

& GETAL RUIMTE

A



Noordhoff

Getal & Ruimte

havo A deel 3

Twaalfde editie, 2021

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
E. Terlaak

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het boek havo A deel 3

Samen met de delen 1 en 2 van havo wiskunde A bevat dit boek de leerstof van het programma havo wiskunde A, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld. Bij het schrijven van dit boek is goed gekeken naar de examens die de laatste jaren zijn afgenomen. Dat betekent dat ervoor gezorgd is dat de theorie en de opgaven aansluiten bij de vraagstelling en het niveau dat op het centraal examen gangbaar is.

De totale studielast voor het vak havo wiskunde A is 320 uur.

In dit boek worden in de eerste drie hoofdstukken de gedeelten van de domeinen behandeld die in de delen 1 en 2 nog niet aan de orde zijn geweest. Bovendien wordt in deze hoofdstukken leerstof uit voorgaande delen herhaald. Deze drie hoofdstukken hebben elk een studielast van ongeveer 25 uur. Daarmee komt de totale studielast van de eerste 11 hoofdstukken op ongeveer 275 uur. Er blijft zo tijd over voor hoofdstuk 12 Examentraining.

In hoofdstuk 9 Exponentiële verbanden komt domein C5 aan bod. Er wordt gerekend met groeifactoren, groeipercentsages, verdubbelingstijd en halveringstijd. Het opstellen van exponentiële formules bij een tekst, tabel of grafiek en het werken met deze formules is een belangrijk onderdeel van het hoofdstuk. Verder komt het omgaan met logaritmisch papier aan de orde en wordt er geredeneerd met groeiformules.

Hoofdstuk 10 Statistiek gebruiken bevat naast een herhaling van de statistiek uit eerdere hoofdstukken ook enkele nieuwe onderwerpen, zoals dotplots en spreidingsdiagrammen. Alle relevante onderwerpen uit de statistiek komen aan de orde in contextrijke opgaven op examenniveau.

In hoofdstuk 11 Formules en variabelen worden enkele eindtermen uit de subdomeinen C1, C2, C3 en C4 verder uitgediept. Ook komt een aantal nieuwe onderwerpen aan de orde, zoals werken met gebieden, omgekeerd evenredige grootheden en wiskundige modellen.

In hoofdstuk 12 Examentraining is de leerstof onderverdeeld in zes onderwerpen die elk in een paragraaf aan de orde komen. In deze editie beginnen de eerste vijf paragrafen met een of twee opgaven waarin korte vragen staan die betrekking hebben op de leerstof in de paragraaf en die geënt zijn op examenvragen. In de theorie die daarop volgt wordt elk onderwerp kort en bondig herhaald. Daarna volgen passende examenopgaven die gekozen zijn uit de examens van 2016 (pilotexamens) tot en met 2019.

De gemengde opgaven bij hoofdstuk 12 zijn gebleven. In een flink aantal korte opgaven, waarbij de onderwerpen door elkaar staan, komen alle basisvaardigheden die een leerling nodig heeft aan de orde.

Opbouw

De opbouw van de hoofdstukken 9, 10 en 11 is dezelfde als in de delen 1 en 2. Deze hoofdstukken hebben een begin- en eindopdracht en een paragraaf Voorkennis. De oriëntatie-opgaven staan voor elke nieuwe theorie en activeren het denken over een nieuw wiskundig begrip. Ook de reflectie-opgaven spelen een belangrijke rol bij het activeren van een wiskundige denkhouding. Naast de gewone opgaven zijn er nog de afsluitende opgaven en de extra opgaven.

Elke paragraaf wordt afgesloten met een Terugblik, aan het eind van elk hoofdstuk staat een Diagnostische toets en achter in het boek staan de Gemengde opgaven.

Drie leerroutes

In deze editie wordt gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen.

De basisroute geeft de leerling voldoende oefening om zich alle vaardigheden die bij de eindtermen horen eigen te maken. In de middenroute worden enkele oefenopgaven overgeslagen en in plaats hiervan maakt de leerling opgaven die dieper op de stof ingaan. De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder oefenopgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.

In hoofdstuk 12 Examentraining is geen routering aanwezig.

Het schoolexamen en het centraal examen

Niet alle in de delen 1, 2 en 3 van havo A aangeboden onderwerpen worden centraal geëxamineerd. De (sub)domeinen B3, D en E5 komen uitsluitend op het schoolexamen aan de orde. In de boeken staan deze onderwerpen in deel 1 hoofdstuk 4 (Handig tellen) en in deel 2 hoofdstuk 5 (Veranderingen) en hoofdstuk 8 (Statistiek met de computer). Alle onderwerpen die behandeld worden in havo A deel 3 behoren tot de stof voor het centraal examen.

Getal & Ruimte online

Alle opgaven kunnen ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant en klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

zomer 2020

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

02 Oriëntatie-opgave

   Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 Gewone opgave

   Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 Reflectie-opgave

   In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 Afsluitende opgave

   De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 Extra opgave

   Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute



2 Middenroute



3 Uitdagende route



NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder route-aanduiding

In de Diagnostische toets, in de Gemengde opgaven en in de Examentraining hebben opgaven geen route-aanduiding.

[ **WERKBLAD**] Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

9 Exponentiële verbanden 6

Beginopdracht	Bevolkingspiramiden	8
	Japan en Nigeria	8
Voorkennis	Formules op de GR	9
9.1	Lineaire en exponentiële groei	11
9.2	Groeipercentages	20
9.3	Formules bij exponentiële groei	29
9.4	Logaritmisch papier en redeneren met groeiformules	37
Eindopdracht	Bevolkingsgroei in Nigeria	47
Diagnostische toets		48

10 Statistiek gebruiken 50

Beginopdracht	NBA ringen	52
Voorkennis	Statistische variabelen	53
10.1	Statistische diagrammen	55
10.2	Causaliteit en groepen vergelijken	64
10.3	De normale verdeling en betrouwbaarheidsintervallen	79
Eindopdracht	Dunks in de WNBA	95
Diagnostische toets		96

11 Formules en variabelen 98

Beginopdracht	De rozenkweker	100
Voorkennis	Lineaire vergelijkingen met twee variabelen	101
11.1	Grafieken en gebieden	103
11.2	Herleiden en combineren van formules	113
11.3	Evenredigheden	123
11.4	Redeneren met formules	129
11.5	Wiskundige modellen	136
Eindopdracht	Toprozen op de veiling	145
Diagnostische toets		146

12 Examentraining 148

12.1	Algemene vaardigheden	150
12.2	Lineaire verbanden	170
12.3	Exponentiële verbanden	180
12.4	Werken met formules	192
12.5	Statistiek	206
12.6	Onderzoeksopgaven	230

Gemengde opgaven	238
Formuleblad	271
Overzicht GR-modules	272
Overzicht routes	273
Trefwoordenregister	276
Verantwoording	277

9

Exponentiële verbanden

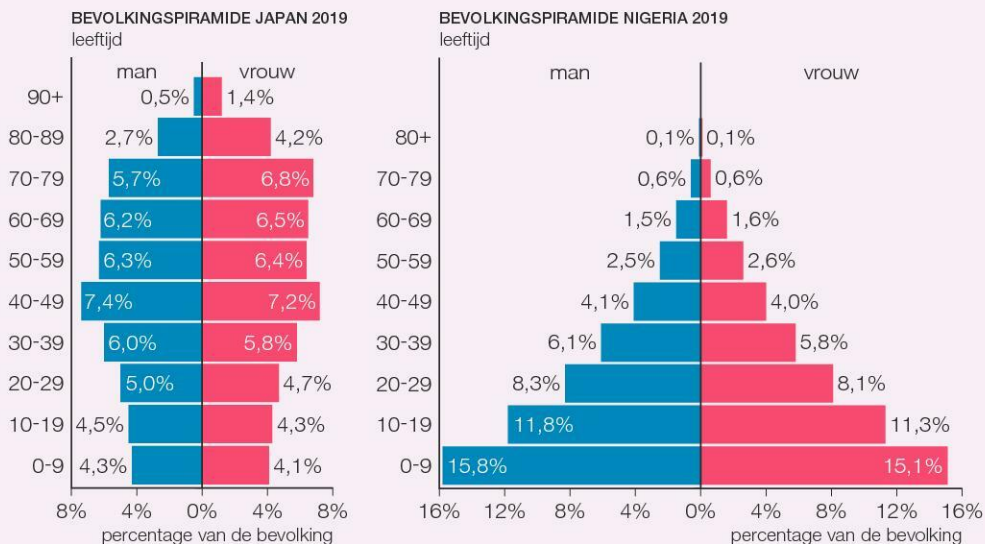
Wat leer je?

- Werken met formules van lineaire en exponentiële groei.
- Rekenen met groeifactoren en groeipercentages.
- Wat verdubbelingstijd en halveringstijd is.
- Hoe je formules opstelt bij exponentiële groei.
- Wat logaritmisch papier is.
- Redeneren met groeiformules.



Beginopdracht Bevolkingspiramiden Japan en Nigeria

In januari 2019 had Japan 125 miljoen inwoners en Nigeria 202 miljoen. In de figuren hieronder zie je dat er een groot verschil is tussen de bevolkingspiramide van Japan en die van Nigeria.



figuur 9.1

- Hoe kun je in deze bevolkingspiramiden zien dat de bevolking van Japan waarschijnlijk zal krimpen en die van Nigeria flink zal toenemen?

We bekijken in deze opdracht de leeftijdscategorieën 0-19 jaar, 20-39 jaar, 40-59 jaar, 60-79 jaar en 80+. We nemen aan dat alleen de vrouwen in de leeftijdscategorie 20-39 jaar kinderen krijgen. Verder nemen we aan dat alle mensen in de leeftijdscategorie 80+ twintig jaar later zijn overleden en dat van de mensen in de leeftijdscategorie 60-79 jaar twintig jaar later 80% is overleden.

In Japan is het vruchtbaarheidscijfer 1,44. Dat betekent dat er gemiddeld 1,44 kinderen per vrouw in de leeftijdscategorie 20-39 jaar geboren worden. In Nigeria is het vruchtbaarheidscijfer 5,53.

Uit deze vruchtbaarheidscijfers en de genoemde aannamen volgt dat de bevolking van Japan inderdaad over twintig jaar zal zijn gekrompen en dat de bevolking van Nigeria flink zal zijn toegenomen.

- Toon dat aan met berekeningen.
- Onderzoek met een soortgelijke berekening of de bevolking van Japan ook zou krimpen als het vruchtbaarheidscijfer 2,5 zou zijn.
- Onderzoek bij welk vruchtbaarheidscijfer het aantal inwoners van Nigeria op 1 januari 2039 gelijk zou zijn aan het aantal inwoners op 1 januari 2019.

Voorkennis Formules op de GR

Theorie A Snijpunten en toppen

Met de optie snijpunt vind je de coördinaten van snijpunten van grafieken. Met de opties maximum en minimum vind je de coördinaten van toppen van grafieken.

Bij het plotten van grafieken krijg je te maken met het kiezen van een geschikt venster. Vaak volgt uit de context wat geschikte waarden van x en y zijn. Ook kun je soms aan de formule zien welke waarden van x en y je het beste kunt kiezen.

In het voorbeeld is bij de formules $N_1 = 20 \cdot 1,2^t$ en $N_2 = 9t + 45$ met $t \geq 0$ geen context gegeven. Je kunt voor het venster bijvoorbeeld beginnen met x tussen 0 en 20.

Voor $t = 0$ krijg je $N_1 = 20 \cdot 1,2^0 = 20$ en

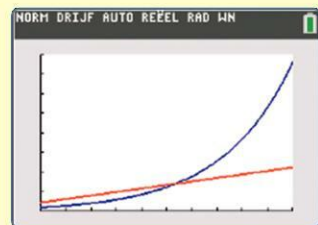
$N_2 = 9 \cdot 0 + 45 = 45$.

Voor $t = 20$ krijg je $N_1 = 20 \cdot 1,2^{20} \approx 767$ en

$N_2 = 9 \cdot 20 + 45 = 225$.

Neem dus voor het venster y tussen 0 en 800.

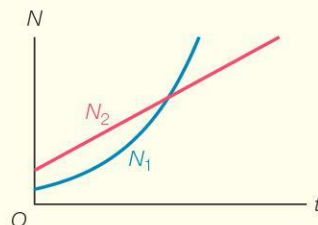
Je krijgt het scherm hiernaast. Het snijpunt is hier goed te zien, maar soms is het nodig om het venster nog aan te passen.



Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $N_1 = 20 \cdot 1,2^t$ en $N_2 = 9t + 45$ met $t \geq 0$. Zie de schets hiernaast.

- a Vanaf welke t is N_1 groter dan N_2 ? Rond af op één decimaal.
- b Voor welke waarde van t is $N_2 - N_1$ maximaal? Hoeveel is deze maximale waarde? Rond af op één decimaal.



Uitwerking

- a Voer in $y_1 = 20 \cdot 1,2^x$ en $y_2 = 9x + 45$.

De optie snijpunt geeft $x = 10,736...$

Dus vanaf $t = 10,8$ is $N_1 > N_2$.

- b $N_2 - N_1 = 9t + 45 - 20 \cdot 1,2^t$

Voer in $y_3 = 9x + 45 - 20 \cdot 1,2^x$.

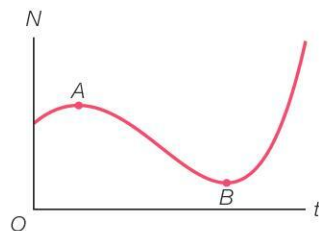
De optie maximum bij y_3 geeft $x \approx 5,0$ en $y \approx 40,2$.

Dus $N_2 - N_1$ is maximaal voor $t = 5,0$. De maximale waarde is 40,2.

- 1** Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.
- a** In voorbeeld a is het antwoord ‘vanaf $t = 10,8$ ’ terwijl de optie snijpunt $x = 10,736\dots$ geeft.
Hoe zit dat?
 - b** Vanaf welke t is $N_1 > 100$? Rond af op één decimaal.

- 2** Gegeven zijn de formules $N_1 = 15 \cdot 0,8^t$ en $N_2 = 12 - t$ met $t \geq 0$.
- a** Schets de grafieken van N_1 en N_2 in één figuur.
 - b** Voor welke t is $N_1 = N_2$? Rond af op twee decimalen.
 - c** Vanaf welke gehele t is $N_1 < 0,5$?
 - d** Voor welke waarde van t is $N_2 - N_1$ maximaal? Hoeveel is dit maximum? Rond af op één decimaal.

- 3** In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $N = 5 \cdot 1,4^t - t^2$ met $t \geq 0$.
- a** Bereken de coördinaten van de toppen A en B . Rond af op één decimaal.
 - b** Bereken voor welke t de waarde van N kleiner is dan 4. Rond af op één decimaal.



figuur 9.2

9.1 Lineaire en exponentiële groei



Het aantal gecertificeerde biologische bedrijven in Nederland neemt jaarlijks met 235 toe.

Op 31 december 2011 waren er 3410 van deze bedrijven in Nederland.

a Hoeveel van deze bedrijven waren er op 31 december 2018?

De oppervlakte in Nederland waarop biologische landbouw plaatsvindt (het bio-areaal) wordt elk jaar 1,065 keer zo groot. Op 31 december 2015 was deze oppervlakte 59 120 hectare.

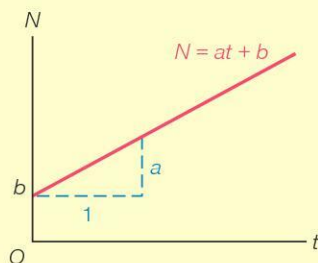
b Hoeveel hectare bio-areaal was er in Nederland op 31 december 2018?

Theorie A Formules bij lineaire en exponentiële groei

In opgave 1 heb je gezien dat het aantal gecertificeerde biologische bedrijven in Nederland elk jaar met 235 toeneemt. Je hebt te maken met **lineaire groei**.

Bij lineaire groei

- neemt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal toe
- hoort een formule van de vorm $N = at + b$, waarin a de toename per tijdseenheid is en b de beginwaarde (of beginhoeveelheid)
- is de grafiek een rechte lijn.



Voorbeeld

De hoeveelheid N groeit lineair. Op $t = 5$ is $N = 130$ en op $t = 8$ is $N = 190$. Stel de formule op van N .

Uitwerking

$$N = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{190 - 130}{8 - 5} = 20$$

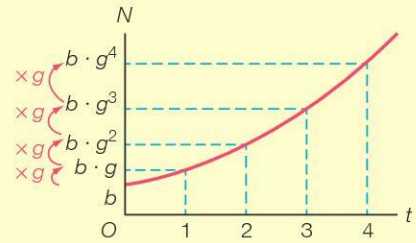
$$\left. \begin{array}{l} N = 20t + b \\ t = 5 \text{ en } N = 130 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 20 \cdot 5 + b = 130 \\ 100 + b = 130 \\ b = 30 \end{array}$$

Dus $N = 20t + 30$.

In opgave 1 heb je ook gezien dat het bio-areaal jaarlijks 1,065 keer zo groot wordt. Dit is een voorbeeld van **exponentiële groei**. Het getal waarmee telkens wordt vermenigvuldigd, heet de groeifactor. Hier is de groeifactor 1,065 per jaar. De beginwaarde (of beginhoeveelheid) is de waarde op $t = 0$.

Bij exponentiële groei

- wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal (de groeifactor) vermenigvuldigd
- hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, waarin b de beginwaarde (of beginhoeveelheid) is en g de groeifactor per tijdseenheid.



In de formule $N = 800 \cdot 0,85^t$ herken je

- de beginhoeveelheid is 800
- de groeifactor per tijdseenheid is 0,85.

Groeifactor tussen 0 en 1, dus N neemt af.

Voor $t = 5$ is $N = 800 \cdot 0,85^5 \approx 355$.

Voorbeeld

De populariteit van de OV-fiets groeit al jaren. In juni 2016 werden er 215 000 ritten met de OV-fiets gemaakt. Dit aantal wordt sindsdien elke maand 1,02 keer zo groot. We nemen aan dat deze groei nog een tijdje aanhoudt.

- Stel de formule op van het aantal ritten met de OV-fiets per maand. Neem het aantal ritten R in duizendtallen en de tijd t in maanden waarbij $t = 0$ juni 2016 is.
- In welke maand van welk jaar was het aantal ritten voor het eerst meer dan 400 000?
- Volgens de formule zal het aantal ritten in december 2023 meer zijn dan in januari 2023. Hoeveel meer?

Uitwerking

- $R = b \cdot g^t$ met $b = 215$ en $g = 1,02$ geeft $R = 215 \cdot 1,02^t$.
- Los op $215 \cdot 1,02^t = 400$.
Voer in $y_1 = 215 \cdot 1,02^x$ en $y_2 = 400$. Neem x tussen 0 en 50 en y tussen 0 en 800.
De optie snijpunt geeft $x \approx 31,35$.
Dus bij $t = 32$ zal het aantal ritten voor het eerst meer zijn dan 400 000. Dat is in februari 2019.
- Bij januari 2023 hoort $t = 79$ en bij december 2023 hoort $t = 90$.
 $215 \cdot 1,02^{90} - 215 \cdot 1,02^{79} \approx 250,1$
De toename van het aantal ritten zal ongeveer 250 duizend zijn.

R2 Zie het voorbeeld over de OV-fiets.



- Laat zien dat $t = 32$ bij de maand februari in 2019 hoort.
- In welke maand van welk jaar was het aantal ritten voor het eerst meer dan 500 000?

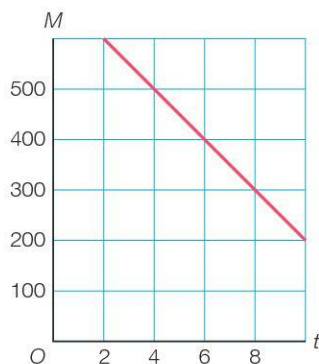
3


- a** De hoeveelheid H groeit lineair. Op $t = 4$ is $H = 552$ en op $t = 10$ is $H = 600$.
 Stel de formule op van H .
- b** De hoeveelheid N neemt toe met een factor 1,075 per jaar. Op $t = 0$ is $N = 580$.
 Stel de formule op van N met t in jaren.
- c** De hoeveelheid M verandert elke dag met een factor 0,995 ten opzichte van de dag ervoor. Op $t = 0$ is $M = 8,4$.
 Stel de formule op van M met t in dagen.

Aan het woord factor kun je zien dat je met een vermenigvuldiging te maken hebt.

4


- De hoeveelheid M neemt lineair af. Zie figuur 9.3.
 Stel de formule op van M .



figuur 9.3

5
 *

- Een hoeveelheid N groeit exponentieel. Op $t = 0$ is $N = 400$ en op $t = 1$ is $N = 434$.
 Stel de formule op van N .

6
 *

- Bij het zuiveren van afvalwater gebruikt men het begrip biochemisch zuurstofverbruik (BZV) als maat voor de verontreiniging van het water met organisch materiaal. In deze opgave gaan we uit van huishoudelijk afvalwater met een BZV van 300 mg/liter. Hoe schoner het water, des te lager het BZV.
- In het laboratorium van de zuiveringsinstallatie gaat men ervan uit dat de BZV met een factor 0,845 per dag afneemt.
- a** Stel de formule op van het BZV van huishoudelijk afvalwater na t dagen zuiveren.
- b** Hoeveel neemt volgens de formule het BZV af in de eerste week van de zuivering?
- c** Een laborant meet het BZV na 5 dagen zuiveren. Drie dagen later meet de laborant nogmaals het BZV. Uit de metingen blijkt dat in deze drie dagen het BZV met 60 mg/liter is afgenomen.
 Komt deze afname overeen met de afname die je verwacht op basis van de formule?

7
 *

- Gegeven is de volgende tabel. Hierin is t de tijd in uren.

t	3	7	10	15
N	24,82	24,18	23,7	22,9

- a** Toon aan dat de tabel bij een lineair verband hoort.
- b** Stel de formule op van N .

**8**

Het gebruik van kunstmest neemt wereldwijd toe met een factor 1,018 per jaar. In 2015 was het gebruik 190 miljoen ton. In Europa wordt juist steeds minder kunstmest gebruikt. In 2015 werd in Europa nog 15,65 miljoen ton gebruikt en sindsdien neemt deze hoeveelheid elk jaar met 20000 ton af.

- a Hoeveel procent van de totale hoeveelheid gebruikte kunstmest in 2015 werd in Europa gebruikt?
- b Stel de formule op van de hoeveelheid kunstmest die jaarlijks wereldwijd wordt gebruikt. Neem de hoeveelheid K_W in miljoenen ton en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2015.
- c Stel de formule op van de hoeveelheid kunstmest die jaarlijks in Europa wordt gebruikt. Neem de hoeveelheid K_E in miljoenen ton en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2015.
- d Bereken hoeveel procent van de totale hoeveelheid gebruikte kunstmest in 2025 in Europa wordt gebruikt.

**A9**

Ans en Bo doneren regelmatig hun haar aan de Haarstichting. Deze stichting gebruikt het haar om personen met kanker aan een pruik te helpen. Ga er in deze opgave van uit dat haar met een constante snelheid aangroeit. Ans en Bo zijn op 1 maart 2020 naar de kapper geweest. Bij Ans was de lengte op 1 april 6,4 cm en op 1 juli 9,1 cm. Bij Bo was de lengte op 1 april 6,3 cm en op 1 juli 9,6 cm.

- a Stel formules op van de haarlengte L_A van Ans en L_B van Bo. Neem L_A en L_B in cm en de tijd t in maanden met $t = 0$ op 1 maart 2020.
- b In welke maand is de haarlengte van Ans voor het eerst meer dan 11,5 cm?
- c In welke maand van welk jaar is de haarlengte van Bo 2 cm meer dan de haarlengte van Ans?
- d Voor de volgende donatie van het haar moet het haar langer zijn dan 25 cm. Ans en Bo willen weer tegelijk naar de kapper gaan. Bereken vanaf welke datum dat kan.

**A10**

In Nederland neemt het aandeel hernieuwbare energie gestaag toe. In 2015 nam het gebruik van biomassa 3,89% van het totale energieverbruik voor zijn rekening. Dit aandeel neemt jaarlijks met 0,21 procentpunten toe, dus in 2016 was het aandeel 4,10%.

In 2015 was het aandeel van zonne-energie 0,25% van het totale energieverbruik. Dit percentage neemt exponentieel toe met een factor 1,35 per jaar.

Bereken het percentage van het totale energieverbruik dat in 2023 afkomstig is van biomassa en zonne-energie. Rond af op twee decimalen.



A11

Zie opgave 10. In Nederland was in 2015 het aandeel van hernieuwbare energie 5,74% van het totale energieverbruik. Behalve uit biomassa en zonne-energie komt hernieuwbare energie voornamelijk uit windenergie. Er is ook nog een klein gedeelte overig. Neem aan dat het aandeel dat afkomstig is uit windenergie en overig vanaf 2015 exponentieel groeit met een factor 1,13 per jaar.

De overheid heeft als doel dat 37% van het energieverbruik in 2030 uit hernieuwbare bronnen komt. Onderzoek met deze gegevens of dit doel gehaald wordt.

**O12**

In de tabel is t de tijd in jaren en zijn M en N hoeveelheden.

- a** Licht toe dat M lineair toeneemt en stel de formule op van M .
b Licht toe dat N niet lineair toeneemt.

t	0	1	2	3	4	5
M	420	505	590	675	760	845
N	420	483	555	639	735	845

N neemt exponentieel toe, want N wordt per jaar steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigd.

- c** Bereken deze factor in twee decimalen.
d Stel de formule op van N .

Theorie B Tabellen bij exponentiële groei

Nederland is een echt fietsland. Lag er in Nederland in 2000 nog ongeveer 20 000 km fietspad, in 2020 was dat toegenomen tot ongeveer 42 000 km. Zie de tabel.

LENGTE FIETSPADEN IN NEDERLAND

jaar	2000	2005	2010	2015	2020
aantal km	20 000	24 000	29 000	35 000	42 000



Om te weten te komen of hier bij benadering sprake is van exponentiële groei, bereken je bij de tabel vier quotiënten.

$$\frac{24\,000}{20\,000} = 1,2; \quad \frac{29\,000}{24\,000} \approx 1,21; \quad \frac{35\,000}{29\,000} \approx 1,21 \text{ en } \frac{42\,000}{35\,000} = 1,2$$

Elke vijf jaar is het aantal km met ongeveer 1,2 vermenigvuldigd. Er is dus sprake van exponentiële groei. De bijbehorende formule is $L = 20\,000 \cdot 1,2^t$ met L de lengte van de fietspaden in km en t de tijd in vijftallen jaren met $t = 0$ in 2000.

Werkschema: aantonen van exponentiële groei bij een tabel

- 1 Bereken voor even grote intervallen de quotiënten $\frac{\text{hoeveelheid aan het eind van het interval}}{\text{hoeveelheid aan het begin van het interval}}$.
- 2 Zijn de quotiënten bij benadering gelijk, dan mag je uitgaan van exponentiële groei.

- 13** De omzet van de webwinkels in Nederland maakt een stormachtige groei door. Zie de tabel.

OMZET NEDERLANDSE WEBWINKELS IN MILJARDEN EURO'S

jaar	2014	2015	2016	2017	2018
omzet O	13,84	16,07	18,72	21,65	25,02

- a Toon aan dat bij de tabel exponentiële groei hoort.
- b Stel de formule op van O . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2014 en rond de groeifactor af op twee decimalen.
- c In 2023 heeft Nederland naar verwachting 17,6 miljoen inwoners. Hoeveel zal in dat jaar de omzet van de webwinkels per Nederlander zijn, aangenomen dat de groei van de omzet zich op dezelfde wijze voortzet?

- A14** De luchtdruk neemt af met de hoogte. Zie de tabel.

- a** Toon aan dat er sprake is van een exponentieel verband tussen de luchtdruk en de hoogte en stel de formule op van de luchtdruk P op een hoogte h . Neem daarbij P in hPa en h in kilometers.
- b** Een expeditie heeft op een hoogte van 7500 meter een kamp opgeslagen op de Mount Everest. Bereken de luchtdruk op die hoogte.

hoogte in meters	luchtdruk in hPa
0	1020
1000	903
2000	800
3000	708
4000	627



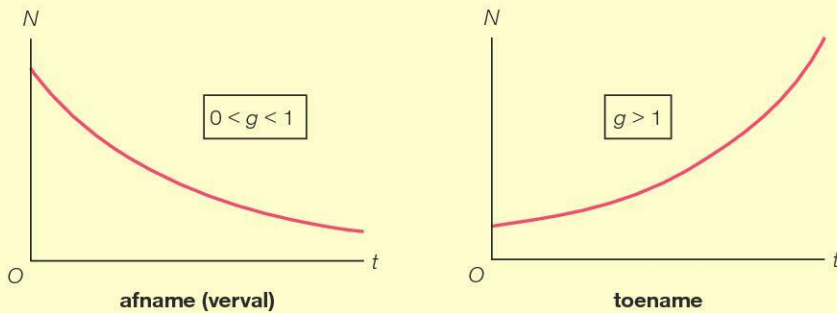
Gegeven zijn de formules $y_1 = 40 \cdot 1,05^x$ en $y_2 = 120 \cdot 0,92^x$.

- Plot de grafieken in één figuur. Neem x tussen 0 en 20 en y tussen 0 en 150.
- Welke soort van stijgen hoort bij de grafiek van y_1 ?
- Welke soort van dalen hoort bij de grafiek van y_2 ?
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken. Rond af op één decimaal.

Theorie C Grafieken bij exponentiële groei

Negatieve groeifactoren komen niet voor, maar de groeifactor kan wel kleiner dan 1 zijn. De hoeveelheid neemt dan af. Ook in deze gevallen spreken we van exponentiële groei, hoewel de uitdrukkingen 'exponentiële afname' en 'exponentieel verval' ook gebruikt worden.

Bij de grafiek van $N = b \cdot g^t$ kun je dus twee situaties onderscheiden: voor g tussen 0 en 1 is de grafiek afnemend dalend en voor g groter dan 1 is de grafiek toenemend stijgend.



figuur 9.4 Exponentieel verval en exponentiële toename.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $N = \frac{1000}{23 \cdot 1,4^t}$.

- Schrijf de formule van N in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op één decimaal en g op drie decimalen.
- Welke soort van stijgen of dalen hoort bij de grafiek van N ? Licht toe.

Uitwerking

$$a \quad N = \frac{1000}{23 \cdot 1,4^t} = \frac{1000}{23} \cdot 1,4^{-t} = \frac{1000}{23} \cdot (1,4^{-1})^t \approx 43,5 \cdot 0,714^t$$

Dus $N = 43,5 \cdot 0,714^t$.

- $g = 0,714$ dus de grafiek van N is afnemend dalend, want g tussen 0 en 1.

- 16** De volgende formules horen bij exponentiële groei.
   Bereken de beginwaarde en de groeifactor. Rond de beginwaarde zo nodig af op gehelen en de groeifactor op drie decimalen.

a $N = \frac{500}{10 \cdot 0,75^t}$

b $N = \frac{8050}{17 \cdot 1,24^t}$

c $N = \frac{650}{0,03 \cdot 4,15^t}$

d $N = \frac{300 \cdot 1,4^t}{1,3 \cdot 0,8^t}$

- 17** Zie de formules van opgave 16.
   Noteer bij elke formule welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek van N hoort. Licht je antwoorden toe.

- A18** Gegeven zijn de formules $N_1 = 130 \cdot 1,075^t$, $N_2 = 450 \cdot 0,925^t$ en $N_3 = N_1 + N_2$.

- a** Schets de grafieken van N_1 , N_2 en N_3 in één figuur.
b Welke soorten van stijgen en dalen herken je bij de grafiek van N_3 ?

Het snijpunt van de grafieken van N_1 en N_2 is A en de top van de grafiek van N_3 is het punt B .

- c** Onderzoek of de t -coördinaten van A en B gelijk zijn.

- A19** Astmapatiënten kunnen geholpen worden door een injectie met het medicijn theofylline. Dit medicijn wordt door de lever afgebroken. Op $t = 0$ vindt een injectie plaats. De concentratie C van het medicijn in het bloed is dan 20 mg per liter. Per uur wordt de concentratie C met 0,8 vermenigvuldigd.

- a** Stel de formule op van de concentratie C na t uur.
b Schets de grafiek van C .
c Het medicijn is uitgewerkt als C minder dan 3 mg per liter is. Na hoeveel uur is het medicijn uitgewerkt? Rond af op één decimaal.
d De daling van de concentratie is tussen $t = 3$ en $t = 4$ meer dan de daling tussen $t = 4$ en $t = 5$. Hoeveel mg per liter scheelt het? Rond af op twee decimalen.
e Bereken de gemiddelde daling per uur van de concentratie tussen $t = 0$ en $t = 8$. Rond af op twee decimalen.

Terugblik

Lineaire groei

Bij lineaire groei neemt de hoeveelheid telkens met hetzelfde getal toe. De formule van lineaire groei is $N = at + b$. Hierbij is b de beginwaarde en a de toename van N per tijdseenheid.

Een hoeveelheid N groeit lineair.

Op $t = 5$ is $N = 80$ en op $t = 12$ is $N = 136$.

Dan is $N = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{136 - 80}{12 - 5} = 8$.

$$\left. \begin{array}{l} N = 8t + b \\ t = 5 \text{ en } N = 80 \end{array} \right\} 8 \cdot 5 + b = 80, \text{ dus } b = 40$$

De formule is $N = 8t + 40$.

Exponentiële groei

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid telkens met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Het getal waarmee je per tijdseenheid vermenigvuldigt, heet de groeifactor per tijdseenheid.

Bij exponentiële groei hoort de formule $N = b \cdot g^t$. Hierin is b de beginhoeveelheid en g de groeifactor per tijdseenheid.

Ligt de groeifactor tussen 0 en 1, dan neemt de hoeveelheid af.

Is de groeifactor groter dan 1, dan neemt de hoeveelheid toe.

Aantonen van exponentiële groei bij een tabel

Om bij een tabel met waarnemingsgetallen te weten te komen of er sprake is van exponentiële groei, bereken je voor even grote intervallen de quotiënten $\frac{\text{hoeveelheid aan eind interval}}{\text{hoeveelheid aan begin interval}}$.

Als deze quotiënten bij benadering gelijk zijn, mag je uitgaan van exponentiële groei.

Stijgen en dalen bij de grafiek van $N = b \cdot g^t$

De grafiek van $N = b \cdot g^t$ is voor $0 < g < 1$ afnemend dalend en voor $g > 1$ toenemend stijgend.

De formule $N = \frac{945}{21 \cdot 2,15^t}$ is te schrijven in de vorm $N = b \cdot g^t$.

$$\text{Je krijgt } N = \frac{945}{21 \cdot 2,15^t} = \frac{945}{21} \cdot 2,15^{-t} = \frac{945}{21} \cdot (2,15^{-1})^t \approx 45 \cdot 0,465^t.$$

Hieraan kun je zien dat de grafiek van $N = \frac{945}{21 \cdot 2,15^t}$ afnemend dalend is, want $g \approx 0,465$ en dit ligt tussen 0 en 1.

9.2 Groeipercentages



Op 1 januari 2015 had de dartsvereniging Tops 540 leden. Dit aantal neemt jaarlijks met 5% toe. Uitgaande van een jaarlijkse toename van 5% groeit het aantal leden van Tops exponentieel. Welk groeifactor hoort bij deze toename?

Theorie A Groeifactor en groeipercentage

Neemt een hoeveelheid per jaar met 18% toe, dan wordt de hoeveelheid met 1,18 per jaar vermenigvuldigd. Je hebt dus te maken met exponentiële groei met groeifactor 1,18 per jaar.

Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 1,26 is, dan heb je te maken met een toename van 26% per jaar. We zeggen dat het **groeipercentage** 26% is.

Bij een jaarlijkse afname van 12% hoort een exponentiële afname met groeifactor 0,88.

Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 0,982 is, dan heb je te maken met een afname van 1,8% per jaar.

18% erbij geeft
 $100\% + 18\% = 118\%$
 dus $\times 1,18$

12% eraf geeft
 $100\% - 12\% = 88\%$
 dus $\times 0,88$

Voorbeeld

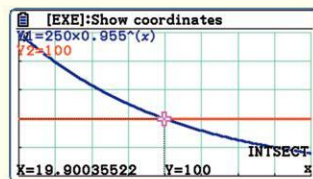
Door verdwenen broedgebieden en intensivering van de landbouw zijn er steeds minder Kievieten in Nederland. Nesten lopen gevaar door maaien, bemesten, ploegen en zaaien. In maart 2000 waren er nog 250 000 broedparen Kievieten in Nederland. Daarna is dat aantal jaarlijks met 4,5% afgenomen.



- Stel de formule op van het aantal broedparen Kievieten in Nederland. Neem het aantal broedparen N in duizendtallen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in maart 2000.
- In maart van welk jaar waren er voor het eerst minder dan 100 000 broedparen Kievieten in Nederland?

Uitwerking

- $N = b \cdot g^t$ met $b = 250$ en $g = 0,955$ geeft $N = 250 \cdot 0,955^t$.
- Los op $250 \cdot 0,955^t = 100$.
 Voer in $y_1 = 250 \cdot 0,955^x$ en $y_2 = 100$.
 De optie snijpunt geeft $x = 19,90...$
 Dus in maart 2020.



R21


Zie het voorbeeld.

- Bij de uitwerking van het voorbeeld zie je een scherm van de GR. Tussen welke waarden van x en y is het venster op dit scherm genomen?
- In welk jaar was het aantal broedparen gehalveerd ten opzichte van het aantal in maart 2000?

22


Vul in.

groeipercentage	13%	3,3%	120%	0,7%				
groefactor					1,12	1,06	2,5	1,237

23


Vul in.

afname in procenten	13%	41,8%	6,2%	0,3%			
groefactor					0,98	0,999	0,246

24


- Een hoeveelheid neemt per jaar met 12,7% toe. Geef de groefactor per jaar.
- Een hoeveelheid neemt per maand met 6,8% af. Geef de groefactor per maand.
- Bij een exponentiële groei is de groefactor 1,735 per maand. Geef het groeipercentage per maand.
- Bij een exponentiële groei is de groefactor 0,845 per dag. Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per dag af?

25


De halsbandparkiet komt van oorsprong niet in Nederland voor. De populatie in Nederland ontstond doordat vrijgelaten of ontsnapte dieren zich gingen voortplanten. In 1990 waren er naar schatting 400 halsbandparkieten in het wild in Nederland. Sindsdien is dit aantal elk jaar met 12% toegenomen. Halsbandparkieten veroorzaken veel schade bij fruittelers, doordat ze appels en peren in boomgaarden stukpikken. Volgens fruitteiler Jan Boer uit Barendrecht kost hem dat jaarlijks tienduizend euro aan omzet.



- Stel de formule op van het aantal in het wild voorkomende halsbandparkieten N in Nederland. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1990.
- In welk jaar zijn er naar verwachting voor het eerst meer dan 15 000 halsbandparkieten in Nederland?
- Neem aan dat in 2015 de totale omzetschade bij fruittelers veroorzaakt door de halsbandparkiet 2 miljoen euro was en dat deze omzetschade elk jaar met 10% toeneemt. Bereken de gemiddelde omzetschade die één halsbandparkiet aanbrengt in 2025.

26 In 2015 was de proportie e-bikes van alle verkochte fietsen in Nederland 0,27. Deze proportie groeit elk jaar met 14%. De proportie e-bikes van alle verkochte fietsen in Nederland noemen we P .



a Stel de formule op van P . Neem t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2015.

b Bereken in welk jaar voor het eerst meer dan de helft van alle verkochte fietsen in Nederland een e-bike is.

27 Op 1 januari 2020 hadden de Verenigde Staten 333,5 miljoen inwoners. Dit aantal neemt naar verwachting jaarlijks met 1,8 miljoen toe. De bevolking van Rusland neemt juist af. Op 1 januari 2020 had Rusland 142,9 miljoen inwoners en dit aantal neemt naar verwachting jaarlijks met 0,4% af.



Bereken op basis van deze gegevens in welk jaar de Verenigde Staten drie keer zoveel inwoners hebben als Rusland.

28 Ter bescherming tegen röntgenstraling wordt vaak lood gebruikt. Bij elke mm dikte van het lood dringt 30% minder röntgenstraling door. De bijbehorende formule is $I = 100 \cdot 0,70^d$. Hierin is I de intensiteit van de straling in procenten en d de dikte van het lood in mm.



a Hoeveel procent van de straling dringt door lood met een dikte van 2 mm?

b Met hoeveel procent neemt de straling af bij lood met een dikte van een halve cm?

c Men wil dat slechts 1% van de straling doordringt. Wat is de dikte van het lood die men moet gebruiken? Geef het antwoord in gehele mm.



A29 Spinazie bevat per 100 gram vers product 80 mg vitamine C. Bewaard bij kamertemperatuur neemt de hoeveelheid vitamine C per dag met 18 mg af. Bij diepvriesspinazie neemt de hoeveelheid vitamine C aanvankelijk per dag met 15% af.



H_k is het aantal mg vitamine C dat na t dagen nog aanwezig is in 100 gram bij kamertemperatuur bewaarde spinazie.

H_d is het aantal mg vitamine C dat na t dagen nog aanwezig is in 100 gram diepvriesspinazie.

a Stel de formules op van H_k en H_d .

b Hoeveel mg vitamine C bevat 100 mg diepvriesspinazie nog op het moment dat 100 mg bij kamertemperatuur bewaarde spinazie juist geen vitamine C meer bevat? Rond af op gehelen.

Bij diepvriesspinazie stabiliseert de hoeveelheid vitamine C zich op een niveau van 40% van de beginhoeveelheid.

c Na hoeveel tijd stabiliseert de hoeveelheid vitamine C zich? Rond af op gehele uren.

d Na hoeveel uur is de hoeveelheid vitamine C in diepvriesspinazie drie keer zo groot als in bij kamertemperatuur bewaarde spinazie?

A30

Op $t = 0$ zijn er in een vijver 150 kikkers en 300 salamanders. Het aantal kikkers neemt per jaar met 6% toe en het aantal salamanders neemt per jaar met 6% af.

Bereken na hoeveel jaar er evenveel kikkers als salamanders in de vijver zijn. Rond het antwoord af op één decimaal.

E31

Een hoeveelheid neemt het eerste jaar met 10% toe. De hoeveelheid neemt in het tweede jaar met 10% af. Het derde jaar neemt de hoeveelheid weer met 10% toe, het vierde jaar neemt de hoeveelheid weer met 10% af, enzovoort.

Na hoeveel jaar heb je voor het eerst minder dan 80% van de beginhoeveelheid?

E32

Een bal bereikt bij een vrije val na het stuiten weer een hoogte van 80% van de vorige hoogte. De bal wordt op een hoogte van 4 meter losgelaten. Geef je antwoorden in cm nauwkeurig.

- Hoeveel cm heeft de bal afgelegd als hij voor de vierde keer de grond raakt?
- De bal wordt dit keer op een grotere hoogte losgelaten. Na de derde stuit bereikt de bal een hoogte van 4 meter. Op welke hoogte is de bal losgelaten?

O33

In een bacteriecultuur groeit het aantal bacteriën met 1% per minuut.

- We vragen ons af hoeveel minuten het duurt voordat het aantal bacteriën is verdubbeld. Geef hiervan een schatting. Kies uit: 70, 80, 90 en 100 minuten.
- Op $t = 0$ zijn er 1 miljard bacteriën. Ga met een berekening na welke van de antwoorden van a het beste is.

Theorie B Verdubbelingstijd

Om een goed beeld te krijgen van de snelheid van exponentiële groei, kun je de verdubbelingstijd gebruiken.

De **verdubbelingstijd** is de tijd die nodig is voor de verdubbeling van een hoeveelheid bij exponentiële groei.

Neemt een hoeveelheid N exponentieel toe met groeifactor 1,038 per jaar en is de beginhoeveelheid 20, dan is de formule $N = 20 \cdot 1,038^t$ met t de tijd in jaren. Om te berekenen hoeveel jaar het duurt totdat de beginhoeveelheid 20 is verdubbeld, los je de vergelijking $20 \cdot 1,038^t = 40$ op. Uit $20 \cdot 1,038^t = 40$ volgt $1,038^t = 2$.

Ga je uit van beginhoeveelheid 50, dan krijg je bij verdubbeling van de beginhoeveelheid de vergelijking $50 \cdot 1,038^t = 100$.

Uit $50 \cdot 1,038^t = 100$ volgt $1,038^t = 2$.

Ga je uit van beginhoeveelheid b , dan krijg je bij verdubbeling van de beginhoeveelheid de vergelijking

$$b \cdot 1,038^t = 2b.$$

Uit $b \cdot 1,038^t = 2b$ volgt $1,038^t = 2$.

$$\begin{array}{l} b \cdot g^t = 2b \\ g^t = 2 \end{array} \quad \text{): } b$$

Steeds krijg je bij groeifactor 1,038 en verdubbeling van een hoeveelheid te maken met de vergelijking $1,038^x = 2$. Deze vergelijking los je als volgt op. Voer in $y_1 = 1,038^x$ en $y_2 = 2$. De optie snijpunt geeft $x \approx 18,58...$

Dus het duurt 18 jaar en $0,58... \times 12 \approx 7$ maanden totdat de hoeveelheid verdubbeld is.

De verdubbelingstijd bij een groeifactor van 1,038 per jaar is 18 jaar en 7 maanden.

De verdubbelingstijd is onafhankelijk van de beginhoeveelheid.

De verdubbelingstijd is de tijd die nodig is voor de verdubbeling van een hoeveelheid bij exponentiële groei.

Bij exponentiële groei met groeifactor g vind je de verdubbelingstijd door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen.

Voorbeeld

- Een populatie neemt jaarlijks met 8,3% toe.
Bereken de verdubbelingstijd. Geef het antwoord in maanden nauwkeurig.
- Een hoeveelheid verdubbelt elke 15 jaar.
Bereken het groeipercentage per jaar.

Uitwerking

- Groeifactor per jaar is 1,083, dus $1,083^t = 2$.

Voer in $y_1 = 1,083^x$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x = 8,69...$

De verdubbelingstijd is 8 jaar en

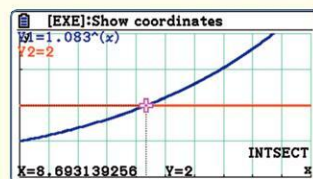
$0,69... \times 12 \approx 8$ maanden.

- Er geldt $g^{15} = 2$ met g de groeifactor per jaar.

Voer in $y_1 = x^{15}$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,047$.

Dus het groeipercentage is 4,7% per jaar.



34

- Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 13,1% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- Een hoeveelheid neemt met 28,4% per week toe.
Bereken de verdubbelingstijd in dagen nauwkeurig.
- Een hoeveelheid verdubbelt elke 25 jaar.
Bereken de groeifactor per jaar. Rond af op drie decimalen.
- Een hoeveelheid verdubbelt elke week.
Bereken het groeipercentage per dag.

35



- a** Voor het aantal inwoners van Ghana geldt de formule $N = 18,7 \cdot 1,025^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2000 en N het aantal inwoners in miljoenen.

Bereken de verdubbelingstijd van het aantal inwoners van Ghana.

- b** De bevolking van Gambia neemt elk jaar met 3,2% toe. De bevolking van Gabon neemt elk jaar met 2,2% toe.

Beredeneer, zonder de verdubbelingstijden te berekenen, bij welk land de bevolking een langere verdubbelingstijd heeft.

- c** Karachi is de grootste stad van Pakistan. Tussen 1998 en 2011 is de bevolking van Karachi meer dan verdubbeld. Neem aan dat het aantal inwoners in deze periode exponentieel is gegroeid en dat de verdubbelingstijd 11,5 jaar was.

Bereken met hoeveel procent per jaar de bevolking van Karachi in de genoemde periode is toegenomen.



A36



In Nederland werd in 1999 bijna 44 miljard euro aan zorg en welzijn uitgegeven. Sindsdien zijn deze kosten enorm toegenomen, maar niet in elke periode was de groei even groot. Zie de tabel.

periode	jaren	jaarlijkse groei
I	2000 t/m 2003	9,7%
II	2004 en 2005	3,8%
III	2006 en 2007	5,0%
IV	2008 t/m 2012	3,9%

Een nadeel van het geven van groeipercentages is dat je de groei mogelijk onderschat. Verdubbelingstijden geven dan een beter beeld van de sterkte van de groei.

- a** Bereken voor elke periode de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.
b Onderzoek of in de periode 2000 t/m 2012 de uitgaven aan zorg en welzijn in Nederland zijn verdubbeld.

In de jaren 2013 en 2014 namen de uitgaven minder sterk toe, maar in de periode 2015 t/m 2019 trad er weer een sterkere stijging op. De verdubbelingstijd voor de periode 2015 t/m 2019 was 26 jaar.

- c** Bereken voor de periode 2015 t/m 2019 het groeipercentage per jaar.
d In 2018 waren de uitgaven aan zorg en welzijn 100 miljard euro. Bereken de uitgaven aan zorg en welzijn in 2015. Rond af op miljarden euro's.

R37



Onderzoek of bij exponentiële groei een verdubbeling van het groeipercentage een halvering van de verdubbelingstijd tot gevolg heeft.

Invasieve exoten

Halsbandparkieten, roodwangschildpadden, Amerikaanse vogelkers: grote kans dat u deze soorten regelmatig ziet. Het zijn exoten: soorten die niet op eigen kracht maar door de mens in Nederland terecht zijn gekomen. Deze soorten kunnen zich permanent vestigen in onze natuur en zich snel vermeerderen. Dan spreken we van invasieve exoten.



Amerikaanse vogelkers

‘Niks mis met wat extra soorten in de natuur’, zullen veel mensen denken. Maar sommige exoten veroorzaken veel schade. Wie last heeft van hooikoorts ondervindt dat aan den lijve: de oprukkende hooikoortsplant Ambrosia verlengt het hooikoortsseizoen. Behalve gezondheidsproblemen kan er schade ontstaan voor de economie. Bijvoorbeeld door aantasting van oogsten door exotische insecten. Ook onze eigen flora en fauna ondervindt veel last van de indringers. Ze worden verdreven uit hun leefgebied en hun nest, lopen nieuwe ziektes op of worden domweg opgevreten. Als een invasieve exoot in de natuur gevestigd is, zijn vaak aanzienlijke uitgaven nodig om de schade te herstellen en de invasieve exoot te verwijderen of om verdere verspreiding te voorkomen. Geschat wordt dat de kosten alleen al in de lidstaten van de Europese Unie ten minste € 12 miljard per jaar bedragen!

Bron: invasieve-exoten.nl

A38

In deze opgave bekijken we een invasieve exoot waarvan het aantal exemplaren gedurende een periode exponentieel toeneemt met een verdubbelingstijd van T jaar.

- a** Hoeveel keer zoveel exemplaren zijn er na drie keer T jaar? En na vier keer T jaar?

Op $t = 0$ zijn er van deze exoot 10000 exemplaren in Nederland. De verdubbelingstijd is 1,5 jaar. Onderzoekers waarschuwen dat een kritische grens wordt bereikt als er nog eens 30000 exemplaren bijkomen.

- b** Bereken hoeveel jaar het nog duurt voordat de kritische grens wordt bereikt als er geen maatregelen worden getroffen.
- c** Op $t = 0$ is men begonnen met de bestrijding van de soort. Daardoor wordt de verdubbelingstijd 5 jaar.
- Bereken hoeveel jaar het dan duurt voordat de kritische grens wordt bereikt.

O39

Een hoeveelheid neemt per jaar met 4,5% af.

- a** Bereken hoeveel jaar het duurt voordat de hoeveelheid is afgenomen van 500 naar 250.
- b** Bereken hoeveel jaar het duurt voordat de hoeveelheid is afgenomen van 250 naar 125.
- c** Vergelijk de antwoorden op de vragen a en b.
- Wat valt je op?

Theorie C Halveringstijd

In opgave 39 heb je bij een exponentiële afname berekend hoelang het duurt voordat een hoeveelheid is gehalveerd. Deze tijd heet de **halveringstijd**.

De halveringstijd is onafhankelijk van de beginhoeveelheid.

De halveringstijd is de tijd waarin een hoeveelheid gehalveerd wordt bij exponentiële groei. Is de groeifactor g , dan vind je de halveringstijd door de vergelijking $g^t = 0,5$ op te lossen.

Voorbeeld

- a Gegeven is de formule $N = 200 \cdot 0,78^t$. Hierin is t de tijd in jaren. Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.
- b Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 8 uur en 45 minuten. Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per uur afneemt.

Uitwerking

- a $g = 0,78$, dus $0,78^t = 0,5$
Voer in $y_1 = 0,78^x$ en $y_2 = 0,5$.
De optie snijpunt geeft $x = 2,78\dots$
De halveringstijd is 2 jaar en $0,78\dots \times 12 \approx 9$ maanden.
- b De halveringstijd is 8,75 uur, dus $g^{8,75} = 0,5$.
Voer in $y_1 = x^{8,75}$ en $y_2 = 0,5$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 0,924$, dus de afname is 7,6% per uur.

40
□ ⊗ *

- a Gegeven is de formule $N = 6 \cdot 0,8^t$. Hierin is t de tijd in jaren. Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.
- b Een hoeveelheid neemt per jaar met 8% af. Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.
- c Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 5 jaar en 3 maanden. Bereken de groeifactor per jaar. Rond af op drie decimalen.

A41
□ ⊗ *

Uit een onderzoek in opdracht van Natuurmonumenten uit 2018 blijkt dat het aantal loopkevers in een natuurgebied in Drenthe dramatisch is afgenomen. De onderzoekers vonden een halveringstijd van 12 jaar. Uit een onderzoek in Duitsland uit 2017 blijkt dat in 27 jaar 76% van de insecten is verdwenen. Onderzoek of deze twee resultaten met elkaar in lijn zijn. Ga uit van exponentiële afname.



Terugblik

Groeipercentage en groeifactor

Bij een groeipercentage van 5,8% hoort de groeifactor 1,058.

Bij een afname van 3,2% hoort de groeifactor 0,968.

Bij de groeifactor 2,42 hoort een groeipercentage van 142%.

Bij de groeifactor 0,42 hoort een afname van 58%.

Neemt een hoeveelheid M vanaf 2010 jaarlijks met 12,5% toe en is M in 2010 gelijk aan 860, dan hoort hierbij de formule $M = 860 \cdot 1,125^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2010.

Neemt een hoeveelheid N vanaf 2015 jaarlijks met 1,8% af en is N in 2015 gelijk aan 1640, dan hoort hierbij de formule $N = 1640 \cdot 0,982^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2015.

Verdubbelingstijd en halveringstijd

De verdubbelingstijd bij exponentiële groei met groeifactor g (met g groter dan 1)

- is de tijd waarin een hoeveelheid verdubbelt
- is onafhankelijk van de beginhoeveelheid
- vind je door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen.

$$\text{verdubbelingstijd} \\ g^t = 2$$

Bij een groeipercentage van 11,7% per jaar bereken je de verdubbelingstijd per jaar door de vergelijking $1,117^t = 2$ op te lossen.

Voer in $y_1 = 1,117^x$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 6,3$ dus de verdubbelingstijd is ongeveer 6,3 jaar.

Om bij een verdubbelingstijd van 8 jaar het groeipercentage per jaar te berekenen, los je de vergelijking $g^8 = 2$ op.

Voer in $y_1 = x^8$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,091$ dus het groeipercentage per jaar is 9,1%.

De halveringstijd bij exponentiële groei met groeifactor g (met g tussen 0 en 1)

- is de tijd waarin een hoeveelheid halveert
- is onafhankelijk van de beginhoeveelheid
- vind je door de vergelijking $g^t = 0,5$ op te lossen.

$$\text{halveringstijd} \\ g^t = 0,5$$

9.3 Formules bij exponentiële groei

O42


Bij een exponentiële groei is de groeifactor per jaar gelijk aan 9.
 De beginwaarde is 2.

a Vul de tabel in.

tijd in jaren	0	1	2	3	4	5
hoeveelheid N	2	18	162			

b Met welk getal wordt N per twee jaar vermenigvuldigd?

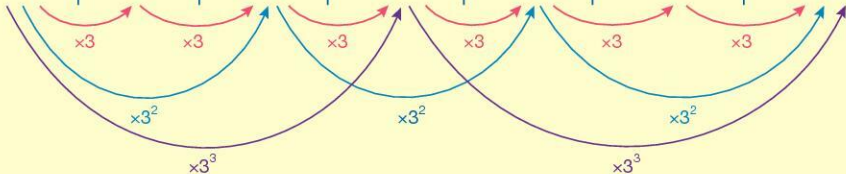
c Wordt N per halfjaar met meer of minder dan 4,5 vermenigvuldigd?

Theorie A Groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid

Een hoeveelheid groeit exponentieel met beginwaarde 100 en groeifactor 3 per uur.

EXPONENTIËLE GROEI

t	0	1	2	3	4	5	6
N	100	$100 \cdot 3^1$ = 300	$100 \cdot 3^2$ = 900	$100 \cdot 3^3$ = 2700	$100 \cdot 3^4$ = 8100	$100 \cdot 3^5$ = 24 300	$100 \cdot 3^6$ = 72 900



Je ziet

- per 2 uur is de groeifactor 3^2
- per 3 uur is de groeifactor 3^3 .

Algemeen

- per n uur is de groeifactor 3^n .

Deze regel geldt ook voor niet-gehele waarden van n .

Zo geldt

- per half uur is de groeifactor $3^{\frac{1}{2}} \approx 1,732$
- per kwartier is de groeifactor $3^{\frac{1}{4}} \approx 1,316$
- per minuut is de groeifactor $3^{\frac{1}{60}} \approx 1,018$.

NORM DRIJF AUTO REËL RAD 1IN	
$3^{1/2}$	1.732050808
$3^{1/4}$	1.316074013
$3^{1/60}$	1.018478864

Bij exponentiële groei met groeifactor g per tijdseenheid is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Heb je te maken met exponentiële groei met groeifactor 0,6 per dag, dan is

- de groeifactor per week $0,6^7 \approx 0,028$
- de groeifactor per uur $0,6^{\frac{1}{24}} \approx 0,979$
- de groeifactor per acht uur $0,6^{\frac{1}{3}} \approx 0,843$.

Om te berekenen wat het groeipercentage per dag is bij een toename van 70% per week gebruik je $g_{\text{week}} = 1,70$ geeft $g_{\text{dag}} = 1,70^{\frac{1}{7}} \approx 1,079$. Het groeipercentage per dag is 7,9%.

Bij exponentiële groei gaat het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid via groeifactoren.

Voorbeeld

Een hoeveelheid neemt per zes uur met 18% toe.

- a Hoeveel procent is de toename per dag?
- b Hoeveel procent is de toename per uur?

Uitwerking

- a $g_{6 \text{ uur}} = 1,18$
 $g_{\text{dag}} = 1,18^4 \approx 1,939$
De toename is 93,9% per dag.
- b $g_{6 \text{ uur}} = 1,18$
 $g_{\text{uur}} = 1,18^{\frac{1}{6}} \approx 1,028$
De toename is 2,8% per uur.

- 1 Eerst de groeifactor per 6 uur.
- 2 Dan de groeifactor per dag.
- 3 Ten slotte het groeipercentage per dag.

43 Een hoeveelheid neemt per kwartier met 12% toe.



- a Hoeveel procent is de toename per uur?
 - b Hoeveel is de procentuele toename per vijf minuten?
 - c Hoeveel procent is de toename per vijf uur?
- Rond af op gehele.

Geef percentages in één decimaal en rond groeifactoren af op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

44 Een hoeveelheid neemt per dag met 16% af.



- a Bereken de groeifactor per week.
- b Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per uur af?
- c Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per kwartier af? Rond af op twee decimalen.

45 Bij een exponentiële groei hoort een groeifactor van 1,3 per dag.



- a Bereken het groeipercentage per week. Rond af op gehele.
- b Bereken het groeipercentage per vier uur.

46
☐ ⊗ *

- a Een hoeveelheid neemt per uur met 19,5% af.
Hoeveel procent is de afname per kwartier?
- b Een hoeveelheid neemt per jaar met 0,08% toe.
Hoeveel procent is de toename per eeuw?
- c Een hoeveelheid neemt per week met 180% toe.
Hoeveel procent is de toename per dag?

R47
☐ ⊗ *

- Een hoeveelheid heeft een verdubbelingstijd van 4 jaar.
Lotte en Anne vragen zich af wat het groeipercentage per maand is.
Ze bedenken dat vier jaar gelijk is aan 48 maanden.
- a Lotte pakt het aan zoals in voorbeeld b op bladzijde 24.
Ze krijgt $g^{48} = 2$ met g de groeifactor per maand.
Los deze vergelijking op en geef het groeipercentage per maand.
 - b Anne pakt het aan zoals in het voorbeeld op de vorige bladzijde.
Ze krijgt $g_{48 \text{ maanden}} = 2$.
Bereken g_{maand} en geef het groeipercentage per maand.
 - c Welke van bovenstaande manieren heeft je voorkeur? Licht toe.

48
☐ ⊗ *

- a Een hoeveelheid heeft een verdubbelingstijd van 1,5 jaar.
Bereken het groeipercentage per week.
- b Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 15 seconden.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per minuut afneemt.

A49
☐ ⊗ *

- Ga bij de volgende vragen uit van exponentiële groei.
- a Het beleid van de regering is erop gericht om de hoeveelheid opgewekte energie door particulieren met zonnecellen elke drie jaar met een factor 2,5 te vermenigvuldigen.
Bereken het groeipercentage per jaar.
 - b In 2020 werd in Nederland twee keer zoveel elektriciteit door windmolens op land geleverd als in 2015.
Bereken het groeipercentage per jaar.
 - c Het aantal muziekwinkels in Nederland is in 12 jaar tijd met 22% afgenomen.
Hoeveel procent is de afname per jaar?



R50
☐ ⊗ *

- De volgende uitspraken zijn onjuist. Verbeter ze.
- a Bij een toename van 5% per dag hoort een toename van $7 \times 5\%$ per week.
 - b Bij een afname van 20% per uur hoort een afname van $\frac{1}{4} \times 20\%$ per kwartier.

51

Bij geluid spelen de begrippen geluidsintensiteit en geluidsniveau een rol. Geluidsintensiteit is het vermogen van geluid per m^2 . In de praktijk werkt men liever met het geluidsniveau. De eenheid van geluidsniveau is decibel (dB).

Een rustig gesprek heeft een geluidsniveau van 50 dB. Bij een drukke verkeersweg is het geluidsniveau 80 dB.

Er geldt de volgende vuistregel:

als de geluidsintensiteit vier keer zo groot wordt, neemt het geluidsniveau met 6 dB toe.

Gebruik deze vuistregel bij het beantwoorden van de volgende vragen.

- a** Bereken met hoeveel dB het geluidsniveau toeneemt, als de geluidsintensiteit 64 keer zo groot wordt.
- b** Bereken hoeveel keer zo groot de geluidsintensiteit is bij een drukke verkeersweg vergeleken met een rustig gesprek.

A52

Wikipedia is een populair naslagwerk op internet. De start van Wikipedia was in januari 2001. Tot januari 2007 is het aantal maandelijks geplaatste artikelen op Wikipedia exponentieel toegenomen. In januari 2007 werden 320 keer zoveel artikelen geplaatst als in januari 2001.

- a** Bereken het groeipercentage per maand.

In januari 2011 was het aantal maandelijks geplaatste artikelen met 35% afgenomen vergeleken met januari 2007. Een mogelijke verklaring is de verscherpte controle op de inhoud van de artikelen.

- b** Met hoeveel procent nam in de periode 2007-2011 het aantal maandelijks geplaatste artikelen per maand af? Ga uit van exponentiële afname.
- c** Vanaf januari 2011 is het aantal maandelijks geplaatste artikelen redelijk stabiel met een aantal van ongeveer 4000. Schat het aantal geplaatste artikelen in januari 2001.

A53

In de wereld wordt steeds meer plastic geproduceerd. De hoeveelheid jaarlijks geproduceerd plastic neemt al vanaf de jaren 70 van de vorige eeuw exponentieel toe. In 1970 werd 44 miljard kg geproduceerd en in 2009 was dat toegenomen tot 250 miljard kg.

Een deel van het plastic komt als afval in de oceaan terecht, waar het mede onder invloed van de zon uiteenvalt in zeer kleine deeltjes, het zogenaamde microplastic.

Onderzoekers bestuderen hoeveel van dit microplastic neerdaalt op de bodem van de oceaan. In deze bodem kan men lagen onderscheiden. Elke laag hoort bij een jaar. In de bodem nabij de kust van Californië vond men in de laag die bij 1972 hoort 6 deeltjes microplastic per 100 cm^2 . In de laag van 1994 vond men 17 deeltjes per 100 cm^2 . Neem aan dat de toename exponentieel is.

Onderzoek of de hoeveelheid microplastic in de lagen van de bodem met ongeveer hetzelfde percentage per jaar toeneemt als de wereldwijde productie van plastic.

A54

Tussen eind 2012 en eind 2018 is het totaal geïnstalleerd vermogen van zonnepanelen in Nederland 12 keer zo groot geworden. Ga hierbij uit van exponentiële groei.

Eind 2018 was er in totaal 4400 megawattpiek aan vermogen geïnstalleerd.

Van het totaal geïnstalleerd vermogen van zonnepanelen was eind 2017 58% aanwezig op daken van particulieren.

Bereken het geïnstalleerd vermogen van zonnepanelen eind 2017 op daken van particulieren.

O55

Een bacteriecultuur groeit exponentieel. Op $t = 5$ zijn er 50 000 bacteriën.

Op $t = 9$ zijn er 300 000 bacteriën. Hierbij is t in uren.

Uit de gegevens volgt dat de groeifactor per uur gelijk is aan 1,565.

a Toon dit aan.

Bij deze situatie hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$ met N het aantal bacteriën en g de groeifactor per uur. Om b te berekenen kun je de vergelijking $b \cdot 1,565^5 = 50\,000$ gebruiken.

b Licht dit toe.

Theorie B Een formule opstellen bij exponentiële groei

Is bij een exponentiële groei de hoeveelheid op twee tijdstippen bekend, dan kun je de bijbehorende formule opstellen. Je berekent hiertoe eerst de groeifactor per tijdseenheid en vervolgens de beginhoeveelheid. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Met name door de verspreiding van klamboes die zijn geïmpregneerd met insecticide, is het aantal dodelijke slachtoffers van malaria sinds 2009 exponentieel afgenomen. In 2012 waren er nog 640 duizend dodelijke slachtoffers. In 2017 was dat aantal afgenomen tot 435 duizend.

Stel de formule op van het aantal dodelijke slachtoffers van malaria. Neem het aantal N in duizendtallen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2009.



Uitwerking

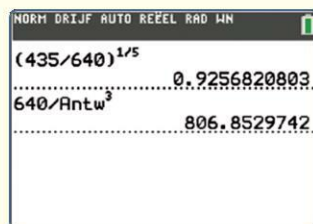
$$N = b \cdot g^t$$

$$g_{5 \text{ jaar}} = \frac{435}{640}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{435}{640} \right)^{\frac{1}{5}} = 0,9256...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,9256...^t \\ t = 3 \text{ en } N = 640 \end{array} \right\} b \cdot 0,9256...^3 = 640$$

$$b = \frac{640}{0,9256...^3} \approx 807$$

$$\text{Dus } N = 807 \cdot 0,926^t.$$



56



a Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. Op $t = 3$ is $N = 1600$ en op $t = 10$ is $N = 4100$. Hierbij is t in uren. Stel de formule op van N .

b Een bacteriesoort groeit exponentieel. Op $t = 3$ zijn er 150 000 bacteriën en op $t = 8$ zijn dat er 1 250 000. Hierbij is t in uren.

Stel de formule op van het aantal bacteriën B . Rond de beginhoeveelheid af op duizendtallen.

c Een hoeveelheid radioactieve stof neemt exponentieel af. Op $t = 5$ is er 0,60 gram en op $t = 8$ is er 0,47 gram. Hierbij is t in dagen.

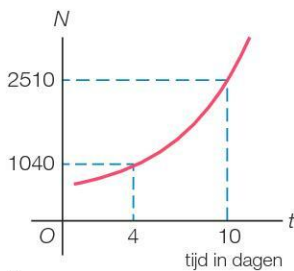
Stel de formule op van de hoeveelheid radioactieve stof H in gram.

Geef de beginwaarde in dezelfde nauwkeurigheid als de gegevens, tenzij anders wordt gevraagd.

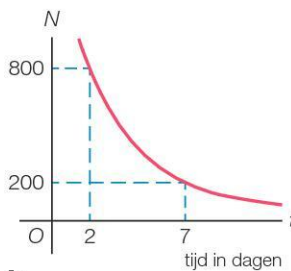
57



a Stel de formule op die bij de exponentiële groei in figuur 9.5a hoort.



a



b

figuur 9.5

b Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Zie figuur 9.5b. Stel de formule op van N .

58



Een projectontwikkelaar is gespecialiseerd in het bouwen van woontorens met op de begane grond winkels en vanaf de eerste verdieping appartementen. Zij rekent voor de bouwlaag op de begane grond 4,89 miljoen euro. Hoeveel ze rekent voor de totale kosten K in miljoenen euro's is afhankelijk van het aantal verdiepingen. Zie de tabel. Hierin is n het aantal verdiepingen met appartementen.

n	0	8	16	24	32
K	4,89	6,05	7,49	9,27	11,47

Tussen n en K bestaat een exponentieel verband.

a Toon dit aan.

b Bereken de totale bouwkosten in het geval de woontoren bestaat uit 20 verdiepingen met appartementen.

c De projectontwikkelaar wil dat de totale bouwkosten maximaal 10,3 miljoen euro bedragen.

Hoeveel verdiepingen met appartementen kan zij voor dit bedrag bouwen?



A59
□ ⊗ *

In de jaren 80 van de vorige eeuw was de ooievaar vrijwel uit Nederland verdwenen. Door herintroductie van ooievaars uit dierentuinen en beschermingsprogramma's is het aantal ooievaars sinds 1995 exponentieel toegenomen. In 2008 waren er al weer 700 broedparen in Nederland en in 2016 waren dat er al 1000.



- a Stel de formule op van het aantal broedparen ooievaars N in Nederland. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1995.
- b In welk jaar zullen er voor het eerst meer dan 1500 broedparen ooievaars in Nederland zijn, als de genoemde groei doorzet?

A60
□ ⊗ *

Door een bloedvatpropje heeft een patiënt tijdelijk verminderd zicht in één oog. Bij het onderzoek van de orthoptist, 10 dagen nadat de patiënt last kreeg, is het verlies van het zicht nog 56%. Bij het vervolgonderzoek 39 dagen na het eerste onderzoek is het verlies van het zicht nog slechts 9%. Ga ervan uit dat het verlies van het zicht exponentieel afneemt.

- a Hoe groot was het verlies van het zicht op het moment dat de patiënt last kreeg?
- b Hoeveel weken nadat de patiënt last kreeg, zal hij naar verwachting 99% van zijn oorspronkelijk zicht terug hebben?

A61
□ ⊗ *

Water absorbeert rood licht meer dan blauw licht en daarom ziet op grote diepte alles er blauw uit. Zo is in de Caribische Zee op vijf meter diepte al 92% van het rode licht geabsorbeerd en van het blauwe nog maar 83%. We noemen P_r het percentage van het rode licht dat op een diepte van d meter doordringt en P_b het percentage van het blauwe licht dat op een diepte van d meter doordringt. Er bestaat een exponentieel verband, zowel tussen P_r en d als tussen P_b en d .

- a Stel de formule op van P_r en van P_b .
- b Tot welke diepte dringt slechts 1% van het rode licht door? Hoeveel procent blauw licht dringt tot deze diepte door?

A62
*

Op 1 januari 2015 telde ons land 2425 honderdplussers. Dat waren er 1327 meer dan op 1 januari 2000. Het merendeel van de honderdplussers was vrouw: in 2000 waren er 928 vrouwen en 170 mannen honderdplus en in 2015 waren er 2112 vrouwen en 313 mannen honderdplus. Naar verwachting zal het aantal vrouwelijke honderdplussers de komende jaren blijven toenemen met hetzelfde jaarlijkse groeipercentage als in de periode 2000-2015 het geval was. Het aantal mannelijke honderdplussers zal echter naar verwachting sterker groeien, namelijk met 9,5% per jaar. 'Een verklaring hiervoor is dat mannen steeds minder zijn gaan roken en vrouwen juist meer', aldus het CBS. Onderzoek hoeveel procent van de honderdplussers in 2025 naar verwachting man is.

Terugblik

Groefactoren omzetten naar andere tijdseenheden

Is g de groefactor per tijdseenheid, dan is de

- groefactor per drie tijdseenheden gelijk aan g^3
- groefactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Deze regel geldt ook voor niet-gehele getallen n .

Is de groefactor per uur gelijk aan 1,8, dan is de

- groefactor per halfuur gelijk aan $1,8^{\frac{1}{2}} \approx 1,342$
- groefactor per kwartier gelijk aan $1,8^{\frac{1}{4}} \approx 1,158$.

Groepercentages omzetten naar andere eenheden

Is de toename per dag 30%, dan is de

- groefactor per dag 1,3
- groefactor per week $1,3^7 \approx 6,27$ en de toename per week dus 527%
- groefactor per uur $1,3^{\frac{1}{24}} \approx 1,011$ en de toename per uur dus 1,1%.

Het omzetten van een groepercentage naar een andere eenheid gaat via groefactoren.

Is de afname per uur 8,2%, dan is de

- groefactor per uur 0,918
- groefactor per dag $0,918^{24} \approx 0,128$, dus de afname per dag is 87,2%
- groefactor per kwartier $0,918^{\frac{1}{4}} \approx 0,979$, dus de afname per kwartier is 2,1%.

De formule opstellen bij exponentiële groei

Weet je bij een exponentiële groei op twee tijdstippen de hoeveelheid, dan kun je de formule opstellen.

Is $N = 82$ voor $t = 5$ uur en is $N = 246$ voor $t = 12$ uur,

dan is $g_{7 \text{ uur}} = \frac{246}{82} = 3$, dus $g_{\text{uur}} = 3^{\frac{1}{7}} \approx 1,1699...$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,1699...^t \\ \text{bij } t = 5 \text{ hoort } N = 82 \end{array} \right\} b \cdot 1,1699...^5 = 82$$
$$b = \frac{82}{1,1699...^5} \approx 37$$

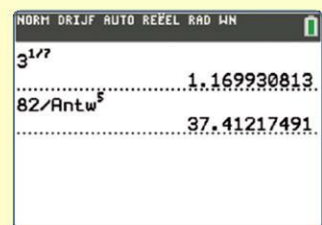
Dus $N = 37 \cdot 1,170^t$.

Met deze formule kun je bijvoorbeeld berekenen voor welke t de hoeveelheid gelijk is aan 500. Los hiertoe de vergelijking

$$37 \cdot 1,170^t = 500 \text{ op.}$$

Invoeren van $y_1 = 37 \cdot 1,170^x$ en $y_2 = 500$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 16,58...$

Dus voor $t \approx 16,6$ is $N = 500$.

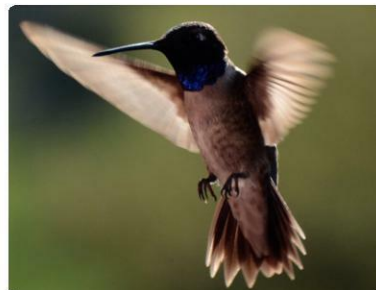


9.4 Logaritmisch papier en redeneren met groeiformules

063
☞*✱

Van een aantal dieren is een indicatie gegeven van het gewicht van een volwassen exemplaar.

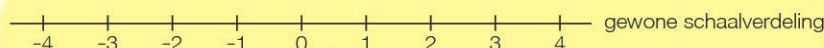
kolibrie	0,002 kg
muis	0,02 kg
egel	0,9 kg
wasbeer	10 kg
zeehond	100 kg
paard	600 kg
olifant	5500 kg
walvis	100 000 kg



- Hoeveel keer zo zwaar is de walvis als de wasbeer?
En hoeveel keer zo zwaar als de kolibrie?
- We willen de acht gewichten op een getallenlijn zetten.
Stel dat we de eenheid zo kiezen, dat 1 mm overeenkomt met 1 gram.
Hoe lang moet de getallenlijn dan worden?
- Neem aan dat op de getallenlijn 1 mm overeenkomt met 1000 kg.
Hoe lang moet de getallenlijn dan worden? Welk bezwaar is tegen deze eenheid in te brengen?

Theorie A Logaritmische schaalverdeling

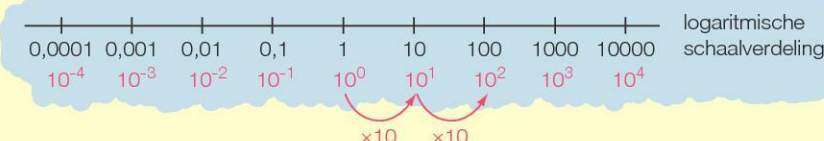
In opgave 63 heb je gezien dat je de waarnemingsgetallen niet goed kunt uitzetten op de getallenlijn met een gewone schaalverdeling. Daarom gebruiken we in dit soort gevallen een **logaritmische schaalverdeling**. Bij een gewone schaalverdeling zit er tussen de getallen 0 en 1 evenveel afstand als tussen de getallen 1 en 2, enzovoort.



Bij een logaritmische schaalverdeling zit er tussen de getallen $10^0 = 1$ en $10^1 = 10$ evenveel afstand als tussen de getallen $10^1 = 10$ en $10^2 = 100$.

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

Bij een vaste stapgrootte hoort bij een logaritmische schaalverdeling dus een vaste factor.



In figuur 9.6 zie je een gedeelte van een vel **logaritmisch papier**. Op de y -as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Op deze as staat het getal 1 bij het snijpunt met de x -as. Op de x -as is een gewone schaalverdeling gekozen.

Met de getallen langs de y -as kun je bij elke horizontale lijn te weten komen welke y -waarde erbij hoort.

