

& GETAL & RUIMTE

A



Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen **havo A** deel 2

Twaalfde editie, 2020

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

Inhoud

5	Veranderingen	4
6	Rekenregels en formules	21
7	Statistiek en beslissingen	40
8	Statistiek met de computer	58
	Gemengde opgaven	74

5 Veranderingen

Voorkennis Intervallen en de delta notatie

Bladzijde 9

- 1 a $0 < x < 6$
b $3,5 < x < 6,4$
c $x > 7$
d $x < 12,5$
- 2 a $1 < x < 4,5$
b $0,5 < x < 5$
c $x < 2$
d $x > 1,5$

Bladzijde 10

- 3 a Stijn lag halverwege voor.
b Bram heeft de wedstrijd gewonnen.
c In het tijdsinterval $0 < t < 60$ lag Stijn voor op Bram.
- 4 a $\Delta x = 7 - 2 = 5$
De bijbehorende Δy is $10 - 4 = 6$.
b $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{5} = 1,2$
$$\left. \begin{array}{l} y = 1,2x + b \\ \text{door } P(2, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,2 \cdot 2 + b = 4 \\ 2,4 + b = 4 \\ b = 1,6 \end{array}$$

Dus $l: y = 1,2x + 1,6$.
- 5 $k: N = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{10 - 4}{12 - 2} = 0,6$
$$\left. \begin{array}{l} N = 0,6t + b \\ \text{door } A(2, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,6 \cdot 2 + b = 4 \\ 1,2 + b = 4 \\ b = 2,8 \end{array}$$

Dus $k: N = 0,6t + 2,8$.

5.1 Stijgen en dalen

Bladzijde 11

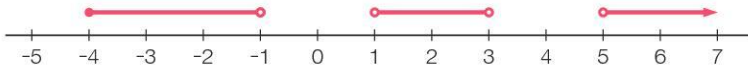
- 1 a De maximale hoogte is 30 meter.
b In de tweede minuut een stijging van $20 - 5 = 15$ meter.
De gemiddelde stijgsnelheid is $\frac{15}{60}$ m/s = 0,25 m/s.
c In de zesde minuut daalde de drone het snelst.

Bladzijde 12

- 2 $\langle \leftarrow, -2 \rangle, [-1, 0], \langle 1, 3 \rangle, \langle 5, \rightarrow \rangle$



- 4 a $[-8, 3]$
b $\langle 4, 4\frac{1}{2}]$
c $[5, 1; 7, 3]$
d $\langle \leftarrow, 2]$

- 5 a** 
- b** $[10, 15]$ en $[3\frac{1}{2}, \rightarrow]$

- 6** klasse A $\langle 23, 40 \rangle$
 klasse B $[40, 80]$
 klasse C $\langle 80, 120 \rangle$

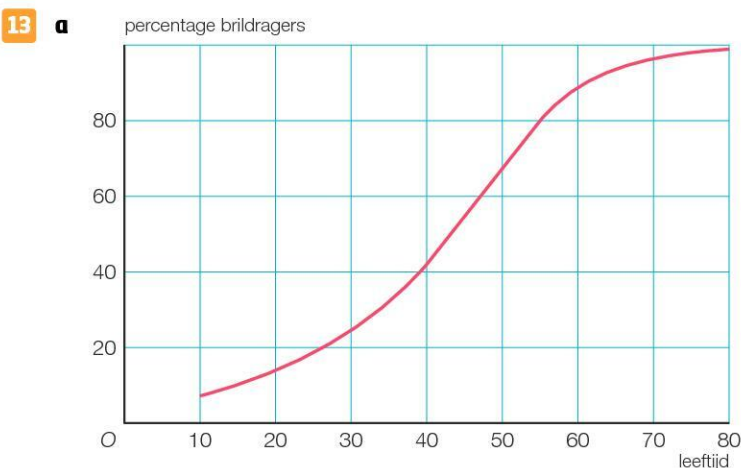
- 7 a** De grafiek is stijgend op $\langle \leftarrow, 1 \rangle$ en $\langle 3, 5 \rangle$.
b De grafiek is dalend op $\langle 1, 3 \rangle$ en $\langle 5, \rightarrow \rangle$.
- 8** Bij deel I daal je steeds sneller en bij deel II daal je juist steeds langzamer.
 Bij gedeelte I neemt de daling toe.
 Bij gedeelte II neemt de daling af.

Bladzijde 14

- 9 a** Toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$ en op $\langle 8, 10 \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle 4, 5 \rangle$ en op $\langle 10, 12 \rangle$.
b Afnemend dalend op $\langle 0, 2 \rangle$ en op $\langle 7, 8 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$.
- 10 a** Constant stijgend op $\langle 0, 3 \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle 3, 4 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 4, 5 \rangle$.
 Afnemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle 7, 10 \rangle$.
b Bij het klimmen neemt de snelheid van de fietser af. Dus op het interval $\langle 4, 7 \rangle$.
- 11 a** In het jaar 1975.
b De grafiek moet nog 30% dalen in één eeuw. Vloeiend verlengen van de grafiek naar 1800 geeft een toenemende daling.

Bladzijde 15

- 12** Bij a hoort III, bij b hoort IV, bij c hoort II en bij d hoort I.



- b** Aflezen uit de grafiek geeft voor de 30-jarigen ongeveer 25%.
c Gebruik de gegevens op 40-jarige leeftijd is 42% brildragend
 op 55-jarige leeftijd is 80% brildragend.

In 15 jaar is de toename $80\% - 42\% = 38\%$, dus bij 1 jaar hoort toename $\frac{38}{15}$.

Van de 50-jarigen draagt dus $42 + 10 \cdot \frac{38}{15} \approx 67\%$ een bril.

- 14** **a** Dat zijn de tijdstippen $t = 3$ en $t = 10$.
b Dat is op $t = 0$, $t = 5$ en $t = 15$. Dus om 7 uur, om 12 uur en om 22 uur.

Bladzijde 16

- 15** **a** Maxima bij de punten B , D en F .
 Het maximum bij B is 30.
 Het maximum bij D is 40.
 Het maximum bij F is 20.
b Minima bij de punten A , C en E .
 Het minimum bij A is 15.
 Het minimum bij C is 20.
 Het minimum bij E is 10.
c Dat is $\frac{40 - 30}{30} \times 100\% \approx 33,3\%$ meer.

Bladzijde 17

- 16** **a** Er zijn 2 maxima.
 Er zijn 2 minima.
b Het grootste maximum is 35 en het kleinste minimum is 5, dus het verschil is $35 - 5 = 30$.
17 **a** Nee, begin januari sluit aan op eind december.
b De filedruk is 580 000 kmmin.
 Deze files duurden in totaal $\frac{580\,000}{1800} \approx 322$ minuten.
 Dus 5 uur.
c Het maximum in maart is 510 000 kmmin.
 Het minimum in februari is 370 000 kmmin.
 Dus $\frac{510\,000 - 370\,000}{370\,000} \times 100\% \approx 38\%$ meer.
d De filedruk hangt samen met de vakanties en de weersomstandigheden. Zo heeft het minimum in augustus te maken met de zomervakantie. De maxima in maart en november hebben te maken met de weersomstandigheden.

5.2 Toenamedigrammen

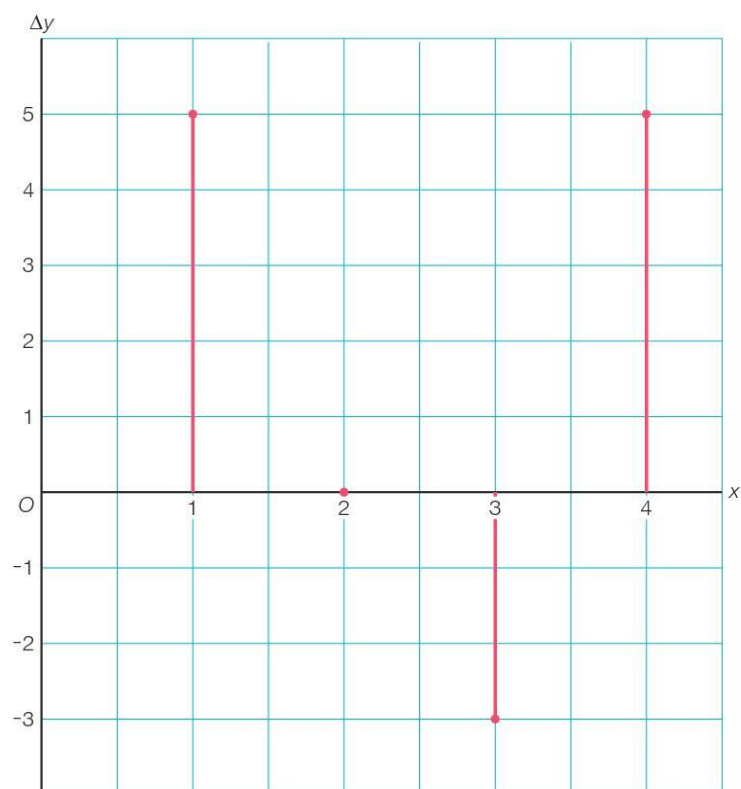
Bladzijde 19

- 18** **a** Tussen tien uur en twaalf uur, dus tussen $t = 2$ en $t = 4$.
 De toename is $10 - 4 = 6^\circ\text{C}$.
b De toename van T op $[4, 6]$ is $15 - 10 = 5^\circ\text{C}$.
c Deze afname is $15,5 - 12 = 3,5^\circ\text{C}$.

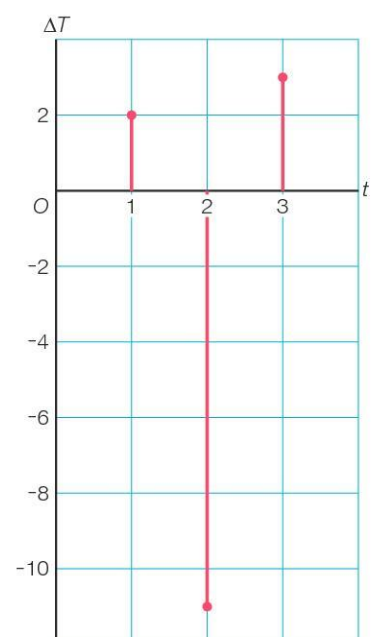
d

interval	$[0, 2]$	$[2, 4]$	$[4, 6]$	$[6, 8]$	$[8, 10]$	$[10, 12]$
ΔT	2	6	5	0,5	-3,5	-4

19	interval	Δy
	$[0, 1]$	5
	$[1, 2]$	0
	$[2, 3]$	-3
	$[3, 4]$	5

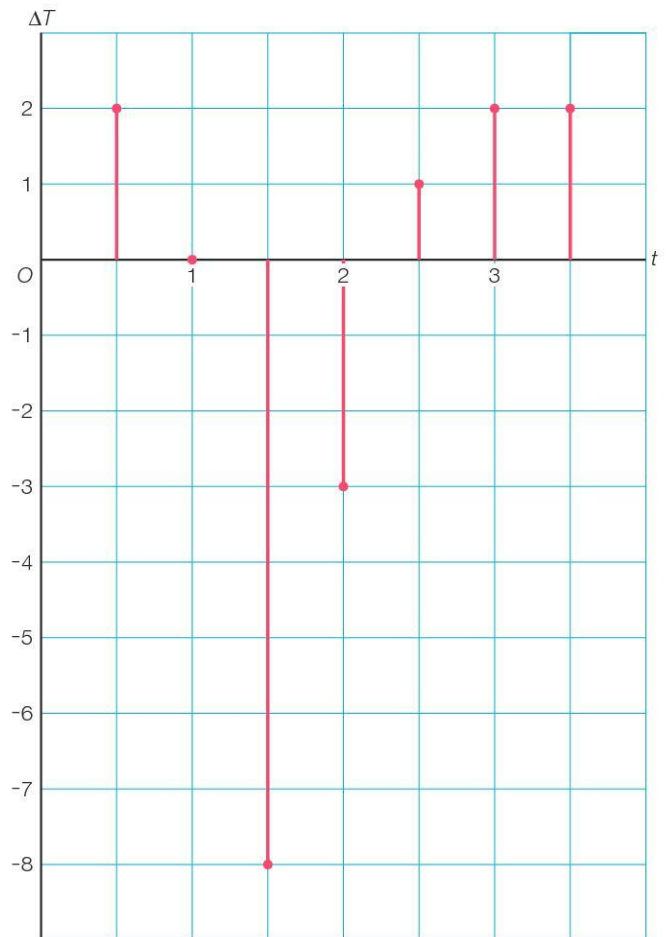


20 a	interval	ΔT
	$[0, 1]$	2
	$[1, 2]$	-11
	$[2, 3]$	3



b

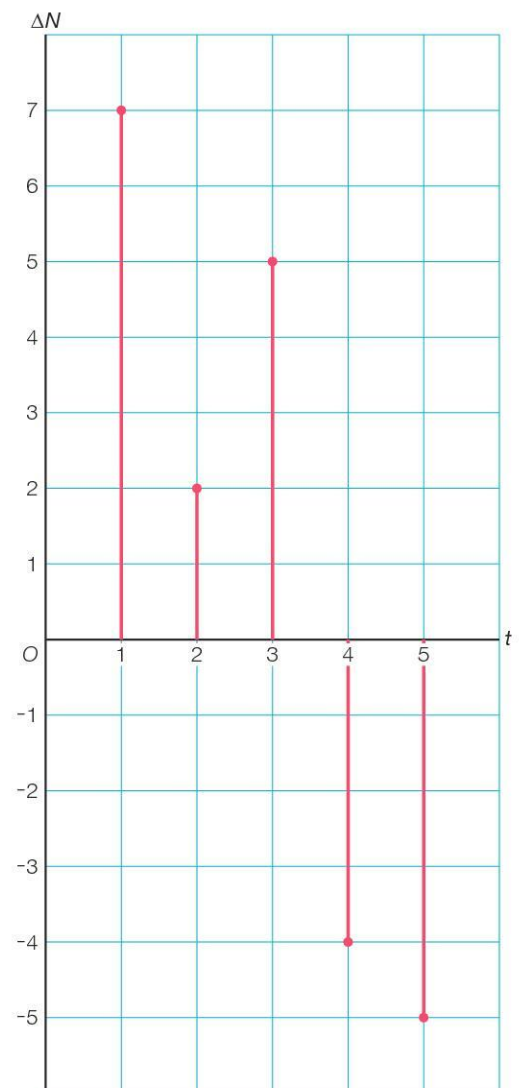
interval	ΔT
$[0; 0,5]$	2
$[0,5; 1]$	0
$[1; 1,5]$	-8
$[1,5; 2]$	-3
$[2; 2,5]$	1
$[2,5; 3]$	2
$[3; 3,5]$	2



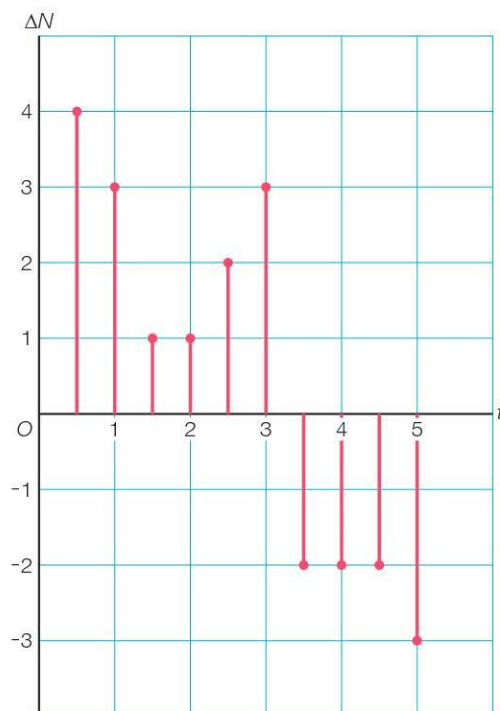
Bladzijde 21

21 a

interval	ΔN
$[0, 1]$	7
$[1, 2]$	2
$[2, 3]$	5
$[3, 4]$	-4
$[4, 5]$	-5

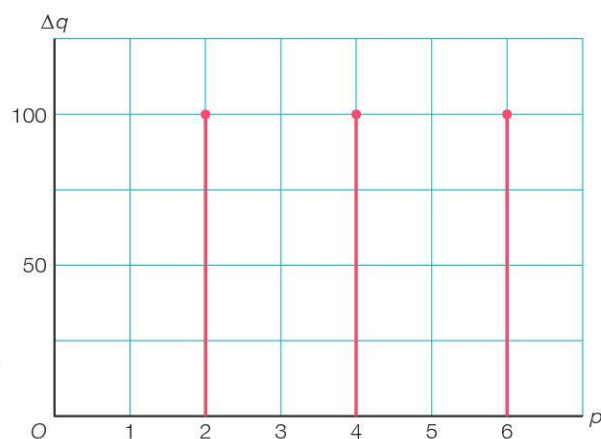


- b** Verdeel de toename 7 op $[0, 1]$ in twee toenames van bijvoorbeeld 4 en 3, enzovoort.

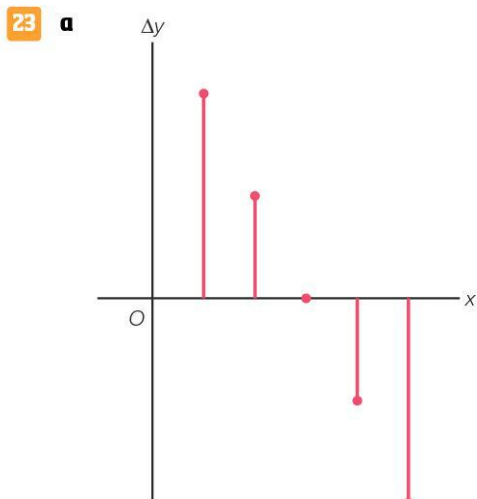
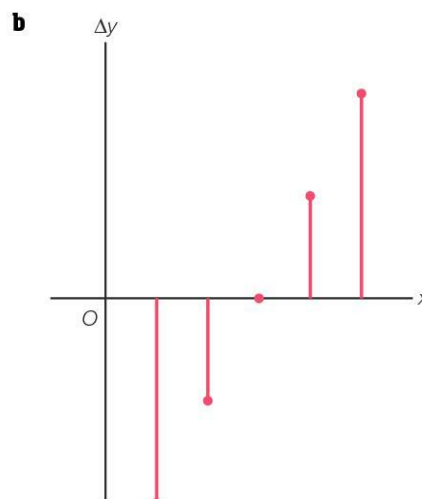


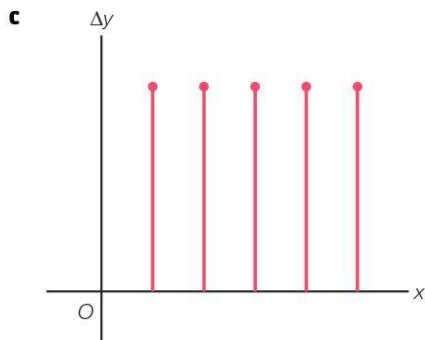
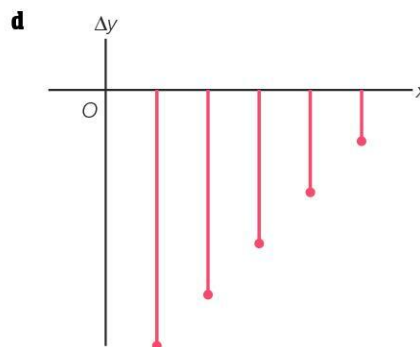
22 a

interval	Δq
$[0, 2]$	100
$[2, 4]$	100
$[4, 6]$	100



- b** De hoogte van de staafjes is 50.
Dit is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn.
c De staafjes zijn allemaal even hoog.
d De staafjes hebben allemaal lengte nul.





24 Bij A hoort III, want tussen 0 en 2 afnemend stijgend en daarna eerst toenemend dalend en daarna afnemend dalend.

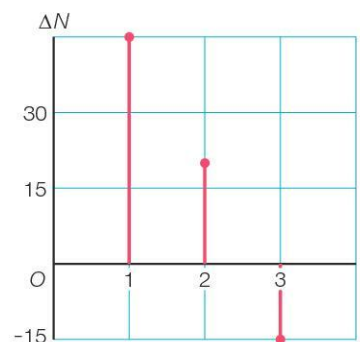
Bij B hoort I, want tussen 0 en 2 afnemend dalend en daarna eerst toenemend stijgend en daarna afnemend stijgend.

Bij C hoort II, want tussen 0 en 3 constant stijgend, dan dalend en daarna weer stijgend.

Bladzijde 22

25

jaar	t	N	ΔN
2017	0	30	—
2018	1	75	45
2019	2	95	20
2020	3	80	-15



26 a Tussen 12 uur en 14 uur is $\Delta T = 4$, dus 's middags om twee uur is de temperatuur $20 + 4 = 24^\circ\text{C}$.

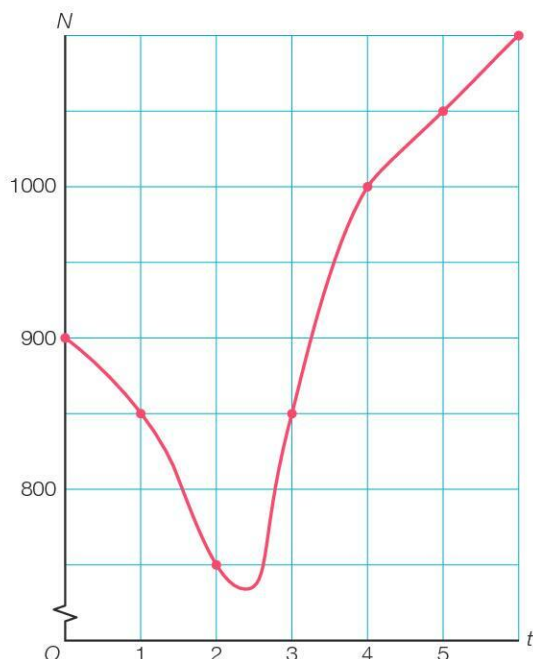
b Om vier uur is de temperatuur $24 - 1 = 23^\circ\text{C}$.

Om acht uur 's avonds is de temperatuur $23 - 5 - 2 = 16^\circ\text{C}$.

c Tussen 8 uur en 10 uur is $\Delta T = 3$ en tussen 10 uur en 12 uur is $\Delta T = 5$, dus om acht uur 's morgens is de temperatuur $20 - 5 - 3 = 12^\circ\text{C}$.

Bladzijde 23

27 Ja, dat kan. Je hebt dan bijvoorbeeld de volgende grafiek.



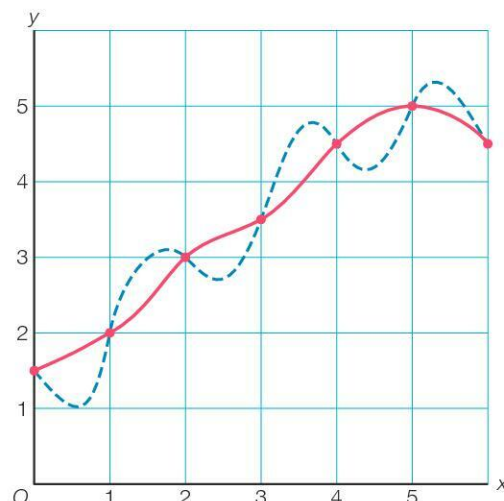
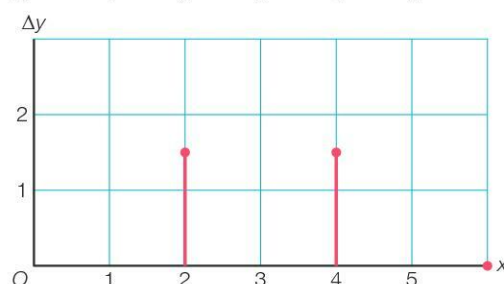
28 a, b

x	y
0	1,5
1	2
2	3
3	3,5
4	4,5
5	5
6	4,5

+0,5
+1
+0,5
+1
+0,5
-0,5

b Alleen de punten $(0; 1,5)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, ... liggen vast. Elke grafiek door deze punten is mogelijk.

interval	Δy
$[0, 2]$	1,5
$[2, 4]$	1,5
$[4, 6]$	0

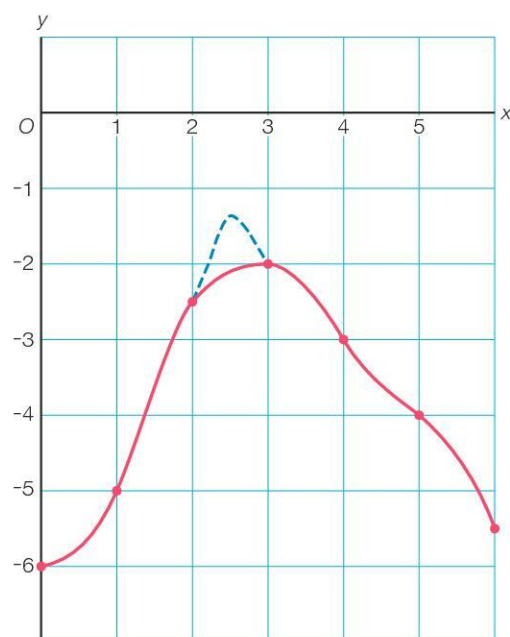


29 a

x	y
0	-6
1	-5
2	-2,5
3	-2
4	-3
5	-4
6	-5,5

+1
+2,5
+0,5
-1
-1
-1,5

b Dit maximum kan optreden bij $x = 2,5$. Zie het gestippelde stuk in de grafiek van vraag a. Het maximum kan niet optreden bij $x = 1,5$, want er is al een maximum tussen $x = 2$ en $x = 4$ en er is gegeven dat er maar één maximum is.

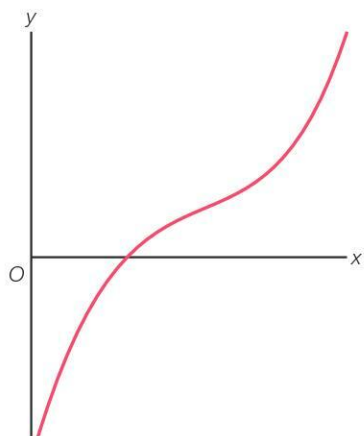


Bladzijde 24

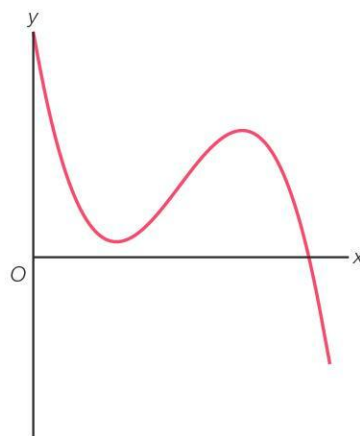
- 30 I constant dalend
II afnemend stijgend
III afnemend dalend
IV toenemend dalend

31

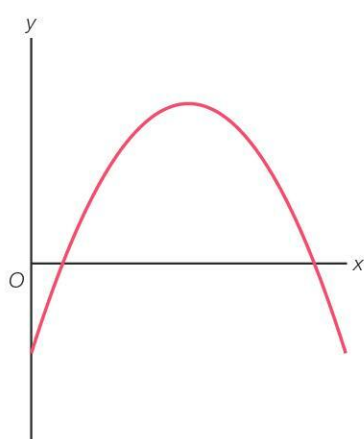
a



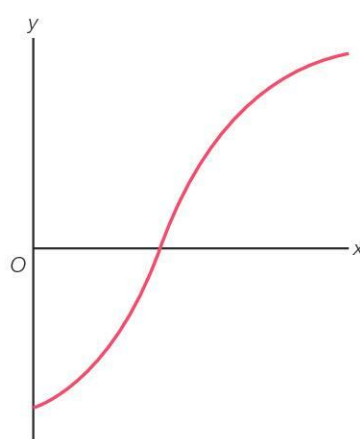
c



b



d



32

a Om 17:00 uur stonden er $110 - 10 - 35 = 65$ fietsen.Om 9:00 uur stonden er $110 - 25 - 15 + 15 - 40 + 40 + 20 = 105$ fietsen.

b Tussen 10 en 11 uur is er netto een afname van 40.

Als 30 personen een fiets hebben neergezet, zijn er dus 70 fietsen meegenomen.

Bladzijde 25

33

a Op 16 maart om 0:00 uur is de olieprijs $101,50 + 0,50 - 1 = 101$ dollar per vat.De tanker bevat $\frac{210\,000\,000}{127,2} \approx 1\,650\,943$ vaten olie.De totale waarde is $1\,650\,943 \cdot 101 \approx 166,7$ miljoen dollar.b Het grootste prijsverschil is $1,25 + 0,75 = 2$ dollar per vat.Dus het gevraagde verschil is $1\,650\,943 \cdot 2 \approx 3,3$ miljoen dollar.

34

Stel er zitten om 15:00 uur x mensen op het terras. Je krijg dan de volgende tabel.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
N	x	$x - 20$	$x - 10$	$x - 40$	$x - 30$	x	$x - 35$	$x - 45$
		-20	+10	-30	+10	+30	-35	-10

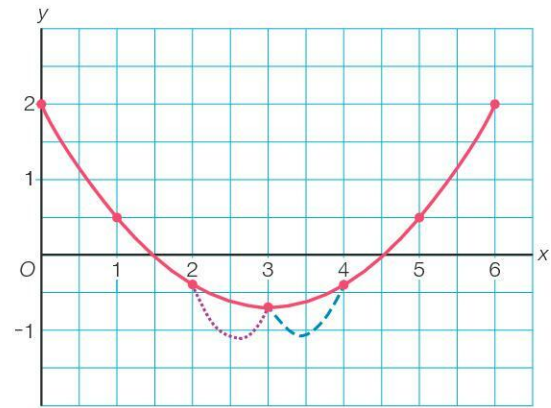
Omdat op alle tijdstippen moet gelden dat N minstens 0 is moet x tenminste 45 zijn.

Er zaten dus om 15:00 uur minstens 45 mensen op het terras.

35 Kies bij $x = 0$ een y -waarde, bijvoorbeeld $y = 2$.

x	y
0	2
1	0,5
2	-0,4
3	-0,7
4	-0,4
5	0,5
6	2

$-1,5$
 $-0,9$
 $-0,3$
 $+0,3$
 $+0,9$
 $+1,5$



In de getekende grafiek treedt het minimum op bij $x = 3$.

Verder zijn twee andere mogelijke grafieken getekend: één met het minimum op $\langle 2, 3 \rangle$

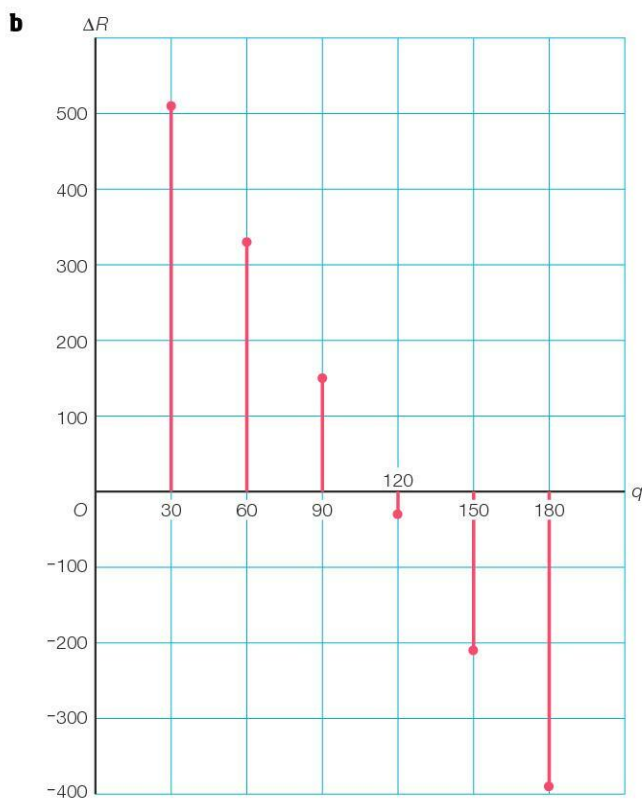
en één met het minimum op $\langle 3, 4 \rangle$.

Het minimum kan optreden op $\langle 2, 4 \rangle$.

Bladzijde 26

36 a

q	R	ΔR
0	0	—
30	510	510
60	840	330
90	990	150
120	960	-30
150	750	-210
180	360	-390



- 37 a** Toenemend stijgend, afnemend stijgend en toenemend dalend.

b

t	N	ΔN
0	0	–
2	1600	1600
4	5120	3520
6	8640	3520
8	10240	1600
10	8000	–2240
12	0	–8000



- 38 a** $h = 10$ geeft $P = 71,8$
De totale kosten zijn $1200 \cdot 0,718 = \text{€ } 861,60$.

