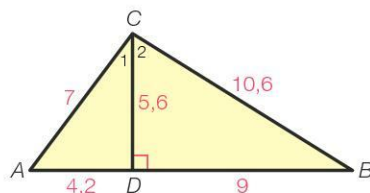
7 Van $\triangle DEF$ in figuur 7.19 is $\angle D = 90^\circ$, $DE = 9$, $DF = 4,8$ en $EF = 10,2$.

- a** Wat is de overstaande rechthoekszijde van $\angle E$?
En wat is de aanliggende rechthoekszijde van $\angle E$?
- b** Bereken $\angle E$ en $\angle F$.

**figuur 7.19**

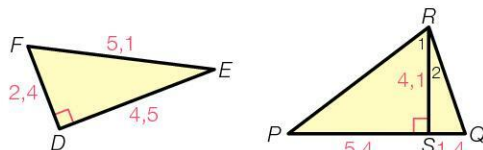
8 Zie figuur 7.20 met $\triangle ABC$ en hoogtelijn CD .

- Van welke rechthoekige driehoek is $\angle A$ een scherpe hoek? Wat is de overstaande rechthoekszijde van $\angle A$? En wat is de aanliggende rechthoekszijde van $\angle A$?
- Bereken $\angle A$.
- Bereken $\angle B$ en $\angle C_{12}$.

**figuur 7.20**

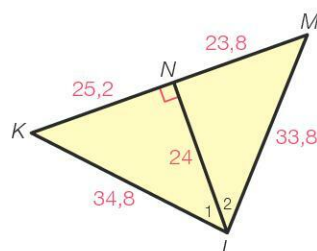
9 Zie figuur 7.21.

- a** Bereken $\angle E$ en $\angle F$.
b Bereken $\angle R_{12}$.

**figuur 7.21**

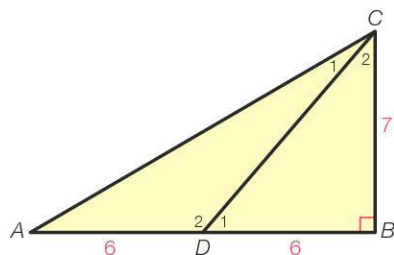
A 10 Zie figuur 7.22.

Bereken $\angle L_{12}$.

**figuur 7.22**

A 11 Zie figuur 7.23.

- Bereken $\angle A$ en $\angle D_1$.
- Bereken $\angle C_1$ en $\angle C_2$.



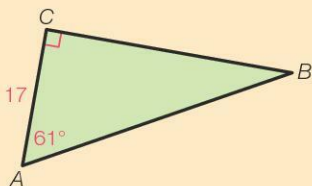
figuur 7.23

Theorie C Zijden berekenen in een rechthoekige driehoek

In de vorige opgaven heb je hoeken berekend met behulp van de tangens. Je kunt met de tangens ook zijden berekenen. Er zijn twee situaties.

Overstaande rechthoekszijde berekenen

Bereken BC in één decimaal nauwkeurig.

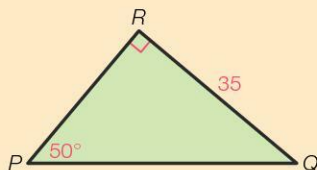


$$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AC} \text{ geeft } \frac{\tan(61^\circ)}{1} \mid \frac{BC}{17}$$

$$BC = 17 \tan(61^\circ) \approx 30,7$$

Aanliggende rechthoekszijde berekenen

Bereken PR in één decimaal nauwkeurig.

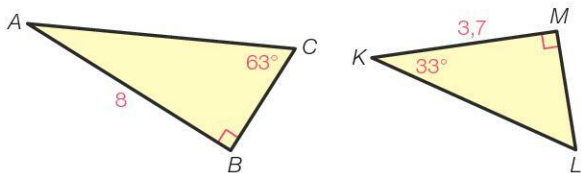


$$\tan(\angle P) = \frac{QR}{PR} \text{ geeft } \frac{\tan(50^\circ)}{1} \mid \frac{35}{PR}$$

$$PR = \frac{35}{\tan(50^\circ)} \approx 29,4$$

12 Zie figuur 7.24.

- Bereken BC . Rond af op één decimaal.
- Bereken LM . Rond af op één decimaal.



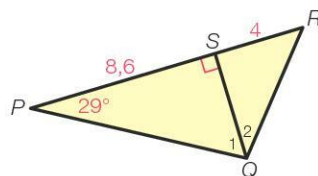
figuur 7.24

- Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ en $AB = 16$. Bereken BC in één decimaal nauwkeurig.
- Van $\triangle DEF$ is $\angle E = 70^\circ$, $\angle F = 90^\circ$ en $DF = 16$. Bereken EF in één decimaal nauwkeurig.

Maak eerst een schets.

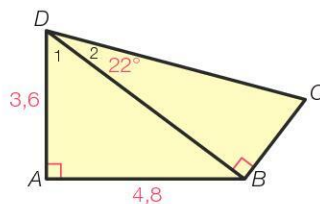


- 14** Zie figuur 7.25.
a Bereken QS . Rond af op één decimaal.
b Bereken $\angle R$.



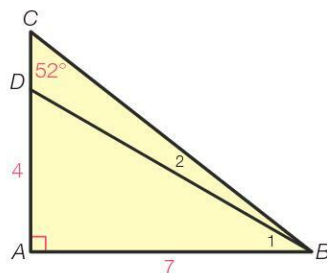
figuur 7.25

- A 15** Zie vierhoek $ABCD$ in figuur 7.26.
 Bereken BC en CD . Rond af op één decimaal.



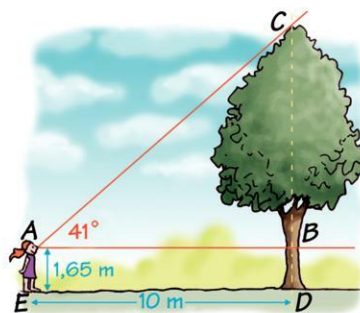
figuur 7.26

- A 16** Zie figuur 7.27.
a Bereken CD in twee decimalen nauwkeurig.
b Bereken $\angle B_2$.



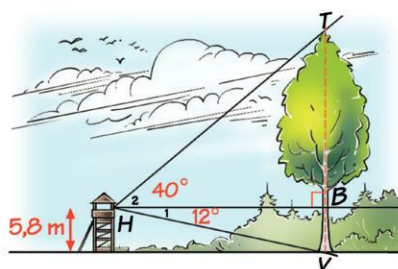
figuur 7.27

- 17** Malou wil de hoogte van een boom berekenen. Ze gaat 10 meter van de boom staan en meet $\angle A = 41^\circ$. Malou weet dat de afstand van haar ogen tot de grond 1,65 meter is. Zie de figuur hiernaast.
a Bereken de hoogte van de boom in meter. Rond af op één decimaal.
b Malou loopt 35 meter verder van de boom af. Hoe groot is nu $\angle A$?



figuur 7.28

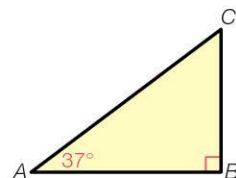
- A 18** Hans ziet vanuit een uitkijktoren op een hoogte van 5,8 meter een boom. Zie figuur 7.29. Hij meet dat $\angle H_1 = 12^\circ$ en $\angle H_2 = 40^\circ$. Bereken de hoogte van de boom in meter. Rond af op één decimaal.



figuur 7.29

7.2 De sinus

- O 19** a Teken zoals hiernaast een rechthoekige driehoek met $\angle A = 37^\circ$ en $\angle B = 90^\circ$. Neem $BC = 4$ cm.
- b Meet de lengte van de schuine zijde, en bereken vervolgens in één decimaal nauwkeurig $\frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}}$.
- c Doe hetzelfde voor $BC = 6$ cm. Wat valt je op?



figuur 7.30

Theorie A De sinus in een rechthoekige driehoek

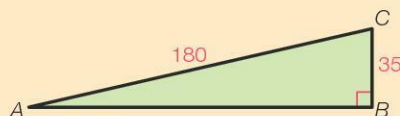
Welke lengte je in opgave 19 voor BC ook kiest, telkens geldt voor $\angle A = 37^\circ$ dat $\frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} \approx 0,6$. Deze verhouding heet de **sinus** van 37° . Notatie: $\sin(37^\circ) \approx 0,6$.

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}}$$

Je rekenmachine heeft een **sin**-toets. Hiermee krijg je $\sin(68^\circ) \approx 0,93$.

Omgekeerd kun je $\angle A$ in figuur 7.31 met $\sin^{-1}$ berekenen. Je gebruikt dan **2nd sin** (TI) of **SHIFT sin** (Casio).

$$\sin(\angle A) = \frac{35}{180} \text{ geeft } \angle A = \sin^{-1}\left(\frac{35}{180}\right) \approx 11,2^\circ.$$



figuur 7.31

Voorbeeld

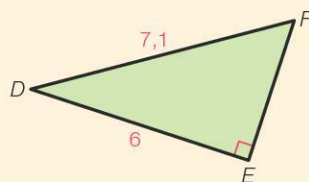
Bereken $\angle F$ in figuur 7.32.

Aanpak

DE is de overstaande rechthoekszijde van $\angle F$, en DF is de schuine zijde, dus gebruik de sinus van $\angle F$.

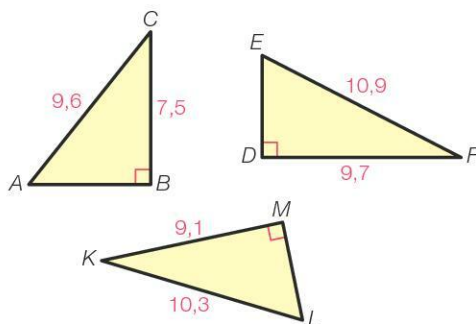
Uitwerking

$$\sin(\angle F) = \frac{DE}{DF} = \frac{6}{7,1} \text{ geeft } \angle F \approx 57,7^\circ$$



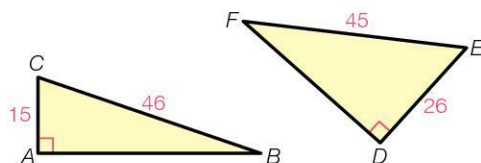
figuur 7.32

- 20** Zie figuur 7.33.
Bereken $\angle A$, $\angle E$ en $\angle L$.



figuur 7.33

- A 21** Zie figuur 7.34.
Bereken $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$ en $\angle F$.



figuur 7.34

- 22** Van de glijbaan in figuur 7.35 is de hoogte twee meter en de lengte is vijf meter.
Bereken $\angle A$.



figuur 7.35

- A 23** Een automobilist rijdt op een gelijkmatig stijgende weg. Op zijn kilometerteller ziet hij dat hij 2200 meter heeft afgelegd. Op een hoogtekaartje leest hij af dat hij daarbij 350 meter is gestegen.
Bereken de hellingshoek.

Theorie B Zijden berekenen met de sinus

Zijn van een rechthoekige driehoek de schuine zijde en een scherpe hoek bekend, dan kun je met de sinus de lengte van de overstaande rechthoekszijde van die hoek berekenen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Bereken KM in figuur 7.36. Rond af op één decimaal.

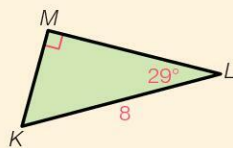
Aanpak

KM is de overstaande rechthoekszijde van $\angle L$, en KL is de schuine zijde, dus gebruik de sinus van $\angle L$.

Uitwerking

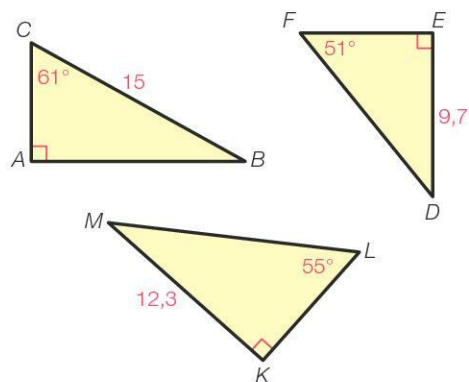
$$\sin(\angle L) = \frac{KM}{KL} \text{ geeft } \frac{\sin(29^\circ)}{1} \mid \frac{KM}{8}$$

$$KM = 8 \sin(29^\circ) \approx 3,9$$



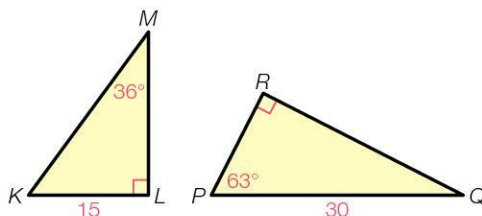
figuur 7.36

- 24** Zie figuur 7.37.
Bereken AB , DF en LM . Rond af op één decimaal.



figuur 7.37

- A 25** Zie figuur 7.38.
Bereken KM , LM , PR en QR . Rond af op één decimaal.



figuur 7.38

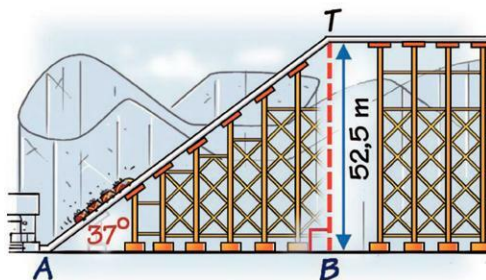
- 26** De Harakiri is een steile skihelling in Oostenrijk. De piste heeft een hellingshoek van $38,2^\circ$ en is 570 meter lang.
Bereken de verticale verplaatsing in meter. Rond af op gehelen.

- A 27** Je kunt de Niagarawatervallen in Noord-Amerika bewonderen terwijl je afdaalt langs een 670 meter lange zipline. De zipline heeft een hellingshoek van 5° en eindigt op het observatiedek onderaan de watervallen.
Bereken het hoogteverschil tussen startpunt en eindpunt van de zipline in meter. Rond af op gehelen.



figuur 7.39

- 28** Een karretje van een achtbaan wordt met een snelheid van 2,5 meter per seconde langs de helling AT omhoog getrokken. Het punt T ligt op een hoogte van 52,5 meter.
Hoeveel seconden is het karretje onderweg van A naar T ? Rond af op één decimaal.

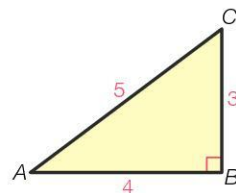


figuur 7.40

7.3 Goniometrische verhoudingen

O 29 Zie figuur 7.41.

- Toon aan dat $\angle A = 36,86...^\circ$.
- Bereken met de **cos**-toets $\cos(36,86...^\circ)$.
Van welke zijden heb je de verhouding gekregen?



figuur 7.41

Theorie A SOSCASTOA

Van de rechthoekige driehoek ABC hiernaast weet je dat

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A} = \frac{BC}{AB}$$

en dat

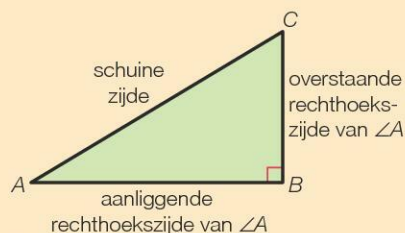
$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{BC}{AC}$$

In opgave 29 heb je ook de verhouding

$\frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}}$ berekend. Deze

verhouding heet de **cosinus** van $\angle A$. Notatie: $\cos(\angle A) = \frac{AB}{AC}$.

Sinus, cosinus en tangens worden **goniometrische verhoudingen** genoemd.



figuur 7.42

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}$$

Je kunt met het ezelsbruggetje SOSCASTOA onthouden wat sinus, cosinus en tangens betekenen. Hierin betekenen SOS, CAS en TOA achtereenvolgens:

SOS Sinus is de **O**verstaande rechthoekszijde gedeeld door de **S**chuine zijde.

CAS Cosinus is de **A**anliggende rechthoekszijde gedeeld door de **S**chuine zijde.

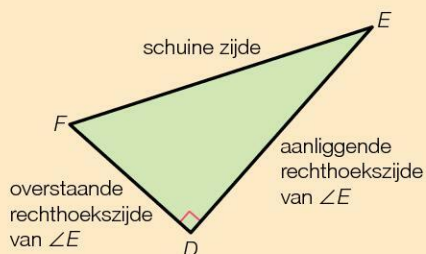
TOA Tangens is de **O**verstaande rechthoekszijde gedeeld door de **A**anliggende rechthoekszijde.



Je kunt in een rechthoekige driehoek van elke scherpe hoek de sinus, de cosinus en de tangens als verhouding van zijden geven.

Zo is in figuur 7.43 $\sin(\angle E) = \frac{DF}{EF}$,

$\cos(\angle E) = \frac{DE}{EF}$ en $\tan(\angle E) = \frac{DF}{DE}$.



figuur 7.43

Voorbeeld

Zie figuur 7.44.

Schrijf als verhouding van twee zijden.

a $\sin(\angle Q)$

c $\sin(\angle P)$

b $\tan(\angle Q)$

d $\cos(\angle P)$

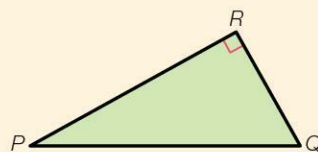
Uitwerking

a $\sin(\angle Q) = \frac{PR}{PQ}$

c $\sin(\angle P) = \frac{QR}{PQ}$

b $\tan(\angle Q) = \frac{PR}{QR}$

d $\cos(\angle P) = \frac{PR}{PQ}$

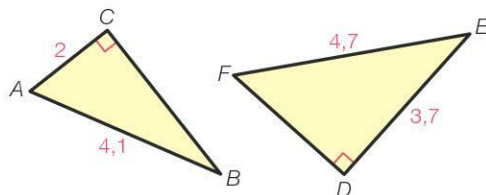


figuur 7.44

T 30

[►► 37] Zie figuur 7.45.

Bereken $\angle A$ en $\angle F$.



figuur 7.45

31

Zie figuur 7.46.

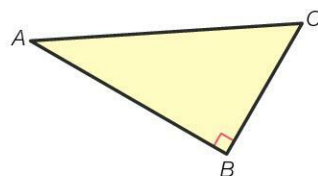
Schrijf als verhouding van twee zijden.

a $\cos(\angle A)$

c $\sin(\angle C)$

b $\tan(\angle A)$

d $\cos(\angle C)$



figuur 7.46

32

Zie figuur 7.47.

Schrijf als verhouding van twee zijden.

a $\sin(\angle C)$

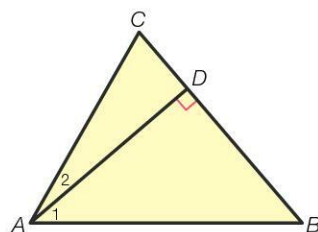
d $\sin(\angle A_2)$

b $\cos(\angle B)$

e $\cos(\angle C)$

c $\tan(\angle A_1)$

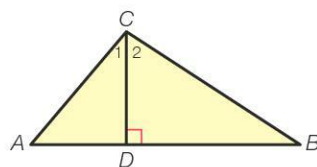
f $\tan(\angle B)$



figuur 7.47

- 33** Zie figuur 7.48.
Schrijf als verhouding van twee zijden.

- a $\tan(\angle A)$
- b $\sin(\angle B)$
- c $\cos(\angle C_1)$
- d $\sin(\angle C_2)$



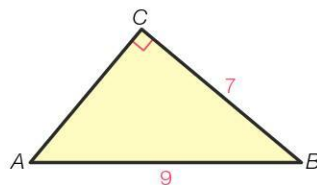
figuur 7.48

- 34** Bereken $\angle A$ als gegeven is dat
- a $\sin(\angle A) = 0,32$
 - b $\cos(\angle A) = 0,98$.

$\cos(\angle A) = 0,53$ geeft
 $\angle A = \cos^{-1}(0,53) \approx 58,0^\circ$



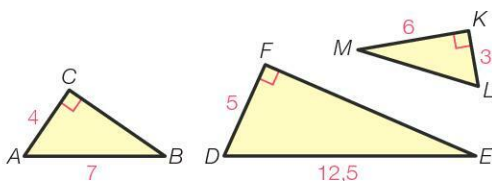
- 35** Van $\triangle ABC$ in figuur 7.49 ga je $\angle B$ berekenen.
- a Je weet BC en dat is de ... rechthoekszijde van $\angle B$.
Je weet AB en dat is de ... zijde van $\triangle ABC$.
 - b Gebruik je nu $\sin(\angle B)$, $\cos(\angle B)$ of $\tan(\angle B)$ om $\angle B$ te berekenen?
 - c Bereken $\angle B$.



figuur 7.49

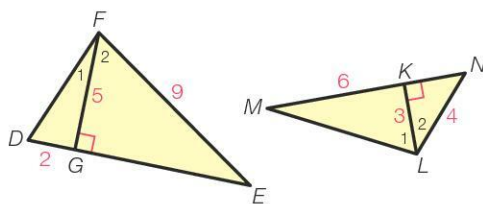
- 36** Zie figuur 7.50.
Bereken. Ga eerst na of je de sinus, de cosinus of de tangens nodig hebt.

- a $\angle A$
- b $\angle E$
- c $\angle M$



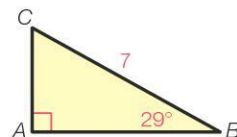
figuur 7.50

- A 37** Zie figuur 7.51.
- a Bereken $\angle D$ en $\angle E$.
 - b Bereken $\angle L_{12}$.



figuur 7.51

- O 38** Van $\triangle ABC$ in figuur 7.52 weet je $\angle B$ en de schuine zijde. Je gaat AC berekenen, dat is de overstaande rechthoekszijde van $\angle B$.
- a Gebruik je $\sin(\angle B)$, $\cos(\angle B)$ of $\tan(\angle B)$ om AC te berekenen?
 - b Bereken AC in twee decimalen nauwkeurig.



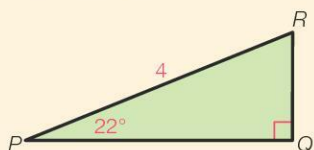
figuur 7.52

Theorie B Zijden berekenen

Met behulp van sinus, cosinus en tangens kun je in rechthoekige driehoeken hoeken en zijden berekenen. Hierbij is steeds de vraag welke goniometrische verhouding je nodig hebt: sinus, cosinus of tangens. In de aanpak van het volgende voorbeeld zie je hoe je daarachter komt.

Voorbeeld

Bereken QR in één decimaal nauwkeurig.



Aanpak

- Je weet $\angle P$.
- Je weet PR , de *schuine zijde*.
- Je wilt QR berekenen, dus de *overstaande rechthoekszijde* van $\angle P$.

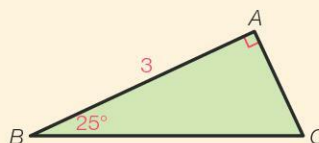
Gebruik dus $\sin(\angle P)$.

Uitwerking

$$\sin(\angle P) = \frac{QR}{PR} \text{ geeft } \frac{\sin(22^\circ)}{1} \mid \frac{QR}{4}$$

$$QR = 4 \sin(22^\circ) \approx 1,5$$

Bereken BC in één decimaal nauwkeurig.



Aanpak

- Je weet $\angle B$.
- Je weet AB , de *aanliggende rechthoekszijde* van $\angle B$.
- Je wilt BC berekenen, dus de *schuine zijde*.

Gebruik dus $\cos(\angle B)$.

Uitwerking

$$\cos(\angle B) = \frac{AB}{BC} \text{ geeft } \frac{\cos(25^\circ)}{1} \mid \frac{3}{BC}$$

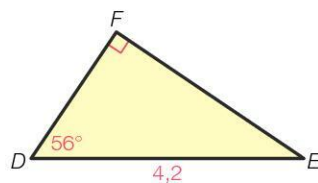
$$BC = \frac{3}{\cos(25^\circ)} \approx 3,3$$

39 Zie figuur 7.53.

- Bereken EF in twee decimalen nauwkeurig.
- Om vervolgens DF te berekenen, zijn er twee manieren:
 - met de stelling van Pythagoras
 - met $\cos(\angle D)$.

Bereken DF op beide manieren in twee decimalen nauwkeurig.

- Welke manier uit vraag b heeft je voorkeur? Waarom?

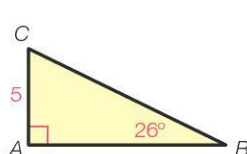


figuur 7.53

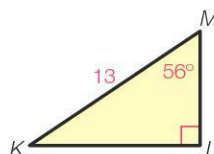
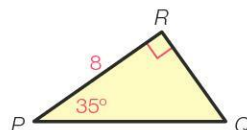
40 Zie figuur 7.54.

Bereken in twee decimalen nauwkeurig.

- BC
- LM
- QR



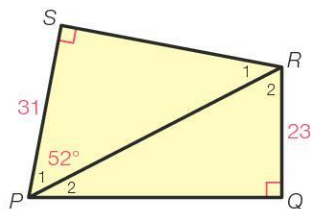
figuur 7.54



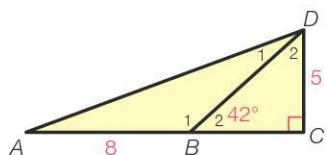
- 41** a Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 26^\circ$, $AB = 6,2$ en $\angle B = 90^\circ$.
Bereken AC in twee decimalen nauwkeurig.
b Van $\triangle KLM$ is $\angle K = 90^\circ$, $\angle M = 73^\circ$ en $KL = 13,8$.
Bereken KM in twee decimalen nauwkeurig.

A 42 Zie figuur 7.55.
Bereken $\angle P_2$.

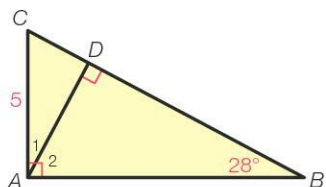
A 43 Zie figuur 7.56.
Bereken $\angle A$.



figuur 7.55



figuur 7.56



figuur 7.57

- 44** Zie figuur 7.57.
Bereken AD en CD in één decimaal nauwkeurig.

Theorie C Gelijkbenige driehoeken

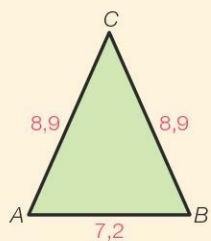
Van een gelijkbenige driehoek waarvan de zijden gegeven zijn, kun je de hoeken berekenen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC in figuur 7.58.
Bereken $\angle A$ en $\angle C$.

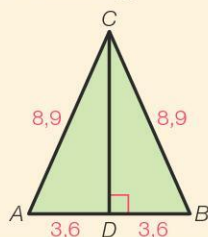
Aanpak

- Je hebt een rechthoekige driehoek nodig waarvan je twee zijden weet. Maak daarom een schets van $\triangle ABC$ en teken daarin vanuit C de loodlijn op AB .
- Werk bij tussenschappen met niet-afgeronde getallen, dus gebruik **ANS** op de rekenmachine.



figuur 7.58

Uitwerking



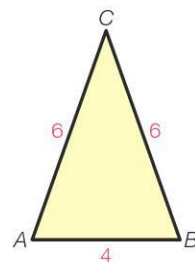
$$\cos(\angle A) = \frac{AD}{AC} = \frac{3,6}{8,9}, \text{ dus } \angle A \approx 66,1^\circ$$

$$\angle B = \angle A = 66,14\dots^\circ \text{ (basishoeken)}$$

$$\angle C = 180^\circ - 2 \cdot 66,14\dots^\circ \approx 47,7^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}$$

Tik in 180 - 2 * 66,14 = .

- 45 In figuur 7.59 zie je de gelijkbenige driehoek ABC .
Bereken $\angle A$ en $\angle C$.



figuur 7.59

- 46 Van $\triangle PQR$ is $PQ = PR = 6,8$ en $QR = 4,7$.
Bereken de hoeken van $\triangle PQR$.

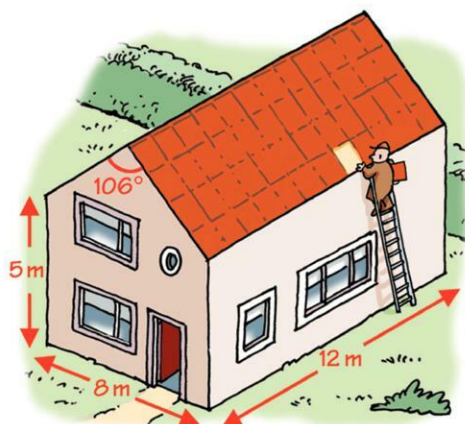
- A 47 Van $\triangle ABC$ is $\angle B = 70^\circ$ en $AB = BC = 6$.
Bereken AC in twee decimalen nauwkeurig.

- A 48 In figuur 7.60 zie je het vooraanzicht van een huis.
Hoeveel meter zit de nok van het huis boven de grond? Rond af op één decimaal.



figuur 7.60

- 49 De twee dakdelen van het symmetrische dak van het huis in figuur 7.61 maken een hoek van 106° met elkaar.
De firma Reinbouw krijgt opdracht dakpannen aan te brengen. Reinbouw rekent € 115 per m^2 .
Hoeveel kost het aanbrengen van de dakpannen?

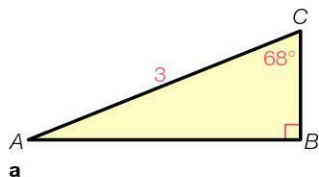


figuur 7.61

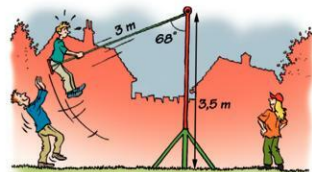
7.4 Berekeningen met goniometrie

50

- a Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 68^\circ$ en $AC = 3$. Zie figuur 7.62a. Bereken BC in één decimaal nauwkeurig.



- b Matthijs is in een speeltuin aan het schommelen. Zie figuur 7.62b. Hoeveel meter zit Matthijs boven de grond bij een wijkhoek van 68° ? Rond af op één decimaal.



b

figuur 7.62

Theorie A Toepassingen

Bij berekeningen met sinus, cosinus en tangens werk je in een rechthoekige driehoek. Zo nodig teken je eerst een hulplijn om een rechthoekige driehoek te krijgen.

Ook komt het voor dat het probleem in een verhaaltje verpakt is. Je maakt dan eerst een schets van de situatie en zoekt een rechthoekige driehoek. De strategie is steeds de volgende.

Werkschema: hoeken en afstanden berekenen bij praktische problemen

- 1 Verdiep je in de situatie.
- 2 Maak een schets en zoek hierin een rechthoekige driehoek. Teken zo nodig een hulplijn.
- 3 Los het probleem op door de juiste goniometrische verhouding te gebruiken. Werk daarbij met niet-afgeronde getallen, dus gebruik **ANS** op de rekenmachine.
- 4 Geef antwoord op de gestelde vraag, controleer of het antwoord realistisch is, en vermeld zo nodig de juiste eenheid.



Met **ANS** roep je het antwoord van de laatste berekening op.

Hoe nauwkeurig?

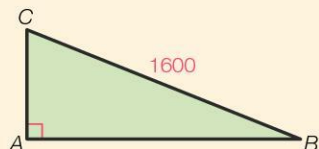
In centimeter nauwkeurig betekent dat je het antwoord afrondt op gehele cm. In plaats van 'bereken in cm nauwkeurig' kun je ook zeggen 'bereken in meter in twee decimalen nauwkeurig'. Het antwoord kan zijn 835 cm, maar ook 8,35 meter of 83,5 dm.

Staat bij een opdracht niet hoe nauwkeurig het antwoord moet zijn, rond dan verstandig af.

Voorbeeld

Meneer Van den Haak rijdt een hellende weg af, waarvan het hellingspercentage 18% is. Op zijn kilometerteller ziet hij dat hij 1600 meter heeft afgelegd. Bereken hoeveel meter hij gedaald is.

Uitwerking



Het hellingspercentage is 18%, dus $\tan(\angle B) = 0,18$.

Hieruit volgt $\angle B = 10,20\dots^\circ$

$$\sin(\angle B) = \frac{AC}{BC} \text{ geeft } \sin(10,20\dots^\circ) = \frac{AC}{1600}$$

$$AC = 1600 \sin(10,20\dots^\circ) \approx 283$$

Dus meneer Van den Haak is 283 meter gedaald.

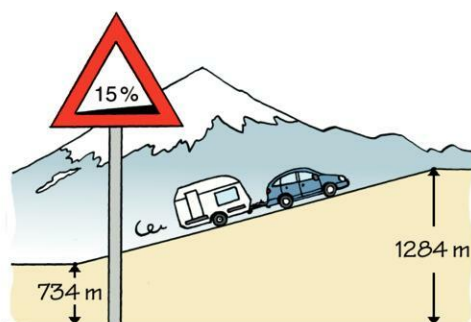
Reken met **ANS** verder met het niet-afgeronde getal.

Rond verstandig af. In dit geval rond je af op gehele.

- 51** Zie de helling in figuur 7.63. Aan het begin van de weg staat op een bord '734 meter boven zeeniveau'. Bij het hoogste punt van de weg staat op een bord '1284 meter boven zeeniveau'. Wat is de lengte van de weg tussen die twee hoogteborden?

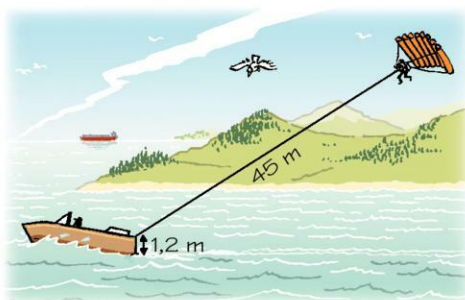


Maak bij opgave 51 eerst een schets en zet letters bij de hoekpunten.



figuur 7.63

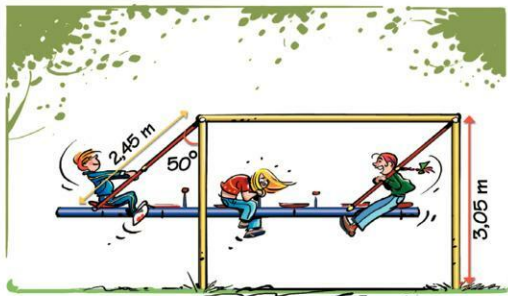
- 52** Jacco doet aan parasailing. Zie figuur 7.64. De verbindingskabel tussen Jacco en de boot is 45 meter lang en heeft een hellingshoek van 38° .
- Hoeveel meter hangt Jacco boven het water?
 - De snelheid van de boot wordt opgevoerd. Daardoor stijgt Jacco nog eens 9 meter. Wat is in dat geval de hellingshoek?



figuur 7.64

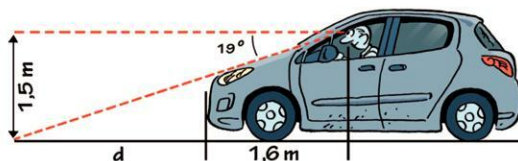
A 53 Zie de reuzenschommel in figuur 7.65.

- Hoe hoog is de schommel op het moment dat de wijkhoek 50° is? Geef het antwoord in centimeter nauwkeurig.
- De maximale hoogte van de schommelplank is 205 cm. Welke wijkhoek hoort hierbij?



figuur 7.65

A 54 Automobilisten kunnen een gedeelte van de weg vlak voor de auto niet waarnemen. In figuur 7.66 is deze 'blinde vlek' aangegeven met d . Bereken d in cm nauwkeurig.



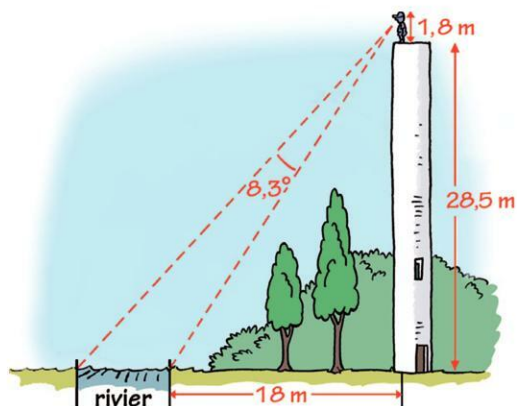
figuur 7.66

A 55 Aan weerszijden van een 1248 meter hoge berg lopen kabelbanen naar de top. De kabelbaanstations A en B bevinden zich beide op een hoogte van 328 meter. Het hellingspercentage van kabelbaan AT is 58%, en dat van kabelbaan BT is 42%. Bereken hoeveel meter kabelbaan BT langer is dan kabelbaan AT .



figuur 7.67

56 Hans staat op een 28,5 meter hoge toren. Zijn ooghoogte is 1,8 meter. Op een afstand van 18 meter van de toren stroomt een rivier. Hans ziet de rivier onder een hoek van $8,3^\circ$. Zie figuur 7.68. Bereken de breedte van de rivier.



figuur 7.68

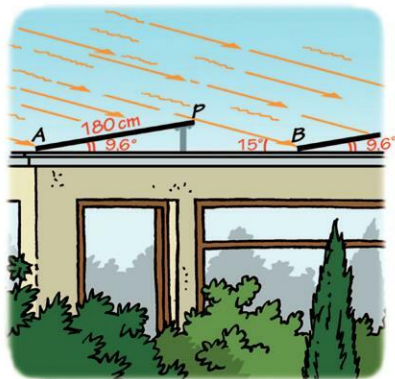
57

Marc, een fervent wielrenner, daalt gedurende vijf minuten met een snelheid van 48 km per uur op een weg met een hellingspercentage van 14%. Aanvankelijk fietst Marc op een hoogte van 1450 meter.
Op welke hoogte is hij vijf minuten later?

58

Op een plat dak worden zonnepanelen geplaatst. De lengte AP van een zonnepaneel is 180 cm en de hellingshoek is $9,6^\circ$. Zie figuur 7.69.
De afstand AB tussen de zonnepanelen wordt zo gekozen, dat de zonnepanelen in de winter net niet in elkaars schaduw staan. Men gaat uit van een zonnehoek van 15° , dat is de zonnehoek om 12:00 uur eind december.

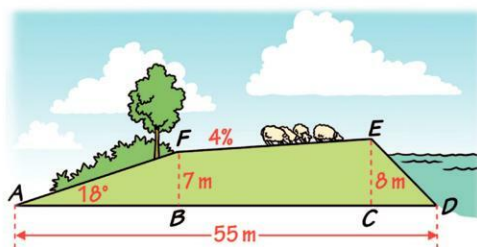
- Bereken de afstand AB in cm nauwkeurig.
- Een zonnepaneel heeft een breedte van 80 cm. Hoeveel zonnepanelen kunnen maximaal geplaatst worden op een plat dak van 18,5 bij 6 meter?



figuur 7.69

59

In figuur 7.70 zie je de dwarsdoorsnede van een dijk. Het hellingspercentage van het stuk EF is 4%. Bereken $\angle D$.



figuur 7.70

ARTIKEL

BEROEP

GESCHIEDENIS

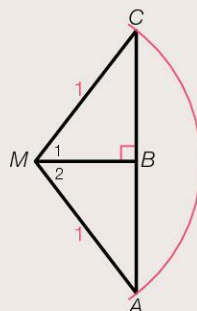
INFORMATIE



De sinus

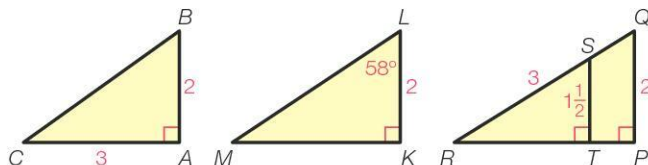
Het begrip sinus werd al rond 500 n.Chr. beschreven in de Indiase wiskundige tekst Aryabhatiyam met het woord जीवा (jiva), dat boogpees betekent.

In de figuur hiernaast is een deel van de cirkel met middelpunt M en straal 1 getekend. Je ziet dat de figuur op een boog lijkt met lijnstuk AC als boogpees. Met goniometrische verhoudingen kun je laten zien dat $AC = 2 \sin(\angle M_1)$. Indiase wiskundigen gebruikten daarom het woord जीवा (jiva) voor de sinus. In de middeleeuwen werd dit door Arabische geleerden vertaald als جيب (jiba). Omdat het Arabisch werd geschreven zonder klinkers, is het waarschijnlijk gelezen als het woord جيب (jayb), dat boezem betekent. Bij de vertaling naar het Latijn werd daarom het Latijnse woord voor boezem gebruikt: sinus.



+ 7.5 Lijnstukken en hoeken berekenen

0 60 Zie figuur 7.71.



figuur 7.71

- Bereken BC in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken LM in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken QR . Gebruik gelijkvormige driehoeken.

Theorie A Het berekenen van lijnstukken

Je hebt al heel wat manieren geleerd om lijnstukken te berekenen.

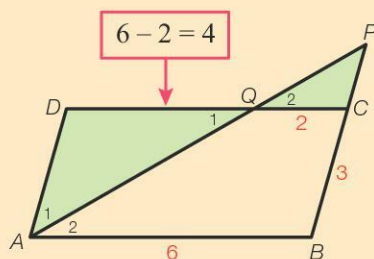
Je kunt dat doen met

- de stelling van Pythagoras
- gelijkvormige driehoeken
- de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens.

