

& GETAL & RUIMTE

A



Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen **havo A** deel 3

Twaalfde editie, 2021

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
E. Terlaak

Inhoud

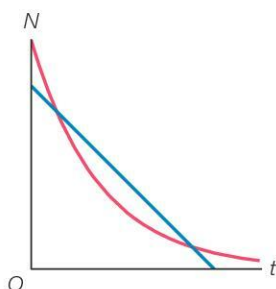
9	Exponentiële verbanden	4
10	Statistiek gebruiken	27
11	Formules en variabelen	43
12	Examentraining	75
	Gemengde opgaven	100

9 Exponentiële verbanden

Voorkennis Formules op de GR

Bladzijde 10

- 1 a** Bij $t = 10,7$ geldt nog niet dat $N_1 > N_2$. Afgerond op één decimaal is dat pas vanaf $t = 10,8$.
- b** Voer in $y_1 = 20 \cdot 1,2^x$ en $y_2 = 100$.
De optie snijpunt geeft $x = 8,827...$
Dus vanaf $t = 8,9$ is $N_1 > 100$.
- 2 a** Voer in $y_1 = 15 \cdot 0,8^x$ en $y_2 = 12 - x$.



- b** De optie snijpunt geeft $x \approx 1,67$ en $x \approx 10,59$.
Dus $N_1 = N_2$ voor $t = 1,67$ en voor $t = 10,59$.
- c** Voer in $y_3 = 0,5$.
De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x = 15,24...$
Dus vanaf $t = 16$ is $N_1 > 0,5$.
- d** $N_2 - N_1 = 12 - t - 15 \cdot 0,8^t$
Voer in $y_4 = 12 - x - 15 \cdot 0,8^x$.
De optie maximum bij y_4 geeft $x \approx 5,4$ en $y \approx 2,1$.
Dus $N_2 - N_1$ is maximaal voor $t = 5,4$. Het maximum is $2,1$.
- 3 a** Voer in $y_1 = 5 \cdot 1,4^x - x^2$.
De optie maximum geeft $x \approx 1,3$ en $y \approx 6,1$.
Dus $A(1,3; 6,1)$.
De optie minimum geeft $x \approx 5,7$ en $y \approx 1,5$.
Dus $B(5,7; 1,5)$.
- b** Voer in $y_2 = 4$.
De optie snijpunt geeft $x = 3,489...$ en $x = 7,075...$
Dus voor $3,5 < t < 7,0$ is $N < 4$.

9.1 Lineaire en exponentiële groei

Bladzijde 11

- 1 a** 7 jaar later, dus $3410 + 7 \cdot 235 = 5055$ bedrijven.
- b** 3 jaar later, dus $59\,120 \cdot 1,065^3 \approx 71\,414$ hectare bio-areaal.

Bladzijde 12

- 2 a** $t = 0$ is juni 2016
 $t = 36$ is juni 2019
 $t = 35$ is mei 2019
 $t = 34$ is april 2019
 $t = 33$ is maart 2019
 $t = 32$ is februari 2019
- b** Los op $215 \cdot 1,02^t = 500$.
Voer in $y_1 = 215 \cdot 1,02^x$ en $y_2 = 500$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 42,6$.
Dus bij $t = 43$ was het aantal ritten voor het eerst meer dan 500 000. Dat was in januari 2020.

Bladzijde 13

3 a $H = at + b$ met $a = \frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{600 - 552}{10 - 4} = \frac{48}{6} = 8$

$$\left. \begin{array}{l} H = 8t + b \\ t = 4 \text{ en } H = 552 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 \cdot 4 + b = 552 \\ 32 + b = 552 \\ b = 520 \end{array}$$

Dus $H = 8t + 520$.

b $N = b \cdot g^t$ met $b = 580$ en $g = 1,075$ geeft $N = 580 \cdot 1,075^t$.

c $M = b \cdot g^t$ met $b = 8,4$ en $g = 0,995$ geeft $M = 8,4 \cdot 0,995^t$.

4 Bij $t = 2$ is $M = 600$ en bij $t = 10$ is $M = 200$.

$M = at + b$ met $a = \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{200 - 600}{10 - 2} = \frac{-400}{8} = -50$

$$\left. \begin{array}{l} M = -50t + b \\ t = 2 \text{ en } M = 600 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -50 \cdot 2 + b = 600 \\ -100 + b = 600 \\ b = 700 \end{array}$$

Dus $M = -50t + 700$.

5 $N = b \cdot g^t$ met $b = 400$ en $g = \frac{434}{400} = 1,085$ geeft $N = 400 \cdot 1,085^t$.

6 a $BZV = b \cdot g^t$ met $b = 300$ en $g = 0,845$ geeft $BZV = 300 \cdot 0,845^t$.

b $t = 7$ geeft $BZV = 300 \cdot 0,845^7 \approx 92$ mg/liter

De afname in de eerste week is ongeveer $300 - 92 = 208$ mg/liter.

c $t = 5$ geeft $BZV = 300 \cdot 0,845^5 \approx 129$ mg/liter

$t = 8$ geeft $BZV = 300 \cdot 0,845^8 \approx 78$ mg/liter

De afname is ongeveer $129 - 78 = 51$ mg/liter.

Dus de afname van 60 mg/liter komt niet overeen met de afname die je verwacht op basis van de formule.

7 a $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{24,18 - 24,82}{7 - 3} = -0,16$

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{23,7 - 24,18}{10 - 7} = -0,16$$

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{22,9 - 23,7}{15 - 10} = -0,16$$

De hoeveelheid neemt per uur met hetzelfde getal af, dus de tabel hoort bij een lineair verband.

b $N = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = -0,16$

$$\left. \begin{array}{l} N = -0,16t + b \\ t = 3 \text{ en } N = 24,82 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,16 \cdot 3 + b = 24,82 \\ -0,48 + b = 24,82 \\ b = 25,3 \end{array}$$

Dus $N = -0,16t + 25,3$.

Bladzijde 14

8 a Dat was $\frac{15,65}{190} \times 100\% \approx 8,2\%$.

b $K_W = b \cdot g^t$ met $b = 190$ en $g = 1,018$ geeft $K_W = 190 \cdot 1,018^t$.

c $20000 = 0,02$ miljoen

$K_E = at + b$ met $a = -0,02$ en $b = 15,65$ geeft $K_E = -0,02t + 15,65$.

d Bij 2025 hoort $t = 10$.

$t = 10$ geeft $K_W = 190 \cdot 1,018^{10} \approx 227,1...$ en $K_E = -0,02 \cdot 10 + 15,65 = 15,45$.

Dat is $\frac{15,45}{227,10...} \times 100\% \approx 6,8\%$.

- 9 a** Bij 1 april hoort $t = 1$ en bij 1 juli hoort $t = 4$.
Bij $t = 1$ hoort $L_A = 6,4$ en bij $t = 4$ hoort $L_A = 9,1$.

$$L_A = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta L_A}{\Delta t} = \frac{9,1 - 6,4}{4 - 1} = \frac{2,7}{3} = 0,9$$

$$\left. \begin{array}{l} L_A = 0,9t + b \\ t = 1 \text{ en } L_A = 6,4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,9 \cdot 1 + b = 6,4 \\ 0,9 + b = 6,4 \\ b = 5,5 \end{array}$$

$$\text{Dus } L_A = 0,9t + 5,5.$$

Bij $t = 1$ hoort $L_B = 6,3$ en bij $t = 4$ hoort $L_B = 9,6$.

$$L_B = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta L_B}{\Delta t} = \frac{9,6 - 6,3}{4 - 1} = \frac{3,3}{3} = 1,1$$

$$\left. \begin{array}{l} L_B = 1,1t + b \\ t = 1 \text{ en } L_B = 6,3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,1 \cdot 1 + b = 6,3 \\ 1,1 + b = 6,3 \\ b = 5,2 \end{array}$$

$$\text{Dus } L_B = 1,1t + 5,2.$$

- b** Los op $0,9t + 5,5 = 11,5$

$$0,9t = 6$$

$$t \approx 6,7$$

Op 1 september is $t = 6$, dus in de maand september is de haarlengte van Ans voor het eerst meer dan 11,5 cm.

- c** Er geldt $L_B = L_A + 2$.

$$\text{Los op } 1,1t + 5,2 = 0,9t + 5,5 + 2$$

$$0,2t = 2,3$$

$$t = 11,5$$

Op 1 februari 2021 is $t = 11$, dus in de maand februari van 2021 is de haarlengte van Bo 2 cm meer dan de haarlengte van Ans.

- d** Er geldt $L_A > 25$ en $L_B > 25$.

$$\text{Los op } 0,9t + 5,5 = 25 \quad \text{en} \quad 1,1t + 5,2 = 25$$

$$0,9t = 19,5$$

$$1,1t = 19,8$$

$$t \approx 21,66...$$

$$t = 18$$

Dus vanaf $t \approx 21,66...$

Op 1 december 2021 is $t = 21$. Dan is $t = 21,66...$ nog $0,66... \cdot 31 \approx 20,7$ dagen vanaf 1 december 2021.

Dus vanaf 21 december 2021 kunnen Ans en Bo voor het eerst weer haar doneren.

- 10** Het percentage biomassa is $P_b = 0,21t + 3,89$ en het percentage zonne-energie is $P_z = 0,25 \cdot 1,35^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2015.

Bij 2023 hoort $t = 8$.

$$t = 8 \text{ geeft } P_b = 0,21 \cdot 8 + 3,89 = 5,57 \text{ en } P_z = 0,25 \cdot 1,35^8 \approx 2,76.$$

Dus in 2023 is $5,57 + 2,76 \approx 8,33\%$ van het totale energieverbruik afkomstig van biomassa en zonne-energie.

Bladzijde 15

- 11** Noem het percentage windenergie en overig P_{wo} .

$$\text{In 2015 is } P_{wo} = 5,74 - 3,89 - 0,25 = 1,60.$$

$$\text{Dus } P_{wo} = 1,60 \cdot 1,13^t \text{ met } t \text{ in jaren en } t = 0 \text{ in 2015.}$$

Bij 2030 hoort $t = 15$.

$$t = 15 \text{ geeft } P_b = 0,21 \cdot 15 + 3,89 = 7,04 \text{ en } P_z = 0,25 \cdot 1,35^{15} \approx 22,54 \text{ en}$$

$$P_{wo} = 1,6 \cdot 1,13^{15} \approx 10,01.$$

In totaal is in 2030 het aandeel uit hernieuwbare bronnen ongeveer

$$7,04 + 22,54 + 10,01 = 39,59\%.$$

Dus het doel wordt gehaald.

- 12 a** M neemt elk jaar met 85 toe, dus lineair.

$$\text{De formule is } M = 85t + 420.$$

- b** N neemt niet elk jaar met dezelfde hoeveelheid toe, dus niet lineair.

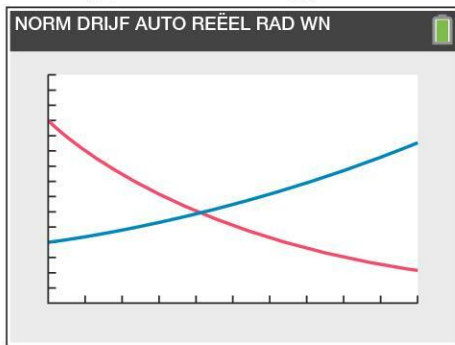
- c $\frac{483}{420} = 1,15$; $\frac{555}{483} \approx 1,15$; $\frac{639}{555} \approx 1,15$; $\frac{735}{639} \approx 1,15$ en $\frac{845}{735} \approx 1,15$
De factor is 1,15.
- d De formule is $N = 420 \cdot 1,15^t$.

Bladzijde 16

- 13 a $\frac{16,07}{13,84} \approx 1,16$; $\frac{18,72}{16,07} \approx 1,16$; $\frac{21,65}{18,72} \approx 1,16$ en $\frac{25,02}{21,65} \approx 1,16$
De quotiënten zijn bij benadering gelijk, dus je mag uitgaan van exponentiële groei.
- b De formule is $O = 13,84 \cdot 1,16^t$.
- c Bij 2023 hoort $t = 9$.
 $t = 9$ geeft $O = 13,84 \cdot 1,16^9 = 52,6...$ miljard euro.
Dus $\frac{52,6... \text{ miljard}}{17,6 \text{ miljoen}} \approx 2990$ euro omzet per Nederlander.
- 14 a $\frac{903}{1020} \approx 0,89$; $\frac{800}{903} \approx 0,89$; $\frac{708}{800} \approx 0,89$ en $\frac{627}{708} \approx 0,89$
De quotiënten zijn bij benadering gelijk, dus je mag uitgaan van exponentiële groei.
De formule is $P = 1020 \cdot 0,89^t$.
- b $h = 7,5$ geeft $P = 1020 \cdot 0,89^{7,5} \approx 426$ hPa.

Bladzijde 17

- 15 a Voer in $y_1 = 40 \cdot 1,05^x$ en $y_2 = 120 \cdot 0,92^x$.



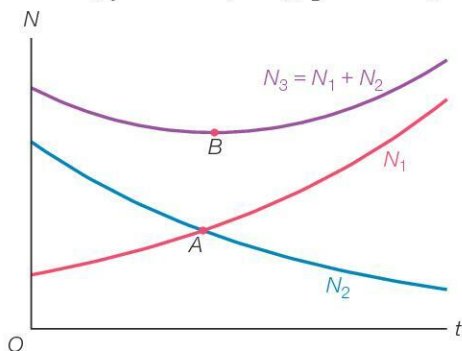
- b Bij de grafiek hoort een toenemende stijging.
- c Bij de grafiek hoort een afnemende daling.
- d De optie snijpunt geeft $x \approx 8,3$ en $y \approx 60,0$.
Het snijpunt is $(8,3; 60,0)$.

Bladzijde 18

- 16 a $N = \frac{500}{10 \cdot 0,75^t} = \frac{500}{10} \cdot 0,75^{-t} = 50 \cdot (0,75^{-1})^t \approx 50 \cdot 1,333^t$
De beginwaarde is 50 en de groeifactor is 1,333.
- b $N = \frac{8050}{17 \cdot 1,24^t} = \frac{8050}{17} \cdot 1,24^{-t} = \frac{8050}{17} \cdot (1,24^{-1})^t \approx 474 \cdot 0,806^t$
De beginwaarde is 474 en de groeifactor is 0,806.
- c $N = \frac{650}{0,03 \cdot 4,15^t} = \frac{650}{0,03} \cdot 4,15^{-t} = \frac{650}{0,03} \cdot (4,15^{-1})^t \approx 21\,667 \cdot 0,241^t$
De beginwaarde is 21 667 en de groeifactor is 0,241.
- d $N = \frac{300 \cdot 1,4^t}{1,3 \cdot 0,8^t} = \frac{300}{1,3} \cdot \left(\frac{1,4}{0,8}\right)^t \approx 231 \cdot 1,75^t$
De beginwaarde is 231 en de groeifactor is 1,75.
- 17 a $g = 1,333$, dus de grafiek van $N = \frac{500}{10 \cdot 0,75^t}$ is toenemend stijgend, want g groter dan 1.
- b $g = 0,806$, dus de grafiek van $N = \frac{8050}{17 \cdot 1,24^t}$ is afnemend dalend, want g tussen 0 en 1.
- c $g = 0,241$, dus de grafiek van $N = \frac{650}{0,03 \cdot 4,15^t}$ is afnemend dalend, want g tussen 0 en 1.

d $g = 1,75$, dus de grafiek van $N = \frac{300 \cdot 1,4^t}{1,3 \cdot 0,8^t}$ is toenemend stijgend, want g groter dan 1.

18 a Voer in $y_1 = 130 \cdot 1,075^x$, $y_2 = 450 \cdot 0,925^x$ en $y_3 = 130 \cdot 1,075^x + 450 \cdot 0,925^x$.



b afnemende daling en toenemende stijging

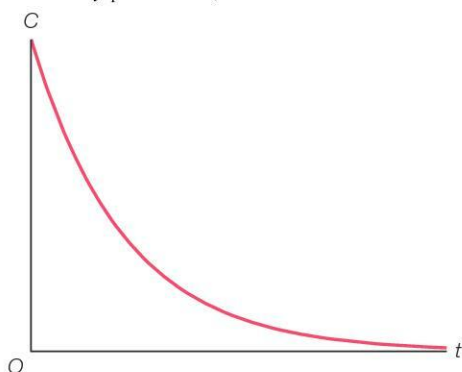
c De optie snijpunt met y_1 en y_2 geeft $x \approx 8,26$, dus $t_A \approx 8,26$.

De optie minimum met y_3 geeft $x \approx 8,76$, dus $t_B \approx 8,76$.

De t -coördinaten van A en B zijn niet gelijk.

19 a De formule is $C = 20 \cdot 0,8^t$.

b Voer in $y_1 = 20 \cdot 0,8^x$.



c Los op $20 \cdot 0,8^t = 3$.

Voer in $y_2 = 3$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 8,5$.

Dus na 8,5 uur is het medicijn uitgewerkt.

d $t = 3$ geeft $C = 20 \cdot 0,8^3 = 10,24$

$t = 4$ geeft $C = 20 \cdot 0,8^4 = 8,192$

De daling tussen $t = 3$ en $t = 4$ is $10,24 - 8,192 = 2,048$.

$t = 5$ geeft $C = 20 \cdot 0,8^5 = 6,5536$

De daling tussen $t = 4$ en $t = 5$ is $8,192 - 6,5536 = 1,6384$.

Het scheelt $2,048 - 1,6384 \approx 0,41$ mg per liter.

e $t = 8$ geeft $C = 20 \cdot 0,8^8 = 3,35...$

De gemiddelde daling per uur tussen $t = 0$ en $t = 8$ is $\frac{20 - 3,35...}{8} \approx 2,08$ mg per liter.

9.2 Groeipercenages

Bladzijde 20

20 De groeifactor is 1,05 per jaar.

Bladzijde 21

21 a x tussen 0 en 40, y tussen 0 en 250.

b Voer in $y_1 = 250 \cdot 0,955^x$ en $y_2 = 125$.

De optie snijpunt geeft $x = 15,05...$

Dus in 2015.

22	groeipercentage	13%	3,3%	120%	0,7%	12%	6%	150%	23,7%
	groefactor	1,13	1,033	2,2	1,007	1,12	1,06	2,5	1,237

23	afname in procenten	13%	41,8%	6,2%	0,3%	2%	0,1%	75,4%
	groefactor	0,87	0,582	0,938	0,997	0,98	0,999	0,246

- 24**
- a De groefactor per jaar is 1,127.
 - b De groefactor per maand is 0,932.
 - c Het groeipercentage per maand is 73,5%.
 - d De hoeveelheid neemt met 15,5% per dag af.

- 25**
- a $N = b \cdot g^t$ met $b = 400$ en $g = 1,12$ geeft $N = 400 \cdot 1,12^t$.
 - b Voer in $y_1 = 400 \cdot 1,12^x$ en $y_2 = 15000$.
De optie snijpunt geeft $x = 31,98...$
Dus in het jaar $1990 + 32 = 2022$.
 - c Het aantal parkieten in 2025 is $N = 400 \cdot 1,12^{35} \approx 21\,120$.
Voor de omzetschade in miljoenen euro's per jaar geldt $S = 2 \cdot 1,10^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2015.
De omzetschade in 2025 is $S = 2 \cdot 1,10^{10} = 5,18...$ miljoen euro.
De gemiddelde schade die één halsbandparkiet aanbrengt in 2025 is $\frac{5,18... \text{ miljoen}}{21\,120} \approx 246$ euro.

Bladzijde 22

- 26**
- a $P = b \cdot g^t$ met $b = 0,27$ en $g = 1,14$ geeft $P = 0,27 \cdot 1,14^t$.
 - b Los op $0,27 \cdot 1,14^t = 0,5$.
Voer in $y_1 = 0,27 \cdot 1,14^x$ en $y_2 = 0,5$.
De optie snijpunt geeft $x = 4,70...$
Dus in het jaar $2015 + 5 = 2020$.
- 27**
- Voor het aantal inwoners van de Verenigde Staten in miljoenen geldt $N_{VS} = 1,8t + 333,5$ met t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2020.
Voor het aantal inwoners van Rusland in miljoenen geldt $N_R = 142,9 \cdot 0,996^t$ met t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2020.
 $N_{VS} = 3 \cdot N_R$, dus los op $1,8t + 333,5 = 3 \cdot 142,9 \cdot 0,996^t$.
Voer in $y_1 = 1,8x + 333,5$ en $y_2 = 3 \cdot 142,9 \cdot 0,996^x$.
De optie snijpunt geeft $x = 27,78...$
Dus in het jaar $2020 + 27 = 2047$.
- 28**
- a $d = 2$ geeft $I = 100 \cdot 0,70^2 = 49$, dus er dringt 49% van de straling door.
 - b $d = 5$ geeft $I = 100 \cdot 0,70^5 \approx 16,8$, dus de straling neemt met $100 - 16,8 = 83,2\%$ af.
 - c Los op $100 \cdot 0,70^d = 1$.
Voer in $y_1 = 100 \cdot 0,70^x$ en $y_2 = 1$.
De optie snijpunt geeft $x = 12,91...$
Dus men moet 13 mm dik lood gebruiken.
- 29**
- a $H_k = -18t + 80$
 $H_d = b \cdot g^t$ met $b = 80$ en $g = 0,85$ geeft $H_d = 80 \cdot 0,85^t$.
 - b Los op $-18t + 80 = 0$
 $-18t = -80$
 $t = 4,44...$
 $t = 4,44...$ geeft $H_d = 80 \cdot 0,85^{4,44...} \approx 39$
Dus nog ongeveer 39 mg vitamine C.

- c** 40% van 80 gram is $0,4 \cdot 80 = 32$ gram.
 Los op $80 \cdot 0,85^t = 32$.
 Voer in $y_1 = 80 \cdot 0,85^x$ en $y_2 = 32$.
 De optie snijpunt geeft $x = 5,63...$
 Dus na 5,63... dagen ≈ 5 dagen en 15 uur (135 uur).
- d** Er geldt $H_d = 3 \cdot H_k$ dus los op $80 \cdot 0,85^t = 3 \cdot (-18t + 80)$.
 Voer in $y_1 = 80 \cdot 0,85^x$ en $y_2 = 3 \cdot (-18x + 80)$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3,62...$
 Dus na 3,62... dagen ≈ 3 dagen en 15 uur (87 uur).

Bladzijde 23

- 30** Voor het aantal kikkers geldt $N_k = 150 \cdot 1,06^t$ met t in jaren.
 Voor het aantal salamanders geldt $N_s = 300 \cdot 0,94^t$ met t in jaren.
 Los op $150 \cdot 1,06^t = 300 \cdot 0,94^t$.
 Voer in $y_1 = 150 \cdot 1,06^x$ en $y_2 = 300 \cdot 0,94^x$.
 De optie snijpunt geeft $x = 5,76...$
 Dus na 5,8 jaar.
- 31** De groeifactor per twee jaar is $1,10 \cdot 0,90 = 0,99$.
 Los op $0,99^t = 0,80$.
 Voer in $y_1 = 0,99^x$ en $y_2 = 0,80$.
 De optie snijpunt geeft $x = 22,20...$
 Dus na $2 \cdot 23 = 46$ jaar.
- 32 a** Voor de hoogte van de bal na het stuiteren geldt $H = 4 \cdot 0,80^a$ met a het aantal keer stuiteren.
 De bal heeft $4 + 2 \cdot 4 \cdot 0,80^1 + 2 \cdot 4 \cdot 0,80^2 + 2 \cdot 4 \cdot 0,80^3 = 19,616$ meter ≈ 1962 cm afgelegd.
- b** Er geldt $H = b \cdot 0,80^a$.
 Los op $b \cdot 0,80^3 = 4$.
 $b \cdot 0,512 = 4$
 $b = 7,8125$
 Dus de bal is op een hoogte van ongeveer 781 cm losgelaten.
- 33 a** *
- b** $N = b \cdot g^t$ met $b = 1$ en $g = 1,01$ geeft $N = 1,01^t$ met N in miljarden en t in minuten.
 Los op $1,01^t = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,01^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 69,66...$
 Dus het beste antwoord is 70 minuten.

Bladzijde 24

- 34 a** Groeifactor per jaar is 1,131, dus $1,131^t = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,131^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 5,63...$
 De verdubbelingstijd is 5 jaar en $0,63... \times 12 \approx 8$ maanden.
- b** Groeifactor per week is 1,284, dus $1,284^t = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,284^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 2,77...$
 De verdubbelingstijd is 2 weken en $0,77... \times 7 \approx 5$ dagen.
- c** Er geldt $g^{25} = 2$ met g de groeifactor per jaar.
 Voer in $y_1 = x^{25}$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 1,028$.
 Dus de groeifactor per jaar is 1,028.
- d** Er geldt $g^7 = 2$ met g de groeifactor per dag.
 Voer in $y_1 = x^7$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 1,104$.
 Dus het groeipercentage is 10,4% per dag.

Bladzijde 25

- 35** **a** Groeifactor per jaar is 1,025, dus $1,025^t = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,025^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 28,07...$
 De verdubbelingstijd is ongeveer 28 jaar.
- b** De bevolking van Gabon groeit langzamer, dus deze verdubbelt minder snel. De verdubbelingstijd van de bevolking van Gabon is dus langer.
- c** Er geldt $g^{11,5} = 2$ met g de groeifactor per jaar.
 Voer in $y_1 = x^{11,5}$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 1,062$.
 Dus het groeipercentage is 6,2% per jaar.
- 36** **a** In periode I is de groeifactor per jaar 1,097,
 daarbij hoort een verdubbelingstijd van $7,4... \approx 7$ jaar.
 In periode II is de groeifactor per jaar
 1,038, daarbij hoort een verdubbelingstijd van $18,5... \approx 19$ jaar.
 In periode III is de groeifactor per jaar 1,050,
 daarbij hoort een verdubbelingstijd van $14,2... \approx 14$ jaar.
 In periode IV is de groeifactor per jaar 1,039,
 daarbij hoort een verdubbelingstijd van $18,1... \approx 18$ jaar.
- b** Bij de periode 2000 t/m 2012 hoort de groeifactor
 $1,097^4 \cdot 1,038^2 \cdot 1,050^2 \cdot 1,039^5 \approx 2,08$.
 Dus de zorgkosten zijn in de periode 2000 t/m 2012 verdubbeld.
- c** Er geldt $g^{26} = 2$ met g de groeifactor per jaar.
 Voer in $y_1 = x^{26}$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 1,0270...$
 Dus het groeipercentage is 2,7% per jaar.
- d** In 2015 waren de uitgaven $\frac{100}{1,0270...^3} \approx 92$ miljard euro.
- 37** Neem bijvoorbeeld groeipercentages van 20% en 40%. Daarbij horen groeifactoren van 1,2 en 1,4.
 Voer in $y_1 = 1,2^x$, $y_2 = 1,4^x$ en $y_3 = 2$.
 De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x = 3,801...$
 De optie snijpunt met y_2 en y_3 geeft $x = 2,060...$
 $\frac{2,060...}{3,801...} \approx 0,54$
 Dus een verdubbeling van het groeipercentage heeft geen halvering van de verdubbelingstijd tot gevolg.

Bladzijde 26

- 38** **a** Elke T jaar verdubbelt het aantal exemplaren, dus na drie keer T jaar zijn er $2^3 = 8$ keer zo veel exemplaren.
 Na vier keer T jaar zijn er $2^4 = 16$ keer zo veel exemplaren.
- b** In totaal zijn er dan $10\,000 + 30\,000 = 40\,000$ exemplaren. Dus het aantal exemplaren is twee keer verdubbeld. Dat duurt $2 \cdot 1,5 = 3$ jaar.
- c** Dan duurt het $2 \cdot 5 = 10$ jaar.
- 39** **a** Los op $500 \cdot 0,955^t = 250$.
 Voer in $y_1 = 500 \cdot 0,955^x$ en $y_2 = 250$.
 De optie snijpunt geeft $x = 15,05...$
 Dus het duurt ongeveer 15 jaar.
- b** Los op $250 \cdot 0,955^t = 125$.
 Voer in $y_1 = 250 \cdot 0,955^x$ en $y_2 = 125$.
 De optie snijpunt geeft $x = 15,05...$
 Dus het duurt ongeveer 15 jaar.
- c** In beide gevallen duurt het even lang voordat de hoeveelheid is gehalveerd.

Bladzijde 27

- 40 a** $g = 0,8$, dus $0,8^t = 0,5$
 Voer in $y_1 = 0,8^x$ en $y_2 = 0,5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3,10\dots$
 De halveringstijd is 3 jaar en $0,10\dots \times 12 \approx 1$ maand.
- b** $g = 0,92$, dus $0,92^t = 0,5$
 Voer in $y_1 = 0,92^x$ en $y_2 = 0,5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 8,31\dots$
 De halveringstijd is 8 jaar en $0,31\dots \times 12 \approx 4$ maanden.
- c** 5 jaar en 3 maanden = 5,25 jaar
 De halveringstijd is 5,25 jaar, dus $g^{5,25} = 0,5$.
 Voer in $y_1 = x^{5,25}$ en $y_2 = 0,5$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 0,876$, dus de groeifactor per jaar is 0,876.
- 41** De halveringstijd is 12 jaar, dus $g^{12} = 0,5$.
 Voer in $y_1 = x^{12}$ en $y_2 = 0,5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 0,943\dots$, dus de groeifactor per jaar is 0,943...
 In 27 jaar is dat $0,943\dots^{27} \approx 0,21$, oftewel een afname van 79%.
 Dat scheelt weinig met 76%, dus de twee resultaten zijn met elkaar in lijn.

9.3 Formules bij exponentiële groei**Bladzijde 29**

- 42 a**
- | tijd in jaren | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------|---|----|-----|------|--------|---------|
| hoeveelheid N | 2 | 18 | 162 | 1458 | 13 122 | 118 098 |
- b** $\frac{162}{2} = 81$, $\frac{1458}{18} = 81$, $\frac{13\,122}{162} = 81$ en $\frac{118\,098}{1458} = 81$
 Dus N wordt per twee jaar met 81 vermenigvuldigd.

Alternatieve uitwerking:

N wordt per jaar vermenigvuldigd met 9, dus per twee jaar met $9^2 = 81$.

- c** Vermenigvuldigen met 4,5 per halfjaar geeft een vermenigvuldiging met $4,5^2 = 20,25$ per jaar.
 N wordt per jaar met 9 vermenigvuldigd, dus per halfjaar is dat minder dan 4,5.

Bladzijde 30

- 43 a** $g_{\text{kwartier}} = 1,12$
 $g_{\text{uur}} = 1,12^4 \approx 1,574$
 De toename per uur is 57,4%.
- b** $g_{5 \text{ minuten}} = 1,12^{\frac{1}{3}} \approx 1,038$
 De procentuele toename per vijf minuten is 3,8%.
- c** vijf uur is 20 kwartier
 $g_{5 \text{ uur}} = 1,12^{20} \approx 9,65$
 De toename per vijf uur is 865%.
- 44 a** $g_{\text{dag}} = 0,84$
 $g_{\text{week}} = 0,84^7 \approx 0,295$
- b** $g_{\text{uur}} = 0,84^{\frac{1}{24}} \approx 0,993$
 De afname per uur is 0,7%.
- c** een kwartier is $\frac{1}{96}$ dag
 $g_{\text{kwartier}} = 0,84^{\frac{1}{96}} \approx 0,9982$
 De afname per kwartier is 0,18%.
- 45 a** $g_{\text{dag}} = 1,3$
 $g_{\text{week}} = 1,3^7 \approx 6,27$
 Het groeipcentage per week is 527%.

- b** vier uur is $\frac{1}{6}$ dag
 $g_{4 \text{ uur}} = 1,3^{\frac{1}{6}} \approx 1,045$
 Het groeipercentage per vier uur is 4,5%.

Bladzijde 31

- 46 a** $g_{\text{uur}} = 0,805$
 $g_{\text{kwartier}} = 0,805^{\frac{1}{4}} \approx 0,947$
 De afname per kwartier is 5,3%.
- b** $g_{\text{jaar}} = 1,0008$
 $g_{\text{eeuw}} = 1,0008^{100} \approx 1,083$
 De toename per eeuw is 8,3%.
- c** $g_{\text{week}} = 2,8$
 $g_{\text{dag}} = 2,8^{\frac{1}{7}} \approx 1,158$
 De toename per dag is 15,8%.
- 47 a** $g^{48} = 2$
 Voer in $y_1 = x^{48}$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 1,015$.
 Het groeipercentage per maand is 1,5%.
- b** $g_{48 \text{ maanden}} = 2$
 $g_{\text{maand}} = 2^{\frac{1}{48}} \approx 1,015$
 Het groeipercentage per maand is 1,5%.
- c** De aanpak van Anne is minder werk, omdat je geen formules hoeft in te voeren op je GR.
- 48 a** 1,5 jaar is 78 weken
 $g_{78 \text{ weken}} = 2$
 $g_{\text{week}} = 2^{\frac{1}{78}} \approx 1,009$
 Het groeipercentage per week is 0,9%.
- b** $g_{\frac{1}{4} \text{ minuut}} = 0,5$
 $g_{\text{minuut}} = 0,5^4 = 0,0625$
 De afname per minuut is 93,8%.
- 49 a** $g_{3 \text{ jaar}} = 2,5$
 $g_{\text{jaar}} = 2,5^{\frac{1}{3}} \approx 1,357$
 Het groeipercentage per jaar is 35,7%.
- b** $g_{5 \text{ jaar}} = 2$
 $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{5}} \approx 1,149$
 Het groeipercentage per jaar is 14,9%.
- c** $g_{12 \text{ jaar}} = 0,78$
 $g_{\text{jaar}} = 0,78^{\frac{1}{12}} \approx 0,980$
 De afname per jaar is 2,0%.
- 50 a** Bij een toename van 5% per dag hoort $g_{\text{dag}} = 1,05$, dus $g_{\text{week}} = 1,05^7 \approx 1,407$. Dat is een toename van 40,7% per week.
- b** Bij een afname van 20% per uur hoort $g_{\text{uur}} = 0,80$, dus $g_{\text{kwartier}} = 0,80^{\frac{1}{4}} \approx 0,946$. Dat is een afname van 5,4% per kwartier.

Bladzijde 32

- 51 a** Per 6 dB is de groeifactor 4.
 Los op $4^x = 64$.
 Voer in $y_1 = 4^x$ en $y_2 = 64$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3$.
 Dus het geluidsniveau neemt met $3 \cdot 6 = 18$ dB toe.

Alternatieve uitwerking:

- De geluidsintensiteit wordt $64 = 4^3$ keer zo groot, dus het geluidsniveau neemt met $3 \cdot 6 = 18$ dB toe.
- b** Het geluidsniveau neemt met $80 - 50 = 30$ dB toe. Dat is $5 \cdot 6$ dB.
 De geluidsintensiteit wordt dus $4^5 = 1024$ keer zo groot.

- 52** **a** 6 jaar is 72 maanden
 $g_{72 \text{ maanden}} = 320$
 $g_{\text{maand}} = 320^{\frac{1}{72}} \approx 1,083$
 Het groeipercentage per maand was 8,3%.
- b** 4 jaar is 48 maanden
 $g_{48 \text{ maanden}} = 0,65$
 $g_{\text{maand}} = 0,65^{\frac{1}{48}} \approx 0,991$
 De afname per maand was 0,9%.
- c** In januari 2007 werden $\frac{4000}{0,65} \approx 6154$ artikelen geplaatst.
 Dus in januari 2001 werden $\frac{6154}{320} \approx 19$ artikelen geplaatst.

53 jaarlijks geproduceerd plastic

$$g_{39 \text{ jaar}} = \frac{250}{44}$$

$$g_{\text{jaar}} = \left(\frac{250}{44}\right)^{\frac{1}{39}} \approx 1,046$$

Het groeipercentage per jaar is 4,6%.

microplastic in bodemlagen

$$g_{22 \text{ jaar}} = \frac{17}{6}$$

$$g_{\text{jaar}} = \left(\frac{17}{6}\right)^{\frac{1}{22}} \approx 1,048$$

Het groeipercentage per jaar is 4,8%.

Dus de hoeveelheden nemen met ongeveer hetzelfde percentage per jaar toe.

Bladzijde 33

- 54** $g_{6 \text{ jaar}} = 12$
 $g_{\text{jaar}} = 12^{\frac{1}{6}} = 1,51\dots$

Het totaal geïnstalleerd vermogen eind 2017 was $\frac{4400}{1,51\dots} = 2907,9\dots$ megawattpiek.

Op daken van particulieren was $0,58 \cdot 2907,9\dots \approx 1687$ megawattpiek geïnstalleerd.

- 55** **a** $g_{4 \text{ uur}} = \frac{300\,000}{50\,000} = 6$, dus $g_{\text{uur}} = 6^{\frac{1}{4}} \approx 1,565$
- b** De formule is van de vorm $N = b \cdot g^t$.
 Invullen van $N = 50\,000$, $g = 1,565$ en $t = 5$ geeft $50\,000 = b \cdot 1,565^5$, oftewel
 $b \cdot 1,565^5 = 50\,000$.

Bladzijde 34

- 56** **a** $N = b \cdot g^t$
 $g_{7 \text{ uur}} = \frac{4100}{1600}$, dus $g_{\text{uur}} = \left(\frac{4100}{1600}\right)^{\frac{1}{7}} = 1,1438\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,1438\dots^t \\ t = 3 \text{ en } N = 1600 \end{array} \right\} b \cdot 1,1438\dots^3 = 1600$$

$$b = \frac{1600}{1,1438\dots^3} \approx 1100$$

Dus $N = 1100 \cdot 1,144^t$.

- b** $B = b \cdot g^t$
 $g_{5 \text{ uur}} = \frac{1\,250\,000}{150\,000}$, dus $g_{\text{uur}} = \left(\frac{1\,250\,000}{150\,000}\right)^{\frac{1}{5}} = 1,5281\dots$
 $B = b \cdot 1,5281\dots^t$
 $t = 3 \text{ en } B = 150\,000$ $\left. \right\} b \cdot 1,5281\dots^3 = 150\,000$
 $b = \frac{150\,000}{1,5281\dots^3} \approx 42\,000$
 Dus $B = 42\,000 \cdot 1,528^t$.

c $H = b \cdot g^t$
 $g_{3 \text{ dagen}} = \frac{0,47}{0,60}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{0,47}{0,60}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,9218...$
 $\left. \begin{array}{l} H = b \cdot 0,9218...^t \\ t = 5 \text{ en } H = 0,60 \end{array} \right\} b \cdot 0,9218...^5 = 0,60$
 $b = \frac{0,60}{0,9218...^5} \approx 0,90$
Dus $H = 0,90 \cdot 0,922^t$.

57 a $N = b \cdot g^t$
 $g_{6 \text{ dagen}} = \frac{2510}{1040}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{2510}{1040}\right)^{\frac{1}{6}} = 1,1581...$
 $\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,1581...^t \\ t = 4 \text{ en } N = 1040 \end{array} \right\} b \cdot 1,1581...^4 = 1040$
 $b = \frac{1040}{1,1581...^4} \approx 580$

Dus $N = 580 \cdot 1,158^t$.

b $N = b \cdot g^t$
 $g_{5 \text{ dagen}} = \frac{200}{800}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{200}{800}\right)^{\frac{1}{5}} = 0,7578...$
 $\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,7578...^t \\ t = 2 \text{ en } N = 800 \end{array} \right\} b \cdot 0,7578...^2 = 800$
 $b = \frac{800}{0,7578...^2} \approx 1400$

Dus $N = 1400 \cdot 0,758^t$.

58 a $\frac{6,05}{4,89} \approx 1,24$; $\frac{7,49}{6,05} \approx 1,24$; $\frac{9,27}{7,49} \approx 1,24$ en $\frac{11,47}{9,27} \approx 1,24$

De quotiënten zijn bij benadering gelijk, dus je mag uitgaan van een exponentieel verband.

b $g_{8 \text{ verdiepingen}} \approx 1,24$ dus $g_{\text{verdieping}} \approx 1,24^{\frac{1}{8}} \approx 1,027$
De formule is $K = 4,89 \cdot 1,027^n$.
 $n = 20$ geeft $K = 4,89 \cdot 1,027^{20} \approx 8,33$
De totale bouwkosten zijn 8,33 miljoen euro.

c Los op $4,89 \cdot 1,027^t = 10,3$.
Voer in $y_1 = 4,89 \cdot 1,027^x$ en $y_2 = 10,3$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 27,96$.
Dus ze kan maximaal 27 verdiepingen met appartementen bouwen.

Bladzijde 35

59 a $N = b \cdot g^t$
 $g_{8 \text{ jaar}} = \frac{1000}{700}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{1000}{700}\right)^{\frac{1}{8}} = 1,0455...$
 $\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,0455...^t \\ t = 13 \text{ en } N = 700 \end{array} \right\} b \cdot 1,0455...^{13} = 700$
 $b = \frac{700}{1,0455...^{13}} \approx 400$

Dus $N = 400 \cdot 1,046^t$.

b Los op $400 \cdot 1,046^t = 1500$.
Voer in $y_1 = 400 \cdot 1,046^x$ en $y_2 = 1500$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 29,39$.
Dus in het jaar $1995 + 29 = 2024$.

- 60 a** $V = b \cdot g^t$ met V het verlies van het zicht in procenten en t de tijd in dagen.

$$g_{39 \text{ dagen}} = \frac{9}{56}, \text{ dus } g_{\text{dag}} = \left(\frac{9}{56}\right)^{\frac{1}{39}} = 0,9542...$$

$$\left. \begin{array}{l} V = b \cdot 0,9542...^t \\ t = 10 \text{ en } V = 56 \end{array} \right\} b \cdot 0,9542...^{10} = 56$$

$$b = \frac{56}{0,9542...^{10}} \approx 89$$

Dus $V = 89 \cdot 0,954^t$.

Het verlies van het zicht was 89% op het moment dat de patiënt last kreeg.

- b** Bij 99% van het zicht terug is er nog 1% verlies van het zicht.

Los op $89 \cdot 0,954^t = 1$.

Voer in $y_1 = 89 \cdot 0,954^x$ en $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 95,32$.

Dus na 95,32 dagen, dat is ongeveer 14 weken.

- 61 a** $P_r = b \cdot g^d$

$$g_{5 \text{ meter}} = \frac{8}{100}, \text{ dus } g_{\text{meter}} = \left(\frac{8}{100}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 0,603.$$

$$b = 100, \text{ dus } P_r = 100 \cdot 0,603^d.$$

$$P_b = b \cdot g^d$$

$$g_{5 \text{ meter}} = \frac{17}{100}, \text{ dus } g_{\text{meter}} = \left(\frac{17}{100}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 0,702.$$

$$b = 100, \text{ dus } P_b = 100 \cdot 0,702^d.$$

- b** Los op $100 \cdot 0,603^d = 1$.

Voer in $y_1 = 100 \cdot 0,603^x$ en $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft $x = 9,10...$

Dus tot 9,1 meter diepte dringt 1% van het rode licht door.

$d = 9,10...$ geeft $P_b = 100 \cdot 0,702^{9,10...} \approx 4$.

Dus tot deze diepte dringt 4% van het blauwe licht door.

- 62** In 2025 zijn er naar verwachting $313 \cdot 1,095^{10} \approx 776$ mannelijke honderdplussers.

Voor de vrouwelijke honderdplussers geldt $g_{15 \text{ jaar}} = \frac{2112}{928}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{2112}{928}\right)^{\frac{1}{15}} = 1,0563...$

In 2025 zijn er naar verwachting $2112 \cdot 1,0563...^{10} \approx 3654$ vrouwelijke honderdplussers.

Dus in 2025 is naar verwachting $\frac{776}{776 + 3654} \times 100\% \approx 17,5\%$ van de honderdplussers man.

9.4 Logaritmisch papier en redeneren met groeiformules

Bladzijde 37

- 63 a** $\frac{100000}{10} = 10000$ keer zo zwaar

$$\frac{100000}{0,002} = 50000000 \text{ keer zo zwaar}$$

- b** Het verschil in gewicht tussen de walvis en de kolibrie is

$100000 - 0,002 = 99999,998 \text{ kg} = 99999998 \text{ gram}$, dus de getallen lijn moet $99999998 \text{ mm} \approx 100 \text{ km}$ lang worden.

- c** De getallenlijn wordt dan ongeveer 10 cm lang.

Het bezwaar is dat de gewichten van de lichte dieren dan heel dicht op elkaar staan en niet meer af te lezen zijn.

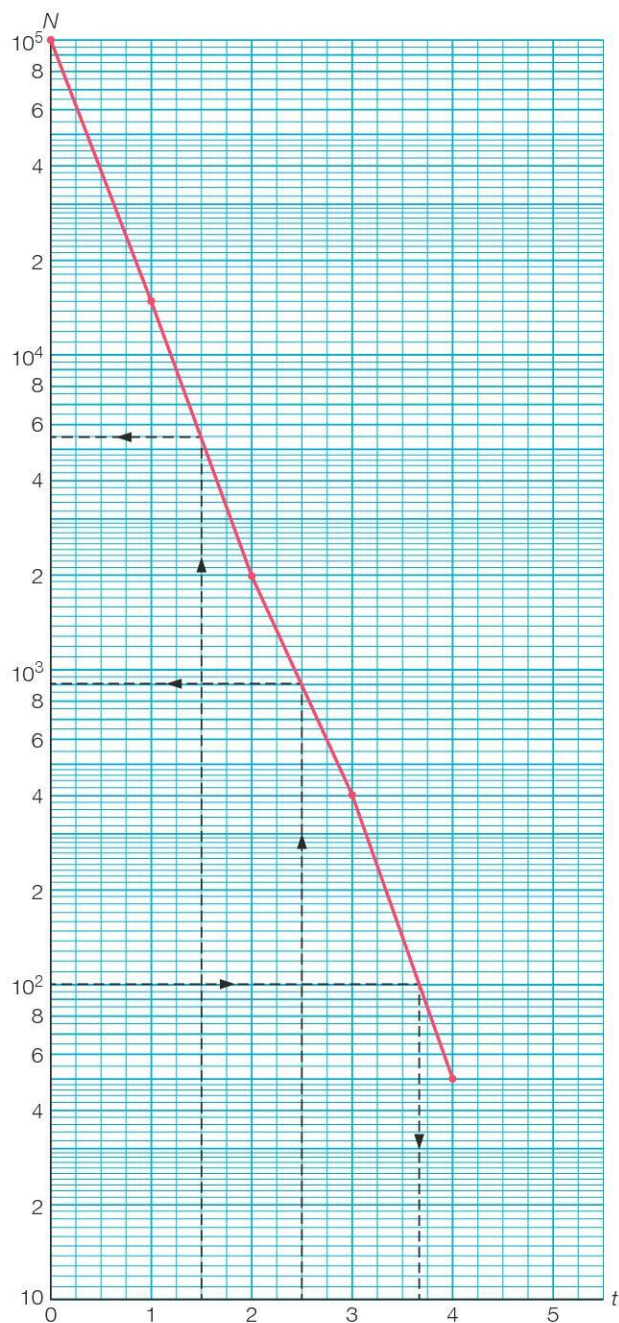
Bladzijde 38

- 64 a** Bij A hoort 1,3, bij B hoort 7,5, bij C hoort 23 en bij D hoort 55.

- b** Bij $y = 9,5$ en $y = 2,4$ is een lijn getekend.

- c** De getallen worden allemaal $10^3 = 1000$ keer zo groot, dus bij B hoort 7500, bij C hoort 23000 en bij D hoort 55000.

65 a



b Zie de figuur.

Aflez bij $t = 1,5$ geeft $N = 5500$.

Aflez bij $t = 2,5$ geeft $N = 900$.

c Aflez bij $N = 100$ geeft $t = 3,7$.

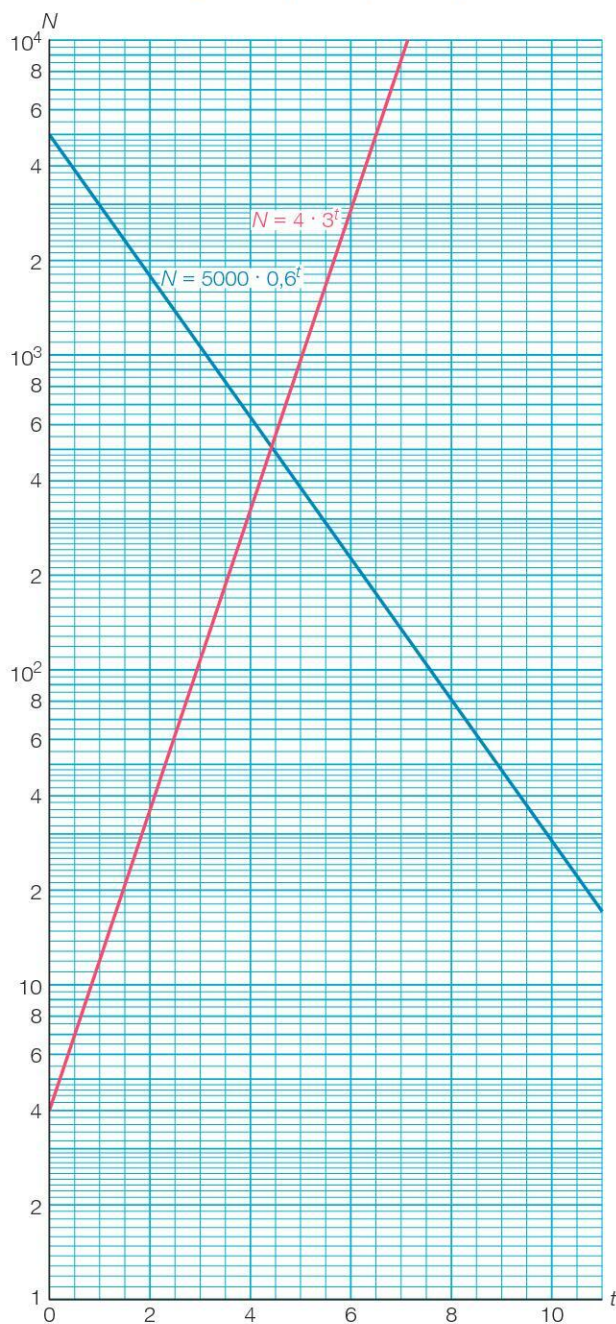
Dus na ongeveer 3,7 minuten.