Van onder naar boven zie je eerst de getallen 1, 2, 3, ..., 9 en $10^1 = 10$.

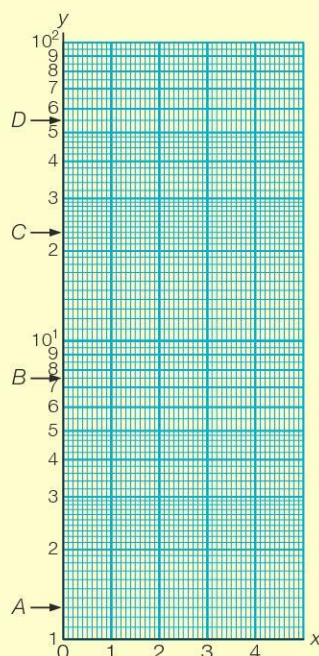
De lijn direct boven de lijn $y = 10$ hoort bij $y = 11$, dan $y = 12$, ... tot en met $y = 20$.

Bij de lijn $y = 20$ staat 2, want $2 \cdot 10^1 = 20$.

Verder naar boven krijg je vervolgens lijnen bij de waarden 21, 22, 23, ..., 29 en 30.

Tussen 30 en 40 staan alleen nog maar lijnen bij 32, 34, 36 en 38.

Tussen 50 en 60 staat alleen nog maar een lijn bij 55.



figuur 9.6

64 Zie figuur 9.6.



- Welke y -waarden horen bij de letters A tot en met D?
- Je ziet in de figuur wel de lijn $y = 17$, maar niet de lijn $y = 37$. Bij welke van de volgende y -waarden is een lijn getekend?
49 9,5 2,4 1,25 0
- Bij een onderzoek variëren de meetresultaten van 10^3 tot 10^5 . Om deze gegevens op het logaritmisch papier van figuur 9.6 te kunnen uitzetten, zet men op de verticale as 10^3 op de hoogte van de horizontale as en 10^5 bij de bovenste horizontale lijn. Bij de letter A hoort dan het getal 1300. Welke getallen horen in dit geval bij de letters B, C en D?

65



[▶ WERKBLAD] Bij desinfectie worden schadelijke micro-organismen op oppervlakken en voorwerpen verminderd. In de tabel zie je hoe het aantal micro-organismen N tijdens het uitkoken van een medisch instrument afneemt. In deze tabel is t de tijd in minuten dat het uitkoken duurt.

- Teken de punten die uit de tabel volgen op het logaritmisch papier en verbind de getekende punten door lijnstukken.
- Gebruik de grafiek die je in vraag a hebt getekend om het aantal micro-organismen te schatten op $t = 1,5$ en $t = 2,5$.
- Lees af na hoeveel minuten het aantal micro-organismen is teruggebracht tot 100. Geef het antwoord in één decimaal.

t	N
0	100 000
1	15 000
2	2000
3	400
4	50

- Vul de tabel hiernaast in.
- Teken de punten die uit de tabel volgen op het logaritmisch papier. Teken door de punten de grafiek van $N = 4 \cdot 3^t$.
- Teken in dezelfde figuur de grafiek van $N = 5000 \cdot 0,6^t$.
- Wat valt je op aan de grafieken?

t	0	2	4	6
$N = 4 \cdot 3^t$				

Theorie B Exponentiële groei en logaritmisch papier

De grafiek van de formule $N = b \cdot g^t$ is op logaritmisch papier een rechte lijn. In opgave 66 heb je daar enkele voorbeelden van gezien. Als omgekeerd de punten van een grafiek op logaritmisch papier (bij benadering) op een rechte lijn liggen, dan is er sprake van exponentiële groei.

Bij een rechte lijn op logaritmisch papier hoort exponentiële groei, dus een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$.

In het voorbeeld zie je hoe je bij een lijn op logaritmisch papier de formule opstelt. Neem twee punten op de lijn die je goed kunt aflezen, zorg er ook voor dat je punten neemt die niet te dicht bij elkaar liggen. Dat komt de nauwkeurigheid ten goede.

Voorbeeld

Zie figuur 9.7.

Stel de formule op van N .

Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.

Uitwerking

Rechte lijn op logaritmisch papier,
dus $N = b \cdot g^t$.

Bij $t = 2$ hoort $N = 400$ en bij $t = 6$
hoort $N = 20$.

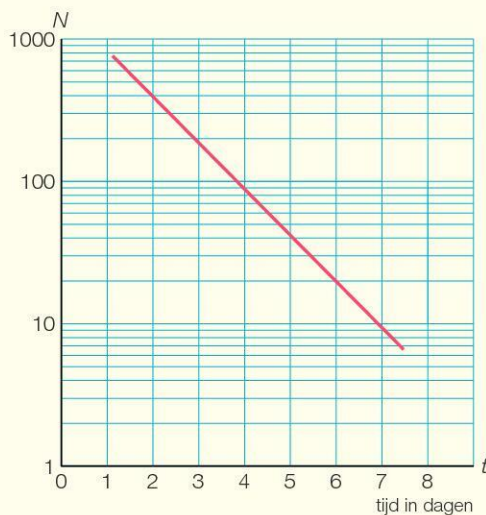
$$g_{4 \text{ dagen}} = \frac{20}{400} = 0,05, \text{ dus}$$

$$g_{\text{dag}} = 0,05^{\frac{1}{4}} = 0,4728\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,4728\dots^t \\ t = 2 \text{ en } N = 400 \end{array} \right\} b \cdot 0,4728\dots^2 = 400$$

$$b = \frac{400}{0,4728\dots^2} \approx 1790$$

Dus $N = 1790 \cdot 0,473^t$.



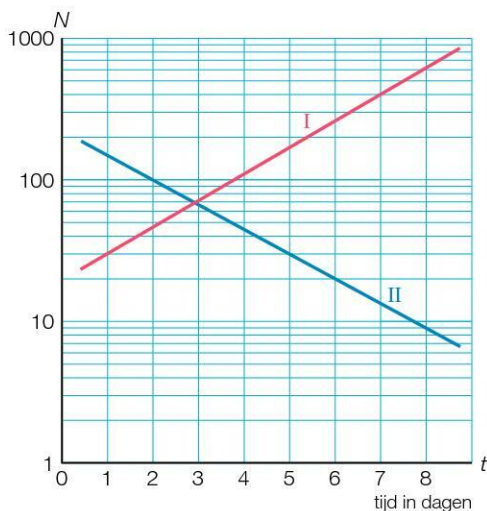
figuur 9.7

67



[▶ WERKBLAD] Zie figuur 9.8.

- Stel de formule op van grafiek I.
- Stel de formule op van grafiek II.
- Grafiek III gaat door het punt (1, 3) en is evenwijdig met grafiek I. Teken grafiek III op het werkblad en stel hiervan de formule op.
- De formule van grafiek IV is $N = 2500 \cdot 0,431^t$. Teken grafiek IV op het werkblad.



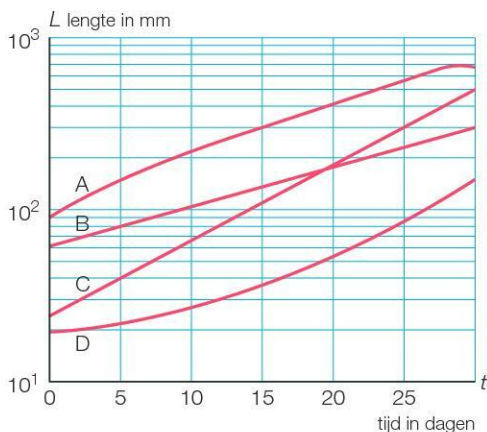
figuur 9.8

68



[▶ WERKBLAD] Van vier planten A, B, C en D is in de maand juni de lengte bijgehouden. De bijbehorende grafieken zijn op logaritmisch papier getekend. Zie figuur 9.9.

- Bij welke planten is sprake van exponentiële groei? Stel van deze planten de formule op van de lengte L in mm na t dagen.
- Plant E groeit exponentieel. Na 5 dagen is de lengte 30 mm en na 25 dagen is de lengte 400 mm. Teken op het werkblad de grafiek van de lengte van plant E.
- Plant F groeit exponentieel met dezelfde groeifactor als plant B en na 10 dagen is de lengte 5 cm. Teken in de figuur van vraag b de grafiek van de lengte van plant F.



figuur 9.9

69



[▶ WERKBLAD] Een vogelwerkgroep heeft in een gebied op de Veluwe in de periode 2001-2015 het aantal patrijzen geteld.

jaar	2001	2003	2004	2006	2007	2010	2012	2015
aantal N	610	455	390	290	250	160	115	75

- Zet de gegevens uit op het logaritmisch papier en toon hiermee aan dat het aantal patrijzen exponentieel afneemt.
- Stel de formule op van het aantal patrijzen N . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2000.

A70

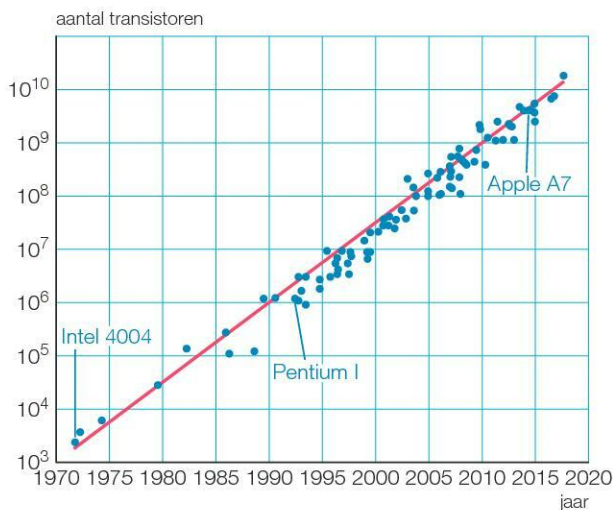

Elke computer gebruikt transistoren om berekeningen te maken. Hoe meer transistoren, hoe sneller de computer. In de begintijd van computers ging het om enkele honderden transistoren per computer. Tegenwoordig zijn dat er vele miljarden, die in zogenaamde microprocessors zijn verwerkt.

In 1965 voorspelde de wetenschapper Gordon Moore dat het aantal transistoren per microprocessor exponentieel zou gaan groeien. Hij gaf een verdubbelingstijd van twee jaar. Deze voorspelling staat bekend als de wet van Moore.

In figuur 9.10 is van enkele microprocessors het aantal transistoren per microprocessor uitgezet tegen het jaar van verschijnen. Verder geeft de lijn een goede indruk van de ontwikkeling tussen 1972 en 2018.

- Laat met een berekening zien dat de lijn in de figuur overeenkomt met de wet van Moore.
- Gebruik een formule van de lijn in de figuur om een voorspelling te doen van het aantal transistoren per microprocessor in 2025.

Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.



figuur 9.10

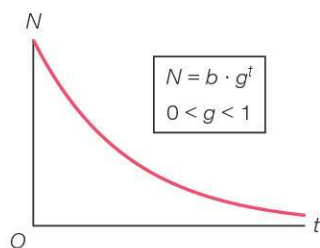
O71


In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $N = b \cdot g^t$ met $0 < g < 1$. De grafiek van N is dalend en N nadert tot 0 als t heel groot wordt.

In deze opgave bekijken we de formule $A = 100 - 90 \cdot 0,8^t$.

Als t heel groot wordt, dan nadert $90 \cdot 0,8^t$ tot 0.

- Hoe volgt hieruit dat $A \approx 100$ als t heel groot wordt?
- Vul in: *toe* of *af*.
 Als t toeneemt, dan neemt $0,8^t$..., dus dan neemt $90 \cdot 0,8^t$..., dus dan neemt $100 - 90 \cdot 0,8^t$...
- Hoe kun je op grond van vraag b concluderen dat de grafiek van A stijgend is?
- Schets de grafiek van A . Gebruik de GR. Neem daarbij x tussen 0 en 20 en y tussen 0 en 100. Is de grafiek inderdaad stijgend?



figuur 9.11

Theorie C Redeneren met groeiformules

In opgave 71 heb je bij de formule van $A = 100 - 90 \cdot 0,8^t$ beredeneerd dat A nadert tot 100 als t heel groot wordt. Je hebt ook beredeneerd dat de grafiek van A stijgend is.

Bij een redenering werk je stap voor stap toe naar een conclusie over de formule of de grafiek, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken of de grafiek te plotten.

Je gebruikt bij redeneren met formules met g^t waarbij $0 < g < 1$

- als t heel groot wordt, dan nadert g^t tot 0
- als t toeneemt, dan neemt g^t af.

Bij het beredeneren kom je twee soorten opdrachten tegen. We lichten dit toe aan de hand van de formule $N = 80(1 - 0,9^t)$.

- 1 Beredeneer wat N ongeveer zal zijn als t heel groot wordt.

Uitwerking

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,9^t$ tot 0, dus dan wordt $1 - 0,9^t \approx 1$, dus dan wordt $80(1 - 0,9^t) \approx 80$. Hieruit volgt dat $N \approx 80$ als t heel groot wordt.

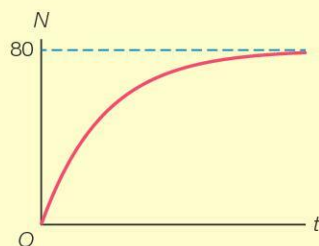
- 2 Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.

Als je van 1 iets afhaalt dat kleiner wordt, dan wordt wat je overhoudt groter.

Uitwerking

Als t toeneemt, dan neemt $0,9^t$ af, dus neemt $1 - 0,9^t$ toe, dus dan neemt $80(1 - 0,9^t)$ toe. Dus de grafiek van N is stijgend.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $N = 80(1 - 0,9^t)$. Met een stippelijntje is aangegeven dat de **grenswaarde** gelijk is aan 80. We zeggen ook wel dat 80 het **verzadigingsniveau** is.



figuur 9.12

Ook bij de formule $B = \frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t}$ kun je beredeneren wat de grenswaarde is. Verder kun je beredeneren dat de grafiek van B dalend is.

Je gebruikt bij redeneren met formules met g^t waarbij $g > 1$

- als t heel groot wordt, dan wordt g^t heel groot
- als t toeneemt, dan neemt g^t toe.

Zo krijg je

- 1 Beredeneer wat B ongeveer zal zijn als t heel groot wordt.

Uitwerking

Als t heel groot wordt, dan wordt $1,6^t$ heel groot, dus dan wordt $0,5 \cdot 1,6^t$ heel groot, dus dan wordt

$1 + 0,5 \cdot 1,6^t$ ook heel groot. Dus dan wordt

$\frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t} \approx 0$. Hieruit volgt dat $B \approx 0$ als t heel groot wordt.

Deel je 120 door een heel groot getal, dan krijg je ongeveer 0.

- 2 Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van B dalend is.

Uitwerking

Als t toeneemt, dan neemt $1,6^t$ toe, dus dan neemt $0,5 \cdot 1,6^t$ toe, dus

dan neemt $1 + 0,5 \cdot 1,6^t$ toe en dan neemt $\frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t}$ af.

Dus de grafiek van B is dalend.

Bij de opgaven in deze paragraaf gaan we er steeds van uit dat $t \geq 0$ is.

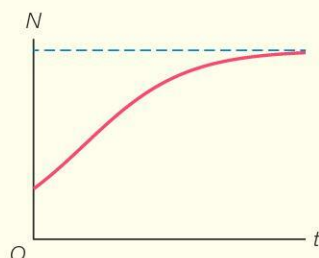
Voorbeeld

Het aantal vissen in een meer is gegeven door de formule

$N = \frac{5000}{2 + 5,5 \cdot 0,74^t}$. Hierin is N het aantal vissen en t de

tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2010.

- a** Beredeneer wat het verzadigingsniveau is.
b Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.



figuur 9.13

Uitwerking

- a** Als t heel groot wordt, nadert $0,74^t$ tot 0. Dan wordt $5,5 \cdot 0,74^t \approx 0$

en $2 + 5,5 \cdot 0,74^t \approx 2$. Dus dan wordt $\frac{5000}{2 + 5,5 \cdot 0,74^t} \approx \frac{5000}{2} = 2500$,

dus het verzadigingsniveau is 2500 vissen.

- b** Als t toeneemt, dan neemt $0,74^t$ af, dus ook $5,5 \cdot 0,74^t$ neemt af, dus ook $2 + 5,5 \cdot 0,74^t$ neemt af, dus

$\frac{5000}{2 + 5,5 \cdot 0,74^t}$ neemt toe.

De grafiek van N is dus stijgend.

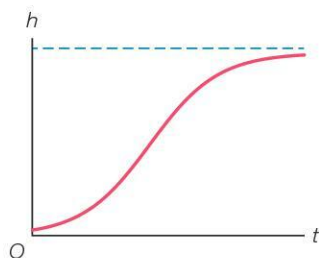
Deel je 5000 door een steeds kleiner positief getal, dan krijg je een steeds grotere uitkomst.

72



Bij de groei van een zonnebloem is de hoogte h gegeven door de formule $h = \frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t}$. Hierin is h de hoogte in cm en t de tijd in weken.

- Beredeneer dat uit de formule volgt dat de zonnebloem voortdurend hoger wordt.
- Hoe hoog is de zonnebloem op $t = 3$?
- Beredeneer wat de grenswaarde is.
- Bereken in één decimaal vanaf welke t de zonnebloem hoger dan 2,5 meter is.



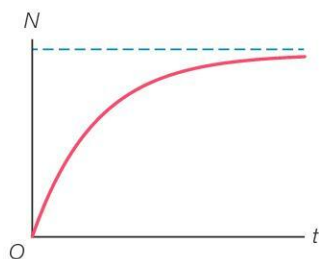
figuur 9.14

73



Belangrijk nieuws verspreidt zich razendsnel in een school. Het aantal leerlingen N dat op een zeker tijdstip t van een belangrijk feit op de hoogte is, wordt gegeven door de formule $N = 1200(1 - 0,7^t)$ met t in uren en $t = 0$ om 9:00 uur.

- Beredeneer dat uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.
- Bij de grafiek van N hoort een lijn die het verzadigingsniveau aangeeft. Welke lijn is dat? Wat is de praktische betekenis van het verzadigingsniveau?
- Hoe laat hebben 950 leerlingen het nieuws gehoord? Rond af op minuten.



figuur 9.15

74



a Beredeneer bij de formule $N = \frac{500}{20 + 13 \cdot 0,85^t}$ wat het verzadigingsniveau is.

b Beredeneer aan de hand van de formule dat de grafiek van $N = \frac{2000}{1 + 4 \cdot 0,65^t}$ stijgend is.

c Beredeneer bij de formule $N = 5 - \frac{0,2}{1,4^t}$ wat de grenswaarde is.

d Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van $N = 320(2 - 0,98^t)$ stijgend is.

75



a Gegeven is de formule $N = 8000(1 + 1,5^t)$.

Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.

b Beredeneer wat de grenswaarde is bij de formule $N = 160 - 50 \cdot 0,8^t$.

c Gegeven is de formule $N = \frac{720}{8 + 2,1 \cdot 1,8^t}$.

Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.

d Gegeven is de formule $N = \frac{10000}{50 + 333 \cdot 0,6^t}$.

Beredeneer wat het verzadigingsniveau is.

A76
  *

Een bioloog doet een onderzoek naar het aantal fruitvliegjes in een afgesloten ruimte. De tijd t is in dagen met $t = 0$ op 1 april om 0:00 uur en N is het aantal fruitvliegjes. De tellingen zijn als punten in figuur 9.16 uitgezet.

- a** Met hoeveel procent is het aantal fruitvliegjes tussen $t = 35$ en $t = 45$ toegenomen?

Tot $t = 30$ gaat de bioloog uit van exponentiële groei met een groeipercentage van 16% per dag.

- b** Bereken, uitgaande van de metingen op $t = 15$ en $t = 25$, het groeipercentage per dag. Rond af op één decimaal.
c Gebruik het groeipercentage 16% om het aantal fruitvliegjes op 23 april om 0:00 uur te berekenen.

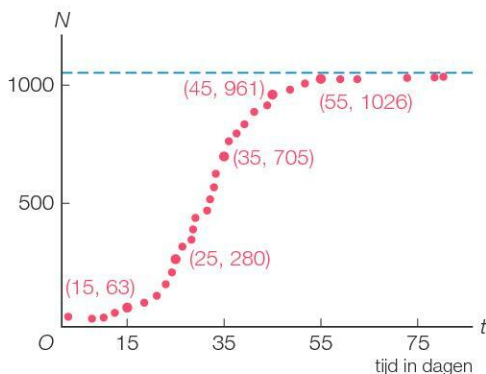
De bioloog benadert het groeiproces met de groeiformule

$$N = \frac{1035}{1 + 210 \cdot 0,84^t}.$$

- d** Hoeveel procent wijkt op $t = 45$ het aantal fruitvliegjes volgens de formule af van de telling van de bioloog?

De bioloog verwacht dat het aantal fruitvliegjes op den duur vrijwel 1035 zal worden.

- e** Beredeneer dat de groeiformule hiermee in overeenstemming is.



figuur 9.16

A77
  *

Hoelang kun je woorden onthouden? Om deze vraag te beantwoorden voerden onderzoekers een experiment uit. Deelnemers kregen een groot aantal woorden in paren te zien. Even later kregen ze als test één van de twee woorden te zien en moesten ze het bijbehorende woord geven. Hoe langer de onderzoekers wachtten met de test, hoe minder woorden de deelnemers zich nog konden herinneren.

De onderzoekers vonden de formule $P = \frac{92}{2,39^t} + \frac{32}{1,04^t} + 10$. Hierin is P het percentage woorden dat correct wordt herinnerd en t de tijd in minuten vanaf het zien van de paren woorden.

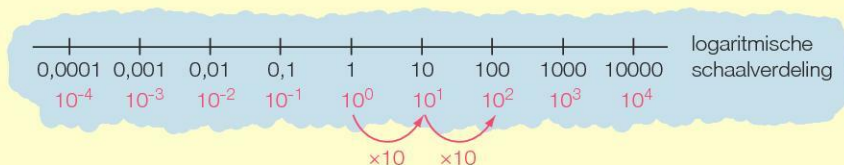
- a** Waarom kan deze formule niet gelden voor $t = 0,5$?
b Hoelang duurt het tot de helft van de woorden nog correct wordt herinnerd? Rond af op gehele seconden.
c Beredeneer wat de grenswaarde is van deze formule. Wat is hiervan de praktische betekenis?
d De formule is te schrijven in de vorm $P = 92 \cdot a^t + 32 \cdot b^t + 10$. Bereken a en b . Rond af op drie decimalen.

Terugblik

Logaritmische schaalverdeling en logaritmisch papier

Bij een logaritmische schaalverdeling zit er tussen de getallen $10^0 = 1$ en $10^1 = 10$ evenveel afstand als tussen de getallen $10^1 = 10$ en $10^2 = 100$.

Bij een vaste stapgrootte hoort bij een logaritmische schaalverdeling dus een vaste factor.

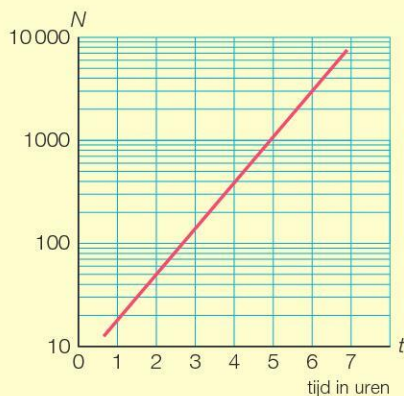


Een voordeel van een logaritmische schaalverdeling is dat je waarnemingen kunt uitzetten die sterk in grootte verschillen.

Bij logaritmisch papier is op de ene as een logaritmische schaalverdeling aangebracht. Op de andere as staat een gewone schaalverdeling. De grafiek hiernaast gaat door de punten (2, 50) en (6, 3000).

Op logaritmisch papier is de grafiek van $N = b \cdot g^t$ een rechte lijn.

Zet je gegevens uit op logaritmisch papier en liggen deze punten (vrijwel) op een rechte lijn, dan weet je dat de gegeven punten (bij benadering) bij exponentiële groei horen.



Redeneren met groeiformules

Gegeven is de formule $N = \frac{150}{3 + 20 \cdot 0,6^t}$. In de figuur hiernaast geeft de stippellijn het verzadigingsniveau aan. Met de formule kun je als volgt beredeneren dat het verzadigingsniveau 50 is.

Als t heel groot wordt, nadert $0,6^t$ tot 0. Dan wordt $20 \cdot 0,6^t \approx 0$ en $3 + 20 \cdot 0,6^t \approx 3$. Dus dan wordt

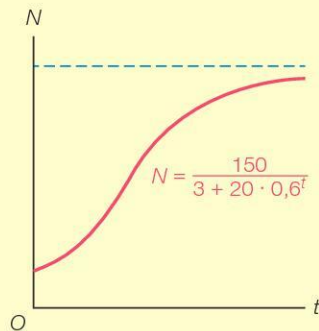
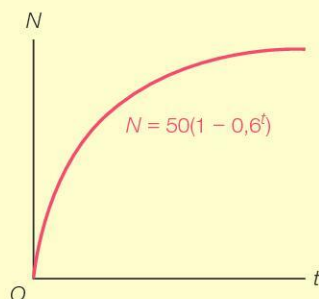
$$\frac{150}{3 + 20 \cdot 0,6^t} \approx \frac{150}{3} = 50, \text{ dus het verzadigingsniveau is } 50.$$

Gegeven is de formule $N = 50(1 - 0,6^t)$. Zie de figuur hiernaast.

Met de formule kun je als volgt beredeneren dat de grafiek stijgend is.

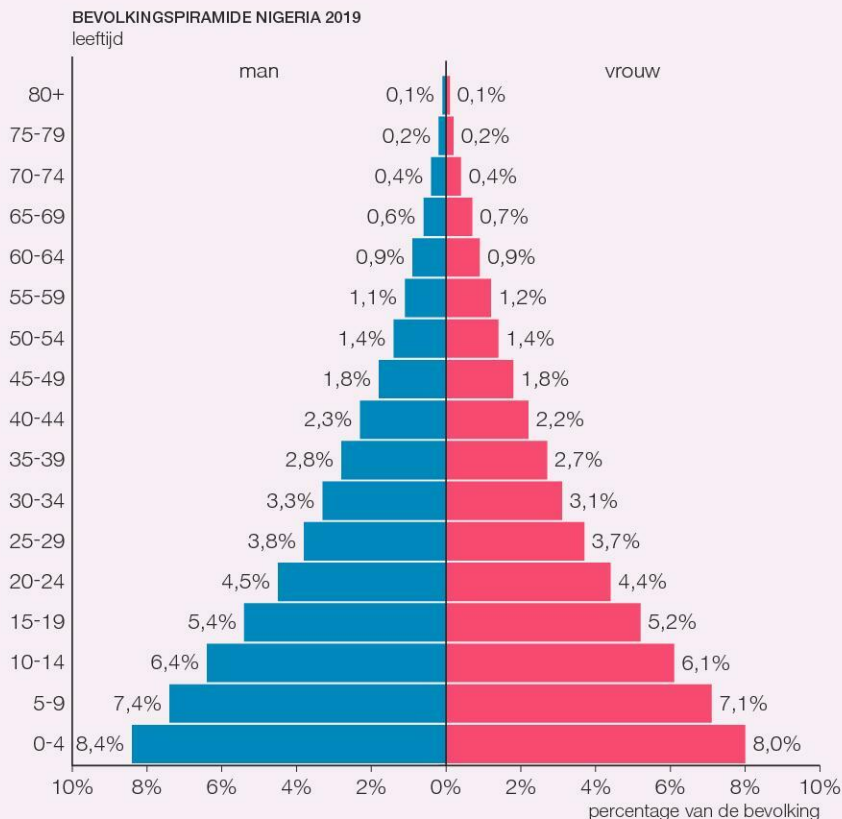
Als t toeneemt, dan neemt $0,6^t$ af, dus neemt $1 - 0,6^t$ toe, dus dan neemt $50(1 - 0,6^t)$ toe.

De grafiek van N is dus stijgend.



Eindopdracht Bevolkingsgroei in Nigeria

In de figuur hieronder zie je de bevolkingspiramide van Nigeria.



figuur 9.17

We nemen aan dat alleen de vrouwen in de leeftijdscategorie 20-39 jaar kinderen krijgen en dat het vruchtbaarheidscijfer in Nigeria 5 is. Dat betekent dat deze vrouwen gemiddeld 5 kinderen krijgen.

Ook nemen we aan dat voor de komende 20 jaar het volgende geldt:

- alle mensen van de leeftijdscategorie 80+ zijn overleden
- in de leeftijdscategorie 60-79 jaar is 80% overleden
- in de leeftijdscategorie 40-59 jaar is 40% overleden
- in van de leeftijdscategorie 20-39 jaar is 10% overleden
- in de leeftijdscategorie 0-19 jaar is 5% overleden.

Ten slotte nemen we aan dat de bevolking van Nigeria exponentieel toeneemt.

- Geef met deze aannamen en gegevens een schatting van de verdubbelingstijd van de bevolking van Nigeria.

Diagnostische toets

9.1 Lineaire en exponentiële groei

- 1** a Een hoeveelheid M groeit lineair. Op $t = 6$ is $M = 156$ en op $t = 10$ is $M = 211$.
Stel de formule op van M .
- b De hoeveelheid N neemt toe met een factor 1,083 per jaar.
Op $t = 0$ is $N = 190$.
Stel de formule op van N .

- 2** In de tabel staan gegevens over de bevolking in West-Afrika in miljoenen inwoners.
- a Toon aan dat bij de tabel exponentiële groei hoort.
- b Stel de formule op van N . Neem de tijd t in tientallen jaren met $t = 0$ in 1980 en rond de groeifactor af op twee decimalen.
- c Volgens een prognose zal de bevolking in West-Afrika in het jaar 2050 ongeveer 796 miljoen zijn.
Komt dit overeen met de formule die je bij vraag b hebt gevonden? Licht toe.

BEVOLKING

jaar	aantal N
1980	137
1990	179
2000	235
2010	308
2020	403

- 3** De formules $N_1 = \frac{200}{3 \cdot 0,9^t}$ en $N_2 = \frac{3000}{15 \cdot 1,12^t}$ horen bij exponentiële groei.
- a Bereken van N_1 en N_2 de beginwaarde en de groeifactor. Rond de beginwaarde zo nodig af op gehelen en de groeifactor op drie decimalen.
- b Welke soort van stijgen of dalen hoort bij de grafiek van N_1 ? En bij de grafiek van N_2 ?

9.2 Groeipercentages

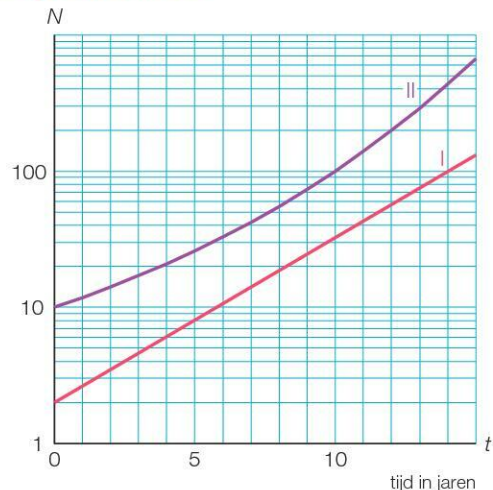
- 4** Een hoeveelheid N neemt met 0,3% per jaar toe. Op $t = 0$ is $N = 2400$.
- a Stel de formule van N op. Neem t in jaren.
- b Vanaf welke gehele waarde van t is N groter dan 2700?
- 5** a Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 15,5% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- b Een hoeveelheid verdubbelt elke 21 jaar.
Bereken het groeipercentage per jaar.
- 6** a Een hoeveelheid neemt per uur met 12% af.
Bereken de halveringstijd in minuten nauwkeurig.
- b Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 7,8 dagen.
Bereken de groeifactor per dag. Rond af op drie decimalen.
- c Gegeven is de formule $N = 195 \cdot 0,975^t$. Hierin is t de tijd in jaren.
Bereken de halveringstijd in jaren. Rond af op één decimaal.

9.3 Formules bij exponentiële groei

- 7** Een hoeveelheid neemt per dag met 36% toe.
- Bereken het groeipercentage per week. Rond af op gehele.
 - Bereken het groeipercentage per uur.
- 8** Bij een exponentiële afname hoort een groeifactor van 0,75 per tien jaar.
- Hoeveel procent is de afname per jaar?
 - Hoeveel procent is de afname per 25 jaar?
- 9** Een hoeveelheid N neemt exponentieel af. Op $t = 4$ is $N = 1500$ en op $t = 7$ is $N = 1200$. Hierbij is t de tijd in dagen. Stel de formule van N op.
- 10** In de populaire Marvelfilms verschijnen in de loop der jaren steeds meer personages. Om deze toename te bepalen hebben onderzoekers alle interacties tussen personages in Marvelfilms in kaart gebracht. Op basis van deze analyse konden ze voor elke Marvelfilm het aantal belangrijke personages berekenen. In 2008 waren dit er gemiddeld 8,1 per film en in 2019 al 14,4. De toename bleek exponentieel te zijn.
- Stel de formule op van het aantal belangrijke personages P per Marvelfilm. Neem de tijd t in jaren, met $t = 0$ in 2008.
 - Bereken in welk jaar er voor het eerst meer dan 20 belangrijke personages in een Marvelfilm zullen optreden, als de genoemde groei doorzet.

9.4 Logaritmisch papier en redeneren met groeiformules

- 11** [▶ WERKBLAD] Zie figuur 9.18.
- Een van de getekende grafieken hoort bij een exponentieel verband. Stel bij deze grafiek de formule op.
 - Gegeven is de formule $N = 800 \cdot 0,736^t$. Teken de grafiek van N op het werkblad.
- 12** Gegeven is de formule $N = \frac{5000}{200 + 12 \cdot 0,78^t}$.
- Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.
 - Beredeneer wat het verzadigingsniveau is.



figuur 9.18

A full-page background image of Kevin Durant in a blue USA basketball jersey, captured mid-air while shooting a basketball. The background shows a crowded arena with spectators and a red banner that reads "London 2012".

10

Statistiek gebruiken

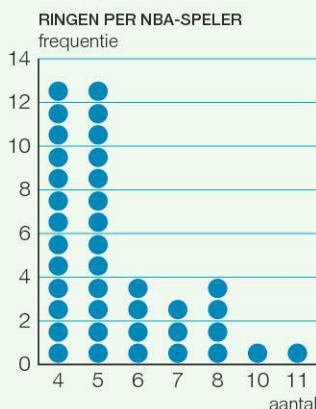
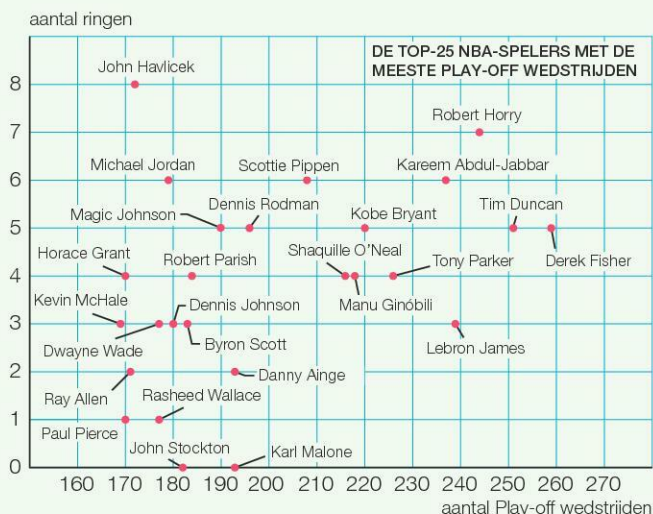
Wat leer je?

- Werken met data uit verschillende soorten diagrammen.
- De voorwaarden voor een oorzakelijk verband nagaan.
- Een geschikte associatiemaat voor het verschil tussen twee groepen kiezen.
- Vaststellen of een steekproef aselekt is.
- Werken met de normale verdeling en betrouwbaarheidsintervallen in contexten.



Beginopdracht NBA ringen

[► WERKBLAD] De in 1949 in de VS opgerichte National Basketball Association (NBA) is de meest prestigieuze basketbalcompetitie ter wereld. Aan het einde van elk seizoen worden zogenaamde Play-off wedstrijden gespeeld om te bepalen welke twee teams tegen elkaar spelen in de finale. De winnaars krijgen een ring en zijn voor een jaar kampioen van de NBA. In de figuur hiernaast staat de verdeling van het aantal ringen per speler, voor spelers met minstens vier ringen. Jyri volgt de NBA nauwlettend. Hij heeft opgezocht wie in de top-25 van spelers met de meeste Play-off wedstrijden staan en hoeveel ringen zij wonnen. Het resultaat staat in de figuur hieronder. Deze figuur staat vergroot op het werkblad.



Bill Russell heeft het record aantal ringen voor spelers en won $\frac{1}{15}$ ring per Play-off wedstrijd die hij speelde.

- Onderzoek hoeveel Play-off wedstrijden Bill Russell speelde. Waarom komt hij niet voor in de figuur hierboven?

Bill Russell heeft het record aantal ringen voor spelers.

Volgens Jyri kun je nagaan wie het beste presteerde door te kijken wie per Play-off wedstrijd de meeste ringen won.

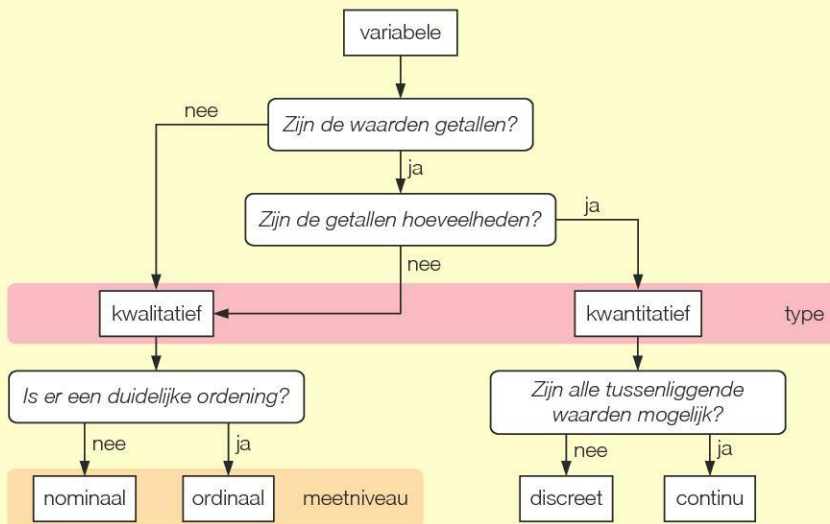
- Welke speler in de top-25 heeft volgens Jyri het beste gepresteerd?
- Kobe Bryant (overleden in 2020) is Jyri's favoriete speler. Hoeveel procent van de NBA spelers in de top-25 presteert volgens Jyri beter dan Kobe Bryant?
- De favoriete speler van Sanne staat in de top-25 en heeft het record aantal Play-off wedstrijden voor spelers met gemiddeld meer dan 70 Play-off wedstrijden per ring. Wie is de favoriete speler van Sanne?

Voorkennis Statistische variabelen

Theorie A De indeling van statistische variabelen

Bij statistiek heten de kenmerken die je onderzoekt variabelen. We maken onderscheid tussen kwalitatieve en kwantitatieve variabelen. De kwalitatieve variabelen hebben een meetniveau (nominaal of ordinaal). Bij kwantitatieve variabelen kun je onderscheid maken tussen discreet en continu.

Voor het indelen van een variabele kijk je naar de *waarden* die deze aan kan nemen en gebruik je het volgende schema.



In het voorbeeld zie je hoe je dit schema gebruikt. Noteer bij soortgelijke opgaven waarin een toelichting wordt gevraagd je antwoord zoals in het voorbeeld.

Voorbeeld

Bij een onderzoek is van 10 000 producten onder andere de variabele streepjescode gebruikt, met als waarden getallen van 13 cijfers.

Is deze variabele nominaal, ordinaal, discreet of continu?
Licht toe.



Uitwerking

Wel getallen, geen hoeveelheden, geen duidelijke ordening.
Dus nominaal.

- 1 In de vragenlijst hieronder komen een aantal variabelen voor. Geef bij elke variabele aan of deze nominaal, ordinaal, discreet of continu is. Licht toe.

Vragenlijst: Omcirkelen wat van toepassing is

geboortjaar: 2004

hoogst genoten opleiding: geen middelbare school / mbo / hbo / wo

telefoonnummer: 0786127768

mogen we u mail sturen? ja / nee

- 2 Ibrahim, Senna en Wissal gaan voor een experiment herhaaldelijk met pijl en boog schieten op het doel in afbeelding 10.1. Ze hebben een lijstje gemaakt van de variabelen die ze willen verzamelen om later te analyseren.

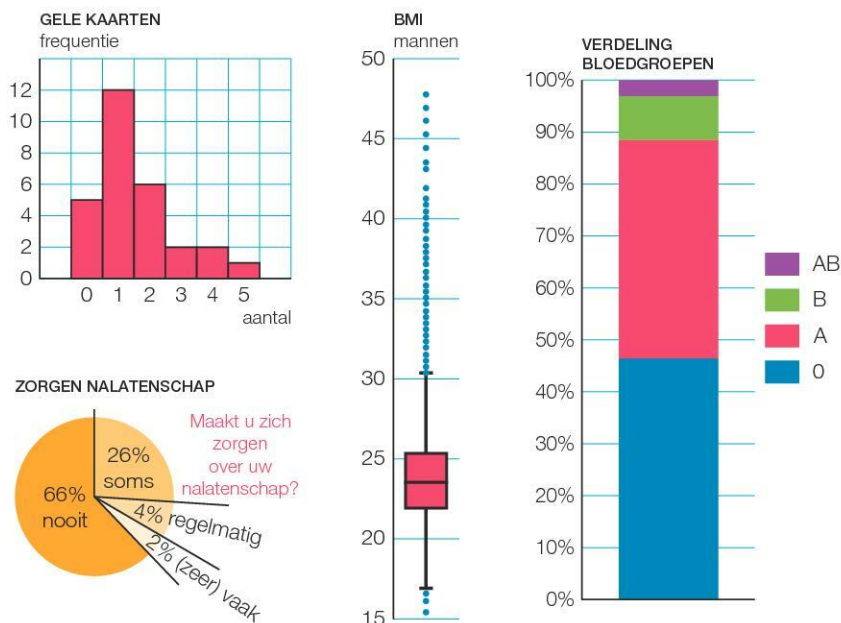


figuur 10.1

Geef van de volgende variabelen aan of ze nominaal, ordinaal, discreet of continu zijn. Licht toe.

- De naam van de schutter van de pijl.
- De afstand van de pijl tot het midden.
- Het aantal hele millimeters dat de pijl het gele gebied mist.
- De kleur van het gebied dat de pijl raakte.
- Of de pijl wel of niet dichterbij het midden zit dan de vorige pijl.
- De snelheid van de pijl in km/uur op gehelen afgerond.

- 3 Geef van elk van de diagrammen hieronder aan of de variabele kwalitatief of kwantitatief is. Geef ook het meetniveau of geef aan of de variabele discreet of continu is. Licht toe.



figuur 10.2

10.1 Statistische diagrammen



01 Een onderzoeker vraagt in een enquête onder andere naar het geslacht van de respondenten. Ze wil de resultaten van de enquête verwerken in enkele diagrammen.

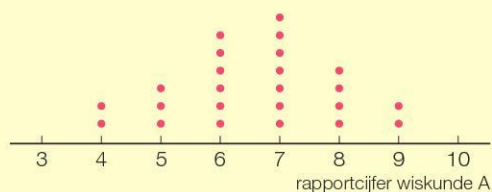
- a** Kan ze bij de variabele geslacht een lijndiagram maken? Licht toe.
- b** Kan ze bij de variabele geslacht een cirkeldiagram maken? Licht toe.

Theorie A Diagrammen bij data

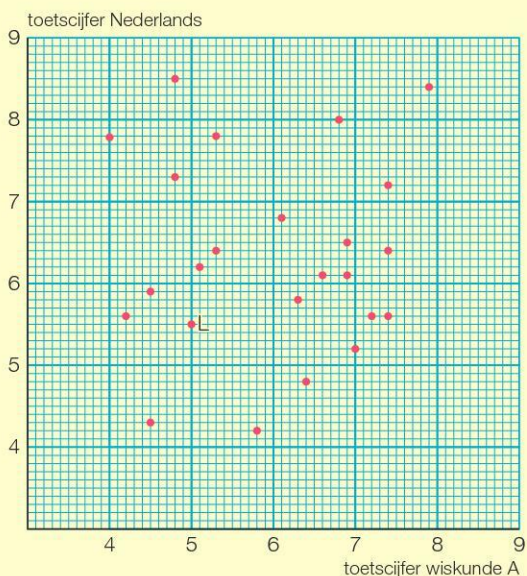
Voor de presentatie van data kun je kiezen uit verschillende typen diagrammen.

Bekijk je bijvoorbeeld de verdeling van rapportcijfers voor het vak wiskunde A, dan geeft de **dotplot** in figuur 10.2 een goed overzicht. Bekijk je echter de samenhang tussen de toetscijfers wiskunde A en de toetscijfers Nederlands, dan kun je beter gebruikmaken van een **spreadsingsdiagram**. Een spreadsingsdiagram wordt ook wel een **puntenwolk** genoemd. In het spreadsingsdiagram in figuur 10.3 zie je dat Leonie (L) een 5 heeft gehaald voor de toets van wiskunde A en een 5,5 voor de toets van Nederlands.

Als je te maken hebt met een kwalitatieve variabele, dan kun je alleen een staafdiagram of een cirkeldiagram maken. Heb je een kwantitatieve variabele dan kun je alle diagrammen maken, maar daarvoor moet je de data soms bewerken. Zie de figuur hieronder.



figuur 10.2 dotplot



figuur 10.3 spreadsingsdiagram

mogelijk bij kwantitatieve data

steel-bladdiagram

histogram

boxplot

dotplot

(cumulatief) lijndiagram

spreadsingsdiagram

(gestapeld) staafdiagram

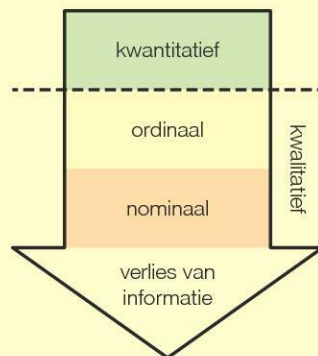
cirkeldiagram

mogelijk bij kwalitatieve data

Bij het bewerken van data kan informatie verloren gaan. Als je bijvoorbeeld het gewicht van eieren in gram indeelt in de gewichtsklassen S, M, L en XL, dan is de data na omzetting kwalitatief in plaats van kwantitatief. Met deze indeling in gewichtsklassen is de variabele ordinaal geworden.

De omzettingen lopen, door verlies van informatie, in één richting. De richting is in het diagram hiernaast met een pijl aangegeven.

Het omzetten van een variabele kan gevolgen hebben voor het soort diagram dat je kunt maken. Als je bijvoorbeeld in plaats van het gewicht in gram de bijbehorende gewichtsklassen gebruikt, kun je hierbij geen boxplot meer tekenen. Er kan namelijk niet meer achterhaald worden wat de waarden zijn van het kleinste waarnemingsgetal, Q_1 , de mediaan, Q_3 en het grootste waarnemingsgetal.



figuur 10.4

Voorbeeld

Stefan heeft van alle leerlingen in zijn klas de lengte in cm nauwkeurig gemeten.

- Zijn de metingen van Stefan kwalitatief of kwantitatief?
- Stefan heeft in een cirkeldiagram met twee sectoren weergegeven welk deel van de leerlingen van zijn klas langer dan 1,70 m is. Licht toe dat de variabele nu kwalitatief is.
- Geef voor elk van de drie centrummaten aan of je deze uit het cirkeldiagram kunt aflezen.

Uitwerking

- kwantitatief
- De metingen waren hoeveelheden en zijn nu twee categorieën.
- Niet het gemiddelde en de mediaan, maar wel de modus.



2 Zie het voorbeeld.

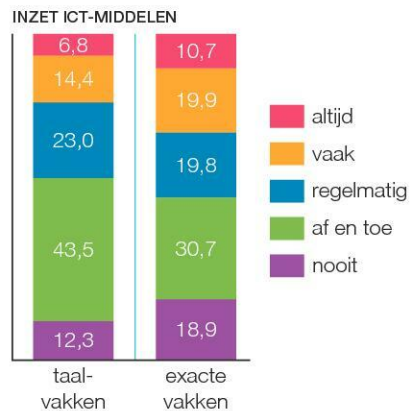
Stefan besluit nog een diagram te maken. Hij maakt daarom bij de variabele lengte een klassenindeling met als klassen: $\langle \leftarrow; 1,70 \rangle$, $\langle 1,70; 1,90 \rangle$ en $\langle 1,90; \rightarrow \rangle$.

- Wat is het meetniveau van de variabele na de klassenindeling?
- Noem twee diagrammen die Stefan kan gebruiken om de data na de klassenindeling te presenteren.
- Waarom kan hij uit de klassenindeling niet meer de gemiddelde lengte berekenen?



3 In 2018 werd een onderzoek gedaan naar de mate van inzet van digitale middelen (ICT-middelen) bij de verschillende vakken op de middelbare school. In de figuur hiernaast zie je een diagram bij de resultaten van dit onderzoek.

- Wat is het meetniveau van de variabele ‘mate van inzet’?
- Wat is de relatieve cumulatieve frequentie van *vaak* bij de taalvakken? En bij de exacte vakken?
- Welke centrum- en spreidingsmaten zijn bij dit diagram te gebruiken?
- Linda wil in een ander type diagram presenteren hoe de mate van inzet van ICT-middelen bij de taalvakken verdeeld is. Welk diagram zou je aanraden? Licht toe.



figuur 10.5



4 Samuel doet een klein onderzoek in de bovenbouw van zijn middelbare school. Hij vraagt daarbij 32 leerlingen naar het aantal liedjes dat ze dagelijks op hun mobiel streamen vanuit de databundel. Zijn resultaten staan verwerkt in het dubbel steel-bladdiagram hiernaast. Je ziet dat er één jongen is die dagelijks 25 liedjes streamt.

- Welke variabele is gebruikt voor het splitsen van de groepen links en rechts in het dubbel steel-bladdiagram? Wat is hiervan het meetniveau?

AANTAL DAGELIJKS BELUISTERDE LIEDJES VIA STREAMING

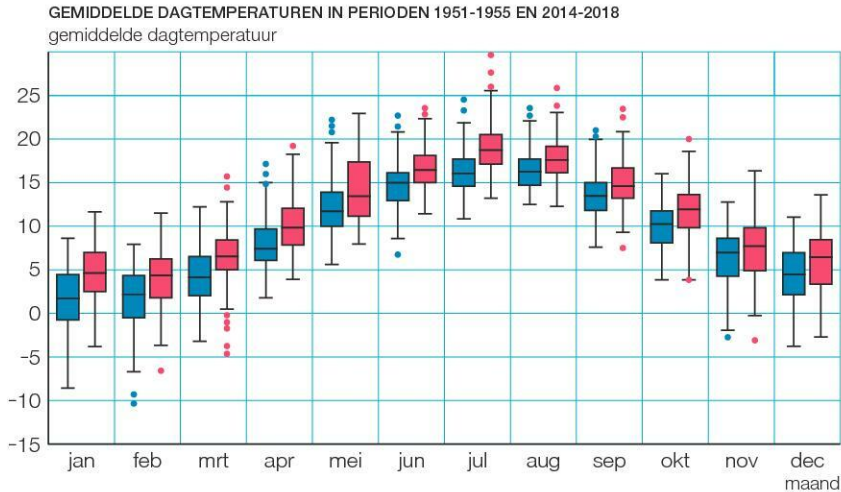
jongens		meisjes
3 1 0	0	0 0 0 0 0 0 0 0 3 5
8 7 4 1 1 0	1	0 0 5
5	2	
0	3	
0	4	
0 0	5	0
0	6	0
	7	5
eenheden	tientallen	eenheden

figuur 10.6

Samuel berekende $\bar{X}_1 = 22,7$ met $S_1 = 19,2$ en $\bar{X}_2 = 13,4$ met $S_2 = 23,9$.

- Koos hij voor groep 1 de jongens of de meisjes? Licht toe.
- Welke centrum- en spreidingsmaten had hij nog meer kunnen gebruiken om de groepen te vergelijken?
- Thom kreeg van Samuel het dubbel steel-bladdiagram toegestuurd. Hij wil onderzoeken of er een samenhang is tussen de leeftijd en het aantal muziknummers dat dagelijks gestreamd wordt. Hij heeft daarvoor ook nog een dotplot van de leeftijden bij dit onderzoek tot zijn beschikking. Heeft hij zo voldoende informatie voor een puntenwolk? Licht toe.

In figuur 10.7 zijn voor twee perioden van 5 jaar de gemiddelde Nederlandse dagtemperaturen in elke maand vergeleken met behulp van boxplots. In deze opgave noemen we het tijdvak 1951-1955 periode I en het tijdvak 1914-2018 periode II.



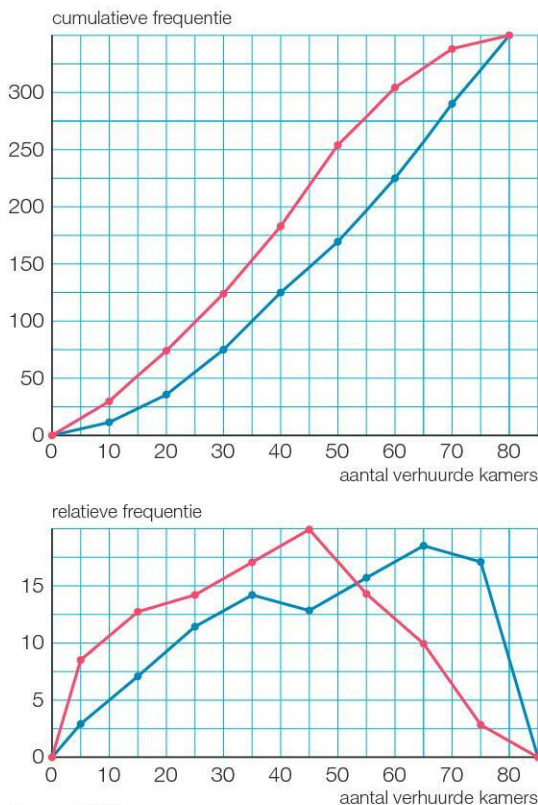
figuur 10.7

- Is de variabele gemiddelde dagtemperatuur kwalitatief of kwantitatief? Wat is het meetniveau van de variabele maand?
- In de figuur is de opwarming van de aarde goed te zien. De gemiddelde dagtemperaturen van periode I zijn doorgaans lager dan de gemiddelde dagtemperaturen van periode II. Welke boxplots horen bij periode II? Licht toe.

In de figuur zijn bij sommige boxplots stippen gezet. Dit zijn uitschieters die meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand van de box af liggen.

- Yoeri is verbaasd dat de rode boxplot in januari geen uitschieter heeft. Bereken bij welke temperaturen er sprake zou zijn van een uitschieter.
- Noem een maand en periode waarin je verwacht dat het gemiddelde lager zal zijn dan de mediaan. Licht je antwoord toe.
- Marlijn maakt bij de gegevens in de figuur een boxplot bij elke periode. De twee boxplots die ze zo krijgt hebben verschillende spreidingsbreedten. Hoe groot is de grootste spreidingsbreedte? Neem de uitschieters hierbij niet mee.

Het gaat niet goed met hotel Bergzicht. Het hotel verdient vooral aan de verhuur van kamers en juist deze inkomstenbron is de afgelopen vijf jaar flink teruggelopen. In de diagrammen hieronder staan voor de jaren 2015 en 2019 de aantallen verhuurde kamers per dag verwerkt met als eerste klasse $[0, 10)$.



figuur 10.8

In de diagrammen is niet de data van elke dag van het jaar verwerkt.

a Hoeveel dagen werden in de diagrammen verwerkt? Licht toe.

Bij het maken van de diagrammen is men vergeten een legenda toe te voegen. Omdat bekend is dat de verhuur terugloopt, is toch te achterhalen welke lijndiagrammen bij welk jaar horen.

b Welke lijndiagrammen horen bij de kamerverhuur van 2019? Licht toe.

c Gebruik twee centrummaten om te demonstreren dat het slecht gaat met de kamerverhuur in hotel Bergzicht.

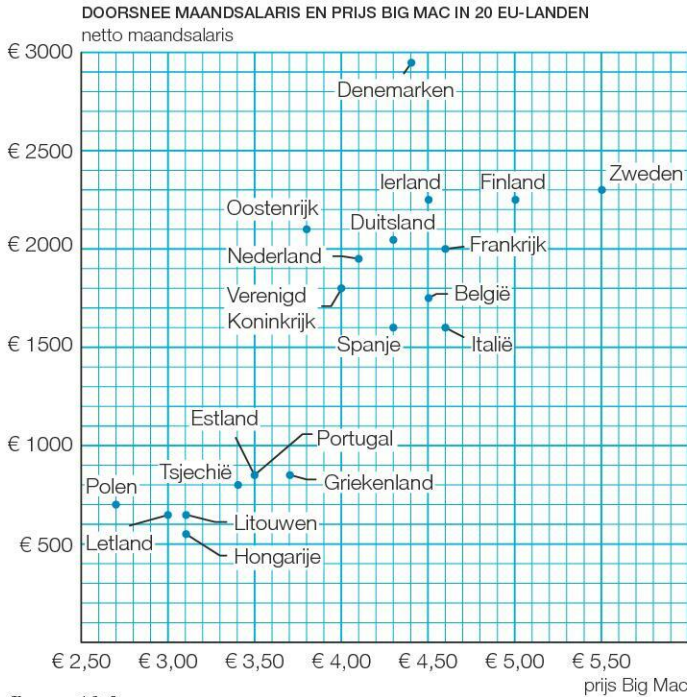
Doordat bij het verwerken van de data een klassenindeling is gebruikt, is niet meer precies af te lezen wat de mediaan van het aantal verhuurde kamers elk jaar is. De eigenaar van het hotel denkt zich te herinneren dat de medianen 40 en 53 waren.

d Onderzoek met de figuren of dit zou kunnen kloppen.

e Ans zegt dat je aan de cumulatieve lijndiagrammen ziet dat voor de klasse $[50, 60)$ de frequentie voor beide perioden gelijk is. Bert zegt dat je in de relatieve polygoon ziet dat dit niet het geval is.

Wie heeft gelijk? Licht toe.

[>WERKBLAD] Niet alle EU-landen zijn even welvarend. Omdat elk EU-land McDonalds restaurants heeft en al deze restaurants de zogenaamde Big Mac serveren, kun je deze hamburger gebruiken om het welvaartsniveau tussen verschillende EU-landen te vergelijken. Zie de figuur met gegevens uit 2019. Deze figuur staat ook op het werkblad.



figuur 10.9

In het diagram wordt een verband gelegd tussen het doorsnee netto maandsalaris en de prijs van een Big Mac in verschillende EU-landen.

- Hoe heet dit type diagram?
- In de titel boven het diagram staat dat er 20 EU-landen zijn vergeleken, terwijl er maar 19 punten in het diagram staan. Leg uit waardoor dit komt.

Op de verticale as staat het doorsnee netto maandsalaris. Uit de formulering is niet duidelijk welke centrummaat hierbij is gebruikt.

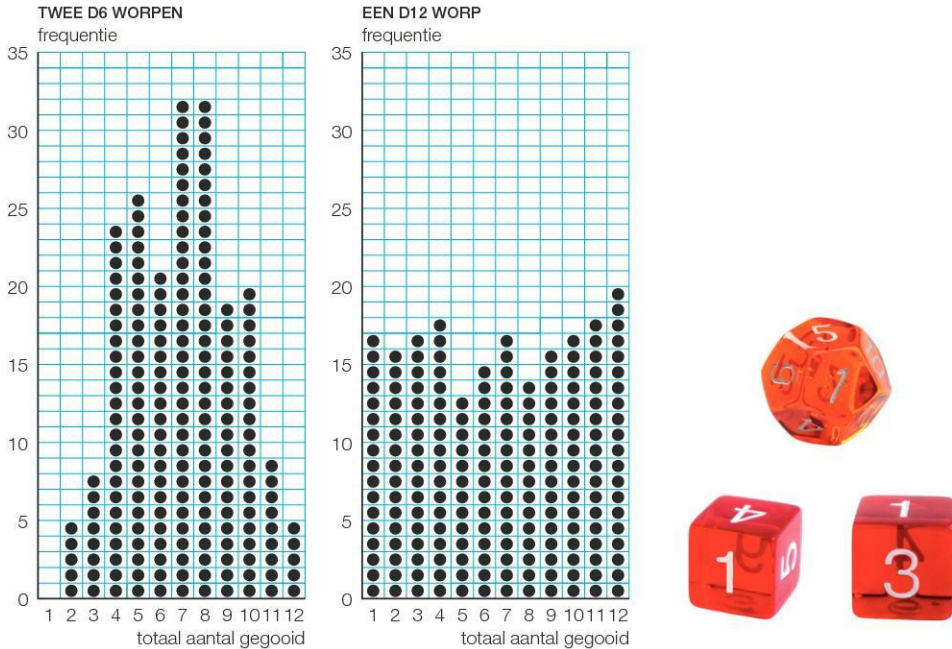
- Welke centrummaat is hiervoor niet geschikt? Licht toe. Gebruik dat de verdeling van maandsalarissen rechts-scheef is.
- Is de variabele netto maandsalaris kwalitatief of kwantitatief?
- Megan en Nicole vragen zich af in welk land ze de meeste Big Macs kunnen kopen voor een netto maandsalaris in dat land. Onderzoek welk land dat is.

In sommige landen is de Big Mac in verhouding tot het netto maandsalaris zo duur dat je er minder dan 250 keer een Big Mac van kunt kopen.

- Onderzoek in welke landen dit het geval is.

A8

Roel en Michiel spelen een spel waarbij je twee opties hebt voor je dobbelsteenworpen. Optie 1 is een worp met twee dobbelstenen met 6 vlakken (deze dobbelstenen worden ook wel D6 genoemd). Optie 2 is een worp met één dobbelsteen met 12 vlakken (zo'n dobbelsteen heet een D12). Ze voeren voor beide opties een experiment uit met 200 worpen. De resultaten zie je in de figuur hieronder.



figuur 10.10

a In welk type diagram staan de resultaten in de figuur gepresenteerd?

Bij het spel dat ze spelen zijn er situaties waarin een speler in totaal minstens 10 moet gooien. Er zijn ook situaties dat een speler niet minder dan in totaal 4 mag gooien.

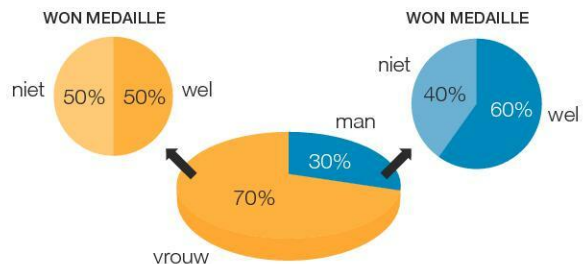
b Welke optie (1 of 2) zou je aanraden in elk van deze situaties?

c Welke standaardverdeling hoort bij de twee D6 worpen? En welke bij de D12 worp?

d Bij welke verdeling hoort de kleinste standaardafwijking? Licht toe.

E9

Bij een sportgala is een groot aantal sporters gevraagd of ze een olympische medaille hebben gewonnen. De resultaten staan in het diagram hiernaast. Je ziet bijvoorbeeld dat van de ondervraagden op het gala 70% vrouw is. Onderzoek welk percentage van de medaillewinnaars vrouw is.



figuur 10.11

Ook in de wetenschap komt fraude voor. Een voorbeeld is het onderzoek van een Amerikaanse voedingsdeskundige naar eetgedrag. Hij bestudeerde proefpersonen die onbeperkt pizza mochten eten. Eén groep moest daarvoor de volle prijs betalen, terwijl een andere groep korting kreeg. Het vermoeden van de onderzoeker was dat mensen die korting krijgen meer gaan eten dan goed voor ze is.

Na afloop legde hij de deelnemers een aantal stellingen voor, zoals 'ik heb teveel gegeten'. Bij elke stelling moesten deelnemers een getal omcirkelen van 1 tot en met 9. Hier betekende 1 'helemaal niet mee eens' en 9 'helemaal mee eens'.

- Met welk meetniveau heb je hier te maken?
- Noem twee soorten diagrammen die geschikt zijn om de antwoorden op de stellingen weer te geven.

In de tabel hieronder zijn de resultaten weergegeven per groep. Je ziet bijvoorbeeld dat er in de groep met korting 7 mensen waren die drie stukken pizza aten. Ook is per stelling berekend wat de gemiddelde score is.

- Leg uit welk bezwaar is in te brengen tegen het berekenen van deze gemiddelden.

	korting			volle prijs		
aantal stukken pizza	één	twee	drie	één	twee	drie
aantal deelnemers	18	18	7	17	19	10
Ik heb meer pizza gegeten dan zou moeten.	2,63	4,82	6,00	1,76	3,53	4,40
Ik voel me schuldig over hoeveel pizza ik at.	2,39	3,44	3,71	2,26	1,68	2,90
Ik voel me ziek.	2,17	2,94	2,43	1,97	1,45	2,25
Ik heb teveel gegeten.	2,11	3,89	3,71	1,67	1,67	3,50

We gaan in detail kijken naar de gemiddelden in de tabel. Daarvoor geven we eerst een eenvoudig voorbeeld. Stel dat we een vraag hebben met antwoordmogelijkheden 1 - 2 - 3 en dat twee deelnemers een getal omcirkelen.

- Onderzoek waarom 2,40 onmogelijk het gemiddelde kan zijn van de antwoorden van deze twee deelnemers.

Een kritische lezer ontdekte dat een gemiddelde in de derde kolom van de groep die de volle prijs betaalde niet kan kloppen.

- Onderzoek welke waarde dat is.
- Onderzoek welke waarden in de eerste kolom van de groep met korting en de eerste kolom van de groep die de volle prijs betaalde, onmogelijk zijn. Houd hierbij rekening met afronding.

Terugblik

Diagrammen bij data

Voor de presentatie van data kun je kiezen uit verschillende typen diagrammen. Welk diagram je kunt kiezen hangt af van het soort data dat je tot je beschikking hebt. Zie het overzicht hieronder.

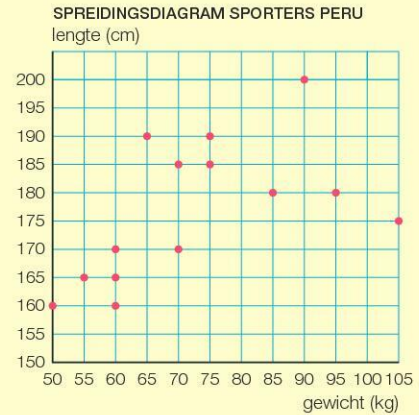
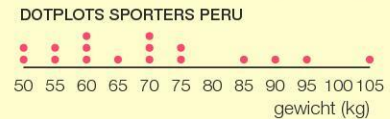
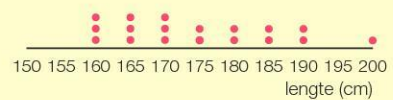
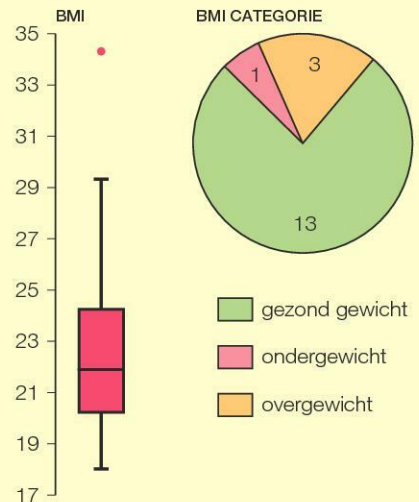


In het spreidingsdiagram zijn de kwantitatieve variabelen lengte en gewicht van enkele sporters uit Peru verwerkt. Hierin is te zien welk gewicht bij welke lengte hoort. Zo zie je bijvoorbeeld dat de langste sporter niet de zwaarste sporter was.

De dotplots geven op het eerste gezicht dezelfde informatie als het spreidingsdiagram, maar in de dotplots is niet meer te zien welk gewicht bij welke lengte hoort. In de dotplots is wel te zien dat het om 17 sporters gaat. Daardoor weet je dat in het spreidingsdiagram enkele metingen elkaar overlappen.

Met de kwantitatieve gegevens uit het spreidingsdiagram en de dotplots kun je van elk van de 17 sporters de BMI berekenen en deze verwerken in een boxplot.

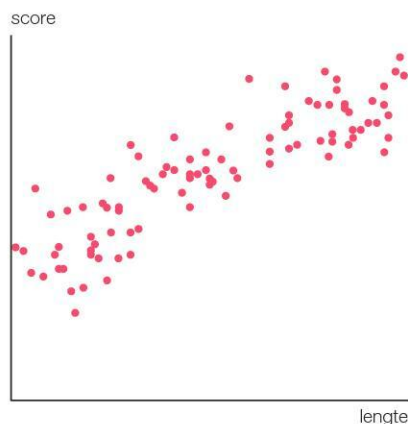
Na verwerking in een boxplot is hieruit geen gemiddelde of standaardafwijking meer te berekenen, er is dus informatie verloren gegaan. Soms is het voor een overzichtelijke presentatie nodig om informatie achterwege te laten. Kies je voor verwerking in een cirkeldiagram, dan kun je bijvoorbeeld een indeling in categorieën maken. De data in het cirkeldiagram is nu kwalitatief, waardoor nog maar weinig berekeningen gemaakt kunnen worden.



10.2 Causaliteit en groepen vergelijken

011
📌🔍*

Op een middelbare school is een groot onderzoek gedaan onder de leerlingen van de klassen 1, 3 en 5 van de havo-afdeling. Van elke leerling uit deze klassen zijn gegevens over onder andere de lengte, het gewicht, de eetgewoonte en de mate van discipline in een database gezet. Nadat deze gegevens zijn verzameld, heeft elke leerling dezelfde algemene kennistoets gemaakt. Het bestuur van de school wil met deze gegevens onder andere onderzoeken waardoor leerlingen goed presteren op de kennistoets. Daartoe zijn in de database allerlei verbanden onderzocht. In figuur 10.12 is de score op de toets uitgezet tegen de lengte. Elk punt in het spreidingsdiagram stelt een leerling voor.



figuur 10.12

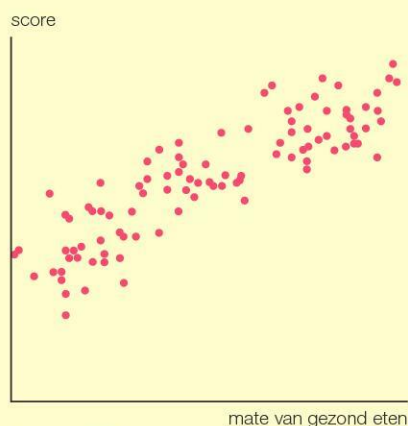
- Licht toe hoe je in de figuur kunt zien dat er een samenhang is tussen de lengte en de score.
- Wat denk je, is een grotere lengte een oorzaak van het beter scoren op de toets? Licht toe.

Theorie A Samenhang en causaliteit

Vaak kun je met gezond verstand bedenken dat een samenhang niet op een oorzaak wijst. De lengte van een scholier is bijvoorbeeld geen oorzaak van hoge scores op een algemene kennistoets.

Als blijkt dat het aantal jaren onderwijs wel de oorzaak is van goede scores, dan is er sprake van een *oorzakelijk verband* tussen het aantal jaren onderwijs en goede scores. In plaats van oorzakelijk verband spreken we ook wel van een *causaal verband* of *causaliteit*.

Bij het onderzoek uit opgave 11 is ook onderzocht of er een verband bestaat tussen gezond eten en scores op de toets. Ook hieruit komt een samenhang naar voren. Zie figuur 10.13. Om te weten te komen of deze samenhang causaal is, moet worden onderzocht of aan de volgende twee voorwaarden is voldaan.



figuur 10.13

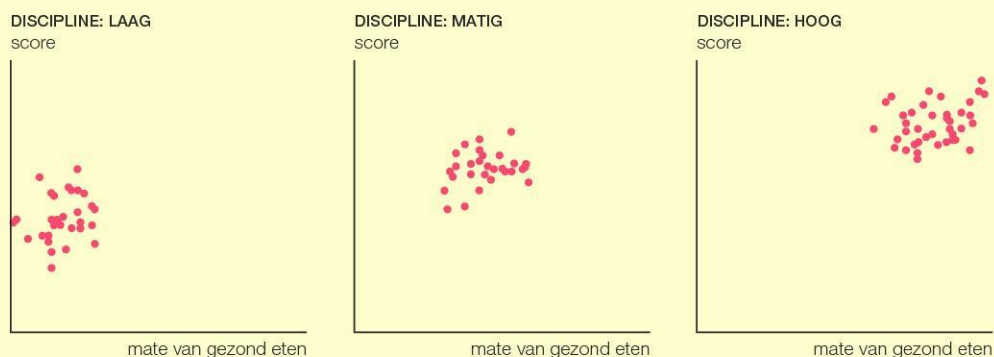
Voorwaarden voor een causaal verband bij een samenhang

- De oorzaak moet voorafgaan aan het gevolg.
- Er mogen geen andere variabelen zijn die de samenhang verklaren.

In het geval van de samenhang tussen gezond eten en scores is aan de eerste voorwaarde voldaan: de toets is gemaakt nadat er is geconstateerd hoe gezond de leerling eet.

Om te onderzoeken of aan de tweede voorwaarde is voldaan, moet je allereerst variabelen bedenken die het verband tussen gezond eten en scores zouden kunnen verklaren. De discipline van leerlingen is zo'n mogelijke variabele. Leerlingen met meer discipline eten mogelijk gezonder en scoren wellicht beter op de kennistoets (doordat ze beter hun best doen op school).

Vervolgens onderzoek je of de variabelen die je hebt bedacht de samenhang verklaren. Om na te gaan of de variabele 'discipline' de samenhang verklaart, kun je als volgt te werk gaan. Verdeel de leerlingen in de categorieën lage discipline, matige discipline en hoge discipline en zet van elke categorie de score uit tegen de mate van gezond eten. Zo ontstaan de volgende drie spreidingsdiagrammen.



figuur 10.14

Je ziet aan de figuur dat er per categorie geen samenhang is tussen gezond eten en scores. Ook zie je dat leerlingen met meer discipline zowel gezonder eten als hoger scoren op de toets. Discipline is dus een variabele die de samenhang tussen gezond eten en scores verklaart. De variabele discipline heet in dat geval de **gemeenschappelijke factor**. Er is geen sprake van een causaal verband tussen gezond eten en scores, omdat niet aan de tweede voorwaarde is voldaan.

In het algemeen is het niet eenvoudig om aan te tonen dat wel aan de tweede voorwaarde is voldaan. In de praktijk komt onderzoek er vaak op neer dat mogelijke gemeenschappelijke factoren één voor één worden uitgesloten. Hoe meer variabelen worden uitgesloten, hoe waarschijnlijker het wordt dat het inderdaad om een oorzakelijk verband gaat.

Je kunt soms alle mogelijke gemeenschappelijke factoren in één keer uitsluiten met een handige onderzoeksopzet. Zie opgave 15. In de praktijk is dit vaak kostbaar.

Er hoeft daarentegen maar één gemeenschappelijke factor te zijn die de samenhang verklaart, zoals discipline, om te zeggen dat er geen sprake is van een causaal verband.

Tenzij anders vermeld gaan we er in de opgaven van uit dat als een oorzakelijk verband in de onderzochte groep bestaat, het ook in de populatie bestaat.

R12 Zie de theorie.



- a** Leg uit hoe je in figuur 10.14 kunt zien dat er binnen elk van de drie categorieën van discipline geen samenhang is tussen gezonder eten en scores.
- b** Hoe zie je aan de drie spreidingsdiagrammen in figuur 10.14 dat leerlingen met meer discipline zowel gezonder eten als hoger scoren op de toets?
- c** Op grond van figuur 10.13 overweegt het bestuur van de school om in de kantine gezonder eten aan te bieden om de prestaties op toetsen te verbeteren.
Wat vind jij hiervan?
- d** Joanne heeft een samenhang gevonden waarbij ze drie gemeenschappelijke factoren kan bedenken. Uit onderzoek blijkt dat geen van de drie de samenhang verklaart. Er is verder aan voorwaarde 1 voor een causaal verband voldaan.
Waarom weet Joanne toch niet helemaal zeker dat er sprake is van een causaal verband?

13 In de volgende gevallen is er wel sprake van een samenhang maar zie je met gezond verstand meteen dat er geen sprake is van een causaal verband. Geef steeds een gemeenschappelijke factor die de samenhang verklaart.



- a** Hoe meer ijsjes er in een week worden verkocht, hoe meer (bijna) verdrinkingsgevallen in die week.
- b** Mensen die een muts dragen zijn vaker verkouden.
- c** Hoe hoger het energieverbruik van gezinnen in een straat, hoe groter het aantal BMW's in de straat.
- d** Hoe meer brandweerlieden een brand bestrijden, hoe meer schade de brand aanricht.



14
☐◎*

Een gymleraar wil aantonen dat gewichtheffen een oorzaak is van grotere bovenarmen. Hij laat daarom de jongens tijdens de gymles gewichtheffen. De meisjes volgen het gewone gymlesprogramma. Na drie maanden stelt hij vast dat de jongens een grotere omvang van de bovenarmen hebben dan de meisjes.

- a** Kun je op basis van de gekozen onderzoeksopzet concluderen dat gewichtheffen een oorzaak is van grotere bovenarmen? Licht toe.

