

& GETAL & RUIMTE

A



Noordhoff

Getal & Ruimte

havo A deel 2

Twaalfde editie, 2020

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek havo A deel 2

Samen met de delen 1 en 3 van havo wiskunde A bevat dit boek de leerstof van het programma havo wiskunde A, zoals dat met ingang van 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak havo wiskunde A is 320 uur. Elk van de delen 1, 2 en 3 bevat vier hoofdstukken, waarbij opgemerkt kan worden dat in het laatste hoofdstuk van deel 3 de examentraining aan bod komt.

In hoofdstuk 5 Veranderingen wordt domein D (Verandering) geheel afgehandeld. De leerstof van domein D wordt uitsluitend getoetst in het Schoolexamen. De studielast van dit hoofdstuk is ongeveer 20 uur. De studielast van elk van de andere drie hoofdstukken in dit boek is ongeveer 25 uur.

In hoofdstuk 6 Rekenregels en formules komen vooral aspecten van de subdomeinen B2 (Algebra), C2 (Grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden) en C3 (Formules met één of meer variabelen) aan de orde. Daarbij is ook aandacht voor het werken met de grafische rekenmachine.

Hoofdstuk 7 Statistiek en beslissingen sluit aan op de nieuwe opzet van het onderwerp Statistiek dat in hoofdstuk 2 van deel 1 is ingezet. In dit hoofdstuk worden met name de subdomeinen E3 (Data en verdelingen) en E4 (Statistische uitspraken doen) behandeld. Samen met hoofdstuk 2 zijn hiermee vrijwel alle aspecten van de subdomeinen E1 tot en met E4 aan de orde geweest. In hoofdstuk 10 van deel 3 wordt deze leerstof grotendeels herhaald, waarbij opgaven op examenniveau worden aangeboden.

In hoofdstuk 8 Statistiek met de computer wordt domein E5 (Statistiek met ICT) behandeld. Indien mogelijk gebruikt men hierbij het computerprogramma Microsoft Excel. Als dit niet beschikbaar is, kan bijvoorbeeld Google Sheets worden gebruikt. In dat geval dient men erop bedacht te zijn dat wellicht niet alle opdrachten gemaakt kunnen worden. Zie hiervoor de informatie in Getal & Ruimte online.

De leerstof die in dit hoofdstuk aan de orde komt dient getoetst te worden in het Schoolexamen.

Afhankelijk van de verdeling van de studielast over het vierde en vijfde leerjaar kan dit boek geheel of gedeeltelijk in de tweede helft van het vierde leerjaar worden doorgenomen.

Opbouw

De opbouw in dit boek is dezelfde als in deel 1. Elk hoofdstuk heeft een begin- en eindopdracht en een paragraaf Voorkennis. De oriëntatie-opgaven staan voor elke nieuwe theorie en activeren het denken over een nieuw wiskundig begrip. Ook de reflectie-opgaven spelen een belangrijke rol bij het activeren van een wiskundige denkhouding. Naast de gewone opgaven en de afsluitende opgaven zijn er nog de extra opgaven. De afsluitende opgaven geven het beoogde eindniveau aan. De extra opgaven doorbreken de standaardaanpak en activeren zo het wiskundig denken.

Aan het eind van de hoofdstukken 5, 6 en 7 staat een Diagnostische toets en achterin het boek staan de Gemengde opgaven bij deze hoofdstukken.

Drie leerroutes

In deze editie wordt gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen.

De basisroute geeft de leerling voldoende oefening om zich alle vaardigheden die bij de eindtermen horen eigen te maken. In de middenroute worden enkele oefenopgaven overgeslagen en in plaats hiervan maakt de leerling opgaven die dieper op de stof ingaan. De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder oefenopgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.

Getal & Ruimte online

Alle opgaven kunnen ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant en klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij de hoofdstukken 5, 6 en 7 een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

Winter 2019

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

02 Oriëntatie-opgave

   Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 Gewone opgave

   Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 Reflectie-opgave

   In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 Afsluitende opgave

   De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 Extra opgave

   Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute



2 Middenroute



3 Uitdagende route



NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder route-aanduiding

In de Diagnostische toets en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▶GR] Verwijzing naar een module van de GR-handleiding.

[▶WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

[▶JCT] Verwijzing naar een module van de handleiding Excel/Sheets.

Inhoud

5 Veranderingen 6

Beginopdracht Groei Nederlandse bevolking 8

Voorkennis Intervallen en de delta notatie 9

5.1 Stijgen en dalen 11

5.2 Toenamedigrammen 19

5.3 Differentiequotiënten 29

Eindopdracht Groei wereldbevolking 37

Diagnostische toets 38

6 Rekenregels en formules 40

Beginopdracht De eland 42

Voorkennis Haakjes wegwerken en variabelen vrijmaken 43

6.1 Formules combineren en herleiden 45

6.2 Formules en de grafische rekenmachine 53

6.3 Formules met breuken 59

6.4 Rekenen met machten en wortels 65

6.5 Formules met exponenten 76

Eindopdracht Het elandjong 81

Diagnostische toets 82

7 Statistiek en beslissingen 84

Beginopdracht PISA Canada 86

Voorkennis Steekproeven, centrummaten en spreidingsmaten 87

7.1 Statistische verdelingen 89

7.2 Betrouwbaarheidsintervallen voor het populatiegemiddelde 102

7.3 Betrouwbaarheidsintervallen voor de populatieproportie 110

7.4 Betrouwbaarheidsintervallen toepassen 118

Eindopdracht PISA Nederland 131

Diagnostische toets 132

8 Statistiek met de computer 134

Beginopdracht Olympische Spelen 2016 136

Voorkennis Centrummaten en boxplots 137

8.1 Werken met een spreadsheet 139

8.2 Werken met datasets 145

8.3 Draaitabellen en draaigrafieken 150

Eindopdracht Succesvolle sportlanden 159

Gemengde opgaven 160

Formuleblad 176

Overzicht GR-modules 177

Overzicht Excel/Sheets-modules 178

Overzicht routes 179

Trefwoordenregister 183

Verantwoording 185



Veranderingen

Wat leer je?

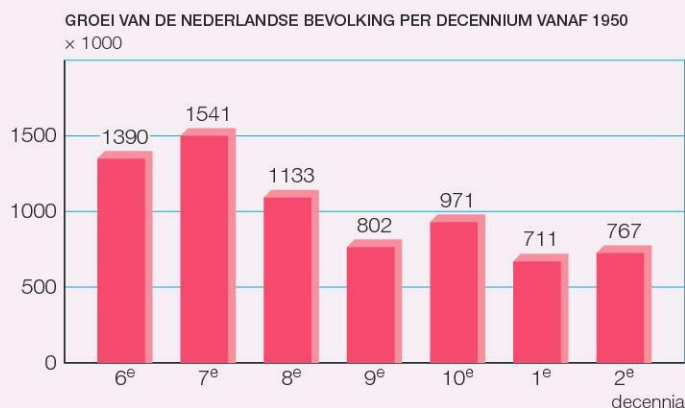
- Dat er verschillende soorten van stijgen en dalen zijn.
- Hoe je veranderingen in beeld kunt brengen met toename-diagrammen.
- Hoe je bij een gegeven toename-diagram een grafiek tekent.
- Toename-diagrammen tekenen bij formules.
- Gemiddelde veranderingen berekenen bij grafieken en formules.





Beginopdracht Groei Nederlandse bevolking

Op 1 januari 2000 had Nederland 15 864 000 inwoners. In het diagram hieronder zie je dat in het eerste decennium van de 21^e eeuw, dat is de periode van 1 januari 2000 tot 1 januari 2010, het aantal inwoners met 711 000 is toegenomen.



- Bereken met behulp van het diagram het aantal inwoners op 1 januari 2020 en op 1 januari 1950.

In het eerste decennium van de 21^e eeuw is het aantal inwoners met 711 000 toegenomen van 15 864 000 tot 16 575 000. De relatieve toename per 1000 inwoners in dit decennium was $\frac{711\,000}{15\,864} \approx 45$.

- Bereken voor alle decennia vanaf 1950 de relatieve toename per 1000 inwoners en verwerk deze relatieve toenames in een diagram zoals hierboven.

De verwachting is dat de Nederlandse bevolking in elk geval tot 2040 zal blijven groeien tot 18 293 000 inwoners op 1 januari, daarna zou de bevolking kunnen krimpen.

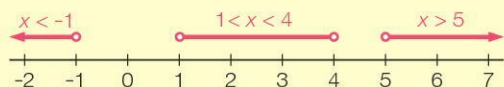
Neem aan dat het aantal inwoners op 1 januari 2050 tot 17 896 000 zou zijn afgenomen.

- Stel dat je de afname van het aantal inwoners zou willen weergeven in de figuur hierboven. Hoe zou je dat aanpakken?
- Bereken de relatieve verandering per 1000 inwoners voor de periode 2040-2050.

Voorkennis Intervallen en de delta notatie

Theorie A Intervallen noteren

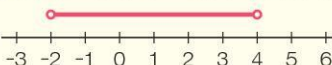
Een interval is een aaneengesloten stuk van de getallenlijn.
In de figuur hieronder zijn boven de getallenlijn drie intervallen getekend.



figuur 5.1

Voorbeeld

a Vul in: x ligt tussen 5 en 9 noteer je als ...

b Vul in: Bij  hoort de notatie ...

Uitwerking

a $5 < x < 9$

b $-2 < x < 4$

1 Vul in.

a x ligt tussen 0 en 6 noteer je als ...

b x ligt tussen 3,5 en 6,4 noteer je als ...

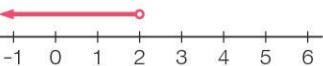
c x is groter dan 7 noteer je als ...

d x is kleiner dan 12,5 noteer je als ...

2 Vul in.

a Bij  hoort de notatie ...

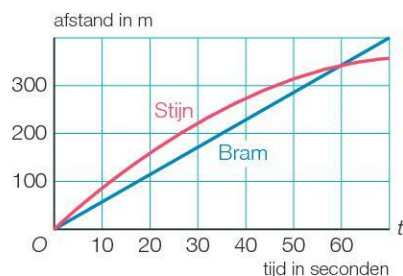
b Bij  hoort de notatie ...

c Bij  hoort de notatie ...

d Bij  hoort de notatie ...

- 3** Stijn en Bram houden een hardloepwedstrijd over 400 meter. In de figuur hiernaast is de afstand uitgezet tegen de tijd.

- Wie lag halverwege voor?
- Wie heeft de wedstrijd gewonnen?
- In welk tijdsinterval lag Stijn voor op Bram?



figuur 5.2

Theorie B De delta notatie

Om de formule op te stellen van de lijn k door de punten $A(1, 3)$ en

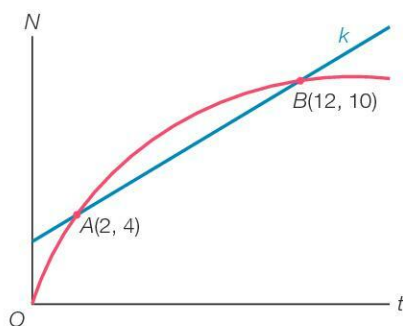
$B(5, 6)$ ga je uit van $k: y = ax + b$ en bereken je eerst $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. In deze

notatie is de letter Δ gebruikt, dat is de Griekse letter D, de eerste letter van differentie (= verschil). Spreek Δ uit als delta.

Je krijgt $\Delta y = 6 - 3 = 3$ en $\Delta x = 5 - 1 = 4$, dus $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{4}$.

- 4** Gegeven zijn de punten $P(2, 4)$ en $Q(7, 10)$.
- Licht toe dat $\Delta x = 5$. Wat is de bijbehorende Δy ?
 - Stel de formule op van de lijn l door P en Q .

- 5** In de figuur hiernaast is N uitgezet tegen t . Zie de rode grafiek. Op de grafiek van N liggen de punten $A(2, 4)$ en $B(12, 10)$. De lijn k gaat door A en B . Stel de formule op van k .

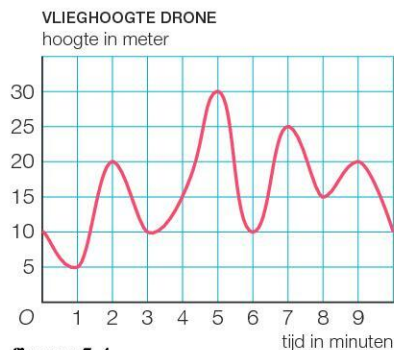


figuur 5.3

5.1 Stijgen en dalen

01 In de figuur hiernaast is de vlieghoogte van een drone uitgezet tegen de tijd.

- Wat is de maximale hoogte van de drone gedurende deze tien minuten?
- Hoeveel m/s was de gemiddelde stijgsnelheid van de drone in de tweede minuut?
- In welke minuut daalde de drone het snelst?



Theorie A Intervallen en stijgen en dalen

Zie figuur 5.5. Als x toeneemt van 1 tot 5, dan ga je langs de grafiek omhoog. De grafiek is dus **stijgend** tussen $x = 1$ en $x = 5$. We kunnen ook zeggen: de grafiek is stijgend voor $1 < x < 5$. We noteren dit met de **intervalnotatie** $\langle 1, 5 \rangle$. Voortaan zeggen we: de grafiek is stijgend op het **interval** $\langle 1, 5 \rangle$.

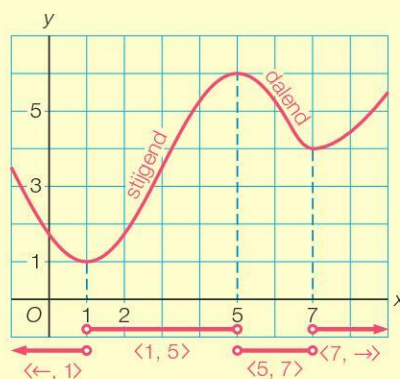
Een interval is een aaneengesloten stuk van de getallenlijn. Tot het **open interval** $\langle 1, 5 \rangle$ behoren alle getallen die tussen 1 en 5 liggen. De grenzen 1 en 5 doen niet mee. Hiernaast is dat met open rondjes aangegeven.

De grafiek in figuur 5.5 is **dalend** op het interval $\langle 5, 7 \rangle$.

De grafiek is stijgend voor elke x groter dan 7. We zeggen dat de grafiek stijgend is op het interval $\langle 7, \rightarrow \rangle$.

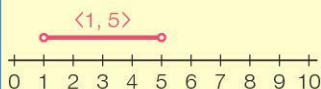
De grafiek is dalend op het interval $\langle \leftarrow, 1 \rangle$.

Behalve open intervallen zijn er ook **gesloten intervallen**. Bij een gesloten interval doen de grenzen wel mee. Hiernaast zie je het gesloten interval $[1, 6]$. Dit is de notatie voor $1 \leq x \leq 6$. Let op dat bij $1 < x < 6$ de grenzen 1 en 6 niet mee doen. Bij $1 \leq x \leq 6$ doen de grenzen 1 en 6 wel mee. Ook aan de dichte rondjes hiernaast kun je zien dat de grenzen 1 en 6 meedoen.



Intervallen

Bij het open interval $\langle 1, 5 \rangle$ doen de grenzen 1 en 5 niet mee.



Tot het interval $\langle 5, \rightarrow \rangle$ behoren alle getallen groter dan 5.

Tot het interval $\langle \leftarrow, 3 \rangle$ behoren alle getallen kleiner dan 3.



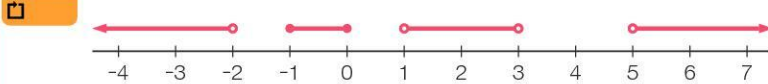
Bij het gesloten interval $[1, 6]$ doen de grenzen 1 en 6 ook mee.



Afspraak

Op de vraag 'Op welke intervallen is de grafiek stijgend?' noteer je de grootst mogelijke open intervallen $\langle \dots, \dots \rangle$.

2 Schrijf de volgende intervallen met de intervalnotatie.



figuur 5.6

3 Teken de volgende intervallen boven een getallenlijn.

$[-5, -4]$, $\langle -1, 2 \rangle$, $[3, 5)$ en $\langle 7, \rightarrow \rangle$.

4 Noteer als interval.

- a** $-8 \leq x \leq 3$ **c** $5,1 \leq x \leq 7,3$
b $4 < x \leq 4\frac{1}{2}$ **d** $x \leq 2$

A5 **a** Teken de intervallen $[-4, -1]$, $\langle 1, 3 \rangle$ en $\langle 5, \rightarrow \rangle$ boven een getallenlijn.

b Noteer $10 \leq x < 15$ en $x \geq 3\frac{1}{2}$ als interval.

6 Op een veiling worden tomaten aangeboden met een gewicht tussen

23 en 120 gram. De veiling hanteert drie gewichtsklassen.

klasse A lichter dan 40 gram

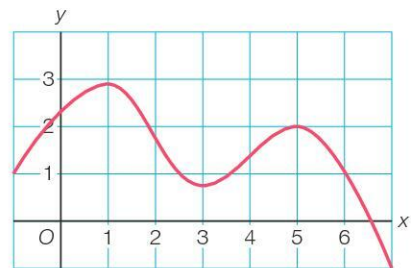
klasse B vanaf 40 tot en met 80 gram

klasse C zwaarder dan 80 gram

Noteer elke gewichtsklasse als een interval.

7 Zie figuur 5.7.

- a** Op welke intervallen is de grafiek stijgend?
b Op welke intervallen is de grafiek dalend?

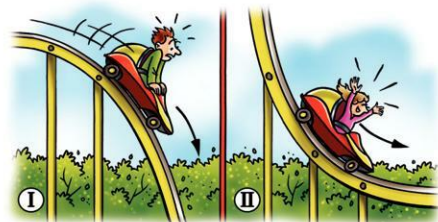


figuur 5.7

08 In een attractiepark staat een achtbaan met verschillende spectaculaire bochten en

hoogteverschillen. We bekijken twee korte gedeelten van de baan. Zie figuur 5.8 met de gedeelten I en II. Op beide gedeelten daalt het wagentje. Toch is het heel anders wanneer je op deel I rijdt dan wanneer je op deel II rijdt. Dat komt doordat je op verschillende manieren daalt.

Leg uit wat het verschil in daling is.



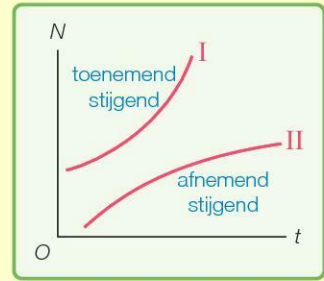
figuur 5.8

Theorie B Soorten van stijgen en dalen

Hiernaast zie je twee grafieken die beide stijgend zijn. Ga je van links naar rechts over de grafieken, dan ga je omhoog. Maar toch is er een belangrijk verschil tussen de twee grafieken.

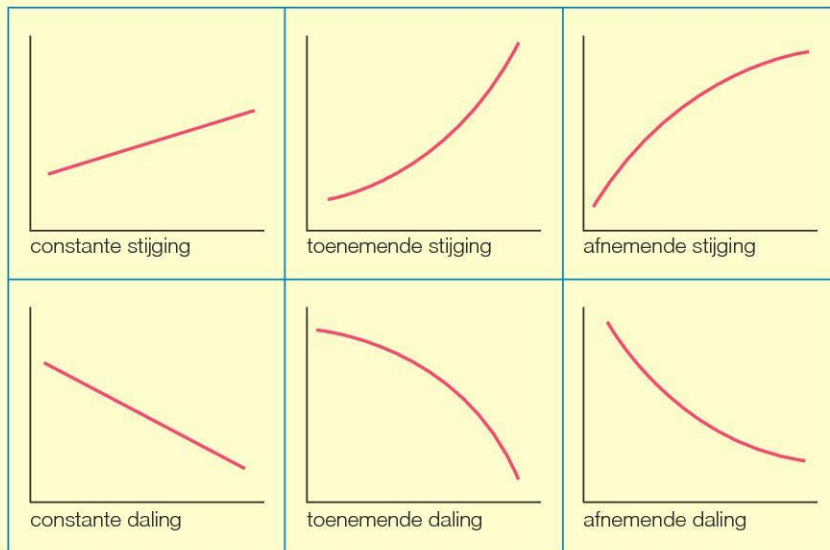
Bij grafiek I is de toename steeds groter; de grafiek gaat steeds steiler omhoog. Er is sprake van **toenemende stijging**.

Bij grafiek II komt er telkens minder bij; de grafiek gaat steeds minder steil omhoog. Er is sprake van **afnemende stijging**.



Hieronder staan de verschillende soorten van stijgen en dalen vermeld.

SOORTEN VAN STIJGEN EN DALEN

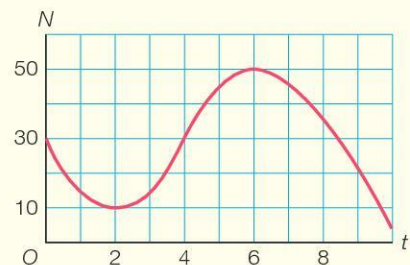


Voorbeeld

Welke soorten van stijgen en dalen kun je op het interval $[0, 10]$ in figuur 5.9 herkennen? Noem ook de bijbehorende intervallen.

Uitwerking

afnemend dalend op $\langle 0, 2 \rangle$
 toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$
 afnemend stijgend op $\langle 4, 6 \rangle$
 toenemend dalend op $\langle 6, 10 \rangle$

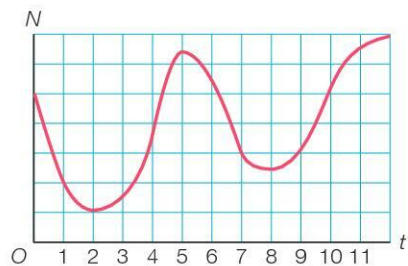


figuur 5.9

9


Zie figuur 5.10 met t tussen 0 en 12.

- Welke soorten van stijgen herken je? Noem ook de bijbehorende intervallen.
- Welke soorten van dalen herken je? Noem ook de bijbehorende intervallen.

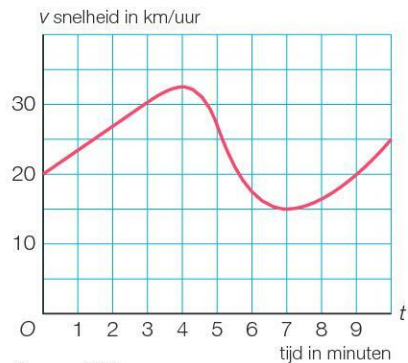


figuur 5.10

10


De grafiek in figuur 5.11 gaat over de snelheid van een fietser tijdens een tocht door een glooiend landschap.

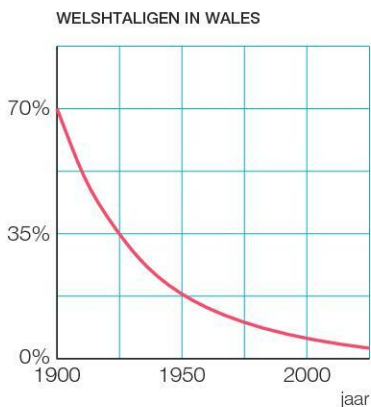
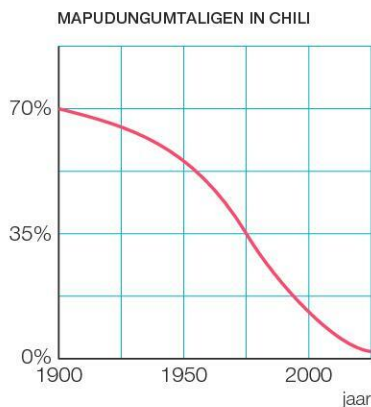
- Welke soorten van stijgen en dalen herken je op het interval $[0, 10]$? Noem ook de bijbehorende intervallen.
- Op welk tijdsinterval is de fietser aan het klimmen?



figuur 5.11

A11


Bij een onderzoek naar bedreigde talen staan de grafieken van figuur 5.12. In de grafieken is af te lezen hoeveel procent van de bevolking de oorspronkelijke taal nog spreekt. Welsh is een Keltische taal die in Wales wordt gesproken. Mapudungum is de taal van de Mapuche die vooral in Chili wonen.



figuur 5.12

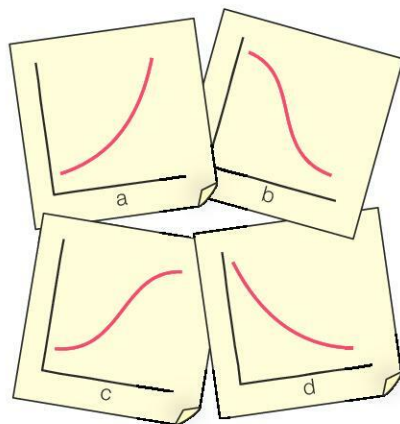
- In welk jaar begon de daling van het percentage Mapudungumtaligen af te nemen?
- Rond 1800 sprak vrijwel de gehele bevolking van Wales nog Welsh. Een onderzoeker breidt de grafiek uit om dit gegeven op te nemen. Welke soort dalen verwacht je dat de grafiek tussen 1800 en 1900 vertoont? Licht toe.

A12
  *

In figuur 5.13 zijn vier globale grafieken getekend. Bij elke grafiek hoort een van de volgende krantenkoppen.

Zoek bij elke grafiek de juiste krantenkop.

- I Afname biodiversiteit bos steeds minder sterk.
- II Explosieve groei verkoop tablets zwakt af.
- III Griepvirus grijpt steeds sneller om zich heen.
- IV Steeds sterkere daling van dollarkoers tot staan gebracht.



figuur 5.13

A13
 *

Van de 10-jarigen in Nederland draagt 8% een bril. Het percentage bril dragers is toenemend stijgend tot de leeftijd van 40 jaar. Dan is 42% brildragend. Vervolgens treedt een constante stijging op tot de leeftijd van 55 jaar. Op die leeftijd draagt 80% een bril. Daarna neemt de toename af. Van de 75-plussers draagt 98% een bril.

- a Teken een grafiek bij deze gegevens.
- b Schat met behulp van de grafiek welk percentage van de 30-jarigen een bril draagt.
- c Bereken met lineair interpoleren welk percentage van de 50-jarigen een bril draagt.

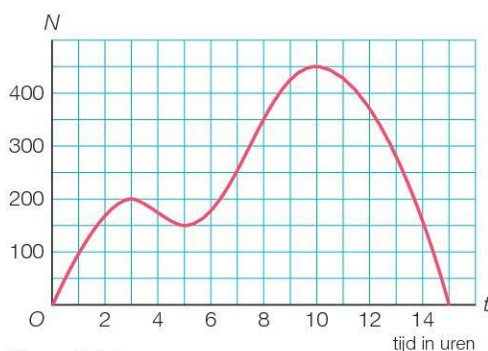


O14
  *

In de figuur hiernaast is het aantal mensen N in een winkelcentrum uitgezet tegen de tijd t in uren met $t = 0$ om 7:00 uur.

Er zijn twee waarden van t waarvoor geldt: direct links van de waarde neemt het aantal mensen toe en direct rechts neemt het aantal af.

- a Welke waarden van t zijn dit?
- b Er zijn drie momenten waarop het aantal mensen in het winkelcentrum minimaal is. Hoe laat is het op deze momenten?



figuur 5.14

Theorie C Maximum en minimum

In een duingebied op Vlieland is gedurende twee jaar het aantal konijnen bijgehouden. Zie de grafiek in figuur 5.15.

De punten A , B en C zijn **toppen** van de grafiek.

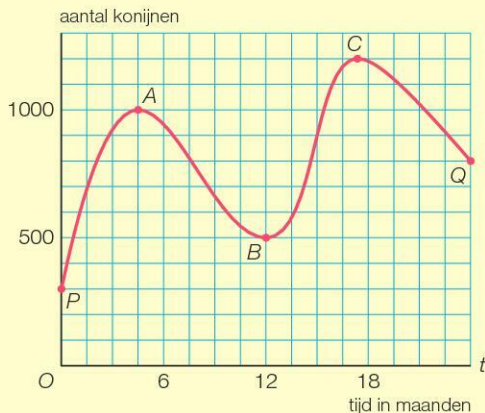
Bij het punt A gaat de grafiek over van stijgend naar dalend, daarom bereikt het aantal konijnen bij het punt A een **maximum**.

Ook bij het punt C is er sprake van een maximum.

Het maximum bij A is 1000.

Het maximum bij C is 1200.

Je ziet dat er meerdere maxima kunnen zijn. Je moet een maximum dus plaatselijk opvatten.



figuur 5.15

Bij het punt B gaat de grafiek over van dalend naar stijgend, daarom bereikt het aantal konijnen bij het punt B een **minimum**. Ook een minimum moet je plaatselijk opvatten.

Het minimum bij B is 500.

Omdat het aantal konijnen alleen is bijgehouden van $t = 0$ tot en met $t = 24$, heeft de grafiek de randpunten P en Q . Op het interval $[0, 24]$ is er bij de punten P en Q sprake van een minimum.

Het is onwaarschijnlijk dat het aantal konijnen in het duingebied op Vlieland in de punten P en Q daadwerkelijk minimaal is. Beperk je je dus niet tot het interval $[0, 24]$, dan is er op $t = 0$ en $t = 24$ geen sprake van een minimum.

Gaat een grafiek over van stijgend naar dalend, dan heeft de grafiek een maximum.

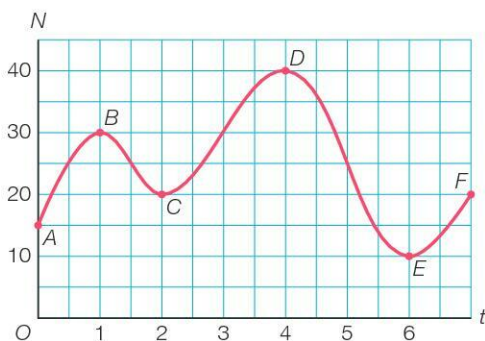
Gaat een grafiek over van dalend naar stijgend, dan heeft de grafiek een minimum.

Ook kunnen bij randpunten op een interval maxima en minima optreden.

15

In figuur 5.16 is de grafiek gegeven op het interval $[0, 7]$.

- Bij welke punten treedt een maximum op? Geef deze maxima.
- Bij welke punten treedt een minimum op? Geef deze minima.
- Hoeveel procent is het maximum bij D meer dan het maximum bij B ?

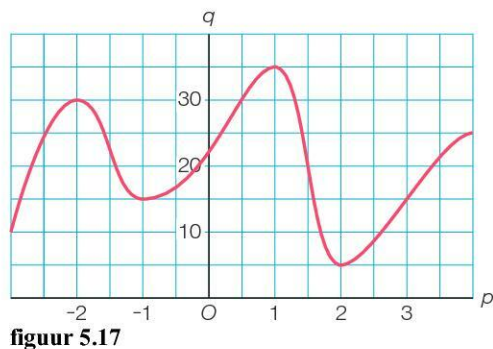


figuur 5.16

16


Zie de grafiek in figuur 5.17.

- Hoeveel maxima heeft de grafiek? En hoeveel minima?
- Hoe groot is het verschil tussen het grootste maximum en het kleinste minimum van de grafiek?

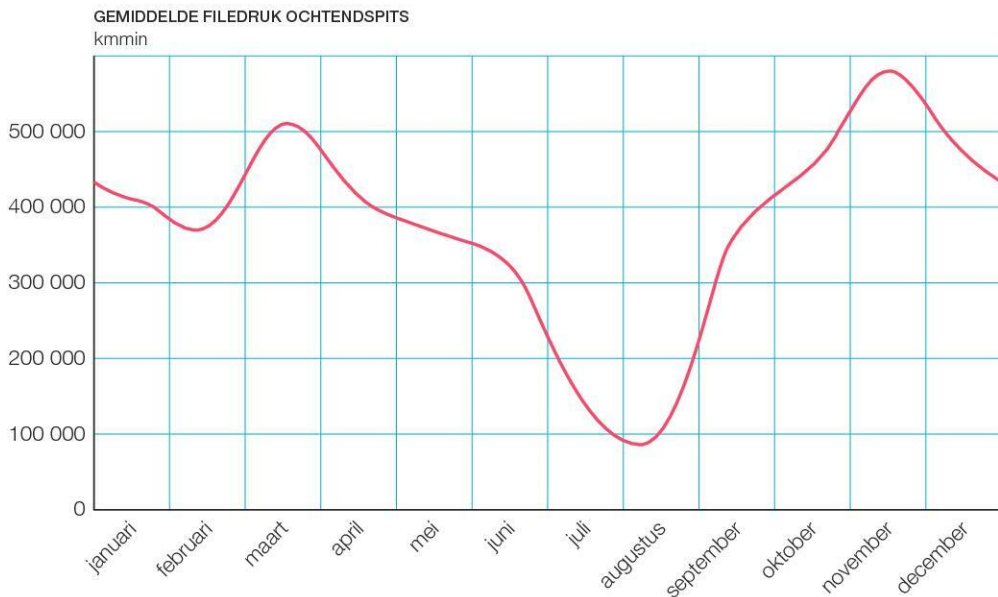


figuur 5.17

A17


De filedruk is een maat voor de drukte op de autosnelwegen. De filedruk wordt uitgedrukt in kilometerminuten (kmmin). Een file met een lengte van 10 km die 30 minuten duurt, levert een filedruk op van $10 \cdot 30 = 300$ kmmin.

In de figuur hieronder zie je een grafiek van de filedruk in de ochtendspits.



figuur 5.18

- Treedt er bij het begin van de grafiek in januari een maximum op? Licht toe.
- Bij het maximum in november stond er in totaal 1800 km file in de ochtendspits. Hoeveel uur duurden deze files in totaal? Rond af op gehele.
- Hoeveel procent meer filedruk was er bij het maximum in maart vergeleken met het minimum in februari?
- Geef een mogelijke verklaring van het verloop van de filedruk gedurende het jaar.

Terugblik

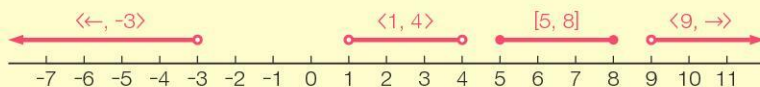
Intervallen

Een interval is een gedeelte van de getallenlijn.

Voorbeelden van open intervallen zijn $\langle \leftarrow, -3 \rangle$, $\langle 1, 4 \rangle$ en $\langle 9, \rightarrow \rangle$.

Een voorbeeld van een gesloten interval is $[5, 8]$.

Hieronder zijn deze intervallen boven de getallenlijn getekend.

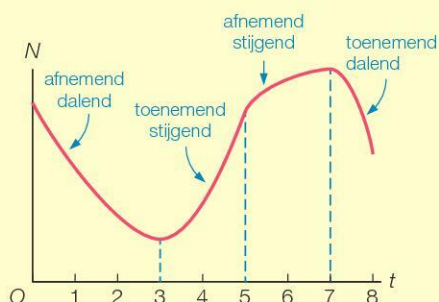


Stijgen en dalen

Om aan te geven waar een grafiek stijgend of dalend is, gebruik je de intervalnotatie. Zowel bij stijgen als bij dalen onderscheiden we drie soorten: constant, afnemend en toenemend.

De grafiek hiernaast is

- afnemend dalend op $\langle 0, 3 \rangle$
- toenemend stijgend op $\langle 3, 5 \rangle$
- afnemend stijgend op $\langle 5, 7 \rangle$
- toenemend dalend op $\langle 7, 8 \rangle$.



Minima en maxima

De grafiek op het interval $[0, 8]$ hiernaast heeft de toppen A , B en C .

Bij A en C treden minima op.

Het minimum bij A is 150 en bij C is dat 50.

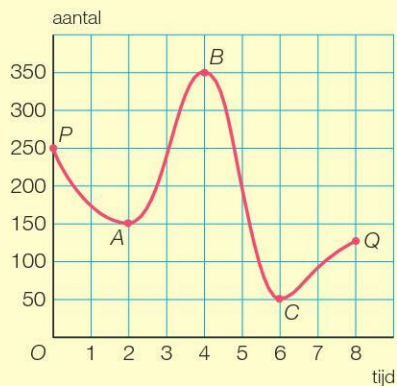
Het maximum bij B is 350.

Het maximum bij B is $\frac{350 - 50}{50} \times 100\% = 600\%$

meer dan het minimum bij C .

Maxima en minima moet je plaatselijk opvatten.

Op het interval $[0, 8]$ treedt bij randpunt P een maximum van 250 op en bij randpunt Q een maximum van 125.



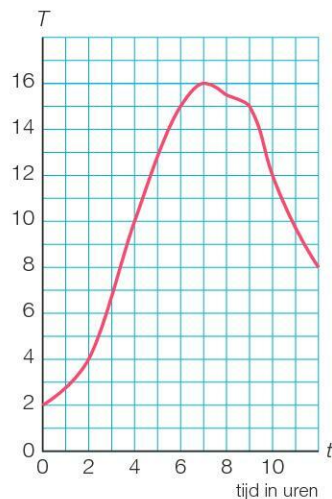
5.2 Toenamediagrammen

O18


Jasmijn heeft op een dag in maart van acht uur 's morgens tot acht uur 's avonds het temperatuurverloop bijgehouden. Zie de figuur hiernaast. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 8:00 uur en T de temperatuur in graden Celsius. Je ziet dat om acht uur 's ochtends de temperatuur 2°C was.

- Wat is de toename van de temperatuur tussen tien uur en twaalf uur?
- Wat is de toename van T op het interval $[4, 6]$?
- Op het interval $[8, 10]$ is er een afname. De verandering van T is dus negatief. Hoe groot is deze afname?
- Neem over en vul in.

interval	$[0, 2]$	$[2, 4]$	$[4, 6]$	$[6, 8]$	$[8, 10]$	$[10, 12]$
ΔT						



figuur 5.19

Theorie A Van grafiek naar toenamediagrammen

Het aantal radioluisteraars op een doordeweekse dag neemt in de loop van de ochtend toe. Zie figuur 5.20a. Hierin is N het aantal luisteraars in duizendtallen en t de tijd in uren met $t = 0$ om 6:00 uur.

Van $t = 0$ tot $t = 1$ is de toename $\Delta N = 15 - 5 = 10$.

Dus op het interval $[0, 1]$ is $\Delta N = 10$.

Van $t = 1$ tot $t = 2$ is de toename $\Delta N = 30 - 15 = 15$.

Dus op $[1, 2]$ is $\Delta N = 15$.

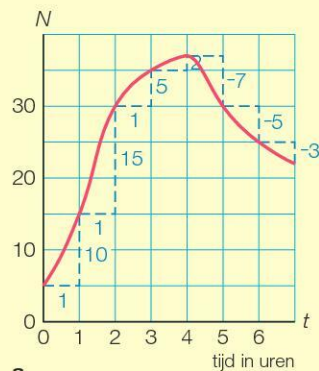
Op het interval $[4, 5]$ is er een afname van 7. Dus op $[4, 5]$ is $\Delta N = -7$.

In de tabel staat bij intervallen met $\Delta t = 1$ de bijbehorende ΔN .

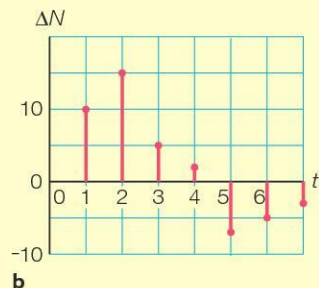
interval	$[0, 1]$	$[1, 2]$	$[2, 3]$	$[3, 4]$	$[4, 5]$	$[5, 6]$	$[6, 7]$
ΔN	10	15	5	2	-7	-5	-3

In figuur 5.20b is bij de tabel een nieuw soort diagram getekend. Eerst is boven de rechtergrens van elk interval de bijbehorende ΔN uitgezet. Vervolgens zijn de punten door verticale lijnstukken met de t -as verbonden.

Figuur 5.20b heet een **toenamediagram**. Bij dit toenamediagram is de **stapgrootte** $\Delta t = 1$.



a



b

figuur 5.20

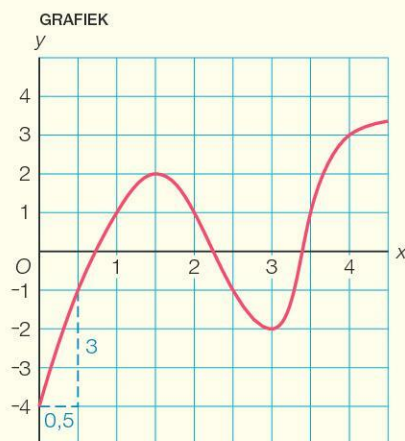
Voorbeeld

Zie figuur 5.21.

Teken het toenamediagram op het interval $[0; 3,5]$ met stapgrootte $\Delta x = 0,5$.

Aanpak

Maak eerst een tabel met toenames. Op $[0; 3,5]$ is het eerste interval met $\Delta x = 0,5$ het interval $[0; 0,5]$. Let erop dat je Δy telkens boven de rechtergrens van het bijbehorende interval uitzet. Bij de verticale as zet je Δy .



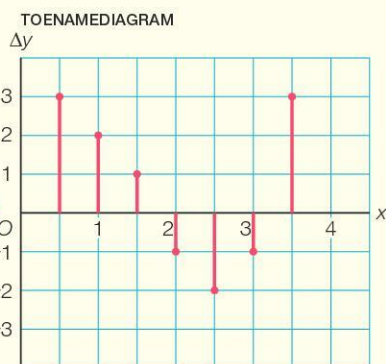
figuur 5.21

Uitwerking

interval	Δy
$[0; 0,5]$	3
$[0,5; 1]$	2
$[1; 1,5]$	1
$[1,5; 2]$	-1
$[2; 2,5]$	-2
$[2,5; 3]$	-1
$[3; 3,5]$	3

Op $[0; 0,5]$ is de toename 3.

Dus het staafje boven 0,5 heeft lengte 3.



19 Zie figuur 5.21 van het voorbeeld.



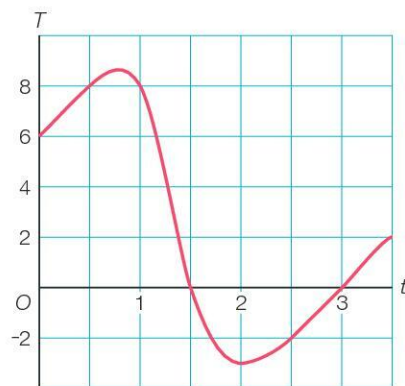
Teken het toenamediagram op het interval $[0, 4]$ met $\Delta x = 1$.

20 Zie figuur 5.22.



a Teken het toenamediagram op het interval $[0, 3]$ met $\Delta t = 1$.

b Teken het toenamediagram op het interval $[0; 3,5]$ met $\Delta t = 0,5$.



figuur 5.22

- 21** De volgende tabel geeft informatie over het aantal grieppatiënten op een school. Hierbij is t de tijd in dagen en N het aantal grieppatiënten.

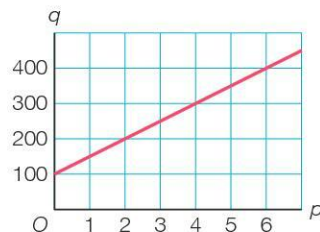
t	0	1	2	3	4	5
N	18	25	27	32	28	23

- Teken het toenamediagram met $\Delta t = 1$.
- Teken een mogelijk toenamediagram met $\Delta t = 0,5$.



22 Zie figuur 5.23.

- Teken het toenamediagram op het interval $[0, 6]$ met $\Delta p = 2$.
- Hoe hoog zijn de staafjes in het toenamediagram met $\Delta p = 1$? Wat heeft dit met de richtingscoëfficiënt van de lijn te maken?
- Wat kun je zeggen van het toenamediagram bij een lineair verband?
- Wat kun je zeggen van het toenamediagram als de grafiek een horizontale lijn is?



figuur 5.23

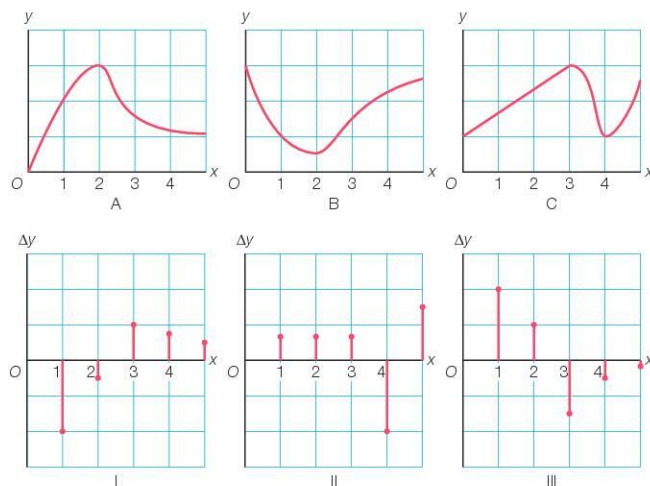
R23 Teken een toenamediagram bij een grafiek die

- één maximum heeft
- één minimum heeft
- bij een lineair verband hoort
- afnemend dalend is.

A24 Hieronder zie je drie grafieken en drie toenamediagrammen. Bij elk van

de grafieken hoort één van de toenamediagrammen.

Zoek bij elke grafiek het juiste toenamediagram. Licht je keuze toe.



figuur 5.24

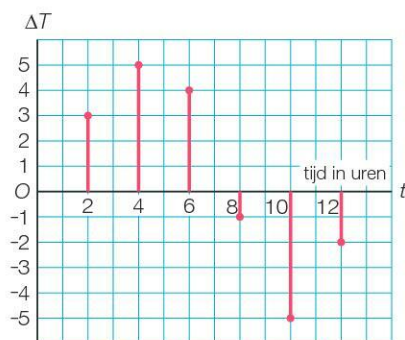
A25

Freek vertelt aan het einde van 2020 over het aantal opdrachten voor zijn bedrijf dat hij in 2017 begon: ‘In 2017 had ik 50 opdrachten minder dan nu. Vorig jaar was mijn beste jaar met 95 opdrachten. Dat was een stijging van 20 opdrachten ten opzichte van 2018. Dit jaar ging het iets minder goed en had ik 15 opdrachten minder dan vorig jaar.’ Teken het toenamediagram voor het bedrijf van Freek. Neem op de horizontale as de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2017 en op de verticale as de verandering van het aantal opdrachten N . Gebruik $\Delta t = 1$.

O26

Jasmijn heeft op een dag in juni van acht uur 's morgens tot acht uur 's avonds het temperatuurverloop bijgehouden. Ze heeft hiervan een toenamediagram gemaakt met stapgrootte 2 uur. Zie de figuur hiernaast. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 8:00 uur en T de temperatuur in graden Celsius. Om twaalf uur 's middags was het 20°C .

- Licht toe dat het 's middags om twee uur 24°C was.
- Wat was de temperatuur om vier uur 's middags? En om acht uur 's avonds?
- Reken na dat de temperatuur om acht uur 's morgens 12°C was.

**figuur 5.25**

Theorie B Van toenamediagram naar grafiek

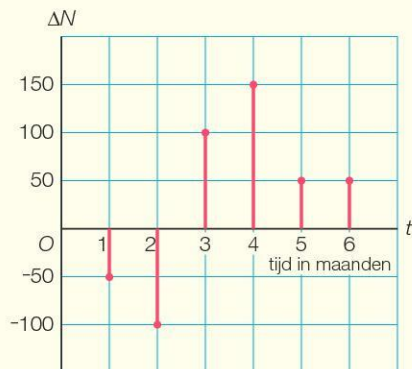
Zijn bij een toenamediagram de coördinaten bekend van een punt van de bijbehorende grafiek, dan kun je coördinaten van andere punten van de grafiek berekenen. Door deze punten is vervolgens een grafiek te tekenen. In het voorbeeld krijg je op deze manier de coördinaten van zeven punten. Tenzij je nog meer informatie hebt over de grafiek, is in theorie elke grafiek door deze zeven punten mogelijk.

Voorbeeld

Het toenamediagram in figuur 5.26 geeft informatie over het aantal konijnen N in een duingebied. Hierin is t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2020.

Op 1 april 2020 zijn er 850 konijnen.

- Teken een grafiek bij deze gegevens.
- Tussen 1 januari en 1 juli 2020 was het aantal konijnen één keer minimaal. De natuurbeheerder beweert dat dit minimum optrad in de maand februari. Kan dit kloppen? Licht toe.

**figuur 5.26**

Aanpak

- a** Maak een tabel met t en N . Gebruik dat op 1 april (dus op $t = 3$) geldt dat $N = 850$. Van $t = 3$ tot $t = 4$ neemt N met 150 toe, dit kun je zien aan het staafje bij $t = 4$. Bereken de overige waarden van N .

Uitwerking

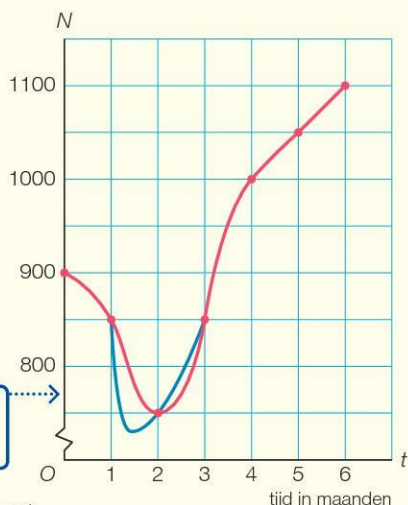
a

t	N	
0	900	
1	850	-50
2	750	-100
3	850	+100
4	1000	+150
5	1050	+50
6	1100	+50

1 april→

Zie de rode grafiek.

Merk op dat elke grafiek door de zeven gevonden punten bij het toenamediaqram past.



- b** Ja, dat kan kloppen, zie de blauwe grafiek hiernaast.

R27

Zie vraag b van het voorbeeld.

