

& GETAL & RUIMTE

A



Noordhoff Uitgevers

Getal & Ruimte

havo A deel 1

Twaalfde editie, 2020

Noordhoff Uitgevers
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek havo A deel 1

Samen met de delen 2 en 3 van havo wiskunde A bevat dit boek de leerstof van het programma havo wiskunde A, zoals dat met ingang van 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak havo wiskunde A is 320 uur. Elk van de delen 1, 2 en 3 bevat vier hoofdstukken, waarbij opgemerkt kan worden dat in het laatste hoofdstuk van deel 3 de examentraining aan bod komt.

De vier hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 25 uur.

In hoofdstuk 1 Tabellen en grafieken worden gedeelten uit de subdomeinen B1, B2, C1 en C4 behandeld.

In hoofdstuk 2 De statistische cyclus komen verschillende aspecten uit domein E aan de orde.

Hoofdstuk 3 Lineaire verbanden is gericht op het subdomein C4.

Het subdomein B3 wordt behandeld in hoofdstuk 4 Handig tellen. Dit onderwerp wordt niet getoetst op het CE.

Beginopdrachten en eindopdrachten

Elk hoofdstuk heeft een beginopdracht en een eindopdracht. In de beginopdracht komen aspecten van het betreffende hoofdstuk aan de orde, zonder dat er een beroep wordt gedaan op technieken die in het hoofdstuk worden geleerd. In de eindopdracht zijn deze technieken meestal wel nodig. De begin- en eindopdrachten zijn geschikt voor groepswork. In een klassengesprek kan worden gereflecteerd op de opdracht. De beginopdracht geeft de docent bovendien de mogelijkheid alvast enkele zaken van het hoofdstuk toe te lichten en de grote lijn hiervan te bespreken. De studielast van elk hoofdstuk is zodanig dat voor beide opdrachten een lesuur kan worden uitgetrokken. De uitwerkingen van deze opdrachten staan in het docentenmateriaal.

Drie leerroutes

In deze editie wordt gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen.

De basisroute geeft de leerling voldoende oefening om zich alle vaardigheden die bij de eindtermen horen eigen te maken.

In de middenroute worden enkele oefenopgaven overgeslagen en in plaats hiervan maakt de leerling opgaven die dieper op de stof ingaan.

De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder oefenopgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.

Om het niveau van de leerlingen in te schatten is het mogelijk om elke leerling in de middenroute te laten beginnen. Na enkele lessen kan dan duidelijk worden welke route voor een leerling de beste is. De docent kan ook de leerlingen zelf hun route laten kiezen. Het is van belang regelmatig te monitoren of de gekozen route de juiste is.

Verdere opbouw

De paragraaf Voorkennis is kort gehouden en sluit inhoudelijk meestal direct aan op de eerste paragraaf.

Gebleven zijn de oriëntatie-opgaven, de reflectie-opgaven en de afsluitende opgaven. Nieuw zijn de extra opgaven, aangegeven met E, die vooral in de uitdagende route voorkomen. Deze extra opgaven doorbreken de standaardaanpak en activeren zo het wiskundig denken. Hierbij is soms dankbaar gebruik gemaakt van Kangoeroe-opgaven. Elke paragraaf wordt afgesloten met een Terugblik, aan het eind van elk hoofdstuk staat een Diagnostische toets en achterin het boek staan de Gemengde opgaven.

Wiskundige denkactiviteiten

In de begin- en eindopdrachten wordt een denkactieve houding van de leerling verwacht. Verder spelen in de samenhang tussen de theorie en de daaropvolgende opgaven wiskundige denkactiviteiten een rol. Zo zijn ten opzichte van de vorige editie enkele voorbeelden vervangen door opgaven waarin de leerling zelf tot een bepaalde aanpak komt. De verschillende aspecten van wiskundige denkactiviteiten komen eveneens voor bij oriëntatie-opgaven, die immers het denken over een nieuw wiskundig begrip activeren. Ook de reflectie-opgaven doen een beroep op het denkvermogen, bijvoorbeeld omdat ze ingaan op de aanpak van een wiskundig probleem of de samenhang tussen wiskundige begrippen. Tot slot zijn de extra opgaven bij uitstek te typeren als denkopgaven.

Getal & Ruimte online

Alle opgaven kunnen ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant en klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

najaar 2019

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

02 Oriëntatie-opgave

   Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 Gewone opgave

   Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 Reflectie-opgave

   In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 Afsluitende opgave

   De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 Extra opgave

   Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute



2 Middenroute



3 Uitdagende route



NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder route-aanduiding

In de Diagnostische toets en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▶GR] Verwijzing naar een module van de GR-handleiding.

[▶WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

1 Tabellen en grafieken 6

Beginopdracht De Triathlon van Maastricht	8
Voorkennis Procenten	9
1.1 Rekenen met procenten en verhoudingen	11
1.2 Maatsystemen	22
1.3 Omgaan met tabellen	31
1.4 Informatie in grafieken	41
Eindopdracht RUN Winschoten	49
Diagnostische toets	50

2 De statistische cyclus 52

Beginopdracht Elektrisch rijden	54
Voorkennis Centrummaten en frequentietabellen	55
2.1 De onderzoeksvraag	57
2.2 Data verzamelen	66
2.3 Centrum- en spreidingsmaten	72
2.4 Representatie van data	80
2.5 Conclusies trekken	91
Eindopdracht Nederlands energieverbruik	101
Diagnostische toets	102

3 Lineaire verbanden 104

Beginopdracht Draf en galop	106
Voorkennis Haakjes wegwerken en vergelijkingen oplossen	107
3.1 Lineaire formules	109
3.2 Lineaire formules vergelijken	117
3.3 Lineaire formules opstellen	126
3.4 Lineaire vergelijkingen met twee variabelen	136
Eindopdracht Man en paard	141
Diagnostische toets	142

4 Handig tellen 144

Beginopdracht Spelbord ontwerp	146
Voorkennis Teldiagrammen	147
4.1 Regels bij telproblemen	148
4.2 Permutaties en combinaties	156
4.3 Allerlei telproblemen	165
Eindopdracht Cirkelvormig spelbord	177
Diagnostische toets	178

Gemengde opgaven	180
Formuleblad	203
Overzicht GR-modules	204
Overzicht routes	205
Trefwoordenregister	209
Verantwoording	211



1 Tabellen en grafieken

Wat leer je?

- Allerlei berekeningen met procenten.
- Rekenen met verhoudingen.
- Werken met de wetenschappelijke notatie.
- Berekeningen maken met verschillende eenheden.
- Het aflezen van informatie uit tabellen.
- Interpoleren en extrapoleren.
- Werken met allerlei soorten grafieken, waaronder grafiekenbundels.



Beginopdracht De Triathlon van Maastricht

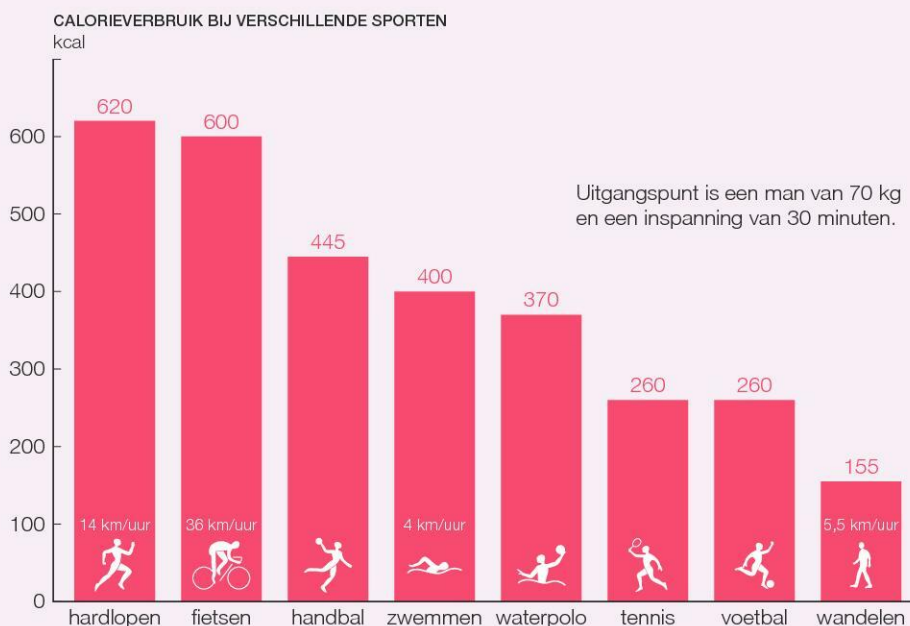
Op 25 mei 2017 vond de eerste Triathlon van Maastricht plaats. De deelnemers zwommen eerst 1,9 km in de Maas tegen de stroom in en daarna 1,9 km terug met de stroom mee. Het fietsparcours (met in totaal 1100 hoogtemeters) bestaat uit twee rondes van 89 km door Maastricht en het Limburgse land. Het loopparcours bestaat uit vier rondes van 10,55 km door Maastricht.

Dennis heeft meegedaan aan deze triathlon. Hij zwom met een gemiddelde snelheid van 4 km per uur. Hij fietste met een gemiddelde snelheid van 36 km per uur en zijn gemiddelde snelheid bij het lopen was 14 km per uur. Dennis weegt 70 kg.

Dennis is ook een fanatieke tennisser.

Als hij dezelfde tijd aan tennissen zou besteden als aan de triathlon, dan verbrandt hij minder calorieën.

Bereken hoeveel procent minder. Gebruik de informatie in de figuur hieronder.



Voorkennis Procenten

Theorie A Percentages berekenen

18% betekent 18 van de 100, dus $18\% = \frac{18}{100} = 0,18$.

En zo is $5\% = \frac{5}{100} = 0,05$, $8,7\% = \frac{8,7}{100} = 0,087$ en $0,3\% = \frac{0,3}{100} = 0,003$.

Je berekent 18% van 620 als volgt: 18% van 620 is $0,18 \times 620 = 111,6$.

Hoeveel is 23% van 75,8?

23% van 75,8 is $0,23 \times 75,8 = 17,434$.

Neemt een hoeveelheid met 17% toe, dan krijg je $100\% + 17\% = 117\%$.

Hierbij hoort de factor 1,17.

En zo geeft een toename van 2,4% de factor 1,024 en een afname van 3% de factor 0,97.

Neemt een hoeveelheid van 680 met 15,6% toe, dan krijg je

$1,156 \times 680 = 786,08$.

Neemt een hoeveelheid van 520 met 4,8% af, dan krijg je

$0,952 \times 520 = 495,04$.

1 Bereken.

- | | |
|----------------|-----------------|
| a 8% van 57 | d 0,2% van 780 |
| b 3,8% van 820 | e 1,08% van 58 |
| c 85% van 1783 | f 0,04% van 850 |

2 Hoeveel krijg je als

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| a 480 met 15% toeneemt | c 315 met 0,14% toeneemt |
| b 700 met 6% afneemt | d 2,5 met 1,2% afneemt? |

Theorie B Hoeveel procent is A van B?

In een klas zitten 28 leerlingen van wie er zes zijn blijven zitten.

Dat is $\frac{6}{28} \times 100\% \approx 21,4\%$. En zo is 7 van 18 gelijk aan $\frac{7}{18} \times 100\% \approx 38,9\%$.

Hoeveel procent is 51 van 78?

51 van 78 is $\frac{51}{78} \times 100\% \approx 65,4\%$.

3 Hoeveel procent is

- | | |
|----------------|------------------|
| a 11 van 53 | d 0,3 van 1,8 |
| b 18 van 720 | e 12,3 van 78,5 |
| c 830 van 1125 | f 0,08 van 0,12? |

Rond percentages af op één decimaal.

Theorie C Procentuele verandering

Op een school zitten 1315 leerlingen. Vorig schooljaar waren dat er 1248. De toename van het aantal leerlingen is $1315 - 1248$.

De toename in procenten is $\frac{1315 - 1248}{1248} \times 100\% \approx 5,4\%$.

Deel door het oorspronkelijke aantal, dus deel door OUD.

$$\text{Procentuele verandering} = \frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\%$$

Neemt de jaaromzet van een bedrijf af van 18,3 miljoen euro tot 16,2 miljoen euro, dan is de procentuele verandering gelijk aan

$$\frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\% = \frac{16,2 - 18,3}{18,3} \times 100\% \approx -11,5\%.$$

Het minteken bevestigt dat er sprake is van een afname.

De procentuele afname is 11,5%.

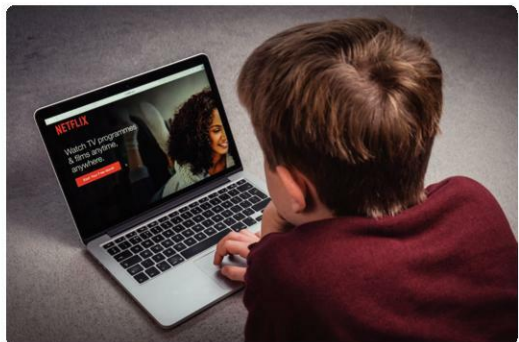
- 4 Bereken telkens de procentuele toename of afname.

Een hoeveelheid neemt

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| a toe van 730 tot 850 | d af van 820 tot 728 |
| b toe van 7,8 tot 13,1 | e af van 1019 tot 101 |
| c toe van 53 tot 55 | f toe van 53 tot 140. |

- 5 In Nederland wordt steeds minder live televisie gekeken en steeds meer naar films en series die door streamingsdiensten worden aangeboden.

- a In 2016 groeide het aantal Nederlandse abonnees van de streamingsdienst Netflix van 1,3 miljoen naar 2,3 miljoen. Hoeveel procent was de toename?
- b Het aantal abonnementen voor televisie daalde in 2016 juist van 7,46 miljoen naar 7,40 miljoen. Hoeveel procent was de afname?



1.1 Rekenen met procenten en verhoudingen

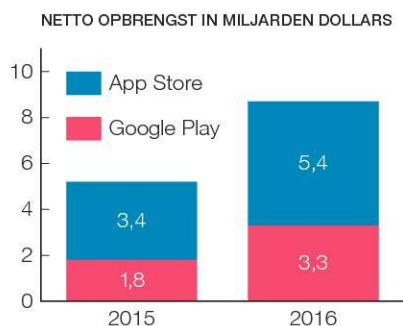
Theorie A De grafische rekenmachine

Bij het vak wiskunde werk je met de grafische rekenmachine, voortaan afgekort met GR. In de handleiding GR staat hoe je dit apparaat kunt gebruiken.

[> GR] Neem de module **Berekeningen op het basisscherm** door.

01
☑ * *

In de figuur hiernaast zie je de netto opbrengsten van de App Store en Google Play in 2015 en 2016. Floris beweert dat de netto opbrengst van de App Store meer is toegenomen dan de netto opbrengst van Google Play. Ilse is het hier niet mee eens. Waarom zijn beide beweringen te verdedigen?



figuur 1.1

Theorie B Procentberekeningen

Bij het vergelijken van gegevens in tabellen krijg je vaak te maken met vragen als

- In welke periode is de toename het grootst?
- Wat is het sterkst toegenomen?

Je onderscheidt hierbij **absolute** en **relatieve veranderingen**.

Bij veranderingen in aantallen gaat het om absolute veranderingen.

Bij veranderingen in procenten gaat het om relatieve veranderingen.

Hieronder staan zeven soorten vragen die je kunt tegenkomen bij procentberekeningen.

1 Hoeveel is 11,8% van 580?

11,8% van 580 is $0,118 \cdot 580 = 68,44$

2 Hoeveel procent is 23 van 78?

23 van 78 is $\frac{23}{78} \times 100\% \approx 29,5\%$

De vermenigvuldigingspunt · betekent hetzelfde als $\times$.

- 3 Een hoeveelheid neemt toe van 35 tot 47.**

Hoeveel procent is de toename?

De procentuele toename is

$$\frac{47 - 35}{35} \times 100\% \approx 34,3\%.$$

De procentuele verandering is

$$\frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\%.$$

- 4 Een hoeveelheid van 250 neemt met 8% toe.**

Hoeveel is de nieuwe hoeveelheid?

$$\text{NIEUW} = 1,08 \times \text{OUD}, \text{ dus } \text{NIEUW} = 1,08 \cdot 250 = 270.$$

- 5 Een hoeveelheid van 1800 neemt met 11% af.**

Hoeveel is de nieuwe hoeveelheid?

$$\text{NIEUW} = 0,89 \times \text{OUD}, \text{ dus } \text{NIEUW} = 0,89 \cdot 1800 = 1602.$$

- 6 Een hoeveelheid neemt met 12% toe tot 1456.**

Hoeveel was de oorspronkelijke hoeveelheid?

$$\text{NIEUW} = 1,12 \times \text{OUD} \text{ en } \text{NIEUW} = 1456$$

$$\text{Dus } 1,12 \times \text{OUD} = 1456. \text{ Je krijgt } \text{OUD} = \frac{1456}{1,12} = 1300.$$

- 7 Een hoeveelheid van 290 is 58% van het totaal.**

Hoeveel is het totaal?

$$58\% \text{ van het totaal is } 290, \text{ dus } 0,58 \times \text{totaal} = 290.$$

$$\text{Dit geeft totaal} = \frac{290}{0,58} = 500.$$

Voorbeeld

Het aantal bloemenwinkels in Nederland nam in de periode 2014-2016 met 4,6% af tot 3900.

Bereken het aantal bloemenwinkels in 2014.

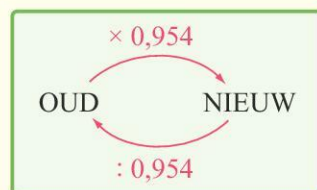
Aanpak

$$100\% - 4,6\% = 95,4\% \text{ dus } \text{NIEUW} = 0,954 \times \text{OUD} \text{ en}$$

$$\text{dit geeft } \text{OUD} = \frac{\text{NIEUW}}{0,954}.$$

Uitwerking

$$\text{Het aantal bloemenwinkels is } \frac{3900}{0,954} \approx 4100.$$



Je ziet dat het aantal bloemenwinkels is gegeven in honderdtallen.

Daarom is ook het antwoord afgerond op honderdtallen.

Bij veel opdrachten is vermeld hoe nauwkeurig je het antwoord moet geven. Staat er geen informatie over de vereiste nauwkeurigheid, dan houd je je bij procentberekeningen aan de volgende vuistregels.

Vuistregels voor afronden

- Geef NIEUW en OUD in dezelfde nauwkeurigheid.
- Geef percentages in één decimaal nauwkeurig.

Let wel, dit zijn slechts vuistregels die je niet klakkeloos moet toepassen. Ga altijd na of de nauwkeurigheid van je antwoord past bij het gegeven probleem.

2 Waarmee moet je OUD vermenigvuldigen bij



- a** een toename van 8%
- b** een afname van 3%
- c** een toename van 3,2%
- d** een afname van 8,7%
- e** een toename van 150%
- f** een afname van 0,3%

3 De populariteit van electronic sports (e-sports) maakt de laatste jaren een grote groei door. E-sports staat ook bekend als professioneel gamen. In 2017 bestond het publiek van e-sports uit 145 miljoen fans. In 2014 waren dat er 89 miljoen.



- a** Bereken de procentuele toename van het aantal fans.
- b** Door de groei van het aantal fans willen steeds meer bedrijven reclame maken bij e-sports. De reclame-inkomsten groeiden daardoor van 194 miljoen dollar in 2014 naar 465 miljoen dollar in 2017. Hoeveel keer zo groot is de relatieve toename van de reclame-inkomsten vergeleken met die van de fans?



- 4**
- a** Een koffiezetapparaat wordt met 25% korting verkocht voor 81 euro. Wat was de oorspronkelijke prijs?
 - b** Inclusief 21% btw kost een fiets 552 euro. Hoeveel kost de fiets zonder btw?
 - c** In 2017 was de gemiddelde CO₂-uitstoot van personenauto's 109 gram CO₂ per km. Dat was 34% minder dan in 2007. Wat was de gemiddelde CO₂-uitstoot van personenauto's in 2007?





5

Zie de tabel over het aantal elektrische personenauto's op 1 januari in Nederland.

ELEKTRISCHE PERSONENAUTO'S IN NEDERLAND

type	2015	2018
volledig elektrisch	7400	21 800
hybride	111 800	152 000
plug-in hybride	36 800	97 300
totaal	156 000	271 100



- Bij welk type is de relatieve toename het grootst?
- Hoeveel procent van het totale aantal elektrische personenauto's was in 2015 volledig elektrisch?
- Het totale aantal personenauto's in Nederland was 8,4 miljoen in 2018.
Hoeveel procent van de personenauto's was elektrisch?
- In 2015 was slechts 2,1% van de personenauto's elektrisch.
Bereken het totale aantal personenauto's in 2015.
- In 2018 was het aantal plug-in hybride personenauto's 1,6% meer dan in 2017.
Hoeveel plug-in hybride personenauto's waren er in 2017?



6

Zie de tabel over het aantal havoleerlingen per profiel in de periode 2012-2017.

LEERLINGEN HAVO 4 EN 5 PER PROFIEL

	2012	2017
NT	12 000	14 300
NG	22 100	
EM		53 200
CM		



- Met hoeveel procent is het aantal leerlingen met een NT-profiel in deze periode toegenomen?
- Het aantal leerlingen met een NG-profiel is in deze periode met 29,9% toegenomen.
Hoeveel leerlingen hadden in 2017 een NG-profiel?
- Het aantal leerlingen met een EM-profiel nam in deze periode met 4,2% toe.
Hoeveel leerlingen hadden dit profiel in 2012?
- Het aantal leerlingen met een CM-profiel nam met 3300 af. Dat is een afname van 19,4%.
Hoeveel CM-leerlingen waren er in 2017?

A7
☐◎*

De volgende vragen gaan over de gemeenteraadsverkiezingen in de stad Utrecht in 2018. In totaal brachten 157 822 mensen hun stem uit.

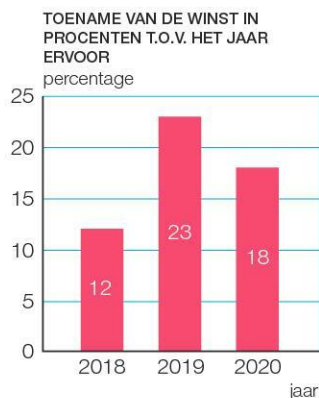
Rond in deze opgave aantallen af op honderdtallen.

- a** De PvdA behaalde 6,2% van de stemmen.
Hoeveel stemmen zijn dat?
- b** GroenLinks werd de grootste partij. Vergeleken met de gemeenteraadsverkiezingen in 2014 haalden ze 54,0% meer stemmen. In 2014 stemden er 23 531 mensen op GroenLinks.
Hoeveel mensen stemden in 2018 op GroenLinks?
- c** Ook de VVD boekte winst. Er stemden 20 522 mensen op deze partij. Dat is maar liefst 35,7% meer dan in 2014.
Hoeveel mensen stemden in 2014 op de VVD?
- d** Er stemden 8428 mensen op het CDA.
Hoeveel procent van de stemmen kreeg het CDA?
- e** In 2014 was D66 nog de grootste partij in Utrecht. Toen stemden 36 829 mensen op deze partij. In 2018 waren dat er 4094 minder.
Met hoeveel procent is het aantal D66-stemmen afgenomen in 2018 vergeleken met 2014?
- f** Het opkomstpercentage in Utrecht was 59,0%.
Hoeveel stemgerechtigden telde Utrecht in 2018?
- g** Vergeleken met 2014 leverde de SP stemmen in. In 2014 stemden 13 223 mensen op de SP. In 2018 waren dat er 51,5% minder.
Hoeveel mensen stemden in 2018 op de SP?
- h** Vergeleken met 2014 stemden er 1053 meer mensen op de ChristenUnie (CU). Dat komt neer op een toename van 19,5%.
Hoeveel mensen stemden in 2018 op de CU?

A8
☐◎*

Een firma maakte in 2017 een winst van 8 miljoen euro.

In het staafdiagram in figuur 1.2 zie je de winstontwikkeling in de daaropvolgende jaren. Met hoeveel procent is de winst toegenomen in de periode 2017-2020?



figuur 1.2

A9
☐◎*

In 2017 waren er in een stad 240 geboorten. In 2018 waren dat er 324. Neem aan dat de procentuele toename elk jaar hetzelfde is.

- a** Hoeveel geboorten waren er in 2019?
- b** Hoeveel geboorten waren er in 2016?

R10
☐◎*

Bij procentberekeningen is een fout snel gemaakt. Voor de hand liggende conclusies blijken vaak niet te kloppen.

Wat is er mis bij de volgende uitspraken?

- a In 2018 was de winst van een bedrijf 15% meer dan in 2017 en in 2019 was de winst zelfs 25% meer dan in 2018.
Dus de winst in 2019 was 40% meer dan in 2017.
- b Een bedrag eerst met 15% verhogen en daarna het verkregen bedrag weer met 15% verlagen levert het oorspronkelijke bedrag op.
- c Van de jongens heeft 40% een onvoldoende en van de meisjes 20%.
Dus 30% van de klas heeft een onvoldoende.

E11
*

- a Tijdens de drie zomermaanden is een hotel voor 88% bezet, de andere maanden voor slechts 40%.
Voor hoeveel procent is het hotel het hele jaar gemiddeld bezet?
- b In een vat zit 30 liter meer als het voor 30% leeg is dan wanneer het voor 30% vol is.
Hoeveel liter zit er in het vat als het vol is?
- c Een dorstige kameel bestaat voor 84% van zijn gewicht uit water. Nadat hij zijn dorst heeft gelest, weegt hij 800 kg en bestaat voor 85% uit water.
Hoeveel woog hij voordat hij begon te drinken?



E12
*

- a Een hoeveelheid H neemt 10 jaar achter elkaar met 2,5% toe.
Voor de hoeveelheid H_{nieuw} na 10 jaar geldt $H_{\text{nieuw}} = a \cdot H$.
Bereken a . Rond af op twee decimalen.
- b Bij een groei van 6% per jaar duurt het t jaar totdat een hoeveelheid H is verdubbeld.
Bereken t in jaren nauwkeurig.

O13
☐◎*

Hiernaast zie je hoeveel ingrediënten nodig zijn om voor zes personen romig aardbeienijs te maken.
Hoeveel eieren zijn nodig om voor tien personen dit ijs te maken? En hoeveel gram poedersuiker?

ROMIG AARDBEENIJS

6 personen • 30 minuten
waardering 8.3 • nagerecht

INGREDIËNTEN

- 300 ml slagroom
- 300 ml volle melk
- 12 eieren
- 240 g fijne tafelsuiker
- 1 kg verse aardbeien
- 75 g poedersuiker
- sap van 1/2 citroen
- 300 g clotted cream



Theorie C Verhoudingen

Jesse verdient met zijn bijbaantje €6,50 per uur. Hierbij hoort de volgende **verhoudingstabel**.

aantal gewerkte uren	1	2	3	8	12
bedrag in euro's	6,50	13	19,50	52	78

Diagram illustrating the relationship between hours worked and amount earned:

- From 1 to 2 hours, the amount increases by $\times 2$.
- From 2 to 12 hours, the amount increases by $\times 4$.
- From 3 to 12 hours, the amount increases by $\times 4$.
- From 6,50 to 13, the amount increases by $\times 2$.
- From 19,50 to 78, the amount increases by $\times 4$.

We zeggen dat de **verhouding** tussen het aantal gewerkte uren en het bedrag in euro's steeds hetzelfde is.

De verhouding $2 : 13$ spreek je uit als 'twee staat tot dertien'.

Door $8 : 52$ en $12 : 78$ te vereenvoudigen zie je dat deze verhoudingen gelijk zijn aan $2 : 13$.

Vereenvoudig een verhouding zo ver mogelijk.

In een verhoudingstabel hebben de getallen die onder elkaar staan allemaal dezelfde verhouding.

Om een bedrag van 225 euro te verdelen in de verhouding $2 : 3$, maak je eerst $2 + 3 = 5$ gelijke delen. Eén deel is $\frac{1}{5} \cdot 225 = 45$ euro, dus de bedragen zijn $2 \cdot 45 = 90$ euro en $3 \cdot 45 = 135$ euro.

Ook $2 : 5 : 8$ is een verhouding.

Om een bedrag van 360 euro in deze verhouding te verdelen, maak je eerst $2 + 5 + 8 = 15$ gelijke delen. Eén deel is $\frac{1}{15} \cdot 360 = 24$ euro, dus de bedragen zijn $2 \cdot 24 = 48$ euro, $5 \cdot 24 = 120$ euro en $8 \cdot 24 = 192$ euro.

De bedragen zijn ook in één keer als volgt te berekenen, namelijk $\frac{2}{15} \cdot 360 = 48$ euro, $\frac{5}{15} \cdot 360 = 120$ euro en $\frac{8}{15} \cdot 360 = 192$ euro.

Voorbeeld

Op een school komen de leerlingen uit de plaatsen A, B en C in de verhouding $8 : 7 : 5$. Er zijn 68 leerlingen meer uit B dan uit C. Hoeveel leerlingen komen uit plaats A?

Aanpak

Bedenk dat B zeven delen en C vijf delen heeft, dus B heeft twee delen meer dan C.

Uitwerking

Twee delen zijn 68 leerlingen, dus één deel is 34 leerlingen.
Het aantal leerlingen uit A is $8 \cdot 34 = 272$.

14



- a** Anna, Bram en Eva doen mee aan een estafetteloop van in totaal 24 km. Ze spreken af dat ze de afstand zullen verdelen in de verhouding 1 : 2 : 3 waarbij Anna de kortste afstand loopt en Eva de langste.

Hoeveel km moet ieder afleggen?

- b** Bij een andere estafetteloop hebben Anna, Bram en Eva de afstand verdeeld in de verhouding 4 : 5 : 7 waarbij Anna de kortste afstand loopt en Eva de langste. Eva loopt 4,5 km meer dan Anna. Hoeveel km loopt Bram in deze estafetteloop?

15



- a** In Qatar wonen 47 vrouwen per 100 mannen. Qatar heeft een populatie van 2,32 miljoen inwoners.

Hoeveel vrouwen wonen er in Qatar?

- b** In China zijn er 6 mannen per 5 vrouwen. Het totale aantal inwoners is 1,38 miljard.
Hoeveel mannen telt China meer dan vrouwen?

16

*

Twee even grote flessen zijn geheel gevuld met een mengsel van water en sap. De verhouding van water en sap in de eerste fles is 2 : 1 en in de tweede fles 4 : 1. Beide flessen worden leeggegoten in dezelfde karaf.

Wat wordt de verhouding van water en sap in de karaf?

A17



- a** In een dorp is de verhouding van het aantal volwassen mannen tot het aantal volwassen vrouwen gelijk aan 2 : 3. De verhouding van het aantal volwassen vrouwen tot het aantal kinderen is gelijk aan 6 : 1.

Wat is de verhouding van het aantal volwassenen (mannen en vrouwen) tot het aantal kinderen?

- b** Olivia, Ina en Nathalie hebben 770 noten geraapt. Ze verdelen ze in de verhouding van hun leeftijden. Voor iedere 3 noten die Olivia kreeg, kreeg Ina er 4. Voor iedere 7 noten die Nathalie kreeg, kreeg Ina er 6.
Hoeveel noten kreeg de jongste?



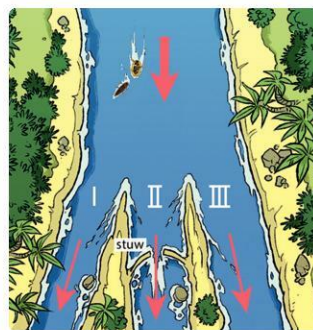
A18
☐ ⊙ *

Een rivier splitst zich in drie takken, zie figuur 1.3. Bij een aanvoer van minder dan $2400 \text{ m}^3/\text{s}$ verhouden de afvoeren in de takken I, II en III zich als $3 : 4 : 5$.

a Bereken de afvoeren in I, II en III als er $2340 \text{ m}^3/\text{s}$ wordt aangevoerd.

De afvoer in tak II mag niet meer zijn dan $800 \text{ m}^3/\text{s}$. Als deze afvoer meer dreigt te worden, dan zorgt de stuw in II ervoor dat de afvoer daar $800 \text{ m}^3/\text{s}$ is. De afvoeren in I en III verhouden zich dan als $3 : 5$.

- b Bereken de afvoeren in I, II en III als er $3000 \text{ m}^3/\text{s}$ wordt aangevoerd.
- c Bereken de aanvoer als via tak III de afvoer $1500 \text{ m}^3/\text{s}$ is.



figuur 1.3

INFORMATIEF

Stuw in rivier

Stuwen worden in rivieren aangelegd om waterstromen te sturen. Er zijn vaste stuwen en er zijn regelbare stuwen. Ze worden gebruikt om het water in hoger gelegen gebieden vast te houden of juist om te voorkomen dat lager gelegen gebieden overstromen. Verder wordt met stuwen gegarandeerd dat de scheepvaart een minimale waterstand heeft. In Nederland worden stuwen ook gebruikt om water uit de Rijn via de IJssel naar het IJsselmeer te voeren.



A19
☐ ⊙ *

In een land heeft het parlement 150 zetels. Er zijn 5 politieke partijen, die we van groot naar klein A, B, C, D en E noemen. Bij een parlamentsverkiezing stemmen de mensen in de verhouding $a : b : c : d : e$ op deze partijen.

- a Neem aan dat de verhouding $5 : 4 : 3 : 2 : 1$ is. Licht toe dat er dan twee mogelijkheden zijn om een meerderheid te vormen met twee partijen. Welke mogelijkheden zijn dat en hoeveel zetels horen hierbij?
- b Hoeveel partijen zijn er minstens nodig om een meerderheid te vormen als de verhouding $10 : 9 : 8 : 7 : 6$ is? Licht je antwoord toe.
- c Onderzoek wat de verhouding $a : b : c : d : e$ is als er steeds 5 zetels zitten tussen twee opeenvolgende partijen.
- d De partijen A en E hebben samen een meerderheid. De verhouding $a : e$ is $16 : 1$ en de verhouding $b : c : d$ is $29 : 19 : 17$. Hoeveel zetels heeft partij A?

Autospuiterij Vermalen is gespecialiseerd in het opknappen van oldtimers. Onderdeel daarvan is het aanbrengen van een laklaag met verharder en thinner.

De verhouding van lak, verharder en thinner is $10 : 5 : 2$. Zo ontstaat een lakmengsel dat goed te spuiten is en bovendien snel verhardt.

Om een bepaalde kleur lakmengsel te krijgen kan Vermalen eerst meerdere kleuren lak met elkaar mengen. Tot slot worden de verharder en thinner toegevoegd.



- a** Een klant wil een speciale kleur groen voor zijn Cadillac Eldorado. Deze kleur groen krijg je door blauwe en gele lak te mengen in de verhouding $3 : 2$.
Bereken hoeveel liter gele lak Vermalen moet gebruiken om 8,5 liter lakmengsel te krijgen.
- b** Voor het overspuiten van een Porsche 914 is 6,8 liter lakmengsel nodig. De kleur lak krijgt Vermalen door rood, groen en geel te mengen in de verhouding $5 : 1 : 2$. Vermalen heeft nog slechts één blik met 2,5 liter rode lak in de zaak.
Onderzoek of Vermalen meer rode lak moet kopen.
- c** Vermalen heeft 5,1 liter lakmengsel nodig voor een Volkswagen Beetle Convertible uit 1978. Voor een bijzonder eindresultaat wil hij voor deze klus een lakmengsel met 25% minder thinner gebruiken dan normaal. Vermalen berekent dat hij dus 0,45 liter thinner nodig heeft. Laat met een berekening zien dat dit klopt en bereken hoeveel liter verharder hij nodig heeft.
- d** Vermalen heeft een emmer met 2 liter paarse lak gemaakt door rode en blauwe lak te mengen in de verhouding $3 : 5$. Hij heeft ook een emmer met 3 liter groene lak gemaakt door blauwe en gele lak te mengen in de verhouding $3 : 1$. De klant besluit op het laatste moment dat hij zijn Citroën ID20 Break Familiale toch in één kleur wil, met rood, blauw en geel in de verhouding $3 : 7 : 2$. Vermalen besluit de boel te redden door de twee emmers bij elkaar te gooien en rode en gele lak toe te voegen.
Bereken hoeveel rode en hoeveel gele lak Vermalen moet toevoegen om de verhouding juist te krijgen.

Terugblik

Absolute en relatieve veranderingen

Een verandering in aantallen is een absolute verandering.

Een verandering in procenten is een relatieve verandering.

$$\text{relatieve verandering} = \frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\%$$

Procentberekeningen

gegeven	vraag	berekening
5,8% van 50	Hoeveel is dat?	Dat is $0,058 \cdot 50 = 2,9$.
18 van 50	Hoeveel procent is dat?	Dat is $\frac{18}{50} \times 100\% = 36\%$.
een toename van 60 naar 80	Hoeveel is de toename in procenten?	De toename is $\frac{80 - 60}{60} \times 100\% \approx 33,3\%$.
een afname van 80 naar 60	Hoeveel is de afname in procenten?	$\frac{60 - 80}{80} \times 100\% = -25\%$ De afname is 25%.
60 neemt toe met 18%	Hoeveel krijg je?	$\text{NIEUW} = 1,18 \times \text{OUD}$ $\text{NIEUW} = 1,18 \cdot 60 = 70,8$
80 neemt af met 18%	Hoeveel krijg je?	$\text{NIEUW} = 0,82 \times \text{OUD}$ $\text{NIEUW} = 0,82 \cdot 80 = 65,6$
een toename met 18% geeft 80	Hoeveel had je?	$\text{NIEUW} = 1,18 \times \text{OUD}$ $\text{OUD} = \frac{80}{1,18} \approx 67,8$
een afname met 18% geeft 60	Hoeveel had je?	$\text{OUD} = \frac{60}{0,82} \approx 73,2$

Verhoudingen

De verhouding 225 : 600 is te vereenvoudigen tot 3 : 8.

Om €27,50 te verdelen in de verhouding 3 : 8 bereken je eerst $3 + 8 = 11$.

De verdeling is $\frac{3}{11} \cdot €27,50 = €7,50$ en $\frac{8}{11} \cdot €27,50 = €20,-$.

Om €27,50 te verdelen in de verhouding 3 : 4 : 8 bereken je eerst $3 + 4 + 8 = 15$.

De verdeling is $\frac{3}{15} \cdot €27,50 = €5,50$; $\frac{4}{15} \cdot €27,50 \approx €7,33$ en $\frac{8}{15} \cdot €27,50 \approx €14,67$.

Verdelen A, B en C een bedrag in de verhouding 4 : 7 : 9 en krijgt B

€45,- meer dan A, dan zijn 3 delen €45,- en is 1 deel €15,-.

A krijgt $4 \cdot 15 = €60,-$; B krijgt $7 \cdot 15 = €105,-$ en C krijgt $9 \cdot 15 = €135,-$.

1.2 Maatsystemen

021
☑ Ⓢ *

Eind 2017 hadden 780 duizend studenten een studieschuld. Gemiddeld was de studieschuld 13 500 euro. Dat betekent dat de totale studieschuld op dat moment ongeveer 10,5 miljard euro was. Zie de berekening op het GR-scherm hiernaast. Licht toe dat de uitkomst $1.053\text{E}10$ inderdaad overeenkomt met ongeveer 10,5 miljard.



Theorie A De wetenschappelijke notatie

Bij de berekeningen met een hele grote of kleine uitkomst geeft de GR het antwoord in de **wetenschappelijke notatie**. Hiervan heb je in opgave 21 een voorbeeld gezien.

Je krijgt bijvoorbeeld $80^6 = 2.62144\text{E}11$ en dit betekent $2,62144 \cdot 10^{11}$.

Om dit antwoord in de gewone notatie te schrijven verschuif je de komma 11 plaatsen naar rechts.

Dus $80^6 = 262\,144\,000\,000$, oftewel 262,144 miljard.

Je kunt ook schrijven $2,62144 \cdot 10^{11} = 262,144 \cdot 10^9$
 dus ruim 262 miljard.

Diagram: $2,62144 \cdot 10^{11} = 262,144 \cdot 10^9$
 - Arrow from 11 to 9: exponent 2 lager
 - Arrow from 2,62144 to 262,144: komma 2 plaatsen naar rechts

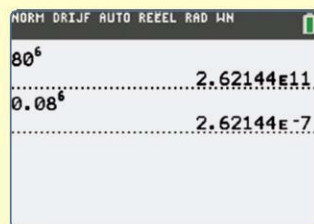
$10^3 = 1000$	duizend
$10^6 = 1\,000\,000$	miljoen
$10^9 = 1\,000\,000\,000$	miljard

Bij de berekening van bijvoorbeeld $0,08^6$ geeft de GR $2.62144\text{E}-07$ en dit betekent $2,62144 \cdot 10^{-7}$.

Schrijf je dit getal in de gewone notatie dan krijg je

$2,62144 \cdot 10^{-7} = 0,000\,000\,262\,144$.

Diagram: $2,62144 \cdot 10^{-7} = 0,000\,000\,262\,144$
 - Arrow from -7 to 0: komma 7 plaatsen naar links



Merk op dat 0,000 000 262 144 met 7 nullen begint, dit zie je terug in de exponent van $2,62144 \cdot 10^{-7}$.

En zo is $0,000032 = 3,2 \cdot 10^{-5}$.

Diagram: $0,000032 = 3,2 \cdot 10^{-5}$
 - Arrow from 0,000032 to 3,2: 5 nullen, dus 10^{-5}

In de wetenschappelijke notatie staat een getal in de vorm $a \cdot 10^b$. Hierin is a een getal tussen 1 en 10.

Voorbeeld

Schrijf de volgende getallen in de wetenschappelijke notatie.

- a $25,2 \cdot 10^8$
- b 685 miljoen
- c 0,00023
- d $0,052 \cdot 10^{-6}$

Uitwerking

- a $25,2 \cdot 10^8 = 2,52 \cdot 10^9$ De komma 1 plaats naar links, dus de exponent plus 1.
- b 685 miljoen = $685 \cdot 10^6 = 6,85 \cdot 10^8$
- c $0,00023 = 2,3 \cdot 10^{-4}$ Vier nullen, dus 10^{-4} .
- d $0,052 \cdot 10^{-6} = 5,2 \cdot 10^{-8}$ De komma 2 plaatsen naar rechts, dus de exponent min 2.

22 Schrijf de volgende getallen in de wetenschappelijke notatie.



- a 432 miljard
- b 0,0061
- c $126 \cdot 10^4$
- d $0,0048 \cdot 10^{-8}$

23 Bereken en schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie.



Rond zo nodig af op twee decimalen.

- a $0,03^7$
- b $\left(\frac{1}{12}\right)^4$
- c 225^6
- d $\left(\frac{2}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2$
- e $\frac{2}{13}$ deel van een miljard
- f $\frac{14}{3 \cdot 10^5}$

24 Bereken. Schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie.



- a $3,5 \cdot 10^6 \times 0,4 \cdot 10^4$
- b $1200 \cdot 55\,000$
- c $12,5 \text{ miljoen} \times 460\,000$
- d $0,018 \times 5 \cdot 10^{-6}$
- e $\frac{1,5 \text{ duizend}}{3 \text{ miljard}}$
- f $0,8^{12} \cdot 2,5^{20}$

Op de TI voer je een getal in de wetenschappelijke notatie in met EE, op de Casio met EXP of $\times 10^x$ en op de HP met EEX.

25 * a Schrijf de getallen 84,5 miljard en 0,00075 in de wetenschappelijke notatie.

- b Bereken $0,04^8$ en 215^6 en schrijf de antwoorden in de wetenschappelijke notatie. Rond af op twee decimalen.
- c Bereken $\left(\frac{2}{9}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^3$ en schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie. Rond af op twee decimalen.
- d Bereken $1500 \times 6,2 \cdot 10^4$ en $\frac{18 \text{ miljoen}}{2,4 \text{ miljard}}$ en schrijf de antwoorden in de wetenschappelijke notatie.

A26
☐ ⊙ *

Schrijf de antwoorden in de wetenschappelijke notatie.

- a** De 7,8 miljoen Nederlandse huishoudens hebben een gemiddeld spaartegoed van 44 500 euro.
Hoeveel euro is het totale spaartegoed van alle Nederlandse huishoudens?
- b** De kans om in de Staatsloterij de jackpot te winnen is vier op de 25 miljard.
Bereken deze kans.

A27
☐ ⊙ *

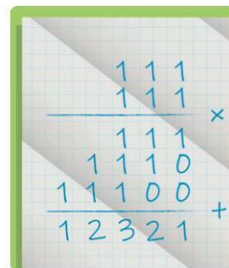
Schrijf de antwoorden in de wetenschappelijke notatie. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- a** Op aarde is er voor elk van de 7,7 miljard mensen ongeveer 180 miljoen m^3 water aanwezig.
Hoeveel m^3 water is er ongeveer op aarde aanwezig?
- b** Van een medicijn is direct na toediening 5 mg in het bloed aanwezig. De hoeveelheid medicijn neemt per uur met 40% af. Dat betekent dat er na twee uur nog $5 \cdot 0,6^2 = 1,8$ mg van het medicijn in het bloed aanwezig is.
Hoeveel mg is er na 24 uur nog in het bloed aanwezig?

E28
☐ ⊙ *

Schrijf in deze opgave de antwoorden niet in de wetenschappelijke notatie.

- a** Bereken 1111^2 en 11111^2 . Welke regelmaat zie je?
- b** Gebruik de regelmaat die je bij a hebt gevonden om 111111^2 (6 enen) en 111111111^2 (10 enen) te berekenen.



O29
☐ ⊙ *

Je weet dat 1 hectometer = 100 meter. Notatie $1 \text{ hm} = 100 \text{ m}$.

Een vierkante hectometer is dus $100 \times 100 = 10\,000$ vierkante meter.

Een vierkante hectometer wordt ook wel hectare genoemd.

Notatie $1 \text{ ha} = 1 \text{ hm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2$.

Het weiland van boer Aart is 300 bij 420 meter.

Hoeveel hectare is dat?

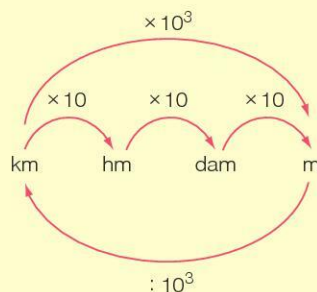
Theorie B Lengte, oppervlakte en inhoud

Je weet dat $1 \text{ km} = 10 \text{ hm}$ en $1 \text{ hm} = 100 \text{ meter}$.

Dit kun je zien in het schema hiernaast.

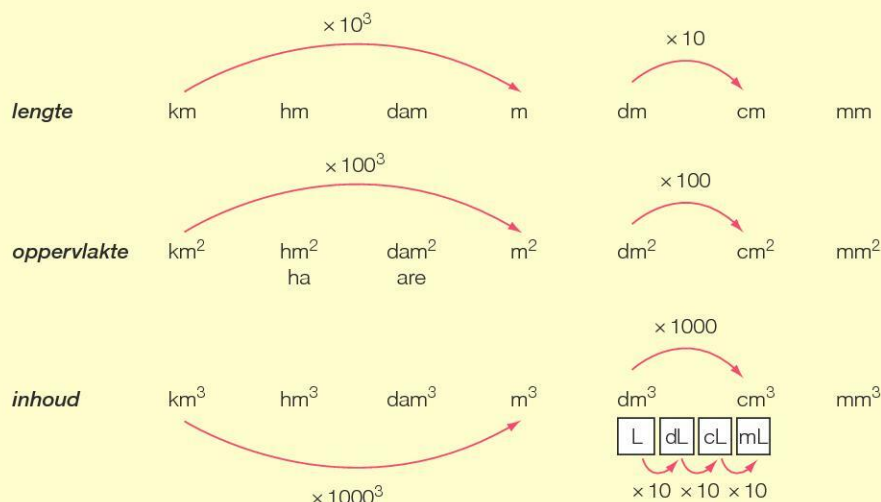
Merk op dat $1 \text{ km} = 1000 \text{ meter} = 10^3 \text{ meter}$ en dus

ook $1 \text{ meter} = \frac{1}{1000} \text{ km} = \frac{1}{10^3} \text{ km}$.



Hoe je oppervlaktematen en inhoudsmaten omrekent zie je in het schema hieronder. Bij het omrekenen van km^2 naar m^2 gebruik je

$$1 \text{ km}^2 = 100 \cdot 100 \cdot 100 \text{ m}^2 = 100^3 \text{ m}^2 \text{ en dus ook } 1 \text{ m}^2 = \frac{1}{100^3} \text{ km}^2.$$



Voorbeeld

Bij een aanvaring met een olietanker komt een flinke hoeveelheid olie in zee terecht. Er vormt zich over een oppervlakte van 150 km^2 een laag olie met een dikte van $0,02 \text{ mm}$.

Bereken hoeveel liter olie in zee is gestroomd.

Aanpak

Omdat $1 \text{ liter} = 1 \text{ dm}^3$ reken je km^2 om naar dm^2 en mm naar dm .

Uitwerking

$$150 \text{ km}^2 = 150 \cdot 100^4 \text{ dm}^2 = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ dm}^2 \text{ en}$$

$$0,02 \text{ mm} = \frac{0,02}{10^2} \text{ dm} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ dm}$$

$$\text{Dus } 1,5 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 3000000 \text{ dm}^3 = 3 \text{ miljoen liter.}$$



Zie het voorbeeld.

a Licht toe dat $150 \text{ km}^2 = 150 \cdot 100^4 \text{ dm}^2$ en dat $0,02 \text{ mm} = \frac{0,02}{10^2} \text{ dm}$.

In de theorie staat dat $1 \text{ km}^2 = 100 \cdot 100 \cdot 100 \text{ m}^2 = 100^3 \text{ m}^2$.

Jos zegt: omdat $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ is $1 \text{ km}^2 = 1000^2 \text{ m}^2$.

b Reken na dat 100^3 hetzelfde is als 1000^2 .

c Licht de aanpak van Jos toe.

d Bereken op de manier van Jos hoeveel m^2 overeenkomt met 5 km^2 .

31

Vul in.



a $52 \text{ hm} = \dots \text{ m}$

e $1,45 \cdot 10^{-8} \text{ km}^3 = \dots \text{ m}^3$

b $3,4 \cdot 10^7 \text{ mm} = \dots \text{ km}$

f $5045 \text{ L} = \dots \text{ m}^3$

c $4,3 \text{ km}^2 = \dots \text{ m}^2$

g $0,06 \text{ dL} = \dots \text{ mL}$

d $6,1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 = \dots \text{ ha}$

h $7,5 \cdot 10^5 \text{ mm}^3 = \dots \text{ L}$

32



- a Ronald heeft 50 m^2 hout geleverd en had precies genoeg aan 4 liter verf.

Bereken in welke dikte Ronald de verf heeft aangebracht. Geef het antwoord in mm.

- b De kraan in de keuken van Kees en Sandra lekt. Er lekt elke twee seconden één druppel water uit de kraan. Volgens Kees is dat geen probleem, want in een jaar tijd lekt er dan nog geen 8 liter water weg. Onderzoek met een berekening of Kees gelijk heeft. Gebruik dat een druppel een inhoud heeft van $0,05 \text{ mL}$.

A33



De hoeveelheid neerslag wordt meestal gegeven in mm.

De gemiddelde jaarlijkse neerslag in De Bilt is ongeveer 880 mm . Dat betekent dat er in een jaar op één vierkante meter in totaal $0,88 \text{ m}^3$ neerslag valt.

- a Licht dit toe. Hoeveel liter valt er in een jaar op één m^2 bij een jaarlijkse neerslag van 880 mm ?

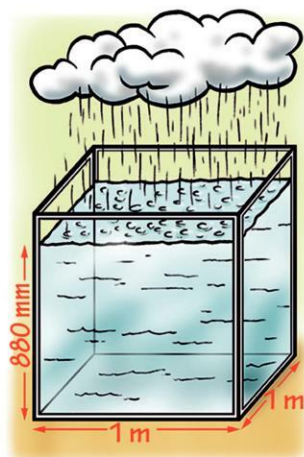
De gemiddelde jaarlijkse neerslagduur in De Bilt is ongeveer 624 uur. Tijdens een wolkbreuk in De Bilt valt er in 20 minuten 24 mm neerslag. De neerslagintensiteit (het aantal mm neerslag per uur) tijdens de wolkbreuk was veel groter dan de gemiddelde neerslagintensiteit gedurende een jaar.

- b Bereken hoeveel keer groter.
c Bereken hoeveel m^3 neerslag er tijdens de wolkbreuk viel op een voetbalveld in De Bilt. Het voetbalveld is 102 bij 65 meter.

In de maand juli valt er gemiddeld 81 mm neerslag in De Bilt.

Neem aan dat dit gemiddelde voor heel Nederland geldt.

- d Bereken in gehele m^3 nauwkeurig hoeveel neerslag er gemiddeld per Nederlander in de maand juli valt in heel Nederland. Gebruik dat de oppervlakte van Nederland $41\,500 \text{ km}^2$ is en dat Nederland 17,4 miljoen inwoners heeft.



A34

De hoeveelheid water op aarde wordt geschat op 1385 miljoen kubieke kilometer (km^3).

Bijna al dit water is zout en bevindt zich in de zeeën en oceanen.

Slechts een klein deel van het water is zoet.

Daarvan is het grootste deel aanwezig in de vorm van ijs, voornamelijk in de ijskappen op de polen en in gletsjers. De rest van het zoet water zit in meren en rivieren, is grondwater of is als waterdamp in de lucht aanwezig.

De waterkringloop is een gesloten systeem waarbij geen water verloren gaat. Dit betekent dat de totale hoeveelheid water, in welke verschijningsvorm dan ook, constant is.

De ijskappen en gletsjers bevatten 2,1% van al het water op aarde. Dat is 68,7% van de totale hoeveelheid zoet water.

a Hoeveel km^3 zoet water is er op aarde?

Hoeveel m^3 is dat per aardbewoner? Gebruik dat er 7,7 miljard mensen op aarde zijn.

Jaarlijks verdampt vanuit de oceanen en zeeën $502\,800\text{ km}^3$ water en vanaf land (inclusief meren, rivieren, ijskappen en gletsjers) $74\,200\text{ km}^3$. De jaarlijkse hoeveelheid neerslag op de oceanen en zeeën is $458\,000\text{ km}^3$.

b Bereken hoeveel procent van het zoet water jaarlijks als neerslag op land valt. Ga ervan uit dat de totale jaarlijkse verdamping gelijk is aan de totale jaarlijkse neerslag. Rond af op twee decimalen.

**O35**

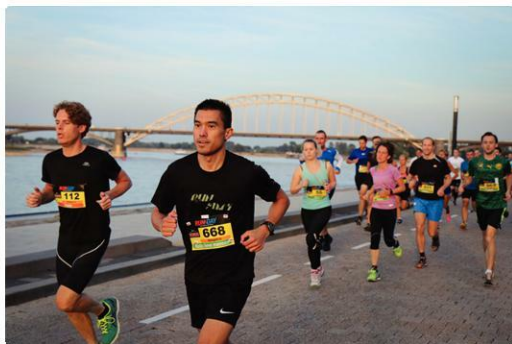
Stijn heeft de Bruggenloop Nijmegen gelopen. Hij legde het parcours van 7 km af in 27 minuten en 45 seconden. Om zijn gemiddelde snelheid in km per uur te berekenen, deel je de afstand in km door de tijd in uren.

a Licht toe dat

45 seconden = 0,75 minuten.

b Geef de tijd van Stijn in uren.

c Bereken de gemiddelde snelheid van Stijn in km per uur. Rond af op één decimaal.



Theorie C Tijd, afstand en snelheid

Snelheden worden in het dagelijks leven meestal gegeven in km per uur.

Notatie km/uur.

Bij wandelen heb je een snelheid van ongeveer 5 km/uur.

Een topatleet loopt de marathon met een snelheid van ongeveer 20 km/uur

en op sommige snelwegen mag je met de auto 130 km/uur.

Soms is het nodig een snelheid om te rekenen van meter per seconde (m/s) naar km/uur of omgekeerd.

Omdat 1 uur = $60 \cdot 60 = 3600$ seconden krijg je

$1 \text{ m/s} = 3600 \text{ m/uur} = 3,6 \text{ km/uur}$.

Dus $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/uur}$.

Omgekeerd is $1 \text{ km/uur} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s}$.

$$\begin{aligned} 1 \text{ km/uur} &= \\ 1000 \text{ m/uur} &= \\ 1000 \text{ m}/3600 \text{ s} &= \\ 1 \text{ m}/3,6 \text{ s} &= \frac{1}{3,6} \text{ m/s} \end{aligned}$$

Voorbeeld

Op 20 augustus 2009 liep Usain Bolt de 200 meter in 19,19 seconden.

Hoeveel km/uur was zijn gemiddelde snelheid?

Rond af op drie decimalen.

Uitwerking

De gemiddelde snelheid is

$$\frac{200}{19,19} \text{ m/s} = \frac{200}{19,19} \cdot 3,6 \text{ km/uur} \approx 37,520 \text{ km/uur}.$$

$$\begin{aligned} \text{snelheid} &= \frac{\text{afstand}}{\text{tijd}} \\ \text{afstand} &= \text{snelheid} \times \text{tijd} \\ \text{tijd} &= \frac{\text{afstand}}{\text{snelheid}} \end{aligned}$$



- a** Het wereldrecord 100 meter sprint voor vrouwen staat op naam van Florence Griffith-Joyner met een tijd van 10,49 seconden. Bereken haar gemiddelde snelheid in km/uur en rond af op drie decimalen.
- b** Op 31 mei 2004 liep Kenenisa Bekele uit Ethiopië de 5000 meter in 12.37,35. Dat betekent 12 minuten en 37,35 seconden. Hoeveel km/uur was zijn gemiddelde snelheid? Rond af op drie decimalen.
- c** De marathon is een hardloopwedstrijd over 42,195 km. Eliud Kipchoge uit Kenia liep op 16 september 2018 de marathon van Berlijn in 2:01.39, dus in 2 uur, 1 minuut en 39 seconden. Wat was zijn gemiddelde snelheid? Geef het antwoord in km/uur en rond af op drie decimalen.



Florence Griffith-Joyner

A37
☐ ◎ *

Jos loopt een paar keer per week hard. Hij heeft een korte route van 6,0 km en een lange route van 9,8 km.

- a Zijn record op de korte route is precies 25 minuten.
Met welk gemiddelde snelheid in km/uur heeft hij die keer gelopen?
- b Bij zijn record op de lange route was zijn gemiddelde snelheid 14 km/uur.
Bereken zijn recordtijd in minuten.
- c Het hardloophorloge van Jos geeft telkens na een km de km-tijd en de gemiddelde snelheid over deze km.
Welke km-tijd moet Jos gemiddeld aanhouden als hij zijn korte route in 26 minuten wil lopen?
- d Ter voorbereiding op een marathon doet Jos een duurloop. Hij loopt 1 uur en 50 minuten met een gemiddelde snelheid van 12,6 km/uur.
Welke afstand heeft Jos gelopen?

A38
☐ ◎ *

Vleermuizen gebruiken ultrageluid als radar. Met hun snuit produceren ze hoogfrequente pieptonen. Uit het teruggekaatste geluid maken ze op wat er zich in hun omgeving bevindt.

Hoeveel seconden zit er tussen het produceren van een pieptoon en het opvangen daarvan, als een voorwerp op een afstand van 200 cm van de vleermuis het geluid weerkaatst? Gebruik dat het geluid een snelheid heeft van 1235 km/uur.



E39
☐ ◎ *

Sandra rent van A naar B en meteen daarna terug naar A. Op de heenweg loopt ze met een snelheid van 14 km/uur en op de terugweg met een snelheid van 12 km/uur. Ze doet 1 uur en 5 minuten over de totale afstand. Hoeveel km is de afstand tussen A en B?

Terugblik

De wetenschappelijke notatie

In de wetenschappelijke notatie staat een getal in de vorm $a \cdot 10^b$, waarbij a een getal tussen 1 en 10 is.

Een antwoord als $1.72\text{E}11$ op de GR betekent $1,72 \cdot 10^{11}$. In de gewone notatie is dit 172 000 000 000, dus 172 miljard. De komma is 11 plaatsen naar rechts verschoven.

En $8.1\text{E}-11$ betekent $8,1 \cdot 10^{-11}$. In de gewone notatie is dit 0,000 000 000 081. De komma is 11 plaatsen naar links verschoven en dat betekent dat in de gewone notatie het getal met 11 nullen begint.