Bladzijde 39

66 a

t	0	2	4	6
$N = 4 \cdot 3^t$	4	36	324	2916

b, c	t	0	2	4	6
	$N = 5000 \cdot 0,6^t$	5000	1800	648	233



d Het zijn (rechte) lijnen.

Bladzijde 40

67 a Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

Bij $t = 1$ hoort $N = 30$ en bij $t = 7$ hoort $N = 400$.

$$g_{6 \text{ dagen}} = \frac{400}{30}, \text{ dus } g_{\text{dag}} = \left(\frac{400}{30}\right)^{\frac{1}{6}} = 1,5398\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,5398\dots^t \\ t = 1 \text{ en } N = 30 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,5398\dots = 30 \\ b = \frac{30}{1,5398\dots} \approx 19 \end{array}$$

Dus $N = 19 \cdot 1,540^t$.

b Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

Bij $t = 2$ hoort $N = 100$ en bij $t = 8$ hoort $N = 9$.

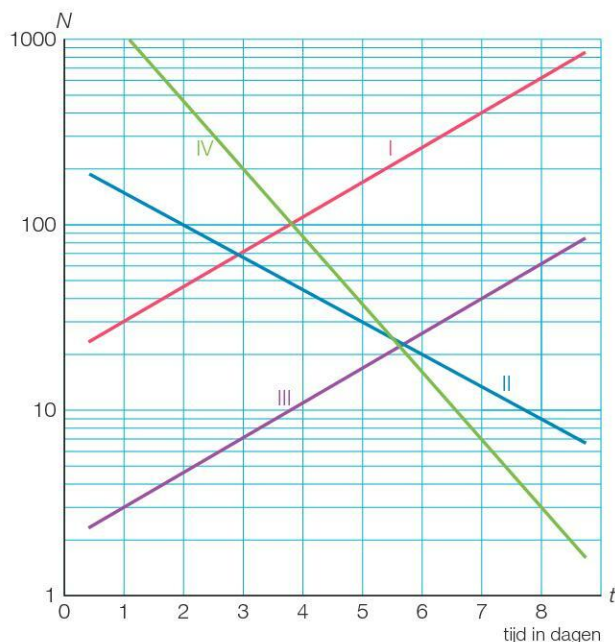
$$g_{6 \text{ dagen}} = \frac{9}{100}, \text{ dus } g_{\text{dag}} = \left(\frac{9}{100}\right)^{\frac{1}{6}} = 0,6694\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,6694\dots^t \\ t = 2 \text{ en } N = 100 \end{array} \right\} b \cdot 0,6694\dots^2 = 100$$

$$b = \frac{100}{0,6694\dots^2} \approx 223$$

Dus $N = 223 \cdot 0,669^t$.

c, d



Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

Bij $t = 1$ hoort $N = 3$ en bij $t = 7$ hoort $N = 40$.

$$g_{6 \text{ dagen}} = \frac{40}{3}, \text{ dus } g_{\text{dag}} = \left(\frac{40}{3}\right)^{\frac{1}{6}} = 1,5398\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,5398\dots^t \\ t = 1 \text{ en } N = 3 \end{array} \right\} b \cdot 1,5398\dots = 3$$

$$b = \frac{3}{1,5398\dots} \approx 2$$

Dus $N = 2 \cdot 1,540^t$.

N. B. Omdat grafiek III evenwijdig is met grafiek I is $g \approx 1,540$.

d $t = 3$ geeft $N \approx 200$ en $t = 8$ geeft $N \approx 3$.

De grafiek is een lijn door $(3, 200)$ en $(8, 3)$.

Zie de figuur.

- 68 a** Bij planten B en C, want de bijbehorende grafieken zijn rechte lijnen op logaritmisch papier.

plant B

$$L_B = b \cdot g^t$$

Bij $t = 5$ hoort $L_B = 80$ en bij $t = 30$ hoort $L_B = 300$.

$$g_{25 \text{ dagen}} = \frac{300}{80}, \text{ dus } g_{\text{dag}} = \left(\frac{300}{80}\right)^{\frac{1}{25}} = 1,0542...$$

$$\left. \begin{array}{l} L_B = b \cdot 1,0542...^t \\ t = 5 \text{ en } L_B = 80 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,0542...^5 = 80 \\ b = \frac{80}{1,0542...^5} \approx 61 \end{array}$$

$$\text{Dus } L_B = 61 \cdot 1,054^t.$$

plant C

$$L_C = b \cdot g^t$$

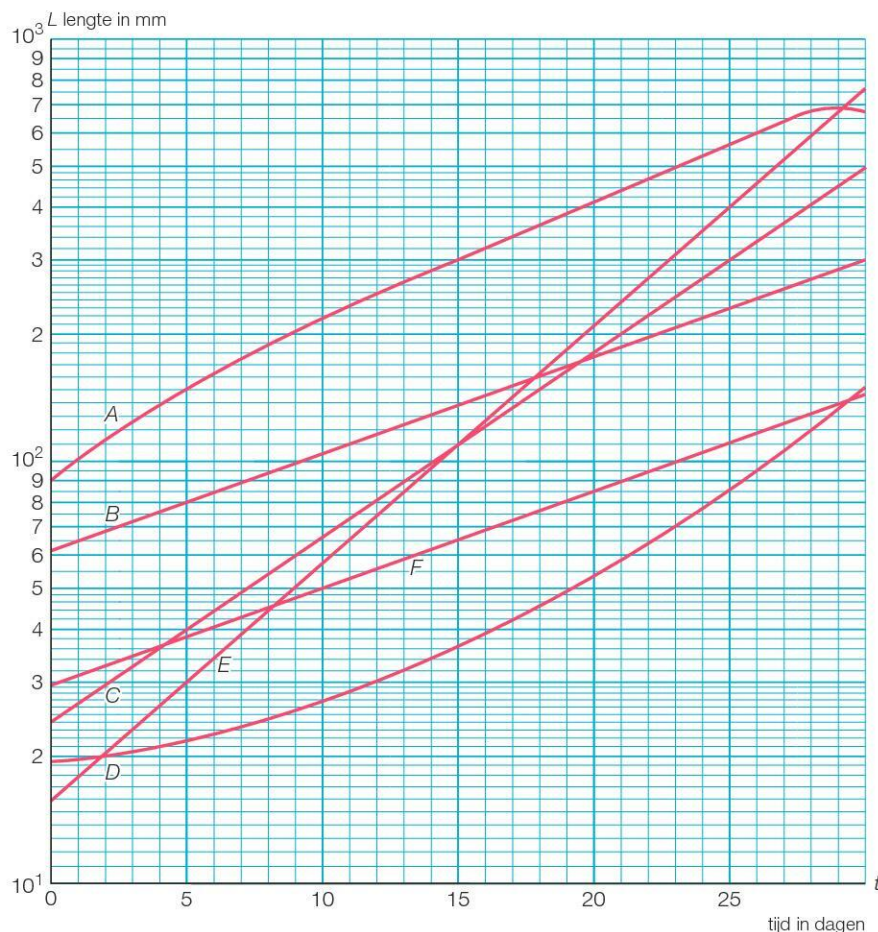
Bij $t = 5$ hoort $L_C = 40$ en bij $t = 25$ hoort $L_C = 300$.

$$g_{20 \text{ dagen}} = \frac{300}{40}, \text{ dus } g_{\text{dag}} = \left(\frac{300}{40}\right)^{\frac{1}{20}} = 1,1059...$$

$$\left. \begin{array}{l} L_C = b \cdot 1,1059...^t \\ t = 5 \text{ en } L_C = 40 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,1059...^5 = 40 \\ b = \frac{40}{1,1059...^5} \approx 24 \end{array}$$

$$\text{Dus } L_C = 24 \cdot 1,106^t.$$

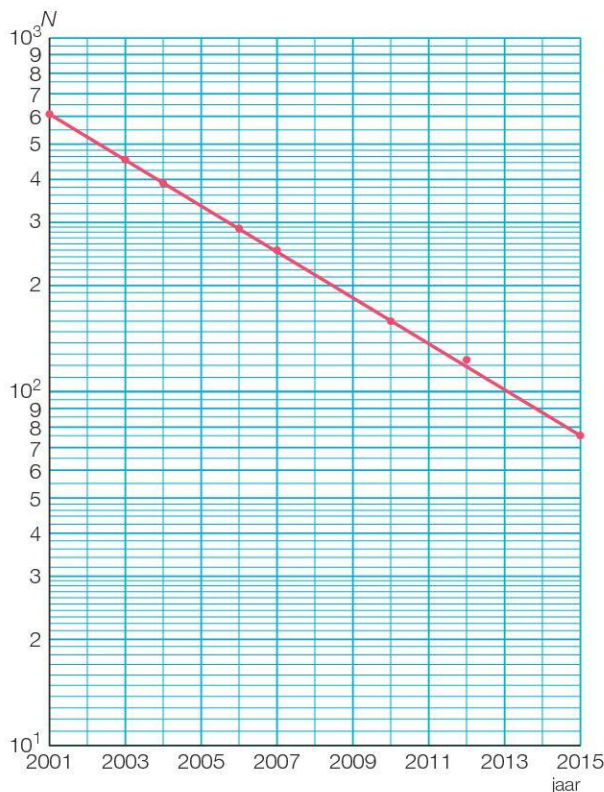
b, c



- c** De grafiek van de lengte van plant F gaat door het punt (10, 50). De groeifactor van plant F is gelijk aan die van plant B, dus de grafiek van de lengte van plant F is evenwijdig met de grafiek van de lengte van plant B. Zie de figuur.

69

a



De grafiek is een rechte lijn op logaritmisch papier, dus er is sprake van exponentiële afname.

b $N = b \cdot g^t$

$$g_{14 \text{ jaar}} = \frac{75}{610}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{75}{610} \right)^{\frac{1}{14}} = 0,8609...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,8609...^t \\ t = 1 \text{ en } N = 610 \end{array} \right\} b \cdot 0,8609... = 610$$

$$b = \frac{610}{0,8609...} \approx 710$$

Dus $N = 710 \cdot 0,861^t$.

Bladzijde 41

70

a De lijn gaat door $(1990, 10^6)$ en $(2010, 10^9)$.

$$g_{20 \text{ jaar}} = \frac{10^9}{10^6}, \text{ dus } g_{2 \text{ jaar}} = \left(\frac{10^9}{10^6} \right)^{\frac{1}{10}} \approx 2$$

De groeifactor per twee jaar is ongeveer 2, dat komt overeen met de wet van Moore.

b $N = 10^6 \cdot 2^t$ met N het aantal microprocessoren per transistor en t de tijd in tweetallen jaren met $t = 0$ in 1990.

In 2025 geldt $t = 17,5$, dan is $N = 10^6 \cdot 2^{17,5} \approx 1,9 \cdot 10^{11}$.

Alternatieve uitwerking:

$N = 10^6 \cdot g^t$ met N het aantal microprocessoren per transistor en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1990.

$$g_{\text{jaar}} = \left(\frac{10^9}{10^6} \right)^{\frac{1}{20}} \approx 1,413$$

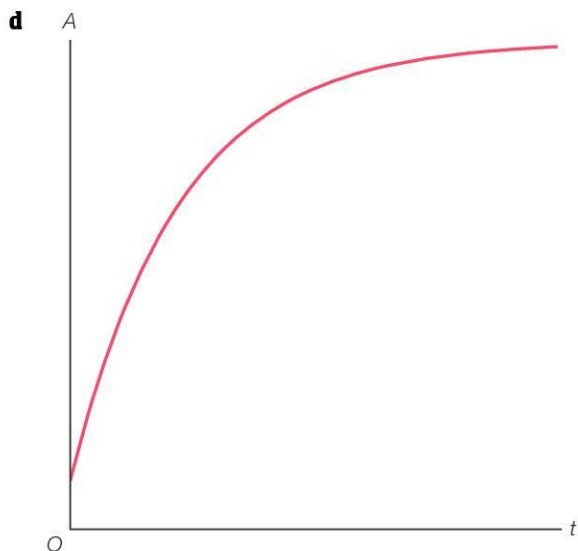
In 2025 geldt $t = 35$, dan is $N = 10^6 \cdot 1,413^{35} \approx 1,8 \cdot 10^{11}$.

71

a Als t heel groot wordt, dan nadert $90 \cdot 0,8^t$ tot 0, dus dan wordt

$$A = 100 - 90 \cdot 0,8^t \approx 100 - 0 = 100.$$

b Als t toeneemt, dan neemt $0,8^t$ af, dus dan neemt $90 \cdot 0,8^t$ af, dus dan neemt $100 - 90 \cdot 0,8^t$ toe.c Als t toeneemt, dan neemt $A = 100 - 90 \cdot 0,8^t$ toe, dus de grafiek van A is stijgend.



De grafiek is inderdaad stijgend.

Bladzijde 44

- 72 a** Als t toeneemt, dan neemt $0,5^t$ af, dus ook $32 \cdot 0,5^t$ neemt af, dus ook $1 + 32 \cdot 0,5^t$ neemt af, dus $\frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t}$ neemt toe.
Dus de zonnebloem wordt voortdurend hoger.
- b** $t = 3$ geeft $h = \frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^3} = 52$
Dus 52 cm hoog.
- c** Als t heel groot wordt, nadert $0,5^t$ tot 0. Dan wordt $32 \cdot 0,5^t \approx 0$ en $1 + 32 \cdot 0,5^t \approx 1$.
Dus dan wordt $\frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t} \approx \frac{260}{1} = 260$, dus de grenswaarde is 260 cm.
- d** Los op $\frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t} = 250$.
Voer in $y_1 = \frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^x}$ en $y_2 = 250$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 9,64$.
Dus vanaf $t = 9,7$.
- 73 a** Als t toeneemt, dan neemt $0,7^t$ af, dus $1 - 0,7^t$ neemt toe, dus ook $1200(1 - 0,7^t)$ neemt toe.
De grafiek van N is dus stijgend.
- b** Als t heel groot wordt, nadert $0,7^t$ tot 0. Dan wordt $1 - 0,7^t \approx 1$. Dus dan wordt $1200(1 - 0,7^t) \approx 1200 \cdot 1 = 1200$, dus het verzadigingsniveau is 1200 leerlingen.
De lijn is $N = 1200$.
De praktische betekenis van het verzadigingsniveau is dat er 1200 leerlingen op de school zitten.
- c** Los op $1200(1 - 0,7^t) = 950$.
Voer in $y_1 = 1200(1 - 0,7^x)$ en $y_2 = 950$.
De optie snijpunt geeft $x = 4,398...$
Dus na 4 uur en $0,398... \times 60 \approx 24$ minuten, dat is om 13:24 uur.
- 74 a** Als t heel groot wordt, nadert $0,85^t$ tot 0. Dan wordt $13 \cdot 0,85^t \approx 0$ en $20 + 13 \cdot 0,85^t \approx 20$.
Dus dan wordt $\frac{500}{20 + 13 \cdot 0,85^t} \approx \frac{500}{20} = 25$, dus het verzadigingsniveau is 25.
- b** Als t toeneemt, dan neemt $0,65^t$ af, dus ook $4 \cdot 0,65^t$ neemt af, dus ook $1 + 4 \cdot 0,65^t$ neemt af, dus $\frac{2000}{1 + 4 \cdot 0,65^t}$ neemt toe.
Dus de grafiek van N is stijgend.
- c** Als t heel groot wordt, dan wordt $1,4^t$ heel groot, dus dan wordt $\frac{0,2}{1,4^t} \approx 0$. Dus dan wordt $5 - \frac{0,2}{1,4^t} \approx 5 - 0 = 5$, dus de grenswaarde is 5.

- d** Als t toeneemt, dan neemt $0,98^t$ af, dus $2 - 0,98^t$ neemt toe, dus ook $320(2 - 0,98^t)$ neemt toe.
Dus de grafiek van N is stijgend.

- 75 a** Als t toeneemt, dan neemt $1,5^t$ toe, dus ook $1 + 1,5^t$ neemt toe, dus ook $8000(1 + 1,5^t)$ neemt toe.
Dus de grafiek van N is stijgend.

- b** Als t heel groot wordt, nadert $0,8^t$ tot 0. Dan wordt $50 \cdot 0,8^t \approx 0$. Dus dan wordt $160 - 50 \cdot 0,8^t \approx 160 - 0 = 160$, dus de grenswaarde is 160.

- c** Als t toeneemt, dan neemt ook $1,8^t$ toe, dus ook $2,1 \cdot 1,8^t$ neemt toe, dus ook $8 + 2,1 \cdot 1,8^t$ neemt toe, dus $\frac{720}{8 + 2,1 \cdot 1,8^t}$ neemt af.

Dus de grafiek van N is dalend.

- d** Als t heel groot wordt, nadert $0,6^t$ tot 0. Dan wordt $333 \cdot 0,6^t \approx 0$ en $50 + 333 \cdot 0,6^t \approx 50$.
Dus dan wordt $\frac{10000}{50 + 333 \cdot 0,6^t} \approx \frac{10000}{50} = 200$, dus het verzadigingsniveau is 200.

Bladzijde 45

- 76 a** De toename is $\frac{961 - 705}{705} \times 100\% \approx 36,3\%$.

- b** $g_{10 \text{ dagen}} = \frac{280}{63}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{280}{63}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 1,1609$
Het groeipercentage per dag is 16,1%.

- c** Op 23 april om 0:00 is $t = 22$, dat is 7 dagen na $t = 15$.
 $N = 63 \cdot 1,16^7 \approx 178$, dus 178 fruitvliegjes.

- d** Voor $t = 45$ is de telling 961 en geeft de formule $N = \frac{1035}{1 + 210 \cdot 0,84^{45}} \approx 956$.
De afwijking is $\frac{961 - 956}{961} \times 100\% \approx 0,5\%$.

- e** Als t heel groot wordt, nadert $0,84^t$ tot 0. Dan wordt $210 \cdot 0,84^t \approx 0$ en $1 + 210 \cdot 0,84^t \approx 1$.
Dus dan wordt $\frac{1035}{1 + 210 \cdot 0,84^t} \approx \frac{1035}{1} = 1035$, dus het verzadigingsniveau is 1035.
Dat is in overeenstemming met de verwachting van de bioloog.

- 77 a** Voor $t = 0,5$ geeft de formule $P = \frac{92}{2,39^{0,5}} + \frac{32}{1,04^{0,5}} + 10 \approx 100,9$. En het is niet mogelijk meer dan 100% van de woorden te herinneren.

- b** De helft is 50 procent, dus los op $\frac{92}{2,39^t} + \frac{32}{1,04^t} + 10 = 50$.

Voer in $y_1 = \frac{92}{2,39^x} + \frac{32}{1,04^x} + 10$ en $y_2 = 50$.

De optie snijpunt geeft $x = 2,445\dots$

Het duurt 4 minuten en $0,445\dots \times 60 \approx 27$ seconden.

- c** Als t heel groot wordt, nadert $\frac{92}{2,39^x}$ tot 0 en ook nadert $\frac{32}{1,04^x}$ tot 0. Dus dan wordt $\frac{92}{2,39^x} + \frac{32}{1,04^x} + 10 \approx 0 + 0 + 10 = 10$, dus de grenswaarde is 10.

Dat betekent dat op den duur nog 10% van de woorden correct wordt herinnerd.

- d** $P = \frac{92}{2,39^t} + \frac{32}{1,04^t} + 10 = 92 \cdot 2,39^{-t} + 32 \cdot 1,04^{-t} + 10$
 $= 92 \cdot (2,39^{-1})^t + 32 \cdot (1,04^{-1})^t + 10 \approx 92 \cdot 0,418^t + 32 \cdot 0,962^t + 10$
Dus $a = 0,418$ en $b = 0,962$.

Diagnostische toets

Bladzijde 48

- 1 a** $M = at + b$ met $a = \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{211 - 156}{10 - 6} = \frac{55}{4} = 13,75$
$$\left. \begin{array}{l} M = 13,75t + b \\ t = 6 \text{ en } M = 156 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 13,75 \cdot 6 + b = 156 \\ 82,5 + b = 156 \\ b = 73,5 \end{array}$$

Dus $M = 13,75t + 73,5$.
- b** $N = b \cdot g^t$ met $b = 190$ en $g = 1,083$ geeft $N = 190 \cdot 1,083^t$.
- 2 a** $\frac{179}{137} \approx 1,31$; $\frac{235}{179} \approx 1,31$; $\frac{308}{235} \approx 1,31$ en $\frac{403}{308} \approx 1,31$
De quotiënten zijn bij benadering gelijk, dus je mag uitgaan van exponentiële groei.
- b** De formule is $N = 137 \cdot 1,31^t$.
- c** Bij 2050 hoort $t = 7$.
 $t = 7$ geeft $N = 137 \cdot 1,31^7 \approx 907$ miljoen inwoners
Dus de prognose komt niet overeen met de formule.
- 3 a** $N_1 = \frac{200}{3 \cdot 0,9^t} = \frac{200}{3} \cdot 0,9^{-t} = \frac{200}{3} \cdot (0,9^{-1})^t \approx 67 \cdot 1,111^t$
De beginwaarde is 67 en de groeifactor is 1,111.
 $N_2 = \frac{3000}{15 \cdot 1,12^t} = \frac{3000}{15} \cdot 1,12^{-t} = 200 \cdot (1,12^{-1})^t \approx 200 \cdot 0,893^t$
De beginwaarde is 200 en de groeifactor is 0,893.
- b** $g = 1,111$, dus de grafiek van $N_1 = \frac{200}{3 \cdot 0,9^t}$ is toenemend stijgend.
 $g = 0,893$ dus de grafiek van $N_2 = \frac{3000}{15 \cdot 1,12^t}$ is afnemend dalend.
- 4 a** $N = b \cdot g^t$ met $b = 2400$ en $g = 1,003$ geeft $N = 2400 \cdot 1,003^t$.
- b** Voer in $y_1 = 2400 \cdot 1,003^x$ en $y_2 = 2700$.
De optie snijpunt geeft $x = 39,31$...
Dus vanaf $t = 40$ is N groter dan 2700.
- 5 a** Groeifactor per jaar is 1,155, dus $1,155^t = 2$.
Voer in $y_1 = 1,155^x$ en $y_2 = 2$.
De optie snijpunt geeft $x = 4,810$...
De verdubbelingstijd is 4 jaar en $0,810 \dots \times 12 \approx 10$ maanden.
- b** Er geldt $g^{21} = 2$ met g de groeifactor per jaar.
Voer in $y_1 = x^{21}$ en $y_2 = 2$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 1,034$.
Dus het groeipcentage per jaar is 3,4%.
- 6 a** Groeifactor per uur is 0,88, dus $0,88^t = 0,5$.
Voer in $y_1 = 0,88^x$ en $y_2 = 0,5$.
De optie snijpunt geeft $x = 5,422$...
De halveringstijd is 5 uur en $0,422 \dots \times 60 \approx 25$ minuten.
- b** Er geldt $g^{7,8} = 2$ met g de groeifactor per dag.
Voer in $y_1 = x^{7,8}$ en $y_2 = 2$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 0,915$.
Dus de groeifactor per dag is 0,915.
- c** Groeifactor per jaar is 0,975, dus $0,975^t = 0,5$.
Voer in $y_1 = 0,975^x$ en $y_2 = 0,5$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 27,4$.
De halveringstijd is 27,4 jaar.

Bladzijde 49

- 7 a** $g_{\text{dag}} = 1,36$
 $g_{\text{week}} = 1,36^7 \approx 8,61$
 Het groeipercentage per week is 761%.
- b** $g_{\text{uur}} = 1,36^{\frac{1}{24}} \approx 1,013$
 Het groeipercentage per uur is 1,3%.

- 8 a** $g_{10 \text{ jaar}} = 0,75$
 $g_{\text{jaar}} = 0,75^{\frac{1}{10}} \approx 0,972$
 De afname per jaar is 2,8%.
- b** $g_{25 \text{ jaar}} = 0,75^{2,5} \approx 0,487$
 De afname per 25 jaar is 51,3%.

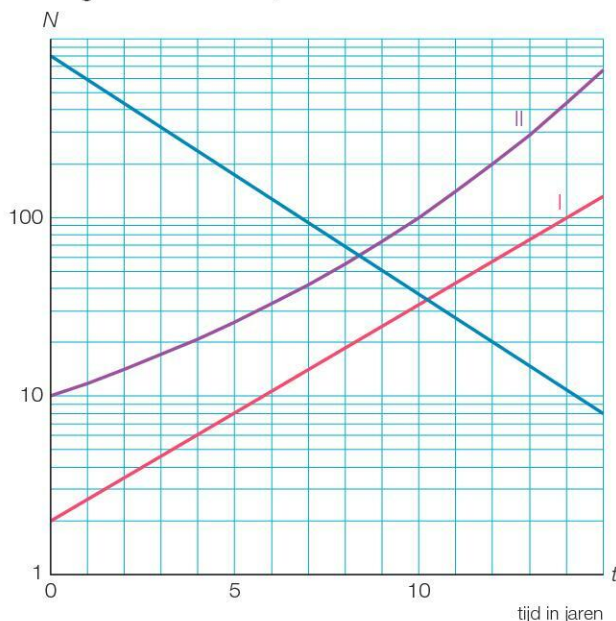
- 9** $N = b \cdot g^t$
 $g_{3 \text{ dagen}} = \frac{1200}{1500}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{1200}{1500}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,9283\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,9283\dots^t \\ t = 4 \text{ en } N = 1500 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,9283\dots^4 = 1500 \\ b = \frac{1500}{0,9283\dots^4} \approx 2000 \end{array}$$

 Dus $N = 2000 \cdot 0,928^t$.

- 10 a** $P = b \cdot g^t$ met $b = 8,1$
 $g_{11 \text{ jaar}} = \frac{14,4}{8,1}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{14,4}{8,1}\right)^{\frac{1}{11}} \approx 1,054$
 Dus $P = 8,1 \cdot 1,054^t$.
- b** Los op $8,1 \cdot 1,054^t = 20$.
 Voer in $y_1 = 8,1 \cdot 1,054^x$ en $y_2 = 20$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 17,2$.
 Dus in het jaar $2008 + 18 = 2026$.

- 11 a** Een exponentieel verband is een rechte lijn op logaritmisch papier.
 Dus grafiek I hoort bij een exponentieel verband.
 Aflezen bij $t = 0$ geeft $N = 2$ en bij $t = 14$ geeft $N = 100$.
 $g_{14 \text{ jaar}} = \frac{100}{2}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{100}{2}\right)^{\frac{1}{14}} \approx 1,322$
 Dus $N = 2 \cdot 1,322^t$.
- b** $t = 0$ geeft $N = 800$
 $t = 12$ geeft $N = 800 \cdot 0,736^{12} \approx 20$



- 12 a** Als t toeneemt, dan neemt $0,78^t$ af, dus ook $12 \cdot 0,78^t$ neemt af, dus ook $200 + 12 \cdot 0,78^t$ neemt af, dus $\frac{5000}{200 + 12 \cdot 0,78^t}$ neemt toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

- b** Als t heel groot wordt, nadert $0,78^t$ tot 0. Dan wordt $12 \cdot 0,78^t \approx 0$ en $200 + 12 \cdot 0,78^t \approx 200$. Dus dan wordt $\frac{5000}{200 + 12 \cdot 0,78^t} \approx \frac{5000}{200} = 25$, dus het verzadigingsniveau is 25.

10 Statistiek gebruiken

Voorkennis Statistische variabelen

Bladzijde 54

- 1** geboortjaar: Wel getallen, wel hoeveelheden, niet alle tussenliggende waarden mogelijk.
Dus discreet.
hoogst genoten opleiding: Geen getallen, wel duidelijke ordening.
Dus ordinaal.
telefoonnummer: Wel getallen, geen hoeveelheden, geen duidelijke ordening.
Dus nominaal.
mogen we u mail sturen?: Geen getallen, geen duidelijke ordening.
Dus nominaal.
- 2** **a** Geen getallen, geen duidelijke ordening. Dus nominaal.
b Wel getallen, wel hoeveelheden, alle tussenliggende waarden mogelijk. Dus continu.
c Wel getallen, wel hoeveelheden, niet alle tussenliggende waarden mogelijk. Dus discreet.
d Geen getallen, wel duidelijke ordening. Dus ordinaal.
e Geen getallen, geen duidelijke ordening. Dus nominaal.
f Wel getallen, wel hoeveelheden, niet alle tussenliggende waarden mogelijk. Dus discreet.
- 3** Gele kaarten: Wel getallen, wel hoeveelheden, niet alle tussenliggende waarden mogelijk.
Dus kwantitatief en discreet.
Zorgen nalatenschap: Geen getallen, wel duidelijke ordening.
Dus kwalitatief en ordinaal.
BMI: Wel getallen, wel hoeveelheden, alle tussenliggende waarden mogelijk.
Dus kwantitatief en continu.
Verdeling bloedgroepen: Geen getallen, geen duidelijke ordening.
Dus kwalitatief en nominaal.

10.1 Statistische diagrammen

Bladzijde 55

- 1** **a** Nee, dat kan niet, omdat het verschil tussen de waarden 'man' en 'vrouw' geen afstand is. Je kunt ze dus niet uitzetten op de horizontale as.
b Ja, dat kan. Je krijgt een cirkeldiagram met twee sectoren, namelijk man en vrouw.

Bladzijde 56

- 2** **a** ordinaal
b staafdiagram en cirkeldiagram
c Vanwege de klassen $\langle \leftarrow; 1,70 \rangle$ en $\langle 1,90; \rightarrow \rangle$. Die hebben geen klassenmidden.

Bladzijde 57

- 3** **a** ordinaal
b Bij de taalvakken: $100 - 6,8 = 93,2\%$.
Bij de exacte vakken: $100 - 10,7 = 89,3\%$.
c Van de centrummaten alleen de modus.
Geen enkele spreidingsmaat.
d Een cirkeldiagram. De data is kwalitatief, dus naast een stapeldiagram (of staafdiagram) is alleen een cirkeldiagram mogelijk.

- 4** **a** De variabele geslacht. Het meetniveau is nominaal.
b Hij koos voor groep 1 de jongens.
 Bij de jongens komen grotere aantallen (boven 20) relatief vaker voor dan bij de meisjes, en lagere aantallen (onder 20) juist relatief minder vaak. Het gemiddelde is dus bij de jongens groter dan bij de meisjes.
 Bij de meisjes is de spreiding van de waarnemingsgetallen groter dan bij de jongens, dus bij de meisjes is de standaardafwijking groter dan bij de jongens.
c Centrummaat: de mediaan. (Niet de modus, want die is er niet bij de jongens.)
 Spreidingsmaten: spreidingsbreedte en interkwartielafstand.
d Nee. Voor een puntenwolk moet per leerling het aantal dagelijks beluisterde liedjes en de leeftijd bekend zijn.

Bladzijde 58

- 5** **a** De variabele dagtemperatuur is kwantitatief.
 Het meetniveau van de variabele maand is ordinaal.
b Je ziet dat de blauwe boxplots doorgaans lager liggen dan de rode boxplots. De rode boxplots horen dus bij periode II.
c $\text{interkwartielafstand} = 7 - 2,5 = 4,5$
 Dus er is sprake van een uitschieter bij een temperatuur van minder dan $2,5 - 1,5 \cdot 4,5 = -4,25^\circ\text{C}$ en meer dan $7 + 1,5 \cdot 4,5 = 13,75^\circ\text{C}$.
d Bijvoorbeeld januari in periode II, want deze boxplot hoort bij een links-scheve verdeling.
e Bij periode I wordt de spreidingsbreedte $22,5 - -9 = 31,5^\circ\text{C}$ en bij periode II wordt de spreidingsbreedte $26 - -4 = 30^\circ\text{C}$. Dus de grootste spreidingsbreedte is $31,5^\circ\text{C}$.

Bladzijde 59

- 6** **a** Uit de cumulatieve frequentiepolygoon lees je af dat er 350 dagen in zijn verwerkt.
b De rode lijndiagrammen horen bij de kamerverhuur van 2019, want bij deze lijndiagrammen komen grotere aantallen verhuurde kamers minder voor.
c In 2015 is de mediaan ongeveer 51 en in 2019 is de mediaan ongeveer 38.
 In 2015 is de modale klasse $[60, 70)$ en in 2019 is de modale klasse $[40, 50)$.
d De mediaan 40 (bij de rode cumulatieve frequentiepolygoon) kan niet kloppen, want de cumulatieve frequentie 175 valt in de klasse $[30, 40)$.
 De mediaan 53 (bij de blauwe cumulatieve frequentiepolygoon) kan wel kloppen, want de cumulatieve frequentie 175 valt in de klasse $[50, 60)$.
e Bert heeft gelijk. Je leest bij de relatieve polygoon bij het klassenmidden 55 af dat de relatieve frequenties niet gelijk zijn. Bij de rode polygoon is de relatieve frequentie minder dan 15 en bij de blauwe polygoon is dat meer dan 15. En omdat het aantal waarnemingsgetallen voor beide gelijk is, namelijk 350, zijn de frequenties niet gelijk.

Bladzijde 60

- 7** **a** spreidingsdiagram
b Estland en Portugal horen bij hetzelfde punt.
c Het gemiddelde is niet geschikt. Omdat de verdeling van de maandsalarissen rechts-scheef is, geeft het gemiddelde maandsalaris een te hoge waarde om nog van een doorsnee maandsalaris te kunnen spreken.

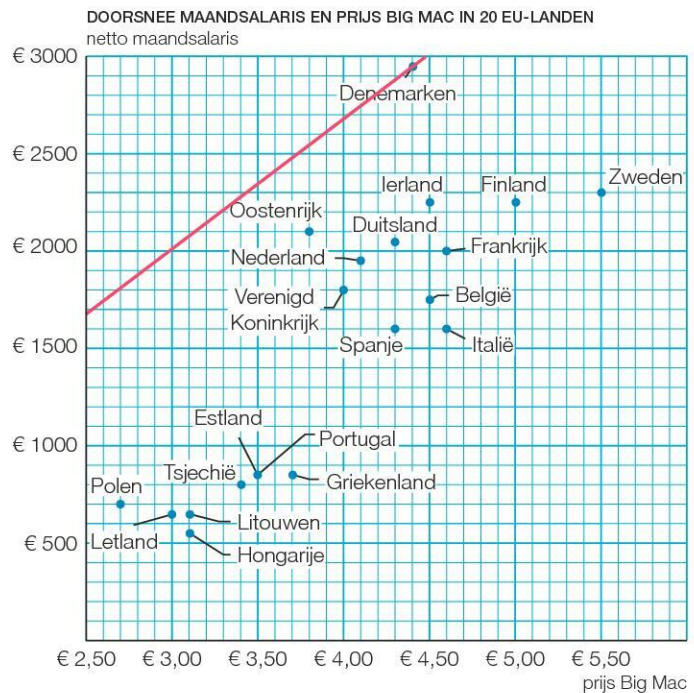
d kwantitatief

e Omdat Denemarken een hoog netto maandsalaris heeft en de prijs van een Big Mac daar niet al te hoog is, komt Denemarken in aanmerking.

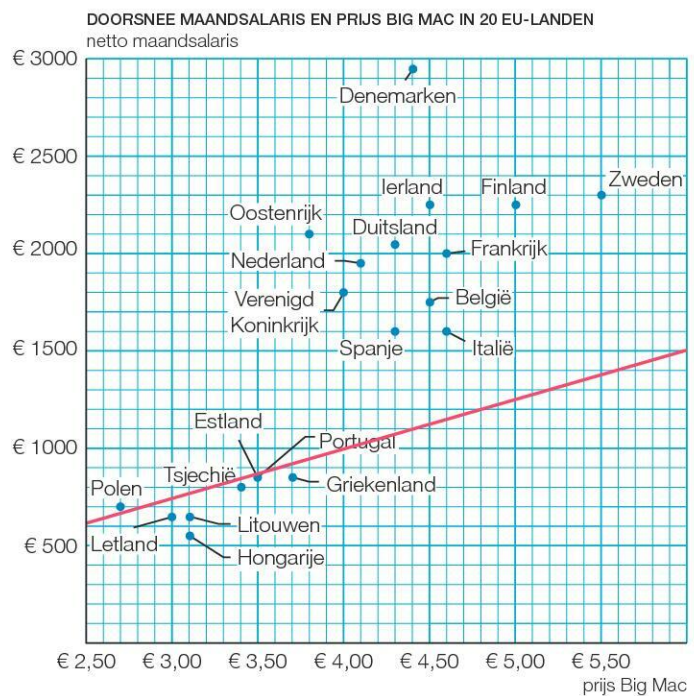
In Denemarken kun je voor een netto maandsalaris ongeveer $\frac{2950}{4,40} \approx 670$ Big

Macs kopen. Bij een prijs van 3 euro zou je dus een netto maandsalaris van $3 \cdot 670 = 2010$ euro moeten hebben om evenveel Big Macs te kunnen kopen.

Teken daarom de lijn door het punt (3, 2010) en het punt van Denemarken. Er liggen geen punten boven deze lijn, dus het antwoord is Denemarken.



f Teken de lijn door de punten (3, 750) en (5, 1250). De punten van de landen onder deze lijn zijn de landen waar je minder dan 250 keer een Big Mac van het netto maandsalaris kunt kopen. Dit zijn de landen Letland, Hongarije, Litouwen, Tsjechië, Estland, Portugal en Griekenland.



Bladzijde 61

- 8 a** dotplot
- b** Bij totaal minstens 10 optie 2. Bij niet minder dan in totaal 4 optie 1.
- c** Bij de D6-worpen hoort een normale verdeling. Bij de D12-worp hoort een uniforme verdeling.
- d** Bij de D6-worpen. Daar zijn veel uitkomsten rond het gemiddelde en relatief weinig lage en hoge uitkomsten.

- 9** Uitgaande van 100 sporters wonnen $0,50 \cdot 70 + 0,60 \cdot 30 = 53$ een medaille. Hierbij waren $0,50 \cdot 70 = 35$ vrouwen.

Dus $\frac{35}{53} \times 100\% \approx 66\%$ van de medaillewinnaars is vrouw.

Bladzijde 62

- 10** **a** ordinaal
b staafdiagram of cirkeldiagram
c Je kunt alleen bij hoeveelheden een gemiddelde berekenen en je kunt je hier afvragen of bijvoorbeeld het getal 9 ('helemaal mee eens') wel een hoeveelheid is.
d Bij een gemiddelde van 2,40 zou de som 4,80 zijn en dat kan niet (de som kan 2, 3, 4, 5 of 6 zijn).
e Dat is 2,25, want bij 10 deelnemers zou de som van de ingevulde getallen dan $10 \cdot 2,25 = 22,5$ zijn en dat kan niet. (De som moet een geheel getal zijn, omdat de antwoordmogelijkheden hele getallen zijn.)
f $18 \cdot 2,63 = 47,34$ dat kan niet
 $18 \cdot 2,39 = 43,02$ dat kan
 $18 \cdot 2,17 = 39,06$ dat kan
 $18 \cdot 2,11 = 37,98$ dat kan
 $17 \cdot 1,76 = 29,92$ dat kan
 $17 \cdot 2,26 = 38,42$ dat kan niet
 $17 \cdot 1,97 = 33,49$ dat kan niet
 $17 \cdot 1,67 = 28,39$ dat kan niet
Dus in de eerste kolom van de groep met korting is 2,63 onmogelijk.
In de eerste kolom van de groep die de volle prijs betaalde zijn 2,26, 1,97 en 1,67 onmogelijk.

10.2 Causaliteit en groepen vergelijken

Bladzijde 64

- 11** **a** Bij grotere lengten horen over het algemeen hogere scores.
b Ik denk het niet. Je krijgt meer kennis doordat je informatie opneemt, niet doordat je langer wordt.

Bladzijde 66

- 12** **a** Voor elke categorie van discipline geldt dat het bijvoorbeeld niet zo is dat bij gezonder eten hogere scores horen.
b Als de categorie van discipline hoger is, dan zijn ook de mate van gezond eten en de scores hoger.
c De samenhang in figuur 10.13 is niet causaal, want een gemeenschappelijke factor is discipline. Dus door alleen gezonder eten aan te bieden zullen de scores niet omhoog gaan.
d Er zou een vierde factor kunnen zijn die de samenhang verklaart.

- 13** **a** het warme weer
b het koude weer
c het inkomen van de gezinnen
d de grootte van de brand

Bladzijde 67

- 14** **a** Nee, want niet alle gemeenschappelijke factoren zijn uitgesloten. De variabele geslacht zou bijvoorbeeld een gemeenschappelijke factor kunnen zijn die de samenhang verklaart. De jongens hadden namelijk al voor het gewichtheffen waarschijnlijk grotere bovenarmen dan de meisjes.
b Ook nu is niet uitgesloten dat er een gemeenschappelijke factor is. Het zou bijvoorbeeld kunnen dat vooral jongens zich opgaven voor het gewichtheffen.
- 15** **a** Leerlingen met meer inzet zullen zowel beter leren voor toetsen als vaker de genoemde opgaven maken.
b Omdat de leerlingen aselekt zijn ingedeeld.
Alle niveaus van inzet zijn ongeveer gelijk verdeeld over de groepen, dus inzet zal niet het verschil tussen de groepen verklaren.

- c Omdat de leerlingen aselekt in de groepen zijn ingedeeld zijn alle gemeenschappelijke factoren ongeveer gelijk verdeeld over de groepen. Het is daarom niet waarschijnlijk dat een andere gemeenschappelijke factor het verschil verklaart.
- d Ja, eerst kwamen de vier maanden les en daarna kwam de toets.
- e Ja, want omdat alle gemeenschappelijke factoren zijn uitgesloten is ook aan de tweede voorwaarde voldaan.

Bladzijde 68

- 16 a Van beide groepen het steekproefgemiddelde en de steekproefstandaardafwijking.
- b Nee, want je weet de steekproefstandaardafwijkingen niet.

Bladzijde 69

17 a

	school		totaal
	A	B	
negatief	85	64	149
positief	43	58	101
totaal	128	122	250

b
$$\phi = \frac{85 \cdot 58 - 64 \cdot 43}{\sqrt{149 \cdot 101 \cdot 128 \cdot 122}} \approx 0,14$$

Omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

- c De conclusie in het voorbeeld is het beste te verdedigen. Door het omzetten van de ordinale variabele in het voorbeeld naar de nominale variabele in vraag a is informatie verloren gegaan.

Bladzijde 70

- 18 a De boxen overlappen elkaar en de medianen van de boxplots liggen buiten de box van de andere boxplot. Dus het verschil is middelmatig.
- b Tussen de jaren 2008 en 2010, tussen de jaren 2008 en 2011, tussen de jaren 2008 en 2012, tussen de jaren 2008 en 2014, tussen de jaren 2008 en 2015 en tussen de jaren 2008 en 2016.
- c Lisa heeft gelijk, want de andere boxen overlappen elkaar allemaal en de medianen liggen binnen de boxen van de andere boxplots.

- 19 a 54% van 108 is $0,54 \cdot 108 \approx 58$.

b

	geweldloos cum. perc.	gewelddadig cum. perc.	Vcp
mislukking	21%	62%	41%
gedeeltelijk succes	46%	75%	29%
succes	100%	100%	0%

$\max.V_{cp} = 41\%$

Omdat $\max.V_{cp} > 40$ is het verschil groot.

c

	geweldloos	gewelddadig	totaal
mislukking	23	134	157
succes	85	82	167
totaal	108	216	324

$$\phi = \frac{23 \cdot 82 - 134 \cdot 85}{\sqrt{157 \cdot 167 \cdot 108 \cdot 216}} \approx -0,38$$

Omdat $-0,4 \leq \phi < -0,2$ is het verschil middelmatig.

Bladzijde 71

- 20** Gebruik de effectgrootte.

$$E = \frac{9,57 - 8,70}{\frac{1}{2}(0,79 + 0,83)} \approx 1,07$$

Omdat $E > 0,8$ is het verschil groot.

- 21** **a** Video's over sport verliezen snel hun actualiteit. Dat is niet het geval bij video's over film.
- b** Vergeleken met muziekvideo's is
 bij sport $\max.V_{cp} = 75 - 30 = 45$ en omdat $\max.V_{cp} > 40$ is het verschil groot
 bij nieuws $\max.V_{cp} = 55 - 30 = 25$ en omdat $20 < \max.V_{cp} \leq 40$ is het verschil matig
 bij film $\max.V_{cp} = 30 - 20 = 10$ en omdat $\max.V_{cp} \leq 20$ is het verschil gering.

Bladzijde 72

22 **a**

	oorlogsjaren	vredesjaren	
koningen	735	2255	2990
koninginnen	154	442	596
	889	2697	3586

- b** oorlogsjaren koningen $\frac{735}{2990} \times 100\% \approx 24,6\%$

$$\text{oorlogsjaren koninginnen} \frac{154}{596} \times 100\% \approx 25,8\%$$

Dus koninginnen voerden relatief iets vaker oorlog.

- c** $\phi = \frac{735 \cdot 442 - 2255 \cdot 154}{\sqrt{2990 \cdot 596 \cdot 889 \cdot 2697}} \approx -0,01$

Omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

- 23** **a** Je krijgt $\phi = 0$, want $20 \cdot 36 - 30 \cdot 24 = 0$.

- b** Bij de jongens kiest $\frac{20}{50} \times 100\% = 40\%$ wiskunde A.

$$\text{Bij de meisjes kiest} \frac{24}{60} \times 100\% = 40\% \text{ wiskunde A.}$$

Dit komt overeen met de conclusie van Amar.

- c** In het geval alle jongens wiskunde A kiezen en alle meisjes wiskunde B, krijg je de volgende tabel.

	jongens	meisjes	totaal
wiskunde A	50	0	50
wiskunde B	0	60	60
totaal	50	60	110

$$\text{Daarbij hoort } \phi = \frac{50 \cdot 60 - 0 \cdot 0}{\sqrt{50 \cdot 60 \cdot 50 \cdot 60}} = 1.$$

In het geval alle jongens wiskunde B kiezen en alle meisjes wiskunde A, krijg je de volgende tabel.

	jongens	meisjes	totaal
wiskunde A	0	60	60
wiskunde B	50	0	50
totaal	50	60	110

$$\text{Daarbij hoort } \phi = \frac{0 \cdot 0 - 60 \cdot 50}{\sqrt{60 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 60}} = -1.$$

De conclusie is dat ϕ minimaal -1 en maximaal 1 is.

Bladzijde 73

- 24 a** Van de ondervraagde Chinezen geeft 65% zijn geluk een 7 of lager. Dat betekent dat 35% zijn geluk een 8 of hoger geeft. Daniek heeft dus gelijk.
- b** Gebruik de max.Vcp. Je kunt de waarden van de Vcp direct uit de tabel aflezen en vindt $\text{max.Vcp} = 65 - 55 = 10$. Omdat $\text{max.Vcp} \leq 20$ is het verschil gering.

c

	ongelukkig	gelukkig	totaal
China	170	830	1000
VS	220	780	1000
totaal	390	1610	2000

$$\phi = \frac{170 \cdot 780 - 830 \cdot 220}{\sqrt{1000 \cdot 1000 \cdot 390 \cdot 1610}} \approx -0,06$$

Omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

- 25 a** Omdat $\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$, is $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ altijd groter dan of gelijk aan 0, en de noemer is altijd positief (de standaardafwijking kan niet negatief zijn en de noemer kan niet 0 zijn).
- b** Als $\bar{X}_1$ toeneemt en de andere termen blijven gelijk, dan wordt de teller groter en daarmee neemt de effectgrootte toe.
- c** Als S_1 toeneemt en de andere termen blijven gelijk, dan wordt de noemer groter en daarmee neemt de effectgrootte af.
- d** Als $\bar{X}_1$ toeneemt en S_1 afneemt en de andere termen gelijk blijven, dan wordt de teller groter en de noemer kleiner en daarmee neemt de effectgrootte toe.
- e** Als S_1 en S_2 beide verdubbelen en $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ gelijk blijven, dan wordt de noemer twee keer zo groot en daarmee halveert de effectgrootte.

Bladzijde 74

- 26 a** Het zou kunnen dat vissen op de vorm van de luidsprekers afkomen en niet op hun geluid. Door luidsprekers zonder geluid te plaatsen kan worden uitgesloten dat de vorm een rol speelt.
- b** De interkwartielafstand is $13 - 5 = 8$ en $1,5 \cdot 8 = 12$. Anderhalf keer de interkwartielafstand boven 13 is 25 en de waarneming 34 ligt dus meer dan anderhalf keer de interkwartielafstand boven het derde kwartiel.
- c** Ze heeft niet gelijk, want zowel meer dan 18 als minder dan 5 is 25%.
- d** Met de boxplots:
 groepen 1 en 2: de boxen overlappen (nog net) en de medianen liggen buiten de box van de andere boxplot, dus het verschil is middelmatig.
 groepen 1 en 3: de boxen overlappen en de medianen liggen buiten de box van de andere boxplot, dus het verschil is middelmatig.
 Met de effectgrootte:
 groepen 1 en 2: $E = \frac{21,6 - 11,3}{\frac{1}{2}(9,8 + 9,0)} \approx 1,10$. Omdat $E > 0,8$ is het verschil groot.
 groepen 1 en 3: $E = \frac{21,6 - 12,1}{\frac{1}{2}(9,8 + 8,8)} \approx 1,02$. Omdat $E > 0,8$ is het verschil groot.
- e** Aan voorwaarde 1 is voldaan, want eerst zijn de luidsprekers geplaatst en daarna is geteld hoeveel monniksvissen zich in het koraal bevonden.
 Ook aan voorwaarde 2 is voldaan. Doordat de koralen aselekt zijn ingedeeld in drie groepen zijn mogelijke gemeenschappelijke factoren ongeveer gelijk verdeeld over de groepen. Deze factoren kunnen dus een verschil niet verklaren. (En ook de vorm van de luidsprekers kan niet de oorzaak zijn, omdat in de groep koralen met de dummy ook minder vissen waren.)
 Dus je mag concluderen dat geluid een oorzaak is van de aanwezigheid van meer monniksvissen.