Naar aanleiding van kritiek op zijn eerste onderzoeksopzet vraagt de gymleraar welke leerlingen uit zijn klassen willen gewichtheffen. Deze leerlingen gaan drie maanden gewichtheffen, de rest van de leerlingen volgt de gewone gymles. De leerlingen die meededen met gewichtheffen blijken na afloop grotere bovenarmen te hebben dan de rest van de leerlingen.

- b** Kun je nu wel concluderen dat gewichtheffen een oorzaak is van grotere bovenarmen? Licht toe.

A15
☐◎*

Wiskundedocent mevrouw Vos volgt nauwgezet het boek in haar havo 5-klas bij wiskunde A. Naast het gewone huiswerk geeft ze elke les een aantal opgaven op uit de serie opgaven die vanaf bladzijde 258 achter in dit boek staan.

Ze constateert dat de leerlingen die vaker deze opgaven maken, hogere cijfers halen op toetsen. Ze vraagt zich af of er een oorzakelijk verband is tussen het maken van deze opgaven en de cijfers op toetsen.

- a** Licht toe waarom inzet een gemeenschappelijke factor kan zijn bij de samenhang tussen het maken van de genoemde opgaven en de cijfers op toetsen.

Wetenschappers in de VS hebben in 2019 onderzocht of het voortdurend afwisselen van onderwerp bij het maken van wiskundeopgaven betere resultaten oplevert bij toetsen.

Hiervoor werden 800 scholieren aselekt in twee groepen ingedeeld. Bij groep 1 gingen de opgaven per les over hetzelfde onderwerp. Bij groep 2 werden naast de opgaven over het behandelde onderwerp ook opgaven aangeboden over andere onderwerpen. Na vier maanden werd in beide groepen dezelfde onverwachte toets afgenomen. Het gemiddelde in groep 1 was een 4,4 en in groep 2 een 6,5.

Bij aselekt indelen worden leerlingen door toeval ingedeeld in een groep.

- b** Leg uit waarom je verwacht dat leerlingen met een grote inzet ongeveer gelijk verdeeld zijn over de twee groepen. Verwacht je dat inzet het verschil tussen de groepen verklaart? Licht toe.
- c** Licht toe dat het door de opzet van het onderzoek onwaarschijnlijk is dat een andere gemeenschappelijke factor het verschil tussen de cijfers van de groepen verklaart.
- d** Is aan de eerste voorwaarde voor een causaal verband bij een samenhang voldaan? Licht toe.
- e** Leg uit of je op basis van de beschreven onderzoeksopzet kunt zeggen dat het maken van opgaven over afwisselende onderwerpen een oorzaak is van het halen van hoge cijfers voor wiskunde.

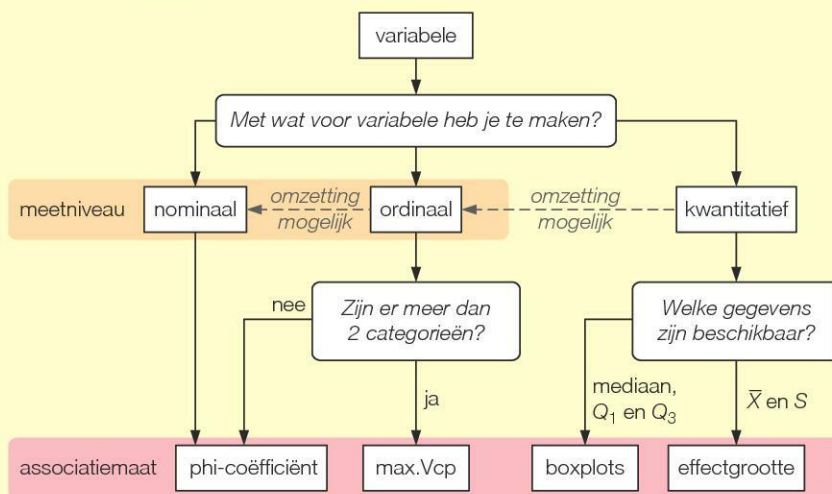
Je kent vier associatiematen voor het bepalen van de grootte van het verschil tussen twee groepen. Deze staan ook op het formuleblad op bladzijde 271.

- Wat heb je nodig van twee groepen om de effectgrootte te kunnen berekenen?
- In België hebben verhoudingsgewijs meer huishoudens een hond dan in Nederland. Jarno wil de grootte van dit verschil bepalen. Hij heeft beschikking over de gegevens in de tabel. Je ziet dat in de steekproef van 595 Belgische huishoudens er 144 een hond hebben. Kan Jarno de effectgrootte gebruiken? Licht toe.

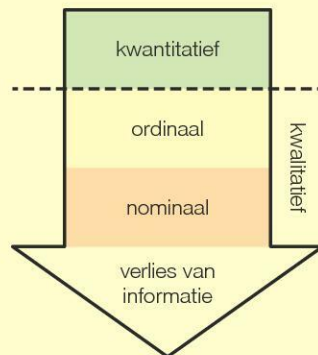
	hond		
	wel	niet	
België	144	451	595
Nederland	133	568	701
	277	1019	

Theorie B Groepen vergelijken

Op het formuleblad (zie bladzijde 271) bij het centraal examen staan vier associatiematen met de bijbehorende vuistregels. Je gebruikt deze om de grootte van het verschil tussen twee groepen te bepalen. Welke associatiemaat je gebruikt hangt af van de soort variabele en de beschikbare gegevens. Zie het volgende schema.



Het is soms mogelijk om een associatiemaat te gebruiken die bij een andere soort variabele hoort. In dat geval moet je de gegevens waarmee je begon meestal wel eerst bewerken, waardoor je een andere soort variabele krijgt. Je hebt gezien dat de omzetting naar een andere soort variabele slechts in één richting mogelijk is, omdat hierbij informatie verloren gaat. Zie figuur 10.15. Je kunt bijvoorbeeld kwantitatieve data van twee groepen zo bewerken dat je de phi-coëfficiënt kunt gebruiken. Maar je kunt bijvoorbeeld niet met ordinale variabelen beginnen en de effectgrootte gebruiken.



figuur 10.15

Voorbeeld

Aan havo 5-leerlingen van de scholen A en B is gevraagd of ze vinden dat Spaans in plaats van Duits gegeven zou moeten worden. Zie de tabel.

- a Wat is het meetniveau van de mening over Spaans als vak in plaats van Duits?
- b Tom wil het verschil in mening over Spaans als vak in plaats van Duits tussen school A en school B berekenen met behulp van de effectgrootte.

Leg uit waarom dat niet kan.

- c Onderzoek de grootte van het verschil in mening.

	school	
	A	B
helemaal niet mee eens	57	23
niet mee eens	28	41
mee eens	27	37
helemaal mee eens	16	21

Uitwerking

- a Het meetniveau is ordinaal.
- b De effectgrootte kan alleen bij een kwantitatieve variabele berekend worden, dus niet bij een ordinale variabele.
- c Ordinale variabele, meer dan 2 categorieën, dus max.Vcp.

	school A		school B		Vcp
	cum. freq.	cum. perc.	cum. freq.	cum. perc.	
helemaal niet mee eens	57	44,5%	23	18,9%	25,6%
niet mee eens	85	66,4%	64	52,5%	13,9%
mee eens	112	87,5%	101	82,8%	4,7%
helemaal mee eens	128	100%	122	100%	0%

max.Vcp = 25,6%

Omdat $20 < \text{max.Vcp} \leq 40$ is het verschil middelmatig.



Zie het voorbeeld.

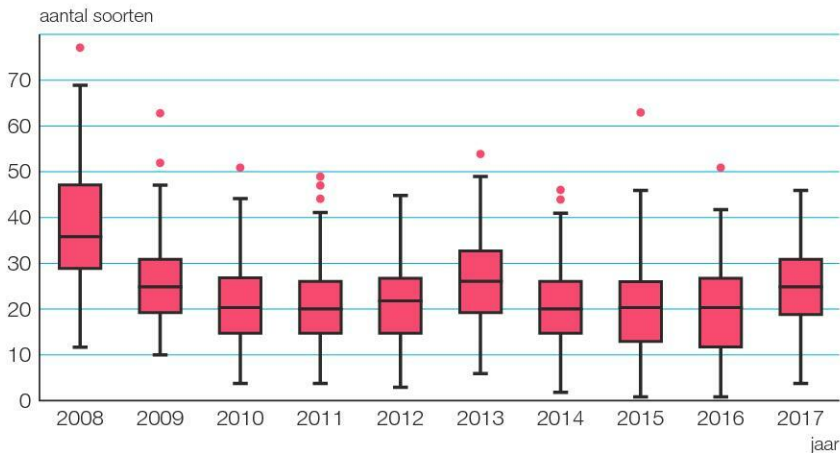
Bij de variabele 'mening over Spaans in plaats van Duits als vak' is het ook mogelijk om de phi-coëfficiënt te berekenen. Daarvoor moeten de gegevens wel eerst bewerkt worden. Kies hiervoor de categorieën negatief en positief. Voor de categorie negatief tel je 'helemaal niet mee eens' en 'niet mee eens' bij elkaar op. Voor de categorie positief doe je hetzelfde met 'helemaal mee eens' en 'mee eens'.

- a Neem de tabel hiernaast over en vul deze verder in.
- b Onderzoek de grootte van het verschil in mening.
- c Je hebt bij vraag b een andere conclusie getrokken dan in het voorbeeld. Welke conclusie is het beste te verdedigen? Licht toe.

	school	
	A	B
negatief	85	
positief		

Biologen hebben in Duitsland op een aantal locaties het aantal soorten insecten onderzocht in de periode 2008 tot en met 2017. Zie de figuur hieronder.

- Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in het aantal soorten insecten tussen 2008 en 2017 groot, middelmatig of gering is.
- Bepaal tussen welke tweetallen jaren het verschil groot is.
- Lisa beweert dat als je 2008 buiten beschouwing laat, de verschillen tussen alle jaren gering zijn. Ga na of ze gelijk heeft.



figuur 10.16

Werkt geweld om je doelen te bereiken als protestgroep? Om die vraag te beantwoorden werden 324 protestgroepen onderzocht die actief waren tussen 1900 en 2006. Zie de tabel hiernaast. In totaal waren 108 protestgroepen gewelddoos.

- Licht toe dat er 58 protestgroepen zowel gewelddoos als succesvol waren.
- Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil tussen gewelddoze en gewelddadige protestgroepen groot, middelmatig of gering is.
- Bewerk de gegevens in de tabel zodat er twee categorieën zijn. Voeg daartoe 'gedeeltelijk succes' en 'succes' samen tot één categorie. Bereken vervolgens met behulp van het formuleblad of het verschil tussen gewelddoze en gewelddadige protestgroepen groot, middelmatig of gering is.

	gewelddoos	gewelddadig
mislukking	21%	62%
gedeeltelijk succes	25%	13%
succes	54%	25%



20
□ ⊗ *

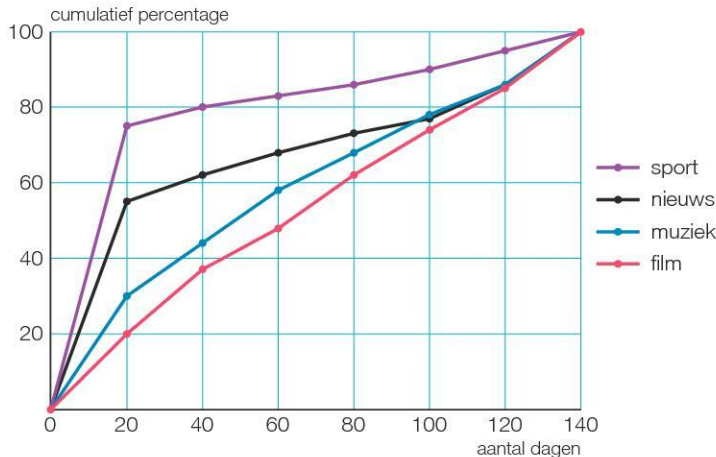
Hardlopers kunnen gebruikmaken van een exoskelet. Dat is een omhulling met kleine motortjes, die moet zorgen dat het lichaam minder energie nodig heeft om voort te bewegen. Onderzoekers lieten deelnemers met en zonder exoskelet op een lopende band 9 km/uur hardlopen. Hierbij werd gemeten hoeveel energie verbruikt werd. Omdat het gewicht van deelnemers geen rol mocht spelen is de verbruikte energie uitgedrukt in watt per kilogram. Zie de tabel hieronder. Bereken met behulp van het formuleblad of het verschil in energieverbruik met en zonder exoskelet groot, middelmatig of gering is.



	met exoskelet	zonder exoskelet
gemiddeld energieverbruik in watt per kg	8,70	9,57
standaardafwijking in watt per kg	0,83	0,79

21
□ ⊗ *

Hoe snel een filmpje op YouTube aan populariteit verliest, hangt af van het onderwerp. Onderzoekers hebben dit verloop van het aantal kijkers onderzocht voor 50 000 YouTube-video's over een periode van 140 dagen. De video's zijn ingedeeld in vier categorieën. In de figuur hieronder staan relatieve cumulatieve frequentiepolygonen van deze gegevens. De eerste klasse is $[0, 20)$.



figuur 10.17

- Verklaar het opvallende verschil in het verloop van het aantal kijkers tussen video's over sport en over film.
- Bepaal aan de hand van de figuur en het formuleblad of het verschil tussen muziekvideo's en elk van de andere categorieën groot, middelmatig of gering is.

A22

Er wordt vaak gedacht dat oorlog voeren een bezigheid is van mannen. Onderzoekers hebben deze aanname onderzocht door na te gaan of koningen relatief vaker oorlog voerden dan koninginnen. Daartoe bekeken ze in de periode 1480-1913 in verschillende koninkrijken per jaar wie er aan de macht was en of er oorlog werd gevoerd. In totaal werden er 3586 van zulke jaren bekeken. Hiervan was 596 jaar een koningin aan de macht. Verder werd in 889 jaren oorlog gevoerd, waarvan in 154 jaren een koningin aan de macht was.



- Vul de tabel in.
- Onderzoek of koningen of koninginnen relatief vaker oorlog voerden.
- Bepaal met behulp van het formuleblad of het verschil groot, middelmatig of gering is.

	oorlogsjaren	vredesjaren	
koningen			
koninginnen			

R23

In de tabel hiernaast zie je welke soort wiskunde is gekozen door jongens en meisjes op het Spinoza College. Amar berekent de phi-coëfficiënt en komt tot de conclusie dat er geen verschil is tussen jongens en meisjes wat betreft de keuze voor wiskunde A of B.

	jongens	meisjes
wiskunde A	20	24
wiskunde B	30	36

- Hoe komt hij tot deze conclusie?
- Bereken het percentage leerlingen dat wiskunde A kiest voor zowel de jongens als de meisjes. Komt dit overeen met de conclusie van Amar?

Het verschil tussen de groepen zou maximaal zijn als alle jongens wiskunde A hadden gekozen en alle meisjes wiskunde B. Of andersom.

- Bereken in beide gevallen de phi-coëfficiënt. Welke conclusie trek je over de minimale en maximale waarde van de phi-coëfficiënt?





Om de mate van geluk tussen landen te vergelijken wordt gebruikgemaakt van vragenlijsten. Hierop geven inwoners van een land aan hoe gelukkig ze zijn met een geheel rapportcijfer. In de tabel zijn de cumulatieve percentages gegeven van de scores van duizend inwoners van China en duizend inwoners van de VS in 2019.

geluk	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
China	0%	1%	2%	5%	17%	40%	65%	89%	98%	100%
VS	2%	2%	4%	8%	22%	34%	55%	80%	91%	100%

- Pascal denkt dat in China 11% van de mensen hun geluk een 8 of hoger geeft. Volgens Daniek moet dat 35% zijn. Wie heeft er gelijk? Licht toe.
- Bepaal met behulp van het formuleblad of het verschil in geluk tussen China en de VS groot, middelmatig of gering is.
- Als mensen hun geluk een 5 of lager geven, noemen we dat 'ongelukkig'. Bij een 6 of hoger, noemen we dat 'gelukkig'. Vul de kruistabel in en onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in geluk groot, middelmatig of gering is.



	ongelukkig	gelukkig	
China			
VS			
			2000



In deze opgave kijken we naar de formule van de effectgrootte

$$E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)} \text{ met } \bar{X}_1 \geq \bar{X}_2.$$

Beredeneer hoe uit de formule van E volgt dat

- de effectgrootte altijd groter dan of gelijk is aan 0
- als $\bar{X}_1$ toeneemt en $\bar{X}_2$, S_1 en S_2 gelijk blijven, de effectgrootte toeneemt
- als S_1 toeneemt en $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ en S_2 gelijk blijven, de effectgrootte afneemt
- als $\bar{X}_1$ toeneemt en S_1 afneemt en $\bar{X}_2$ en S_2 en gelijk blijven, de effectgrootte toeneemt
- als S_1 en S_2 beide verdubbelen en $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ gelijk blijven, de effectgrootte halveert.

Door de verzuring van oceanen sterven koraalriffen in hoog tempo af. De afbraak van koraal kan geremd worden door er vissen naartoe te lokken. Wetenschappers hebben daarom onderzocht of er meer vissen naar een koraalrif zwemmen als er geluiden van gezonde koraalriffen worden afgespeeld. Ze selecteerden hiervoor 33 aangetaste koraalriffen voor de kust van Australië, die ze aselekt in drie groepen verdeelden. In groep 1 werd het geluid van gezonde koraalriffen afgespeeld met onderwaterluidsprekers, in groep 2 stonden alleen de luidsprekers zonder dat er geluid uit kwam en in groep 3 werd niets gedaan.



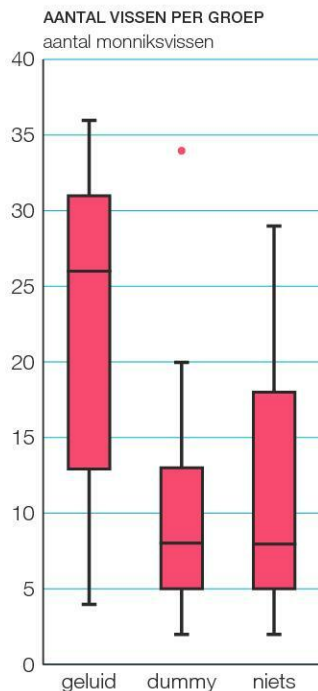
- a** Leg uit waarom ervoor gekozen is om in groep 2 luidsprekers te plaatsen waar geen geluid uit kwam.

Gedurende 40 dagen is er meerdere keren per dag gemeten hoeveel monniksvissen zich in de koraalriffen bevinden. De resultaten van één dag van het onderzoek staan in de figuur en de tabel. De term ‘dummy’ verwijst naar groep 2, waar een luidspreker stond die geen geluid maakte. Je ziet dat voor de groep ‘dummy’ een punt buiten de boxplot ligt. Dit punt ligt meer dan anderhalf keer de interkwartielafstand boven het derde kwartiel.

- b** Toon dit aan met een berekening.
c Saffa beweert dat er in groep 3 meer metingen zijn met meer dan 18 vissen dan metingen met minder dan 5 vissen.
 Leg uit of ze gelijk heeft.
d Onderzoek met het formuleblad of het verschil tussen groep 1 en elk van de beide andere groepen groot, middelmatig of gering is. Doe dat op twee verschillende manieren.

Ook voor de overige dagen van het onderzoek zijn er in de groep ‘geluid’ meer vissen geteld dan in de andere twee groepen.

- e** Leg uit of je op basis van de onderzoeksopzet en de resultaten mag concluderen dat geluid een oorzaak is van de aanwezigheid van meer monniksvissen.

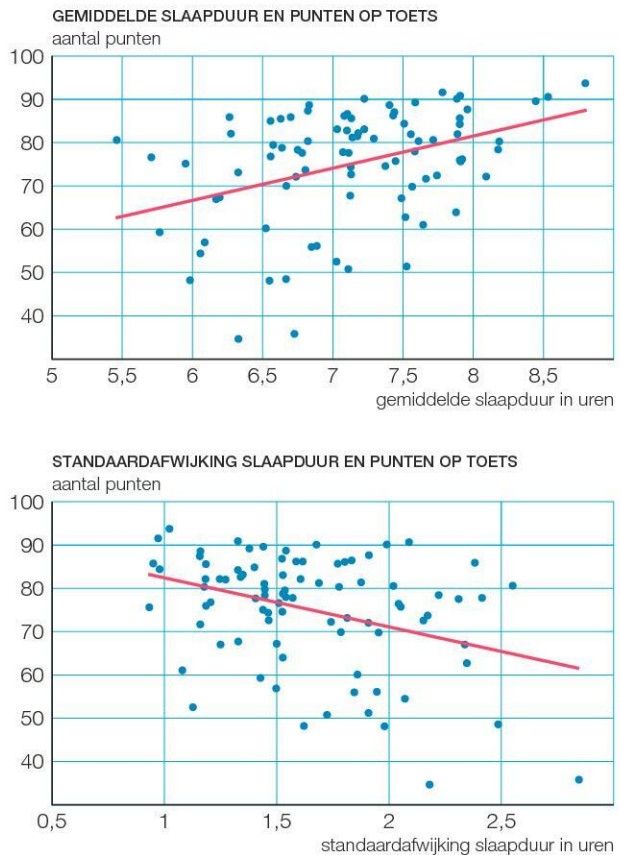


figuur 10.18

	$\bar{X}$	S
geluid	21,6	9,8
dummy	11,3	9,0
niets	12,1	8,8

Haal je betere cijfers als je langer slaapt? Om dat te onderzoeken kregen 100 studenten aan de Amerikaanse universiteit MIT drie maanden voor een scheikundetoets een fitbit mee. Dat is een horloge dat onder andere bijhoudt hoelang je slaapt. De resultaten staan in de figuren hiernaast. De rode lijnen geven de samenhang weer.

- a Heeft de student met de hoogste score ook de langste gemiddelde slaapduur? Sliep de student met de laagste score gemiddeld ook het kortst?
- b Leg bij de volgende uitspraken uit of ze volgen uit de figuren.
 - I Studenten met een gemiddelde slaapduur van minstens acht uur haalden tenminste 70 punten.
 - II Studenten die vaker ongeveer even lang slapen, scoren beter.



figuur 10.19

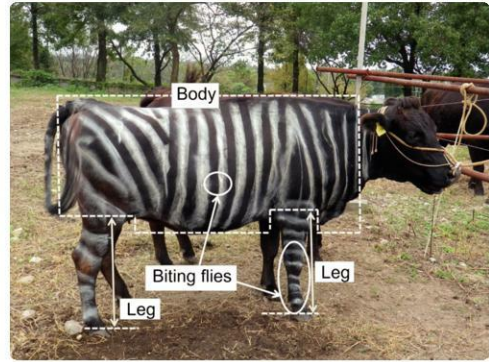
Er was geen samenhang tussen het aantal uren slaap op de nacht voor de toets en de score op de toets.

Om ook het effect van slapen op lange termijn vast te stellen, werden de studenten in twee groepen ingedeeld. Studenten links van de mediaan werden 'slechte slapers' genoemd en studenten rechts van de mediaan 'goede slapers'. De goede slapers scoorden gemiddeld 6,57 punten beter op de toets dan de slechte slapers. De standaardafwijking van de slechte slapers was 11,01 punten en die van de goede slapers 13,71 punten.

- c Bereken met behulp van het formuleblad hoe groot het verschil in score tussen goede en slechte slapers is.
- d Kun je concluderen dat voor deze studenten een lange slaapduur de oorzaak is van goede scores? Licht toe.

Koeien worden soms duizenden keren per dag gestoken door vliegen, waardoor de koeien gewicht verliezen en minder melk geven. Dit levert de veehouderij wereldwijd een kostenpost van miljarden euro's op.

Bekend is dat zebra's minder last hebben van vliegen. Bij een onderzoek in Japan werden daarom witte strepen op zes Zwarte Wagyu koeien geverfd. Deze koeien werden vergeleken met zes Zwarte Wagyu koeien zonder strepen. De wetenschappers telden op basis van foto's en videobeelden hoe vaak koeien reageerden op vliegen (schudden van de kop, stampen, flapperen met de oren, enzovoort) en hoeveel vliegen op de foto's te zien waren.



a Noem twee kwalitatieve variabelen die een rol spelen in dit onderzoek.

Van alle koeien werd elke 30 minuten een foto gemaakt om het aantal vliegen te tellen. Deze gegevens staan in de tabel hiernaast.

b Bereken met behulp van het formuleblad de grootte van het verschil tussen het totale aantal vliegen bij de twee groepen koeien. Gebruik dat de standaardafwijking van het totale aantal vliegen voor gestreepte koeien 35,2 is en voor zwarte koeien 68,6.

	gemiddeld aantal vliegen per foto	
	lichaam	poten
zwarte koeien	42,1	86,7
gestreepte koeien	15,3	40,2

De foto's van de koeien werden van slechts één zijde genomen. Het aantal vliegen is dus twee keer zo groot als op een foto. Verder is bekend dat de vliegen gemiddeld elke vier minuten een keer steken.

De Japanse boer Joji vindt het verven van zijn Zwarte Wagyu koeien veel gedoe, maar weet dat er een flink verminderde melkproductie is als zijn koeien gemiddeld meer dan 2000 keer per uur op lichaam of poten worden gestoken. Dat wil hij voorkomen.

c Zou je hem op basis van de onderzoeksresultaten aanraden zijn koeien te verven? Licht toe met een berekening.

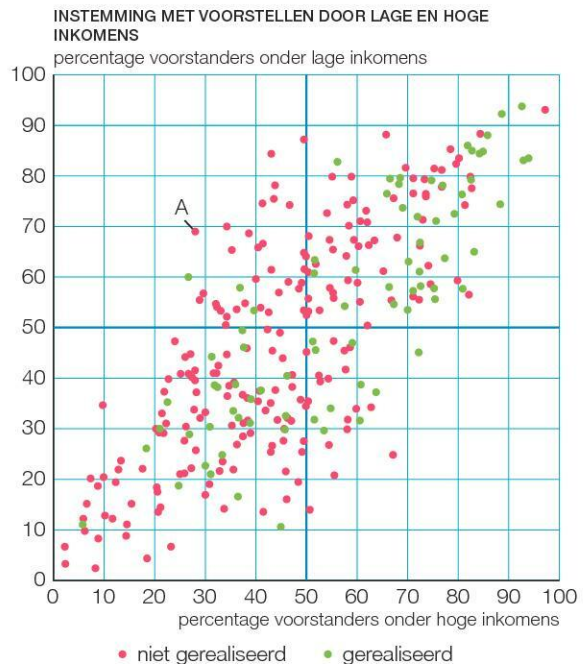
Bij het onderzoek was ook een derde groep Zwarte Wagyu koeien opgenomen die zwart waren geverfd.

d Waarom hebben de wetenschappers dit gedaan?

Een onderzoeker trekt de conclusie dat gestreepte koeien minder vaak gestoken worden. Door de gekozen onderzoeksopzet is deze conclusie echter te algemeen.

e Noem hiervoor twee aspecten uit de gekozen onderzoeksopzet.

Veel Nederlanders met een laag inkomen hebben het gevoel dat hun mening niet telt. Onderzoekers wilden weten of ze gelijk hebben. Ze verzamelden opiniepeilingen uit de periode 1979 tot en met 2012, waarin Nederlanders werd gevraagd wat ze van een voorstel vinden. Er werden voorstellen voorgelegd zoals: 'Er moet een referendum over de afschaffing van de euro komen.' Vervolgens maakten ze onderscheid tussen de meningen van mensen met een laag inkomen en een hoog inkomen. Elk punt in het spreidingsdiagram is een voorstel. Op de assen is het percentage dat een voorstel steunt voor beide groepen af te lezen.



figuur 10.20

- a** Voorstel A in het spreidingsdiagram ging over de verhoging van het minimumloon. Hoeveel procent van de mensen met een hoog inkomen was voorstander van dit voorstel? En hoeveel procent bij de lage inkomens?

Het spreidingsdiagram is in vier vlakken verdeeld. In het vlak rechtsboven staan voorstellen waar zowel de lage als de hoge inkomens in meerderheid voorstander van zijn.

- b** Geef de betekenis van het vlak linksboven.

De kleur van de punten geeft aan of een voorstel gerealiseerd is. Rood betekent dat het voorstel niet is gerealiseerd en groen betekent dat het wel is gerealiseerd. In het vlak linksboven staan 38 voorstellen.

- c** Bepaal hoeveel procent van deze voorstellen gerealiseerd is.

Van de voorstellen in het vlak rechtsonder zijn 10 van de 30 voorstellen gerealiseerd. Er is een verschil tussen de vlakken rechtsonder en linksboven wat betreft het realiseren van voorstellen.

- d** Toon met behulp van percentages aan dat er verschil is en geef de praktische betekenis van dit verschil.
e Bepaal met behulp van het formuleblad of dit verschil groot, middelmatig of gering is.

Tarik stelt vast dat de voorstellen in het vlak rechtsboven vaak zijn gerealiseerd en dat deze ook door mensen met lage inkomens worden gesteund. Volgens hem toont dit aan dat er wel naar hen geluisterd wordt.

- f** Waarom kan Tarik deze conclusie niet trekken?

Terugblik

Samenhang en causaliteit

Om bij twee variabelen vast te stellen of er bij een samenhang ook sprake is van causaliteit onderzoek je twee voorwaarden.

1. De oorzaak moet voorafgaan aan het gevolg.
2. Er mogen geen andere variabelen zijn die de samenhang verklaren.

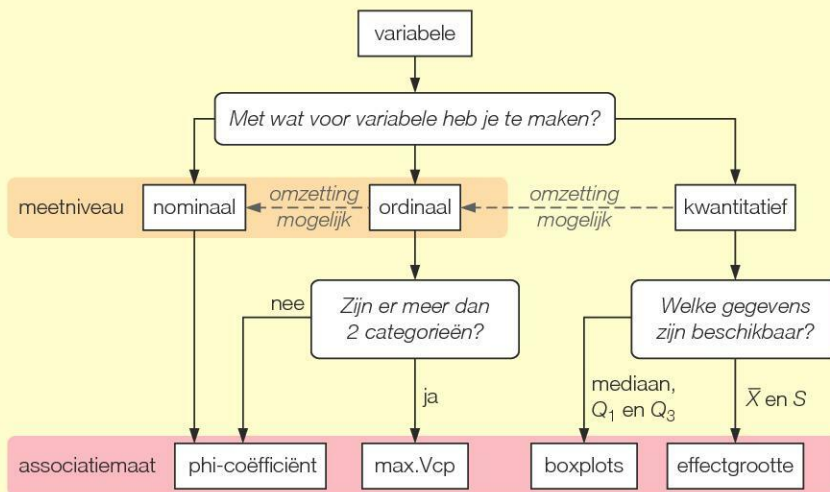
Wanneer uit een onderzoek blijkt dat mensen die meer zitten vaker diabetes hebben, dan wil dat nog niet zeggen dat veel zitten een oorzaak is van diabetes.

Het zou immers kunnen dat mensen met diabetes minder mobiel zijn en dus door hun ziekte meer zitten (voorwaarde 1). Het zou ook kunnen dat de variabele overgewicht de samenhang verklaart (voorwaarde 2).

Mensen met overgewicht zitten wellicht meer omdat ze moeilijker bewegen en krijgen mogelijk ook vaker diabetes. Een variabele die de samenhang verklaart, is een gemeenschappelijke factor.

Groepen vergelijken

Om de grootte van een verschil tussen twee groepen te bepalen, gebruik je een geschikte associatiemaat. Gebruik voor de keuze van een associatiemaat het onderstaande schema.

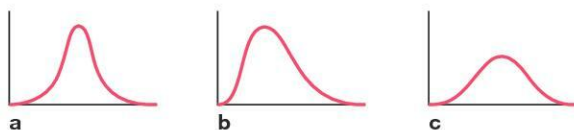


Welke associatiemaat je kunt gebruiken, hangt af van het soort variabele waar je mee te maken hebt en welke gegevens beschikbaar zijn. Het is soms mogelijk om een associatiemaat te gebruiken die bij een andere soort variabele hoort. In dat geval moet je de gegevens waarmee je begon meestal wel eerst bewerken. Om het verschil tussen groepen in een associatiemaat uit te drukken gebruik je het formuleblad op bladzijde 271. Hier vind je ook de vuistregels waarmee je aangeeft of het verschil gering, middelmatig of groot is. Dit formuleblad staat ook op het voorblad bij het centraal examen.

10.3 De normale verdeling en betrouwbaarheidsintervallen

O30


Bij welke van de onderstaande figuren hoort geen normale verdeling?
 Licht toe.



figuur 10.21

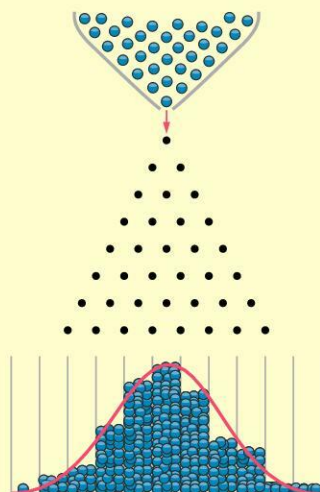
Theorie A De normale verdeling bij waarnemingsgetallen

Wanneer afwijkingen van het gemiddelde willekeurig optreden, ontstaat een normale verdeling. Dit proces is in figuur 10.22 nog eens geïllustreerd door het bord van Galton. In dit bord komen de blauwe balletjes op zwarte pinnen terecht, waarna ze door toeval steeds naar links of rechts vallen. De balletjes onderaan het bord vormen zo bij benadering een normale verdeling.

Je bent de normale verdeling tegengekomen bij waarnemingsgetallen en bij steekproeven. In de volgende opgaven komen situaties uit het dagelijks leven voor waarbij door toeval afwijkingen kunnen optreden.

Een blauw balletje in het bord van Galton stelt hier telkens een waarnemingsgetal voor. Denk bijvoorbeeld aan de lengte van volwassen Nederlandse vrouwen. Een blauw balletje stelt dan de lengte van een volwassen Nederlandse vrouw voor.

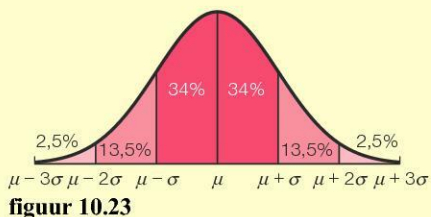
De normale verdeling bij steekproeven komt aan bod in theorie B.



figuur 10.22

Je kent de vuistregels bij de normale verdeling:

- ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$
- bijna 100% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.



figuur 10.23

Bij berekeningen met de vuistregels mag je de woorden ongeveer en bijna weglaten. Zo mag je bij een normale verdeling met $\mu = 49$ en $\sigma = 2$ zeggen dat 16% van de waarnemingsgetallen kleiner dan 47 is.

31

Het gewicht van een groep van 8000 producten is normaal verdeeld met gemiddelde 500 gram en standaardafwijking 15 gram.

- Welk percentage van de producten weegt minder dan 485 gram?
- Hoeveel producten wegen meer dan 530 gram?
- Wat weet je van de gewichten van de middelste 95% van deze groep producten?

Van een andere partij van 3940 producten is niet bekend of het gewicht van de producten normaal verdeeld is. Wel is bepaald dat het gemiddelde 400 gram is en de standaardafwijking 15 gram. Het blijkt dat 97 van deze producten lichter dan 370 gram zijn. Dit is ongeveer gelijk aan wat je op basis van een normale verdeling zou verwachten.

- Toon dat aan.

32

Hiernaast zie je een tabel met de lengte van mannelijke deelnemers aan de Olympische Spelen van Rio in 2016. Met de percentages uit de tabel en het gegeven dat er 190 mannelijke deelnemers langer dan 2,02 m waren, kun je berekenen hoeveel mannen deelnamen aan de spelen in Rio.

- Bereken dit aantal en rond af op honderdtallen.

De lengtes zijn bij benadering normaal verdeeld. De aantallen wijken iets af ten opzichte van wat je zou verwachten op basis van een normale verdeling met een gemiddelde van 1,82 meter en een standaardafwijking van 10 cm.

- Laat zien dat de percentages in de tabel weinig verschillen van de vuistregels bij de normale verdeling.

LENGTE MANNEN RIO

lengte in m	percentage
<1,52	0,1%
1,52-1,62	1,9%
1,62-1,72	12,7%
1,72-1,82	33,2%
1,82-1,92	35,1%
1,92-2,02	13,8%
2,02-2,12	2,9%
>2,12	0,1%

33

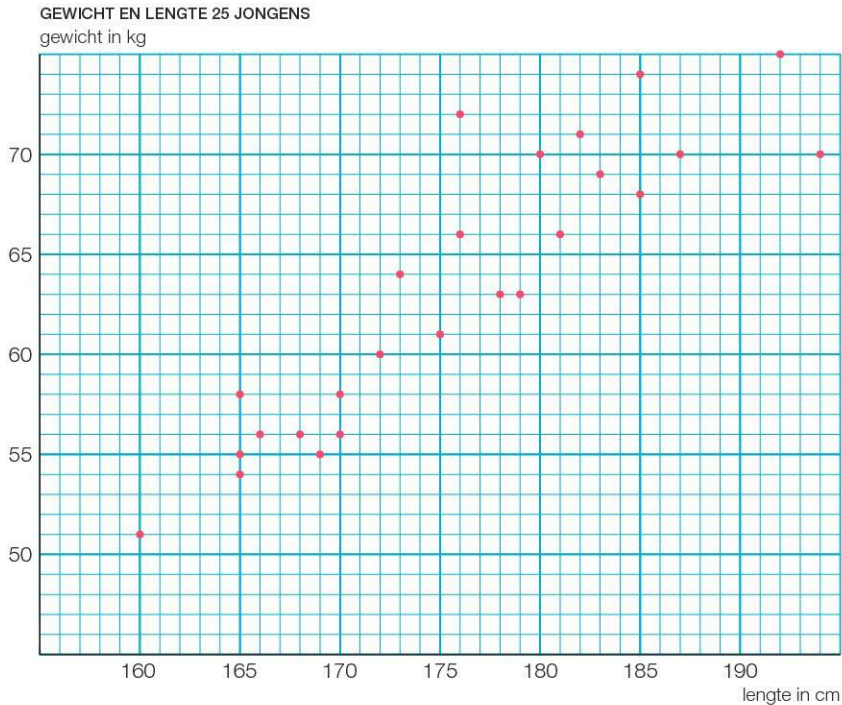
Van een partij olijven is de diameter normaal verdeeld met een gemiddelde van 18 mm.

Internationale kwaliteitseisen stellen dat 95% van de olijven in de partij een diameter tussen 17 en 19 mm moet hebben.

- Wat zou op basis van deze informatie de standaardafwijking van de diameter bij deze olijven moeten zijn?
- Een onderzoeker wil nagaan of grotere olijven over het algemeen sneller bederven. Welk type diagram is hiervoor geschikt en welke informatie is nodig om dit diagram te maken?



Bij een onderzoek is van 25 jongens het gewicht en de lengte gemeten. De resultaten staan in het spreidingsdiagram.



figuur 10.24

- Maarten wil van zowel de lengte als het gewicht de modus bepalen. Lukt dit? Licht toe.
- Heeft de jongen met de mediane lengte ook het mediane gewicht? Licht toe.
- De onderzoeker maakt op basis van de lengte vijf even grote groepen, oplopend van de 20% kortste jongens tot en met de 20% langste jongens. Bij welke van deze groepen is de spreidingsbreedte het grootst?
- Hoeveel procent van de jongens hoort zowel bij de langste 12% als bij de zwaarste 12% van de onderzoeksgroep?

De onderzoeker vraag zich af of de lengte van de deelnemende jongens bij benadering normaal verdeeld is. Zij berekent dat hun gemiddelde lengte 176 cm is met een standaardafwijking van 9 cm.

Om een van de vuistregels te controleren bekijkt ze het aantal jongens met een lengte in de klasse $[167, 185]$.

- Welke vuistregel controleert ze hiermee en wat is haar conclusie?

Hoe harder de muziek, hoe mooier het klinkt, denken veel producenten van muziek. Ze willen daarom dat de liedjes van hun artiesten zo hard mogelijk worden afgespeeld. Ze kunnen natuurlijk niet bepalen hoe hard jij het volume zet. Maar muziek heeft ook een digitale hardheid, die producenten wel kunnen aanpassen. Deze digitale hardheid wordt uitgedrukt in dBFS. Het hardste geluid dat mogelijk is, heeft een waarde van 0 dBFS, terwijl minder harde geluiden negatieve waarden hebben. Om zoveel mogelijk tonen in de buurt van 0 dBFS te krijgen, veranderen producenten de spreiding van de digitale hardheid van hun liedjes en stellen ze vervolgens de hardste toon in op 0 dBFS.

a Maken ze daartoe de spreiding groter of kleiner? Licht toe.

In de figuur hiernaast zie je voor een aantal jaren de verdeling van de gemiddelde digitale hardheid in dBFS van duizenden liedjes. Een onderzoeker concludeert dat de hardheid in geen enkel jaar normaal verdeeld is.

b Geef een mogelijke statistische redenering die de onderzoeker hiervoor gebruikt kan hebben.

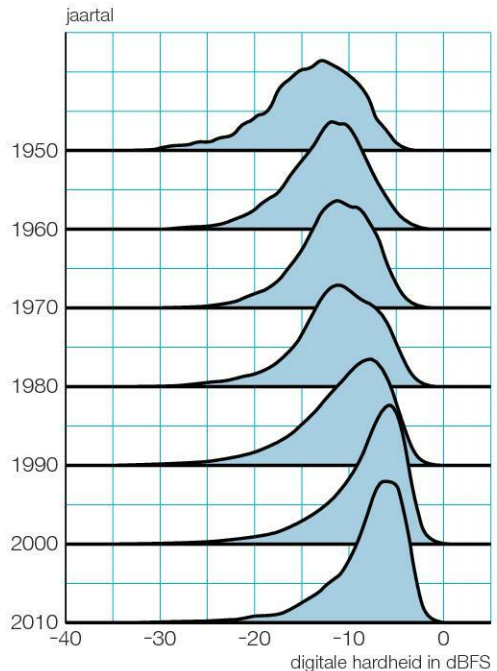
De ontwikkeling van de digitale hardheid van muziek kan beschreven worden met de formule $H = -14 + 0,067t$. Hierin is H de gemiddelde digitale hardheid in dBFS en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1950.

c Leg met behulp van figuur 10.25 uit of de keuze voor het gemiddelde als centrummaat een overschatting of een onderschatting van de digitale hardheid geeft.

d Bereken in welk jaar volgens de formule de gemiddelde digitale hardheid 0 dBFS zou zijn en beschrijf hoe liedjes in dat jaar zouden klinken.

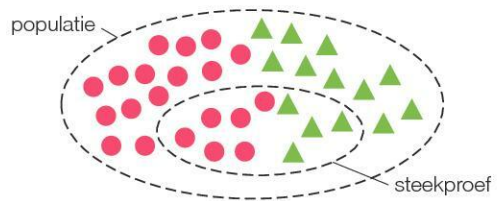
Zover zal het niet komen, want sinds 2010 neemt de gemiddelde digitale hardheid weer iets af en geldt de formule voor H dus niet meer. Een aanleiding hiervoor was het album *Death Magnetic* van Metallica. Het verschil tussen de hardste en zachtste tonen was hier door de producent zo klein gemaakt dat volgens sommige fans de muziek vervormd was. Streamingdiensten zoals Spotify hebben naar aanleiding van deze kritiek hun beleid aangepast. Ze berekenen sindsdien de gemiddelde digitale hardheid van een liedje en spelen dit af op -14 dBFS.

e Leg uit waarom bij liedjes van het album *Death Magnetic* van Metallica door dit beleid de hardste toon minder hard klinkt dan bij liedjes met een grote spreiding.



figuur 10.25

In de figuur hiernaast zie je welke steekproef uit een populatie is genomen. Toon met een berekening aan dat de proportie rode bolletjes in de steekproef verschilt van die in de populatie.



figuur 10.26

Theorie B De normale verdeling bij steekproeven

De populatie is de totale groep waarop een onderzoek zich richt. Het is soms onwenselijk en bijna altijd te veel werk om de hele populatie te onderzoeken. Daarom wordt een steekproef genomen. Als een steekproef aselekt is, heeft elk element in de populatie een even grote kans om in de steekproef te komen.

Als je een kwantitatieve variabele hebt onderzocht, kun je een gemiddelde berekenen. Het gemiddelde van een populatie geven we aan met μ en het gemiddelde van een steekproef met $\bar{X}$.

Doordat een aselechte steekproef door toeval tot stand komt, wijkt het steekproefgemiddelde door toeval af van het populatiegemiddelde. Als er, in gedachten, heel veel aselechte steekproeven worden genomen, ontstaat een normale verdeling van heel veel steekproefgemiddeldes. Deze verdeling heet de steekproevenverdeling. In het bord van Galton stelt een blauw balletje in deze situatie een steekproefgemiddelde voor.

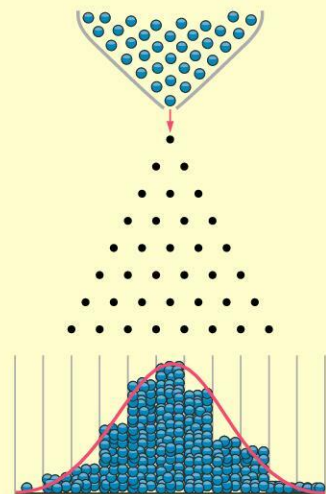
Als je een kwalitatieve variabele hebt onderzocht, kun je geen gemiddelde berekenen. Je kunt wel de proportie van het onderzochte kenmerk berekenen. De populatieproportie p bereken je met

$$p = \frac{\text{aantal elementen met het kenmerk in de populatie}}{\text{totaal aantal elementen in de populatie}}.$$

De steekproefproportie $\hat{p}$ bereken je met

$$\hat{p} = \frac{\text{aantal elementen met het kenmerk in de steekproef}}{\text{totaal aantal elementen in de steekproef}}.$$

Ook bij heel veel steekproefproporties uit aselechte steekproeven, ontstaat een normale verdeling. Ook deze verdeling heet een steekproevenverdeling. In het bord van Galton stelt een blauw balletje in deze situatie een steekproefproportie voor.



figuur 10.27

R37
☐◎*

In een ziekenhuis liggen 1000 mensen, waarvan 50 een levensbedreigende ziekte hebben. In een steekproef van 80 kinderen op de kinderafdeling blijken er 4 een levensbedreigende ziekte te hebben.

- a Bereken de populatieproportie en de steekproefproportie.
- b Is de steekproef aselekt? Licht toe.

38
☐◎*

In de onderstaande gevallen is er geen sprake van een aselekte steekproef.

- a Met PISA-scores worden de schoolprestaties van Nederlandse 15-jarige scholieren gemeten. PISA selecteert hiertoe aselekt scholen voor een toets. In 2018 deed slechts 61% van de geselecteerde scholen mee. Verwacht je dat de gemiddelde score in de steekproef lager of hoger is dan in de populatie? Licht toe.
- b In 2018 onderzocht de Nederlandse Voedsel en Warenautoriteit (NVWA) 93 boerenbedrijven die werden verdacht van fraude bij de registratie van dieren. Hiervan bleken 45 inderdaad fraude te hebben gepleegd. Verwacht je dat de steekproefproportie lager of hoger is dan de populatieproportie van alle boerenbedrijven? Licht toe.



39
☐◎*

Er wordt vaak beweerd dat 97% van de klimaatwetenschappers denkt dat opwarming van de aarde door de mens wordt veroorzaakt. Een van de bronnen voor dit percentage is een steekproef van 79 klimaatwetenschappers, waarvan 77 de mens als oorzaak voor de opwarming zien.

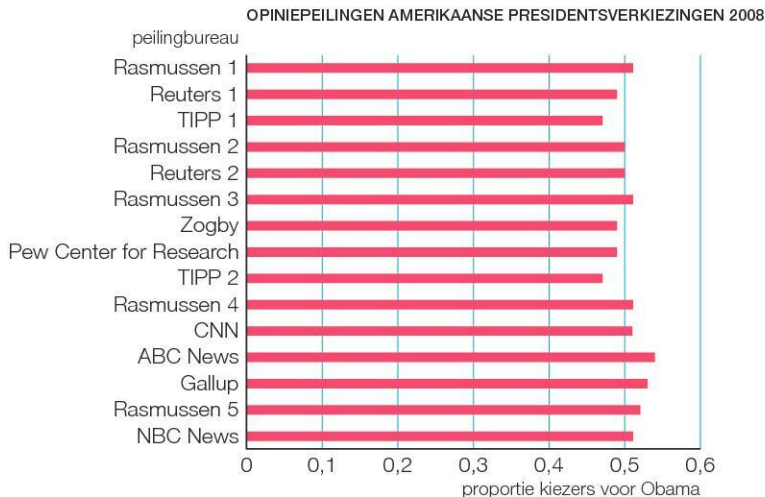
- a Benoem wat in deze peiling de populatie en wat de steekproef is.

Voor een andere studie zijn geen wetenschappers ondervraagd, maar zijn de samenvattingen gelezen van alle 12000 wetenschappelijke artikelen over klimaatverandering uit de periode 1991-2011. Van deze artikelen gaf twee derde geen mening over de bewering dat de mens bijdraagt aan klimaatverandering. Uit de overige artikelen bleek wel een mening en hiervan stelde 97,1% dat de mens bijdraagt aan klimaatverandering.

- b Bram ziet 0,971 als een populatieproportie. Wat is volgens Bram de populatie?
- c Sabine ziet 0,971 als een steekproefproportie bij een steekproef uit de populatie van alle 12000 artikelen. Leg uit of deze steekproef aselekt is.



In de week voorafgaand aan de Amerikaanse verkiezingen van 2008 hebben 15 peilingbureaus een steekproef genomen om het stemgedrag van Amerikanen die gaan stemmen te peilen. In figuur 10.28 zie je voor elke steekproef de proportie kiezers die op Barack Obama zegt te gaan stemmen.



figuur 10.28

- Leg uit waarom de populatie voor de onderzoekers niet bestond uit Amerikanen die mogen stemmen.
Wat was voor hen wel de populatie?
- Aan de steekproef van CNN deden 1000 mensen mee.
Bereken hoeveel daarvan hebben aangegeven op Obama te gaan stemmen.
- De verkiezingen lieten zien dat de populatieproportie 0,51 was.
Leg uit waarom de verkiezingsuitslag gelijk is aan de populatieproportie.

We gaan ervan uit dat de 15 steekproeven dezelfde omvang hebben, dat ze aselekt zijn genomen en dat de stemvoorkeur tijdens deze week niet veranderd is.

- Benthe denkt dat hieruit volgt dat alle steekproeven dezelfde steekproefproportie $\hat{p}$ zouden moeten hebben.
Licht toe waarom dat niet zo is.

Als er heel veel aselechte steekproeven met $n = 1000$ worden genomen bij $p = 0,51$ ontstaat een steekproevenverdeling die normaal verdeeld is met standaardafwijking 0,016.

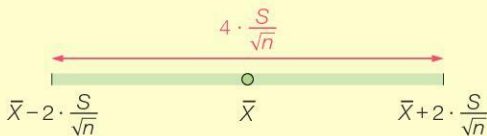
- Wat weet je van de middelste 95% van de steekproefproporties van deze steekproeven?
- Wat weet je van de 5% steekproefproporties die het meeste afwijken van de populatieproportie?
- Twee van de 15 steekproeven uit figuur 10.28 liggen op een afstand groter dan 2σ van de populatieproportie.
Welke steekproeven zijn dat?

Gegeven is het 95%-betrouwbaarheidsinterval $0,3 \pm 2 \cdot 0,02$.
 Wat is de breedte van dit 95%-betrouwbaarheidsinterval?

Theorie C Betrouwbaarheidsintervallen

Bij een onderzoek wordt doorgaans maar één steekproef genomen. Op basis daarvan wil je iets zeggen over de populatie. Als je bijvoorbeeld het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ berekent, dan is dat meestal niet gelijk aan het populatiegemiddelde μ . Het is zelfs onbekend hoe ver $\bar{X}$ bij het populatiegemiddelde vandaan ligt. Maar als de steekproef aselekt is, kun je wel een interval geven rondom $\bar{X}$, waar het populatiegemiddelde met 95% betrouwbaarheid binnen valt. Dit heet het 95%-betrouwbaarheidsinterval omdat het in 95% van de steekproeven het populatiegemiddelde bevat.

De formule van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde bij steekproefgemiddelde $\bar{X}$, steekproefstandaardafwijking S en steekproefomvang n is $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ oftewel $\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$. De breedte van dit interval is $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$. Zie de figuur hieronder.



figuur 10.29

Bij een kwalitatieve variabele kun je voor de populatie en de steekproef alleen een proportie berekenen. De formule van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie p bij

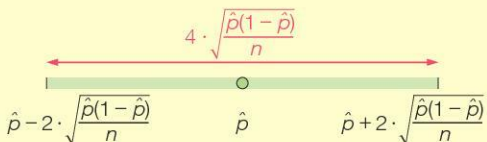
steekproefproportie $\hat{p}$ en steekproefomvang n is $\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

oftewel $\left[\hat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$.

De breedte van dit interval is $4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$. Zie de figuur hieronder.

Je mag ook gebruiken $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$, want

$$\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$



figuur 10.30

Voorbeeld

Uit onderzoek van het RIVM in 2018 blijkt dat slechts 47% van de Nederlanders ouder dan 4 jaar aan de bewegingsrichtlijnen voldoet. Neem aan dat voor dit onderzoek een aselechte steekproef van 5000 respondenten werd genomen.

- a Bereken hoeveel het RIVM er met 95% betrouwbaarheid maximaal naast zit. Geef je antwoord in procenten.
- b Het RIVM wil dat de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval maximaal 2% is.
Bereken welke steekproefomvang hierbij hoort. Ga uit van $\hat{p} = 0,5$.

Aanpak

- a Omdat $\hat{p} = 0,47$ het midden van het interval is, zit het RIVM er met 95% betrouwbaarheid maximaal $2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ naast.
- b Gebruik de formule voor de breedte met $\hat{p} = 0,5$ en breedte = 0,02 en los de vergelijking op die je zo krijgt.

Uitwerking

- a $\hat{p} = 0,47$ en $n = 5000$ geeft $2 \cdot \sqrt{\frac{0,47 \cdot 0,53}{5000}} \approx 0,014$.
Het RIVM zit er dus met 95% betrouwbaarheid maximaal 1,4% naast.
- b Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = 0,02$.
Voer in $y_1 = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{x}}$ en $y_2 = 0,02$.
De optie snijpunt geeft $x = 10000$.
De steekproefomvang moet dus minstens 10000 zijn.



Zie het voorbeeld.

- a Stel dat naar aanleiding van vraag b besloten wordt een steekproef van 10000 personen te nemen en dat blijkt dat $\hat{p} = 0,48$ in plaats van het uitgangspunt $\hat{p} = 0,5$.
Is het interval dan nauwkeurig genoeg voor het RIVM? Licht toe met een berekening.
- b Bereken bij de steekproef onder 10000 respondenten met $\hat{p} = 0,48$ het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij het percentage Nederlanders ouder dan 4 jaar dat voldoet aan de richtlijn. Rond af op één decimaal.

Een betrouwbaarheidsinterval noemen we nauwkeuriger als het minder breed is.

Let op: er wordt een 95%-betrouwbaarheidsinterval bij een percentage gevraagd.

43 Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde bij

- a $\bar{X} = 120$, $S = 36$ en $n = 144$
- b $\bar{X} = 64,4$; $S = 15,5$ en $n = 100$
- c $\bar{X} = 18$ en $\frac{S}{\sqrt{n}} = 0,32$.

44 Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie bij

- a $\hat{p} = 0,4$ en $n = 240$
- b $\hat{p} = 0,48$ en $n = 380$
- c $\hat{p} = \frac{5}{9}$ en $n = 10\,000$.

Rond in een betrouwbaarheidsinterval proporties af op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

A45 Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een steekproef

- a met 260 deelnemers met gemiddelde 23,4 en steekproefstandaardafwijking 1,9
- b van 700 personen waarbij 64% het onderzochte kenmerk had
- c een steekproef van 1000 voorstellingen waarbij in totaal 5350 personen voor het einde van de film vertrokken en waarbij de standaardafwijking van het aantal vertrokken personen per voorstelling 3,2 was.

Rond in een betrouwbaarheidsinterval gemiddelden af op één decimaal meer dan de gegeven standaardafwijking, tenzij anders wordt gevraagd.

46 Bereken welke steekproefomvang minimaal nodig is voor een 95%-betrouwbaarheidsinterval met

- a $\hat{p} = 0,3$ en een maximale breedte van het betrouwbaarheidsinterval van 0,04
- b $S = 4$ en een maximale breedte van het betrouwbaarheidsinterval van 0,8.

47 Bereken welke steekproefomvang nodig is voor een 95%-betrouwbaarheidsinterval met

- a $\hat{p} = 0,6$ en een maximale afwijking van 3%
- b een steekproefgemiddelde van 80 kg, een steekproefstandaardafwijking van 2 kg en een maximale afwijking van 0,5 kg.

A48
☐ ⊙ *

Gegeven zijn de volgende 95%-betrouwbaarheidsintervallen bij een populatiegemiddelde.

P: $[112,1; 124,1]$ en Q: $117 \pm 2 \cdot 3,3$

- a** Welke van deze betrouwbaarheidsintervallen is het meest nauwkeurig? Licht toe.

Bij betrouwbaarheidsinterval Q was S gelijk aan 66.

- b** Bereken de steekproefomvang bij betrouwbaarheidsinterval Q.
c Bereken hoe groot de steekproefomvang bij betrouwbaarheidsinterval Q moet zijn, zodat het betrouwbaarheidsinterval net zo nauwkeurig is als bij P.

R49
⊙ *

Een onderzoeker wil weten wat de proportie linkshandige Nederlanders is. Neem aan dat de Nederlandse bevolking uit 17 miljoen mensen bestaat en dat de onderzoeker uitgaat van een steekproefproportie van 0,1.

- a** Bereken hoeveel mensen hij moet opnemen in zijn steekproef voor een 95%-betrouwbaarheidsinterval met een maximale breedte van 0,02.

De onderzoeker vraagt zich af of de proportie linkshandigen in de wereld hetzelfde is als in Nederland. Hij gaat er vanuit dat de wereldbevolking uit 8 miljard mensen bestaat en dat de steekproefproportie weer 0,1 is. Hij berekent dat zijn steekproef net zo groot moet zijn als bij vraag a. Jori kan dit niet geloven, omdat de wereldbevolking veel groter is dan de bevolking van Nederland. Hij denkt dat de onderzoeker een rekenfout heeft gemaakt. Laura beweert dat de steekproefomvang in beide gevallen hetzelfde is. Volgens haar kun je dit zien aan de formule voor het berekenen van het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

- b** Leg uit wie volgens jou gelijk heeft.

Er worden nooit aselecte steekproeven genomen van de wereldbevolking.

- c** Leg uit waarom het praktisch gezien moeilijk is om een aselecte steekproef te nemen van de wereldbevolking.



E50

In 2014 publiceerde NRC handelsblad een onderzoek naar zelfcitatie in het werk van een Nederlandse econoom. Zelfcitatie is het kopiëren van zinnen uit eigen werk zonder bronvermelding. In een steekproef vond een NRC-journalist 8 artikelen waarin zelfcitatie plaatsvond. Neem aan dat deze steekproef aselect was. Een commissie onderzocht vervolgens alle 261 artikelen van de econoom en vond dat 60 hiervan zelfcitatie bevatten.

a Bereken de populatieproportie p .

De NRC-journalist heeft niet vermeld wat de steekproefomvang n was. Salma wil met 95% betrouwbaarheid berekenen wat het minimale en het maximale aantal artikelen in de steekproef kan zijn geweest. Hiertoe lost

ze de vergelijkingen $p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \frac{8}{n}$ en $p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \frac{8}{n}$ op.

- b** Met welke vergelijking berekent ze het maximale aantal artikelen in de steekproef?
- c** Bereken met 95% betrouwbaarheid wat het minimale en maximale aantal artikelen in de steekproef kan zijn geweest.

R51

De onderstaande stellingen gaan over de betekenis van het 95%-betrouwbaarheidsinterval $[0,715; 0,885]$.

Welke stellingen zijn juist?

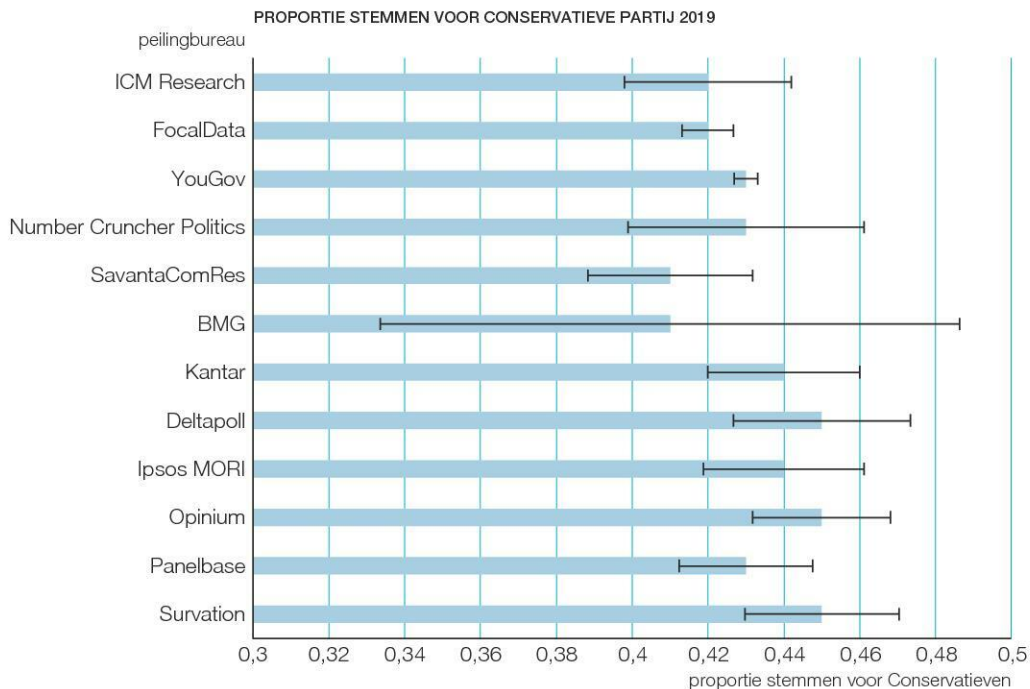
- I Je weet van de populatieproportie met 95% betrouwbaarheid dat deze 0,8 is.
- II Je weet van de populatieproportie met 95% betrouwbaarheid dat deze in het interval $[0,715; 0,885]$ ligt.
- III Je weet van de steekproefproportie met 100% betrouwbaarheid dat deze 0,8 is.
- IV Je weet van de steekproefproportie met 95% betrouwbaarheid dat deze 0,8 is.

52

Als er bij de onderstaande situaties sprake is van een aselechte steekproef uit de populatie, bereken dan het 95%-betrouwbaarheidsinterval. Als er geen sprake is van een aselechte steekproef uit de populatie, licht dan toe waarom dat niet zo is.

- a** In 2012 waren er onaangekondigde controles bij een aselechte steekproef van 119 piercing- en tatoeageshops uit een lijst van alle dergelijke shops in Nederland. Hiervan bleken er 36 niet aan alle eisen te voldoen.
- b** Voor een onderzoek naar hacken onder Nederlandse jongeren wordt aselechte een steekproef van 1044 jongeren genomen uit een panel van 33 000 mensen. Deze panelleden hebben zich aangemeld om aan onderzoeken deel te nemen. Van de jongeren in de steekproef zegt 14,2% wel eens een mobiele telefoon gehackt te hebben.
- c** Voor een onderzoek naar de beeldvorming van een zanger op Twitter heeft een onderzoeker toegang tot alle data van Twitter. Hierin staan 5000 berichten over de zanger, waarvan 1800 negatief blijken te zijn.

In de week voorafgaand aan de verkiezingen in het Verenigd Koninkrijk in 2019 zijn peilingen uitgevoerd. In de figuur zie je de proportie stemmen voor de conservatieve partij volgens 12 peilingbureaus. Aan het einde van de staven is steeds het 95%-betrouwbaarheidsinterval weergegeven.



figuur 10.31

- a** Voor de peiling van Deltapoll zijn 1800 mensen ondervraagd en was de steekproefproportie 0,45.
Bereken de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval dat bij deze peiling hoort en bepaal of deze ongeveer overeenkomt met de figuur.
- b** Aan de grootste peiling deden 105 612 mensen mee en aan de kleinste 166.
Leg op basis van de figuur uit welke organisatie bij welke steekproefomvang hoort.
- c** Bepaal met behulp van de figuur de steekproefomvang van de steekproef van Kantar.

Bij de verkiezingen wonnen de conservatieven met 44% procent van de stemmen. Dus $p = 0,44$ kan gezien worden als de populatieproportie.

- d** Bij BMG ligt de populatieproportie binnen het 95%-betrouwbaarheidsinterval.
Waarom is dat niet zo indrukwekkend?
- e** Bij hoeveel procent van de organisaties ligt de populatieproportie binnen het 95%-betrouwbaarheidsinterval? Is dat meer of minder dan je zou verwachten? Geef een mogelijke verklaring.

A54

In een land zijn er voor elke autobezitter 2 mensen zonder auto. In een steekproef blijken 18 van de 80 ondervraagden een auto te hebben. De populatieproportie valt buiten het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

- Toon dit met een berekening aan.
- Lieke beweert dat hieruit volgt dat de steekproef niet aselekt was. Leg uit waarom je het wel of niet eens bent met Lieke.

A55

Hoewel katten voor de gezelligheid in huis worden gehaald zijn het eigenlijk roofdieren. Er bestaan daarom zorgen over de invloed van jagende huiskatten op beschermde diersoorten.

Onderzoekers willen graag weten hoe groot het jachtgebied van katten is. Om deze oppervlakte te bepalen hebben onderzoekers GPS-trackers bevestigd aan een steekproef van 925 huiskatten die naar buiten mogen. Neem aan dat de steekproef aselekt is.

De gemiddelde oppervlakte van het jachtgebied van de katten in de steekproef was $0,019 \text{ km}^2$ met een standaardafwijking van $0,012 \text{ km}^2$.

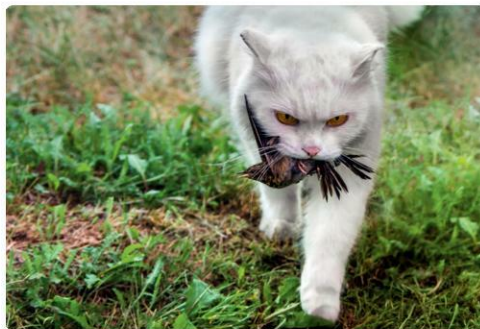
- Beredeneer op basis van deze gegevens dat de oppervlakte van het jachtgebied in de steekproef niet normaal verdeeld kan zijn.
- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de oppervlakte van het jachtgebied in km^2 .

Er waren drie katten in de steekproef die per dag jaagden op een gebied van meer dan 1 km^2 . Een van deze katten was Max, waarvan een route te zien is op de foto hiernaast. Gedurende 50 aselekt gekozen dagen is de oppervlakte van het jachtgebied van Max bijgehouden. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval dat hoort bij de oppervlakte van zijn jachtgebied in km^2 is $[1,273; 3,478]$. Hieruit volgt dat S ongeveer gelijk is aan 3,9.

- Bereken S in drie decimalen.

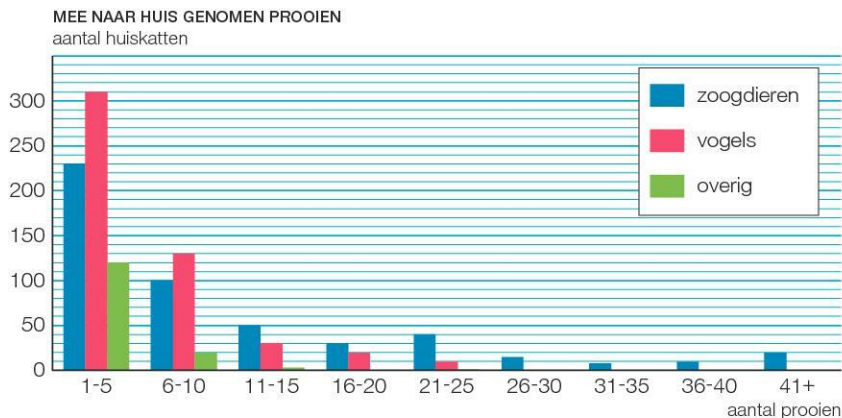
Door het jachtgebied van Max meer dan 50 dagen te onderzoeken, kun je een nauwkeuriger betrouwbaarheidsinterval opstellen.

- Bereken hoeveel dagen het onderzoek moet duren om een 95%-betrouwbaarheidsinterval met een breedte van 1 km^2 te krijgen. Neem aan dat $S = 3,9 \text{ km}^2$.



A56
☐ ⊗ *

In Groot-Brittannië werd een representatieve steekproef van 986 kattenbezitters genomen. Zij hielden gedurende vijf maanden bij hoeveel prooien hun kat mee naar huis nam. Neem aan dat elke kattenbezitter één kat heeft. De resultaten staan in het staafdiagram.



figuur 10.32

Amel trekt op grond van het staafdiagram twee conclusies bij deze gegevens.

I Alle huiskatten hebben minstens één vogel mee naar huis genomen.

II Er werden meer vogels dan zoogdieren mee naar huis genomen.

a Toon met berekeningen aan dat je deze conclusies niet kunt trekken.

b Geef het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie huiskatten in Groot-Brittannië die vogels mee naar huis nemen.

Het totale aantal mee naar huis genomen prooien in de periode van de steekproef is 14 370. Het totale aantal huiskatten in Groot-Brittannië is 9 miljoen. Neem verder aan dat 25% van de prooien mee naar huis wordt genomen en dat de katten gedurende het jaar evenveel prooien vangen.

c Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het totale aantal prooien in miljoenen per jaar dat door huiskatten wordt gevangen in Groot-Brittannië. Gebruik dat $S = 14,1$ mee naar huis genomen prooien per kat.

A57
*

Zie opgave 56.

Een onderzoeker wil een 95%-betrouwbaarheidsinterval opstellen voor het aantal prooien per jaar van de 2,6 miljoen Nederlandse huiskatten. Op basis van onder andere de bovenstaande studie verwacht ze een gemiddelde van 140 prooien per kat per jaar.

Hoeveel kattenbezitters moeten in haar steekproef zitten, zodat haar 95%-betrouwbaarheidsinterval een maximale breedte van 50 miljoen heeft? Ga ervan uit dat de kattenbezitters allemaal één kat hebben en gebruik dat $S = 134$.

Terugblik

De normale verdeling

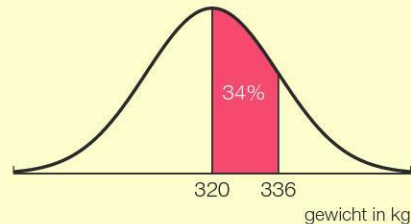
Bij een normale verdeling horen de volgende vuistregels.

- ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$
- bijna 100% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$

Je komt de normale verdeling tegen in twee situaties:

- bij sommige hoeveelheden uit het dagelijks leven
- bij steekproefgemiddelden en steekproefproporties, die een steekproevenverdeling vormen als er heel veel steekproeven worden genomen.

Je mag bij een normale verdeling van gewichten met $\mu = 320$ kg en $\sigma = 16$ kg zeggen dat 34% van de gewichten tussen 320 kg en 336 kg ligt.



Werken met betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$$\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right].$$
 Hierin is $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, S de

steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.

De breedte van dit interval is $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$$\left[\hat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right].$$
 Hierin is $\hat{p}$ de

steekproefproportie en n de steekproefomvang.

De breedte van dit interval is $4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

Wil je dat de breedte van een 95%-betrouwbaarheidsinterval maximaal 1,2 is bij steekproefgemiddelde 12,6 en steekproefstandaardafwijking 5,2

dan bedenk je dat de breedte $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ is met $S = 5,2$.

Je lost op $4 \cdot \frac{5,2}{\sqrt{n}} = 1,2$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \frac{5,2}{\sqrt{x}}$ en $y_2 = 1,2$.

De optie snijpunt geeft $x = 300,44...$

De steekproefomvang moet dus minstens 301 zijn.

Eindopdracht Dunks in de WNBA

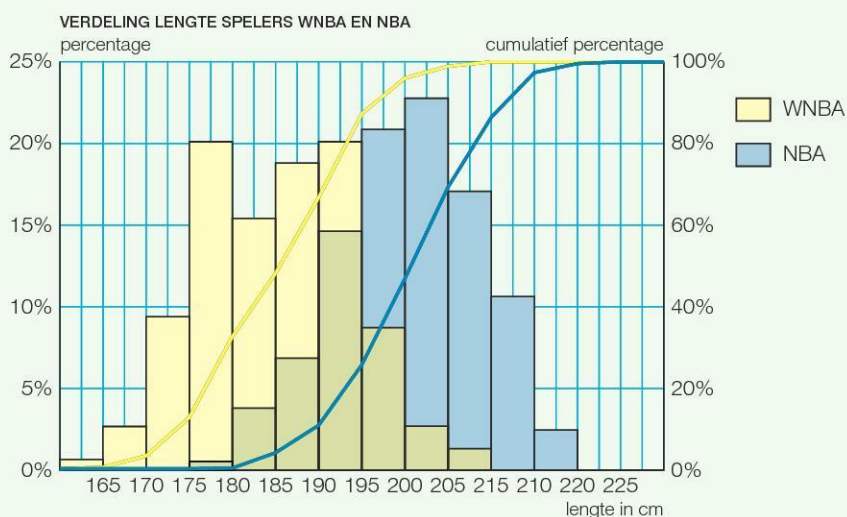
De Women's National Basketball Association (WNBA) is de bekendste Amerikaanse basketbalcompetitie voor dames. De WNBA werd in 1996 opgericht en heeft een opzet die sterk lijkt op die van de NBA.

Wanneer een basketbalspeler door te springen de basketbal boven de ring weet te brengen en vervolgens in een neerwaartse beweging scoort, spreekt men van een (slam)dunk. In de NBA komt deze wijze van scoren vaak voor, terwijl er in de WNBA minder dan tien spelers zijn die op deze wijze kunnen scoren. De recordhouder aantal dunks binnen de WNBA is Brittney Griner.

Het is niet verrassend dat weinig WNBA-spelers dunken, omdat ze doorgaans een stuk kleiner zijn en de ring op dezelfde hoogte (305 cm) hangt als in de NBA. In de figuur hieronder staan gegevens over de lengte van spelers uit de NBA en WNBA in 2019.



Brittney Griner dunkt tijdens haar debuut-wedstrijd in de WNBA



Ga in deze opgave uit van de volgende aannames:

- Spelers in de WNBA springen 48,8 cm en in de NBA 67,1 cm.
- Het bereik van een speler is 34% meer dan zijn of haar lengte.
- Om de bal te kunnen dunken moet je 10 cm boven de ring komen.
- Onderzoek hoe hoog de ring in de WNBA zou moeten hangen om te zorgen dat (op basis van de aannames hierboven) hetzelfde deel van de spelers kan dunken als in de NBA.

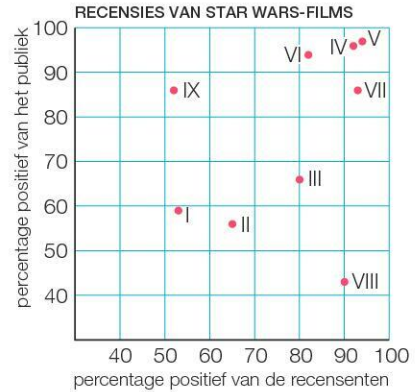


Diagnostische toets

10.1 Statistische diagrammen

1 Op de website Rotten Tomatoes worden door zowel recensenten als het gewone publiek films beoordeeld met 'fresh' (positief) of 'rotten' (negatief). Zie het spreidingsdiagram met beoordelingen van negen Star Wars-films.

- Is een beoordeling op Rotten Tomatoes een kwalitatieve of een kwantitatieve variabele? En het aantal mensen dat positief is over een Star Wars-film per groep?
- Bij welke film is het verschil tussen het oordeel van het publiek en de recensenten het grootst? Bepaal de grootte van dit verschil.
- Voor welke films is het percentage positieve beoordelingen door recensenten groter dan door het publiek?



figuur 10.33

10.2 Causaliteit en groepen vergelijken

2 Wetenschappers verzamelden gegevens van 40 monarchvlinders die in gevangenschap zijn opgegroeid. Ze vergeleken deze met een groep van 41 monarchvlinders in het wild. Onder de vlinders in gevangenschap waren 24 mannetjes en bij die in het wild 27.

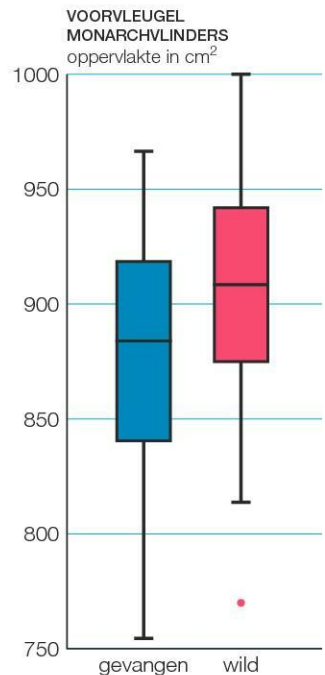
- Is de variabele geslacht kwalitatief of kwantitatief?
- Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in geslacht tussen monarchvlinders in gevangenschap en in het wild groot, middelmatig of gering is.

Van beide groepen vlinders is de oppervlakte van een voorvleugel gemeten. Zie de tabel en boxplots.