Lengte, oppervlakte en inhoud

Hieronder staan de belangrijkste maten voor lengte, oppervlakte en inhoud.

lengte	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
oppervlakte	km ²	hm ² (ha)	dam ² (are)	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
inhoud	km ³	hm ³	dam ³	m ³	dm ³ (L)	cm ³ (mL)	mm ³

Bij de lengtematen zit er tussen elke stap een factor 10.

Zo is $1 \text{ km} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ m} = 1000 \text{ m}$. Omgekeerd is $1 \text{ m} = \frac{1}{1000} \text{ km}$.

Bij de oppervlaktematen zit er tussen elke stap een factor 100.

Zo is $1 \text{ cm}^2 = \frac{1}{100^2} \text{ m}^2$.

Bij de inhoudsmaten zit er tussen elke stap een factor 1000.

Zo is $1 \text{ m}^3 = 1000^3 \text{ mm}^3$. Verder is $1 \text{ L} = 10 \text{ dL} = 100 \text{ cL} = 1000 \text{ mL}$.

Tijd, afstand en snelheid

Bij het omrekenen van meter per seconde (m/s) naar kilometer per uur (km/uur) gebruik je dat $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/uur}$.

Omgekeerd is $1 \text{ km/uur} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s}$.

Loopt een atleet de 400 meter in 44,25 seconden, dan is zijn gemiddelde

snelheid $\frac{400}{44,25} \text{ m/s} = \frac{400}{44,25} \cdot 3,6 \text{ km/uur} \approx 32,542 \text{ km/uur}$.

Een atleet die 35 minuten hardloopt met een gemiddelde snelheid van 15,3 km/uur heeft een afstand van

$15,3 \cdot \frac{35}{60} = 8,925 \text{ km}$ afgelegd.

Loop je een afstand van 13,8 km met een gemiddelde

snelheid van 11,5 km/uur, dan doe je daar $\frac{13,8}{11,5} = 1,2$ uur over.

Dat is 1 uur en $0,2 \cdot 60$ minuten = 1 uur en 12 minuten.

$$\begin{aligned}\text{snelheid} &= \frac{\text{afstand}}{\text{tijd}} \\ \text{afstand} &= \text{snelheid} \times \text{tijd} \\ \text{tijd} &= \frac{\text{afstand}}{\text{snelheid}}\end{aligned}$$

1.3 Omgaan met tabellen



De ANWB biedt een autoverzekering aan. Bij het vaststellen van de premie gebruikt de ANWB een bonus-malusregeling. Schadevrij rijden wordt beloond met een korting op de premie. De korting kan oplopen tot 80%. Bij schade kan het percentage afnemen. Het is zelfs mogelijk dat een toeslag op de premie wordt toegepast. Ga uit van een basispremie van 1000 euro per jaar. Bij het aangaan van de verzekering geldt trede 6 als uitgangspunt. Je krijgt direct 35% korting en betaalt dus € 650,- voor het eerste jaar. Zie de tabel.

BONUS/MALUSLADDER ANWB-AUTOVERZEKERING

Bonus/ malus-trede	Korting/ Toeslag in %	Nieuwe bonus/malustrede na een verzekeringsjaar met:				
		0 schades	1 schade	2 schades	3 schades	4+ schades
21	80	21	16	11	6	1
20	80	21	15	10	5	1
19	80	20	14	9	4	1
18	80	19	13	8	3	1
17	80	18	12	7	2	1
16	80	17	11	6	1	1
15	80	16	10	5	1	1
14	80	15	9	4	1	1
13	75	14	8	3	1	1
12	70	13	7	2	1	1
11	65	12	6	1	1	1
10	55	11	5	1	1	1
9	50	10	4	1	1	1
8	45	9	3	1	1	1
7	40	8	2	1	1	1
6	35	7	1	1	1	1
5	20	6	1	1	1	1
4	+10	5	1	1	1	1
3	+10	4	1	1	1	1
2	+10	3	1	1	1	1
1	+10	2	1	1	1	1

Mevrouw Zalm gaat op 1 januari 2010 de verzekering aan. Ze rijdt vijf jaar zonder schade.

a Licht toe dat in 2015 mevrouw Zalm € 350,- premie betaalt.

b In 2015 heeft mevrouw Zalm één schade.

Op welke trede is ze op 1 januari 2016? Hoeveel moet ze betalen?

c In de jaren 2016, 2017, 2018 en 2019 rijdt mevrouw Zalm schadevrij. In 2020 heeft ze twee schades.

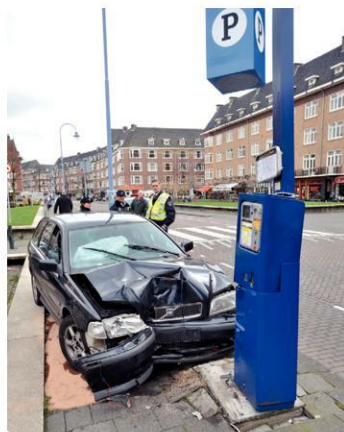
Op welke trede is mevrouw Zalm op 1 januari 2021? Hoeveel premie moet ze dan betalen?

O41


Zie opgave 40.

Ga weer uit van een basispremie van 1000 euro.
 Meneer Verbeek zit op 1 januari 2015 op trede 12.
 Hij betaalt dan 300 euro voor zijn autoverzekering.
 In 2015 heeft hij één schade van 450 euro.
 Stel dat hij de schade meldt bij de ANWB.

- a Op welke trede is meneer Verbeek op 1 januari 2016? Hoeveel betaalt hij dan?
- b In de jaren 2016, 2017, 2018 en 2019 rijdt meneer Verbeek schadevrij.
 Hoeveel euro heeft hij in totaal betaald aan de ANWB in de periode van 1 januari 2016 tot en met 1 januari 2020?
- c Neem aan dat meneer Verbeek de in 2015 opgelopen schade niet bij de ANWB zou hebben gemeld. Op 1 januari 2016 zit hij dus op trede 13. Enzovoort.
 Hoeveel euro zou hij dan aan de ANWB hebben betaald in de periode van 1 januari 2016 tot en met 1 januari 2020?
- d Vergelijk de antwoorden op de vragen b en c. Welk advies zou je aan een automobilist geven wanneer het tot een schade komt?



O42


In de tabel staan gegevens over de melkveehouderij in Nederland.

OMVANG MELKVEEHOUDERIJ

jaar	aantal bedrijven	aantal melkkoeien ×1000	totale melkproductie in 1000 ton*
1975	91 700	2218	10 286
1985	58 000	2367	12 525
1995	38 800	1698	11 165
2005	23 500	1433	10 827
2015	18 300	1620	13 500

*1 ton = 1000 kg

- a Doe aan de hand van de tabel een uitspraak over het verloop van het aantal bedrijven, over het aantal koeien en over de melkproductie.
- b De bedrijfsomvang is het aantal koeien per bedrijf.
 Maak een tabel met de gemiddelde bedrijfsomvang. Rond af op gehele.
- c Toon aan dat in 1975 de gemiddelde melkproductie per bedrijf ongeveer gelijk was aan 112 ton.
- d Breid je tabel uit met kolommen over de gemiddelde melkproductie per bedrijf in tonnen en de gemiddelde melkproductie per koe in kg. Rond af op gehele.
- e Doe aan de hand van de toegevoegde kolommen enkele uitspraken over de ontwikkeling van de melkveehouderij in Nederland.

Theorie A Twee soorten tabellen

Tabellen worden vaak gebruikt om een grote hoeveelheid cijfermateriaal op een overzichtelijke wijze te presenteren. Vandaar dat je deze in kranten, tijdschriften en leerboeken regelmatig aantreft.

Vaak zijn in deze tabellen **onderzoeksresultaten** verwerkt, zoals bij de tabel over de melkveehouderij. Er zijn echter ook tabellen waarbij geen onderzoeksresultaten zijn verwerkt, maar waarbij sprake is van een **voorschrift**, zoals in de tabel van de ANWB.

Bij een tabel moet het duidelijk zijn wat elk getal in de tabel voorstelt. Maak je zelf een tabel, zorg dan voor voldoende duidelijkheid over de betekenis van de kolommen en de rijen.

Let bij een tabel op het volgende.

- Maakt de titel duidelijk waar de tabel over gaat?
- Is het duidelijk wat de rijen en de kolommen voorstellen?
- Zijn moeilijke begrippen toegelicht?

43 In de tabel staat informatie over enkele landen van de EU.
De gegevens zijn van 1 januari 2018.

BEVOLKING VAN EU-LANDEN

land	aantal inwoners ×1000	aantal inwoners per km ²	beroepsbevolking ×1000	aandeel landbouw in beroepsbevolking
Bulgarije	7102	65	3017	6,8%
Nederland	17 118	505	7969	1,2%
Roemenië	19 524	85	8951	28,3%
Zweden	10 120	25	5361	2,0%
EU	516 195	115	238 900	5,0%

- Maak een tabel met de oppervlakte in km² ×1000. Rond af op gehelen.
- Voeg de kolom 'bevolking als percentage van het totaal van de EU' toe.
- Hoeveel personen waren op 1 januari 2018 in Roemenië werkzaam in de landbouw? Rond af op duizendtallen.
- Hoeveel procent van de bevolking van Zweden behoorde op 1 januari 2018 tot de beroepsbevolking?
- Hoeveel procent van de bevolking van Bulgarije was op 1 januari 2018 werkzaam in de landbouw?



44



In de tabel hiernaast staat informatie over de parlementen van enkele landen.

- Italië heeft 62,1 miljoen inwoners. Hoeveel parlementsleden zijn er in Italië?
- Rusland heeft 142,3 miljoen inwoners. Hoeveel parlementsleden zijn er in Rusland per 100 000 inwoners? Rond af op twee decimalen.
- Maak een tabel met het aantal inwoners in miljoenen. Rond af op één decimaal.

PARLEMENTSLEDEN PER LAND 2018

land	aantal	aantal per 100 000 inwoners
Italië		1,02
Duitsland	709	0,88
Rusland	450	
Denemarken	179	3,20
Nederland	150	0,86
IJsland	63	18,53
Luxemburg	60	10,17

45



De stroom die zonnepanelen opwekken, kan direct in huis gebruikt worden of teruggeleverd worden aan het elektriciteitsnet. De energiemeter registreert hoeveel stroom je van het elektriciteitsnet afneemt en hoeveel stroom je aan het elektriciteitsnet levert. De aan het net geleverde stroom streept de leverancier jaarlijks weg tegen de verbruikte stroom. Als je op jaarbasis meer stroom aan het net hebt geleverd dan afgenomen, krijg je hiervoor per kWh een vergoeding; de zogenaamde *terugleververgoeding*. Bij elke leverancier van elektriciteit betaal je leveringskosten, dat zijn de vaste kosten. Verder betaal je een bedrag per geleverde kWh. In deze opgave bekijken we drie leveranciers en drie huishoudens. Zie de tabellen.

leverancier	leveringskosten per maand	bedrag per geleverde kWh	terugleververgoeding per kWh
A	€2,50	€0,2010	€0,054
B	€5,75	€0,1805	€0,092
C	€7,75	€0,1785	€0,115

huishouden	verbruik kWh per jaar	opbrengst zonnepanelen kWh per jaar
Djoser	3500	0
Erikson	2700	1800
Franken	3300	4500

Onderzoek voor elk van de huishoudens welke leverancier het voordeligst is.

Kinderopvang wordt door de overheid gesubsidieerd. Ook de werkgever betaalt mee.

De totale kinderopvangtoeslag is afhankelijk van het gezamenlijk inkomen van de ouders. Zie de tabel. Hierin kun je ook zien welk percentage van de opvangkosten ouders vergoed krijgen. Kinderopvang Nijntje rekent een uurtarief van € 6,90.

Een kind dat elke week één dag naar de kinderopvang gaat, verblijft daar in totaal 45,5 uur per maand.

Voor een kind dat elke week een halve dag naar de opvang gaat, is dat 22,75 uur per maand.

- a** Martijn en Judith hebben een gezamenlijk jaarinkomen van € 60 000,- per jaar. Ze brengen hun twee kinderen één dag per week naar kinderopvang Nijntje.

Toon aan dat dit per maand zonder toeslag € 627,90 en met toeslag € 94,19 kost.

- b** Eva en Luuk hebben twee kinderen. De oudste gaat één dag per week naar opvang Nijntje en de andere gaat anderhalve dag per week. Eva verdient € 4000,- per maand en Luuk € 3200. Hoeveel procent van hun maandsalaris zijn ze kwijt aan kinderopvang?



KINDERDAGOPVANG 2018

(gezamenlijk) jaarinkomen		kinderopvang- toeslag	
van	tot	1 ^e kind	2 ^e kind
lager dan	€ 19.433	96,0%	96,0%
€ 19.434	€ 20.728	96,0%	96,0%
€ 20.729	€ 22.020	96,0%	96,0%
€ 22.021	€ 23.315	96,0%	96,0%
€ 23.316	€ 24.610	96,0%	96,0%
€ 24.611	€ 25.903	95,6%	95,7%
€ 25.904	€ 27.197	94,5%	95,5%
€ 27.198	€ 28.487	93,5%	95,3%
€ 28.488	€ 29.879	92,6%	95,1%
€ 29.880	€ 31.269	92,0%	95,0%
€ 31.270	€ 32.662	91,0%	94,8%
€ 32.663	€ 34.053	90,5%	94,6%
€ 34.054	€ 35.447	89,7%	94,6%
€ 35.448	€ 36.838	88,9%	94,6%
€ 36.839	€ 38.262	88,3%	94,6%
€ 38.263	€ 39.689	87,5%	94,6%
€ 39.690	€ 41.116	86,8%	94,6%
€ 41.117	€ 42.542	86,1%	94,6%
€ 42.543	€ 43.971	85,2%	94,6%
€ 43.972	€ 45.398	84,7%	94,6%
€ 45.399	€ 46.824	83,9%	94,6%
€ 46.825	€ 48.251	83,3%	94,6%
€ 48.252	€ 49.810	82,4%	94,6%
€ 49.811	€ 52.868	80,9%	94,6%
€ 52.869	€ 55.924	80,1%	94,2%
€ 55.925	€ 58.982	79,0%	93,6%
€ 58.983	€ 62.041	76,8%	93,2%
€ 62.042	€ 65.097	75,5%	92,9%
€ 65.098	€ 68.156	72,3%	92,2%
€ 68.157	€ 71.213	69,9%	91,9%
€ 71.214	€ 74.271	67,6%	91,2%
€ 74.272	€ 77.331	65,4%	90,5%
€ 77.332	€ 80.387	63,1%	90,0%
€ 80.388	€ 83.447	60,9%	89,6%
€ 83.448	€ 86.504	58,4%	89,3%
€ 86.505	€ 89.560	56,2%	88,6%
€ 89.561	€ 92.618	54,0%	88,2%
€ 92.619	€ 95.737	51,6%	87,7%
€ 95.738	€ 98.869	49,6%	87,0%
€ 98.870	€ 102.000	47,5%	86,5%
€ 102.001	€ 105.131	45,4%	86,1%

A47 Zie opgave 46.

***** Anne en Sanne hebben twee kinderen die beiden twee dagen per week naar de kinderopvang gaan. Zij zijn 4,5% van hun maandsalaris kwijt aan kinderopvang.

Onderzoek welk mogelijk gezamenlijk jaarinkomen per jaar Anne en Sanne hebben.

A48 Zorgverzekeraar Avéro biedt naast de verplichte basisverzekering ook aanvullende verzekeringen aan. Een klant kan ervoor kiezen om een aanvullende verzekering af te sluiten. Iedereen heeft een wettelijk verplicht eigen risico van 385 euro. Je kunt het eigen risico echter ook verhogen. In dat geval krijg je een korting op de premie.

Zie de tabel hiernaast voor de verzekeringen die Avéro aanbiedt.

a Mevrouw Lever is 56 jaar. Ze neemt een basisverzekering en een aanvullende verzekering Royaal. Ze neemt geen aanvullende tandartsverzekering. Mevrouw Lever betaalt per maand en ze verhoogt het eigen risico met 200 euro. Bereken hoeveel premie ze jaarlijks moet betalen.

b Elsemieke is 22 jaar. Ze sluit een basisverzekering af, verhoogt haar eigen risico met 500 euro en neemt een aanvullende tandartsverzekering Intro. Ze betaalt per halfjaar. Bereken hoeveel premie Elsemieke per halfjaar betaalt.

Indien je werkgever afspraken heeft gemaakt met de zorgverzekeraar is het mogelijk om extra korting te krijgen. In dat geval krijg je 10% korting op de basisverzekering en 15% op de aanvullende verzekeringen.

c Femke is 35 jaar en breidt de basisverzekering uit met een aanvullende verzekering Royaal en een aanvullende tandartsverzekering Start. Ze verhoogt het eigen risico niet. Femke wil kosten besparen door gebruik te maken van de korting via haar werkgever en door per jaar te betalen. Bereken welk bedrag Femke hierdoor in een jaar aan premie bespaart.

ZORGVERZEKERING VAN AVERO 2018

Eigen risico	Premie
Premie bij €385 eigen risico	€ 119,45
Premie bij €485 eigen risico	€ 115,45
Premie bij €585 eigen risico	€ 111,45
Premie bij €685 eigen risico	€ 107,45
Premie bij €785 eigen risico	€ 103,45
Premie bij €885 eigen risico	€ 99,45

Aanvullende verzekeringen

Leeftijd	Intro	Start	Royaal
0 t/m 17	€0	€0	€0
18 t/m 34	€7,25	€17,75	€27,95
35 t/m 54	€7,95	€19,75	€35,75
vanaf 55	€8,95	€19,95	€35,50

Aanvullende tandartsverzekeringen

Leeftijd	Intro	Start	Royaal
0 t/m 17	n.v.t	n.v.t	n.v.t
18 t/m 29	€ 14,95	€ 20,80	€ 35,75
vanaf 30	€ 15,95	€ 22,95	€ 41,50

- De premies zijn per maand.
- Bij betaling per halfjaar wordt 1,25% korting en bij betaling per jaar wordt 3% korting gegeven op de te betalen premie.

Van een persoon is gedurende een groot aantal jaren de lichaamslengte en de armlengte bijgehouden. Zie de tabel.

LICHAAMS- EN ARMLENGTE

lichaamslengte in cm	60	80	100	120	140	160
armlengte in cm	25	33	40	45	49	52

- Teken de punten die uit de tabel volgen en teken door de punten een vloeiende kromme.
- Gebruik de grafiek om een schatting te geven van de armlengte bij een lichaamslengte van 85 cm.
- Schat de armlengte bij een lichaamslengte van 180 cm.

Theorie B Interpoleren en extrapoleren

Bij een tabel met waarnemingsresultaten kun je tussenliggende waarden schatten. Dat heet **interpoleren**. Bij **extrapoleren** geef je een schatting van een waarde die buiten de waarnemingen ligt.

In opgave 49 ben je bij het interpoleren en extrapoleren uitgegaan van een grafiek. We spreken dan van **grafisch interpoleren** en **grafisch extrapoleren**.

Interpoleren: schatten van een tussenliggende waarde.

Extrapoleren: schatten van een waarde die buiten de gegevens ligt.

Behalve grafisch interpoleren en extrapoleren, kun je ook interpoleren en extrapoleren met behulp van een berekening. Ga je hierbij uit van een lineair verband, dan heet dat **lineair interpoleren** of **lineair extrapoleren**.

Petra rijdt op de snelweg. Om 14:05 uur heeft ze 28 km afgelegd. Om 14:20 uur is dat 58 km. Zie de tabel.

Om met lineair interpoleren een schatting te geven van het aantal km dat ze heeft afgelegd om 14:15 uur, ga je als volgt te werk.

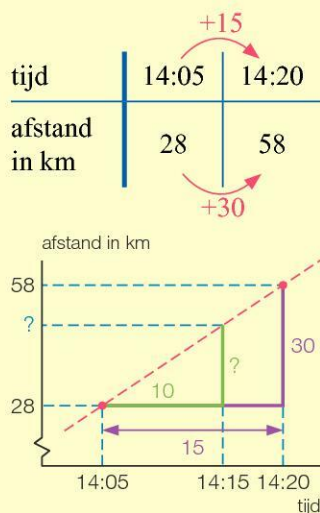
In 15 minuten legt ze $58 - 28 = 30$ km af, dus

in één minuut legt ze $\frac{30}{15} = 2$ km af.

14:15 uur is 10 minuten na 14:05 uur, dus om 14:15 uur heeft ze $28 + 10 \cdot 2 = 48$ km afgelegd.

Om met lineair extrapoleren een schatting te geven van het aantal km dat ze heeft afgelegd om 14:33 uur, ga je als volgt te werk.

14:33 uur is 13 minuten na 14:20 uur, dus om 14:33 uur heeft ze $58 + 13 \cdot 2 = 84$ km afgelegd.



figuur 1.4

Voorbeeld

Gegeven is de volgende tabel.

jaar	1995	2002	2005	2011	2020
aantal	670	508	281	220	193

- Bereken het aantal in 2009 met lineair interpoleren. Rond af op gehele.
- Bereken het aantal in 2027 met lineair extrapoleren. Rond af op gehele.

Aanpak

- 2009 ligt tussen 2005 en 2011, dus gebruik het gedeelte van de tabel dat hiernaast staat.

jaar	2005	2011
aantal	281	220

- Gebruik de laatste ontwikkeling om het aantal te berekenen in 2027, dus gebruik het gedeelte van de tabel dat hiernaast staat.

jaar	2011	2020
aantal	220	193

Uitwerking

- In 6 jaar 61 minder, dus in 1 jaar $\frac{61}{6}$ minder.
2009 is 4 jaar na 2005, dus in 2009 is het aantal $281 - 4 \cdot \frac{61}{6} \approx 240$.
- In 9 jaar 27 minder, dus in 1 jaar $\frac{27}{9} = 3$ minder.
2027 is 7 jaar na 2020, dus in 2027 is het aantal $193 - 7 \cdot 3 = 172$.



Het aantal Nederlandse gemeenten daalt al jaren. De daling is het gevolg van gemeentelijke herindelingen, waarbij gemeenten worden samengevoegd. In de tabel hieronder staat voor een aantal jaren het aantal Nederlandse gemeenten vermeld.

AANTAL NEDERLANDSE GEMEENTEN OP 1 JANUARI

jaar	2000	2015	2019
aantal	537	393	355

Bereken met lineair interpoleren of lineair extrapoleren het aantal gemeenten op 1 januari van het jaar

- 2010
- 2018
- 2021.



51
☐ ⊙ *

Op een winterse dag was de temperatuur om 7:00 uur $-4,5^{\circ}\text{C}$. Vier uur later, dus om 11:00 uur, was de temperatuur gestegen tot $2,3^{\circ}\text{C}$.

- Bereken met lineair interpoleren de temperatuur om 9:30 uur.
- Bereken met lineair extrapoleren de temperatuur om 14:00 uur.
- Waarom is lineair extrapoleren onverstandig als je de temperatuur om 20:00 uur wilt schatten?

A52
☐ ⊙ *

Hepatitis A is een leverontsteking die wordt veroorzaakt door het hepatitis A-virus. Mensen raken besmet door contact met zieken of door voedsel of water dat verontreinigd is met ontlasting dat het virus bevat. De kans op besmetting neemt toe naarmate de hygiënische omstandigheden slechter zijn. Er is geen behandeling met medicijnen voor hepatitis A. Wel is het mogelijk om te vaccineren om de ziekte te voorkomen.

De infectieziekte tuberculose (tbc) wordt veroorzaakt door een bacterie. Bij niet of niet goed behandelen kan de ziekte dodelijk zijn. Wereldwijd is tuberculose een groot probleem. In landen waar tuberculose vaak voorkomt wordt tegen de ziekte gevaccineerd.

In de tabel staat informatie over het aantal meldingen van hepatitis A en tuberculose in Nederland.

AANTAL MELDINGEN HEPATITIS A EN TUBERCULOSE IN NEDERLAND

jaar	1970	1990	2000	2016
hepatitis A	3789	771	658	81
tuberculose	2570	1369	1443	889

Bereken met lineair interpoleren

- het aantal meldingen van hepatitis A in 2010
- het aantal meldingen van tuberculose in 2015.

Het aantal meldingen van tuberculose vertoont wel een dalende trend, maar soms neemt het aantal meldingen toch nog toe ten opzichte van het jaar ervoor. Neem eens aan dat je alleen over de gegevens van 1970 en 2016 zou beschikken.

- In welk jaar zouden er dan volgens lineair extrapoleren geen meldingen meer zijn van tuberculose in Nederland?

A53
☐ *

Het aantal Nederlanders van 100 jaar en ouder (100-jarigen) neemt voortdurend toe. Ook neemt het aantal 100-jarige mannen ten opzichte van het aantal 100-jarige vrouwen toe. In 2017 was deze verhouding 1 : 6 en de verwachting is dat de verhouding 3 : 14 zal zijn in 2024. Neem aan dat het percentage van 100-jarigen dat man is lineair toeneemt.

In het jaar 2029 zal onder de 100-jarigen de verhouding mannen en vrouwen gelijk zijn aan 1 : p .

Bereken p . Rond af op gehelen.

Terugblik

Tabellen maken

In een tabel kun je cijfermateriaal overzichtelijk presenteren.

Bij een tabel moet je goed kijken naar het opschrift, de betekenis van de kolommen en de rijen en naar de toelichting van moeilijke begrippen.

Tabellen met onderzoeksresultaten

Tabellen zijn vaak het resultaat van een onderzoek dat naar aanleiding van een vraagstelling is uitgevoerd. Bestudering van de verkregen tabel kan weer aanleiding zijn tot verder onderzoek.

Door verschillende kolommen in een tabel te combineren, kun je vaak nog heel wat extra informatie krijgen. Zo kun je met de onderstaande tabel over de volkshuisvesting in Nederland het antwoord vinden op de volgende vragen.

- Is in de afgelopen 50 jaar het aantal kamers per woning gestegen?
- Is de afgelopen 50 jaar het aantal personen per woning toe- of afgenomen?
- Hoe heeft het aantal personen per kamer zich in de afgelopen 50 jaar ontwikkeld?

VOLKHUISVESTING IN NEDERLAND

jaar	aantal woningen ×1000	aantal kamers ×1000	aantal inwoners ×1000
1971	3873	20 179	12 787
1998	6425	29 555	15 760
2008	7107	31 635	16 537
2018	7740	33 437	17 118

Tabellen met voorschrift

Een tabel met tarieven is een voorbeeld van een tabel met een voorschrift. Door zo'n tabel te bestuderen is soms een gunstig tarief te vinden.

Interpoleren en extrapoleren

Met de tabel hiernaast kun je het aantal woningen in 2014 schatten. Met lineair interpoleren gaat dat als volgt.

In 10 jaar 633 meer, dus in 1 jaar $\frac{633}{10} = 63,3$ meer.

2014 is 6 jaar na 2008, dus in 2014 krijg je $7107 + 6 \cdot 63,3 \approx 7487$.

Dus ongeveer 7487 duizend woningen.

Met lineair extrapoleren kun je nagaan dat het aantal woningen in 2025 ongeveer gelijk is aan $7740 + 7 \cdot 63,3 \approx 8183$ duizend woningen.

jaar	2008	2018
aantal	7107	7740

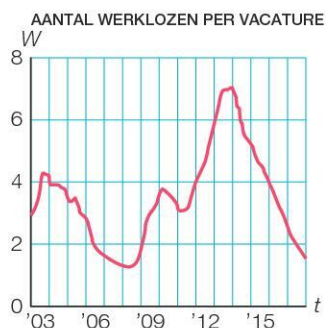
+10

+633

1.4 Informatie in grafieken

054 In figuur 1.5 zie je voor een aantal jaren het aantal werklozen per vacature.

- Met hoeveel procent is het aantal werklozen per vacature toegenomen in 2012?
- Is het voor iemand die werkloos is moeilijk of juist gemakkelijk een baan te vinden als het aantal werklozen per vacature groot is? Licht toe.



figuur 1.5

Theorie A Uitzetten tegen

Behalve tabellen kun je ook grafieken gebruiken om informatie overzichtelijk weer te geven. In figuur 1.5 hierboven heb je daarvan een voorbeeld gezien. In deze figuur is het aantal werklozen per vacature W **uitgezet tegen** de tijd t .

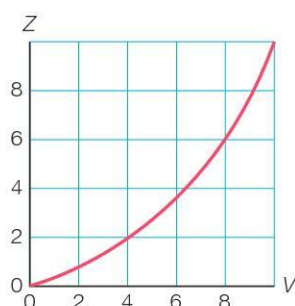
W uitzetten tegen t betekent dat je een grafiek tekent waarbij t op de horizontale as staat en W op de verticale as.

55 [► WERKBLAD] Op de Veluwe kunnen volgens natuurbeheerders maximaal 835 wilde zwijnen leven. In jaren dat er veel eikels en beukenootjes zijn, neemt het aantal wilde zwijnen explosief toe. Soms zijn er het jaar daarop dan wel 10 000 wilde zwijnen op de Veluwe. Met zo'n grote populatie neemt ook het aantal aanrijdingen tussen voertuigen en wilde zwijnen toe.

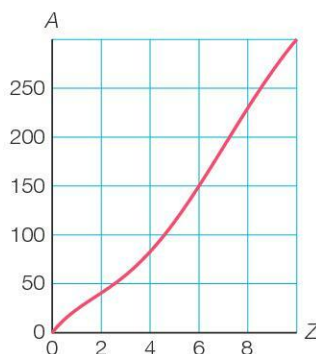
In figuur 1.6 is Z uitgezet tegen V . Hierbij is Z het aantal wilde zwijnen op de Veluwe in duizendtallen en V de hoeveelheid voedsel in miljoenen kg eikels en beukenootjes in het jaar daarvoor.

In figuur 1.7 is A uitgezet tegen Z . Hierbij is A het aantal aanrijdingen op de Veluwe tussen voertuigen en wilde zwijnen.

- Met welk percentage neemt het aantal aanrijdingen toe als de hoeveelheid voedsel toeneemt van 4 tot 8 miljoen kg?
- In een jaar zijn er 80 aanrijdingen met wilde zwijnen op de Veluwe. Schat de hoeveelheid voedsel in het jaar daarvoor.
- Teken een grafiek waarin je het aantal aanrijdingen uitzet tegen de hoeveelheid voedsel in het jaar daarvoor.

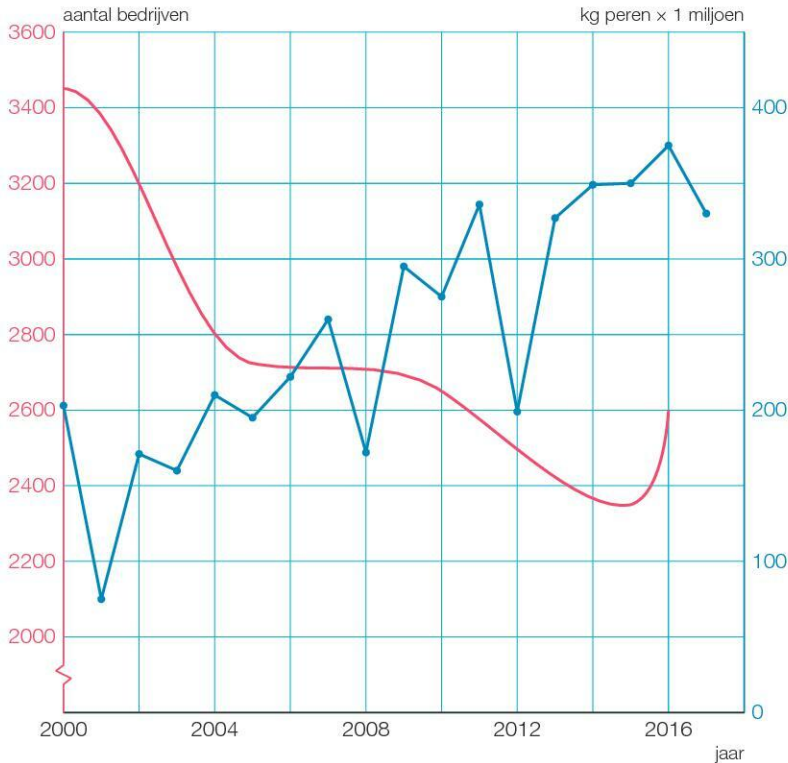


figuur 1.6



figuur 1.7

Figuur 1.8 gaat over het aantal fruittelers in Nederland dat peren levert en de perenoogst van deze bedrijven.



figuur 1.8

Je ziet dat er in 2010 in Nederland ongeveer 2650 fruittelers van peren waren en dat deze bedrijven in totaal ongeveer 275 miljoen kg peren afleverden.

- Hoeveel kg peren leverde een bedrijf gemiddeld af in 2010?
- Het aantal bedrijven is in de periode 2000-2015 afgenomen. Met hoeveel procent?
- De perenoogst wisselt nogal sterk van jaar tot jaar. Dat komt onder andere omdat de oogst van het weer afhangt. Hoeveel procent is de grootste oogst meer dan de kleinste oogst in de periode 2000-2017?
- De grafiek van het aantal bedrijven is als een vloeiende kromme getekend en de grafiek van de perenoogst als losse lijnstukken. Waarom denk je dat dit zo gedaan is?

In 2015 werd er in totaal op 9234 hectare landbouwgrond peren verbouwd. In 2000 was dat nog 6019 hectare.

- Hoeveel was in 2015 de perenoogst per hectare?
- Met hoeveel procent is het aantal hectare per bedrijf waar peren worden verbouwd toegenomen in de periode 2000-2015?

In de figuur hieronder zie je informatie over het gemiddeld aantal kinderen per vrouw en de gemiddelde leeftijd waarop vrouwen hun eerste kind krijgen in Nederland.



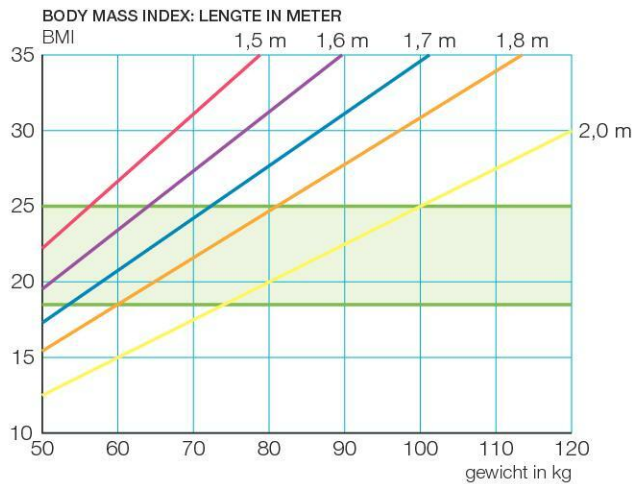
figuur 1.9

Zeg van elk van onderstaande beweringen of deze op grond van de figuur te verdedigen zijn. Licht telkens je antwoord toe.

- De gemiddelde leeftijd waarop vrouwen hun eerste kind krijgen neemt voortdurend toe.
- Het gemiddeld aantal kinderen per vrouw is tussen 2010 en 2016 met ongeveer 8% gedaald.
- Het gemiddeld aantal kinderen per vrouw was in 2016 flink toegenomen ten opzichte van dat in 1999.
- In 1992 treedt een bijzondere situatie op, gezien het snijpunt van de grafieken.
- Je kunt aan de grafieken zien dat het aantal inwoners van Nederland op den duur zal afnemen.



De Body Mass Index (BMI) hangt af van het gewicht en de lengte van een persoon. In de figuur hiernaast is de BMI uitgezet tegen het gewicht. Voor een aantal lengtes is de bijbehorende grafiek getekend. Volwassenen hebben een gezond gewicht als de BMI tussen 18,5 en 25 ligt. In de figuur is dit met een groene strook aangegeven. Gebruik de figuur om de volgende vragen te beantwoorden.

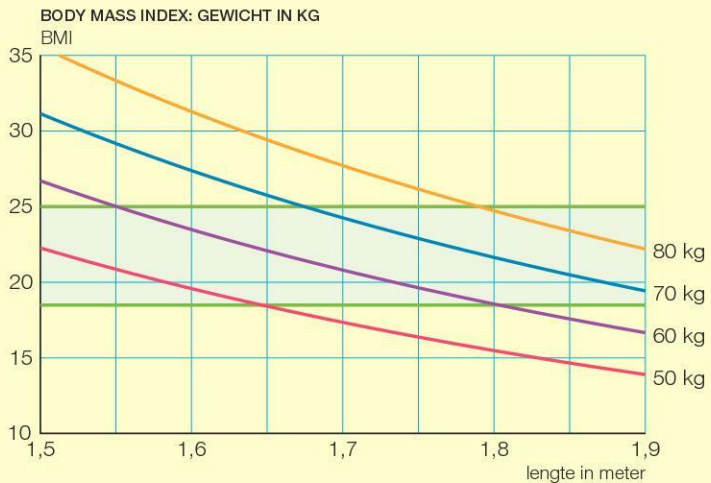


figuur 1.10

- Jos weegt 90 kg en zijn lengte is 170 cm. Wat is zijn BMI?
- Frank heeft een lengte van 180 cm. Zijn BMI is 27. Hoeveel kg moet hij afvallen om een gezond gewicht te hebben?

Theorie B Grafiekenbundels

In de figuur van opgave 58 is voor een aantal lengtes de grafiek getekend in een assenstelsel waar de BMI is uitgezet tegen het gewicht. Zo'n figuur heet een **grafiekenbundel**. De bundel hoeft niet te bestaan uit een aantal rechte lijnen. Zo is in de figuur hiernaast de BMI uitgezet tegen de lengte. In deze figuur is voor een aantal



figuur 1.11

gewichten de bijbehorende kromme getekend. Ook is de groene strook getekend die gezond gewicht aangeeft. Je leest bijvoorbeeld af dat bij een gewicht van 70 kg en een lengte van 175 cm een gezond gewicht hoort. Let bij het aflezen van grafiekenbundels goed op het opschrift en wat er bij de assen staat. Gebruik een geodriehoek om nauwkeurig af te lezen. In het voorbeeld zie je hoe dat gaat.

Voorbeeld

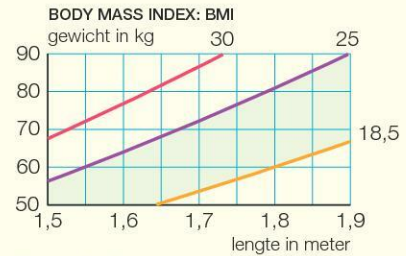
In de figuur hiernaast is het gewicht uitgezet tegen de lengte.

Een volwassen persoon met een BMI tussen 18,5 en 25 heeft een gezond gewicht.

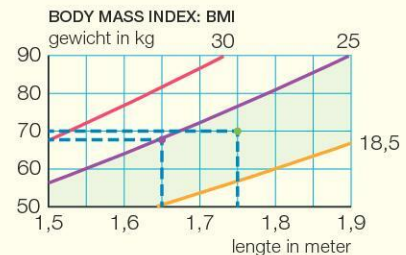
- a** Koen heeft een lengte van 165 cm en een gewicht van 75 kg.
Hoeveel kg moet Koen afvallen om een gezond gewicht te hebben?
- b** Eline heeft een lengte van 175 cm en een gewicht van 70 kg.
Geef een schatting van haar BMI.

Uitwerking

- a** Zie de figuur. Bij een lengte van 1,65 meter en een BMI van 25 hoort een gewicht van 68 kg.
Koën moet dus 7 kg afvallen.
- b** Zie de figuur. Een schatting van haar BMI is 23.



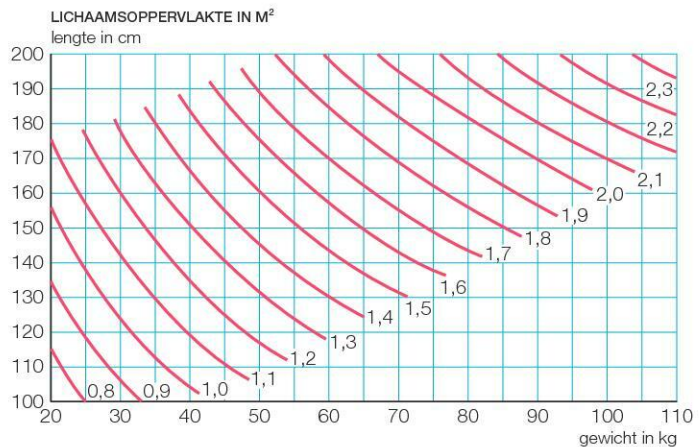
figuur 1.12



59

▶ **WERKBLAD** Voor het bepalen van de juiste dosering van sommige medicijnen is het van belang de lichaamsoppervlakte van de patiënt te kennen. In figuur 1.13 kun je bij een gegeven lengte en een gegeven gewicht de lichaamsoppervlakte van een persoon aflezen.

- a** Bas is 1,70 meter lang. Bas volgt een afslankkuur, waardoor zijn gewicht afneemt van 100 kg tot 90 kg. Met hoeveel procent neemt zijn lichaamsoppervlakte af?
- b** Bekijk personen met een lengte van 1,70 meter. Zet in een grafiek de lichaamsoppervlakte uit tegen het gewicht van deze personen. Vul daartoe de tabel hiernaast in.
- | gewicht | lichaamsoppervlakte |
|---------|---------------------|
| 100 | |
| 90 | |
| 80 | |
| 70 | |
| 60 | |
| 50 | |
| 40 | |
| 30 | |
| 20 | |

**figuur 1.13**

gewicht					
lichaamsoppervlakte					

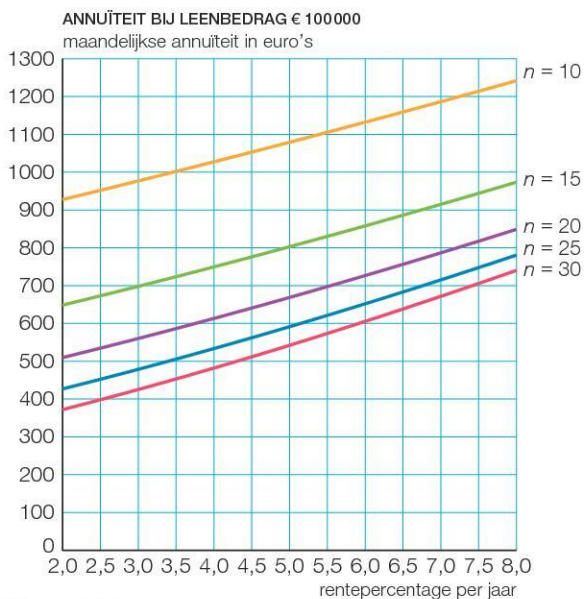
[► WERKBLAD] Bij een hypotheek op basis van annuïteit betaal je gedurende de looptijd een vast bedrag per maand. Dit bedrag, de maandelijkse annuïteit, bestaat voor een gedeelte uit rente en voor een gedeelte uit aflossing van de hypotheek. In het begin van de looptijd betaal je vooral rente, en aan het eind vooral aflossing.

Het resultaat is dat je maandelijks hetzelfde bedrag betaalt, en dat aan het eind van de looptijd het volledige hypotheekbedrag is afgelost.

De maandelijkse annuïteit hangt af van het geleende bedrag, de looptijd en het rentepercentage.

In de figuur hiernaast is uitgegaan van een hypotheek van 100 000 euro.

De maandelijkse annuïteit in euro's is uitgezet tegen het rentepercentage per jaar. De looptijd n is in jaren. In deze opgave gebruik je alleen de looptijden die in de figuur zijn aangegeven. Zo lees je bijvoorbeeld af dat bij een rentepercentage van 6% en een looptijd van 15 jaar, de maandelijkse annuïteit ongeveer 860 euro is. Leen je 150 000 euro in plaats van 100 000 euro, dan is de maandelijkse annuïteit anderhalf keer zo groot, dus ongeveer 1290 euro.



figuur 1.14

- a De familie Donders neemt een annuïteitenhypotheek van 350 000 euro.

Ze kunnen per maand maximaal 2100 euro betalen. De rente is 5,0%.

Welke looptijd raad jij aan?

De rente is afhankelijk van de looptijd. Zie de tabel hiernaast.

De familie Everaars neemt een annuïteitenhypotheek van 250 000 euro.

Ze kunnen per maand maximaal 1750 euro betalen.

- b Welke looptijd raad je de familie Everaars aan in het geval dat ze een zo laag mogelijke maandlast willen hebben? Licht toe.
- c Welke looptijd raad je de familie Everaars aan in het geval dat ze de hypotheek zo snel mogelijk willen aflossen? Hoeveel is dan de maandlast?

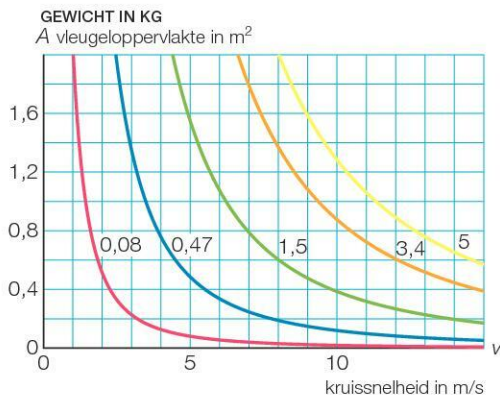
looptijd (jaren)	10	15	20	25	30
rentepercentage	3,5	4,0	5,0	5,5	6,0

A61


[▶ WERKBLAD] In de tabel zie je van enkele vogels het gewicht. In de grafiek is voor een aantal gewichten de vleugeloppervlakte A van vogels uitgezet tegen de kruissnelheid v . Hierin is A in m^2 en v in m/s . De kruissnelheid is de snelheid waarbij het energieverbruik per afgelegde afstand minimaal is. Gebruik de tabel en de figuur bij het beantwoorden van de vragen.

vogel	gewicht
spreeuw	80 gram
kiekendief	470 gram
blauwe reiger	1,5 kg
ooievaar	3,4 kg
zeearend	5 kg
kraanvogel	5,5 kg
albatros	8 kg

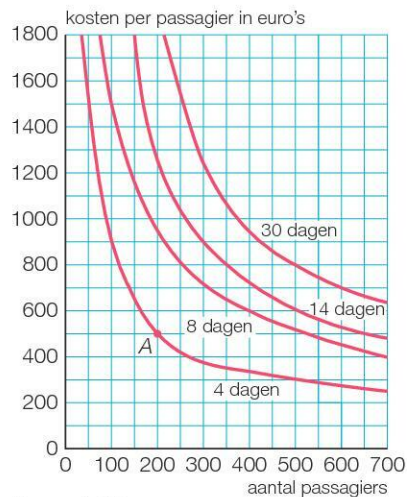
- Een vogel heeft een kruissnelheid van 14 m/s en een vleugeloppervlakte van $0,2 \text{ m}^2$. Welke vogel is dat?
- Een kiekendief heeft een kruissnelheid van 30 km/uur . Hoeveel cm^2 is de vleugeloppervlakte? Rond af op gehelen.
- Een zeearend heeft een vleugeloppervlakte van 7200 cm^2 . Hij vliegt op kruissnelheid over een afstand van 200 km . Hoelang doet hij hierover? Geef het antwoord in kwartieren nauwkeurig.



figuur 1.15

A62


[▶ WERKBLAD] De firma Suncruises is eigenaar van enkele cruiseschepen. Het schip Sun of the Sea heeft een maximale capaciteit van 700 passagiers. De kosten voor Suncruises van een trip met de Sun of the Sea hangen af van de duur van de trip en van het aantal passagiers. Zie figuur 1.16. Een cruise van 4 dagen bij een bezetting met 200 passagiers kost Suncruises 500 euro per persoon. Zie het punt A in de figuur. Op een cruise met 300 passagiers maakt Suncruises een winst van 27000 euro. Voor de cruise betaalt een passagier 990 euro. Hoeveel dagen duurt de cruise?



figuur 1.16

A63


Zie opgave 62.

* Bij een cruise van 30 dagen maakt de firma Suncruises een winst van 53000 euro, dat komt overeen met een winst van $11,7\%$. Hoeveel betaalt een passagier voor deze cruise?

Terugblik

Uitzetten tegen

Bij de opdracht ‘Zet de waterhoogte uit tegen de tijd’ zet je de tijd op de horizontale as en de waterhoogte op de verticale as.

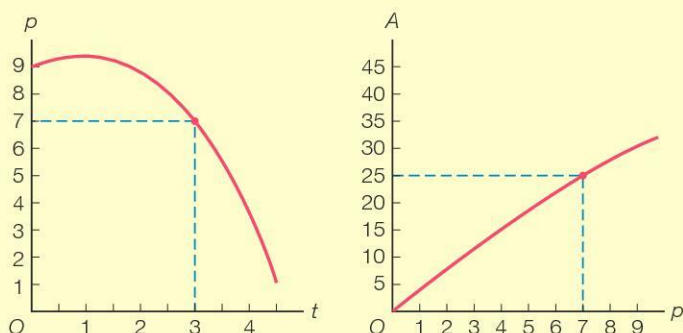
Let bij het aflezen uit grafieken goed op de informatie bij de assen en op de gebruikte eenheden.

Grafieken combineren

Door de grafieken in de figuren hieronder te combineren kun je bij een waarde t de bijbehorende waarde van A te weten komen.

Bijvoorbeeld bij $t = 3$ hoort $p = 7$ en bij $p = 7$ hoort $A = 25$.

Dus bij $t = 3$ hoort $A = 25$.

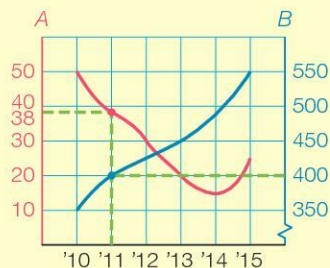


Twee verticale assen

De grafieken van twee verschijnselen kun je in één figuur verwerken door met twee verticale assen te werken. Zo is voor 2011 af te lezen $A = 38$ en $B = 400$.

Kijk op de juiste as.

Door het gebruik van verschillende verticale assen heeft het snijpunt van de grafieken geen betekenis.



Grafiekenbundels

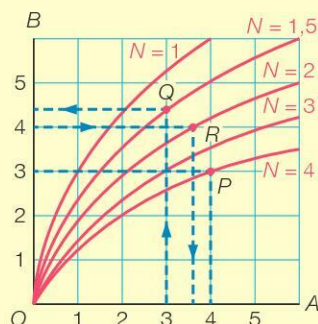
Een grafiekenbundel bestaat uit een aantal grafieken die in één figuur zijn samengebracht.

In de grafiekenbundel hiernaast is voor een aantal waarden van N de variabele B uitgezet tegen A .

Voor $A = 4$ en $B = 3$ krijg je het punt P , dus $N = 4$.

Voor $A = 3$ en $N = 1,5$ krijg je het punt Q , dus $B \approx 4,4$.

Voor $B = 4$ en $N = 2$ krijg je het punt R , dus $A \approx 3,6$.



Eindopdracht RUN Winschoten

Elk jaar wordt op de tweede zaterdag in september de RUN Winschoten gehouden. Dit hardloopevenement bestaat uit verschillende onderdelen waaronder de RUN 100. Dit is een hardloopewedstrijd van 100 km voor de echte ultralopers. Hieraan is het Nederlands kampioenschap verbonden, maar er doen ook veel lopers uit andere landen mee. Er wordt gelopen in tien rondes van elk 10 km.

In 2017 werd de 100 km gewonnen door de Belg Wouter Decock in een tijd van 6:46:12, dus 6 uur, 46 minuten en 12 seconden. De Nederlander Pascal van Norden eindigde als tweede en werd daarmee Nederlands kampioen.

In de tabel hieronder zie je het eerste gedeelte van de uitslagen van deze wedstrijd.



100 KM SOLO

Rank	Cat	Name	Nation	Lap1	Lap2	Lap3	Lap4	Lap5	Lap6	Lap7	Lap8	Lap9	Lap10	Time
1	M	W. Decock	BEL	38:59	39:06	39:59	41:20	39:03	40:31	40:23	41:35	41:53	43:29	06:46:12
2	M	P. van Norden	NED	40:25	40:43	40:28	40:06	40:21	40:47	41:36	43:18	43:51	43:38	06:55:10
3	M	G. Wegener	GER	41:59	41:31	41:27	41:36	42:00	42:43	44:38	46:08	49:20	47:13	07:18:31
4	M	O. Velicka	CZE	42:02	41:58	43:01	42:57	43:12	43:46	45:03	46:07	46:43	45:02	07:19:47
5	M	B. Arreborg Hansen	DEN	43:11	42:48	42:42	42:40	43:07	43:20	44:31	44:56	46:40	47:04	07:20:56
6	M	B. van Rijswijk	NED	42:38	42:51	43:03	42:41	42:27	44:09	46:38	44:24	47:37	48:01	07:24:25
7	M	J. Arzubialde	ESP	43:45	43:50	44:15	44:09	43:25	44:57	46:40	48:30	48:57	50:19	07:38:44
8	M	R. Breedveld	NED	43:32	43:33	44:20	44:37	45:25	47:26	48:13	48:44	49:54	50:07	07:45:47
9	M	D. Orálek	CZE	41:58	41:31	41:03	41:07	44:20	47:19	48:27	53:21	53:35	53:36	07:46:14
10	M	M. Ehm	GER	43:48	43:51	43:40	43:29	44:01	45:13	46:44	49:15	48:30	59:56	07:48:22
11	W	S. Sundberg	SWE	45:41	45:37	46:00	46:55	47:48	45:33	46:02	47:10	50:28	49:02	07:50:13
12	M	G. Ceuppens	BEL	46:55	47:24	47:50	47:00	47:23	47:01	47:29	50:35	49:46	47:59	07:59:19
13	W	K. Kasparova	CZE	47:27	46:51	46:39	46:57	47:27	48:28	50:35	50:39	52:28	52:19	08:09:45

Onderzoek welke van de volgende beweringen waar zijn.

- Als Pascal van Norden de tweede 50 km net zo snel had gelopen als de eerste 50 km, had hij de wedstrijd gewonnen.
- Van de deelnemers die gemiddeld sneller dan 12,5 km/uur liepen, was minder dan 10% vrouw.
- De winnaar bij de mannen liep meer dan 15% sneller dan de winnaar bij de vrouwen.
- De twee beste Belgen waren gemiddeld sneller dan de drie beste Tsjechen.

Werk bij de volgende opdracht in groepjes van drie of vier.

- Bedenk elk een bewering bij de tabel van de uitslagen zoals hierboven en laat de anderen in de groep onderzoeken of de bewering juist is. Daag je klasgenoten uit.

Diagnostische toets

1.1 Rekenen met procenten en verhoudingen

- 1** **a** De huurprijs voor een woning is met 3,5% toegenomen tot €745,20. Wat was de oorspronkelijke huurprijs?
- b** In 2018 was een energierekening €1232,-. In 2017 was dat €1318,-. Bereken de procentuele verandering.
- c** Het aantal werknemers bij een bedrijf is met 45 afgenomen. Dat was een daling van 13,8%. Hoeveel werknemers heeft het bedrijf nu?
- 2** In een verf fabriek worden jaarlijks vier miljoen blikken verf geproduceerd. Deze verf wordt verpakt in blikken van 0,5 liter, 1 liter en 2,5 liter in de verhouding 6 : 7 : 7. Bereken hoeveel liter verf er jaarlijks in de fabriek wordt geproduceerd.

1.2 Maatsystemen

- 3** Bereken. Schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- a** $850 \cdot 125\,000$ **b** $2,13 \cdot 10^{-2} \times 3,68 \cdot 10^{-4}$ **c** $\frac{5,5}{2 \text{ miljoen}}$
- 4** Vul in.
- a** $610 \text{ cm}^2 = \dots \text{ m}^2$ **c** $8,2 \text{ km}^2 = \dots \text{ m}^2$ **e** $8,5 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 = \dots \text{ L}$
- b** $3,7 \cdot 10^6 \text{ mm} = \dots \text{ hm}$ **d** $3,1 \cdot 10^6 \text{ mL} = \dots \text{ dm}^3$ **f** $6,15 \cdot 10^{-4} \text{ ha} = \dots \text{ cm}^2$
- 5** Rosa heeft een emmer met een inhoud van 20 liter. Ze bouwt een zandkasteel waarvoor ze 35 emmers zand gebruikt. Een cm^3 zand bevat ongeveer 10000 zandkorrels. Uit hoeveel zandkorrels bestaat het zandkasteel ongeveer? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie.
- 6** De CN-Tower in Toronto was met 553 meter jarenlang het hoogste vrijstaande bouwwerk ter wereld. De CN-Tower wordt veel door toeristen bezocht die met de lift in 58 seconden naar het eerste uitkijkpunt op 350 meter hoogte worden gebracht.
- a** Bereken de gemiddelde snelheid van deze lift in km/uur. Rond af op één decimaal.
- b** Een andere lift brengt je in 23 seconden van het eerste naar het tweede uitkijkpunt. De gemiddelde snelheid van deze lift is 15,3 km/uur. Bereken in gehele meters nauwkeurig op welke hoogte het tweede uitkijkpunt zich bevindt.



1.3 Omgaan met tabellen

- 7** In de tabel staat informatie die hoort bij de drie grootste luchthavens van Europa in 2017.

GROOTSTE LUCHTHAVENS VAN EUROPA IN 2017

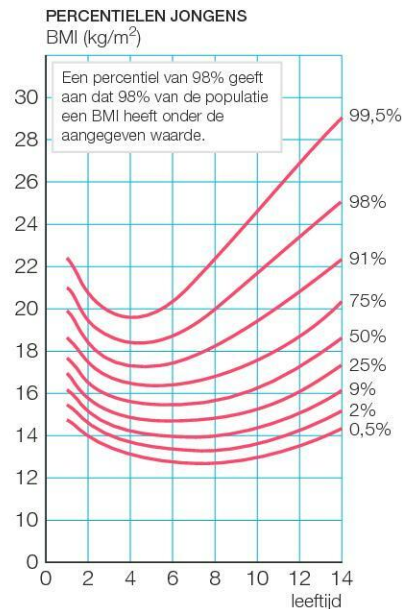
luchthaven	aantal passagiers ×1 000 000	aantal overstappers per 1000 passagiers	aantal passagiersvluchten ×1000	aandeel passagiers- vluchten
London Heathrow	78,0	304	471	99,4%
Paris C. de Gaulle	69,5	168	476	93,3%
Schiphol	68,5	369	497	89,3%

- a** Maak een tabel met het aantal overstappers.
b Voeg een kolom toe met het totaal aantal vluchten.
c Voeg een kolom toe met het gemiddeld aantal passagiers per passagiersvlucht.
d In 2012 was het aantal passagiersvluchten op Paris C. de Gaulle 458 duizend.
Bereken met lineair interpoleren het aantal passagiersvluchten op Paris C. de Gaulle in 2015.
e In 2012 was het aantal passagiers op Schiphol 57,5 miljoen.
Bereken met lineair extrapoleren het gemiddeld aantal passagiers per dag in 2021.

1.4 Informatie in grafieken

- 8** [**WERKBLAD**] Bij volwassenen is er sprake van een gezond gewicht als de BMI tussen 18,5 en 25 ligt. Voor kinderen zijn de grenswaarden afhankelijk van de leeftijd, want tijdens de groeifase verandert de hoeveelheid vetweefsel. In figuur 1.17 kun je de grenswaarden voor jongens van verschillende leeftijd aflezen. Men spreekt van ondergewicht als een jongen bij de laagste 9% zit en van overgewicht als een jongen tot de hoogste 9% behoort.

- a** Sam is 12 jaar en hij heeft ondergewicht. Wat weet je van zijn BMI?
b Finn heeft een BMI van 18. Hij heeft overgewicht. Wat weet je van zijn leeftijd?
c Levi is 6 jaar en heeft een BMI van 17. Schat hoeveel procent van de 6-jarige jongens een hogere BMI heeft dan Levi.
d Zet in een grafiek voor jongens van tien jaar de percentielen uit tegen de BMI.



figuur 1.17

A white Tesla Model S is parked on a paved surface, with its front left wheel and side mirror visible. The background is filled with lush green trees, creating a bokeh effect. A large white number '2' is overlaid on the left side of the image.

2

De statistische cyclus

Wat leer je?