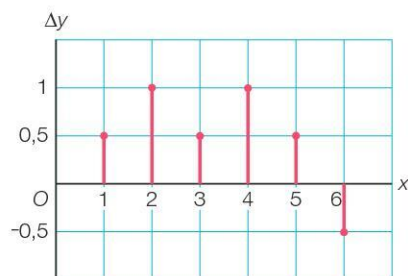
Zou het aantal konijnen minimaal geweest kunnen zijn in maart? Licht toe.

28

Gegeven is het toenamediaqram in figuur 5.27.

De bijbehorende grafiek gaat door het punt $(2, 3)$.

- Teken een grafiek bij deze gegevens.
- Waarom zijn er meerdere grafieken mogelijk? Teken met een andere kleur nog een mogelijke grafiek in de figuur van vraag a.
- Teken het toenamediaqram met $\Delta x = 2$ op het interval $[0, 6]$.

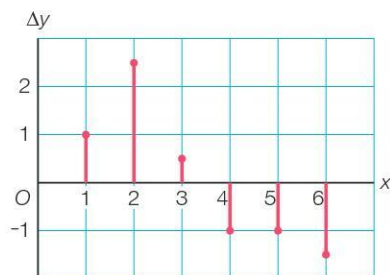


figuur 5.27

29

Gegeven is het toenamediaqram in figuur 5.28.

- Teken een grafiek die bij het toenamediaqram hoort en die door het punt $(3, -2)$ gaat.
- Er is gegeven dat de grafiek die bij het toenamediaqram hoort maar één maximum heeft. Kan dit maximum optreden bij $x = 2,5$? En bij $x = 1,5$? Licht toe.



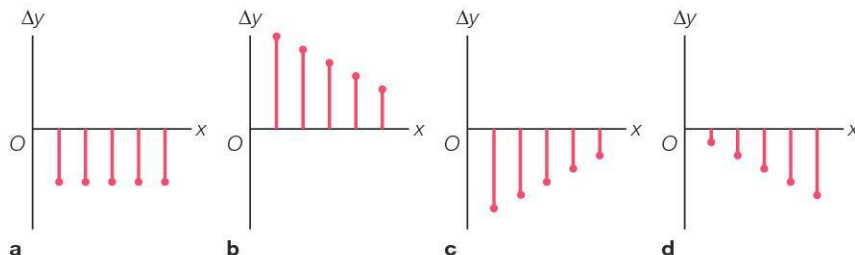
figuur 5.28

30



In een toenamediagram van een grafiek kun je de verschillende soorten van stijgen en dalen herkennen.

Zoek bij de toenamediagrammen in figuur 5.29 de juiste soort van stijgen of dalen. Kies uit: toenemend stijgend, afnemend stijgend, constant stijgend, toenemend dalend, afnemend dalend en constant dalend.

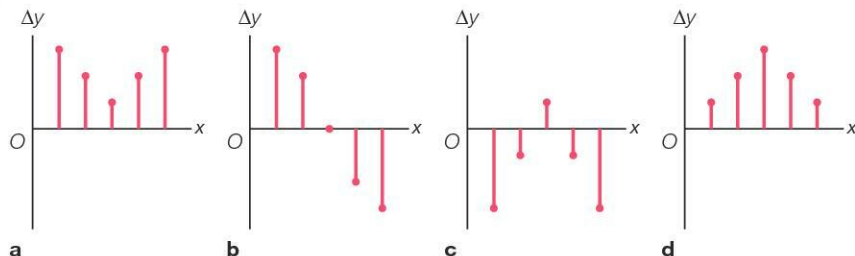


figuur 5.29

31



Schets mogelijke grafieken bij de volgende toenamediagrammen.



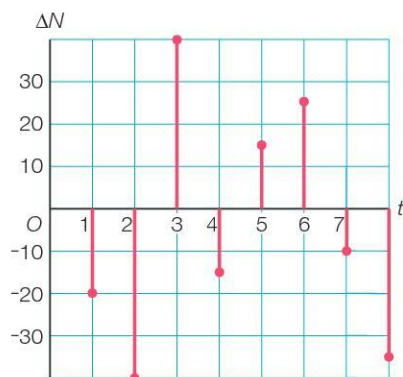
figuur 5.30

A32



In Nationaal Park De Hoge Veluwe kun je gebruik maken van witte leenfietsen. Op een aantal plekken in het park zijn stallingen waar je een fiets kunt meenemen of wegzetten. Een beheerder van het park houdt op een dag vanaf 9:00 uur bij hoeveel fietsen er in één van de stallingen staan. Zie het toenamediagram in figuur 5.31 waarin t de tijd in uren is met $t = 0$ om 9:00 uur en N het aantal fietsen in de stalling. Om 15:00 uur stonden er 110 fietsen in de stalling.

- Hoeveel fietsen stonden er om 17:00 uur in de stalling? En om 9:00 uur?
- Tussen 10 en 11 uur hebben in totaal 30 personen een fiets in de stalling gezet. Hoeveel fietsen zijn er tussen 10 en 11 uur meegenomen?



figuur 5.31

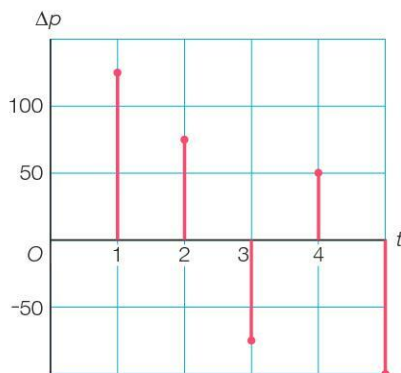


A33
  *

Tijdens de vaart van Dubai naar de haven van Rotterdam houdt de stuurman van een grote olietanker elke dag de verandering van de olieprijs bij. Zie het toenamediaagram in figuur 5.32. Hierin is t de tijd in dagen met $t = 0$ op 11 maart om 0:00 uur en Δp de prijsverandering in dollarcenten per vat. Een vat komt overeen met 127,2 kg olie. De tanker vervoert 210 000 ton olie.

Op 14 maart om 0:00 uur was de olieprijs 101,50 dollar per vat. Geef in deze opgave de antwoorden in miljoenen dollar en rond af op één decimaal.

- Bereken de totale waarde van de olie in de tanker op 16 maart om 0:00 uur. Gebruik dat 1 ton = 1000 kg.
- De stuurman berekent elke dag om 0:00 uur de waarde van de olie in de tanker. Wat is het verschil tussen de hoogste en laagste waarde die hij berekent?



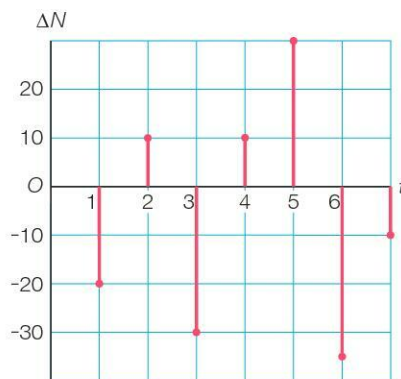
figuur 5.32



A34
  *

Op een zonnige dag houdt Daan bij hoeveel mensen er op een groot terras zitten. Zie het toenamediaagram in figuur 5.33 met t de tijd in uren en $t = 0$ om 15:00 uur en N het aantal mensen op het terras.

Onderzoek hoeveel mensen er om 15:00 uur minstens op het terras hebben gezeten.

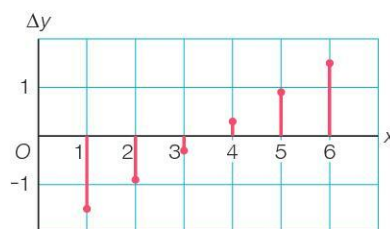


figuur 5.33

E35
 *

Bij het toenamediaagram in figuur 5.34 hoort een grafiek met één minimum.

Voor welke waarden van x kan dit minimum optreden? Geef een zo groot mogelijk interval.



figuur 5.34

O36


Een fabrikant hanteert voor de opbrengst van zijn product de formule $R = -0,1q^2 + 20q$. Hierin is q de weekverkoop en R de opbrengst in euro's.

- a** Vul de tabel hiernaast verder in.
b Teken het toenamediagram op $[0, 180]$ met $\Delta q = 30$.

q	R	ΔR
0	0	-
30	510	510
60	840	330
90		
120		
150		
180		

Theorie C Formules en toenamediagrammen

In opgave 36 heb je een toenamediagram getekend bij een gegeven formule. Je kunt de GR gebruiken om bij een formule een tabel te maken.

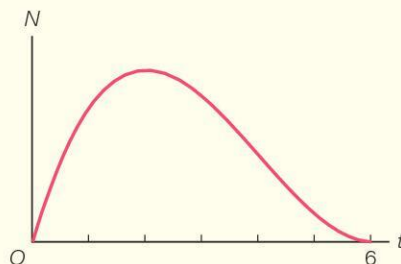
[► GR] Neem daarvoor de module **Formules en tabellen** door.

Bij de tabel die de GR geeft, zijn de toenamen te berekenen. Vervolgens is het toenamediagram te tekenen.

Voorbeeld

De directie van een pretpark hanteert voor het aantal personen N in de rij voor de kassa het model $N = t^3 - 12t^2 + 36t$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 9:00 uur. De kassa is geopend van 9:00 uur tot 15:00 uur. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van N .

Teken het toenamediagram op $[0, 6]$ met $\Delta t = 1$.



figuur 5.35

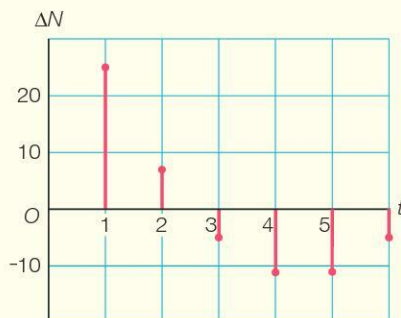
Aanpak

Voer de formule in op de GR en maak een tabel met kolommen t , N en ΔN .

Uitwerking

Voer in $y_1 = x^3 - 12x^2 + 36x$.

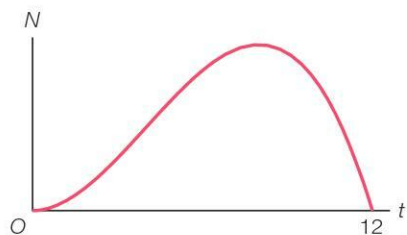
t	N	ΔN
0	0	-
1	25	25
2	32	7
3	27	-5
4	16	-11
5	5	-11
6	0	-5



37


Het aantal personen dat zich op een zomerse dag in een dierentuin bevindt, is te beschrijven met de formule $N = 480t^2 - 40t^3$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 9:00 uur. De dierentuin sluit om 21:00 uur. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van N .

- Welke soorten van stijgen en dalen herken je in de grafiek?
- Teken het toenamediagram op $[0, 12]$ met $\Delta t = 2$.



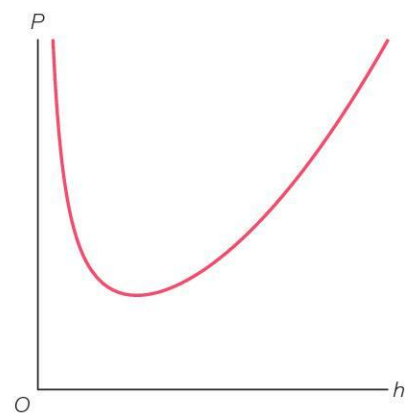
figuur 5.36



A38


Een fabrikant van verpakkingsmateriaal maakt luxe doosjes voor kleine cadeaus. Hij gebruikt de formule $P = 0,45h^2 + \frac{165}{h} + 10,3$ voor de productiekosten in eurocent per doosje. Hierin is h de hoogte van het doosje in cm. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van P .

- Bereken de totale kosten in euro's voor het produceren van 1200 doosjes met een hoogte van 10 cm.
- De fabrikant overweegt de hoogte van de doosjes te veranderen van 10 naar 12 cm. Bereken met hoeveel procent de productiekosten per doosje dan toenemen.
- Teken het toenamediagram op $[2, 14]$ met $\Delta h = 2$.
- Hoe zie je in het toenamediagram dat de grafiek van P van afnemend dalend naar toenemend stijgend gaat?



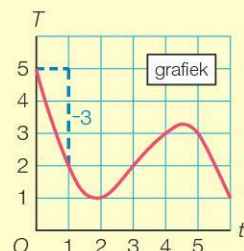
figuur 5.37

Terugblik

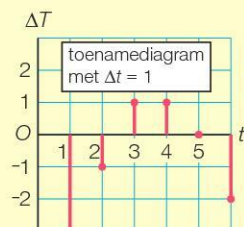
Toenamediagram

Om bij de grafiek hiernaast het toenamediagram te tekenen met $\Delta t = 1$, lees je bij stapgrootte $\Delta t = 1$ de veranderingen ΔT uit de grafiek af.

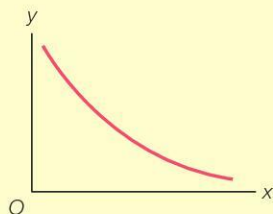
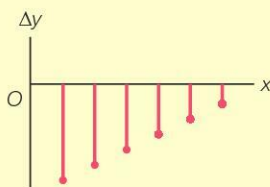
interval	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, 4]	[4, 5]	[5, 6]
ΔT	-3	-1	1	1	0	-2



Vervolgens zet je de veranderingen ΔT uit tegen t en verbind je de punten door een verticaal lijnstukje met de t -as. Teken elk verticaal lijnstukje boven de rechtergrens van het interval, dus het eerste lijnstukje bij $t = 1$, het tweede bij $t = 2$, enzovoort.

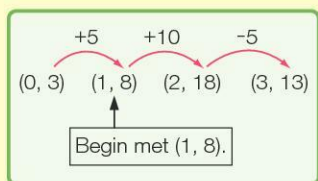
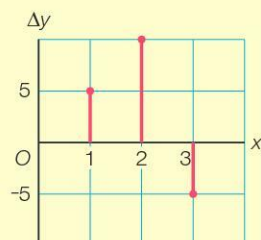


Bij een afnemend dalende grafiek hoort een toenamediagram met staafjes onder de horizontale as die steeds korter worden.



Van toenamediagram naar grafiek

Van een grafiek die door het punt $(1, 8)$ gaat, is het toenamediagram in de figuur hiernaast getekend. Hieruit volgt dat de grafiek ook door de punten $(0, 3)$, $(2, 18)$ en $(3, 13)$ gaat.



Een toenamediagram bij een formule

Om bij een gegeven formule een toenamediagram te tekenen voer je de formule in op de GR. Vervolgens maak je op de GR een tabel waarbij je de juiste stapgrootte kiest. Neem deze tabel over en voeg een kolom met de veranderingen toe.

Gebruik deze tabel om het toenamediagram te tekenen.

5.3 Differentiequotiënten



In 2017 passeerde Nederland de grens van 17 miljoen inwoners. In de tabel kun je voor verschillende perioden de toename van het aantal inwoners N in miljoenen aflezen.

BEVOLKING VAN NEDERLAND

periode	toename ΔN
1840-1940	5,8
1940-1970	4,2
1970-1990	1,9
1990-2010	1,6
2010-2020	0,8



Stijn bekijkt de tabel en zegt: ‘Er is sinds 1840 sprake van een afnemende stijging.’
Welke fout maakt Stijn?

Theorie A Gemiddelde veranderingen

Om veranderingen van inwoneraantallen N te vergelijken, gebruik je ΔN . Het ligt voor de hand om te zeggen: ‘Hoe groter ΔN , des te sterker verandert N .’ Maar je moet hiermee voorzichtig zijn, want ook de lengte Δt van het tijdsinterval speelt een rol.

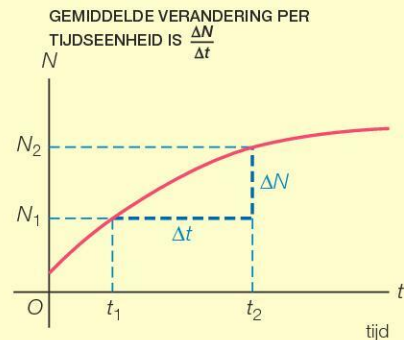
Om de veranderingen goed met elkaar te vergelijken bekijk je de **gemiddelde veranderingen** per tijdseenheid.

Zo geldt voor de tabel hierboven:

- voor de periode 1840-1940 neemt N met 5,8 toe, dus de gemiddelde verandering is

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{5,8}{100} = 0,058 \text{ miljoen per jaar.}$$

- voor de periode 1940-1970 neemt N met 4,2 toe, dus de gemiddelde verandering is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{4,2}{30} = 0,14$ miljoen per jaar.



figuur 5.38

$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ is de gemiddelde verandering van N per tijdseenheid.



In de tabel staat informatie over het aantal woningen N in miljoenen in Nederland.

WONINGVOORRAAD NEDERLAND

jaar	1920	1947	1964	1970	1980	1987	1995	2000	2019
N	1,37	2,12	3,15	3,75	4,85	5,59	6,30	6,59	7,82

- a** Met hoeveel neemt N toe in de periode 1980-1987? Wat is de gemiddelde toename per jaar in deze periode?

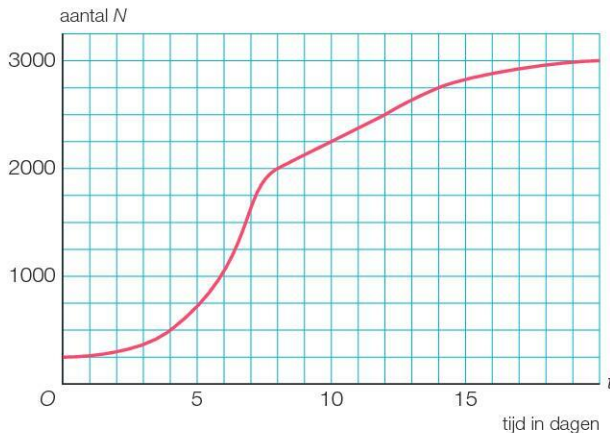
Hieronder is een begin gemaakt van de tabel met periode, Δt , ΔN en $\frac{\Delta N}{\Delta t}$.

periode	Δt	ΔN	$\frac{\Delta N}{\Delta t}$
1920-1947	27	0,75	0,028
...	...	...	...

- b** Neem de tabel over en vul deze aan met de andere zeven periodes.
c In welke periode is de gemiddelde toename het grootst?
d Trek een conclusie over het verloop van de woningvoorraad in Nederland.



In figuur 5.39 is de groei weergegeven van een populatie fruitvliegjes in een afgesloten ruimte.



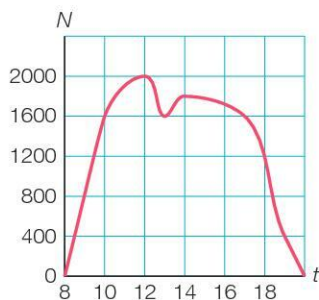
figuur 5.39

- a** Bereken de gemiddelde toename per dag van het aantal fruitvliegjes gedurende de eerste tien dagen.
b Hoe kun je in de figuur zien dat de gemiddelde toename per dag op $[2, 8]$ groter is dan op $[10, 14]$?
c Zeg zonder berekening op welk interval de gemiddelde toename per dag het grootst is en ook op welk interval het kleinst.
 Kies uit $[0, 4]$, $[4, 8]$, $[8, 12]$ en $[12, 20]$.

A42
  *

In figuur 5.40 is het aantal auto's N op een parkeerterrein bij een dierentuin uitgezet tegen de tijd t in uren. Het betreft een zaterdag in mei.

- Bereken $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ op het interval $[9, 13]$.
- Bereken de gemiddelde verandering van N op het interval $[12, 17]$.
- Geef een interval waarop de gemiddelde toename 100 auto's per uur is.
- Geef een interval waarop de gemiddelde afname 200 auto's per uur is.

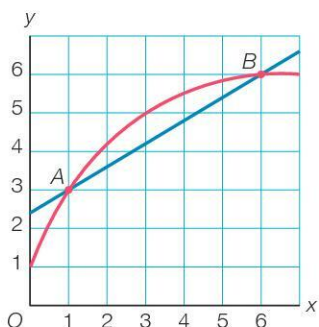


figuur 5.40

O43
  *

Op de grafiek hiernaast liggen de punten $A(1, 3)$ en $B(6, 6)$.

- Bereken de gemiddelde toename van y op het interval $[1, 6]$.
- Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B .
- Vergelijk de antwoorden van a en b. Wat valt je op?



figuur 5.41

Theorie B Differentiequotiënten bij grafieken

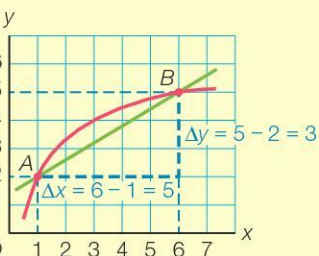
Op het interval $[1, 6]$ in figuur 5.42 is $\Delta x = 6 - 1 = 5$ en $\Delta y = 5 - 2 = 3$.

De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5} = 0,6$. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ heet

het **differentiequotiënt** van y op het interval $[1, 6]$.

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is de richtingscoëfficiënt

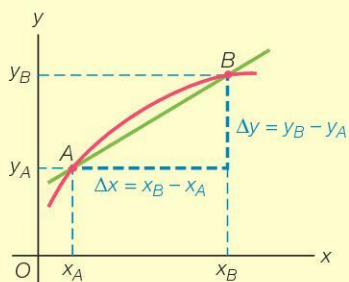
van de lijn AB in figuur 5.42. In plaats van 'de richtingscoëfficiënt van de lijn AB ' zeggen we ook 'de **helling** van de lijn AB '.



figuur 5.42

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van y op $[x_A, x_B]$ is

- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (oftewel de helling) van de lijn AB
- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



Voorbeeld

Zie figuur 5.43.

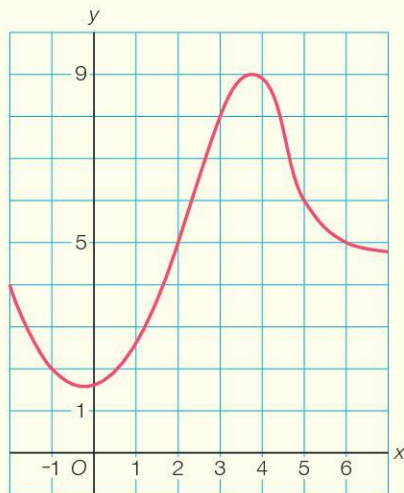
- a Bereken de gemiddelde verandering van y op het interval $[-1, 3]$.
- b Bereken het differentiequotient op $[3, 5]$.

Uitwerking

- a De gemiddelde verandering op $[-1, 3]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 2}{3 - (-1)} = \frac{6}{4} = 1,5.$$

- b Op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 8}{5 - 3} = \frac{-2}{2} = -1.$



figuur 5.43

44 Zie figuur 5.43.

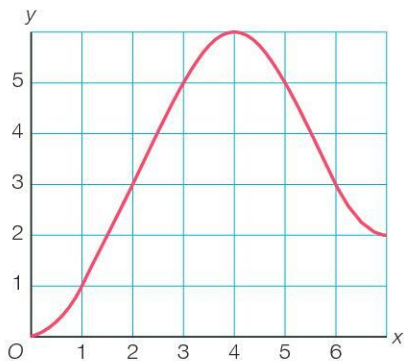


- a Bereken de gemiddelde verandering van y op het interval $[2, 5]$.
- b Bereken het differentiequotient op $[-1, 5]$.
- c Noem een interval waarop de gemiddelde verandering van y nul is.

45 Zie figuur 5.44.



- a Bereken het differentiequotient op $[1, 3]$.
- b Bereken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op $[4, 6]$.
Wat betekent het dat je antwoord negatief is?
- c Bereken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op $[2, 7]$.
- d Noem een interval waarop de gemiddelde verandering gelijk is aan 0.
- e Noem een interval waarop $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gelijk is 1,5.

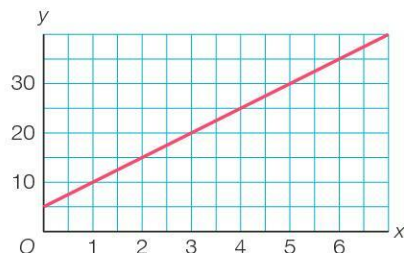


figuur 5.44

R46 Zie figuur 5.45. De grafiek is een lijn.



- a Bereken het differentiequotient op de intervallen $[0, 2]$, $[2, 5]$, $[5, 6]$ en $[6, 10]$.
- b Wat kun je zeggen van de differentiequotienten als de grafiek een lijn is?

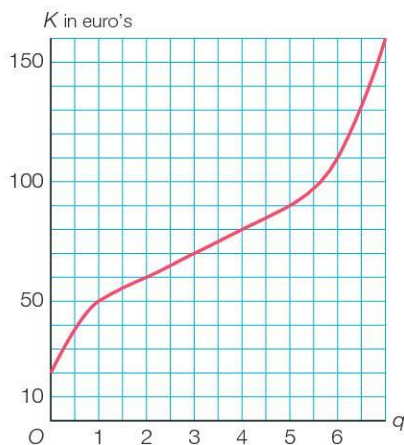


figuur 5.45

A47
  *

[▶ WERKBLAD] Zie de kostengrafiek in figuur 5.46.

- Bereken $\frac{\Delta K}{\Delta q}$ in euro's per stuk op de intervallen $[0, 2]$, $[2, 4]$ en $[4, 6]$.
- Op welk interval uit vraag a is de gemiddelde verandering van K het grootst?
- Bekijk de intervallen $[0, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 6]$ en $[6, 7]$.
Toon aan dat de gemiddelde verandering van K op $[6, 7]$ het grootst is.
- Voor welke q is de gemiddelde toename van de kosten op $[0, q]$ gelijk aan die op het interval $[0, 4]$? Licht je antwoord toe met behulp van het werkblad.

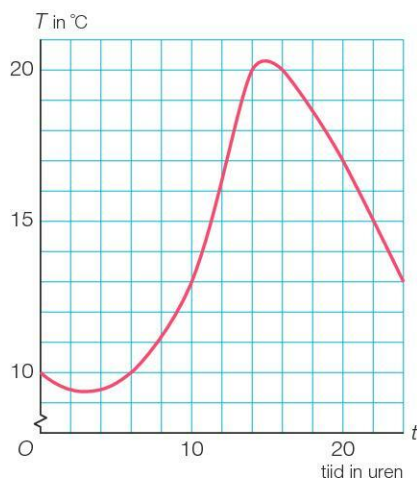


figuur 5.46

A48
  *

De grafiek in figuur 5.47 gaat over het verloop van de temperatuur op een dag in mei.

- Bereken $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op $[6, 10]$ en op $[9, 14]$.
- Licht toe dat op $[16, 20]$ geldt dat $\Delta T = -3$ en bereken $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op $[16, 20]$. Wat betekent het dat dit differentiequotient negatief is?
- Geef twee intervallen waarop de gemiddelde verandering $0^\circ\text{C}/\text{uur}$ is.
- Geef een interval waarop de gemiddelde verandering $0,4^\circ\text{C}/\text{uur}$ is.



figuur 5.47

A49
 *

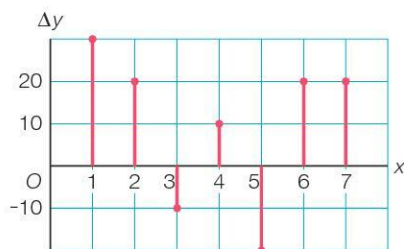
Zie het toenamediagram in figuur 5.48.

Bereken de differentiequotienten op de intervallen $[0, 7]$ en $[2, 6]$.

E50
 *

Van een grafiek is het volgende bekend:

- de grafiek gaat door het punt $(0, 2)$
 - op $[0, 2]$ is het differentiequotient $\frac{1}{4}$
 - op $[0, 5]$ is het differentiequotient $\frac{1}{5}$
 - op $[1, 3]$ is het differentiequotient $1\frac{1}{2}$
 - op $[1, 5]$ is het differentiequotient $\frac{1}{2}$.
- Teken een mogelijke grafiek.
 - Bereken het differentiequotient op $[3, 5]$.
 - Is het mogelijk dat het differentiequotient op $[1, 4]$ gelijk is aan $1\frac{1}{2}$? Licht toe.

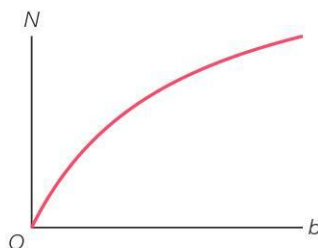


figuur 5.48

Een ecoduct is een viaduct dat wilde dieren gebruiken om drukke wegen over te steken.

Uit een onderzoek bleek dat het aantal dieren N dat per etmaal een ecoduct gebruikt, afhankelijk is van de breedte b van het ecoduct. Men gebruikt de formule $N = 20 - \frac{100}{b+5}$. Hierin is b

de breedte van het ecoduct in meter en N het aantal stuks wild (zoals herten, everzwijnen en konijnen) dat per etmaal het ecoduct gebruikt. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van N .



- Reken na dat bij $b = 5$ hoort $N = 10$ en dat bij $b = 15$ hoort $N = 15$.
- Bereken de gemiddelde verandering van N als b toeneemt van 5 naar 15 meter.
- Bereken het differentiequotiënt op het interval $[10, 15]$.

figuur 5.49



Theorie C Differentiequotienten en formules

Om bij de formule $N = 20 - \frac{100}{b+5}$ van opgave 51 het differentiequotiënt

op het interval $[15, 25]$ te berekenen, ga je als volgt te werk.

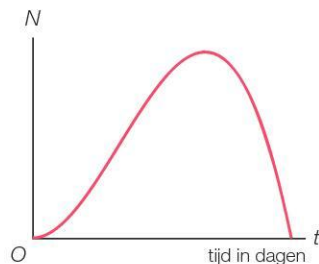
- Bereken N bij $b = 15$. Je krijgt $N = 15$.
- Bereken N bij $b = 25$. Je krijgt $N = 16,6\dots$
- Bereken het differentiequotiënt $\frac{\Delta N}{\Delta b}$ op $[15, 25]$. Je krijgt $\frac{\Delta N}{\Delta b} = \frac{16,6\dots - 15}{25 - 15} \approx 0,17$ dieren per etmaal per meter.

In opgave 51b heb je gezien dat de gemiddelde verandering op het interval $[5, 15]$ gelijk is aan 0,5 dieren per etmaal per meter. Dus het verbreden van een ecoduct van 5 naar 15 meter heeft meer effect dan het verbreden van 15 naar 25 meter. In het eerste geval levert elke meter verbreding gemiddeld een toename op van 0,5 dieren per etmaal, terwijl in het tweede geval deze toename slechts 0,17 is.

52
☐ ⊙

Hiernaast zie je het verloop van het aantal grieppatiënten N in een stad. Hierbij hoort de formule $N = 140t^2 - 5t^3$ met de tijd t in dagen.

- a Bereken het differentiequotiënt op $[3, 8]$.
- b Bereken de gemiddelde toename van N in de tweede week.
- c Bereken de gemiddelde toename van N op het interval $[10, 16]$.



figuur 5.50

E53
*

Zie opgave 52 met de formule $N = 140t^2 - 5t^3$. Vera beweert dat er een periode is waarin de gemiddelde toename van N meer dan 1300 patiënten per dag is. Kan dit kloppen? Licht toe.

A54
☐ ⊙ *

Gegeven is de kostenformule $K = q^3 - 6q^2 + 13q + 15$.

Hierin is K in duizenden euro's en q de productie in duizendtallen. De productie is maximaal 8000 stuks.

- a Bereken het differentiequotiënt van K op het interval $[4, 6]$. Vergeet niet de eenheid te vermelden.
- b Bereken de gemiddelde toename van de kosten in euro's per stuk als de productie toeneemt van 2000 tot 5000 stuks.
- c Bereken de gemiddelde toename van K in euro's per stuk als de productie toeneemt van 3600 tot 6100 stuks.

K in duizenden euro's
en q in duizendtallen,
dus de gemiddelde
verandering van K is in
euro's per stuk.

Terugblik

Differentiequotiënt

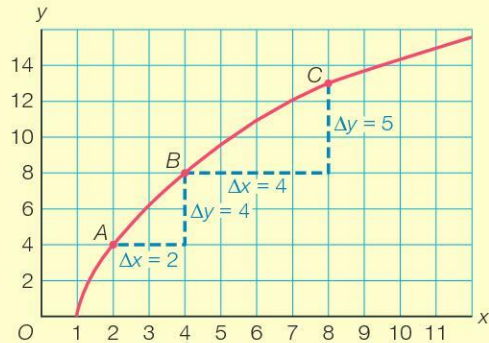
Om veranderingen op intervallen van verschillende lengte te vergelijken, gebruik je differentiequotiënten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is de gemiddelde verandering van y op een interval.

In de figuur hiernaast kun je aflezen:

- Op het interval $[2, 4]$ is $\Delta y = 4$ en $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$.
- Op het interval $[4, 8]$ is $\Delta y = 5$ en $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{4} = 1,25$.

Dat de grafiek afnemend stijgend is, wordt bevestigd door de differentiequotiënten 2 en 1,25. Uit alleen $\Delta y = 4$ en $\Delta y = 5$ valt hier geen conclusie te trekken over de soort van stijgen.



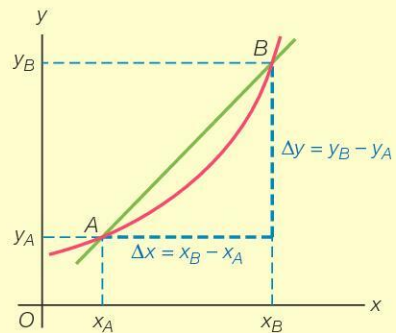
Differentiequotiënt en richtingscoëfficiënt (helling)

Het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

De volgende begrippen komen op hetzelfde neer.

- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (helling) van de lijn AB



Het differentiequotiënt bij formules

Een bedrijf berekent de maandelijkse opbrengst R in euro's met de formule $R = -0,001q^2 + 12q$. Hierin is q het aantal artikelen dat per maand verkocht wordt.

$q = 2000$ geeft $R = 20\,000$ en $q = 3000$ geeft $R = 27\,000$.

Het differentiequotiënt op $[2000, 3000]$ is

$$\frac{\Delta R}{\Delta q} = \frac{27\,000 - 20\,000}{3000 - 2000} = 7 \text{ euro per stuk.}$$

Eindopdracht Groei wereldbevolking

Hieronder zie je enkele gedeelten uit een publicatie van het Nederlands Interdisciplinair Demografisch Instituut (NIDI) van 31 augustus 2017.

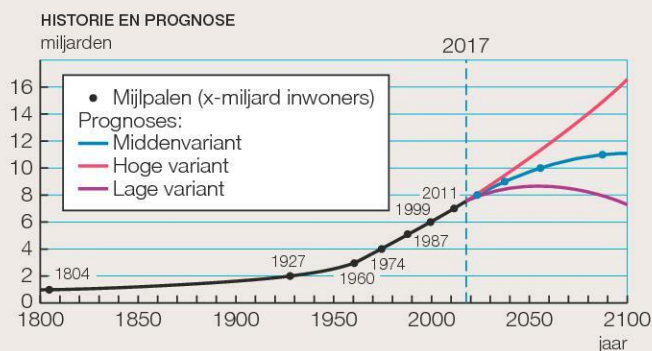
ARTIKEL

WERELDBEVOLKING VAN $7\frac{1}{2}$ NAAR 11 MILJARD?

Stond de teller in 2011 nog op 7 miljard, inmiddels is de wereldbevolking de grens van $7\frac{1}{2}$ miljard mensen gepasseerd. En hoewel het groeitempo daalt verwachten de Verenigde Naties nog een verdere bevolkingsgroei, op de lange termijn mogelijk tot ruim 11 miljard mensen.

Hoewel de groei van de wereldbevolking sinds het eind van de jaren tachtig afneemt, komen er tegenwoordig per saldo toch nog altijd ongeveer 83 miljoen mensen (1,1%) per jaar bij, ongeveer de omvang van de bevolking van Duitsland. Hoewel de Verenigde Naties (VN) in hun meest recente prognose van de wereldbevolking een verdere daling van de geboortecijfers voorzien, verwachten zij een voortgaande groei van de wereldbevolking.

De huidige verwachting (volgens de zogenoemde middenvariant van de VN-bevolkingsprognose) is dat rond 2023 de grens van 8 miljard wordt doorbroken, rond 2037 die van 9 miljard, rond 2055 die van 10 miljard en op de langere termijn, rond 2087, mogelijk zelfs die van 11 miljard.



We nemen de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1900.

- Bereken tussen elke twee opeenvolgende mijlpalen het differentiequotient in miljoenen per jaar. Begin met het interval $[-96, 27]$ en eindig met het interval $[155, 187]$. Rond af op gehele.
- Teken een histogram met op de verticale as de differentiequotiënten en neem op de horizontale as t tussen 0 en 200. Teken de eerste staaf op het interval $[27, 60]$. De staven zullen niet even breed zijn.

Een onderzoeker heeft bij de grafiek van de differentiequotiënten D een formule opgesteld.

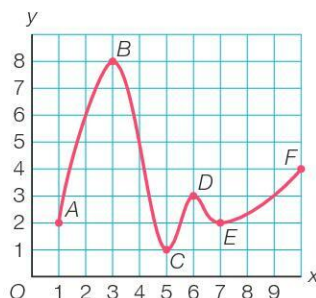
Deze formule is $D = 0,0000325t^3 - 0,017t^2 + 2,2t$ met t tussen 0 en 250.

- Controleer dat volgens deze formule geldt dat D ongeveer nul is in het jaar 2135. Wat is de betekenis hiervan voor de wereldbevolking?
- Bereken D in het jaar 2150. Wat betekent het antwoord voor de wereldbevolking?

Diagnostische toets

5.1 Stijgen en dalen

- 1** In figuur 5.51 is de grafiek gegeven op het interval $[1, 10]$.
- Welke soorten van stijgen en dalen herken je? Noem telkens ook het bijbehorende interval.
 - In welke punten treedt er een maximum op? Hoe groot zijn die maxima?
 - Tussen welk opeenvolgend minimum en maximum is de procentuele toename het kleinst?



figuur 5.51

- 2** De ontwikkelaar van een nieuwe game houdt bij hoe groot het spelersaantal is. Dat aantal neemt de eerste twee weken met constante stijging toe tot 400 spelers. Vervolgens is er gedurende drie weken sprake van een toenemende stijging tot 2000 spelers. Daarna neemt de stijging af. Acht weken na de lancering van de game bereikt het spelersaantal een maximum van 3200.

- Teken een grafiek bij deze gegevens.
- Schat met behulp van de grafiek het spelersaantal zes weken na de lancering.
- Twaalf weken na de lancering bereikt het spelersaantal voor de tweede keer een maximum. Beschrijf het verloop van de grafiek van het spelersaantal van tien tot twaalf weken na lancering. Gebruik daarbij de woorden: toenemende, afnemende, stijging, daling, minimum en maximum.

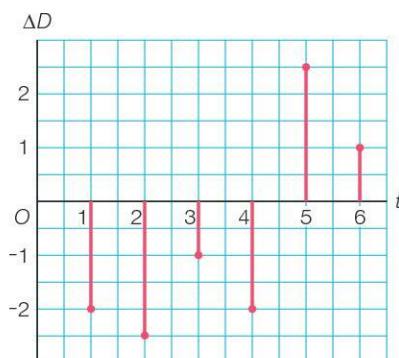
5.2 Toenamediagrammen

- 3** De apparatuur van een duikboot registreert de verandering van de waterdruk tijdens het duiken. In het toenamediagram in figuur 5.52 zie je een deel van deze registratie. Hierin is t de tijd in kwartieren met $t = 0$ om 8:00 uur en D de waterdruk in bar. Om 8:30 uur was de waterdruk 4 bar.

- Bereken de waterdruk om 8:15 uur.

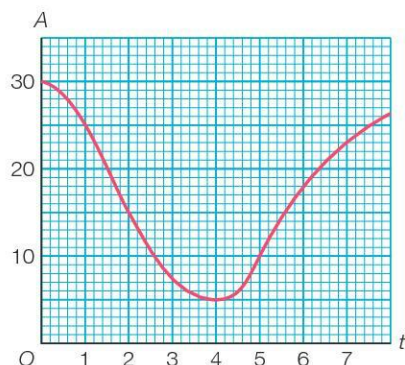
Hoe dieper je duikt, hoe groter de waterdruk. Aan de oppervlakte is de druk 1 bar en elke 10 meter die je duikt komt daar 1 bar bij.

- Hoe laat kwam de duikboot aan de oppervlakte?
- Volgens de kapitein bereikt de diepte van de duikboot na 9:00 uur een maximum van 35 meter. Hoe laat is dat?



figuur 5.52

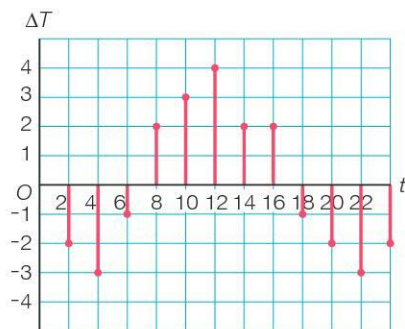
- 4** Zie figuur 5.53.
Teken het toenamediagram op het interval $[0, 8]$ met $\Delta t = 1$.



figuur 5.53

- 5** In de figuur hiernaast zie je een toenamediagram bij het temperatuurverloop op een dag in oktober. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 0:00 uur en T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$. Om 8 uur 's morgens was het 10°C .

- Bereken de temperatuur om 16 uur en om 4 uur.
- Teken het toenamediagram op $[0, 24]$ met stapgrootte 4 uur.
- Teken een mogelijke grafiek van het temperatuurverloop.



figuur 5.54

5.3 Differentiequotiënten

- 6** Zie figuur 5.53.
- Bereken het differentiequotiënt $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ op de intervallen $[0, 2]$ en $[3, 6]$.
 - Noem een interval waarop het differentiequotiënt gelijk is aan 5.
- 7** Gegeven is de formule $K = 0,1(q - 4)^3 + 7,4$. Hierin is K de kosten in duizenden euro's en q de productie in duizendtallen.
- Geef de praktische betekenis van het differentiequotiënt op $[2, 4]$.
 - Bereken $\frac{\Delta K}{\Delta q}$ op $[0, 2]$, $[0, 4]$, $[0, 6]$ en $[0, 9]$.
 - Op welk interval uit vraag b is de gemiddelde verandering van K het kleinst?
- 8** In de formule $W = -0,01q^3 + 1,5q^2 + 30q - 500$ is W de winst in duizenden euro's en q de productie in duizendtallen.
- Bereken het differentiequotiënt van W op het interval $[5, 25]$.
 - Bereken de gemiddelde toename van de winst in euro's per stuk als de productie toeneemt van 50 000 tot 75 000 stuks.
 - Bereken de gemiddelde verandering van W in euro's per stuk als de productie toeneemt van 80 000 tot 88 000 stuks.

6

Rekenregels en formules

Wat leer je?

- Formules combineren en herleiden.
- Hoe je met de grafische rekenmachine bijzonderheden van grafieken opspoort.
- De rekenregels voor machten en wortels gebruiken.
- Werken met formules met breuken.
- Herleiden van formules met exponenten.



Beginopdracht De eland

Elanden leven in noordelijke streken, met name in Scandinavische landen, Siberië en Canada. Mannetjes kunnen wel 800 kilogram wegen. Vrouwjeselanden zijn een stuk kleiner en hebben een gewicht tot 375 kilogram.

De hoeveelheid energie die een eland per dag nodig heeft om op gewicht te blijven is afhankelijk van het gewicht. Deze energie geven we aan met E_{basis} .

Elanden zijn een groot gedeelte van de dag bezig met het zoeken naar voedsel, wat veel tijd en energie kost. Als er voldoende voedsel wordt gevonden, krijgt een eland meer energie binnen dan dat het zoeken ernaar kost. De energie die overblijft geven we aan met $E_{\text{beschikbaar}}$. Deze energie moet dus minimaal gelijk zijn aan E_{basis} om op gewicht te blijven. Voor energie gebruiken we de eenheid kcal.

Een groep biologen heeft onderzoek gedaan naar elanden en is tot de onderstaande tabel gekomen. In de tabel is W het gewicht van een eland in kilogram. Je ziet dat een eland met een gewicht van 200 kg om op gewicht te blijven per dag 7400 kcal nodig heeft en 11 600 kcal beschikbaar heeft.

W	50	100	150	200	250	300	350	400
E_{basis}	2600	4400	6000	7400	8800	10 100	11 300	12 500
$E_{\text{beschikbaar}}$	2100	6500	9440	11 600	13 300	14 600	15 700	16 500

- Bij het optimale gewicht van een eland is $E_{\text{beschikbaar}} - E_{\text{basis}}$ maximaal. Dan blijft er namelijk zo veel mogelijk energie over voor andere activiteiten dan het zoeken naar voedsel. Geef een schatting van het optimale gewicht.
- Zet de punten van de tabel uit in één figuur. Neem W op de horizontale as en E op de verticale as. Verbind de punten van E_{basis} door een vloeiende kromme. Doe dat ook voor de punten van $E_{\text{beschikbaar}}$.
- De grafieken hebben een snijpunt. Welk gewicht hoort er bij het snijpunt? Geef de praktische betekenis van dit snijpunt.

De biologen hebben formules opgesteld die bij de tabel horen. Deze formules zijn:

$$E_{\text{basis}} = 140W^{0,75} \text{ en } E_{\text{beschikbaar}} = 2200\sqrt{W} - 40W - 11\,500.$$

- Controleer deze formules voor $W = 100$ en $W = 400$.

Een elandjong is na de geboorte afhankelijk van moedermelk. Deze afhankelijkheid duurt totdat het kalf zelfstandig voor zijn voedsel kan zorgen.

- Kan volgens de formules een elandkalfje van 55 kg al zelfstandig voor zijn voedsel zorgen? Licht toe.

Voorkennis Haakjes wegwerken en variabelen vrijmaken

Theorie A Haakjes wegwerken

Voor het wegwerken van haakjes gebruik je de volgende regels.

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Voorbeeld

Werk de haakjes weg en herleid.

a $(2x - 1)(3x + 1)$

b $(p - 2q)^2$

c $y(y - 1)^2$

Uitwerking

a $(2x - 1)(3x + 1) = 6x^2 + 2x - 3x - 1 = 6x^2 - x - 1$

b $(p - 2q)^2 = (p - 2q)(p - 2q) = p^2 - 2pq - 2pq + 4q^2 = p^2 - 4pq + 4q^2$

c $y(y - 1)^2 = y(y - 1)(y - 1) = y(y^2 - y - y + 1) = y(y^2 - 2y + 1) = y^3 - 2y^2 + y$

1 Werk de haakjes weg en herleid.

a $5(2x - 1) - 2(3x + 1)$

b $(x - 1)(x - 2)$

c $(4x + 1)(4x - 1)$

d $(3a - 2b)^2$

e $5(p - 3q)^2$

f $2m(m + 1)^2$

Theorie B Variabelen vrijmaken

In de vergelijking $2x + 3y = 6$ kun je de variabele y vrijmaken.

Je krijgt

$$2x + 3y = 6$$

$$3y = -2x + 6$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

In de formule $y = -\frac{2}{3}x + 2$ is y uitgedrukt in x .

Voorbeeld

Maak y vrij bij $3(x + 2) - 4(y - 1) = 16$.

Uitwerking

$$3(x + 2) - 4(y - 1) = 16$$

$$3x + 6 - 4y + 4 = 16$$

$$-4y = -3x + 6$$

$$y = \frac{3}{4}x - 1\frac{1}{2}$$

- 2**
- a** Maak y vrij bij $4x - 3y = 9$.
 - b** Maak m vrij bij $2(m - 3) - 4n = 6$.
 - c** Gegeven is $5(p - 2q) - 3(p + 3) = 15$.
Druk p uit in q .
 - d** Gegeven is de formule $B = 2(A - 4) + 5(4 - A)$.
Druk A uit in B .

6.1 Formules combineren en herleiden



01 Om het leesniveau van leesboekjes voor kinderen in het Engelse taalgebied te bepalen, is door de Amerikanen Flesch en Kincaid de formule $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$ ontwikkeld. In deze formule is G een geheel getal dat de 'grade' aangeeft. Grade 1 is het niveau van 6-jarigen en grade 12 is het niveau van 17-jarigen. Verder staat W voor woordlengte, dat is het gemiddeld aantal lettergrepen per woord en Z voor zinslengte, dat is het gemiddeld aantal woorden per zin.

- a** Bereken de grade van een leesboek waarin het gemiddeld aantal lettergrepen per woord 1,9 is en het gemiddeld aantal woorden per zin 7,9.

In vraag a geldt $Z = W + 6$.

- b** Licht dit toe.

Voor teksten waarvoor geldt $Z = W + 6$ gaat de formule van G over in $G = 11,8W + 0,39(W + 6) - 15,59$ en dit is te herleiden tot $G = 12,19W - 13,25$.

- c** Laat deze herleiding zien.

- d** Bereken de grade van een tekst waarvoor geldt $Z = W + 6$ en waarin het gemiddeld aantal lettergrepen per woord gelijk is aan 1,5.

Theorie A Lineaire vormen combineren en herleiden

In opgave 1 is de formule $Z = W + 6$ ingevuld in de formule $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$. We zeggen dat we de twee formules hebben **gecombineerd**. We zeggen ook wel 'de formule $Z = W + 6$ is gesubstitueerd in de formule $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$ '.

Substitueren betekent 'vervangen door'. Je hebt Z vervangen door $W + 6$. Bij het substitueren krijg je vaak met het wegwerken van haakjes te maken.

Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$ en $W = Z - 7,5$. Schrijf de formule van G in de vorm $G = aZ + b$.