In figuur 7.72 is het parallellogram $ABCD$ getekend. Om CP te berekenen, maak je gebruik van gelijkvormigheid.

$$\left. \begin{array}{l} \angle Q_1 = \angle Q_2 \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle A_1 = \angle P \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle A Q D \sim \triangle P Q C$$

$$\frac{AD}{PC} \Big| \frac{QD}{QC} \text{ geeft } \frac{3}{PC} \Big| \frac{4}{2}, \text{ dus } CP = \frac{3 \cdot 2}{4} = 1,5.$$



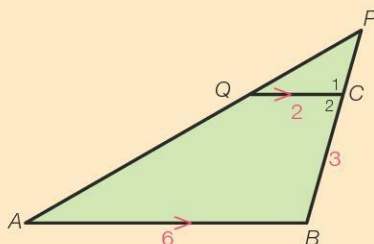
figuur 7.72

Soms is het handig de lengte van een lijnstuk x te stellen.

In figuur 7.73, met $CQ \parallel AB$, $AB = 6$, $BC = 3$ en $CQ = 2$, willen we CP berekenen.

$$\left. \begin{array}{l} \angle P \text{ (in } \triangle QCP) = \angle P \text{ (in } \triangle ABP) \\ \angle C_1 = \angle B \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle CPQ \sim \triangle BPA$$

$$\frac{CP}{BP} \Big| \frac{CQ}{BA} \text{ geeft } \frac{CP}{BP} \Big| \frac{2}{6}$$



figuur 7.73

Het lijkt of we hier vastlopen, want de lengte van het lijnstuk BP is niet bekend. Maar door $CP = x$ te stellen, kunnen we CP toch berekenen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

In figuur 7.74 is $CQ \parallel AB$, $AB = 6$, $BC = 3$ en $CQ = 2$.
Bereken CP .

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} \angle P \text{ (in } \triangle QCP) = \angle P \text{ (in } \triangle ABP) \\ \angle C_1 = \angle B \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle CPQ \sim \triangle BPA$$

Stel $CP = x$, dan is $BP = x + 3$.

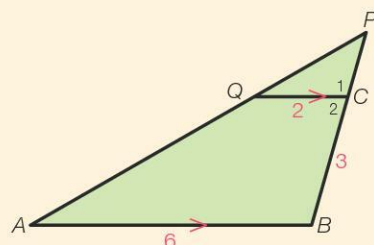
$$\frac{CP}{BP} = \frac{CQ}{BA} \text{ geeft } \frac{x}{x+3} = \frac{2}{6}$$

$$6x = 2(x + 3)$$

$$6x = 2x + 6$$

$$4x = 6$$

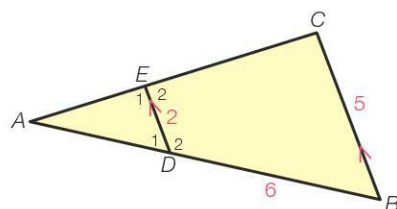
$$x = 1,5 \text{ dus } CP = 1,5.$$



figuur 7.74

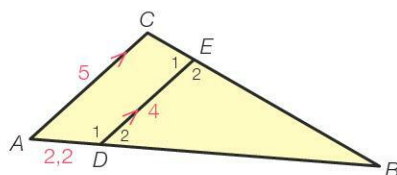
- 61** Zie figuur 7.75 met $DE = 2$, $BD = 6$ en $BC = 5$.
Verder is $BC \parallel DE$.

- Stel $AD = x$, dan is $AB = x + \dots$
- Bereken AD en AB .



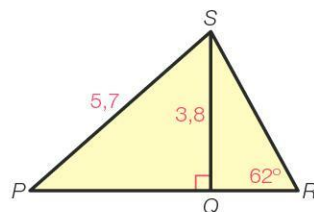
figuur 7.75

- 62** Zie figuur 7.76.
Bereken BD .



figuur 7.76

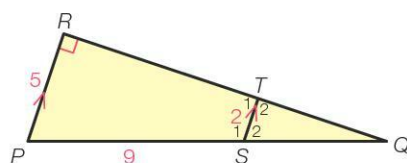
- 63** Zie figuur 7.77.
a Bereken QR en RS . Rond af op één decimaal.
b Bereken PQ in één decimaal nauwkeurig.



figuur 7.77

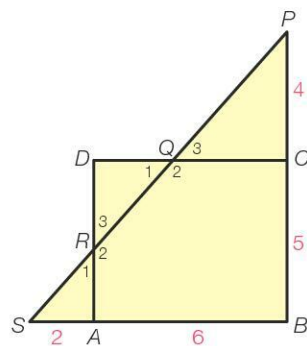
- A 64** Zie figuur 7.78 met $PR = 5$, $PS = 9$ en $ST = 2$.
Verder is $PR \parallel ST$.

- Bereken QS .
- Bereken RT in één decimaal nauwkeurig.
- Bereken $\angle Q$.



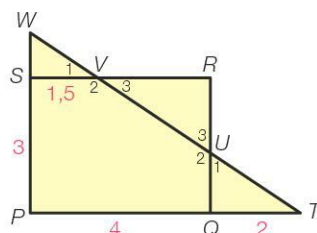
figuur 7.78

- 65** Zie figuur 7.79 met rechthoek $ABCD$.
- Bereken CQ in één decimaal nauwkeurig.
 - Bereken DR .
 - Bereken PS in één decimaal nauwkeurig.
 - Bereken $\angle S$.



figuur 7.79

- A 66** Zie figuur 7.80 met rechthoek $PQRS$.
- Bereken WS .
 - Bereken UV in één decimaal nauwkeurig.
 - Bereken $\angle V_2$.



figuur 7.80

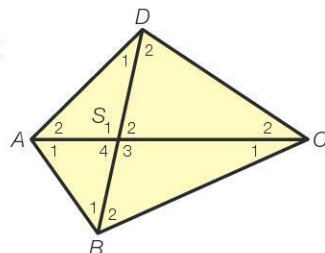
- O 67** Lees de tekst over hoeknotaties.

Hoeknotaties

In figuur 7.81 kun je $\angle S_1$ met drie letters noteren, namelijk met $\angle ASD$. Dus $\angle ASD$ is de hoek die je krijgt door van A via S naar D te gaan. In deze hoeknotatie geeft de middelste letter het hoekpunt aan. Je kunt $\angle S_1$ dus ook schrijven als $\angle DSA$. En zo kun je $\angle A_1$ op vier manieren noteren: als $\angle SAB$, als $\angle BAS$, als $\angle CAB$ en als $\angle BAC$.

Noteer met drie letters.

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| a $\angle A_2$ | c $\angle B_2$ | e $\angle C_2$ |
| b $\angle B_1$ | d $\angle S_3$ | f $\angle D_1$ |



figuur 7.81

Theorie B Hoeken berekenen in de ruimte

Om een hoek te berekenen in een ruimtefiguur, zoek je eerst naar een vlak waarin de benen van de hoek liggen. Schets dit vlak apart en zoek hierin naar een rechthoekige driehoek. Bij berekeningen in een balk kun je gebruiken dat alle zijvlakken en alle diagonaalvlakken rechthoeken zijn.

Werkschema: hoeken berekenen in ruimtefiguren

- Schets een rechthoekige driehoek of een vlak waarin de gevraagde hoek ligt.
- Bereken zo nodig ontbrekende lengten van lijnstukken.
- Bereken de gevraagde hoek met sinus, cosinus of tangens.

Voorbeeld

Bereken $\angle BEC$ in de balk hiernaast.

Aanpak

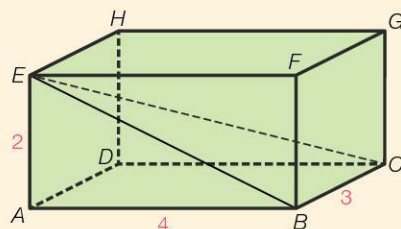
$\angle BEC$ ligt in diagonaalvlak $EBCH$, dus schets $EBCH$. Om $\angle BEC$ te berekenen, heb je de lengte van BE nodig. Gebruik de stelling van Pythagoras in $\triangle ABE$ om BE te berekenen. Je weet nu van $\angle BEC$ de overstaande en de aanliggende rechthoekszijde, dus gebruik de tangens.

Uitwerking

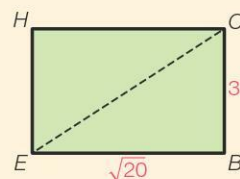
In $\triangle ABE$ is $\angle A = 90^\circ$, dus $BE^2 = AB^2 + AE^2 = 4^2 + 2^2 = 20$
 $BE = \sqrt{20}$

Zie de schets hiernaast.

$$\tan(\angle BEC) = \frac{BC}{BE} = \frac{3}{\sqrt{20}} \text{ geeft } \angle BEC \approx 33,9^\circ$$

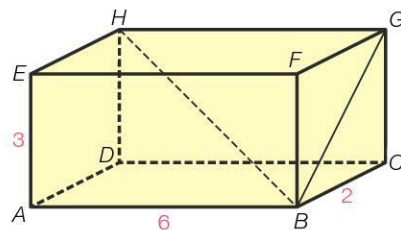


figuur 7.82



68 Zie de balk in figuur 7.83.

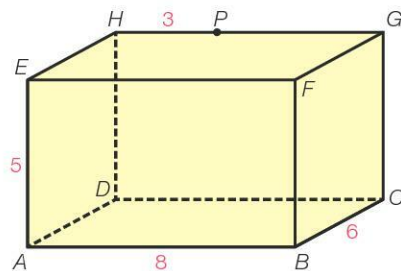
- Bereken $\angle BHG$.
- Bereken $\angle HBF$.
- Bereken $\angle CBH$.



figuur 7.83

A 69 Van de balk in figuur 7.84 is $AB = 8$, $BC = 6$ en $AE = 5$. Op de ribbe GH ligt het punt P met $PH = 3$.

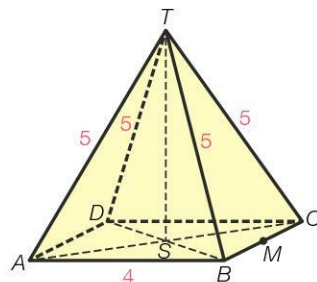
- Bereken $\angle CEF$.
- Bereken $\angle HBD$.
- Bereken $\angle BPG$.
- Bereken $\angle DPC$.



figuur 7.84

A 70 Van de piramide in figuur 7.85 is grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijde 4. Verder is M het midden van ribbe BC , en is $AT = BT = CT = DT = 5$.

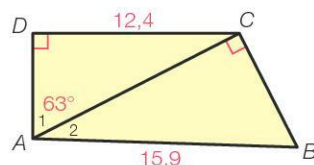
- Bereken $\angle TAS$.
- Bereken $\angle TMS$.



figuur 7.85

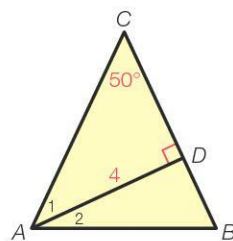
Gemengde opgaven

- 1 Zie figuur 7.86.
Bereken $\angle A_2$.



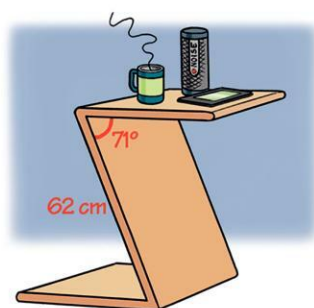
figuur 7.86

- 2 Zie figuur 7.87 met de gelijkbenige driehoek ABC met $AC = BC$ en $\angle C = 50^\circ$. Verder is $AD = 4$. Bereken de omtrek van $\triangle ABC$ in één decimaal nauwkeurig.



figuur 7.87

- 3 Een houten bijzettafeltje is Z-vormig. Zie figuur 7.88. Het schuine gedeelte is 62 cm lang en maakt een hoek van 71° met het tafelblad. Bereken de hoogte van het tafeltje in cm nauwkeurig.



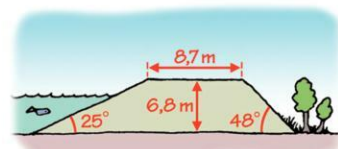
figuur 7.88

- 4 Een vuurtorenwachter neemt vanaf 60 meter hoogte twee boeien waar, beide precies in oostelijke richting. Zie figuur 7.89. Hoeveel meter is de afstand tussen de boeien? Rond af op gehelen.



figuur 7.89

- 5 Bereken de breedte van de onderkant van de dijk in figuur 7.90.

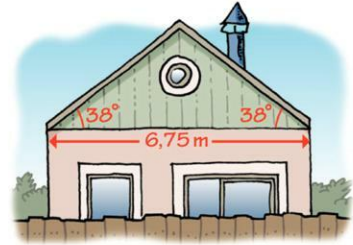


figuur 7.90

- 6 Op de Olympische Spelen van 2018 in Pyeong Chang deed Kimberley Bos mee aan het onderdeel skeleton. De baan, die ook gebruikt werd voor het bobsleeën, start op een hoogte van 940 meter, eindigt op een hoogte van 824 meter en heeft een gemiddelde hellingshoek van $4,8^\circ$. Bereken de lengte van de baan.

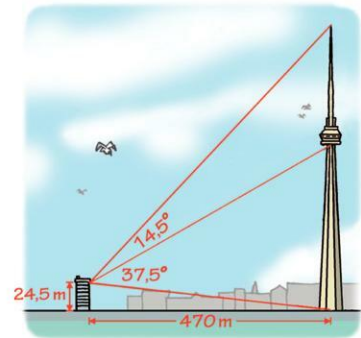


- 7 In figuur 7.91 zie je een gedeelte van de voorgevel van een huis. Het huis is 6,75 meter breed en 12 meter diep. De dakbedekking wordt vernieuwd. Dat kost € 125 per m^2 . Bereken de totale kosten.



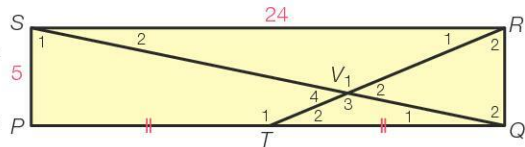
figuur 7.91

- 8 De CN-tower is een van de hoogste gebouwen ter wereld. Barbara kijkt vanuit haar hotelkamer in Toronto op een hoogte van 24,5 meter naar de CN-tower. Ze ziet het gedeelte van de toren onder het uitkijkplatform onder een hoek van $37,5^\circ$. Zie figuur 7.92.
- Bereken op welke hoogte het uitkijkplatform zit.
 - Bereken de hoogte van de CN-tower.



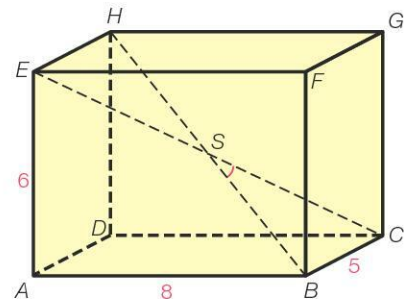
figuur 7.92

- 9 Zie rechthoek $PQRS$ in figuur 7.93 met $PS = 5$, $RS = 24$ en T het midden van PQ .
- Bereken RT .
 - Bereken TV . Rond af op één decimaal.
 - Bereken $\angle V_3$.



figuur 7.93

- 10 Zie de balk in figuur 7.94 met $AB = 8$, $BC = 5$ en $AE = 6$.
- Bereken $\angle AHB$.
 - De lichaamsdiagonalen BH en CE snijden elkaar in punt S . Bereken $\angle BSC$.



figuur 7.94

Samenvatting

7.1, 7.2, 7.3 Goniometrische verhoudingen

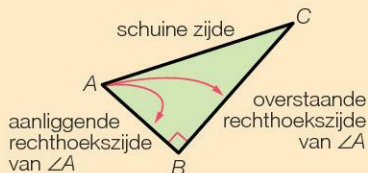
blz 60

In een rechthoekige driehoek ABC met $\angle B = 90^\circ$ is

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}$$

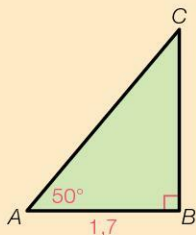


Je kunt de goniometrische verhoudingen onthouden met het ezelsbruggetje SOS CASTOA.

blz 63

Weet je van een rechthoekige driehoek een scherpe hoek en een van de zijden, dan kun je de andere zijden berekenen.

Bereken BC in één decimaal nauwkeurig.

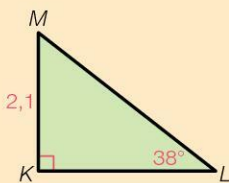


$$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} \text{ geeft}$$

$$\tan(50^\circ) \mid \frac{BC}{1} \mid 1,7$$

$$BC = 1,7 \tan(50^\circ) \approx 2,0$$

Bereken LM in één decimaal nauwkeurig.

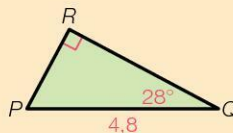


$$\sin(\angle L) = \frac{KM}{LM} \text{ geeft}$$

$$\sin(38^\circ) \mid \frac{2,1}{1} \mid LM$$

$$LM = \frac{2,1}{\sin(38^\circ)} \approx 3,4$$

Bereken QR in één decimaal nauwkeurig.



$$\cos(\angle Q) = \frac{QR}{PQ} \text{ geeft}$$

$$\cos(28^\circ) \mid \frac{QR}{1} \mid 4,8$$

$$QR = 4,8 \cos(28^\circ) \approx 4,2$$

7.4 Berekeningen met goniometrie

blz 66

Goniometrische verhoudingen gebruik je om afstanden en hoeken te berekenen. Gebruik het volgende werkschema.

- 1 Verdiep je in de situatie.
- 2 Maak een schets en zoek hierin een rechthoekige driehoek.
Teken zo nodig een hulplijn.
- 3 Los het probleem op door de juiste goniometrische verhouding te gebruiken. Werk daarbij met niet-afgeronde getallen.
- 4 Geef antwoord op de gestelde vraag, controleer of het antwoord realistisch is, en vermeld zo nodig de juiste eenheid.

Gebruik **ANS** op de rekenmachine.

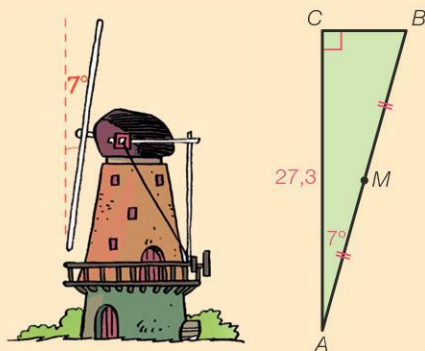
blz 67 De afstand van de molenwieken tot de grond in de figuur hiernaast varieert van 5,4 meter tot 32,7 meter. Om de lengte van een molenwiek te berekenen, maak je een schets zoals hiernaast met $\triangle ABC$.

In $\triangle ABC$ is $AC = 32,7 - 5,4 = 27,3$ meter.

$$\cos(\angle A) = \frac{AC}{AB} \text{ geeft } \frac{\cos(7^\circ)}{1} \mid \frac{27,3}{AB}$$

$$AB = \frac{27,3}{\cos(7^\circ)} = 27,50 \dots$$

Dus de molenwieken hebben elk een lengte van $\frac{1}{2} \cdot 27,50 \dots \approx 13,8$ meter.



+ 7.5 Lijnstukken en hoeken berekenen

blz 70 Lijnstukken kun je berekenen met

- de stelling van Pythagoras
- gelijkvormige driehoeken
- goniometrische verhoudingen.

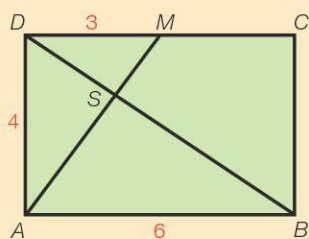
blz 71 Om in de figuur hiernaast AS te berekenen, gebruik je eerst in $\triangle AMD$ de stelling van Pythagoras om AM te berekenen. Je krijgt $AM = 5$.

Vervolgens toon je aan dat $\triangle ABS \sim \triangle MDS$.

Stel $AS = x$, dan is $MS = 5 - x$. Je krijgt

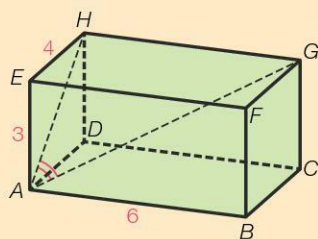
$$\frac{AB}{MD} \mid \frac{AS}{MS} \text{ geeft } \frac{6}{3} \mid \frac{x}{5-x}$$

Hieruit volgt dat $3x = 6(5 - x)$ en dit geeft $x = 3\frac{1}{3}$.



blz 72 Om een hoek te berekenen in een ruimtefiguur zoals de balk hiernaast, ga je als volgt te werk.

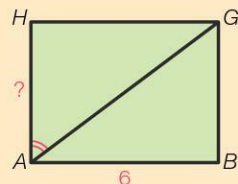
- 1 Schets een rechthoekige driehoek of een vlak waarin de gevraagde hoek ligt.
- 2 Bereken zo nodig ontbrekende lengten van lijnstukken.
- 3 Bereken de gevraagde hoek met sinus, cosinus of tangens.



Om $\angle HAG$ in balk $ABCD EFGH$ te berekenen, schets je eerst het diagonaalvlak $ABGH$. Dit diagonaalvlak is een rechthoek.

Bereken vervolgens AH in $\triangle AEH$ met de stelling van Pythagoras. Je krijgt $AH^2 = AE^2 + EH^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, dus $AH = 5$.

In $\triangle AGH$ is $\tan(\angle HAG) = \frac{HG}{AH} = \frac{6}{5}$, dus $\angle HAG \approx 50,2^\circ$.

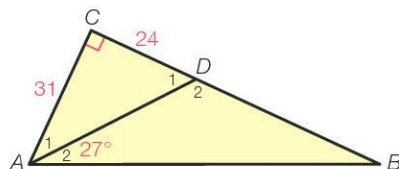


$\angle HAG$, dus A is het hoekpunt en de benen zijn AH en AG .

Diagnostische toets

7.1 Berekeningen met de tangens

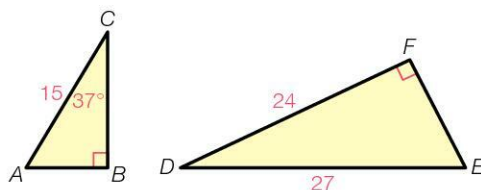
- 1** Zie figuur 7.95.
1,2 **a** Bereken $\angle A_1$.
b Bereken BD . Rond af op één decimaal.



figuur 7.95

7.2 De sinus

- 2** Zie figuur 7.96.
3,4 **a** Bereken AB . Rond af op één decimaal.
b Bereken $\angle E$.

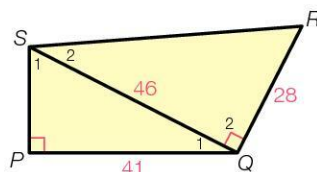


figuur 7.96

7.3 Goniometrische verhoudingen

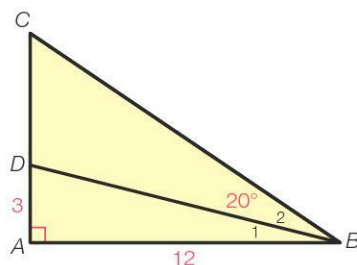
- 3** **a** Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 55^\circ$ en $AC = 4,5$.
 Bereken AB in twee decimalen nauwkeurig.
b Van $\triangle DEF$ is $\angle D = 90^\circ$, $\angle E = 71^\circ$ en $EF = 6,1$.
 Bereken DE in twee decimalen nauwkeurig.

- 4** Zie figuur 7.97.
8 Bereken $\angle S_{12}$.



figuur 7.97

- 5** Zie figuur 7.98.
9 Bereken BC in één decimaal nauwkeurig.



figuur 7.98

- 6** Van $\triangle PQR$ is $QR = 4$ en $PQ = PR = 5,6$.
10,11 Bereken de hoeken van $\triangle PQR$.

- 7** In figuur 7.99 zie je de ijskathedraal van de Noorse stad Tromsø. In het gebouw zijn verschillende gelijkbenige driehoeken te herkennen, waarvan de grootste een basis heeft van 22,8 meter en een tophoek van 36° .
 Bereken de hoogte van deze driehoek in meter. Rond af op één decimaal.



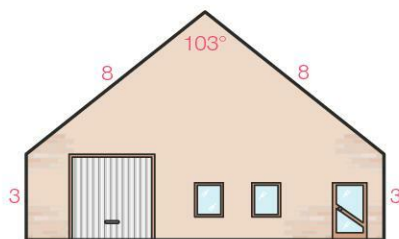
figuur 7.99

7.4 Berekeningen met goniometrie

- 8** Het vooraanzicht van de fabriekshal in figuur 7.100 heeft de vorm van een symmetrische vijfhoek.

13,14

Bereken de breedte en de hoogte van de hal in meter. Rond af op één decimaal.

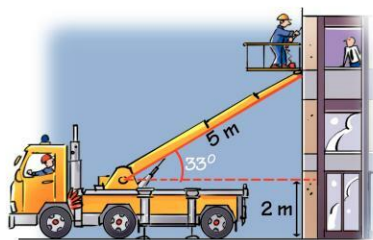


figuur 7.100 De afmetingen zijn in meter.

- 9** Met een hoogwerker worden reparaties uitgevoerd aan de gevel van een kantoorgebouw. Zie figuur 7.101. De hoogwerker is tot een lengte van 5 meter uitgeschoven en maakt een hoek van 33° met de rode horizontale lijn.

15

- a** Bereken in meter hoe hoog het uiteinde van de hoogwerker tegen de gevel komt. Rond af op één decimaal.



figuur 7.101

Om reparaties op een grotere hoogte uit te voeren, maakt men de hoek van de arm met de horizontale lijn groter, waarbij de arm 5 meter lang blijft.

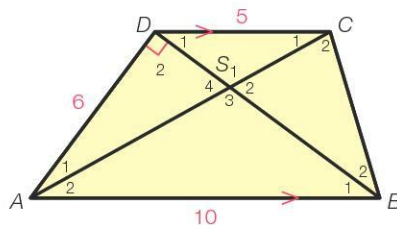
- b** Bereken de hoek waarbij het uiteinde van de hoogwerker op een hoogte van 6,5 meter komt.
c Daarna wordt de wagen een stukje naar het kantoorgebouw gereden, zodat de reparateurs hun werkzaamheden kunnen voortzetten. Bereken in dm nauwkeurig de afstand die de wagen hierbij wordt verreden.

7.5 Lijnstukken en hoeken berekenen

- 10** Zie figuur 7.102.

16

- a** Bereken BD .
b Bereken BS in twee decimalen nauwkeurig.
c Bereken $\angle S_3$.

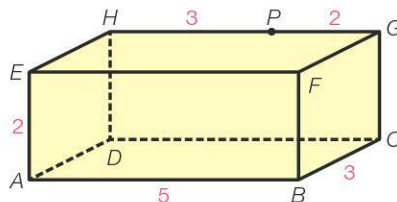


figuur 7.102

- 11** Zie de balk in figuur 7.103.

17

- a** Bereken $\angle ACE$.
b Bereken $\angle APH$.
c Bereken $\angle EPF$.



figuur 7.103

Herhaling

7.1 Berekeningen met de tangens

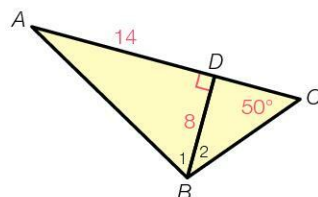
- 1** Zie figuur 7.104. Om $\angle A$ te berekenen, gebruik je de tangens in $\triangle ABD$. Bedenk hierbij dat

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}$$

- a** Wat is de overstaande rechthoekszijde van $\angle A$?
En wat is de aanliggende rechthoekszijde van $\angle A$?
- b** Bereken $\angle A$.

Om CD te berekenen, gebruik je de tangens in $\triangle BCD$.
Je weet dat $\angle C = 50^\circ$.

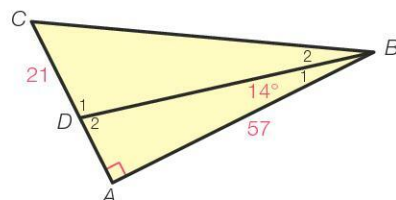
- c** Wat is de overstaande rechthoekszijde van $\angle C$?
En wat is de aanliggende rechthoekszijde van $\angle C$?
- d** Bereken CD . Rond af op één decimaal.



figuur 7.104

- 2** Zie figuur 7.105. Om $\angle C$ te berekenen, gebruik je de tangens in $\triangle ABC$. Hiervoor heb je behalve zijde AB ook zijde AC nodig. Bereken daarom eerst zijde AD met de tangens in $\triangle ABD$.

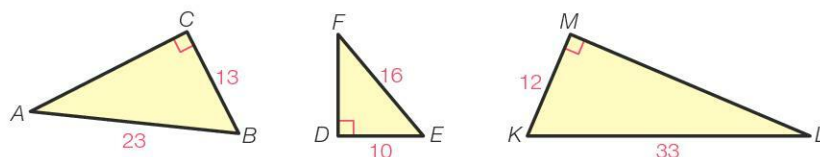
- a** Bereken AD . Rond af op één decimaal.
- b** Bereken AC . Denk eraan om de niet-afgeronde waarde van AD te gebruiken.
- c** Bereken $\angle C$.



figuur 7.105

7.2 De sinus

- 3** Zie figuur 7.106.



figuur 7.106

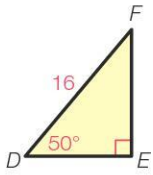
- a** Voor het berekenen van $\angle A$ in $\triangle ABC$ gebruik je

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{BC}{AB}$$

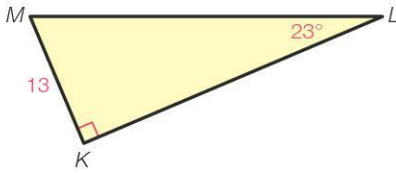
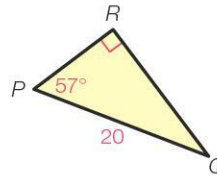
Bereken $\angle A$.

- b** Zie $\triangle DEF$. Wat is de overstaande rechthoekszijde van $\angle F$?
En wat is de schuine zijde? Bereken $\angle F$.
- c** Bereken $\angle L$.

- 4 Zie figuur 7.107.
Bereken EF , LM en QR . Rond af op één decimaal.



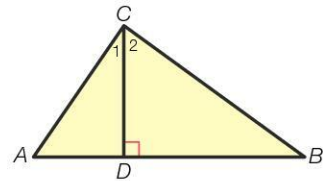
figuur 7.107



7.3 Goniometrische verhoudingen

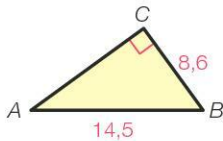
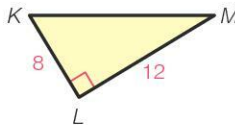
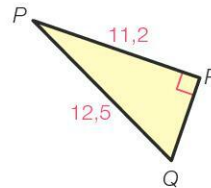
- 5 Zie figuur 7.108.
Schrijf als verhouding van twee zijden. Gebruik het ezelsbruggetje SOS CASTOA.

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a $\sin(\angle A)$ | d $\sin(\angle C_2)$ |
| b $\cos(\angle B)$ | e $\cos(\angle C_1)$ |
| c $\tan(\angle C_1)$ | f $\tan(\angle B)$ |



figuur 7.108

- 6 Zie figuur 7.109.
- Waarom gebruik je $\sin(\angle A)$ voor het berekenen van $\angle A$?
 - Bereken $\angle A$.
 - Bereken $\angle M$ en $\angle P$.

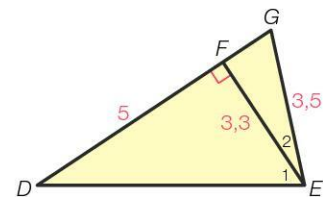


figuur 7.109

- 7
- Van $\triangle PQR$ is $\angle P = 90^\circ$, $\angle Q = 42^\circ$ en $PR = 5,5$. Om QR te berekenen, maak je eerst een schets van $\triangle PQR$. Bereken QR in twee decimalen nauwkeurig.
 - Van $\triangle FGH$ is $\angle F = 25^\circ$, $\angle H = 90^\circ$ en $FH = 6,3$. Bereken GH in twee decimalen nauwkeurig.

- 8 Om $\angle E_{12}$ in figuur 7.110 te berekenen, bereken je eerst $\angle E_1$ en $\angle E_2$.

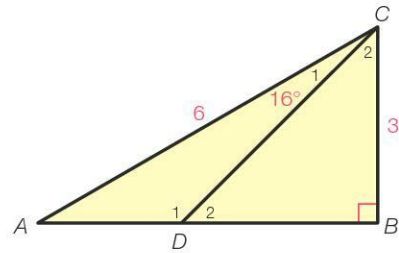
- Van welke rechthoekige driehoek is $\angle E_1$ een hoek? Bereken $\angle E_1$.
- Van welke rechthoekige driehoek is $\angle E_2$ een hoek? Bereken $\angle E_2$.
- Bereken $\angle E_{12}$.



figuur 7.110

- 9** Om BD in figuur 7.111 te berekenen, ga je als volgt te werk.

- Bereken $\angle A$ in $\triangle ABC$.
 - Bereken $\angle C_2$ met de hoekensom van $\triangle ABC$.
 - Gebruik $\angle C_2$ om BD te berekenen.
- Bereken BD . Rond af op één decimaal.

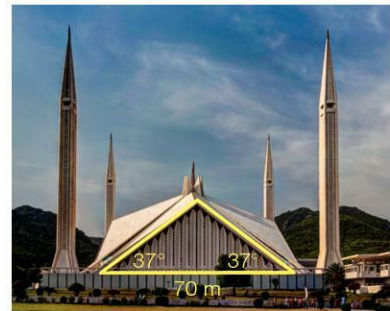


figuur 7.111

- 10** Van $\triangle ABC$ is $\angle C = 76^\circ$ en $AC = BC = 4,1$.
- Schets $\triangle ABC$.
 - Om AB te berekenen, teken je eerst hoogtelijn CD . Deze hulplijn is de symmetrieas van $\triangle ABC$. Bereken AB in twee decimalen nauwkeurig. Gebruik dat uit de symmetrie volgt $AD = BD$.

- 11** Van $\triangle DEF$ is $EF = 6$ en $DE = DF = 3,8$. Bereken de hoeken van $\triangle DEF$.

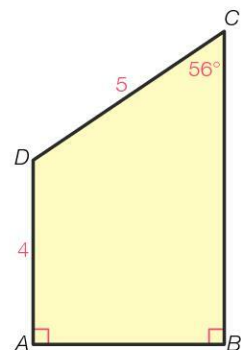
- 12** In figuur 7.112 zie je de Faisalmoskee van de Pakistaanse hoofdstad Islamabad. De voorgevel heeft de vorm van een gelijkbenige driehoek met een basis van 70 meter en basishoeken van 37° . Bereken de hoogte van de voorgevel in meter. Rond af op één decimaal. Maak eerst een schets en teken hierin de hoogtelijn vanuit de top.



figuur 7.112

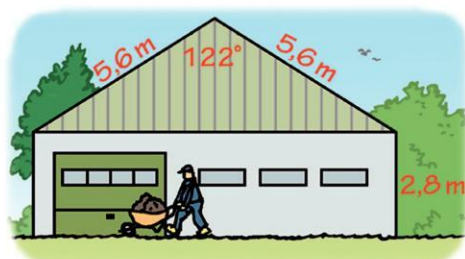
7.4 Berekeningen met goniometrie

- 13** Zie figuur 7.113.
- Bereken AB in één decimaal nauwkeurig. Maak eerst een schets van vierhoek $ABCD$ en teken hierin de hulplijn vanuit D loodrecht op BC .
 - Bereken BC in één decimaal nauwkeurig.



figuur 7.113

- 14** In figuur 7.114 zie je het vooraanzicht van een schuur.
Bereken de hoogte en de breedte van de schuur in meter. Rond af op één decimaal.

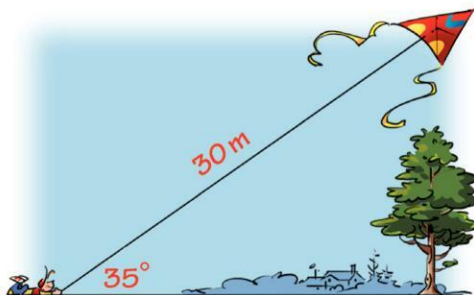


figuur 7.114

- 15** Bert is aan het vliegeren. Het vliegertouw is 30 meter lang en de hoek die het touw met de grond maakt is 35° . Zie figuur 7.115.
a Hoe hoog staat de vlieger?

Na een poosje klimt de vlieger door de wind tot een hoogte van 24 meter.

- b** Bereken de hoek die het vliegertouw dan met de grond maakt.



figuur 7.115

7.5 Lijnstukken en hoeken berekenen

- 16** Gegeven is de rechthoek $ABCD$ in figuur 7.116. Om AF te berekenen, gebruik je eerst de stelling van Pythagoras in $\triangle ABE$. Vervolgens maak je gebruik van gelijkvormigheid.

- a** Toon aan dat $AE = 17$.

- b** Toon aan dat $\triangle AFD \sim \triangle EFC$.

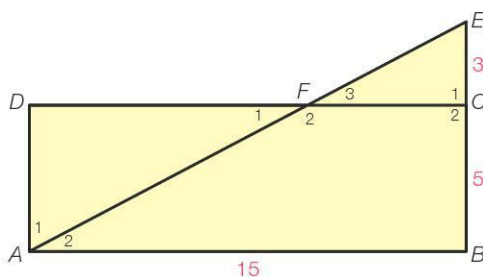
- c** Vul in.

Uit $\triangle AFD \sim \triangle EFC$ volgt de verhoudingstabel $\frac{AD}{AF}$.

- d** Vul in.

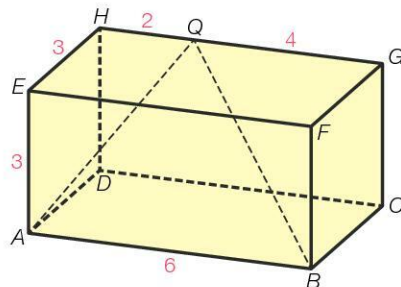
Stel $AF = x$. Dan is $EF = \dots - x$.

- e** Bereken AF in één decimaal nauwkeurig. Gebruik de verhoudingstabel van vraag c.



figuur 7.116

- 17** Zie de balk in figuur 7.117.
a Bereken AH , en schets het diagonaalvlak $ABGH$ met AQ en BQ .
b Welke goniometrische verhouding gebruik je om $\angle AQH$ te berekenen? Bereken $\angle AQH$.
c Bereken $\angle BQG$.
d Bereken $\angle AQB$.



figuur 7.117

Onderzoek Driehoeksmeting

Bij bouwprojecten zie je weleens landmeters aan het werk met hun digitale apparatuur. Maar hoe bracht men vroeger het landschap in kaart? De meetinstrumenten waren minder nauwkeurig, maar de wiskunde was toen precies hetzelfde.



- 1** [▶ WERKBOEK] Zie figuur 7.118. Een landmeter heeft de opdracht om de afstand AB te bepalen, maar de rivier maakt het lastig om deze afstand direct te meten. De landmeter maakt daarom gebruik van punt C en meet $AC = 124$ meter, $\angle A = 54^\circ$ en $\angle C = 66^\circ$.

- a Teken in $\triangle ABC$ hoogtelijn AD , en licht toe dat $AD = 124 \sin(66^\circ)$ en $AD = AB \sin(60^\circ)$.
- b Geef de vergelijking die uit vraag a volgt, en toon aan dat $AB \approx 131$ meter.



figuur 7.118

- 2** [▶ WERKBOEK] Door in figuur 7.118 in $\triangle ABC$ hoogtelijn CE te tekenen, kun je ook de afstand BC berekenen. Onderzoek hoe dat gaat, en toon aan dat $BC \approx 116$ meter.

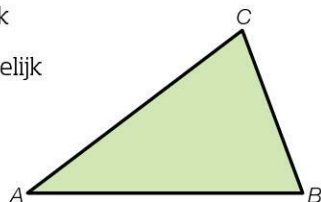
In opgave 1 en 2 heb je de twee onbekende zijden van $\triangle ABC$ berekend door gebruik te maken van hoogtelijnen. Maar ook zonder hoogtelijnen kun je de onbekende zijden berekenen. Hoe dit gaat, onderzoek je in opgave 3.

- 3** In figuur 7.118 is BC de overstaande zijde van $\angle A$.
- a Geef de overstaande zijde van $\angle B$, en de overstaande zijde van $\angle C$.
 - b Bereken $\frac{\sin(\text{hoek})}{\text{overstaande zijde van de hoek}}$ voor $\angle A$, $\angle B$ en $\angle C$.
Welk vermoeden krijg je?
 - c Teken een willekeurige driehoek ABC en meet alle hoeken en zijden. Controleer of je vermoeden bevestigd wordt.
En hoe zit dat bij je klasgenoten?

In opgave 3 heb je het vermoeden gekregen dat in een driehoek de verhoudingen $\frac{\sin(\text{hoek})}{\text{overstaande zijde van de hoek}}$ aan elkaar gelijk zijn. Algemeen geldt dat voor elke $\triangle ABC$

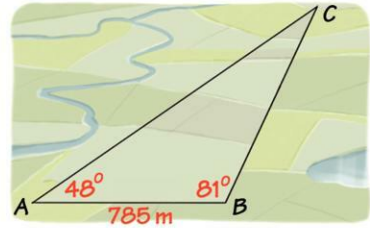
$\frac{\sin(\angle A)}{BC} \mid \frac{\sin(\angle B)}{AC} \mid \frac{\sin(\angle C)}{AB}$ een verhoudingstabel is.

