

UITWERKINGEN
DEEL 2

WISKUNDE

12E EDITIE

3 HAVO

& GETAL & RUIMTE



Noordhoff Uitgevers

Getal & Ruimte

Uitwerkingen **3 havo** deel 2

Twaalfde editie, 2019

Noordhoff Uitgevers
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
C. J. Admiraal
J. A. Verbeek
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse
M. Vos
B. W. van Laarhoven

Inhoud

6	Kwadratische vergelijkingen en ongelijkheden	4
7	Goniometrie	38
8	Allerlei verbanden	61
9	Spreiding, tellen en kans	89
	Wiskundige vaardigheden	111
	Algemene vaardigheden	119
	Kangoeroe-opgaven	121

6 Kwadratische vergelijkingen en ongelijkheden

Voorkennis Ontbinden in factoren en kwadratische vergelijkingen oplossen

Bladzijde 10

- 1 a $x^2 - 12x = x(x - 12)$
 b $x^2 + x = x(x + 1)$
 c $5x^2 - 3x = x(5x - 3)$
 d $8x^2 + 12x = 4x(2x + 3)$
 e $16x^2 - 48x = 16x(x - 3)$
 f $5x^2 + 160x = 5x(x + 32)$

Bladzijde 11

2 a

product -28	som
1	-28
-1	28
2	-14
-2	14
4	-7
-4	7

- b De som van -2 en 14 is 12.
 $x^2 + 12x - 28 = (x - 2)(x + 14)$
 c $x^2 + 27x - 28 = (x - 1)(x + 28)$
 d $x^2 + 3x - 28 = (x - 4)(x + 7)$

- e $x^2 - 3x - 28 = (x + 4)(x - 7)$
 f $x^2 - 12x - 28 = (x + 2)(x - 14)$

3 a

product 20	som
1	20
-1	-20
2	10
-2	-10
4	5
-4	-5

- b $x^2 - 12x + 20 = (x - 2)(x - 10)$
 c $x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5)$
 d $x^2 + 21x + 20 = (x + 1)(x + 20)$

product -20	som
1	-20
-1	20
2	-10
-2	10
4	-5
-4	5

- e $x^2 + 19x - 20 = (x - 1)(x + 20)$
 f $x^2 - x - 20 = (x + 4)(x - 5)$
 g $x^2 + 8x - 20 = (x - 2)(x + 10)$

- 4 a $x^2 - 7x - 18 = (x + 2)(x - 9)$
 b $x^2 + 18x = x(x + 18)$
 c $x^2 + 9x + 18 = (x + 3)(x + 6)$
 d $x^2 + 7x + 6 = (x + 1)(x + 6)$
 e $2x^2 - 6x = 2x(x - 3)$

- f $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$
 g $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$
 h $10x + 15x^2 = 5x(2 + 3x)$
 i $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

5 a $x^2 + 10x + 16 = 0$
 $(x + 2)(x + 8) = 0$
 $x + 2 = 0 \vee x + 8 = 0$
 $x = -2 \vee x = -8$

b $x^2 + 10x = 0$
 $x(x + 10) = 0$
 $x = 0 \vee x + 10 = 0$
 $x = 0 \vee x = -10$

c $(x - 10)(2x + 5) = 0$
 $x - 10 = 0 \vee 2x + 5 = 0$
 $x = 10 \vee 2x = -5$
 $x = 10 \vee x = -2\frac{1}{2}$

d $x^2 + x - 72 = 0$
 $(x - 8)(x + 9) = 0$
 $x - 8 = 0 \vee x + 9 = 0$
 $x = 8 \vee x = -9$

e $x^2 + 7x - 30 = 0$
 $(x - 3)(x + 10) = 0$
 $x - 3 = 0 \vee x + 10 = 0$
 $x = 3 \vee x = -10$

f $2x^2 - x = 0$
 $x(2x - 1) = 0$
 $x = 0 \vee 2x - 1 = 0$
 $x = 0 \vee 2x = 1$
 $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$

6 a $x^2 + 2x = 24$
 $x^2 + 2x - 24 = 0$
 $(x - 4)(x + 6) = 0$
 $x - 4 = 0 \vee x + 6 = 0$
 $x = 4 \vee x = -6$

b $x^2 = 3x + 18$
 $x^2 - 3x - 18 = 0$
 $(x + 3)(x - 6) = 0$
 $x + 3 = 0 \vee x - 6 = 0$
 $x = -3 \vee x = 6$

c $x^2 - 7 = 6x$
 $x^2 - 6x - 7 = 0$
 $(x + 1)(x - 7) = 0$
 $x + 1 = 0 \vee x - 7 = 0$
 $x = -1 \vee x = 7$

d $x^2 + 40 = 14x$
 $x^2 - 14x + 40 = 0$
 $(x - 4)(x - 10) = 0$
 $x - 4 = 0 \vee x - 10 = 0$
 $x = 4 \vee x = 10$

e $x^2 = 16x$
 $x^2 - 16x = 0$
 $x(x - 16) = 0$
 $x = 0 \vee x - 16 = 0$
 $x = 0 \vee x = 16$

f $x^2 = 16x + 36$
 $x^2 - 16x - 36 = 0$
 $(x + 2)(x - 18) = 0$
 $x + 2 = 0 \vee x - 18 = 0$
 $x = -2 \vee x = 18$

6.1 De abc-formule

Bladzijde 12

- 1 a** Een punt ligt op de x -as als de y -coördinaat 0 is.
 Een punt ligt op de y -as als de x -coördinaat 0 is.
- b** $f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$
 Je weet nu dat C het punt $(0, 5)$ is.
- c** $f(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 1 - 6 + 5 = 0$
 $f(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 25 - 30 + 5 = 0$
 $A(1, 0)$ en $B(5, 0)$

2 $f(0) = 0 + 0 - 15 = -15$, dus $C(0, -15)$.
 $f(x) = 0$ geeft $x^2 + 2x - 15 = 0$
 $(x - 3)(x + 5) = 0$
 $x - 3 = 0 \vee x + 5 = 0$
 $x = 3 \vee x = -5$

Dus $A(-5, 0)$ en $B(3, 0)$.

Bladzijde 13

- 3 a** $f(0) = 0 - 0 = 0$, dus het snijpunt met de y -as is $(0, 0)$.
 $f(x) = 0$ geeft $5x^2 - 10x = 0$
 $5x(x - 2) = 0$
 $5x = 0 \vee x - 2 = 0$
 $x = 0 \vee x = 2$
 Dus de snijpunten met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(2, 0)$.

- b** $g(0) = 0 + 0 + 9 = 9$, dus het snijpunt met de y -as is $(0, 9)$.

$$\begin{aligned}g(x) = 0 \text{ geeft } x^2 + 6x + 9 &= 0 \\(x + 3)(x + 3) &= 0 \\x + 3 = 0 \vee x + 3 &= 0 \\x &= -3\end{aligned}$$

Dus het snijpunt met de x -as is $(-3, 0)$.

- c** $h(0) = (0 - 8)(0 - 3) = 24$, dus het snijpunt met de y -as is $(0, 24)$.

$$\begin{aligned}h(x) = 0 \text{ geeft } (2x - 8)(x - 3) &= 0 \\2x - 8 = 0 \vee x - 3 &= 0 \\2x = 8 \vee x &= 3 \\x = 4 \vee x &= 3\end{aligned}$$

Dus de snijpunten met de x -as zijn $(3, 0)$ en $(4, 0)$.

- d** $k(0) = 0 + 0 - 24 = -24$, dus het snijpunt met de y -as is $(0, -24)$.

$$\begin{aligned}k(x) = 0 \text{ geeft } x^2 + 10x - 24 &= 0 \\(x - 2)(x + 12) &= 0 \\x - 2 = 0 \vee x + 12 &= 0 \\x = 2 \vee x &= -12\end{aligned}$$

Dus de snijpunten met de x -as zijn $(-12, 0)$ en $(2, 0)$.

4 a $h_I = 0$ geeft $-0,00625x^2 + 1,5x = 0$

$$\begin{aligned}x(-0,00625x + 1,5) &= 0 \\x = 0 \vee -0,00625x + 1,5 &= 0 \\x = 0 \vee -0,00625x &= -1,5 \\x = 0 \vee x &= 240\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_{II} = 0 \text{ geeft } -0,0015x^2 + 0,6x &= 0 \\x(-0,0015x + 0,6) &= 0 \\x = 0 \vee -0,0015x + 0,6 &= 0 \\x = 0 \vee -0,0015x &= -0,6 \\x = 0 \vee x &= 400\end{aligned}$$

Steen II komt $400 - 240 = 160$ meter verder in zee dan steen I.

- b** Steen I bereikt de grootste hoogte voor $x = \frac{0 + 240}{2} = 120$.

$$x = 120 \text{ geeft } h_I = -0,00625 \cdot 120^2 + 1,5 \cdot 120 = 90$$

$$\text{Steen II bereikt de grootste hoogte voor } x = \frac{0 + 400}{2} = 200.$$

$$x = 200 \text{ geeft } h_{II} = -0,0015 \cdot 200^2 + 0,6 \cdot 200 = 60$$

Dus steen I komt $90 - 60 = 30$ meter hoger dan steen II.

- 5 a** Omdat er niet twee gehele getallen zijn waarvan het product 1 is en de som -4 .

- b** Uit de grafiek is af te lezen $x \approx 0,3 \vee x \approx 3,7$.

6 a $a = 3, b = 7$ en $c = -4$

b $a = -5, b = 1$ en $c = -2$

c $a = -1, b = 6$ en $c = 11$

d $a = 1, b = -1$ en $c = 1$

7 a $7x^2 = 2x + 8$
 $7x^2 - 2x - 8 = 0$
 $a = 7, b = -2$ en $c = -8$

b $5x^2 + 8x = 8$
 $5x^2 + 8x - 8 = 0$
 $a = 5, b = 8$ en $c = -8$

c $5 - x = x^2$
 $-x^2 - x + 5 = 0$
 $a = -1, b = -1$ en $c = 5$

d $(x + 2)(x - 1) = 4$
 $x^2 - x + 2x - 2 = 4$
 $x^2 + x - 6 = 0$
 $a = 1, b = 1$ en $c = -6$

Bladzijde 14

8 a $3x^2 - 7 = 4x$
 $3x^2 - 4x - 7 = 0$
 $a = 3, b = -4 \text{ en } c = -7$
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -7 = 100$
 $x = \frac{4 + \sqrt{100}}{6} \vee x = \frac{4 - \sqrt{100}}{6}$
 $x = \frac{4 + 10}{6} \vee x = \frac{4 - 10}{6}$
 $x = 2\frac{1}{3} \vee x = -1$

b $3 - 15x = 18x^2$
 $-18x^2 - 15x + 3 = 0$
 $6x^2 + 5x - 1 = 0$
 $a = 6, b = 5 \text{ en } c = -1$
 $D = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot -1 = 49$
 $x = \frac{-5 + \sqrt{49}}{12} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{49}}{12}$
 $x = \frac{-5 + 7}{12} \vee x = \frac{-5 - 7}{12}$
 $x = \frac{1}{6} \vee x = -1$

c $x = 4 - 5x^2$
 $5x^2 + x - 4 = 0$
 $a = 5, b = 1 \text{ en } c = -4$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 5 \cdot -4 = 81$
 $x = \frac{-1 + \sqrt{81}}{10} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{81}}{10}$
 $x = \frac{-1 + 9}{10} \vee x = \frac{-1 - 9}{10}$
 $x = \frac{4}{5} \vee x = -1$

9 a $2x^2 + 3x + 1 = 0$
 $a = 2, b = 3 \text{ en } c = 1$
 $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$

b $3x^2 - 7x - 1 = 0$
 $a = 3, b = -7 \text{ en } c = -1$
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -1 = 61$

c $x^2 - x - 5 = 0$
 $a = 1, b = -1 \text{ en } c = -5$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -5 = 21$

Bladzijde 15

10 a $a = 2, b = -5 \text{ en } c = -7$

b $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -7 = 81$

c $x = \frac{5 + \sqrt{81}}{4} \vee x = \frac{5 - \sqrt{81}}{4}$
 $x = \frac{5 + 9}{4} \vee x = \frac{5 - 9}{4}$
 $x = 3\frac{1}{2} \vee x = -1$

11 a $3x^2 - 7x + 2 = 0$
 $a = 3, b = -7$ en $c = 2$
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$
 $x = \frac{7 + \sqrt{25}}{6} \vee x = \frac{7 - \sqrt{25}}{6}$
 $x = \frac{7+5}{6} \vee x = \frac{7-5}{6}$
 $x = 2 \vee x = \frac{1}{3}$

b $5x^2 - x - 4 = 0$
 $a = 5, b = -1$ en $c = -4$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4) = 81$
 $x = \frac{1 + \sqrt{81}}{10} \vee x = \frac{1 - \sqrt{81}}{10}$
 $x = \frac{1+9}{10} \vee x = \frac{1-9}{10}$
 $x = 1 \vee x = -\frac{4}{5}$

c $10x^2 + 9x + 2 = 0$
 $a = 10, b = 9$ en $c = 2$
 $D = 9^2 - 4 \cdot 10 \cdot 2 = 1$
 $x = \frac{-9 + \sqrt{1}}{20} \vee x = \frac{-9 - \sqrt{1}}{20}$
 $x = \frac{-9+1}{20} \vee x = \frac{-9-1}{20}$
 $x = -\frac{2}{5} \vee x = -\frac{1}{2}$

12 a $3x^2 + 3 = 10x$
 $3x^2 - 10x + 3 = 0$
 $a = 3, b = -10$ en $c = 3$
 $D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$
 $x = \frac{10 + \sqrt{64}}{6} \vee x = \frac{10 - \sqrt{64}}{6}$
 $x = \frac{10+8}{6} \vee x = \frac{10-8}{6}$
 $x = 3 \vee x = \frac{1}{3}$

b $6x^2 + x = 2$
 $6x^2 + x - 2 = 0$
 $a = 6, b = 1$ en $c = -2$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 49$
 $x = \frac{-1 + \sqrt{49}}{12} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{49}}{12}$
 $x = \frac{-1+7}{12} \vee x = \frac{-1-7}{12}$
 $x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{2}{3}$

c $4x^2 + 3 = 8x$
 $4x^2 - 8x + 3 = 0$
 $a = 4, b = -8$ en $c = 3$
 $D = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16$
 $x = \frac{8 + \sqrt{16}}{8} \vee x = \frac{8 - \sqrt{16}}{8}$
 $x = \frac{8+4}{8} \vee x = \frac{8-4}{8}$
 $x = 1\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$

d $4x^2 + 5x + 1 = 0$
 $a = 4, b = 5$ en $c = 1$
 $D = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$
 $x = \frac{-5 + \sqrt{9}}{8} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{9}}{8}$
 $x = \frac{-5+3}{8} \vee x = \frac{-5-3}{8}$
 $x = -\frac{1}{4} \vee x = -1$

e $2x^2 + 3x - 5 = 0$
 $a = 2, b = 3$ en $c = -5$
 $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49$
 $x = \frac{-3 + \sqrt{49}}{4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{49}}{4}$
 $x = \frac{-3+7}{4} \vee x = \frac{-3-7}{4}$
 $x = 1 \vee x = -2\frac{1}{2}$

f $7x^2 - 5x - 2 = 0$
 $a = 7, b = -5$ en $c = -2$
 $D = (-5)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-2) = 81$
 $x = \frac{5 + \sqrt{81}}{14} \vee x = \frac{5 - \sqrt{81}}{14}$
 $x = \frac{5+9}{14} \vee x = \frac{5-9}{14}$
 $x = 1 \vee x = -\frac{2}{7}$

d $7x = 2x^2 + 5$
 $-2x^2 + 7x - 5 = 0$
 $a = -2, b = 7$ en $c = -5$
 $D = 7^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-5) = 9$
 $x = \frac{-7 + \sqrt{9}}{-4} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{9}}{-4}$
 $x = \frac{-7+3}{-4} \vee x = \frac{-7-3}{-4}$
 $x = 1 \vee x = 2\frac{1}{2}$

e $9x - 4 = 5x^2$
 $-5x^2 + 9x - 4 = 0$
 $a = -5, b = 9$ en $c = -4$
 $D = 9^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-4) = 1$
 $x = \frac{-9 + \sqrt{1}}{-10} \vee x = \frac{-9 - \sqrt{1}}{-10}$
 $x = \frac{-9+1}{-10} \vee x = \frac{-9-1}{-10}$
 $x = \frac{4}{5} \vee x = 1$

f $50x^2 + 1 = 15x$
 $50x^2 - 15x + 1 = 0$
 $a = 50, b = -15$ en $c = 1$
 $D = (-15)^2 - 4 \cdot 50 \cdot 1 = 25$
 $x = \frac{15 + \sqrt{25}}{100} \vee x = \frac{15 - \sqrt{25}}{100}$
 $x = \frac{15+5}{100} \vee x = \frac{15-5}{100}$
 $x = \frac{1}{5} \vee x = \frac{1}{10}$

13 a $f(x) = 0$ geeft $2x^2 - 3x - 2 = 0$
 $a = 2, b = -3$ en $c = -2$
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$
 $x = \frac{3 + \sqrt{25}}{4} \vee x = \frac{3 - \sqrt{25}}{4}$
 $x = \frac{3 + 5}{4} \vee x = \frac{3 - 5}{4}$
 $x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$

Dus $A(-\frac{1}{2}, 0)$ en $B(2, 0)$.

b $f(x) = g(x)$ geeft $2x^2 - 3x - 2 = -2x + 1$
 $2x^2 - x - 3 = 0$
 $a = 2, b = -1$ en $c = -3$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 25$
 $x = \frac{1 + \sqrt{25}}{4} \vee x = \frac{1 - \sqrt{25}}{4}$
 $x = \frac{1 + 5}{4} \vee x = \frac{1 - 5}{4}$
 $x = 1\frac{1}{2} \vee x = -1$
 $g(1\frac{1}{2}) = -2 \cdot 1\frac{1}{2} + 1 = -2$ en $g(-1) = -2 \cdot -1 + 1 = 3$
Dus $C(-1, 3)$ en $D(1\frac{1}{2}, -2)$.

14 $x = -1$ geeft $3 \cdot (-1)^2 + b \cdot -1 = 5$
 $3 - b = 5$
 $-b = 2$
 $b = -2$
 $b = -2$ geeft $3x^2 - 2x = 5$
 $3x^2 - 2x - 5 = 0$
 $a = 3, b = -2$ en $c = -5$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64$
 $x = \frac{2 + \sqrt{64}}{6} \vee x = \frac{2 - \sqrt{64}}{6}$
 $x = \frac{2 + 8}{6} \vee x = \frac{2 - 8}{6}$
 $x = 1\frac{2}{3} \vee x = -1$

Dus de andere oplossing is $x = 1\frac{2}{3}$.

Bladzijde 16

15 a $7x^2 = 3x + 7$
 $7x^2 - 3x - 7 = 0$
 $a = 7, b = -3$ en $c = -7$
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 7 \cdot -7 = 205$
 $x = \frac{3 + \sqrt{205}}{14} \vee x = \frac{3 - \sqrt{205}}{14}$
 $x \approx 1,24 \vee x \approx -0,81$

b $5x = 6 - 11x^2$
 $11x^2 + 5x - 6 = 0$
 $a = 11, b = 5$ en $c = -6$
 $D = 5^2 - 4 \cdot 11 \cdot -6 = 289$
 $x = \frac{-5 + \sqrt{289}}{22} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{289}}{22}$
 $x = \frac{-5 + 17}{22} \vee x = \frac{-5 - 17}{22}$
 $x = \frac{6}{11} \vee x = -1$

16 a $x^2 + x - 4 = 0$
 $a = 1, b = 1 \text{ en } c = -4$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 17$
 $x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$
 $x \approx 1,56 \vee x \approx -2,56$

b $x^2 - 5x - 3 = 0$
 $a = 1, b = -5 \text{ en } c = -3$
 $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 37$
 $x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2} \vee x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}$
 $x \approx 5,54 \vee x \approx -0,54$

17 a $2x^2 + 4x + 1 = 0$
 $a = 2, b = 4 \text{ en } c = 1$
 $D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$
 $x = \frac{-4 + \sqrt{8}}{4} \vee x = \frac{-4 - \sqrt{8}}{4}$
 $x \approx -0,29 \vee x \approx -1,71$

b $x^2 + x = 5$
 $x^2 + x - 5 = 0$
 $a = 1, b = 1 \text{ en } c = -5$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -5 = 21$
 $x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$
 $x \approx 1,79 \vee x \approx -2,79$

18 a $5x^2 + 2x + 1 = 0$
 $a = 5, b = 2 \text{ en } c = 1$
 $D = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = -16$

b De vergelijking heeft geen oplossing omdat $\sqrt{-16}$ niet bestaat.

c $9x^2 + 6x + 1 = 0$
 $a = 9, b = 6 \text{ en } c = 1$
 $D = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$

d De vergelijking heeft maar één oplossing omdat $\frac{-6 + \sqrt{0}}{18}$ en $\frac{-6 - \sqrt{0}}{18}$ gelijk zijn.

Bladzijde 17

19 a $x^2 + 6x + 6 = 0$
 $a = 1, b = 6 \text{ en } c = 6$
 $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 12$
 $D > 0$, dus twee oplossingen.

b $\frac{1}{16}x^2 - 10x + 400 = 0$
 $a = \frac{1}{16}, b = -10 \text{ en } c = 400$
 $D = (-10)^2 - 4 \cdot \frac{1}{16} \cdot 400 = 0$
 $D = 0$, dus één oplossing.

c $-3x^2 + 5x - 4 = 0$
 $a = -3, b = 5 \text{ en } c = -4$
 $D = 5^2 - 4 \cdot -3 \cdot -4 = -23$
 $D < 0$, dus geen oplossing.

d $2x^2 + x = 5x - 2$
 $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 $a = 2, b = -4 \text{ en } c = 2$
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$
 $D = 0$, dus één oplossing.

c $5x^2 - 3x - 3 = 0$
 $a = 5, b = -3 \text{ en } c = -3$
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -3 = 69$
 $x = \frac{3 + \sqrt{69}}{10} \vee x = \frac{3 - \sqrt{69}}{10}$
 $x \approx 1,13 \vee x \approx -0,53$

d $-x^2 + 5x - 5 = 0$
 $a = -1, b = 5 \text{ en } c = -5$
 $D = 5^2 - 4 \cdot -1 \cdot -5 = 5$
 $x = \frac{-5 + \sqrt{5}}{-2} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{5}}{-2}$
 $x \approx 1,38 \vee x \approx 3,62$

c $3x^2 = 2x + 8$
 $3x^2 - 2x - 8 = 0$
 $a = 3, b = -2 \text{ en } c = -8$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -8 = 100$
 $x = \frac{2 + \sqrt{100}}{6} \vee x = \frac{2 - \sqrt{100}}{6}$
 $x = \frac{2 + 10}{6} \vee x = \frac{2 - 10}{6}$
 $x = 2 \vee x = -1\frac{1}{3}$

d $x + 5 = 2x^2$
 $-2x^2 + x + 5 = 0$
 $a = -2, b = 1 \text{ en } c = 5$
 $D = 1^2 - 4 \cdot -2 \cdot 5 = 41$
 $x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{-4} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{41}}{-4}$
 $x \approx -1,35 \vee x \approx 1,85$

20 a $x^2 + 3x + 4 = 0$
 $a = 1, b = 3$ en $c = 4$
 $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7$
 $D < 0$, dus geen oplossing.

b $9x^2 - 12x + 4 = 0$
 $a = 9, b = -12$ en $c = 4$
 $D = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0$
 $x = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

c $-2x^2 + 5x - 2 = 0$
 $a = -2, b = 5$ en $c = -2$
 $D = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) = 9$
 $x = \frac{-5 + \sqrt{9}}{-4} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{9}}{-4}$
 $x = \frac{-5 + 3}{-4} \vee x = \frac{-5 - 3}{-4}$
 $x = \frac{1}{2} \vee x = 2$

d $x^2 - x + 6 = 0$
 $a = 1, b = -1$ en $c = 6$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -23$
 $D < 0$, dus geen oplossing.

21 a $25x^2 + 20x + 1 = 0$
 $a = 25, b = 20$ en $c = 1$
 $D = 20^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 = 300$
 $x = \frac{-20 + \sqrt{300}}{50} \vee x = \frac{-20 - \sqrt{300}}{50}$
 $x \approx -0,05 \vee x \approx -0,75$

b $3x + 1 = 2x^2$
 $-2x^2 + 3x + 1 = 0$
 $a = -2, b = 3$ en $c = 1$
 $D = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 17$
 $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{-4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{-4}$
 $x \approx -0,28 \vee x \approx 1,78$

c $-2x^2 + 5x = 5$
 $-2x^2 + 5x - 5 = 0$
 $a = -2, b = 5$ en $c = -5$
 $D = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-5) = -15$
 $D < 0$, dus geen oplossing.

d $8x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0$
 $a = 8, b = -4$ en $c = \frac{1}{2}$
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 0$
 $x = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

e $2x^2 + 6 = x$
 $2x^2 - x + 6 = 0$
 $a = 2, b = -1$ en $c = 6$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = -47$
 $D < 0$, dus geen oplossing.

f $x(5x - 7) = -2$
 $5x^2 - 7x = -2$
 $5x^2 - 7x + 2 = 0$
 $a = 5, b = -7$ en $c = 2$
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 9$
 $x = \frac{7 + \sqrt{9}}{10} \vee x = \frac{7 - \sqrt{9}}{10}$
 $x = \frac{7 + 3}{10} \vee x = \frac{7 - 3}{10}$
 $x = 1 \vee x = \frac{2}{5}$

22 $3x^2 + c = 6x$
 $3x^2 - 6x + c = 0$
 Er is gegeven dat deze vergelijking één oplossing heeft, dus $D = 0$.
 $a = 3, b = -6$ en $D = 0$ geeft $x = \frac{6}{6} = 1$.

6.2 De ligging van een parabool ten opzichte van de x-as

Bladzijde 18

23 a $x^2 - 2x + 2 = 0$
 $a = 1, b = -2$ en $c = 2$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$

b De vergelijking $x^2 - 2x + 2 = 0$ heeft geen oplossing omdat $D < 0$.
 Je kunt dat zien in de figuur omdat de grafiek van $f(x) = x^2 - 2x + 2$ de x-as niet snijdt.

c $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$
 $a = \frac{1}{2}, b = -2$ en $c = 2$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$

d De vergelijking $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$ heeft één oplossing omdat $D = 0$.
 Je kunt dat zien in de figuur omdat de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ de x-as raakt.

Bladzijde 19

24 a $y = x^2 + 2x + 3$
 $a = 1, b = 2$ en $c = 3$
 $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$
 $D < 0$, dus geen snijpunt met de x -as.

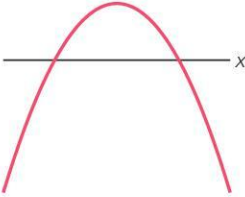
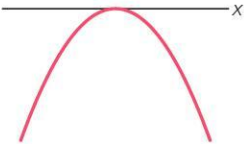
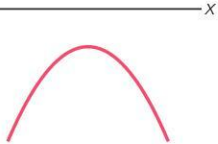
b $y = -x^2 - x + 1$
 $a = -1, b = -1$ en $c = 1$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 5$
 $D > 0$, dus twee snijpunten met de x -as.

c $y = x^2 + 9x + 20$
 $a = 1, b = 9$ en $c = 20$
 $D = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 1$
 $D > 0$, dus twee snijpunten met de x -as.

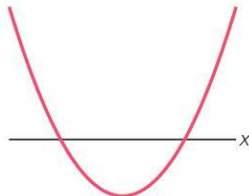
d $y = 4x^2 - 4x + 1$
 $a = 4, b = -4$ en $c = 1$
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$
 $D = 0$, dus één snijpunt (raakpunt) met de x -as.

25

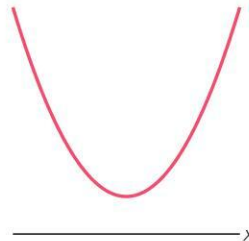
De parabool $y = ax^2 + bx + c$ met $a < 0$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
		
De parabool heeft twee snijpunten met de x -as.	De parabool heeft één snijpunt (raakpunt) met de x -as.	De parabool heeft geen snijpunt met de x -as.

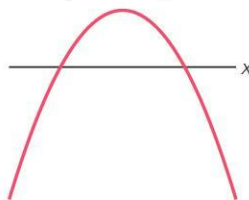
26 a $y = 2x^2 + 3x - 4$
 $a = 2, b = 3$ en $c = -4$
 $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 41$
 $D > 0$, dus twee snijpunten met de x -as.
 $a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



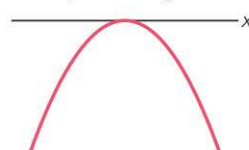
c $y = 8x^2 - x + 1$
 $a = 8, b = -1$ en $c = 1$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1 = -31$
 $D < 0$, dus geen snijpunt met de x -as.
 $a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



b $y = -x^2 + 6x + 1$
 $a = -1, b = 6$ en $c = 1$
 $D = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 40$
 $D > 0$, dus twee snijpunten met de x -as.
 $a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



d $y = -3x^2 + 6x - 3$
 $a = -3, b = 6$ en $c = -3$
 $D = 6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-3) = 0$
 $D = 0$, dus één snijpunt (raakpunt) met de x -as.
 $a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



27 a $f(x) = 2x^2 - 5x + p$
 $a = 2, b = -5$ en $c = p$
 $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 25 - 8p$

b $25 - 8p = 0$
 $-8p = -25$
 $p = 3\frac{1}{8}$

c De grafiek raakt de x -as voor $p = 3\frac{1}{8}$.

- 28 a** $f(x) = -3x^2 + 12x + p$
 $a = -3$, $b = 12$ en $c = p$
 $D = 12^2 - 4 \cdot -3 \cdot p = 144 + 12p$
 De grafiek raakt de x -as, dus $D = 0$.
 $144 + 12p = 0$
 $12p = -144$
 $p = -12$
- b** $f(-5) = -3 \cdot (-5)^2 + 12 \cdot -5 + p = -75 - 60 + p = p - 135$
 $f(-5) = 40$ geeft $p - 135 = 40$, dus $p = 175$.
- c** $f(1) = -3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + p = p + 9$
 $f(1) = 0$ geeft $p + 9 = 0$, dus $p = -9$.
 $p = -9$ geeft $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$.
 $f(x) = 0$ geeft $-3x^2 + 12x - 9 = 0$
 $a = -3$, $b = 12$ en $c = -9$
 $D = 12^2 - 4 \cdot -3 \cdot -9 = 36$
 $x = \frac{-12 + \sqrt{36}}{-6} \vee x = \frac{-12 - \sqrt{36}}{-6}$
 $x = \frac{-12 + 6}{-6} \vee x = \frac{-12 - 6}{-6}$
 $x = 1 \vee x = 3$
 Dus $D(3, 0)$.

6.3 Oplossingsmethoden

Bladzijde 20

- 29 a** De vergelijking $x^2 - 16 = 0$ kun je herleiden tot de vorm $x^2 = c$.
 Bij $x^2 - 16x = 0$ kun je het linkerlid ontbinden in factoren.
- b** Bij de vergelijking $x(x - 3) = 0$ kun je $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$ toepassen.
 Bij $x(x - 3) = 10$ werk je de haakjes weg en maak je vervolgens het rechterlid 0.

Bladzijde 21

- 30 a** $x^2 + 6x = 0$
 $x(x + 6) = 0$
 $x = 0 \vee x + 6 = 0$
 $x = 0 \vee x = -6$
- b** $x^2 + 6x = 7$
 $x^2 + 6x - 7 = 0$
 $(x - 1)(x + 7) = 0$
 $x - 1 = 0 \vee x + 7 = 0$
 $x = 1 \vee x = -7$
- c** $x^2 + 6x + 7 = 0$
 $a = 1$, $b = 6$ en $c = 7$
 $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 8$
 $x = \frac{-6 + \sqrt{8}}{2} \vee x = \frac{-6 - \sqrt{8}}{2}$
 $x \approx -1,59 \vee x \approx -4,41$
- d** $x^2 + 6x = 27$
 $x^2 + 6x - 27 = 0$
 $(x - 3)(x + 9) = 0$
 $x - 3 = 0 \vee x + 9 = 0$
 $x = 3 \vee x = -9$
- e** $x^2 + 7 = 1$
 $x^2 = -6$
 geen oplossing
- f** $x^2 - 7x - 6 = 0$
 $a = 1$, $b = -7$ en $c = -6$
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -6 = 73$
 $x = \frac{7 + \sqrt{73}}{2} \vee x = \frac{7 - \sqrt{73}}{2}$
 $x \approx 7,77 \vee x \approx -0,77$

31

a $2x^2 = 6x$

$2x^2 - 6x = 0$

$2x(x - 3) = 0$

$2x = 0 \vee x - 3 = 0$

$x = 0 \vee x = 3$

b $x^2 + 3x - 7 = 0$

$a = 1, b = 3 \text{ en } c = -7$

$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot -7 = 37$

$x = \frac{-3 + \sqrt{37}}{2} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{37}}{2}$

$x \approx 1,54 \vee x \approx -4,54$

c $(2x - 1)(x - 5) = 0$

$2x - 1 = 0 \vee x - 5 = 0$

$2x = 1 \vee x = 5$

$x = \frac{1}{2} \vee x = 5$

32

a $6x^2 + 36x = 96$

$6x^2 + 36x - 96 = 0$

$x^2 + 6x - 16 = 0$

$(x - 2)(x + 8) = 0$

$x - 2 = 0 \vee x + 8 = 0$

$x = 2 \vee x = -8$

b $4x^2 + 4x = 8x$

$4x^2 - 4x = 0$

$4x(x - 1) = 0$

$4x = 0 \vee x - 1 = 0$

$x = 0 \vee x = 1$

c $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 12$

$\frac{1}{2}x^2 + 5x - 12 = 0$

$x^2 + 10x - 24 = 0$

$(x - 2)(x + 12) = 0$

$x - 2 = 0 \vee x + 12 = 0$

$x = 2 \vee x = -12$

d $(x - 2)(x - 3) = 20$

$x^2 - 3x - 2x + 6 = 20$

$x^2 - 5x - 14 = 0$

$(x + 2)(x - 7) = 0$

$x + 2 = 0 \vee x - 7 = 0$

$x = -2 \vee x = 7$

e $25x^2 - 10x + 1 = 0$

$a = 25, b = -10 \text{ en } c = 1$

$D = (-10)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 = 0$

$x = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

f $2x^2 - 12 = 8$

$2x^2 = 20$

$x^2 = 10$

$x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$

$x \approx 3,16 \vee x \approx -3,16$

d $(x - 5)^2 = 49$

$x - 5 = 7 \vee x - 5 = -7$

$x = 12 \vee x = -2$

e $3x^2 - 7 = x^2 + 25$

$2x^2 = 32$

$x^2 = 16$

$x = 4 \vee x = -4$

f $(x - 7)(3x + 7) = -3$

$3x^2 + 7x - 21x - 49 = -3$

$3x^2 - 14x - 46 = 0$

$a = 3, b = -14 \text{ en } c = -46$

$D = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -46 = 748$

$x = \frac{14 + \sqrt{748}}{6} \vee x = \frac{14 - \sqrt{748}}{6}$

$x \approx 6,89 \vee x \approx -2,22$

Bladzijde 22

33

a Zie de figuur hiernaast.

opp I = $12 \cdot x = 12x$

opp II = $x \cdot x = x^2$

opp III = $4 \cdot x = 4x$

opp border = opp I + opp II + opp III
 $= 12x + x^2 + 4x = x^2 + 16x$

b Hieruit volgt de vergelijking $x^2 + 16x = 57$.

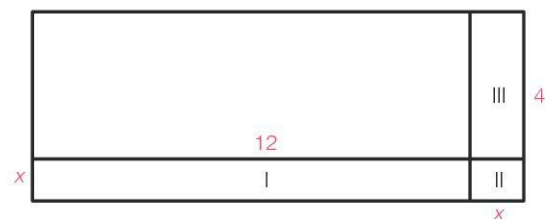
$x^2 + 16x = 57$

$x^2 + 16x - 57 = 0$

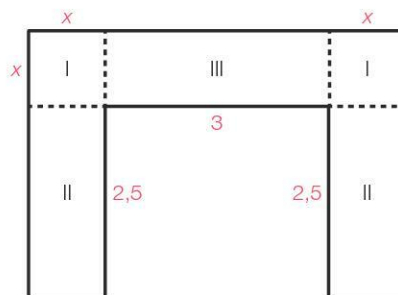
$(x - 3)(x + 19) = 0$

$x - 3 = 0 \vee x + 19 = 0$

$x = 3 \vee x = -19$

c De oplossing $x = -19$ kan niet, dus de breedte van de border is 3 meter.

- 34 a** Zie de figuur hiernaast.
 opp I = $x \cdot x = x^2$
 opp II = $2,5 \cdot x = 2,5x$
 opp III = $3 \cdot x = 3x$
 opp witte gedeelte = $2 \cdot \text{opp I} + 2 \cdot \text{opp II} + \text{opp III}$
 $= 2x^2 + 2 \cdot 2,5x + 3x$
 $= 2x^2 + 5x + 3x = 2x^2 + 8x$



- b** $2x^2 + 8x = 4,5$
 $2x^2 + 8x - 4,5 = 0$
 $a = 2, b = 8 \text{ en } c = -4,5$
 $D = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot -4,5 = 100$
 $x = \frac{-8 + \sqrt{100}}{4} \vee x = \frac{-8 - \sqrt{100}}{4}$
 $x = \frac{-8 + 10}{4} \vee x = \frac{-8 - 10}{4}$
 $x = \frac{1}{2} \vee x = -4\frac{1}{2}$
 De oplossing $x = -4\frac{1}{2}$ kan niet, dus $x = \frac{1}{2}$.

- 35 a** Zie de figuur hiernaast.
 opp I = $x \cdot x = x^2$
 opp II = $x \cdot (30 - x) = 30x - x^2$
 opp III = $x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$
 opp trottoir = opp I + opp II + opp III
 $= x^2 + 30x - x^2 + 50x - x^2$
 $= 80x - x^2$

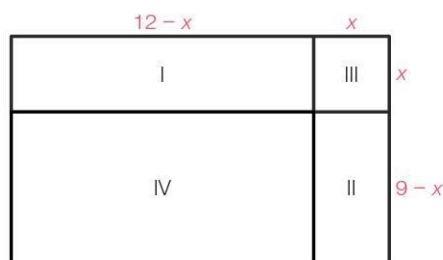


De gemeente betaalt € 25 per m², dus de oppervlakte is $\frac{5775}{25} = 231 \text{ m}^2$.

Er geldt $80x - x^2 = 231$
 $-x^2 + 80x - 231 = 0$
 $x^2 - 80x + 231 = 0$

- b** $x^2 - 80x + 231 = 0$
 $(x - 3)(x - 77) = 0$
 $x - 3 = 0 \vee x - 77 = 0$
 $x = 3 \vee x = 77$
 De oplossing $x = 77$ kan niet, dus de breedte van het trottoir is 3 meter.

- 36** Zie de figuur hiernaast.
 opp III = $x \cdot x = x^2$
 opp IV = $(12 - x) \cdot (9 - x) = 108 - 12x - 9x + x^2 = x^2 - 21x + 108$
 opp gras = opp III + opp IV = $x^2 + x^2 - 21x + 108$
 $= 2x^2 - 21x + 108$



De oppervlakte van het gras is 63 m², dus

$$2x^2 - 21x + 108 = 63$$

$$2x^2 - 21x + 45 = 0$$

$$a = 2, b = -21 \text{ en } c = 45$$

$$D = (-21)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 45 = 81$$

$$x = \frac{21 + \sqrt{81}}{4} \vee x = \frac{21 - \sqrt{81}}{4}$$

$$x = \frac{21 + 9}{4} \vee x = \frac{21 - 9}{4}$$

$$x = 7\frac{1}{2} \vee x = 3$$

De oppervlakte van het vierkante stuk grasveld is $(7\frac{1}{2})^2 = 56\frac{1}{4} \text{ m}^2$ of $3^2 = 9 \text{ m}^2$.

37 Zie de figuur hiernaast.

$$\text{opp I} = x \cdot x = x^2$$

$$\text{opp II} = x \cdot 15 = 15x$$

$$\text{opp III} = 25 \cdot x = 25x$$

$$\begin{aligned} \text{opp tegelpad} &= 4 \cdot \text{opp I} + 2 \cdot \text{opp II} + 2 \cdot \text{opp III} \\ &= 4 \cdot x^2 + 2 \cdot 15x + 2 \cdot 25x \\ &= 4x^2 + 80x \end{aligned}$$

De oppervlakte van het zwembad is $25 \cdot 15 = 375 \text{ m}^2$.

De oppervlakte van het tegelpad is $\frac{3}{5} \cdot 375 = 225 \text{ m}^2$.

Dus los op

$$4x^2 + 80x = 225$$

$$4x^2 + 80x - 225 = 0$$

$$a = 4, b = 80 \text{ en } c = -225$$

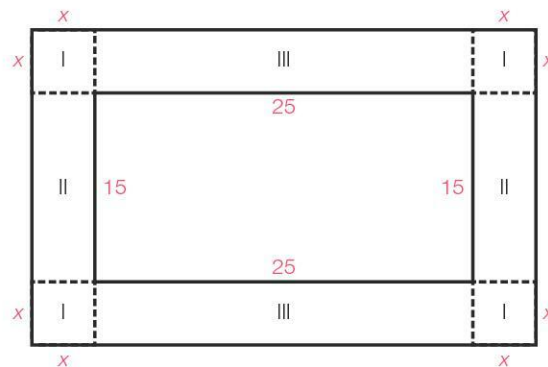
$$D = 80^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-225) = 10\,000$$

$$x = \frac{-80 + \sqrt{10\,000}}{8} \vee x = \frac{-80 - \sqrt{10\,000}}{8}$$

$$x = \frac{-80 + 100}{8} \vee x = \frac{-80 - 100}{8}$$

$$x = 2\frac{1}{2} \vee x = -22\frac{1}{2}$$

De oplossing $x = -22\frac{1}{2}$ kan niet, dus de breedte van het tegelpad is $2\frac{1}{2}$ meter.



6.4 Ongelijkheden en grafieken

Bladzijde 23

- 38 **a** Een periode met hoge inspanning duurt 60 seconden.
b De tweede periode van inspanning begint na 240 seconden en eindigt na 300 seconden.
c Tussen $t \approx 96$ en $t \approx 162$ en tussen $t \approx 276$ en $t \approx 342$ is de frequentie meer dan 130.

Bladzijde 24

- 39 **a** $-3 < x < 12$ **c** $x > 8$
b $5 < x < 17$ **d** $x < -3$
- 40 **a** $3 < x < 7$ **c** $x < -2$
b $x < 3 \vee x > 7$ **d** $x > -1$
- 41 **a** $-1 < x < 3$
b $x < -5 \vee x > 4$
c $x > -5$
- 42 **a** $x < 5 \vee x > 9$
b $-5 < x < 6$
c $x > -4$

Bladzijde 25

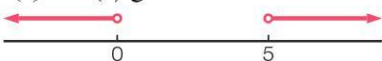
- 43 **a** Van 12 uur tot 16 uur was het buiten warmer dan binnen.
b Om 9:30 uur is het binnen vier graden warmer dan buiten.
c Van 8 tot 11 uur en van 18 tot 20 uur is het temperatuurverschil tussen binnen en buiten meer dan $1,5^\circ\text{C}$. Dat is dus gedurende 5 uur.

- 44** a $g(5) = 4$
 b $f(0) = 4, g(0) = 8, f(1) = 6, g(1) = 6, f(2) = 8, g(2) = 4$
 c Bij $x = 2$ ligt de grafiek van f boven de grafiek van g , dus $f(2) > g(2)$.
 Bij $x = 4$ ligt de grafiek van f boven de grafiek van g , dus $f(4) > g(4)$.
 Bij $x = 7$ ligt de grafiek van f onder de grafiek van g , dus $f(7) < g(7)$.
 d $x = 4$ is een oplossing van de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ omdat bij $x = 4$ de grafiek van f boven de grafiek van g ligt.
 e $x = 3$ is een oplossing van $f(x) > g(x)$.
 $x = 8$ is geen oplossing van $f(x) > g(x)$.
 f De getallen tussen 1 en 6 zijn de oplossingen van $f(x) > g(x)$.
 Notatie: $1 < x < 6$.

Bladzijde 27

- 45** a $f(x) = g(x)$ geeft $x = 1 \vee x = 6$

 $f(x) < g(x)$ geeft $x < 1 \vee x > 6$
 b $h(x) = k(x)$ geeft $x = -1 \vee x = 5$

 $h(x) > k(x)$ geeft $-1 < x < 5$
 c $l(x) = m(x)$ geeft $x = 0 \vee x = 5$

 $l(x) > m(x)$ geeft $x < 0 \vee x > 5$

- 46** $f(x) = 5$ geeft $x = -1 \vee x = 6$

 $f(x) < 5$ geeft $-1 < x < 6$

- 47** a $f(x) = g(x)$ geeft $x = 1 \vee x = 6$

 $f(x) < g(x)$ geeft $x < 1 \vee x > 6$
 b $f(x) = 3$ geeft $x = 0 \vee x = 6$

 $f(x) > 3$ geeft $0 < x < 6$
 c $h(x) = k(x)$ geeft $x = -4 \vee x = 2$

 $h(x) > k(x)$ geeft $-4 < x < 2$

- d $h(x) = 1$ geeft $x = -1$

 $h(x) > 1$ geeft $x > -1$
 e $l(x) = m(x)$ geeft $x = 0 \vee x = 5$

 $l(x) < m(x)$ geeft $0 < x < 5$
 f $m(x) = 0$ geeft $x = 6$

 $m(x) < 0$ geeft $x > 6$

6.5 Kwadratische ongelijkheden

Bladzijde 28

- 48** a $x^2 = -2x + 3$
 $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x - 1)(x + 3) = 0$
 $x - 1 = 0 \vee x + 3 = 0$
 $x = 1 \vee x = -3$
 b $x_A = -3$ en $x_B = 1$
 c

 $f(x) < g(x)$ geeft $-3 < x < 1$

Bladzijde 29**49**

a $x^2 - 2x - 4 = 2 - x$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x+2)(x-3) = 0$

$x+2=0 \vee x-3=0$

$x=-2 \vee x=3$

Uit de figuur volgt



$x^2 - 2x - 4 < 2 - x$ geeft $-2 < x < 3$

b

$x^2 - 5 = -x + 1$

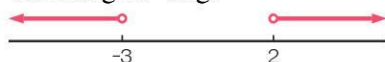
$x^2 + x - 6 = 0$

$(x-2)(x+3) = 0$

$x-2=0 \vee x+3=0$

$x=2 \vee x=-3$

Uit de figuur volgt



$x^2 - 5 > -x + 1$ geeft $x < -3 \vee x > 2$

c

$x^2 - 2 = 4x + 3$

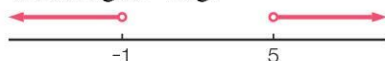
$x^2 - 4x - 5 = 0$

$(x+1)(x-5) = 0$

$x+1=0 \vee x-5=0$

$x=-1 \vee x=5$

Uit de figuur volgt



$x^2 - 2 > 4x + 3$ geeft $x < -1 \vee x > 5$

50

a $x^2 - 2 = 2x + 1$

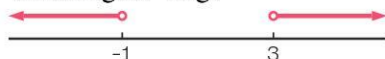
$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x+1)(x-3) = 0$

$x+1=0 \vee x-3=0$

$x=-1 \vee x=3$

Uit de figuur volgt



$x^2 - 2 > 2x + 1$ geeft $x < -1 \vee x > 3$

b

$x^2 - 2x = -3x + 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x-1)(x+2) = 0$

$x-1=0 \vee x+2=0$

$x=1 \vee x=-2$

Uit de figuur volgt



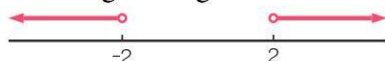
$x^2 - 2x < -3x + 2$ geeft $-2 < x < 1$

c

$x^2 = 4$

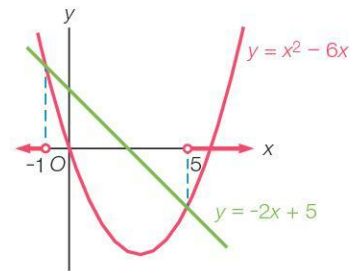
$x = 2 \vee x = -2$

Uit de figuur volgt



$x^2 > 4$ geeft $x < -2 \vee x > 2$

51 $x^2 - 6x = -2x + 5$
 $x^2 - 4x - 5 = 0$
 $(x+1)(x-5) = 0$
 $x+1 = 0 \vee x-5 = 0$
 $x = -1 \vee x = 5$
 Zie de figuur hiernaast.
 $x^2 - 6x > -2x + 5$ geeft $x < -1 \vee x > 5$



Bladzijde 30

52 a $0,005v^2 - 0,8v + 36 = 6$
 $0,005v^2 - 0,8v + 30 = 0$
 $a = 0,005, b = -0,8$ en $c = 30$
 $D = (-0,8)^2 - 4 \cdot 0,005 \cdot 30 = 0,04$
 $v = \frac{0,8 + \sqrt{0,04}}{0,01} \vee v = \frac{0,8 - \sqrt{0,04}}{0,01}$
 $v = \frac{0,8 + 0,2}{0,01} \vee v = \frac{0,8 - 0,2}{0,01}$
 $v = 100 \vee v = 60$

b Uit de figuur volgt



$0,005v^2 - 0,8v + 36 < 6$ geeft $60 < v < 100$

c Bij snelheden tussen 60 en 100 km per uur is het benzineverbruik minder dan 6 liter per 100 km.

53 Er wordt winst gemaakt als $R > K$, dus als $-0,02q^2 + 40q > 16q + 238$.
 $-0,02q^2 + 40q = 16q + 238$
 $-0,02q^2 + 24q - 238 = 0$
 $a = -0,02, b = 24$ en $c = -238$
 $D = 24^2 - 4 \cdot -0,02 \cdot -238 = 556,96$
 $q = \frac{-24 + \sqrt{556,96}}{-0,04} \vee q = \frac{-24 - \sqrt{556,96}}{-0,04}$
 $q = \frac{-24 + 23,6}{-0,04} \vee q = \frac{-24 - 23,6}{-0,04}$
 $q = 10 \vee q = 1190$
 Uit de figuur volgt



$-0,02q^2 + 40q > 16q + 238$ geeft $10 < q < 1190$

Dus bij 11 tot en met 1189 verkochte artikelen maakt het bedrijf winst.

54 a $\frac{1}{2}x^2 - 1 = x + 3$
 $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x+2)(x-4) = 0$
 $x+2 = 0 \vee x-4 = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$
 Uit de figuur volgt



$\frac{1}{2}x^2 - 1 < x + 3$ geeft $-2 < x < 4$

$$\text{b } -\frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}x - 1$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x+2)(x-5) = 0$$

$$x+2=0 \vee x-5=0$$

$$x=-2 \vee x=5$$

Uit de figuur volgt



$$-\frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2} < -\frac{3}{4}x - 1 \text{ geeft } x < -2 \vee x > 5$$

$$\text{c } \frac{1}{2}x^2 - 2x = 6$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x+2)(x-6) = 0$$

$$x+2=0 \vee x-6=0$$

$$x=-2 \vee x=6$$

Uit de figuur volgt



$$\frac{1}{2}x^2 - 2x < 6 \text{ geeft } -2 < x < 6$$

$$55 \text{ a } f(-3) = (-3)^2 - 4 \cdot -3 + 3 = 24, \text{ dus } f(-3) > 0.$$

$$f(0) = 0 - 0 + 3 = 3, \text{ dus } f(0) > 0.$$

$$f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0, \text{ dus } f(1) = 0.$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1, \text{ dus } f(2) < 0.$$

$$f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0, \text{ dus } f(3) = 0.$$

$$f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 8, \text{ dus } f(5) > 0.$$

b Bij $f(x) > 0$ hoort het gedeelte van de grafiek dat boven de x -as ligt.

Bij $f(x) < 0$ hoort het gedeelte van de grafiek dat onder de x -as ligt.