Uitwerking

Invullen van $W = Z - 7,5$ in $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$ geeft

$$G = 11,8(Z - 7,5) + 0,39Z - 15,59 \quad \leftarrow \text{Denk aan haakjes om } Z - 7,5.$$

$$G = 11,8Z - 88,5 + 0,39Z - 15,59$$

$$G = 12,19Z - 104,09$$

Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $A = 0,03k - 0,6(l - 20)$ en $k = 1,4l + 150$.

De formule van A is te schrijven in de vorm $A = al + b$.

Bereken a en b .

Uitwerking

Invullen van $k = 1,4l + 150$ in $A = 0,03k - 0,6(l - 20)$ geeft

$$A = 0,03(1,4l + 150) - 0,6(l - 20)$$

$$A = 0,042l + 4,5 - 0,6l + 12$$

$$A = -0,558l + 16,5$$

$$\text{Dus } a = -0,558 \text{ en } b = 16,5.$$

2



- a** Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde met de formule

$$G = 11,8W + 0,39Z - 15,59.$$

Neem $Z = 5W$ en schrijf de formule van G in de vorm $G = aW + b$.

- b** Zie het voorbeeld hierboven met de formule $A = 0,03k - 0,6(l - 20)$.

Neem $l = -0,25k + 15$ en schrijf de formule van A in de vorm $A = ak + b$.

3



- a** Gegeven zijn de formules $R = 3p - 4q + 5$ en $p = 1,5q + 2$.

Schrijf de formule van R in de vorm $R = aq + b$.

- b** Gegeven zijn de formules $F = 0,16m - 0,4(5 - 2n)$ en $m = 3 - 2n$.

De formule van F is te schrijven in de vorm $F = an + b$.

Bereken a en b .

4



Gegeven zijn de formules $B = 0,0012(600 - 18K)$ en $K = 0,16L$.

- a** Neem $L = 25$ en bereken K en B .

- b** Druk B uit in L .

- c** Bereken L voor $B = 0,288$ door een vergelijking op te lossen.

E5

*

Van de gehele positieve getallen a , b en c is bekend dat $2a + b = c$ en

$$4a + 2b + c = 21.$$

Bereken c en geef mogelijke waarden voor a en b .

**6**

Het aantal blikken verf q dat een winkelier per week verkoopt is gegeven door de formule $q = -10p + 0,3A + 150$. Hierin is p de verkoopprijs van een blik in euro's en A het bedrag in euro's dat de winkelier per week aan reclame uitgeeft.

- De winkelier geeft in een week 240 euro aan reclame uit. Die week heeft hij 117 blikken verf verkocht.
Bereken de prijs van een blik.
- De winkelier besluit om per week tien keer de verkoopprijs van één blik aan reclame uit te geven.
Druk voor deze situatie q uit in p .
- In een andere week besluit de winkelier 30 euro aan reclame uit te geven vermeerderd met vijf keer de prijs van één blik.
Toon aan dat in dat geval $q = -8,5p + 159$.
- De winkelier besluit voortaan uit te gaan van de formule $A = 2p + 8$.
Schrijf de formule van q in de vorm $q = ap + b$.

Aantonen van de juistheid van een formule betekent dat je stap voor stap naar de formule toe werkt. Je kunt niet volstaan met het geven van getallenvoorbeelden.

**A7**

Om te weten hoeveel voedingsstoffen een paard nodig heeft, moet het gewicht van het paard bekend zijn. Omdat het niet zo handig is daarvoor telkens een weegschaal te gebruiken, schatten paardenhouders het gewicht met een formule.

- fokmerries: $G = 5,2BO + 2,6SH - 855$
- rijpaarden: $G = 4,3BO + 3,0SH - 785$

Hierin is G het gewicht in kg, BO de borstomvang in cm en SH de schofthoogte in cm.

- Een fokmerrie heeft een borstomvang van 1,80 meter en een schofthoogte van 1,68 meter.
Bereken het gewicht van de merrie.
- Door een meetfout wordt bij een rijpaard de borstomvang 5 cm te groot gemeten. Beredeneer hoeveel kg de schatting van het gewicht te hoog uitvalt.
- Druk voor rijpaarden waarvoor geldt $BO = SH + 12$ het gewicht G uit in SH .
- Een fokmerrie en een rijpaard zijn even zwaar. Van de merrie is $BO = 180$ en van het rijpaard is $BO = 185$.
De paarden hebben dezelfde schofthoogte. Bereken deze schofthoogte in cm nauwkeurig.



figuur 6.1



A8

In opgave 1 heb je gewerkt met de formule van Flesch en Kincaid waarmee de leesbaarheid van een tekst kan worden bepaald.

Computers kunnen ook de leesbaarheid van een tekst bepalen.

Hiervoor is de *Automated Readability Index (ARI)* ontwikkeld.

De *ARI* gebruikt per woord het aantal tekens in plaats van het aantal lettergrepen, omdat het aantal lettergrepen voor een computer moeilijk te bepalen is.

De formule is $ARI = 4,71T + 0,5Z - 21,43$. Hierin is T het gemiddeld aantal tekens per woord en Z het gemiddeld aantal woorden per zin.

- a** Een tekst bestaat uit 12 zinnen met in totaal 90 woorden en 495 tekens.

Bereken de *ARI*.

- b** Iemand voegt drie zinnen van de tekst van vraag a samen tot één zin.

Het totale aantal woorden en tekens van de tekst verandert niet.

Bereken hoe de *ARI* verandert.

- c** Voor teksten waarvoor geldt $Z = T + 3$ is de formule van *ARI* te schrijven in de vorm $ARI = aT + b$.

Bereken a en b .

- d** Een *ARI* van 1 hoort bij het niveau van 6-jarigen, een *ARI* van 2 hoort bij het niveau van 7-jarigen, enzovoort.

Verander de formule zo, dat je het niveau krijgt van de bijbehorende leeftijd L , dus schrijf de formule in de vorm $L = aT + bZ + c$.

**09**

Gegeven zijn de formules $T = m^2 + 4n + 2$ en $m = n - 1$.

- a** Bereken T voor $n = 5$.

Substitutie van $m = n - 1$ in $T = m^2 + 4n + 2$ geeft $T = (n - 1)^2 + 4n + 2$.

- b** Toon aan dat dit te herleiden is tot $T = n^2 + 2n + 3$.

Theorie B Kwadratische vormen combineren en herleiden

Je kunt de formules $T = m^2 + 4n + 2$ en $m = 2n + 3$ combineren tot de vorm $T = an^2 + bn + c$.

Substitutie van $m = 2n + 3$ in $T = m^2 + 4n + 2$ geeft

$$T = (2n + 3)^2 + 4n + 2$$

$$T = (2n + 3)(2n + 3) + 4n + 2$$

$$T = 4n^2 + 6n + 6n + 9 + 4n + 2$$

$$T = 4n^2 + 16n + 11$$

Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $A = 3,5k^2l$ en $k = l - 2$.

De formule van A is te schrijven in de vorm $A = al^3 + bl^2 + cl$.

Bereken a , b en c .

Uitwerking

Invullen van $k = l - 2$ in $A = 3,5k^2l$ geeft

$$A = 3,5(l - 2)^2 \cdot l$$

$$A = 3,5l(l - 2)(l - 2)$$

$$A = 3,5l(l^2 - 2l - 2l + 4) \quad \leftarrow \text{Denk aan de haakjes.}$$

$$A = 3,5l(l^2 - 4l + 4)$$

$$A = 3,5l^3 - 14l^2 + 14l$$

Dus $a = 3,5$, $b = -14$ en $c = 14$.

10 Zie het voorbeeld met de formule $A = 3,5k^2l$.

Neem $k = l + 2$ en schrijf A in de vorm $A = al^3 + bl^2 + cl$.

11 a Gegeven zijn de formules $B = 3t^2 - 4s^2 + 5$ en $s = t - 2$.

Schrijf de formule van B in de vorm $B = at^2 + bt + c$.

b Gegeven zijn de formules $N = 15a^2b$ en $a = 2b - 3$.

Toon aan dat hieruit volgt $N = 60b^3 - 180b^2 + 135b$.

A12 Tussen de prijs p in euro's en het aantal ijsjes q dat ijscoman Jan per dag verkoopt bestaat het verband $p = -0,002q + 3,10$. De dagopbrengst R in euro's kan worden berekend door de prijs van een ijsje te vermenigvuldigen met het aantal verkochte ijsjes, oftewel $R = p \cdot q$.

a Schrijf de formule van R in de vorm $R = aq^2 + bq$.

b Bereken de dagopbrengst bij een verkoop van 500 ijsjes per dag. Hoeveel kost een ijsje dan?

Jan heeft ook kosten. De kosten per dag in euro's worden gegeven door de formule $K = 0,70q + 180$.

c Bereken K als Jan per dag 500 ijsjes verkoopt. Hoeveel winst maakt Jan dan per dag?

De winst per dag in euro's kan worden berekend door van de opbrengst R de kosten K af te trekken. Je krijgt zo de formule $W = -0,002q^2 + 2,40q - 180$.

d Toon dit aan.

e Jan verkoopt 450 ijsjes per dag.

Bereken de winst per dag en de prijs van een ijsje.

f Met hoeveel procent neemt de winst per dag toe als het aantal per dag verkochte ijsjes toeneemt van 400 naar 550?



E13 Gegeven zijn de formules $A = 3p^2 - 36q + 5$ en $p = aq + 3$.

- *** Er is een waarde van a waarvoor de formule van A te schrijven is in de vorm $A = mq^2 + n$.
Bereken a , m en n .

O14 Gegeven zijn de formules $N = 3p + 4q - 5$ en $q = 0,5p - 3$.

- ⊗ *** **a** Druk N uit in p en herleid.

Om N uit te drukken in q maak je eerst p vrij bij de formule $q = 0,5p - 3$.
Je krijgt $p = 2q + 6$.

- b** Licht toe hoe uit $q = 0,5p - 3$ volgt dat $p = 2q + 6$.

De formules $N = 3p + 4q - 5$ en $p = 2q + 6$ zijn te combineren tot de formule $N = 10q + 13$.

- c** Toon dit aan.

Theorie C Variabelen vrijmaken en formules combineren

De formules $K = 18 + 2p + 3q$ en $q = 5p + 30$ zijn te combineren waarbij K is uitgedrukt in p maar ook zo dat K is uitgedrukt in q .

Om K uit te drukken in q maak je eerst p vrij bij de formule $q = 5p + 30$.
 $q = 5p + 30$ geeft $5p = q - 30$, dus $p = 0,2q - 6$.

$$\left. \begin{array}{l} K = 18 + 2p + 3q \\ p = 0,2q - 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} K = 18 + 2(0,2q - 6) + 3q \\ K = 18 + 0,4q - 12 + 3q \\ K = 3,4q + 6 \end{array}$$

De accolade geeft aan welke formules gecombineerd worden.

Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $A = 8s + 3t + 850$ en $2s - 5t = 40$.
Schrijf de formule van A in de vorm $A = at + b$.

Aanpak

Maak eerst s vrij bij $2s - 5t = 40$.

Uitwerking

$$2s - 5t = 40$$

$$2s = 5t + 40$$

$$s = 2,5t + 20$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 8s + 3t + 850 \\ s = 2,5t + 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 8(2,5t + 20) + 3t + 850 \\ A = 20t + 160 + 3t + 850 \\ A = 23t + 1010 \end{array}$$

Om A uit te drukken in t , moet in de formule $A = 8s + 3t + 850$ de variabele s worden vervangen door een formule waarbij s is uitgedrukt in t .

15 Zie het voorbeeld.

- ⊗ *** Druk A uit in s en herleid.

16
☐ ⊗ *

- a** Combineer de formules $T = 3r + 6s + 80$ en $r + 8s = 100$ tot de vorm $T = as + b$.
- b** Combineer de formules $C = 2a - 3b + 64$ en $5a - 8b = 160$ tot de vorm $C = ma + n$.

17
☐ ⊗ *

Gegeven zijn de formules $Q = 5m - n + 125$ en $3m + 5n = 12$.

De formule van Q is te herleiden tot $Q = 5,6m + 122,6$.

- a** Laat deze herleiding zien.
- b** Bereken m voor $Q = 201$. Welke waarde van n hoort hierbij?

A18
☐ ⊗ *

a Gegeven zijn de formules $A = 2t + 5p + 9$ en $t = -\frac{1}{3}p + 3\frac{2}{3}$.

De formule van A is te schrijven in de vorm $A = at + b$.

Bereken a en b .

- b** De formules $B = 5xy + 20$ en $3x - 2y = 6$ zijn te combineren tot de vorm $B = ax^2 + bx + c$.
- Bereken a , b en c .

E19
*

Gegeven zijn de formules $N = 6pq - 2p^2 + 4$ en $2p + 3q = 8$ en $q = p + 1$.

Bereken N .

Terugblik

Formules combineren

De formules $D = 5x + 3y + 30$ en $x = 12 - 2y$ zijn te combineren tot de vorm $D = ay + b$.

$$\left. \begin{array}{l} D = 5x + 3y + 30 \\ x = 12 - 2y \end{array} \right\} \begin{array}{l} D = 5(12 - 2y) + 3y + 30 \\ D = 60 - 10y + 3y + 30 \\ D = -7y + 90 \end{array}$$

Je ziet dat $a = -7$ en $b = 90$.

De formules $E = 0,1p^2 - 0,02q + 4,5$ en $p = 0,5q + 1$ zijn te combineren tot de vorm $E = aq^2 + bq + c$.

Invullen van $p = 0,5q + 1$ in $E = 0,1p^2 - 0,02q + 4,5$ geeft

$$E = 0,1(0,5q + 1)^2 - 0,02q + 4,5$$

$$E = 0,1(0,5q + 1)(0,5q + 1) - 0,02q + 4,5$$

$$E = 0,1(0,25q^2 + 0,5q + 0,5q + 1) - 0,02q + 4,5$$

$$E = 0,1(0,25q^2 + q + 1) - 0,02q + 4,5$$

$$E = 0,025q^2 + 0,1q + 0,1 - 0,02q + 4,5$$

$$E = 0,025q^2 + 0,08q + 4,6$$

Variabelen vrijmaken en formules combineren

De formules $D = 5x + 3y + 30$ en $3x - 2y = 28$ zijn te combineren tot de vorm $D = ax + b$.

Eerst maak je y vrij bij de formule $3x - 2y = 28$.

Je krijgt $-2y = -3x + 28$, dus $y = 1,5x - 14$.

$$\left. \begin{array}{l} D = 5x + 3y + 30 \\ y = 1,5x - 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} D = 5x + 3(1,5x - 14) + 30 \\ D = 5x + 4,5x - 42 + 30 \\ D = 9,5x - 12 \end{array}$$

Is bovendien gegeven dat $D = 140$, dan kun je x en y berekenen.

Je krijgt $9,5x - 12 = 140$ oftewel $9,5x = 152$, dus $x = 16$.

$x = 16$ en $y = 1,5x - 14$ geeft $y = 1,5 \cdot 16 - 14 = 10$.

6.2 Formules en de grafische rekenmachine



Gegeven zijn de formules $y_1 = 0,35x + 2$ en $y_2 = -0,16x + 8$.

- a Voer de formules in op de GR en plot de grafieken. Neem x en y tussen 0 en 10.
Waarom staat het snijpunt van de grafieken niet op het scherm?
- b Kies x en y zo, dat het snijpunt wel op het scherm staat en bereken de coördinaten van het snijpunt. Rond af op twee decimalen.

Theorie A Grafieken plotten en toppen berekenen

In de module **Formules, grafieken en snijpunten** heb je geleerd hoe je met de GR de coördinaten berekent van het snijpunt van grafieken van lineaire formules.

In de module **Formules en tabellen** heb je geleerd hoe je met de GR een tabel maakt bij een formule.

In de volgende module leer je hoe je met de GR coördinaten van toppen van grafieken berekent.

In opgave 20 heb je gezien dat het snijpunt van de grafieken niet op het scherm van de GR stond. Bij het plotten van grafieken is het van belang na te denken welke waarden van x en y je kiest voor het scherm. Het scherm met deze waarden van x en y noemen we het **venster** van de GR. Uit de context van de opgaven blijkt vaak wat geschikte waarden van x of y zijn voor het venster.

[► GR] Neem nu de module **Grafieken, toppen en snijpunten** van de handleiding GR door.

Let op het verschil tussen de opdrachten plotten, schetsen en tekenen van de grafiek.

Plot de grafiek	Schets de grafiek	Teken de grafiek
Laat de GR de grafiek op het scherm tekenen. Kies het venster zo, dat alle bijzonderheden van de grafiek op het scherm te zien zijn.	Maak in je schrift een schets van de grafiek. Het gaat alleen om de vorm van de grafiek en de ligging ten opzichte van de assen. Je mag daarbij de GR gebruiken. Zet letters bij de assen.	Teken in je schrift nauwkeurig de grafiek en zet getallen en letters bij de assen. Maak eerst een tabel in je schrift. Gebruik daarbij de GR.

Bij berekeningen die je met de GR maakt, hoort een toelichting. Zo vermeld je de formules die je invoert en de gebruikte opties. We herinneren je aan de volgende afspraak.

Uitwerking bij gebruik van de GR

- 1** Noteer de formules die je invoert, dus schrijf op $y_1 = \dots$ en $y_2 = \dots$
- 2** Noteer de optie(s) die je gebruikt en geef het resultaat.
- 3** Beantwoord de gestelde vraag.

Voorbeeld

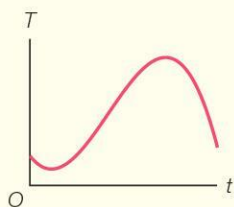
De temperatuur van het zeewater voor de Nederlandse kust wordt beschreven door de formule $T = -0,093t^3 + 1,39t^2 - 3,28t + 4,7$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari en $0 \leq t \leq 12$.

- a** Schets de grafiek van T .
- b** Bereken de temperatuur op 1 juli. Rond af op één decimaal.
- c** In welke maand is de temperatuur van het zeewater minimaal? Wat is de minimale temperatuur?
- d** In welke maanden was de temperatuur van het zeewater 14°C ?

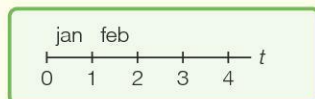
Uitwerking

- a** Voer in $y_1 = -0,093x^3 + 1,39x^2 - 3,28x + 4,7$.

$0 \leq t \leq 12$, dus neem in het venster x tussen 0 en 12.



- b** Bij 1 juli hoort $t = 6$.
 $t = 6$ geeft $T \approx 15,0^\circ\text{C}$
- c** De optie minimum geeft $x \approx 1,4$ en $y \approx 2,6$.
Dus in februari. De minimale temperatuur is $2,6^\circ\text{C}$.
- d** Voer in $y_2 = 14$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 5,7$ en $x \approx 10,8$.
Dus in de maanden juni en november.



21 Zie het voorbeeld.



- a** In welke maand is de temperatuur van het zeewater maximaal? Wat is de maximale temperatuur?
- b** In welke maanden kwam de temperatuur van het zeewater boven de 19°C ?

22 De winst W van een bedrijf in honderden euro's wordt gegeven door de formule $W = -0,02q^2 + 5,2q - 200$. Hierin is q het aantal verkochte artikelen met q kleiner dan 225.

- a Schets de grafiek van W .
- b Bereken de maximale winst.
- c Hoeveel artikelen moeten er verkocht worden om een winst van minstens 10000 euro te hebben?

Zet de juiste letters bij de assen.

23 Een fabrikant van elektrische apparaten brengt een nieuw model broodrooster op de markt. Een bedrijfseconoom heeft een formule opgesteld voor de opbrengst R per week in euro's bij een weekverkoop van q broodroosters: $R = -0,02q^2 + 30q$ met q kleiner dan 1200.

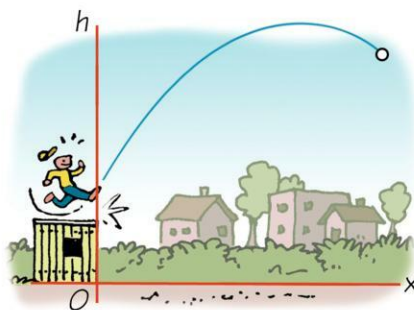
- a Schets de grafiek van R .
- b Voor welke q is de opbrengst maximaal? Hoeveel is de maximale opbrengst?
- c Hoeveel broodroosters moet de fabrikant per week verkopen om een opbrengst van minstens 8000 euro te hebben?

Het bedrijf heeft ook kosten. Per week zijn deze kosten gegeven door $K = 5q + 3000$.

- d De grafieken van K en R hebben twee snijpunten. Wat is de praktische betekenis van deze snijpunten? Welke aantallen verkochte broodroosters horen bij deze snijpunten?
- e Het bedrijf verkoopt in een week 600 broodroosters. Hoeveel euro is de winst die week?

24 Luuk staat op het platte dak van een schuur en trapt een bal weg. Zie figuur 6.2. De baan van de bal wordt gegeven door de formule $h = -0,09x^2 + 1,8x + 3$. Hierin zijn x en h in meter. Luuk kan de bal maximaal 25 meter weg trappen.

- a Hoe hoog is het schuurtje?
- b Bereken op welke afstand van het schuurtje de bal op de grond komt. Geef het antwoord in dm nauwkeurig.
- c Bereken de maximale hoogte van de bal.
- d Op 18 meter afstand van het schuurtje staat een boom die 5 meter hoog is. Luuk trapt de bal in de richting van de boom. Onderzoek of de bal over de boom heen gaat.



figuur 6.2

25



Het benzineverbruik van een auto is gegeven door de formule $B = 0,001v^2 - 0,12v + 7,8$. Hierin is B het benzineverbruik in liters per 100 km bij een snelheid van v km per uur.

- Schets de grafiek van B .
- Mevrouw Van Santen verhoogt haar snelheid van 80 tot 100 km per uur. Hoeveel neemt het benzineverbruik toe?
- Meneer Van Ast verhoogt zijn snelheid van 30 tot 40 km per uur. Met hoeveel procent neemt het benzineverbruik af?
- Mevrouw Tjong a Sie wil zo zuinig mogelijk rijden. Welke snelheid moet zij aanhouden?
- Op een gegeven moment verbruikt de auto van meneer Vonk 4,5 liter per 100 km. Wat weet je van zijn snelheid? Rond af op gehele.
- Mevrouw Kerkhof rijdt met een constante snelheid. Ze moet nog 60 km rijden. In de tank zit nog 3 liter benzine. Met welke snelheid moet mevrouw Kerkhof rijden als ze zonder tanken op de plaats van bestemming wil aankomen?



26



Zie opgave 25 met de formule $B = 0,001v^2 - 0,12v + 7,8$.

Meneer Yates rijdt met een snelheid van 120 km/uur over de snelweg. Met deze snelheid heeft hij genoeg benzine voor een afstand van 60 km, maar de eerstvolgende benzinepomp is 90 km verder. Hij wil de benzinepomp zo snel mogelijk bereiken. Met welke snelheid moet hij dan rijden? Rond af op gehele.

A27



De bedrijfseconoom van een supermarktketen heeft een formule opgesteld die beschrijft hoeveel klanten er op elk tijdstip op een vrijdag in één van de vestigingen aanwezig is.

Deze formule is $N = -0,15t^4 + 3,35t^3 - 24t^2 + 65t$. Hierin is N het aantal klanten t uur na het openingstijdstip van 8:00 uur.

- Om de grafiek te plotten, kies je eerst een geschikt venster. Welke waarden voor x kies je hierbij? Licht toe en schets de grafiek van N .
- Hoe laat is het volgens de formule het drukst in de supermarkt? Hoeveel klanten zijn er dan?
- Hoe laat verlaten de laatste klanten de supermarkt?
- Hoe laat zijn er evenveel klanten in de supermarkt als om kwart over drie?

A28
☐ ⊗ *

Een jongerenblad start een reclamecampagne om de losse verkoop te verhogen. De campagne zal enkele maanden duren.

De uitgever van het blad hanteert voor het jaar na de start van de reclamecampagne de formule $A = 9 + \frac{5}{(0,05t - 2)^2 + 1}$. Hierin is A het aantal wekelijks verkochte exemplaren in duizendtallen en t de tijd in weken met $t = 0$ op het moment dat de campagne begint.

- a Schets de grafiek van A .
- b Hoeveel weken na de start van de campagne is de losse verkoop het grootst? Hoeveel is de verkoop dan?
- c Gedurende hoeveel weken is de wekelijkse verkoop meer dan 13 500 exemplaren?

A29
⊗ *

In een natuurgebied neemt de oppervlakte van de heide af, terwijl de oppervlakte van het gras toeneemt.

De oppervlakte van de heide is gegeven door de formule $H = 600 \cdot 0,95^t$ en de oppervlakte van het gras is gegeven door de formule $G = 100\sqrt{t+1}$. In deze formules zijn H en G in hectare en is de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2015. Men neemt aan dat deze formules in elk geval zullen gelden tot het jaar 2030.

- a Schets de grafieken in één figuur.
- b Met hoeveel hectare is de oppervlakte van de heide afgenomen tussen 1 januari 2018 en 1 juli 2021? Rond af op één decimaal.
- c In welk jaar zal de oppervlakte van het gras gelijk zijn aan de oppervlakte van de heide? Hoeveel hectare heide is er dan nog?
- d Wat was de totale oppervlakte van de heide en het gras samen op 1 januari 2015? En wat zal de totale oppervlakte zijn op 1 januari 2025?
- e In welke maand van welk jaar was de totale oppervlakte van de heide en het gras samen maximaal? Hoeveel was toen de totale oppervlakte van heide en gras samen?



Terugblik

Formules en de GR

Op de GR kun je formules invoeren om de grafieken te plotten en tabellen te maken. De GR heeft opties om

- bij een formule een tabel te maken
- bij een gegeven x de y -waarde te berekenen
- de coördinaten van snijpunten van grafieken te berekenen
- de coördinaten van toppen te berekenen.

Gebruik je in de uitwerking van een opgave de GR, dan noteer je de formules die je invoert en de opties die je gebruikt. Verder geef je het resultaat en beantwoord je de gestelde vraag.

Bij een experiment in een laboratorium wordt het aantal bacteriën in de eerste twee weken van september gegeven door de formule $N = t^3 - 9t^2 + 200$. Hierin is N het aantal bacteriën in miljoenen en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 september om 0:00 uur. Omdat t de tijd in dagen is en de formule geldt voor de eerste twee weken, neem je in het venster x tussen 0 en 14.

Je berekent als volgt op welke datum het aantal bacteriën is toegenomen tot een half miljard.

Voer in $y_1 = x^3 - 9x^2 + 200$ en $y_2 = 500$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 11,3$.

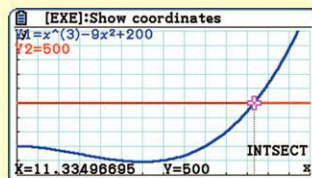
Op 12 september is het aantal bacteriën tot een half miljard toegenomen.

Je ziet in de grafiek dat het aantal bacteriën op een gegeven moment minimaal is. Dit minimum bereken je op de GR met de optie minimum. Je krijgt $x = 6$ en $y = 92$. Dus op 7 september om 0:00 uur is het aantal bacteriën minimaal. Het minimale aantal is 92 miljoen.

Op de GR is ook een tabel gemaakt, zie hiernaast.

Je leest daarin bijvoorbeeld af dat op de eerste dag het aantal bacteriën met 8 miljoen verminderde en dat er op de zevende dag 10 miljoen bacteriën bij kwamen.

Een half miljard is 500 miljoen, dus $y_2 = 500$.
Twee weken is 14 dagen, dus $X_{\max} = 14$.



NORM. DRIJF AUTO REZEL RAD LIN DRUK OP ENTER VOOR BEMERKEN				
X	Y1			
0	200			
1	192			
2	172			
3	146			
4	120			
5	100			
6	92			
7	102			
8	136			
9	200			
10	300			

$Y1 = X^3 - 9X^2 + 200$

6.3 Formules met breuken



Bereken zonder rekenmachine.

a $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$

b $4 \cdot \frac{2}{9}$

c $\frac{1}{7} : \frac{2}{3}$

d $\frac{3}{4} : 5$

Theorie A Breuken vermenigvuldigen en delen

Bij de breuk $\frac{4}{12}$ kun je teller en noemer delen door 4.

Daarmee vereenvoudig je de breuk. Je krijgt $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Ook de breuk $\frac{4x}{11x}$ kun je vereenvoudigen. Je deelt dan teller en noemer door x . Dit geeft $\frac{4x}{11x} = \frac{4}{11}$.

En zo is $\frac{18ab}{24b} = \frac{3a}{4}$.

Deel teller en noemer door $6b$.

$\frac{3a}{4}$ kun je schrijven als $\frac{3}{4}a$. Dit heet **de variabele uit de breuk halen**.

Haal je bij $\frac{4(x-1)}{5}$ de variabele x uit de breuk, dan krijg je $\frac{4}{5}(x-1)$.

Bij het vermenigvuldigen van breuken gebruik je

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}.$$

Dus $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$ en $5 \cdot \frac{4}{21} = \frac{20}{21}$.

$$5 \cdot \frac{4}{21} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 21}$$

Vereenvoudig de breuk.

En zo is $D = \frac{3x}{4} \cdot \frac{2}{5y}$ te herleiden tot $D = \frac{6x}{20y} = \frac{3x}{10y}$, dus $D = \frac{3x}{10y}$.

Neem je in deze formule $y = 2x$, dan is $D = \frac{3x}{10 \cdot 2x} = \frac{3x}{20x} = \frac{3}{20}$.

De formule $E = x \cdot \left(\frac{x}{5} + 2\right)$ kun je schrijven in de vorm $E = ax^2 + bx$.

Je krijgt $E = x \cdot \left(\frac{x}{5} + 2\right) = \frac{x^2}{5} + 2x = \frac{1}{5}x^2 + 2x$.

Haal de variabele uit de breuk.

Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Dus $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Bij het herleiden van de formule $F = \frac{1}{5} : \frac{3}{x}$ krijg je

$$F = \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x}{15} = \frac{1}{15}x.$$

$$\text{breuk} = \frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$$

$$\text{Het omgekeerde van } \frac{a}{b} \text{ is } \frac{b}{a}.$$

Voorbeeld

- a** Herleid de formule $A = \frac{2}{7} \cdot \frac{x-y}{x}$ en werk de haakjes weg.
- b** Herleid de formule $B = \frac{2x}{5y} : \frac{4}{5}$.
- c** Neem $y = 4x$ in de formule $C = \frac{x+y}{x+2}$ en herleid.

Denk aan de haakjes.

Uitwerking

a $A = \frac{2}{7} \cdot \frac{x-y}{x} = \frac{2(x-y)}{7x} = \frac{2x-2y}{7x}$, dus $A = \frac{2x-2y}{7x}$

b $B = \frac{2x}{5y} : \frac{4}{5} = \frac{2x}{5y} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10x}{20y} = \frac{x}{2y}$, dus $B = \frac{x}{2y}$

c $y = 4x$ invullen geeft $C = \frac{x+4x}{x+2} = \frac{5x}{x+2}$, dus $C = \frac{5x}{x+2}$.

31 Haal bij de volgende formules de variabele x uit de breuk.



a $A = \frac{5x}{6}$

d $D = \frac{3(x-2)}{4}$

b $B = \frac{x}{8}$

e $E = \frac{15x}{4}$

c $C = \frac{2(x-3)}{5}$

f $F = \frac{12(x+2)}{4}$

32 Herleid de formule en werk zo nodig de haakjes weg.



a $A = \frac{3}{5} \cdot \frac{x+y}{y}$

d $D = \frac{a+1}{a} : \frac{1}{2}$

b $B = \frac{2x}{y} \cdot \frac{y+1}{4}$

e $E = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{x+1}{x}$

c $C = \frac{2a}{3b} : \frac{4}{9}$

f $F = 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x+1}$

33 **a** Neem $y = 7x$ in de formule $A = \frac{x+y}{10}$ en herleid.



b Neem $y = 5x$ in de formule $B = \frac{x+y}{2x}$ en herleid.

c Neem $y = x+2$ in de formule $C = \frac{x-4}{3-y}$ en herleid.

34
□ ⊙ *

- a De formule $A = 0,15 \cdot \frac{x}{0,375} \cdot (x - 2)$ is te herleiden tot de vorm

$$A = ax^2 + bx.$$

Bereken a en b .

- b De formule $B = 2p \cdot \left(\frac{p}{7} - 3\right)$ is te herleiden tot de vorm $B = ap^2 + bp$.

Bereken a en b . Rond a af op twee decimalen.

- c De formule $C = 1,8 \cdot \frac{x+4}{2} : \frac{3}{x-1}$ is te herleiden tot de vorm

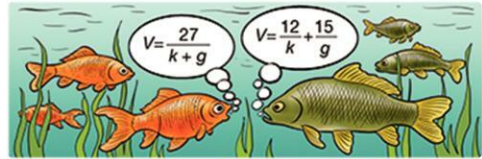
$$C = ax^2 + bx + c.$$

Bereken a , b en c .

A35
*

In een vijver zwemmen karpers en goudvissen. Het aantal karpers noemen we k en het aantal goudvissen g .

We bekijken eerst de situatie dat er 12 vrouwtjeskarpers zijn en 15 vrouwtjesgoudvissen. Het gedeelte van het totaal aantal vissen dat vrouwtje is, noemen we V .



Volgens José geldt in deze situatie de formule $V = \frac{27}{k + g}$.

Volgens Rik geldt in deze situatie de formule $V = \frac{12}{k} + \frac{15}{g}$.

Volgens Job komen de formules van José en Rik op hetzelfde neer.

- a Wie heeft gelijk?

We bekijken nu een situatie waarin van de karpers een vierde deel vrouwtje is en van de goudvissen twee vijfde deel.

Hierbij hoort de formule $V = \frac{\frac{1}{4}k + \frac{2}{5}g}{k + g}$.

Deze formule is te herleiden tot $V = \frac{5k + 8g}{20(k + g)}$.

- b Laat deze herleiding zien.

- c Gebruik de formule $V = \frac{5k + 8g}{20(k + g)}$ om te berekenen welk percentage van de vissen in de vijver een vrouwtje is als er anderhalf keer zoveel goudvissen als karpers zijn.

E36
⊙ *

- a Als een hoeveelheid water bevriest neemt het volume met $\frac{1}{11}$ deel toe. Met welk deel neemt het volume van een hoeveelheid ijs bij smelten af?

- b Van de gasten (mannen, vrouwen en kinderen) op een bruiloftsfeest was $\frac{1}{8}$ deel kind. Van de volwassen bruiloftsgasten was $\frac{3}{7}$ deel man. Welk deel van de bruiloftsgasten was vrouw?

E37
*

Bereken $(1 + \frac{1}{2}) \cdot (1 + \frac{1}{3}) \cdot (1 + \frac{1}{4}) \cdot (1 + \frac{1}{5}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{1}{1001})$.

Bereken zonder rekenmachine.

a $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$

c $\frac{4}{5} - \frac{3}{7}$

b $\frac{1}{4} + \frac{1}{9}$

d $1\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

Theorie B Breuken optellen en aftrekken

De breuken $\frac{5}{9}$ en $\frac{2}{9}$ zijn gelijknamig, want ze hebben dezelfde noemer.

Gelijknamige breuken kun je direct optellen en aftrekken.

Dus $\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ en $\frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

En zo is de formule $A = \frac{2}{x} + \frac{3}{x}$ te herleiden tot $A = \frac{5}{x}$.

Om breuken die niet gelijknamig zijn op te tellen, maak je ze eerst gelijknamig.

Dus $\frac{5}{9} + \frac{3}{8} = \frac{40}{72} + \frac{27}{72} = \frac{67}{72}$ en $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

De nieuwe noemer
wordt $9 \cdot 8 = 72$.

Het is niet nodig om als
noemer $4 \cdot 8 = 32$ te nemen.

Schrijf je het rechterlid van de formule $B = \frac{2}{x} + \frac{3}{y}$ als één breuk, dan

krijg je $B = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2y}{xy} + \frac{3x}{yx} = \frac{3x + 2y}{xy}$.

Schrijf je het rechterlid van de formule $C = \frac{4}{3x} - \frac{2}{x}$ als één breuk, dan

krijg je $C = \frac{4}{3x} - \frac{2}{x} = \frac{4}{3x} - \frac{6}{3x} = -\frac{2}{3x}$.

Voorbeeld

Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.

a $F = \frac{2}{5p} - \frac{1}{4p}$

b $G = 5 + \frac{3}{2q}$

Uitwerking

a $F = \frac{2}{5p} - \frac{1}{4p} = \frac{8}{20p} - \frac{5}{20p} = \frac{3}{20p}$

b $G = 5 + \frac{3}{2q} = \frac{10q}{2q} + \frac{3}{2q} = \frac{10q + 3}{2q}$

Bedenk dat $5 = \frac{5}{1}$.

39 Herleid tot één breuk.



a $\frac{5}{2a} + \frac{3}{2a}$

c $\frac{2}{3a} + \frac{3}{2b}$

e $a - \frac{3}{a}$

b $\frac{7}{2a} - \frac{3}{a}$

d $10 - \frac{2}{a}$

f $\frac{5}{ab} - 2$

40 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.



a $A = \frac{5}{x} + \frac{3}{y}$

b $B = \frac{6}{x} - \frac{3}{2x}$

c $C = 5 - \frac{2}{5x}$

A41 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.



a $N = \frac{3p}{q} - \frac{2}{q}$

c $N = \frac{3}{p} + \frac{2}{q}$

e $N = 2 + \frac{3}{p}$

b $N = \frac{3p}{q} - \frac{3}{2q}$

d $N = \frac{5}{q} : \frac{2}{p}$

f $N = \frac{5p}{6q} - 2$

A42 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk en werk zo nodig de haakjes weg.



a $A = \frac{2}{x-3} - \frac{4}{3x}$

b $B = 5 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}$

c $C = \frac{6}{a} \cdot \frac{5}{a+b} : \frac{4}{a+b}$

A43 Op een school zitten in totaal T leerlingen. Hiervan zitten er x in havo 4, dus het gedeelte van de leerlingen dat in havo 4 zit, is $\frac{x}{T}$.



Van alle leerlingen in havo 4 zit een zesde deel in klas 4HA. Van de leerlingen in 4HA is drie vijfde deel een meisje.

Het gedeelte van de leerlingen dat in 4HA zit en een meisje is, noemen we M . Er geldt $M = \frac{x}{10T}$.

a Laat zien dat deze formule klopt.

Een vijfde deel van alle leerlingen op de school zit in havo 4, dus $x = \frac{1}{5}T$.

b Gebruik de formules $M = \frac{x}{10T}$ en $x = \frac{1}{5}T$ om te berekenen welk deel van de leerlingen van de school in 4HA zit en een meisje is.

Van de leerlingen die niet in havo 4 zitten, zit een kwart in havo 5. Het gedeelte van de leerlingen van de school dat in havo 5 zit noemen we G .

De formule van G is te schrijven in de vorm $G = \frac{aT + bx}{T}$.

c Bereken a en b .



Terugblik

Breuken vermenigvuldigen en delen

Bij het vermenigvuldigen van breuken gebruik je

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}.$$

Schrijf je het rechterlid van de formule $A = \frac{5}{6} \cdot \frac{3a}{a-1}$ als één breuk, dan

$$\text{krijg je } A = \frac{5}{6} \cdot \frac{3a}{a-1} = \frac{5 \cdot 3a}{6(a-1)} = \frac{15a}{6a-6}.$$

Neem je $a = 2$ in deze formule, dan krijg je $A = \frac{15 \cdot 2}{6 \cdot 2 - 6} = 5$.

Bij het delen door een breuk gebruik je dat delen door een breuk hetzelfde is als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Zo kun je de formule $C = 60 \cdot \frac{x+3}{4} : \frac{10}{2x-1}$ herleiden tot de vorm

$C = ax^2 + bx + c$. Je krijgt

$$\begin{aligned} C &= 60 \cdot \frac{x+3}{4} \cdot \frac{2x-1}{10} = \frac{60(x+3)(2x-1)}{40} = 1,5(2x^2 - x + 6x - 3) \\ &= 1,5(2x^2 + 5x - 3) = 3x^2 + 7,5x - 4,5. \end{aligned}$$

Dus $a = 3$, $b = 7,5$ en $c = -4,5$.

Breuken optellen en aftrekken

Gelijknamige breuken kun je direct optellen en aftrekken.

Zo is $D = \frac{5}{2a} - \frac{3}{2a}$ te herleiden tot $D = \frac{2}{2a}$, dus $D = \frac{1}{a}$.

Om niet-gelijknamige breuken samen te nemen, maak je ze eerst

gelijknamig. Zo is $E = \frac{5}{2a} - \frac{3}{b} = \frac{5b}{2ab} - \frac{6a}{2ab} = \frac{5b-6a}{2ab}$ en

$$F = 10 - \frac{3}{b} = \frac{10b}{b} - \frac{3}{b} = \frac{10b-3}{b}.$$

Bij het herleiden van de formule $G = \frac{5}{a} - \frac{3}{4a^2}$ gebruik je als noemer $4a^2$.

$$\text{Je krijgt } G = \frac{5}{a} - \frac{3}{4a^2} = \frac{20a}{4a^2} - \frac{3}{4a^2} = \frac{20a-3}{4a^2}.$$

6.4 Rekenen met machten en wortels

O44


Je weet dat $x^2 = x \cdot x$ en $x^3 = x \cdot x \cdot x$.

a Laat zien dat hieruit volgt dat $x^2 \cdot x^3 = x^5$.

b Laat zien dat $(x^2)^3 = x^6$.

c Laat zien dat $(3x)^4 = 3^4 \cdot x^4$.

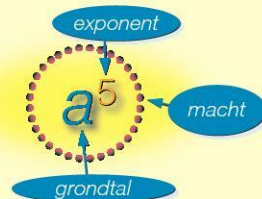
Theorie A Rekenregels voor machten

Je weet dat a^5 een macht van a is.

In de macht a^5 is a het grondtal en 5 de exponent.

a^5 is een korte schrijfwijze voor $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$,
 dus voor het product van vijf factoren a .

Rekenen met machten gaat als volgt.



$a^2 \cdot a^5 = \underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ factoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5 \text{ factoren}} = a^{2+5} = a^7$	Bij het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten bij elkaar op.
$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^{5-2} = a^3$	Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af.
$(a^2)^5 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{5 \text{ factoren } a^2} = a^{2 \cdot 5} = a^{10}$	Bij de macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten met elkaar.
$(ab)^4 = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab}_{4 \text{ factoren } ab} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4 \text{ factoren } a} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b}_{4 \text{ factoren } b} = a^4 b^4$	Bij de macht van een product krijg je een product van machten.

Zo krijg je de volgende rekenregels voor machten.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

Hieronder zie je hoe je de rekenregels gebruikt bij het herleiden.

$$(-3a^3)^4 = (-3)^4 \cdot (a^3)^4 = 81a^{12}$$

$$(-3a^2)^3 = (-3)^3 \cdot (a^2)^3 = -27a^6$$

$$(2a^3)^2 - (a^2)^3 = 4a^6 - a^6 = 3a^6$$

$$a^3 \cdot a^2 + a^3 + a^2 = a^5 + a^3 + a^2$$

$$\frac{12a^3b}{3ab} = 4a^2$$

Let op: $a^3 \cdot a^2 = a^5$ maar
 $a^3 + a^2$ kan niet korter.

$$\begin{aligned} (-2)^4 &= -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 \\ \text{Dus } (-2)^4 &= 16. \\ -2^4 &= -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ \text{Dus } -2^4 &= -16. \end{aligned}$$

45 Herleid.



- a $(a^3)^4$
b $(p^2)^3 \cdot (p^3)^5$
c $(q^3)^4 + (q^6)^2$

- d $6a \cdot (a^4)^2$
e $10x^6 - 5(x^2)^3$
f $5(x^8)^2 - 3x^{10}$

46 Herleid.



- a $\frac{12x^6}{4x^2}$
b $\frac{5x^{10}}{15x^5}$
c $\frac{24a^4b^2}{6ab}$

- d $\frac{-15p^6q}{5p^2q}$
e $\frac{14x^3y^2}{24x^2y}$
f $\frac{(2ab)^3}{(3ab)^2}$

A47 Herleid de volgende formules.



- a $P = (-2ab)^3 \cdot b$
b $P = (3a)^2 + (2b)^2$
c $P = \frac{30a^3b}{5a^2b}$

- d $P = (3a)^3 - 8a^3$
e $P = (5a^4)^2 + (-a^2)^4$
f $P = \frac{(4a^2b)^2}{(-2a)^4}$

O48 Gegeven zijn de formules $A = 10x^{1,3}$,
 $B = 20x^{0,7}$ en $C = 200x^2$.



- a Neem de tabel hiernaast over en vul hem in. Rond A en B af op twee decimalen en $A \cdot B$ op gehele.
b Vergelijk de laatste twee rijen van de tabel. Wat valt je op?

x	1	2	3	4	5
A					
B					
A · B					
C					

Theorie B Machten met gebroken exponenten

De rekenregels voor machten gelden ook voor machten met gebroken exponenten.

Dus bijvoorbeeld

$$x^{1,5} \cdot x^{2,3} = x^{3,8}$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{x^{6,1}}{x^{5,4}} = x^{0,7}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(x^{1,75})^2 = x^{3,5}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(x^{1,4} \cdot y^{2,1})^2 = x^{2,8} \cdot y^{4,2}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

Zo is de formule $y = 2x^{1,4} \cdot 3x^{1,7}$ te herleiden tot $y = 6x^{3,1}$.

De formule $y = 6x^{3,1}$ is een machtsformule.

Een formule van de vorm $y = ax^b$ is een **machtsformule**.

Gebroken getallen zijn breuken of decimale getallen.

Voorbeeld

- a** Herleid de formule $F = 0,054 \cdot (20x^{1,5})^{3,4}$ tot de vorm $F = ax^b$. Rond a af op gehele.
- b** Gegeven zijn de formules $N = 0,6k^{2,25}$ en $k = 15l$.
Schrijf de formule van N in de vorm $N = al^b$. Rond a af op gehele.

Uitwerking

- a** $F = 0,054 \cdot (20x^{1,5})^{3,4} = 0,054 \cdot 20^{3,4} \cdot (x^{1,5})^{3,4} \approx 1432 \cdot x^{5,1}$
Dus $F = 1432x^{5,1}$.
- b** Invullen van $k = 15l$ in $N = 0,6k^{2,25}$ geeft
 $N = 0,6 \cdot (15l)^{2,25} = 0,6 \cdot 15^{2,25} \cdot l^{2,25} \approx 266 \cdot l^{2,25}$.
Dus $N = 266l^{2,25}$.

49 Herleid de volgende formules.



- a** $A = x^{1,2} \cdot x^{3,4}$ **d** $D = \frac{(xy)^{1,6}}{x^{1,4}y^{1,2}}$
- b** $B = \frac{x^{5,6}}{x^{4,9}}$ **e** $E = (x^2y^3)^{1,1}$
- c** $C = (x^{1,2})^{3,1}$ **f** $F = \left(\frac{x^{1,75}}{x^{1,35}}\right)^{1,5}$

50 Herleid de volgende formules tot de vorm $y = ax^b$. Rond a af op gehele.



- a** $y = (100x^{0,6})^{1,4}$
- b** $y = 12,8 \cdot (25x^{1,8})^{1,1}$
- c** $y = 0,0018 \cdot (312x^{0,75})^2$

51 Herleid de formule $A = (250p^4)^{1,16}$ tot de vorm $A = ap^b$. Rond a af op gehele.



- a** Herleid de formule $A = (250p^4)^{1,16}$ tot de vorm $A = ap^b$. Rond a af op gehele.
- b** Gegeven is de formule $B = \frac{0,18(13,5q^{0,8})^{2,5}}{q^{0,6}}$.
Schrijf de formule in de vorm $B = aq^b$. Rond a af op gehele.
- c** De formule $C = 1250(6,12x^{1,3}y^{2,7})^{0,5}$ is te schrijven in de vorm $C = ax^by^c$.
Bereken a , b en c . Rond a af op gehele.

52 Gegeven zijn de formules $K = 20p^{1,15}$ en $p = 80q$. Schrijf de formule van K in de vorm $K = aq^b$. Rond a af op gehele.



- a** Gegeven zijn de formules $K = 20p^{1,15}$ en $p = 80q$.
Schrijf de formule van K in de vorm $K = aq^b$. Rond a af op gehele.
- b** Gegeven zijn de formules $L = 0,05t^{2,5}$ en $t = 155w^{0,6}$.
Schrijf de formule van L in de vorm $L = aw^b$. Rond a af op gehele.
- c** Gegeven zijn de formules $M = 50f^{0,75} \cdot g^{1,25}$ en $g = 20f^2$.
Schrijf de formule van M in de vorm $M = af^b$. Rond a af op gehele.

A53
☐ ⊙ *

Biologen hebben onderzoek gedaan naar de soortenrijkdom van planten en dieren op een aantal eilanden in het Caribisch gebied. Ze vonden voor het aantal soorten N van amfibieën en reptielen het verband $N = 3,3A^{0,3}$. Hierin is N het aantal soorten op het eiland en A de oppervlakte van het eiland in vierkante mijlen.

- a Bereken het aantal soorten op een eiland met een oppervlakte van 200 vierkante mijlen.
- b Er geldt: bij elke verdubbeling van de oppervlakte hoort een toename van het aantal soorten met een vast percentage. Bereken dit percentage. Rond af op gehele.
- c Om de formule om te zetten in de vorm $N = aB^{0,3}$ waarin B de oppervlakte in vierkante kilometer is, gebruik je dat 1 vierkante mijl gelijk is aan 2,6 vierkante km, dus dat $A = 2,6B$. Bereken a . Rond af op één decimaal.



A54
☐ ⊙ *

Voor het berekenen van de braadtijd van kalkoenen wordt de formule $T = 1,42G^{0,65}$ gebruikt. Hierin is G het gewicht van de kalkoen in kg en T de braadtijd in uren.