VOORVLEUGELOPPERVLAKTE

	gevangen	wild
$\bar{X}$	877,1 cm ²	903,1 cm ²
S	55,7 cm ²	73,3 cm ²

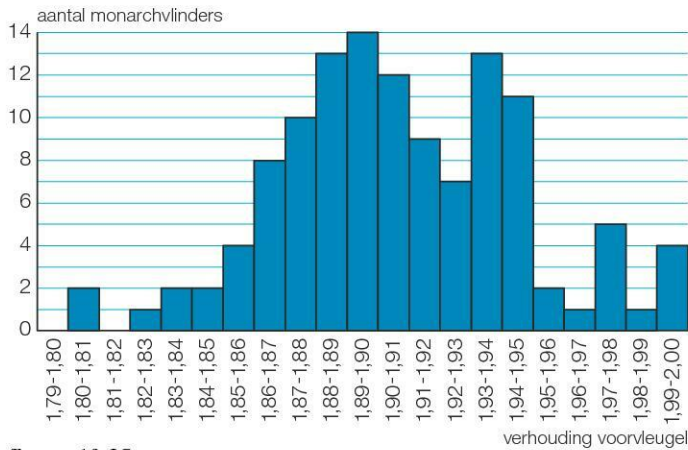
- Onderzoek met twee associatiematen de grootte van het verschil in voorvleugeloppervlakte tussen de groepen monarchvlinders.
- Mag je op grond van dit onderzoek concluderen dat gevangenschap voor deze vlinders een oorzaak is van een kleinere oppervlakte van de voorvleugel? Licht toe.



figuur 10.34

10.3 De normale verdeling en betrouwbaarheidsintervallen

- 3** Van 123 monarchvlinders is van een voorvleugel de verhouding gemeten van de lengte tot de breedte. Zie de figuur hieronder.



figuur 10.35

- a** Licht de mediaan in de modale klasse? Licht toe.
b Geef twee redenen waarom dit geen normale verdeling is.

Bij de steekproef was de gemiddelde verhouding 1,91 met $\sigma = 0,04$.

- c** Bereken hoeveel procent van de vlinders met een verhouding van minder dan 1,83 je zou verwachten als er sprake zou zijn van een normale verdeling. Komt dit percentage ongeveer overeen met figuur 10.35?

- 4** Het longfonds heeft in 2019 een steekproef gehouden onder Nederlanders met een longziekte. Van de 220 ondervraagden gaven 55 aan verhuisd te zijn naar een plek met schonere lucht. Neem aan dat de steekproef aselekt is.

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage personen dat is verhuisd naar een plek met schonere lucht.
b Waarom is de steekproef van het longfonds geen aselechte steekproef voor een onderzoeker die wil weten hoeveel Nederlanders zijn verhuisd naar een plek met schonere lucht?

- 5** Voor een onderzoek uit 2017 naar *fast fashion* is aan 50 volwassen Nederlanders gevraagd hoeveel schoenen en kledingstukken zij bezitten en hoeveel daarvan ongebruikt zijn. Zie de tabel hiernaast. Neem aan dat de steekproef aselekt is.

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddeld aantal jassen van een volwassen Nederlander. Gebruik dat $S = 2,2$.

	totaal	ongebruikt
schoenen	482	117
broeken	475	124
t-shirts	1282	353
jumpsuits	49	21
jassen	284	55

Een kledingfabrikant wil een 95%-betrouwbaarheidsinterval met een breedte van maximaal 4% opstellen voor het percentage ongebruikte jumpsuits in Nederland. De fabrikant gaat uit van $\hat{p} = 0,5$.

- b** Bereken het aantal personen dat in de steekproef moet zitten.

11

Formules en variabelen

Wat leer je?

- Gebieden tekenen en interpreteren.
- Formules herleiden en omwerken.
- Rekenen met formules bij recht evenredige en omgekeerd evenredige verbanden.
- Redeneren met formules.
- Werken met wiskundige modellen.

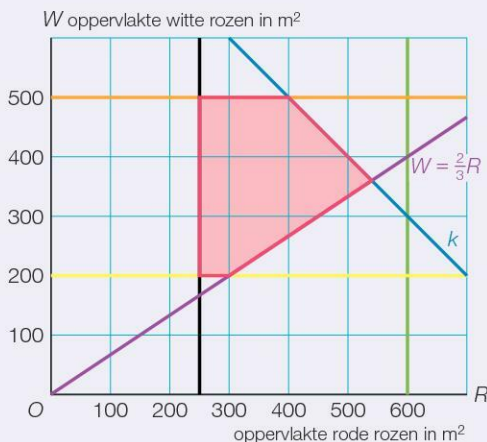


Beginopdracht De rozenkweker

[▶ WERKBLAD] Kweker Jansma heeft enkele kassen bestemd voor het kweken van Toprozen. Om het predicaat Toproos te krijgen moeten de rozen aan een aantal criteria voldoen, zoals resistentie tegen ziektes, groeikracht, vorm en bloemkleur. Hiervoor worden de rozen vier keer in een jaar gekeurd. Na het toekennen van het predicaat wordt elke drie jaar opnieuw gekeurd.

Jansma heeft maximaal 900 m² in zijn kassen beschikbaar voor het kweken van Toprozen. Hij gaat rode en witte Toprozen kweken. Voor de rode rozen wil hij minimaal 250 m² en maximaal 600 m² gebruiken. Voor de witte rozen wil hij minimaal 200 m² en maximaal 500 m² gebruiken. Ook wil hij voor de rode rozen hoogstens anderhalf keer zoveel oppervlakte gebruiken als voor de witte rozen.

Om te zien welke mogelijkheden hij dan heeft, maakt Jansma de figuur hiernaast. Hij heeft het gebied gekleurd dat voldoet aan alle genoemde voorwaarden. In deze figuur zie je twee schuine lijnen. Bij de ene schuine lijn hoort de formule $W = \frac{2}{3}R$. De andere schuine lijn is k .



figuur 11.1

- Hoe volgt uit de tekst dat $R = 1\frac{1}{2}W$? Laat zien dat hieruit volgt dat $W = \frac{2}{3}R$.
- Jansma heeft maximaal 900 m² in zijn kassen beschikbaar. Hieruit volgt de vergelijking van k .
Geef deze vergelijking.
- Kan Jansma kiezen voor 520 m² rode rozen en 350 m² witte rozen? Licht toe.
En kan hij kiezen voor 350 m² rode rozen en 520 m² witte rozen? Licht toe.

Jansma wil nog een voorwaarde toevoegen. Hij wil minstens zoveel oppervlakte voor de rode rozen gebruiken als voor de witte rozen.

- Teken in de figuur op het werkblad de lijn die bij deze voorwaarde hoort.
Kleur daarna het gebied dat aan alle voorwaarden voldoet.

Gebruik bij de volgende vragen de figuur die je zojuist hebt getekend. Neem aan dat er per m² evenveel rode als witte rozen worden gekweekt.

- Op de veiling krijgt Jansma 80 cent voor een rode roos en 60 cent voor een witte roos.
Hoeveel m² kan Jansma het beste gebruiken voor de rode rozen en hoeveel m² voor de witte rozen als hij een zo groot mogelijke opbrengst wil hebben?
- Beantwoord dezelfde vraag nog eens als Jansma op de veiling 60 cent voor een rode roos krijgt en 80 cent voor een witte roos.

Voorkennis Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

Theorie A De vergelijking $ax + by = c$

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$. De grafiek is een rechte lijn.

Om de lijn k : $2x + 3y = 12$ te tekenen, bereken je de coördinaten van twee punten.

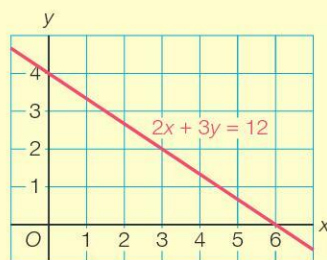
$x = 0$ geeft $2 \cdot 0 + 3y = 12$, dus $y = 4$

$y = 0$ geeft $2x + 3 \cdot 0 = 12$, dus $x = 6$

Zo krijg je de tabel

x	0	6
y	4	0

De lijn zie je in figuur 11.2.



figuur 11.2

Je kunt bij $2x + 3y = 12$ de variabele y vrijmaken.

Je krijgt $2x + 3y = 12$

$$3y = -2x + 12$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

Dus k : $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

Uit k : $y = -\frac{2}{3}x + 4$ lees je af dat van lijn k de richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{3}$ is.

Notatie $rc_k = -\frac{2}{3}$.

Ook van de lijn l : $y = -\frac{2}{3}x + 2$ is de richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{3}$.

Omdat $rc_k = rc_l$, zijn de lijnen k en l evenwijdig.

Je kunt de formule van l schrijven in de vorm $ax + by = c$.

Je krijgt $y = -\frac{2}{3}x + 2$

$$\frac{2}{3}x + y = 2$$

$$2x + 3y = 6$$

Dus l : $2x + 3y = 6$.

Ook aan deze vorm kun je zien dat de lijn l evenwijdig is met de lijn k : $2x + 3y = 12$, want in beide vergelijkingen is het linkerlid $2x + 3y$.

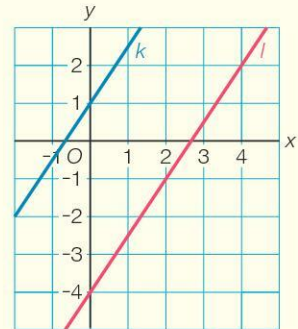
Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $k: 3x - 2y = -2$ en $l: 3x - 2y = 8$.

- a Teken k en l in één figuur.
- b Bovendien is gegeven de lijn $m: y = -0,5x + 3$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en m .
- c De lijn n gaat door het punt $A(1, 4)$ en is evenwijdig met k .
Stel een vergelijking op van n in de vorm $ax + by = c$.

Uitwerking

a $k: 3x - 2y = -2$	x	0	$-\frac{2}{3}$
	y	1	0
$l: 3x - 2y = 8$	x	0	$2\frac{2}{3}$
	y	-4	0



- b $k: 3x - 2y = -2$ **Maak y vrij.**
 $-2y = -3x - 2$
 $y = 1,5x + 1$
 k snijden met m geeft $1,5x + 1 = -0,5x + 3$
 $2x = 2$
 $x = 1$
 $x = 1$ geeft $y = 1,5 \cdot 1 + 1 = 2,5$, dus het snijpunt is $(1; 2,5)$.
- c n evenwijdig met k , dus $n: 3x - 2y = c$.
Door $A(1, 4)$ geeft $c = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = -5$.
Dus $n: 3x - 2y = -5$.

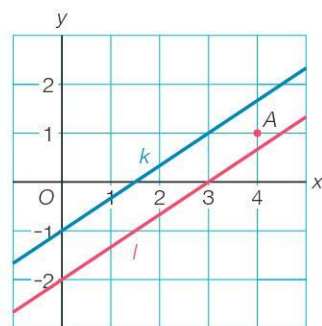
- 1** Zie het voorbeeld.
- a Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m .
 - b De lijn p gaat door $O(0, 0)$ en is evenwijdig met k .
Stel een vergelijking op van p in de vorm $ax + by = c$.

- 2** Gegeven zijn de lijnen $k: 4x + y = 6$ en $l: 4x + y = 2$.
- a Teken k en l in één figuur.
 - b Bovendien is gegeven de lijn $m: y = x - 1$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en m .
 - c De lijn n gaat door het punt $A(3, 2)$ en is evenwijdig met k .
Stel een vergelijking op van n in de vorm $ax + by = c$.

11.1 Grafieken en gebieden

01 In de figuur hiernaast zijn de lijnen $k: 2x - 3y = 3$ en $l: 2x - 3y = 6$ getekend.

- Bereken van k en l de richtingscoëfficiënt.
- De lijn m gaat door het punt $A(4, 1)$ en is evenwijdig met k .
Stel een vergelijking op van m in de vorm $ax + by = c$.



figuur 11.3

Theorie A Evenwijdige lijnen

De lijnen $p: y = 0,18x + 3$ en $q: y = 0,18x + 5$ zijn evenwijdig, omdat de richtingscoëfficiënten gelijk zijn. Er geldt $rc_p = rc_q = 0,18$.

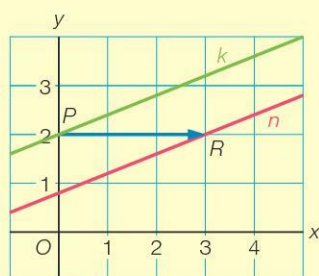
Ook de lijnen $r: 3,4x + 1,5y = 6$ en $s: 3,4x + 1,5y = 9$ zijn evenwijdig.

Lijnen met vergelijkingen van de vorm $ax + by = c$ zijn evenwijdig als het linkerlid gelijk is.

De lijn $k: y = 0,4x + 2$ snijdt de y -as in het punt $P(0, 2)$. De lijn k wordt 3 naar boven geschoven, zo krijg je de lijn l . Deze lijn is evenwijdig met k en snijdt de y -as in het punt $Q(0, 5)$. Dus de formule van l is $y = 0,4x + 5$.

De lijn k wordt 3 naar beneden verschoven, zo krijg je de lijn $m: y = 0,4x - 1$.

Je kunt k ook 3 naar rechts verschuiven. Zo krijg je de lijn n .



figuur 11.4

$$x_P = 0, \text{ dus } x_R = 0 + 3 = 3$$

De lijn n is evenwijdig met k en het punt $R(3, 2)$ ligt op n .
 $R(3, 2)$ op $y = 0,4x + b$ geeft $0,4 \cdot 3 + b = 2$, dus $b = 0,8$.
Dus $n: y = 0,4x + 0,8$.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde zie je hoe je te werk gaat als je een lijn verschuift waarvan de vergelijking in de vorm $ax + by = c$ is gegeven.

Voorbeeld

Gegeven is de lijn k : $5x + 4y = 8$.

- a** De lijn k wordt 3 naar boven verschoven, zo ontstaat de lijn l .
Stel een vergelijking van l op in de vorm $ax + by = c$.
- b** De lijn k wordt 3 naar rechts verschoven, zo ontstaat de lijn m .
Stel een vergelijking van m op in de vorm $ax + by = c$.

Aanpak

Bereken de coördinaten van een punt op k en verschuif dit punt. Gebruik dat de verschoven lijn evenwijdig is met k , dus dat de vergelijking van de lijn van de vorm $5x + 4y = c$ is.

Uitwerking

- a** $x = 0$ geeft $y = 2$, dus $(0, 2)$ op k .
3 naar boven, dus $(0, 5)$ op l .
 l evenwijdig met k , dus l : $5x + 4y = c$.
 $(0, 5)$ op l geeft $c = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 5 = 20$.
Dus l : $5x + 4y = 20$.
- b** 3 naar rechts, dus $(3, 2)$ op m .
 m evenwijdig met k , dus m : $5x + 4y = c$.
 $(3, 2)$ op m geeft $c = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 23$.
Dus m : $5x + 4y = 23$.



R2 Zie het voorbeeld.

- a** De lijn k wordt 4 naar beneden verschoven, zo ontstaat de lijn n .
Stel een vergelijking van n op in de vorm $ax + by = c$.
- b** De lijn k wordt 5 naar links verschoven, zo ontstaat de lijn p .
Stel een vergelijking van p op in de vorm $ax + by = c$.



- a** De lijn k : $2x - 3y = 12$ wordt 5 naar boven verschoven. Zo ontstaat de lijn l .
Stel een vergelijking van l op in de vorm $ax + by = c$.
- b** De lijn m : $y = 1,6x + 3$ wordt 4 naar rechts verschoven. Zo ontstaat de lijn n .
Stel de formule op van n .



4

Als een groot vrachtschip de motoren uitzet, dan neemt de snelheid langzaam af. In deze opgave nemen we aan dat er een lineair verband is tussen de snelheid en de tijd.

Een vrachtschip zet bij een snelheid van 30 km/uur de motoren uit. Het duurt vervolgens 45 minuten tot het schip stil ligt. De snelheid is te beschrijven met de formule $v = -\frac{2}{3}t + 30$. Hierin is v de snelheid in km/uur en t de tijd in minuten.

a Toon aan dat deze formule uit de gegevens volgt.

Als de beginsnelheid 22 km/uur is, dan geldt de formule $v = -\frac{2}{3}t + 22$.

b Bereken na hoeveel minuten het schip stil ligt als de beginsnelheid 22 km/uur is.

c Teken de grafieken van $v = -\frac{2}{3}t + 30$ en $v = -\frac{2}{3}t + 22$ in één figuur.

d In de figuur van vraag c kun je het gebied aangeven dat geldt als de beginsnelheid tussen 22 en 30 km/uur ligt.

Kleur dit gebied.

e Als 24 minuten na het uitzetten van de motoren de snelheid 10 km/uur is, geldt ook een formule van de vorm $v = -\frac{2}{3}t + b$.

Bereken b .

f Als bij een gegeven snelheid tijdens het afremmen de bijbehorende tijd moet worden berekend, is het handig als de formule in de vorm $t = av + b$ is geschreven.

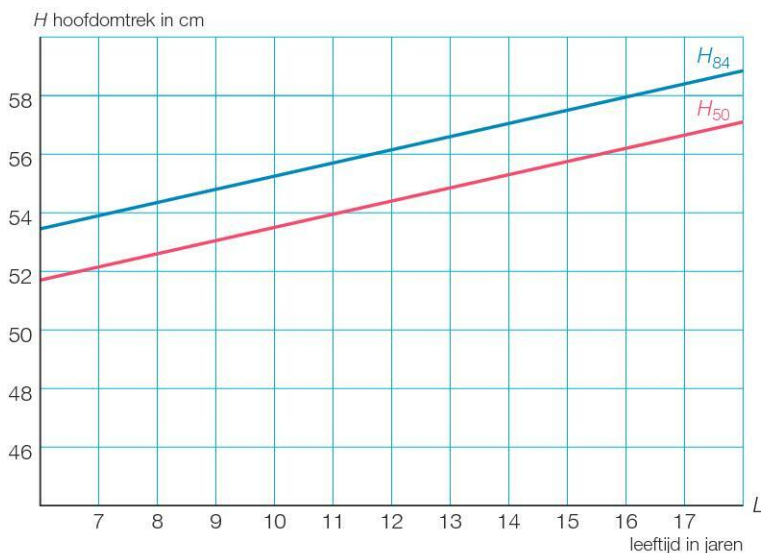
Schrijf de formule $v = -\frac{2}{3}t + 30$ in de vorm $t = av + b$.



[▶ WERKBLAD] Voor Nederlandse jongens van dezelfde leeftijd is de hoofdomtrek normaal verdeeld. De gemiddelde hoofdomtrek noteren we met H_{50} , omdat 50% van de jongens een kleinere hoofdomtrek heeft dan het gemiddelde.

Er bestaat een lineair verband tussen de hoofdomtrek en de leeftijd. Er geldt $H_{50} = 0,45L + 49$. Hierin is L de leeftijd in jaren met L tussen 6 en 18 en H_{50} de gemiddelde hoofdomtrek in cm.

Niet iedereen heeft bij een bepaalde leeftijd dezelfde hoofdomtrek. In de figuur hieronder zie je ook de lijn H_{84} . Deze lijn is evenwijdig met de lijn H_{50} . De lijn H_{84} ligt één standaardafwijking boven de lijn H_{50} . De standaardafwijking is 1,75 cm.



figuur 11.5

a Geef de formule van H_{84} .

De lijn H_{16} ligt één standaardafwijking onder de lijn H_{50} .

b Geef de formule van H_{16} en teken deze lijn in de figuur op het werkblad.

c Gebruik een vuistregel bij de normale verdeling om op het werkblad het gebied te kleuren waarin de hoofdomtrek van 95% van alle Nederlandse jongens tussen 6 en 18 jaar ligt.

d Als je bij een gemiddelde hoofdomtrek de leeftijd wilt berekenen, is het handig de formule van H_{50} te schrijven in de vorm $L = aH_{50} + b$. Schrijf de formule $H_{50} = 0,45L + 49$ in de vorm $L = aH_{50} + b$. Rond a af op twee decimalen en b op gehelen.

e De formule $H_{50} = 0,45L + 49$ is ook te schrijven in de vorm $pH_{50} + qL = 1$. Bereken p en q . Rond af op drie decimalen.

A6*****

Gegeven is de lijn $k: \frac{x}{250} + \frac{y}{350} = 1$.

De vergelijking van k is te schrijven in de vorm $7x + 5y = c$.

- Bereken c .
- De lijn m gaat door het punt $(3,6; 1,3)$ en is evenwijdig met k .
Stel van m een vergelijking op in de vorm $ax + by = c$ met a, b en c gehele getallen.
- De lijn $l: px + 8y = 2000$ is evenwijdig met k .
Bereken p .

07**☐ ⊗ ***

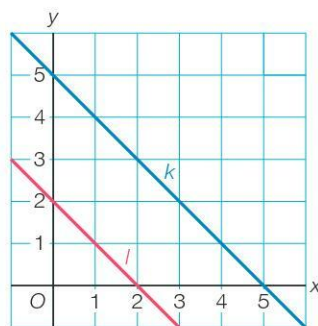
In figuur 11.6 zijn de lijnen $k: x + y = 5$ en $l: x + y = 2$ getekend.

De lijn $m: x + y = 3$ ligt tussen deze lijnen in.

- Licht dit toe.

Het gebied boven de lijn l kun je aangeven met de ongelijkheid $x + y > 2$.

- Geef de ongelijkheid van het gebied onder de lijn k .
- Welk gebied hoort bij de ongelijkheid $2 < x + y < 5$?

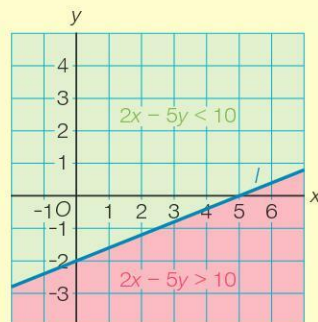


figuur 11.6

Theorie B De ongelijkheid $ax + by \leq c$

De lijn $l: 2x - 5y = 10$ verdeelt het vlak in twee **halfvlakken**. De grafiek van $2x - 5y > 10$ is het halfvlak dat bestaat uit alle punten waarvoor $2x - 5y > 10$ klopt. Om erachter te komen welk halfvlak bij $2x - 5y > 10$ hoort, vul je in de ongelijkheid de coördinaten van een handig gekozen punt in. Neem je bijvoorbeeld $(0, 0)$, dan krijg je $2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 > 10$ oftewel $0 > 10$; dit klopt niet. Dus de grafiek van $2x - 5y > 10$ is het halfvlak waarin $(0, 0)$ niet ligt. En zo is de grafiek van $2x - 5y < 10$ het halfvlak waarin $(0, 0)$ wel ligt. Zie figuur 11.7

Bij $ax + by \geq c$ hoort een **halfvlak met rand**. De rand is de lijn $ax + by = c$. Bij het tekenen van een halfvlak met rand geef je de rand dezelfde kleur als het halfvlak.



figuur 11.7

De grafiek van $ax + by \leq c$ is een halfvlak met rand begrensd door de lijn met vergelijking $ax + by = c$.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde zie je hoe je bij een lineaire ongelijkheid met twee variabelen de grafiek tekent.

Voorbeeld

Teken de grafiek van $2x + 3y \leq -6$.

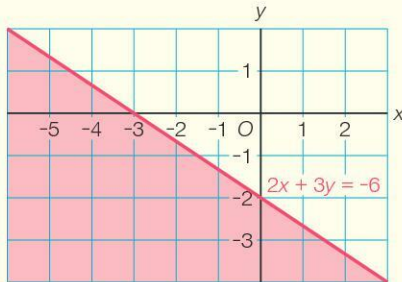
Uitwerking

De lijn $2x + 3y = -6$.

x	0	-3
y	-2	0

$(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 \leq -6$; dit klopt niet.

Je moet het halfvlak met rand hebben waar $(0, 0)$ niet in ligt.



8 Teken in verschillende figuren de grafiek van

- a** $x + 2y \geq 6$ **b** $x - y \geq 2$ **c** $3x + y \leq -1$

9 Bij de ongelijkheid $2x + y \leq 0$ heb je niets aan $(0, 0)$ als controlepunt.

- a** Waarom is $(0, 0)$ geen geschikt controlepunt?
b Teken de grafiek van $2x + y \leq 0$.

10 Teken in verschillende figuren de grafiek van

- a** $x - y \geq 0$ **c** $3x - y \leq -1$ **e** $y \geq 3x$
b $x \geq 3$ **d** $y \leq 2$ **f** $x + y \geq 0$

A11 Teken in verschillende figuren de grafiek van

- a** $2p - 3q \leq 6$ **b** $3F + 4G \leq 12$ **c** $N \leq 4 - t$

12 Voor het rode gebied in de figuur hiernaast geldt

- a** $2 \leq x \leq 4$ en $-3 \leq x - y \leq -1$.

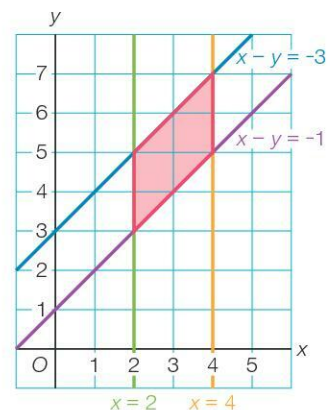
Hierbij betekent $2 \leq x \leq 4$ dat het gebied tussen de lijnen $x = 2$ en $x = 4$ ligt.

En $-3 \leq x - y \leq -1$ betekent dat het gebied tussen de lijnen $x - y = -3$ en $x - y = -1$ ligt.

Het rode gebied voldoet aan zowel $2 \leq x \leq 4$ als $-3 \leq x - y \leq -1$.

Teken het gebied waarvoor geldt

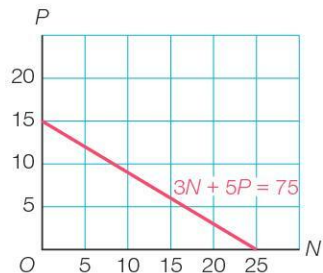
$1 \leq x \leq 4$ en $2 \leq x + y \leq 5$.



figuur 11.8

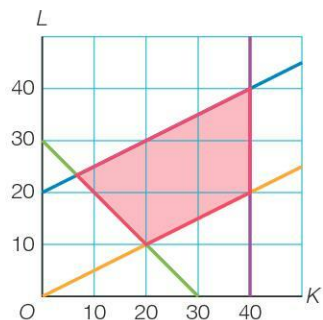
- 13**  **a** Teken het gebied waarvoor geldt $1 \leq y \leq 2$ en $3 \leq x + y \leq 5$.
b Teken het gebied waarvoor geldt $2 \leq x \leq 5$ en $1 \leq y \leq 4$ en $6 \leq x + 2y \leq 10$.

- A14**    In figuur 11.9 is de lijn $3N + 5P = 75$ getekend. Neem de figuur over en teken hierin het gebied waarvoor geldt $5 \leq N \leq 20$ en $5 \leq P \leq 20$ en $75 \leq 3N + 5P \leq 125$.



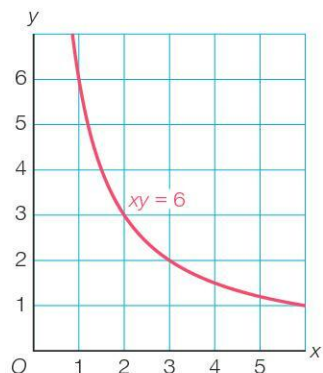
figuur 11.9

- 15**    Het gebied in figuur 11.10 is begrensd door rode lijnen. Twee van deze lijnen zijn $K - 2L = 0$ en $K - 2L = 40$. Schrijf de ongelijkheden op die bij dit gebied horen.



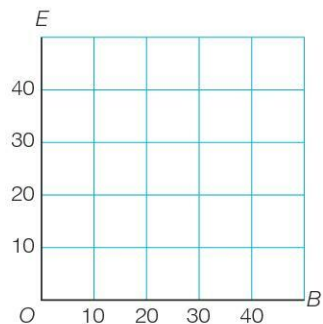
figuur 11.10

- A16**    [**WERKBLAD**] In figuur 11.11 is de grafiek van $xy = 6$ getekend. Teken op het werkblad het gebied waarvoor geldt $xy \leq 6$ en $x \geq 1$ en $-1 \leq x - y \leq 1$.



figuur 11.11

- A17**    [**WERKBLAD**] In een nieuw aan te leggen plantsoen wil men beuken en eiken planten. Er is plaats voor maximaal 40 bomen. Verder wil men minimaal 10 en ten hoogste 25 eiken en ook minstens evenveel eiken als beuken. Noem het aantal beuken B en het aantal eiken E .
a Welke ongelijkheden horen bij de situatie?
b Teken op het werkblad het gebied dat bij de ongelijkheden van vraag a hoort.
c Onderzoek met de figuur van vraag b hoeveel beuken men nog maximaal kan planten als wordt gekozen voor 15 eiken.



figuur 11.12

[► WERKBLAD] In ons voedsel zitten voedingsstoffen, zoals koolhydraten, eiwitten en vetten. Ons lichaam haalt energie uit deze voedingsstoffen. Om gezond te blijven is het belangrijk dat je niet te weinig energie binnenkrijgt, maar ook niet te veel. Een eenheid voor energie is kilocalorie (kcal).

De energiebehoefte is van veel factoren afhankelijk, bijvoorbeeld je leeftijd en hoe actief je bent. Het Europese voedselagentschap EFSA heeft onderzocht dat de gemiddelde energiebehoefte voor mensen van 17 jaar 2600 kcal per dag is.



In de tabel staat informatie en advies over verschillende voedingsstoffen.

voedingsstof	energie in kcal per gram	minimale aantal kcal per dag	maximale aantal kcal per dag
koolhydraten	4	1040	1820
eiwitten	4	260	650
vetten	9	geen	1040

Jori is 17 jaar en krijgt op een dag 275 gram koolhydraten, 150 gram eiwitten en 100 gram vetten binnen.

- Laat met een berekening zien dat Jori op deze dag 2600 kcal binnenkrijgt.
- Onderzoek of de hoeveelheden koolhydraten, eiwitten en vetten aan het advies voldoen.

Door een gebied te tekenen kun je onderzoeken welke samenstelling van voedingsstoffen aan het advies voldoen. We noemen het aantal gram koolhydraten dat iemand per dag binnenkrijgt x , het aantal gram eiwitten y en het aantal gram vetten z .

Uit de gegevens volgen de ongelijkheden $1040 \leq 4x \leq 1820$ en $260 \leq 4y \leq 650$.

- Licht deze ongelijkheden toe.

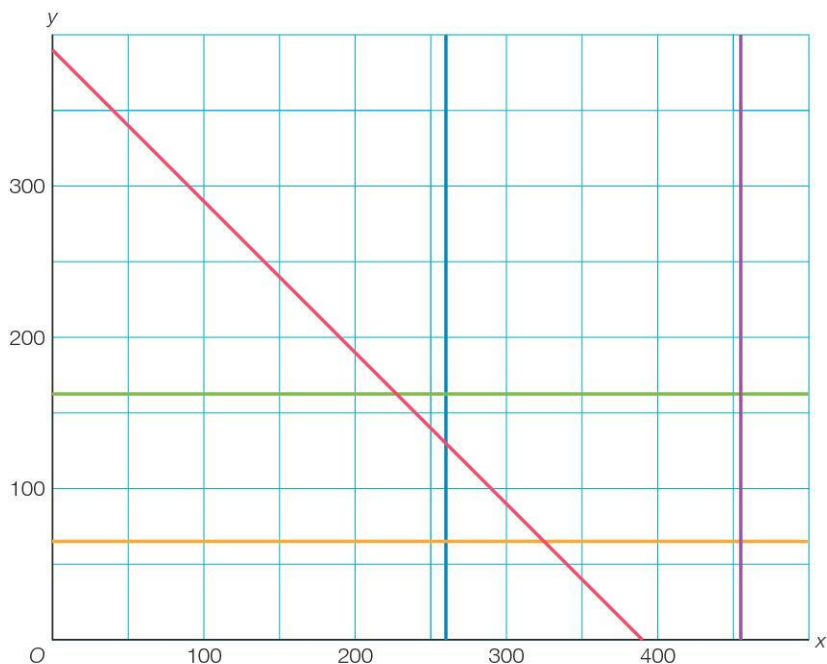
Er geldt $9z = 2600 - 4x - 4y$.

d Licht dit toe.

Uit $9z = 2600 - 4x - 4y$ en de gegevens volgt de ongelijkheid $2600 - 4x - 4y \leq 1040$.

e Licht dit toe.

In de figuur hieronder en op het werkblad zijn de lijnen getekend die bij de ongelijkheden horen.



figuur 11.13

f Teken op het werkblad het gebied dat voldoet aan de ongelijkheden.

Ada is 17 jaar en heeft een gemiddelde energiebehoefte.

g Ze eet 110 gram vetten en 150 gram eiwitten per dag.

Onderzoek of zij de adviezen over voedingsstoffen hiermee opvolgt.

h Ada wil zich aan de adviezen houden, maar zo min mogelijk koolhydraten en zoveel mogelijk eiwitten binnenkrijgen.

Onderzoek met de figuur hoeveel gram koolhydraten, eiwitten en vetten zij dan binnen moet krijgen.

Terugblik

Evenwijdige lijnen

De lijnen $4x + 5y = 7$ en $4x + 5y = 11$ zijn evenwijdig. Dit kun je nagaan door van beide lijnen de richtingscoëfficiënt te berekenen. Deze richtingscoëfficiënt is $-0,8$.

Ook aan het linkerlid $4x + 5y$ van de beide vergelijkingen kun je zien dat de lijnen evenwijdig zijn.

Om een vergelijking op te stellen van de lijn n die door het punt $A(3, 8)$ gaat en evenwijdig is met de lijn $m : 5x - 2y = 4$, ga je uit van $5x - 2y = c$.

Je berekent c door de coördinaten van A in te vullen. Je krijgt

$c = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 8 = -1$, dus een vergelijking van n is $5x - 2y = -1$.

Lineaire ongelijkheid met twee variabelen

Een voorbeeld van een lineaire ongelijkheid met twee variabelen is $2x - 3y > 6$.

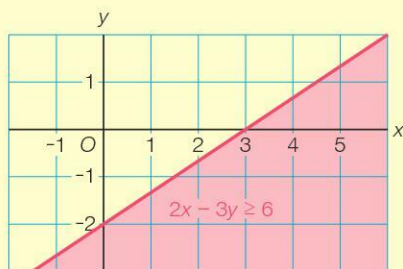
De grafiek van $2x - 3y > 6$ is een halfvlak begrensd door de lijn $2x - 3y = 6$. Om te weten

welk halfvlak, vul je in de ongelijkheid de coördinaten van een punt in, bijvoorbeeld van $(0, 0)$. Je krijgt $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 > 6$; dit klopt niet.

Dus je moet het halfvlak hebben waar $(0, 0)$ niet in ligt.

Bij $2x - 3y \geq 6$ behoort ook de rand tot de grafiek.

Geef de rand dezelfde kleur als het halfvlak.



Begrensde gebieden

In de figuur hiernaast zie je het gebied waarvoor geldt $x \geq 0$ en $1 \leq y \leq 3$ en $x - y \leq 0$ en $2x + y \leq 4$.

Je hebt te maken met het gebied waar de halfvlakken

$x > 0$ (rechts van de y -as),

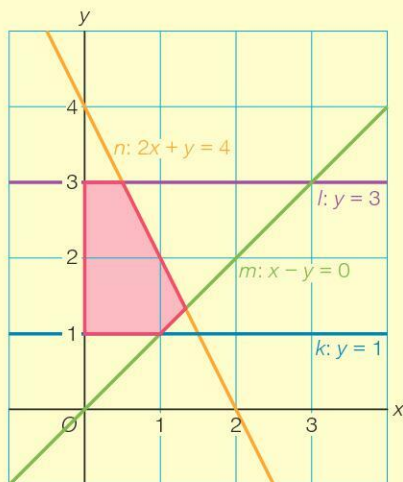
$1 < y < 3$ (tussen de lijnen k en l),

$x - y < 0$ (boven de lijn m) en

$2x + y < 4$ (onder de lijn n)

elkaar overlappen.

De randen doen ook mee.



11.2 Herleiden en combineren van formules



- 019** a Maak y vrij bij $3(x-5) + 4(y-3) = 5$.
 b Toon aan dat de formule $A = 60 \cdot \frac{x+1}{3} \cdot \frac{x-2}{20}$ te herleiden is tot $A = x^2 - x - 2$.
 c Toon aan dat de formule $D = 0,25\sqrt{F}$ te schrijven is als $F = 16D^2$.

Theorie A Formules herleiden en variabelen vrijmaken

Bij het herleiden van formules met breuken gebruik je

- $\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$
- delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk
- om breuken die niet gelijknamig zijn op te tellen, maak je ze eerst gelijknamig.

Gelijknamige breuken hebben dezelfde noemer.

Bij het herleiden van de formule $N = \frac{3}{2t} + \frac{1}{t+1}$ krijg je

$$N = \frac{3}{2t} + \frac{1}{t+1} = \frac{3(t+1)}{2t(t+1)} + \frac{2t}{2t(t+1)} = \frac{3t+3+2t}{2t(t+1)} = \frac{5t+3}{2t(t+1)}$$

Bij het herleiden van formules met machten gebruik je de rekenregels voor machten.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (a^p)^q = a^{pq} \quad (ab)^p = a^p b^p$$

Deze regels gelden ook voor machten met gebroken en negatieve exponenten.

Voor machten met negatieve exponenten geldt $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

$$\frac{1}{2x^3} = \frac{1}{2}x^{-3}$$

Verder geldt $a^0 = 1$ voor $a \neq 0$.

Bij het herleiden van de formule $M = \frac{(0,2q^{1,3})^{-2,5}}{5,2q^2}$ krijg je

$$M = \frac{(0,2q^{1,3})^{-2,5}}{5,2q^2} = \frac{0,2^{-2,5} \cdot (q^{1,3})^{-2,5}}{5,2q^2} = \frac{0,2^{-2,5}}{5,2} \cdot \frac{q^{-3,25}}{q^2} \approx 10,75 \cdot q^{-5,25}$$

herleiden (pointing to $(q^{1,3})^{-2,5}$)
berekenen (pointing to $\frac{0,2^{-2,5}}{5,2}$)

Bij het herleiden van formules met wortels gebruik je de rekenregels voor wortels.

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \text{ en } \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$$

Bij het herleiden van de formule $F = \sqrt{20n} + \sqrt{2n}$ krijg je

$$F = \sqrt{20} \cdot \sqrt{n} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{n} = 4,47... \sqrt{n} + 1,41... \sqrt{n} \approx 5,89 \sqrt{n}, \text{ dus } F = 5,89 \sqrt{n}.$$

Bij het vrijmaken van y bij de formule $G = 100 \cdot \sqrt{\frac{y}{15}}$ krijg je

$$100 \cdot \sqrt{\frac{y}{15}} = G \quad \text{Deel links en rechts door 100.}$$

$$\sqrt{\frac{y}{15}} = 0,01G \quad \text{Kwadrateer beide leden.}$$

$$\frac{y}{15} = (0,01G)^2 \quad \text{Vermenigvuldiging links en rechts met 15.}$$

$$y = 15 \cdot 0,01^2 \cdot G^2$$

$$y = 0,0015G^2$$

Bij het herleiden van gebroken formules en bij het vrijmaken van variabelen bij gebroken formules gebruik je de volgende regels.

- $\frac{A}{B} \cdot C = \frac{C}{B} \cdot A$
- $\frac{A}{B} = C$ geeft $B = \frac{A}{C}$
- $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ geeft $A \cdot D = B \cdot C$

Let op het verschil:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ geeft } A \cdot D = B \cdot C.$$

Zie het voorbeeld op de volgende bladzijde.

De formule $P = \frac{7x-6}{x}$ is te schrijven in de vorm $P = a + \frac{b}{x}$.

Je krijgt $P = \frac{7x-6}{x} = \frac{7x}{x} - \frac{6}{x} = 7 - \frac{6}{x}$, dus $a = 7$ en $b = -6$.

Het schrijven van $\frac{7x-6}{x}$ als $7 - \frac{6}{x}$ heet ook wel **uitdelen**.

Je hebt x uitgedeeld.

Je kunt de formule $N = \frac{0,6p^2 - 3p + 2}{4p}$ schrijven in de vorm $N = ap + b + \frac{c}{p}$.

$$\text{Je krijgt } N = \frac{0,6p^2 - 3p + 2}{4p} = \frac{0,6p^2}{4p} - \frac{3p}{4p} + \frac{2}{4p} = 0,15p - 0,75 + \frac{0,5}{p}.$$

Voorbeeld

- a** Herleid de formule $D = \frac{7-2q}{1,5} \cdot 21 + 18$ tot de vorm $D = aq + b$.
- b** Maak L vrij bij de formule $K = 8 - \frac{5}{L}$.
- c** Maak N vrij bij de formule $M = \frac{2N-3}{4}$.

Uitwerking

a $D = \frac{7-2q}{1,5} \cdot 21 + 18$ Gebruik $\frac{A}{B} \cdot C = \frac{C}{B} \cdot A$.

$$D = \frac{21}{1,5} \cdot (7-2q) + 18$$

$$D = 14(7-2q) + 18$$

$$D = 98 - 28q + 18$$

$$D = -28q + 116$$

b $K = 8 - \frac{5}{L}$ Zet de term met L apart.

$$\frac{5}{L} = 8 - K$$

Gebruik $\frac{A}{B} = C$ geeft $B = \frac{A}{C}$.

$$L = \frac{5}{8-K}$$

c $M = \frac{2N-3}{4}$

$$\frac{M}{1} = \frac{2N-3}{4}$$

Gebruik $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ geeft $A \cdot D = B \cdot C$.

$$4M = 2N - 3$$

$$2N - 3 = 4M$$

$$2N = 4M + 3$$

$$N = 2M + 1,5$$

$$\frac{A}{B} = C \text{ oftewel } \frac{A}{B} = \frac{C}{1}$$

$$BC = A$$

$$B = \frac{A}{C}$$

$$\text{Dus } \frac{A}{B} = C \text{ geeft } B = \frac{A}{C}.$$



20

a Herleid de formule $K = 36 \cdot \frac{5-3x}{4,5} - 12$ tot de vorm $K = ax + b$.

b Gegeven is $K = 5 + \frac{8}{q}$.

Druk q uit in K .

c Maak y vrij bij $2 + \frac{y}{x+3} = 7$.

21
□ ⊗ *

- a Schrijf het rechterlid van de formule $M = \frac{5}{t} - 3t$ als één breuk.
- b Toon aan dat de formule $R = \frac{0,5q^2 - 2q + 5}{q} + q - 1$ te herleiden is tot $R = 1,5q - 3 + \frac{5}{q}$.
- c Herleid het rechterlid van de formule $T = \frac{6p}{p-2} \cdot (p+2) \cdot \frac{1}{3}$ tot één breuk.
- d Toon aan dat de formule $N = \frac{3t^{-1,12}}{2t} \cdot t^{3,15}$ te herleiden is tot $N = 1,5t^{1,03}$.

22
□ ⊗ *

- a Herleid de formule $P = 20 + \frac{3-2t}{5} \cdot 35$ tot de vorm $P = at + b$.
- b Maak x vrij bij $2(x-5) - 3(y+1) = 15$.
- c Schrijf de formule $N = \frac{423}{5 \cdot 1,3^t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond g af op drie decimalen.
- d Maak L vrij bij $3(\frac{2}{3}L - 8) + 4K = 6(2 - L)$.

23
□ ⊗ *

- a Maak x vrij bij $\frac{y}{5} = \frac{4x+7}{4}$.
- b Herleid de formule $F = \frac{100}{6+5K}$ tot de vorm $K = \frac{a}{F} + b$.
- c Herleid $A \cdot \left(2 - \frac{x}{50}\right) = 1$ tot de vorm $x = a + \frac{b}{A}$.
- d De formule $C = 6x^{1,12} \cdot \frac{4x^{2,05}}{3x}$ is te herleiden tot de vorm $C = ax^b$. Bereken a en b .

24
□ ⊗

- a Herleid de formule $M = \frac{1}{3} \cdot \frac{2t+1}{5} \cdot \frac{6}{t+1}$ tot $M = \frac{4t+2}{5t+5}$.
- b Schrijf het rechterlid van de formule $N = \frac{5}{t+1} - \frac{4}{t+2}$ als één breuk en herleid de teller.
- c Herleid de formule $P = \frac{(5,1x^{1,6})^4}{27x^{1,7}}$ tot de vorm $P = ax^b$. Rond a af op gehele.
- d Maak y vrij bij de formule $Q = 12,5\sqrt{\frac{y}{16}}$.

25

a Herleid de formule $K = 51 \cdot \frac{x^2 + 2x}{6} - 15$ tot de vorm $K = ax^2 + bx + c$.

b Herleid $8 - \frac{2y}{x+6} = x$ tot de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

c De formule $F = \frac{2}{5} \cdot \frac{1-3q}{16} : \frac{1-2q}{10}$ is te herleiden is tot de vorm $F = \frac{3q+a}{8q+b}$.

Bereken a en b .

d De formule $G = \frac{(25x^{1,1})^{1,5}}{x^{2,65}} - \frac{25}{x}$ is te herleiden tot de vorm $G = ax^b$.

Bereken a en b .

26

a Herleid de formule $P = \sqrt{30Q} - \sqrt{5Q}$ tot de vorm $P = a\sqrt{Q}$.

Rond a af op twee decimalen.

b Gegeven is de formule $N = \frac{5x}{3y-2}$.

Neem $N = 6$ en herleid de formule tot de vorm $x = ay + b$.

c Maak A vrij bij $\frac{4A}{3(2t-20)} = 16$.

d Herleid de formule $A = \frac{(2x^{1,4})^{-3}}{(3x^{1,4})^{-2}}$ tot de vorm $A = ax^b$.

e Schrijf de formule $N = \frac{3}{50 \cdot 0,6^t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond g af op drie decimalen.

A27

a Gegeven is de formule $H = \frac{5pq}{12(6-r)}$.

Neem $H = 15$ en $q = 6$ en herleid de formule tot de vorm $p = ar + b$.

b Gegeven is de formule $L = t^2 \cdot \frac{5-x}{5y} + 6$.

Neem $L = 16$ en $t = 5$ en herleid de formule tot de vorm $y = ax + b$.

c Gegeven is $1,5A = 6 - 0,6\sqrt{B-1}$.

Druk B uit in A .

d Herleid de formule $F = \left(\frac{2}{p^{0,6}}\right)^3 - \frac{(4p^{1,6})^{1,5}}{(5p^{1,4})^3}$ tot de vorm $F = ap^b$.

A28

De tijd die een persoon onbeschermd in de zon kan zitten zonder te

verbranden is te berekenen met de formule $T = \frac{-2,1Z + 37}{18Z}$. Hierin is T

de tijd in uren en Z de zonkracht.

a Bij zonkracht 8 kun je onbeschermd korter in de zon zitten dan bij zonkracht 6.

Hoeveel minuten scheelt het?

b De formule van T is te schrijven in de vorm $T = a + \frac{b}{Z}$.

Bereken a en b . Rond af op drie decimalen.

- a** Gegeven zijn de formules $A = 3,5P - 0,8Q + 4$ en $Q = 4P + 1$.
 Combineer de formules tot de vorm $A = aP + b$.
- b** Gegeven zijn de formules $B = 2,8x^2 + 4,1xy + y^2$ en $y = x - 2$.
 Schrijf de formule van B in de vorm $B = ax^2 + bx + c$.
- c** Gegeven zijn de formules $C = 3m + 4n + 5$ en $m = 2n - 1$.
 Schrijf de formule van C in de vorm $C = am + b$.

Theorie B Formules combineren

Om de formules $D = 3p^2 + 4pq - 6q$ en $3p - 2q = 6$ te combineren tot de vorm $D = ap^2 + bp + c$ moet in de formule $D = 3p^2 + 4pq - 6q$ de variabele q worden vervangen door een formule waarbij q is uitgedrukt in p . Dus maak eerst q vrij bij $3p - 2q = 6$.

$$\begin{aligned} 3p - 2q &= 6 \\ -2q &= -3p + 6 \\ q &= 1,5p - 3 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} D &= 3p^2 + 4pq - 6q \\ D &= 3p^2 + 4p \cdot (1,5p - 3) - 6 \cdot (1,5p - 3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} D &= 3p^2 + 6p^2 - 12p - 9p + 18 \\ D &= 9p^2 - 21p + 18 \end{aligned}$$

Je kunt de formules $P = 25x$ en $x = (\frac{1}{5})^t$ combineren tot de formule $P = 5^{2-t}$.

Combineren van de formules geeft $P = 25 \cdot (\frac{1}{5})^t$. Schrijf vervolgens zowel 25 als $(\frac{1}{5})^t$ als macht van 5.

Je krijgt $P = 25 \cdot (\frac{1}{5})^t = 5^2 \cdot (5^{-1})^t = 5^2 \cdot 5^{-t} = 5^{2-t}$.

Voorbeeld

In de Verenigde Staten van Amerika gebruikt men de eenheid kubieke feet (ft^3) om de hoeveelheid gebruikt drinkwater aan te geven.

Met de formule $K = 0,025x + 45$ bereken je de kosten in dollars bij het gebruik van $x \text{ ft}^3$ drinkwater.

Schrijf de formule in de vorm $K = ay + b$ met y de hoeveelheid gebruikt drinkwater in m^3 . Rond a af op twee decimalen. Gebruik dat $1 \text{ ft}^3 = 0,028 \text{ m}^3$.

Aanpak

Om van ft^3 naar m^3 te gaan, vermenigvuldig je met 0,028 dus $0,028x = y$.

Uitwerking

Er geldt $y = 0,028x$, dus $x = \frac{1}{0,028}y$.

$$K = 0,025 \cdot \frac{1}{0,028}y + 45 = \frac{0,025}{0,028}y + 45 = 0,892\dots y + 45$$

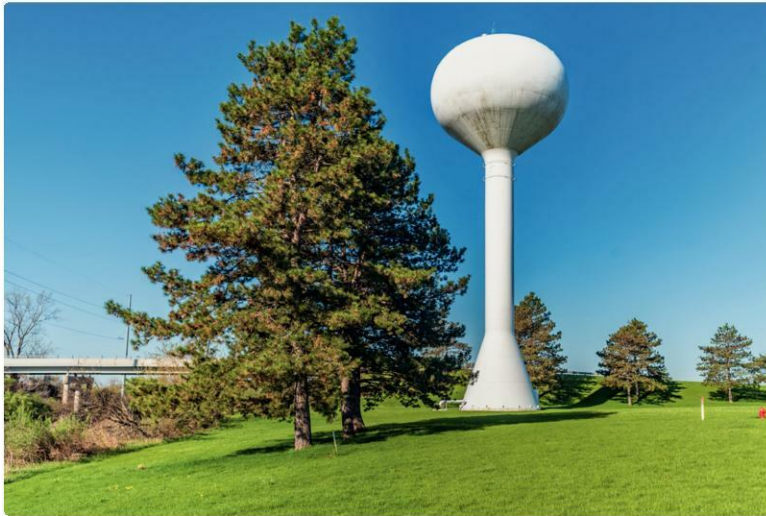
Dus $K = 0,89y + 45$.

$y = 0,028x$
 Controle: $x = 1$ geeft
 $y = 0,028$ en dat klopt.

30
✎ ⊗ *

Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

Schrijf de formule van $K = 0,89z + 45$ in de vorm $K = az + b$ met z de hoeveelheid gebruikt drinkwater in liter.



31
✎ ⊗ *

a Gegeven zijn de formules $A = m^2 - 4mn + 8n$ en $5m - 2n = 10$.

Combineer de formules tot de vorm $A = am^2 + bm + c$.

b Gegeven zijn de formules $N = \frac{36}{p}$ en $p = (\frac{1}{6})^t$. Je kunt de formules combineren en de formule van N herleiden tot $N = 6^{t+2}$. Laat deze herleiding zien.

c Je kunt de formules $T = \frac{k}{k+3}$ en $k = 3^t - 3$ combineren tot de formule $T = 1 - 3^{1-t}$. Laat dat zien.

d Combineer de formules $F = 20 - \frac{5}{p}$ en $p = 3,12^{0,1x}$ tot de vorm $F = a + b \cdot g^x$. Rond g af op twee decimalen.

32
✎ ⊗ *

In een formule $L = 0,04t^2 - t + 31$ is t de tijd in dagen en L de lengte in inch.

a Zet de formule om naar de vorm $L = aw^2 + bw + c$ met w de tijd in weken.

b Zet de formule om naar de vorm $l = pt^2 + qt + r$ met t de tijd in dagen en l de lengte in cm. Rond in het antwoord af op twee decimalen en gebruik dat $1 \text{ inch} = 2,54 \text{ cm}$.

Bij een onderzoek naar de toestand van het Great Barrier Reef voor de noordoostkust van Australië is een formule opgesteld van de temperatuur van het zeewater voor de kust. De formule is $F = 0,252m^2 - 3,06m + 84,2$. Hierin is F de temperatuur van het zeewater in graden Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) en m de tijd in maanden met $m = 0$ op 1 januari en $0 \leq m \leq 12$. Voor het omrekenen van graden Fahrenheit naar graden Celsius ($^{\circ}\text{C}$) gebruik je de



formule $C = \frac{F - 32}{1,8}$. Hierin is C de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en F de temperatuur in $^{\circ}\text{F}$.

Uit de formule $C = \frac{F - 32}{1,8}$ volgt $F = 1,8C + 32$.

- a** Toon dit aan.
- b** Bereken in graden Celsius hoeveel de temperatuur van het zeewater afneemt tussen 1 februari en 1 april. Rond af op één decimaal.
- c** Bereken hoeveel $^{\circ}\text{F}$ de minimale temperatuur van het zeewater is. Geef ook de minimale temperatuur in $^{\circ}\text{C}$. Rond af op één decimaal.

De formule $F = 0,252m^2 - 3,06m + 84,2$ is om te zetten naar de formule $C = 0,14m^2 - 1,7m + 29$. Hierin is C de temperatuur van het zeewater in $^{\circ}\text{C}$.

- d** Toon dit aan.

De formule $C = 0,14m^2 - 1,7m + 29$ is om te zetten naar de formule $C = 0,0075w^2 - 0,39w + 29$. Hierin is w de tijd in weken met $w = 0$ op 1 januari.

- e** Toon dit aan. Gebruik 1 maand $= \frac{52}{12}$ weken.

De formule $C = 0,0075w^2 - 0,39w + 29$ is om te zetten naar een formule van de vorm $C = ad^2 + bd + 29$. Hierin is d de tijd in dagen met $d = 0$ op 1 januari.

- f** Bereken a en b . Geef a en b in de wetenschappelijke notatie en rond af op twee decimalen.
- g** Bereken voor welke d de temperatuur van het zeewater minimaal is.

Mensen en mieren verschillen in de mate waarin ze rekening houden met elkaar als het druk wordt.

Bij mensen wordt de snelheid waarmee ze door een straat lopen

beschreven door de formule $V = 1,3 \left(1 - \frac{K}{5,2} \right)$. Hierin is V de snelheid

van voetgangers in m/s en K het aantal voetgangers per m^2 .

- a** Bereken de snelheid van voetgangers als er 0,8 mensen per m^2 in een winkelstraat lopen. Geef het antwoord in km/uur.

De snelheid van voetgangers heeft invloed op de doorstroming, dat wil zeggen hoeveel mensen er per seconde door een straat lopen. De formule voor de doorstroming is $D = V \cdot K$.

De formule van D is te herleiden tot $D = -0,25K^2 + 1,3K$.

- b** Laat deze herleiding zien en schets de grafiek van D .
c Bereken bij hoeveel mensen per m^2 de doorstroming maximaal is.

Om de doorstroming bij mieren te onderzoeken lieten wetenschappers ze over een kleine brug lopen om bij hun voedsel te komen. Van belang is hierbij hoe vaak de mieren tegen elkaar aan botsen. Als het aantal mieren per cm^2 groter wordt, neemt het aantal botsingen b toe. Dit verband wordt weergegeven door de formule $b = 0,61k$ met k het aantal mieren per cm^2 .

Bovendien geldt: hoe meer botsingen er zijn, hoe meer tijd de mieren nodig hebben om de brug over te steken. Hiervoor vonden de onderzoekers de formule $t = 0,95 + 0,24b$ met t de tijd in seconden. Uit het bovenstaande volgt dat bij benadering geldt dat $t = 0,95 + 0,15k$.

- d** Toon dit aan.

Onderzoekers vonden ook een positieve invloed van drukte op de snelheid van mieren. Als het drukker is, dan zijn de geursporen sterker waardoor mieren niet bezig hoeven te zijn met de richting waarin ze moeten lopen.

Beide effecten hebben de onderzoekers verwerkt in de formule

$v = \frac{1,6 + 0,4k \cdot 0,8^k}{t}$. In deze formule is v de snelheid in cm per seconde.

- e** Bereken de snelheid van de mieren als er 10 mieren per cm^2 zijn. Geef het antwoord in cm per minuut en rond af op gehelen.

De doorstroming bij de mieren wordt gegeven door de formule $d = v \cdot k$. Het aantal mieren per cm^2 kan niet meer zijn dan 18.

- f** Schets de grafiek van d .
g Onderzoek bij welk aantal mieren per cm^2 de doorstroming maximaal is.
h Bij drukte gedragen mieren zich socialer dan mensen. Hoe kun je dat aan de twee schetsen zien?

Terugblik

Formules herleiden en variabelen vrijmaken

De formule $A = \frac{5-4m}{1,8} \cdot 2,7 + 10m$ is te herleiden tot de vorm $A = am + b$.

$$A = \frac{5-4m}{1,8} \cdot 2,7 + 10m = \frac{2,7}{1,8} \cdot (5-4m) + 10m = 1,5(5-4m) + 10m \\ = 7,5 - 6m + 10m = 4m + 7,5, \text{ dus } A = 4m + 7,5.$$

De formule $B = \frac{(4y^{1,5})^{1,6}}{6y^3}$ is te herleiden tot de vorm $B = ay^b$.

$$B = \frac{(4y^{1,5})^{1,6}}{6y^3} = \frac{4^{1,6}(y^{1,5})^{1,6}}{6y^3} = \frac{4^{1,6}}{6} \cdot \frac{y^{2,4}}{y^3} \approx 1,53y^{-0,6}, \text{ dus } B = 1,53y^{-0,6}.$$

De formule $C = 16 \cdot (\frac{1}{2})^t$ is te herleiden tot $C = 2^{4-t}$.

$$C = 16 \cdot (\frac{1}{2})^t = 2^4 \cdot (2^{-1})^t = 2^4 \cdot 2^{-t} = 2^{4-t}, \text{ dus } C = 2^{4-t}.$$

Bij de formule $5(a-1) - \frac{1}{2}(4b-6) = 12$ kun je b vrijmaken: $5a - 5 - 2b + 3 = 12$
 $-2b = -5a + 14$
 $b = 2,5a - 7$

Bij de formule $4x = 5 - 2\sqrt{y+3}$ kun je y vrijmaken: $2\sqrt{y+3} = 5 - 4x$

$$\sqrt{y+3} = 2,5 - 2x \\ y+3 = (2,5 - 2x)^2 \\ y = (2,5 - 2x)^2 - 3$$

Bij de formule $p = 3 + \frac{6}{q}$ kun je q vrijmaken: $\frac{6}{q} = p - 3$

$$q = \frac{6}{p-3}$$

Formules combineren

De formules $F = \frac{2y^2 - 5y}{4x}$ en $y = 3x$ kun je combineren.

$$\text{Je krijgt } F = \frac{2(3x)^2 - 5 \cdot 3x}{4x} = \frac{2 \cdot 9x^2 - 15x}{4x} = \frac{18x^2 - 15x}{4x}.$$

Vervolgens kun je uitdelen. Je krijgt $F = \frac{18x^2 - 15x}{4x} = \frac{18x^2}{4x} - \frac{15x}{4x} = 4,5x - 3,75$.

In de formule $A = 0,05t^2 + 4t + 3$ is t de tijd in uren. Om deze formule om te zetten in een formule waarbij A wordt uitgedrukt in de tijd d in dagen gebruik je dat 1 dag = 24 uur, dus $t = 24d$.

$$\text{Je krijgt } A = 0,05 \cdot (24d)^2 + 4 \cdot 24d + 3 = 28,8d^2 + 96d + 3, \text{ dus} \\ A = 28,8d^2 + 96d + 3.$$

11.3 Evenredigheden



Bekijk de volgende situaties.

I Na afloop van een festival verdienen x schoonmakers allemaal hetzelfde bedrag per uur. Samen verdienen ze y euro.

II Na afloop van een festival maken x personen het feestterrein in y minuten schoon.

a Neem aan dat het aantal personen x vier keer zo groot is als aanvankelijk werd aangenomen.

Welk effect heeft dat in beide situaties op y ?

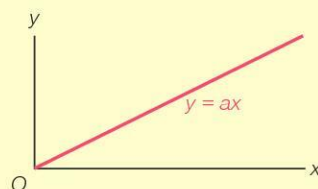
b In welke situatie is sprake van evenredige grootheden?

Theorie A Omgekeerd evenredig

Je kent het begrip (recht) evenredig al.

y is (recht) evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
- De bijbehorende tabel is een verhoudingstabel.
- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.



Martijn maakt een fietstocht van 60 km. Bij een snelheid van

$\times 3$
 $\begin{pmatrix} \times 2 \\ \times 2 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 10 \text{ km/uur doet hij er 6 uur over} \\ 20 \text{ km/uur doet hij er 3 uur over} \\ 30 \text{ km/uur doet hij er 2 uur over} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} :2 \\ :2 \end{pmatrix} :3$

Maak je de snelheid k maal zo groot, dan moet je de tijd door k delen.

We zeggen dat de snelheid v **omgekeerd evenredig** is met de tijd t . In de volgende tabel kun je nagaan dat het product $v \cdot t$ telkens 60 is.

t	1	2	3	4	5	6
v	60	30	20	15	12	10

In figuur 11.14 is de grafiek getekend. De grafiek is een (deel van een) hyperbool.

Tussen v en t bestaat het **omgekeerd evenredig verband** $v \cdot t = 60$.

Je kunt dit verband ook beschrijven met de

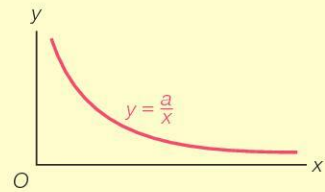
formule $v = \frac{60}{t}$ of met de formule $t = \frac{60}{v}$.



figuur 11.14

y is omgekeerd evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y door hetzelfde getal delen.
- Het product $x \cdot y$ is constant, dus $x \cdot y = a$ oftewel $y = \frac{a}{x}$.
- De grafiek is een hyperbool.



Voorbeeld

Volgens een bedrijfseconoom is het aantal tandenborstels q dat een bedrijf dagelijks verkoopt omgekeerd evenredig met de prijs p in euro's. Bij een prijs van €3,25 worden dagelijks 800 tandenborstels verkocht. Stel de formule op van q bij een prijs van p euro.

Uitwerking

q is omgekeerd evenredig met p , dus $q = \frac{a}{p}$.

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{a}{p} \\ p = 3,25 \text{ en } q = 800 \end{array} \right\} \frac{a}{3,25} = 800$$
$$a = 800 \cdot 3,25 = 2600$$

Vermenigvuldig links en rechts met 3,25.

$$\text{Dus } q = \frac{2600}{p}.$$

36 Zie het voorbeeld.



a In de theorie staat dat er drie manieren zijn om een formule te beschrijven die bij een omgekeerd evenredig verband hoort.

Schrijf de formule $q = \frac{2600}{p}$ op de andere twee manieren.

b Bereken de dagelijkse verkoop bij een prijs van €2,70.

c Bereken welke prijs bij een dagelijkse verkoop van 550 stuks hoort.

37 In welke van de volgende situaties is sprake van een recht evenredig verband en in welke van een omgekeerd evenredig verband?



a Het aantal pakken melk dat je koopt en de prijs van het totaal.

b Het aantal even grote volkstuintjes op een complex van 1 ha en de grootte van zo'n volkstuintje.

c Het aantal mensen dat van één noodrantsoen moet leven en de hoeveelheid voedsel per persoon.

d Het aantal producten dat een machine aflevert en de tijd die de machine draait.

e Het aantal auto's op een veerboot en de beschikbare plaats per auto.

- 38** Volgens een onderzoeksbureau is het aantal per maand verkochte vulpennen van het merk Waterman omgekeerd evenredig met de prijs p in euro's. Bij een prijs van € 40,50 is de maandverkoop 6480 vulpennen.
- a** Stel de formule op van de maandelijkse verkoop q bij een prijs van p euro.
 - b** Bereken de maandelijkse verkoop bij een prijs van € 25,-.
 - c** Bereken welke prijs bij een maandelijkse verkoop van 5600 vulpennen hoort.

- 39** Onderzoek in de Stille Oceaan heeft uitgewezen dat de watertemperatuur T in °C omgekeerd evenredig is met de diepte d in km. Dit verband blijkt alleen te gelden voor diepten groter dan 500 meter. Op een diepte van 2500 meter is de watertemperatuur 1,6 °C.
- a** Stel de formule op van de temperatuur T op een diepte van d km.
 - b** Hoeveel is de watertemperatuur op 4835 meter diepte?
 - c** Op welke diepte is de watertemperatuur 1,4 °C?



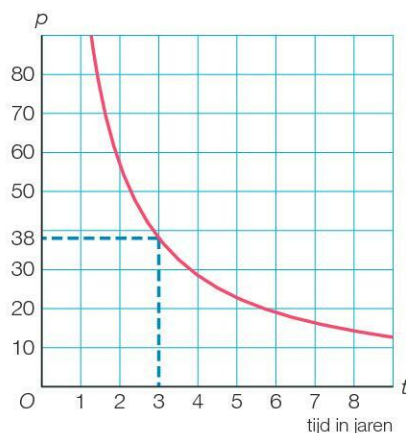
- 40** Het tarief bij de onroerende zaakbelasting (OZB) is evenredig met de vastgestelde waarde van de woning. In deze opgave bekijken we de OZB voor eigenaren van woningen in de gemeente Rozendam. De familie Duin heeft een woning van 360 000 euro en betaalt hiervoor aan OZB 450 euro per jaar.
- a** Stel de formule op van het jaarlijkse bedrag B aan OZB in euro's bij een woning met een waarde van W euro.
 - b** De familie Klapwijk betaalt per jaar 525 euro aan OZB. Bereken de waarde van hun woning.
 - c** De familie Vonk heeft een woning met een waarde van 820 000 euro, dat is 0,4% van de totale waarde van alle woningen in Rozendam. Bereken de totale jaarlijkse inkomsten aan OZB voor de gemeente Rozendam.

- 41** Een bungalowpark heeft regelmatig te kampen met wateroverlast. De eigenaars van de bungalows besluiten drainage aan te leggen. Er worden drainagebuizen aangebracht die voor de afvoer van het water zorgen. De totale kosten van de aanleg zijn 288 000 euro. De oppervlakte van het vakantiepark is 120 000 m². Afgesproken wordt dat de parkbewoners samen de totale aanlegkosten opbrengen. Het te betalen bedrag aan aanlegkosten is recht evenredig met de oppervlakte van de kavel. Voor een kavel zijn de aanlegkosten 1536 euro. Bereken de oppervlakte van die kavel.

A42
  *

Enkele jaren geleden vond in Chedabucto Bay bij Canada een olieramp plaats, waarbij veel olie op de stranden terecht kwam. Natuurlijke processen zorgen voor afbraak van de olie. Onderzoek heeft uitgewezen dat het percentage p van de nog aanwezige olie omgekeerd evenredig is met de verstreken tijd t in jaren. Hierbij is $t > 1$. In de grafiek van figuur 11.15 vind je verdere informatie.

- Stel de formule op van het percentage p van de olie dat na t jaar nog aanwezig is.
- Hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid olie is na 5,5 jaar nog aanwezig?
- Hoelang duurt het tot 95% van de olie is verdwenen?



figuur 11.15

A43
  *

Gegeven is de tabel hiernaast. Onderzoek welk verband er bestaat tussen y_1 en x , tussen y_2 en x en tussen y_3 en x en geef telkens de bijbehorende formule.

x	3	5	9	12	15
y_1	10,2	17	30,6	40,8	51
y_2	150	90	50	37,5	30
y_3	17	15	11	8	5

A44
  *

Een apotheek moet vaak oplossingen leveren van een heel nauwkeurige concentratie. Bovendien moet zo'n oplossing geleverd kunnen worden in elk gewenst volume. Het is voor de apotheek niet praktisch allerlei concentraties in voorraad te hebben. Vaak is slechts één bepaalde concentratie in huis.

Apotheek West heeft alcohol van 95% in voorraad, dat wil zeggen 95% van de oplossing is alcohol en 5% is water.

- De apotheker vult 1 liter (= 1000 mL) alcohol van 95% met water aan tot 3 liter.
Toon aan dat de concentratie alcohol van de oplossing in dat geval 31,7% is.

We gaan bij de vragen b, c en d telkens uit van 1000 mL alcohol van 95%. De apotheker vult dit aan tot V mL oplossing.

- Bereken de concentratie c in procenten bij aanvullen tot 2000 mL.
- De concentratie c in procenten en het volume V in mL zijn omgekeerd evenredig. Controleer dat met de antwoorden op de vragen a en b.
- Een klant heeft alcohol van 70% nodig.
Licht toe hoe de apotheker deze oplossing kan verkrijgen.

De apotheker heeft een waterstofperoxide-oplossing in voorraad van 3%. Een klant vraagt 500 mL waterstofperoxide met een sterkte van 0,2%.

- Hoeveel mL van de voorradige oplossing moet worden aangevuld met water?

A45

Bij grote etappekoersen in het wielrennen maakt de wedstrijdleiding vaak enkele tijdschema's voor een etappe. Je hebt dan drie schema's: een langzaam schema, een snel schema en een schema daartussenin. Tijdens de koers houdt men in de gaten op welk schema gereden wordt.

Bij een etappe in de Tour de France wordt gestart om 12:15 uur. Het langzame schema geeft aan dat bij een gemiddelde snelheid van 42 km/uur de finish om 17:30 uur is. De finish blijkt om 16:55 uur te zijn.

Met welke gemiddelde snelheid is in deze etappe gereden?

**E46**

Pascal van Norden (Gouda, 5 september 1972) is een Nederlandse ultraloper. Hij is gespecialiseerd in lange afstanden. In 2017 prolongeerde hij in Winschoten zijn titel Nederlands kampioen 100 km. Hij legde deze afstand af in 6 uur, 55 minuten en 10 seconden. Daarmee was zijn gemiddelde snelheid (afgerond op drie decimalen) gelijk aan 14,452 km/uur.

We vragen ons in deze opgave af hoe gelijkmatig Pascal tijdens deze race heeft gelopen. Als hij steeds even hard liep, moet er sprake zijn van een evenredig verband tussen de afgelegde afstand en de tijd.

In de tabel zie je de tussentijden na telkens 10 km.

6 uur, 55 minuten en
10 seconden is

$$6 + \frac{55}{60} + \frac{10}{3600} = 6,919... \text{ uur.}$$

100 km in 6,919... uur, dus
gemiddelde snelheid is

$$\frac{100}{6,919...} \approx 14,452 \text{ km/uur.}$$

TUSSENTIJDEN BIJ DE KAMPIOENSRACE VAN PASCAL VAN NORDEN, 2017

afstand in km	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
tijd	40:25	1:21:08	2:01:36	2:41:42	3:22:03	4:02:50	4:44:26	5:27:44	6:11:35	6:55:10

Je kunt berekenen dat zijn gemiddelde snelheid tijdens de eerste 10 km gelijk was aan 14,845 km/uur.

- a** Licht dit toe met een berekening en bereken de gemiddelde snelheid in km/uur over de eerste 20 km en de eerste 30 km. Rond af op drie decimalen.

Je ziet dat de berekende gemiddelde snelheden niet precies aan elkaar gelijk zijn. Het gemiddelde van de drie in vraag a berekende snelheden is 14,813 km/uur. We nemen aan dat er een evenredig verband bestaat tussen de afgelegde afstand en de tijd als de gemiddelde snelheid niet meer dan 1% afwijkt van deze 14,813 km/uur. Dat betekent dat er een evenredig verband bestaat als de gemiddelde snelheid tussen 14,665 en 14,961 km/uur ligt.

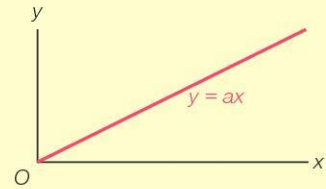
- b** Bereken tot welke afstand het evenredige verband opgaat.

Terugblik

Evenredigheden

y is (recht) evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
- De bijbehorende tabel is een verhoudingstabel.
- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.

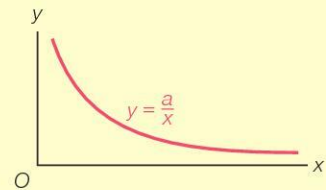


y is omgekeerd evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y door hetzelfde getal delen.
- Het product $x \cdot y$ is constant, dus $x \cdot y = a$ oftewel

$$y = \frac{a}{x}.$$

- De grafiek is een hyperbool.



De bereidingstijd van vlees in een magnetron is omgekeerd evenredig met het ingestelde vermogen. Bij een vermogen V van 800 watt is de bereidingstijd T precies 4 minuten.

De formule van T krijg je als volgt.

$$\text{omgekeerd evenredig, dus } T = \frac{a}{V} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{800} = 4 \\ a = 4 \cdot 800 = 3200 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } T = \frac{3200}{V}.$$

11.4 Redeneren met formules



Gegeven zijn de formules $y_1 = \frac{4}{x}$, $y_2 = \frac{4}{x} + 5$ en $y_3 = \frac{4}{x} - 8$.

Wat gebeurt er met y_1 als x heel groot wordt? En wat kun je dan zeggen van y_2 ? En wat van y_3 ?

Theorie A Formules van de vorm $y = \frac{a}{x} + b$

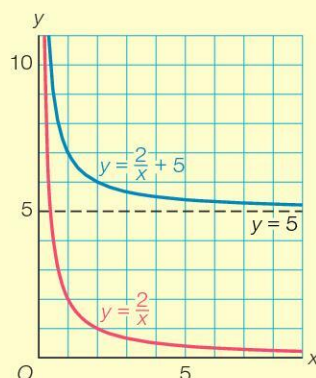
In figuur 11.16 is de grafiek van $y = \frac{2}{x}$ getekend voor $x > 0$. Als x heel groot wordt, dan nadert y tot 0. De grafiek komt rechts steeds dichterbij de x -as, dus de grenswaarde is 0.

Wordt x heel groot bij de formule $y = \frac{2}{x} + 5$, dan wordt $y \approx 0 + 5 = 5$, dus de grenswaarde is 5.

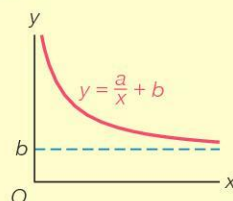
Bij een omgekeerd evenredig verband is de grenswaarde 0.

Bij het verband $y = \frac{a}{x} + b$ is de grenswaarde b .

De grafiek van $y = \frac{a}{x} + b$ met $a > 0$ is voor $x > 0$ dalend.



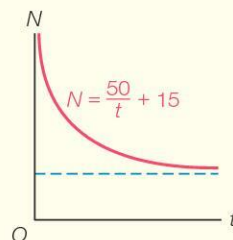
figuur 11.16



Voorbeeld

Hiernaast zie je een schets van de grafiek van $N = \frac{50}{t} + 15$ met $t > 0$.

- Beredeneer wat de grenswaarde is.
- Beredeneer hoe uit de formule van N volgt dat de grafiek dalend is.
- Vanaf welke t is N kleiner dan 18? Rond af op één decimaal.



figuur 11.17

Uitwerking

- Als t heel groot wordt, nadert $\frac{50}{t}$ tot 0 en dan wordt $\frac{50}{t} + 15 \approx 15$.

Dus de grenswaarde is 15.

- Als t toeneemt, dan neemt $\frac{50}{t}$ af. Dus ook $\frac{50}{t} + 15$ neemt af.

De grafiek van N is dus dalend.

- Voer in $y_1 = \frac{50}{x} + 15$ en $y_2 = 18$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 16,7$, dus vanaf $t \approx 16,7$ is N kleiner dan 18.

48
□ ⊗ *

Gegeven is de formule $A = \frac{150}{s} + 20$ met $s > 0$.

- Berekeneer wat de grenswaarde is.
- Berekeneer hoe uit de formule van A volgt dat de grafiek dalend is.
- Vanaf welke s is A kleiner dan 24?
- Met hoeveel procent neemt A af als s toeneemt van 20 tot 25?

49
□ ⊗ *

Bij de productie van koffiezetapparaten hangen de fabricagekosten K in euro's per apparaat af van het aantal apparaten q dat per dag gemaakt wordt. Er geldt $K = 30 + \frac{4000}{q}$.

- Berekeneer hoe uit de formule van K volgt dat de grafiek dalend is. Licht toe dat dit met de praktijk overeenkomt.
- De productie wordt verhoogd van 500 tot 600 stuks per dag. Met hoeveel procent dalen de fabricagekosten per apparaat?
- Berekeneer wat de grenswaarde is. Welke praktische betekenis heeft de grenswaarde?
- De fabrikant streeft naar een kostprijs per apparaat van niet meer dan 45 euro. Hoeveel moet de productie per dag dan zijn?
- Kan de kostprijs K minder dan € 30,50 worden? Licht toe.

A50
□ ⊗ *

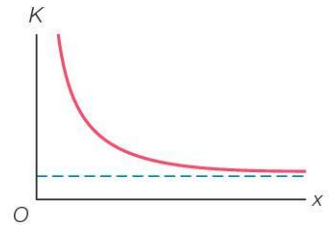
Het bedrijf Klienstra houdt zich bezig met het schoonhouden van grote gebouwen, zoals kantoren en scholen. Het tarief hangt af van de vloeroppervlakte van het schoon te maken object. Voor oppervlakten tot 10000 m² kun je het tarief berekenen met de formule

$$K = 27,5 + \frac{15}{x}.$$

Hierin is K het bedrag in euro's per m² dat

per jaar betaald moet worden en x de oppervlakte in 1000 m².