Bladzijde 75

- 27 a** De student met de hoogste score heeft ook de langste gemiddelde slaapduur (te zien in de bovenste figuur).
De student met de laagste score sliep niet gemiddeld het kortst (ook te zien in de bovenste figuur).
- b** Uitspraak I volgt uit de bovenste figuur: er zijn 6 studenten met een gemiddelde slaapduur van minstens acht uur en deze haalden allemaal tenminste 70 punten.
Uitspraak II volgt uit de onderste figuur: studenten die vaker ongeveer even lang slapen hebben een kleinere standaardafwijking van de slaapduur, en daarbij hoort een hogere score.
- c** Gebruik de effectgrootte.

$$E = \frac{6,57}{\frac{1}{2}(13,71 + 11,01)} \approx 0,53$$
 Omdat $0,4 < E \leq 0,8$ is het verschil middelmatig.
- d** Dat kun je niet concluderen, want er zou een gemeenschappelijke factor kunnen zijn die de samenhang verklaart. Bijvoorbeeld een regelmatige dagindeling.

Bladzijde 76

- 28 a** Bijvoorbeeld wel/niet geverfd en wel/geen reactie van de koeien op de vliegen.
- b** Gebruik de effectgrootte.
 Bij de zwarte koeien is $\bar{X} = 42,1 + 86,7 = 128,8$.
 Bij de gestreepte koeien is $\bar{X} = 15,3 + 40,2 = 55,5$.

$$E = \frac{128,8 - 55,5}{\frac{1}{2}(68,6 + 35,2)} \approx 1,41$$
 Omdat $E > 0,8$ is het verschil groot.
- c** Per uur is het aantal vliegen gemiddeld
 bij de zwarte koeien $2 \cdot 128,8 = 257,6$ en bij de gestreepte koeien $2 \cdot 55,5 = 110$.
 Een vlieg steekt elke vier minuten een keer, dus $\frac{60}{4} = 15$ steken per uur.
 Het gemiddeld aantal steken per uur is
 bij de zwarte koeien $15 \cdot 257,6 = 3864$ en bij de gestreepte koeien $15 \cdot 110 = 1650$.
 Dus ik raad hem aan zijn koeien te verven, want 1650 is minder dan 2000 en 3864 is meer dan 2000.
- d** Om uit te sluiten dat de vliegen wegblijven vanwege de verf en niet het patroon van de verf.
- e** Alleen de Zwarte Wagyu koeien zijn onderzocht, misschien is het anders bij andere rassen. Het onderzoek vond plaats in Japan. Daar zijn misschien andere vliegen dan elders.

Bladzijde 77

- 29 a** Bij de hoge inkomens was 28% voorstander en bij de lage inkomens 69%.
- b** In het vlak linksboven staan voorstellen waarvan de hoge inkomens geen voorstander zijn en de lage inkomens wel.
- c** In het vlak linksboven is $\frac{3}{38} \times 100\% \approx 7,9\%$ van de voorstellen gerealiseerd.
- d** In het vlak rechtsonder is $\frac{10}{30} \times 100\% \approx 33,3\%$ gerealiseerd.
 Er worden verhoudingsgewijs meer voorstellen gerealiseerd waar de hoge inkomens voorstander van zijn en de lage inkomens niet, dan er voorstellen worden gerealiseerd waarvan de lage inkomens voorstander zijn en de hoge inkomens niet.
- e** Maak de volgende kruistabel.

	gerealiseerd	niet gerealiseerd	totaal
linksboven	3	35	38
rechtsonder	10	20	30
totaal	13	55	

$$\phi = \frac{3 \cdot 20 - 35 \cdot 10}{\sqrt{38 \cdot 30 \cdot 13 \cdot 55}} \approx -0,32$$

Omdat $-0,4 \leq \phi < -0,2$ is het verschil middelmatig.

- f** Je kunt hieruit net zo goed de conclusie trekken dat er geluisterd wordt naar mensen met hoge inkomens, want die steunen deze voorstellen ook. Het is daarom beter om te kijken naar de verschillen tussen de vlakken linksboven en rechtsonder, zoals in de vragen d en e is gedaan. En dan blijkt dat er wel verschil is in de mate waarin naar de verschillende inkomensgroepen wordt geluisterd.

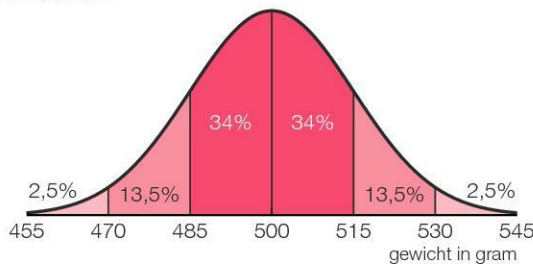
10.3 De normale verdeling en betrouwbaarheidsintervallen

Bladzijde 79

- 30** Bij figuur b, want de verdelingskromme is rechts-scheef.

Bladzijde 80

- 31 a**



Zie de schets. Dus 16%.

- b** 2,5%, dus dat zijn $0,025 \cdot 8000 = 200$ producten.
c Deze hebben een gewicht tussen 470 en 530 gram.
d Volgens de vuistregels bij de normale verdeling is bij een gemiddelde van 400 gram en een standaardafwijking van 15 gram 2,5% lichter dan 370 gram. Omdat $0,025 \cdot 3940 \approx 99$, komt een aantal van 97 ongeveer overeen met wat je op basis van een normale verdeling zou verwachten.

- 32 a** $2,9 + 0,1 = 3\%$ is 190 geeft een totaal van $\frac{100}{3} \cdot 190 \approx 6300$ mannen.

- b** Volgens de vuistregels zou tussen 1,72 m en 1,92 m ongeveer 68% moeten zitten. In de tabel is dat $33,2 + 35,1 = 68,3\%$. Dus weinig verschil.
 Volgens de vuistregels zou tussen 1,62 m en 2,02 m ongeveer 95% moeten zitten. In de tabel is dat $68,3 + 12,7 + 13,8 = 94,8\%$. Dus weinig verschil.
 Volgens de vuistregels zou tussen 1,52 m en 2,12 m bijna 100% moeten zitten. In de tabel is dat 99,8%. Dus ook hier weinig verschil.

- 33 a** $4\sigma = 19 - 17 = 2$ mm, dus $\sigma = 0,5$ mm.

- b** Hiervoor is een spreidingsdiagram geschikt.
 Het is dan nodig om per olijf de diameter en de bederftijd te weten.

Bladzijde 81

- 34 a** De modus van de lengte is 165 cm (komt drie keer voor).
 Van het gewicht is er geen modus, want de gewichten 56 kg en 70 kg komen beide drie keer voor.
b De mediane lengte (het 13^e waarnemingsgetal als op grootte is gerangschikt) is 176 cm. Bij 176 cm hoort een gewicht van 66 kg of van 72 kg. Het mediane gewicht is echter 63 kg, dus de jongen met de mediane lengte heeft niet het mediane gewicht.
c Bij de groepen is de spreidingsbreedte achtereenvolgens $166 - 160 = 6$ cm, $172 - 168 = 4$ cm, $178 - 173 = 5$ cm, $183 - 179 = 4$ cm en $194 - 185 = 9$ cm. Dus bij de 20% langste jongens is de spreidingsbreedte het grootst.

- d** 12% is 3 jongens.

De drie jongens met de grootste lengte hebben een lengte van 187 cm (die heeft een gewicht van 70 kg), 192 cm (die heeft een gewicht van 75 kg) en 194 cm (die heeft een gewicht van 70 kg).

De drie jongens met het grootste gewicht hebben een gewicht van 72 kg (die heeft een lengte van 176 cm), 74 kg (die heeft een lengte van 185 cm) en 75 kg (die heeft een lengte van 192 cm).

Dus alleen de jongen met een lengte van 192 cm en een gewicht van 75 kg hoort bij beide groepen van drie jongens. Dat is dus $\frac{1}{25} \times 100\% = 4\%$ van de jongens.

- e** Ze controleert de vuistregel dat ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ ligt.

In het spreidingsdiagram hebben 17 jongens een lengte die in de klasse $[167, 185]$ valt.

Dat is dus $\frac{17}{25} \times 100\% = 68\%$.

De conclusie is dat dit overeenkomt met de vuistregel.

Bladzijde 82

- 35 a** Ze maken de spreiding kleiner. Dan liggen de tonen dichter bij elkaar en zijn er dus ook meer tonen in de buurt van de hardste toon.
- b** De krommen zijn niet symmetrisch.
- c** Eerder een onderschatting, want de verdelingen zijn links-scheef en daarbij is het gemiddelde lager dan de modus en de mediaan.
- d** Oplossen van de vergelijking $-14 + 0,067t = 0$ geeft $t \approx 209$ en hierbij hoort het jaar $1950 + 209 = 2159$.
In dat jaar klinken de tonen allemaal even hard.
- e** Doordat de tonen bij *Death Magnetic* dicht bij elkaar liggen, komt de hardste toon niet ver boven het gemiddelde van -14 dBFS uit. Bij liedjes met een grote spreiding liggen tonen verder uit elkaar en ligt de hardste toon dus ook verder boven het gemiddelde van -14 dBFS.

Bladzijde 83

- 36** In de steekproef zijn 6 van de 10 bolletjes rood, dus de steekproefproportie van de rode bolletjes is $\frac{6}{10} = 0,6$.
In de populatie zijn 20 van de 34 bolletjes rood, dus de populatieproportie van de rode bolletjes is $\frac{20}{34} \approx 0,59$.

Bladzijde 84

- 37 a** De populatieproportie is $\frac{50}{1000} = 0,05$.
De steekproefproportie is $\frac{4}{80} = 0,05$.
- b** Nee, de steekproef is niet aselekt, omdat alleen kinderen kans hebben om in de steekproef te komen.
- 38 a** Ik verwacht hoger, want geselecteerde scholen die verwachten zwak te scoren doen waarschijnlijk minder vaak mee.
- b** Ik verwacht hoger, want alleen verdachte bedrijven werden onderzocht.
- 39 a** De populatie is alle klimaatwetenschappers.
De steekproef is 79 klimaatwetenschappers.
- b** Volgens Bram bestaat de populatie uit de wetenschappelijke artikelen waarin een mening werd gegeven.
- c** Niet aselekt, want alleen de wetenschappelijke artikelen waarin een mening werd gegeven hebben kans om in de steekproef te komen.

Bladzijde 85

- 40 a** Niet alle Amerikanen die mogen stemmen gaan ook daadwerkelijk stemmen. De populatie bestond voor de onderzoekers uit Amerikanen die gaan stemmen.
- b** Bij CNN is de proportie stemmen voor Obama gelijk aan 0,51. Dus $0,51 \cdot 1000 = 510$ gaven aan op Obama te gaan stemmen.
- c** Bij de verkiezingen zijn gegevens verzameld van alle Amerikanen die zijn gaan stemmen.
- d** Als steekproeven aselekt worden getrokken, dan wijken steekproefproporties $\hat{p}$ door toeval af van de populatieproportie p .
- e** Deze liggen in het interval $[0,51 - 2 \cdot 0,016; 0,51 + 2 \cdot 0,016] = [0,478; 0,542]$.
- f** Deze hebben een steekproefproportie van minder dan 0,478 of van meer dan 0,542.
- g** TIPP1 en TIPP2.

Bladzijde 86

- 41** De breedte is $4 \cdot 0,02 = 0,08$.

Bladzijde 87

- 42 a** De breedte van het interval is dan $4 \cdot \sqrt{\frac{0,48 \cdot 0,52}{10000}} = 0,01998...$
De breedte is dan 1,998...% en dat is minder dan 2%, dus het is nauwkeurig genoeg.
- b** $\hat{p} = 0,48$ en $n = 10000$ geeft $\sqrt{\frac{0,48 \cdot 0,52}{10000}} = 0,0049...$
 $[0,48 - 2 \cdot 0,0049...; 0,48 + 2 \cdot 0,0049...] \approx [0,470; 0,490]$
Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij het percentage is [47,0%; 49,0%].

Bladzijde 88

- 43 a** $\left[120 - 2 \cdot \frac{36}{\sqrt{144}}, 120 + 2 \cdot \frac{36}{\sqrt{144}}\right] = [114, 126]$
- b** $\left[64,4 - 2 \cdot \frac{15,5}{\sqrt{100}}, 64,4 + 2 \cdot \frac{15,5}{\sqrt{100}}\right] = [61,3; 67,5]$
- c** $[18 - 2 \cdot 0,32; 18 + 2 \cdot 0,32] = [17,36; 18,64]$
- 44 a** $\hat{p} = 0,4$ en $n = 240$ geeft $\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{240}} = 0,0316...$
Dus $[0,4 - 2 \cdot 0,0316...; 0,4 + 2 \cdot 0,0316...] \approx [0,337; 0,463]$.
- b** $\hat{p} = 0,48$ en $n = 380$ geeft $\sqrt{\frac{0,48 \cdot 0,52}{380}} = 0,0256...$
Dus $[0,48 - 2 \cdot 0,0256...; 0,48 + 2 \cdot 0,0256...] \approx [0,429; 0,531]$.
- c** $\hat{p} = \frac{5}{9}$ en $n = 10000$ geeft $\sqrt{\frac{\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9}}{10000}} = 0,0049...$
Dus $[\frac{5}{9} - 2 \cdot 0,0049...; \frac{5}{9} + 2 \cdot 0,0049...] \approx [0,546; 0,565]$.
- 45 a** Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is
 $\left[23,4 - 2 \cdot \frac{1,9}{\sqrt{260}}, 23,4 + 2 \cdot \frac{1,9}{\sqrt{260}}\right] \approx [23,16; 23,64]$.
- b** $\hat{p} = 0,64$ en $n = 700$ geeft $\sqrt{\frac{0,64 \cdot 0,36}{700}} = 0,018...$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is
 $[0,64 - 2 \cdot 0,018...; 0,64 + 2 \cdot 0,018...] \approx [0,604; 0,676]$, oftewel [60,4%; 67,6%].
- c** Het gemiddelde is $\bar{X} = \frac{5350}{1000} = 5,35$.
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $\left[5,35 - 2 \cdot \frac{3,2}{\sqrt{1000}}, 5,35 + 2 \cdot \frac{3,2}{\sqrt{1000}}\right] \approx [5,15; 5,55]$.

46 a Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{n}} = 0,04$, oftewel $\sqrt{\frac{0,21}{n}} = 0,01$.

Voer in $y_1 = \sqrt{\frac{0,21}{x}}$ en $y_2 = 0,01$.

De optie snijpunt geeft $x = 2100$, dus de steekproefomvang moet minimaal 2100 zijn.

b Los op $4 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} = 0,8$, oftewel $\frac{16}{\sqrt{n}} = 0,8$.

Voer in $y_1 = \frac{16}{\sqrt{x}}$ en $y_2 = 0,8$.

De optie snijpunt geeft $x = 400$, dus de steekproefomvang moet minimaal 400 zijn.

47 a De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is dus $2 \cdot 0,03 = 0,06$.

Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{n}} = 0,06$, oftewel $\sqrt{\frac{0,24}{n}} = 0,015$.

Voer in $y_1 = \sqrt{\frac{0,24}{x}}$ en $y_2 = 0,015$.

De optie snijpunt geeft $x = 1066,6\dots$, dus de steekproefomvang moet minimaal 1067 zijn.

b De breedte van het interval is $2 \cdot 0,5 = 1$ kg.

Los op $4 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 1$, oftewel $\frac{8}{\sqrt{n}} = 1$, dus $\sqrt{n} = 8$ en $n = 64$.

De steekproefomvang moet minimaal 64 zijn.

Bladzijde 89

48 a De breedte van P is $124,1 - 112,1 = 12$.

De breedte van Q is $4 \cdot 3,3 = 13,2$.

Dus P is het meest nauwkeurig.

b Er geldt $\frac{S}{\sqrt{n}} = 3,3$, dus $\frac{66}{\sqrt{n}} = 3,3$.

Voer in $y_1 = \frac{66}{\sqrt{x}}$ en $y_2 = 3,3$.

De optie snijpunt geeft $x = 400$, dus de steekproefomvang is 400.

c Dan moet gelden dat $4 \cdot \frac{66}{\sqrt{n}} = 12$, oftewel $\frac{66}{\sqrt{n}} = 3$.

Voer in $y_1 = \frac{66}{\sqrt{x}}$ en $y_2 = 3$.

De optie snijpunt geeft $x = 484$, dus de steekproefomvang moet 484 zijn.

49 a Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{n}} = 0,02$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{x}}$ en $y_2 = 0,02$.

De optie snijpunt geeft $x = 3600$, dus hij moet minimaal 3600 mensen opnemen in zijn steekproef.

b Laura heeft gelijk. De omvang van de populatie komt niet voor in de formule van het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

c Omdat niet iedereen geregistreerd staat is het moeilijk om een lijst op te stellen van de wereldbevolking waaruit je een aselechte steekproef kunt nemen.

Ook zijn veel mensen moeilijk te bereiken.

50 a De populatieproportie $p = \frac{60}{261}$.

b Met de vergelijking $p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \frac{8}{n}$, want dan is $\frac{8}{n}$ het kleinst en moet n dus het grootst zijn.

c $p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \frac{8}{n}$ met $p = \frac{60}{261}$ geeft $\frac{60}{261} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{60}{261}(1 - \frac{60}{261})}{n}} = \frac{8}{n}$.

Voer in $y_1 = \frac{60}{261} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{60}{261}(1 - \frac{60}{261})}{x}}$ en $y_2 = \frac{8}{x}$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 64,1$.

$p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \frac{8}{n}$ met $p = \frac{60}{261}$ geeft $\frac{60}{261} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{60}{261}(1 - \frac{60}{261})}{n}} = \frac{8}{n}$.

Voer in $y_1 = \frac{60}{261} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{60}{261}(1 - \frac{60}{261})}{x}}$ en $y_2 = \frac{8}{x}$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 18,9$.

Dus er kunnen minimaal 19 artikelen en maximaal 64 artikelen in de steekproef zijn geweest.

51 De stellingen II en III zijn juist.

52 a De steekproef is aselekt.

$\hat{p} = \frac{36}{119}$ en $n = 119$ geeft $\sqrt{\frac{\frac{36}{119} \cdot (1 - \frac{36}{119})}{119}} = 0,0421\dots$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$[\frac{36}{119} - 2 \cdot 0,0421\dots; \frac{36}{119} + 2 \cdot 0,0421\dots] \approx [0,218; 0,387]$.

b Niet aselekt, want de steekproef is niet genomen uit de populatie, maar uit mensen die zichzelf hebben aangemeld.

c Het betreft hier geen steekproef, want de hele populatie is onderzocht.

53 a De breedte is $4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ met $\hat{p} = 0,45$ en $n = 1800$ en dit geeft

$4 \cdot \sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{1800}} \approx 0,047$.

In de figuur lees je af: breedte = $0,472 - 0,428 = 0,044$.

Dit komt ongeveer met elkaar overeen.

b De grootste peiling heeft de kleinste breedte, dus dat is de peiling van YouGov.

De kleinste peiling heeft de grootste breedte, dus dat is de peiling van BMG.

c De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $0,46 - 0,42 = 0,04$ en de steekproefproportie is 0,44.

Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,44 \cdot 0,56}{n}} = 0,04$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,44 \cdot 0,56}{x}}$ en $y_2 = 0,04$.

De optie snijpunt geeft $x = 2464$, dus de steekproefomvang is 2464.

- d** Het betrouwbaarheidsinterval van BMG is heel breed. Dan kun je van tevoren niet veel zeggen over wat de uitslag gaat zijn.
- e** Bij 9 van de 12, dat is dus bij 75%.
Dat is minder dan je zou verwachten.
Een mogelijke verklaring is dat het maar 12 peilingen zijn. Als je meer peilingen zou houden, zou het percentage hoger kunnen liggen.
Het kan ook zijn dat de steekproeven niet aselekt zijn.

Bladzijde 92

- 54 a** $\hat{p} = \frac{18}{80} = 0,225$ en $n = 80$ geeft $\sqrt{\frac{0,225 \cdot (1 - 0,225)}{80}} = 0,0466...$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is
 $[0,225 - 2 \cdot 0,0466...; 0,225 + 2 \cdot 0,0466...] \approx [0,132; 0,318]$.
De populatieproportie is $\frac{1}{3}$ en dit ligt niet in het interval $[0,132; 0,318]$.
- b** Bij aselekte steekproeven valt de populatieproportie bij 5% van de steekproeven buiten het 95%-betrouwbaarheidsinterval. Dit zou zo'n steekproef kunnen zijn.
Ik ben het daarom niet met Lieke eens.
- 55 a** Bij een normale verdeling ligt 2,5% van de waarnemingsgetallen tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu - 2\sigma$.
Maar bij deze steekproef ligt 0% van de waarnemingsgetallen tussen de bijbehorende waarden $-0,017$ en $-0,005$ (want oppervlakte kan niet negatief zijn).
- b** Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $\left[0,019 - 2 \cdot \frac{0,012}{\sqrt{925}}; 0,019 + 2 \cdot \frac{0,012}{\sqrt{925}}\right] \approx [0,0182; 0,0198]$.
- c** De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $3,478 - 1,273 = 2,205$.
Dus $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{50}} = 2,205$, oftewel $\frac{S}{\sqrt{50}} = 0,55125$.
Dit geeft $S = 0,55125 \cdot \sqrt{50} = 3,8979... \approx 3,898$.
- d** Los op $4 \cdot \frac{3,9}{\sqrt{n}} = 1$, oftewel $\frac{15,6}{\sqrt{n}} = 1$.
Hieruit volgt $\sqrt{n} = 15,6$ en dit geeft $n = 15,6^2 = 243,36$.
Dus het jachtgebied van Max moet minimaal 244 dagen onderzocht worden.

Bladzijde 93

- 56 a** I Lees af: het aantal katten dat een vogel mee naar huis heeft genomen is
 $310 + 130 + 30 + 20 + 10 = 500$.
Dus $986 - 500 = 486$ katten hebben geen vogel mee naar huis genomen.
- II Het maximale aantal vogels dat mee naar huis is genomen is
 $5 \cdot 310 + 10 \cdot 130 + 15 \cdot 30 + 20 \cdot 20 + 25 \cdot 10 = 3950$.
Het minimale aantal zoogdieren dat mee naar huis is genomen is
 $1 \cdot 230 + 6 \cdot 100 + ... + 36 \cdot 10 + 41 \cdot 20 = 4518$.
Dus er zijn meer zoogdieren dan vogels mee naar huis genomen.
- b** $\hat{p} = \frac{500}{986}$ en $n = 986$ geeft $2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{500}{986} \cdot (1 - \frac{500}{986})}{986}} = 0,0318...$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $\left[\frac{500}{986} - 0,0318...; \frac{500}{986} + 0,0318...\right] \approx [0,475; 0,539]$.
- c** Per kat is het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aantal mee naar huis genomen prooien $\left[\frac{14370}{986} - 2 \cdot \frac{14,1}{\sqrt{986}}; \frac{14370}{986} + 2 \cdot \frac{14,1}{\sqrt{986}}\right] = [13,67...; 15,47...]$.
Het gevraagde 95%-betrouwbaarheidsinterval is
 $4 \cdot \frac{12}{5} \cdot 9 \cdot [13,67...; 15,47...] \approx [1182; 1337]$.

- 57** De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde per kattenbezitter is $4 \cdot \frac{134}{\sqrt{n}}$, dus de breedte voor de 2,6 miljoen kattenbezitters is $2,6 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot \frac{134}{\sqrt{n}}$.

Los op $2,6 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot \frac{134}{\sqrt{n}} = 50 \cdot 10^6$, oftewel $\frac{1393,6}{\sqrt{n}} = 50$.

Voer in $y_1 = \frac{1393,6}{\sqrt{x}}$ en $y_2 = 50$.

De optie snijpunt geeft $x = 776,84...$

Dus minstens 777 kattenbezitters in de steekproef.

Diagnostische toets

Bladzijde 96

- 1 a** Een beoordeling op *Rotten Tomatoes* is een kwalitatieve variabele. Het aantal mensen dat positief is over een Star Wars-film per groep is een kwantitatieve variabele.
- b** Het verschil in beoordeling is het grootst bij VIII. Hierover is 90% van de recensenten en 42% van het publiek positief. Het verschil is dus $90 - 42 = 48\%$.
- c** Als je een diagonale lijn trekt in het assenstelsel, van linksonder naar rechtsboven, dan zijn alle films onder deze lijn positiever beoordeeld door recensenten dan door het publiek. Dat zijn II, III, VII en VIII.

- 2 a** kwalitatief

b

	gevangen	wild	totaal
man	24	27	51
vrouw	16	14	30
totaal	40	41	81

$$\phi = \frac{24 \cdot 14 - 27 \cdot 16}{\sqrt{51 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 41}} \approx -0,06$$

Omdat $-0,2 \leq \phi < 0,2$ is het verschil gering.

- c** Met de boxplots:
De boxen overlappen elkaar en geen van beide medianen ligt buiten de box van de andere boxplot. Dus het verschil is gering.
Met de effectgrootte:
 $E = \frac{903,1 - 877,1}{\frac{1}{2}(73,3 + 55,7)} \approx 0,403$
Omdat $0,4 < E \leq 0,8$ is het verschil middelmatig.
- d** Nee, deze conclusie mag je niet trekken, omdat je niet kunt uitsluiten dat er een gemeenschappelijke factor is. De vlinders zijn niet aselekt ingedeeld in twee groepen.

Bladzijde 97

- 3 a** Nee, want de modale klasse is 1,89-1,90 en de mediaan is het 62^e waarnemingsgetal en ligt in de klasse 1,90-1,91.
- b** De mediaan en de modus zijn niet gelijk aan elkaar. Het histogram is tweetoppig.
- c** Bij $\mu = 1,91$ en $\sigma = 0,04$ is $\mu - 2\sigma = 1,83$. Dat betekent dat 2,5% van de waarnemingsgetallen kleiner dan 1,83 zou zijn als er sprake was van een normale verdeling.
In figuur 10.35 lees je af dat 3 waarnemingsgetallen kleiner zijn dan 1,83. Dat is $\frac{3}{123} \times 100\% = 2,439...\%$. De percentages komen dus ongeveer overeen.

- 4 a** $\hat{p} = \frac{55}{220} = 0,25$ en $n = 220$ geeft $\sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{220}} = 0,0291...$
 $[0,25 - 2 \cdot 0,0291...; 0,25 + 2 \cdot 0,0291...] \approx [0,192; 0,308]$.
 Dus $[19,2\%; 30,8\%]$.
- b** Nederlanders zonder longziekte hadden geen kans om in de steekproef te komen.

- 5 a** $\bar{X} = \frac{284}{50} = 5,68$, $S = 2,2$ en $n = 50$
 $\left[5,68 - 2 \cdot \frac{2,2}{\sqrt{50}}; 5,68 + 2 \cdot \frac{2,2}{\sqrt{50}} \right] \approx [5,06; 6,30]$.
- b** Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = 0,04$, oftewel $\sqrt{\frac{0,25}{n}} = 0,01$.

Voer in $y_1 = \sqrt{\frac{0,25}{x}}$ en $y_2 = 0,01$.

De optie snijpunt geeft $x = 2500$, dus het aantal personen in de steekproef moet minimaal 2500 zijn.

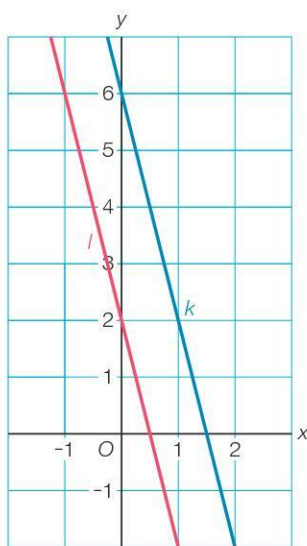
11 Formules en variabelen

Voorkennis Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

Bladzijde 102

- 1 a** $l: 3x - 2y = 8$
 $-2y = -3x + 8$
 $y = 1,5x - 4$
 l snijden met m geeft $1,5x - 4 = -0,5x + 3$
 $2x = 7$
 $x = 3,5$
 $x = 3,5$ geeft $y = 1,5 \cdot 3,5 - 4 = 1,25$, dus het snijpunt is $(3,5; 1,25)$.
- b** p evenwijdig met k , dus $p: 3x - 2y = c$.
 Door $O(0, 0)$ geeft $c = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$.
 Dus $p: 3x - 2y = 0$.

- 2 a** $k: 4x + y = 6$
- | | | |
|-----|---|-----|
| x | 0 | 1,5 |
| y | 6 | 0 |
- $l: 4x + y = 2$
- | | | |
|-----|---|-----|
| x | 0 | 0,5 |
| y | 2 | 0 |



- b** $k: 4x + y = 6$, dus $y = -4x + 6$
 k snijden met m geeft $-4x + 6 = x - 1$
 $-5x = -7$
 $x = 1,4$
 $x = 1,4$ geeft $y = 1,4 - 1 = 0,4$, dus het snijpunt is $(1,4; 0,4)$.
- c** n evenwijdig met k , dus $n: 4x + y = c$.
 Door $A(3, 2)$ geeft $c = 4 \cdot 3 + 2 = 14$.
 Dus $n: 4x + y = 14$.

11.1 Grafieken en gebieden

Bladzijde 103

- 1 a** $k: 2x - 3y = 3$ $l: 2x - 3y = 6$
 $-3y = -2x + 3$ $-3y = -2x + 6$
 $y = \frac{2}{3}x - 1$ $y = \frac{2}{3}x - 2$
 Dus $rc_k = \frac{2}{3}$. Dus $rc_l = \frac{2}{3}$.
- b** m evenwijdig met k , dus $m: 2x - 3y = c$.
 Door $A(4, 1)$ geeft $c = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$.
 Dus $m: 2x - 3y = 5$.

Bladzijde 104

- 2 a** 4 naar beneden, dus $(0, -2)$ op n .
 n evenwijdig met k , dus $n: 5x + 4y = c$.
 $(0, -2)$ op n geeft $c = 5 \cdot 0 + 4 \cdot -2 = -8$.
Dus $n: 5x + 4y = -8$.
- b** 5 naar links, dus $(-5, 2)$ op p .
 p evenwijdig met k , dus $p: 5x + 4y = c$.
 $(-5, 2)$ op p geeft $c = 5 \cdot -5 + 4 \cdot 2 = -17$.
Dus $p: 5x + 4y = -17$.
- 3 a** $x = 0$ geeft $y = -4$, dus $(0, -4)$ op k .
5 naar boven, dus $(0, 1)$ op l .
 l evenwijdig met k , dus $l: 2x - 3y = c$.
 $(0, 1)$ op l geeft $c = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$.
Dus $l: 2x - 3y = -3$.
- b** $x = 0$ geeft $y = 3$, dus $(0, 3)$ op m .
4 naar rechts, dus $(4, 3)$ op n .
 n evenwijdig met m , dus $n: y = 1,6x + b$.
 $(4, 3)$ op n geeft $1,6 \cdot 4 + b = 3$
 $6,4 + b = 3$
 $b = -3,4$
Dus $n: y = 1,6x - 3,4$.

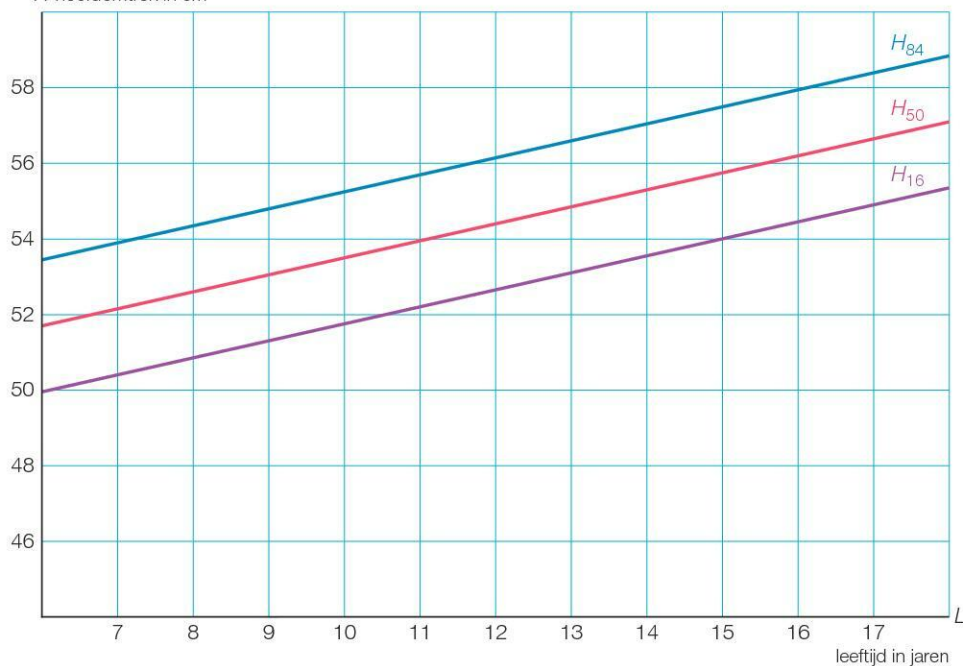
Bladzijde 105

- 4 a** $v = at + b$, want lineair verband.
 $b = 30$, want $v = 30$ op $t = 0$.
Op $t = 0$ is $b = 30$ en op $t = 45$ is $v = 0$, dus $a = \frac{0 - 30}{45 - 0} = -\frac{2}{3}$.
- b** $v = 0$ geeft $-\frac{2}{3}t + 22 = 0$
 $-\frac{2}{3}t = -22$
 $t = 33$
Dus na 33 minuten.
- c, d**
-
- e** $v = -\frac{2}{3}t + b$ door $(24, 10)$ geeft $-\frac{2}{3} \cdot 24 + b = 10$
 $-16 + b = 10$
 $b = 26$
- f** $v = -\frac{2}{3}t + 30$
 $\frac{2}{3}t = -v + 30$
 $t = -1\frac{1}{2}v + 45$

Bladzijde 106

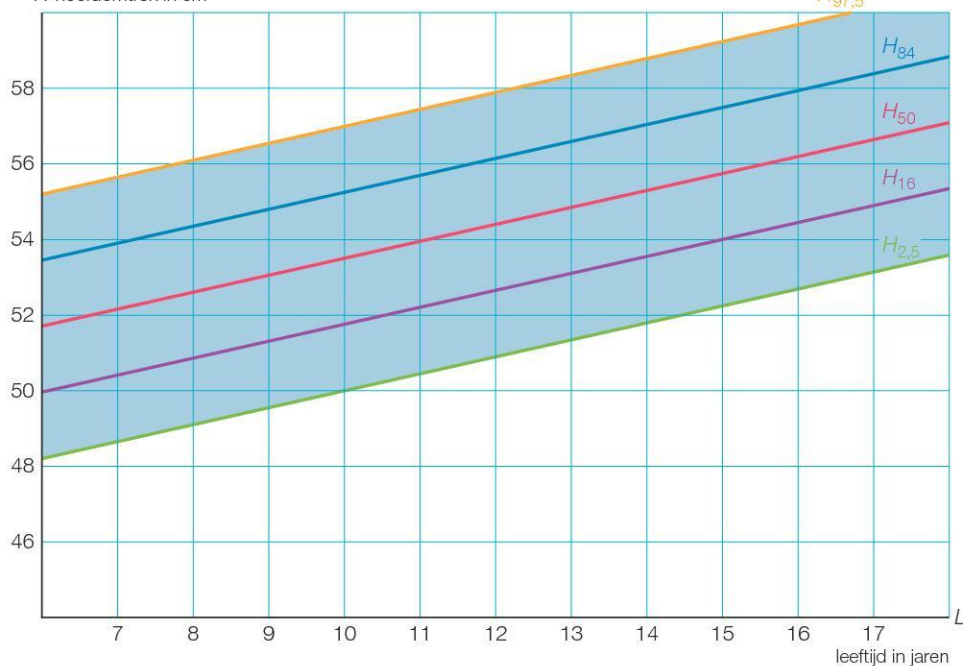
- 5 a** De lijn $H_{50} = 0,45L + 49$ één standaardafwijking, dus 1,75 naar boven verschuiven geeft $H_{84} = 0,45L + 50,75$.
b Omdat $49 - 1,75 = 47,25$, is $H_{16} = 0,45L + 47,25$.

H hoofdomtrek in cm



- c** Twee standaardafwijkingen, dus $2 \cdot 1,75 = 3,5$ boven en onder de lijn $H_{50} = 0,45L + 49$ geeft $H_{2,5} = 0,45L + 45,5$ en $H_{97,5} = 0,45L + 52,5$.

H hoofdomtrek in cm



- d** $H_{50} = 0,45L + 49$
 $0,45L + 49 = H_{50}$
 $0,45L = H_{50} - 49$
 $L \approx 2,22H_{50} - 109$
Dus $L = 2,22H_{50} - 109$.
e $H_{50} - 0,45L = 49$
Deel het linkerlid en het rechterlid door 49.
Je krijgt $p = \frac{1}{49} \approx 0,020$ en $q = \frac{-0,45}{49} \approx -0,009$.

Bladzijde 107

- 6 a** $\frac{x}{250} + \frac{y}{350} = 1$
 Vermenigvuldig het linkerlid en het rechterlid met $7 \cdot 250 = 5 \cdot 350 = 1750$.
 Je krijgt $c = 1 \cdot 1750 = 1750$.
- b** Invullen van $x = 3,6$ en $y = 1,3$ in $7x + 5y = c$ geeft $7 \cdot 3,6 + 5 \cdot 1,3 = 31,7$.
 Vermenigvuldig het linkerlid en het rechterlid met 10.
 Je krijgt $m: 70x + 55y = 317$.
- c** Om van $\frac{y}{350}$ te krijgen $8y$ moet je vermenigvuldigen met $8 \cdot 350 = 2800$.
 Je krijgt $p = 2800 \cdot \frac{1}{250} = 11,2$.

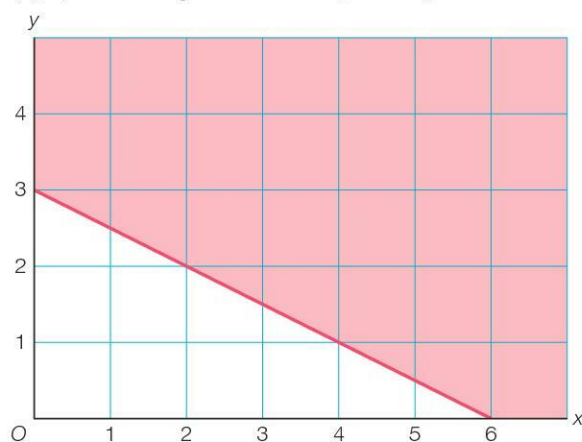
- 7 a** De lijn k snijdt de assen in de punten $(5, 0)$ en $(0, 5)$.
 De lijn l snijdt de assen in de punten $(2, 0)$ en $(0, 2)$.
 De lijn m snijdt de assen in de punten $(3, 0)$ en $(0, 3)$.
 De lijnen k , l en m zijn evenwijdig, $(3, 0)$ ligt tussen $(5, 0)$ en $(2, 0)$ in en $(0, 3)$ ligt tussen $(0, 5)$ en $(0, 2)$ in.
 Hieruit volgt dat m tussen k en l ligt.
- b** Met de ongelijkheid $x + y < 5$.
- c** Dit is het gebied tussen k en l .

Bladzijde 108

- 8 a** De lijn $x + 2y = 6$.

x	0	6
y	3	0

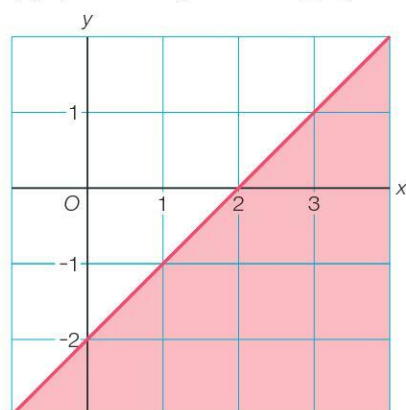
$(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 \geq 6$; dit klopt niet.



- b** De lijn $x - y = 2$.

x	0	2
y	-2	0

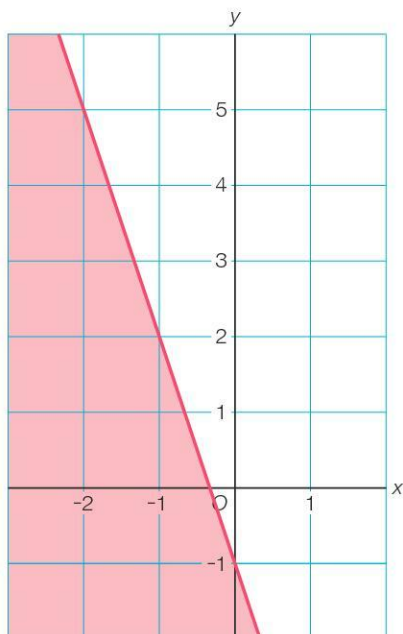
$(0, 0)$ invullen geeft $0 - 0 \geq 2$; dit klopt niet.



c De lijn $3x + y = -1$.

x	0	-2
y	-1	5

$(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 \leq -1$; dit klopt niet.

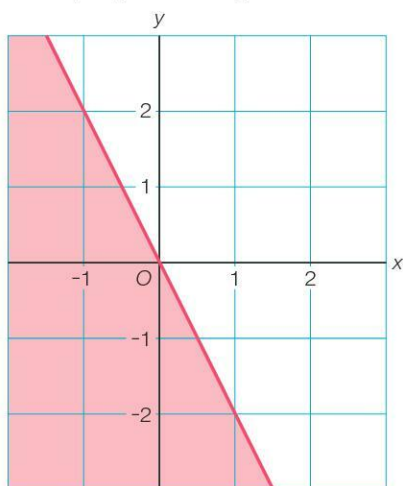


9 a Omdat dit punt op de lijn $2x + y = 0$ ligt.

b

x	0	1
y	0	-2

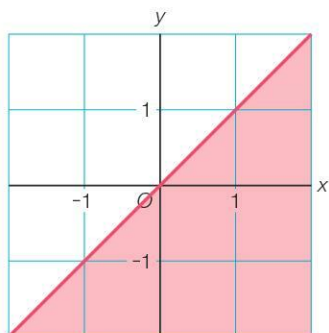
Punt $(0, 1)$ invullen geeft $1 \leq 0$; dit klopt niet.



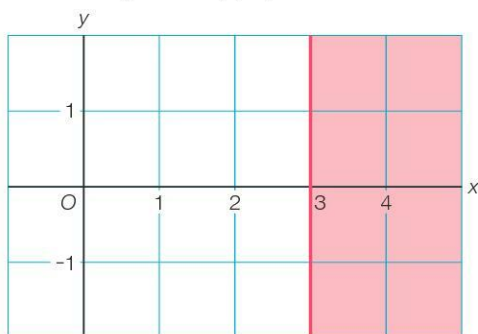
10 a De lijn $x - y = 0$.

x	0	1
y	0	1

(0, 1) invullen geeft $0 - 1 \geq 0$; dit klopt niet.



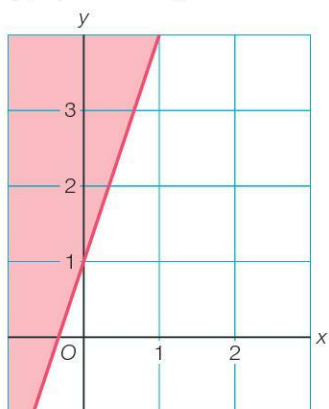
b verticale lijn door (3, 0)



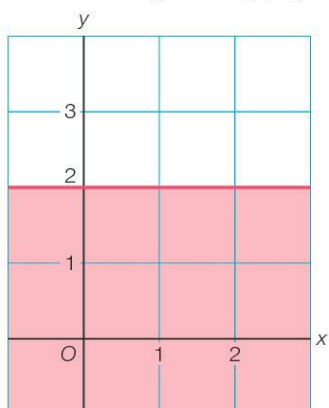
c De lijn $3x - y = -1$

x	0	1
y	1	4

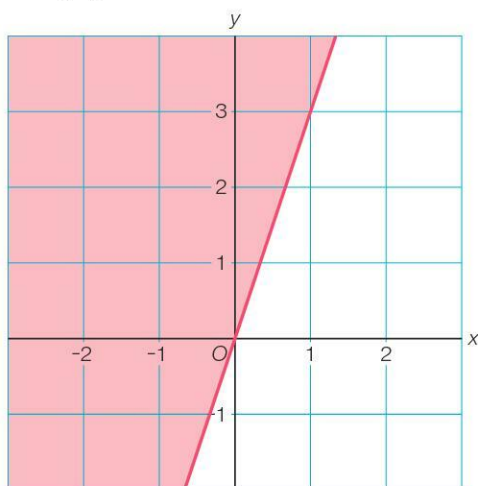
(0, 0) invullen geeft $0 - 0 \leq -1$; dit klopt niet.



d horizontale lijn door (0, 2)



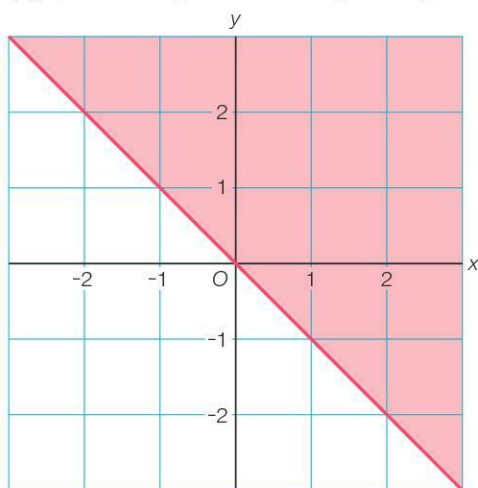
e De lijn $y = 3x$.



f De lijn $x + y = 0$.

x	0	1
y	0	-1

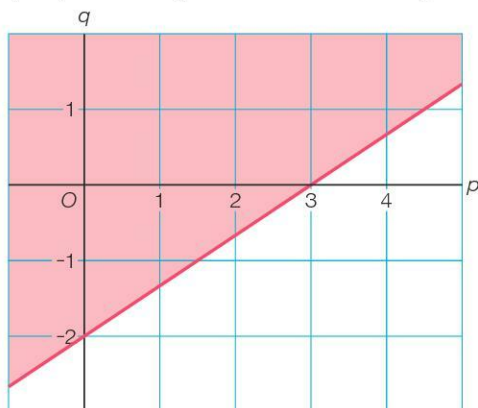
$(0, 1)$ invullen geeft $0 + 1 \geq 0$; dit klopt.



11 a De lijn $2p - 3q = 6$.

p	0	3
q	-2	0

$(0, 0)$ invullen geeft $0 - 0 \leq 6$; dit klopt.

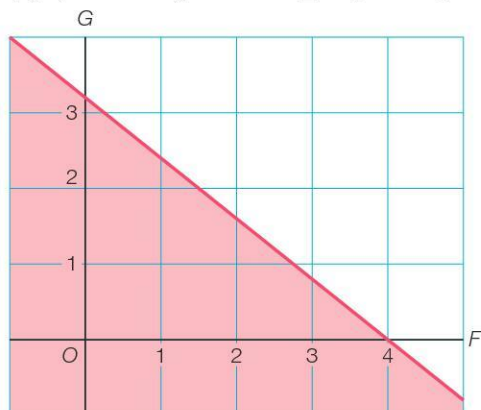


N.B. Je kunt ook de p -as verticaal tekenen en de q -as horizontaal.

b De lijn $3F + 4G = 12$.

F	0	4
G	3	0

$(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 \leq 12$; dit klopt.

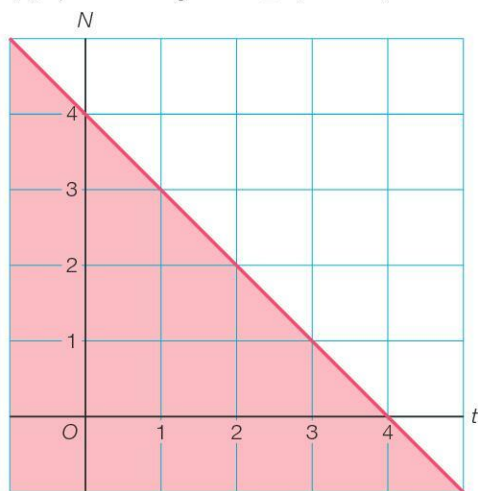


N.B. Je kunt ook de F -as verticaal tekenen en de G -as horizontaal.

c De lijn $N = 4 - t$.

lijn door $(0, 4)$ met $rc -1$.

$(0, 0)$ invullen geeft $0 \leq 4$; dit klopt.