- b** $h = 12$ geeft $P = 88,85$

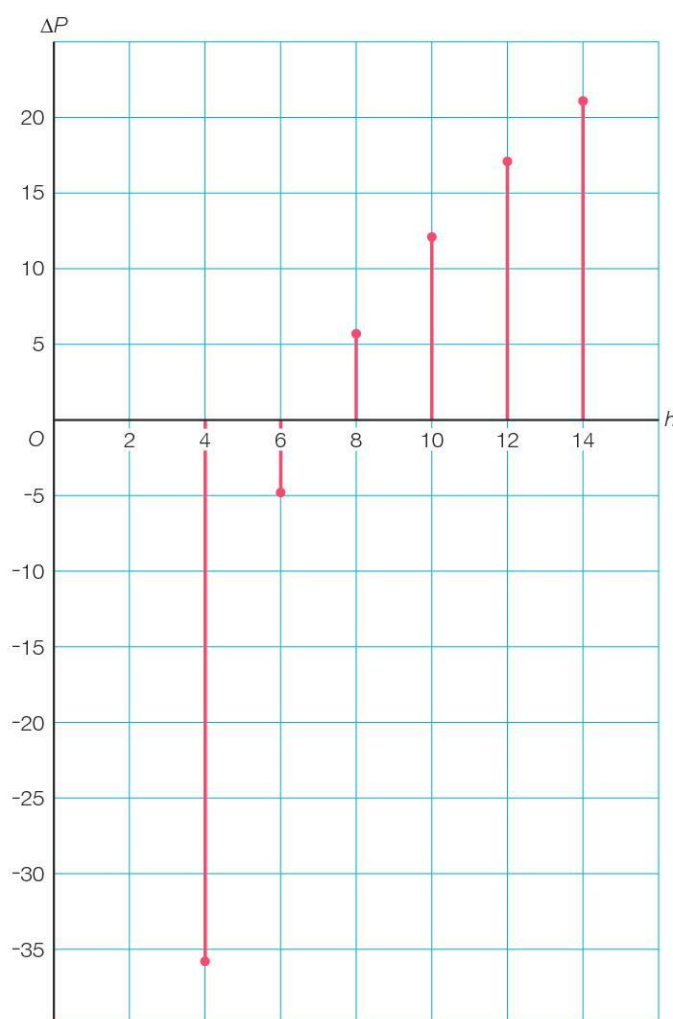
De productiekosten per doosje nemen toe met $\frac{88,85 - 71,8}{71,8} \times 100\% \approx 23,7\%$.

- c** Voer in $y_1 = 0,45x^2 + \frac{165}{x} + 10,3$.

h	P	ΔP
2	94,6	–
4	58,8	–35,8
6	54	–4,8
8	59,7	5,7
10	71,8	12,1
12	88,9	17,1
14	110,3	21,4

- d** De staafjes liggen eerst onder de h -as en worden steeds korter, dus afnemend dalend.

Daarna liggen de staafjes boven de h -as en worden steeds langer, dus toenemend stijgend.



5.3 Differentiequotiënten

Bladzijde 29

- 39** Stijn vergeet rekening te houden met de lengten van de perioden.

Bladzijde 30

- 40 a** In de periode 1980-1987 neemt N met $5,59 - 4,85 = 0,74$ toe. Hier is $\Delta t = 1987 - 1980 = 7$ en $\Delta N = 0,74$.

De gemiddelde toename is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{0,74}{7} \approx 0,106$ miljoen per jaar.

b

periode	Δt	ΔN	$\frac{\Delta N}{\Delta t}$
1920-1947	27	0,75	0,028
1947-1964	17	1,03	0,061
1964-1970	6	0,60	0,100
1970-1980	10	1,10	0,110
1980-1987	7	0,74	0,106
1987-1995	8	0,71	0,089
1995-2000	5	0,29	0,058
2000-2019	19	1,23	0,065

- c** De gemiddelde toename is het grootst in de periode 1970-1980.
d De woningvoorraad nam steeds toe, maar de sterkste toename was in de periode tussen 1964 en 1987.

- 41 a** Op $[0, 10]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{2250 - 250}{10 - 0} = \frac{2000}{10} = 200$.

De gemiddelde toename gedurende de eerste 10 dagen is 200 fruitvliegjes per dag.

- b** Op $[2, 8]$ loopt de grafiek steiler dan op $[10, 14]$.
c Het grootst op $[4, 8]$, het kleinst op $[0, 4]$.

Bladzijde 31

- 42 a** Op $[9, 13]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 800}{13 - 9} = 200$.

- b** Op $[12, 17]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 2000}{17 - 12} = -80$.

- c** Op $[9, 17]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 800}{17 - 9} = \frac{800}{8} = 100$, dus $[9, 17]$.

- d** Op $[15, 18]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1200 - 1800}{18 - 15} = \frac{-600}{3} = -200$, dus $[15, 18]$.

- 43 a** Op $[1, 6]$ is de gemiddelde toename $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 3}{6 - 1} = \frac{3}{5} = 0,6$.

- b** De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 3}{6 - 1} = \frac{3}{5} = 0,6$.

- c** De antwoorden en ook de berekeningen zijn hetzelfde.

Bladzijde 32

- 44 a** De gemiddelde verandering op $[2, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 5}{5 - 2} = \frac{1}{3}$.

- b** Op $[-1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 2}{5 - (-1)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

- c** Bijvoorbeeld $[2, 6]$.

45 a Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$.

b Op $[4, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-6}{6-4} = \frac{-3}{2} = -1,5$.
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, dus er is een afname.

c Op $[2, 7]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-3}{7-2} = \frac{-1}{5} = -0,2$.

d Bijvoorbeeld $[2, 6]$ of $[3, 5]$.

e Bijvoorbeeld $[0, 2]$ of $[2, 4]$.

46 a Op elk interval is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5$.

b Bij een lijn zijn alle differentiequotienten gelijk.

Bladzijde 33

47 a Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{40}{2} = 20$ euro per stuk.

Op $[2, 4]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{20}{2} = 10$ euro per stuk.

Op $[4, 6]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{30}{2} = 15$ euro per stuk.

b De gemiddelde verandering is het grootst op het interval $[0, 2]$.

c

interval	$\frac{\Delta K}{\Delta q}$
$[0, 1]$	30
$[1, 3]$	10
$[3, 6]$	13,3
$[6, 7]$	50

Zie de tabel, op $[6, 7]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q}$ het grootst.

d Teken de lijn door $(0, 20)$ en $(4, 80)$.
 Deze lijn snijdt de grafiek ook in het punt $(6, 110)$.
 Dus de gevraagde q is 6.

48 a Op $[6, 10]$ is $\Delta T = 13 - 10 = 3$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{3}{4} = 0,75^\circ\text{C}$ per uur.

Op $[9, 14]$ is $\Delta T = 20 - 12 = 8$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{8}{5} = 1,6^\circ\text{C}$ per uur.

b Op $t = 16$ is $T = 20$, op $t = 20$ is $T = 17$, dus op $[16, 20]$ is $\Delta T = 17 - 20 = -3$.

Op $[16, 20]$ is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{-3}{4} = -0,75$.

Dit betekent dat tussen $t = 16$ en $t = 20$ de temperatuur daalt.

c Bijvoorbeeld $[0, 6]$ en $[10, 24]$.

d Bijvoorbeeld op $[10, 20]$ is $\Delta T = 17 - 13 = 4$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{4}{10} = 0,4^\circ\text{C}$ per uur.

Dus op het interval $[10, 20]$ is de gemiddelde verandering $0,4^\circ\text{C}$ per uur.

49 Op $[0, 7]$ is $\Delta y = 30 + 20 - 10 + 10 - 20 + 20 + 20 = 70$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{70}{7} = 10$.

Op $[2, 6]$ is $\Delta y = -10 + 10 - 20 + 20 = 0$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

50 a Door $(0, 2)$.

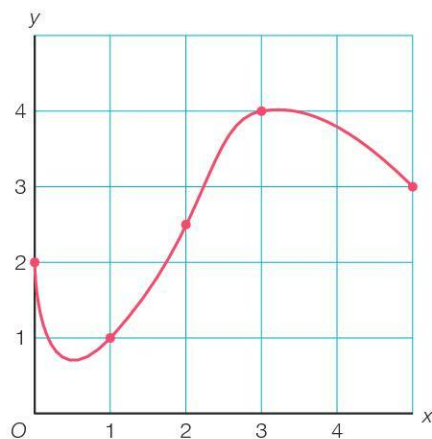
Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$, dus door $(2, 2 + 2 \cdot \frac{1}{4}) = (2, 2\frac{1}{2})$.

Op $[0, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{5}$, dus door $(5, 2 + 5 \cdot \frac{1}{5}) = (5, 3)$.

Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$, dus door $(1, 3 - 4 \cdot \frac{1}{2}) = (1, 1)$.

Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\frac{1}{2}$, dus door $(3, 1 + 2 \cdot 1\frac{1}{2}) = (3, 4)$.

Hieronder zie je een mogelijke grafiek.



b Het differentiequotient op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-4}{5-3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

c Dat is mogelijk, want bij $x = 4$ is elke y -coördinaat mogelijk, dus ook $y = 5\frac{1}{2}$.

En op $[1, 4]$ geeft dit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\frac{1}{2} - 1}{4 - 1} = \frac{4\frac{1}{2}}{3} = 1\frac{1}{2}$.

Bladzijde 34

51 a $b = 5$ geeft $N = 20 - \frac{100}{5+5} = 20 - 10 = 10$

$b = 15$ geeft $N = 20 - \frac{100}{15+5} = 20 - 5 = 15$

b De gemiddelde verandering op $[5, 15]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta b} = \frac{5}{10} = 0,5$ dieren per nacht per meter.

c Op $[10, 15]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta b} = \frac{15 - 13\frac{1}{3}}{5} = \frac{1}{3}$.

Bladzijde 35

52 a $t = 3$ geeft $N = 1125$ en $t = 8$ geeft $N = 6400$.

Op $[3, 8]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{6400 - 1125}{5} = 1055$, dus 1055 patiënten per dag.

b De tweede week is van $t = 7$ tot $t = 14$.

$t = 7$ geeft $N = 5145$ en $t = 14$ geeft $N = 13\,720$.

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{13\,720 - 5145}{7} = 1225$$

De gemiddelde toename is 1225 patiënten per dag.

c $t = 10$ geeft $N = 9000$ en $t = 16$ geeft $N = 15\,360$.

Op $[10, 16]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{15\,360 - 9000}{6} = 1060$.

De gemiddelde toename is 1060 patiënten per dag.

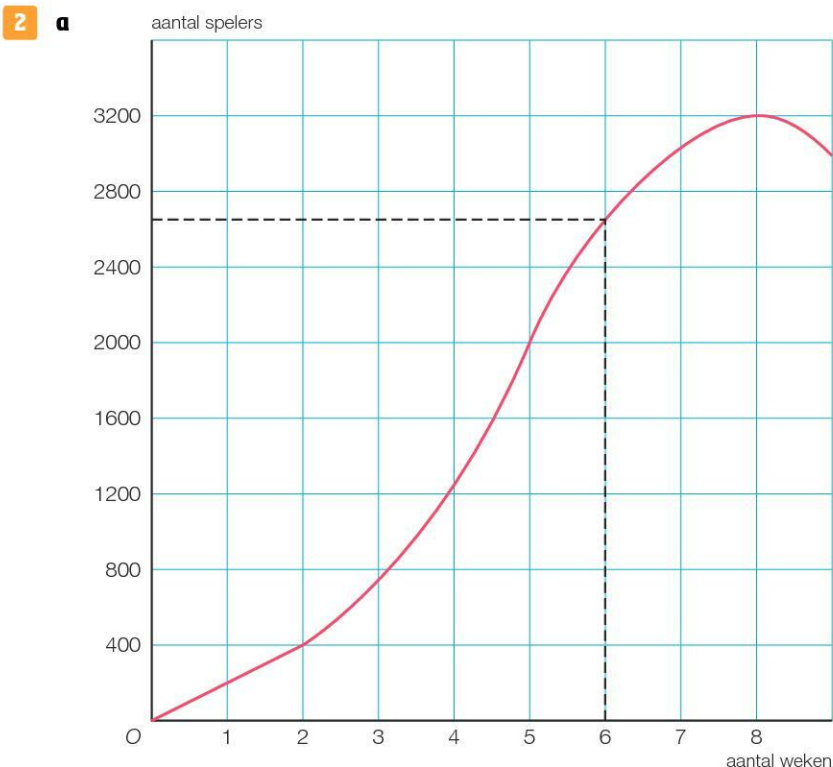
- 53** Kijk waar de grafiek het steilst is.
 Dat is in de buurt van $t = 9$.
 $t = 9$ geeft $N = 7695$ en $t = 10$ geeft $N = 9000$.
 Op $[9, 10]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{9000 - 7695}{1} = 1305$.
 Dus op $[9, 10]$ is de gemiddelde toename 1305 patiënten per dag.
 Dat is meer dan 1300, dus het klopt.

- 54 a** $q = 4$ geeft $K = 35$ en $q = 6$ geeft $K = 93$.
 Op $[4, 6]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{93 - 35}{2} = 29$ euro per stuk.
b $q = 2$ geeft $K = 25$ en $q = 5$ geeft $K = 55$.
 Op $[2, 5]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{55 - 25}{3} = 10$ euro per stuk.
c $q = 3,6$ geeft $K = 30,696$ en $q = 6,1$ geeft $K = 98,021$.
 Op $[3,6; 6,1]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{98,021 - 30,696}{2,5} = 26,93$.
 De gemiddelde toename van de kosten is 26,93 euro per stuk.

Diagnostische toets

Bladzijde 38

- 1 a** Afnemend stijgend op $\langle 1, 3 \rangle$ en op $\langle 5,5; 6 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 3, 4 \rangle$ en op $\langle 6; 6,5 \rangle$.
 Afnemend dalend op $\langle 4, 5 \rangle$ en op $\langle 6,5; 7 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle 5; 5,5 \rangle$ en op $\langle 7, 10 \rangle$.
b Maxima in de punten B , D en F .
 De maxima zijn 8, 3 en 4.
c Dat is tussen het minimum bij E en het maximum bij F .
 De procentuele toename is daar $\frac{4 - 2}{2} \times 100\% = 100\%$



- b** Zie de grafiek. De schatting is ruim 2600 spelers.
c Achtereenvolgens: toenemende daling, afnemende daling, minimum, toenemende stijging, afnemende stijging, maximum.

- 3 a Uit de gegevens volgt de tabel hieronder.

t	0	1	2	3	4	5	6
D	8,5	6,5	4	3	1	3,5	4,5

Bij 8:15 uur hoort $t = 1$. Dus de waterdruk is 6,5 bar.

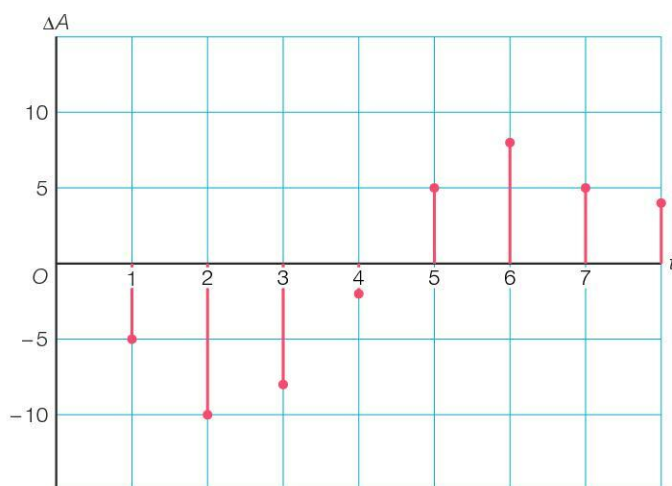
- b Op $t = 4$ is $D = 1$, dus om 9:00 uur kwam de duikboot aan de oppervlakte.

- c Bij een diepte van 35 meter hoort $D = 1 + \frac{35}{10} = 4,5$.

Dat is om 9:30 uur.

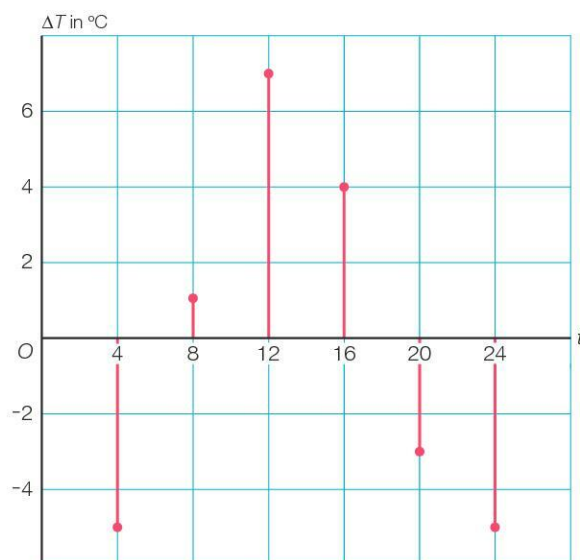
Bladzijde 39

4 interval	ΔA
[0, 1]	-5
[1, 2]	-10
[2, 3]	-8
[3, 4]	-2
[4, 5]	5
[5, 6]	8
[6, 7]	5
[7, 8]	4

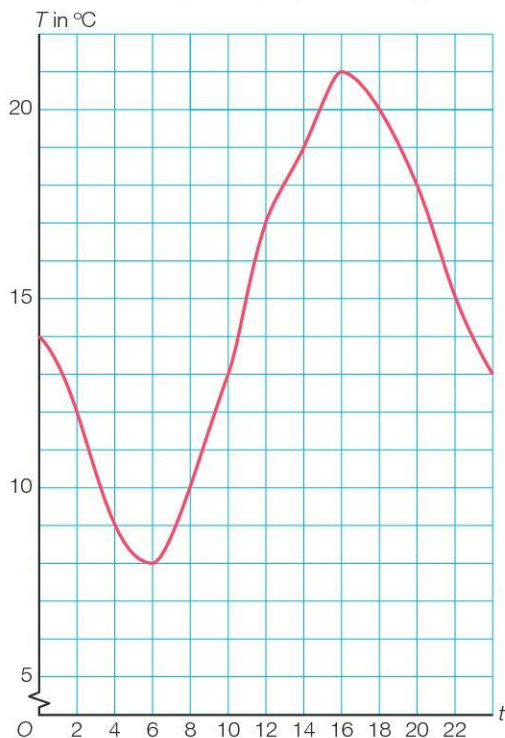


- 5 a $10 + 3 + 4 + 2 + 2 = 21$
Om 16 uur was het 21°C .
 $10 - 2 + 1 = 9$
Om 4 uur was het 9°C .

b interval	ΔT
[0, 4]	-5
[4, 8]	1
[8, 12]	7
[12, 16]	4
[16, 20]	-3
[20, 24]	-5



c	t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
	T	14	12	9	8	10	13	17	19	21	20	18	15	13



- 6 a** $t = 0$ geeft $A = 30$ en $t = 2$ geeft $A = 15$.

Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{15 - 30}{2} = \frac{-15}{2} = -7\frac{1}{2}$.

$t = 3$ geeft $A = 7$ en $t = 6$ geeft $A = 18$.

Op $[3, 6]$ is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{18 - 7}{3} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3} (\approx 3,7)$.

- b** Bijvoorbeeld $[4, 5]$.

- 7 a** $q = 2$ geeft $K = 6,6$ en $q = 4$ geeft $K = 7,4$.

Op $[2, 4]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{7,4 - 6,6}{2} = 0,40$ euro per stuk.

Als de productie toeneemt van 2000 tot 4000 stuks, nemen de kosten met gemiddeld 40 cent per stuk toe.

- b** Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{6,6 - 1}{2 - 0} = 2,80$ euro per stuk.

Op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{7,4 - 1}{4 - 0} = 1,60$ euro per stuk.

Op $[0, 6]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{8,2 - 1}{6 - 0} = 1,20$ euro per stuk.

Op $[0, 9]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{19,9 - 1}{9 - 0} = 2,10$ euro per stuk.

- c** Op $[0, 6]$ is de gemiddelde verandering van K het kleinst.

- 8 a** $q = 5$ geeft $W = -313,75$ en $q = 25$ geeft $W = 1931,52$.

Op $[5, 25]$ is $\frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{1931,52 - (-313,75)}{25 - 5} = \frac{1345}{20} = 67,25$ euro per stuk.

- b** $q = 50$ geeft $W = 3500$ en $q = 75$ geeft $W = 5968,75$.

Op $[50, 75]$ is $\frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{5968,75 - 3500}{75 - 50} = 98,75$.

De gemiddelde toename is €98,75 per stuk.

- c** $q = 80$ geeft $W = 6380$ en $q = 88$ geeft $W = 6941,28$.

Op $[80, 88]$ is $\frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{6941,28 - 6380}{88 - 80} = 70,16$.

De gemiddelde verandering is €70,16 per stuk.

6 Rekenregels en formules

Voorkennis Haakjes wegwerken en variabelen vrijmaken

Bladzijde 43

- 1 a $5(2x - 1) - 2(3x + 1) = 10x - 5 - 6x - 2 = 4x - 7$
b $(x - 1)(x - 2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$
c $(4x + 1)(4x - 1) = 16x^2 - 4x + 4x - 1 = 16x^2 - 1$
d $(3a - 2b)^2 = (3a - 2b)(3a - 2b) = 9a^2 - 6ab - 6ab + 4b^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$
e $5(p - 3q)^2 = 5(p - 3q)(p - 3q) = 5(p^2 - 3pq - 3pq + 9q^2) = 5(p^2 - 6pq + 9q^2) = 5p^2 - 30pq + 45q^2$
f $2m(m + 1)^2 = 2m(m + 1)(m + 1) = 2m(m^2 + m + m + 1) = 2m(m^2 + 2m + 1) = 2m^3 + 4m^2 + 2m$

Bladzijde 44

- 2 a $4x - 3y = 9$
 $-3y = -4x + 9$
 $y = 1\frac{1}{3}x - 3$
b $2(m - 3) - 4n = 6$
 $2m - 6 = 4n + 6$
 $2m = 4n + 12$
 $m = 2n + 6$
c $5(p - 2q) - 3(p + 3) = 15$
 $5p - 10q - 3p - 9 = 15$
 $2p = 10q + 24$
 $p = 5q + 12$
d $B = 2(A - 4) + 5(4 - A)$
 $B = 2A - 8 + 20 - 5A$
 $3A = -B + 12$
 $A = -\frac{1}{3}B + 4$

6.1 Formules combineren en herleiden

Bladzijde 45

- 1 a $W = 1,9$ en $Z = 7,9$ invullen geeft $G = 11,8 \cdot 1,9 + 0,39 \cdot 7,9 - 15,59 = 9,911 \approx 10$.
De grade is 10.
b $Z = 7,9$ en $W = 1,9$, dus Z is 6 meer dan W .
c $G = 11,8W + 0,39(W + 6) - 15,59$
 $G = 11,8W + 0,39W + 2,34 - 15,59$
 $G = 12,19W - 13,25$
d $W = 1,5$ invullen in $G = 12,19W - 13,25$ geeft $G = 12,19 \cdot 1,5 - 13,25 = 5,035 \approx 5$.
De grade is 5.

Bladzijde 45

- 2 a Invullen van $Z = 5W$ in $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$ geeft
 $G = 11,8W + 0,39 \cdot 5W - 15,59$
 $G = 11,8W + 1,95W - 15,59$
 $G = 13,75W - 15,59$
b Invullen van $l = -0,25k + 15$ in $A = 0,03k - 0,6(l - 20)$ geeft
 $A = 0,03k - 0,6(-0,25k + 15 - 20)$
 $A = 0,03k - 0,6(-0,25k - 5)$
 $A = 0,03k + 0,15k + 3$
 $A = 0,18k + 3$
- 3 a Invullen van $p = 1,5q + 2$ in $R = 3p - 4q + 5$ geeft
 $R = 3(1,5q + 2) - 4q + 5$
 $R = 4,5q + 6 - 4q + 5$
 $R = 0,5q + 11$

- b** Invullen van $m = 3 - 2n$ in $F = 0,16m - 0,4(5 - 2n)$ geeft
 $F = 0,16(3 - 2n) - 0,4(5 - 2n)$
 $F = 0,48 - 0,32n - 2 + 0,8n$
 $F = 0,48n - 1,52$
Dus $a = 0,48$ en $b = -1,52$.

- 4 a** $L = 25$ geeft $K = 0,16 \cdot 25 = 4$
 $K = 4$ geeft $B = 0,0012(600 - 18 \cdot 4) = 0,6336$
b Invullen van $K = 0,16L$ in $B = 0,0012(600 - 18K)$ geeft
 $B = 0,0012(600 - 18 \cdot 0,16L)$
 $B = 0,0012(600 - 2,88L)$
 $B = 0,72 - 0,003456L$
c $0,72 - 0,003456L = 0,288$
 $-0,003456L = -0,432$
 $L = 125$

- 5** $2a + b = c$, dus $4a + 2b = 2c$
Invullen van $4a + 2b = 2c$ in $4a + 2b + c = 21$ geeft
 $2c + c = 21$
 $3c = 21$
 $c = 7$
Dus $2a + b = 7$.
 $b = 1$ geeft $2a + 1 = 7$, dus $a = 3$
 $b = 3$ geeft $2a + 3 = 7$, dus $a = 2$
 $b = 5$ geeft $2a + 5 = 7$, dus $a = 1$
Dus $c = 7$ en mogelijke waarden voor a en b zijn $a = 1$ met $b = 5$, $a = 2$ met $b = 3$ en $a = 3$ met $b = 1$.

Bladzijde 47

- 6 a** $A = 240$ en $q = 117$ geeft $-10p + 0,3 \cdot 240 + 150 = 117$
 $-10p = -105$
 $p = 10,5$
De prijs van een blik is € 10,50.
b Invullen van $A = 10p$ in $q = -10p + 0,3A + 150$ geeft
 $q = -10p + 0,3 \cdot 10p + 150$
 $q = -10p + 3p + 150$
 $q = -7p + 150$
c Invullen van $A = 30 + 5p$ in $q = -10p + 0,3A + 150$ geeft
 $q = -10p + 0,3(30 + 5p) + 150$
 $q = -10p + 9 + 1,5p + 150$
 $q = -8,5p + 159$
d Invullen van $A = 2p + 8$ in $q = -10p + 0,3A + 150$ geeft
 $q = -10p + 0,3(2p + 8) + 150$
 $q = -10p + 0,6p + 2,4 + 150$
 $q = -9,4p + 152,4$
- 7 a** $BO = 180$ en $SH = 168$ geeft $G = 5,2 \cdot 180 + 2,6 \cdot 168 - 855 \approx 518$ kg.
b De 5 cm borstomvang te veel draagt $4,3 \cdot 5 = 21,5$ kg bij aan het berekende gewicht.
De schatting van het gewicht valt dus 21,5 kg te hoog uit.
c Invullen van $BO = SH + 12$ in $G = 4,3BO + 3,0SH - 785$ geeft
 $G = 4,3(SH + 12) + 3,0SH - 785$
 $G = 4,3SH + 51,6 + 3,0SH - 785$
 $G = 7,3SH - 733,4$
d $5,2 \cdot 180 + 2,6SH - 855 = 4,3 \cdot 185 + 3,0SH - 785$
 $81 + 2,6SH = 10,5 + 3,0SH$
 $-0,4SH = -70,5$
 $SH \approx 176$
Dus de schofthoogte is 1,76 m.

Bladzijde 48

- 8 a** $T = \frac{495}{90} = 5,5$ en $Z = \frac{90}{12} = 7,5$ geeft
 $ARI = 4,71 \cdot 5,5 + 0,5 \cdot 7,5 - 21,43 = 8,225$
- b** Het aantal zinnen wordt dan 10 en $Z = \frac{90}{10} = 9$.
 $ARI = 4,71 \cdot 5,5 + 0,5 \cdot 9 - 21,43 = 8,975$
 De ARI is 0,75 punt gestegen.
- c** Invullen van $Z = T + 3$ in $ARI = 4,71T + 0,5Z - 21,43$ geeft
 $ARI = 4,71T + 0,5(T + 3) - 21,43$
 $ARI = 4,71T + 0,5T + 1,5 - 21,43$
 $ARI = 5,21T - 19,93$
 Dus $a = 5,21$ en $b = -19,93$.
- d** Er geldt $ARI = L - 5$.
 Invullen van $ARI = L - 5$ in $ARI = 4,71T + 0,5Z - 21,43$ geeft
 $L - 5 = 4,71T + 0,5Z - 21,43$
 $L = 4,71T + 0,5Z - 16,43$

- 9 a** $n = 5$ geeft $m = 5 - 1 = 4$
 $n = 5$ en $m = 4$ geeft $T = 4^2 + 4 \cdot 5 + 2 = 38$
- b** $T = (n - 1)^2 + 4n + 2$
 $T = (n - 1)(n - 1) + 4n + 2$
 $T = n^2 - n - n + 1 + 4n + 2$
 $T = n^2 + 2n + 3$

Bladzijde 49

- 10** Invullen van $k = l + 2$ in $A = 3,5k^2l$ geeft
 $A = 3,5(l + 2)^2 \cdot l$
 $A = 3,5l(l + 2)(l + 2)$
 $A = 3,5l(l^2 + 2l + 2l + 4)$
 $A = 3,5l(l^2 + 4l + 4)$
 $A = 3,5l^3 + 14l^2 + 14l$
- 11 a** Invullen van $s = t - 2$ in $B = 3t^2 - 4s^2 + 5$ geeft
 $B = 3t^2 - 4(t - 2)^2 + 5$
 $B = 3t^2 - 4(t - 2)(t - 2) + 5$
 $B = 3t^2 - 4(t^2 - 2t - 2t + 4) + 5$
 $B = 3t^2 - 4(t^2 - 4t + 4) + 5$
 $B = 3t^2 - 4t^2 + 16t - 16 + 5$
 $B = -t^2 + 16t - 11$
- b** Invullen van $a = 2b - 3$ in $N = 15a^2b$ geeft
 $N = 15(2b - 3)^2 \cdot b$
 $N = 15b(2b - 3)(2b - 3)$
 $N = 15b(4b^2 - 6b - 6b + 9)$
 $N = 15b(4b^2 - 12b + 9)$
 $N = 60b^3 - 180b^2 + 135b$
- 12 a** Invullen van $p = -0,002q + 3,10$ in $R = pq$ geeft
 $R = (-0,002q + 3,10)q$
 $R = -0,002q^2 + 3,10q$
- b** $q = 500$ geeft $R = -0,002 \cdot 500^2 + 3,10 \cdot 500 = 1050$
 $p = -0,002 \cdot 500 + 3,10 = 2,10$
 De dagopbrengst is dan dus 1050 euro en een ijsje kost dan 2,10 euro.
- c** $q = 500$ geeft $K = 0,70 \cdot 500 + 180 = 530$
 Jan maakt dan $1050 - 530 = 520$ euro winst.
- d** $W = R - K$ dus $W = -0,002q^2 + 3,10q - (0,70q + 180)$
 $W = -0,002q^2 + 3,10q - 0,70q - 180$
 $W = -0,002q^2 + 2,40q - 180$

- e** $q = 450$ geeft $W = -0,002 \cdot 450^2 + 2,40 \cdot 450 - 180 = 495$
 $p = -0,002 \cdot 450 + 3,10 = 2,20$
 De winst is 495 euro en een ijsje kost 2,20 euro.
- f** $q = 400$ geeft $W = 460$ en $q = 550$ geeft $W = 535$
 De winst neemt met $\frac{535 - 460}{460} \times 100\% \approx 16,3\%$ toe.

Bladzijde 50

- 13** Invullen van $p = aq + 3$ in $A = 3p^2 - 36q + 5$ geeft
 $A = 3(aq + 3)^2 - 36q + 5$
 $A = 3(aq + 3)(aq + 3) - 36q + 5$
 $A = 3(a^2q^2 + 3aq + 3aq + 9) - 36q + 5$
 $A = 3(a^2q^2 + 6aq + 9) - 36q + 5$
 $A = 3a^2q^2 + 18aq + 27 - 36q + 5$
 $A = 3a^2q^2 + 18aq - 36q + 32$
 Er moet gelden dat $18a = 36$, dus $a = 2$.
 Met $a = 2$ krijg je $A = 12q^2 + 32$.
 Dus $a = 2$, $m = 12$ en $n = 32$.
- 14 a** Invullen van $q = 0,5p - 3$ in $N = 3p + 4q - 5$ geeft
 $N = 3p + 4(0,5p - 3) - 5$
 $N = 3p + 2p - 12 - 5$
 $N = 5p - 17$
- b** $q = 0,5p - 3$
 $0,5p - 3 = q$
 $0,5p = q + 3$
 $p = 2q + 6$
- c** Invullen van $p = 2q + 6$ in $N = 3p + 4q - 5$ geeft
 $N = 3(2q + 6) + 4q - 5$
 $N = 6q + 18 + 4q - 5$
 $N = 10q + 13$

- 15** $2s - 5t = 40$
 $-5t = -2s + 40$
 $t = 0,4s - 8$
 $A = 8s + 3t + 850 \left\{ \begin{array}{l} A = 8s + 3(0,4s - 8) + 850 \\ A = 8s + 1,2s - 24 + 850 \\ A = 9,2s + 826 \end{array} \right.$

Bladzijde 51

- 16 a** $r + 8s = 100$
 $r = 100 - 8s$
 $T = 3r + 6s + 80 \left\{ \begin{array}{l} T = 3(100 - 8s) + 6s + 80 \\ T = 300 - 24s + 6s + 80 \\ T = -18s + 380 \end{array} \right.$
- b** $5a - 8b = 160$
 $-8b = -5a + 160$
 $b = 0,625a - 20$
 $C = 2a - 3b + 64 \left\{ \begin{array}{l} C = 2a - 3(0,625a - 20) + 64 \\ C = 2a - 1,875a + 60 + 64 \\ C = 0,125a + 124 \end{array} \right.$
- 17 a** $3m + 5n = 12$
 $5n = 12 - 3m$
 $n = 2,4 - 0,6m$
 $Q = 5m - n + 125 \left\{ \begin{array}{l} Q = 5m - (2,4 - 0,6m) + 125 \\ Q = 5m - 2,4 + 0,6m + 125 \\ Q = 5,6m + 122,6 \end{array} \right.$

- b** Los op $5,6m + 122,6 = 201$
 $5,6m = 78,4$
 $m = 14$
 $m = 14$ geeft $n = 2,4 - 0,6 \cdot 14 = -6$
Dus $m = 14$ en $n = -6$.