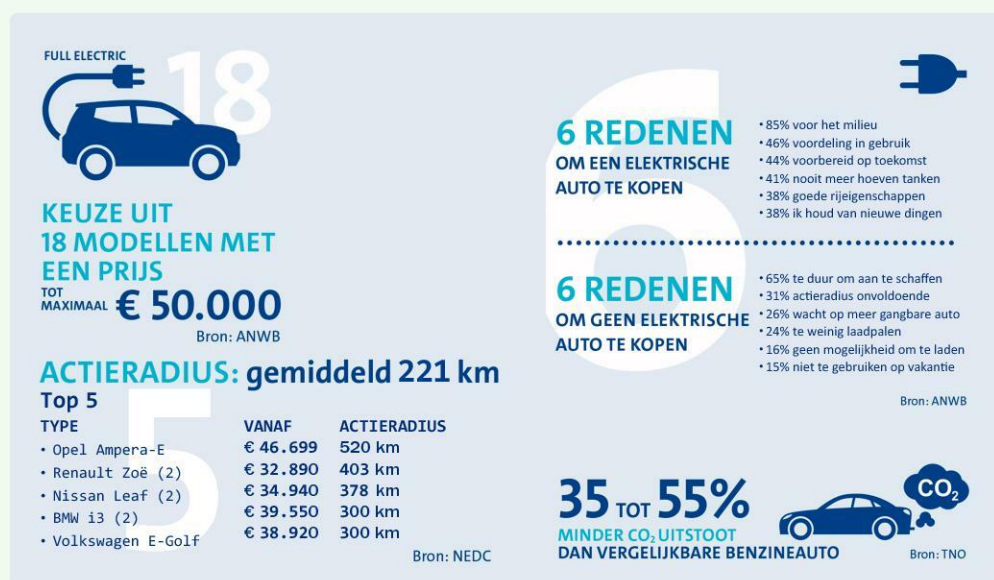
- Welke fasen worden onderscheiden in de statistische cyclus.
- Aan welke voorwaarden een representatieve steekproef moet voldoen.
- Wat statistische variabelen zijn en hoe je ze kunt indelen.
- Diagrammen analyseren en in elkaar omzetten.
- De voor- en nadelen van het werken met een klassenindeling.
- Het trekken van conclusies met behulp van associatiematen.



Beginopdracht Elektrisch rijden

De Elektrisch Rijden Monitor van de ANWB geeft jaarlijks de actuele stand van zaken weer rond elektrisch rijden in Nederland. Elektrisch rijden is in opmars, maar komt onder particuliere automobilisten nog steeds weinig voor. De ANWB heeft een representatief onderzoek gedaan onder de Nederlandse bevolking naar de redenen hiervan. Door de uitkomsten van dit onderzoek te koppelen aan data uit de markt krijg je een beeld van de ontwikkeling van elektrisch rijden in Nederland.

Hieronder zie je een deel van de Elektrisch Rijden Monitor 2018.



- De zes redenen om een elektrische auto te kopen en de zes redenen om dat niet te doen, zijn resultaten uit een enquête van de ANWB. Je ziet dat de percentages optellen tot meer dan 100%. Bedenk welke vragen de ANWB gesteld kan hebben om deze resultaten te krijgen. Geef ook aan in welke vorm deze vragen gesteld kunnen zijn.
- Er lijkt een verband te zijn tussen de actieradius en de vanaf prijs. Voor welke auto uit de top 5 is deze verhouding het gunstigst?
- TNO komt tot de conclusie dat er bij een middenklasse elektrische auto per gereden kilometer 170 gram CO₂ vrijkomt. Hoeveel gram CO₂ stoot een vergelijkbare benzineauto dan maximaal uit?

Voorkennis Centrummaten en frequentietabellen

Theorie A Centrummaten

Je kunt gebruikmaken van het gemiddelde om aan te geven waar het centrum van de gegevens zich bevindt. Het gemiddelde is daarom een voorbeeld van een centrummaat. Andere centrummaten zijn de mediaan en de modus.

Je zou misschien verwachten dat bij het gemiddelde de ene helft van de waarnemingsgetallen onder het gemiddelde ligt en de andere helft erboven. Dat hoeft echter niet zo te zijn. De centrummaat die de waarnemingsgetallen wel in twee even grote groepen verdeelt, is de mediaan.

Hieronder zie je hoe je de mediaan berekent bij een oneven en even aantal waarnemingsgetallen.

MEDIAAN BIJ EEN ONEVEN AANTAL

Bij 9 getallen is de mediaan het 5^e getal.

0, 0, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7
mediaan = 3

MEDIAAN BIJ EEN EVEN AANTAL

Bij 10 getallen is de mediaan het gemiddelde van het 5^e en 6^e getal.

0, 0, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7, 8
mediaan = 4

BEREKENEN VAN GEMIDDELDE, MEDIAAN EN MODUS

gemiddelde	Tel alle waarnemingsgetallen bij elkaar op. Deel dit door het aantal waarnemingsgetallen.
mediaan	Schrijf de getallen in volgorde van grootte. De mediaan is het middelste getal bij een oneven aantal getallen. Bij een even aantal getallen is de mediaan het gemiddelde van de middelste twee getallen.
modus	Ga na of er één waarneming is met de hoogste frequentie. Is die er, dan is dit de modus. Is die er niet, dan is er geen modus.

- 1** In klas 4HA is gedurende enige tijd dagelijks bijgehouden hoeveel leerlingen die dag te laat in de les kwamen.

TELAATKOMERS IN KLAS 4HA

aantal	0	1	2	3	4	5	6
frequentie	3	3	7	0	3	2	2

- a** Hoeveel dagen duurde het onderzoek?
b Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus.



Theorie B Frequentietabellen en staafdiagrammen

In de frequentietabel hiernaast staan de (absolute) frequenties bij de bloedgroepen van de leerlingen in klas 4H1. De totale frequentie is $13 + 12 + 2 + 1 = 28$.

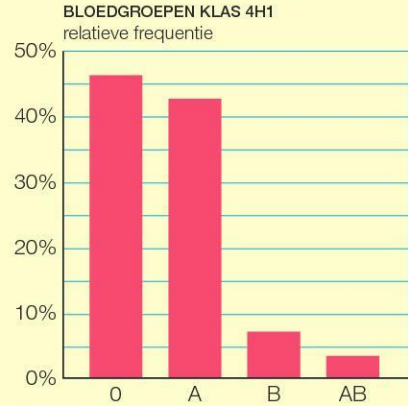
In figuur 2.1 is bij de tabel een staafdiagram getekend. Bij het staafdiagram staan de staven los van elkaar, omdat ze bij verschillende categorieën horen.

In het staafdiagram zijn relatieve frequenties gebruikt. Zo is de relatieve frequentie van bloedgroep 0 gelijk aan

$$\frac{13}{28} \times 100\% \approx 46,4\%.$$

BLOEDGROEPEN KLAS 4H1

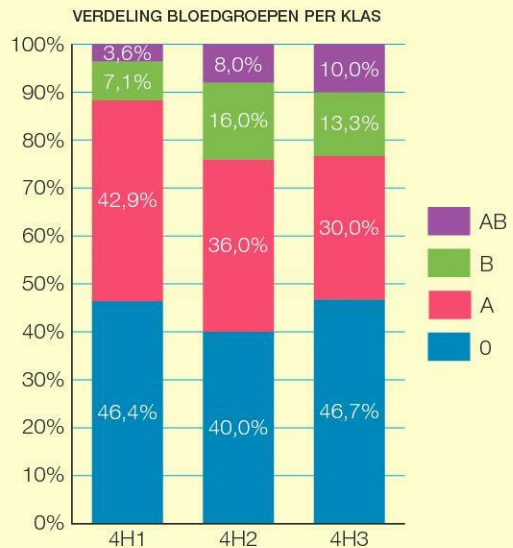
bloedgroep	0	A	B	AB
frequentie	13	12	2	1



figuur 2.1

In figuur 2.2 zie je een samengesteld staafdiagram, ook wel stapeldiagram genoemd.

Je ziet de verdeling van de bloedgroepen in verschillende klassen. Door het gebruik van relatieve frequenties kun je de verdelingen makkelijk vergelijken. Een nadeel is dat je niet meer kunt zien hoeveel leerlingen er in elke klas zitten.



figuur 2.2

2 Zie het samengesteld staafdiagram in figuur 2.2 met de verdeling van de bloedgroepen per klas.

- Welke centrummaat kun je bij de bloedgroepen van klas 4H3 gebruiken? Licht toe.
- In klas 4H2 zitten twee leerlingen met bloedgroep AB. Bereken het aantal leerlingen in 4H2.
- In klas 4H3 zijn er 6 leerlingen meer met bloedgroep A dan met bloedgroep AB. Bereken het aantal leerlingen met bloedgroep 0 in 4H3.

2.1 De onderzoeksvraag



01

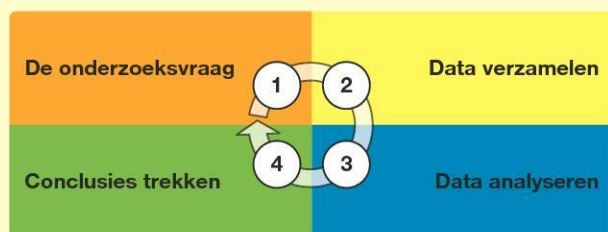
Daan en Emma doen een onderzoek. Hieronder staan zes activiteiten die ze hebben uitgevoerd bij hun onderzoek.

Welke volgorde is logisch?

- 1 Het afvragen of de onderzoeksvraag is beantwoord en zo nodig nieuwe vragen opstellen.
- 2 Het interpreteren van alle verzamelde informatie om te kijken of de onderzoeksvraag hiermee beantwoord kan worden.
- 3 Een overzicht maken van alle aspecten die bij het onderwerp komen kijken, om zo tot de onderzoeksvraag te komen.
- 4 Het beantwoorden van de onderzoeksvraag op basis van de uitkomsten van de verzamelde enquêtes en gevonden informatie.
- 5 Vaststellen welke kenmerken onderzocht moeten worden om de onderzoeksvraag te kunnen beantwoorden.
- 6 Het afnemen van enquêtes en opzoeken van informatie over het onderwerp.

Theorie A Fasen in de statistische cyclus

Bij een statistisch onderzoek probeert men antwoord op een vraag te vinden door het verzamelen, verwerken en interpreteren van gegevens. De **statistiek** houdt zich bezig met methoden en technieken voor het verzamelen, verwerken, analyseren en presenteren van gegevens. De verzamelde gegevens worden **data** genoemd. Deze data staan centraal in de **statistische cyclus**: het proces van opstellen van een onderzoeksvraag, verzamelen en analyseren van data en hieruit conclusies trekken. Het woord cyclus wijst erop dat het doorlopen van deze stappen vaak nieuwe (vervolg)vragen oplevert die verder onderzocht kunnen worden.



figuur 2.3 De statistische cyclus

In dit hoofdstuk staan de vier fasen van de statistische cyclus centraal. De begrippen en technieken die je in dit hoofdstuk leert zijn allemaal in een of meerdere van deze fasen te gebruiken. Als je zelf onderzoek doet (bijvoorbeeld voor je profielwerkstuk) helpt de statistische cyclus je bij het in goede banen leiden van het proces.

**2**

Geef bij elk van de stappen uit opgave 1 aan op welke plek ze het beste in de statistische cyclus passen.

**3**

Lees de onderstaande tekst over kijkonderzoek.

ARTIKEL

Kijkonderzoek

Voor veel Nederlanders is televisiekijken een belangrijke tijdsbesteding. Per dag kijken we in Nederland per persoon ongeveer 3 uur televisie. De kijkcijfers zijn voor televisiemakers en zenders een graadmeter voor succes.

Onderzoeksbureau GfK voert kijkcijferonderzoek uit voor de Stichting KijkOnderzoek (SKO). Het kijkonderzoek

laat zien hoeveel mensen er kijken naar zenders en programma's. Met behulp van deze gegevens kunnen inhoud en tijdstip van programma's afgestemd worden op wat de kijker belangrijk vindt. Het succes van een programma telt bovendien mee bij het bepalen van het tarief voor een reclamespot in de omliggende reclameblokken.

Hieronder staan vier fragmenten uit het kijkonderzoek.

Geef voor elk van de fragmenten aan bij welke fase in de statistische cyclus dit het beste past.

A

Nadat de metergegevens van alle panelhuishoudens naar GfK zijn gestuurd, wordt vastgesteld naar welke zenders is gekeken. Dit gebeurt door middel van Enhanced Audio Matching; bij deze techniek wordt gebruikgemaakt van het matchen van audio samples.

B

SKO stelt dagelijks de standaardresultaten kijkdichtheid, marktaandeel en de absolute aantallen kijkers (KijkTotaal en Uitzenddag) ter beschikking. Deze informatie komt op de website en is bedoeld voor het algemene publiek. De resultaten die SKO op de website publiceert, zijn onder voorwaarden te gebruiken en de bronvermelding is verplicht.

C

Op basis van de achtergrondkenmerken van de panelleden zijn verschillende vragen te onderzoeken: hoeveel 13 t/m 19-jarigen kijken naar een bepaald programma, hoeveel autobezitters hebben de commercial voor een nieuwe personenwagen gezien, kijken alleen sportliefhebbers naar sportprogramma's? Het is belangrijk de vragen scherp te formuleren en af te bakenen voor er tot verder onderzoek wordt overgegaan.

D

Elk huishouden dat meedoet aan het kijkonderzoek krijgt op alle televisietoestellen in huis een 'kijkmeter'. De kijkmeter kan automatisch registreren dat een toestel aanstaat en slaat deze informatie op. De kijkmeter legt vast wat er in het televisietoestel gebeurt, maar kan niet 'zien' wat zich in de kamer afspeelt en wie er naar de televisie kijken. Daarom moeten alle personen van 3 jaar en ouder die kijken zich aanmelden.

bron: SKO

Hieronder staan enkele onderzoeksvragen waar iets mis mee is.

Geef bij elke vraag aan waarom het geen goede onderzoeksvraag is.

- a Hoeveel mensen willen overstappen van een dieselauto naar een elektrische auto?
- b Waarom willen niet meer steden de dieselauto weren uit de binnenstad en waar ligt dat aan?
- c Waarom zijn eigenaren van benzineauto's minder milieubewust dan eigenaren van elektrische auto's?

Theorie B De onderzoeksvraag

Voor elk onderzoek is de onderzoeksvraag, ook wel hoofdvraag genoemd, van cruciaal belang. Een goede onderzoeksvraag helpt je om je onderzoek gedegen uit te voeren en om een overzichtelijk verslag te maken.

Een onderzoeksvraag stelt een verband tussen twee of meer zaken aan de orde. Dit verband kan een *samenhang* aangeven, zoals bij de onderzoeksvraag 'Wat is het aandeel van de CO₂-uitstoot van het verkeer op de totale CO₂-uitstoot?'.

Het verband kan bovendien *causaal* zijn. Je hebt met een **causaal verband** ofwel **oorzakelijk verband** te maken als een gebeurtenis het directe gevolg is van een andere gebeurtenis.

Een voorbeeld van een onderzoeksvraag met een *causaal* verband is 'Hoe beïnvloedt de uitstoot van fijnstof door auto's de volksgezondheid in steden?'.

Het opstellen van een onderzoeksvraag gaat in vier stappen.

- 1 Het onderzoeksterrein *verkennen*.

Om een goede vraag te stellen, dien je voldoende te weten van het onderwerp. Het kan zijn dat je al langere tijd geïnteresseerd bent in het onderwerp en daar al wat van weet. Anders is het verstandig je globaal in te lezen.

- 2 Het onderzoeksterrein *afbakenen*.

Beperk je bij het onderzoek tot iets dat je overziet. Maak je het onderzoeksterrein te breed, dan bestaat de kans dat je de grote hoeveelheid informatie die op je afkomt niet kunt overzien, of dat je te veel tijd kwijt bent met het onderzoek.

- 3 De *eerste versie* van de onderzoeksvraag *formuleren*.

Nadat je het onderzoeksterrein voldoende hebt afgebakend, blijven er nog verschillende soorten vragen over die je kunt stellen. Wil je een vraag stellen waarmee je het verschijnsel dat je gaat onderzoeken *beschrijft*, of wil je meer de kant op van een *verklaring* of van een *oordeel* of een *advies*?

4 De onderzoeksvraag *toetsen*.

Een onderzoeksvraag moet aan de volgende eisen voldoen.

- De onderzoeksvraag moet *scherp geformuleerd* zijn.
Er mogen dus geen vage woorden in zitten.
De vraag in opgave 4a kan dus beter worden geformuleerd als ‘Welk percentage van de mensen die nu in een dieselauto rijden willen binnen drie jaar overstappen op een elektrische auto?’
- De onderzoeksvraag moet *enkelvoudig* zijn.
Aan het woordje ‘en’ in de vraag van opgave 4b kun je zien dat het in feite om twee onderzoeken gaat.
Een betere vraag zou zijn ‘Welk verschil in beleid is er tussen Arnhem en Enschede wat betreft het weren van dieselauto’s uit de binnenstad?’.
- De onderzoeksvraag moet *nieuw* zijn.
Het heeft geen zin een onderzoek te doen naar iets dat algemeen bekend is. Een vraag als ‘Hebben elektrische auto’s minder CO₂-uitstoot dan benzineauto’s?’ heeft geen zin, omdat het antwoord al bekend is.
- De onderzoeksvraag *mag niet uitgaan van foute veronderstellingen*.
De vraag in opgave 4c gaat uit van de veronderstelling dat eigenaren van benzineauto’s minder milieubewust zijn dan eigenaren van elektrische auto’s.
Een betere vraag zou zijn ‘Wat is het verschil in opvattingen over het milieu tussen eigenaren van benzineauto’s en eigenaren van elektrische auto’s?’.

5 Hieronder staan enkele onderzoeksvragen.



Welke van deze vragen stellen een causaal verband aan de orde? Licht toe.

- a** Welk effect heeft overmatig gamen op schoolprestaties?
- b** Welk verband is er bij scholieren tussen gebruik van sociale media en gamen?
- c** In hoeverre helpt het verbieden van roken op het schoolplein bij het terugdringen van roken onder scholieren?
- d** Hoe hangt het rookgedrag van scholieren samen met het opleidingsniveau?

6 Karlijn is geïnteresseerd in paardrijden. Ze rijdt al jaren paard en wil



onderzoeken of kinderen van rijke ouders vaker paardrijden dan kinderen van ouders die niet rijk zijn.

- a** Zou Karlijn het onderzoeksterrein nog moeten verkennen? Licht toe.
- b** Bedenk een onderzoeksvraag voor Karlijn.
- c** Is de onderzoeksvraag die je hebt bedacht voldoende afgebakend? Licht toe. Verander zo nodig de onderzoeksvraag.
- d** Ga na of de onderzoeksvraag die je hebt bedacht voldoet aan de vier eisen die in de theorie staan vermeld. Licht je antwoorden toe en verander zo nodig de onderzoeksvraag.

**7**

Nadat de onderzoeksvraag is opgesteld en voordat je data gaat verzamelen, is het soms nodig om een aantal deelvragen te bedenken. Om de onderzoeksvraag te beantwoorden, moet je eerst een aantal zaken weten. Het beantwoorden van de deelvragen zou moeten leiden tot het beantwoorden van de hoofdvraag.

Zo zouden bij de onderzoeksvraag ‘Welk verschil in beleid is er tussen Arnhem en Enschede wat betreft het weren van dieselauto’s uit de binnenstad?’ de volgende deelvragen geformuleerd kunnen worden.

- 1** Wat is het beleid van Arnhem wat betreft het weren van dieselauto’s uit de binnenstad?
- 2** Wat is het beleid van Enschede wat betreft het weren van dieselauto’s uit de binnenstad?

Bedenk bij elk van de onderzoeksvragen hieronder twee deelvragen.

- a** Wat is het aandeel van de CO₂-uitstoot van het verkeer op de totale CO₂-uitstoot?
- b** Hoe beïnvloedt de uitstoot van fijnstof door auto’s de volksgezondheid in steden?

Zie opgave 6.

- c** Bedenk bij de onderzoeksvraag die je voor Karlijn hebt bedacht twee deelvragen.

**8**

Bedenk bij twee van de onderzoeksvragen van opgave 5 twee deelvragen.

**9**

In de theorie worden vier soorten onderzoeksvragen genoemd:

- *** A een beschrijvende vraag
- B een verklarende vraag
- C een vraag die uitmondt in een oordeel
- D een vraag die uitmondt in een advies.

Hieronder staan vier onderzoeksvragen die horen bij een onderzoek naar de ontwikkeling van de woningmarkt in Nederland.

- 1** Hoe is de prijsontwikkeling op de Nederlandse woningmarkt van de afgelopen vijf jaar te verklaren?
 - 2** Welk beleid moet er worden gevoerd om een stabiele woningmarkt in Nederland te bereiken?
 - 3** Hoe is de Nederlandse woningmarkt veranderd sinds het jaar 2000?
 - 4** In welke mate voldoet de ontwikkeling op de Nederlandse woningmarkt aan de beloftes van de regering?
- a** Zeg bij elk van de genoemde onderzoeksvragen van welke soort (A, B, C of D) de vraag is.
 - b** Bedenk bij twee van de onderzoeksvragen hierboven twee deelvragen.

Voor een kijkonderzoek wordt niet van elke Nederlander onderzocht welke tv-programma's zijn bekeken.

- a Noem een mogelijke reden waarom niet van elke Nederlander het kijkgedrag wordt onderzocht.

Over de groep Nederlanders in het onderzoek schrijft Stichting KijkOnderzoek (SKO) het volgende.

‘Het is voldoende om een representatieve groep te onderzoeken. Representatief wil zeggen dat de groep net zo is opgebouwd als de bevolking, met een overeenkomstig percentage jongeren, vrouwen, hoger opgeleiden, enzovoort.’

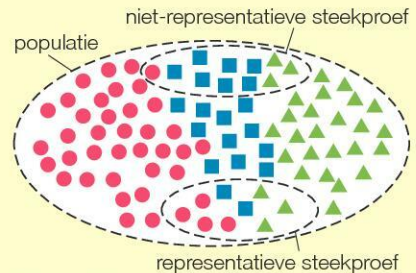
- b Waarom denk je dat SKO wil dat de te onderzoeken groep representatief is?

Theorie C Een steekproef nemen

Een statistisch onderzoek hoeft zich niet alleen te richten op individuele mensen, maar kan ook betrekking hebben op bijvoorbeeld huishoudens, scholen en materiële zaken zoals lampen of pakken melk. De totale groep waarop het onderzoek zich richt heet de **populatie**.

Het onderzoeken van de hele populatie lukt in veel gevallen niet, bijvoorbeeld omdat het teveel werk is. Het deel van de populatie dat je daadwerkelijk onderzoekt heet de **steekproef**.

Het is belangrijk dat een steekproef een goede afspiegeling is van de totale populatie. Een steekproef heet dan **representatief**.



figuur 2.4

Een steekproef is representatief als zij een goede afspiegeling is van de gehele populatie.

Een representatieve steekproef moet in elk geval voldoen aan de volgende eisen.

- **De steekproef is voldoende groot.**
 Hoe meer kenmerken je wilt onderzoeken (zoals leeftijd, werk en inkomen), hoe groter de steekproef moet zijn.
- **De steekproef is aselekt.**
 Een steekproef is **aselect** als elk element van de populatie een even grote kans heeft om in de steekproef voor te komen.

Om een representatieve steekproef te krijgen bij de maandelijkse peiling naar de politieke voorkeur, worden ongeveer 3000 stemgerechtigde Nederlanders ondervraagd. De personen in de steekproef worden zo gekozen dat alle Nederlandse stemgerechtigden een even grote kans hebben om in de steekproef voor te komen.

11
☐ ⊙ *

Omschrijf bij de volgende onderzoeksvragen een populatie.

- a Welke vervolgopleidingen kiezen de leerlingen van je school?
- b In welk weekblad staan de meeste illustraties?
- c Welk percentage van de inwoners van Appelscha is daar ook geboren?
- d Hoe effectief is een nieuw geneesmiddel tegen hooikoorts?

12
☐ ⊙ *

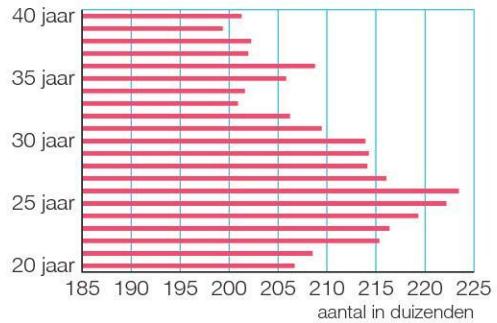
a Er wordt een onderzoek gedaan naar de fruitconsumptie van Nederlanders van 20 tot en met 40 jaar door van elke leeftijd evenveel personen te ondervragen.

Geef commentaar. Gebruik de figuur hiernaast.

b Bij een onderzoek worden alleen mannen in de pensioengerechtigde leeftijd ondervraagd.
Kun je hier te maken hebben met een aselechte steekproef? Licht toe.

c Bij een onderzoek worden 100 mensen ondervraagd.
Kun je hier te maken hebben met een steekproef die voldoende groot is? Licht toe.

LEEFTIJDOPBOUW NEDERLANDSE BEVOLKING



figuur 2.5

A13
☐ ⊙ *

Een onderzoeksbureau wil de mening weten van de Nederlander over klimaatverandering.

Waarom zijn de volgende steekproeven niet representatief?

- a Op een zaterdagmiddag wordt op een druk kruispunt in de stad een groot aantal voorbijgangers ondervraagd.
- b In de ochtendspits wordt in een file een groot aantal automobilisten ondervraagd.
- c Door loting via postcodenummers wordt uit elke provincie één persoon ondervraagd.
- d Een groot aantal toeristen in het bezoekerscentrum van het natuurgebied de Posbank wordt ondervraagd.
- e Er wordt een vragenlijst afgenomen via de smartphone.

O14
☐ ⊙ *

Voorafgaand aan de Tweede Kamerverkiezingen in 2017 is een peiling gedaan, waarbij onderzoekers probeerden het aandeel stemmen per partij te voorspellen. Van de 1200 ondervraagden gaven 205 aan op de VVD te gaan stemmen. Bij de verkiezingen haalde de VVD uiteindelijk 21,3% van de stemmen.

Is dat meer of minder dan je op grond van de peiling zou verwachten?
Licht toe.

Theorie D Populatieproportie en steekproefproportie

Bij de Tweede Kamerverkiezingen worden 150 zetels verdeeld met als uitgangspunt het deel van de stemmen dat elk van de partijen krijgt. De wiskundige term voor deel is **proportie**. Alle stemgerechtigden in Nederland vormen samen de populatie. Wanneer 12% van de populatie op de partij D66 stemt, zeggen we dat de **populatieproportie** D66-stemmers 0,12 is. Deze populatieproportie noteren we als $p = 0,12$. Bij een peiling voor de verkiezingen wordt maar een deel van de stemgerechtigden onderzocht en heb je dus te maken met een steekproef. Wanneer bij een steekproef het aandeel D66-stemmers 9% is, zeggen we dat de **steekproefproportie** 0,09 is. Deze steekproefproportie noteren we als $\hat{p} = 0,09$. Bij een representatieve steekproef zal $\hat{p}$ in de meeste gevallen weinig verschillen van p .

Soms wordt het dakje op de p bij de steekproefproportie weggelaten. Het is dan belangrijk dat je zelf goed kunt inschatten of je met p of $\hat{p}$ te maken hebt.

De populatieproportie p van een kenmerk in de populatie is

$$p = \frac{\text{aantal elementen met het kenmerk in de populatie}}{\text{totaal aantal elementen in de populatie}}.$$

De steekproefproportie $\hat{p}$ van een kenmerk in de steekproef is

$$\hat{p} = \frac{\text{aantal elementen met het kenmerk in de steekproef}}{\text{totaal aantal elementen in de steekproef}}.$$

- 15** De dagproductie literpakken melk in een melkfabriek is 10 000. Hiervan hebben 120 pakken te weinig inhoud. In een steekproef worden 250 pakken van de dagproductie onderzocht op de inhoud. Hiervan blijken er 4 te weinig inhoud te hebben. Bereken de populatieproportie en de steekproefproportie bij literpakken melk met te weinig inhoud.

- A16** Van de patiënten in een ziekenhuis is de populatieproportie van het kenmerk 'de patiënt heeft bloedgroep A' gelijk aan 0,418. Het blijkt namelijk dat 627 patiënten bloedgroep A hebben. Bij een steekproef in dit ziekenhuis zijn er 27 patiënten met bloedgroep A, waarmee de steekproefproportie op 0,45 komt. Bereken het aantal patiënten in het ziekenhuis en het aantal patiënten in de steekproef.

- E17** Voor het personeel van een ziekenhuis geldt dat de populatieproportie voor het kenmerk 'personeelslid is man' gelijk is aan 0,3. Voor het kenmerk 'man heeft kinderen' geldt $p = 0,6$. Voor het kenmerk 'vrouw heeft kinderen' geldt $p = 0,5$. Wat is de populatieproportie van het kenmerk 'personeelslid met kinderen is man'? Rond af op twee decimalen.

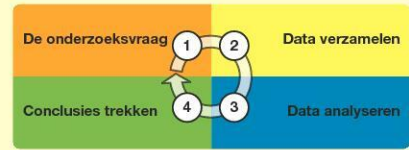
Terugblik

De statistische cyclus

De statistiek houdt zich bezig met methoden en technieken voor het verzamelen, verwerken, analyseren en presenteren van gegevens. De verzamelde gegevens worden data genoemd.

Deze data staan centraal in de statistische cyclus:

het proces van opstellen van een onderzoeksvraag, verzamelen en analyseren van data en hieruit conclusies trekken. Het woord cyclus wijst erop dat het doorlopen van deze stappen vaak nieuwe (vervolg)vragen oplevert die verder onderzocht kunnen worden.



De onderzoeksvraag

Een statistisch onderzoek begint met een goede onderzoeksvraag. Deze vraag stelt een verband tussen twee of meer zaken aan de orde.

Bij de vraag ‘Wat is het aandeel van de CO₂-uitstoot van het verkeer op de totale CO₂-uitstoot?’ is er sprake van een samenhang tussen de CO₂-uitstoot van het verkeer en de totale CO₂-uitstoot.

Bij de vraag ‘Hoe beïnvloedt de uitstoot van fijnstof door auto’s de volksgezondheid in steden?’ is er sprake van een causaal (oorzakelijk) verband: het directe gevolg van de uitstoot van fijnstof door auto’s wordt onderzocht.

Een steekproef nemen

De totale groep waarop een onderzoek zich richt heet de populatie. De populatie kan een groep mensen zijn, maar bijvoorbeeld ook geneesmiddelen of elektrische auto’s. Het deel van de populatie dat daadwerkelijk onderzocht wordt heet de steekproef. Om representatief te zijn (een goed beeld van de populatie te geven) moet de steekproef in ieder geval voldoende groot en aselekt zijn.

Bij een aselechte steekproef heeft elk element van de populatie gelijke kans om in de steekproef te komen.

Populatieproportie en steekproefproportie

Wanneer je onderzoekt welk deel van de populatie een bepaalde eigenschap heeft, doe je onderzoek naar een proportie. De proportie is een getal tussen 0 en 1 dat aangeeft welk deel de betreffende eigenschap heeft. Het doel van je onderzoek is het bepalen van de populatieproportie (het deel van de populatie met de eigenschap). Gebruik je een steekproef in je onderzoek, dan geeft dit de steekproefproportie (het deel van de steekproef met de eigenschap). Bij een representatieve steekproef verschillen deze proporties meestal niet veel.

Als 14% van de Nederlanders een zilverkleurige auto heeft, is de proportie Nederlanders met een zilverkleurige auto 0,14.

2.2 Data verzamelen



Hieronder staan twee enquêtevragen.

Leg uit waarom het lastig is deze vragen te beantwoorden.

1 Gebruikt u veel internet?

2 Hoeveel uur per week kijkt u tv?

Kies uit

☐ minder dan 2 uur

☐ meer dan 5 uur

☐ minder dan 5 uur

☐ meer dan 10 uur

Theorie A Enquêtevragen en statistische variabelen

In deze paragraaf richten we ons op fase 2 van de statistische cyclus: Data verzamelen.

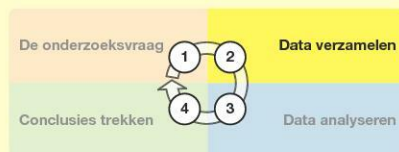
Om antwoord te vinden op de onderzoeksvraag moeten er bij een statistisch onderzoek gegevens worden verzameld.

Er zijn verschillende manieren om aan gegevens te komen. Voor veel onderzoeken kan gebruik worden gemaakt van bestaand cijfermateriaal.

Op internet zijn veel gegevens te vinden. Een bekende bron voor gegevens over Nederland en haar inwoners is de site van het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS).

Voor sommige onderzoeken zullen de juiste gegevens echter niet beschikbaar zijn. De onderzoeker zal dan bijvoorbeeld door middel van een enquête, een simulatie of een experiment de gegevens moeten verzamelen.

Een enquête is een veelgebruikte methode om gegevens te verzamelen. Het opstellen van een goede vragenlijst is echter niet makkelijk. Hieronder zie je een aantal tips van het CBS voor het maken en afnemen van een enquête. De deelnemers aan een enquête worden **respondenten** genoemd.



INFORMATIEF

Tips van het CBS voor enquêtevragen

- 1 Stel begrijpelijke vragen in korte zinnen, met duidelijke begrippen.
- 2 Stel geen suggestieve vragen zoals *'U vindt het hier in de straat toch ook rommelig?'*.
- 3 Stel geen dubbele vragen waarbij in één vraag meerdere onderwerpen aan bod komen.
- 4 Vermijd (dubbele) ontkenningen, zoals *'Vind je het geen probleem dat je hier niet mag kletsen?'*.
- 5 Pas op met vragen over gevoelige onderwerpen.
- 6 Pas op met vragen die een beroep doen op de herinnering zoals *'Hoe vaak bent u de afgelopen drie jaar bij een arts of andere hulpverlener geweest?'*.
- 7 Vermijd hypothetische vragen zoals *'Wat zou u doen als u directeur van Albert Heijn was?'*.
- 8 Geef eenduidige en complete antwoordmogelijkheden bij meerkeuzevragen.

19


- a Lever commentaar op de volgende enquêtevragen.
- 1 U heeft zeker ook veel geluidsoverlast van bureu?
 - 2 Vindt u niet, dat het verstandig is om geen huis te kopen als u er ook een kunt huren?
 - 3 Kijkt u veel televisie?
 - 4 Hoe vaak heeft u vorige week de website NU.nl bezocht?
- Kies uit
 I elke dag II nooit III 1 of 2 keer IV 3 t/m 7 keer.
- b Stel bij elk van de vier enquêtevragen van a een nieuwe vraag op waarbij je rekening houdt met alle tips van het CBS.

020


- Bij een onderzoek wordt van alle sporters die deelnemen aan de Olympische Spelen een aantal kenmerken genoteerd.
- a Bedenk vijf van deze mogelijke kenmerken.
 - b Welke kenmerken bij a kun je uitdrukken in een getal?
 - c Vul je antwoord bij a aan zodat je ten minste drie kenmerken hebt die je niet in een getal uitdrukt.

021


Gegeven is de volgende tabel.

BEST BETAALDE SPORTERS 2018

rang	naam	sport	inkomen (\$)	leeftijd
1	Floyd Mayweather	boksen	275 miljoen	41
2	Lionel Messi	voetbal	111 miljoen	31
3	Cristiano Ronaldo	voetbal	108 miljoen	33
4	Conor McGregor	MMA	99 miljoen	30
5	Neymar da Silva Santos Júnior	voetbal	90 miljoen	26

- a Karel zegt 'Messi en Ronaldo hebben in 2018 samen 219 miljoen dollar verdiend.
Ben je het hier mee eens?
- b Lars zegt 'Messi en Ronaldo staan samen op rang 5'.
Ben je het hier mee eens?
- c Welke kolommen geven een eigenschap weer en welke een hoeveelheid?

Theorie B Statistische variabelen en data

Bij statistiek heten de kenmerken die je onderzoekt **variabelen** omdat ze verschillende waarden kunnen aannemen (ze zijn variabel). De waarden van variabelen zijn niet altijd getallen. Zo kan een variabele bijvoorbeeld de haarkleur zijn met waarden zoals 'blond' of 'bruin'. Het geheel van alle waarden van de variabelen uit een onderzoek zijn de onderzoeksgegevens oftewel de data.

Bij een variabele zoals haarkleur kun je niet rekenen met verschillen omdat de variabele geen hoeveelheid, maar een eigenschap betreft. Dit soort variabelen heten **kwalitatieve variabelen**.

Variabelen die wel een hoeveelheid betreffen, zoals bijvoorbeeld lichaamslengte in cm, heten **kwantitatieve variabelen**.

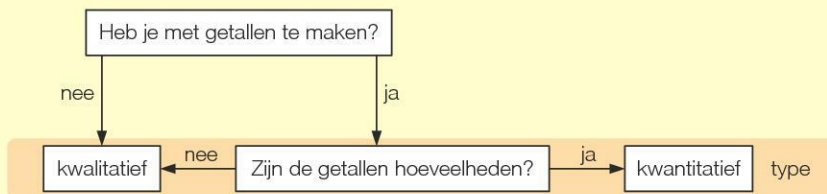
Een ander woord voor eigenschap is *kwaliteit*.
Een ander woord voor hoeveelheid is *kwantiteit*.

Van veel variabelen is direct te zeggen of ze kwalitatief dan wel kwantitatief zijn. Maar soms is het lastiger, zoals bijvoorbeeld bij de variabele rang in opgave 21.

Omdat een rang geen hoeveelheid (kwantiteit) is, kun je bijvoorbeeld niet stellen dat de som van de rangen 1 en 2 gelijk is aan rang 3. De variabele rang betreft een eigenschap en is daarom een kwalitatieve variabele.

De variabele inkomen in opgave 21 betreft een hoeveelheid en is daarom een kwantitatieve variabele.

Bij twijfel kun je als volgt te werk gaan om te bepalen of een variabele kwalitatief of kwantitatief is.



22
☐ ⊗ *

a Geef bij de volgende variabelen aan of ze kwalitatief of kwantitatief zijn.

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| I geslacht | III lidmaatschapsnummer |
| II leeftijd in jaren | IV toetscijfer wiskunde |

b Geef nog twee voorbeelden van een kwalitatieve variabele die uitgedrukt is in een getal.

23
☐ ⊗ *

Bij een medisch onderzoek worden vaak veel factoren onderzocht. In de tabel hiernaast zie je een deel van een ingevulde vragenlijst. Welke variabelen zijn kwantitatief en welke kwalitatief?

patiëntennummer	11235813
geboortjaar	1985
opleiding	hbo
beroep	leraar
bloedgroep	0
sportfrequentie:	
niet wekelijks	✓
1 – 2 per week	
> 2 keer per week	

R24


Bij een enquête over het aantal dagen per week dat Nederlanders vlees eten, kun je kiezen uit 0 dagen, 1 dag, 2 dagen, 3 dagen en 4 of meer dagen.

De onderzoeker wil weten hoeveel dagen Nederlanders gemiddeld per week vlees eten.

Tegen welk probleem loopt de onderzoeker aan met deze vraag?

O25


Een enquête voor autobezitters bevat de volgende vragen.

I Hoe vaak maakt u gebruik van de auto? Kies uit

☐ nooit ☐ soms ☐ regelmatig ☐ vaak

II Wat voor type auto rijdt u? Kies uit

☐ benzine ☐ diesel ☐ hybride ☐ elektrisch ☐ anders

a Is de variabele autogebruik kwalitatief of kwantitatief? En de variabele type auto?

b Bij welke vraag geven de antwoorden een duidelijke volgorde aan? Licht toe.

Theorie C Meetniveau van een kwalitatieve variabele

Bij kwalitatieve variabelen is het van belang hoe ze zijn gemeten.

Als de waarden een duidelijke volgorde (ordening) hebben, is de variabele gemeten op **ordinaal** niveau. Dat is het geval bij de variabele autogebruik in opgave 25.

Als de volgorde niet van belang is, zoals bij de variabele type auto, is er gemeten op **nominaal** niveau.

De **meetniveaus** nominaal en ordinaal horen bij een kwalitatieve variabele.

Een variabele die op nominaal niveau is gemeten, is een **nominale variabele**.

Een variabele die op ordinaal niveau is gemeten, is een **ordinale variabele**.

Nominaal is afgeleid van het Latijnse woord *nomen*, dat naam betekent.

MEETNIVEAUS KWALITATIEVE VARIABLE

meetniveau	omschrijving
nominaal	De verschillende categorieën worden <i>benoemd</i> , maar er is geen duidelijke volgorde in de waarden van de variabele.
ordinaal	Er is een duidelijke <i>ordening</i> in de waarden van de variabele.

26


Geef voor de vragenlijst hiernaast bij elke variabele het meetniveau.

Vragenlijst *Omcirkelen wat van toepassing is*

geslacht: man / vrouw
 aantal broers/zussen: 0 / 1 / 2 / 3+
 vooropleiding: vmbo / havo / vwo
 woonplaats:



27
☐ ⊙

Er wordt onderzoek gedaan naar de vakantiebestemming van Nederlanders in de herfstvakantie.

Bedenk in de context van dit onderzoek een kwantitatieve variabele, een nominale variabele en een ordinale variabele.

028
☐ ⊙ *

Bij een snelheidscontrole heeft de politie te maken met de variabelen 'aantal auto's' en 'snelheid in km/uur'.

Deze variabelen zijn beide kwantitatief, maar toch is er verschil in waarden die deze variabelen kunnen aannemen. Zo kan de variabele 'aantal auto's' bijvoorbeeld niet de waarde 85,6 aannemen.

Omschrijf wat het verschil is in waarden die de variabelen 'aantal auto's' en 'snelheid in km/uur' kunnen aannemen.

Theorie D Discrete en continue variabelen

Een gebouw heeft 12 verdiepingen. Je kunt bijvoorbeeld spreken over de 3^e verdieping of de 4^e verdieping. Maar verdieping $3\frac{1}{2}$ bestaat niet. De verdieping van een gebouw is een voorbeeld van een **discrete variabele**.

De hoogte waarop de lift zich in het gebouw bevindt, kan bijvoorbeeld 3 meter of 4 meter zijn, maar ook elke tussenliggende waarde is mogelijk. De hoogte van de lift in meters is daarom een voorbeeld van een **continue variabele**.

Bij kwantitatieve variabelen maken we onderscheid in discrete en continue variabelen.

- Bij een discrete variabele zijn sommige tussenliggende waarden niet mogelijk.
- Bij een continue variabele zijn alle tussenliggende waarden mogelijk.

29
☐ ⊙

Geef aan of de variabele continu of discreet is.

- a het aantal appels aan een appelboom
- b het gewicht van de appels aan een appelboom
- c de tijd die wordt besteed aan het leren voor een toets
- d rapportcijfer
- e voetlengte
- f schoenmaat

30
*

Marc en Petra hebben een discussie over de variabele leeftijd. Marc vindt leeftijd een discrete variabele, omdat leeftijd op documenten altijd in gehelen staat aangegeven. Petra brengt hier tegenin dat je leeftijd sinds je geboorte steeds toeneemt: als het moment van je geboorte bekend is, dan kun je zo nauwkeurig als je wilt bepalen hoe oud je bent. Wat vind jij? Licht je standpunt toe.

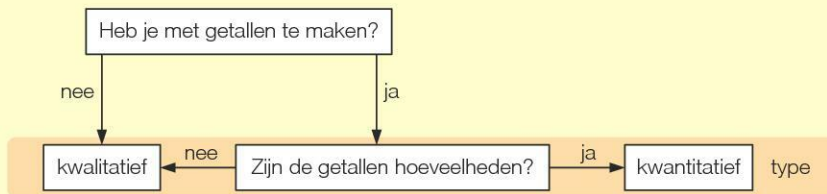
Terugblik

Enquêtevragen en statistische variabelen

Informatie verzamelen kun je op verschillende manieren aanpakken. Wanneer gegevens beschikbaar zijn via bronnen (zoals bijvoorbeeld het CBS) is dat een logisch uitgangspunt. Zijn er geen bronnen dan zul je de gegevens zelf moeten verzamelen, dat kan bijvoorbeeld met een enquête.

Statistische variabelen en data

De kenmerken bij een statistisch onderzoek heten variabelen. Tijdens het onderzoek verzamel je de waarden die de variabelen aannemen. Al deze waarden samen noemen we de onderzoeksgegevens of data. Het is belangrijk de opdeling in kwalitatieve en kwantitatieve variabelen te kennen. Het bepalen van het type variabele doe je met behulp van de mogelijke waarden van de variabele en het schema hieronder.



Nominale en ordinale variabelen

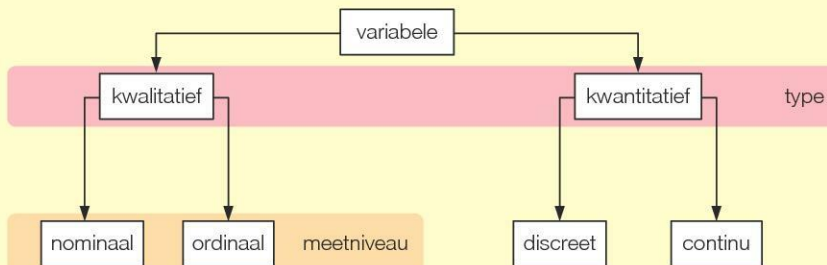
Bij kwalitatieve variabelen is er een onderscheid in de meetniveaus nominaal en ordinaal.

- Bij een ordinale variabele is er een duidelijke ordening in de waarden van de variabele.
- Bij een nominale variabele is er geen duidelijke ordening.

Discrete en continue variabelen

Bij kwantitatieve variabelen maken we onderscheid tussen discrete en continue variabelen.

- Bij een discrete variabele zijn sommige tussenliggende waarden niet mogelijk.
- Bij een continue variabele zijn alle tussenliggende waarden mogelijk.



2.3 Centrum- en spreidingsmaten

031
☑️📌*

Bij het invullen van een vragenlijst heb je bij elke vraag de keuze uit de scores hiernaast.

a Van welk meetniveau is hier sprake?

Een onderzoeker laat de vragenlijst door 100 mensen invullen.

b Licht aan de hand van een voorbeeld toe dat het onjuist is als hij de gemiddelde score per vraag berekent.

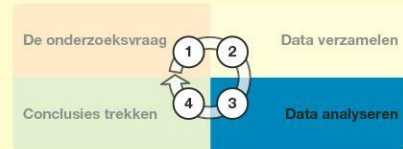
c Welke centrummaat zou hij hier wel kunnen gebruiken?

1:	helemaal mee oneens
2:	mee oneens
3:	acceptabel
4:	mee eens
5:	helemaal mee eens

Theorie A Centrummaten

In deze paragraaf richten we ons op fase 3 van de statistische cyclus: Data analyseren.

Bij het analyseren van data kan het nuttig zijn bij een serie waarnemingsgetallen een centrummaat te berekenen.



Verschillende situaties vragen om verschillende centrummaten.

Bij kwalitatieve variabelen kun je de modus gebruiken.

Het voordeel van kwantitatieve variabelen is dat je de keuze hebt uit alle centrummaten.

Let op dat het gemiddelde niet altijd een juiste indruk geeft van het centrum van de waarnemingsgetallen. Het gemiddelde is bijvoorbeeld gevoelig voor uitschieters. Een **uitschieter** is een waarnemingsgetal dat erg afwijkt van de andere waarnemingsgetallen.

VOOR- EN NADELEN BIJ DRIE CENTRUMMATEN

	voordeel	nadeel
gemiddelde	gebruikt alle waarnemingsgetallen	gevoelig voor uitschieters
mediaan	ongevoelig voor uitschieters	alleen de grootte van de middelste waarneming(en) is van belang
modus	geschikt voor elk type variabele	is er niet altijd

32
☐◎*

Welke centrummaat is het meest geschikt om de volgende waarnemingen te karakteriseren? Licht toe.

- Op een verjaardagsfeestje hebben de aanwezigen de volgende leeftijden: 17, 20, 22, 17, 19, 21 en 68 jaar.
- Van tien leerlingen is de haarkleur: blond, rood, bruin, bruin, zwart, bruin, bruin, blond, bruin en blond.
- Een verkoper verkoopt op de zes werkdagen van een week de volgende aantallen fietsen: 8, 7, 4, 5, 8 en 6.
- Bij een natuurkundeproef meten tien leerlingen het volume van dezelfde glazen bol. De metingen leveren op: 48, 48, 48, 48, 53, 48, 48, 48, 48 en 48 cm³.



33
☐◎

In de tabel zie je de resultaten van Jim en Nils op hun rapport. Jim heeft Duits als extra vak, waardoor hij één rapportcijfer meer heeft dan Nils. Voor de vakken CKV en LO kregen ze geen rapportcijfer, maar een woord-beoordeling.

- Bereken de mediaan van de rapportcijfers van Jim.
- Bereken de mediaan van de rapportcijfers van Nils.
- Nils wil zorgen dat de mediaan van zijn rapportcijfers hoger wordt dan een 7,0.
Op welk vak kan hij zich dan het beste richten? Licht toe met een berekening.

vak	beoordeling	
	Jim	Nils
NE	5,9	6,6
EN	8,4	7,4
DU	8,0	-
WIA	7,2	7,3
SK	6,3	5,9
BIO	6,8	6,3
NLT	7,0	7,1
AK	6,6	5,7
MAA	7,0	7,0
CKV	V	V
LO	V	V

34
☐◎*

In klas 4HB is nauwgezet het aantal telaatkomers geregistreerd.

TELAATKOMERS IN 4HB

aantal	0	1	2	3	4	5	32
frequentie	1	5	5	3	3	2	1

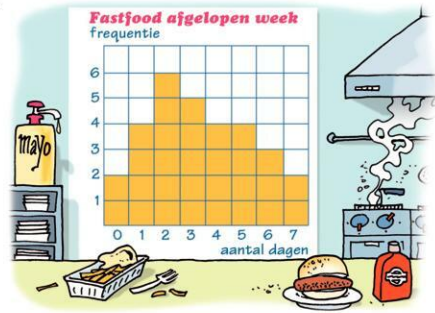
- Bereken het gemiddelde.
- Wanneer de afdelingscoördinator het gemiddelde ziet, is hij erg ontstemd. Hij vindt het gemiddelde aantal telaatkomers onaanvaardbaar hoog. Door het gebruiken van een andere centrummaat weet de klas hem milder te stemmen. Hoe doet de klas dat?

35



Aan een groep leerlingen is gevraagd op hoeveel dagen ze de afgelopen week fastfood hebben gegeten. De eerste 30 resultaten zie je in de figuur hiernaast.

- Met welke variabele heb je hier te maken? Waarom kun je bij deze variabele het gemiddelde, de modus en de mediaan berekenen?
- Zet de centrummaten op volgorde van klein naar groot.
- Op het einde van het onderzoek waren in totaal 40 leerlingen ondervraagd. De mediaan bleek gelijk te zijn gebleven. Het gemiddelde was 3,5 en de modus was groter dan het gemiddelde. Geef een mogelijke frequentietabel bij deze situatie.



figuur 2.7

E36



Jori heeft vijf keer een bordspel gespeeld. Zijn scores waren achtereenvolgens 51, 57, 51, 51 en 55.

De maximale score bij dit spel is 60 en de minimale score 50.

Hoe vaak moet hij het spel nog minstens spelen om

- een gemiddelde score van 55 te krijgen
- de modus van zijn scores groter dan het gemiddelde te laten worden
- de mediaan van zijn scores groter dan het gemiddelde te laten worden?

O37



Een docent heeft berekend dat voor een toets de helft van de leerlingen een voldoende heeft behaald.

- Welke centrummaat heeft de docent berekend? Licht toe.

De docent berekent dat de mediaan van de onvoldoendes een 3,6 is en de mediaan van de voldoende een 8,1.

- Hoeveel procent van de leerlingen heeft een cijfer hoger dan een 8,1? En hoeveel procent heeft een cijfer tussen 3,6 en 8,1?

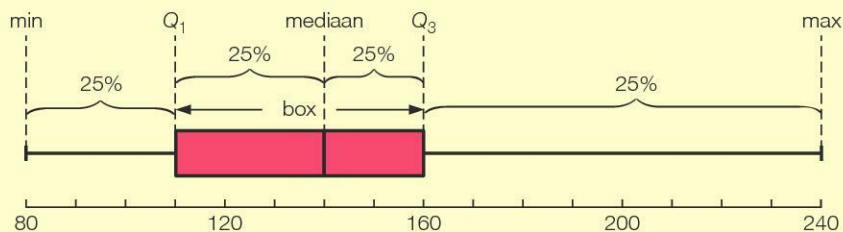
Theorie B De boxplot

Een **boxplot** is een diagram dat de verdeling van data in beeld brengt. Alleen bij een kwantitatieve variabele kun je een boxplot maken.

De mediaan verdeelt een serie waarnemingsgetallen in twee groepen, die beide bestaan uit 50% van de waarnemingsgetallen. Van beide groepen kun je weer de mediaan bepalen. Er ontstaat dan een verdeling in vier groepen die elk 25% van de waarnemingsgetallen bevatten.

De mediaan van de eerste helft heet het **eerste kwartiel**. Notatie Q_1 .

De mediaan van de tweede helft heet het **derde kwartiel**. Notatie Q_3 .



figuur 2.8

In de boxplot hierboven lees je af dat

- de 25% kleinste waarnemingsgetallen ligt tussen 80 en 110
- de volgende 25% van de waarnemingsgetallen ligt tussen 110 en 140
- de volgende 25% van de waarnemingsgetallen ligt tussen 140 en 160
- de 25% grootste waarnemingsgetallen ligt tussen 160 en 240.

Elk deel van de boxplot bevat 25% van de waarnemingsgetallen.

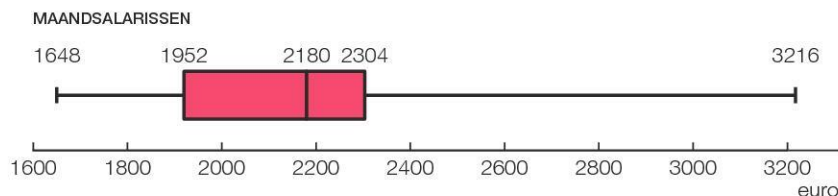
Het verschil tussen het grootste en kleinste waarnemingsgetal heet de **spreidingsbreedte**. In de figuur is de spreidingsbreedte $240 - 80 = 160$. De breedte van de **box** in de boxplot heet de **interkwartielafstand** (ook wel kwartielafstand). In de figuur is de interkwartielafstand $160 - 110 = 50$.

spreidingsbreedte = maximum – minimum

interkwartielafstand = $Q_3 - Q_1$

38
📅

Van de 250 werknemers van een ICT-bedrijf is het maandsalaris in een boxplot verwerkt. Zie de figuur hieronder.



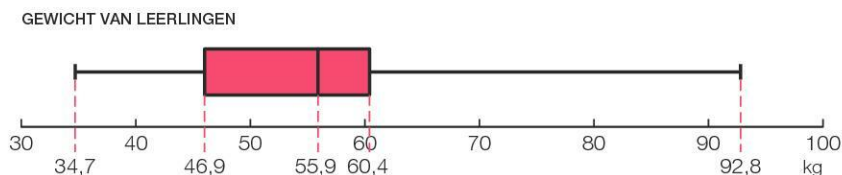
figuur 2.9

- Bereken de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.
- Hoeveel werknemers hebben een maandsalaris tussen 1952 en 2304 euro?
- Wat weet je van de maandsalarissen van de 25% werknemers met de hoogste maandsalarissen?

39



Van een grote scholengemeenschap zijn de gewichten van alle 2184 leerlingen genoteerd. Er is bij deze data een boxplot gemaakt. Zie figuur 2.10.



figuur 2.10

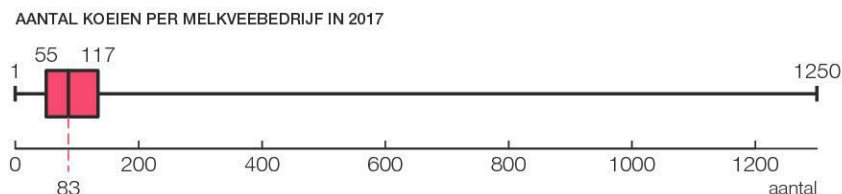
Een leerling trekt uit bovenstaande gegevens de volgende conclusies. Geef bij elke conclusie aan of deze juist is of onjuist. Licht toe.

- Er zijn meer leerlingen die een gewicht hebben tussen 60,4 en 92,8 kg dan tussen 55,9 en 60,4 kg.
- Er zijn meer dan 550 leerlingen die lichter zijn dan 46,9 kg.
- Er vallen minder leerlingen binnen dan buiten de box.
- Meer dan driekwart van de leerlingen is lichter dan het gemiddelde van het kleinste en grootste gewicht.

A40



Er wordt al jaren onderzoek gedaan naar het aantal melkkoeien per melkveebedrijf in Nederland. Zie de boxplot.



figuur 2.11

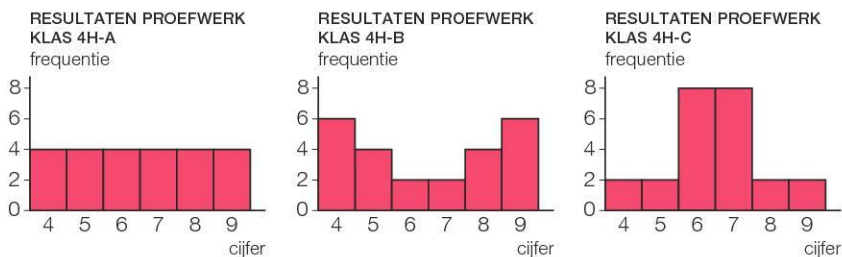
In 2017 waren er 18 056 melkveebedrijven.

- Hoeveel bedrijven hebben meer dan 83 koeien?
- Is het gemiddelde hoger of lager dan de mediaan? Licht toe.
- Verbeter de volgende bewering zodat deze correct wordt.
Er zijn meer bedrijven met meer dan 117 koeien dan bedrijven met minder dan 55 koeien.
- Onderzoek of de volgende bewering kan kloppen.
De bedrijven met meer dan 117 koeien hebben samen meer koeien dan de bedrijven met minder dan 117 koeien.
- Geef een schatting van het aantal bedrijven met minder dan 100 koeien.



Drie klassen maken hetzelfde proefwerk. Van elke klas is het gemiddelde cijfer 6,5 en de spreidingsbreedte 5. Toch is er verschil in spreiding, zie figuur 2.12.

Omschrijf dit verschil.



figuur 2.12

Theorie C De standaardafwijking

Twee groepen met gelijke mediaan of gelijk gemiddelde kunnen nog steeds sterk verschillen. Om meer informatie te geven over een groep kun je gebruikmaken van een **spreadingsmaat**. Een spreidingsmaat drukt de mate van spreiding van de gegevens uit in een getal.

De eenvoudigste spreidingsmaat is de spreidingsbreedte, maar deze is zeer gevoelig voor uitschieters.

De interkwartielafstand heeft dit nadeel niet en is een voorbeeld van een spreidingsmaat die vaak in combinatie met de mediaan wordt gebruikt.

De meest gebruikte spreidingsmaat is de **standaardafwijking**, ook wel de **standaarddeviatie** genoemd.

De standaardafwijking wordt vaak in combinatie met het gemiddelde gebruikt. De gebruikelijke notatie voor de standaardafwijking is σ , dat is de Griekse letter sigma. Net als het gemiddelde maakt de standaardafwijking gebruik van alle waarnemingsgetallen.

De standaardafwijking geeft een indruk van de gemiddelde afwijking van de waarnemingsgetallen tot het gemiddelde.

De standaardafwijking met de hand berekenen is een hele klus en daarom wordt dat bijna altijd elektronisch gedaan. Om de standaardafwijking met de hand te berekenen, ga je als volgt te werk:

- 1 Bereken het gemiddelde van de waarnemingsgetallen.
- 2 Bereken voor elk waarnemingsgetal het verschil met het gemiddelde, dus waarnemingsgetal – gemiddelde.
- 3 Tel de kwadraten van al deze verschillen bij elkaar op.
- 4 Deel de uitkomst door het aantal waarnemingsgetallen.
- 5 Neem de wortel van deze uitkomst. Dit getal is de standaardafwijking van de waarnemingsgetallen.

42



Coen heeft de volgende getallen in zijn schrift staan.

rij A:	0, 2, 3, 4, 6
rij B:	10, 12, 13, 14, 16
rij C:	3, 3, 3, 3, 3

figuur 2.13

- Bereken de standaardafwijking van rij A.
- Hoe komt het dat de standaardafwijkingen van de rijen A en B gelijk zijn?
- Geef de standaardafwijking van rij C.