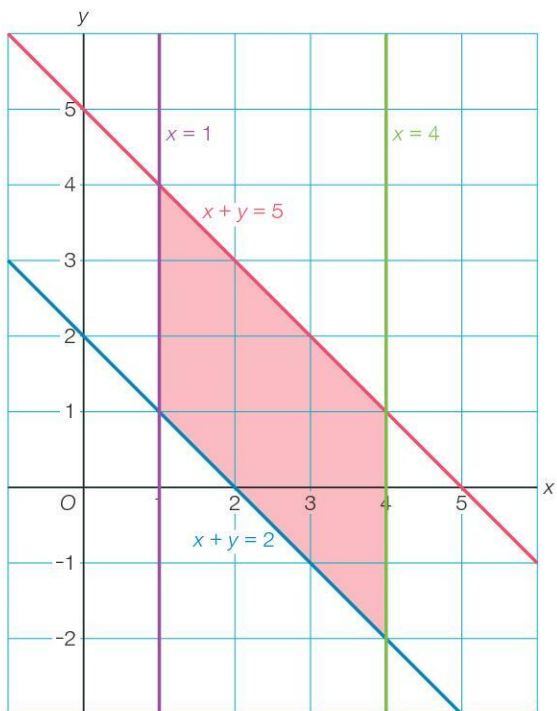


- 12** Tussen de lijnen $x = 1$ en $x = 4$ en ook tussen de lijnen $x + y = 2$ en $x + y = 5$.
De lijn $x + y = 2$.

x	0	2
y	2	0

De lijn $x + y = 5$.

x	0	5
y	5	0



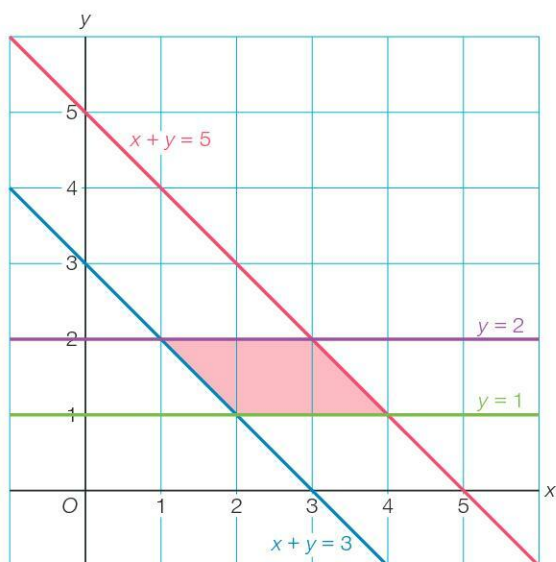
Bladzijde 109

- 13 a** Tussen de lijnen $y = 1$ en $y = 2$ en ook tussen de lijnen $x + y = 3$ en $x + y = 5$.
De lijn $x + y = 3$.

x	0	3
y	3	0

De lijn $x + y = 5$.

x	0	5
y	5	0



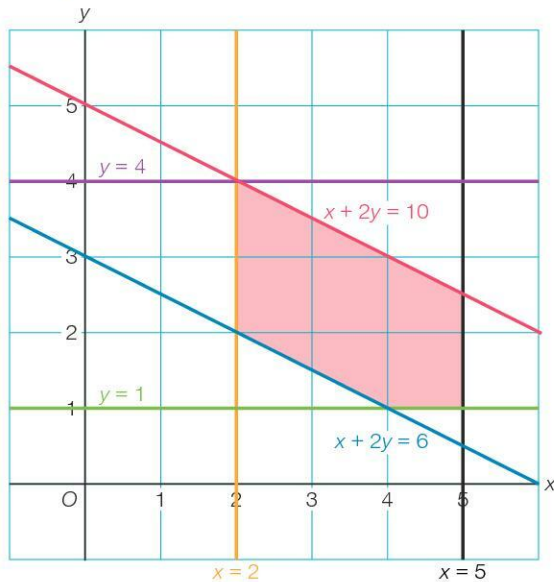
- b** Tussen de lijnen $x = 2$ en $x = 5$ en ook tussen de lijnen $y = 1$ en $y = 4$ en ook tussen de lijnen $x + 2y = 6$ en $x + 2y = 10$.

De lijn $x + 2y = 6$.

x	0	6
y	3	0

De lijn $x + 2y = 10$.

x	0	6
y	5	2



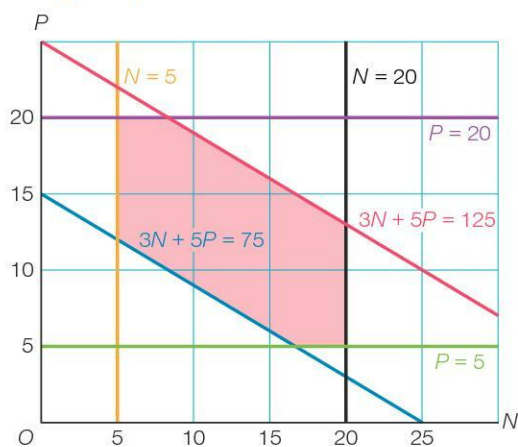
- 14** Tussen de lijnen $N = 5$ en $N = 20$ en ook tussen de lijnen $P = 5$ en $P = 20$ en ook tussen de lijnen $3N + 5P = 75$ en $3N + 5P = 125$.

De lijn $3N + 5P = 75$.

N	0	25
P	15	0

De lijn $3N + 5P = 125$.

N	0	25
P	25	10



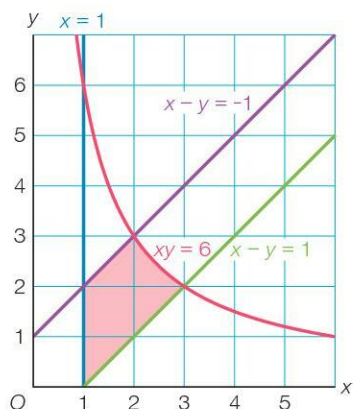
- 15** De lijn door $(30, 0)$ en $(0, 30)$ is de lijn $K + L = 30$.
 Verder is de lijn $K = 40$ getekend.
 Tussen de lijnen $K - 2L = 0$ en $K - 2L = 40$, dus $0 \leq K - 2L \leq 40$.
 Links van de lijn $K = 40$, dus $K \leq 40$.
 Boven de lijn $K + L = 30$, dus $K + L \geq 30$.

- 16** $xy \leq 6$, dus onder de kromme $xy = 6$, want bij invullen van $x = 0$ en $y = 0$ klopt het. Verder rechts van de lijn $x = 1$ en tussen de lijnen $x - y = -1$ en $x - y = 1$. De lijn $x - y = -1$.

x	0	3
y	1	4

De lijn $x - y = 1$.

x	1	3
y	0	2



- 17 a** Maximaal 40 bomen, dus $B + E \leq 40$.
Minimaal 10 en ten hoogste 25 eiken, dus $10 \leq E \leq 25$.
Minstens evenveel eiken als beuken, dus $E \geq B$.
Het aantal beuken is minstens 0, dus $B \geq 0$.

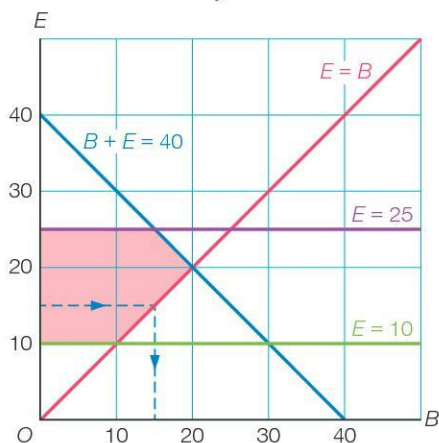
b De lijn $B + E = 40$.

B	0	40
E	40	0

$(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 \leq 40$; dit klopt.

Dus je moet het halfvlak met rand hebben waar $(0, 0)$ in ligt.

Verder tussen de lijnen $E = 10$ en $E = 25$, boven de lijn $E = B$ en rechts van de E -as.



- c** Zie het gebied van vraag b.
 $E = 15$ en $E \geq B$ geeft $15 \geq B$.
Als men 15 eiken plant kan men nog hoogstens 15 beuken planten.

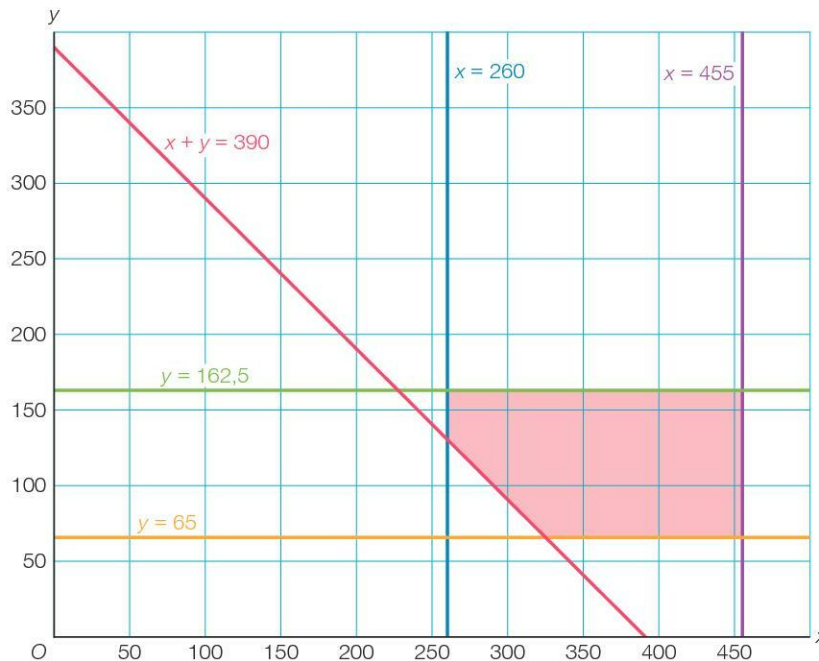
Bladzijde 110

- 18 a** aantal kcal = $275 \cdot 4 + 150 \cdot 4 + 100 \cdot 9 = 2600$
b Koolhydraten $275 \cdot 4 = 1100$, dus tussen 1040 en 1820 en voldoet daarmee aan het advies.
Eiwitten $150 \cdot 4 = 600$, dus tussen 260 en 650 en voldoet daarmee aan het advies.
Vetten $100 \cdot 9 = 900$, dus minder dan 1040 en voldoet daarmee aan het advies.

- c** Per gram koolhydraten is de energie 4 kcal, dus per x gram koolhydraten is de energie $4x$ kcal en dat moet tussen 1040 en 1820 liggen.
Per gram eiwitten is de energie 4 kcal, dus per y gram eiwitten is de energie $4y$ kcal en dat moet tussen 260 en 650 liggen.

Bladzijde 111

- d** Er geldt $4x + 4y + 9z = 2600$ en hieruit volgt dat $9z = 2600 - 4x - 4y$.
e Er moet gelden dat $9z \leq 1040$ en omdat $9z = 2600 - 4x - 4y$ geldt dat $2600 - 4x - 4y \leq 1040$.
f Uit $1040 \leq 4x \leq 1820$ volgt $260 \leq x \leq 455$, dus tussen de lijnen $x = 260$ en $x = 455$.
Uit $260 \leq 4y \leq 650$ volgt $65 \leq y \leq 162,5$, dus tussen de lijnen $y = 65$ en $y = 162,5$.
Uit $2600 - 4x - 4y = 1040$ volgt $-4x - 4y = -1560$ oftewel $x + y = 390$.
(0, 0) invullen in $2600 - 4x - 4y \leq 1040$ geeft $2600 \leq 1040$; dit klopt niet.
Dus je moet het halfvlak met rand hebben waar (0, 0) niet in ligt.



- g** 110 gram vet en 150 gram eiwit is samen $110 \cdot 9 + 150 \cdot 4 = 1590$ kcal.
 $2600 - 1590 = 1010$, dus ze moet $\frac{1010}{4} = 252,5$ gram koolhydraten binnenkrijgen.
Dus $x = 252,5$ en $y = 150$.
Het punt $(252,5; 150)$ ligt niet in het gebied, dus ze volgt de adviezen hiermee niet op.
h Dus x zo klein mogelijk en y zo groot mogelijk.
Zie de figuur: hierbij hoort het punt $(260; 162,5)$.
Invullen van $x = 260$ en $y = 162,5$ in $9z = 2600 - 4x - 4y$ geeft
 $9z = 2600 - 4 \cdot 260 - 4 \cdot 162,5 = 910$, dus $z \approx 101$.
Ze moet 260 gram koolhydraten, 162,5 gram eiwitten en ongeveer 101 gram vetten binnen krijgen.

11.2 Herleiden en combineren van formules

Bladzijde 113

- 19 a** $3(x - 5) + 4(y - 3) = 5$
 $3x - 15 + 4y - 12 = 5$
 $4y = -3x + 32$
 $y = -0,75x + 8$
- b** $A = 60 \cdot \frac{x+1}{3} \cdot \frac{x-2}{20}$
 $A = \frac{60}{3 \cdot 20} \cdot (x+1)(x-2)$
 $A = x^2 - 2x + x - 2$
 $A = x^2 - x - 2$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad D &= 0,25\sqrt{F} \\ 0,25\sqrt{F} &= D \\ \sqrt{F} &= 4D \\ F &= (4D)^2 \\ F &= 16D^2 \end{aligned}$$

Bladzijde 115

$$\begin{aligned} 20 \quad \text{a} \quad K &= 36 \cdot \frac{5-3x}{4,5} - 12 \\ K &= \frac{36}{4,5} \cdot (5-3x) - 12 \\ K &= 8(5-3x) - 12 \\ K &= 40 - 24x - 12 \\ K &= -24x + 28 \\ \text{b} \quad K &= 5 + \frac{8}{q} \\ \frac{8}{q} &= K - 5 \\ q &= \frac{8}{K-5} \\ \text{c} \quad 2 + \frac{y}{x+3} &= 7 \\ \frac{y}{x+3} &= 5 \\ \frac{y}{x+3} &= \frac{5}{1} \\ y &= 5(x+3) \\ y &= 5x + 15 \end{aligned}$$

Bladzijde 116

$$\begin{aligned} 21 \quad \text{a} \quad M &= \frac{5}{t} - 3t = \frac{5}{t} - \frac{3t \cdot t}{t} = \frac{5-3t^2}{t} \\ \text{b} \quad R &= \frac{0,5q^2 - 2q + 5}{q} + q - 1 = \frac{0,5q^2}{q} - \frac{2q}{q} + \frac{5}{q} + q - 1 = 0,5q - 2 + \frac{5}{q} + q - 1 = 1,5q - 3 + \frac{5}{q} \\ \text{c} \quad T &= \frac{6p}{p-2} \cdot (p+2) \cdot \frac{1}{3} = \frac{6p \cdot (p+2) \cdot \frac{1}{3}}{p-2} = \frac{2p(p+2)}{p-2} = \frac{2p^2 + 4p}{p-2} \\ \text{d} \quad N &= \frac{3t^{-1,12}}{2t} \cdot t^{3,15} = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^{-1,12} \cdot t^{3,15}}{t} = 1,5 \cdot \frac{t^{2,03}}{t^1} = 1,5t^{1,03} \\ 22 \quad \text{a} \quad P &= 20 + \frac{3-2t}{5} \cdot 35 \\ P &= 20 + \frac{35}{5} \cdot (3-2t) \\ P &= 20 + 7(3-2t) \\ P &= 20 + 21 - 14t \\ P &= -14t + 41 \\ \text{b} \quad 2(x-5) - 3(y+1) &= 15 \\ 2x - 10 - 3y - 3 &= 15 \\ 2x &= 3y + 28 \\ x &= 1,5y + 14 \\ \text{c} \quad N &= \frac{423}{5 \cdot 1,3^t} = \frac{423}{5} \cdot 1,3^{-t} = \frac{423}{5} \cdot (1,3^{-1})^t \approx 84,6 \cdot 0,769^t \\ \text{Dus } N &= 84,6 \cdot 0,769^t. \\ \text{d} \quad 3\left(\frac{2}{3}L - 8\right) + 4K &= 6(2-L) \\ 2L - 24 + 4K &= 12 - 6L \\ 8L &= -4K + 36 \\ L &= -\frac{1}{2}K + 4\frac{1}{2} \end{aligned}$$

23 a $\frac{y}{5} = \frac{4x+7}{4}$
 $5(4x+7) = 4y$
 $20x + 35 = 4y$
 $20x = 4y - 35$
 $x = 0,2y - 1,75$

b $F = \frac{100}{6+5K}$
 $6+5K = \frac{100}{F}$
 $5K = \frac{100}{F} - 6$
 $K = \frac{20}{F} - 1,2$

c $A \cdot \left(2 - \frac{x}{50}\right) = 1$
 $2 - \frac{x}{50} = \frac{1}{A}$
 $-\frac{x}{50} = -2 + \frac{1}{A}$
 $x = 100 - \frac{50}{A}$

d $C = 6x^{1,12} \cdot \frac{4x^{2,05}}{3x} = \frac{6 \cdot 4}{3} \cdot \frac{x^{1,12} \cdot x^{2,05}}{x} = 8 \cdot \frac{x^{3,17}}{x^1} = 8x^{2,17}$
Dus $a = 8$ en $b = 2,17$.

24 a $M = \frac{1}{3} \cdot \frac{2t+1}{5} \cdot \frac{6}{t+1} = \frac{6}{3} \cdot \frac{2t+1}{5(t+1)} = \frac{2(2t+1)}{5(t+1)} = \frac{4t+2}{5t+5}$

b $N = \frac{5}{t+1} - \frac{4}{t+2} = \frac{5(t+2)}{(t+1)(t+2)} - \frac{4(t+1)}{(t+1)(t+2)} = \frac{5(t+2) - 4(t+1)}{(t+1)(t+2)} = \frac{5t+10-4t-4}{(t+1)(t+2)} = \frac{t+6}{(t+1)(t+2)}$

c $P = \frac{(5,1x^{1,6})^4}{27x^{1,7}} = \frac{5,1^4 \cdot (x^{1,6})^4}{27x^{1,7}} = \frac{5,1^4}{27} \cdot \frac{x^{6,4}}{x^{1,7}} \approx 25 \cdot x^{4,7}$
Dus $P = 25x^{4,7}$.

d $Q = 12,5\sqrt{\frac{y}{16}}$
 $12,5\sqrt{\frac{y}{16}} = Q$
 $\sqrt{\frac{y}{16}} = 0,08Q$
 $\frac{y}{16} = (0,08Q)^2$
 $y = 16 \cdot 0,08^2 \cdot Q^2$
 $y = 0,1024Q^2$

Bladzijde 117

25 a $K = 51 \cdot \frac{x^2+2x}{6} - 15 = \frac{51}{6} \cdot (x^2+2x) - 15 = 8,5(x^2+2x) - 15 = 8,5x^2 + 17x - 15$

b $8 - \frac{2y}{x+6} = x$
 $-\frac{2y}{x+6} = x - 8$
 $-2y = (x-8)(x+6)$
 $-2y = x^2 + 6x - 8x - 48$
 $-2y = x^2 - 2x - 48$
 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 24$

$$\text{c } F = \frac{2}{5} \cdot \frac{1-3q}{16} : \frac{1-2q}{10} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1-3q}{16} \cdot \frac{10}{1-2q} = \frac{20(1-3q)}{80(1-2q)} = \frac{1-3q}{4(1-2q)} = \frac{1-3q}{4-8q} = \frac{3q-1}{8q-4}$$

Dus $a = -1$ en $b = -4$.

$$\text{d } G = \frac{(25x^{1,1})^{1,5}}{x^{2,65}} - \frac{25}{x} = \frac{25^{1,5} \cdot (x^{1,1})^{1,5}}{x^{2,65}} - \frac{25}{x} = \frac{125x^{1,65}}{x^{2,65}} - \frac{25}{x^1} = 125x^{-1} - 25x^{-1} = 100x^{-1}$$

Dus $a = 100$ en $b = -1$.

26 a $P = \sqrt{30Q} - \sqrt{5Q} = \sqrt{30} \cdot \sqrt{Q} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{Q} = 5,477... \sqrt{Q} - 2,236... \sqrt{Q} \approx 3,24 \sqrt{Q}$
Dus $P = 3,24 \sqrt{Q}$.

b $N = 6$ invullen geeft $\frac{5x}{3y-2} = 6$
 $5x = 6(3y-2)$
 $5x = 18y - 12$
 $x = 3,6y - 2,4$

c $\frac{4A}{3(2t-20)} = 16$

$$\frac{4A}{3(2t-20)} = \frac{16}{1}$$

$$4A = 48(2t-20)$$

$$4A = 96t - 960$$

$$A = 24t - 240$$

d $A = \frac{(2x^{1,4})^{-3}}{(3x^{1,4})^{-2}} = \frac{2^{-3} \cdot (x^{1,4})^{-3}}{3^{-2} \cdot (x^{1,4})^{-2}} = \frac{2^{-3}}{3^{-2}} \cdot \frac{x^{-4,2}}{x^{-2,8}} = 1,125 \cdot x^{-1,4}$
Dus $A = 1,125x^{-1,4}$.

e $N = \frac{3}{50 \cdot 0,6^t} = \frac{3}{50} \cdot 0,6^{-t} = \frac{3}{50} \cdot (0,6^{-1})^t \approx 0,06 \cdot 1,667^t$
Dus $N = 0,06 \cdot 1,667^t$.

27 a $H = \frac{5pq}{12(6-r)}$ met $H = 15$ en $q = 6$ geeft $\frac{5p \cdot 6}{12(6-r)} = 15$
 $30p = 15 \cdot 12(6-r)$
 $30p = 180(6-r)$
 $p = 6(6-r)$
 $p = 36 - 6r$

Dus $p = -6r + 36$.

b $L = t^2 \cdot \frac{5-x}{5y} + 6$ met $L = 16$ en $t = 5$ geeft $5^2 \cdot \frac{5-x}{5y} + 6 = 16$

$$\frac{25}{5} \cdot \frac{5-x}{y} = 10$$

$$5 \cdot \frac{5-x}{y} = 10$$

$$\frac{5-x}{y} = 2$$

$$2y = 5-x$$

$$y = 2,5 - 0,5x$$

Dus $y = -0,5x + 2,5$.

c $1,5A = 6 - 0,6\sqrt{B-1}$

$$0,6\sqrt{B-1} = 6 - 1,5A$$

$$\sqrt{B-1} = 10 - 2,5A$$

$$B-1 = (10 - 2,5A)^2$$

$$B = 1 + (10 - 2,5A)^2$$

d $F = \left(\frac{2}{p^{0,6}}\right)^3 - \frac{(4p^{1,6})^{1,5}}{(5p^{1,4})^3} = \frac{2^3}{(p^{0,6})^3} - \frac{4^{1,5} \cdot (p^{1,6})^{1,5}}{5^3 \cdot (p^{1,4})^3} = \frac{8}{p^{1,8}} - \frac{8 \cdot p^{2,4}}{125 \cdot p^{4,2}} = 8p^{-1,8} - 0,064p^{-1,8} = 7,936p^{-1,8}$

Dus $F = 7,936p^{-1,8}$.

28 a $Z = 8$ geeft $T = \frac{-2,1 \cdot 8 + 37}{18 \cdot 8} = 0,140... \text{ uur} = 8,41... \text{ minuten}$
 $Z = 6$ geeft $T = \frac{-2,1 \cdot 6 + 37}{18 \cdot 6} = 0,225... \text{ uur} = 13,55... \text{ minuten}$
 Het scheelt $13,55... - 8,41... \approx 5$ minuten.

b $T = \frac{-2,1Z + 37}{18Z} = \frac{-2,1Z}{18Z} + \frac{37}{18Z} \approx -0,117 + \frac{2,056}{Z}$
 Dus $a = -0,117$ en $b = 2,056$.

Bladzijde 118

29 a $Q = 4P + 1$ invullen bij $A = 3,5P - 0,8Q + 4$ geeft
 $A = 3,5P - 0,8(4P + 1) + 4$
 $A = 3,5P - 3,2P - 0,8 + 4$
 $A = 0,3P + 3,2$

b $y = x - 2$ invullen bij $B = 2,8x^2 + 4,1xy + y^2$ geeft
 $B = 2,8x^2 + 4,1x(x - 2) + (x - 2)^2$
 $B = 2,8x^2 + 4,1x^2 - 8,2x + (x - 2)(x - 2)$
 $B = 6,9x^2 - 8,2x + x^2 - 2x - 2x + 4$
 $B = 7,9x^2 - 12,2x + 4$

c $m = 2n - 1$
 $-2n = -m - 1$
 $n = 0,5m + 0,5$
 $C = 3m + 4n + 5$ } $C = 3m + 4(0,5m + 0,5) + 5$
 $C = 3m + 2m + 2 + 5$
 $C = 5m + 7$

Alternatieve uitwerking:

Uit $m = 2n - 1$ volgt $2n = m + 1$, dus $4n = 2m + 2$

$4n = 2m + 2$ invullen bij $C = 3m + 4n + 5$ geeft $C = 3m + 2m + 2 + 5 = 5m + 7$.

Bladzijde 119

30 Er geldt $z = 1000y$, dus $y = 0,001z$.
 $K = 0,89 \cdot 0,001z + 45 = 0,00089z + 45$
 Dus $K = 0,00089z + 45$.

31 a $5m - 2n = 10$
 $-2n = -5m + 10$
 $n = 2,5m - 5$
 $A = m^2 - 4mn + 8n$ } $A = m^2 - 4m \cdot (2,5m - 5) + 8 \cdot (2,5m - 5)$
 $A = m^2 - 10m^2 + 20m + 20m - 40$
 $A = -9m^2 + 40m - 40$

b $p = (\frac{1}{6})^t = (6^{-1})^t = 6^{-t}$ invullen bij $N = \frac{36}{p} = \frac{6^2}{p}$ geeft $N = \frac{6^2}{6^{-t}} = 6^2 \cdot 6^t = 6^{2+t} = 6^{t+2}$.

c $k = 3^t - 3$ invullen bij $T = \frac{k}{k+3}$ geeft
 $T = \frac{3^t - 3}{3^t - 3 + 3} = \frac{3^t - 3}{3^t} = \frac{3^t}{3^t} - \frac{3^1}{3^t} = 1 - 3^1 \cdot 3^{-t} = 1 - 3^{1-t}$.

d $p = 3,12^{0,1x}$ invullen bij $F = 20 - \frac{5}{p}$ geeft
 $F = 20 - \frac{5}{3,12^{0,1x}} = 20 - 5 \cdot 3,12^{-0,1x} = 20 - 5 \cdot (3,12^{-0,1})^x \approx 20 - 5 \cdot 0,89^x$.
 Dus $F = 20 - 5 \cdot 0,89^x$.

32 a $t = 7w$ invullen bij $L = 0,04t^2 - t + 31$ geeft
 $L = 0,04 \cdot (7w)^2 - 7w + 31 = 0,04 \cdot 7^2 \cdot w^2 - 7w + 31 = 1,96w^2 - 7w + 31$.
 Dus $L = 1,96w^2 - 7w + 31$.

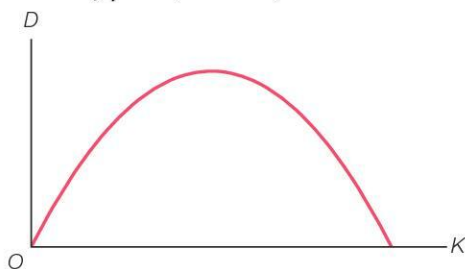
b $L = \frac{1}{2,54} \cdot l$ invullen bij $L = 0,04t^2 - t + 31$ geeft $\frac{1}{2,54} \cdot l = 0,04t^2 - t + 31$
 $l = 0,1016t^2 - 2,54t + 78,74$
 Dus $l = 0,10t^2 - 2,54t + 78,74$.

Bladzijde 120

- 33 a** Bij $C = \frac{F-32}{1,8}$ het linker- en rechterlid vermenigvuldigen met 1,8 geeft $1,8C = F - 32$, dus $F = 1,8C + 32$.
- b** Bij 1 februari hoort $m = 1$ en bij 1 april hoort $m = 3$.
 $m = 1$ geeft $F = 0,252 \cdot 1^2 - 3,06 \cdot 1 + 84,2 = 81,392$ en $C = \frac{81,392 - 32}{1,8} = 27,44$.
 $m = 3$ geeft $F = 0,252 \cdot 3^2 - 3,06 \cdot 3 + 84,2 = 77,288$ en $C = \frac{77,288 - 32}{1,8} = 25,16$.
 De temperatuur neemt met $27,44 - 25,16 \approx 2,3^\circ\text{C}$ af.
- c** Voer in $y_1 = 0,252x^2 - 3,06x + 84,2$.
 De optie minimum geeft $y = 74,91\dots$
 Dus de minimale temperatuur is $74,9^\circ\text{F}$, oftewel $\frac{74,91\dots - 32}{1,8} \approx 23,8^\circ\text{C}$.
- d** In de formule F vervangen door $1,8C + 32$ geeft $1,8C + 32 = 0,252m^2 - 3,06m + 84,2$
 $1,8C = 0,252m^2 - 3,06m + 52,2$
 $C = 0,14m^2 - 1,7m + 29$
- e** In de formule m vervangen door $\frac{12}{52}w = \frac{3}{13}w$ geeft $C = 0,14 \cdot \left(\frac{3}{13}w\right)^2 - 1,7 \cdot \frac{3}{13}w + 29$
 $C = 0,14 \cdot 0,053\dots w^2 - 0,392\dots w + 29$
 $C \approx 0,0075w^2 - 0,39w + 29$
 Dus $C = 0,0075w^2 - 0,39w + 29$.
- f** In de formule w vervangen door $\frac{1}{7}d$ geeft $C = 0,0075 \cdot \left(\frac{1}{7}d\right)^2 - 0,39 \cdot \frac{1}{7}d + 29$
 $C = 0,0075 \cdot \frac{1}{49}d^2 - 0,39 \cdot \frac{1}{7}d + 29$
 $C \approx 1,53 \cdot 10^{-4}d^2 - 5,57 \cdot 10^{-2}d + 29$
 Dus $a = 1,53 \cdot 10^{-4}$ en $b = 5,57 \cdot 10^{-2}$.
- g** Voer in $y_1 = 1,53 \cdot 10^{-4}x^2 - 5,57 \cdot 10^{-2}x + 29$.
 De optie minimum geeft $x = 182,02\dots$
 Dus voor $d \approx 182$ is de temperatuur van het zeewater minimaal.

Bladzijde 121

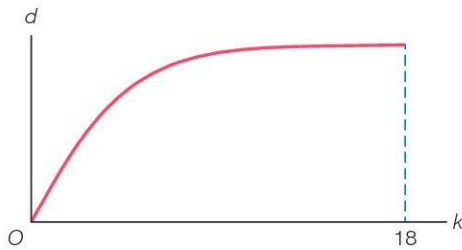
- 34 a** $K = 0,8$ geeft $V = 1,3\left(1 - \frac{0,8}{5,2}\right) = 1,1 \text{ m/s} = 3,96 \text{ km/uur}$
- b** $V = 1,3\left(1 - \frac{K}{5,2}\right)$ invullen bij $D = V \cdot K$ geeft
 $D = 1,3\left(1 - \frac{K}{5,2}\right) \cdot K = 1,3K \cdot \left(1 - \frac{K}{5,2}\right) = 1,3K - 0,25K^2 = -0,25K^2 + 1,3K$.
 Voer in $y_1 = -0,25x^2 + 1,3x$.



- c** De optie maximum geeft $x = 2,6$ en $y = 1,69$.
 De doorstroming is maximaal bij 2,6 mensen per m^2 .
- d** $b = 0,61k$ invullen bij $t = 0,95 + 0,24b$ geeft
 $t = 0,95 + 0,24 \cdot 0,61k = 0,95 + 0,1464k \approx 0,95 + 0,15k$.
 Dus $t = 0,95 + 0,15k$.
- e** $k = 10$ geeft $t = 0,95 + 0,15 \cdot 10 = 2,45$ en $v = \frac{1,6 + 0,4 \cdot 10 \cdot 0,8^{10}}{2,45}$
 $= 0,828\dots \text{ cm/seconde} \approx 50 \text{ cm/minuut}$.

$$f \quad d = v \cdot k = \frac{1,6 + 0,4k \cdot 0,8^k}{0,95 + 0,15k} \cdot k$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{(1,6 + 0,4x \cdot 0,8^x)}{0,95 + 0,15x} \cdot x.$$



g Zie de grafiek. De doorstroming is maximaal bij 18 mieren per cm^2 .

h Bij grotere drukte neemt bij mieren de doorstroming nog steeds toe, maar bij mensen neemt de doorstroming af en wordt zelfs nul bij grote drukte.

11.3 Evenredigheden

Bladzijde 123

- 35 a y wordt bij situatie I dan 4 keer zo groot.
 y wordt bij situatie II dan gedeeld door 4.
 b In situatie I.

Bladzijde 124

- 36 a $q \cdot p = 2600$ en $p = \frac{2600}{q}$
 b $p = 2,70$ geeft $q = \frac{2600}{2,70} \approx 962,96$
 De dagelijkse verkoop is 963 stuks.
 c $p = \frac{2600}{q}$ met $q = 550$ geeft $p = \frac{2600}{550} \approx 4,73$
 De prijs is €4,73.

- 37 a recht evenredig
 b omgekeerd evenredig
 c omgekeerd evenredig
 d recht evenredig
 e omgekeerd evenredig

Bladzijde 125

- 38 a q is omgekeerd evenredig met p , dus $q = \frac{a}{p}$.

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{a}{p} \\ p = 40,50 \text{ en } q = 6480 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{40,50} = 6480 \\ a = 6480 \cdot 40,50 = 262\,440 \end{array}$$

 Dus $q = \frac{262\,440}{p}$.
 b $p = 25$ geeft $q = \frac{262\,440}{25} = 10\,497,6$
 De maandelijkse verkoop is 10498 stuks.
 c Los op $\frac{262\,440}{p} = 5600$ oftewel $\frac{262\,440}{p} = \frac{5600}{1}$

$$5600p = 262\,440$$

$$p \approx 46,86$$

 De prijs is €46,86.

- 39 a** T is omgekeerd evenredig met d , dus $T = \frac{a}{d}$.

$$\left. \begin{array}{l} T = \frac{a}{d} \\ d = 2,5 \text{ en } T = 1,6 \end{array} \right\} \frac{a}{2,5} = 1,6$$

$$a = 1,6 \cdot 2,5 = 4$$

Dus $T = \frac{4}{d}$.

- b** $d = 4,835$ geeft $T = \frac{4}{4,835} \approx 0,8$

De temperatuur is $0,8^\circ\text{C}$.

- c** Los op $\frac{4}{d} = 1,4$ oftewel $\frac{4}{d} = \frac{1,4}{1}$
- $$1,4d = 4$$
- $$d \approx 2,857$$

Op een diepte van ongeveer 2900 meter.

- 40 a** $B = aW$
 $W = 360\,000$ en $B = 450$ $\left\{ \begin{array}{l} a \cdot 360\,000 = 450 \\ a = 0,00125 \end{array} \right.$

Dus $B = 0,00125W$.

- b** $B = 525$ geeft $0,00125W = 525$
- $$W = 420\,000$$

De waarde van hun woning is 420 000 euro.

- c** $0,4\%$ is 820 000, dus 100% is $\frac{100}{0,4} \cdot 820\,000 = 205\,000\,000$.

$$B = 0,00125 \cdot 205\,000\,000 = 256\,250$$

De totale jaarlijkse inkomsten zijn 256 250 euro.

- 41** K zijn de kosten in euro's en A is de oppervlakte in m^2 .
 K is evenredig met A , dus $K = a \cdot A$.

$$\left. \begin{array}{l} K = a \cdot A \\ A = 120\,000 \text{ en } K = 288\,000 \end{array} \right\} \frac{a \cdot 120\,000}{120\,000} = \frac{288\,000}{120\,000}$$

$$a = 2,4$$

Dus $K = 2,4A$.

$$K = 1536 \text{ geeft } 2,4A = 1536$$

$$A = 640$$

De oppervlakte van die kavel is 640 m^2 .

Bladzijde 126

- 42 a** p is omgekeerd evenredig met t , dus $p = \frac{a}{t}$.

$$\left. \begin{array}{l} p = \frac{a}{t} \\ t = 3 \text{ en } p = 38 \end{array} \right\} \frac{a}{3} = 38$$

$$a = 38 \cdot 3 = 114$$

Dus $p = \frac{114}{t}$.

- b** $t = 5,5$ geeft $p = \frac{114}{5,5} \approx 20,7$

Na 5,5 jaar is nog 20,7% van de olie aanwezig.

- c** Los op $\frac{114}{t} = 5$ oftewel $\frac{114}{t} = \frac{5}{1}$
- $$5t = 114$$
- $$t = 22,8$$

Het duurt 22,8 jaar.

43 Er geldt $\frac{10,2}{3} = \frac{17}{5} = \frac{30,6}{9} = \frac{40,8}{12} = \frac{51}{15} = 3,4$.

Dus tussen y_1 en x bestaat een evenredig verband.

De formule is $y_1 = 3,4x$.

Er geldt $3 \cdot 150 = 5 \cdot 90 = 9 \cdot 50 = 12 \cdot 37,5 = 15 \cdot 30 = 450$.

Dus tussen y_2 en x bestaat een omgekeerd evenredig verband.

De formule is $y_2 = \frac{450}{x}$.

Er geldt $\frac{\Delta y_3}{\Delta x} = \frac{15 - 17}{5 - 3} = \frac{11 - 15}{9 - 5} = \frac{8 - 11}{12 - 9} = \frac{5 - 8}{15 - 12} = -1$.

Dus tussen y_3 en x bestaat een lineair verband.

$$\left. \begin{array}{l} y_3 = -x + b \\ x = 3 \text{ en } y_3 = 17 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 + b = 17 \\ b = 20 \end{array}$$

De formule is $y_3 = -x + 20$.

44 a In 3 liter zit 950 mL alcohol, dat is $\frac{950}{3000} \times 100\% \approx 31,7\%$.

b In 2000 mL zit 950 mL alcohol, dus $c = \frac{950}{2000} \times 100\% = 47,5\%$.

c Bij omgekeerd evenredig moet $c \cdot V$ constant zijn.

Bij a geldt $31,66\% \cdot 3000 = 95000$.

Bij b geldt $47,5 \cdot 2000 = 95000$.

Dus het klopt met de antwoorden van a en b.

d Er geldt $c \cdot V = 95000$ en $c = 70$, dus $70V = 95000$ en dit geeft $V \approx 1357$.

Hij moet 1000 mL alcohol van 95% aanvullen tot 1357 mL.

e $c \cdot V$ is constant

$c = 0,2$ en $V = 500$ geeft $0,2 \cdot 500 = 100$

$c \cdot V = 100$ en $c = 3$ geeft $3V = 100$

$V \approx 33,3$

Hij moet 33,3 mL aanvullen met water.

Bladzijde 127

45 Bij het langzame schema hoort een tijdsduur van 5 uur en 15 minuten = $5\frac{1}{4}$ uur.

De werkelijke tijdsduur is 4 uur en 40 minuten = $4\frac{2}{3}$ uur.

Bij een vaste afstand is de snelheid omgekeerd evenredig met de tijd, dus voor de etappe

geldt $5\frac{1}{4} \cdot 42 = 220,5$ km. De werkelijke snelheid is dus $\frac{220,5}{4\frac{2}{3}} = 47,25$ km/uur.

Dus in de etappe is met een gemiddelde snelheid van 47,25 km/uur gereden.

46 a De tijd over de eerste 10 km is 40 minuten 25 seconden = $\frac{40}{60} + \frac{25}{60 \cdot 60}$ uur $\approx 0,67361$ uur.

De gemiddelde snelheid over de eerste 10 km is $\frac{10 \text{ km}}{0,67361 \text{ uur}} \approx 14,845$ km/uur.

De gemiddelde snelheid over de eerste 20 km is $\frac{20 \text{ km}}{1 + \frac{21}{60} + \frac{8}{60 \cdot 60}} \text{ uur} \approx 14,790$ km/uur.

De gemiddelde snelheid over de eerste 30 km is $\frac{30 \text{ km}}{2 + \frac{1}{60} + \frac{36}{60 \cdot 60}} \text{ uur} \approx 14,803$ km/uur.

- b** De gemiddelde snelheid over de eerste 40 km is $\frac{40 \text{ km}}{2 + \frac{41}{60} + \frac{42}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,842 \text{ km/uur}$.
- De gemiddelde snelheid over de eerste 50 km is $\frac{50 \text{ km}}{3 + \frac{22}{60} + \frac{3}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,848 \text{ km/uur}$.
- De gemiddelde snelheid over de eerste 60 km is $\frac{60 \text{ km}}{4 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,825 \text{ km/uur}$.
- De gemiddelde snelheid over de eerste 70 km is $\frac{70 \text{ km}}{4 + \frac{44}{60} + \frac{26}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,766 \text{ km/uur}$.
- De gemiddelde snelheid over de eerste 80 km is $\frac{80 \text{ km}}{5 + \frac{27}{60} + \frac{44}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,646 \text{ km/uur}$.
- Dus het evenredige verband gaat op tot en met 70 kilometer.

11.4 Redeneren met formules

Bladzijde 129

- 47** Als x heel groot is, dan nadert y_1 tot nul.
 Als x heel groot is, nadert y_2 tot $0 + 5 = 5$. Dus y_2 wordt ongeveer 5.
 Als x heel groot is, nadert y_3 tot $0 - 8 = -8$. Dus y_3 wordt ongeveer -8.

Bladzijde 130

- 48 a** Als s heel groot wordt, nadert $\frac{150}{s}$ tot 0 en dan wordt $\frac{150}{s} + 20 \approx 20$.
 Dus de grenswaarde is 20.
- b** Als s toeneemt, dan neemt $\frac{150}{s}$ af. Dus ook $\frac{150}{s} + 20$ neemt af.
 De grafiek van A is dus dalend.
- c** Voer in $y_1 = \frac{150}{x} + 20$ en $y_1 = 24$.
 De optie snijpunt geeft $x = 37,5$, dus vanaf $s = 37,5$ is A kleiner dan 24.
- d** $s = 20$ geeft $A = 27,5$ en $s = 25$ geeft $A = 26$.
 De afname is 1,5, dat is $\frac{1,5}{27,5} \times 100\% \approx 5,5\%$.
- 49 a** Als q toeneemt, dan neemt $\frac{4000}{q}$ af. Dus ook $30 + \frac{4000}{q}$ neemt af.
 De grafiek van K is dus dalend.
 Bij een grotere productie worden de vaste kosten verdeeld over meer apparaten, daardoor nemen de kosten per apparaat af.
- b** $q = 500$ geeft $K = 38$ en $q = 600$ geeft $K \approx 36,67$.
 De afname is € 1,33, dat is $\frac{1,33}{38} \times 100\% \approx 3,5\%$.
- c** Als q heel groot wordt, nadert $\frac{4000}{q}$ tot 0 en dan nadert $30 + \frac{4000}{q}$ tot 30.
 Dus de grenswaarde is 30.
 Als er veel apparaten per dag worden gemaakt, dan naderen de kosten tot € 30,- per apparaat.
- d** Voer in $y_1 = 30 + \frac{4000}{x}$ en $y_1 = 45$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 266,7$.
 De productie moet 267 of meer apparaten per dag zijn.
- e** Ja, want € 30,50 is meer dan € 30,-.

- 50 a** Bij 2000 m^2 hoort $x = 2$.
 $x = 2$ geeft $K = 35$
 De jaarlijkse kosten zijn $2000 \cdot 35 = 70\,000$ euro.
- b** De oppervlakte is $3 \cdot 20 \cdot 40 = 2400 \text{ m}^2$.
 $x = 2,4$ geeft $K = 33,75$
 De jaarlijkse kosten zijn $2400 \cdot 33,75 = 81\,000$ euro.
- c** Voer in $y_1 = 27,5 + \frac{15}{x}$ en $y_2 = 29,5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 7,5$.
 De oppervlakte is dus minstens 7500 m^2 .
- d** Nee, voor een steeds grotere oppervlakte neemt alleen K , dus de kosten per m^2 af.
 Doordat de kosten per m^2 voor grote oppervlakten nooit minder dan $27,50$ euro zijn zullen de totale schoonmaakkosten toe blijven nemen met minstens $27,50$ euro per m^2 .
- e** $J = 1000x \cdot K = 1000x \cdot \left(27,5 + \frac{15}{x}\right) = 27\,500x + \frac{15\,000x}{x} = 27\,500x + 15\,000$
 Dus $a = 27\,500$ en $b = 15\,000$.

Bladzijde 131

- 51 a** y neemt toe
b y neemt af
c y neemt af
d y neemt toe

Bladzijde 132

- 52 a** $y = 5x^{-3} = \frac{5}{x^3}$

Als x toeneemt, dan neemt x^3 toe, dus $\frac{5}{x^3}$ neemt af.

De grafiek van y is dalend.

- b** Als x heel groot wordt, dan wordt $3x$ heel groot en dan wordt $3x + 1$ heel groot,
 dus dan nadert $\frac{20}{3x+1}$ tot 0 en dan wordt $100 - \frac{20}{3x+1} \approx 100 - 0 = 100$.

Dus de grenswaarde is 100.

Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 heel groot en dan wordt $x^2 + 1$ heel groot, dus dan nadert $\frac{10}{x^2+1}$ tot 0 en dan wordt $\frac{10}{x^2+1} - 5 \approx 0 - 5 = -5$.

Dus de grenswaarde is -5 .

Als x heel groot wordt, dan nadert $0,8^x$ tot 0, dus dan is $50 \cdot 0,8^x \approx 0$.

Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot.

Als x heel groot wordt, dan wordt van $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ de teller ongeveer nul en de noemer

heel groot, dus dan wordt $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}} \approx 0$.

De grenswaarde is 0.

Bladzijde 133

- 53 a** stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $\frac{100}{x}$ af, dus dan neemt $250 - \frac{100}{x}$ toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan nadert $\frac{100}{x}$ tot 0, dus dan wordt $250 - \frac{100}{x} \approx 250 - 0 = 250$. Dus de grenswaarde is 250.

b stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $0,98^x$ af en $100 \cdot 0,98^x$ neemt af.

Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe en $x^2 + 1$ neemt toe.

Van $\frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2 + 1}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2 + 1}$ neemt af.

Dus de grafiek is dalend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan nadert $0,98^x$ tot 0, dus dan wordt $100 \cdot 0,98^x \approx 0$.

Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 heel groot, dus dan wordt $x^2 + 1$ heel groot.

Als x heel groot wordt, dan wordt van $\frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2 + 1}$ de teller ongeveer nul en de

noemer heel groot, dus dan nadert $\frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2 + 1}$ tot 0.

De grenswaarde is 0.

c stijgen of dalen

Als t toeneemt, dan neemt $0,75^t$ af, dus dan neemt $3 \cdot 0,75^t$ af en daarom neemt $2 - 3 \cdot 0,75^t$ toe. Dus ook $1250(2 - 3 \cdot 0,75^t)$ neemt toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

grenswaarde

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,75^t$ tot 0, dus dan wordt $3 \cdot 0,75^t \approx 0$ en dan wordt $2 - 3 \cdot 0,75^t \approx 2 - 0 = 2$. Dus dan wordt $1250(2 - 3 \cdot 0,75^t) \approx 1250 \cdot 2 = 2500$.

De grenswaarde is 2500.

54 a stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe, dus dan neemt $\frac{12}{x^2}$ af en dan neemt $25 + \frac{12}{x^2}$ ook af.

Dus de grafiek van y is dalend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 heel groot, dus dan nadert $\frac{12}{x^2}$ tot 0 en dan wordt $25 + \frac{12}{x^2} \approx 25 + 0 = 25$.

De grenswaarde is 25.

b stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe, dus dan neemt $2 + \sqrt{x}$ toe en dan neemt $\frac{80}{2 + \sqrt{x}}$

dus af. Daarom neemt $40 - \frac{80}{2 + \sqrt{x}}$ toe.

De grafiek van y is stijgend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot, dus dan wordt $2 + \sqrt{x}$ heel groot en dan nadert $\frac{80}{2 + \sqrt{x}}$ tot 0. Dus dan wordt $40 - \frac{80}{2 + \sqrt{x}} \approx 40 - 0 = 40$.

De grenswaarde is 40.

c stijgen of dalen

Als t toeneemt, dan neemt $0,65^t$ af, dus dan neemt $333 \cdot 0,65^t$ af, dus ook

$250 + 333 \cdot 0,65^t$ neemt af. Daarom neemt $\frac{18000}{250 + 333 \cdot 0,65^t}$ toe.

De grafiek van N is stijgend.

grenswaarde

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,65^t$ tot 0, dus dan wordt $333 \cdot 0,65^t \approx 0$ en dan

wordt $250 + 333 \cdot 0,65^t \approx 250 + 0 = 250$. Dan wordt $\frac{18000}{250 + 333 \cdot 0,65^t} \approx \frac{18000}{250} = 72$.

De grenswaarde is 72.

- 55 a** Als x toeneemt, dan neemt $\frac{x}{22}$ toe, dus dan neemt $3 + \frac{x}{22}$ toe. Daarom neemt

$$x\left(3 + \frac{x}{22}\right) \text{ ook toe.}$$

De grafiek van A is stijgend.

- b** Als x toeneemt, dan neemt $x^{2,3}$ toe, dus dan neemt $x^{2,3} + 1$ toe.

Als x toeneemt, dan neemt $0,3^x$ af, dus dan neemt $20 \cdot 0,3^x$ af.

Van $\frac{x^{2,3} + 1}{20 \cdot 0,3^x}$ neemt de teller toe en de noemer af, dus $\frac{x^{2,3} + 1}{20 \cdot 0,3^x}$ neemt toe.

De grafiek van B is stijgend.

- 56 a** Als v toeneemt, dan neemt v^2 toe, dus dan neemt (bij gelijkblijvende f) ook $\frac{v^2}{25f}$ toe.

Dus als v toeneemt neemt L toe oftewel bij een hogere snelheid hoort een langere remweg.

- b** Hoe meer grip, hoe kleiner de remweg. Dus moet gelden hoe groter f hoe kleiner L en

dit klopt want als f toeneemt neemt $\frac{v^2}{25f}$ af.