Dit staat bekend als de **sinusregel**.



- 4** Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 65^\circ$ en $AC = 10$. Bereken BC en AB met de sinusregel. Rond af op één decimaal.

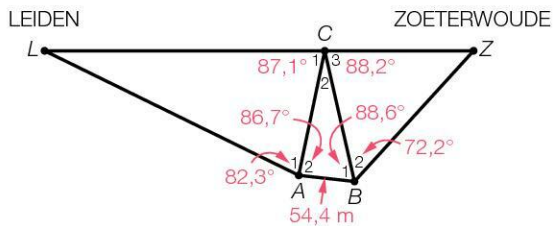
- 5 Een landmeter wil de omtrek van een driehoekige akker bepalen. Hij heeft hiervoor twee hoeken en een zijde gemeten. Zie figuur 7.119. Bereken de omtrek van de akker in meter.



figuur 7.119

Door van een driehoek twee hoeken en de zijde tussen deze twee hoeken te meten, kun je de overige twee zijden berekenen met de sinusregel. Deze combinatie van meten en berekenen wordt **driehoeksmeting** genoemd. Een van de pioniers met deze methode was de Leidenaar Willebrord Snel van Royen, beter bekend als Snellius. In 1615 bepaalde Snellius via driehoeksmeting de afstand tussen de toren van het stadhuis van Leiden en de kerktoeren van Zoeterwoude, terwijl hij maar een fractie van de afstand daadwerkelijk hoefde te meten. In de volgende opgave ontdek je hoe dat gaat.

- 6 Zie figuur 7.120. Om de afstand tussen Leiden en Zoeterwoude te berekenen, is de afstand tussen twee bomen A en B gemeten. Verder is op de lijn LZ een herkenningpunt C gekozen, en is een aantal hoeken gemeten.



figuur 7.120

- 7 Een theodoliet is een instrument om hoeken te meten. Er zijn ook apps waarmee dit kan. Download zo'n app en onderzoek hoe deze werkt.
- 8 In deze opdracht ga je zelf een afstand met driehoeksmeting bepalen. Voer daarvoor de volgende stappen uit:
- Zoek in de buurt een open ruimte, zoals een plein of grasveld.
 - Kies twee punten A en B , die minstens 50 meter uit elkaar liggen en waartussen je de afstand kunt meten.
 - Zorg dat je vanuit zowel A als B een verderop gelegen punt C kunt zien, bijvoorbeeld een kerktoeren of een flatgebouw.
 - Onderzoek hoe je de afstand AB zo nauwkeurig mogelijk kunt meten, en voer de meting uit.
 - Meet $\angle ABC$ en $\angle BAC$ zo nauwkeurig mogelijk met de app die je in opgave 6 hebt gevonden.
- Bereken de afstanden AC en BC . Controleer je antwoord met bijvoorbeeld Google Earth of afstandmeten.nl.

Allerlei verbanden

Het gebruik van elektrische auto's zit in de lift. Op 1 januari 2018 reden er bijna 22 000 elektrische auto's rond in Nederland. De verwachting is dat dit aantal de komende jaren flink toeneemt. 'Tanken' met een elektrische auto doe je bij een laadpaal. Er zijn drie soorten laadpalen: de oplaadpaal voor thuis, de publieke laadpaal, en de snellaadpaal. De snellaadpaal tref je met name aan langs auto- en snelwegen en op grote parkeerterreinen en carpoolplaatsen.

Het bedrijf Fastned bouwt en beheert snellaadstations in ons land, waarbij zonne- en windenergie worden gebruikt voor het opwekken van de elektriciteit. In 2017 was Fastned nog niet winstgevend. Wel verdubbelde dat jaar de omzet vergeleken met het jaar ervoor.

Wat leer je?

- Wat exponentiële groei is.
- Hoe de formule van exponentiële groei eruit ziet.
- Dat bij procentuele toename per tijdseenheid exponentiële groei hoort.
- Het verschil tussen lineaire en exponentiële groei.
- Wat interpoleren en extrapoleren is.
- Werken met periodieke verbanden.
- Wat een machtsfunctie is.
- Vergelijkingen met machten oplossen.
- Welke formule bij een omgekeerd evenredig verband hoort.

8



Dag
Benzine

Hallo
Zon en Wind!

Voorkennis

Vermenigvuldigingsfactor, de formule van een lijn, en de vergelijking $x^2 = c$

Theorie A Vermenigvuldigingsfactor

Neemt een hoeveelheid met 23% toe, dan krijg je $100\% + 23\% = 123\%$. Dus NIEUW = $1,23 \times$ OUD.
Het getal 1,23 is de vermenigvuldigingsfactor bij een procentuele toename van 23%.

Omgekeerd hoort bij de vermenigvuldigingsfactor 1,068 een procentuele toename van 6,8%.

$\times 1,068$, dus 106,8%.
 $106,8\% - 100\% = 6,8\%$

Neemt een hoeveelheid met 14% af, dan krijg je $100\% - 14\% = 86\%$. Dus bij een procentuele afname van 14% hoort de vermenigvuldigingsfactor 0,86.

Omgekeerd hoort bij de vermenigvuldigingsfactor 0,703 een procentuele afname van 29,7%.

$\times 0,703$, dus 70,3%.
 $100\% - 70,3\% = 29,7\%$

- 1 Neem de tabel over en vul hem verder in.

procentuele toename	17%	1,7%	0,17%	83,2%			
vermenigvuldigingsfactor					1,023	1,0085	2,5

- 2 Neem de tabel over en vul hem verder in.

procentuele afname	31%	3,1%	0,31%	68,7%			
vermenigvuldigingsfactor					0,87	0,982	0,997

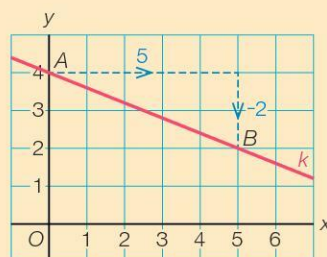
Theorie B De formule van een lijn

De formule van lijn k in figuur 8.1 stel je als volgt op.

- 1 Stel $y = ax + b$.
- 2 Het snijpunt met de y -as is $(0, 4)$, dus $b = 4$.
- 3 Gebruik ook het punt $(5, 2)$.

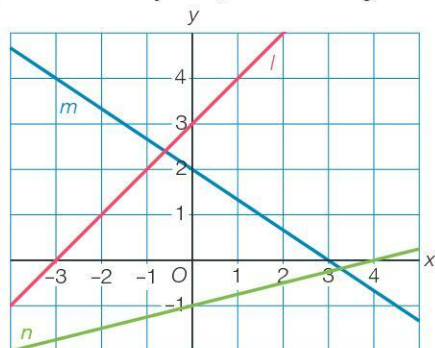
$$\text{Je krijgt } a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = -\frac{2}{5}.$$

- 4 Dus $k: y = -\frac{2}{5}x + 4$.

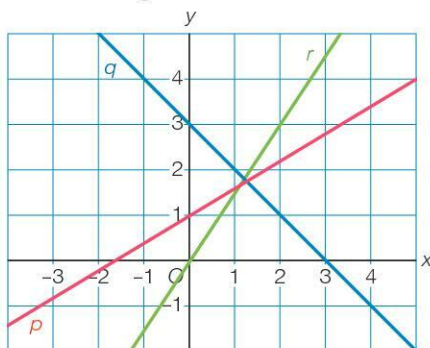


figuur 8.1

- 3 Stel van de lijnen l , m en n in figuur 8.2 de formule op.



figuur 8.2



figuur 8.3

- 4 Stel van de lijnen p , q en r in figuur 8.3 de formule op.

Theorie C en de opgaven 5 en 6 bereiden voor op de plus-stof van paragraaf 8.5.

Theorie C De vergelijking $x^2 = c$

Van de vergelijking $x^2 = 25$ zijn de oplossingen $x = 5$ en $x = -5$. Want $5^2 = 25$ en $(-5)^2 = 25$.

Ook $x^2 = 11$ heeft twee oplossingen, namelijk $x = \sqrt{11}$ en $x = -\sqrt{11}$. Met je rekenmachine kun je deze oplossingen benaderen. Je krijgt $x \approx 3,32$ en $x \approx -3,32$.

De vergelijking $x^2 = 0$ heeft één oplossing, namelijk $x = 0$.

De vergelijking $x^2 = -4$ heeft geen oplossing, want het kwadraat van een getal is niet negatief.

Voorbeeld

Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^2 + 3 = 15$

b $3x^2 = 15$

c $3x^2 + 3 = 15$

Uitwerking

a $x^2 + 3 = 15$

$x^2 = 12$

$x = \sqrt{12} \vee x = -\sqrt{12}$

$x \approx 3,46 \vee x \approx -3,46$

b $3x^2 = 15$

$x^2 = 5$

$x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$

$x \approx 2,24 \vee x \approx -2,24$

c $3x^2 + 3 = 15$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$

- 5 Los op zonder rekenmachine.

a $x^2 - 16 = 0$

c $x^2 + 12 = 13$

e $x^2 - 5 = 139$

b $3x^2 = 75$

d $4x^2 = -64$

f $x^2 + 2 = 2$

- 6 Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

a $3x^2 + 5 = 26$

c $6x^2 - 1 = 11$

e $2x^2 + 5 = 4$

b $5x^2 - 5 = 25$

d $-2x^2 + 2 = -14$

f $6x^2 - 5 = 49$

8.1 Exponentiële groei

0 1 Fastned bouwt en beheert snellaadstations voor elektrische auto's in Nederland. In 2017 was de omzet van Fastned 0,5 miljoen euro. Dat was een verdubbeling ten opzichte van het jaar ervoor. Neem aan dat de omzet ook na 2017 jaarlijks blijft verdubbelen. Neem de tabel hiernaast over en vul hem verder in. In de tabel is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2016.

OMZET FASTNED IN MILJOENEN

t	0	1	2	3	4
omzet	0,25	0,5			

Theorie A Formule voor exponentiële groei

De omzet in opgave 1 verdubbelt elk jaar. Het bedrag wordt dus elk jaar met 2 vermenigvuldigd. Je hebt hier te maken met een voorbeeld van **exponentiële groei**. Het getal waarmee het aantal elk jaar wordt vermenigvuldigd, heet de **groefactor** per jaar. De groefactor per jaar is hier 2. Verder is de **beginhoeveelheid**, de hoeveelheid op $t = 0$, gelijk aan 0,25 miljoen.

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Dat getal heet de groefactor per tijdseenheid.

De omzet in miljoenen euro's van Fastned noemen we N .

Op $t = 1$ is $N = 0,25 \cdot 2 = 0,25 \cdot 2^1$.

Op $t = 2$ is $N = 0,25 \cdot 2 \cdot 2 = 0,25 \cdot 2^2$.

Op $t = 3$ is $N = 0,25 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 0,25 \cdot 2^3$.

Op $t = 4$ is $N = 0,25 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 0,25 \cdot 2^4$.

Algemeen is $N = 0,25 \cdot 2^t$.

Bij de exponentiële groei $N = 0,25 \cdot 2^t$ herken je:

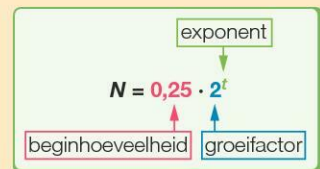
- de beginhoeveelheid is 0,25
- de groefactor per tijdseenheid is 2.

Op $t = 6$ is $N = 0,25 \cdot 2^6 = 16$.

Op de rekenmachine tik je in

$0,25 \times 2 \wedge 6 =$ (Casio) of

$0,25 \times 2 \wedge 6 \text{ ENTER}$ (TI).



Exponentiële groei

beginwaarde b

$b \cdot g$ } $\times g$

$b \cdot g^2$ } $\times g$

$b \cdot g^3$ } $\times g$

$\vdots$

$b \cdot g^t$ } $\times g$

Formule voor exponentiële groei

$$N = b \cdot g^t$$

b is de beginhoeveelheid of beginwaarde.

g is de groefactor per tijdseenheid.

In de formule van exponentiële groei staat de variabele in de exponent.

Voorbeeld

Namibië is een land in Zuidwest-Afrika. Op 1 januari 2017 had Namibië 2,49 miljoen inwoners. De verwachting is dat dit aantal elk jaar met 1,023 wordt vermenigvuldigd.

- a Stel de formule op van het aantal inwoners N in miljoenen na t jaar.
- b Hoeveel inwoners telt Namibië op 1 januari 2025?
- c Onderzoek in welk jaar het aantal inwoners op 1 januari voor het eerst meer dan 3,6 miljoen is.

Uitwerking

- a
$$\left. \begin{array}{l} \text{formule } N = b \cdot g^t \\ \text{beginwaarde } b = 2,49 \\ \text{groefactor per jaar } g = 1,023 \end{array} \right\} N = 2,49 \cdot 1,023^t$$
- b $t = 8$ geeft $N = 2,49 \cdot 1,023^8 \approx 2,99$
Dus op 1 januari 2025 heeft Namibië 2,99 miljoen inwoners.
- c Neem beginwaarde 2,49 en vermenigvuldig herhaald met 1,023.
 $t = 16$ geeft $N = 3,582 \dots$
 $t = 17$ geeft $N = 3,665 \dots$
17 jaar na 1 januari 2017, dus op 1 januari 2034 is het aantal inwoners voor het eerst meer dan 3,6 miljoen.



Rond verstandig af. Geef NIEUW in dezelfde nauwkeurigheid als OUD.

Neem beginwaarde 2,49 en vermenigvuldig herhaald met 1,023.

Tik in $2,49 =$
 $\times 1,023 =$ ← op $t = 1$
 $=$ ← op $t = 2$
 $=$ ← op $t = 3$

enzovoort

Na 17 keer $=$ heb je $2,49 \cdot 1,023^{17}$.

T 2 [►►6] Botswana is een land in Zuidwest-Afrika. Op 1 januari 2017 had Botswana 2,22 miljoen inwoners. De verwachting is dat dit aantal jaarlijks met 1,019 wordt vermenigvuldigd.

- a Stel de formule op van het aantal inwoners N in miljoenen na t jaar.
- b Hoeveel inwoners heeft Botswana op 1 januari 2024?
- c In welk jaar zijn er op 1 januari voor het eerst meer dan 3 miljoen inwoners?
- d Men verwacht dat 9,5% van alle inwoners op 1 januari 2026 in de hoofdstad Gaborone woont. Hoeveel zijn dat er? Rond af op duizendtallen.

3 Gegeven is de formule $N = 18 \cdot 1,3^t$.

- a Hoeveel is de beginhoeveelheid? Schrijf de groefactor op.
- b Bereken N voor $t = 4$. Rond af op één decimaal.
- c Onderzoek voor welke t de hoeveelheid N voor het eerst meer dan 650 is.

- 4** Een boom van 1,8 meter is op 1 maart 2019 geplant. Volgens de kweker wordt de boom elk jaar 1,2 keer zo hoog.
- Stel de formule op van de hoogte h in meter na t jaar.
 - Hoe hoog is de boom op 1 maart 2025?
 - Op 1 maart van welk jaar is de boom voor het eerst hoger dan 10 meter?

- 5** Op 1 januari 2019 had een bedrijf 6500 werknemers. De directie verwacht dat dit aantal jaarlijks met 1,06 vermenigvuldigd wordt.
- Stel de formule op van het aantal werknemers N na t jaar.
 - Hoeveel werknemers verwacht de directie op 1 januari 2029?
 - Op 1 januari van welk jaar verwacht de directie voor het eerst meer dan 20000 werknemers?

- A 6** Elektronisch betalen blijft onverminderd groeien. In 2017 werd in Nederland 3,84 miljard keer met de pinpas betaald, voor een totaalbedrag van 97,3 miljard euro. De verwachting is dat het aantal pinbetalingen jaarlijks met 1,086 wordt vermenigvuldigd.
- Stel de formule op van het aantal pinbetalingen N per jaar in miljarden. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2017.
 - Hoeveel keer zal er in 2021 met de pinpas worden betaald?
 - In 2023 zullen er meer pinbetalingen zijn dan in 2022. Hoeveel meer?
 - In welk jaar wordt er voor het eerst meer dan 7,5 miljard keer met de pinpas betaald?



- 7** Ga uit van een groot vel papier met een dikte van 0,1 mm.
- Hoe vaak denk je dat je het papier dubbel kunt vouwen? Controleer je schatting.
 - Schrijf de formule op van de dikte D in km na n keer vouwen.
 - Na hoeveel keer vouwen is het papier meer dan 100 km dik?
 - Bij 42 keer vouwen is de afstand Aarde-Maan overbrugd. Wat weet je op grond hiervan over de afstand Aarde-Maan?



O 8 In tien jaar tijd is de brievenbuspost gehalveerd van 4,8 miljard poststukken in 2005 tot 2,4 miljard poststukken in 2015. De verwachting is dat de brievenbuspost ook in de toekomst elke tien jaar zal halveren.

- Neem de tabel hiernaast over en vul hem verder in. De tijd t is in tientallen jaren met $t = 0$ in 2005 en N is het aantal poststukken in miljarden.
- Stel de formule op van N .

t	0	1	2	3	4
N	4,8	2,4			

Theorie B Exponentiële afname

In opgave 8 halveert de brievenbuspost elke tien jaar. De groeifactor per tien jaar is dus 0,5. De hoeveelheid neemt voortdurend af. We spreken van **exponentiële afname**. Bij exponentiële afname hoort de formule $N = b \cdot g^t$ met g tussen 0 en 1, oftewel $0 < g < 1$. Negatieve groeifactoren bestaan niet. Het aantal poststukken zou dan negatieve waarden aan kunnen nemen, en dat kan niet.

Exponentiële groei

$$N = b \cdot g^t$$

$g > 1$
exponentiële
toename

$0 < g < 1$
exponentiële
afname

9 Gegeven is de formule $N = 850 \cdot 0,83^t$.

- Welk getal is de groeifactor?
- Bereken N voor $t = 4$. Rond af op één decimaal.
- Onderzoek voor welke t de hoeveelheid N voor het eerst minder dan 10 is.

Exponentiële afname is een vorm van exponentiële groei.



A 10 Litouwen is een land in Noordoost-Europa. Op 1 januari 2017 had Litouwen 2,82 miljoen inwoners. De verwachting is dat dit aantal jaarlijks met 0,987 wordt vermenigvuldigd.

- Stel de formule op van het aantal inwoners N in miljoenen na t jaar.
- Hoeveel inwoners zijn er op 1 januari 2027?
- Onderzoek in welk jaar er voor het eerst minder dan 2,3 miljoen inwoners zullen zijn.
- Met hoeveel neemt het aantal inwoners af in de periode van 1 januari 2020 tot 1 januari 2030?

A 11 Een patiënt neemt op een dag 12 mg van een medicijn in. Per dag wordt $\frac{1}{4}$ deel van het medicijn in het lichaam afgebroken, dus na een dag is er nog $\frac{3}{4}$ deel over.

- Stel de formule op van het aantal mg N van het medicijn dat t dagen na het innemen nog aanwezig is.
- Onderzoek na hoeveel dagen de hoeveelheid voor het eerst minder dan 0,5 mg is.

12 Een hoeveelheid neemt exponentieel af. De beginhoeveelheid is 1000 en op $t = 2$ is er nog 810 over. Bereken de hoeveelheid op $t = 8$. Rond af op gehelen.

8.2 Procenten en groeifactoren

- O 13**
- a** Een bedrag van 80 euro neemt met 10% toe.
Hoeveel heb je dan? Met welk getal is vermenigvuldigd?
 - b** Een bedrag van 200 euro neemt met 3,6% toe.
Hoeveel heb je dan? Met welk getal is vermenigvuldigd?

Theorie A Procentuele toename

Neemt een hoeveelheid met 12% toe, dan krijg je $100\% + 12\% = 112\%$.

Dus $\text{NIEUW} = 1,12 \times \text{OUD}$.

Neemt een hoeveelheid *per tijdseenheid* met 12% toe, dan heb je te maken met exponentiële groei met groeifactor 1,12 per tijdseenheid.

toename van

- 18%, dan $\text{NIEUW} = 1,18 \times \text{OUD}$
- 8%, dan $\text{NIEUW} = 1,08 \times \text{OUD}$
- 1,8%, dan $\text{NIEUW} = 1,018 \times \text{OUD}$
- 0,8%, dan $\text{NIEUW} = 1,008 \times \text{OUD}$

Bij een procentuele toename van

- 39% per jaar hoort exponentiële groei met groeifactor 1,39 per jaar
- 2,5% per jaar hoort exponentiële groei met groeifactor 1,025 per jaar.

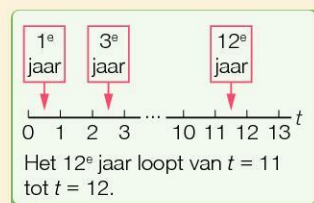
Voorbeeld

Een bedrag van 150 euro staat tegen een jaarlijkse rente van 1,2% op een spaarrekening.

- a** Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat na t jaar op de spaarrekening staat.
- b** Hoeveel is het bedrag na 8 jaar?
- c** Na hoeveel jaar staat er voor het eerst meer dan 200 euro op de rekening?
- d** Met hoeveel euro neemt het bedrag het twaalfde jaar toe?

Uitwerking

- a** formule $B = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 150$
toename 1,2%, dus groeifactor $g = 1,012$ } $B = 150 \cdot 1,012^t$
- b** $t = 8$ geeft $B = 150 \cdot 1,012^8 \approx 165,02$ euro **rond geldbedragen af op centen**
- c** Neem beginwaarde 150 en vermenigvuldig herhaald met 1,012.
 $t = 24$ geeft $B \approx 199,72$
 $t = 25$ geeft $B \approx 202,12$
Na 25 jaar staat er voor het eerst meer dan 200 euro op de rekening.
- d** Het 12^e jaar loopt van $t = 11$ tot $t = 12$.
 $t = 11$ geeft $B = 150 \cdot 1,012^{11} = 171,031\dots$
 $t = 12$ geeft $B = 150 \cdot 1,012^{12} = 173,084\dots$
De toename is $173,084\dots - 171,031\dots \approx 2,05$ euro.



T 14 [►►17] Australië is een land dat maar liefst 185 keer zo groot is als Nederland. Op 1 januari 2017 had Australië 23,2 miljoen inwoners, en dat aantal neemt jaarlijks met 1,12% toe.

- a** Stel de formule op van het aantal inwoners N in miljoenen t jaar na 1 januari 2017.
- b** Hoeveel inwoners komen er in 2024 bij? Rond af op duizendtallen.
- c** In welk jaar zijn er voor het eerst 27 miljoen inwoners?

15 Een bedrag van 780 euro staat tegen een jaarlijkse rente van 1,4% op een spaarrekening.

- a** Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat na t jaar op de spaarrekening staat.
- b** Hoeveel is het bedrag na zeven jaar?
- c** Na hoeveel jaar staat er voor het eerst meer dan 1000 euro op de rekening?
- d** Met hoeveel euro neemt het bedrag het tiende jaar toe?

16 Het aantal herten in een natuurgebied neemt jaarlijks met 4% toe. Op 1 januari 2019 zijn er 44 herten in het natuurgebied.

- a** Stel de formule op van het aantal herten N dat t jaar na 1 januari 2019 in het natuurgebied aanwezig is.
- b** Hoeveel herten zijn er op 1 januari 2024 in het natuurgebied? En hoeveel op 1 januari 2029?
- c** Op 1 januari van welk jaar is het aantal herten in het natuurgebied voor het eerst meer dan 80?



A 17 Mevrouw Halzema leent een bedrag van 5000 euro tegen 1,2% rente per maand.

- a** Stel de formule op van de schuld S in euro's na t maanden.
- b** Hoeveel is haar schuld na anderhalf jaar?
- c** Met hoeveel euro neemt de schuld de zesde maand toe?
- d** Met hoeveel euro neemt de schuld het tweede jaar toe?
- e** Na drie jaar lost ze de schuld in één keer af. Hoeveel betaalt ze in totaal aan rente?

18 Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 7,8% toe. Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid in tien jaar toeneemt.

O 19 Een artikel van 80 euro wordt 12,5% goedkoper. Met welk getal moet je de oude prijs vermenigvuldigen om de nieuwe prijs te berekenen? Bereken de nieuwe prijs.

Theorie B Procentuele afname

Neemt een hoeveelheid met 3,8% af, dan krijg je $100\% - 3,8\% = 96,2\%$. Dus $\text{NIEUW} = 0,962 \times \text{OUD}$.

Neemt een hoeveelheid *per tijdseenheid* met 3,8% af, dan heb je te maken met exponentiële afname met groeifactor 0,962 per tijdseenheid. Je kunt ook zeggen dat er exponentiële groei is met groeifactor 0,962 per tijdseenheid.

afname van

- 18%, dan $\text{NIEUW} = 0,82 \times \text{OUD}$
- 1,8%, dan $\text{NIEUW} = 0,982 \times \text{OUD}$
- 0,18%, dan $\text{NIEUW} = 0,9982 \times \text{OUD}$
- 0,8%, dan $\text{NIEUW} = 0,992 \times \text{OUD}$

Bij een procentuele afname van

- 12% per jaar hoort exponentiële groei met groeifactor 0,88 per jaar
- 2,6% per jaar hoort exponentiële groei met groeifactor 0,974 per jaar.

- 20** Frits koopt op 1 januari 2019 een auto van 18 500 euro. De verwachting is dat de auto jaarlijks 22,5% in waarde afneemt.
- Stel de formule op van de waarde W in euro's na t jaar.
 - Hoeveel is de auto op 1 januari 2022 nog waard?
 - Hoeveel euro daalt de waarde van de auto in 2025?
 - In welk jaar is de waarde voor het eerst minder dan 1500 euro?

- A 21** In een meer is een giftige stof terechtgekomen. Metingen wijzen uit dat er 150 ppm van de stof in het meer aanwezig is. Bacteriën zorgen er voor dat de stof met 8% per week wordt afgebroken.
- Stel de formule op van de hoeveelheid P in ppm van de giftige stof die na t weken in het meer aanwezig is.
 - Met hoeveel ppm neemt de stof in de vijfde week af?
 - Na hoeveel weken is de hoeveelheid giftige stof voor het eerst meer dan gehalveerd?

ppm betekent 'parts per million'.
1 ppm geeft dus één miljoenste deel aan.

- A 22** Op 1 januari 1990 waren er in Nederland 125 000 land- en tuinbouwbedrijven en was de gemiddelde oppervlakte van een bedrijf 16,4 ha. Sindsdien is het aantal bedrijven met 2,9% per jaar afgenomen, terwijl de gemiddelde oppervlakte jaarlijks met 2,5% toenam.
- Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1990, en stel formules op van het aantal bedrijven N en de gemiddelde oppervlakte A van een bedrijf in ha.
 - Bereken in welk jaar op 1 januari de gemiddelde oppervlakte van een bedrijf voor het eerst meer dan 35 ha is.
 - Bereken met hoeveel procent het aantal bedrijven afnam in de periode van 1 januari 1998 tot 1 januari 2012.
 - Bereken de totale hoeveelheid land- en tuinbouwgrond op 1 januari 2020. Rond af op duizenden ha.

8.3 Tabellen en groei

23 De tabel hiernaast gaat over exponentiële groei. Hierbij is t de tijd in jaren en is N het aantal.

- Welk getal is de groeifactor per jaar?
- Stel de formule op van het aantal N na t jaar.
- Vul de tabel verder in.
- Bereken N voor $t = 8$. Rond af op gehelen.

t	0	1	2	3	4	5
N	1024	1280	1600			

Theorie A Tabel bij exponentiële groei

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid telkens met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Om na te gaan of bij de volgende tabel exponentiële groei hoort, voer je een aantal delingen uit. Zijn de uitkomsten van de delingen (bij benadering) gelijk, dan mag je uitgaan van exponentiële groei.

t in jaren	0	1	2	3	4	5
hoeveelheid N	320	500	780	1223	1899	2960

Bij deze tabel horen de delingen $\frac{500}{320} \approx 1,56$, $\frac{780}{500} = 1,56$,

$\frac{1223}{780} \approx 1,57$, $\frac{1899}{1223} \approx 1,55$ en $\frac{2960}{1899} \approx 1,56$.

Je ziet dat de opeenvolgende delingen telkens ongeveer 1,56 als uitkomst hebben. Je mag dan uitgaan van exponentiële groei met groeifactor 1,56 per jaar.

De beginhoeveelheid is 320, dus de formule is $N = 320 \cdot 1,56^t$.



Zijn de uitkomsten van de delingen vrijwel gelijk? Dan heb je te maken met exponentiële groei.

24 a Bij welke van de volgende tabellen is sprake van exponentiële groei?

I

t	0	1	2	3
N	8	12	18	27

II

t	0	1	2	3
N	8	12	16	20

III

t	0	1	2	3
N	50	60	72	86,4

b Stel in het geval van exponentiële groei de formule van N op.

25 a Toon aan dat bij de volgende tabel exponentiële groei hoort, en stel de formule van N op. Rond de groeifactor af op twee decimalen.

t	0	1	2	3	4	5	6
N	55	65	77	91	107	126	148

- Bereken N voor $t = 10$.
- Voor welke t is N voor het eerst meer dan 750?

- A 26** Bij een onderzoek worden schimmels gekweekt. In de tabel zie je hoeveel cm^2 de schimmels na t dagen bedekken.

tijd t in dagen	0	1	2	3	4	5	6
oppervlakte O in cm^2	3,5	4,9	6,9	9,7	13,6	19,0	26,6

- Teken de grafiek bij de tabel.
- Toon aan dat bij de tabel exponentiële groei hoort.
- Stel de formule van O op. Rond de groeifactor af op één decimaal.
- Voor welke t is de oppervlakte voor het eerst meer dan 50 cm^2 ?

- O 27** Door een aantal beschermingsmaatregelen gaat het weer goed met de das in Nederland. Freek onderzoekt het aantal dassen in een natuurgebied. De resultaten van zijn tellingen zie je in de tabel.

DASSEN IN NATUURGEBIED

jaar	2015	2016	2017	2018
aantal dassen	65	135	205	275



- Licht toe dat er geen sprake is van exponentiële groei.
- Neem aan dat de ontwikkeling uit de tabel zich voortzet. Bereken het aantal dassen in het natuurgebied in 2025.

Theorie B Lineaire en exponentiële groei

De volgende tabel hoort bij lineaire groei. Bij lineaire groei neemt de hoeveelheid telkens met hetzelfde aantal toe of af.

t	0	1	2	3	4
N	750	780	810	840	870

$\xrightarrow{+30}$ $\xrightarrow{+30}$ $\xrightarrow{+30}$ $\xrightarrow{+30}$

De bijbehorende formule is van de vorm $N = at + b$. Voor $t = 0$ is $N = 750$, dus $b = 750$. De toename van N is telkens 30, dus $a = 30$. De formule is $N = 30t + 750$.

De volgende tabel hoort bij exponentiële groei. Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid telkens met dezelfde factor vermenigvuldigd.

t	0	1	2	3	4
N	1280	1600	2000	2500	3125

$\times 1,25$ $\times 1,25$ $\times 1,25$ $\times 1,25$

De bijbehorende formule is van de vorm $N = b \cdot g^t$. De beginwaarde is $b = 1280$. De groeifactor is $g = 1,25$. De formule is $N = 1280 \cdot 1,25^t$.

Let op het verschil tussen lineaire groei en exponentiële groei.

lineaire groei

Per tijdseenheid neemt de hoeveelheid met hetzelfde aantal toe.

exponentiële groei

Per tijdseenheid wordt de hoeveelheid met dezelfde factor vermenigvuldigd.

28 Gegeven zijn de volgende tabellen.

I	t	0	1	2	3	4
	N	16	24	36	54	81

II	t	0	1	2	3	4
	N	28	25	22	19	16

- Welke tabel hoort bij lineaire groei? Waarom?
- Welke tabel hoort bij exponentiële groei? Licht toe.
- Stel bij elke tabel de formule op.
- Bereken voor elke tabel N voor $t = 8$.

29 Steeds meer mensen maken gebruik van deelauto's. De tabel hieronder gaat over het aantal deelauto's in Nederland.

DEELAUTO'S IN NEDERLAND OP 1 JANUARI

jaar	2013	2014	2015	2016	2017
aantal N	4000	9250	14 500	19 750	25 000

- Wat voor soort groei hoort bij de tabel? Licht toe.
- Stel de formule van N op. Neem hierin de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2013.
- Neem aan dat de formule van vraag b ook voor de jaren na 2017 geldt.
In welk jaar zal het aantal deelauto's in Nederland voor het eerst meer dan 50 000 zijn?

A 30 In de tabellen hiernaast staat informatie over de oppervlakte A in ha waarop in Nederland bloembollen worden geteeld.

- Bij welke tabel is sprake van lineaire groei? En bij welke van exponentiële groei?
- Stel bij beide tabellen de formule van A op. Neem hierin de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2014. Rond in het geval van exponentiële groei de groeifactor af op drie decimalen.
- Op hoeveel procent van het gebied waarop in Nederland bloembollen worden geteeld, worden in 2019 krokusbollen geteeld?

BLOEMBOLLEN TOTAAL

jaar	2014	2015	2016	2017
A	23 590	24 581	25 613	26 689

KROKUSBOLLEN

jaar	2014	2015	2016	2017
A	467	429	391	353

31 Bij een exponentiële groei hoort de formule $N = 2^{3t+7}$.
Schrijf de formule in de vorm $N = b \cdot g^t$.

In de tabel staat informatie over het aantal inwoners van Nederland.

BEVOLKING NEDERLAND IN MILJOENEN

jaar	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2015
aantal inwoners	10,0	11,4	13,0	14,1	14,9	15,9	16,7	16,9

Schat het aantal inwoners van Nederland in

a 1965

b 1998

c 2025

Theorie C Interpoleren en extrapoleren

In de tabel zie je gegevens over de frisdrankconsumptie in Nederland.

FRISDRANKCONSUMPTIE PER NEDERLANDER PER JAAR

jaar	1975	1980	1985	1990	1995	2002	2010	2014
aantal liter	56	58	58	71	81	94	102	95

Uitgaande van deze gegevens kun je een schatting geven van de hoeveelheid frisdrank die in 1998 door de Nederlander gemiddeld werd gedronken.

In 1995 was dat 81 liter en in 2002 was dat 94 liter. Dat is in

7 jaar 13 liter meer, dus in één jaar $\frac{13}{7}$ liter meer. 1998 is

drie jaar na 1995, dus de schatting voor 1998 is

$$81 + 3 \times \frac{13}{7} \approx 87 \text{ liter.}$$

Uitgaande van de gegevens van 1995 en 2002 heb je een schatting gegeven voor het tussenliggende jaar 1998. Een schatting geven van zo'n tussenliggende waarde heet **interpoleren** (inter = tussen).

Zou je bij de gegeven tabel een schatting geven van het frisdrankverbruik in 2025, dan ben je aan het **extrapoleren** (extra = buiten). Bij extrapoleren geef je een schatting voor een jaar dat buiten het onderzochte tijdvak ligt. Je gebruikt hiervoor de laatste twee waarnemingen uit de tabel.

De schatting voor 2025 krijg je als volgt. Bij 2010 hoort 102 liter en bij 2014 hoort 95 liter. Dat is in 4 jaar 7 liter minder, dus in één jaar $\frac{7}{4}$ liter minder. 2025 is elf jaar na 2014, dus de schatting voor 2025 is $95 - 11 \times \frac{7}{4} \approx 76$ liter.

Voor een schatting van 1998 gebruik je de waarnemingen van 1995 en 2002.



Bij extrapoleren gebruik je de laatste twee waarnemingen.

INTERPOLEREN Bij een serie waarnemingsgetallen een tussenliggende waarde schatten.
EXTRAPOLEREN Bij een serie waarnemingsgetallen een waarde schatten die buiten de serie waarnemingen ligt.

Bedenk dat je bij extrapoleren voorzichtig moet zijn met je schatting. Je weet nooit hoe een verschijnsel zich in de loop van de tijd ontwikkelt.

Maar ook bij interpoleren kun je er flink naast zitten, want tussen twee meetpunten kunnen behoorlijke schommelingen optreden.

Voorbeeld

In de tabel staat informatie over de omzet van de firma Intermac.

OMZET FIRMA INTERMAC IN MILJOENEN EURO'S

jaar	1995	2000	2003	2010	2017
omzet	8,3	6,5	6,1	9,7	12,4

- a Geef met interpoleren een schatting van de omzet in 1998.
- b Geef met extrapoleren een schatting van de omzet in 2023.

Uitwerking

- a In 5 jaar $8,3 - 6,5 = 1,8$ eraf, dus in één jaar $\frac{1,8}{5}$ eraf.

De omzet in 1998 was $8,3 - 3 \times \frac{1,8}{5} \approx 7,2$ miljoen euro.

- b In 7 jaar $12,4 - 9,7 = 2,7$ erbij, dus in één jaar $\frac{2,7}{7}$ erbij.

De omzet in 2023 is $12,4 + 6 \times \frac{2,7}{7} \approx 14,7$ miljoen euro.



Geef bij interpoleren en extrapoleren het antwoord in dezelfde nauwkeurigheid als de gegevens.

- 33 In de tabel staat informatie over het aantal verkochte vliegvakanties van reisbureau Globe.

AANTAL VERKOCHTE VLIEGVAKANTIES

jaar	1997	2001	2005	2017
aantal	3052	4163	4955	5211

- a Geef met interpoleren een schatting van het aantal verkochte vliegvakanties in 2004.
- b Geef met interpoleren een schatting van het aantal verkochte vliegvakanties in 2006.
- c Geef met extrapoleren een schatting van het aantal vliegvakanties dat in 2025 zal worden verkocht.

- 34** De tabel gaat over het aantal personen in Nederland dat verhuist.

AANTAL PERSONEN DAT VERHUIST

jaar	1997	2005	2012	2016
aantal $\times$ 1000	1740	1651	1479	1791

- Geef met interpoleren een schatting van het aantal personen dat is verhuist in 2000.
- Geef met interpoleren een schatting van het aantal personen dat is verhuist in 2010.
- Geef met extrapoleren een schatting van het aantal personen dat in 2025 gaat verhuizen.



- A 35** Zie de tabel hieronder.

CONSUMPTIE IN LITER PER PERSOON PER JAAR

jaar	2000	2007	2016
frisdrank	97,1	96,7	90,1
mineraal- en bronwater	16,9	21,9	25,7
sap en nectar	25,8	27,5	24,1

- Geef met interpoleren een schatting van de frisdrank-consumptie in 2010.
- Geef met extrapoleren een schatting van de consumptie van mineraal- en bronwater in 2025.
- Geef met extrapoleren de consumptie van sap en nectar in 2100. Geef commentaar.

- A 36** Daan maakt een ballonvaart. De boordcomputer meet voortdurend de hoogte en de temperatuur. Zie de tabel.

HOOGTE EN TEMPERatuur TIJDENS BALLONVAART

hoogte in meter	0	100	150	225	300	350
temperatuur in $^{\circ}\text{C}$	22,0	20,8	20,2	19,2	18,1	17,4

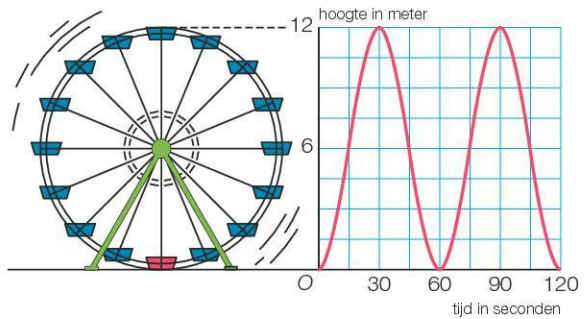
- Geef met interpoleren een schatting van de temperatuur op een hoogte van 180 meter.
- Geef met extrapoleren een schatting van de temperatuur op een hoogte van 420 meter.
- Geef met interpoleren een schatting van de hoogte waarop de temperatuur 20°C is.
- Geef met extrapoleren een schatting van de hoogte waarop de temperatuur 15°C is.

8.4 Periodieke verbanden

O 37

[► WERKBOEK] In figuur 8.4 zie je een reuzenrad met daarbij de grafiek van de hoogte van het rode bakje.

- Hoeveel seconden duurt één keer ronddraaien?
- 's Avonds draait het reuzenrad twee keer zo snel. Teken de grafiek die bij deze situatie hoort.
- Er is voor de kinderen een minirad met een hoogte van 6 meter dat twee keer zo langzaam draait als het reuzenrad in figuur 8.4. Teken de grafiek van de hoogte van een bakje in het minirad gedurende drie keer ronddraaien.



figuur 8.4

De grafiek heeft geen scherpe punten.