Bladzijde 31

$$56 \text{ a } -x^2 + 7x - 12 = 0$$

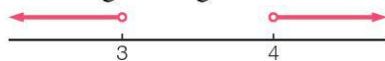
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x-3)(x-4) = 0$$

$$x-3=0 \vee x-4=0$$

$$x=3 \vee x=4$$

Uit de figuur volgt



$$-x^2 + 7x - 12 < 0 \text{ geeft } x < 3 \vee x > 4$$

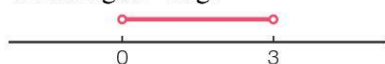
$$\text{b } x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x=0 \vee x-3=0$$

$$x=0 \vee x=3$$

Uit de figuur volgt



$$x^2 - 3x < 0 \text{ geeft } 0 < x < 3$$

$$\text{c } -\frac{1}{2}(x+2)(x-5) = 0$$

$$x+2=0 \vee x-5=0$$

$$x=-2 \vee x=5$$

Uit de figuur volgt



$$-\frac{1}{2}(x+2)(x-5) > 0 \text{ geeft } -2 < x < 5$$

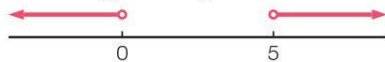
Bladzijde 32

57 a $\frac{1}{3}x(x-5) = 0$

$$\frac{1}{3}x = 0 \vee x - 5 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 5$$

Uit de figuur volgt



$$\frac{1}{3}x(x-5) > 0 \text{ geeft } x < 0 \vee x > 5$$

b $-\frac{1}{4}(x+1)(x+5) = 0$

$$x+1 = 0 \vee x+5 = 0$$

$$x = -1 \vee x = -5$$

Uit de figuur volgt



$$-\frac{1}{4}(x+1)(x+5) > 0 \text{ geeft } -5 < x < -1$$

c $-x^2 - x + 2 = 0$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x-1)(x+2) = 0$$

$$x-1 = 0 \vee x+2 = 0$$

$$x = 1 \vee x = -2$$

Uit de figuur volgt



$$-x^2 - x + 2 < 0 \text{ geeft } x < -2 \vee x > 1$$

58 a Hierbij hoort de ongelijkheid $0,25t^2 - 2,6t + 1 < 0$.

$$0,25t^2 - 2,6t + 1 = 0$$

$$t^2 - 10,4t + 4 = 0$$

$$(t-0,4)(t-10) = 0$$

$$t-0,4 = 0 \vee t-10 = 0$$

$$t = 0,4 \vee t = 10$$

Uit de figuur volgt



$$0,25t^2 - 2,6t + 1 < 0 \text{ geeft } 0,4 < t < 10$$

b Het vriest $10 - 0,4 = 9,6$ uur, dus 9 uur en 36 minuten.

c De laagste temperatuur wordt bereikt op $t_{\text{top}} = -\frac{-2,6}{2 \cdot 0,25} = 5,2$.

$$t = 5,2 \text{ geeft } T = 0,25 \cdot 5,2^2 - 2,6 \cdot 5,2 + 1 = -5,76$$

Dus het wordt kouder dan -5°C .

59 a De vergelijking $f(x) = 0$ heeft geen oplossing omdat de grafiek van f de x -as niet snijdt of raakt.

b Voor elke x ligt de grafiek van f boven de x -as, dus voor elke x geldt $f(x) > 0$, dus elke x is oplossing van de ongelijkheid $x^2 + 2x + 3 > 0$.

Bladzijde 33

60 a $x^2 - 3x + 3 < 0$ voor geen enkele x

b $x^2 - 3x + 3 > 0$ voor elke x

c $x^2 - 3x + 3 < -2$ voor geen enkele x

d $-x^2 + 4x - 4 < 0$

$$-(x^2 - 4x + 4) < 0$$

$$-(x-2)^2 < 0 \text{ voor } x \neq 2$$

e $-x^2 + 4x - 4 > 0$ voor geen enkele x

f $-x^2 + 4x - 4 < 5$ voor elke x

61 a $f(x) < 0$ voor elke x

b $f(x) > 0$ voor geen enkele x

c $f(x) < 3$ voor elke x

d $g(x) < 0$ voor geen enkele x

e $g(x) > 0$ voor $x \neq 3$

f $g(x) < -3$ voor geen enkele x

g $h(x) < 0$ voor $x \neq 8$

h $h(x) > 0$ voor geen enkele x

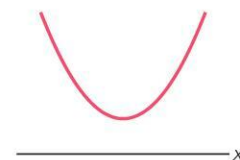
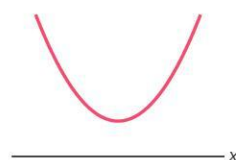
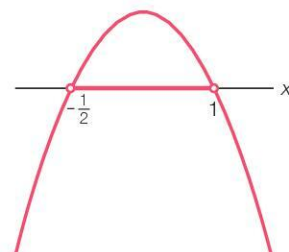
- 62** **a** $f(x) < 0$ voor geen enkele x
b $f(x) > 0$ voor $x \neq -5$
c $f(x) > -5$ voor elke x
d $g(x) < 0$ voor $x \neq 0$
e $g(x) > 0$ voor geen enkele x

- 63** **a** $-x^2 + 2x - 2 < 0$ voor elke x
b $-x^2 + 2x - 2 > 0$ voor geen enkele x
c $-x^2 + 2x - 2 > 2$ voor geen enkele x

- 64** **a** $x^2 + 2x + 3 = 0$
 $a = 1, b = 2$ en $c = 3$
 $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$.
 $D < 0$, dus $x^2 + 2x + 3 = 0$ heeft geen oplossing.
 Zie de figuur hiernaast.
 $x^2 + 2x + 3 > 0$ voor elke x
b $-x^2 + 4x - 5 = 0$
 $a = -1, b = 4$ en $c = -5$
 $D = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = -4$.
 $D < 0$, dus $-x^2 + 4x - 5 = 0$ heeft geen oplossing.
 Zie de figuur hiernaast.
 $-x^2 + 4x - 5 > 0$ voor geen enkele x
c $3x^2 - x + 1 = 0$
 $a = 3, b = -1$ en $c = 1$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -11$.
 $D < 0$, dus $3x^2 - x + 1 = 0$ heeft geen oplossing.
 Zie de figuur hiernaast.
 $3x^2 - x + 1 < 0$ voor geen enkele x
d $-2x^2 + x + 1 = 0$
 $a = -2, b = 1$ en $c = 1$
 $D = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 9$
 $x = \frac{-1 + \sqrt{9}}{-4} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{9}}{-4}$
 $x = \frac{-1 + 3}{-4} \vee x = \frac{-1 - 3}{-4}$
 $x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$
 Zie de figuur hiernaast.
 $-2x^2 + x + 1 > 0$ geeft $-\frac{1}{2} < x < 1$

- f** $g(x) > 2$ voor geen enkele x
g $h(x) < 0$ voor geen enkele x
h $h(x) > 0$ voor elke x
i $h(x) < -3$ voor geen enkele x
j $h(x) > -6$ voor elke x

- d** $x^2 - 6x + 9 > 0$ oftewel $(x - 3)^2 > 0$ voor $x \neq 3$
e $x^2 - 6x + 9 < 0$ voor geen enkele x
f $x^2 - 6x + 9 > -20$ voor elke x



Gemengde opgaven

Bladzijde 34

- 1** **a** $x^2 + 11x - 60 = 0$
 $(x - 4)(x + 15) = 0$
 $x - 4 = 0 \vee x + 15 = 0$
 $x = 4 \vee x = -15$
b $12x^2 - 18x = 0$
 $6x(2x - 3) = 0$
 $6x = 0 \vee 2x - 3 = 0$
 $x = 0 \vee 2x = 3$
 $x = 0 \vee x = 1\frac{1}{2}$

- c** $3x^2 - 10x + 3 = 0$
 $a = 3, b = -10$ en $c = 3$
 $D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$
 $x = \frac{10 + \sqrt{64}}{6} \vee x = \frac{10 - \sqrt{64}}{6}$
 $x = \frac{10 + 8}{6} \vee x = \frac{10 - 8}{6}$
 $x = 3 \vee x = \frac{1}{3}$
d $x^2 + 6x + 9 = 0$
 $(x + 3)(x + 3) = 0$
 $x + 3 = 0 \vee x + 3 = 0$
 $x = -3$

e $3x^2 - 5x + 2 = 0$

$a = 3, b = -5$ en $c = 2$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$

$x = \frac{5 + \sqrt{1}}{6} \vee x = \frac{5 - \sqrt{1}}{6}$

$x = \frac{5 + 1}{6} \vee x = \frac{5 - 1}{6}$

$x = 1 \vee x = \frac{2}{3}$

2 a $2x^2 + 3x + 1 = 0$

$a = 2, b = 3$ en $c = 1$

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$

$x = \frac{-3 + \sqrt{1}}{4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{1}}{4}$

$x = \frac{-3 + 1}{4} \vee x = \frac{-3 - 1}{4}$

$x = -\frac{1}{2} \vee x = -1$

b $2x^2 + 3x = 1$

$2x^2 + 3x - 1 = 0$

$a = 2, b = 3$ en $c = -1$

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 17$

$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$

$x \approx 0,28 \vee x \approx -1,78$

c $x^2 - 5 = 2x$

$x^2 - 2x - 5 = 0$

$a = 1, b = -2$ en $c = -5$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 24$

$x = \frac{2 + \sqrt{24}}{2} \vee x = \frac{2 - \sqrt{24}}{2}$

$x \approx 3,45 \vee x \approx -1,45$

d $x^2 + 7 = 2$

$x^2 = -5$

geen oplossing

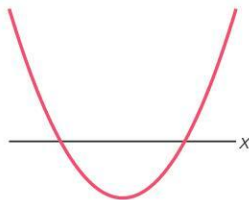
3 a $y = x^2 + 5x + 6$

$a = 1, b = 5$ en $c = 6$

$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$

$D > 0$, dus twee snijpunten met de x -as.

$a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



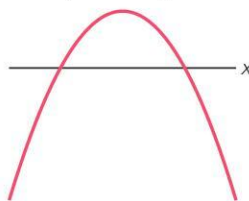
b $y = -x^2 + 5x + 6$

$a = -1, b = 5$ en $c = 6$

$D = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 = 49$

$D > 0$, dus twee snijpunten met de x -as.

$a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



f $5x^2 - 7x + 2 = 0$

$a = 5, b = -7$ en $c = 2$

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 9$

$x = \frac{7 + \sqrt{9}}{10} \vee x = \frac{7 - \sqrt{9}}{10}$

$x = \frac{7 + 3}{10} \vee x = \frac{7 - 3}{10}$

$x = 1 \vee x = \frac{2}{5}$

e $(x + 7)(3x - 10) = 0$

$x + 7 = 0 \vee 3x - 10 = 0$

$x = -7 \vee 3x = 10$

$x = -7 \vee x = \frac{10}{3}$

f $4x^2 + 1 = 4x$

$4x^2 - 4x + 1 = 0$

$a = 4, b = -4$ en $c = 1$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$

$x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

g $3x^2 - x + 4 = 0$

$a = 3, b = -1$ en $c = 4$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = -47$

$D < 0$, dus geen oplossing.

h $3x^2 - 1 = 26$

$3x^2 = 27$

$x^2 = 9$

$x = 3 \vee x = -3$

i $(x + 2)(x - 3) = -4$

$x^2 - 3x + 2x - 6 = -4$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x + 1)(x - 2) = 0$

$x + 1 = 0 \vee x - 2 = 0$

$x = -1 \vee x = 2$

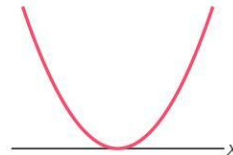
c $y = 16x^2 + 8x + 1$

$a = 16, b = 8$ en $c = 1$

$D = 8^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 0$

$D = 0$, dus één snijpunt (raakpunt) met de x -as.

$a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



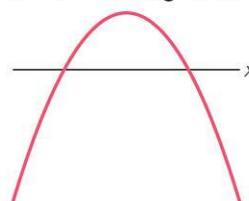
d $y = -2x^2 - x$

$a = -2, b = -1$ en $c = 0$

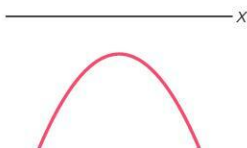
$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0 = 1$

$D > 0$, dus twee snijpunten met de x -as.

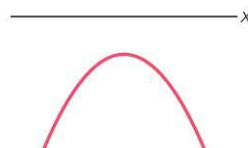
$a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



e $y = -2x^2 - 1$
 $a = -2$, $b = 0$ en $c = -1$
 $D = 0^2 - 4 \cdot -2 \cdot -1 = -8$
 $D < 0$, dus geen snijpunt met de x -as.
 $a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



f $y = -2x^2 - x - 1$
 $a = -2$, $b = -1$ en $c = -1$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot -2 \cdot -1 = -7$
 $D < 0$, dus geen snijpunt met de x -as.
 $a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



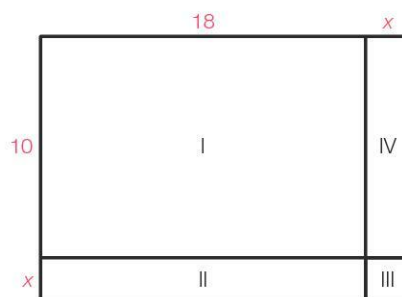
4 a $f(x) = 0$ geeft $-2x^2 + 8x + 5 = 0$
 $a = -2$, $b = 8$ en $c = 5$
 $D = 8^2 - 4 \cdot -2 \cdot 5 = 104$
 $x = \frac{-8 + \sqrt{104}}{-4} \vee x = \frac{-8 - \sqrt{104}}{-4}$
 $x = -0,54... \vee x = 4,54...$

$AB = 4,54... - -0,54... \approx 5,10$

b $f(x) = 11$ geeft $-2x^2 + 8x + 5 = 11$
 $-2x^2 + 8x - 6 = 0$
 $a = -2$, $b = 8$ en $c = -6$
 $D = 8^2 - 4 \cdot -2 \cdot -6 = 16$
 $x = \frac{-8 + \sqrt{16}}{-4} \vee x = \frac{-8 - \sqrt{16}}{-4}$
 $x = \frac{-8 + 4}{-4} \vee x = \frac{-8 - 4}{-4}$
 $x = 1 \vee x = 3$

Dus $C(1, 11)$ en $D(3, 11)$.

5 a Zie de figuur hiernaast.
opp I = $18 \cdot 10 = 180$
opp II = $18 \cdot x = 18x$
opp III = $x \cdot x = x^2$
opp IV = $10 \cdot x = 10x$
Dus de oppervlakte van het grasveld en de bloemenborder samen is
opp = $180 + 18x + x^2 + 10x = x^2 + 28x + 180$.
opp = 224,25 geeft $x^2 + 28x + 180 = 224,25$
 $x^2 + 28x - 44,25 = 0$

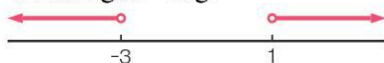


b $x^2 + 28x - 44,25 = 0$
 $a = 1$, $b = 28$ en $c = -44,25$
 $D = 28^2 - 4 \cdot 1 \cdot -44,25 = 961$
 $x = \frac{-28 + \sqrt{961}}{2} \vee x = \frac{-28 - \sqrt{961}}{2}$
 $x = \frac{-28 + 31}{2} \vee x = \frac{-28 - 31}{2}$
 $x = 1\frac{1}{2} \vee x = -29\frac{1}{2}$

De oplossing $x = -29\frac{1}{2}$ kan niet, dus de bloemenborder is $1\frac{1}{2}$ meter breed.

6 a $x^2 + 2x = 3$
 $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x - 1)(x + 3) = 0$
 $x - 1 = 0 \vee x + 3 = 0$
 $x = 1 \vee x = -3$

Uit de figuur volgt



$x^2 + 2x > 3$ geeft $x < -3 \vee x > 1$

b $x^2 - 4x = 2x - 8$
 $x^2 - 6x + 8 = 0$
 $(x - 2)(x - 4) = 0$
 $x - 2 = 0 \vee x - 4 = 0$
 $x = 2 \vee x = 4$

Uit de figuur volgt



$x^2 - 4x < 2x - 8$ geeft $2 < x < 4$

c $x^2 - 3 = -2x + 5$
 $x^2 + 2x - 8 = 0$
 $(x - 2)(x + 4) = 0$
 $x - 2 = 0 \vee x + 4 = 0$
 $x = 2 \vee x = -4$

Uit de figuur volgt



$x^2 - 3 < -2x + 5$ geeft $-4 < x < 2$

Bladzijde 35

7 a $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 6x + p$

$a = -\frac{1}{2}$, $b = -6$ en $c = p$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot -\frac{1}{2} \cdot p = 36 + 2p$

De grafiek raakt de x -as, dus $D = 0$.

$36 + 2p = 0$

$2p = -36$

$p = -18$

b $f(-6) = -\frac{1}{2} \cdot (-6)^2 - 6 \cdot -6 + p = -18 + 36 + p = p + 18$
 $f(-6) = 18$ geeft $p + 18 = 18$, dus $p = 0$.

c $f(-8) = -\frac{1}{2} \cdot (-8)^2 - 6 \cdot -8 + p = -32 + 48 + p = p + 16$
 $f(-8) = 0$ geeft $p + 16 = 0$, dus $p = -16$.

$p = -16$ geeft $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 6x - 16$

$f(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 - 6x - 16 = 0$

$x^2 + 12x + 32 = 0$

$(x + 4)(x + 8) = 0$

$x + 4 = 0 \vee x + 8 = 0$

$x = -4 \vee x = -8$

Dus $C(-4, 0)$ en $BC = -4 - -8 = 4$.

8 a $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\frac{1}{2} = 0$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x - 1)(x + 5) = 0$

$x - 1 = 0 \vee x + 5 = 0$

$x = 1 \vee x = -5$

b $(2x + 1)^2 = 16$

$2x + 1 = 4 \vee 2x + 1 = -4$

$2x = 3 \vee 2x = -5$

$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -2\frac{1}{2}$

c $(3x - 1)(2x + 1) = 6$

$6x^2 + 3x - 2x - 1 = 6$

$6x^2 + x - 7 = 0$

$a = 6$, $b = 1$ en $c = -7$

$D = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot -7 = 169$

$x = \frac{-1 + \sqrt{169}}{12} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{169}}{12}$

$x = \frac{-1 + 13}{12} \vee x = \frac{-1 - 13}{12}$

$x = 1 \vee x = -1\frac{1}{6}$

d $2x^2 = -16 - 12x$

$2x^2 + 12x + 16 = 0$

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$(x + 2)(x + 4) = 0$

$x + 2 = 0 \vee x + 4 = 0$

$x = -2 \vee x = -4$

e $(3x - 1)(2x + 8) = 6x^2$

$6x^2 + 24x - 2x - 8 = 6x^2$

$22x - 8 = 0$

$22x = 8$

$x = \frac{4}{11}$

f $x(x - 2) = -3$

$x^2 - 2x = -3$

$x^2 - 2x + 3 = 0$

$a = 1$, $b = -2$ en $c = 3$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$

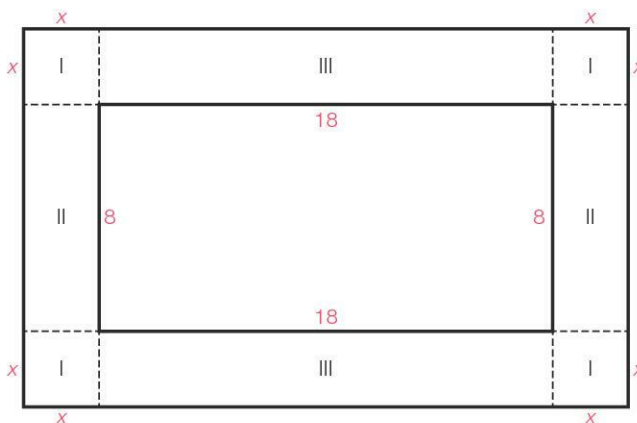
$D < 0$, dus geen oplossing.

- 9 a** Zie de figuur hiernaast.
 opp I = $x \cdot x = x^2$
 opp II = $8 \cdot x = 8x$
 opp III = $18 \cdot x = 18x$
 opp tegelpad = $4 \cdot \text{opp I} + 2 \cdot \text{opp II} + 2 \cdot \text{opp III}$
 $= 4 \cdot x^2 + 2 \cdot 8x + 2 \cdot 18x$
 $= 4x^2 + 16x + 36x$
 $= 4x^2 + 52x$

- b** opp zwembad = $18 \cdot 8 = 144 \text{ m}^2$
 opp tegelpad = $\frac{5}{6} \cdot 144 = 120 \text{ m}^2$
 Dus hieruit volgt de vergelijking
 $4x^2 + 52x = 120$.

- c** $4x^2 + 52x = 120$
 $4x^2 + 52x - 120 = 0$
 $x^2 + 13x - 30 = 0$
 $(x - 2)(x + 15) = 0$
 $x - 2 = 0 \vee x + 15 = 0$
 $x = 2 \vee x = -15$

De oplossing $x = -15$ kan niet, dus de breedte van het pad is 2 meter.

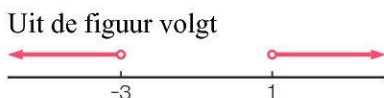


- 10 a** $-x^2 + 6x = 8$
 $-x^2 + 6x - 8 = 0$
 $x^2 - 6x + 8 = 0$
 $(x - 2)(x - 4) = 0$
 $x - 2 = 0 \vee x - 4 = 0$
 $x = 2 \vee x = 4$
 Uit de figuur volgt



$-x^2 + 6x > 8$ geeft $2 < x < 4$

- b** $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x - 1)(x + 3) = 0$
 $x - 1 = 0 \vee x + 3 = 0$
 $x = 1 \vee x = -3$
 Uit de figuur volgt



$x^2 + 2x - 3 > 0$ geeft $x < -3 \vee x > 1$

- c** $-x^2 + 3 = x + 1$
 $-x^2 - x + 2 = 0$
 $x^2 + x - 2 = 0$
 $(x - 1)(x + 2) = 0$
 $x - 1 = 0 \vee x + 2 = 0$
 $x = 1 \vee x = -2$
 Uit de figuur volgt



$-x^2 + 3 > x + 1$ geeft $-2 < x < 1$

- 11 a** $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$
 $x^2 - 4x + 4 = 0$
 $(x - 2)(x - 2) = 0$
 $x - 2 = 0$
 $x = 2$
 $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 > 0$ voor $x \neq 2$
- b** $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 < -4$ voor geen enkele x

- c** $-x^2 + 3x - 3 < 0$ voor elke x
d $-x^2 + 3x - 3 > 1$ voor geen enkele x
e $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4 > 0$ voor elke x
f $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4 < -1$ voor geen enkele x

Diagnostische toets

Bladzijde 38

1 a $f(x) = 0$ geeft $-2x^2 + 6x = 0$
 $-2x(x-3) = 0$
 $-2x = 0 \vee x-3 = 0$
 $x = 0 \vee x = 3$

Dus $A(0, 0)$ en $B(3, 0)$.

b $g(0) = 0 - 0 - 24 = -24$, dus $R(0, -24)$.
 $g(x) = 0$ geeft $x^2 - 2x - 24 = 0$
 $(x+4)(x-6) = 0$
 $x+4 = 0 \vee x-6 = 0$
 $x = -4 \vee x = 6$

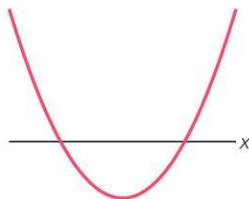
Dus $P(-4, 0)$ en $Q(6, 0)$.

2 a $2x^2 - 7x + 6 = 0$
 $a = 2, b = -7$ en $c = 6$
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 1$
 $x = \frac{7 + \sqrt{1}}{4} \vee x = \frac{7 - \sqrt{1}}{4}$
 $x = \frac{7+1}{4} \vee x = \frac{7-1}{4}$
 $x = 2 \vee x = 1\frac{1}{2}$

3 a $2x^2 + 3x - 20 = 0$
 $a = 2, b = 3$ en $c = -20$
 $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-20) = 169$
 $x = \frac{-3 + \sqrt{169}}{4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{169}}{4}$
 $x = \frac{-3+13}{4} \vee x = \frac{-3-13}{4}$
 $x = 2\frac{1}{2} \vee x = -4$

b $8x^2 + 14x = 15$
 $8x^2 + 14x - 15 = 0$
 $a = 8, b = 14$ en $c = -15$
 $D = 14^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-15) = 676$
 $x = \frac{-14 + \sqrt{676}}{16} \vee x = \frac{-14 - \sqrt{676}}{16}$
 $x = \frac{-14+26}{16} \vee x = \frac{-14-26}{16}$
 $x = \frac{3}{4} \vee x = -2\frac{1}{2}$

4 a $y = 3x^2 + 4x + 1$
 $a = 3, b = 4$ en $c = 1$
 $D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$
 $D > 0$, dus twee snijpunten met de x -as.
 $a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.

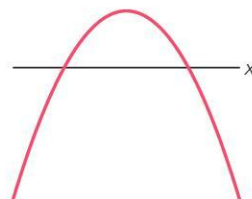


b $2x^2 + 19x - 10 = 0$
 $a = 2, b = 19$ en $c = -10$
 $D = 19^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 441$
 $x = \frac{-19 + \sqrt{441}}{4} \vee x = \frac{-19 - \sqrt{441}}{4}$
 $x = \frac{-19+21}{4} \vee x = \frac{-19-21}{4}$
 $x = \frac{1}{2} \vee x = -10$

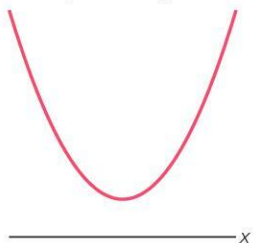
c $6x = 7x^2 + 1$
 $-7x^2 + 6x - 1 = 0$
 $a = -7, b = 6$ en $c = -1$
 $D = 6^2 - 4 \cdot (-7) \cdot (-1) = 8$
 $x = \frac{-6 + \sqrt{8}}{-14} \vee x = \frac{-6 - \sqrt{8}}{-14}$
 $x \approx 0,23 \vee x \approx 0,63$

d $5x = 7x^2 + 1$
 $-7x^2 + 5x - 1 = 0$
 $a = -7, b = 5$ en $c = -1$
 $D = 5^2 - 4 \cdot (-7) \cdot (-1) = -3$
 $D < 0$, dus geen oplossing.

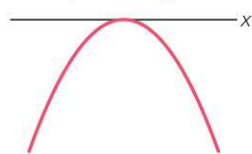
b $y = -4x^2 + 3x + 1$
 $a = -4, b = 3$ en $c = 1$
 $D = 3^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 1 = 25$
 $D > 0$, dus twee snijpunten met de x -as.
 $a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



- c** $y = x^2 + 3x + 4$
 $a = 1, b = 3$ en $c = 4$
 $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7$
 $D < 0$, dus geen snijpunt met de x -as.
 $a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



- d** $y = -2x^2 + 4x - 2$
 $a = -2, b = 4$ en $c = -2$
 $D = 4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) = 0$
 $D = 0$, dus één snijpunt (raakpunt) met de x -as.
 $a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



- 5 a** $f(x) = -3x^2 + 6x + p$
 $a = -3, b = 6$ en $c = p$
 $D = 6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot p = 36 + 12p$
De grafiek raakt de x -as, dus $D = 0$.
 $36 + 12p = 0$
 $12p = -36$
 $p = -3$
- b** $f(-5) = -3 \cdot (-5)^2 + 6 \cdot (-5) + p = -75 - 30 + p = p - 105$
 $f(-5) = 20$ geeft $p - 105 = 20$, dus $p = 125$.

- 6 a** $x^2 - 8x = 0$
 $x(x - 8) = 0$
 $x = 0 \vee x - 8 = 0$
 $x = 0 \vee x = 8$
- b** $x^2 - 8x = 9$
 $x^2 - 8x - 9 = 0$
 $(x + 1)(x - 9) = 0$
 $x + 1 = 0 \vee x - 9 = 0$
 $x = -1 \vee x = 9$
- c** $x^2 - 8x + 9 = 0$
 $a = 1, b = -8$ en $c = 9$
 $D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 28$
 $x = \frac{8 + \sqrt{28}}{2} \vee x = \frac{8 - \sqrt{28}}{2}$
 $x \approx 6,65 \vee x \approx 1,35$
- d** $x^2 + 8 = 0$
 $x^2 = -8$
geen oplossing
- e** $3x^2 + 9x = 0$
 $3x(x + 3) = 0$
 $3x = 0 \vee x + 3 = 0$
 $x = 0 \vee x = -3$

- f** $9x^2 - 5x - 4 = 0$
 $a = 9, b = -5$ en $c = -4$
 $D = (-5)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-4) = 169$
 $x = \frac{5 + \sqrt{169}}{18} \vee x = \frac{5 - \sqrt{169}}{18}$
 $x = \frac{5 + 13}{18} \vee x = \frac{5 - 13}{18}$
 $x = 1 \vee x = -\frac{4}{9}$
- g** $9x^2 - 6x + 1 = 0$
 $a = 9, b = -6$ en $c = 1$
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$
 $x = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
- h** $9x^2 - 6 = 3$
 $9x^2 = 9$
 $x^2 = 1$
 $x = 1 \vee x = -1$
- i** $9x^2 - 6x = 3$
 $9x^2 - 6x - 3 = 0$
 $a = 9, b = -6$ en $c = -3$
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-3) = 144$
 $x = \frac{6 + \sqrt{144}}{18} \vee x = \frac{6 - \sqrt{144}}{18}$
 $x = \frac{6 + 12}{18} \vee x = \frac{6 - 12}{18}$
 $x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$

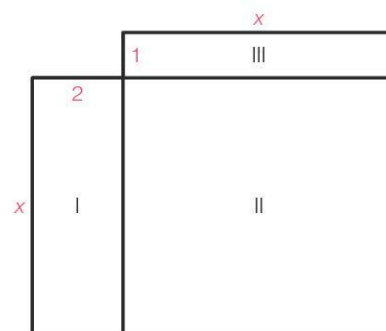
7 a $2x^2 + 10 = 12x$
 $2x^2 - 12x + 10 = 0$
 $x^2 - 6x + 5 = 0$
 $(x-1)(x-5) = 0$
 $x-1 = 0 \vee x-5 = 0$
 $x = 1 \vee x = 5$

b $\frac{1}{4}x^2 + 2x = 5$
 $\frac{1}{4}x^2 + 2x - 5 = 0$
 $x^2 + 8x - 20 = 0$
 $(x-2)(x+10) = 0$
 $x-2 = 0 \vee x+10 = 0$
 $x = 2 \vee x = -10$

c $(2x-3)(x+10) = 70$
 $2x^2 + 20x - 3x - 30 = 70$
 $2x^2 + 17x - 100 = 0$
 $a = 2, b = 17 \text{ en } c = -100$
 $D = 17^2 - 4 \cdot 2 \cdot -100 = 1089$
 $x = \frac{-17 + \sqrt{1089}}{4} \vee x = \frac{-17 - \sqrt{1089}}{4}$
 $x = \frac{-17 + 33}{4} \vee x = \frac{-17 - 33}{4}$
 $x = 4 \vee x = -12\frac{1}{2}$

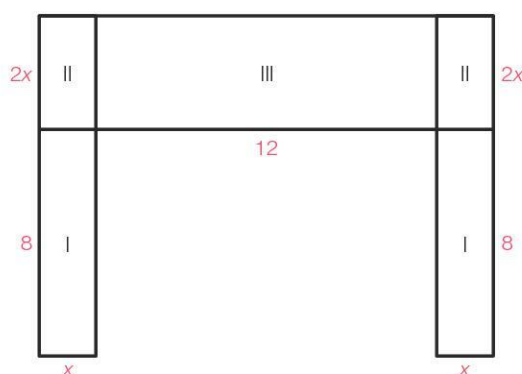
8 a Zie de figuur hiernaast.
opp I = $x \cdot 2 = 2x$
opp II = $x \cdot x = x^2$
opp III = $x \cdot 1 = x$
opp grasveld = opp I + opp II + opp III = $2x + x^2 + x = x^2 + 3x$

b $x^2 + 3x = 28$
 $x^2 + 3x - 28 = 0$
 $(x-4)(x+7) = 0$
 $x-4 = 0 \vee x+7 = 0$
 $x = 4 \vee x = -7$
De oplossing $x = -7$ kan niet, dus $x = 4$.



Bladzijde 39

9 Zie de figuur hiernaast.
opp I = $x \cdot 8 = 8x$
opp II = $x \cdot 2x = 2x^2$
opp III = $12 \cdot 2x = 24x$
opp tegelpad = $2 \cdot \text{opp I} + 2 \cdot \text{opp II} + \text{opp III}$
 $= 16x + 4x^2 + 24x$
 $= 4x^2 + 40x$
De oppervlakte is 44 m^2 , dus
 $4x^2 + 40x = 44$
 $4x^2 + 40x - 44 = 0$
 $x^2 + 10x - 11 = 0$
 $(x-1)(x+11) = 0$
 $x-1 = 0 \vee x+11 = 0$
 $x = 1 \vee x = -11$
De oplossing $x = -11$ kan niet, dus de breedte van het pad is 1 meter.



- 10 a $f(x) = g(x)$ geeft $x = -1 \vee x = 2$



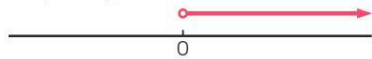
$f(x) > g(x)$ geeft $-1 < x < 2$

- b $f(x) = 3$ geeft $x = 0 \vee x = 2$



$f(x) < 3$ geeft $x < 0 \vee x > 2$

- c $g(x) = 1$ geeft $x = 0$



$g(x) > 1$ geeft $x > 0$

- 11 a $x^2 - 3 = x - 1$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x + 1 = 0 \vee x - 2 = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

Uit de figuur volgt



$x^2 - 3 < x - 1$ geeft $-1 < x < 2$

- b $x^2 - 4x = 4 - x$

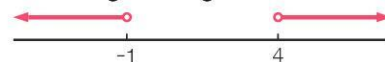
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x + 1)(x - 4) = 0$$

$$x + 1 = 0 \vee x - 4 = 0$$

$$x = -1 \vee x = 4$$

Uit de figuur volgt



$x^2 - 4x > 4 - x$ geeft $x < -1 \vee x > 4$

- 12 a $-x^2 + 3x = 0$

$$-x(x - 3) = 0$$

$$-x = 0 \vee x - 3 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

Uit de figuur volgt



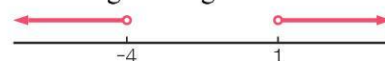
$-x^2 + 3x > 0$ geeft $0 < x < 3$

- b $\frac{1}{2}(x - 1)(x + 4) = 0$

$$x - 1 = 0 \vee x + 4 = 0$$

$$x = 1 \vee x = -4$$

Uit de figuur volgt



$\frac{1}{2}(x - 1)(x + 4) > 0$ geeft $x < -4 \vee x > 1$

- 13 a $f(x) < 0$ voor geen enkele x

- b $f(x) > 0$ voor elke x

- c $f(x) > -3$ voor elke x

- d $g(x) < 0$ voor $x \neq 4$

- e $g(x) > 0$ voor geen enkele x

- f $g(x) > 3$ voor geen enkele x

Herhaling

Bladzijde 40

- 1 a $x^2 - 8x + 12 = 0$

$$(x - 2)(x - 6) = 0$$

$$x - 2 = 0 \vee x - 6 = 0$$

$$x = 2 \vee x = 6$$

- b De snijpunten van de grafiek met de x -as zijn $(2, 0)$ en $(6, 0)$.

- 2 a $g(0) = 0 - 0 = 0$, dus het snijpunt met de y -as is $(0, 0)$.

$$g(x) = 0 \text{ geeft } 3x^2 - 12x = 0$$

$$3x(x - 4) = 0$$

$$3x = 0 \vee x - 4 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 4$$

Dus de snijpunten met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(4, 0)$.

- b $h(0) = 0 - 0 - 20 = -20$, dus het snijpunt met de y -as is $(0, -20)$.

$$h(x) = 0 \text{ geeft } x^2 - x - 20 = 0$$

$$(x + 4)(x - 5) = 0$$

$$x + 4 = 0 \vee x - 5 = 0$$

$$x = -4 \vee x = 5$$

Dus de snijpunten met de x -as zijn $(-4, 0)$ en $(5, 0)$.

3 a $a = 2, b = -5$ en $c = 3$, dus $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$

b $x = \frac{5+1}{4}$ en $x = \frac{5-1}{4}$, dus $x = 1\frac{1}{2}$ en $x = 1$.

c $5x^2 + 7x + 2 = 0$

$a = 5, b = 7$ en $c = 2$

$D = 7^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 9$

$x = \frac{-7 + \sqrt{9}}{10} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{9}}{10}$

$x = \frac{-7 + 3}{10} \vee x = \frac{-7 - 3}{10}$

$x = -\frac{2}{5} \vee x = -1$

d $3x^2 + 10x + 8 = 0$

$a = 3, b = 10$ en $c = 8$

$D = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 4$

$x = \frac{-10 + \sqrt{4}}{6} \vee x = \frac{-10 - \sqrt{4}}{6}$

$x = \frac{-10 + 2}{6} \vee x = \frac{-10 - 2}{6}$

$x = -1\frac{1}{3} \vee x = -2$

4 a $2x^2 + 6x - 1 = 0$

$a = 2, b = 6$ en $c = -1$

$D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 44$

$x = \frac{-6 + \sqrt{44}}{4} \vee x = \frac{-6 - \sqrt{44}}{4}$

b $x \approx 0,16 \vee x \approx -3,16$

c $3x^2 - 8x + 2 = 0$

$a = 3, b = -8$ en $c = 2$

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40$

$x = \frac{8 + \sqrt{40}}{6} \vee x = \frac{8 - \sqrt{40}}{6}$

$x \approx 2,39 \vee x \approx 0,28$

5 a $x^2 - 5x + 8 = 0$

$a = 1, b = -5$ en $c = 8$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -7$

$D < 0$, dus de vergelijking heeft geen oplossing.

b $3x^2 - x + 7 = 0$

$a = 3, b = -1$ en $c = 7$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -83$

$D < 0$, dus geen oplossing.

c $-5x^2 + 2x - 1 = 0$

$a = -5, b = 2$ en $c = -1$

$D = 2^2 - 4 \cdot -5 \cdot -1 = -16$

$D < 0$, dus geen oplossing.

6 a $2x^2 + 5x = 42$
 $2x^2 + 5x - 42 = 0$
 $a = 2, b = 5 \text{ en } c = -42$
 $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot -42 = 361$
 $x = \frac{-5 + \sqrt{361}}{4} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{361}}{4}$
 $x = \frac{-5 + 19}{4} \vee x = \frac{-5 - 19}{4}$

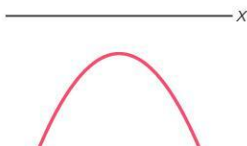
$x = 3\frac{1}{2} \vee x = -6$

b $2x^2 + 6 = -7x$
 $2x^2 + 7x + 6 = 0$
 $a = 2, b = 7 \text{ en } c = 6$
 $D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 1$
 $x = \frac{-7 + \sqrt{1}}{4} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{1}}{4}$
 $x = \frac{-7 + 1}{4} \vee x = \frac{-7 - 1}{4}$

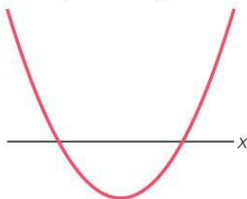
$x = -1\frac{1}{2} \vee x = -2$

c $2x^2 + 7x + 7 = 0$
 $a = 2, b = 7 \text{ en } c = 7$
 $D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -7$
 $D < 0$, dus geen oplossing.

7 a $y = -4x^2 + 20x - 28$
 $a = -4, b = 20 \text{ en } c = -28$
 $D = 20^2 - 4 \cdot -4 \cdot -28 = -48$
 $D < 0$, dus geen snijpunt met de x -as.
 $a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



b $y = 4x^2 - 20x + 1$
 $a = 4, b = -20 \text{ en } c = 1$
 $D = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 384$
 $D > 0$, dus twee snijpunten met de x -as.
 $a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



8 a $f(x) = 3x^2 + 6x + p$
 $a = 3, b = 6 \text{ en } c = p$
 $D = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot p = 36 - 12p$

b $36 - 12p = 0$
 $-12p = -36$
 $p = 3$

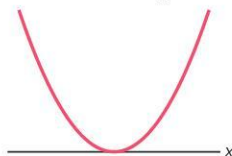
c De grafiek raakt de x -as als $D = 0$.
 Dus voor $p = 3$.

d $2x^2 = 6 - 9x$
 $2x^2 + 9x - 6 = 0$
 $a = 2, b = 9 \text{ en } c = -6$
 $D = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot -6 = 129$
 $x = \frac{-9 + \sqrt{129}}{4} \vee x = \frac{-9 - \sqrt{129}}{4}$
 $x \approx 0,59 \vee x \approx -5,09$

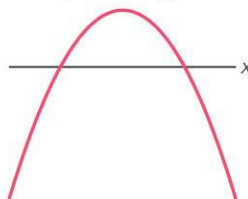
e $10x^2 + 99x = 10$
 $10x^2 + 99x - 10 = 0$
 $a = 10, b = 99 \text{ en } c = -10$
 $D = 99^2 - 4 \cdot 10 \cdot -10 = 10201$
 $x = \frac{-99 + \sqrt{10201}}{20} \vee x = \frac{-99 - \sqrt{10201}}{20}$
 $x = \frac{-99 + 101}{20} \vee x = \frac{-99 - 101}{20}$
 $x = \frac{1}{10} \vee x = -10$

f $2x^2 + 7x = 7$
 $2x^2 + 7x - 7 = 0$
 $a = 2, b = 7 \text{ en } c = -7$
 $D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot -7 = 105$
 $x = \frac{-7 + \sqrt{105}}{4} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{105}}{4}$
 $x \approx 0,81 \vee x \approx -4,31$

c $y = 4x^2 - 20x + 25$
 $a = 4, b = -20 \text{ en } c = 25$
 $D = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 0$
 $D = 0$, dus één snijpunt (raakpunt) met de x -as.
 $a > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.



d $y = -4x^2 + 20x - 24$
 $a = -4, b = 20 \text{ en } c = -24$
 $D = 20^2 - 4 \cdot -4 \cdot -24 = 16$
 $D > 0$, dus twee snijpunten met de x -as.
 $a < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.



- 9 a** $-18 + 9 + p = 12$
 $-9 + p = 12$
 $p = 21$
b $f(-5) = -2 \cdot (-5)^2 + 3 \cdot -5 + p = -50 - 15 + p = p - 65$
 $f(-5) = 16$ geeft $p - 65 = 16$, dus $p = 81$.

- 10 a** $x^2 - 7x = 0$
 $x(x - 7) = 0$
 $x = 0 \vee x - 7 = 0$
 $x = 0 \vee x = 7$
b $x^2 - 5x - 14 = 0$
 $(x + 2)(x - 7) = 0$
 $x + 2 = 0 \vee x - 7 = 0$
 $x = -2 \vee x = 7$
c $6x^2 - 7x + 2 = 0$
 $a = 6, b = -7$ en $c = 2$
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 1$
 $x = \frac{7 + \sqrt{1}}{12} \vee x = \frac{7 - \sqrt{1}}{12}$
 $x = \frac{7 + 1}{12} \vee x = \frac{7 - 1}{12}$
 $x = \frac{2}{3} \vee x = \frac{1}{2}$
d $4x^2 = 36$
 $x^2 = 9$
 $x = 3 \vee x = -3$

- e** $25x^2 + 10x + 1 = 0$
 $a = 25, b = 10$ en $c = 1$
 $D = 10^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 = 0$
 $x = \frac{-10}{50} = -\frac{1}{5}$
f $x^2 + x + 2 = 0$
 $a = 1, b = 1$ en $c = 2$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7$
 $D < 0$, dus geen oplossing.
g $3x^2 + 6x = 0$
 $3x(x + 2) = 0$
 $3x = 0 \vee x + 2 = 0$
 $x = 0 \vee x = -2$
h $x^2 + 20 = 4$
 $x^2 = -16$
geen oplossing

Bladzijde 42

- 11 a** $\frac{1}{4}x^2 = 5$
 $x^2 = 20$
 $x = \sqrt{20} \vee x = -\sqrt{20}$
 $x \approx 4,47 \vee x \approx -4,47$
b $\frac{1}{4}x^2 + x = 3$
 $\frac{1}{4}x^2 + x - 3 = 0$
 $x^2 + 4x - 12 = 0$
 $(x - 2)(x + 6) = 0$
 $x - 2 = 0 \vee x + 6 = 0$
 $x = 2 \vee x = -6$
c $5x^2 = 10x + 15$
 $5x^2 - 10x - 15 = 0$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x + 1)(x - 3) = 0$
 $x + 1 = 0 \vee x - 3 = 0$
 $x = -1 \vee x = 3$
d $6x^2 + 24x + 24 = 0$
 $x^2 + 4x + 4 = 0$
 $(x + 2)(x + 2) = 0$
 $x + 2 = 0 \vee x + 2 = 0$
 $x = -2$
e $(x + 2)^2 = 9$
 $x + 2 = 3 \vee x + 2 = -3$
 $x = 1 \vee x = -5$
f $(x + 2)(x + 3) = 9$
 $x^2 + 3x + 2x + 6 = 9$
 $x^2 + 5x - 3 = 0$
 $a = 1, b = 5$ en $c = -3$
 $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 37$
 $x = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$
 $x \approx 0,54 \vee x \approx -5,54$
12 a opp II = $12x$ en opp III = x^2
b opp stroken = opp I + opp II + opp III = $8x + 12x + x^2 = x^2 + 20x$
c De oppervlakte was $8 \cdot 12 = 96 \text{ m}^2$. Voor een verdubbeling moet de oppervlakte van de stroken ook 96 m^2 zijn. Dus $x^2 + 20x = 96$.
d $x^2 + 20x = 96$
 $x^2 + 20x - 96 = 0$
 $(x - 4)(x + 24) = 0$
 $x - 4 = 0 \vee x + 24 = 0$
 $x = 4 \vee x = -24$
e De oplossing $x = -24$ kan niet, dus $x = 4$.
De afmetingen zijn 12 meter bij 16 meter.
13 a $-5 < x < -1$
b $x < -1 \vee x > 3$
c $2 < x < 4$
d $x < -3 \vee x > 0$

Bladzijde 43

14 a $f(x) = g(x)$ geeft $x = 0 \vee x = 2$

$f(x) < g(x)$ geeft $x < 0 \vee x > 2$

b $f(x) = h(x)$ geeft $x = -1 \vee x = 2$

$f(x) > h(x)$ geeft $-1 < x < 2$

15 a $x^2 - 3x = 3 - x$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x + 1)(x - 3) = 0$
 $x + 1 = 0 \vee x - 3 = 0$
 $x = -1 \vee x = 3$

Uit de figuur volgt



$x^2 - 3x < 3 - x$ geeft $-1 < x < 3$

c $g(x) = h(x)$ geeft $x = 1 \vee x = 2$

$g(x) > h(x)$ geeft $x < 1 \vee x > 2$

d $f(x) = 2$ geeft $x = -1 \vee x = 1$

$f(x) < 2$ geeft $x < -1 \vee x > 1$

b $x^2 = 4x$
 $x^2 - 4x = 0$
 $x(x - 4) = 0$
 $x = 0 \vee x - 4 = 0$
 $x = 0 \vee x = 4$

Uit de figuur volgt



$x^2 > 4x$ geeft $x < 0 \vee x > 4$

Bladzijde 44

16 a $x^2 + 3x = 0$
 $x(x + 3) = 0$
 $x = 0 \vee x + 3 = 0$
 $x = 0 \vee x = -3$

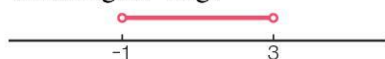
Uit de figuur volgt



$x^2 + 3x > 0$ geeft $x < -3 \vee x > 0$

b $-x^2 + 2x + 3 = 0$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x + 1)(x - 3) = 0$
 $x + 1 = 0 \vee x - 3 = 0$
 $x = -1 \vee x = 3$

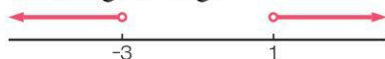
Uit de figuur volgt



$-x^2 + 2x + 3 > 0$ geeft $-1 < x < 3$

c $\frac{1}{3}(x - 1)(x + 3) = 0$
 $x - 1 = 0 \vee x + 3 = 0$
 $x = 1 \vee x = -3$

Uit de figuur volgt



$\frac{1}{3}(x - 1)(x + 3) > 0$ geeft $x < -3 \vee x > 1$

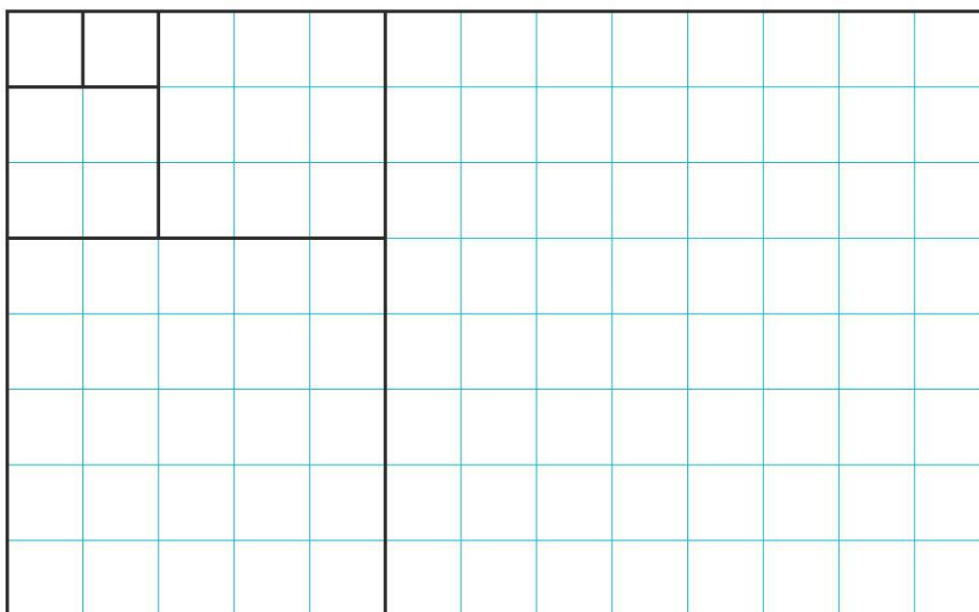
- 17 a** $h(x) > 0$ voor geen enkele x
b $h(x) < 0$ voor elke x
c $h(x) < 2$ voor elke x
d $k(x) < 0$ voor $x \neq 0$
e $k(x) > 0$ voor geen enkele x
f $k(x) < 2$ voor elke x

- g** $l(x) > 0$ voor $x \neq 3$
h $l(x) < 0$ voor geen enkele x
i $l(x) > -3$ voor elke x
j $m(x) > 0$ voor elke x
k $m(x) < 0$ voor geen enkele x
l $m(x) > -3$ voor elke x

Onderzoek Het gulden getal

Bladzijde 45

1 a,b,c,d



e

rechthoek	lange zijde	korte zijde	$\frac{\text{lange zijde}}{\text{korte zijde}}$
1	1	1	1
2	2	1	2
3	3	2	1,5
4	5	3	1,667
5	8	5	1,6
6	13	8	1,625
7	21	13	1,615
8	34	21	1,619
9	55	34	1,618
10	89	55	1,618

f Op den duur krijg je weer dezelfde verhouding $\frac{\text{lange zijde}}{\text{korte zijde}}$.

Bladzijde 46

2 Neem bijvoorbeeld $A = 3$.

$$B = \frac{1}{3} + 1 = 1,333...$$

$$F = \frac{1}{1,636...} + 1 = 1,611...$$

$$C = \frac{1}{1,333...} + 1 = 1,75$$

$$G = \frac{1}{1,611...} + 1 = 1,620...$$

$$D = \frac{1}{1,75} + 1 = 1,571...$$

$$H = \frac{1}{1,620...} + 1 = 1,617...$$

$$E = \frac{1}{1,571...} + 1 = 1,636...$$

$$I = \frac{1}{1,617...} + 1 \approx 1,618$$

Je krijgt dezelfde benadering van ϕ als in opgave 1, met welk getal je ook begint.