- c** $f = 8$ invullen bij $L = \frac{v^2}{25f}$ geeft $L = \frac{v^2}{25 \cdot 8} = \frac{v^2}{200} = \frac{1}{200} \cdot v^2 = 0,005v^2$

Dus $L = 0,005v^2$.

- d** $v = 60$ invullen bij $L = \frac{v^2}{25f}$ geeft $L = \frac{60^2}{25f} = \frac{3600}{25f} = \frac{144}{f}$

Dus $b = 144$.

- e** $L = 38$ geeft $\frac{v^2}{25f} = 38$ oftewel $\frac{v^2}{25f} = \frac{38}{1}$
 $38 \cdot 25f = v^2$
 $950f = v^2$
 $f = \frac{v^2}{950}$

- f** Bij een snelheid van a km/uur is $L = \frac{a^2}{25f}$.

Bij een 20% hogere snelheid, dus bij $v = 1,2a$ is $L = \frac{(1,2a)^2}{25f} = \frac{1,44a^2}{25f} = 1,44 \cdot \frac{a^2}{25f}$.

Dus de lengte van de remweg neemt met 44% toe bij een 20% hogere snelheid.

Bladzijde 134

- 57** Voor de grote schildpad geldt $\frac{g}{\beta} = 0,17$.

Voor de kleine schildpad is l kleiner dan bij de grote, terwijl g gelijk is.

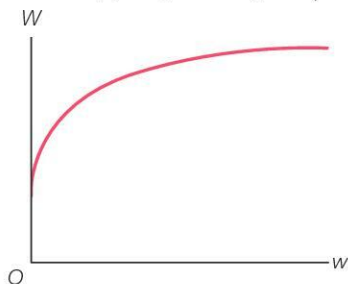
Dus de teller is gelijk en de noemer is kleiner, dus de breuk $\frac{g}{\beta}$ is groter. Dus voor de

kleine schildpad is $\frac{g}{\beta} > 0,17$, dus deze verkeert in voldoende conditie.

- 58 a** $T = 33$ en $G = 33 + (T - 33) \cdot W$ geeft $G = 33 + (33 - 33)W = 33 + 0W = 33$.

Dus bij een luchttemperatuur van 33°C is de gevoelstemperatuur 33°C ongeacht de windsnelheid.

- b** Voer in $y_1 = 0,474 + 0,454\sqrt{x} \cdot (1 - 0,1\sqrt{x})$.



De grafiek van W is afnemend stijgend.

- c Voor temperaturen rond het vriespunt geldt $T \approx 0$, dus dan is $T - 33$ negatief. De grafiek van G daalt dus als W toeneemt. Uit de schets blijkt dat W toeneemt als w toeneemt.
Dus de gevoelstemperatuur neemt af als de windsnelheid toeneemt.

11.5 Wiskundige modellen

Bladzijde 136

- 59 a $N = at + 10$ met $a = \frac{-3}{50} = -0,06$
Dus $N = -0,06t + 10$.
b $N = 10 \cdot g^t$ met $g_{50 \text{ jaar}} = \frac{7}{10}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{1}{50}} \approx 0,993$.
Dus $N = 10 \cdot 0,993^t$.

Bladzijde 137

- 60 a De formule is $W = 100 \cdot 0,983^t$.
 $t = 52$ invullen in de formule geeft $W = 100 \cdot 0,983^{52} \approx 41,00$.
Dit komt overeen met het exponentiële model.
b Voer in $y_1 = 100 \cdot 0,983^x$ en $y_2 = 25$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 80,85$.
Dus na 81 dagen.
c Bij de toename van t van 0 tot 8 is de afname van W gelijk aan 8.
Bij de toename van t van 8 tot 16 is de afname van W gelijk aan 6.
Omdat deze afnames niet gelijk zijn, hoort bij de tabel geen lineair model.

d

t in dagen	0	8	16	52
$W_1 = 100 \cdot 0,989^t$	100	91,5	83,8	56,3

t in dagen	0	8	16	52
$W_2 = 100 - 0,6t - 1,2\sqrt{t}$	100	91,8	85,6	60,1

Zie de tabellen. Het model W_2 past het beste bij de gegevens in de tabel.

Bladzijde 138

- 61 a $x = 10$ invullen in de formule geeft $h = -0,005 \cdot 10^2 + 0,4 \cdot 10 = 3,5$.
Dit komt overeen met de tabel.
 $x = 60$ invullen in de formule geeft $h = -0,005 \cdot 60^2 + 0,4 \cdot 60 = 6,0$.
Dit komt overeen met de tabel.
b Voer in $y_1 = -0,005x^2 + 0,4x$.
De optie maximum geeft $x = 40$ en $y = 8$.
De bal komt maximaal 8 meter hoog.
c De optie nulpunt geeft $x = 80$.
De bal komt 80 meter vanaf de afslag weer op de grond.
d Dat is bij $x = 55$. De formule geeft $h = 6,875$.
De afwijking is $7,0 - 6,875 = 0,125 \text{ m} = 12,5 \text{ cm}$.
- 62 a $t = 0$ invullen in de formule geeft $N = 0^3 - 8 \cdot 0 + 200 = 200$. Klopt.
 $t = 1$ invullen in de formule geeft $N = 1^3 - 8 \cdot 1 + 200 = 193$. Klopt, want dit is 7 minder dan 200.
6 september om 0:00 uur is $t = 5$.
 $t = 5$ invullen in de formule geeft $N = 5^3 - 8 \cdot 5 + 200 = 285$. Klopt.
7 september om 0:00 uur is $t = 6$.
 $t = 6$ invullen in de formule geeft $N = 6^3 - 8 \cdot 6 + 200 = 368$. Klopt.

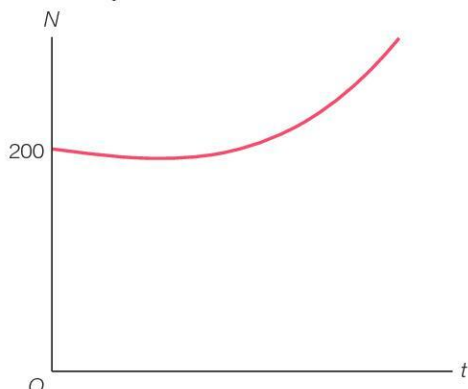
b

t	N
7	487
8	648
9	857

$\begin{matrix} \nearrow +161 \\ \nearrow +209 \end{matrix}$

Tussen $t = 8$ en $t = 9$, dat is op 9 september.

- c** Voer in $y_1 = x^3 - 8x + 200$.



De optie minimum geeft $x \approx 1,63$ en $y \approx 191$.
Het minimale aantal bacteriën is 191 miljoen.

Bladzijde 139

- 63 a** In de tabel zijn weliswaar gelijke afnamen van T te zien, maar dat is bij ongelijke toenames van t .
- b** $T = 80 \cdot 0,985^t + 20$
 $t = 0$ geeft $T = 100$
 $t = 9$ geeft $T \approx 89,8$
 $t = 19$ geeft $T \approx 80,0$
 $t = 31$ geeft $T \approx 70,0$
 $t = 46$ geeft $T \approx 59,9$
 $t = 65$ geeft $T \approx 50,0$
Dus het model klopt met de gegevens.
- c** $t = 60$ geeft $T \approx 52,3$.
Dus $52,3^\circ\text{C}$.
- d** Voer in $y_1 = 80 \cdot 0,985^x + 20$ en $y_2 = 40$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 91,7$.
Dus ongeveer 92 minuten.
- e** Als t heel groot wordt, nadert $0,985^t$ tot 0, dus dan wordt $80 \cdot 0,985^t \approx 0$ en dan wordt $80 \cdot 0,985^t + 20 \approx 0 + 20 = 20$.
De omgevingstemperatuur is 20°C .

- 64 a** Voer in $y_1 = -3,35x^3 + 132x^2 - 1240x + 5000$.
De optie minimum geeft $x \approx 6,12$ en $y \approx 1587$.
Dus het minimale aantal bezoekers in het model is 1587.
Het scheelt $1587 - 1450 = 137$ met het werkelijke minimum.
Dat is $\frac{137}{1450} \times 100\% \approx 9,4\%$.
- b** De optie maximum geeft $x = 20,143\dots$ en $y \approx 6201$.
De afwijking is $20,143\dots - 19 = 1,143\dots$ uur ≈ 69 minuten.

Bladzijde 140

- 65 a** Dat was een langzame tijd, want het punt dat erbij hoort ligt boven de lijn van het model.
- b** Dat was in 1968 met een tijd van 9,9 seconden.

c Los op $-0,0142t + 12,237 = 10$

$$-0,0142t = -2,237$$

$$t \approx 157,5$$

Omdat de Olympische Spelen om de vier jaar worden gehouden is dat in het jaar $1900 + 160 = 2060$.

d $M = at + b$

Bij $t = 40$ hoort $M = 10,4$ en bij $t = 104$ hoort $M = 9,8$.

$$a = \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{9,8 - 10,4}{104 - 40} = -0,009375$$

$$\begin{aligned} M &= -0,009375t + b \\ t = 40 \text{ en } M &= 10,4 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} -0,009375 \cdot 40 + b &= 10,4 \\ -0,375 + b &= 10,4 \\ b &= 10,775 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Dus } M = -0,009375t + 10,775.$$

e Los op $-0,009375t + 10,775 = -0,0142t + 12,237$

$$0,004825t = 1,462$$

$$t \approx 303$$

Dus in het jaar $1900 + 304 = 2204$.

Bij $t = 304$ hoort $V \approx 7,92$, dus een tijd van 7,92 seconden.

f 100 m in 10,54 seconden is $\frac{100}{10,54} \text{ m/s} = \frac{100}{10,54} \cdot 3,6 \approx 34,2 \text{ km/uur}$.

g Bij 2200 hoort $t = 300$.

$$t = 300 \text{ geeft } V = 7,977$$

$$100 \text{ m in } 7,977 \text{ seconden is } \frac{100}{7,977} \text{ m/s} = \frac{100}{7,977} \cdot 3,6 = 45,1 \text{ km/uur}.$$

Deze snelheid is menselijk onmogelijk, dus met deze lineaire modellen kun je geen voorspellingen doen die ver in de toekomst liggen.

Bladzijde 141

66 a $Q = \frac{a}{P^{1,5}}$ geeft $a = P^{1,5} \cdot Q$

$$P = 4 \text{ en } Q = 12,5 \text{ geeft } a = 4^{1,5} \cdot 12,5 = 100$$

b $Q = \frac{100}{P^{1,5}}$

$$P = 7 \text{ geeft } Q = 5,399... \approx 5,4 \text{ klopt}$$

$$P = 9 \text{ geeft } Q = 3,703... \approx 3,7 \text{ klopt}$$

$$P = 12 \text{ geeft } Q = 2,405... \approx 2,4 \text{ klopt}$$

Bladzijde 142

67 a $K = \frac{50}{t^c} \quad \left. \begin{aligned} t = 1 \text{ en } K &= 50 \end{aligned} \right\} \frac{50}{1^c} = 50$

omdat $1^c = 1$ voor elke waarde van c kun je hiermee c niet berekenen.

b $K = \frac{50}{t^c} \quad \left. \begin{aligned} t = 3 \text{ en } K &= 14,9 \end{aligned} \right\} \frac{50}{3^c} = 14,9$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{50}{3^x} \text{ en } y_2 = 14,9.$$

De optie snijpunt geeft $x = 1,101...$

Dus je krijgt ook $c = 1,1$.

c $t = 0$ en $F = 0$ invullen in $F = at^{1,75}$ geeft $a \cdot 0^{1,75} = 0$ en dit geeft $0 = 0$. Daarmee is a niet berekend.

d $t = 4$ en $F = 100$ invullen geeft $a \cdot 4^{1,75} = 100$, dus $a = \frac{100}{4^{1,75}} = 8,838...$

Afgerond op gehelen is nu ook $a = 9$.

- 68 a** Als L omgekeerd evenredig is met t , dan geldt $L = \frac{a}{t}$.

$t = 2$ en $L = 9$ geeft $\frac{a}{2} = 9$, dus $a = 18$.

$t = 3$ en $L = 4$ geeft $\frac{a}{3} = 4$, dus $a = 12$.

Niet dezelfde a , dus L is niet omgekeerd evenredig met t .

$$\text{b } \left. \begin{array}{l} L = \frac{36}{t^b} \\ t = 3 \text{ en } L = 4 \end{array} \right\} \frac{36}{3^b} = 4$$

Voer in $y_1 = \frac{36}{3^x}$ en $y_2 = 4$.

De optie snijpunt geeft $x = 2$.

Dus $b = 2$.

- 69 a** Als N evenredig is met t , dan geldt $N = at$.

$t = 4$ en $N = 94$ geeft $a \cdot 4 = 94$, dus $a = 23,5$.

$t = 9$ en $N = 195$ geeft $a \cdot 9 = 195$, dus $a \approx 21,7$.

Niet dezelfde a , dus N niet evenredig met t .

$$\text{b } \text{Op } [4, 9] \text{ is } \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{195 - 94}{9 - 4} = 20,2.$$

$$\text{Op } [9, 14] \text{ is } \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{290 - 195}{14 - 9} = 19.$$

Niet dezelfde $\frac{\Delta N}{\Delta t}$, dus geen lineair verband.

$$\text{c } \left. \begin{array}{l} N = 27t^b \\ t = 4 \text{ en } N = 94 \end{array} \right\} 27 \cdot 4^b = 94$$

Voer in $y_1 = 27 \cdot 4^x$ en $y_2 = 94$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,899\dots$

Dus $b = 0,9$.

- 70 a** $N = b \cdot g^t$ met $b = 10$ en $g_{20 \text{ jaar}} = \frac{8}{10}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{1}{20}} \approx 0,989$.

De formule is $N = 10 \cdot 0,989^t$.

Bij 2020 hoort $t = 50$.

$t = 50$ geeft $N = 10 \cdot 0,989^{50} \approx 5,75$

Dus het aantal wilde vogels zou 5,75 miljard zijn geweest.

$$\text{b } \left. \begin{array}{l} N_I = 6(1 + g^t) \\ t = 20 \text{ en } N = 8 \end{array} \right\} 6(1 + g^{20}) = 8$$

Voer in $y_1 = 6(1 + x^{20})$ en $y_2 = 8$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,947$.

Dus $g \approx 0,947$.

De formule is $N_I = 6(1 + 0,947^t)$.

$t = 50$ geeft $N_I = 6,39$

$$\left. \begin{array}{l} N_{II} = \frac{12,4}{t^b} \\ t = 20 \text{ en } N = 8 \end{array} \right\} \frac{12,4}{20^b} = 8$$

Voer in $y_1 = \frac{12,4}{20^x}$ en $y_2 = 8$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,146$.

Dus $b \approx 0,146$.

De formule is $N_{II} = \frac{12,4}{t^{0,146}}$.

$t = 50$ geeft $N_{II} \approx 7,00$

Het model $N_{II} = \frac{12,4}{t^{0,146}}$ klopt het beste voor 2020, want in 2020 is $N = 7$.

Bladzijde 143

$$71 \quad N = \frac{400}{1 + 20 \cdot g^t} \quad \left. \begin{array}{l} \\ t = 14 \text{ en } N = 230 \end{array} \right\} \frac{400}{1 + 20 \cdot g^{14}} = 230$$

Voer in $y_1 = \frac{400}{1 + 20 \cdot x^{14}}$ en $y_2 = 230$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,7901\dots$

Dus $g = 0,79$.

N.B.

De formule $N = \frac{400}{1 + 20 \cdot 0,79^t}$ geeft voor $t = 0$ dat $N \approx 19$, voor $t = 8$ dat $N \approx 99$ en voor $t = 19$ dat $N \approx 326$.

Dus $g = 0,79$ klopt ook voor de andere gegevens in de tabel.

- 72 a De formule die bij de vuistregel hoort is $m = 7h$.

Los op $30\sqrt{h} - 1,8h = 7h$.

Voer in $y_1 = 30\sqrt{x} - 1,8x$ en $y_2 = 7x$.

De optie snijpunt geeft $x = 11,62\dots$

De hondenleeftijd is 11,6 jaar.

- b De vraag is voor welke h een maximum optreedt bij

$V = 30\sqrt{h} - 1,8h - 7h = 30\sqrt{h} - 8,8h$.

Voer in $y_1 = 30\sqrt{x} - 8,8x$.

De optie maximum geeft $x \approx 2,9$ en $y \approx 25,6$.

De hondenleeftijd is 2,9 jaar en het maximale verschil in mensenjaren is 25,6 jaar.

$$c \quad \left. \begin{array}{l} m_{\text{middel}} = 30\sqrt{h} + ah \\ h = 4 \text{ en } m_{\text{middel}} = 56 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 30\sqrt{4} + a \cdot 4 = 56 \\ 60 + 4a = 56 \\ 4a = -4 \\ a = -1 \end{array}$$

Dus $m_{\text{middel}} = 30\sqrt{h} - h$.

Los op $30\sqrt{h} - h = 67$.

Voer in $y_1 = 30\sqrt{x} - x$ en $y_2 = 67$.

De optie snijpunt geeft $x = 5,90\dots$

Dus de pensioenleeftijd van deze hond is 5,9 jaar.

$$73 \quad a \quad \left. \begin{array}{l} m_{\text{groot}} = 30\sqrt{h} + ah \\ h = 4 \text{ en } m_{\text{groot}} = 60 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 30\sqrt{4} + a \cdot 4 = 60 \\ 60 + 4a = 60 \\ a = 0 \end{array}$$

Dus $m_{\text{groot}} = 30\sqrt{h}$.

Los op $30\sqrt{h} = 100$.

Voer in $y_1 = 30\sqrt{x}$ en $y_2 = 100$.

De optie snijpunt geeft $x = 11,11\dots$

Dus maximaal 11 jaar.

- b $V = m_{\text{groot}} - m_{\text{klein}} = 30\sqrt{h} - (30\sqrt{h} - 1,8h) = 30\sqrt{h} - 30\sqrt{h} + 1,8h = 1,8h$

Los op $1,8h = 10$

$h \approx 5,6$

Dus bij een hondenleeftijd van 5,6 jaar.

Diagnostische toets**Bladzijde 146**

$$1 \quad a \quad S = 300, \text{ dus los op } -15k + 300 = 0 \\ -15k = -300 \\ k = 20$$

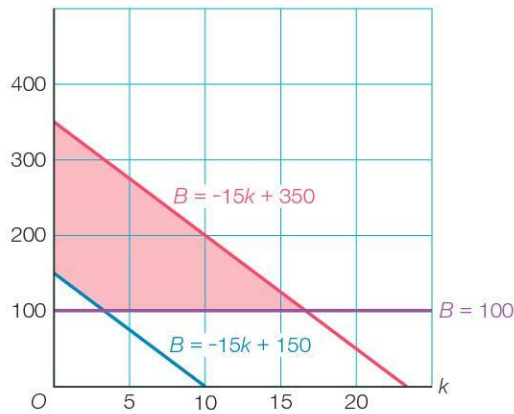
Dus na 20 km.

b, c $B = -15k + 150$

k	0	10
B	150	0

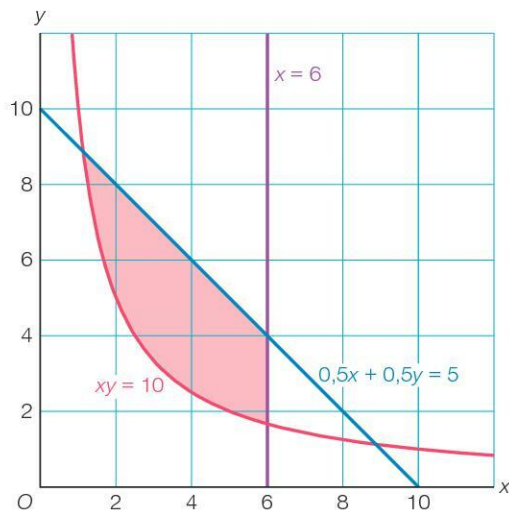
$B = -15k + 350$

k	0	20
B	350	50



d $B = 200$ geeft $-15k + S = 200$
 $-15k = -S + 200$
 $k = 0,066... \cdot S - 13,333...$
Dus $k = 0,07S - 13,33$.

- 2** $xy \geq 10$, dus boven de kromme $xy = 10$, want bij invullen van $x = 0$ en $y = 0$ klopt het niet.
Verder links van de lijn $x = 6$ en onder de lijn $0,5x + 0,5y = 5$.
De lijn $0,5x + 0,5y = 5$ gaat door $(0, 10)$ en $(10, 0)$.



3 a $N = \frac{25}{50 \cdot 0,4^t} = \frac{25}{50} \cdot 0,4^{-t} = 0,5 \cdot (0,4^{-1})^t = 0,5 \cdot 2,5^t$
Dus $N = 0,5 \cdot 2,5^t$.

b $9q = 1,5\sqrt{16p}$
 $1,5\sqrt{16p} = 9q$
 $\sqrt{16p} = 6q$
 $16p = (6q)^2$
 $p = \frac{1}{16} \cdot 6^2 \cdot q^2$
 $p = 2,25q^2$

c $x \cdot L^2 = y - \frac{4-6x}{L}$ met $L = 2$ geeft $4x = y - \frac{4-6x}{2}$

$$y - \frac{4-6x}{2} = 4x$$

$$y = 4x + \frac{4-6x}{2}$$

$$y = 4x + 2 - 3x$$

$$y = x + 2$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad \frac{5V}{6q+7} &= 8 \\ 6q+7 &= \frac{5V}{8} \\ 6q &= 0,625V - 7 \\ q &= 0,104... \cdot V - 1,166... \\ \text{Dus } q &= 0,10V - 1,17. \end{aligned}$$

4 a $y = 3x + 2$ invullen bij $R = 2xy - 5$ geeft $R = 2x(3x + 2) - 5 = 6x^2 + 4x - 5$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad q &= 3p - 2 \\ 3p - 2 &= q \\ 3p &= q + 2 \\ p &= \frac{1}{3}q + \frac{2}{3} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} L &= 6\left(\frac{1}{3}q + \frac{2}{3}\right) - 5q + 2 \\ L &= 2q + 4 - 5q + 2 \\ L &= -3q + 6 \end{aligned} \right\}$$

Bladzijde 147

5 a $K = 106$ en $W = 200$ geeft $\frac{200p}{0,417} = 106$
 $200p = 44,202$
 $p \approx 0,22$

b $p = 0,25 - 0,01j$ en $W = 30 + j$ invullen bij $K = \frac{p \cdot W}{0,417}$ geeft

$$K = \frac{(0,25 - 0,01j) \cdot (30 + j)}{0,417} = \frac{7,5 + 0,25j - 0,3j - 0,01j^2}{0,417} = \frac{-0,01j^2 - 0,05j + 7,5}{0,417} \approx -0,02j^2 - 0,12j + 18$$

Dus $K = -0,02j^2 - 0,12j + 18$.

6 a C is omgekeerd evenredig met p , dus $C = \frac{a}{p}$.

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{a}{p} \\ p &= 1,20 \text{ en } C = 40 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{a}{1,20} &= 40 \\ a &= 40 \cdot 1,20 = 48 \end{aligned}$$

Dus $C = \frac{48}{p}$.

b $p = 1,50$ geeft $C = 32$ en $p = 1,20$ hoort bij $C = 40$
Dus $40 - 32 = 8$ croissantjes meer.

7 a Als p toeneemt, dan neemt $\frac{p}{7}$ af, dus dan neemt $4 - \frac{7}{p}$ toe.

Dus de grafiek van K is stijgend.

Als p heel groot wordt, dan nadert $\frac{7}{p}$ tot 0, dus dan wordt $4 - \frac{7}{p} \approx 4$.

Dus de grenswaarde is 4.

b Als x toeneemt, dan neemt $1,2x^4$ toe en dan neemt $\sqrt{x}$ toe. Dus $1,2x^4 + \sqrt{x}$ neemt toe,
dus dan neemt $\frac{1200}{1,2x^4 + \sqrt{x}}$ af en dan neemt $\frac{1200}{1,2x^4 + \sqrt{x}} + 5,2$ ook af.

De grafiek van y is dalend.

Als x heel groot wordt, dan wordt $1,2x^4$ heel groot en wordt $\sqrt{x}$ heel groot, dus dan

nadert $\frac{1200}{1,2x^4 + \sqrt{x}}$ tot 0, dus dan wordt $\frac{1200}{1,2x^4 + \sqrt{x}} + 5,2 \approx 5,2$.

De grenswaarde is 5,2.

- 8 a** $x = 1$ invullen in de formule geeft $y = 25,03$.
 $x = 20$ invullen geeft $y = 16,1$.
 $x = 32$ invullen geeft $y = 10,46$.
De formule klopt niet voor $x = 32$, dus het model klopt niet bij de tabel.

- b** $x = 20$ en $y = 16$ invullen bij $y = 5\left(1 + \frac{4}{x^p}\right)$ geeft $5\left(1 + \frac{4}{20^p}\right) = 16$.

Voer in $y_1 = 5\left(1 + \frac{4}{20^x}\right)$ en $y_2 = 16$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,2$.

Dus $p \approx 0,2$.

N.B. De formule $y = 5\left(1 + \frac{4}{x^{0,2}}\right)$ klopt bij de andere waarden van de tabel.

12 Examentraining

12.1 Algemene vaardigheden

Bladzijde 150

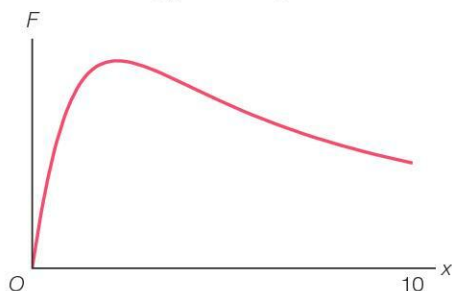
- 1 a** De toename is $\frac{69\,170 - 48\,520}{48\,520} \times 100\% \approx 42,6\%$.
- b** $A : B = 1 : 5 = 2 : 10$ en $B : C = 2 : 7 = 10 : 35$, dus $A : B : C = 2 : 10 : 35$.
De verhouding $A : C$ is $2 : 35$.
- c** Omgekeerd evenredig, dus $Q = \frac{a}{P}$.

Grafiek door $(3, 600)$, dus $\frac{a}{3} = 600$ en dit geeft $a = 1800$.

$$\text{Dus } Q = \frac{1800}{P}.$$

- d** In 9 jaar 495 meer, dus in 1 jaar $\frac{495}{9} = 55$ meer.
2012 is 6 jaar na 2006, dus in 2012 is $A = 5700 + 6 \cdot 55 = 6030$.
- e** In 5 jaar 215 meer, dus in 1 jaar $\frac{215}{5} = 43$ meer.
2023 is 3 jaar na 2020, dus in 2023 is $A = 6410 + 3 \cdot 43 = 6539$.
- f** $K = 24$ en $B = 15$ invullen geeft $3,1A - 4,12 \cdot 15 + 16,05 = 24$
 $3,1A = 69,75$
 $A = 22,5$

- g** Voer in $y_1 = \frac{100x}{0,6x^2 + x + 3}$.



Achtereenvolgens afnemende stijging, toenemende daling en afnemende daling.

- h** De optie maximum geeft $x = 2,236\dots$ en $y = 27,149\dots$
Het maximum van F is $27,15$ voor $x = 2,24$.
- i** Voer in $y_2 = 20$.
De optie snijpunt geeft $x = 0,861\dots$ en $x = 5,805\dots$
Dus $F > 20$ voor x tussen $0,87$ en $5,80$.

Bladzijde 155

- 2 a** Er zijn 16 overige landen.
In 6 landen was het vertrouwen in het parlement groter dan in Nederland.
Dat is dus $\frac{6}{10} \times 100\% = 37,5\%$.
- b** Alle landen onder de lijn door $(10, 10)$ en $(80, 80)$.
Dat zijn Oostenrijk, Duitsland, Denemarken, Finland, Nederland, Noorwegen, Zweden en het Verenigd Koninkrijk.
- 3** In 19 jaar $3,1$ cm meer, dus in 1 jaar $\frac{3,1}{19}$ cm meer.

2050 is 50 jaar na 2000, dus in 2050 is de gemiddelde lengte $180,4 + 50 \cdot \frac{3,1}{19} \approx 188,6$ cm.

Bladzijde 156

- 4 a** $2500 \cdot 3,5 = 8750 \text{ m}^2 = 0,875 \text{ ha}$
 De kosten zijn $(250 + 475 + 150) \cdot 0,875 = 875 \cdot 0,875 \approx \text{€} 765,63$.
 De subsidie is $2500 \cdot 0,63 = \text{€} 1575$.
 1575 is meer dan 765,63, dus het subsidiebedrag was hoger.

Bladzijde 157

- b** $W = 100 \cdot 0,53 - 0,035 \cdot 500 - 21,455 = 14,045 \text{ euro}$
 De nettowinst is $21 \cdot 14,045 \approx \text{€} 294,95$.
c $W = 0$ en $D = 1025$ geeft $100S - 0,035 \cdot 1025 - 21,455 = 0$
 $100S = 57,33$
 $S = 0,5733$
 Dus minimaal €0,58 per strekkende meter.

- 5** In 2912 was $0,318 \cdot 345\,000 = 47\,610 \text{ km}^2$ van het rif met koraal bedekt.
 De afname is $\frac{97\,000 - 47\,610}{97\,000} \times 100\% \approx 50,9\%$.

Bladzijde 158

- 6 a** Na 11 jaar = 132 maanden moet er nog een restschuld zijn, maar na 12 jaar = 144 maanden moet de restschuld gelijk zijn aan 0 euro.
 Ze had een studieschuld van 6000 euro.

Bladzijde 159

- b** Bij 6000 euro hoort een restschuld van €3561 en bij 6500 euro hoort een restschuld van €4097.
 Bij 500 euro meer hoort een restschuld van €536 meer, dus bij 1 euro meer hoort een restschuld van $\frac{536}{500}$ euro meer.
 6200 is 200 euro meer dan 6000, dus bij een studieschuld van 6200 euro hoort een restschuld van $3561 + 200 \cdot \frac{536}{500} = \text{€} 3775,40$.

- 7 a** Los op $1 + \frac{d}{10} = 5$
 $\frac{d}{10} = 4$
 $d = 40$

Dus maximaal 40 meter diep.

- b** $d = 19$ geeft $p = 1 + \frac{19}{10} = 2,9$
 Er is nodig $L = 20 \cdot 2,9 \cdot 45 = 2610 \text{ barliter}$.
 In de duikfles zit $12 \cdot 200 = 2400 \text{ barliter}$.
 Dus Jan kan deze duik niet maken.

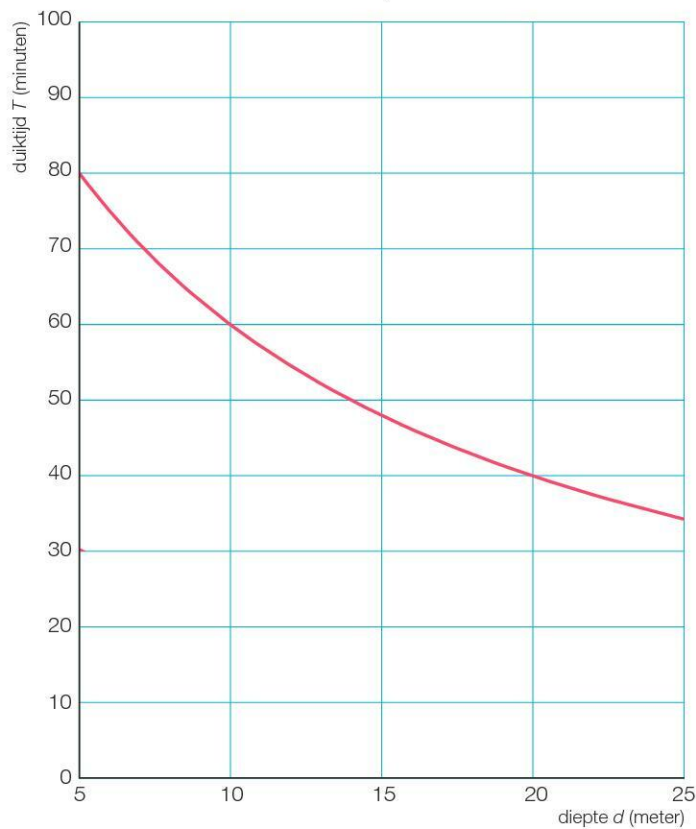
c $d = 5$ geeft $p = 1,5$ en $T = \frac{2400}{20 \cdot 1,5} = 80$

$d = 10$ geeft $p = 2$ en $T = \frac{2400}{20 \cdot 2} = 60$

$d = 15$ geeft $p = 2,5$ en $T = \frac{2400}{20 \cdot 2,5} = 48$

$d = 20$ geeft $p = 3$ en $T = \frac{2400}{20 \cdot 3} = 40$

$d = 25$ geeft $p = 3,5$ en $T = \frac{2400}{20 \cdot 3,5} \approx 34$

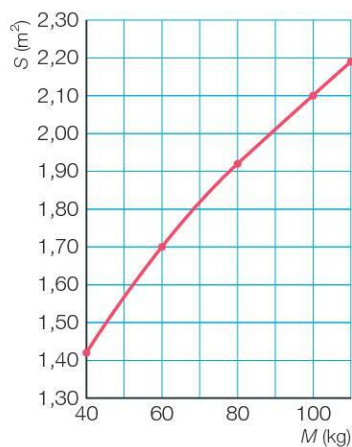


Bladzijde 160

- 8 a Bij meneer Franssen is $S = 2,04 \text{ m}^2$.
 Bij de buurman is $S = 1,83 \text{ m}^2$.
 Het verschil is $2,04 - 1,83 = 0,21 \text{ m}^2$.

b

M	40	60	80	100	110
S	1,42	1,70	1,92	2,10	2,19



- c Op de lijn $L = 180$ wordt S steeds groter, dus de grafiek van S is stijgend.
De snijpunten van de lijnen met de lijn $L = 180$ liggen steeds verder uit elkaar, dus de grafiek van S is afnemend stijgend.

Bladzijde 161

- d Bij vrouwen is $S = 0,007184 \cdot 167,5^{0,725} \cdot 70^{0,425} \approx 1,79$.
Bij mannen is $S = 0,007184 \cdot 180,9^{0,725} \cdot 84^{0,425} \approx 2,05$.
Dus $\frac{2,05 - 1,79}{1,79} \times 100\% \approx 14,5\%$ groter.
- e Minimale lengte, dus gebruik $M = 89$.
Los op $0,007184 \cdot L^{0,725} \cdot 89^{0,425} = 1,90$.
Voer in $y_1 = 0,007184 \cdot x^{0,725} \cdot 89^{0,425}$ en $y_2 = 1,90$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 158$, dus de minimale lengte is 158 cm.

- 9 a $d = 80$ geeft $I = 10^{-1} = 0,1$
 $d = 74$ geeft $I = 10^{-1,6} = 0,025...$
De afname is $\frac{0,1 - 0,025...}{0,1} \times 100\% \approx 75\%$.
- b Los op $10^{0,1(0,04t+73,7)-9} = 0,058$.
Voer in $y_1 = 10^{0,1(0,04x+73,7)-9}$ en maak een tabel.
Lees af $x = 98$ geeft $y_1 = 0,0578...$
 $x = 99$ geeft $y_1 = 0,0583...$
Dus 98 maanden.

Bladzijde 162

- 10 a 6,3 miljoen in 2000 en 7,7 miljoen in 2011.
De toename is $\frac{7,7 - 6,3}{6,3} \times 100\% \approx 22,2\%$.
- b De toename in 11 jaar is $460 - 400 = 60$, dus de toename per jaar is $\frac{60}{11}$.
Het aantal in 2020 is dan $460 + 9 \cdot \frac{60}{11} \approx 509$.
- c Aantal inwoners in 1990 is $\frac{1000}{344} \cdot 5\,118\,429 \approx 14\,879\,154$.
Aantal inwoners in 2010 is $\frac{1000}{460} \cdot 7\,622\,353 \approx 16\,570\,333$.
De toename is $16\,570\,333 - 14\,879\,154 \approx 1\,691\,000$.

Bladzijde 163

- 11 a De stijging is $\frac{118 - 109}{109} \times 100\% \approx 8\%$.
- b De toename in 5 jaar is $109 - 103 = 6$, dus de toename per jaar is $\frac{6}{5} = 1,2$.
2021 is 11 jaar na 2010, dus in 2021 is het indexcijfer $109 + 11 \cdot 1,2 \approx 122$.

Bladzijde 164

- 12 a Er is 100^6 keer verdund.
Dus voor $\frac{1}{100^6} = \frac{1}{10^{12}}$ deel.
- b Per stap blijft er 0,002% over.
 $0,002\% = \frac{0,002}{100}$, dus het getal is $\frac{100}{0,002} = 50\,000$.
- c D12 geeft een verhouding van $1 : 10^{12}$.
 $0,05$ milliliter $= 0,05 \cdot 10^{-3}$ liter $= 5 \cdot 10^{-5}$ liter
 20 zwembaden hebben een inhoud van $20 \cdot 2,5 \cdot 10^6$ liter $= 50 \cdot 10^6$ liter $= 5 \cdot 10^7$ liter.
Dit geeft een verhouding van $5 \cdot 10^{-5} : 5 \cdot 10^7 = 1 : 10^{12}$.
Dus de bewering klopt.

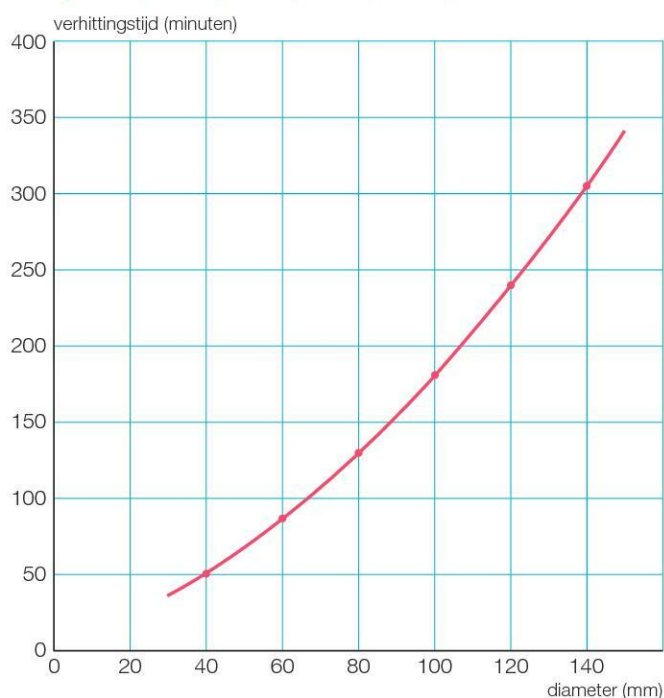
Bladzijde 165

- 13 a** Voer in $y_1 = \frac{1000x}{4,5 + 0,09x + 0,0035x^2}$.
 De optie maximum geeft $x \approx 36$ en $y \approx 2933$.
 Het maximum is bij een snelheid van 36 km/uur.
- b** Voer in $y_2 = 2500$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 18$ en $x \approx 70$.
 Dus een maximumsnelheid van 70 km/uur.
- c** $v = 130$ geeft $C = 1725$
 1725 auto's per uur is $\frac{1725}{12} \approx 144$ auto's per 5 minuten.
 Dus binnen het tijdsinterval 7.15-7.20 uur.

Bladzijde 166

14 a

d	40	60	80	100	120	140
T	53	88	133	183	240	305



- b** $d = 45$ geeft $V = 0,7 \cdot 45 + 0,0089 \cdot 45^2 \approx 50$
 Dus 50 minuten.

Bladzijde 167

- c** 2,5 uur = 150 minuten
 Los op $0,7d + 0,0089d^2 = 150$.
 Voer in $y_1 = 0,7x + 0,0089x^2$ en $y_2 = 150$.
 De optie snijpunt geeft $x = 96,3...$
 Dus maximaal 96 mm.
- 15 a** Aflezen bij $B = 300$ geeft 500 Mbit duurt 1,7 seconden en 1000 Mbit duurt 3,3 seconden.
 Het duurt $3,3 - 1,7 = 1,6$ seconden langer.
- b** Omgekeerd evenredig, dus $T \cdot B$ is constant.
 Bij $T = 5$ hoort $B = 200$, dus $T \cdot B = 5 \cdot 200 = 1000$.
 De formule is $B = \frac{1000}{T}$.

Bladzijde 168

16 a Thomas $GFR = \frac{(140 - 45) \cdot 78}{0,81 \cdot 95} = 96,29...$

Julia $GFR = 0,85 \cdot \frac{(140 - 45) \cdot 69}{0,81 \cdot 95} = 72,40...$

Het verschil is $96,29... - 72,40... \approx 24$ mL per minuut.

- b** Invullen van $K = 95$ en $L = 33$ in formule 2 geeft

$$GFR = 32\,788 \cdot 95^{-1,154} \cdot 33^{-0,203} = 84,17...$$

Invullen van $K = 95$ en $L = 33$ in formule 1 geeft

$$GFR = \frac{(140 - 33) \cdot G}{0,81 \cdot 95} = \frac{107}{96,95} \cdot G = 1,39... \cdot G.$$

$1,39... \cdot G = 84,17...$ geeft $G = 60,53...$, dus Klaas weegt 61 kg.

Bladzijde 169

- c** Los op $24\,329 \cdot K^{-1,154} \cdot 56^{-0,203} = 60$.

Voer in $y_1 = 24\,329 \cdot x^{-1,154} \cdot 56^{-0,203}$ en $y_2 = 60$.

De optie snijpunt geeft $x = 89,62...$

Dus maximaal 89 micromol per liter.

12.2 Lineaire verbanden**Bladzijde 170**

- 17 a** De punten (500, 150) en (2500, 450) liggen op de lijn.

$$F = aK + b \text{ met } a = \frac{\Delta F}{\Delta K} = \frac{450 - 150}{2500 - 500} = 0,15$$

$$\left. \begin{array}{l} F = 0,15K + b \\ \text{door } (500, 150) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,15 \cdot 500 + b = 150 \\ 75 + b = 150 \\ b = 75 \end{array}$$

Dus $F = 0,15K + 75$.

- b** $A = 0,3P + 4,2$ invullen in $B = \frac{A}{1,2}$ geeft $B = \frac{0,3P + 4,2}{1,2} = \frac{0,3P}{1,2} + \frac{4,2}{1,2} = 0,25P + 3,5$.

Dus $a = 0,25$ en $b = 3,5$.

- c** Los op $\frac{D}{300} + \frac{83}{200} = 1$

$$\frac{D}{300} = 0,585$$

$$D = 0,585 \cdot 300 = 175,5$$

Dus $Z > 1$ voor $D > 175,5$.

Alternatieve uitwerking:

Voer in $y_1 = \frac{x}{300} + \frac{83}{200}$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x = 175,5$.

Uit de plot volgt dat $D > 175,5$.

- d** $S = 2,5k - 220$

$$2,5k - 220 = S$$

$$2,5k = S + 220$$

$$k = 0,4S + 88$$

- e** $G = 40$ en $KNZ = 265$ invullen geeft

$$15 \cdot F - 18 \cdot 40 + 4,5 \cdot H + 25 = 265$$

$$15F = -4,5 \cdot H + 960$$

$$F = -0,3 \cdot H + 64$$

Dus $a = -0,3$ en $b = 64$.

f $P = 3 \cdot F$ geeft $F = \frac{1}{3} \cdot P$, dus $15F = 15 \cdot \frac{1}{3}P = 5P$

$Q = 8 \cdot G$ geeft $G = \frac{1}{8} \cdot Q$, dus $-18G = -18 \cdot \frac{1}{8}Q = -2,25Q$

$R = 0,15 \cdot H$ geeft $H = \frac{1}{0,15} \cdot R$, dus $4,5H = 4,5 \cdot \frac{1}{0,15} \cdot R = 30R$

Op de puntjes moeten de getallen 5; 2,25 en 30 staan.

g $C = 20$ geeft de vergelijking $5 \cdot W + 15 \cdot V = 20$.

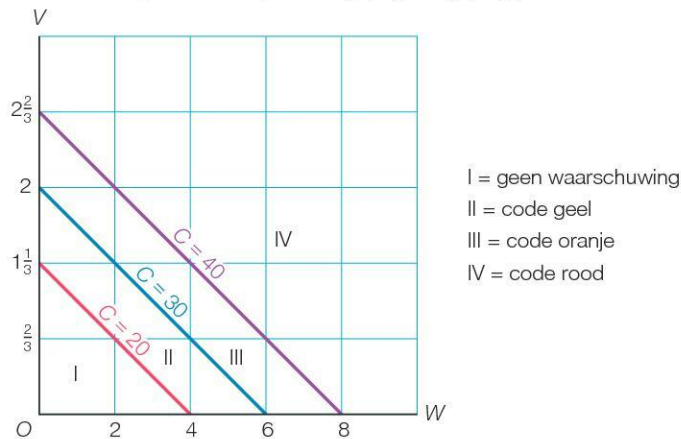
Dit is een lijn door de punten $(4, 0)$ en $(0, 1\frac{1}{3})$.

$C = 30$ geeft de vergelijking $5 \cdot W + 15 \cdot V = 30$.

Dit is een lijn door de punten $(6, 0)$ en $(0, 2)$.

$C = 40$ geeft de vergelijking $5 \cdot W + 15 \cdot V = 40$.

Dit is een lijn door de punten $(8, 0)$ en $(0, 2\frac{2}{3})$.



Bladzijde 173

18 a C_{blauw} wordt gedeeld door 300 en C_{wit} wordt gedeeld door 2000, dus C_{blauw} levert een grotere bijdrage aan F dan C_{wit} .
Dus blauw asbest is gevaarlijker.

b Los op $\frac{C_{\text{wit}}}{2000} + \frac{75}{300} = 1$

$$\frac{C_{\text{wit}}}{2000} = 0,75$$

$$C_{\text{wit}} = 0,75 \cdot 2000 = 1500$$

Dus voor $C_{\text{wit}} > 1500$.

c $\frac{C_{\text{wit}}}{2000} + \frac{C_{\text{blauw}}}{300} = 1$

$$3 \cdot C_{\text{wit}} + 20 \cdot C_{\text{blauw}} = 6000 \quad \times 6000$$

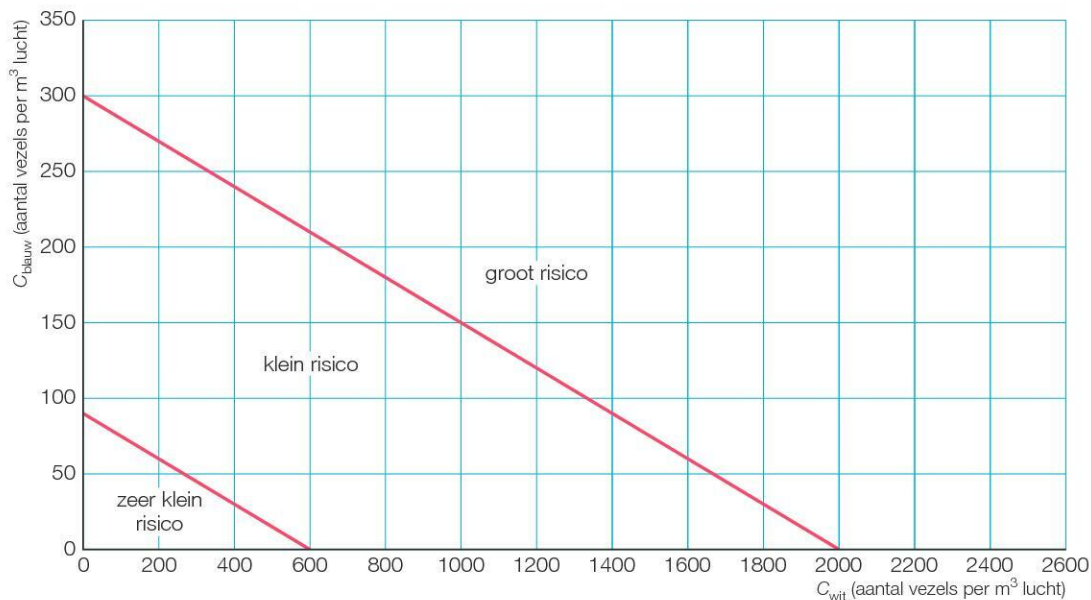
De getallen zijn 3 en 20.

$$d \quad \frac{C_{\text{wit}}}{2000} + \frac{C_{\text{blauw}}}{300} = 0,3$$

C_{wit}	0	600
C_{blauw}	90	0

$$\frac{C_{\text{wit}}}{2000} + \frac{C_{\text{blauw}}}{300} = 1$$

C_{wit}	0	2000
C_{blauw}	300	0



Bladzijde 174

- 19 a Er zijn $200 \cdot 2 = 400$ passages.
 Bij een standaardtarief kost het $400 \cdot 5 = 2000$ euro.
 Met de t-tag kost het $150 \cdot 3,80 + 250 \cdot 3,05 = 1332,50$ euro.
 Dus hij is met de t-tag $2000 - 1332,50 = 667,50$ euro goedkoper uit.

Bladzijde 175

- b Voor het eerste gedeelte geldt $K = 3,80p$.
 $p = 150$ geeft $K = 3,80 \cdot 150 = 570$
 Voor het tweede gedeelte geldt $K = 3,05p + b$.
 Door $(150, 570)$ geeft $3,05 \cdot 150 + b = 570$
 $457,50 + b = 570$
 $b = 112,50$

Dus voor het tweede gedeelte geldt $K = 3,05p + 112,50$.