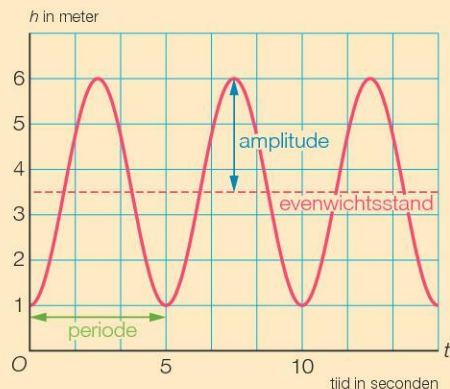


Theorie A Evenwichtsstand en amplitude

Sommige verschijnselen herhalen zich met een vaste regelmaat. Je hebt dan te maken met een **periodiek verband**. Denk maar aan de hoogte van een bakje in het reuzenrad, aan de getijdenbeweging van het zeewater en aan het in- en uitademen van de mens. Bij het reuzenrad in figuur 8.4 herhaalt de grafiek zich elke minuut. Daarom is de **periode** één minuut.

Bij een periodiek verband hoort een grafiek die zich steeds herhaalt. De kortste tijd die het duurt tot herhaling optreedt, heet de periode.

In figuur 8.5 zie je de grafiek van een periodiek verband. De periode is 5 seconden. De horizontale stippellijn hoort bij de **evenwichtsstand**. De hoogste en laagste punten van de grafiek liggen even ver van deze stippellijn. De grafiek schommelt als het ware om de evenwichtsstand. In de figuur hiernaast is de evenwichtsstand 3,5 meter. Het verschil tussen de hoogste stand en de evenwichtsstand heet de **amplitude**. Hiernaast is de amplitude dus $6 - 3,5 = 2,5$ meter.



figuur 8.5

$$\text{evenwichtsstand} = \frac{\text{hoogste stand} + \text{laagste stand}}{2}$$

$$\text{amplitude} = \text{hoogste stand} - \text{evenwichtsstand}$$

Voorbeeld

Zie figuur 8.6.

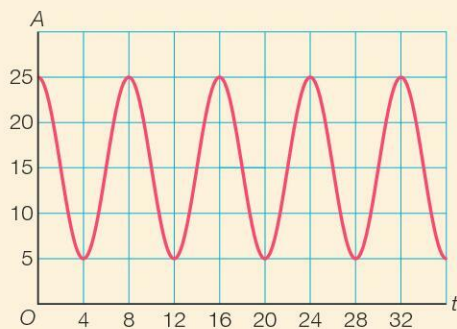
Bereken de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.

Uitwerking

$$\text{periode} = 12 - 4 = 8$$

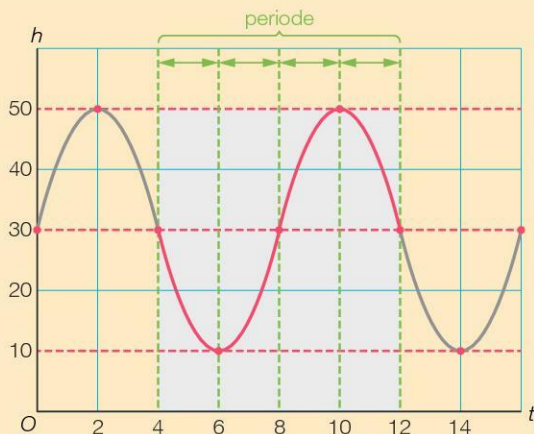
$$\text{evenwichtsstand} = \frac{25 + 5}{2} = 15$$

$$\text{amplitude} = 25 - 15 = 10$$



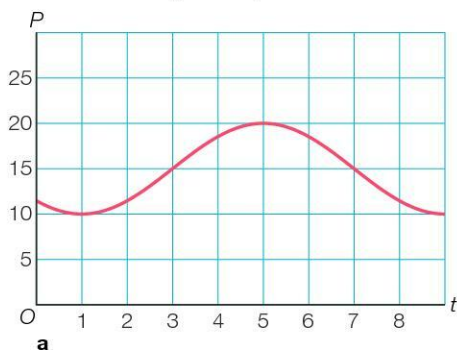
figuur 8.6

Bij het tekenen van de grafiek van een periodiek verband maak je gebruik van de periode, de evenwichtsstand en de amplitude. In de figuur hiernaast is een grafiek getekend van een periodiek verband met periode 8, evenwichtsstand 30 en amplitude 20. Merk op dat de horizontale afstand tussen de rode punten steeds een kwart periode is.

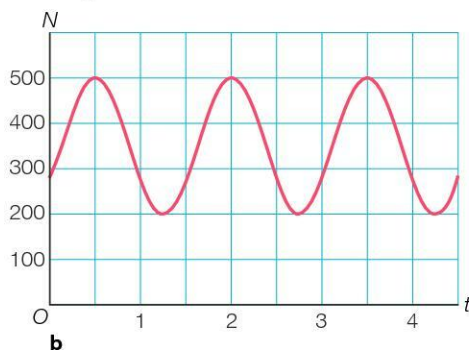


figuur 8.7

- 38 a** Zie figuur 8.8a.
Bereken de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.
- b** Zie figuur 8.8b.
Bereken de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.

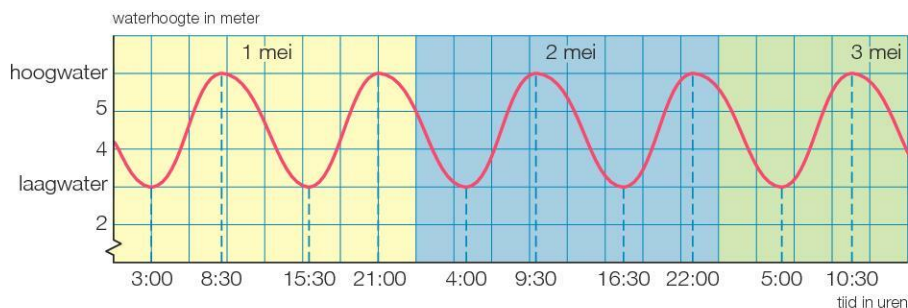


figuur 8.8



b

- 39** In Port Isaac, een vissersdorp in Engeland, is begin mei de waterhoogte in meter bijgehouden. Zie de grafiek.



figuur 8.9

- Bereken de periode.
- Op welke tijdstippen is het op 4 mei hoogwater?
- Op welke tijdstippen is het op 5 mei laagwater?
- De vissersboot WY3C wil op 2 mei de haven binnenvaren. Dat kan alleen als de waterhoogte meer dan 5 meter is. Tussen welke tijdstippen kan de WY3C binnenvaren?

- 40** [▶ WERKBOEK] Van de grafiek van een periodiek verband is de periode 4, de evenwichtsstand 5 en de amplitude 3. De grafiek gaat door het punt $(0, 8)$.

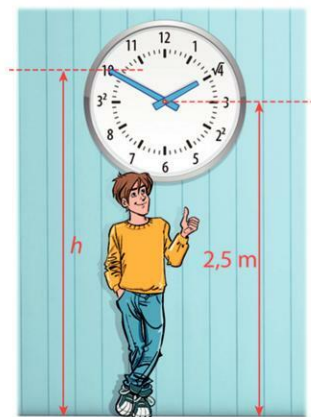
- Teken drie perioden van de grafiek.
- Geef de hoogste stand en de laagste stand.
- Welke hoogte hoort bij $t = 26$? En bij $t = 33$? En welke bij $t = 35$? En bij $t = 122$?

- A 41** [▶ WERKBOEK] Harm heeft in de woonkamer van zijn nieuwe appartement een klok opgehangen. Zie de figuur hiernaast. De grote wijzer van de klok heeft een lengte van 50 cm, de kleine wijzer is 30 cm lang. Op $t = 0$ is het middernacht. Bij de hoogte h in cm van het uiteinde van de grote wijzer hoort een periodiek verband.

- Geef de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.
- Teken twee perioden van de grafiek.

Ook bij de hoogte h in cm van het uiteinde van de kleine wijzer hoort een periodiek verband.

- Teken twee perioden van de grafiek.



figuur 8.10

42 [▶ WERKBOEK] Op een kermis staan een minirad en een reuzenrad. Het minirad is 6 meter hoog en draait drie keer per minuut rond. Het reuzenrad is 15 meter hoog en draait in 45 seconden één keer rond. Janneke stapt in het minirad en Ronald stapt op hetzelfde moment in het reuzenrad.

- Teken de grafieken van de hoogte van Janneke en de hoogte van Ronald gedurende 4 minuten.
- Na hoeveel seconden zijn Janneke en Ronald voor het eerst weer tegelijk beneden?

Je kunt het antwoord van vraag b ook zonder grafieken vinden. Gebruik hiervoor de veelvouden van 20 en 45.

De veelvouden van 20 zijn 20, 40, 60, ...

De veelvouden van 45 zijn 45, 90, 135, ...

- Hoe volgt het antwoord van vraag b uit de veelvouden van 20 en 45?
- Neem aan dat het minirad 25 seconden over een ronde doet. Na hoeveel seconden zijn Janneke en Ronald dan weer voor het eerst tegelijk beneden?

A 43 Ga bij de volgende onderdelen uit van een minirad I en een reuzenrad II. Ronald stapt in rad I en Janneke stapt op hetzelfde moment in rad II.

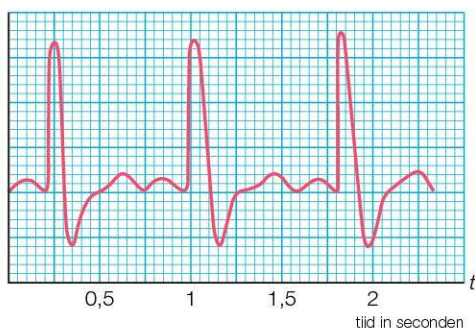
Bereken voor de volgende situaties telkens na hoeveel seconden ze voor het eerst weer tegelijk beneden zijn.

- Periode rad I is 18 seconden en periode rad II is een halve minuut.
- Periode rad I is 15 seconden en periode rad II is 50 seconden.
- Periode rad I is 1 minuut en 15 seconden en periode rad II is 2 minuten.



44 Bij onderzoek naar hartkwalen maakt men gebruik van een elektrocardiogram. Hiermee wordt de hartslag van een persoon in beeld gebracht. Figuur 8.11 gaat over het hart van Sifan.

- Per slag gaat er 70 cm^3 bloed door het hart van Sifan. Hoeveel liter bloed gaat er per etmaal door haar hart?
- Door een schrikreactie is het aantal slagen per minuut met 50% toegenomen. Bereken de periode van Sifans verhoogde hartslag.



figuur 8.11

8.5 Machtsfuncties

O 45 Het vermogen van een windmolen hangt af van de windsnelheid. Van een windmolen is het vermogen P in watt te berekenen met de formule $P = 60v^3$. Hierin is v de windsnelheid in meter per seconde.

- a** Bereken het vermogen bij een windsnelheid van 8 m/s.
- b** Op een zeker moment levert de windmolen een vermogen van 350 000 watt.
Is de windsnelheid dan meer of minder dan 20 m/s?



Theorie A Functiewaarden bij machtsfuncties

In de formule $P = 60v^3$ staat de derde macht van de variabele v . Deze formule is een voorbeeld van een **machtsformule**.

Andere voorbeelden van machtsformules zijn $y = 0,2x^5$, $y = 3x^4$ en $T = 0,5a^7$. De bijbehorende functies heten **machtsfuncties**.

Een functie f van de vorm $f(x) = ax^n$ is een machtsfunctie.

De functie $f(x) = 0,2x^4$ is een voorbeeld van een machtsfunctie.

Bij 3 hoort de functiewaarde $f(3) = 0,2 \cdot 3^4 = 16,2$.

En bij $-1,5$ hoort de functiewaarde $f(-1,5) = 0,2 \cdot (-1,5)^4 = 1,0125$.

Denk hierbij aan de haakjes om $-1,5$.

46 Gegeven is de functie $f(x) = 0,2x^5$.
Bereken $f(2)$, $f(-3,5)$ en $f(6,3)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

47 Gegeven is de functie $g(x) = -4x^4$.
Bereken $g(3)$, $g(-5,2)$ en $g(0,82)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

A 48 De inhoud I van een bol met straal r is te berekenen met de formule $I = \frac{4}{3}\pi r^3$.

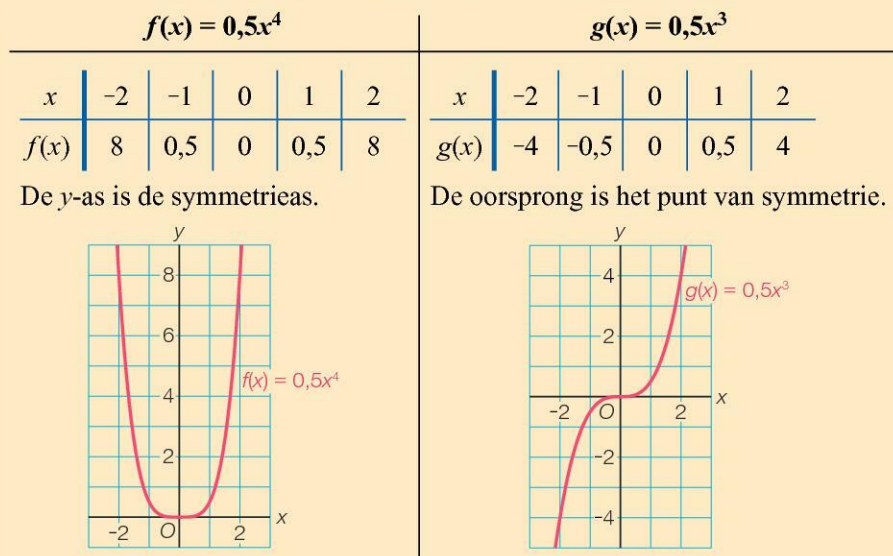
- a** De straal van een bol is 8 cm.
Bereken de inhoud van de bol in cm^3 . Rond af op gehele.
- b** Een volleybal past precies in een kubusvormige doos met ribben van 24 cm.
Hoeveel ruimte is er nog over in de doos als de bal erin zit? Geef je antwoord in cm^3 nauwkeurig.
- c** In een doosje van 20 bij 5 bij 5 cm passen precies vier golfballen.
Hoeveel procent van de ruimte in de doos wordt door de golfballen gevuld?

Theorie B Grafieken van machtsfuncties

Bij $f(x) = 0,5x^4$ is $f(2) = 0,5 \cdot 2^4 = 8$ en $f(-2) = 0,5 \cdot (-2)^4 = 8$.

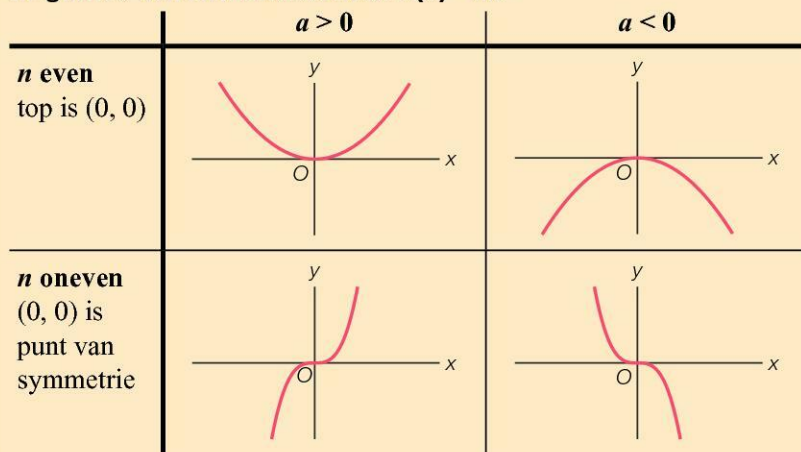
Bij $g(x) = 0,5x^3$ is $g(2) = 0,5 \cdot 2^3 = 4$ en $g(-2) = 0,5 \cdot (-2)^3 = -4$.

Hieronder zijn de grafieken van $f(x) = 0,5x^4$ en $g(x) = 0,5x^3$ getekend.



De grafiek van $h(x) = -0,5x^4$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = 0,5x^4$ door deze te spiegelen in de x-as, en de grafiek van $k(x) = -0,5x^3$ krijg je door de grafiek van $g(x) = 0,5x^3$ in de x-as te spiegelen.

De grafiek van de machtsfunctie $f(x) = ax^n$



49 Maak in aparte figuren schetsen van de grafieken van

a $f(x) = -6x^5$

c $h(x) = -200x^6$

e $p(x) = -6x^7$

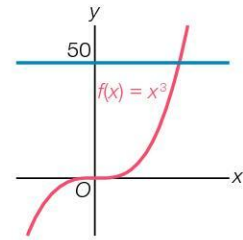
b $g(x) = 3,2x^4$

d $k(x) = 0,3x^5$

f $q(x) = -11x^{10}$

50

- a Uit figuur 8.12 volgt dat de vergelijking $x^3 = 50$ één oplossing heeft. Licht dit toe.
 b Licht met een schets toe dat de vergelijking $x^5 = -30$ één oplossing heeft.
 c Hoeveel oplossingen hebben de vergelijkingen $x^4 = 100$ en $x^6 = -60$? Licht je antwoorden toe met schetsen.



figuur 8.12

Theorie C De vergelijking $x^n = a$

In opgave 50 heb je gezien dat de vergelijking $x^3 = 50$ één oplossing heeft. Om x te benaderen, tik je in op de rekenmachine

3 **SHIFT** **x^y** **50** **=** (Casio) of **3** **2nd** **^** **50** **ENTER** (TI).

Je krijgt $x \approx 3,68$. Notatie: $x = \sqrt[3]{50} \approx 3,68$.

$\sqrt[3]{50}$ is de **derdemachtswortel** van 50.

De oplossing van de vergelijking $x^5 = 120$ is $x = \sqrt[5]{120} \approx 2,61$.

En de oplossing van $x^7 = 1000$ is $x = \sqrt[7]{1000} \approx 2,68$.

$\sqrt[3]{50}$, $\sqrt[5]{120}$ en $\sqrt[7]{1000}$ zijn voorbeelden van **hogermachtswortels**.

$\sqrt[3]{80}$ is de derdemachtswortel van 80.

$\sqrt[4]{29}$ is de vierdemachtswortel van 29.

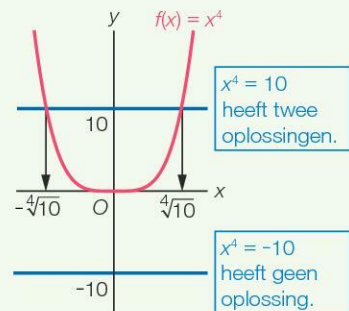
$\sqrt[5]{37}$ is de vijfdemachtswortel van 37.

De vergelijking $x^4 = 10$ heeft twee oplossingen, want de grafiek van $f(x) = x^4$ heeft twee snijpunten met de horizontale lijn op hoogte 10.

De positieve oplossing is $x = \sqrt[4]{10} \approx 1,78$.

De negatieve oplossing is $x = -\sqrt[4]{10} \approx -1,78$.

De grafiek van $f(x) = x^4$ heeft geen snijpunten met de horizontale lijn $y = -10$, dus de vergelijking $x^4 = -10$ heeft geen oplossing.



De vergelijking $x^n = a$

	$a > 0$	$a < 0$	$a = 0$
n even	twee oplossingen $x = \sqrt[n]{a} \vee x = -\sqrt[n]{a}$	geen oplossing	één oplossing $x = 0$
n oneven	één oplossing $x = \sqrt[n]{a}$	één oplossing $x = \sqrt[n]{a}$	één oplossing $x = 0$

Voor $\sqrt[n]{a}$ schrijven we $\sqrt[n]{a}$.



51 Los op. Geef de oplossingen in één decimaal nauwkeurig.

a $x^5 = 17$

b $x^4 = 28$

c $x^7 = 100$

d $x^3 = -21$

e $x^4 = -60$

f $x^5 = -0,01$

g $x^6 = 7$

h $x^{10} = 99\,999$

i $x^6 = 6$

Theorie D De vergelijking $ax^n + b = c$

Bij het oplossen van de vergelijking $5x^3 + 2 = -48$ krijg je

$$5x^3 + 2 = -48 \quad \text{breng 2 naar het rechterlid}$$

$$5x^3 = -50 \quad \text{deel beide leden door 5}$$

$$x^3 = -10 \quad \text{neem de derdemachtswortel van -10}$$

$$x = \sqrt[3]{-10} \quad \text{gebruik je rekenmachine om de oplossing te benaderen}$$

$$x \approx -2,15$$

Voorbeeld

Los op $3x^4 + 20 = 700$. Geef de oplossingen in twee decimalen nauwkeurig.

Uitwerking

$$3x^4 + 20 = 700$$

$$3x^4 = 680$$

$$x^4 = \frac{680}{3}$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{680}{3}} \vee x = -\sqrt[4]{\frac{680}{3}}$$

$$x \approx 3,88 \vee x \approx -3,88$$

52 Los op. Geef de oplossingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $3x^6 = 50$

c $2x^7 + 4 = -50$

e $3x^4 + 240 = -660$

b $x^3 + 6 = 60$

d $5x^3 - 74 = 100$

f $0,3x^5 - 38 = 183$

A 53 Los op. Geef de oplossingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $6x^4 - 20 = 500$

b $3x^3 - 15 = -92$

c $-7x^5 - 34 = -43$

A 54 Uit een onderzoek blijkt dat automobilisten een grotere kans hebben een ongeluk te krijgen als zij gewend zijn sneller te rijden dan toegestaan. Het ongevalsrisico R geeft aan hoeveel procent de kans is dat je binnen drie jaar bij een ongeval betrokken raakt. R is te berekenen met de formule $R = 0,215s^8$. Hierin geeft s aan hoeveel keer zo snel de automobilist gewend is te rijden vergeleken met de toegestane snelheid.

a Max is gewend 1,4 keer zo snel te rijden als toegestaan.

Bereken de kans dat Max binnen drie jaar bij een ongeluk betrokken raakt.

b Het ongevalsrisico van Daniël is 10%.

Bereken hoeveel keer zo snel hij gewend is te rijden als de toegestane snelheid. Rond af op één decimaal.

c Van 10000 automobilisten is bekend dat ze gewend zijn om de toegestane snelheid aan te houden.

Hoeveel van hen zullen naar verwachting de komende drie jaar niet bij een ongeluk betrokken raken?

- O 55** Neem over en vul in.
- a** $10^2 = 100$, dus $\sqrt{100} = \dots$
 - b** $5^3 = 125$, dus $\sqrt[3]{125} = \dots$
 - c** $3^4 = 81$, dus $\sqrt[4]{81} = \dots$

Theorie E Hogeremachtswortels herleiden

Omdat $6^3 = 216$, is $\sqrt[3]{216} = 6$.

En zo is $\sqrt[4]{81} = 3$, want $3^4 = 81$.

Bij het oplossen van de vergelijking $x^3 = 125$ krijg je als oplossing $x = \sqrt[3]{125}$. Omdat $5^3 = 125$, herleid je de oplossing tot $x = 5$.

En zo krijg je bij het oplossen van $x^6 = 64$ de oplossingen $x = 2$ en $x = -2$. Want $2^6 = 64$ en $(-2)^6 = 64$.



$x = \sqrt[6]{64}$ herleid je tot $x = 2$, want $2^6 = 64$.

Voorbeeld

Los op $3x^4 - 35 = 1840$.

Uitwerking

$$3x^4 - 35 = 1840$$

$$3x^4 = 1875$$

$$x^4 = 625$$

$$x = 5 \vee x = -5$$

- 56** **a** Neem de tabel hiernaast over en vul hem in.
b Leer de tabel uit je hoofd, zodat je de getallen voortaan herkent als macht.

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1					
2					
3					
4					
5					
6					

- 57** Los op. Gebruik de tabel van opgave 56.

- a** $x^3 = 27$
- b** $x^4 = 1$
- c** $x^5 = 32$
- d** $x^5 = -1024$
- e** $x^6 = -729$
- f** $x^3 = -216$

- A 58** Los op.

- a** $2x^3 = 128$
- b** $x^3 + 14 = 13$
- c** $-x^4 + 625 = 0$
- d** $2x^4 - 6 = 156$
- e** $-\frac{1}{2}x^5 + 3 = 3$
- f** $7 - 3x^6 = 4$

8.6 Omgekeerd evenredige verbanden

O 59

Een groot gebouw moet worden geschilderd. Volgens de opzichter kunnen 12 schilders het karwei in 6 dagen klaren.

- Stel dat er geen 12, maar 24 schilders beschikbaar zijn.
Hoelang doen zij over de klus?
- Stel dat er slechts 4 schilders beschikbaar zijn.
Hoeveel dagen hebben zij werk?
- Vul in.
Als je vier keer zoveel schilders hebt, dan duurt het schilderen vier keer zo ...
- Noem het aantal schilders x en het aantal benodigde dagen y .
Neem de tabel over en vul hem verder in.
Wat valt je op?

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y							6	
xy							72	



Theorie A De formule $y = \frac{a}{x}$

In opgave 59 heb je een voorbeeld gezien van een omgekeerd evenredig verband. Het aantal schilders x is **omgekeerd evenredig** met het aantal dagen y dat het schilderen duurt. Dat betekent:

Vermenigvuldig je het aantal schilders met een getal, dan deel je het aantal dagen door dat getal.

In de tabel heb je gezien dat het product xy telkens 72 is.

Door bij $xy = 72$ beide leden door x te delen, krijg je $y = \frac{72}{x}$.

De formule $y = \frac{72}{x}$ hoort bij een omgekeerd evenredig verband.

Bij een omgekeerd evenredig verband beperken we ons tot positieve waarden van x en y .



x en y zijn omgekeerd evenredig

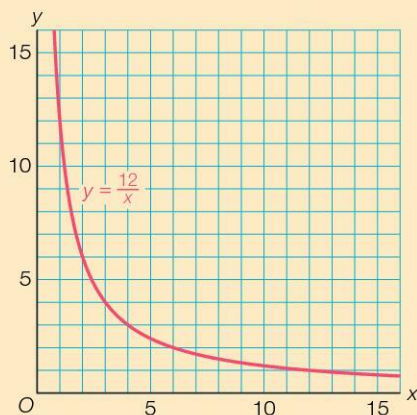
- Vermenigvuldig je x met een getal k , dan deel je y door k .
- Het product xy is constant, dus $xy = a$.
- De formule is van de vorm $y = \frac{a}{x}$.

Om de grafiek van $y = \frac{12}{x}$ te tekenen, maak je eerst een tabel.

x	1	2	3	4	6	12	24
y	12	6	4	3	2	1	0,5

De grafiek zie je in figuur 8.13.

De grafiek die bij een omgekeerd evenredig verband hoort, heet een **hyperbool**. Vandaar dat een omgekeerd evenredig verband ook een **hyperbolisch verband** wordt genoemd.



figuur 8.13

- 60** Een vuistregel zegt dat vier personen 60 dagen van een mud aardappels kunnen eten.

1 mud aardappels $\approx$ 70 kg

a Hoeveel dagen kunnen acht personen van een mud eten?

Neem aan dat x personen y dagen van een mud kunnen eten.

- b** Welke formule hoort bij de vuistregel?
c Wat weet je van y als x heel groot is?
d Wat gebeurt er met y als het aantal personen verdubbelt?

- 61** [▶ WERKBOEK] Bij een puzzelwedstrijd is 6000 euro beschikbaar voor inzenders van de goede oplossing.

a Neem aan dat zes mensen de puzzel foutloos maken. Hoeveel ontvangt ieder?

Neem aan dat x mensen de puzzel foutloos maken en dat ieder y euro ontvangt.

- b** Stel de formule van y op.
c Wat weet je van y als er heel veel goede inzendingen zijn?
d Teken de grafiek bij de formule van vraag b.

- A 62** In verband met dierenwelzijn mogen in een scharrelstal maximaal negen kippen per m^2 worden gehouden. In deze opgave gaan we uit van een scharrelstal van 40 bij 25 meter.

a Hoeveel kippen mogen in deze stal worden gehouden?

De leefruimte L is het aantal cm^2 dat een kip gemiddeld tot haar beschikking heeft.

- b** Bereken L als er 8000 kippen in de stal worden gehouden.
c De leefruimte L hangt af van het aantal kippen a . Stel de formule van L op voor de stal.
d Onderzoek hoeveel kippen er in de stal worden gehouden als een kip gemiddeld 20 dm^2 tot haar beschikking heeft.



Gemengde opgaven

- 1** Yvonne heeft een slavink gekocht. Op het moment dat zij de slavink op het aanrecht legt, zitten er 20 000 bacteriën op. Dit aantal groeit elk uur met 12,5%.
- Stel de formule op van het aantal bacteriën N na t uur.
 - Hoeveel bacteriën zijn er na 24 uur? Rond af op duizendtallen.
 - Na hoeveel uur zijn er voor het eerst meer dan 400 000 bacteriën?
 - Met hoeveel neemt het aantal bacteriën toe in het achtste uur?

- 2** In Nederland wordt het deel van de bevolking van 15 tot 75 jaar de potentiële beroepsbevolking genoemd. De verwachting is dat de potentiële beroepsbevolking vanaf 2020 jaarlijks met 0,21% daalt, en dat de potentiële beroepsbevolking in 2020 uit 13,1 miljoen personen zal bestaan.
- Stel de formule op van de potentiële beroepsbevolking B . Neem B in miljoenen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2020.
 - Bereken hoeveel personen van 15 tot 75 jaar er in 2050 in Nederland wonen.
 - Met hoeveel personen neemt de potentiële beroepsbevolking af in 2030? Rond af op duizendtallen.
 - Men verwacht dat Nederland 17,7 miljoen inwoners heeft in 2030. Hoeveel procent van de Nederlandse bevolking behoort in 2030 tot de potentiële beroepsbevolking?

- 3** In de tabel zie je hoeveel computers het computerbedrijf Complus in 2018 heeft verkocht.
- Bij de tabel hoort exponentiële groei. Toon dit aan en geef de groeifactor per kwartaal in twee decimalen nauwkeurig.
 - Stel de formule op van het aantal computers N dat per kwartaal verkocht is. Neem t in kwartalen met $t = 0$ in het eerste kwartaal van 2018.

VERKOOP COMPLUS IN 2018

kwartaal	1	2	3	4
aantal	180	202	226	253

Neem aan dat de formule ook voor andere kwartalen geldt.

- Bereken hoeveel computers Complus in het tweede halfjaar van 2020 verkoopt.
- Bereken hoeveel computers Complus in het tweede kwartaal van 2017 heeft verkocht.
- In welk kwartaal van welk jaar verkoopt Complus voor het eerst meer dan 1000 computers?

- 4** Los op. Geef de oplossingen in één decimaal nauwkeurig.
- $x^3 = 350$
 - $x^5 = -750$
 - $x^4 = 800$
 - $x^8 = -400$

- 5** In de tabel hiernaast staat informatie over het aantal ritten dat met OV-fietsen werd gemaakt.

RITTEN MET OV-FIETSEN

jaar	2006	2008	2011	2015
aantal $\times 10^5$	2,5	4,8	10,0	19,0

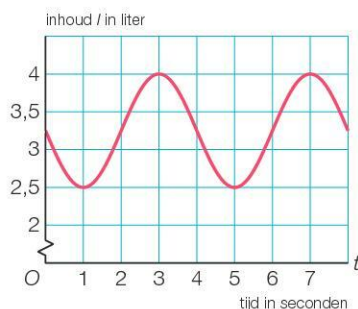
- Geef met interpoleren een schatting van het aantal ritten in 2010.
- Geef met extrapoleren een schatting van het aantal ritten in 2025.

De OV-fiets werd in 2004 geïntroduceerd.

- Geef met extrapoleren een schatting van het aantal ritten in 2004.

- 6** [**WERKBOEK**] In figuur 8.14 is af te lezen hoeveel lucht er in de longen van Monique aanwezig is.

- Bereken de periode, evenwichtsstand en amplitude.
- Schat de hoeveelheid lucht in de longen van Monique na 29 seconden. En hoeveel is dat ongeveer na 1 minuut en 18 seconden?
- Hoeveel lucht ademt Monique in totaal per uur uit?
- De periode van Lydia's ademhaling is 3 seconden en de bijbehorende amplitude is 0,8 liter. Teken een grafiek van de hoeveelheid lucht in de longen van Lydia. Kies zelf een evenwichtsstand.
- Bij Michel is de periode 4,8 seconden en bij Bilal is de periode 3,2 seconden. Op $t = 5$ hebben ze allebei de maximale hoeveelheid lucht in hun longen. Voor welke t is er in hun longen voor het eerst weer gelijktijdig de maximale hoeveelheid lucht aanwezig?



figuur 8.14

- 7** Alle ramen van een kantoorgebouw moeten worden gelapt. Schoonmaakbedrijf Glastra gaat de klus uitvoeren. Het aantal uur u waarin alle ramen worden gelapt hangt af van het aantal glazenwassers g dat wordt ingezet. Uit ervaring weet Glastra dat drie glazenwassers veertig uur nodig hebben om alle ramen van het gebouw te lappen.

- Stel de formule van u op.
- De beheerder van het kantoorgebouw wil de klus in acht uur gedaan hebben. Hoeveel glazenwassers worden ingezet?

- 8** Bioloog Janssen doet onderzoek naar het verband tussen het gewicht en de lengte van een slang van de soort *Heterodon nasicus*. Voor mannetjesslangen ontdekte hij het verband $G = 0,45l^3$. Hierin is G het gewicht in gram en l de lengte in dm.

- Bereken het gewicht van een mannetjesslang van 80 cm.
- Van een mannetjesslang is het gewicht 350 gram. Bereken de lengte in centimeter nauwkeurig.
- Ook voor vrouwtjesslangen geldt een formule van de vorm $G = al^3$. Een vrouwtjesslang van 60 cm weegt 93 gram. Bereken a . Rond af op twee decimalen.

Samenvatting

8.1 Exponentiële groei

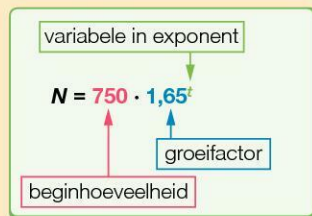
blz 90

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Dat getal heet de groeifactor per tijdseenheid. De algemene formule bij exponentiële groei is $N = b \cdot g^t$. Hierin is b de beginhoeveelheid en g de groeifactor per tijdseenheid.

De formule $N = 750 \cdot 1,65^t$ met t in jaren hoort bij exponentiële groei met groeifactor 1,65 per jaar.

blz 93

De formule $N = 800 \cdot 0,85^t$ hoort bij exponentiële afname. Bij exponentiële afname ligt de groeifactor tussen 0 en 1.



8.2 Procenten en groeifactoren

blz 94

Bij een toename van 7,2% per jaar hoort exponentiële groei met groeifactor 1,072 per jaar.

blz 96

Bij een afname van 2,6% per jaar hoort exponentiële groei met groeifactor 0,974 per jaar.

7,2% toename geeft
 $100\% + 7,2\% = 107,2\%$,
 dus $\times 1,072$.

2,6% afname geeft
 $100\% - 2,6\% = 97,4\%$,
 dus $\times 0,974$.

8.3 Tabellen en groei

blz 97

Je kunt bij een gegeven tabel nagaan of er sprake is van exponentiële groei. Je deelt dan opeenvolgende getallen en controleert of de uitkomsten bij benadering gelijk zijn.

blz 98

lineaire groei

Per tijdseenheid neemt de hoeveelheid met hetzelfde getal toe.

t	0	1	2	3	4
N	3,6	4,3	5,0	5,7	6,4

$+0,7 \quad +0,7 \quad +0,7 \quad +0,7$

$$N = 0,7t + 3,6$$

exponentiële groei

Per tijdseenheid wordt de hoeveelheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd.

t	0	1	2	3	4
N	48	72	108	162	243

$\times 1,5 \quad \times 1,5 \quad \times 1,5 \quad \times 1,5$

$$N = 48 \cdot 1,5^t$$

blz 100

Interpoleren Bij een serie waarnemingsgetallen een tussenliggende waarde schatten.

Extrapoleren Het schatten van een waarde die buiten de serie waarnemingsgetallen ligt.

Zie de tabel hiernaast.

Met interpoleren krijg je als volgt een schatting van de winst in 2012.

In 9 jaar $470\,000 - 258\,000 = 212\,000$ erbij,

dus in 1 jaar $\frac{212\,000}{9}$ erbij. 2012 is 7 jaar na 2005, dus in 2012

was de winst $258\,000 + 7 \times \frac{212\,000}{9} \approx 423\,000$ euro.

jaar	2005	2014	2018
winst	€ 258 000	€ 470 000	€ 580 000

Ga bij interpoleren en extrapoleren na of het resultaat in de gegeven situatie acceptabel is.

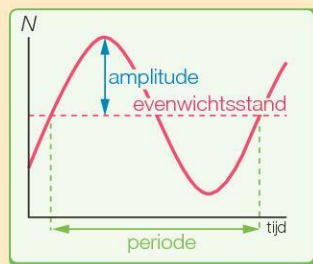
Gebruik bij extrapoleren de laatste twee waarnemingen.

8.4 Periodieke verbanden

blz 103 Bij een periodiek verband herhaalt de grafiek zich steeds. De periode is de kortste tijd die het duurt tot herhaling optreedt.

blz 104
$$\text{evenwichtsstand} = \frac{\text{hoogste stand} + \text{laagste stand}}{2}$$

$$\text{amplitude} = \text{hoogste stand} - \text{evenwichtsstand}$$



8.5 Machtsfuncties

blz 107 Een functie van de vorm $f(x) = ax^n$ is een machtsfunctie. Is n even, dan is de y -as de symmetrieas van de grafiek. Is n oneven, dan is de grafiek puntsymmetrisch in de oorsprong.

blz 109 **Oplossingen van $x^n = a$**

	$a > 0$	$a < 0$	$a = 0$
n even	$x = \sqrt[n]{a} \vee x = -\sqrt[n]{a}$	geen oplossing	$x = 0$
n oneven	$x = \sqrt[n]{a}$	$x = \sqrt[n]{a}$	$x = 0$

$x^7 = 87$ geeft $x = \sqrt[7]{87} \approx 1,89$

$x^5 = -280$ geeft $x = \sqrt[5]{-280} \approx -3,09$

$x^6 = 80$ geeft $x = \sqrt[6]{80} \approx 2,08 \vee x = -\sqrt[6]{80} \approx -2,08$

$x^4 = -280$ heeft geen oplossing.

blz 110 + Hiernaast zie je hoe je de vergelijking $3x^5 + 2 = 70$ oplost.

blz 111 Sommige hogere machtswortels kun je herleiden. Zo is $\sqrt[4]{81} = 3$, want $3^4 = 81$. En $\sqrt[3]{-8} = -2$, want $(-2)^3 = -8$.

$$3x^5 + 2 = 70$$

$$3x^5 = 68$$

$$x^5 = \frac{68}{3}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{68}{3}} \approx 1,87$$

8.6 Omgekeerd evenredige verbanden

blz 112 Bij het omgekeerd evenredige verband $y = \frac{40}{x}$ hoort de tabel hieronder.

x	2	4	8	10	20
y	20	10	5	4	2

Vermenigvuldig je x met een getal, dan deel je y door hetzelfde getal. Het product xy is telkens 40.

De grafiek van $y = \frac{40}{x}$ is een hyperbool.



Diagnostische toets

8.1 Exponentiële groei

- 1** Op 1 januari 2018 had Oeganda 39,6 miljoen inwoners.
- 1 De verwachting is dat dit aantal jaarlijks met 1,033 wordt vermenigvuldigd.
- Stel de formule op van het aantal inwoners N van Oeganda na t jaar. Neem N in miljoenen en de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2018.
 - Bereken het aantal inwoners op 1 januari 2025.
 - In welk jaar is het aantal inwoners op 1 januari voor het eerst meer dan 50 miljoen?
 - Met hoeveel neemt het aantal inwoners in 2030 toe?

8.2 Procenten en groeifactoren

- 2** In 2015 werd er wereldwijd 830 miljoen ton melk geproduceerd. Jaarlijks neemt de wereldmelkproductie met 2,3% toe.
- 2,3
- Stel de formule op van de wereldmelkproductie N in miljoenen tonnen. Neem $t = 0$ in 2015.
 - Bereken de wereldmelkproductie in 2020.
 - In welk jaar zal er voor het eerst meer dan 1,2 miljard ton melk worden geproduceerd?
 - In 2030 wordt er meer melk geproduceerd dan in 2025.
Hoeveel procent meer?



- 3** Mathijs koopt op 1 januari 2019 een nieuwe elektrische auto voor € 32 000. De verwachting is dat de waarde van de auto jaarlijks met 8,5% afneemt.
- 4,5
- Stel de formule op van de waarde W in euro's na t jaar.
 - Hoeveel is de auto waard op 1 januari 2025?
 - Met hoeveel euro daalt de waarde van de auto in 2030?
 - Op 1 januari van welk jaar is de auto voor het eerst minder dan € 15 000 waard?

8.3 Tabellen en groei

- 4** Gegeven zijn de tabellen I en II hiernaast.
- 6,7
- Welke tabel hoort bij lineaire groei? En welke bij exponentiële groei? Licht toe.
 - Stel bij beide tabellen de formule op.
 - Bereken bij beide tabellen N voor $t = 8$.

I	t	0	1	2	3	4
	N	5120	5400	5680	5960	6240

II	t	0	1	2	3	4
	N	5120	5376	5645	5927	6223

figuur 8.15

- 5** In de tabel staat informatie over het aantal voertuigkilometers in Nederland. Dat is het totale aantal kilometers dat alle motorvoertuigen in Nederland samen rijden in een jaar.