- Klienstra maakt het kantoorgebouw van de firma Z&N schoon. Hiervan is de oppervlakte 2000 m². Hoeveel moet Z&N per jaar aan schoonmaakkosten betalen?
- Een schoolgebouw bestaat uit drie verdiepingen, elk van 20 bij 40 meter. Bereken het bedrag dat de school per jaar bij Klienstra aan schoonmaakkosten kwijt is.
- Een bedrijf wil voor het schoonmaken niet meer dan € 29,50 per m² per jaar betalen. Wat weet je van de oppervlakte van dit bedrijf als ze met Klienstra in zee gaan?
- De grafiek van K is dalend. Kun je zeggen dat de totale schoonmaakkosten per jaar afnemen als je een steeds grotere oppervlakte laat schoonmaken? Licht toe.
- De totale jaarlijkse schoonmaakkosten J zijn te schrijven in de vorm $J = ax + b$. Bereken a en b .



In de volgende formules is $x > 0$.

Wat weet je van y als x toeneemt? Kies uit de antwoorden 'y neemt toe' en 'y neemt af'.

- a $y = 1 - 0,9^x$ c $y = 10 + \frac{1}{x^2}$
b $y = \frac{20}{2x + 1}$ d $y = \frac{3\sqrt{x+1}}{10}$

Theorie B Redeneren met formules

Je weet al hoe je bij groeiformules als $N = 500(1 - 0,82^t)$ en

$N = \frac{2400}{3 + 20 \cdot 0,75^t}$ beredeneert of de bijbehorende grafiek stijgend of dalend is. Je gebruikt

- als t toeneemt, dan neemt g^t toe als $g > 1$
- als t toeneemt, dan neemt g^t af als $0 < g < 1$.

Ook kun je door redeneren de grenswaarde vinden.

Bij $N = 500(1 - 0,82^t)$ gaat dat als volgt.

1. grenswaarde

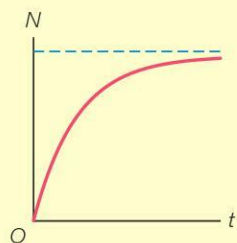
Als t heel groot wordt, dan nadert $0,82^t$ tot 0, dus dan wordt $1 - 0,82^t \approx 1$, dus dan wordt $500(1 - 0,82^t) \approx 500$.

Dus de grenswaarde is 500.

2. stijgen of dalen

Als t toeneemt, dan neemt $0,82^t$ af, dus dan neemt $1 - 0,82^t$ toe, dus dan neemt $500(1 - 0,82^t)$ ook toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.



figuur 11.18
 $N = 500(1 - 0,82^t)$

Bij $N = \frac{2400}{3 + 20 \cdot 0,75^t}$ redeneer je als volgt.

1. grenswaarde

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,75^t$ tot 0 en dan wordt $20 \cdot 0,75^t \approx 0$ en $3 + 20 \cdot 0,75^t \approx 3$. Dus dan wordt

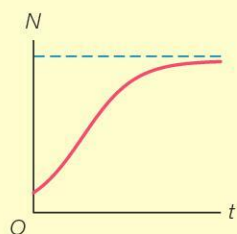
$$\frac{2400}{3 + 20 \cdot 0,75^t} \approx \frac{2400}{3} = 800.$$

Dus de grenswaarde is 800.

2. stijgen of dalen

Als t toeneemt, dan neemt $0,75^t$ af, dus dan neemt $20 \cdot 0,75^t$ ook af, dus ook $3 + 20 \cdot 0,75^t$ neemt af. Daarom neemt

$\frac{2400}{3 + 20 \cdot 0,75^t}$ toe en is de grafiek van N stijgend.



figuur 11.19
 $N = \frac{2400}{3 + 20 \cdot 0,75^t}$

Ook bij formules als $y = 100 - \frac{20}{3x+1}$, $y = \frac{10}{x^2+1} - 5$ en $y = \frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$

kun je beredeneren of de grafiek van y stijgend of dalend is.

Daarbij nemen we steeds $x > 0$, tenzij anders vermeld.

Bij dit soort redeneringen gebruiken we

- als x toeneemt, dan neemt ax toe als $a > 0$
- als x toeneemt, dan neemt ax af als $a < 0$
- als x toeneemt, dan neemt x^n toe als $n > 0$
- als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe.

Voorbeeld

Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort.

a $y = 100 - \frac{20}{3x+1}$

b $y = \frac{10}{x^2+1} - 5$

c $y = \frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$

Uitwerking

a Als x toeneemt, dan neemt $3x$ toe, dus $3x+1$ neemt toe, dus

$\frac{20}{3x+1}$ neemt af en $100 - \frac{20}{3x+1}$ neemt toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

b Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe, dus dan neemt x^2+1 toe en

$\frac{10}{x^2+1}$ neemt af, dus dan neemt $\frac{10}{x^2+1} - 5$ ook af.

Dus de grafiek van y is dalend.

c Als x toeneemt, dan neemt $0,8^x$ af en $50 \cdot 0,8^x$ neemt af.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe.

Van $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ neemt af.

Dus de grafiek van y is dalend.



a In de theorie staat

‘als x toeneemt, dan neemt x^n toe als $n > 0$.’

Gebruik dit en de rekenregel $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ om te beredeneren

dat de grafiek van $y = 5x^{-3}$ dalend is.

b Zie het voorbeeld.

Bij elk van de gegeven formules hoort een grafiek met een grenswaarde.

Beredeneer bij elk van de formules wat de grenswaarde is.

Ga in de opgaven steeds uit van $x > 0$, tenzij anders vermeld.

53 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.

a $y = 250 - \frac{100}{x}$

b $y = \frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2 + 1}$

c $N = 1250(2 - 3 \cdot 0,75^t)$

54 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.

a $y = 25 + \frac{12}{x^2}$

b $y = 40 - \frac{80}{2 + \sqrt{x}}$

c $N = \frac{18000}{250 + 333 \cdot 0,65^t}$

A55 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort.

a $A = x \left(3 + \frac{x}{22} \right)$

b $B = \frac{x^{2,3} + 1}{20 \cdot 0,3^x}$

A56 Uit de lengte L van de remweg van een auto kan met de vuistregel

$L = \frac{v^2}{25f}$ de snelheid worden bepaald waarmee gereden is. Hierin is L in

meters en is v de snelheid in km/uur. Verder is f een positief getal dat afhangt van het wegdek, de weersomstandigheden en de autobanden.

- a** Hoe volgt uit de formule dat bij een hogere snelheid en een vaste waarde van f een langere remweg hoort?
- b** Beredeneer met de formule dat bij meer grip een grotere waarde van f hoort.
- c** Schrijf de formule van L in de vorm $L = a \cdot v^2$ in het geval $f = 8$.
- d** In het geval dat de auto met een snelheid van 60 km/uur rijdt, is de formule van L te schrijven in de vorm $L = \frac{b}{f}$.
Bereken b .
- e** Druk voor remwegen van 38 meter f uit in v .
- f** Met hoeveel procent neemt de lengte van de remweg toe bij een 20% hogere snelheid?

A57
📷

Het is van belang dat de schildpad voor ze aan haar winterslaap begint in een goede conditie verkeert, want anders is de kans groot dat ze door haar reserves heen raakt en sterft.

De conditie van een schildpad is te berekenen met de Jackson ratio $J = \frac{g}{l^3}$.

Hierin is g het gewicht van de schildpad in gram en l de lengte in cm. Schildpadden van de soort *T. hermanni* met een J van rond de 0,21 verkeren in een goede conditie. Maar is $J < 0,17$, dan is de conditie onvoldoende.

Van twee *T. hermanni* schildpadden die hetzelfde gewicht hebben, is bekend dat de grootste een Jackson ratio van 0,17 heeft.

Beredeneer met de formule of de kleine schildpad in voldoende conditie verkeert.



A58
*

Een van de oudste methoden om de gevoelstemperatuur te berekenen is de methode van Siple en Passel.

De formule die hierbij hoort is

$$G = 33 + (T - 33) \cdot W \text{ met } W = 0,474 + 0,454\sqrt{w} \cdot (1 - 0,1\sqrt{w}).$$

Hierin is G de gevoelstemperatuur in $^{\circ}\text{C}$, T de luchttemperatuur in $^{\circ}\text{C}$ op 1,50 meter hoogte en w de windsnelheid in m/s op 10 meter hoogte. De formule geldt voor windsnelheden tussen 0 en 25 m/s.

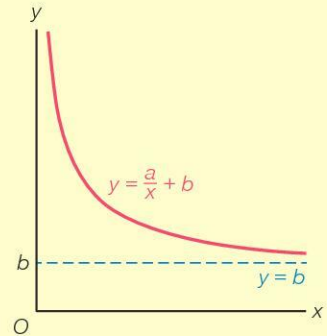
- Uit de formule van G volgt dat er een luchttemperatuur is die bij elke windsnelheid dezelfde gevoelstemperatuur oplevert.
Toon dit aan.
- Schets de grafiek van W voor w tussen 0 en 25. Welke soort van stijgen of dalen heeft de grafiek van W ?
- Beredeneer met de schets van vraag b en de formule van G dat bij luchttemperaturen rondom het vriespunt de gevoelstemperatuur afneemt als de windsnelheid toeneemt.

Terugblik

Formules van de vorm $y = \frac{a}{x} + b$

Wordt x heel groot bij de formule $y = \frac{a}{x} + b$, dan nadert $\frac{a}{x}$ tot 0, dus dan wordt $y = \frac{a}{x} + b \approx b$, dus de grenswaarde is b .

De grafiek komt rechts steeds dichterbij de lijn $y = b$. In de figuur hiernaast is $a > 0$, dus de grafiek is dalend.



Bij de formule $N = \frac{8}{t} + 3,75$ met $t > 0$ bereken je als volgt dat de grafiek dalend is.

Als t toeneemt, dan neemt $\frac{8}{t}$ af, dus dan neemt $\frac{8}{t} + 3,75$ ook af.

Dus de grafiek van N is dalend.

Je berekent als volgt wat de grenswaarde van N is.

Als t heel groot wordt, dan nadert $\frac{8}{t}$ tot 0, dus dan wordt $\frac{8}{t} + 3,75 \approx 3,75$.

Dus de grenswaarde is 3,75.

Je kunt als volgt berekenen dat N niet gelijk kan zijn aan 3,7. De grafiek is dalend en de grenswaarde is 3,75, dus N is altijd groter dan 3,75. Dus N kan niet gelijk zijn aan 3,7.

Redeneren met formules

Bij de formule $N = \frac{1200}{4 + 15 \cdot 0,72^t}$ bereken je als volgt dat de grafiek van N stijgend is.

Als t toeneemt, dan neemt $0,72^t$ af, dus dan neemt $15 \cdot 0,72^t$ ook af, dus ook $4 + 15 \cdot 0,72^t$ neemt af. Daarom neemt $\frac{1200}{4 + 15 \cdot 0,72^t}$ toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

Je kunt berekenen dat bij de formule $y = 200 - \frac{50}{x\sqrt{x}}$ een stijgende grafiek hoort. Dat gaat als volgt.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe, dus dan neemt $x\sqrt{x}$ ook toe, dus dan neemt $\frac{50}{x\sqrt{x}}$ af, dus dan neemt $200 - \frac{50}{x\sqrt{x}}$ toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

11.5 Wiskundige modellen

059
☑ * *

In een krantenartikel staat dat het aantal wilde vogels in Noord-Amerika in 50 jaar met 3 miljard is afgenomen. In 1970 waren er nog 10 miljard wilde vogels.

a Ga uit van een lineaire afname.

Stel de formule op van het aantal wilde vogels in Noord-Amerika. Neem het aantal N in miljarden en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1970.

b Ga uit van een exponentiële afname.

Stel de formule op van het aantal wilde vogels in Noord-Amerika. Neem het aantal N in miljarden en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1970. Rond de groeifactor af op drie decimalen.



Van de Baltimoretroepiaal is 2 op de 5 in 50 jaar verdwenen.

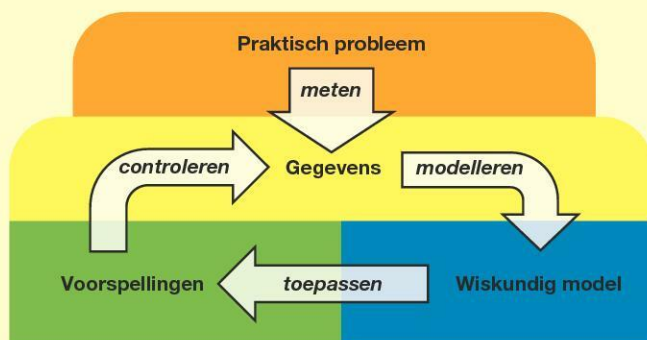
Theorie A Modelvorming

In opgave 59 heb je twee formules opgesteld bij de vogelstand in Noord-Amerika. Omdat in het krantenartikel maar weinig gegevens staan, kun je niet weten welke formule juist is. En misschien is geen van beide formules juist.

Wanneer je de vogelstand beschrijft met wiskunde, is het resultaat een **wiskundig model**.

Heb je de beschikking over meer gegevens, dan kun je controleren welke van de opgestelde modellen het beste voldoet. Wellicht is het nodig om een ander wiskundig model te gebruiken dan lineaire of exponentiële groei.

Het proces van opstellen van een wiskundig model en het aanpassen hiervan heet **modelvorming**. Zie het schema hieronder.



figuur 11.20

Voorbeeld

De meeste medicijnen zijn beperkt houdbaar, omdat na verloop van tijd de hoeveelheid werkzame stof in het medicijn minder wordt. Bij het medicijn Prox wordt de hoeveelheid werkzame stof W uitgedrukt in een getal tussen 0 en 100.

Bij de productie is de hoeveelheid werkzame stof 100 en bij een bewaartemperatuur van 20°C is na 10 dagen deze hoeveelheid nog 84. Neem aan dat er een lineair verband is tussen W en de tijd t in dagen.

- a** Stel de formule op van W .

Het blijkt dat 26 dagen na de productie de hoeveelheid werkzame stof 64 is.

- b** Toon aan dat dit niet in overeenstemming is met het lineaire model.
c Laat zien dat er wel een exponentieel model is dat past bij deze gegevens.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} W = at + 100 \\ t = 10 \text{ en } W = 84 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 10a + 100 = 84 \\ 10a = -16 \\ a = -1,6 \end{array}$$

Dus $W = -1,6t + 100$.

- b** $t = 26$ invullen in de formule geeft $W = -1,6 \cdot 26 + 100 = 58,4$ en dit is niet gelijk aan 64, dus niet in overeenstemming met het lineaire model.

c $g_{10 \text{ dagen}} = \frac{84}{100} = 0,84$, dus $g_{\text{dag}} = 0,84^{\frac{1}{10}} \approx 0,983$

$$g_{26 \text{ dagen}} = \frac{64}{100} = 0,64, \text{ dus } g_{\text{dag}} = 0,64^{\frac{1}{26}} \approx 0,983$$

De groeifactoren per dag zijn bij benadering aan elkaar gelijk en daarom past een exponentieel model bij deze gegevens.



60 Zie het voorbeeld. Het blijkt dat de hoeveelheid werkzame stof 52 dagen na de productie nog 41 is.

- a** Onderzoek of dit overeenkomt met het exponentiële model.
b Na hoeveel dagen is volgens het exponentiële model de hoeveelheid werkzame stof voor het eerst minder dan 25?

Bij bewaren in de koelkast bij 4°C is Prox langer houdbaar. In de tabel hiernaast zie je dat bij bewaren in de koelkast de hoeveelheid werkzame stof na 16 dagen 86 is.

HOUDBAARHEID PROX BIJ 4°C

t in dagen	0	8	16	52
W	100	92	86	60

- c** Laat zien dat bij de tabel geen lineair model hoort.

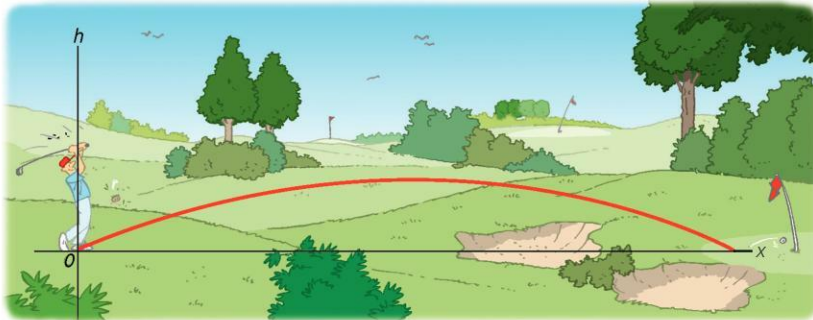
De producent heeft twee modellen opgesteld die de hoeveelheid werkzame stof bij bewaren bij 4°C beschrijven. Deze modellen zijn $W_1 = 100 \cdot 0,989^t$ en $W_2 = 100 - 0,6t - 1,2\sqrt{t}$.

- d** Onderzoek welke van deze twee modellen het beste past bij de gegevens in de tabel.

61
 *

Bij het bestuderen van de baan van een golfbal heeft men de tabel hiernaast opgesteld. Hierin zijn x en h in meters. Zie ook de figuur hieronder.

x	0	10	30	55	60
h	0	3,5	7,5	7,0	6,0



figuur 11.21

Men neemt aan dat de baan de vorm van een parabool heeft. Men gaat uit van het model $h = -0,005x^2 + 0,4x$.

- Controleer dat de formule klopt met de gegevens bij $x = 10$ en $x = 60$.
- Hoe hoog komt de bal maximaal volgens dit model?
- Hoeveel meter vanaf de afslag komt de bal volgens dit model weer op de grond?
- De formule komt niet overeen met één van de meetwaarden in de tabel. Bij welke waarde van x is dat? Hoeveel cm wijkt de hoogte die de formule geeft af van de gemeten waarde?

62
 *

Een experiment met bacteriën in een laboratorium begint op 1 september om 0:00 uur met 200 miljoen bacteriën. Uit metingen blijkt dat het aantal bacteriën op 1 september met 7 miljoen afneemt en op 6 september toeneemt van 285 miljoen tot 368 miljoen. De laborant neemt op grond van deze metingen aan dat het aantal bacteriën wordt gegeven door het model $N = t^3 - 8t + 200$. Hierin is N het aantal in miljoenen en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 september om 0:00 uur.

- Controleer dat de formule overeenkomt met de gegevens.
- Op welke datum neemt volgens dit model het aantal bacteriën voor het eerst met meer dan 200 miljoen toe?
- Maak een schets van de grafiek bij de formule waaruit blijkt dat er een tijdstip is waarop het aantal bacteriën minimaal is en bereken het minimale aantal bacteriën.

A63
  *

Een thermosfles wordt getest door deze te vullen met kokendheet water. Daarna wordt op verschillende tijdstippen de temperatuur van het water in de fles gemeten. Zie de tabel, waarin T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ is na t minuten.

t	0	9	19	31	46	65
T	100	90	80	70	60	50

a Licht toe dat bij de tabel geen lineair verband hoort.

De onderzoeker gaat uit van het model $T = 80 \cdot 0,985^t + 20$.

b Controleer of het model bij benadering klopt met de gegevens.

c Wat is volgens het model de temperatuur na een uur?

d Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van het water in de thermosfles gedaald is tot 40°C .

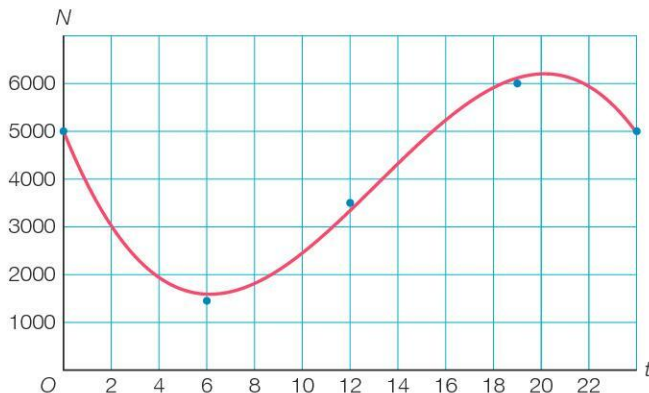
e In het model is er rekening mee gehouden dat het water op den duur de temperatuur van de omgeving aanneemt.

Bereken wat deze omgevingstemperatuur is.



A64
  *

Het aantal bezoekers van een website is op een doordeweekse dag om zes uur 's ochtends minimaal met 1450 bezoekers en om zeven uur 's avonds maximaal met 6000 bezoekers. Verder is om 12 uur het aantal bezoekers 3500. En om 0 uur en 24 uur zijn er 5000 bezoekers. In de figuur hieronder zijn deze gegevens als punten getekend. Bovendien is de grafiek bij het model $N = -3,35t^3 + 132t^2 - 1240t + 5000$ getekend. Hierbij is N het aantal bezoekers en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0 uur.



figuur 11.22

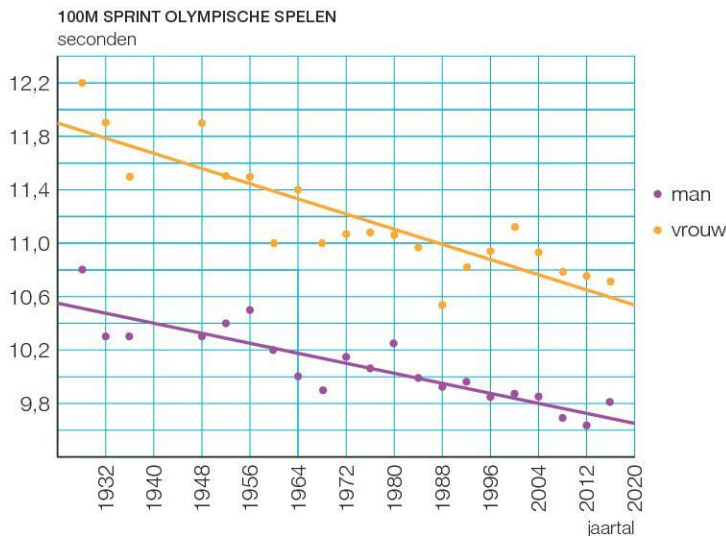
a Het minimale aantal bezoekers in het model wijkt af van het werkelijke minimum.

Hoeveel procent scheelt het?

b Het tijdstip waarop het maximale aantal bezoekers wordt bereikt, wijkt in het model af van de werkelijkheid.

Hoeveel minuten scheelt het?

Bij het atletiekonderdeel 100 meter sprint op de Olympische Spelen verbeteren de vrouwen zich sneller dan de mannen. Zie de figuur hieronder met de tijden van de vrouwelijke en mannelijke winnaars en de bijbehorende lineaire modellen. De Olympische Spelen worden om de vier jaar gehouden.



figuur 11.23

Tijdens de Olympische Spelen van 1948 in Londen was de Nederlandse Fanny Blankers-Koen de snelste vrouw op de 100 meter.

- Is dat vergeleken met het model een snelle of langzame tijd? Licht toe.
- Jim Hines was de eerste atleet die bij de Olympische Spelen de 100 meter sprint in minder dan 10 seconden liep.
In welk jaar was dat?

Bij het model voor de winnende tijden van de vrouwen hoort de formule $V = -0,0142t + 12,237$ met V in seconden en t in jaren met $t = 0$ in 1900.

- Gebruik het model om te voorspellen in welk jaar tijdens de Olympische Spelen voor het eerst een vrouw de mijlpaal van minder dan 10 seconden zal bereiken.
- De formule bij het model voor de winnende tijden van de mannen is van de vorm $M = at + b$ met M in seconden en t in jaren met $t = 0$ in 1900.
Stel de formule op. Gebruik daarbij dat het model bij 1940 een tijd van 10,4 seconden geeft en bij 2004 een tijd van 9,8 seconden.
- In welk jaar zouden volgens de modellen tijdens de Olympische Spelen de vrouwen voor het eerst sneller zijn dan de mannen? Welke tijd hoort daarbij?
- In 1988 won Florence Griffith Joyner de gouden medaille. Ze had een tijd van 10,54 seconden en sindsdien is geen enkele vrouw sneller geweest op de 100 meter tijdens Olympische Spelen.
Bereken haar gemiddelde snelheid in km/uur. Rond af op één decimaal.
- Wat zou volgens het model de gemiddelde snelheid in km/uur van de snelste vrouw zijn tijdens de Spelen in 2200? Wat zegt je antwoord over de bruikbaarheid van deze lineaire modellen om voorspellingen te doen die ver in de toekomst liggen? Licht toe.

Gegeven is de tabel hiernaast. Bij de tabel hoort een formule van de vorm $Q = \frac{a}{P^{1,5}}$.

P	4	7	9	12
Q	12,5	5,4	3,7	2,4

Met $P = 4$ en $Q = 12,5$ kun je berekenen dat $a = 100$.

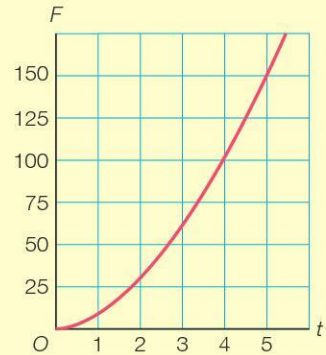
- Laat deze berekening zien.
- Controleer met de gevonden formule of de andere punten van de tabel bij deze formule horen.

Theorie B Modellen bij tabellen en grafieken

In figuur 11.24 is F uitgezet tegen t . Als gegeven is dat bij de grafiek een formule hoort van de vorm $F = at^{1,75}$, dan kun je met het invullen van de coördinaten van een geschikt gekozen punt de waarde van a berekenen. Lees af $t = 5$ en $F = 150$.

Invullen geeft $a \cdot 5^{1,75} = 150$, dus $a = \frac{150}{5^{1,75}} = 8,972\dots$

Afgerond op gehele is $a = 9$, dus de formule is $F = 9t^{1,75}$.



figuur 11.24

Voorbeeld

Gegeven is de tabel hiernaast.

- Laat zien dat K niet omgekeerd evenredig is met t .

t	1	2	3	4	5
K	50	23,3	14,9	11,9	8,5

Bij de tabel hoort een verband van de vorm $K = \frac{50}{t^c}$.

- Bereken c . Rond af op één decimaal.

Uitwerking

- Als K omgekeerd evenredig is met t , dan geldt $K = \frac{a}{t}$.

$t = 1$ en $K = 50$ geeft $\frac{a}{1} = 50$, dus $a = 50$.

$t = 5$ en $K = 8,5$ geeft $\frac{a}{5} = 8,5$, dus $a = 42,5$.

Niet dezelfde a , dus K is niet omgekeerd evenredig met t .

- $K = \frac{50}{t^c}$
 $t = 5$ en $K = 8,5$ $\left\} \frac{50}{5^c} = 8,5$

Voer in $y_1 = \frac{50}{5^x}$ en $y_2 = 8,5$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,1$.

Dus $c = 1,1$.

R67


Zie het voorbeeld.

- Onderzoek waarom bij vraag b $t = 1$ en $K = 50$ niet geschikt zijn om c te berekenen.
- Onderzoek of je ook $c = 1,1$ krijgt als je $t = 3$ en $K = 14,9$ gebruikt.

Zie de theorie.

Uit figuur 11.24 is het punt $(5, 150)$ gebruikt om a te berekenen, omdat dit punt goed af te lezen is in de grafiek.

- Waarom is het niet verstandig om het punt $(0, 0)$ te gebruiken om a te berekenen?
- Onderzoek of je ook $a = 9$ krijgt als je het punt bij $t = 4$ gebruikt.

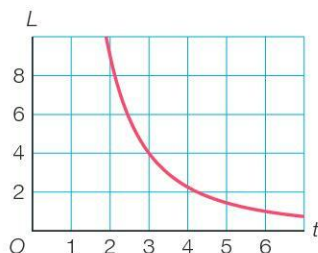
68


Gegeven is de grafiek hiernaast.

- Laat met berekeningen zien dat L niet omgekeerd evenredig is met t .

Bij de grafiek hoort een verband van de vorm $L = \frac{36}{t^b}$.

- Bereken b .



figuur 11.25

69


Gegeven is de tabel hiernaast.

- Onderzoek of N evenredig is met t .
- Onderzoek of er een lineair verband bestaat tussen t en N .

Bij de tabel hoort een verband van de vorm $N = 27t^b$.

- Bereken b . Rond af op één decimaal.

t	4	9	14	18
N	94	195	290	364

A70


In opgave 59 heb je kunnen lezen dat tussen 1970 en 2020 het aantal wilde vogels in Noord-Amerika is afgenomen van 10 miljard tot 7 miljard. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van deze afname. Hierin is N het aantal wilde vogels in miljarden en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1970. Tussen 1970 en 1990 is de afname exponentieel.

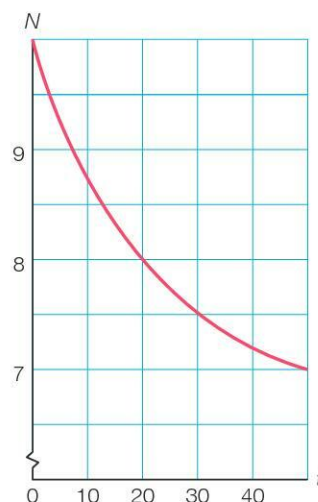
- Stel de formule op die bij deze exponentiële afname hoort en bereken met deze formule wat het aantal wilde vogels zou zijn geweest in 2020.

De exponentiële afname zet zich na 1990 niet voort, want in 2020 is $N = 7$.

Een onderzoeker overweegt twee modellen voor het aantal wilde vogels vanaf 1990. De formules zijn van de vorm

$N_I = 6(1 + g^t)$ en $N_{II} = \frac{12,4}{t^b}$ met t in jaren en $t = 0$ in 1970.

- Gebruik de gegevens van 1990 om g en b te berekenen en controleer hiermee welk model het beste klopt voor 2020.



figuur 11.26

71 Bij de tabel hiernaast hoort een formule van de vorm



$$N = \frac{400}{1 + 20 \cdot g^t}$$

Bereken g . Rond af op twee decimalen.

t	0	8	14	19
N	19	99	230	326

A72



De veelgebruikte vuistregel dat een hondenleeftijd keer zeven gelijk is aan een mensenleeftijd klopt niet. Uit deze vuistregel volgt bijvoorbeeld dat een hondenleeftijd van 2 jaar vergelijkbaar is met een mensenleeftijd van 14 jaar. In werkelijkheid is in dit geval een mensenleeftijd van ongeveer 40 jaar een veel betere schatting. Bovendien is er bij hondenleeftijden een verschil tussen kleine rassen (tot 15 kg), middelgrote rassen (15 tot 45 kg) en grote rassen (vanaf 45 kg).

In de tabel hiernaast zie je een omrekening die de situatie veel beter weergeeft.

Voor alle rassen kun je een model van de vorm $m = 30\sqrt{h} + ah$ gebruiken. Hierin is h de hondenleeftijd in jaren, m de mensenleeftijd in jaren en a een getal dat afhangt van de grootte van het ras. Voor kleine rassen geldt $a = -1,8$.

Er is bij kleine rassen een hondenleeftijd tussen 11 en 12 jaar waarbij het model $m_{\text{klein}} = 30\sqrt{h} - 1,8h$ dezelfde mensenleeftijd oplevert als de vuistregel.

leeftijd hond	mensenjaren		
	klein ras	middelgroot ras	groot ras
1	28	29	30
2	39	40	43
4	53	56	60
10	77	84	95
15	89	100	
20	100		

- Bereken deze hondenleeftijd in één decimaal.
- Bereken bij welke hondenleeftijd het verschil tussen het model en de vuistregel maximaal is. Hoeveel is dit maximale verschil in mensenjaren? Rond af op één decimaal.

Volgens het model worden honden van middelgrote rassen maximaal 15 jaar oud. Stel dat een hond van een middelgroot ras met pensioen mag als een mensenleeftijd van 67 jaar is bereikt.

- Bereken de waarde van a die hoort bij middelgrote rassen en gebruik deze om de pensioenleeftijd van deze hond te berekenen. Rond af op één decimaal.

A73



Zie opgave 72.

Een hond van een groot ras wordt volgens het model maximaal 100 mensenjaren oud.

- Hoe oud wordt een hond van een groot ras maximaal in hondenjaren? Rond af op gehele.

Het verschil tussen m_{groot} en m_{klein} neemt toe bij toenemende hondenjaren. Hierbij is m_{groot} de mensenleeftijd in het model bij de grote rassen.

- Bereken bij welke hondenleeftijd het verschil tussen m_{groot} en m_{klein} 10 jaar is. Rond af op één decimaal.

Terugblik

Modelvorming

Een wiskundig model is een formule, een grafiek of een ander wiskundig instrument waarmee je de werkelijkheid benadert. Omdat je met een benadering werkt, moet je voorzichtig zijn met het trekken van conclusies. Om een betere benadering te krijgen kan het noodzakelijk zijn het model te verfijnen of bij te stellen.

Bij de tabel hiernaast wordt een exponentieel model opgesteld.

t in dagen	3	12
N	91,7	22,9

Je krijgt $g_{9 \text{ dagen}} = \frac{22,9}{91,7}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{22,9}{91,7}\right)^{\frac{1}{9}} = 0,8571\dots$

$t = 3$ en $N = 91,7$ invullen in $N = b \cdot 0,8571\dots^t$ geeft $N \approx 146$, dus het model is $N = 146 \cdot 0,857^t$.

Het blijkt dat voor $t = 7$ geldt dat $N = 39,3$. De formule geeft $N = 146 \cdot 0,857^7 \approx 49,6$. Hieruit volgt dat het exponentiële model niet klopt met alle gegevens.

Je kunt controleren dat het model $N = \frac{275}{t}$ beter past bij de drie gegevens.

$t = 3$ geeft $N = \frac{275}{3} \approx 91,7$

$t = 7$ geeft $N = \frac{275}{7} \approx 39,3$

$t = 12$ geeft $N = \frac{275}{12} \approx 22,9$

Modellen bij tabellen en grafieken

Bij de tabel hiernaast hoort een formule van de vorm

$A = 20t^b$. Invullen van $t = 12$ en $A = 129$ geeft

$20 \cdot 12^b = 129$. Deze vergelijking los je op met de GR.

Je krijgt $b \approx 0,75$ en de formule is $A = 20t^{0,75}$.

t	1	5	9	12
A	20	67	104	129

Bij de grafiek hiernaast hoort een formule van de vorm

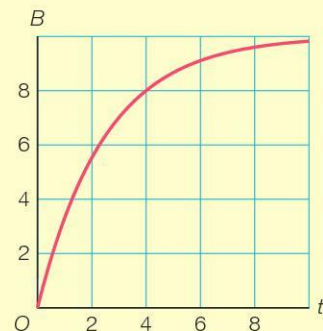
$B = 10(1 - g^t)$. Lees een geschikt punt af, bijvoorbeeld

(4, 8). Invullen van $t = 4$ en $B = 8$ geeft de vergelijking

$10(1 - g^4) = 8$.

Oplossen met de GR geeft $g \approx 0,67$ en de formule is

$B = 10(1 - 0,67^t)$.



Eindopdracht Toprozen op de veiling

Kweker Jansma is gespecialiseerd in het kweken van rozen met het predicaat Toproos.

Jansma verkoopt deze rozen elke vrijdag op de veiling. Daar worden dan ook door andere kwekers Toprozen aangeboden.

Voor het bedrag dat Jansma per Toproos ontvangt hanteert hij een model. Het bedrag is omgekeerd evenredig met het totaal aantal Toprozen dat op de veiling wordt aangeboden. Als er in totaal 8000 Toprozen worden aangeboden, is de prijs per roos

60 cent. Hieruit volgt de formule $p = \frac{4800}{T}$.

Hierin is p de prijs per roos in euro's en T het totaal aantal Toprozen dat op die dag op de veiling wordt aangeboden.

- Laat zien hoe de formule $p = \frac{4800}{T}$ uit de gegevens volgt.



Op een vrijdag biedt Jansma 1000 Toprozen aan op de veiling. Hij ontvangt hiervoor in totaal 640 euro.

- Hoeveel Toprozen bieden de andere kwekers die dag aan op de veiling?

Op een vrijdag bieden de andere kwekers samen 4500 Toprozen aan op de veiling.

Voor de Toprozen die Jansma die dag aanbiedt, ontvangt hij een bedrag van 1200 euro.

- Hoeveel Toprozen heeft Jansma die dag op de veiling aangeboden?

We noemen het aantal Toprozen dat Jansma op een vrijdag aanbiedt J en het aantal Toprozen dat de andere kwekers samen aanbieden A .

- Druk het bedrag B in euro dat Jansma op een vrijdag ontvangt uit in J en A .

Op een vrijdag bieden de andere kwekers samen 5000 Toprozen aan. Jansma ontvangt een bedrag van 1250 euro voor zijn Toprozen.

- Welk bedrag ontvangt hij per roos?

Op een vrijdag bieden de andere kwekers samen 4000 Toprozen meer aan dan Jansma. Op deze dag ontvangt Jansma voor zijn Toprozen in totaal 1025 euro.

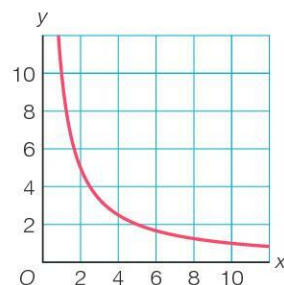
- Hoeveel Toprozen heeft Jansma die dag aangeboden? Hoeveel leverde een Toproos die dag per stuk op?

Diagnostische toets

11.1 Grafieken en gebieden

- 1** Bij een bepaald OV-bedrijf geldt voor het bedrag B in eurocenten op je OV-chipkaart na een rit de formule $B = -15k + S$. Hierin is k het aantal gereden kilometers en S het saldo vóór de rit in eurocenten.
- a** Bereken na hoeveel kilometer er geen geld meer op je kaart staat bij een saldo van 3 euro vóór de rit.
 - b** Teken in één figuur de grafieken die horen bij een saldo van 1,50 euro en 3,50 euro.
 - c** Kleur in de figuur van vraag b het gebied dat hoort bij een saldo tussen 1,50 euro en 3,50 euro en waarbij het bedrag meer dan 1 euro is.
 - d** Myra wil berekenen na hoeveel kilometer het bedrag op haar kaart nog 2 euro is bij verschillende saldo's.
Neem $B = 200$ en schrijf de formule in de vorm $k = aS + b$. Rond a en b af op twee decimalen.

- 2** [**WERKBLAD**] Op het werkblad is de grafiek van $xy = 10$ getekend.
Teken op het werkblad het gebied waarvoor geldt $xy \geq 10$ en $x \leq 6$ en $0,5x + 0,5y \leq 5$.



figuur 11.27

11.2 Herleiden en combineren van formules

- 3**
- a** Schrijf de formule $N = \frac{25}{50 \cdot 0,4^t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$.
 - b** Maak p vrij bij de formule $9q = 1,5 \cdot \sqrt{16p}$.
 - c** Neem $L = 2$ in de formule $x \cdot L^2 = y - \frac{4 - 6x}{L}$ en maak y vrij.
 - d** Druk q uit in V bij $\frac{5V}{6q + 7} = 8$. Rond af op twee decimalen.
- 4**
- a** Je kunt de formules $R = 2xy - 5$ en $y = 3x + 2$ combineren tot de formule $R = 6x^2 + 4x - 5$.
Laat dat zien.
 - b** Gegeven zijn de formules $L = 6p - 5q + 2$ en $q = 3p - 2$.
Herleid de formule van L tot de vorm $L = aq + b$.

5 Voor de dagelijkse kosten K in eurocenten voor het gebruik van een elektrisch apparaat geldt de formule $K = \frac{p \cdot W}{0,417}$, met p de prijs van elektriciteit in euro per kilowattuur en W het vermogen van het apparaat in watt.

- a** De dagelijkse kosten voor het gebruik van een apparaat van 200 watt zijn 106 eurocent.
Bereken p . Rond af op twee decimalen.
- b** Anne heeft in 2020 een nieuwe koelkast aangeschaft en op hetzelfde moment werd ze klant bij een nieuwe energieleverancier. Deze hanteert de formule $p = 0,25 - 0,01j$. Verder geldt voor de koelkast $W = 30 + j$. In beide formules is j de tijd in jaren sinds 2020.
Herleid de formule van K tot de vorm $K = aj^2 + bj + c$. Rond a en b af op twee decimalen en c op gehelen.

11.3 Evenredigheden

6 Gegeven is dat het dagelijks aantal verkochte croissantjes C in een supermarkt omgekeerd evenredig is met de prijs p per croissant in euro. Voor $p = 1,20$ is $C = 40$.

- a** Stel de formule op van C .
- b** Op een dag zijn de croissantjes in de aanbieding van 1,50 euro voor 1,20 euro.
Hoeveel meer croissantjes worden die dag verkocht vanwege de aanbieding?

11.4 Redeneren met formules

7 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.

- a** $K = 4 - \frac{7}{p}$ met $p > 0$
- b** $y = \frac{1200}{1,2x^4 + \sqrt{x}} + 5,2$

11.5 Wiskundige modellen

8 Zie de tabel hiernaast.

- a** Volgens Marloes hoort het model $y = -0,47x + 25,5$ bij de tabel.

x	1	20	32
y	25	16	15

Controleer of dat bij benadering klopt.

- b** Volgens Adriaan hoort er een formule van de vorm $y = 5\left(1 + \frac{4}{x^p}\right)$ bij de tabel.
Bereken p . Rond af op één decimaal.

12

Examentraining

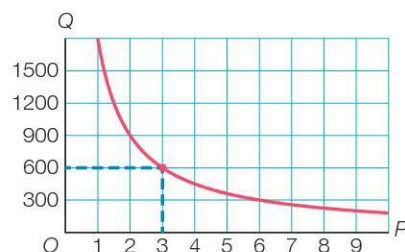
Waar moet je bij het examen op letten?

- Het is belangrijk dat je je goed inleeft in het probleem van de opgave. Daarvoor is vaak de eerste vraag bedoeld.
- Ga gegeven reken- en afleesvoorbeelden zorgvuldig na, dit helpt je bij het maken van de vragen.
- Ga steeds na of je antwoord hebt gegeven op de gestelde vraag. Let ook op de afronding.
- Lees uit grafieken en figuren nauwkeurig af. Gebruik dus je geodriehoek. Onnauwkeurig aflezen kost punten.



12.1 Algemene vaardigheden

- 1 a** Een hoeveelheid neemt toe van 48 520 tot 69 170.
Hoeveel procent is deze toename?
- b** Voor de hoeveelheden A , B en C gelden de verhoudingen $A : B = 1 : 5$ en $B : C = 2 : 7$.
Bereken de verhouding $A : C$.
- c** Tussen P en Q bestaat een omgekeerd evenredig verband. Zie de figuur hiernaast.
Stel een formule op waarbij je Q uitdrukt in P .
- d** Zie de tabel hiernaast.
Bereken met lineair interpoleren A in het jaar 2012.
- e** Zie de tabel hiernaast.
Bereken met lineair extrapoleren A in het jaar 2023.
- f** Gegeven is de formule $K = 3,1A - 4,12B + 16,05$.
Neem $K = 24$ en $B = 15$ en bereken A .



figuur 12.1

jaar	2006	2015	2020
A	5700	6195	6410

Gegeven is de formule $F = \frac{100x}{0,6x^2 + x + 3}$ met $0 < x < 10$.

- g** Schets de grafiek van F en geef de verschillende soorten van stijgen en dalen van de grafiek.
- h** Bereken het maximum van F . Rond af op twee decimalen.
- i** Bereken voor welke waarden van x geldt dat $F > 20$. Rond af op twee decimalen.

Procenten

27% betekent 27 van de 100, dus $27\% = \frac{27}{100} = 0,27$.

27% van 320 is $0,27 \times 320 = 86,4$.

Procentberekeningen

- 1 Hoeveel procent is 12 van 65?
12 van 65 is $\frac{12}{65} \times 100\% \approx 18,5\%$.
- 2 Een hoeveelheid neemt toe van 825 tot 917.
De relatieve toename is $\frac{917 - 825}{825} \times 100\% \approx 11,2\%$.
- 3 Bereken 18,7% van 728.
18,7% van 728 is $0,187 \times 728 \approx 136$.

- Relatieve verandering is $\frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\%$.
- De relatieve verandering is de verandering in procenten.
- De absolute verandering is de verandering in aantallen (hoeveelheden).

- 4 • Een hoeveelheid van 836 neemt met 42,7% toe.
Je krijgt $1,427 \times 836 \approx 1193$.
• Een hoeveelheid van 8,12 miljoen neemt met 17,6% af.
Je krijgt $0,824 \times 8,12 \approx 6,7$ miljoen.
- 5 • Een hoeveelheid neemt met 38% toe tot 376.
Je had $\frac{376}{1,38} \approx 272$.
• Een hoeveelheid neemt met 57% af tot 6,3 miljoen.
Je had $\frac{6,3}{0,43} \approx 14,7$ miljoen.
- 6 Een hoeveelheid van 320 is 35% van het totaal.
Het totaal is $\frac{320}{0,35} \approx 914$.
- 7 Een hoeveelheid neemt met 10% toe. De zo ontstane hoeveelheid neemt met 20% toe.
Omdat $1,10 \times 1,20 = 1,32$, is de totale procentuele toename 32%.

Verhoudingen, evenredig en omgekeerd evenredig

Aron, Bouchra en Carmen verdelen een bedrag in de verhouding $A : B : C = 2 : 5 : 10$. Als Bouchra 165 euro meer krijgt dan Aron, dan is 3 delen gelijk aan 165 euro, dus 1 deel is 55 euro.
Carmen krijgt $10 \cdot 55 = 550$ euro en het totale bedrag is $(2 + 5 + 10) \cdot 55 = 17 \cdot 55 = 935$ euro.

Als M evenredig is met N dan geldt $M = aN$. Weet je dat bij $N = 18$ hoort $M = 135$, dan geldt $18a = 135$, dus $a = \frac{135}{18} = 7,5$.

De formule is dus $M = 7,5N$.

Als G omgekeerd evenredig is met R , dan geldt dat $G \cdot R = \text{constant}$.
Hoort $G = 1500$ bij $R = 20$, dan is de constante gelijk aan $1500 \cdot 20 = 30\,000$.

De formule waarbij G is uitgedrukt in R is dan $G = \frac{30\,000}{R}$.

Interpoleren en extrapoleren

Bij een tabel met waarnemingsgetallen kun je interpoleren en extrapoleren. Bij interpoleren schat je een tussenliggende waarde. Bij extrapoleren schat je een waarde die buiten de gegevens ligt.

Bij grafisch interpoleren en grafisch extrapoleren schat je een waarde aan de hand van een grafiek.

Bij lineair interpoleren en lineair extrapoleren ga je uit van een rechte lijn door de gegeven punten.

Bij de tabel

a	12	18	25	36	50
P	720	950	1428	2831	2180

bereken je P voor $a = 33$ met behulp van lineair interpoleren als volgt.

Gebruik

a	25	36
P	1428	2831

$+11$
 $+1403$

Als a met 1 toeneemt, neemt P met $\frac{1403}{11}$ toe.

Als a met 8 toeneemt, neemt P met $8 \cdot \frac{1403}{11}$ toe.

Voor $a = 33$ krijg je $P = 1428 + 8 \cdot \frac{1403}{11} \approx 2448$.

Voor het berekenen van P met behulp van lineair extrapoleren bij $a = 57$ gebruik je het gedeelte

36	50
2831	2180

van de tabel.

Formules invullen en vergelijkingen oplossen

De formule $B = 4,5D - 5,6E + 21,4$ is een formule met twee variabelen.

Voor $D = 5$ en $E = 6$ krijg je $B = 4,5 \cdot 5 - 5,6 \cdot 6 + 21,4 = 10,3$.

Voor $B = 54$ en $D = 11,6$ krijg je $4,5 \cdot 11,6 - 5,6E + 21,4 = 54$. Dit is een lineaire vergelijking, en deze vergelijking kun je stap voor stap oplossen.

Je krijgt $52,2 - 5,6E + 21,4 = 54$

$$-5,6E = -19,6$$

$$E = 3,5$$

Formules en grafieken op de GR

Op de GR kun je formules invoeren, hierbij tabellen maken en grafieken plotten. Bij de grafieken kun je:

- bij een gegeven x -waarde de y -waarde berekenen;
- de coördinaten van snijpunten berekenen (met de optie snijpunt);
- de coördinaten van toppen berekenen (met de opties maximum en minimum);
- de coördinaten van snijpunten met de horizontale as berekenen (met de optie nulpunt).

Geef de volgende toelichting bij gebruik van de GR.

- 1 Noteer de formules die je invoert.
Schrijf dus op $y_1 = \dots$, $y_2 = \dots$, enzovoort.
- 2 Noteer de optie die je gebruikt en geef het resultaat.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

Vergeet de toelichting niet. Dat kost punten op je examen.

Hiernaast zie je de grafiek van $N = 20t^{1,4} - 6t^{1,8}$ met $0 < t < 20$.

Ook is de lijn $N = 100$ getekend.

Om te berekenen voor welke waarden van t geldt dat $N > 100$, voer je in $y_1 = 20x^{1,4} - 6x^{1,8}$ en $y_2 = 100$.

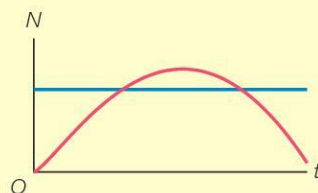
De optie snijpunt geeft $x = 6,452\dots$ en $x = 15,069\dots$

Wordt het antwoord gevraagd in twee decimalen, dan krijg je t tussen 6,46 en 15,06. Let hierbij op de juiste afronding. Zo is voor $t = 6,45$ nog niet $N > 100$.

Om het maximum van N te berekenen, gebruik je de optie maximum.

De optie maximum geeft $x = 10,822\dots$ en $y = 124,706\dots$

Dus het maximum is ongeveer 124,7 voor $t \approx 10,8$.



figuur 12.2

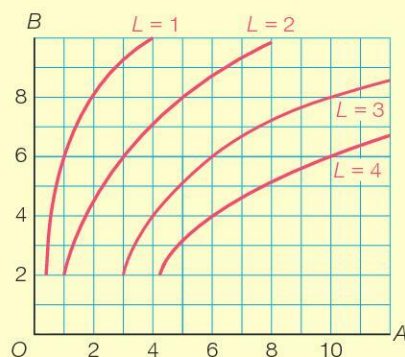
Grafiekenbundels en grafieken tekenen

In de figuur hiernaast is voor een aantal waarden van L de grafiek getekend in een assenstelsel waar B is uitgezet tegen A . Uit deze grafiekenbundel lees je bijvoorbeeld het volgende af:

bij $A = 4$ en $B = 4$ hoort $L = 3$

bij $A = 5$ en $L = 2$ hoort $B = 8$

bij $B = 8$ en $L = 3$ hoort $A = 10$.



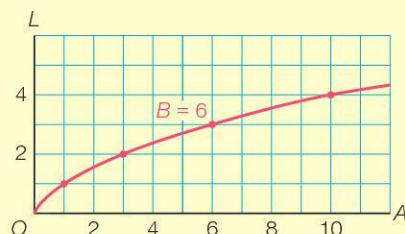
figuur 12.3

Je kunt voor bijvoorbeeld $B = 6$ de grafiek tekenen waarbij L is uitgezet tegen A .

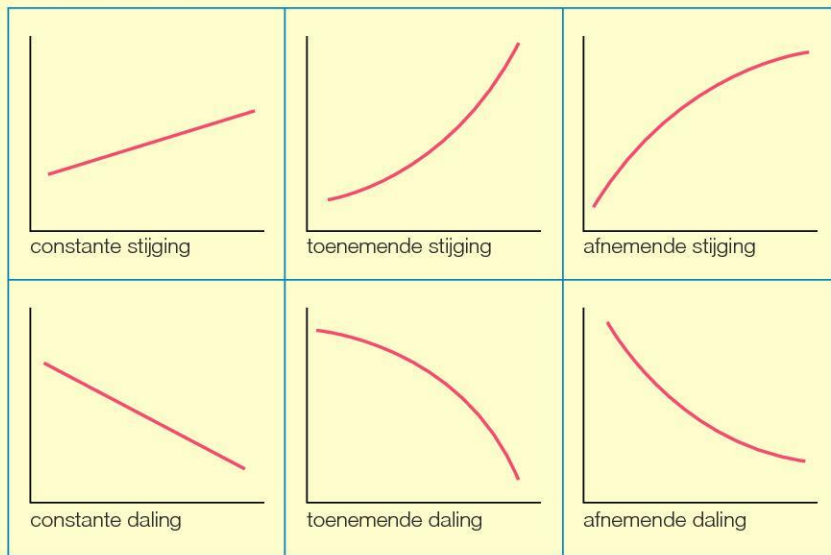
Teken daartoe in de figuur de horizontale lijn $B = 6$ en lees bij de verschillende waarden van L af welke A erbij hoort. Je krijgt de volgende tabel.

A	1	3	6	10
L	1	2	3	4

Zet deze punten uit in een assenstelsel met een horizontale A -as en een verticale L -as en verbind de punten door een vloeiende kromme. Je krijgt figuur 12.4. In deze figuur is de grafiek van L afnemend stijgend. Dit zie je ook terug in de grafiekenbundel in figuur 12.3: op de lijn $B = 6$ wordt van links naar rechts L steeds groter, dus de grafiek van L is stijgend. Bovendien liggen de snijpunten met de lijn $B = 6$ steeds verder uit elkaar, dus de grafiek van L is afnemend stijgend.

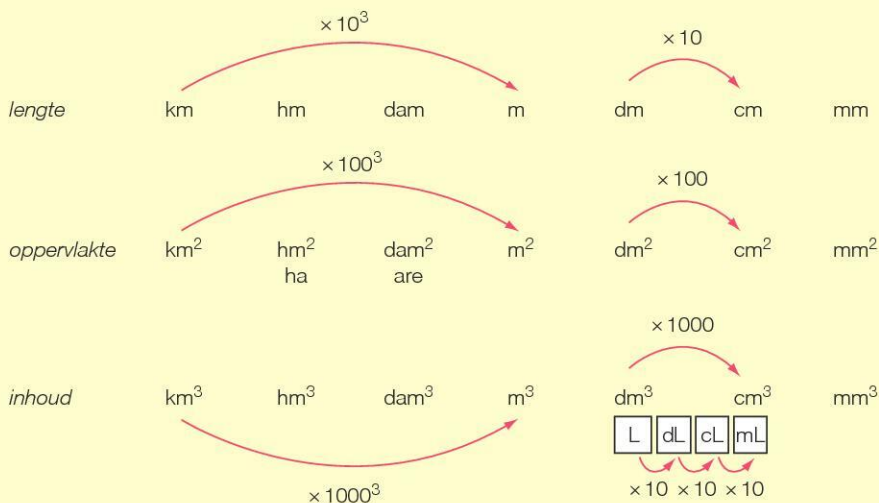


figuur 12.4



Lengte, oppervlakte en inhoud

Het volgende schema kun je gebruiken om eenheden om te rekenen.



figuur 12.5

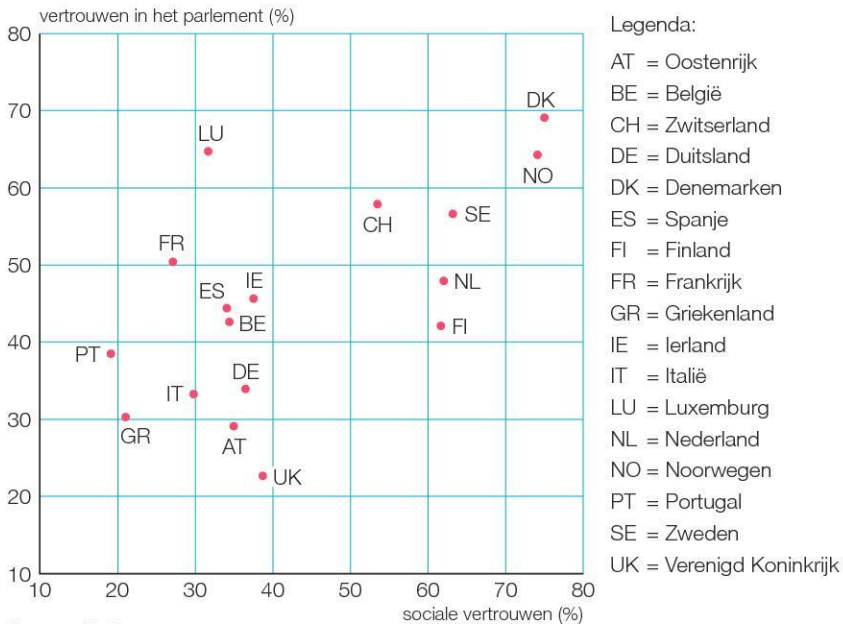
In een etmaal valt 12 mm neerslag. Om te berekenen hoeveel liter er is gevallen in een gebied van 35 km² ga je als volgt te werk.

- Bedenk dat 1 liter = 1 dm³, dus reken de gegevens om naar dm en dm².
- 12 mm = 0,12 dm en 35 km² = 35 · 10⁸ dm²
- Er is 0,12 × 35 · 10⁸ dm² = 420 000 000 dm³ = 420 miljoen liter neerslag gevallen.

2 2016-I

Het Sociaal en Cultureel Planbureau beschrijft om de twee jaar in het rapport 'De Sociale Staat van Nederland' hoe het met het vertrouwen van Nederlanders gesteld is. Daarbij wordt onder andere onderscheid gemaakt tussen het vertrouwen in de medemens, ook wel het *sociale vertrouwen* genoemd, en het vertrouwen in het parlement. Beide soorten van vertrouwen worden uitgedrukt in een percentage: hoe hoger het percentage, des te meer vertrouwen. In de figuur wordt het vertrouwen van Nederlanders in het jaar 2008 vergeleken met dat van andere Europeanen.

Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat in Italië het sociale vertrouwen 30% bedroeg.



figuur 12.5

In de figuur is af te lezen hoe groot in Nederland het vertrouwen in het parlement was. In sommige van de overige landen was het vertrouwen in het parlement groter.

- Bepaal in hoeveel procent van de overige landen dit het geval was.
- Schrijf de namen op van alle landen waar het sociale vertrouwen groter was dan het vertrouwen in het parlement.

3 2016-II

Jarenlang nam in Nederland de gemiddelde lengte van volwassen mannen en vrouwen toe. Ook aan het einde van de vorige eeuw was dat nog zo: op 1 januari van het jaar 1981 waren Nederlandse mannen gemiddeld 177,3 cm lang en op 1 januari 2000 was de gemiddelde lengte toegenomen tot 180,4 cm. Dit proces verliep bij benadering lineair.

Wanneer we ervan uitgaan dat deze groei zich op dezelfde wijze voortzet, kan met behulp van lineair extrapoleren de gemiddelde lengte van de Nederlandse mannen op 1 januari 2050 berekend worden.

Bereken de gemiddelde lengte van de Nederlandse mannen op 1 januari 2050.

4 2017-I

Langs akkers zie je tegenwoordig vaak kleurige stroken met bloemen of met gras en kruiden. Deze stroken worden akkerranden genoemd.

Ze worden aangelegd door boeren die een gedeelte van hun landbouwgrond gebruiken voor natuurbeheer. Akkerranden bieden namelijk leefruimte aan vogels, bijen en vlinders. Ze zijn ook aantrekkelijk voor toeristen.

In de tabel staat aangegeven wat de kosten van een akkerrand per hectare zijn (1 hectare = 10 000 m²).



KOSTEN OP JAARBASIS IN EURO PER HECTARE AKKERRAND

	bloemenrand	gras-kruidenrand
zaaizaad	400	100
grondbewerking	250	63
zaaien	390	146
onderhoud (o.a. onkruid verwijderen)	475	400
management (o.a. administratie)	150	150

Boeren kunnen van de gemeente subsidie krijgen voor het aanleggen van een akkerrand. Voor gemeenten telt vooral de toeristische waarde van een akkerrand, daarom wordt het subsidiebedrag alleen bepaald door de lengte van de akkerrand. Deze lengte wordt uitgedrukt in *streckende meters*: 1 strekkende meter betekent dat de lengte 1 meter is, ongeacht de breedte.

In de Hoeksche Waard golden in 2013 de volgende regels:

- De akkerrand dient minimaal 3,5 meter breed te zijn.
- Het subsidiebedrag is €0,63 per strekkende meter bloemenrand.
- Het subsidiebedrag is €0,53 per strekkende meter gras-kruidenrand.
- Naast het subsidiebedrag worden de kosten van het zaaizaad en het zaaien vergoed.
- Alle overige kosten zijn voor rekening van de boer.

In deze opgave gaan we ervan uit dat de breedte van een akkerrand altijd 3,5 meter is.

Daan de Geus, een boer in de Hoeksche Waard, legde in 2013 bloemenranden aan over een totale lengte van 2500 meter.

- a** Laat zien dat het subsidiebedrag dat hij ontving hoger was dan het bedrag dat hij kwijt was aan de kosten van grondbewerking, onderhoud en management.

Hoewel het erop lijkt dat er aan een akkerrand aardig te verdienen valt, zal een boer niet op deze manier rekenen. Op de landbouwgrond waarop hij een akkerrand aanlegt, hadden immers ook gewassen kunnen groeien. De winst daarvan mist de boer. Dit heet *winstderving*.

Voor de nettowinst W die in 2013 in de Hoeksche Waard gemaakt werd op een gras-kruidenrand met een lengte van 100 meter geldt de formule $W = 100 \cdot S - 0,035 \cdot D - 21,455$. In deze formule is W de nettowinst per 100 meter gras-kruidenrand, S is het subsidiebedrag per strekkende meter gras-kruidenrand en D is het bedrag aan winstderving per hectare. Alle bedragen zijn in euro.

Bas Nederlof, ook een boer in de Hoeksche Waard, heeft in 2013 een gras-kruidenrand van 2100 meter aangelegd. De winstderving was 500 euro per hectare.

b Bereken de nettowinst die hij op deze akkerrand gemaakt heeft.

Boeren leggen het liefst akkerranden aan op slechte landbouwgrond of op grond die lastig te bewerken is. Op goede landbouwgrond is de winst door het telen van een gewas namelijk vaak hoger dan de nettowinst op een akkerrand.

In 2013 leverde een gewas op goede landbouwgrond gemiddeld 1025 euro per hectare winst op. Als een boer op deze grond een akkerrand zou aanleggen, zou de winstderving dus 1025 euro per hectare zijn. Een boer kon daarom in 2013, alleen als hij een hoger subsidiebedrag per strekkende meter kreeg, zonder verlies een akkerrand op goede landbouwgrond aanleggen.

c Bereken met behulp van de formule het minimale subsidiebedrag per strekkende meter waarbij een gras-kruidenrand op goede landbouwgrond in 2013 zonder verlies kon worden aangelegd. Geef je antwoord in hele centen.

5 2017-I

Het Great Barrier Reef voor de kust van Australië is het grootste en bekendste koraalrif ter wereld. De totale oppervlakte van het rif is 345 000 km². Helaas is in de periode 1985-2012 veel koraal op het rif verdwenen, zo blijkt uit een Australische studie.

In 1985 was nog 97 000 km² van het rif bedekt met koraal. In 2012 was deze oppervlakte afgenomen tot nog slechts 13,8% van het rifoppervlak.

Je kunt berekenen dat de oppervlakte van het rif dat met koraal bedekt was in de periode 1985-2012 met ruim 50% is afgenomen.

Bereken dit percentage in één decimaal nauwkeurig.



6 2017-I

Een student die tussen 1996 en 2014 begon met studeren, kreeg de zogenoemde prestatiebeurs, een beurs in de vorm van een lening waarover rente berekend werd. Door het ontvangen van de prestatiebeurs bouwde een student dus een studieschuld op. Deze studieschuld werd echter kwijtgescholden als de student binnen 10 jaar een diploma haalde. Als een student binnen 10 jaar geen diploma haalde, moest hij de opgebouwde studieschuld, inclusief rente, terugbetalen. Het was verplicht elke maand een bedrag van minstens €45,41 terug te betalen. De schuld die dan na elke maandelijkse terugbetaling overbleef, werd de *restschuld* genoemd. De restschuld werd dus elke maand lager. Hieronder staat een tabel met daarin de restschulden bij een maandelijkse terugbetaling van €45,41 voor verschillende studieschulden en verschillende maanden na de eerste terugbetaling.

RESTSCHULD (AFGEROND OP HELE EURO'S) BIJ EEN MAANDELIJKE TERUGBETALING VAN €45,41

maanden na moment van eerste terugbetaling	oorspronkelijke studieschuld								
	4000	4500	5000	5500	6000	6500	7000	7500	8000
0	3955	4455	4955	5455	5955	6455	6955	7455	7955
12	3461	3968	4475	4982	5489	5996	6503	7010	7517
24	2961	3475	3989	4503	5017	5531	6045	6559	7073
36	2454	2975	3496	4017	4538	5059	5581	6102	6623
48	1939	2468	2996	3525	4053	4581	5110	5638	6166
60	1418	1954	2489	3025	3561	4097	4632	5168	5704
72	889	1432	1976	2519	3062	3605	4148	4692	5235
84	353	904	1455	2005	2556	3107	3658	4208	4759
96	0	368	927	1485	2043	2602	3160	3718	4277
108	0	0	391	957	1523	2089	2656	3222	3788
120	0	0	0	422	996	1570	2144	2718	3292
132	0	0	0	0	462	1044	1626	2208	2790
144	0	0	0	0	0	510	1100	1690	2280
156	0	0	0	0	0	0	567	1165	1763
168	0	0	0	0	0	0	26	633	1239
180	0	0	0	0	0	0	0	93	709

Maaïke had een studieschuld. Ze betaalde €45,41 per maand terug. Ze had er meer dan 11 jaar, maar minder dan 12 jaar voor nodig om de totale studieschuld terug te betalen.

- a** Bepaal met de tabel een mogelijke waarde van haar studieschuld.

Door omstandigheden moest Andries zijn studie voortijdig afbreken. Hij had toen een studieschuld opgebouwd van € 6200,- die hij helemaal moest terugbetalen. Hij begon in september 2014 met het terugbetalen van de verplichte €45,41 per maand.

- b** Bereken met behulp van lineair interpoleren hoe groot de restschuld van Andries 60 maanden na de eerste terugbetaling is.

7 2016-I

[► WERKBLAD] Duiken is een mooie sport, maar niet ongevaarlijk. Het grootste gevaar waar duikers mee te maken krijgen, is de druk van het water op het lichaam. Deze druk wordt hoger naarmate de duiker dieper duikt. Een formule

die het verband tussen de druk en de diepte weergeeft, luidt $p = 1 + \frac{d}{10}$.

Hierin is p de druk van het water op het lichaam in bar en d de diepte onder water in meter.

Duikorganisaties adviseren recreatieve duikers om de druk van het water op het lichaam niet hoger te laten worden dan 5 bar.

- a** Bereken hoe diep een recreatieve duiker dan maximaal kan duiken.

Bij een duik wordt een duikfles meegenomen met perslucht om onder water te kunnen ademen. Perslucht is lucht die onder grote druk wordt samengeperst. De hoeveelheid perslucht L wordt uitgedrukt in barliter. De waarde van L wordt berekend door de inhoud van de fles (in liter) te vermenigvuldigen met de druk (in bar). Als je bijvoorbeeld een duikfles van 15 liter vult tot een druk van 200 bar, dan is de hoeveelheid perslucht in de fles $15 \times 200 = 3000$ barliter.

Om de benodigde hoeveelheid perslucht voor een duik te berekenen, maakt een duiker gebruik van de formule $L = 20 \cdot p \cdot T$. Hierin is L de hoeveelheid perslucht in barliter, p de druk van het water op het lichaam in bar en T de duiktijd in minuten. De duiktijd is de tijd die de duiker onder water is.

Jan wil een duik gaan maken van drie kwartier naar een diepte van 19 meter. Hij gebruikt een duikfles van 12 liter en vult deze tot een druk van 200 bar.

- b** Bereken of Jan hiermee deze duik kan maken.

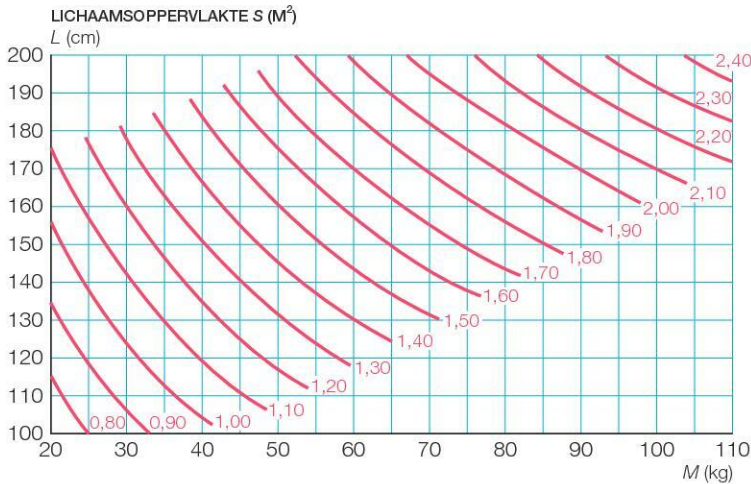
Het Grevelingenmeer in de provincie Zeeland is een groot meer, dat niet overal even diep is. Dennis gaat duiken in een gedeelte van dit meer, waar het nergens dieper dan 25 meter is. Hij vult zijn duikfles met 2400 barliter perslucht.

Met deze hoeveelheid perslucht heeft Dennis verschillende mogelijkheden voor zijn duik. Hij kan bijvoorbeeld kiezen voor een niet al te diepe duik waarbij hij lang onder water kan blijven, of voor een diepere duik met een kortere duiktijd. Dennis kan voor de keuze van zijn duik een grafiek tekenen, waarbij hij de duiktijd T uitzet tegen de diepte d .

- c** Teken deze grafiek in de figuur op het werkblad voor duiken van minstens 5 meter en hoogstens 25 meter diep. Bereken hiervoor eerst voor minstens vijf dieptes d de bijbehorende duiktijd T .

8 2017-II

[► WERKBLAD] Voor het bepalen van de dosering van sommige medicijnen is de lichaamsoppervlakte van de patiënt van belang. Op de afdeling hematologie van het VU medisch centrum in Amsterdam wordt de lichaamsoppervlakte bij gegeven lengte en gewicht bepaald met behulp van onderstaande figuur. Deze figuur staat vergroot op het werkblad. In deze opgave is S de lichaamsoppervlakte in m^2 , L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.



figuur 12.6

Je kunt bijvoorbeeld in de figuur aflezen dat iemand die 55 kg weegt en 130 cm lang is, volgens dit model een lichaamsoppervlakte van ongeveer $1,35 \text{ m}^2$ heeft.

Meneer Franssen weegt 85 kg. Hij is 180 cm lang. Zijn buurman is even lang, maar hij weegt slechts 65 kg.

- a Bepaal met behulp van de figuur hoeveel m^2 het verschil volgens dit model zou zijn tussen de lichaamsoppervlakte van meneer Franssen en de lichaamsoppervlakte van zijn buurman.

Bij een vaste lengte L kunnen in de figuur bij verschillende waarden van M de bijbehorende waarden van S worden afgelezen.

- b Teken op het werkblad de grafiek van S voor personen met een lengte van 170 cm en gewichten van 40 tot en met 110 kg. Gebruik hiervoor minstens vijf in de figuur afgelezen punten en geef die duidelijk aan in je tekening.

Voor de grafiek van de vorige vraag (die hoort bij $L = 170$) geldt:

- de grafiek is stijgend;
- de grafiek is afnemend stijgend.

Dit geldt niet alleen voor de grafiek die hoort bij $L = 170$.

- c Leg uit hoe je in figuur 12.6 kunt aflezen dat de grafiek die hoort bij $L = 180$ ook stijgend is én afnemend stijgend.

De figuur is gebaseerd op de formule $S = 0,007184 \cdot L^{0,725} \cdot M^{0,425}$. Hierin is S de lichaamsoppervlakte in m^2 , L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

In 2011 onderzocht het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek) kenmerken van personen van 20 jaar en ouder. De gemiddelden van de opgegeven lengtes en gewichten staan in de tabel.

	gemiddelde lengte (cm)	gemiddeld gewicht (kg)
vrouwen	167,5	70
mannen	180,9	84

- d** Bereken met de formule hoeveel procent de lichaamsoppervlakte van een man van gemiddelde lengte en gewicht groter is dan die van een vrouw van gemiddelde lengte en gewicht.

Van een persoon is gegeven dat zijn lichaamsoppervlakte $1,90 \text{ m}^2$ is. Van zijn gewicht is alleen bekend dat het minstens 72 kg en hoogstens 89 kg is.

- e** Bereken met behulp van de formule voor S de minimale lengte in gehele cm van deze persoon.

9 2019-I

Wie naast een snelweg woont, heeft bijna altijd te maken met overlast door de geluidsintensiteit van het verkeer. De laatste jaren probeert men deze overlast te beperken, onder andere door het aanleggen van zogenaamd stil asfalt.

Met de formule $I = 10^{0,1d-9}$ kan de geluids-intensiteit I worden berekend als bekend is hoeveel decibel (dB) geluid er wordt geproduceerd. Hierin is d de hoeveelheid geproduceerd geluid in dB en is I de geluidsintensiteit in milliwatt per m^2 .

Een weggedeelte wordt opnieuw geasfalteerd, waarbij het oude asfalt wordt vervangen door stil asfalt. De hoeveelheid geproduceerd geluid daalt daardoor van 80 dB naar 74 dB.

- a** Bereken met hoeveel procent de geluidsintensiteit afneemt. Geef je antwoord in hele procenten.

Uit metingen blijkt dat de hoeveelheid geproduceerd geluid op stil asfalt door de jaren heen stijgt. Dit komt onder andere door slijtage van het asfalt.

In de formule $I = 10^{0,1(0,04t + 73,7) - 9}$ is de geluidsintensiteit I uitgedrukt in het aantal maanden t na het aanleggen van stil asfalt.

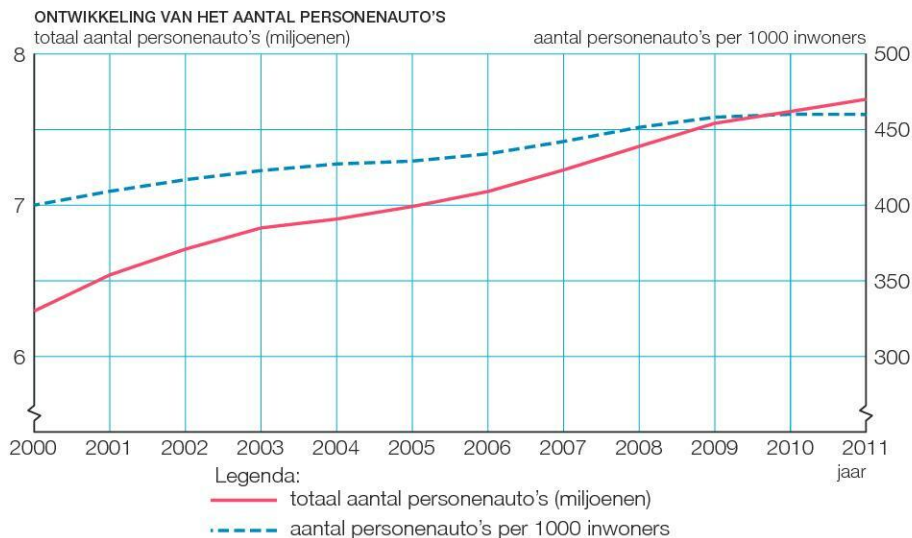
Stil asfalt moet volgens planning worden vervangen als de geluids-intensiteit I volgens de formule groter wordt dan 0,058 milliwatt per m^2 .

- b** Bereken met behulp van de laatste formule hoeveel hele maanden stil asfalt volgens planning meegaat.



10 2017-II

Het aantal personenauto's in Nederland neemt elk jaar toe. In de figuur is de ontwikkeling te zien van het totaal aantal personenauto's (linker verticale as) en van het aantal personenauto's per 1000 inwoners (rechter verticale as) in Nederland van 2000 tot en met 2011. Deze aantallen zijn telkens op 1 januari van elk jaar vastgesteld.



figuur 12.7

In de figuur kun je aflezen dat er op 1 januari 2005 ongeveer 7 miljoen personenauto's waren in Nederland en dat er op dat moment ongeveer 430 personenauto's per 1000 inwoners waren.

Van 1 januari 2000 tot 1 januari 2011 is het totaal aantal personenauto's toegenomen.

a Bereken met hoeveel procent dit aantal is toegenomen.

Ga ervan uit dat de gemiddelde jaarlijkse toename van het aantal personenauto's per 1000 inwoners in de periode 2000-2011 ook geldt voor de jaren na 2011.

b Bereken hiermee het aantal personenauto's per 1000 inwoners op 1 januari 2020.

In de tabel staan gegevens over het aantal personenauto's in Nederland in de jaren 1990 en 2010. De gegevens zijn telkens vastgesteld op 1 januari.

Het aantal inwoners van Nederland is in de loop der jaren toegenomen.