- c $K_{\text{zonder btw}} = \frac{11,15p + 412,5}{1,21}$
 $a = \frac{11,15}{1,21} \approx 9,21$ en $b = \frac{412,5}{1,21} \approx 340,91$

- 20 a Stel de breedte waarmee telkens wordt vermeerderd b .
 Dan geldt $21 + 4b = 93$ en dit geeft $b = 18$.
 De breedte van Z6-papier is $93 + 18 = 111$ cm.
- b $n = 1$ geeft $O = 21 \cdot 30 = 630$ en $n = 2$ geeft $O = 39 \cdot 30 = 1170$.
 Dus $a = 1170 - 630 = 540$.

$$\left. \begin{array}{l} O = 540n + b \\ n = 1 \text{ en } O = 630 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 540 \cdot 1 + b = 630 \\ b = 90 \end{array}$$

 Dus $a = 540$ en $b = 90$.

Bladzijde 176

- 21 a** In de troposfeer is het verschil ongeveer 70°C .
 In de stratosfeer is het verschil ongeveer 55°C .
 In de mesosfeer is het verschil ongeveer 80°C .
 Het verschil is het kleinst in de stratosfeer.

Bladzijde 177

- b** $T = 2,8h - 134,1$
 $2,8h - 134,1 = T$
 $2,8h = T + 134,1$
 $h = \frac{1}{2,8}T + \frac{134,1}{2,8}$
 Dus $h = 0,36 \cdot T + 47,89$.
- c** Bij $T = -2,5$ hoort $h = 51$ en bij $T = -58,5$ hoort $h = 71$.
 $h = aT + b$ met $a = \frac{\Delta h}{\Delta T} = \frac{71 - 51}{-58,5 - (-2,5)} \approx -0,36$

$$\left. \begin{array}{l} h = -0,36T + b \\ T = -2,5 \text{ en } h = 51 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,36 \cdot (-2,5) + b = 51 \\ 0,9 + b = 51 \\ b = 50,1 \end{array}$$

 Dus $h = -0,36T + 50,1$.

- 22** Bij $W = 45\,000$ hoort $E = 500$ en bij $W = 95\,000$ hoort $E = 1500$.
 $E = aW + b$ met $a = \frac{\Delta E}{\Delta W} = \frac{1500 - 500}{95\,000 - 45\,000} = 0,02$

$$\left. \begin{array}{l} E = 0,02W + b \\ W = 45\,000 \text{ en } E = 500 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,02 \cdot 45\,000 + b = 500 \\ 900 + b = 500 \\ b = -400 \end{array}$$

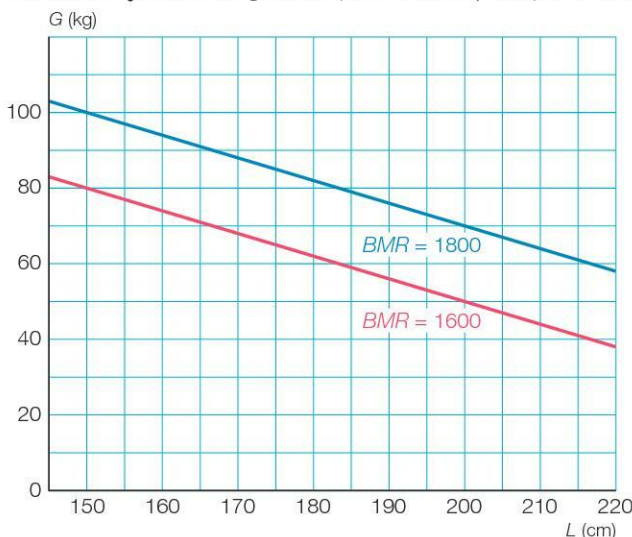
 Dus $E = 0,02W - 400$.

Bladzijde 178

- 23 a** $BMR = 10 \cdot 77 - 5 \cdot 25 + 6,25 \cdot 188 + 5 = 1825$
- b** Vanwege het gewicht neemt zijn BMR met $10 \cdot 5 = 50$ af.
 Vanwege zijn leeftijd neemt zijn BMR met $5 \cdot 1 = 5$ af.
 De BMR is $50 + 5 = 55$ verminderd.
- c** $J = 30$ en $BMR = 2000$ geeft
 $10G - 5 \cdot 30 + 6,25L + 5 = 2000$
 $10G = -6,25L + 2145$
 $G = -0,625L + 214,5$
 Dus $a = -0,6$ en $b = 214,5$.

Bladzijde 179

- d** $J = 30$ en $BMR = 1800$ geeft $10G - 5 \cdot 30 + 6,25L + 5 = 1800$ oftewel $G = -0,625L + 194,5$.
 Teken de lijn door de punten $(150; 100,75)$ en $(200; 69,5)$.



e $W = 2,2 \cdot G$ geeft $G = \frac{1}{2,2} \cdot W$ en $H = 0,033 \cdot L$ geeft $L = \frac{1}{0,033} \cdot H$.

Dit geeft $BMR = 10 \cdot \frac{1}{2,2} \cdot W - 5Y + 6,25 \cdot \frac{1}{0,033} \cdot H + 5$.

De getallen zijn $\frac{10}{2,2} \approx 4,5$ en $\frac{6,25}{0,033} \approx 189,4$.

12.3 Exponentiële verbanden

Bladzijde 180

- 24 a** $g_{\text{jaar}} = 1,0125$, dus $g_{20 \text{ jaar}} = 1,0125^{20} \approx 1,282$
De toename in 20 jaar is 28,2%.
- b** $g_{\text{jaar}} = 0,994$, dus $g_{100 \text{ jaar}} = 0,994^{100} \approx 0,548$
Dus in 100 jaar neemt de hoeveelheid met 45,2% af.
- c** Groeifactor per jaar is 1,0135, dus $1,0135^t = 2$.
Voer in $y_1 = 1,0135^x$ en $y_2 = 2$.
De optie snijpunt geeft $x = 51,69...$
Na 52 jaar is de hoeveelheid verdubbeld.
- d** Groeifactor per jaar is 0,9995, dus $0,9995^t = 0,5$.
Voer in $y_1 = 0,9995^x$ en $y_2 = 0,5$.
De optie snijpunt geeft $x = 1385,9...$
De halveringstijd is 1386 jaar.
- e** $g_{20 \text{ jaar}} = 2$, dus $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{20}} \approx 1,035$.
Het groeipercentage is 3,5% per jaar.
- f** $g_{577 \text{ jaar}} = 0,5$, dus $g_{\text{jaar}} = 0,5^{\frac{1}{577}} \approx 0,99880$.
De hoeveelheid neemt jaarlijks met 0,120% af.
- g** $N = \frac{200}{1,85^{0,1t}} = 200 \cdot 1,85^{-0,1t} = 200 \cdot (1,85^{-0,1})^t \approx 200 \cdot 0,94^t$
Dus $N = 200 \cdot 0,94^t$.
- h** Voer in $y_1 = 0,05 \cdot 40^x$ en $y_2 = 25 \cdot 10^6$.
De optie snijpunt geeft $x = 5,429...$
Dus $x = 5,43$.
- i** $\frac{1,5 \cdot 10^6}{10^8} = 0,015$; $\frac{2,3 \cdot 10^4}{1,5 \cdot 10^6} \approx 0,0153$; $\frac{340}{2,3 \cdot 10^4} \approx 0,0148$ en $\frac{5,1}{340} = 0,015$
De quotiënten zijn bij benadering gelijk, dus bij de tabel hoort een exponentieel verband.
- j** $H = b \cdot g^t$
 $g_{13 \text{ jaar}} = \frac{10\,640}{3680}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{10\,640}{3680}\right)^{\frac{1}{13}} = 1,0850...$
$$\left. \begin{array}{l} H = b \cdot 1,0850...^t \\ t = 5 \text{ en } H = 3680 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,0850...^5 = 3680 \\ b = \frac{3680}{1,0850...^5} \approx 2450 \end{array}$$

Dus $H = 2450 \cdot 1,085^t$.
- k** Bij $t = 3$ hoort $N = 90$ en bij $t = 10$ hoort $N = 3000$.
 $g_{7 \text{ jaar}} = \frac{3000}{90}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{3000}{90}\right)^{\frac{1}{7}} = 1,650...$
$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,650...^t \\ t = 3 \text{ en } N = 90 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,650...^3 = 90 \\ b = \frac{90}{1,650...^3} \approx 20 \end{array}$$

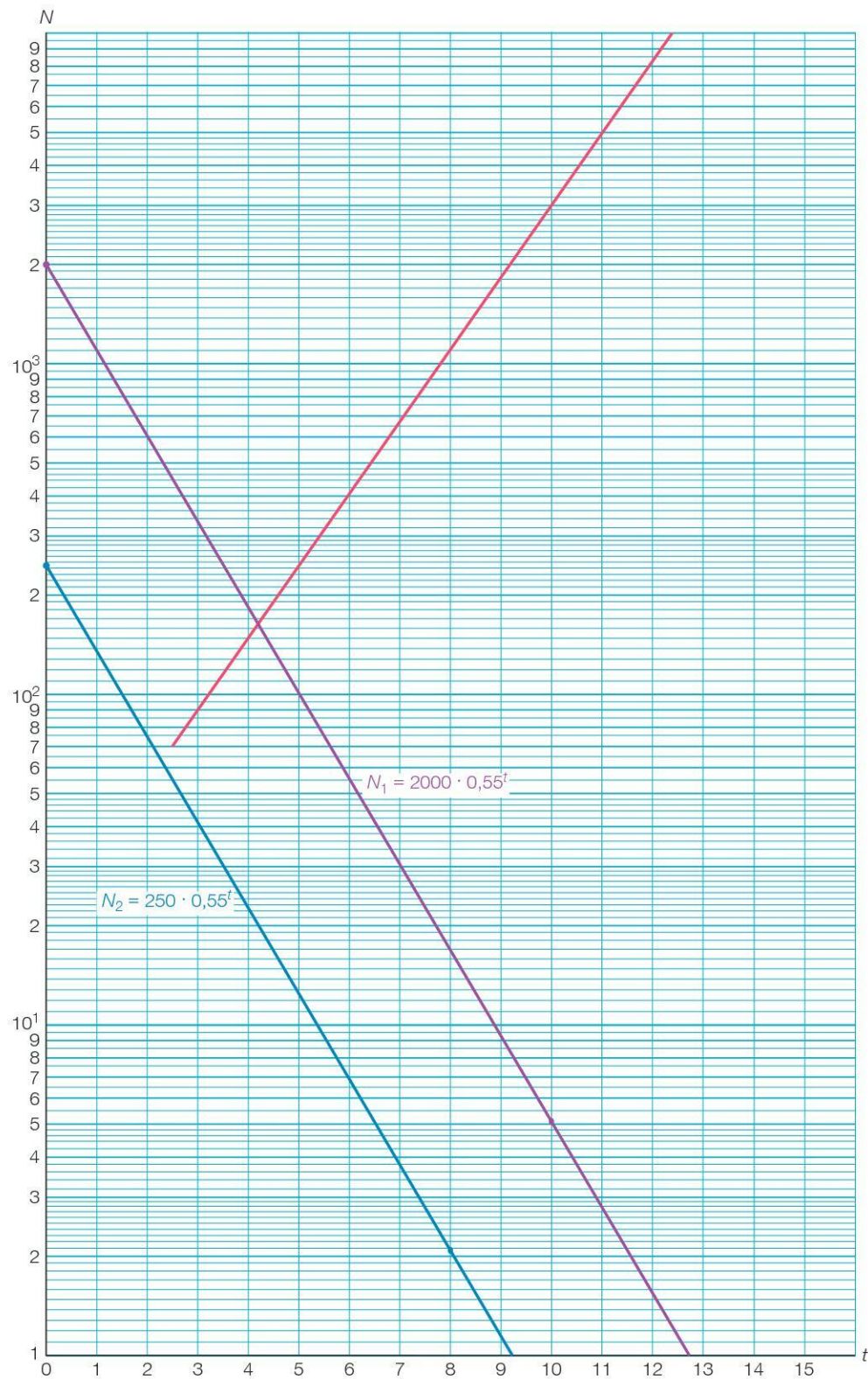
Dus $b = 20$ en $g = 1,65$.

1 $N_1 = 2000 \cdot 0,55^t$

t	0	10
N_1	2000	5,1

$N_2 = 250 \cdot 0,55^t$

t	0	8
N_1	250	2,1



De lijnen zijn evenwijdig omdat de groeifactoren gelijk zijn.

Bladzijde 184

- 25 a** $g_{30 \text{ jaar}} = 0,5$, dus $g_{\text{jaar}} = 0,5^{\frac{1}{30}} \approx 0,977$.
De afname is 2,3% per jaar.
- b** $g_{300 \text{ jaar}} = 0,5^{10} = 0,000976...$
Dus er is nog ongeveer 0,098% over.
- c** $D = 1 - \frac{1}{2,058^{0,1d}} = 1 - 2,058^{-0,1d} = 1 - (2,058^{-0,1})^d$
Dus $g = 2,058^{-0,1} \approx 0,93$.

Bladzijde 185

- d** Van de straling die door het staal wordt doorgelaten moet $\frac{5}{8}$ deel, dat is 62,5%, door het beton worden doorgelaten.
Los op $\frac{100}{1,021^d} = 62,5$.
Voer in $y_1 = \frac{100}{1,021^x}$ en $y_2 = 62,5$.
De optie snijpunt geeft $x = 22,6...$
Dus het beton moet 23 cm dik zijn.

- 26 a** Na 6 uur is de temperatuur $72,5^\circ\text{C}$.
In de eerste 6 uur is de afname $4,2 + 4,1 + 4,0 + 3,9 + 3,8 + 3,7 = 23,7^\circ\text{C}$.
De begintemperatuur is $72,5 + 23,7 = 96,2^\circ\text{C}$.
- b** Na 6 uur is de temperatuur $85,8^\circ\text{C}$ en na 12 uur is de temperatuur $77,1^\circ\text{C}$.
 $g_{6 \text{ uur}} = \frac{77,1}{85,8}$, dus $g_{\text{uur}} = \left(\frac{77,1}{85,8}\right)^{\frac{1}{6}} = 0,98233...$
Het percentage is 1,77%.
- c** $T = 77,1 \cdot 0,9823^t$ met T de temperatuur en t de tijd in uren met $t = 0$ na 12 uur.
Los op $77,1 \cdot 0,9823^t = 65$.
Voer in $y_1 = 77,1 \cdot 0,9823^x$ en $y_2 = 65$.
De optie snijpunt geeft $x = 9,559...$
Dus $12 + 9 = 21$ uren.

Bladzijde 186

- 27** In 2007.
Het aantal patiënten met een zorginfectie is $0,078 \cdot 1,8$ miljoen = 140 400.
De kosten zijn $4 \cdot 1140 \cdot 140 400 = 640,224$ miljoen euro.
In 2012.
Het aantal patiënten met een zorginfectie is $0,038 \cdot 2,0$ miljoen = 76 000.
De kosten per dag zijn $1140 \cdot 1,03^5 \approx 1322$ euro.
De kosten zijn $4 \cdot 1322 \cdot 76 000 = 401,888$ miljoen euro.
De kosten waren $640,224 - 401,888 \approx 238$ miljoen euro lager.

Bladzijde 187

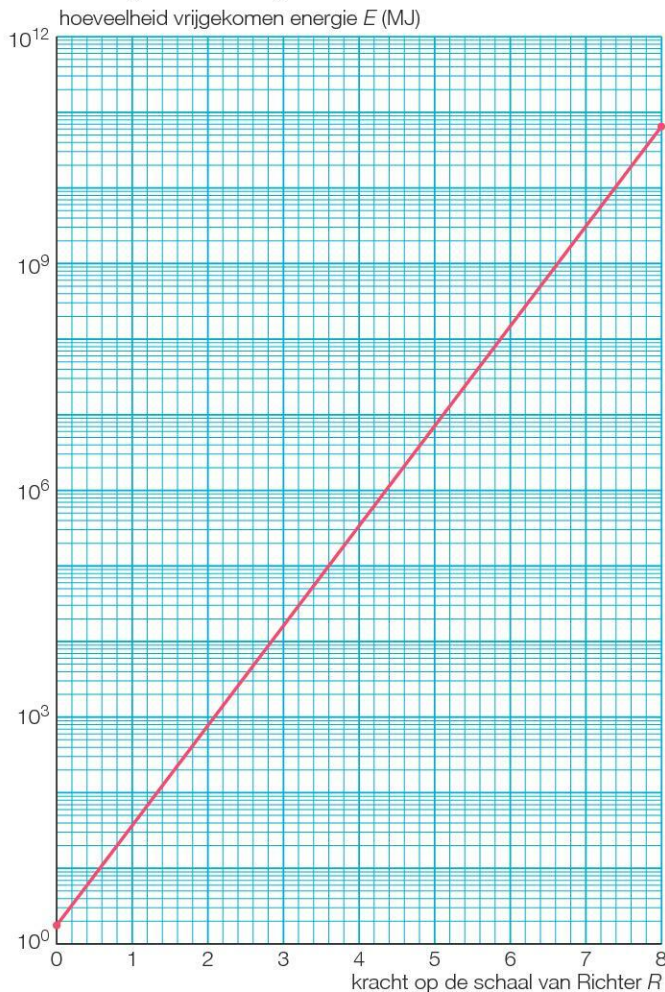
- 28 a** $g_{10 \text{ jaar}} = 0,5$, dus $g_{\text{jaar}} = 0,5^{\frac{1}{10}} = 0,933...$
De afname is 7% per jaar.
- b** $g_{\text{jaar}} = 1,0089$
Los op $1,0089^t = 1,5$.
Voer in $y_1 = 1,0089^x$ en $y_2 = 1,5$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 45,8$.
Het zou 46 jaar duren.
- 29 a** $g_{85 \text{ km}} = \frac{0,0037}{1013}$, dus $g_{\text{km}} = \left(\frac{0,0037}{1013}\right)^{\frac{1}{85}} \approx 0,863$.
Het percentage is 13,7%.
- b** $L = 1013 \cdot 0,863^h$, dus los op $1013 \cdot 0,863^h = 4,5$.
Voer in $y_1 = 1013 \cdot 0,863^x$ en $y_2 = 4,5$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 37$, dus $h = 37$.
 $h = 37$ geeft $T = 2,8 \cdot 37 - 134,1 \approx -31^\circ\text{C}$

Bladzijde 188

- 30 a** Formaat A_n heeft oppervlakte $1\,000\,000 \cdot 0,5^n \text{ mm}^2$.
Dus formaat A11 heeft oppervlakte $1\,000\,000 \cdot 0,5^{11} \approx 488 \text{ mm}^2$.
- b** $h = \sqrt{2} \cdot b$ en $h \cdot b = \text{oppervlakte}$ geeft $\sqrt{2} \cdot b \cdot b = \text{oppervlakte}$.
Los op $b^2 \sqrt{2} = 15\,625$
$$b^2 = \frac{15\,625}{\sqrt{2}}$$
$$b = 105,11\dots$$
$$h = \sqrt{2} \cdot 105,11\dots = 148,65\dots$$
Dus $h \approx 149 \text{ mm}$ en $b \approx 105 \text{ mm}$.
- c** $\frac{84}{119} \approx 0,71$; $\frac{59}{84} \approx 0,70$; $\frac{42}{59} \approx 0,71$ en $\frac{30}{42} \approx 0,71$
De quotiënten zijn bij benadering gelijk, dus er is sprake van een exponentieel verband.

Bladzijde 189

- 31 a** $6,3 - 3,3 = 3$, dus $30^3 = 27\,000$ keer zoveel.
- b** $R = 6,3$ geeft $E = 0,06 \cdot 32^{6,3} \approx 182 \cdot 10^6 \text{ MJ}$
9% van $182 \cdot 10^6$ is $0,09 \cdot 182 \cdot 10^6 \approx 16,4 \cdot 10^6 \text{ MJ}$
Los op $0,06 \cdot 32^R = 16,4 \cdot 10^6$.
Voer in $y_1 = 0,06 \cdot 32^x$ en $y_2 = 16,4 \cdot 10^6$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 5,6$.
Dus $R = 5,6$.
- c** $R = 1$ geeft $E = 1,92$, dus teken het punt (1; 1,92).
 $R = 8$ geeft $E \approx 6,6 \cdot 10^{10}$, dus teken het punt (8; $6,6 \cdot 10^{10}$).
Teken de lijn door deze punten.



- 32** $g_{20 \text{ jaar}} = 3$, dus $g_{\text{jaar}} = 3^{\frac{1}{20}} = 1,056\dots$
Dus met 6%.

Bladzijde 190

- 33** 90% afgestorven, dus 10% over.
 10% van $3 \cdot 10^8$ is $3 \cdot 10^7$.
 Lees af: de afname van $3 \cdot 10^8$ tot $3 \cdot 10^7$ duurt 1 minuut.

- 34** **a** $g_{\text{jaar}} = 0,97$, dus $g_{20 \text{ jaar}} = 0,97^{20} = 0,543\dots$
 De afname is 46%.
- b** Groeifactor per jaar is 0,95, dus los op $0,95^t = 0,5$.
 Voer in $y_1 = 0,95^x$ en $y_2 = 0,5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 13,51\dots$
 Dus in $2010 + 14 = 2024$.

Bladzijde 191

- 35** **a** Bij do is dat in maand 4 van 2017.
 Bij ac is dat in maand 8 van 2019.
 Dus 2 jaar en 4 maanden later.
- b** De lijnen zijn evenwijdig, dus de groeifactoren zijn gelijk.
 Dus ook de groeipercentsages zijn gelijk en dus heeft de lezer ongelijk.

12.4 Werken met formules**Bladzijde 192**

- 36** **a** $M = K - L = 2p\left(\frac{p}{16} + 0,6\right) - (1,8 + 0,14p^2)$

$$= \frac{2p^2}{16} + 1,2p - 1,8 + 0,14p^2$$

$$= 0,125p^2 + 1,2p - 1,8 + 0,14p^2$$

$$= 0,265p^2 + 1,2p - 1,8$$

 Dus $M = 0,265p^2 + 1,2p - 1,8$.
- b** $H = 0,04q^2$ invullen bij $F = \frac{12,6G}{H}$ geeft $F = \frac{12,6G}{0,04q^2} = \frac{12,6}{0,04} \cdot G \cdot q^{-2} = 315 \cdot G \cdot q^{-2}$.
 Dus $F = 315 \cdot G \cdot q^{-2}$.
- c** $N = 75n$ invullen bij $M = 2,5 \cdot N^{0,6} \cdot p^{0,8}$ geeft
 $M = 2,5 \cdot (75n)^{0,6} \cdot p^{0,8} = 2,5 \cdot 75^{0,6} \cdot n^{0,6} \cdot p^{0,8} \approx 33,3 \cdot n^{0,6} \cdot p^{0,8}$.
 Dus $a = 33,3$ en $b = 0,6$.
- d** $Z\left(2 - \frac{R}{50}\right) = 3$

$$2 - \frac{R}{50} = \frac{3}{Z}$$

$$-\frac{R}{50} = -2 + \frac{3}{Z}$$

$$R = 100 - \frac{150}{Z} \quad \times -50$$
- e** $K = 1000 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^q = 10^3 \cdot \left(\frac{1}{10^2}\right)^q = 10^3 \cdot (10^{-2})^q = 10^3 \cdot 10^{-2q} = 10^{3-2q}$
- f** $R = 30$ en $Q = 15$ invullen bij $BL = \frac{(180 - R) \cdot Q}{0,75K^2}$ geeft

$$BL = \frac{(180 - 30) \cdot 15}{0,75K^2} = \frac{150 \cdot 15}{0,75} \cdot K^{-2} = 3000 \cdot K^{-2}$$
.
 Dus $a = 3000$ en $b = -2$.
- g** Als A toeneemt, dan neemt $3A$ toe.
 Als B afneemt, dan neemt B^2 af, dus ook $B^2 + 2$ neemt af.
 Van $D = \frac{3A}{B^2 + 2}$ neemt de teller toe en de noemer af, dus D neemt toe.

h $E = \frac{300 - A}{12B}$ geeft $12B = \frac{300 - A}{E}$ oftewel $B = \frac{300 - A}{12E}$.

Als A toeneemt, dan neemt $300 - A$ af. De teller blijft positief, want A tussen 100 en 200.

Als E toeneemt, dan neemt $12E$ toe.

Van $B = \frac{300 - A}{12E}$ neemt de teller af en de noemer neemt toe, dus B neemt af.

Bladzijde 196

37 a $9 \text{ km/uur} = \frac{9}{60} = 0,15 \text{ km/minuut}$

De wandelsnelheid is $\frac{0,15}{2,5} = 0,06 \text{ km/minuut}$.

Totale afstand = afstand hardlopen + afstand wandelen, dus $A = 0,15 \cdot H + 0,06 \cdot W$.

b Invullen van $W = 60 - H$ bij $A = 0,15 \cdot H + 0,06 \cdot W$ geeft

$$A = 0,15 \cdot H + 0,06 \cdot (60 - H)$$

$$A = 0,15 \cdot H + 3,6 - 0,06 \cdot H$$

$$A = 0,09H + 3,6.$$

Bladzijde 197

38 a $I_{\text{knikker}} = 0,5236 \cdot 1,3^3 = 1,15... \text{ cm}^2$

Het aantal knikkers is $\frac{0,64 \cdot 800}{1,15...} \approx 445$.

b 64% van I_{pot} is $0,64 \cdot I_{\text{pot}}$

$$K = \frac{0,64 \cdot I_{\text{pot}}}{I_{\text{knikker}}} = \frac{0,64}{0,5236} \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{d^3} \approx 1,222 \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{d^3}$$

c Voor het maximale aantal moet p zo groot mogelijk zijn ($p = 65,0$) en d zo klein mogelijk zijn ($d = 1,5$).

Het maximale aantal is $0,0191 \cdot 65,0 \cdot \frac{1000}{1,5^3} = 367,85... \text{ dus } 367 \text{ (of } 368\text{)}.$

Bladzijde 198

39 $L = 100 \cdot l$ invullen bij $S = 0,007184 \cdot L^{0,725} \cdot M^{0,425}$ geeft

$$S = 0,007184 \cdot (100 \cdot l)^{0,725} \cdot M^{0,425}$$

$$S = 0,007184 \cdot 100^{0,725} \cdot l^{0,725} \cdot M^{0,425}$$

$$S = 0,202 \cdot l^{0,725} \cdot M^{0,425}$$

40 a V is minimaal 0 en maximaal 100.

De minimale waarde is $I_A = \frac{0}{20} + \frac{27 - 24}{10} = 0,3$.

De maximale waarde is $I_A = \frac{100}{20} + \frac{27 - 24}{10} = 5,3$.

b Los op $\frac{35}{20} + \frac{27 - T}{10} < 2$.

Voer in $y_1 = \frac{35}{20} + \frac{27 - x}{10}$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x = 24,5$.

Uit de plot volgt dat $T > 24,5$, dus bij temperaturen van meer dan $24,5^\circ\text{C}$.

c Bij constante temperaturen vermindert $\frac{27 - T}{10}$ niet.

Als V afneemt, dan neemt $\frac{V}{20}$ af, dus dan neemt I_A af.

Bij afnemende I_A neemt het risico op bosbranden toe.

Bladzijde 199

- d** $V = 43$ geeft $I_C = (216 - 2,84 \cdot 43 + 1,12T) \cdot 0,97^{43}$
 $I_C = (93,88 + 1,12T) \cdot 0,2698\dots$
 $I_C = 0,30T + 25,34$
- e** Risico volgens de Angström Index zeer groot, dus $I_A < 2$ oftewel $0,05V + 0,2 < 2$ en dit geeft $V < 36$.
 Volgens de Chandler Burning Index zeer klein, dus $I_C < 50$ oftewel $(244 - 2,84V) \cdot 0,97^V < 50$.
 Voer in $y_1 = (244 - 2,84V) \cdot 0,97^V$ en $y_2 = 50$.
 De optie snijpunt geeft $x = 34,9\dots$ en uit de plot volgt dat $V > 34,9\dots$
 Dus bij een relatieve luchtvochtigheid van 35% is dit het geval.

Bladzijde 200

- 41 a** Als p toeneemt, dan neemt $\frac{p}{100}$ toe, dus dan neemt $1 - \frac{p}{100}$ af en dan neemt

$$B \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) \text{ af.}$$

Dus dan wordt een kleiner aantal personen besmet.

- b** $B_v = 1$ en $B = 2,2$ geeft $2,2 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1$

$$1 - \frac{p}{100} = \frac{1}{2,2}$$

$$\frac{p}{100} = 1 - \frac{1}{2,2}$$

$$p = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2,2}\right) = 54,54\dots$$

Dus minimaal 55%.

Bladzijde 201

- c** Zonder vaccinatie is in week 46 het aantal personen met griep $1000 \cdot 2,2^6 \approx 113\,380$.

$$B_v = 2,2 \cdot \left(1 - \frac{14}{100}\right) = 1,892$$

Met vaccinatie is in week 46 het aantal personen met griep $1000 \cdot 1,892^6 \approx 45\,870$.

Dus $\frac{113\,380 - 45\,870}{113\,380} \times 100\% \approx 60\%$ minder.

Alternatieve uitwerking:

$$p = 14 \text{ geeft } 1 - \frac{p}{100} = 1 - \frac{14}{100} = 0,86$$

$$0,86^6 = 0,4045\dots$$

Dus 60% minder.

- d** $B_v = 1$ geeft $B \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1$

$$1 - \frac{p}{100} = \frac{1}{B}$$

$$\frac{p}{100} = 1 - \frac{1}{B}$$

$$p = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{B}\right) = 100 - \frac{100}{B}$$

- e** $B_v = 1$ geeft formule 2, dus $p = 100 - \frac{100}{B}$.

$$B = 20 \text{ geeft } p = 100 - \frac{100}{20} = 95$$

Als mazelen zich zal uitbreiden is $B_v > 1$, dus $p < 95$.

Dat is het geval bij de landen Denemarken, Frankrijk, Italië, Noorwegen en Oostenrijk.

- 42** $P = 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n = 10^2 \cdot (10^{-1})^n = 10^2 \cdot 10^{-n} = 10^{2-n}$

Bladzijde 202

43 a $R_R - R_F = 2307 - 2107 = 200$

$$V_F = \frac{1}{1 + 10^{0,0025 \cdot 200}} \approx 0,24$$

$V_F < 0,5$, dus je mag verwachten dat Faber zal verliezen.

b Als R_B groter wordt, dan wordt $0,0025 \cdot (R_B - 1932)$ groter.

Dan wordt $10^{0,0025 \cdot (R_B - 1932)}$ groter en dan wordt $\frac{1}{10^{0,0025 \cdot (R_B - 1932)}}$ kleiner.

Bladzijde 203

c $V_W = \frac{1}{1 + 10^{0,0025 \cdot (2862 - 2744)}} = 0,3364...$

$P = 1$, dus $P - V_W = 0,6635...$

$$10 \cdot 0,6635... = 6,635... \approx 7$$

De nieuwe rating is $2744 + 7 = 2751$.

d P is hoogstens 1 en V is minstens 0.

Dus $P - V$ is hoogstens 1 en dus is $10 \cdot (P - V)$ hoogstens 10.

44 Met de eigen schatting wordt G kleiner en daarmee wordt de BMI kleiner. Ook wordt L groter, dus L^2 wordt groter en daarmee wordt de BMI kleiner.

Bladzijde 204

45 a $v = 93$ geeft $A = 93 \cdot \left(\frac{93}{188} + 0,14 \right) \approx 59$

De afstand is maar 50 meter, dus de automobilist houdt niet de veilige afstand aan.

b Als v groter wordt, dan wordt $\frac{v}{188}$ groter en ook $\frac{v}{188} + 0,14$ wordt groter.

Dus $v \cdot \left(\frac{v}{188} + 0,14 \right)$ wordt ook groter.

c $A = v \cdot \left(\frac{v}{188} + 0,14 \right) = \frac{v^2}{188} + 0,14v$

$$W = A + 4,50 = \frac{v^2}{188} + 0,14v + 4,50.$$

$$\text{Dus } W = 0,01v^2 + 0,14v + 4,50.$$

Bladzijde 205

46 a L wordt groter en G blijft gelijk, dus $(140 - L) \cdot G$ wordt kleiner.

Omdat GFR groter wordt, moet K kleiner worden, en bij een kleinere K hoort een betere nierfunctie.

b $L = 40$ en $G = 80$ invullen geeft $GFR = \frac{(140 - 40) \cdot 80}{0,81 \cdot K} = \frac{8000}{0,81} \cdot \frac{1}{K} \approx 9877 \cdot K^{-1}$.

12.5 Statistiek**Bladzijde 206**

47 a De verdeling is links-scheef, dus het gemiddelde is kleiner dan de mediaan.

Aantal leerlingen tot en met 5 punten is $1 + 2 + 3 + 5 + 10 + 15 = 36$.

Aantal leerlingen tot en met 6 punten is $36 + 20 = 56$.

Dus de mediaan is 6.

De modus is 7.

De volgorde is gemiddelde, mediaan, modus.

b Aantal leerlingen tot en met 4 punten is 21 en aantal leerlingen tot en met 5 punten is 36, dus $Q_1 = 5$.

Dus boxplot C hoort bij de test.

- c Alleen volwassenen zijn ondervraagd.
Alleen bezoekers van het Rijksmuseum zijn ondervraagd.

d

		voelt zich veilig		
		ja	nee	totaal
woont in Amsterdam	ja	130	30	160
	nee	810	80	890
totaal		940	110	1050

$$\phi = \frac{130 \cdot 80 - 30 \cdot 810}{\sqrt{160 \cdot 890 \cdot 940 \cdot 110}} \approx -0,11$$

$-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dus het verschil is gering.

- e De variabelen zijn *woont in Amsterdam* en *voelt zich veilig*.
Beide variabelen zijn kwalitatief, want het zijn geen hoeveelheden.

Bladzijde 207

- 48 a Bij groep A is de verdeling symmetrisch en het gemiddelde is gelijk aan de mediaan (beide 512).

Bij groep B is de verdeling niet symmetrisch en bovendien is het gemiddelde (521) niet precies gelijk aan de mediaan (520).

Dus bij groep B zijn de scores niet normaal verdeeld.

- b Dat kan met effectgrootte of boxplots.

effectgrootte

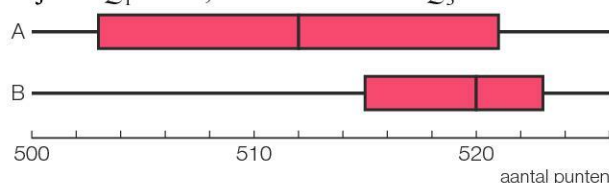
$$E = \frac{521 - 512}{\frac{1}{2}(7,5 + 13,0)} \approx 0,88$$

$E > 0,8$, dus het verschil is groot.

boxplots

Bij A is $Q_1 = 503$, mediaan = 512 en $Q_3 = 521$.

Bij B is $Q_1 = 515$, mediaan = 520 en $Q_3 = 523$.



De boxen overlappen.

De mediaan van A ligt buiten de box van B.

Dus het verschil is middelmatig.

- c Volgens de vuistregels bij de normale verdeling zouden $0,025 \cdot 1030 \approx 26$ leerlingen een score moeten hebben van $\mu - 2\sigma = 521 - 2 \cdot 7,5 = 506$ of lager.

In de tabel zijn dat er $1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 = 26$.

Dit komt dus met elkaar overeen.

- d $4\sigma = 536 - 502 = 34$, dus $\sigma = 8,5$.

Bladzijde 208

- e $\hat{p} = \frac{268}{1117} \approx 0,24$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,24 \cdot 0,76}{1117}} = 0,0127\dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,24 - 2 \cdot 0,0127\dots \approx 0,214$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,24 + 2 \cdot 0,0127\dots \approx 0,266$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [21,4%; 26,6%].

- f Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$\left[170 - 2 \cdot \frac{40}{\sqrt{1117}}, 170 + 2 \cdot \frac{40}{\sqrt{1117}} \right] \approx [167,6; 172,4].$$

Bladzijde 214

49 a $4\sigma = 64,4 - 63,6 = 0,8$, dus $\sigma = \frac{0,8}{4} = 0,2$.

b $p = 63,6$ geeft $K = 0,0191 \cdot 63,6 \cdot \frac{1050}{0,95^3} \approx 1488$

$p = 64,4$ geeft $K = 0,0191 \cdot 64,4 \cdot \frac{1050}{0,95^3} \approx 1506$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [1488, 1506].

Bladzijde 215

50 a $\hat{p} = \frac{1286}{32664} = 0,0393...$

$\sigma = \sqrt{\frac{0,0393...(1 - 0,0393...)}{32664}} = 0,0010...$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,0393... - 2 \cdot 0,0010... \approx 0,037$

$\hat{p} + 2\sigma = 0,0393... + 2 \cdot 0,0010... \approx 0,042$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [3,7%; 4,2%].

b geopereerd

		wel	niet	totaal
zorginfectie opgelopen	wel	1286	3408	4694
	niet	31378	59227	90605
	totaal	32664	62635	95299

$\phi = \frac{1286 \cdot 59227 - 3408 \cdot 31378}{\sqrt{4694 \cdot 90605 \cdot 32664 \cdot 62635}} \approx -0,03$

$-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dus het verschil is gering.

c De variabelen zijn *zorginfectie opgelopen* en *geopereerd*.

Beide variabelen zijn kwalitatief, want deze variabelen zijn niet in een getal uitgedrukt.

Bladzijde 217

51 a conclusie 1

De gemiddelde score van de 16- en 24-jarigen in Nederland is hoger dan 285, terwijl dat van de hele populatie ongeveer 280 is. Dit betekent dat de groep 16- tot 24-jarigen gemiddeld hoger gescoord heeft dan de groep 25- tot 65-jarigen, dus de conclusie is juist.

conclusie 2

De gemiddelde score van de 16- en 24-jarigen in Zweden is hoogstens gelijk aan de gemiddelde score van Oostenrijk en die is lager dan 280. De gemiddelde score van de hele populatie is 280, dus de groep 16- tot 24-jarigen heeft gemiddeld lager gescoord dan de 25- tot 65-jarigen, dus de conclusie is juist.

b De mediaan is (272,5) is niet gelijk aan het gemiddelde (268,7) en dat moet wel bij een normale verdeling.

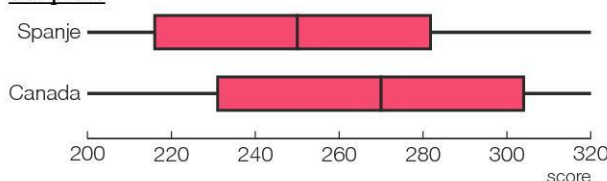
c Dat kan met de effectgrootte of met boxplots.

effectgrootte

$E = \frac{265,5 - 245,8}{\frac{1}{2}(55,5 + 51,3)} \approx 0,37$

$E \leq 0,4$, dus het verschil is gering.

boxplots



De boxen overlappen elkaar en de medianen liggen binnen de box van de andere boxplot, dus het verschil is gering.

Bladzijde 218

- d** De standaardafwijking bij Australië is 56,6 en de standaardafwijking bij Spanje is 51,3. Dus de spreiding bij Australië is groter dan bij Spanje.
De interkwartielafstand bij Australië is $305,4 - 234,7 = 70,7$ en de interkwartielafstand bij Spanje is $280,9 - 216,3 = 64,6$.
Dus de spreiding bij Australië is groter dan bij Spanje.
- e** Het verschil tussen de hoogste en de laagste waarde is voor Nederland groter dan voor Japan.
In Japan is de spreiding kleiner dan in Nederland.

52 $\hat{p} = \frac{4292}{7400} = 0,58$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,58 \cdot 0,42}{7400}} = 0,0057\dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,58 - 2 \cdot 0,0057\dots \approx 0,5685$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,58 + 2 \cdot 0,0057\dots \approx 0,5915$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage is $[56,85; 59,15]$.

Dit interval ligt binnen $[56,6; 59,4]$, dus uitspraak 1 is juist.

Bladzijde 219

- 53** Gebruik de effectgrootte.

$$E = \frac{0,9}{\frac{1}{2}(6,0 + 6,2)} \approx 0,15$$

$E \leq 0,4$, dus het verschil is gering.

- 54 a** 95%, dus tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.

$$4\sigma = 5,3 - 4,0 = 1,3, \text{ dus } \sigma = \frac{1,3}{4} \approx 0,3 \text{ biljoen per liter}$$

- b** Gebruik de effectgrootte.

$$\text{man } \bar{X}_1 = \frac{8,6 + 11,0}{2} = 9,8 \text{ en } S_1 = 0,6$$

$$\text{vrouw } \bar{X}_2 = \frac{7,6 + 10,0}{2} = 8,8 \text{ en } S_1 = 0,6$$

$$E = \frac{9,8 - 8,8}{\frac{1}{2}(0,6 + 0,6)} \approx 1,7$$

$E > 0,8$, dus het verschil is groot.

Bladzijde 220

- 55 a** $100 - 5,6 = 94,4$, dus 94,4% is 7318.

$$\text{aantal kassabonnen is } \frac{100}{94,4} \cdot 7318 = 7752$$

Dus $2 \cdot 7752 = 15\,504$ dollar aan metrokaartjes.

- b** Lees af: meer dan 1000 kcal ongeveer 42%.

Dus van lunchrestaurants van tex-mex.

Bladzijde 221

- c** Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$\left[857 - 2 \cdot \frac{336}{\sqrt{3857}}, 857 + 2 \cdot \frac{336}{\sqrt{3857}} \right] \approx [846, 868].$$

Dus 750 ligt niet in het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

- d** Voorbeelden van juiste aspecten:

- Het onderzoek is alleen gehouden onder volwassenen die in hun lunchpauze ergens gaan lunchen terwijl er ook volwassenen zullen zijn die hun eigen lunch meenemen of helemaal niet lunchen.
- Het onderzoek is alleen gehouden onder volwassenen in New York City.
- Het onderzoek is alleen gehouden in lunchzaken die op hun website calorie-informatie hadden staan.

- e Gebruik de effectgrootte.

$$E = \frac{766 - 713}{\frac{1}{2}(584 + 301)} \approx 0,12$$

$E \leq 0,4$, dus het verschil is gering en de stelling dat er een groot verschil is wordt dus niet ondersteund.

Bladzijde 222

56 a $\hat{p} = 0,23$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,23 \cdot 0,77}{6714}} = 0,0051\dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,23 - 2 \cdot 0,0051\dots = 0,219\dots$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,23 + 2 \cdot 0,0051\dots = 0,240\dots$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [22%, 24%].

- b Gebruik de volgende kruistabel:

	havo	vwo	totaal
wel gerookt	410	261	671
niet gerookt	1395	1383	2778
totaal	1805	1664	3449

$$\phi = \frac{410 \cdot 1383 - 261 \cdot 1395}{\sqrt{671 \cdot 2778 \cdot 1805 \cdot 1664}} \approx 0,08$$

Omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ is het verschil gering.

Bladzijde 223

- c Uit de tabel blijkt dat lage aantallen sigaretten een veel hogere frequentie hebben dan hoge aantallen.

Hierbij past polygoon b.

- d Bij de meisjes ligt de mediaan bij $\frac{1}{2} \cdot 336 = 168$, dus bij de meisjes is de mediaan kleiner dan 1 (want $168 < 196$).

Bij de jongens ligt de mediaan bij $\frac{1}{2} \cdot 376 = 188$, dus bij de jongens is de mediaan groter dan 1 (want $188 > 168$).

Dus bij de jongens is de mediaan het grootst.

Bladzijde 224

- 57 a De boxen van juli en augustus overlappen elkaar, maar de mediaan van augustus ligt buiten de box van juli. Dus het verschil is middelmatig en de uitspraak is niet juist.

- b Het maximum van de februarimaanden is kleiner dan het minimum van de aprilmaanden.

Dus de uitspraak is juist.

Bladzijde 225

- c In 1995 is de totale erosie 4000 ha.

Zoek in figuur 12.38 naar het totaal 4000 ha. Dat is 2600 (linkeroever) en 1400 ha (rechteroever) en hierbij hoort een maximale waterdoorvoer van 88 000 m³/s.

- d De totale erosie in de periode 2001 tot en met 2005 was

$$1300 + 2200 + 2800 + 2600 + 1700 = 10\,600 \text{ ha} = 106 \text{ km}^2.$$

Het aantal bewoners is $106 \cdot 975 \approx 103\,000$.

Bladzijde 226

58 a $\mu - 2\sigma = 22,5 - 2 \cdot 6,9 = 8,7$

Volgens de vuistregels bij de normale verdeling zou 2,5% minder dan 8,7 scorepunten moeten hebben. Dat zijn $0,0025 \cdot 950 \approx 24$ kandidaten.

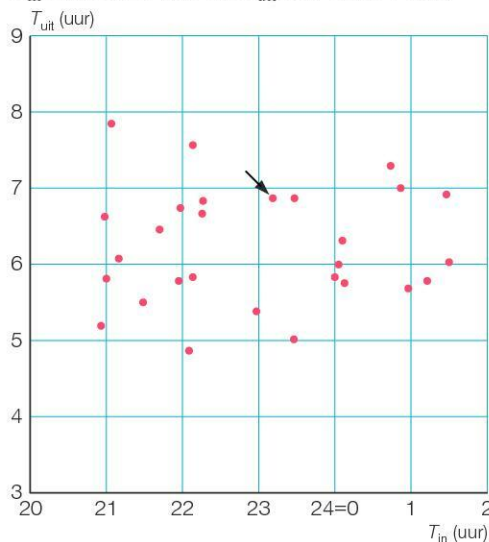
Uit de tabel aflezen geeft: 8 punten of minder dat zijn 24 kandidaten. Dus evenveel als je bij de normale verdeling zou verwachten.

Bladzijde 227

- b** Uit figuur 12.40 blijkt dat de modus 39 is.
De helft van 45 813 is 22 907.
Uit de tabel volgt dat de mediaan 36 is.
Het verschil is 3.
- c** Bij Engels heeft $\frac{5530}{45\,813} \times 100\% \approx 12,1\%$ een onvoldoende.
De helft van 22,8% is 11,4%, dus 12,1% is iets meer dan de helft van 22,8%.
- d** $\hat{p} = 0,228$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,228 \cdot 0,772}{950}} = 0,0136\dots$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,228 - 2 \cdot 0,0136\dots \approx 0,201$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,228 + 2 \cdot 0,0136\dots \approx 0,255$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [20,1%; 25,5%].
- e** Een puntenwolk of spreidingsdiagram is het meest geschikt.
Extra nodig:
- de resultaten van de kandidaten die in beide groepen zitten
- per kandidaat de scores van beide vakken.

Bladzijde 228

- 59 a** T_{in} iets na 23 uur en T_{uit} iets voor 7 uur.



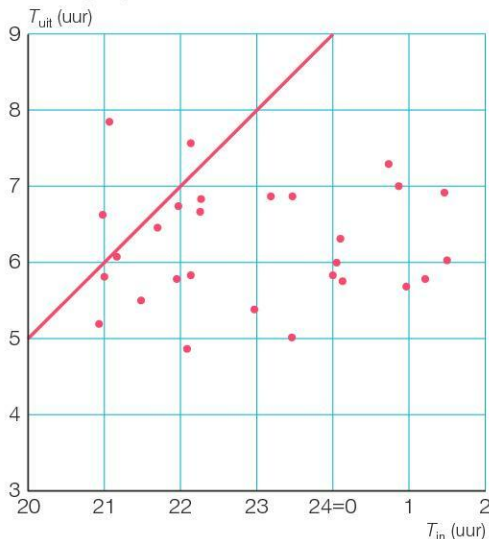
- b** De spreidingsbreedte van T_{in} is $25,5 - 20,9 = 4,6$ uur.
De spreidingsbreedte van T_{uit} is $7,8 - 4,9 = 2,9$ uur.
 $\frac{4,6}{2,9} \approx 1,6$ dus op de puntjes moet 1,6 staan.

Bladzijde 229

- c** Bij I: De punten liggen niet op of rond een rechte of kromme lijn.
Bij II: Bij een normale verdeling zouden er in het midden meer punten moeten liggen dan aan de randen en dat is niet zo.

d Teken de lijn $T_{\text{uit}} - T_{\text{in}} = 9$.

Deze lijn gaat onder andere door de punten (21, 6) en (22, 7).



Er liggen 3 punten boven de lijn, dus hij heeft zich 3 nachten aan de stelregel gehouden.

- e I: De boxen overlappen elkaar niet, dus je kunt deze conclusie wel trekken.
 II: Uit de boxplot kun je niet een gemiddelde aflezen, dus je kunt deze conclusie niet trekken.

12.6 Onderzoeksopgaven

Bladzijde 230

60 Voor de gemiddelde voetafdruk per persoon geldt $V = 2,85 - 0,11t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2010.

Los op $2,85 - 0,11t = 1,20$

$$-0,11t = -1,65$$

$$t = 15$$

Dus de formule $V = 2,85 - 0,11t$ is geldig tot en met 2025.

Voor de wereldbevolking geldt $W = 6,9 \cdot 1,007^t$ met t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2010 en W in miljarden.

Voor $0 \leq t \leq 15$ geldt voor de totale voetafdruk $TV = 6,9 \cdot 1,007^t \cdot (2,85 - 0,11t)$.

Voer de formule in en maak een tabel. Je krijgt

$t = 13$ geeft $TV \approx 10,728$

$t = 14$ geeft $TV \approx 9,966$

$t = 15$ geeft $TV \approx 9,193$

Voor $15 \leq t \leq 40$ geldt $TV = 6,9 \cdot 1,007^t \cdot 1,20 = 8,28 \cdot 1,007^t$.

Voer de formule in en maak een tabel. Je krijgt

$t = 27$ geeft $TV \approx 9,996$

$t = 28$ geeft $TV \approx 10,066$

Dus minder dan 10 miljard mha voor de jaren 2024 tot en met 2037.