VOERTUIGKILOMETERS IN MILJOENEN

jaar	1995	2002	2010	2016
aantal	101 990	120 482	127 928	133 093

- Geef met interpoleren een schatting van het aantal voertuigkilometers in 2000.
- Geef met extrapoleren een schatting van het aantal voertuigkilometers in 2024.



8.4 Periodieke verbanden

- 6** [**WERKBOEK**] Op een kermis staan een reuzenrad en een minirad. Op het moment dat Judith in het reuzenrad stapt, stapt Mark in het minirad. Het reuzenrad is 40 meter hoog en draait in 1 minuut en 20 seconden één keer rond. Het minirad draait in 50 seconden één keer rond.
- Teken de grafiek van de hoogte van Judith gedurende de eerste vier minuten.
 - Na hoeveel seconden zijn Judith en Mark voor het eerst weer tegelijk beneden?

8.5 Machtsfuncties

- 7** Maak in aparte figuren schetsen van de grafieken van
- $f(x) = -4x^4$
 - $g(x) = 3x^7$
 - $h(x) = 5x^8$
- 8** Los op. Geef de oplossingen in twee decimalen nauwkeurig.
- $x^3 = 118$
 - $x^3 = -209$
 - $x^4 = 1000$
 - $x^4 = -200$
 - $x^5 = 83$
 - $x^5 = -0,86$
- 9** Los op. Geef de oplossingen in twee decimalen nauwkeurig.
- $7x^8 = 900$
 - $0,2x^6 - 72 = 850$
 - $5x^3 + 151 = 103$
- 10** Los op.
- $x^4 = 256$
 - $2x^4 = -162$
 - $-3x^6 + 10 = 7$

8.6 Omgekeerd evenredige verbanden

- 11** [**WERKBOEK**] Een rechthoekige tuin van x bij y meter heeft een oppervlakte van 36 m^2 .
- Stel de formule van y op.
 - Teken de grafiek bij de formule van vraag a.
 - Neem aan dat x vier keer zo groot wordt. Wat gebeurt er met y ?
 - Wat weet je van y als x een heel klein getal is?

Herhaling

8.1 Exponentiële groei

- 1** Bij exponentiële groei hoort de formule $N = b \cdot g^t$. Hierin is b de beginhoeveelheid en g de groeifactor per tijdseenheid. De groeifactor g is het getal waarmee telkens wordt vermenigvuldigd.

Op 1 januari 2018 leven op een eiland 1650 konijnen. De verwachting is dat dit aantal jaarlijks met 1,4 wordt vermenigvuldigd.

- a** Stel de formule op van het aantal konijnen N na t jaar. Neem $t = 0$ op 1 januari 2018.
- b** Bereken hoeveel konijnen er na acht jaar zijn.
- c** In welk jaar zijn er op 1 januari voor het eerst meer dan 100 000 konijnen? Neem beginwaarde 1650 en vermenigvuldig steeds met 1,4.
- d** Hoeveel konijnen komen er in 2024 bij?

Beginwaarde 1650 en herhaald vermenigvuldigen met 1,4.

Tik in **1650 =**
× 1.4 = ← op $t = 1$
= ← op $t = 2$
= ← op $t = 3$
enzovoort



figuur 8.16

8.2 Procenten en groeifactoren

- 2** Bij een procentuele toename van 18% per jaar hoort exponentiële groei met groeifactor 1,18 per jaar.

Geef bij de volgende toenames per jaar steeds de groeifactor.

- | | | |
|---------------|----------------|---------------|
| a 24% | c 0,24% | e 80% |
| b 2,4% | d 0,08% | f 200% |

- 3** Een bedrag B van 50 euro staat op een spaarrekening tegen een jaarlijkse rente van 1,1%.

- a** Geef de groeifactor.
- b** Geef de formule van het bedrag B in euro's dat na t jaar op de spaarrekening staat.
- c** Hoeveel euro staat na acht jaar op de spaarrekening?
- d** Met hoeveel euro neemt het bedrag het tiende jaar toe?

- 4** Bij een procentuele afname van 6% per jaar hoort exponentiële groei met groeifactor 0,94 per jaar.

Geef bij de volgende afnamen per jaar steeds de groeifactor.

- | | | |
|---------------|----------------|--------------|
| a 15% | c 0,8% | e 80% |
| b 1,4% | d 0,06% | f 50% |

6% afname geeft
 $100\% - 6\% = 94\%$,
dus $\times 0,94$.

2,7% afname geeft
 $100\% - 2,7\% = 97,3\%$,
dus $\times 0,973$.

- 5** Op 1 januari 2018 had Bulgarije 7,1 miljoen inwoners. Dat aantal neemt per jaar met 0,9% af.
- Stel de formule op van het aantal inwoners N van Bulgarije na t jaar. Neem N in miljoenen en $t = 0$ op 1 januari 2018.
 - Bereken het aantal inwoners op 1 januari 2026.
 - Met hoeveel neemt het aantal inwoners in 2030 af? Rond af op duizendtallen.



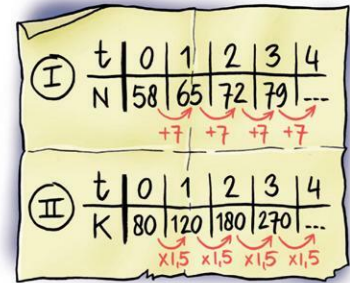
Van de inwoners van Bulgarije wonen er zo'n 1,3 miljoen in de hoofdstad Sofia.

8.3 Tabellen en groei

- 6** Bij lineaire groei neemt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal toe. Tabel I hiernaast hoort bij lineaire groei.
- Stel de formule op van N , en bereken N voor $t = 8$.

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Tabel II hiernaast hoort bij exponentiële groei.

- Stel de formule op van K .
- Bereken K voor $t = 6$. Rond af op gehelen.



figuur 8.17

- 7** Gegeven zijn de volgende tabellen.

I	t	0	1	2	3
	N	285	456	730	1168

II	t	0	1	2	3
	N	285	470	655	840

- Welke tabel hoort bij exponentiële groei? Licht toe.
- Welke tabel hoort bij lineaire groei? Licht toe.
- Stel bij beide tabellen de formule op.
- Bereken bij beide tabellen N voor $t = 10$. Rond zo nodig af op gehelen.

- 8** Vrouwen trouwen op steeds hogere leeftijd. Zie de tabel.

GEMIDDELTE LEEFTIJD VROUWEN BIJ 1st HUWELIJK

jaar	1988	1993	1995	2006	2016
gemiddelde leeftijd	27,3	29,1	29,6	30,8	31,0

Hiernaast zie je hoe je met interpoleren een schatting krijgt van de gemiddelde leeftijd waarop vrouwen in 1991 in het huwelijk traden.

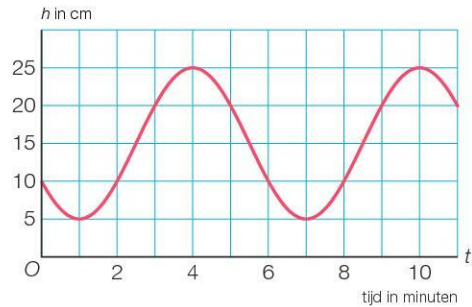
- Geef met interpoleren een schatting van de gemiddelde leeftijd waarop vrouwen in 2000 in het huwelijk traden.
- Geef met extrapoleren een schatting van de gemiddelde leeftijd waarop vrouwen in 2030 zullen trouwen.

Van 1988 tot 1993 is 5 jaar.
In 5 jaar $29,1 - 27,3 = 1,8$ erbij,
dus in één jaar $\frac{1,8}{5}$ erbij.
1991 is 3 jaar na 1988, dus je
krijgt $27,3 + 3 \times \frac{1,8}{5} \approx 28,4$ jaar.

8.4 Periodieke verbanden

9 [WERKBOEK] De grafiek in figuur 8.18 hoort bij een periodiek verband.

- Bereken de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.
- Noem drie tijdstippen na $t = 10$ waarop de laagste stand wordt bereikt.
- Op welk tijdstip na $t = 50$ wordt de hoogste stand voor het eerst bereikt?
- Teken de grafiek van een periodiek verband met een periode van 3 minuten, een evenwichtsstand van 30 cm en een amplitude van 20 cm.

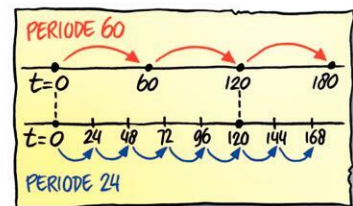


figuur 8.18

10 Een minirad draait in 24 seconden één keer rond en een reuzenrad draait in 60 seconden één keer rond. Op $t = 0$ stapt Annemarie in het reuzenrad en Floor in het minirad. Hiernaast zie je dat ze na 120 seconden weer tegelijk beneden zijn.

Na hoeveel seconden zijn ze voor het eerst weer tegelijk beneden als

- het minirad een periode van 18 seconden heeft en het reuzenrad een periode van 45 seconden
- het minirad een periode van 12 seconden heeft en het reuzenrad een periode van 27 seconden
- het minirad een periode van 14 seconden heeft en het reuzenrad een periode van 20 seconden?



De veelvouden van 60 zijn

60, 120, ...

De veelvouden van 24 zijn

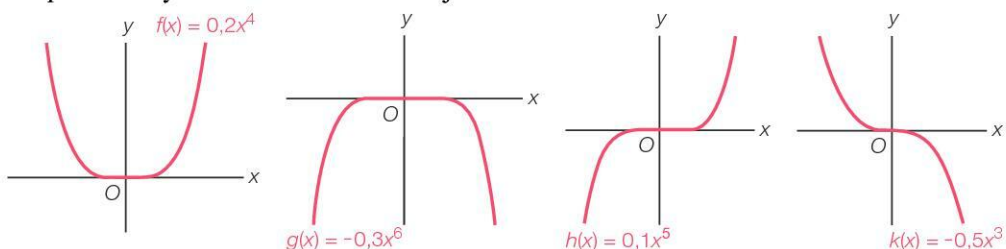
24, 48, 72, 96, 120, ...

8.5 Machtsfuncties

11 Een machtsfunctie heeft de vorm $f(x) = ax^n$.

Voor even n is de grafiek symmetrisch met de y -as als symmetrieas.

Voor oneven n is de grafiek puntsymmetrisch met de oorsprong als punt van symmetrie. Hieronder zie je welke situaties voorkomen.



figuur 8.19

Schets in aparte figuren de grafieken van

- $f(x) = 0,8x^3$
- $g(x) = -0,2x^5$
- $h(x) = 8x^6$
- $k(x) = -5x^{10}$

- 12** De vergelijking $x^7 = 80$ heeft de oplossing $x = \sqrt[7]{80} \approx 1,87$.
 Tik in **7** **SHIFT** **x[□]** **80** **=** (Casio) of **7** **2nd** **^** **80** **ENTER** (TI).
 De vergelijking $x^8 = 80$ heeft twee oplossingen, namelijk
 $x = \sqrt[8]{80} \approx 1,73$ en $x = -\sqrt[8]{80} \approx -1,73$.
 De vergelijking $x^8 = -80$ heeft geen oplossing.

Los op. Geef de oplossingen in twee decimalen nauwkeurig.

- a** $x^3 = 650$ **d** $x^6 = -820$
b $x^8 = 820$ **e** $x^4 = 0,093$
c $x^5 = -82$ **f** $x^7 = -0,1$

- 13** Hiernaast zie je hoe je de vergelijking $3x^5 + 80 = 120$ oplost.

Los op. Geef de oplossingen in twee decimalen nauwkeurig.

- a** $2x^3 + 1 = 17$ **d** $2x^4 + 10 = 0$
b $3x^6 = 0,083$ **e** $3x^6 - 70 = 1050$
c $5x^7 = 100$ **f** $5x^8 + 8 = 2$

$$\begin{aligned} 3x^5 + 80 &= 120 \\ 3x^5 &= 40 \\ x^5 &= \frac{40}{3} \\ x &= \sqrt[5]{\frac{40}{3}} \\ x &\approx 1,68 \end{aligned}$$

- 14** Bij het oplossen van de vergelijking $x^3 = 1000$ gebruik je dat $\sqrt[3]{1000} = 10$. Immers $10^3 = 1000$. Je schrijft de oplossing $x = 10$ in één keer op.
 En zo krijg je bij $x^4 = 81$ in één keer de oplossingen $x = 3$ en $x = -3$.

Los op.

- a** $x^3 = 64$ **c** $5x^3 = -5$
b $x^4 = 10000$ **d** $2x^6 - 8 = 120$

8.6 Omgekeerd evenredige verbanden

- 15** Bas woont op een afstand van 24 km van zijn oma.
- a** Op een dag gaat Bas op de fiets naar oma. Hij heeft tegenwind. Zijn gemiddelde snelheid is 12 km per uur. Hoeveel uur doet hij erover?
 - b** Op de terugweg gaat hij met zijn ouders mee met de auto. Omdat het nogal druk is op de weg, rijdt zijn vader gemiddeld 48 km per uur. Hoeveel uur duurt de rit?

Met een snelheid van v km per uur doet Bas er t uur over om bij zijn oma te komen.

- c** Welke van de volgende formules hoort hierbij?

$$t = \frac{24}{v} \quad t = \frac{v}{24} \quad t = 24v \quad t = v + 24$$

- d** Wat gebeurt er met t als v heel klein wordt?

Onderzoek Begrensde groei

Je hebt in dit hoofdstuk verschillende voorbeelden van exponentiële groei gezien. In de praktijk kan groei echter niet onbeperkt doorgaan. Onder invloed van de omgeving wordt de groei begrensd.

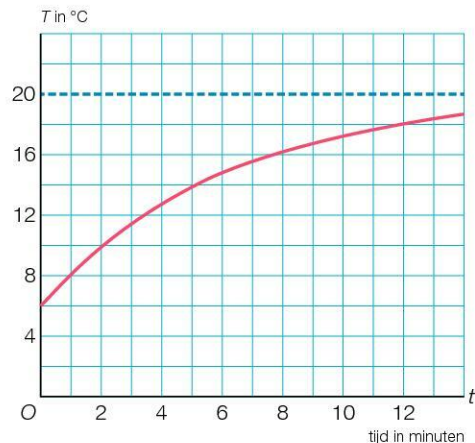
In dit onderzoek krijg je te maken met een aantal gevallen van **begrensd groei**.

- 1** Sylvia haalt een pak melk uit de koelkast. Elke minuut meet ze de temperatuur van de melk. Zie de tabel. Hierin is t het aantal minuten nadat Sylvia de melk uit de koelkast heeft gehaald, T de temperatuur van de melk in $^{\circ}\text{C}$, en V het verschil van de omgevingstemperatuur en de temperatuur van de melk.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	6	8,1	9,9	11,4	12,7	13,8	14,7	15,5	16,2	16,8	17,2
V	14										

- Welke temperatuur had de melk in de koelkast? En wat is de omgevingstemperatuur?
- Neem de tabel over en vul hem verder in.
- Onderzoek of T exponentieel toeneemt.
- Toon aan dat V exponentieel afneemt. Wat zijn de waarden van b en g in de formule $V = b \cdot g^t$?
- Bereken V voor $t = 11$, $t = 12$ en $t = 13$.
- Bereken T voor $t = 11$, $t = 12$ en $t = 13$.

Het opwarmen van de melk in opgave 1 is een voorbeeld van begrensd groei. De temperatuur van de melk loopt geleidelijk op tot de omgevingstemperatuur. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van T . Welke formule hierbij hoort, zie je in de volgende opgave.



figuur 8.20

- 2** De formule van T in figuur 8.20 is $T = 20 - 14 \cdot 0,85^t$. Onderzoek hoe je de formule van T kunt opstellen met de resultaten van opgave 1.

- 3** Een stuk vlees met een temperatuur van 4°C wordt uit de koelkast gehaald. Bij de temperatuur van het vlees hoort de tabel hieronder. Hierin is t het aantal minuten nadat het vlees uit de koelkast is gehaald, T de temperatuur van het vlees in $^{\circ}\text{C}$, en V het verschil van de omgevingstemperatuur en de temperatuur van het vlees.

t	0	1	2	3	4	5	6
T	4	6,1	8,0	9,7	11,2	12,6	13,8
V	21	18,9	17,0	15,3	13,8	12,4	11,2

- Onderzoek welke formule je voor V kunt opstellen met t als variabele.
- Stel de formule van T op, met t het aantal minuten nadat het vlees uit de koelkast is gehaald.
- Onderzoek voor welke t de temperatuur van het vlees voor het eerst hoger dan $17,5^{\circ}\text{C}$ is.

- 4** Een kop koffie heeft direct na het inschenken een temperatuur van 80°C . De omgevingstemperatuur is 24°C . Het temperatuurverschil van de koffie en de omgeving neemt per minuut met 18% af. Tamara drinkt het liefst koffie met een temperatuur van 48°C . Onderzoek hoe lang ze moet wachten.

- 5** Een pakje boter heeft een temperatuur van 26°C . De boter wordt in de koelkast gelegd. De temperatuur in de koelkast is 5°C . Het verschil van de temperatuur van de boter en de temperatuur in de koelkast neemt exponentieel af. Na twee minuten is de temperatuur van de boter $20,5^{\circ}\text{C}$. Onderzoek wat de temperatuur van de boter is, tien minuten nadat het in de koelkast is gelegd.

Ook bij allerlei groeiprocessen in de natuur heb je te maken met begrensde groei. Zo kan het aantal vissen in een vijver of het aantal bomen in een bos niet onbeperkt doorgroeien. Er is sprake van een **verzadigingsniveau**.

- 6** Licht het bovenstaande toe, en onderzoek wat bedoeld wordt met verzadigingsniveau.

- 7** In een vijver is voedsel en ruimte voor maximaal 1800 vissen. Op $t = 0$ worden 60 vissen in de vijver uitgezet. In de tabel hieronder zie je het verloop van het aantal vissen A in de vijver. Hierin is t in jaren.

t	0	1	2	3	4	5
A	60	495	821	1066	1250	1387



Onderzoek na hoeveel jaar er voor het eerst meer dan 1750 vissen in de vijver aanwezig zijn.

Spreiding, tellen en kans

In de zomer van 2018 hoefde je voor mooi weer niet naar het buitenland. Dat jaar was er van 15 juli tot en met 27 juli een hittegolf in Nederland, waarbij de maximumtemperatuur in De Bilt opliep tot 35,7 °C. In Nederland is officieel sprake van een hittegolf als de maximumtemperatuur in De Bilt gedurende tenminste vijf dagen elke dag 25 °C of hoger is. Bovendien moet het in die vijf dagen op minstens drie dagen 30 °C of warmer zijn.

In de periode 1901-2018 zijn er in ons land zesentwintig officiële hittegolven geweest. De langste was in 1975 met een duur van achttien dagen. In Brabant en Limburg komen meer hittegolven voor, die bovendien vaak langer duren dan elders in het land. In het noorden en langs de kust zijn hittegolven zeldzamer.

Wat leer je?

- Wat bedoeld wordt met het begrip spreiding.
- Wat de spreidingsbreedte en wat de kwartielafstand is.
- Werken met boxplots.
- + - Werken met spreidingsdiagrammen.
- Telproblemen oplossen.
- Kansen berekenen.



9



Voorkennis Centrummaten

Theorie A Frequentietabel en gemiddelde

In de frequentietabel hieronder zie je het aantal per dag verkochte exemplaren van het computerspel Minecraft bij GameGiant in de periode van oktober 2018 tot en met december 2018.

DAGVERKOOP MINDCRAFT BIJ GAMEGIANT

aantal	0	1	2	3	4	5	6	7	8
frequentie	8	19	12	15	9	5	7	2	1

De totale frequentie is $8 + 19 + 12 + 15 + 9 + 5 + 7 + 2 + 1 = 78$.

De totale frequentie geeft aan dat GameGiant in de periode van oktober 2018 tot en met december 2018 op 78 dagen open is geweest.

Het waarnemingsgetal 2 heeft de frequentie 12. Deze frequentie heet de absolute frequentie van 2. In de betreffende periode waren er dus twaalf dagen waarop GameGiant twee exemplaren van Minecraft verkocht.

De relatieve frequentie van 2 is $\frac{12}{78} \times 100\% \approx 15,4\%$.

$$\text{relatieve frequentie} = \frac{\text{absolute frequentie}}{\text{totale frequentie}} \times 100\%$$

Het totaal verkochte aantal is $8 \cdot 0 + 19 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + \dots + 1 \cdot 8$, en de totale frequentie is 78. Dus het gemiddeld verkochte aantal per dag is $\frac{8 \cdot 0 + 19 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 8}{78} \approx 2,73$.

$$\text{gemiddelde} = \frac{\text{som van de waarnemingsgetallen}}{\text{totale frequentie}}$$

- 1** Langs de weg van Schagen naar Alkmaar houdt de politie regelmatig snelheidscontroles. In de frequentietabel staat hoeveel automobilisten per controle een boete kregen.

UITGEDEELDE BOETES PER CONTROLE

aantal boetes	5	6	7	8	9	10	11
frequentie	8	13	9	4	5	2	1

- Hoeveel controles zijn in de tabel verwerkt?
- Hoeveel boetes zijn uitgedeeld?
- Hoeveel automobilisten kregen er gemiddeld per controle een boete? Rond af op één decimaal.
- Bereken de relatieve frequentie van het waarnemingsgetal 9.
- Bij hoeveel procent van de controles werden meer dan 9 boetes uitgedeeld?

- 2 In een klas is een proefwerk natuurkunde gemaakt. De resultaten staan in de frequentietabel.

RESULTATEN PROEFWERK NATUURKUNDE

cijfer	3	4	5	6	7	8	9	10
frequentie	1	2	6	7	4	3	4	1

- a Hoeveel leerlingen hebben het proefwerk gemaakt?
- b Bereken het gemiddelde. Rond af op één decimaal.
- c Van welke waarnemingsgetallen is de relatieve frequentie groter dan 20%?
- 3 Sanne gaat elke dag met de bus naar school. In een week waren haar reistijden 6, 5, 5, 49 en 5 minuten.
- a Geef een mogelijke verklaring voor de uitschieter 49.
- b Bereken de gemiddelde reistijd. Vind je dat het gemiddelde een goede indruk geeft van de reistijd met de bus? Licht toe.

Theorie B Centrummaten

Door het gemiddelde krijg je een indruk van een hoeveelheid cijfermateriaal. Maar als er een uitschieter bij de waarnemingsgetallen zit, kun je beter gebruikmaken van de mediaan of de modus. Gemiddelde, mediaan en modus zijn centrummaten.

CENTRUMMATEN

gemiddelde	Het gemiddelde is $\frac{\text{som van de waarnemingsgetallen}}{\text{totale frequentie}}$.
mediaan	Staan de waarnemingsgetallen in volgorde van grootte, dan is de mediaan <ul style="list-style-type: none">• bij een oneven aantal waarnemingsgetallen het middelste getal• bij een even aantal waarnemingsgetallen het gemiddelde van de middelste twee getallen.
modus	De modus is het waarnemingsgetal met de grootste frequentie. Zijn er meer waarnemingsgetallen met de grootste frequentie, dan is er geen modus.

Staan de waarnemingsgetallen in volgorde van grootte, dan is

- bij 11 waarnemingsgetallen de mediaan het 6^e getal
- bij 12 waarnemingsgetallen de mediaan het gemiddelde van het 6^e en 7^e getal.

En zo is

- bij 75 waarnemingsgetallen de mediaan het 38^e getal
- bij 76 waarnemingsgetallen de mediaan het gemiddelde van het 38^e en 39^e getal.

Voorbeeld

Gegeven is de volgende frequentietabel.

waarnemingsgetal	0	1	2	3	4	5	6
frequentie	27	21	14	16	8	2	8

Bereken de mediaan en de modus.

Uitwerking

totale frequentie = $27 + 21 + 14 + 16 + 8 + 2 + 8 = 96$

$$\text{mediaan} = \frac{48^{\text{e}} \text{ getal} + 49^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5$$

modus = 0



De som van de frequenties 27 en 21 is 48, dus het 48^e getal is 1 en het 49^e getal is 2.

- 4 Hoe bereken je de mediaan bij de volgende aantallen waarnemingsgetallen?

a 28 b 87 c 500 d 1857

- 5 Gegeven is de volgende frequentietabel.

waarnemingsgetal	8	9	10	11	12	13	14
frequentie	7	15	9	12	14	25	4

- a Bereken het gemiddelde in één decimaal nauwkeurig.
b Bereken de mediaan en de modus.

- 6 Voordat je aan het praktijkrijexamen mag meedoen, moet je eerst het theorie-examen halen. Examinator Drijver houdt twintig dagen bij hoeveel kandidaten per dag voor het theorie-examen slagen. Hij noteert de aantallen hiernaast. Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus.

33	30	38	35	32
35	36	29	39	38
33	40	38	38	33
37	34	35	35	36

- 7 Het eerste elftal van EDO speelt in een voetbalcompetitie. In deze competitie speelt elk team een uit- en een thuiswedstrijd tegen elk ander team. Aan het eind van de competitie maakt de trainer van EDO de volgende frequentietabel.

GESCOORDE DOELPUNTEN EDO

aantal doelpunten	0	1	2	3	4	5	6	7
frequentie	8	6	4	7	3	1	0	1

- a Hoeveel teams namen deel aan de competitie?
b Hoeveel doelpunten heeft EDO in totaal gescoord?
c In hoeveel procent van de wedstrijden heeft EDO gescoord?
d Hoeveel doelpunten heeft EDO gemiddeld per wedstrijd gescoord? Rond af op twee decimalen.
e Bereken de mediaan en de modus.

9.1 Spreidingsmaten

0 1 In een klas hebben de jongens de volgende rapportcijfers voor Engels: 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9.

a Bereken de mediaan.

De mediaan verdeelt de serie waarnemingsgetallen in twee even grote groepen.

b Bereken de mediaan van de eerste groep.

c De jongens waarvan het rapportcijfer tot de 25% laagste behoren, krijgen steunles. Hoeveel jongens zijn dat?

Theorie A Kwartielen

De mediaan verdeelt een serie waarnemingsgetallen in twee helften. Van elk van deze helften kun je vervolgens weer de mediaan bepalen. Je krijgt dan een verdeling in vier groepen die elk (ongeveer) 25% van de waarnemingsgetallen bevat.

De mediaan van de eerste helft heet het **eerste kwartiel**.

Notatie: Q_1 .

De mediaan van de tweede helft heet het **derde kwartiel**.

Notatie: Q_3 .

Van een serie waarnemingsgetallen is

- **het eerste kwartiel Q_1 de mediaan van de eerste helft van de serie**
- **het derde kwartiel Q_3 de mediaan van de tweede helft van de serie.**

De mediaan van de hele serie waarnemingsgetallen heet ook wel het tweede kwartiel, oftewel Q_2 .



Van de getallen 5, 7, 3, 11, 7, 5, 8, 9 en 6 bereken je de kwartielen Q_1 en Q_3 als volgt.

1 Zet de getallen in volgorde van grootte.

3 5 5 6 7 7 8 9 11

mediaan

2 Splits de serie getallen in twee even grote groepen en geef van beide groepen de mediaan.

<i>eerste helft</i>	<i>tweede helft</i>
3 5 5 6	7 8 9 11
⋮	⋮
$Q_1 = 5$	$Q_3 = \frac{8+9}{2} = 8,5$

Bij 9 waarnemingsgetallen splits je in twee groepen van 4 getallen. Je laat de mediaan weg.

Je hebt hierboven te maken met een oneven aantal waarnemingsgetallen. Om twee even grote groepen te krijgen, laat je de mediaan weg.

Bij een even aantal waarnemingsgetallen hoef je niets weg te laten om twee even grote groepen te krijgen.

Voorbeeld

Gegeven zijn de waarnemingsgetallen 13, 18, 8, 7, 11, 9, 16 en 8.
Bereken de mediaan, het eerste kwartiel en het derde kwartiel.

Uitwerking

7 8 8 9 11 13 16 18

zet de getallen in volgorde van grootte

$$\text{mediaan} = \frac{9+11}{2} = 10$$

eerste helft

tweede helft

7 8 8 9 11 13 16 18

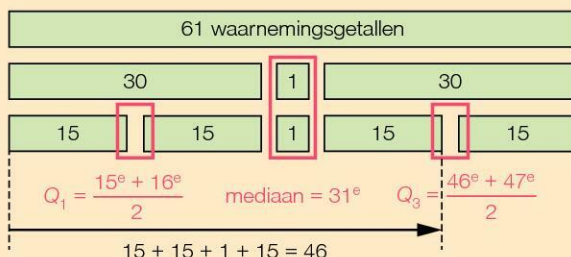
splits in twee even grote groepen

$$Q_1 = 8$$

$$Q_3 = \frac{13+16}{2} = 14,5$$

bereken van beide groepen de mediaan

Als je te maken hebt met een groot aantal waarnemingsgetallen, kun je voor het berekenen van Q_1 en Q_3 een schema zoals hiernaast gebruiken. Hierbij ga je ervan uit dat de 61 waarnemingsgetallen in volgorde van grootte staan.



2 Bereken de mediaan, het eerste kwartiel en het derde kwartiel.

a 26 32 54 62 67 70 38 51 62 58

b 51 17 20 18 23 18 18 17 25 31 49 51 29

c 8,3 1,7 2,6 1,9 3,2 7,9 6,3

3 De leerlingen van klas H3B hebben bijgehouden hoeveel uur ze het afgelopen weekend op het internet hebben gesurft.

SURFEN OP HET INTERNET DOOR H3B

aantal uur	0	2	5	8	9	10	14
frequentie	4	2	3	7	8	5	1

Bereken Q_1 en Q_3 .

A 4 Bij een onderzoek hebben Freek en Mathilde genoteerd hoeveel seconden er telkens tussen twee voorbijrijdende auto's zit.

TIJD TUSSEN VOORBIJRIJDENDE AUTO'S

tijd in seconden	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Freek	8	18	23	8	5	4	3	5	1	3	4
Mathilde	5	3	7	2	8	12	18	7	9	6	4

a Hoeveel minuten duurde het onderzoek van Freek? En hoeveel dat van Mathilde?

b Hoeveel auto's heeft Freek voorbij zien rijden?

c Bereken Q_1 en Q_3 van de waarnemingen van Freek.

d Bereken Q_1 en Q_3 van de waarnemingen van Mathilde.

e Wie van de twee stond langs de drukste weg? Licht toe.

- 0 5** Twee medewerkers van een supermarkt hebben genoteerd hoeveel klanten ze op een dag per uur geholpen hebben.

AANTAL KLANTEN PER UUR

medewerker A	5	6	8	9	14	19	20	22	23
medewerker B	5	11	12	13	14	15	16	17	23

- Hoeveel uur werkt een medewerker per dag?
- Bereken van elke medewerker het gemiddelde aantal klanten per uur, de mediaan, Q_1 en Q_3 .
- Geef het gemiddelde een goede indruk van het verschil in de werkzaamheden tussen A en B? En de mediaan? En het eerste en derde kwartiel? Licht toe.

Theorie B Spreidingsbreedte en kwartielafstand

Hieronder zie je van drie leerlingen de proefwerkcijfers voor wiskunde.

leerling	proefwerkcijfers	gemiddelde	mediaan	Q_1	Q_3
Aafke	6,1 6,5 6,7 7,0 7,1 7,2 7,7	6,9	7,0	6,5	7,2
Ben	4,5 4,8 5,1 7,0 8,6 8,8 9,5	6,9	7,0	4,8	8,8
Chris	4,5 6,3 6,5 7,0 7,1 7,4 9,5	6,9	7,0	6,3	7,4

De cijfers van Aafke verschillen onderling maar weinig. Ze liggen allemaal dicht bij het gemiddelde. We zeggen dat de **spreiding** bij de cijfers van Aafke klein is.

Bij Chris en Ben is de spreiding groter dan bij Aafke. Door de **spreidingsbreedte** te berekenen, wordt dit verschil duidelijk.

$$\text{spreidingsbreedte} = \text{grootste getal} - \text{kleinste getal}$$

De spreidingsbreedte bij Aafke is $7,7 - 6,1 = 1,6$. Bij Chris en Ben is dat $9,5 - 4,5 = 5,0$.

Maar ook bij Ben en Chris is er verschil in spreiding. Bij Ben verschillen zes cijfers veel van de mediaan, terwijl bij Chris alleen de uitersten 4,5 en 9,5 ver van de mediaan liggen.

Afgezien van deze twee uitersten lijkt de cijferverdeling van Chris meer op die van Aafke dan op die van Ben. Door het berekenen van de **kwartielafstand** wordt dit verschil in spreiding verduidelijkt.

$$\text{kwartielafstand} = Q_3 - Q_1$$

Bij Chris is de kwartielafstand $7,4 - 6,3 = 1,1$, bij Ben is dat $8,8 - 4,8 = 4,0$ en bij Aafke is de kwartielafstand $7,2 - 6,5 = 0,7$. De kwartielafstand en de spreidingsbreedte zijn voorbeelden van **spreidingsmaten**.

Voorbeeld

Aan een groep jongeren is gevraagd hoe vaak ze het afgelopen jaar naar de bioscoop zijn geweest.

HOE VAAK NAAR DE BIOSCOOP?

aantal keer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	18
frequentie	3	7	10	8	12	8	7	9	5	4	2	4	1

Bereken de mediaan, de spreidingsbreedte en de kwartielfstand van de waarnemingsgetallen.

Uitwerking

totale frequentie = $3 + 7 + 10 + 8 + 12 + 8 + 7 + 9 + 5 + 4 + 2 + 4 + 1 = 80$

$$\text{mediaan} = \frac{40^{\text{e}} \text{ getal} + 41^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{4 + 5}{2} = 4,5$$

$$Q_1 = \frac{20^{\text{e}} \text{ getal} + 21^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{2 + 3}{2} = 2,5$$

$$Q_3 = \frac{60^{\text{e}} \text{ getal} + 61^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{7 + 7}{2} = 7$$

$$\text{spreidingsbreedte} = 18 - 0 = 18$$

$$\text{kwartielfstand} = 7 - 2,5 = 4,5$$

- 6 Bereken de mediaan, de spreidingsbreedte en de kwartielfstand.

a 6 8 3 2 1 5 4 6 8 5 6 7 8 8 6 6

b 20 23 24 25 15 18 18 22 20 23

c 22 15 27 21 14 20 22 29 22 15 19 22 26

- 7 Bij een golftoernooi hadden de deelnemers in de eerste ronde de volgende aantallen slagen nodig.

AANTAL SLAGEN IN DE EERSTE RONDE

aantal slagen	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
frequentie	1	5	5	14	12	13	8	5	10	10	6	4	5

Bereken de spreidingsbreedte en de kwartielfstand.



- a Bij een atletiekwedstrijd doet een verspringer zes pogingen. De mediaan van de gemeten afstanden is 7,34 meter. Wat is gunstiger, een kleine of een grote spreidingsbreedte?
- b Gijs staat gemiddeld een 6 op zijn overgangsrapport. Wat is gunstiger, een kleine of een grote spreidingsbreedte?



- A 9** In figuur 9.1 zie je drie histogrammen. De gewichten zijn afgerond op halve kilogrammen.



figuur 9.1

In welk histogram is de spreiding het grootst? En in welk histogram het kleinst? Licht je antwoord toe met een spreidingsmaat.

- A 10** In de tabel zie je hoeveel uur per week de leerlingen van klas H3B naar sportuitzendingen op de televisie kijken.

NAAR SPORTUITZENDINGEN OP TV KIJKEN

aantal uur per week	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
jongens	3	0	1	2	4	1	0	0	1	2	1
meisjes	4	3	3	3	1	0	1	0	0	1	1

- Bereken bij elke groep de spreidingsbreedte en de kwartielfstand.
- Trek een conclusie uit de spreidingsmaten.

- 11** Gegeven is de volgende frequentietabel.

waarnemingsgetal	2	3	4	5	6	7	8
frequentie	4	1	3	p	5	3	2

Geef een mogelijke waarde van p waarvoor de kwartielfstand gelijk is aan

- 0
- 4

9.2 De boxplot

- O 12** a De mediaan, Q_1 en Q_3 verdelen een serie van 60 waarnemingsgetallen in vier groepen. Uit hoeveel procent van de waarnemingsgetallen bestaat elke groep?
- b Licht toe dat je de bij vraag a gevonden percentages niet precies krijgt bij een serie van 50 waarnemingsgetallen.

Theorie A Een boxplot tekenen

Centrum- en spreidingsmaten geven een indruk van een serie waarnemingsgetallen. Je kunt deze informatie overzichtelijk in een diagram weergeven. Een voorbeeld van een dergelijk diagram is de **boxplot**.

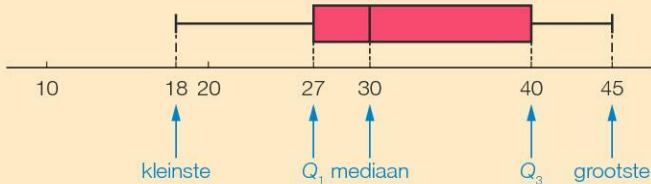
Om een boxplot te tekenen, heb je nodig

- het kleinste en het grootste waarnemingsgetal
- de mediaan en de kwartielen Q_1 en Q_3 .

Van een serie scores is gegeven

- laagste score = 18 en hoogste score = 45
- mediaan = 30, $Q_1 = 27$ en $Q_3 = 40$.

Met deze gegevens kun je het diagram van figuur 9.2 tekenen. Dit diagram heet een boxplot.

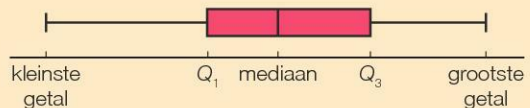


figuur 9.2

De boxplot bestaat uit vier delen, die elk (ongeveer) 25% van de waarnemingsgetallen bevatten.

In een boxplot staan

- kleinste waarnemingsgetal
- eerste kwartiel Q_1
- mediaan
- derde kwartiel Q_3
- grootste waarnemingsgetal



Voorbeeld

Teken de boxplot bij de volgende frequentietabel.

getal	2	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	8	14	16	10	7	12	5	3

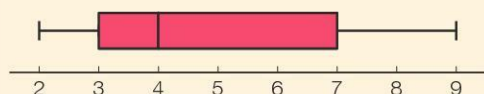
Uitwerking

totale frequentie = $8 + 14 + 16 + 10 + 7 + 12 + 5 + 3 = 75$

kleinste getal = 2 en grootste getal = 9

mediaan = 38^e getal = 4

$Q_1 = 19^{\text{e}}$ getal = 3 en $Q_3 = 57^{\text{e}}$ getal = 7



- 13** Aan de Reigerstraat wonen 19 gezinnen.

Het aantal personen per huishouden is

2 2 4 1 4 5 1 8 1 2 3 2 5 3 2 4 4 3 2

Teken bij deze gegevens de boxplot.

- 14** In de tabel hiernaast staat hoeveel doelpunten de hockeyteams in een competitie na tien wedstrijden hebben gemaakt.

DOELPUNTEN NA TIEN WEDSTRIJDEN

aantal	15	16	17	18	22	25	30
frequentie	3	2	1	4	1	2	1

Teken bij deze tabel de boxplot.

- 15** Uit een grote partij eieren wordt van 32 eieren het gewicht in gram gemeten. De resultaten staan hieronder.

55 56 62 63 48 65 44 60 41 50 53 57 50 59 59 64
66 49 58 57 73 51 68 55 50 62 58 62 49 71 54 53

- Maak bij deze gegevens een steelblad-diagram.
- Gebruik het steelblad-diagram om de boxplot te tekenen.
- Wat vind je, geeft het steelblad-diagram of de boxplot het beste beeld van de verdeling van de gewichten van de eieren?

- A 16** In de tabel hieronder staat informatie over het online koopgedrag van de leerlingen van 3 havo van het Twickel College.

ONLINE AANKOPEN

aantal keer	0	1	2	5	8	12	13	15	23
jongens	8	6	8	0	15	7	5	4	2
meisjes	13	10	8	9	6	3	4	2	0

Teken boven één getallenlijn de twee boxplots van het online koopgedrag van de jongens en de meisjes van 3 havo van het Twickel College.

- A 17** De medezeggenschapsraden van twee scholen met fusieplannen hebben de leeftijdsopbouw van de docenten onderzocht. De resultaten staan in het steel-bladdiagram.

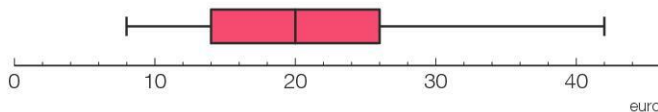
LEEFTIJD DOCENTEN

school I		school II
8 8 5 2 2	2	7 8 9 9
8 7 6 3 3 2 0 0	3	1 4 5 8 8
8 6 5 5 4 4 3 1 1 0 0 0	4	0 1 3 3 4 4 4 5 7 7
6 5 4 3 3 2 1 0	5	1 2 5 6
	6	0 0 1
eenheden	tientallen	eenheden

- Hoeveel docenten geven les op school I? En hoeveel op school II?
- Bereken van beide scholen de mediaan en de modus.
- Teken boven één getallenlijn de twee boxplots van de leeftijden van de docenten van school I en school II.

- O 18** Aan de 120 derdeklassers van het Archimedes College is gevraagd hoeveel zakgeld ze per maand krijgen. Zie de boxplot in figuur 9.3.