Deze formule is te herleiden tot de vorm $t = ag^b$ waarin g het gewicht van de kalkoen in gram is, en t de braadtijd in minuten.

Geef deze formule. Rond verstandig af.

O55
☐ ⊙ *

In de tabel hiernaast kun je zowel in de exponenten als in de getallen rechts van het =-teken een regelmaat herkennen.

- a Hoe volgt uit deze regelmaat dat $2^0 = 1$ en $2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$?
- b Vul in: $2^{-3} = \frac{1}{2^{\dots}}$ en $2^{-4} = \frac{1}{2^{\dots}}$.

$2^5 =$	32
$2^4 =$	16
$2^3 =$	8
$2^2 =$	4
$2^1 =$	...
$2^0 =$	...
$2^{-1} =$	...
$2^{-2} =$	...
$2^{-3} =$	...

Theorie C Machten met negatieve exponenten

In opgave 55 heb je ontdekt dat $2^0 = 1$. En zo is ook $3^0 = 1$.
Voor $a \neq 0$ geldt in het algemeen $a^0 = 1$.

In opgave 55 zag je ook dat $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ en $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

En zo is ook $3^{-1} = \frac{1}{3}$, $4^{-2} = \frac{1}{4^2}$ en $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$.

Voor $a \neq 0$ geldt in het algemeen $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

Voor $a \neq 0$ geldt $a^0 = 1$ en $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

De rekenregels voor machten gelden ook bij negatieve exponenten.
Zie het voorbeeld.

Je weet $\frac{a^3}{a^3} = 1$.

Ook geldt $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$.

Conclusie: $a^0 = 1$.

Je weet $\frac{a^0}{a^3} = \frac{1}{a^3}$.

Ook geldt $\frac{a^0}{a^3} = a^{0-3} = a^{-3}$.

Conclusie: $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Voorbeeld

Schrijf als macht van a .

a $a^{-7} \cdot a^3$

b $\frac{a^3}{a^{-8}}$

c $a \cdot (a^2)^{-5}$

d $a^5 \cdot \frac{1}{a}$

Uitwerking

a $a^{-7} \cdot a^3 = a^{-7+3} = a^{-4}$

b $\frac{a^3}{a^{-8}} = a^{3-(-8)} = a^{3+8} = a^{11}$

c $a \cdot (a^2)^{-5} = a \cdot a^{-10} = a^{1-10} = a^{-9}$

d $a^5 \cdot \frac{1}{a} = a^5 \cdot a^{-1} = a^{5-1} = a^4$

$\frac{1}{a} = \frac{1}{a^1} = a^{-1}$

Ook bij het herleiden van formules krijg je te maken met machten met negatieve exponenten. Zie het voorbeeld hieronder.

Voorbeeld

Herleid de formule $P = \frac{x^{2,4}}{(1,2x^{3,1})^2}$ tot de vorm $P = ax^b$. Rond a af op twee decimalen.

Uitwerking

$$P = \frac{x^{2,4}}{(1,2x^{3,1})^2} = \frac{x^{2,4}}{1,2^2 \cdot (x^{3,1})^2} = \frac{x^{2,4}}{1,44x^{6,2}} \approx 0,69x^{-3,8} \leftarrow \frac{x^{2,4}}{1,44x^{6,2}} = \frac{1}{1,44} \cdot x^{2,4-6,2}$$

Dus $P = 0,69x^{-3,8}$.

56


Schrijf als macht van a .

a $a^{-5} \cdot a^2$

d $(a^{-3})^4$

g 1

b $\frac{a}{a^{-2}}$

e $\frac{a^7}{a^0}$

h $a^3 \cdot (a^4)^{-2}$

c $a^4 \cdot \frac{1}{a}$

f $\frac{a^4}{\left(\frac{1}{a^3}\right)}$

i $\left(\frac{1}{a^2}\right)^3$

57


a Herleid de formule $C = \frac{10x^{3,2}}{(4,5x^{2,5})^2}$ tot de vorm $C = ax^b$. Rond a af op twee decimalen.

b Herleid de formule $D = \frac{2t^{1,6} \cdot 4t^{2,4}}{15t^6}$ tot de vorm $D = at^b$.

c Herleid de formule $E = \frac{(250p^{1,16})^{1,5}}{313p^4}$ tot de vorm $E = ap^b$. Rond a af op één decimaal.

A58


a Gegeven zijn de formules $M = 105x^{-1,6}y^{1,2}$ en $y = 1,5x^{-0,8}$. Schrijf de formule van M in de vorm $M = ax^b$. Rond a af op gehele.

b Gegeven zijn de formules $N = \frac{21p^{1,5}}{16q^{1,6}}$ en $q = 7,5p^2$.

Schrijf de formule van N in de vorm $N = ap^b$. Rond a af op drie decimalen.

A59

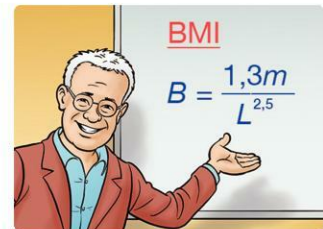

Professor Trefethen hanteert de formule $B = \frac{1,3m}{L^{2,5}}$ voor

het berekenen van de body-mass index (BMI). In deze formule is m het gewicht in kg en L de lengte in meter.

a Bereken met deze formule de BMI van iemand met een lengte van 1,75 meter en een gewicht van 80 kg. Rond af op één decimaal.

b Voor personen met een lengte van 170 cm is de formule te schrijven in de vorm $B = am$. Bereken a . Rond af op drie decimalen.

c Voor personen met een gewicht van 75 kg is de formule te schrijven in de vorm $B = bL^c$. Bereken b en c .



E60


Harry schrijft een rij getallen op. Hij begint met 1 en het tweede getal is 2. Elk getal daarna maakt hij als volgt. Hij deelt het voorlaatst opgeschreven getal door het laatst opgeschreven getal. Schrijf het 10^e getal dat hij zo krijgt als macht van 2.

Je weet $(\sqrt{10})^2 = 10$.

- Wat is $(\sqrt{x})^2$? En wat is $(\sqrt{2a})^2$?
- Druk P uit in B in de formule $B = \sqrt{0,5P}$. Kwadrateer eerst het linker- en rechterlid.

Theorie D Rekenregels voor wortels

Je weet dat het kwadraat van $\sqrt{5}$ gelijk is aan 5, dus $(\sqrt{5})^2 = 5$.

In het algemeen is $(\sqrt{A})^2 = A$.

Dit kun je gebruiken om bij $\sqrt{A} = B$ de wortel weg te werken.

Kwadrateer het linkerlid en het rechterlid. Je krijgt $\sqrt{A} = B$ geeft $A = B^2$.

$\sqrt{A} = B$ geeft $A = B^2$

Deze regel gebruik je ook om bij de formule $F = 20\sqrt{0,1G}$ de variabele G uit te drukken in F . Je krijgt

$$F = 20\sqrt{0,1G} \quad \text{Verwissel het linker- en rechterlid.}$$

$$20\sqrt{0,1G} = F \quad \text{Deel links en rechts door 20, het rechterlid wordt } \frac{1}{20}F = 0,05F.$$

$$\sqrt{0,1G} = 0,05F \quad \text{Kwadrateer het linker- en het rechterlid.}$$

$$0,1G = (0,05F)^2 \quad \text{Gebruik } (ab)^p = a^p b^p.$$

$$0,1G = 0,0025F^2 \quad \text{Deel links en rechts door 0,1 oftewel vermenigvuldig links en rechts met 10.}$$

$$G = 0,025F^2$$

$$\text{Je weet } \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6.$$

$$\text{Ook geldt } \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6.$$

$$\text{Dus } \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}. \text{ Net zo is } \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}.$$

$$\text{Je weet } \sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\text{Ook geldt } \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2.$$

$$\text{Dus } \sqrt{\frac{64}{16}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}}. \text{ Net zo is } \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

Rekenregels voor wortels

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \text{ en } \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$$

Andersom geldt ook

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

De rekenregels voor wortels kun je ook gebruiken als er letters onder het wortelteken voorkomen.

$$\text{Zo is } \sqrt{2p} \cdot \sqrt{5q} = \sqrt{2p \cdot 5q} = \sqrt{10pq}.$$

Het is mogelijk $\sqrt{10pq}$ te herleiden tot de vorm $c\sqrt{pq}$.

$$\text{Je krijgt } \sqrt{10pq} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{pq} \approx 3,16\sqrt{pq}.$$

Je ziet dat c is afgerond op twee decimalen.

Bij het herleiden van de formule $A = \sqrt{16pq}$ tot de vorm $A = c\sqrt{pq}$ hoeft je c niet af te ronden.

$$\text{Immers } A = \sqrt{16pq} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{pq} = 4\sqrt{pq}.$$

Voorbeeld

a Schrijf de formule $M = 50\sqrt{12,25t}$ in de vorm $M = a\sqrt{t}$.

b Schrijf de formule $N = 5\sqrt{2p + 3q}$ in de vorm $N = \sqrt{ap + bq}$.

c Schrijf de formule $R = 10\sqrt{\frac{k}{3,5}}$ in de vorm $k = aR^2$.

Uitwerking

a $M = 50\sqrt{12,25t} = 50 \cdot \sqrt{12,25} \cdot \sqrt{t} = 50 \cdot 3,5 \cdot \sqrt{t} = 175\sqrt{t}$

$$\text{Dus } M = 175\sqrt{t}.$$

b $N = 5\sqrt{2p + 3q} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2p + 3q} = \sqrt{25(2p + 3q)} = \sqrt{50p + 75q}$

$$\text{Dus } N = \sqrt{50p + 75q}.$$

Denk aan de haakjes.

c $R = 10\sqrt{\frac{k}{3,5}}$ **Verwissel het linker- en rechterlid.**

$$10\sqrt{\frac{k}{3,5}} = R$$

Deel links en rechts door 10.

$$\sqrt{\frac{k}{3,5}} = 0,1R$$

Kwadrateer het linker- en rechterlid.

$$\frac{k}{3,5} = 0,01R^2$$

Vermenigvuldiging het linker- en rechterlid met 3,5.

$$k = 0,035R^2$$

62 Schrijf bij de volgende formules het rechterlid als één wortel.



a $A = \sqrt{3a} \cdot \sqrt{5b}$

b $A = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3ab}$

c $A = \frac{\sqrt{10a}}{\sqrt{5}}$

d $A = \sqrt{3p} \cdot \sqrt{1,5q}$

e $A = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3x} \cdot \sqrt{12y}$

f $A = \frac{\sqrt{20xy}}{\sqrt{2y}}$

63 Schrijf de volgende formules in de vorm $A = c\sqrt{ab}$.



Rond c zo nodig af op twee decimalen.

a $A = \sqrt{5a} \cdot \sqrt{6b}$

b $A = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3ab}$

c $A = 6\sqrt{3a} \cdot \sqrt{7b}$

d $A = 4\sqrt{25ab}$

e $A = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2a} \cdot \sqrt{3b}$

f $A = \frac{\sqrt{20a^2b}}{\sqrt{10a}}$

A64 **a** Schrijf de formule $C = 0,04\sqrt{225x}$ in de vorm $C = a\sqrt{x}$.



b Schrijf de formule $D = 0,05\sqrt{420y}$ in de vorm $D = \sqrt{ay}$.

c Schrijf de formule $E = 0,8\sqrt{0,2t + 5}$ in de vorm $E = \sqrt{at + b}$.

A65 **a** Schrijf de formule $F = 25\sqrt{0,1P}$ in de vorm $P = aF^2$.



b Schrijf de formule $G = 0,05\sqrt{\frac{Q}{12,5}}$ in de vorm $Q = aG^2$.

c Maak R vrij bij de formule $H = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{3R}{14}}$.

A66
□ ⊙ *

Winkels hebben van de artikelen die ze verkopen een bepaalde voorraad. Deze voorraad moet niet te groot zijn, want dan krijg je te maken met hoge voorraadkosten. Een winkel moet dus niet te grote bestellingen in één keer doen. Ook heeft de winkel te maken met de kosten die gemoeid zijn met het doen van een bestelling: de bestelkosten. Met de *formule van Camp* is de optimale bestelhoeveelheid te berekenen voor winkels die te maken hebben met een constante vraag naar een bepaald artikel.



Deze formule is $Q = \sqrt{\frac{2Bn}{V}}$. Hierin is

- Q de optimale bestelhoeveelheid
 - B de bestelkosten in euro's, ongeacht de grootte van de bestelling
 - n het aantal verkochte artikelen per jaar
 - V de voorraadkosten in euro's per stuk per jaar.
- a** Een winkel verkoopt per jaar 2400 vazen van een bepaald model. De bestelkosten zijn 15 euro en de voorraadkosten per vaas per jaar zijn 5 cent.
- Toon aan dat de winkel twee keer per jaar een bestelling zal plaatsen.
- b** Een andere winkel verkoopt per jaar 800 droogmolens.

Schrijf voor deze winkel de formule van Camp in de vorm $Q = c\sqrt{\frac{B}{V}}$.

- c** Voor een winkel zijn de bestelkosten voor het bestellen van strijkplanken 25 euro en zijn de voorraadkosten 80 cent per strijkplank per jaar.
- De optimale bestelhoeveelheid is te schrijven in de vorm $Q = d\sqrt{n}$. Bereken d . Rond af op één decimaal.
- d** Van een artikel worden per jaar 3000 stuks verkocht. De voorraadkosten zijn 12 cent per stuk per jaar.
- Geef voor dit artikel de formule waarbij de bestelkosten zijn uitgedrukt in de optimale bestelhoeveelheid.

A67

*

Zie opgave 66.

De voorraadkosten V worden soms berekend met de formule $V = 0,01p \cdot I$. Hierin is I de inkoopprijs per stuk van een artikel en is p een percentage. Dit percentage geeft aan hoeveel procent van de inkoopprijs aan voorraadkosten wordt uitgegeven. Bij een inkoopprijs van 60 euro per stuk en een percentage van 0,5% zijn de voorraadkosten dan $0,01 \cdot 0,5 \cdot 60 = 0,3$, dus 30 cent per stuk per jaar.

Een winkel verkoopt per jaar 200 hogedrukreinigers van type A. De inkoopprijs van deze hogedrukreinigers is 160 euro per stuk en de bestelkosten per bestelling zijn 25 euro. Bij een optimale bestelhoeveelheid blijken vier bestellingen per jaar te horen.

Bereken p .

Terugblik

Rekenregels voor machten

De rekenregels voor machten zijn

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, (a^p)^q = a^{pq} \text{ en } (ab)^p = a^p b^p.$$

$$\text{Zo is } x^4 \cdot x^3 = x^7, \frac{x^{12}}{x^3} = x^9, (x^3)^4 = x^{12} \text{ en } (3x^4)^3 = 27x^{12}.$$

Let op dat $x^4 + x^3$ niet kan worden herleid.

$$\text{Dus } (4x^2)^2 + \frac{x^8}{x^5} = 16x^4 + x^3, \text{ maar } (4x^2)^2 + \frac{x^9}{x^5} = 16x^4 + x^4 = 17x^4.$$

Gebroken en negatieve exponenten

De rekenregels voor machten gelden ook voor gebroken exponenten.

Voor negatieve exponenten geldt de regel $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. Ook is $a^0 = 1$ voor $a \neq 0$.

Zo is de formule $M = 0,025 \cdot (30x^{1,6})^{1,4}$ te herleiden tot de vorm $M = ax^b$.

$$M = 0,025 \cdot (30x^{1,6})^{1,4} = 0,025 \cdot 30^{1,4} \cdot (x^{1,6})^{1,4} \approx 2,92 \cdot x^{2,24}$$

Dus de formule is $M = 2,92x^{2,24}$.

Door $y = 10x^{1,2}$ in te vullen in de formule $N = \frac{520}{y^{0,4}}$ is de formule van N te schrijven in de vorm $N = ax^b$. Je krijgt

$$N = \frac{520}{(10x^{1,2})^{0,4}} = \frac{520}{10^{0,4} \cdot x^{0,48}} = \frac{520}{10^{0,4}} \cdot x^{-0,48} \approx 207 \cdot x^{-0,48}.$$

Dus $a = 207$, $b = -0,48$ en de formule is $N = 207x^{-0,48}$.

Rekenregels voor wortels

Bij de formule $P = 25\sqrt{0,002Q}$ is de variabele Q vrij te maken door te gebruiken dat $\sqrt{A} = B$ geeft $A = B^2$. Je verwisselt eerst het linker- en het

rechterlid. Je krijgt $25\sqrt{0,002Q} = P$

$$\sqrt{0,002Q} = 0,04P$$

$$0,002Q = 0,0016P^2$$

$$Q = 0,8P^2$$

Met de rekenregels $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ en $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ zijn allerlei

herleidingen te maken.

Zo is de formule $K = 0,8\sqrt{16x}$ te herleiden tot de vorm $K = a\sqrt{x}$ en ook tot de vorm $K = \sqrt{bx}$.

$$K = 0,8\sqrt{16x} = 0,8 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} = 0,8 \cdot 4 \cdot \sqrt{x} = 3,2\sqrt{x} \text{ en}$$

$$K = 0,8\sqrt{16x} = \sqrt{0,8^2 \cdot 16x} = \sqrt{0,8^2 \cdot 16 \cdot x} = \sqrt{10,24x}$$

6.5 Formules met exponenten

O68 Gegeven is de formule $N = 50 \cdot 1,12^t$.



- Bereken N voor $t = 0$.
- Bereken N voor $t = 1$ en voor $t = 2$.
- Schets de grafiek van N . Neem t tussen 0 en 20.

O69 Je weet $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, dus ook $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$.



- Vul in $\frac{1}{4^t} = 4^{\dots}$.

Je weet $(a^p)^q = a^{pq}$, dus ook $a^{pq} = (a^p)^q$.

- Vul in $4^{-t} = (4^{\dots})^t$.
- Laat zien dat de formule $N = 15 \cdot \frac{1}{4^t}$ te schrijven is als $N = 15 \cdot 0,25^t$.

Theorie A Exponentiële groei

De formule $N = 80 \cdot 1,15^t$ hoort bij **exponentiële groei**.

Is t de tijd in jaren dan wordt de hoeveelheid elk jaar met 1,15 vermenigvuldigd, dit is de **groefactor** per jaar.

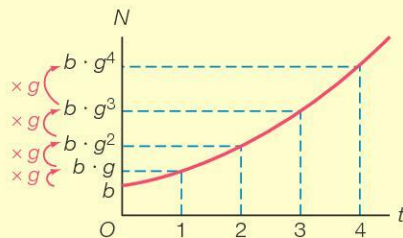
Op $t = 0$ is $N = 80 \cdot 1,15^0 = 80$, dit is de **beginwaarde** (of beginhoeveelheid).

Bij een beginwaarde b en groefactor per tijdseenheid g ontstaat de formule van exponentiële groei als volgt.

Op $t = 0$ is	$N = b$	$= b \cdot g^0$
Op $t = 1$ is	$N = b \cdot g$	$= b \cdot g^1$
Op $t = 2$ is	$N = b \cdot g \cdot g$	$= b \cdot g^2$
Op $t = 3$ is	$N = b \cdot g \cdot g \cdot g$	$= b \cdot g^3$
$\vdots$		
Op tijdstip t is	$N = b \cdot \underbrace{g \cdot g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{t \text{ keer}} = b \cdot g^t$	

Bij exponentiële groei

- wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal (de groefactor) vermenigvuldigd
- hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, waarin b de beginwaarde (of beginhoeveelheid) is en g de groefactor per tijdseenheid.



In de formule $N = 800 \cdot 1,3^t$ herken je

- de beginwaarde is 800
- de groeifactor per tijdseenheid is 1,3.

Voor $t = 5$ is $N = 800 \cdot 1,3^5 \approx 2970$.

In de formule $N = b \cdot g^t$ staat de variabele t in de exponent. Let op het verschil tussen de formule

$N = 50 \cdot t^{1,12}$ en de formule $N = 50 \cdot 1,12^t$.

De formule $N = 50 \cdot t^{1,12}$ is een machtsformule en de formule $N = 50 \cdot 1,12^t$ is een **exponentiële formule**.

Bij een exponentiële formule staat de variabele in de exponent.

De formule $M = 11 \cdot \frac{1}{2,5^t}$ is te herleiden tot $M = 11 \cdot 0,4^t$.

Daarbij worden de regels $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ en $(a^p)^q = a^{pq}$ gebruikt.

Dus $M = 11 \cdot \frac{1}{2,5^t} = 11 \cdot 2,5^{-t} = 11 \cdot 2,5^{-1 \cdot t} = 11 \cdot (2,5^{-1})^t = 11 \cdot 0,4^t$.

$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$	$-t = -1 \cdot t$	$a^{pq} = (a^p)^q$	$2,5^{-1} = 0,4$
--------------------------	-------------------	--------------------	------------------

Hiermee is de formule $M = 11 \cdot \frac{1}{2,5^t}$ geschreven in de vorm $M = b \cdot g^t$.

Dus ook de formule $M = 11 \cdot \frac{1}{2,5^t}$ is een exponentiële formule.

Voorbeeld

Schrijf de formule $P = \frac{84}{15 \cdot 0,8^t}$ in de vorm $P = b \cdot g^t$.

Uitwerking

$$P = \frac{84}{15 \cdot 0,8^t} = \frac{84}{15} \cdot 0,8^{-t} = 5,6 \cdot (0,8^{-1})^t = 5,6 \cdot 1,25^t$$

Dus $P = 5,6 \cdot 1,25^t$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $K = (85 - 2,5A + 1,6B) \cdot 0,9^A$.

Neem $A = 10$ en schrijf de formule van K in de vorm $K = aB + b$.

Rond a en b af op twee decimalen.

Uitwerking

$A = 10$ invullen in de formule van K geeft

$$K = (85 - 2,5 \cdot 10 + 1,6B) \cdot 0,9^{10}$$

$$K = (60 + 1,6B) \cdot 0,348...$$

$$K \approx 20,92 + 0,56B$$

Dus $K = 0,56B + 20,92$.

70
☐ ⊙ *

- a In het eerste voorbeeld van de vorige bladzijde is de formule

$$P = \frac{84}{15 \cdot 0,8^t} \text{ herleid tot } P = 5,6 \cdot 1,25^t.$$

Geef van de formule van P de beginwaarde en de groeifactor.

- b Zie het tweede voorbeeld op de vorige bladzijde.

Wat voor soort formule is de formule $K = 0,56B + 20,92$?

71
☐

Gegeven is de formule $N = 200 \cdot 0,86^t$.

- a Schets de grafiek van N . Neem t tussen 0 en 20.
b Hoe kun je aan de groeifactor zien dat de grafiek van N dalend is?
c Bereken voor welke t geldt dat $N = 50$. Rond af op één decimaal.

72
☐ ⊙

Gegeven zijn de formules $N = 20 \cdot 1,15^t$ en $M = 150 \cdot 0,92^t$.

- a Schets de grafieken in één figuur. Neem t tussen 0 en 20.
b Bereken voor welke t geldt dat $N = M$. Rond af op twee decimalen.
c Met hoeveel procent neemt N toe tussen $t = 0$ en $t = 3$?
Met hoeveel procent neemt M af tussen $t = 0$ en $t = 3$?

A73
☐ ⊙ *

Gegeven zijn de formules $K = 18 \cdot 1,06^t$ en $L = 95 \cdot 0,95^t$. Hierin is t de tijd in dagen met t tussen 0 en 20.

- a Met hoeveel procent neemt K toe tussen $t = 0$ en $t = 4$?
Met hoeveel procent neemt L af tussen $t = 0$ en $t = 4$?
b Op een gegeven moment is $K = 36,22$.
Hoeveel dagen duurt het dan nog totdat $K = L$? Rond af op één decimaal.

74
☐ ⊙ *

a Schrijf de formule $N = 3,2 \cdot \frac{5,6}{4 \cdot 1,25^t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$.

- b Gegeven is de formule $M = (550 + 2p + 3q) \cdot 0,88^q$.
Neem $q = 5$ en schrijf de formule van M in de vorm $M = ap + b$.
Rond a af op twee decimalen en b op gehelen.

A75
☐ ⊙ *

a Gegeven is de formule $F = 100 \left(2 + \frac{25}{12 \cdot 0,9^t} \right)$.

Schrijf de formule van F in de vorm $F = a + b \cdot g^t$. Rond b af op gehelen en g op twee decimalen.

b Gegeven is de formule $G = \frac{51}{y} (x - x \cdot 0,8^y)$.

Neem $y = 5,6$ en schrijf de formule van G in de vorm $G = ax$. Rond a af op twee decimalen.

c Gegeven is de formule $H = 5 \cdot 0,75^t - \frac{12}{5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^t}$.

De formule van H is te schrijven in de vorm $H = b \cdot 0,75^t$.
Bereken b .

E76*****

Het aantal snoeken in een meer is gegeven door een formule van de vorm

$$N = \frac{520}{1 + b \cdot g^t}.$$

Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2000.

Op 1 januari 2000 is $N = 26$ en op 1 januari 2005 is $N = 55$.

Bereken b en g en bereken hiermee in tientallen het aantal snoeken op 1 januari 2020.



Terugblik

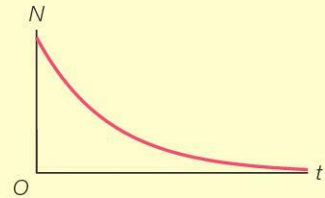
De formule $N = b \cdot g^t$

De formule $N = b \cdot g^t$ hoort bij exponentiële groei. De beginwaarde is b en de groeifactor per tijdseenheid is g .

Je kunt de formule $N = 150 \cdot \frac{20}{3 \cdot 1,2^t}$ herleiden tot de vorm $N = b \cdot g^t$.

Je krijgt $N = 150 \cdot \frac{20}{3 \cdot 1,2^t} = \frac{150 \cdot 20}{3} \cdot 1,2^{-t} = 1000 \cdot (1,2^{-1})^t \approx 1000 \cdot 0,83^t$,

dus $N = 1000 \cdot 0,83^t$. In deze formule is de beginwaarde 1000 en de groeifactor 0,83. Hiernaast is de grafiek van N getekend.



Herleiden van formules met exponenten

Neem je voor m een getal in de formule $T = \frac{60}{m}(10n - n \cdot 1,14^m)$ dan is de formule van T te herleiden tot de vorm $T = an$.

Neem je $m = 16$, dan krijg je

$$T = \frac{60}{16}(10n - n \cdot 1,14^{16}) = 3,75(10n - n \cdot 8,137...) = 3,75 \cdot 1,862...n \approx 6,99n,$$

dus $T = 6,99n$.

De formule $Z = 2 \cdot 2,5^t + \frac{60}{0,4^t}$ is te herleiden tot de vorm $Z = b \cdot g^t$.

Dat gaat als volgt.

$$Z = 2 \cdot 2,5^t + \frac{60}{0,4^t}$$

$$Z = 2 \cdot 2,5^t + 60 \cdot 0,4^{-t}$$

$$Z = 2 \cdot 2,5^t + 60 \cdot (0,4^{-1})^t$$

$$Z = 2 \cdot 2,5^t + 60 \cdot 2,5^t$$

$$Z = 62 \cdot 2,5^t$$

Eindopdracht Het elandjong

In de beginopdracht heb je gerekend met de formules $E_{\text{basis}} = 140W^{0,75}$ en $E_{\text{beschikbaar}} = 2200\sqrt{W} - 40W - 11\,500$.

Hierin is E_{basis} het aantal kcal per dag dat een eland van W kg nodig heeft om op gewicht te blijven. $E_{\text{beschikbaar}}$ is het aantal kcal per dag dat een eland van W kg meer aan energie binnenkrijgt dan dat het zoeken naar voedsel kost.

In de beginopdracht heb je gezien dat er een snijpunt van de grafieken is tussen $W = 50$ en $W = 100$. Met de formules kun je nagaan dat er ook nog een snijpunt is tussen $W = 600$ en $W = 700$.

- Bereken welke gewichten bij deze snijpunten horen. Wat betekent het voor een eland als zijn gewicht rechts van het tweede snijpunt ligt?

Bij het optimale gewicht van een eland is $E_{\text{beschikbaar}} - E_{\text{basis}}$ maximaal.

- Bereken met behulp van de formules wat het optimale gewicht van een eland is.

Hoeveel kcal per dag houdt de eland dan over voor andere activiteiten dan het zoeken naar voedsel?

Een elandjong is na de geboorte afhankelijk van moedermelk. Deze afhankelijkheid duurt totdat een gewicht is bereikt waarop het kalf zelf voor zijn voedsel kan zorgen. Een kalf werd op 1 juni geboren en woog bij de geboorte 14 kg. De eerste maand geldt een dagelijkse groeifactor van 1,03 voor het gewicht en daarna neemt het gewicht met 1 kg per dag toe.



- Onderzoek vanaf welke datum het kalf kan ophouden met drinken bij de moeder en zelfstandig voor zijn voedsel kan zorgen.

De biologen die de formules voor E_{basis} en $E_{\text{beschikbaar}}$ hebben opgesteld, zoeken naar een eenvoudige formule voor $V = E_{\text{beschikbaar}} - E_{\text{basis}}$. Volgens één van de biologen voldoet de formule $V_{\text{kcal}} = -0,05W^2 + 30W$ voor waarden van W tussen 100 en 500.

- Ben je het met deze bioloog eens? Licht je antwoord toe met enkele berekeningen.

De bioloog wil de formule $V_{\text{kcal}} = -0,05W^2 + 30W$ zo schrijven dat de energie in kJ wordt gegeven. Deze formule is van de vorm

$$V_{\text{kJ}} = aW^2 + bW.$$

- Bereken a en b . Gebruik dat $V_{\text{kJ}} = 4,19V_{\text{kcal}}$.

Diagnostische toets

6.1 Formules combineren en herleiden

- 1** **a** Gegeven zijn de formules $R = 3p - q + 2$ en $q = p + 2$.
Combineer deze formules en druk R uit in p .
- b** Gegeven zijn de formules $A = 2kl + 3$ en $k = l + 2$.
Schrijf de formule van A in de vorm $A = al^2 + bl + c$.
- c** De formules $K = 0,06pq + 1,25$ en $2p + 4q = 11$ zijn te combineren tot de vorm $K = aq^2 + bq + c$.
Bereken a , b en c .

- 2** Bij lage temperaturen kan onbedekte huid van een mens bevriezen. Dit verschijnsel wordt frostbite genoemd. Hierbij gebruikt men de formule $F = (2000 - 16,3v)(-5 - T)^{-1,668}$. Hierin is F het aantal minuten dat een mens met onbedekte huid buiten kan zijn voordat de huid bevroert, v de windsnelheid in km/uur en T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$.
Schrijf de formule van F in de vorm $F = av + b$ voor een dag waarop de temperatuur -12°C is. Rond a en b af op twee decimalen.
Van welk verband is sprake bij deze formule?

6.2 Formules en de grafische rekenmachine

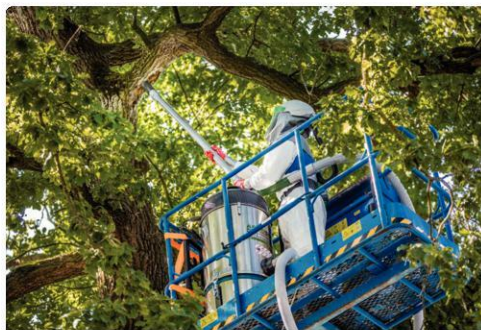
- 3** Voor het dagelijks verloop van het aantal auto's in de parkeergarage van een groot winkelcentrum is de formule $N = -0,36t^4 + 13,8t^3 - 176t^2 + 790t$ opgesteld. Hierin is N het aantal auto's en t de tijd in uren met $t = 0$ om 6:00 uur.
- a** Schets de grafiek van N .
- b** Bereken het aantal auto's dat om 21:00 uur in de parkeergarage staat.
- c** Bereken het aantal auto's bij elk maximum.
- d** Vanaf 9:00 uur is het aantal auto's zo groot, dat het lastig is een vrije plek te vinden.
Bereken tot welk tijdstip deze drukte aanhoudt. Rond af op minuten.
- e** Meneer Van den Berg wil het winkelcentrum tijdens de middag bezoeken. Hij wil graag dat er dan veel parkeerruimte is.
Wat is op basis van de formule het gunstigste tijdstip? Rond af op halve uren.

6.3 Formules met breuken

- 4** Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.

a $A = \frac{4}{3x} + \frac{1}{x}$	c $C = \frac{8}{9x} \cdot \frac{3}{4x}$
b $B = \frac{2}{x} - \frac{4}{y}$	d $D = \frac{5}{6x} : 1\frac{1}{3}$

- 5** Van de T bomen in een gemeente zijn er p besmet met processierupsen. Het gedeelte van de besmette bomen is dus $\frac{p}{T}$. Van deze bomen is driekwart bekend bij de gemeente en daarvan is de helft gemarkeerd met lint. Het gedeelte gemarkeerde bomen M wordt gegeven door $M = \frac{3p}{8T}$.



- Laat zien dat deze formule klopt.
- De gemeente gaat ervan uit dat geldt $p = \frac{2}{3}T$. Bereken welk deel van de bomen in de gemeente gemarkeerd is.

6.4 Rekenen met machten en wortels

- 6** Combineer de formules en druk K uit in q .

- | | |
|--|--|
| a $K = p^2 + 5q^6$ en $p = -5q^3$ | c $K = 10p^{1,5}q^{-1,5}$ en $p = 9q^3$ |
| b $K = \frac{p^{0,6}}{8q^{0,1}}$ en $p = 32q^{0,4}$ | d $K = (4p)^{2,5}$ en $p = \frac{1}{q^{0,4}}$ |

- 7**
- Schrijf de formule $A = 0,1\sqrt{64x}$ in de vorm $A = a\sqrt{x}$.
 - Schrijf de formule $B = 2\sqrt{0,5y - 1,5}$ in de vorm $B = \sqrt{ay + b}$.
 - Schrijf de formule $C = 0,4\sqrt{\frac{t}{2,4}}$ in de vorm $t = aC^2$.
 - Maak q vrij bij $D = \frac{\sqrt{20q^{2,2}}}{\sqrt{5q^{0,2}}}$.

6.5 Formules met exponenten

- 8** Gegeven is de formule $N = \frac{\sqrt{1,5A}}{1,6^B}$.

- Neem $A = 6$ en schrijf de formule in de vorm $N = a \cdot g^B$.
- Neem $B = -1$ en schrijf de formule in de vorm $N = c\sqrt{A}$. Rond c af op twee decimalen.
- Voor $N = 1$ en $A = 24$ is de waarde van B ongeveer 3,8. Bereken de waarde van B . Rond af op twee decimalen.

7

Statistiek en beslissingen

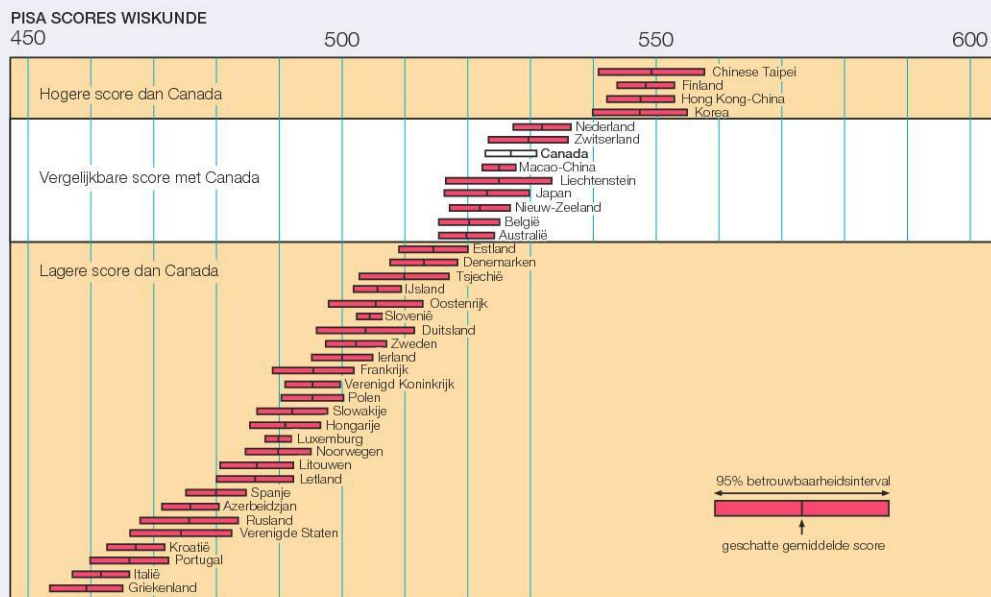
Wat leer je?

- Verschillende soorten verdelingen herkennen en vergelijken.
- Wat de normale verdeling is en welke vuistregels erbij horen.
- Rekenen aan de steekproevenverdelingen bij een gemiddelde of proportie
- Wat een betrouwbaarheidsinterval bij een gemiddelde of proportie is.
- Wanneer je welk type betrouwbaarheidsinterval gebruikt.
- Betrouwbaarheidsintervallen toepassen.



Beginopdracht PISA Canada

Het Programme for International Student Assessment (PISA) is een groot internationaal vergelijkend onderzoek onder scholieren naar hun kennis en vaardigheid op het gebied van taal, wiskunde en wetenschap. Om de drie jaar wordt in een groot aantal landen een representatieve steekproef genomen van 15-jarigen. Bij het onderzoek wordt gebruik gemaakt van een zogenaamde PISA-score die aan een hoger beheersingsniveau een hogere score toekent.



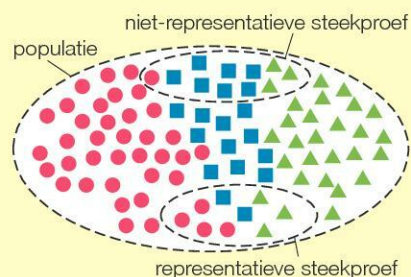
In de figuur zie je de PISA-scores voor wiskunde, gezien vanuit het perspectief van Canada. De gemiddelde score voor wiskunde van scholieren in de steekproef van Ierland was 500.

- Waarom is het interval $[495, 505]$ gebruikt om de score voor alle Ierse 15-jarigen scholieren (de populatie) weer te geven?
- Je ziet dat niet alle intervallen even breed zijn. Geef van de volgende factoren aan of ze van invloed zijn op de breedte van de intervallen: het gemiddelde, de standaardafwijking, de steekproefomvang.
- In het diagram staat een aantal landen met een score vergelijkbaar met die van Canada.
Onderzoek hoe deze groep tot stand is gekomen.
- Nederland en België scoorden vergelijkbaar met Canada.
Wil dat zeggen dat de scores van Nederland en België ook vergelijkbaar waren? Licht toe.

Voorkennis Steekproeven, centrummaten en spreidingsmaten

Theorie A Proporties bij steekproeven

De totale groep waarop een onderzoek zich richt heet de populatie. Het onderzoeken van de hele populatie lukt in veel gevallen niet, bijvoorbeeld omdat het veel werk is. Het deel van de populatie dat je daadwerkelijk onderzoekt, heet de steekproef. Het is belangrijk dat een steekproef een goede afspiegeling is van de populatie. Een steekproef heet dan representatief.



figuur 7.1

De populatieproportie is het deel van de populatie dat een bepaalde eigenschap heeft. De steekproefproportie is het deel van de steekproef dat deze eigenschap heeft. Door een representatieve steekproef te gebruiken zal de steekproefproportie meestal dichtbij de populatieproportie liggen.

De populatieproportie p van een kenmerk in de populatie is

$$p = \frac{\text{aantal elementen met het kenmerk in de populatie}}{\text{totaal aantal elementen in de populatie}}.$$

De steekproefproportie $\hat{p}$ van een kenmerk in de steekproef is

$$\hat{p} = \frac{\text{aantal elementen met het kenmerk in de steekproef}}{\text{totaal aantal elementen in de steekproef}}.$$

Soms wordt het dakje op de p bij de steekproefproportie weggelaten. Het is dan belangrijk dat je zelf goed kunt inschatten of je met p of $\hat{p}$ te maken hebt.

1 De dagproductie literpakken vruchtensap in een fabriek is 20 000. Hiervan hebben 165 pakken te weinig inhoud. In een steekproef worden 250 pakken van de dagproductie onderzocht op de inhoud. Hiervan blijken er 2 te weinig inhoud te hebben. Bereken de populatieproportie en de steekproefproportie van literpakken vruchtensap met te weinig inhoud.

2 Van de sporters die deelnemen aan een groot sportevenement is de populatieproportie van het kenmerk 'de sporter heeft bloedgroep B' gelijk aan 0,225. Het blijkt namelijk dat 639 sporters bloedgroep B hebben. Bij een steekproef van 115 sporters tijdens dit evenement blijkt de steekproefproportie bij het kenmerk 'heeft bloedgroep B' 0,235 te zijn. Bereken het totale aantal sporters op dit sportevenement en het aantal sporters met bloedgroep B in de steekproef.

Theorie B Centrummaten en spreidingsmaten

Het geheel van alle data is vaak onoverzichtelijk. Om een beeld te krijgen helpt een tabel of diagram. Je kunt ook centrum- en spreidingsmaten berekenen.

Een centrummaat kwantificeert waar het centrum van de data ligt. Spreidingsmaten kwantificeren hoe sterk de data verspreid is.

Voorbeelden van centrummaten zijn gemiddelde, modus en mediaan.

Voorbeelden van spreidingsmaten zijn spreidingsbreedte, interkwartielafstand en standaardafwijking.

Kwantificeren betekent uitdrukken in een getal.

Voor de standaardafwijking wordt het symbool σ , spreek uit sigma, gebruikt.

- 3** Voor een practicum biologie moet Rianne slakken tellen in een volkstuintje. Ze verdeelt het tuintje in stukken van één vierkante meter. Het resultaat staat in de tabel.

SLAKKEN IN VOLKSTUINTJE

aantal per m ²	2	3	4	5	6	7
frequentie	18	16	5	7	3	2

- a Hoeveel m² heeft Rianne onderzocht?
- b Hoeveel slakken heeft Rianne in totaal geteld?

Bij het teruglezen van haar notities ontdekt Rianne dat één van de metingen van 7 slakken per m² eigenlijk 1 slak per m² had moeten zijn.

- c Verandert hierdoor het gemiddelde? Hoe zit dat bij de modus en de mediaan?

Rianne onderzoekt nog één vierkante meter extra en ontdekt acht slakken.

- d Zal de standaardafwijking hierdoor toenemen? Licht toe.

De standaardafwijking σ geeft een indruk van de gemiddelde afwijking van de waarnemingsgetallen ten opzichte van het gemiddelde.

- 4** Zie de boxplot hieronder.



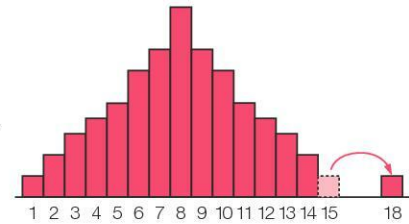
figuur 7.2

- a Welke centrum- en spreidingsmaten kun je aflezen in deze boxplot?
- b Hoeveel procent van de waarnemingsgetallen ligt tussen 2 en 4?

7.1 Statistische verdelingen



In figuur 7.3 zie je een histogram waarbij het staafje bij 15 wordt verplaatst naar 18. Welk effect heeft deze verandering op de modus, de mediaan en het gemiddelde? Kies uit: neemt toe, blijft gelijk of neemt af. Licht je antwoorden toe.



figuur 7.3

Theorie A Standaardverdelingen

In een histogram is de verdeling van de data goed te zien. We onderscheiden een aantal standaardverdelingen.

Een **symmetrische verdeling**.

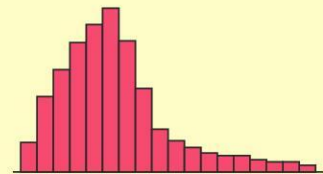
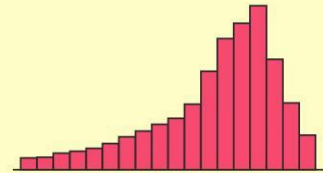
Het gemiddelde, de modus en de mediaan zijn gelijk.



Een **scheve verdeling**.

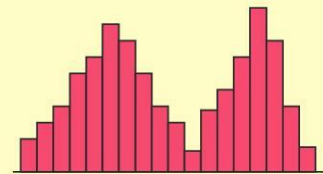
Hierin is de data aan één kant meer verspreid. Dit heet ook wel de **staart van de verdeling**. Bij een **rechts-scheve verdeling** ligt de staart rechts en bij een **links-scheve verdeling** links. In het algemeen ligt het gemiddelde meer richting de staart van de verdeling dan de mediaan.

De mediaan geeft hierdoor een beter beeld van het centrum van de verdeling dan het gemiddelde.



Een **meertoppige verdeling**.

Hierbij zijn meerdere toppen binnen de data te onderscheiden. De standaardafwijking is relatief groot.



Een **uniforme verdeling**.

Elk waarnemingsgetal heeft dezelfde frequentie.

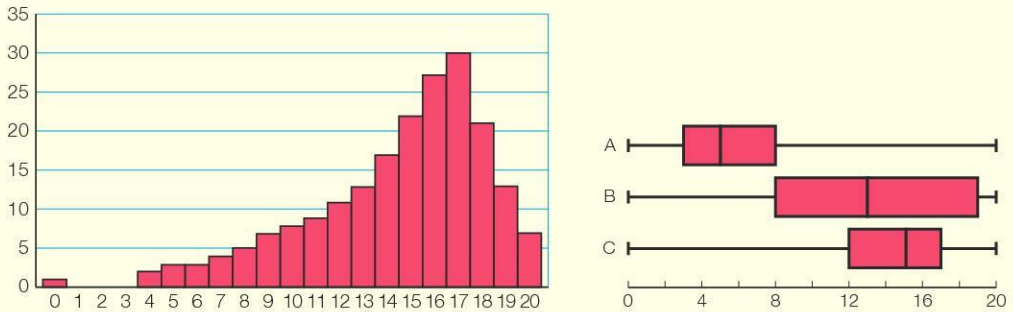


De links-scheve verdeling in het voorbeeld op de volgende bladzijde bevat een uitzonderlijk laag waarnemingsgetal.

Een waarnemingsgetal dat opvallend afwijkt van de rest van de verdeling wordt een **uitschieter** of **uitbijter** genoemd.

Voorbeeld

Zie figuur 7.4. Eén van de boxplots hoort bij het histogram.
Onderzoek welke boxplot dat is.



figuur 7.4

Uitwerking

Boxplot A kan niet kloppen, omdat in het histogram tussen 8 en 20 meer dan 25% van de data ligt.

Boxplot B kan niet kloppen, omdat in het histogram tussen 19 en 20 minder dan 25% van de data ligt.

Dus boxplot C hoort bij het histogram.

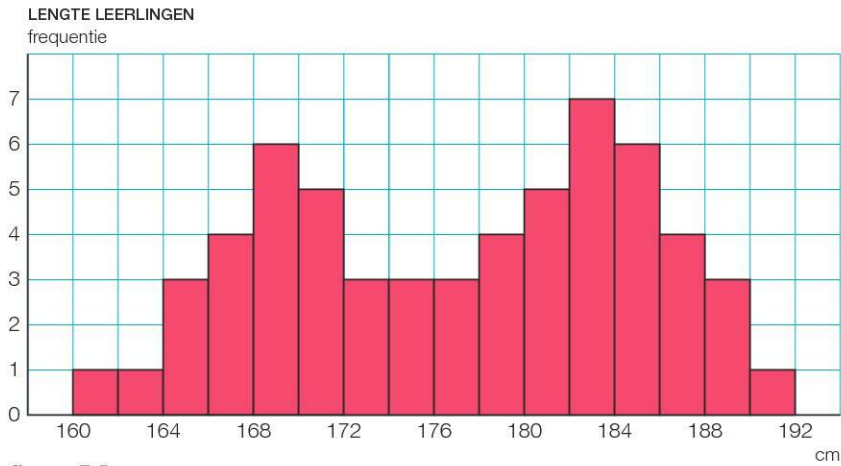


2 Noem bij elk van onderstaande situaties een mogelijke verdeling.

- a Het IQ van Nederlandse 20-jarigen.
- b Het jaarinkomen van Nederlandse werknemers.
- c Het gewicht van sinaasappels bij een kraam op de markt.
- d De zwangerschapsduur van Nederlandse vrouwen.
- e Het gewicht van volwassen zeeleeuwen.

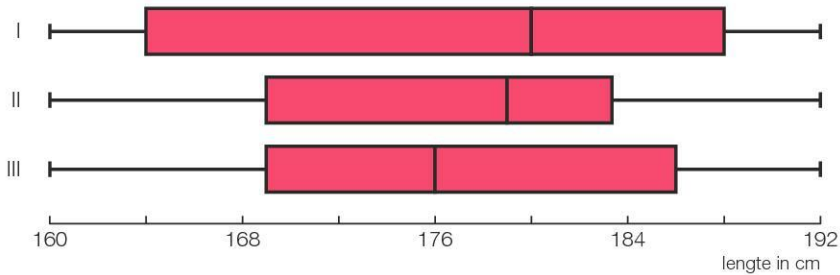


Zie figuur 7.5 met de verdeling van de lengten van 59 leerlingen.
 De eerste klasse is $[160, 162)$.