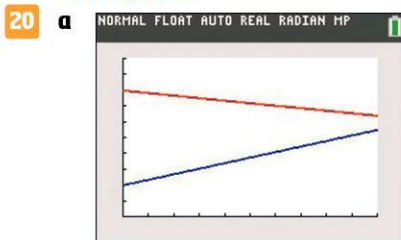
18 a $t = -\frac{1}{3}p + 3\frac{2}{3}$
 $\frac{1}{3}p = -t + 3\frac{2}{3}$
 $p = -3t + 11$
 $A = 2t + 5p + 9$ $\left\{ \begin{array}{l} A = 2t + 5(-3t + 11) + 9 \\ A = 2t - 15t + 55 + 9 \\ A = -13t + 64 \end{array} \right.$
Dus $a = -13$ en $b = 64$.

b $3x - 2y = 6$
 $-2y = -3x + 6$
 $y = 1,5x - 3$
 $B = 5xy + 20$ $\left\{ \begin{array}{l} B = 5x(1,5x - 3) + 20 \\ B = 7,5x^2 - 15x + 20 \end{array} \right.$
Dus $a = 7,5$, $b = -15$ en $c = 20$.

19 Invullen van $q = p + 1$ in $2p + 3q = 8$ geeft
 $2p + 3(p + 1) = 8$
 $2p + 3p + 3 = 8$
 $5p = 5$
 $p = 1$
 $q = p + 1$ $\left\{ \begin{array}{l} q = 1 + 1 = 2 \end{array} \right.$
Invullen van $p = 1$ en $q = 2$ in $N = 6pq - 2p^2 + 4$ geeft $N = 6 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1^2 + 4 = 14$.

6.2 Formules en de grafische rekenmachine

Bladzijde 53



De maximale waarde van x op het scherm is te laag.

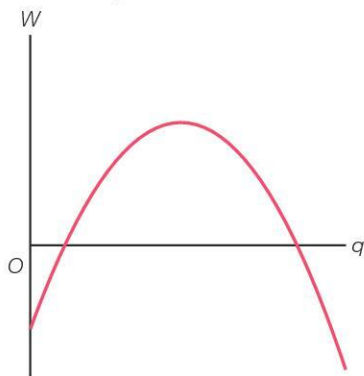
- b** Neem bijvoorbeeld x tussen 0 en 15.
De optie snijpunt geeft $x \approx 11,76$ en $y \approx 6,12$, dus het snijpunt is $(11,76; 6,12)$.

Bladzijde 54

- 21 a** Voer in $y_1 = -0,093x^3 + 1,39x^2 - 3,28x + 4,7$.
De optie maximum geeft $x \approx 8,6$ en $y \approx 20,1$.
Dus in september. De maximale temperatuur is $20,1^\circ\text{C}$.
b Voer in $y_2 = 19$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 7,5$ en $x \approx 9,6$.
Dus in de maanden augustus, september en oktober.

Bladzijde 55

- 22 a** Voer in $y_1 = -0,02x^2 + 5,2x - 200$.

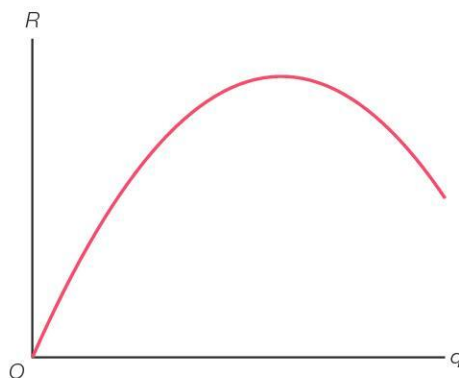


- b** De optie maximum geeft $x = 130$ en $y = 138$.
De maximale winst is $138 \cdot 100 = 13\,800$ euro.
c Bij 10000 euro winst hoort $W = 100$.
Voer in $y_2 = 100$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 86,4$ en $x \approx 173,6$.
Dus bij een verkoop vanaf 87 tot en met 173 artikelen.

- 23 a** Voer in $y_1 = -0,02x^2 + 30x$.

Zie de schets hiernaast.

- b** De optie maximum geeft $x = 750$ en $y = 11\,250$.
De opbrengst is maximaal voor $q = 750$.
De maximale opbrengst is 11 250 euro per week.
c Voer in $y_2 = 8000$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 346,9$ en $x \approx 1153,1$.
De opbrengst is minstens 8000 euro bij een verkoop van 347 tot en met 1153 broodroosters per week.
d Bij de waarden van q die bij deze snijpunten horen is $K = R$, dus er is dan geen winst en geen verlies.
Voer in $y_2 = 5x + 3000$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 134,46$ en $x \approx 1115,54$.
Bij de snijpunten horen 134 en 1116 broodroosters.
e $q = 600$ geeft $R = 10\,800$ en $K = 6000$, dus de winst is $10\,800 - 6000 = 4800$ euro.



- 24 a** Voer in $y_1 = -0,09x^2 + 1,8x + 3$.

$$x = 0 \text{ geeft } y_1 = 3$$

Het schuurtje is 3 meter hoog.

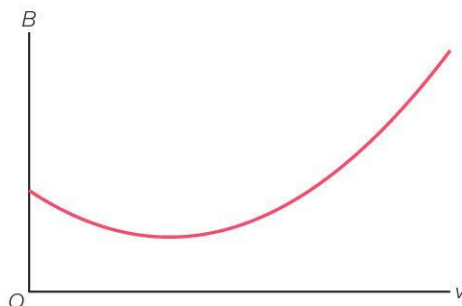
- b** De optie nulpunt geeft $x \approx 21,5$.
De bal komt na 21,5 meter op de grond.
c De optie maximum geeft $x = 10$ en $y = 12$.
De maximale hoogte is 12 meter.
d $x = 18$ geeft $y_1 = 6,24$
De bal gaat over de boom heen.

Bladzijde 56

- 25 a** Voer in $y_1 = 0,001x^2 - 0,12x + 7,8$.

Zie de schets hiernaast.

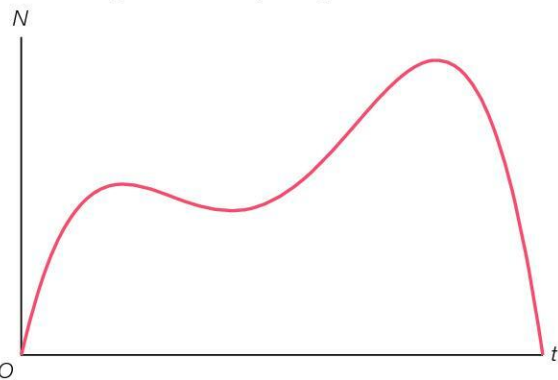
- b** $x = 80$ geeft $y_1 = 4,6$ en $x = 100$ geeft $y_1 = 5,8$.
Het benzineverbruik neemt dus toe met $5,8 - 4,6 = 1,2$ liter per 100 km.
c $x = 30$ geeft $y_1 = 5,1$ en $x = 40$ geeft $y_1 = 4,6$.
De procentuele verandering is $\frac{4,6 - 5,1}{5,1} \times 100\% \approx -9,8\%$.
Zijn benzineverbruik neemt af met 9,8%.
d De optie minimum geeft $x = 60$ en $y = 4,2$.
Ze moet 60 km per uur rijden.



- e** Voer in $y_2 = 4,5$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 42,7$ en $x \approx 77,3$.
Zijn snelheid is 43 km per uur of 77 km per uur.
- f** Haar verbruik mag dan hoogstens $\frac{3}{60} \cdot 100 = 5$ liter per 100 km zijn.
Voer in $y_2 = 5$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 31,72$ en $x \approx 88,20$.
Ze moet een snelheid tussen 32 en 88 km per uur aanhouden.

- 26** $v = 120$ geeft $B = 7,8$ liter per 100 km.
Dat is dus 0,078 liter per km. Hij heeft dus $60 \cdot 0,078 = 4,68$ liter in de tank.
Hij mag dus maximaal 4,68 liter per 90 km rijden, oftewel $\frac{4,68}{90} \cdot 100 = 5,2$ liter per 100 km.
Voer in $y_2 = 5,2$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 28,4$ en $x \approx 91,6$.
Dus hij moet met een snelheid van 91 km/uur rijden.

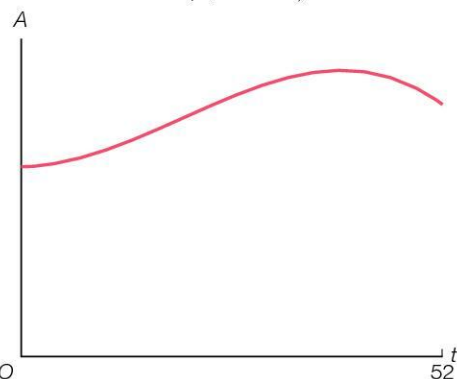
- 27 a** Voer in $y_1 = -0,15x^4 + 3,35x^3 - 24x^2 + 65x$.
Voor x neem je waarden tussen 0 (als de winkel opengaat) en 14 (omdat de meeste supermarkten niet later dan 10 uur 's avonds dichtgaan). Het gedeelte waar het aantal klanten negatief is laat je weg.



- b** De optie maximum geeft $x \approx 9,579$ en $y \approx 102,0$.
9,579 uur is 9 uur en 35 minuten.
Dus om 17:35 uur is het het drukst.
Er zijn dan 102 klanten.
- c** De optie nulpunt geeft $x \approx 12,024$.
Dus om 20:01 uur verlaten de laatste klanten de supermarkt.
- d** Bij 15:15 uur hoort $t = 7,25$. Dat geeft $N \approx 72$.
Voer in $y_2 = 72$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 11,037$.
Dus om 19:02 uur zijn er evenveel klanten in de supermarkt als om kwart over drie.

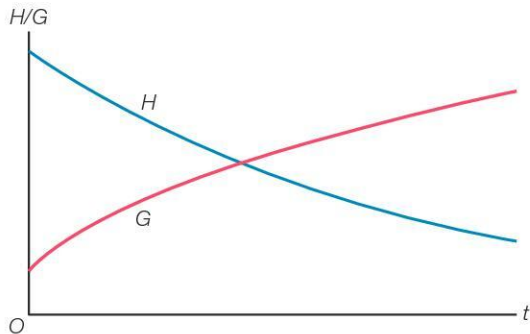
Bladzijde 57

- 28 a** Voer in $y_1 = 9 + \frac{5}{(0,05x - 2)^2 + 1}$.



- b** De optie maximum geeft $x = 40$ en $y = 14$.
Dus 40 weken na de start is de losse verkoop het grootst.
De verkoop is dan 14 000 stuks.
- c** Voer in $y_2 = 13,5$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 33,33$ en $y \approx 46,67$.
Tussen $t = 33,33$ en $t = 46,67$ liggen de waarden $t = 34, 35, \dots, 46$.
Dus gedurende 13 weken is de verkoop meer dan 13 500 stuks.

- 29 a** Voer in $y_1 = 600 \cdot 0,95^x$ en $y_2 = 100\sqrt{x+1}$.



- b** $t = 3$ geeft $H = 514,4\dots$
 $t = 6,5$ geeft $H = 429,8\dots$
Dat is een afname van $514,4\dots - 429,8\dots \approx 84,5$ hectare.
- c** De optie snijpunt geeft $x = 10,83\dots$ en $y = 344,09\dots$
Dat is het jaar 2025.
Er is dan nog 344 hectare heide.
- d** Voer in $y_3 = 600 \cdot 0,95^x + 100\sqrt{x+1}$.
 $x = 0$ geeft $y_3 = 700$, dus op 1 januari 2015 was de totale oppervlakte 700 hectare.
 $x = 10$ geeft $y_3 = 690,90\dots$, dus op 1 januari 2025 zal de totale oppervlakte ongeveer 691 hectare zijn.
- e** De optie maximum geeft $x \approx 2,36\dots$ en $y = 714,89\dots$
 $0,36\dots \cdot 12 \approx 4,4$
In mei 2017 was de totale oppervlakte maximaal.
Er was toen in totaal ongeveer 715 hectare.

6.3 Formules met breuken

Bladzijde 59

- 30 a** $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$ **c** $\frac{1}{7} : \frac{2}{3} = \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{14}$
b $4 \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$ **d** $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} : \frac{5}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$

Bladzijde 60

- 31 a** $A = \frac{5x}{6} = \frac{5}{6}x$ **d** $D = \frac{3(x-2)}{4} = \frac{3}{4}(x-2)$
b $B = \frac{x}{8} = \frac{1}{8}x$ **e** $E = \frac{15x}{4} = \frac{15}{4}x = 3,75x$
c $C = \frac{2(x-3)}{5} = \frac{2}{5}(x-3)$ **f** $F = \frac{12(x+2)}{4} = \frac{12}{4}(x+2) = 3(x+2)$

32 a $A = \frac{3}{5} \cdot \frac{x+y}{y} = \frac{3(x+y)}{5y} = \frac{3x+3y}{5y}$, dus $A = \frac{3x+3y}{5y}$
 b $B = \frac{2x}{y} \cdot \frac{y+1}{4} = \frac{2x(y+1)}{4y} = \frac{x(y+1)}{2y} = \frac{xy+x}{2y}$, dus $B = \frac{xy+x}{2y}$
 c $C = \frac{2a}{3b} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2a}{3b} \cdot \frac{9}{4} = \frac{18a}{12b} = \frac{3a}{2b}$, dus $C = \frac{3a}{2b}$
 d $D = \frac{a+1}{a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a+1}{a} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2(a+1)}{a} = \frac{2a+2}{a}$, dus $D = \frac{2a+2}{a}$
 e $E = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{2(x+1)}{35x} = \frac{2x+2}{35x}$, dus $E = \frac{2x+2}{35x}$
 f $F = 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x+1} = \frac{2xy}{y(x+1)} = \frac{2x}{x+1}$, dus $F = \frac{2x}{x+1}$

33 a $y = 7x$ invullen geeft $A = \frac{x+7x}{10} = \frac{8x}{10} = \frac{4x}{5} = \frac{4}{5}x$, dus $A = \frac{4}{5}x$
 b $y = 5x$ invullen geeft $B = \frac{x+5x}{2x} = \frac{6x}{2x} = 3$, dus $B = 3$
 c $y = x+2$ invullen geeft $C = \frac{x-4}{3-(x+2)} = \frac{x-4}{3-x-2} = \frac{x-4}{1-x}$, dus $C = \frac{x-4}{1-x}$

Bladzijde 61

34 a $A = 0,15 \cdot \frac{x}{0,375} \cdot (x-2) = \frac{0,15}{1} \cdot \frac{x}{0,375} \cdot \frac{(x-2)}{1} = \frac{0,15x(x-2)}{0,375} = 0,4x(x-2) = 0,4x^2 - 0,8x$
 Dus $a = 0,4$ en $b = -0,8$.
 b $B = 2p \cdot \left(\frac{p}{7} - 3\right) = \frac{2p}{1} \cdot \left(\frac{p}{7} - 3\right) = \frac{2p^2}{7} - 6p \approx 0,29p^2 - 6p$
 Dus $a = 0,29$ en $b = -6$.
 c $C = 1,8 \cdot \frac{x+4}{2} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{1,8}{1} \cdot \frac{x+4}{2} \cdot \frac{x-1}{3} = \frac{1,8(x+4)(x-1)}{6} = 0,3(x+4)(x-1)$
 $= 0,3(x^2 - x + 4x - 4) = 0,3(x^2 + 3x - 4) = 0,3x^2 + 0,9x - 1,2$
 Dus $a = 0,3$, $b = 0,9$ en $c = -1,2$.

35 a Door bijvoorbeeld $k = 24$ en $g = 30$ te nemen zie je dat $\frac{27}{k+g}$ niet gelijk is aan $\frac{12}{k} + \frac{15}{g}$.
 Er zijn in totaal $k + g$ vissen en hiervan zijn er $12 + 15 = 27$ vrouwtjes.
 Het gedeelte dat een vrouwtje is, is dus $V = \frac{27}{k+g}$.
 Dus José heeft gelijk en Rik en Job niet.
 b $V = \frac{\frac{1}{4}k + \frac{2}{5}g}{k+g} = \frac{20(\frac{1}{4}k + \frac{2}{5}g)}{20(k+g)} = \frac{5k+8g}{20(k+g)}$
 c Dan geldt $g = 1,5k$.
 $g = 1,5k$ invullen geeft $V = \frac{5k+8 \cdot 1,5k}{20(k+1,5k)} = \frac{5k+12k}{20 \cdot 2,5k} = \frac{17k}{50k} = \frac{17}{50} = 0,34$
 Dus het percentage is 34%.

36 a Stel je hebt eerst 1 liter water. Dan heb je na bevriezen $1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11}$ liter.
 Na ontdooien heb je weer 1 liter, dus het volume neemt met $\frac{1}{12}$ liter af
 (je houdt $\frac{11}{12}$ deel over), want $\frac{12}{11} \cdot \frac{11}{12} = 1$.
 b $\frac{1}{8}$ deel is kind, dus $\frac{7}{8}$ deel is volwassen. Hiervan is $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ deel vrouw.
 Dus van de bruiloftsgasten was $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{8} = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}$ deel vrouw.

37 $(1 + \frac{1}{2}) \cdot (1 + \frac{1}{3}) \cdot (1 + \frac{1}{4}) \cdot (1 + \frac{1}{5}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{1}{1001}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots \cdot \frac{1001}{1000} \cdot \frac{1002}{1001} = \frac{1002}{2} = 501$

Bladzijde 62

38 a $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$

b $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{9}{36} + \frac{4}{36} = \frac{13}{36}$

c $\frac{4}{5} - \frac{3}{7} = \frac{28}{35} - \frac{15}{35} = \frac{13}{35}$

d $1\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9}{6} - \frac{2}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

Bladzijde 63

39 a $\frac{5}{2a} + \frac{3}{2a} = \frac{8}{2a} = \frac{4}{a}$

b $\frac{7}{2a} - \frac{3}{a} = \frac{7}{2a} - \frac{6}{2a} = \frac{1}{2a}$

c $\frac{2}{3a} + \frac{3}{2b} = \frac{4b}{6ab} + \frac{9a}{6ab} = \frac{9a+4b}{6ab}$

d $10 - \frac{2}{a} = \frac{10a}{a} - \frac{2}{a} = \frac{10a-2}{a}$

e $a - \frac{3}{a} = \frac{a}{1} - \frac{3}{a} = \frac{a^2}{a} - \frac{3}{a} = \frac{a^2-3}{a}$

f $\frac{5}{ab} - 2 = \frac{5}{ab} - \frac{2}{1} = \frac{5}{ab} - \frac{2ab}{ab} = \frac{5-2ab}{ab}$

40 a $A = \frac{5}{x} + \frac{3}{y} = \frac{5y}{xy} + \frac{3x}{xy} = \frac{3x+5y}{xy}$

b $B = \frac{6}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{12}{2x} - \frac{3}{2x} = \frac{9}{2x}$

c $C = 5 - \frac{2}{5x} = \frac{25x}{5x} - \frac{2}{5x} = \frac{25x-2}{5x}$

41 a $N = \frac{3p}{q} - \frac{2}{q} = \frac{3p-2}{q}$

b $N = \frac{3p}{q} - \frac{3}{2q} = \frac{6p}{2q} - \frac{3}{2q} = \frac{6p-3}{2q}$

c $N = \frac{3}{p} + \frac{2}{q} = \frac{3q}{pq} + \frac{2p}{pq} = \frac{2p+3q}{pq}$

d $N = \frac{5}{q} ; \frac{2}{p} = \frac{5}{q} \cdot \frac{p}{2} = \frac{5p}{2q}$

e $N = 2 + \frac{3}{p} = \frac{2p}{p} + \frac{3}{p} = \frac{2p+3}{p}$

f $N = \frac{5p}{6q} - 2 = \frac{5p}{6q} - \frac{12q}{6q} = \frac{5p-12q}{6q}$

42 a $A = \frac{2}{x-3} - \frac{4}{3x} = \frac{6x}{(x-3) \cdot 3x} - \frac{4(x-3)}{(x-3) \cdot 3x} = \frac{6x-4(x-3)}{3x(x-3)} = \frac{6x-4x+12}{3x^2-9x} = \frac{2x+12}{3x^2-9x}$

b $B = 5 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{5p^2}{p^2} - \frac{2p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{5p^2-2p-1}{p^2}$

c $C = \frac{6}{a} \cdot \frac{5}{a+b} ; \frac{4}{a+b} = \frac{6}{a} \cdot \frac{5}{a+b} \cdot \frac{a+b}{4} = \frac{30(a+b)}{4a(a+b)} = \frac{30}{4a} = \frac{15}{2a}$

43 a Het gedeelte dat in 4HA zit is $\frac{1}{6} \cdot \frac{x}{T} = \frac{x}{6T}$.

Hiervan is $\frac{3}{5}$ deel een meisje, dus $M = \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{6T} = \frac{3x}{30T} = \frac{x}{10T}$.

b Invullen van $x = \frac{1}{5}T$ in $M = \frac{x}{10T}$ geeft $M = \frac{\frac{1}{5}T}{10T} = \frac{1}{50}$.

Dus $\frac{1}{50}$ deel van de leerlingen zit in 4HA en is een meisje.

c Niet in havo 4 zitten $T-x$ leerlingen.

Dus in havo 5 zitten $\frac{1}{4}(T-x) = \frac{1}{4}T - \frac{1}{4}x$ leerlingen.

Dus $G = \frac{\frac{1}{4}T - \frac{1}{4}x}{T}$ en dus geldt $a = \frac{1}{4}$ en $b = -\frac{1}{4}$.

Alternatieve uitwerking:

Het deel van de leerlingen dat niet in havo 4 zit is $1 - \frac{x}{T}$. Een kwart hiervan zit in havo 5, dus

$$G = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{T} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{T}{T} - \frac{x}{T} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{T-x}{T} \right) = \frac{\frac{1}{4}T - \frac{1}{4}x}{T} \text{ en dus geldt } a = \frac{1}{4} \text{ en } b = -\frac{1}{4}.$$

6.4 Rekenen met machten en wortels

Bladzijde 65

- 44 a $x^2 \cdot x^3 = \underbrace{x \cdot x}_{x^2} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x}_{x^3} = x^5$
 b $(x^2)^3 = (\underbrace{x \cdot x}_{x^2})^3 = \underbrace{x \cdot x}_{x^2} \cdot \underbrace{x \cdot x}_{x^2} \cdot \underbrace{x \cdot x}_{x^2} = x^6$
 c $(3x)^4 = 3x \cdot 3x \cdot 3x \cdot 3x = 3^4 \cdot x^4$

Bladzijde 66

- 45 a $(a^3)^4 = a^{12}$
 b $(p^2)^3 \cdot (p^3)^5 = p^6 \cdot p^{15} = p^{21}$
 c $(q^3)^4 + (q^6)^2 = q^{12} + q^{12} = 2q^{12}$
 d $6a \cdot (a^4)^2 = 6a \cdot a^8 = 6a^9$
 e $10x^6 - 5(x^2)^3 = 10x^6 - 5x^6 = 5x^6$
 f $5(x^8)^2 - 3x^{10} = 5x^{16} - 3x^{10}$
- 46 a $\frac{12x^6}{4x^2} = 3x^4$
 b $\frac{5x^{10}}{15x^5} = \frac{1}{3}x^5$
 c $\frac{24a^4b^2}{6ab} = 4a^3b$
 d $\frac{-15p^6q}{5p^2q} = -3p^4$
 e $\frac{14x^3y^2}{24x^2y} = \frac{7}{12}xy$
 f $\frac{(2ab)^3}{(3ab)^2} = \frac{8a^3b^3}{9a^2b^2} = \frac{8}{9}ab$
- 47 a $P = (-2ab)^3 \cdot b = -8a^3b^3 \cdot b = -8a^3b^4$
 b $P = (3a)^2 + (2b)^2 = 9a^2 + 4b^2$
 c $P = \frac{30a^3b}{5a^2b} = 6a$
 d $P = (3a)^3 - 8a^3 = 27a^3 - 8a^3 = 19a^3$
 e $P = (5a^4)^2 + (-a^2)^4 = 25a^8 + a^8 = 26a^8$
 f $P = \frac{(4a^2b)^2}{(-2a)^4} = \frac{16a^4b^2}{16a^4} = b^2$

48 a

x	1	2	3	4	5
A	10	24,62	41,71	60,63	81,03
B	20	32,49	43,15	52,78	61,70
A · B	200	800	1800	3200	5000
C	200	800	1800	3200	5000

- b De waarden van A · B en C zijn gelijk.

Bladzijde 67

- 49 a $A = x^{1,2} \cdot x^{3,4} = x^{4,6}$, dus $A = x^{4,6}$
 b $B = \frac{x^{5,6}}{x^{4,9}} = x^{0,7}$, dus $B = x^{0,7}$
 c $C = (x^{1,2})^{3,1} = x^{3,72}$, dus $C = x^{3,72}$
 d $D = \frac{(xy)^{1,6}}{x^{1,4}y^{1,2}} = \frac{x^{1,6}y^{1,6}}{x^{1,4}y^{1,2}} = x^{0,2}y^{0,4}$, dus $D = x^{0,2}y^{0,4}$
 e $E = (x^2y^3)^{1,1} = x^{2,2}y^{3,3}$, dus $E = x^{2,2}y^{3,3}$
 f $F = \left(\frac{x^{1,75}}{x^{1,35}}\right)^{1,5} = (x^{0,4})^{1,5} = x^{0,6}$, dus $F = x^{0,6}$
- 50 a $y = (100x^{0,6})^{1,4} = 100^{1,4} \cdot (x^{0,6})^{1,4} \approx 631 \cdot x^{0,84}$
 Dus $y = 631x^{0,84}$.
 b $y = 12,8 \cdot (25x^{1,8})^{1,1} = 12,8 \cdot 25^{1,1} \cdot (x^{1,8})^{1,1} \approx 442 \cdot x^{1,98}$
 Dus $y = 442x^{1,98}$.
 c $y = 0,0018 \cdot (312x^{0,75})^2 = 0,0018 \cdot 312^2 \cdot (x^{0,75})^2 \approx 175 \cdot x^{1,5}$
 Dus $y = 175x^{1,5}$.

- 51 a** $A = (250p^4)^{1,16} = 250^{1,16} \cdot (p^4)^{1,16} \approx 605p^{4,64}$
Dus $A = 605p^{4,64}$.
- b** $B = \frac{0,18(13,5q^{0,8})^{2,5}}{q^{0,6}} = \frac{0,18 \cdot 13,5^{2,5} \cdot (q^{0,8})^{2,5}}{q^{0,6}} \approx \frac{121q^2}{q^{0,6}} = 121q^{1,4}$
Dus $B = 121q^{1,4}$.
- c** $C = 1250(6,12x^{1,3}y^{2,7})^{0,5} = 1250 \cdot 6,12^{0,5} \cdot (x^{1,3})^{0,5} \cdot (y^{2,7})^{0,5} \approx 3092 \cdot x^{0,65} \cdot y^{1,35}$
Dus $a = 3092$, $b = 0,65$ en $c = 1,35$.

- 52 a** $p = 80q$ invullen geeft $K = 20(80q)^{1,15} = 20 \cdot 80^{1,15} \cdot q^{1,15} \approx 3087 \cdot q^{1,15}$
Dus $K = 3087q^{1,15}$.
- b** $t = 155w^{0,6}$ invullen geeft
 $L = 0,05(155w^{0,6})^{2,5} = 0,05 \cdot 155^{2,5} \cdot (w^{0,6})^{2,5} \approx 14955 \cdot w^{1,5}$
Dus $L = 14955w^{1,5}$.
- c** $g = 20f^2$ invullen geeft
 $M = 50f^{0,75} \cdot (20f^2)^{1,25} = 50f^{0,75} \cdot 20^{1,25} \cdot (f^2)^{1,25} = 50 \cdot 20^{1,25} \cdot f^{0,75} \cdot f^{2,5} \approx 2115 \cdot f^{3,25}$
Dus $M = 2115f^{3,25}$.

Bladzijde 68

- 53 a** $A = 200$ geeft $N = 3,3 \cdot 200^{0,3} = 16,17...$
Dus 16 soorten.
- b** $A = 400$ geeft $N = 3,3 \cdot 400^{0,3} = 19,91...$
De toename is $\frac{19,91... - 16,17...}{16,17...} \times 100\% \approx 23\%$.
- c** $A = 2,6B$ invullen geeft $N = 3,3(2,6B)^{0,3} = 3,3 \cdot 2,6^{0,3} \cdot B^{0,3} \approx 4,4 \cdot B^{0,3}$.
Dus $a = 4,4$.

- 54** Er geldt $G = 0,001g$ en $T = \frac{1}{60}t$.
 $G = 0,001g$ en $T = \frac{1}{60}t$ invullen in $T = 1,42G^{0,65}$ geeft
 $\frac{1}{60}t = 1,42 \cdot (0,001g)^{0,65}$
 $t = 60 \cdot 1,42 \cdot 0,001^{0,65} \cdot g^{0,65}$
 $t \approx 0,956 \cdot g^{0,65}$
Dus $t = 0,956g^{0,65}$.

- 55 a** De exponent bij het grondtal 2 wordt telkens één lager en de uitkomsten worden steeds door 2 gedeeld.
Zo krijg je $2^1 = \frac{4}{2} = 2$, $2^0 = \frac{2}{2} = 1$, $2^{-1} = \frac{1}{2}$ en $2^{-2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.
Omdat $4 = 2^2$ is $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$, dus er geldt $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$.
- b** $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ en $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

Bladzijde 70

- 56 a** $a^{-5} \cdot a^2 = a^{-5+2} = a^{-3}$
- b** $\frac{a}{a^{-2}} = a^{1-(-2)} = a^{1+2} = a^3$
- c** $a^4 \cdot \frac{1}{a} = a^4 \cdot a^{-1} = a^{4-1} = a^3$
- d** $(a^{-3})^4 = a^{-12}$
- e** $\frac{a^7}{a^0} = a^{7-0} = a^7$
- f** $\frac{a^4}{\left(\frac{1}{a^3}\right)} = \frac{a^4}{a^{-3}} = a^{4-(-3)} = a^{4+3} = a^7$
- g** $1 = a^0$
- h** $a^3 \cdot (a^4)^{-2} = a^3 \cdot a^{-8} = a^{3-8} = a^{-5}$
- i** $\left(\frac{1}{a^2}\right)^3 = (a^{-2})^3 = a^{-6}$

57 a $C = \frac{10x^{3,2}}{(4,5x^{2,5})^2} = \frac{10x^{3,2}}{4,5^2 \cdot x^5} = \frac{10}{4,5^2} \cdot x^{3,2-5} \approx 0,49 \cdot x^{-1,8}$

Dus $C = 0,49x^{-1,8}$.

b $D = \frac{2t^{1,6} \cdot 4t^{2,4}}{15t^6} = \frac{8t^4}{15t^6} = \frac{8}{15} \cdot t^{4-6} = \frac{8}{15}t^{-2}$

Dus $D = \frac{8}{15}t^{-2}$.

c $E = \frac{(250p^{1,16})^{1,5}}{313p^4} = \frac{250^{1,5}(p^{1,16})^{1,5}}{313p^4} = \frac{250^{1,5}}{313} \cdot \frac{p^{1,74}}{p^4} \approx 12,6 \cdot p^{1,74-4} = 12,6 \cdot p^{-2,26}$

Dus $E = 12,6p^{-2,26}$.

58 a Invullen van $y = 1,5x^{-0,8}$ in $M = 105x^{-1,6}y^{1,2}$ geeft
 $M = 105x^{-1,6} \cdot (1,5x^{-0,8})^{1,2} = 105x^{-1,6} \cdot 1,5^{1,2} \cdot (x^{-0,8})^{1,2}$
 $= 105 \cdot 1,5^{1,2} \cdot x^{-1,6} \cdot x^{-0,96} \approx 171 \cdot x^{-1,6-0,96} = 171 \cdot x^{-2,56}$
Dus $M = 171x^{-2,56}$.

b Invullen van $q = 7,5p^2$ in $N = \frac{21p^{1,5}}{16q^{1,6}}$ geeft

$$N = \frac{21p^{1,5}}{16(7,5p^2)^{1,6}} = \frac{21p^{1,5}}{16 \cdot 7,5^{1,6} \cdot (p^2)^{1,6}} = \frac{21}{16 \cdot 7,5^{1,6}} \cdot \frac{p^{1,5}}{p^{3,2}} \approx 0,052 \cdot p^{1,5-3,2} = 0,052 \cdot p^{-1,7}$$

Dus $N = 0,052p^{-1,7}$.

59 a $m = 80$ en $L = 1,75$ geeft $B = \frac{1,3 \cdot 80}{1,75^{2,5}} \approx 25,7$

b Invullen van $L = 1,7$ in $B = \frac{1,3m}{L^{2,5}}$ geeft $B = \frac{1,3m}{1,7^{2,5}} \approx 0,345m$.

Dus $a = 0,345$.

c Invullen van $m = 75$ in $B = \frac{1,3m}{L^{2,5}}$ geeft $B = \frac{1,3 \cdot 75}{L^{2,5}} = 97,5 \cdot L^{-2,5}$

Dus $b = 97,5$ en $c = -2,5$.

60 Bedenk dat $1 = 2^0$ en $2 = 2^1$. Je krijgt de volgende tabel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^0	2^1	$\frac{2^0}{2^1} = 2^{-1}$	$\frac{2^1}{2^1} = 2^0$	$\frac{2^{-1}}{2^2} = 2^{-3}$	$\frac{2^2}{2^{-3}} = 2^5$	$\frac{2^{-3}}{2^5} = 2^{-8}$	$\frac{2^5}{2^{-8}} = 2^{13}$	$\frac{2^{-8}}{2^{13}} = 2^{-21}$	$\frac{2^{13}}{2^{-21}} = 2^{34}$

Bladzijde 71

61 a $(\sqrt{x})^2 = x$ en $(\sqrt{2a})^2 = 2a$

b $B = \sqrt{0,5P}$ kwadrateren geeft $B^2 = 0,5P$, dus $P = 2B^2$.