3 Neem bijvoorbeeld $A = 4$.

$$B = \sqrt{4 + 1} = 2,236...$$

$$F = \sqrt{1,634... + 1} = 1,623...$$

$$C = \sqrt{2,236... + 1} = 1,798...$$

$$G = \sqrt{1,623... + 1} = 1,619...$$

$$D = \sqrt{1,798... + 1} = 1,672...$$

$$H = \sqrt{1,619... + 1} = 1,618...$$

$$E = \sqrt{1,672... + 1} = 1,634...$$

$$I = \sqrt{1,618... + 1} \approx 1,618$$

Je krijgt ook met deze rij dezelfde benadering van ϕ , met welk getal je ook begint.

4 $\phi^2 \approx 1,618^2 \approx 2,618$ en $\frac{1}{\phi} \approx \frac{1}{1,618} \approx 0,618$

Op grond van deze uitkomsten kun je vermoeden dat $\phi^2 = \phi + 1$ en $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$.

5 a De onafgeronde waarde van ϕ .

b Nee, 1,618 is niet de exacte waarde van ϕ .

c De rechthoeken zijn gelijkvormig, dus de verhouding $\frac{\text{lange zijde}}{\text{korte zijde}}$ bij de rechthoeken is gelijk. Bij de kleine rechthoek is de lange zijde x en de korte zijde 1. Bij de grote rechthoek is de lange zijde $x + 1$ en de korte zijde x .

Dus $\frac{x}{1} \mid \frac{x+1}{x}$ is een verhoudingstabel.

d Uit $\frac{x}{1} \mid \frac{x+1}{x}$ volgt de vergelijking $x \cdot x = x + 1$.

e Dit geeft $x^2 = x + 1$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$a = 1, b = -1 \text{ en } c = -1$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

f $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, dus de oplossing $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ kan niet.

Dus de exacte waarde van ϕ is $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

g $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2,618... \text{ en } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = 2,618..., \text{ dus } \phi^2 = \phi + 1.$

$$\frac{1}{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)} = 0,618... \text{ en } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = 0,618..., \text{ dus } \frac{1}{\phi} = \phi - 1.$$

Dus de vermoedens van opgave 4 kloppen.

Bladzijde 47

6 a $\phi^4 = \phi \cdot \phi^3 = \phi \cdot (2\phi + 1) = 2\phi^2 + \phi = 2(\phi + 1) + \phi = 3\phi + 2$
 $\phi^5 = \phi \cdot \phi^4 = \phi \cdot (3\phi + 2) = 3\phi^2 + 2\phi = 3(\phi + 1) + 2\phi = 5\phi + 3$
 $\phi^6 = \phi \cdot \phi^5 = \phi \cdot (5\phi + 3) = 5\phi^2 + 3\phi = 5(\phi + 1) + 3\phi = 8\phi + 5$

b $\phi^7 = 13\phi + 8$ en $\phi^8 = 21\phi + 13$

7 Stel $BC = 1$ en $AC = x$. Dan is $AB = x + 1$.

Nu is $\frac{x}{1} \mid \frac{x+1}{x}$ een verhoudingstabel.

In opgave 5 heb je gezien dat hieruit volgt dat $x = \phi$.

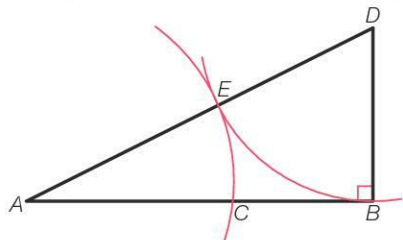
$$\text{Dus } \frac{AC}{BC} = \frac{x}{1} = \frac{\phi}{1} = \phi \text{ en } \frac{AB}{AC} = \frac{x+1}{x} = \frac{\phi+1}{\phi} = \frac{\phi^2}{\phi} = \phi.$$

- 8 a** Construeren is een manier van tekenen waarbij alleen een potlood, een passer en een rechte lat gebruikt worden.

*

b Bijvoorbeeld

- Teken lijnstuk AB .
 - Teken een rechthoekige driehoek ABD met $BD = \frac{1}{2}AB$ en $\angle B = 90^\circ$.
 - Teken een cirkelboog met middelpunt D , door B . De boog snijdt AD in E .
 - Teken een cirkelboog met middelpunt A , door E . De boog snijdt AB in C .
- Het lijnstuk AB is nu verdeeld volgens de gulden snede. Zie de figuur hieronder.



- 9 a** *

b *

- 10** *

7 Goniometrie

Voorkennis Kruisproducten en tangens

Bladzijde 50

- 1 a $x = \frac{9 \cdot 5}{7} \approx 6,4$ c $x = 3 \cdot 11 = 33$
b $x = \frac{3 \cdot 9}{7} \approx 3,9$ d $x = \frac{0,32 \cdot 2}{0,09} \approx 7,1$

Bladzijde 51

- 2 $\tan(\angle B) = \frac{AC}{AB}$ geeft $\frac{\tan(26^\circ)}{1} \mid \frac{190}{AB}$
 $AB = \frac{190}{\tan(26^\circ)} \approx 390$ meter
 $\tan(\angle D) = \frac{EF}{DE}$ geeft $\frac{\tan(47^\circ)}{1} \mid \frac{EF}{280}$
 $EF = 280 \tan(47^\circ) \approx 300$ meter

- 3 $\tan(\angle K) = \frac{LM}{KL}$ geeft $\frac{\tan(22^\circ)}{1} \mid \frac{LM}{390}$
 $LM = 390 \tan(22^\circ) = 157,5...$
 $\angle L = 90^\circ$, dus $KM^2 = KL^2 + LM^2$
 $KM^2 = 390^2 + 157,5...^2 = 176\,928,3...$
 $KM = \sqrt{176\,928,3...} \approx 421$
Dus de lengte van de helling KM is ongeveer 421 meter.
 $\tan(\angle Q) = \frac{PR}{PQ}$ geeft $\frac{\tan(31^\circ)}{1} \mid \frac{240}{PQ}$
 $PQ = \frac{240}{\tan(31^\circ)} = 399,4...$
 $\angle P = 90^\circ$, dus $QR^2 = PQ^2 + PR^2$
 $QR^2 = 399,4...^2 + 240^2 = 217\,141,9...$
 $QR = \sqrt{217\,141,9...} \approx 466$
Dus de lengte van de helling QR is ongeveer 466 meter.

- 4 $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{1,4}{3,1}$ geeft $\angle A \approx 24,3^\circ$
 $\tan(\angle T) = \frac{SU}{ST} = \frac{2,8}{1,1}$ geeft $\angle T \approx 68,6^\circ$
- 5 a hellingspercentage = 13%, dus hellingsgetal is 0,13.
 $\tan(0,13) =$ hellingshoek, dus hellingshoek $\approx 7,4^\circ$.
b hellingsgetal = $\tan(34^\circ) = 0,6745...$, dus hellingspercentage $\approx 67,5\%$.

7.1 Berekeningen met de tangens

Bladzijde 52

- 1 a BC is de schuine zijde en AB en AC zijn de rechthoekszijden.
b Rechthoekszijde AC ligt tegenover $\angle B$.
c Dit is rechthoekszijde AB .

Bladzijde 53

- 2 $\tan(\angle P) = \frac{QR}{PR} = \frac{5,6}{10,5}$ geeft $\angle P \approx 28,1^\circ$
 $\angle Q = 180^\circ - 90^\circ - 28,07...^\circ \approx 61,9^\circ$ (hoekensom driehoek)

- 3 a** $\angle A$ is een scherpe hoek van $\triangle ACD$.
 $\tan(\angle A) = \frac{CD}{AD}$
b $\tan(\angle B) = \frac{CD}{BD}$, $\tan(\angle C_1) = \frac{AD}{CD}$ en $\tan(\angle C_2) = \frac{BD}{CD}$

- 4 a** $\tan(\angle A_1) = \frac{BC}{AB}$
b $\tan(\angle A_2) = \frac{CD}{AD}$
c $\tan(\angle C_1) = \frac{AD}{CD}$ en $\tan(\angle C_2) = \frac{AB}{BC}$

- 5 a** AC is de aanliggende rechthoekszijde van $\angle A$.
 BC is de overstaande rechthoekszijde van $\angle A$.
b $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AC}$
c $\tan(\angle B) = \frac{AC}{BC}$

Bladzijde 54

- 6** $\tan(\angle L_1) = \frac{MN}{LN} = \frac{1,1}{6}$ geeft $\angle L_1 = 10,38\dots^\circ$
 $\tan(\angle L_2) = \frac{KN}{LN} = \frac{2,5}{6}$ geeft $\angle L_2 = 22,61\dots^\circ$
Dus $\angle L_{12} = 10,38\dots^\circ + 22,61\dots^\circ \approx 33,0^\circ$.

- 7 a** Van $\angle E$ is DF de overstaande rechthoekszijde en DE de aanliggende rechthoekszijde.
b $\tan(\angle E) = \frac{DF}{DE} = \frac{4,8}{9}$ geeft $\angle E \approx 28,1^\circ$
 $\angle F = 180^\circ - 90^\circ - 28,07\dots^\circ \approx 61,9^\circ$ (hoekensom driehoek)

- 8 a** $\angle A$ is een scherpe hoek van de rechthoekige driehoek ACD .
In $\triangle ACD$ is CD de overstaande rechthoekszijde van $\angle A$, en is AD de aanliggende rechthoekszijde van $\angle A$.
b $\tan(\angle A) = \frac{CD}{AD} = \frac{5,6}{4,2}$ geeft $\angle A \approx 53,1^\circ$
c $\tan(\angle B) = \frac{CD}{BD} = \frac{5,6}{9}$ geeft $\angle B \approx 31,9^\circ$
 $\angle C_{12} = 180^\circ - 53,13\dots^\circ - 31,89\dots^\circ \approx 95,0^\circ$ (hoekensom driehoek)

- 9 a** $\tan(\angle E) = \frac{DF}{DE} = \frac{2,4}{4,5}$ geeft $\angle E \approx 28,1^\circ$
 $\angle F = 180^\circ - 90^\circ - 28,07\dots^\circ \approx 61,9^\circ$ (hoekensom driehoek)
b $\tan(\angle R_1) = \frac{PS}{RS} = \frac{5,4}{4,1}$ geeft $\angle R_1 = 52,79\dots^\circ$
 $\tan(\angle R_2) = \frac{QS}{RS} = \frac{1,4}{4,1}$ geeft $\angle R_2 = 18,85\dots^\circ$
Dus $\angle R_{12} = 52,79\dots^\circ + 18,85\dots^\circ \approx 71,6^\circ$.

- 10** $\tan(\angle L_1) = \frac{KN}{LN} = \frac{25,2}{24}$ geeft $\angle L_1 = 46,39\dots^\circ$
 $\tan(\angle L_2) = \frac{MN}{LN} = \frac{23,8}{24}$ geeft $\angle L_2 = 44,76\dots^\circ$
Dus $\angle L_{12} = 46,39\dots^\circ + 44,76\dots^\circ \approx 91,2^\circ$.

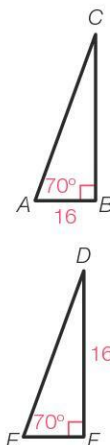
Bladzijde 55

- 11 a** $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{12}$ geeft $\angle A \approx 30,3^\circ$
 $\tan(\angle D_1) = \frac{BC}{BD} = \frac{7}{6}$ geeft $\angle D_1 \approx 49,4^\circ$
b $\angle C_2 = 180^\circ - 90^\circ - 49,39...^\circ \approx 40,6^\circ$ (hoekensom driehoek)
 $\angle C_1 = 180^\circ - 90^\circ - 40,60...^\circ - 30,25...^\circ \approx 19,1^\circ$ (hoekensom driehoek)

- 12 a** $\tan(\angle C) = \frac{AB}{BC}$ geeft $\frac{\tan(63^\circ)}{1} \mid \frac{8}{BC}$
 $BC = \frac{8}{\tan(63^\circ)} \approx 4,1$
b $\tan(\angle K) = \frac{LM}{KM}$ geeft $\frac{\tan(33^\circ)}{1} \mid \frac{LM}{3,7}$
 $LM = 3,7 \tan(33^\circ) \approx 2,4$

- 13 a** Zie de schets hiernaast.
 $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB}$ geeft $\frac{\tan(70^\circ)}{1} \mid \frac{BC}{16}$
 $BC = 16 \tan(70^\circ) \approx 44,0$

- b** Zie de schets hiernaast.
 $\tan(\angle E) = \frac{DF}{EF}$ geeft $\frac{\tan(70^\circ)}{1} \mid \frac{16}{EF}$
 $EF = \frac{16}{\tan(70^\circ)} \approx 5,8$



Bladzijde 56

- 14 a** $\tan(\angle P) = \frac{QS}{PS}$ geeft $\frac{\tan(29^\circ)}{1} \mid \frac{QS}{8,6}$
 $QS = 8,6 \tan(29^\circ) \approx 4,8$
b $\tan(\angle R) = \frac{QS}{RS} = \frac{4,76...}{4}$ geeft $\angle R \approx 50,0^\circ$

- 15** In $\triangle ABD$ is $\angle A = 90^\circ$, dus $BD^2 = AB^2 + AD^2$
 $BD^2 = 4,8^2 + 3,6^2 = 36$
 $BD = \sqrt{36} = 6$
 $\tan(\angle D_2) = \frac{BC}{BD}$ geeft $\frac{\tan(22^\circ)}{1} \mid \frac{BC}{6}$
 $BC = 6 \tan(22^\circ) \approx 2,4$
 In $\triangle BCD$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $CD^2 = BD^2 + BC^2$
 $CD^2 = 6^2 + 2,42...^2 = 41,87...$
 $CD = \sqrt{41,87...} \approx 6,5$

- 16 a** $\tan(\angle C) = \frac{AB}{AC}$ geeft $\frac{\tan(52^\circ)}{1} \mid \frac{7}{AC}$
 $AC = \frac{7}{\tan(52^\circ)} = 5,468...$
 $CD = 5,468... - 4 \approx 1,47$
b $\tan(\angle B_1) = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{7}$ geeft $\angle B_1 = 29,74...^\circ$
 $\angle B_2 = 180^\circ - 90^\circ - 52^\circ - 29,74...^\circ \approx 8,3^\circ$ (hoekensom driehoek)

17 a $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB}$ geeft $\frac{\tan(41^\circ)}{1} \mid \frac{BC}{10}$

$BC = 10 \tan(41^\circ) = 8,69...$

Dus de hoogte van de boom is $1,65 + 8,69... \approx 10,3$ meter.

b $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{8,69...}{45}$ geeft $\angle A \approx 10,9^\circ$

18 $\tan(\angle H_1) = \frac{BV}{BH}$ geeft $\frac{\tan(12^\circ)}{1} \mid \frac{5,8}{BH}$

$BH = \frac{5,8}{\tan(12^\circ)} = 27,28...$

$\tan(\angle H_2) = \frac{BT}{BH}$ geeft $\frac{\tan(40^\circ)}{1} \mid \frac{BT}{27,28...}$

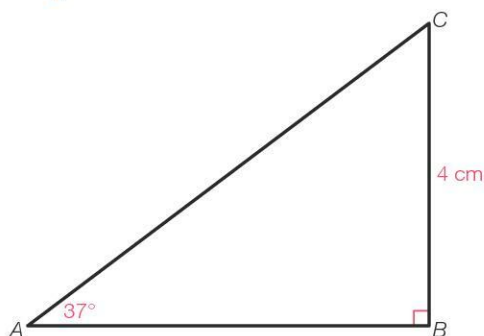
$BT = 27,28... \cdot \tan(40^\circ) = 22,89...$

De hoogte van de boom is $5,8 + 22,89... \approx 28,7$ meter.

7.2 De sinus

Bladzijde 57

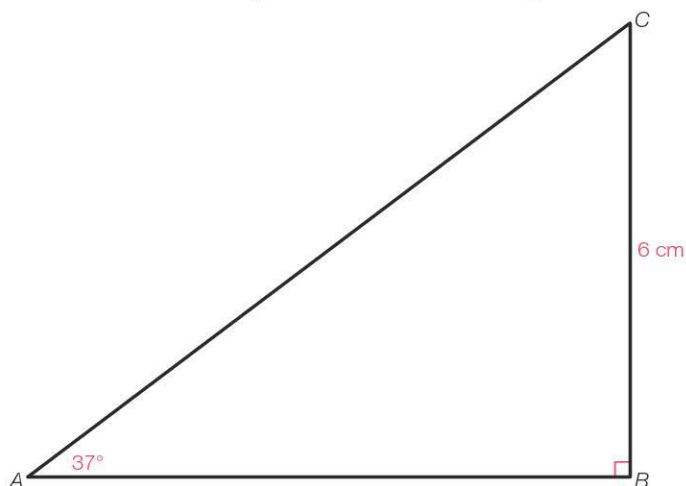
19 a



b Meten geeft $AC \approx 6,6$ cm.

$$\frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{BC}{AC} \approx \frac{4}{6,6} \approx 0,6$$

c



Meten geeft $AC \approx 10,0$ cm.

$$\frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{BC}{AC} \approx \frac{6}{10,0} = 0,6$$

Blijft $\angle A$ gelijk, dan blijft de verhouding

$$\frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}}$$
 ook gelijk.

Bladzijde 58

20 $\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC} = \frac{7,5}{9,6}$ geeft $\angle A \approx 51,4^\circ$

$\sin(\angle E) = \frac{DF}{EF} = \frac{9,7}{10,9}$ geeft $\angle E \approx 62,9^\circ$

$\sin(\angle L) = \frac{KM}{KL} = \frac{9,1}{10,3}$ geeft $\angle L \approx 62,1^\circ$

21 $\sin(\angle B) = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{46}$ geeft $\angle B \approx 19,0^\circ$

$\angle C = 180^\circ - 90^\circ - 19,03...^\circ \approx 71,0^\circ$ (hoekensom driehoek)

$\sin(\angle F) = \frac{DE}{EF} = \frac{26}{45}$ geeft $\angle F \approx 35,3^\circ$

$\angle E = 180^\circ - 90^\circ - 35,29...^\circ \approx 54,7^\circ$ (hoekensom driehoek)

22 $\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5}$ geeft $\angle A \approx 23,6^\circ$

23 $\sin(\text{hellingshoek}) = \frac{\text{verticaal}}{\text{lengte helling}} = \frac{350}{2200}$ geeft hellingshoek $\approx 9,2^\circ$

Bladzijde 59

24 $\sin(\angle C) = \frac{AB}{BC}$ geeft $\frac{\sin(61^\circ)}{1} \mid \frac{AB}{15}$

$AB = 15 \sin(61^\circ) \approx 13,1$

$\sin(\angle F) = \frac{DE}{DF}$ geeft $\frac{\sin(51^\circ)}{1} \mid \frac{9,7}{DF}$

$DF = \frac{9,7}{\sin(51^\circ)} \approx 12,5$

$\sin(\angle L) = \frac{KM}{LM}$ geeft $\frac{\sin(55^\circ)}{1} \mid \frac{12,3}{LM}$

$LM = \frac{12,3}{\sin(55^\circ)} \approx 15,0$

25 $\sin(\angle M) = \frac{KL}{KM}$ geeft $\frac{\sin(36^\circ)}{1} \mid \frac{15}{KM}$, dus $KM = \frac{15}{\sin(36^\circ)} \approx 25,5$.

$\tan(\angle M) = \frac{KL}{LM}$ geeft $\frac{\tan(36^\circ)}{1} \mid \frac{15}{LM}$, dus $LM = \frac{15}{\tan(36^\circ)} \approx 20,6$.

$\sin(\angle P) = \frac{QR}{PQ}$ geeft $\frac{\sin(63^\circ)}{1} \mid \frac{QR}{30}$, dus $QR = 30 \sin(63^\circ) \approx 26,7$.

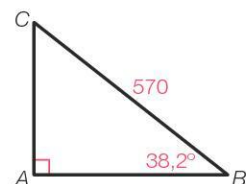
$\tan(\angle P) = \frac{QR}{PR}$ geeft $\frac{\tan(63^\circ)}{1} \mid \frac{26,73...}{PR}$, dus $PR = \frac{26,73...}{\tan(63^\circ)} \approx 13,6$.

26 Zie de schets hiernaast.

$\sin(\angle B) = \frac{AC}{BC}$ geeft $\frac{\sin(38,2^\circ)}{1} \mid \frac{AC}{570}$

$AC = 570 \sin(38,2^\circ) \approx 352$ meter

Dus de verticale verplaatsing is ongeveer 352 meter.

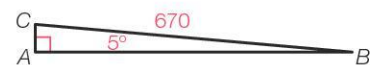


27 Zie de schets hiernaast.

$\sin(\angle B) = \frac{AC}{BC}$ geeft $\frac{\sin(5^\circ)}{1} \mid \frac{AC}{670}$

$AC = 670 \sin(5^\circ) \approx 58$ meter

Dus het hoogteverschil is ongeveer 58 meter.



$$28 \quad \sin(\angle A) = \frac{BT}{AT} \text{ geeft } \frac{\sin(37^\circ)}{1} \mid \frac{52,5}{AT}$$

$$AT = \frac{52,5}{\sin(37^\circ)} = 87,23...$$

Dus het karretje is $\frac{87,23...}{2,5} \approx 34,9$ seconden onderweg.

7.3 Goniometrische verhoudingen

Bladzijde 60

$$29 \quad \text{a} \quad \tan(\angle A) = \frac{3}{4} \text{ geeft } \angle A = 36,86...^\circ$$

$$\text{b} \quad \cos(36,86...^\circ) = 0,8$$

Je hebt de verhouding $\frac{AB}{AC}$ gekregen, want $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} = 0,8$.

Bladzijde 61

$$30 \quad \cos(\angle A) = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{4,1} \text{ geeft } \angle A \approx 60,8^\circ$$

$$\sin(\angle F) = \frac{DE}{EF} = \frac{3,7}{4,7} \text{ geeft } \angle F \approx 51,9^\circ$$

$$31 \quad \text{a} \quad \cos(\angle A) = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{c} \quad \sin(\angle C) = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{b} \quad \tan(\angle A) = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{d} \quad \cos(\angle C) = \frac{BC}{AC}$$

$$32 \quad \text{a} \quad \sin(\angle C) = \frac{AD}{AC}$$

$$\text{c} \quad \tan(\angle A_1) = \frac{BD}{AD}$$

$$\text{e} \quad \cos(\angle C) = \frac{CD}{AC}$$

$$\text{b} \quad \cos(\angle B) = \frac{BD}{AB}$$

$$\text{d} \quad \sin(\angle A_2) = \frac{CD}{AC}$$

$$\text{f} \quad \tan(\angle B) = \frac{AD}{BD}$$

Bladzijde 62

$$33 \quad \text{a} \quad \tan(\angle A) = \frac{CD}{AD}$$

$$\text{c} \quad \cos(\angle C_1) = \frac{CD}{AC}$$

$$\text{b} \quad \sin(\angle B) = \frac{CD}{BC}$$

$$\text{d} \quad \sin(\angle C_2) = \frac{BD}{BC}$$

$$34 \quad \text{a} \quad \sin(\angle A) = 0,32 \text{ geeft } \angle A \approx 18,7^\circ$$

$$\text{b} \quad \cos(\angle A) = 0,98 \text{ geeft } \angle A \approx 11,5^\circ$$

$$35 \quad \text{a} \quad BC \text{ is de aanliggende rechthoekszijde van } \angle B.$$

AB is de schuine zijde van $\triangle ABC$.

$$\text{b} \quad \text{Je gebruikt } \cos(\angle B).$$

$$\text{c} \quad \cos(\angle B) = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{9} \text{ geeft } \angle B \approx 38,9^\circ$$

$$36 \quad \text{a} \quad \cos(\angle A) = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{7} \text{ geeft } \angle A \approx 55,2^\circ$$

$$\text{b} \quad \sin(\angle E) = \frac{DF}{DE} = \frac{5}{12,5} \text{ geeft } \angle E \approx 23,6^\circ$$

$$\text{c} \quad \tan(\angle M) = \frac{KL}{KM} = \frac{3}{6} \text{ geeft } \angle M \approx 26,6^\circ$$

37 a $\tan(\angle D) = \frac{FG}{DG} = \frac{5}{2}$ geeft $\angle D \approx 68,2^\circ$
 $\sin(\angle E) = \frac{FG}{EF} = \frac{5}{9}$ geeft $\angle E \approx 33,7^\circ$
b $\tan(\angle L_1) = \frac{KM}{KL} = \frac{6}{3}$ geeft $\angle L_1 = 63,43\dots^\circ$
 $\cos(\angle L_2) = \frac{KL}{LN} = \frac{3}{4}$ geeft $\angle L_2 = 41,40\dots^\circ$
 $\angle L_{12} = 63,43\dots^\circ + 41,40\dots^\circ \approx 104,8^\circ$

38 a Je gebruikt $\sin(\angle B)$ om AC te berekenen.
b $\sin(\angle B) = \frac{AC}{BC}$ geeft $\frac{\sin(29^\circ)}{1} \mid \frac{AC}{7}$
 $AC = 7 \sin(29^\circ) \approx 3,39$

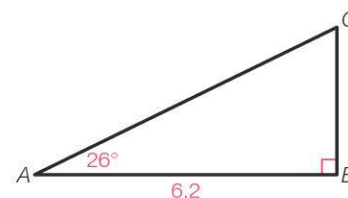
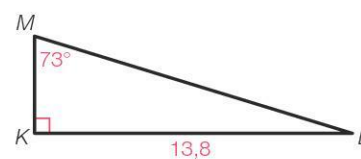
Bladzijde 63

39 a $\sin(\angle D) = \frac{EF}{DE}$ geeft $\frac{\sin(56^\circ)}{1} \mid \frac{EF}{4,2}$
 $EF = 4,2 \sin(56^\circ) \approx 3,48$
b • met de stelling van Pythagoras
 $\angle F = 90^\circ$, dus $DF^2 + EF^2 = DE^2$
 $DF^2 + 3,481\dots^2 = 4,2^2$
 $DF^2 = 4,2^2 - 3,481\dots^2 = 5,515\dots$
 $DF = \sqrt{5,515\dots} \approx 2,35$
 • met $\cos(\angle D)$
 $\cos(\angle D) = \frac{DF}{DE}$ geeft $\frac{\cos(56^\circ)}{1} \mid \frac{DF}{4,2}$
 $DF = 4,2 \cos(56^\circ) \approx 2,35$
c Met $\cos(\angle D)$, want dat geeft minder rekenwerk.

40 a $\sin(\angle B) = \frac{AC}{BC}$ geeft $\frac{\sin(26^\circ)}{1} \mid \frac{5}{BC}$
 $BC = \frac{5}{\sin(26^\circ)} \approx 11,41$
b $\cos(\angle M) = \frac{LM}{KM}$ geeft $\frac{\cos(56^\circ)}{1} \mid \frac{LM}{13}$
 $LM = 13 \cos(56^\circ) \approx 7,27$
c $\tan(\angle P) = \frac{QR}{PR}$ geeft $\frac{\tan(35^\circ)}{1} \mid \frac{QR}{8}$
 $QR = 8 \tan(35^\circ) \approx 5,60$

Bladzijde 64

41 a Zie de schets hiernaast.
 $\cos(\angle A) = \frac{AB}{AC}$ geeft $\frac{\cos(26^\circ)}{1} \mid \frac{6,2}{AC}$
 $AC = \frac{6,2}{\cos(26^\circ)} \approx 6,90$
b Zie de schets hiernaast.
 $\tan(\angle M) = \frac{KL}{KM}$ geeft $\frac{\tan(73^\circ)}{1} \mid \frac{13,8}{KM}$
 $KM = \frac{13,8}{\tan(73^\circ)} \approx 4,22$



42 $\cos(\angle P_1) = \frac{PS}{PR}$ geeft $\frac{\cos(52^\circ)}{1} \mid \frac{31}{PR}$

$$PR = \frac{31}{\cos(52^\circ)} = 50,35\dots$$

$$\sin(\angle P_2) = \frac{QR}{PR} = \frac{23}{50,35\dots} \text{ geeft } \angle P_2 \approx 27,2^\circ$$

43 $\tan(\angle B_2) = \frac{CD}{BC}$ geeft $\frac{\tan(42^\circ)}{1} \mid \frac{5}{BC}$, dus $BC = \frac{5}{\tan(42^\circ)} = 5,55\dots$

$$AC = 8 + 5,55\dots = 13,55\dots$$

$$\tan(\angle A) = \frac{CD}{AC} = \frac{5}{13,55\dots} \text{ geeft } \angle A \approx 20,3^\circ$$

44 $\angle C = 180^\circ - 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$ (hoekensom driehoek)

$$\text{In } \triangle ACD \text{ is } \sin(\angle C) = \frac{AD}{AC} \text{ en dit geeft } \frac{\sin(62^\circ)}{1} \mid \frac{AD}{5}.$$

$$\text{Dus } AD = 5 \sin(62^\circ) \approx 4,4.$$

$$\text{In } \triangle ACD \text{ is } \cos(\angle C) = \frac{CD}{AC} \text{ en dit geeft } \frac{\cos(62^\circ)}{1} \mid \frac{CD}{5}.$$

$$\text{Dus } CD = 5 \cos(62^\circ) \approx 2,3.$$

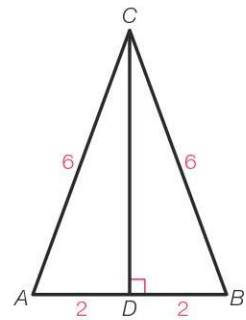
Bladzijde 65

45 Zie de schets hiernaast.

$$\cos(\angle A) = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{6} \text{ geeft } \angle A \approx 70,5^\circ$$

$$\angle B = \angle A = 70,52\dots^\circ \text{ (basishoeken)}$$

$$\angle C = 180^\circ - 2 \cdot 70,52\dots^\circ \approx 38,9^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}$$

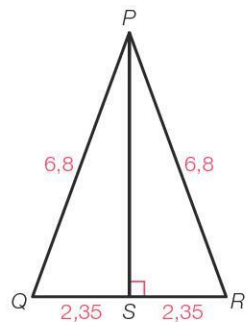


46 Zie de schets hiernaast.

$$\cos(\angle Q) = \frac{QS}{PQ} = \frac{2,35}{6,8} \text{ geeft } \angle Q \approx 69,8^\circ$$

$$\angle R = \angle Q \approx 69,8^\circ \text{ (basishoeken)}$$

$$\angle P = 180^\circ - 2 \cdot 69,78\dots^\circ \approx 40,4^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}$$

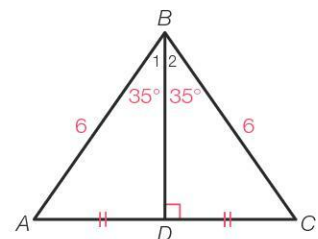


47 Zie de schets hiernaast.

$$\sin(\angle B_1) = \frac{AD}{AB} \text{ geeft } \frac{\sin(35^\circ)}{1} \mid \frac{AD}{6}$$

$$AD = 6 \sin(35^\circ) = 3,441\dots$$

$$\text{Dus } AC = 2 \cdot 3,441\dots \approx 6,88.$$

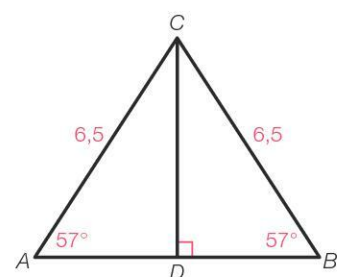


48 Zie de schets hiernaast.

$$\sin(A) = \frac{CD}{AC} \text{ geeft } \frac{\sin(57^\circ)}{1} \mid \frac{CD}{6,5}$$

$$CD = 6,5 \sin(57^\circ) = 5,45\dots$$

De nok van het huis zit $2,8 + 5,45\dots \approx 8,3$ meter boven de grond.



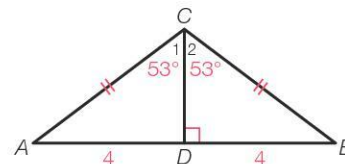
- 49 Zie de schets hiernaast.

$$\sin(\angle C_1) = \frac{AD}{AC} \text{ geeft } \frac{\sin(53^\circ)}{1} \mid \frac{4}{AC}$$

$$AC = \frac{4}{\sin(53^\circ)} = 5,00...$$

$$\text{oppervlakte dak} = 2 \cdot 12 \cdot 5,00... = 120,20... \text{ m}^2$$

Het aanbrengen van de dakpannen kost $120,20... \cdot 115 \approx 13\,823,58$ euro.



7.4 Berekeningen met goniometrie

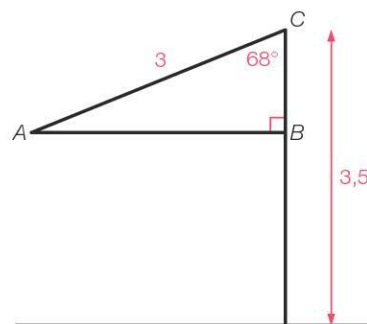
Bladzijde 66

50 a $\cos(\angle C) = \frac{BC}{AC}$ geeft $\frac{\cos(68^\circ)}{1} \mid \frac{BC}{3}$

$$BC = 3 \cos(68^\circ) \approx 1,1$$

- b Zie de schets hiernaast.

In vraag a is berekend dat $BC \approx 1,1$, dus bij een wijkhoek van 68° zit Matthijs ongeveer $3,5 - 1,1 = 2,4$ meter boven de grond.



Bladzijde 67

- 51 In de schets hiernaast is $BC = 1284 - 734 = 550$ meter. Het hellingspercentage is 15%, dus $\tan(\angle A) = 0,15$ en dit geeft $\angle A = 8,53...^\circ$.

$$\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC} \text{ geeft } \frac{\sin(8,53...^\circ)}{1} \mid \frac{550}{AC}$$

$$AC = \frac{550}{\sin(8,53...^\circ)} \approx 3708$$

Dus de lengte van de weg tussen de twee hoogteborden is ongeveer 3708 meter.



- 52 a Zie de schets hiernaast.

$$\sin(\angle A) = \frac{BJ}{AJ} \text{ geeft } \frac{\sin(38^\circ)}{1} \mid \frac{BJ}{45}$$

$$BJ = 45 \sin(38^\circ) = 27,70...$$

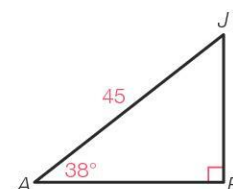
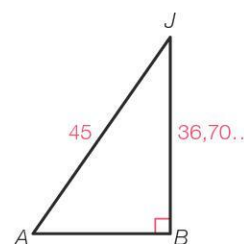
Dus Jacco hangt $1,2 + 27,70... \approx 28,9$ meter boven het water.

- b Zie de figuur hiernaast.

In de nieuwe situatie is $BJ = 27,70... + 9 = 36,70...$

$$\sin(\angle A) = \frac{BJ}{AJ} = \frac{36,70...}{45} \text{ geeft } \angle A \approx 54,7^\circ$$

Dus de hellingshoek is ongeveer $54,7^\circ$.



Bladzijde 68

- 53 a Zie de schets hiernaast.

$$\cos(\angle C) = \frac{BC}{AC} \text{ geeft } \frac{\cos(50^\circ)}{1} \mid \frac{BC}{2,45}$$

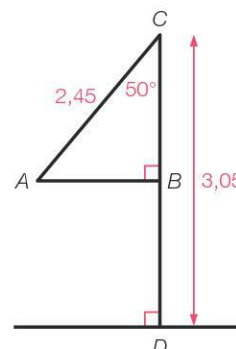
$$BC = 2,45 \cos(50^\circ) = 1,57...$$

De schommel is $3,05 - 1,57... \approx 1,48$ meter hoog.

- b In de nieuwe situatie is $BC = 3,05 - 2,05 = 1$.

$$\cos(\angle C) = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2,45} \text{ geeft } \angle C \approx 65,9^\circ$$

Dus de wijkhoek bij de maximale hoogte is ongeveer $65,9^\circ$.

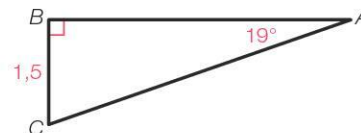


- 54 Zie de schets hiernaast.

$$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} \text{ geeft } \frac{\tan(19^\circ)}{1} \mid \frac{1,5}{AB}$$

$$AB = \frac{1,5}{\tan(19^\circ)} = 4,356...$$

$$d = 4,356... - 1,6 \approx 2,76 \text{ meter.}$$



- 55 Zie de schets hiernaast.

$$DT = 1248 - 328 = 920$$

hellingspercentage $AT = 58\%$, dus hellingsgetal $AT = 0,58$.

$$\tan(\angle A) = \text{hellingsgetal } AT = 0,58 \text{ geeft } \angle A = 30,11...^\circ$$

$$\sin(\angle A) = \frac{DT}{AT} \text{ geeft } \frac{\sin(30,11...^\circ)}{1} \mid \frac{920}{AT}$$

$$AT = \frac{920}{\sin(30,11...^\circ)} = 1833,6...$$

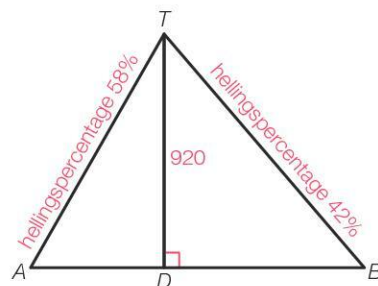
hellingspercentage $BT = 42\%$, dus hellingsgetal $BT = 0,42$.

$$\tan(\angle B) = \text{hellingsgetal } BT = 0,42 \text{ geeft } \angle B = 22,78...^\circ$$

$$\sin(\angle B) = \frac{DT}{BT} \text{ geeft } \frac{\sin(22,78...^\circ)}{1} \mid \frac{920}{BT}$$

$$BT = \frac{920}{\sin(22,78...^\circ)} = 2375,8...$$

Dus kabelbaan BT is $2375,8... - 1833,6... \approx 542$ meter langer dan kabelbaan AT .



- 56 Zie de figuur hiernaast.

$$BC = 28,5 + 1,8 = 30,3$$

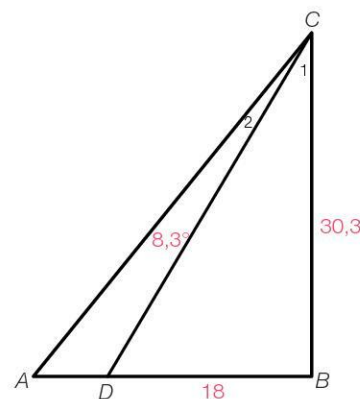
$$\tan(\angle C_1) = \frac{BD}{BC} = \frac{18}{30,3} \text{ geeft } \angle C_1 = 30,7...^\circ$$

$$\angle C_{12} = 30,7...^\circ + 8,3^\circ = 39,0...^\circ$$

$$\tan(\angle C_{12}) = \frac{AB}{BC} \text{ geeft } \frac{\tan(39,0...^\circ)}{1} \mid \frac{AB}{30,3}$$

$$AB = 30,3 \tan(39,0...^\circ) = 24,54...$$

De breedte van de rivier is $24,54... - 18 \approx 6,5$ meter.



Bladzijde 69

- 57 Marc legt in vijf minuten $\frac{5}{60} \cdot 48 = 4$ km = 4000 meter af.

Zie de schets hiernaast.

hellingspercentage = 14%, dus hellingsgetal = 0,14.

$$\tan(\angle B) = \text{hellingsgetal} = 0,14 \text{ geeft } \angle B = 7,96...^\circ$$

$$\sin(\angle B) = \frac{AC}{BC} \text{ geeft } \frac{\sin(7,96...^\circ)}{1} \mid \frac{AC}{4000}$$

$$AC = 4000 \sin(7,96...^\circ) = 554,5...$$

Dus vijf minuten later is hij op een hoogte van $1450 - 554,5... \approx 895$ meter.



- 58 a Zie de schets hiernaast.

$$\cos(\angle A) = \frac{AQ}{AP} \text{ geeft } \frac{\cos(9,6^\circ)}{1} \mid \frac{AQ}{180}$$

$$AQ = 180 \cos(9,6^\circ) = 177,47...$$

$$\sin(\angle A) = \frac{PQ}{AP} \text{ geeft } \frac{\sin(9,6^\circ)}{1} \mid \frac{PQ}{180}$$

$$PQ = 180 \sin(9,6^\circ) = 30,01...$$

$$\tan(\angle B) = \frac{PQ}{BQ} \text{ geeft } \frac{\tan(15^\circ)}{1} \mid \frac{30,01...}{BQ}$$

$$BQ = \frac{30,01...}{\tan(15^\circ)} = 112,03...$$

Dus $AB = AQ + BQ = 177,47... + 112,03... \approx 290$ cm.



- b** Bij de achterste rij zonnepanelen is geen ruimte voor schaduwval nodig.

Leg je de zonnepanelen over 6 meter achter elkaar:

dan passen er, afgezien van de laatste rij, $\frac{600 - 177}{290} \approx 1,5$ panelen achter elkaar,

en passen er $\frac{1850}{80} \approx 23,1$ panelen naast elkaar, dus in totaal $23 \cdot 2 = 46$ zonnepanelen.

Leg je de zonnepanelen over 18,5 meter achter elkaar:

dan passen er, afgezien van de laatste rij, $\frac{1850 - 177}{290} \approx 5,8$ panelen achter elkaar,

en passen er $\frac{600}{80} = 7,5$ panelen naast elkaar, dus in totaal $6 \cdot 7 = 42$ zonnepanelen.

Dus er kunnen maximaal 46 zonnepanelen geplaatst worden.

59 $\tan(\angle A) = \frac{BF}{AB}$ geeft $\frac{\tan(18^\circ)}{1} \mid \frac{7}{AB}$, dus $AB = \frac{7}{\tan(18^\circ)} = 21,5\dots$

Van EF is hellingspercentage = 4%, dus hellingsgetal = 0,04.

hellingsgetal = $\frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}}$ geeft $\frac{0,04}{1} \mid \frac{1}{BC}$, dus $BC = \frac{1}{0,04} = 25$.

$CD = 55 - 25 - 21,5\dots = 8,4\dots$

$\tan(\angle D) = \frac{CE}{CD} = \frac{8}{8,4\dots}$ geeft $\angle D \approx 43,4^\circ$

7.5 Lijnstukken en hoeken berekenen

Bladzijde 70

60 a $\angle A = 90^\circ$, dus $BC^2 = AC^2 + AB^2$
 $BC^2 = 3^2 + 2^2 = 13$
 $BC = \sqrt{13} \approx 3,61$

b $\cos(\angle L) = \frac{KL}{LM}$ geeft $\frac{\cos(58^\circ)}{1} \mid \frac{2}{LM}$
 $LM = \frac{2}{\cos(58^\circ)} \approx 3,77$

c $\left. \begin{array}{l} \angle T = \angle P (= 90^\circ) \\ \angle R \text{ (in } \triangle RST) = \angle R \text{ (in } \triangle PQR) \end{array} \right\} \triangle RST \sim \triangle RQP$
 $\frac{RS}{RQ} \mid \frac{ST}{QP} \mid \frac{RT}{RP}$ geeft $\frac{3}{RQ} \mid \frac{1\frac{1}{2}}{2} \mid \frac{RT}{RP}$
 $QR = \frac{2 \cdot 3}{1\frac{1}{2}} = 4$

Bladzijde 71

61 a $AB = x + 6$

b $\left. \begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle ADE) = \angle A \text{ (in } \triangle ABC) \\ \angle D_1 = \angle B \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\frac{AD}{AB} \mid \frac{DE}{BC}$ geeft $\frac{x}{x+6} \mid \frac{2}{5}$

$5x = 2(x+6)$

$5x = 2x + 12$

$3x = 12$

$x = 4$, dus $AD = 4$ en $AB = 4 + 6 = 10$.

62 $\left. \begin{array}{l} \angle B \text{ (in } \triangle ABC) = \angle B \text{ (in } \triangle BDE) \\ \angle C = \angle E_2 \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DBE$
 Stel $BD = x$, dan is $AB = x + 2,2$.
 $\frac{AB}{DB} \mid \frac{AC}{DE}$ geeft $\frac{x + 2,2}{x} \mid \frac{5}{4}$
 $5x = 4(x + 2,2)$
 $5x = 4x + 8,8$
 $x = 8,8$, dus $BD = 8,8$.

63 a $\tan(\angle R) = \frac{QS}{QR}$ geeft $\frac{\tan(62^\circ)}{1} \mid \frac{3,8}{QR}$
 $QR = \frac{3,8}{\tan(62^\circ)} \approx 2,0$
 $\sin(\angle R) = \frac{QS}{RS}$ geeft $\frac{\sin(62^\circ)}{1} \mid \frac{3,8}{RS}$
 $RS = \frac{3,8}{\sin(62^\circ)} \approx 4,3$
b In $\triangle PQS$ is $\angle Q = 90^\circ$, dus $PQ^2 + QS^2 = PS^2$
 $PQ^2 + 3,8^2 = 5,7^2$
 $PQ^2 = 5,7^2 - 3,8^2 = 18,05$
 $PQ = \sqrt{18,05} \approx 4,2$

64 a $\left. \begin{array}{l} \angle P = \angle S_2 \text{ (F-hoeken)} \\ \angle R = \angle T_2 \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle PQR \sim \triangle SQT$
 Stel $QS = x$, dan is $PQ = x + 9$.
 $\frac{PQ}{SQ} \mid \frac{PR}{ST}$ geeft $\frac{x + 9}{x} \mid \frac{5}{2}$
 $5x = 2(x + 9)$
 $5x = 2x + 18$
 $3x = 18$
 $x = 6$, dus $QS = 6$.
b In $\triangle PQR$ is $\angle R = 90^\circ$, dus $QR^2 + PR^2 = PQ^2$
 $QR^2 + 5^2 = (9 + 6)^2$
 $QR^2 = 15^2 - 5^2 = 200$
 $QR = \sqrt{200} = 14,14...$
 In $\triangle QTS$ is $\angle T_2 = \angle R = 90^\circ$, dus $QT^2 + ST^2 = QS^2$
 $QT^2 + 2^2 = 6^2$
 $QT^2 = 6^2 - 2^2 = 32$
 $QT = \sqrt{32} = 5,65...$
 $RT = 14,14... - 5,65... \approx 8,5$
c $\sin(\angle Q) = \frac{ST}{QS} = \frac{2}{6}$ geeft $\angle Q \approx 19,5^\circ$

Bladzijde 72

65 a $\left. \begin{array}{l} \angle C = \angle B (= 90^\circ) \\ \angle Q_3 = \angle S \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle CPQ \sim \triangle BPS$
 $\frac{CP}{BP} \mid \frac{CQ}{BS}$ geeft $\frac{4}{9} \mid \frac{CQ}{8}$
 $CQ = \frac{4 \cdot 8}{9} \approx 3,6$
b $\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle B (= 90^\circ) \\ \angle R_1 = \angle P \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ARS \sim \triangle BPS$
 $\frac{AR}{BP} \mid \frac{AS}{BS}$ geeft $\frac{AR}{9} \mid \frac{2}{8}$
 $AR = \frac{2 \cdot 9}{8} = 2,25$
 $DR = AD - AR = 5 - 2,25 = 2,75$

- c In $\triangle BSP$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $PS^2 = BS^2 + BP^2$
 $PS^2 = 8^2 + 9^2 = 145$
 $PS = \sqrt{145} \approx 12,0$
- d $\tan(\angle S) = \frac{BP}{BS} = \frac{9}{8}$ geeft $\angle S \approx 48,4^\circ$

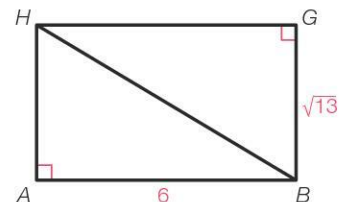
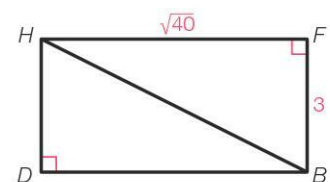
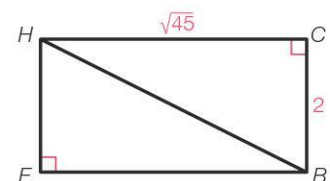
66 a $\left. \begin{array}{l} \angle S = \angle P (= 90^\circ) \\ \angle V_1 = \angle T \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle WSV \sim \triangle WPT$
 Stel $WS = x$. Dan is $WP = x + 3$.
 $\frac{WS}{WP} = \frac{SV}{PT}$ geeft $\frac{x}{x+3} = \frac{1,5}{6}$
 $6x = 1,5(x+3)$
 $6x = 1,5x + 4,5$
 $4,5x = 4,5$
 $x = 1$, dus $WS = 1$.