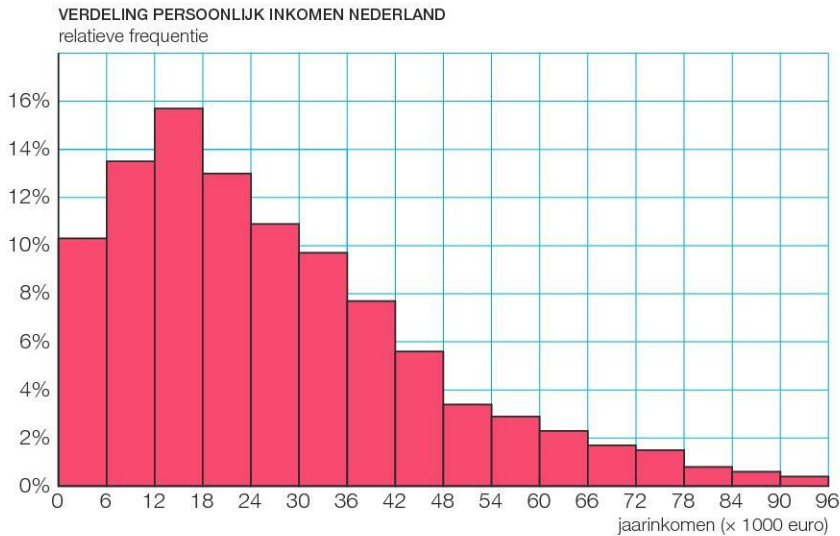
figuur 7.5

- Er zijn twee toppen in het histogram. Geef hiervoor een mogelijke verklaring.
- Geef de modale klasse.
- Volgens Bram is het gemiddelde 176 cm en de standaardafwijking 8 cm.
 Zou dat kunnen kloppen? Licht toe.
- In de figuur hieronder zie je drie boxplots.
 Welke van de drie past het beste bij figuur 7.5? Licht toe.



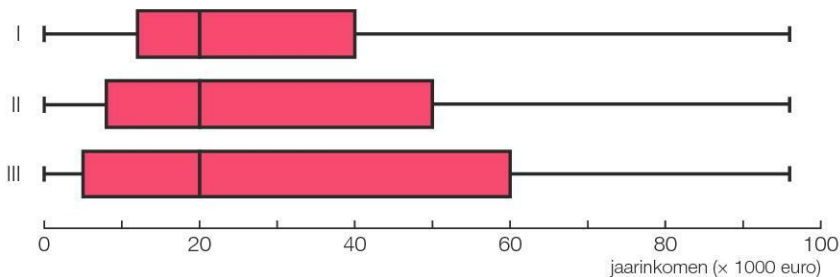
figuur 7.6

In figuur 7.7 zie je een gedeelte van de verdeling van het persoonlijk inkomen in Nederland.



figuur 7.7

- In de krant staat dat het doorsnee inkomen ongeveer 26 700 euro is. Onderzoek met behulp van de figuur of dit de mediaan of het gemiddelde is.
- Een journalist wil met het gemiddelde of de mediaan een beeld geven van wat in Nederland een gangbaar inkomen is. Welke van de twee centrummaten geeft een beter beeld? Licht toe.
- Joost beweert dat als iedereen hetzelfde inkomen zou hebben, alle staven in figuur 7.7 even hoog zouden zijn. Dus dat je in dat geval met een uniforme verdeling te maken hebt. Heeft Joost gelijk? Licht toe.
- In de figuur hieronder zie je drie boxplots. Welke van de drie past het beste bij figuur 7.7? Licht toe.



figuur 7.8

A5
📊

In figuur 7.9 zijn vier boxplots getekend. Deze horen bij de verdelingen I, II, III en IV.

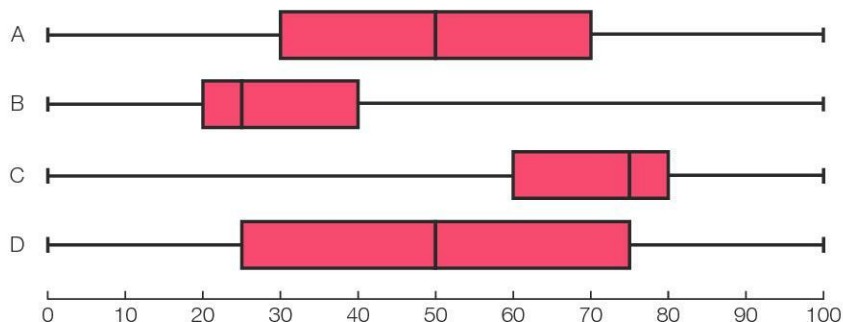
Welke boxplot hoort bij welke verdeling?

I De verdeling is uniform.

II De verdeling is tweetoppig, de eerste top zit bij 30 en de tweede top bij 70.

III De verdeling is rechts-scheef.

IV De verdeling is links-scheef.



figuur 7.9

E6
*

Lees het informatief.

INFORMATIEF

Uitschieters

Waarnemingsgetallen die opvallend afwijken van de rest van de verdeling worden uitschieters of uitbijters genoemd. In het Engels spreekt men van *outliers*. Soms worden uitschieters in de onderzoeksresultaten meegenomen en soms worden ze juist weggelaten, omdat ze bijvoorbeeld het gevolg zijn van een meetfout. Er bestaan verschillende methoden, om te bepalen wanneer een waarnemingsgetal opvallend afwijkt. Een veelgebruikte afspraak is:

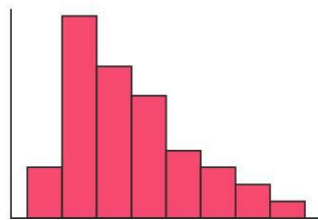
Een uitschieter is een waarnemingsgetal dat meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand onder het eerste of boven het derde kwartiel ligt.

Bij het analyseren van de data moet een onderzoeker beslissen hoe om te gaan met uitschieters. Bij een boxplot worden uitschieters soms als losse punten buiten de boxplot aangegeven.

Onderzoek of in het voorbeeld op bladzijde 90 volgens bovenstaande afspraak inderdaad een uitschieter voorkwam.



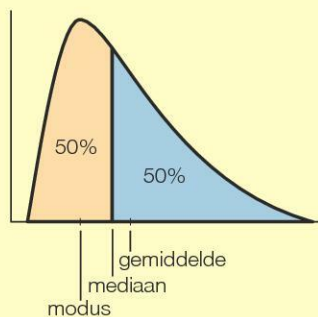
07 Zie het histogram in figuur 7.10.
Is de modus groter of kleiner dan de mediaan? Licht toe.



figuur 7.10

Theorie B Verdelingskrommen

Een histogram geeft een goed beeld van een frequentieverdeling. Maar in plaats van een histogram te tekenen kun je ook een globale grafiek van de verdeling schetsen. Zo'n grafiek heet een **verdelingskromme**. Zo hoort bij het histogram in figuur 7.10 de verdelingskromme hiernaast. Ook hier ligt de modus bij de top. De verticale lijn bij de mediaan verdeelt de oppervlakte onder de kromme in twee gebieden met gelijke oppervlakte. De mediaan is hier dus groter dan de modus. Omdat de verdeling rechts-scheef is, is het gemiddelde groter dan de mediaan.



figuur 7.11

Ook een **cumulatieve verdelingskromme** geeft een beeld van een verdeling. Is een verdelingskromme gegeven dan kun je daarbij een schets maken van de cumulatieve verdelingskromme en andersom.

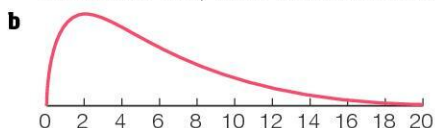
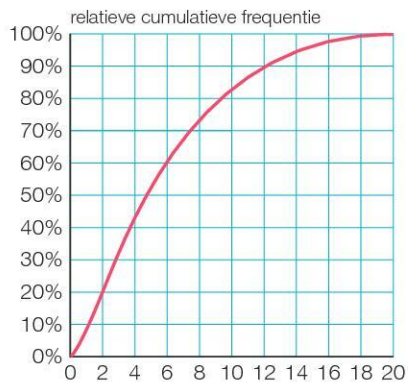
Voorbeeld

Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme in figuur 7.12.

- a** Licht toe dat je te maken hebt met een rechts-scheve verdeling met een top bij 2.
- b** Schets de bijbehorende verdelingskromme. Neem de horizontale as van 0 tot 20.

Uitwerking

- a** In het begin is de kromme erg steil, dus zijn daar veel waarnemingsgetallen. Op het eind is de kromme minder steil, dus daar zijn weinig waarnemingsgetallen. Dus het is een rechts-scheve verdeling.
De modus is 2, want de kromme is daar het steilst.



figuur 7.12



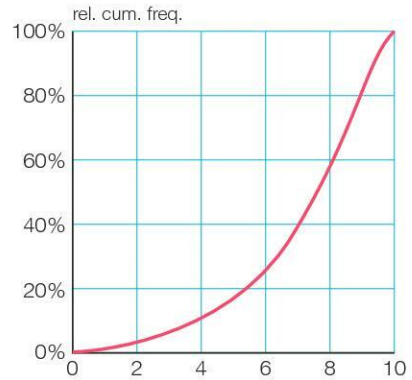
Zie het voorbeeld.

- a Geef een schatting van de mediaan met behulp van de relatieve cumulatieve verdelingskromme.
- b Licht toe dat bij het steilste stuk van de relatieve cumulatieve verdelingskromme de modus hoort.

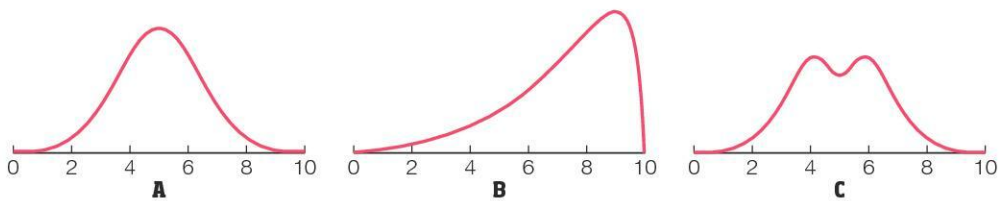


Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme in figuur 7.13.

Welke van de onderstaande verdelingskrommen hoort hierbij? Licht toe.



figuur 7.13

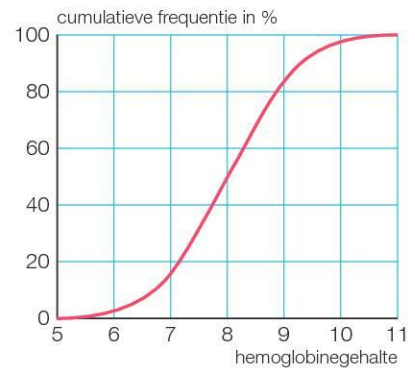


figuur 7.14



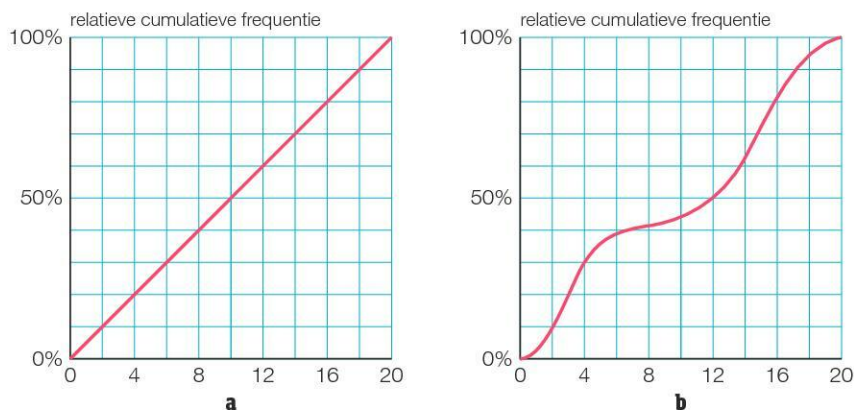
Bij een medisch onderzoek is het hemoglobinegehalte van een grote groep Nederlandse mannen gemeten. Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme in figuur 7.15.

- a Met welke soort verdeling heb je te maken? Licht toe.
- b Schets de bijbehorende verdelingskromme. Neem op de horizontale as de getallen 5, 6, 7, 8, 9, 10 en 11.
- c Schat het gemiddeld hemoglobinegehalte van de onderzochte groep.



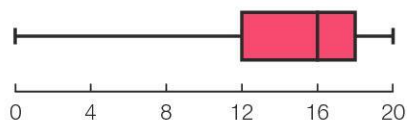
figuur 7.15

- 11** Zie de relatieve cumulatieve verdelingskrommen hieronder.
 Met welke soorten verdelingen heb je te maken? Licht toe.



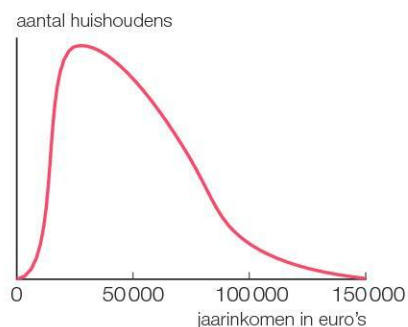
figuur 7.16

- 12** Gegeven is de boxplot in figuur 7.17.
 a Met welke soort verdeling heb je te maken? Licht toe.
 b Hoe ligt het gemiddelde ten opzichte van de mediaan?



figuur 7.17

- A13** De verdelingskromme in figuur 7.18 geeft informatie over de verdeling van de jaarinkomens van huishoudens van een groot aantal gemeentes.
 a Zet op volgorde van klein naar groot: mediaan, modus en gemiddelde. Licht toe.
 b Schets de relatieve cumulatieve verdelingskromme. Neem op de horizontale as de getallen 0, 50 000, 100 000 en 150 000.



figuur 7.18

GESCHIEDENIS

Karl Pearson (1857-1936)

Pearson was een wetenschapper die in Londen werd geboren. Hij studeerde wiskunde op King's College in Cambridge en werkte op verschillende Duitse universiteiten. Bij zijn geboorte kreeg hij de naam Carl, die hij in Duitsland besloot te veranderen naar Karl. Karl Pearson leverde een aantal grote bijdragen aan het onderwerp statistiek, zoals bijvoorbeeld de introductie van het histogram en een manier om de correlatie (samenhang) van twee variabelen te kwantificeren: de Pearson correlatiecoëfficiënt. Ook komt de term standaardafwijking van Pearson. In 1882 werd zijn boek *The Grammar of Science* gepubliceerd, dat van invloed was op Einstein bij het ontwikkelen van diens relativiteitstheorieën.

E14

*

De beroemde statisticus Karl Pearson (zie het kader op de vorige bladzijde) gebruikte de formule $s = \frac{\text{gemiddelde} - \text{modus}}{\text{standaardafwijking}}$ om de

scheefheid van een verdeling te kwantificeren. Uit de waarde van s blijkt of de verdeling links-scheef of rechts-scheef is, en ook hoe sterk deze afwijkt van een symmetrische verdeling.

a Is bij een rechts-scheve verdeling s positief of negatief? Licht toe.

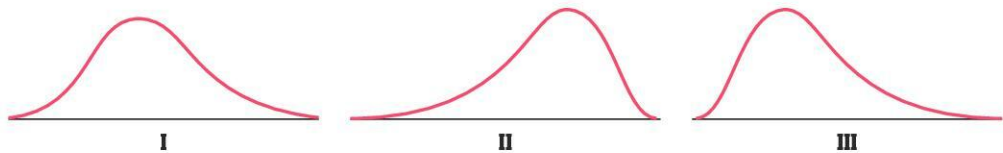
Bij een voetbaltoernooi dat twee dagen duurt, wordt bijgehouden hoeveel doelpunten per wedstrijd worden gescoord. Zie de tabel.

doelpunten	0	1	2	3	4	5	6
frequentie dag 1	4	5	3	2	2	1	1
frequentie dag 2	2	3	5	4	2	1	0

De standaardafwijking is 1,76 op de eerste dag en 1,35 op de tweede dag.

- b** Teken voor beide dagen een histogram. Op welke dag wijkt de verdeling het meest af van een symmetrische verdeling?
- c** Bereken s voor beide dagen. Rond af op twee decimalen. Hoe zie je aan s hoe sterk de verdeling afwijkt van een symmetrische verdeling?

Hieronder zijn drie verdelingskrommen getekend.



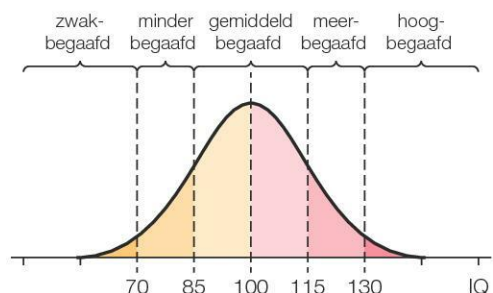
figuur 7.19

- d** Bij welke kromme hoort een negatieve waarde van s ? En bij welke kromme hoort de grootste positieve waarde van s ?

015

Het intelligentiequotiënt (IQ) is een maat voor intelligentie. Het IQ heeft een symmetrische verdeling zoals in figuur 7.20. Van de 17,3 miljoen Nederlanders zijn er 11,8 miljoen gemiddeld begaafd.

- a** Welk percentage Nederlanders is gemiddeld begaafd?
- b** Er zijn in Nederland 2,3 miljoen ‘meer-begaafden’. Welk percentage Nederlanders is hoogbegaafd?



figuur 7.20

Theorie C De normale verdeling

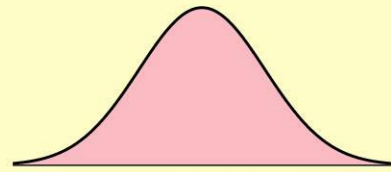
In figuur 7.21 is de verdelingskromme bij een bijzondere symmetrische verdeling getekend. Deze klokvormige kromme heet de **normaalkromme** en hoort bij de **normale verdeling**.

Normale verdelingen komen veel voor in het dagelijks leven.

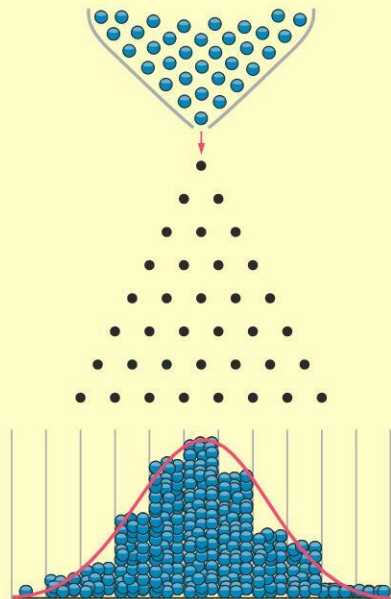
In veel situaties waarbij afwijkingen van het gemiddelde willekeurig optreden is het resultaat een normale verdeling. Dit verrassende resultaat kun je demonstreren met het *bord van Galton*, waarbij een groot aantal balletjes op onderliggende pinnetjes valt en steeds willekeurig naar links of rechts stuitert. Elk balletje neemt een onvoorspelbare route, maar het resultaat van alle balletjes samen is toch steeds goed te voorspellen met de normale verdeling.

De normale verdeling past bijvoorbeeld goed bij de verdeling van

- de lengte van Nederlandse 20-jarige mannen
- het aantal branduren van een bepaald type lamp
- de gewichten van kilopakken koffie.



figuur 7.21 De normaalkromme



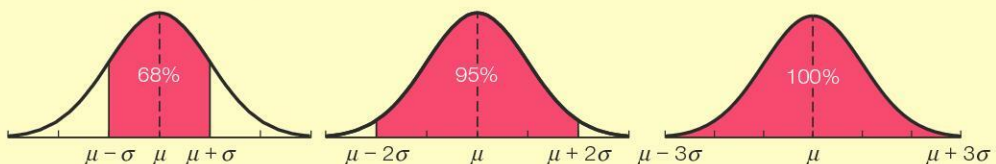
figuur 7.22

Bij de normale verdeling wordt het gemiddelde aangegeven met de Griekse letter μ . Spreek μ uit als mu. Voor de standaardafwijking gebruiken we de Griekse letter σ .

De totale oppervlakte onder de kromme is 100%.

Bij de normale verdeling ligt ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen minder dan σ van μ af. En ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt minder dan 2σ van μ af. En bijna 100% ligt minder dan 3σ van μ af.

gemiddelde μ
standaardafwijking σ

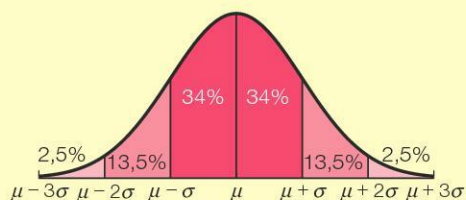


figuur 7.23

Uit de symmetrie van de normaalkromme volgen de percentages in de verschillende gebieden in figuur 7.24. Onthoud deze percentages.

Vuistregels bij de normale verdeling

- ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$
- bijna 100% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$



figuur 7.24

Bij berekeningen met de vuistregels mag je de woorden ongeveer en bijna weglaten.

Voorbeeld

Van 600 baby's is gegeven dat het geboortegewicht normaal verdeeld is. Het gemiddelde $\mu = 3500$ gram en de standaardafwijking $\sigma = 450$ gram.

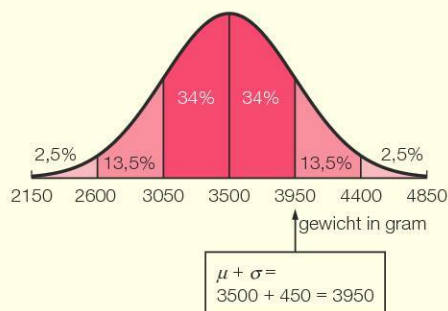
- Van hoeveel procent van de baby's is het geboortegewicht meer dan 4400 gram?
- Hoeveel baby's hebben een geboortegewicht tussen 2600 gram en 3950 gram?
- Van hoeveel baby's wijkt het geboortegewicht meer dan 900 gram van het gemiddelde af?

Aanpak

Schets een normaalkromme en zet getallen bij de horizontale as.

Uitwerking

- Zie de schets. Dus 2,5%.
- $13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$, dus $0,815 \cdot 600 = 489$ baby's.
- 900 gram is 2σ , dus van $2,5\% + 2,5\% = 5\%$ en dat zijn $0,05 \cdot 600 = 30$ baby's.



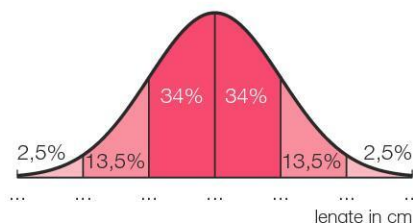
16

Van een groep volwassen vrouwen is de lengte normaal verdeeld met $\mu = 170$ cm en $\sigma = 5$ cm.

- Neem figuur 7.25 over en zet onder de horizontale as de juiste getallen.

Van hoeveel procent van de vrouwen is de lengte

- tussen 165 en 180 cm
- minder dan 160 cm
- meer dan 175 cm
- tussen 160 en 170 cm?



figuur 7.25

17
☐ ⊙ *

Van 200 konijnen is het gewicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 2,1 kg en een standaardafwijking van 0,3 kg.

- a Hoeveel procent van de konijnen is zwaarder dan 2,7 kg?
- b Wat is de proportie konijnen met een gewicht tussen 1,5 en 2,4 kg?
- c Bereken het aantal konijnen dat lichter is dan 1,8 kg.
- d Wat weet je van de gewichten van de vijf lichtste konijnen van deze groep?

A18
☐ ⊙ *

Van 5000 appels is het gewicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 180 gram en een standaardafwijking van 11 gram.

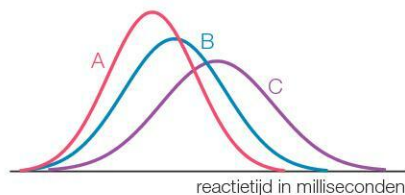
- a Hoeveel appels wegen tussen 158 en 191 gram?
- b Hoeveel appels zijn lichter dan 191 gram?
- c Wat weet je van de gewichten van de zwaarste 125 appels?

A19
☐ ⊙ *

Bij drie grote groepen mannen wordt van elke man de reactietijd gemeten.

De eerste groep bestaat uit 18-jarigen, de tweede uit 30-jarigen en de derde uit 60-jarigen.

- a Welke kromme hoort bij de 18-jarigen? En welke bij de 60-jarigen?
Licht je antwoord toe.
- b De groep 18-jarigen heeft een gemiddelde reactietijd van 420 ms. Bijna alle 18-jarigen en 30-jarigen hebben reactietijden vanaf 210 ms, maar de standaardafwijking van de 30-jarigen is 10% groter dan die van de 18-jarigen. Bereken de gemiddelde reactietijd van 30-jarige mannen.



figuur 7.26

INFORMATIEF

De normale verdeling

Veel beroemde geleerden hebben zich beziggehouden met de normale verdeling. Omstreeks 1730 gebruikte de Fransman Abraham de Moivre (1667-1754) als eerste de normale verdeling. Hij ontdekte dat vele kleine toevalligheden in de natuur merkwaardig genoeg tot mooie regelmatige verdelingen kunnen leiden. Ook de veelzijdige geleerde Gauss (1777-1855) werd gefascineerd door de normaalkromme en hij slaagde erin de formule op te stellen bij de kromme. Vandaar dat ook de naam Gauss-kromme gebruikt wordt.

De Belg Adolphe Quetelet (1796-1874) ontdekte dat normaalkrommen goed gebruikt kunnen worden om menselijke kenmerken zoals lichaamslengte en voetlengte te beschrijven.



Carl Friedrich Gauss

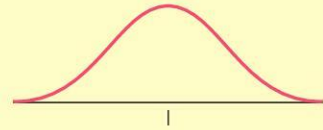
Terugblik

Verdelingen en centrummaten

In de figuren hiernaast zie je voorbeelden van verdelingskrommen bij de volgende soorten verdelingen.

I symmetrische verdeling

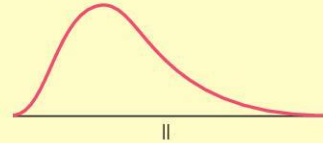
Het gemiddelde, de modus en de mediaan zijn gelijk.



II rechts-scheve verdeling

De modus ligt bij de top.

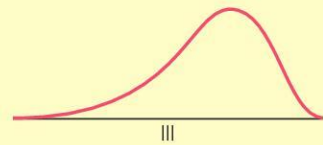
Het gemiddelde is groter dan de mediaan.



III links-scheve verdeling

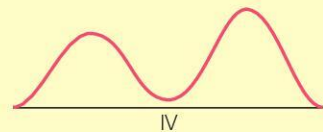
De modus ligt bij de top.

Het gemiddelde is kleiner dan de mediaan.



IV meertoppige verdeling

In de figuur hiernaast zie je een tweetoppige verdeling waarbij het gemiddelde en de mediaan tussen de twee toppen liggen.

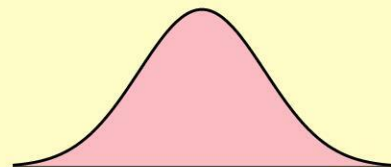
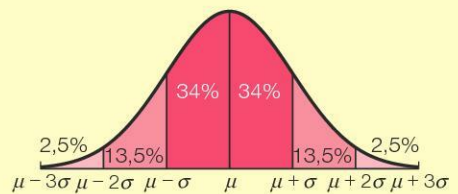


De normale verdeling

Heeft een symmetrische verdeling een klokvorm zoals hiernaast, dan is er sprake van een normale verdeling. De bijbehorende kromme heet de normaalkromme. De top ligt boven het gemiddelde μ . De breedte van de kromme hangt af van de standaardafwijking σ .

Bij een normale verdeling ligt

- ongeveer 68% van alle waarnemingsgetallen tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- ongeveer 95% van alle waarnemingsgetallen tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$
- bijna 100% van alle waarnemingsgetallen tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.

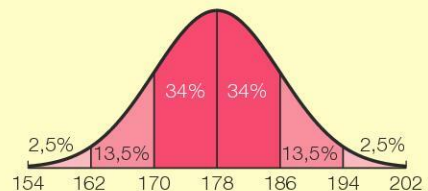


Bij een groep mannen, waarvan de lengte

normaal verdeeld is met $\mu = 178$ cm en

$\sigma = 8$ cm, hoort de verdeling hiernaast.

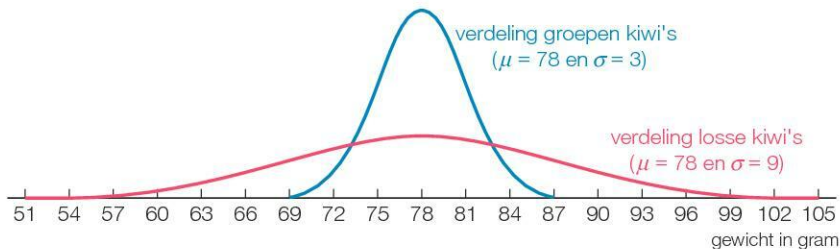
De percentages volgen uit de vuistregels bij de normale verdeling. Je ziet dat 47,5% van de mannen een lengte heeft tussen 162 en 178 cm.



7.2 Betrouwbaarheidsintervallen voor het populatiegemiddelde



Bij een kwaliteitscontrole is het gewicht van een groot aantal kiwi's gemeten. Het resultaat is normaal verdeeld, zie de rode verdeling in figuur 7.27. Ter controle zijn de kiwi's door een tweede onderzoeksteam in groepen van negen stuks tegelijk nogmaals gewogen. Hierbij werd telkens het gemiddeld gewicht per kiwi berekend. Het resultaat is ook normaal verdeeld, zie de blauwe verdeling in de figuur.



figuur 7.27

- a In de figuur zie je dat de gemiddelden van beide verdelingen hetzelfde zijn. Is dit verrassend? Licht toe.
- b Hoeveel procent van de los gewogen kiwi's weegt tussen de 69 en 87 gram?
- c Hoeveel procent van de groepen kiwi's weegt tussen de 69 en 87 gram?

Het is opmerkelijk dat de verdeling bij de in groepen gewogen kiwi's een kleinere standaardafwijking heeft. We vragen ons af hoe dat komt. Een meting uit de blauwe verdeling komt op hetzelfde neer als het gemiddelde nemen van negen metingen uit de rode verdeling.

- d Ga uit van de rode verdeling.
Hoeveel procent van de kiwi's weegt meer dan 87 gram? Is het waarschijnlijk dat negen willekeurig gekozen kiwi's allemaal meer dan 87 gram wegen? Is het waarschijnlijk dat het gemiddeld gewicht van negen willekeurig gekozen kiwi's meer dan 87 gram is?
- e Hoe volgt uit je antwoorden bij d dat de blauwe verdeling smaller is dan de rode verdeling? Wat betekent dit voor de standaardafwijking?
- f Vul in. Hoe groter de groep, hoe ... de standaardafwijking.

Theorie A De verdeling van het steekproefgemiddelde

Wanneer je een steekproef neemt bij een variabele die normaal verdeeld is, hoort bij de mogelijke steekproefgemiddelden ook een normale verdeling.

In opgave 20 bekeek je steekproeven van negen kiwi's uit een populatie kiwi's waarvan het gewicht normaal verdeeld is. De verdeling van het steekproefgemiddelde heeft dan hetzelfde gemiddelde, maar een kleinere standaardafwijking. Dit effect wordt veroorzaakt doordat bij het selecteren van kiwi's voor de steekproef de kans op een kiwi met een gemiddeld gewicht veel groter is dan de kans op een kiwi met een uitzonderlijk laag of hoog gewicht. Het zal dus bijvoorbeeld bijna niet voorkomen dat negen keer achter elkaar een hele zware kiwi gekozen wordt.

Bovendien kunnen zelfs negen uitzonderlijke gewichten (zowel licht als zwaar) samen weer een gemiddelde rond het midden van de verdeling opleveren.

Voor de verdeling van het steekproefgemiddelde geldt het volgende.

Bij een steekproef van n objecten uit een normale verdeling met gemiddelde μ en standaardafwijking σ is het steekproefgemiddelde normaal verdeeld met gemiddelde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Het aantal objecten n van een steekproef wordt ook wel de **steekproefomvang** of steekproeflengte genoemd.

Voorbeeld

Bij de supermarkt kun je bakjes druiven kopen. De inhoud van deze bakjes is normaal verdeeld met een gemiddelde van 500 gram en een standaardafwijking van 10 gram.

Bij een onderzoek van de consumentenbond worden steekproeven van vier bakjes genomen en wordt het gemiddelde gewicht van de bakjes druiven in de steekproef berekend. Welk percentage van de steekproeven zal een gemiddeld gewicht van minder dan 490 gram opleveren?



Aanpak

Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van de verdeling van het steekproefgemiddelde.

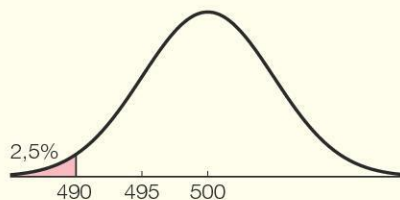
Gebruik vervolgens de vuistregels bij de normale verdeling.

Uitwerking

Voor de steekproeven geldt $\mu = 500$ gram en

$$\sigma = \frac{10}{\sqrt{4}} = 5 \text{ gram.}$$

Zie de schets, dus 2,5%.



21



De lengte van de 17-jarige spelers op een groot damesvolleybaltoernooi is normaal verdeeld met een gemiddelde van 168 cm en een standaardafwijking van 8 cm. Op de eerste dag van het toernooi is er een activiteit om kennis te maken. Hiertoe worden de deelnemende dames willekeurig in teams van 16 spelers ingedeeld.

Bereken het percentage teams met een gemiddelde lengte tussen 164 en 172 cm.



22



Bij een groot onderzoek worden leerlingen van 14 jaar getest op hun reactiesnelheid. De reactietijd van 14-jarigen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 600 milliseconde en een standaardafwijking van 120 milliseconde.

- Is de variabele reactietijd kwalitatief of kwantitatief? Licht toe.
- Stel dat de onderzoekers per groep van 16 leerlingen één gemiddelde reactietijd berekenen.
Bij hoeveel procent van de groepen is de gemiddelde reactietijd minder dan 570 ms?
- Stel dat de onderzoekers per groep van 64 leerlingen één gemiddelde reactietijd berekenen.
Bij hoeveel procent van de groepen is de gemiddelde reactietijd minder dan 570 ms?

A23



Voor een bepaald merk hagelslag geldt dat het gewicht van de pakken normaal verdeeld is met een gemiddelde van 500 gram en een standaardafwijking van 9 gram. Voor de kwaliteitscontrole twijfelt de fabrikant tussen twee manieren om het gemiddelde gewicht van de pakken hagelslag te controleren.

I controle van pallets met 900 pakken hagelslag

II controle van trays met 9 pakken hagelslag

Bij de controle van een pallet van 900 pakken en een doos van 9 pakken blijkt in beide gevallen het gemiddelde gewicht 497 gram per pak te zijn. Volgens de kwaliteitscontroleur is er met de pakken op de pallet iets mis, maar met de pakken in de doos niet.

Hoe komt zij tot deze uitspraak? Licht toe met een berekening.

A24*****

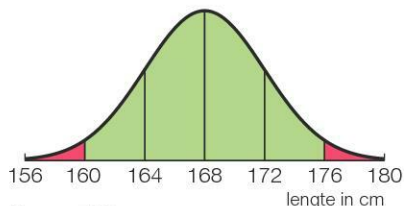
In een attractie kunnen negen personen in een wagentje. Voor de veiligheid wordt bij elk wagentje gedurende de dag het gemiddelde gewicht van de inzittenden vastgesteld. Op een bepaalde dag blijkt dit 70 kg met een standaardafwijking van 5 kg te zijn. Ga ervan uit dat alle wagentjes die dag vol waren.

Ad concludeert op basis van deze informatie dat vrijwel geen enkele bezoeker van de attractie meer dan 85 kg woog.

Onderzoek welke fout Ad maakt en verbeter zijn conclusie.

025**☐⊗***

Van een groep mensen is de lengte normaal verdeeld met $\mu = 168$ cm en $\sigma = 8$ cm. Bij steekproeven van 4 personen waarbij telkens de gemiddelde lengte per persoon wordt berekend krijg je de verdeling van het steekproefgemiddelde in figuur 7.28.

STEEKPROEVENVERDELING BIJ $n = 4$ **figuur 7.28**

- Licht de getallen in de figuur toe.
- Hoeveel procent van de steekproefgemiddelden valt in het groene gebied?
- Van een steekproef van 4 personen blijkt het gemiddelde 158 cm te zijn.
Is dit een waarschijnlijk resultaat? Licht toe.

Een steekproefgemiddelde dat in het groene gebied valt noemen we waarschijnlijk. Een steekproefgemiddelde dat in een rood gebied valt noemen we onwaarschijnlijk. Ga bij vraag d weer uit van de groep mensen waarvan de lengte normaal verdeeld is met $\mu = 168$ cm en $\sigma = 8$ cm.

- Geef van de volgende steekproefgemiddelden aan of ze waarschijnlijk of onwaarschijnlijk zijn. Teken telkens eerst de bijbehorende verdeling.

- steekproefomvang 16 en gemiddelde 163 cm
- steekproefomvang 64 en gemiddelde 167 cm
- steekproefomvang 100 en gemiddelde 170 cm
- steekproefomvang 25 en gemiddelde 170 cm

- In het algemeen heeft de verdeling van het steekproefgemiddelde te maken met een gemiddelde μ

en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, waarbij n de steekproefomvang is.

Welk interval hoort in dit geval bij het waarschijnlijke gebied?

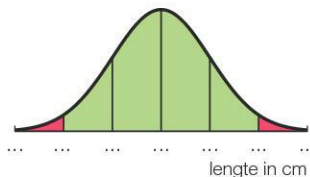
Kies uit:

I $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$

II $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$

III $\left[\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

IV $\left[\mu - 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$



Theorie B Betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde

In opgave 25 zag je dat het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ in 95% van de gevallen minder dan $2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ van het populatiegemiddelde μ verschilt.

Omgekeerd is het ook zo dat μ in 95% van de gevallen minder dan

$2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ van $\bar{X}$ verschilt. Het interval $\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ bevat dus

in 95% van de gevallen het gemiddelde μ . Dit geeft een goede manier om μ te bepalen uit het steekproefresultaat, met als enige probleem dat σ onbekend is. Deze waarde van σ kun je goed schatten door de steekproefstandaardafwijking S bij je steekproef te gebruiken. Zo kun je dus een interval berekenen dat in 95% van de gevallen μ bevat.

Dit interval heet het **95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde**.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is $\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$. Hierin is $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, S de steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.

Voorbeeld

Bij een onderzoek onder 715 Nederlandse jongeren naar hun smartphonegebruik, blijkt de gemiddelde dagelijkse gebruiksduur 3,5 uur te zijn. De bijbehorende standaardafwijking is 1 uur en 10 minuten.

- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde gebruiksduur onder jongeren in minuten nauwkeurig.
- b Welke informatie geeft dit interval in deze context?

Uitwerking

- a $\bar{X} = 3,5 \cdot 60 = 210$ minuten, $S = 70$ minuten en $n = 715$.

$$\left[210 - 2 \cdot \frac{70}{\sqrt{715}}, 210 + 2 \cdot \frac{70}{\sqrt{715}} \right] \approx [205, 215]$$

- b De gemiddelde dagelijkse gebruiksduur van de smartphone van Nederlandse jongeren ligt met 95% zekerheid tussen 205 en 215 minuten.

In het voorbeeld is niet vermeld dat het om een normale verdeling en een representatieve steekproef gaat. In de opgaven over betrouwbaarheidsintervallen mag je aannemen dat aan deze voorwaarden is voldaan.

26 Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde bij

a $\bar{X} = 100$; $S = 24$ en $n = 144$

b $\bar{X} = 80,5$; $S = 15,5$ en $n = 100$

c $\bar{X} = 12,50$ en $\frac{S}{\sqrt{n}} = 0,65$.

27 Bij een steekproef van 65 basisschoolleerlingen met zwemdiploma A is de gemiddelde leeftijd waarop zij het diploma hebben gehaald 6 jaar en 9 maanden. De standaardafwijking is 10 maanden. Bereken in tienden van maanden nauwkeurig het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde leeftijd waarop basisschoolleerlingen het zwemdiploma A halen. Welke informatie geeft dat in deze context?



A28 Het Nibud heeft de uitgaven van Nederlandse scholieren met leeftijden tussen 12 en 18 jaar onderzocht. Het blijkt dat de uitgaven aan kleding en schoenen verschillen tussen jongens en meisjes. Je ziet in de tabel een overzicht van de bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsintervallen voor de gemiddelde uitgaven per maand.

UITGAVEN PER MAAND AAN KLEDING EN SCHOENEN

	geslacht	
	jongens ($n = 1635$)	meisjes ($n = 1625$)
bedrag in euro	[42,15; 43,85]	[38,20; 39,80]

- Welke twee variabelen zijn in de tabel gebruikt? Geef bij deze variabelen aan of het een kwalitatieve of een kwantitatieve variabele is.
- Bereken met behulp van de tabel de gemiddelde uitgaven aan kleding en schoenen bij de jongens en bij de meisjes.

Door de formule voor het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde te gebruiken, kun je narekenen dat de steekproefstandaardafwijking S bij de jongens ongeveer 17 euro en bij de meisjes ongeveer 16 euro is.

- Bereken S voor de uitgaven aan kleding en schoenen bij de jongens en bij de meisjes. Rond af op centen.
- In de steekproef kwamen 41 meisjes voor die meer dan 71 euro aan kleding en schoenen uitgaven. Onderzoek met een berekening of dit overeenkomt met wat je op basis van de vuistregels bij de normale verdeling zou verwachten.
- Ga met een formule op het formuleblad na of de grootte van het verschil in uitgaven aan kleding en schoenen tussen jongens en meisjes groot, middelmatig of gering is.

A29

Mevrouw Hendriks geeft een examentraining om haar leerlingen goed op het eindexamen voor te bereiden. Ze geeft ook een afsluitende toets met opgaven waarvan zij weet dat er landelijk gemiddeld 50 punten voor worden behaald. Ze gaat ervan uit dat haar examenklassen vóór de examentraining representatief zijn voor de populatie examenleerlingen in Nederland.

Na de examentraining maakt haar klas 5HA1 de afsluitende toets. De resultaten staan in de tabel hiernaast.

RESULTATEN 5HA1

n	25
$\bar{X}$	52
S	6

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze tabel.

Mevrouw Hendriks hoopt met de resultaten te kunnen zeggen dat leerlingen na haar examentraining met 95% zekerheid boven het landelijk gemiddelde scoren.

- b** Licht toe dat ze dit niet kan zeggen op basis van het 95%-betrouwbaarheidsinterval van vraag a.

Mevrouw Hendriks geeft de training ook aan haar klas 5HA2. Aan de resultaten in de tabel hiernaast ziet ze al snel dat hier ook niet met 95% zekerheid te zeggen is dat de leerlingen boven het landelijk gemiddelde scoren.

RESULTATEN 5HA2

n	24
$\bar{X}$	52
S	6

- c** Verklaar hoe ze dit, zonder het interval op te stellen, kan zien.
d De leerlingen uit de twee klassen samen hebben een gemiddelde score van 52 met een standaardafwijking van 6.

Welke conclusie trekt ze als ze de resultaten van de leerlingen uit de twee klassen samen onderzoekt met een 95%-betrouwbaarheidsinterval? Verklaar het resultaat.

E30

Behalve 95%-betrouwbaarheidsintervallen zijn er ook 90%- en 99%-betrouwbaarheidsintervallen. Deze hebben dezelfde vorm als een 95%-betrouwbaarheidsinterval, dus $\left[\bar{X} - a \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + a \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$.

Bij een 90%-betrouwbaarheidsinterval is a kleiner dan 2 en bij een 99%-betrouwbaarheidsinterval is a groter dan 2.

- a** Verklaar dit.

In opgave 29a vond je het 95%-betrouwbaarheidsinterval $[49,6; 54,4]$. Bij deze vraag hoort het 99%-betrouwbaarheidsinterval $[48,9; 55,1]$. Hieruit volgt dat voor een 99%-betrouwbaarheidsinterval geldt dat $a \approx 2,6$.

- b** Laat dit met een berekening zien.
c Bij een 90%-betrouwbaarheidsinterval geldt $a \approx 1,6$.
 Hoeveel keer zo breed is een 99%-betrouwbaarheidsinterval als een 90%-betrouwbaarheidsinterval? Rond af op één decimaal.
d Bedenk een situatie waarbij de voorkeur uitgaat naar een 99%-betrouwbaarheidsinterval.

Terugblik

De verdeling van het steekproefgemiddelde

Bij steekproeven met steekproefomvang n uit een normale verdeling met gemiddelde μ en standaardafwijking σ is het steekproefgemiddelde

normaal verdeeld met gemiddelde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Een supermarkt verkoopt bakjes kersen. De inhoud van de bakjes is normaal verdeeld met gemiddelde 350 gram en standaardafwijking 15 gram. Neem je steekproeven van 25 van deze bakjes, dan geldt voor deze steekproeven dat het gemiddelde gewicht van de inhoud van deze

bakjes 350 gram is en de standaardafwijking $\frac{15}{\sqrt{25}} = 3$ gram. Het gemiddelde

zal per steekproef verschillen, maar toch zal in 95% van de steekproeven het steekproefgemiddelde tussen $350 - 2 \cdot 3 = 344$ gram en

$350 + 2 \cdot 3 = 356$ gram liggen. Dit volgt uit de vuistregels bij de normale verdeling.

Betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$. Hierin is $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, S de steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.

Een supermarkt verkoopt bakjes kersen. Op de bakjes staat dat de inhoud 350 gram is. Bij een controle wil men onderzoeken of de inhoud inderdaad 350 gram is. Daartoe neemt men een steekproef van 25 van deze bakjes en berekent men van deze bakjes het gemiddelde gewicht en de standaardafwijking. Men vindt $\bar{X} = 346$ gram en $S = 14$ gram.

Hiermee kan het 95%-betrouwbaarheidsinterval worden berekend.

Je krijgt $\left[346 - 2 \cdot \frac{14}{\sqrt{25}}, 346 + 2 \cdot \frac{14}{\sqrt{25}} \right] = [340,4; 351,6]$.

Dit betekent dat met een betrouwbaarheid van 95% het gemiddelde gewicht van de bakjes kersen in de supermarkt tussen 340,4 en 351,6 gram ligt. Het kan dus zijn dat het gemiddelde gewicht van de bakjes in de supermarkt inderdaad 350 gram is.

Had men een steekproef genomen met lengte 100 en daarbij ook gevonden dat $\bar{X} = 346$ gram en $S = 14$ gram, dan zou het 95%-betrouwbaarheidsinterval zijn

$\left[346 - 2 \cdot \frac{14}{\sqrt{100}}, 346 + 2 \cdot \frac{14}{\sqrt{100}} \right] = [343,2; 348,8]$. In dat geval kan men

dus niet met 95% zekerheid zeggen dat het gemiddelde gewicht van de bakjes kersen in de supermarkt 350 gram is.

7.3 Betrouwbaarheidsintervallen voor de populatieproportie

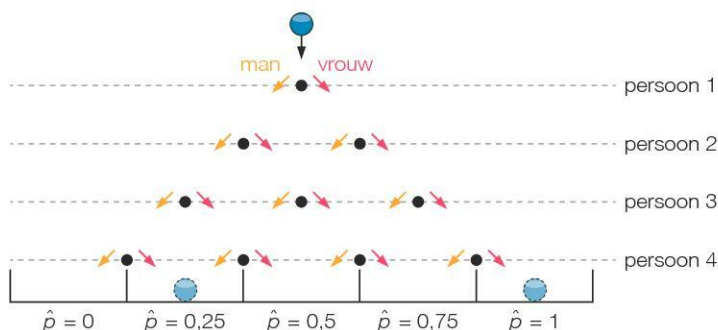
031
📌🔍*

Bij een enquête onder een grote groep willekeurig gekozen Nederlanders zal de proportie vrouwen ongeveer 0,5 zijn. Leg je de enquête voor aan groepen van vier willekeurig gekozen Nederlanders, dan zal de proportie vrouwen variëren. Zijn er bijvoorbeeld 3 vrouwen in een groep, dan is de proportie $\frac{3}{4} = 0,75$.

- a** Welke proportie vrouwen lijkt je waarschijnlijker: 0,25 of 1? Licht toe.

Ondanks dat de uitkomst van de steekproef willekeurig is, zijn niet alle uitkomsten even waarschijnlijk.

In de figuur hieronder staan alle mogelijke proporties vrouwen bij een steekproef met vier personen schematisch weergegeven als een bord van Galton.



figuur 7.29

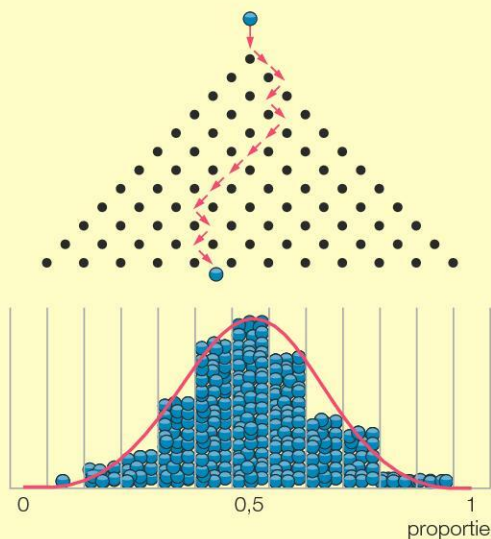
- b** Het nemen van een steekproef kunnen we in de figuur simuleren door een balletje op de bovenste pin te laten vallen en te kijken in welk bakje het balletje eindigt.
Waarom zal het balletje vaker bij $\hat{p} = 0,25$ eindigen dan bij $\hat{p} = 1$?

Theorie A De verdeling van de steekproefproportie

Wanneer je een kwalitatieve variabele (zoals bijvoorbeeld geslacht of hobby's) onderzoekt, kun je geen gemiddelde berekenen. Wel kun je de proportie bij de verschillende waarden van de variabele berekenen.

Wanneer bij een onderzoeksvraag een kwalitatieve variabele centraal staat, ligt een analyse met proporties voor de hand.