Bladzijde 73

62 a $A = \sqrt{3a} \cdot \sqrt{5b} = \sqrt{15ab}$

b $A = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3ab} = \sqrt{18ab}$

c $A = \frac{\sqrt{10a}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10a}{5}} = \sqrt{2a}$

d $A = \sqrt{3p} \cdot \sqrt{1,5q} = \sqrt{4,5pq}$

e $A = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3x} \cdot \sqrt{12y} = \sqrt{180xy}$

f $A = \frac{\sqrt{20xy}}{\sqrt{2y}} = \sqrt{\frac{20xy}{2y}} = \sqrt{10x}$

63 a $A = \sqrt{5a} \cdot \sqrt{6b} = \sqrt{30ab} = \sqrt{30} \cdot \sqrt{ab} \approx 5,48\sqrt{ab}$
Dus $A = 5,48\sqrt{ab}$.

b $A = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3ab} = \sqrt{36ab} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{ab} = 6\sqrt{ab}$
Dus $A = 6\sqrt{ab}$.

c $A = 6\sqrt{3a} \cdot \sqrt{7b} = 6 \cdot \sqrt{21ab} = 6 \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{ab} \approx 27,50\sqrt{ab}$
Dus $A = 27,50\sqrt{ab}$.

d $A = 4\sqrt{25ab} = 4 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{ab} = 4 \cdot 5 \cdot \sqrt{ab} = 20\sqrt{ab}$
Dus $A = 20\sqrt{ab}$.

e $A = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2a} \cdot \sqrt{3b} = \sqrt{36ab} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{ab} = 6\sqrt{ab}$
Dus $A = 6\sqrt{ab}$.

f $A = \frac{\sqrt{20a^2b}}{\sqrt{10a}} = \sqrt{\frac{20a^2b}{10a}} = \sqrt{2ab} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{ab} \approx 1,41\sqrt{ab}$
Dus $A = 1,41\sqrt{ab}$.

64 a $C = 0,04\sqrt{225x} = 0,04 \cdot \sqrt{225} \cdot \sqrt{x} = 0,04 \cdot 15 \cdot \sqrt{x} = 0,6 \cdot \sqrt{x}$
Dus $C = 0,6\sqrt{x}$.

b $D = 0,05\sqrt{420y} = \sqrt{0,05^2} \cdot \sqrt{420y} = \sqrt{0,05^2 \cdot 420y} = \sqrt{1,05y}$
Dus $D = \sqrt{1,05y}$.

c $E = 0,8\sqrt{0,2t+5} = \sqrt{0,8^2} \cdot \sqrt{0,2t+5} = \sqrt{0,64} \cdot \sqrt{0,2t+5} = \sqrt{0,64(2t+5)} = \sqrt{0,128t+3,2}$
Dus $E = \sqrt{0,128t+3,2}$.

65 a $F = 25\sqrt{0,1P}$
 $25\sqrt{0,1P} = F$
 $\sqrt{0,1P} = 0,04F$
 $0,1P = 0,0016F^2$
 $P = 0,016F^2$

b $G = 0,05\sqrt{\frac{Q}{12,5}}$
 $0,05\sqrt{\frac{Q}{12,5}} = G$
 $\sqrt{\frac{Q}{12,5}} = 20G$
 $\frac{Q}{12,5} = 400G^2$
 $Q = 5000G^2$

c $H = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{3R}{14}}$
 $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{3R}{14}} = H$
 $\sqrt{\frac{3R}{14}} = \frac{3}{2}H$
 $\frac{3R}{14} = 2,25H^2$
 $3R = 31,5H^2$
 $R = 10,5H^2$

Bladzijde 74

66 a $n = 2400$, $B = 15$ en $V = 0,05$ invullen geeft $Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 2400}{0,05}} = 1200$.

De optimale bestelhoeveelheid is 1200 stuks, dus de winkel zal $\frac{2400}{1200} = 2$ keer per jaar een bestelling plaatsen.

b Invullen van $n = 800$ in $Q = \sqrt{\frac{2Bn}{V}}$ geeft $Q = \sqrt{\frac{2B \cdot 800}{V}} = \sqrt{1600 \cdot \frac{B}{V}} = \sqrt{1600} \cdot \sqrt{\frac{B}{V}} = 40\sqrt{\frac{B}{V}}$.

c Invullen van $B = 25$ en $V = 0,8$ in $Q = \sqrt{\frac{2Bn}{V}}$ geeft

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 25n}{0,8}} = \sqrt{62,5n} = \sqrt{62,5} \cdot \sqrt{n} \approx 7,9 \cdot \sqrt{n}.$$

Dus $d = 7,9$.

d Invullen van $n = 3000$ en $V = 0,12$ in $Q = \sqrt{\frac{2Bn}{V}}$ geeft $Q = \sqrt{\frac{2B \cdot 3000}{0,12}} = \sqrt{50000B}$.

$$\sqrt{50000B} = Q$$

$$50000B = Q^2$$

$$B = 0,00002Q^2$$

67 Invullen van $n = 200$, $B = 25$ en $Q = \frac{200}{4} = 50$ in $Q = \sqrt{\frac{2Bn}{V}}$ geeft $50 = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 200}{V}}$

oftewel $\sqrt{\frac{10000}{V}} = 50$.

Voer in $y_1 = \sqrt{\frac{10000}{x}}$ en $y_2 = 50$.

De optie snijpunt geeft $x = 4$.

Dus $V = 4$.

Invullen van $I = 160$ en $V = 4$ in $V = 0,01p \cdot I$ geeft

$$0,01p \cdot 160 = 4$$

$$1,6p = 4$$

$$p = 2,5$$

6.5 Formules met exponenten

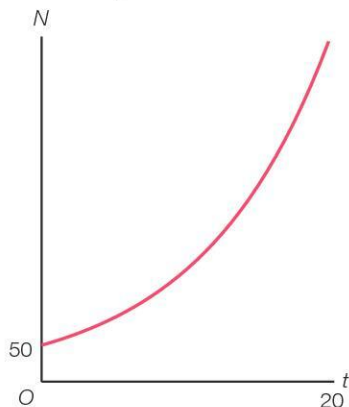
Bladzijde 76

68 a $t = 0$ geeft $N = 50 \cdot 1,12^0 = 50$

b $t = 1$ geeft $N = 50 \cdot 1,12^1 = 56$

$t = 2$ geeft $N = 50 \cdot 1,12^2 = 62,72$

c Voer in $y_1 = 50 \cdot 1,12^x$.



69 a $\frac{1}{4^t} = 4^{-t}$

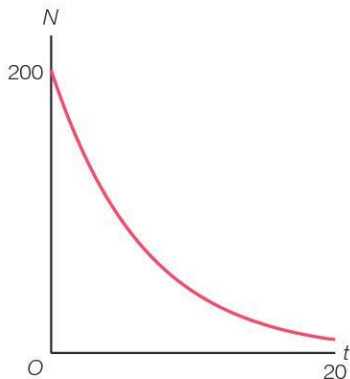
b $4^{-t} = (4^{-1})^t$

c $N = 15 \cdot \frac{1}{4^t} = 15 \cdot 4^{-t} = 15 \cdot (4^{-1})^t = 15 \cdot 0,25^t$

Bladzijde 78

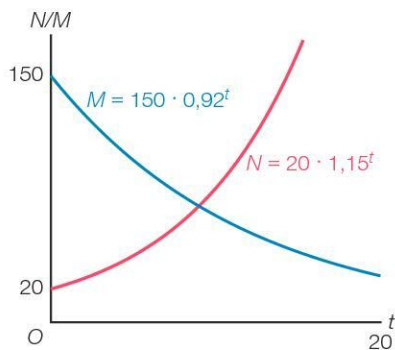
- 70 a** De beginwaarde is 5,6 en de groeifactor is 1,25.
b Een lineaire formule.

- 71 a** Voer in $y_1 = 200 \cdot 0,86^x$.



- b** De groeifactor ligt tussen 0 en 1.
c Voer in $y_2 = 50$.
 De optie snijpunt geeft $x = 9,19...$
 Dus voor $t = 9,2$ is $N = 50$.

- 72 a** Voer in $y_1 = 20 \cdot 1,15^x$ en $y_2 = 150 \cdot 0,92^x$.



- b** De optie snijpunt geeft $x = 9,029...$
 Voor $t = 9,03$ is $N = M$.
c $t = 0$ geeft $N = 20$ en $t = 3$ geeft $N = 30,4175$.
 De toename is $\frac{30,4175 - 20}{20} \times 100\% \approx 52,1\%$.
 $t = 0$ geeft $M = 150$ en $t = 3$ geeft $M = 116,8032$.
 De toename is $\frac{116,8032 - 150}{150} \times 100\% \approx -22,1\%$.
 Dus een afname van 22,1%.

- 73 a** $t = 0$ geeft $K = 18$ en $t = 4$ geeft $K \approx 22,724...$
 De toename is $\frac{22,724... - 18}{18} \times 100\% \approx 26,2\%$.
 $t = 0$ geeft $L = 95$ en $t = 4$ geeft $L = 77,378...$
 De toename is $\frac{77,378... - 95}{95} \times 100\% \approx -18,5\%$.
 Dus een afname van 18,5%.
b Voer in $y_1 = 18 \cdot 1,06^x$ en $y_2 = 36,22$.
 De optie snijpunt geeft $x = 12,00...$
 Voer in $y_3 = 95 \cdot 0,95^x$.
 De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x = 15,18...$
 Het duurt dan nog $15,18... - 12,00... \approx 3,2$ dagen.

- 74 a** $N = 3,2 \cdot \frac{5,6}{4 \cdot 1,25^t} = \frac{3,2 \cdot 5,6}{4} \cdot 1,25^{-t} = 4,48 \cdot 1,25^{-1 \cdot t} = 4,48 \cdot (1,25^{-1})^t = 4,48 \cdot 0,8^t$
 Dus $N = 4,48 \cdot 0,8^t$.
- b** $q = 5$ invullen in de formule van M geeft
 $M = (550 + 2p + 3 \cdot 5) \cdot 0,88^5$
 $M = (2p + 565) \cdot 0,527...$
 $M \approx 1,06p + 298$
 Dus $M = 1,06p + 298$.

- 75 a** $F = 100 \left(2 + \frac{25}{12 \cdot 0,9^t} \right) = 100 \left(2 + \frac{25}{12} \cdot 0,9^{-t} \right) = 100 \left(2 + \frac{25}{12} \cdot 0,9^{-1 \cdot t} \right)$
 $\approx 200 + 208 \cdot (0,9^{-1})^t \approx 200 + 208 \cdot 1,11^t$
 Dus $F = 200 + 208 \cdot 1,11^t$.

Alternatieve uitwerking:

$$F = 100 \left(2 + \frac{25}{12 \cdot 0,9^t} \right) = 200 + \frac{2500}{12 \cdot 0,9^t} \approx 200 + 208 \cdot 0,9^{-t} = 200 + 208 \cdot 0,9^{-1 \cdot t}$$

$$= 200 + 208 \cdot (0,9^{-1})^t \approx 200 + 208 \cdot 1,11^t$$

Dus $F = 200 + 208 \cdot 1,11^t$.

- b** $y = 5,6$ invullen in de formule van G geeft
 $G = \frac{5,1}{5,6} (x - x \cdot 0,8^{5,6}) = \frac{5,1}{5,6} (x - 0,286... \cdot x) = \frac{5,1}{5,6} \cdot 0,713... \cdot x \approx 6,50x$
 Dus $G = 6,50x$.
- c** $H = 5 \cdot 0,75^t - \frac{12}{5 \cdot (\frac{4}{3})^t} = 5 \cdot 0,75^t - \frac{12}{5} \cdot (\frac{4}{3})^{-t}$
 $= 5 \cdot 0,75^t - 2,4 \cdot ((\frac{4}{3})^{-1})^t = 5 \cdot 0,75^t - 2,4 \cdot 0,75^t = 2,6 \cdot 0,75^t$
 Dus $b = 2,6$.

Bladzijde 79

- 76** Bij 1 januari 2000 hoort $t = 0$ en bij 1 januari 2005 hoort $t = 5$.
 $t = 0$ invullen in de formule van N geeft $N = \frac{520}{1 + b \cdot g^0} = \frac{520}{1 + b}$.
 Dus $\frac{520}{1 + b} = 26$ oftewel $1 + b = 20$ en dus $b = 19$.
 Invullen van $t = 5$ en $N = 55$ in de formule $N = \frac{520}{1 + 19 \cdot g^t}$ geeft $\frac{520}{1 + 19 \cdot g^5} = 55$.
 Voer in $y_1 = \frac{520}{1 + 19x^5}$ en $y_2 = 55$.
 De optie snijpunt geeft $x = 0,850... \approx 0,85$
 De formule is dus $N = \frac{520}{1 + 19 \cdot 0,85^t}$.
 Bij 1 januari 2020 hoort $t = 20$.
 $t = 20$ geeft $N = \frac{520}{1 + 19 \cdot 0,85^{20}} = 299,46...$
 Dus op 1 januari 2020 zijn er ongeveer 300 snoeken.

Diagnostische toets

Bladzijde 82

- 1 a** Invullen van $q = p + 2$ in $R = 3p - q + 2$ geeft
 $R = 3p - (p + 2) + 2$
 $R = 3p - p - 2 + 2$
 $R = 2p$
- b** Invullen van $k = l + 2$ in $A = 2kl + 3$ geeft
 $A = 2(l + 2) \cdot l + 3$
 $A = 2l(l + 2) + 3$
 $A = 2l^2 + 4l + 3$

c $2p + 4q = 11$
 $2p = -4q + 11$
 $p = -2q + 5,5$
 $K = 0,06pq + 1,25$

$$\left. \begin{array}{l} K = 0,06(-2q + 5,5) \cdot q + 1,25 \\ K = 0,06q(-2q + 5,5) + 1,25 \\ K = -0,12q^2 + 0,33q + 1,25 \end{array} \right\}$$

Dus $a = -0,12$, $b = 0,33$ en $c = 1,25$.

2 Invullen van $T = -12$ in de formule van F geeft

$$F = (2000 - 16,3v)(-5 - -12)^{-1,668}$$

$$F = (2000 - 16,3v)7^{-1,668}$$

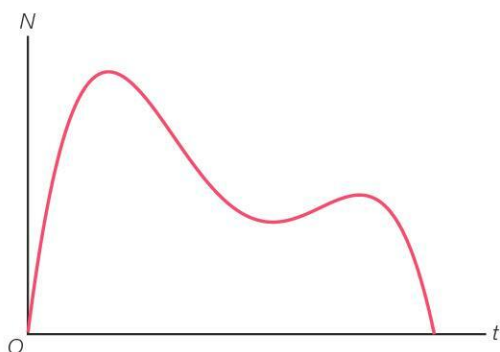
$$F = (2000 - 16,3v) \cdot 0,0389...$$

$$F \approx 77,88 - 0,63v$$

$$\text{Dus } F = -0,63v + 77,88.$$

Dit is een lineair verband.

3 a Voer in $y_1 = -0,36x^4 + 13,8x^3 - 176x^2 + 790x$.



b Bij 21:00 uur hoort $t = 15$.

$$t = 15 \text{ geeft } N = 600$$

Dus om 21:00 uur staan er 600 auto's in de parkeergarage.

c De optie maximum geeft $x \approx 3,53$ en $y \approx 1147$ en ook $x \approx 14,5$ en $y \approx 608$.

Bij de twee maxima horen 1147 en 608 auto's.

d Bij 9:00 uur hoort $t = 3$.

$$t = 3 \text{ geeft } N = 1129$$

Voer in $y_2 = 1129$.

De optie snijpunt geeft $x = 4,114...$

$0,114... \cdot 60 \approx 7$, dus bij $t = 4,114...$ hoort 10:07 uur.

e De optie minimum geeft $x \approx 10,71$.

Bij $t = 10,5$ hoort 16:30 uur.

Dus het gunstigste tijdstip is 16:30 uur.

4 a $A = \frac{4}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3x} + \frac{3}{3x} = \frac{7}{3x}$

b $B = \frac{2}{x} - \frac{4}{y} = \frac{2y}{xy} - \frac{4x}{xy} = \frac{2y - 4x}{xy}$

c $C = \frac{8}{9x} \cdot \frac{3}{4x} = \frac{24}{36x^2} = \frac{2}{3x^2}$

d $D = \frac{5}{6x} : 1\frac{1}{3} = \frac{5}{6x} : \frac{4}{3} = \frac{5}{6x} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{24x} = \frac{5}{8x}$

Bladzijde 83

5 a Er geldt $M = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{p}{T} = \frac{3p}{8T}$.

b Invullen van $p = \frac{2}{3}T$ in $M = \frac{3p}{8T}$ geeft $M = \frac{3 \cdot \frac{2}{3}T}{8T} = \frac{2T}{8T} = \frac{1}{4}$.

Dus $\frac{1}{4}$ deel van de bomen is gemarkeerd.

- 6 a** Invullen van $p = -5q^3$ in de formule van K geeft $K = (-5q^3)^2 + 5q^6 = 25q^6 + 5q^6 = 30q^6$.
Dus $K = 30q^6$.
- b** Invullen van $p = 32q^{0,4}$ in de formule van K geeft

$$K = \frac{(32q^{0,4})^{0,6}}{8q^{0,1}} = \frac{32^{0,6} \cdot (q^{0,4})^{0,6}}{8q^{0,1}} = \frac{32^{0,6}}{8} \cdot \frac{q^{0,24}}{q^{0,1}} = 1 \cdot q^{0,14}.$$
Dus $K = q^{0,14}$.
- c** Invullen van $p = 9q^3$ in de formule van K geeft

$$K = 10 \cdot (9q^3)^{1,5} \cdot q^{-1,5} = 10 \cdot 9^{1,5} \cdot (q^3)^{1,5} \cdot q^{-1,5} = 270 \cdot q^{4,5} \cdot q^{-1,5} = 270 \cdot q^3.$$
Dus $K = 270q^3$.
- d** Invullen van $p = \frac{1}{q^{0,4}} = q^{-0,4}$ in de formule van K geeft

$$K = (4q^{-0,4})^{2,5} = 4^{2,5} \cdot (q^{-0,4})^{2,5} = 32q^{-1}.$$
Dus $K = 32q^{-1}$ oftewel $K = \frac{32}{q}$.

- 7 a** $A = 0,1\sqrt{64x} = 0,1\sqrt{64} \cdot \sqrt{x} = 0,1 \cdot 8 \cdot \sqrt{x} = 0,8 \cdot \sqrt{x}$
Dus $A = 0,8\sqrt{x}$.
- b** $B = 2\sqrt{0,5y - 1,5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{0,5y - 1,5} = \sqrt{4(0,5y - 1,5)} = \sqrt{2y - 6}$
Dus $B = \sqrt{2y - 6}$.
- c** $C = 0,4\sqrt{\frac{t}{2,4}}$

$$0,4\sqrt{\frac{t}{2,4}} = C$$

$$\sqrt{\frac{t}{2,4}} = 2,5C$$

$$\frac{t}{2,4} = 6,25C^2$$

$$t = 15C^2$$
- d** $D = \frac{\sqrt{20q^{2,2}}}{\sqrt{5q^{0,2}}} = \sqrt{\frac{20q^{2,2}}{5q^{0,2}}} = \sqrt{4q^2} = 2q$
 $D = 2q$ geeft $q = \frac{1}{2}D$.

- 8 a** Invullen van $A = 6$ geeft $N = \frac{\sqrt{1,5 \cdot 6}}{1,6^B} = \sqrt{9} \cdot 1,6^{-B} = 3 \cdot (1,6^{-1})^B = 3 \cdot 0,625^B$.
Dus $N = 3 \cdot 0,625^B$.
- b** Invullen van $B = -1$ geeft $N = \frac{\sqrt{1,5A}}{1,6^{-1}} = \frac{\sqrt{1,5} \cdot \sqrt{A}}{1,6^{-1}} = \frac{\sqrt{1,5}}{1,6^{-1}} \cdot \sqrt{A} \approx 1,96 \cdot \sqrt{A}$.
Dus $N = 1,96\sqrt{A}$.
- c** Invullen van $N = 1$ en $A = 24$ in de formule $N = \frac{\sqrt{1,5A}}{1,6^B}$ geeft $\frac{\sqrt{1,5 \cdot 24}}{1,6^B} = 1$,
dus $\frac{\sqrt{36}}{1,6^B} = 1$ oftewel $\frac{6}{1,6^B} = 1$.
Voer in $y_1 = \frac{6}{1,6^x}$ en $y_2 = 1$.
De optie snijpunt geeft $x = 3,812...$
Dus $B = 3,81$.

7 Statistiek en beslissingen

Voorkennis Steekproeven, centrummaten en spreidingsmaten

Bladzijde 87

- 1 De populatieproportie is $p = \frac{165}{20000} = 0,00825$.

De steekproefproportie is $\hat{p} = \frac{2}{250} = 0,008$.

- 2 Het totaal aantal sporters op het sportevenement is $\frac{639}{0,225} = 2840$.

Het aantal sporters met bloedgroep B in de steekproef is $0,235 \cdot 115 \approx 27$.

Bladzijde 88

- 3
- a Rianne heeft $18 + 16 + 5 + 7 + 3 + 2 = 51 \text{ m}^2$ onderzocht.
 - b Rianne heeft in totaal $18 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 171$ slakken geteld.
 - c Het gemiddelde verandert, het wordt lager.
De modus blijft 18.
De mediaan blijft 3.
 - d De standaardafwijking zal toenemen, want het waarnemingsgetal 8 ligt ver boven het gemiddelde.
- 4
- a Centrummaat: mediaan.
Spreidingsmaten: spreidingsbreedte en interkwartielafstand.
 - b 25%

7.1 Statistische verdelingen

Bladzijde 89

- 1 De modus blijft 8.
De mediaan blijft gelijk, deze was 8 en blijft 8.
Het gemiddelde neemt toe, want de som van de waarnemingsgetallen neemt toe en de totale frequentie blijft gelijk.

Bladzijde 90

- 2
- a symmetrische verdeling
 - b rechts-scheve verdeling
 - c symmetrische verdeling
 - d links-scheve verdeling
 - e meertoppige verdeling

Bladzijde 91

- 3
- a Het betreft een groep korte en een groep lange leerlingen. Bijvoorbeeld meisjes en jongens of een eerste klas en een vijfde klas.
 - b De modale klasse is $[182, 184)$.
 - c Dat zou kunnen kloppen. Het gemiddelde ligt tussen de twee toppen en de lengten wijken gemiddeld ongeveer 8 cm van het gemiddelde 176 cm af.
 - d Boxplot I kan niet kloppen, omdat in het histogram tussen 160 cm en 164 cm veel minder dan 25% van de data ligt.
Boxplot III kan niet kloppen, omdat in het histogram meer dan 50% van de data rechts van 176 cm ligt.
Boxplot II past het beste, want in het histogram ligt bijvoorbeeld ongeveer 25% van de data tussen 179 cm en 183 cm.

Bladzijde 92

- 4 a Tot en met de klasse 18-24 is het cumulatieve percentage $10 + 13,7 + 15,8 + 13 = 52,5$. Dus de mediaan ligt in de klasse 18-24. Dus met het doorsnee inkomen van 26 700 euro wordt het gemiddelde bedoeld.
- b Omdat de verdeling van de inkomens rechts-scheef is, geeft de mediaan een beter beeld. Het gemiddelde zou relatief hoog zijn door een klein aantal hele hoge inkomens in de staart van de verdeling.
- c Nee, als iedereen een gelijk inkomen heeft is dat het enige inkomen dat voorkomt en bestaat de verdeling uit één staaf.
- d In het histogram kun je aflezen dat $10 + 13,7 = 23,7\%$ van de inkomens onder 12 000 euro ligt oftewel dat Q_1 meer dan 12 000 euro is. Dit klopt niet met boxplots II en III, want daar ligt Q_1 onder de 10 000 euro. Het klopt wel met boxplot I. In het histogram is verder af te lezen dat $10 + 13,7 + 15,8 + 13 + 10,8 + 9,8 = 73,1\%$ van de inkomens onder de 36 000 euro ligt. Dus Q_3 ligt in de klasse 36-42. Dit klopt niet met boxplots II en III, maar wel met boxplot I. Dus boxplot I past het beste.

Bladzijde 93

- 5 Bij I hoort boxplot D.
Bij II hoort boxplot A.
Bij III hoort boxplot B.
Bij IV hoort boxplot C.
- 6 De interkwartielafstand is $17 - 12 = 5$.
1,5 keer de interkwartielafstand is $1,5 \cdot 5 = 7,5$.
Het waarnemingsgetal 0 ligt meer dan 7,5 van de box van de boxplot af, dus dit is volgens de afspraak een uitschieter.

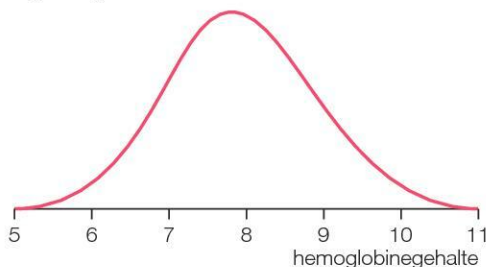
Bladzijde 94

- 7 De modus is kleiner dan de mediaan. De modus hoort bij het hoogste staafje en het eerste en tweede staafje vormen samen minder dan de helft van de waarnemingsgetallen, de mediaan ligt dus rechts van het hoogste staafje.

Bladzijde 95

- 8 a Lees af bij 50% dat de mediaan 4,8 is.
- b Bij het steilste stuk van de relatieve cumulatieve verdelingskromme zitten de meeste waarnemingsgetallen, dus daarbij hoort de modus.
- 9 Uit de relatieve cumulatieve verdelingskromme lees je af: de mediaan zit bij ongeveer 7,5 en de modus bij ongeveer 9. Weinig waarnemingsgetallen in het begin, dus het is een links-scheve verdeling. Dus verdelingskromme B hoort er bij.
- 10 a Het is een symmetrische verdeling, want de relatieve cumulatieve verdelingskromme is puntsymmetrisch.

b



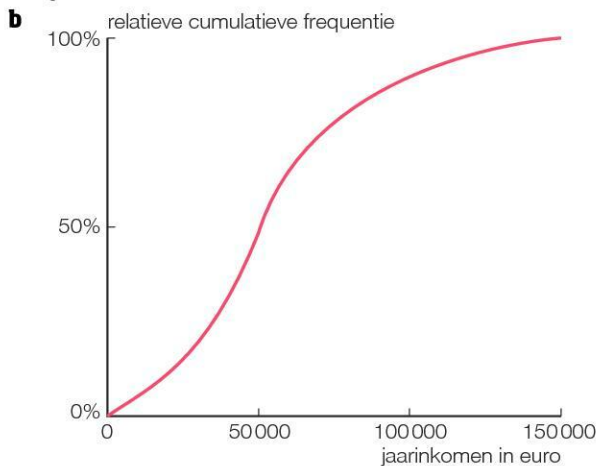
- c Het gemiddelde is hier gelijk aan de mediaan, dus ongeveer 8.

Bladzijde 96

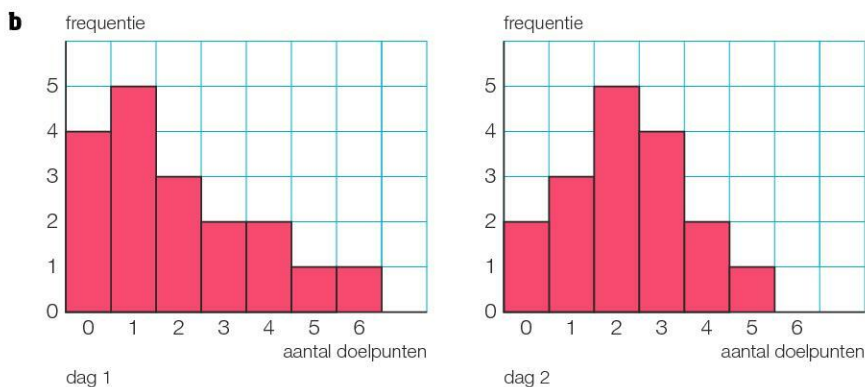
- 11** Bij figuur 7.16a: De cumulatieve verdelingskromme is overal even steil, de verdelingskromme is dus overal even hoog, dus er is sprake van een uniforme verdeling. Bij figuur 7.16b: Er zijn twee steile gedeelten in de cumulatieve verdelingskromme, dus er is sprake van een tweetoppige verdeling.

- 12** **a** Weinig waarnemingsgetallen op het begin en veel op het eind, dus een links-scheve verdeling.
b Het gemiddelde ligt links van de mediaan.

- 13** **a** De modus hoort bij de top, dus is ongeveer 30 000 euro. Hier ligt minder dan 50% van de oppervlakte voor, dus de mediaan ligt hier rechts van. Omdat het een rechts-scheve verdeling is, ligt het gemiddelde rechts van de mediaan. Dus modus, mediaan, gemiddelde.

**Bladzijde 97**

- 14** **a** Bij een rechts-scheve verdeling is het gemiddelde groter dan de modus, dus $\text{gemiddelde} - \text{modus}$ is positief en dus ook $s = \frac{\text{gemiddelde} - \text{modus}}{\text{standaardafwijking}}$ is positief.



Op dag 1 wijkt de verdeling het meest af van een symmetrische verdeling.

- c** Berekening s bij dag 1:

$$\text{gemiddelde} = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1}{4 + 5 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1} = 2$$

$$\text{modus} = 1$$

$$\text{Dus } s = \frac{2 - 1}{1,76} \approx 0,57.$$

Berekening s bij dag 2:

$$\text{gemiddelde} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{2 + 3 + 5 + 4 + 2 + 1} \approx 2,235$$

$$\text{modus} = 2$$

$$\text{Dus } s = \frac{2,235 - 2}{1,35} \approx 0,17.$$

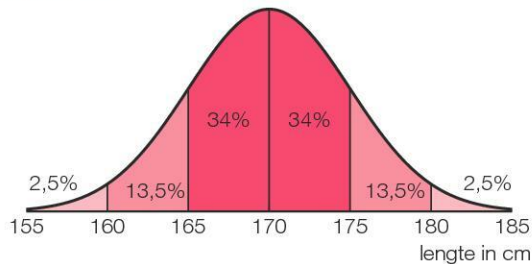
Als s groter is, wijkt de verdeling meer af van een symmetrische verdeling.

- d** Bij kromme II hoort een links-scheve verdeling, dus daar hoort een negatieve waarde van s bij.
Van de krommen I en III is kromme III het meest rechts-scheef, dus daar hoort de grootste positieve waarde van s bij.

- 15 a** Het percentage is $\frac{11,8}{17,3} \times 100\% \approx 68,2\%$.
b Van de 68,2% gemiddeld begaafden (zie a) heeft 34,1% een IQ boven de 100, omdat de verdeling symmetrisch is. Verder is $\frac{2,3}{17,3} \times 100\% \approx 13,3\%$ meer begaafd. Dus is $50\% - 34,1\% - 13,3\% = 2,6\%$ hoogbegaafd.

Bladzijde 99

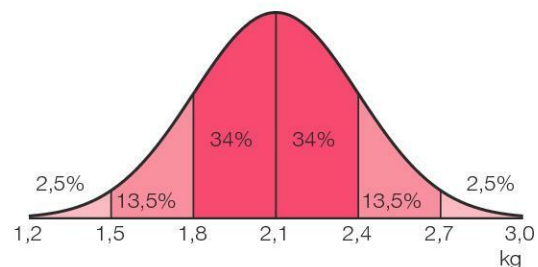
16 a



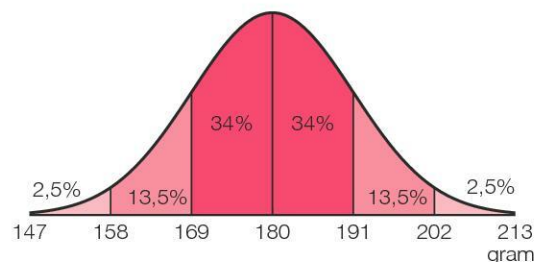
- b** $34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%$
c 2,5%
d $13,5\% + 2,5\% = 16\%$
e $13,5\% + 34\% = 47,5\%$

Bladzijde 100

- 17 a** 2,5%
b $13,5\% + 68\% = 81,5\%$, dus de proportie is 0,815.
c $2,5\% + 13,5\% = 16\%$, dus $0,16 \cdot 200 = 32$ konijnen.
d $\frac{5}{200} \times 100\% = 2,5\%$, dus deze hebben een gewicht van minder dan 1,5 kg.



- 18 a** $13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$
Dus $0,815 \cdot 5000 = 4075$ appels.
b 84%, dus $0,84 \cdot 5000 = 4200$ appels.
c 125 is $\frac{125}{5000} \times 100\% = 2,5\%$.
Dus zwaarder dan 202 gram.



- 19 a** Op hogere leeftijd is snel reageren moeilijker, dus neemt de reactietijd toe. Bij de 18-jarigen hoort kromme A (kleinste gemiddelde), bij de 60-jarigen hoort kromme C (grootste gemiddelde).
b Bij de 18-jarigen is $3\sigma = 420 - 210 = 210$ ms, dus $\sigma = 70$ ms.
Dus bij de 30-jarigen is $\sigma = 1,1 \cdot 70 = 77$ ms.
De gemiddelde reactietijd bij de 30-jarigen is dus $201 + 3 \cdot 77 = 441$ ms.

7.2 Betrouwbaarheidsintervallen voor het populatiegemiddelde

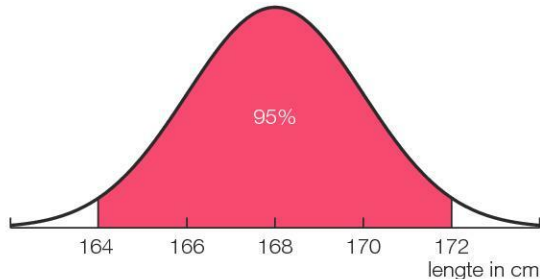
Bladzijde 102

- 20 a** Dit is niet verrassend, want het zijn dezelfde kiwi's.
b $\mu - \sigma = 78 - 9 = 69$ gram en $\mu + \sigma = 78 + 9 = 87$ gram, dus 68%.
c $\mu - 3\sigma = 78 - 3 \cdot 9 = 51$ gram en $\mu + 3\sigma = 78 + 3 \cdot 9 = 99$ gram, dus (bijna) 100%.