- b $\tan(\angle V_1) = \frac{SW}{SV} = \frac{1}{1,5}$ geeft $\angle V_1 = 33,69...^\circ$
 $\angle V_3 = \angle V_1 = 33,69...^\circ$ (overstaande hoeken)
 $RV = RS - SV = 4 - 1,5 = 2,5$
 $\cos(\angle V_3) = \frac{RV}{UV}$ geeft $\frac{\cos(33,69...^\circ)}{1} = \frac{2,5}{UV}$
 $UV = \frac{2,5}{\cos(33,69...^\circ)} \approx 3,0$
- c $\angle V_2 = 180^\circ - 33,69...^\circ \approx 146,3^\circ$ (gestrekte hoek)

- 67 a $\angle DAS, \angle SAD, \angle CAD$ of $\angle DAC$
 b $\angle ABS, \angle SBA, \angle DBA$ of $\angle ABD$
 c $\angle CBS, \angle SBC, \angle DBC$ of $\angle CBD$
 d $\angle BSC$ of $\angle CSB$
 e $\angle DCS, \angle SCD, \angle DCA$ of $\angle ACD$
 f $\angle ADS, \angle SDA, \angle ADB$ of $\angle BDA$

Bladzijde 73

- 68 a In $\triangle BCG$ is $\angle C = 90^\circ$, dus $BG^2 = BC^2 + CG^2 = 2^2 + 3^2 = 13$
 $BG = \sqrt{13}$
 Zie de schets hiernaast.
 $\tan(\angle BHG) = \frac{BG}{GH} = \frac{\sqrt{13}}{6}$ geeft $\angle BHG \approx 31,0^\circ$
- b In $\triangle EFH$ is $\angle E = 90^\circ$, dus $FH^2 = EF^2 + EH^2 = 6^2 + 2^2 = 40$
 $FH = \sqrt{40}$
 Zie de schets hiernaast.
 $\tan(\angle HBF) = \frac{FH}{BF} = \frac{\sqrt{40}}{3}$ geeft $\angle HBF \approx 64,6^\circ$
- c In $\triangle CDH$ is $\angle D = 90^\circ$, dus $CH^2 = CD^2 + DH^2 = 6^2 + 3^2 = 45$
 $CH = \sqrt{45}$
 Zie de schets hiernaast.
 $\tan(\angle CBH) = \frac{CH}{BC} = \frac{\sqrt{45}}{2}$ geeft $\angle CBH \approx 73,4^\circ$



- 69 a** In $\triangle BCF$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $CF^2 = BC^2 + BF^2 = 6^2 + 5^2 = 61$
 $CF = \sqrt{61}$

Zie de schets hiernaast.

$$\tan(\angle CEF) = \frac{CF}{EF} = \frac{\sqrt{61}}{8} \text{ geeft } \angle CEF \approx 44,3^\circ$$

- b** In $\triangle ABD$ is $\angle A = 90^\circ$, dus $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 8^2 + 6^2 = 100$
 $BD = \sqrt{100} = 10$

Zie de schets hiernaast.

$$\tan(\angle HBD) = \frac{DH}{BD} = \frac{5}{10} \text{ geeft } \angle HBD \approx 26,6^\circ$$

- c** $BG = CF = \sqrt{61}$

Zie de schets hiernaast.

$$\tan(\angle BPG) = \frac{BG}{GP} = \frac{\sqrt{61}}{5} \text{ geeft } \angle BPG \approx 57,4^\circ$$

- d** Zie de schets hiernaast.

$$\tan(\angle DPH) = \frac{DH}{HP} = \frac{5}{3} \text{ geeft } \angle DPH = 59,03\dots^\circ$$

$$\tan(\angle CPG) = \frac{CG}{GP} = \frac{5}{5} = 1 \text{ geeft } \angle CPG = 45^\circ$$

$$\angle DPC = 180^\circ - 59,03\dots^\circ - 45^\circ \approx 76,0^\circ \text{ (gestrekte hoek)}$$

- 70 a** In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 4^2 = 32$
 $AC = \sqrt{32}$

$$AS = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{32}$$

Zie de schets hiernaast.

$$\cos(\angle TAS) = \frac{AS}{AT} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{32}}{5} \text{ geeft } \angle TAS \approx 55,6^\circ$$

- b** $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

In $\triangle BMT$ is $\angle M = 90^\circ$, dus $MT^2 + BM^2 = BT^2$

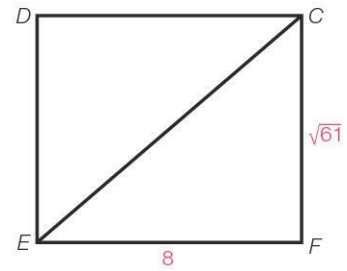
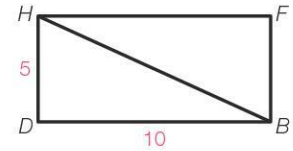
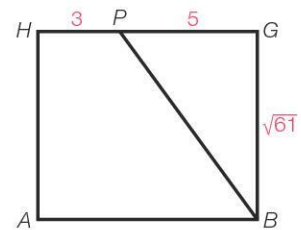
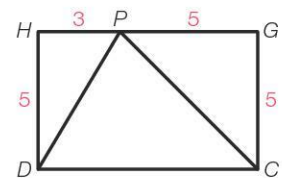
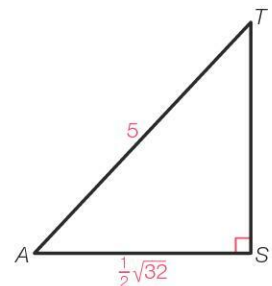
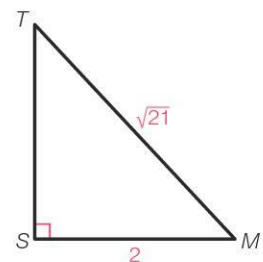
$$MT^2 + 2^2 = 5^2$$

$$MT^2 = 5^2 - 2^2 = 21$$

$$MT = \sqrt{21}$$

Zie de schets hiernaast.

$$\cos(\angle TMS) = \frac{MS}{MT} = \frac{2}{\sqrt{21}} \text{ geeft } \angle TMS \approx 64,1^\circ$$



Gemengde opgaven

Bladzijde 74

1 $\sin(\angle A_1) = \frac{CD}{AC}$ geeft $\frac{\sin(63^\circ)}{1} \mid \frac{12,4}{AC}$

$$AC = \frac{12,4}{\sin(63^\circ)} = 13,91\dots$$

$$\cos(\angle A_2) = \frac{AC}{AB} = \frac{13,91\dots}{15,9} \text{ geeft } \angle A_2 \approx 28,9^\circ$$

2 $\sin(\angle C) = \frac{AD}{AC}$ geeft $\frac{\sin(50^\circ)}{1} \mid \frac{4}{AC}$

$$AC = \frac{4}{\sin(50^\circ)} = 5,22...$$

$$BC = AC = 5,22...$$

$$\angle A_{12} + \angle B = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}$$

$$\angle A_{12} = \angle B = 130^\circ : 2 = 65^\circ \text{ (basishoeken)}$$

$$\sin(\angle B) = \frac{AD}{AB} \text{ geeft } \frac{\sin(65^\circ)}{1} \mid \frac{4}{AB}$$

$$AB = \frac{4}{\sin(65^\circ)} = 4,41...$$

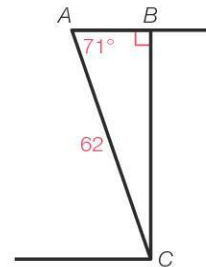
De omtrek van $\triangle ABC$ is $4,41... + 2 \cdot 5,22... \approx 14,9$.

3 Zie de schets hiernaast.

$$\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC} \text{ geeft } \frac{\sin(71^\circ)}{1} \mid \frac{BC}{62}$$

$$BC = 62 \sin(71^\circ) \approx 59$$

Dus de hoogte van het tafeltje is 59 cm.



4 Zie de schets hiernaast.

$$\tan(\angle C) = \frac{AB_1}{AC} \text{ geeft } \frac{\tan(82^\circ)}{1} \mid \frac{AB_1}{60}$$

$$AB_1 = 60 \tan(82^\circ) = 426,9...$$

Zie de schets hiernaast.

$$\tan(\angle C) = \frac{AB_2}{AC} \text{ geeft } \frac{\tan(84^\circ)}{1} \mid \frac{AB_2}{60}$$

$$AB_2 = 60 \tan(84^\circ) = 570,8...$$

De afstand is $570,8... - 426,9... \approx 144$ meter.



5 Zie de schets hiernaast.

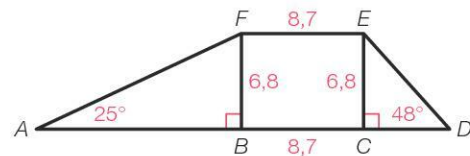
$$\tan(\angle A) = \frac{BF}{AB} \text{ geeft } \frac{\tan(25^\circ)}{1} \mid \frac{6,8}{AB}$$

$$AB = \frac{6,8}{\tan(25^\circ)} \approx 14,58...$$

$$\tan(\angle D) = \frac{CE}{CD} \text{ geeft } \frac{\tan(48^\circ)}{1} \mid \frac{6,8}{CD}$$

$$CD = \frac{6,8}{\tan(48^\circ)} \approx 6,12...$$

De breedte van de onderkant is $14,58... + 8,7 + 6,12... \approx 29,4$ meter.



Bladzijde 75

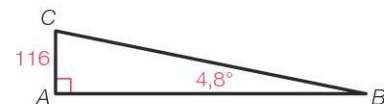
6 Zie de schets hiernaast.

$$AC = 940 - 824 = 116$$

$$\sin(\angle B) = \frac{AC}{BC} \text{ geeft } \frac{\sin(4,8^\circ)}{1} \mid \frac{116}{BC}$$

$$BC = \frac{116}{\sin(4,8^\circ)} \approx 1386$$

Dus de lengte van de baan is ongeveer 1386 meter.

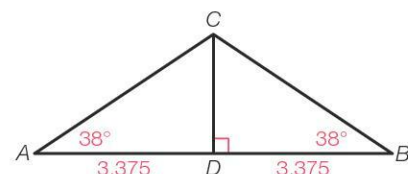


7 Zie de schets hiernaast.

$$\cos(\angle A) = \frac{AD}{AC} \text{ geeft } \frac{\cos(38^\circ)}{1} \mid \frac{3,375}{AC}$$

$$AC = \frac{3,375}{\cos(38^\circ)} = 4,28...$$

De totale kosten zijn $4,28... \cdot 12 \cdot 2 \cdot 125 \approx 12\,848,81$ euro.



- 8 a Zie de schets hiernaast.

$$\tan(\angle B_1) = \frac{AD}{AB} = \frac{24,5}{470} \text{ geeft } \angle B_1 = 2,98...^\circ$$

$$\angle D_2 = \angle B_1 = 2,98...^\circ \text{ (Z-hoeken)}$$

$$\angle D_3 = 37,5^\circ - 2,98...^\circ = 34,51...^\circ$$

$$\tan(\angle D_3) = \frac{CE}{CD} \text{ geeft } \frac{\tan(34,51...^\circ)}{1} \left| \frac{CE}{470} \right.$$

$$CE = 470 \tan(34,51...^\circ) = 323,21...$$

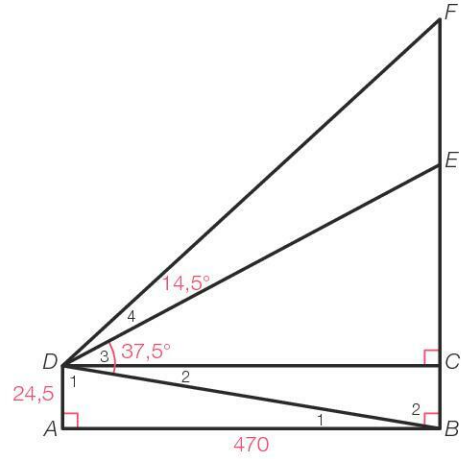
Dus het uitkijkplatform zit op een hoogte van $24,5 + 323,21... \approx 348$ meter.

- b $\angle D_{34} = 34,51...^\circ + 14,5^\circ = 49,01...^\circ$

$$\tan(\angle D_{34}) = \frac{CF}{CD} \text{ geeft } \frac{\tan(49,01...^\circ)}{1} \left| \frac{CF}{470} \right.$$

$$CF = 470 \tan(49,01...^\circ) = 540,97...$$

Dus de hoogte van de CN-tower is $24,5 + 540,97... \approx 566$ meter.



- 9 a $PT = QT = \frac{1}{2} \cdot RS = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$

$$\text{In } \triangle QRT \text{ is } \angle Q = 90^\circ, \text{ dus } RT^2 = QR^2 + QT^2 = 5^2 + 12^2 = 169$$

$$RT = \sqrt{169} = 13$$

- b $\left. \begin{array}{l} \angle Q_1 = \angle S_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle T_2 = \angle R_1 \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle QTV \sim \triangle SRV$

Stel $TV = x$, dan is $RV = 13 - x$.

$$\frac{QT}{SR} \left| \frac{TV}{RV} \right. \text{ geeft } \frac{12}{24} \left| \frac{x}{13-x} \right.$$

$$24x = 12(13 - x)$$

$$24x = 156 - 12x$$

$$36x = 156$$

$$x = \frac{156}{36} \approx 4,3, \text{ dus } TV \approx 4,3.$$

- c $\tan(\angle Q_1) = \frac{PS}{PQ} = \frac{5}{24} \text{ geeft } \angle Q_1 = 11,76...^\circ$

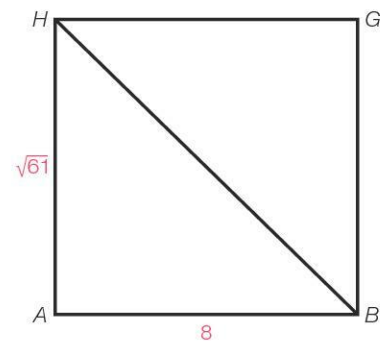
$$\tan(\angle T_2) = \frac{QR}{QT} = \frac{5}{12} \text{ geeft } \angle T_2 = 22,61...^\circ$$

$$\angle V_3 = 180^\circ - 11,76...^\circ - 22,61...^\circ \approx 145,6^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}$$

- 10 a In $\triangle ADH$ is $\angle D = 90^\circ$, dus $AH^2 = AD^2 + DH^2 = 5^2 + 6^2 = 61$
- $$AH = \sqrt{61}$$

Zie de schets hiernaast.

$$\tan(\angle AHB) = \frac{AB}{AH} = \frac{8}{\sqrt{61}} \text{ geeft } \angle AHB \approx 45,7^\circ$$



- b In $\triangle ABE$ is $\angle A = 90^\circ$, dus $BE^2 = AB^2 + AE^2 = 8^2 + 6^2 = 100$
- $$BE = \sqrt{100} = 10$$

Zie de schets hiernaast.

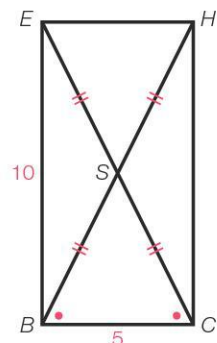
CE en BH zijn even lang en delen elkaar middendoor.

$\triangle BCS$ is dus gelijkbenig met $BS = CS$.

$$\tan(\angle BCE) = \frac{BE}{BC} = \frac{10}{5} \text{ geeft } \angle BCE = 63,43...^\circ$$

$$\angle CBS = \angle BCE = 63,43...^\circ \text{ (basishoeken)}$$

$$\angle BSC = 180^\circ - 2 \cdot 63,43...^\circ \approx 53,1^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}$$



Diagnostische toets

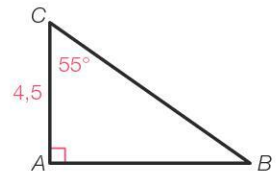
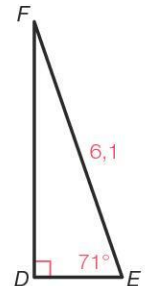
Bladzijde 78

1 a $\tan(\angle A_1) = \frac{CD}{AC} = \frac{24}{31}$ geeft $\angle A_1 \approx 37,7^\circ$
 b $\tan(\angle A_{12}) = \frac{BC}{AC}$ geeft $\frac{\tan(37,7...^\circ + 27^\circ)}{1} \mid \frac{BC}{31}$
 $BC = 31 \tan(64,7...^\circ) = 65,71...$
 $BD = BC - CD = 65,71... - 24 \approx 41,7$

2 a $\sin(\angle C) = \frac{AB}{AC}$ geeft $\frac{\sin(37^\circ)}{1} \mid \frac{AB}{15}$
 $AB = 15 \sin(37^\circ) \approx 9,0$
 b $\sin(\angle E) = \frac{DF}{DE} = \frac{24}{27}$ geeft $\angle E \approx 62,7^\circ$

3 a Zie de schets hiernaast.
 $\tan(\angle C) = \frac{AB}{AC}$ geeft $\frac{\tan(55^\circ)}{1} \mid \frac{AB}{4,5}$
 $AB = 4,5 \tan(55^\circ) \approx 6,43$

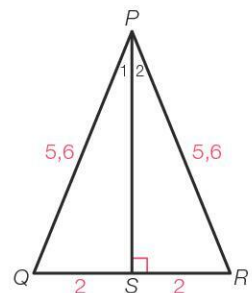
b Zie de schets hiernaast.
 $\cos(\angle E) = \frac{DE}{EF}$ geeft $\frac{\cos(71^\circ)}{1} \mid \frac{DE}{6,1}$
 $DE = 6,1 \cos(71^\circ) \approx 1,99$



4 $\sin(\angle S_1) = \frac{PQ}{QS} = \frac{41}{46}$ geeft $\angle S_1 = 63,03...^\circ$
 $\tan(\angle S_2) = \frac{QR}{QS} = \frac{28}{46}$ geeft $\angle S_2 = 31,32...^\circ$
 $\angle S_{12} = 63,03...^\circ + 31,32...^\circ \approx 94,4^\circ$

5 $\tan(\angle B_1) = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{12}$ geeft $\angle B_1 = 14,0...^\circ$
 $\angle B_{12} = 14,0...^\circ + 20^\circ = 34,0...^\circ$
 $\cos(\angle B_{12}) = \frac{AB}{BC}$ geeft $\frac{\cos(34,0...^\circ)}{1} \mid \frac{12}{BC}$
 $BC = \frac{12}{\cos(34,0...^\circ)} \approx 14,5$

6 Zie de schets hiernaast.
 $\cos(\angle Q) = \frac{QS}{PQ} = \frac{2}{5,6}$ geeft $\angle Q \approx 69,1^\circ$
 $\angle R = \angle Q \approx 69,1^\circ$ (basishoeken)
 $\angle P = 180^\circ - 2 \cdot 69,07...^\circ \approx 41,8^\circ$ (hoekensom driehoek)

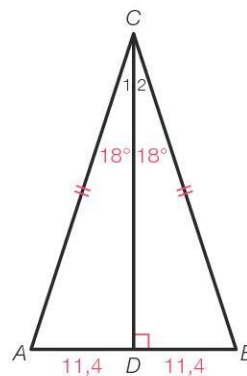


- 7 Zie de schets hiernaast.

$$\tan(\angle C_1) = \frac{AD}{CD} \text{ geeft } \frac{\tan(18^\circ)}{1} \mid \frac{11,4}{CD}$$

$$CD = \frac{11,4}{\tan(18^\circ)} \approx 35,1$$

Dus de hoogte van de kathedraal is ongeveer 35,1 meter.



Bladzijde 79

- 8 Zie de schets hiernaast.

$$\sin(\angle C_1) = \frac{AD}{AC} \text{ geeft } \frac{\sin(51,5^\circ)}{1} \mid \frac{AD}{8}$$

$$AD = 8 \sin(51,5^\circ) = 6,26...$$

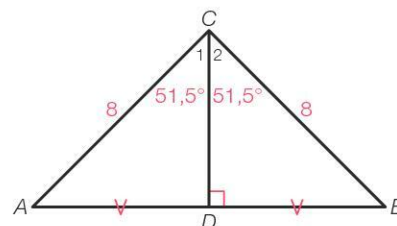
$$AB = 2 \cdot AD = 2 \cdot 6,26... \approx 12,5$$

De breedte van de hal is ongeveer 12,5 meter.

$$\cos(\angle C_1) = \frac{CD}{AC} \text{ geeft } \frac{\cos(51,5^\circ)}{1} \mid \frac{CD}{8}$$

$$CD = 8 \cos(51,5^\circ) = 4,98...$$

De hoogte van de hal is $3 + 4,98... \approx 8,0$ meter.



- 9 a Zie de schets hiernaast.

$$\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC} \text{ geeft } \frac{\sin(33^\circ)}{1} \mid \frac{BC}{5}$$

$$BC = 5 \sin(33^\circ) = 2,72...$$

Het uiteinde van de hoogwerker komt op $2 + 2,72... \approx 4,7$ meter hoogte tegen de gevel.

- b Zie de schets hiernaast.

$$QR = 6,5 - 2 = 4,5 \text{ m}$$

$$\sin(\angle P) = \frac{QR}{PR} = \frac{4,5}{5} \text{ geeft } \angle P \approx 64,2^\circ$$

- c Zie de schets van vraag b.

In $\triangle PQR$ is $\angle Q = 90^\circ$, dus $PQ^2 + QR^2 = PR^2$

$$PQ^2 + 4,5^2 = 5^2$$

$$PQ^2 = 5^2 - 4,5^2 = 4,75$$

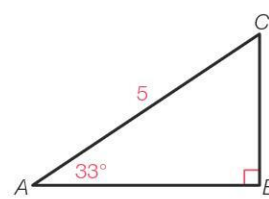
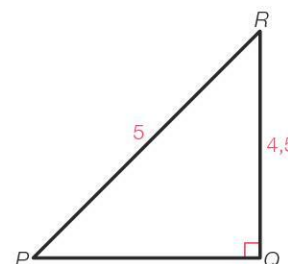
$$PQ = \sqrt{4,75} = 2,17...$$

Zie de schets van vraag a.

$$\cos(\angle A) = \frac{AB}{AC} \text{ geeft } \frac{\cos(33^\circ)}{1} \mid \frac{AB}{5}$$

$$AB = 5 \cos(33^\circ) = 4,19...$$

De wagen wordt hierbij $4,19... - 2,17... \approx 2,0$ meter verreden.



- 10 a In $\triangle ABD$ is $\angle D = 90^\circ$, dus $BD^2 + AD^2 = AB^2$

$$BD^2 + 6^2 = 10^2$$

$$BD^2 = 10^2 - 6^2 = 64$$

$$BD = \sqrt{64} = 8$$

- b $\angle A_2 = \angle C_1$ (Z-hoeken) $\left. \begin{array}{l} \angle B_1 = \angle D_1 \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABS \sim \triangle CDS$

Stel $BS = x$. Dan is $DS = 8 - x$.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BS}{DS} \text{ geeft } \frac{10}{5} = \frac{x}{8-x}$$

$$5x = 10(8-x)$$

$$5x = 80 - 10x$$

$$15x = 80$$

$$x = \frac{80}{15} \approx 5,33, \text{ dus } BS \approx 5,33.$$

- c $DS = BD - BS = 8 - 5,33... = 2,66...$
 $\tan(\angle S_4) = \frac{AD}{DS} = \frac{6}{2,66...}$ geeft $\angle S_4 = 66,03...^\circ$
 $\angle S_3 = 180^\circ - 66,03...^\circ \approx 114,0^\circ$ (gestrekte hoek)

- 11 a In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 3^2 = 34$
 $AC = \sqrt{34}$

Zie de schets hiernaast.

$$\tan(\angle ACE) = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{\sqrt{34}} \text{ geeft } \angle ACE \approx 18,9^\circ$$

- b In $\triangle ADH$ is $\angle D = 90^\circ$, dus $AH^2 = AD^2 + DH^2 = 3^2 + 2^2 = 13$
 $AH = \sqrt{13}$

Zie de schets hiernaast.

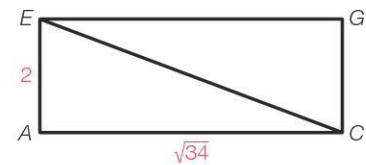
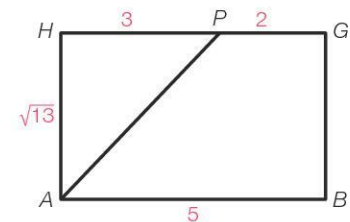
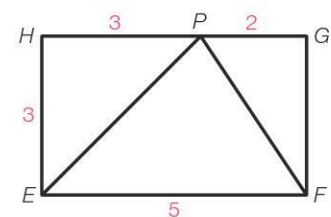
$$\tan(\angle APH) = \frac{AH}{HP} = \frac{\sqrt{13}}{3} \text{ geeft } \angle APH \approx 50,2^\circ$$

- c Zie de schets hiernaast.

$$\tan(\angle EPH) = \frac{EH}{HP} = \frac{3}{3} = 1 \text{ geeft } \angle EPH = 45^\circ$$

$$\tan(\angle FPG) = \frac{FG}{GP} = \frac{3}{2} \text{ geeft } \angle FPG = 56,30...^\circ$$

$$\angle EPF = 180^\circ - 45^\circ - 56,30...^\circ \approx 78,7^\circ \text{ (gestrekte hoek)}$$



Herhaling

Bladzijde 80

- 1 a De overstaande rechthoekszijde van $\angle A$ is BD .
 De aanliggende rechthoekszijde van $\angle A$ is AD .

b $\tan(\angle A) = \frac{BD}{AD} = \frac{8}{14}$ geeft $\angle A \approx 29,7^\circ$

- c De overstaande rechthoekszijde van $\angle C$ is BD .
 De aanliggende rechthoekszijde van $\angle C$ is CD .

d $\tan(\angle C) = \frac{BD}{CD}$ geeft $\frac{\tan(50^\circ)}{1} \mid \frac{8}{CD}$
 $CD = \frac{8}{\tan(50^\circ)} \approx 6,7$

2 a $\tan(\angle B_1) = \frac{AD}{AB}$ geeft $\frac{\tan(14^\circ)}{1} \mid \frac{AD}{57}$
 $AD = 57 \tan(14^\circ) \approx 14,2$

b $AC = AD + CD = 14,21... + 21 \approx 35,2$

c $\tan(\angle C) = \frac{AB}{AC} = \frac{57}{35,21...}$ geeft $\angle C \approx 58,3^\circ$

3 a $\sin(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{13}{23}$ geeft $\angle A \approx 34,4^\circ$

- b De overstaande rechthoekszijde van $\angle F$ is DE .
 De schuine zijde is EF .

$$\sin(\angle F) = \frac{DE}{EF} = \frac{10}{16} \text{ geeft } \angle F \approx 38,7^\circ$$

c $\sin(\angle L) = \frac{KM}{KL} = \frac{12}{33}$ geeft $\angle L \approx 21,3^\circ$

Bladzijde 81

4 $\sin(\angle D) = \frac{EF}{DF}$ geeft $\frac{\sin(50^\circ)}{1} \mid \frac{EF}{16}$
 $EF = 16 \sin(50^\circ) \approx 12,3$
 $\sin(\angle L) = \frac{KM}{LM}$ geeft $\frac{\sin(23^\circ)}{1} \mid \frac{13}{LM}$
 $LM = \frac{13}{\sin(23^\circ)} \approx 33,3$
 $\sin(\angle P) = \frac{QR}{PQ}$ geeft $\frac{\sin(57^\circ)}{1} \mid \frac{QR}{20}$
 $QR = 20 \sin(57^\circ) \approx 16,8$

5 a $\sin(\angle A) = \frac{CD}{AC}$ c $\tan(\angle C_1) = \frac{AD}{CD}$ e $\cos(\angle C_1) = \frac{CD}{AC}$
b $\cos(\angle B) = \frac{BD}{BC}$ d $\sin(\angle C_2) = \frac{BD}{BC}$ f $\tan(\angle B) = \frac{CD}{BD}$

6 a Je weet de overstaande rechthoekszijde van $\angle A$ en de schuine zijde, dus gebruik $\sin(\angle A)$.

b $\sin(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{8,6}{14,5}$ geeft $\angle A \approx 36,4^\circ$

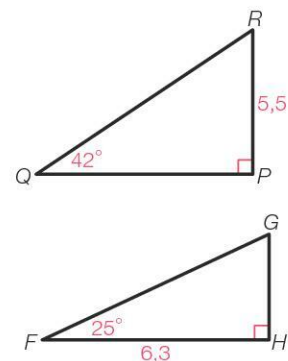
c $\tan(\angle M) = \frac{KL}{LM} = \frac{8}{12}$ geeft $\angle M \approx 33,7^\circ$
 $\cos(\angle P) = \frac{PR}{PQ} = \frac{11,2}{12,5}$ geeft $\angle P \approx 26,4^\circ$

7 a Zie de schets hiernaast.

$\sin(\angle Q) = \frac{PR}{QR}$ geeft $\frac{\sin(42^\circ)}{1} \mid \frac{5,5}{QR}$
 $QR = \frac{5,5}{\sin(42^\circ)} \approx 8,22$

b Zie de schets hiernaast.

$\tan(\angle F) = \frac{GH}{FH}$ geeft $\frac{\tan(25^\circ)}{1} \mid \frac{GH}{6,3}$
 $GH = 6,3 \tan(25^\circ) \approx 2,94$



8 a $\angle E_1$ is een hoek van de rechthoekige driehoek DEF.

$\tan(\angle E_1) = \frac{DF}{EF} = \frac{5}{3,3}$ geeft $\angle E_1 \approx 56,6^\circ$

b $\angle E_2$ is een hoek van de rechthoekige driehoek EFG.

$\cos(\angle E_2) = \frac{EF}{EG} = \frac{3,3}{3,5}$ geeft $\angle E_2 \approx 19,5^\circ$

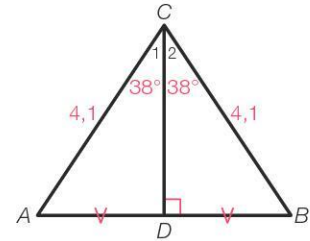
c $\angle E_{12} = 56,57...^\circ + 19,46...^\circ \approx 76,0^\circ$

Bladzijde 82

9 $\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{6}$ geeft $\angle A = 30^\circ$
 $\angle C_2 = 180^\circ - 90^\circ - 16^\circ - 30^\circ = 44^\circ$ (hoekensom driehoek)
 $\tan(\angle C_2) = \frac{BD}{BC}$ geeft $\frac{\tan(44^\circ)}{1} \mid \frac{BD}{3}$
 $BD = 3 \tan(44^\circ) \approx 2,9$

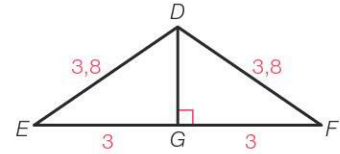
- 10 a Zie de schets hiernaast.

b $\sin(\angle C_1) = \frac{AD}{AC}$ geeft $\frac{\sin(38^\circ)}{1} \mid \frac{AD}{4,1}$
 $AD = 4,1 \sin(38^\circ) = 2,52...$
 $AB = 2 \cdot AD = 2 \cdot 2,52... \approx 5,05$



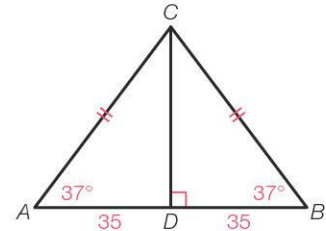
- 11 Zie de schets hiernaast.

$\cos(\angle E) = \frac{EG}{DE} = \frac{3}{3,8}$ geeft $\angle E \approx 37,9^\circ$
 $\angle F = \angle E \approx 37,9^\circ$
 $\angle D = 180^\circ - 2 \cdot 37,86...^\circ \approx 104,3^\circ$ (hoekensom driehoek)



- 12 Zie de schets hiernaast.

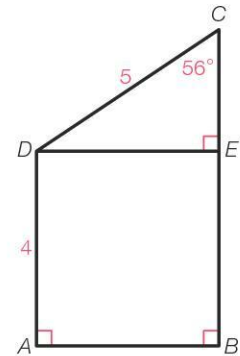
$\tan(\angle A) = \frac{CD}{AD}$ geeft $\frac{\tan(37^\circ)}{1} \mid \frac{CD}{35}$
 $CD = 35 \tan(37^\circ) \approx 26,4$
Dus de hoogte van de voorgevel is ongeveer 26,4 meter.



- 13 a Zie de schets hiernaast.

$\sin(\angle C) = \frac{DE}{CD}$ geeft $\frac{\sin(56^\circ)}{1} \mid \frac{DE}{5}$
 $DE = 5 \sin(56^\circ) \approx 4,1$
 $AB = DE \approx 4,1$

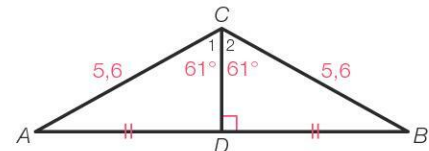
b $\cos(\angle C) = \frac{CE}{CD}$ geeft $\frac{\cos(56^\circ)}{1} \mid \frac{CE}{5}$
 $CE = 5 \cos(56^\circ) = 2,79...$
 $BC = 4 + 2,79... \approx 6,8$



Bladzijde 83

- 14 Zie de schets hiernaast.

$\cos(\angle C_1) = \frac{CD}{AC}$ geeft $\frac{\cos(61^\circ)}{1} \mid \frac{CD}{5,6}$
 $CD = 5,6 \cos(61^\circ) = 2,71...$
Dus de hoogte van de schuur is $2,8 + 2,71... \approx 5,5$ meter.
 $\sin(\angle C_1) = \frac{AD}{AC}$ geeft $\frac{\sin(61^\circ)}{1} \mid \frac{AD}{5,6}$
 $AD = 5,6 \sin(61^\circ) = 4,89...$
Dus de breedte van de schuur is $2 \cdot 4,89... \approx 9,8$ meter.

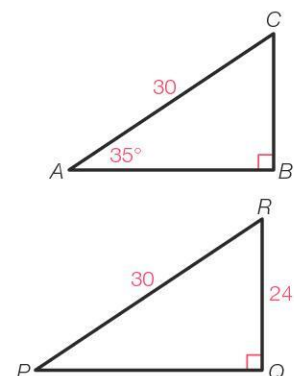


- 15 a Zie de schets hiernaast.

$\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC}$ geeft $\frac{\sin(35^\circ)}{1} \mid \frac{BC}{30}$
 $BC = 30 \sin(35^\circ) \approx 17,2$
De vlieger staat ongeveer 17,2 meter hoog.

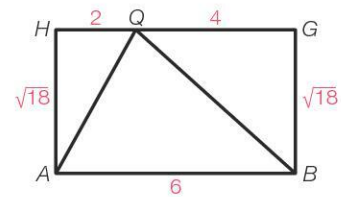
- b Zie de schets hiernaast.

$\sin(\angle P) = \frac{QR}{PR} = \frac{24}{30}$ geeft $\angle P \approx 53,1^\circ$
Het vliegertouw maakt een hoek van ongeveer $53,1^\circ$ met de grond.



- 16 a** In $\triangle ABE$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $AE^2 = AB^2 + BE^2$
 $AE^2 = 15^2 + 8^2 = 289$
 $AE = \sqrt{289} = 17$
- b** $\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle E \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle D = \angle C (=90^\circ) \end{array} \right\} \triangle AFD \sim \triangle EFC$
- c** Uit $\triangle AFD \sim \triangle EFC$ volgt de verhoudingstabel $\frac{AD}{EC} \mid \frac{AF}{EF}$.
- d** Stel $AF = x$. Dan is $EF = 17 - x$.
- e** $\frac{AD}{EC} \mid \frac{AF}{EF}$ geeft $\frac{5}{3} \mid \frac{x}{17-x}$
 $3x = 5(17 - x)$
 $3x = 85 - 5x$
 $8x = 85$
 $x = \frac{85}{8} \approx 10,6$, dus $AF \approx 10,6$.

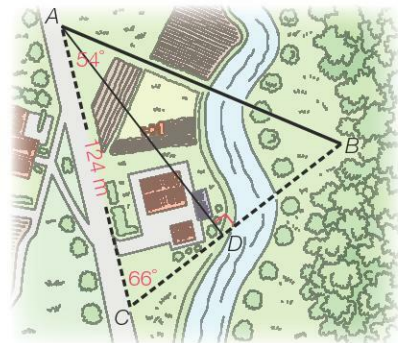
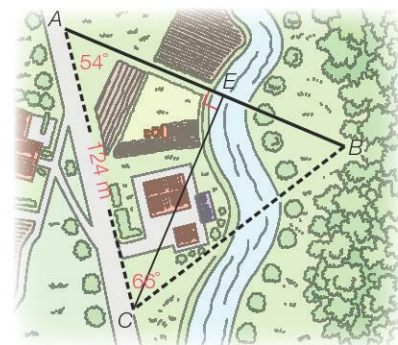
- 17 a** In $\triangle ADH$ is $\angle D = 90^\circ$, dus $AH^2 = AD^2 + DH^2$
 $AH^2 = 3^2 + 3^2 = 18$
 $AH = \sqrt{18}$
- Zie de schets hiernaast.
- b** Je weet de overstaande en de aanliggende rechthoekszijde van $\angle AQH$, dus gebruik $\tan(\angle AQH)$.
 $\tan(\angle AQH) = \frac{AH}{HQ} = \frac{\sqrt{18}}{2}$ geeft $\angle AQH \approx 64,8^\circ$
- c** $\tan(\angle BQG) = \frac{BG}{GQ} = \frac{\sqrt{18}}{4}$ geeft $\angle BQG \approx 46,7^\circ$
- d** $\angle AQB = 180^\circ - 64,76...^\circ - 46,68...^\circ \approx 68,6^\circ$ (hoekensom driehoek)



Onderzoek Driehoeksmeting

Bladzijde 84

- 1 a** Zie de figuur hiernaast.
 $\sin(\angle C) = \frac{AD}{AC}$ geeft $\frac{\sin(66^\circ)}{1} \mid \frac{AD}{124}$
 $AD = 124 \sin(66^\circ)$
 $\angle B = 180^\circ - 54^\circ - 66^\circ = 60^\circ$ (hoekensom driehoek)
 $\sin(\angle B) = \frac{AD}{AB}$ geeft $\frac{\sin(60^\circ)}{1} \mid \frac{AD}{AB}$
 $AD = AB \sin(60^\circ)$
- b** $\left. \begin{array}{l} AD = 124 \sin(66^\circ) \\ AD = AB \sin(60^\circ) \end{array} \right\} \begin{array}{l} AB \sin(60^\circ) = 124 \sin(66^\circ) \\ AB = \frac{124 \sin(66^\circ)}{\sin(60^\circ)} \approx 131 \text{ meter} \end{array}$
- 2** Zie de figuur hiernaast.
 $\sin(\angle A) = \frac{CE}{AC}$ geeft $\frac{\sin(54^\circ)}{1} \mid \frac{CE}{124}$
 $CE = 124 \sin(54^\circ)$
 $\sin(\angle B) = \frac{CE}{BC}$ geeft $\frac{\sin(60^\circ)}{1} \mid \frac{CE}{BC}$
 $\left. \begin{array}{l} CE = BC \sin(60^\circ) \\ CE = 124 \sin(54^\circ) \end{array} \right\} \begin{array}{l} BC \sin(60^\circ) = 124 \sin(54^\circ) \\ BC = \frac{124 \sin(54^\circ)}{\sin(60^\circ)} \approx 116 \text{ meter} \end{array}$



- 3 a AC is de overstaande zijde van $\angle B$, en AB is de overstaande zijde van $\angle C$.

$$\begin{aligned} \text{b} \quad \frac{\sin(\angle A)}{BC} &= \frac{\sin(54^\circ)}{115,83...} = 0,00698... \\ \frac{\sin(\angle B)}{AC} &= \frac{\sin(60^\circ)}{124} = 0,00698... \\ \frac{\sin(\angle C)}{AB} &= \frac{\sin(66^\circ)}{130,80...} = 0,00698... \end{aligned}$$

Je krijgt het vermoeden dat voor elke hoek van een driehoek de verhouding $\frac{\sin(\text{hoek})}{\text{overstaande zijde}}$ steeds gelijk is.

c *

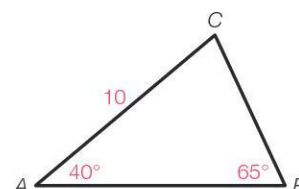
- 4 Zie de figuur hiernaast.

$\angle C = 180^\circ - 40^\circ - 65^\circ = 75^\circ$ (hoekensom driehoek)

$$\frac{\sin(\angle A)}{BC} \mid \frac{\sin(\angle B)}{AC} \mid \frac{\sin(\angle C)}{AB} \text{ geeft } \frac{\sin(40^\circ)}{BC} \mid \frac{\sin(65^\circ)}{10} \mid \frac{\sin(75^\circ)}{AB}$$

$$\frac{\sin(40^\circ)}{BC} \mid \frac{\sin(65^\circ)}{10} \text{ geeft } BC = \frac{10 \sin(40^\circ)}{\sin(65^\circ)} \approx 7,1$$

$$\frac{\sin(65^\circ)}{10} \mid \frac{\sin(75^\circ)}{AB} \text{ geeft } AB = \frac{10 \sin(75^\circ)}{\sin(65^\circ)} \approx 10,7$$



Bladzijde 85

- 5 $\angle C = 180^\circ - 81^\circ - 48^\circ = 51^\circ$ (hoekensom driehoek)

$$\frac{BC}{\sin(48^\circ)} \mid \frac{785}{\sin(51^\circ)} \mid \frac{AC}{\sin(81^\circ)}$$

$$BC = \frac{785 \sin(48^\circ)}{\sin(51^\circ)} = 750,6...$$

$$AC = \frac{785 \sin(81^\circ)}{\sin(51^\circ)} = 997,6...$$

De omtrek van de akker is $785 + 750,6... + 997,6... \approx 2533$ meter.

- 6 $\angle C_2 = 180^\circ - 86,7^\circ - 88,6^\circ = 4,7^\circ$ (hoekensom driehoek)

$$\text{De sinusregel in } \triangle ABC \text{ geeft } \frac{BC}{\sin(86,7^\circ)} \mid \frac{AC}{\sin(88,6^\circ)} \mid \frac{54,4}{\sin(4,7^\circ)}$$

$$BC = \frac{54,4 \sin(86,7^\circ)}{\sin(4,7^\circ)} = 662,8...$$

$$AC = \frac{54,4 \sin(88,6^\circ)}{\sin(4,7^\circ)} = 663,7...$$

$\angle L = 180^\circ - 82,3^\circ - 87,1^\circ = 10,6^\circ$ (hoekensom driehoek)

$$\text{De sinusregel in } \triangle ACL \text{ geeft } \frac{663,7...}{\sin(10,6^\circ)} \mid \frac{CL}{\sin(82,3^\circ)}$$

$$CL = \frac{663,7... \cdot \sin(82,3^\circ)}{\sin(10,6^\circ)} = 3575,5...$$

$\angle Z = 180^\circ - 72,2^\circ - 88,2^\circ = 19,6^\circ$ (hoekensom driehoek)

$$\text{De sinusregel in } \triangle BCZ \text{ geeft } \frac{662,8...}{\sin(19,6^\circ)} \mid \frac{CZ}{\sin(72,2^\circ)}$$

$$CZ = \frac{662,8... \cdot \sin(72,2^\circ)}{\sin(19,6^\circ)} = 1881,2...$$

$CL + CZ = 3575,5... + 1881,2... = 5456,8...$, dus $LZ \approx 5,5$ kilometer.

7 *

8 *

8 Allerlei verbanden

Voorkennis Vermenigvuldigingsfactor, de formule van een lijn, en de vergelijking $x^2 = c$

Bladzijde 88

1	procentuele toename	17%	1,7%	0,17%	83,2%	2,3%	0,85%	150%
	vermenigvuldigingsfactor	1,17	1,017	1,0017	1,832	1,023	1,0085	2,5

2	procentuele afname	31%	3,1%	0,31%	68,7%	13%	1,8%	0,3%
	vermenigvuldigingsfactor	0,69	0,969	0,9969	0,313	0,87	0,982	0,997

Bladzijde 89

3 Lijn l

- 1 Stel $l: y = ax + b$.
- 2 Het snijpunt met de y -as is $(0, 3)$, dus $b = 3$.
- 3 Gebruik ook het punt $(1, 4)$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{1}{1} = 1$$
- 4 Dus $l: y = x + 3$.

Lijn m

- 1 Stel $m: y = ax + b$.
- 2 Het snijpunt met de y -as is $(0, 2)$, dus $b = 2$.
- 3 Gebruik ook het punt $(3, 0)$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$
- 4 Dus $m: y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Lijn n

- 1 Stel $n: y = ax + b$.
- 2 Het snijpunt met de y -as is $(0, -1)$, dus $b = -1$.
- 3 Gebruik ook het punt $(4, 0)$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{1}{4}$$
- 4 Dus $n: y = \frac{1}{4}x - 1$.

4 Lijn p

- 1 Stel $p: y = ax + b$.
- 2 Het snijpunt met de y -as is $(0, 1)$, dus $b = 1$.
- 3 Gebruik ook het punt $(5, 4)$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{3}{5}$$
- 4 Dus $p: y = \frac{3}{5}x + 1$.

Lijn q

- 1 Stel $q: y = ax + b$.
- 2 Het snijpunt met de y -as is $(0, 3)$, dus $b = 3$.
- 3 Gebruik ook het punt $(1, 2)$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{-1}{1} = -1$$
- 4 Dus $q: y = -x + 3$.

Lijn r

- 1 Stel $r: y = ax + b$.
- 2 Het snijpunt met de y -as is $(0, 0)$, dus $b = 0$.
- 3 Gebruik ook het punt $(2, 3)$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

- 4 Dus $r: y = 1\frac{1}{2}x$.

- 5**
- | | | |
|--|--|--|
| a $x^2 - 16 = 0$
$x^2 = 16$
$x = 4 \vee x = -4$ | c $x^2 + 12 = 13$
$x^2 = 1$
$x = 1 \vee x = -1$ | e $x^2 - 5 = 139$
$x^2 = 144$
$x = 12 \vee x = -12$ |
| b $3x^2 = 75$
$x^2 = 25$
$x = 5 \vee x = -5$ | d $4x^2 = -64$
$x^2 = -16$
geen oplossing | f $x^2 + 2 = 2$
$x^2 = 0$
$x = 0$ |
- 6**
- | | | |
|--|--|--|
| a $3x^2 + 5 = 26$
$3x^2 = 21$
$x^2 = 7$
$x = \sqrt{7} \vee x = -\sqrt{7}$
$x \approx 2,65 \vee x \approx -2,65$ | c $6x^2 - 1 = 11$
$6x^2 = 12$
$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$
$x \approx 1,41 \vee x \approx -1,41$ | e $2x^2 + 5 = 4$
$2x^2 = -1$
$x^2 = -\frac{1}{2}$
geen oplossing |
| b $5x^2 - 5 = 25$
$5x^2 = 30$
$x^2 = 6$
$x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$
$x \approx 2,45 \vee x \approx -2,45$ | d $-2x^2 + 2 = -14$
$-2x^2 = -16$
$x^2 = 8$
$x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}$
$x \approx 2,83 \vee x \approx -2,83$ | f $6x^2 - 5 = 49$
$6x^2 = 54$
$x^2 = 9$
$x = 3 \vee x = -3$ |

8.1 Exponentiële groei

Bladzijde 90

- 1** OMZET FASTNED IN MILJOENEN

t	0	1	2	3	4
omzet	0,25	0,5	1	2	4

Bladzijde 91

- 2**
- a** formule $N = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 2,22$
groefactor per jaar $g = 1,019$ } $N = 2,22 \cdot 1,019^t$
- b** $t = 7$ geeft $N = 2,22 \cdot 1,019^7 \approx 2,53$
Dus op 1 januari 2024 heeft Botswana 2,53 miljoen inwoners.
- c** Neem beginwaarde 2,22 en vermenigvuldig herhaald met 1,019.
 $t = 15$ geeft $N = 2,94...$
 $t = 16$ geeft $N = 3,00...$
Dus op 1 januari 2033 zijn er voor het eerst meer dan 3 miljoen inwoners.
- d** $t = 9$ geeft $N = 2,22 \cdot 1,019^9 = 2,62...$
Dus dat zijn er $0,095 \times 2,62... \text{ miljoen} \approx 250\,000$.
- 3**
- a** De beginhoeveelheid is $b = 18$.
De groefactor is $g = 1,3$.
- b** $t = 4$ geeft $N = 18 \cdot 1,3^4 \approx 51,4$
- c** Neem beginwaarde 18 en vermenigvuldig herhaald met 1,3.
 $t = 13$ geeft $N \approx 545$
 $t = 14$ geeft $N \approx 709$
Dus voor $t = 14$ is de hoeveelheid N voor het eerst meer dan 650.

Bladzijde 92

- 4** a $\left. \begin{array}{l} \text{formule } h = b \cdot g^t \\ \text{beginwaarde } b = 1,8 \\ \text{groefactor per jaar } g = 1,2 \end{array} \right\} h = 1,8 \cdot 1,2^t$
 b $t = 6$ geeft $h = 1,8 \cdot 1,2^6 \approx 5,4$
 Dus op 1 maart 2025 is de boom 5,4 meter hoog.
 c Neem beginwaarde 1,8 en vermenigvuldig herhaald met 1,2.
 $t = 9$ geeft $h \approx 9,3$
 $t = 10$ geeft $h \approx 11,1$
 Dus op 1 maart 2029 is de boom voor het eerst hoger dan 10 meter.
- 5** a $\left. \begin{array}{l} \text{formule } N = b \cdot g^t \\ \text{beginwaarde } b = 6500 \\ \text{groefactor per jaar } g = 1,06 \end{array} \right\} N = 6500 \cdot 1,06^t$
 b $t = 10$ geeft $N = 6500 \cdot 1,06^{10} \approx 11\,641$
 Dus de directie verwacht 11 641 werknemers op 1 januari 2029.
 c Neem beginwaarde 6500 en vermenigvuldig herhaald met 1,06.
 $t = 19$ geeft $N \approx 19\,666$
 $t = 20$ geeft $N \approx 20\,846$
 Dus op 1 januari 2039 verwacht de directie voor het eerst meer dan 20 000 werknemers.
- 6** a $\left. \begin{array}{l} \text{formule } N = b \cdot g^t \\ \text{beginwaarde } b = 3,84 \\ \text{groefactor per jaar } g = 1,086 \end{array} \right\} N = 3,84 \cdot 1,086^t$
 b $t = 4$ geeft $N = 3,84 \cdot 1,086^4 \approx 5,34$ miljard betalingen met de pinpas in 2021.
 c $t = 5$ geeft $N = 3,84 \cdot 1,086^5 = 5,800\dots$
 $t = 6$ geeft $N = 3,84 \cdot 1,086^6 = 6,299\dots$
 In 2023 zullen er $6,299\dots - 5,800\dots \approx 0,50$ miljard betalingen meer zijn dan in 2022.
 d Neem beginwaarde 3,84 en vermenigvuldig herhaald met 1,086.
 $t = 8$ geeft $N \approx 7,4$
 $t = 9$ geeft $N \approx 8,1$
 Dus in 2026 zal er voor het eerst meer dan 7,5 miljard keer met de pinpas worden betaald.
- 7** a *
- b $0,1 \text{ mm} = 10^{-1} \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m} = 10^{-7} \text{ km}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{formule } D = b \cdot g^t \\ \text{beginwaarde } b = 10^{-7} \\ \text{groefactor } g = 2 \end{array} \right\} D = 10^{-7} \cdot 2^n$
- c Neem beginwaarde 10^{-7} en vermenigvuldig herhaald met 2.
 $n = 29$ geeft $D \approx 54$
 $n = 30$ geeft $D \approx 107$
 Dus na 30 keer vouwen is het papier meer dan 100 km dik.
- d $n = 42$ geeft $D = 10^{-7} \cdot 2^{42} \approx 439\,805$
 Dus de afstand Aarde-Maan is niet meer dan 439 805 km.

Bladzijde 93

- 8** a
- | t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| N | 4,8 | 2,4 | 1,2 | 0,6 | 0,3 |
- b $\left. \begin{array}{l} \text{formule } N = b \cdot g^t \\ \text{beginwaarde } b = 4,8 \\ \text{groefactor per tien jaar } g = 0,5 \end{array} \right\} N = 4,8 \cdot 0,5^t$

- 9** a De groeifactor is $g = 0,83$.
 b $t = 4$ geeft $N = 850 \cdot 0,83^4 \approx 403,4$
 c Neem beginwaarde 850 en vermenigvuldig herhaald met 0,83.
 $t = 23$ geeft $N \approx 11,7$
 $t = 24$ geeft $N \approx 9,7$
 Dus voor $t = 24$ is N voor het eerst minder dan 10.
- 10** a formule $N = b \cdot g^t$
 beginwaarde $b = 2,82$
 groeifactor per jaar $g = 0,987$ } $N = 2,82 \cdot 0,987^t$
 b $t = 10$ geeft $N = 2,82 \cdot 0,987^{10} \approx 2,47$
 Dus op 1 januari 2027 heeft Litouwen 2,47 miljoen inwoners.
 c Neem beginwaarde 2,82 en vermenigvuldig herhaald met 0,987.
 $t = 15$ geeft $N = 2,31...$
 $t = 16$ geeft $N = 2,28...$
 Dus in de loop van 2032 zullen er voor het eerst minder dan 2,3 miljoen inwoners zijn.
 d $t = 3$ geeft $N = 2,82 \cdot 0,987^3 = 2,711...$
 $t = 13$ geeft $N = 2,82 \cdot 0,987^{13} = 2,378...$
 Het aantal inwoners neem af met $2,711... - 2,378... \approx 0,33$ miljoen.
- 11** a formule $N = b \cdot g^t$
 beginwaarde $b = 12$
 groeifactor per dag $g = \frac{3}{4}$ } $N = 12 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t$
 b Neem beginwaarde 12 en vermenigvuldig herhaald met $\frac{3}{4}$.
 $t = 11$ geeft $N \approx 0,51$
 $t = 12$ geeft $N \approx 0,38$
 Dus na iets meer dan 11 dagen is er voor het eerst minder dan 0,5 mg van het medicijn aanwezig.
- 12** De beginhoeveelheid is 1000, en de groeifactor per twee tijdseenheden is $\frac{810}{1000} = 0,81$.
 Dus op $t = 8$ is de hoeveelheid $1000 \cdot 0,81^4 \approx 430$.

8.2 Procenten en groeifactoren

Bladzijde 94

- 13** a $100\% + 10\% = 110\%$, dus NIEUW $= 1,10 \times \text{OUD} = 1,10 \times 80 = 88$ euro.
 Er is met het getal 1,10 vermenigvuldigd.
 b $100\% + 3,6\% = 103,6\%$, dus NIEUW $= 1,036 \times \text{OUD} = 1,036 \times 200 = 207,20$ euro.
 Er is met het getal 1,036 vermenigvuldigd.