In opgave 31 zag je dat er bij een populatieproportie van 0,5 verschillende steekproefproporties kunnen ontstaan. Ook zag je dat niet alle mogelijke steekproefproporties even waarschijnlijk zijn. De verdeling die aangeeft hoe waarschijnlijk de verschillende steekproefproporties zijn, heet de **verdeling van de steekproefproportie**. Hoe groter de steekproefomvang hoe beter de verdeling van de steekproefproportie overeenkomt met de normale verdeling.



figuur 7.30

Voor de verdeling van de steekproefproportie gebruik je het volgende.

Bij populatieproportie p en steekproefomvang n is de steekproefproportie normaal verdeeld met gemiddelde p

en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

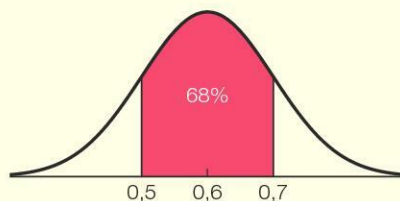
Voorbeeld

In een land heeft 60% van de bevolking bruine ogen. Bij een groep van 24 personen wordt de proportie personen met bruine ogen genoteerd. Bereken bij welk percentage van de mogelijke steekproeven de steekproefproportie tussen 0,5 en 0,7 zal liggen.

Uitwerking

$$\mu = p = 0,6 \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{24}} = 0,1.$$

Zie de schets, dus bij 68%.



R32
☐ ⊙ *

Zie het voorbeeld.

- a Tussen welke proporties verwacht je dat de middelste 95% van de mogelijke steekproeven zal liggen?
- b Hoeveel procent van de mogelijke steekproeven heeft een proportie groter dan 0,64 bij een steekproefomvang van 600 personen?

33
☐ ⊙ *

De klas van meneer Verheijen voert in de stad een onderzoek uit. Alle 30 leerlingen selecteren willekeurig 25 personen en noteren onder andere de proportie mannen onder deze 25 personen.

- a Het blijkt dat 90% van de leerlingen een steekproefproportie tussen 0,4 en 0,6 heeft genoteerd. Dit resultaat maakt meneer Verheijen achterdochtig.
Laat met een berekening zien dat meneer Verheijen terecht achterdochtig is.
- b Pieter vond in zijn steekproef $\hat{p} = 0,28$.
Betekent dit dat hij iets verkeerd heeft gedaan? Licht toe.

A34
☐ ⊙ *

Bij een uitbraak van een ziekte onder vleermuizen is 3 op de 5 vleermuizen besmet. Een kolonie vleermuizen wordt onderzocht door 24 vleermuizen te testen op deze ziekte. De onderzoekers spreken van een zorgelijke situatie als meer dan de helft van de kolonie besmet is. Er is sprake van een alarmerende steekproef wanneer de proportie besmette vleermuizen 0,5 of hoger is.

Zelfs als 3 op de 5 vleermuizen in de kolonie besmet is, zal een deel van de steekproeven niet alarmerend zijn.

Er is een risico dat de onderzoekers onterecht denken dat de situatie in de kolonie niet zorgelijk is.

- a Laat met een berekening zien dat dit risico 16% is.
- b Een onderzoeker stelt dat dit risico meer dan 6 keer zo klein wordt door niet 24 maar 96 vleermuizen te onderzoeken.
Onderzoek of zij gelijk heeft.



A35
  *

Glenn is een fanatiek basketballer. Ze heeft een goed schot en scoort gemiddeld 7 van de 10 vrije worpen. Uiteraard heeft ze weleens dagen waarop ze minder vrije worpen scoort dan gemiddeld. Arthur twijfelt aan de schutterskwaliteiten van Glenn en beweert dat ze niet eens 60% van haar vrije worpen scoort. Ze gaan de volgende weddenschap aan: Glenn neemt 21 vrije worpen en wint als ze er minstens 60% scoort. Je kunt het vrije worpen schieten van Glenn opvatten als een steekproef uit een populatie van schoten waarvan ze 70% scoort.

- a** Bereken welk percentage van dit soort weddenschappen Glenn zal winnen.



Tegen de verwachting in verliest Glenn de weddenschap. Ze moet een week lang de tas van Arthur dragen. Ze stelt voor om dubbel of niets te spelen met een test van 84 schoten. Arthur accepteert haar voorstel.

- b** Bereken hoeveel keer zo waarschijnlijk het is dat Glenn deze weddenschap wint als dat Arthur deze wint.

O36
  *

In een populatie heeft 40% van de personen eigenschap A. We bekijken de verdelingskromme van de steekproefproportie bij verschillende steekproeflengten. In de figuur hiernaast staan de gebieden aangegeven die je kent uit de vuistregels bij de normale verdeling.

We noemen steekproefproporties die in het groene gebied vallen waarschijnlijk. Steekproefproporties die in een rood gebied vallen, noemen we onwaarschijnlijk.

We nemen steekproeven van n personen en noteren de proportie personen met eigenschap A als $\hat{p}$.

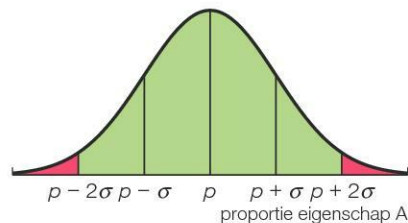
- a** Geef van de volgende steekproefproporties aan of ze waarschijnlijk of onwaarschijnlijk zijn. Teken telkens eerst de bijbehorende verdeling.

- I** $n = 24$ en $\hat{p} = 0,53$
- II** $n = 96$ en $\hat{p} = 0,53$
- III** $n = 96$ en $\hat{p} = 0,33$
- IV** $n = 2400$ en $\hat{p} = 0,41$

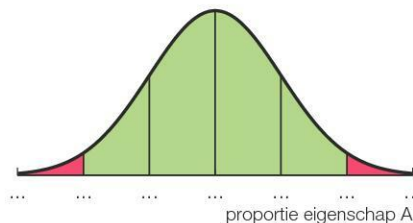
- b** In het algemeen heeft de verdeling van de steekproefproportie een

gemiddelde p en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Welk interval hoort in dit geval bij het waarschijnlijke gebied?



figuur 7.31

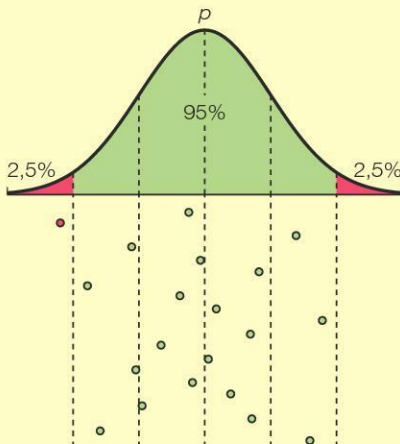


Theorie B Betrouwbaarheidsinterval voor een proportie

Bij een onderzoek onder n personen met populatieproportie p zal de steekproefproportie $\hat{p}$ per steekproef verschillen. De waarden van $\hat{p}$ ontstaan uit een steekproevenverdeling die normaal verdeeld is met

gemiddelde p en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

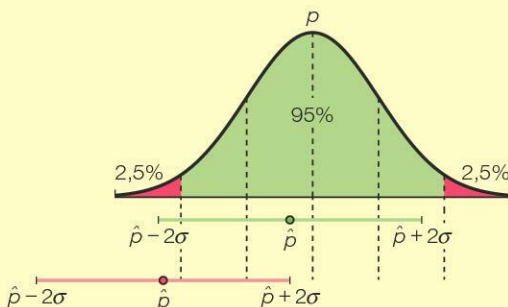
In figuur 7.32 staat deze steekproevenverdeling met daaronder 20 steekproefproporties uit deze verdeling. Elke steekproefproportie staat als bolletje weergegeven. De verwachting is dat 95% van de steekproefproporties in het groene gebied valt.



figuur 7.32

In figuur 7.33 is bij twee steekproeven ook het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ getekend als een lijnstuk vanaf $\hat{p} - 2\sigma$ tot en met $\hat{p} + 2\sigma$.

Bij het groene lijnstuk valt de populatieproportie p binnen dit interval. Bij het rode lijnstuk valt de populatieproportie p buiten dit interval.



figuur 7.33

In 95% van de steekproeven zal het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ de populatieproportie p bevatten.

Om het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ te berekenen heb je

$\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ nodig. Het probleem is dat p onbekend

is, daar ben je immers naar op zoek. Een oplossing voor dit probleem is het schatten van p met de steekproefproportie $\hat{p}$. Je vervangt dan p door $\hat{p}$ bij het berekenen van σ . Voor grotere waarden van n zal deze schatting steeds beter kloppen.

Zo krijg je een interval dat in 95% van alle steekproeven p bevat, dit heet het **95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie**.

Het doel van een onderzoek naar een proportie is het bepalen van p . Dit doe je op basis van $\hat{p}$, het resultaat van de steekproef.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$. Hierin is $\hat{p}$ de steekproefproportie en $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ met n de steekproefomvang.

Voorbeeld

Twee dagen voor een verkiezing wordt aan 1200 stemgerechtigde Nederlanders gevraagd of ze van plan zijn te gaan stemmen.

Van deze 1200 zeggen 756 inderdaad te gaan stemmen.

Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie stemgerechtigde Nederlanders die van plan zijn te gaan stemmen.

Uitwerking

$$\hat{p} = \frac{756}{1200} = 0,63 \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{0,63 \cdot 0,37}{1200}} = 0,0139\dots$$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,63 - 2 \cdot 0,0139\dots \approx 0,602 \text{ en}$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,63 + 2 \cdot 0,0139\dots \approx 0,658$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,602; 0,658]$.

Rond in een betrouwbaarheidsinterval proporties af op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

R37 Zie het voorbeeld.



Bij een andere peiling worden 600 stemgerechtigde Nederlanders ondervraagd. Hiervan zijn er 378 van plan te gaan stemmen.

- Toon aan dat de steekproefproportie ook nu gelijk is aan 0,63 en bereken de standaardafwijking. Rond af op drie decimalen.
- Bereken het hierbij behorende 95%-betrouwbaarheidsinterval.
- Vergelijk het 95%-betrouwbaarheidsinterval van vraag b met dat van het voorbeeld.
Welke conclusie trek je?

- 38** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie bij
- a** $\hat{p} = 0,5$ en $n = 100$
 - b** $\hat{p} = 0,46$ en $n = 250$
 - c** $\hat{p} = \frac{4}{7}$ en $n = 98$
 - d** een steekproef van 700 personen waarbij 36% het onderzochte kenmerk had.

- 39** Een bioloog onderzoekt de verhouding tussen mannetjes en vrouwtjes van de bruine kikker in bergmeren van de Pyreneeën. Van de 150 onderzochte kikkers blijken er maar liefst 117 een mannetje te zijn.
- a** Bereken de steekproefproportie van de mannetjeskikkers.
 - b** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie mannetjeskikkers.



- A40** Bij een onderzoek naar het roken van sigaretten worden 840 volwassenen ondervraagd. Hiervan blijken er 235 te roken.
- a** Is de variabele *rookt sigaretten* kwalitatief of kwantitatief? Licht toe.
 - b** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie volwassenen die roken.

Bij het onderzoek waren 470 mannen en 370 vrouwen betrokken. Van de mannen rookten er 146.

- c** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie volwassen mannen die roken. Doe dat ook voor de vrouwen.
- d** Vergelijk de betrouwbaarheidsintervallen van vraag c. Kun je met 95% zekerheid concluderen dat het deel van de vrouwen dat sigaretten rookt, kleiner is dan het deel van de mannen dat sigaretten rookt?

- A41** Bij de presidentsverkiezingen in een land moet gekozen worden tussen de kandidaten A en B. In een peiling die voorafgaat aan de verkiezingen zeggen 935 mensen te gaan stemmen. Hiervan zeggen 487 op kandidaat A te gaan stemmen, de anderen kiezen voor kandidaat B. Onderzoek of je met een betrouwbaarheid van 95% kunt zeggen dat kandidaat A de verkiezingen zal gaan winnen.

Terugblik

De verdeling van de steekproefproportie

Bij een steekproef met steekproefomvang n uit een populatie met populatieproportie p is de steekproefproportie normaal verdeeld met

gemiddelde p en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Een supermarkt verkoopt bakjes kersen waarvan bekend is dat 30% van de bakjes beschadigd is. Neem je steekproeven van 84 van deze bakjes, dan zijn bij deze steekproeven gemiddeld 30% van de bakjes beschadigd. De bijbehorende standaardafwijking is

$\sigma = \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{84}} = 0,05$. De proportie zal per steekproef verschillen, maar

toch zal bij 95% van de steekproeven de proportie van de bakjes die beschadigd is, liggen tussen $0,3 - 2 \cdot 0,05 = 0,2$ en $0,3 + 2 \cdot 0,05 = 0,4$, oftewel tussen 20% en 40%. Dit volgt uit de vuistregels bij de normale verdeling.

Betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$. Hierin is $\hat{p}$ de steekproefproportie en $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

met n de steekproefomvang.

De verkoper verwacht dat 30% van de bakjes kersen beschadigd is. Om dit vermoeden te controleren, neemt men een steekproef van 50 bakjes. Het blijkt dat hiervan 20 bakjes beschadigd zijn.

Hiermee kan een 95%-betrouwbaarheidsinterval worden berekend.

Omdat $\hat{p} = \frac{20}{50} = 0,4$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{50}} = 0,069...$ krijg je

$\hat{p} - 2\sigma = 0,4 - 2 \cdot 0,069... \approx 0,261$ en $\hat{p} + 2\sigma = 0,4 + 2 \cdot 0,069... \approx 0,539$. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,261; 0,539]$.

Dus op basis van deze steekproef kun je met 95% zekerheid zeggen dat het percentage beschadigde bakjes tussen 26,1% en 53,9% ligt.

Had men een steekproef genomen met lengte 100 en blijken 40 bakjes beschadigd te zijn, dan is ook $\hat{p} = 0,4$. Nu echter is

$\sigma = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{100}} = 0,048...$, zodat $\hat{p} - 2\sigma = 0,4 - 2 \cdot 0,048... \approx 0,302$ en

$\hat{p} + 2\sigma = 0,4 + 2 \cdot 0,048... \approx 0,498$. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,302; 0,498]$.

Op basis van dit interval lijkt het niet waarschijnlijk dat het percentage beschadigde bakjes 30% is.

7.4 Betrouwbaarheidsintervallen toepassen

O42
📌🔍*

Voor een onderzoek naar het kijkgedrag van jongeren op YouTube zijn de volgende deelvragen opgesteld.

- 1 Hoeveel tijd besteden jongeren wekelijks aan het kijken van YouTube-video's?
- 2 Welk deel van de jongeren kijkt dagelijks een video op YouTube?

De onderzoekers willen gebruik maken van betrouwbaarheidsintervallen om uit het resultaat van de steekproef een conclusie te trekken over het kijkgedrag van de populatie.

Welke soort betrouwbaarheidsinterval zou je aanraden bij deelvraag 1?
En welke soort bij deelvraag 2?

Theorie A Twee soorten betrouwbaarheidsintervallen

In dit hoofdstuk heb je kennis gemaakt met twee soorten betrouwbaarheidsintervallen.

- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde.
- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

In opgave 42 zijn bij de deelvragen verschillende soorten betrouwbaarheidsintervallen nodig. Welke soort je kiest hangt af van het type variabele, kwantitatief of kwalitatief, dat bij de deelvraag hoort.

Bij de vraag: 'Hoeveel tijd besteden jongeren wekelijks aan het kijken van YouTube-video's?', wil je weten hoelang jongeren in de steekproef wekelijks gemiddeld naar YouTube-video's kijken. Omdat het hier gaat om een gemiddelde, ligt het betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde voor de hand.

Bij een kwantitatieve variabele gebruik je het betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde.

Bij de vraag: 'Welk deel van de jongeren kijkt dagelijks een video op YouTube?', is het antwoord een deel oftewel een proportie. Daarom gebruik je het betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

Bij een kwalitatieve variabele gebruik je het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie.

Vaak kun je ook aan de gegevens in een opgave zien welk betrouwbaarheidsinterval gevraagd wordt.

Voor het betrouwbaarheidsinterval voor een populatieproportie heb je $\hat{p}$ en n nodig.

Voor het betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde heb je $\bar{X}$, S en n nodig.

- 43** Geef bij de onderstaande onderzoeksvragen steeds aan welk soort betrouwbaarheidsinterval het meest voor de hand ligt.
- a Hoeveel tijd besteden mannen dagelijks aan hun uiterlijk?
 - b Welk percentage eindexamenleerlingen heeft al een rijbewijs?
 - c Welk deel van de Nederlanders doet aan afvalscheiding?
 - d Zijn basketballers of voetballers sneller op de 100 m sprint?
 - e Scoren veel leerlingen op school boven het landelijk gemiddelde?

- 44** Bij een steekproef van 150 middelbare scholieren bleek dat 60% van de scholieren het afgelopen schooljaar meer dan 120 minuten per week aan wiskundehuiswerk besteedt. Verder bleek voor het aantal minuten wiskundehuiswerk per week te gelden dat $\bar{X} = 150$ en $S = 40$.
- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddeld aantal minuten wiskundehuiswerk per week.
 - b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie leerlingen die meer dan 120 minuten per week aan wiskundehuiswerk besteedt.

- A45** Tijdens een landelijke bijeenkomst van docenten lichamelijke opvoeding (lo) werd bij 135 deelnemers een Coopertest afgenomen. De deelnemers moesten 12 minuten hardlopen en daarbij een zo ver mogelijke afstand afleggen. In de tabel zie je een schaal voor de beoordeling van resultaten.

BEOORDELING RESULTATEN COOPERTEST

beoordeling	geslacht	
	m	v
zeer slecht	0 – 1600 m	0 – 1500 m
slecht	1600 – 2000 m	1500 – 1800 m
redelijk	2000 – 2400 m	1800 – 2200 m
goed	2400 – 2800 m	2200 – 2700 m
zeer goed	2800 – 3200 m	2700 – 3100 m
uitstekend	3200 – 3600 m	3100 – 3500 m

Van de 75 mannelijke docenten bleken er 3 een zeer slechte conditie te hebben en 12 een slechte conditie. Afstanden onder de 2000 m voor mannen worden door de organisatie als onvoldoende bestempeld.

- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aandeel mannelijke lo-docenten met een onvoldoende conditie.
- b Bij de vrouwelijke docenten was de gemiddelde afstand 2750 m met een steekproefstandaardafwijking van 550 m. Je mag er vanuit gaan dat het een representatieve steekproef betreft.
Kun je met 95% zekerheid concluderen dat de gemiddelde vrouwelijke lo-docent een zeer goede conditie heeft? Licht toe.

A46
📊🔍*

Op een congres werden aselekt 200 van de 1390 aanwezigen gevraagd mee te doen aan een enquête over rijbewijzen. Het bleek dat 79 van de deelnemers aan de enquête geen rijbewijs hadden. Bij de deelnemers die wel een rijbewijs hadden, bleek de gemiddelde leeftijd waarop het rijbewijs behaald was 21,7 jaar met een standaardafwijking van 3,7 jaar.

- a Wat betekent aselekt in deze context?
- b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde leeftijd waarop bezoekers van dit congres met een rijbewijs, hun rijbewijs behaalden. Rond af op één decimaal.
- c Een van de deelnemers denkt dat een derde van alle bezoekers van het congres geen rijbewijs heeft.

Onderzoek met een 95%-betrouwbaarheidsinterval of hij gelijk kan hebben.

A47
📊🔍

Laura en Storr onderzoeken voor hun profielwerkstuk hoeveel inwoners van Nijmegen tevreden zijn met de manier van afval inzamelen. Ze hebben een representatieve steekproef samengesteld van 500 Nijmegenaren. Van de mensen in de steekproef zijn er 425 tevreden over de manier van afval inzamelen. Op basis van dit resultaat en het gegeven dat Nijmegen 176 duizend inwoners heeft, willen ze met een 95%-betrouwbaarheidsinterval weergeven hoeveel Nijmegenaren achter de manier van afval inzamelen staan.

Bereken dit betrouwbaarheidsinterval en rond af op duizendtallen.

A48
🔍*

Dani en Jay hebben krasloten als onderwerp voor hun profielwerkstuk.

Uit hun onderzoek blijkt dat bij een steekproef van 400 loten er 160 een prijs hadden. Dus gemiddeld moet iemand 2,5 kraslot kopen om een prijs te hebben.

Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde aantal krasloten dat nodig is om een prijs te hebben en rond af op twee decimalen.

O49
📊🔍*

Carolijn heeft de volgende berekeningen in haar schrift staan.

$$\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 25$$
$$\bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 33$$
$$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 29 \pm 4$$

S is de steekproefstandaard-afwijking
 $\frac{S}{\sqrt{n}}$ is de standaard-afwijking bij het steekproefgemiddelde

- a Wat was bij haar berekening de waarde van $\bar{X}$? Hoe kun je die berekenen uit de grenzen 25 en 33?
- b Welke waarde hoort bij de standaardafwijking $\frac{S}{\sqrt{n}}$?

Theorie B Verschillende notaties voor betrouwbaarheidsintervallen

Op het formuleblad bij het centraal examen staan de formules voor de 95%-betrouwbaarheidsintervallen als volgt genoteerd.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \text{ met } p \text{ de steekproefproportie en } n \text{ de steekproefomvang.}$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ met } \bar{X} \text{ het steekproefgemiddelde, } n \text{ de steekproefomvang en } S \text{ de steekproefstandaardafwijking.}$$

Er zijn drie opmerkelijke verschillen tussen de notatie op het formuleblad bij het centraal examen en de notatie in dit boek.

- 1 In plaats van intervalnotatie wordt een notatie met $\pm$ gebruikt.
- 2 Voor de steekproefproportie wordt p in plaats van $\hat{p}$ gebruikt.
- 3 Op de plek van σ staat $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

In de notatie op het formuleblad zijn de formules voor de onder- en bovengrens van een interval samengevoegd met het $\pm$ -teken. Door in plaats van dit teken een $-$ te nemen krijg je de formule voor de ondergrens van het interval. Neem je $+$ dan krijg je de bovengrens.

Wanneer je het interval $[0,55; 0,85]$ in deze notatie schrijft, krijg je $0,7 \pm 0,15$. Het voordeel van deze notatie is dat de steekproportie of het steekproefgemiddelde direct af te lezen is (in dit geval 0,7). Het nadeel is dat de grenzen niet direct af te lezen zijn.

Soms wordt het dakje op de p bij de steekproefproportie weggelaten. Het is dan belangrijk dat je zelf goed kunt inschatten of je met p of $\hat{p}$ te maken hebt.

Bij het interval $[0,55; 0,85]$ is 0,55 de ondergrens en 0,85 de bovengrens van het interval.

Voorbeeld

Gegeven is het 95%-betrouwbaarheidsinterval $0,32 \pm 0,04$.

- a Schrijf dit betrouwbaarheidsinterval in de intervalnotatie.
- b Bereken de standaardafwijking σ .

Uitwerking

- a $0,32 - 0,04 = 0,28$ en $0,32 + 0,04 = 0,36$, dus $[0,28; 0,36]$.
- b $2\sigma = 0,04$ dus $\sigma = 0,02$.

50



- a Schrijf het betrouwbaarheidsinterval $[0,405; 0,435]$ in de $\pm$ -notatie.
- b Schrijf het interval $0,21 \pm 0,015$ in de intervalnotatie.
- c Bij een steekproef zijn de resultaten $\bar{X} = 180$, $S = 9,8$ en $n = 210$. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze steekproef. Schrijf het resultaat in beide notaties. Rond af op twee decimalen.
- d In een wetenschappelijk tijdschrift staat bij de steekproefresultaten $p = 0,12$ en $n = 11\,733$ genoteerd. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze steekproef. Schrijf het resultaat in beide notaties.

A51



- Bij een onderzoek naar woningtypen onder Nederlanders met een huurwoning bleek dat van de 26 580 respondenten er 10 098 in een rijtjeshuis wonen.
- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage huurders dat in een rijtjeshuis woont. Geef je antwoord in de intervalnotatie.
 - b Dennis beweert dat de populatieproportie 0,40 zal zijn. Is dit op basis van je antwoord bij a waarschijnlijk? Licht toe.
 - c Het onderzoek werd in verschillende provincies uitgevoerd en leverde uiteenlopende resultaten op. In Friesland was het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aantal huurders dat in een rijtjeshuis woont gelijk aan $[27\,281; 30\,165]$. Bereken hoeveel de steekproefproportie van Friesland verschilt van de steekproefproportie van heel Nederland. Gebruik dat er in Friesland 110 900 huurders zijn.

A52



- Uit een onderzoek van het Voedingscentrum blijkt dat Nederlanders fors te weinig groenten eten. Het advies is om 250 gram groente per dag te eten, maar dat lukt niet veel mensen. Uit cijfers van het Voedingscentrum blijkt dat een Nederlander gemiddeld 127 gram groente per dag eet. IJla kan dit maar moeilijk geloven en doet een klein onderzoek onder haar vrienden. Bij $n = 50$ vindt zij een gemiddelde van 210 gram groente per dag met een standaardafwijking van 80 gram.
- a Laat met het 95%-betrouwbaarheidsinterval zien dat het hier waarschijnlijk niet om een representatieve steekproef gaat. Welke notatie van het betrouwbaarheidsinterval is hier het handigst? Licht toe.
 - b Uit het onderzoek van het Voedingscentrum blijkt dat het slecht gesteld is met de dagelijkse hoeveelheid groente die jongens van 14-18 jaar eten. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze groep was 130 ± 40 gram. Volgens Bart kun je aan dit betrouwbaarheidsinterval zien dat 95% van de jongens van 14-18 jaar dagelijks tussen 90 en 170 gram groenten eet. Ben je het met Bart eens? Licht toe.

Rowan en Donata maken een profielwerkstuk over voeding met als deelvraag ‘Welk deel van de havo-leerlingen eet minstens een dag in de week vegetarisch?’. Hun onderzoek onder 100 leerlingen binnen de eigen school leverde een proportie van 0,32 op. Dezelfde vragenlijst leverde bij vier andere scholen ook de proportie 0,32 op; dit keer onder 400 leerlingen.



- a Bereken bij beide situaties het 95%-betrouwbaarheidsinterval. Gebruik de $\pm$ -notatie.
- b Rowan zegt dat het interval bij de eigen school minder betrouwbaar is. Donata zegt dat het interval bij de eigen school minder nauwkeurig is. Een van de twee heeft gelijk. Licht toe wie dat is.

Aan het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ kun je zien dat de breedte van het bijbehorende betrouwbaarheidsinterval gelijk is aan 4σ .

- c Licht dit toe.
- d Vul in. Als de waarde van n groter wordt, dan wordt de breedte van het betrouwbaarheidsinterval ...

Theorie C De nauwkeurigheid van een betrouwbaarheidsinterval

Bij betrouwbaarheidsintervallen spelen twee aspecten een belangrijke rol.

Het eerste aspect is de *betrouwbaarheid*: we nemen een marge van twee standaardafwijkingen op de uitkomst van de steekproef zodat in 95% van de gevallen de populatieproportie of het populatiegemiddelde in het interval ligt. Neem je meer dan twee standaardafwijkingen marge, dan is het interval meer dan 95% betrouwbaar. Meer marge geeft zo meer betrouwbaarheid.

Het tweede aspect is de *nauwkeurigheid*: we willen zo precies mogelijk weergeven waar de populatieproportie of het populatiegemiddelde ligt. Stel dat een winkel met 95% zekerheid weet dat de proportie tevreden klanten tussen 0,1 en 0,9 ligt, dan geeft dit maar weinig informatie: het is niet nauwkeurig. Je kunt het betrouwbaarheidsinterval nauwkeuriger maken door minder marge te nemen. Minder marge geeft zo meer nauwkeurigheid.

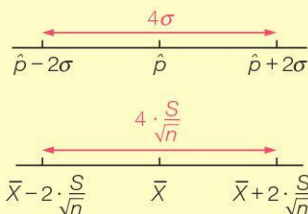
De aspecten betrouwbaarheid en nauwkeurigheid zijn tegengesteld. Meer marge geeft een breder interval en dus meer betrouwbaarheid. Minder marge geeft een smaller interval en dus meer nauwkeurigheid. De oplossing voor dit probleem zag je in opgave 53 waar grotere steekproeven nauwkeurigere resultaten opleverden, die nog steeds in 95% van de gevallen betrouwbaar zijn. Dit kun je zien aan de formule voor de breedte van een betrouwbaarheidsinterval.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval

voor de populatieproportie is $4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval

voor het populatiegemiddelde is $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.



Doordat in beide formules de steekproefomvang n in de noemer van de breuk staat, zorgt een grotere waarde van n voor een kleinere breedte van het betrouwbaarheidsinterval. De uitkomst is dan nauwkeuriger, maar nog steeds in 95% van de gevallen betrouwbaar.

Een grotere steekproef geeft een smaller 95%-betrouwbaarheidsinterval en dus meer nauwkeurigheid.

Voorbeeld

Een ondernemer overweegt een koffiezaak te openen in het centrum van 's-Hertogenbosch. Hij wil onderzoeken hoeveel koffie de klanten van koffiezaken in 's-Hertogenbosch dagelijks gemiddeld drinken. Bij de onderzoeksresultaten zal een 95%-betrouwbaarheidsinterval worden opgesteld met een maximale breedte van 50 mL. Onderzoek of minimaal 100, 200 of 300 mensen onderzocht moeten worden. Ga bij je berekening uit van $S = 205$ mL.

Aanpak

Gebruik de formule voor de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij de verschillende waarden van n om na te gaan wanneer de breedte voor het eerst kleiner dan 50 mL is.

Uitwerking

$$4 \cdot \frac{205}{\sqrt{100}} = 82 \text{ mL}, 4 \cdot \frac{205}{\sqrt{200}} \approx 58 \text{ mL en } 4 \cdot \frac{205}{\sqrt{300}} \approx 47 \text{ mL}.$$

Er moeten dus minimaal 300 mensen onderzocht worden.

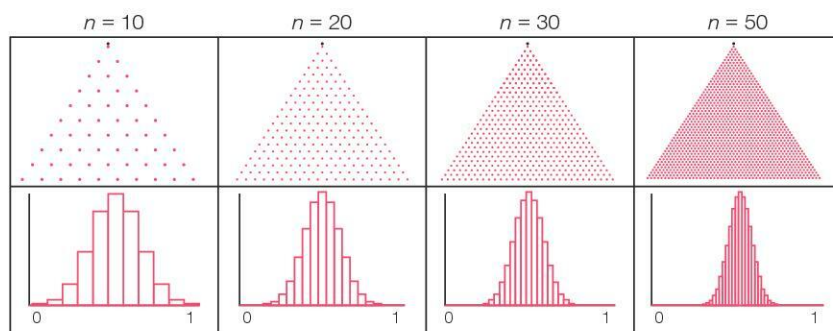
54

Een onderzoeker wil met een groot onderzoek aantonen dat een specifieke bijwerking van een medicijn in circa 15% van de gevallen optreedt. Om dit nauwkeurig te doen wil ze een 95%-betrouwbaarheidsinterval met een breedte van maximaal 3%. Om tijd en kosten te besparen, wil ze niet meer proefpersonen onderzoeken dan nodig is. Ga met een berekening na of ze dan het beste gebruik kan maken van 1000, 2000, 3000 of 4000 proefpersonen.



R55

In de onderstaande figuur staan vijf histogrammen getekend bij Galtonborden met steeds meer rijen. Licht toe hoe je aan de figuur kunt zien dat bij grotere steekproeven het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie nauwkeuriger wordt.



figuur 7.34

56

Jochem doet onderzoek naar de kleur van de personenauto's die in Nederland rondrijden. Hij neemt zich voor van 900 auto's de kleur te noteren. Van de eerste 575 auto's zijn er 47 rood.

- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rode auto's in Nederland op basis van de eerste 575 auto's. Welke informatie geeft het betrouwbaarheidsinterval in deze context?
- Bij de laatste 325 auto's zijn er 30 rood. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rode auto's in Nederland op basis van de 900 onderzochte auto's.
- Is je antwoord bij vraag a betrouwbaarder dan bij vraag b? En hoe zit het met de nauwkeurigheid?

A57




Van 38 meisjes en 43 jongens is bij een leeftijd van 6 maanden en 12 maanden de lengte genoteerd.
 Zie de tabel.

LENGTE KINDEREN VAN 6 EN 12 MAANDEN

		lengte in cm			
		6 maanden		12 maanden	
	n	$\bar{X}$	S	$\bar{X}$	S
meisjes	38	66,2	2,8	73,6	3,2
jongens	43	68,0	3,1	76,8	3,4



Bij deze tabel kunnen voor de lengte vier 95%-betrouwbaarheidsintervallen worden opgesteld.

Onderzoek welk van de vier intervallen het meest nauwkeurig is.

A58




Anna onderzoekt het gemiddelde gewicht van Nederlandse huiskatten. Ze heeft van een dierenarts de gegevens van 200 huiskatten gekregen. In de tabel hieronder staan enkele statistieken bij de gegevens.

GEWICHT HUISKATTEN

	geslacht	
	m	v
n	91	109
$\bar{X}$	4201 gram	3215 gram
S	705 gram	620 gram



- Noem de twee variabelen die in de tabel voorkomen. Zijn de variabelen kwalitatief of kwantitatief?
- Beredeneer, dus zonder berekening, dat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde gewicht bij de vrouwelijke katten minder breed is dan bij de mannelijke katten.
- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde gewicht van de vrouwelijke huiskat. Geef je antwoord in de intervalnotatie en rond af op gehele grammen.
- Voor de mannelijke huiskatten berekende Anna het 95%-betrouwbaarheidsinterval [4053 gram, 4349 gram]. Anna besluit het interval te noteren als [4,1 kg; 4,3 kg]. Dit heeft effect op de betrouwbaarheid van het interval.
 Is de betrouwbaarheid van het nieuwe interval meer of minder dan 95%? Licht toe.

Meneer Mutsaers geeft aardrijkskunde in de bovenbouw. Hij vraagt zich af welk deel van de Nederlandse havo-bovenbouwleerlingen een ander continent hebben bezocht. Hij besluit de leerlingen op zijn school te bevragen via een online enquête. Uit zijn enquête blijkt dat van de 70 respondenten er 28 een ander continent hebben bezocht.



- a** Bereken het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Meneer Mutsaers vindt dit interval te onnauwkeurig en gaat daarom een grotere steekproef nemen. Hij wil een 95%-betrouwbaarheidsinterval met een breedte van maximaal 0,1. Hij neemt aan dat de steekproefproportie weer 0,4 zal zijn. Hij stelt daarom de vergelijking

$$4 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{n}} = 0,1 \text{ op.}$$

- b** Licht deze vergelijking toe.

De oplossing van deze vergelijking is $n = 384$.

- c** Laat dit zien.

- d** Meneer Mutsaers neemt een steekproef van 400 leerlingen en het blijkt dat 180 hiervan een ander continent hebben bezocht. Krijgt hij zo een breedte van maximaal 0,1?

Theorie D Berekenen van de steekproefomvang

In opgave 59 kreeg je de vergelijking $4 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{n}} = 0,1$. Door deze vergelijking op te lossen kun je bij het 95%-betrouwbaarheidsinterval de steekproefomvang n berekenen die nodig is om bij een proportie van 0,4 een breedte van 0,1 te krijgen.

Het oplossen van deze vergelijking mag met de GR. Je krijgt $n = 384$.

Voor een breedte van maximaal 0,1 heb je bij $\hat{p} = 0,4$ dus een steekproefomvang van minstens 384 nodig.

Om de steekproefomvang te berekenen bij de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval los je een vergelijking op.

- Bij een proportie: $\text{breedte} = 4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$.
- Bij een gemiddelde: $\text{breedte} = 4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.

Bij het oplossen met de GR gebruik je bij y_1 de formule voor de breedte en bij y_2 de vereiste breedte. Een geschikt venster stel je in door y tussen 0 en het dubbele van y_2 te kiezen. Voor x zijn de grenzen 0 en 2000 een goed uitgangspunt. Zie je geen snijpunt, verhoog dan de bovengrens van x .

Voorbeeld

Bereken de steekproefomvang als

- a de populatieproportie met 95% zekerheid in $[0,555; 0,605]$ ligt
- b het populatiegemiddelde met 95% zekerheid in $[999, 1005]$ ligt en geldt dat $S = 48$.

Uitwerking

- a breedte $= 0,605 - 0,555 = 0,05$ en $\hat{p} = \frac{0,555 + 0,605}{2} = 0,58$

$$\text{Los op } 4 \cdot \sqrt{\frac{0,58 \cdot 0,42}{n}} = 0,05.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,58 \cdot 0,42}{x}} \text{ en } y_2 = 0,05.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 1559$, dus de steekproefomvang is 1559.

- b breedte $= 1005 - 999 = 6$ en $S = 48$

$$\text{Los op } 4 \cdot \frac{48}{\sqrt{n}} = 6.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 4 \cdot \frac{48}{\sqrt{x}} \text{ en } y_2 = 6.$$

De optie snijpunt geeft $x = 1024$, dus de steekproefomvang is 1024.

60



Bereken de steekproefomvang als

- a de populatieproportie met 95% zekerheid in $[0,34; 0,46]$ ligt
- b het populatiegemiddelde met 95% zekerheid in $[540, 590]$ ligt en geldt dat $S = 205$.

61



Bij een onderzoek onder D66 stemmers blijkt dat 55% het koningshuis wil behouden. Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval was $[0,49; 0,61]$.

Hoeveel D66 stemmers zijn ondervraagd?

62



Het gemiddeld aantal uren dat Nederlanders in de buitenlucht doorbrengen, verschilt per dag. Uit onderzoek blijkt dat op zondag het 95%-betrouwbaarheidsinterval $[3,0; 3,4]$ is, met een steekproefstandaardafwijking van 1,6 uur.

Hoe groot was de steekproefomvang bij dit onderzoek?



A63
☐ ⊙ *

Noord-Hollandse vrouwenvoeten zijn de grootste van het land, blijkt uit onderzoek uitgevoerd voor een online schoenenketen. Met een gemiddelde schoenmaat van maar liefst 39,5 is de schoenmaat van Noord-Hollandse vrouwen bijna een halve maat groter dan de gemiddelde schoenmaat van de Nederlandse vrouw. Bij de resultaten van het onderzoek staat niet vermeld wat de omvang van de steekproef was.

Onderzoek hoe groot de steekproef onder Noord-Hollandse vrouwen minimaal moet zijn geweest om met 95% zekerheid te concluderen dat de gemiddelde schoenmaat van Noord-Hollandse vrouwen 39 of hoger is. Ga uit van $S = 1,5$.



A64
☐ ⊙ *

Bij een Brits onderzoek door een datingwebsite voor heteroseksuelen is bekeken op welke leeftijd mensen 'de ware' ontmoeten. Bij het onderzoek bestond de steekproef uit 2000 personen waarvan een deel uit mannen en een deel uit vrouwen bestond. Het bleek dat voor mannen de gemiddelde leeftijd van ontmoeten van 'de ware' op 28 jaar lag. Met 95% zekerheid wijkt het populatiegemiddelde hier niet meer dan 6 maanden van af. Voor de groep mannen was S gelijk aan 7 jaar en 9 maanden.

Bereken welk percentage van de personen in de steekproef een man was.



E65
☐ *

Bij een onderzoek naar de moeilijkheid van het havo wiskunde A examen zijn 850 examenkandidaten ondervraagd. Uit het onderzoek blijkt dat een groot deel van de ondervraagden het examen te moeilijk vond. De breedte van het bijhorende 95%-betrouwbaarheidsinterval was 0,05.

Bereken hoeveel van de ondervraagden het examen te moeilijk vonden.

Terugblik

Werken met betrouwbaarheidsintervallen

Er zijn twee soorten betrouwbaarheidsintervallen:

- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.
- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde.

Bij een kwalitatieve variabele gebruik je het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie.

Beide soorten betrouwbaarheidsintervallen staan op het formuleblad bij het centraal examen. De notatie op het formuleblad is echter anders dan de intervalnotatie in dit boek. Hieronder zie je het deel van het formuleblad dat over betrouwbaarheidsintervallen gaat.

Bij een kwantitatieve variabele gebruik je het betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \text{ met } p \text{ de steekproefproportie en } n \text{ de steekproefomvang.}$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ met } \bar{X} \text{ het steekproefgemiddelde, } n \text{ de steekproefomvang en } S \text{ de steekproefstandaardafwijking.}$$

Het interval $[2,8; 3,2]$ ziet er in de notatie van het formuleblad uit als

$$3 \pm 2 \cdot 0,1 \text{ oftewel } 3 \pm 0,2. \text{ Je ziet dat } \bar{X} = 3 \text{ en } \frac{S}{\sqrt{n}} = 0,1.$$

De breedte van een betrouwbaarheidsinterval

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de

populatieproportie is $4 \cdot \sigma$ met $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het

populatiegemiddelde is $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.

Om bij $\hat{p} = 0,3$ te berekenen voor welke n de breedte van het interval

gelijk is aan 0,08 stel je de vergelijking $4 \cdot \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{n}} = 0,08$ op.

Oplossen met de GR geeft $n = 525$. Bij een steekproefomvang van 525 heeft het interval dus een breedte van 0,08.

Eindopdracht PISA Nederland

In 2015 nam Nederland weer deel aan het PISA-onderzoek dat onder andere het wiskundeniveau van 15-jarigen van verschillende landen en regio's vergelijkt. De score van Nederland op het onderdeel wiskunde viel tegen in vergelijking met het onderzoek uit 2006. Toch eindigde Nederland nog steeds in de top-20, zoals in de tabel hieronder te zien is.

rangnummer	land	95%-betrouwbaarheidsinterval
1	Singapore	561 - 567
2	Hong Kong-China	542 - 554
3	Macao-China	542 - 546
4	Chinese Taipei	536 - 548
5	Japan	527 - 538
6	B-S-J-G-China	522 - 541
7	Korea	517 - 531
8	Zwitserland	516 - 527
9	Estland	516 - 524
10	Canada	511 - 520
11	Nederland	508 - 517
12	Denemarken	507 - 515
13	Finland	507 - 516
14	Slovenië	507 - 512
15	België	502 - 512
16	Duitsland	500 - 512
17	Polen	500 - 509
18	Ierland	500 - 508
19	Noorwegen	497 - 506
20	Oostenrijk	491 - 502

- Op basis waarvan is de rangorde in de tabel tot stand gekomen?

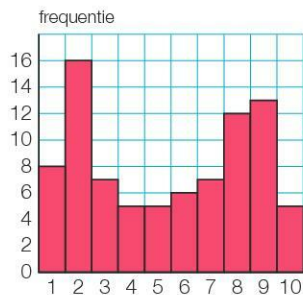
In totaal werden 5385 leerlingen in Nederland en 10 500 leerlingen in Duitsland onderzocht.

- Welke steekproefstandaardafwijking is groter, die van Duitse of Nederlandse leerlingen? Hoe groot is het verschil?
- Door de grenzen van de betrouwbaarheidsintervallen kun je niet precies zeggen op welke plek in de top-20 Nederland staat. Door rekening te houden met deze grenzen, is de hoogste mogelijke notering van Nederland een gedeelde 7^e plaats met Korea. Wat is de laagst mogelijke notering?
- Hoeveel extra leerlingen zou Nederland moeten laten onderzoeken om te zorgen dat het 95%-betrouwbaarheidsinterval van Nederland niet overlapt met dat van Polen? Neem aan dat het steekproefgemiddelde voor Nederland 512,5 blijft en de steekproefstandaardafwijking 165.

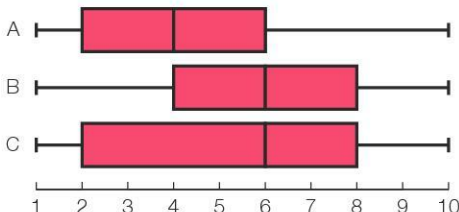
Diagnostische toets

7.1 Statistische verdelingen

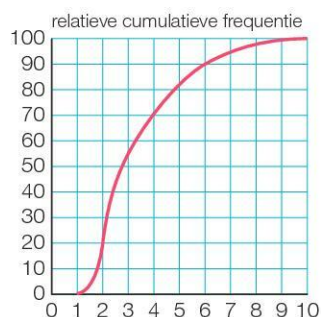
- 1** In het histogram in figuur 7.34 zijn 84 waarnemingsgetallen verwerkt. Onderzoek welke boxplot bij het histogram hoort.



figuur 7.34



- 2** Zie de relatieve verdelingskromme in figuur 7.35.
- a** Met wat voor soort verdeling heb je te maken?
 - b** Zet op volgorde van klein naar groot: mediaan, modus en gemiddelde. Licht toe.
 - c** Schets de bijbehorende verdelingskromme.



figuur 7.35

- 3** Van 4000 bananen is gegeven dat het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 138 gram en een standaardafwijking van 19 gram.
- a** Hoeveel van deze bananen hebben een gewicht van meer dan 157 gram?
 - b** Bij een kwaliteitscontrole worden 120 van deze bananen gewogen. Hoeveel van deze bananen hebben naar verwachting een gewicht van minder dan 100 gram?

7.2 Betrouwbaarheidsintervallen voor het populatiegemiddelde

- 4** De inhoud van zakken aardappelen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 600 gram en een standaardafwijking van 30 gram. Er worden steekproeven genomen van 16 zakken en van deze zakken wordt telkens het gemiddelde gewicht in de steekproef berekend. Welk percentage van de steekproeven zal een gemiddeld gewicht van tussen 585 en 615 gram opleveren?
- 5** Voor een onderzoek naar de wachttijd bij de helpdesk van een internetprovider werden 300 gesprekken geanalyseerd. Hierbij was de gemiddelde wachttijd 3 minuten en 20 seconden. De bijbehorende standaardafwijking is 45 seconden.
- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de wachttijd bij de helpdesk van deze internetprovider in seconden nauwkeurig.
 - b** Welke informatie geeft dit interval in deze context?

7.3 Betrouwbaarheidsintervallen voor de populatieproportie

- 6** Een kwart van de Nederlandse huishoudens heeft één of meer homeopathische middelen in huis. Bij een onderzoek wordt van 75 huishoudens de proportie genoteerd met een homeopathisch middel in huis.
Bereken bij welk percentage van de mogelijke steekproeven de steekproefproportie tussen 0,2 en 0,3 zal liggen.
- 7** Bij een onderzoek onder 1500 Nederlandse huishoudens blijken er 400 homeopathische middelen in huis te hebben.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie huishoudens dat homeopathische middelen in huis heeft.

7.4 Betrouwbaarheidsintervallen toepassen

- 8** Bij een onderzoek onder 126 jongeren tussen 12 en 20 jaar bleek dat 72% van deze jongeren meer dan 8 minuten per keer doucht. Verder bleek dat deze jongeren gemiddeld 52 minuten per week douchen. De bijbehorende standaardafwijking was 14 minuten.
- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddeld aantal minuten douchen per week.
 - b** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie jongeren die meer dan 8 minuten per keer doucht.
- 9**
- a** Schrijf het interval $0,316 \pm 0,018$ in de intervalnotatie.
 - b** Schrijf het interval $[215, 269]$ in de $\pm$ -notatie.
 - c** Bij een onderzoek staat bij de steekproefresultaten vermeld dat $\hat{p} = 0,28$ en $n = 224$.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze steekproef. Schrijf het resultaat in beide notaties.
- 10** In een krant staat dat 35% van de volwassen Nederlanders last heeft van vliegschaamte. Bij vliegschaamte voel je je schuldig als je vliegt. Een onderzoeker wil controleren of dit percentage juist is. Hij wil een 95%-betrouwbaarheidsinterval opstellen met een breedte van maximaal 10%. Om dit te bereiken wil hij niet meer mensen ondervragen dan nodig is.
Onderzoek of er minimaal 200, 300 of 400 mensen ondervraagd moeten worden.
- 11** Bereken de steekproefomvang als
- a** het populatiegemiddelde met 95% zekerheid in $[268, 272]$ ligt en geldt dat $S = 45$
 - b** de populatieproportie met 95% zekerheid in $[0,372; 0,418]$ ligt.

8

Statistiek met de computer

Wat leer je?

- In een spreadsheet data invoeren en berekeningen maken.
- Diagrammen maken met een spreadsheetprogramma.
- Informatie zoeken met filteren en sorteren in een grote dataset.
- Gegevens met behulp van formules combineren tot nieuwe gegevens.
- Met draaitabellen gegevens van een grote dataset samenvatten.
- Draaigrafieken maken.



Beginopdracht Olympische Spelen 2016

Aan de Olympische Zomerspelen in Rio de Janeiro 2016 deden meer dan 11 000 sporters uit 205 landen mee. Van al deze sporters is informatie verzameld.

Open het bestand *SportersRio2016*. Het bestand is gesorteerd op land, geboortedatum en geslacht. Dat is in een bepaalde volgorde gedaan.

- Onderzoek welke volgorde dat is.
- Welke sport beoefent de oudste sporter uit China?
- Wat is het gewicht van de enige Nederlandse taekwondo-deelnemer?
- Hoe heet de langste vrouw van het damesbasketbalteam uit Senegal?

Je kunt aantallen sporters tellen door te kijken naar de nummers van de rijen, die helemaal links worden weergegeven.

- Van hoeveel sporters is er informatie beschikbaar?
- Reken na dat 249 sporters uit Nederland kwamen. Hoeveel sporters kwamen uit België?

André vraagt zich af hoe de aantallen mannelijke en vrouwelijke sporters uit Nederland zich verhouden tot de aantallen uit België. Hij stelt de volgende kruistabel op.

	Nederland	België	totaal
man			
vrouw			
totaal			

- Neem de tabel over en vul in.
- Had Nederland procentueel gezien meer of minder vrouwelijke sporters dan België?