ZAKGELD PER MAAND



figuur 9.3

Lex beweert: ‘Er zijn meer leerlingen die meer dan 26 euro krijgen dan leerlingen die minder dan 14 euro krijgen, want het rechterstuk van de boxplot is langer dan het linkerstuk.’
Leg uit waarom Lex ongelijk heeft.

Theorie B Aflezen uit boxplots

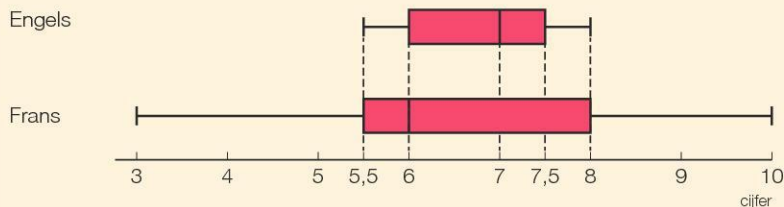
Je weet dat een boxplot bestaat uit vier delen, die elk (ongeveer) 25% van de waarnemingsgetallen bevatten. Zo volgt uit figuur 9.3 dat er net zoveel leerlingen zijn die tussen 8 en 14 euro zakgeld krijgen, als leerlingen die tussen 26 en 42 euro krijgen. In beide gevallen gaat het om 25% van 120 leerlingen, dus 30 leerlingen.

Uit de boxplot is af te lezen dat het kleinste waarnemingsgetal 8 euro is en het grootste waarnemingsgetal 42 euro. Hieruit volgt dat er minstens één leerling 8 euro zakgeld krijgt, en minstens één leerling 42 euro. Aflezen van $Q_1 = 14$, mediaan = 20 en $Q_3 = 26$ betekent echter niet per se dat er een leerling is met 14, 20 of 26 euro zakgeld. Zo kan de waarde van Q_1 het gemiddelde zijn van de waarnemingsgetallen 13 en 15.

Voorbeeld

In de figuur hieronder zijn van 120 leerlingen van 3 havo de resultaten van een proefwerk Frans en een proefwerk Engels verwerkt.

RESULTATEN PROEFWERK



figuur 9.4

- a Bij welk vak waren de meeste leerlingen met een cijfer hoger dan 6?
- b Schat het totale aantal voldoende.
- c Volgens Anton waren er bij Frans meer leerlingen met een cijfer hoger dan 7 dan bij Engels. Heeft Anton gelijk? Licht toe.

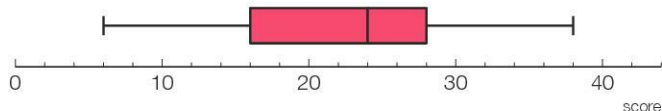
Uitwerking

- a Engels 75% van 120 en Frans 50% van 120, dus bij Engels.
- b Engels 100% van 120, dus 120, en Frans 75% van 120, dus 90. totaal $120 + 90 = 210$ voldoende
- c Bij Engels heeft 50% een cijfer hoger dan 7. Bij Frans is dat minder dan 50%. Dus Anton heeft geen gelijk.

Merk op dat het aantal leerlingen dat voor Frans een cijfer hoger dan 7 haalde, niet uit de figuur af te lezen is. Je kunt wel een schatting geven. Omdat 7 halverwege 6 en 8 ligt, is een schatting $\frac{1}{2} \times 25\% + 25\% = 37,5\%$, dus ongeveer $0,375 \times 120 = 45$ leerlingen.

- 19** Alle 160 derdeklassers van het Archimedes College hebben een toets gemaakt. De resultaten zijn verwerkt in de boxplot hieronder.

RESULTATEN TOETS

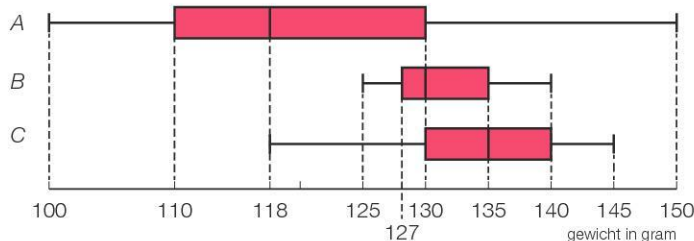


figuur 9.5

- a Bereken de kwartielafstand.
- b Schat het aantal leerlingen met een score van 24 tot en met 28 punten.
- c Schat het aantal leerlingen met 28 punten of minder.
- d Wat weet je van de scores van de 25% best scorende leerlingen?
- e Geef een schatting van het aantal leerlingen dat 20 punten of minder scoorde.

- 20** Bij een supermarkt zijn drie soorten appels te koop. Van elke soort worden willekeurig 80 appels gepakt, waarna van elk exemplaar het gewicht wordt bepaald. In figuur 9.6 is van elke soort de boxplot getekend.

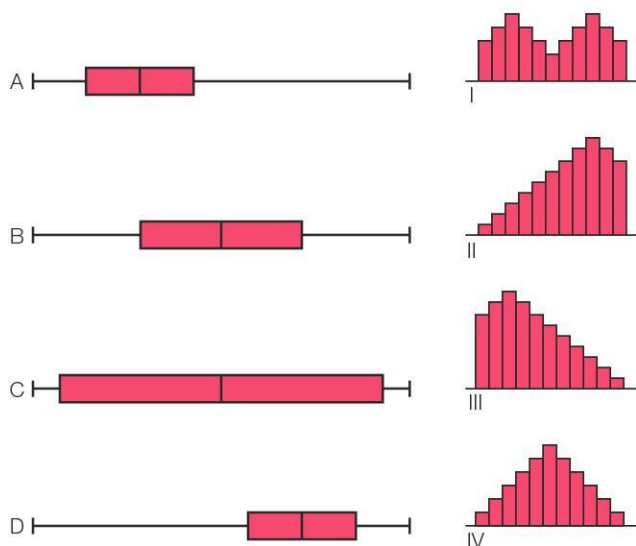
GEWICHTEN APPELS



figuur 9.6

- Van welke soort zijn de meeste appels zwaarder dan 130 gram?
- Schat het aantal appels dat zwaarder is dan 118 gram.
- Hoeveel weegt de zwaarste appel?
- Bij welke soort is de kwartielafstand het kleinst? Hoeveel is die kwartielafstand?
- Welke conclusie volgt uit de figuur?
 - De helft van de appels van soort A weegt minder dan elke appel van de soorten B en C.
 - Elke appel van soort B weegt minder dan het zwaarste kwart van soort C.
 - De zwaarste helft van soort A bevat meer appels dan alle appels van soort B samen.

- 21** Hieronder staan vier boxplots en vier histogrammen. Zoek bij elke boxplot het best passende histogram.



figuur 9.7

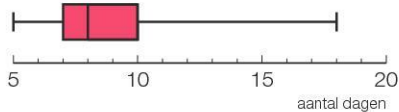
A 22 Een hittegolf is een opeenvolging van minimaal vijf zomerse dagen in De Bilt, waarvan er minstens drie tropisch zijn.

De boxplot in figuur 9.8 gaat over hittegolven in Nederland in de periode van 1 januari 1901 tot 1 januari 2019. In deze periode waren er in totaal 26 hittegolven.

Een zomerse dag is een dag waarop de maximumtemperatuur 25°C of hoger is.

Een tropische dag is een dag waarop de maximumtemperatuur 30°C of hoger is.

DUUR HITTEGOLF

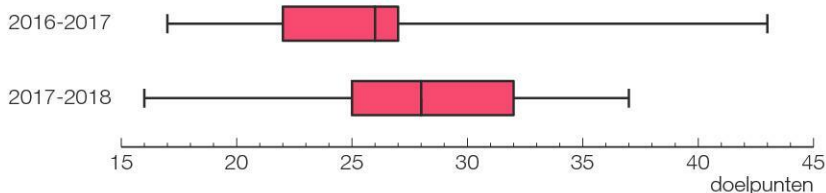


figuur 9.8

- De hittegolf die het langste duurde, was in 1975. Hoeveel dagen duurde die hittegolf?
- Schat hoeveel hittegolven langer dan zeven dagen duurden.
- Wat denk je, is de gemiddelde duur van een hittegolf groter of kleiner dan de mediaan? Licht toe.
- Marieke beweert op basis van de boxplot dat het aantal hittegolven dat langer dan tien dagen duurde, groter is dan het aantal hittegolven dat korter dan zeven dagen duurde. Ben je het met haar eens? Licht toe.

A 23 Figuur 9.9 gaat over het per speelronde gescoorde aantal doelpunten in de Eredivisie in de seizoenen 2016-2017 en 2017-2018. Beide seizoenen hadden 34 speelrondes.

AANTAL DOELPUNTEN PER SPEELRONDE



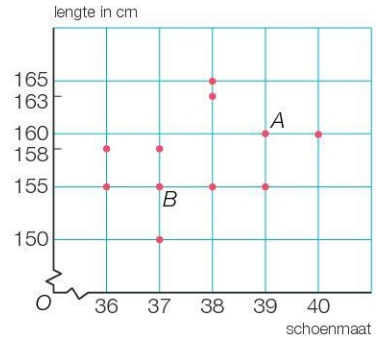
figuur 9.9

- In speelronde 30 van 2016-2017 werden de meeste doelpunten gescoord. In speelronde 23 van 2017-2018 werden de minste doelpunten gescoord. Hoeveel is het verschil?
- Bereken bij beide seizoenen de spreidingsbreedte en de kwartielafstand.
- In 2016-2017 is het gemiddelde precies gelijk aan de mediaan. Hoeveel doelpunten werden er dat seizoen gescoord?

+ 9.3 Spreidingsdiagrammen

24 De figuur hiernaast geeft informatie over de schoenmaat en de lengte van een aantal leerlingen. Punt *A* hoort bij Anton. De schoenmaat van Anton is 39 en hij is 160 cm lang.

- Van hoeveel leerlingen zijn in figuur 9.10 de gegevens verwerkt?
- Punt *B* hoort bij Bea. Wat is haar schoenmaat? Hoe lang is Bea?
- Heeft de langste leerling de grootste schoenmaat?
- Bereken de gemiddelde lengte van deze leerlingen in centimeter nauwkeurig.

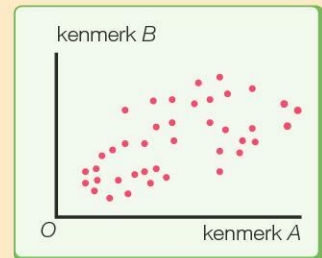


figuur 9.10

Theorie A Puntenwolk

In opgave 24 is bij elk **element** van een **populatie** leerlingen naar twee kenmerken gekeken: de schoenmaat en de lengte. Vervolgens zijn de elementen van de populatie als punten in een **spreidingsdiagram** getekend. Daarbij is op de horizontale as de schoenmaat uitgezet, en op de verticale as de lengte. De punten vormen samen een **puntenwolk**.

In een spreidingsdiagram stellen de punten de elementen van een populatie voor. Hierbij zijn van elk element twee kenmerken weergegeven.



- 25** [WERKBOEK] Van een aantal leerlingen is de lengte en het gewicht gegeven. Je ziet dat van de eerste leerling de lengte 148 cm is en het gewicht 52 kg.

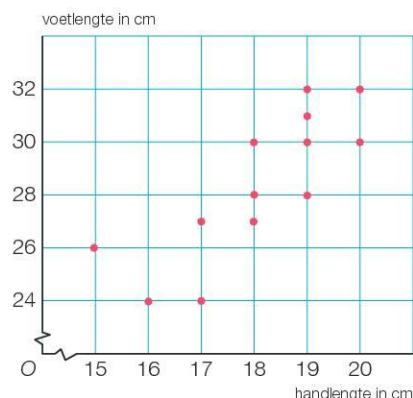
LENGTE EN GEWICHT VAN LEERLINGEN

lengte in cm	148	153	164	152	158	153	172	172	156	155
gewicht in kg	52	48	52	50	56	50	62	56	49	48

- Verwerk de gegevens uit de tabel in het spreidingsdiagram.
- Renske zegt: 'Hoe langer, hoe zwaarder.' Wat vind je daarvan?
- Bereken het gemiddelde gewicht van de leerlingen die langer dan 155 cm zijn.
- Bereken de gemiddelde lengte van de leerlingen die lichter dan 52 kg zijn.

26 Van een aantal leerlingen is de handlengte en de voetenlengte gemeten. Zie het spreidingsdiagram in figuur 9.11.

- Van hoeveel leerlingen is de handlengte meer dan 17 cm? En van hoeveel is de voetenlengte minder dan 27 cm?
- Lex zegt: 'Hoe groter de handlengte, des te groter de voetenlengte.'
Geef commentaar.
- Bereken de gemiddelde voetenlengte in cm. Rond af op één decimaal.
- Bereken de mediaan van de handlengten.
- Bereken de modus van de voetenlengten. En ook van de handlengten.
- Teken de boxplot van de handlengten.



figuur 9.11

A 27 [▶ WERKBOEK] Hieronder staat informatie over de Nederlandse provincies.

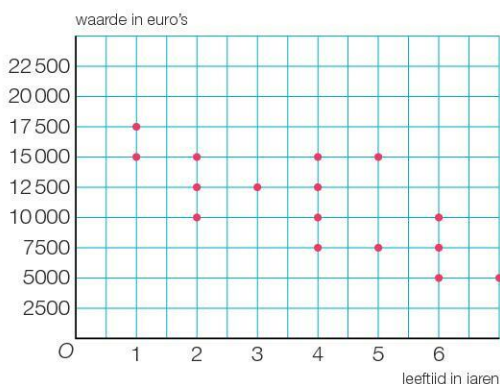
provincie	Gr	Fr	Dr	Ov	Flv	Gld
opp in km ²	2300	3300	2600	3300	1400	5000
aantal inwoners in mln	0,6	0,7	0,5	1,1	0,4	2,0

provincie	Ut	NH	ZH	Zld	NB	Lim
opp in km ²	1400	2700	2800	1800	4900	2200
aantal inwoners in mln	1,3	2,8	3,6	0,4	2,5	1,1

- Verwerk de informatie in het spreidingsdiagram.
- Anne zegt: 'Hoe groter de oppervlakte, hoe meer inwoners.'
Geef commentaar.
- Welke provincie heeft de grootste bevolkingsdichtheid?
En welke de kleinste?

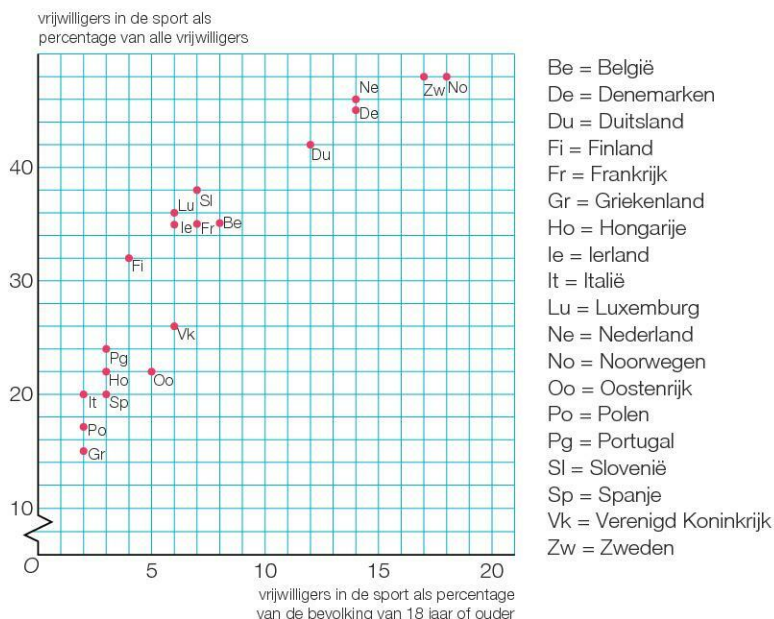
A 28 In het spreidingsdiagram in figuur 9.12 zijn gegevens van auto's verwerkt.

- Bereken de mediaan van de leeftijden van de auto's.
- Teken de boxplot van de waarden van de auto's.
- Bereken de modus van de leeftijden.
- Floor zegt: 'Hoe ouder de auto, hoe hoger de waarde.'
Geef commentaar.



figuur 9.12

Figuur 9.13 komt uit de rapportage 'Sport' van het Sociaal Cultureel Planbureau. De rapportage gaat over de bevolking van 18 jaar of ouder. Uit de rapportage blijkt dat in Nederland de deelname aan vrijwilligerswerk in de sport en op andere terreinen groot is.



figuur 9.13

- Welke landen doen het qua vrijwilligers in de sport als percentage van de bevolking van 18 jaar of ouder beter dan Nederland? En welke landen doen het qua vrijwilligers in de sport als percentage van alle vrijwilligers beter dan Nederland?
- Marlies beweert: 'Hoe hoger het percentage van de bevolking dat vrijwilliger is in de sport, des te hoger is het percentage vrijwilligers.'
Licht met enkele getallenvoorbeelden toe dat Marlies geen gelijk heeft.
- In Oostenrijk zijn 6,8 miljoen mensen 18 jaar of ouder.
Hoeveel van hen zijn vrijwilliger in de sport? En hoeveel vrijwilligers zijn er in totaal in Oostenrijk?
- In Luxemburg zijn 75 000 vrijwilligers actief.
Bereken het aantal Luxemburgers dat 18 jaar of ouder is.
- Hoeveel procent van de Finnen van 18 jaar of ouder is vrijwilliger in de sport? En hoeveel procent is vrijwilliger?

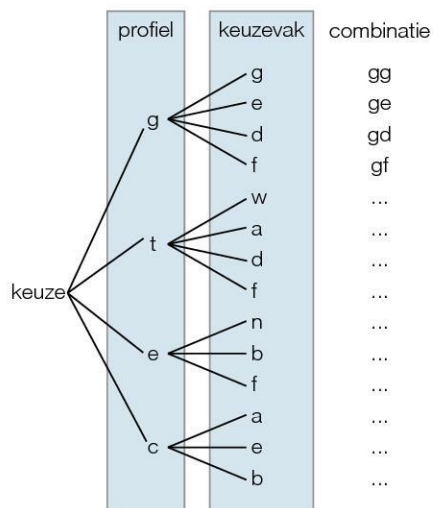


9.4 Telproblemen

0 30

[► WERKBOEK] In klas 4 kiest elke havo-leerling een profiel: natuur en gezondheid (g), natuur en techniek (t), economie en maatschappij (e) of cultuur en maatschappij (c). Daarnaast kan op het Curiecollege als keuzevak worden gekozen uit wiskunde D (w), economie (e), Duits (d), Frans (f), geschiedenis (g), biologie (b), natuurkunde (n), en aardrijkskunde (a). Deze keuzevakken zijn echter niet bij elk profiel mogelijk. Zie het schema in figuur 9.14.

- Maak het schema af.
- Op hoeveel manieren kun je op het Curiecollege profielen en keuzevakken combineren?
- Hoeveel mogelijkheden zijn er op het Curiecollege om een exact vak als keuzevak in je pakket op te nemen?



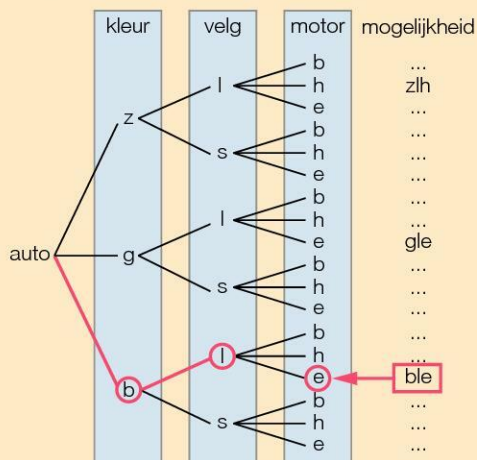
figuur 9.14

Theorie A Boomdiagram en wegendiagram

Bij garage Stuurman is de Toyota Auris verkrijgbaar in de kleuren zwart (z), groen (g) en blauw (b). Verder kan de auto worden geleverd met lichtmetalen velgen (l) en stalen velgen (s). Daarnaast kun je kiezen uit benzine (b), hybride (h) en elektrisch (e).

Met het **boomdiagram** in figuur 9.15 krijg je een overzicht van alle mogelijkheden.

De rode takken in het boomdiagram geven de mogelijkheid 'blauw, lichtmetalen velgen, elektrisch' aan, afgekort als ble. In totaal zijn er $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ mogelijke uitvoeringen van de Toyota Auris bij garage Stuurman te koop.



figuur 9.15

Ook het **wegendiagram** in figuur 9.16 op de volgende bladzijde geeft een overzicht van het aantal mogelijke uitvoeringen van de Toyota Auris bij Stuurman.



figuur 9.16

De rode weg geeft de mogelijkheid zlh aan.

Het totale aantal mogelijkheden is $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$.

Er zijn $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ mogelijke uitvoeringen met een benzinemotor.

31 Tussen de plaatsen P , Q , R en S zijn wandelroutes uitgezet:

- een witte, rode en blauwe route van P naar Q
- een gele en paarse route van Q naar R
- een witte, zwarte, gele en blauwe route van R naar S .

a Teken een wegendigram bij deze situatie.

b Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal om van P via Q en R naar S te wandelen?

c Hoeveel mogelijkheden bevatten een rode route?

d Hoeveel mogelijkheden bevatten een zwarte route?

32 Mo gooit met een gewone dobbelsteen, een viervlaksdobbelsteen en een muntstuk van 1 euro. Met een viervlaksdobbelsteen kun je 1, 2, 3 of 4 ogen gooien.

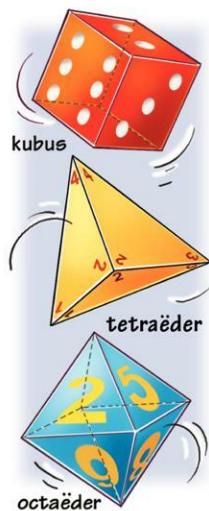
a Teken een wegendigram bij deze situatie.

b Hoeveel mogelijke resultaten zijn er?

A 33 Chantal gooit met een gewone dobbelsteen, een viervlaksdobbelsteen en een achtlvaksdobbelsteen.

a Hoeveel mogelijke resultaten zijn er?

b Hoeveel mogelijke worpen zijn er waarbij Chantal met de achtlvaksdobbelsteen acht ogen gooit?



Theorie B Vermenigvuldigingsregel

Het kiezen van een Toyota Auris bij garage Stuurman bestaat uit drie handelingen.

- handeling 1: kies een kleur 3 mogelijkheden
- handeling 2: kies een velg 2 mogelijkheden
- handeling 3: kies een motortype 3 mogelijkheden

Het totale aantal mogelijkheden is $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$.

Dit is een voorbeeld van de **vermenigvuldigingsregel**.

De vermenigvuldigingsregel

Een gecombineerde handeling die bestaat uit

handeling I die op p manieren kan worden uitgevoerd

en handeling II die op q manieren kan worden uitgevoerd

en handeling III die op r manieren kan worden uitgevoerd

kan op $p \cdot q \cdot r$ manieren worden uitgevoerd.

Voorbeeld

Jeroen laat de schijven in de figuur hieronder ronddraaien. Nadat de schijven zijn uitgedraaid, wijst elke pijl één sector aan. Het resultaat is een getal van drie cijfers. Zo is in figuur 9.17 het getal 532 aangegeven.



figuur 9.17

- a Hoeveel getallen zijn mogelijk?
- b Hoeveel getallen groter dan 300 zijn mogelijk?
- c Hoeveel getallen kleiner dan 140 zijn mogelijk?

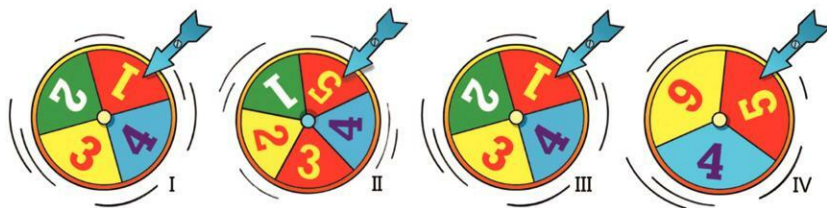
Aanpak

- b Het eerste cijfer moet 3, 4, 5 of 6 zijn, dus handeling I kan op vier manieren worden uitgevoerd.
- c Het eerste cijfer moet 1 zijn en het tweede cijfer moet 2 of 3 zijn, dus handeling I kan op één manier en handeling II kan op twee manieren worden uitgevoerd.

Uitwerking

- a aantal mogelijkheden = $6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$
- b aantal mogelijkheden = $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$
- c aantal mogelijkheden = $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

- 34** Jordy laat de schijven in figuur 9.18 ronddraaien. Nadat de schijven zijn uitgedraaid, wijst elke pijl één sector aan. Het resultaat is een getal van vier cijfers.



figuur 9.18

- a Hoeveel getallen zijn mogelijk?
- b Hoeveel even getallen zijn mogelijk?
- c Hoeveel getallen groter dan 2000 zijn mogelijk?
- d Hoeveel getallen zijn mogelijk met op het eind twee dezelfde cijfers?
- e Hoeveel getallen kleiner dan 1400 zijn mogelijk?

35 Steve wil een rockband oprichten. Hij zoekt nog een zanger, een gitarist, een toetsenist en een drummer. Op een oproep reageren zes zangers, vijf gitaristen, vier toetsenisten en vijf drummers.

- Op hoeveel manieren kan Steve de band samenstellen?
- Er melden zich nog twee zangers en drie gitaristen aan.
Met hoeveel neemt het aantal mogelijkheden om de band te vormen toe?

36 Een fruitautomaat heeft drie vensters naast elkaar, waarachter drie banden onafhankelijk van elkaar ronddraaien. Op elke band staan tien afbeeldingen. Zie de tabel.

AANTAL AFBEELDINGEN PER BAND

	band 1	band 2	band 3
appel	0	0	3
pen	1	3	2
lepel	6	0	0
schaar	1	6	2
boek	2	1	3
totaal	10	10	10

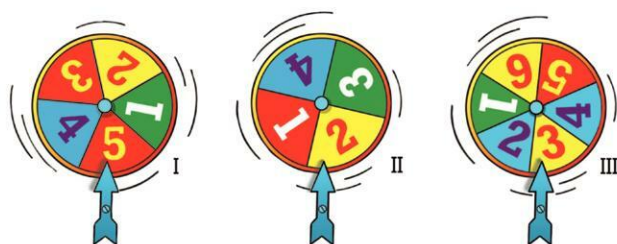


Je kunt de banden laten draaien en daarna stoppen door op een knop te drukken.

Op hoeveel manieren kan

- op elke band een schaar tevoorschijn komen
- drie keer een boek verschijnen
- een appel, een lepel en een schaar verschijnen
- er bij de drie afbeeldingen in elk geval een lepel zitten?

A 37 Patrick laat de schijven in figuur 9.19 draaien. Nadat de schijven zijn uitgedraaid, wijzen de pijlen een getal van drie cijfers aan.



figuur 9.19

- Hoeveel getallen zijn mogelijk?
- Hoeveel getallen groter dan 520 zijn mogelijk?
- Hoeveel getallen kleiner dan 400 zijn mogelijk?
- Hoeveel getallen zijn mogelijk met alleen maar oneven cijfers?
- Hoeveel getallen zijn mogelijk waarin het cijfer 6 voorkomt?

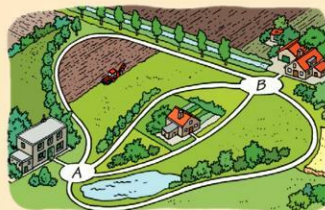
In een klas van 24 leerlingen worden achtereenvolgens een concertkaartje en een bioscoopkaartje verloot. De leerlingen zijn genummerd van 1 tot en met 24. Bij het verloten kan de mentor uit twee methoden kiezen.

- 1 De nummers 1 tot en met 24 op een schijf zetten en de schijf twee keer laten draaien.
- 2 Lootjes met daarop de nummers 1 tot en met 24 in een doos doen en na elkaar twee lootjes trekken.
 - a Op hoeveel manieren kunnen de twee kaartjes verloot worden bij methode 1?
 - b Op hoeveel manieren kunnen de twee kaartjes verloot worden bij methode 2?
 - c Welke methode vind je de beste? Waarom?



Theorie C Met en zonder herhaling

Het aantal rondwandelingen in figuur 9.20 van A via B terug naar A is $4 \cdot 4 = 16$. Je gaat er dan vanuit dat je terug dezelfde weg mag kiezen als heen. Wil je terug een andere weg nemen, dan is het aantal $4 \cdot 3 = 12$. Het is bij telproblemen dus belangrijk je af te vragen of **herhalingen** zijn toegestaan.



figuur 9.20

Voorbeeld

Op hoeveel manieren kun je uit een bestuur van zes personen achtereenvolgens een voorzitter, een secretaris en een penningmeester kiezen?

Aanpak

Bedenk dat herhalingen niet zijn toegestaan.

- handeling I: kies de voorzitter 6 mogelijkheden
- handeling II: kies de secretaris 5 mogelijkheden
- handeling III: kies de penningmeester 4 mogelijkheden

Uitwerking

aantal manieren = $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Voorbeeld

Bij een bedrijf krijgt elk artikel een code. Men gebruikt hiervoor de letters A, E, I, O, U en Y.

Hoeveel codes zijn mogelijk

- a met drie letters, als herhalingen zijn toegestaan
- b met vier letters, als herhalingen niet zijn toegestaan?

Uitwerking

- a aantal mogelijkheden = $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- b aantal mogelijkheden = $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Een voorbeeld van een drielettercode is AUU.
Een voorbeeld van een vierlettercode is IOEA.

- a Op hoeveel manieren kunnen vier gasten over zeven eenpersoonskamers verdeeld worden?
- b Hoeveel codes zijn mogelijk bestaande uit
 - zes cijfers
 - zes verschillende cijfers
 - zes dezelfde cijfers?
- c Hoeveel vijflettercodes zijn mogelijk die beginnen met een A en eindigen met een Z
 - als herhalingen zijn toegestaan
 - als herhalingen niet zijn toegestaan?

40 De opa van Frank heeft een groot aantal dvd's. Om een goed overzicht te houden, voorziet hij elke dvd van een lettercode. Hij gebruikt uitsluitend de letters A, B, C, D, E, F en G. Hoeveel vierlettercodes kan de opa van Frank maken

- a als herhalingen niet zijn toegestaan
- b als elke letter meer dan één keer gebruikt mag worden
- c als herhalingen zijn toegestaan en de code moet beginnen met CD
- d als elke letter maar één keer gebruikt mag worden en de code moet beginnen met CD?

41 Een pincode bestaat uit vier cijfers.

- a Hoeveel verschillende pincodes zijn er in totaal?
- b Hoeveel pincodes zijn er met vier verschillende cijfers?
- c Hoeveel pincodes zijn er met vier dezelfde cijfers?
- d Hoeveel pincodes zijn er met uitsluitend oneven cijfers?

42 In een bedrijf krijgt elk artikel een code. Hiervoor gebruikt men de letters A, B, C, D, E, F en G.

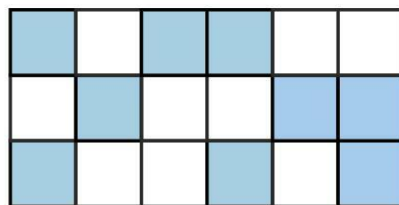
- a Hoeveel drielettercodes zijn mogelijk als elke letter maar één keer gebruikt mag worden? En hoeveel vierlettercodes als elke letter vaker gebruikt mag worden?
- b Matthijs beweert: het aantal vijflettercodes waarbij herhalingen zijn toegestaan, is meer dan 14 000 groter dan het aantal vijflettercodes zonder herhaling. Onderzoek of Matthijs gelijk heeft.

43 Een bedrijf voorziet zijn artikelen van een code bestaande uit een rijtje van vier vierkantjes die elk gevuld zijn met één van de tekens ♥, ●, ▲ en ■.

Voorbeelden zijn     en    .

- a Toon aan dat er 256 codes mogelijk zijn.
- b Hoeveel van deze codes beginnen met ▲?
- c Hoeveel van deze codes beginnen met ● en eindigen met ■?
- d Hoeveel codes bestaan uit vier verschillende tekens?

A 44 Een fabrikant voorziet zijn artikelen van een code door in een 3×6 -rooster elk hokje al dan niet blauw te maken. Een voorbeeld zie je hiernaast.



figuur 9.21

- Hoeveel codes zijn er mogelijk?
- Hoeveel codes zijn er waarbij alle hokjes aan de rand blauw zijn?
- Hoeveel codes zijn er waarbij alle hokjes in de middelste rij wit zijn?

A 45 Een derde klas bestaat uit 13 meisjes en 16 jongens. Voor de organisatie van een feestavond worden drie leerlingen aangewezen. De eerste leerling verzorgt de muziek, de tweede de drank en de derde de hapjes.

Op hoeveel manieren zijn drie leerlingen aan te wijzen

- als een meisje voor de muziek moet zorgen en twee jongens voor de drank en de hapjes
- als uitsluitend meisjes de organisatie op zich nemen
- als een jongen voor de muziek moet zorgen en een meisje voor de drank?

A 46 In deze opgave gaat het om getallen van vier cijfers waarin alleen de cijfers 2, 3, 4, 5, 6 en 7 voorkomen.

Hoeveel van die getallen zijn er als elk cijfer

- maar één keer gebruikt mag worden
- maar één keer gebruikt mag worden en het getal groter is dan 6000
- meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal oneven is?

A 47 **a** Aan de finale van de 100 meter hardlopen doen acht atleten mee. Op hoeveel manieren kunnen de gouden, de zilveren en de bronzen medaille verdeeld worden?

b Renske maakt een test die uit twaalf vierkeuzevragen bestaat. Van vijf vragen weet ze het antwoord. De rest gokt ze. Op hoeveel manieren kan Renske de test invullen?

c Van een playlist met twintig nummers worden vijf nummers willekeurig afgespeeld. Op hoeveel manieren kan dit?

d Annemarie maakt 'woorden' van vier letters. Ook niet bestaande woorden, zoals KBBA, zijn toegestaan. Hoeveel woorden zijn mogelijk als ze

- alleen klinkers gebruikt
- alleen medeklinkers gebruikt
- voor een woord verschillende letters gebruikt
- de volgorde klinker - medeklinker - klinker - medeklinker kiest?

De klinkers zijn
A, E, I, O en U.

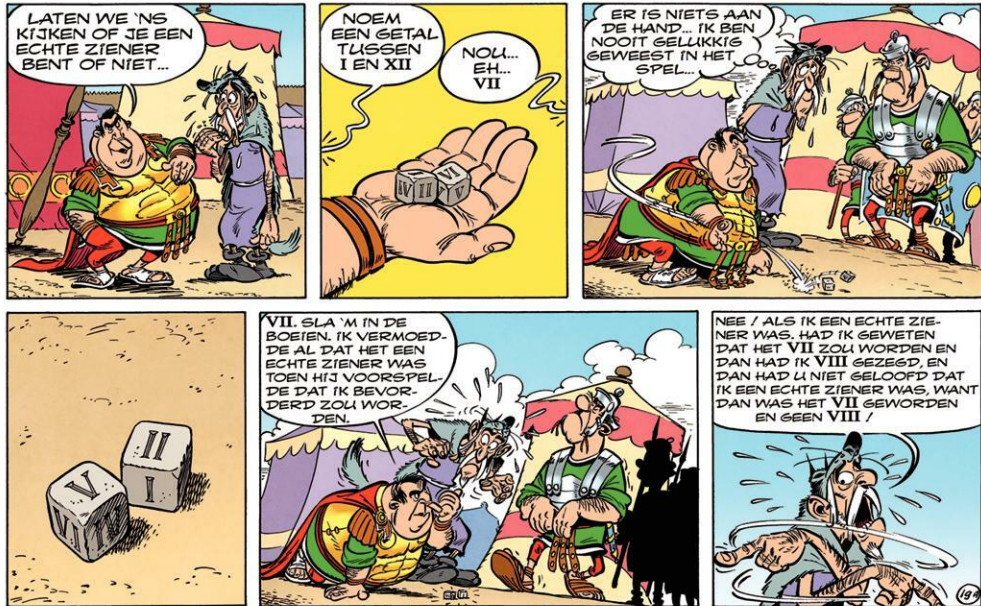
48 Hoeveel codes van vijf verschillende letters zijn er, die beginnen en eindigen met een klinker?

9.5 Kans

0 49

Hieronder zie je een gedeelte uit de strip Asterix en de ziener.

Een ziener is een toekomstvoorspeller. In de Romeinse tijd was het verboden het beroep van ziener uit te oefenen.



figuur 9.22

a Lees de strip. Welk getal kiest de ziener?

De ziener wil niet als ziener ontmaskerd worden, want dan wordt hij in de boeien geslagen.

b Waarom was het niet slim van de ziener om zeven te noemen?

c Welk getal had de ziener het beste kunnen noemen?

Theorie A Kans

In het dagelijkse leven praat je veel over kansen, bijvoorbeeld:

- Wat is de kans dat je overgaat naar de vierde klas?
- Wat is de kans dat je voor een proefwerk een voldoende haalt?
- Er is een kleine kans dat je een prijs wint in de staatsloterij.
- De kans dat het morgen regent is 50%.

In al deze gevallen kun je niet met zekerheid zeggen wat er gaat gebeuren. Het toeval speelt een rol. Maar sommige gebeurtenissen hebben een grotere **kans** dan andere. Zo is bij het gooien met twee dobbelstenen de kans op 'som 7' groter dan de kans op 'som 2'. Bij het spelen van spelletjes kun je daar handig gebruik van maken.

50 Schat de kans op de volgende gebeurtenissen. Kies telkens uit één van de hiernaast genoemde vijf mogelijkheden.

- Je wint de hoofdprijs in de staatsloterij.
- Een pasgeboren baby is een jongen.
- In een klas zitten vier leerlingen met dezelfde voornaam.
- Op weg naar huis krijg je een lekke band.
- Het sneeuwt volgend jaar tijdens de kerst.
- Het regent in november.
- Je leraar is op 29 februari geboren.
- Bij een worp met een dobbelsteen gooi je een even aantal ogen.
- Bij een worp met twee dobbelstenen gooi je in totaal 13 ogen.
- Er is een dag waarop meerdere Nederlanders jarig zijn.

- 1 - onmogelijk
- 2 - kleine kans
- 3 - kans van 50%
- 4 - grote kans
- 5 - zeker



figuur 9.23

51 Als je een punaise laat vallen, dan kan deze op twee manieren op de grond terechtkomen. Zie figuur 9.24.

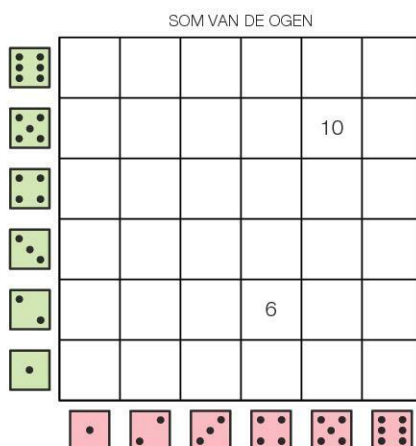
- Neem twintig punaises en gooi ze op de grond. Hoeveel keer krijg je manier 1?
- Vergelijk jouw resultaat met dat van je klasgenoten.
- Lise beweert: 'Omdat een punaise op twee manieren terecht kan komen, is de kans dat de punaise op manier 1 terechtkomt gelijk aan 50%.' Ben je het met haar eens? Licht toe.
- Welke gebeurtenis heeft de grootste kans: 'punaise valt op manier 1' of 'punaise valt op manier 2'?



figuur 9.24

52 [▶ WERKBOEK] Bij het gooien met twee dobbelstenen hangt het van het toeval af hoeveel ogen je gooit. In het schema in figuur 9.25 zijn alle mogelijkheden terug te vinden.

- Vul het schema verder in.
- Hoeveel hokjes zijn er in totaal?
- In hoeveel hokjes staat 2? En in hoeveel hokjes 7?
- Volgens Ron heb je bij het gooien met twee dobbelstenen meer kans om 'som 7' te gooien dan 'som 2'. Ben je het met hem eens? Waarom?



figuur 9.25

Theorie B Kansen berekenen

Bij het gooien met twee dobbelstenen zijn in totaal 36 uitkomsten mogelijk. In het rooster in figuur 9.26 zijn al deze uitkomsten terug te vinden. In elk hokje staat de som van de ogen.

De kans om bij het gooien met twee dobbelstenen 'som 6' te krijgen, bereken je als volgt.

In totaal zijn er 36 uitkomsten. Van deze uitkomsten zijn er vijf met som 6. De kans

op som 6 is gelijk aan $\frac{5}{36}$.

Je noteert dit als $P(\text{som } 6) = \frac{5}{36}$. Spreek uit: de kans op som 6 is $\frac{5}{36}$.

Je kunt de uitkomst van $P(\text{som } 6)$ ook schrijven als een decimaal getal of als een percentage.

Omdat $\frac{5}{36} \approx 0,139$ krijg je $P(\text{som } 6) \approx 0,139$ of $P(\text{som } 6) \approx 13,9\%$.