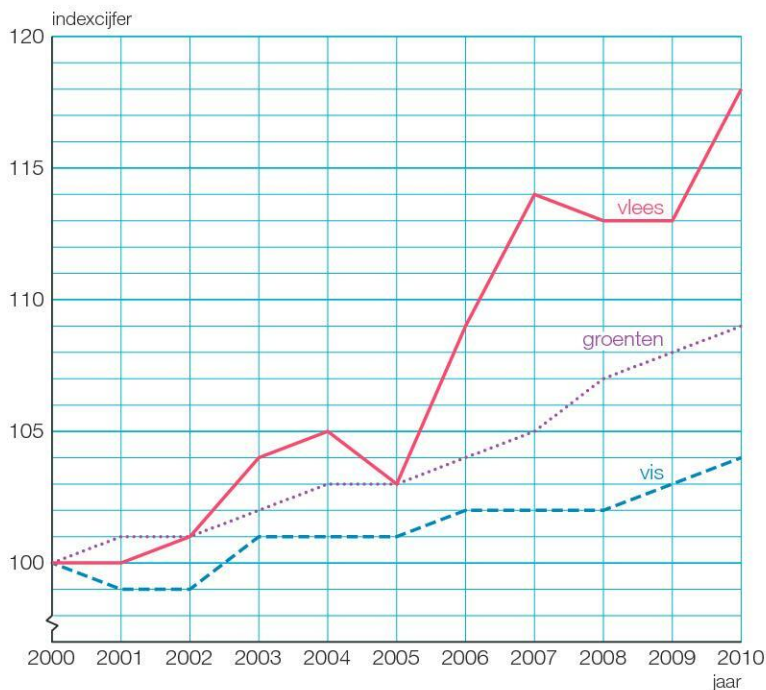
c Bereken met behulp van de tabel de toename van het aantal inwoners van Nederland in de periode van 1 januari 1990 tot 1 januari 2010. Rond je antwoord af op duizendtallen.

AANTAL PERSONENAUTO'S IN NEDERLAND

jaar	totaal aantal	aantal per 1000 inwoners
1990	5 118 429	344
2010	7 622 353	460

11 2018-II

Voedingsmiddelen worden in China steeds duurder. Om de prijzen over de jaren heen te kunnen vergelijken, worden ze vaak vergeleken met de prijs in een bepaald basisjaar. In deze opgave is het jaar 2000 het basisjaar. De prijs van een voedingsmiddel, bijvoorbeeld vis, duiden we in dat basisjaar aan met het getal 100. We zeggen: het *indexcijfer* van vis is in 2000 gelijk aan 100. In de figuur zie je dat het indexcijfer van vis in 2010 gelijk is aan 104. Dat betekent dat in 2010 vis $\frac{104}{100} = 1,04$ keer zo duur is als in 2000. Anders gezegd: in 2010 was vis 4% duurder dan in 2000.



figuur 12.8

In de periode 2006-2010 is het indexcijfer van vlees met 9 gestegen. Dat hoeft niet te betekenen dat de prijs van vlees met 9% is gestegen.

- a** Bereken met hoeveel procent de prijs van vlees in deze periode dan wel is gestegen. Rond je antwoord af op een geheel getal.

De grafiek van het indexcijfer van groenten in de periode 2005-2010 is bij benadering een rechte lijn. Je kunt op basis van de indexcijfers van 2005 en 2010 het indexcijfer van groenten in 2021 schatten door middel van lineair extrapoleren.

- b** Bereken op deze manier het indexcijfer van groenten in 2021. Rond je antwoord af op een geheel getal.

12 2019-I

Homeopathische middelen worden gemaakt uit grondstoffen die worden gehaald uit planten, dieren of mineralen. Uit deze grondstoffen wordt allereerst een basisstof gemaakt, de zogenoemde oertinctuur.

Oertinctuur is echter nog niet geschikt voor gebruik. Daarvoor moet deze een aantal keren verdund worden. Na deze verdunningen ontstaat dan een homeopathisch middel dat gereed is voor gebruik.

Voor het verdunnen worden verschillende verdunningsreeksen gebruikt. Zie de tabel.

D-reeks	verdunningen van 1 : 10
C-reeks	verdunningen van 1 : 100
LM-reeks	verdunningen van 1 : ...



Om aan te geven welke verdunningen een oertinctuur ondergaan heeft, voegt men aan de Latijnse naam van het homeopathische middel een letter en een getal toe. Zo bestaat bijvoorbeeld het middel Arnica D3. De toevoeging D3 geeft aan dat de oertinctuur Arnica driemaal een verdunning van 1 : 10 heeft ondergaan. Het homeopathisch middel Arnica D3 bestaat dus voor 1/1000e deel uit de oertinctuur Arnica.

a Bereken welk deel van het homeopathisch middel Sulphur C6 uit de oertinctuur Sulphur bestaat.

Naast de D-reeks zijn er ook de C-reeks en de LM-reeks.

In de C-reeks is er sprake van verdunningen waarin bij elke verdunningsstap de hoeveelheid oertinctuur in het middel 99% minder wordt.

In de LM-reeks is er sprake van verdunningen waarin bij elke verdunningsstap de hoeveelheid oertinctuur in het middel 99,998% minder wordt.

b Bereken welk getal er in de tabel op de puntjes moet komen te staan.

Iemand beweert dat de verdunning van de hoeveelheid oertinctuur in Arnica montana D12 gelijk is aan de verhouding van het volume van één waterdruppel tot het volume van 20 olympische zwembaden.

Een waterdruppel bevat ongeveer 0,05 milliliter en een olympisch zwembad heeft een inhoud van ongeveer 2,5 miljoen liter water.

c Laat zien dat de bewering klopt.

13 2019-I

Wegbeheerder Rijkswaterstaat heeft voor een bepaald stuk snelweg een formule opgesteld voor het maximale aantal auto's dat in een bepaalde tijd over dit stuk snelweg kan rijden, de zogenaamde capaciteit C . Deze

formule luidt $C = \frac{1000v}{4,5 + 0,09v + 0,0035v^2}$. In deze formule is v de

snelheid in km per uur en C de capaciteit in aantal auto's per uur.

Het blijkt dat volgens de formule de grootste waarde van C op dit stuk snelweg bereikt wordt bij een vrij lage snelheid.

- a** Bereken bij welke snelheid hiervan sprake is. Geef je antwoord in hele km per uur.

Als er meer automobilisten van dit stuk snelweg gebruik willen maken dan volgens de capaciteit C mogelijk is, ontstaat er een file. Dit kan voorkomen worden als iedereen tijdig zijn snelheid aanpast.

Op matrixborden boven de snelweg geeft Rijkswaterstaat dan een maximumsnelheid aan (in hele km per uur). Dit is de hoogste snelheid die voorkomt dat een file ontstaat.

Op dit stuk snelweg moet in de avondspits de capaciteit minimaal 2500 auto's per uur zijn om een file te voorkomen.

- b** Bereken welke maximumsnelheid Rijkswaterstaat in deze situatie op de matrixborden aangeeft.

Rijkswaterstaat heeft op dit stuk snelweg gedurende één maandagmorgen metingen verricht en bijgehouden hoeveel auto's er passeerden. In de tabel zie je de resultaten gedurende één uur. Op dit stuk snelweg is een maximumsnelheid van 130 km per uur toegestaan.

tijdsinterval	aantal auto's	tijdsinterval	aantal auto's	tijdsinterval	aantal auto's
7.00-7.05 uur	73	7.20-7.25 uur	174	7.40-7.45 uur	235
7.05-7.10 uur	104	7.25-7.30 uur	198	7.45-7.50 uur	267
7.10-7.15 uur	142	7.30-7.35 uur	220	7.50-7.55 uur	282
7.15-7.20 uur	189	7.35-7.40 uur	224	7.55-8.00 uur	265

We nemen aan dat het aantal auto's per tijdsinterval gelijkmatig over het tijdsinterval verdeeld is. Je kunt dan met behulp van de formule van C bij benadering vaststellen vanaf welk moment de automobilisten vanwege de capaciteit een lagere snelheid dan 130 km per uur moesten gaan aanhouden.

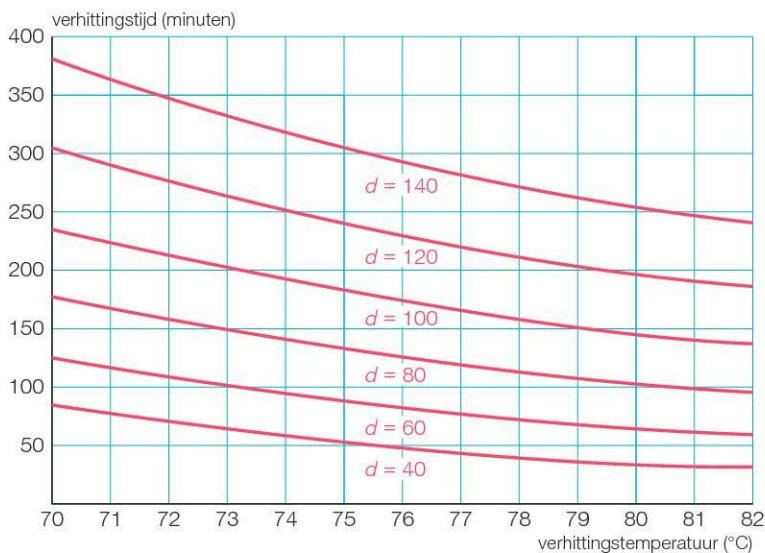
- c** Bereken binnen welk tijdsinterval de automobilisten voor het eerst een lagere snelheid moesten gaan aanhouden.

14 2019-I

[► WERKBLAD] Sommige levensmiddelen kunnen langer houdbaar worden gemaakt door ze te verhitten. Door verhitting zullen de meeste bacteriën in deze levensmiddelen afsterven. Hoe langer er wordt verhit, hoe meer bacteriën er afsterven.

Als een verhitting onder de 100 °C heeft plaatsgevonden, noemt men dit pasteurisatie. De onderzoeksorganisatie TNO heeft richtlijnen opgesteld voor het pasteurisatieproces. Hiermee kan een slager die zelf worst maakt, bepalen welke verhittingstemperatuur en verhittingstijd nodig zijn.

In figuur 12.9 zie je de verhittingstemperaturen en verhittingstijden van worsten met diameters d van 40 tot en met 140 mm met tussenstappen van 20 mm. Deze figuur staat vergroot op het werkblad.



figuur 12.9

In de figuur op het werkblad kun je aflezen dat een worst met een diameter van 100 mm bij een verhittingstemperatuur van 80 °C een verhittingstijd van 145 minuten nodig heeft.

Een veelgebruikte verhittingstemperatuur is 75 °C.

- a** Teken in het assenstelsel op het werkblad met behulp van de figuur een grafiek waarin de verhittingstijd is uitgezet tegen de diameter bij een verhittingstemperatuur van 75 °C.

In plaats van figuur 12.9 gebruiken sommige slagers ook wel formules om de verhittingstijd te berekenen. Bij een verhittingstemperatuur van 78 °C berekent men de verhittingstijd V dan met de formule $V = 0,7d + 0,0089d^2$. Hierin is V de verhittingstijd in minuten en d de diameter van de worst in mm.

- b** Bereken met de formule de verhittingstijd van een worst met een diameter van 4,5 cm bij een verhittingstemperatuur van 78 °C. Geef je antwoord in hele minuten.

Een slager maakt worsten met verschillende diameters en kiest bij het pasteuriseren altijd voor een verhittingstemperatuur van $78\text{ }^{\circ}\text{C}$. Hij wil het pasteurisatieproces niet langer dan 2,5 uur laten duren.

- c Bereken met de formule welke diameter deze worsten maximaal mogen hebben. Geef je antwoord in hele mm.

15 2019-II

[► WERKBLAD] Het internet wordt steeds intensiever gebruikt. Daarmee stijgt de vraag naar snellere internetverbindingen die grotere hoeveelheden data (digitale informatie) per tijdseenheid kunnen verwerken.

De bedrijven die dit mogelijk moeten maken, de providers, proberen door middel van onderzoek de groeiende vraag naar sneller internet te voorspellen. Een van de onderzochte zaken is de downloadsnelheid¹⁾, aangegeven in Mbit/s (megabit per seconde).

Bij elke internetverbinding beperkt de *bandbreedte* de snelheid. De bandbreedte van een verbinding is de maximale hoeveelheid data die verwerkt kan worden per tijdseenheid.

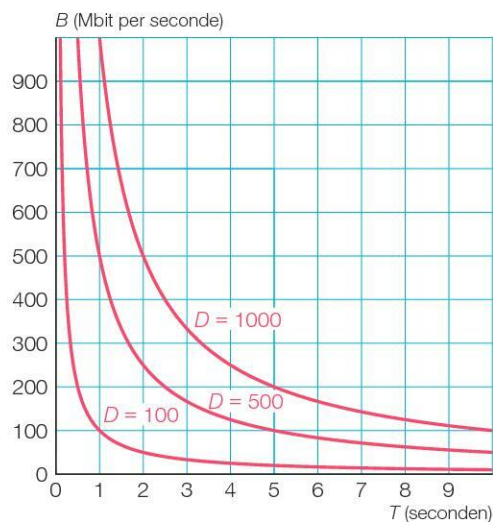
In figuur 12.10 is voor drie datahoeveelheden D (in Mbit) het verband weergegeven tussen de verwerkingstijd T (in seconden) en de bijbehorende bandbreedte B (in Mbit/s) bij het downloaden. Deze figuur staat vergroot afgedrukt op het werkblad.

Bij een bandbreedte van 300 Mbit/s duurt het langer om 1000 Mbit te downloaden dan 500 Mbit.

- a Bepaal hoeveel seconden langer. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op het werkblad. Geef je antwoord in één decimaal.

In figuur 12.10 zie je voor $D = 1000$ het omgekeerd evenredig verband tussen B en T getekend.

- b Stel bij deze waarde van D een formule op waarbij je B uitdrukt in T . Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op het werkblad. Licht je antwoord toe.



figuur 12.10

noot 1 Downloaden is het binnenhalen van digitale informatie van een andere computer.

16 2019-II

Kreatinine is een afbraakproduct dat door de nieren uit het bloed wordt gefilterd. De hoeveelheid kreatinine in het bloed geeft aan hoe goed de nieren functioneren. Hoe kleiner de hoeveelheid kreatinine in het bloed, des te beter de nierfunctie.

Om een nauwkeurig beeld van het functioneren van de nieren te krijgen, moet rekening worden gehouden met de lichaamsbouw en de leeftijd van de persoon die onderzocht wordt.

In veel gevallen wordt hiervoor de *GFR* (Glomerular Filtration Rate, de filtratiesnelheid van de nieren in milliliter per minuut) berekend. Er bestaan hiervoor meerdere formules.

Een daarvan is formule 1. Deze formule is voor mannen en vrouwen verschillend.

FORMULE 1

mannen	vrouwen
$GFR = \frac{(140 - L) \cdot G}{0,81 \cdot K}$	$GFR = 0,85 \cdot \frac{(140 - L) \cdot G}{0,81 \cdot K}$

Hierin is L de leeftijd van de patiënt in jaren, G het lichaamsgewicht in kg en K de hoeveelheid kreatinine in micromol per liter.

Thomas en Julia zijn een tweeling van 45 jaar. Ze laten een onderzoek doen naar het functioneren van hun nieren.

Thomas is een man, hij weegt 78 kg. Julia is een vrouw, ze weegt 69 kg. Bij beiden is de hoeveelheid kreatinine in het bloed 95 micromol per liter.

- a** Bereken hoe groot het verschil is tussen de *GFR* van Thomas en de *GFR* van Julia. Geef je antwoord in een geheel aantal milliliter per minuut.

Een andere formule die vaak gebruikt wordt, is formule 2. Ook deze formule is voor mannen en vrouwen verschillend.

FORMULE 2

mannen	vrouwen
$GFR = 32\,788 \cdot K^{-1,154} \cdot L^{-0,203}$	$GFR = 24\,329 \cdot K^{-1,154} \cdot L^{-0,203}$

Hierin is L de leeftijd van de patiënt in jaren en K de hoeveelheid kreatinine in micromol per liter.

Formule 2 geeft de *GFR* voor patiënten die een gewicht hebben dat past bij hun lengte. Het voordeel van deze formule is dat het lichaamsgewicht niet nodig is in de berekening.

Klaas is een man van 33 jaar met een gewicht dat past bij zijn lengte. De hoeveelheid kreatinine in zijn bloed is 95 micromol per liter. Formule 1 en formule 2 geven bij Klaas precies dezelfde uitkomst.

- b** Bereken het gewicht van Klaas. Geef je antwoord in gehele kg.

Bij de *GFR*-waarden berekend met formule 2, is door de NVKC¹⁾ de volgende tabel opgesteld.

<i>GFR</i>	nierfunctie
≥ 60	normaal
$30 - < 60$	matige afname
$15 - < 30$	ernstige afname
< 15	uitval nierfunctie

Bij Jiska, een vrouw van 56 jaar, wordt een normale nierfunctie geconstateerd. Haar *GFR* is berekend met formule 2.

- c** Bereken hoeveel kreatinine Jiska maximaal in haar bloed heeft. Geef je antwoord in een geheel aantal micromol per liter.

noot 1 Nederlandse Vereniging voor Klinische Chemie en Laboratoriumgeneeskunde

12.2 Lineaire verbanden

- 17 a** De punten in het assenstelsel hiernaast liggen bij benadering op een rechte lijn.

Van deze lijn kun je een formule opstellen, waarbij je F uitdrukt in K .

Stel deze formule op.

- b** Gegeven zijn de formules $A = 0,3P + 4,2$ en

$B = \frac{A}{1,2}$. De formule van B is te schrijven in

de vorm $B = a \cdot P + b$.

Bereken a en b .

- c** Gegeven is de formule $Z = \frac{D}{300} + \frac{83}{200}$.

Bereken voor welke waarden van D geldt dat $Z > 1$.

- d** Gegeven is de formule $S = 2,5k - 220$.

Schrijf de formule in de vorm $k = aS + b$.

- e** Gegeven is de formule $KNZ = 15 \cdot F - 18 \cdot G + 4,5 \cdot H + 25$.

Voor $G = 40$ en $KNZ = 265$ kun je F uitdrukken in H . Er geldt dan

$F = a \cdot H + b$, waarbij a en b getallen zijn.

Bereken a en b .

- f** Gegeven is de formule $KNZ = 15 \cdot F - 18 \cdot G + 4,5 \cdot H + 25$.

Er geldt $P = 3F$, $Q = 8G$ en $R = 0,15H$. Hiermee is de formule van

KNZ te schrijven in de vorm $KNZ = \dots \cdot P - \dots \cdot Q + \dots \cdot R + 25$.

Hierbij staan op de puntjes getallen.

Bereken welke getallen op de puntjes moeten staan.

- g** Gegeven is de formule $C = 5 \cdot W + 15 \cdot V$.

We onderscheiden de situaties:

$C \leq 20$ geen waarschuwing

$20 < C \leq 30$ code geel

$30 < C \leq 40$ code oranje

$C > 40$ code rood

Deze situaties kunnen als vier gebieden

worden weergegeven in een assenstelsel

zoals hiernaast. De grenzen tussen deze

gebieden zijn rechte lijnen.

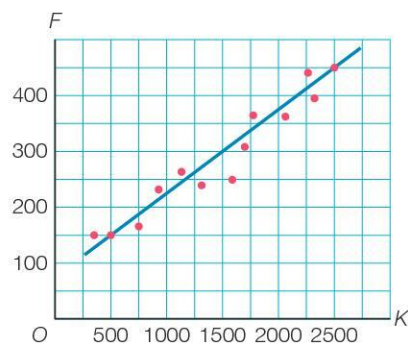
Teken een assenstelsel zoals hiernaast en

teken hierin de vier gebieden. Kies hiertoe

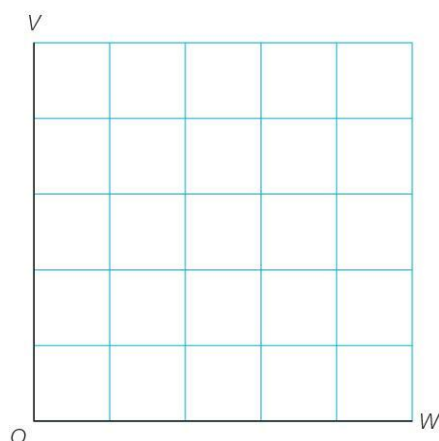
een geschikte schaalverdeling en geef

duidelijk aan welke situatie bij welk gebied

hoort.



figuur 12.11



figuur 12.12

Lineaire formules

De formule $y = ax + b$ is de algemene vorm van een lineaire formule. De bijbehorende grafiek is de lijn met richtingscoëfficiënt a , die de y -as snijdt in het punt $(0, b)$.

$rc = a$ betekent: 1 naar rechts en a omhoog.

Van de lijn $y = ax + b$ door de punten A en B is

$$rc = a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Bij de lineaire formule $p = aq + b$ is $a = \frac{\Delta p}{\Delta q}$.

De lijn k in figuur 12.13 gaat door de punten $A(4, 22)$ en $B(12, 78)$.

De formule van k krijg je als volgt.

$$T = av + b \text{ met } a = \frac{\Delta T}{\Delta v} = \frac{78 - 22}{12 - 4} = 7$$

$$\left. \begin{array}{l} T = 7v + b \\ v = 4 \text{ en } T = 22 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7 \cdot 4 + b = 22 \\ 28 + b = 22 \\ b = -6 \end{array}$$

Dus $T = 7v - 6$.

Om te berekenen voor welke v geldt dat $T = 141$, los je de vergelijking $7v - 6 = 141$ op.

Je krijgt $7v = 147$ en dit geeft $v = 21$.

Ook kun je de formule omwerken zodat v wordt uitgedrukt in T .

Je krijgt $T = 7v - 6$

$$7v - 6 = T$$

$$7v = T + 6$$

$$v = \frac{1}{7}T + \frac{6}{7}$$

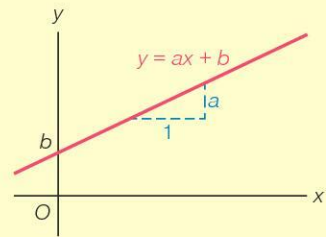
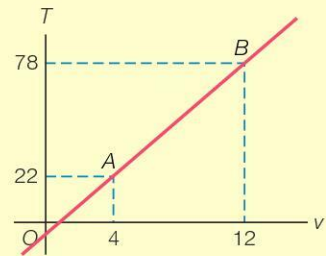
Best passende lijn

In de figuur is de best passende lijn bij de puntenwolk getekend. De formule van deze lijn stel je als volgt op.

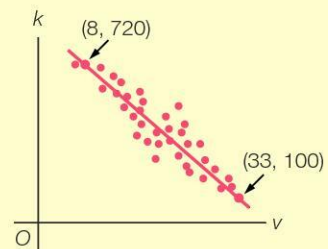
$$k = av + b \text{ met } a = \frac{\Delta k}{\Delta v} = \frac{100 - 720}{33 - 8} = -24,8$$

$$\left. \begin{array}{l} k = -24,8v + b \\ v = 8 \text{ en } k = 720 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -24,8 \cdot 8 + b = 720 \\ -198,4 + b = 720 \\ b = 918,4 \end{array}$$

Dus $k = -24,8v + 918,4$.



figuur 12.13



figuur 12.14

Lineaire ongelijkheden oplossen

Bij het oplossen van ongelijkheden gebruik je de GR.

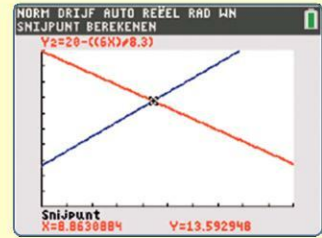
Om bij de formules $N_1 = \frac{16T}{17,1} + 5,3$ en $N_2 = 20 - \frac{6T}{8,3}$ de ongelijkheid $N_1 > N_2$ op te lossen, ga je als volgt te werk.

Voer in $y_1 = \frac{16x}{17,1} + 5,3$ en $y_2 = 20 - \frac{6x}{8,3}$.

Plot de grafieken en gebruik de optie snijpunt.

De GR geeft $x = 8,863...$

Uit de plot volgt dat $N_1 > N_2$ voor $T > 8,9$.



Lineaire formules omvormen

Je kunt de formule $K = \frac{20,7p + 180}{1,5}$ schrijven in de vorm $K = ap + b$.

Je gaat hierbij uitdelen. Je krijgt $K = \frac{20,7p}{1,5} + \frac{180}{1,5} = 13,8p + 120$.

Is bij de formule $L = 3,15S + 4,6T - 3,4U$ gegeven dat $L = 24$ en $U = 5$, dan kun je S uitdrukken in T . Je krijgt

$$3,15S + 4,6T - 3,4 \cdot 5 = 24$$

$$3,15S = -4,6T + 41$$

$$S = -1,46T + 13,02$$

Hierbij is afgerond op twee decimalen.

Gebieden tekenen

Bij de formule $T = 1,5A + 4B$ gelden de volgende vier situaties:

I $T \leq 12$

II $12 < T \leq 18$

III $18 < T \leq 24$

IV $T > 24$

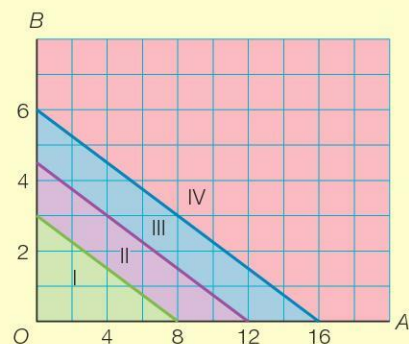
Deze situaties kunnen als vier gebieden worden weergegeven in een assenstelsel met een horizontale A -as en een verticale B -as.

$T = 12$ geeft $1,5A + 4B = 12$ en dit is een lijn door de punten $(8, 0)$ en $(0, 3)$.

$T = 18$ geeft $1,5A + 4B = 18$ en dit is een lijn door de punten $(12, 0)$ en $(0, 4,5)$.

$T = 24$ geeft $1,5A + 4B = 24$ en dit is een lijn door de punten $(16, 0)$ and $(0, 6)$.

Zo krijg je de figuur hiernaast met de vier gebieden, waarin elk van de situaties is aangegeven.



figuur 12.15

18 2016-II

[► WERKBLAD] Vroeger werd in veel bouwmaterialen asbest gebruikt. Als een oud gebouw gesloopt wordt, kunnen asbestvezels in de lucht terechtkomen. Iemand die langdurig asbestvezels inademt, kan erg ziek worden. Als men vermoedt dat er bij de sloop asbest is vrijgekomen, dan worden er maatregelen genomen op basis van de gemeten hoeveelheid asbestvezels in de lucht.

Er zijn twee hoofdsoorten asbest: wit asbest en blauw asbest. Met behulp van de gemeten concentraties van deze beide hoofdsoorten wordt de

overschrijdingsfactor F berekend. Er geldt $F = \frac{C_{\text{wit}}}{2000} + \frac{C_{\text{blauw}}}{300}$.

Hierin zijn C_{wit} en C_{blauw} de gemeten concentraties witte en blauwe asbestvezels per m^3 lucht. Hoe groter de waarde van de overschrijdingsfactor F is, des te groter is het gevaar.

Een van de twee hoofdsoorten asbest is gevaarlijker dan de andere hoofdsoort.

- a** Beredeneer aan de hand van de formule, zonder getallenvoorbeelden te geven, welke hoofdsoort gevaarlijker is: wit of blauw asbest.

Zonder getallenvoorbeeld, dus je mag geen getallen voor C_{wit} en C_{blauw} nemen om F te berekenen.

Afhankelijk van de waarde van F worden maatregelen getroffen. Men onderscheidt drie situaties:

- $F < 0,3$: zeer klein risico, er wordt een beheersplan opgesteld,
- $0,3 \leq F \leq 1$: klein risico, de asbestbron wordt opgespoord en verwijderd,
- $F > 1$: groot risico, er wordt tot ontruiming overgegaan.

Tijdens de verbouwing van een bepaald huis wordt gemeten: $C_{\text{blauw}} = 75$.

- b** Bereken bij welke waarden van C_{wit} wordt geadviseerd om tot ontruiming over te gaan.

In het geval dat $F = 1$ is de formule te schrijven in de vorm

$$\dots \cdot C_{\text{wit}} + \dots \cdot C_{\text{blauw}} = 6000.$$

- c** Bereken de getallen die op de puntjes moeten staan.

Op het werkblad is een assenstelsel getekend met horizontaal C_{wit} en verticaal C_{blauw} . De drie risico's (zeer klein, klein en groot) kunnen als gebieden worden weergegeven in dit assenstelsel. De grenzen tussen deze gebieden zijn (rechte) lijnen.

- d** Teken in het assenstelsel op het werkblad de drie risicogebieden. Kies hiertoe een geschikte schaalverdeling en geef duidelijk aan welk risico bij welk gebied hoort.



19 2016-I

De Westerscheldetunnel verbindt Zeeuws-Vlaanderen met de rest van Nederland. Voor ieder voertuig, waarmee gebruikgemaakt wordt van de tunnel, moet tol betaald worden. In deze opgave gaan we uit van de tarieven die in 2013 golden per passage (enkele reis). Zie figuur 12.16.

Tarieven per enkele passage inclusief 21% BTW geldig voor 2013					
Categorie			Standaard	t-tag	Veelgebruikerstarief
①		personenauto's zonder aanhanger	€ 5,00	€ 3,80	€ 3,05
②		personenauto's met aanhanger	€ 7,45	€ 5,70	€ 4,55
③		kleine (bestel)bussen, kleine vrachtwagens	€ 18,00	€ 13,90	€ 11,15
④		grote vrachtwagens	€ 25,00	€ 19,00	€ 15,25
⑤		motoren	€ 2,00	€ 2,50	€ 2,00

figuur 12.16

Voor elke categorie bestaan er drie verschillende tarieven:

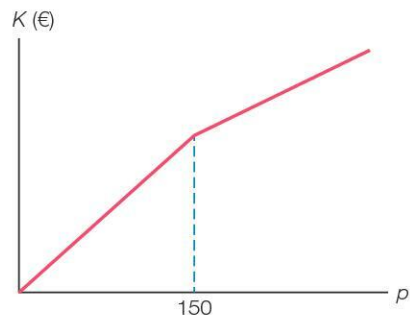
- Wie maar af en toe gebruikmaakt van de tunnel, betaalt het standaardtarief.
- Vaste klanten zijn goedkoper uit: zij bestellen eenmalig gratis de zogenaamde t-tag, een elektronisch apparaat waarmee automatisch wordt betaald. Vervolgens betalen zij bij elke passage het t-tagtarief.
- Daarnaast krijgen vaste klanten met t-tag nog meer korting indien zij vaak gebruik maken van de tunnel: voor elke passage na de 150^e passage in een kalenderjaar betalen zij het nog lagere veelgebruikerstarief.

Meneer Dingemanse woont in Middelburg en werkt 200 dagen per kalenderjaar in Terneuzen. Op deze dagen maakt hij heen en terug gebruik van de Westerscheldetunnel. Hij rijdt in een personenauto zonder aanhanger.

Met de t-tag is hij veel goedkoper uit dan wanneer hij telkens het standaardtarief zou betalen.

- Bereken hoeveel euro hij per kalenderjaar goedkoper uit is met een t-tag.

Voor de bestuurder van een personenauto zonder aanhanger die gebruikmaakt van de t-tag, hangen de totale kosten K in een kalenderjaar af van het aantal passages p in dat jaar. De grafiek van K bestaat uit twee gedeelten, waarbij het tweede gedeelte minder steil loopt. In figuur 12.17 is een schets gemaakt van deze grafiek.



figuur 12.17

- b** Stel voor beide gedeelten een formule op voor K , uitgedrukt in p .

Bij het veelgebruikerstarief voor kleine (bestel)bussen hoort vanaf de 150^e passage de formule $K = 11,15 \cdot p + 412,5$. Hierin zijn K de kosten in euro's en is p het aantal passages in een kalenderjaar.

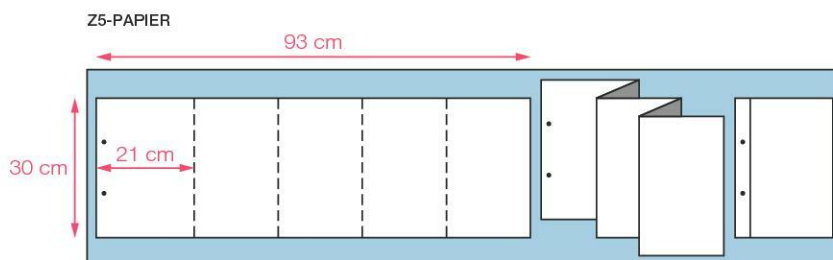
De formule geeft de kosten K inclusief 21% btw. In sommige situaties werkt men liever met een formule voor de kosten zonder btw. Deze formule kan worden herleid uit de formule van K en heeft de vorm $K_{\text{zonder btw}} = a \cdot p + b$. Hierin zijn a en b getallen en is p het aantal passages in een kalenderjaar.

- c** Bereken a en b . Rond je antwoorden af op twee decimalen.

20 2017-I

Technisch tekenaars gebruiken papier uit de Z-serie. De hoogte van een vel uit de Z-serie is altijd gelijk aan 30 cm. Een vel Z1-papier, met formaatnummer 1, heeft een breedte van 21 cm.

Bij elk volgend formaat in de Z-serie wordt de breedte telkens met een vast aantal cm vermeerderd. Dit vaste aantal cm is kleiner dan 21 cm en is zo gekozen dat een vel papier uit de Z-serie zigzag gevouwen in een ordner voor A4-papier past. In de figuur is een voorbeeld gegeven van technisch tekenpapier in Z5-formaat. Het vel Z5-papier, met formaatnummer $n = 5$, heeft een breedte van 93 cm.



figuur 12.18

- a** Bereken de breedte van Z6-papier.

Je kunt een formule opstellen voor de oppervlakte van een vel papier uit de Z-serie met formaatnummer n .

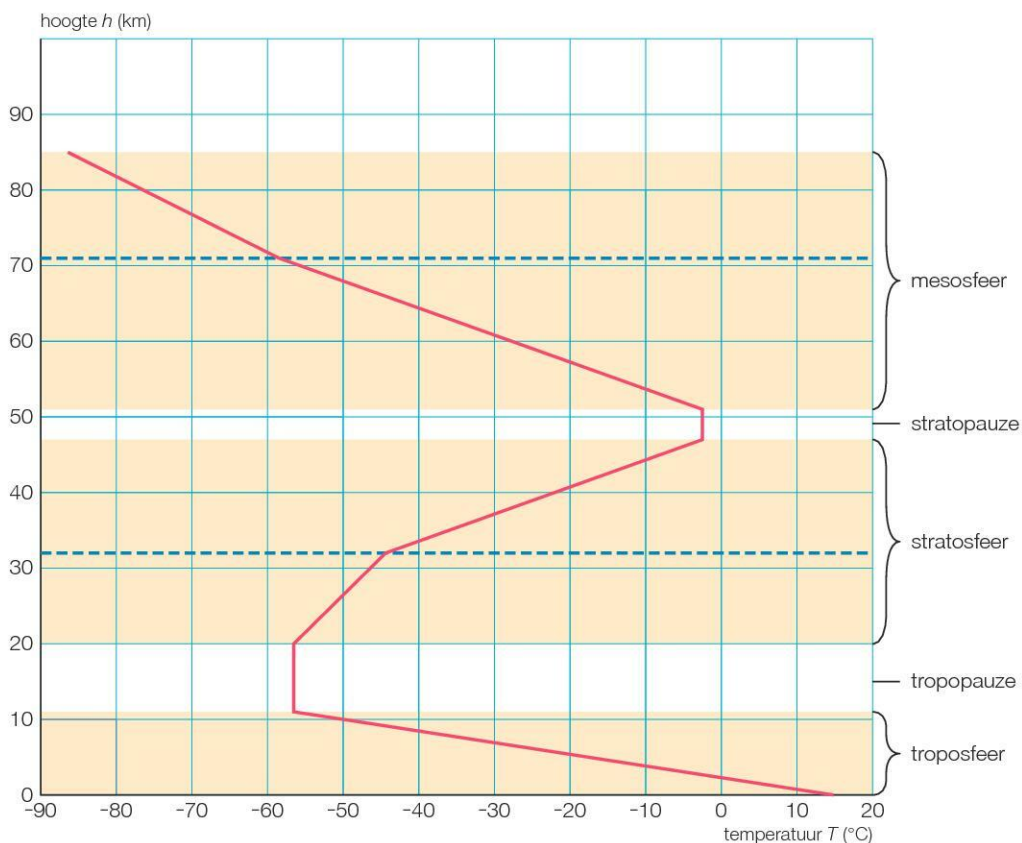
Deze formule is te schrijven in de vorm $O = a \cdot n + b$.

Hierin is O de oppervlakte in cm^2 en zijn a en b getallen.

- b** Bereken de waarden van a en b .

21 2017-II

De atmosfeer, ook wel dampkring genoemd, is het gasvormige omhulsel van de aarde en is opgebouwd uit verschillende lagen. De onderste drie lagen zijn de troposfeer, de stratosfeer en de mesosfeer. De overgangszone tussen de onderste twee lagen wordt de tropopauze genoemd, de overgangszone daarboven de stratopauze. Zie de figuur. De hoogtes waarop de verschillende lagen en overgangszones zich bevinden, zijn niet overal op aarde gelijk en kunnen door de tijd heen variëren. Om zaken toch goed te kunnen vergelijken heeft men een model voor de onderste drie lagen en overgangszones vastgesteld: de standaardatmosfeer. De temperatuur op een bepaalde hoogte is in de figuur af te lezen. Daarin zie je het verband tussen de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ en de hoogte h in km. Zo kun je aflezen dat op een hoogte van 10 km de temperatuur -50°C is.



figuur 12.19

In elk van de drie sferen is er een laagste en hoogste temperatuur.

- a** Bepaal in welke van de drie sferen het verschil tussen de hoogste en laagste temperatuur het kleinst is. Licht je antwoord toe.

De stratosfeer bestaat uit twee delen. In beide delen neemt de temperatuur toe naarmate je hoger komt. Voor de temperatuur in het bovenste deel geldt de formule $T = 2,8 \cdot h - 134,1$. Je kunt deze formule herleiden tot de vorm $h = a \cdot T + b$, waarbij a en b getallen zijn.

b Laat deze herleiding zien en rond a en b af op twee decimalen.

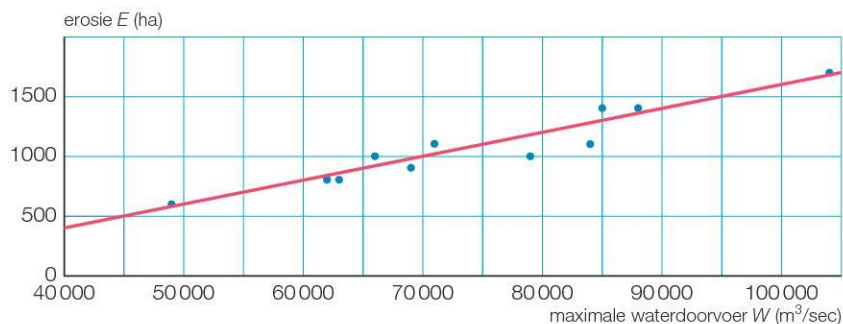
Ook voor andere sferen, bijvoorbeeld voor de mesosfeer, kun je formules opstellen van het verband tussen de hoogte en de temperatuur.

De mesosfeer bestaat uit twee delen.

c Stel voor het onderste deel van de mesosfeer de formule op van h , uitgedrukt in T .

22 2018-II

In de figuur hieronder is voor een rivier de erosie in ha uitgezet tegen de maximale waterdoorvoer in m^3 per seconde. Elk punt hoort bij een jaar uit de periode 1995 tot en met 2005. Deze punten liggen bij benadering op een rechte lijn.



figuur 12.20

Je kunt van deze lijn de formule opstellen, waarbij je de erosie E (in ha) uitdrukt in de maximale waterdoorvoer W (in m^3/sec).

Stel deze formule op.



23 2018-I

[► WERKBLAD] Mensen krijgen energie binnen via voedsel. De hoeveelheid energie in voedsel wordt uitgedrukt in kilocalorieën (kcal). De minimale hoeveelheid energie die iemand per dag nodig heeft om op gewicht te blijven, wordt aangeduid met de Engelse afkorting *BMR* (Basal Metabolic Rate).

Diëtisten maken gebruik van formules om deze hoeveelheid te berekenen. Een formule van de *BMR* voor mannen luidt $BMR = 10 \cdot G - 5 \cdot J + 6,25 \cdot L + 5$.

In deze formule is G het gewicht in kg, J de leeftijd in jaren, L de lengte in cm en *BMR* in kcal.

Luuk is 1,88 meter lang en weegt 77 kg. Hij is 25 jaar oud.

a Bereken zijn *BMR*.

Marcio is in precies 1 jaar 5 kg afgevallen. Zijn lengte is niet veranderd.

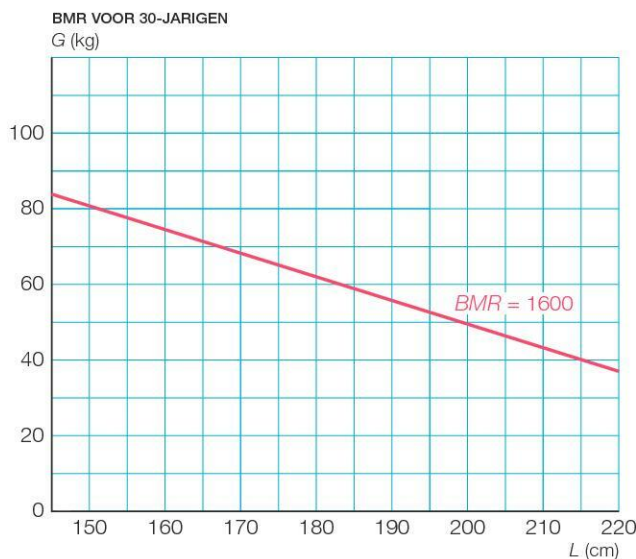
b Bereken aan de hand van de formule, zonder gebruik te maken van een getallenvoorbeeld voor G en J , hoeveel Marcio's *BMR* in die periode van 1 jaar verminderd is.

Hier is sprake van een getallenvoorbeeld als je bijvoorbeeld neemt $G = 75$ en $J = 30$. Dat mag dus niet.

Voor 30-jarige mannen met een *BMR* van 2000 kcal kun je het gewicht uitdrukken in de lengte. Er geldt dan $G = a \cdot L + b$, waarbij a en b getallen zijn.

c Bereken de waarden van a en b in één decimaal nauwkeurig.

In de figuur is voor 30-jarige mannen met een *BMR* van 1600 een grafiek getekend die het verband tussen G en L weergeeft. De figuur staat ook op het werkblad.



figuur 12.21

Je kunt voor 30-jarige mannen ook bij andere *BMR*-waarden de grafiek tekenen die het verband tussen *G* en *L* weergeeft.

- d** Teken in de figuur op het werkblad voor 30-jarige mannen de grafiek die hoort bij een *BMR* van 1800. Licht je werkwijze toe.

In de Verenigde Staten hanteert men soortgelijke formules maar met andere variabelen. Men gebruikt voor het gewicht de variabele *W* (weight) in pounds, voor de lengte de variabele *H* (height) in feet en voor de leeftijd in jaren de variabele *Y* (years). Er geldt:

$$W = 2,2 \cdot G$$

$$Y = J$$

$$H = 0,033 \cdot L$$

Met deze gegevens kun je de formule van *BMR* opstellen zoals die in de Verenigde Staten gebruikt wordt in de vorm

$$BMR = \dots \cdot W - 5 \cdot Y + \dots \cdot H + 5.$$

Hierbij staan op de puntjes getallen.

- e** Bereken welke getallen op de puntjes moeten staan en rond af op één decimaal.

12.3 Exponentiële verbanden

- 24 a** Een hoeveelheid neemt per jaar met 1,25% toe.
Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid in 20 jaar toe?
- b** Een hoeveelheid neemt per jaar met 0,6% af.
Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid in 100 jaar af?
- c** Een hoeveelheid neemt per jaar met 1,35% toe.
Na hoeveel jaar is de hoeveelheid verdubbeld?
- d** Een hoeveelheid neemt per jaar met 0,05% af.
Bereken de halveringstijd.
- e** Bereken het groeipercentage per jaar bij een verdubbelingstijd van 20 jaar.
- f** De halveringstijd van een hoeveelheid is 577 jaar.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid jaarlijks afneemt. Rond af op drie decimalen.
- g** Schrijf de formule $N = \frac{200}{1,85^{0,1t}}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond g af op twee decimalen.
- h** Los de vergelijking $0,05 \cdot 40^x = 25 \cdot 10^6$ op. Rond af op twee decimalen.
- i** Toon aan dat bij de tabel hiernaast een exponentieel verband hoort.

A	0	3	6	9	12
B	10^8	$1,5 \cdot 10^6$	$2,3 \cdot 10^4$	340	5,1

- j** Een hoeveelheid H groeit exponentieel. Op 1 januari 2005 is $H = 3680$ en op 1 januari 2018 is $H = 10\,640$.
Stel de formule op van H . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2000.

[► WERKBLAD] Bij de vragen k en l gebruik je een werkblad.

- k** De lijn die op het logaritmisch papier op het werkblad is getekend, hoort bij een exponentieel verband, dus de formule is van de vorm $N = b \cdot g^t$.
Bereken b in gehelen en g in twee decimalen.
- l** Gegeven zijn de formules $N_1 = 2000 \cdot 0,55^t$ en $N_2 = 250 \cdot 0,55^t$ met t de tijd in jaren.
De grafieken van deze formules zijn op logaritmisch papier rechte lijnen.
Teken deze lijnen op het werkblad. Waarom zijn de lijnen evenwijdig?

Exponentiële groei

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid telkens met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Bij exponentiële groei hoort de formule $N = b \cdot g^t$. Hierbij is b de beginhoeveelheid en g de groeifactor per tijdseenheid.

Groefactoren en groeipercentages

Bij een toename van 12% per tijdseenheid hoort exponentiële groei met groeifactor 1,12. Dus neemt een hoeveelheid N jaarlijks met 12% toe en is de beginhoeveelheid 1250, dan hoort daarbij de formule $N = 1250 \cdot 1,12^t$.

Is g de groeifactor per tijdseenheid, dan is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Is de groeifactor per dag 1,32, dan is de groeifactor per week gelijk aan $g_{\text{week}} = 1,32^7 \approx 6,983$.

En zo volgt uit $g_{\text{dag}} = 1,32$ dat $g_{\text{uur}} = 1,32^{\frac{1}{24}} \approx 1,012$.

Neemt een hoeveelheid per dag met 4% toe, dan bereken je als volgt de procentuele toename per week.

- $g_{\text{dag}} = 1,04$, dus $g_{\text{week}} = 1,04^7 \approx 1,316$
- Het groeipercentage per week is 31,6%.

Het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid gaat via groefactoren.

Neemt een hoeveelheid per uur met 28% af, dan bereken je de procentuele afname per kwartier via de groefactoren g_{uur} en g_{kwartier} .

$$g_{\text{uur}} = 0,72$$

$$g_{\text{kwartier}} = 0,72^{\frac{1}{2}} \approx 0,849$$

De afname per kwartier is 15,1%.

Exponentieel verband aantonen

Je kunt aantonen dat bij de tabel hiernaast een exponentieel verband hoort. Dat gaat als volgt.

$$\frac{10,98}{7,32} = 1,5; \frac{16,47}{10,98} = 1,5 \text{ en } \frac{24,71}{16,47} \approx 1,5$$

Telkens als a met 4 toeneemt, wordt L met 1,5 vermenigvuldigd.

Je hebt dus te maken met een exponentieel verband.

Wil je weten welke L bij $a = 15$ hoort, dan gebruik je de groeifactor $g = 1,5^{\frac{1}{4}} = 1,106...$ en het gegeven dat $L = 10,98$ bij $a = 12$ hoort.

Je krijgt: voor $a = 15$ is

$$L = 10,98 \cdot 1,106...^3 \approx 14,88.$$

a	8	12	16	20
L	7,32	10,98	16,47	24,71

a	12	13	14	15	16
L	10,98	...	...	...	16,47

$\times 1,106... \times 1,106... \times 1,106...$

Voor $a = 15$ is
 $L = 10,98 \cdot 1,106...^3$

Exponentiële formule opstellen

Bij exponentiële groei kun je de formule opstellen als je op twee tijdstippen de hoeveelheid weet.

De grafiek in figuur 12.22 hoort bij exponentiële groei.

De bijbehorende formule krijg je als volgt.

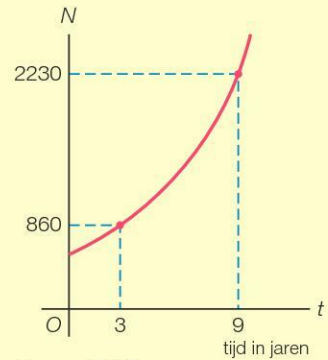
Bij $t = 3$ hoort $N = 860$ en bij $t = 9$ hoort $N = 2230$.

$$g_{\text{jaar}} = \frac{2230}{860}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{2230}{860}\right)^{\frac{1}{6}} = 1,1721\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,1721\dots^t \\ t = 3 \text{ en } N = 860 \end{array} \right\} b \cdot 1,1721\dots^3 = 860$$

$$\text{Dus } b = \frac{860}{1,1721\dots^3} = 534,0663\dots$$

Rond je de beginhoeveelheid af op gehelen en de groeifactor op drie decimalen, dan krijg je de formule $N = 534 \cdot 1,172^t$.



figuur 12.22

Lineaire en exponentiële groei

Voor $t = 3$ is $N = 150$ en voor $t = 8$ is $N = 600$.

- Heb je te maken met *lineaire groei*, dan is $rc = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{600 - 150}{8 - 3} = 90$.

Dus per tijdseenheid neemt N met 90 toe.

- Heb je te maken met *exponentiële groei*, dan is $g = \left(\frac{600}{150}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,320$.

Dus per tijdseenheid wordt N met 1,320 vermenigvuldigd.



Verdubbelingstijd en halveringstijd

De *verdubbelingstijd* is de tijd waarin de hoeveelheid verdubbelt bij exponentiële groei, dus met 2 wordt vermenigvuldigd.

Bij exponentiële groei met groeifactor g vind je de verdubbelingstijd t door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen.

Is bij een exponentiële groei de toename 2,3% per jaar, dan krijg je de vergelijking $1,023^t = 2$ met t in jaren. Invoeren van de formules $y_1 = 1,023^x$ en $y_2 = 2$ en gebruik van de optie snijpunt geeft $x = 30,48\dots$, dus de verdubbelingstijd is ongeveer 30,5 jaar.

Om bij een verdubbelingstijd van 50 jaar het groeipercentage per jaar te berekenen, krijg je $g_{50 \text{ jaar}} = 2$ dus $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{50}} = 1,01395\dots$, dus het groeipercentage is ongeveer 1,40% per jaar.

Je kunt ook met de GR de vergelijking $g^{50} = 2$ oplossen met $y_1 = x^{50}$ en $y_2 = 2$.

De *halveringstijd* is de tijd waarin de hoeveelheid halveert bij exponentiële groei, dus met 0,5 wordt vermenigvuldigd.

Bij exponentiële groei met groeifactor g vind je de halveringstijd t door de vergelijking $g^t = 0,5$ op te lossen.

Is bij een exponentiële groei de afname 2,3% per jaar, dan krijg je de vergelijking $0,977^t = 0,5$. Invoeren van de formules $y_1 = 0,977^x$ en $y_2 = 0,5$ en gebruik van de optie snijpunt geeft $x = 29,78\dots$, dus de halveringstijd is ongeveer 29,8 jaar.

Om bij een halveringstijd van 50 jaar het groeipercentage per jaar te berekenen, krijg je $g_{50 \text{ jaar}} = 0,5$ dus $g_{\text{jaar}} = 0,5^{\frac{1}{50}} = 0,98623\dots$, dus de afname is ongeveer 1,38% per jaar.

Logaritmisch papier

Bij een rechte lijn op logaritmisch papier hoort exponentiële groei.

Op het logaritmisch papier hiernaast zijn twee evenwijdige lijnen getekend.

Dit betekent dat de groeifactoren gelijk zijn. Dit kun je ook narekenen.

Lees af dat de grafiek van N_1 door de punten (0, 1500) en (7, 200) gaat.

Dit geeft $g_{7 \text{ jaar}} = \frac{200}{1500}$, dus

$$g_{\text{jaar}} = \left(\frac{200}{1500}\right)^{\frac{1}{7}} \approx 0,750.$$

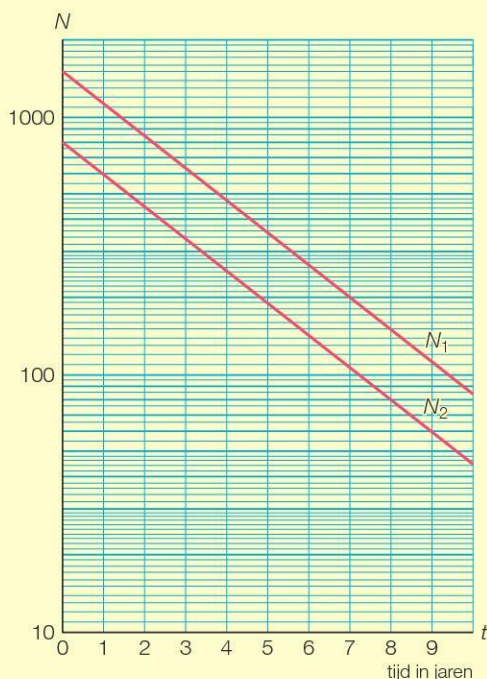
Lees af dat de grafiek van N_2 door de punten (0, 800) en (8, 80) gaat.

Dit geeft $g_{8 \text{ jaar}} = \frac{80}{800} = 0,1$, dus

$$g_{\text{jaar}} = 0,1^{\frac{1}{8}} \approx 0,750.$$

Je ziet dat de groeifactoren per jaar aan elkaar gelijk zijn.

De formules zijn $N_1 = 1500 \cdot 0,750^t$ en $N_2 = 800 \cdot 0,750^t$.



figuur 12.23

25 2016-I

Een Gammacell is een apparaat dat onder andere gebruikt wordt bij onderzoek naar de bederfelijkheid van voedsel. De Gammacell is een stalen kast waarin zich de radioactieve stof cesium bevindt. Zie de foto.

De hoeveelheid radioactieve straling van cesium neemt jaarlijks met een vast percentage af en is na ongeveer 30 jaar gehalveerd.

- a** Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid radioactieve straling per jaar afneemt.



De tijd waarin de hoeveelheid straling tot de helft is afgenomen, wordt de halveringstijd genoemd. Soms wordt de volgende vuistregel gebruikt: 'Na tien keer de halveringstijd is het radioactieve materiaal zijn straling kwijt.'

Volgens deze vuistregel zou cesium dus na 300 jaar zijn straling kwijt zijn. Dat is niet helemaal juist. Er is nog een klein beetje van de beginstraling over.

- b** Bereken hoeveel procent van de beginstraling er na 300 jaar nog over is.

De stalen wand van de kast, waarin zich de stof cesium bevindt, houdt veel van de radioactieve straling tegen. Het deel van de straling dat tegengehouden wordt door de stalen wand, geven we aan met D .

Hiervoor geldt de formule $D = 1 - \frac{1}{2,058^{0,1d}}$. Hierin is d de dikte van de stalen wand in cm.

Je kunt de formule van D schrijven in de vorm $D = 1 - g^d$, waarbij g een getal is.

- c** Bereken g en rond je antwoord af op twee decimalen.

Afgedankte Gammacellen worden verwerkt en opgeslagen door het bedrijf Covra in Borssele. Het bedrijf moet ervoor zorgen dat uit zo'n Gammacell heel weinig straling vrijkomt wanneer deze wordt opgeslagen.

Een Gammacell met een stalen wand van 35 cm dik werkt niet goed meer en wordt afgedankt. Je kunt berekenen dat de stalen wand van deze Gammacell 8% van de straling doorlaat die het cesium heeft op het moment dat het bij Covra binnenkomt. Omdat dat percentage voor opslag te veel is, wordt de hele Gammacell ingepakt in beton. Van de straling die door het staal heen komt, wordt een percentage P door het beton doorgelaten. Dit percentage hangt af van de dikte van het beton. Er

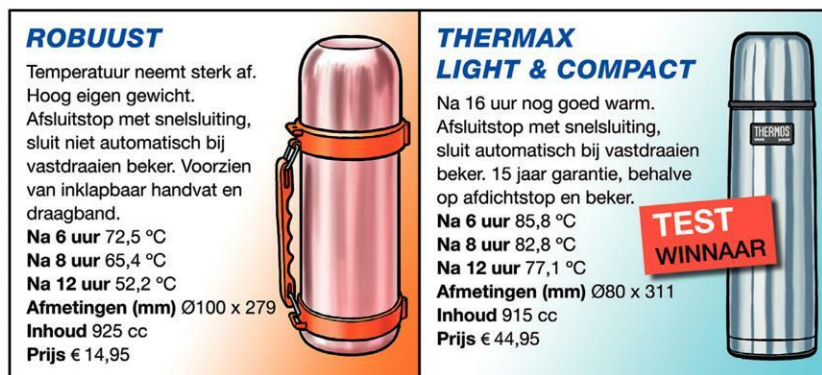
geldt de formule $P = \frac{100}{1,021^d}$. Hierin is d de dikte van het beton in cm.

Het bedrijf moet de dikte van het beton zo kiezen, dat het staal en het beton samen 5% van de straling doorlaten die het cesium op het moment van binnenkomst heeft.

- d Bereken hoeveel cm de dikte van het beton moet zijn. Rond je antwoord af op een geheel getal.

26 2016-II

Met een thermosfles heb je onderweg altijd je eigen warme drank bij je. Een consumentenblad heeft een aantal thermosflessen getest. Eén van de testonderdelen was: hoe snel neemt de temperatuur van de flesinhoud af? De flessen werden gevuld met zeer heet water en in een laboratorium in een testomgeving gezet, bij een temperatuur van $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Vervolgens werd elke twee uur de temperatuur van het water gemeten. In figuur 12.24 staan de resultaten van twee thermosflessen: de thermosfles Robuust en de thermosfles Thermax.



figuur 12.24

De temperatuur van het water in de Robuust nam in het eerste uur met $4,2\text{ }^{\circ}\text{C}$ af. In de daaropvolgende uren nam de temperatuur telkens met $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$ minder af vergeleken met het uur ervoor. Met behulp van deze gegevens en de informatie in de figuur kun je berekenen hoe hoog de begintemperatuur van het water was.

- a Bereken deze begintemperatuur.

De Thermax was de testwinnaar. Na 6 uur nam de temperatuur van het water in deze thermosfles af volgens een exponentieel verband. Met behulp van de gegevens in de figuur kan berekend worden dat de temperatuur ieder uur met afgerond $1,8\%$ daalde.

- b Bereken dit percentage in twee decimalen nauwkeurig.

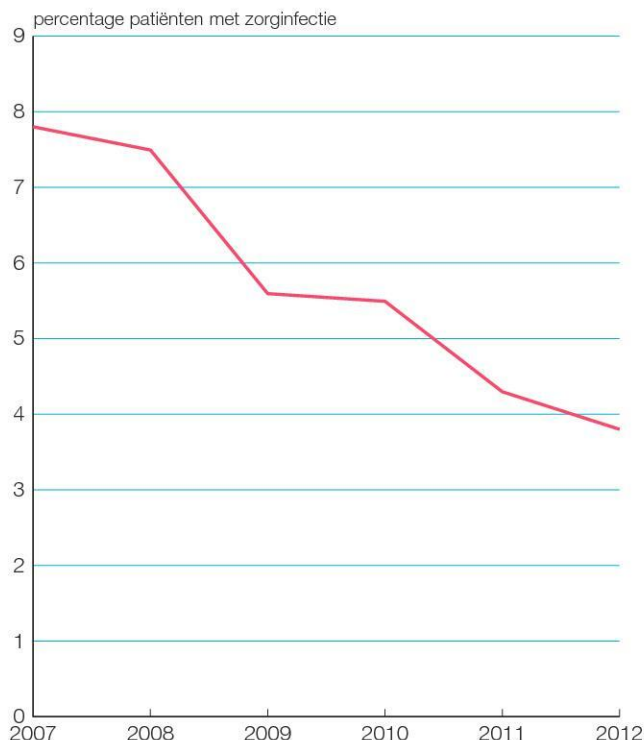
Veel mensen vinden koffie of thee alleen lekker als de temperatuur ten minste $65\text{ }^{\circ}\text{C}$ is. Bij de Thermax bleef tijdens de test de temperatuur van het water heel lang boven die grens van $65\text{ }^{\circ}\text{C}$.

- c Bereken hoeveel hele uren de temperatuur ten minste $65\text{ }^{\circ}\text{C}$ was.

27 2016-II

Patiënten die voor een behandeling enige tijd in een ziekenhuis worden opgenomen, lopen tijdens dit verblijf het risico een infectie te krijgen. Zo'n infectie wordt een zorginfectie genoemd. Een deel van de zorginfecties ontstaat na een operatie.

In de periode 2007 tot en met 2012 daalde in Nederland het percentage patiënten met een zorginfectie. Zie de figuur.



figuur 12.25

We gaan ervan uit dat elke patiënt die een zorginfectie oploopt, 4 extra verpleegdagen nodig heeft. In 2007 bedroeg de kostprijs van elke extra verpleegdag € 1140. Daarna steeg deze kostprijs jaarlijks met 3%.

In 2007 werden er 1,8 miljoen patiënten in een ziekenhuis opgenomen, in 2012 waren dat er 2,0 miljoen.

Zowel de kostprijs per extra verpleegdag als het totaal aantal patiënten steeg. Maar omdat het percentage patiënten met een zorginfectie daalde, waren de totale kosten van de extra verpleegdagen ten gevolge van zorginfecties in 2012 lager dan in 2007. Op basis van bovenstaande gegevens kan berekend worden hoeveel deze kosten lager waren.

Bereken dit bedrag. Rond het antwoord af op miljoenen euro's.

28 2017-I

Het Great Barrier Reef voor de kust van Australië is het grootste en bekendste koraalrif ter wereld. De totale oppervlakte van het rif is $345\,000\text{ km}^2$. Helaas is in de periode 1985-2012 veel koraal op het rif verdwenen, zo blijkt uit een Australische studie.

Het blijkt dat in de periode 1985-2012 de oppervlakte van het rif dat met koraal is bedekt, is gehalveerd.

De onderzoekers waarschuwden in 2012 dat er nog meer koraal zou verdwijnen. Zij verwachtten dat als er niet zou worden ingegrepen, de oppervlakte van het rif dat met koraal bedekt is in de periode 2012-2022 opnieuw zou halveren.

Neem aan dat deze afname vanaf 2012 exponentieel zou zijn.

- a** Bereken met hoeveel procent de oppervlakte van het rif dat met koraal bedekt is dan jaarlijks zou afnemen. Geef je antwoord in hele procenten.

De belangrijkste bedreigingen voor het koraal komen van tropische stormen en de doornenkroon, een grote zeester.

Als er geen doornenkronen zouden zijn en als we aannemen dat de schade door tropische stormen ongeveer gelijk blijft, zou het aantal km^2 rif dat met koraal bedekt is met 0,89% per jaar kunnen toenemen.

- b** Bereken hoeveel jaar het dan zou duren totdat het aantal km^2 rif dat met koraal bedekt is, voor het eerst weer met 50% zou zijn toegenomen.

29 2017-II

In de atmosfeer (dampkring) hangt zowel de temperatuur als de luchtdruk af van de hoogte.

Luchtdruk wordt vaak uitgedrukt in hectopascal of hPa. De luchtdruk op een hoogte van 0 kilometer is gelijk aan 1013 hPa en op een hoogte van 85 km is de luchtdruk 0,0037 hPa.

Het verband tussen de luchtdruk en de hoogte is exponentieel.

Met behulp van bovenstaande gegevens kun je berekenen dat de luchtdruk elke kilometer met ongeveer 14% afneemt.

- a** Bereken dit percentage in één decimaal nauwkeurig.

Om gegevens over het weer te verzamelen wordt een weerballon opgelaten met meetapparatuur, waaronder een thermometer. De ballon zet uit naarmate hij hoger in de atmosfeer komt, omdat de luchtdruk steeds verder afneemt. Op het moment dat de luchtdruk 4,5 hPa is, scheurt de ballon open en valt hij naar beneden.

- b** Bereken de temperatuur die de ballon meet op zijn maximale hoogte. Rond je antwoord af op een geheel getal. Gebruik dat voor de temperatuur geldt $T = 2,8h - 134,1$. Hierin is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en h de hoogte in km.

30 2017-I

Het bekendste papierformaat is het A4'tje, een vel papier dat in grote delen van de wereld als standaardpapierformaat gebruikt wordt. Het A4'tje komt uit een serie die begint met A0, een vel papier met een oppervlakte van precies 1 m^2 . Van elk volgend formaat in de A-serie is de oppervlakte telkens tweemaal zo klein. In de praktijk zijn voornamelijk de formaten A0 tot en met A11 in gebruik.

De afmetingen van de eerste vijf formaten staan in de tabel. Hierin zijn de hoogte en breedte afgerond op hele cm.

formaat	formaat-nummer n	oppervlakte (mm^2)	hoogte h (cm)	breedte b (cm)
A0	0	1 000 000	119	84
A1	1	500 000	84	59
A2	2	250 000	59	42
A3	3	125 000	42	30
A4	4	62 500	30	21
...	...	...	...	...

Een formaat dat vaak gebruikt wordt voor postzegels is het A11-formaat.

a Bereken de oppervlakte van een A11-postzegel in hele mm^2 .

Voor de hoogte h en voor de breedte b van een vel papier in de A-serie geldt $h = \sqrt{2} \cdot b$.

In de tabel zijn zowel de hoogte als de breedte in hele cm gegeven. Maar met de bovenstaande formule kunnen bij een gegeven oppervlakte de hoogte en de breedte nauwkeuriger berekend worden. Er geldt $h \cdot b = \text{oppervlakte}$.

De oppervlakte van een vel A6-papier is $15\,625 \text{ mm}^2$.

b Bereken met de bovenstaande formules de hoogte en de breedte van een vel A6-papier. Rond je antwoorden af op hele mm.

In theorie bestaat er een exponentieel verband tussen de hoogte h van een vel papier in de A-serie en het formaatnummer n . Door de afronding van h kunnen er kleine afwijkingen zijn.

c Toon met behulp van alle waarden van h uit de tabel aan dat er bij benadering een exponentieel verband bestaat tussen de hoogte h van een vel papier in de A-serie en het formaatnummer n .

31 2018-I

[► WERKBLAD] Aardbevingen verschillen in kracht. De kracht van een aardbeving wordt meestal weergegeven op de schaal van Richter.

In de nacht van 5 op 6 april 2009 werd de Italiaanse stad l'Aquila getroffen door een zware aardbeving. De avond ervoor werd er al een lichte beving gevoeld die een kracht had van 3,3 op de schaal van Richter. De zware aardbeving 's nachts, die veel schade aanrichtte, had een kracht van 6,3 op de schaal van Richter.



Bij elke aardbeving komt energie vrij. Volgens een wetenschapper geldt de volgende vuistregel: als de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt, dan is de hoeveelheid vrijgekomen energie ongeveer 30 keer zo groot.

Er is bij de zware aardbeving 's nachts veel meer energie vrijgekomen dan bij de lichte beving van de avond daarvoor.

- a** Bereken met behulp van de vuistregel hoeveel keer zoveel energie er 's nachts vrijkwam vergeleken met de avond ervoor.

Bij een aardbeving kan de hoeveelheid vrijgekomen energie worden berekend met de formule $E = 0,06 \cdot 32^R$.

In deze formule is R de kracht van de aardbeving op de schaal van Richter en E de hoeveelheid vrijgekomen energie in MJ (megajoule).

Na de zware nachtelijke aardbeving waren er nog verschillende kleine naschokken. Bij de naschok van 7 april 's avonds was de hoeveelheid energie die vrijkwam slechts 9% van de hoeveelheid energie die bij de zware nachtelijke aardbeving vrijkwam. Toch was deze naschok ook een zware schok.

- b** Bereken welke kracht deze naschok had op de schaal van Richter. Rond je antwoord af op één decimaal.

Op het werkblad staat een assenstelsel afgebeeld, waarbij op de verticale as een logaritmische schaal is gebruikt. In dat assenstelsel kun je een grafiek tekenen waarin je de vrijgekomen energie uitzet tegen de kracht op de schaal van Richter. Deze grafiek blijkt een (rechte) lijn te zijn.

- c** Teken deze grafiek in de figuur op het werkblad voor bevingen met een kracht van minimaal 1 en maximaal 8 op de schaal van Richter.

32 2018-II

In China is de jaarlijkse vleesconsumptie per persoon in de periode 1985-2005 verdrievoudigd tot 45 kg. Neem aan dat deze groei exponentieel verliep.

Bereken met hoeveel procent per jaar deze jaarlijkse vleesconsumptie per persoon in de periode 1985-2005 toenam. Rond je antwoord af op een geheel getal.

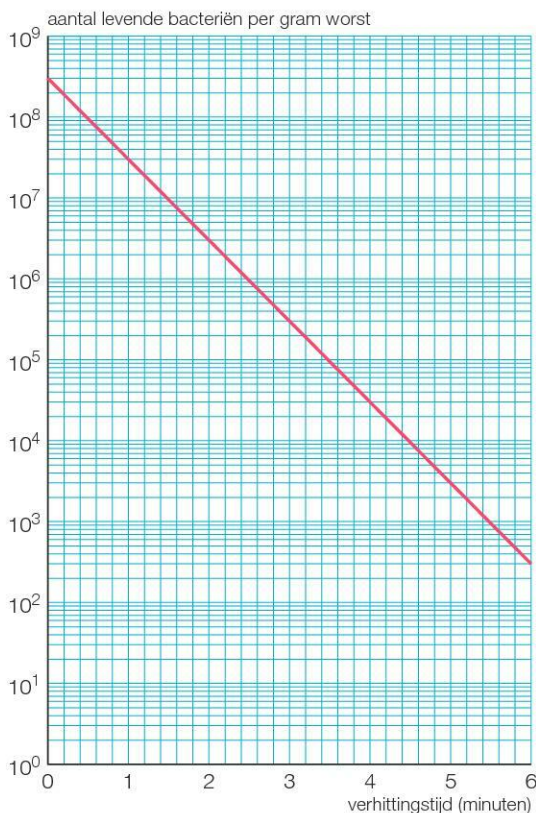
33 2019-I

Sommige levensmiddelen kunnen langer houdbaar worden gemaakt door ze te verhitten. Door verhitting zullen de meeste bacteriën in deze levensmiddelen afsterven. Hoe langer er wordt verhit, hoe meer bacteriën er afsterven.

Bij een bepaald type worst is in figuur 12.26 het aantal levende bacteriën per gram worst uitgezet tegen de verhittingstijd in minuten. Daarbij is de verhittingstemperatuur 70 °C. In deze figuur is op de verticale as een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

In figuur 12.26 kun je bijvoorbeeld aflezen dat er bij aanvang van de verhitting 300 000 000 levende bacteriën per gram worst aanwezig zijn. Na 6 minuten verhitting is dit aantal gedaald tot 300.

Bepaal na hoeveel minuten verhitting 90% van de bacteriën is afgestorven.



figuur 12.26

34 2019-II

De kievit is een weidevogel. Het aantal kieviten in Nederland neemt af. Dit komt onder andere door intensivering van de landbouw en door uitbreiding van het stedelijk gebied.

We maken in deze opgave onderscheid tussen de aantallen broedende en niet-broedende kieviten.

In de periode 1990-2010 nam het aantal broedende kieviten elk jaar met 3% af.

- a** Bereken met hoeveel procent het aantal broedende kieviten in de periode 1990-2010 is afgenomen. Geef je antwoord in hele procenten.

Na 2010 nam het aantal broedende kieviten in Nederland elk jaar met 5% af. Neem aan dat deze afname zo doorgaat.

- b** Bereken in welk jaar het aantal broedende kieviten voor het eerst minder dan de helft zal zijn van het aantal in 2010.

35 2019-II

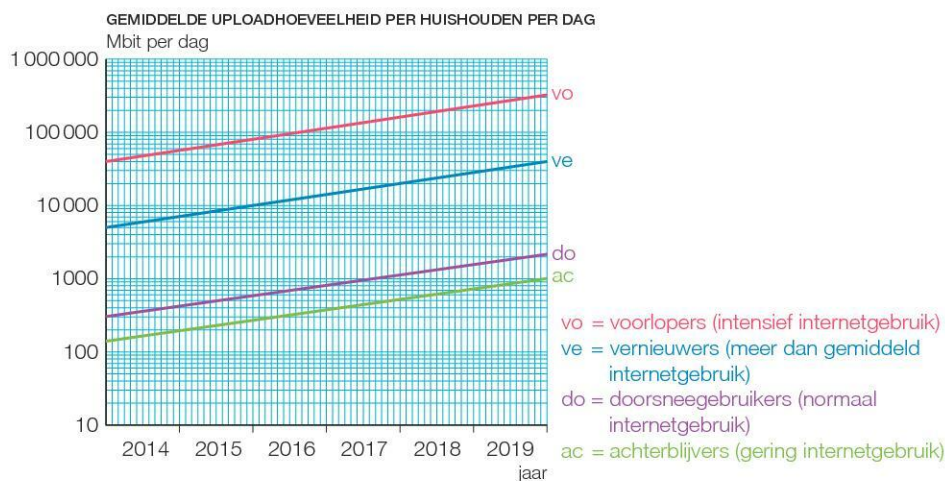
[► WERKBLAD] Het internet wordt steeds intensiever gebruikt. Daarmee stijgt de vraag naar snellere internetverbindingen die grotere hoeveelheden data (digitale informatie) per tijdseenheid kunnen verwerken.

De bedrijven die dit mogelijk moeten maken, de providers, proberen door middel van onderzoek de groeiende vraag naar sneller internet te voorspellen. Een van de onderzochte aspecten is de te verwachten groei van de hoeveelheid data die een huishouden per dag uploadt¹⁾.

In figuur 12.27 zie je de voorspelde gemiddelde hoeveelheden van vier groepen huishoudens. De verticale as heeft een logaritmische schaal.

Op de horizontale as is elk jaar in 12 maanden verdeeld.

Figuur 12.27 staat vergroot op het werkblad.



figuur 12.27

In figuur 12.27 zie je dat de gemiddelde uploadhoeveelheid per huishouden per dag voor alle groepen huishoudens in de loop der jaren toeneemt.

De achterblijvers hebben later dan de doorsneegebruikers een gemiddelde uploadhoeveelheid van 900 Mbit per huishouden per dag.

a Bepaal hoeveel jaar en maanden dit later is. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op het werkblad.

Voor iedere groep geldt dat het jaarlijkse groeipercentage in de periode 2014-2019 constant is.

Een lezer van het onderzoeksrapport beweert:

‘Het jaarlijkse groeipercentage van de gemiddelde uploadhoeveelheid per huishouden per dag van de achterblijvers is lager dan dat van de vernieuwers.’

b Onderzoek of deze lezer gelijk heeft. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op het werkblad.

noot 1 Uploaden is het verzenden van digitale informatie naar een andere computer.

12.4 Werken met formules

- 36 a** Gegeven zijn de formules $K = 2p\left(\frac{p}{16} + 0,6\right)$, $L = 1,8 - 0,14p^2$ en $M = K - L$.
Schrijf de formule van M in de vorm $M = ap^2 + bp + c$.
- b** Combineer de formules $F = \frac{12,6G}{H}$ en $H = 0,04q^2$ tot de vorm $F = a \cdot G \cdot q^b$.
- c** Gegeven zijn de formules $M = 2,5 \cdot N^{0,6} \cdot p^{0,8}$ en $N = 75n$.
De formule van M is te schrijven in de vorm $M = a \cdot n^b \cdot p^{0,8}$.
Bereken a en b . Rond af op één decimaal.
- d** De formule $Z\left(2 - \frac{R}{50}\right) = 3$ is te herleiden tot $R = 100 - \frac{150}{Z}$.
Laat deze herleiding zien.
- e** De formule $K = 1000 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^q$ is te herleiden tot $K = 10^{3-2q}$.
Laat deze herleiding zien.
- f** De formule $BL = \frac{(180 - R) \cdot Q}{0,75K^2}$ is voor $R = 30$ en $Q = 15$ te herleiden tot de vorm $BL = a \cdot K^b$.
Bereken a en b .
- g** Gegeven is de formule $D = \frac{3A}{B^2 + 2}$ met $A > 0$ en $B > 0$.
 A neemt toe en B neemt af.
Beredeneer of D dan toeneemt of afneemt.
- h** Gegeven is de formule $E = \frac{300 - A}{12B}$ met A tussen 100 en 200 en $B > 0$.
 A en E nemen beide toe.
Beredeneer of B dan toeneemt of afneemt.

Formules herleiden

De formule $y = 24 + \frac{2p+5}{1,5} \cdot 18$ is te herleiden tot de vorm $y = ap + b$. Dat gaat als volgt.

$$\begin{aligned}y &= 24 + \frac{2p+5}{1,5} \cdot 18 \text{ geeft } y = 24 + \frac{18}{1,5} \cdot (2p+5) \\& \quad y = 24 + 12(2p+5) \\& \quad y = 24 + 24p + 60 \\& \quad y = 24p + 84\end{aligned}$$

Dus $a = 24$ en $b = 84$.

Haakjes wegwerken

$$a(b+c) = ab+ac$$

$$(a+b)c = ac+bc$$

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= \\ac+ad+bc+bd\end{aligned}$$

De formule $N = \frac{1200}{1,5p^{1,3}}$ is te herleiden tot de vorm

$N = ap^b$. Dat gaat als volgt.

$$N = \frac{1200}{1,5p^{1,3}} = \frac{1200}{1,5} \cdot p^{-1,3} = 800p^{-1,3}$$

De formule $M = \frac{1000}{0,01^t}$ is te herleiden tot $M = 10^{2t+3}$.

Dat gaat als volgt. Je wil een macht van 10 krijgen.