Voorkennis Centrummaten en boxplots

Theorie A Centrummaten

Om data te karakteriseren met één getal kun je een centrummaat gebruiken.

CENTRUMMATEN

gemiddelde	Het gemiddelde is $\frac{\text{som van de waarnemingsgetallen}}{\text{totale frequentie}}$.
mediaan	Schrijf de getallen in volgorde van grootte. De mediaan is het middelste getal bij een oneven aantal getallen. Bij een even aantal getallen is de mediaan het gemiddelde van de middelste twee getallen.
modus	De modus is het waarnemingsgetal met de grootste frequentie. Zijn er twee of meer waarnemingsgetallen met de grootste frequentie, dan is er geen modus.

Zijn er bij een statistisch onderzoek veel verschillende waarnemingsgetallen, dan maak je meestal een indeling in klassen. Bij de klasse $[20, 25)$ doet de linkergrens 20 mee, maar de rechtergrens 25 niet. Het klassenmidden is 22,5.

Om bij een klassenindeling het gemiddelde te schatten, maak je gebruik van de klassenmiddens. Je kunt bij een klassenindeling de mediaan niet meer berekenen, maar je kunt wel aangeven in welke klasse de mediaan ligt. In plaats van de modus heb je bij een klassenindeling te maken met de modale klasse.

1 Van een groep museumbezoekers is de leeftijd genoteerd.

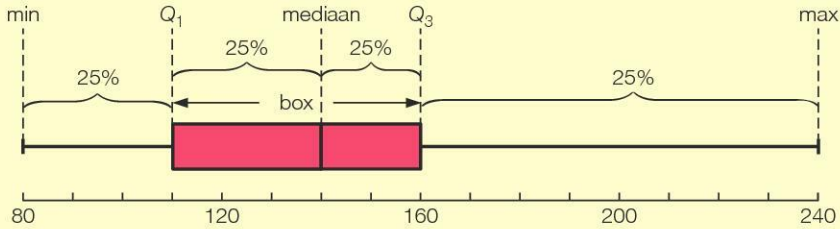
De resultaten staan in de tabel hiernaast.

- a** Geef een schatting van de gemiddelde leeftijd. Rond af op één decimaal.
- b** In welke klasse ligt de mediaan?
- c** Geef de modale klasse.

leeftijd	frequentie
$[0, 15)$	12
$[15, 30)$	10
$[30, 45)$	13
$[45, 60)$	24
$[60, 75)$	21
$[75, 90)$	2

Theorie B Boxplots en spreidingsmaten

Een boxplot is een diagram dat de spreiding van data in beeld brengt. Alleen bij een kwantitatieve variabele kun je een boxplot maken. De mediaan verdeelt een serie waarnemingsgetallen in twee even grote groepen. Van elk van deze groepen kun je weer de mediaan bepalen. De mediaan van de eerste helft heet het eerste kwartiel. Notatie Q_1 . De mediaan van de tweede helft heet het derde kwartiel. Notatie Q_3 .



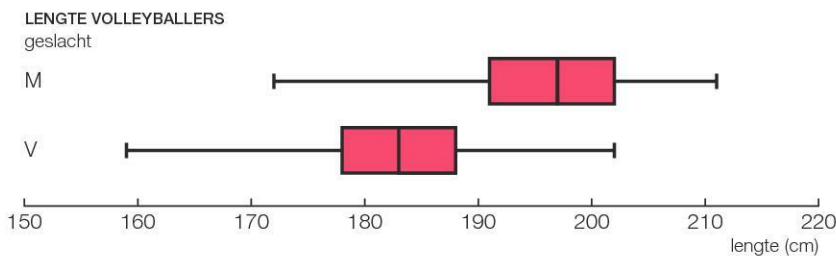
figuur 8.1

Verder ken je de volgende spreidingsmaten:

- spreidingsbreedte = maximum – minimum
- interkwartielafstand = $Q_3 - Q_1$
- standaardafwijking σ .

De standaardafwijking geeft een indruk van de gemiddelde afwijking van de waarnemingsgetallen tot het gemiddelde.

- 2** Op de Olympische Spelen 2016 in Rio de Janeiro namen aan het volleybaltoernooi zowel bij de mannen als de vrouwen 192 sporters deel. Voor beide geslachten is de lengte verwerkt in boxplots. Zie de figuur hieronder.



figuur 8.2

- Hoeveel vrouwen zijn kleiner dan 1,83 meter?
- Frits beweert dat de langste vrouw langer is dan de meeste mannen. Licht zijn uitspraak toe.
- Is de spreidingsbreedte van de lengte groter bij de mannen of de vrouwen? Licht toe met een berekening.

8.1 Werken met een spreadsheet

Theorie A Data invoeren

Een **spreadsheet** of (**digitaal**) **rekenblad** bestaat uit cellen in rijen en kolommen. Elke cel kan een getal, een tekst of een formule bevatten. Formules maken het mogelijk om bijvoorbeeld bij een kolom het gemiddelde te berekenen en dit weer te geven in een cel. Een spreadsheet is dynamisch. Dat wil zeggen dat de uitkomsten van formules direct opnieuw worden berekend als je de waarde in een cel verandert.

In dit hoofdstuk werk je met een spreadsheetprogramma, zoals bijvoorbeeld Microsoft Excel of Google Sheets.

De modules en de bestanden die in dit hoofdstuk genoemd worden vind je in Getal & Ruimte online.

[► ICT] Neem de module **Data invoeren** door.



De tabel hieronder gaat over aantallen verkochte woningen in de gemeente Utrecht. Open een nieuw rekenblad en voer de tabel in. Gebruik zo mogelijk de vulgreep. Sla het bestand op onder de naam *WoningVerkoopUtrecht*. Je hebt het bestand later nog nodig.

	A	B	C	D	E
1	jaar	1e kwartaal	2e kwartaal	3e kwartaal	4e kwartaal
2	2008	1024	1123	1292	1252
3	2010	772	743	881	964
4	2012	630	767	864	889
5	2014	724	484	710	882
6	2016	1204	1016	1383	1474
7	2018	1147	1239	1472	1404

figuur 8.3

Theorie B Rekenen met een spreadsheet

[► ICT] Neem de module **Formules en verwijzingen** door.

Het berekenen van kwartielen met een spreadsheetprogramma kan iets andere antwoorden opleveren dan met de methode die je in de onderbouw hebt geleerd. Voor grote aantallen gegevens, zoals in dit hoofdstuk, zijn eventuele verschillen erg klein.

2

In het bestand *ProefwerkScores* zie je voor elke leerling van een klas hoeveel punten hij of zij gehaald heeft voor elk van de vragen van een proefwerk. In rij 2 zie je de maximale score per vraag.

- Bereken in cel Y2 hoeveel punten er maximaal gehaald konden worden bij dit proefwerk. Welke functie heb je gebruikt?
- Bereken in cel Y3 hoeveel punten Joris gehaald heeft bij dit proefwerk. Gebruik de vulgreep in kolom Y om de scores van de andere leerlingen te berekenen. Welke leerling heeft de meeste punten gehaald en welke leerling de minste?

Belangrijke functies
SOM
AANTAL
GEMIDDELDE
MEDIAAN
MIN
MAX
STDEV.P
KWARTIEL of
KWARTIEL.EXC
AFRONDEN

Het cijfer voor dit proefwerk wordt berekend met de formule

$$\text{cijfer} = \frac{\text{score}}{\text{max score}} \times 9 + 1.$$

- Bereken in cel Z3 het cijfer dat Joris voor dit proefwerk heeft gehaald. Gebruik in je formule een absolute verwijzing naar cel Y2 en een relatieve verwijzing naar cel Y3.
- Pas de ceileigenschappen van Z3 aan, zodat het cijfer wordt weergegeven met één decimaal. Gebruik de vulgreep om de cijfers van de andere leerlingen te berekenen.

Gebruik F4 voor het wisselen tussen absolute en relatieve verwijzingen.

De docent is geïnteresseerd in de statistieken van de proefwerkresultaten.

- Bereken voor elke vraag het gemiddelde, de standaardafwijking, de laagste score, Q_1 , de mediaan, Q_3 en de hoogste score. Doe dit ook voor de totaalscores en de cijfers. Sla het bestand op onder de naam *ProefwerkMaten*. Je hebt het bestand later nog nodig.
- Gebruik formules om de volgende vragen te beantwoorden.
 - Bij welke vragen is de interkwartielafstand van de scores 2,5?
 - Bij welke vragen is het gemiddelde gelijk aan de mediaan?

A3

In het bestand *CijfersKlas* zie je een overzicht van toetscijfers van een klas. Het eindcijfer wordt bepaald door een gewogen gemiddelde te nemen van de cijfers. In rij 1 zie je hoe vaak elke toets meetelt voor het eindcijfer. Het eindcijfer wordt afgerond op één decimaal.

- Bereken voor elke leerling het eindcijfer. Denk aan het gebruik van relatieve en absolute verwijzingen. Gebruik de functie AFRONDEN om de eindcijfers op één decimaal af te ronden.
- Bereken in cel J25 het gemiddelde eindcijfer van de klas. Pas de ceileigenschappen van deze cel aan, zodat het gemiddelde wordt weergegeven in twee decimalen.
- Als de laatste toets niet 5, maar 6 keer meetelt, dan is het gemiddelde eindcijfer van de klas hoger.
Hoeveel scheelt het met het gemiddelde van vraag b?

Theorie C Diagrammen

Onderzoeksgegevens worden vaak verzameld in tabellen. Tabellen geven echter niet altijd een goed overzicht van de gegevens. Daarom worden bij de tabellen diagrammen gemaakt. Een diagram vat de gegevens op een grafische manier samen. Bekende diagrammen zijn lijn-, staaf-, stapel- en cirkeldiagrammen. Een diagram moet snel inzicht geven in de gegevens. Zorg bij het maken van diagrammen dus voor

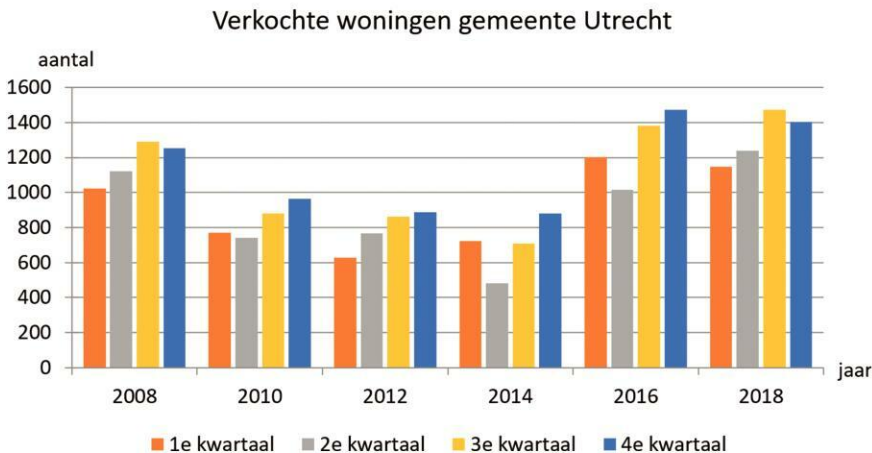
- een passende titel
- duidelijke informatie bij de assen en/of een legenda
- een geschikte schaalverdeling met eventueel roosterlijnen
- logisch kleurgebruik.

[▶ICT] Neem de module **Diagrammen** door.

Bij het namaken van diagrammen in de volgende opgaven is het belangrijk dat de opzet gelijk is. Je gebruikt dus hetzelfde soort diagram, dezelfde variabelen, labels en schaalverdelingen. Details als lettertype, kleuren, posities en afstanden mogen verschillen, zolang het diagram maar duidelijk is. Raadpleeg bij twijfel je docent.



4 Open het bestand *WoningVerkoopUtrecht* van opgave 1 en maak bij de gegevens een samengesteld staafdiagram, zoals in de figuur hieronder.

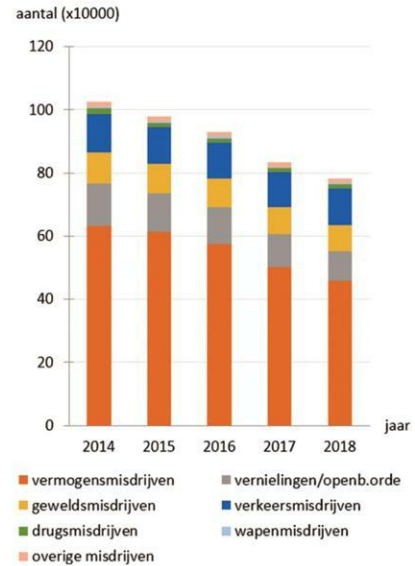


figuur 8.4

In het bestand *Criminaliteit* staan cijfers over geregistreerde criminaliteit in Nederland in de jaren 2010 tot en met 2018.

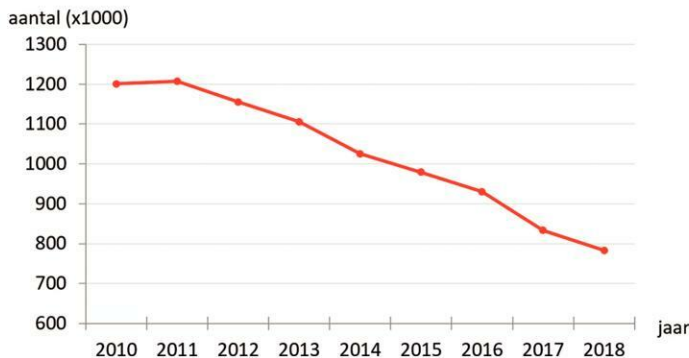
- Maak voor de jaren 2014 tot en met 2018 het stapeldiagram van figuur 8.5.
- Het lijndiagram in figuur 8.6 geeft de ontwikkeling weer van het totaal aantal misdrijven in de periode 2010-2018. Maak dit diagram.
- Het diagram in figuur 8.7 geeft weer hoe de in 2018 gepleegde misdrijven zijn verdeeld over de verschillende categorieën. Maak dit diagram.

Aantallen geregistreerde misdrijven in Nederland



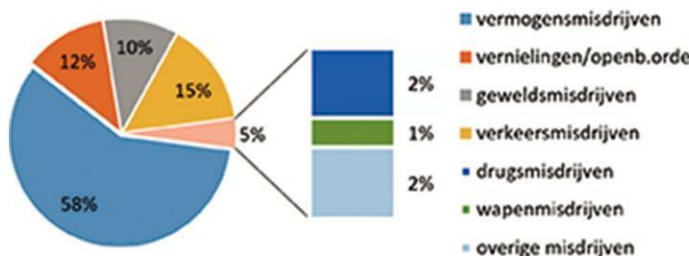
figuur 8.5

Ontwikkeling misdrijven in Nederland



figuur 8.6

Verdeling misdrijven in 2018



figuur 8.7

Theorie D Boxplots en uitbijters

Je hebt geleerd dat een boxplot de spreiding van data in beeld brengt. Boxplots die met de computer gemaakt zijn, worden meestal verticaal weergegeven.

Soms worden niet alle gegevens in de boxplot opgenomen. Waarden die ver van de box van de boxplot liggen, worden uitschieters of uitbijters genoemd. Deze worden als losse punten buiten de boxplot getekend.

Een veelgebruikte vuistregel is:

Een uitbijter is een waarnemingsgetal dat meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand onder het eerste of boven het derde kwartiel ligt.

[►ICT] Neem de module **Boxplots** door.



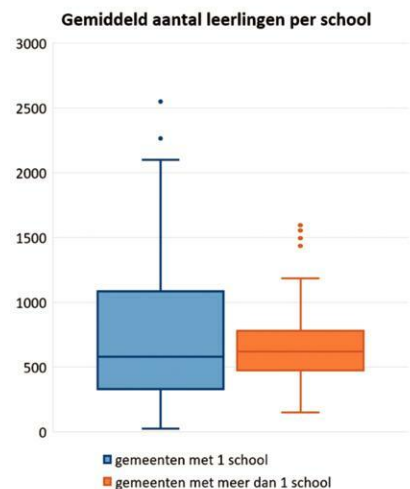
6 Bij een voetbalclub is bijgehouden hoe vaak iedere speler de bal kan hooghouden. De trainer heeft berekend dat $Q_1 = 10$, $Q_3 = 24$ en mediaan = 20.

- a Clara kan de bal 56 keer hooghouden.
Bereken of deze waarde volgens de vuistregel een uitbijter is.
- b Sommige jonge voetballers kunnen de bal maar één keer hooghouden.
Waarom zijn deze waarden volgens de vuistregel geen uitbijters?



7 In het bestand *MiddelbareScholen* staan gegevens over het aantal leerlingen en het aantal middelbare scholen per gemeente in Nederland.

- a Op welke variabele is het bestand gesorteerd?
- b Sorteert het bestand op het aantal leerlingen.
- c Maak de boxplot bij het aantal leerlingen van de 20 gemeenten met het grootste aantal leerlingen. Welke gemeenten horen bij de uitbijterpunten?
- d Bereken in kolom D voor elke gemeente het gemiddeld aantal leerlingen per school.
- e De boxplots hiernaast geven informatie over het gemiddeld aantal leerlingen per school in gemeenten met één school en gemeenten met meer dan één school.
Maak dit diagram.
- f Noem een opvallend verschil tussen de twee boxplots.



figuur 8.8

Twée boxplots vergelijken

Voor het bepalen van de grootte van het verschil bij kwantitatieve variabelen kun je twee boxplots vergelijken.

Het gedeelte tussen het eerste het derde kwartiel heet de box.

Hanteer de volgende vuistregels.

- Als de boxen elkaar niet overlappen, dan zeggen we *het verschil is groot*.
- Als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot ligt buiten de box van de andere boxplot, dan zeggen we *het verschil is middelmatig*.
- In alle andere gevallen zeggen we *het verschil is gering*.



8 Het bestand *SportersRio2016* bevat de gegevens van 11 538 sporters die deelnamen aan de Olympische Spelen 2016 in Rio de Janeiro.

- Van hoeveel sporters staat de lengte niet in de dataset?
- Maak in één figuur voor zowel mannen als vrouwen een boxplot bij de variabele lengte.
- Mannen vanaf een bepaalde lengte worden als uitbijterpunten weergegeven in de boxplot.
Welke lengte is dat? Om hoeveel mannen gaat het hier?
- Er is één opvallende uitbijter bij de lengte van de vrouwen.
Zou deze lengte kunnen kloppen?
- Zie het informatief hierboven.
Is het verschil in lengte tussen mannelijke en vrouwelijke sporters groot, middelmatig of gering?
- Bepaal door het vergelijken van twee boxplots hoe groot het verschil in gewicht tussen mannelijke en vrouwelijke sporters is.

Pas op met uitbijters.
Dit kunnen fouten in de dataset zijn.



A9 Het bestand *VerwijzingenHalt* bevat gegevens over het aantal verwijzingen per gemeente naar de organisatie Het Alternatief (HALT). Het doel van deze organisatie is om jeugdcriminaliteit te voorkomen en te bestraffen. Een verwijzing naar HALT wordt meestal door de politie of een leerplichtambtenaar gedaan.

Suzanne wil onderzoeken hoe groot het verschil in het aantal verwijzingen naar HALT is tussen grote en kleine gemeenten. Ze berekent eerst voor elke gemeente de verwijzingsgraad. Dat is het aantal verwijzingen naar HALT per 10000 inwoners. Daarna vergelijkt ze de boxplot met de verwijzingsgraad van de 50 grootste gemeenten met die van de 50 kleinste gemeenten.

Voer het onderzoek van Suzanne uit. Welke conclusie trekt ze? Gebruik het informatief hierboven.

8.2 Werken met datasets



Gebruik het bestand *SportersRio2016*.

Bereken het gemiddelde gewicht van de Japanse voetballers.

Theorie A Zoeken in een dataset

Om zonder problemen gebruik te kunnen maken van een aantal geavanceerde mogelijkheden van spreadsheetprogramma's, is het belangrijk dat je werkt met een zogenaamde **nette dataset**. Bij een nette dataset zijn de kolommen voorzien van kolomkoppen en zijn de cellen die grenzen aan de dataset leeg. Bovendien staan gegevens die bij elkaar horen steeds in één rij. De informatie in zo'n rij heet een **record**. Een nette dataset geeft je onder andere de mogelijkheid gegevens te **sorteren** en te **filteren**. Je kunt dan bijvoorbeeld snel het gemiddelde van een deelgroep berekenen.

[▶ ICT] Neem de module **Zoeken in een dataset** door.

Maak je gebruik van Excel, zet dan bij de volgende opgaven eerst de dataset om in een Tabel en maak de totaalrij aan.

Afspraak

Geef bij de beantwoording van de vragen steeds aan

- in welke kolommen je welke filters gebruikt
- in welke kolommen je op welke manier sorteert
- welke functies je gebruikt.



De volgende vragen gaan over het weer in De Bilt. Gebruik het bestand *WeerHistorie*, dat een nette dataset bevat met weergegevens gemeten door het weerstation in De Bilt.

- Hoeveel variabelen bevat de dataset?
- Van hoeveel dagen bevat de dataset gegevens?
- Op welke datum was de gemiddelde temperatuur het hoogst?
- Op hoeveel dagen was het gemiddeld 0°C of kouder?
- Wat is het totaal aantal uren zonneschijn dat is gemeten in de jaren 2016, 2017 en 2018 samen?
- Een dag wordt tropisch genoemd als de maximumtemperatuur 30°C of hoger is.
Wat was de gemiddelde temperatuur van alle tropische dagen? Rond af op twee decimalen.
- Het jaar 1965 was één van de natste jaren sinds de neerslag wordt gemeten.
Hoeveel mm neerslag viel er in dat jaar in totaal? Op welke dag regende het dat jaar het langst?

Open het bestand *SportersRio2016*.

- Welke sport beoefent de oudste sporter? En de jongste?
- Hoeveel procent van de sporters was 16 jaar of jonger?
- Wat was de gemiddelde leeftijd van de Nederlandse sporters? Rond af op gehelen.
- De sporters die meedoen aan de triatlon hebben een lager gemiddeld gewicht dan de roeiers. Hoeveel kg scheelt het? Rond af op gehelen.
- Volgens een journalist zijn de vrouwelijke Nederlandse sporters gemiddeld 4 cm langer dan de vrouwelijke sporters uit andere landen. Klopt dit? En hoe zit dat bij de mannelijke sporters?
- Hoeveel procent van de gouden medailles werd gewonnen door sporters uit de Verenigde Staten?



In het bestand *StudentenEnquete* zijn gegevens verzameld van 271 studenten.

- De gemiddelde lengte van de studenten in groep D is groter dan die van de studenten in groep A. Hoeveel cm scheelt het? Rond af op gehelen.
- Hoeveel procent van de studenten heeft een linkshandige ouder?

Het gemiddeld aantal uren slaap per etmaal van de studenten zie je in de kolom UrenSlaap. Studenten die gemiddeld minder dan 8 uur slapen hebben een korte slaapduur.

- Neem de kruistabel over en vul in.
- Welk percentage van de vrouwelijke studenten heeft een korte slaapduur? Is dit groter of kleiner dan het percentage bij de mannelijke studenten?

	slaapduur		totaal
	kort	lang	
man			
vrouw			
totaal			

Zie het informatief op de volgende bladzijde.

- Onderzoek met behulp van de phi-coëfficiënt of het verschil in slaapduur tussen mannelijke en vrouwelijke studenten groot, middelmatig of gering is.
- Luc ziet dat studenten die uit een plattelandsdorp komen vaker uitwonend zijn dan studenten die uit een grote stad komen. Onderzoek met behulp van de phi-coëfficiënt of het verschil in woonsituatie groot, middelmatig of gering is.

De phi-coëfficiënt

Een associatiemaat drukt in een getal uit hoeveel twee groepen van elkaar verschillen. Bij twee nominale variabelen met elk twee waarden gebruiken we als associatiemaat de phi-coëfficiënt.

Bij de 2×2 kruistabel hiernaast bereken je de phi-coëfficiënt met

$$\phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}$$

	waarde I	waarde II	
waarde 1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a + b</i>
waarde 2	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>c + d</i>
	<i>a + c</i>	<i>b + d</i>	

Bij de phi-coëfficiënt hanteren we de volgende vuistregels om een conclusie te trekken over de grootte van het verschil tussen twee groepen.

- Bij $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$ zeggen we *het verschil is groot*.
- Bij $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$ zeggen we *het verschil is middelmatig*.
- Bij $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$ zeggen we *het verschil is gering*.

O14


Bij een enquête onder de gasten van hotel De Negensprong is gevraagd naar de mate van tevredenheid over het ontbijtbuffet. Men kon daarbij kiezen uit de volgende antwoorden:

slecht matig voldoende ruim voldoende goed

In het bestand *Ontbijtbuffet* zijn de antwoorden op deze vraag in een tabel verzameld.

Bij nader inzien wil de hoteleigenaar alleen onderscheid maken tussen positieve, neutrale en negatieve beoordelingen.

Daarom wil hij de antwoorden 'ruim voldoende' en 'goed' vervangen door 'Positief' en de antwoorden 'matig' en 'slecht' door 'Negatief'. De beoordeling 'voldoende' beschouwt hij als een neutraal antwoord en zal hij dus 'Neutraal' willen noemen. De hoteleigenaar bedenkt de volgende aanpak.

- 1 Maak een nieuwe kolom aan door in cel D1 Beoordeling te typen.
- 2 Filter de kolom Ontbijtbuffet op 'ruim voldoende' en 'goed', zet in de eerste cel van de nieuwe kolom 'Positief' en gebruik de vulgreep om de kolom te vullen.
- 3 Filter de kolom Ontbijtbuffet op 'matig' en 'slecht', zet in de eerste cel van de nieuwe kolom 'Negatief' en gebruik de vulgreep om de kolom te vullen.
- 4 Vul op dezelfde wijze de juiste cellen van de nieuwe kolom met 'Neutraal'.

Onderzoek of deze aanpak werkt.

Theorie B Hercoderen en formules

In opgave 14 heb je een nieuwe variabele gemaakt, die gebaseerd is op een bestaande variabele. Dit proces wordt het **hercoderen** van een variabele genoemd.

Je kunt ook een nieuwe variabele toevoegen die waarden van verschillende bestaande variabelen combineert. In opgave 13 heb je gebruikgemaakt van een getalfilter om onderzoek te doen naar de kortslapers. Wil je onderzoek doen onder de uitwonende, vrouwelijke kortslapers dan moet je nóg twee filters juist instellen. Het is dan handig te beschikken over een nieuwe variabele die aangeeft of een student al dan niet een uitwonende, vrouwelijke kortslaper is. Je hebt daarna slechts één filter nodig om deze groep te bekijken. In de volgende module wordt uitgelegd hoe je dit doet.

[▶ ICT] Neem de module **Hercoderen** door.



15 Gebruik het bestand *SportersRio2016*.

Voeg een variabele *AtletiekVrouwBenelux* toe, die met de waarden Ja/Nee aangeeft of een sporter een vrouw uit de Benelux is die aan atletiek doet. Denk aan de afspraak op bladzijde 145.

Geef het in je uitwerking aan als je een nieuwe variabele toevoegt.



16 Ga uit van het bestand *SportersRio2016*.

- a** Voeg een variabele *Medailles* toe, die aangeeft hoeveel medailles een sporter in totaal won.
- b** Hoeveel sporters wonnen meer dan één medaille?
Hoeveel van hen wonnen ten minste één gouden medaille?
- c** Welke sporter won de meeste medailles?



17 Bij koud weer voelt het op een dag met veel wind kouder aan dan op een dag met weinig wind. Om de zogenaamde gevoelstemperatuur te berekenen kan de formule $G = 1,41 - 1,162W + 0,98T + 0,0124W^2 + 0,0185WT$ worden gebruikt. Hierin is T de temperatuur in °C en W de windsnelheid in m/s. Open het bestand *WeerHistorie*. Onderzoek met behulp van de gemiddelde temperatuur en de gemiddelde windsnelheid welke dag het koudst aanvoelde.

A18
☐ ⊗ *

Ga uit van de gegevens in het bestand *SportersRio2016*.

Gebruik in deze opgave alleen de gegevens van sporters waarvan zowel het gewicht als de lengte in de dataset staat.

a Ga na dat dit voor 10 858 sporters het geval is.

De BMI is een maat die vaak gebruikt wordt om te beoordelen of een persoon overgewicht heeft of niet. De BMI wordt berekend met de

formule $BMI = \frac{\text{gewicht}}{\text{lengte}^2}$. Hierin is het gewicht in kg en de lengte in m.

Een BMI van 25 of meer geeft overgewicht aan.

b Voeg de variabele BMI toe. Welke sporter had de hoogste BMI?

c Voeg de variabele OvergewichtBMI toe, die de waarde Ja heeft als de sporter overgewicht heeft en Nee als de sporter geen overgewicht heeft.

d Hoeveel sporters hadden overgewicht?

A19
*

Sinds een aantal jaren gebruikt het KNMI voor het berekenen van de gevoelstemperatuur niet meer de formule van opgave 17.

Tegenwoordig gebruikt men de formule

$$G = 13,12 + 0,6215T - 11,37(3,6W)^{0,16} + 0,3965T(3,6W)^{0,16}.$$

Hierin is T de temperatuur in °C en W de windsnelheid in m/s. Deze formule geldt voor $W > 1,3$. Als de windsnelheid 1,3 m/s of lager is, dan gaan we ervan uit dat de gevoelstemperatuur gelijk is aan de luchttemperatuur.

Gebruik het bestand *WeerHistorie*.

Onderzoek op welke dag volgens deze formule het verschil tussen de gemiddelde temperatuur en de gevoelstemperatuur het grootst was.

Gebruik voor T de gemiddelde temperatuur en voor W de gemiddelde windsnelheid.



8.3 Draaitabellen en draaigrafieken



In het bestand *SocialeNetwerken* vind je gegevens van een enquête die is gehouden onder inwoners van de VS van 20 tot 25 jaar.

- Hoeveel mannen deden mee aan het onderzoek? En hoeveel vrouwen?
- Geef van elk van de regio's (Midwest, Northeast, South en West) aan hoeveel personen meededen aan het onderzoek.
- Neem de kruistabel hiernaast over en vul deze verder in.

		geslacht		
		M	V	
regio	Midwest			
	Northeast			
	South			
	West			
				798

Theorie A Draaitabellen maken

In opgave 20 heb je door herhaald gebruik van filters een kruistabel gemaakt. Voor deze kruistabel heb je minstens zeven keer een filter moeten instellen.

Wil je bijvoorbeeld een kruistabel maken zoals hiernaast, waarin per staat is af te lezen hoeveel jongens en meisjes meededen aan het onderzoek, dan is dat met filters instellen veel werk. In een spreadsheet kun je met behulp van **draaitabellen** snel dergelijke kruistabellen maken.

Een draaitabel is een tabel die data uit een nette dataset op een dynamische manier kan samenvatten, rangschikken en groeperen. Een draaitabel kan onder andere automatisch kruistabellen maken met aantallen, gemiddelden, standaardafwijkingen en minima.

DEELNEMERS ONDERZOEK

	M	V	
Alabama	6	10	16
Alaska	0	1	1
Arizona	12	8	20
Arkansas	4	3	7
California	48	48	96
Colorado	11	12	23
⋮	⋮	⋮	⋮
Wisconsin	6	8	14
Wyoming	0	1	1
	402	396	798

[▶ ICT] Neem de module **Draaitabellen** door.



21
☐ ◎ *

Open het bestand *SportersRio2016*.

a Maak een kruistabel met aantallen

- met als rij-variabele Geslacht en als kolomvariabele Leeftijd
- met als rij-variabele Leeftijd en als kolomvariabele Geslacht.

Wat is de modale leeftijd bij de vrouwelijke sporters?

b Maak kruistabellen waarmee de volgende vragen te beantwoorden zijn.

- Bij welke sporten staan evenveel mannen als vrouwen in de dataset?
- Welke sport beoefende de oudste sporter met een gouden medaille?

Door variabelen in rijen of kolommen te verwisselen (draaien) kun je de brongegevens op andere manieren samenvatten.

22
☐ ◎ *

In het bestand *Speerwerpen* is van alle speerwerpers de beste afstand genoteerd die ze hebben geworpen bij de kwalificatieronde voor de Olympische Spelen 2016.

Maak een kruistabel waarin de kleinste, de gemiddelde en de grootste geworpen afstanden zijn af te lezen, uitgesplitst naar geslacht en vervolgens naar groep.



A23
☐ ◎ *

Ga uit van het bestand *SocialeNetwerken*.

De variabele FB-Vrienden geeft aan hoeveel Facebookvrienden iemand heeft. De waarde #NULL! geeft aan dat de vraag niet gesteld is aan deze persoon, omdat deze geen Facebookaccount heeft.

Susanne beweert dat uit de dataset blijkt dat voor personen die een Facebookaccount hebben, geldt dat

- hoe ouder ze zijn, hoe meer Facebookvrienden ze hebben
- vrouwen over het algemeen meer Facebookvrienden hebben dan mannen.

a Onderzoek of Susanne gelijk heeft. Licht je antwoord toe met behulp van één draaitabel met gemiddelde aantallen Facebookvrienden.

Michiel wil onderzoeken of de aantallen Facebookvrienden van personen op het platteland (Rural) afwijken van die van personen in de stad (Urban). Hij bedenkt dat ondervraagden zonder Facebookaccount nul Facebookvrienden hebben. Daarom hercodeert hij de variabele FB-vrienden.

b Maak voor Michiel de kruistabel die de gemiddelde aantallen Facebookvrienden voor de genoemde woonomgevingen weergeeft. Welke conclusie trekt Michiel?

R24
☐ ○ *

Ga uit van het bestand *SocialeNetwerken*.
Maak een kruistabel met aantallen met de variabelen *DeeltFotosVanZichzelf* en *DeeltVideosVanZichzelf*.
Wat is de betekenis van het getal 12 in de tabel?



O25
☐ ○ *

Het bestand *LeerlingGegevens* bevat informatie over leerlingen van het Playfair College.

- a Maak met behulp van een draaitabel een frequentietabel van alle voorkomende lichaamslengtes. Waarom geeft deze frequentietabel geen goed beeld van de verdeling?
- b Voeg aan de dataset de nieuwe variabele *LengteKlasse* toe, die aangeeft tot welk van de lengteklassen 150-159, 160-169, ... de leerling behoort.
- c Maak met behulp van een draaitabel een frequentietabel bij de variabele *LengteKlasse*.

Theorie B Groeperen en draaigrafieken

In opgave 25 heb je door middel van hercoderen een klassenindeling gemaakt.

In een spreadsheet is het mogelijk om op een dynamische manier een klassenindeling te maken. Het maken van een klassenindeling komt neer op het **groeperen** van de waarden van een variabele.

Het is ook mogelijk een diagram bij een draaitabel te maken dat met de draaitabel meeverandert. Zo'n dynamisch diagram heet een **draaigrafiek**.

[▶ ICT] Neem de module **Groeperen en draaigrafieken** door.

Afspraak

Maak in deze paragraaf de genoemde diagrammen met behulp van draaitabellen/draaigrafieken. Maak elke grafiek netjes op. Zorg dus voor voldoende informatie bij de assen, een passende titel en zo nodig een legenda.

26



Ga uit van het bestand *StudentenEnquete*.

- Maak een cirkeldiagram bij de variabele Groep. Zorg ervoor dat in het diagram de aantallen studenten per groep te zien zijn.
- Maak een staafdiagram bij de variabele Lengte. Neem een klassenindeling tussen 155 en 195, met stapgrootte 5. Je krijgt dan een tabel zoals hiernaast.
- Maak een staafdiagram bij de variabele UrenSlaap. Neem een klassenindeling tussen 5 en 10, met stapgrootte 1.
- Maak een cirkeldiagram bij de variabele AantalBroersEnZussen. Meer dan vijf broers en zussen komt niet vaak voor. Groepeer daarom de aantallen broers en zussen boven vijf in een groep met de naam 'meer dan 5'.



lengte	aantal
< 155	5
155-159	11
160-164	27
165-169	32
170-174	46
175-179	41
180-184	47
185-189	42
190-194	13
>195	7
totaal	271

27



Gebruik het bestand *Speerwerpen*.

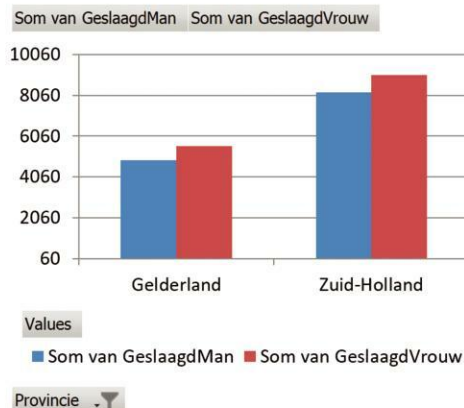
- Maak een frequentietabel van de geworpen afstanden met een draaitabel. Neem een klassenindeling tussen 55 en 90, met stapgrootte 5.
- Maak bij de tabel van vraag a een staafdiagram.
- Met wat voor soort verdeling heb je hier te maken?
- Pas de draaitabel en de draaigrafiek aan, zodat mannen en vrouwen apart worden weergegeven. Hoe is het antwoord op vraag c te verklaren?

Bij zowel de mannen als de vrouwen waren de atleten opgedeeld in de groepen A en B.

- Pas het staafdiagram van vraag d aan, zodat zowel bij de mannen als bij de vrouwen de resultaten van de A- en de B-groep snel vergeleken kunnen worden.

Open het bestand *Examenkandidaten*. De dataset in dit bestand bevat gegevens over eindexamenkandidaten op havo en vwo in 2018. De gegevens over het aantal geslaagde en gezakte kandidaten zijn uitgesplitst naar school, niveau, profiel(combinatie) en geslacht.

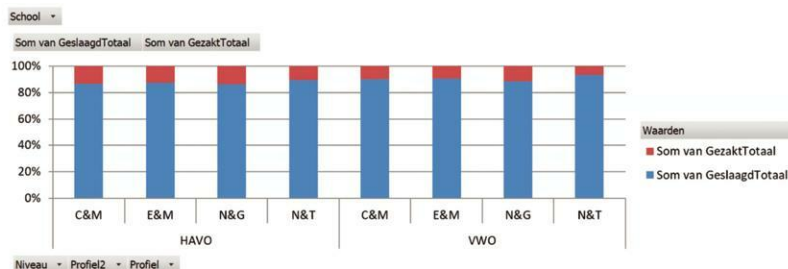
- Maak een stapeldiagram waarin per niveau af te lezen is hoeveel jongens en meisjes eindexamen deden.
- Maak het staafdiagram van figuur 8.9, waarin voor twee provincies te zien is hoeveel jongens en meisjes geslaagd zijn.
- Met een cirkeldiagram kan worden weergegeven welk percentage van de havo-examenkandidaten is geslaagd. Maak dit cirkeldiagram en zorg ervoor dat de percentages zichtbaar zijn in het diagram.
- Maak een staafdiagram waarin voor de gemeente Almelo per school te zien is hoeveel kandidaten geslaagd zijn voor het dubbelprofiel N&T/N&G.



figuur 8.9

Ga uit van het bestand *Examenkandidaten*.

- In het 100% stapeldiagram hieronder zijn voor heel Nederland per niveau de slagingspercentages voor elk van de vier profielen weergegeven. Dubbelprofielen zijn gegroepeerd met het profiel dat als eerste wordt genoemd. Maak een soortgelijk diagram voor je eigen school.



figuur 8.10

Menno heeft voor een praktische opdracht deze dataset bestudeerd. Volgens hem slagen in de vier grootste gemeenten van Nederland (Amsterdam, Rotterdam, 's-Gravenhage en Utrecht) relatief minder leerlingen dan in andere gemeenten. Om deze bewering te onderbouwen, wil hij in zijn verslag een 100% stapeldiagram opnemen waarin het gemiddelde slagingspercentage af te lezen is. Daarbij geeft de ene staaf het slagingspercentage voor de vier grootste gemeenten samen, en de andere staaf het percentage voor alle overige gemeenten. Ook wil hij onderzoeken of de resultaten van deze vergelijking voor de havo anders zijn dan voor het vwo.

- Maak voor Menno het benodigde 100% stapeldiagram. Laat de verticale as lopen van 0 tot 100%.
- Welke conclusie trekt Menno?

A30
📷🔍*

Gebruik het bestand *SocialeNetwerken*.

De variabelen *DeeltFotosVanZichzelf* en *DeeltVideosVanZichzelf* hebben de waarde #NULL! gekregen als de deelnemer deze vraag niet heeft beantwoord, omdat hij of zij geen sociale netwerken gebruikt.

- a** Maak een draaigrafiek van het type 100% gestapelde kolom. Zorg ervoor dat in het diagram voor elke leeftijd, uitgesplitst naar geslacht te zien is hoe de waarden van de variabele *DeeltFotosVanZichzelf* zich verhouden.

Bram en Roland bekijken de draaitabel die hoort bij vraag a. Volgens Bram deelt ongeveer 22% van de 24-jarige vrouwen uit het onderzoek geen foto's van zichzelf op sociale netwerksites. Volgens Roland is dat ongeveer 26%.

- b** Hoe komt Bram op ongeveer 22% en hoe komt Roland op ongeveer 26%? Wie heeft gelijk? Licht toe.

A31
📷🔍*

Ga uit van het bestand *SocialeNetwerken*.

- a** Hercodeer de variabele *DeeltFotosVanZichzelf*, zodat alleen nog de waarden ja en nee voorkomen.

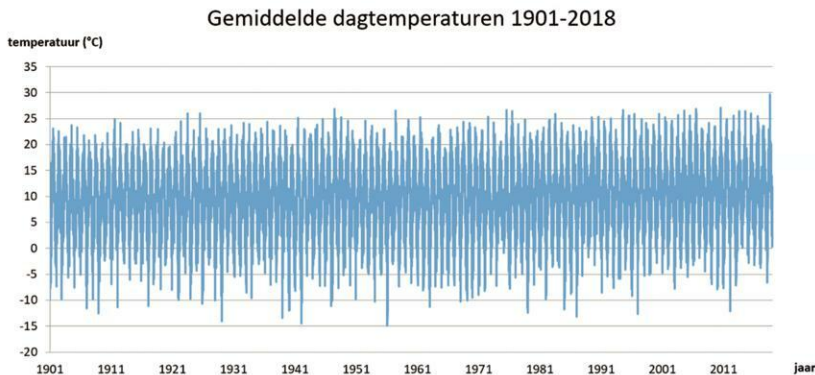
Ezra maakt vier groepen. De groepen bestaan uit personen die van zichzelf

- zowel foto's als video's delen
 - alleen foto's delen
 - alleen video's delen
 - geen van beide delen.
- b** Maak een cirkeldiagram dat laat zien hoe de aantallen van deze groepen zich verhouden.



Het bestand *TemperatuurHistorie* bevat een dataset met alle door het weerstation in De Bilt gemeten temperaturen in de periode van 1901 tot en met 2018.

Nathalie heeft een artikel gelezen over de opwarming van de aarde. Ook in Nederland zou een stijgende trend te zien zijn in de gemiddelde dagtemperaturen. Ze heeft deze stijgende trend in beeld proberen te brengen door alle temperaturen in de dataset te selecteren en er een lijndiagram bij te maken. Ze krijgt de figuur hieronder.



figuur 8.11

- a Vind je dat de stijgende trend goed in beeld wordt gebracht? Licht toe.
- b Van hoeveel dagen is de temperatuur in het bestand opgenomen? Zijn al deze dagen in het lijndiagram goed te onderscheiden?

Sven maakt eerst een draaitabel waarin de gemiddelde temperaturen per jaar zijn weergegeven. Hierbij maakt hij een lijndiagram. Hij tekent de verticale as van 7°C tot 12°C.

- c Maak het lijndiagram van Sven. Is de stijgende trend goed zichtbaar? Licht toe.



Theorie C Groeperen van datums

Het lijndiagram van Nathalie in opgave 32 geeft geen goed beeld van de stijgende trend in temperaturen. Dit komt doordat het lijndiagram uit veel te veel gegevenspunten bestaat. In het diagram is het patroon van de jaargetijden nog enigszins te herkennen, maar dit verbergt grotendeels de trend. Het is beter een lijndiagram te maken met als gegevenspunten bijvoorbeeld de gemiddelde jaartemperaturen, of de gemiddelde maandtemperaturen van de maand mei door de jaren heen. In de volgende module leer je hoe je dit soort diagrammen maakt.

[► ICT] Neem de module **Groeperen van datums** door.



33

In het bestand *WoningVerkoop* zie je informatie over woningverkoop in Nederland in de periode 1995 tot en met 2018. De variabele *AantalVerkochteWoningen* geeft aan hoeveel bestaande woningen (dus exclusief nieuwbouw) er in totaal in de betreffende maand zijn verkocht.

- Gropeer de variabele *Periode* op jaren én kwartalen en maak voor de periode 1995-2007 een lijndiagram van de verkochte aantallen woningen. Welk patroon is in het diagram te herkennen?
- Maak met behulp van een draaigrafiek een lijndiagram waarin voor de jaren 1995-2018 is te zien hoeveel woningen er dat jaar verkocht zijn en wat de gemiddelde verkoopprijs van een woning was.
- Bij de analyse van de woningmarkt wordt vaak gekeken naar de totale woningwaarde van de verkochte woningen. De totale woningwaarde is het aantal verkochte woningen vermenigvuldigd met de gemiddelde verkoopprijs.

Voeg aan het lijndiagram van vraag b een grafiek toe van de totale woningwaarde in honderdduizenden euro's.



Regelmatig verschijnen er in de krant en op internet artikelen over weerrecords. Het artikel hieronder gaat over het weer in De Bilt in juni 2018. Op enkele plaatsen ontbreken getallen. Met het begrip normaal wordt telkens het gemiddelde in de maanden juni van de jaren 1981-2010 bedoeld.

ARTIKEL

Juni 2018: zeer warm, zeer droog en normale hoeveelheid zon

Na een recordwarme mei en zeer zachte april was ook juni met gemiddeld ... °C maar liefst ... °C warmer dan normaal. De maand eindigt op een ...^e plek in de top 10 van warmste junimaanden sinds 1951.

In De Bilt viel ... mm regen, dat is ...% minder dan normaal. Omdat ook mei vrij

droog was, behoort het jaar 2018 tot nu toe bij de 5% droogste jaren. De verschillen zijn lokaal echter groot. Vooral halverwege de maand juni liet de zon zich minder zien. De laatste week was echter zeer zonnig. In De Bilt scheen de zon in totaal ... uur, tegen ... uur normaal.

Ga uit van het bestand *WeerDeBilt*. Op het tabblad Historie zijn de gegevens vanaf 1951 tot en met 2018 verzameld. Op het tabblad Tijdvak 1981-2010 zijn de gegevens van de jaren 1981-2010 nog eens apart opgenomen. Op het tabblad Juni 2018 zijn de gegevens van juni 2018 apart opgenomen.

- Onderzoek welke getallen in het artikel op de puntjes moeten staan. Rond indien nodig af op één decimaal.
- Vul de juiste gegevens in op het tabblad Temperaturen juni. Maak bij de gegevens een lijndiagram waarin de normale temperatuur in juni en de temperatuur in juni 2018 te zien zijn.
- Maak een figuur zoals bij vraag b, maar nu voor de hoeveelheid neerslag.



Gebruik het bestand *WeerDeBilt*.

Schrijf voor de maand waarin je bent geboren een artikel over het weer. Je mag zelf kiezen welke variabelen je daarvoor gebruikt. Voeg aan je artikel enkele diagrammen toe.

Eindopdracht Succesvolle sportlanden

In hoofdstuk 2 heb je kennism gemaakt met de statistische cyclus: het proces van opstellen van een onderzoeksvraag, verzamelen en analyseren van data en hieruit conclusies trekken. Bij het verzamelen en analyseren van data wordt vaak gebruik gemaakt van een spreadsheetprogramma. Je gaat onderzoeken hoe succesvol Nederland is geweest op de Olympische Spelen. Het direct vergelijken van het aantal gewonnen medailles tussen landen is oneerlijk. In dit onderzoek ga je daarom kijken hoe groot het succes relatief is.

- Stel een hoofdvraag en bijbehorende deelvragen op.

Hieronder zie je een zogeheten medaillespiegel. Deze medaillespiegel betreft alle Olympische Spelen vanaf 1994 tot en met 2018. Deze tabel staat ook in het bestand *Medaillespiegel*.

Land	Goud	Zilver	Brons	Totaal
Verenigde Staten	297	256	238	791
China	201	150	137	488
Rusland	184	155	184	523
Duitsland	157	158	156	471
Groot-Brittannië	100	82	89	271
Frankrijk	87	94	116	297
Zuid-Korea	84	83	61	228
Australië	77	96	100	273
Italië	75	74	92	241
Noorwegen	75	61	61	197
Canada	73	80	91	244
Nederland	72	66	63	201
Japan	63	67	82	212
Hongarije	43	28	28	99
Cuba	42	41	54	137
Zwitserland	41	31	34	106
Oekraïne	37	31	59	127
Zweden	34	46	35	115
Oostenrijk	32	40	49	121
Spanje	27	45	32	104

- Hoe is de volgorde van landen in deze medaillespiegel bepaald?