43



Meneer Boers heeft in zijn klas een toets afgenomen. De cijfers variëren van 2,8 tot en met 9,4. Het gemiddelde is 6,2.

- Hij berekent $\sigma = 5,3$.
Licht toe waarom dit niet kan kloppen.

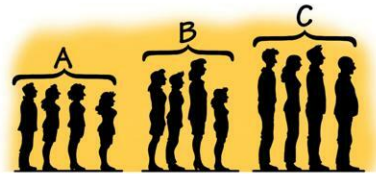
Na het bespreken van de toets blijkt dat meneer Boers een fout heeft gemaakt bij het tellen van de punten. Het cijfer 2,8 moet een 3,9 zijn.

- Is de standaardafwijking hierdoor groter of kleiner geworden? Licht toe.

A44

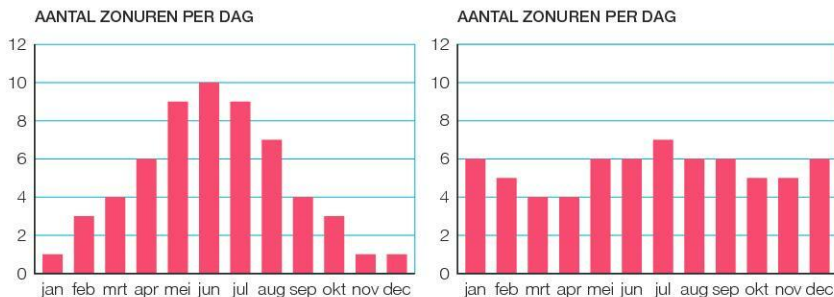


- Bij welke van de groepen hiernaast is de standaardafwijking van de lengte het grootst? Licht toe.



figuur 2.14

- In onderstaande figuren kun je voor iedere maand het gemiddeld aantal zonuren per dag in de steden Helsinki en Quito aflezen. De standaardafwijking bij Helsinki is groter dan bij Quito. Welke van de twee figuren hoort bij Quito? Licht toe.



figuur 2.15

Terugblik

Centrummaten

Gemiddelde, mediaan en modus zijn centrummaten.

Elke centrummaat heeft voor- en nadelen. Het hangt van de situatie af welke centrummaat de voorkeur heeft. Zo kun je bijvoorbeeld het gemiddelde niet gebruiken bij een kwalitatieve variabele.

VOOR- EN NADELEN BIJ DRIE CENTRUMMATEN

	voordeel	nadeel
gemiddelde	gebruikt alle waarnemingsgetallen	gevoelig voor uitschieters
mediaan	ongevoelig voor uitschieters	alleen de grootte van de middelste waarneming(en) is van belang
modus	geschikt voor elk type variabele	is er niet altijd

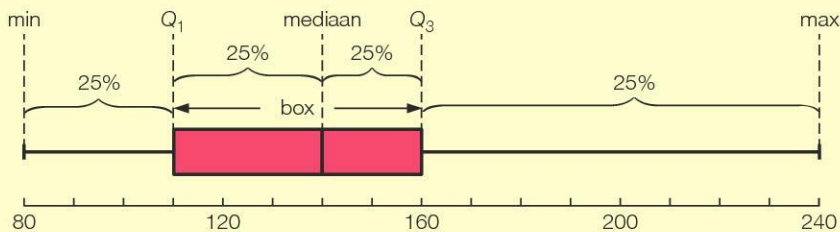
Boxplot

De mediaan verdeelt een serie waarnemingsgetallen in twee groepen, die beide bestaan uit 50% van de waarnemingsgetallen. Van elk van deze even grote groepen kun je weer de mediaan bepalen. Er ontstaat dan een verdeling in vier groepen, die elk 25% van de waarnemingsgetallen bevatten.

De mediaan van de eerste helft heet het eerste kwartiel. Notatie Q_1 .

De mediaan van de tweede helft heet het derde kwartiel. Notatie Q_3 .

Een boxplot is een diagram dat de spreiding van data in beeld brengt. Alleen bij een kwantitatieve variabele kun je een boxplot maken.



Spreidingsmaten

Je kunt de volgende spreidingsmaten gebruiken:

- spreidingsbreedte = grootste waarnemingsgetal – kleinste waarnemingsgetal
- interkwartielafstand = derde kwartiel – eerste kwartiel
- standaardafwijking (notatie σ)

De standaardafwijking gebruikt men vaak in combinatie met het gemiddelde.

De interkwartielafstand wordt vaak samen met de mediaan gebruikt.

De standaardafwijking geeft een indruk van de gemiddelde afwijking van de waarnemingsgetallen tot het gemiddelde.

2.4 Representatie van data

O45
📊🔍*

Anneke heeft een tijdje bijgehouden hoeveel euro zij uit geeft in de supermarkt. De bedragen, afgerond op gehele euro's, staan hieronder.

55	28	36	68	21	17	65
32	20	26	15	58	11	43
57	69	33	27	47	38	56
29	25	14	18	16	51	44

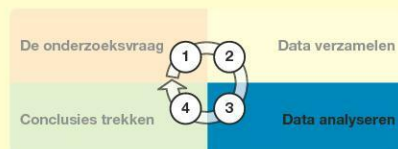
Waarom is het niet zinvol hierbij een frequentietabel te maken?



Theorie A Klassenindeling

Ook in deze paragraaf richten we ons op fase 3 van de statistische cyclus: Data analyseren.

In opgave 45 komt elk waarnemingsgetal maar één keer voor. Het heeft dan geen zin een frequentietabel te maken, want alleen de frequentie 1 komt voor. Om een beter inzicht te krijgen in de bedragen kun je de bedragen indelen in groepen. Deze groepen heten **klassen**.



Omdat het kleinste bedrag 11 euro is en het grootste 69 euro, is een verstandige **klassenindeling** $[10, 20)$, $[20, 30)$, $[30, 40)$, $[40, 50)$, $[50, 60)$ en $[60, 70)$.

Bij de klasse $[10, 20)$ geef je met $[$ aan dat 10 wel tot de klasse behoort en met $)$ dat 20 niet tot de klasse behoort.

Bij deze klasse heten 10 en 20 de **klassengrenzen**.

De **klassenbreedte** is $20 - 10 = 10$.

Het **klassenmidden** is $\frac{10 + 20}{2} = 15$.

De klasse $[10, 20)$ loopt van 10 tot 20.
Bij $\langle 10, 20]$ hoort 10 niet bij de klasse en 20 wel.

Aan een frequentietabel met een klassenindeling is niet meer te zien van welke waarnemingsgetallen is uitgegaan.

Om een benadering te krijgen van het gemiddelde kun je gebruikmaken van de klassenmiddens.

In plaats van de modus spreken we bij een klassenindeling van de **modale klasse**, dat is de klasse met de grootste frequentie.

Ook de mediaan is bij een klassenindeling niet meer te berekenen. Je kunt wel berekenen in welke klasse de mediaan ligt.

Voorbeeld

Van een aantal leerlingen is het gewicht vastgesteld.
Zie de frequentietabel hiernaast.

- Bereken het gemiddelde gewicht met behulp van klassenmiddens.
- In welke klasse ligt de mediaan?
- Geef de modale klasse.

Uitwerking

- totale frequentie = $4 + 7 + 12 + 14 + 5 + 8 = 50$

$$\text{gemiddelde} = \frac{4 \cdot 52,5 + 7 \cdot 57,5 + \dots + 8 \cdot 77,5}{50} = 65,8 \text{ kg}$$

- De mediaan is het gemiddelde van het 25^e en 26^e getal, dit ligt in de klasse $[65, 70)$.
- De modale klasse is $[65, 70)$.

GEWICHT LEERLINGEN IN KG

gewicht	frequentie
$[50, 55)$	4
$[55, 60)$	7
$[60, 65)$	12
$[65, 70)$	14
$[70, 75)$	5
$[75, 80)$	8

In de eerste drie klassen zitten $4 + 7 + 12 = 23$ getallen.

46
☐ ⊗ *

Van een aantal levensmiddelen in een supermarkt is de prijs genoteerd. Zie de frequentietabel hiernaast.

- Heb je hier te maken met een continue of een discrete variabele? Licht toe.
- Een zak snoep kost € 3,00. In welke klasse valt dit?
- Bereken de gemiddelde prijs met behulp van klassenmiddens.
- In welke klasse ligt de mediaan?
- Geef de modale klasse.

PRIJS LEVENSMIDDELEN

prijs in centen	frequentie
$\langle 0, 100]$	26
$\langle 100, 200]$	17
$\langle 200, 300]$	21
$\langle 300, 400]$	8
$\langle 400, 500]$	13
$\langle 500, 600]$	2

A47
☐

Bij een onderzoek in een winkelcentrum is van elke winkel het aantal werknemers en het aantal m² vloeroppervlakte vastgesteld.

winkel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aantal werknemers	6	8	18	25	7	4	22	16	12	8
vloeroppervlakte in m ²	125	85	240	325	412	72	450	315	65	82

winkel	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
aantal werknemers	18	23	14	9	4	8	8	28	9	19
vloeroppervlakte in m ²	180	521	228	172	88	56	185	270	120	438

- Maak een frequentietabel bij de vloeroppervlakte in m². Neem de klassen $[50, 150)$, $[150, 200)$, ...
- Wat is de modale klasse bij de vloeroppervlakte?
- Met behulp van de gegeven tabel kun je berekenen dat de gemiddelde vloeroppervlakte per werknemer ongeveer 16,7 m² is.
Bereken de gemiddelde vloeroppervlakte per werknemer door de klassenmiddens van de frequentietabel bij vraag a te gebruiken.
Verklaar het verschil tussen de twee gemiddelden.

A48 Aan de docenten van het Noorderveld College is gevraagd hoe oud ze zijn. Zie de frequentietabel hiernaast.

- Mevrouw Van Santen is 35 jaar.
In welke leeftijdsklasse valt ze?
- Een docent Frans zegt dat de gemiddelde leeftijd van de docenten 40 jaar is.
Onderzoek of dit kan kloppen.
- Kan de mediaan 47 jaar zijn? Licht toe.
- Conciërge Erwin beweert dat de modus van de leeftijden 36 is.
Waarom kan dit niet kloppen?

DOCENTEN N.C.	
leeftijd	frequentie
[25, 35>	18
[35, 45>	3
[45, 55>	40
[55, 65>	9
[65, 75>	2

49 Hiernaast staat het *steel-bladdiagram* bij het aantal werknemers per winkel in een winkelcentrum. Van het aantal 32 op de onderste regel is 3 de steel (het aantal tientallen) en 2 het blad (het aantal eenheden).

- Geef de modus.
- Bereken de spreidingsbreedte.
- Bereken de interkwartielafstand.
- Een steel-bladdiagram kun je opvatten als een bijzondere klassenindeling.
Wat zijn de klassen van het gegeven steel-bladdiagram?

AANTAL WERKNEMERS	
0	3 4 4 4 6 6 7 7 8 8 8 9 9
1	2 4 6 6 8 8 8 8 9
2	0 2 3 5 8
3	2 3 4
tientallen	eenheden

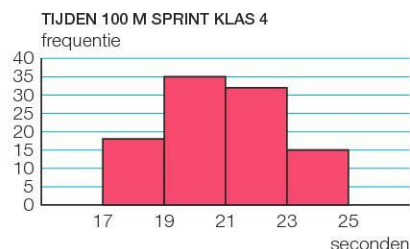
50 Aan een groep ouders is gevraagd op welke leeftijd van de man en de vrouw het eerste kind geboren is. Zie het een *dubbel steel-bladdiagram* hiernaast.

- Hoeveel ouderparen zijn ondervraagd?
- Hoeveel mannen van deze groep waren 33 jaar bij de geboorte van het eerste kind? En hoeveel vrouwen waren 35 jaar?
- Hoeveel mannen waren jonger dan 30 jaar? En hoeveel vrouwen?
- Luuk maakt een klassenindeling van de mannen en vrouwen samen. Hij neemt als eerste klasse [18, 24).
Hoeveel personen komen er in de klasse [30, 36)?
En hoeveel in de hoogste klasse?

LEEFTIJD OUDERS BIJ GEBORTE EERSTE KIND		
man		vrouw
9	1	8 9 9 9
6 5 5 3 3	2	0 0 2 3
6 4 4 3 0	3	5 5
8 4 3	4	0 1 2 2 3 3
1 0	5	
eenheden	tientallen	eenheden

051 Zie het staafdiagram hiernaast.

- Heb je hier met een kwalitatieve of kwantitatieve variabele te maken?
- Waarom staan op de horizontale as de getallen bij de grenzen van de staven?
- Waarom staan de staven niet los van elkaar?



figuur 2.16

Theorie B Histogram en frequentiepolygoon

In de figuur hiernaast is een **histogram** getekend. Bij een histogram staat op de horizontale as een kwantitatieve variabele. Is deze variabele discreet en is er geen klassenindeling gebruikt, dan staan de getallen onder de staven. Heb je te maken met een klassenindeling dan staan de klassengrenzen bij de grenzen van de staven. De staven in een histogram staan tegen elkaar aan.

Een histogram is een staafdiagram met een kwantitatieve variabele op de horizontale as. De staven staan tegen elkaar aan.

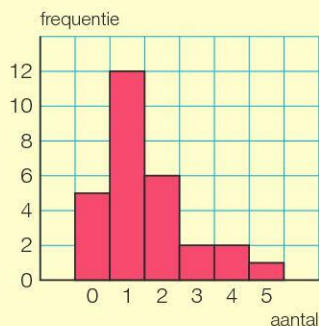
Bij een kwalitatieve variabele kun je geen histogram maken. Je kunt wel een staafdiagram maken, de staven staan dan los van elkaar.

In figuur 2.18 is bij het histogram in figuur 2.17 de **frequentiepolygoon** getekend. Een frequentiepolygoon is een lijndiagram waarin de frequenties zijn uitgezet tegen de waarnemingsgetallen.

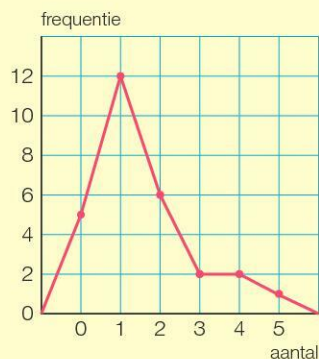
Omdat het hier een discrete variabele betreft waarbij geen klassenindeling is gebruikt, is boven elk waarnemingsgetal een stip gezet. De hoogte van de stip komt overeen met de frequentie van het waarnemingsgetal. Bij een klassenindeling zou die stip boven het klassenmidden geplaatst zijn. Door de opeenvolgende stippen te verbinden met lijnstukken krijg je de frequentiepolygoon. Een frequentiepolygoon begint en eindigt op de horizontale as.

Een frequentiepolygoon is een lijndiagram waarin de frequenties zijn uitgezet tegen de waarnemingsgetallen. Het begin- en eindpunt liggen op de horizontale as.

In figuur 2.18 is een frequentiepolygoon getekend bij absolute frequenties. Je kunt dat ook doen bij relatieve frequenties. Je krijgt dan de **relatieve frequentiepolygoon**.



figuur 2.17



figuur 2.18

Een frequentiepolygoon is alleen te gebruiken bij een kwantitatieve variabele.

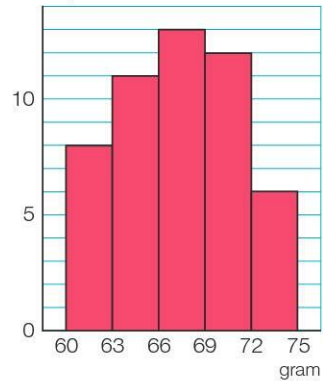
52



Van 50 eieren is het gewicht vastgesteld. De resultaten zijn verwerkt in de figuur hiernaast met als eerste klasse $[60, 63)$.

- Met welke variabele heb je hier te maken? Is deze variabele kwalitatief of kwantitatief?
- Geef de modale klasse.
- Matthijs beweert dat het totale gewicht van de eieren tussen 3291 en 3441 gram ligt. Toon aan dat hij gelijk heeft.
- Onderzoek of het mogelijk is dat het gemiddelde gewicht van de eieren buiten de klasse $[66, 69)$ ligt.

GEWICHT EIEREN
frequentie



figuur 2.20

53



Boer Jopma heeft bij een partij eieren de tabel hiernaast gemaakt.

- Is de variabele klasse kwalitatief of kwantitatief? Licht toe.
- Jopma wil weten wat het gemiddelde gewicht van deze partij eieren ongeveer is. Kan hij dit berekenen met de gegevens in de tabel? Licht toe.
- Jopma wil de gegevens uit de tabel verwerken in een staafdiagram. Waarom kan hij geen histogram gebruiken?

EIEREN BOER JOPMA

klasse	gewicht in gram	aantal
S	$\langle \leftarrow, 53 \rangle$	441
M	$[53, 63)$	541
L	$[63, 73)$	533
XL	$[73, \rightarrow)$	216

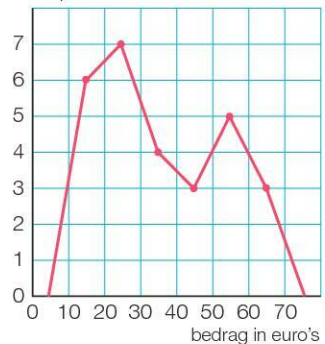
54



Voor een aantal winkels is de gemiddelde besteding per klant (gemiddeld bonbedrag) verwerkt in een klassenindeling met als eerste klasse $[10, 20)$. In de figuur hiernaast zie je de bijbehorende frequentiepolygoon.

- Met welke variabele heb je hier te maken? Is deze variabele discreet of continu? Licht toe.
- Wat is het laagst mogelijke bonbedrag?
- Van hoeveel winkels is het gemiddeld bonbedrag in de figuur verwerkt?
- In welke klasse ligt de mediaan?
- Bereken de relatieve frequentie van de klasse $[50, 60)$.

GEMIDDELD BONBEDRAG
frequentie

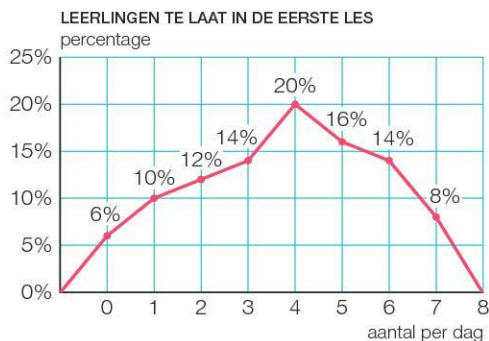


figuur 2.19

A55
  

De verzuimbeheerder op het Dominicus College heeft een aantal dagen bijgehouden hoeveel leerlingen te laat in hun eerste les kwamen. Tot haar schrik kwam het tijdens de onderzoeksperiode 33 dagen voor dat er meer dan vijf leerlingen te laat in hun eerste les waren. Alle data van haar onderzoek staat verwerkt in de relatieve frequentiepolygoon hiernaast.

- Is het mogelijk om bij deze gegevens een histogram te maken?
Licht toe.
- Bereken het gemiddeld aantal leerlingen dat te laat kwam in de eerste les.
- Hoeveel dagen duurde het onderzoek?
- Bereken hoe vaak de verzuimbeheerder genoteerd heeft dat een leerling te laat in de eerste les kwam.



figuur 2.21

O56
  

In de tabel hiernaast vind je een klassenindeling bij de lengte van mannelijke sporters op de Olympische Spelen van 2012.

- Diego Castillo is een zwemmer met een lengte van 175 cm. Bereken hoeveel procent van de sporters in de tabel kleiner is dan Diego.
- Camille Lacourt is een zwemmer met een lengte van 2 meter die deelnam aan deze Olympische Spelen. Uit de tabel volgt dat Camille bij de 5% langste sporters hoort.
Laat zien dat dit klopt.

Voor het onderling vergelijken van resultaten maakt men soms gebruik van het begrip *percentielscore*. Deze score geeft in een getal weer hoeveel procent van de resultaten dezelfde waarde of lager heeft.

- Bij de lengte van een mannelijke sporter uit de tabel hoort een percentielscore van 65.
Wat weet je over zijn lengte?
- Welke percentielscore hoort bij de mediaan?

LENGTE MANNELIJKE
OLYMPISCHE SPORTERS

lengte	rel. freq.
$\langle \leftarrow, 155 \rangle$	0,3%
$[155, 160 \rangle$	0,7%
$[160, 165 \rangle$	2,4%
$[165, 170 \rangle$	5,9%
$[170, 175 \rangle$	12,2%
$[175, 180 \rangle$	16,3%
$[180, 185 \rangle$	20,4%
$[185, 190 \rangle$	17,2%
$[190, 195 \rangle$	13,0%
$[195, 200 \rangle$	6,9%
$[200, 205 \rangle$	3,0%
$[205, 210 \rangle$	1,1%
$[210, 215 \rangle$	0,4%
$[215, \rightarrow \rangle$	0,2%

Theorie C Cumulatieve frequentiepolygoon

Tel je bij de frequentie van een waarnemingsgetal ook alle voorgaande frequenties mee, dan krijg je de

cumulatieve frequentie. Wanneer je met cumulatieve frequenties in procenten te maken hebt, noem je het resultaat de **relatieve cumulatieve frequentie**.

Bij de tabel hiernaast bereken je de cumulatieve frequentie van de klasse $[30, 40)$ door de frequentie van deze klasse én alle voorgaande klassen op te tellen.

De cumulatieve frequentie van de klasse $[30, 40)$ is

$$\begin{array}{c} 6 \\ \uparrow \\ \text{frequentie} \\ \text{van } [10, 20) \end{array} + \begin{array}{c} 7 \\ \uparrow \\ \text{frequentie} \\ \text{van } [20, 30) \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \uparrow \\ \text{frequentie} \\ \text{van } [30, 40) \end{array} = 17$$

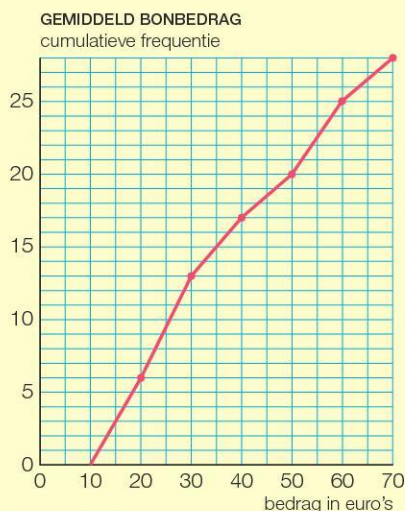
GEMIDDELD BONBEDRAG

bedrag in euro's	frequentie
$[10, 20)$	6
$[20, 30)$	7
$[30, 40)$	4
$[40, 50)$	3
$[50, 60)$	5
$[60, 70)$	3

Er zijn dus 17 winkels waarbij het gemiddeld bonbedrag minder dan 40 euro is. En zo zijn er $6 + 7 + 4 + 3 + 5 + 3 = 28$ winkels waarbij het gemiddeld bonbedrag minder dan 70 euro is.

In figuur 2.22 is de **cumulatieve frequentiepolygoon** getekend. De punten zijn uitgezet boven de *rechtergrens* van elke klasse. Uit deze figuur kun je aflezen dat er 20 winkels zijn met een gemiddeld bonbedrag van minder dan 50 euro. En ook kun je aflezen dat er $28 - 17 = 11$ winkels zijn met een gemiddeld bonbedrag van minstens 40 euro.

Een frequentiepolygoon bij relatieve cumulatieve frequenties heet een **relatieve cumulatieve frequentiepolygoon**.



figuur 2.22

R57



Waarom worden (relatieve) cumulatieve frequenties in een polygoon uitgezet boven de rechterklassengrenzen?

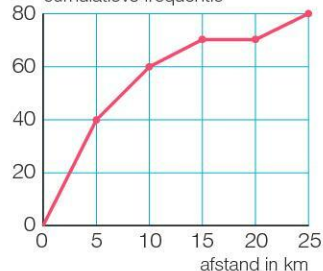
58



Van een groep studenten is de afstand huis-school genoteerd. Zie de cumulatieve frequentiepolygoon in figuur 2.23, waarbij de eerste klasse $[0, 5)$ is.

- Hoeveel studenten zijn bij het onderzoek betrokken?
- Hoeveel studenten wonen minder dan 10 km van school?
- Hoeveel studenten wonen minstens 20 km van school?
- Hoeveel studenten wonen minstens 10 km, maar minder dan 20 km van school?
- Teken een histogram bij figuur 2.23.

AFSTAND HUIS-SCHOOL
cumulatieve frequentie

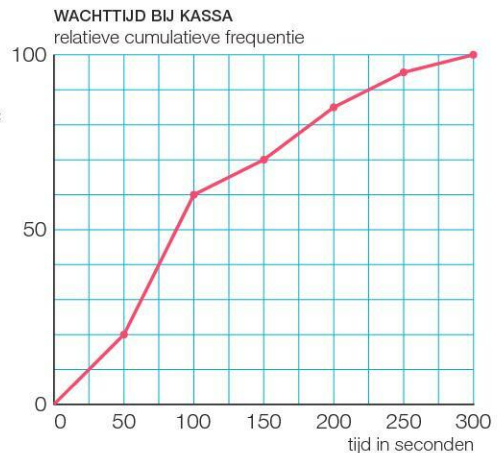


figuur 2.23

59


In een supermarkt is bijgehouden hoeveel seconden een klant in de rij bij de kassa staat tot hij aan de beurt is. De wachttijden van 300 klanten zijn verwerkt in de relatieve cumulatieve frequentiepolygoon in figuur 2.24, waarbij de eerste klasse $[0, 50)$ is.

- Hoeveel procent van de klanten stond minder dan 100 seconden in de rij? Hoeveel klanten zijn dat?
- Hoeveel klanten stonden minder dan 200 seconden in de rij?
- Hoeveel klanten moesten minstens 2,5 minuut wachten?
- Hoeveel klanten moesten minstens 100, maar minder dan 200 seconden wachten?

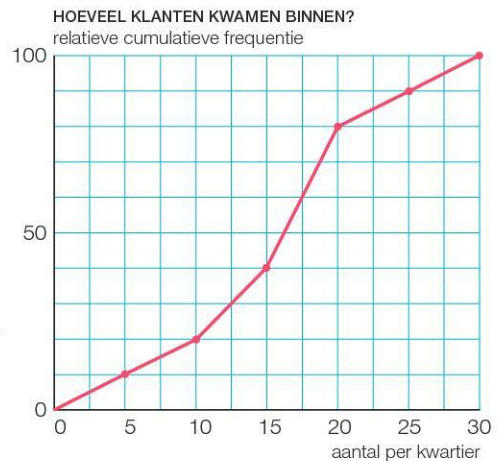


figuur 2.24

A60


In een winkel is op een dag van 10:00 tot 20:00 uur genoteerd hoeveel klanten er per kwartier de winkel binnenkwamen. Zie figuur 2.25, waarbij de eerste klasse $[0, 5)$ is.

- Hoeveel kwartieren kwamen minder dan 20 klanten binnen?
- Hoeveel kwartieren kwamen minstens 15 klanten binnen?
- Hoeveel kwartieren kwamen minstens 10, maar minder dan 25 klanten de winkel binnen?
- Maak bij figuur 2.25 een frequentietabel met absolute frequenties.



figuur 2.25

061


Het eerste kwartiel, de mediaan en het derde kwartiel verdelen een serie waarnemingsgetallen in vier groepen.

Geef de relatieve cumulatieve frequentie van Q_1 , van de mediaan en van Q_3 .

Theorie D Presentaties in elkaar omzetten

Data van een onderzoek wordt meestal gepresenteerd in diagrammen en tabellen. Daarom wordt een diagram of tabel ook wel een **presentatie** (of **representatie**) van de data genoemd. Welke presentatie de voorkeur heeft hangt af van de data en wat de onderzoeker wil laten zien.

Het is belangrijk presentaties in elkaar om te kunnen zetten zodat met verschillende presentaties gewerkt kan worden. Let op dat na het omzetten soms niet alle oorspronkelijke data meer zichtbaar is. Bij het maken van een boxplot of klassenindeling gaat er bijvoorbeeld informatie verloren. Wanneer je berekeningen maakt op basis van dit soort presentaties krijg je een benadering.

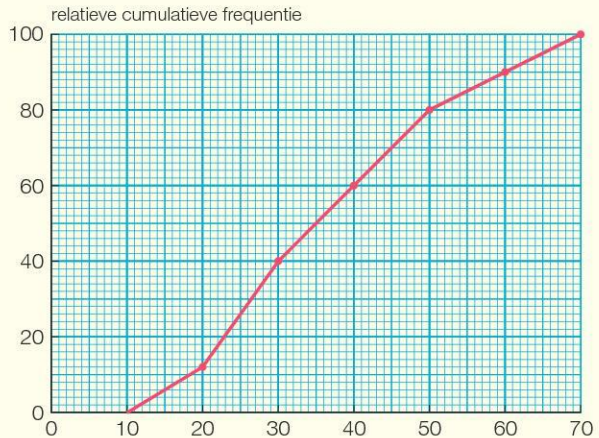
In het voorbeeld wordt bij een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon een boxplot gemaakt. Een boxplot geeft een duidelijker overzicht van de spreiding van de gegevens.

Voorbeeld

Zie de relatieve cumulatieve frequentiepolygoon hiernaast. Teken bij deze figuur de boxplot.

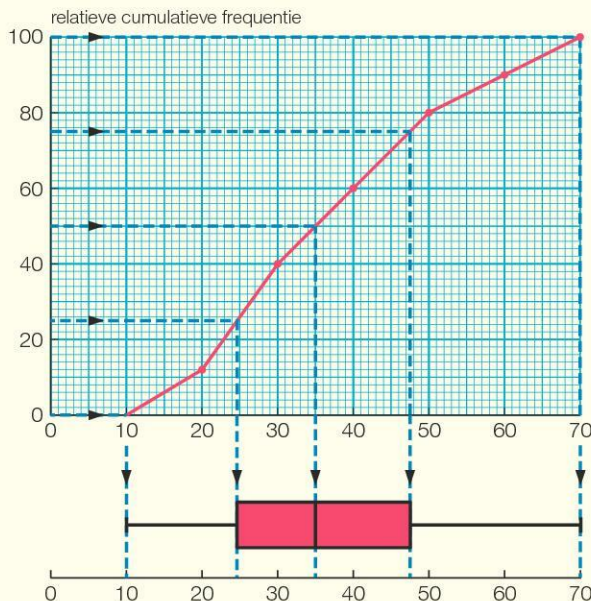
Aanpak

Bepaal de vijf getallen die voor de boxplot nodig zijn, door te kijken welke waarden bij de cumulatieve percentages 0, 25, 50, 75 en 100 horen.



figuur 2.26

Uitwerking



Laat zien hoe je te werk gaat bij het bepalen van de waarden uit een diagram. Hiernaast is dat gedaan met stippellijnen.

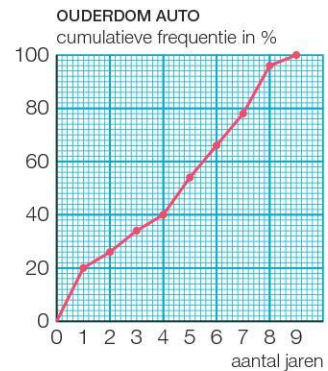


Zie het voorbeeld. In de boxplot is de mediaan bij 35 getekend. De mediaan van de oorspronkelijke data is echter 38. Verklaar dit verschil.



[▶WERKBLAD] Tijdens een autoshow wordt een groot aantal tweedehands auto's aangeboden. Figuur 2.27 geeft informatie over de ouderdom van de aangeboden auto's.

- Bepaal met behulp van figuur 2.27 de waarden van Q_1 , de mediaan en Q_3 .
- Teken de boxplot bij figuur 2.27.
- Onderzoek of een kwart van de auto's in de autoshow ouder dan 6 jaar en 2 maanden kan zijn.

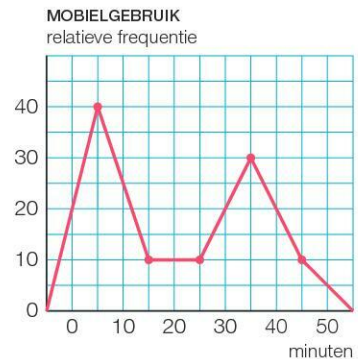


figuur 2.27



Van een aantal leerlingen is bijgehouden hoeveel minuten ze tijdens een pauze hun mobiel gebruikten. De resultaten zijn verwerkt in de relatieve frequentiepolygoon in figuur 2.28, waarbij de eerste klasse $[0, 10)$ is.

- Teken de boxplot bij figuur 2.28.
- Welke interkwartielafstand volgt uit de boxplot?
- Onderzoek of de werkelijke interkwartielafstand 38 minuten kan zijn.



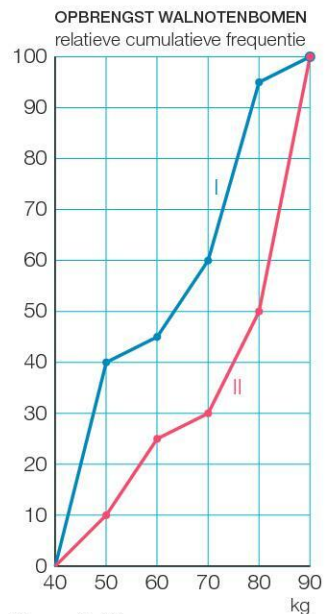
figuur 2.28



Pietro Pallina bezit twee stukken land met walnotenbomen. Op perceel I staan 200 bomen, op perceel II staan 160 bomen.

De opbrengst per boom in kg is verwerkt in figuur 2.29, waarbij de eerste klasse $[40, 50)$ is.

- Teken de relatieve frequentiepolygoon voor perceel I.
- Hoeveel bomen van perceel I brachten minstens 60, maar minder dan 70 kg op?
- Teken het histogram met absolute frequenties voor perceel II.
- Benader met behulp van de klassenmiddens de gemiddelde opbrengst per boom op perceel II.



figuur 2.29

Terugblik

Steel-bladdiagram en klassenindeling

Een manier om (kleine hoeveelheden) data overzichtelijk te ordenen is een steelbladdiagram. Van het getal 40 op de onderste regel is 4 de steel en 0 het blad.

STEEL-BLADDIAGRAM

2	1 3 5 5 6 7 8 9
3	1 1 2 3 3 4 4 4 6 6 8 8 9
4	0 0 2 3
tientallen	eenheden

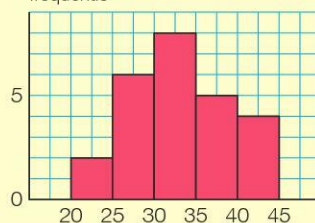
klasse	frequentie
[20, 25)	2
[25, 30)	6
[30, 35)	8
[35, 40)	5
[40, 45)	4

Hiernaast staat een klassenindeling bij deze data.

Bij de klasse [20, 25) doet de linkergrens 20 mee, maar de rechtergrens 25 niet. De klassenbreedte van deze klasse is 5 en het klassenmidden is 22,5. Een nadeel van een klassenindeling is het verlies aan informatie. Zo kun je in de klasse [20, 25) niet meer zien welke waarde de twee metingen hadden.

Maak je bij een klassenindeling een histogram, dan staan de klassengrenzen tussen de staven, zie hiernaast.

HISTOGRAM
frequentie



Frequentiepolygoon en cumulatieve frequentiepolygoon

Bij een frequentietabel van een kwantitatieve variabele is een frequentiepolygoon te maken.

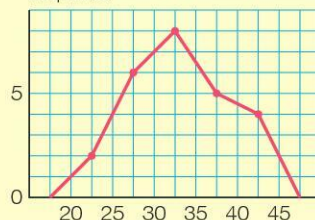
Een frequentiepolygoon is een lijndiagram waarin frequenties zijn uitgezet tegen de waarnemingsgetallen. Begin- en eindpunt liggen op de horizontale as.

Bij een relatieve frequentiepolygoon zet je de relatieve frequenties uit tegen de waarnemingsgetallen.

Door bij de frequentie van een waarneming alle frequenties van voorgaande waarnemingen op te tellen, krijg je de cumulatieve frequentie. Bij de klasse [30, 35) hoort de cumulatieve frequentie $2 + 6 + 8 = 16$.

Een frequentiepolygoon bij cumulatieve frequenties heet een cumulatieve frequentiepolygoon. Let erop dat de cumulatieve frequentie altijd boven de *rechterklassengrens* wordt uitgezet.

FREQUENTIEPOLYGOON
frequentie



CUMULATIEVE
FREQUENTIEPOLYGOON
cumulatieve frequentie



Diagrammen omzetten

Diagrammen helpen om data te presenteren. Een diagram wordt daarom ook wel een presentatie of representatie van de data genoemd.

Op deze pagina staat een aantal representaties van dezelfde data. Let op dat bij het maken van een boxplot of een klassenindeling informatie verloren gaat.

2.5 Conclusies trekken

O66
  *

Bij het examen uitje in havo 5 kunnen de leerlingen kiezen tussen zeilen of naar Disneyland Parijs. In de tabel hiernaast zie je wat de leerlingen hebben gekozen.

- Met welke variabelen heb je in de tabel te maken? Zijn deze variabelen kwalitatief of kwantitatief? Licht toe.
- Vind je dat er een groot, middelmatig of gering verschil is tussen de keuze van de jongens en de meisjes?

	bestemming		
	zeilen	Disneyland	
jongen	21	18	39
meisje	15	31	46
	36	49	85

Theorie A Verschillen kwantificeren bij nominale variabelen

In deze paragraaf richten we ons op fase 4 van de statistische cyclus: Conclusies trekken.

Je leert conclusies trekken over de grootte van een verschil tussen twee groepen. Om zo'n conclusie te trekken bereken je eerst een **associatiemaat**.

Een associatiemaat drukt in een getal uit hoeveel twee groepen van elkaar verschillen. Een ander woord voor in een getal uitdrukken is **kwantificeren**.

In opgave 66 staat een tabel met de nominale variabele geslacht, die de waarden jongen en meisje heeft, en de nominale variabele bestemming, die de waarden zeilen en Disneyland heeft. Een tabel als deze, die de frequentie weergeeft bij elke combinatie van waarden, heet een **kruistabel**. Vaak worden ook de totale frequenties bij de kruistabel genoteerd.

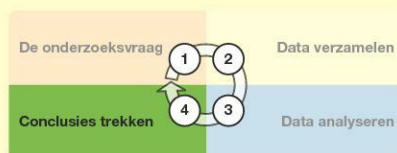
Bij twee nominale variabelen met elk twee waarden gebruiken we als associatiemaat de **phi-coëfficiënt**.

Bij de 2×2 kruistabel hiernaast bereken je de phi-coëfficiënt met

$$\phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}$$

Bij de phi-coëfficiënt hanteren we de volgende vuistregels om een conclusie te trekken over de grootte van het verschil tussen twee groepen.

- Bij $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$ zeggen we *het verschil is groot*.
- Bij $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$ zeggen we *het verschil is middelmatig*.
- Bij $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ zeggen we *het verschil is gering*.

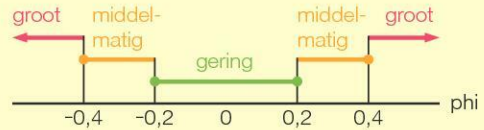


Het woord associatie wordt gebruikt wanneer verschillende dingen met elkaar in verband worden gebracht.

	waarde I	waarde II	
waarde 1	a	b	$a + b$
waarde 2	c	d	$c + d$
	$a + c$	$b + d$	

Hiernaast staan deze vuistregels schematisch weergegeven.

VUISTREGELS PHI-COËFFICIËNT



De associatiematen en vuistregels voor het bepalen van de grootte van het verschil staan bij het centraal examen op een formuleblad. Je hoeft ze dus niet uit het hoofd te leren.

Voorbeeld

Er is onderzoek gedaan naar de tevredenheid over de woonsituatie. Daarbij is onderscheid gemaakt tussen huurwoningen en koopwoningen. Zie de tabel.

Onderzoek met behulp van de phi-coëfficiënt of het verschil in tevredenheid groot, middelmatig of gering is.

	tevredenheid		
	ontevreden	tevreden	
huurwoning	485	3172	3657
koopwoning	180	6163	6343
	665	9335	10 000

Uitwerking

$$\phi = \frac{485 \cdot 6163 - 180 \cdot 3172}{\sqrt{3657 \cdot 6343 \cdot 665 \cdot 9335}} \approx 0,202$$

Let op met afronden, want dat kan de conclusie beïnvloeden.

Omdat $0,2 < \phi \leq 0,4$ is het verschil gering.

67 Bereken bij opgave 66 met behulp van de phi-coëfficiënt of het verschil in bestemming tussen jongens en meisjes groot, middelmatig of gering is.

68 Bij sommige medicijnen hangt het al of niet optreden van bijwerkingen samen met de aanwezigheid van een genetische factor bij de patiënt. In deze opgave bekijken we een onderzoek onder 80 patiënten die een bepaald medicijn gebruiken. Van de patiënten hebben 29 de genetische factor die wordt onderzocht. Van de 32 patiënten die bijwerkingen hadden bleek bij 17 de genetische factor aanwezig te zijn.

- Vul de kruistabel in.
- Onderzoek met de phi-coëfficiënt of het verschil in bijwerkingen tussen de patiënten met en de patiënten zonder de genetische factor groot, middelmatig of gering is.

		bijwerkingen		
		wel	niet	
genetische factor	wel			
	niet			

A69
☐ ⊙ *

‘Windmolens voor de kust verpesten mijn strandbezoek’. Dat is de stelling die aan 2081 Nederlandse en 512 Duitse toeristen werd voorgelegd. Het Duitse deel van het onderzoek werd gedaan door onderzoeksbureau GfK (Growth from Knowledge) in opdracht van Natuur en Milieu. Het bleek dat 620 Nederlanders het eens waren met de stelling, terwijl dit aantal bij de Duitse toeristen maar 72 was.

Onderzoek met behulp van de phi-coëfficiënt of het verschil in mening tussen Duitse en Nederlandse toeristen groot, middelmatig of gering is.



E70
*

Bij een discussie wordt een gezelschap mensen verdeeld in twee even grote groepen. In de ene groep is 75% voor de stelling, terwijl in de andere groep 67% tegen de stelling is.

Onderzoek met de phi-coëfficiënt of je hier te maken hebt met een groot, middelmatig of klein verschil.

O71
☐ ⊙ *

Fenne heeft onderzoek gedaan naar de relatie tussen werksector en besteedbaar inkomen. Voor de werksector is onderscheid gemaakt tussen werken bij de overheid of in een bedrijf. Het inkomen is ingedeeld in vijf categorieën waarbij 1 het laagste inkomen is en 5 het hoogste. Zie de tabel.

- a Wat is het meetniveau van de variabele inkomen?
- b Waarom kun je hier niet de phi-coëfficiënt gebruiken om het verschil te kwantificeren?

inkomens- categorie	werksector	
	overheid	bedrijf
1	25	11
2	58	34
3	24	32
4	7	26
5	6	12

Theorie B Verschillen kwantificeren bij ordinale variabelen

Bij een ordinale variabele gebruik je de associatiemaat **maximale verschil in cumulatief percentage** (max.Vcp) om het verschil te kwantificeren.

De max.Vcp bereken je bij de gegevens van opgave 71 als volgt.

- 1 Bereken voor beide werksectoren bij elke inkomenscategorie de cumulatieve frequentie.
- 2 Bereken voor beide werksectoren bij elke inkomenscategorie het cumulatieve percentage, oftewel de relatieve cumulatieve frequentie.
- 3 Bereken bij elke inkomenscategorie het verschil van de cumulatieve percentages.
- 4 Kijk wat het grootste verschil is, dat is de max.Vcp.

In de tabel hieronder is deze berekening uitgevoerd.

	werksector				
	overheid		bedrijf		
inkomens- categorie	cum. freq.	cum. perc.	cum. freq.	cum. perc.	Vcp
1	25	20,8%	11	9,6%	11,2%
2	83	69,2%	45	39,1%	30,1%
3	107	89,2%	77	67,0%	22,2%
4	114	95,0%	103	89,6%	5,4%
5	120	100%	115	100%	0%

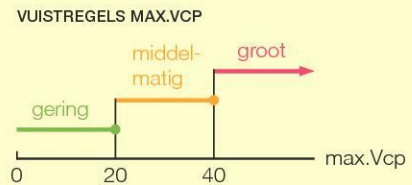
←..... max.Vcp

Bij de max.Vcp hanteren we de volgende vuistregels om een conclusie te trekken over de grootte van het verschil tussen twee groepen.

- Bij $\text{max.Vcp} > 40$ zeggen we *het verschil is groot*.
- Bij $20 < \text{max.Vcp} \leq 40$ zeggen we *het verschil is middelmatig*.
- Bij $\text{max.Vcp} \leq 20$ zeggen we *het verschil is gering*.

Hiernaast staan deze vuistregels schematisch weergegeven.

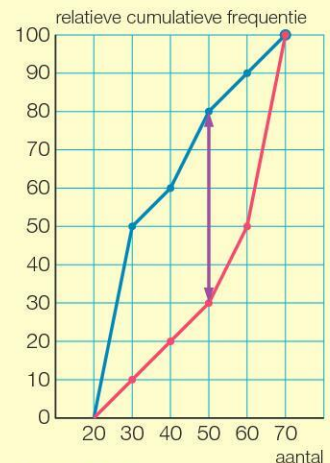
In de tabel zie je dat het maximale verschil in cumulatief percentage 30,1% is. Het verschil in inkomenscategorie tussen overheid en bedrijfsleven is middelmatig, want $20 < \text{max.Vcp} \leq 40$.



Zijn de gegevens gepresenteerd in bijvoorbeeld een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon of een stapeldiagram, dan kun je de relatieve cumulatieve frequentie direct aflezen. Je hoeft dan dus geen tabel te maken om de max.Vcp te berekenen.

Zo vind je de max.Vcp in figuur 2.30 door te zoeken naar de grootste verticale afstand tussen de twee relatieve cumulatieve frequentiepolygoenen. Dit geeft $\text{max.Vcp} = 80 - 30 = 50\%$.

Het verschil is dus groot, want $\text{max.Vcp} > 40$.



figuur 2.30

72


Carglass is een bedrijf dat autoruiten repareert. Na een reparatie wordt de klant gevraagd mee te werken aan een klanttevredenheidsonderzoek. In de tabel hieronder zie je hoe in het vierde kwartaal van 2019 de klanten van de vestigingen in Arnhem en Nijmegen hebben geantwoord bij de stelling “Ik ben snel en deskundig geholpen”.

IK BEN SNEL EN DESKUNDIG GEHOLPEN

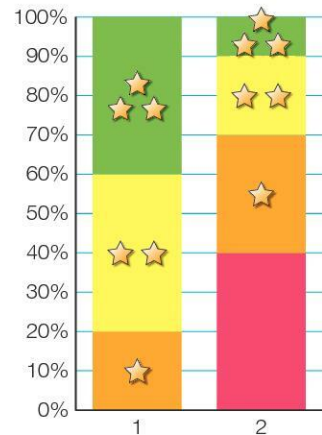
	Arnhem	Nijmegen
zeer mee oneens	5	3
mee oneens	6	1
neutraal	12	18
mee eens	38	66
zeer mee eens	64	32

Onderzoek of het verschil tussen de vestigingen in Arnhem en Nijmegen wat betreft het beantwoorden van deze stelling groot, middelmatig of gering is.

73


Voor twee hotels staan de beoordelingen in het gestapelde staafdiagram hiernaast vergeleken.

- Wat is het meetniveau van de variabele beoordeling?
- Onderzoek of het verschil in beoordeling tussen de hotels groot, middelmatig of gering is.



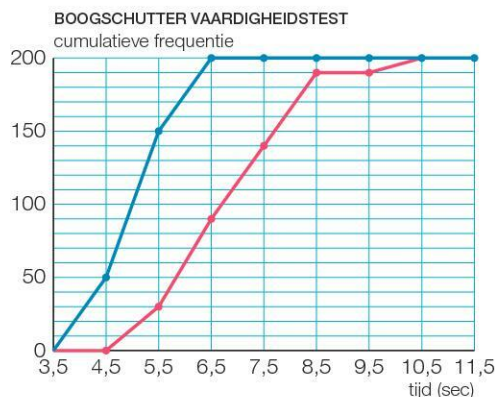
figuur 2.31

A74


Bij een vaardigheidstest wordt een groep boogschutters gevraagd om zo snel mogelijk een doelwit te raken. De proefpersonen zijn verdeeld in twee groepen:

Groep 1 had een klein doelwit.
 Groep 2 had een groot doelwit.
 De resultaten van het onderzoek zijn verwerkt in de figuur hiernaast.

- Welke cumulatieve frequentiepolygoon hoort bij het kleine doelwit? Licht toe.
- Onderzoek of het verschil in snelheid tussen de groepen groot, middelmatig of gering is.



figuur 2.32

Twee groepen met wiskunde A leerlingen hebben verschillend gescoord voor een toets. Het blijkt dat het eerste kwartiel van de ene groep gelijk is aan het derde kwartiel van de andere groep.
Vind je dat er een groot, middelmatig of gering verschil is tussen de resultaten van de twee groepen?

Theorie C Verschillen bepalen bij kwantitatieve variabelen

Voor het bepalen van de grootte van het verschil bij kwantitatieve variabelen leer je twee manieren. Deze manieren zijn **twee boxplots vergelijken** en de **effectgrootte** berekenen.

Twee boxplots vergelijken

Voor het vergelijken van twee boxplots gebruik je het eerste kwartiel, de mediaan en het derde kwartiel.

Het gedeelte tussen het eerste en het derde kwartiel heet de box.

Bij vergelijken van twee boxplots hanteren we de volgende vuistregels om een conclusie te trekken over de grootte van het verschil tussen twee groepen.

- Als de boxen elkaar niet overlappen, dan zeggen we *het verschil is groot*.
- Als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot ligt buiten de box van de andere boxplot, dan zeggen we *het verschil is middelmatig*.
- In alle andere gevallen zeggen we *het verschil is gering*.

Effectgrootte

Wanneer bij twee groepen zowel het gemiddelde als de standaardafwijking bekend is, gebruik je als associatiemaat de effectgrootte.

Je berekent de effectgrootte met de formule $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$.

$\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ zijn de gemiddelden van groep 1 en groep 2.
De bijbehorende standaardafwijkingen zijn S_1 en S_2 .
Neem $\bar{X}_1 > \bar{X}_2$, zodat de effectgrootte positief is.

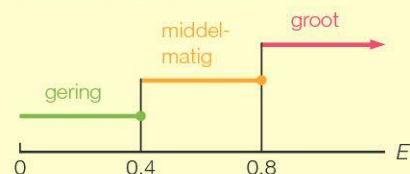
Bij effectgrootte hanteren we de volgende vuistregels om een conclusie te trekken over de grootte van het verschil tussen twee groepen.

- Bij $E > 0,8$ zeggen we *het verschil is groot*.
- Bij $0,4 < E \leq 0,8$ zeggen we *het verschil is middelmatig*.
- Bij $E \leq 0,4$ zeggen we *het verschil is gering*.

Hiernaast staan deze vuistregels schematisch weergegeven.

Benieuwd waarom hier de letter S wordt gebruikt in plaats van σ ? Zie het informatief op de volgende bladzijde.

VUISTREGELS EFFECTGROOTTE



σ versus S

In de statistiek worden twee soorten standaardafwijkingen gebruikt: de populatiestandaardafwijking σ en de steekproefstandaardafwijking S . Welke je gebruikt hangt af van de situatie.

Wanneer je iets wil zeggen over de gehele populatie en de populatiestandaardafwijking σ beschikbaar is, dan gebruik je deze.

Soms is de populatiestandaardafwijking niet bekend. Als er in dat geval een steekproef wordt genomen, dan kun je de steekproefstandaardafwijking berekenen. Deze gebruik je dan om iets over de hele populatie te zeggen.

Hoe groter de steekproef, hoe kleiner het verschil is tussen σ en S .

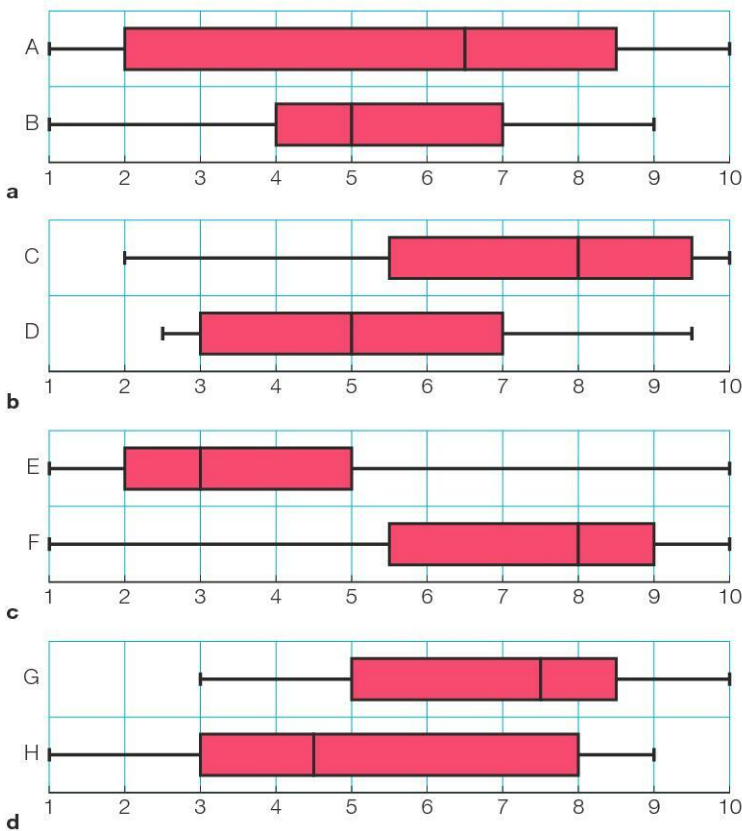
In de opgaven gebruik je de gegeven standaardafwijking.

76




In de figuur hieronder zie je vier keer de boxplots van twee groepen.

Vergelijk de boxplots en noteer of het verschil tussen de boxplots groot, middelmatig of gering is.



figuur 2.33

Van twee merken appelsap is de inhoud van een aantal pakken vergeleken. De resultaten staan in de tabel.

INHOUD 1 LITERPAK APPELSAP

	gem.	stand. afw.
merk A	1007 mL	3 mL
merk B	1012 mL	10 mL

- Welke variabelen zijn hier onderzocht? Zijn dit kwalitatieve of kwantitatieve variabelen?
- Onderzoek met een associatiemaat of het verschil in inhoud tussen de merken groot, middelmatig of gering is.

[▶WERKBLAD] In de figuur hiernaast zijn nogmaals de gegevens over de opbrengst van walnotenbomen op de twee percelen van Pietro Pallina weergegeven.

- Onderzoek met de max.Vcp of het verschil in opbrengst groot, middelmatig of gering is.

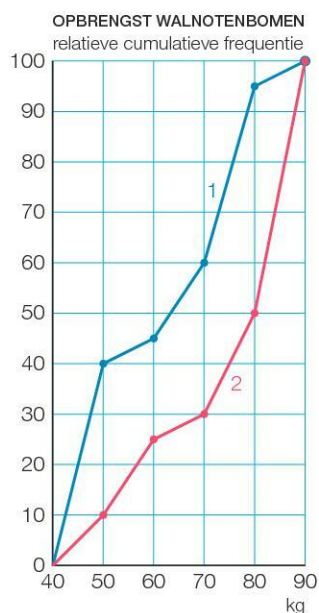
Het is ook mogelijk een conclusie te trekken over het verschil in opbrengst door twee boxplots te vergelijken.

- Teken de boxplots en gebruik deze om te onderzoeken of het verschil in opbrengst groot, middelmatig of gering is.

Een onderzoeker heeft op basis van de oorspronkelijke data berekend dat $\bar{X}_1 = 62,0$ en $S_1 = 14,4$ en dat $\bar{X}_2 = 73,5$ en $S_2 = 14,2$.

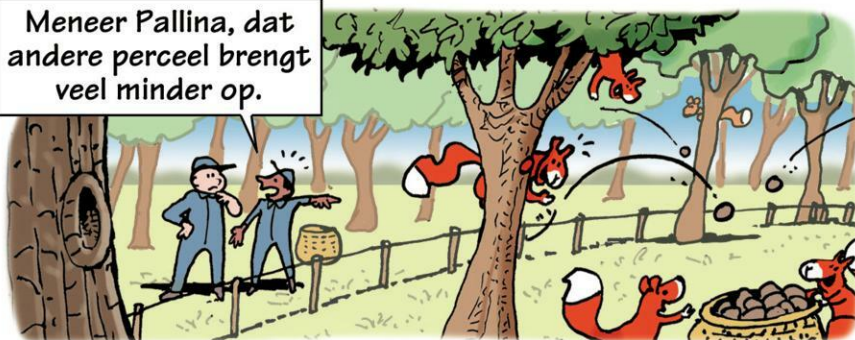
- Onderzoek met de effectgrootte of het verschil in opbrengst groot, middelmatig of gering is.
- Welke van de drie conclusies over het verschil in opbrengst is het meest betrouwbaar? En welke het minst betrouwbaar?

Licht je antwoorden toe.



figuur 2.34

Meneer Pallina, dat andere perceel brengt veel minder op.



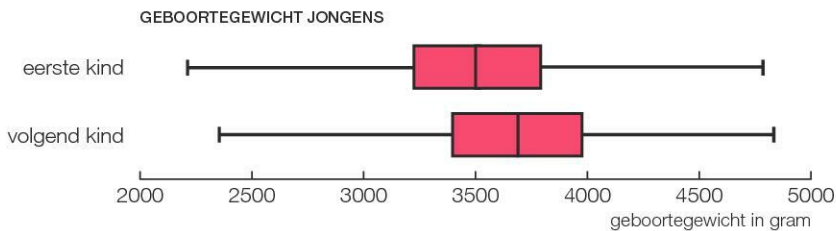
In de tabel zie je de resultaten van een steekproef van jongens die na een normale zwangerschapsduur zijn geboren.
 Het geboortegewicht van eerste kinderen blijkt gemiddeld lager te zijn dan dat van volgende kinderen.

GEBOORTEGEWICHT JONGENS

	gem.	stand. afw.
eerste kind	3497 gram	428 gram
volgend kind	3673 gram	442 gram

- Onderzoek met een associatiemaat of het verschil in geboortegewicht tussen eerste kind en volgend kind groot, middelmatig of gering is.
- Stel dat de standaardafwijkingen kleiner zouden zijn dan die in de tabel.
 Welke invloed heeft dat op de effectgrootte? Licht toe.

Hieronder zijn de boxplots getekend bij de geboortegewichten van jongens die na een normale zwangerschapsduur zijn geboren.



figuur 2.35

- Welke conclusie over het verschil in geboortegewicht kun je trekken op grond van de boxplots?
- Bij vraag a heb je een andere conclusie getrokken dan bij vraag c over de grootte van het verschil in geboortegewicht.
 Welke van deze twee conclusies is het beste te verdedigen?
 Licht toe.



Terugblik

Associatiematen

Met associatiematen kun je de grootte van het verschil tussen twee groepen kwantificeren, oftewel uitdrukken in een getal. Welke associatiemaat je gebruikt hangt af van het type variabele en de gegevens. Op het centraal examen worden de associatiematen phi, max.Vcp, effectgrootte en het vergelijken van twee boxplots gebruikt. De associatiematen staan samen met de vuistregels voor het bepalen van de grootte van het verschil op het formuleblad. Je hoeft de associatiematen en vuistregels dus niet uit het hoofd te leren. Het is wel belangrijk te weten in welke situatie je welke associatiemaat moet gebruiken.

Verschillen kwantificeren bij nominale variabelen

Voor het kwantificeren van het verschil bij nominale variabelen met twee waarden kun je gebruikmaken van de phi-coëfficiënt.

	waarde I	waarde II	
waarde 1	a	b	$a + b$
waarde 2	c	d	$c + d$
	$a + c$	$b + d$	

$$\phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}$$

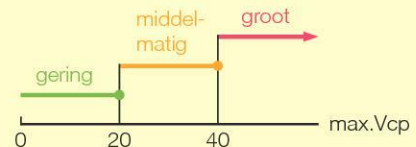
VUISTREGELS PHI-COËFFICIËNT



Verschillen kwantificeren bij ordinale variabelen

Voor het kwantificeren van het verschil bij een ordinale variabele kun je gebruikmaken van het maximale verschil in cumulatief percentage (max.Vcp).