Om kansen te berekenen, is het vaak handig een overzicht te maken van alle mogelijke uitkomsten, en hierin de gunstige uitkomsten aan te geven. Daarom is hierboven een 6×6 -rooster gemaakt waarin de gunstige uitkomsten 'som 6' zijn aangegeven.

SOM

	7	8	9	10	11	12
	6	7	8	9	10	11
	5	6	7	8	9	10
	4	5	6	7	8	9
	3	4	5	6	7	8
	2	3	4	5	6	7








figuur 9.26 Bij het gooien met twee dobbelstenen zijn in totaal 36 uitkomsten mogelijk.

De letter P komt van het Latijnse woord *probabilitas*.

$$\text{kans} = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$$

Voorbeeld

Ismaël gooit met twee dobbelstenen.

Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat hij

- tien ogen gooit
- minder dan vijf ogen gooit.

Aanpak

Maak een rooster zoals hiernaast, en markeer hierin de gunstige uitkomsten. Het totale aantal mogelijke uitkomsten is 36.

- Tel de mogelijke uitkomsten met 10 ogen.
- Tel de mogelijke uitkomsten met minder dan 5 ogen.

Uitwerking

Zie het rooster hiernaast.

- $P(\text{som is } 10) = \frac{3}{36} \approx 0,083$
- $P(\text{som is kleiner dan } 5) = \frac{6}{36} \approx 0,167$

SOM

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

T 53 [► 57] Marieke gooit met een gewone dobbelsteen en met een viervlaksdobbelsteen. Bereken in procenten.

- a** $P(\text{de som is meer dan } 6)$
- b** $P(\text{de som is minder dan } 10)$
- c** $P(\text{het verschil is minder dan } 3)$
- d** $P(\text{het product is } 12)$

54 Rafael gooit met een rode en een zwarte dobbelsteen.

Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat hij

- a** zeven ogen gooit
- b** met de rode dobbelsteen meer ogen gooit dan met de zwarte.

55 Cathelijnn gooit met twee dobbelstenen.

- a** Maak een 6×6 -rooster met in elk hokje het product van de ogen.

Bereken in procenten de kans dat

- b** het product van de ogen 12 is
- c** het product van de ogen minder dan 5 is
- d** het product van de ogen oneven is.

56 Marleen draait de schijven in figuur 9.27. Nadat de schijven zijn uitgedraaid, wijst elke pijl een getal aan. Bereken. Geef je antwoord als breuk.

- a** $P(\text{de som van de getallen is } 9)$
- b** $P(\text{de getallen verschillen } 2 \text{ van elkaar})$
- c** $P(\text{het product van de getallen is groter dan } 15)$
- d** $P(\text{de getallen zijn niet gelijk})$



figuur 9.27

A 57 Frits gooit met twee dobbelstenen.

Bereken in drie decimalen nauwkeurig.

- a** $P(\text{de aantallen ogen zijn gelijk})$
- b** $P(\text{de som van de ogen is een kwadraat})$
- c** $P(\text{het verschil van de ogen is } 3)$

Simone gooit 300 keer met twee dobbelstenen.

- d** Hoe vaak verwacht je dat ze gelijke ogen gooit?

58 Als Tim jarig is, mag hij van oma uit vier enveloppen kiezen. In deze enveloppen zitten bedragen van € 10, € 15, € 15 en € 25. Opa laat Tim uit drie enveloppen kiezen. Hierin zitten bedragen van € 10, € 10 en € 25. Tim kiest van beide grootouders een envelop.

- a** Welke bedragen kan Tim van opa en oma samen krijgen? Bereken de kans op elk van deze bedragen. Geef je antwoord als breuk.
- b** Opa en oma hebben twaalf kleinkinderen. Elk van hen mag op zijn verjaardag op dezelfde manier als Tim twee enveloppen kiezen. Hoeveel verwacht je dat opa en oma in een jaar aan de verjaardagen van hun kleinkinderen kwijt zijn?



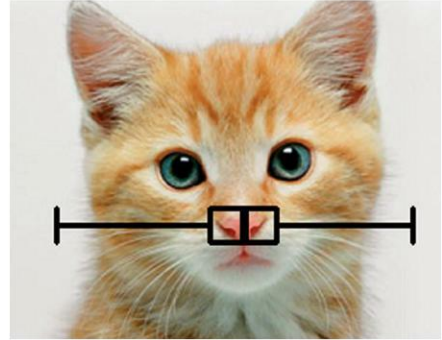


9.6 Spreiding met Excel

In deze paragraaf ga je met Excel boxplots en spreidingsdiagrammen tekenen. Daarbij maak je gebruik van het databestand 'Leerlinggegevens'. In dit bestand zijn van een aantal leerlingen gegevens opgeslagen, zoals de lengte en het gewicht.

[> WERKBOEK] In het werkboek kun je nalezen hoe je met Excel de spreidingsbreedte en de kwartielfstand berekent en hoe je boxplots en spreidingsdiagrammen tekent.

In het Engels wordt een boxplot ook wel 'box and whisker diagram' genoemd, dat wil zeggen een diagram met rechthoeken en snorharen.

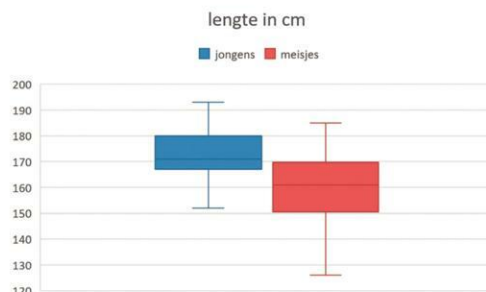


59 a Open het bestand 'Leerlinggegevens' met Excel.

	A	B	C	D	E	F
	nummer	naam	geslacht	leeftijd in jaren	lengte in cm	gewicht in kg
1						
2	1	Iris	m	16	157	67
3	2	Daan	j	15	169	70
4	3	Lars	j	14	178	81
5	4	Myrna	m	15	183	77
6	5	Menno	j	15	170	56
7	6	Thomas	j	13	155	62
8	7	Angela	m	15	152	58
9	8	Jerry	j	17	180	86
10	9	Jorn	j	14	168	73
11	10	Christiaan	j	15	158	70
12	11	Marianne	m	16	175	60

figuur 9.28

- b** Van hoeveel leerlingen zijn gegevens verzameld?
- c** Bereken met Excel de spreidingsbreedte en de kwartielfstand van de lengtes van de leerlingen. In het werkboek kun je lezen hoe dat gaat.
- d** In het werkboek staat hoe je bij het kenmerk 'lengte in cm' in één figuur de boxplots van de meisjes en de jongens krijgt.
Teken deze boxplots. Zorg dat je figuur 9.29 op je scherm krijgt.

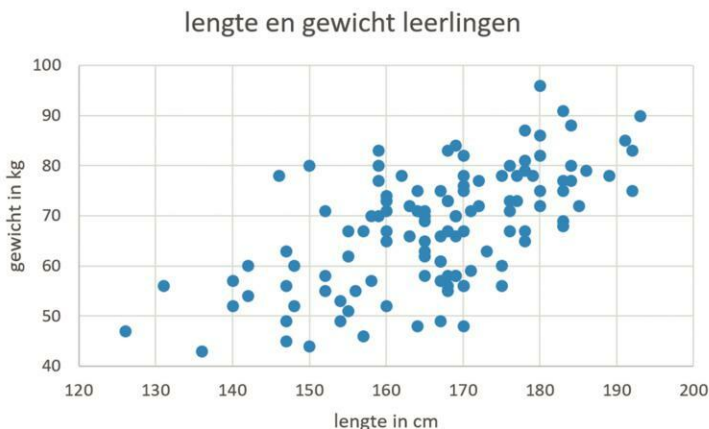


figuur 9.29

- 60**
- Begin met een nieuw werkblad en open het bestand 'Leerlinggegevens'.
 - Bereken de spreidingsbreedte en de kwartielafstand van de gewichten van de leerlingen.
 - Maak bij het kenmerk 'gewicht in kg' de boxplots voor meisjes en voor jongens.

- 61**
- Begin met een nieuw werkblad en open het bestand 'Leerlinggegevens'.
 - Deel de leerlingen in naar leeftijd.
 - Teken voor elke leeftijdsgroep een boxplot bij het kenmerk 'lengte in cm'.

- 62**
- Om te onderzoeken of er een verband bestaat tussen de lengte en het gewicht van de leerlingen, laat je Excel een spreidingsdiagram tekenen. In het werkboek kun je lezen hoe dat gaat. Zorg dat je figuur 9.30 op je scherm krijgt.



figuur 9.30

- 63**
- Begin met een nieuw werkblad en open het bestand 'Leerlinggegevens'.
 - Maak bij de kenmerken 'aantal uren sport per week' en 'aantal uren tv per week' een spreidingsdiagram.
 - Trek een conclusie uit het spreidingsdiagram.

- 64**
- Verzamel zelf statistische gegevens en verwerk deze in boxplots en spreidingsdiagrammen. Gebruik bijvoorbeeld de website van het CBS.

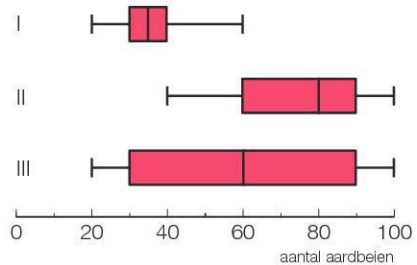


Gemengde opgaven

- 1** Op drie aardbeievelden is onderzocht welke invloed bemesting heeft. In de boxplots hiernaast is voor elk veld het aantal aardbeien per plant verwerkt. Op elk veld staan 240 planten.

- Schat hoeveel planten minstens 60 aardbeien hebben.
- Schat hoeveel procent van alle planten minstens 90 aardbeien heeft.
- Volgens Carlijn zijn er meer planten met minstens 40 aardbeien op veld III dan planten met hoogstens 40 aardbeien op veld I. Heeft Carlijn gelijk? Licht toe.
- Bekijk de 25% van de planten op veld II met de minste aardbeien.
Is het mogelijk dat deze planten samen 3600 aardbeien hebben? Licht toe.

AARDBEIEN PER PLANT



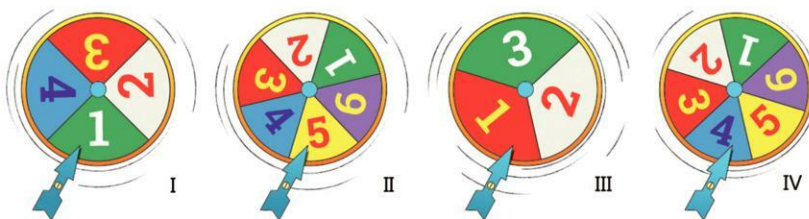
figuur 9.31

- 2** Kapper Douma heeft in maart het aantal klanten per dag bijgehouden. Zie het steel-bladdiagram.
- Bereken het gemiddelde aantal klanten per dag in maart bij kapper Douma. Rond af op één decimaal.
 - Bereken de mediaan en de modus.
 - Bereken de spreidingsbreedte en de kwartielfstand.
 - Teken de boxplot.

AANTAL KLANTEN KAPPER DOUMA

0	8 8 9
1	0 0 2 4 5 7 8 8
2	0 0 0 1 1 2 3 3 5 5 9
3	0 1
tientallen	eenheden

- 3** Maaïke laat de schijven in figuur 9.32 draaien. Nadat ze zijn uitgedraaid, wijst elke pijl een sector aan. Het resultaat is een getal van vier cijfers.



figuur 9.32

- Hoeveel getallen zijn er mogelijk?
- Hoeveel getallen groter dan 4500 zijn er mogelijk?
- Hoeveel getallen deelbaar door 5 zijn er mogelijk?
- Hoeveel getallen met uitsluitend even cijfers zijn er mogelijk?

- 4** Linda maakt codes die bestaan uit letters. Ze gebruikt daarbij alleen de letters U, V, W, X, Y en Z.
- Hoeveel tweelettercodes kan ze maken?
 - Hoeveel vierlettercodes kan ze maken die eindigen op Z?
 - Hoeveel vijflettercodes kan ze maken die beginnen met XY?
 - Hoeveel vijflettercodes kan ze maken die uit verschillende letters bestaan?

- 5** Huub laat de schijven I en II in figuur 9.33 één keer draaien. Nadat de schijven zijn uitgedraaid, wijst elke pijl een getal aan.

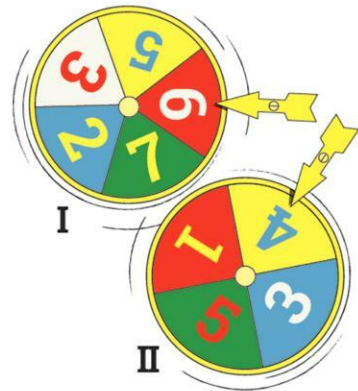
Bereken in procenten de kans dat

- de som van de getallen 7 is
- het verschil van de getallen minder dan 2 is
- het product van de getallen meer dan 16 is.

Cindy laat schijf I twee keer draaien. Elke keer nadat de schijf is uitgedraaid, wijst de pijl een getal aan.

Bereken. Geef je antwoord als breuk.

- $P(\text{de getallen zijn niet gelijk})$
- $P(\text{de som van de getallen is even})$
- $P(\text{het verschil van de getallen is meer dan 3})$



figuur 9.33

- 6** In Yellowstone National Park in de VS bevindt zich Old Faithful. Dat is een geiser die om de één à twee uur een eruptie heeft. Het spreidingsdiagram in figuur 9.34 heeft betrekking op een aaneengesloten periode begin juni.

- Hoe lang duurde de kortste eruptie?
- Bill ziet begin juni een eruptie. Pas na 105 minuten is er weer een eruptie.

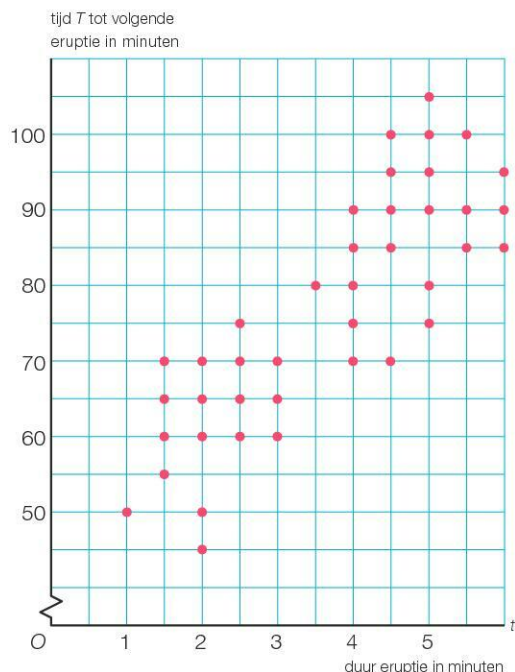
Hoe lang duurde de eruptie die Bill zag?

- Bekijk alle erupties die korter dan 3 minuten duurden.

Hoeveel minuten duurde het gemiddeld tot er weer een eruptie kwam?

- Bekijk de erupties waarbij het minstens 70 minuten duurde tot de volgende eruptie.

Teken de boxplot van de duur van de erupties.



figuur 9.34

Samenvatting

9.1 Spreidingsmaten

blz 131

Zet je een serie waarnemingsgetallen in volgorde van grootte, dan is

- het eerste kwartiel Q_1 de mediaan van de eerste helft van de serie
- het derde kwartiel Q_3 de mediaan van de tweede helft van de serie.

De mediaan, Q_1 en Q_3 verdelen een serie waarnemingsgetallen in vier groepen die elk (ongeveer) 25% van de waarnemingsgetallen bevatten.

Het steel-bladdiagram hiernaast gaat over het aantal gele kaarten per speelronde in de Eredivisie in het seizoen 2017-2018.

Er waren 34 speelrondes, dus na het splitsen van de serie waarnemingsgetallen in twee groepen van 17 krijg je $Q_1 = 9^e$ getal = 24 en $Q_3 = 26^e$ getal = 31. Verder is

$$\text{mediaan} = \frac{17^e \text{ getal} + 18^e \text{ getal}}{2} = \frac{26 + 26}{2} = 26.$$

blz 133

Kwartielafstand en spreidingsbreedte zijn voorbeelden van spreidingsmaten.

$$\text{kwartielafstand} = Q_3 - Q_1$$

$$\text{spreidingsbreedte} = \text{grootste getal} - \text{kleinste getal}$$

Bij het steel-bladdiagram hierboven krijg je

$$\text{kwartielafstand} = 31 - 24 = 7 \text{ en spreidingsbreedte} = 42 - 15 = 27.$$

GELE KAARTEN SEIZOEN 2017-2018

1	5 6
2	0 0 1 1 3 4 4 4 4 4 5 6 6 6 6 6 7 8 9
3	1 1 1 1 1 2 2 4 4 5 5 6
4	2
tientallen	eenheden

9.2 De boxplot

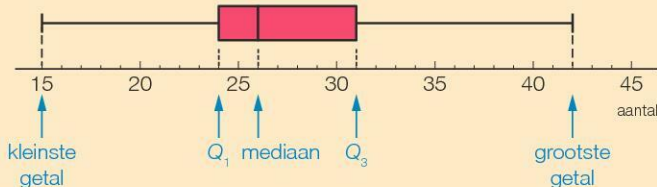
blz 136

Bij een serie waarnemingsgetallen kun je een boxplot tekenen.

In een boxplot zet je uit: het kleinste waarnemingsgetal, Q_1 , de mediaan, Q_3 , en het grootste waarnemingsgetal.

Bij het aantal gele kaarten in de Eredivisie in het seizoen 2017-2018 kun je de boxplot hieronder maken.

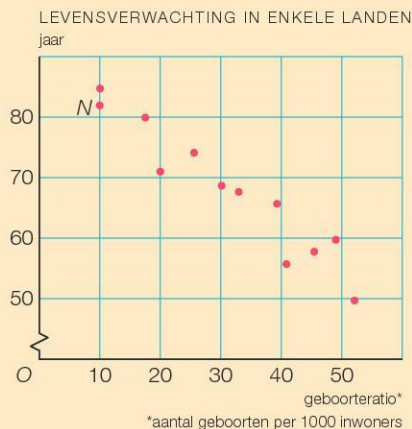
GELE KAARTEN SEIZOEN 2017-2018



9.3 Spreidingsdiagrammen

blz 142

In een spreidingsdiagram stellen de punten de elementen van een populatie voor. Hierbij zijn van elk element twee kenmerken weergegeven. Het spreidingsdiagram hiernaast gaat over een populatie van twaalf landen. Het punt $N(10, 82)$ hoort bij Nederland. In Nederland is de geboortecijfer 10 en de levensverwachting 82 jaar.



9.4 Telproblemen

blz 146

De vermenigvuldigingsregel

Een gecombineerde handeling die bestaat uit
 handeling I die op p manieren kan worden uitgevoerd
 en handeling II die op q manieren kan worden uitgevoerd
 en handeling III die op r manieren kan worden uitgevoerd
 kan op $p \cdot q \cdot r$ manieren worden uitgevoerd.

Bij het draaien van de drie schijven
 hiernaast zijn er in totaal $4 \cdot 3 \cdot 8 = 96$
 getallen mogelijk. Hiervan zijn er
 $1 \cdot 2 \cdot 8 = 16$ groter dan 420. En
 $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ getallen zijn even.



blz 149

Ga bij telproblemen na of herhalingen
 zijn toegestaan.

9.5 Kans

blz 154

$$\text{kans} = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$$

Om kansen te berekenen, is het vaak handig een overzicht te maken van alle mogelijke uitkomsten en hierin de gunstige uitkomsten aan te geven.

Kijk je bij het gooien met een viervlaksdobbelsteen en een gewone dobbelsteen naar het verschil van de ogen, dan zijn er 24 mogelijke uitkomsten. Zie het rooster hiernaast. Hierin zijn met geel de zeven mogelijke uitkomsten aangegeven waarbij het verschil 1 is. Dus $P(\text{verschil is } 1) = \frac{7}{24}$. Omdat $\frac{7}{24} \approx 0,292$ kun je ook schrijven $P(\text{verschil is } 1) \approx 0,292$ en $P(\text{verschil is } 1) \approx 29,2\%$.

	VERSCHIL			
5	5	4	3	2
4	4	3	2	1
3	3	2	1	0
2	2	1	0	1
1	1	0	1	2
0	0	1	2	3
	1	2	3	4

Diagnostische toets

9.1 Spreidingsmaten

- 1** In de kop van Overijssel ligt Blokzijl. De sluis in Blokzijl is een bezienswaardigheid. De frequentietabel hieronder geeft informatie over het aantal boten dat in een week in mei de sluis passeert.

BOTEN DOOR DE SLUIS IN BLOKZIJL

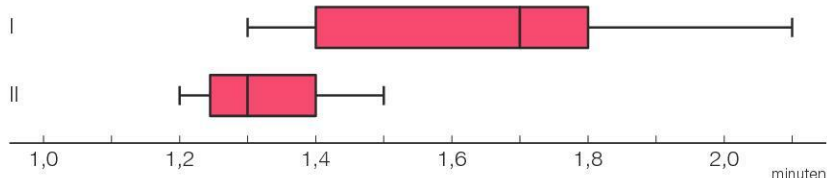
aantal per uur	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
frequentie	4	8	8	3	4	15	5	8	3	10	2

Bereken de spreidingsbreedte en de kwartielafstand.

9.2 De boxplot

- 2** Zie de frequentietabel bij opgave 1.
- 3** Het circuit van Zandvoort is 4307 meter lang. Op een zondag worden de rondetijden van 40 professionele coureurs en 60 amateurcoureurs geklokt. De resultaten in figuur 9.35 zijn gesplitst in professionals en amateurs.

RONDETIJDEN CIRCUIT ZANDVOORT



figuur 9.35

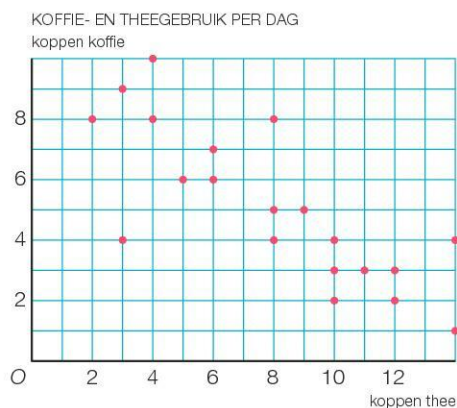
- Licht toe dat boxplot I bij de amateurs hoort.
- Schat hoeveel coureurs een rondetijd onder de 1,4 minuten hebben gereden.
- Karin beweert dat de 15 snelste amateurs allemaal minstens zo snel waren als tien professionals. Kan Karin gelijk hebben? Licht toe.



9.3 Spreidingsdiagrammen

4 Van een aantal gezinnen is onderzocht hoeveel koppen koffie en hoeveel koppen thee er op een dag worden gedronken. Zie figuur 9.36.

- Hoeveel procent van de gezinnen drinkt meer thee dan koffie?
- Bereken het gemiddelde aantal koppen koffie per gezin per dag.
- Van de onderzochte gezinnen drinkt de familie Jansen het minste koffie. Hoeveel koppen thee drinkt de familie Jansen per dag?
- Wat is de modus van het aantal gedronken koppen koffie per dag?



figuur 9.36

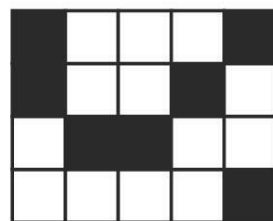
9.4 Telproblemen

5 Bij de firma Edoc krijgt elk artikel een code. De code bestaat uit twee cijfers gevolgd door drie letters. Alle cijfers komen in aanmerking en mogen vaker gebruikt worden. Bij de letters kiest men uit A, B, C, D, E en F.

- Hoeveel codes zijn mogelijk als
 - elke letter maar één keer gebruikt mag worden
 - elke letter vaker gebruikt mag worden?
- Hoeveel codes zijn er mogelijk die beginnen met 8 en eindigen met een klinker als elke letter vaker gebruikt mag worden?
- Hoeveel codes zijn er mogelijk die beginnen met twee gelijke cijfers?

6 Een fabrikant maakt codes door in een 4×5 -rooster elk hokje al dan niet zwart te maken. Een voorbeeld zie je hiernaast.

- Hoeveel codes zijn er mogelijk?
- Hoeveel codes zijn er mogelijk waarbij alle hokjes aan de rand zwart zijn?
- Hoeveel codes zijn er mogelijk waarbij alle hokjes in de middelste kolom wit zijn?
- De fabrikant besluit het aantal mogelijke codes te vergroten door voortaan elk hokje wit, zwart of rood te maken. Met hoeveel neemt het aantal mogelijke codes toe?



figuur 9.37

9.5 Kans

7 Rob gooit met een gewone en een bijzondere dobbelsteen. Op de bijzondere dobbelsteen staan de oneven getallen van 1 tot en met 11.

Bereken. Geef je antwoord als breuk.

- $P(\text{som is even})$
- $P(\text{som is meer dan } 12)$
- $P(\text{product is minder dan } 11)$
- $P(\text{verschil is meer dan } 4)$

Herhaling

9.1 Spreidingsmaten

- 1 Van een rij waarnemingsgetallen, gerangschikt van klein naar groot, is Q_1 de mediaan van de eerste helft en Q_3 de mediaan van de tweede helft.

Bereken Q_1 en Q_3 .

a 21, 21, 25, 27, 31, 38, 39, 41, 41, 45

b 5, 5, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10

c	getal	5	6	7	8	9
	frequentie	3	1	5	7	2



- 2 Je kent de volgende spreidingsmaten.

- kwartielfstand = $Q_3 - Q_1$
- spreidingsbreedte = grootste getal - kleinste getal

Bereken de kwartielfstand en de spreidingsbreedte.

a 8, 9, 9, 9, 12, 13, 17, 21, 28

b 31, 31, 48, 52, 98, 102, 107, 108, 120

c	getal	18	19	20	21	22	23
	frequentie	8	2	19	7	21	9

9.2 De boxplot

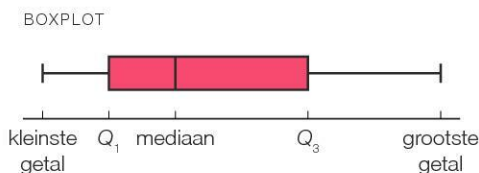
- 3 Om een boxplot te tekenen, heb je vijf getallen nodig: het kleinste waarnemingsgetal, Q_1 , de mediaan, Q_3 , en het grootste waarnemingsgetal.

Teken de boxplot.

a 8, 3, 2, 6, 4, 7, 9, 5, 3

b 12, 15, 12, 13, 18, 23, 14, 17, 13, 13

c	getal	12	13	14	15	16	17	18
	frequentie	8	7	11	16	3	18	2



- 4 Tuincentrum Struik verkoopt sierstenen met een gewicht van 15 tot 40 kg. Bo koopt twee zakken van 500 kg en controleert het gewicht van de stenen. De resultaten in kg staan hieronder.

zak A: 35 25 16 38 40 26 34 23 27

34 39 18 33 22 21 26 17 22

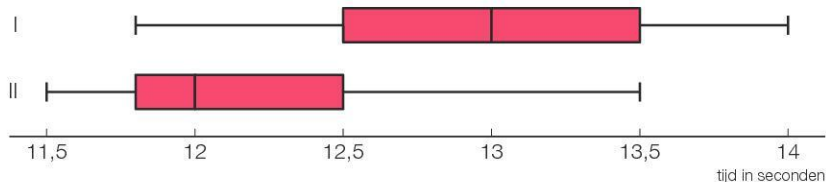
zak B: 18 20 27 32 26 19 16 15 38 15 16

29 27 27 20 21 25 25 28 16 20 20

- a Maak een dubbel steel-bladdiagram.
b Teken boven één getallenlijn de twee bijbehorende boxplots.

- 5** Een groep van twintig leden van een atletiekvereniging krijgt een half jaar lang extra training op de 100 meter sprint. Van elke atleet is de tijd voor en direct na deze training gemeten. De resultaten zijn verwerkt in de volgende figuur.

TIJDEN 100 METER SPRINT

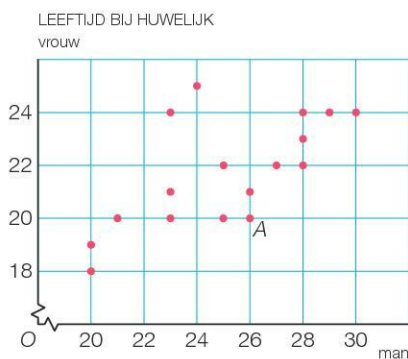


figuur 9.38

- Licht toe dat boxplot I bij de tijden van voor de training hoort.
- Schat hoeveel leden de 100 meter voor de training in minder dan 12,5 seconden lopen. En hoeveel zijn dat er na de training?

9.3 Spreidingsdiagrammen

- 6** In een gemeentehuis zijn in een maand een aantal huwelijken gesloten. In figuur 9.39 zie je informatie over de leeftijden van de mannen en vrouwen.



figuur 9.39

- Van hoeveel echtparen zijn in het spreidingsdiagram de gegevens verwerkt?
- Het punt A hoort bij het echtpaar Aalders. Hoe oud is de man? En hoe oud is de vrouw?
- Van hoeveel procent van de echtparen is de vrouw ouder dan de man?
- Van hoeveel procent van de echtparen is de man 23 jaar?
- Vul de volgende frequentietabel in.

LEEFTIJD MAN BIJ HUWELIJK

leeftijd	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
frequentie											

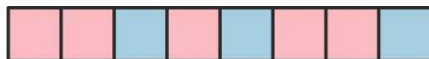
- Bereken de gemiddelde leeftijd van de mannen. Rond af op één decimaal.
- Bereken de gemiddelde leeftijd van de vrouwen in één decimaal nauwkeurig. Bereken ook de mediaan en de modus.



9.4 Telproblemen

- 7** Een bedrijf gebruikt voor elk artikel een code die bestaat uit drie of vier letters gevolgd door één cijfer. De cijfers 0, 1 en 2 worden niet gebruikt. De letters worden gekozen uit P, Q, R, S, T, U, V en W. Mogelijke codes zijn TRQ8, VVVW3 en RRSS5.
- a** Hoeveel codes van drie letters zijn mogelijk als de letters verschillend zijn?
 - b** Hoeveel codes van drie letters zijn mogelijk als herhalingen zijn toegestaan?
 - c** Hoeveel codes van vier letters zijn mogelijk als herhalingen zijn toegestaan? En hoeveel zijn er mogelijk als herhalingen niet zijn toegestaan?
 - d** Hoeveel codes van drie letters zijn mogelijk als de drie letters gelijk zijn en de code eindigt op een 7 of een 8?

- 8** Piet heeft een strook met acht hokjes. Elk hokje kleurt hij rood of blauw. Een voorbeeld zie je hiernaast.

**figuur 9.40**

- a** Op hoeveel manieren kan hij de strook kleuren?
b Op hoeveel manieren kan hij de strook kleuren als in elk geval het eerste en het laatste hokje rood moeten zijn?

Douwe kleurt een strook met tien hokjes. Hij kleurt elk hokje rood, blauw of groen.

- c** Op hoeveel manieren kan Douwe de strook kleuren?
- d** Op het laatste moment besluit Douwe de hokjes rood, blauw, groen of zwart te kleuren.
Op hoeveel manieren kan Douwe de strook kleuren als het eerste en het laatste hokje dezelfde kleur moeten hebben?

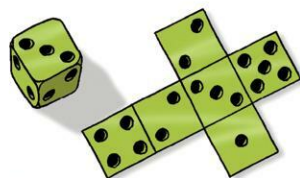
9.5 Kans

- 9** Martijn gooit twee keer met de dobbelsteen uit figuur 9.41a en telt de punten bij elkaar op. Om de kans op een bepaald puntenaantal te berekenen, maakt Martijn het rooster van figuur 9.41b.

- a** Neem het rooster over en vul het verder in.

Bereken in drie decimalen nauwkeurig.

- b** $P(\text{som is } 6)$
- c** $P(\text{som is minder dan } 5)$
- d** $P(\text{som is kleiner dan product})$



a

50m

5						9
4						
3						
2						
2						
1						
	1	2	2	3	4	5

b

figuur 9.41

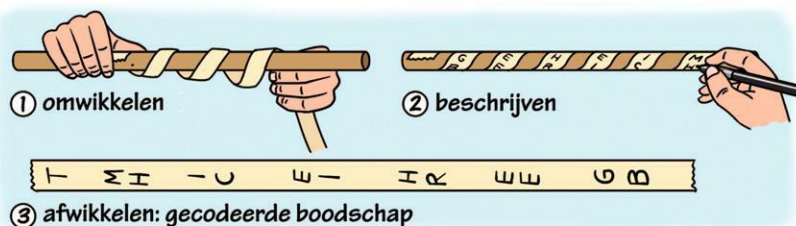
Onderzoek Geheimschrift

Sinds mensenheugenis hebben koningen, keizers en generaals er baat bij om hun bevelen zo te versturen, dat de vijand er niets van begrijpt. Mede daarom zijn er in de loop van de tijd allerlei **geheimschriften** ontwikkeld. De wetenschap die zich bezighoudt met geheimschriften heet **cryptografie**.

Tegenwoordig speelt cryptografie een belangrijke rol bij het versturen van informatie via internet. Zo is het bijvoorbeeld belangrijk dat bij internetbankieren en bij het kopen van artikelen bij een webwinkel financiële gegevens geheim blijven.

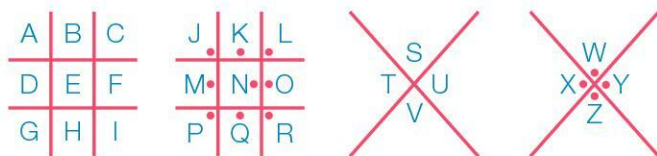
In dit onderzoek ga je een aantal geheimschriften onderzoeken en teksten versleutelen en ontcijferen.

- 1** De scytale is een van de oudste methoden om een geheime boodschap door te geven. Hierbij werd een reep perkament om een stok gerold en daarna beschreven met een boodschap. Vervolgens werd de rol perkament van de stok gehaald en naar de plaats van bestemming gebracht.



Onderzoek hoe de ontvanger de boodschap kon ontcijferen.

- 2** Een geheimschrift is als volgt vastgelegd.



- a** Ontcijfer het volgende bericht.

[illegible]

- b** Versleutel je eigen naam in dit geheimschrift.

- 3** Julius Caesar (100-44 v.Chr.) gebruikte een geheimschrift om aan zijn legeraanvoerders bevelen door te geven. Hierbij werd elke letter door een andere vervangen. Bijvoorbeeld

alfabet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	...
vervangingsalfabet	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	...

Deze tabel is de **sleutel** van het geheimschrift. Van deze sleutel is de stap 5.

Versleutel met dit geheimschrift

- a** met stap 5 'de vijand nadert'
- b** met stap 10 'morgen aanvallen'.

Ontcijfer de volgende boodschappen

- c** met stap 3 NRP RQPLGGHOLMN WHUXJ QDDU URPH
- d** met stap 25 JNNO NADKHW NL LDS DUDQYVHIM.

- 4** Ontcijfer de volgende boodschap. Onderzoek eerst met welke stap is versleuteld.

OP NZOP GLY OPKP MZZODNSLA VFY UP KPWQ GTYOPY

Vijanden kwamen er al snel achter hoe een geheimschrift met een vaste stap kon worden ontcijferd. Om het kraken van een geheimschrift moeilijker te maken, zijn allerlei methoden ontwikkeld. Bij een van deze methoden laat je de stap variëren. Met bijvoorbeeld de sleutel 5-8-1-3-11 krijg je de versleuteling hieronder.

M	O	E	I	L	I	J	K	T	E	O	N	T	C	I	J	F	E	R	E	N
5	8	1	3	11	5	8	1	3	11	5	8	1	3	11	5	8	1	3	11	5
R	W	F	L	W	N	R	L	W	P	T	V	U	F	T	O	N	F	U	P	S

- 5** **a** Onderzoek hoe deze versleuteling werkt, en versleutel hiermee het woord 'Pythagoras'.
b Ontcijfer MR NRW QF IS met de sleutel 4-7-1-9.

- 6** Bij het doorgeven van de sleutel van een geheimschrift, kun je gebruikmaken van repeterende breuken. Zo is $\frac{1}{7} = 0,142857142857142 \dots$

- a** Ontcijfer IEPLNN EMG ZJWFXGZJUEI DZJBLIP met de sleutel van $\frac{1}{7}$.
- b** Versleutel het woord 'Archimedes' met de sleutel van $\frac{1}{13}$.

In de 16^e eeuw bedacht Blaise de Vigenère een variant op de manier van versleutelen die je in de vorige opgaven hebt gezien. Bij deze methode wordt gebruik gemaakt van een codewoord. Gebruik je het codewoord BOMEN voor het coderen van een boodschap, dan krijg je de tabel op de volgende bladzijde.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a
o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m

- 7 a** Onderzoek hoe de versleuteling van Blaise de Vigenère werkt, en gebruik deze om de boodschap 'De vijand komt morgen' met het codewoord BOMEN te versleutelen. Gebruik het schema hieronder.

D	E	V	I	J	A	N	D	K	O	M	T	M	O	R	G	E	N
<div></div>																	
B	O	M	E	N	B	O	M	E	N	B	O	M	E	N	B	O	M
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

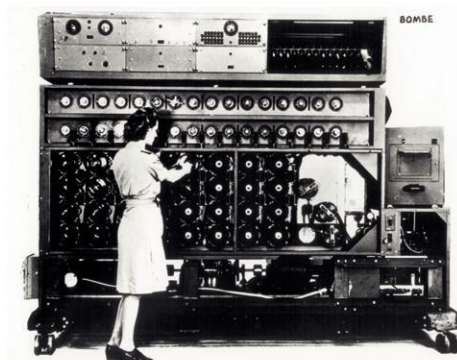
- b** Ontcijfer de boodschap ES HVRES UW IPCDFVK met het codewoord BOMEN.
- c** Onderzoek hoe je een codewoord kunt omzetten naar een sleutel zoals in opgave 5. Welke sleutel hoort bij het codewoord BOMEN?

- 8** Versleutel een boodschap met een zelfgekozen codewoord en laat een klasgenoot de boodschap ontcijferen nadat je het codewoord hebt gegeven.

- 9 a** Onderzoek wat frequentieanalyse is, en hoe je hiermee een tekst kunt ontcijferen die volgens de methode van Blaise de Vigenère is versleuteld.
- b** Onderzoek welke rol cryptografie gespeeld heeft in de Tweede Wereldoorlog.



De Enigma, een revolutionaire elektromechanische codeermachine die door de Duitsers in de Tweede Wereldoorlog werd gebruikt.



Bij het kraken van de Enigma werden voorlopers van de moderne computer ingezet.

Vaardigheden

De Vaardigheden bestaan uit Wiskundige vaardigheden en Algemene vaardigheden.

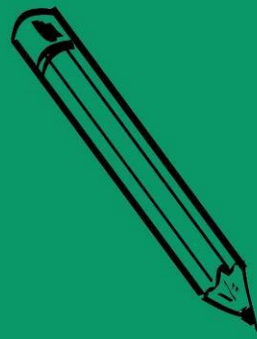
In de Wiskundige vaardigheden worden rekenvaardigheden en algebraïsche vaardigheden herhaald en verder ingeslepen.

De Wiskundige vaardigheden in dit boek bestaan uit vier lessen.

- 1 Breuken
- 2 Procenten
- 3 Machten
- 4 Vergelijkingen en ongelijkheden

In de Algemene vaardigheden staat het systematisch oplossen van problemen centraal. In dit boek is hierbij aandacht voor het voorkomen van vastlopen en het zoeken naar een geschikte aanpak.





$$\frac{65}{12}q = (1A + \frac{4}{8}) + (10 - \frac{3}{4} = P(48 + 13C)(35 - \frac{q65}{P} = \frac{3}{4}(\frac{P}{65} - \frac{C}{13})(188 +$$



Wiskundige vaardigheden

1 Breuken

Breuken vereenvoudigen

De breuk $\frac{5a}{8a}$ is te vereenvoudigen tot $\frac{5}{8}$ door teller en

noemer door a te delen. En zo is $\frac{7ab}{14ac} = \frac{b}{2c}$. Je hebt teller en

noemer door 7 en door a gedeeld.

Verder is $\frac{16xy}{8x} = \frac{2y}{1} = 2y$. Je hebt teller en noemer door 8 en door x gedeeld.

Let op het verschil tussen $\frac{8a}{a} = \frac{8 \cdot a}{1 \cdot a} = \frac{8}{1} = 8$ en $\frac{a}{8a} = \frac{1 \cdot a}{8 \cdot a} = \frac{1}{8}$.

1 Vereenvoudig.

a $\frac{25a}{a}$

c $\frac{18xy}{24xz}$

e $\frac{-20pqr}{25prs}$

b $\frac{5b}{15a}$

d $\frac{a}{25a}$

f $\frac{-21ab}{35abc}$

Voorbeelden

$$\frac{15ab}{3a} - 7b = 5b - 7b = -2b$$

$$\frac{8xy}{y} - \frac{12xz}{2z} = 8x - 6x = 2x$$

2 Herleid.

a $\frac{18xy}{6x} - 5y$

b $\frac{-27xy}{9y} - 5x$

c $-\frac{3xy}{y} - \frac{-2xz}{6z}$

Breuken optellen

Bij het optellen van gelijknamige breuken neem je de tellers samen, de noemer verandert niet.