- d** Meer dan 87 gram is 16%.
Dat is niet waarschijnlijk.
Dat is ook niet waarschijnlijk.
- e** Er zullen zeer weinig groepen van negen kiwi's zijn waarbij het gemiddelde meer dan 87 gram is. En zo zijn er ook zeer weinig groepen van negen kiwi's waarbij het gemiddelde minder is dan 69 gram. Dat betekent dat de blauwe verdeling smaller is dan de rode verdeling. De standaardafwijking is dus kleiner.
- f** kleiner

Bladzijde 104

- 21** Voor de teams van 16 spelers geldt $\mu = 168$ cm en $\sigma = \frac{8}{\sqrt{16}} = 2$ cm.



Dus 95% van de teams heeft een lengte tussen 164 en 172 cm.

- 22 a** De variabele reactietijd is kwantitatief, want het geeft een hoeveelheid aan.
- b** Voor de groepen van 16 leerlingen geldt $\mu = 600$ ms en $\sigma = \frac{120}{\sqrt{16}} = 30$ ms.
 $570 = 600 - 1 \cdot 30 = \mu - \sigma$
 Minder dan 570 ms is 16%.
- c** Voor de groepen van 64 leerlingen geldt $\mu = 600$ ms en $\sigma = \frac{12}{\sqrt{64}} = 15$ ms.
 $570 = 600 - 2 \cdot 15 = \mu - 2\sigma$
 Minder dan 570 ms is 2,5%.

- 23** Voor de pallets met 900 pakken geldt $\mu = 500$ gram en $\sigma = \frac{9}{\sqrt{900}} = 0,3$ gram.

$$497 = 500 - 10 \cdot 0,3 = \mu - 10\sigma$$

Dus 497 gram of minder is 0%.

Het is dus onmogelijk dat de pakken op de pallet gemiddeld 497 gram wegen als er niets mis is.

Voor de trays met 9 pakken geldt $\mu = 500$ gram en $\sigma = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$ gram.

$$497 = 500 - 1 \cdot 3 = \mu - \sigma$$

Dus 497 gram of minder is 16%.

Het zal dus met enige regelmaat voorkomen dat pakken in een tray gemiddeld 497 gram wegen.

Bladzijde 105

- 24** Ad gebruikt de standaardafwijking van de groep inzittenden alsof het de standaardafwijking per bezoeker is.
 Neem als standaardafwijking van alle bezoekers x kg.
- Voor de groep van negen inzittenden geldt dan dat $\mu = 70$ kg en $\sigma = \frac{x}{\sqrt{9}} = \frac{x}{3}$ kg.
- Dit geeft $\frac{x}{3} = 5$, dus $x = 15$ kg.
- Voor de bezoekers geldt dus dat $\mu = 70$ kg en $\sigma = 15$ kg.
- $85 = 70 + 1 \cdot 15 = \mu + \sigma$, dus 16% van de bezoekers weegt meer dan 85 kg.

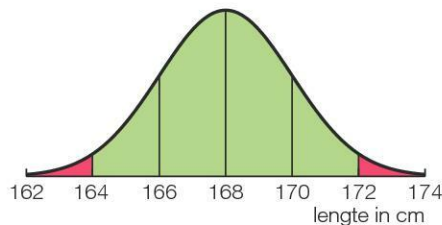
- 25 a** Voor de steekproeven geldt $\mu = 168$ cm en $\sigma = \frac{8}{\sqrt{4}} = 4$ cm,

dus $\mu - \sigma = 168 - 4 = 164$ cm, $\mu - 2\sigma = 168 - 2 \cdot 4 = 160$ cm,
 $\mu - 3\sigma = 168 - 3 \cdot 4 = 156$ cm, $\mu + \sigma = 168 + 4 = 172$ cm,
 $\mu + 2\sigma = 168 + 2 \cdot 4 = 176$ cm en $\mu + 3\sigma = 168 + 3 \cdot 4 = 180$ cm.

b 95%

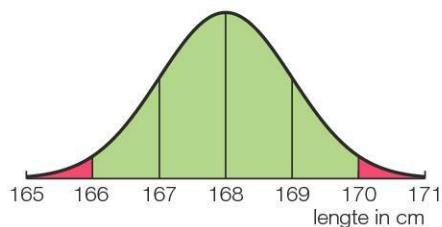
c Dit is geen waarschijnlijk resultaat, want 158 valt nog links van 160.

d I $\sigma = \frac{8}{\sqrt{16}} = 2$ cm



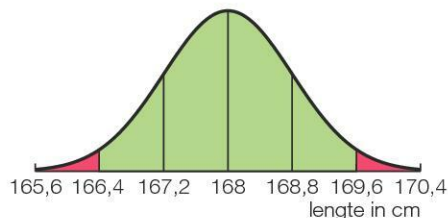
163 valt in een rood gebied, dus onwaarschijnlijk.

II $\sigma = \frac{8}{\sqrt{64}} = 1$ cm



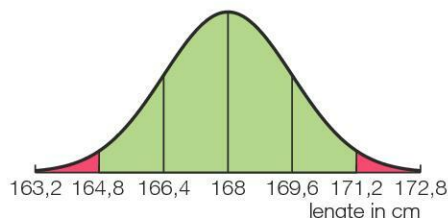
167 valt in het groene gebied, dus waarschijnlijk.

III $\sigma = \frac{8}{\sqrt{100}} = 0,8$ cm



170 valt in een rood gebied, dus onwaarschijnlijk.

IV $\sigma = \frac{8}{\sqrt{25}} = 1,6$ cm



170 valt in het groene gebied, dus waarschijnlijk.

e Interval IV.

Bladzijde 107

26 a $\left[100 - 2 \cdot \frac{24}{\sqrt{144}}, 100 + 2 \cdot \frac{24}{\sqrt{144}} \right] = [96, 104]$

b $\left[80,5 - 2 \cdot \frac{15,5}{\sqrt{100}}, 80,5 + 2 \cdot \frac{15,5}{\sqrt{100}} \right] = [77,4; 83,6]$

c $[12,50 - 2 \cdot 0,65; 12,50 + 2 \cdot 0,65] = [11,20; 13,80]$

- 27** 6 jaar en 9 maanden is 81 maanden

$$\left[81 - 2 \cdot \frac{10}{\sqrt{65}}, 81 + 2 \cdot \frac{10}{\sqrt{65}} \right] \approx [78,5; 83,5]$$

De gemiddelde leeftijd waarop basisschoolleerlingen het zwemdiploma halen ligt met 95% zekerheid tussen 78,5 en 83,5 maanden.

- 28 a** De variabelen geslacht en bedrag in euro.

De variabele geslacht is kwalitatief.

De variabele bedrag in euro is kwantitatief.

- b** Bij de jongens is het gemiddelde $\frac{42,15 + 43,85}{2} = 43$ euro.

Bij de meisjes is het gemiddelde $\frac{38,20 + 39,80}{2} = 39$ euro.

- c** Bij de jongens is $2 \cdot \frac{S}{\sqrt{1635}} = 0,85$ en dit geeft $S = \frac{0,85 \cdot \sqrt{1635}}{2} \approx 17,18$, dus 17,18 euro.

Bij de meisjes is $2 \cdot \frac{S}{\sqrt{1625}} = 0,80$ en dit geeft $S = \frac{0,80 \cdot \sqrt{1625}}{2} \approx 16,12$, dus 16,12 euro.

- d** 71 euro wijkt $71 - 39 = 32$ euro af van het gemiddelde. Dat is ongeveer 2 standaardafwijkingen. Op basis van de vuistregels zou je verwachten dat dit in 2,5% van de gevallen gebeurt. Het betrof hier 41 meisjes oftewel $\frac{41}{1625} \times 100\% \approx 2,5\%$, dus het klopt.

- e** Gebruik de effectgrootte E .

$$E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)} = \frac{43 - 39}{\frac{1}{2}(17 + 16)} \approx 0,24$$

Omdat $E \leq 0,4$ is het verschil gering.

Bladzijde 108

- 29 a** $\left[52 - 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{25}}, 52 + 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{25}} \right] = [49,6; 54,4]$

- b** Het landelijk gemiddelde van 50 punten valt binnen het 95%-betrouwbaarheidsinterval. Daarom kan ze niet met 95% zekerheid zeggen dat leerlingen na haar examentraining boven het landelijk gemiddelde scoren.

- c** In 5HA2 is $\bar{X}$ en S hetzelfde als in 5HA1, maar n is kleiner, dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval van klas 5HA2 is breder dan dat van klas 5HA1 en dus valt 50 er zeker weer binnen.

- d** Voor de twee klassen samen is $n = 25 + 24 = 49$, dus het

95%-betrouwbaarheidsinterval is dan $\left[52 - 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{49}}, 52 + 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{49}} \right] \approx [50,3; 53,7]$.

Nu valt 50 buiten het interval, dus nu is de conclusie dat leerlingen na het volgen van haar examentraining boven het landelijk gemiddelde scoren. Door de grotere waarde van n is het betrouwbaarheidsinterval smaller geworden.

- 30 a** Bij een 95%-betrouwbaarheidsinterval is $a = 2$, want volgens de vuistregels bij de normale verdeling ligt ongeveer 95% van alle waarnemingsgetallen tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.

Hieruit volgt dat 90% van alle waarnemingsgetallen tussen $\mu - a\sigma$ en $\mu + a\sigma$ ligt, waarbij $a < 2$ en dat 99% van alle waarnemingsgetallen tussen $\mu - a\sigma$ en $\mu + a\sigma$ ligt, waarbij $a > 2$.

- b** Bij opgave 29a geldt dat $2 \cdot \frac{6}{\sqrt{25}} = 54,4 - 52$ oftewel $2 \cdot \frac{6}{5} = 2,4$.

Bij het 99%-betrouwbaarheidsinterval geldt dus $a \cdot \frac{6}{\sqrt{25}} = 55,1 - 52$ oftewel $a \cdot \frac{6}{5} = 3,1$, dus $a \approx 2,6$.

- c De breedte is $\frac{2,6}{1,6} \approx 1,6$ keer zo groot.
- d Bijvoorbeeld als men wil onderzoeken of de gewenste hoeveelheid werkzame stof in een medicijn klopt met wat het moet zijn.

7.3 Betrouwbaarheidsintervallen voor de populatieproportie

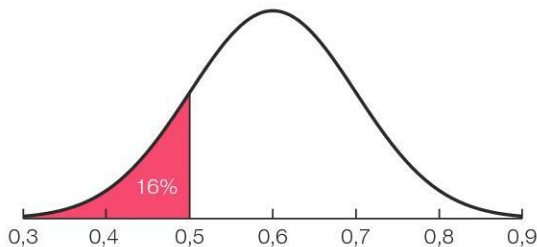
Bladzijde 110

- 31 a 0,25 lijkt waarschijnlijker.
De kans op 1 vrouw en 3 mannen is groter dan de kans op 4 vrouwen.
- b Er zijn meer mogelijke routes om in het bakje van $\hat{p} = 0,25$ te eindigen, dan in het bakje van $\hat{p} = 1$.

Bladzijde 112

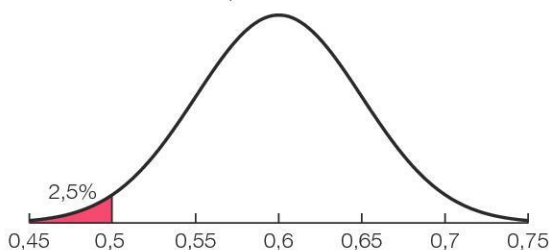
- 32 a Tussen 0,4 en 0,8.
- b $\sigma = \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{600}} = 0,02$
 $0,64 = 0,60 + 2 \cdot 0,02 = \mu + 2\sigma$, dus 2,5%.
- 33 a $\sigma = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{25}} = 0,1$, dus je verwacht dat 68% van de leerlingen een steekproefproportie tussen 0,4 en 0,6 heeft. Daarom is bij 90% meneer Verheijen terecht achterdochtig.
- b De proportie mannen hangt van toeval af, dus $\hat{p} = 0,28$ voor Pieter zou best kunnen.
- 34 a Als 3 op de 5 vleermuizen besmet is, dan is $p = \frac{3}{5} = 0,6$.

$$\mu = p = 0,6 \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{24}} = 0,1$$



De oppervlakte links van 0,5 is 16%, en dit is het risico waarbij gedacht wordt dat de situatie niet zorgelijk is.

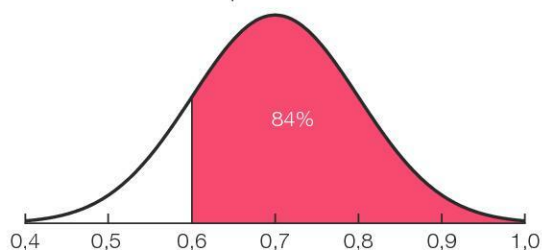
- b $\mu = p = 0,6$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{96}} = 0,05$



De oppervlakte links van 0,5 is 2,5%.

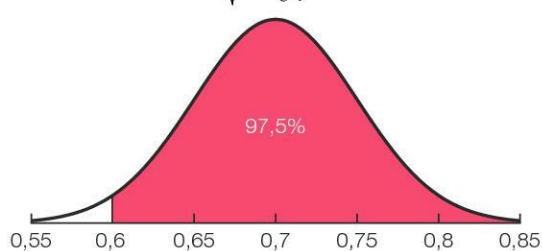
Dus het risico is $\frac{16}{2,5} = 6,4$ keer zo klein als voorheen. Dat is meer dan 6 keer, dus zij heeft gelijk.

35 a $\mu = p = 0,7$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{21}} = 0,1$



Uit de figuur blijkt dat Glenn $100\% - 16\% = 84\%$ van de weddenschappen zal winnen.

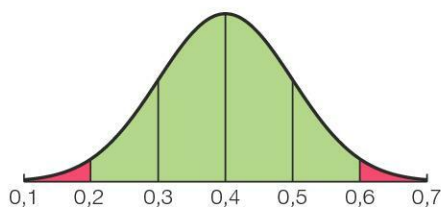
b $\mu = p = 0,7$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{84}} = 0,05$



Zie de figuur: Glenn wint 97,5% van deze weddenschappen en Arthur 2,5%.

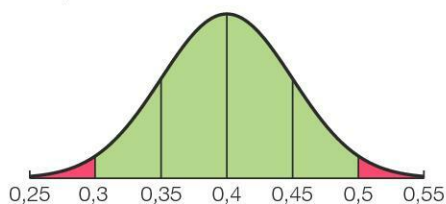
Dus het is $\frac{97,5}{2,5} = 39$ keer zo waarschijnlijk dat Glenn deze weddenschap wint als dat Arthur deze wint.

36 a $p = 0,40$
I $\sigma = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{24}} = 0,1$



0,53 valt in het groene gebied, dus waarschijnlijk.

II $\sigma = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{96}} = 0,05$

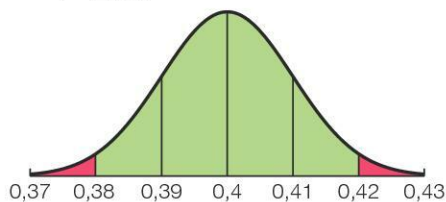


0,53 valt in een rood gebied, dus onwaarschijnlijk.

III Zie de figuur bij II.

0,33 valt in het groene gebied, dus waarschijnlijk.

$$\text{IV } \sigma = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{2400}} = 0,01$$



0,41 valt in het groene gebied, dus waarschijnlijk.

b Het interval $\left[p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$.

Bladzijde 115

37 a $\hat{p} = \frac{378}{600} = 0,63$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,63 \cdot 0,37}{600}} = 0,0197... \approx 0,020$

b $\hat{p} - 2\sigma = 0,63 - 2 \cdot 0,0197... \approx 0,591$ en

$\hat{p} + 2\sigma = 0,63 + 2 \cdot 0,0197... \approx 0,669$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,591; 0,669]$.

c Bij $n = 1200$ hoort een kleiner 95%-betrouwbaarheidsinterval dan bij $n = 600$.

Dus wanneer je minder mensen onderzoekt is het 95%-betrouwbaarheidsinterval breder.

Bladzijde 116

38 a $\hat{p} = 0,5$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{100}} = 0,05$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,5 - 2 \cdot 0,05 = 0,4$ en

$\hat{p} + 2\sigma = 0,5 + 2 \cdot 0,05 = 0,6$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,4; 0,6]$.

b $\hat{p} = 0,46$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,46 \cdot 0,54}{250}} = 0,0315...$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,46 - 2 \cdot 0,0315... \approx 0,397$ en

$\hat{p} + 2\sigma = 0,46 + 2 \cdot 0,0315... \approx 0,523$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,397; 0,523]$.

c $\hat{p} = \frac{4}{7}$ en $\sigma = \sqrt{\frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7}}{98}} = 0,0499...$

$\hat{p} - 2\sigma = \frac{4}{7} - 2 \cdot 0,0499... \approx 0,471$ en

$\hat{p} + 2\sigma = \frac{4}{7} + 2 \cdot 0,0499... \approx 0,671$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,471; 0,671]$.

d $\hat{p} = 0,36$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,36 \cdot 0,64}{700}} = 0,0181...$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,36 - 2 \cdot 0,0181... \approx 0,324$ en

$\hat{p} + 2\sigma = 0,36 + 2 \cdot 0,0181... \approx 0,396$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,324; 0,396]$.

39 a $\hat{p} = \frac{117}{150} = 0,78$

b $\sigma = \sqrt{\frac{0,78 \cdot 0,22}{150}} = 0,0338...$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,78 - 2 \cdot 0,0338... \approx 0,712$ en

$\hat{p} + 2\sigma = 0,78 + 2 \cdot 0,0338... \approx 0,848$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,712; 0,848]$.

40 a De variabele *rookt sigaretten* is kwalitatief, het is een eigenschap.

b $\hat{p} = \frac{235}{840} = 0,2797...$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,2797... \cdot 0,7202...}{840}} = 0,0154...$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,2797... - 2 \cdot 0,0154... \approx 0,249$ en

$\hat{p} + 2\sigma = 0,2797... + 2 \cdot 0,0154... \approx 0,311$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,249; 0,311].

c Voor de mannen geldt $\hat{p} = \frac{146}{470} = 0,3106...$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,3106... \cdot 0,6893...}{470}} = 0,0213...$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,3106... - 2 \cdot 0,0213... \approx 0,268$ en

$\hat{p} + 2\sigma = 0,3106... + 2 \cdot 0,0213... \approx 0,353$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie mannen die roken is [0,268; 0,353].

Van de vrouwen rookten er $235 - 146 = 89$, dus voor de proportie vrouwen die roken geldt

$\hat{p} = \frac{89}{370} = 0,2405...$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,2405... \cdot 0,7594...}{370}} = 0,0222...$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,2405... - 2 \cdot 0,0222... \approx 0,196$ en

$\hat{p} + 2\sigma = 0,2405... + 2 \cdot 0,0222... \approx 0,285$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie vrouwen die roken is [0,196; 0,285].

d De intervallen overlappen, je kunt dus niet met 95% zekerheid concluderen dat het deel van de vrouwen dat sigaretten rookt kleiner is dan het deel van de mannen. Het zou bijvoorbeeld zo kunnen zijn dat bij de vrouwen $p = 0,28$ en bij de mannen $p = 0,27$.

41 De steekproefproportie van de mensen die zeggen op A te gaan stemmen is

$\hat{p} = \frac{487}{935} = 0,5208...$

De bijbehorende standaardafwijking is $\sigma = \sqrt{\frac{0,5208... \cdot 0,4791...}{935}} = 0,0163...$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,5208... - 2 \cdot 0,0163... \approx 0,488$

Omdat $0,488 < 0,5$ kun je niet met een betrouwbaarheid van 95% zeggen dat kandidaat A de verkiezingen zal gaan winnen.

7.4 Betrouwbaarheidsintervallen toepassen

Bladzijde 118

42 Bij deelvraag 1 een betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde.
Bij deelvraag 2 een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

Bladzijde 119

- 43**
- a** populatiegemiddelde
 - b** populatieproportie
 - c** populatieproportie
 - d** populatiegemiddelde
 - e** populatieproportie

44 a $\left[150 - 2 \cdot \frac{40}{\sqrt{150}}, 150 + 2 \cdot \frac{40}{\sqrt{150}} \right] \approx [143, 157]$

b $\hat{p} = 0,6$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{150}} = 0,04$

$[0,6 - 2 \cdot 0,04; 0,6 + 2 \cdot 0,04] = [0,52; 0,68]$

45 a $\hat{p} = \frac{15}{75} = 0,2$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{75}} = 0,0461\dots$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,2 - 2 \cdot 0,0461\dots \approx 0,108$ en

$\hat{p} + 2\sigma = 0,2 + 2 \cdot 0,0461\dots \approx 0,292$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,108; 0,292]$.

b $\bar{X} = 2750$ m, $S = 550$ m en $n = 153 - 75 = 60$.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $\left[2750 - 2 \cdot \frac{550}{\sqrt{60}}, 2750 + 2 \cdot \frac{550}{\sqrt{60}} \right] \approx [2608, 2892]$.

Dit interval ligt niet geheel binnen het interval $[2700, 3100]$ dat een goede conditie aangeeft. Dus kun je niet met 95% zekerheid concluderen dat de gemiddelde vrouwelijke lo-docent een zeer goede conditie heeft.

Bladzijde 120

46 a Dat alle deelnemers aan het congres een gelijke kans hadden om in de steekproef te komen.

b $\bar{X} = 21,7$ jaar, $S = 3,7$ jaar en $n = 200 - 79 = 121$.

$\left[21,7 - 2 \cdot \frac{3,7}{\sqrt{121}}, 21,7 + 2 \cdot \frac{3,7}{\sqrt{121}} \right] \approx [21,0; 22,4]$

c De proportie van de deelnemers die geen rijbewijs hebben is $\frac{79}{200} = 0,395$.

$\hat{p} = 0,395$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,395 \cdot 0,605}{200}} = 0,0345\dots$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,395 - 2 \cdot 0,0345\dots \approx 0,326$ en

$\hat{p} + 2\sigma = 0,395 + 2 \cdot 0,0345\dots \approx 0,464$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie bezoekers zonder rijbewijs is $[0,326; 0,464]$.

Omdat $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ in dit interval ligt, kan hij met 95% zekerheid gelijk hebben.

47 $\hat{p} = \frac{425}{500} = 0,85$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,85 \cdot 0,15}{500}} = 0,015\dots$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,85 - 2 \cdot 0,015\dots = 0,818\dots$ en

$\hat{p} + 2\sigma = 0,85 + 2 \cdot 0,015\dots = 0,881\dots$

$0,818\dots \cdot 176$ duizend ≈ 144 duizend

$0,881\dots \cdot 176$ duizend ≈ 155 duizend

Het gevraagde betrouwbaarheidsinterval is $[144\ 000, 155\ 000]$.

48 $\hat{p} = \frac{160}{400} = 0,4$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{400}} = 0,024\dots$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,4 - 2 \cdot 0,024\dots = 0,351\dots$ en

$\hat{p} + 2\sigma = 0,4 + 2 \cdot 0,024\dots = 0,448\dots$

Dus met 95% betrouwbaarheid heeft tussen de 0,351... en 0,448... deel van de krasloten prijs.

Als 0,351... deel van de krasloten prijs heeft moet je er gemiddeld $\frac{1}{0,351\dots} \approx 2,85$ kopen voor een prijs.

Als 0,448... deel van de krasloten prijs heeft moet je er gemiddeld $\frac{1}{0,448\dots} \approx 2,23$ kopen voor een prijs.

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[2,23; 2,85]$.

49 a $\bar{X} = 29$, dit is het gemiddelde van de grenzen 25 en 33.

b Bij $2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ hoort 4, dus $\frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{4}{2} = 2$.

Bladzijde 122

- 50 a** $\frac{0,405 + 0,435}{2} = 0,42$ en $0,42 - 0,405 = 0,015$, dus $0,42 \pm 0,015$.
- b** $0,21 - 0,015 = 0,195$ en $0,21 + 0,015 = 0,225$, dus $[0,195; 0,225]$.
- c** $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 180 \pm 2 \cdot \frac{9,8}{\sqrt{210}} \approx 180 \pm 1,35$ oftewel $[178,65; 181,35]$.
- d** $p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,12 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,12 \cdot 0,88}{11733}} \approx 0,12 \pm 0,006$ oftewel $[0,114; 0,126]$.

- 51 a** $\hat{p} = \frac{10\,098}{26\,580} \approx 0,37991$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,37991 \cdot 0,62009}{26\,580}} \approx 0,00298$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,37991 - 2 \cdot 0,00298 \approx 0,374$ en
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,37991 + 2 \cdot 0,00298 \approx 0,386$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[37,4\%; 38,6\%]$.
- b** Dit is niet waarschijnlijk, want 0,40 ligt niet in het interval $[0,374; 0,386]$.
- c** $\frac{27\,281 + 30\,165}{2} = 28\,723$, dus de steekproefproportie in Friesland is $\frac{27\,723}{110\,900} \approx 0,259$.
 Dit verschilt $0,380 - 0,259 = 0,121$ met dat van heel Nederland.

- 52 a** $\bar{X} = 210$ gram, $S = 80$ gram en $n = 50$ geeft $\left[210 - 2 \cdot \frac{80}{\sqrt{50}}, 210 + 2 \cdot \frac{80}{\sqrt{50}}\right] \approx [187, 233]$.
 Omdat 127 ver buiten dit interval ligt, gaat het hier waarschijnlijk niet om een representatieve steekproef. De intervalnotatie is hier het handigst, want dan kun je goed zien dat 127 niet in het interval ligt.
- b** Ik ben het niet met Bart eens. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval betekent dat met een betrouwbaarheid van 95% de gemiddelde groente inname van jongeren van 14-18 jaar tussen 90 en 170 gram per dag is.

Bladzijde 123

- 53 a** Bij de eigen school geldt $0,32 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,32 \cdot 0,68}{100}} \approx 0,32 \pm 0,093$.
 Bij de andere scholen geldt $0,32 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,32 \cdot 0,68}{400}} \approx 0,32 \pm 0,047$.
- b** Donata heeft gelijk.
 Beide intervallen zijn 95% betrouwbaar.
 Omdat de steekproefomvang bij de vier andere scholen samen groter is dan bij de eigen school, is het betrouwbaarheidsinterval bij de vier andere scholen nauwkeuriger.
- c** De breedte van het betrouwbaarheidsinterval is $\hat{p} + 2\sigma - (\hat{p} - 2\sigma) = \hat{p} + 2\sigma - \hat{p} + 2\sigma = 4\sigma$.
- d** kleiner

Bladzijde 125

- 54** Bij $n = 1000$ is $4\sigma = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{1000}} \approx 0,045 > 3\%$.

Bij $n = 2000$ is $4\sigma = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{2000}} \approx 0,032 > 3\%$.

Bij $n = 3000$ is $4\sigma = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{3000}} \approx 0,026 < 3\%$.

Ze kan het beste gebruikmaken van 3000 proefpersonen.

- 55** Bij grotere steekproeven hoort een grotere n en dus een Galtonbord met meer rijen. Je ziet dat de bijbehorende histogrammen voor grotere waarden van n steeds smaller worden. Bij een smaller histogram hoort een smallere verdelingskromme en dus een kleinere standaardafwijking. Bij een kleinere standaardafwijking is het 95%-betrouwbaarheidsinterval smaller en dus nauwkeuriger.

- 56 a** $\hat{p} = \frac{47}{575} = 0,817...$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,817...(1-0,817...)}{575}} = 0,011...$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,817... - 2 \cdot 0,011... \approx 0,059$ en
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,817... + 2 \cdot 0,011... \approx 0,105$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,059; 0,105]$.
 Hiermee weet je met 95% zekerheid dat de populatieproportie rode auto's tussen 0,059 en 0,105 ligt.
- b** Totaal $47 + 30 = 77$ van de 900 auto's zijn rood.
 $\hat{p} = \frac{77}{900} = 0,085...$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,085...(1-0,085...)}{900}} = 0,093...$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,085... - 2 \cdot 0,093... \approx 0,067$ en
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,085... + 2 \cdot 0,093... \approx 0,104$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,067; 0,104]$.
- c** De antwoorden zijn allebei even betrouwbaar (de betrouwbaarheid is 95%).
 Het antwoord bij vraag b is nauwkeuriger, omdat de steekproef groter is (900 tegen 575).

Bladzijde 126

- 57** De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor

- meisjes van 6 maanden oud is $4 \cdot \frac{2,8}{\sqrt{38}} \approx 1,817$
- meisjes van 12 maanden oud is $4 \cdot \frac{3,2}{\sqrt{38}} \approx 2,076$
- jongens van 6 maanden oud is $4 \cdot \frac{3,1}{\sqrt{43}} \approx 1,891$
- jongens van 12 maanden oud is $4 \cdot \frac{3,4}{\sqrt{43}} \approx 2,074$.

Het interval voor meisjes van 6 maanden oud is het smalst en dus het meest nauwkeurig.

Alternatieve uitwerking:

Per waarde van n hoeft je alleen de kleinste waarde van S te bekijken als je een smal interval zoekt.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval

voor meisjes van 6 maanden oud is $4 \cdot \frac{2,8}{\sqrt{38}} \approx 1,817$.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval

voor jongens van 6 maanden oud is $4 \cdot \frac{3,1}{\sqrt{43}} \approx 1,891$.

Het interval voor meisjes van 6 maanden oud is het smalst en dus het meest nauwkeurig.

- 58 a** geslacht en gewicht
 De variabele geslacht is kwalitatief.
 De variabele gewicht is kwantitatief.
- b** Bij de vrouwelijke katten is S kleiner en n groter dan bij de mannelijke katten.
 Dus $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ is kleiner bij de vrouwelijke katten.
- c** $\bar{X} = 3215$ gram, $S = 620$ gram en $n = 109$
 $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 3215 \pm 2 \cdot \frac{620}{\sqrt{109}} \approx 3215 \pm 119$ dus $[3096, 3334]$
- d** Het nieuwe interval is minder betrouwbaar dan 95% omdat de gedeelten van 4053 gram tot 4100 gram en van 4300 gram tot 4349 gram (van het 95%-betrouwbaarheidsinterval) ontbreken.

Bladzijde 127

59 a $\hat{p} = \frac{28}{70} = 0,4$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{70}} = 0,058\dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,4 - 2 \cdot 0,058\dots \approx 0,283 \text{ en}$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,4 + 2 \cdot 0,058\dots \approx 0,517$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,283; 0,517]$.

b De breedte van het betrouwbaarheidsinterval is 4σ , dus $4 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{n}}$ moet gelijk zijn aan 0,1.

c $4 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{384}} = 4 \cdot \sqrt{0,00625} = 4 \cdot 0,025 = 0,1$

d $\hat{p} = \frac{180}{400} = 0,45$ en breedte $= 4 \cdot \sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{400}} = 0,099\dots < 0,1$.

Dus hij krijgt een breedte van maximaal 0,1.

Bladzijde 128

60 a breedte $= 0,46 - 0,34 = 0,12$ en $\hat{p} = \frac{0,34 + 0,46}{2} = 0,4$

Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{n}} = 0,12$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{x}}$ en $y_2 = 0,12$.

De optie snijpunt geeft $x = 266,6\dots$, dus de steekproefomvang is 267.

b breedte $= 590 - 540 = 50$ en $S = 205$

Los op $4 \cdot \frac{205}{\sqrt{n}} = 50$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \frac{205}{\sqrt{x}}$ en $y_2 = 50$.

De optie snijpunt geeft $x = 268,96$, dus de steekproefomvang is 269.

61 breedte $= 0,61 - 0,49 = 0,12$ en $\hat{p} = 0,55$

Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,55 \cdot 0,45}{n}} = 0,12$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,55 \cdot 0,45}{x}}$ en $y_2 = 0,12$.

De optie snijpunt geeft $x = 275$, dus er zijn 275 D66 stemmers ondervraagd.

62 breedte $= 3,4 - 3,0 = 0,4$ uur en $S = 1,6$ uur

Los op $4 \cdot \frac{1,6}{\sqrt{n}} = 0,4$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \frac{1,6}{\sqrt{x}}$ en $y_2 = 0,4$.

De optie snijpunt geeft $x = 256$, dus de steekproefomvang was 256.

Bladzijde 129

63 Om met 95% betrouwbaarheid te concluderen dat van Noord-Hollandse vrouwen de schoenmaat maat 39 of hoger is, moet de ondergrens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval gelijk zijn aan 39.

Omdat $\bar{X} = 39,5$ is het 95%-betrouwbaarheidsinterval dan $[39, 40]$. De breedte is dus gelijk aan 1.

Los op $4 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{n}} = 1$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{x}}$ en $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft $x = 36$, dus de steekproefomvang moet minimaal 36 zijn geweest.

- 64** De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $2 \cdot 6 = 12$ maanden = 1 jaar.

$S = 7$ jaar en 9 maanden = 7,75 jaar

Los op $4 \cdot \frac{7,75}{\sqrt{n}} = 1$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \frac{7,75}{\sqrt{x}}$ en $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft $x = 961$, dus er zaten 961 mannen in de steekproef.

Dat is $\frac{961}{2000} \times 100\% \approx 48\%$.

- 65** Stel de steekproefproportie van de ondervraagden die het examen te moeilijk vonden is $\hat{p}$.

Er geldt $4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{850}} = 0,05$.

Voer in $y_1 = \sqrt{\frac{x(1-x)}{850}}$ en $y_2 = 0,05$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,157...$ en $x = 0,842...$

Omdat het een groot deel bedroeg vonden $0,842... \cdot 850 \approx 716$ ondervraagden het examen te moeilijk.