Bladzijde 231

- 61** Voor het aantal senioren geldt

$$V_s = at + 35\,000 \text{ met } a = \frac{\Delta V_s}{\Delta t} = \frac{53\,000 - 35\,000}{12} = 1500.$$

$$\text{Dus } V_s = 1500t + 35\,000.$$

Voor het aantal junioren geldt

$$V_j = at + 33\,000 \text{ met } a = \frac{\Delta V_j}{\Delta t} = \frac{85\,000 - 33\,000}{12} = 4333.$$

$$\text{Dus } V_j = 4333t + 33\,000.$$

$$V_s + V_j = 1500t + 35\,000 + 4333t + 33\,000 = 5833t + 68\,000$$

$$\text{Er moet gelden } \frac{V_s}{V_s + V_j} = 0,35.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{1500x + 35\,000}{5833x + 68\,000} \text{ en } y_2 = 0,35.$$

De optie snijpunt geeft $x = 20,68\dots$

Dus in het jaar $2002 + 21 = 2023$.

Bladzijde 233

- 62** B = aantal hokjes in de breedte zonder witruimte

$$B = an + b \text{ met } a = \frac{\Delta B}{\Delta n} = \frac{177 - 21}{40 - 1} = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} B = 4n + b \\ n = 1 \text{ en } B = 21 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 1 + b = 21 \\ b = 17 \end{array}$$

$$\text{Dus } B = 4n + 17.$$

$$\text{Voor } n = 25 \text{ is } B = 117.$$

$$\text{Voor } n = 25 \text{ is de totale breedte } 117 + 8 = 125.$$

$$\text{Het percentage is } \frac{125^2 - 117^2}{125^2} \times 100\% \approx 12,4\%.$$

- 63** Meeste bioscopen per inwoner, dus minste aantal inwoners per bioscoop. Dat is Groningen.

Groningen heeft 11 bioscopen en 50 000 inwoners per bioscoop, dus $11 \cdot 50\,000 = 550\,000$ inwoners.

$$\text{Er zijn } 1\,180\,000 \text{ bioscoopbezoeken in Groningen, dat is } \frac{1\,180\,000}{550\,000} \approx 2,15$$

bioscoopbezoeken per inwoner, dus Kees heeft gelijk.

Bladzijde 234

- 64** Er zijn $\frac{4620}{210} = 22$ zonnepanelen nodig, dus de kosten zijn 10 200 euro.

$$\text{De gemiddelde prijs per kWh is } 0,223 + 4,5 \cdot 0,003 = \text{€ } 0,2365.$$

$$\text{De opbrengst in 10 jaar is } 10 \cdot 4620 \cdot 0,2365 = 10\,926 \text{ euro.}$$

De opbrengst is meer dan de kosten, dus de slogan klopt.

Bladzijde 235

- 65** Er worden $210 - 198 = 12$ extra tickets per vlucht verkocht.

$$\text{Dat levert op } 300 \text{ vluchten } 300 \cdot 12 \cdot 78 = 280\,800 \text{ dollar extra inkomsten.}$$

In deze 300 vluchten moet aan $8 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 31$ passagiers een vergoeding van 250 dollar worden betaald.

$$\text{De extra winst is dus } 280\,800 - 31 \cdot 250 = 273\,050 \text{ dollar.}$$

$$\text{De gemiddelde extra winst per stoel is } \frac{273\,050}{300 \cdot 198} = 4,59\dots \text{ dollar.}$$

$$\text{Dat is } \frac{4,59\dots}{11,25} \times 100\% \approx 40,9\% \text{ meer dan } 11,25 \text{ dollar.}$$

De risicoanalist heeft dus gelijk.

Bladzijde 236

- 66** In 2005 werden 13 750 auto's gestolen, dat is 0,01375 miljoen.
Aantal personenauto's N in miljoenen.

$$N = at + 7,93 \text{ met } t = 0 \text{ in 2013 en } a = \frac{7,93 - 6,55}{12} = 0,115.$$

$$\text{Dus } N = 0,115t + 7,93.$$

$$\text{Aantal gestolen auto's } A \text{ in miljoenen, dus } A = 0,0015N = 0,0015(0,115t + 7,93).$$

$$\text{Los op } 0,0015(0,115t + 7,93) = 0,01375$$

$$0,115t + 7,93 = 9,166\dots$$

$$0,115t = 1,236\dots$$

$$t \approx 10,75$$

$$\text{Dus in } 2013 + 11 = 2024.$$

Bladzijde 237

- 67** Benzine of diesel: 243 toename in 4 jaar, dus in 2020 is het $7725 + 243 = 7968$.
LPG: 38 afname in 4 jaar, dus in 2020 is het $165 - 38 = 127$.

$$\text{Elektrisch en hybride: groeifactor } \frac{211}{70} \text{ per 4 jaar, dus in 2020 is het } 211 \cdot \frac{211}{70} \approx 636.$$

$$\text{Totaal } 7968 + 127 + 636 = 8731.$$

$$\text{Het aandeel elektrisch en hybride is dan } \frac{636}{8731} \times 100\% \approx 7,3\%.$$

Dus het aandeel zal tenminste 5,2% zijn.

Gemengde opgaven

9 Exponentiële verbanden

Bladzijde 238

1 a $N = \frac{1750}{121 \cdot 1,8^t} = \frac{1750}{121} \cdot 1,8^{-t} = \frac{1750}{121} \cdot (1,8^{-1})^t \approx 14,46 \cdot 0,56^t$
Dus $N = 14,46 \cdot 0,56^t$.

b Groeifactor per jaar is 1,045, dus $1,045^t = 2$.

Voer in $y_1 = 1,045^x$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 15,74$...

Dus de verdubbelingstijd is 15 jaar en $0,74 \dots \times 12 \approx 9$ maanden.

c De halveringstijd is 15,75 uur, dus $g_{15,75 \text{ uur}} = 0,5$.

Dus $g_{\text{uur}} = 0,5^{\frac{1}{15,75}} \approx 0,957$.

De afname is 4,3% per uur.

d $g_{10 \text{ uur}} = 1,035$

$g_{\text{dag}} = 1,035^{\frac{24}{10}} \approx 1,086$

De toename is 8,6% per dag.

e $N = b \cdot g^t$

$g_{2,5 \text{ uur}} = \frac{6000}{5000} = \frac{6}{5}$, dus $g_{\text{uur}} = \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{2,5}} = 1,0756 \dots$

$N = b \cdot 1,0756 \dots^t$
 $t = 4$ en $N = 5000$ } $b \cdot 1,0756 \dots^4 = 5000$

$$b = \frac{5000}{1,0756 \dots^4} \approx 3700$$

Dus $N = 3700 \cdot 1,076^t$.

f Als t heel groot wordt, nadert $0,95^t$ tot 0. Dan wordt $6 \cdot 0,95^t \approx 0$ en

$$25 + 6 \cdot 0,95^t \approx 25. \text{ Dus dan wordt } \frac{2850}{25 + 6 \cdot 0,95^t} \approx \frac{2850}{25} = 114.$$

Dus het verzadigingsniveau is 114.

2 a $N = \frac{581}{55 \cdot 0,95^t} = \frac{581}{55} \cdot 0,95^{-t} = \frac{581}{55} \cdot (0,95^{-1})^t \approx 10,56 \cdot 1,053^t$

De formule is van de vorm $N = b \cdot g^t$ met $g \approx 1,053$, dus de grafiek van $N = \frac{581}{55 \cdot 0,95^t}$

is toenemend stijgend, want g groter dan 1.

b De verdubbelingstijd is 12,5 jaar, dus $g_{12,5 \text{ jaar}} = 2$.

Dus $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{12,5}} \approx 1,057$.

Het groeipcentage is 5,7% per jaar.

c $g_3 \text{ weken} = g_{21 \text{ dagen}} = 0,6$

$g_{\text{dag}} = 0,6^{\frac{1}{21}} \approx 0,975 \dots$

Los op $0,975 \dots^t = 0,5$.

Voer in $y_1 = 0,975 \dots^x$ en $y_2 = 0,5$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 28,5$.

Dus de halveringstijd is 28,5 dagen.

d $N = b \cdot g^t$

$g_{10 \text{ dagen}} = 0,5$, dus $g_{\text{dag}} = 0,5^{\frac{1}{10}} = 0,9330 \dots$

$N = b \cdot 0,9330 \dots^t$
 $t = 15$ en $N = 2800$ } $b \cdot 0,9330 \dots^{15} = 2800$

$$b = \frac{2800}{0,9330 \dots^{15}} \approx 7920$$

Dus $N = 7920 \cdot 0,933^t$.

e Als t toeneemt, dan neemt $1,06^t$ toe, dus ook $3 \cdot 1,06^t$ neemt toe, dus ook $3 \cdot 1,06^t - 2$ neemt toe, dus $512(3 \cdot 1,06^t - 2)$ neemt toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

- 3 a** $t = 0$ geeft $N \approx 18\,571$
 $t = 10$ geeft $N \approx 31\,161$
 Dus tussen 1 januari 1960 en 1 januari 1970 is het aantal inwoners met $31\,161 - 18\,571 = 12\,590$ toegenomen.
 $t = 20$ geeft $N \approx 44\,166$
 Dus tussen 1 januari 1970 en 1 januari 1980 is het aantal inwoners met $44\,166 - 31\,161 = 13\,005$ toegenomen.
- b** Als t toeneemt, dan neemt $0,92^t$ af, dus ook $2,5 \cdot 0,92^t$ neemt af, dus ook $1 + 2,5 \cdot 0,92^t$ neemt af, dus $\frac{65\,000}{1 + 2,5 \cdot 0,92^t}$ neemt toe.
 Dus de grafiek van N is stijgend.
- c** Als t heel groot wordt, nadert $0,92^t$ tot 0. Dan wordt $2,5 \cdot 0,92^t \approx 0$ en $1 + 2,5 \cdot 0,92^t \approx 1$.
 Dus dan wordt $\frac{65\,000}{1 + 2,5 \cdot 0,92^t} \approx \frac{65\,000}{1} = 65\,000$, dus de grenswaarde is 65 000.
- d** Op 1 januari 2020 is $t = 60$ en dat geeft $N \approx 63\,926$.
 De grenswaarde is 65 000, dus vanaf 2020 zal het aantal inwoners niet meer flink toenemen.
- e** Los op $\frac{65\,000}{1 + 2,5 \cdot 0,92^t} = 50\,000$.
 Voer in $y_1 = \frac{65\,000}{1 + 2,5 \cdot 0,92^x}$ en $y_2 = 50\,000$.
 De optie snijpunt geeft $x = 25,42\dots$
 Dus 25 jaar en $0,42\dots \times 12 \approx 5,1$ maanden na 1 januari 1960.
 Dus in juni 1985.

Bladzijde 239

- 4 a** $g_{30 \text{ jaar}} = \frac{21\,000}{3500} = 6$, dus $g_{10 \text{ jaar}} = 6^{\frac{1}{3}} \approx 1,871$
 De toename per tien jaar is 87,1%.
- b** $W = b \cdot g^t$
 $g_{30 \text{ jaar}} = \frac{21\,000}{3500} = 6$, dus $g_{\text{jaar}} = 6^{\frac{1}{30}} = 1,0615\dots$

$$\left. \begin{array}{l} W = b \cdot 1,0615\dots^t \\ t = 13 \text{ en } W = 3500 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,0615\dots^{13} = 3500 \\ b = \frac{3500}{1,0615\dots^{13}} \approx 1610 \end{array}$$

 Dus $W = 1610 \cdot 1,062^t$.
- c** $t = 22$ geeft $W \approx 6047$
 Dus ongeveer 6000 woorden.
- d** Groeifactor per jaar is 1,062, dus $1,062^t = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,062^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 11,52\dots$
 Dus de verdubbelingstijd is ongeveer 12 jaar.
- e** Los op $1610 \cdot 1,062^t = 60\,000$.
 Voer in $y_1 = 1610 \cdot 1,062^x$ en $y_2 = 60\,000$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 60,1$.
 Dus in het jaar $1970 + 60 = 2030$.
- 5 a** Bij exponentiële groei zijn de quotiënten bij benadering gelijk.
 In België is dat niet het geval, je krijgt $\frac{88}{75} \approx 1,2$ en $\frac{122}{88} \approx 1,4$.
 In Ecuador is dat niet het geval, je krijgt $\frac{18}{14} \approx 1,3$ en $\frac{27}{18} = 1,5$.
 Dus in Italië is er sprake van exponentiële groei (je krijgt $\frac{6077}{5476} \approx 1,1$; $\frac{6820}{6077} \approx 1,1$;
 $\frac{7503}{6820} \approx 1,1$; $\frac{8215}{7503} \approx 1,1$; $\frac{9134}{8215} \approx 1,1$ en $\frac{10\,023}{9134} \approx 1,1$).

- b** $N = b \cdot g^t$
 $g_{6 \text{ dagen}} = \frac{10023}{5476}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{10023}{5476}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1,106$
 $t = 0$ op 28 maart geeft $N = 10023 \cdot 1,106^t$.
 Los op $10023 \cdot 1,106^t = 1\,000\,000$.
 Voer in $y_1 = 10023 \cdot 1,106^x$ en $y_2 = 1\,000\,000$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 45,7$.
 Dus 46 dagen na 28 maart.

6 a $N = b \cdot g^t$
 $g_{3 \text{ jaar}} = 0,27$, dus $g_{\text{jaar}} = 0,27^{\frac{1}{3}} = 0,646\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,646\dots^t \\ t = 7 \text{ en } N = 100 \end{array} \right\} b \cdot 0,646\dots^7 = 100$$

$$b = \frac{100}{0,646\dots^7} \approx 2120$$

- Dus $N = 2120 \cdot 0,646^t$.
b Op 1 juli 2017 is $t = 4,5$, dus $N \approx 297$. Dus ongeveer 300 vissen.
 Op 1 november 2014 is $t = 1\frac{10}{12}$, dus $N \approx 952$. Dus ongeveer 950 vissen.
c Groeifactor per jaar is 0,646, dus $0,646^t = 0,5$.
 Voer in $y_1 = 0,646^x$ en $y_2 = 0,5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 1,586\dots$
 Dus de halveringstijd is 1 jaar en $0,586\dots \times 12 \approx 7$ maanden (= 19 maanden).
d Los op $2120 \cdot 0,646^t = 500$.
 Voer in $y_1 = 2120 \cdot 0,646^x$ en $y_2 = 500$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3,305\dots$
 Dus 3 jaar en $0,305\dots \times 12 \approx 3,67$ maanden na 1 januari 2013.
 Dus in april 2016.

Bladzijde 240

- 7 a** $P = b \cdot g^t$
 Bij $t = 150$ hoort $P = 10$, dus $g_{150 \text{ dagen}} = \frac{10}{100} = 0,1$, dus $g_{\text{dag}} = 0,1^{\frac{1}{150}} \approx 0,985$.
 Dus $P = 100 \cdot 0,985^t$.
b $t = 200$ geeft $P = 100 \cdot 0,985^{200} \approx 4,9$, dus na 200 dagen was er nog 4,9% over.
c Groeifactor per jaar is 0,985, dus $0,985^t = 0,5$.
 Voer in $y_1 = 0,985^x$ en $y_2 = 0,5$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 46$.
 Dus de halveringstijd is ongeveer 46 dagen.
d Los op $100 \cdot 0,985^t = 1$.
 Voer in $y_1 = 100 \cdot 0,985^x$ en $y_2 = 1$.
 De optie snijpunt geeft $x = 304,7\dots$
 Dus na $304,7\dots$ dagen ≈ 10 maanden is er minder dan 1% van de beginhoeveelheid aanwezig.

- 8 a** $g_{27 \text{ jaar}} = \frac{125}{145}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{125}{145}\right)^{\frac{1}{27}} \approx 0,9945$.
 Bij een groeifactor van 0,9945 hoort een afname van 0,55%.
b Voor de hoeveelheid drinkwater N in liter per dag geldt $N = 145 \cdot 0,9945^t$ met t de tijd in jaren en $t = 0$ in 1990.
 $t = 23$ geeft $N = 145 \cdot 0,9945^{23} \approx 128$
 Dus in 2013 verbruikte een Nederlander gemiddeld 128 liter drinkwater per dag.

Alternatieve uitwerking:

De groeifactor per jaar is $\left(\frac{125}{145}\right)^{\frac{1}{27}} \approx 0,9945\dots$
 2013 is 23 jaar na 1990, dus in 2013 verbruikte een Nederlander gemiddeld $145 \cdot 0,9945\dots^{23} \approx 128$ liter drinkwater per dag.

- c In 2013 werd er $0,43 \cdot 128 = 55,04$ liter gebruikt voor douchen.

$$D = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{55,04 - 45,9}{13} = 0,703...$$

$$\left. \begin{array}{l} D = 0,703... \cdot t + b \\ t = 10 \text{ en } D = 45,9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,703... \cdot 10 + b = 45,9 \\ b \approx 38,9 \end{array}$$

$$\text{Dus } D = 0,7t + 38,9.$$

- d De helft van het waterverbruik is douchen, dus $D = 0,5N$.

$$\text{Los op } 0,7t + 38,9 = 0,5 \cdot 145 \cdot 0,9945^t.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 0,7x + 38,9 \text{ en } y_2 = 0,5 \cdot 145 \cdot 0,9945^x.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 31,5$.

Dus in het jaar $1990 + 32 = 2022$ (of in de loop van het jaar 2021).

Bladzijde 241

- 9 a De grafiek is een lijnstuk op logaritmisch papier, dus er is sprake van een exponentieel verband.

$$N = b \cdot g^t$$

$$g_{23 \text{ dagen}} = \frac{3983}{13}, \text{ dus } g_{\text{dag}} = \left(\frac{3983}{13} \right)^{\frac{1}{23}} \approx 1,283.$$

$$\text{Dus } N = 13 \cdot 1,283^t.$$

- b Groeifactor per dag is 1,283, dus $1,283^t = 2$.

$$\text{Voer in } y_1 = 1,283^x \text{ en } y_2 = 2.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 2,8$.

Dus de verdubbelingstijd is ongeveer 2,8 dagen.

- c $t = 40$ geeft $N = 13 \cdot 1,283^{40} \approx 277\,000$.

Aflezen bij $t = 40$ geeft 50 000 besmettingen.

Dus $277\,000 - 50\,000 \approx 227\,000$ meer besmettingen.

Bladzijde 242

- 10 a Als t heel groot wordt, nadert $0,99936^t$ tot 0. Dan wordt $69 \cdot 0,99936^t \approx 0$. Dus dan wordt $69 - 69 \cdot 0,99936^t \approx 69$, dus de grenswaarde is 69.

De botdichtheid neemt minder dan 69% af, dus dan blijft er minstens 31% botdichtheid behouden.

- b $t = 500$ geeft $B = 69 - 69 \cdot 0,99936^{500} = 18,9...$, dus

$$T = \frac{\left(\frac{100 - 18,9...}{100} \right) \cdot 0,840 - 0,858}{0,120} \approx -1,47.$$

Deze T-score is acceptabel.

$$t = 1000 \text{ geeft } B = 69 - 69 \cdot 0,99936^{1000} = 32,6..., \text{ dus}$$

$$T = \frac{\left(\frac{100 - 32,6...}{100} \right) \cdot 0,840 - 0,858}{0,120} \approx -2,43.$$

Deze T-score is niet acceptabel.

- c Los op $\frac{\left(\frac{100 - B}{100} \right) \cdot 0,840 - 0,858}{0,120} = -2$.

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{\left(\frac{100 - x}{100} \right) \cdot 0,840 - 0,858}{0,120} \text{ en } y_2 = -2.$$

De optie snijpunt geeft $x = 26,42...$, dus $B = 26,24...$

$$\text{Los op } 69 - 69 \cdot 0,99936^t = 26,24...$$

$$\text{Voer in } y_1 = 69 - 69 \cdot 0,99936^x \text{ en } y_2 = 26,24...$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 754$.

Dus 754 dagen.

Alternatieve uitwerking:

$$\text{Los op } \frac{\left(\frac{100 - (-69 \cdot 0,99936^t + 69)}{100}\right) \cdot 0,840 - 0,858}{0,120} = -2.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{\left(\frac{100 - (-69 \cdot 0,99936^x + 69)}{100}\right) \cdot 0,840 - 0,858}{0,120} \text{ en } y_2 = -2.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 754$, dus 754 dagen.

$$\text{d De grenswaarde van } B \text{ is } 69, \text{ dat geeft } T = \frac{\left(\frac{100 - 69}{100}\right) \cdot 0,840 - 0,858}{0,120} = -4,98.$$

Dus Shadan heeft gelijk, want de laagst mogelijke T-score is -4,98.

11 a $\frac{38,1}{56,1} \approx 0,68; \frac{25,9}{38,1} \approx 0,68; \frac{17,6}{25,9} \approx 0,68; \frac{12,0}{17,6} \approx 0,68 \text{ en } \frac{8,2}{12,0} \approx 0,68$

De quotiënten zijn bij benadering gelijk, dus er is een exponentieel verband.

b 3,8 cm ligt tussen 3,5 cm en 4,5 cm, dus gebruik als beginwaarde het percentage 25,9.

De groeifactor per cm is 0,68, dus bij een dikte van 3,8 cm dringt

$$25,9 \cdot 0,68^{0,3} \approx 23,1\% \text{ van het geluid door.}$$

c 15 ligt tussen 17,6 en 12,0, dus gebruik als beginwaarde het percentage 17,6.

De groeifactor per cm is 0,68, dus los op $17,6 \cdot 0,68^x = 15$.

$$\text{Voer in } y_1 = 17,6 \cdot 0,68^x \text{ en } y_2 = 15.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,4$.

Deze plaat heeft een dikte van ongeveer $4,5 + 0,4 = 4,9$ cm (= 49 mm).

Bladzijde 243

12 a $s = 0,25$ geeft $N = b \cdot 0,992^{0,25 \cdot t} = b \cdot (0,992^{0,25})^t \approx b \cdot 0,998^t$

b Los op $0,998^t = 0,5$.

$$\text{Voer in } y_1 = 0,998^x \text{ en } y_2 = 0,5.$$

De optie snijpunt geeft $x = 346,2...$

$$\text{Dus de halveringstijd is } 346,2... \text{ uur} \approx \frac{346,2...}{24} \approx 14,4 \text{ dagen.}$$

c Los op $0,992^{0,06t} = 0,5$.

$$\text{Voer in } y_1 = 0,992^{0,06x} \text{ en } y_2 = 0,5.$$

De optie snijpunt geeft $x = 1438,2...$

$$\text{Dus de halveringstijd is } 1438,2... \text{ uur} \approx \frac{1438,2...}{24} \approx 60 \text{ dagen.}$$

d Los op $0,8 \cdot 0,992^{0,06t} = 0,2$.

$$\text{Voer in } y_1 = 0,8 \cdot 0,992^{0,06x} \text{ en } y_2 = 0,2.$$

De optie snijpunt geeft $x = 2876,5...$

$$\text{Dus na } 2876,5... \text{ uur} \approx \frac{2876,5...}{24} \approx 120 \text{ dagen.}$$

e Als 70% van de concentratie is verdwenen is er nog 30% over, dus los op $0,992^{0,06t} = 0,3$.

$$\text{Voer in } y_1 = 0,992^{0,06x} \text{ en } y_2 = 0,3.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 2500$.

Dus ongeveer 2500 keer zo lang.

f Planten zijn niet zo effectief om de lucht in binnenruimtes te zuiveren.

Bladzijde 244

13 a In de 5^e laag $2 \cdot 8 = 16$ spelers.

In de 6^e laag $2 \cdot 16 = 32$ spelers.

b Elke speler moet twee mensen vinden voor de volgende laag, dus het aantal spelers wordt met twee vermenigvuldigd. Er is één speler in de eerste laag, dus voor de 7^e laag wordt er zes keer met twee vermenigvuldigd. Dat is 2^6 .

In de 20^e laag bevinden zich $2^{19} = 524\,288$ mensen.

- c** Het aantal spelers in de 4^e, 5^e en 6^e laag is $8 + 16 + 32 = 56$.
- d** Alleen spelers in de 1^e, 2^e en 3^e laag hebben geld ontvangen, dat zijn er $1 + 2 + 4 = 7$.
In totaal zijn er $56 + 7 = 63$ spelers, waarvan $\frac{56}{63} \times 100\% \approx 88,9\%$ geld heeft verloren.
- e** In laag 32 zitten $2^{31} = 2\,147\,483\,648$ mensen, samen met de mensen in laag 33 zouden dat er $2\,147\,483\,648 + 4\,294\,967\,296 = 6\,442\,450\,944$ zijn. Dat is meer dan 6 miljard.
- f** De spelers in de 30^e, 31^e en 32^e laag verliezen hun geld. Dat zijn $2^{29} + 2^{30} + 2^{31} = 3\,758\,096\,384$ mensen. Dat is $\frac{3\,758\,096\,384}{4\,294\,967\,295} \times 100\% = 87,5\%$.
- g** De totale inleg van deelnemers uit een laag wordt verdeeld over de deelnemers drie lagen daarboven. Aangezien het aantal deelnemers in elke laag verdubbelt, zijn dat er $2^3 = 8$ keer zo veel. Dus een inleg van 10 000 euro levert $8 \cdot 10\,000 = 80\,000$ euro op.
- h** Als het spel 11 lagen diep is, dan hebben de mensen in de 9^e, 10^e en 11^e laag hun inleg verloren. Dat zijn $2^8 + 2^9 + 2^{10} = 1792$ deelnemers. Bij een inleg van 10 000 euro hebben zij $1792 \cdot 10\,000 = 17\,920\,000$ euro verloren..
Dat is ongeveer 18 miljoen euro, dus het klopt.

10 Statistiek gebruiken

Bladzijde 245

- 14 a** $E = \frac{38,4 - 31,2}{\frac{1}{2}(2,9 + 3,1)} = 2,4$
 $E > 0,8$, dus het verschil is groot.
- b** De lijn gaat door de punten (20; 2,2) en (60, 7).
 $S_{\text{nieuw}} = a \cdot S_{\text{oud}} + b$ met $\frac{\Delta S_{\text{nieuw}}}{\Delta S_{\text{oud}}} = \frac{7 - 2,2}{60 - 20} = 0,12$.
$$\left. \begin{array}{l} S_{\text{nieuw}} = 0,12S_{\text{oud}} + b \\ S_{\text{oud}} = 20 \text{ en } S_{\text{nieuw}} = 2,2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,12 \cdot 20 + b = 2,2 \\ 2,4 + b = 2,2 \\ b = -0,2 \end{array}$$

Dus $S_{\text{nieuw}} = 0,12S_{\text{oud}} - 0,2$.
- c** Los op $0,12S_{\text{oud}} - 0,2 = 8,4$
 $0,12S_{\text{oud}} = 8,6$
 $S_{\text{oud}} \approx 72$
Dus een score van ongeveer 72.
- d** $S_{\text{oud}} = 40$ geeft $S_{\text{nieuw}} = 0,12 \cdot 40 - 0,2 = 4,6$
Dus bij scores lager dan 4,6 op de nieuwe test worden de extra trainingen aangeboden.
- e** Dat is twee keer het geval.
Er is een persoon waarvoor geldt $S_{\text{oud}} < 40$, maar $S_{\text{nieuw}} > 4,6$. Hierbij hoort het punt (39; 4,7).
Er is ook een persoon waarvoor geldt $S_{\text{oud}} > 40$, maar $S_{\text{nieuw}} < 4,6$. Hierbij hoort het punt (41; 4,5).

Bladzijde 246

- 15 a** kwantitatief
- b** Bij de punten op deze lijn was de schatting voor de discussie gelijk aan de schatting na de discussie. De bijbehorende leerlingen zijn dus niet van gedachten veranderd naar aanleiding van de discussie.
- c** De punten rechts van de lijn $x = 80$ liggen bijna allemaal onder de lijn $y = 80$.

Bladzijde 247

- 16 a** Niet eens. De polygoon van Alphastar ligt hoger, dus minder acties per minuut komt juist vaker voor bij Alphastar.
- b** $\text{max.Vcp} = 75 - 60 = 15$
 $\text{max.Vcp} \leq 20$, dus het verschil is gering.

- c Alphastar won $11 + 4 + 10 + 4 + 4 + 10 + 8 + 5 + 5 = 61$ wedstrijden.
De menselijke tegenstanders wonnen $3 + 0 + 2 + 4 + 3 + 5 + 6 + 5 + 3 = 31$ wedstrijden.
Dat is $\frac{61}{31} \approx 1,97$ keer zo vaak.

d *Aanpak:*

Maak een kruistabel met gewonnen en verloren wedstrijden van Alphastar en de menselijke tegenstanders waar ze met hetzelfde ras speelden.

In totaal zijn dat $14 + 7 + 8 = 29$ wedstrijden, waarvan Alphastar er $11 + 4 + 5 = 20$ won. De mens won er dus $29 - 19 = 9$. Zie de tabel.

	Alphastar	mens	
gewonnen	20	9	29
verloren	9	20	29
	29	29	

$$\phi = \frac{20 \cdot 20 - 9 \cdot 9}{\sqrt{29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29}} \approx 0,38$$

$0,2 < \phi \leq 0,4$, dus het verschil is middelmatig.

Bladzijde 248

- 17 a De gegevens van alle basisscholen zijn opgenomen, dus het populatiegemiddelde is al bekend (met 100% betrouwbaarheid).
b Het gemiddelde 30,1 valt niet in de modale klasse $\langle 29, 30 \rangle$.
c Meer dan twee standaardafwijkingen onder het gemiddelde is een schoolweging kleiner dan $30,1 - 2 \cdot 3,7 = 22,7$. Dat zijn minstens $52 + 80 = 132$ en hoogstens $52 + 80 + 105 = 237$ scholen.
Volgens de vuistregels bij de normale verdeling is dat 2,5% van de scholen, dus $0,025 \cdot 6489 \approx 162$ scholen. Het kan dus kloppen met het histogram.
d school A:
 $W = 20$ geeft $N = 101,57 - 1,79 \cdot 20 = 65,77$
 $62\% < 65,77\%$, dus het vereiste streefniveau wordt niet gehaald.
school B:
 $W = 40$ geeft $N = 101,57 - 1,79 \cdot 40 = 29,97$
 $32\% > 29,97\%$, dus het vereiste streefniveau wordt gehaald.

Bladzijde 249

- 18 a $E = \frac{1,80 - 1,25}{\frac{1}{2}(0,09 + 0,39)} \approx 2,29$
 $E > 0,8$, dus het verschil is groot.
b $\left[1,25 - 2 \cdot \frac{0,39}{\sqrt{69}}; 1,25 + 2 \cdot \frac{0,39}{\sqrt{69}} \right] \approx [1,156; 1,344]$
c De noppenhoogte neemt gemiddeld per jaar met $\frac{2 - 1,25}{40} = 0,01875$ mm af.
Dus na $\frac{2}{0,01875} \approx 107$ jaar zijn de noppen verdwenen.
d kleinste gemiddelde noppenhoogte:
De gemiddelde afname per jaar is $\frac{2 - 1,156}{40} = 0,0211$ mm.
Dus een levensduur van $\frac{2}{0,0211} \approx 95$ jaar.
grootste gemiddelde noppenhoogte:
De gemiddelde afname per jaar is $\frac{2 - 1,344}{40} = 0,0164$ mm.
Dus een levensduur van $\frac{2}{0,0164} \approx 122$ jaar.

e Los op $4 \cdot \frac{0,39}{\sqrt{n}} = 0,1$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \frac{0,39}{\sqrt{x}}$ en $y_2 = 0,1$.

De optie snijpunt geeft $x = 243,36$.

Dus er moeten minstens 244 noppen in de steekproef zitten.

Bladzijde 250

19 a $\phi = \frac{118 \cdot 124 - 182 \cdot 176}{\sqrt{300 \cdot 300 \cdot 294 \cdot 306}} \approx -0,19$

$-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dus het verschil is gering.

b Het percentage mannetjes is $\frac{176}{300} \times 100\% \approx 59\%$ en het percentage vrouwtjes is

$100\% - 59\% = 41\%$.

De percentageverhouding mannetjes : vrouwtjes = 59 : 41.

c $\frac{42 - 24}{24,4 - 21,6} \approx 6,4$; $\frac{60 - 42}{27,2 - 24,4} \approx 6,4$ en $\frac{76 - 60}{29,7 - 27,2} = 6,4$

Steeds krijg je ongeveer 6,4% per °C, dus de aanname van de bioloog is te verdedigen.

Bij een toename van 1 °C hoort een toename in het percentage mannetjes van 6,4, dus

bij 1 procent toename van mannetjes hoort een toename van $\frac{1}{6,4} = 0,15... \text{ } ^\circ\text{C}$.

De gezochte verhouding van 1 : 1 heeft een percentage mannetjes van 50%, dat is 8% meer dan de 42% bij 24,4 °C. Dus bij 50% mannetjes hoort een temperatuur van $24,4 + 8 \cdot 0,15... \approx 25,7^\circ\text{C}$.

Bladzijde 251

d De best passende lijn gaat door de punten (23, 30) en (27, 60).

$P_m = aT + b$ met $\frac{\Delta P_m}{\Delta T} = \frac{60 - 30}{27 - 23} = 7,5$.

$$\left. \begin{array}{l} P_m = 7,5T + b \\ T = 23 \text{ en } P_m = 30 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7,5 \cdot 23 + b = 30 \\ 172,5 + b = 30 \\ b = -142,5 \end{array}$$

Dus $P_m = 7,5T - 142,5$.

$P_v = 100 - P_m = 100 - (7,5T - 142,5) = 100 - 7,5T + 142,5 = -7,5T + 242,5$

Dus $P_v = -7,5T + 242,5$.

e $\hat{p} = 0,44$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,44 \cdot 0,56}{250}} = 0,031...$

$\hat{p} - 2\sigma = 0,44 - 2 \cdot 0,031... \approx 0,377$

$\hat{p} + 2\sigma = 0,44 + 2 \cdot 0,031... \approx 0,503$

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage mannetjes is

$[37,7\%; 50,3\%]$.

$T = 24,3$ geeft $P_m = 7,5 \cdot 24,3 - 142,5 = 39,75$

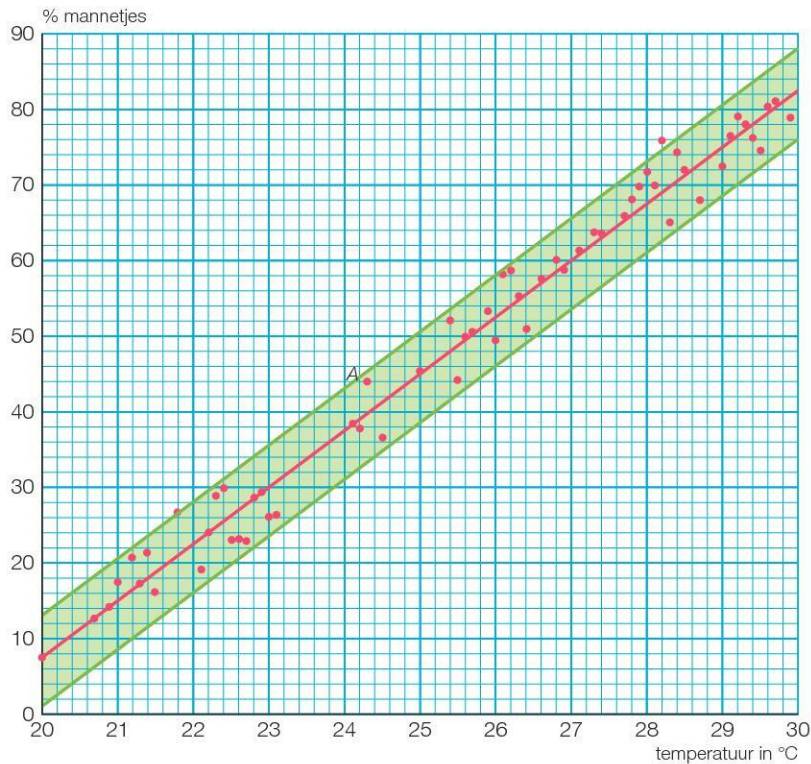
Ja, 39,75% valt binnen het interval.

f De middelste 95% ligt hoogstens 2σ , dus 6% van het gemiddelde, oftewel van de lijn af.

Dus de middelste 95% ligt tussen de lijnen $P_m = 7,5T - 148,5$ en $P_m = 7,5T - 136,5$.

T	20	30
$P_m = 7,5T - 148,5$	1,5	76,5

T	20	30
$P_m = 7,5T - 136,5$	13,5	88,5



- g** 8 op de 25 is gelijk aan 32 op de 100, dus 32% is mannetje.
Lees af bij $T = 24^\circ\text{C}$ dat 32% binnen het gebied van vraag f valt.

Bladzijde 252

- 20 a** kwantitatief en continu
- b** Conclusie 2 is te algemeen, het gaat hier om de Munduruku en niet om alle inheemse volken. Verder gaat het alleen over aantallen tussen 1 en 10, dus 'grotere aantallen' is onduidelijk.
Verbetering conclusie 2:
Munduruku vinden aantallen tussen 5 en 10 dichter bij elkaar liggen dan aantallen tussen 1 en 4.
- c** Bij de laagste 50% is de spreidingsbreedte $6,5 - 1,5 = 5$.
Bij de hoogste 50% is de spreidingsbreedte $8 - 6,3 = 1,7$.
- d** Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $\left[6,5 - 2 \cdot \frac{1,896}{\sqrt{33}}; 6,5 + 2 \cdot \frac{1,896}{\sqrt{33}}\right] \approx [5,84; 7,16]$.
Omdat 5 niet in dit interval ligt, kun je met minstens 95% betrouwbaarheid zeggen dat de Munduruku het stippenaantal 5 niet op de positie van 5 op de getallenlijn plaatsen.

Bladzijde 253

21 a $E = \frac{11,98 - 3,89}{\frac{1}{2}(9,43 + 5,26)} \approx 1,09$

$E > 0,8$, dus het verschil is groot.

b

	actief	controle	
verbetering	43	9	52
geen verbetering	27	68	95
	70	77	147

$$\phi = \frac{43 \cdot 68 - 9 \cdot 27}{\sqrt{52 \cdot 95 \cdot 70 \cdot 77}} \approx 0,52$$

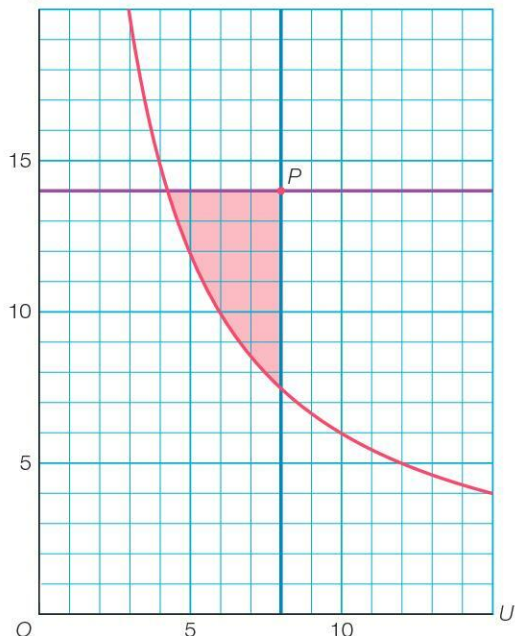
$\phi > 0,4$, dus het verschil is groot.

- c** Aan voorwaarde 1 is voldaan, want er was eerst sprake van intensieve begeleiding en daarna werd de verbetering van de gezondheid gemeten.
 Aan voorwaarde 2 is voldaan, want de patiënten zijn aselekt ingedeeld en daarom zijn mogelijke gemeenschappelijke factoren ongeveer gelijk verdeeld over de groepen.
 Deze factoren kunnen het verschil dus niet verklaren.
 Dus je mag concluderen dat intensieve begeleiding een oorzaak is van de verbetering van de gezondheid van diabetespatiënten.

11 Formules en variabelen

22 a $D \leq 14$ en $U \leq 8$

b D



- c** Als Jan 14 dagen lang 8 uur per dag werkt is dat $14 \cdot 8 = 112$ uur.
 Hierbij hoort het punt P in de figuur.
- d** Vanwege de voorrijkosten zijn de kosten minimaal bij zo min mogelijk dagen, dus
 Jan werkt 8 uur per dag. Dus $D = \frac{80}{8} = 10$ dagen.
 De minimale kosten zijn $50 \cdot 10 + 20 \cdot 80 = 2100$ euro.
- e** De voorrijkosten zijn 50 euro per dag oftewel $50 \cdot D$. Verder werkt Jan D dagen elke dag U uur, dus in totaal $D \cdot U$ uur. Hij rekent 20 euro per uur oftewel $20 \cdot D \cdot U$. Dus voor de totale kosten geldt $K = 50 \cdot D + 20 \cdot D \cdot U$.
- f** Er geldt $K = 2500$ en $U = 6$.

$$\left. \begin{array}{l} K = 50D + 20DU \\ K = 2500 \text{ en } U = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 50D + 20D \cdot 6 = 2500 \\ 50D + 120D = 2500 \\ 170D = 2500 \\ D \approx 14,7 \end{array}$$

Dat is niet mogelijk, want de klus zou dan 14,7 dagen duren en dat is te lang.

Bladzijde 254

23 a $A = 5p - \frac{6}{p^2} = \frac{5p^3}{p^2} - \frac{6}{p^2} = \frac{5p^3 - 6}{p^2}$

b $B = \frac{7q}{3q-12} \cdot (q-2) - \frac{1}{3} \cdot \frac{5q}{q-4} = \frac{7q(q-2)}{3q-12} - \frac{5q}{3(q-4)} = \frac{7q^2-14q}{3q-12} - \frac{5q}{3q-12} = \frac{7q^2-14q-5q}{3q-12} = \frac{7q^2-19q}{3q-12}$

c $K = \frac{1}{3}q + 4 + \frac{5}{q} = \frac{q}{3} + 4 + \frac{5}{q} = \frac{q^2}{3q} + \frac{12q}{3q} + \frac{15}{3q} = \frac{q^2 + 12q + 15}{3q}$

d $N = \frac{2t^3}{\left(\frac{5}{3t^4}\right)} \cdot t^2 = 2t^3 \cdot \frac{3t^4}{5} \cdot t^2 = 2t^3 \cdot \frac{3}{5} \cdot t^4 \cdot t^2 = 1,2t^1 = 1,2t$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad \frac{v+8}{1} &= \frac{2C}{4+2v} \\ 2C &= (v+8)(4+2v) \\ 2C &= 4v + 2v^2 + 32 + 16v \\ 2C &= 2v^2 + 20v + 32 \\ C &= v^2 + 10v + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f} \quad \frac{5y-6}{9x} &= 2\frac{2}{3} \\ \frac{5y-6}{9x} &= \frac{8}{3} \\ 3(5y-6) &= 8 \cdot 9x \\ 15y-18 &= 72x \\ 15y &= 72x+18 \\ y &= 4,8x+1,2 \end{aligned}$$

$$24 \quad \text{a} \quad N = \frac{1}{12}a \cdot \frac{(2a+3)a}{4a+4} = \frac{(2a+3)a^2}{12(4a+4)} = \frac{2a^3+3a^2}{48a+48}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad P &= \frac{(a-5)(a+6)}{a-2} + a + 1 = \frac{a^2+6a-5a-30}{a-2} + \frac{a(a-2)}{a-2} + \frac{a-2}{a-2} \\ &= \frac{a^2+6a-5a-30+a(a-2)+a-2}{a-2} = \frac{a^2+a-30+a^2-2a+a-2}{a-2} = \frac{2a^2-32}{a-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad Q &= \frac{5}{3p+2} \\ 3p+2 &= \frac{5}{Q} \\ 3p &= \frac{5}{Q} - 2 \\ p &= \frac{5}{3Q} - \frac{2}{3} \left(= \frac{5-2Q}{3Q} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad 4 - \frac{H}{x^2+1} &= 11 \\ \frac{H}{x^2+1} &= -7 \\ H &= -7(x^2+1) \\ H &= -7x^2-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25 \quad \text{a} \quad x &= 3\sqrt{2y}-8x+3 \\ 3\sqrt{2y} &= 9x-3 \\ \sqrt{2y} &= 3x-1 \\ 2y &= (3x-1)^2 \\ y &= \frac{1}{2}(3x-1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad a &= 0,25b+2 \\ 0,25b &= a-2 \\ b &= 4a-8 \\ F &= \frac{0,1a}{2a-1} \cdot (2b+1) \left. \vphantom{\begin{matrix} F \\ b \end{matrix}} \right\} F = \frac{0,1a}{2a-1} \cdot (2(4a-8)+1) \\ b &= 4a-8 \\ F &= \frac{0,1a}{2a-1} \cdot (8a-16+1) \\ F &= \frac{0,1a(8a-15)}{2a-1} = \frac{0,8a^2-1,5a}{2a-1} \\ \text{Dus } F &= \frac{0,8a^2-1,5a}{2a-1}. \end{aligned}$$

- c $p = k + 2$ invullen in $G = \frac{k - p^2}{k^2}$ geeft

$$G = \frac{k - (k + 2)^2}{k^2}$$

$$G = \frac{k - (k^2 + 2k + 2k + 4)}{k^2}$$

$$G = \frac{k - k^2 - 2k - 2k - 4}{k^2}$$

$$G = \frac{-k^2 - 3k - 4}{k^2}$$

$$G = \frac{-k^2}{k^2} + \frac{-3k}{k^2} + \frac{-4}{k^2}$$

$$G = -1 + \frac{-3}{k} + \frac{-4}{k^2}$$

Dus $a = -1$, $b = -3$ en $c = -4$.

Bladzijde 255

- 26 a Het model geeft de volgende tabel, afgerond op gehelen.

T_F	52	56	61	64	66	67	71	73	81
A	18	21	26	29	30	31	35	37	44

De tabellen zijn gelijk, dus het model klopt bij benadering met de gegevens.

- b $T_F = 75$ geeft $A = 0,913 \cdot 75 - 29,8 = 38,675$
 38,675 per 15 seconden is $60 \cdot 4 \cdot 38,675 = 9282$ per uur.
 Dat is meer dan 9000.

- c $A = 0,913T_F - 29,8$
 $0,913T_F = A + 29,8$
 $T_F = 1,09...A + 32,69...$
 Dus $T_F \approx A + 33$.

Dat komt overeen met de methode van de scouting.

- d $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$
 $T_F - 32 = \frac{9}{5}T_C$
 $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$
 $A = 0,913T_F - 29,8$ $\left. \begin{array}{l} A = 0,913(\frac{9}{5}T_C + 32) - 29,8 \\ A = 1,6434T_C + 29,216 - 29,8 \\ A \approx 1,64T_C - 0,58 \end{array} \right\}$

Dus $A = 1,64T_C - 0,58$.

- e Een krekel tjirpt A keer gedurende 15 seconden, dus gedurende 9 seconden tjirpt de krekel $\frac{9}{15}A$ keer.

Noem het aantal keer tjirpen gedurende 9 seconden A^* , dan geldt $A^* = \frac{9}{15}A$ oftewel $A = \frac{15}{9}A^*$.

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{15}{9}A^* \\ A = 1,64T_C - 0,58 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{15}{9}A^* = 1,64T_C - 0,58 \\ A^* = 0,984T_C - 0,348 \\ A^* \approx T_C \end{array}$$

Dus de methode komt overeen met de formule van vraag d.

- 27 a $3q - 15p = 5$
 $-15p = -3q + 5$
 $-7,5p = -1,5q + 2,5$ $\left. \begin{array}{l} W = 18 - 1,5q + 2,5 + 2q \\ W = 18 - 7,5p + 2q \end{array} \right\} \begin{array}{l} W = 0,5q + 20,5 \end{array}$

$$\begin{array}{l} \mathbf{b} \quad x + z = 6 \\ \quad z = -x + 6 \\ \quad y = 2x + 5 \\ \quad F = 3xy + 4xz + 8 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x + z = 6 \\ z = -x + 6 \\ y = 2x + 5 \\ F = 3xy + 4xz + 8 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} F = 3x(2x + 5) + 4x(-x + 6) + 8 \\ F = 6x^2 + 15x - 4x^2 + 24x + 8 \\ F = 2x^2 + 39x + 8 \end{array}$$

$$\mathbf{c} \quad P = 6 \text{ en } l = 4 \text{ invullen bij } P = \frac{2k(3l + 8)}{4 + 7m} \text{ geeft}$$

$$\frac{2k(3 \cdot 4 + 8)}{4 + 7m} = 6$$

$$2k(3 \cdot 4 + 8) = 6(4 + 7m)$$

$$2k \cdot 20 = 24 + 42m$$

$$40k = 24 + 42m$$

$$k = 0,6 + 1,05m$$

$$\text{Dus } k = 1,05m + 0,6.$$

$$\mathbf{d} \quad G = 12 - 21 \cdot \frac{6 - 7,5h}{63} = 12 - \frac{21}{63} \cdot (6 - 7,5h) = 12 - \frac{1}{3}(6 - 7,5h) = 12 - 2 + 2,5h = 2,5h + 10$$

$$\text{Dus } G = 2,5h + 10.$$

Bladzijde 256

- 28 a** Bij een omgekeerd evenredig verband hoort de formule $P = \frac{a}{L}$. Aflezen in de grafiek geeft $P = 100$ bij $L = 0$ en dit klopt niet met de formule, want $\frac{a}{0}$ kan niet. Dus er is geen sprake van een omgekeerd evenredig verband.