Bladzijde 95

- 14** a formule $N = b \cdot g^t$
 beginwaarde $b = 23,2$
 toename 1,12%, dus groeifactor per jaar $g = 1,0112$ } $N = 23,2 \cdot 1,0112^t$
 b 2024 loopt van $t = 7$ tot $t = 8$
 $t = 7$ geeft $N = 23,2 \cdot 1,0112^7 = 25,0811...$
 $t = 8$ geeft $N = 23,2 \cdot 1,0112^8 = 25,3620...$
 $25,3620... - 25,0811... = 0,2809...$ miljoen
 Dus in 2024 komen er 281 000 inwoners bij.
 c Neem beginwaarde 23,2 en vermenigvuldig herhaald met 1,0112.
 $t = 13$ geeft $N = 26,81...$
 $t = 14$ geeft $N = 27,11...$
 In de loop van 2030 zijn er voor het eerst 27 miljoen inwoners.

- 15** a formule $B = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 780$
toename 1,4%, dus groeifactor per jaar $g = 1,014$ } $B = 780 \cdot 1,014^t$
- b $t = 7$ geeft $B = 780 \cdot 1,014^7 \approx 859,73$ euro na zeven jaar.
- c Neem beginwaarde 780 en vermenigvuldig herhaald met 1,014.
 $t = 17$ geeft $B \approx 987,96$
 $t = 18$ geeft $B \approx 1001,79$
Dus na achttien jaar staat er voor het eerst meer dan 1000 euro op de rekening.
- d Het tiende jaar loopt van $t = 9$ tot $t = 10$.
 $t = 9$ geeft $B = 780 \cdot 1,014^9 = 883,967...$
 $t = 10$ geeft $B = 780 \cdot 1,014^{10} = 896,342...$
Het bedrag neemt het tiende jaar met $896,342... - 883,967... \approx 12,38$ euro toe.

- 16** a formule $N = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 44$
toename 4%, dus groeifactor per jaar $g = 1,04$ } $N = 44 \cdot 1,04^t$
- b $t = 5$ geeft $N = 44 \cdot 1,04^5 \approx 54$ herten in het natuurgebied op 1 januari 2024.
 $t = 10$ geeft $N = 44 \cdot 1,04^{10} \approx 65$ herten in het natuurgebied op 1 januari 2029.
- c Neem beginwaarde 44 en vermenigvuldig herhaald met 1,04.
 $t = 15$ geeft $N \approx 79$
 $t = 16$ geeft $N \approx 82$
Dus op 1 januari 2035 is het aantal herten in het natuurgebied voor het eerst meer dan 80.

- 17** a formule $S = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 5000$
toename 1,2%, dus groeifactor per maand $g = 1,012$ } $S = 5000 \cdot 1,012^t$
- b Anderhalf jaar is 18 maanden.
 $t = 18$ geeft $S = 5000 \cdot 1,012^{18} \approx 6197,54$ euro schuld na anderhalf jaar.
- c De zesde maand loopt van $t = 5$ tot $t = 6$.
 $t = 5$ geeft $S = 5000 \cdot 1,012^5 = 5307,28...$
 $t = 6$ geeft $S = 5000 \cdot 1,012^6 = 5370,97...$
De schuld neemt de zesde maand toe met $5370,97... - 5307,28... \approx 63,69$ euro.
- d Het tweede jaar loopt van $t = 12$ tot $t = 24$.
 $t = 12$ geeft $S = 5000 \cdot 1,012^{12} = 5769,47...$
 $t = 24$ geeft $S = 5000 \cdot 1,012^{24} = 6657,36...$
De schuld neemt het tweede jaar toe met $6657,36... - 5769,47... \approx 887,89$ euro.
- e $t = 36$ geeft $S = 5000 \cdot 1,012^{36} \approx 7681,90$
Ze betaalt in totaal $7681,90 - 5000 = 2681,90$ euro aan rente.

- 18** De groeifactor per jaar is 1,078, dus de groeifactor per tien jaar is $1,078^{10} \approx 2,119$.
Dit geeft na tien jaar dus $100\% \times 2,119 = 211,9\%$.
In tien jaar neemt de hoeveelheid met $211,9\% - 100\% = 111,9\%$ toe.

- 19** $100\% - 12,5\% = 87,5\%$, dus $NIEUW = 0,875 \times OUD = 0,875 \times 80 = 70$ euro.

Bladzijde 96

- 20** a formule $W = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 18\,500$
afname 22,5%, dus groeifactor per jaar $g = 0,775$ } $W = 18\,500 \cdot 0,775^t$
- b $t = 3$ geeft $W = 18\,500 \cdot 0,775^3 \approx 8611$ euro op 1 januari 2022.
- c 2025 loopt van $t = 6$ tot $t = 7$.
 $t = 6$ geeft $W = 18\,500 \cdot 0,775^6 = 4008,5...$
 $t = 7$ geeft $W = 18\,500 \cdot 0,775^7 = 3106,5...$
De waarde van de auto daalt in 2025 met $4008,5... - 3106,5... \approx 902$ euro.
- d Neem beginwaarde 18 500 en vermenigvuldig herhaald met 0,775.
 $t = 9$ geeft $W \approx 1866$
 $t = 10$ geeft $W \approx 1446$
In de loop van 2028 is de auto voor het eerst minder dan 1500 euro waard.

- 21 a** formule $P = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 150$
afname 8%, dus groeifactor per jaar $g = 0,92$ } $P = 150 \cdot 0,92^t$
- b** De vijfde week loopt van $t = 4$ tot $t = 5$.
 $t = 4$ geeft $P = 150 \cdot 0,92^4 = 107,45\dots$
 $t = 5$ geeft $P = 150 \cdot 0,92^5 = 98,86\dots$
In de vijfde week neemt de stof met $107,45\dots - 98,86\dots \approx 8,6$ ppm af.
- c** Als de hoeveelheid giftige stof gehalveerd is, is er nog $150 : 2 = 75$ ppm in het meer aanwezig.
Neem beginwaarde 150 en vermenigvuldig herhaald met 0,92.
 $t = 8$ geeft $P \approx 77$
 $t = 9$ geeft $P \approx 71$
Dus na negen weken is de hoeveelheid giftige stof voor het eerst meer dan gehalveerd.

- 22 a** formule $N = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 125\,000$
afname 2,9%, dus groeifactor per jaar $g = 0,971$ } $N = 125\,000 \cdot 0,971^t$
- formule $A = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 16,4$
toename 2,5%, dus groeifactor per jaar $g = 1,025$ } $A = 16,4 \cdot 1,025^t$
- b** Neem beginwaarde 16,4 en vermenigvuldig herhaald met 1,025.
 $t = 30$ geeft $A \approx 34,4$
 $t = 31$ geeft $A \approx 35,3$
Dus op 1 januari 2021 is de gemiddelde oppervlakte van een bedrijf voor het eerst meer dan 35 ha.
- c** $t = 8$ geeft $N = 125\,000 \cdot 0,971^8 \approx 98\,779$
 $t = 22$ geeft $N = 125\,000 \cdot 0,971^{22} \approx 65\,423$
 $\frac{65\,423 - 98\,779}{98\,779} \times 100\% \approx -33,8\%$, dus de procentuele afname is 33,8%.
- d** $t = 30$ geeft $N = 125\,000 \cdot 0,971^{30} \approx 51\,700$
 $t = 30$ geeft $A = 16,4 \cdot 1,025^{30} \approx 34,4$ ha
De totale hoeveelheid land- en tuinbouwgrond op 1 januari 2020 is
 $51\,700 \cdot 34,4 \approx 1\,778\,000$ ha.

8.3 Tabellen en groei

Bladzijde 97

- 23 a** $\frac{1280}{1024} = 1,25$ en $\frac{1600}{1280} = 1,25$, dus de groeifactor per jaar is $g = 1,25$.
- b** formule $N = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 1024$
groeifactor per jaar $g = 1,25$ } $N = 1024 \cdot 1,25^t$
- c**
- | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| N | 1024 | 1280 | 1600 | 2000 | 2500 | 3125 |
- d** $t = 8$ geeft $N = 1024 \cdot 1,25^8 \approx 6104$
- 24 a** tabel I: $\frac{12}{8} = 1,5$, $\frac{18}{12} = 1,5$ en $\frac{27}{18} = 1,5$
De opeenvolgende delingen zijn gelijk, dus exponentiële groei met groeifactor 1,5.
tabel II: $\frac{12}{8} = 1,5$, $\frac{16}{12} \approx 1,3$
De opeenvolgende delingen zijn niet gelijk, dus geen exponentiële groei.
tabel III: $\frac{60}{50} = 1,2$, $\frac{72}{60} = 1,2$ en $\frac{86,4}{72} = 1,2$
De opeenvolgende delingen zijn gelijk, dus exponentiële groei met groeifactor 1,2.

b tabel I: formule $N = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 8$
groefactor $g = 1,5$ } $N = 8 \cdot 1,5^t$

tabel III: formule $N = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 50$
groefactor $g = 1,2$ } $N = 50 \cdot 1,2^t$

25 a $\frac{65}{55} \approx 1,18$, $\frac{77}{65} \approx 1,18$, $\frac{91}{77} \approx 1,18$, $\frac{107}{91} \approx 1,18$, $\frac{126}{107} \approx 1,18$ en $\frac{148}{126} \approx 1,17$

De opeenvolgende delingen zijn bij benadering gelijk, dus exponentiële groei met groefactor 1,18.

formule $N = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 55$
groefactor $g = 1,18$ } $N = 55 \cdot 1,18^t$

b $t = 10$ geeft $N = 55 \cdot 1,18^{10} \approx 288$

c Neem beginwaarde 55 en vermenigvuldig herhaald met 1,18.

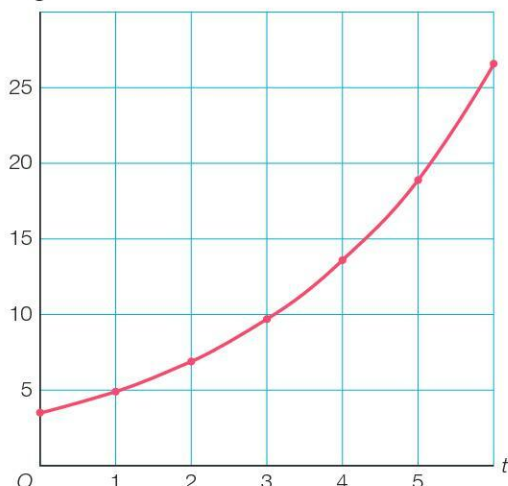
$t = 15$ geeft $N \approx 659$

$t = 16$ geeft $N \approx 777$

Dus voor $t = 16$ is N voor het eerst meer dan 750.

Bladzijde 98

26 a O



b $\frac{4,9}{3,5} = 1,4$, $\frac{6,9}{4,9} \approx 1,4$, $\frac{9,7}{6,9} \approx 1,4$, $\frac{13,6}{9,7} \approx 1,4$, $\frac{19,0}{13,6} \approx 1,4$ en $\frac{26,6}{19,0} = 1,4$

De opeenvolgende delingen zijn bij benadering gelijk, dus exponentiële groei met groefactor 1,4.

c formule $O = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 3,5$
groefactor per dag $g = 1,4$ } $O = 3,5 \cdot 1,4^t$

d Neem beginwaarde 3,5 en vermenigvuldig herhaald met 1,4.

$t = 7$ geeft $O \approx 36,9$

$t = 8$ geeft $O \approx 51,7$

Dus voor $t = 8$ is de oppervlakte voor het eerst meer dan 50 cm².

27 a $\frac{135}{65} \approx 2,1$ en $\frac{205}{135} \approx 1,5$

De opeenvolgende delingen zijn niet gelijk, dus er is geen sprake van exponentiële groei.

b $135 - 65 = 70$, $205 - 135 = 70$ en $275 - 205 = 70$

Er komen elk jaar 70 dassen bij.

2025 is 10 jaar na 2015.

Dus het aantal dassen in 2025 is $65 + 10 \cdot 70 = 765$.

Bladzijde 99

- 28 a** Tabel II hoort bij lineaire groei, want de hoeveelheid neemt per tijdseenheid af met 3.

b tabel I: $\frac{24}{16} = 1,5$, $\frac{36}{24} = 1,5$, $\frac{54}{36} = 1,5$ en $\frac{81}{54} = 1,5$

De opeenvolgende delingen zijn gelijk, dus exponentiële groei met groeifactor 1,5.

c tabel I: formule $N = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 16$
groeifactor $g = 1,5$ } $N = 16 \cdot 1,5^t$

tabel II: formule $N = at + b$
beginwaarde $b = 28$
toename $a = -3$ } $N = -3t + 28$

- d** tabel I: $t = 8$ geeft $N = 16 \cdot 1,5^8 = 410,0625$
tabel II: $t = 8$ geeft $N = -3 \cdot 8 + 28 = 4$

- 29 a** Er hoort lineaire groei bij de tabel, want de hoeveelheid neemt per jaar toe met 5250.

b formule $N = at + b$
beginwaarde $b = 4000$
toename per jaar $a = 5250$ } $N = 5250t + 4000$

- c** Neem beginwaarde 4000 en tel er herhaald 5250 bij op.

$t = 8$ geeft $N = 46\,000$

$t = 9$ geeft $N = 51\,250$

Dus in de loop van 2021 zal het aantal deelauto's in Nederland voor het eerst meer dan 50 000 zijn.

- 30 a** tabel I: $\frac{24\,581}{23\,590} \approx 1,042$, $\frac{25\,613}{24\,581} \approx 1,042$ en $\frac{26\,689}{25\,613} \approx 1,042$

De opeenvolgende delingen zijn bij benadering gelijk, dus exponentiële groei met groeifactor 1,042.

Bij tabel II hoort lineaire groei, want de oppervlakte neemt per jaar af met 38 ha.

b tabel I: formule $A = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 23\,590$
groeifactor per jaar $g = 1,042$ } $A = 23\,590 \cdot 1,042^t$

tabel II: formule $A = at + b$
beginwaarde $b = 467$
toename per jaar $a = -38$ } $A = -38t + 467$

- c** De totale oppervlakte voor bloembollenteelt in 2019 is $23\,590 \cdot 1,042^5 = 28\,977,8\dots$ ha.
De oppervlakte waarop in 2019 krokusbollen worden geteeld is $-38 \cdot 5 + 467 = 277$ ha.

Het gevraagde percentage is dus $\frac{277}{28\,977,8\dots} \times 100\% \approx 1,0\%$.

- 31** $t = 0$ geeft $N = 2^{3 \cdot 0 + 7} = 2^7 = 128$
 $t = 1$ geeft $N = 2^{3 \cdot 1 + 7} = 2^{10} = 1024$

Dus de beginwaarde is $b = 128$, en de groeifactor is $g = \frac{1024}{128} = 8$.

De formule is dus $N = 128 \cdot 8^t$.

Bladzijde 100

- 32 a** In 1960 had Nederland 11,4 miljoen inwoners.
In 1970 had Nederland 13,0 miljoen inwoners.
1965 ligt midden tussen 1960 en 1970, dus een schatting van het aantal inwoners

in 1965 is $\frac{11,4 + 13,0}{2} = 12,2$ miljoen inwoners.

- b** In 1990 had Nederland 14,9 miljoen inwoners.
In 2000 had Nederland 15,9 miljoen inwoners.
Dat is een toename van $15,9 - 14,9 = 1$ miljoen in tien jaar, oftewel 0,1 miljoen per jaar.
1998 is acht jaar na 1990, dus een schatting van het aantal inwoners in 1998 is
 $14,9 + 8 \times 0,1 = 15,7$ miljoen.

- c** In 2010 had Nederland 16,7 miljoen inwoners.
 In 2015 had Nederland 16,9 miljoen inwoners.
 Dat is een toename van $16,9 - 16,7 = 0,2$ miljoen in vijf jaar.
 2025 is tien jaar na 2015, dus een schatting van het aantal inwoners in 2025 is
 $16,9 + 2 \times 0,2 = 17,3$ miljoen.

Bladzijde 101

- 33 a** In 4 jaar $4955 - 4163 = 792$ erbij, dus in één jaar $\frac{792}{4}$ erbij.
 Het aantal verkochte vliegvakanties in 2004 was $4163 + 3 \times \frac{792}{4} = 4757$.
- b** In 12 jaar $5211 - 4955 = 256$ erbij, dus in één jaar $\frac{256}{12}$ erbij.
 Het aantal verkochte vliegvakanties in 2006 was $4955 + 1 \times \frac{256}{12} \approx 4976$.
- c** Het aantal verkochte vliegvakanties in 2025 is $5211 + 8 \times \frac{256}{12} \approx 5382$.

Bladzijde 102

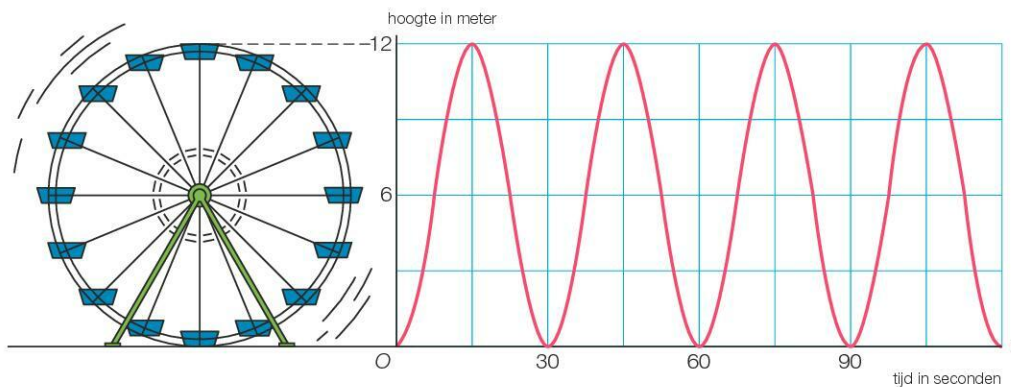
- 34 a** In 8 jaar $1740 - 1651 = 89$ eraf, dus in één jaar $\frac{89}{8}$ eraf.
 Het aantal personen dat in 2000 is verhuisd, is $1740 - 3 \times \frac{89}{8} \approx 1707$.
- b** In 7 jaar $1651 - 1479 = 172$ eraf, dus in één jaar $\frac{172}{7}$ eraf.
 Het aantal personen dat in 2010 is verhuisd, is $1651 - 5 \times \frac{172}{7} \approx 1528$.
- c** In 4 jaar $1791 - 1479 = 312$ erbij, dus in één jaar $\frac{312}{4}$ erbij.
 Het aantal personen dat in 2025 gaat verhuizen, is $1791 + 9 \times \frac{312}{4} = 2493$.
- 35 a** In 9 jaar $96,7 - 90,1 = 6,6$ eraf, dus in één jaar $\frac{6,6}{9}$ eraf.
 De frisdrankconsumptie in 2010 was $96,7 - 3 \times \frac{6,6}{9} = 94,5$ liter.
- b** In 9 jaar $25,7 - 21,9 = 3,8$ erbij.
 2025 is 9 jaar na 2016, dus de consumptie van mineraal- en bronwater in 2025 is
 $25,7 + 3,8 = 29,5$ liter.
- c** In 9 jaar $27,5 - 24,1 = 3,4$ eraf, dus in één jaar $\frac{3,4}{9}$ eraf.
 De consumptie van sap en nectar in 2100 is $24,1 - 84 \times \frac{3,4}{9} \approx -7,6$ liter.
 Dat kan niet. Het is niet juist te veronderstellen dat de consumptie van sap en nectar
 vanaf 2016 elke negen jaar met 3,4 liter afneemt.
- 36 a** Per $225 - 150 = 75$ meter $20,2 - 19,2 = 1,0^\circ\text{C}$ eraf, dus per meter $\frac{1,0}{75}^\circ\text{C}$ eraf.
 Op een hoogte van 180 meter is de temperatuur $20,2 - 30 \times \frac{1,0}{75} = 19,8^\circ\text{C}$.
- b** Per meter $\frac{0,7}{50}^\circ\text{C}$ eraf.
 Op een hoogte van 420 meter is de temperatuur $17,4 - 70 \times \frac{0,7}{50} \approx 16,4^\circ\text{C}$.
- c** Bij een daling van $20,2 - 19,2 = 1^\circ\text{C}$ komt er $225 - 150 = 75$ meter bij.
 De temperatuur is 20°C op een hoogte van $150 + 0,2 \times 75 = 165$ meter.
- d** Bij een daling van $18,1 - 17,4 = 0,7^\circ\text{C}$ komt er $350 - 300 = 50$ meter bij.
 De temperatuur is 15°C op een hoogte van $350 + \frac{2,4}{0,7} \times 50 \approx 521$ meter.

8.4 Periodieke verbanden

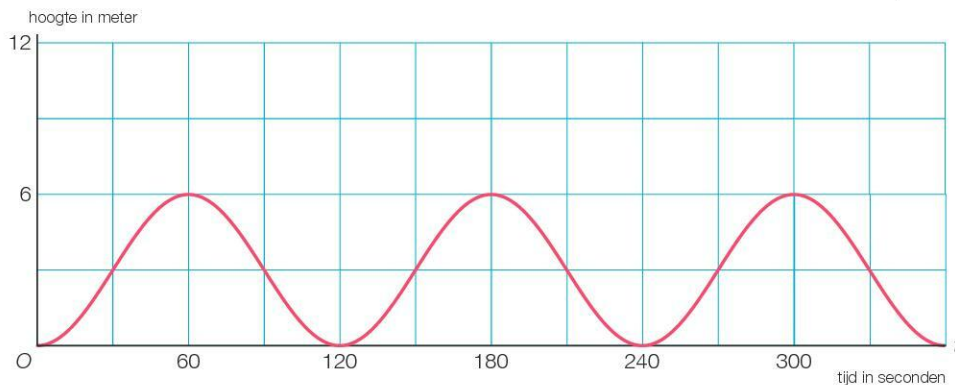
Bladzijde 103

- 37 a Eén keer ronddraaien duurt 60 seconden.

b



c



Bladzijde 104

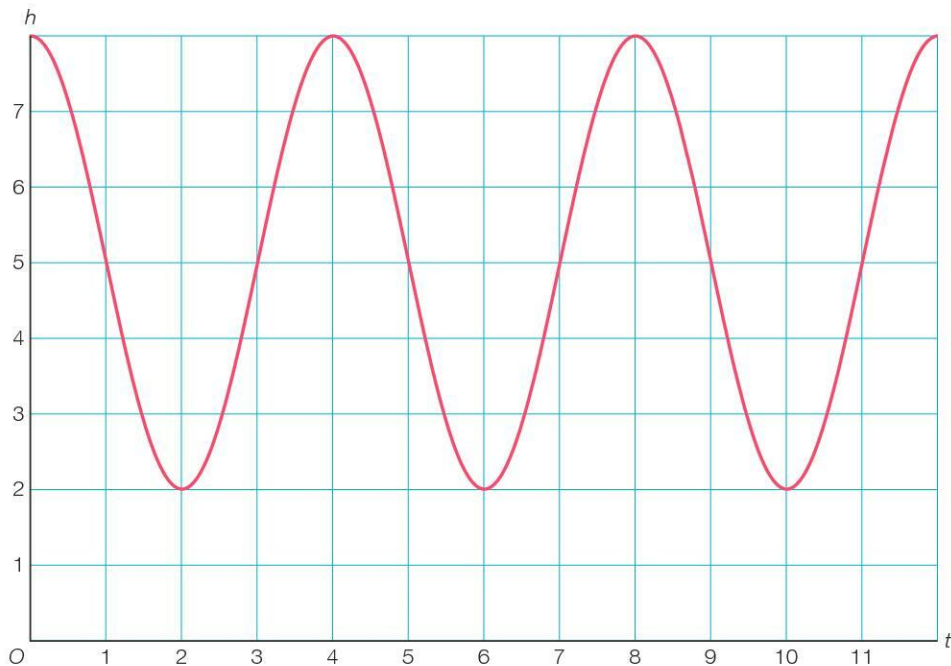
- 38 a periode = $9 - 1 = 8$
 evenwichtsstand = $\frac{20 + 10}{2} = 15$
 amplitude = $20 - 15 = 5$
 b periode = $2 - 0,5 = 1,5$
 evenwichtsstand = $\frac{500 + 200}{2} = 350$
 amplitude = $500 - 350 = 150$

Bladzijde 105

- 39 a Gebruik 2 mei.
 $22 - 9:30 = 12:30$ uur, dus de periode is $12\frac{1}{2}$ uur.
 b Op 3 mei is het om 10:30 en 23:00 hoogwater.
 Op 4 mei is het $2 \times 12\frac{1}{2} = 25$ uur later hoogwater, dus 1 dag en 1 uur later.
 Het is op 4 mei dus hoogwater om 11:30 uur en 24:00 uur.
 c Op 3 mei is het laagwater om 5 uur en om 17:30 uur.
 Op 5 mei is het $4 \times 12\frac{1}{2} = 50$ uur later laagwater, dus 2 dagen en 2 uur later.
 Het is op 5 mei dus laagwater om 7 uur en om 19:30 uur.
 d Aflezen geeft een waterhoogte van meer dan 5 meter van ongeveer 7:30 uur tot ongeveer 12:15 uur en van ongeveer 19:30 uur tot het einde van de dag.
 Dus gedurende deze twee perioden kan de WY3C binnenvaren.

40

a



b hoogste stand = 8

laagste stand = 2

c Bij $t = 26$ is de grafiek even hoog als bij $t = 26 - 6 \cdot 4 = 2$. Bij $t = 2$ is de hoogte 2.Dus bij $t = 26$ hoort ook hoogte 2.Bij $t = 33$ is de grafiek even hoog als bij $t = 33 - 8 \cdot 4 = 1$. Bij $t = 1$ is de hoogte 5.Dus bij $t = 33$ hoort ook hoogte 5.Bij $t = 35$ is de grafiek even hoog als bij $t = 35 - 8 \cdot 4 = 3$. Bij $t = 3$ is de hoogte 5.Dus bij $t = 35$ hoort ook hoogte 5.Bij $t = 122$ is de grafiek even hoog als bij $t = 122 - 30 \cdot 4 = 2$. Bij $t = 2$ is de hoogte 2.Dus bij $t = 122$ hoort ook hoogte 2.

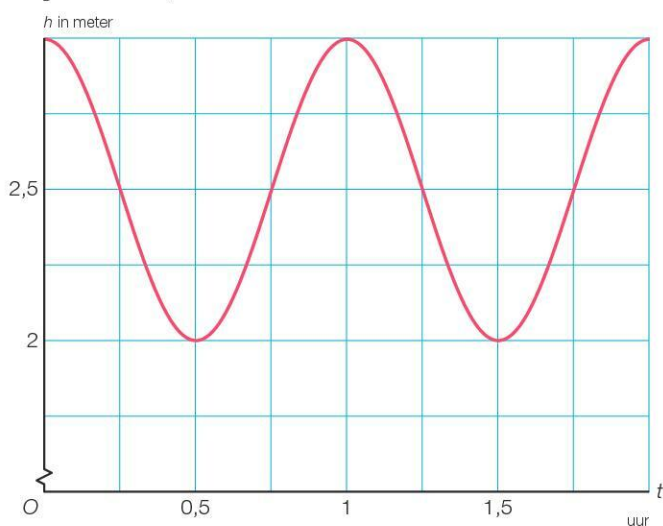
41

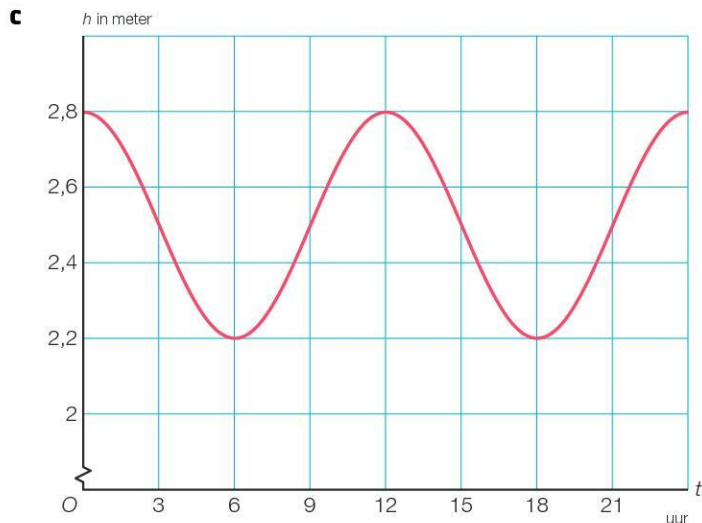
a periode = 1 uur

evenwichtsstand = 2,5 meter

amplitude = 0,5 meter

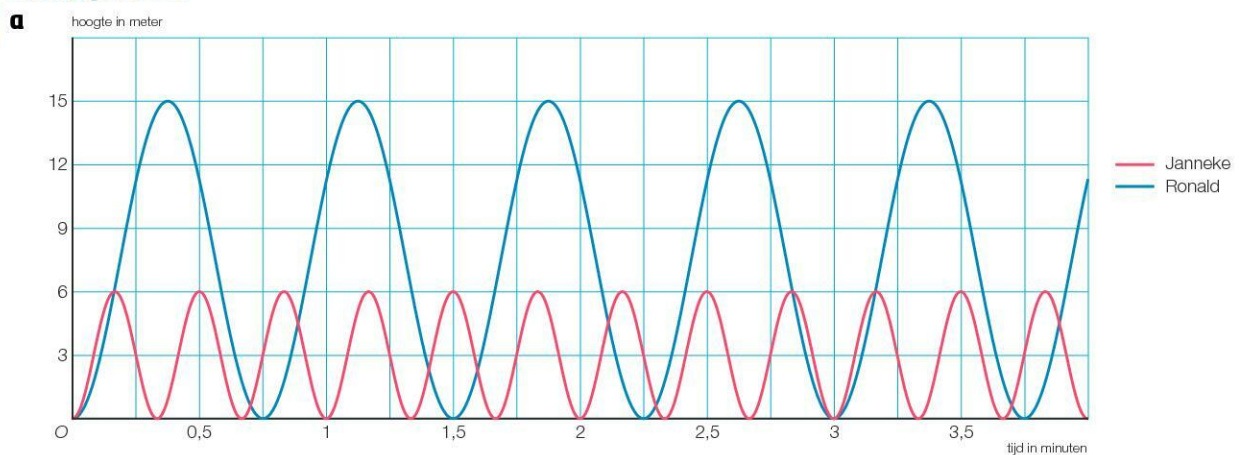
b





Bladzijde 106

42



- b** Na 3 minuten, dus na 180 seconden zijn Janneke en Ronald voor het eerst weer tegelijk beneden.
- c** Zoek naar het kleinste getal dat in beide rijen met veelvouden voorkomt.
De veelvouden van 20 zijn 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, **180**, ...
De veelvouden van 45 zijn 45, 90, 135, **180**, ...
Het antwoord van vraag b, 180, is het kleinste getal dat in beide rijen met veelvouden voorkomt.
- d** De veelvouden van 25 zijn 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, **225**, ...
De veelvouden van 45 zijn 45, 90, 135, 180, **225**, ...
Na 225 seconden zijn Janneke en Ronald weer voor het eerst tegelijk beneden.

43

- a** Een halve minuut is 30 seconden.
De veelvouden van 18 zijn 18, 36, 54, 72, **90**, ...
De veelvouden van 30 zijn 30, 60, **90**, ...
Na 90 seconden zijn Janneke en Ronald voor het eerst weer tegelijk beneden.
- b** De veelvouden van 15 zijn 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, **150**, ...
De veelvouden van 50 zijn 50, 100, **150**, ...
Na 150 seconden zijn Janneke en Ronald voor het eerst weer tegelijk beneden.
- c** 1 minuut en 15 seconden is 75 seconden.
Twee minuten is 120 seconden.
De veelvouden van 75 zijn 75, 150, 225, 300, 375, 450, 525, **600**, ...
De veelvouden van 120 zijn 120, 240, 360, 480, **600**, ...
Na 600 seconden zijn Janneke en Ronald voor het eerst weer tegelijk beneden.

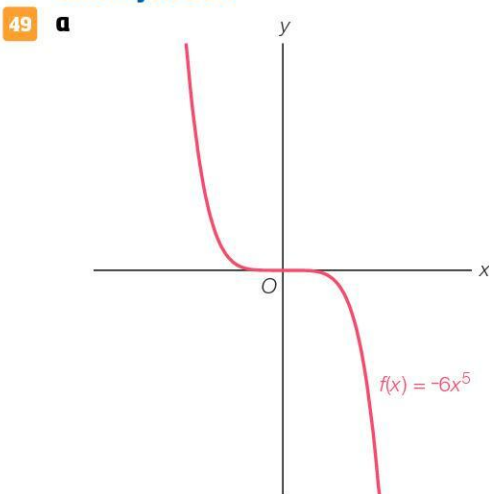
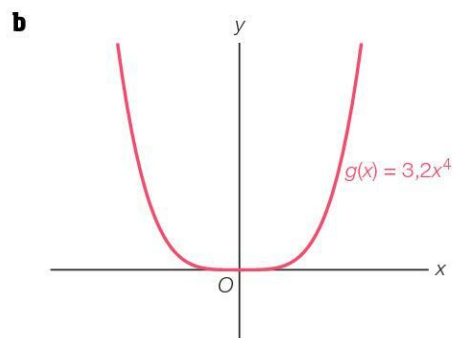
- 44 a** De periode van de hartslag is 0,75 seconden, dus per minuut slaat het hart van Sifan $\frac{60}{0,75} = 80$ keer.
 Het aantal slagen per dag is dus $24 \cdot 60 \cdot 80 = 115\,200$.
 Daarbij gaat er $115\,200 \cdot 70 = 8\,064\,000 \text{ cm}^3$ bloed door het hart.
 Per etmaal gaat er dus 8064 liter bloed door Sifans hart.
- b** Het aantal slagen per minuut na de schrikreactie is $1,5 \cdot 80 = 120$.
 De periode van Sifans verhoogde hartslag is dan $\frac{60}{120} = 0,5$ seconden.

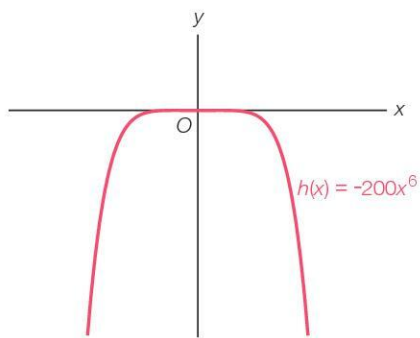
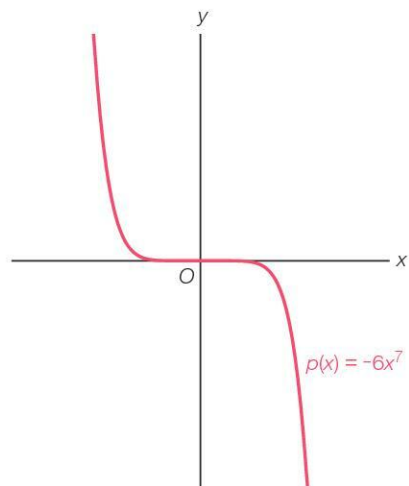
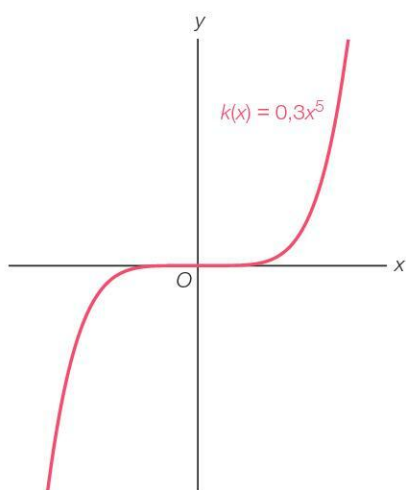
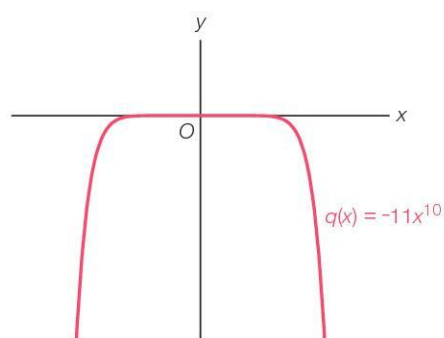
8.5 Machtsfuncties

Bladzijde 107

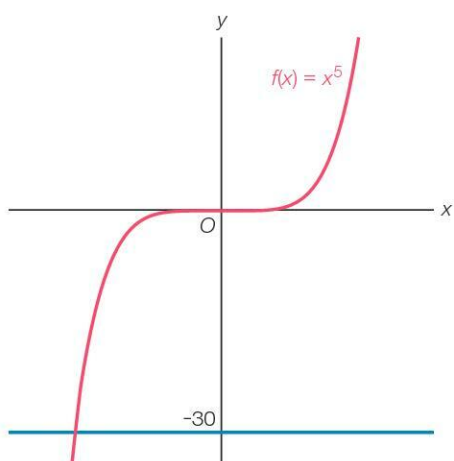
- 45 a** $v = 8$ geeft $P = 60 \cdot 8^3 = 30\,720$ watt
b $v = 20$ geeft $P = 60 \cdot 20^3 = 480\,000$ watt
 $350\,000 < 480\,000$, dus bij een vermogen van 350 000 watt is de windsnelheid minder dan 20 m/s.
- 46** $f(2) = 0,2 \cdot 2^5 = 6,4$
 $f(-3,5) = 0,2 \cdot (-3,5)^5 \approx -105,04$
 $f(6,3) = 0,2 \cdot 6,3^5 \approx 1984,87$
- 47** $g(3) = -4 \cdot 3^4 = -324$
 $g(-5,2) = -4 \cdot (-5,2)^4 \approx -2924,65$
 $g(0,82) = -4 \cdot 0,82^4 \approx -1,81$
- 48 a** $r = 8 \text{ cm}$ geeft $I = \frac{4}{3}\pi \cdot 8^3 \approx 2145 \text{ cm}^3$
b De inhoud van de kubus is $24^3 = 13\,824 \text{ cm}^3$.
 De diameter van de volleybal is 24 cm, dus de straal is 12 cm.
 $r = 12 \text{ cm}$ geeft $I = \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3 \approx 7238 \text{ cm}^3$
 Als de bal in de doos zit, is er $13\,824 - 7238 = 6586 \text{ cm}^3$ ruimte over.
- c** De inhoud van de doos is $20 \cdot 5 \cdot 5 = 500 \text{ cm}^3$
 De diameter van de golfbal is 5 cm, dus de straal is 2,5 cm.
 $r = 2,5 \text{ cm}$ geeft $I = \frac{4}{3}\pi \cdot 2,5^3 = 65,4... \text{ cm}^3$
 De totale inhoud van vier golfballen is $4 \cdot 65,4... = 261,7... \text{ cm}^3$.
 Dat is $\frac{261,7...}{500} \times 100\% \approx 52,4\%$ van de ruimte in de doos.

Bladzijde 108

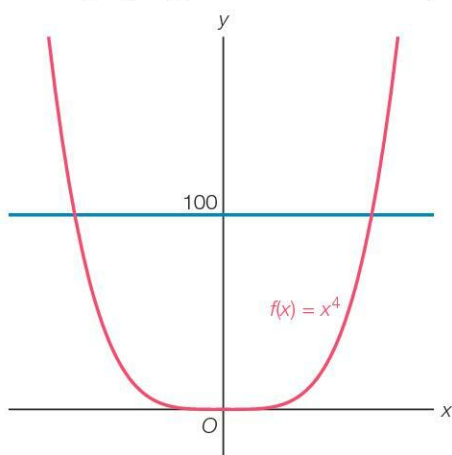


c**e****d****f****Bladzijde 109**

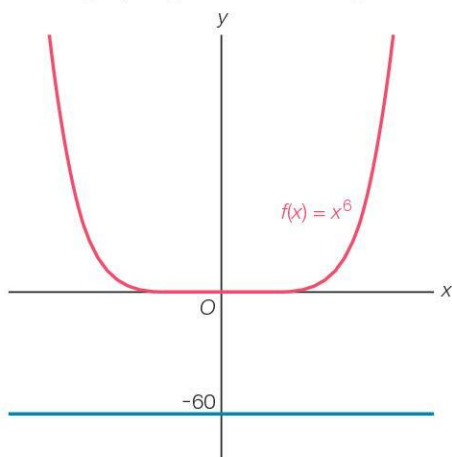
- 50 a** De grafiek van $f(x) = x^3$ heeft één snijpunt met de lijn op hoogte 50, dus de vergelijking $x^3 = 50$ heeft één oplossing.

b

c De vergelijking $x^4 = 100$ heeft twee oplossingen.



De vergelijking $x^6 = -60$ heeft geen oplossingen.



- 51**
- a** $x^5 = 17$
 $x = \sqrt[5]{17}$
 $x \approx 1,8$
- b** $x^4 = 28$
 $x = \sqrt[4]{28} \vee x = -\sqrt[4]{28}$
 $x \approx 2,3 \vee x \approx -2,3$
- c** $x^7 = 100$
 $x = \sqrt[7]{100}$
 $x \approx 1,9$
- d** $x^3 = -21$
 $x = \sqrt[3]{-21}$
 $x \approx -2,8$
- e** $x^4 = -60$
 geen oplossing
- f** $x^5 = -0,01$
 $x = \sqrt[5]{-0,01}$
 $x \approx -0,4$
- g** $x^6 = 7$
 $x = \sqrt[6]{7} \vee x = -\sqrt[6]{7}$
 $x \approx 1,4 \vee x \approx -1,4$
- h** $x^{10} = 99\,999$
 $x = \sqrt[10]{99\,999} \vee x = -\sqrt[10]{99\,999}$
 $x \approx 3,2 \vee x \approx -3,2$
- i** $x^6 = 6$
 $x = \sqrt[6]{6} \vee x = -\sqrt[6]{6}$
 $x \approx 1,3 \vee x \approx -1,3$

Bladzijde 110

- 52**
- a** $3x^6 = 50$
 $x^6 = \frac{50}{3}$
 $x = \sqrt[6]{\frac{50}{3}} \vee x = -\sqrt[6]{\frac{50}{3}}$
 $x \approx 1,60 \vee x \approx -1,60$
- b** $x^3 + 6 = 60$
 $x^3 = 54$
 $x = \sqrt[3]{54}$
 $x \approx 3,78$
- c** $2x^7 + 4 = -50$
 $2x^7 = -54$
 $x^7 = -27$
 $x = \sqrt[7]{-27}$
 $x \approx -1,60$
- d** $5x^4 - 74 = 100$
 $5x^4 = 174$
 $x^4 = \frac{174}{5}$
 $x = \sqrt[4]{\frac{174}{5}} \vee x = -\sqrt[4]{\frac{174}{5}}$
 $x \approx 2,43 \vee x \approx -2,43$
- e** $3x^4 + 240 = -660$
 $3x^4 = -900$
 $x^4 = -300$
 geen oplossing
- f** $0,3x^5 - 38 = 183$
 $0,3x^5 = 221$
 $x^5 = \frac{221}{0,3}$
 $x = \sqrt[5]{\frac{221}{0,3}}$
 $x \approx 3,75$

53 **a** $6x^4 - 20 = 500$
 $6x^4 = 520$
 $6x^4 = \frac{520}{6}$
 $x = \sqrt[4]{\frac{520}{6}} \vee x = -\sqrt[4]{\frac{520}{6}}$
 $x \approx 3,05 \vee x \approx -3,05$

b $3x^3 - 15 = -92$
 $3x^3 = -77$
 $x^3 = \frac{-77}{3}$
 $x = \sqrt[3]{\frac{-77}{3}}$
 $x \approx -2,95$

c $-7x^5 - 34 = -43$
 $-7x^5 = -9$
 $x^5 = \frac{-9}{-7} = \frac{9}{7}$
 $x = \sqrt[5]{\frac{9}{7}}$
 $x \approx 1,05$

54 **a** $s = 1,4$ geeft $R = 0,215 \cdot 1,4^8 \approx 3,2$
Dus de kans dat Max binnen drie jaar bij een ongeluk betrokken raakt, is 3,2%.

b $R = 10$ geeft $0,215s^8 = 10$

$$s^8 = \frac{10}{0,215}$$

$$s = \sqrt[8]{\frac{10}{0,215}} \vee s = -\sqrt[8]{\frac{10}{0,215}}$$

$$s \approx 1,6 \vee s \approx -1,6$$

Dus Daniël is gewend 1,6 keer zo snel te rijden als de toegestane snelheid.

c $s = 1$ geeft $R = 0,215 \cdot 1^8 = 0,215$
Van de 10000 automobilisten zullen er naar verwachting $0,215 \cdot 10000 = 2150$ binnen drie jaar betrokken raken bij een ongeluk.
Dus $10000 - 2150 = 7850$ automobilisten raken naar verwachting de komende drie jaar niet bij een ongeluk betrokken.

Bladzijde 111

55 **a** $10^2 = 100$, dus $\sqrt{100} = 10$.
b $5^3 = 125$, dus $\sqrt[3]{125} = 5$.
c $3^4 = 81$, dus $\sqrt[4]{81} = 3$.

56 **a**

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	
5	25	125	625		
6	36	216			

b *

57 **a** $x^3 = 27$
 $x = 3$

b $x^4 = 1$
 $x = 1 \vee x = -1$

c $x^5 = 32$
 $x = 2$

d $x^5 = -1024$
 $x = -4$

e $x^6 = -729$
geen oplossing

f $x^3 = -729$
 $x = -9$

58 **a** $2x^3 = 128$
 $x^3 = 64$
 $x = 4$

b $x^3 + 14 = 13$
 $x^3 = -1$
 $x = -1$

c $-x^4 + 625 = 0$
 $-x^4 = -625$
 $x^4 = 625$
 $x = 5 \vee x = -5$

d $2x^4 - 6 = 156$
 $2x^4 = 162$
 $x^4 = 81$
 $x = 3 \vee x = -3$

e $-\frac{1}{2}x^5 + 3 = 3$
 $-\frac{1}{2}x^5 = 0$
 $x^5 = 0$
 $x = 0$

f $7 - 3x^6 = 4$
 $-3x^6 = -3$
 $x^6 = 1$
 $x = 1 \vee x = -1$

8.6 Omgekeerd evenredige verbanden

Bladzijde 112

- 59** **a** 24 schilders doen 3 dagen over de klus.
b 4 schilders doen 18 dagen over de klus.
c Als je vier keer zoveel schilders hebt, dan duurt het schilderen vier keer zo kort.

d

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	72	36	24	18	12	9	6	3
xy	72	72	72	72	72	72	72	72

Als je x met een getal vermenigvuldigt, moet je de bijbehorende y door dat getal delen.
 De uitkomst van het product xy is steeds 72.

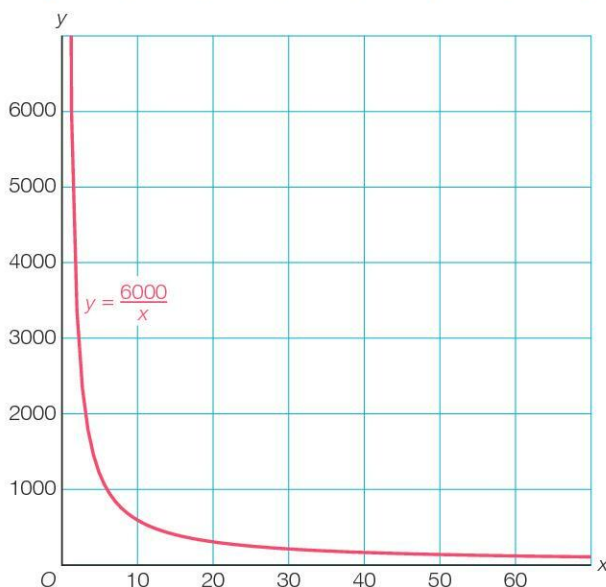
Bladzijde 113

- 60** **a** Acht personen kunnen 30 dagen van een mud eten.
b Voor de vuistregel geldt $xy = 240$, dus de formule is $y = \frac{240}{x}$.
c Als x heel groot is, is y heel klein.
d Als het aantal personen verdubbelt, dan halveert y .

- 61** **a** Ieder ontvangt dan $6000 : 6 = 1000$ euro.
b Er geldt $xy = 6000$, dus $y = \frac{6000}{x}$.
c Bij heel veel goede inzendingen ontvangt ieder een heel klein geldbedrag omdat de 6000 euro over heel veel mensen moet worden verdeeld. Dus als er heel veel goede inzendingen zijn, is y heel klein.

d

x	1	2	3	4	6	10	20	30	40	50	60
y	6000	3000	2000	1500	1000	600	300	200	150	120	100



- 62** **a** De oppervlakte van de stal is $40 \cdot 25 = 1000 \text{ m}^2$, dus er mogen $1000 : 9 = 9000$ kippen in de stal worden gehouden.
b De oppervlakte van de stal is $1000 \text{ m}^2 = 10\,000\,000 \text{ cm}^2$, dus $L = 10\,000\,000 : 8000 = 1250 \text{ cm}^2$.
c Er geldt $L \cdot a = 10\,000\,000$, dus $L = \frac{10\,000\,000}{a}$.
d $20 \text{ dm}^2 = 2000 \text{ cm}^2$, dus $L = 2000$.
 Dit geeft $2000 \cdot a = 10\,000\,000$, dus $a = 10\,000\,000 : 2000 = 5000$ kippen.