Diagnostische toets

Bladzijde 132

- 1** De frequentie van de waarnemingsgetallen tot en met 5 is $8 + 16 + 7 + 5 + 5 = 41$ en tot en met 6 is $41 + 6 = 47$, dus de mediaan is 6.

Boxplot A valt af, want daar is de mediaan 4.

De frequentie van de waarnemingsgetallen tot en met 2 is $8 + 16 = 24$, dus $Q_1 = 2$.

Dus boxplot C hoort bij het histogram.

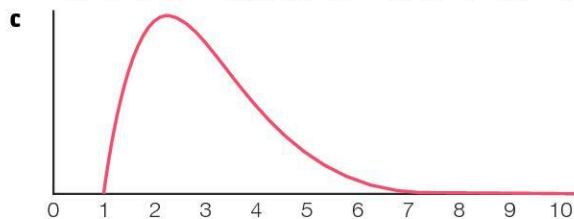
- 2 a** Veel waarnemingsgetallen aan het begin en weinig op het eind, dus een rechts-scheve verdeling.

b Bij 2,8 is de relatieve cumulatieve frequentie 50, dus de mediaan is 2,8.

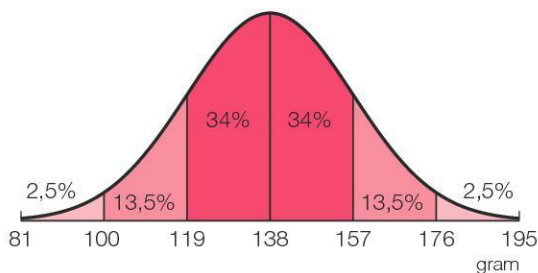
Het steilste deel van de grafiek ligt voor 2,8, dus de modus is kleiner dan de mediaan.

Het is een rechts-scheve verdeling, dus het gemiddelde is groter dan de mediaan.

Dus eerst de modus, dan de mediaan en dan het gemiddelde.



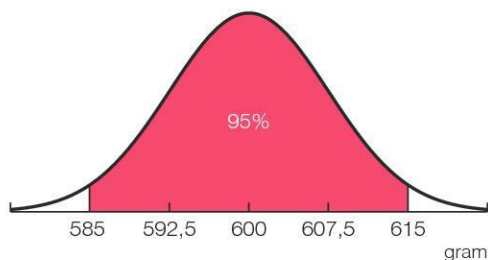
- 3 a**



Meer dan 157 gram is $13,5\% + 2,5\% = 16\%$, dus $0,16 \cdot 4000 = 640$ bananen.

- b** 2,5%, dat zijn dus $0,025 \cdot 120 = 3$ bananen.

- 4 Voor de steekproeven geldt $\mu = 600$ gram en $\sigma = \frac{30}{\sqrt{16}} = 7,5$ gram.

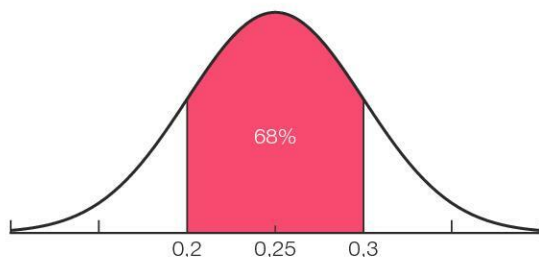


Zie de schets, dus 95%.

- 5 a $\bar{X} = 3 \cdot 60 + 20 = 200$ seconden, $S = 45$ seconden en $n = 300$
 $\left[200 - 2 \cdot \frac{45}{\sqrt{300}}, 200 + 2 \cdot \frac{45}{\sqrt{300}} \right] \approx [195, 205]$
 b De gemiddelde wachttijd bij de helpdesk ligt met 95% zekerheid tussen 195 en 205 seconden.

Bladzijde 133

- 6 $\mu = p = 0,25$ en $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{75}} = 0,05$



Zie de schets, dus bij 68%.

- 7 $\hat{p} = \frac{400}{1500} = \frac{4}{15}$ en $\sigma = \sqrt{\frac{\frac{4}{15} \cdot \frac{11}{15}}{1500}} = 0,0114...$
 $\hat{p} - 2\sigma = \frac{4}{15} - 2 \cdot 0,0114... \approx 0,244$ en
 $\hat{p} + 2\sigma = \frac{4}{15} + 2 \cdot 0,0114... \approx 0,290$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,244; 0,290]$.

- 8 a $\bar{X} = 52$ minuten, $S = 14$ minuten en $n = 126$
 $\left[52 - 2 \cdot \frac{14}{\sqrt{126}}, 52 + 2 \cdot \frac{14}{\sqrt{126}} \right] \approx [49,5; 54,5]$
 b $\hat{p} = 0,72$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,72 \cdot 0,28}{126}} = 0,04$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,72 - 2 \cdot 0,04 = 0,64$ en $\hat{p} + 2\sigma = 0,72 + 2 \cdot 0,04 = 0,80$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,64; 0,80]$.

- 9 a $0,316 - 0,018 = 0,298$ en $0,316 + 0,018 = 0,334$, dus $[0,298; 0,334]$.
 b $\frac{215 + 269}{2} = 242$ en $242 - 215 = 27$, dus 242 ± 27 .
 c $\hat{p} = 0,28$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,28 \cdot 0,72}{224}} = 0,03$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,28 - 2 \cdot 0,03 = 0,22$ en
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,28 + 2 \cdot 0,03 = 0,34$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,22; 0,34]$ oftewel $0,28 \pm 0,06$.

10 Bij $n = 200$ is $4\sigma = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{200}} \approx 0,135 > 10\%$.

Bij $n = 300$ is $4\sigma = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{300}} \approx 0,110 > 10\%$.

Bij $n = 400$ is $4\sigma = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{400}} \approx 0,095 < 10\%$.

Dus er moeten minimaal 400 mensen worden ondervraagd.

11 a breedte $= 272 - 268 = 4$ en $S = 45$

Los op $4 \cdot \frac{45}{\sqrt{n}} = 4$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \frac{45}{\sqrt{x}}$ en $y_2 = 4$.

De optie snijpunt geeft $x = 2025$, dus de steekproefomvang is 2025.

b breedte $= 0,418 - 0,372 = 0,046$ en $\hat{p} = \frac{0,372 + 0,418}{2} = 0,395$

Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,395 \cdot 0,605}{n}} = 0,046$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,395 \cdot 0,605}{x}}$ en $y_2 = 0,046$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1807$, dus de steekproefomvang is 1807.

8 Statistiek met de computer

Voorkennis Centrummaten en boxplots

Bladzijde 137

- 1 a totale frequentie = $12 + 10 + 13 + 24 + 21 + 2 = 82$
gemiddelde leeftijd = $\frac{12 \cdot 7,5 + 10 \cdot 22,5 + 13 \cdot 37,5 + 24 \cdot 52,5 + 21 \cdot 67,5 + 2 \cdot 82,5}{82} \approx 44,5$ jaar
- b De mediaan is het gemiddelde van het 41^e en 42^e waarnemingsgetal.
Omdat $12 + 10 + 13 = 35$ en $35 + 24 = 59$ ligt de mediaan in de klasse $[45, 60)$.
- c De modale klasse is $[45, 60)$, want deze klasse heeft de grootste frequentie.

Bladzijde 138

- 2 a De helft van de vrouwen is kleiner dan 1,83 meter. Dat zijn $\frac{192}{2} = 96$ vrouwen.
- b De langste vrouw is 202 cm en driekwart van de mannen is kleiner dan 202 cm.
- c Bij de mannen is de spreidingsbreedte $211 - 172 = 39$ cm.
Bij de vrouwen is de spreidingsbreedte $202 - 159 = 43$ cm.
De spreidingsbreedte is het grootst bij de vrouwen.

8.1 Werken met een spreadsheet

Bladzijde 139

- 1 *

Bladzijde 140

- 2 a Gebruik de functie SOM.
 $Y2 = \text{SOM}(B2:X2)$ geeft 82 punten.
- b $Y3 = \text{SOM}(B3:X3)$ geeft 61 punten voor Joris.
Lisa had de meeste punten, Kim de minste.
- c $Z3 = Y3 / \$Y\$2 * 9 + 1$ geeft 7,695...
- d *
- e $B27 = \text{GEMIDDELDE}(B3:B25)$
 $B28 = \text{STDEV.P}(B3:B25)$
 $B29 = \text{MIN}(B3:B25)$
 $B30 = \text{KWARTIEL}(B3:B25;1)$
 $B31 = \text{MEDIAAN}(B3:B25)$
 $B32 = \text{KWARTIEL}(B3:B25;3)$
 $B33 = \text{MAX}(B3:B25)$
Met de vulgreep bereken je in één keer de overige waarden.
- f $B34 = B32 - B30$ en gebruik de vulgreep.
Bij de vragen 14 en 15 is de interkwartielafstand 2,5.
 $B35 = B27 - B31$ en gebruik de vulgreep.
Bij de vragen 2, 3 en 20 is het gemiddelde gelijk aan de mediaan.
- 3 a $J3 = \text{AFRONDEN}((B3 * \$B\$1 + C3 * \$C\$1 + D3 * \$D\$1 + \dots + I3 * \$I\$1) / \text{SOM}(\$B\$1:\$I\$1);1)$
Gebruik de vulgreep om de overige cijfers te berekenen.
De eindcijfers zijn achtereenvolgens 6,7 5,7 7,2 3,8 6,9 5,7 6,8 5,2 4,9 4,9 5,4 6,4 4,8 7,9 6,3 6,0 6,3 5,3 7,0 8,1 en 6,6.
- b $J25 = \text{GEMIDDELDE}(J3:J23)$ en weergave instellen op twee decimalen geeft gemiddelde is 6,09.
- c $I1 = 6$ geeft gemiddelde is 6,10.
Het scheelt 0,01 punt met het gemiddelde in vraag b.

Bladzijde 142

- 5 a** Selecteer de cellen A1:H1 en tegelijk (houd Ctrl ingedrukt) A6:H10 en maak het juiste staafdiagram.
Kies bij As opmaken voor Weergave-eenheden 10 000. Maak het diagram verder op.
- b** Voeg een kolom toe door in cel I1 Totaal te typen.
 $I2 = \text{SOM}(B2:H2)$ en gebruik de vulgreep.
Selecteer de cellen A1:A10 en tegelijk I1:I10 en maak een lijndiagram.
Kies bij As opmaken voor Weergave-eenheden 1000. Maak het diagram verder op.
- c** Selecteer de cellen B2:H2 en tegelijk B10:H10 en maak het juiste cirkeldiagram.
Voeg Gegevenslabels toe en kies bij de Gegevenslabels opmaken voor Percentage. Maak het diagram verder op.

Bladzijde 143

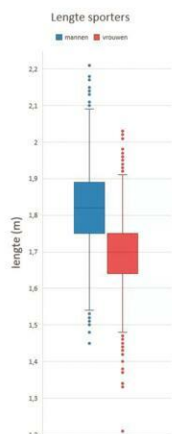
- 6 a** De interkwartielafstand is $24 - 10 = 14$ en $24 + 1,5 \cdot 14 = 45$. De waarde 56 is dus een uitbijter.
- b** $10 - 1,5 \cdot 14 = -11$. De waarde 1 is dus geen uitbijter.
- 7 a** Het bestand is gesorteerd op de variabele Gemeente.
- b** Sorteer de kolom AantalLeerlingen met 'Sorteren van laag naar hoog'.
- c** Selecteer de cellen B277 (Enschede) tot en met B296 (Amsterdam) en maak een boxplot. Ga na dat je nu 20 gemeenten hebt geselecteerd.



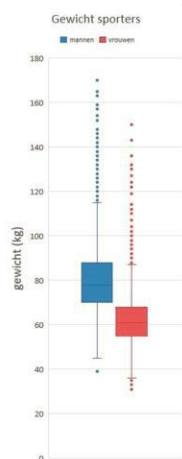
Bij de uitbijterpunten horen de gemeenten Den Haag, Rotterdam en Amsterdam.

- d** Typ in D1 GemiddeldAantalLeerlingen.
 $D2 = B2/C2$ en gebruik de vulgreep.
- e** Sorteer de kolom AantalScholen met 'Sorteren van laag naar hoog'. Selecteer de cellen B2:B90 en maak hierbij een boxplot. Kies Gegevens selecteren (door met de rechtermuisknop op de boxplot te klikken). Bewerk reeks 1 en geef deze de naam 'gemeenten met 1 school'. Voeg een nieuwe reeks toe en noem deze 'gemeenten met meer dan 1 school' en selecteer bij Reekswaarden de cellen B91:B296. Maak het diagram verder op.
- f** Bij gemeenten met meer dan één middelbare school is de spreiding van het gemiddeld aantal leerlingen veel kleiner dan bij gemeenten met één middelbare school.

- 8 a** Sorteer de kolom Lengte met 'Sorteren van laag naar hoog'. De cellen E11210 tot en met E11539 zijn leeg. Van 330 sporters staat de lengte niet in de dataset.
- b** Sorteer de kolom Lengte met 'Sorteren van laag naar hoog' en daarna de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z'.
 Selecteer de cellen E2:E6143 (de lengten van de mannen) maak hierbij een boxplot. Kies Gegevens selecteren (door met de rechtermuisknop op de boxplot te klikken). Bewerk reeks 1 en geef deze de naam 'mannen'. Voeg een nieuwe reeks toe en noem deze 'vrouwen' en selecteer bij Reekswaarden de cellen E6335:E11400 (de lengten van de vrouwen). Maak het diagram verder op.

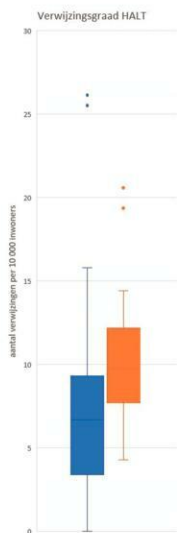


- c** Die lengte is 2,10 meter. Je ziet in de tabel dat het gaat om 32 mannen.
- d** De opvallende lengte is 1,21 meter. Dit lijkt een fout in de dataset te zijn.
- e** De boxen overlappen elkaar (net). Beide medianen liggen buiten de box van de andere boxplot. Het verschil is middelmatig.
- f** Sorteer de kolom Gewicht met 'Sorteren van laag naar hoog' en daarna de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z'.
 Selecteer de cellen F2:F5874 (de gewichten van de mannen) en maak hierbij een boxplot. Kies Gegevens selecteren (door met de rechtermuisknop op de boxplot te klikken). Bewerk reeks 1 en geef deze de naam 'mannen'. Voeg een nieuwe reeks toe en noem deze 'vrouwen' en selecteer bij Reekswaarden de cellen F6335:F11340 (de gewichten van de vrouwen). Maak het diagram verder op.



De boxen overlappen elkaar niet, dus het verschil is groot.

- 9** Voeg een kolom toe door in cel D1 Verwijzingsgraad te typen.
 $D2=C2/(B2/10000)$ en gebruik de vulgreep.
 Sorteer de kolom Bevolkingsaantal met 'Sorteren laag naar hoog' en maak de boxplot.
 Gebruik een reeks voor de 50 kleinste gemeenten (Schiermonnikoog tot en met Heeze-Leende) en een tweede reeks voor de 50 grootste gemeenten (Almelo tot en met Amsterdam).



De boxen overlappen elkaar en beide medianen vallen buiten de box van de andere boxplot. Het verschil is dus middelmatig.

8.2 Werken met datasets

Bladzijde 145

- 10** Sorteer eerst de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z' en dan de kolom Sport met 'Sorteren van A naar Z'. Selecteer de gewichten van de Japanse voetballmannen en lees rechtsonder in beeld af dat hun gemiddelde gewicht 74,1 kg is.

Alternatieve uitwerking:

De Japanse voetballmannen staan in rij 8037 tot en met 8058. Typ in een lege cel `=GEMIDDELDE(F8037:F8058)` en lees af dat het gemiddelde gewicht van de Japanse voetballmannen ongeveer 74,1 kg is.

- 11**
- a** De dataset bevat 11 variabelen.
 - b** Kiezen van 'Aantal' in kolom A van de totaalrij geeft 24 837.
De dataset bevat van 24 837 dagen gegevens.
 - c** Sorteer de kolom GemiddeldeTemperatuur(°C) met 'Sorteren van hoog naar laag'.
De warmste dag was 27 juli 2018.
 - d** Filter de kolom GemiddeldeTemperatuur(°C) op 'Is kleiner dan of gelijk aan' 0.
Kiezen van 'Aantal' in kolom C van de totaalrij geeft 1617.
Op 1617 dagen was het gemiddeld 0 °C of kouder.
 - e** Filter uit vraag d verwijderen.
Filter de kolom Datum op 2016, 2017 en 2018.
Kiezen van 'Som' in kolom H van de totaalrij geeft ongeveer 5522,7.
De zon heeft in de jaren 2016, 2017 en 2018 in totaal 5522,7 uur geschenen.
 - f** Filter uit vraag e verwijderen.
Filter de kolom MaximaleTemperatuur(°C) op 'Is groter dan of gelijk aan' 30.
Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom F van de totaalrij geeft 24,00...
De gemiddelde temperatuur tijdens de tropische dagen was 24,0 °C.
 - g** Filter uit vraag f verwijderen.
Filter de kolom Datum op 1965.
Kiezen van 'Som' in kolom J van de totaalrij geeft 1151,9 mm neerslag.
In 1965 viel in totaal 1151,9 mm neerslag.
Sorteer de kolom Neerslagduur(uren) met 'Sorteren van hoog naar laag'.
Op 18 december regende het in dat jaar het langst.

- 12 a** Sorteer de kolom Leeftijd met 'Sorteren van hoog naar laag' en daarna met 'Sorteren van laag naar hoog'.
De oudste sporter doet aan paardensport en de jongste aan zwemsport.
- b** Kiezen van 'Aantal' in kolom D van de totaalrij geeft 11 538.
Filter de kolom Leeftijd op 'Is kleiner dan of gelijk aan' 16.
Nu geeft 'Aantal' in kolom D van de totaalrij 82.
Dus $\frac{82}{11\,538} \times 100\% \approx 0,7\%$ van de sporters was 16 jaar of jonger.
- c** Filter uit vraag b verwijderen.
Filter de kolom Land op Nederland.
Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom D van de totaalrij geeft 26,78...
De gemiddelde leeftijd van de Nederlandse sporters was 27 jaar.
- d** Filters uit vraag c verwijderen.
Filter de kolom Sport op triatlon.
Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom F van de totaalrij geeft 60,63... kg.
Filter de kolom Sport op roeien.
Aflezen in kolom F van de totaalrij geeft 79,93... kg.
Het scheelt $79,93\ldots - 60,63\ldots \approx 19$ kg.
- e** Filter uit vraag d verwijderen.
Filter de kolom Land op Nederland en filter de kolom Geslacht op V.
Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom E van de totaalrij geeft 1,747... cm.
Filter de kolom Land op alles behalve Nederland.
Aflezen in kolom E van de totaalrij geeft 1,698... cm.
Het verschil is dus $1,747\ldots - 1,698\ldots \approx 0,05$ m = 5 cm.
De journalist heeft dus niet gelijk.
Filter de kolom Geslacht op M en voer dezelfde handelingen uit als hierboven bij de vrouwen.
Het verschil bij de mannen is $1,850\ldots - 1,820\ldots \approx 0,03$ m = 3 cm.
- f** Filters uit vraag e verwijderen.
Filter de kolom Goud op alles behalve 0.
Kiezen van 'Som' in kolom H van de totaalrij geeft 666 gouden medailles.
Filter de kolom Land op Verenigde Staten.
Aflezen in kolom H van de totaalrij geeft 139 gouden medailles.
Dus $\frac{139}{666} \times 100\% \approx 20,9\%$ van de gouden medailles werd gewonnen door sporters uit de Verenigde Staten.
- 13 a** Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom C van de totaalrij.
Filter de kolom Groep op D geeft 177,47... cm.
Filter de kolom Groep op A geeft 173,5 cm.
Het verschil is $177,47\ldots - 173,5 \approx 4$ cm.
- b** Filter kolom LR-handig-moeder op L.
Kiezen van 'Aantal' in kolom I van de totaalrij geeft 15 linkshandige moeders.
Filter kolom LR-handig-vader op L.
Aflezen in kolom J van de totaalrij geeft 1 ouderpaar die beiden linkshandig zijn.
Filter uit kolom LR-handig-moeder verwijderen.
Aflezen in kolom J van de totaalrij geeft 28 linkshandige vaders.
In totaal hebben $15 + 28 - 1 = 42$ studenten een linkshandige ouder.
Dus $\frac{42}{271} \times 100\% \approx 15,5\%$ van de studenten heeft een linkshandige ouder.

- c Kies 'Aantal' in kolom G van de totaalrij. Dit geeft een totaal van 271 personen. Filter de kolom Geslacht op M. Aflezen in kolom G van de totaalrij geeft 139 mannen en dus $271 - 139 = 132$ vrouwen. Filter de kolom UrenSlaap op 'Kleiner dan' 8. Filter de kolom Geslacht op M. Aflezen in kolom G van de totaalrij geeft 101 kortslapers bij de mannen en dus $139 - 101 = 38$ langslapers bij de mannen. Kolom Geslacht filteren op V. Aflezen in kolom G van de totaalrij geeft 93 kortslapers bij de vrouwen en dus $132 - 93 = 39$ langslapers bij de vrouwen.

	slaapduur		totaal
	kort	lang	
man	101	38	139
vrouw	93	39	132
totaal	194	77	271

- d Bij de vrouwen heeft $\frac{93}{132} \times 100\% \approx 70,5\%$ een korte slaapduur. Bij de mannen is dat

$$\frac{101}{139} \times 100\% \approx 72,7\%.$$

Bij de vrouwen is dit percentage dus kleiner dan bij de mannen.

- e $\phi = \frac{101 \cdot 39 - 38 \cdot 93}{\sqrt{139 \cdot 132 \cdot 194 \cdot 77}} \approx 0,024.$

Er geldt $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dus het verschil is gering.

- f Kies 'Aantal' in kolom K van de totaalrij. Kolom Herkomst filteren op plattelandsdorp. Aflezen in kolom K van de totaalrij geeft 49 studenten uit een plattelandsdorp. Kolom Woonsituatie filteren op Uitwonend. Aflezen in kolom K van de totaalrij geeft 34 uitwonende studenten uit een plattelandsdorp en dus $49 - 34 = 15$ thuiswonende studenten uit een plattelandsdorp. Kolom Herkomst filteren op grote stad. Aflezen in kolom K van de totaalrij geeft 22 uitwonende studenten uit een grote stad. Filter verwijderen uit woonsituatie en aflezen in kolom K van de totaalrij geeft in totaal 37 studenten uit een grote stad. Er zijn dus $37 - 22 = 15$ thuiswonende studenten uit een grote stad.

	Herkomst		totaal
	plattelandsdorp	grote stad	
thuiswonend	15	15	30
uitwonend	34	22	56
totaal	49	37	86

$$\phi = \frac{15 \cdot 22 - 15 \cdot 34}{\sqrt{30 \cdot 56 \cdot 49 \cdot 37}} \approx -0,103.$$

Er geldt $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dus het verschil is gering.

Bladzijde 147

- 14 Deze aanpak werkt.

Bladzijde 148

- 15 Maak een nieuwe kolom door in cel L1 AtletiekVrouwBenelux te typen. Filter de kolom Land op België, Luxemburg en Nederland. Filter de kolom Geslacht op V en filter de kolom Sport op Atletiek. Zet in de eerste cel van de nieuwe kolom Ja en gebruik de vulgreep. Verwijder alle filters en filter dan de kolom AtletiekVrouwBenelux op Lege cellen. Zet in de eerste cel van de kolom Nee en gebruik de vulgreep. Verwijder alle filters.

- 16** a Maak een nieuwe kolom door in cel L1 Medailles te typen.
 $L2=SOM(H2:I2;J2)$
 b Kiezen van 'Aantal' in kolom L van de totaalrij en de kolom Medailles op groter dan 1 filteren geeft 129 atleten met meer dan één medaille.
 Filteren van de kolom Goud op groter dan 0 geeft 89 atleten met meer dan één medaille, waarvan tenminste één gouden.
 c Verwijderen van alle filters en de kolom Medailles sorteren met 'Sorteren van hoog naar laag' geeft Michael Phelps met 6 medailles.
- 17** Maak een nieuwe kolom door in cel L1 Gevoelstemperatuur te typen.
 $L2=1,41-1,162*B2+0,98*C2+0,0124*B2^2+0,0185*B2*C2$
 Sorteert de kolom Gevoelstemperatuur met 'Sorteren van laag naar hoog'.
 De dag die het koudst aanvoelde was 1 februari 1956.

Bladzijde 149

- 18** a Filter in de kolommen Lengte en Gewicht de Lege cellen eruit.
 Kiezen van 'Aantal' in kolom E van de totaalrij geeft 10858 sporters.
 b Voeg een kolom toe door in cel N1 BMI te typen.
 $N2=F2/E2^2$
 De kolom BMI sorteren met 'Sorteren van hoog naar laag' geeft Shaimaa Haridy.
 c Voeg een kolom toe door in cel O1 OvergewichtBMI te typen.
 Filter de kolom BMI op 'Is groter dan of gelijk aan' 25.
 Typ in de eerste cel van de nieuwe kolom Ja en gebruik de vulgreep.
 Filter wissen in de kolom BMI. Filter de kolom OvergewichtBMI op Lege cellen en zet in de eerste cel van deze kolom Nee en gebruik de vulgreep.
 d Kiezen van 'Aantal' in kolom O van de totaalrij en de kolom OvergewichtBMI filteren op Ja geeft 2068 sporters met overgewicht.
- 19** Maak een nieuwe kolom door in cel L1 Gevoelstemperatuur te typen.
 Filter de kolom GemiddeldeWindsnelheid(m/s) op 'Is kleiner dan of gelijk aan' 1,3.
 $L709=C709$ (en gebruik indien nodig de vulgreep).
 Filter de kolom GemiddeldeWindsnelheid(m/s) op 'Groter Dan' 1,3.
 $L2=13,12+0,6215*C2-11,37*(3,6*B2)^{0,16}+0,3965*C2*(3,6*B2)^{0,16}$ (en gebruik indien nodig de vulgreep)
 Verwijder alle filters en maak een nieuwe kolom door in cel M1 Verschil te typen.
 $M2=ABS(L2-C2)$
 Kolom Verschil sorteren met 'Sorteren van hoog naar laag' geeft het grootste verschil op 31 januari 1956.

8.3 Draaitabellen en draaigrafieken

Bladzijde 150

- 20** a Kies 'Aantal' in kolom E van de totaalrij.
 Filteren van kolom Geslacht op M geeft 402 mannen en filteren op V geeft 396 vrouwen.
 b Kies 'Aantal' in kolom C van de totaalrij.
 Filteren van kolom Regio op Midwest geeft 170, filteren op Northeast geeft 111, filteren op South geeft 294 en filteren op West geeft 223 personen.
 c Filter per Regio op M en op V.

		geslacht		
		M	V	
regio	Midwest	95	75	170
	Northeast	52	59	111
	South	148	146	294
	West	107	116	223
		402	396	798

Bladzijde 151

- 21 a** De modale leeftijd bij de vrouwelijke sporters is 25.
- b**
- Maak een draaitabel met als rij-variabele Sport en als kolomvariabele Geslacht en kies bij Waarden voor Aantal van Geslacht.
Bij de sporten badminton, basketbal, boogschieten, hockey, moderne vijfkamp, taekwondo, tafeltennis, triatlon en volleybal staan evenveel mannen als vrouwen in de dataset.
 - Maak een draaitabel met als rij-variabele Leeftijd en als kolomvariabele Goud en kies bij Waarden voor Aantal van Goud.
De oudste winnaar van een gouden medaille is 58. Dubbelklikken op de waarde 1 in de tabel geeft een nieuw tabblad met de gegevens van deze sporter.
De oudste gouden medaillewinnaar deed aan paardensport.
Opmerking: als je ook Sport toevoegt als kolomvariabele, dan levert dit een minder overzichtelijke tabel op, maar kun je de sport wel direct aflezen.

- 22** Maak een draaitabel met als rij-variabelen Geslacht en Groep en zorg bij Waarden voor Min van Afstand, Gemiddelde van Afstand en Max van Afstand.
Stel de getalnotatie van Gemiddelde van Afstand in op twee decimalen.

Rijlabels	Min van Afstand (m)	Gemiddelde van Afstand (m)2	Max van Afstand (m)3
M	71,93	79,95	88,68
A	71,93	79,70	84,46
B	72,61	80,21	88,68
V	53,42	59,92	67,11
A	54,94	60,20	64,30
B	53,42	59,63	67,11
Eindtotaal	53,42	70,69	88,68

- 23 a** Maak een draaitabel met Leeftijd als rij-variabele, Geslacht als kolom-variabele en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van FB-vrienden.
Stel de getalnotatie in op gehelen.
Naarmate de personen ouder zijn hebben ze, met uitzondering van de 23-jarigen, meer Facebookvrienden.
Voor alle leeftijden geldt dat de vrouwen meer Facebookvrienden hebben dan de mannen.
Susanne heeft dus gelijk.

Gemiddelde van FB_Vrienden	Kolomlabels	
Rijlabels	M	V
20	182	185
21	271	393
22	370	470
23	367	492
24	409	445
25	491	594
Eindtotaal	374	467

- b** Filter de kolom FB-Vrienden op #NULL!.
Typ in de eerste cel van de kolom 0 en gebruik de vulgreep.
Maak een draaitabel met als rij-variabele Woonomgeving en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van FB-Vrienden.
Stel de getalnotatie in op gehelen.
Michiel concludeert dat het niet veel verschil maakt, maar dat in stedelijke gebieden personen iets minder Facebookvrienden hebben dan op het platteland.

Rijlabels	Gemiddelde van FB_Vrienden
Rural	315
Suburban	313
Urban	301
(leeg)	265
Eindtotaal	308

Bladzijde 152

- 24** Er zijn 12 personen waarbij zowel de variabele DeeltFotosVanZichzelf als de variabele DeeltVideosVanZichzelf de waarde #NULL! hebben.
Van deze personen is niet bekend of ze al dan niet foto's en/of video's van zichzelf delen.
- 25 a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Lengte en kies bij Waarden voor Aantal van LeerlingID.
Er komen zeer veel verschillende lengtes voor en de meeste lengtes hebben een lage frequentie. Dat levert een weinig overzichtelijke frequentietabel op.
- b** Maak een nieuwe kolom door LengteKlasse te typen in cel H1 van het werkblad DATASET.
Filter Lengte met getalfilter Tussen op 'Is groter dan of gelijk aan' 150 en 'Is kleiner dan of gelijk aan' 159.
Typ in de eerste cel van de nieuwe kolom 150 – 159 en gebruik de vulgreep.
Herhaal deze handeling voor de overige lengteklassen.

- c Maak een draaitabel met als rij-variabele LengteKlasse en kies bij Waarden voor Aantal van LeerlingID.

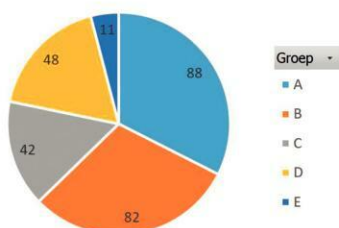
Rijlabels	Aantal van LeerlingID
150-159	9
160-169	44
170-179	54
180-189	31
190-199	8
Eindtotaal	146

Bladzijde 153

- 26 a Maak een draaitabel met als rij-variabele Groep en kies bij Waarden voor Aantal van Groep.

Aantal van Groep

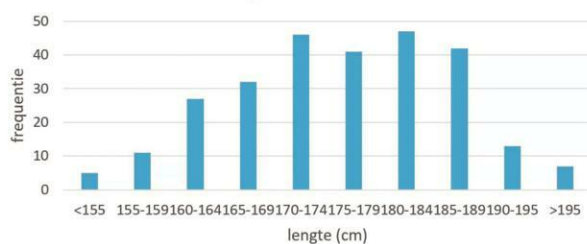
Aantallen studenten per groep



- b Maak een draaitabel met als rij-variabele Lengte en kies bij Waarden voor Aantal van Groep. Kies bij Lengte voor groeperen: Beginnen bij 155, Eindigen bij 195 en Op 5.

Aantal van Groep

Lengte studenten

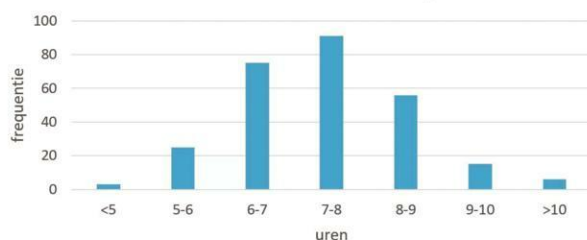


Lengte (cm)

- c Maak een draaitabel met als rij-variabele UrenSlaap en kies bij Waarden voor Aantal van Groep. Kies bij UrenSlaap voor groeperen: Beginnen bij 5, Eindigen bij 10 en Op 1.

Aantal van UrenSlaap

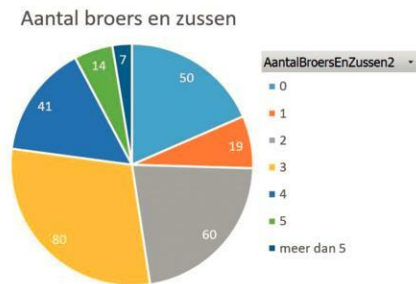
Gemiddeld aantal uren slaap



UrenSlaap

- d** Maak een draaitabel met als rij-variabele AantalBroersEnZussen en kies bij Waarden voor Aantal van AantalBroersEnZussen.
Kies bij AantalBroersEnZussen voor groeperen van 6 en 7 broers en zussen.