Bedenk dat $1000 = 10^3$ en dat $0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$.

$$M = \frac{1000}{0,01^t} = \frac{10^3}{(\frac{1}{100})^t} = 10^3 \cdot (\frac{1}{10^2})^{-t} = 10^3 \cdot (10^{-2})^{-t} = 10^3 \cdot 10^{2t} = 10^{3+2t} = 10^{2t+3}$$

Rekenregels voor machten

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$$

Variabelen vrijmaken

Met kruislings vermenigvuldigen is p vrij te maken bij de formule

$$\frac{2p-3}{q} = 5. \text{ Dat gaat als volgt.}$$

$$\begin{aligned} \frac{2p-3}{q} = 5 \text{ geeft } \frac{2p-3}{q} &= \frac{5}{1} \\ 2p-3 &= 5q \\ 2p &= 5q+3 \\ p &= 2,5q+1,5 \end{aligned}$$

Neem je $x = 5$ en $V = 20$ in de formule $V = x \cdot \frac{3-p}{2y} + 12$, dan kun je y als volgt uitdrukken in p .

$$\begin{aligned} V = x \cdot \frac{3-p}{2y} + 12 \\ x = 5 \text{ en } V = 20 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} 5 \cdot \frac{3-p}{2y} + 12 &= 20 \\ \frac{5(3-p)}{2y} &= 8 \\ \frac{5(3-p)}{2y} &= \frac{8}{1} \\ 16y &= 15-5p \\ y &= 0,9375 - 0,3125p \end{aligned} \right.$$

Met het uitdrukken van y in p heb je een formule van de vorm $y = ap + b$ gekregen. Hierin is $a = -0,3125$ en $b = 0,9375$.

De formule $A = 200\sqrt{\frac{B}{6}}$ is te herleiden tot de vorm $B = cA^2$.

$$A = 200\sqrt{\frac{B}{6}} \text{ geeft } \sqrt{\frac{B}{6}} = 0,005A \quad \text{Kwadrateer beide leden.}$$

$$\frac{B}{6} = 2,5 \cdot 10^{-5} A^2$$

$$B = 1,5 \cdot 10^{-4} A^2$$

Dus $c = 1,5 \cdot 10^{-4}$.

Bij de formule $P = 50 + \frac{800}{Q}$ maak je als volgt Q vrij.

$$P = 50 + \frac{800}{Q} \text{ geeft } \frac{800}{Q} = P - 50 \quad \text{Gebruik } \frac{A}{B} = C \text{ geeft } B = \frac{A}{C}.$$

$$Q = \frac{800}{P - 50}$$

Bij de formule $c\left(4 - \frac{k}{25}\right) = 1$ maak je als volgt k vrij.

$$c\left(4 - \frac{k}{25}\right) = 1 \text{ geeft } 4 - \frac{k}{25} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{k}{25} = 4 - \frac{1}{c}$$

$$k = 100 - \frac{25}{c}$$

Formules combineren

De formules $A = 2t + 3p + 2$ en $5t + p = 20$ zijn te combineren tot de vorm $A = at + b$. Daartoe maak je eerst p vrij bij $5t + p = 20$.

Je krijgt $p = -5t + 20$.

$$\left. \begin{array}{l} A = 2t + 3p + 2 \\ p = -5t + 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 2t + 3(-5t + 20) + 2 \\ A = 2t - 15t + 60 + 2 \\ A = -13t + 62 \end{array}$$

Dus $a = -13$ en $b = 62$.

De formules $E = 20 \cdot P^{0,15} \cdot Q^{0,95}$, $P = 30R$ en $Q = 40R$ zijn te combineren tot de vorm $E = a \cdot R^b$.

Dat gaat als volgt.

Invullen van $P = 30R$ en $Q = 40R$ in $E = 20 \cdot P^{0,15} \cdot Q^{0,95}$ geeft

$$E = 20 \cdot (30R)^{0,15} \cdot (40R)^{0,95}$$

$$E = 20 \cdot 30^{0,15} \cdot R^{0,15} \cdot 40^{0,95} \cdot R^{0,95}$$

$$E = 20 \cdot 30^{0,15} \cdot 40^{0,95} \cdot R^{0,15} \cdot R^{0,95}$$

$$E \approx 1108 \cdot R^{0,15+0,95}$$

$$\text{Dus } E = 1108 \cdot R^{1,1}.$$

Redeneren met formules

Bij de formule $Q = 250(1 - 0,75^t)$ beredeneer je als volgt dat de grafiek van Q stijgend is voor $t > 0$.

Als t toeneemt, dan neemt $0,75^t$ af, dus dan neemt $1 - 0,75^t$ toe, dus ook $250(1 - 0,75^t)$ neemt toe.

Dus de grafiek van Q is stijgend.

Bij de formule $Q = 250(1 - 0,75^t)$ beredeneer je als volgt wat de grenswaarde is.

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,75^t$ tot 0, dus dan wordt $1 - 0,75^t \approx 1$ en $250(1 - 0,75^t) \approx 250$.

Dus de grenswaarde is 250.

Bij de formule $P = \frac{1500}{2 + 5 \cdot 0,8^t}$ beredeneer je als volgt dat de grafiek van P stijgend is voor $t > 0$.

Als t toeneemt, dan neemt $0,8^t$ af, dus dan neemt $5 \cdot 0,8^t$ ook af, dus dan neemt $2 + 5 \cdot 0,8^t$ ook af en daarom neemt $\frac{1500}{2 + 5 \cdot 0,8^t}$ toe.

Dus de grafiek van P is stijgend.

Bij de formule $P = \frac{1500}{2 + 5 \cdot 0,8^t}$ beredeneer je als volgt wat de grenswaarde is.

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,8^t$ tot 0, dus dan wordt $5 \cdot 0,8^t \approx 0$ en $2 + 5 \cdot 0,8^t \approx 2$ en $\frac{1500}{2 + 5 \cdot 0,8^t} \approx \frac{1500}{2} = 750$.

Dus de grenswaarde is 750.

Bij de formule $K = p^2 \left(\frac{p}{17} + 5,15 \right)$ met $p > 0$ beredeneer je als volgt dat K groter wordt als p groter wordt.

Als p groter wordt, dan wordt $\frac{p}{17}$ ook groter. En dan wordt $\frac{p}{17} + 5,15$ ook groter. Ook p^2 wordt groter als p groter wordt, en dus wordt $p^2 \left(\frac{p}{17} + 5,15 \right)$ ook groter.

Gegeven is de formule $F = 1,16 \cdot \frac{(80 - A) \cdot B}{0,17C}$ met $0 < A < 80$, $B > 0$ en $C > 0$.

Bij deze formule kun je als volgt beredeneren dat als A en F groter worden en B gelijk blijft, de waarde van C dan kleiner moet worden. Als A groter wordt, dan wordt $80 - A$ kleiner. Omdat B gelijk blijft, wordt de teller van de breuk kleiner. Omdat F groter wordt, moet de noemer van de breuk ook kleiner worden. Dat betekent dat $0,17C$ kleiner moet worden, dus dat C kleiner moet worden.

37 2016-I

Als je begint met hardlopen, moet je in het begin niet te snel of te lang willen lopen. Het is veel beter om rustig aan te beginnen en eerst een goede conditie op te bouwen. Een trainingsprogramma dat veel gebruikt wordt, heet Start to Run. Daarbij moet je tien weken lang drie keer per week hardlopen, waarbij je gaandeweg steeds langere periodes aan één stuk hardloopt. Je wisselt hierbij het hardlopen af met wandelen.

Meneer Saddal volgt het programma van Start to Run. Zijn hardloopsnelheid is gedurende het hele programma 9 km per uur. Dit is tweeënhalf keer zo hoog als zijn wandelsnelheid. Je kunt een formule opstellen voor de totale afstand die meneer Saddal per trainingsdag aflegt. Deze formule luidt $A = 0,15 \cdot H + 0,06 \cdot W$.

Hierin is A de totale afgelegde afstand in km, H het aantal hardloopminuten en W het aantal wandelminuten.

a Laat met berekeningen zien dat deze formule juist is.

Meneer Saddal krijgt de smaak te pakken en gaat na de periode van tien weken door met hardlopen. Hij besluit om een uur lang te gaan trainen. Tijdens het hardlopen houdt hij zijn gebruikelijke snelheid aan. Lukt dat niet, dan houdt hij één of meer minuten wandelpauze.

Voor een training van een uur geldt dan $W = 60 - H$.

Hierin is W het aantal wandelminuten en H het aantal hardloopminuten.

Als je de formule van W invult in de formule van A , ontstaat een formule van A die alleen nog afhangt van het aantal hardloopminuten H . Deze nieuwe formule van A is te herleiden tot de vorm $A = a \cdot H + b$, waarbij a en b getallen zijn.

b Herleid de formule van A tot deze vorm.

38 2016-II

Op een braderie zie je wel eens een glazen pot staan, helemaal gevuld met even grote knikkers. Tegen betaling van een bepaald bedrag mag je raden hoeveel knikkers er in de pot zitten. Degene die het aantal precies raadt of er het dichtst bij zit, wint een prijs.

Uit onderzoek blijkt dat de knikkers ongeveer 64% van de beschikbare ruimte innemen. Dit gegeven maakt het mogelijk een redelijke schatting te geven van het aantal knikkers in de pot. Hiervoor gebruiken we het volgende stappenplan:

- Bepaal de diameter van een knikker en bereken daarmee de inhoud van een knikker.
- Bereken 64% van de inhoud van de glazen pot en deel dit door de inhoud van één knikker. Het afgeronde antwoord is een redelijke schatting van het aantal knikkers in de pot.



De inhoud van een knikker is te berekenen met de formule

$$I_{\text{knikker}} = 0,5236 \cdot d^3.$$

Hierin is d de diameter van de knikker in cm en I_{knikker} de inhoud van een knikker in cm^3 .

Een glazen pot met een inhoud van 800 cm^3 is helemaal gevuld met knikkers, die elk een diameter van 1,3 cm hebben.

- a** Geef, met behulp van het hierboven beschreven stappenplan en de formule voor I_{knikker} , een redelijke schatting van het aantal knikkers in de pot.

Het aantal knikkers in de gevulde pot hangt af van de inhoud van de pot

en van de diameter van de knikkers. Er geldt $K = 1,222 \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{d^3}$.

Hierin is d de diameter van de knikkers in cm en I_{pot} de inhoud van de glazen pot in cm^3 . De afgeronde waarde van K is het aantal knikkers in de pot.

- b** Laat zien hoe je de formule voor K uit het stappenplan kunt afleiden.

Als je precies weet welk percentage van een pot gevuld is, kun je de

formule $K = 0,0191 \cdot p \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{d^3}$ gebruiken om het aantal knikkers te

berekenen. Hierin is p het percentage gevulde ruimte, I_{pot} de inhoud van de glazen pot in cm^3 en d de diameter van de knikkers in cm.

Janneke wil op een braderie schatten hoeveel knikkers er in een glazen pot zitten. Ze herkent de glazen pot als een voorraadpot met een inhoud van 1000 cm^3 en schat dat de diameter van de knikkers minimaal 1,5 cm en maximaal 1,7 cm is. Verder gaat ze ervan uit dat het percentage gevulde ruimte minimaal 63,0 en maximaal 65,0 is.

- c** Bereken het maximale aantal knikkers dat volgens de schattingen van Janneke in de glazen pot kan zitten. Licht je antwoord toe.

39 2017-II

Gegeven is de formule $S = 0,007184 \cdot L^{0,725} \cdot M^{0,425}$.

Hierin is S de lichaamsoppervlakte in m^2 , L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

De lichaamslengte in meter noemen we l . Er geldt: $L = 100 \cdot l$.

De oorspronkelijke formule kan daarmee herleid worden tot de vorm $S = a \cdot l^b \cdot M^{0,425}$, waarin a en b getallen zijn.

Voer deze herleiding uit en geef daarbij de waarden van a en b in drie decimalen nauwkeurig.

40 2018-I

In de zomer kan in natuurgebieden met veel bos gemakkelijk brand ontstaan.

Het risico op bosbrand wordt vooral bepaald door de temperatuur van de lucht en door de hoeveelheid vocht in de lucht.

Om het risico op bosbrand goed in beeld te krijgen, wordt gebruikgemaakt van een *brandgevaarindex*.

In Scandinavië gebruikt men als brandgevaarindex de Angström Index,

die wordt berekend met de formule $I_A = \frac{V}{20} + \frac{27 - T}{10}$.

Hierin is I_A de Angström Index, V de relatieve luchtvochtigheid in procenten en T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$. De relatieve luchtvochtigheid V geeft de hoeveelheid vocht in de lucht aan ten opzichte van de hoeveelheid vocht die de lucht maximaal kan bevatten. De relatieve luchtvochtigheid kan niet meer dan 100% zijn.

- a** Bereken de minimale en de maximale waarde van de Angström Index bij een temperatuur van 24°C .

Hoe lager de waarde van I_A , hoe groter het risico op bosbrand. In onderstaande tabel kun je zien hoe de waarden van I_A worden vertaald naar het risico op bosbrand.

I_A	risico op bosbrand
4 of groter	zeer klein
van 2,5 tot 4	klein
van 2 tot 2,5	groot
kleiner dan 2	zeer groot

Op een bepaalde zomerdag is de relatieve luchtvochtigheid 35%.

- b** Bereken bij welke temperaturen er op deze dag sprake is van een zeer groot risico op bosbrand.

Als de temperatuur constant is, dan neemt het risico op bosbrand toe als de relatieve luchtvochtigheid afneemt.

- c** Beredeneer zonder getallenvoorbeelden dat de formule hiermee in overeenstemming is.

Een andere index voor brandgevaar is de Chandler Burning Index I_C , die in Noord-Amerika wordt gebruikt. Deze wordt berekend met de formule $I_C = (216 - 2,84V + 1,12T) \cdot 0,97^V$.

Ook in deze formule is V de relatieve luchtvochtigheid in procenten en T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$.

Als de relatieve luchtvochtigheid bekend is, dan is de formule van I_C te herleiden tot de vorm $I_C = a \cdot T + b$, waarbij a en b getallen zijn.

- d** Geef deze herleiding voor het geval dat de relatieve luchtvochtigheid 43% is. Rond de waarden van a en b af op twee decimalen.

In onderstaande tabel kun je zien hoe de waarden van I_C worden vertaald naar het risico op bosbrand.

I_C	risico op bosbrand
kleiner dan 50	zeer klein
van 50 tot 75	klein
van 75 tot 90	groot
90 of groter	zeer groot

De Angström Index en de Chandler Burning Index proberen beide het risico op bosbrand zo goed mogelijk weer te geven. Toch zijn er situaties waarin het risico volgens de ene index groot is en volgens de andere juist klein. Wellicht zijn er zelfs situaties waarin het risico op bosbrand volgens de Angström Index zeer groot is en volgens de Chandler Burning Index zeer klein.

Een brandgevaarexpert onderzoekt of er zo'n situatie mogelijk is bij een temperatuur van 25°C . Bij deze temperatuur kan de Angström Index geschreven worden als $I_A = 0,05V + 0,2$.

De Chandler Burning Index kan bij 25°C geschreven worden als $I_C = (244 - 2,84V) \cdot 0,97^V$.

De expert berekent met behulp van deze formules voor verschillende relatieve luchtvochtigheden het risico op bosbrand.

- e** Onderzoek of er een relatieve luchtvochtigheid mogelijk is waarbij het risico volgens de Angström Index zeer groot is en volgens de Chandler Burning Index zeer klein. Licht je antwoord toe.

41 2018-II

Sommige ziektes zijn besmettelijk. Als je aan zo'n besmettelijke ziekte lijdt, kun je gezonde personen besmetten, waardoor die ook ziek worden. Van veel ziektes is bekend hoe groot het gemiddelde aantal (gezonde) personen is dat door één zieke wordt besmet. Dat gemiddelde aantal noemen we B . Zo geldt bijvoorbeeld voor de ziekte griep dat $B = 2,2$.

In deze opgave maken we de volgende aannames:

- Iemand die ziek wordt, is precies één week ziek. Daarna is hij weer gezond (maar kan vervolgens wel weer ziek worden). Alleen in die ene week dat hij ziek is, besmet hij andere personen.
- Wie besmet wordt, zal pas in de week erna ziek zijn.

Stel bijvoorbeeld dat in week 50 van een bepaald jaar één persoon een ziekte heeft met $B = 3$. In week 51 zal die persoon weer gezond zijn, maar zullen drie andere personen ziek zijn. In week 52 zullen er negen andere personen ziek zijn, omdat elk van de drie zieken van week 51 drie andere personen heeft besmet.

In de praktijk besmet een zieke vaak minder personen dan het gemiddelde aantal B , omdat tegen een aantal ziektes vaccins zijn ontwikkeld. Als je met zo'n vaccin bent ingeënt, kun je de ziekte niet meer krijgen. Vaccinatie van een deel van de bevolking leidt ertoe dat het gemiddelde aantal personen dat door één zieke wordt besmet, kleiner is dan B . We noemen dit gemiddelde aantal B_v .

Dus:

- B is het gemiddelde aantal personen dat besmet wordt door één zieke als niemand gevaccineerd zou worden.
- B_v is het gemiddelde aantal personen dat besmet wordt door één zieke als er sprake is van vaccinatie van een deel van de bevolking.

In deze opgave gebruiken we de volgende formule om B_v te bepalen:

$$B_v = B \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) \quad (\text{formule 1})$$

Hierin is p de *vaccinatiegraad*: het percentage van de bevolking dat tegen de ziekte is gevaccineerd.

Bij elke ziekte zorgt een hogere vaccinatiegraad ervoor dat een kleiner aantal personen besmet wordt.

- a** Beredeneer dit aan de hand van formule 1, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken.

Een situatie waarbij B_v groter is dan 1, is onwenselijk: in zo'n geval zal het aantal zieken elke week groter zijn dan het aantal zieken in de week daarvóór. We zeggen dan: de ziekte *breidt zich uit*.

Voor griep geldt $B = 2,2$.

- b** Bereken met behulp van formule 1 hoe hoog de vaccinatiegraad tegen griep minimaal moet zijn om ervoor te zorgen dat deze ziekte zich niet uitbreidt. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Van de Nederlandse bevolking heeft 14% zich laten vaccineren tegen griep. Stel dat er 1000 personen in week 40 griep hebben. Je kunt berekenen hoeveel personen met griep er in week 46 zullen zijn. Dat aantal is minder dan wanneer niemand tegen griep zou zijn gevaccineerd.

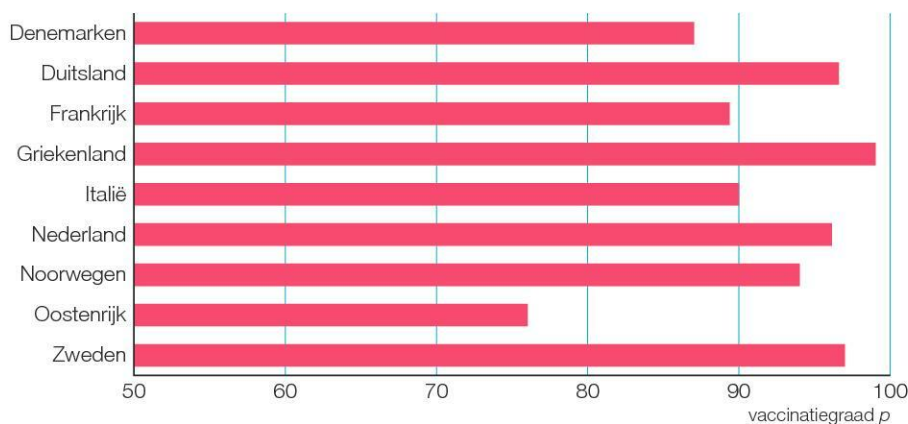
- c** Bereken hoeveel procent dat minder is. Rond je antwoord af op een geheel getal.

In een situatie waarbij $B_v = 1$ kan formule 1 herleid worden tot de formule $p = 100 - \frac{100}{B}$. (formule 2)

- d** Laat deze herleiding zien.

De ziekte mazelen is veel besmettelijker en gevaarlijker dan griep. Als niemand zich laat vaccineren, besmet één persoon met mazelen gemiddeld 20 andere personen.

In de figuur is van verschillende landen in de Europese Unie de vaccinatiegraad tegen mazelen weergegeven.



figuur 12.28

- e** Onderzoek in welke landen uit de figuur de ziekte mazelen zich zal uitbreiden.

42 2019-I

Gegeven is de formule $P = 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$.

Je kunt de formule van P herleiden tot de formule $P = 10^{2-n}$.

Geef deze herleiding.

43 2018-II

Bij een schaakpartij kan een speler punten verdienen. Als hij een partij wint, krijgt hij 1 punt. Als hij verliest, dan krijgt hij 0 punten. Wanneer de partij in remise eindigt (geen van beide spelers heeft gewonnen), dan krijgt hij 0,5 punt.

Door op bovenstaande manier punten toe te kennen, kan een ranglijst worden opgesteld van alle wedstrijdspelers in de wereld. De top 10 van deze ranglijst (juni 2017) zie je in de figuur.

In de figuur zie je bij elke speler zijn *rating*. Hoe hoger de rating, des te beter de speler tot dan toe heeft gespeeld. De rating wordt altijd afgerond op een geheel getal.

In deze opgave wordt uitgelegd hoe de rating van een speler berekend wordt. Hiervoor kijkt men allereerst naar de *vooraf verwachte score* voor de speler bij elke partij die hij gaat spelen: dat is een voorspelling van het aantal punten dat hij met die partij gaat scoren. Dit getal ligt tussen 0 en 1. Als het kleiner is dan 0,5, dan mag je verwachten dat hij zal verliezen. Als het groter is dan 0,5, dan mag je verwachten dat hij zal winnen.

Als twee schakers, speler A en speler B, een partij tegen elkaar gaan spelen, dan kan met behulp van de rating van beide spelers de vooraf verwachte score bij de partij voor speler A worden berekend¹⁾ met de

$$\text{formule } V_A = \frac{1}{1 + 10^{0,0025(R_B - R_A)}}.$$

Hierin is:

- V_A de vooraf verwachte score bij de partij voor speler A
- R_A de rating van speler A
- R_B de rating van speler B

Schakers Rutten en Faber gaan een partij spelen. De rating van Rutten is 2307, de rating van Faber is 2107.

- a** Laat met behulp van de formule zien dat je mag verwachten dat Faber zal verliezen.

De rating van schaker Altena (schaker A) is 1932. Er geldt: hoe hoger de rating van zijn tegenspeler (schaker B) is, des te lager is de vooraf verwachte score voor Altena. Dit kan beredeneerd worden aan de hand van de formule.

- b** Geef deze redenering zonder gebruik te maken van de grafische rekenmachine.

#	naam	land	rating
1	Carlsen		2827
2	Kasparov		2812
3	Vachier-Lagrave		2810
4	Kramnik		2809
5	Aronian		2807
6	Caruana		2800
7	Mamedyarov		2792
8	Anand		2791
9	So		2783
10	Grischuk		2779

figuur 12.29

noot 1 In de praktijk worden andere formules gebruikt, maar de gegeven formule geeft een goede benadering.

We gaan er in de rest van deze opgave van uit dat de nieuwe rating van een speler wordt berekend direct na het spelen van de partij. Deze nieuwe rating wordt bepaald met behulp van het aantal punten P dat de speler met de partij scoorde (0 of 0,5 of 1) en de vooraf verwachte score V bij de partij voor de speler. Voor een grootmeester (een zeer goede schaker) gaat dit met het onderstaande stappenplan:

- 1 Eerst wordt het verschil berekend van het aantal punten dat de speler met de partij scoorde en de vooraf verwachte score voor de speler bij deze partij (dus $P - V$).
- 2 De uitkomst bij stap 1 wordt vermenigvuldigd met 10.
- 3 De uitkomst bij stap 2 wordt afgerond op een geheel getal.
- 4 De uitkomst bij stap 3 wordt opgeteld bij de rating die de speler vóór de partij had.

Op het Tata Steel-schaaktoernooi in 2015 speelden de grootmeesters Magnus Carlsen en Radoslaw Wojtaszek tegen elkaar. Voorafgaand aan deze partij was de rating van Carlsen 2862 en die van Wojtaszek 2744. De partij werd gewonnen door Wojtaszek.

c Bereken de nieuwe rating van Wojtaszek.

De rating van een grootmeester kan door één partij nooit met meer dan 10 punten stijgen.

d Leg uit waarom dit juist is.

44 2016-II

In het algemeen schatten mensen hun lengte te hoog. Tegelijkertijd geldt dat ze hun gewicht te laag schatten: ze denken minder te wegen dan ze in werkelijkheid wegen. Dit heeft gevolgen voor de *BMI* (Body Mass Index). Dit is een maat voor het al dan niet te zwaar zijn van een persoon.

De formule voor de *BMI* is $BMI = \frac{G}{L^2}$.

In deze formule is G het gewicht in kg en L de lengte in meters.

Als de *BMI* van iemand groter is dan 25, spreekt men van overgewicht.

Uiteraard behoren mensen hun *BMI* te berekenen met behulp van hun werkelijke lengte en gewicht. Als mensen echter hun geschatte lengte en gewicht gebruiken, levert dat een andere *BMI* op.

Er is bij minder mensen sprake van overgewicht als zij hun *BMI* met hun eigen schattingen berekenen in plaats van met hun werkelijke lengte en gewicht.

Beredeneer dit met behulp van de formule voor de *BMI*, zonder voor G en L getallen in te vullen.

45 2019-I

Veel verkeersongevallen worden veroorzaakt door auto's die te dicht op elkaar rijden. Om ongevallen te voorkomen moeten automobilisten een minimale afstand tot hun voorganger houden. Men noemt dit de *veilige afstand*. Zie de figuur.



figuur 12.30

De veilige afstand tussen een auto en zijn voorganger hangt af van de snelheid waarmee gereden wordt. Als beide auto's even snel rijden, geldt

$$A = v \cdot \left(\frac{v}{188} + 0,14 \right).$$

Hierin is v de snelheid van beide auto's in km per uur en A de veilige afstand in meters.

Twee auto's rijden achter elkaar met een snelheid van 93 km per uur. De afstand tussen de twee auto's is 50 meter.

- a** Onderzoek of de achterste automobilist minimaal de veilige afstand tot zijn voorganger aanhoudt.

De veilige afstand wordt groter als de snelheid toeneemt.

- b** Beredeneer, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken, dat de formule hiermee in overeenstemming is.

Je kunt de formule van A herleiden tot een vorm zonder haakjes. Met behulp van de informatie in de figuur kun je vervolgens een formule opstellen van de hoeveelheid wegdek W in meters die een automobilist nodig heeft als hij de veilige afstand aanhoudt. We gaan ervan uit dat de lengte van een auto 4,50 meter is.

De formule van W is te schrijven in de vorm $W = \dots \cdot v^2 + \dots \cdot v + \dots$

- c** Stel de formule van W op en herleid de formule tot de bovenstaande vorm, waarbij op de puntjes getallen staan. Geef deze getallen in twee decimalen.

46 2019-II

Kreatinine is een afbraakproduct dat door de nieren uit het bloed wordt gefilterd. De hoeveelheid kreatinine in het bloed geeft aan hoe goed de nieren functioneren. Hoe kleiner de hoeveelheid kreatinine in het bloed, des te beter de nierfunctie.

Om een nauwkeurig beeld van het functioneren van de nieren te krijgen, moet rekening worden gehouden met de lichaamsbouw en de leeftijd van de persoon die onderzocht wordt.

In veel gevallen wordt hiervoor de *GFR* (Glomerular Filtration Rate, de filtratiesnelheid van de nieren in milliliter per minuut) berekend. Er bestaan hiervoor meerdere formules.

In deze opgave werk je met de formule hieronder. Deze formule is voor mannen en vrouwen verschillend.

mannen	vrouwen
$GFR = \frac{(140 - L) \cdot G}{0,81 \cdot K}$	$GFR = 0,85 \cdot \frac{(140 - L) \cdot G}{0,81 \cdot K}$

Hierin is L de leeftijd van de patiënt in jaren, G het lichaamsgewicht in kg en K de hoeveelheid kreatinine in micromol per liter.

Nicolien is een vrouw. Ze laat ieder jaar de waarde van haar *GFR* bepalen. Neem aan dat haar lichaamsgewicht gelijk blijft. De waarden van haar *GFR* worden in de loop der jaren groter.

- a** Beredeneer, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken, met behulp van de formule dat de nierfunctie van Nicolien beter wordt.

Voor mannen van 40 jaar en een gewicht van 80 kg is de formule te herleiden tot een formule van de vorm $GFR = \dots \cdot K^m$, waarbij er op de puntjes getallen staan.

- b** Geef deze herleiding en geef daarbij de getallen die op de puntjes komen te staan in gehelen.

12.5 Statistiek

Gebruik bij de opgaven in deze paragraaf het formuleblad zoals dat op het voorblad staat bij het centraal examen. Dit formuleblad vind je op bladzijde 271 van dit boek.

- 47 a** De 100 leerlingen van havo 5 hebben een test gemaakt, waarop je maximaal 10 punten kon behalen. De resultaten zie je in de figuur hiernaast. De centrummaten gemiddelde, modus en mediaan zijn alle drie verschillend.

Zet de centrummaten op volgorde van klein naar groot. Licht je antwoord toe.

- b** De resultaten van de test van vraag a zijn in een boxplot verwerkt. In figuur 12.32 zie je drie boxplots waarvan er één bij de test hoort.

Welke van deze boxplots is dat? Licht je antwoord toe.

- c** Bij een onderzoek naar het gevoel van veiligheid in het openbaar vervoer in Amsterdam werden volwassenen ondervraagd die met het openbaar vervoer naar het Rijksmuseum waren gekomen. Van de 1050 ondervraagden gaven 110 te kennen dat ze zich niet veilig voelden in het openbaar vervoer.

De conclusie van de onderzoekers was: 'Ruim tien procent van de gebruikers van het openbaar vervoer in Amsterdam voelt zich daarin niet veilig.'

Noem twee aspecten uit de gekozen onderzoeksopzet op grond waarvan je moet zeggen dat deze conclusie te algemeen is.

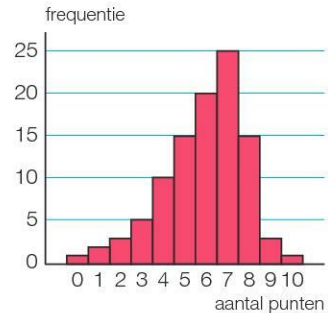
- d** Zie het onderzoek in vraag c. Van de 1050 ondervraagde personen woonden 160 in Amsterdam en hiervan gaven 30 aan zich niet veilig te voelen in het openbaar vervoer.

Het is mogelijk op basis van deze gegevens een kruistabel te maken.

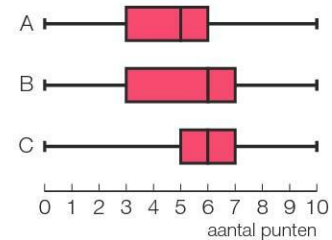
Hiernaast is hiervan een begin gemaakt. Met behulp van de ingevulde kruistabel kun je bepalen of het verschil in gevoel van veiligheid in het openbaar vervoer in Amsterdam tussen personen die in Amsterdam wonen en die niet in Amsterdam wonen groot, middelmatig of gering is.

Neem de kruistabel over en bepaal hiermee en met een vuistregel op het formuleblad of het genoemde verschil groot, middelmatig of gering is.

- e** In de kruistabel bij vraag d worden variabelen gebruikt. Noem de variabelen uit de kruistabel en geef aan of deze variabelen kwalitatief of kwantitatief zijn. Licht je antwoord toe.



figuur 12.31



figuur 12.32

		voelt zich veilig		totaal
		ja	nee	
woont in Amsterdam	ja			
	nee			
totaal				

48 Verschillende groepen leerlingen hebben een test gemaakt waarop je maximaal 550 punten kunt behalen. In totaal deden 10 780 leerlingen deze test. Groep A telde 1240 leerlingen en in groep B zaten 1030 leerlingen. Bij groep A was de gemiddelde score 512 punten en was de standaardafwijking 13,0. Bij groep B was het gemiddelde 521 en de standaardafwijking 7,5.

In de tabel hiernaast staat nog meer informatie over deze test.

Je ziet dat bij groep A het 20^e percentiel 501 is. Dit betekent dat 20% van de leerlingen in groep A een score van 501 of lager had.

Bij een van deze groepen zijn de scores normaal verdeeld. Bij de andere groep is dat niet het geval.

- Geef een statistische redenering waarmee je uitlegt voor welke groep de scores niet normaal verdeeld zijn.
- Bepaal met het formuleblad op twee verschillende manieren of het verschil tussen de scores die behaald zijn door de leerlingen van groep A en de scores die behaald zijn door de leerlingen van groep B groot, middelmatig of gering is.
- We bekijken nu de zwakste leerlingen in groep B met een score die minstens tweemaal de standaardafwijking lager ligt dan het gemiddelde. In de tabel hieronder staat de verdeling van de laagste 10% scores van groep B.

Je ziet dat er 20 leerlingen waren met een score van 508.

score	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510
aantal	1	1	1	2	3	3	4	5	6	14	20	25	25

Uit deze tabel blijkt dat, ondanks dat de scores niet normaal verdeeld zijn, het aantal leerlingen met zo'n lage score toch ongeveer gelijk is aan het aantal dat je op grond van de vuistregels bij de normale verdeling zou verwachten.

Toon dit aan.

In groep C zaten 1180 leerlingen. De scores in deze groep zijn normaal verdeeld. Het blijkt dat de middelste 95% van de leerlingen een score had tussen 502 en 536.

- Bereken de standaardafwijking van de scores in groep C.

percentiel	A	B
5	491	508
10	495	510
15	498	513
20	501	514
25	503	515
50	512	520
75	521	523
80	523	524
85	526	525
90	529	528
95	533	529

In groep D zaten 1117 leerlingen. Deze leerlingen vulden bovendien na afloop van de test een vragenlijst in. Een van de vragen was hoeveel tijd je had gestudeerd voor deze test. Het bleek dat 268 leerlingen meer dan vier uur hadden gestudeerd.

Op basis hiervan kun je het percentage schatten van alle leerlingen die meer dan vier uur hebben gestudeerd bij de voorbereiding van de test. Hierbij gaan we er vanuit dat groep D een representatieve steekproef is.

- e** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van dit percentage. Rond in het eindantwoord af op één decimaal.

Uit de vragenlijst die de leerlingen van groep D hebben ingevuld blijkt dat ze gemiddeld 170 minuten hadden gestudeerd voor deze test. De standaardafwijking was 40 minuten. Op basis hiervan kun je het gemiddeld aantal minuten schatten dat de 10780 leerlingen die deze test maakten, hebben gestudeerd.

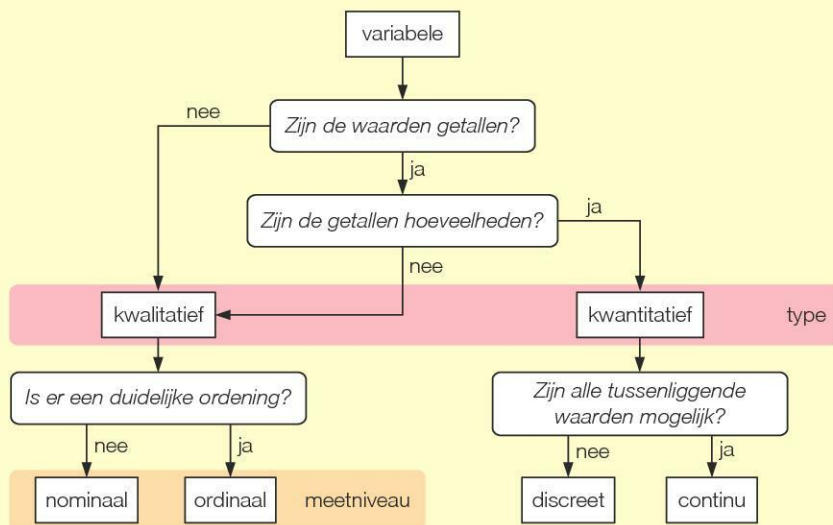
- f** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van dit gemiddelde. Rond in het eindantwoord af op één decimaal.

Soorten variabelen

Een *kwalitatieve variabele* geeft een eigenschap weer, bijvoorbeeld beroep, godsdienst of geslacht.

Een *kwantitatieve variabele* geeft een hoeveelheid weer. Voorbeelden zijn temperatuur, snelheid en geboortjaar.

Kwalitatieve en kwantitatieve variabelen kun je nog verder onderverdelen. Zie het schema.



Je kunt met het schema nagaan dat de variabele 'aantal rotte appels' een discrete variabele is. En dat de variabele telefoonnummer een nominale variabele is.

Centrum- en spreidingsmaten

De centrummaten zijn *gemiddelde*, *modus* en *mediaan*.

BEREKENEN VAN GEMIDDELDE, MEDIAAN EN MODUS

gemiddelde	Tel alle waarnemingsgetallen bij elkaar op. Deel dit door het aantal waarnemingsgetallen.
mediaan	Schrijf de getallen in volgorde van grootte. De mediaan is het middelste getal bij een oneven aantal getallen. Bij een even aantal getallen is de mediaan het gemiddelde van de middelste twee getallen.
modus	Ga na of er één waarneming is met de hoogste frequentie. Is die er, dan is dit de modus. Is die er niet, dan is er geen modus.

VOOR- EN NADELEN BIJ DRIE CENTRUMMATEN

	voordeel	nadeel
gemiddelde	gebruikt alle waarnemingsgetallen	gevoelig voor uitschieters
mediaan	ongevoelig voor uitschieters	alleen de grootte van de middelste waarneming(en) is van belang
modus	geschikt voor elk type variabele	is er niet altijd

De mediaan van de eerste helft heet het eerste kwartiel. Notatie Q_1 .
De mediaan van de tweede helft heet het derde kwartiel. Notatie Q_3 .

Bij een klassenindeling is de modale klasse de klasse met de grootste frequentie.

Je kunt ook aangeven in welke klasse de mediaan ligt.

Omdat bij een klassenindeling informatie verloren is gegaan, is het gemiddelde niet precies te berekenen.

Je kent de *spreidingsmaten* spreidingsbreedte, interkwartielafstand en standaardafwijking.

De *spreidingsbreedte* is het verschil tussen het grootste en het kleinste waarnemingsgetal.

De *interkwartielafstand* (kwartielafstand) is het verschil tussen het derde en het eerste kwartiel, dus de interkwartielafstand is $Q_3 - Q_1$.

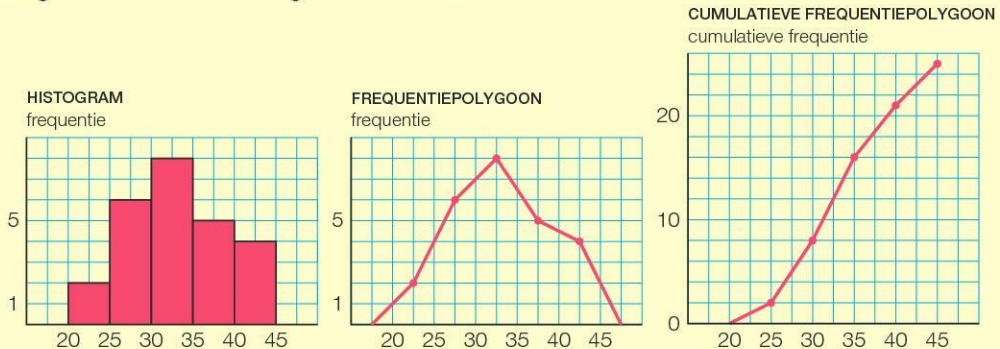
De *standaardafwijking* σ geeft een goede indruk van de spreiding rond het gemiddelde. Ruwweg kun je zeggen dat de getallen gemiddeld σ van het gemiddelde afliggen.

Representaties van data

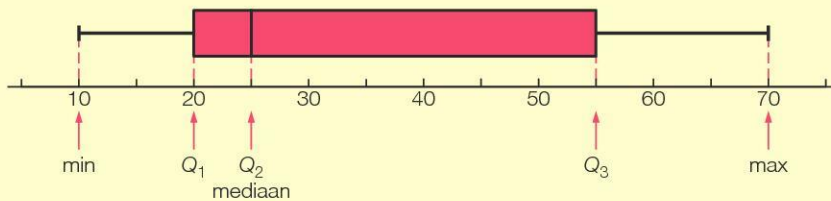
Een *histogram* is een staafdiagram bij een frequentieverdeling met kwantitatieve gegevens op de horizontale as.

Een *frequentiepolygoon* is een lijndiagram waarin de frequenties zijn uitgezet tegen de waarnemingsgetallen. Begin- en eindpunt liggen op de horizontale as.

Bij een *cumulatieve frequentiepolygoon* zijn de cumulatieve frequenties uitgezet boven de rechtergrens van elke klasse.



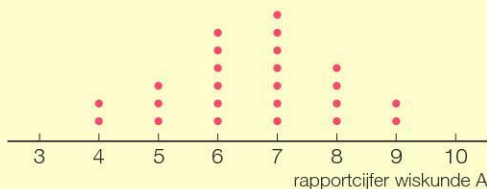
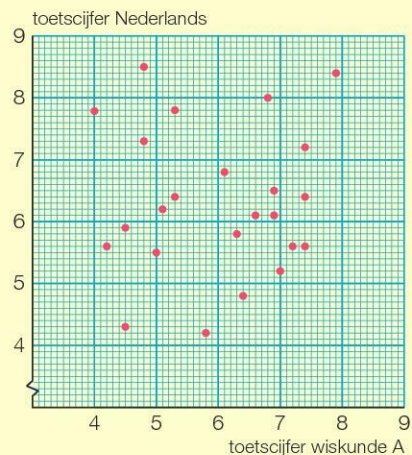
Een *boxplot* is een diagram waarin je de verdeling in vier even grote groepen zichtbaar maakt. Elk deel van de boxplot bevat 25% van de waarnemingsgetallen.



In de *dotplot* in de figuur hieronder zijn de rapportcijfers van wiskunde A van een klas weergegeven.

In het *spreidingsdiagram* hiernaast zijn van deze klas toetscijfers Nederlands uitgezet tegen toetscijfers wiskunde A.

Een spreidingsdiagram wordt ook wel een *puntenwolk* genoemd.



Associatiematen

Op het formuleblad (zie bladzijde 271) bij het centraal examen staan vier associatiematen met de bijbehorende vuistregels. Je gebruikt deze om de grootte van het verschil tussen twee groepen te bepalen. Welke associatiemaat je gebruikt hangt af van de soort variabele en de beschikbare gegevens. Zie het onderstaande schema.



Hieronder zie je enkele voorbeelden van het bepalen van de grootte van het verschil tussen twee groepen.

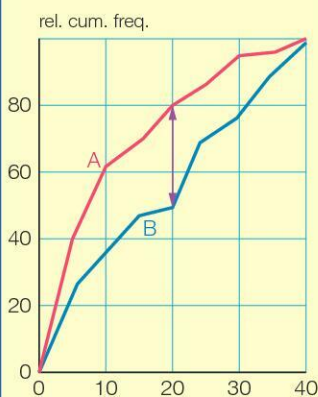
phi-coëfficiënt

Bij de tabel hiernaast is

$$\phi = \frac{26 \cdot 34 - 38 \cdot 45}{\sqrt{64 \cdot 79 \cdot 71 \cdot 72}} \approx -0,16, \text{ dus het verschil is gering want } -0,2 \leq \phi \leq 0,2.$$

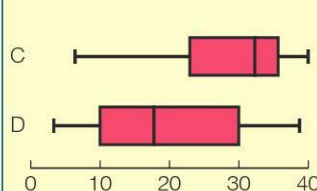
	waarde I	waarde II	
waarde 1	26	38	64
waarde 2	45	34	79
	71	72	

max.Vcp



max.Vcp = 30%
Omdat $20 < \text{max.Vcp} \leq 40$,
is het verschil middelmatig.

boxplots vergelijken



- De boxen overlappen elkaar.
 - Er is een mediaan die buiten de box van de andere boxplot ligt.
- Dus het verschil is middelmatig.

effectgrootte

$$\bar{X}_1 = 176 \text{ en } S_1 = 12$$

$$\bar{X}_2 = 172 \text{ en } S_2 = 10$$

$$E = \frac{176 - 172}{\frac{1}{2}(12 + 10)} \approx 0,36$$

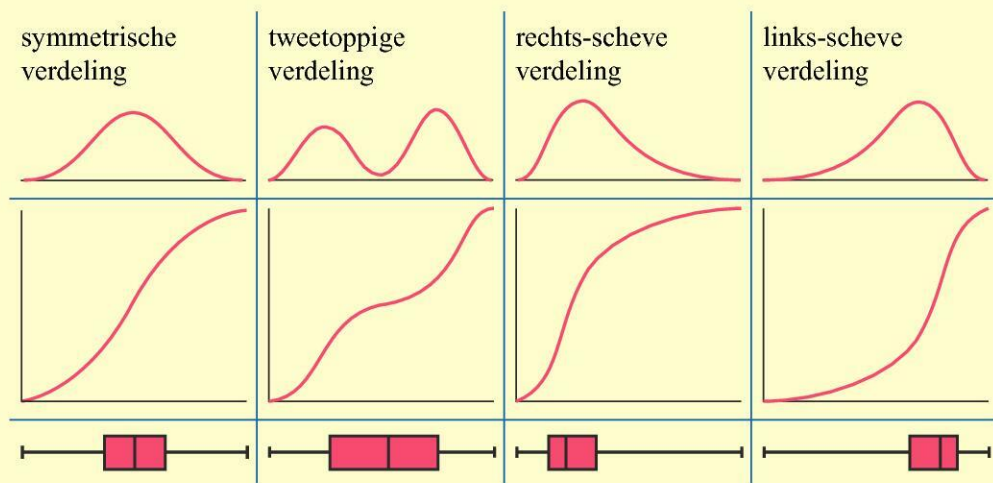
Omdat $E \leq 0,4$, is het verschil gering.

Verdelingen

Een *verdelingskromme* is een globale grafiek van een verdeling.

Hieronder staan de verdelingskrommen bij enkele verdelingen.

Daaronder zijn de bijbehorende *cumulatieve verdelingskrommen* en boxplots getekend.



De *normale verdeling* is een continue verdeling waarbij de verdelingskromme symmetrisch is.

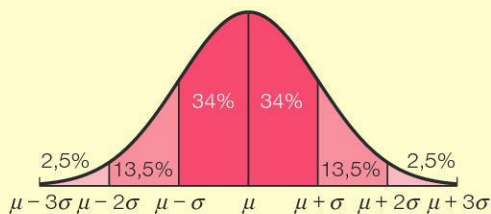
Het gemiddelde, de modus en de mediaan vallen samen.

Het gemiddelde wordt aangegeven met μ en de standaardafwijking met σ .

De normaalkromme is klokvormig.

Bij de normale verdeling horen de volgende vuistregels.

- Ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
- Ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.
- Bijna 100% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.

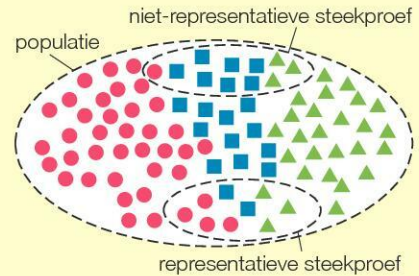


Betrouwbaarheidsintervallen

De totale groep waarop een onderzoek zich richt heet de *populatie*. Wil men onderzoeken hoeveel procent van de huishoudens twee of meer auto's bezit, dan wordt de populatie gevormd door de huishoudens.

Niet alle huishoudens worden ondervraagd. Men neemt een *steekproef*. De steekproef moet *representatief* zijn.

Een steekproef is representatief als zij een juiste afspiegeling is van de gehele populatie. Dat betekent dat de steekproef voldoende groot moet zijn en *aselect*. Dit laatste houdt in dat elk element van de populatie dezelfde kans moet hebben om in de steekproef voor te komen.



Je hebt te maken met de begrippen populatieproportie en steekproefproportie.

De *populatieproportie* p van een populatie is het deel van de populatie met een bepaald kenmerk.

De *steekproefproportie* $\hat{p}$ van een steekproef is het deel van de steekproef met een bepaald kenmerk.

Voor een populatieproportie is het 95%-betrouwbaarheidsinterval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$.

Hierin is $\hat{p}$ de steekproefproportie en σ de standaardafwijking.

Voor de standaardafwijking geldt de formule $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$. Hierin is n de steekproefomvang.

Is bij een steekproef van lengte 900 de steekproefproportie $\hat{p} = 0,36$, dan

$$\text{is } \sigma = \sqrt{\frac{0,36(1 - 0,36)}{900}} = 0,016.$$

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$[0,36 - 2 \cdot 0,016; 0,36 + 2 \cdot 0,016] = [0,328; 0,392].$$

Op het formuleblad staat:

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}}, \text{ met } p \text{ de steekproefproportie en } n \text{ de steekproefomvang.}$$

$$\text{Bij } \hat{p} = 0,36 \text{ en } n = 900 \text{ krijg je } 0,36 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0,36(1 - 0,36)}{900}} = 0,36 \pm 0,032.$$

Voor een populatiegemiddelde is het 95%-betrouwbaarheidsinterval

$$\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right].$$

Hierin is $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, S de steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.

Is bij een steekproef van lengte 400 het steekproefgemiddelde $\bar{X} = 35$ en $S = 12$, dan is het 95%-betrouwbaarheidsinterval

$$\left[35 - 2 \cdot \frac{12}{\sqrt{400}}, 35 + 2 \cdot \frac{12}{\sqrt{400}} \right] = [33,8; 36,2].$$

Op het formuleblad staat:

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, met $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, n de steekproefomvang en S de steekproefstandaardafwijking.

Bij $n = 400$, $\bar{X} = 35$ en $S = 12$ krijg je $35 \pm 2 \cdot \frac{12}{\sqrt{400}} = 35 \pm 1,2$.

49 2016-II

Het vullen van een glazen pot met knikkers is een voorbeeld van random close packing. Bij random close packing wordt een hoeveelheid identieke voorwerpen willekeurig in een pot of bak gedaan, waarna er wordt geschud om de beschikbare ruimte zo goed mogelijk op te vullen. Bij bolvormige voorwerpen, zoals knikkers, blijkt dat het gedeelte dat gevuld wordt altijd ongeveer even groot is. Het percentage gevulde ruimte is normaal verdeeld met een gemiddelde van 64,0. In 95% van de gevallen ligt het percentage gevulde ruimte tussen de 63,6 en 64,4. Op grond van dit gegeven kun je de standaardafwijking van het percentage gevulde ruimte berekenen.

a Bereken deze standaardafwijking.

Als je precies weet welk percentage van een pot gevuld is, kun je de

formule $K = 0,0191 \cdot p \cdot \frac{I_{\text{pot}}}{d^3}$ gebruiken om het aantal knikkers te

berekenen. Hierin is p het percentage gevulde ruimte, I_{pot} de inhoud van de glazen pot in cm^3 en d de diameter van de knikkers in cm.

Een glazen pot met een inhoud van 1050 cm^3 is helemaal gevuld met knikkers met een diameter van 0,95 cm. Het aantal knikkers in de pot is afhankelijk van het percentage gevulde ruimte.

b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het aantal knikkers in de pot. Rond af op helen.

50 2016-II

[► WERKBLAD] Patiënten die voor een behandeling enige tijd in een ziekenhuis worden opgenomen, lopen tijdens dit verblijf het risico een infectie te krijgen. Zo'n infectie wordt een zorginfectie genoemd. Een deel van de zorginfecties ontstaat na een operatie. In de periode 2007 tot en met 2012 is een steekproef gehouden onder een deel van de Nederlandse ziekenhuizen. Enkele resultaten hiervan zijn in de tabel te zien.

	aantal
patiënten	95 299
patiënten die een zorginfectie hebben opgelopen	4694
geopereerde patiënten	32 664
geopereerde patiënten die een zorginfectie hebben opgelopen	1286

We nemen aan dat de patiënten in deze ziekenhuizen representatief zijn voor alle patiënten die in een Nederlands ziekenhuis worden opgenomen. Dan kunnen we op basis van de gegevens in de tabel schatten hoeveel procent van alle in Nederland geopereerde patiënten in de genoemde periode een zorginfectie opliep.

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van dit percentage. Rond de getallen in je eindantwoord af op één decimaal.

Het is mogelijk om op basis van de tabel een kruistabel te maken. Hiernaast is een begin gemaakt met deze kruistabel. Met behulp van de ingevulde kruistabel kun je bepalen of het verschil in het krijgen van een zorginfectie tussen geopereerde en niet-

geopereerde patiënten groot, middelmatig of gering is.

- b** Neem de kruistabel over, vul het in en bepaal daarmee, en met behulp van een vuistregel op het formuleblad, of het genoemde verschil groot, middelmatig of gering is.

In de kruistabel worden variabelen gebruikt.

- c** Noem de variabelen uit de kruistabel en geef aan of deze variabelen kwalitatief of kwantitatief zijn. Licht je antwoord toe.

		geopereerd		totaal
		wel	niet	
zorginfectie opgelopen	wel			
	niet			
totaal				

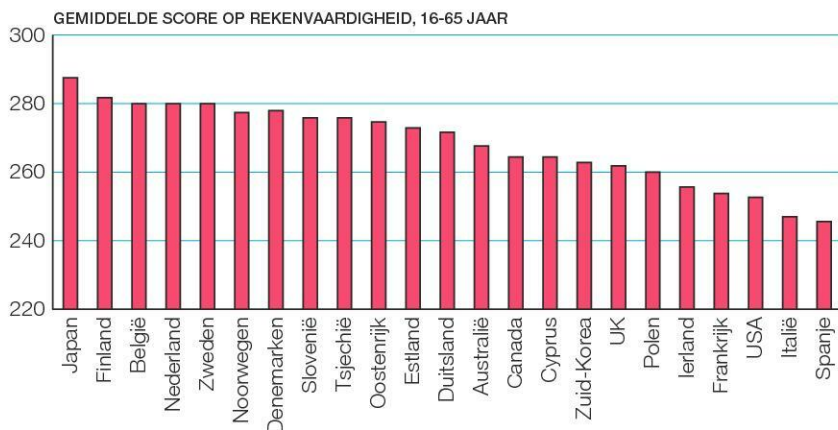


51 2017-I

De OESO (Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling) publiceerde in oktober 2013 de resultaten van het onderzoek PIAAC (Programme for the International Assessment of Adult Competencies). Dit is een onderzoek naar reken-, taal- en probleemoplossingsvaardigheden in 23 landen onder ruim 5000 16- tot 65-jarigen per land.

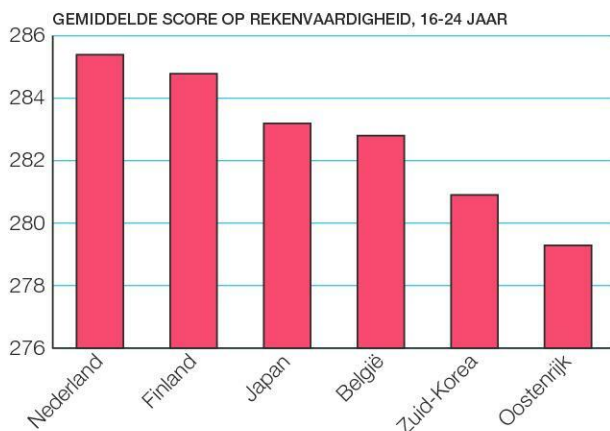
Deze opgave gaat alleen over de score op rekenvaardigheid. Deze score heeft een schaal van 0 tot 500.

Voor ieder land is op basis van het onderzoek een schatting gemaakt voor de gemiddelde score van de gehele populatie van 16- tot 65-jarigen. In figuur 12.33 zie je deze gemiddelde scores per land. Nederland staat op de vierde plaats.



figuur 12.33

Ook voor de deelpopulatie van 16- tot 24-jarigen zijn de gemiddelde scores per land bepaald. Nederland staat hier op de eerste plaats. In figuur 12.34 zie je de gemiddelde scores van de top 6. Zweden behoort niet tot de top 6.



figuur 12.34

Als je de figuren 12.33 en 12.34 met elkaar vergelijkt, zijn er verschillende conclusies mogelijk. Hieronder staan twee mogelijke conclusies.

- 1 In Nederland scoren de 16- tot 24-jarigen gemiddeld hoger dan de 25- tot 65-jarigen.
 - 2 In Zweden scoren de 16- tot 24-jarigen gemiddeld lager dan de 25- tot 65-jarigen.
- a** Leg bij elk van deze conclusies uit of deze juist is en of deze kan worden getrokken op basis van het vergelijken van de figuren 12.33 en 12.34.

In de tabel staan de *percentielen* van de scores van enkele deelnemende landen. Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat het 75e percentiel van Australië 305,4 is. Dit betekent dat 75% van de Australische deelnemers een score van 305,4 of lager had.

land	gemiddelde score	standaard-afwijking	percentiel						
			5	10	25	50	75	90	95
Australië	267,6	56,6	169,3	197,7	234,7	271,9	305,4	334,3	351,6
Canada	265,5	55,5	169,2	194,2	230,8	269,8	303,9	332,4	349,3
Finland	282,2	52,2	193,6	217,4	250,8	285,8	317,3	345,0	360,8
Frankrijk	254,2	56,2	152,1	179,7	219,9	259,2	293,9	321,5	336,5
Duitsland	271,7	53,1	179,0	201,9	238,4	275,9	309,3	335,0	350,5
Italië	247,1	50,0	161,1	182,9	215,4	249,3	281,9	309,1	324,1
Japan	288,2	44,0	212,6	231,7	260,7	290,8	318,1	341,7	355,4
Nederland	280,3	51,1	188,6	214,6	251,0	285,8	315,3	339,7	354,2
Spanje	245,8	51,3	149,1	177,8	216,3	250,3	280,9	307,4	322,3
Zweden	279,1	54,9	181,7	209,9	249,2	284,0	316,0	342,8	358,4
USA	252,8	57,0	151,7	177,9	217,1	256,1	293,1	322,7	340,0
alle deelnemers van de 23 landen	268,7	51,3	178,4	202,8	237,9	272,5	303,9	330,3	345,6

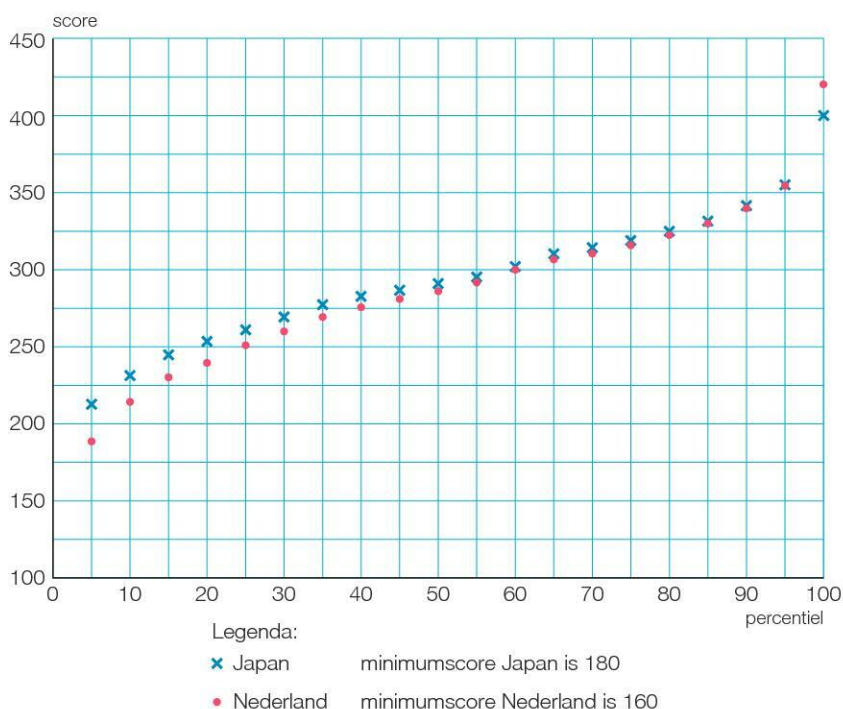
Een van de onderzoekers concludeert op basis van de laatste regel van de tabel dat de score van alle deelnemers niet normaal verdeeld is.

- b** Geef een mogelijke statistische redenering die deze onderzoeker hiervoor gebruikt kan hebben.
- c** Bepaal met behulp van het formuleblad op twee verschillende manieren of het verschil tussen de scores die behaald zijn door de Canadese deelnemers en de scores die behaald zijn door de Spaanse deelnemers groot, middelmatig of gering is.

Er zijn verschillende manieren om met behulp van de tabel de spreiding van de scores tussen landen te vergelijken.

- d** Kies twee verschillende spreidingsmaten en vergelijk met elk van deze maten de spreiding van de scores in Australië en Spanje.

In figuur 12.35 zijn de percentielscores van Japan en Nederland in een grafiek weergegeven.



figuur 12.35

De grafiek van Japan verschilt van de grafiek van Nederland.

- e** Beredeneer met behulp van figuur 12.35 of de spreiding van de scores in Japan groter of kleiner is dan die in Nederland.

52 2016-I

Voor het onderzoek ‘Sociale samenhang’ in 2013 werden gegevens verzameld onder de Nederlandse bevolking. Er deden 7400 aselect getrokken personen aan dit onderzoek mee. Van de deelnemers gaven 4292 personen aan vertrouwen te hebben in de medemens.

Op basis van deze gegevens worden de volgende twee uitspraken gedaan over het percentage Nederlanders dat (in 2013) vertrouwen had in de medemens:

- 1 Het is meer dan 95% zeker dat het percentage Nederlanders dat vertrouwen had in de medemens, in het interval $[56,6; 59,4]$ ligt.
- 2 Het is minder dan 95% zeker dat het percentage Nederlanders dat vertrouwen had in de medemens, in het interval $[56,6; 59,4]$ ligt.

Eén van deze twee uitspraken is juist.

Welke uitspraak is juist? Licht je antwoord met een berekening toe.

53 2016-II

Jaarlijks wordt voor een onderzoek aan een groot aantal personen gevraagd hun lengte te schatten. We noemen deze lengte de geschatte lengte. Daarnaast wordt de lengte nauwkeurig door een onderzoeker gemeten. We noemen deze lengte de werkelijke lengte. De geschatte lengte en de werkelijke lengte worden vervolgens met elkaar vergeleken. Het blijkt dat mensen in het algemeen hun lengte te hoog schatten.

In het onderzoek van een bepaald jaar schatten de vrouwen hun lengte gemiddeld 0,9 cm hoger dan hun werkelijke lengte. De standaardafwijking van de werkelijke lengte was 6,0 cm. De standaardafwijking van de geschatte lengte was 6,2 cm.

Bepaal met behulp van een vuistregel op het formuleblad of het verschil tussen de werkelijke lengte en de geschatte lengte gering, middelmatig of groot is.

54 2018-I

Bij een bloedonderzoek worden het hemoglobinegehalte en de hoeveelheid rode bloedcellen gemeten. In de uitslag van het onderzoek staan van beide de gemeten waarden. Om deze uitslag te kunnen beoordelen, worden de gemeten waarden vergeleken met de bijbehorende *referentiewaarden*.

Dit zijn de waarden zoals ze gevonden worden bij 95% van de gezonde mensen. In deze opgave bekijken we de referentiewaarden van volwassenen. Het hemoglobinegehalte wordt uitgedrukt in millimol per liter (mmol/L) (een mol is een eenheid voor het aantal deeltjes) en de hoeveelheid rode bloedcellen in biljoenen per liter (1 biljoen = 10^{12}). We gaan ervan uit dat het hemoglobinegehalte en de hoeveelheid rode bloedcellen van gezonde mannen normaal verdeeld zijn. Dit geldt ook voor het hemoglobinegehalte en de hoeveelheid rode bloedcellen van gezonde vrouwen.

In de tabel staan de referentiewaarden van het hemoglobinegehalte en van de hoeveelheid rode bloedcellen.

Deze referentiewaarden liggen symmetrisch om het gemiddelde.

Zo kun je in de tabel bijvoorbeeld aflezen dat 95% van de gezonde mannen een hemoglobinegehalte heeft tussen 8,6 mmol/L en 11,0 mmol/L.

	geslacht	referentiewaarden
hemoglobine	man	8,6 – 11,0
	vrouw	7,6 – 10,0
rode bloedcellen	man	4,4 – 5,8
	vrouw	4,0 – 5,3

- a** Bereken de standaardafwijking van de hoeveelheid rode bloedcellen van gezonde vrouwen. Geef je antwoord in biljoenen per liter en rond af op één decimaal.

De standaardafwijking van het hemoglobinegehalte van zowel gezonde mannen als gezonde vrouwen is 0,6 mmol/L.

- b** Bereken met behulp van het formuleblad of het verschil tussen het hemoglobinegehalte van gezonde mannen en gezonde vrouwen gering, middelmatig of groot is.

[► **WERKBLAD**] Een paar jaar geleden heeft men in de Verenigde Staten een onderzoek gehouden onder mensen die in hun lunchpauze ergens gaan eten. Men wilde weten wat er zoal als lunch besteld werd en hoeveel kilocalorieën (kcal) de bestelde lunch bevatte.

Het onderzoek werd uitgevoerd in New York City. Uit alle 1064 lunchrestaurants die op hun website calorie-informatie hadden staan, werden er willekeurig 167 uitgekozen waar het onderzoek werd uitgevoerd.

Verschillende teams van onderzoekers gingen rond lunchtijd naar deze lunchrestaurants om klanten te informeren over het onderzoek. Alleen klanten van 18 jaar en ouder mochten meedoen. Ze moesten dan een individuele bestelling plaatsen. Wie vervolgens zijn kassabonnetje inleverde, kreeg als beloning een metrokaartje van 2 dollar. Vrijwel alle klanten wilden meedoen met het onderzoek, mede vanwege de beloning. De onderzoekers kregen op deze manier heel wat kassabonnetjes in handen. Achteraf bleek dat 5,6% van de ingeleverde kassabonnetjes onbruikbaar was. De overige 7318 kassabonnetjes konden worden gebruikt voor het onderzoek.

a Bereken hoeveel dollar de onderzoekers kwijt waren aan metrokaartjes.

Omdat op de kassabonnetjes precies vermeld stond wat er besteld was, konden onderzoekers met de calorie-informatie van de betreffende lunchrestaurants berekenen hoeveel kcal elke lunch bevatte. Een samenvatting van de resultaten staat in onderstaande tabel.

type lunch-restaurant	aantal restaurants	aantal geldige kassa-bonnetjes	aantal kcal per kassa-bonnetje		percentage klanten dat meer dan ... kcal bestelde	
			gemiddelde	standaardafwijking	1000 kcal	1250 kcal
broodjes	49	1989	734	361	20,0	8,8
pizza	17	272	766	449	20,6	15,1
ham-burgers	75	3857	857	336	38,6	16,5
tex-mex	3	96	900	295	41,7	17,7
kip	14	649	931	264	47,5	18,0
gemengd	9	455	821	256	35,6	16,9
totaal	167	7318	827	458	33,5	14,5

Van één type lunchrestaurant uit bovenstaande tabel zijn de resultaten ook weergegeven in een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon. Deze polygoon staat op het werkblad.

b Van welk type lunchrestaurant zijn de resultaten in de polygoon weergegeven? Licht je antwoord toe. Je kunt daarbij de figuur op het werkblad gebruiken.

De aanbevolen hoeveelheid kcal voor een lunch is 750 kcal. Het lijkt erop dat die hoeveelheid in hamburgerrestaurants ruimschoots overschreden wordt. Het steekproefgemiddelde was daar immers veel hoger dan 750 kcal.

- c** Onderzoek of de aanbevolen hoeveelheid van 750 kcal in het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde in hamburgerrestaurants ligt.

De Amerikaanse overheid is geschrokken van de resultaten van dit onderzoek. Ze trekt de conclusie: ‘Veel volwassenen nuttigen bij de lunch meer dan de aanbevolen hoeveelheid kcal.’

Door de gekozen onderzoeksofzet, zoals die beschreven staat in de inleiding van deze opgave, is de conclusie van de Amerikaanse overheid echter te algemeen.

- d** Noem hiervoor twee aspecten uit de gekozen onderzoeksofzet.

Een van de deelnemende lunchrestaurants probeert zijn klanten bewust te maken van de hoeveelheid kcal die ze bestellen. Dit restaurant presenteert daarom de calorie-informatie niet alleen op de website, maar ook duidelijk zichtbaar bij het bestelpunt. De onderzoekers hebben aan de klanten van dit restaurant gevraagd of deze informatie effect had op hun bestelling. Die informatie hebben zij per klant gekoppeld aan zijn of haar kassabonnetje. De resultaten staan in onderstaande tabel.

	aantal geldige kassabonnetjes	aantal kcal		percentage dat meer dan 1000 kcal bestelt
		gemiddelde	standaardafwijking	
calorie-informatie wel gelezen	568	713	301	17,5
calorie-informatie niet gelezen	1237	766	584	23,0

Op grond van de resultaten in de tabel hierboven bespreken de onderzoekers de volgende stelling: ‘Er bestaat een groot verschil in het aantal kcal per bestelling tussen klanten die de calorie-informatie wel hebben gelezen en klanten die de calorie-informatie niet hebben gelezen.’

- e** Onderzoek met behulp van het formuleblad of deze stelling door de gegevens in de tabel hierboven wordt ondersteund.

56 2018-II

Sinds de jaren tachtig meet het Trimbos-instituut regelmatig via een enquête het gebruik van alcohol, drugs en tabak in aselecte, representatieve steekproeven onder alle leerlingen van het voortgezet onderwijs. Ook werd de leerlingen in de enquête gevraagd naar hun leeftijd (in jaren), hun geslacht (jongen, meisje), en hun schoolniveau (vmbo, havo, vwo).

Aan de enquête van 2015 deden 6714 leerlingen mee in de leeftijd van 12 tot en met 16 jaar. In deze groep is onder andere gekeken naar de lifetime-prevalentie van roken. Hieronder staat wat dit begrip betekent:

lifetime-prevalentie van roken = het percentage van de leerlingen dat rookt of ooit gerookt heeft in zijn of haar leven.

Zie onderstaande tabel.

LIFETIME-PREVALENTIE VAN ROKEN

steekproefomvang	6714
aantal dat rookt of ooit gerookt heeft	1544
lifetime-prevalentie	23%

In de tabel hierboven zie je dat van de leerlingen in de steekproef 23%, bijna een kwart, rookt of ooit gerookt heeft.

Op basis van bovenstaande gegevens kun je het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de lifetime-prevalentie van roken berekenen.

- a** Bereken dit 95%-betrouwbaarheidsinterval. Rond de percentages in je antwoord af op gehele getallen.

In de tabel hieronder zijn de 6714 leerlingen uitgesplitst naar schoolniveau.

LIFETIME-PREVALENTIE VAN ROKEN

	aantal leerlingen	aantal dat rookt of ooit gerookt heeft	lifetime-prevalentie
vmbo	3265	873	27%
havo	1805	410	23%
vwo	1644	261	16%
totaal	6714	1544	23%

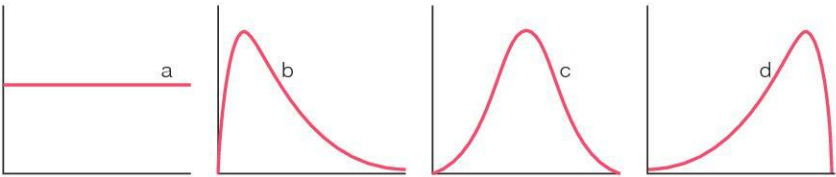
- b** Bepaal met behulp van het formuleblad of het verschil in lifetime-prevalentie van roken tussen havoleerlingen en vwo-leerlingen groot, middelmatig of gering is.

Van de 1544 leerlingen die aangaven dat zij rookten of ooit gerookt hadden, gaven 712 leerlingen aan in de afgelopen maand nog gerookt te hebben. Deze groep van 712 leerlingen noemen we ‘de rokers’. Aan de rokers is gevraagd hoeveel sigaretten zij gemiddeld per dag hebben gerookt in de afgelopen maand. Het resultaat staat in de tabel hieronder.

GEMIDDELD AANTAL SIGARETTEN PER DAG

	aantal leerlingen
minder dan één sigaret (< 1)	364
één tot en met tien sigaretten (1 – 10)	255
meer dan tien sigaretten (> 10)	93
totaal	712

Deze tabel geeft inzicht in de verdeling van de variabele ‘gemiddeld aantal sigaretten per dag in de afgelopen maand’. Op basis van deze gegevens kun je inschatten hoe de relatieve frequentiepolygoon van deze variabele eruitziet. In de figuur staan vier schetsen van relatieve frequentiepolygoonen (a, b, c, d).



figuur 12.36

- c Welke van deze vier relatieve frequentiepolygoonen geeft de verdeling waarschijnlijk het best weer? Licht je antwoord toe.

In de tabel hieronder zijn de gegevens van de vorige tabel uitgesplitst naar geslacht.

GEMIDDELD AANTAL SIGARETTEN PER DAG

	meisjes	jongens	totaal
minder dan één sigaret (< 1)	196	168	364
één tot en met tien sigaretten (1 – 10)	111	144	255
meer dan tien sigaretten (> 10)	29	64	93
totaal	336	376	712

- d Bij welk geslacht, meisjes of jongens, is de mediaan van het gemiddeld aantal sigaretten per dag het grootst? Licht je antwoord toe.

57 2018-II

[► WERKBLAD] De Jamuna is een van de grootste rivieren van Bangladesh. In het regenseizoen kan de rivier wel bijna 12 km breed zijn. Dan stroomt het water zo snel en met zo veel kracht, dat de oevers van de rivier aangetast worden. Een deel van de oevers verdwijnt dan door het water. Zie de foto.



Op een bepaalde plaats van de Jamuna wordt gemeten hoeveel water (in m^3) daar per seconde langs stroomt. Dit noemt men de *waterdoorvoer*. Deze varieert behoorlijk: in het regenseizoen kan de waterdoorvoer wel $100\,000\text{ m}^3$ per seconde zijn, terwijl de waterdoorvoer in de droge tijd 'slechts' 3000 m^3 per seconde is.

Er is berekend hoe groot de waterdoorvoer in de maand januari van 1972 gemiddeld was. Dit werd ook gedaan voor alle andere januarimaanden in de periode 1973 tot en met 2007. Deze 36 waarden zijn samengevat met een boxplot. Deze boxplot staat in de figuur op het werkblad.

In diezelfde figuur staat ook een boxplot die hoort bij alle februari maanden in de periode 1972 tot en met 2007. En net zo voor alle andere maanden in het jaar.

Karin doet met behulp van het formuleblad de volgende uitspraak: 'Het verschil in gemiddelde waterdoorvoer tussen de julimaanden en de augustusmaanden in de periode 1972 tot en met 2007 is gering.'

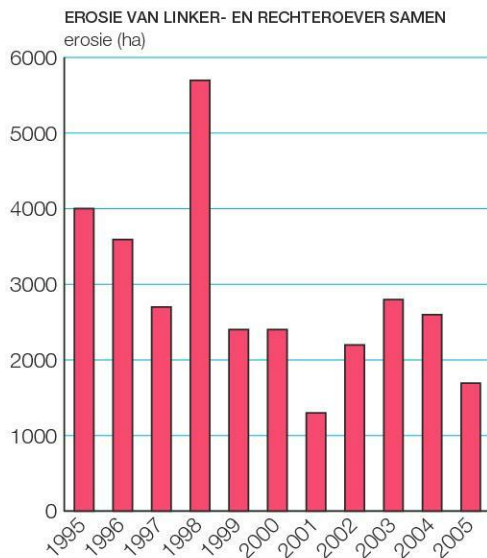
- a** Is deze uitspraak juist, onjuist, of is dat niet uit de figuur op het werkblad af te leiden? Licht je antwoord toe.

Bob doet ook een uitspraak: 'In april 1983 was de gemiddelde waterdoorvoer groter dan in februari 1983.'

- b** Is deze uitspraak juist, onjuist, of is dat niet uit de figuur op het werkblad af te leiden? Licht je antwoord toe.

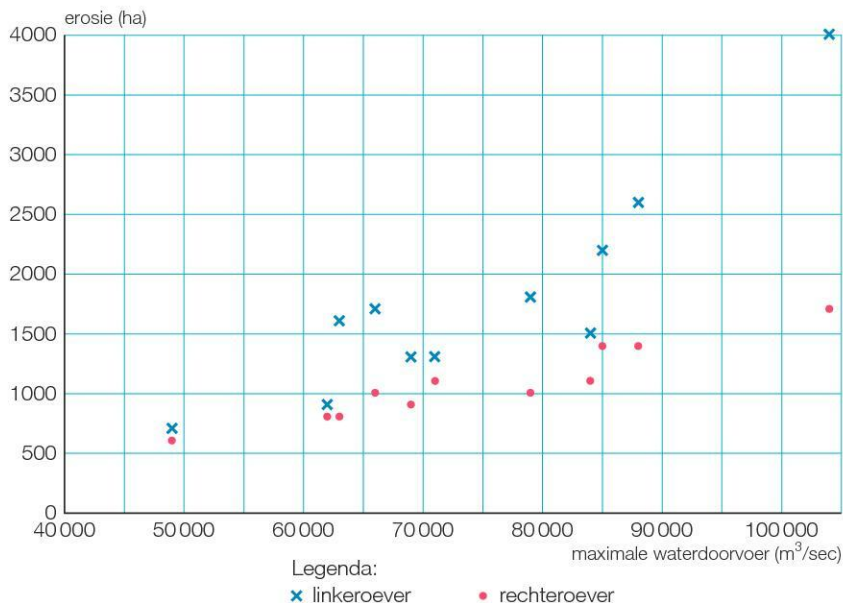
Als de waterdoorvoer erg groot is, ook al is dat maar gedurende een paar uur of een paar dagen, dan worden de oevers aangetast en verdwijnen er stukken oever in de rivier. Dit heet *erosie*.