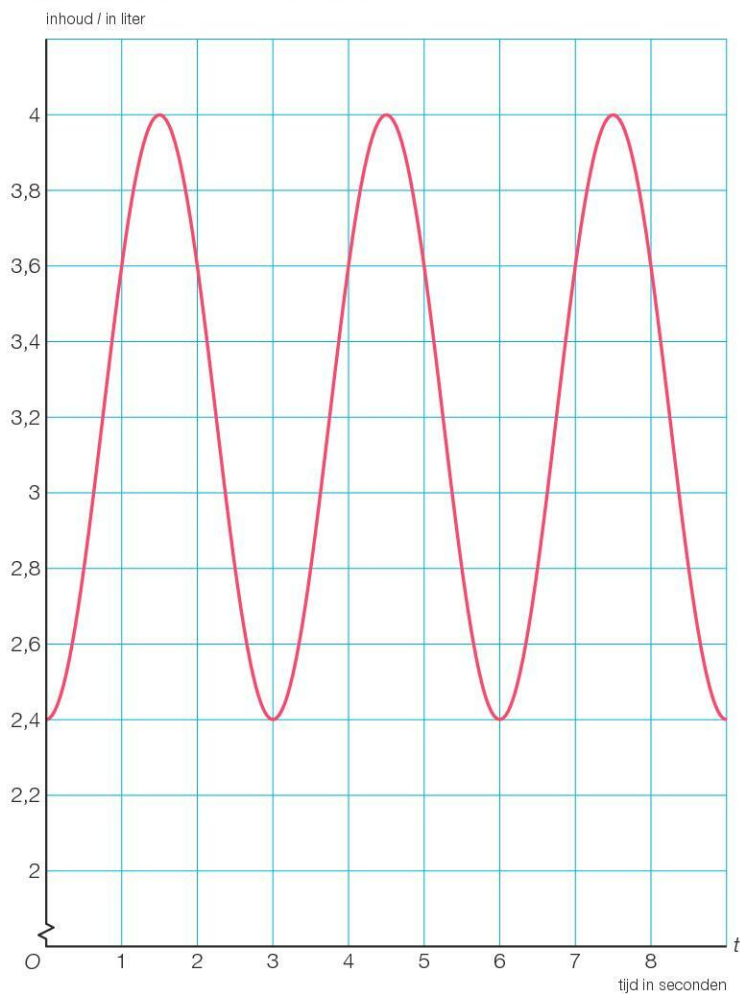
Gemengde opgaven

Bladzijde 114

- 1** a formule $N = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 20\,000$
toename 12,5%, dus groeifactor per uur $g = 1,125$ } $N = 20\,000 \cdot 1,125^t$
- b $t = 24$ geeft $N = 20\,000 \cdot 1,125^{24} \approx 338\,000$ bacteriën na 24 uur.
- c Neem beginwaarde 20 000 en vermenigvuldig herhaald met 1,125.
 $t = 25$ geeft $N \approx 380\,052$
 $t = 26$ geeft $N \approx 427\,559$
Dus na 26 uur zijn er voor het eerst meer dan 400 000 bacteriën.
- d Het achtste uur loopt van $t = 7$ tot $t = 8$.
 $t = 7$ geeft $N = 20\,000 \cdot 1,125^7 \approx 45\,614$
 $t = 8$ geeft $N = 20\,000 \cdot 1,125^8 \approx 51\,316$
De gevraagde toename is $51\,316 - 45\,614 = 5702$.
- 2** a formule $B = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 13,1$
afname 0,21%, dus groeifactor per jaar $g = 0,9979$ } $B = 13,1 \cdot 0,9979^t$
- b $t = 30$ geeft $B = 13,1 \cdot 0,9979^{30} \approx 12,3$
Dus in 2050 wonen er 12,3 miljoen personen van 15 tot 75 jaar in Nederland.
- c 2030 loopt van $t = 10$ tot $t = 11$.
 $t = 10$ geeft $B = 13,1 \cdot 0,9979^{10} = 12,827\dots$
 $t = 11$ geeft $B = 13,1 \cdot 0,9979^{11} = 12,800\dots$
De potentiële beroepsbevolking neemt in 2030 af met
 $12,827\dots - 12,800\dots \approx 0,027$ miljoen, dus met 27 000 personen.
- d In 2030 bestaat de potentiële beroepsbevolking uit 12,827... miljoen personen (zie c).
In 2030 behoort dus $\frac{12,827\dots}{17,7} \times 100\% \approx 72,5\%$ van de Nederlandse bevolking tot de potentiële beroepsbevolking.
- 3** a $\frac{202}{180} \approx 1,12$, $\frac{226}{202} \approx 1,12$, en $\frac{253}{226} \approx 1,12$
De opeenvolgende delingen zijn bij benadering gelijk, dus exponentiële groei met groeifactor 1,12.
- b formule $N = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 180$
groeifactor per kwartaal $g = 1,12$ } $N = 180 \cdot 1,12^t$
- c Bij het tweede halfjaar van 2020 horen $t = 10$ en $t = 11$.
 $t = 10$ geeft $N = 180 \cdot 1,12^{10} \approx 559$
 $t = 11$ geeft $N = 180 \cdot 1,12^{11} \approx 626$
In het tweede halfjaar van 2020 verkoopt Complus $559 + 626 = 1185$ computers.
- d Het tweede kwartaal van 2017 is drie kwartalen eerder dan het kwartaal waarin er 180 computers werden verkocht. Als er in het tweede kwartaal van 2017 x computers werden verkocht, geldt dus $x \cdot 1,12^3 = 180$, en dit geeft $x = \frac{180}{1,12^3} \approx 128$.
In het tweede kwartaal van 2017 heeft Complus 128 computers verkocht.
- e Neem beginwaarde 180 en vermenigvuldig herhaald met 1,12.
 $t = 15$ geeft $N \approx 985$
 $t = 16$ geeft $N \approx 1103$
In het eerste kwartaal van 2022 verkoopt Complus voor het eerst meer dan 1000 computers.
- 4** a $x^3 = 350$
 $x = \sqrt[3]{350}$
 $x \approx 7,0$
- b $x^5 = -750$
 $x = \sqrt[5]{-750}$
 $x \approx -3,8$
- c $x^4 = 800$
 $x = \sqrt[4]{800} \vee x = -\sqrt[4]{800}$
 $x \approx 5,3 \vee x \approx -5,3$
- d $x^8 = -400$
geen oplossing

- 5 a** In 3 jaar $10,0 - 4,8 = 5,2$ erbij, dus in één jaar $\frac{5,2}{3}$ erbij.
 $4,8 + 2 \times \frac{5,2}{3} \approx 8,3$, dus het aantal ritten in 2010 was $8,3 \times 10^5$.
- b** In 4 jaar $19,0 - 10,0 = 9,0$ erbij, dus in één jaar $\frac{9,0}{4}$ erbij.
 $19,0 + 10 \times \frac{9,0}{4} = 41,5$, dus het aantal ritten in 2025 is $41,5 \times 10^5$.
- c** In 2 jaar $4,8 - 2,5 = 2,3$ erbij.
 $2,5 - 2,3 = 0,2$, dus het aantal ritten in 2004 was $0,2 \times 10^5$.
- 6 a** periode = $5 - 1 = 4$ seconden
 evenwichtsstand = $\frac{4 + 2,5}{2} = 3,25$ liter
 amplitude = $4 - 3,25 = 0,75$ liter
- b** Na 29 seconden zit er evenveel lucht in haar longen als na $29 - 7 \cdot 4 = 1$ seconde.
 Dus dat is 2,5 liter.
 1 minuut en 18 seconden is 78 seconden.
 Na 1 minuut en 18 seconden zit er evenveel lucht in haar longen als na
 $78 - 4 \cdot 19 = 2$ seconden.
 Dus dat is 3,25 liter.
- c** Elke vier seconden 1,5 liter, dus per minuut ademt Monique $\frac{60}{4} \cdot 1,5 = 22,5$ liter lucht uit.
 Dat is $60 \cdot 22,5 = 1350$ liter per uur.

d



- e** De veelvouden van 4,8 zijn 4,8, 9,6, ...
 De veelvouden van 3,2 zijn 3,2, 6,4, 9,6, ...
 Dus voor $t = 5 + 9,6 = 14,6$ is er in hun longen voor het eerst weer gelijktijdig de maximale hoeveelheid lucht aanwezig.

7 a Er geldt $g \cdot u = 3 \cdot 40 = 120$, dus $u = \frac{120}{g}$.

- b** $u = 8$ geeft $8g = 120$, dus $g = \frac{120}{8} = 15$.
 Er worden 15 glazenwassers ingezet.

- 8 a** $80 \text{ cm} = 8 \text{ dm}$
 $l = 8$ geeft $G = 0,45 \cdot 8^3 = 230,4$
 Het gewicht van de slang is 230,4 gram.

- b** $G = 350$ geeft $0,45l^3 = 350$

$$l^3 = \frac{350}{0,45}$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{350}{0,45}}$$

$$l \approx 9,2$$

De lengte van de slang is dus 92 cm.

- c** $60 \text{ cm} = 6 \text{ dm}$
 $l = 6$ en $G = 93$ geeft $a \cdot 6^3 = 93$
 $216a = 93$
 $a = \frac{93}{216}$
 $a \approx 0,43$

Diagnostische toets

Bladzijde 118

- 1 a** $\left. \begin{array}{l} \text{formule } N = b \cdot g^t \\ \text{beginwaarde } b = 39,6 \\ \text{groefactor per jaar } g = 1,033 \end{array} \right\} N = 39,6 \cdot 1,033^t$
b $t = 7$ geeft $N = 39,6 \cdot 1,033^7 \approx 49,7$ miljoen inwoners op 1 januari 2025.
c Neem beginwaarde 39,6 en vermenigvuldig herhaald met 1,033.
 $t = 7$ geeft $N \approx 49,7$
 $t = 8$ geeft $N \approx 51,3$
 Dus op 1 januari 2026 is het aantal inwoners voor het eerst meer dan 50 miljoen.
d Het jaar 2030 loopt van $t = 12$ tot $t = 13$.
 $t = 12$ geeft $N = 39,6 \cdot 1,033^{12} = 58,46...$
 $t = 13$ geeft $N = 39,6 \cdot 1,033^{13} = 60,39...$
 In 2030 neemt het aantal inwoners toe met $60,39... - 58,46... \approx 1,9$ miljoen.

- 2 a** $\left. \begin{array}{l} \text{formule } N = b \cdot g^t \\ \text{beginwaarde } b = 830 \\ \text{groefactor per jaar } g = 1,023 \end{array} \right\} N = 830 \cdot 1,023^t$
b $t = 5$ geeft $N = 830 \cdot 1,023^5 \approx 930$ miljoen ton melk in 2020.
c Neem beginwaarde 830 en vermenigvuldig herhaald met 1,023.
 $1,2 \text{ miljard} = 1200 \text{ miljoen}$
 $t = 16$ geeft $N \approx 1194$
 $t = 17$ geeft $N \approx 1222$
 In 2032 zal er voor het eerst meer dan 1,2 miljard ton melk worden geproduceerd.

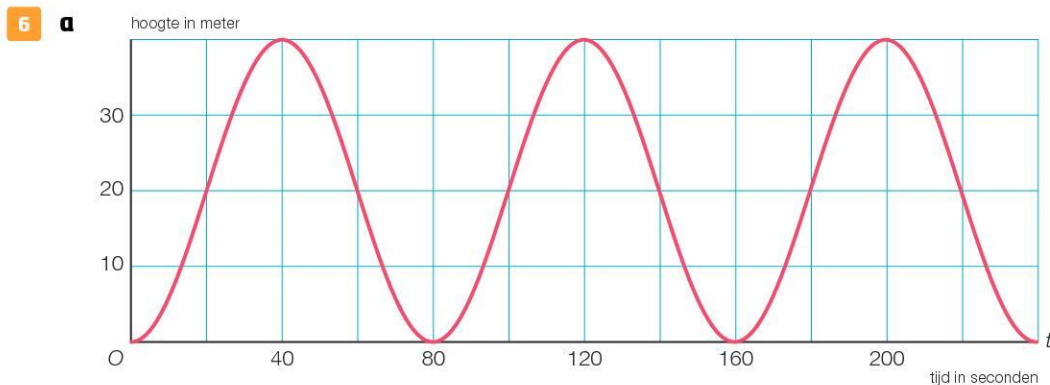
- d** $t = 10$ geeft $N = 830 \cdot 1,023^{10} = 1041,9\dots$
 $t = 15$ geeft $N = 830 \cdot 1,023^{15} = 1167,3\dots$
 Dus in 2030 wordt er $\frac{1167,3\dots - 1041,9\dots}{1041,9\dots} \times 100\% \approx 12,0\%$ meer melk geproduceerd dan in 2025.

- 3 a** formule $W = b \cdot g^t$
 beginwaarde $b = 32\,000$
 afname 8,5%, dus groeifactor per jaar $g = 0,915$ } $W = 32\,000 \cdot 0,915^t$
- b** $t = 6$ geeft $W = 32\,000 \cdot 0,915^6 \approx 18\,779$ euro op 1 januari 2025.
- c** 2030 loopt van $t = 11$ tot $t = 12$.
 $t = 11$ geeft $W = 32\,000 \cdot 0,915^{11} = 12\,044,3\dots$
 $t = 12$ geeft $W = 32\,000 \cdot 0,915^{12} = 11\,020,5\dots$
 De waarde van de auto daalt in 2030 met $12\,044,3\dots - 11\,020,5\dots \approx 1024$ euro.
- d** Neem beginwaarde 32 000 en vermenigvuldig herhaald met 0,915.
 $t = 8$ geeft $W \approx 15\,722$
 $t = 9$ geeft $W \approx 14\,386$
 Dus op 1 januari 2028 is de auto voor het eerst minder dan 15 000 euro waard.

- 4 a** Tabel I
 $5400 - 5120 = 280$
 $5680 - 5400 = 280$
 $5960 - 5680 = 280$
 $6240 - 5960 = 280$
 De hoeveelheid neemt per tijdseenheid met hetzelfde getal toe, dus tabel I hoort bij lineaire groei.
- Tabel II
 $\frac{5376}{5120} = 1,05$, $\frac{5645}{5376} \approx 1,05$, $\frac{5927}{5645} \approx 1,05$ en $\frac{6223}{5927} \approx 1,05$
 De hoeveelheid wordt per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd, dus tabel II hoort bij exponentiële groei.
- b** tabel I: formule $N = at + b$
 beginwaarde $b = 5120$
 toename $a = 280$ } $N = 280t + 5120$
- tabel II: formule $N = b \cdot g^t$
 beginwaarde $b = 5120$
 groeifactor $g = 1,05$ } $N = 5120 \cdot 1,05^t$
- c** tabel I: $t = 8$ geeft $N = 280 \cdot 8 + 5120 = 7360$
 tabel II: $t = 8$ geeft $N = 5120 \cdot 1,05^8 \approx 7565$

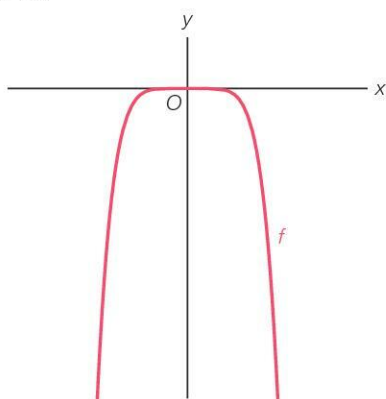
Bladzijde 119

- 5 a** In 7 jaar $120\,482 - 101\,990 = 18\,492$ erbij, dus in één jaar $\frac{18\,492}{7}$ erbij.
 $101\,990 + 5 \times \frac{18\,492}{7} \approx 115\,199$, dus het aantal voertuigkilometers in 2000 was 115 199 miljoen.
- b** In 6 jaar $133\,093 - 127\,928 = 5165$ erbij, dus in één jaar $\frac{5165}{6}$ erbij.
 $133\,093 + 8 \times \frac{5165}{6} \approx 139\,980$, dus het aantal voertuigkilometers in 2024 is 139 980 miljoen.

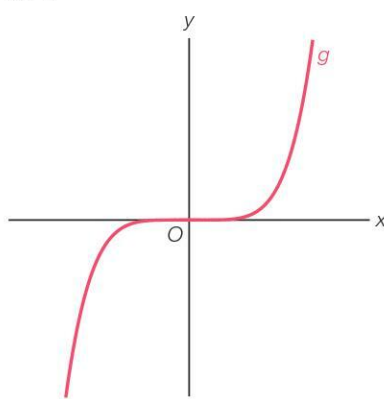


- b** 1 minuut en 20 seconden is 80 seconden.
 De veelvouden van 80 zijn 80, 160, 240, 320, 400, ...
 De veelvouden van 50 zijn 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, ...
 Na 400 seconden zijn Judith en Mark voor het eerst weer tegelijk beneden.

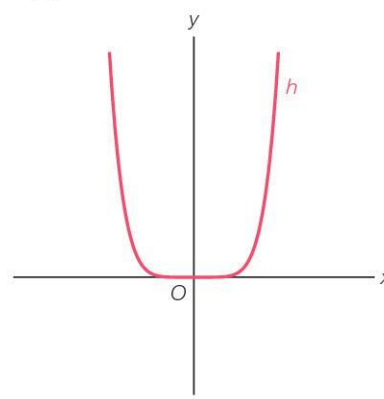
7 a $f(x) = -4x^6$



b $g(x) = 3x^7$



c $h(x) = 5x^8$



8 a $x^3 = 118$
 $x = \sqrt[3]{118}$
 $x \approx 4,90$

b $x^3 = -209$
 $x = \sqrt[3]{-209}$
 $x \approx -5,93$

c $x^4 = 1000$
 $x = \sqrt[4]{1000} \vee x = -\sqrt[4]{1000}$
 $x \approx 5,62 \vee x \approx -5,62$

d $x^4 = -200$
 geen oplossing

e $x^5 = 83$
 $x = \sqrt[5]{83}$
 $x \approx 2,42$

f $x^5 = -0,86$
 $x = \sqrt[5]{-0,86}$
 $x \approx -0,97$

9 a $7x^8 = 900$
 $x^8 = \frac{900}{7}$
 $x = \sqrt[8]{\frac{900}{7}} \vee x = -\sqrt[8]{\frac{900}{7}}$
 $x \approx 1,84 \vee x \approx -1,84$

b $0,2x^6 - 72 = 850$
 $0,2x^6 = 922$
 $x^6 = \frac{922}{0,2} = 4610$
 $x = \sqrt[6]{4610} \vee x = -\sqrt[6]{4610}$
 $x \approx 4,08 \vee x \approx -4,08$

c $5x^3 + 151 = 103$
 $5x^3 = -48$
 $x^3 = \frac{-48}{5}$
 $x = \sqrt[3]{\frac{-48}{5}}$
 $x \approx -2,13$

10 a $x^4 = 256$
 $x = 4 \vee x = -4$

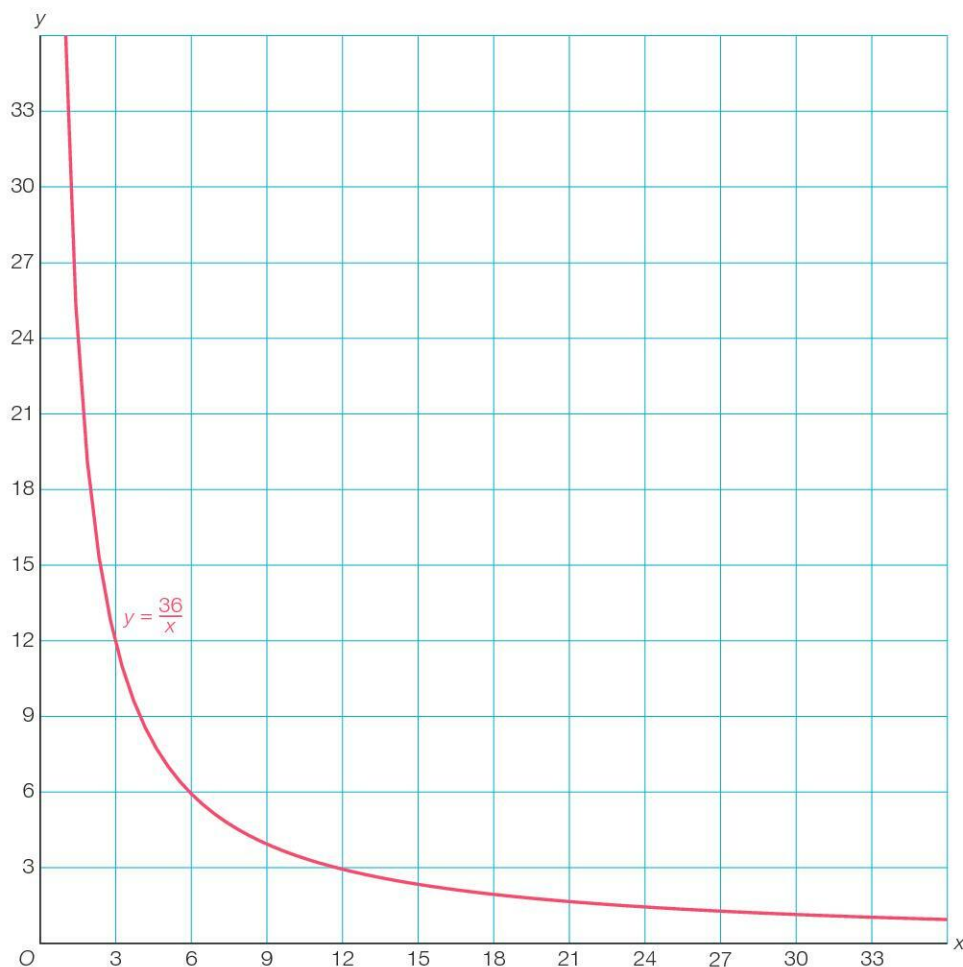
b $2x^4 = -162$
 $x^4 = -81$
 geen oplossing

c $-3x^6 + 10 = 7$
 $-3x^6 = -3$
 $x^6 = 1$
 $x = 1 \vee x = -1$

11 a $xy = 36$, dus $y = \frac{36}{x}$.

b

x	1	2	3	4	6	9	12	18	36
y	36	18	12	9	6	4	3	2	1



c Als x vier keer zo groot wordt, wordt y vier keer zo klein.

d Als x een heel klein getal is, dan is y een heel groot getal.

Herhaling

Bladzijde 120

- 1 a** formule $N = b \cdot g^t$
beginwaarde $b = 1650$
groeifactor per jaar $g = 1,4$ } $N = 1650 \cdot 1,4^t$
- b** $t = 8$ geeft $N = 1650 \cdot 1,4^8 \approx 24\,351$ konijnen na acht jaar.
- c** Neem beginwaarde 1650 en vermenigvuldig herhaald met 1,4.
 $t = 12$ geeft $N \approx 93\,545$
 $t = 13$ geeft $N \approx 130\,963$
Op 1 januari 2031 zijn er voor het eerst meer dan 100 000 konijnen.
- d** 2024 loopt van $t = 6$ tot $t = 7$.
 $t = 6$ geeft $N = 1650 \cdot 1,4^6 \approx 12\,424$
 $t = 7$ geeft $N = 1650 \cdot 1,4^7 \approx 17\,393$
In 2024 komen er $17\,393 - 12\,424 = 4\,969$ konijnen bij.

- 2** a $100\% + 24\% = 124\%$, dus $g = 1,24$.
b $100\% + 2,4\% = 102,4\%$, dus $g = 1,024$.
c $100\% + 0,24\% = 100,24\%$, dus $g = 1,0024$.
d $100\% + 0,08\% = 100,08\%$, dus $g = 1,0008$.
e $100\% + 80\% = 180\%$, dus $g = 1,8$.
f $100\% + 200\% = 300\%$, dus $g = 3$.
- 3** a $100\% + 1,1\% = 101,1\%$, dus $g = 1,011$.
b $\left. \begin{array}{l} \text{formule } B = b \cdot g^t \\ \text{beginwaarde } b = 50 \\ \text{groefactor per jaar } g = 1,011 \end{array} \right\} B = 50 \cdot 1,011^t$
c $t = 8$ geeft $B = 50 \cdot 1,011^8 \approx 54,57$ euro
d Het tiende jaar loopt van $t = 9$ tot $t = 10$.
 $t = 9$ geeft $B = 50 \cdot 1,011^9 = 55,17\dots$
 $t = 10$ geeft $B = 50 \cdot 1,011^{10} = 55,78\dots$
Het bedrag neemt het tiende jaar toe met $55,78\dots - 55,17\dots \approx 0,61$ euro.
- 4** a $100\% - 15\% = 85\%$, dus $g = 0,85$.
b $100\% - 1,4\% = 98,6\%$, dus $g = 0,986$.
c $100\% - 0,8\% = 99,2\%$, dus $g = 0,992$.
d $100\% - 0,06\% = 99,94\%$, dus $g = 0,9994$.
e $100\% - 80\% = 20\%$, dus $g = 0,2$.
f $100\% - 50\% = 50\%$, dus $g = 0,5$.

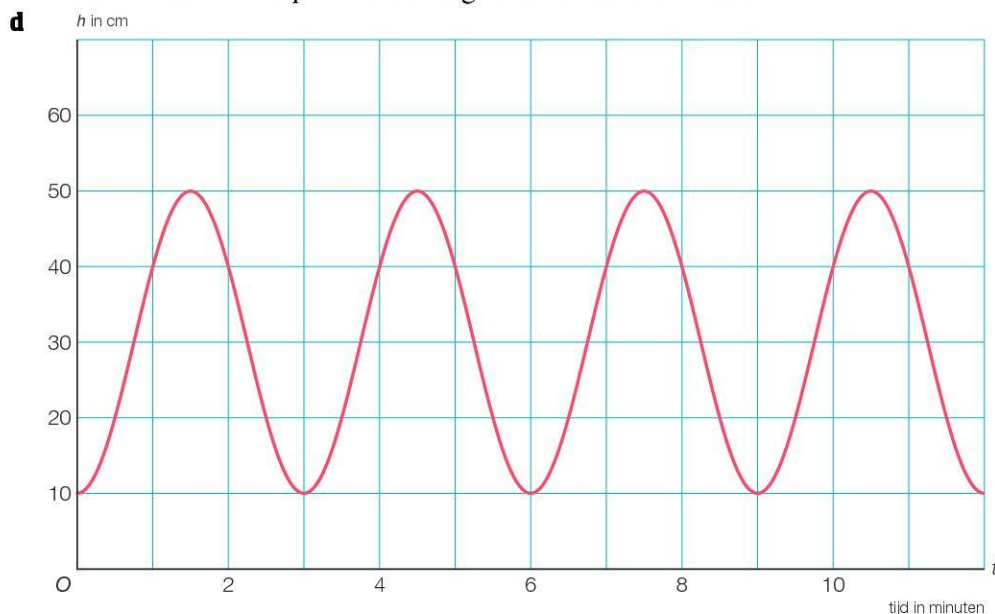
Bladzijde 121

- 5** a $\left. \begin{array}{l} \text{formule } N = b \cdot g^t \\ \text{beginwaarde } b = 7,1 \\ \text{afname } 0,9\%, \text{ dus groefactor per jaar } g = 0,991 \end{array} \right\} N = 7,1 \cdot 0,991^t$
b $t = 8$ geeft $N = 7,1 \cdot 0,991^8 \approx 6,6$ miljoen inwoners op 1 januari 2026.
c 2030 loopt van $t = 12$ tot $t = 13$.
 $t = 12$ geeft $N = 7,1 \cdot 0,991^{12} = 6,3700\dots$
 $t = 13$ geeft $N = 7,1 \cdot 0,991^{13} = 6,3127\dots$
 $6,3700\dots - 6,3127\dots = 0,0573\dots$
Dus in 2030 neemt het aantal inwoners af met 57 000.
- 6** a $\left. \begin{array}{l} \text{formule } N = at + b \\ \text{beginwaarde } b = 58 \\ \text{toename } a = 7 \end{array} \right\} N = 7t + 58$
 $t = 8$ geeft $N = 7 \cdot 8 + 58 = 114$
b $\left. \begin{array}{l} \text{formule } K = b \cdot g^t \\ \text{beginwaarde } b = 80 \\ \text{groefactor } g = 1,5 \end{array} \right\} K = 80 \cdot 1,5^t$
c $t = 6$ geeft $K = 80 \cdot 1,5^6 \approx 911$
- 7** a tabel I: $\frac{456}{285} = 1,6$, $\frac{730}{456} \approx 1,6$ en $\frac{1168}{730} = 1,6$
De hoeveelheid wordt per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
Dus tabel I hoort bij exponentiële groei.
b tabel II: $470 - 285 = 185$, $655 - 470 = 185$ en $840 - 655 = 185$
De hoeveelheid neemt per tijdseenheid met hetzelfde getal toe.
Dus tabel II hoort bij lineaire groei.
c tabel I: $\left. \begin{array}{l} \text{formule } N = b \cdot g^t \\ \text{beginwaarde } b = 285 \\ \text{groefactor } g = 1,6 \end{array} \right\} N = 285 \cdot 1,6^t$
tabel II: $\left. \begin{array}{l} \text{formule } N = at + b \\ \text{beginwaarde } b = 285 \\ \text{toename } a = 185 \end{array} \right\} N = 185t + 285$
d tabel I: $t = 10$ geeft $N = 285 \cdot 1,6^{10} \approx 31\,336$
tabel II: $t = 10$ geeft $N = 185 \cdot 10 + 285 = 2135$

- 8 a** In 11 jaar $30,8 - 29,6 = 1,2$ erbij, dus in één jaar $\frac{1,2}{11}$ erbij.
 In 2000 was de gemiddelde leeftijd waarop vrouwen in het huwelijk traden
 $29,6 + 5 \times \frac{1,2}{11} \approx 30,1$ jaar.
- b** In 10 jaar $31,0 - 30,8 = 0,2$ erbij, dus in één jaar $\frac{0,2}{10}$ erbij.
 In 2030 is de gemiddelde leeftijd waarop vrouwen zullen trouwen
 $31,0 + 14 \times \frac{0,2}{10} \approx 31,3$ jaar.

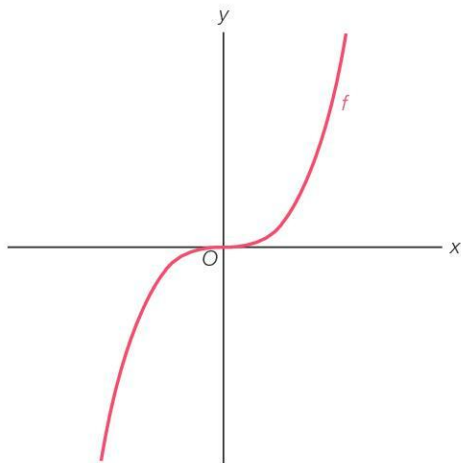
Bladzijde 122

- 9 a** periode = $10 - 4 = 6$ minuten
 evenwichtsstand = $\frac{25 + 5}{2} = 15$ cm
 amplitude = $25 - 15 = 10$ cm
- b** De periode is 6 minuten, dus op $t = 7 + 6 = 13$, $t = 13 + 6 = 19$ en $t = 19 + 6 = 25$ wordt de laagste stand bereikt.
- c** Op $t = 10$ wordt de hoogste stand bereikt. De periode is 6 minuten.
 Neem beginwaarde 10 en tel er herhaald 6 bij op.
 De hoogste stand wordt bereikt op $t = 46$ en daarna weer op $t = 52$.
 Dus na $t = 50$ wordt op $t = 52$ de hoogste stand voor het eerst bereikt.

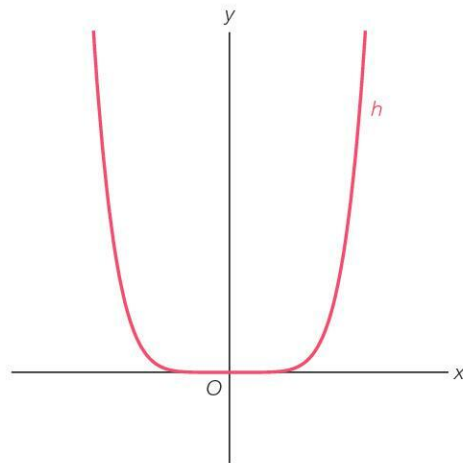


- 10 a** De veelvouden van 18 zijn 18, 36, 54, 72, 90, ...
 De veelvouden van 45 zijn 45, 90, ...
 Na 90 seconden zijn Annemarie en Floor voor het eerst weer tegelijk beneden.
- b** De veelvouden van 12 zijn 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, ...
 De veelvouden van 27 zijn 27, 54, 81, 108, ...
 Na 108 seconden zijn Annemarie en Floor voor het eerst weer tegelijk beneden.
- c** De veelvouden van 14 zijn 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, ...
 De veelvouden van 20 zijn 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, ...
 Na 140 seconden zijn Annemarie en Floor voor het eerst weer tegelijk beneden.

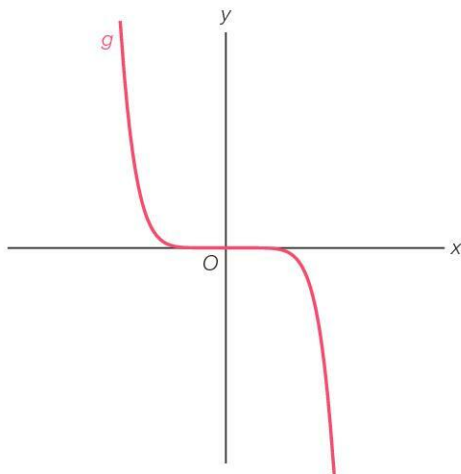
11 a $f(x) = 0,8x^3$



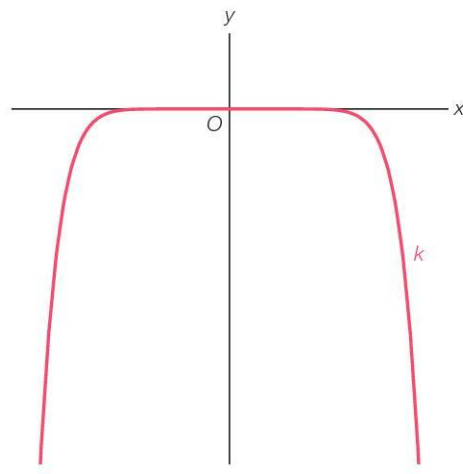
c $h(x) = 8x^6$



b $g(x) = -0,2x^5$



d $k(x) = -5x^{10}$



Bladzijde 123

12 a $x^3 = 650$

$$x = \sqrt[3]{650}$$

$$x \approx 8,66$$

b $x^8 = 820$

$$x = \sqrt[8]{820} \vee x = -\sqrt[8]{820}$$

$$x \approx 2,31 \vee x \approx -2,31$$

c $x^5 = -82$

$$x = \sqrt[5]{-82}$$

$$x \approx -2,41$$

d $x^6 = -820$

geen oplossing

e $x^4 = 0,093$

$$x = \sqrt[4]{0,093} \vee x = -\sqrt[4]{0,093}$$

$$x \approx 0,55 \vee x \approx -0,55$$

f $x^7 = -0,1$

$$x = \sqrt[7]{-0,1}$$

$$x \approx -0,72$$

13 a $2x^3 + 1 = 17$

$$2x^3 = 16$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8}$$

$$x = 2$$

b $3x^6 = 0,083$

$$x^6 = \frac{0,083}{3}$$

$$x = \sqrt[6]{\frac{0,083}{3}} \vee x = -\sqrt[6]{\frac{0,083}{3}}$$

$$x \approx 0,55 \vee x \approx -0,55$$

c $5x^7 = 100$

$$x^7 = 20$$

$$x = \sqrt[7]{20}$$

$$x \approx 1,53$$

d $2x^4 + 10 = 0$

$$2x^4 = -10$$

$$x^4 = -5$$

geen oplossing

e $3x^6 - 70 = 1050$

$$3x^6 = 1120$$

$$x^6 = \frac{1120}{3}$$

$$x = \sqrt[6]{\frac{1120}{3}} \vee x = -\sqrt[6]{\frac{1120}{3}}$$

$$x \approx 2,68 \vee x \approx -2,68$$

f $5x^3 + 8 = 2$

$$5x^3 = -6$$

$$x^3 = \frac{-6}{5}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-6}{5}}$$

$$x \approx -1,06$$

- 14 a $x^3 = 64$
 $x = 4$
 b $x^4 = 10000$
 $x = 10 \vee x = -10$
 c $5x^3 = -5$
 $x^3 = -1$
 $x = -1$
 d $2x^6 - 8 = 120$
 $2x^6 = 128$
 $x^6 = 64$
 $x = 2 \vee x = -2$

- 15 a Hij doet er $\frac{24}{12} = 2$ uur over.
 b De rit duurt $\frac{24}{48} = \frac{1}{2}$ uur.
 c $t = \frac{24}{v}$
 d Als v heel klein wordt, wordt t heel groot.
 Als de snelheid van Bas heel laag is, zal hij er heel lang over doen.

Onderzoek Begrenste groei

Bladzijde 124

- 1 a De melk had in de koelkast een temperatuur van 6°C .
 De omgevingstemperatuur is $6 + 14 = 20^\circ\text{C}$.
 b
- | t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-----|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| T | 6 | 8,1 | 9,9 | 11,4 | 12,7 | 13,8 | 14,7 | 15,5 | 16,2 | 16,8 | 17,2 |
| V | 14 | 11,9 | 10,1 | 8,6 | 7,3 | 6,2 | 5,3 | 4,5 | 3,8 | 3,2 | 2,8 |
- c $\frac{8,1}{6} = 1,35$ en $\frac{9,9}{8,1} \approx 1,22$
 De opeenvolgende delingen zijn niet gelijk, dus geen exponentiële groei.
 d $\frac{11,9}{14} = 0,85$, $\frac{10,1}{11,9} \approx 0,85$, $\frac{8,6}{10,1} \approx 0,85$, $\frac{7,3}{8,6} \approx 0,85$, $\frac{6,2}{7,3} \approx 0,85$, $\frac{5,3}{6,2} \approx 0,85$,
 $\frac{4,5}{5,3} \approx 0,85$, $\frac{3,8}{4,5} \approx 0,84$, $\frac{3,2}{3,8} \approx 0,84$ en $\frac{2,8}{3,2} \approx 0,88$
 De opeenvolgende delingen zijn bij benadering gelijk en $g < 1$, dus V neemt exponentieel af.
 In de formule $V = b \cdot g^t$ is de beginwaarde $b = 14$ en de groeifactor per minuut $g = 0,85$.
 e $t = 11$ geeft $V = 14 \cdot 0,85^{11} \approx 2,3^\circ\text{C}$
 $t = 12$ geeft $V = 14 \cdot 0,85^{12} \approx 2,0^\circ\text{C}$
 $t = 13$ geeft $V = 14 \cdot 0,85^{13} \approx 1,7^\circ\text{C}$
 f $t = 11$ geeft $T \approx 20 - 2,3 = 17,7^\circ\text{C}$
 $t = 12$ geeft $T \approx 20 - 2,0 = 18,0^\circ\text{C}$
 $t = 13$ geeft $T \approx 20 - 1,7 = 18,3^\circ\text{C}$

- 2 Uit opgave 1 volgt $V = \text{omgevingstemperatuur} - T$
 omgevingstemperatuur $= 20^\circ\text{C}$ } $V = 20 - T$, dus $T = 20 - V$
 $T = 20 - V$
 $V = 14 \cdot 0,85^t$ (zie 1d) } $T = 20 - 14 \cdot 0,85^t$

Bladzijde 125

- 3 a $\frac{18,9}{21} = 0,9$, $\frac{17,0}{18,9} \approx 0,9$, $\frac{15,3}{17,0} \approx 0,9$, $\frac{13,8}{15,3} \approx 0,9$, $\frac{12,4}{13,8} \approx 0,9$ en $\frac{11,2}{12,4} \approx 0,9$
 De opeenvolgende delingen zijn bij benadering gelijk, dus exponentiële groei.
 formule $V = b \cdot g^t$
 beginwaarde $b = 21$
 groeifactor per minuut $g = 0,9$ } $V = 21 \cdot 0,9^t$

b De omgevingstemperatuur is $T + V = 4 + 21 = 25^\circ\text{C}$, dus er geldt

$$\left. \begin{array}{l} T = 25 - V \\ V = 21 \cdot 0,9^t \end{array} \right\} T = 25 - 21 \cdot 0,9^t$$

c $25 - 21 \cdot 0,9^t > 17,5$

$$-21 \cdot 0,9^t > -7,5$$

$$21 \cdot 0,9^t < 7,5$$

Neem beginwaarde 21 en vermenigvuldig herhaald met 0,9.

$$t = 9 \text{ geeft } 21 \cdot 0,9^9 \approx 8,1$$

$$t = 10 \text{ geeft } 21 \cdot 0,9^{10} \approx 7,3$$

Dus voor $t = 10$ is de temperatuur van het vlees voor het eerst meer dan $17,5^\circ\text{C}$.

4 Stel V is het verschil tussen de temperatuur van de koffie en de omgevingstemperatuur.

Dan geldt: formule $V = b \cdot g^t$

beginwaarde $b = 56$

afname 18%, dus groeifactor per minuut $g = 0,82$

$$\left. \begin{array}{l} \text{beginwaarde } b = 56 \\ \text{afname 18\%, dus groeifactor per minuut } g = 0,82 \end{array} \right\} V = 56 \cdot 0,82^t$$

Tamara moet wachten totdat geldt $V = 48 - 24 = 24$.

Neem beginwaarde 56 en vermenigvuldig herhaald met 0,82.

$$t = 4 \text{ geeft } V \approx 25,3$$

$$t = 5 \text{ geeft } V \approx 20,8$$

Dus Tamara moet ruim vier minuten wachten.

5 Stel V is het verschil tussen de temperatuur van de boter en de omgevingstemperatuur.

Op $t = 0$ is $V = 26 - 5 = 21$.

Op $t = 2$ is $V = 20,5 - 5 = 15,5$.

formule $V = b \cdot g^t$

beginwaarde $b = 21$

$$\left. \begin{array}{l} \text{formule } V = b \cdot g^t \\ \text{beginwaarde } b = 21 \\ \text{groeifactor per twee minuten } g = \frac{15,5}{21} \end{array} \right\} V = 21 \cdot \left(\frac{15,5}{21}\right)^t$$

Tien minuten nadat de boter in de koelkast is gelegd, dus voor $t = 5$, is $V = 21 \cdot \left(\frac{15,5}{21}\right)^5 \approx 4,6$.

De temperatuur van de boter is dan ongeveer $5 + 4,6 = 9,6^\circ\text{C}$.

6 Vissen, bomen, en andere materiële zaken nemen ruimte in. In praktijk is de beschikbare ruimte in een vijver of een bos beperkt. Bovendien hebben vissen, bomen en andere levende organismen leefruimte nodig. Hierdoor kan het aantal vissen of het aantal bomen niet onbeperkt doorgroeien. Er is sprake van begrensde groei. Het maximale aantal organismen in een gegeven ruimte wordt het verzadigingsniveau genoemd.

7 Maximaal 1800 vissen, dus het verschil V tussen het maximum en het huidige aantal A is $V = 1800 - A$.

t	0	1	2	3	4	5
A	60	495	821	1066	1250	1387
V	1740	1305	979	734	550	413

$$\frac{1305}{1740} = 0,75, \frac{979}{1305} \approx 0,75, \frac{734}{979} \approx 0,75, \frac{550}{734} \approx 0,75, \text{ en } \frac{413}{550} \approx 0,75$$

De opeenvolgende delingen zijn bij benadering gelijk, dus bij V is sprake van exponentiële groei.

formule $V = b \cdot g^t$

beginwaarde $b = 1740$

groeifactor per jaar $g = 0,75$

Meer dan 1750 vissen betekent

$$V < 1800 - 1750$$

$$1740 \cdot 0,75^t < 50$$

Neem beginwaarde 1740 en vermenigvuldig herhaald met 0,75.

$$t = 12 \text{ geeft } V \approx 55$$

$$t = 13 \text{ geeft } V \approx 41$$

Dus na 13 jaar zijn er voor het eerst meer dan 1750 vissen in de vijver aanwezig.

9 Spreiding, tellen en kans

Voorkennis Centrummaten

Bladzijde 128

- 1 a** totale frequentie = $8 + 13 + 9 + 4 + 5 + 2 + 1 = 42$
Dus er zijn 42 controles in de tabel verwerkt.
- b** $8 \cdot 5 + 13 \cdot 6 + 9 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 11 = 289$
Dus er zijn 289 boetes uitgedeeld.
- c** gemiddelde = $\frac{289}{42} \approx 6,9$
Dus per controlebeurt kregen er gemiddeld 6,9 automobilisten een boete.
- d** relatieve frequentie = $\frac{5}{42} \times 100\% \approx 11,9\%$
- e** $\frac{2+1}{42} \times 100\% \approx 7,1\%$
Dus bij 7,1% van de controles werden meer dan 9 boetes uitgedeeld.

Bladzijde 129

- 2 a** totale frequentie = $1 + 2 + 6 + 7 + 4 + 3 + 4 + 1 = 28$
Dus 28 leerlingen hebben het proefwerk gemaakt.
- b** gemiddelde = $\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 1 \cdot 10}{28} \approx 6,5$
- c** 20% van 28 is $0,20 \times 28 = 5,6$.
Dus van de waarnemingsgetallen 5 en 6 is de relatieve frequentie groter dan 20%.
- 3 a** Ze kan die donderdag de bus hebben gemist of de bus had pech.
- b** gemiddelde = $\frac{6 + 5 + 5 + 49 + 5}{5} = 14$ minuten
Het gemiddelde geeft geen goede indruk van de reistijd, want vier van de vijf tijden liggen ver onder het gemiddelde. De uitschieter zorgt voor een verkeerde indruk.

Bladzijde 130

- 4 a** Bij 28 waarnemingsgetallen is de mediaan het gemiddelde van het 14^e en het 15^e getal.
b Bij 87 waarnemingsgetallen is de mediaan het 44^e getal.
c Bij 500 waarnemingsgetallen is de mediaan het gemiddelde van het 250^e en het 251^e getal.
d Bij 1857 waarnemingsgetallen is de mediaan het 929^e getal.
- 5 a** totale frequentie = $7 + 15 + 9 + 12 + 14 + 25 + 4 = 86$
gemiddelde = $\frac{7 \cdot 8 + 15 \cdot 9 + 9 \cdot 10 + 12 \cdot 11 + 14 \cdot 12 + 25 \cdot 13 + 4 \cdot 14}{86} \approx 11,2$
- b** mediaan = $\frac{43^{\text{e}} \text{ getal} + 44^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{11 + 12}{2} = 11,5$
modus = 13
- 6** gemiddelde = $\frac{33 + 30 + 38 + \dots + 35 + 36}{20} = \frac{704}{20} = 35,2$
getallen in volgorde: 29 30 32 33 33 33 34 35 35 35 35 36 36 37 38 38 38 38 39 40
mediaan = $\frac{10^{\text{e}} \text{ getal} + 11^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{35 + 35}{2} = 35$
Er is geen modus.
- 7 a** totale frequentie = $8 + 6 + 4 + 7 + 3 + 1 + 0 + 1 = 30$
Er werden in totaal 30 wedstrijden gespeeld door EDO, dus er waren 15 andere teams.
In totaal deden er dus 16 teams mee aan de competitie.
- b** $8 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 7 = 59$
Dus EDO heeft in totaal 59 doelpunten gescoord.

c EDO heeft in 22 wedstrijden gescoord, dus in $\frac{22}{30} \times 100\% \approx 73,3\%$.

d gemiddelde = $\frac{59}{30} \approx 1,97$

Dus EDO heeft gemiddeld ongeveer 1,97 doelpunten per wedstrijd gescoord.

e mediaan = $\frac{15^{\text{e}} \text{ getal} + 16^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$
modus = 0

9.1 Spreidingsmaten

Bladzijde 131

- 1 a totale frequentie = 14, dus mediaan = $\frac{7^{\text{e}} \text{ getal} + 8^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{6+7}{2} = 6,5$.
b eerste groep: 3 4 4 5 6 6 6
mediaan eerste groep = 5
c Dat zijn de cijfers die links van de mediaan van de eerste groep liggen.
Dus drie jongens krijgen steunles.

Bladzijde 132

- 2 a 26 32 38 51 54 58 62 62 67 70
mediaan = $\frac{54+58}{2} = 56$
eerste helft: 26 32 38 51 54
 $Q_1 = 38$
tweede helft: 58 62 62 67 70
 $Q_3 = 62$
b 17 17 18 18 18 20 23 25 29 31 49 51 51
mediaan = 23
eerste helft: 17 17 18 18 18 20
 $Q_1 = \frac{18+18}{2} = 18$
tweede helft: 25 29 31 49 51 51
 $Q_3 = \frac{31+49}{2} = 40$
c 1,7 1,9 2,6 3,2 6,3 7,9 8,3
mediaan = 3,2
eerste helft: 1,7 1,9 2,6
 $Q_1 = 1,9$
tweede helft: 6,3 7,9 8,3
 $Q_3 = 7,9$
- 3 totale frequentie = $4 + 2 + 3 + 7 + 8 + 5 + 1 = 30$
De mediaan verdeelt de waarnemingsgetallen in twee groepen van 15.
 $Q_1 = 8^{\text{e}} \text{ getal} = 5 \text{ uur}$
 $Q_3 = 23^{\text{e}} \text{ getal} = 9 \text{ uur}$
- 4 a Het onderzoek van Freek duurde $8 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 23 \cdot 4 + \dots + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 12 = 420$ seconden.
Dus 7 minuten.
Het onderzoek van Mathilde duurde $5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + \dots + 6 \cdot 11 + 4 \cdot 12 = 600$ seconden.
Dus 10 minuten.
b Freek heeft $8 + 18 + 23 + \dots + 3 + 4 = 82$ tijden genoteerd, dus hij heeft tijdens zijn onderzoek 83 auto's voorbij zien rijden.
c De mediaan verdeelt de waarnemingsgetallen van Freek in twee groepen van 41.
 $Q_1 = 21^{\text{e}} \text{ getal} = 3 \text{ seconden}$
 $Q_3 = 62^{\text{e}} \text{ getal} = 6 \text{ seconden}$

- d** Mathilde heeft $5 + 3 + 7 + \dots + 6 + 4 = 81$ tijden geregistreerd.
De mediaan verdeelt de waarnemingsgetallen van Mathilde in twee groepen van 40.

$$Q_1 = \frac{20^{\text{e}} \text{ getal} + 21^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{6 + 6}{2} = 6 \text{ seconden}$$

$$Q_3 = \frac{61^{\text{e}} \text{ getal} + 62^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{9 + 9}{2} = 9 \text{ seconden}$$
- e** Bij Freek komen in 7 minuten 83 auto's voorbij en bij Mathilde in 10 minuten 82 auto's.
Dus Freek stond langs de drukste weg.

Bladzijde 133

- 5 a** Een medewerker werkt negen uur per dag.

b medewerker A

$$\text{gemiddelde} = \frac{5 + 6 + 8 + 9 + 14 + 19 + 20 + 22 + 23}{9} = 14$$

mediaan = 14

eerste helft: 5 6 8 9

$$Q_1 = \frac{6 + 8}{2} = 7$$

tweede helft: 19 20 22 23

$$Q_3 = \frac{20 + 22}{2} = 21$$

medewerker B

$$\text{gemiddelde} = \frac{5 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 23}{9} = 14$$

mediaan = 14

eerste helft: 5 11 12 13

$$Q_1 = \frac{11 + 12}{2} = 11,5$$

tweede helft: 15 16 17 23

$$Q_3 = \frac{16 + 17}{2} = 16,5$$

- c** Van A en B is het gemiddelde hetzelfde, en ook de mediaan is hetzelfde.
Dus het gemiddelde en de mediaan geven geen goede indruk van het verschil in de werkzaamheden tussen A en B.
Het eerste en het derde kwartiel geven wel een goede indruk van het verschil in de werkzaamheden tussen A en B. Hieruit volgt dat bij A meer rustige en meer drukke uren zijn voorgekomen, dus dat de drukte meer gespreid is dan bij B.

Bladzijde 134

- 6 a** 1 2 3 4 5 5 6 6 6 6 6 7 8 8 8 8

totale frequentie = 16

$$\text{mediaan} = \frac{8^{\text{e}} \text{ getal} + 9^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{6 + 6}{2} = 6$$

$$Q_1 = \frac{4^{\text{e}} \text{ getal} + 5^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{4 + 5}{2} = 4,5 \text{ en } Q_3 = \frac{12^{\text{e}} \text{ getal} + 13^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{7 + 8}{2} = 7,5$$

spreidingsbreedte = $8 - 1 = 7$ en kwartielafstand = $7,5 - 4,5 = 3$

- b** 15 18 18 20 20 22 23 23 24 25

totale frequentie = 10

$$\text{mediaan} = \frac{5^{\text{e}} \text{ getal} + 6^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{20 + 22}{2} = 21$$

$$Q_1 = 3^{\text{e}} \text{ getal} = 18 \text{ en } Q_3 = 8^{\text{e}} \text{ getal} = 23$$

spreidingsbreedte = $25 - 15 = 10$ en kwartielafstand = $23 - 18 = 5$

- c** 14 15 15 19 20 21 22 22 22 22 26 27 29

totale frequentie = 13

mediaan = $7^{\text{e}} \text{ getal} = 22$

$$Q_1 = \frac{3^{\text{e}} \text{ getal} + 4^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{15 + 19}{2} = 17 \text{ en } Q_3 = \frac{10^{\text{e}} \text{ getal} + 11^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{22 + 26}{2} = 24$$

spreidingsbreedte = $29 - 14 = 15$ en kwartielafstand = $24 - 17 = 7$

- 7** spreidingsbreedte = $82 - 70 = 12$
 totale frequentie = $1 + 5 + 5 + \dots + 4 + 5 = 98$
 De mediaan verdeelt de waarnemingsgetallen in twee groepen van 49.
 $Q_1 = 25^{\text{e}}$ getal = 73 en $Q_3 = 74^{\text{e}}$ getal = 79
 kwartielfstand = $79 - 73 = 6$

- 8 a** Hoe groter de spreidingsbreedte, hoe groter het verschil tussen de kleinste en de grootste sprong. Een grote spreidingsbreedte is gunstiger, want dan is er een grote kans dat de verspringer in elk geval één grote sprong heeft gemaakt.
b Een kleine spreidingsbreedte is gunstiger, want dan is er een grote kans dat er geen onvoldoendes op zijn overgangsrapport staan.

Bladzijde 135

9 histogram a

totale frequentie = $1 + 4 + 18 + 4 + 1 = 28$

De mediaan verdeelt de waarnemingsgetallen in twee groepen van 14.

$$Q_1 = \frac{7^{\text{e}} \text{ getal} + 8^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3 \text{ kg en } Q_3 = \frac{21^{\text{e}} \text{ getal} + 22^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3 \text{ kg}$$

kwartielfstand = $3 - 3 = 0 \text{ kg}$

histogram b

totale frequentie = $18 + 5 + 2 + 5 + 18 = 48$

De mediaan verdeelt de waarnemingsgetallen in twee groepen van 24.

$$Q_1 = \frac{12^{\text{e}} \text{ getal} + 13^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2 \text{ kg en } Q_3 = \frac{36^{\text{e}} \text{ getal} + 37^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4 \text{ kg}$$

kwartielfstand = $4 - 2 = 2 \text{ kg}$

histogram c

totale frequentie = $16 + 16 + 16 + 16 + 16 = 80$

De mediaan verdeelt de waarnemingsgetallen in twee groepen van 40.

$$Q_1 = \frac{20^{\text{e}} \text{ getal} + 21^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{2,5 + 2,5}{2} = 2,5 \text{ kg en } Q_3 = \frac{60^{\text{e}} \text{ getal} + 61^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{3,5 + 3,5}{2} = 3,5 \text{ kg}$$

kwartielfstand = $3,5 - 2,5 = 1 \text{ kg}$

Bij alle drie de histogrammen is de spreidingsbreedte $4 - 2 = 2 \text{ kg}$.