Aantal van AantalBroersEnZussen

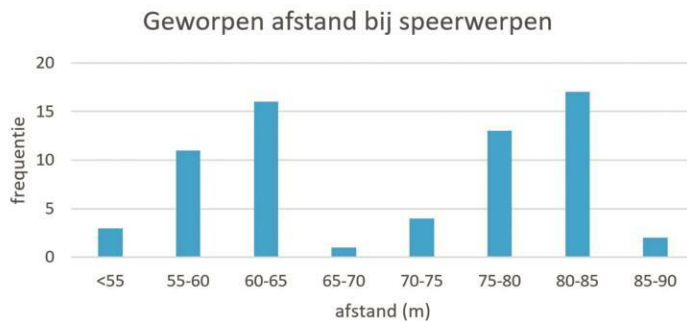


- 27 a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Afstand en kies bij Waarden voor Aantal van Afstand.
Kies bij Afstand voor groeperen: Beginnen bij 55, Eindigen bij 90 en Op 5.

Rijlabels	Aantal van Afstand (m)
<55	3
55-60	11
60-65	16
65-70	1
70-75	4
75-80	13
80-85	17
85-90	2
Eindtotaal	67

b

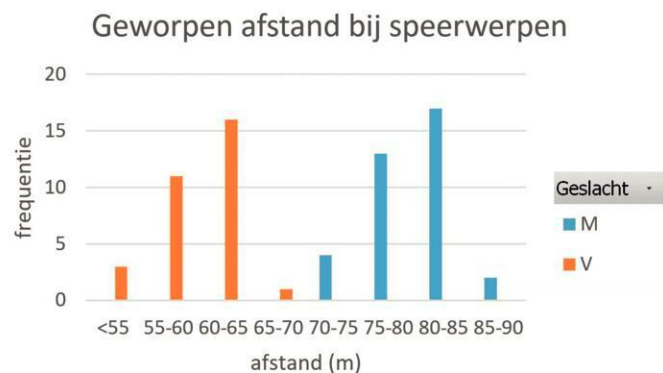
Aantal van Afstand (m)



Afstand (m)

- c** Je hebt te maken met een meertoppige verdeling.
d Voeg Geslacht toe als kolomvariabele.

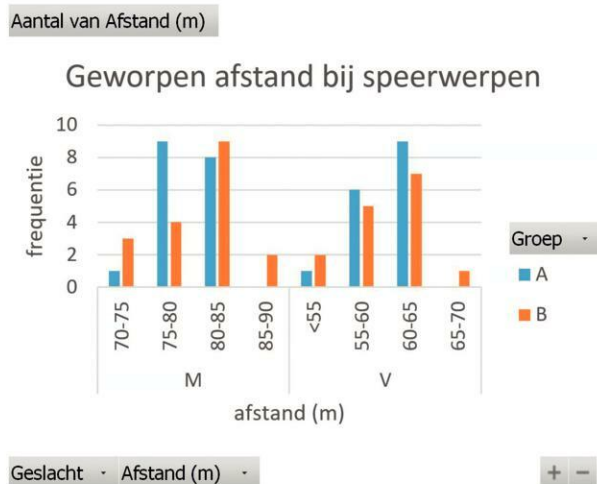
Aantal van Afstand (m)



Afstand (m)

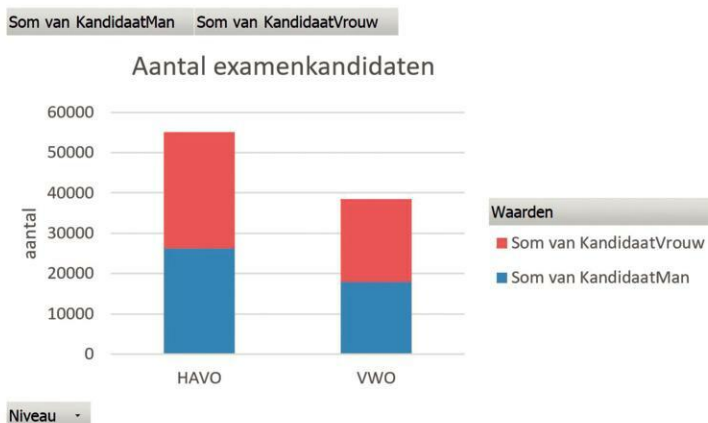
De mannen gooien verder dan de vrouwen. Dit veroorzaakt de twee toppen.

- e Versleep Geslacht van Kolommen naar Rijen en zet Geslacht boven Afstand. Voeg Groep toe als kolomvariabele.

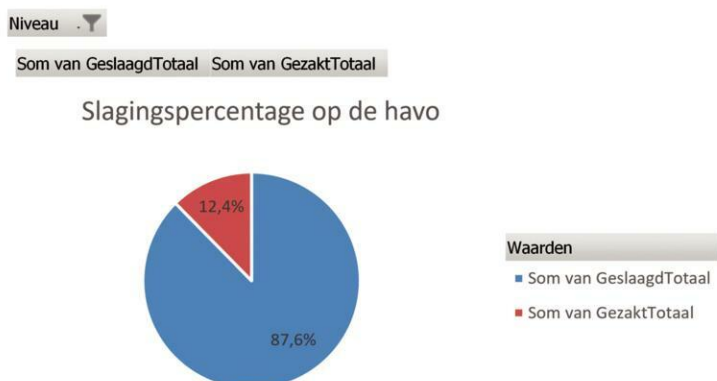


Bladzijde 154

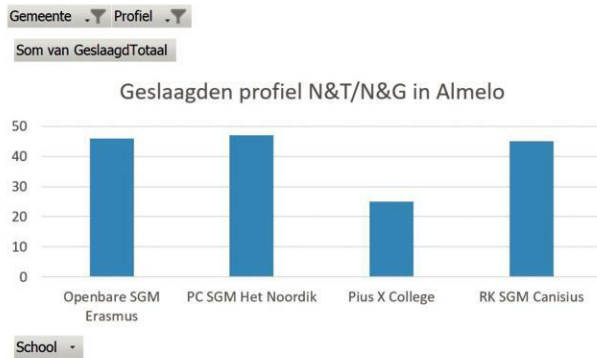
- 28 a Maak een draaitabel met als rij-variabele Niveau en kies bij Waarden voor Som van KandidaatMan en Som van KandidaatVrouw.



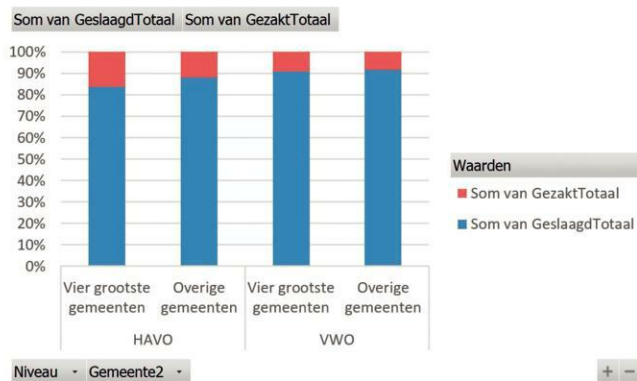
- b Maak een draaitabel met als rij-variabele Provincie en kies bij Waarden voor Som van GeslaagdMan en Som van GeslaagdVrouw. Filter vervolgens in de draaitabel op de juiste provincies.
Je kunt ook voor het filteren het staafdiagram maken en dan in de figuur de juiste provincies selecteren.
- c Maak een draaitabel en kies bij Waarden voor Som van GeslaagdTotaal en Som van GezaktTotaal.
Kies als filter-variabele voor Niveau en filter op HAVO.
Maak het cirkeldiagram en zorg ervoor dat de gegevenslabels weergegeven worden.
Bij Gegevenslabels opmaken kun je kiezen voor weergave in procenten. Bij notatie kun je kiezen voor een percentage in één decimaal.



- d** Maak een draaitabel met als filter-variabelen Gemeente en Profiel, als rij-variabele School en kies bij Waarden voor Som van GeslaagdTotaal. Filter bij Gemeente op Almelo en bij Profiel op N&T/N&G.

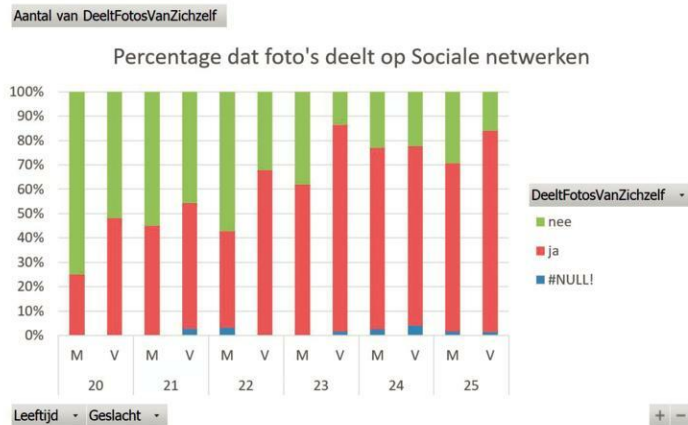


- 29 a** Maak een draaitabel met als rij-variabelen Niveau en Profiel en kies bij Waarden voor Som van GeslaagdTotaal en Som van GezaktTotaal. Groepeer de profielen zoals aangegeven en maak de draaigrafiek.
- b** Maak een draaitabel en kies als rij-variabele Gemeente. Selecteer de vier grootste gemeenten door de Ctrl-toets vast te houden en kies voor groeperen. Bij de rij-variabelen zie je nu een nieuwe variabele Gemeente2 staan. Verwijder de oorspronkelijke variabele Gemeente om de tabel overzichtelijker te maken. Selecteer vervolgens alle gemeenten behalve Groep1 (gebruik Shift en Ctrl) en kies voor groeperen. Pas de namen voor Groep1 en Groep2 aan en zet ze op eventueel in de juiste volgorde de groepen naar de juiste plek te slepen. Voeg nu Niveau toe als rij-variabele en zorg dat deze boven Gemeente2 komt te staan. Kies bij Waarden voor Som van GeslaagdTotaal en Som van GezaktTotaal. Maak nu de draaigrafiek.



- c** Door de verticale as in de figuur van vraag b te laten lopen van 75% tot 100% zijn de percentages beter af te lezen. Op de havo is het slagingspercentage in de grote gemeenten ongeveer 5% lager dan in de overige gemeenten. Op het vwo maakt het niet veel verschil, maar het slagingspercentage in de grote steden is ook hier lager dan in de overige gemeenten.

- 30 a** Maak een draaitabel met als rij-variabelen Leeftijd en Geslacht, als kolom-variabele DeeltFotosVanZichzelf en kies bij Waarden voor Aantal van DeeltFotosVanZichzelf.



- b** Bram kijkt naar het aantal in de kolom Nee. Hij berekent $\frac{17}{76} \times 100\% \approx 22\%$.

Roland rekent ook de vrouwen bij #Null! mee. Hij berekent $\frac{20}{76} \times 100\% \approx 26\%$.

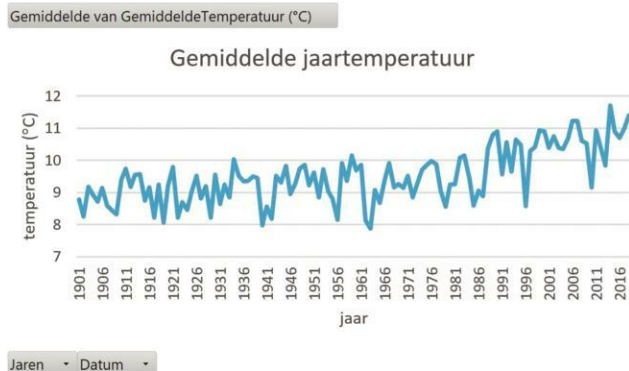
Roland heeft gelijk. Vrouwen die geen sociale netwerken gebruiken, delen er dus ook geen foto's van zichzelf op.

- 31 a** Filter de kolom DeeltFotosVanZichzelf op #NULL!. Typ in de eerste cel van deze kolom nee en gebruik de vulgreep.
- b** Filter de kolom DeeltVideosVanZichzelf op #NULL!. Typ in de eerste cel van deze kolom nee en gebruik de vulgreep.
- Voeg een kolom in naast de kolom DeeltFotosVanZichzelf en noem deze kolom Deelgedrag.
- Filter zowel DeeltFotosVanZichzelf als DeeltVideosVanZichzelf op ja. Zet in de eerste cel van de kolom Deelgedrag 'foto's en video's' en gebruik de vulgreep.
- Filter zowel DeeltFotosVanZichzelf als DeeltVideosVanZichzelf op nee. Zet in de eerste cel van de kolom Deelgedrag 'geen van beide' en gebruik de vulgreep.
- Filter DeeltFotosVanZichzelf op ja en DeeltVideosVanZichzelf op nee. Zet in de eerste cel van de kolom Deelgedrag 'alleen foto's' en gebruik de vulgreep.
- Filter DeeltFotosVanZichzelf op nee en DeeltVideosVanZichzelf op ja. Zet in de eerste cel van de kolom Deelgedrag 'alleen video's' en gebruik de vulgreep.
- Maak een draaitabel met als rij-variabele Deelgedrag en kies bij Waarden voor Aantal van ID.



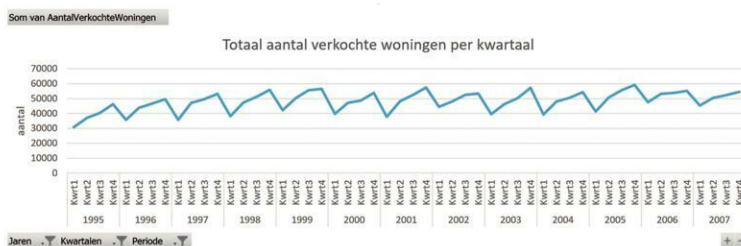
- 32 a** Nee, er zijn zoveel datapunten dat de grafiek onoverzichtelijk is.
- b** Kies Aantal in kolom A van de totaalrij. Aflezen geeft 43 099 dagen. Deze dagen zijn niet allemaal in het lijndiagram te onderscheiden.

- c** Maak een draaitabel met als rij-variabele Datum en kies bij waarde voor Gemiddelde van GemiddeldeTemperatuur.
- Het kan dat Excel zelf al voor een groepering per jaar zorgt. Als dat zo is, dan kun je direct de figuur maken. Als Excel geen groepering maakt, dan kies je zelf voor Groeperen en selecteer je Jaren.
- De stijgende trend is in de figuur goed zichtbaar.



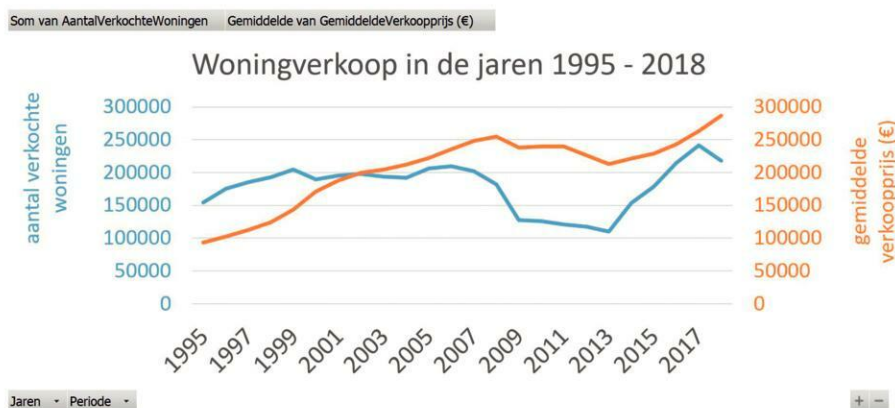
Bladzijde 157

- 33 a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Periode en kies bij Waarden voor Som van AantalVerkochteWoningen.
- Het kan dat Excel zelf al voor een groepering op jaren en kwartalen zorgt.
- Als dat niet zo is, dan kies je voor Groeperen en selecteer je jaren en kwartalen.
- Filter de variabele Periode met een Datumfilter op Tussen 1-1-1995 en 31-12-2007.
- Je kunt ook in de draaitabel bij Rijlabels de juiste jaren selecteren.

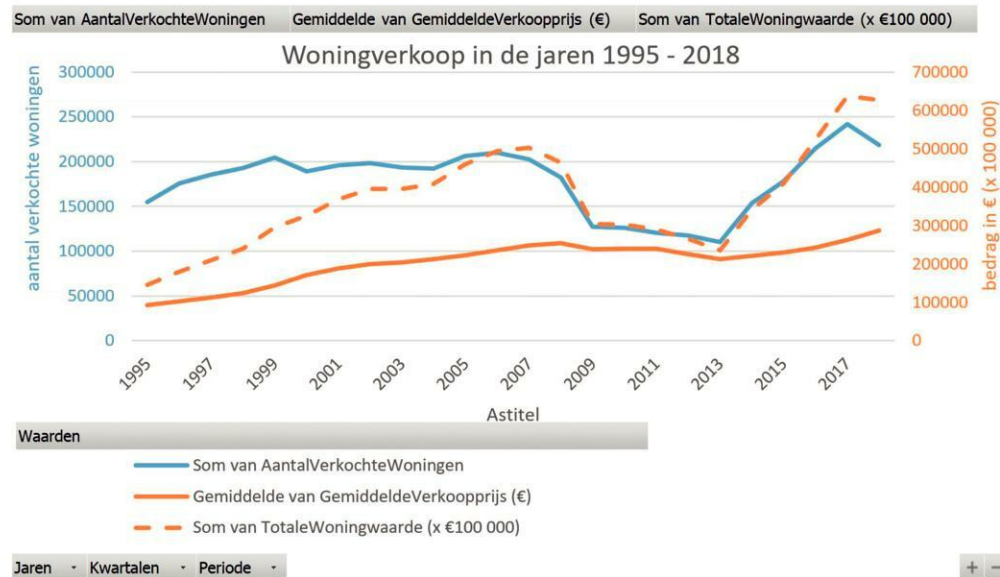


Steeds neemt de kwartaalverkoop binnen een jaar toe en steeds is het aantal verkochte woningen in het eerste kwartaal van een jaar minder dan in het laatste kwartaal van het voorafgaande jaar.

- b** Voeg aan de draaitabel bij Waarden het Gemiddelde van GemiddeldeVerkoopprijs toe. Pas de filter van de variabele Periode aan, zodat de jaren 1995-2018 getoond worden. Kies bij Periode voor groeperen: selecteer alleen Jaren.
- Maak het lijndiagram. Kies bij de grafiek voor de gemiddelde verkoopprijs voor Gegevensreeks Opmaken en selecteer Reeks tekenen op Secundaire as. Deze grafiek wordt nu afgebeeld op de rechter-as.



- c Voeg een kolom toe door in cel D1 TotaleWoningwaarde (×€100 000) te typen.
 $D2=B2*C2/100\,000$
 Vernieuw de draaitabel. Voeg bij Waarden de Som van TotaleWoningwaarde (×€100 000) toe.
 Kies bij de grafiek voor TotaleWoningwaarde (×€100 000) voor Gegevensreeks
 Opmaken en selecteer Reeks tekenen op Secundaire as. Deze grafiek wordt nu ook
 afgebeeld op de rechter-as.



Bladzijde 158

- 34 a Maak op het tabblad Juni 2018 de totaalrij aan. Kies Gemiddelde in kolom C van de totaalrij. Het gemiddelde is 17,5 °C. Dus het getal dat op de eerste puntjes moet staan is 17,5.

Maak bij de gegevens in het tabblad Tijdvak 1981-2010 een draaitabel met als rij-variabele Datum en kies bij Waarden voor Gemiddelde van GemTemperatuur(°C). Groepeer Datum op Maanden.

Lees bij juni af dat de normale gemiddelde temperatuur 15,6 °C is. Dus het getal dat op de tweede puntjes moet staan is $17,5 - 15,6 = 1,9$.

Maak bij de gegevens van het tabblad Historie een draaitabel met als rij-variabele Datum en kies bij Waarden voor Gemiddelde van GemTemperatuur(°C). Kies bij Groeperen voor zowel Maanden als Jaren. Zet de rij-variabele Datum bovenaan bij de rij-variabelen. Filter de variabele Datum op Alle datums in de periode juni. Sorteer de waarden van Gemiddelde van GemTemperatuur(°C) met 'Sorteren van hoog naar laag'. Merk op dat 2018 op plek 5 in de rij staat. Dus op de derde puntjes moet 5 staan.

Kies op het tabblad Juni 2018 in kolom J van de totaalrij voor Som en lees af dat er in juni 2018 in totaal 11,8 mm neerslag viel. Dit is het getal dat op de eerste puntjes van de tweede alinea moet staan.

Voeg aan de draaitabel bij het tabblad Tijdvak 1981-2010 bij Waarden Som van HoeveelheidNeerslag toe. In totaal viel er in deze 30 jaar in de maanden juni 1968,5 mm neerslag, dus dat is gemiddeld 65,6 mm per maand. In juni 2018 viel dus $\frac{65,6 - 11,8}{65,6} \times 100\% \approx 82,0\%$ minder neerslag dan normaal. Het tweede getal in de tweede alinea is dus 82.

Kies op het tabblad Juni 2018 in de totaalrij van de kolom Zonneschijnduur voor Som en lees af dat in juni 2018 de zon in totaal 204,9 uur scheen. Het eerste getal in de derde alinea is dus 205.

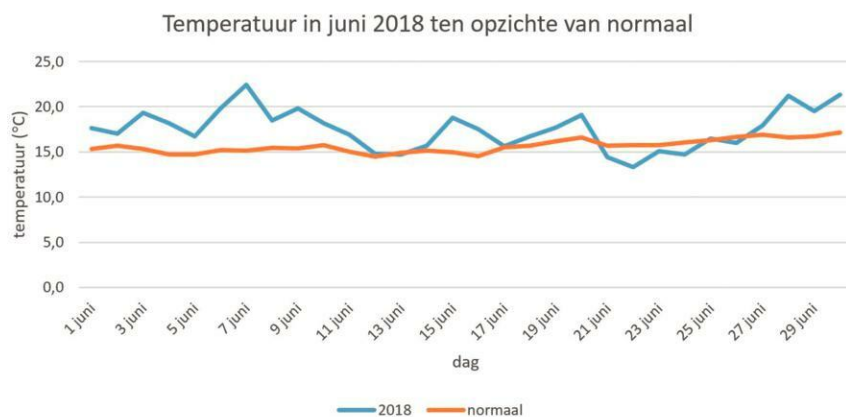
Voeg aan de draaitabel bij het tabblad Tijdvak 1981-2010 bij Waarden Som van Zonneschijnduur toe. In totaal scheen de zon in deze 30 jaar in de maanden juni 5817,5 uur, dus dat is gemiddeld ongeveer 194 uur per maand. Dit is het laatste getal van het artikel.

- b** Zet in de cellen B3 t/m B32 van het tabblad Temperaturen juni de gemiddelde dagtemperaturen van juni 2018. Kopieer deze van het tabblad Juni 2018.

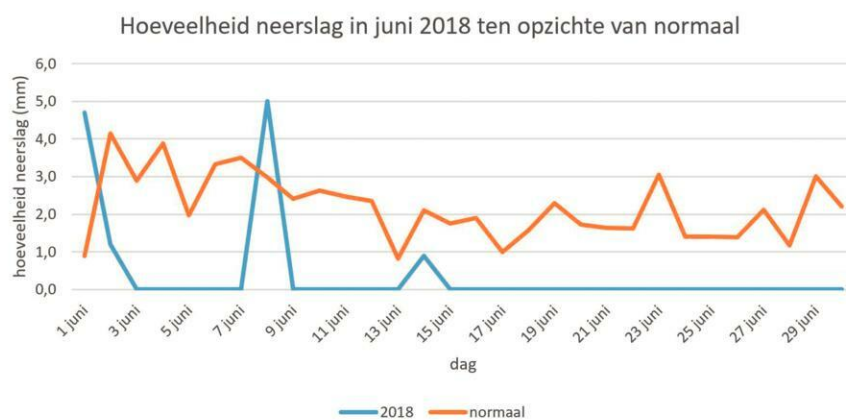
Gebruik de draaitabel bij het tabblad Tijdvak 1981-2010 uit vraag a. Groepeer Datum op Maanden én Dagen. Kopieer de gemiddelde dagtemperaturen van juni in de periode 1981-2010 naar de cellen C3 t/m C32 van het tabblad Temperaturen juni. Zorg ervoor dat de getallen in één decimaal worden weergegeven. Je krijgt de volgende tabel.

	A	B	C
1			
2			
3	Dag	2018	normaal
4	1 juni	17,6	15,3
5	2 juni	17,0	15,7
6	3 juni	19,3	15,3
7	4 juni	18,2	14,7
8	5 juni	16,7	14,7
9	6 juni	19,8	15,2
10	7 juni	22,4	15,1
11	8 juni	18,5	15,4
12	9 juni	19,8	15,4
13	10 juni	18,2	15,7
14	11 juni	16,9	15,0
15	12 juni	14,8	14,5
16	13 juni	14,7	14,9
17	14 juni	15,7	15,1
18	15 juni	18,8	14,9
19	16 juni	17,5	14,6
20	17 juni	15,6	15,5
21	18 juni	16,7	15,7
22	19 juni	17,7	16,2
23	20 juni	19,1	16,6
24	21 juni	14,4	15,7
25	22 juni	13,3	15,7
26	23 juni	15,1	15,7
27	24 juni	14,7	16,0
28	25 juni	16,5	16,3
29	26 juni	16,0	16,6
30	27 juni	17,9	16,9
31	28 juni	21,2	16,6
32	29 juni	19,5	16,7
33	30 juni	21,3	17,2

Maak het lijndiagram.



- c** Ga te werk zoals bij vraag b.



Gemengde opgaven

5 Veranderingen

Bladzijde 160

- 1 a** minimum is 120 om 9:00 uur
 maximum is 450 om 11:00 uur
 minimum is 430 om 11:15 uur
 maximum is 600 om 12:30 uur
 minimum is 545 om 13:00 uur
 maximum is 600 om 13:30 uur
 minimum is 545 om 14:00 uur
- b** In het 6^e kwartier. Ze stegen van 265 m naar 365 m, dat is 100 m.
- c** Het eerste maximum is 450 om 11:00 uur en het laatste maximum is 600 om 13:30 uur.
 $600 - 450 = 150$ m in 2,5 uur = 150 minuten, dus de gemiddelde stijging is 1 meter per minuut.

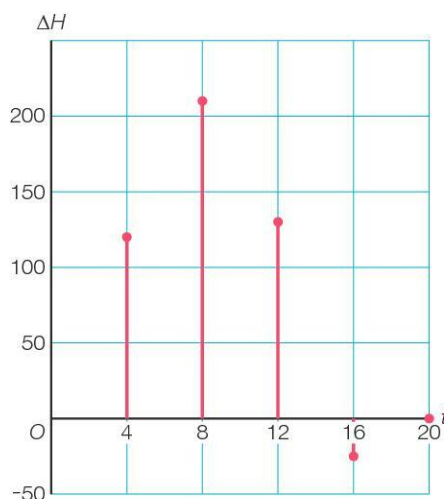
- d** Als $\frac{\Delta H}{\Delta t}$ het grootst is, loopt de lijn zo steil mogelijk.

De steilste lijn door (0, 120) en een ander punt op de grafiek gaat door (7, 430), dus $x = 7$.

- e** Bijvoorbeeld [14, 18].

f

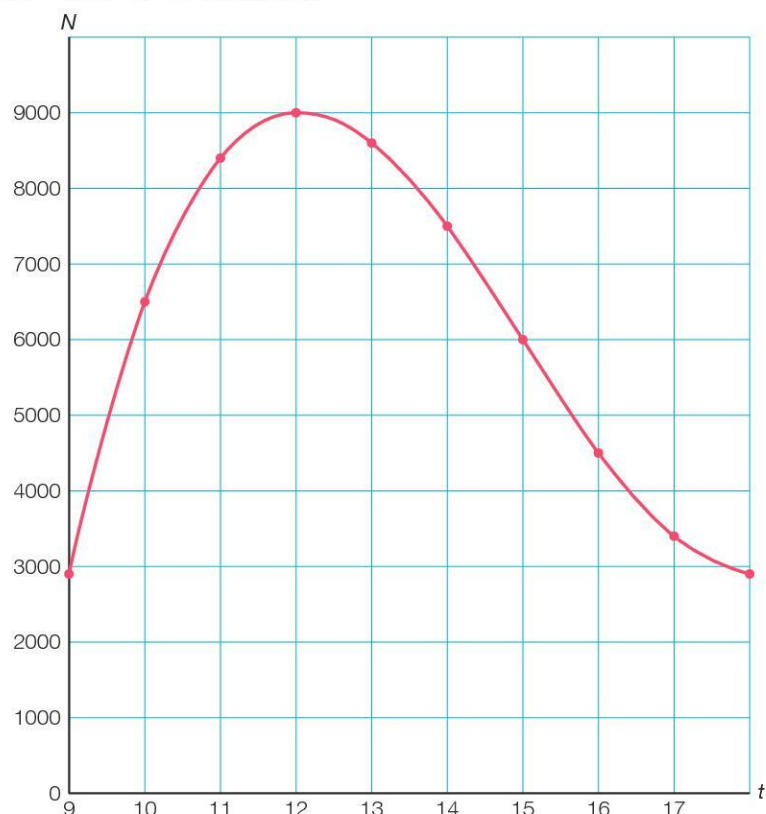
t	H	ΔH
0	120	-
4	240	120
8	450	210
12	570	130
16	545	-25
20	545	0



- 2 a Om 11 uur waren er $7500 + 1100 + 400 - 600 = 8400$ bezoekers.

b

t	N	
9	2900	
10	6500	+ 3600
11	8400	+ 1900
12	9000	+ 600
13	8600	- 400
14	7500	- 1100
15	6000	- 1500
16	4500	- 1500
17	3400	- 1100
18	2900	- 500



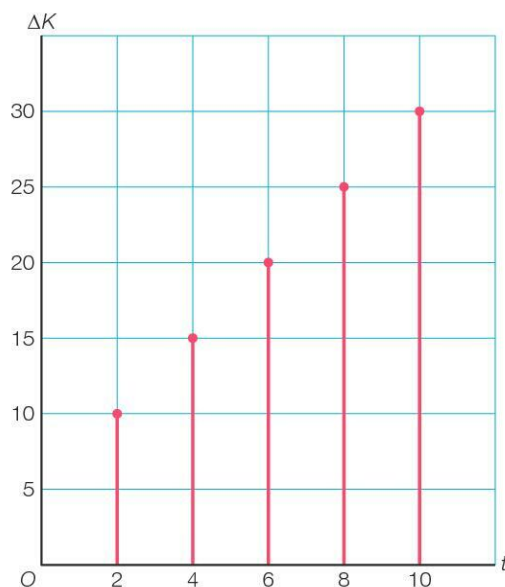
- c Dat kan kloppen.

Bij $t = 12$ hoort $\Delta N = 600$, maar dit is de netto toename. Er kunnen best 1100 bezoekers het park zijn binnengelopen en 500 het park hebben verlaten. Ook dan is $\Delta N = 600$.

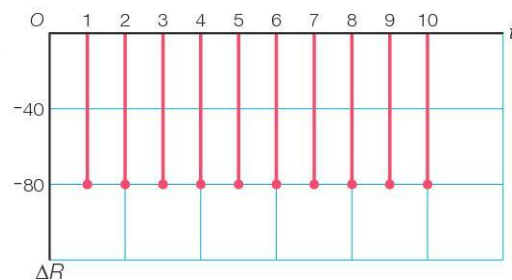
- d Het is mogelijk dat er tussen 11 uur en 12 uur 10000 bezoekers waren, want elke grafiek door de punten is in theorie mogelijk.

- 3 a $\Delta t = 2$, dus tussen 2010 en 2020 zijn er 5 tijdsintervallen.

De totale toename van het aantal koolmezen K moet $630 - 530 = 100$ zijn, en de toenames worden steeds groter (toenemende stijging), dus neem bijvoorbeeld de toenames 10, 15, 20, 25 en 30.

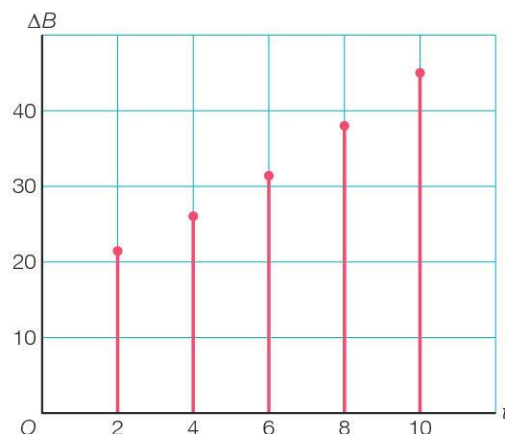


- b** $\Delta t = 1$, dus 10 tijdsintervallen.
 Constante daling, dus de daling van het aantal roodborsten
 R is per jaar $\frac{9640 - 8840}{10} = 80$.

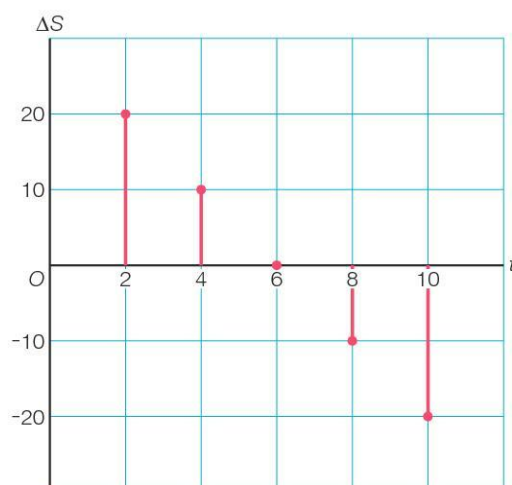


- c** Zie de tabel met het aantal bosuilen B .

t	0	2	4	6	8	10
B	100	121	146	177	214	259
ΔB	–	21	25	31	37	45



- d** Neem voor het aantal sperwers S bijvoorbeeld de toenames 20, 10, 0, -10 en -20.