VUISTREGELS MAX.VCP

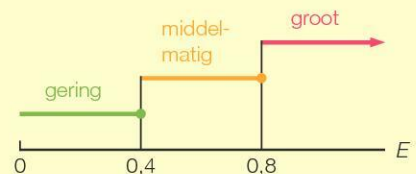


Verschillen kwantificeren bij kwantitatieve variabelen

Bij kwantitatieve variabelen zijn verschillen te kwantificeren met de effectgrootte en door de boxplots te vergelijken.

De formule van de effectgrootte is $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$.

VUISTREGELS EFFECTGROOTTE

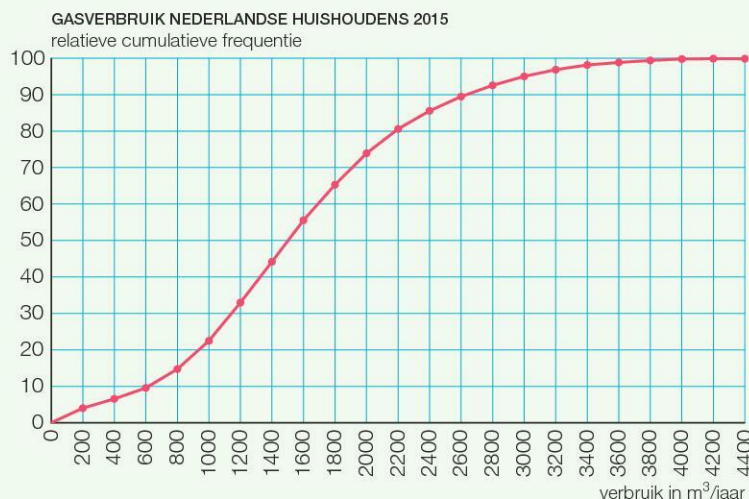


Bij het vergelijken van boxplots gebruik je de volgende vuistregels.

- Als de boxen elkaar niet overlappen, dan zeggen we *het verschil is groot*.
- Als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot ligt buiten de box van de andere boxplot, dan zeggen we *het verschil is middelmatig*.
- In alle andere gevallen zeggen we *het verschil is gering*.

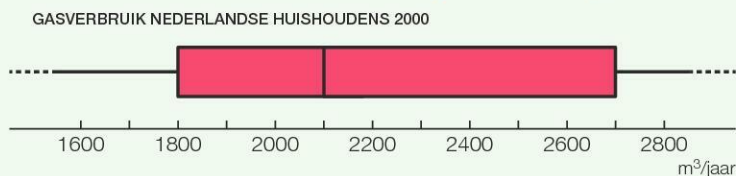
Eindopdracht Nederlands energieverbruik

[▶WERKBLAD] Hieronder staan twee figuren en een tabel die betrekking hebben op het energieverbruik van Nederlandse huishoudens.



KERNCIJFERS HUISHOUDENS (BRON: RVO)

	2000	2015
aantal inwoners per 1 januari	15.863.950	16.900.726
aantal huishoudens per 1 januari	6.801.000	7.665.000
aantal personen per huishouden	2,3	2,2
gasverbruik per huishouden	1900 m³	1432 m³
verbruik elektriciteit per huishouden	3103 kWh	2966 kWh



- Bereken met hoeveel procent het totale elektriciteitsverbruik van Nederlandse huishoudens is veranderd in 2015 ten opzichte van 2000. Doe dit ook voor het gasverbruik.
- Onderzoek of de mediaan van het gasverbruik van Nederlandse huishoudens in 2015 hoger of lager was dan het gemiddelde. Kun je deze conclusie met 100% zekerheid trekken op basis van de gegevens hierboven? Licht toe.
- Onderzoek met behulp van een associatiemaat hoe groot het verschil is in gasverbruik van Nederlandse huishoudens in 2015 vergeleken met dat in 2000.

Diagnostische toets

2.1 De onderzoeksvraag

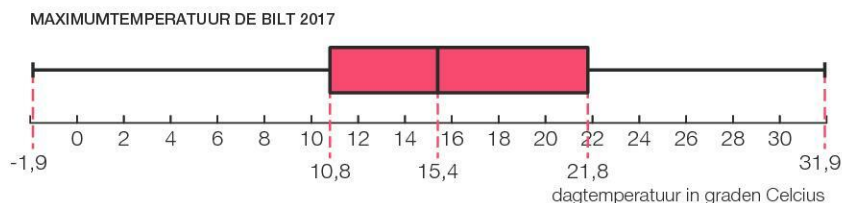
- 1** a Welke vier fasen onderscheiden we in de statistische cyclus?
b Wat wordt bedoeld met een causaal verband? Geef een voorbeeld.
c Aan welke twee eisen moet een representatieve steekproef voldoen?
d Wat is het verschil tussen de populatieproportie en de steekproefproportie? Wanneer zullen deze proporties in de meeste gevallen weinig verschillen?
- 2** Van 123 leerlingen van een school met 1447 leerlingen is bekend dat ze meer dan 20 uur per week gamen.
Bij een steekproef geven 12 leerlingen aan dat ze meer dan 20 uur per week gamen, waarmee de steekproefproportie op 0,09 komt.
a Bereken de populatieproportie van de leerlingen met het kenmerk 'gamet meer dan 20 uur per week'. Rond af op drie decimalen.
b Bereken ook het aantal leerlingen in de steekproef.

2.2 Data verzamelen

- 3** a Omschrijf het verschil tussen een kwantitatieve en een kwalitatieve variabele. Geef van elk een voorbeeld.
b Welke twee meetniveaus ken je? Geef bij elk van de meetniveaus een voorbeeld van een variabele die op dat niveau is gemeten.
c Omschrijf het verschil tussen een discrete en een continue variabele. Geef van elk een voorbeeld.

2.3 Centrum- en spreidingsmaten

- 4** In het jaar 2017 is elke dag de maximumtemperatuur in De Bilt genoteerd. Zie de boxplot in figuur 2.35.



figuur 2.35

- a Hoeveel dagen is in 2017 de maximumtemperatuur meer dan $21,8^{\circ}\text{C}$ geweest?
b Onderzoek of de gemiddelde maximumtemperatuur meer dan 20°C kan zijn geweest.
c Volgens Lars is de spreidingsbreedte meer dan drie keer zo groot als de interkwartielafstand. Onderzoek of Lars gelijk heeft.
d Geef een schatting van de standaardafwijking. Kies uit 1°C , 4°C , 9°C en 16°C .

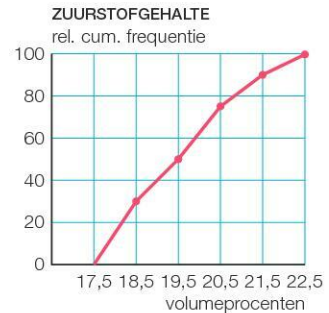
2.4 Representatie van data

- 5** In een stad is gedurende een jaar bijgehouden hoeveel klachten over geluidsoverlast er per dag binnenkwamen. Zie de frequentietabel.
- Een jaar eerder waren er 6215 klachten over geluidsoverlast. Kun je op basis van de tabel concluderen of er dit jaar meer klachten waren? Licht toe.
 - In welke klasse ligt de mediaan?
 - Geef de modale klasse.

KLACHTEN GELUIDSOVERLAST

aantal	frequentie
[0, 5)	2
[5, 10)	6
[10, 15)	55
[15, 20)	126
[20, 25)	135
[25, 30)	35
[30, 35)	6

- 6** Bij een medisch onderzoek meet men bij 240 mannen het zuurstofgehalte (in volumepercenten) van het bloed. Zie de figuur hiernaast, waarbij de eerste klasse $[17,5; 18,5)$ is.
- Hoeveel mannen hebben minder dan 18,5% zuurstof in het bloed? En hoeveel mannen minstens 20,5%?
 - Maak bij de figuur een frequentietabel met absolute frequenties.
 - Teken een histogram met absolute frequenties.



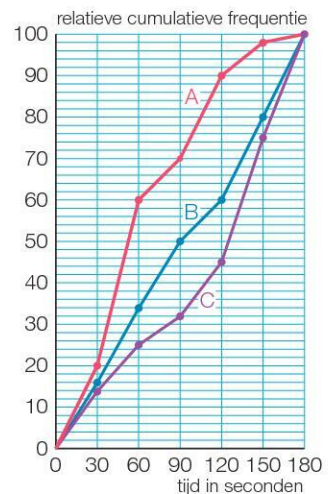
figuur 2.36

2.5 Conclusies trekken

- 7** In de tabel hiernaast zie je van het afgelopen jaar hoeveel van de kandidaten van de rijsscholen A en B, die voor het eerst rijexamen deden, slaagden. Onderzoek met de phi-coëfficiënt of het verschil groot, middelmatig of gering is.
- 8** Bij een onderzoek naar de levensduur van espresso-apparaten bleek dat de gemiddelde levensduur van onderzochte apparaten van het type Gustoso 5,4 jaar was en de standaardafwijking 1,6 jaar. Van het type Robusto was het gemiddelde 6,6 jaar en de standaardafwijking 1,2 jaar. Onderzoek of het verschil groot, middelmatig of gering is.

	geslaagd		
	ja	nee	
A	34	57	91
B	66	60	126
	100	117	217

- 9** [► WERKBLAD] Een supermarktketen heeft onderzoek gedaan naar de wachttijd bij de kassa. Bij elk filiaal is van 300 klanten de wachttijd genoteerd. In de figuur hiernaast zijn de resultaten van drie filialen verwerkt.
- Bij welk filiaal is de wachttijd bij de kassa het kortst?
 - Onderzoek met de max.Vcp of het verschil in wachttijd tussen de filialen A en B groot, middelmatig of gering is. Doe dit ook voor de filialen B en C en voor de filialen A en C.
 - Teken in één figuur de boxplots van de filialen A, B en C en onderzoek of je met de boxplots dezelfde conclusies trekt als bij vraag b.



figuur 2.37

3

Lineaire verbanden

Wat leer je?

- Hoe je een lineaire formule opstelt, ook in praktische situaties.
- Wat een recht evenredig verband is.
- Oplossen van lineaire vergelijkingen en ongelijkheden.
- Problemen oplossen door een vergelijking op te stellen.
- Werken met lineaire vergelijkingen met twee variabelen.



Beginopdracht **Draf en galop**

Op de paardenrenbaan Duindigt in Den Haag vinden regelmatig draverijen plaats. De aangespannen paarden (de dravers) trekken een karretje (de sulky), dat wordt bestuurd door de pikeur. Tijdens een draverij kunnen paarden in draf snelheden van 45 km/uur bereiken.

Een paard dat tijdens de race in galop terechtkomt, wordt gediskwalificeerd.

Voor een paard is het niet natuurlijk om bij een snelheid van 45 km/uur in draf te gaan. Bij zo'n snelheid rent een paard normaal gesproken in galop. Door training kan een paard ook bij hoge snelheden door de pikeur in draf worden gehouden. Er bestaan formules die het aantal passen per minuut geven van een paard in draf en galop.

De formules $A_{\text{draf}} = 3,5v + 30$ en $A_{\text{galop}} = 0,5v + 90$ geven het verband tussen de snelheid v van het paard in km/uur en het aantal passen A per minuut.

- Het paard Winner gaat in draf en heeft een snelheid van 12 km/uur.

Bereken de paslengte.

- Het paard Misty gaat in draf en heeft een paslengte van 3,0 meter. Onderzoek of bij een verdubbeling van de snelheid ook een verdubbeling van de paslengte hoort als Misty in draf blijft.

Onder natuurlijke omstandigheden zal een paard bij een bepaalde snelheid van draf overgaan in galop. Bij deze snelheid geven de twee formules hetzelfde aantal passen per minuut aan.

- Onderzoek met de formules bij welke snelheid de overgang van draf naar galop plaatsvindt.

Bij een draverij kunnen snelheden tot 45 km/uur voorkomen terwijl het paard nog steeds in draf is.

Het paard Happy gaat tijdens een draverij bij een snelheid van 45 km/uur over in galop. Voor Happy geldt de formule $A_{\text{galop}} = 0,5v + b$. Neem aan dat ook voor Happy geldt dat bij overgang van draf naar galop het aantal passen per minuut gelijk is.

- Bereken b .



paard in draf



paard in galop

Voorkennis Haakjes wegwerken en vergelijkingen oplossen

Theorie A Haakjes wegwerken

Je kunt $3x + 5x$ herleiden tot $8x$. En zo is $5x + x = 6x$ en $12x - 2x = 10x$. Maar $8x + 3y$ is niet te herleiden en ook $3x + 5$ kun je niet eenvoudiger schrijven. Je kunt alleen gelijksoortige termen samennemen.

Voor het wegwerken van haakjes heb je de volgende regels geleerd.

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Voorbeeld

Werk de haakjes weg en herleid.

a $3(2x + 5)$

b $(2x + 3)5 - 7$

c $6 - (x - 3)$

Herleiden betekent zo eenvoudig mogelijk schrijven.

Uitwerking

a $3(2x + 5) = 6x + 15$

b $(2x + 3)5 - 7 = 10x + 15 - 7 = 10x + 8$

c $6 - (x - 3) = 6 - x + 3 = -x + 9$

1 Werk de haakjes weg en herleid.

a $2(3x + 1) + 2x$

d $3 - 5(x - 3)$

b $5(x - 3) + 7$

e $5(2x - 1) - (4x + 7)$

c $(2x + 5)3 + 3x$

f $-(2x - 1) + 4(2 - 3x)$

Theorie B Lineaire vergelijkingen oplossen

Een voorbeeld van een lineaire vergelijking is $5x + 2 = 37 - 2x$.

Hierin heet $5x + 2$ het linkerlid en $37 - 2x$ het rechterlid.

Je lost de vergelijking op door hem stap voor stap eenvoudiger te maken.

Je mag daarbij

- termen van het ene lid naar het andere lid brengen, maar dan moet je – vervangen door + en + vervangen door –
- beide leden door hetzelfde getal delen of met hetzelfde getal vermenigvuldigen.

Het oplossen van de vergelijking $5x + 2 = 37 - 2x$ gaat als volgt.

$5x + 2 = 37 - 2x$ **Termen met x naar het linkerlid en de rest naar het rechterlid.**

$5x + 2x = 37 - 2$ **Herleid beide leden.**

$7x = 35$ **Deel beide leden door het getal dat voor x staat.**

$x = 5$

Dus $x = 5$ is de oplossing van de vergelijking $5x + 2 = 37 - 2x$.

Door $x = 5$ in de vergelijking in te vullen, kun je controleren dat het klopt: $5 \cdot 5 + 2 = 37 - 2 \cdot 5$. Inderdaad, het klopt, want je krijgt $27 = 27$.

Let op het verschil tussen $x + 4 = 20$, $x - 4 = 20$ en $4x = 20$.

$x + 4 = 20$ $x = 20 - 4$ $x = 16$	$x - 4 = 20$ $x = 20 + 4$ $x = 24$	$4x = 20$ $x = \frac{20}{4}$ $x = 5$
--	--	--

Staan er in een lineaire vergelijking haakjes, werk die dan eerst weg.

Zo krijg je bij $3(x - 3) = x + 8$ eerst $3x - 9 = x + 8$. Enzovoort.

Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

- 1 Werk zo nodig de haakjes weg.
- 2 Breng de termen met de variabele naar het linkerlid en de rest naar het rechterlid, en herleid beide leden.
- 3 Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.

Voorbeeld

Los op.

a $3(x - 3) = x + 8$

b $5 - (x + 2) = 11 - 3x$

Uitwerking

a $3(x - 3) = x + 8$

$3x - 9 = x + 8$

$2x = 17$

$x = 8\frac{1}{2}$

b $5 - (x + 2) = 11 - 3x$

$5 - x - 2 = 11 - 3x$

$2x = 8$

$x = 4$

2 Los op.

a $x + 5 = 20$

c $6x - 2 = 2x + 18$

b $5x = 20$

d $5 - x = 2x - 1$

3 Los op.

a $2(x - 1) = 3(x + 2)$

d $2(x - 3) - 7 = 3(x - 6) + 18$

b $3(x - 80) = 100 - x$

e $8 - 3(2x - 1) = 3 + 2(1 - x)$

c $5 - (x + 1) = 15 - 3x$

f $1,8x + 0,6 = -1,2x + 3$

3.1 Lineaire formules



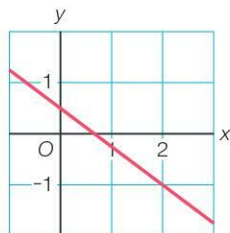
01 Gegeven zijn vier lineaire formules en de bijbehorende grafieken. Zoek bij elke formule de juiste grafiek.

I $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

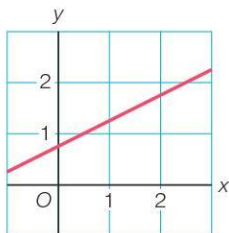
II $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

III $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

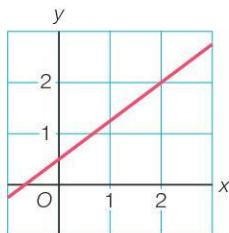
IV $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$



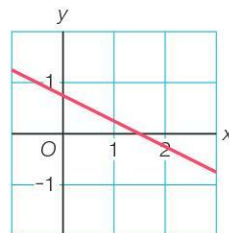
A
figuur 3.1



B



C



D

Theorie A Richtingscoëfficiënt

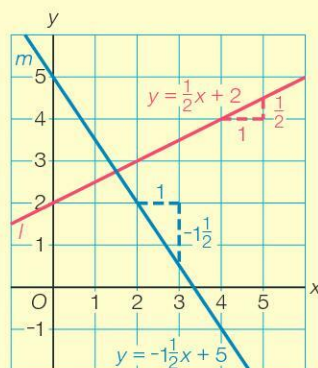
In de figuur hiernaast is de lijn l : $y = \frac{1}{2}x + 2$ getekend. De grafiek van de **lineaire formule** $y = \frac{1}{2}x + 2$ is de lijn waarvoor geldt

- het snijpunt met de y -as is $(0, 2)$
- ga je 1 naar rechts, dan ga je $\frac{1}{2}$ omhoog.

Het getal $\frac{1}{2}$ in de formule $y = \frac{1}{2}x + 2$ heet de **richtingscoëfficiënt** van l . Notatie: $rc_l = \frac{1}{2}$.

Van de lijn m : $y = -1\frac{1}{2}x + 5$ is de richtingscoëfficiënt gelijk aan $-1\frac{1}{2}$. Dus $rc_m = -1\frac{1}{2}$. Dit betekent: ga je 1 naar rechts, dan ga je $-1\frac{1}{2}$ omhoog.

Dat is hetzelfde als 1 naar rechts en $1\frac{1}{2}$ omlaag
en ook hetzelfde als 2 naar rechts en 3 omlaag.



figuur 3.2

Van de lijn $y = ax + b$ is de richtingscoëfficiënt a .

$rc = a$ betekent 1 naar rechts en a omhoog.

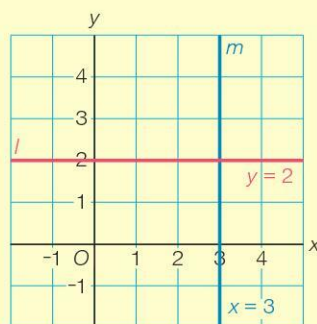
De lijn $y = ax + b$ snijdt de y -as in het punt $(0, b)$.

De lijnen p : $y = 3x - 5$ en q : $y = 3x + 7$ hebben dezelfde richtingscoëfficiënt. Daarom zijn de lijnen p en q evenwijdig.

Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.

Van de lijn l in figuur 3.3 is $rc_l = 0$. Immers, ga je 1 naar rechts, dan ga je 0 omhoog. Dus de formule van l is $y = 0x + 2$. Hiervoor schrijven we kortweg $y = 2$. Op de lijn $y = 2$ liggen alle punten met y -coördinaat 2.

Op de verticale lijn m in figuur 3.3 liggen alle punten met de x -coördinaat 3. Daarom zeggen we dat de lijn m de formule $x = 3$ heeft. Een verticale lijn heeft geen richtingscoëfficiënt.



figuur 3.3

De lijn $y = 5$ is de horizontale lijn door het punt $(0, 5)$.

Alle punten op deze lijn hebben y -coördinaat 5.

De lijn $x = 6$ is de verticale lijn door het punt $(6, 0)$.

Alle punten op deze lijn hebben x -coördinaat 6.

Voorbeeld

Teken in één figuur de lijnen $l: y = -0,8x + 3$, $m: y = 3$ en $n: x = 4$.

Aanpak

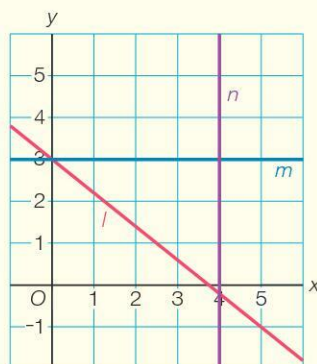
Maak bij l een tabel met twee punten. Neem in elk geval $x = 0$.

Verder is m de horizontale lijn door $(0, 3)$ en n de verticale lijn door $(4, 0)$.

Uitwerking

x	0	5
y	3	-1

Zie figuur 3.4.



figuur 3.4

2 Gegeven zijn de lijnen $k: y = -3x + 2$, $m: y = \frac{1}{2}x - 1$, $p: y = 2$ en $q: y = 2x$.

- a** Teken deze lijnen in één figuur.
b Schrijf van elk van deze lijnen de richtingscoëfficiënt op. Begin met $rc_k = \dots$

3 Gegeven zijn de lijnen

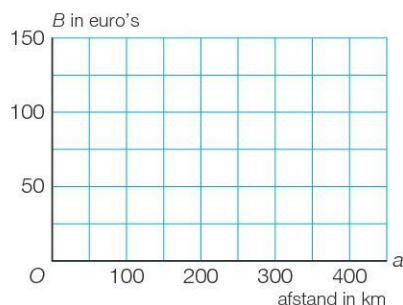
- l met $rc_l = 2$ die door $A(0, -1)$ gaat
 - m met $rc_m = -0,4$ die door $B(0, 2)$ gaat
 - n met $rc_n = -1$ die door $O(0, 0)$ gaat.
- a** Teken deze lijnen in één figuur.
b Schrijf van elk van deze lijnen de formule op. Begin met $l: y = \dots$

- 4** Gegeven zijn de lijnen k , l en m die door het punt $A(0, 1)$ gaan met $rc_k = 3$, $rc_l = 1$ en $rc_m = -1\frac{1}{2}$.
- Teken deze lijnen in één figuur.
 - Schrijf van elk van deze lijnen de formule op.
 - Teken door het punt $B(0, 4)$ de lijn n die evenwijdig is met m en schrijf van n de formule op.

- A5** Gegeven zijn de lijnen k : $y = 0,6x - 3$, l : $y = -1,5x + 4$ en m met $rc_m = 2,5$ die door het punt $(0, -6)$ gaat.
- Teken k , l en m in één figuur.
 - Teken de lijn n die door de oorsprong gaat en evenwijdig is met k . Wat is de formule van n ?
 - De lijn k snijdt de x -as in het punt A . De lijn p gaat door A en is evenwijdig met de y -as. Stel de formule van p op.
 - De lijn l snijdt de y -as in het punt B . De lijn q gaat door B en is evenwijdig met de x -as. Stel de formule van q op.

- 6** Bij autoverhuurbedrijf Rent-a-car kun je voor één dag een bestelauto huren. Met de formule $B = 0,15a + 80$ kun je berekenen hoeveel euro je moet betalen als je a km rijdt.

- Hoeveel euro moet je betalen bij een afstand van 50 km?
- Bij de grafiek hoort een assenstelsel zoals in figuur 3.5. Hoe zie je aan de formule dat de a -as de horizontale as is?



figuur 3.5

- Teken de grafiek. Waarom mag je niet links van de B -as tekenen?
- In de formule staan twee getallen. Welke informatie geeft 0,15 over het verhuurtarief? En welke informatie geeft 80?

Autoverhuurbedrijf Cheap rekent een vast bedrag van 90 euro en een bedrag van 11 cent per km.

- Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat je bij Cheap betaalt als je a km rijdt en teken de grafiek van B in de figuur van vraag c.
- Welk bedrijf is het voordeligst bij een rit van 150 km? Hoeveel scheelt het?
- Vanaf welk aantal km is Cheap voordeliger dan Rent-a-car?

- 7** Teken in een assenstelsel met een horizontale t -as en een verticale N -as de lijnen l : $N = t - 2$, m : $N = 3 - \frac{1}{2}t$ en n : $N = \frac{1}{3}t - 2$.



Bij de productie van artikelen onderscheidt men twee soorten kosten, namelijk de *vaste kosten* en de *variabele kosten*. De vaste kosten zijn onafhankelijk van de productieomvang. Bijvoorbeeld de kosten van de machines en de huur van de bedrijfsruimte. De variabele kosten hangen af van de productieomvang. Bijvoorbeeld de kosten van grondstoffen, materialen en arbeid.

Een firma produceert balpennen. De kosten K in euro's die per dag gemaakt worden voor het produceren van q balpennen zijn gegeven door de formule $K = 0,25q + 200$.

- a** Hoeveel zijn de vaste kosten? En hoeveel zijn de variabele kosten per balpen?

Na verloop van tijd veranderen de variabele kosten in 0,30 euro per balpen, de vaste kosten blijven gelijk.

- b** Stel de nieuwe formule van de kosten op.

Weer enige tijd later veranderen de vaste kosten in 400 euro per dag. De variabele kosten blijven 0,30 euro per balpen.

- c** Stel voor deze nieuwe situatie de formule op van de kosten.
d Welke invloed heeft een stijging van de variabele kosten op de grafiek? En welke invloed heeft een stijging van de vaste kosten op de grafiek?



De lijnen k , l en m gaan door het punt $A(0, 1)$. Er geldt $rc_l = \frac{3}{4} \cdot rc_k$ en $rc_m = \frac{1}{2} \cdot rc_k$. De snijpunten van k , l en m met de lijn $x = 6$ zijn achtereenvolgens B , C en D . De y -coördinaat van het punt B is 19. Bereken de afstand tussen de punten C en D .



In een cilindervormig vat staat het water 1,2 meter hoog. Na opening van een kraan stroomt het vat met constante snelheid leeg. Per kwartier daalt het waterpeil met 30 cm.
Stel de formule op van de waterhoogte h in cm t minuten na het openen van de kraan.

Theorie B Een lineaire formule opstellen bij een tekst

Het is belangrijk dat je bij allerlei situaties lineaire formules kunt opstellen. Soms volgt zo'n formule uit de tekst. Let daarbij op de gevraagde eenheden. Zo is in opgave 10 de waterhoogte h in cm terwijl de beginhoogte gegeven is in meter. Omdat de tijd t in minuten is, reken je de afname van 30 cm per kwartier om naar een afname van 2 cm per minuut. Dus de richtingscoëfficiënt is -2 .

11 Bij het produceren van boeken is er een lineair verband tussen de productiekosten K in euro's per boek en het aantal pagina's x in het boek. Volgens een uitgever moet je rekenen op een vast bedrag van €2,50 per boek aan kosten. Verder zijn de kosten 10 cent per vijf pagina's.

- a** Stel de formule op van K voor het produceren van een boek met x pagina's.
- b** Martijn beweert dat de productiekosten verdubbelen als het aantal bladzijden verdubbelt. Geef commentaar.

A12 **a** Aan het wateroppervlak heerst een druk van 1015 hPa. Onder water neemt per 10 meter de druk met 1000 hPa toe. Stel de formule op van de druk P in hPa op een waterdiepte van d meter.

b Op 1 januari 2018 was er 5,5 miljoen km² tropisch regenwoud in het Amazonegebied. Door menselijk handelen neemt de oppervlakte hiervan dagelijks met 2200 ha af. Neem aan dat deze afname zich de komende jaren voortzet. Stel de formule op van de oppervlakte A aan tropisch regenwoud in het Amazonegebied t jaar na 1 januari 2018. Neem A in miljoenen ha en rond in het antwoord af op één decimaal.

c Een parachutist opent zijn parachute op een hoogte van 600 meter en daalt met een snelheid van 18 km/uur. Stel de formule op van de hoogte h in meter t seconden na het openen van de parachute.

A13 Tim en Jelmer gaan naar een concert in Nijmegen. Jelmer gebruikt een taxi van taxibedrijf A om bij het concert te komen. Voor deze rit van 12 km betaalt Jelmer €25,80 en geen instaptarief. Tim gebruikt een taxi van taxibedrijf B. Hij betaalt €12,40 voor zijn rit van 5 km, dat is inclusief het instaptarief van €1,95. Bij beide taxibedrijven bestaat er een lineair verband tussen de kosten K in euro's en de afstand d van de rit in km. Tim had ook voor taxibedrijf A kunnen kiezen en Jelmer voor B. Bereken voor beide of dat voordeliger was geweest.

E14 Jannie moet 40 opgaven als huiswerk maken. Om haar te stimuleren belooft haar moeder 50 cent voor elke opgave die ze goed doet. Maar voor elke fout gemaakte opgave gaat er 1 euro af. Ze maakt alle opgaven.

- a** Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat Jannie krijgt als ze x opgaven goed maakt.
- b** Jannie krijgt uiteindelijk 2 euro van haar moeder. Hoeveel opgaven had Jannie goed?

Gegeven is de verhoudingstabel hiernaast.

- a Teken de grafiek bij deze verhoudingstabel.
Welke bijzonderheid heeft de grafiek?
- b Welke formule hoort bij de grafiek? Kies uit
 $y = 0,4x + 1$, $y = 0,4x$ en $y = x + 0,4$.

x	1	3	5	8	10
y	0,4	1,2	2	3,2	4

Theorie C Recht evenredig

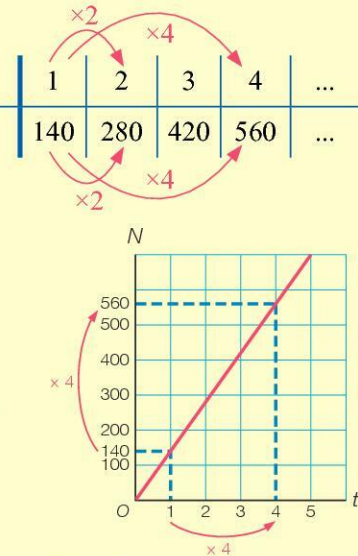
Een machine produceert 140 flessen per minuut. De verhoudingstabel hiernaast past bij deze situatie.

tijd t in minuten	1	2	3	4	...
aantal flessen N	140	280	420	560	...

De grafiek die bij deze verhoudingstabel hoort, zie je in figuur 3.6. De grafiek is een rechte lijn door het punt $O(0, 0)$ met richtingscoëfficiënt 140. Hierbij hoort de lineaire formule $N = 140t$.

Vermenigvuldig je in de verhoudingstabel de tijd t met een getal k , dan moet je N ook met k vermenigvuldigen. We zeggen dat N **evenredig** is met t . In plaats van N is evenredig met t zeggen we ook N is **recht evenredig** met t .

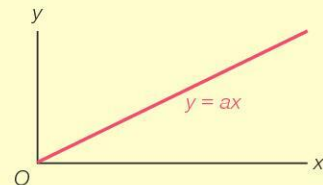
Een lineair verband $y = ax + b$ waarbij $b = 0$, is een evenredig verband.



figuur 3.6

y is (recht) evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De grafiek is een lijn door de oorsprong.



Voorbeeld

Gegeven is dat N evenredig is met t . Bij $t = 12$ hoort $N = 99$. Stel de formule van N op en bereken N voor $t = 15$.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} N = at \\ t = 12 \text{ en } N = 99 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 12 = 99 \\ 12a = 99 \\ a = 8,25 \end{array}$$

Dus $N = 8,25t$.

$t = 15$ geeft $N = 8,25 \cdot 15 = 123,75$

R16 Welke van de volgende beweringen is waar? Licht toe.



- Bewering I Als N evenredig is met t , dan bestaat er een lineair verband tussen N en t .
- Bewering II Als er een lineair verband bestaat tussen N en t , dan is N evenredig met t .

17 Gegeven is dat y evenredig is met x .



- a** Voor $x = 15$ is $y = 24$.
Stel de formule van y op en bereken y voor $x = 60$.
- b** Voor $x = 6$ is $y = 3,6$.
Stel de formule van y op en bereken x voor $y = 30,6$.

18 De bewoners van appartementencomplex 'Zuiderwal' hebben te maken met gemeenschappelijke servicekosten. De afspraak is deze kosten evenredig te verdelen op basis van de vloeroppervlakte.



De familie Akker heeft een appartement met een vloeroppervlakte van 84 m^2 . Ze betalen jaarlijks 1890 euro aan servicekosten.

- a** Stel de formule op van de jaarlijkse servicekosten K in euro's bij een vloeroppervlakte van $A \text{ m}^2$.
- b** De familie De Winter betaalt per jaar 2700 euro aan servicekosten. Hoeveel is de vloeroppervlakte van hun appartement?
- c** Het appartement van de familie Klecker heeft een vloeroppervlakte van 75 m^2 , dat is 1,2% van de totale vloeroppervlakte van het complex. Bereken de jaarlijkse servicekosten van het gehele appartementencomplex.

19 Een bij moet maar liefst 6250 km afleggen om tot een productie van 50 gram honing te komen. Ga ervan uit dat de productie honing h in gram evenredig is met de afgelegde afstand d in km.



- a** Stel de formule van h op.
- b** Een bij legt in zijn leven een afstand van 40 000 km af, dat is ongeveer de omtrek van de aarde. Hoeveel is de totale honingproductie van deze bij?

A20 In woningen gaat veel warmte verloren via de ramen. Het warmteverlies is evenredig met de oppervlakte van het raam.



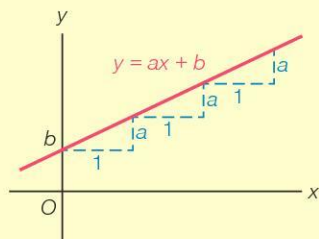
In de woning van de familie Huisman gaat op een winterse dag door een raam met een oppervlakte van 3 m^2 per uur gemiddeld 1,2 MJ (= 1,2 miljoen Joule) aan warmte verloren.

- a** Stel de formule op van het warmteverlies Q in MJ per uur op een winterse dag door een raam met een oppervlakte van $A \text{ m}^2$.
- b** Een raam heeft een oppervlakte van $1,8 \text{ m}^2$, dat is 12% van de totale glasoppervlakte van de woning. Hoeveel MJ warmte gaat er op een winterse dag via de ramen verloren?

Terugblik

Lineaire formules

Bij een lineair verband tussen x en y hoort als grafiek een rechte lijn. De bijbehorende formule heeft de vorm $y = ax + b$. Hierin is a de richtingscoëfficiënt. $rc = a$ betekent 1 naar rechts en a omhoog. Het snijpunt van de lijn met de y -as is het punt $(0, b)$.



Grafiek tekenen bij een lineaire formule

Om de lijn $l: y = -0,5x + 2$ te tekenen, maak je een tabel met twee punten, bijvoorbeeld zoals hiernaast.

x	0	2
y	2	1

Horizontale en verticale lijnen

De formule $y = 3$ hoort bij de horizontale lijn door het punt $(0, 3)$.

De formule $x = 2$ hoort bij de verticale lijn door het punt $(2, 0)$.

Lineaire formules opstellen

In 1998 was de gemiddelde lengte van volwassen vrouwen in Nederland 1,68 meter. In 20 jaar tijd is de gemiddelde lengte met 6 mm toegenomen. Ga uit van een lineair verband.

Je stelt als volgt de formule op van de gemiddelde lengte L in cm t jaar na 1998.

Reken de toename van 6 mm per 20 jaar om naar een toename van $\frac{0,6}{20} = 0,03$ cm per jaar. De richtingscoëfficiënt is dus 0,03.

Bij $t = 0$ is de lengte 168 cm. Je krijgt $L = 0,03t + 168$.

Recht evenredig

Bij y is evenredig met x geldt

- de formule heeft de vorm $y = ax$
- vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen
- de grafiek is een lijn door de oorsprong.

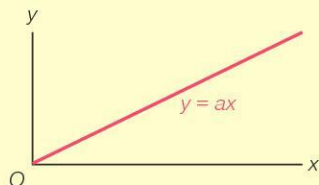
Het bedrag B in euro's dat Sabine verdient bij de supermarkt is evenredig met het aantal uur t dat ze werkt.

Voor 4 uur werken krijgt ze 17 euro.

De formule van B krijg je als volgt.

$$\left. \begin{array}{l} B = at \\ t = 4 \text{ en } B = 17 \end{array} \right\} a \cdot 4 = 17, \text{ dus } a = 4,25$$

Dus $B = 4,25t$.



3.2 Lineaire formules vergelijken

021
☐ ⊗ *

Jelmer maakt gebruik van taxibedrijf A dat het tarief berekent met de formule $K = 2,15d$. Tim maakt gebruik van taxibedrijf B dat het tarief berekent met de formule $K = 2,09d + 1,95$. In deze formules zijn K de kosten in euro's bij een rit van d km.

Om te berekenen bij welke afstand de taxibedrijven even duur zijn, los je de vergelijking $2,15d = 2,09d + 1,95$ op.

- Licht dit toe.
- Bereken bij welke afstand de taxibedrijven even duur zijn.



Theorie A Vergelijkingen oplossen

Bij het oplossen van een **lineaire vergelijking** zoals $15t - 45 = 7t + 5$ of $\frac{1}{3}x + 5 = \frac{2}{3}(x - 6)$ werk je stap voor stap naar het antwoord toe.

Bij de vergelijking $15t - 45 = 7t + 5$ gaat dat als volgt.

$$15t - 45 = 7t + 5 \quad \text{Breng } 7t \text{ naar links en } -45 \text{ naar rechts.}$$

$$15t - 7t = 5 + 45 \quad \text{Herleid beide leden.}$$

$$8t = 50 \quad \text{Deel door het getal dat voor } t \text{ staat.}$$

$$t = \frac{50}{8} = 6,25$$

Bij het oplossen van $\frac{1}{3}x + 5 = \frac{2}{3}(x - 6)$ ga je als volgt te werk.

$$\frac{1}{3}x + 5 = \frac{2}{3}(x - 6) \quad \text{Werk de haakjes weg.}$$

$$\frac{1}{3}x + 5 = \frac{2}{3}x - 4 \quad \text{Breng } \frac{2}{3}x \text{ naar links en } 5 \text{ naar rechts.}$$

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x = -4 - 5 \quad \text{Herleid beide leden.}$$

$$-\frac{1}{3}x = -9 \quad \text{Deel door het getal dat voor } x \text{ staat.}$$

$$x = \frac{-9}{-\frac{1}{3}} = 27$$

Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

- 1 Werk zo nodig de haakjes weg.
- 2 Breng de termen met de variabele naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid en herleid beide leden.
- 3 Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.

Voorbeeld

Los op. Rond af op één decimaal.

a $0,5x - 2,2 = -3(x - 20) + 5,1$

b $500q = -20(11q - 4250)$

Uitwerking

a $0,5x - 2,2 = -3(x - 20) + 5,1$

$0,5x - 2,2 = -3x + 60 + 5,1$

$3,5x = 67,3$

$x \approx 19,2$

b $500q = -20(11q - 4250)$

$500q = -220q + 85\,000$

$720q = 85\,000$

$q \approx 118,1$

22 Los op. Rond af op één decimaal.



a $5(x - 3) = 2,1x - 4$

b $5t - 16 = 2(t - 8) + 17$

c $0,31p + 1,81 = 0,04p + 5,12$

d $\frac{1}{4}x + 3 = x + 11$

23 Los op. Rond af op één decimaal.



a $320q + 1000 = 8000 - 120q$

b $37,5x + 125 = -5x + 214,2$

c $1\frac{1}{2}(3t + 8) = 5t - 3\frac{1}{3}$

d $-0,38a + 2,88 = 7,31 - 0,06(a - 8)$

24 Los op. Rond af op één decimaal.



a $7q - 20 = 0,25(2q - 3) - 8$

b $5(a - 7) = 15a - (4a - 21)$

c $1 - 2\frac{1}{4}(p + 6) = p + 8$

d $0,18(q - 16) = 0,05q + 15,2$

25 Gegeven zijn de lijnen $l: y = -0,8x + 3$ en



$m: y = 1,7x - 4,25$. Zie figuur 3.7.

a Welke vergelijking moet je oplossen om de x -coördinaat van het snijpunt S te berekenen?

b Bereken de coördinaten van S .

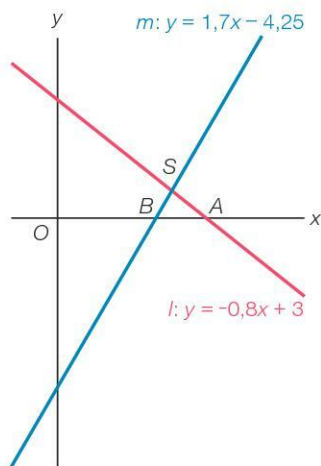
De lijn l snijdt de x -as in het punt A .

c Welke vergelijking moet je oplossen om de x -coördinaat van het punt A te berekenen?

d Bereken de coördinaten van A .

e De lijn m snijdt de x -as in het punt B .

Bereken de coördinaten van B .



figuur 3.7

26 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen



a $k: y = 2(x - 3)$ en $l: y = 5 - 3x$

b $m: y = -2\frac{1}{2}x + 5$ en $n: y = 25$.

A27 Gegeven is de lijn $n: y = -2,5x + 35$.



- a** De lijn n snijdt de x -as in het punt P en de y -as in het punt Q .
Bereken de coördinaten van de punten P en Q .
- b** Op n ligt het punt R met x -coördinaat $x_R = -20$.
Bereken de y -coördinaat y_R .
- c** Op n ligt het punt S met y -coördinaat $y_S = 45$.
Bereken de x -coördinaat x_S .
- d** Op n ligt het punt T waarvan de x -coördinaat gelijk is aan de y -coördinaat.
Bereken de coördinaten van het punt T .

A28 Veel mensen zijn benieuwd naar hun ideale gewicht. Er zijn



verschillende formules in gebruik om het ideale gewicht G in kg te berekenen, zoals de formules van Lorenz-Vandervael. Voor vrouwen is die formule $G = 0,6l - 40$ en voor mannen $G = 0,7l - 55$. Hierin is l de lengte in cm.

Is het gewicht tussen 110% en 130% van G , dan is er sprake van matig overgewicht. Ernstig overgewicht heb je boven 140% van G .

- a** Marloes heeft een ideaal gewicht van 65 kg.
Bereken hoe lang ze is.
- b** Koen is 1,80 meter lang. Hij heeft ernstig overgewicht.
Wat weet je van zijn gewicht?
- c** Rob en Lotte zijn even lang en hebben beide een ideaal gewicht.
Rob is 3 kg zwaarder dan Lotte.
Bereken de lengte van Lotte.

E29 Karel maakt rijtjes van vijf opeenvolgende positieve gehele getallen met de eigenschap: de som van drie van deze getallen is gelijk aan de som van de andere twee.



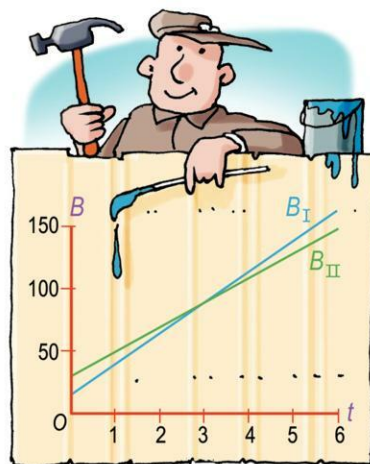
Welke twee rijtjes maakt Karel?

O30 Klusjesman I hanteert als tarief voor het uitvoeren



van zijn werkzaamheden de formule $B_I = 25t + 15$. Bij klusjesman II is dat $B_{II} = 20t + 29,5$. Hierin is B het bedrag in euro's en t het aantal uren dat ze met de klus bezig zijn.

- a** Welke informatie geven de getallen 25 en 15 in de formule van klusjesman I?
- b** Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken. Welke informatie geven deze twee getallen?
- c** Voor welke aantallen uren is klusjesman I goedkoper dan klusjesman II?



Theorie B Lineaire ongelijkheden oplossen

Bij bedrijven die op verschillende manieren hun tarieven berekenen, kun je je afvragen welk bedrijf het voordeligste is.

De reparatiebedrijven I en II hanteren de tarieven

$B_I = 25t + 82$ en $B_{II} = 30t + 55$. Hierin is B het bedrag in euro's en t de reparatietijd in uren. Zie figuur 3.8.

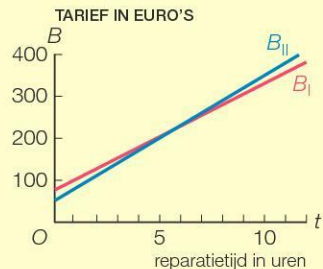
Om te onderzoeken voor welke t bedrijf I voordeliger is dan bedrijf II los je de **lineaire ongelijkheid** $B_I < B_{II}$ op.

Dus $25t + 82 < 30t + 55$. Je gaat als volgt te werk.

- Bereken de t -coördinaat van het snijpunt door de vergelijking $25t + 82 = 30t + 55$ op te lossen.
Je krijgt $t = 5,4$.
- Kijk in de figuur voor welke waarden van t geldt dat B_I kleiner is dan B_{II} . Je ziet dat dit het geval is voor $t > 5,4$.

Dus bedrijf I is voordeliger dan bedrijf II voor $t > 5,4$.

De oplossing van de lineaire ongelijkheid $25t + 82 < 30t + 55$ is dus $t > 5,4$.



figuur 3.8

Voorbeeld

IJssalon Sophia hanteert voor de opbrengst R in euro's de formule $R = 2,25q$. Hierin is q het aantal verkochte ijsjes per week. De kosten K in euro's zijn $K = 1,15q + 352$. Zie figuur 3.9.

Hoeveel ijsjes moet Sophia per week verkopen om winst te maken?

Uitwerking

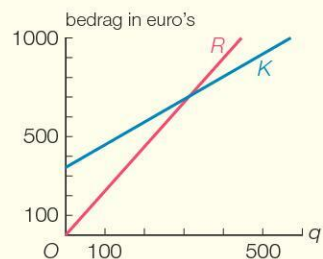
Sophia maakt winst als $R > K$, dus $2,25q > 1,15q + 352$.

Los op $2,25q = 1,15q + 352$

$$1,10q = 352$$

$$q = 320$$

Zie de figuur. Sophia moet meer dan 320 ijsjes per week verkopen.



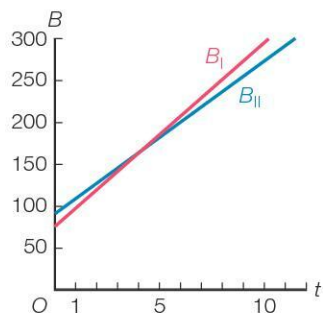
figuur 3.9

31
📌

De reparatiebedrijven I en II gebruiken de tarieven

$B_I = 22t + 80$ en $B_{II} = 18t + 96$. Hierbij is B het bedrag in euro's en t de reparatietijd in uren.

Onderzoek bij welke reparatietijden bedrijf I voordeliger is dan bedrijf II.

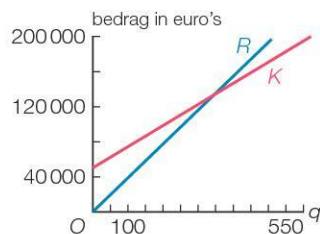


figuur 3.10

32
  *

Een fabrikant van wasmachines rekent per week op 50 000 euro aan vaste kosten en een bedrag van 250 euro aan variabele kosten per machine. Hij verkoopt de machines voor 400 euro per stuk.

- Stel de formule op van de kosten K en van de opbrengst R bij een productie van q machines per week.
- Bij welke productie q maakt de fabrikant winst?



figuur 3.11

A33
  *

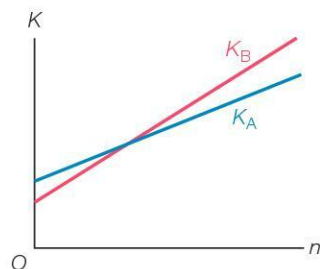
Nienke overweegt lid te worden van een golfclub. Golfclub Andantino rekent een contributie van €435,- per jaar. Daarbij komt €12,- per keer golfen. De contributie bij golfclub Bastion is €350,- per jaar, vermeerderd met €17,50 per keer golfen. Neem aan dat Nienke per jaar n keer gaat golfen.

- Stel de formule op van de jaarlijkse kosten K_A in euro's als Nienke voor Andantino kiest. Doe dat ook voor de jaarlijkse kosten K_B bij Bastion.



In de figuur hiernaast zijn de grafieken van K_A en K_B getekend.

- Bij hoeveel keer golfen per jaar adviseer je Nienke lid te worden van Andantino?
- Nienke wil niet meer dan €600,- kosten per jaar hebben. Welk advies geef je nu?

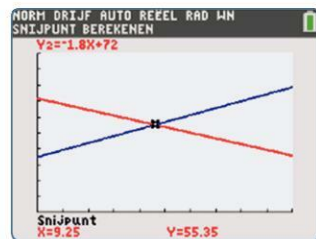


figuur 3.12

034
  *

Hiernaast zie je de grafieken van de formules $y = 2,2x + 35$ en $y = -1,8x + 72$ op het scherm van de grafische rekenmachine (GR).

Ook zijn met de GR de coördinaten van het snijpunt berekend. Je ziet dat het snijpunt (9,25; 55,35) is. Wat is de oplossing van de ongelijkheid $2,2x + 35 > -1,8x + 72$?



Theorie C Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met de GR

Bij een gegeven formule kun je de grafische rekenmachine (GR) de grafiek laten tekenen. Het laten tekenen van een grafiek door de GR heet **plotten**.

Heb je twee grafieken geplot die een snijpunt hebben, dan kun je de GR de coördinaten van het snijpunt laten berekenen. De x -coördinaat van het snijpunt is de oplossing van de vergelijking die je krijgt als je de formules aan elkaar gelijk stelt. Je kunt de geplotte grafieken en het snijpunt gebruiken om een ongelijkheid op te lossen.

Neem eerst de volgende module door.

[►GR] In de module **Formules, grafieken en snijpunten** leer je hoe je formules op de GR invoert, grafieken plot en de coördinaten van snijpunten berekent.

Gebruik je opties van de GR bij het oplossen van een probleem, dan is alleen een antwoord niet voldoende. Hieronder zie je aan welke voorwaarden de uitwerking moet voldoen.

Uitwerking bij gebruik van de GR

- 1 Noteer de formules die je invoert, dus schrijf op $y_1 = \dots$ en $y_2 = \dots$
- 2 Noteer de optie(s) die je gebruikt en geef het resultaat.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

Een moeilijkheid bij het werken met grafieken op de GR is het vaststellen tussen welke waarden je x en y moet nemen om de grafieken goed op het scherm te krijgen. We komen daar in een volgend hoofdstuk op terug. Voor nu neem je in elke opgave x tussen 0 en 20 en y tussen 0 en 100, tenzij anders vermeld.

Voorbeeld

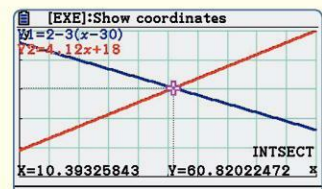
Bereken voor welke t geldt dat $2 - 3(t - 30) < 4,12t + 18$. Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

Voer in $y_1 = 2 - 3(x - 30)$ en $y_2 = 4,12x + 18$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 10,39$.

Uit de plot volgt dat $t > 10,39$.



35

Los de volgende ongelijkheden op. Rond af op twee decimalen.

a $3,68x + 25 > 10 - 4(x - 20)$

b $95 - 5,12x < 12 + 3,25(2x - 1)$

36



- a Gegeven zijn de formules $N = 5,06t + 14,5$ en $M = 83,4 - 1,34t$. Bereken voor welke waarden van t geldt dat $N < M$. Rond af op twee decimalen.

- b Gegeven zijn de formules $F = \frac{400 - 3q}{5,11}$ en $G = \frac{320 + 9q}{6,85}$.

Bereken voor welke waarden van q geldt dat $F > G$. Rond af op twee decimalen.

37



Rond in deze opgave af op twee decimalen.

Gegeven zijn de formules $A = 5,15d + 25$, $B = 8,35d + 8,16$ en

$$C = \frac{10,09d + 155}{3,5}.$$

- a Bereken voor welke waarden van d geldt dat $B > C$.
 b Bereken voor welke waarden van d geldt dat $A < B$ en bovendien $A < C$.
 c Bereken voor welke waarden van d geldt dat $A < B < C$.

$A < B < C$ betekent
 $A < B$ en $B < C$.

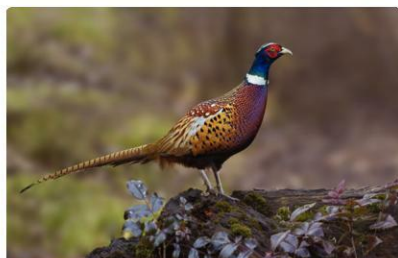
A38



In 1990 waren er 50 000 broedparen patrijzen in Nederland. In dat jaar waren er in Nederland 44 000 broedparen fazanten en 15 000 broedparen kuifeenden.

Het aantal broedparen patrijzen is sindsdien jaarlijks met 1600 afgenomen. Ook het aantal broedparen fazanten nam af, namelijk met 800 broedparen per jaar. Het aantal broedparen kuifeenden is echter jaarlijks toegenomen met 300 broedparen per jaar.

- a Stel de formule op van het aantal broedparen patrijzen P , van het aantal broedparen fazanten F en van het aantal broedparen kuifeenden K . Neem P , K en F in duizendtallen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1990.
 b Onderzoek met behulp van grafieken in welke jaren er minder broedparen patrijzen dan fazanten in Nederland waren, maar wel meer broedparen patrijzen dan kuifeenden.



Baarzen kunnen leven in water waarvan de temperatuur maximaal 25°C is. Bovendien hebben ze minstens 2 mg zuurstof per liter water nodig. We bekijken in deze opgave baarzen die leven in een meer waarvan de diepte 4 meter is.

Aan het begin van een lange hete zomer is op 1 juli de temperatuur van het water alleen aan de oppervlakte 25°C . Gedurende de zomer komt de diepte waarop de temperatuur 25°C is elke drie dagen 10 cm lager te liggen.

We nemen in deze opgave de tijd t in dagen met $t = 0$ op 1 juli en de diepte d in meter.

De diepte waaronder het koud genoeg is voor de baarzen noemen we d_T . Uit de gegevens volgt dat geldt $d_T = 0,033t$. Hierbij is afgerond op drie decimalen.

a Toon aan dat deze formule klopt.

Op 1 juli is overal in het meer voldoende zuurstof aanwezig. Vanaf dat moment ontwikkelt zich door rotting van organismen op de bodem een steeds dikkere laag met te weinig zuurstof. Deze laag neemt vanaf 1 juli elke dag met 5 cm toe. De diepte waarboven er voldoende zuurstof voor de baarzen is, noemen we d_Z . Uit de gegevens volgt dat $d_Z = 4 - 0,05t$.

b Toon dit aan.

c Onderzoek met behulp van grafieken vanaf welke datum de baarzen niet meer in het meer kunnen leven. Om de grafieken goed op het scherm te krijgen, neem je x tussen 0 en 90 en y tussen 0 en 5.

$t = 0$ is op 1 juli
 $t = 30$ is op 31 juli
 $t = 31$ is op 1 augustus
 $t = 61$ is op 31 augustus



Terugblik

Lineaire vergelijkingen oplossen

Bij het oplossen van lineaire vergelijkingen gebruik je het volgende werkschema.

Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

- 1 Werk zo nodig de haakjes weg.
- 2 Breng de termen met de variabele naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid en herleid beide leden.
- 3 Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.

Het oplossen van de vergelijking $0,75x - 4 = 0,25(x - 3)$ gaat als volgt.

$$0,75x - 4 = 0,25(x - 3) \quad \text{Werk de haakjes weg.}$$

$$0,75x - 4 = 0,25x - 0,75 \quad \text{Breng } 0,25x \text{ naar links en } -4 \text{ naar rechts.}$$

$$0,75x - 0,25x = -0,75 + 4 \quad \text{Herleid beide leden.}$$

$$0,5x = 3,25 \quad \text{Deel door het getal dat voor } x \text{ staat.}$$

$$x = 6,5$$

Lineaire ongelijkheden oplossen

Om te weten voor welke q het bedrag $B_I = 0,3q + 2$ minder is dan het bedrag $B_{II} = -0,1q + 18$ los je de ongelijkheid $0,3q + 2 < -0,1q + 18$ op.

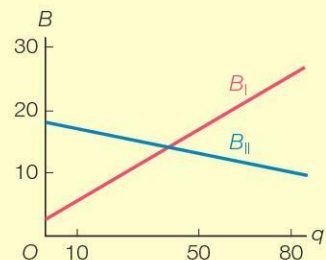
Dit doe je door de vergelijking $0,3q + 2 = -0,1q + 18$ op te lossen en vervolgens in de figuur te kijken voor welke waarden van q de grafiek van B_I onder de grafiek van B_{II} ligt.

Het oplossen van de vergelijking geeft $q = 40$.

In de figuur zie je dat voor $q < 40$ de grafiek van B_I onder de grafiek van B_{II} ligt.

De oplossing van de lineaire ongelijkheid

$0,3q + 2 < -0,1q + 18$ is dus $q < 40$.



Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met de GR

Bij een gegeven formule kun je de grafische rekenmachine de grafiek laten tekenen. Het laten tekenen van een grafiek door de GR heet plotten.

In een uitwerking waarbij je de GR gebruikt, zijn de volgende stappen van belang.

- 1 Noteer de formules die je invoert, dus schrijf op $y_1 = \dots$ en $y_2 = \dots$
- 2 Noteer de optie(s) die je gebruikt en geef het resultaat.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

Bij het oplossen van een ongelijkheid kun je de GR gebruiken om de x -coördinaat van het snijpunt te berekenen. Vervolgens gebruik je de plot om de oplossing van de ongelijkheid af te lezen.

3.3 Lineaire formules opstellen

- 040** De lijn k heeft richtingscoëfficiënt 3.
   De formule van k is te schrijven als $y = 3x + b$.

a Licht dit toe.

De lijn k gaat door het punt $(5, 22)$. Hieruit volgt de vergelijking
 $3 \cdot 5 + b = 22$.

b Licht dit toe.

c Bereken b en geef de formule van k .

Theorie A Lineaire formule opstellen bij gegeven rc en punt

In opgave 40 heb je een formule opgesteld van een lijn met een gegeven richtingscoëfficiënt en een punt op die lijn.

In het voorbeeld wordt gevraagd om een **vergelijking van een lijn** op te stellen. We gebruiken de begrippen formule van een lijn en vergelijking van een lijn door elkaar.

Voorbeeld

De lijn l gaat door het punt $A(10, 25)$ en $rc_l = \frac{3}{4}$.
Stel een vergelijking van l op.

Uitwerking

Vul $x = 10$ en $y = 25$ in.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } A(10, 25) \end{array} \right\} \frac{3}{4} \cdot 10 + b = 25$$
$$7\frac{1}{2} + b = 25$$
$$b = 17\frac{1}{2}$$

Dus $l: y = \frac{3}{4}x + 17\frac{1}{2}$.

- 41**    **a** De lijn l gaat door het punt $A(5, 8)$ en $rc_l = 2$.
Stel een vergelijking van l op.

De lijn m gaat door het punt $B(18, 30)$ en $rc_m = -\frac{1}{2}$.

b Stel de formule van m op.

c Op de lijn m ligt het punt C met x -coördinaat $x_C = 50$.
Bereken de y -coördinaat y_C .

d Op de lijn m ligt het punt D met $x_D = 30$.
Bereken y_D .

A42


Van de lijn k is $rc_k = 0,5$, van de lijn l is $rc_l = 0,6$ en van de lijn m is $rc_m = 0,8$. De lijnen gaan alle drie door het punt $A(6, 10)$. Een van de lijnen snijdt de x -as tussen de punten $B(-11, 0)$ en $C(-10, 0)$. Onderzoek met een berekening welke lijn dat is.

O43


Taxibedrijf TCR rekent een bedrag per km en een vast bedrag aan voorrijkosten. Alex heeft 2 km gereden en moet 11 euro betalen. Lodewieke heeft 6 km gereden. Zij moet 21 euro betalen. Zie de punten A en B en de lijn l door deze punten in figuur 3.13.

a Vul in.