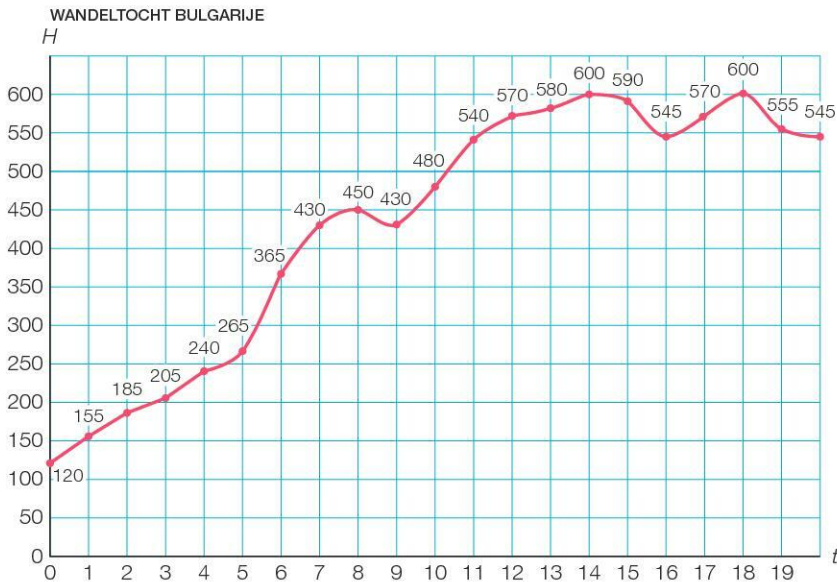
Om het relatieve succes van landen te kunnen bepalen, hebben we extra kwantitatieve informatie nodig,

- Bedenk een manier om 'relatief succes' uit te drukken in één getal.
- Zoek de benodigde extra informatie over de landen op en verzamel die in je bestand.
- Voeg een kolom RelatiefSucces toe en bereken met je zelfbedachte methode de waarde voor elk land.
- Beantwoord de deelvragen en de hoofdvraag.

Gemengde opgaven

5 Veranderingen

- 1** [▶WERKBLAD] Stijn en Marlijn nemen tijdens een wandeltocht in Bulgarije een hoogtemeter mee. Ze beginnen hun tocht in het dal en eindigen bij een hut. De resultaten van de hoogtemeter zijn verwerkt in de grafiek in figuur G.1. De hoogte H is in meter en de tijd t in kwartieren, met $t = 0$ om 9:00 uur 's ochtends.



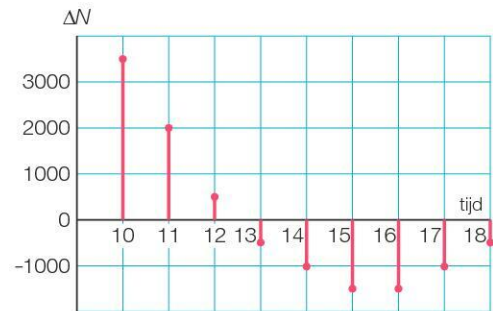
figuur G.1

- Geef voor alle maxima en minima op het interval $[0, 20]$ aan hoe laat het was en welke hoogte hierbij hoort.
- In welk kwartier zijn Stijn en Marlijn het snelst gestegen? Hoeveel meter was dat?
- Hoeveel meter per minuut stegen Stijn en Marlijn gemiddeld tussen het eerste maximum en het laatste maximum van de tocht?
- Op het interval $[0, x]$ was $\frac{\Delta H}{\Delta t}$ het grootst.
Geef de waarde van x .
- Geef een interval waarop $\frac{\Delta H}{\Delta t} = 0$.
- Teken het toenamediaagram op het interval $[0, 20]$.
Neem stapgrootte 1 uur.



2 In figuur G.2 zie je een toenamediagram bij het aantal bezoekers dat zich in een pretpark bevindt. Om 14:00 uur waren er 7500 bezoekers in het park.

- Hoeveel bezoekers waren er om 11:00 uur?
- Teken een mogelijke grafiek van het aantal bezoekers tussen 9:00 uur en 18:00 uur.
- Tessa werkt bij de kassa's van het park. Ze beweert dat tussen 11:00 uur en 12:00 uur meer dan 1000 bezoekers het park zijn binnengekomen. Kan dat kloppen? Licht toe.
- De directeur van het pretpark beweert dat op het drukste moment van de dag wel 10000 bezoekers op het park waren. Kan dat kloppen? Licht toe



figuur G.2



3 Biologen hebben ontdekt dat in een nationaal park in Europa het aantal koolmezen toenemend stijgt. In 2010 ($t = 0$) waren er 530 koolmezen, in 2020 ($t = 10$) waren dat er 630.

- Teken voor de periode 2010-2020 een mogelijk toenamediagram met $\Delta t = 2$. Ga er hierbij van uit dat de toenames steeds veelvoudigen zijn van vijf, dus bijvoorbeeld 10 of 25.

In het park was er bij roodborsten sprake van een constante daling, en wel van 9640 in 2010 tot 8840 in 2020.

- Teken het bijbehorende toenamediagram met $\Delta t = 1$.

In het park kwamen voor 2010 geen bosuilen voor. In 2010 werden op een zorgvuldig gekozen bosperceel 100 bosuilen uitgezet. Het aantal bosuilen op dit perceel nam jaarlijks met 10% toe.

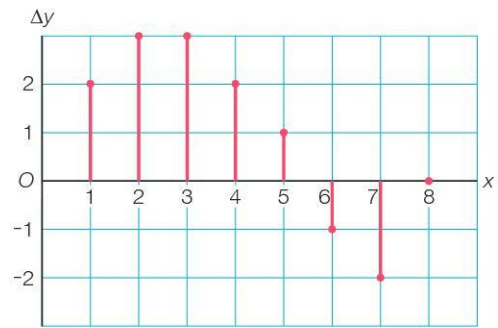
- Teken voor de periode 2010-2020 het toenamediagram dat hoort bij de bosuilen. Neem $\Delta t = 2$.

Het aantal sperwers in het park nam in de periode 2010-2020 aanvankelijk toe, maar in 2020 was het aantal sperwers weer gelijk aan dat in 2010.

- Teken een mogelijk toenamediagram bij deze situatie. Neem $\Delta t = 2$.

4 Van de grafiek bij het toenamediagram in figuur G.3 is gegeven dat deze één maximum heeft.

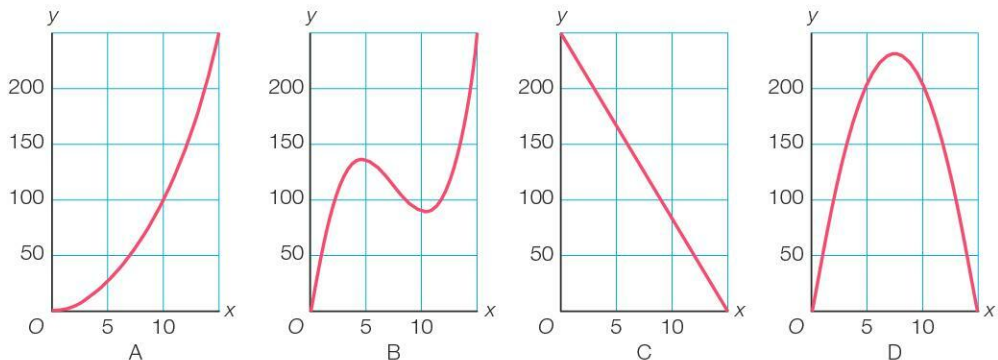
- Voor welke waarden van x kan het maximum optreden? Geef een zo groot mogelijk interval.
- Bij de grafiek worden gemiddelde toenames berekend op verschillende intervallen die liggen tussen $x = 0$ en $x = 8$. Nandy beweert dat de hoogst mogelijke gemiddelde toename dan gelijk is aan 3.
Ben je het met haar eens? Licht toe.



figuur G.3

- Voor welke van de volgende intervallen geldt dat $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$?
[0, 8] [4, 7] [3, 7] [3, 8]

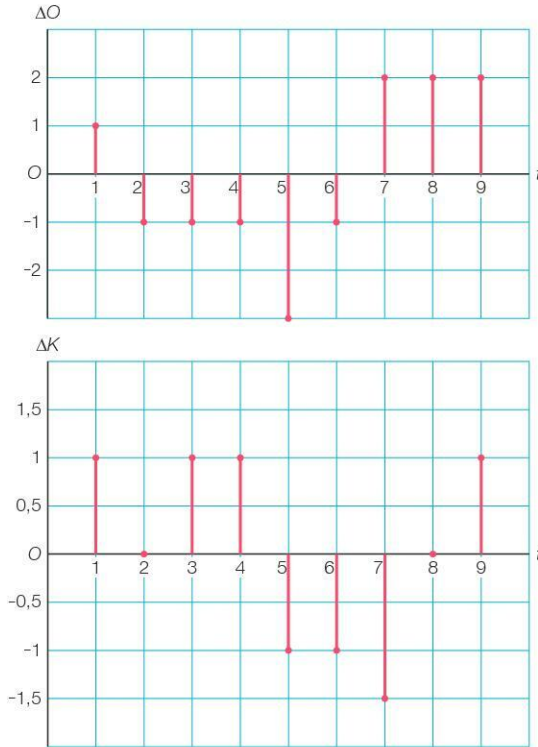
5 Geef voor de volgende uitspraken steeds aan welke van de grafieken A, B, C en D erbij passen. Het kan voorkomen dat bij één uitspraak meerdere grafieken passen.



figuur G.4

- Er is een interval met $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.
- In een bijbehorend toenamediagram worden de verticale lijnstukjes van links naar rechts steeds groter.
- Er is een interval waar $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ negatief is.
- Bij elk bijbehorend toenamediagram zijn de verticale lijnstukjes even lang.
- Voor elk interval is $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gelijk.

- 6** Van een bedrijf is de verandering van de opbrengsten en de kosten bijgehouden. Zie de toenamediagrammen in figuur G.5. Hierin zijn de maandelijkse opbrengst O en de maandelijkse kosten K in duizenden euro's en de tijd t in maanden waarbij $t = 0$ hoort bij de maand januari 2019.



figuur G.5

In maart was de opbrengst 15 000 euro. De kosten waren die maand 12 000 euro.

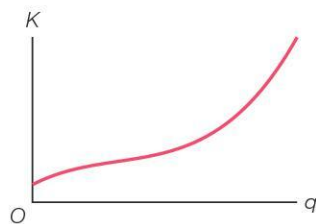
- Hoe groot was de opbrengst in augustus?
- Hoe groot waren de kosten in januari?

De maandelijkse winst W van het bedrijf in duizenden euro's wordt gegeven door de formule $W = O - K$. In maart was de winst dus $15 - 12 = 3$ duizend euro.

- In welke maanden boekte het bedrijf de meeste winst?
- Gedurende drie maanden maakte het bedrijf verlies. Hoeveel euro verlies was dat in totaal?
- Onderzoek of de formule $\Delta W = \Delta O - \Delta K$ ook geldt.
- In de maand nadat het bedrijf een nieuwe directeur aanstelde was de verandering van de maandelijkse winst voor het eerst positief. In welke maand werd de nieuwe directeur aangesteld?
- Het bedrijf maakte in de eerste tien maanden van 2019 gemiddeld 1300 euro winst per maand. De totale winst in 2019 was 21 000 euro. Van november naar december was ΔW gelijk aan 0. Hoeveel euro was de winst in december 2019?

- 7** De totale dagelijkse kosten bij de productie van een luxe wekkerradio worden gegeven door de formule $K = 1,2q^3 - 8q^2 + 25q + 22$. Hierin is K in honderden euro's en is q het aantal geproduceerde wekkerradio's per dag in honderdtallen. Er worden maximaal 800 wekkerradio's per dag geproduceerd.

- Bereken de totale dagelijkse kosten bij een productie van 500 wekkerradio's per dag. Hoeveel zijn in dat geval de gemiddelde kosten per wekkerradio?
- Bereken $\frac{\Delta K}{\Delta q}$ op het interval $[5, 7]$.
- Bereken de gemiddelde toename van de dagelijkse kosten als de productie toeneemt van 150 tot 400 stuks.
- Bij welke productie komen de dagelijkse kosten uit op 14 320 euro? Wat zijn de gemiddelde kosten per wekkerradio dan?
- Op een bepaald moment worden wekkerradio's gefabriceerd met een kostprijs van 25 euro per wekkerradio. Hoeveel stuks worden dagelijks geproduceerd? Geef alle mogelijkheden.



figuur G.6

- 8** In januari 2019 is Valerie een YouTube kanaal gestart. Met enige regelmaat uploadt ze een video naar haar kanaal. Ze heeft telkens aan het eind van de maand bijgehouden wat het totale aantal video's V is dat op haar kanaal staat. Daarnaast heeft Valerie ook bijgehouden wat het totale aantal abonnees A van haar kanaal is.

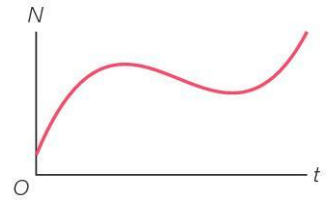
In de tabel hiernaast staan ΔV en ΔA weergegeven. De tijd t is in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2019.

- Hoeveel video's heeft Valerie in het eerste half jaar geüpload?
- In welke maand heeft ze voor het eerst meer dan 1000 abonnees?
- Volgens Valerie was het aantal abonnees van haar kanaal eerst toenemend stijgend en daarna afnemend stijgend. Kan ze gelijk hebben? Licht toe.
- Bereken $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ op het interval $[0, 5]$ en geef hiervan de praktische betekenis.
- Bereken $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ voor het jaar 2019.
- Het aantal abonnees per video op het kanaal van Valerie bereikt aan het eind van een maand in 2019 een maximum van bijna 430. Welke maand is dat?

interval	ΔV	ΔA
$[0, 1]$	1	100
$[1, 2]$	1	140
$[2, 3]$	2	285
$[3, 4]$	3	479
$[4, 5]$	4	762
$[5, 6]$	2	941
$[6, 7]$	1	1151
$[7, 8]$	0	1334
$[8, 9]$	1	1247
$[9, 10]$	3	952
$[10, 11]$	2	606
$[11, 12]$	1	368

- 9** Het aantal leden N van sportvereniging Avanti is voor de periode van 2008 tot en met 2020 gegeven door de formule $N = 2t^3 - 41t^2 + 240t + 100$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2008.

- Teken het toenamediaagram op het interval $[0, 12]$ met $\Delta t = 2$.
- Bereken het differentiequotient van N op $[1, 5]$.
- In 2017 bereikt het aantal leden van Avanti een dieptepunt met een ledenaantal van 394. De penningmeester zegt dat het allemaal wel meevalt en merkt op dat Avanti dit ledenaantal in het verleden ook al eens heeft gehad. Onderzoek in welk jaar dat was.
- Bereken de gemiddelde verandering van het aantal leden per maand tussen 1 januari 2009 en 1 juli 2012.



figuur G.7

6 Rekenregels en formules

- 10** De prijs P in euro's voor een taxirit wordt bepaald door een starttarief, de afstand d in km en de tijdsduur t in minuten van de rit. De maximale prijs die een taxi in 2019 mag rekenen is $P_{\max} = 3,19 + 2,35d + 0,39t$.

- Bereken de maximale prijs van een taxirit van 5 km die 15 minuten duurt.

Taxibedrijf GRT gaat voor de berekening van de ritprijs uit van de formule voor $P_{\max}$ maar rekent bij ritten over een afstand vanaf 5 km voor de eerste 3 km geen kilometertarief. Daaruit volgt dat voor taxiriten bij GRT vanaf 5 km de formule $P_{\text{GRT}} = 3,19 + 2,35(d - 3) + 0,39t$ geldt.

- Licht dit toe.
- Schrijf de formule in de vorm $P_{\text{GRT}} = ad + bt + c$.

In de stad is de gemiddelde snelheid van een taxi 20 km/uur. Daaruit volgt dat een taxirit van d km in de stad $3d$ minuten duurt.

- Toon dit aan.
- Schrijf de formule voor de maximale prijs van een taxirit in de stad in de vorm $P_{\max} = p + qd$.

- 11** **a** Schrijf de formule $A = -3\sqrt{2x} \cdot \sqrt{12\frac{1}{2}y}$ in de vorm $A = c\sqrt{xy}$.

- Schrijf de formule $B = \frac{3}{2\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}$ in de vorm $B = \frac{a + bx}{\sqrt{x}}$.

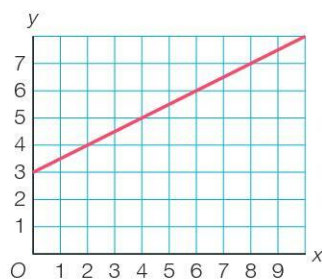
- Herleid de formule $C = \frac{\sqrt{54ab^2}}{\sqrt{6b}} + \sqrt{2a} \cdot \sqrt{3b}$ tot de vorm $C = c\sqrt{ab}$. Rond c af op twee decimalen.

- Herleid de formule $D = 3x^2 \cdot (0,5\sqrt{x})^{-2}$.

- Schrijf de formule $E = 2\sqrt{\frac{F}{5}}$ in de vorm $F = aE^2$.

- 12** In deze opgave werken we met de formule $z = 5x + 2y$ en de grafiek in figuur G.8.

- a** Welke z krijg je bij $x = 2$?
- b** Welke z hoort bij $y = 5$?
- c** Bereken x en y bij $z = 66$.



figuur G.8

- 13** Een bank wil zijn klanten stimuleren om meer geld op de spaarrekening te houden. Ze gebruiken daarvoor een puntensysteem. Hoe meer je spaart, des te meer punten krijg je aan het einde van het jaar. Afhankelijk van het aantal punten en je spaargeld krijg je een bedrag uitgekeerd.

Voor het berekenen van het aantal punten na een jaar sparen hanteert de bank de formule $p = 2S - 1$. Hierbij is p het aantal punten en S het gemiddelde spaarbedrag in duizenden euro's.

Voor het bedrag B in euro dat de bank aan het einde van het jaar uitkeert geldt de formule $B = 3p + 4S$.

- a** Matthijs heeft gedurende een jaar gemiddeld 2000 euro op zijn spaarrekening staan.
Welk bedrag krijgt hij uitgekeerd?
- b** Mark krijgt van de bank te horen dat hij 9 punten heeft gespaard.
Welk bedrag krijgt hij uitgekeerd?
- c** Sabine krijgt 97 euro uitgekeerd.
Wat was het gemiddelde bedrag op haar spaarrekening gedurende het afgelopen jaar en hoeveel punten kreeg ze?

- 14**
- a** Schrijf het rechterlid van de formule $A = \frac{2}{p} - \frac{p}{q}$ als één breuk.
 - b** Toon aan dat $B = \frac{1}{3}q + 4 + \frac{5}{q}$ te schrijven is als $B = \frac{q^2 + 12q + 15}{3q}$.
 - c** Schrijf het rechterlid van de formule $C = 3q - 2 \cdot \frac{2q}{2q + 1}$ als één breuk en herleid.
 - d** Herleid de formule $D = \frac{-(4p^3q)^2}{(-2q)^4}$.
 - e** Schrijf het rechterlid van de formule $E = 3q \cdot \frac{q}{q - 1} : \frac{q}{q + 1}$ als één breuk en herleid.
 - f** Herleid de formule $F = \left(\frac{9p^{1,25}}{p^{-0,15}} \right)^{1,5}$.
 - g** Combineer de formules $G = p - \frac{3q}{2p}$ en $q = 2p$ tot de vorm $G = aq + b$.

- 15** **a** Combineer de formules $A = 4p - q + 20$ en $p - q = 10$ tot de vorm $A = ap + b$.
- b** De formules $B = 2pq - 3p + 4$ en $5p - 8q = 160$ zijn te combineren tot de vorm $B = aq^2 + bq + c$.
Bereken a , b en c .
- c** Gegeven zijn de formules $W = 18 - 7,5p + 2q$ en $3q - 15p = 5$.
Druk W uit in q en herleid.
- d** Combineer de formules $F = 3xy + 4xz + 8$, $y = 2x + 5$ en $x + z = 6$ tot de vorm $F = ax^2 + bx + c$.

- 16** **a** Schrijf de formule $A = \frac{120}{50 \cdot 1,25^t}$ in de vorm $A = b \cdot g^t$.
- b** Combineer de formules $B = \frac{200}{N}$ en $N = 40 \cdot 0,8^t$ tot de vorm $B = b \cdot g^t$.
- c** Combineer de formules $D \cdot N = 2,4$ en $N = 24 \cdot 1,08^t$ tot de vorm $D = b \cdot g^t$. Rond g af op twee decimalen.
- d** Gegeven is de exponentiële formule $N = \frac{24}{48 \cdot 0,5^t}$.
Geef de beginwaarde en de groeifactor.

- 17** Bij meerkeuzetoetsen kan de methode *correction for guessing* gebruikt worden. Bij deze methode wordt rekening gehouden met het feit dat je bijvoorbeeld bij het gokken van 40 vierkeuzevragen, er gemiddeld 10 juist zal beantwoorden. De formule $S = G - \frac{F}{K-1}$ wordt gebruikt voor het berekenen van de score S . Hierin is G het aantal goede antwoorden, F het aantal foute antwoorden en K het aantal keuzemogelijkheden.
- a** Bereken de score van iemand met 10 goede antwoorden op een toets van 20 tweekeuzevragen. Licht toe hoe je dit antwoord had kunnen voorspellen.

Er geldt $\text{aantal vragen} = G + F$. Hiermee is de formule van S bij een toets van 20 driekeuzevragen te schrijven als $S = 1,5G - 10$.

- b** Toon dit aan.

Om de score S om te zetten in het cijfer C gebruikt men de formule

$$C = \frac{S}{\text{maximale score}} \cdot 9 + 1.$$

- c** Hoeveel vragen moet je goed beantwoorden op een toets van 20 driekeuzevragen om minstens een 5,5 te halen?
- d** De formules van S en C die horen bij een toets van 30 vierkeuzevragen zijn te combineren tot de vorm $C = a \cdot G + b$.
Bereken a en b .

- 18** Dominion is een kaartspel waarbij spelers kaarten kopen om zoveel mogelijk overwinningspunten te scoren. Hiernaast zie je twee kaarten uit het spel.

De kaart Hertogdom geeft 3 overwinningspunten en de kaart Hertog geeft 1 overwinningspunt voor elke kaart Hertogdom die de speler tijdens het spel koopt. Het is lastig in te schatten hoeveel van elke soort kaart je het beste kunt kopen om zoveel mogelijk overwinningspunten te scoren. In deze opgave onderzoeken we de beste strategie.



figuur G.9

- a** Remco wil in totaal vijf kaarten kopen.

Hoeveel Hertogdommen en Hertogen kan hij het beste kopen?

Om de beste strategie te vinden voor verschillende aantallen kaarten kun je formules gebruiken. Noem het aantal Hertogdommen x en het aantal Hertogen y . Het is nu mogelijk een formule op te stellen voor het aantal overwinningspunten S uitgedrukt in x en y . Deze formule is $S = 3x + xy$.

- b** Licht deze formule toe.

Als Remco in totaal 9 kaarten koopt, geldt $x + y = 9$.

- c** Stel voor het geval dat Remco 9 kaarten koopt een formule voor S uitgedrukt in x op en herleid deze formule.

- d** Wat is de beste strategie bij 9 kaarten?

- e** Wat is het maximale aantal overwinningspunten dat je met 12 kaarten kunt halen?

- 19** Achmed heeft een vijver met waterlelies die zich erg snel uitbreiden over het wateroppervlak. De oppervlakte in m^2 die bedekt is met waterlelies wordt

gegeven door de formule $W = \frac{20}{1 + b \cdot g^t}$.

Hierin is t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 juni. Achmed heeft genoteerd dat op 1 juni 4 m^2 met waterlelies is bedekt.

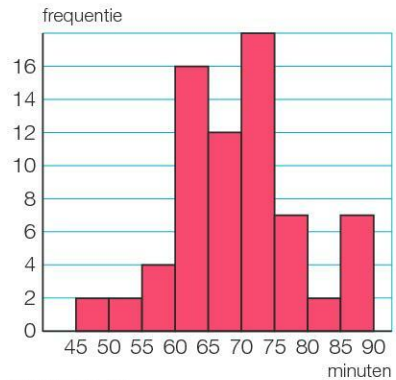
Vier maanden later was deze oppervlakte toegenomen tot 18 m^2 .

Bereken b en g en bereken hiermee de oppervlakte die bedekt was met waterlelies halverwege de maand juli.



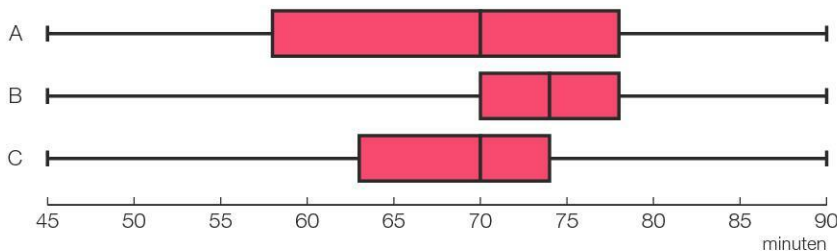
7 Statistiek en beslissingen

20 Elk jaar begin juni wordt in Rozendaal de Bedriegertjesloop gehouden. In 2019 deden er 70 vrouwen mee aan de 11 kilometer run. De tijd van de winnares was 45:56, dus 45 minuten en 56 seconden. De gemiddelde tijd van alle 70 deelnemers was 69,3 minuten en de standaardafwijking was 8,7 minuten. In de figuur hiernaast zijn de tijden van deze deelnemers in een histogram weergegeven. De eerste klasse is $[45, 50)$.



figuur G.10

- a** Onderzoek of de mediaan in de modale klasse valt.
- b** Hieronder zie je drie boxplots. Welke past het best bij het histogram? Licht toe.



figuur G.11

- c** Er waren zeven deelnemers die 85 of meer minuten over het parcours deden. Stel dat deze zeven niet hadden meegedaan. Zou het gemiddelde dan groter of kleiner worden? En de standaardafwijking? Licht toe.
- d** Bij de Bedriegertjesloop in 2018 waren er problemen met de tijdwaarneming. Daardoor is er bij de mannen die de 11 km liepen van slechts 35 lopers een tijd geregistreerd. Het gemiddelde hiervan was 59,5 minuten en de standaardafwijking was 10,3 minuten. Neem aan dat het hier een representatieve steekproef betreft. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde tijd van alle mannen die in 2018 meededen aan de 11 km.



- 21** In 2019 heeft het Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu (RIVM) onderzoek gedaan naar de gezondheidseffecten van kortdurende blootstelling aan ultrafijnstof rond Schiphol. Een van de drie deelstudies was een studie met 161 basisschoolkinderen in woonkernen vlakbij Schiphol. Hieronder staat een citaat en tabel uit het RIVM rapport over deze deelstudie.

ARTIKEL

In totaal hebben 161 kinderen deelgenomen aan het onderzoek. De gemiddelde leeftijd was tien jaar, 79 van de kinderen waren meisjes en 13 kinderen hadden op dat moment astma. Bij 21 kinderen werd in de basisvragenlijst melding gemaakt van kortademigheid in de afgelopen twaalf maanden.

KARAKTERISTIEKEN VAN DE DEELNEMERS AAN HET ONDERZOEK

	totaal	Aalsmeer	Badhoevedorp
<i>n</i>	161	79	82
lengte, m	$1,42 \pm 0,07^*$	$1,43 \pm 0,07$	$1,42 \pm 0,07$
gewicht, kg	$34,87 \pm 6,40$	$34,83 \pm 6,27$	$34,90 \pm 6,55$
leeftijd, jaar	$9,96 \pm 0,72$	$9,97 \pm 0,75$	$9,95 \pm 0,69$
hooikoorts	30	18	12
piepende ademhaling	16	5	11
kortademigheid	21	6	15
astma	13	8	5
meisje	79	35	44

* gemiddelde $\pm$ standaarddeviatie

Met standaarddeviatie wordt de steekproefstandaardafwijking (*S*) bedoeld. Gebruik bij de volgende drie vragen de vuistregels bij de normale verdeling.

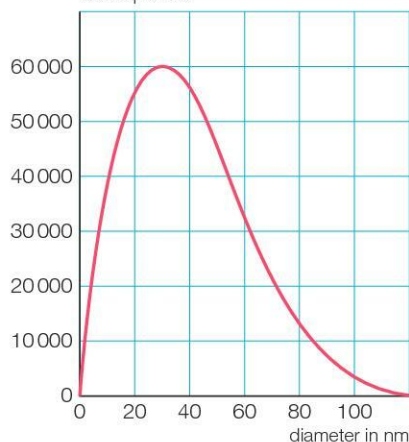
- Hoeveel van de 161 kinderen hebben een lengte tussen 135 en 149 cm?
- Hoeveel van de 79 kinderen uit Aalsmeer hebben een gewicht tussen 28,56 en 47,37 kg?
- Hoeveel van de 82 kinderen uit Badhoevedorp zijn jonger dan 9 jaar en 3 maanden?

Het vliegverkeer veroorzaakt veel ultrafijnstof. In de verdelingskromme hiernaast zie je dat er per cm^3 ongeveer 60 000 fijnstofdeeltjes met een diameter van 30 nanometer (nm) voorkomen.

$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$.

- Hoe ligt hier het gemiddelde ten opzichte van de mediaan?
- Schets de relatieve cumulatieve verdelingskromme. Neem de horizontale as van 0 tot 120.

FIJNSTOFDEELTJES DOOR VliegVERKEER
aantal per cm^3



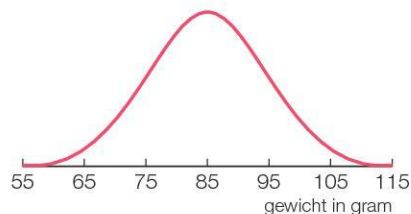
figuur G.12

- 22** Fruitteler Hoekzema verdeelt zijn Elstar-appels in de klassen klein, midden en groot. De gewichten in de drie klassen zijn normaal verdeeld. De kleine appels wegen gemiddeld 85 gram met een standaardafwijking van 10 gram. Voor de Elstars in de middenklasse zijn deze getallen 130 gram en 15 gram, en voor de grote appels 180 gram en 20 gram.



Hiernaast is de relatieve verdelingskromme van de appels in de klasse klein getekend.

- Neem de figuur over en teken hierin de relatieve verdelingskrommen van de twee andere klassen.
- Hoekzema neemt uit elk van de klassen midden en groot een steekproef. Zie de tabel hiernaast. Onderzoek of de 95%-betrouwbaarheidsintervallen van het gemiddelde gewicht van de appels in deze twee klassen elkaar overlappen.
- Kun je concluderen dat er een duidelijke scheiding is in gewicht tussen appels van de klassen midden en groot? Licht toe.



figuur G.13

	midden	groot
n	16	25
$\bar{X}$	132	175
S	18	20

- 23** De Stichting Kijkonderzoek (SKO) doet onderzoek naar het televisiekijkgedrag van Nederlanders. Hiernaast zie je de 95%-betrouwbaarheidsintervallen voor de gemiddelde kijktijd per dag voor 6- tot 12-jarigen en 13- tot 19-jarigen.

- Welke twee variabelen zijn in de tabel gebruikt? Geef bij deze variabelen aan of het een kwalitatieve of een kwantitatieve variabele is.

KIJKTIJD NAAR TV IN MINUTEN PER DAG

	leeftijdsgroep	
	6- tot 12-jarigen	13- tot 19-jarigen
n	410	560
kijktijd	[64, 72]	[55, 61]

Je kunt met de tabel narekenen dat de steekproefstandaardafwijking S bij de 6- tot 12-jarigen ongeveer 40 minuten is en bij de 13- tot 19-jarigen ongeveer 35 minuten.

- Bereken S voor de 6- tot 12-jarigen en voor de 13- tot 19-jarigen. Rond af op één decimaal.
- In de steekproef waren er bij de 13- tot 19-jarigen 14 personen die meer dan 2 uur en 10 minuten per dag naar de televisie keken. Onderzoek met een berekening of dit overeenkomt met wat je op basis van de vuistregels bij de normale verdeling zou verwachten.
- Ga met een formule op het formuleblad na of de grootte van het verschil in televisiekijktijd tussen 6- tot 12-jarigen en 13- tot 19-jarigen groot, middelmatig of gering is.

24 In een kleine stad stimuleert de gemeente de verkoop van zonnepanelen aan huishoudens. Na een jaar blijkt dat 512 van de in totaal 7051 huishoudens zonnepanelen op het dak van de woning geïnstalleerd hebben. Om te bekijken of het beleid van de gemeente daadwerkelijk een positieve bijdrage levert aan de plaatsing van zonnepanelen door huishoudens, laten de oppositiepartijen in de gemeenteraad een landelijke steekproef uitvoeren. In deze steekproef is aan 233 huishoudens gevraagd of ze eigen zonnepanelen gebruiken voor de energievoorziening. Uit de steekproef volgde de steekproefproportie $\hat{p} = 0,0472$.

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie huishoudens in het land die eigen zonnepanelen gebruiken. Rond af op vier decimalen.
- b** Kun je op basis van deze steekproef en het daarbij berekende betrouwbaarheidsinterval concluderen dat de stimuleringsmaatregelen van de gemeente geholpen hebben?

De wethouder die verantwoordelijk is voor de stimuleringsmaatregelen is niet tevreden met de opzet van het onderzoek van de oppositie en laat nogmaals een landelijke steekproef uitvoeren. Deze keer wordt dezelfde vraag gesteld aan 5000 huishoudens en dat levert een steekproefproportie op van $\hat{p} = 0,0592$. Op basis van de resultaten van deze steekproef claimt de wethouder dat de genomen maatregelen wel degelijk effect hebben.

- c** Laat zien op basis van welke cijfers de wethouder de oppositiepartijen kan proberen te overtuigen.

In de provincie Groningen is onderzoek gedaan naar het percentage huishoudens dat zonnepanelen op het dak heeft geïnstalleerd. Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval was $18,5\% \pm 4,5\%$.

- d** Bereken de steekproefomvang.



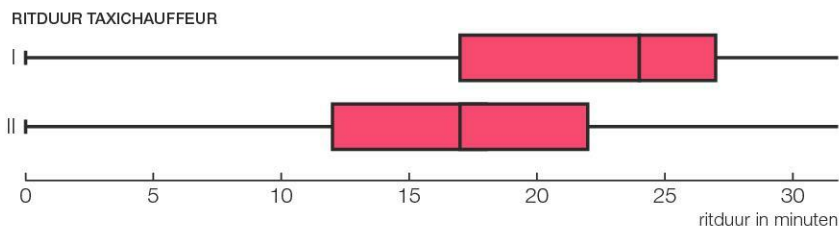
25 Twee taxichauffeurs, de ene uit Amsterdam en de andere uit Zutphen, hebben gedurende een aantal maanden het aantal minuten van elke taxirit bijgehouden. In de tabel zie je hoe de duur van de ritten van beide chauffeurs verdeeld is. Je ziet bijvoorbeeld dat van de chauffeur uit Zutphen 22 procent van de ritten tussen 20 en 25 minuten duurde.

ritduur in minuten	Amsterdam	Zutphen
[0, 5>	1%	2%
[5, 10>	5%	14%
[10, 15>	12%	19%
[15, 20>	18%	29%
[20, 25>	23%	22%
[25, 30>	30%	11%
vanaf 30	11%	3%

- Met wat voor twee soort verdelingen heb je hier te maken? Kies uit: links-scheef, rechts-scheef, symmetrisch of meertoppig.
- Geef een mogelijke praktische verklaring voor het verschil in de verdelingen van de ritduur van beide chauffeurs.
- Volgens Margot kun je in de tabel zien dat de chauffeur uit Amsterdam veel meer minuten in de taxi heeft gereden dan de chauffeur uit Zutphen.
Ben je het met haar eens? Licht toe.

De chauffeur uit Zutphen reed bij de ritten die tussen 15 en 20 minuten duurden gemiddeld 29 km/uur en bij de ritten die tussen 20 en 25 minuten duurden gemiddeld 39 km/uur. Hij beweert dat hij meer kilometers heeft gereden voor de ritten tussen 15 en 20 minuten dan voor de ritten tussen 20 en 25 minuten.

- Toon aan dat de chauffeur geen gelijk kan hebben.
- In figuur G.14 zijn de gegevens van de chauffeurs verwerkt tot twee (gedeelten van) boxplots.
Welke hoort bij de chauffeur uit Amsterdam? Licht toe.



figuur G.14

- Schets in één figuur van beide chauffeurs de relatieve cumulatieve verdelingskromme. Neem de horizontale as van 0 tot 30.

- 26** Een voetbalblad heeft onderzoek gedaan naar de blessuretijd die scheidsrechters toekennen in de eredivisie.

Op basis van gegevens van 31 wedstrijden van scheidsrechter Kuiper is berekend dat hij gemiddeld 4 minuten en 13 seconden bijtelde. De bijbehorende standaardafwijking was 1 minuut en 23 seconden.

- a** Bereken voor scheidsrechter Kuiper het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde blessuretijd. Rond af op gehele seconden.

Over alle wedstrijden die in Europa in een seizoen zijn gespeeld, was de gemiddelde blessuretijd 3 minuten en 45 seconden.

- b** Kun je met 95% zekerheid concluderen dat er wat betreft de blessuretijd een verschil is met de wedstrijden van Kuiper?
- c** Was de conclusie bij vraag b anders geweest als het gegeven gemiddelde en de gegeven standaardafwijking waren gebaseerd op 41 wedstrijden?

- 27** Kees en Frits doen voor het vak statistiek een onderzoek met als onderzoeksvraag ‘Welk deel van de M&M’s is rood?’. Voor hun onderzoek openen ze een doos met daarin een aantal zakjes M&M’s en tellen van elke kleur het aantal M&M’s. In de tabel hieronder staat het resultaat.

kleur	blauw	bruin	groen	oranje	rood	geel	totaal
aantal	487	398	489	530	371	375	2650

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rode M&M’s.
- b** Volgens Kees is de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie oranje M&M’s ongeveer 15% groter dan van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rode M&M’s. Onderzoek of Kees gelijk heeft.

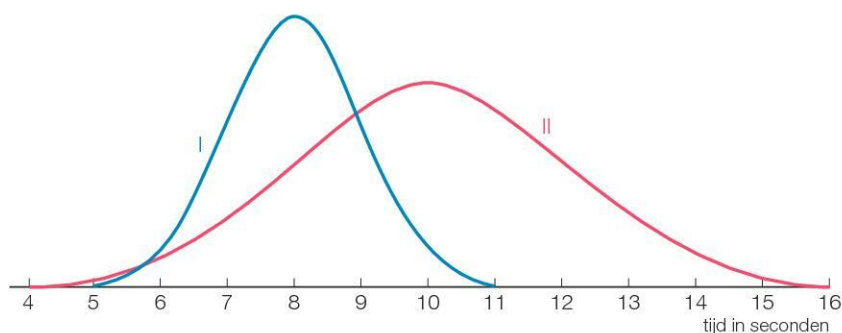


28 Sportstapelen (Engels: *sport stacking*, ook bekend als *cup stacking* of *speed stacking*) is een sport waarbij zo snel mogelijk plastic bekertjes gestapeld moeten worden in bepaalde formaties.

Beoefenaars van de sport plaatsen plastic bekertjes op elkaar in bepaalde formaties en in vooraf bepaalde volgordes. Je speelt dit spel tegen een andere speler of tegen de klok. Vaak worden piramiden van drie, zes of tien bekertjes gemaakt. Deskundigen zeggen dat deze sport de tweekhandigheid, concentratie en oog-hand coördinatie bevordert.



Twee even grote groepen sportstapelaars hebben tegen de klok gespeeld. De resultaten zijn weergegeven in de verdelingskrommen in figuur G.15. Neem aan dat de tijden van beide groepen normaal verdeeld zijn.



figuur G.15

- a** Geef twee redenen waarom kromme I bij de meer ervaren sportstapelaars hoort.

Van de meer ervaren groep is de standaardafwijking 1 seconde.

- b** Wat is de standaardafwijking van de minder ervaren groep?
c Welk percentage van de meer ervaren groep behaalde tijden onder de 6 seconden?
d Bereken het percentage van de minder ervaren groep dat meer tijd nodig heeft dan de beste helft van de meer ervaren groep.
e Door de twee groepen samen te nemen ontstaat een verdelingskromme voor de tijden van de sportstapelaars als geheel. Welke soort verdeling past het beste bij die verdelingskromme? Kies uit links-scheef, rechts-scheef, symmetrisch of tweekoppig. Licht toe met een schets.

Bij een steekproef onder sportstapelaars met meer ervaring is het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde tijd in seconden die ze over het stapelen doen $8 \pm 0,2$.

- f** Volgens Bart komt dit betrouwbaarheidsinterval niet overeen met de resultaten in figuur G.15.

Ben je het met Bart eens? Licht toe.

- g** Bereken de steekproefomvang. Gebruik dat $S = 0,9$ seconden.

Formuleblad

Vuistregels bij de grootte van het verschil van twee groepen

2 × 2-kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $\phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$

- als $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$, dan zeggen we ‘het verschil is groot’,
- als $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$, dan zeggen we ‘het verschil is middelmatig’,
- als $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dan zeggen we ‘het verschil is gering’.

Maximale verschil in cumulatief percentage (max.Vcp) (met steekproefomvang $n > 100$)

- als max.Vcp > 40 , dan zeggen we ‘het verschil is groot’,
- als $20 < \text{max.Vcp} \leq 40$, dan zeggen we ‘het verschil is middelmatig’,
- als max.Vcp ≤ 20 , dan zeggen we ‘het verschil is gering’.

Effectgrootte $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$ met $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ de steekproefgemiddelden

($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we ‘het verschil is groot’,
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we ‘het verschil is middelmatig’,
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we ‘het verschil is gering’.

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen¹ elkaar niet overlappen, dan zeggen we ‘het verschil is groot’,
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we ‘het verschil is middelmatig’,
- in alle andere gevallen zeggen we ‘het verschil is gering’.

¹ De ‘box’ is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is $p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, met p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, met $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, n de steekproefomvang en S de steekproefstandaardafwijking.

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen.
- De toets Ans en fouten verbeteren.
- Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen.
- Decimaal getal omzetten in breuk.

havo A deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 11

Formules, grafieken en snijpunten

- Formules invoeren en grafieken plotten.
- De optie snijpunt gebruiken.

havo A deel 1
hoofdstuk 3
bladzijde 122

Formules en tabellen

- Bij een formule een tabel maken.

havo A deel 2
hoofdstuk 5
bladzijde 26

Grafieken, toppen en snijpunten

- Het kiezen van een geschikt venster.
- De opties snijpunt, nulpunt, maximum en minimum.

havo A deel 2
hoofdstuk 6
bladzijde 53

Allerlei

- Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR.

Overzicht Excel/Sheets-modules

Module

Data invoeren <ul style="list-style-type: none">• lege werkmap aanmaken• data handig invoeren in rijen en kolommen• vulgreep gebruiken• cellen opmaken	havo A deel 2 hoofdstuk 8 bladzijde 139
Formules en verwijzingen <ul style="list-style-type: none">• absolute verwijzingen naar cellen• relatieve verwijzingen naar cellen• verwijzingen gebruiken in formules	havo A deel 2 hoofdstuk 8 bladzijde 139
Diagrammen <ul style="list-style-type: none">• lijn-, staaf-, stapel- en cirkeldiagrammen maken	havo A deel 2 hoofdstuk 8 bladzijde 141
Boxplots <ul style="list-style-type: none">• boxplots maken	havo A deel 2 hoofdstuk 8 bladzijde 143
Zoeken in een dataset <ul style="list-style-type: none">• omzetten van nette dataset in Exceltabel• sorteren en filteren• werken met totalenrij	havo A deel 2 hoofdstuk 8 bladzijde 145
Hercoderen <ul style="list-style-type: none">• hercoderen van variabelen	havo A deel 2 hoofdstuk 8 bladzijde 148
Draaitabellen <ul style="list-style-type: none">• draaitabellen maken	havo A deel 2 hoofdstuk 8 bladzijde 150
Groeperen en draaigrafieken <ul style="list-style-type: none">• groeperen van waarden in draaitabellen• maken van draaigrafieken	havo A deel 2 hoofdstuk 8 bladzijde 152
Groeperen van datums <ul style="list-style-type: none">• groeperen van datums	havo A deel 2 hoofdstuk 8 bladzijde 157

Overzicht routes

5 Veranderingen

5.1 Stijgen en dalen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

5.2 Toenamediagrammen

opgave	18	19	20	21	22	23	24	25
□ basis								
⊙ midden								
* uitdagend								

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38

5.3 Differentiequotiënten

opgave	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
□ basis																
⊙ midden																
* uitdagend																

6 Rekenregels en formules

6.1 Formules combineren en herleiden

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

14	15	16	17	18	19

6.2 Formules en de grafische rekenmachine

opgave	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
□ basis										
⊙ midden										
* uitdagend										

6.3 Formules met breuken

opgave	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

6.4 Rekenen met machten en wortels

opgave	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
□ basis											
⊙ midden											
* uitdagend											

55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67

6.5 Formules met exponenten

opgave	68	69	70	71	72	73	74	75	76
▣ basis									
⊙ midden									
* uitdagend									

7 Statistiek en beslissingen

7.1 Statistische verdelingen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
☐ basis														
☒ midden														
☒ uitdagend														

15	16	17	18	19

7.2 Betrouwbaarheidsintervallen voor het populatiegemiddelde

opgave	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
☐ basis											
☒ midden											
☒ uitdagend											

7.3 Betrouwbaarheidsintervallen voor de populatieproportie

opgave	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
☐ basis											
☒ midden											
☒ uitdagend											

7.4 Betrouwbaarheidsintervallen toepassen

opgave	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
☐ basis											
☒ midden											
☒ uitdagend											

53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65

Trefwoordenregister

A

afnemende daling 13
afnemende stijging 13

B

95%-betrouwbaar-
heidsinterval 106, 115,
118, 121, 124
breedte van - 124, 127
95%-betrouwbaar-
heidsinterval voor de
populatieproportie 115,
118, 121, 124
95%-betrouwbaar-
heidsinterval voor het
populatie-gemiddelde
106, 118, 121, 124
beginhoeveelheid 76
beginwaarde 76
betrouwbaarheid 123
betrouwbaarheidsinterval
106, 115, 118, 121, 124
bord van Galton 98
boxplot 138
breedte van
95%-betrouwbaar-
heidsinterval 124, 127
breuken 59
- aftrekken 62
- delen 59
- optellen 62
- vermenigvuldigen 59

C

centrummaat 88, 137
combineren van
formules 45, 50
constante daling 13
constante stijging 13
cumulatieve
verdelingskromme 94

D

dalend 11
daling
afnemende - 13
constante - 13
toenemende - 13
dataset 145
delta notatie 10
differentiequotiënt 31
digitaal rekenblad 139
draaigrafiek 152
draaitabel 150

E

Excel 139
exponent 65
exponentiële formule 77
exponentiële groei 76

F

filteren 145
formules combineren 45,
50

G

Gauss, Carl Friedrich 100
gebroken exponenten 66
gelijknamige breuken 62
gemiddelde verandering 29
gesloten interval 11
grafiek
- plotten 53
- schetsen 53
- tekenen 53
groeifactor 76
groeperen 152
grondtal 65

H

helling van lijn 31
hercoderen 148

I

interval 11
gesloten - 11
open - 11
intervalnotatie 11

L

links-scheve verdeling 89

M

machten 65
- met gebroken
exponenten 66
- met negatieve
exponenten 69
rekenregels voor - 65,
66, 69
machtsformule 66, 77
maximum 16
meertoppige verdeling 89
minimum 16
Moivre, Abraham de 100

N

nauwkeurigheid 123
negatieve exponenten 69
nette dataset 145
normaalkromme 98
normale verdeling 98, 100

O

open interval 11

P

Pearson, Karl 96
phi-coëfficiënt 147
plotten 53
populatie 87
populatieproportie 87, 111,
114

Q

Quetelet, Adolphe 100

R

rechts-scheve verdeling 89

record 145

rekenblad 139

rekenregels voor

machten 65, 66, 69

rekenregels voor

wortels 71

representatieve

steekproef 87

S

schetsen 53

scheve verdeling 89

Sheets 139

sorteren 145

spreadsheet 139

spreadingsmaat 88, 138

staart van de verdeling 89

standaardverdeling 89

stapgrootte 19

steekproef 87

steekproefgemiddelde 103

steekproeflengte 103

steekproefomvang 103,
127

steekproefproportie 87,
111, 114

steekproevenverdeling 114

stijgend 11

stijging

afnemende - 13

constante - 13

toenemende - 13

substitueren 45

symmetrische verdeling 89

T

tekenen 53

toenamedigram 19

toenemende daling 13

toenemende stijging 13

top van grafiek 16

U

uitbijter 89, 93, 143

uitschieter 89, 93, 143

uniforme verdeling 89

V

variabele uit de breuk
halen 59

variabelen vrijmaken 43,
50

venster van GR 53

verdeling

links-scheve - 89

meertoppige - 89

normale - 98

rechts-scheve - 89

scheve - 89

staart van de - 89

standaard- 89

symmetrische - 89

uniforme - 89

- van de

steekproefproportie 111

verdelingskromme 94

cumulatieve - 94

vuistregels bij de normale
verdeling 99

W

wortel 71

Verantwoording

Illustraties: Richard van de Pol Illustratie & Vormgeving, Tilburg; Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: Integra Software Services
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 6-7
Shutterstock: p. 15, 25, 40-41, 49, 68, 81, 84-85, 116, 126 o, 127, 128, 129 (2x), 134-135, 150, 152, 155, 157, 168 o, 171
Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 24, 27, 29, 34, 56, 57, 79, 83, 104, 107, 146, 149, 153, 158, 172
iStock: p. 47, 74, 90, 112, 123, 125
Sabine de Waal, Hendrik-Ido-Ambacht: p. 48, 161
Getty Images: p. 100, 174, 175
Angel Photography, Amsterdam: p. 103
CE Wiskunde A havo 2019: p. 121, 130
Stijn Voets, Nijmegen: p. 126 b, 160, 168 b
AP Images / Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 151
Marc Pluim Fotografie, Velp: p. 169

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv,
Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73533-3



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



Noordhoff



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-73533-3



9 789001 735333