Bladzijde 162

- 4** **a** Op het interval $\langle 4, 6 \rangle$.
b Nee, elke grafiek door de punten is mogelijk. Tussen $x = 2$ en $x = 2,5$ kan de grafiek bijvoorbeeld 2 toenemen. De gemiddelde toename op het interval $[2; 2,5]$ is dan 4.
c De intervallen $[3, 7]$ en $[3, 8]$.

- 5** **a** B en D
b A
c B, C en D
d C
e C

Bladzijde 163

- 6** **a** Gebruik het toenamedigram bij de opbrengst.
 $15 - 1 - 1 - 3 - 1 + 2 = 11$, dus in augustus was de opbrengst 11 000 euro.
b Gebruik het toenamedigram bij de kosten.
 $12 + 0 - 1 = 11$, dus in januari waren de kosten 11 000 euro.

c	maand	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt
	opbrengst	15	16	15	14	13	10	9	11	13	15
	kosten	11	12	12	13	14	13	12	10	10	11
	winst	4	4	3	1	-1	-3	-3	1	3	4

In de maanden januari, februari en oktober boekte het bedrijf de meeste winst.

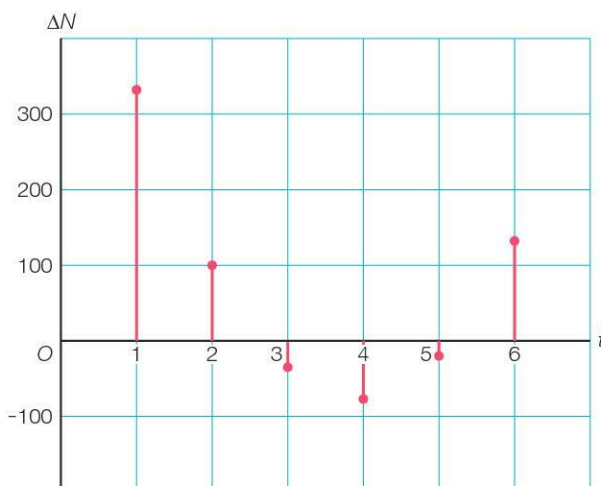
- d** $1 + 3 + 3 = 7$, dus het verlies was in totaal 7000 euro.
- e** Van januari naar februari geldt $\Delta W = 0$, $\Delta O = 1$ en $\Delta K = 1$, dus er geldt $\Delta W = \Delta O - \Delta K$.
En zo geldt altijd dat $\Delta W = \Delta O - \Delta K$.
- f** Zie de tabel, dat was in juli, want van juli naar augustus was de verandering van de maandelijkse winst voor het eerst positief.
- g** De winst in november en december samen was $21\,000 - 13\,000 = 8000$ euro.
Omdat van november naar december geldt $\Delta W = 0$, was de winst in december even groot als in november. Dus zowel in november als in december is de winst 4000 euro.

Bladzijde 164

- 7 a** 500 wekkerradio's, dus $q = 5$.
 $q = 5$ geeft $K = 97$, dus de kosten zijn 9700 euro.
 $\frac{9700}{500} = 19,40$, dus de gemiddelde kosten zijn € 19,40 per wekkerradio.
- b** Op $[5, 7]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{216,6 - 97}{7 - 5} = € 59,80$ per wekkerradio.
- c** Op $[1,5; 4]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{70,8 - 45,55}{4 - 1,5} = € 10,10$ per wekkerradio.
- d** 14 320 euro, dus $K = 143,2$.
Los op $1,2q^3 - 8q^2 + 25q + 22 = 143,2$.
Voer in $y_1 = 1,2x^3 - 8x^2 + 25x + 22$ en $y_2 = 143,2$.
De optie snijpunt geeft $x = 6$, dus bij een productie van 600 stuks.
De gemiddelde kosten per wekkerradio zijn dan $\frac{14\,320}{600} \approx € 23,87$.
- e** Voer in $y_2 = 25x$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 1,98$ en $x \approx 6,19$.
Er worden dagelijks 198 of 619 stuks geproduceerd.
- 8 a** $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 2 = 13$ video's
- b** $100 + 140 + 285 + 479 = 1004$, dus in april.
- c** Ja, ΔA is steeds positief, dus A is stijgend.
Eerst neemt ΔA steeds toe, daarna neemt ΔA af.
- d** Op $[0, 5]$ is $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{11}{5} = 2,2$.
Valerie heeft in de eerste vijf maanden van het jaar gemiddeld 2,2 video's per maand geüpload.
- e** Op $[0, 12]$ is $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{21}{12} = 1,75$.
- f** Op $t = 8$ is $\frac{A}{V} = \frac{5192}{14} \approx 370$.
Op $t = 9$ is $\frac{A}{V} = \frac{6439}{15} \approx 429$.
Op $t = 10$ is $\frac{A}{V} = \frac{7391}{18} \approx 411$.
Dat is op $t = 9$, dus eind september.

- 9 a Voer in $y_1 = 2x^3 - 41x^2 + 240x + 100$.

t	N	ΔN
0	100	-
2	432	332
4	532	100
6	496	-36
8	420	-76
10	400	-20
12	532	132



- b Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{525 - 301}{5 - 1} = 56$ leden per jaar.
- c Voer in $y_2 = 394$.
De optie snijpunt geeft $x = 1,65...$
Dus in het jaar 2009.
- d Bij 1 januari 2009 hoort $t = 1$ en bij 1 juli 2012 hoort $t = 4,5$.
Op $[1; 4,5]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx \frac{532 - 301}{4,5 - 1} = 66$ leden per jaar = 5,5 leden per maand.

6 Rekenregels en formules

- 10 a Invullen van $d = 5$ en $t = 15$ geeft $P_{\max} = 3,19 + 2,35 \cdot 5 + 0,39 \cdot 15 = 20,79$.
De maximale prijs is € 20,79.
- b Als je d km rijdt, betaal je 3 km minder. Dus in de formule van $P_{\max}$ wordt d vervangen door $d - 3$.
- c $P_{\text{GRT}} = 3,19 + 2,35(d - 3) + 0,39t$
 $P_{\text{GRT}} = 3,19 + 2,35d - 7,05 + 0,39t$
 $P_{\text{GRT}} = 2,35d + 0,39t - 3,86$
- d 20 km/uur = 1 km/3 minuten
Dus een rit van d km duurt $3d$ minuten.
- e Invullen van $t = 3d$ in de formule van $P_{\max}$ geeft
 $P_{\max} = 3,19 + 2,35d + 0,39 \cdot 3d$
 $P_{\max} = 3,19 + 2,35d + 1,17d$
 $P_{\max} = 3,19 + 3,52d$

- 11 a $A = -3\sqrt{2x} \cdot \sqrt{12\frac{1}{2}y} = -3\sqrt{25xy} = -3 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{xy} = -3 \cdot 5 \cdot \sqrt{xy} = -15\sqrt{xy}$
Dus $A = -15\sqrt{xy}$.

$$b \quad B = \frac{3}{2\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{8x}{2\sqrt{x}} = \frac{3 + 8x}{2\sqrt{x}} = \frac{1,5 + 4x}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Dus } B = \frac{1,5 + 4x}{\sqrt{x}}.$$

$$c \quad C = \frac{\sqrt{54ab^2}}{\sqrt{6b}} + \sqrt{2a} \cdot \sqrt{3b} = \sqrt{\frac{54ab^2}{6b}} + \sqrt{6ab} = \sqrt{9ab} + \sqrt{6ab} =$$

$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{ab} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{ab} = 3\sqrt{ab} + 2,449... \sqrt{ab} \approx 5,45\sqrt{ab}$$

$$\text{Dus } C = 5,45\sqrt{ab}.$$

$$d \quad D = 3x^2 \cdot (0,5\sqrt{x})^{-2} = \frac{3x^2}{(0,5\sqrt{x})^2} = \frac{3x^2}{0,25x} = 12x$$

$$\text{Dus } D = 12x.$$

$$\begin{aligned} \text{e } E &= 2\sqrt{\frac{F}{5}} \\ 2\sqrt{\frac{F}{5}} &= E \\ \sqrt{\frac{F}{5}} &= 0,5E \\ \frac{F}{5} &= 0,25E^2 \\ F &= 1,25E^2 \end{aligned}$$

Bladzijde 166

- 12 a** In de figuur lees je af dat bij $x = 2$ hoort $y = 4$.
Dus $z = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 18$.
- b** In de figuur lees je af dat bij $y = 5$ hoort $x = 4$.
Dus $z = 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 30$.
- c** De formule van de lijn in de figuur is $y = 0,5x + 3$.
Invullen van $y = 0,5x + 3$ in $z = 5x + 2y$ geeft $z = 5x + 2(0,5x + 3) = 5x + x + 6$,
dus $z = 6x + 6$.
 $z = 66$ geeft dus $6x + 6 = 66$
 $6x = 60$
 $x = 10$
 $x = 10$ invullen in $y = 0,5x + 3$ geeft $y = 0,5 \cdot 10 + 3 = 8$.
Dus $x = 10$ en $y = 8$.
- 13 a** $S = 2$ geeft $p = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ en $B = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17$
Dus hij krijgt 17 euro uitgekeerd.
- b** $p = 9$ geeft $2S - 1 = 9$
 $2S = 10$
 $S = 5$
 $p = 9$ en $S = 5$ geeft $B = 3 \cdot 9 + 4 \cdot 5 = 47$
Dus hij krijgt 47 euro uitgekeerd.
- c** Invullen van $p = 2S - 1$ geeft $B = 3(2S - 1) + 4S = 6S - 3 + 4S = 10S - 3$, dus
 $B = 10S - 3$.
Los op $10S - 3 = 97$
 $10S = 100$
 $S = 10$
 $S = 10$ geeft $p = 2 \cdot 10 - 1 = 19$
Het gemiddeld bedrag op de spaarrekening was 10000 euro en ze kreeg 19 punten.

- 14 a** $A = \frac{2}{p} - \frac{p}{q} = \frac{2q}{pq} - \frac{p^2}{pq} = \frac{2q - p^2}{pq}$
Dus $A = \frac{2q - p^2}{pq}$.
- b** $B = \frac{1}{3}q + 4 + \frac{5}{q} = \frac{q}{3} + 4 + \frac{5}{q} = \frac{q^2}{3q} + \frac{12q}{3q} + \frac{15}{3q} = \frac{q^2 + 12q + 15}{3q}$
- c** $C = 3q - 2 \cdot \frac{2q}{2q+1} = \frac{3q(2q+1)}{2q+1} - \frac{2 \cdot 2q}{2q+1} = \frac{6q^2 + 3q - 4q}{2q+1} = \frac{6q^2 - q}{2q+1}$
Dus $C = \frac{6q^2 - q}{2q+1}$.
- d** $D = \frac{-(4p^3q)^2}{(-2q)^4} = \frac{-16p^6q^2}{16q^4} = -\frac{p^6}{q^2}$
Dus $D = -\frac{p^6}{q^2}$.

$$\text{e } E = 3q \cdot \frac{q}{q-1} : \frac{q}{q+1} = \frac{3q}{1} \cdot \frac{q}{q-1} \cdot \frac{q+1}{q} = \frac{3q^2(q+1)}{q(q-1)} = \frac{3q(q+1)}{q-1} \left(= \frac{3q^2+3q}{q-1} \right)$$

$$\text{Dus } E = \frac{3q(q+1)}{q-1} \left(= \frac{3q^2+3q}{q-1} \right).$$

$$\text{f } F = \left(\frac{9p^{1,25}}{p^{-0,15}} \right)^{1,5} = (9p^{1,25-(-0,15)})^{1,5} = (9p^{1,4})^{1,5} = 9^{1,5} \cdot (p^{1,4})^{1,5} = 27p^{2,1}$$

$$\text{Dus } F = 27p^{2,1}.$$

$$\text{g } \text{Uit } q = 2p \text{ volgt } p = \frac{1}{2}q.$$

$$\text{Invullen van } p = \frac{1}{2}q \text{ in de formule van } G \text{ geeft } G = \frac{1}{2}q - \frac{3q}{2 \cdot \frac{1}{2}q} = \frac{1}{2}q - \frac{3q}{q} = \frac{1}{2}q - 3.$$

$$\text{Dus } G = \frac{1}{2}q - 3.$$

Bladzijde 167

$$\text{15 a } \left. \begin{array}{l} p - q = 10 \\ -q = -p + 10 \\ q = p - 10 \\ A = 4p - q + 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 4p - (p - 10) + 20 \\ A = 4p - p + 10 + 20 \\ A = 3p + 30 \end{array}$$

$$\text{b } \left. \begin{array}{l} 5p - 8q = 160 \\ 5p = 8q + 160 \\ p = 1,6q + 32 \\ B = 2pq - 3p + 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} B = 2(1,6q + 32)q - 3(1,6q + 32) + 4 \\ B = 2q(1,6q + 32) - 4,8q - 96 + 4 \\ B = 3,2q^2 + 64q - 4,8q - 92 \\ B = 3,2q^2 + 59,2q - 92 \end{array}$$

$$\text{Dus } a = 3,2, b = 59,2 \text{ en } c = -92.$$

$$\text{c } \left. \begin{array}{l} 3q - 15p = 5 \\ -15p = -3q + 5 \\ p = \frac{1}{5}q - \frac{1}{3} \\ W = 18 - 7,5p + 2q \end{array} \right\} \begin{array}{l} W = 18 - 7,5\left(\frac{1}{5}q - \frac{1}{3}\right) + 2q \\ W = 18 - 1,5q - 2,5 + 2q \\ W = 0,5q + 15,5 \end{array}$$

$$\text{d } \left. \begin{array}{l} x + z = 6 \\ z = -x + 6 \\ y = 2x + 5 \\ F = 3xy + 4xz + 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} F = 3x(2x + 5) + 4x(-x + 6) + 8 \\ F = 6x^2 + 15x - 4x^2 + 24x + 8 \\ F = 2x^2 + 39x + 8 \end{array}$$

$$\text{16 a } A = \frac{120}{50 \cdot 1,25^t} = \frac{120}{50} \cdot 1,25^{-t} = 2,4 \cdot (1,25^{-1})^t = 2,4 \cdot 0,8^t$$

$$\text{Dus } A = 2,4 \cdot 0,8^t.$$

$$\text{b } \text{Invullen van } N = 40 \cdot 0,8^t \text{ in } B = \frac{200}{N} \text{ geeft}$$

$$B = \frac{200}{40 \cdot 0,8^t} = \frac{200}{40} \cdot 0,8^{-t} = 5 \cdot (0,8^{-1})^t = 5 \cdot 1,25^t$$

$$\text{Dus } B = 5 \cdot 1,25^t.$$

$$\text{c } \text{Uit } D \cdot N = 2,4 \text{ volgt } D = \frac{2,4}{N}.$$

$$\text{Invullen van } N = 2,4 \cdot 1,08^t \text{ in } D = \frac{2,4}{N} \text{ geeft}$$

$$D = \frac{2,4}{2,4 \cdot 1,08^t} = \frac{2,4}{2,4} \cdot 1,08^{-t} = 0,1 \cdot (1,08^{-1})^t \approx 0,1 \cdot 0,93^t.$$

$$\text{Dus } D = 0,1 \cdot 0,93^t.$$

$$\text{d } N = \frac{24}{48 \cdot 0,5^t} = \frac{24}{48} \cdot 0,5^{-t} = 0,5 \cdot (0,5^{-1})^t = 0,5 \cdot 2^t$$

$$\text{De beginwaarde is } 0,5 \text{ en de groeifactor is } 2.$$

- 17 a** Invullen van $G = 10$, $F = 10$ en $K = 2$ in de formule van S geeft

$$S = 10 - \frac{10}{2-1} = 10 - 10 = 0.$$

Als je 20 tweekeuzevragen op de gok beantwoordt, dan verwacht je er 10 goed te hebben. Dat zou geen punten op moeten leveren.

- b** $G + F = 20$, dus $F = 20 - G$.

Invullen van $F = 20 - G$ en $K = 3$ in de formule van S geeft

$$S = G - \frac{20-G}{3-1} = G - \frac{20-G}{2} = G - 0,5(20-G) = G - 10 + 0,5G = 1,5G - 10.$$

Dus $S = 1,5G - 10$.

- c** Invullen van $C = 5,5$ en maximale score = 20 in de formule van C geeft

$$\frac{S}{20} \cdot 9 + 1 = 5,5$$

$$0,45 \cdot S = 4,5$$

$$S = 10$$

$$\text{Dus } 1,5G - 10 = 10$$

$$1,5G = 20$$

$$G = 13,33\ldots$$

Je moet dus minstens 14 vragen goed beantwoorden.

- d** $G + F = 30$, dus $F = 30 - G$.

Invullen van $F = 30 - G$ en $K = 4$ in de formule $S = G - \frac{F}{K-1}$ geeft

$$S = G - \frac{30-G}{4-1} = G - \frac{30-G}{3} = G - \frac{1}{3}(30-G) = G - 10 + \frac{1}{3}G = 1\frac{1}{3}G - 10.$$

Invullen van $S = 1\frac{1}{3}G - 10$ in $C = \frac{S}{30} \cdot 9 + 1$ geeft

$$C = \frac{1\frac{1}{3}G - 10}{30} \cdot 9 + 1 = \frac{9}{30}(1\frac{1}{3}G - 10) + 1 = 0,4G - 3 + 1 = 0,4G - 2.$$

Dus $a = 0,4$ en $b = -2$.

Bladzijde 168

18 a

aantal Hertogdommen	0	1	2	3	4	5
aantal Hertogen	5	4	3	2	1	0
aantal overwinningpunten	0	7	12	15	16	15

Remco kan het beste 4 Hertogdommen en 1 Hertog kopen.

- b** Het aantal punten voor x Hertogdommen is $3x$ en voor y Hertogen is het xy , dus $S = 3x + xy$.

- c** $x + y = 9$

$$\left. \begin{array}{l} y = 9 - x \\ S = 3x + xy \end{array} \right\} \begin{array}{l} S = 3x + x(9 - x) \\ S = 3x + 9x - x^2 \\ S = 12x - x^2 \end{array}$$

- d** Voer in $y_1 = 12x - x^2$ en maak een tabel.

Lees uit de tabel af dat y_1 maximaal 36 is voor $x = 6$.

De beste strategie is het kopen van 6 Hertogdommen en 3 Hertogen.

- e** $x + y = 12$

$$\left. \begin{array}{l} y = 12 - x \\ S = 3x + xy \end{array} \right\} \begin{array}{l} S = 3x + x(12 - x) \\ S = 3x + 12x - x^2 \\ S = 15x - x^2 \end{array}$$

Voer in $y_1 = 15x - x^2$ en maak een tabel.

Lees uit de tabel af dat y_1 maximaal 56 is voor zowel $x = 7$ als $x = 8$.

Dus het maximale aantal overwinningpunten met 12 kaarten is 56.

19 Invullen van $t = 0$ en $W = 4$ geeft $\frac{20}{1+b \cdot g^0} = 4$ oftewel $\frac{20}{1+b} = 4$.

Voer in $y_1 = \frac{20}{1+x}$ en $y_2 = 4$.

De optie snijpunt geeft $x = 4$, dus $b = 4$.

Invullen van $t = 4$ en $W = 18$ in $W = \frac{20}{1+4 \cdot g^t}$ geeft $\frac{20}{1+4 \cdot g^4} = 18$.

Voer in $y_1 = \frac{20}{1+4x^4}$ en $y_2 = 18$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,4082\dots$, dus $g \approx 0,4$.

Zo krijg je de formule $W = \frac{20}{1+4 \cdot 0,4^t}$.

Bij halverwege juli hoort $t = 1,5$.

$t = 1,5$ geeft $W = 9,94\dots$, dus halverwege juli is ongeveer 10 m^2 bedekt met waterlelies.

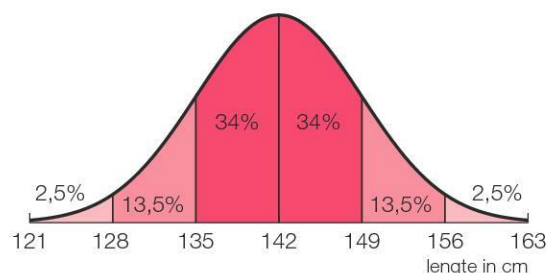
7 Statistiek en beslissingen

Bladzijde 169

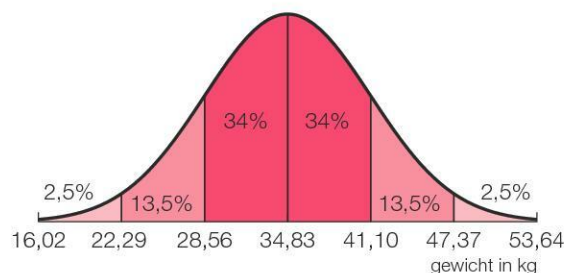
- 20 a** Tot en met de klasse $[60, 65)$ zijn er $2 + 2 + 4 + 16 = 24$ waarnemingsgetallen en tot en met de klasse $[65, 70)$ zijn er $24 + 12 = 36$ waarnemingsgetallen.
Dus de mediaan (het gemiddelde van het 35^e en 36^e waarnemingsgetal) valt in de klasse $[65, 70)$.
De modale klasse (de klasse met de grootste frequentie) is $[70, 75)$.
Dus de mediaan valt niet in de modale klasse.
- b** De mediaan is hoogstens 70 minuten (zie vraag a). Dus boxplot B valt af.
 Q_1 is het 18^e waarnemingsgetal en dit valt in de klasse $[60, 65)$ (zie vraag a).
Dus boxplot A valt ook af.
Boxplot C past het beste bij het histogram.
- c** Het gemiddelde wordt kleiner, want de tijden van 85 of meer minuten lagen ver boven het gemiddelde.
Ook de standaardafwijking wordt kleiner, want er komen minder waarnemingsgetallen ver van het gemiddelde te liggen.
- d** Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde tijd in minuten is $\left[59,5 - 2 \cdot \frac{10,3}{\sqrt{35}}; 59,5 + 2 \cdot \frac{10,3}{\sqrt{35}} \right] \approx [56,0; 63,0]$.

Bladzijde 170

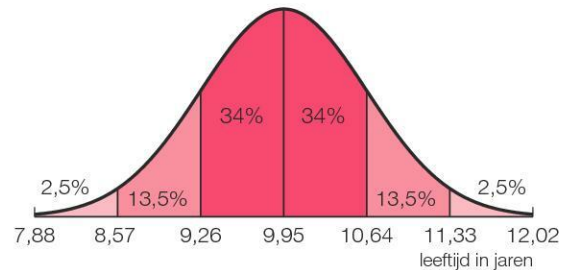
- 21 a** Zie de schets. Dus $34\% + 34\% = 68\%$.
Dat zijn $0,68 \cdot 161 \approx 109$ kinderen.



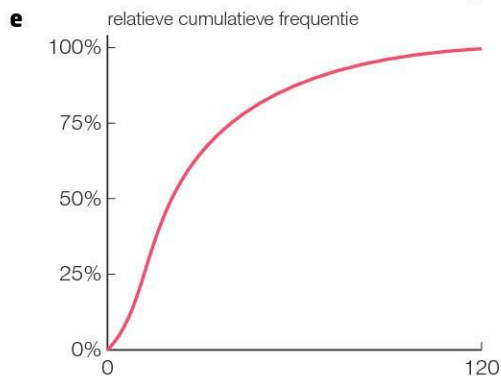
- b** Zie de schets. Dus $34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%$.
Dat zijn $0,815 \cdot 79 \approx 64$ kinderen.



- c 9 jaar en 3 maanden = 9,25 jaar
Zie de schets. Dus $2,5\% + 13,5\% = 16\%$.
Dat zijn $0,16 \cdot 82 \approx 13$ kinderen.



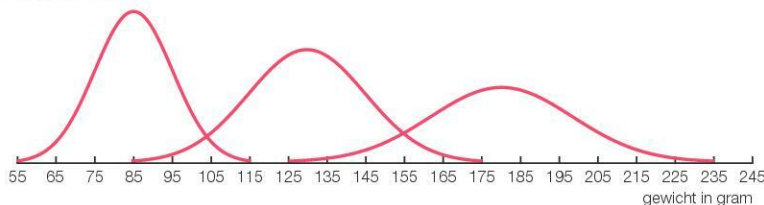
- d Omdat het een rechts-scheve verdeling is, ligt het gemiddelde rechts van de mediaan.



Bladzijde 171

22

a



- b Het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij de klasse midden is

$$\left[132 - 2 \cdot \frac{18}{\sqrt{16}}, 132 + 2 \cdot \frac{18}{\sqrt{16}} \right] = [123, 141].$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij de klasse groot is

$$\left[175 - 2 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}}, 175 + 2 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}} \right] = [167, 183].$$

Dus ze overlappen elkaar niet.

- c Nee, in de verdelingskrommen van vraag a zie je dat een appel van 160 gram even goed in de klasse midden als in de klasse groot terecht kan komen. Dat de betrouwbaarheidsintervallen bij vraag b niet overlappen wijst er wel op dat de gemiddelden van de groepen midden en groot van elkaar verschillen.

23

- a De variabelen leeftijdsgroep en kijktijd.
De variabele leeftijdsgroep is kwalitatief.
De variabele kijktijd is kwantitatief.

- b Bij de 6- tot 12-jarigen geldt $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{410}} = 72 - 64$

$$4 \cdot \frac{S}{\sqrt{410}} = 8$$

$$\frac{S}{\sqrt{410}} = 2$$

$$S = 2 \cdot \sqrt{410} = 40,496... \approx 40,5$$

Bij de 13- tot 19-jarigen geldt $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{560}} = 61 - 55$

$$4 \cdot \frac{S}{\sqrt{560}} = 6$$

$$\frac{S}{\sqrt{560}} = 1,5$$

$$S = 1,5 \cdot \sqrt{560} = 35,496... \approx 35,5$$

- c 2 uur en 10 minuten = 130 minuten

De gemiddelde kijktijd bij de 13- tot 19-jarigen is $\frac{55+61}{2} = 58$ minuten en de standaardafwijking in de steekproef is 35,5 minuten (of 35 minuten), dus 130 minuten ligt $\frac{130-58}{35,5} \approx 2,0$ standaardafwijkingen boven het gemiddelde.

Omdat $\frac{14}{560} \times 100\% = 2,5\%$ verwacht je dit inderdaad volgens de vuistregels bij de normale verdeling.

- d Gebruik de effectgrootte met $\bar{X}_1 = \frac{64+72}{2} = 68$.

$$E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)} = \frac{68 - 58}{\frac{1}{2}(40,5 + 35,5)} = \frac{10}{38} \approx 0,26$$

Omdat $E \leq 0,4$ is het verschil gering.

Bladzijde 172

24 a $\hat{p} = 0,0472$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,0472 \cdot 0,9528}{233}} = 0,0138...$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,0472 - 2 \cdot 0,0138... \approx 0,0194$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,0472 + 2 \cdot 0,0138... \approx 0,0750$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,0194; 0,0750]$.

- b $p = \frac{512}{7051} \approx 0,0726$ en dit valt binnen het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Dus op grond hiervan kun je niet concluderen dat de stimuleringsmaatregelen van de gemeente hebben geholpen.

c $\hat{p} = 0,0592$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,0592 \cdot 0,9408}{5000}} = 0,0033...$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,0592 - 2 \cdot 0,0033... \approx 0,0525$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,0592 + 2 \cdot 0,0033... \approx 0,0659$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,0525; 0,0659]$.

Nu is de populatieproportie $p = \frac{512}{7051} \approx 0,0726 > 0,0659$ en hieruit valt met 95%

zekerheid te concluderen dat de stimuleringsmaatregelen hebben geholpen.

- d breedte is $2 \cdot 4,5\% = 9\% = 0,09$ en $\hat{p} = 0,185$

$$\text{Los op } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,185 \cdot 0,815}{n}} = 0,09.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 4 \sqrt{\frac{0,185 \cdot 0,815}{x}} \text{ en } y_2 = 0,09.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 298$, dus de steekproefomvang is 298.

Bladzijde 173

- 25 a Bij Amsterdam links-scheef en bij Zutphen symmetrisch.

- b In Amsterdam zijn grotere afstanden mogelijk en is het drukker dan in Zutphen. Daardoor zijn er in Amsterdam meer langere ritten dan kortere en in Zutphen veel ritten met ongeveer een gemiddelde ritduur.

- c Ik ben het niet met Margot eens, want in de tabel staan relatieve gegevens en geen absolute.

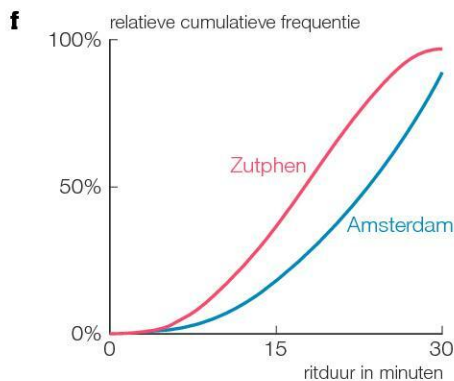
- d Stel de chauffeur had in totaal 100 ritten.

In de 29 ritten die tussen 15 en 20 minuten duurden heeft hij dan maximaal $29 \cdot 29 \cdot \frac{1}{3} \approx 280$ km gereden.

In de 22 ritten die tussen 20 en 25 minuten duurden heeft hij dan minimaal $22 \cdot 39 \cdot \frac{1}{3} = 286$ km gereden.

Omdat $280 < 286$ kan de chauffeur geen gelijk hebben.

- e Boxplot I hoort bij de chauffeur uit Amsterdam, want boxplot I hoort bij een links-scheve verdeling.



Bladzijde 174

- 26 a** 4 minuten en 13 seconden is $4 \cdot 60 + 13 = 253$ seconden.

1 minuut en 23 seconden is $60 + 23 = 83$ seconden.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de tijd in seconden is

$$\left[253 - 2 \cdot \frac{83}{\sqrt{31}}, 253 + 2 \cdot \frac{83}{\sqrt{31}} \right] \approx [223; 283].$$

- b** 3 minuten en 45 seconden is $3 \cdot 60 + 45 = 225$ seconden.

Dit valt binnen het 95%-betrouwbaarheidsinterval dus er is op basis van dit onderzoek geen reden om aan te nemen dat er een verschil is met de wedstrijden van Kuiper.

- c** Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $\left[253 - 2 \cdot \frac{83}{\sqrt{41}}, 253 + 2 \cdot \frac{83}{\sqrt{41}} \right] \approx [227; 279]$.

Nu valt de gemiddelde blessuretijd van 3 minuten en 45 seconden, oftewel 225 seconden, niet in het betrouwbaarheidsinterval en hieruit valt te concluderen dat er wel een verschil is met de wedstrijden van Kuiper.

- 27 a** $\hat{p} = \frac{371}{2650} = 0,14$ geeft $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{2650}} = 0,00674\dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,14 - 2 \cdot 0,00674\dots \approx 0,127$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,14 + 2 \cdot 0,00674\dots \approx 0,153$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,127; 0,153]$.

- b** Bij de oranje M&M's geldt $\hat{p} = \frac{530}{2650} = 0,2$. Dus breedte $= 4 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{2650}} \approx 0,0311$.

Bij de rode M&M's geldt $\hat{p} = 0,14$. Dus breedte $= 4 \cdot \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{2650}} \approx 0,0270$.

$$\frac{0,0311}{0,0270} \times 100\% \approx 115\%. \text{ Dus Kees heeft gelijk.}$$

Bladzijde 175

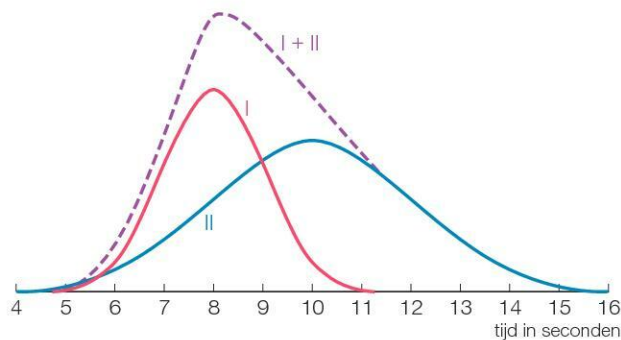
- 28 a** Het gemiddelde bij kromme I is minder dan bij kromme II, dus de spelers die bij kromme I horen stapelen sneller. De standaardafwijking bij kromme I is kleiner dan bij kromme II, dus de spelers die bij kromme I horen zijn meer aan elkaar gewaagd.
- b** Tussen $t = 4$ en $t = 16$ is 12 seconden en dat is (volgens de vuistregels bij de normale verdeling) 6 standaardafwijkingen.

Dus de gevraagde standaardafwijking is $\frac{12}{6} = 2$ seconden.

- c** Bij groep I is $\mu = 8$ en $\sigma = 1$, dus links van 6 zit 2,5%.

- d** Bij groep II is $\mu = 10$ en $\sigma = 2$, dus rechts van 8 zit $34\% + 34\% + 13,5\% + 2,5\% = 84\%$.

e



Rechts-scheef. Zie de figuur waarin de grafiek van $I + II$ is geschetst.

- f Ik ben het niet met Bart eens. Hij lijkt te vergeten dat bij de verdeling van het gemiddelde de standaardafwijking $\frac{S}{\sqrt{n}}$ hoort. Dus als n groot is kan de standaardafwijking bij het 95%-betrouwbaarheidsinterval veel kleiner zijn dan de standaardafwijking S in figuur G.15.
- g breedte $= 2 \cdot 0,2 = 0,4$ en $S = 0,9$.

Los op $4 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{n}} = 0,4$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{x}}$ en $y_2 = 0,4$.

De optie snijpunt geeft $x = 81$, dus de steekproefomvang is 81.

Verantwoording

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer
13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie.
Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom
hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89596-9



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.