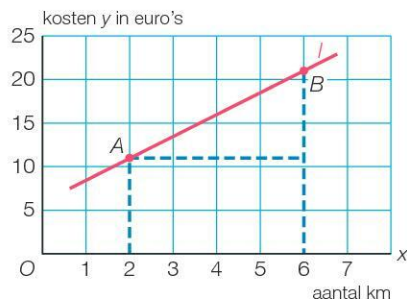
Ga je op de grafiek 4 naar rechts, dan ga je ... omhoog, oftewel ga je 1 naar rechts, dan ga je ... omhoog.

b Welk getal is rc_l ?

c In figuur 3.13 is $x_B - x_A = 6 - 2 = 4$.

Hoeveel is $y_B - y_A$?

d Hoe kun je met $x_B - x_A$ en $y_B - y_A$ de richtingscoëfficiënt van l berekenen?



figuur 3.13

Theorie B Richtingscoëfficiënt berekenen

De lijn l in figuur 3.14 gaat door de punten A en B .

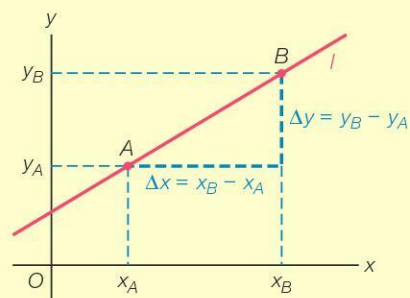
Ga je $x_B - x_A$ naar rechts, dan ga je $y_B - y_A$ omhoog. Dus ga je 1 naar rechts, dan ga je

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ omhoog.

Je ziet dat

$$rc_l = \frac{\text{verschil van de } y\text{-coördinaten}}{\text{bijbehorende verschil van de } x\text{-coördinaten}}$$

Voor het verschil van de twee y -coördinaten schrijven we Δy en voor het bijbehorende verschil van de x -coördinaten Δx .



figuur 3.14

Van de lijn $y = ax + b$ door de punten A en B is de

richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Δ is de Griekse hoofdletter D, de eerste letter van differentie (= verschil). Spreek Δ uit als delta.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de lijn l door de punten $P(2, -1)$ en $Q(6, 5)$.

Uitwerking

$$y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-1)}{6 - 2} = \frac{6}{4} = 1,5$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1,5x + b \\ \text{door } P(2, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,5 \cdot 2 + b = -1 \\ 3 + b = -1 \\ b = -4 \end{array}$$

Dus $l: y = 1,5x - 4$.

R44 Zie het voorbeeld.



a Lotte neemt $\Delta y = -1 - 5$.

Welke Δx hoort daarbij? Krijgt ze ook $rc_l = 1,5$?

b Lars gebruikt de coördinaten van het punt Q om b te berekenen in

$$y = 1,5x + b.$$

Welke berekening hoort daarbij?

45 Stel de formule op van de lijn



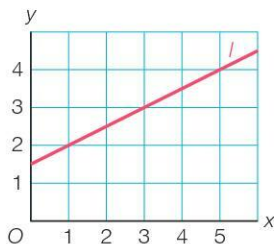
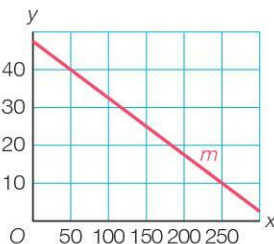
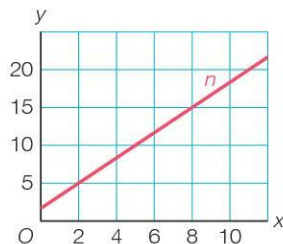
a l door $A(-1, 1)$ en $B(1, 4)$

b m door $C(-3, 5)$ en $D(2, 0)$

c n door $E(180, 360)$ en $F(160, 250)$

d p door $G(15, 73)$ en $H(45, 58)$.

46 Stel van elke lijn in figuur 3.15 de formule op. Kies telkens twee punten waarvan je de coördinaten goed kunt aflezen.



figuur 3.15

A47 Stel een vergelijking op van de lijn



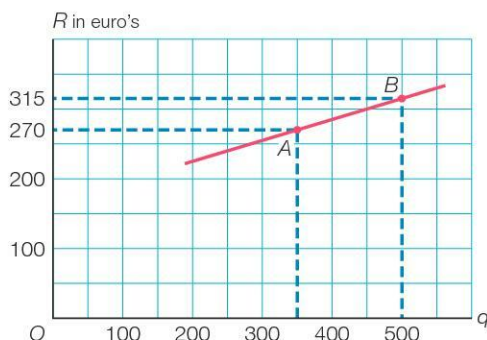
a k door de punten $A(-23, -125)$ en $B(17, 155)$

b l door de oorsprong die evenwijdig is met de lijn door de punten $C(18, -27)$ en $D(12, -30)$

c m door het punt $E(-8, 14)$ die evenwijdig is met de lijn door de punten $O(0, 0)$ en $F(-12, 4)$.

A48 De lijn k gaat door de punten $A(2, 22)$ en $B(12, 7)$ en de lijn l gaat door de punten $C(4, 3)$ en $D(20, 43)$. Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l .

049 Mevrouw Hak is vertegenwoordigster in bonbons. Ze ontvangt een basisloon per week en een beloning per verkochte doos. Er bestaat een lineair verband tussen het aantal verkochte dozen q en haar weekinkomen R . Bij een weekverkoop van 350 dozen is haar inkomen 270 euro en bij een weekverkoop van 500 dozen verdient ze 315 euro. Zie figuur 3.16.



figuur 3.16

- Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten A en B .
- Hoeveel verdient mevrouw Hak per doos?
- Hoeveel is haar basisloon per week?

Theorie C Lineaire formules in de praktijk

In de praktijk zijn er heel wat verbanden tussen grootheden te benaderen door lineaire formules.

Bij toepassingen gebruik je vaak andere letters dan x en y . Zo geeft de formule $B = 0,11d + 80$ aan dat er een **lineair verband** is tussen de huurprijs B van een auto en het aantal kilometers d dat je met de auto rijdt. In deze formule is B **uitgedrukt in d** .

In $R = aq + b$ is R uitgedrukt in q . Er geldt $a = \frac{\Delta R}{\Delta q}$.

In $N = at + b$ is N uitgedrukt in t . Er geldt $a = \frac{\Delta N}{\Delta t}$.

Voorbeeld

Een marktkoopman verkoopt T-shirts. De ervaring leert dat bij een prijs van 5 euro er 90 T-shirts per week verkocht worden. Bij een prijs van 8 euro is de weekverkoop nog maar 30 stuks. Er bestaat een lineair verband tussen de prijs p in euro's van een T-shirt en de weekverkoop q .

- a Druk q uit in p .
- b Bereken de prijs van een T-shirt als de weekverkoop 82 stuks is.

Uitwerking

- a $q = ap + b$
Bij $p = 5$ hoort $q = 90$ en bij $p = 8$ hoort $q = 30$.

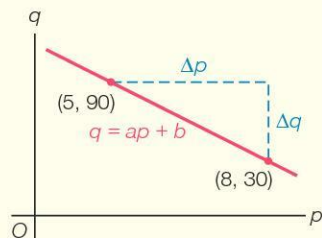
$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{30 - 90}{8 - 5} = -20$$

$$\left. \begin{array}{l} q = -20p + b \\ p = 5 \text{ en } q = 90 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -20 \cdot 5 + b = 90 \\ -100 + b = 90 \\ b = 190 \end{array}$$

$$\text{Dus } q = -20p + 190.$$

- b Los op $-20p + 190 = 82$
 $-20p = -108$
 $p = 5,4$

$$\text{Dus € } 5,40.$$



R50
☐ ⊗ *

In het voorbeeld is q uitgedrukt in p . Je kunt ook p uitdrukken in q .

Je begint dan met $p = aq + b$ met $a = \frac{\Delta p}{\Delta q}$.

- a Druk p uit in q .
- b Bereken met de zojuist gevonden formule het antwoord van vraag b van het voorbeeld.

51
☐ ⊗

- a Tussen K en m bestaat een lineair verband.

Voor $m = 5$ is $K = 10$ en voor $m = 12$ is $K = 115$.

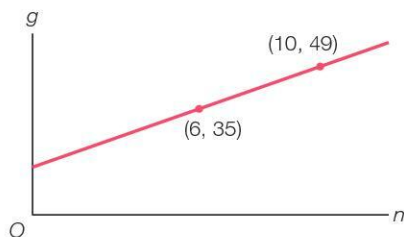
Druk K uit in m .

- b Er bestaat een lineair verband tussen F en R .

Voor $R = 15$ is $F = 300$ en voor $R = 42$ is $F = 138$.

Stel de formule op van F .

- c Zie de lijn in de figuur hiernaast.
Stel een vergelijking op van deze lijn.



figuur 3.17



Tijdens een vlucht van de Airbus A310 is er na 250 km vliegen 56 ton kerosine in de brandstoftanks aanwezig, 400 km verder is dat nog 49,6 ton. Er bestaat een lineair verband tussen de aanwezige hoeveelheid kerosine k in ton en de vluchtafstand V in km.

- a** Stel de formule op van k .

Als veiligheidsmaatregel gaat er in de cockpit een alarm af als er in de tanks nog maar 5 ton kerosine zit.

- b** Hoeveel km na de start gaat het alarm af?
Hoeveel km kan er dan nog gevlogen worden?



Lees het infokader over de Conconitest.

INFORMATIEF

De Conconitest

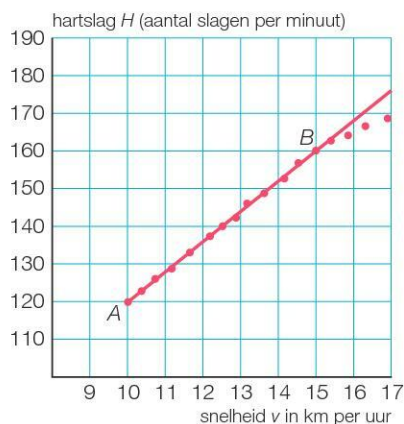
Conconi is een Italiaanse sportarts die zich intensief met het ontwikkelen van nieuwe trainingsmethoden heeft beziggehouden. Hij is vooral bekend geworden door zijn begeleiding van de wielrenner Francesco Moser die in 1984 het werelduurrecord op de baan verbeterde.

Conconi heeft een van de meest gebruikte trainingstesten ontwikkeld: de Conconitest. Hardlopers gaan om de 2 à 3 minuten sneller lopen, waarbij ze

telkens de hartslag vastleggen met een hartslagmeter. Het blijkt dat de hartslag lineair stijgt tot een zekere drempelwaarde: de anaerobe drempel. Vanaf deze drempelwaarde treedt een afbuiging van de grafiek op. Boven de anaerobe drempel treedt verzuring in de spieren op, waardoor de sporter zijn inspanning zal moeten afbreken. Sporters dienen ervoor te zorgen dat tijdens de training de hartslag iets onder de drempelwaarde blijft.

Kees doet de Conconitest. De meetresultaten zijn uitgezet in figuur 3.18. Bij een snelheid van 15,8 km per uur begint verzuring op te treden.

- a** Stel de formule op van de lijn in figuur 3.18. Gebruik de punten A en B .
- b** Bereken met de formule welke hartslag bij de anaerobe drempel van Kees hoort.
- c** Door extra training weet Kees zijn anaerobe drempel te verhogen. Tijdens de Conconitest wordt nu bij een snelheid van 12 km/uur een hartslag van 142 slagen per minuut gemeten. Zijn hartslag in rust (bij $v = 0$) is onveranderd gebleven. Bij een hartslag van 178 slagen per minuut begint verzuring op te treden. Bereken welke snelheid nu bij de anaerobe drempel van Kees hoort.



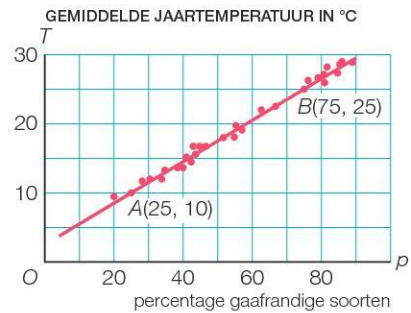
figuur 3.18

Bij bomen en planten komen gaafrandige en niet-gaafrandige bladeren voor. Opmerkelijk is dat in de tropen de meeste planten en bomen gaafrandige bladeren hebben. Verder weg van de evenaar zijn de planten met niet-gaafrandige bladeren in de meerderheid.

Onderzoek heeft uitgewezen dat er een lineair verband bestaat tussen de gemiddelde lokale jaartemperatuur en het percentage gaafrandige soorten. Het lineaire verband wordt gebruikt om met fossiele flora's de gemiddelde lokale jaartemperatuur in het verleden te bepalen.

- Stel de formule op van de gemiddelde lokale jaartemperatuur T in $^{\circ}\text{C}$. Gebruik de punten A en B van de grafiek.
- Bij een onderzoek stuit men op een fossiele flora uit het Carboon, dit is de voorlaatste periode van het Paleozoïcum (350 tot 270 miljoen jaar geleden).

Van deze flora blijkt 82% uit gaafrandige soorten te bestaan. Schat de gemiddelde lokale jaartemperatuur in het Carboon.



figuur 3.19



gaafrandig

niet-gaafrandig

In figuur 3.20 zie je het verband tussen de productiekosten K per dag in euro's en de dagproductie q . De grafiek bestaat uit drie stukken.

- Het eerste stuk begint in $(0, 500)$ en eindigt in $(1000, 1200)$.
Stel de formule op van dit gedeelte.
- Doe dit ook voor de gedeelten II en III.
- Maak een overzicht van de formules van de productiekosten. Doe dit zoals hieronder.

Productiekosten

$K = \dots q + \dots$ voor q tussen 0 en 1000

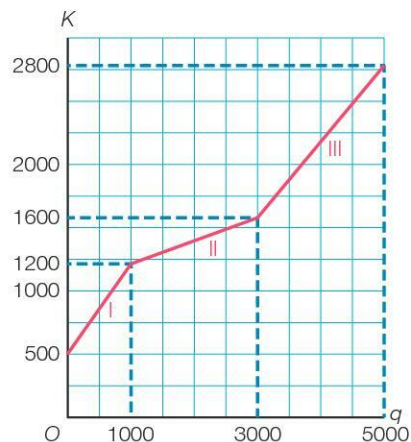
$K = \dots q + \dots$ voor q tussen ... en ...

$K = \dots q + \dots$ voor q tussen ... en ...

- Hoeveel procent meer zijn de productiekosten bij een dagproductie van 3500 stuks vergeleken met een dagproductie van 1500 stuks?
- De artikelen worden verkocht voor € 2,60 per stuk.
Bereken de winst bij een dagproductie van 2600 stuks.

Sinds kort is de dagproductie meer dan 5000 stuks. Er blijkt dat bij een dagproductie van 7000 stuks de kosten 3500 euro per dag zijn.

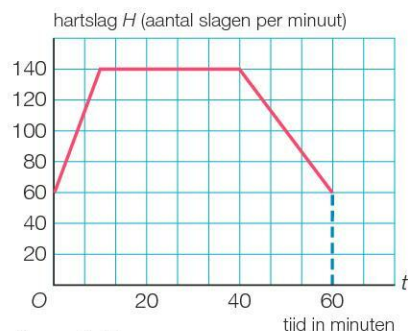
- Bereken met behulp van lineair interpoleren de kosten bij een dagproductie van 6300 stuks.



figuur 3.20

A56 Annet gaat elke week naar een sportschool. Ze begint met een warming-up van 10 minuten, waarna de work-out begint. Na afloop is een cooling down van belang voor een goed herstel. De grafiek in figuur 3.21 gaat over een bezoek van Annet aan de sportschool.

- Maak een overzicht van de formules van de hartslag zoals in opgave 55c.
- Bereken hoeveel minuten de hartslag van Annet meer dan 120 is.



figuur 3.21

A57 Iedereen die in Nederland woont, moet belasting betalen over hun belastbaar inkomen. Er zijn daarvoor vier belastingschijven. De tarieven voor 2019 staan in de tabel.

belastingschijf	belastbaar inkomen	belastingpercentage
schijf 1	t/m 20 384 euro	36,65%
schijf 2 en 3	vanaf 20 384 t/m 68 507 euro	38,10%
schijf 4	vanaf 68 507 euro	51,75%

Voor de belasting B_1 die je moet betalen in schijf 1 geldt de formule $B_1 = 0,3665i$. Hierin is i het belastbaar inkomen.

- Licht deze formule toe.
- Bereken hoeveel belasting je moet betalen als je het maximale inkomen uit schijf 1 verdient. Rond af op gehele euro's.

Als je tussen 20 384 en 68 507 euro per jaar verdient, dan betaal je over de eerste 20 384 euro 36,65% belasting. Over de rest van het bedrag betaal je de belasting die hoort bij schijf 2 en 3.

- Bereken hoeveel belasting je moet betalen als je het maximale inkomen uit schijf 2 en 3 verdient. Rond af op gehele euro's.
- De belasting die iemand met een belastbaar inkomen dat valt in schijf 2 en 3 moet betalen noemen we B_{23} . De formule is van de vorm $B_{23} = 0,381i + b$. Bereken b . Rond af op gehelen.

- Stel de formule op van de belasting B_4 die iemand met een belastbaar inkomen dat valt in schijf 4 moet betalen.

- Mevrouw Van Sprundel heeft in 2019 een belastbaar inkomen van 78 125 euro en voor meneer Van Sprundel was dat 35 400 euro. Bereken hoeveel zij in totaal aan belasting moeten betalen. Gebruik de formules die je hebt opgesteld.



A58

De volwassen Nederlander wordt gemiddeld steeds langer en zwaarder. In 1986 had de Nederlandse man een gemiddelde lengte van 177,5 cm en een gemiddeld gewicht van 77,6 kg. In 2016 was dat 181,1 cm en 84,5 kg. De Nederlandse vrouw woog in 2020 gemiddeld 72,0 kg. Dat was 4,5 kg meer dan in 1995. In 2020 was de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw 167,5 cm. Dat was 1,3 cm meer dan in 1994.

Neem in deze opgave aan dat er lineaire verbanden bestaan tussen de tijd t in jaren en het gewicht in kg, en tussen t en de lengte in cm. Neem bovendien aan dat deze lineaire verbanden ook de komende jaren gelden. Neem $t = 0$ in het jaar 1980.

- a Stel de formule op
 - van het gemiddelde gewicht G_m van de Nederlandse man,
 - van het gemiddelde gewicht G_v van de Nederlandse vrouw,
 - van de gemiddelde lengte L_m van de Nederlandse man en
 - van de gemiddelde lengte L_v van de Nederlandse vrouw.
- b Bereken de gemiddelde lengte van de Nederlandse man in het jaar dat de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw 168 cm is.
- c Mannen zijn gemiddeld zwaarder dan vrouwen. In 2012 was het verschil 13 kg. Bereken in welk jaar dit verschil 14 kg zal zijn. Wat is dan het gemiddelde gewicht van de Nederlandse man?

Een bekende maat om na te gaan of er sprake is van gezond gewicht of overgewicht is de Body Mass Index (BMI). De BMI bereken je met de formule $BMI = \frac{\text{gewicht}}{\text{lengte}^2}$. Hierin is het gewicht in kg en de lengte in meter.

Bij een BMI van 18,5 tot 25 is sprake van normaal gewicht, bij 25 tot 27 is er licht overgewicht en bij 27 tot 30 is er matig overgewicht.

Bram beweert dat tussen 1990 en 2020 de BMI van de Nederlandse man meer gestegen is dan de BMI van de Nederlandse vrouw.

- d Onderzoek of Bram gelijk heeft.

E59

Een koudwaterkraan, geheel geopend, vult een vat met een inhoud van 60 liter in 10 minuten. Een warmwaterkraan, ook geheel geopend, vult hetzelfde vat in 12 minuten. Een stop in de bodem van het vat zorgt ervoor dat het vat niet leegloopt. Als de stop er uit is, loopt een vol vat in 20 minuten helemaal leeg.

Als nu bij een leeg vat beide kranen geheel opengezet worden en ook de stop uit de bodem getrokken wordt, hoeveel minuten duurt het dan tot het vat vol is?

Terugblik

De richtingscoëfficiënt berekenen

Zijn van een lijn twee punten bekend, dan is de formule van de lijn op te stellen. Neem $y = ax + b$ met de richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Hierin is Δy het verschil van de y -waarden en Δx het bijbehorende verschil van de x -waarden.

Bij de lineaire formule $T = as + b$ is $a = \frac{\Delta T}{\Delta s}$.

Is gegeven dat bij $s = 5$ hoort $T = 21$ en bij $s = 11$ hoort $T = 14$, dan is

$$a = \frac{\Delta T}{\Delta s} = \frac{21 - 14}{5 - 11} = \frac{7}{-6} = -1\frac{1}{6}.$$

De formule opstellen van een lijn door twee gegeven punten

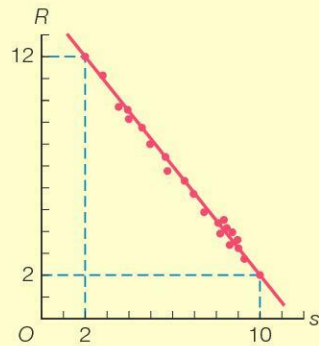
De formule van de lijn in de figuur hiernaast krijg je als volgt.

- $R = as + b$ met $a = \frac{\Delta R}{\Delta s}$
- Gebruik de punten (2, 12) en (10, 2) op de lijn.
$$a = \frac{\Delta R}{\Delta s} = \frac{2 - 12}{10 - 2} = -1,25$$
- $$\left. \begin{array}{l} R = -1,25s + b \\ s = 2 \text{ en } R = 12 \end{array} \right\} -1,25 \cdot 2 + b = 12, \text{ dus } b = 14,5$$

Je krijgt $R = -1,25s + 14,5$.

Hiermee is de vergelijking van de lijn opgesteld.

We zeggen ook wel dat R is uitgedrukt in s .



In de figuur hiernaast bestaat de grafiek uit drie lijnstukken. Het tweede stuk gaat door de punten (15, 60) en (40, 80). De bijbehorende formule vind je als volgt.

$$N = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{80 - 60}{40 - 15} = 0,8$$

$t = 15$ en $N = 60$ invullen in $N = 0,8t + b$ geeft $0,8 \cdot 15 + b = 60$, dus $b = 48$.

De formule is $N = 0,8t + 48$.

Op dezelfde manier vind je de formules voor het eerste en laatste stuk. Je krijgt

$$N = 2\frac{2}{3}t + 20 \text{ voor } t \text{ tussen } 0 \text{ en } 15$$

$$N = 0,8t + 48 \text{ voor } t \text{ tussen } 15 \text{ en } 40$$

$$N = 4t - 80 \text{ voor } t \text{ groter dan } 40.$$



3.4 Lineaire vergelijkingen met twee variabelen



De familie De Jong, bestaande uit twee volwassenen en drie kinderen, bezoekt de vakantiebeurs. Voor kinderen geldt een speciaal tarief. De vijf toegangskarten kosten samen €45,-.

- Noem enkele mogelijkheden voor de prijs van een toegangskart van een kind en van een volwassene.
- Stel dat een kaartje voor een kind x euro kost en voor een volwassene y euro.

Vul in: tussen x en y bestaat het verband $3x + 2y = \dots$

Theorie A Een variabele vrijmaken

In opgave 60 heb je de vergelijking $3x + 2y = 45$ opgesteld. Hierin kun je y **vrijmaken**. Dat gaat als volgt.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 45 && \text{Breng } 3x \text{ naar rechts.} \\ 2y &= -3x + 45 && \text{Deel alle termen door 2.} \\ y &= -1,5x + 22,5 \end{aligned}$$

Hiermee is y vrijgemaakt. Dit is hetzelfde als y uitdrukken in x .

Je ziet dat er een lineair verband bestaat tussen x en y . De grafiek van $3x + 2y = 45$ is dus een rechte lijn met richtingscoëfficiënt $-1,5$.

De vergelijking $3x + 2y = 45$ is een voorbeeld van een **lineaire vergelijking met twee variabelen**. Andere voorbeelden van lineaire vergelijkingen met twee variabelen zijn $3x - 2y = 12$ en $5p - 2q = 20$.

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$. De grafiek is een rechte lijn.

Voor $a = 2$, $b = -3$ en $c = 6$ krijg je $2x - 3y = 6$.

Om de bijbehorende lijn l te tekenen, bereken je de coördinaten van twee punten.

$x = 0$ geeft $2 \cdot 0 - 3y = 6$, dus $y = -2$.

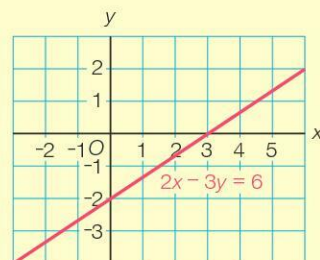
$y = 0$ geeft $2x - 3 \cdot 0 = 6$, dus $x = 3$.

Zo krijg je de tabel

x	0	3
y	-2	0

De lijn zie je in figuur 3.22.

Het punt $(9, 4)$ ligt op l , want invullen geeft $2 \cdot 9 - 3 \cdot 4 = 6$ en dit klopt. We zeggen dat $x = 9$ en $y = 4$ voldoet aan de vergelijking $2x - 3y = 6$.



figuur 3.22

Voorbeeld

Gegeven is de lijn $l: 2x - 5y = 8$.

- a Onderzoek of het punt $(14, 4)$ op l ligt.
- b Teken l .
- c Maak y vrij.

Uitwerking

- a Invullen geeft $2 \cdot 14 - 5 \cdot 4 = 8$ en dit klopt, dus $(14, 4)$ ligt op l .

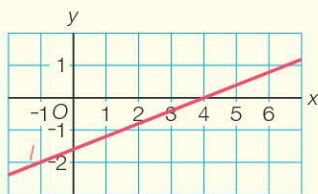
- b

x	-1	4
y	-2	0

Zoek twee roosterpunten op de lijn.

$y = 0$ geeft $2x - 5 \cdot 0 = 8$, oftewel $2x = 8$, dus $x = 4$.

$x = -1$ geeft $2 \cdot -1 - 5y = 8$, oftewel $-5y = 10$, dus $y = -2$.



- c $2x - 5y = 8$
 $-5y = -2x + 8$
 $y = 0,4x - 1,6$

- 61** a Maak y vrij bij $15x + 12y = 2520$.
b Druk p uit in q bij $3p - 2q = 16\frac{1}{2}$.
c Maak b vrij bij $5a - 2b = 16$.

- 62** Gegeven zijn de lijnen $l: 3x - y = 6$, $m: x + y = 1$, $n: x - y = 0$ en $p: x + 2y = 4$.
a Teken deze lijnen in één figuur.
b Bereken van elk van deze lijnen de richtingscoëfficiënt.

- A63** Gegeven is de lijn $l: 4x - 3y = 24$.
a Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de x -as en met de y -as en teken l .
b Onderzoek welke van de punten $A(8, 3)$, $B(18, 16)$ en $C(-30, -48)$ op l liggen.

- O64** a Jan koopt bij een tuincentrum twaalf coniferen en vier appelboompjes. Hij moet hiervoor € 242,40 betalen. Stel dat één conifeer x euro kost en één appelboompje y euro.
Welk verband tussen x en y volgt hieruit?
b Voor een concert zijn kaartjes te koop van 10 en 15 euro. De totale opbrengst op een avond is 4300 euro.
Stel bij deze gegevens een lineaire vergelijking op met de variabelen x en y .

In een restaurant is plaats voor 52 gasten. Er zijn in totaal 19 tafels, waarvan x tafels voor vier personen en y tafels voor twee personen. Bij deze situatie horen de vergelijkingen $x + y = 19$ en $4x + 2y = 52$.

- Licht dit toe.
- Maak van beide vergelijkingen formules met y uitgedrukt in x .
- De grafieken die bij de formules horen, hebben een snijpunt. Bereken de coördinaten van dit snijpunt.
- Hoeveel tafels voor vier personen heeft het restaurant? En hoeveel tafels voor twee personen?

Theorie B Vergelijkingen met twee variabelen toepassen

In opgave 65 zag je een situatie met twee variabelen (het aantal tafels voor vier personen en het aantal tafels voor twee personen) en twee voorwaarden (het totale aantal tafels en het totale aantal personen). In veel gevallen kun je de waarden van de variabelen als volgt berekenen.

Werkschema: situaties met twee variabelen

- Noem de variabelen x en y .
- Gebruik de voorwaarden om twee vergelijkingen op te stellen.
- Maak van beide vergelijkingen formules met y uitgedrukt in x .
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij deze formules.
- Gebruik de coördinaten van het snijpunt om de vraag te beantwoorden.

Voorbeeld

Meubelzaak Lefat verkoopt in een actieweek in totaal 52 tafels en stoelen. Een tafel kost 750 euro en een stoel 350 euro. De verkochte tafels en stoelen brengen tijdens de actieweek in totaal 24 600 euro op. Bereken hoeveel tafels en hoeveel stoelen in de actieweek werden verkocht.

Uitwerking

x = aantal tafels

y = aantal stoelen

$x + y = 52$, dus $y = 52 - x$

$750x + 350y = 24\,600$, dus $350y = -750x + 24\,600$

$$y = -2\frac{1}{7}x + 70\frac{2}{7}$$

Los op $52 - x = -2\frac{1}{7}x + 70\frac{2}{7}$

$$1\frac{1}{7}x = 18\frac{2}{7}$$

$$x = 16$$

$$y = 52 - 16 = 36$$

Neem $x = 16$ in de formule $y = 52 - x$.

Er zijn dus 16 tafels en 36 stoelen verkocht.

- 66** Op een camping wordt een barbecue gehouden.
 Kinderen betalen € 6,- en volwassenen € 8,-. In totaal brengt de barbecue € 1764,- op. Aan de barbecue doen 250 personen mee.
 Stel dat er x kinderen en y volwassenen aan de barbecue meedoen.
 Bereken hoeveel kinderen aan de barbecue meedoen.

- 67** In een envelop zitten briefjes van 5 en 10 euro. In totaal zitten er 20 briefjes in met een totale waarde van 135 euro.
 Bereken hoeveel briefjes van 5 euro en hoeveel briefjes van 10 euro er in de envelop zitten.

- 68** Rijwielhandelaar Lentink heeft in de maand april twee typen elektrische fietsen in de aanbieding gehad. Type A kostte 1575 euro en type B kostte 2025 euro. In totaal zijn er in april 38 fietsen van deze typen verkocht en deze brachten in totaal 66 150 euro op.
 Bereken hoeveel fietsen van type A en type B in de maand april zijn verkocht.

- A69** Een diëtiste moet een salade samenstellen uit tomaten en eieren. In deze salade moet voldoende vitamine A en vitamine B zitten. In de tabel zie je verdere informatie.
 Bereken uit hoeveel gram tomaat en eieren de salade moet bestaan.

	vit. A	vit. B
25 gram tomaat	2 mg	4 mg
25 gram ei	5 mg	3 mg
totaal vereist	60 mg	71 mg

- A70** Op de verjaardag van Marjan is de gemiddelde leeftijd van de 15 aanwezige personen 16,4 jaar. De jongens zijn gemiddeld 15,6 jaar en de meisjes 16,8 jaar.
 Hoeveel jongens zijn er op de verjaardag?

- A71** Meneer Welten rijdt over de snelweg van A naar B. Dat is een afstand van 85 km. Op een deel van deze route rijdt hij met de toegestane snelheid van 100 km/uur en op het andere deel rijdt hij met de toegestane snelheid van 120 km/uur. In totaal doet hij drie kwartier over de afstand van A naar B.
 Bereken hoeveel km hij met een snelheid van 120 km/uur rijdt.

- E72** Als 20 mensen samen een rekening betalen en ieder betaalt hetzelfde bedrag, dan betalen ze samen 3 euro te veel. Als 21 mensen dezelfde rekening betalen en ieder betaalt 3 euro minder, dan betalen ze samen 10 euro te veel.
 Bereken het bedrag van de rekening.



Terugblik

Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$.

De grafiek van $ax + by = c$ is een rechte lijn.

Om de lijn $k: 3x - 4y = 12$ te tekenen, maak je eerst een tabel met twee punten die op de lijn liggen.

Je krijgt bijvoorbeeld

x	0	4
y	-3	0

Dus de lijn gaat door de punten $(0, -3)$ en $(4, 0)$.

Het punt $A(10, 4\frac{1}{2})$ ligt op $k: 3x - 4y = 12$, want $3 \cdot 10 - 4 \cdot 4\frac{1}{2} = 12$ en dat klopt.

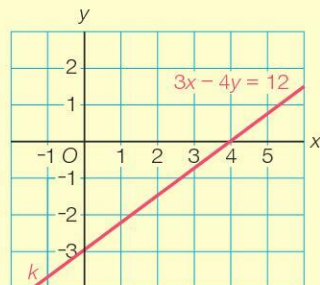
We zeggen dat $x = 10$ en $y = 4\frac{1}{2}$ voldoet aan de vergelijking $3x - 4y = 12$.

Bij de vergelijking $3x - 4y = 12$ kun je de variabele y vrijmaken.

Je krijgt $3x - 4y = 12$

$$-4y = -3x + 12$$

$$y = 0,75x - 3$$



Vergelijkingen met twee variabelen toepassen

Bij een pretpark is de entreprijs voor een volwassene € 18 en voor een kind € 12. Op een dag zijn er 1370 kaartjes verkocht en is er € 19 200 aan entreegeld binnengekomen. Om te berekenen hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen die dag het pretpark bezochten, ga je als volgt te werk.

Noem de variabelen x en y .

x = aantal volwassenen

y = aantal kinderen

Bij de situatie horen de vergelijkingen $x + y = 1370$ en $18x + 12y = 19200$.

Uit $x + y = 1370$ volgt $y = 1370 - x$.

Uit $18x + 12y = 19200$ volgt $12y = -18x + 19200$

$$y = -1,5x + 1600$$

Los op $1370 - x = -1,5x + 1600$

$$0,5x = 230$$

$$x = 460$$

Dus $y = 1370 - 460 = 910$.

Dus 460 volwassenen en 910 kinderen.

Eindopdracht Man en paard

Jesse Owens (1913-1980) was een Amerikaanse atleet, die vier gouden medailles won bij de Olympische Spelen van 1936 in Berlijn: de 100 m, de 200 m, het verspringen en de 4×100 m estafette. Na deze Spelen werd hij uitgebuit door de Amerikaanse Atletiekfederatie en toen Jesse uiteindelijk weigerde hieraan mee te werken, werd hij geschorst. Om in zijn levensonderhoud te voorzien, deed hij aan allerlei vreemde wedstrijden mee. Zo sprintte hij in 1948 tegen een paard. Jesse won. In juli 2010 sprintte de Britse atleet Jamie Baulch tegen het paard Peopleton Brook. Jamie was gespecialiseerd in de 400 meter, maar zijn persoonlijk record op de 100 meter sprint was met 10,51 seconden ook heel behoorlijk. Jamie verloor echter van Peopleton Brook.

In deze opdracht onderzoek je hoe een race over 100 meter tussen een goede atleet en een snel paard kan verlopen. De atleet bereikt eerder zijn topsnelheid, maar het paard heeft uiteindelijk een hogere topsnelheid.

We gaan eerst uit van de volgende situatie.

De atleet heeft na 3,5 seconden 24,5 meter afgelegd en na 7,5 seconden 66,5 meter.

Het paard heeft na 6 seconden 48 meter afgelegd en na 8 seconden 72 meter.

De atleet loopt de eerste 3,5 seconden met een constante snelheid (dus de afgelegde afstand is een lineaire formule van de tijd) en vanaf 3,5 seconden tot aan de finish met een andere constante snelheid.

Het paard loopt de eerste 6 seconden met een constante snelheid en vanaf 6 seconden tot aan de finish met een andere constante snelheid.

- Onderzoek door formules op te stellen wie deze race over 100 meter wint. Hoeveel seconden voorsprong heeft de winnaar? Rond af op twee decimalen.
- Onderzoek na hoeveel seconden de atleet zijn topsnelheid moet bereiken om 0,1 seconden eerder over de finish te komen dan het paard. Rond het antwoord af op één decimaal.



Jesse Owens



Jesse Owens

Diagnostische toets

3.1 Lineaire formules

- 1** Gegeven zijn de lijnen $l: y = x - 2$, $m: y = 2 - 1,5x$ en $n: y = -1$.
- a** Schrijf van elk van deze lijnen de richtingscoëfficiënt op.
Begin met $rc_l = \dots$
 - b** Teken de lijnen in één figuur.
- 2** De luchtdruk in een fietsband is 4,5 bar. Door een klein lek neemt de druk in de band ieder kwartier af met 6,5 kilopascal.
Stel de formule op van de luchtdruk in de band P in kilopascal, t uur na het ontstaan van het lek. Ga uit van een lineair verband en gebruik dat 1 kilopascal = 0,01 bar.
- 3** Gegeven is dat y evenredig is met x .
- a** Voor $x = 10$ is $y = 17$.
Stel de formule op van y en bereken y voor $x = 45$.
 - b** Voor $x = 12$ is $y = 9,2$.
Stel de formule op van y en bereken x voor $y = 23$.

3.2 Lineaire formules vergelijken

- 4** Los op. Rond af op één decimaal.
- a** $3x + 2 = 2 - 4(x - 3)$
 - c** $0,2(a - 7) = 0,4 - (3,1 - a)$
 - b** $120q + 840 = 144 - 60q$
 - d** $0,16(p + 5) = 0,05p - 3,44$
- 5** Bij de Nederlandse Spoorwegen kun je een abonnement nemen waarmee je in de spits 20% korting krijgt. De kosten voor dit abonnement zijn € 24,- per maand. Marlies gebruikt de trein om een aantal dagen per week naar haar werk en terug te reizen. Ze reist alleen in de spits. Het reguliere tarief van deze rit is € 7,50 voor een enkele reis. Neem aan dat Marlies n keer per maand met de trein naar haar werk gaat.
- a** Stel de formule op voor de maandelijkse kosten K_z in euro's als Marlies besluit geen abonnement te nemen. Doe dat ook voor de maandelijkse kosten K_a als ze het abonnement wel neemt.
 - b** Bereken voor welk aantal keren retour reizen per maand de reiskosten van Marlies met en zonder abonnement gelijk zijn.
- 6** Rond in deze opgave af op twee decimalen.
Gegeven zijn de formules $A = -7,14t + 74$, $B = -1,11t + 22,22$ en $C = \frac{-41t + 565}{10,5}$.
- a** Bereken voor welke waarden van t geldt dat $B > C$.
 - b** Bereken voor welke waarden van t geldt dat $B < A < C$.

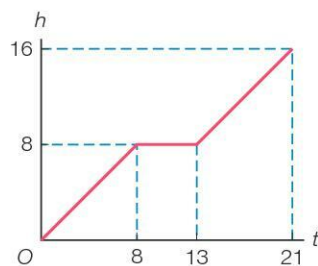
3.3 Lineaire formules opstellen

7 De lijn l gaat door het punt $A(3, -7)$ en $rc_l = -1,25$.
Stel de formule van l op.

8 Stel de formule op van de lijn door de punten

- a** $A(2, 3)$ en $B(8, -2)$
- b** $C(-1, 2)$ en $D(2, 0)$.

9 Schepen die vanuit de Golf van Panama het Panamakanaal invaren worden door de sluizen van Miraflores in twee stappen naar een hoogte van 16 meter boven zeeniveau gebracht. In de figuur hiernaast zie je het verband tussen de hoogte van een schip boven zeeniveau h in meters en de tijd t in minuten. Hierbij is $t = 0$ het moment waarop het schip begint te stijgen.



figuur 3.23

- a** Maak een overzicht van de formules van de hoogte van een schip in de sluizen van Miraflores.
- b** Na hoeveel minuten bevindt een schip zich op een hoogte van 13 meter boven zeeniveau?

Schepen die de andere kant op varen leggen het traject in precies dezelfde tijd omgekeerd af. Deze schepen bevinden zich op $t = 0$ op een hoogte van 16 meter boven zeeniveau.

- c** Maak ook voor deze schepen een overzicht van de formules.

3.4 Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

10 **a** Maak q vrij bij $5p - 3q = 9$.

b Druk T uit in t bij $7,5T + 22,5t = 15$.

11 Gegeven is de lijn l met vergelijking $5x - 4y = 40$.

- a** Bereken de richtingscoëfficiënt van lijn l .
- b** Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de x -as en met de y -as en teken l .
- c** Onderzoek welke van de punten $A(9; 1,2)$, $B(18; 12,5)$ en $C(-28, -45)$ op l liggen.

12 Koffiebrander Ari verkoopt een melange van twee soorten koffiebonen. De ene soort kost € 5,- per 250 gram en de andere kost € 7,50 per 250 gram. Ari maakt in totaal 30 kg van de melange met een totale prijs van € 786. Hoeveel kilogram van de duurste bonen zitten er in de melange?



4

Handig tellen

Wat leer je?

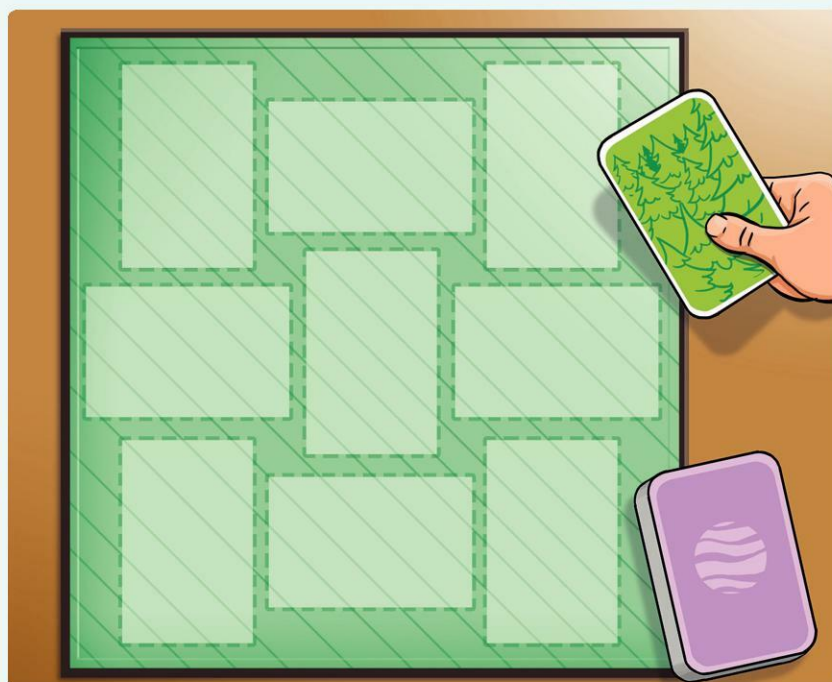
- De vermenigvuldigingsregel en somregel gebruiken bij telproblemen.
- Wat permutaties, faculteiten en combinaties zijn en hoe je deze gebruikt.
- Hoe je aan de slag gaat bij lastige telproblemen.



Beginopdracht Spelbord ontwerp

Sommige bordspellen worden op den duur minder leuk omdat er weinig variatie is in het spelbord. Er zijn spellenmakers die dit probleem proberen op te lossen door een spelbord te maken dat je op veel manieren kunt combineren.

Een voorbeeld is het onderstaande spelbord, dat uit negen vakken bestaat waarin je een kaart kunt leggen.



Ter voorbereiding van het spel worden 9 verschillende kaarten op dit spelbord neergelegd. Elke kaart kan maar op één manier in een vak gelegd worden.

- Hoeveel verschillende opstellingen zijn er mogelijk?

Om voor meer afwisseling te zorgen, besluit de spellenmaker ook de achterkant van de kaarten te bedrukken. Elke kaart kan nu op twee manieren in een vak gelegd worden.

- Hoeveel verschillende opstellingen zijn er dan mogelijk?

Daarnaast besluit de spellenmaker om een nieuwe kaart toe te voegen die ook aan twee kanten is bedrukt. Bij het neerleggen van de kaarten blijft er één kaart over.

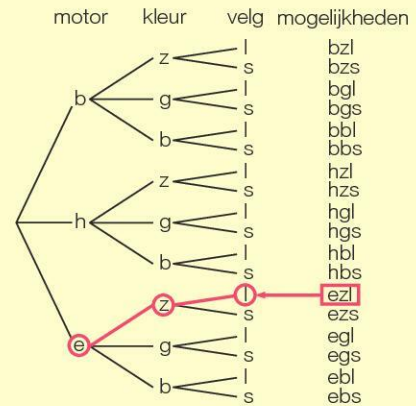
- Hoeveel extra opstellingen zijn er nu mogelijk?

Voorkennis Teldiagrammen

Theorie A Boomdiagram en wegediagram

Bij garage Stuurman is de Toyota Auris verkrijgbaar met een benzine, een hybride of een elektrische motor. Verder kan gekozen worden uit de kleuren zwart, groen en blauw. De auto wordt tot slot geleverd met lichtmetalen velgen of stalen velgen. Met het boomdiagram in figuur 4.1 krijg je een overzicht van alle mogelijkheden.

Soms is het handig om in plaats van een boomdiagram een wegediagram te maken. Voordelen van wegediagrammen zijn dat ze snel te tekenen zijn en dat de bijbehorende berekening eenvoudig uit het diagram is af te leiden. Hieronder zie je het wegediagram bij de situatie van de Toyota Auris.



figuur 4.1



figuur 4.2

De rode route hoort bij de keuze voor een elektrische motor, de kleur zwart en lichtmetalen velgen.

Het totale aantal mogelijkheden bereken je als volgt.

$$\text{aantal} = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

- 1 Linda gaat met school op reis naar het buitenland. In haar tas zitten drie spijkerbroeken en vijf T-shirts. Ze trekt elke dag een spijkerbroek en een T-shirt aan.
 - a Op hoeveel manieren kan Linda zich hiermee kleden?
 - b Tijdens de reis koopt ze er een spijkerbroek en twee T-shirts bij. Met hoeveel neemt het aantal mogelijkheden hierdoor toe?
- 2 In een bos zijn drie wandelroutes aangelegd: geel, groen en blauw. Je kunt de routes maar in één richting bewandelen. Iets verderop komen de drie routes bij elkaar. Een wandelaar kan dan kiezen om over te stappen op een andere route. Verderop gebeurt dat weer.
 - a Hoeveel verschillende mogelijke wandelingen zijn er in totaal?
 - b De boswachter besluit om tijdens het broedseizoen het eerste deel van de gele route verboden terrein te maken. Met hoeveel neemt het aantal mogelijke wandelingen daardoor af?

4.1 Regels bij telproblemen



In een restaurant kan Annette kiezen uit het twee- of driegangendiner. Bij een tweegangendiner hoort geen nagerecht. Zie de menukaart hiernaast voor alle opties.

- Hoeveel verschillende keuzes voor haar menu heeft Annette bij een tweegangendiner? En bij een driegangendiner?
- Hoeveel keuzes voor haar menu heeft Annette in totaal?



Theorie A De vermenigvuldigingsregel en de somregel

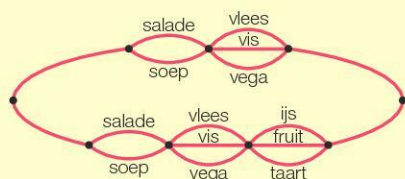
In opgave 1 werd gevraagd hoeveel keuzes Annette kan maken bij het samenstellen van haar menu. Haar keuzemogelijkheden voor het driegangendiner zijn overzichtelijk te presenteren in een wegendiagram.



figuur 4.3

Om het wegendiagram te doorlopen kies je een eerste gerecht *en* een tweede gerecht *en* een derde gerecht. Daarom gebruik je de **vermenigvuldigingsregel**. Je vermenigvuldigt de opeenvolgende aantallen keuzemogelijkheden. Aan het wegendiagram kun je zien dat ze $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ verschillende keuzes voor het driegangendiner heeft.

In opgave 1 had Annette de keuze uit een twee- of driegangendiner. Daarbij hoort het volgende wegendiagram.



figuur 4.4

In dit wegendiagram zijn twee verschillende situaties te onderscheiden. Je kiest voor een tweegangendiner *of* je kiest voor een driegangendiner. In deze situatie gebruik je behalve de vermenigvuldigingsregel ook de **somregel**. Bij de somregel tel je het aantal mogelijkheden van de verschillende situaties bij elkaar op.

Zo krijg je het totale aantal keuzemogelijkheden:

$$\text{aantal} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 = 24.$$

Vuistregel

In een situatie waar je *en* kunt gebruiken, vermenigvuldig je.

Vuistregel

In een situatie waar je *of* kunt gebruiken, tel je op.

Voorbeeld

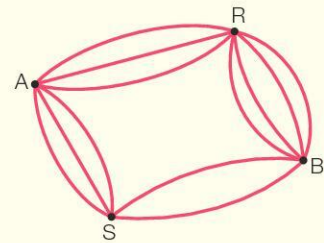
Hoeveel routes zijn er in het diagram van A naar B?

Aanpak

van A naar B via R of via S

Uitwerking

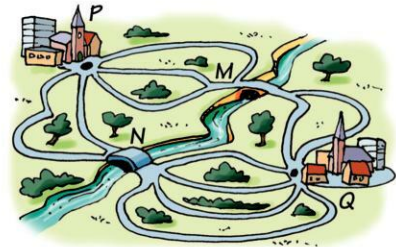
$$\text{aantal} = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 18$$



figuur 4.5

2
☐ ⊗ *

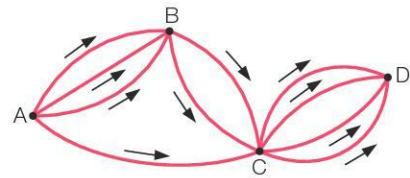
Tussen de plaatsen P en Q stroomt een rivier die bij M en N kan worden overgestoken. Op hoeveel manieren kun je van P naar Q?



figuur 4.6

3
☐ ⊗

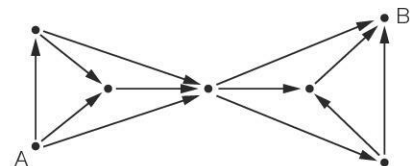
Zie het wegendiaagram in figuur 4.7. Op hoeveel manieren kun je van A naar D?



figuur 4.7

E4
⊗ *

Zie figuur 4.8. Op hoeveel manieren kun je van A naar B als je steeds de pijlen volgt?



figuur 4.8

5
☐ ⊗

Op een boekenplank staan acht Duitse, elf Engelse en vijf Franse boeken.

- a Caroline leest van deze boeken eerst een Duits, dan een Engels en ten slotte een Frans boek. Hoeveel mogelijke drietallen zijn er?
- b Hoeveel mogelijke tweetallen zijn er voor Caroline als ze twee boeken leest, waarvan alleen het eerste boek Duits is.



- 6** Een hoofdstuk uit een wiskundeboek bestaat uit vijf paragrafen. Om het proefwerk over dit hoofdstuk te maken, gebruikt de docent een computerprogramma. Dit programma kiest eerst bij paragraaf 1 willekeurig één opgave uit acht beschikbare opgaven. Daarna kiest het programma één opgave bij paragraaf 2, dan één bij paragraaf 3, enzovoort. Zie de tabel.

PROEFWERKOPGAVEN

paragraaf	1	2	3	4	5
aantal beschikbare opgaven	8	5	7	3	11

- Hoeveel verschillende proefwerken kan de computer leveren?
- Nadat de leraar het proefwerk voor klas 4Ha heeft samengesteld, gaat hij dat ook doen voor klas 4Hb.
Hoeveel proefwerken kan de computer leveren als alle opgaven verschillen van die van klas 4Ha?

- 7** Woonwarenhuis Comfi verkoopt houten kasten van het type KD. Deze zijn er in de breedtematen 40 cm, 60 cm en 80 cm. De kasten zijn in de kleuren wit, zwart, rood en bruin verkrijgbaar. Elke kast heeft een deur van hout, matglas of helder glas, waarbij de houten deuren leverbaar zijn in de kleuren wit, zwart, rood en groen. Hoeveel kasten van het type KD kun je samenstellen?

Een wegendiaagram kan helpen om een overzicht te krijgen.

- A8** In tapasrestaurant Mediterana hebben ze tapas gebaseerd op de landen Spanje, Italië en Portugal. Voor elk land heb je de keuze uit 15 tapas met keuze uit vlees, vis en veganistische gerechten. De verdeling zie je in de tabel.

Coen gaat met zijn vrienden bij Mediterana eten. Ze hebben afgesproken de eerste ronde Spaanse tapas te eten, de tweede ronde Italiaanse tapas en de laatste ronde tapas uit Portugal. Coen mag elke ronde een van de tapas uitkiezen. Hoeveel keuzes heeft Coen als hij

- drie vleestapas wil kiezen
- een Italiaans visgerecht wil en verder twee vlees tapas
- drie vlees of drie vis of drie veganistische tapas wil
- een veganistische tapa en twee vis tapas wil?

	vlees	vis	vegan
Spaans	8	4	3
Italiaans	5	7	3
Portugees	4	7	4



A9 De RDW is de Nederlandse overheidsdienst die de registratie van gemotoriseerde voertuigen verzorgt. Dat gaat met behulp van een kenteken, dat is een unieke cijfer- en lettercombinatie die op de voor- en achterkant van een gemotoriseerd voertuig moet worden bevestigd. De RDW bepaalt hoeveel letters en cijfers op de kentekens moeten staan en in welke volgorde. Elke paar jaar wordt een nieuwe serie kentekens in gebruik genomen. Zie de tabel hiernaast.

- a** Hoeveel verschillende kentekens waren er in de eerste serie mogelijk?

In 1965 nam de RDW een nieuwe serie in gebruik en in 1973 weer.

- b** Hoeveel kentekens kon de RDW in totaal uitgeven vóór 1973?

Vanaf de vierde serie gebruikt de RDW geen klinkers meer in de kentekens. De letters C en Q gebruikt de RDW ook niet, omdat deze letters te veel op een 0 lijken.

- c** Hoeveel verschillende kentekens waren er mogelijk in serie vijf?

In serie 7 en 8 werden voor het eerst drie letters achter elkaar op het kenteken gezet. Toen werden ook de volgende combinaties verboden: GVD, KKK, NSB, PKK, PSV en TBS.

- d** Hoeveel verschillende kentekens waren er mogelijk in serie 7 en 8 samen?

Daarna werden ook de lettercombinaties PVV, SGP en VVD verboden.

- e** Hoeveel meer kentekens zitten er in serie 11 vergeleken met serie 10?

- f** Hoeveel kentekens met de letters RDW (in deze volgorde en zonder streepjes) zijn er in totaal mogelijk in de eerste 11 series?

Serie	Jaartal	Combinatie
1	1951	XX-99-99
2	1965	99-99-XX
3	1973	99-XX-99
4	1978	XX-99-XX
5	1991	XX-XX-99
6	1999	99-XX-XX
7	2005	99-XXX-9
8	2009	9-XXX-99
9	2006	XX-999-X
10	2008	X-999-XX
11	2015	XXX-99-X

X = letter, 9 = cijfer

Volgens de RDW zijn de klinkers:
A, E, I, O, U en Y.

O10 Drie vrienden spelen een spel waarbij elke speler mag kiezen uit één van acht verschillende spelkarakters.

Hoeveel situaties zijn mogelijk wanneer

- a** elke speler een verschillend spelkarakter moet kiezen
b spelkarakters vaker gekozen mogen worden?



Theorie B Met of zonder herhaling

Het aantal rondwandelingen van A via B naar A terug in figuur 4.9 is $5 \cdot 5 = 25$.

Je gaat er dan vanuit dat je op de terugweg dezelfde weg mag kiezen als op de heenweg.

Wil je terug niet dezelfde weg nemen als heen, dan is het aantal $5 \cdot 4 = 20$.

Het is bij telproblemen belangrijk je af te vragen of **herhalingen** zijn toegestaan.



figuur 4.9

Zonder herhaling

In opgave 10 kozen 3 spelers uit 8 verschillende karakters. Als karakters niet vaker gekozen mogen worden, heb je te maken met een situatie zonder herhaling.

Het aantal manieren om de karakters te verdelen is

$$\text{aantal} = \overset{8}{\uparrow} \times \overset{7}{\uparrow} \times \overset{6}{\uparrow} = 336$$

De eerste speler kiest uit 8 karakters.

Daarna kiest de tweede speler uit 7 karakters.

Ten slotte kiest de derde speler uit 6 karakters.

Met herhaling

Als karakters wel vaker gekozen mogen worden, heb je te maken met een situatie met herhaling.

Het aantal manieren om de karakters te verdelen is

$$\text{aantal} = \overset{8}{\uparrow} \times \overset{8}{\uparrow} \times \overset{8}{\uparrow} = 512$$

De eerste speler kiest uit 8 karakters.

De tweede speler kiest ook uit 8 karakters.

De derde speler kiest ook uit 8 karakters.

Voorbeeld

Een bedrijf laat een nieuwe website maken. De achtergrond van de website moet bestaan uit drie gekleurde horizontale banen. Voor de kleur van de banen wordt gekozen uit rood, geel en blauw.

Hoeveel mogelijke achtergronden voor de website zijn er als

- a alle banen een verschillende kleur hebben
- b twee aan elkaar grenzende banen niet dezelfde kleur mogen hebben?

Uitwerking

a aantal = $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

b aantal = $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

Voor de derde baan zijn weer twee kleuren mogelijk.

11 In een bedrijf krijgt elk artikel een code. Bij het coderen gebruikt men de letters *o, p, q, r, s* en *t*.

- a Hoeveel drielettercodes zijn mogelijk als
 - elke letter maar één keer gebruikt mag worden
 - elke letter ook vaker gebruikt mag worden?
- b Hoeveel vierlettercodes zijn mogelijk waarbij niet twee dezelfde letters naast elkaar staan?
- c Het bedrijf gebruikt per artikel uitsluitend een drielettercode waarbij herhalingen zijn toegestaan of een vierlettercode waarbij herhalingen niet zijn toegestaan.
Hoeveel codes zijn mogelijk?

Verschillende soorten codes

drielettercodes

met herhaling

bijvoorbeeld *s p p*

zonder herhaling

bijvoorbeeld *s p t*

vierlettercodes

met herhaling

bijvoorbeeld *q t o t*

zonder herhaling

bijvoorbeeld *p r t o*

12 Bij een uitwisseling maakt een groep van acht Nederlandse en tien Franse leerlingen een wandeling door Lille. Eén leerling maakt foto's, één leerling maakt een verslag en één leerling bepaalt de route.

Op hoeveel manieren zijn drie leerlingen aan te wijzen als

- a een Franse leerling de route bepaalt en het verder niet uitmaakt
- b een Franse leerling de route bepaalt en Nederlandse leerlingen de foto's en het verslag maken
- c de foto's en het verslag niet allebei door Franse leerlingen en niet allebei door Nederlandse leerlingen worden gemaakt?



13 * Hoeveel routes zijn er in de figuur hiernaast als je begint en eindigt in A en zowel L als R wilt bezoeken, waarbij je elke weg maar één keer mag gebruiken?



figuur 4.10

A14 Landenvlaggen zijn een symbool voor nationale eenheid. Ze zeggen vaak wat over het land en zijn geschiedenis. Veel landen hebben een vlag met drie verticale banen.

In deze opgave beperken we ons tot de kleuren zwart, wit, blauw, rood, groen, geel en oranje.

- a Hoeveel vlaggen met drie verticale banen zijn met deze kleuren te vormen? Twee aan elkaar grenzende banen hebben verschillende kleuren.
- b Hoeveel vlaggen met drie verticale banen zijn te vormen als alle kleuren verschillen?

De vlag van Denemarken bestaat uit een kruis met vier vlakken.

- c Op hoeveel manieren is dit patroon te kleuren als het kruis een andere kleur heeft dan elk van de vier vlakken, waarbij de vier vlakken van kleur mogen verschillen?



A15
☐ ⊙ *

Marlies organiseert een filmavond voor haar vriendinnen. Op deze avond worden drie films gedraaid van verschillende genres uit de film-top-25. In de tabel zie je hoe vaak elk genre in de top-25 voorkomt.

DE FILM-TOP-25

genre	aantal
drama	4
comedy	5
actie	7
horror	4
romantiek	3
tekenfilm	2

Hoeveel mogelijkheden zijn er om de avond te vullen als

- a ze eerst naar een tekenfilm kijken, dan naar een comedy en als laatste naar een horrorfilm
- b ze eerst naar een comedy en als laatste naar een drama kijken
- c als ze naar een drama, een comedy en een horrorfilm kijken, waarbij in elk geval de horrorfilm als eerste wordt bekeken?

Matthijs organiseert ook een filmavond waarop naar drie verschillende films uit dezelfde top-25 wordt gekeken.

- d Hoeveel mogelijkheden zijn er om eerst een horrorfilm, vervolgens een actiefilm en ten slotte weer een horrorfilm te zien?