Vereenvoudig de breuk.

$$\text{Dus } \frac{8}{a} + \frac{2}{a} = \frac{10}{a} \text{ en } \frac{9}{2x} - \frac{3}{2x} = \frac{6}{2x} = \frac{3}{x}.$$

$$\text{Verder is } \frac{x}{y} + \frac{3x}{y} = \frac{4x}{y} \text{ en } \frac{x}{y} + \frac{3z}{y} = \frac{x+3z}{y}.$$

Om niet-gelijknamige breuken op te tellen, maak je ze eerst gelijknamig.

$$\text{Zo is } \frac{5}{x} + \frac{2}{y} = \frac{5y}{xy} + \frac{2x}{xy} = \frac{5y + 2x}{xy}.$$

$$\text{Verder is } \frac{3}{x} + \frac{2}{5x} = \frac{15}{5x} + \frac{2}{5x} = \frac{17}{5x} \text{ en}$$

$$2 - \frac{6}{a} = \frac{2}{1} - \frac{6}{a} = \frac{2a}{a} - \frac{6}{a} = \frac{2a - 6}{a}.$$

3 Herleid.

a $\frac{3x}{2z} + \frac{5x}{2z}$

b $\frac{7p}{3q} - \frac{p}{3q}$

c $\frac{2}{a} - \frac{b}{a}$

4 Herleid.

a $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$

c $\frac{2}{3x} + \frac{5}{2x}$

e $\frac{4}{x} - 3$

b $\frac{3}{5a} - \frac{2}{a}$

d $\frac{2}{a} - \frac{3}{a^2}$

f $\frac{7}{4p} - \frac{3}{2q}$

Breuken vermenigvuldigen en delen

Bij het vermenigvuldigen van breuken gebruik je

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}.$$

Bij delen door een breuk vermenigvuldig je met het omgekeerde van die breuk.

$$\text{Dus } \frac{6}{a} : \frac{3}{b} = \frac{6}{a} \cdot \frac{b}{3} = \frac{6b}{3a} = \frac{2b}{a} \text{ en } 3 : \frac{15}{a} = \frac{3}{1} \cdot \frac{a}{15} = \frac{3a}{15} = \frac{a}{5} = \frac{1}{5}a.$$

5 Herleid.

a $\frac{3}{2a} \cdot \frac{6}{a}$

b $-\frac{3}{x} \cdot \frac{-x}{3y}$

c $\frac{8}{3a} \cdot \frac{5}{2a}$

6 Herleid.

a $\frac{3}{2a} : \frac{6}{a}$

b $\frac{1}{2a} : \frac{6}{c}$

c $\frac{a}{9} : (3a)$

7 Herleid.

a $\frac{3}{2a} \cdot \frac{3b}{a}$

c $-9 \cdot \frac{3}{4a}$

e $6a \cdot \frac{2a}{3}$

b $\frac{3}{2a} : \frac{3b}{a}$

d $-9 : \frac{3}{4a}$

f $6a : \frac{2a}{3}$

8 Herleid.

a $\frac{3}{a} + \frac{6}{b}$

d $\frac{12}{5x} + \frac{3}{x}$

g $\frac{5}{a} - 7$

b $\frac{3}{a} \cdot \frac{6}{b}$

e $\frac{12}{5x} \cdot \frac{3}{x}$

h $\frac{5}{a} \cdot 7$

c $\frac{3}{a} : \frac{6}{b}$

f $\frac{12}{5x} : \frac{3}{x}$

i $\frac{5}{a} : 7$

2 Procenten

Procenten en percentages

37% van 620 is $0,37 \times 620 = 229,4$.

18 van 41 is $\frac{18}{41} \times 100\% \approx 43,9\%$.

9 Bereken.

a 6% van 830

d 0,38% van 1200

g 11% van 20

b 53% van 72

e 96% van 80

h 3,1% van 800

c 5,3% van 750

f 2,37% van 700

i 0,89% van 750

10 Hoeveel procent is

a 7 van 25

e 1 van 3

b 18 van 50

f 59 van 60

c 900 van 1250

g 71 van 400

d 7 van 8

h 1,38 van 2,5

Rond percentages
zo nodig af op één
decimaal.



Vermenigvuldigingsfactor

Een hoeveelheid neemt toe met 18%.
18% erbij geeft $100\% + 18\% = 118\%$,
dus de vermenigvuldigingsfactor is 1,18.

Een hoeveelheid neemt af met 18%.
18% eraf geeft $100\% - 18\% = 82\%$,
dus de vermenigvuldigingsfactor is 0,82.

11 Geef de vermenigvuldigingsfactor bij een procentuele toename van

a 31%

c 0,2%

e 99,9%

b 8%

d 3,8%

f 1,03%

12 Geef de vermenigvuldigingsfactor bij een procentuele afname van

a 7%

c 1,9%

e 0,082%

b 48%

d 0,82%

f 88,2%

13 Geef de vermenigvuldigingsfactor bij een procentuele

a afname van 9,5%

d afname van 17,6%

g afname van 0,28%

b toename van 9,5%

e toename van 117%

h toename van 0,28%

c afname van 0,95%

f afname van 0,18%

i afname van 1,1%

Procentuele verandering

Bij de vermenigvuldigingsfactor 1,372 hoort een procentuele toename van 37,2%.

Bij de vermenigvuldigingsfactor 0,736 hoort een procentuele afname van 26,4%.

$\times 1,372$, dus 137,2%
 $137,2\% - 100\% = 37,2\%$
Dus een toename van 37,2%.

$\times 0,736$, dus 73,6%
 $100\% - 73,6\% = 26,4\%$
Dus een afname van 26,4%.

- 14 Geef de procentuele toename bij de volgende vermenigvuldigingsfactoren.

a 1,2	c 1,007	e 2
b 1,319	d 1,928	f 1,555

- 15 Geef de procentuele afname bij de volgende vermenigvuldigingsfactoren.

a 0,9	c 0,12	e 0,009
b 0,99	d 0,555	f 0,123

- 16 Geef de procentuele verandering bij de volgende vermenigvuldigingsfactoren.

a 1,005	c 2,1	e 1,0082
b 0,31	d 0,295	f 0,9006

3 Machten

Machten vermenigvuldigen

$$a^3 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a^3} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{a^4} = a^7$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

En zo is $a^5 \cdot a^8 = a^{13}$ en $a^{12} \cdot a = a^{13}$.

Verder is $3a^6 \cdot 5a^2 = 15a^8$ en $8a^5 \cdot 2a = 16a^6$.

- 17 Herleid.

a $a^7 \cdot a^8$	c $5a^6 \cdot 3a^7$	e $a^7 \cdot 5a$
b $a^3 \cdot a$	d $3a \cdot 8a^2$	f $7a \cdot 3a$

Macht van macht en macht van product

$$(a^5)^3 = a^5 \cdot a^5 \cdot a^5 = a^{5+5+5} = a^{5 \cdot 3} = a^{15}$$

En zo is $(a^4)^6 = a^{24}$ en $(a^5)^9 = a^{45}$.

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = a^3b^3$$

En zo is $(ab)^6 = a^6b^6$ en $(3a)^4 = 3^4 \cdot a^4 = 81a^4$.

Verder is $(5a^3)^2 = 5^2 \cdot (a^3)^2 = 25a^6$ en $(-3a^6)^2 = (-3)^2 \cdot (a^6)^2 = 9a^{12}$.

$$(a^p)^q = a^{pq}$$
$$(ab)^p = a^p b^p$$

- 18 Herleid.

a $(a^4)^3$	c $(5a)^3$	e $(-3a^2)^3$
b $(a^7)^8$	d $(-2a)^3$	f $5(a^6)^3$

Machten delen

$$\frac{a^6}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{1} = a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$$

En zo is $\frac{a^8}{a^3} = a^5$ en $\frac{a^{18}}{a^7} = a^{11}$.

Verder is $\frac{a^{13}}{a^{13}} = 1$ en $\frac{15a^{15}}{3a^3} = 5a^{12}$.

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$\frac{a^p}{a^p} = 1$$

19 Herleid.

a $\frac{a^8}{a^2}$

d $\frac{5a^{18}}{a^6}$

g $\frac{12a^{12}}{6a^6}$

b $\frac{a^4}{a^4}$

e $\frac{7a^6}{a^6}$

h $\frac{18a^{18}}{2a^{18}}$

c $\frac{a^7}{a}$

f $\frac{3a^5}{a^4}$

i $\frac{8a^3}{4a}$

Machten optellen

$$2a^6 + 3a^6 = \underbrace{a^6 + a^6}_{2a^6} + \underbrace{a^6 + a^6 + a^6}_{3a^6} = 5a^6$$

En zo is $5a^4 + 3a^4 = 8a^4$ en $7a^8 - a^8 = 6a^8$.

Maar $3a^6 + 5b^6$ kan niet korter.

Ook $3a^7 + 5a$ kan niet korter.

$$a^p + a^p = 2a^p$$

$$a^p + b^p \text{ kan niet korter}$$

$$a^p + a^q \text{ kan niet korter}$$

20 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $5a^6 + 7a^6$

d $a^6 + a^6$

g $a^9 + 8a^9$

b $3a^2 + 8a^2$

e $8a^7 - a^7$

h $-a^5 + a^5$

c $17a^{10} - 8a^{10}$

f $5a^3 + 3a^5$

i $11a^3 + a^{11}$

Regels voor het herleiden van machten

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$\frac{a^p}{a^p} = 1$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$a^p + a^p = 2a^p$$

21 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $a^7 \cdot a^3$

e $a^5 \cdot a^8 \cdot a^4$

i $(5a^2)^4$

b $(a^7)^3$

f $3a^7 \cdot 7a^3$

j $5a^4 - 7a^4$

c $a^7 + a^3$

g $6a^4 - 5a^4$

k $(-2b^2)^3$

d $\frac{a^7}{a^3}$

h $\frac{18a^9}{3a^3}$

l $\frac{5a^5}{a}$

Voorbeelden

$$\begin{aligned}3(a^4)^3 + (3a^6)^2 &= 3a^{12} + 9a^{12} = 12a^{12} \\(3a^3)^4 \cdot 5(a^2)^7 &= 81a^{12} \cdot 5a^{14} = 405a^{26} \\ \frac{64a^6 + 8a^6}{(6a)^2} &= \frac{72a^6}{36a^2} = 2a^4\end{aligned}$$

22 Herleid.

a $(3a)^3 - 3a^3$
b $(a^6)^2 + (a^3)^4$
c $(2a)^5 \cdot 3a$
d $\frac{6a^4 + 12a^4}{(3a^2)^2}$

e $(6a^3)^2 \cdot 5(a^5)^4$
f $(-3a^5)^4 - 5(a^5)^4$
g $(4a^2)^3 + (a^3)^2$
h $\frac{3a^8 - a^8}{2(a^2)^3}$

23 Herleid.

a $3(x^4)^3 + (2x^6)^2 - 2x \cdot x^{11}$
b $2x^4 \cdot -3y^5 \cdot x^7 \cdot 2y$
c $(6x^5)^2 \cdot 6x^3 + (-4x^3)^3 \cdot x^4$
d $\frac{3(x^5)^2 + 7x^3 \cdot x^7}{5x^4}$

e $4(x^3)^2 - 5x^4 \cdot 7x^2$
f $x^8 - 2x^5 \cdot -3x^4 + 5(x^4)^2$
g $3x^7 + 7x^3 - 2x^7 - 8x^3$
h $\frac{6x^6 - 20(x^3)^2}{2x \cdot x^2}$

4 Vergelijkingen en ongelijkheden

Lineaire vergelijkingen oplossen

- 1 Werk de haakjes weg.
- 2 Breng alle termen met x naar het linkerlid en de rest naar het rechterlid.
- 3 Herleid beide leden.
- 4 Deel beide leden door het getal dat voor x staat.

Voorbeeld

$$\begin{aligned}2(3x + 5) &= 5 - (1 - 3x) \\6x + 10 &= 5 - 1 + 3x \\6x - 3x &= 5 - 1 - 10 \\3x &= -6 \\x &= -2\end{aligned}$$

24 Los op.

a $3x - 1 = 5x + 11$
b $2 - x = 7 + x$
c $8 + 3x = 5x - 3x$
d $5(2 - x) - 6 = 8 - 3x$

e $-7 - (8 - x) = 3 - 2x$
f $3x - 2(6 - 2x) = 5 + 3(2x - 1)$
g $3x - 2(1 - x) = 7(1 - x) - 9$
h $8x - 3x - 2(1 - x) = 5(2 + x)$

Voorbeeld

$$\frac{3}{4}x - 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}$$

$$12 \cdot \frac{3}{4}x - 12 \cdot 1\frac{1}{2} = 12 \cdot 1\frac{1}{3}x - 12 \cdot 1\frac{2}{3}$$

$$9x - 18 = 16x - 20$$

$$9x - 16x = -20 + 18$$

$$-7x = -2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

25 Los op.

a $\frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{3}x + 3$

c $2 - \frac{1}{2}(x - 1) = 5 - \frac{1}{3}x$

b $1\frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{6}x - 1$

d $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}x - 1$

Lineaire ongelijkheden oplossen

Ga bij het oplossen van lineaire ongelijkheden op dezelfde manier te werk als bij het oplossen van lineaire vergelijkingen. Deel je van een ongelijkheid beide leden door een negatief getal, dan klap je het ongelijkheidsteken om.

Voorbeelden

$$8x + 3 > 3x - 12$$

$$8x - 3x > -12 - 3$$

$$5x > -15$$

$$x > -3$$

$$3x - 7 > 5x + 1$$

$$3x - 5x > 1 + 7$$

$$-2x > 8$$

$$x < -4$$

Deel door -2 , dus klap het ongelijkheidsteken om.



26 Los op.

a $3x - 1 < 8$

b $5 - 2x > 13$

c $-2x > 0$

d $6 - x < 6$

e $2 + x < 1 + 3x$

f $3x - 1 < 5 - x$

g $2x - 1 > 5 + 3x$

h $3x - 8 < 5x - 2$

27 Los op.

a $2(x - 1) - 5 < 7$

b $5 - \frac{1}{2}x > 1\frac{1}{2}x + 8$

c $\frac{1}{3}x - 4 < \frac{1}{2}x + 1$

d $3 - 2(1 - x) + 17 > -10$

e $7x - 3(2 - x) > 2x + 3$

f $\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}x < 4x - 4$

g $\frac{1}{2}(\frac{1}{3}x + 3) > \frac{2}{3}x - 1$

h $2 + x > 3 - 2(3 - x)$

Kwadratische vergelijkingen oplossen

Er zijn verschillende typen kwadratische vergelijkingen.

$x^2 = c$	$ax^2 + bx = 0$	$x^2 + bx + c = 0$
$3x^2 - 12 = 15$	$3x^2 - 12x = 15x$	$x^2 - 4x = 5$
$3x^2 = 27$	$3x^2 - 27x = 0$	$x^2 - 4x - 5 = 0$
$x^2 = 9$	$3x(x - 9) = 0$	$(x + 1)(x - 5) = 0$
$x = 3 \vee x = -3$	$3x = 0 \vee x - 9 = 0$	$x + 1 = 0 \vee x - 5 = 0$
	$x = 0 \vee x = 9$	$x = -1 \vee x = 5$

28 Los op.

- a** $x^2 = 49$ **e** $(5x - 1)(3x + 12) = 0$
b $3x^2 - 1 = 26$ **f** $(x - 8)(x - 3) = 0$
c $\frac{1}{2}x^2 + 1 = 0$ **g** $4x^2 - 8 = 3x^2 - 7$
d $x^2 + 7x = 0$ **h** $x^2 + 8x - 20 = 0$

29 Los op.

- a** $x^2 - 3x - 4 = 0$ **f** $x^2 + 8x = 9$
b $x^2 = 5x$ **g** $x(x + 8) = 33$
c $x^2 + 8 = 7$ **h** $x^2 + 5x = x + 5$
d $x^2 + 8x = 7x$ **i** $x(x - 2) = 24x$
e $x^2 - 13x + 30 = 0$ **j** $3x(x + 5) = 15x + 3$

Voorbeelden

$$\begin{array}{ll}
 3x^2 - 6x = 9 & \frac{1}{2}x^2 + 5 = 3\frac{1}{2}x \\
 3x^2 - 6x - 9 = 0 & \frac{1}{2}x^2 - 3\frac{1}{2}x + 5 = 0 \\
 x^2 - 2x - 3 = 0 & x^2 - 7x + 10 = 0 \\
 (x + 1)(x - 3) = 0 & (x - 2)(x - 5) = 0 \\
 x + 1 = 0 \vee x - 3 = 0 & x - 2 = 0 \vee x - 5 = 0 \\
 x = -1 \vee x = 3 & x = 2 \vee x = 5
 \end{array}$$

30 Los op.

- a** $4x^2 - 4x = 8$ **e** $-0,1x^2 - 1,3x = 4,2$
b $\frac{1}{2}x^2 + 8 = 5x$ **f** $\frac{1}{4}x^2 + x = 15$
c $2x(x - 5) = 32 - 10x$ **g** $(2x + 1)^2 = 12x + 33$
d $\frac{1}{10}x^2 = 3x - 20$ **h** $\frac{1}{3}x(x - 5) = 12$

31 Hiernaast zie je hoe je de vergelijking $(x + 3)^2 = x^2 + 3x$ oplost. Je ziet dat je een lineaire vergelijking krijgt.

Los op.

- a** $(x + 5)^2 = x^2 + 15$ **d** $(2x + 1)^2 = 3(x^2 + 2)$
b $(x - 2)^2 = x^2 - 15$ **e** $(3x + 1)(x - 6) = 3x^2$
c $(2x + 1)^2 = 4(x^2 - 2)$ **f** $(3x + 1)(x - 6) = 2(x^2 + 6)$

$$\begin{array}{l}
 (x + 3)^2 = x^2 + 3x \\
 x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x \\
 6x + 9 = 3x \\
 3x = -9 \\
 x = -3
 \end{array}$$

De abc-formule

De kwadratische vergelijking $3x^2 + 2x - 5 = 0$ los je op met de abc-formule.

$$a = 3, b = 2 \text{ en } c = -5$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64$$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{64}}{6} \vee x = \frac{-2 - \sqrt{64}}{6}$$

$$x = \frac{-2 + 8}{6} \vee x = \frac{-2 - 8}{6}$$

$$x = 1 \vee x = -1\frac{2}{3}$$

De abc-formule

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$

$$\text{zijn } x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$\text{met } D = b^2 - 4ac.$$

- 32** Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^2 + x - 3 = 0$

b $9x^2 + 6x + 1 = 0$

c $24x^2 - 2x = 35$

d $3x^2 - x - 4 = 0$

e $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$

f $2x^2 + 5x = 3$

- 33** Los op.

a $x(5x + 9) - 14 = 0$

b $(2x - 1)^2 - x^2 = 5$

c $5 - (4 - x)^2 = x - 1$

d $(3x - 1)(2x + 1) = 5 + x$



Vergelijkingen met machten

De vergelijking $x^n = a$

	$a > 0$	$a < 0$	$a = 0$
n even	twee oplossingen $x = \sqrt[n]{a} \vee x = -\sqrt[n]{a}$	geen oplossing	één oplossing $x = 0$
n oneven	één oplossing $x = \sqrt[n]{a}$	één oplossing $x = \sqrt[n]{a}$	één oplossing $x = 0$

Voorbeelden

$$x^3 = 5$$

$$x = \sqrt[3]{5}$$

$$x \approx 1,71$$

$$x^4 = -74$$

geen oplossing

$$x^9 = -133$$

$$x = \sqrt[9]{-133}$$

$$x \approx -1,72$$

$$x^6 = 22$$

$$x = \sqrt[6]{22} \vee x = -\sqrt[6]{22}$$

$$x \approx 1,67 \vee x \approx -1,67$$

34 Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^3 = 21$

b $x^3 = -53$

c $x^3 = 0,89$

d $x^5 = 837$

e $x^5 = -61$

f $x^5 = 0,082$

g $x^4 = 75$

h $x^4 = -51$

i $x^8 = -0,031$

j $x^6 = 194481$

Voorbeelden

$3x^7 + 17 = 2$

$3x^7 = -15$

$x^7 = -5$

$x = \sqrt[7]{-5}$

$x \approx -1,26$

$5x^4 = 80$

$x^4 = 16$

$x = \sqrt[4]{16} \vee x = -\sqrt[4]{16}$

$x = 2 \vee x = -2$

$3x^8 = -21$

$x^8 = -7$

geen oplossing

35 Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

a $5x^3 + 8 = 43$

b $2x^4 + 10 = 7$

c $0,5x^3 - 0,8 = 0,17$

d $10x^7 = -1000$

e $3x^4 + 1 = 16$

f $4 - x^6 = 3$

g $8 - x^3 = 4 - 5x^3$

h $6x^5 + 9 = 51$

Algemene vaardigheden

Probleemaanpak

- 1** Van drie kannen is de grootste tot de rand toe gevuld met acht liter water. De andere twee zijn leeg. Door de vijf-literkan vol te gieten met water uit de grootste kan en vervolgens de kleinste kan te vullen met water uit de vijf-literkan, krijg je de beschikking over hoeveelheden van drie, twee en drie liter.



Ga dit na, en onderzoek hoe je door slim overgieten twee gelijke hoeveelheden van vier liter kunt krijgen.

Vastlopen voorkomen

Het is geen schande om vast te lopen bij een wiskundig probleem. Dat kan iedereen overkomen. Heb je in de gaten dat je bent vastgelopen, dan kun je er wat aan doen. Beschouw vastlopen als een goede gelegenheid om van te leren. Gebruik het schema probleemaanpak. Hieronder wordt dieper ingegaan op de eerste twee stappen. Misschien helpt het je om vastlopen te voorkomen.

1 Begrijp de vraag

Lees de vraag nog eens aandachtig door. Is het probleem helder? Heb je geen informatie overgeslagen? Noteer wat gegeven is en wat er wordt gevraagd. Bij het probleem in opgave 1 krijg je dan:

Gegeven		Gevraagd
8 L vol	Overgieten! Hoe gaat dat?	8 L
5 L leeg		5 L } elk 4 L
3 L leeg		3 L leeg

Het kan ook helpen met een ander over het probleem te praten of het probleem een tijdje te laten rusten. Probeer zo mogelijk concreet materiaal te gebruiken.

2 Zoek een geschikte aanpak

Bij de kannen met water ligt de aanpak *probeer en test* voor de hand. In dit geval is het handig een tabel te maken. Je krijgt bijvoorbeeld de tabel op de volgende bladzijde.

Schema probleemaanpak

- 1 Begrijp de vraag.
- 2 Zoek een geschikte aanpak.
- 3 Werk de aanpak uit.
- 4 Controleer je antwoord.
Reflecteer, dus kijk nog eens terug.

Strategieën probleemoplossen

- 1 Probeer en test.
- 2 Maak een schets.
- 3 Zoek de regelmaat.
- 4 Voer een variabele in.
- 5 Zoek een verwant probleem.



achtliterkan	8	3	3	6	6		4
vijfliterkan	0	5	2	2	0	...	4
drieliterkan	0	0	3	0	2		0

Maak deze tabel af.

- 2** Drie vaten hebben een inhoud van 19, 13 en 7 liter. Het grootste vat is leeg, de andere twee zijn geheel gevuld met water. Hoe kun je door overgieten 10 liter water in een van de vaten krijgen?

- 3** Uit hoeveel getallen bestaan de rijen I en II?

I: 8, 15, 22, 29, ..., 351

II: 53, 64, 75, 86, ..., 471

- 4** Welk getal is groter?

a 2^{3000} of 3^{2000}

c 3^{300} of 5^{200}

b 2^{400} of 15^{100}

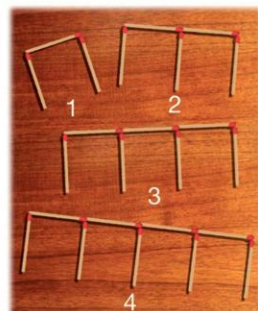
d 2^{1000} of 16^{200}

- 5 a** Welke acht breuken verdelen de getallenlijn tussen 0 en $\frac{1}{5}$ in gelijke stukken?

b Welke vijftien breuken verdelen de getallenlijn tussen 8 en $8\frac{1}{4}$ in gelijke stukken?

- 6 a** De figuren hiernaast zijn met lucifers gelegd. Hoeveel lucifers zijn nodig voor de n -de figuur?

b Bedenk een verwant probleem.

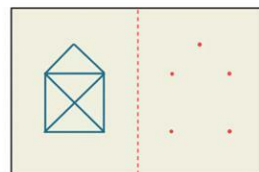


- 7** Tien schijven met verschillende diameters zijn willekeurig op elkaar gestapeld. Je moet ze zo stapelen dat de diameters van boven naar beneden toenemen. Bij elke zet geldt: je mag vanaf de bovenzijde een willekeurig stapeltje vastpakken, omkeren en weer terugleggen.

Hoeveel zetten heb je hoogstens nodig als je het probleem met zo min mogelijk zetten op wilt lossen? En hoe zit dat bij een stapel met 20 schijven? En bij een stapel met n schijven?

- 8** Zie de figuur hiernaast. Je kunt het huisje tekenen zonder het potlood van het papier te halen en waarbij je elk lijnstuk maar één keer tekent.

Onderzoek hoe dat gaat.



- 9** Op een tafel liggen 31 lucifers. Frederik en Lucy mogen om de beurt één, twee of drie lucifers pakken. Wie de laatste lucifer pakt, is winnaar.

Wat is de winnende strategie? Maakt het uit wie begint?

En hoe zit het bij 32 lucifers? En bij 33 lucifers?

Kangoeroe-opgaven

De Kangoeroe is een wereldwijde reken- en wiskundewedstrijd die jaarlijks wordt gehouden.

Er zijn opgaven voor

- de basisschool (wizFUN, wizKID en wizSMART)
- de klassen 1 en 2 havo/vwo en 3 havo (wizBRAIN)
- de klassen 4 en 5 havo en 3, 4, 5 en 6 vwo (wizPROF).

In dit boek staan de wizBRAIN opgaven van het jaar 2017.

De eerste tien opgaven zijn eenvoudig, de volgende tien opgaven zijn iets lastiger en de laatste tien opgaven zijn moeilijk.

Je mag geen rekenmachine gebruiken, maar wel kladpapier.





- 1 Hoe laat is het 17 uur na 17:00 uur?
A 08:00 uur **B** 09:00 uur **C** 10:00 uur **D** 11:00 uur **E** 12:00 uur

- 2 Jeanette telt drie verschillende positieve gehele getallen op. Haar antwoord is 7. Susan vermenigvuldigt dezelfde drie getallen met elkaar. Wat is Susans antwoord?
A 5 **B** 8 **C** 9 **D** 10 **E** 12

- 3 Een groep meisjes staat in een kring. Eva is het vierde meisje links van Laura en het zevende meisje rechts van Laura. Hoeveel meisjes staan er in de kring?
A 9 **B** 10 **C** 11 **D** 12 **E** 13

- 4 Welk getal moet je van -17 aftrekken om -33 te krijgen?
A -50 **B** -16 **C** 16 **D** 40 **E** 50

- 5 In de gelijkbenige driehoek hiernaast is de hoogte van elke streep even groot. Welk deel van de driehoek is wit?

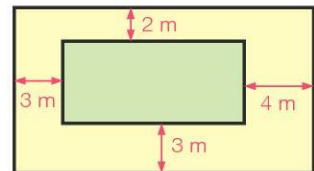


- A** $\frac{1}{3}$ **B** $\frac{2}{5}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{2}{3}$ **E** $\frac{3}{4}$

- 6 Welke van de volgende beweringen is juist?
A $\frac{4}{1} = 1,4$ **B** $\frac{5}{2} = 2,5$ **C** $\frac{6}{3} = 3,6$ **D** $\frac{7}{4} = 4,7$ **E** $\frac{8}{5} = 5,8$

- 7 Amal heeft 20 euro. Elk van haar vier zussen heeft 10 euro. Hoeveel euro moet Amal ieder van haar zussen geven, zodat elk van de vijf meisjes hetzelfde aantal euro's heeft?
A € 2 **B** € 2,50 **C** € 4 **D** € 5 **E** € 8

- 8 De zijden van de beide rechthoeken hiernaast zijn evenwijdig. Hoeveel meter is het verschil tussen de omtrek van de grote en de kleine rechthoek?



- A** 12 **B** 16 **C** 20 **D** 21 **E** 24

- 9 De figuur hiernaast is gemaakt door twee witte en twee rode harten op elkaar te leggen. De oppervlaktes van de harten zijn 1 cm^2 , 4 cm^2 , 9 cm^2 en 16 cm^2 .

Hoeveel cm^2 van de rode harten is zichtbaar?

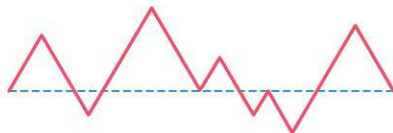
A 9 B 10 C 11 D 12 E 13



- 10 In de figuur zie je zeven gelijkzijdige driehoeken, gevormd door de stippellijn en de rode kronkellijn samen. De stippellijn heeft lengte 20.

Wat is de lengte van de rode kronkellijn?

A 30 B 40 C 50 D 60 E 70



- 11 Mieke Mier en Jaap Lieveheersbeest lopen langs een lange tak.



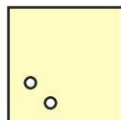
Mieke gaat van links naar rechts en heeft $\frac{2}{3}$ deel van de lengte van de tak gelopen. Jaap gaat van rechts naar links en heeft $\frac{3}{4}$ deel van de lengte van de tak gelopen.

Welk deel van de lengte van de tak zijn de twee beestjes van elkaar verwijderd?

A $\frac{1}{12}$ B $\frac{3}{8}$ C $\frac{5}{12}$ D $\frac{1}{2}$ E $\frac{5}{7}$

- 12 Mark heeft een velletje papier twee keer gevouwen. Daarna heeft hij een gat in het papier geprikt. Vervolgens heeft hij het papier weer helemaal opengevouwen. Het vel papier zag er toen uit zoals in de figuur hiernaast.

Hoe heeft Mark het papier gevouwen?



A B C D E

- 13 Bij een toneelvoorstelling op school was $\frac{1}{6}$ deel van de toeschouwers volwassen, de rest was kind. Van de kinderen was $\frac{2}{5}$ deel jongen. Welk deel van de toeschouwers was meisje?

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{1}{5}$ C $\frac{1}{4}$ D $\frac{1}{3}$ E $\frac{1}{2}$

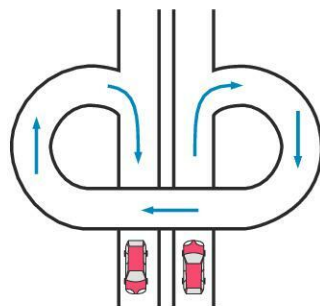
- 14** Emma, Ina, Rita en Tina zijn zusjes. Ze zijn (in een andere volgorde) 3, 8, 12 en 14 jaar oud. Emma is jonger dan Rita. De som van de leeftijden van Emma en Tina is deelbaar door 5. Ook de som van de leeftijden van Tina en Rita is deelbaar door 5. Hoe oud is Ina?
- A** 3 jaar **B** 5 jaar **C** 8 jaar **D** 12 jaar **E** 14 jaar

- 15** Tycho gaat een hardloopschema maken. Hij wil twee keer per week hardlopen, telkens op dezelfde dagen in de week. Hij wil nooit twee dagen achter elkaar hardlopen. Hoeveel schema's kan Tycho maken?
- A** 8 **B** 10 **C** 12 **D** 14 **E** 16

- 16** In een tabel moeten getallen worden geschreven. Als je de eerste drie getallen optelt, dan moet je als som 22 krijgen. Als je de laatste drie getallen optelt, dan moet je als som 25 krijgen. Als je alle vijf de getallen optelt, dan moet je als som 35 krijgen. Stefano is al begonnen, zie de figuur hiernaast. Wat moet het antwoord zijn als Stefano de getallen in de blauwe vakjes vermenigvuldigt?
- A** 0 **B** 39 **C** 48 **D** 63 **E** 108



- 17** Een auto volgt de pijlen. Hoeveel graden draait hij in totaal?



- 18** Kwik wil een lat in 9 stukken van gelijke lengte zagen. Hij tekent de zaagpunten alvast op de lat. Kwek wil dezelfde lat in 8 stukken van gelijke lengte zagen. Hij tekent ook alvast de zaagpunten op de lat. Kwak zaagt de lat door bij alle getekende zaagpunten. In hoeveel stukken zaagt hij de lat?
- A** 15 **B** 16 **C** 17 **D** 18 **E** 19
- 19** Van de deelnemers aan de Sidney Marathon was 35% vrouw. Het aantal deelnemende mannen was 252 groter dan het aantal deelnemende vrouwen. Hoeveel mensen liepen de Sidney Marathon?
- A** 802 **B** 810 **C** 822 **D** 824 **E** 840

- 20** Monica wil in elk vakje van de tabel een getal schrijven. Telkens als zij de getallen in twee vakjes met een gemeenschappelijke rand optelt, moet zij hetzelfde antwoord krijgen. Zij heeft al twee getallen opgeschreven.

Wat moet Monica als antwoord krijgen als zij alle getallen in de volle tabel optelt?

A 18 **B** 20 **C** 21 **D** 22 **E** 23

2		
		3

- 21** Van een driehoek zijn de hoeken allemaal verschillend van grootte. Ook zijn de drie hoeken, gemeten in graden, gehele getallen. Wat is de kleinst mogelijke uitkomst als je de kleinste en de grootste hoek optelt?

A 61° **B** 90° **C** 91° **D** 120° **E** 121°

- 22** Tien kangoeroes staan op een rij zoals in de figuur hieronder.



Kangoeroes die elkaar aankijken ruilen van plaats, maar ze draaien zich niet om. Dit gebeurt net zo vaak tot er geen paar kangoeroes meer is die elkaar aankijkt.

Hoe vaak wisselen kangoeroes van plaats?

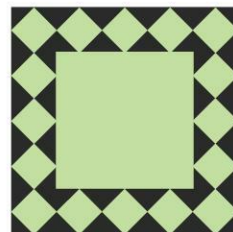
A 15 **B** 16 **C** 18 **D** 20 **E** 21

- 23** Gülben gaat bij elk van de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 óf het getal 2 óf het getal 5 optellen. Ze wil zo weinig mogelijk verschillende antwoorden krijgen.

Hoeveel antwoorden krijgt ze dan?

A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** 9

- 24** In de figuur hiernaast zie je het tafelkleedje van Fatima. Het heeft een regelmatig patroon. Hoeveel procent van het tafelkleedje is zwart?



A 16% **B** 24% **C** 25% **D** 32% **E** 36%

- 25** Een rij begint met de cijfers 2 en 3. Elk nieuw cijfer van de rij krijg je door de twee cijfers ervoor met elkaar te vermenigvuldigen en het laatste cijfer van de uitkomst te nemen. De rij begint dus met 2, 3, 6, 8, 8, ...

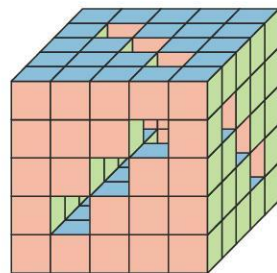
Wat is het 2017^e cijfer van deze rij?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 6 **E** 8

- 26** Iedere 3 minuten vertrekt er een bus van het vliegveld naar het centrum van de stad. Een auto vertrekt tegelijk met een bus van het vliegveld en rijdt dezelfde route als de bus. Een bus doet 60 minuten over de rit, de auto 35 minuten. Hoeveel bussen haalt de auto in, de bus die tegelijkertijd vertrok niet meegerekend?

A 8 **B** 9 **C** 10 **D** 11 **E** 13

- 27** Bert heeft 125 kleine kubusjes. Een aantal daarvan heeft hij aan elkaar gelijmd. Hij maakte een kubus met negen tunnels die door de hele kubus gaan. Hoeveel kleine kubusjes heeft Bert niet gebruikt?

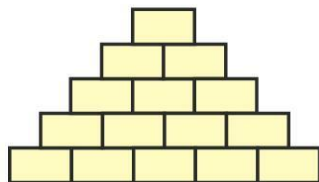


A 36 **B** 39 **C** 42 **D** 45 **E** 52

- 28** Twee hardlopers trainen op een ronde baan van 720 meter. Beiden lopen met een constante snelheid. De eerste loper rent met de klok mee en loopt een ronde in 4 minuten. De tweede rent tegen de klok in en loopt een ronde in 5 minuten. De twee komen elkaar een aantal keren tegen. Hoeveel meter loopt de tweede hardloper tussen twee ontmoetingen in?

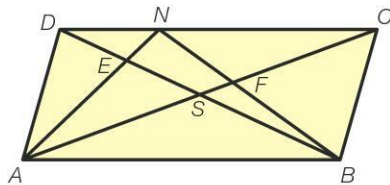
A 320 **B** 330 **C** 340 **D** 350 **E** 355

- 29** Sarah wil in elk vakje van de optelpiramide hiernaast een positief geheel getal schrijven. Ieder getal in een vakje moet de som zijn van de twee getallen er direct schuin onder. Wat is het grootste aantal oneven getallen dat Sarah op kan schrijven?



A 7 **B** 8 **C** 9 **D** 10 **E** 11

- 30** In de figuur zie je parallellogram $ABCD$ met oppervlakte 1. S is het snijpunt van de diagonalen. Het punt N ligt op zijde CD . E is het snijpunt van AN en BD . F is het snijpunt van BN en AC . De oppervlaktes van de driehoeken AED en BFC zijn samen $\frac{1}{3}$. Wat is de oppervlakte van de vierhoek $ESFN$?



A $\frac{1}{14}$ **B** $\frac{1}{12}$ **C** $\frac{1}{10}$ **D** $\frac{1}{8}$ **E** $\frac{1}{6}$

Trefwoordenregister

A

aanliggende
 rechthoekszijde 52
aantal oplossingen
 van een kwadratische
 vergelijking 17
abc-formule 13
afname
 exponentiële – 93
 procentuele – 96
amplitude 103

B

beginhoeveelheid 90
begrensd groei 124
boomdiagram 145
boxplot 136

C

Cardano, Gerolamo 15
centrummaten 129
construeren 47
cosinus 60
cryptografie 167

D

derde kwartiel 131
derdemachtswortel 109
discriminant 14, 17
driehoeksmeting 85

E

eerste kwartiel 131
element 142
evenwichtsstand 103
exacte waarde 45
exponentiële afname 93
exponentiële groei 90
 formule voor – 90
 tabel bij – 97
extrapoleren 100

F

formule van een lijn 88

G

geheimschrift 167
gemiddelde 128
goniometrische
 verhoudingen 60
groei
 begrensd – 124
 exponentiële – 90
 lineaire – 98
groefactor 90
gulden getal 45
gulden rechthoeken 47
gulden snede 47

H

hellingsgetal 51
hellingshoek 50, 51
herhalingen 149
hogere machtswortel 109
hyperbolisch verband 113
hyperbool 113

I

interpoleren 100
interval 23

K

kans 152
kruisproduct 50
kwadratische
 ongelijkheid 28
kwadratische vergelijking
 – aantal oplossingen
 van een 17
 – oplossen 11, 20
 – opstellen 21
kwartiel
 derde – 131
 eerste – 131
kwartielafstand 133
kwartielentabel 156

L

lijn
 formule van een – 88
lineaire groei 98

M

machtsformule 107
machtsfuncties 107
mediaan 129
modus 129

O

omgekeerd evenredig 112
ongelijkheid 26
 – kwadratische 28
ontbinden in factoren 10
overstaande
 rechthoekszijde 52

P

periode 103
periodiek verband 103
populatie 142
probleemaanpak 182
procentuele afname 96
procentuele toename 94
puntenwolk 142

Q

Q_1 131
 Q_3 131

R

raakpunt 18
rechthoekszijde
 aanliggende – 52
 overstaande – 52
relatieve frequentie 128
ruimtefiguren
 hoeken berekenen in –
 72

S

sinus 57, 69
sinusregel 84
sleutel 168
SOSCASTOA 60
spreiding 133
spreidingsbreedte 133
spreidingsdiagram 142
spreidingsmaten 133

T

tangens 50, 52
toename
 procentuele – 94

V

vermenigvuldigingsfactor
 88
vermenigvuldigingsregel
 146
verzadigingsniveau 125

W

wegendiagram 145

Verantwoording

Illustraties: Haasart, Wim de Haas, Rhenen

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

iStock: p. 8 (inzet), 8-9, 48 (inzet), 98, 126 (inzet), 126-127, 165

Shutterstock: p. 15, 48-49, 78, 82, 84, 95, 107, 121, 125, 153, 170-171

ANP Foto, Den Haag: p. 75

Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 86 (inzet), 86-87, 92

ASTERIX®- OBELIX®- IDEFIX® / © 2019 LES EDITIONS ALBERT RENE /

GOSCINNY – UDERZO: p. 152

AFP / ANP Foto, Den Haag: p. 169 l

National Security Agency / Wikipedia: p. 169 r

Getty Images: p. 184-185

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:

Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,

9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleenen.



0 / 19

© 2019 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-90084-7



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



Noordhoff Uitgevers



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-90084-7



9 789001 900847