Bij histogram b is de kwartielfstand het grootst.

Dus bij histogram b is de spreiding het grootst.

Bij histogram a is de kwartielfstand het kleinst.

Dus bij histogram a is de spreiding het kleinst.

10 a jongens

totale frequentie = $3 + 0 + 1 + \dots + 2 + 1 = 15$

mediaan = 8^{e} getal = 4 uur

$Q_1 = 4^{\text{e}}$ getal = 2 uur en $Q_3 = 12^{\text{e}}$ getal = 8 uur

spreidingsbreedte = $10 - 0 = 10$ uur en kwartielfstand = $8 - 2 = 6$ uur

meisjes

totale frequentie = $4 + 3 + 3 + \dots + 1 + 1 = 17$

mediaan = 9^{e} getal = 2 uur

$$Q_1 = \frac{4^{\text{e}} \text{ getal} + 5^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{0 + 1}{2} = 0,5 \text{ uur en } Q_3 = \frac{13^{\text{e}} \text{ getal} + 14^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{3 + 4}{2} = 3,5 \text{ uur}$$

spreidingsbreedte = $10 - 0 = 10$ uur en kwartielfstand = $3,5 - 0,5 = 3$ uur

- b** De spreiding bij de jongens is groter.

11 a Neem bijvoorbeeld $p = 80$.

Dan is totale frequentie = 98, $Q_1 = 25^{\text{e}}$ getal = 5 en $Q_3 = 74^{\text{e}}$ getal = 5.

Dus kwartielfstand = $5 - 5 = 0$.

- b** Neem bijvoorbeeld $p = 0$.

Dan is totale frequentie = 18, $Q_1 = 5^{\text{e}}$ getal = 3 en $Q_3 = 14^{\text{e}}$ getal = 7.

Dus kwartielfstand = $7 - 3 = 4$.

9.2 De boxplot

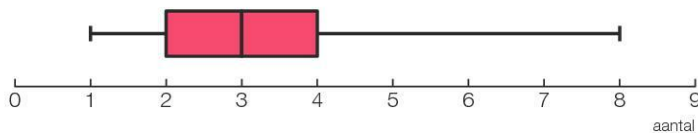
Bladzijde 136

- 12 a** Elke groep bestaat uit $\frac{15}{60} \times 100\% = 25\%$ van de waarnemingsgetallen.
- b** De mediaan verdeelt 50 waarnemingsgetallen in twee groepen van 25. Deze groepen bevatten elk een oneven aantal waarnemingsgetallen. Om de eerste helft op te splitsen in twee even grote groepen laat je het eerste kwartiel weg en om de tweede helft op te splitsen in twee even grote groepen laat je het derde kwartiel weg. Dit geeft vier groepen van 12 waarnemingsgetallen. Elke groep bestaat dan dus uit $\frac{12}{50} \times 100\% = 24\%$ van de waarnemingsgetallen.

Bladzijde 137

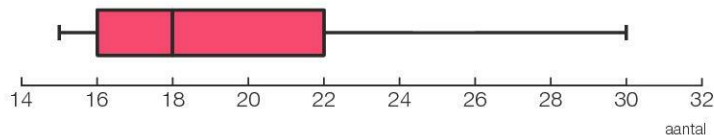
- 13** 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 8
 kleinste getal = 1 en grootste getal = 8
 mediaan = 10^e getal = 3
 $Q_1 = 5^{\text{e}}$ getal = 2 en $Q_3 = 15^{\text{e}}$ getal = 4

PERSONEN PER HUISHOUDEN



- 14** totale frequentie = $3 + 2 + 1 + 4 + 1 + 2 + 1 = 14$
 kleinste getal = 15 en grootste getal = 30
 mediaan = $\frac{7^{\text{e}} \text{ getal} + 8^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{18 + 18}{2} = 18$
 $Q_1 = 4^{\text{e}}$ getal = 16 en $Q_3 = 11^{\text{e}}$ getal = 22

DOELPUNTEN NA TIEN WEDSTRIJDEN

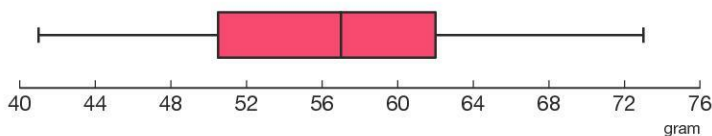


- 15 a** GEWICHT IN GRAM

4	1 4 8 9 9
5	0 0 0 1 3 3 4 5 5 6 7 7 8 8 9 9
6	0 2 2 2 3 4 5 6 8
7	1 3
tientallen	eenheden

- b** kleinste getal = 41 en grootste getal = 73
 mediaan = $\frac{16^{\text{e}} \text{ getal} + 17^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{57 + 57}{2} = 57$
 $Q_1 = \frac{8^{\text{e}} \text{ getal} + 9^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{50 + 51}{2} = 50,5$ en $Q_3 = \frac{24^{\text{e}} \text{ getal} + 25^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{62 + 62}{2} = 62$

GEWICHT EIEREN



- c** *

16 jongens

Er zijn $8 + 6 + 8 + 15 + 7 + 5 + 4 + 2 = 55$ jongens.

kleinste getal = 0 en grootste getal = 23

mediaan = 28^e getal = 8

$Q_1 = 14^{\text{e}}$ getal = 1 en $Q_3 = 42^{\text{e}}$ getal = 12

meisjes

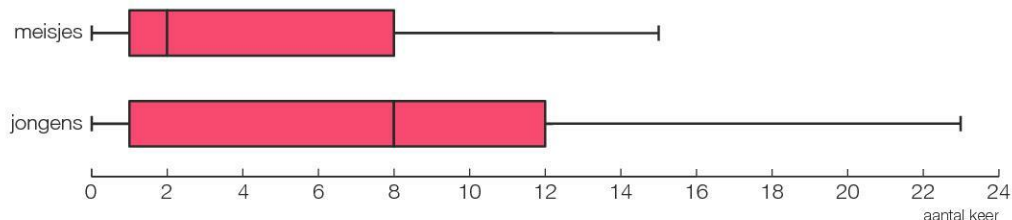
Er zijn $13 + 10 + 8 + 9 + 6 + 3 + 4 + 2 = 55$ meisjes.

kleinste getal = 0 en grootste getal = 15

mediaan = 28^e getal = 2

$Q_1 = 14^{\text{e}}$ getal = 1 en $Q_3 = 42^{\text{e}}$ getal = 8

ONLINE AANKOPEN

**Bladzijde 138**

17 a Op school I geven 33 docenten les en op school II geven 26 docenten les.

b school I

mediaan = 17^e getal = 41

modus = 40

school II

mediaan = $\frac{13^{\text{e}} \text{ getal} + 14^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{43 + 44}{2} = 43,5$

modus = 44

c school I

kleinste getal = 22 en grootste getal = 56

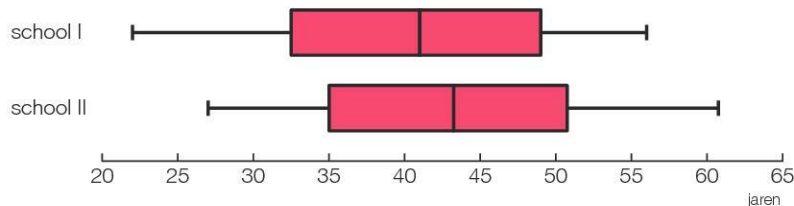
$Q_1 = \frac{8^{\text{e}} \text{ getal} + 9^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{32 + 33}{2} = 32,5$ en $Q_3 = \frac{25^{\text{e}} \text{ getal} + 26^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{48 + 50}{2} = 49$

school II

kleinste getal = 27 en grootste getal = 61

$Q_1 = 7^{\text{e}} \text{ getal} = 35$ en $Q_3 = 20^{\text{e}} \text{ getal} = 51$

LEEFTIJD



18 25% van de leerlingen krijgt meer dan 26 euro per week en 25% van de leerlingen krijgt minder dan 14 euro per week. Dat zijn in beide gevallen $0,25 \times 120 = 30$ leerlingen. Dus wat Lex zegt klopt niet. De lengte van een boxplot zegt niets over het aantal waarnemingsgetallen.

Bladzijde 139

- 19 a $Q_1 = 16$ en $Q_3 = 28$, dus kwartielafstand $= 28 - 16 = 12$.
b 25% van de leerlingen had een score van 24 tot en met 28 punten.
Dat zijn $0,25 \times 160 = 40$ leerlingen.
c 75% van de leerlingen had 28 punten of minder.
Dat zijn $0,75 \times 160 = 120$ leerlingen.
d De 25% best scorende leerlingen hadden een score van 28 tot en met 38 punten.
e 20 ligt halverwege 16 en 24. Dus ongeveer $25\% + \frac{1}{2} \times 25\% = 37,5\%$.
Dat zijn $0,375 \times 160 = 60$ leerlingen.

Bladzijde 140

- 20 a Van soort C zijn de meeste appels zwaarder dan 130 gram, namelijk 75%.
Bij soort A is dat 25% en bij soort B is dat 50%.
b Er zijn $0,50 \times 80 + 80 + 80 = 200$ appels zwaarder dan 118 gram.
c De zwaarste appel weegt 150 gram.
d Bij soort B is de kwartielafstand het kleinst.
Deze is $135 - 127 = 8$ gram.
e Uit de figuur volgen de conclusies 1 en 2.
- 21 Bij A hoort III.
Bij B hoort IV.
Bij C hoort I.
Bij D hoort II.

Bladzijde 141

- 22 a De hittegolf in 1975 duurde 18 dagen.
b Langer dan 7 dagen, dus dat is 8 dagen of meer. Dat zijn $0,5 \times 26 = 13$ hittegolven.
c Liggen de kleinste en grootste waarneming even ver van de mediaan en liggen Q_1 en Q_3 even ver van de mediaan, dan zal het gemiddelde ongeveer gelijk zijn aan de mediaan.
Ligt Q_3 verder van de mediaan dan Q_1 , en ligt ook de grootste waarneming verder van de mediaan dan de kleinste, dan is het gemiddelde groter dan de mediaan.
De gemiddelde duur van een hittegolf is dus groter dan de mediaan.
d Oneens, want 25% van de hittegolven duurde korter dan 7 dagen en 25% van de hittegolven duurde langer dan 10 dagen. Dus de aantallen zijn gelijk.
- 23 a In speelronde 30 van 2016-2017 werden 43 doelpunten gescoord.
In speelronde 23 van 2017-2018 werden 16 doelpunten gescoord.
Het verschil is $43 - 16 = 27$ doelpunten.
b seizoen 2016-2017
spreidingsbreedte $= 43 - 17 = 26$ en kwartielafstand $= 27 - 22 = 5$
seizoen 2017-2018
spreidingsbreedte $= 37 - 16 = 21$ en kwartielafstand $= 32 - 25 = 7$
c In het seizoen 2016-2017 werden $34 \times 26 = 884$ doelpunten gescoord.

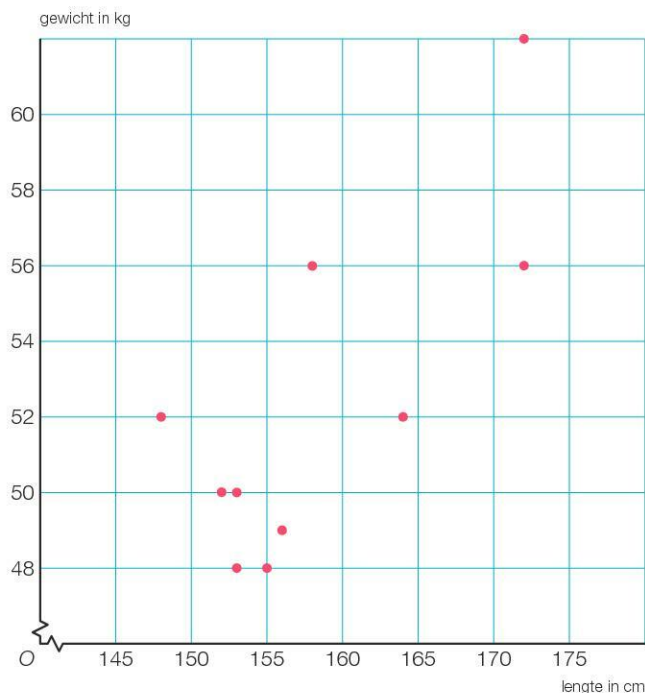
9.3 Spreidingsdiagrammen

Bladzijde 142

- 24 a Van elf leerlingen zijn de gegevens verwerkt.
b Haar schoenmaat is 37 en ze is 155 cm lang.
c Nee, want de langste leerling heeft schoenmaat 38, en de grootste schoenmaat is 40.
d gemiddelde $= \frac{150 + 4 \cdot 155 + 2 \cdot 158 + 2 \cdot 160 + 163 + 165}{11} \approx 158$ cm

25

a



b Dat is niet altijd het geval. Er is bijvoorbeeld een leerling van 164 cm die 52 kg weegt, maar er is ook een leerling van 158 cm die 56 kg weegt.

c $\text{gemiddelde} = \frac{49 + 52 + 56 + 56 + 62}{5} = 55 \text{ kg}$

d $\text{gemiddelde} = \frac{152 + 153 + 153 + 155 + 156}{5} = 153,8 \text{ cm}$

Bladzijde 143

26

a Van negen leerlingen is de handlengte meer dan 17 cm.

Van drie leerlingen is de voetslengte minder dan 27 cm.

b Dat is niet altijd het geval. Zo heeft bijvoorbeeld degene met de kleinste handlengte een grotere voetslengte dan twee andere leerlingen. Dus Lex heeft ongelijk.

c $\text{gemiddelde} = \frac{2 \cdot 24 + 26 + 2 \cdot 27 + 2 \cdot 28 + 3 \cdot 30 + 31 + 2 \cdot 32}{13} \approx 28,4 \text{ cm}$

d mediaan = 7^e getal = 18 cm

e modus voetslengten = 30 cm

modus handlengten = 19 cm

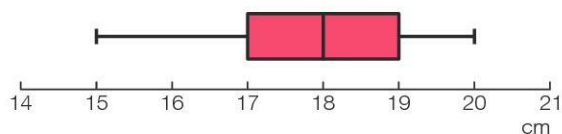
f totale frequentie = 13

kleinste getal = 15 en grootste getal = 20

mediaan = 7^e getal = 18

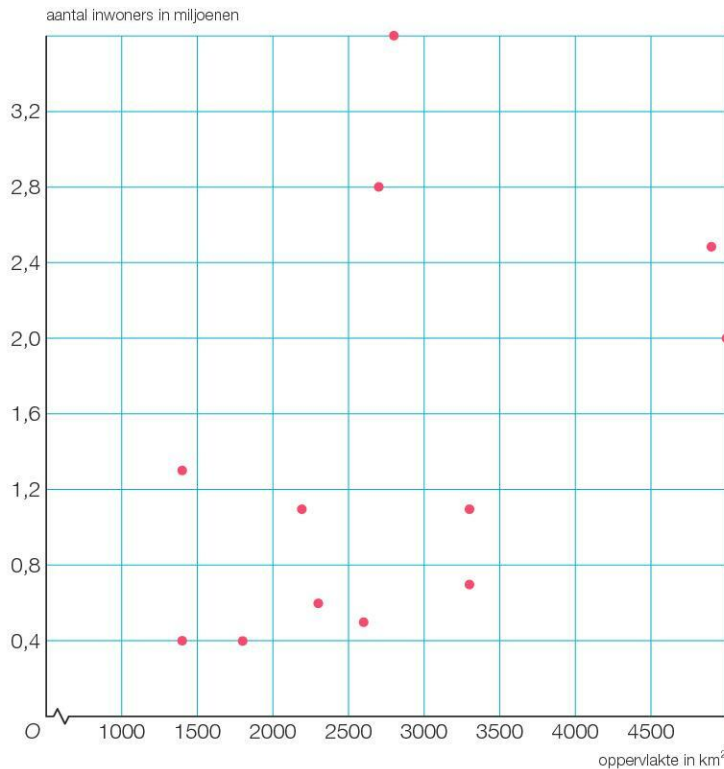
$Q_1 = \frac{3^{\text{e}} \text{ getal} + 4^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{17 + 17}{2} = 17$ en $Q_3 = \frac{10^{\text{e}} \text{ getal} + 11^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{19 + 19}{2} = 19$

HANDELENTE



27

a



b Dat is niet zo. De provincie met de meeste inwoners heeft bijvoorbeeld niet de grootste oppervlakte.

c Gebruik bevolkingsdichtheid = $\frac{\text{aantal inwoners}}{\text{oppervlakte}}$.

Je krijgt dan het aantal inwoners per km².

provincie	Gr	Fr	Dr	Ov	Flv	Gld
bevolkingsdichtheid	261	212	192	333	286	400

provincie	Ut	NH	ZH	Zld	NB	Lim
bevolkingsdichtheid	929	1037	1286	222	510	500

Zuid-Holland heeft de grootste bevolkingsdichtheid en Drenthe de kleinste.

28

a totale frequentie = 16

$$\text{mediaan} = \frac{8^{\text{e}} \text{ getal} + 9^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4 \text{ jaar}$$

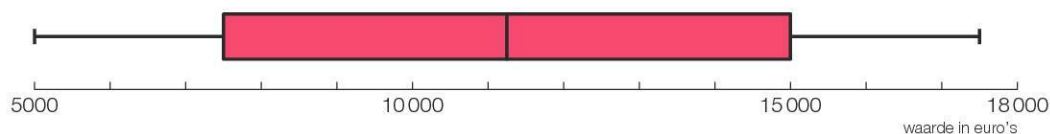
b kleinste getal = 5000 en grootste getal = 17 500

$$\text{mediaan} = \frac{8^{\text{e}} \text{ getal} + 9^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{10\,000 + 12\,500}{2} = 11\,250$$

$$Q_1 = \frac{4^{\text{e}} \text{ getal} + 5^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{7500 + 7500}{2} = 7500 \text{ en}$$

$$Q_3 = \frac{12^{\text{e}} \text{ getal} + 13^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{15\,000 + 15\,000}{2} = 15\,000$$

WAARDE AUTO'S



c De modus van de leeftijden is 4 jaar.

d Dat klopt niet. Hoe ouder een auto is, hoe minder hij waard wordt. Het kan voorkomen dat een oudere auto toch meer waard is dan een jongere. Het ene automerk is bijvoorbeeld duurder dan het andere automerk. Ook kan een goed onderhouden oudere auto meer waard zijn dan een jongere auto met schade.

Bladzijde 144

29

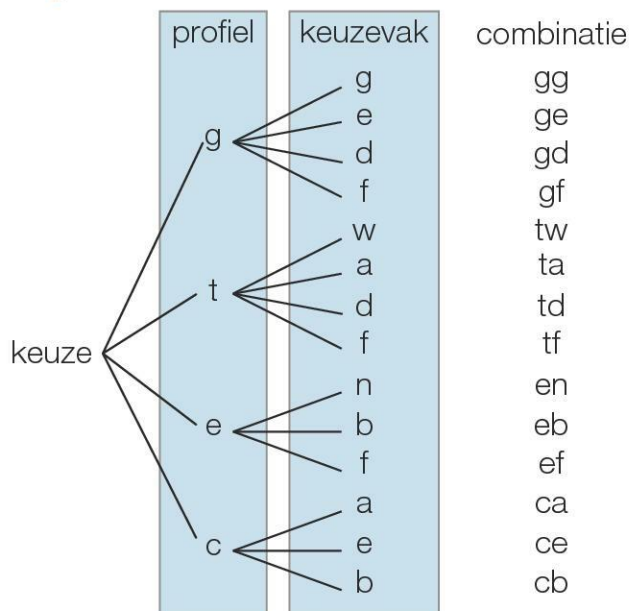
- a** Zweden en Noorwegen doen het bij allebei beter dan Nederland.
- b** Bij het Verenigd Koninkrijk is 6% van de bevolking vrijwilliger in de sport en 26% van alle vrijwilligers vrijwilliger in de sport. Bij Finland zijn deze percentages respectievelijk 4% en 32%.
Bij Oostenrijk is 5% van de bevolking vrijwilliger in de sport en 22% van alle vrijwilligers vrijwilliger in de sport. Bij Portugal zijn deze percentages respectievelijk 3% en 24%.
Bij België is 8% van de bevolking vrijwilliger in de sport en 35% van alle vrijwilligers vrijwilliger in de sport. Bij Slovenië zijn deze percentages respectievelijk 7% en 38%.
Bij een hoger percentage vrijwilliger in de sport als percentage van de bevolking van 18 jaar of ouder hoort dus niet altijd een hoger percentage van alle vrijwilligers. Marlies heeft dus geen gelijk.
- c** 5% van 6,8 miljoen is $0,05 \times 6,8 = 0,34$ miljoen vrijwilligers in de sport.
22% van alle vrijwilligers is vrijwilliger in de sport, dus $0,22 \times \text{TOTAAL} = 0,34$ miljoen.
Hieruit volgt $\text{TOTAAL} = \frac{0,34 \text{ miljoen}}{0,22} \approx 1,5$ miljoen vrijwilligers in Oostenrijk.
- d** In Luxemburg zijn $0,36 \times 75\,000 = 27\,000$ vrijwilligers in de sport actief.
Van de totale bevolking van 18 jaar of ouder is 6% als vrijwilliger actief, dus
 $0,06 \times \text{TOTAAL} = 27\,000$ oftewel $\text{TOTAAL} = \frac{27\,000}{0,06} = 450\,000$ Luxemburgers zijn 18 jaar of ouder.
- e** 4% van de Finnen van 18 jaar of ouder is vrijwilliger in de sport.
32% van de vrijwilligers is vrijwilliger in de sport.
Hieruit volgt $0,04 \times \text{aantal Finnen ouder dan 18 jaar} = 0,32 \times \text{aantal vrijwilligers}$.
Dus $\frac{\text{aantal vrijwilligers}}{\text{aantal Finnen ouder dan 18 jaar}} = \frac{0,04}{0,32}$.
Dus $\frac{0,04}{0,32} \times 100\% = 12,5\%$ is vrijwilliger.

9.4 Telproblemen

Bladzijde 145

30

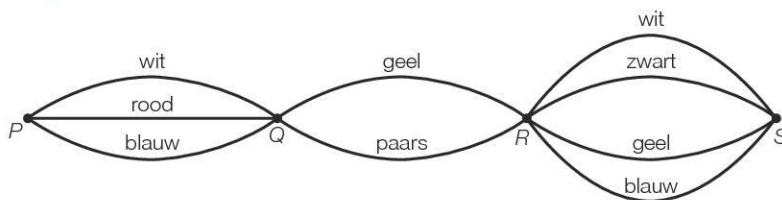
a



- b** 14 manieren
- c** De exacte vakken zijn wiskunde D, biologie en natuurkunde, dus 4 mogelijkheden

Bladzijde 146

31 a

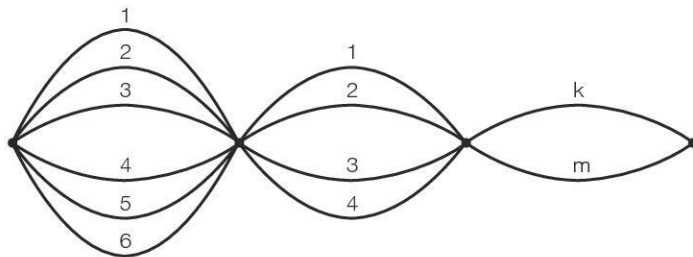


b aantal mogelijkheden = $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

c aantal mogelijkheden = $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$

d aantal mogelijkheden = $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

32 a gewone dobbelsteen viervlaksdobbelsteen 1-euro muntstuk



b aantal mogelijkheden = $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$

33 a aantal mogelijkheden = $6 \cdot 4 \cdot 8 = 192$

b aantal mogelijkheden = $6 \cdot 4 \cdot 1 = 24$

Bladzijde 147

34 a aantal mogelijkheden = $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 240$

b aantal mogelijkheden = $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 160$

c aantal mogelijkheden = $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$

d aantal mogelijkheden = $4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = 20$

e aantal mogelijkheden = $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

Bladzijde 148

35 a aantal manieren = $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 = 600$

b aantal mogelijkheden = $8 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 5 = 1280$

Het aantal mogelijkheden om de band te vormen neemt toe met $1280 - 600 = 680$.

36 a aantal manieren = $1 \cdot 6 \cdot 2 = 12$

b aantal manieren = $2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$

c aantal manieren = $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$

d aantal manieren = $6 \cdot 10 \cdot 10 = 600$

37 a aantal mogelijkheden = $5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$

b aantal mogelijkheden = $1 \cdot 3 \cdot 6 = 18$

c aantal mogelijkheden = $3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$

d aantal mogelijkheden = $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$

e aantal mogelijkheden = $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$

Bladzijde 149

38 a aantal manieren = $24 \cdot 24 = 576$

b aantal manieren = $24 \cdot 23 = 552$

c Methode 2 zou je eerlijker kunnen vinden, want bij methode 1 bestaat de kans dat één persoon beide kaartjes wint.

Bladzijde 150

- 39 **a** aantal manieren = $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$
b aantal mogelijkheden = $10^6 = 1\,000\,000$
aantal mogelijkheden = $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$
aantal mogelijkheden = $10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 10$
c aantal mogelijkheden = $1 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 1 = 17\,576$
aantal mogelijkheden = $1 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 1 = 12\,144$
- 40 **a** aantal mogelijkheden = $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$
b aantal mogelijkheden = $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$
c aantal mogelijkheden = $1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 7 = 49$
d aantal mogelijkheden = $1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$
- 41 **a** aantal mogelijkheden = $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$
b aantal mogelijkheden = $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$
c aantal mogelijkheden = $10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 10$
d aantal mogelijkheden = $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
- 42 **a** aantal mogelijkheden = $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$
aantal mogelijkheden = $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$
b aantal mogelijkheden met herhalingen = $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 16\,807$
aantal mogelijkheden zonder herhalingen = $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$
 $16\,807 - 2520 = 14\,287$, dus Matthijs heeft gelijk.
- 43 **a** aantal mogelijkheden = $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$
b aantal mogelijkheden = $1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
c aantal mogelijkheden = $1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$
d aantal mogelijkheden = $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Bladzijde 151

- 44 **a** Er zijn 18 hokjes, dus aantal mogelijkheden = $2^{18} = 262\,144$.
b Er zijn 14 hokjes aan de rand, dus aantal mogelijkheden = $1^{14} \cdot 2^4 = 16$.
c Er zijn 6 hokjes in de middelste rij, dus aantal mogelijkheden = $1^6 \cdot 2^{12} = 4096$.
- 45 **a** aantal manieren = $13 \cdot 16 \cdot 15 = 3120$
b aantal manieren = $13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$
c aantal manieren = $16 \cdot 13 \cdot 27 = 5616$
- 46 **a** aantal mogelijkheden = $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
b aantal mogelijkheden = $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 120$
c aantal mogelijkheden = $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 648$
- 47 **a** aantal manieren = $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$
b aantal manieren = $1^5 \cdot 4^7 = 16\,384$
c aantal manieren = $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1\,860\,480$
d aantal mogelijkheden = $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
aantal mogelijkheden = $21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 = 194\,481$
aantal mogelijkheden = $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$
aantal mogelijkheden = $5 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 21 = 11\,025$

48 Aanpak

Kies eerst een klinker voor de eerste plek. Hiervoor heb je vijf mogelijkheden.
Kies vervolgens een klinker voor de laatste plek. Hiervoor heb je vier mogelijkheden.
Je hebt nu nog 24 letters over voor de overige drie plekken.

Uitwerking

aantal mogelijkheden = $5 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 4 = 242\,880$

9.5 Kans

Bladzijde 152

- 49**
- a** De ziener kiest het getal 7.
 - b** Omdat de kans op 7 groot is.
Je kunt namelijk op veel manieren 7 gooien.
1 en 6 2 en 5 3 en 4
6 en 1 5 en 2 4 en 3
 - c** De ziener had het beste 2 of 12 kunnen noemen.
Je kunt zowel 2 als 12 maar op één manier gooien.
1 en 1 geeft 2
6 en 6 geeft 12

Bladzijde 153

- 50**
- a** kleine kans
 - b** kans van 50%
 - c** kleine kans
 - d** kleine kans
 - e** kleine kans
 - f** grote kans
 - g** kleine kans
 - h** kans van 50%
 - i** onmogelijk
 - j** zeker
- 51**
- a** *
 - b** *
 - c** Lise heeft geen gelijk, want manier 1 komt minder vaak voor dan manier 2.
Bij 50% kans zouden beide manieren even vaak voorkomen.
 - d** De gebeurtenis ‘punaise valt op manier 2’ heeft de grootste kans.
- 52**
- a**
- SOM VAN DE OGEN
- | | | | | | | |
|--|---|---|---|----|----|----|
| | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
-
- b** 36 hokjes
 - c** In één hokje staat 2 en in zes hokjes staat 7.
 - d** Ron heeft gelijk, want van de 36 mogelijkheden zijn er meer met ‘som 7’ dan met ‘som 2’.
Dus er is meer kans op ‘som 7’ dan op ‘som 2’ bij het gooien met twee dobbelstenen.

Bladzijde 155

53

4		c	c	d	c	c	c
	b	b	a	b	a	b	a
3	c	c	c	c	d	c	
	b	b	b	a	b	a	b
2	c	c	c	c			d
	b	b	b	b	a	b	a
1	c	c	c				
	b	b	b	b	a	b	
	1	2	3	4	5	6	

- a** $P(\text{de som is meer dan } 6) = \frac{10}{24} \approx 0,417$, dus 41,7%.
- b** $P(\text{de som is minder dan } 10) = \frac{23}{24} \approx 0,958$, dus 95,8%.

c $P(\text{het verschil is minder dan 3}) = \frac{17}{24} = 0,708$, dus 70,8%.

d $P(\text{het product is 12}) = \frac{3}{24} = 0,125$, dus 12,5%.

54

6	a					
5		a				b
4			a		b	b
3				a	b	b
2			b	b	a	b
1		b	b	b	b	a
	1	2	3	4	5	6

rood

a $P(\text{som is 7}) = \frac{6}{36} \approx 0,167$

b $P(\text{met de rode meer dan met de zwarte}) = \frac{15}{36} \approx 0,417$

55

	PRODUCT					
6	6	12	18	24	30	36
5	5	10	15	20	25	30
4	4	8	12	16	20	24
3	3	6	9	12	15	18
2	2	4	6	8	10	12
1	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6

b $P(\text{product is 12}) = \frac{4}{36} \approx 0,111$, dus 11,1%.

c $P(\text{product is minder dan 5}) = \frac{8}{36} \approx 0,222$, dus 22,2%.

d $P(\text{product is oneven}) = \frac{9}{36} = 0,25$, dus 25%.

56

5	d	d	c	d	c	c	d
4	d	d	c	c	d	c	d
3	d		d	d	d	c	d
2		d	d	d	d	d	d
	2	3	4	5	5	6	

a $P(\text{de som van de getallen is 9}) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

b $P(\text{de getallen verschillen 2 van elkaar}) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

c $P(\text{het product van de getallen is groter dan 15}) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

d $P(\text{de getallen zijn niet gelijk}) = \frac{19}{24}$

57

6			c			
5		c				a
4	c			b	a	
3			a		b	
2		a	b		c	
1	a		b	c		
	1	2	3	4	5	6

- a $P(\text{de aantallen ogen zijn gelijk}) = \frac{6}{36} \approx 0,167$
- b $P(\text{de som van de ogen is een kwadraat}) = \frac{7}{36} \approx 0,194$
- c $P(\text{het verschil van de ogen is 3}) = \frac{6}{36} \approx 0,167$
- d Je verwacht dat ze $\frac{6}{36} \cdot 300 = 50$ keer gelijke ogen gooit.

58

BEDRAGEN				
€ 25	€ 35	€ 40	€ 40	€ 50
€ 10	€ 20	€ 25	€ 25	€ 35
€ 10	€ 20	€ 25	€ 25	€ 35
	€ 10	€ 15	€ 15	€ 25

- a $P(20 \text{ euro}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
- $P(25 \text{ euro}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
- $P(35 \text{ euro}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
- $P(40 \text{ euro}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
- $P(50 \text{ euro}) = \frac{1}{12}$
- b Er zijn 12 manieren om de enveloppen te combineren, waarbij elke manier dezelfde kans heeft. Dus met 12 verjaardagen per jaar verwacht je dat elke manier een keer voorkomt. Opa en oma zijn dus naar verwachting $2 \cdot 20 + 4 \cdot 25 + 3 \cdot 35 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 50 = 375$ euro per jaar kwijt.

9.6 Spreiding met Excel

Bladzijde 156

59

- a *
- b Van 119 leerlingen zijn gegevens verzameld.
- c De spreidingsbreedte is 67 cm en de kwartielafstand 17 cm.
- d *

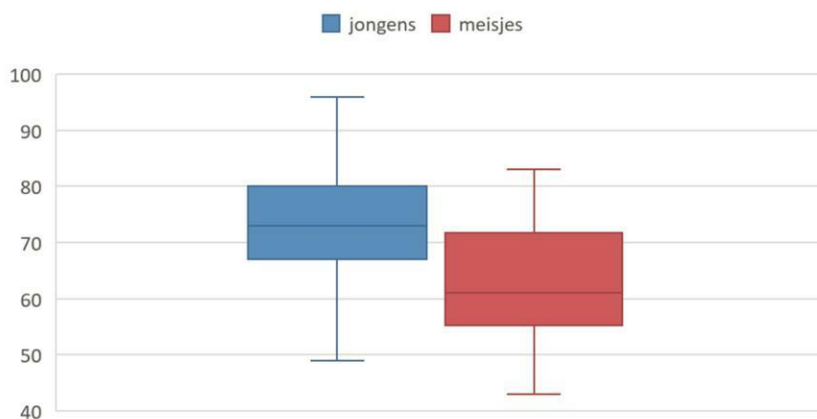
60

a *

b De spreidingsbreedte is 53 kg en de kwartielafstand is 19 kg.

c

gewicht in kg

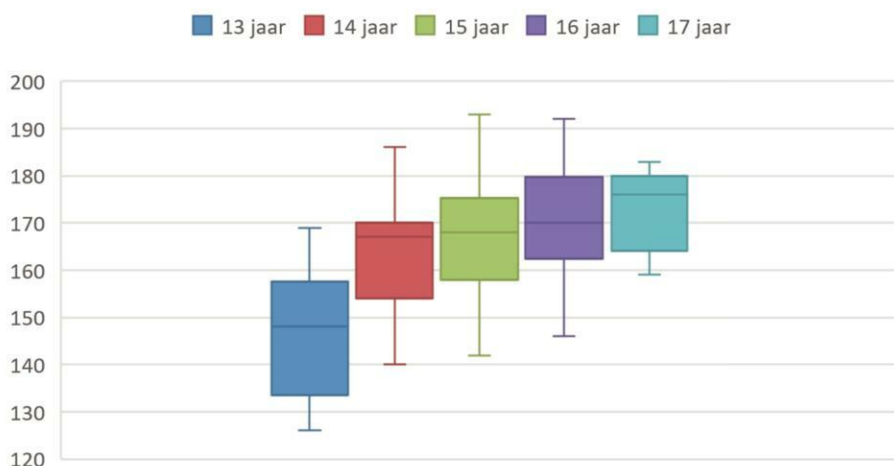


61

a,b *

c

lengte in cm



62

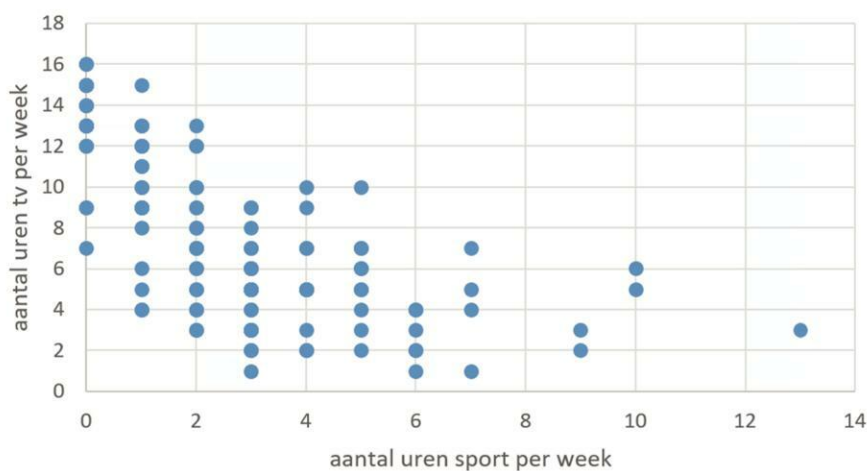
*

63

a *

b

vrijtijdsbesteding leerlingen



c De leerlingen die veel sporten kijken over het algemeen minder tv dan de leerlingen die weinig sporten.

64

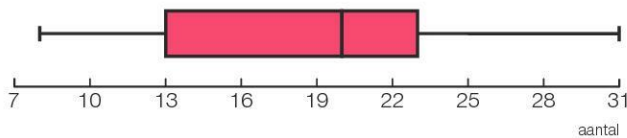
*

Gemengde opgaven

Bladzijde 158

- 1** **a** 75% van veld II en 50% van veld III geeft $0,75 \times 240 + 0,5 \times 240 = 300$ planten.
b 25% van veld II en 25% van veld III geeft $0,25 \times 240 + 0,25 \times 240 = 120$ planten.
 Er zijn in totaal $3 \times 240 = 720$ planten, dus $\frac{120}{720} \times 100\% \approx 16,7\%$ van alle planten heeft meer dan 90 aardbeien.
c Op veld I heeft 75% van de 240 planten minder dan 40 aardbeien.
 Op veld III heeft tussen de 50% en 75% van de 240 planten meer dan 40 aardbeien.
 Dus Carlijn heeft ongelijk.
d 25% van 240 is $0,25 \times 240 = 60$ planten.
 Het maximale aantal aardbeien dat deze planten samen kunnen hebben is als slechts één van deze planten 40 aardbeien heeft en de rest allemaal 60 aardbeien per plant.
 Dan hebben ze samen $40 + 59 \times 60 = 3580$ aardbeien.
 Het is dus niet mogelijk dat deze planten samen 3600 aardbeien hebben.

- 2** **a** gemiddelde = $\frac{8 + 8 + 9 + \dots + 29 + 30 + 31}{24} \approx 18,7$
b mediaan = $\frac{12^{\text{e}} \text{ getal} + 13^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{20 + 20}{2} = 20$
 modus = 20
c kleinste getal = 8 en grootste getal = 31
 spreidingsbreedte = $31 - 8 = 23$
 $Q_1 = \frac{6^{\text{e}} \text{ getal} + 7^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{12 + 14}{2} = 13$ en $Q_3 = \frac{18^{\text{e}} \text{ getal} + 19^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{23 + 23}{2} = 23$
 kwartielafstand = $23 - 13 = 10$
d AANTAL KLANTEN KAPPER DOUMA



- 3** **a** aantal mogelijkheden = $4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = 432$
b aantal mogelijkheden = $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$
c aantal mogelijkheden = $4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 1 = 72$
d aantal mogelijkheden = $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 18$

Bladzijde 159

- 4** **a** aantal mogelijkheden = $6 \cdot 6 = 36$
b aantal mogelijkheden = $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = 216$
c aantal mogelijkheden = $1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
d aantal mogelijkheden = $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$
- 5** **a** $P(\text{som is } 7) = \frac{2}{20} = 0,1$, dus 10%.
b $P(\text{verschil minder dan } 2) = \frac{6}{20} = 0,3$, dus 30%.
c $P(\text{product meer dan } 16) = \frac{8}{20} = 0,4$, dus 40%.

			c	c	c
5	a			b	
4			c	c	c
		a	b	b	
3				c	c
	b	b			
1					
	b				
	2	3	5	7	9

- d $P(\text{de getallen zijn niet gelijk}) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$
 e $P(\text{de som van de getallen is even}) = \frac{17}{25}$
 f $P(\text{het verschil van de getallen is meer dan 3}) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

9	f	e	f	e	f	e	e
7	d	d	d	d	e	e	e
5	d	d	e	e	e	e	f
3	d	e	e	e	f	e	f
2	e	d	d	d	d	d	d
	2	3	5	7	9		

- 6 a De kortste eruptie duurde 1 minuut.
 b De eruptie duurde 5 minuten.
 c Van die groep is het gemiddelde $\frac{45 + 2 \cdot 50 + 55 + 3 \cdot 60 + 3 \cdot 65 + 3 \cdot 70 + 75}{14} \approx 61$.

Dus het duurde gemiddeld 61 minuten tot er weer een eruptie kwam.

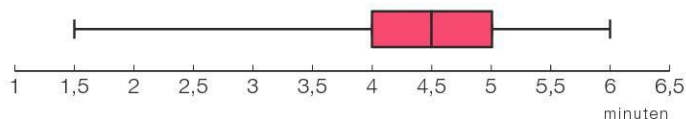
- d Er zijn 28 erupties waarbij het minstens 70 minuten duurde tot de volgende eruptie.

kleinste getal = 1,5 en grootste getal = 6

$$\text{mediaan} = \frac{14^{\text{e}} \text{ getal} + 15^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{4,5 + 4,5}{2} = 4,5$$

$$Q_1 = \frac{7^{\text{e}} \text{ getal} + 8^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4 \text{ en } Q_3 = \frac{21^{\text{e}} \text{ getal} + 22^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{5 + 5}{2} = 5$$

DUUR VAN DE ERUPTIES



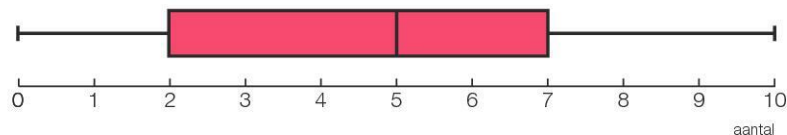
Diagnostische toets

Bladzijde 162

- 1 kleinste getal = 0 en grootste getal = 10, dus spreidingsbreedte = $10 - 0 = 10$ uur.
 totale frequentie = $4 + 8 + 8 + \dots + 10 + 2 = 70$
 $Q_1 = 18^{\text{e}} \text{ getal} = 2$ en $Q_3 = 53^{\text{e}} \text{ getal} = 7$, dus kwartielafstand = $7 - 2 = 5$ uur.

- 2 mediaan = $\frac{35^{\text{e}} \text{ getal} + 36^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{5 + 5}{2} = 5$

BOTEN DOOR DE SLUIS IN BLOKZIJL



- 3 a De meeste tijden in boxplot I zijn langer, dus deze coureurs zijn langzamer.
 Boxplot I hoort dus bij de amateurs.
 b 25% bij boxplot I en 75% bij boxplot II, dus $0,25 \times 60 + 0,75 \times 40 = 45$.
 Ongeveer 45 coureurs hebben een rondetijd onder de 1,4 minuten gereden.
 c $0,25 \times 60 = 15$ amateurs zijn sneller dan 1,4 minuten.
 $0,25 \times 40 = 10$ profs zijn langzamer dan 1,4 minuten.
 Dus Karin kan gelijk hebben.

Bladzijde 163

- 4 a** 11 van de 20 gezinnen drinkt meer thee dan koffie, dat is $\frac{11}{20} \times 100\% = 55\%$.
- b** De gezinnen drinken gemiddeld $\frac{1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 7 + 3 \cdot 8 + 9 + 10}{20} = 5,1$ koppen koffie per dag.
- c** De familie Jansen drinkt 14 koppen thee per dag.
- d** De modus is 4 koppen koffie per dag.
- 5 a** aantal mogelijkheden = $10 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 12\,000$
aantal mogelijkheden = $10 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 21\,600$
- b** aantal mogelijkheden = $1 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 720$
- c** aantal mogelijkheden = $10 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 2160$
- 6 a** aantal mogelijkheden = $2^{20} = 1\,048\,576$
- b** aantal mogelijkheden = $1^{14} \cdot 2^6 = 64$
- c** aantal mogelijkheden = $1^4 \cdot 2^{16} = 65\,536$
- d** Het aantal mogelijkheden neemt met $3^{20} - 2^{20} = 3\,485\,735\,825$ toe.

7

6	c	d					b	b	b	d
5	c									d
4	a	a	a	a	a	b	a	b		b
3	c						d	d		d
2	a	a	a	a	a		b	b		b
1	c	c	c	c	d	c	d		d	d
	a	a	a	a	a	a	a			
	1	3	5	7	9	11				

- a** $P(\text{som is even}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
- b** $P(\text{som is meer dan 12}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
- c** $P(\text{product is minder dan 11}) = \frac{13}{36}$
- d** $P(\text{verschil is meer dan 4}) = \frac{13}{36}$

Herhaling

Bladzijde 164

- 1 a** 10 waarnemingsgetallen, dus de mediaan verdeelt de waarnemingsgetallen in twee groepen van 5.
 $Q_1 = 3^{\text{e}} \text{ getal} = 25$ en $Q_3 = 8^{\text{e}} \text{ getal} = 41$
- b** 13 waarnemingsgetallen, dus de mediaan verdeelt de waarnemingsgetallen in twee groepen van 6 waarbij de mediaan zelf wordt weggelaten.
 $Q_1 = \frac{3^{\text{e}} \text{ getal} + 4^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{7 + 7}{2} = 7$ en $Q_3 = \frac{10^{\text{e}} \text{ getal} + 11^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{9 + 10}{2} = 9,5$
- c** $3 + 1 + 5 + 7 + 2 = 18$ waarnemingsgetallen, dus de mediaan verdeelt de waarnemingsgetallen in twee groepen van 9.
 $Q_1 = 5^{\text{e}} \text{ getal} = 7$ en $Q_3 = 14^{\text{e}} \text{ getal} = 8$

- 2 a** 9 waarnemingsgetallen, dus de mediaan verdeelt de waarnemingsgetallen in twee groepen van 4 waarbij de mediaan zelf wordt weggelaten.

$$Q_1 = \frac{2^{\text{e}} \text{ getal} + 3^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{9 + 9}{2} = 9 \text{ en } Q_3 = \frac{7^{\text{e}} \text{ getal} + 8^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{17 + 21}{2} = 19, \text{ dus}$$

kwartielfstand = $19 - 9 = 10$.

kleinste getal = 8 en grootste getal = 28, dus spreidingsbreedte = $28 - 8 = 20$.

- b** 9 waarnemingsgetallen, dus de mediaan verdeelt de waarnemingsgetallen in twee groepen van 4 waarbij de mediaan zelf wordt weggelaten.

$$Q_1 = \frac{2^{\text{e}} \text{ getal} + 3^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{31 + 48}{2} = 39,5 \text{ en } Q_3 = \frac{7^{\text{e}} \text{ getal} + 8^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{107 + 108}{2} = 107,5, \text{ dus}$$

kwartielfstand = $107,5 - 39,5 = 68$.

kleinste getal = 31 en grootste getal = 120, dus spreidingsbreedte = $120 - 31 = 89$.

- c** $8 + 2 + 19 + 7 + 21 + 9 = 66$ waarnemingsgetallen, dus de mediaan verdeelt de waarnemingsgetallen in twee groepen van 33.

$$Q_1 = 17^{\text{e}} \text{ getal} = 20 \text{ en } Q_3 = 50^{\text{e}} \text{ getal} = 22, \text{ dus kwartielfstand} = 22 - 20 = 2.$$

kleinste getal = 18 en grootste getal = 23, dus spreidingsbreedte = $23 - 18 = 5$.

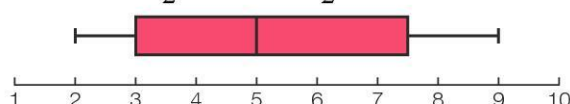
- 3 a** 2 3 3 4 5 6 7 8 9

totale frequentie = 9

kleinste getal = 2 en grootste getal = 9

mediaan = $5^{\text{e}} \text{ getal} = 5$

$$Q_1 = \frac{2^{\text{e}} \text{ getal} + 3^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3 \text{ en } Q_3 = \frac{7^{\text{e}} \text{ getal} + 8^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{7 + 8}{2} = 7,5$$



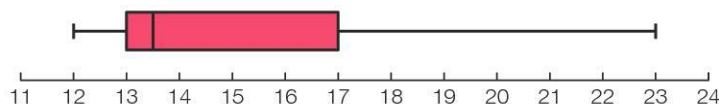
- b** 12 12 13 13 13 14 15 17 18 23

totale frequentie = 10

kleinste getal = 12 en grootste getal = 23

$$\text{mediaan} = \frac{5^{\text{e}} \text{ getal} + 6^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{13 + 14}{2} = 13,5$$

$$Q_1 = 3^{\text{e}} \text{ getal} = 13 \text{ en } Q_3 = 8^{\text{e}} \text{ getal} = 17$$

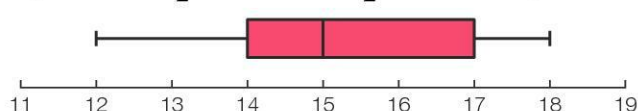


- c** totale frequentie = $8 + 7 + 11 + 16 + 3 + 18 + 2 = 65$

kleinste getal = 12 en grootste getal = 18

mediaan = $33^{\text{e}} \text{ getal} = 15$

$$Q_1 = \frac{16^{\text{e}} \text{ getal} + 17^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{14 + 14}{2} = 14 \text{ en } Q_3 = \frac{49^{\text{e}} \text{ getal} + 50^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{17 + 17}{2} = 17$$



- 4 a** GEWICHT IN KG

zak A		zak B
8 7 6	1	5 5 6 6 6 8 9
7 6 6 5 3 2 2 1	2	0 0 0 0 1 5 5 6 7 7 7 8 9
9 8 5 4 4 3	3	2 8
0	4	
eenheden	tientallen	eenheden

b zak A

totale frequentie = 18

kleinste getal = 16 en grootste getal = 40

$$\text{mediaan} = \frac{9^{\text{e}} \text{ getal} + 10^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{26 + 26}{2} = 26$$

 $Q_1 = 5^{\text{e}} \text{ getal} = 22$ en $Q_3 = 14^{\text{e}} \text{ getal} = 34$ zak B

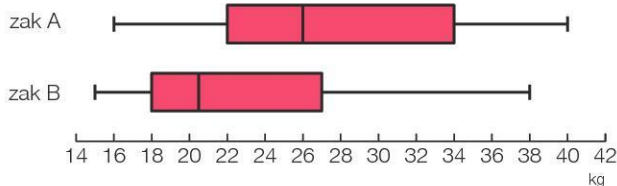
totale frequentie = 22

kleinste getal = 15 en grootste getal = 38

$$\text{mediaan} = \frac{11^{\text{e}} \text{ getal} + 12^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{20 + 21}{2} = 20,5$$

 $Q_1 = 6^{\text{e}} \text{ getal} = 18$ en $Q_3 = 17^{\text{e}} \text{ getal} = 27$

GEWICHT SIERSTENEN

**Bladzijde 165**

- 5 a** De meeste tijden in boxplot I zijn langer, dus hier zijn de atleten langzamer. Boxplot I hoort dus bij de tijden van voor de training.
- b** 25% van 20 is $0,25 \times 20 = 5$ leden die voor de training de 100 meter in minder dan 12,5 seconden lopen.
Na de training is dat 75% van de 20, dus $0,75 \times 20 = 15$ leden.
- 6 a** Van 17 echtparen zijn in het spreidingsdiagram de gegevens verwerkt.
- b** De man is 26 jaar, de vrouw is 20 jaar.
- c** Bij twee echtparen is de vrouw ouder dan de man, dus $\frac{2}{17} \times 100\% \approx 11,8\%$.
- d** Bij drie echtparen is de man 23 jaar, dus $\frac{3}{17} \times 100\% \approx 17,6\%$.
- e**
- | | | | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| leeftijd | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| frequentie | 2 | 1 | 0 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
- f** De gemiddelde leeftijd van de mannen is

$$\frac{2 \cdot 20 + 1 \cdot 21 + 0 \cdot 22 + 3 \cdot 23 + 1 \cdot 24 + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 26 + 1 \cdot 27 + 3 \cdot 28 + 1 \cdot 29 + 1 \cdot 30}{17} \approx 25,1 \text{ jaar.}$$
- g** De gemiddelde leeftijd van de vrouwen is

$$\frac{1 \cdot 18 + 1 \cdot 19 + 4 \cdot 20 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 22 + 1 \cdot 23 + 4 \cdot 24 + 1 \cdot 25}{17} \approx 21,7 \text{ jaar.}$$

 mediaan = 9^e getal = 22 jaar
 Er is geen modus.