A16
☐ ⊙ *

In deze opgave gaat het om getallen van vier cijfers, waarin alleen maar de cijfers 3, 4, 5, 6, 7 en 8 voorkomen.

Hoeveel van die getallen zijn er in het geval

- a elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
- b elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal groter dan 6000 moet zijn
- c elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden
- d elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal tussen 6000 en 6500 moet liggen
- e elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 6500 moet zijn?

A17
☐ ⊙ *

Roel ontwerpt een spel waarbij de speler vier keer met één dobbelsteen gooit. Er zijn drie situaties die punten opleveren.

- 1 Alle vier de ogen aantallen zijn verschillend.
- 2 Er is geen enkele keer 6 ogen voorgekomen.
- 3 De dobbelsteen viel nooit twee worpen achter elkaar op hetzelfde ogen aantal.

Roel wil dat een situatie die vaker voorkomt, minder punten oplevert dan een situatie die minder vaak voorkomt. Bereken welke van de drie situaties het meeste en welke manier het minste punten waard is.



E18
*

Rosalin schrijft getallen van vijf cijfers op die alleen bestaan uit de cijfers 1, 2 en 3. Ook wil zij dat cijfers die naast elkaar staan precies 1 verschillen. Hoeveel getallen kan Rosalin maximaal opschrijven?

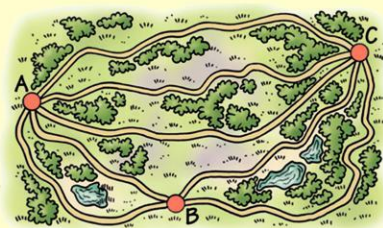
Terugblik

De vermenigvuldigings- en somregel

Om te zien of je bij een telprobleem moet vermenigvuldigen of optellen kun je letten op de woorden *en* en *of*. Als vuistregel moet je bij *en* vermenigvuldigen en bij *of* optellen.

Bij twijfel kan een wegediagram uitkomst bieden.

In de situatie hiernaast kun je direct van A naar C of eerst naar B *en* dan naar C. Dus het aantal routes van A naar C is $3 + 2 \cdot 2 = 7$.



Met of zonder herhaling

Let op of herhalingen zijn toegestaan.

Een schaakclub kiest elk kwartaal uit dezelfde 12 leden welke speler de wedstrijd op bord 1 mag spelen. Hoeveel mogelijkheden zijn er voor een kalenderjaar?

Het aantal mogelijkheden is $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12$, want bij elk kwartaal zijn er 12 mogelijkheden.

De twaalf leden van de schaakclub kiezen uit hun midden een team van vier spelers. De eerst gekozen speler speelt aan bord 1, de tweede aan bord 2, enzovoort.

Hoeveel teams kunnen zo gekozen worden?

Het aantal teams is $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$, want herhalingen zijn niet toegestaan.

Telproblemen uitwerken

Bij eenvoudige telproblemen ligt de berekening vaak voor de hand.

Maak je getallen van vier cijfers waarbij je de cijfers 1, 2, 3, 4 en 9 mag gebruiken en zijn herhalingen niet toegestaan, dan krijg je aantal = $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Wanneer een situatie minder eenvoudig is, is het belangrijk het aantal keuzemogelijkheden goed te overdenken voor je de berekening maakt.

Maak je getallen van vier cijfers die tussen de 4000 en 4400 liggen, waarbij je de cijfers 1, 2, 3, 4 en 9 mag gebruiken, dan bereken je het aantal mogelijke getallen als volgt.

Het eerste cijfer is een 4. Je hebt dus maar 1 keuze.

Het tweede cijfer is een 1, 2 of 3. Je hebt dus 3 keuzes.

Dus het aantal mogelijke getallen is $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$.

4.2 Permutaties en combinaties



Een groep van acht vrienden gaat een weekend kamperen. Eén van hen reserveert de camping, een ander regelt het vervoer en een derde doet de inkopen.

- a Op hoeveel manieren kunnen deze drie taken verdeeld worden?
- b Op hoeveel manieren kunnen acht verschillende taken over deze acht vrienden verdeeld worden?

Theorie A Permutaties en faculteiten

Voor het organiseren van een feestavond melden zich acht leerlingen aan. We noemen ze A, B, C, D, E, F, G en H. Uit deze acht leerlingen worden er drie gekozen: de eerste zorgt voor de drank, de tweede voor de hapjes en de derde voor de muziek.

We vragen ons af op hoeveel manieren de drie leerlingen gekozen kunnen worden. Het antwoord volgt uit de vermenigvuldigingsregel. Het aantal manieren is $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Een mogelijk verdeling is BDF. We noemen BDF een **rangschikking** van drie leerlingen uit acht leerlingen. Een ander woord voor rangschikking is **permutatie**.

Dus het aantal permutaties van 3 uit 8 is $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Bij een permutatie heb je te maken met een situatie zonder herhaling.

Het aantal permutaties van 3 uit 8, dus het aantal rangschikkingen van drie dingen die je uit acht dingen kiest, is $8 \cdot 7 \cdot 6$.

Het aantal permutaties van 4 uit 10 is $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$. En het aantal permutaties van 10 uit 10 is $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

De notatie voor dit product is $10!$ (spreek uit: 10 faculteit).

We zeggen kortweg: het aantal permutaties van tien dingen is $10!$.

Het aantal permutaties van n dingen, dus het aantal rangschikkingen van n dingen is $n!$.

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

De GR heeft opties waarmee je faculteiten en aantallen permutaties kunt berekenen.

- Op de TI krijg je ! en nPr in het math-KANS-menu of via de functietoets f2.
- Op de Casio krijg je ! en nPr in het OPTN-PROB-menu.
- Op de HP krijg je Factorieel en Permutatie in het werksetmenu



Wisk. Kies vervolgens Kans.

Voorbeeld

Aan een hardloopwedstrijd doen zeven atleten mee.

- a Op hoeveel manieren kunnen de gouden, de zilveren en de bronzen medaille bij deze atleten terecht komen?
- b In hoeveel volgorden kunnen de zeven atleten de finish passeren?

Uitwerking

- a aantal = $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$
- b aantal = $7! = 5040$



20
📅🔍

- a Simone heeft twaalf bordspellen. Ze stelt een top-5 samen. Op hoeveel manieren kan dat?
- b Bij een spellentoernooi staan 56 genummerde stoelen. Er komen 23 spelers de zaal binnen. Elke speler neemt plaats op een stoel. Op hoeveel manieren kan dat?
- c Voor een spelavond nemen zes vriendinnen ieder een verschillend bordspel mee. Ze zullen elk spel één keer spelen. Hoeveel volgorden zijn mogelijk?



21
📅🔍*

- Martin is de pincode van zijn bankpas vergeten, maar hij weet nog wel dat daarin de cijfers 2, 5, 8 en 9 voorkomen.
- a Hoeveel pincodes zijn er met deze cijfers?
 - b Hoeveel van deze pincodes beginnen met 5?

22
📅🔍*

Luus heeft een muziekplaylist gemaakt met haar tien favoriete nummers. De totale speelduur van de playlist is 28 minuten en 12 seconden. Ze luistert altijd op shuffle, de tien nummers worden dan in willekeurige volgorde afgespeeld. Bereken hoeveel jaar Luus nodig zou hebben om de playlist op alle mogelijke verschillende volgordes achter elkaar te beluisteren.

A23
📅🔍*

- De selectie van het eerste team van volleybalvereniging Avanti bestaat uit negen spelers.
- a Bij het begin van de competitie wordt een foto van de selectie gemaakt. De fotograaf zet hiertoe de spelers op een rij. Hoeveel rijen zijn mogelijk?
 - b Op hoeveel manieren kun je een aanvoerder en een reserveaanvoerder kiezen?
 - c Voor de wedstrijd tegen Smash deelt de trainer de shirts met de rugnummers 1 tot en met 6 uit. Op hoeveel manieren kan dat?

E24
🔍*

- Een bedrijf gebruikt codes met de letters a , b , c , d , e en f . Bedenk een vraag waarbij er
- a $6!$ codes zijn
 - b 6^4 codes zijn
 - c $6 \cdot 5 \cdot 4$ codes zijn
 - d 6^3 codes zijn.

Marit gaat vier verschillende kazen kopen voor een kaasproeverij. Bij de kaasboer heeft ze keuze uit 12 soorten kaas. Ze wil een kaasmenu samenstellen, waarbij ze de kazen één voor één opdient.

a Hoeveel verschillende kaasmenu's kan ze samenstellen?

Marit besluit de kazen niet één voor één op te dienen, maar gelijktijdig te serveren. Hierdoor heeft ze minder verschillende mogelijkheden bij het serveren van de kazen.

b Licht dit toe.

Theorie B Combinaties

Na een schoolfeest maken drie leerlingen de zaal schoon. De leerlingen Annelies, Bert, Casper, Daan en Evelien stellen zich beschikbaar.

Op hoeveel manieren is uit deze vijf leerlingen een schoonmaakkploeg van drie leerlingen te vormen?

Het voor de hand liggende antwoord $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ is niet goed.

Je moet er rekening mee houden dat de schoonmaakkploeg ABC

(Annelies, Bert en Casper) dezelfde ploeg is als bijvoorbeeld BAC. Binnen de schoonmaakkploeg is de volgorde niet van belang, dus de ploegen ABC, ACB, BAC, BCA, CAB en CBA zijn allemaal dezelfde schoonmaakkploeg.

Voor drie leerlingen in een schoonmaakkploeg betekent dit telkens $3! = 6$ permutaties die bij één schoonmaakkploeg horen. Zie de figuur hiernaast.

Omdat de volgorde binnen de ploeg niet van belang is, komen er van de $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ mogelijke drietallen telkens $3! = 6$ op hetzelfde neer. Het aantal mogelijke schoonmaakkploegen is dus

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10.$$

Is bij het kiezen van drie dingen uit vijf dingen de volgorde *niet* van belang, zoals bij de schoonmaakkploeg, dan spreken we van het aantal **combinaties** van 3 uit 5. Het aantal combinaties van 3 uit 5 noteren we als $\binom{5}{3}$. Spreek uit: vijf boven drie.

Het aantal combinaties van 3 uit 5 noteer je als $\binom{5}{3}$. Dit is het aantal manieren om 3 dingen te kiezen uit 5 dingen waarbij de volgorde niet van belang is.

Let op het verschil met permutaties, waarbij de volgorde van de gekozen dingen wel van belang is.

ALLE MOGELIJKE SCHOONMAAKPLOEGEN

1	ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA	←
2	ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA	←
3	ABE	AEB	BAE	BEA	EAB	EBA	←
4	ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA	←
5	ACE	AEC	CAE	CEA	EAC	ECA	←
6	ADE	AED	DAE	DEA	EAD	EDA	←
7	BCD	BDC	CBD	CDB	DBC	DCB	←
8	BCE	BEC	CBE	CEB	EBC	ECB	←
9	BDE	BED	DBE	DEB	EBD	EDB	←
10	CDE	CED	DCE	DEC	ECD	EDC	←

telt steeds maar voor één

Op de GR vind je de optie voor combinaties in hetzelfde menu als de optie voor permutaties. Op de TI en Casio worden combinaties weergegeven met nCr.

Ga na dat $\binom{5}{3} = 10$.

Voorbeeld

Frauke heeft tien boeken in de kast staan die ze al heeft gelezen. Ze besluit er drie weg te geven.

Hoeveel mogelijkheden zijn er

- a als ze drie vrienden elk één boek geeft
- b als ze één vriendin drie boeken geeft?

Aanpak

Er moeten drie boeken uit tien boeken gekozen worden. Dus je hebt te maken met permutaties of combinaties. Ga per situatie na of de volgorde van belang is.

Uitwerking

a aantal = $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ <..... De volgorde is van belang, dus permutaties.

b aantal = $\binom{10}{3} = 120$ <..... De volgorde is niet van belang, dus combinaties.

R26



Gaat het bij de volgende situaties om combinaties of om permutaties?

- a Uit een klas worden zes leerlingen gekozen om boodschappen te doen voor het schoolfeest.
- b In een klas worden vijf bioscoopbonnen verloot.
- c Een vereniging kiest uit haar leden een voorzitter, een secretaris en een penningmeester.
- d Uit een top tien stel je een eigen top drie samen.
- e Van 500 leerlingen komen er 300 naar het schoolfeest.

27

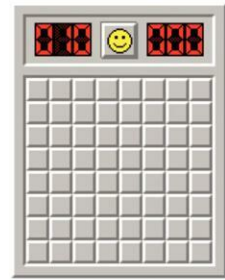


- a Uit een selectie van 18 spelers wordt een spelersraad van vier spelers samengesteld. Hoeveel spelersraden zijn mogelijk?
- b Bij de lotto kruist een deelnemer zes getallen aan uit de nummers 1 tot en met 45. Hoeveel zestallen zijn mogelijk?
- c Een toets bestaat uit 20 ja/nee-vragen. Hoeveel mogelijkheden zijn er om 15 juiste antwoorden aan te kruisen?
- d Op het onderdeel 100 meter sprint bij de Olympische Spelen behalen drie van de acht finalisten een medaille. Op hoeveel manieren kan dat?



28
□ ⊙ *

Bij het spel mijnenveger worden in het speelveld van 8×8 vakjes 10 mijnen geplaatst. Bij elke vakje bestaat de mogelijkheid dat er een mijn geplaatst is of niet. Hoeveel mogelijke opstellingen zijn er?



A29
□ ⊙ *

Op de boekenplank van Yvonne staan zes Engelse, vijf Franse en drie Duitse boeken.

- a Op hoeveel manieren kunnen deze 14 boeken gerangschikt zijn?
- b Sabine leent drie boeken van Yvonne. Hoeveel drietallen zijn er mogelijk?
- c Hoeveel drietallen zijn er mogelijk als Sabine een Engels, een Frans en een Duits boek wil lenen?
- d Hoeveel drietallen zijn mogelijk als Sabine drie Engelse boeken leent?

A30
*

Een tenniscoach wil een tweetal selecteren om deel te nemen aan een dubbelspeltoernooi. Zij kan kiezen uit 5 spelers. De coach vindt haar keuzes erg beperkt. Als zij uit dubbel zoveel spelers had mogen kiezen, hoeveel keer zoveel teams zou zij dan kunnen samenstellen?

E31
⊙ *

Bedenk een telprobleem waarbij het aantal mogelijkheden is

- a $\binom{7}{3}$
- b $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

O32
□ ⊙ *

Denise moet voor haar examendossier vijf Engelse en vier Duitse boeken lezen. De Engelse boeken kiest ze uit een lijst van 60 boeken en de Duitse uit een lijst van 40 boeken.

Op hoeveel manieren kan Denise

- a de vijf Engelse boeken kiezen
- b de vier Duitse boeken kiezen
- c de vijf Engelse en de vier Duitse boeken kiezen?

Theorie C Werken met permutaties en combinaties

In het volgende voorbeeld gebruik je de vermenigvuldigingsregel en de somregel, in een situatie waar je met permutaties en combinaties te maken hebt.

Voorbeeld

Aysha koopt graag een langspeelplaat (lp) van muziek die ze leuk vindt. Ze heeft een overzicht gemaakt van de genres van al haar platen, zie de tabel hiernaast.

Aysha leent een aantal lp's uit aan Kees.

Op hoeveel manieren kan dat als hij

- a drie of vier popplaten leent
- b in totaal vijf platen leent, waarvan drie rockplaten?

Aysha stelt een top-3 samen van haar favoriete platen.

- c Op hoeveel manieren kan dat als haar top-3 uit één genre bestaat?

genre	aantal
pop	9
rock	12
metal	5

Aanpak

- a Hij leent drie *of* vier popplaten, dus gebruik de somregel. Bij het lenen van platen is de volgorde niet van belang, dus het gaat om combinaties.
- b Hij leent drie rockplaten *en* twee niet-rockplaten, dus gebruik de vermenigvuldigingsregel.
- c Ze stelt een top-3 samen van pop *of* rock *of* metal, dus gebruik de somregel. Bij een top-3 is de volgorde van belang, dus het gaat om permutaties.

Uitwerking

a aantal = $\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 210$

Er zijn 14 niet-rockplaten.

b aantal = $\binom{12}{3} \cdot \binom{14}{2} = 20020$

c aantal = $9 \cdot 8 \cdot 7 + 12 \cdot 11 \cdot 10 + 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1884$



33

In de tabel zie je de verdeling naar leeftijd van een vierde klas.

Er wordt een klankbordgroep van vier leerlingen gekozen.

Hoeveel groepen zijn mogelijk

- a met twee 15-jarigen en twee 18-jarigen
- b met twee 15-jarigen en één 18-jarige
- c met drie of vier 17-jarigen
- d met allemaal leerlingen van dezelfde leeftijd?

Uit deze groep van 28 leerlingen worden er twee gekozen die het klassenuitje gaan voorbereiden. De eerste leerling organiseert de activiteit en de tweede leerling regelt het vervoer.

Hoeveel tweetallen zijn mogelijk als

- e één van de twee 17 jaar is
- f ze beide even oud zijn?

leeftijd	aantal
15	6
16	14
17	5
18	3

In de tabel zie je de verdeling naar leeftijd van de volwassen mannen en vrouwen die in een flatgebouw wonen.

Voor een onderzoek worden acht van deze mensen geënquêteerd.

Hoeveel achttallen zijn er met

- a uitsluitend mannen
- b vier vrouwen
- c twee personen uit de jongste leeftijdsgroep en zes uit de oudste leeftijdsgroep
- d drie personen uit de middelste leeftijdsgroep
- e meer dan zes personen uit de jongste leeftijdsgroep?

Voor de Vereniging van Eigenaren wordt een bestuur gekozen bestaande uit een voorzitter, secretaris en penningmeester.

Hoeveel verschillende besturen zijn er mogelijk met

- f uitsluitend vrouwen
- g met iemand uit de oudste leeftijdsgroep als voorzitter?

LEEFTIJD BEWONERS FLATGEBOUW

	18 tot 25	25 tot 40	40 en ouder	
man	8	20	8	36
vrouw	12	16	5	33
	20	36	13	69

Smoothies worden gemaakt door ingevroren fruit, groenten en zuivelproducten in een blender te mixen tot een gladde substantie. Soms wordt hieraan nog een extra smaakstof toegevoegd, zoals bijvoorbeeld honing.

Bij de Smoothie-Beach-Bar kun je smoothies krijgen in drie maten: small, medium en large. Door ingrediënten te kiezen van de kaart hiernaast kun je zelf je smoothie samenstellen. Je kiest eerst een zuivelsoort. Deze vul je aan met één of meer van de overige ingrediënten.

- a Daniëlle wil een smoothie met drie fruitsoorten, twee groentesoorten en geen flavourshot. Hoeveel verschillende smoothies zijn er mogelijk?
- b Levi wil een large smoothie zonder yoghurt, met één of twee fruitsoorten, drie groente-soorten en één flavourshot. Hoeveel mogelijkheden zijn er voor hem?
- c Lise wil een kwarksmoothie met verder alleen maar groenten. Hoeveel mogelijkheden zijn er als zij minstens twee maar hoogstens vier groentesoorten wil?

INGREDIËNTEN SMOOTHIE

zuivel	fruit	groente	flavourshot
kwark	aardbei	avocado	karamel
melk	appel	bleekselderij	chocola
yoghurt	ananas	komkommer	kokos
	banaan	pompoen	hazelnoot
	bosbes	rode kool	honing
	framboos	spinazie	lemon
	mango	tomaat	mint
	peer	vijg	vanille
	perzik	wortel	
	kiwi		



36



Een groep van zeven studenten gaat samen koken en eten. Ze spreken af dat vier mensen de boodschappen doen en de rest gaat koken. Het stelletje Ivo en Sandra wil in ieder geval bij elkaar blijven. Op hoeveel manieren kan de groep die boodschappen gaat doen samengesteld worden?

A37



Restaurant MiniBurger serveert kleine hamburgerbroodjes met verschillende soorten beleg. Ondanks dat lang niet alle gerechten vlees bevatten, spreekt het restaurant toch bij elk soort broodje van een burger. Hieronder zie je welke drie typen burgers mogelijk zijn.

vlees	vis	vegetarisch
spicy chicken	fishburger	zeewierburger
Texas burger	knoflookgarnalen	zwarte bonenburger
serranoham	calamares	gegrilde groente
chorizo	gerookte zalm	asperges
	zeebaarsfilet	spinazie-kaasburger
		roergebakken groente

Stijn gaat lunchen bij MiniBurger, hij krijgt dan een aantal burgers naar keuze op één plank geserveerd. Stijn kiest altijd voor verschillende burgers. Op hoeveel manieren kan hij

- a twee vlees-, één vis- en twee vegetarische burgers kiezen
- b een volledig vegetarische lunch van vier of vijf burgers kiezen
- c één vegetarische burger en daarnaast drie visburgers of drie vleesburgers kiezen?

Het restaurant heeft vier keuzes voor een dessert.

- d Op hoeveel manieren kan Stijn een plank samenstellen van vier verschillende burgers en daarna al dan niet een dessert?

Het restaurant stelt een wekelijkse burger top-3 samen.

- e Op hoeveel manieren kunnen daar alleen maar burgers van één type op staan?



E38



Bedenk een telprobleem waarbij het aantal mogelijkheden is

a $\binom{6}{3} + \binom{5}{2}$

b $8 \cdot 7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 \cdot 3$.

Terugblik

Permutaties

Een permutatie is een rangschikking. Zo zijn ABC, ACB en CAB verschillende permutaties van de letters A, B en C.

Het totale aantal permutaties van deze letters is $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Het aantal permutaties van 3 dingen uit 7 dingen is $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Met de GR kun je faculteiten en aantallen permutaties eenvoudig berekenen.

Combinaties

Kies je drie dingen uit zeven dingen zonder op de volgorde te letten, dan heb je te maken met een combinatie van 3 uit 7.

Het aantal combinaties van 3 uit 7 is $\binom{7}{3} = 35$.

Gebruik voor het berekenen van aantallen combinaties de optie op de GR.

Bij het aantal afvaardigingen van vier personen uit een klas van 25

leerlingen gaat het om combinaties. Het aantal is $\binom{25}{4} = 12\,650$.

Werken met permutaties en combinaties

In een klas zitten 13 jongens en 16 meisjes.

- Uit deze klas wordt een klankbordgroep van vijf leerlingen gekozen.

Het aantal groepen met minstens vier meisjes is

$$\binom{16}{4} \cdot \binom{13}{1} + \binom{16}{5} = 28\,028. \quad \text{4 meisjes en 1 jongen of 5 meisjes}$$

- Uit deze klas wordt een comité, bestaande uit een voorzitter, een secretaris en een penningmeester gekozen.

Het aantal comités dat bestaat uit leerlingen van uitsluitend hetzelfde geslacht is

$$13 \cdot 12 \cdot 11 + 16 \cdot 15 \cdot 14 = 5076. \quad \text{3 jongens of 3 meisjes}$$

4.3 Allerlei telproblemen



039 Onno heeft vijf pionnen uit een schaakset op een rijtje gezet. Het zijn twee witte en drie zwarte pionnen. Hoeveel verschillende rijtjes kan hij maken?



Theorie A Het aantal rijtjes bestaande uit A's en B's

In opgave 39 werd gevraagd naar het aantal rijtjes met 2 witte en 3 zwarte pionnen. Je kunt dit probleem als volgt aanpakken.

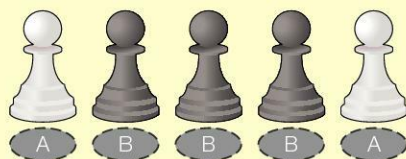
Er zijn vijf plekken waar de pionnen kunnen staan, waarbij op twee plekken een witte pion moet komen. Heb je de witte pionnen geplaatst, dan heb je verder geen keuzevrijheid meer. De drie zwarte pionnen komen immers op de overgebleven plekken te staan.

De vraag is dus op hoeveel manieren je voor de witte pionnen, twee plekken uit vijf plekken kunt kiezen. Omdat de volgorde niet van belang is, heb je te maken met combinaties. Het aantal manieren is dus

$$\binom{5}{2} = 10.$$

Je kunt soortgelijke problemen vertalen naar een situatie waarbij je een rijtje maakt met een zeker aantal A's en een zeker aantal B's.

In opgave 39 ging het om een rijtje van 2 A's (witte pionnen) en 3 B's (zwarte pionnen).



Maak je een rijtje van 2 A's en 3 B's dan is het aantal mogelijke rijtjes gelijk aan $\binom{2+3}{2} = \binom{5}{2} = 10$.

In plaats van eerst de 2 witte pionnen neer te zetten, kun je ook beginnen met het neerzetten van de 3 zwarte pionnen.

Zo zie je dat ook geldt $\binom{5}{3} = 10$.

En zo is het aantal rijtjes bestaande uit twee A's en zes B's gelijk aan $\binom{2+6}{2} = \binom{8}{2} = 28$ en ook aan $\binom{2+6}{6} = \binom{8}{6} = 28$.

$$\begin{aligned}\binom{8}{2} &= \binom{8}{6} \\ \binom{10}{3} &= \binom{10}{7}\end{aligned}$$

Voorbeeld

Op een aanrecht staat een stapel van rode en witte borden.

Hoeveel verschillende stapels zijn er

- a met 5 rode borden en 7 witte borden
- b met in totaal 8 borden, waarvan 6 rode
- c in totaal mogelijk bij een stapel van 10 borden?

Uitwerking

a aantal = $\binom{12}{5} = 792$

b aantal = $\binom{8}{6} = 28$

c aantal = $2^{10} = 1024$ er zijn 2 mogelijkheden voor elk bord in de stapel



- 40** Willem gooit tien keer met een geldstuk. Telkens noteert hij K (kop) of M (munt). Een mogelijke serie is KKMMKMMMKK. Hoeveel series zijn er
- a met acht keer kop
 - b met vijf keer kop
 - c in totaal mogelijk?

- R41** Niet alle telproblemen zijn te vertalen naar een situatie waarbij je een rijtje maakt met een zeker aantal A's en B's. Gegeven zijn de volgende situaties.
- 1 Lisa heeft een wachtwoord dat bestaat uit 3 enen en 5 nullen.
 - 2 Bob wil boven de deur een rijtje van twee rode, twee witte en vier gele tegels zetten.
 - 3 Een leeg fietsenrek wordt voor de helft gevuld door er vijf OV-fietsen in te zetten.
 - 4 In een pincode van vier cijfers staan 3 vieren.
- Geef aan welke van deze situaties zijn te vertalen naar rijtjes van A's en B's en bereken hierbij het aantal mogelijke rijtjes.

- 42** Voor een toelatingsexamen moeten 20 tweekeuzevragen worden beantwoord. Een kandidaat wordt toegelaten als hij minstens 80% van de vragen juist beantwoordt. Op hoeveel manieren kun je het formulier invullen om toegelaten te worden? Hoeveel procent is dat van het totale aantal manieren om het formulier in te vullen?

43

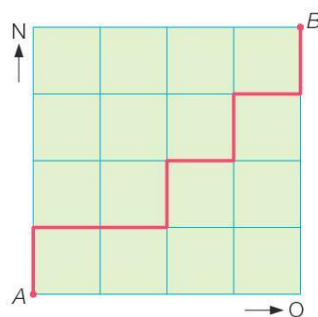

Van sommige steden bestaat de plattegrond uit een rechthoekig stratenplan. Op de foto zie je een stukje van zo'n plattegrond in Barcelona.



We bekijken routes zonder omwegen van A naar B .

De rode route geven we aan met NOONONON.

- Schrijf nog twee mogelijke routes van A naar B op.
- Hoeveel letters staan in een route van A naar B ? Hoe vaak staat de letter N daarbij?
- Hoeveel routes zijn er van A naar B ?



figuur 4.11

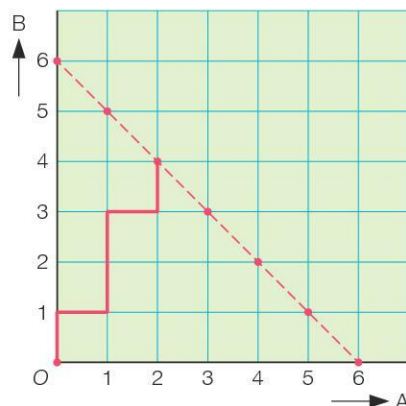
A44


Bij een voetbalwedstrijd is zes keer gescoord.

Een mogelijk scoreverloop bij de eindstand 2 - 4 is in figuur 4.12 aangegeven als een route in een rooster.

Hoeveel scoreverlopen zijn er

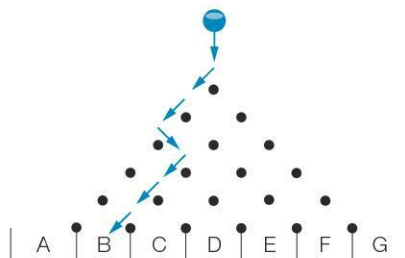
- mogelijk met de eindstand 2 - 4
- mogelijk met de eindstand 3 - 3
- mogelijk met de eindstand 5 - 1
- in totaal mogelijk?



figuur 4.12

A45


In de figuur zie je een schematische weergave van een bord van Galton. Een balletje valt op de bovenste pin. Iedere keer dat het balletje op een pin valt, valt het naar links of naar rechts. Eén mogelijke route is in de figuur getekend.



figuur 4.13

- a Vul in.
Om in bakje C te eindigen moet het balletje ... keer naar links en ... keer naar rechts vallen.
- b Hoeveel routes zijn er om in bakje C te eindigen?
- c Er zijn meer routes die in bakje D eindigen dan routes die in bakje B eindigen.
Hoeveel meer?

O46


Jori maakt een trein met een locomotief voorop en daarachter vier wagons. Hij heeft de keuze uit zes wagons met de nummers 3, 4, 5, 6, 7 en 8. Hieronder staan twee mogelijke opstellingen.



Door de wagons achter elkaar te plaatsen, ontstaat een getal van vier cijfers.

Jori vraagt zich af hoeveel verschillende treinen hij kan maken waarbij het getal dat ontstaat groter is dan 5500.

Hij onderscheid daarbij de volgende situaties

- Treinen met als eerste wagon een 6, 7 of 8.
- Treinen met als eerste wagon een 5 en als tweede wagon een 6, 7 of 8.

- a Licht toe waarom dit een handige aanpak is.
- b Bereken het aantal mogelijkheden bij elke situatie.
- c Bereken het totale aantal mogelijkheden.

Theorie B Telproblemen structureren

Bij telproblemen zoals in opgave 46 is het handig om een aantal situaties te onderscheiden voordat je gaat rekenen. Hiermee voorkom je dat je mogelijkheden vergeet mee te tellen. Heb je het aantal mogelijkheden per situatie berekend, dan gebruik je de somregel om het totale aantal mogelijkheden te krijgen.

Voorbeeld

Bij het spel Dominion kies je voordat het spel begint 10 verschillende kaarten. Het maakt niet uit in welke volgorde deze kaarten gekozen worden. Bij het spel kun je in totaal uit 26 kaarten kiezen. In de tabel zie je een overzicht van de verschillende soorten kaarten.

kaartsoort	overwinning	actie	aanval	verdediging
aantal	1	20	4	1

Mark wil een set van 10 kaarten kiezen die aan de volgende voorwaarden voldoen: als hij een aanvalskaat heeft gekozen, wil hij ook de verdedigingskaart hebben. Verder wil hij niet meer dan 2 aanvalskarten hebben.

Bereken hoeveel mogelijke sets van 10 kaarten hij kan kiezen.

Uitwerking

0 aanvalskarten

$$\text{aantal} = \binom{22}{10} = 646\,646$$

1 aanvalskaat en 1 verdedigingskaart

$$\text{aantal} = \binom{4}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{21}{8} = 813\,960$$

2 aanvalskarten en 1 verdedigingskaart

$$\text{aantal} = \binom{4}{2} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{21}{7} = 2\,790\,720$$

Het totale aantal sets is $646\,646 + 813\,960 + 2\,790\,720 = 4\,251\,326$.



47

Janne geeft een dag in de week spinningles. Om de trainingsopbouw te ondersteunen maakt ze gebruik van muziek uit verschillende genres. In de tabel zie je een voorselectie waar ze uit wil kiezen.

genre	dance	pop	hip hop
aantal nummers	6	5	8



Haar les bestaat uit vijf fasen waaronder een warming up aan het begin en de cooling down aan het eind. Ze wil bij elke fase een verschillend muziknummer kiezen en stelt daarvoor een playlist samen. Ze wil beginnen en eindigen met een popnummer en tussendoor afwisselend een dance- en een hip hopnummer gebruiken. Op hoeveel manieren kan ze een playlist samenstellen?



48

Een bedrijf codeert zijn artikelen met de letters A en B.

Een code van vijf letters is bijvoorbeeld BAABA.

- a Hoeveel codes van zeven letters zijn er met minstens vijf A's?
- b Hoeveel codes van zes letters zijn er die meer A's dan B's bevatten?
- c Hoeveel codes van negen letters zijn er in totaal?

49


Bij een bordspel schrijft elke speler in het geheim een aantal commando's op een rijtje. Spelers kunnen kiezen uit het commando links of het commando rechts.

a Jeroen wil drie keer links en vijf keer rechts, maar hij weet nog niet in welke volgorde.

Hoeveel mogelijkheden heeft hij?

b Arda wil twee keer het commando links, maar ze twijfelt nog of ze in totaal zeven of acht commando's moet opschrijven.

Hoeveel mogelijkheden heeft zij?

c Bij een uitbereiding van het spel is ook het commando midden mogelijk.

Hoeveel mogelijkheden zijn er dan om een rijtje van zes commando's op te schrijven?

50


Elsbeth gooit met vijf dobbelstenen. Ze vraagt zich af hoeveel mogelijkheden er zijn om in totaal 28 ogen te gooien. Ze bedenkt dat 'drie zessen en twee vijven' een van de mogelijke situaties is.



a Wat is de andere situatie om in totaal 28 ogen te gooien?

b Bereken bij beide situaties het aantal mogelijkheden.

c Wat is het totaal aantal mogelijkheden om met vijf dobbelstenen 28 ogen te gooien?

A51


a André gooit met vier dobbelstenen.

Hoeveel mogelijkheden zijn er om in totaal zes ogen te gooien?

b Julia gooit met zes dobbelstenen.

Hoeveel mogelijkheden zijn er om in totaal 34 ogen te gooien?

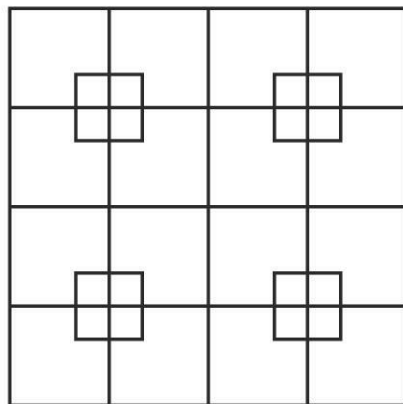
E52


Er moet een trein gemaakt worden door achter een locomotief vijf wagons (A, B, C, D en E) te plaatsen. Wagon A moet dichterbij de locomotief komen dan wagon B.

Op hoeveel manieren kan deze trein gemaakt worden?

O53


Hoeveel vierkanten zijn er in figuur hiernaast te ontdekken?



figuur 4.14

Theorie C Probleemoplossen bij telproblemen

Veel telproblemen passen niet precies bij één van de technieken die je in dit hoofdstuk hebt geleerd. Om deze problemen op te lossen bedenk je eerst een mogelijke aanpak.

Een mogelijke aanpak bedenken leer je door veel te puzzelen op de opgaven. Je leert veel meer van het zoeken naar het antwoord dan van het antwoord zelf.

De volgende tips kunnen van pas komen als je klem zit.

- Herken je in de opgave iets uit een eerder opgelost telprobleem? Neem je oude aanpak als uitgangspunt.
- Kun je een begin maken met het noteren van een aantal mogelijkheden? Gebruik daarbij eventueel een schema of een diagram.
- Kun je een kleinere of makkelijkere variant van het telprobleem bedenken? Probeer eerst die variant op te lossen.

In de opgaven komen verschillende soorten telproblemen voor.

Houd bij het oplossen steeds bovenstaande tips in je achterhoofd. In het voorbeeld staan deze drie tips in de aanpak genoemd. Vaak heb je echter aan een van de tips genoeg.

Voorbeeld

Hoeveel driehoeken zijn er in figuur hiernaast te ontdekken?

Aanpak

- Herken je in de opgave iets uit een eerder opgelost telprobleem? Neem je oude aanpak als uitgangspunt. [Ja, probeer de aanpak van opgave 53 bij dit probleem.](#)
- Kun je een begin maken met het noteren van een aantal mogelijkheden? Gebruik daarbij eventueel een schema of een diagram.

[Er zijn driehoeken van vier verschillende groottes.](#)

[Tel de driehoeken van klein naar groot. Tel ze per soort.](#)

- Kun je een kleinere of makkelijkere variant van het telprobleem bedenken? Probeer eerst die variant op te lossen.

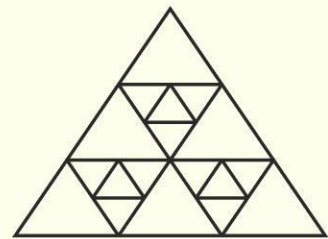
[In de situatie van figuur 4.16a zijn er](#)

[4 kleine + 1 grotere = 5 driehoeken.](#)

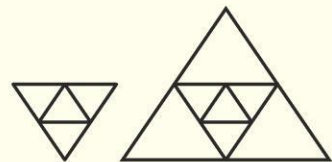
[In de situatie van figuur 4.16b zijn er](#)

[4 kleine + 4 grotere + 1 grootste = 9 driehoeken.](#)

[De volgende stap is het hele telprobleem oplossen.](#)



figuur 4.15



a b
figuur 4.16

Uitwerking

Door de driehoeken per soort van klein naar groot te tellen, krijg je aantal = $12 + 9 + 3 + 1 = 25$.

Geef een toelichting bij je aanpak.

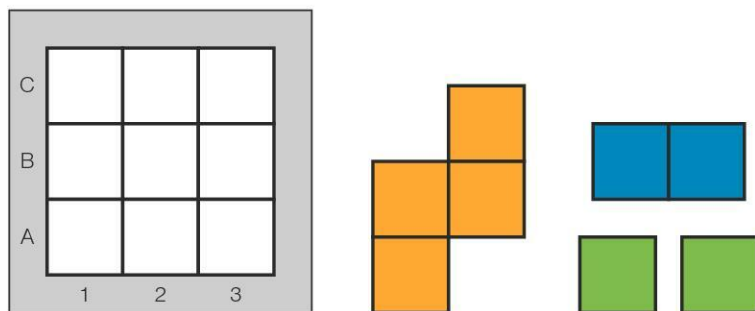
- 54** Bij een toernooi met 10 spelers en 2 scheidsrechters schudt iedereen elkaar voor de wedstrijd de hand.
Hoe vaak worden er handen geschud?

- 55** Een bedrijf met zes kantoren neemt twaalf nieuwe medewerkers aan.
Op hoeveel manieren kunnen deze medewerkers verdeeld worden over de zes kantoren? Het kan dus voorkomen dat de twaalf nieuwe werknemers op één kantoor komen.

- 56** Acht vrienden spelen het spel saboteur, waarbij 2 of 3 spelers in het geheim saboteurs zijn. De saboteurs proberen de gewone spelers tegen te werken.
Op hoeveel manieren kunnen de 8 rollen worden verdeeld?



- 57** Zie de figuur hieronder. Jim vraagt zich af op hoeveel manieren hij de vier stukken op het 3 bij 3 rooster kan leggen. De stukken zijn gekleurd aan de bovenzijde, maar hebben een witte achterkant. Jim wil alle stukken op het rooster leggen met de gekleurde zijde naar boven.
Bereken op hoeveel verschillende manieren dit kan.



figuur 4.17

- 58** Levi gaat een hardloopschema maken. Hij wil iedere week drie dagen hardlopen, telkens op dezelfde dagen. Hij wil nooit twee dagen achter elkaar hardlopen.
Hoeveel verschillende schema's kan Levi maken?

- 59** Tijdens een ckv-les kleuren de leerlingen de vlakverdeling hiernaast. Van de acht rechthoeken moeten er vier gekleurd worden met rood, geel, blauw en zwart. Elke kleur moet één keer gebruikt worden. De andere rechthoeken blijven wit. Zo ontstaat een Mondriaan-compositie.
Hoeveel composities zijn mogelijk?



figuur 4.18

60

In de figuur hiernaast zie je het kunstwerk Acceptatie nr. 2 van kunstenaar Willy Alferink. De sculptuur bestaat uit vijf gestapelde bollen die van onder naar boven in diameter afnemen. Twee van deze bollen zijn geschilderd in roodtinten, twee in blauwtinten en één in groentinten. Willy Alferink heeft ervoor gekozen om de onderste bol in roodtinten te schilderen, de bol daarboven in blauwtinten, enzovoort. Hij had ook voor een andere volgorde van de kleuren kunnen kiezen. Hoeveel verschillende volgorden zijn er met twee rode, twee blauwe en één groene bol als twee bollen boven elkaar niet dezelfde kleur mogen hebben?



Bron: www.willyalferink.nl

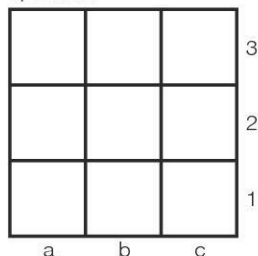
61

Julia heeft munten van 20 cent, van 50 cent en van 1 euro in haar portemonnee. Van elk heeft ze er zes. Op hoeveel manieren kan ze hiermee 2,20 euro betalen?

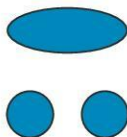
62

Meneer Kieboom is een fanatiek speler van het spel zeeslag. Op vakantie speelt hij vaak een vereenvoudigde versie van het spel. Bij deze versie plaats je één boot van twee hokjes en twee bootjes van 1 hokje op een veld van 3 bij 3 hokjes, zoals in de figuur hieronder. De boot van twee hokjes mag niet diagonaal geplaatst worden.

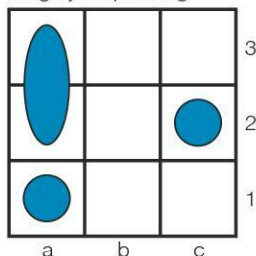
speelveld



beschikbare
boten



mogelijke opstelling



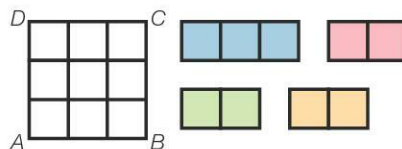
figuur 4.19

Onderzoek op hoeveel manieren meneer Kieboom zijn boten kan plaatsen.

63

Sanne heeft op een stuk papier een 3 bij 3 vierkant $ABCD$ getekend. Ze heeft vier losse stukjes papier met verschillende kleuren. Een stukje van 1 bij 3 en drie verschillende stukjes van 1 bij 2.

Op hoeveel manieren kan Sanne het hele vierkant bedekken met de stukjes gekleurd papier?

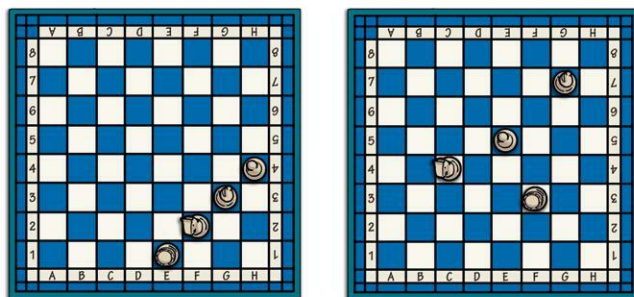


figuur 4.20

64

*

Harm wil van de witte schaakstukken een paard, een loper, een toren en een pion op een schaakbord van 8 bij 8 velden plaatsen zodat in elke rij en in elke kolom hoogstens één stuk staat. Op hoeveel manieren kan dit?



figuur 4.21

65

*

Bij een spel moeten Mitchel en Pieter de buit van 5 goudstukken en 10 zilverstukken verdelen. De enige eis is dat elke speler iets moet krijgen.

Op hoeveel manieren kunnen ze de buit verdelen?



66

*

Op het startscherm van de smartphone van Elske is in een 4×4 rooster plaats voor 16 icoontjes van apps. Elske gebruikt niet alle 16 plaatsen. Zij heeft de 12 icoontjes van haar meest gebruikte apps op het homescreen gerangschikt.

- Op hoeveel manieren kan dit?
- Op hoeveel manieren kan dit als ze de linker kolom leeg laat?
- Op hoeveel manieren kan dit als ze in elke rij één plaats leeg laat?

Elske wil de 4 icoontjes van haar socialmedia-apps op één rij of in één kolom. Verder maakt het haar niet uit.

- Hoeveel mogelijkheden zijn er?



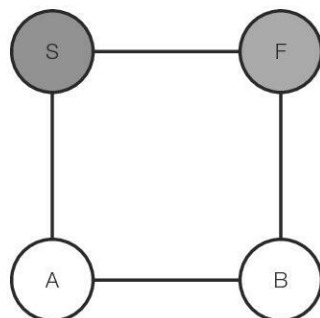
67

*

Hiernaast zie je een spelbord. Het spel begint met het plaatsen van een pion op S (Start). Bij elke zet wordt de pion over een lijntje verschoven. Zodra de pion op F (Finish) komt eindigt het spel.

De bedoeling is de pion in precies 13 zetten van S naar F te krijgen.

Op hoeveel manieren kan dat?

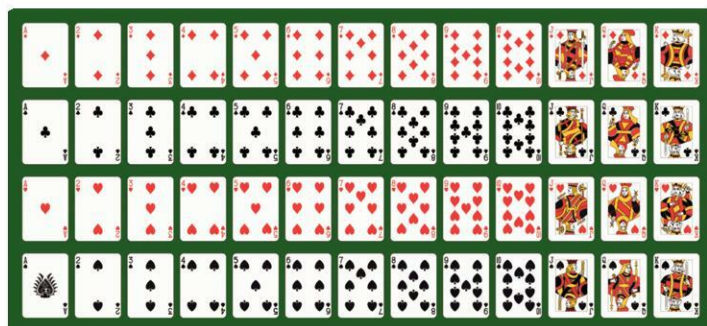


figuur 4.22

68

*

Bij poker wordt een spel met 52 kaarten gebruikt. Zie de figuur hieronder voor een overzicht van deze kaarten.



figuur 4.23

In de vier rijen zie je de verschillende soorten kaarten: ruiten, klaveren, harten en schoppen. Van elke soort kaarten zijn er 13 verschillende waarden: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K.

Bij poker draait het spel om een set van vijf kaarten. Een voorbeeld daarvan is full house, dat is een drietal kaarten van dezelfde waarde met nog een tweetal kaarten van een andere gelijke waarde, zoals hiernaast.

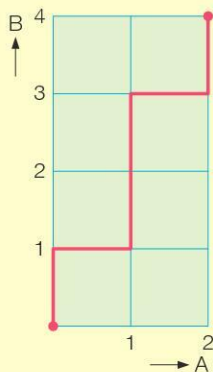
Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er voor full house? Hoeveel procent is dit van het totale aantal mogelijke sets van vijf kaarten?



Terugblik

Rijttjes met A's en B's

- Het aantal rijttjes met drie A's en zeven B's is $\binom{10}{3}$ en ook $\binom{10}{7}$.
- Het aantal rijttjes met tien hokjes waarbij elk hokje gevuld is met een A of een B is 2^{10} .
- Bij het tien keer gooien met een geldstuk is het aantal series met drie keer munt (en dus zeven keer kop) gelijk aan $\binom{10}{3}$.
- Het aantal scoreverlopen van de stand 0 - 0 naar de stand 2 - 4 is gelijk aan het aantal rijttjes met 2 A's en 4 B's oftewel $\binom{2+4}{2} = \binom{6}{2}$ en ook $\binom{6}{4}$.



Telproblemen structureren

Het berekenen van het aantal rijttjes bestaande uit 3 A's en 3 B's, waarbij niet twee A's in het midden mogen staan, is niet eenvoudig. Daarom is het belangrijk eerst de mogelijke situaties te onderscheiden, voor je begint met een berekening. Als er geen twee A's in het midden mogen staan, zijn de mogelijkheden voor de derde en vierde letter: AB, BB of BA. Dat zijn dus 3 situaties:

$$_ _ A B _ _ \quad \text{nog 2 A's en 2 B's, dus aantal} = \binom{4}{2} = 6$$

$$_ _ B B _ _ \quad \text{nog 3 A's en 1 B, dus aantal} = \binom{4}{1} = 4$$

$$_ _ B A _ _ \quad \text{nog 2 A's en 2 B's, dus aantal} = \binom{4}{2} = 6$$

Het totale aantal mogelijke rijttjes is dus $6 + 4 + 6 = 16$.

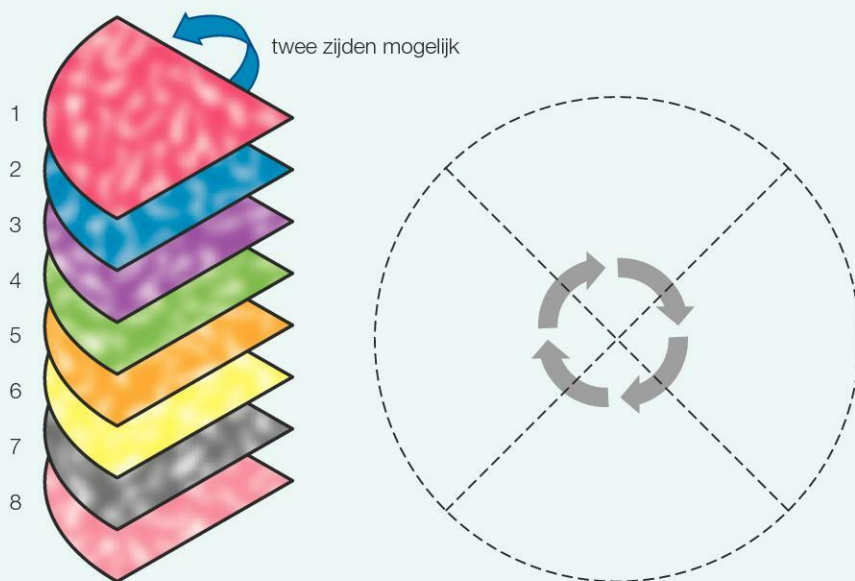
Probleemoplossen bij telproblemen

Veel telproblemen passen niet precies bij één van de technieken die je in dit hoofdstuk hebt geleerd. Om deze problemen op te lossen bedenk je eerst een mogelijke aanpak. Lukt het niet om een mogelijke aanpak te bedenken? Dan kunnen de volgende tips van pas komen.

- Herken je in de opgave iets uit een eerder opgelost telprobleem? Neem je oude aanpak als uitgangspunt.
- Kun je een begin maken met het noteren van een aantal mogelijkheden? Gebruik daarbij eventueel een schema of een diagram.
- Kun je een kleinere of makkelijkere variant van het telprobleem bedenken? Probeer eerst die variant op te lossen.

Eindopdracht Cirkelvormig spelbord

Het spelbord in deze opdracht is cirkelvormig met vier plaatsen waarop een tegel (in de vorm van een kwartcirkel) gelegd kan worden. Voor het spel is het belangrijk welke tegels er opeenvolgend liggen. Het is echter niet van belang hoe het spelbord op tafel ligt: het spelbord bijvoorbeeld een kwartslag draaien, verandert niets aan het spel. Bij het spel worden acht verschillende tegels geleverd die op beide zijden uniek bedrukt zijn.



De maker van het spel wil op de doos benadrukken hoeveel verschillende spelborden er mogelijk zijn.

- Bereken dit aantal verschillende spelborden.

Bij haar ontwerp heeft de maker van het spel nog een aantal opties achter de hand gehouden om de variatie in het spel nog groter te maken. Zo overweegt zij een uitbreiding waarbij twee verschillende fiches geplaatst worden op twee aangrenzende kwartcirkels van het spelbord.

- Bereken hoeveel keer zoveel mogelijke spelborden een speler met de uitbreiding heeft.

Zoals je gezien hebt, levert een uitbreiding van het spel met twee fiches al veel extra mogelijkheden op.

- Bedenk zelf een uitbreiding van het spel, waarbij het aantal mogelijkheden is te berekenen met de technieken uit dit hoofdstuk. Daag een klasgenoot uit om dit aantal mogelijkheden te berekenen.

Diagnostische toets

4.1 Regels bij telproblemen

1 In de supermarkt kan Jeroen kiezen uit vijf soorten pasta, vier verschillende sauzen en drie soorten groenten. Hij stelt een gerecht samen met één soort pasta, één soort saus en één soort groente.

- a Op hoeveel manieren kan dat?
- b Spagetti en linguine zijn twee van de beschikbare soorten pasta, maar Jeroen wil graag een andere soort. Verder wil hij courgette als groente. Op hoeveel manieren kan hij dan een gerecht samenstellen?

2 Een bedrijf gebruikt artikelcodes van vijf cijfers.

Hoeveel codes zijn er mogelijk als deze

- a geen nullen bevat
- b met een 3 begint en eindigt
- c uit vijf verschillende cijfers bestaat
- d uit vijf dezelfde cijfers bestaat?

3 Bij een schaakvereniging worden uit de 19 leden willekeurig twee leden gekozen om tegen elkaar te spelen. De speler die als eerste gekozen wordt speelt met wit, de ander met zwart. In de tabel zie je hoeveel jongens en meisjes lid zijn en wat hun favoriete opening is. Hoeveel tweetallen zijn mogelijk waarbij

- a een jongen met wit en een meisje met zwart speelt
- b beide spelers jongens of beide spelers meisjes zijn
- c beide spelers niet het damegambiet als favoriete opening hebben
- d beide spelers dezelfde favoriete opening hebben?

favoriete opening	jongen	meisje
de Caro-Kann	3	6
het damegambiet	4	2
de Siciliaanse	2	2



4.2 Permutaties en combinaties

4 Christel kijkt acht video's op YouTube.

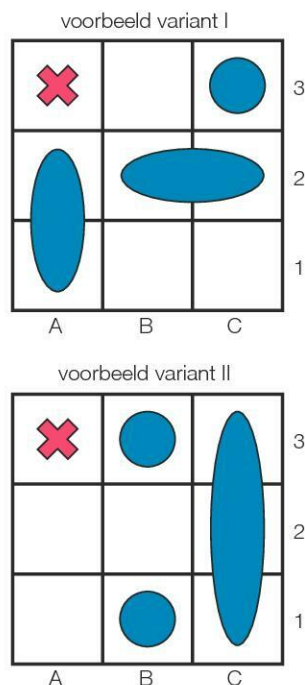
- a Hoeveel volgordes zijn daarbij mogelijk?
- b Ze geeft vijf van de video's een like. Op hoeveel manieren kan dat?
- c Ze deelt een van de video's met haar zusje, een andere met haar broer en weer een andere met een vriendin. Op hoeveel manieren kan dat?

- 5** De redactie van een schoolkrant bestaat uit zes vierdeklassers en acht vijfdeklassers.
- a** Er wordt een groep van vijf leerlingen uit de redactie gekozen die onderzoek gaan doen voor een artikel over de nieuwe directie. Hoeveel groepen zijn mogelijk met twee vierdeklassers?
 - b** Uit de redactie wordt een hoofdredacteur, een beeldredacteur, een distributeur en een opmaker gekozen. Op hoeveel manieren kan dat als ze uitsluitend uit hetzelfde leerjaar komen?
 - c** Een docent komt op bezoek bij de redactie, zij wordt rondgeleid door een groep van drie redactieleden. Op hoeveel manieren kan die groep worden samengesteld als er minstens één vijfdeklasser bij zit?

4.3 Allerlei telproblemen

- 6** Jan gooit elf keer met een geldstuk. Hoeveel mogelijkheden zijn er
- a** om zes keer kop te gooien
 - b** in totaal
 - c** om hoogstens twee keer munt te gooien?
- 7** Tim en Stijn spelen tafelfootbal. Het spel is voorbij als er tien doelpunten gemaakt zijn. Een mogelijk scoreverloop is 1-0, 2-0, 3-0, 3-1, 3-2, ..., 7-2, 7-3.
- a** Hoeveel scoreverlopen zijn er in totaal mogelijk?
 - b** Hoeveel scoreverlopen eindigen in een gelijke stand?
 - c** Tim scoort de eerste drie doelpunten, maar Stijn weet toch te winnen. Hoeveel scoreverlopen zijn er voor deze wedstrijd mogelijk?

- 8** Adriana en Adriaan spelen het spel zeeslag op een veld van 3 bij 3 hokjes. Voor het plaatsen van de boten hebben ze twee varianten bedacht. Bij variant I plaatsen spelers een horizontale en een verticale boot van lengte 2 en een boot van lengte 1. Bij variant II plaatsen spelers een boot van lengte 3, die zowel horizontaal als verticaal geplaatst mag worden, en twee boten van lengte 1. Beide spelers weten dat de ander altijd het vakje A3 als eerste bombardeert, dus ze plaatsen daar nooit een boot. Onderzoek bij welke variant de meeste opstellingen mogelijk zijn.



figuur 4.24

Gemengde opgaven

1 Tabellen en grafieken

- 1** Zie de tabel met informatie over de bovenbouw van de havo-afdeling van een school.

LEERLINGVERDELING BOVENBOUW HAVO

schooljaar	aantal leerlingen 4 havo	percentage blijven zitten	aantal leerlingen 5 havo	percentage gezakt
2015-2016	104		88	12,5%
2016-2017	110	16,4%	94	10,6%
2017-2018	101	17,8%	99	8,1%
2018-2019	96	12,5%		14,0%
2019-2020	106	14,2%	98	17,3%

- a** In 2015-2016 bleven 22 leerlingen in 4 havo zitten.
Hoeveel procent was dat?
- b** In 2018-2019 zakten 13 leerlingen voor hun havo examen.
Hoeveel leerlingen zaten er in 5 havo?
- c** Met hoeveel procent is het totaal aantal leerlingen in de bovenbouw havo in 2019-2020 toegenomen ten opzichte van 2015-2016?
- d** In 2020-2021 is het aantal leerlingen in 4 havo ten opzichte van 2019-2020 met 5,7% toegenomen.
Hoeveel leerlingen zaten er in 2020-2021 in 4 havo?
- e** Het totaal aantal leerlingen in de bovenbouw havo is in het schooljaar 2015-2016 met 3,5% afgenomen ten opzichte van 2014-2015.
In 2014-2015 zaten er 92 leerlingen in de examenklas.
Hoeveel leerlingen zaten in dat schooljaar in 4 havo?

- 2** De hoeveelheid huishoudelijk afval per inwoner is in Nederland in de periode 1970-2000 voortdurend toegenomen, maar daarna nam het af. Zie de tabel.

HUISHOUDELIJK AFVAL IN AANTAL KG PER INWONER PER JAAR

jaar	1970	1988	1995	2000	2004	2012	2017
aantal kg	281	395	482	566	561	518	496

- a** Bereken met lineair interpoleren de hoeveelheid huishoudelijk afval per inwoner in 2010.
- b** Bereken met lineair extrapoleren de hoeveelheid huishoudelijk afval per inwoner in 2024.
- c** Gebruik de gegevens van 2004 en 2017 om een schatting te maken in welk jaar de hoeveelheid huishoudelijk afval per persoon voor het eerst weer minder dan 300 kg zal zijn.

3 In de medaillespiegel van de Olympische Spelen is van alle landen bijgehouden hoeveel gouden, zilveren en bronzen medailles ze hebben gewonnen. Tot en met de Winterspelen van 2018 in Pyeongchang zijn er 18 845 medailles uitgereikt waarvan 6138 gouden.

- a** Nederland heeft 2,12% van deze gouden medailles gewonnen.
Hoeveel gouden medailles zijn dat?
- b** Denemarken heeft 1,035% van alle tot dan toe uitgereikte medailles gewonnen, waarvan gouden, zilveren en bronzen medailles in de verhouding 3 : 5 : 5.
Hoeveel bronzen medailles won Denemarken?
- c** Noorwegen is een echt wintersportland. Het haalde in totaal 368 medailles tijdens Olympische Winterspelen, dat is 70,8% van het aantal medailles dat Noorwegen ooit won tijdens Olympische Spelen.
Hoeveel procent van alle tot dan toe uitgereikte medailles heeft Noorwegen gewonnen?



4 In 2017 deden in totaal 200 893 leerlingen examen op vwo, havo en vmbo. Zie de tabel hiernaast. Het valt Rob op dat de verhouding van de leerlingen vwo : havo : vmbo ongeveer 2 : 3 : 6 is.