Alternatieve uitwerking:

Bij een omgekeerd evenredig verband is $P \cdot L$ constant. Het punt $(0, 100)$ in de grafiek geeft $P \cdot L = 0 \cdot 100 = 0$ en het punt $(10, 20)$ geeft $P \cdot L = 10 \cdot 20 = 200$. Dat is niet constant, dus er is geen sprake van een omgekeerd evenredig verband.

$$\mathbf{b} \quad P = 100 \cdot g^L$$

$$g_{10 \text{ jaar}} = \frac{20}{100} = 0,2, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = 0,2^{\frac{1}{10}} \approx 0,851.$$

$$\text{Dus } P = 100 \cdot 0,851^L.$$

$$\mathbf{c} \quad \text{Er geldt } 37,5 \cdot 4 = 25 \cdot 6 = 15 \cdot 10 = 150.$$

$$\text{Dus } P = \frac{150}{L}.$$

$$\mathbf{d} \quad \text{Als } L \text{ toeneemt, dan neemt } 0,83^L \text{ af, dus ook } 95 \cdot 0,83^L \text{ neemt af, dus ook } 95 \cdot 0,83^L + 5 \text{ neemt af.}$$

$$\text{Dus de grafiek van } P = 95 \cdot 0,83^L + 5 \text{ is dalend.}$$

$$\text{Als } L \text{ heel groot wordt, nadert } 0,83^L \text{ tot } 0. \text{ Dan wordt } 95 \cdot 0,83^L \approx 0 \text{ en } 95 \cdot 0,83^L + 5 \approx 5.$$

$$\text{Dus de grenswaarde is } 5.$$

$$\mathbf{e} \quad \text{verzekeraar A: } P = 100 \cdot 0,851^{12} = 14,4...$$

$$\text{verzekeraar B: } P = \frac{150}{12} = 12,5$$

$$\text{verzekeraar C: } P = 95 \cdot 0,83^{12} + 5 = 15,1...$$

Dus verzekeraar C keert de hoogste dagwaarde uit.

$$\text{Dat is } \frac{15,1...}{100} \cdot 21\,500 \approx 3300 \text{ euro.}$$

$$\mathbf{29 a} \quad w = 18 \text{ en } V = 84 \text{ geeft } -0,35A \cdot 18 + 8,4A = 84$$

$$-6,3A + 8,4A = 84$$

$$2,1A = 84$$

$$A = \frac{84}{2,1} = 40$$

Er passeren 40 auto's per minuut.

$$\mathbf{b} \quad A = 75 \text{ en } V = 160 \text{ geeft } -0,35 \cdot 75w + 8,4 \cdot 75 = 160$$

$$-26,25w + 630 = 160$$

$$-26,25w = -470$$

$$w \approx 17,9$$

De windsnelheid was 17,9 m/s.

- c** $A = 60$ geeft $V = -0,35 \cdot 60w + 8,4 \cdot 60 = -21w + 504$
Dus $V = -21w + 504$.
- d** $w = 10$ geeft $V = -0,35A \cdot 10 + 8,4A = -3,5A + 8,4A = 4,9A$
 $V = 4,9A$
 $A = \frac{1}{4,9}V$
Dus $a = \frac{1}{4,9} \approx 0,204$.

Bladzijde 257

- 30 a** $t = 10$ geeft $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3 \cdot 10}} \approx 0,5$
Dus 0,5% is besmet (geweest).
- b** Los op $\frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}} = 50$.
Voer in $y_1 = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3x}}$ en $y_2 = 50$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 35$.
Dus na 35 dagen.
- c** Als t toeneemt, dan neemt $-0,3t$ af, dus dan neemt $2^{-0,3t}$ af, dus ook $1450 \cdot 2^{-0,3t}$ neemt af en $1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}$ neemt af. Dus $\frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}}$ neemt toe.
De grafiek van P is dus stijgend.
- d** $2^{-0,3t} = (2^{-0,3})^t \approx 0,812^t$, dus de formule is te schrijven als $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 0,812^t}$.
Als t heel groot wordt, nadert $0,812^t$ tot 0. Dan wordt $1450 \cdot 0,812^t \approx 0$ en $1 + 1450 \cdot 0,812^t \approx 1$. Dus dan wordt $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 0,812^t} \approx \frac{100}{1} = 100$.
De grenswaarde is 100%, dus uiteindelijk zullen alle bewoners besmet zijn (geweest).
- e** Bij 25 maart 2020 hoort $t = 24$ en dit geeft $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3 \cdot 24}} \approx 9,2$.
Dus dan zouden er $0,092 \cdot 17,4 \approx 1,6$ miljoen mensen besmet zijn (geweest).
Bij 24 april 2020 hoort $t = 24 + 30 = 54$ en dit geeft $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3 \cdot 54}} \approx 98,1$.
Dus dan zouden er $0,981 \cdot 17,4 \approx 17,1$ miljoen mensen besmet zijn geweest.
- f** De grenswaarde van de formule is a , dus met 10 miljoen inwoners geldt $a = 10\,000\,000$.
Er gaan zeven dagen in een week, dus er geldt $t = 7w$.
Dit geeft $-0,3t = -0,3 \cdot 7w = -2,1w$, dus $c = -2,1$.

Alternatieve uitwerking voor de berekening van a :

Het aantal besmette personen in New York is P procent van 10 miljoen, dus er geldt

$$I = \frac{P}{100} \cdot 10\,000\,000 \text{ oftewel } I = 100\,000P. \text{ Dit geeft}$$

$$I = 100\,000 \cdot \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}} = \frac{10\,000\,000}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}}, \text{ dus } a = 10\,000\,000.$$

Bladzijde 258

- 31 a** De som van de huidplooien is $32 + 27 + 26 + 31 = 116$ mm.
Uit de tabel volgt dat D ligt tussen 1,0135 en 1,0108.
Bij een toename van 10 mm neemt D af met $1,0135 - 1,0108 = 0,0027$, dus per mm een afname van $\frac{0,0027}{10}$.
116 is 6 meer dan 110, dus $D = 1,0135 - 6 \cdot \frac{0,0027}{10} = 1,01188$.
 $D = 1,01188$ geeft $P = \frac{495}{1,01188} - 450 \approx 39,2$
Het vetpercentage is 39,2%.

b Los op $\frac{495}{D} - 450 = 31,7$.

Voer in $y_1 = \frac{495}{x} - 450$ en $y_2 = 31,7$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,0276$.

Uit de tabel volgt bij $D = 1,0276$ dat de som van de huidplooien 70 mm is.

c Uit de tabel volgt bij een som van de huidplooien van 110 mm dat $D = 1,0135$, dus

$$P = \frac{495}{1,0135} - 450 \approx 38,4.$$

Voor het afvallen bestond zijn lichaam uit $0,384 \cdot 108 \approx 41,5$ kg vet en dus uit $108 - 41,5 = 66,5$ kg niet-vet.

Uit de tabel volgt bij een som van de huidplooien van 70 mm dat $D = 1,0276$, dus

$$P = \frac{495}{1,0276} - 450 \approx 31,7.$$

Na het afvallen is zijn vetpercentage 31,7%, dus zijn percentage niet-vet is

$100 - 31,7 = 68,3\%$. Omdat hij alleen vet is kwijtgeraakt heeft hij nog steeds 66,5 kg

aan niet-vet, dus zijn lichaamsgewicht is $\frac{66,5}{0,683} \approx 97,4$ kg.

Hij is dus $108 - 97,4 = 10,6$ kg afgevallen.

d Uit de tabel volgt bij een som van de huidplooien van 60 mm dat $D = 1,0324$, dus

$$P = \frac{495}{1,0324} - 450 \approx 29,5.$$

Lieke heeft volgens het model $0,295 \cdot 60 = 17,7$ kg vet, dat is $17,7 - 16,8 = 0,9$ kg meer dan volgens de scan.

Dus ze heeft volgens de scan $\frac{0,9}{17,7} \times 100\% \approx 5,1\%$ minder vet dan volgens het model.

12 Examentraining

32 $P = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3\frac{1}{3}a} \cdot \sqrt{6b} = \sqrt{5 \cdot 3\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot a \cdot b} = \sqrt{100ab} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{ab} = 10\sqrt{ab}$

33 De winst in 2020 was $31,25 \cdot 1,085 \cdot 0,847 \approx 28,72$ miljoen euro.

34 $m = 2n - 1$ invullen in $G = 10m^2n - 2m$ geeft

$$G = 10(2n - 1)^2 \cdot n - 2(2n - 1)$$

$$G = 10n(2n - 1)(2n - 1) - 4n + 2$$

$$G = 10n(4n^2 - 2n - 2n + 1) - 4n + 2$$

$$G = 10n(4n^2 - 4n + 1) - 4n + 2$$

$$G = 40n^3 - 40n^2 + 10n - 4n + 2$$

$$G = 40n^3 - 40n^2 + 6n + 2$$

35 Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,28 \cdot 0,72}{n}} = 0,06$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,28 \cdot 0,72}{x}}$ en $y_2 = 0,06$.

De optie snijpunt geeft $x = 896$.

Dus de minimale steekproefomvang is 896.

Bladzijde 259

36 $\phi = \frac{83 \cdot 12 - 41 \cdot 106}{\sqrt{124 \cdot 118 \cdot 189 \cdot 53}} \approx -0,28$

$-0,4 \leq \phi < 0,2$, dus het verschil is middelmatig.

37 aantal beuken : aantal eiken = $1 : 3 = 2 : 6$

aantal eiken : aantal sparren = $2 : 5 = 6 : 15$

Dus aantal beuken : aantal sparren = $2 : 15$.

$$\begin{aligned} 38 \quad & 6a - 5b = 18 \\ & -5b = -6a + 18 \\ & b = 1,2a - 3,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 39 \quad & B = aV + b \\ & \text{Bij } V = 120 \text{ hoort } B = 172,98 \text{ en bij } V = 148 \text{ hoort } B = 202,66. \\ & a = \frac{\Delta B}{\Delta V} = \frac{202,66 - 172,98}{148 - 120} = 1,06 \\ & \left. \begin{aligned} B &= 1,06V + b \\ V = 120 \text{ en } B &= 172,98 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 1,06 \cdot 120 + b &= 172,98 \\ 127,2 + b &= 172,98 \\ b &= 45,78 \end{aligned} \\ & \text{Dus } B = 1,06V + 45,78. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 40 \quad & t = 200p^{0,8} \text{ invullen bij } N = 0,06t^{1,4} \text{ geeft} \\ & N = 0,06(200p^{0,8})^{1,4} = 0,06 \cdot 200^{1,4} \cdot p^{0,8 \cdot 1,4} \approx 100 \cdot p^{1,12}. \\ & \text{Dus } N = 100p^{1,12}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 41 \quad & 49 \text{ minuten en } 40 \text{ seconden is } \frac{49}{60} + \frac{40}{3600} = 0,827... \text{ uur.} \\ & \text{Dus zijn snelheid is } \frac{9,8}{0,827...} \approx 11,84 \text{ km/uur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 42 \quad & \text{De groeifactor per jaar is } 1,073, \text{ dus } 1,073^t = 2. \\ & \text{Voer in } y_1 = 1,073^x \text{ en } y_2 = 2. \\ & \text{De optie snijpunt geeft } x = 9,83... \\ & \text{De verdubbelingstijd is } 9 \text{ jaar en } 0,83... \times 12 \approx 10 \text{ maanden.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 43 \quad & 2,4y = 3 - 0,6\sqrt{x-2} \\ & 3 - 0,6\sqrt{x-2} = 2,4y \\ & -0,6\sqrt{x-2} = 2,4y - 3 \\ & \sqrt{x-2} = -4y + 5 \\ & x - 2 = (-4y + 5)^2 \\ & x = (-4y + 5)^2 + 2 (= 16y^2 - 40y + 27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 44 \quad \mathbf{a} \quad & \text{In 11 jaar } 1165 - 840 = 325 \text{ meer, dus in 1 jaar } \frac{325}{11} \text{ meer.} \\ & 2010 \text{ is 7 jaar na 2003, dus in 2010 is het aantal } 840 + 7 \cdot \frac{325}{11} \approx 1047. \\ \mathbf{b} \quad & \text{In 6 jaar } 1390 - 1165 = 225 \text{ meer, dus in 1 jaar } \frac{225}{6} \text{ meer.} \\ & 2025 \text{ is 5 jaar na 2020, dus in 2025 is het aantal } 1390 + 5 \cdot \frac{225}{6} \approx 1578. \\ \mathbf{c} \quad & \text{In 8 jaar } 840 - 520 = 320 \text{ meer, dus in 1 jaar } \frac{3250}{8} = 40 \text{ meer.} \\ & 760 \text{ is 240 meer dan 520, dus dat is } \frac{240}{40} = 6 \text{ jaar na 1995.} \\ & \text{Dus in het jaar } 1995 + 6 = 2001. \end{aligned}$$

$$45 \quad (2a - 1)^2 - 4(3a - 1) = (2a - 1)(2a - 1) - 12a + 4 = 4a^2 - 2a - 2a + 1 - 12a + 4 = 4a^2 - 16a + 5$$

Bladzijde 260

- 46 **a** nominaal
b ordinaal
c nominaal

47 De toename is $\frac{145 - 115}{115} \times 100\% \approx 26,1\%$.

48 $y = -\frac{1}{3}x + b$
 Door $A(0, 9)$, dus $b = 9$.
 Dus k : $y = -\frac{1}{3}x + 9$.

- 49 **a** De modale klasse is $[76, 78)$.
b De mediaan is het gemiddelde van het 75^e en 76^e getal, deze liggen beide in de klasse $[76, 78)$.
 Dus de mediaan ligt in de klasse $[76, 78)$.
c De standaardafwijking 3,0 cm hoort bij de tabel.
d De cumulatieve frequentie van de klasse $[74, 76)$ is $5 + 13 + 16 = 34$,
 dus de relatieve cumulatieve frequentie is $\frac{34}{150} \times 100\% \approx 22,7\%$.

50 $N = b \cdot g^t$
 $g_{8 \text{ jaar}} = \frac{77}{326}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{77}{326}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 0,8349...$
 $N = b \cdot 0,8349...^t$
 $t = 3 \text{ en } N = 326 \left\{ \begin{array}{l} b \cdot 0,8349...^3 = 326 \\ b = \frac{326}{0,8349...^3} \approx 560 \end{array} \right.$
 Dus $N = 560 \cdot 0,835^t$.

51 $g_{3 \text{ jaar}} = 2$, dus $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{3}} \approx 1,260$
 Dus het groeipcentage per jaar is 26,0%.

52 **a** $A = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{2\frac{1}{2}q} = \sqrt{2p \cdot 2\frac{1}{2}q} = \sqrt{5pq}$
b $B = \frac{\sqrt{30xy}}{\sqrt{2y}} = \sqrt{\frac{30xy}{2y}} = \sqrt{15x}$

- 53 **a** Als t toeneemt, dan neemt t^2 toe, dus dan neemt $t^2 + 1$ toe,
 dus dan neemt $\frac{100}{t^2 + 1}$ af, dus dan neemt $50 + \frac{100}{t^2 + 1}$ ook af.
 Dus de grafiek van N is dalend.
b Als x toeneemt, dan neemt $x + 10$ toe, dus dan neemt $\frac{57}{x + 10}$ af,
 dus dan neemt $300 - \frac{57}{x + 10}$ toe.
 Dus de grafiek van y is stijgend.

54 $N = \frac{562}{25 \cdot 1,3^t} = \frac{562}{25} \cdot 1,3^{-t} = 22,48 \cdot (1,3^{-1})^t \approx 22,48 \cdot 0,769^t$
 De grafiek van N is afnemend dalend, want g tussen 0 en 1.

Bladzijde 261

- 55 Rechts-scheef, dus de mediaan ligt links.



56 x = aantal kaartjes van 15 euro
 y = aantal kaartjes van 20 euro
 $x + y = 705$, dus $y = 705 - x$
 $15x + 20y = 11\,500$, dus $20y = -15x + 11\,500$
 $y = -0,75x + 575$
 Los op $705 - x = -0,75x + 575$
 $-0,25x = -130$
 $x = 520$
 $y = 705 - 520 = 185$
 Dus er zijn 185 kaartjes van 20 euro verkocht.

57 $q = 10 - 4p$
 $4p = 10 - q$
 $p = 2,5 - 0,25q$ } $R = 2(2,5 - 0,25q) - 3q + 50$
 $R = 2p - 3q + 50$ } $R = 5 - 0,5q - 3q + 50$
 $R = -3,5q + 55$

58 Er geldt $p = 0,36$, dus het totale aantal leerlingen is $\frac{450}{0,36} = 1250$.
 De steekproefproportie $\hat{p}$ is $\frac{12}{25} = 0,48$.

59 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is
 $\left[38\,500 - 2 \cdot \frac{14\,300}{\sqrt{80}}, 38\,500 + 2 \cdot \frac{14\,300}{\sqrt{80}} \right] \approx [35\,300, 41\,700]$.

60 $n = 12m^{0,6}$ invullen bij $F = \frac{50m^{0,54}}{17n^{1,4}}$ geeft
 $F = \frac{50m^{0,54}}{17(12m^{0,6})^{1,4}} = \frac{50m^{0,54}}{17 \cdot 12^{1,4} \cdot (m^{0,6})^{1,4}} = \frac{50}{17 \cdot 12^{1,4}} \cdot \frac{m^{0,54}}{m^{0,84}} \approx 0,09m^{-0,3}$.
 Dus $F = 0,09m^{-0,3}$.

61 **a** Als t toeneemt, dan neemt $0,91^t$ af, dus dan neemt $20 \cdot 0,91^t$ af,
 dus dan neemt $1 + 0,91^t$ ook af, dus $\frac{1500}{1 + 20 \cdot 0,91^t}$ neemt toe.
 Dus de grafiek van N is stijgend.
b Als t toeneemt, dan neemt $0,98^t$ af, dus dan neemt $1 - 0,98^t$ toe,
 dus ook $20(1 - 0,98^t)$ neemt toe, dus $10 + 20(1 - 0,98^t)$ neemt toe.
 Dus de grafiek van N is stijgend.

62 Los op $3(0,5x - 2) = 0,6x + 12$
 $1,5x - 6 = 0,6x + 12$
 $0,9x = 18$
 $x = 20$
 $x = 20$ geeft $y = 3(0,5 \cdot 20 - 2) = 24$
 Dus het snijpunt is $(20, 24)$.

63 $b = 0,8a + 4$ invullen bij $N = 0,15b - 0,05(2a - 3)$ geeft
 $N = 0,15(0,8a + 4) - 0,1a + 0,15 = 0,12a + 0,6 - 0,1a + 0,15 = 0,02a + 0,75$.
 Dus $N = 0,02a + 0,75$.

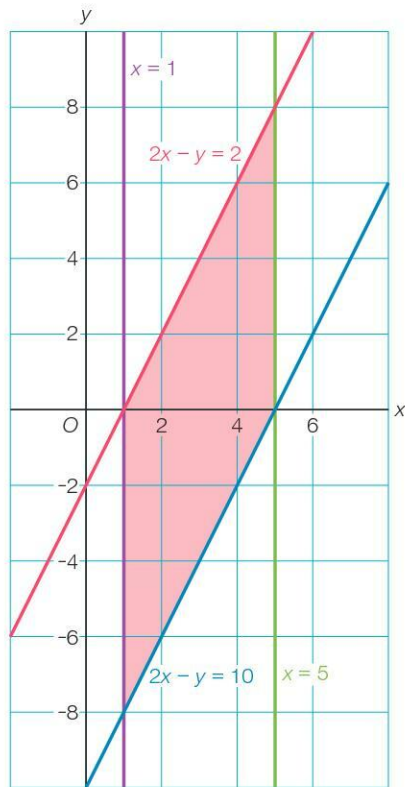
64 $(a^{-2})^4 \cdot a^5 = a^{-8} \cdot a^5 = a^{-3}$

- 65 Tussen de lijnen $x = 1$ en $x = 5$ en ook tussen de lijnen $2x - y = 2$ en $2x - y = 10$.
de lijn $2x - y = 2$

x	0	2
y	-2	2

de lijn $2x - y = 10$

x	5	7
y	0	4



Bladzijde 262

66 $\frac{750 - 820}{820} \times 100\% \approx -8,5\%$

Dus de afname is 8,5%.

67 Het totaal is $\frac{649}{0,0564} \approx 11\,507$.

- 68
- De boxen overlappen elkaar.
 - Een mediaan van een boxplot ligt buiten de box van de andere boxplot.
- Dus het verschil is middelmatig.

69 a $P = (4a - 1) \cdot \frac{2b}{4a - 1} = \frac{(4a - 1) \cdot 2b}{4a - 1} = 2b$

b $A = 5p \cdot \frac{3}{q} \cdot \frac{1 - q}{q} = \frac{5p \cdot 3 \cdot (1 - q)}{q \cdot q} = \frac{15p(1 - q)}{q^2} = \frac{15p - 15pq}{q^2}$

- 70
- a continu
 - b discreet
 - c continu

$$71 \quad F = \frac{2a^2 - 3a + 4}{2a} + 4a + 1\frac{1}{2} = \frac{2a^2}{2a} - \frac{3a}{2a} + \frac{4}{2a} + 4a + 1\frac{1}{2} = a - 1\frac{1}{2} + \frac{2}{a} + 4a + 1\frac{1}{2} = 5a + \frac{2}{a}$$

$$72 \quad E = \frac{112 - 85}{\frac{1}{2}(38 + 24)} \approx 0,87$$

$E > 0,8$, dus het verschil is groot.

$$73 \quad N = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{63 - 52}{12 - 8} = 2,75$$

$$\left. \begin{array}{l} N = 2,75t + b \\ t = 8 \text{ en } N = 52 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2,75 \cdot 8 + b = 52 \\ 22 + b = 52 \\ b = 30 \end{array}$$

Dus $N = 2,75t + 30$.

Bladzijde 263

$$74 \quad 6x - 33 = -4(x - 12) + 15$$

$$6x - 33 = -4x + 48 + 15$$

$$10x = 96$$

$$x = 9,6$$

$$75 \quad M = 200 \left(4 + \frac{74}{25 \cdot 0,95^t} \right) = 200 \cdot 4 + \frac{200 \cdot 74}{25 \cdot 0,95^t} = 800 + \frac{200 \cdot 74}{25} \cdot 0,95^{-t}$$

$$= 800 + 592 \cdot (0,95^{-1})^t \approx 800 + 592 \cdot 1,05^t$$

$$\text{Dus } M = 800 + 592 \cdot 1,05^t.$$

$$76 \quad 1\frac{1}{4}(6t - 1) = 2\frac{1}{2}t + 6$$

$$7\frac{1}{2}t - 1\frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}t + 6$$

$$5t = 7\frac{1}{4}$$

$$t = 1,45$$

$$77 \quad \left. \begin{array}{l} y = ax \\ x = 12 \text{ en } y = 69 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 12 = 69 \\ a = 5,75 \end{array}$$

$$\text{Dus } y = 5,75x.$$

$$x = 42 \text{ geeft } y = 5,75 \cdot 42 = 241,5$$

$$78 \quad N = b \cdot g^t$$

$$g_{8 \text{ dagen}} = \frac{161}{101}, \text{ dus } g_{\text{dag}} = \left(\frac{161}{101} \right)^{\frac{1}{8}} = 1,0600...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,0600...^t \\ t = 4 \text{ en } N = 101 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,0600...^4 = 101 \\ b = \frac{101}{1,0600...^4} \approx 80 \end{array}$$

$$b = \frac{101}{1,0600...^4} \approx 80$$

$$\text{Dus } N = 80 \cdot 1,060^t.$$

$$79 \quad A = 5x^{-1,15} \cdot \frac{3x^{4,25}}{x^2} = 5x^{-1,15} \cdot 3x^{2,25} = 15x^{1,1}$$

$$\text{Dus } a = 15 \text{ en } b = 1,1.$$

$$80 \quad \text{a} \quad \begin{array}{l} \text{spreidingsbreedte} = 58 - 10 = 48 \\ \text{interkwartielafstand} = 42 - 20 = 22 \end{array}$$

$$\text{Dat is } \frac{48}{22} \approx 2,2 \text{ keer zo groot.}$$

$$\text{b} \quad 25\% \text{ van } 1060, \text{ dat is } 0,25 \cdot 1060 = 265 \text{ waarnemingsgetallen.}$$

$$\text{c} \quad \text{Het kleinst mogelijke gemiddelde is } 0,25 \cdot 10 + 0,25 \cdot 20 + 0,25 \cdot 24 + 0,25 \cdot 42 = 24.$$

$$\text{Het grootst mogelijke gemiddelde is } 0,25 \cdot 20 + 0,25 \cdot 24 + 0,25 \cdot 42 + 0,25 \cdot 58 = 36.$$

Dus dat klopt.

$$\text{d} \quad \text{De schatting van de standaardafwijking is } 14, \text{ want het gemiddelde zal ongeveer } 30 \text{ zijn en de gemiddelde afwijking hiervan is ongeveer } 14.$$

$$81 \quad A = 8 - \frac{12}{n}$$

$$\frac{12}{n} = 8 - A$$

$$n = \frac{12}{8 - A}$$

$$82 \quad y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{55 - 70}{20 - 8} = -1,25$$

$$y = -1,25x + b$$

door $A(8, 70)$ $\left\{ \begin{array}{l} -1,25 \cdot 8 + b = 70 \\ -10 + b = 70 \\ b = 80 \end{array} \right.$

Dus $l: y = -1,25x + 80$.

$$83 \quad 30689 \text{ km}^2 = 30689 \cdot 10^6 \text{ m}^2$$

De oppervlakte per inwoner is $\frac{30689 \cdot 10^6}{11,46 \cdot 10^6} \approx 2678 \text{ m}^2$.

$$84 \quad q = p - 3 \text{ invullen bij } F = 5p^2 - 2q^2 + 10 \text{ geeft}$$

$$F = 5p^2 - 2(p - 3)^2 + 10$$

$$F = 5p^2 - 2(p - 3)(p - 3) + 10$$

$$F = 5p^2 - 2(p^2 - 3p - 3p + 9) + 10$$

$$F = 5p^2 - 2p^2 + 6p + 6p - 18 + 10$$

$$F = 3p^2 + 12p - 8$$

Bladzijde 264

- 85 a Als x heel groot wordt, wordt x^2 ook heel groot, dus $x^2 + 1$ wordt heel groot, dus dan nadert $\frac{50}{x^2 + 1}$ tot 0, dus $100 + \frac{50}{x^2 + 1} \approx 100$.
- Dus de grenswaarde is 100.
- b Als t heel groot wordt, wordt $t + 2$ ook heel groot, dus dan nadert $\frac{30}{t + 2}$ tot 0, dus $50 - \frac{30}{t + 2} \approx 50$.
- Dus de grenswaarde is 50.

- 86 a Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is
- $$\left[1200 - 2 \cdot \frac{85}{\sqrt{625}}, 1200 + 2 \cdot \frac{85}{\sqrt{625}} \right] = [1193,2; 1206,8].$$
- b Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is
- $$[25,62 - 2 \cdot 1,45; 25,62 + 2 \cdot 1,45] = [22,72; 28,52].$$

$$87 \quad \text{De oorspronkelijke hoeveelheid was } \frac{3015}{1,184} \approx 2546.$$

	stad		platteland		Vcp
	cum. freq.	cum. perc.	cum. freq.	cum. perc.	
1	16	2%	112	17,5%	15,5%
2	72	9%	240	37,5%	28,5%
3	184	23%	560	87,5%	64,5%
4	304	38%	608	95%	57%
5	800	100%	640	100%	0%

← max.Vcp

max.Vcp > 40, dus het verschil is groot.

- 89 a** Als t heel groot wordt, nadert $0,96^t$ tot 0, dus $14 \cdot 0,96^t \approx 0$,
dus $3 + 14 \cdot 0,96^t \approx 3$, dus $\frac{600}{3 + 14 \cdot 0,96^t} \approx \frac{600}{3} = 200$.
Dus het verzadigingsniveau is 200.
- b** Als t heel groot wordt, nadert $0,81^t$ tot 0, dus $3 - 0,81^t \approx 3$,
dus $450(3 - 0,81^t) \approx 450 \cdot 3 = 1350$.
Dus het verzadigingsniveau is 1350.

90 $y = 2x - 1$ invullen bij $K = \frac{x+y}{4x-y}$ geeft

$$K = \frac{x + 2x - 1}{4x - (2x - 1)}$$

$$K = \frac{3x - 1}{4x - 2x + 1}$$

$$K = \frac{3x - 1}{2x + 1}$$

91 $N = 3\sqrt{2a} \cdot \sqrt{5b} = 3 \cdot \sqrt{10ab} = 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{ab} \approx 9,49\sqrt{ab}$
Dus $N = 9,49\sqrt{ab}$.

92 Vier delen is 25 euro, dus één deel is $\frac{25}{4} = 6,25$ euro.
In totaal zijn er $2 + 3 + 7 = 12$ delen, dat is een bedrag van $12 \cdot 6,25 = 75$ euro.

93 a $\hat{p} = 0,83$ en $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0,83 \cdot 0,17}{280}} = 0,0224...$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is
 $[0,83 - 2 \cdot 0,0224...; 0,83 + 2 \cdot 0,0224...] \approx [0,785; 0,875]$.

b $\hat{p} = \frac{83}{112}$ en $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{83}{112}(1 - \frac{83}{112})}{52}} = 0,0607...$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is
 $[\frac{83}{112} - 2 \cdot 0,0607...; \frac{83}{112} + 2 \cdot 0,0607...] \approx [0,620; 0,863]$.

Bladzijde 265

94 De groeifactor per jaar is 0,942, dus los op $0,942^t = 0,5$.
Voer in $y_1 = 0,942^x$ en $y_2 = 0,5$.
De optie snijpunt geeft $x = 11,60...$
Dus de halveringstijd is 11 jaar en $12 \times 0,60... \approx 7$ maanden.

95 $\frac{2x}{3y} = \frac{5}{7}$ geeft $3y \cdot 5 = 2x \cdot 7$
 $15y = 14x$
 $y = \frac{14}{15}x$

96 $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{14,80 - 20,60}{6 - 2} = -1,45$; $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{10,45 - 14,80}{9 - 6} = -1,45$ en $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{3,20 - 10,45}{14 - 9} = -1,45$

Steeds is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = -1,45$, dus lineaire groei.

$$\left. \begin{array}{l} N = -1,45t + b \\ t = 2 \text{ en } N = 20,60 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,45 \cdot 2 + b = 20,60 \\ -2,90 + b = 20,60 \\ b = 23,50 \end{array}$$

Dus $N = -1,45t + 23,50$.

- 97 a** $q = 400$ geeft $W = -0,01 \cdot 400^2 + 7,5 \cdot 400 - 650 = 750$
 Dus de winst is 75 000 euro, dat is $\frac{75\,000}{400} = 187,50$ euro per artikel.
- b** Voer in $y_1 = -0,01x^2 + 7,5x - 650$.
 De optie maximum geeft $x = 375$ en $y = 756,25$.
 De maximale jaarlijkse winst is 75 625 euro.

- 98 a** $0,65 - 0,06 = 0,59$ en $0,65 + 0,06 = 0,71$, dus $[0,59; 0,71]$.
 $\sigma = \frac{0,06}{2} = 0,03$
- b** $\bar{X} = \frac{1280 + 1340}{2} = 1310$ en $\frac{1340 - 1280}{2} = 30$, dus 1310 ± 30 .
 $S = \frac{30}{2} = 15$

- 99** $67,13 \text{ km}^2 = 67,13 \cdot 10^8 \text{ dm}^2$
 $55 \text{ mm} = 55 \cdot 10^{-2} \text{ dm}$
 Dus er viel die dag $67,13 \cdot 10^8 \cdot 55 \cdot 10^{-2} \approx 3,69 \cdot 10^9$ liter regen.

- 100 a** $g_{8 \text{ uur}} = 0,891$, dus $g_{50 \text{ uur}} = 0,891^{\frac{50}{8}} \approx 0,486$.
 De afname per 50 uur is 51,4%.
- b** 8 uur = 24 keer 20 minuten
 $g_{8 \text{ uur}} = 0,891$, dus $g_{20 \text{ minuten}} = 0,891^{\frac{1}{24}} \approx 0,995$.
 De afname per 20 minuten is 0,5%.

- 101** $y = 2x - 1$ invullen in $B = \frac{6x^2 - y^2}{y^2 + 1}$ geeft

$$B = \frac{6x^2 - (2x - 1)^2}{(2x - 1)^2 + 1} = \frac{6x^2 - (2x - 1)(2x - 1)}{(2x - 1)(2x - 1) + 1} = \frac{6x^2 - (4x^2 - 2x - 2x + 1)}{4x^2 - 2x - 2x + 1 + 1} = \frac{6x^2 - 4x^2 + 2x + 2x - 1}{4x^2 - 4x + 2} = \frac{2x^2 + 4x - 1}{4x^2 - 4x + 2}$$

 Dus $B = \frac{2x^2 + 4x - 1}{4x^2 - 4x + 2}$.

- 102** $\hat{p} = \frac{78}{140}$ en $\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{78}{140}(1 - \frac{78}{140})}{140}} = 0,0419...$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is
 $\left[\frac{78}{140} - 2 \cdot 0,0419...; \frac{78}{140} + 2 \cdot 0,0419... \right] \approx [0,473; 0,641]$.

Bladzijde 266

- 103** $N = 18 \cdot \frac{2x - 3}{6} + 3x - 5 = \frac{18}{6} \cdot (2x - 3) + 3x - 5 = 3 \cdot (2x - 3) + 3x - 5 = 6x - 9 + 3x - 5 = 9x - 14$
 Dus $N = 9x - 14$.

- 104 a** Voer in $y_1 = \frac{90\,000x}{x^2 + 900}$.
 De optie maximum geeft $x = 30$ en $y = 1500$.
 Dus na 30 dagen. Er lagen toen 1500 patiënten op de ic.
- b** Voer in $y_2 = 1400$.
 De optie snijpunt geeft $x = 20,6...$ en $x = 43,6...$
 Dus gedurende 23 dagen.

- 105** Bij een prijs p in euro's en een aantal stuks per dag q geldt $q = \frac{a}{p}$.

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{a}{p} \\ p = 0,8 \text{ en } q = 135 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{0,8} = 135 \\ a = 108 \end{array}$$

$$p = 1,10 \text{ geeft } q = \frac{108}{1,10} \approx 98$$

Bij een prijs van € 1,10 verkoopt hij 98 meloenen per dag.

Alternatieve uitwerking:

Bij een prijs p in euro's en een aantal stuks per dag q geldt $p \cdot q = \text{constant}$.

$p = 0,8$ en $q = 135$ geeft $p \cdot q = 0,8 \cdot 135 = 108$.

$$p = 1,10 \text{ geeft } 1,10 \cdot q = 108, \text{ dus } q = \frac{108}{1,10} \approx 98.$$

Bij een prijs van € 1,10 verkoopt hij 98 meloenen per dag.

- 106** 5 jaar en 4 maanden is $5\frac{1}{3}$ jaar.

$$g_{5\frac{1}{3} \text{ jaar}} = 0,5 \text{ geeft } g_{\text{jaar}} = 0,5^{\frac{1}{5\frac{1}{3}}} \approx 0,878$$

De afname per jaar is 12,2%.

$$\mathbf{107} \quad K = \frac{24x}{x-4} \cdot (x+4) \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} \cdot \frac{x(x+4)}{x-4} = 3 \cdot \frac{x^2+4x}{x-4} = \frac{3x^2+12x}{x-4}$$

$$\text{Dus } K = \frac{3x^2+12x}{x-4}.$$

$$\mathbf{108} \quad \left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(6, 9) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 6 + b = 9 \\ -2 + b = 9 \end{array}$$

$$b = 11$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{1}{3}x + 11.$$

- 109** Dat is $45\,486 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \approx 3,9 \cdot 10^9$ dollar per dag.

$$\mathbf{110} \quad N = \frac{200}{133 \cdot 0,6^t} = \frac{200}{133} \cdot 0,6^{-t} = \frac{200}{133} \cdot (0,6^{-1})^t \approx 1,504 \cdot 1,667^t$$

$$\text{Dus } N = 1,504 \cdot 1,667^t.$$

$$\mathbf{111} \quad y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30-18}{10-2} = 1,5$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1,5x + b \\ \text{door } A(2, 18) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,5 \cdot 2 + b = 18 \\ 3 + b = 18 \end{array}$$

$$b = 15$$

$$\text{Dus } k: y = 1,5x + 15.$$

- 112 a** $g_{\text{dag}} = 1,086$, dus $g_{\text{week}} = 1,086^7 \approx 1,782$.

De toename per week is 78,2%.

b $g_{\text{dag}} = 1,086$, dus $g_{10 \text{ uur}} = 1,086^{\frac{10}{24}} \approx 1,035$.

De toename per 10 uur is 3,5%.

Bladzijde 267

113 $2x - 3y = 10$

$$-3y = -2x + 10$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x - 3\frac{1}{3} \\ T = 6xy - 20x + 15y \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = 6x(\frac{2}{3}x - 3\frac{1}{3}) - 20x + 15(\frac{2}{3}x - 3\frac{1}{3}) \\ T = 4x^2 - 20x - 20x + 10x - 50 \\ T = 4x^2 - 30x - 50 \end{array}$$

$$T = 4x^2 - 30x - 50$$

$$\text{Dus } a = 4, b = -30 \text{ en } c = -50.$$

114 $\frac{6,5 \text{ km}}{14,6 \text{ km/uur}} = 0,445... \text{ uur} = 0,445... \times 60 \text{ minuten} = 26,71... \text{ minuten}$
Dus 26 minuten en $0,71... \times 60 \approx 43$ seconden.

115 a $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{20-5}{30-0} \approx 0,83$ en $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{53-20}{60-30} \approx 1,1$
De gemiddelde toenames zijn niet gelijk, dus geen lineair verband.

b $g_{30 \text{ seconden}} = \frac{20}{5} = 4$ en $g_{30 \text{ seconden}} = \frac{53}{20} = 2,65$

De groeifactoren zijn niet gelijk, dus geen exponentieel verband.

c $t = 30$ geeft $T = -0,00011 \cdot 30^3 + 0,02 \cdot 30^2 + 5 = 20,03 \approx 20$, dit klopt.
 $t = 100$ geeft $T = -0,00011 \cdot 100^3 + 0,02 \cdot 100^2 + 5 = 95$, dit klopt.

d Los op $-0,00011t^3 + 0,02t^2 + 5 = 85$.
Voer in $y_1 = -0,00011x^3 + 0,02x^2 + 5$ en $y_2 = 85$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 88$.
Dus na 88 seconden is de temperatuur 85°C .

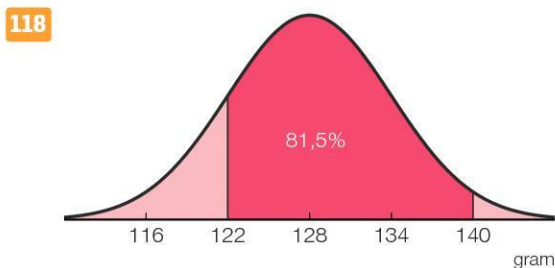
116 $A = at + b$ met $a = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{22-78}{28-12} = -3,5$

$$\left. \begin{array}{l} A = -3,5t + b \\ t = 12 \text{ en } A = 78 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3,5 \cdot 12 + b = 78 \\ -42 + b = 78 \\ b = 120 \end{array}$$

Dus $A = -3,5t + 120$.

117 $k + 2l = 40$
 $2l = -k + 40$
 $l = -0,5k + 20$
 $N = 2k - 3l + 50$ $\left\{ \begin{array}{l} N = 2k - 3(-0,5k + 20) + 50 \\ N = 2k + 1,5k - 60 + 50 \\ N = 3,5k - 10 \end{array} \right.$

Dus $N = 3,5k - 10$.

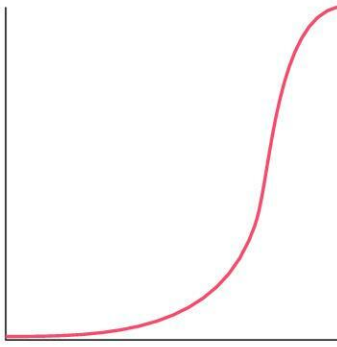


$34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%$
Dus $0,815 \cdot 6000 = 4890$ kiwi's.

119 a $5a^3 \cdot 4a^2 = 20a^5$
b $(-4a^3)^2 - 8a^5 - 10a^6 = 16a^6 - 8a^5 - 10a^6 = 6a^6 - 8a^5$
c $\frac{16x^2y^3}{24xy} = \frac{2}{3}xy^2$

120 Voer in $y_1 = 2,56x + 30$ en $y_2 = 83 - 5(x - 10)$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 13,62$.
Uit de plot volgt dat $x > 13,62$.

- 121** Links-scheef, dus pas ver rechts het punt met relatieve cumulatieve frequentie 50%.



Bladzijde 268

- 122** De verhouding klas 1 : klas 2 of 3 = 6 : 11.
 De verhouding klas 1 : bovenbouw = 3 : 5 = 6 : 10.
 Dus de verhouding klas 1 : klas 2 of 3 : bovenbouw = 6 : 11 : 10.
 In totaal zijn er $6 + 11 + 10 = 27$ delen.
 Eén deel is $\frac{1350}{27} = 50$ leerlingen.
 In de bovenbouw zitten dus $10 \cdot 50 = 500$ leerlingen.

123 $\hat{p} = \frac{0,177 + 0,323}{2} = 0,25$

Dus er zijn $0,25 \cdot 140 = 35$ scooters opgevoerd.

124 $y = 4x + 5$ invullen in $A = \frac{4x}{x-1} \cdot (2y-3)$ geeft

$$A = \frac{4x}{x-1} \cdot (2(4x+5)-3) = \frac{4x}{x-1} \cdot (8x+10-3) = \frac{4x}{x-1} \cdot (8x+7) = \frac{4x(8x+7)}{x-1}.$$

Dus $A = \frac{4x(8x+7)}{x-1}$ oftewel $A = \frac{32x^2 + 28x}{x-1}.$

- 125 a** Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.
 Bij $t = 2$ hoort $N = 20$ en bij $t = 8$ hoort $N = 500$.

$$g_{6 \text{ jaar}} = \frac{500}{20} = 25, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = 25^{\frac{1}{6}} = 1,7099...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,7099...^t \\ t = 2 \text{ en } N = 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,7099...^2 = 20 \\ b = \frac{20}{1,7099...^2} \approx 7 \end{array}$$

Dus $N = 7 \cdot 1,710^t$.

- b** Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.
 Bij $t = 3$ hoort $N = 800$ en bij $t = 7$ hoort $N = 60$.

$$g_{4 \text{ jaar}} = \frac{60}{800} = 0,075, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = 0,075^{\frac{1}{4}} = 0,5233...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,5233...^t \\ t = 3 \text{ en } N = 800 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,5233...^3 = 800 \\ b = \frac{800}{0,5233...^3} \approx 5580 \end{array}$$

Dus $N = 5580 \cdot 0,523^t$.

126 a $A = 5x - \frac{4}{3x} = \frac{15x^2}{3x} - \frac{4}{3x} = \frac{15x^2 - 4}{3x}$

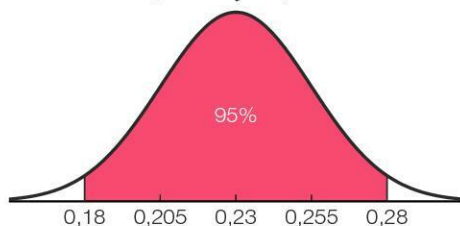
b $B = \frac{7}{2x} - \frac{5}{3x} = \frac{21}{6x} - \frac{10}{6x} = \frac{21-10}{6x} = \frac{11}{6x}$

c $D = 5a^2 - \frac{3}{a^2} = \frac{5a^4}{a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{5a^4 - 3}{a^2}$

d $E = \frac{2}{p} + 3p \cdot \frac{5q}{2p^2} = \frac{2}{p} + \frac{15pq}{2p^2} = \frac{2}{p} + \frac{15q}{2p} = \frac{4}{2p} + \frac{15q}{2p} = \frac{4+15q}{2p}$

127 $\mu = p = 0,23$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,23 \cdot 0,77}{283}} \approx 0,025$

Zie de schets, dus bij $13,5 + 34 + 34 + 13,5 = 95\%$.



Bladzijde 269

128 a Als n toeneemt, dan neemt $\frac{30000}{n}$ af, dus $450 + \frac{30000}{n}$ neemt ook af.

De grafiek van K is dus dalend.

De vaste kosten zullen per persoon in de praktijk ook afnemen als er meer personen met de cruise meegaan.

b Als n heel groot wordt, nadert $\frac{30000}{n}$ tot 0. Dan wordt $450 + \frac{30000}{n} \approx 450 + 0 = 450$.

Dus de grenswaarde is 450 euro.

Als er heel veel passagiers mee zouden kunnen, dan zouden dit de kosten per passagier zijn.

c Om 100 000 euro winst te maken, moet je per passagier $\frac{100000}{2500} = 40$ euro winst maken.

De kosten K per passagier bij 2500 passagiers zijn $450 + \frac{30000}{2500} = 462$ euro.

De prijs per passagier die ze moeten vragen is dus $462 + 40 = 502$ euro.

129 a Als x toeneemt, dan neemt $\frac{5}{x}$ af, dus dan neemt $20 - \frac{5}{x}$ toe.

Dus de grafiek is stijgend.

Als x heel groot wordt, nadert $\frac{5}{x}$ tot 0. Dus dan wordt $20 - \frac{5}{x} \approx 20$.

Dus de grenswaarde is 20.

b Als x toeneemt, dan neemt $0,6^x$ af, dus dan neemt $12 \cdot 0,6^x$ ook af.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ ook toe.

Van $\frac{12 \cdot 0,6^x}{\sqrt{x}}$ neemt de teller af en de noemer neemt toe, dus $\frac{12 \cdot 0,6^x}{\sqrt{x}}$ neemt af.

Dus de grafiek is dalend.

Als x heel groot wordt, nadert $0,6^x$ tot 0. Dus dan wordt $12 \cdot 0,6^x \approx 0$.

Als x heel groot wordt, wordt $\sqrt{x}$ ook heel groot.

Van $\frac{12 \cdot 0,6^x}{\sqrt{x}}$ nadert de teller tot 0 en wordt de noemer heel groot,

dus wordt $\frac{12 \cdot 0,6^x}{\sqrt{x}} \approx 0$.

Dus de grenswaarde is 0.

c Als x toeneemt, dan neemt x^2 ook toe, dus $x^2 + 2$ neemt toe, dus $\frac{80}{x^2 + 2}$ neemt af.

Dus $25 - \frac{80}{x^2 + 2}$ neemt toe.

Dus de grafiek is stijgend.

Als x heel groot wordt, wordt x^2 ook heel groot en ook $x^2 + 2$ wordt heel groot.

Dus nadert $\frac{80}{x^2 + 2}$ tot 0 en dan wordt $25 - \frac{80}{x^2 + 2} \approx 25$.

Dus de grenswaarde is 25.

$$130 \text{ a } g_{5 \text{ dagen}} = \frac{345}{446}, \text{ dus } g_{\text{dag}} = \left(\frac{345}{446}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 0,950.$$

$$g_{4 \text{ dagen}} = \frac{281}{345}, \text{ dus } g_{\text{dag}} = \left(\frac{281}{345}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0,950.$$

$$g_{3 \text{ dagen}} = \frac{241}{281}, \text{ dus } g_{\text{dag}} = \left(\frac{241}{281}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0,950.$$

De groeifactoren per dag zijn bij benadering gelijk, dus bij de tabel hoort exponentiële groei.

$$\text{b } N = b \cdot g^t \text{ met } g = 0,950$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,950^t \\ t = 3 \text{ en } N = 446 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,950^3 = 446 \\ b = \frac{446}{0,950^3} \approx 520 \end{array}$$

$$\text{Dus } N = 520 \cdot 0,950^t.$$

$$131 \text{ } 2 \text{ micrometer} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ meter}$$

$$\text{De diameter van het virusdeeltje is } \frac{2 \cdot 10^{-6}}{50} \text{ m} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ m.}$$

$$132 \text{ } P = \frac{3}{4a-1}$$

$$4a-1 = \frac{3}{P}$$

$$4a = \frac{3}{P} + 1$$

$$a = \frac{3}{4P} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4P} + \frac{P}{4P} = \frac{3+P}{4P}$$

$$\text{Dus } a = \frac{P+3}{4P}.$$

$$133 \text{ a } \text{Als } A \text{ omgekeerd evenredig is met } B \text{ dan geldt } A \cdot B = \text{constant.}$$

$$\text{Je krijgt } 40 \cdot 2 = 80; 26,7 \cdot 3 = 80,1; 17,8 \cdot 4 = 71,2 \text{ en } 7,9 \cdot 6 = 47,4.$$

De producten zijn niet gelijk, dus A is niet omgekeerd evenredig met B .

$$\text{b } \left. \begin{array}{l} A = \frac{90}{c^B} \\ A = 40 \text{ en } B = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{90}{c^2} = 40 \\ c^2 = \frac{90}{40} \end{array}$$

$$c = \sqrt{\frac{90}{40}} = 1,5$$

$$\text{Dus } A = \frac{90}{1,5^B}.$$

$$B = 5 \text{ geeft } A = \frac{90}{1,5^5} \approx 11,9$$

Bladzijde 270

$$134 \text{ } N_A = 25t + 1560 \text{ en } N_B = 1450 \cdot 1,078^t$$

$$\text{Los op } N_B = 2 \cdot N_A \text{ oftewel } 1450 \cdot 1,078^t = 2 \cdot (25t + 1560).$$

$$\text{Voer in } y_1 = 1450 \cdot 1,078^x \text{ en } y_2 = 2 \cdot (25x + 1560).$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 12,7$.

Dus na 12,7 jaar.

$$135 \text{ Voer in } y_1 = \frac{350-2x}{6,13} \text{ en } y_2 = \frac{5x+380}{8,27}.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 11,97$.

Uit de plot volgt dat $p > 11,97$.

Verantwoording

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie.
Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontlenen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 21

© 2021 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73761-0



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.