Bladzijde 166

- 7 a** aantal mogelijkheden = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7 = 2352$
- b** aantal mogelijkheden = $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 3584$
- c** aantal mogelijkheden = $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 28\,672$ als herhalingen zijn toegestaan
 aantal mogelijkheden = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 = 11\,760$ als herhalingen niet zijn toegestaan
- d** aantal mogelijkheden = $8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 16$
- 8 a** aantal manieren = $2^8 = 256$
- b** aantal manieren = $1 \cdot 2^6 \cdot 1 = 64$
- c** aantal manieren = $3^{10} = 59\,049$
- d** aantal manieren = $4^9 \cdot 1 = 262\,144$

9 a

SOM						
5	6	d 7	d 7	d 8	d 9	d 10
4	5	d 6	d 6	d 7	d 8	d 9
3	4	d 5	d 5	d 6	d 7	d 8
2	3	4	4	d 5	d 6	d 7
2	3	4	4	d 5	d 6	d 7
1	2	3	3	4	5	6
	1	2	2	3	4	5

b $P(\text{som is } 6) = \frac{7}{36} \approx 0,194$

c $P(\text{som is minder dan } 5) = \frac{11}{36} \approx 0,306$

d $P(\text{som is kleiner dan het product}) = \frac{21}{36} \approx 0,583$

Onderzoek Geheimschrift

Bladzijde 167

1 Door de reep perkament weer om een stok van dezelfde dikte te rollen.

2 a deze geheimtaal is leuk

b *

Bladzijde 168

3 a IJ ANOFSI SFIJWY

b WYBQOX KKXFKVVOX

c kom onmiddellijk terug naar rome

d koop obelix om met everzwijn

4 met stap 11: de code van deze boodschap kun je zelf vinden

5 a UGUKLLWSDD

b ik mis je zo

6 a handig die repeterende breuken

b AYIQKPEKKB

Bladzijde 169

7 a ES HMWB BP OBNH YSEHSZ

b de vrede is voorbij

c Bij het codewoord BOMEN hoort de sleutel 1-14-12-4-13.

8 *

9 a *

b *

Wiskundige vaardigheden

1 Breuken

Bladzijde 172

1 a $\frac{25a}{a} = 25$

b $\frac{5b}{15a} = \frac{b}{3a}$

c $\frac{18xy}{24xz} = \frac{3y}{4z}$

2 a $\frac{18xy}{6x} - 5y = 3y - 5y = -2y$

b $\frac{-27xy}{9y} - 5x = -3x - 5x = -8x$

c $-\frac{3xy}{y} - \frac{-2xz}{6z} = -3x + \frac{1}{3}x = -2\frac{2}{3}x$

d $\frac{a}{25a} = \frac{1}{25}$

e $\frac{-20pqr}{25prs} = -\frac{4q}{5s}$

f $\frac{-21ab}{35abc} = -\frac{3}{5c}$

Bladzijde 173

3 a $\frac{3x}{2z} + \frac{5x}{2z} = \frac{8x}{2z} = \frac{4x}{z}$

b $\frac{7p}{3q} - \frac{p}{3q} = \frac{6p}{3q} = \frac{2p}{q}$

c $\frac{2}{a} - \frac{b}{a} = \frac{2-b}{a}$

4 a $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = \frac{2b}{ab} + \frac{3a}{ab} = \frac{2b+3a}{ab}$

b $\frac{3}{5a} - \frac{2}{a} = \frac{3}{5a} - \frac{10}{5a} = -\frac{7}{5a}$

c $\frac{2}{3x} + \frac{5}{2x} = \frac{4}{6x} + \frac{15}{6x} = \frac{19}{6x}$

d $\frac{2}{a} - \frac{3}{a^2} = \frac{2a}{a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{2a-3}{a^2}$

e $\frac{4}{x} - 3 = \frac{4}{x} - \frac{3x}{x} = \frac{4-3x}{x}$

f $\frac{7}{4p} - \frac{3}{2q} = \frac{7q}{4pq} - \frac{6p}{4pq} = \frac{7q-6p}{4pq}$

5 a $\frac{3}{2a} \cdot \frac{6}{a} = \frac{18}{2a^2} = \frac{9}{a^2}$

b $-\frac{3}{x} \cdot \frac{-x}{3y} = \frac{3x}{3xy} = \frac{1}{y}$

c $\frac{8}{3a} \cdot \frac{5}{2a} = \frac{40}{6a^2} = \frac{20}{3a^2}$

6 a $\frac{3}{2a} : \frac{6}{a} = \frac{3}{2a} \cdot \frac{a}{6} = \frac{3a}{12a} = \frac{1}{4}$

b $\frac{1}{2a} : \frac{6}{c} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{c}{6} = \frac{c}{12a}$

c $\frac{a}{9} : (3a) = \frac{a}{9} \cdot \frac{1}{3a} = \frac{a}{27a} = \frac{1}{27}$

7 a $\frac{3}{2a} \cdot \frac{3b}{a} = \frac{9b}{2a^2}$

b $\frac{3}{2a} : \frac{3b}{a} = \frac{3}{2a} \cdot \frac{a}{3b} = \frac{3a}{6ab} = \frac{1}{2b}$

c $-9 \cdot \frac{3}{4a} = -\frac{27}{4a}$

d $-9 : \frac{3}{4a} = -9 \cdot \frac{4a}{3} = \frac{-36a}{3} = -12a$

e $6a \cdot \frac{2a}{3} = \frac{12a^2}{3} = 4a^2$

f $6a : \frac{2a}{3} = 6a \cdot \frac{3}{2a} = \frac{18a}{2a} = 9$

Bladzijde 174

8 a $\frac{3}{a} + \frac{6}{b} = \frac{3b}{ab} + \frac{6a}{ab} = \frac{3b+6a}{ab}$
b $\frac{3}{a} \cdot \frac{6}{b} = \frac{18}{ab}$
c $\frac{3}{a} : \frac{6}{b} = \frac{3}{a} \cdot \frac{b}{6} = \frac{3b}{6a} = \frac{b}{2a}$
d $\frac{12}{5x} + \frac{3}{x} = \frac{12}{5x} + \frac{15}{5x} = \frac{27}{5x}$
e $\frac{12}{5x} \cdot \frac{3}{x} = \frac{36}{5x^2}$

f $\frac{12}{5x} : \frac{3}{x} = \frac{12}{5x} \cdot \frac{x}{3} = \frac{12x}{15x} = \frac{4}{5}$
g $\frac{5}{a} - 7 = \frac{5}{a} - \frac{7a}{a} = \frac{5-7a}{a}$
h $\frac{5}{a} \cdot 7 = \frac{35}{a}$
i $\frac{5}{a} : 7 = \frac{5}{a} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{7a}$

2 Procenten

9 a 6% van 830 is $0,06 \times 830 = 49,8$.
b 53% van 72 is $0,53 \times 72 = 38,16$.
c 5,3% van 750 is $0,053 \times 750 = 39,75$.
d 0,38% van 1200 is $0,0038 \times 1200 = 4,56$.
e 96% van 80 is $0,96 \times 80 = 76,8$.

10 a 7 van 25 is $\frac{7}{25} \times 100\% = 28\%$.
b 18 van 50 is $\frac{18}{50} \times 100\% = 36\%$.
c 900 van 1250 is $\frac{900}{1250} \times 100\% = 72\%$.
d 7 van 8 is $\frac{7}{8} \times 100\% = 87,5\%$.

11 a 1,31 c 1,002
b 1,08 d 1,038

12 a 0,93 c 0,981
b 0,52 d 0,9918

13 a 0,905 d 0,824
b 1,095 e 2,17
c 0,9905 f 0,9982

f 2,37% van 700 is $0,0237 \times 700 = 16,59$.
g 11% van 20 is $0,11 \times 20 = 2,2$.
h 3,1% van 800 is $0,031 \times 800 = 24,8$.
i 0,89% van 750 is $0,0089 \times 750 = 6,675$.

e 1 van 3 is $\frac{1}{3} \times 100\% \approx 33,3\%$.
f 59 van 60 is $\frac{59}{60} \times 100\% \approx 98,3\%$.
g 71 van 400 is $\frac{71}{400} \times 100\% \approx 17,8\%$.
h 1,38 van 2,5 is $\frac{1,38}{2,5} \times 100\% = 55,2\%$.

e 1,999
f 1,0103

e 0,99918
f 0,118

g 0,9972
h 1,0028
i 0,989

Bladzijde 175

14 a 20% c 0,7%
b 31,9% d 92,8%

15 a 10% c 88%
b 1% d 44,5%

16 a 0,5% toename c 110% toename
b 69% afname d 70,5% afname

e 100%
f 55,5%

e 99,1%
f 87,7%

e 0,82% toename
f 9,94% afname

3 Machten

- 17 a $a^7 \cdot a^8 = a^{15}$ c $5a^6 \cdot 3a^7 = 15a^{13}$ e $a^7 \cdot 5a = 5a^8$
 b $a^3 \cdot a = a^4$ d $3a \cdot 8a^2 = 24a^3$ f $7a \cdot 3a = 21a^2$
- 18 a $(a^4)^3 = a^{12}$ c $(5a)^3 = 125a^3$ e $(-3a^2)^3 = -27a^6$
 b $(a^7)^8 = a^{56}$ d $(-2a)^3 = -8a^3$ f $5(a^6)^3 = 5a^{18}$

Bladzijde 176

- 19 a $\frac{a^8}{a^2} = a^6$ d $\frac{5a^{18}}{a^6} = 5a^{12}$ g $\frac{12a^{12}}{6a^6} = 2a^6$
 b $\frac{a^4}{a^4} = 1$ e $\frac{7a^6}{a^6} = 7$ h $\frac{18a^{18}}{2a^{18}} = 9$
 c $\frac{a^7}{a} = a^6$ f $\frac{3a^5}{a^4} = 3a$ i $\frac{8a^3}{4a} = 2a^2$
- 20 a $5a^6 + 7a^6 = 12a^6$ d $a^6 + a^6 = 2a^6$ g $a^9 + 8a^9 = 9a^9$
 b $3a^2 + 8a^2 = 11a^2$ e $8a^7 - a^7 = 7a^7$ h $-a^5 + a^5 = 0$
 c $17a^{10} - 8a^{10} = 9a^{10}$ f $5a^3 + 3a^5$ kan niet i $11a^3 + a^{11}$ kan niet
- 21 a $a^7 \cdot a^3 = a^{10}$ e $a^5 \cdot a^8 \cdot a^4 = a^{17}$ i $(5a^2)^4 = 625a^8$
 b $(a^7)^3 = a^{21}$ f $3a^7 \cdot 7a^3 = 21a^{10}$ j $5a^4 - 7a^4 = -2a^4$
 c $a^7 + a^3$ kan niet g $6a^4 - 5a^4 = a^4$ k $(-2b^2)^3 = -8b^6$
 d $\frac{a^7}{a^3} = a^4$ h $\frac{18a^9}{3a^3} = 6a^6$ l $\frac{5a^5}{a} = 5a^4$

Bladzijde 177

- 22 a $(3a)^3 - 3a^3 = 27a^3 - 3a^3 = 24a^3$ e $(6a^3)^2 \cdot 5(a^5)^4 = 36a^6 \cdot 5a^{20} = 180a^{26}$
 b $(a^6)^2 + (a^3)^4 = a^{12} + a^{12} = 2a^{12}$ f $(-3a^5)^4 - 5(a^5)^4 = 81a^{20} - 5a^{20} = 76a^{20}$
 c $(2a)^5 \cdot 3a = 32a^5 \cdot 3a = 96a^6$ g $(4a^2)^3 + (3a^3)^2 = 64a^6 + 9a^6 = 73a^6$
 d $\frac{6a^4 + 12a^4}{(3a^2)^2} = \frac{18a^4}{9a^4} = 2$ h $\frac{3a^8 - a^8}{2(a^2)^3} = \frac{2a^8}{2a^6} = a^2$
- 23 a $3(x^4)^3 + (2x^6)^2 - 2x \cdot x^{11} = 3x^{12} + 4x^{12} - 2x^{12} = 5x^{12}$
 b $2x^4 \cdot -3y^5 \cdot x^7 \cdot 2y = -12x^{11}y^6$
 c $(6x^5)^2 \cdot 6x^3 + (-4x^3)^3 \cdot x^4 = 36x^{10} \cdot 6x^3 - 64x^9 \cdot x^4 = 216x^{13} - 64x^{13} = 152x^{13}$
 d $\frac{3(x^5)^2 + 7x^3 \cdot x^7}{5x^4} = \frac{3x^{10} + 7x^{10}}{5x^4} = \frac{10x^{10}}{5x^4} = 2x^6$
 e $4(x^3)^2 - 5x^4 \cdot 7x^2 = 4x^6 - 35x^6 = -31x^6$
 f $x^8 - 2x^5 \cdot -3x^4 + 5(x^4)^2 = x^8 + 6x^9 + 5x^8 = 6x^9 + 6x^8$
 g $3x^7 + 7x^3 - 2x^7 - 8x^3 = x^7 - x^3$
 h $\frac{6x^6 - 20(x^3)^2}{2x \cdot x^2} = \frac{6x^6 - 20x^6}{2x^3} = \frac{-14x^6}{2x^3} = -7x^3$

4 Vergelijkingen en ongelijkheden

24 a $3x - 1 = 5x + 11$
 $3x - 5x = 11 + 1$
 $-2x = 12$
 $x = -6$

b $2 - x = 7 + x$
 $-x - x = 7 - 2$
 $-2x = 5$
 $x = -2\frac{1}{2}$

c $8 + 3x = 5x - 3x$
 $3x - 5x + 3x = -8$
 $x = -8$

d $5(2 - x) - 6 = 8 - 3x$
 $10 - 5x - 6 = 8 - 3x$
 $-5x + 3x = 8 - 10 + 6$
 $-2x = 4$
 $x = -2$

e $-7 - (8 - x) = 3 - 2x$
 $-7 - 8 + x = 3 - 2x$
 $x + 2x = 3 + 7 + 8$
 $3x = 18$
 $x = 6$

f $3x - 2(6 - 2x) = 5 + 3(2x - 1)$
 $3x - 12 + 4x = 5 + 6x - 3$
 $3x + 4x - 6x = 5 - 3 + 12$
 $x = 14$

g $3x - 2(1 - x) = 7(1 - x) - 9$
 $3x - 2 + 2x = 7 - 7x - 9$
 $3x + 2x + 7x = 7 - 9 + 2$
 $12x = 0$
 $x = 0$

h $8x - 3x - 2(1 - x) = 5(2 + x)$
 $8x - 3x - 2 + 2x = 10 + 5x$
 $8x - 3x + 2x - 5x = 10 + 2$
 $2x = 12$
 $x = 6$

Bladzijde 178

25 a $\frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{3}x + 3$
 $6 \cdot \frac{1}{2}x - 6 \cdot 1 = 6 \cdot \frac{1}{3}x + 6 \cdot 3$
 $3x - 6 = 2x + 18$
 $3x - 2x = 18 + 6$
 $x = 24$

b $1\frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{6}x - 1$
 $6 \cdot 1\frac{1}{2}x - 6 \cdot 2 = 6 \cdot \frac{1}{6}x - 6 \cdot 1$
 $9x - 12 = x - 6$
 $9x - x = -6 + 12$
 $8x = 6$
 $x = \frac{3}{4}$

c $2 - \frac{1}{2}(x - 1) = 5 - \frac{1}{3}x$
 $2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{3}x$
 $6 \cdot 2 - 6 \cdot \frac{1}{2}x + 6 \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot 5 - 6 \cdot \frac{1}{3}x$
 $12 - 3x + 3 = 30 - 2x$
 $-3x + 2x = 30 - 12 - 3$
 $-x = 15$
 $x = -15$

d $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}x - 1$
 $12 \cdot \frac{2}{3}x - 12 \cdot \frac{1}{4} = 12 \cdot \frac{1}{2}x - 12 \cdot 1$
 $8x - 3 = 6x - 12$
 $8x - 6x = -12 + 3$
 $2x = -9$
 $x = -4\frac{1}{2}$

26 a $3x - 1 < 8$
 $3x < 8 + 1$
 $3x < 9$
 $x < 3$

b $5 - 2x > 13$
 $-2x > 13 - 5$
 $-2x > 8$
 $x < -4$

c $-2x > 0$
 $x < 0$

d $6 - x < 6$
 $-x < 6 - 6$
 $-x < 0$
 $x > 0$

e $2 + x < 1 + 3x$
 $x - 3x < 1 - 2$
 $-2x < -1$
 $x > \frac{1}{2}$

f $3x - 1 < 5 - x$
 $3x + x < 5 + 1$
 $4x < 6$
 $x < 1\frac{1}{2}$

g $2x - 1 > 5 + 3x$
 $2x - 3x > 5 + 1$
 $-x > 6$
 $x < -6$

h $3x - 8 < 5x - 2$
 $3x - 5x < -2 + 8$
 $-2x < 6$
 $x > -3$

27 a $2(x-1)-5 < 7$

$$2x-2-5 < 7$$

$$2x < 7+2+5$$

$$2x < 14$$

$$x < 7$$

b $5 - \frac{1}{2}x > 1\frac{1}{2}x + 8$

$$-\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}x > 8 - 5$$

$$-2x > 3$$

$$x < -1\frac{1}{2}$$

c $\frac{1}{3}x - 4 < \frac{1}{2}x + 1$

$$6 \cdot \frac{1}{3}x - 6 \cdot 4 < 6 \cdot \frac{1}{2}x + 6 \cdot 1$$

$$2x - 24 < 3x + 6$$

$$2x - 3x < 6 + 24$$

$$-x < 30$$

$$x > -30$$

d $3 - 2(1-x) + 17 > -10$

$$3 - 2 + 2x + 17 > -10$$

$$2x > -10 - 3 + 2 - 17$$

$$2x > -28$$

$$x > -14$$

e $7x - 3(2-x) > 2x + 3$

$$7x - 6 + 3x > 2x + 3$$

$$7x + 3x - 2x > 3 + 6$$

$$8x > 9$$

$$x > 1\frac{1}{8}$$

f $\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}x < 4x - 4$

$$15 \cdot \frac{3}{5}x + 15 \cdot \frac{1}{3}x < 15 \cdot 4x - 15 \cdot 4$$

$$9x + 5x < 60x - 60$$

$$9x + 5x - 60x < -60$$

$$-46x < -60$$

$$x > \frac{-60}{-46}$$

$$x > \frac{30}{23}$$

$$x > 1\frac{7}{23}$$

g $\frac{1}{2}(\frac{1}{3}x + 3) > \frac{2}{3}x - 1$

$$\frac{1}{6}x + 1\frac{1}{2} > \frac{2}{3}x - 1$$

$$6 \cdot \frac{1}{6}x + 6 \cdot 1\frac{1}{2} > 6 \cdot \frac{2}{3}x - 6 \cdot 1$$

$$x + 9 > 4x - 6$$

$$x - 4x > -6 - 9$$

$$-3x > -15$$

$$x < 5$$

h $2 + x > 3 - 2(3-x)$

$$2 + x > 3 - 6 + 2x$$

$$x - 2x > 3 - 6 - 2$$

$$-x > -5$$

$$x < 5$$

Bladzijde 179

28 a $x^2 = 49$

$$x = 7 \vee x = -7$$

b $3x^2 - 1 = 26$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

c $\frac{1}{2}x^2 + 1 = 0$

$$\frac{1}{2}x^2 = -1$$

$$x^2 = -2$$

geen oplossing

d $x^2 + 7x = 0$

$$x(x+7) = 0$$

$$x = 0 \vee x + 7 = 0$$

$$x = 0 \vee x = -7$$

e $(5x-1)(3x+12) = 0$

$$5x-1 = 0 \vee 3x+12 = 0$$

$$5x = 1 \vee 3x = -12$$

$$x = \frac{1}{5} \vee x = -4$$

f $(x-8)(x-3) = 0$

$$x-8 = 0 \vee x-3 = 0$$

$$x = 8 \vee x = 3$$

g $4x^2 - 8 = 3x^2 - 7$

$$4x^2 - 3x^2 = -7 + 8$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

h $x^2 + 8x - 20 = 0$

$$(x+10)(x-2) = 0$$

$$x+10 = 0 \vee x-2 = 0$$

$$x = -10 \vee x = 2$$

29 a $x^2 - 3x - 4 = 0$
 $(x - 4)(x + 1) = 0$
 $x - 4 = 0 \vee x + 1 = 0$
 $x = 4 \vee x = -1$

b $x^2 = 5x$
 $x^2 - 5x = 0$
 $x(x - 5) = 0$
 $x = 0 \vee x - 5 = 0$
 $x = 0 \vee x = 5$

c $x^2 + 8 = 7$
 $x^2 = -1$
geen oplossing

d $x^2 + 8x = 7x$
 $x^2 + x = 0$
 $x(x + 1) = 0$
 $x = 0 \vee x + 1 = 0$
 $x = 0 \vee x = -1$

e $x^2 - 13x + 30 = 0$
 $(x - 3)(x - 10) = 0$
 $x - 3 = 0 \vee x - 10 = 0$
 $x = 3 \vee x = 10$

30 a $4x^2 - 4x = 8$
 $4x^2 - 4x - 8 = 0$
 $x^2 - x - 2 = 0$
 $(x - 2)(x + 1) = 0$
 $x - 2 = 0 \vee x + 1 = 0$
 $x = 2 \vee x = -1$

b $\frac{1}{2}x^2 + 8 = 5x$
 $\frac{1}{2}x^2 - 5x + 8 = 0$
 $x^2 - 10x + 16 = 0$
 $(x - 2)(x - 8) = 0$
 $x - 2 = 0 \vee x - 8 = 0$
 $x = 2 \vee x = 8$

c $2x(x - 5) = 32 - 10x$
 $2x^2 - 10x = 32 - 10x$
 $2x^2 = 32$
 $x^2 = 16$
 $x = 4 \vee x = -4$

d $\frac{1}{10}x^2 = 3x - 20$
 $\frac{1}{10}x^2 - 3x + 20 = 0$
 $x^2 - 30x + 200 = 0$
 $(x - 10)(x - 20) = 0$
 $x - 10 = 0 \vee x - 20 = 0$
 $x = 10 \vee x = 20$

f $x^2 + 8x = 9$
 $x^2 + 8x - 9 = 0$
 $(x + 9)(x - 1) = 0$
 $x + 9 = 0 \vee x - 1 = 0$
 $x = -9 \vee x = 1$

g $x(x + 8) = 33$
 $x^2 + 8x = 33$
 $x^2 + 8x - 33 = 0$
 $(x + 11)(x - 3) = 0$
 $x + 11 = 0 \vee x - 3 = 0$
 $x = -11 \vee x = 3$

h $x^2 + 5x = x + 5$
 $x^2 + 4x - 5 = 0$
 $(x + 5)(x - 1) = 0$
 $x + 5 = 0 \vee x - 1 = 0$
 $x = -5 \vee x = 1$

i $x(x - 2) = 24x$
 $x^2 - 2x = 24x$
 $x^2 - 26x = 0$
 $x(x - 26) = 0$
 $x = 0 \vee x - 26 = 0$
 $x = 0 \vee x = 26$

j $3x(x + 5) = 15x + 3$
 $3x^2 + 15x = 15x + 3$
 $3x^2 = 3$
 $x^2 = 1$
 $x = 1 \vee x = -1$

e $-0,1x^2 - 1,3x = 4,2$
 $-0,1x^2 - 1,3x - 4,2 = 0$
 $x^2 + 13x + 42 = 0$
 $(x + 6)(x + 7) = 0$
 $x + 6 = 0 \vee x + 7 = 0$
 $x = -6 \vee x = -7$

f $\frac{1}{4}x^2 + x = 15$
 $\frac{1}{4}x^2 + x - 15 = 0$
 $x^2 + 4x - 60 = 0$
 $(x + 10)(x - 6) = 0$
 $x + 10 = 0 \vee x - 6 = 0$
 $x = -10 \vee x = 6$

g $(2x + 1)^2 = 12x + 33$
 $4x^2 + 4x + 1 = 12x + 33$
 $4x^2 - 8x - 32 = 0$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x - 4)(x + 2) = 0$
 $x - 4 = 0 \vee x + 2 = 0$
 $x = 4 \vee x = -2$

h $\frac{1}{3}x(x - 5) = 12$
 $\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x = 12$
 $\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x - 12 = 0$
 $x^2 - 5x - 36 = 0$
 $(x - 9)(x + 4) = 0$
 $x - 9 = 0 \vee x + 4 = 0$
 $x = 9 \vee x = -4$

31 a $(x+5)^2 = x^2 + 15$
 $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 15$
 $10x + 25 = 15$
 $10x = -10$
 $x = -1$

b $(x-2)^2 = x^2 - 15$
 $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 15$
 $-4x + 4 = -15$
 $-4x = -19$
 $x = 4\frac{3}{4}$

c $(2x+1)^2 = 4(x^2 - 2)$
 $4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 8$
 $4x + 1 = -8$
 $4x = -9$
 $x = -2\frac{1}{4}$

d $(2x+1)^2 = 3(x^2 + 2)$
 $4x^2 + 4x + 1 = 3x^2 + 6$
 $x^2 + 4x - 5 = 0$
 $(x-1)(x+5) = 0$
 $x-1 = 0 \vee x+5 = 0$
 $x = 1 \vee x = -5$

e $(3x+1)(x-6) = 3x^2$
 $3x^2 - 18x + x - 6 = 3x^2$
 $-18x + x - 6 = 0$
 $-17x = 6$
 $x = -\frac{6}{17}$

f $(3x+1)(x-6) = 2(x^2 + 6)$
 $3x^2 - 18x + x - 6 = 2x^2 + 12$
 $x^2 - 17x - 18 = 0$
 $(x-18)(x+1) = 0$
 $x-18 = 0 \vee x+1 = 0$
 $x = 18 \vee x = -1$

Bladzijde 180

32 a $x^2 + x - 3 = 0$
 $a = 1, b = 1 \text{ en } c = -3$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 13$
 $x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$
 $x \approx 1,30 \vee x \approx -2,30$

b $9x^2 + 6x + 1 = 0$
 $a = 9, b = 6 \text{ en } c = 1$
 $D = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$
 $x = \frac{-6}{18}$
 $x = -\frac{1}{3}$

c $24x^2 - 2x = 35$
 $24x^2 - 2x - 35 = 0$
 $a = 24, b = -2 \text{ en } c = -35$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 24 \cdot -35 = 3364$
 $x = \frac{2 + \sqrt{3364}}{48} \vee x = \frac{2 - \sqrt{3364}}{48}$
 $x = \frac{2 + 58}{48} \vee x = \frac{2 - 58}{48}$
 $x = 1\frac{1}{4} \vee x = -1\frac{1}{6}$

d $3x^2 - x - 4 = 0$
 $a = 3, b = -1 \text{ en } c = -4$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -4 = 49$
 $x = \frac{1 + \sqrt{49}}{6} \vee x = \frac{1 - \sqrt{49}}{6}$
 $x = \frac{1+7}{6} \vee x = \frac{1-7}{6}$
 $x = 1\frac{1}{3} \vee x = -1$

e $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$
 $x^2 - 4x - 12 = 0$
 $(x-6)(x+2) = 0$
 $x-6 = 0 \vee x+2 = 0$
 $x = 6 \vee x = -2$

f $2x^2 + 5x = 3$
 $2x^2 + 5x - 3 = 0$
 $a = 2, b = 5 \text{ en } c = -3$
 $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 49$
 $x = \frac{-5 + \sqrt{49}}{4} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{49}}{4}$
 $x = \frac{-5+7}{4} \vee x = \frac{-5-7}{4}$
 $x = \frac{1}{2} \vee x = -3$

33 a $x(5x+9)-14=0$
 $5x^2+9x-14=0$
 $a=5, b=9 \text{ en } c=-14$
 $D=9^2-4 \cdot 5 \cdot -14=361$
 $x=\frac{-9+\sqrt{361}}{10} \vee x=\frac{-9-\sqrt{361}}{10}$
 $x=\frac{-9+19}{10} \vee x=\frac{-9-19}{10}$
 $x=1 \vee x=-2\frac{4}{5}$

b $(2x-1)^2-x^2=5$
 $4x^2-4x+1-x^2=5$
 $3x^2-4x-4=0$
 $a=3, b=-4 \text{ en } c=-4$
 $D=(-4)^2-4 \cdot 3 \cdot -4=64$
 $x=\frac{4+\sqrt{64}}{6} \vee x=\frac{4-\sqrt{64}}{6}$
 $x=\frac{4+8}{6} \vee x=\frac{4-8}{6}$
 $x=2 \vee x=-\frac{2}{3}$

c $5-(4-x)^2=x-1$
 $5-(16-8x+x^2)=x-1$
 $5-16+8x-x^2=x-1$
 $-x^2+7x-10=0$
 $x^2-7x+10=0$
 $(x-2)(x-5)=0$
 $x=2 \vee x=5$

d $(3x-1)(2x+1)=5+x$
 $6x^2+3x-2x-1=5+x$
 $6x^2=6$
 $x^2=1$
 $x=1 \vee x=-1$

Bladzijde 181

34 a $x^3=21$
 $x=\sqrt[3]{21}$
 $x \approx 2,76$

b $x^3=-53$
 $x=\sqrt[3]{-53}$
 $x \approx -3,76$

c $x^3=0,89$
 $x=\sqrt[3]{0,89}$
 $x \approx 0,96$

d $x^5=837$
 $x=\sqrt[5]{837}$
 $x \approx 3,84$

e $x^5=-61$
 $x=\sqrt[5]{-61}$
 $x \approx -2,28$

f $x^5=0,082$
 $x=\sqrt[5]{0,082}$
 $x \approx 0,61$

g $x^4=75$
 $x=\sqrt[4]{75} \vee x=-\sqrt[4]{75}$
 $x \approx 2,94 \vee x \approx -2,94$

h $x^4=-51$
 geen oplossing

i $x^8=-0,031$
 geen oplossing

j $x^6=194481$
 $x=\sqrt[6]{194481} \vee x=-\sqrt[6]{194481}$
 $x \approx 7,61 \vee x \approx -7,61$

35 a $5x^3+8=43$
 $5x^3=35$
 $x^3=7$
 $x=\sqrt[3]{7}$
 $x \approx 1,91$

b $2x^4+10=7$
 $2x^4=-3$
 $x^4=-1\frac{1}{2}$
 geen oplossing

c $0,5x^3-0,8=0,17$
 $0,5x^3=0,97$
 $x^3=1,94$
 $x=\sqrt[3]{1,94}$
 $x \approx 1,25$

d $10x^7=-1000$
 $x^7=-100$
 $x=\sqrt[7]{-100}$
 $x \approx -1,93$

e $3x^4+1=16$
 $3x^4=15$
 $x^4=5$
 $x=\sqrt[4]{5} \vee x=-\sqrt[4]{5}$
 $x \approx 1,50 \vee x \approx -1,50$

f $4-x^6=3$
 $-x^6=-1$
 $x^6=1$
 $x=\sqrt[6]{1} \vee x=-\sqrt[6]{1}$
 $x=1 \vee x=-1$

g $8-x^3=4-5x^3$
 $4x^3=-4$
 $x^3=-1$
 $x=\sqrt[3]{-1}$
 $x=-1$

h $6x^5+9=51$
 $6x^5=42$
 $x^5=7$
 $x=\sqrt[5]{7}$
 $x \approx 1,48$

Algemene vaardigheden

Bladzijde 182

- 1 De vijf-literkan volgielen met water uit de acht-literkan geeft 5 liter in de vijf-literkan en $8 - 5 = 3$ liter over in de acht-literkan.

De drie-literkan vervolgens vullen met water uit de vijf-literkan geeft 3 liter in de drie-literkan en $5 - 3 = 2$ liter over in de vijf-literkan.

Twee gelijke hoeveelheden van 4 liter krijg je als volgt.

	startsituatie	stap 1	stap 2	stap 3	stap 4	stap 5	stap 6	eindsituatie
acht-literkan	8	3	3	6	6	1	1	4
vijf-literkan	0	5	2	2	0	5	4	4
drie-literkan	0	0	3	0	2	2	3	0

Bladzijde 183

- 2 Je kunt via de volgende stappen 10 liter in een van de vaten krijgen.

19-liter vat	0	7	7	14	14	1	1	8	8	15	15	2	2	9	9	16	16	3	3
13-liter vat	13	13	6	6	0	13	12	12	5	5	0	13	11	11	4	4	0	13	10
7-liter vat	7	0	7	0	6	6	7	0	7	0	5	5	7	0	7	0	4	4	7

- 3 Rij I

Er komt steeds 7 bij.

Er komt dus $\frac{351 - 8}{7} = 49$ keer 7 bij.

Dus rij I bestaat uit 50 getallen.

Rij II

Er komt steeds 11 bij.

Er komt dus $\frac{471 - 53}{11} = 38$ keer 11 bij.

Dus rij II bestaat uit 39 getallen.

- 4 a $2^{3000} = (2^3)^{1000} = 8^{1000}$
 $3^{2000} = (3^2)^{1000} = 9^{1000}$
 $9^{1000} > 8^{1000}$, dus $3^{2000} > 2^{3000}$.
 b $2^{400} = (2^4)^{100} = 16^{100}$
 $16^{100} > 15^{100}$, dus $2^{400} > 15^{100}$.
 c $3^{300} = (3^3)^{100} = 27^{100}$
 $5^{200} = (5^2)^{100} = 25^{100}$
 $27^{100} > 25^{100}$, dus $3^{300} > 5^{200}$.
 d $16^{200} = (2^4)^{200} = 2^{800}$
 $2^{1000} > 2^{800}$, dus $2^{1000} > 16^{200}$.

- 5 a Acht breuken verdelen de getallenlijn tussen 0 en $\frac{1}{5}$ in negen gelijke stukken.

$$\frac{1}{5} : 9 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

De acht breuken zijn $\frac{1}{45}, \frac{2}{45}, \frac{3}{45} = \frac{1}{15}, \frac{4}{45}, \frac{5}{45} = \frac{1}{9}, \frac{6}{45} = \frac{2}{15}, \frac{7}{45}$ en $\frac{8}{45}$.

- b Vijftien breuken verdelen de getallenlijn tussen 8 en $8\frac{1}{4}$ in zestien gelijke stukken.

$$8\frac{1}{4} - 8 = \frac{1}{4} \text{ en } \frac{1}{4} : 16 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$$

De vijftien breuken zijn $8\frac{1}{64}, 8\frac{2}{64} = 8\frac{1}{32}, 8\frac{3}{64}, 8\frac{4}{64} = 8\frac{1}{16}, 8\frac{5}{64}, 8\frac{6}{64} = 8\frac{3}{32}, 8\frac{7}{64}, 8\frac{8}{64} = 8\frac{1}{8}, 8\frac{9}{64}, 8\frac{10}{64} = 8\frac{5}{32}, 8\frac{11}{64}, 8\frac{12}{64} = 8\frac{3}{16}, 8\frac{13}{64}, 8\frac{14}{64} = 8\frac{7}{32}$ en $8\frac{15}{64}$.

- 6 a Figuur 1 bestaat uit 3 lucifers.
 Figuur 2 bestaat uit 5 lucifers.
 Figuur 3 bestaat uit 7 lucifers.
 Figuur 4 bestaat uit 9 lucifers.

Per figuur komen er steeds 2 lucifers bij, dus er is sprake van een lineair verband.

Stel $A = an + b$ met A het aantal lucifers en n het figuurnummer.

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \text{ geeft } A = 2n + b \\ n = 1 \text{ en } A = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 1 + b = 3 \\ 2 + b = 3 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus voor de n -de figuur zijn $2n + 1$ lucifers nodig.

b *

- 7** Nummer de schijven oplopend naar diameter. Dus schijf 1 heeft de kleinste diameter, schijf 2 heeft de één-na-kleinste diameter, enzovoort.

$$n = 2 \text{ hoogstens 1 zet} \quad \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \rightarrow 1$$

$$n = 3 \text{ hoogstens 3 zetten} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & \\ 3 & \rightarrow 1 & \rightarrow 1 & \rightarrow 2 & \\ 2 & 2 & 3 & 3 & \end{array}$$

$$n = 4 \text{ hoogstens 5 zetten} \quad \begin{array}{ccccccc} 3 & 4 & 1 & 3 & 2 & 1 & \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & \\ 4 & \rightarrow 3 & \rightarrow 2 & \rightarrow 2 & \rightarrow 3 & \rightarrow 3 & \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & \end{array}$$

$n = 5$ hoogstens 7 zetten eerste zet: 5 bovenop
tweede zet: 5 onderop
Vervolgens nog hoogstens vijf zetten om de overige vier schijven in de goede volgorde te krijgen.

Er komen steeds 2 zetten bij.

Er is sprake van een lineair verband.

Stel $A = an + b$ met A het aantal zetten en n het aantal schijven.

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \text{ geeft } A = 2n + b \\ n = 2 \text{ en } A = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + b = 1 \\ 4 + b = 1 \\ b = -3 \end{array}$$

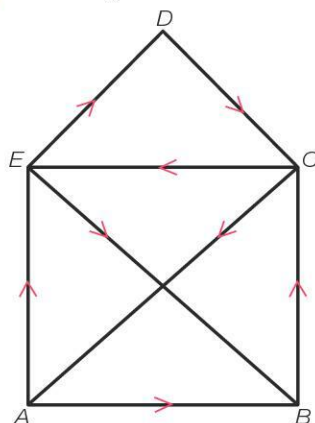
Dus $A = 2n - 3$.

Bij 10 schijven heb je hoogstens $2 \cdot 10 - 3 = 20 - 3 = 17$ zetten nodig.

Bij 20 schijven heb je hoogstens $2 \cdot 20 - 3 = 40 - 3 = 37$ zetten nodig.

Bij n schijven heb je hoogstens $2n - 3$ zetten nodig.

- 8** Zie de figuur hieronder. Het tekenen gaat bijvoorbeeld als volgt: $A-B-C-A-E-D-C-E-B$.



- 9** De winnende strategie is om ervoor te zorgen dat er na jouw beurt vier lucifers overblijven, want dan kan je tegenstander nooit de laatste lucifer pakken. Hetzelfde geldt voor veelvouden van vier lucifers. De winnende speler krijgt na zijn beurt de aantallen: 28-24-20-16-12-8-4-0.

Het maakt uit wie begint. Bij 31 lucifers kan de startspeler winnen door 28 lucifers over te laten voor de tegenspeler. Bij 33 lucifers kan de startspeler winnen door 32 lucifers over te laten voor de tegenstander. Bij 32 lucifers lukt dat niet en kan de tegenstander winnen door 28 lucifers over te laten.

Kangoeroe-opgaven

Bladzijde 186

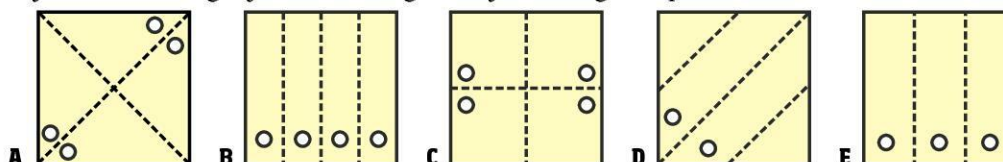
- 1 C** 7 uur na 17:00 uur is het 24:00 uur, dus 0:00 uur. Nog $17 - 7 = 10$ uur later is het daarom 10:00 uur.
- 2 B** Jeanette doet de optelling $1 + 2 + 4 = 7$.
Dus Susan krijgt $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$.
- 3 C** Links van Laura staan er tussen haar en Eva drie meisjes, rechts staan er zes meisjes tussen Laura en Eva. Er staan behalve Laura en Eva dus $6 + 3 = 9$ meisjes. Daarbij moet je Laura en Eva nog meerekenen. Er staan dus $9 + 2 = 11$ meisjes in de kring.
- 4 C** $-17 - 16 = -33$, dus je moet 16 van -17 aftrekken om -33 te krijgen.
- 5 C** Naast elke zwarte of blauwe streep zie je een even grote witte streep. Dus de helft van de driehoek is wit.
- 6 B** $\frac{4}{1} = 4$, $\frac{5}{2} = 2,5$, $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{7}{4} = 1,75$ en $\frac{8}{5} = 1,6$
Dus de bewering bij B is juist.
- 7 A** De vijf meisjes hebben samen $20 + 4 \cdot 10 = 60$ euro. Als ze allemaal evenveel euro's hebben, dan hebben ze elk $60 : 5 = 12$ euro. Dus Amal moet ieder van haar zussen 2 euro geven.
- 8 E** De lengte van de grote rechthoek is $3 + 4 = 7$ meter meer dan die van de kleine rechthoek. De breedte van de grote rechthoek is $2 + 3 = 5$ meter meer dan die van de kleine rechthoek. De omtrek van de grote rechthoek is daarom $2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 24$ meter meer dan die van de kleine rechthoek.

Bladzijde 187

- 9 B** Het binnenste rode gebied is $4 - 1 = 3 \text{ cm}^2$, het buitenste rode gebied is $16 - 9 = 7 \text{ cm}^2$. Er is $7 + 3 = 10 \text{ cm}^2$ rood zichtbaar.
- 10 B** Het eerste stuk is een gelijkzijdige driehoek, dus daarin is de rode kronkellijn twee keer zo lang als de blauwe stippellijn. Hetzelfde geldt voor de stukken daarna. De rode kronkellijn is daarom $2 \cdot 20 = 40$ lang.
- 11 C** Kijk naar de stukken die Mieke en Jaap nog moeten afleggen
De beestjes zijn daarom $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$ deel van de tak van elkaar verwijderd.



- 12 D** Bij elk van de mogelijke uitvouwingen zie je het volgende patroon.



Dus Mark heeft het papier zoals bij D gevouwen.

- 13 E** $\frac{5}{6}$ deel van de toeschouwers was kind, en $\frac{3}{5}$ deel van de kinderen was meisje.
Dus was $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ deel van de toeschouwers meisje.

Bladzijde 188

- 14 E** Er zijn twee paren getallen waarvan de som deelbaar is door 5, namelijk $3 + 12 = 15$ en $8 + 12 = 20$. De leeftijd die hier niet bij staat moet dan wel de leeftijd van Ina zijn. Dus Ina is 14 jaar.

- 15 D** Hij kan de volgende schema's maken.

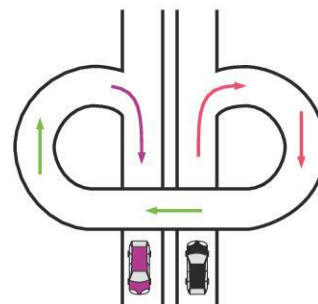
maandag-woensdag	dinsdag-donderdag	woensdag-vrijdag	donderdag-zaterdag
maandag-donderdag	dinsdag-vrijdag	woensdag-zaterdag	donderdag-zondag
maandag-vrijdag	dinsdag-zaterdag	woensdag-zondag	vrijdag-zondag
maandag-zaterdag	dinsdag-zondag		

Dat zijn er dus veertien.

- 16 D** Zie de figuur hiernaast. De som van de getallen in de drie gekleurde vakjes moet gelijk zijn aan $35 - 3 - 4 = 28$. De som van de getallen in het rode en het groene vakje moet gelijk zijn aan $22 - 3 = 19$. Het getal in het blauwe vakje is daarom $28 - 19 = 9$. De som van de getallen in het groene en blauwe vakje moet gelijk zijn aan $25 - 4 = 21$, en het getal in het rode vakje is daarom $28 - 21 = 7$. De getallen in het rode en blauwe vakje zijn dus 9 en 7, en hun product is $9 \cdot 7 = 63$.



- 17 E** Zie de figuur hiernaast. De auto is drie keer 180° gedraaid (rood – groen – paars), dus in totaal 540° .



- 18 B** Als je een lat in 2 stukken wilt zagen, dan moet je 1 keer zagen. Als je een lat in 3 stukken wilt zagen, dan moet je 2 keer zagen. Dus als Kwik de lat in 9 stukken wil zagen, dan moet hij 8 zaagpunten tekenen. En Kwek moet 7 zaagpunten tekenen. In totaal tekenen zij daarom $7 + 8 = 15$ zaagpunten. Kwak zaagt de lat daarom in 16 stukken.

- 19 E** 35% was vrouw, dus 65% was man. Het verschil is 30%, en dat moet gelijk zijn aan 252. Dan is 10% gelijk aan $252 : 3 = 84$, en 100% is daarom gelijk aan 840.

Bladzijde 189

- 20 D** Zie de figuur hiernaast. Kijk naar de buren van het vakje met de 2. Die zijn in de eerste tabel geel gekleurd. Daarin moet hetzelfde getal komen te staan omdat ze opgeteld bij 2 hetzelfde antwoord geven. Kijk vervolgens naar de buren van de gele vakjes. Die zijn in de tweede tabel groen gekleurd. In de groene vakjes moet telkens weer eenzelfde getal komen te staan omdat ze opgeteld bij de gele hetzelfde antwoord moeten geven. Zo doorgaand kun je elk vakje kleuren en met een getal vullen. Je krijgt dan de laatste tabel. Als je daarvan alle getallen optelt, krijg je als antwoord 22.

2		
		3

2		
		3

2	3	2
3	2	3
2	3	2

- 21 C** De kleinste en de grootste hoek zijn opgeteld gelijk aan 180° min de middelste hoek. De middelste hoek moet minder dan 90° zijn, anders zijn er immers twee hoeken van minstens 90° en is de som van de hoeken meer dan 180° . De middelste hoek kan wel 89° zijn. De kleinste en de grootste hoek opgeteld zijn dan 91° .

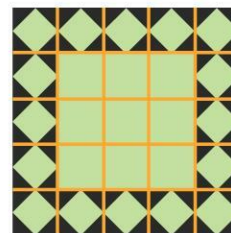
- 22 C** Zie de figuur hieronder. De gekleurde kangoeroes moeten helemaal naar links. De blauwe moeten daarbij elk met drie witte wisselen, de rode elk met zes witte. In totaal moet er dus $2 \times 3 + 2 \times 6 = 18$ keer gewisseld worden.



- 23 B** In de tabel hieronder vind je alle mogelijkheden. Je ziet dan dat er minstens zes verschillende antwoorden zijn, zie bijvoorbeeld de antwoorden die met rood zijn aangegeven.

getal	1	2	3	4	5	6	7	8	9
+ 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
+ 5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

- 24 D** Teken een aantal lijnen, zoals de oranje in de figuur hiernaast. Je ziet dat het tafelkleedje zo wordt opgedeeld in 25 vierkantjes, die elk dus 4% van het tafelkleedje zijn. De 16 vierkantjes aan de rand zijn elk voor de helft zwart. Daarom is $16 \cdot 4\% : 2 = 32\%$ van het tafelkleedje zwart.

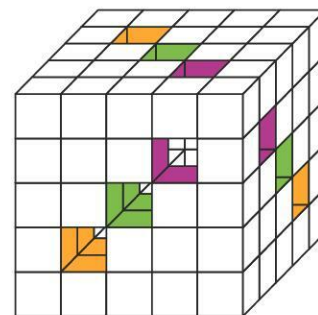


- 25 A** Breid de rij uit. Je krijgt 2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2, 8, ...
Je ziet dat na de eerste twee getallen, de getallen van de rij zich gaan herhalen met periode 6.
 $2010 : 6 = 335$, dus het 2013^e getal is gelijk aan het 3^e getal van de rij.
En dus is het 2017^e getal van deze rij gelijk aan het 7^e getal, en dat is 2.

Bladzijde 190

- 26 A** De auto haalt de bussen in die respectievelijk 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 en 24 minuten eerder zijn vertrokken. De bus die 24 minuten eerder vertrok, komt $60 - 24 - 35 = 1$ minuut na de auto aan in de stad. De bus daarvoor, die 27 minuten eerder vertrok, komt 2 minuten eerder dan de auto aan. Dus de auto haalt acht bussen in.

- 27 B** De grote kubus zonder tunnels is 5 kubusjes lang, 5 kubusjes breed en 5 kubusjes hoog. Om de oranje tunnels te maken, heeft Bert $5 + 4 + 4 = 13$ kubusjes weggehaald. Hetzelfde geldt voor de groene en voor de paarse tunnels. Bert heeft daarom $3 \cdot 13 = 39$ kubusjes niet gebruikt.

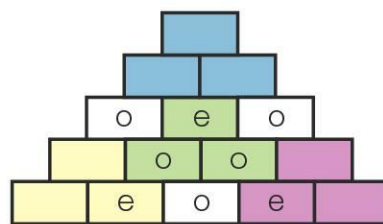
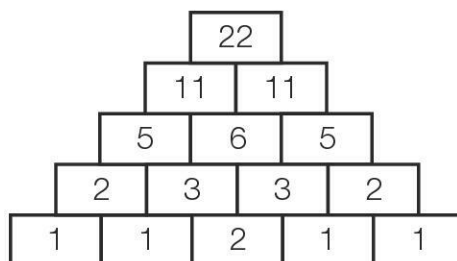


- 28 A** Als de twee hardlopers elkaar ontmoeten, hebben ze samen een hele ronde afgelegd. Hiervan legt de eerste hardloper $\frac{5}{9}$ deel af en de tweede $\frac{4}{9}$ deel. De tweede hardloper loopt daarom $\frac{4}{9} \cdot 720 = 320$ meter tussen twee ontmoetingen in.

- 29 D** In deze opgave maak je gebruik van
 even + even = even,
 oneven + oneven = even en
 oneven + even = even + oneven = oneven.
 In de figuur hiernaast staat e voor een even getal, en o voor een
 oneven getal.

In elk drietal vakjes van de vorm  kunnen niet meer
 dan twee oneven getallen staan. Je kunt in de figuur vier van
 deze drietallen vinden, zie de drietallen gekleurde vakjes in
 de figuur hiernaast. Daarin kunnen dus hoogstens $4 \times 2 = 8$
 oneven getallen staan. Naast de genoemde drietallen vakjes
 zijn er nog drie vakjes, zie de witte vakjes in de figuur
 hiernaast.

Stel dat je elf oneven getallen in de figuur wilt schrijven, dus
 twee in elk drietal gekleurde vakjes en drie in de drie witte
 vakjes. Dan moet de bovenste groene even zijn, anders
 worden de twee blauwe erboven allebei even. Dus zijn de
 onderste twee groene allebei oneven. In de onderste rij zijn
 dan de gekleurde burens van het witte vakje, dat oneven is,
 even. Maar dan moeten de andere gele en paarse vakjes
 oneven zijn. Maar dat kan niet, want dan zouden de bovenste
 witte vakjes juist even moeten zijn. Dus wat je wilt kan niet.
 Je kunt dus niet elf oneven getallen in de figuur schrijven.
 In de figuur hiernaast zie je dat je dat met tien oneven
 getallen wel lukt.



- 30 B** De oppervlaktes van de driehoeken AND en BCN zijn samen $\frac{1}{2}$, dus de oppervlaktes
 van de driehoeken END en FCN zijn samen $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.
 De oppervlakte van elk van de driehoeken ASD , ASB en BCS is $\frac{1}{4}$, dus de oppervlakte van
 vierhoek $ESFN$ is $1 - 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{12}{12} - \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12}$.

Verantwoording

Beeld

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:

Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleenen.



0 / 19

© 2019 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-90087-8



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.