- a** Bereken de aantallen voor vwo, havo en vmbo in het geval de verhouding precies 2 : 3 : 6 zou zijn.
Ga uit van het totaal.
- b** Bereken het totale aantal leerlingen in het geval de verhouding precies 2 : 3 : 6 zou zijn en het aantal op de havo 53 974 is.

EXAMENLEERLINGEN 2017

vwo	37 892
havo	53 974
vmbo	109 027
totaal	200 893

De laatste jaren zijn de volgende trends waar te nemen. Enerzijds loopt het totale aantal leerlingen terug, anderzijds loopt het aantal leerlingen op het vmbo verhoudingsgewijs terug.

Ga uit van een verhouding die precies 2 : 3 : 6 is.

Neem aan dat op een gegeven moment het totale aantal leerlingen met 10% is teruggelopen en dat alleen het aantal vmbo-leerlingen is verminderd.

De nieuwe verhouding wordt daardoor 2 : 3 : p .

- c** Bereken p en schrijf daarna de verhouding met drie gehele getallen waarbij zo ver mogelijk vereenvoudigd is.



- 5** De firma Kleijn produceert onder andere planken voor laminaatvloeren. Deze planken bestaan uit een goedkope onderlaag met daarbovenop een laag fineer van 1,5 mm dikte. De planken hebben een lengte van 1,4 meter en een breedte van 20 cm.

a Bereken hoeveel cm^3 fineer voor een plank gebruikt wordt.

Kleijn verkoopt deze planken in pakken op pallets. In een pak gaan 12 planken en op een pallet gaan 60 pakken. Maandelijks produceert Kleijn 324 pallets.

b Bereken hoeveel m^3 fineer Kleijn gebruikt voor de maandproductie van deze planken. Rond af op één decimaal.

Kleijn levert ook planken voor massief houten vloeren. Deze worden gemaakt in de houtsoorten beuken, eiken en esdoorn in de verhouding 2 : 5 : 1. Er worden maandelijks 5775 meer eiken planken geproduceerd dan beuken planken.

c Bereken hoeveel planken voor massief houten vloeren er totaal per maand worden geproduceerd.

- 6** Zie de grafieken in figuur G.1. Je kunt aflezen dat in 2009 de gemiddelde huizenprijs 245 000 euro was en de jaarlijkse hypotheekrente 5,1% bij een 5 jaar vaste hypotheekrente.

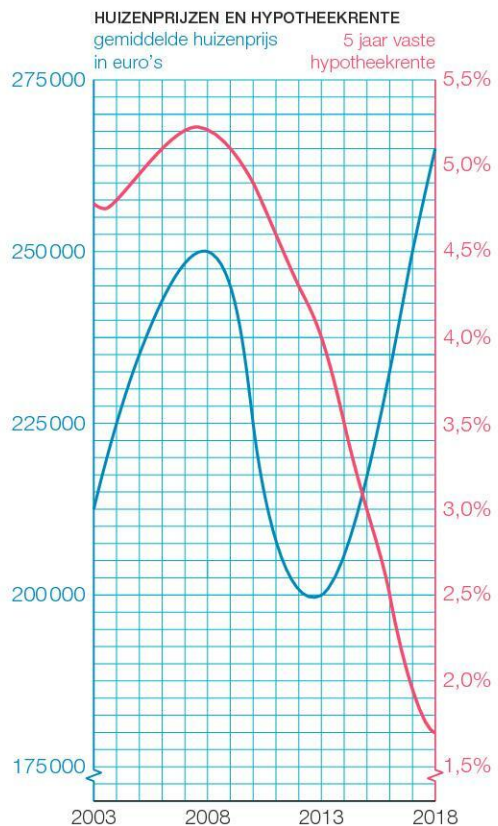
a Bereken de procentuele verandering van de gemiddelde huizenprijs in de periode 2003-2018.

b De familie Erker heeft in 2010 een huis gekocht. Ze nemen een hypotheek van 250 000 euro.

Toon met een berekening aan dat ze gedurende de vijf jaar dat de rente is vastgelegd 61 250 euro rente betalen.

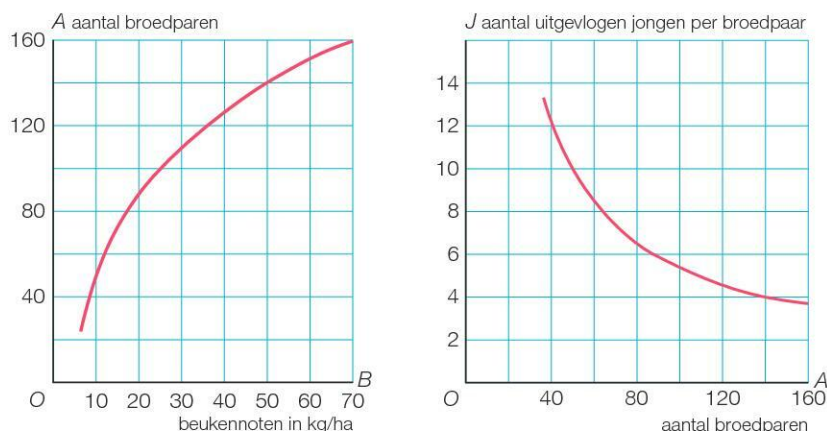
c De familie Feraart koopt in 2004 een huis van 225 000 euro. Ze nemen een hypotheek voor het hele bedrag. De prijs van het huis ontwikkelt zich volgens de grafiek. In 2018 verkopen ze het huis aan de familie Geerts die ook een hypotheek neemt voor het hele bedrag.

Welke familie betaalde per maand meer hypotheekrente, de familie Feraart in 2004 of de familie Geerts in 2018? Hoeveel scheelt het?



figuur G.1

- 7** Biologen ontdekten op een onderzoeksterrein een verband tussen de hoeveelheid beukennoten B in de winter en het aantal broedparen van koolmezen A in het voorjaar daarop. Ook bleek het gemiddelde aantal uitgevlogen koolmezenjongen J per broedpaar af te hangen van het aantal broedparen in het gebied. Zie figuur G.2.



figuur G.2

- Stel dat op het terrein 20 kg beukennoten per ha voorkomt. Hoeveel jongen vlogen er dan per broedpaar uit?
- Stel dat er gemiddeld tien jongen per broedpaar uitvliegen. Wat weet je van het aantal kg beukennoten per ha in de winter ervoor?
- Het onderzoeksterrein is 6 ha groot en heeft een opbrengst van 300 kg beukennoten. Hoeveel jongen vlogen in totaal uit?

- 8** In de tabel staat informatie over de Olympische Spelen van 2016 in Rio de Janeiro.

- Maak een tabel van het aantal sporters per miljoen inwoners. Rond af op één decimaal.
- Voeg de kolom 'aantal medailles per sporter' toe. Rond af op twee decimalen.
- Hoeveel medailles had Nederland moeten winnen om net zoveel medailles per sporter te hebben als Jamaica?
- Met hoeveel sporters had China naar de Olympische Spelen moeten gaan om evenveel sporters per miljoen inwoners te hebben als Australië?

land	aantal medailles	aantal sporters	aantal inwoners $\times 100\,000$
VS	121	567	3266
China	70	404	13 793
Australië	29	431	232
Nederland	19	249	171
Jamaica	11	57	30



- 9** Op een aantal snelwegen in Nederland is de maximaal toegestane snelheid 130 km/uur. Vanwege milieuredenen laait af en toe de discussie op om de maximale snelheid tot 120 km/uur of zelfs tot 100 km/uur te beperken. Steevast hoor je dan als tegenargument dat je dan veel langer onderweg bent. In deze opgave ga je onderzoeken hoeveel dat kan schelen, en ook hoe groot de milieuwinst zou kunnen zijn.
- Meneer Dijk woont in Arnhem en werkt in Groningen. Om naar zijn werk te gaan legt hij 170 km in de auto af. Hij rijdt overal de toegestane maximale snelheid, zie de tabel. In deze opgave hoef je geen rekening te houden met oponthoud door files en dergelijke.

maximale snelheid in km/uur	50	100	120	130
lengte wegvak in km	6	15	84	65

- Bereken hoeveel minuten meneer Dijk over de afstand Arnhem-Groningen doet. Rond af op gehele minuten.
- Neem aan dat de maximale snelheid van 130 km/uur wordt teruggebracht naar 120 km/uur.
Hoeveel minuten langer doet meneer Dijk dan over de afstand Arnhem-Groningen?
- Neem aan dat op de wegen waar meneer Dijk 120 km/uur en 130 km/uur mag, de maximale snelheid 100 km/uur wordt.
Hoeveel minuten doet hij dan langer over de rit in vergelijking met de situatie van vraag a?

Meneer Dijk rijdt twee keer per week van Arnhem naar Groningen en terug. Hij rijdt in een auto met benzinemotor. In de tabel hieronder zie je welk benzineverbruik bij deze auto hoort. Je leest bijvoorbeeld af dat bij een snelheid van 120 km/uur het benzineverbruik 7,7 liter per 100 km is.

snelheid in km/uur	50	100	120	130
verbruik in liter/100 km	5,8	5,5	7,7	9,4

- Bereken hoeveel liter benzine per week meneer Dijk verbruikt als de toegestane maximale snelheden niet worden beperkt.
- Neem aan dat op de wegen waar meneer Dijk 120 km/uur en 130 km/uur mag, de maximale snelheid 100 km/uur wordt.
Hoeveel procent benzine bespaart meneer Dijk dan?



10 Hiernaast zie je enkele gedeelten uit de tarieven 2019 van kampeerterrein Harskamperdennen. Gebruik dit om de volgende vragen te beantwoorden.

a De heer en mevrouw Andel staan in het laagseizoen zes nachten op een elektraplaats. Ze hebben niet gereserveerd.

Hoeveel betalen ze in totaal?

b De familie Bot bestaat uit twee volwassenen. Ze reserveren een comfortplaats van 1 tot en met 15 augustus.

Laat met een berekening zien dat ze €432,56 moeten betalen.

c Anne en Kim willen van 7 mei tot en met 25 mei op een XXL plaats staan. Bij het reserveren vragen ze zich af wat voordeliger is: het aantal nachten betalen of gebruik maken van het arrangement van de meimaand. Bij het arrangement voor een XXL plaats geldt een toeslag van 55 euro.

Onderzoek wat het voordeligst is.

d Meneer en mevrouw Damen hebben van 25 mei tot en met 10 juni een plaats gereserveerd op het natuurkampeerterrein. Zelf zijn ze deze hele periode aanwezig. Hun twee kinderen (15 en 17 jaar) komen bij hen kamperen van vrijdag 31 mei tot en met maandag 3 juni. Hoeveel betaalt de familie Damen in totaal?

TARIEVEN KAMPEREN HARKAMPERDENNEN 2019

Plaats	Laagseizoen	Hoogseizoen
Elektraplaats	€ 21,50	€ 26,70
Comfortplaats	€ 23,50	€ 28,70
Hondenterrein	€ 24,50	€ 29,70
XXL plaats	€ 25,50	€ 30,70
Natuurkampeerterrein	€ 18,50	€ 23,70

*All-in tarieven voor 2 personen per nacht exclusief toeristenbelasting

***Laagseizoen:** 29/3 t/m 28/5, 12/6 t/m 12/7 en 24/8 t/m 25/10

***Hoogseizoen:** 29/5 t/m 11/6, 13/7 t/m 23/8

Overige tarieven

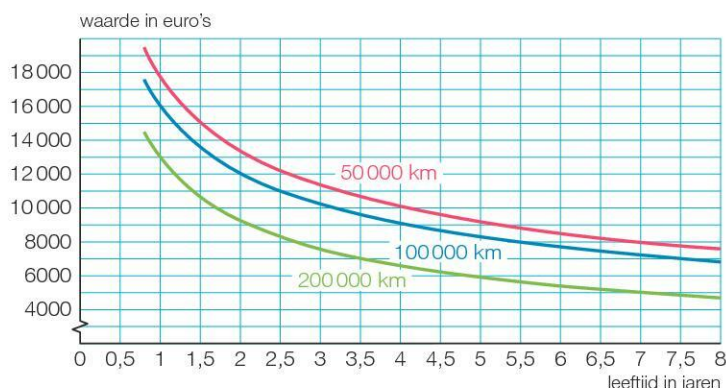
Extra persoon vanaf 2 jaar p.p.p.n	€ 4,20
Toeristenbelasting p.p.p.n	€ 0,92
Reserveringskosten per plaats/per reservering	€ 5,00

Arrangementen 2019	Periode in 2019	Prijs per 2 personen
Maand april	29-03 t/m 26-04	€ 230,00
Voorseizoen Compleet	29-03 t/m 23-06	€ 920,00
Voorseizoen t/m Pinksteren	29-03 t/m 11-06	€ 800,00
Meivakantie	27-04 t/m 06-05	overnachtingstarief
Meimaand	06-05 t/m 27-05	€ 370,00
Hemelvaart	29-05 t/m 03-06	€ 155,00
Pinksteren	07-06 t/m 11-06	€ 135,00



- 11** [► WERKBLAD] Als een auto na een ongeval total loss wordt verklaard, dan keert een verzekeraar in sommige gevallen de dagwaarde van de auto uit aan de eigenaar. De dagwaarde van een auto is afhankelijk van het type auto, de leeftijd en de kilometerstand.

Voor een bepaald type auto is in de figuur hieronder voor drie kilometerstanden de dagwaarde van de auto af te lezen bij een bepaalde leeftijd in jaren.



figuur G.3

- a** Wat is de dagwaarde van dit type auto als deze 200 000 km heeft gereden en 7 jaar oud is?
- b** Herbert en Tom krijgen van hun verzekeraar allebei dezelfde dagwaarde uitgekeerd voor dit type auto. De auto van Herbert is 5,5 jaar oud en heeft 100 000 kilometer gereden. De auto van Tom heeft 50 000 km gereden.

Hoe oud is de auto van Tom?

- c** Jeroen heeft op 1 juli 2013 een volledig nieuwe auto van dit type gekocht voor 21 000 euro. Hij heeft voor de auto een verzekering afgesloten en betaalt een gemiddelde premie van €38,- per maand. Op 1 januari 2020 krijgt hij een ongeluk en wordt de auto total loss verklaard. De auto heeft dan een kilometerstand van 100 000 km. Jeroen krijgt van de verzekeraar de dagwaarde uitgekeerd en wil dan een nieuwe auto van 21 000 euro aanschaffen. Hoeveel euro is Jeroen door het afsluiten van de verzekering goedkoper uit dan wanneer hij geen verzekering had afgesloten?

- 12** Deze opgave gaat over pinbetalingen in Nederland.

In 2010 waren er 2154 miljoen pinbetalingen. Het totale bedrag van de pinbetalingen (de omzet) was 80,9 miljard euro. In 2017 waren er 3843 miljoen pinbetalingen. Toen was de omzet 100,6 miljard euro.

- a** Hoeveel pinbetalingen waren er in 2017 gemiddeld per seconde?
- b** Is het gemiddeld pinbedrag in 2017 toegenomen of afgenomen ten opzichte van 2010? Met hoeveel procent?
- c** Neem aan dat de toename van het aantal pinbetalingen de komende jaren doorzet.

Bereken met lineair extrapoleren het aantal pinbetalingen in 2025.

2 De statistische cyclus

13 Bij een onderzoek naar de ecologische impact van een windmolenpark op zee kunnen de volgende vragen worden gesteld.

- I Welke invloed hebben de windmolens op zeedieren?
 - II Welke zeedieren ondervinden de meeste hinder van windmolens?
 - III Welke maatregelen kunnen worden genomen om eventuele schade onder vogels te beperken?
- a Welke vraag gaat uit van een foute veronderstelling? Welke vraag mondt uit in een advies? Is er bij de overgebleven vraag sprake van samenhang of een causaal verband? Licht je antwoorden toe.
 - b Vraag I kan scherper worden geformuleerd.
Doe dat.
 - c Formuleer vraag II zo, dat deze voldoet aan de eisen waaraan een onderzoeksvraag moet voldoen.
 - d Omschrijf bij vraag III de populatie.

14 In de tabel zie je enige informatie over de provincies Drenthe, Gelderland en Noord-Holland.

provincie	netnummer hoofdstad	bevolkingsdichtheid (inwoners per km ²)	aantal ziekenhuizen	waardering leefomgeving
Drenthe	0592	185	4	***
Gelderland	026	409	10	****
Noord-Holland	023	1039	15	***

De variabelen die in deze tabel voorkomen zijn provincie, netnummer hoofdstad, bevolkingsdichtheid, aantal ziekenhuizen en waardering leefomgeving.

- a Welke van deze variabelen zijn kwalitatief? Geef het meetniveau van deze variabelen.
- b Welke van deze variabelen zijn discreet?

Voor het vaststellen van de waardering van de leefomgeving zijn 1025 inwoners van Drenthe ondervraagd. Zij konden kiezen op een schaal van 1 tot en met 5 sterren. Zie de tabel hiernaast.

- c Bereken de steekproefproportie van de inwoners van Drenthe die de leefomgeving waarderen met minstens drie sterren.

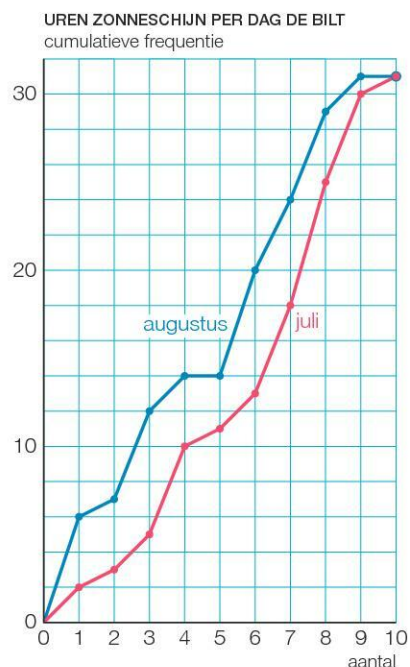
WAARDERING LEEFOMGEVING DRENTHÉ	
sterren	aantal
*	71
**	204
***	548
****	168
*****	34

- 15** Gedurende de maanden juli en augustus is het aantal uren zonneshijjn per dag in De Bilt bijgehouden. Zie de twee cumulatieve frequentiepolygonen in figuur G.4 waarbij de eerste klasse $[0, 1)$ is.

- a** Hoeveel dagen waren er in
- juli met minder dan 6 uur zon
 - augustus met minstens 6 uur zon
 - juli met minstens 4 uur, maar minder dan 8 uur zon?
- b** Welke maand was het zonnigst? Licht toe.

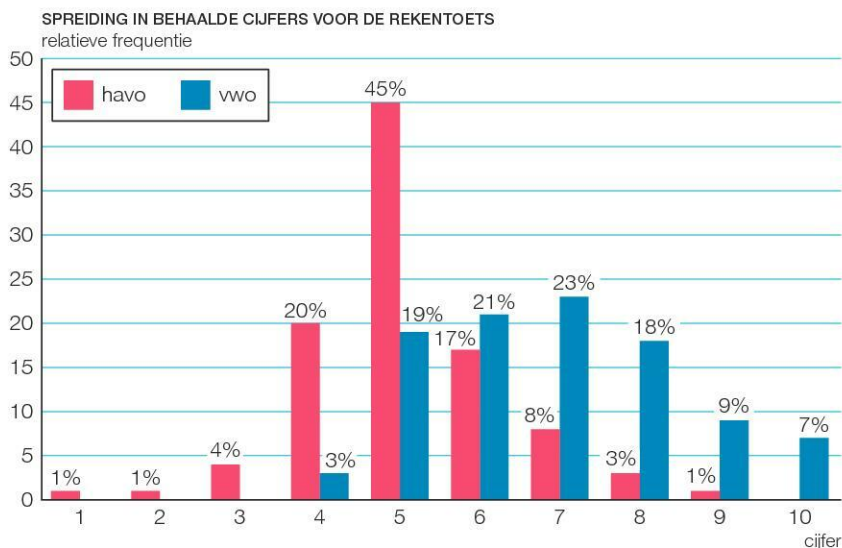
In juli scheen de zon gemiddeld 5,7 uur per dag.

- c** Welke standaardafwijking hoort hierbij? Kies uit 2,5 uur en 5 uur.
- d** Geef een schatting van het totaal aantal uren zonneshijjn in De Bilt in juli en augustus samen. Kies uit 315 uur, 355 uur en 395 uur. Licht toe.



figuur G.4

- 16** In 2014 werd de eerste verplichte rekentoets als onderdeel van het eindexamen afgenomen. In figuur G.5 zijn de resultaten van deze toets gepresenteerd. Inmiddels is de rekentoets afgeschaft als examenonderdeel.

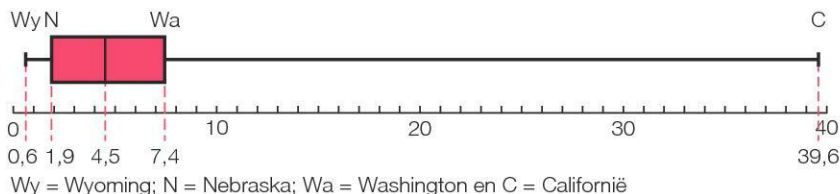


figuur G.5

Onderzoek met behulp van de max.Vcp of het verschil in cijfers tussen havo en vwo groot, middelmatig of gering is.

- 17** In 2019 hadden de 50 staten van de VS samen 326 miljoen inwoners. De verdeling van het aantal inwoners per staat is verwerkt in de boxplot in figuur G.6.

BEVOLKING VAN DE 50 STATEN VAN DE VS IN MILJOENEN



figuur G.6

- Bereken de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.
- Hoeveel staten hebben minstens zoveel inwoners als Nebraska?
- Waarom staat er boven de mediaan geen Amerikaanse staat?
- Bekijk de staten die de laagste 50% van de inwoneraantallen hebben. Geef een schatting van het totale aantal inwoners van deze staten.
- Wanneer je met behulp van de boxplot een schatting maakt van het totaal aantal inwoners van de VS, krijg je een veel te hoge schatting. Bereken deze geschatte waarde en geef een verklaring voor het verschil met de werkelijke waarde 326 miljoen.



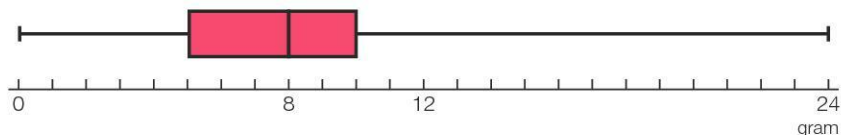
- 18** In Nijmegen wil het RSC (Radboud Sportcentrum) een onderzoek doen met als titel: “Hoe sportief zijn de Nijmeegse studenten?”.

De volgende drie methoden voor het nemen van een steekproef worden overwogen.

- Op de website van het RSC wordt een poll geplaatst. Een poll is een korte lijst van stellingen met meerkeuze antwoorden.
 - Er wordt aan alle studenten een e-mail gestuurd, met de vraag een korte enquête in te vullen. Van de studenten vult 20% de enquête in.
 - De dames van de hockeyclub nemen interviews af bij jongeren op straat in de stad Nijmegen.
- Leg bij iedere methode uit waarom deze waarschijnlijk geen representatieve steekproef oplevert.
 - Voor het onderzoek wordt een enquête afgenomen. Bedenk voor de meetniveaus nominaal en ordinaal een mogelijke enquêtevraag.

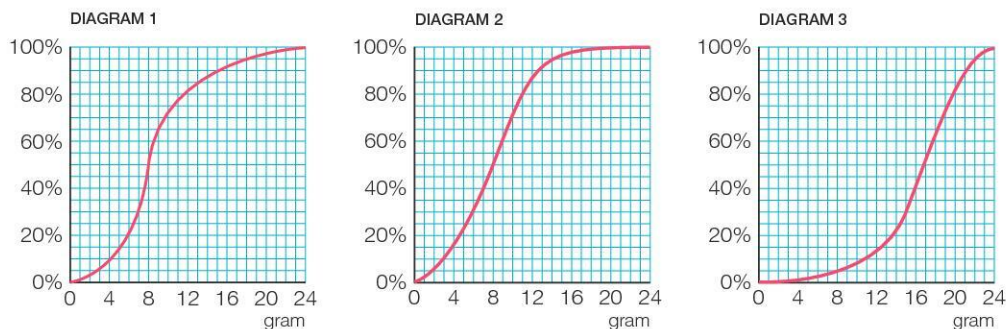
- 19** Van 177 appels is gecontroleerd hoeveel ze van het streefgewicht van 120 gram afwijken. De resultaten zijn verwerkt in de boxplot in figuur G.7.

VERSCHILLEN MET STREEFGEWICHT



figuur G.7

- Hoeveel procent van de spreidingsbreedte is de interkwartielafstand?
- Mitchel schat dat de appels gemiddeld 12 gram van het streefgewicht afwijken.
Ga met een berekening na of dit een redelijke schatting is.
- Welke van onderstaande relatieve cumulatieve frequentiepolygonen komt overeen met de boxplot? Licht toe.



figuur G.8

- 20** Bij een onderzoek wordt door middel van een vragenlijst onderzocht in hoeverre men het eens is met bepaalde stellingen. Elk van de stellingen kan op de volgende vijf puntsschaal beoordeeld worden:
1 (helemaal mee oneens), 2 (mee oneens), 3 (acceptabel), 4 (mee eens) of 5 (helemaal mee eens).

De vragenlijst is door 3000 personen ingevuld.

- Is de beoordeling een kwalitatieve of kwantitatieve variabele?
- Licht aan de hand van een voorbeeld toe dat het onjuist is het gemiddelde te nemen van de beoordelingen.
- Welke centrummaat kan wel gebruikt worden bij het verwerken van deze gegevens?

De onderzoekers hebben een representatieve steekproef gebruikt.

- Aan welke voorwaarden voldoet de steekproef dan?
- Uit de resultaten van het onderzoek concluderen de onderzoekers dat de populatieproportie van Nederlanders die stelling 1 acceptabel vinden ongeveer 0,4 is.

Hoeveel mensen hebben deze optie gekozen in de vragenlijst?

21 In een onderzoeksrapport over de financiële situatie van studenten staat de tabel hiernaast. Er zijn in totaal 2723 studenten ondervraagd.

- Welke variabelen staan in de tabel? Geef van elk van deze variabelen het meetniveau. Licht je antwoord toe.
- Onderzoek met de phi-coëfficiënt of het verschil in het hebben van een bijbaan tussen de mannen en de vrouwen groot, middelmatig of gering is.

		bijbaan		
		ja	nee	
geslacht	m	763	327	1090
	v	1196	457	1633
		1939	784	2723

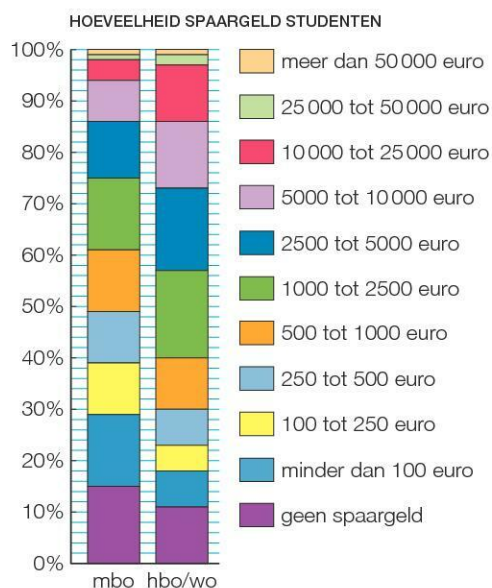
Uit het rapport blijkt dat er een verschil bestaat tussen hbo-studenten en wo-studenten in het hebben van een bijbaan. Een deel van de resultaten staat in de tabel hiernaast.

- Onderzoek of dit verschil groot, middelmatig of gering is.

		bijbaan		
		ja	nee	
opleidingsniveau	hbo	1200	379	
	wo			
		1939	784	2723

Tussen mbo-studenten en hbo/wo-studenten bestaat een verschil in de hoeveelheid spaargeld die zij hebben. Zie de figuur hiernaast.

- Onderzoek met behulp van de max.Vcp of dit verschil groot, middelmatig of gering is.



figuur G.9

ARTIKEL

Strandwandeling helpt om langer te slapen

Een wandeling over het strand zorgt voor een 47 minuten langere slaap in de nacht erop. Een stuk meer dan wanneer die wandeling landinwaarts plaatsvindt. Dat blijkt uit onderzoek van de Universiteit van Surrey.

Er deden 109 mensen van tussen de 21 en 82 jaar mee aan het onderzoek. De ene helft (54) maakte een wandeling over het strand en de andere helft (55) liep een even lange en even zware route door het binnenland. Beide groepen voelden zich na afloop gelukkiger en minder gespannen. Ook de slaapduur van beide groepen nam toe.



Geluk en spanning werden gemeten via een vragenlijst waarop de deelnemers de ochtend vóór de wandeling en de ochtend na de wandeling moesten aangeven in hoeverre zij zich gelukkig en ontspannen voelden. Zie de figuur hiernaast.

- a** Geef het meetniveau van de variabelen geluk en spanning.

erg ongelukkig	☐	☐	☐	☐	☐	erg gelukkig
zeer gespannen	☐	☐	☐	☐	☐	zeer ontspannen

In de tabel hiernaast zie je het gemiddelde $\bar{X}$ en de standaardafwijking S bij de variabele slaapduur, zowel van de nacht voor de wandeling als de nacht daarna, uitgesplitst naar wandelgebied.

- b** Is de variabele slaapduur discreet of continu? Licht toe.
- c** Onderzoek of het verschil in slaapduur tussen de nacht voor en de nacht na de wandeling bij de strandwandelaars groot, middelmatig of gering is.
Doe dat ook voor de wandelaars in het binnenland.

	slaapduur (minuten)			
	voor		na	
	$\bar{X}$	S	$\bar{X}$	S
strand	413	71	460	59
binnenland	417	82	430	61

23 Corinne doet onderzoek naar ziekenhuispatiënten die minstens twee weken in het ziekenhuis verblijven. Ze neemt zowel bij ziekenhuis A als bij ziekenhuis B een steekproef van 288 van deze patiënten. In de tabel hiernaast zie je het gemiddelde en de standaardafwijking van het aantal ligdagen van de door haar onderzochte personen.

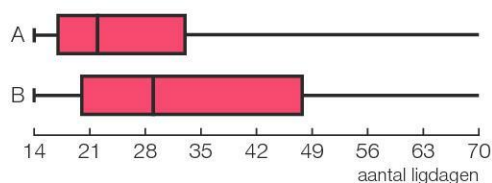
AANTAL LIGDAGEN		
	$\bar{X}$	S
A	28,7	17,8
B	37,7	25,6

- a** Met behulp van de tabel bepaalt Corinne of het verschil in ligdagen groot, middelmatig of gering is.
Welke conclusie trekt Corinne? Licht toe.

De onderzoeksbegeleider van Corinne adviseert haar om ook de boxplots van het aantal ligdagen te vergelijken.

In de figuur hiernaast zie je voor beide ziekenhuizen (delen van) de boxplots.

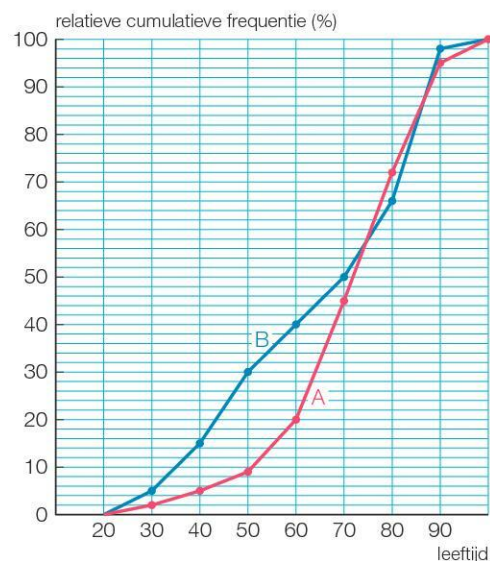
- b** Welke conclusie trekt Corinne over de grootte van het verschil op basis van de boxplots?



figuur G.10

In figuur G.11 zie je voor beide ziekenhuizen de leeftijdsopbouw van de onderzochte patiënten.

- c** Onderzoek met deze figuur of het verschil in leeftijdsopbouw groot, middelmatig of gering is.



figuur G.11

3 Lineaire verbanden

24 De lijn l gaat door het punt $A(2, 7)$ en $rc_l = -\frac{3}{4}$.

- a** Stel de formule op van l .
b Het punt B met x -coördinaat $x_B = -2$ ligt op l .
Bereken de y -coördinaat y_B .

De lijn m gaat door de punten $P(-1, 5)$ en $Q(2, -1)$.

- c** Stel de formule op van m .
d Op m ligt het punt R met $y_R = 13$.
Bereken x_R .

25 Los op. Rond af op één decimaal.

a $4 - (x - 3) = 2x$

b $0,3p - 8 = 2 - 0,8p$

c $\frac{6x-5}{7} = 0,12x + 6,5$

26 **a** Maak y vrij bij $5x - 2y = 12$.

b Druk a uit in b bij $3a + 4b = 12$.

c Druk t uit in T bij $5,25T - 1,5t = 8,25$.

d Gegeven is de lijn l : $3x + 2y = -4$.

Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de x -as en de y -as.

27 Bij het onderhoud van een zwembad in de tuin van een villa wordt het water uit het bad gepompt. Voordat het pompen begon zat er 120 m^3 water in het bad en per twee uur wordt er 30 000 liter weggepompt. Er bestaat een lineair verband tussen het aantal liter water W in het zwembad en de tijd t . Neem t in kwartieren met $t = 0$ op het moment dat men begint te pompen.

a Stel de formule op van W .

b Na hoeveel uur is het zwembad leeg?

c Na hoeveel minuten zat er nog 110 625 liter water in het zwembad?

28 De jaarlijkse elektriciteitsrekening bestaat uit een bedrag per kWh verbruikte elektriciteit en een vast bedrag per aansluiting (het vastrecht). De familie Kühler heeft 3250 kWh verbruikt en moet € 841,60 betalen. De familie Kolkman heeft 4426 kWh verbruikt en moet € 1112,08 betalen.

a Stel de formule op van het bedrag B in euro's bij een verbruik van e kWh.

b Hoeveel is het vastrecht? Hoeveel is de prijs per kWh?

c De familie Winkelman moet € 1050,44 betalen.

Hoeveel kWh heeft de familie Winkelman verbruikt?

29 De in Nederland gebruikte schoenmaten vinden hun oorsprong in Frankrijk. Uitgangspunt was een Franse lengtemaat: de steek. De Franse steek is 6,67 mm. De schoenmaat geeft de lengte van de schoen in Franse steken aan.

a Is de schoenmaat evenredig met de lengte van een schoen?

b Hoeveel mm hoort bij schoenmaat 43? Rond af op gehelen.

Vooral bij sportschoenen kom je het Engelse schoenmaatsysteem tegen.

SCHOENMATEN

Engelse maat E	4	6	8	10	12
Franse maat F	37	39,5	42	44,5	47

c Is de Franse maat evenredig met de Engelse maat? Licht toe.

d Laat zien dat er een lineair verband bestaat tussen E en F en geef de formule van F .

e Geef de Franse maat afgerond op halven bij een Engelse maat van 9,5.

30 Bij het kopen van gordijnen moet je er rekening mee houden dat de breedte B van de gordijnstof meer moet zijn dan de lengte r van de gordijnrail. In de praktijk gaat men ervan uit dat B evenredig is met r . Het hangt van het type plooi af welke formule erbij hoort.

a Meneer Brinkman gebruikt de enkele plooi. Bij rails van 248 cm heeft hij gordijnstof met een breedte van 372 cm nodig.

Stel de formule van B op.

b Mevrouw Lankhorst gebruikt de platte stolpplooi. Bij rails van 188 cm hoort gordijnbreedte 470 cm.

Bereken bij de platte stolpplooi de gordijnbreedte bij rails van 212 cm.

31 Twee producenten van stroopwafels waren jaren in een race verwickeld wie het eerste 100 miljoen stroopwafels geproduceerd zou hebben. Beide fabrieken openden tegelijk op 1 januari 1999. De eerste jaren leek producent A te gaan winnen met een jaarlijkse productie van 4 miljoen stroopwafels tegenover de 3 miljoen stroopwafels die producent B jaarlijks produceerde. Door een innovatie in productietechniek won producent B echter de race door op 1 januari 2019 stroopwafel nummer 100 miljoen te produceren. De innovatie bij producent B maakte een productie van 6 miljoen stroopwafels per jaar mogelijk.

a Stel formules op voor het totale aantal geproduceerde stroopwafels van de producenten A en B in miljoenen. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1999 en ga uit van lineaire verbanden.

b Na de innovatie bij producent B wist het bedrijf zijn achterstand snel om te buigen in een voorsprong. Bereken hoeveel maanden het duurde voordat bedrijf B na de innovatie op kop lag in productie.



32 In de steden maken steeds meer mensen gebruik van het zogenaamde autodelen. Je huurt dan voor korte tijd een auto die in de buurt geparkeerd staat en deelt de auto als het ware met je buurtgenoten. Marcel huurde gedurende 1 uur en 5 minuten een auto bij Autodeal en betaalde een bedrag van €15,90. Dat was inclusief een starttarief van €5,50. Fritz huurde gedurende 45 minuten een auto bij Carshare en betaalde een bedrag van €13,05. Hij betaalde geen starttarief. Bij beide bedrijven bestaat een lineair verband tussen de kosten K in euro's en de tijd t in minuten die de auto gehuurd wordt.

a Stel de formule op van K_A voor het bedrijf Autodeal. Stel ook de formule op van K_C voor het bedrijf Carshare.

b Yvonne gaat een auto huren en berekent vooraf dat huren bij Autodeal voor haar het voordeligst is.

Wat weet je over het aantal minuten dat Yvonne de auto gaat huren?

Rond je antwoord af op gehele minuten.

33 Voor het schilderen van de plafonds van hun nieuwe appartement gebruiken Tessa en Joshua één type verf. Joshua heeft bijgehouden dat ze voor het eerste plafond van 9 m^2 in totaal $0,8$ liter verf nodig hadden. Neem aan dat het verbruik per m^2 plafond voor alle kamers in het appartement gelijk zal zijn.

- a** Stel de formule op van het aantal liter verf L dat ze nodig hebben voor een totale plafondoppervlakte van $P \text{ m}^2$.
- b** Joshua heeft 15 liter verf gehaald.
Bereken hoeveel m^2 plafond ze hiermee kunnen schilderen.

- 34** **a** Rederij Doexen verzorgt rondvaarten. Bij een van de rondvaarten zijn 80 passagiers aan boord. In totaal betalen deze passagiers $\text{€}990$ voor de rondvaart. Volwassenen betalen $\text{€}15$ voor de rondvaart en kinderen $\text{€}12$. Bereken hoeveel kinderen er aan boord zijn.
- b** Een marktkoopman verkoopt appels en peren. De appels kosten $\text{€}1,50$ per kg en de peren $\text{€}1,25$. Op een dag verkoopt hij in totaal 305 kg en is zijn opbrengst $\text{€}400,-$.
Bereken hoeveel kg appels hij verkoopt.

35 Antropologen kunnen de lichaamslengte van een mens schatten aan de hand van de lengte van een bot dat bij opgravingen wordt gevonden. Daarbij gebruiken ze onder andere de humerus, dat is het bot dat van de elleboog naar de schouder loopt.

Tussen de lichaamslengte L in cm en de lengte x in cm van de humerus bestaat een lineair verband.

Bij mannen geldt $L = 2,89x + 70,6$ met x tussen 10 en 40 .

Bij vrouwen geldt $L = 2,75x + 71,5$ met x tussen 10 en 40 .

- a** Bij opgravingen vindt men een humerus met een lengte van 31 cm . Men neemt aan dat deze humerus van een man afkomstig is.
Hoe lang was deze man? En als deze humerus van een vrouw was geweest, hoe lang zou deze vrouw dan zijn geweest? Rond af op gehele cm.
- b** Hoeveel cm is de humerus van een man met een lichaamslengte van 180 cm ? En van een vrouw van dezelfde lichaamslengte? Rond af op één decimaal.
- c** Wat is de kleinste en wat is de grootste lichaamslengte van een vrouw die je met deze formule kunt berekenen?
- d** Bij welke lengte van de humerus is er volgens de formules een verschil van 4 cm in lichaamslengte tussen mannen en vrouwen?



- 36** Van twee personenauto's is het benzineverbruik gemeten. Daarbij kwamen lineaire verbanden tevoorschijn tussen het benzineverbruik B in liter per 100 km en de snelheid v in km per uur. Hierbij ligt de snelheid v tussen 50 en 120 km/uur.

Voor merk P luidt de formule $B = 0,08v + 1,0$. Bij merk Q hoort bij $v = 60$ het verbruik $B = 6,5$ en bij $v = 100$ hoort $B = 8,5$.

- Stel de formule van B op die bij merk Q hoort.
- Teken voor beide merken in één figuur de grafieken van B .
- Bij welke snelheden verbruikt merk Q minder benzine dan merk P?
- Bij welke snelheid verbruikt merk P per 100 km een halve liter benzine meer dan merk Q?

4 Handig tellen

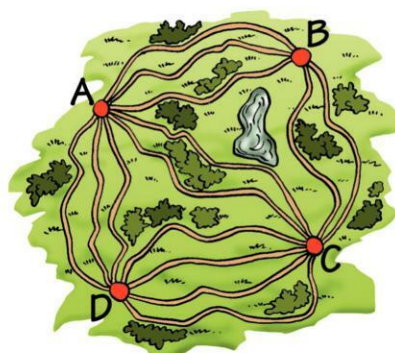
- 37** Zie het wegendigram hiernaast. Ga er bij de volgende vragen vanuit dat je elke plaats hooguit één keer aandoet.

Op hoeveel manieren kun je

- van A naar C
- van A naar D?

Lorenzo maakt een rondwandeling van A, naar B, naar C en weer naar A. Hij wil minstens een keer over een van de wegen die langs het meer lopen.

- Hoeveel verschillende rondwandelingen zijn mogelijk?



figuur G.12

- 38** In het brailleschrift worden de tekens gevormd door zes stippen die al dan niet voelbaar gemaakt zijn. Hieronder zie je enkele letters in brailleschrift. Een zwarte stip is voelbaar, een open rondje niet.

A	B	C	D	E	F	G

figuur G.13

- Hoeveel tekens zijn mogelijk als er twee stippen voelbaar zijn?
- Hoeveel tekens zijn in totaal mogelijk? Het teken met geen enkele zwarte stip doet hierbij niet mee.
- Hoeveel tekens zijn mogelijk waarbij de helft van de stippen voelbaar is, waarvan er precies één in de middelste rij zit?

39 Een gemeenteraad bestaat uit negen leden. Er zijn drie CDA-leden, drie PvdA-leden, twee VVD-leden en één lid van de partij Gemeentebelangen. Er moet een commissie van drie leden worden samengesteld.

- a** Hoeveel commissies zijn mogelijk met twee CDA-leden?
- b** Hoeveel commissies zijn in totaal mogelijk?
- c** Hoeveel commissies zijn mogelijk waarin geen leden van dezelfde partij zitten?

De negen raadsleden staan in de rij om hun toespraken te geven.

- d** Hoeveel verschillende rijen zijn er mogelijk?

40 Van de letters van het woord WISKUNDE ga je codes van vijf letters vormen.

Op hoeveel manieren kan dit als

- a** elke letter maar één keer in een code mag voorkomen
- b** elke letter meer dan één keer mag voorkomen
- c** de codes met een W beginnen en op een N eindigen en elke letter maar één keer mag voorkomen?



41 In deze opgave maak je getallen van vijf cijfers. Daarbij mag je alleen gebruikmaken van de cijfers 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8.

Hoeveel getallen zijn er als je

- a** elk cijfer één keer mag gebruiken en het getal begint met een 4
- b** elk cijfer vaker mag gebruiken en het getal eindigt op een 5
- c** elk cijfer vaker mag gebruiken en het getal groter is dan 30 000
- d** elk cijfer vaker mag gebruiken en het getal groter is dan 46 000
- e** elk cijfer één keer mag gebruiken en het getal kleiner is dan 64 000
- f** elk cijfer vaker mag gebruiken en het getal precies twee vijfen bevat die naast elkaar staan?

42 Het alarmsysteem van de familie Schiereck kan worden aan- en uitgezet middels een pincode van vier cijfers. Elk cijfer mag vaker gebruikt worden. Aan de slijtage van de knoppen op het cijferpaneel van het alarmsysteem is duidelijk te zien dat de knoppen voor de cijfers 4, 7 en 8 het meest gebruikt worden. Ga ervan uit dat de viercijferige pincode is opgebouwd uit deze drie cijfers.

Hoeveel mogelijke pincodes zijn er dan?

- 43** Sara en Alex spelen een kaartspel tegen elkaar. Ze spelen vijf partijen en kijken daarna wie de meeste partijen heeft gewonnen. Diegene is de grote winnaar. Een mogelijk scoreverloop is 1-0, 2-0, 2-1, 2-2, 2-3. Hierbij is Alex de grote winnaar.

- a** Hoeveel scoreverlopen zijn er mogelijk waarbij Alex maar één keer verliest?
- b** Hoeveel scoreverlopen zijn er mogelijk waarbij Sara de grote winnaar is?



Na een aantal keer spelen realiseren Sara en Alex zich dat ze kunnen stoppen met spelen zodra een van hen drie keer heeft gewonnen, de ander kan dan niet meer de grote winnaar worden. Ze besluiten met deze nieuwe regel te spelen.

- c** Hoeveel scoreverlopen zijn er mogelijk waarbij Alex de eerste twee partijen wint?
- d** Hoeveel scoreverlopen zijn er mogelijk waarbij minstens vier partijen worden gespeeld?

- 44** Een distributiecentrum gebruikt een code met blauwe en witte vakjes in een rechthoek van 4 bij 5. Zie figuur G.14.

- a** Bereken het aantal codes met zes blauwe vakjes.
- b** Hoeveel verschillende codes zijn er in totaal te maken?
- c** Hoeveel codes zijn er mogelijk met in de eerste kolom één blauw vakje, in de tweede kolom twee blauwe vakjes, in de derde kolom drie blauwe vakjes en in de vierde kolom vier blauwe vakjes?

Een code heet *positief* als meer dan de helft van de vakjes blauw is en een code heet *open* als de middelste zes vakjes wit zijn.

- d** Hoeveel procent van de codes is positief?
- e** Hoeveel positieve codes zijn open?

kolom			
1	2	3	4
■	□	□	■
□	■	□	□
■	■	□	■
■	□	□	□
□	□	■	□

figuur G.14

- 45** In een tuincentrum is een aantal planten in de aanbieding. Zie de tabel hieronder.

eenjarige planten	vaste planten	moestuinplanten	heesters
begonia viooltje afrikaantje vlijtig liesje vergeet-me-nietje	hortensia geranium pioenroos	aardbei peterselie munt boerenkool	vlinderstruik magnolia roos

Bas koopt een aantal planten die in de aanbieding zijn.

Op hoeveel manieren kan hij

- a** twee verschillende eenjarige planten, een vaste plant en een heester kiezen
- b** uit elke categorie twee verschillende planten kiezen?

Bas twijfelt of hij een moestuin wil beginnen. Hij koopt in totaal acht verschillende soorten planten die in de aanbieding zijn. Hij koopt hierbij drie moestuinplanten of geen enkele moestuinplant.

- c** Op hoeveel manieren kan dat?

Bij de ingang van het tuincentrum staat dat ze 50 verschillende soorten meerjarige planten verkopen. Bas wil vijf van deze soorten in de voortuin en vijf andere in de achtertuin.

- d** Op hoeveel manieren kan dat?



46 Voor het spel ‘*Wie is de mol?*’ wordt door zes kandidaten een opdracht uitgevoerd. Hiervoor moeten twee duo’s in de stad Sevilla foto’s maken. Het ene duo maakt foto’s van drie kerken en het tweede duo van drie musea. Verder is er een kandidaat die de fotoduo’s aanwijzingen geeft, zodat deze weten waar de te fotograferen gebouwen staan. De zesde kandidaat moet na afloop van de opdracht de zes foto’s op volgorde van bouwjaar van de gefotografeerde gebouwen leggen.

- a** Op hoeveel manieren kunnen de kandidaten worden verdeeld over de verschillende taken?

De kandidaat die de foto’s op volgorde moet leggen, heeft geen idee van de bouwjaren van de gebouwen op de foto’s. Wel denkt hij dat de kerken in ieder geval allemaal ouder zijn dan de musea. Hij besluit op basis hiervan een gok te wagen.

- b** Hoeveel volgordes zijn dan mogelijk?

De kandidaat krijgt te horen dat het klopt dat de kerken allemaal ouder zijn dan de musea, maar dat geen enkele foto op de goede plek ligt. Hij mag nog een poging wagen.

- c** Hoeveel volgordes blijven dan nog over?

Gedurende de dag heeft een van de kandidaten, ‘de mol’, geprobeerd om de opdracht te saboteren.

De dag wordt afgesloten met een individuele test. Ter afsluiting van deze test wordt aan alle kandidaten gevraagd wie zij denken dat de mol is.

De mol krijgt na de test een lijstje te zien met daarop, op alfabetische volgorde, de namen van de andere vijf kandidaten en daarachter de door hen genoemde mol. Slechts twee van de kandidaten hebben de juiste mol genoemd.

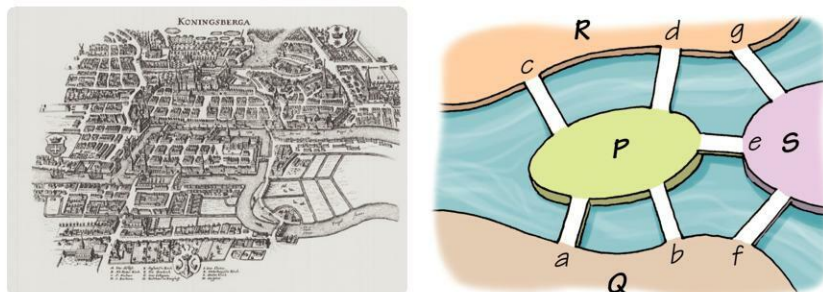
- d** Hoeveel verschillende lijstjes kan de mol te zien krijgen?



47 Het zeven bruggen probleem van Koningsbergen is een wiskundig vraagstuk. Het werd voor het eerst in 1736 opgelost door de beroemde wiskundige Leonard Euler. Het probleem luidt:

“Is het mogelijk in Koningsbergen een route te lopen die precies één keer over elke brug gaat?”

Hieronder zie je een oude kaart van de plaats Koningsbergen en een schematische weergave van de verschillende gebieden en bruggen.



figuur G.15

In de schematische weergave zie je dat de bruggen a , b , c , d , e , f en g heten. De gebieden heten P , Q , R en S .

We gaan er bij de onderdelen a en b van uit dat we elk gebied maar één keer bezoeken.

- a** Hoeveel routes zijn mogelijk van P naar S ?
- b** Hoeveel routes zijn mogelijk van Q naar R ?

Pim wil het zeven bruggen probleem oplossen door alle permutaties van de letters a , b , c , d , e , f en g na te gaan.

Stel dat Pim 20 seconden per permutatie voor de controle nodig heeft.

Hij kan dus bijvoorbeeld in 20 seconden zien dat de route $abcdefg$ niet mogelijk is.

- c** Waarom is de route $abcdefg$ niet mogelijk?
- d** Bereken hoelang Pim bezig is met het controleren van alle rangschikkingen.

Euler had een slimmere manier om het zeven bruggen probleem op te lossen. Hij ging niet alle mogelijkheden na, maar had de volgende redenering:

Elk gebied, behalve eventueel het gebied waar je begint of eindigt, moet een even aantal bruggen hebben omdat je naar het gebied toe moet en het ook weer moet kunnen verlaten.

- e** Hoe kun je Eulers redenering gebruiken om te concluderen dat het zeven bruggen probleem van Koningsbergen geen oplossing heeft?
- f** Onderzoek tussen welke twee gebieden je een brug kunt bouwen, zodat het probleem wel een oplossing krijgt.

Formuleblad

Vuistregels bij de grootte van het verschil van twee groepen

$$2 \times 2 \text{-kruistabel } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ met } \phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$$

- als $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$, dan zeggen we ‘het verschil is groot’,
- als $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$, dan zeggen we ‘het verschil is matig’,
- als $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dan zeggen we ‘het verschil is gering’.

Maximale verschil in cumulatief percentage (max.Vcp) (met steekproefomvang $n > 100$)

- als max.Vcp > 40 , dan zeggen we ‘het verschil is groot’,
- als $20 < \text{max.Vcp} \leq 40$, dan zeggen we ‘het verschil is matig’,
- als max.Vcp ≤ 20 , dan zeggen we ‘het verschil is gering’.

$$\text{Effectgrootte } E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2)}} \text{ met } \bar{X}_1 \text{ en } \bar{X}_2 \text{ de steekproefgemiddelden}$$

($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we ‘het verschil is groot’,
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we ‘het verschil is matig’,
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we ‘het verschil is gering’.

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen¹ elkaar niet overlappen, dan zeggen we ‘het verschil is groot’,
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we ‘het verschil is matig’,
- in alle andere gevallen zeggen we ‘het verschil is gering’.

¹ De ‘box’ is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen.
- De toets Ans en fouten verbeteren.
- Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen.
- Decimaal getal omzetten in breuk.

havo A deel 1

hoofdstuk 1

bladzijde 11

Formules, grafieken en snijpunten

- Formules invoeren en grafieken plotten.
- De optie snijpunt gebruiken.

havo A deel 1

hoofdstuk 3

bladzijde 122

Allerlei

- Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR.
-

Overzicht routes

1 Tabellen en grafieken

1.1 Rekenen met procenten en verhoudingen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

13	14	15	16	17	18	19	20

1.2 Maatsystemen

opgave	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

35	36	37	38	39

1.3 Omgaan met tabellen

opgave	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

1.4 Informatie in grafieken

opgave	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
□ basis										
⊙ midden										
* uitdagend										

2 De statistische cyclus

2.1 De onderzoeksvraag

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
☐ basis																	
☒ midden																	
☒ uitdagend																	

2.2 Data verzamelen

opgave	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
☐ basis													
☒ midden													
☒ uitdagend													

2.3 Centrum- en spreidingsmaten

opgave	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
☐ basis														
☒ midden														
☒ uitdagend														

2.4 Representatie van data

opgave	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
☐ basis											
☒ midden											
☒ uitdagend											

	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65

2.5 Conclusies trekken

opgave	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
☐ basis														
☒ midden														
☒ uitdagend														

3 Lineaire verbanden

3.1 Lineaire formules

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
☐ basis														
☐ midden														
☒ uitdagend														

15	16	17	18	19	20

3.2 Lineaire formules vergelijken

opgave	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
☐ basis													
☐ midden													
☒ uitdagend													

34	35	36	37	38	39

3.3 Lineaire formules opstellen

opgave	40	41	42	43	44	45	46	47	48
☐ basis									
☐ midden									
☒ uitdagend									

49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59

3.4 Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

opgave	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
☐ basis													
☐ midden													
☒ uitdagend													

4 Handig tellen

4.1 Regels bij telproblemen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
□ basis																		
⊙ midden																		
* uitdagend																		

4.2 Permutaties en combinaties

opgave	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

32	33	34	35	36	37	38

4.3 Allerlei telproblemen

opgave	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68

Trefwoordenregister

A

absolute verandering 11
aselect 62
associatiemaat 91

B

boomdiagram 147
box 75
boxplot 74
boxplots vergelijken 96

C

causaal verband 59
Centraal Bureau voor de
Statistiek 66
centrummaten 72
combinatie 158
conclusies trekken 91
continue variabele 70
cumulatieve frequentie 86
cumulatieve
frequentiepolygoon 86

D

data 57
data analyseren 72, 80
data verzamelen 66
delta 127
derde kwartiel 74
discrete variabele 70
dubbel steel-
bladdiagram 82

E

eerste kwartiel 74
effectgrootte 96
enquêtevragen 66
evenredig 114
recht - 114
evenwijdige lijnen 109
extrapoleren 37
grafisch - 37
lineair - 37

F

faculteit 156
frequentie 56
cumulatieve - 86
relatieve cumulatieve -
86
frequentiepolygoon 83
cumulatieve - 86
relatieve - 83
relatieve cumulatieve -
86
frequentietabel 56

G

gemiddelde 55, 72
grafiekenbundel 44
grafisch extrapoleren 37
grafisch interpoleren 37
grafische rekenmachine
11, 112

H

haakjes wegwerken 107
herhalingen 152
herleiden 107
histogram 83
horizontale lijn 110

I

inhoudsmaten 25
interkwartielafstand 75
interpoleren 37
grafisch - 37
lineair - 37

K

klassen 80
klassenbreedte 80
klassengrenzen 80
klassenindeling 80
klassenmidden 80
kruistabel 91
kwalitatieve variabele 68

kwantificeren 91
kwantitatieve variabele 68
kwartiel 74
derde - 74
eerste - 74
kwartielafstand 75

L

lengtematen 25
lijnen 109
evenwijdige - 109
horizontale - 110
verticale - 110
lineair extrapoleren 37
lineair interpoleren 37
lineair verband 129
lineaire formule 109
lineaire ongelijkheid 120
lineaire vergelijking
107, 117
lineaire vergelijking met
twee variabelen 136

M

maximaal verschil in
cumulatief
percentage 93
max.Vcp 93
mediaan 55, 72
meetniveau 69
met herhaling 152
modale klasse 80
modus 55, 72

N

nominaal 69
nominaal niveau 69
nominale variabele 69

O

onderzoeksgegevens 67
onderzoeksresultaten 33
onderzoeksvraag 59

oorzakelijk verband 59
oppervlaktematen 25
ordinaal 69
ordinaal niveau 69
ordinale variabele 69

P

permutatie 156
phi-coëfficiënt 91
plotten 122
populatie 62
populatieproportie 64
populatiestandaardaf-
wijking 97
presentatie 87
procentuele
verandering 10
proportie 64

R

rangschikking 156
recht evenredig 114
relatieve cumulatieve
frequentie 86
relatieve cumulatieve
frequentiepolygoon 86
relatieve
frequentiepolygoon 83
relatieve verandering 11
representatie 87

representatief 62
respondenten 66
richtingscoëfficiënt 109,
127
rijtjes bestaande uit A's en
B's 165

S

samenhang 59
sigma 77, 97
somregel 148
spreidingsbreedte 75
spreidingsmaat 77
staafdiagram 56
standaardafwijking 77, 97
standaarddeviatie 77
stapeldiagram 56
statistiek 57
statistische cyclus 57
steekproef 62
steekproefproportie 64
steekproefstandaardaf-
wijking 97
steel-bladdiagram 82

U

uitdrukken in 129
uitschieter 72
uitzetten tegen 41

V

variabele 67
continue - 70
discrete - 70
kwalitatieve - 68
kwantitatieve - 68
nominale - 69
ordinale - 69
- vrijmaken 136
verandering 11
absolute - 11
relatieve - 11
vergelijking van een lijn 126
verhouding 17
verhoudingstabel 17
vermenigvuldigingsregel 148
verticale lijn 110
voorschrift 33
vrijmaken 136

W

wegendiagram 147
wetenschappelijke notatie 22

Z

zonder herhaling 15

Verantwoording

Illustraties: Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: Integra Software Services
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Foto's

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

ANP Foto, Den Haag: p. 6-7
Imageselect, Wassenaar: p. 10, 99, 104-105, 121
Shutterstock: p. 13, 14 b, 29, 50, 52-53, 123 m + o, 124, 129, 132 (2x), 150, 153, 162, 163, 169, 175 (2x), 178, 183, 195, 199, 200, 201
iStock: p. 14 o, 20, 27 b, 35, 76, 123 b, 144-145, 154, 167, 189
Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 19, 28, 38, 80, 93, 133, 181 (2x), 185, 196, 202
Stichting 024 Sport Fotograaf: Renée Tijdink: p. 27 o
De Beeldunie, Amsterdam: p. 32
Lusitana / Wikimedia Commons: p. 33
RUN Winschoten: p. 49
ANWB Nederland: p. 54 (2x)
Getty Images: p. 141 (2x)
Stijn Voets, Nijmegen: p. 151, 157, 172
Sabine de Waal, Hendrik Ido Ambacht: p. 192
Angel Photography, Amsterdam: p. 159
www.willyalferink.nl: p. 173

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.



0 / 19

© 2019 Noordhoff Uitgevers bv,
Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89176-3



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



Noordhoff Uitgevers



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89176-3



9 789001 891763