Voor de jaren 1995 tot en met 2005 is in figuur 12.37 te zien hoeveel hectare land door erosie verdween (1 hectare (ha) = $10\,000\text{ m}^2$).



figuur 12.37

In figuur 12.38 is voor elk jaar in de periode 1995 tot en met 2005 zowel de erosie van de linkeroever als de erosie van de rechteroever in dat jaar uitgezet tegen de maximale waterdoorvoer in dat jaar. Zo kun je in figuur 12.38 bijvoorbeeld zien dat in één van die jaren 2200 ha van de linkeroever verdween, 1400 ha van de rechteroever verdween en dat de maximale waterdoorvoer 85 000 m³ per seconde was. Je kunt in figuur 12.38 echter niet zien in welk jaar dat was.



figuur 12.38

Figuur 12.37 en figuur 12.38 staan ook op het werkblad.

- c** Bepaal de maximale waterdoorvoer in het jaar 1995 met behulp van figuur 12.37 en figuur 12.38. Je kunt hierbij de figuren op het werkblad gebruiken.

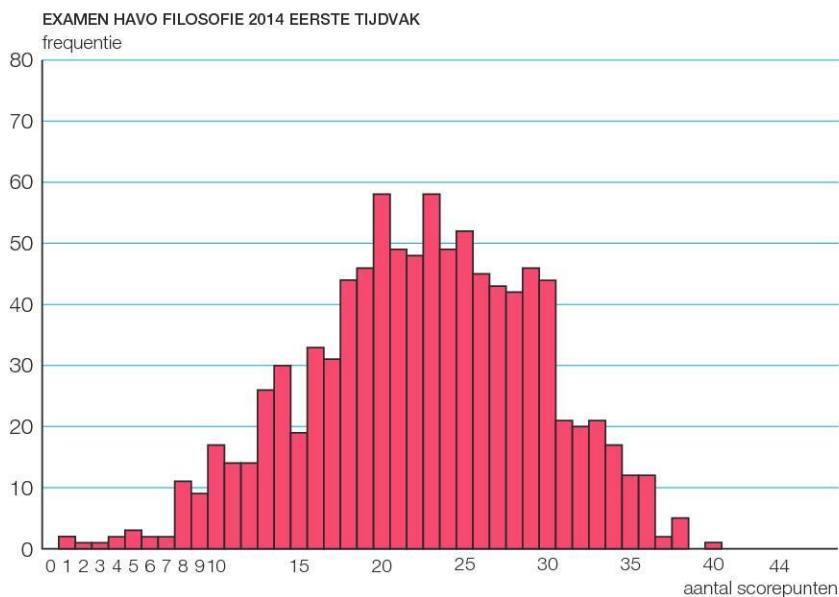
Voor de bewoners langs de Jamuna zijn de gevolgen van erosie groot. Veel mensen die een stukje grond langs de rivier hadden, hebben moeten toezien hoe hun grond door de rivier verdween. Dit trof veel mensen, doordat Bangladesh dichtbevolkt is: de bevolkingsdichtheid was aan het begin van deze eeuw 975 inwoners per km².

Een politicus wil een berekening hebben van het aantal bewoners dat in de periode 2001 tot en met 2005 het land waarop zij woonden zijn kwijtgeraakt als gevolg van erosie door de Jamuna. Gebruik bij deze berekening figuur 12.37 en neem aan dat in deze periode de bevolkingsdichtheid van 975 inwoners per km² ook geldt voor het gebied langs de Jamuna.

- d** Geef deze berekening. Rond het aantal bewoners af op duizendtallen.

[► WERKBLAD] Ieder jaar worden de resultaten van de examens door Cito geanalyseerd. In deze opgave bekijken we de resultaten van twee examens havo 2014 eerste tijdvak, namelijk het examen filosofie en het examen Engels.

Het examen filosofie werd door ongeveer 1500 kandidaten gemaakt. Cito heeft de resultaten van 950 aselect gekozen kandidaten geanalyseerd. De resultaten van de analysegroep staan in figuur 12.39 en in de tabel op het werkblad.



figuur 12.39

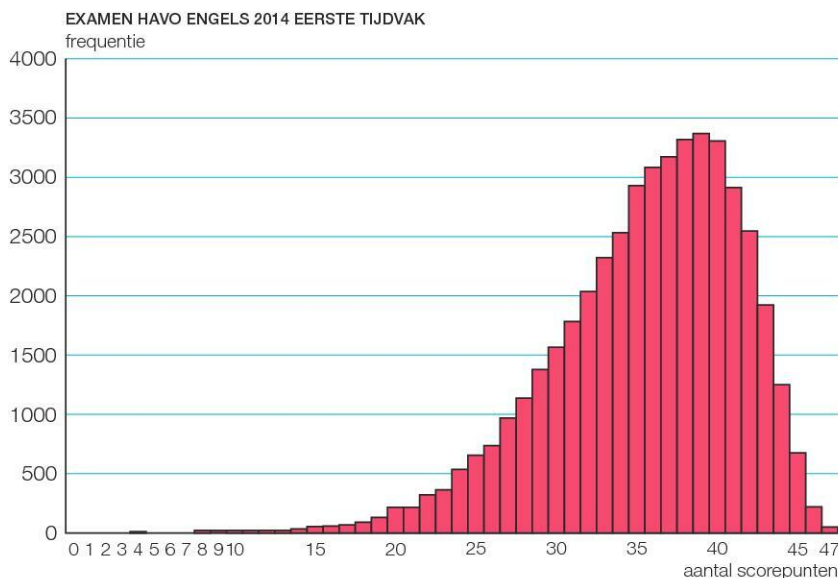
Voor het examen filosofie konden maximaal 44 scorepunten behaald worden. Zowel in de figuur als in de tabel op het werkblad kun je zien dat de twee zwakste kandidaten in de analysegroep slechts 1 scorepunt behaalden en dat de beste kandidaat 40 scorepunten behaalde.

Het examen filosofie had een gemiddelde score van 22,5 met een standaardafwijking van 6,9. We bekijken de zwakste kandidaten in de analysegroep, met een score die meer dan tweemaal de standaardafwijking lager ligt dan het gemiddelde.

Als de scores normaal verdeeld zouden zijn, zou je met behulp van een vuistregel van de normale verdeling kunnen berekenen hoeveel kandidaten met zo'n score er in de analysegroep waren. De scores zijn echter niet normaal verdeeld. Het aantal kandidaten met zo'n lage score in de analysegroep blijkt toch ongeveer gelijk te zijn aan het aantal dat je op grond van de normale verdeling zou verwachten.

a Toon dit aan.

Van het examen Engels, dat door ruim 56 000 kandidaten is gemaakt, zijn de resultaten van 45 813 kandidaten geanalyseerd. Deze resultaten staan in figuur 12.40 en ook in de tabel op het werkblad. Voor dit examen konden maximaal 47 scorepunten behaald worden. De gemiddelde score was 35,6 en de standaardafwijking 5,7.



figuur 12.40

Door gebruik te maken van figuur 12.40 en de tabel voor Engels op het werkblad kun je berekenen hoe groot het verschil is tussen de modus en de mediaan van het aantal scorepunten voor het examen Engels.

b Bereken dit verschil. Licht je werkwijze toe.

Voor het examen filosofie behaalde 22,8% van de kandidaten in de analysegroep een onvoldoende (een cijfer lager dan 5,5).

c Laat zien dat het percentage onvoldoendes voor het examen Engels iets meer dan de helft daarvan was.

d Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage kandidaten met een onvoldoende voor filosofie. Geef de grenzen in één decimaal.

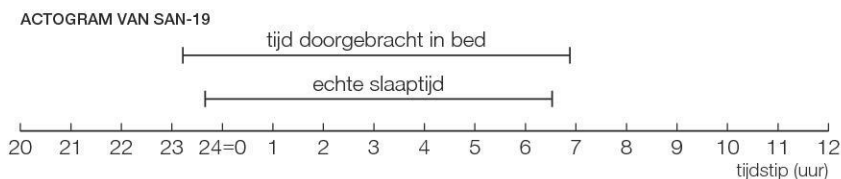
Een Cito-medewerker wil de samenhang tussen de scores van de examens filosofie en Engels onderzoeken. Zij vraagt zich af of een hoge score voor filosofie ook een hoge score voor Engels betekent.

e Welke grafische weergave is daarvoor het meest geschikt en welke extra informatie is nodig om die grafische weergave te kunnen maken?

[► WERKBLAD] In moderne samenlevingen hebben veel mensen een slaapprobleem.

Sommige onderzoekers zijn van mening dat de aanwezigheid van allerlei soorten van kunstmatig licht daarbij een rol speelt. Over de slaapgewoonten van mensen die niet beschikken over kunstmatig licht is veel minder bekend. Daarom is er slaaponderzoek verricht bij verschillende bevolkingsgroepen in Afrika. In deze opgave gaan we in op dit onderzoek bij een van die bevolkingsgroepen, namelijk de San. Verschillende leden van deze bevolkingsgroep kregen bij dit onderzoek een apparaatje om hun pols. Hiermee wordt bijgehouden op welke tijdstippen iemand naar bed gaat, in slaap valt, wakker wordt en opstaat. Het apparaatje geeft deze gegevens elke 24 uur weer in een zogenaamd actogram.

In figuur 12.41 zie je een gedeelte van een actogram van deelnemer San-19.



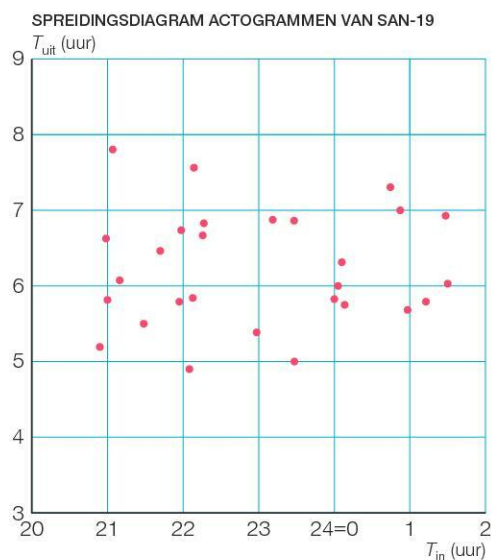
figuur 12.41

Van deze deelnemer zijn alle actogrammen van de periode 15 januari tot en met 11 februari geanalyseerd. Er is onder andere gezocht naar een verband tussen het tijdstip van naar bed gaan T_{in} en het tijdstip van opstaan T_{uit} . Daartoe zijn T_{in} en T_{uit} weergegeven in een spreidingsdiagram. Zie figuur 12.42, die ook op het werkblad staat.

- a** Geef in de figuur op het werkblad aan welk punt in het spreidingsdiagram afkomstig is van het actogram van deelnemer San-19 in figuur 12.41.

Van deelnemer San-19 is de spreidingsbreedte van T_{in} ... keer zo groot als de spreidingsbreedte van T_{uit} .

- b** Bereken welk getal er op de puntjes moet staan. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op het werkblad. Geef je antwoord in één decimaal.



figuur 12.42

Op grond van figuur 12.42 trekken de onderzoekers de volgende twee conclusies:

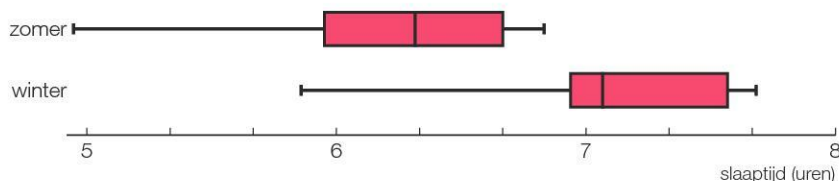
- I Er lijkt bij deelnemer San-19 geen verband te zijn tussen T_{in} en T_{uit} .
 - II De verdeling van de tijdstippen T_{in} lijkt bij deelnemer San-19 niet op een normale verdeling.
- c** Geef bij elke conclusie een geldig argument dat de onderzoekers gebruikt zouden kunnen hebben ter onderbouwing van die conclusie.

Niet alle tijd die in bed wordt doorgebracht is echte slaaptijd. Vaak is er tijd nodig om in slaap te komen of blijft iemand 's morgens nog even liggen na het wakker worden. Uit metingen bij deelnemer San-19 is gebleken dat hij om daadwerkelijk 8 uur te slapen, 9 uur in bed moet liggen.

- d** Onderzoek in hoeveel van de gemeten nachten deelnemer San-19 zich aan de stelregel 'minstens 8 uur slaap per nacht' gehouden heeft. Gebruik de figuur op het werkblad.

Het onderzoek is eenmaal in de zomer en eenmaal in de winter uitgevoerd.

Van elke deelnemer aan het onderzoek is zowel van de zomerperiode als van de winterperiode de gemiddelde echte slaaptijd berekend. Deze gemiddelde slaaptijden van alle deelnemers zijn weergegeven in twee boxplots. Zie figuur 12.43.



figuur 12.43

De onderzoekers trekken op basis van dit onderzoek de volgende twee conclusies:

- I Bij de deelnemers aan het onderzoek is het verschil tussen de echte slaaptijd in de zomerperiode en de slaaptijd in de winterperiode groot.
 - II Bij de deelnemers aan het onderzoek is de slaaptijd in de zomer gemiddeld 53 minuten korter dan de slaaptijd in de winter.
- e** Leg bij elk van deze twee conclusies uit of je die wel of niet kunt trekken op grond van figuur 12.43. Gebruik waar mogelijk een vuistregel van het formuleblad.

12.6 Onderzoeksopgaven

De laatste opgave van het centraal examen is een zogenaamde onderzoeksopgave. In een onderzoeksopgave wordt allerlei informatie gegeven die je moet combineren. Er wordt slechts één vraag gesteld die meestal begint met ‘Onderzoek ...’

Het is de bedoeling dat je zelf de nodige tussenstappen bedenkt.

Ook als je het eindantwoord niet kunt vinden, is het toch verstandig zoveel mogelijk tussenstappen op te schrijven. Ook dat kan nog veel punten opleveren.

60 2018-I

De (ecologische) voetafdruk is de hoeveelheid aardoppervlak die iemand jaarlijks nodig heeft vanwege zijn manier van leven. Zo heeft iemand die veel consumeert een grotere voetafdruk dan iemand die weinig consumeert. Deze voetafdruk wordt uitgedrukt in mha (mondiale hectares), waarbij mha staat voor een hectare aardoppervlak die gebruikt kan worden voor onder andere landbouw, visserij of industrie.

Als de totale voetafdruk van alle mensen op de wereld 10 miljard mha (of minder) is, dan heeft de aarde voldoende mogelijkheid om zichzelf te herstellen. Is de totale voetafdruk meer dan 10 miljard mha, dan zal de aarde op den duur uitgeput raken.

Al sinds lange tijd neemt zowel de wereldbevolking als de totale voetafdruk toe. In 1974 kwam de totale voetafdruk al boven de genoemde grens van 10 miljard mha uit.

In 2010 bestond de wereldbevolking uit 6,9 miljard mensen en was de gemiddelde voetafdruk per persoon 2,85 mha. De totale voetafdruk in 2010 was dus $6,9 \text{ miljard} \times 2,85 \approx 19,7 \text{ miljard mha}$.

Vanaf 2010 zijn er maatregelen getroffen om ervoor te zorgen dat de totale voetafdruk op termijn weer onder de 10 miljard mha komt.

We doen de volgende aannames voor de periode 2010-2050:

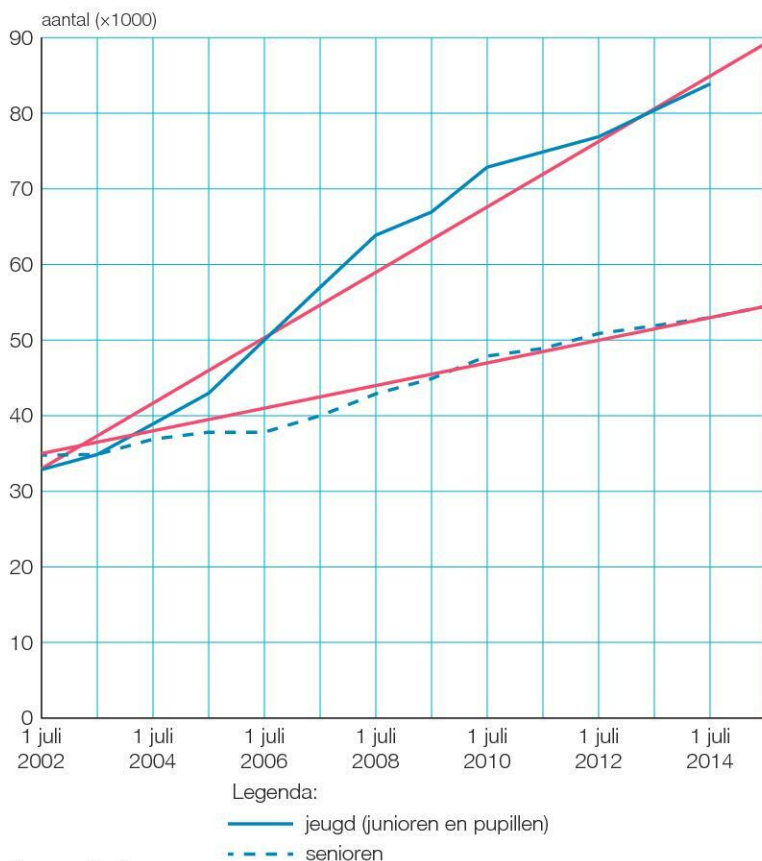
- Vanaf 2010 neemt de gemiddelde voetafdruk per persoon af met 0,11 mha per jaar, totdat een gemiddelde voetafdruk per persoon van 1,20 mha bereikt is. De jaren daarna blijft de gemiddelde voetafdruk per persoon 1,20 mha.
- De wereldbevolking neemt elk jaar toe met 0,7%.

De gemiddelde voetafdruk neemt dus af (tot 1,20 mha), maar de wereldbevolking neemt toe. Het is daarom de vraag of de genomen maatregelen voldoende zijn om de totale voetafdruk te laten dalen tot onder de 10 miljard mha. Dit blijkt een aantal jaren het geval te zijn, maar na verloop van tijd komt de totale voetafdruk toch weer boven de 10 miljard mha.

Onderzoek in welke jaren in de periode 2010-2050 de totale voetafdruk minder dan 10 miljard mha is.

61 2016-I

Vrouwenvoetbal is in. Steeds meer vrouwen en meisjes in Nederland zijn lid van een voetbalclub. In de figuur zie je de ontwikkeling van het aantal vrouwelijke leden van voetbalclubs in de periode 2002 tot en met 2014, telkens gemeten op 1 juli van het betreffende jaar. In de figuur is onder andere te zien dat zowel bij de jeugd als bij de senioren het aantal leden toeneemt. Omdat het aantal leden bij de jeugd sneller groeit dan bij de senioren, wordt het percentage senioren bij de voetbalsters steeds lager. In 2002 was nog iets meer dan 50% van de voetbalsters senior, in 2014 was dat percentage geslonken tot minder dan 40%.



figuur 12.44

De ontwikkeling van zowel het aantal leden bij de jeugd als bij de senioren is te benaderen door een lineair verband. De bijbehorende lijnen zijn in de figuur met rood getekend. We gaan ervan uit dat de aantallen leden van de beide groepen zich volgens de getekende lijnen zullen blijven ontwikkelen. Het percentage senioren zal dan nog verder afnemen.

In een bepaald jaar zal op 1 juli het percentage senioren voor het eerst lager zijn dan 35% van het totaal aantal leden.

Onderzoek in welk jaar dat is.

62 2016-II

Tegenwoordig zie je vaak Quick Responsecodes, oftewel QR-codes. Door zo'n QR-code met je mobiele telefoon te 'lezen' krijg je informatie over een bepaald product of word je doorgeschakeld naar een website.

Een QR-code is een vierkante figuur die is opgebouwd uit kleine zwarte en witte hokjes, zie figuur 12.45a.

In drie hoeken van een QR-code zijn er hokjes volgens een vast patroon ingekleurd. De overgebleven hokjes van een QR-code zijn zwart of wit gekleurd afhankelijk van de informatie die de QR-code moet bevatten.

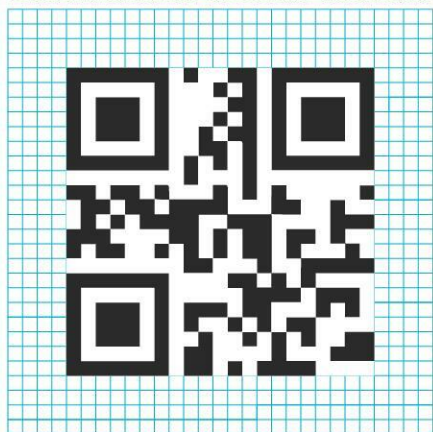
De QR-code in figuur 12.45a bestaat uit 441 hokjes, oftewel uit 21 bij 21 hokjes. QR-codes van dit formaat zijn de kleinste die bestaan en krijgen daarom versienummer 1. Er zijn ook QR-codes met een hoger versienummer. De grootste QR-codes bestaan uit 177 bij 177 hokjes en het bijbehorende versienummer is dan 40. Het verband tussen het aantal hokjes op de onderste regel van een QR-code en het versienummer is lineair. De totale ruimte die nodig is om een QR-code weer te geven, wordt niet alleen bepaald door het versienummer. Het wordt aangeraden om rondom elke QR-code voldoende witruimte te hebben. We gaan ervan uit dat rondom elke QR-code een witte rand gebruikt wordt van 4 hokjes breed, ongeacht het versienummer. In figuur 12.45b zie je hoe dat eruitziet bij een QR-code met versienummer 1 en in figuur 12.46 bij een QR-code met versienummer 2. Voor de duidelijkheid zijn de hokjes van de witte rand getekend.

QR-CODE



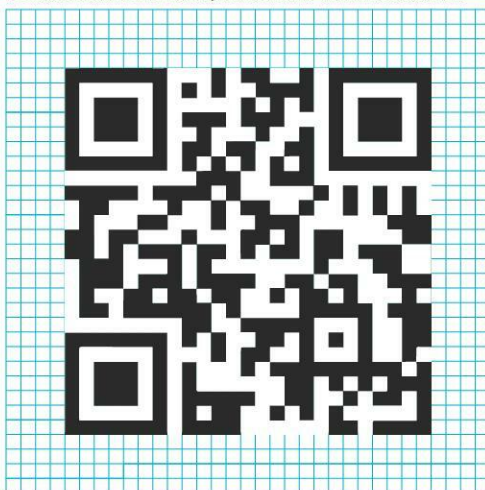
figuur 12.45a

TOTALE RUIMTE BIJ EEN QR-CODE MET VERSIENUMMER 1



figuur 12.45b

TOTALE RUIMTE BIJ EEN QR-CODE MET VERSIENUMMER 2

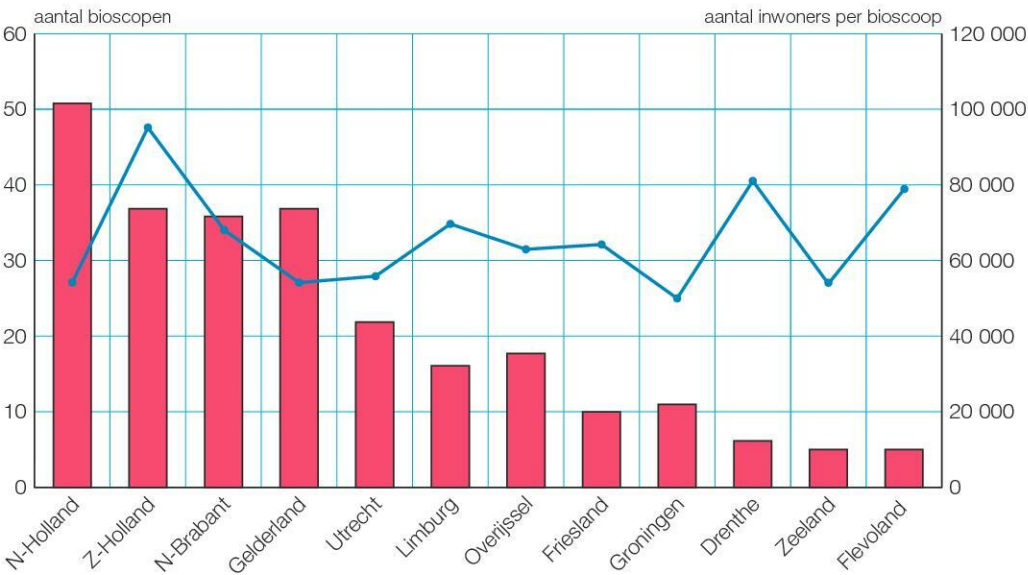


figuur 12.46

Een deel van de totale benodigde ruimte wordt dus in beslag genomen door de witte rand. Bij een QR-code met versienummer 1, zoals in figuur 12.45b, is dat deel ongeveer gelijk aan 48%. Bij een QR-code met versienummer 2, zoals in figuur 12.46, is dat deel ongeveer 43%. Hoe groter het versienummer, des te kleiner is het percentage. Bereken hoe groot dat percentage is bij een QR-code met versienummer 25.

63 2017-I

In de figuur staan gegevens over bioscopen in Nederland in 2012.



figuur 12.47

Het staafdiagram geeft het aantal bioscopen per provincie weer (linker verticale as). Het lijndiagram toont het aantal inwoners per bioscoop uitgesplitst per provincie (rechter verticale as).

In de tabel staat per provincie het aantal bioscoopbezoeken in 2012.

provincie	bezoeken	provincie	bezoeken	provincie	bezoeken
N-Holland	7 532 000	Utrecht	2 009 000	Friesland	625 000
Z-Holland	7 298 000	Overijssel	1 663 000	Flevoland	525 000
N-Brabant	4 366 000	Limburg	1 662 000	Drenthe	519 000
Gelderland	2 695 000	Groningen	1 180 000	Zeeland	486 000

Kees beweert: ‘In de provincie met de meeste bioscopen per inwoner is het gemiddeld aantal bioscoopbezoeken per inwoner meer dan 2.’ Onderzoek over welke provincie Kees het heeft en bereken voor deze provincie of hij gelijk heeft.

64 2017-II

Steeds meer mensen kopen zonnepanelen omdat ze willen besparen op hun energiekosten. De energie die opgewekt wordt door zonnepanelen is namelijk gratis.

In de linker tabel staat hoeveel energie een huishouden jaarlijks gemiddeld verbruikt. De prijzen van zonnepanelen inclusief installatie en onderhoud staan in de rechter tabel.

aantal personen per huishouden	gemiddeld energieverbruik per jaar in kilowattuur (kWh)	aantal zonnepanelen	prijs inclusief installatie en onderhoud (euro)
1	2300	16	7600
2	3400	17	7975
3	4100	18	8350
4	4620	19	8725
5	5300	20	9100
6	5400	21	9650
		22	10 200
		23	10 700
		24	11 200
		25	11 700

**Zonnepanelen
binnen 10 jaar
terugverdiend!**



SolarXL, een bedrijf dat zonnepanelen verkoopt en de prijzen uit de rechter tabel hanteert, adverteert in het jaar 2017 met de slogan hierboven.

Het huishouden van de familie Jaspers bestaat in totaal uit vier personen en heeft elk jaar een gemiddeld energieverbruik voor een huishouden van vier personen. Meneer Jaspers overweegt in het jaar 2017 om zonnepanelen aan te schaffen en die vanaf 1 januari 2018 te gebruiken. Er zullen dan zo min mogelijk, maar voldoende zonnepanelen aangeschaft worden zodat alle benodigde energie door de panelen geleverd kan worden. Meneer Jaspers vraagt zich af of de slogan van SolarXL voor zijn gezin klopt. Om dat te berekenen, doet hij de volgende aannames:

- Elk zonnepaneel levert jaarlijks 210 kWh energie op.
- De prijs van energie per kWh in het jaar 2017 bedraagt €0,22 (voor huishoudens zonder zonnepanelen).
- De prijs van energie per kWh zal jaarlijks met €0,003 toenemen.
- Er wordt geen winst gemaakt op het geldbedrag dat bespaard zou worden door geen zonnepanelen te kopen: het wordt dus bijvoorbeeld niet op een spaarrekening gezet.

Onderzoek of de slogan klopt voor de situatie van dit gezin, uitgaande van bovenstaande aannames.

65 2018-II

Een overboeking van een vliegtuig ontstaat doordat voor een vlucht meer tickets worden verkocht dan er zitplaatsen zijn. Sommige vliegmaatschappijen kiezen hiervoor, omdat telkens weer blijkt dat niet iedereen die een vliegticket heeft gekocht komt opdagen. Door meer tickets te verkopen willen de vliegmaatschappijen hun winst vergroten. Een vliegmaatschappij rekent er dus bij overboeking op dat sommige passagiers niet komen opdagen. Als vrijwel alle passagiers wel komen opdagen, zijn er te weinig zitplaatsen. In dat geval kunnen één of meer passagiers niet mee. De vliegmaatschappij lost dit op door aan deze passagiers een vergoeding te geven.

De vliegmaatschappij Aircrown vliegt in de Verenigde Staten dagelijks op de route Minneapolis – Chicago. Het vliegtuig waarmee gevlogen wordt, heeft 198 stoelen. De tickets op deze vlucht kosten \$ 78 (78 dollar). Een risicoanalist heeft twee situaties onderzocht: de situatie zonder overboeking en de situatie met overboeking van het vliegtuig.

Zonder overboeking van het vliegtuig

198 mensen kopen een ticket. Allen kunnen mee met het vliegtuig en wie niet komt opdagen is zijn geld kwijt.

Met overboeking van het vliegtuig

Aircrown verkoopt geen 198, maar 210 tickets per vlucht. Iedere passagier die niet komt opdagen, is zijn geld kwijt. Iedere passagier die wel komt opdagen en voor wie er geen stoel meer is, krijgt zijn \$ 78 niet terug, maar krijgt wel een vergoeding van \$ 250. Dit zijn de enige extra kosten die Aircrown maakt door het verkopen van de extra tickets.

Aircrown heeft van 300 vluchten waarvan de 210 tickets allemaal verkocht zijn, bijgehouden hoeveel passagiers er zijn komen opdagen. Zie de tabel. Met deze gegevens kun je berekenen hoeveel dollar de vliegmaatschappij aan vergoedingen heeft moet betalen.

aantal passagiers dat komt opdagen	195 of minder	196	197	198	199	200	201	202	203	204 of meer
aantal vluchten	234	22	17	11	8	4	2	1	1	0

De risicoanalist van de vliegmaatschappij wil met bovenstaande gegevens berekenen wat overboeking oplevert aan extra winst in vergelijking met de situatie zonder overboeking.

Hij kijkt hiervoor naar de gemiddelde winst *per stoel* per vlucht.

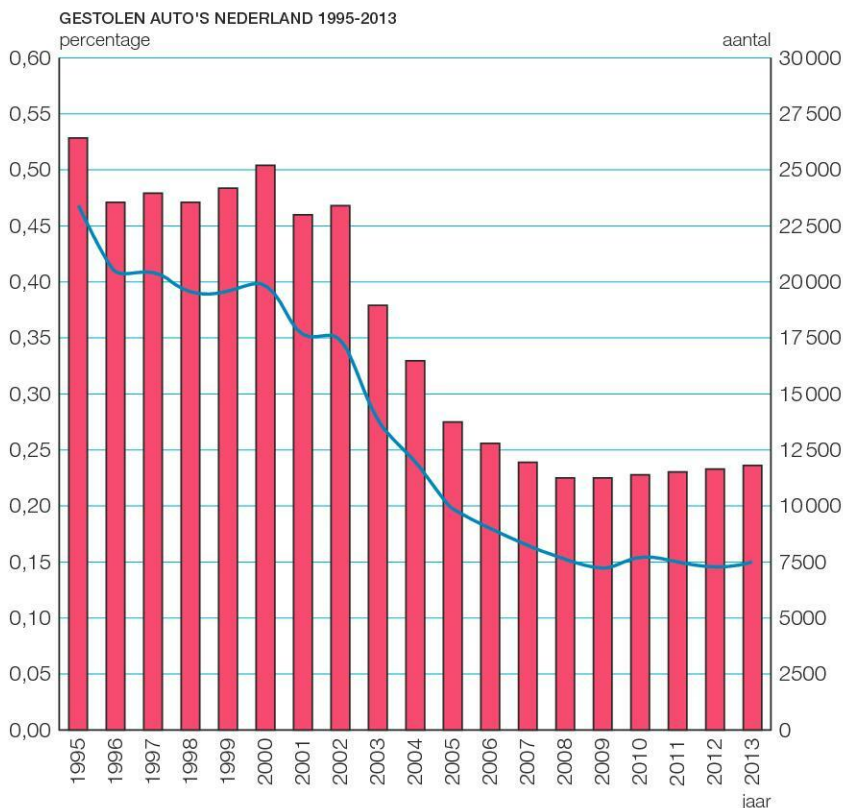
In de situatie zonder overboeking is de gemiddelde winst per stoel per vlucht gelijk aan \$ 11,25.

Volgens de risicoanalist is de gemiddelde winst per stoel per vlucht in de situatie met overboeking minstens 25% hoger dan in de situatie zonder overboeking.

Onderzoek of de risicoanalist gelijk heeft.

66 2019-I

Elk jaar wordt een percentage van de auto's in Nederland gestolen. Dit percentage is aan het begin van deze eeuw flink gedaald. In de figuur is voor de jaren 1995 tot en met 2013 zowel het percentage gestolen personenauto's (kromme) als het aantal gestolen personenauto's (staafdiagram) weergegeven.



figuur 12.48

In de figuur is te zien dat in de laatste weergegeven jaren het percentage gestolen personenauto's ongeveer gelijk aan 0,15% bleef.

Ook als dit de volgende jaren zo zou blijven, dan nog neemt het aantal gestolen personenauto's toe, omdat het aantal personenauto's in Nederland toeneemt. In de tabel is voor een aantal jaren het aantal personenauto's in Nederland weergegeven.

jaar	2001	2004	2007	2010	2013
aantal personenauto's in Nederland (in miljoenen)	6,55	6,90	7,24	7,59	7,93

Uit de tabel is af te leiden dat het aantal personenauto's bij benadering lineair toeneemt. Neem aan dat de komende jaren het percentage gestolen personenauto's blijft zoals in 2013 en dat het aantal personenauto's lineair blijft toenemen zoals in de tabel.

Bereken in welk jaar er voor het eerst weer meer personenauto's gestolen zullen worden dan in 2005.

67 2019-II

In 2016 telde Nederland ongeveer 8,1 miljoen personenauto's. De meeste personenauto's rijden op benzine of diesel. Het aantal personenauto's dat op lpg (gas) rijdt, neemt de laatste jaren af. Elektrische en hybride personenauto's¹⁾ nemen juist toe in aantal. Hun gezamenlijk aandeel was in 2016 met ongeveer 2,6% nog betrekkelijk klein.

Uit het rapport 'Maak elektrisch rijden groot: acht acties voor doorbraak bij particulieren' kan worden afgeleid dat er een ambitie bestaat om het gezamenlijk aandeel elektrische en hybride personenauto's in 2020 op ten minste 5,2% te krijgen.

Om de ontwikkelingen in kaart te brengen, is onderstaande tabel beschikbaar. Hierin staat informatie over het aantal personenauto's in Nederland.

AANTAL PERSONENAUTO'S (× 1000)

type	2012	2016
benzine of diesel	7482	7725
lpg (gas)	203	165
elektrisch en hybride gezamenlijk	70	211
totaal	7755	8101

We nemen aan dat in de periode 2012-2016 gold:

- 1 het aantal personenauto's dat op benzine of diesel reed, nam jaarlijks met hetzelfde aantal toe;
- 2 het aantal personenauto's dat op lpg (gas) reed, nam jaarlijks met hetzelfde aantal af;
- 3 het gezamenlijk aantal elektrische en hybride personenauto's nam jaarlijks met hetzelfde percentage toe.

Het is de vraag of de hierboven genoemde ambitie gehaald wordt als de groei bij elk van de drie bovenstaande punten zich na 2016 op dezelfde wijze blijft voortzetten.

Onderzoek, gebruikmakend van bovenstaande gegevens en aannames, of het gezamenlijk aandeel elektrische en hybride personenauto's in 2020 ten minste 5,2% zal zijn.

noot 1 Elektrische auto's rijden volledig op een elektromotor, hybrides hebben zowel een elektromotor als een verbrandingsmotor.

Gemengde opgaven

9 Exponentiële verbanden

- 1** a Schrijf de formule $N = \frac{1750}{121 \cdot 1,8^t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b en g af op twee decimalen.
- b Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 4,5% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- c Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 15 uur en 45 minuten.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per uur afneemt.
- d Een hoeveelheid neemt per 10 uur met 3,5% toe.
Hoeveel procent is de toename per dag?
- e Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. Op $t = 4$ is $N = 5000$ en op $t = 6,5$ is $N = 6000$. Hierbij is t de tijd in uren.
Stel de formule op van N . Rond de beginhoeveelheid af op honderdtallen.
- f Beredeneer bij de formule $N = \frac{2850}{25 + 6 \cdot 0,95^t}$ wat het verzadigingsniveau is.
- 2** a Toon aan dat de grafiek van $N = \frac{581}{55 \cdot 0,95^t}$ toenemend stijgend is.
- b Een hoeveelheid verdubbelt elke twaalf en een half jaar.
Bereken het groeipercentage per jaar.
- c Een hoeveelheid neemt elke drie weken met 40% af.
Bereken de halveringstijd. Geef het antwoord in dagen en rond af op één decimaal.
- d Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Tussen $t = 5$ en $t = 15$ is de hoeveelheid gehalveerd tot $N = 2800$. Hierbij is t in dagen.
Stel de formule op van N . Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.
- e Gegeven is de formule $N = 512(3 \cdot 1,06^t - 2)$.
Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.
- 3** Bij de groei van het aantal inwoners van een stad hoort de formule $N = \frac{65\,000}{1 + 2,5 \cdot 0,92^t}$. Hierin is N het aantal inwoners en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1960.
- a Met hoeveel is het aantal inwoners toegenomen tussen 1 januari 1960 en 1 januari 1970? En met hoeveel tussen 1 januari 1970 en 1 januari 1980?
- b Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.
- c Beredeneer wat de grenswaarde is.
- d Zal het aantal inwoners vanaf 2020 nog flink toenemen? Licht toe.
- e In welke maand van welk jaar waren er 50 000 inwoners?

- 4** De Europese Unie maakt regels voor vissers om visstanden op peil te houden. Het aantal woorden W waarin deze regels worden opgeschreven, groeit exponentieel. In 1983 waren er 3500 woorden nodig om de visregels op te schrijven. In 2013 waren dat er 21 000.



- Bereken de procentuele toename per tien jaar van het aantal woorden W van de Europese visregels.
- Stel de formule op van W . Neem t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1970. Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.
- Hoeveel woorden telden de visregels in 1992? Rond je antwoord af op honderdtallen.
- Bereken de verdubbelingstijd van het aantal woorden van de visregels. Rond af op gehele jaren.
- Dit wiskundeboek bevat ongeveer 60 000 woorden. Bereken met behulp van de formule in welk jaar de visregels van de EU uit evenveel woorden bestaan.

- 5** In de onderstaande tabel staat het totale aantal sterfgevallen ten gevolge van covid-19 voor drie landen in 2020. Je ziet dat er in België tot en met 28 maart in totaal 353 personen zijn overleden.

	22 maart	23 maart	24 maart	25 maart	26 maart	27 maart	28 maart
België	75	88	122	178	220	289	353
Ecuador	14	18	27	28	34	36	48
Italië	5476	6077	6820	7503	8215	9134	10023

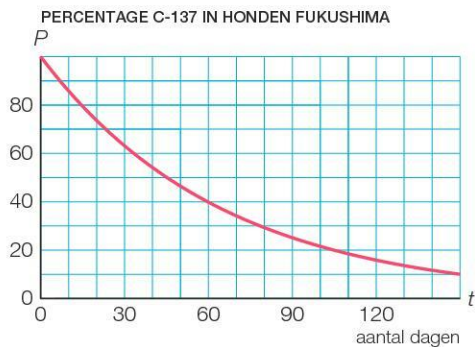
In één van deze drie landen is er in deze periode bij benadering sprake van exponentiële groei van het totale aantal sterfgevallen door covid-19.

- Onderzoek welk land dat is.
- Bereken hoeveel dagen na 28 maart in dit land het totale aantal sterfgevallen boven een miljoen zou uitkomen, als de exponentiële groei zou doorzetten.

- 6** Vanaf 1 januari 2013 is het aantal vissen in ‘Vijvers de Beukenhorst’ bijgehouden. Het aantal vissen blijkt exponentieel af te nemen. In de periode van 1 januari 2016 tot 1 januari 2019 was de afname maar liefst 73%. Op 1 januari 2020 waren er nog maar 100 vissen.

- Stel de formule op van het aantal vissen N . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2013. Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.
- Bereken het aantal vissen in ‘Vijvers de Beukenhorst’ op 1 juli 2017 en op 1 november 2014.
- Bereken in maanden nauwkeurig de halveringstijd van het aantal vissen.
- Bereken in welke maand van welk jaar er voor het eerst minder dan 500 vissen in ‘Vijvers de Beukenhorst’ waren.

- 7** Op 11 maart 2011 vond een kernramp plaats bij de Japanse stad Fukushima. Er werden daarbij radioactieve deeltjes de lucht in geblazen, waaronder cesium-137. Onderzoekers hebben gedurende 150 dagen gemeten hoeveel van deze deeltjes aanwezig waren bij honden uit het besmette gebied. De hoeveelheid cesium-137 bij de eerste meting is hierbij gelijkgesteld aan 100%. In figuur G.1 is het percentage P van cesium-137 uitgezet tegen het aantal dagen t .



figuur G.1

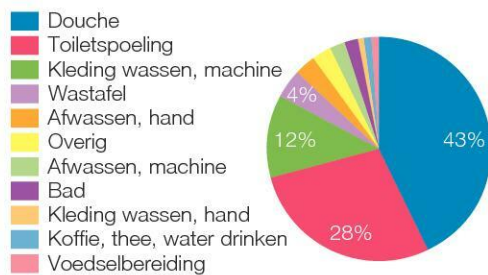
Ga uit van een exponentiële afname.

- Stel de formule op van P .
- Hoeveel procent cesium-137 was er na 200 dagen over?
- Bereken de halveringstijd van het percentage cesium-137. Rond af op gehele dagen.
- Na hoeveel maanden is er minder dan 1% van de beginhoeveelheid cesium-137 aanwezig in de honden?

- 8** In 1990 verbruikten Nederlanders gemiddeld 145 liter drinkwater per dag. In 2017 was dat 125 liter. Ga uit van exponentiële afname. Uit de gegevens volgt dat de hoeveelheid verbruikt drinkwater per persoon per dag elk jaar met 0,55% afneemt.

- Toon aan dat dit percentage bij benadering juist is.
- Bereken hoeveel liter drinkwater per dag een Nederlander in 2013 gemiddeld verbruikte. Rond af op gehelen.

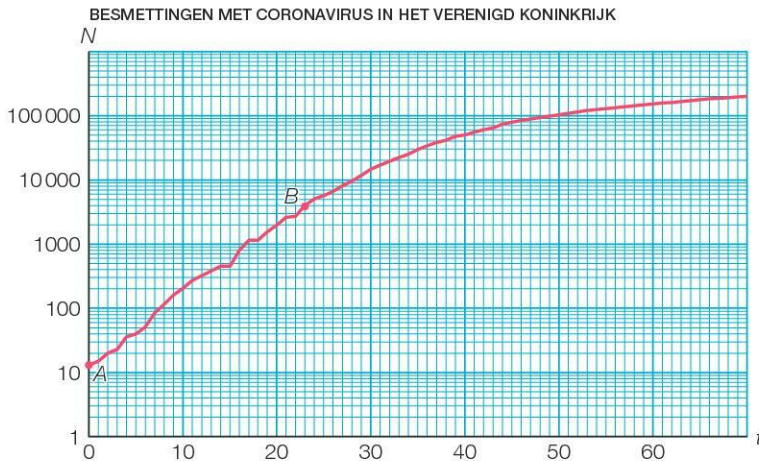
In het diagram hiernaast staan de toepassingen van drinkwater in 2013. Het waterverbruik neemt al jaren af voor de meeste toepassingen, zoals toiletspoeling en kleding wassen. Voor douchen is er echter sprake van een lineaire toename van het waterverbruik.



figuur G.2

- Stel de formule op voor het waterverbruik D voor douchen in liter per dag per persoon. Gebruik dat er in het jaar 2000 per persoon 45,9 liter per dag werd verbruikt voor douchen. Neem t de tijd in dagen met $t = 0$ in 1990. Rond in de formule af op één decimaal.
- Bereken in welk jaar voor het eerst minstens de helft van het waterverbruik van Nederlanders voor rekening komt van douchen als deze trends doorzetten.

- 9 De regering van het Verenigd Koninkrijk heeft in 2020 pas laat ingrijpende maatregelen genomen om het coronavirus in te dammen. Het aantal besmettingen met het coronavirus vanaf 26 februari 2020 is weergegeven in figuur G.3. Hierin is t de tijd in dagen met $t = 0$ op 26 februari 2020.



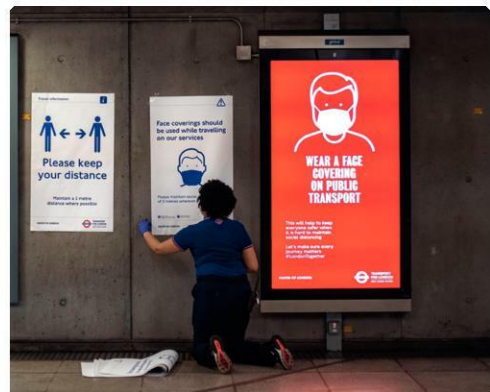
figuur G.3

Op 26 februari waren er 13 besmettingen vastgesteld. Hierbij hoort punt A . Punt B hoort bij de situatie 23 dagen later, toen er 3983 mensen besmet waren. We beschouwen het deel van de grafiek tussen A en B als een recht lijnstuk.

- Stel de formule op van het aantal besmettingen N voor de periode $t = 0$ tot en met $t = 23$.
- Bereken in hoeveel dagen het aantal besmettingen in deze periode verdubbelde. Rond af op één decimaal.

Doordat de Britse regering maatregelen nam om het virus in te dammen nam de groei van het aantal besmettingen na $t = 23$ af.

- Bepaal aan de hand van de figuur en de formule van vraag a hoeveel meer mensen besmet waren geweest 40 dagen na 26 februari 2020 als er geen maatregelen waren getroffen. Rond af op duizendtallen.



- 10** Tijdens ruimtereizen is de zwaartekracht die op het lichaam van astronauten werkt zeer gering. Als gevolg hiervan neemt de dichtheid van hun botten af. Het verloop van deze afname tijdens ruimtereizen wordt gegeven door de formule $B = 69 - 69 \cdot 0,99936^t$. Hierin is B de procentuele afname van de botdichtheid en t de tijd in dagen.



- a** Beredeneer wat de grenswaarde is.
Leg uit hoe hieruit volgt dat je altijd minstens 31% botdichtheid behoudt.

Het gevaar van botbreuken door afname van de botdichtheid wordt uitgedrukt in een T-score. Er geldt de formule

$$T = \frac{\left(\frac{100 - B}{100}\right) \cdot 0,840 - 0,858}{0,120} \quad \text{met } T \text{ de afwijking van de norm voor}$$

botdichtheid. De ruimtevaartorganisatie NASA vindt T-scores boven de -2 acceptabel.

De T-score is relevant voor lange ruimtereizen, zoals een bemande expeditie naar Mars. Voor een reis naar deze planeet zijn twee scenario's uitgewerkt: een reis van 500 dagen en een reis van 1000 dagen. Het nadeel van de reis van 500 dagen is dat deze meer energie kost en daardoor moeilijker uit te voeren is.

- b** Onderzoek voor beide scenario's of ze acceptabele T-scores opleveren.
c Bereken hoeveel dagen een astronaut in de ruimte mag zijn als zij boven de norm voor de T-score van de NASA moet blijven.
d Volgens Shadan komt de T-score nooit onder -5 .
Onderzoek of zij gelijk heeft.

- 11** De firma AcustiDemp fabriceert geluiddempende schuimplaten. Deze schuimplaten absorberen het geluid in de middenfrequenties. Het percentage van het geluid dat door een plaat dringt is afhankelijk van de dikte van de plaat. Zie de tabel.

- a** Toon aan dat er een exponentieel verband bestaat tussen de dikte van de plaat en het percentage geluid dat doordringt.
b Bereken voor een plaat met een dikte van 3,8 cm het percentage geluid dat doordringt.
c Bereken de dikte van een plaat waarbij 15% van het geluid doordringt. Rond af op gehele mm.

dikte plaat in cm	percentage geluid dat doordringt
1,5	56,1
2,5	38,1
3,5	25,9
4,5	17,6
5,5	12,0
6,5	8,2

- 12** Er wordt vaak gedacht dat de luchtkwaliteit van een ruimte sterk verbeterd door de aanwezigheid van planten.

Onderzoekers die zich met deze vraag bezighouden, gaan voor een kamer van 125 m^3 uit van de formule $N = b \cdot 0,992^{s \cdot t}$. Hierin zijn N en b de nieuwe en oude concentraties schadelijke deeltjes in ppm, is s de proportie gezuiverde lucht per m^3 per uur per plant en t de tijd in uren.

Voor $s = 0,25$ is de formule te herschrijven tot $N = b \cdot 0,998^t$.

- a** Toon dit aan.
- b** Toon aan dat de halveringstijd van de concentratie schadelijke deeltjes in de kamer bij een plant met $s = 0,25$ ruim 14 dagen is.

Voor een gemiddelde plant geldt $s = 0,06$.

- c** Bereken de halveringstijd van de concentratie schadelijke deeltjes in de kamer bij een gemiddelde plant. Rond af op gehele dagen.

In de kamer is de concentratie van de kankerverwekkende stof benzeen $0,8 \text{ ppm}$.

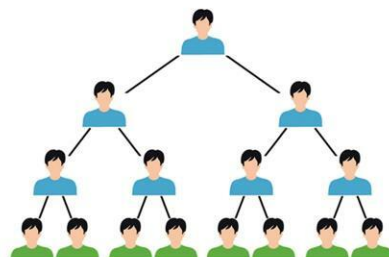
- d** Bereken na hoeveel dagen de veilige hoeveelheid van $0,2 \text{ ppm}$ wordt bereikt door een gemiddelde plant.

Om de effectiviteit van luchtzuivering door planten te bepalen wordt deze vergeleken met het zuiverende effect van doorstroom van lucht in een ruimte. Neem aan dat in huizen door doorstroom per uur gemiddeld 70% van de concentratie schadelijke deeltjes uit de lucht verdwijnt.

- e** Hoeveel keer zo lang doet een gemiddelde plant in de kamer erover om dezelfde zuivering te bereiken? Rond af op honderdtallen.
- f** Wat concludeer je over de effectiviteit van planten voor de zuivering van lucht in binnenruimtes?



- 13** Bij een piramidespel wordt geld ingelegd met de verwachting er later meer geld uit te halen. De speler die het spel begint staat bovenaan de piramide. Hij moet twee mensen vinden die mee willen doen en onder hem komen te staan in de piramide. Zij moeten elk ook weer twee mensen vinden, enzovoort. In de figuur is deze situatie weergegeven voor de eerste vier lagen.



figuur G.4

- a Hoeveel spelers bevinden zich in de 6^e laag?
- b Licht toe dat het aantal mensen in 7^e laag gelijk is aan 2^6 . Hoeveel mensen bevinden zich in de 20^e laag?

Pas vanaf de vierde laag leggen spelers geld in. Het geld van de acht spelers in de vierde laag gaat naar de speler aan de top. Het geld van de 16 spelers in de vijfde laag gaat naar de twee spelers in de tweede laag, enzovoort.

- c Hoeveel spelers hebben geld ingelegd als het spel 6 lagen diep is?
- d Hoeveel procent van de spelers verliest geld als het spel 6 lagen diep blijft?

Een probleem van piramidespelen is dat er steeds nieuwe spelers gevonden moeten worden. Het aantal volwassenen op aarde is echter beperkt. Ga er daarom van uit dat er maximaal 6 miljard mensen mee kunnen doen aan het piramidespel. Sofia berekent het aantal mensen in laag 33. Ze krijgt $2^{32} = 4\,294\,967\,296$. Volgens haar volgt hieruit dat er in een piramidespel in ieder geval minder dan 33 lagen zijn. Ze gaat er hierbij van uit dat een laag helemaal bezet is of helemaal leeg is.

- e Licht de conclusie van Sofia toe met een berekening.

Als alle volwassenen op aarde mee willen doen, dan is het maximale aantal geheel bezette lagen 32. Er zitten dan in totaal 4 294 967 295 volwassenen in de piramide.

- f Toon aan dat 87,5% van de deelnemers geld verliest als het spel stopt bij 32 bezette lagen.

In 2006 werd in Ierland een piramidespel genaamd Liberty and Speedball gestart. De deelnemers vanaf de 4^e laag in de piramide moesten 10 000 euro inleggen en zouden 80 000 euro terugkrijgen.

- g Leg uit dat dit overeenkomt met de eerder beschreven situatie bij figuur G.4.

Na een tijdje konden er geen nieuwe deelnemers gevonden worden en stortte het spel in. De politie ontdekte dat deelnemers ongeveer 18 miljoen euro hadden verloren. Conan neemt aan dat de piramide laag voor laag groeit en dat lagen helemaal bezet zijn. Hij beweert dat uit deze gegevens en aannames volgt dat het spel 11 lagen diep moet zijn geweest.

- h Onderzoek met een berekening of dit klopt.

In Nederland zijn
piramidespelen
verboden.

10 Statistiek gebruiken

- 14** Sporters die lager dan 40 punten scoren op een conditietest krijgen een serie extra conditietrainingen aangeboden. De scores van 50 sporters die de extra conditietrainingen hebben gedaan worden gebruikt om na te gaan of de extra trainingen het gewenste effect hebben. In de tabel zie je van deze sporters het gemiddelde en de standaardafwijking van de scores op de conditietest voor de trainingen en na de trainingen.

SCORE

	gem.	stand.afw.
voor	31,2	2,9
na	38,4	3,1

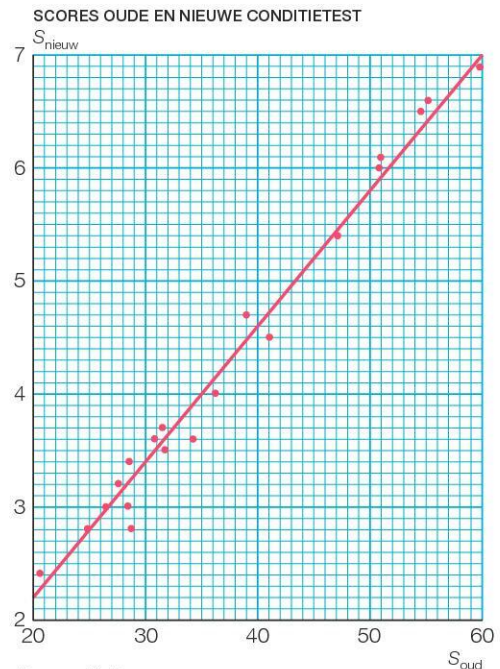
- a** Onderzoek of het verschil in scores groot, middelmatig of gering is.

Omdat de conditietest die wordt gebruikt veel tijd kost, onderzoekt coach Wim of deze test vervangen kan worden door een nieuw ontwikkelde test. Bij deze nieuwe test liggen de scores tussen 0 en 10. Wim neemt bij 20 sporters zowel de oude als de nieuwe test af. De resultaten zijn verwerkt in de figuur hiernaast. Daarin is bovendien de best passende lijn getekend.

- b** Stel de formule op van de best passende lijn.
- c** Een sporter scoort een 8,4 op de nieuwe test. Welke score verwacht je dat deze sporter bij de oude test gehaald zou hebben? Rond af op gehele.

De best passende lijn wordt gebruikt voor de omzetting van de oude scores in de nieuwe scores.

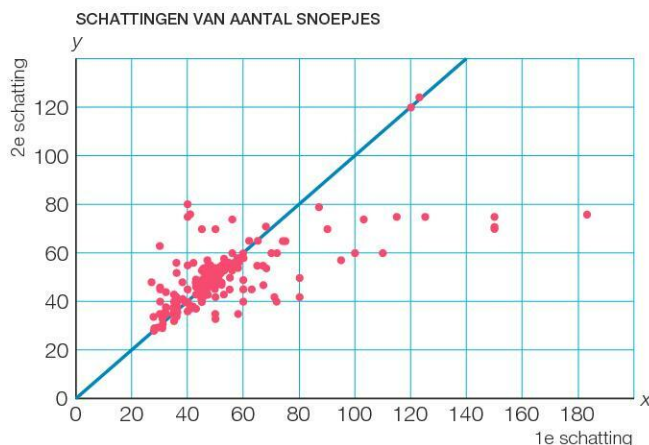
- d** Bij welke scores op de nieuwe test worden de extra conditietrainingen aangeboden?
- e** Het kan voorkomen dat een sporter bij de nieuwe test niet, maar bij de oude test wel extra trainingen krijgt aangeboden of juist andersom. Bij hoeveel van de 20 sporters uit figuur G.5 is dat het geval? Licht toe.



figuur G.5



- 15** In een experiment werd aan 14-jarige leerlingen gevraagd om het aantal snoepjes in een doorzichtige pot te schatten. De leerlingen maakten eerst zelfstandig een schatting. Daarna maakten ze na een discussie met andere leerlingen opnieuw een schatting. Zie figuur G.6. Het aantal snoepjes in de pot was 57.



figuur G.6

- a** Is de schatting van het aantal snoepjes een kwalitatieve of een kwantitatieve variabele?
- b** In de figuur is de lijn $y = x$ getekend. Geef de praktische betekenis van de punten die op deze lijn liggen.
- c** Licht toe hoe je kunt zien dat leerlingen met schattingen van meer dan 80 hun schatting bijna allemaal naar beneden hebben bijgesteld.

INFORMATIEF

Go

Lange tijd konden computers bij spellen geen serieuze tegenstand bieden aan de mens. Stapje voor stapje is hierin verandering gekomen. Al in het jaar 1952 was een computer even goed als de mens in boter-kaas-en-eieren. Maar het duurde tot 1997 voordat een computer de beste menselijke schaker ter wereld wist te verslaan. Dat komt doordat er bij schaken veel meer mogelijkheden zijn dan bij boter-kaas-en-eieren.

Het Aziatische bordspel Go heeft op zijn beurt weer veel meer mogelijkheden dan schaken. Pas in 2016 versloeg een computer Lee Sedol, de Zuid-Koreaanse wereldkampioen.



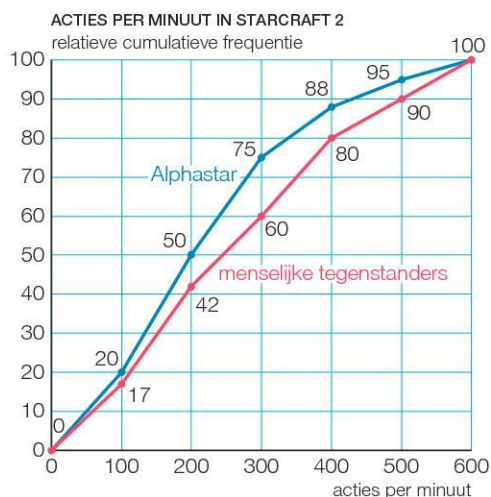
16 In 2019 nam het computerprogramma Alphastar het op tegen de beste menselijke spelers van het computerspel Starcraft 2. In dit spel moeten spelers elkaar verslaan met een leger. De eenheden van de legers kunnen vrij bewegen over een slagveld. Het aantal mogelijkheden is daardoor vele malen groter dan bij bordspellen. Het is daarom moeilijk voor programmeurs om de vele regels van een winnende strategie te schrijven. Alphastar lost dit probleem op door razendsnel heel vaak tegen zichzelf te spelen en zo zichzelf regels te leren.

De makers van Alphastar wilden hun programma van menselijke tegenstanders laten winnen door strategie en niet door snelheid. Daarom hebben ze het aantal acties dat het programma in een minuut kan uitvoeren begrensd. In figuur G.7 zie je de relatieve cumulatieve frequentiepolygonen van het aantal acties per minuut van Alphastar en zijn menselijke tegenstanders.

- a** Caroline denkt op basis van de figuur dat Alphastar per minuut meer acties uitvoert dan zijn menselijke tegenstanders, omdat de bijbehorende polygoon hoger ligt.

Leg uit of je het met haar eens bent.

- b** Bepaal met behulp van het formuleblad en de figuur of het verschil in acties per minuut tussen Alphastar en zijn menselijke tegenstanders groot, middelmatig of gering is.



figuur G.7

In het spel Starcraft 2 kunnen drie rassen gespeeld worden: Protoss, Terran en Zerg.

Elk ras heeft andere mogelijkheden.

Alphastar speelde als elk van de rassen tegen menselijke tegenstanders. Elke

wedstrijd had een winnaar. In de tabel hiernaast staat welk deel van de

wedstrijden Alphastar gewonnen heeft.

Zo zie je dat Alphastar als Protoss

14 wedstrijden heeft gespeeld tegen een menselijke speler die ook Protoss was, waarvan het er 11 won.

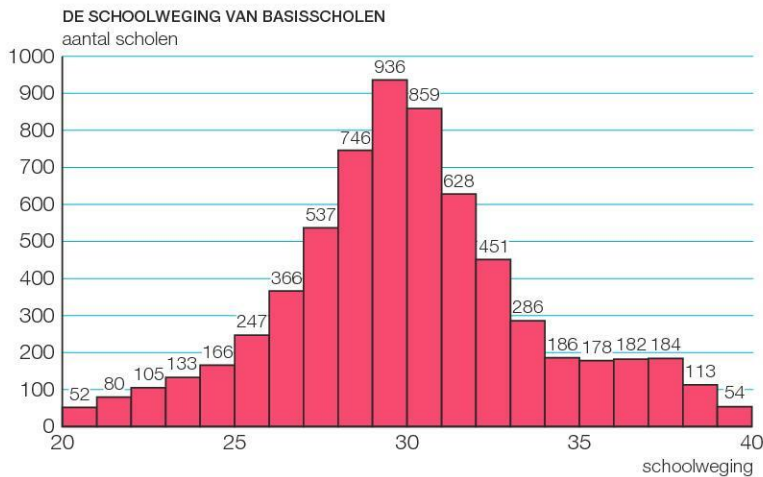
- c** Toon met een berekening aan dat Alphastar bijna twee keer zo vaak won als zijn menselijke tegenstanders.

- d** Bekijk de wedstrijden waarin Alphastar en zijn menselijke tegenstanders hetzelfde ras speelden.

Onderzoek bij deze wedstrijden met behulp van het formuleblad of het verschil in gewonnen wedstrijden groot, middelmatig of gering is.

		Menselijke tegenstanders		
		Protoss	Terran	Zerg
Alphastar	Protoss	11/14	4/4	10/12
	Terran	4/8	4/7	10/15
	Zerg	8/14	5/10	5/8

- 17** Kinderen op de basisschool hebben niet allemaal dezelfde uitgangspositie. Sommige kinderen hebben een taalachterstand, terwijl andere kinderen van hun ouders juist al veel kennis hebben meegekregen. Om op een eerlijke manier te bepalen hoeveel de kinderen leren op een school moet rekening worden gehouden met deze uitgangsposities. Met behulp van een formule worden de uitgangsposities van alle leerlingen op een school uitgedrukt in de schoolweging. Hoe hoger de schoolweging, hoe groter de achterstand van leerlingen op een school. Hieronder zie je de schoolweging van alle 6489 basisscholen in Nederland voor de periode 2016 tot en met 2019. De gemiddelde schoolweging was 30,1 en de standaardafwijking 3,7.



figuur G.8

- Licht toe waarom het geen zin heeft om bij deze gegevens een 95%-betrouwbaarheidsinterval op te stellen.
- Geef een statistische redenering waaruit blijkt dat er geen sprake is van een normale verdeling in figuur G.8.

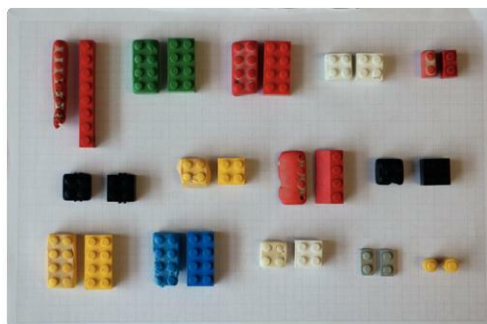
Als de schoolweging normaal verdeeld zou zijn, zou je met de vuistregels bij de normale verdeling kunnen berekenen hoeveel scholen meer dan twee standaardafwijkingen onder het gemiddelde liggen.

- Onderzoek met een berekening of dit aantal scholen kan kloppen met het histogram in figuur G.8.

Met de schoolweging W kan voor iedere school een streefniveau N worden vastgesteld dat past bij de leerlingen op de school. Dit verband wordt beschreven door de formule $N = 101,57 - 1,79W$. Hierin is N het gewenste percentage leerlingen met goede reken- en taalvaardigheid.

- Licht toe of school A met een schoolweging van 20, waarvan 62% van de leerlingen goede reken- en taalvaardigheid heeft, het vereiste streefniveau haalt. En school B met schoolweging 40 waar 32% goede reken- en taalvaardigheid heeft?

18 Om te bepalen hoelang het duurt totdat plastic is vergaan, hebben onderzoekers LEGO-blokjes verzameld die zijn aangespoeld uit de oceaan. Uit deze verzameling zijn 14 blokjes geselecteerd die allemaal 40 jaar oud zijn. Neem aan dat ze ook 40 jaar in de oceaan hebben gelegen. Bij elk van deze blokjes is vervolgens een vergelijkbaar blokje gezocht van dezelfde leeftijd, dat uit een opslagruimte komt. In de figuur hiernaast zie je deze 14 paren blokjes. Steeds komt het linker blokje uit de oceaan en het rechter blokje uit de opslag.



figuur G.9

Om het effect van de oceaan op het plastic te onderzoeken, wilden de onderzoekers de afmetingen van de blokjes gebruiken. Voor het onderste deel van een LEGO-blokje bleek dit niet mogelijk omdat de blokjes uit de oceaan sterk vervormd waren, maar het lukte wel met de noppen bovenop de blokjes. Van de blokjes uit de oceaan is de gemiddelde noppenhoogte 1,25 mm met standaardafwijking 0,39 mm. Bij die uit de opslag is het 1,80 mm met standaardafwijking 0,09 mm.

- a Onderzoek met behulp van een geschikte associatiemaat of het verschil in noppenhoogte tussen blokjes uit de oceaan en blokjes uit de opslag groot, middelmatig of gering is.
- b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde noppenhoogte van een LEGO-blokje dat 40 jaar in de oceaan ligt. Gebruik dat er 69 noppen in de steekproef zitten en dat de steekproef representatief is. Rond af op drie decimalen.

Neem verder aan dat de noppen van een nieuw LEGO-blokje 2 mm hoog zijn en dat ze in de oceaan elk jaar evenveel hoogte verliezen. Hieruit volgt dat na gemiddeld 107 jaar de noppen van de LEGO-blokjes zijn verdwenen.

- c Toon dit aan.
- d De gemiddelde levensduur van alle noppen in de oceaan kan meer of minder zijn dan 107 jaar.
Wat zou de gemiddelde levensduur van noppen in de oceaan zijn op basis van de kleinste gemiddelde noppenhoogte na 40 jaar die je met 95% betrouwbaarheid mag verwachten? En op basis van de grootste gemiddelde noppenhoogte die je op dezelfde wijze mag verwachten?

De onderzoekers willen dat de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de noppenhoogte na 40 jaar maximaal 0,1 mm is.

- e Bereken hoeveel noppen daarvoor in de steekproef moeten zitten. Gebruik $S = 0,39$.

19 [► WERKBLAD] Bij de meeste vissen wordt het geslacht van de nakomelingen bepaald door de geslachtschromosomen die zij van de ouders krijgen. Omgevingsfactoren hebben meestal geen invloed op het geslacht. Maar bij sommige vissen, evenals bij sommige reptielen, blijkt juist de temperatuur een doorslaggevende factor in het geslacht van de nakomelingen te zijn. Men onderzoekt bij welke vissoorten dit het geval is omdat de opwarming van de aarde een enorme impact kan hebben op de populaties van deze vissoorten.

Een bioloog heeft van de populaties A en B van de soort *Odontesthes argentinensis* het aantal mannetjes en het aantal vrouwtjes in een steekproef van pasgeboren vissen vastgesteld.

Beide steekproeven hebben een omvang van 300. Populatie A leeft in water met een gemiddelde temperatuur van 24 °C en populatie

B in water dat gemiddeld 27 °C is. Zie de tabel hiernaast.

		geslacht	
		M	V
populatie	A (24 °C)	118	182
	B (27 °C)	176	124

- a** Bepaal met behulp van het formuleblad of de grootte van het verschil groot, middelmatig of gering is.

Uit de tabel volgt dat voor populatie A de percentageverhouding mannetjes : vrouwtjes gelijk is aan 39 : 61.

- b** Geef de percentageverhouding mannetjes : vrouwtjes bij populatie B.

Op basis van de percentageverhoudingen besluit de bioloog nader onderzoek te doen naar de verhouding mannetjes : vrouwtjes bij verschillende watertemperaturen.

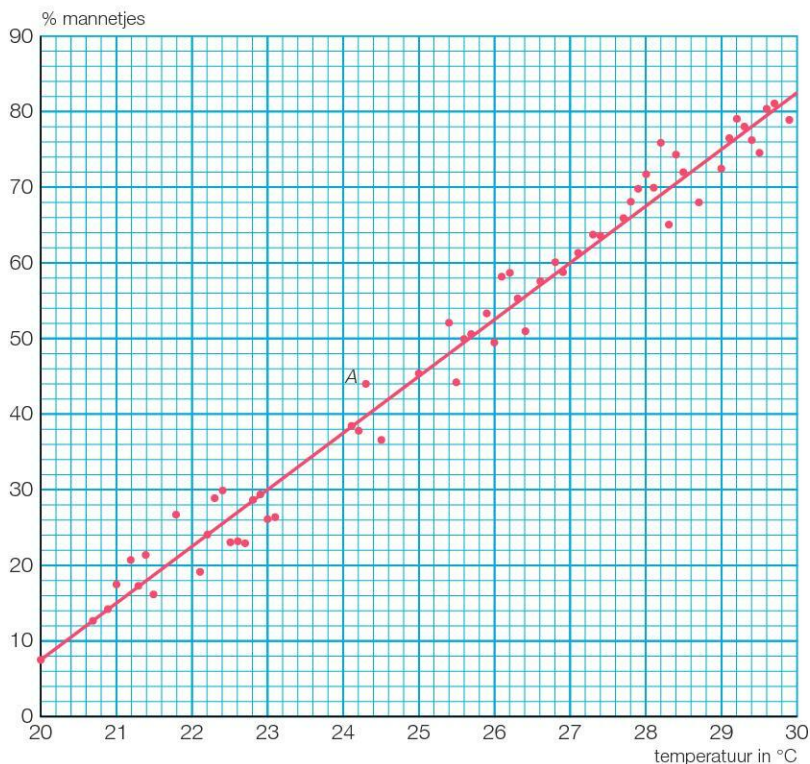
In een laboratorium wordt bij een aantal watertemperaturen de verhouding mannetjes : vrouwtjes van de nakomelingen vastgesteld. In de tabel hieronder zie je de eerste resultaten.

Op basis van eerder onderzoek naar temperatuurafhankelijke geslachtsverhouding bij vissen en de tabel hieronder, neemt de bioloog aan dat er een lineair verband bestaat tussen de temperatuur en het percentage mannetjes. Volgens haar neemt het percentage mannetjes bij elke temperatuurstijging van 1 °C toe met 6,4.

temperatuur in °C	21,6	24,4	27,2	29,7
mannetjes : vrouwtjes	24 : 76	42 : 58	60 : 40	76 : 24

- c** Laat met berekeningen zien dat de aanname van de bioloog te verdedigen is en bereken bij welke temperatuur de verhouding mannetjes : vrouwtjes naar verwachting 1 : 1 is. Rond af op één decimaal.

Van een andere vissoort waarvan de geslachtsverhouding temperatuurafhankelijk is, zijn van een flink aantal onderzoeken de resultaten samengebracht in figuur G.10. In de figuur is ook de best passende lijn getekend. Deze geeft het verband weer tussen de temperatuur en het percentage mannetjes. Figuur G.10 staat ook op het werkblad.



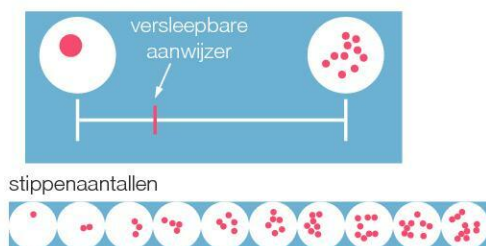
figuur G.10

- d** Stel de formule op van het verband tussen de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ en het percentage mannetjes P_m en geef ook een formule van het verband tussen T en het percentage vrouwtjes P_v .
- e** Bij een temperatuur van $24,3^{\circ}\text{C}$ is van een aselechte steekproef van 250 nakomelingen het geslacht bepaald. Het percentage mannetjes bleek 44% te zijn, zie het punt A in de figuur.
Stel hierbij een 95%-betrouwbaarheidsinterval op voor het percentage mannetjes. Valt het percentage mannetjes dat bij deze temperatuur volgt uit de formule van vraag d binnen dit interval?

Met behulp van de lijn in figuur G.10 kan men op basis van de watertemperatuur een voorspelling doen over de verhouding mannetjes : vrouwtjes bij populaties van deze vissensoort in de natuur. We gaan ervan uit dat bij elke temperatuur het percentage mannetjes normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 3%.

- f** Teken op het werkblad het gebied waarin de middelste 95% ligt van de percentages mannetjes bij elk van de temperaturen tussen 20 en 30 graden. Licht je werkwijze toe.
- g** Van een populatie in de natuur die leeft in water met een gemiddelde temperatuur van 24°C blijkt dat 8 op de 25 nakomelingen een mannetje is.
Valt deze verhouding binnen het gebied van vraag f? Licht toe.

20 Bij kwantitatieve variabelen is een belangrijke eigenschap dat verschillen even groot zijn. De afstand tussen 1 en 2 is dus hetzelfde als de afstand tussen 9 en 10. Mensen die hebben leren rekenen, vinden dit logisch: het verschil is in beide gevallen immers 1. Maar is dat ook logisch zonder kennis van rekenen? Om dat te onderzoeken hebben



figuur G.11

wetenschappers leden van de Munduruku-stam in de Amazone onderzocht. De stamleden werd gevraagd om op een lijnstuk, zoals in figuur G.11, aan te geven waar verschillende stippenaantallen horen te staan.

- a** Welk soort variabele is de positie van de aanwijzer? Geef indien mogelijk ook het meetniveau van de variabele of geef aan of deze discreet of continu is.

Ter vergelijking werd deze vraag ook voorgelegd aan inwoners van de VS. De resultaten van beide groepen staan in figuur G.12. Je ziet bijvoorbeeld dat de Munduruku het stippenaantal 2 op de positie van 3 op de getallenlijn zetten. De wetenschappers trokken de volgende twee conclusies.

- 1 Inwoners uit de VS vinden de afstand tussen 1 en 2 net zo groot als de afstand tussen 9 en 10.
- 2 Inheemse volken vinden grotere aantallen doorgaans dichter bij elkaar liggen.

Eén van deze conclusies werd later preciezer geformuleerd.

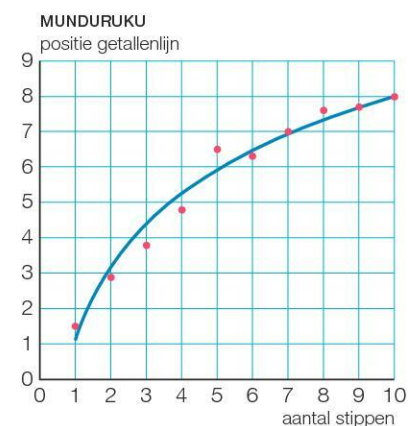
- b** Welke conclusie was dat? Licht toe en geef een suggestie voor een verbetering van de conclusie.

De onderzoekers willen een voorbeeld geven bij conclusie 2. Daartoe bekijken ze de spreidingsbreedte van de aanwijzerpositie bij de laagste 50% stippenaantallen en de hoogste 50% stippenaantallen voor beide groepen.

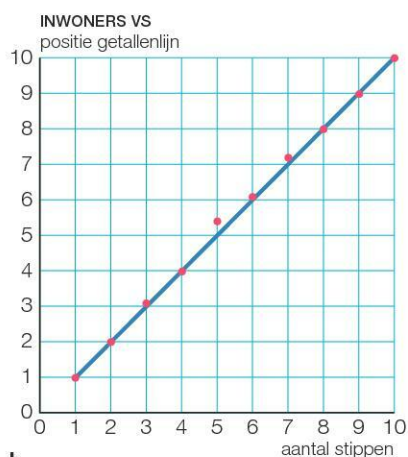
- c** Bepaal deze spreidingsbreedten.

Voor het onderzoek is een aselechte steekproef van 33 Munduruku genomen. Voor deze deelnemers is de gemiddelde positie op de getallenlijn van het stippenaantal 5 gelijk aan 6,5 met een standaardafwijking van 1,896.

- d** Toon aan dat je met minstens 95% betrouwbaarheid kunt zeggen dat de Munduruku het stippenaantal 5 niet op de positie van 5 op de getallenlijn plaatsen.



a



b

figuur G.12

- 21** Bij een onderzoek uit 2018 zijn 147 diabetespatiënten met overgewicht aselekt verdeeld over twee groepen: een actieve groep en een controlegroep. De 70 patiënten in de actieve groep werden een jaar lang intensief begeleid bij hun dieet en bij het sporten. Ze verloren daardoor gemiddeld 11,98 kg aan lichaamsgewicht met standaardafwijking 9,43 kg. De andere 77 patiënten zaten in een controlegroep en kregen de gebruikelijke zorg van het ziekenhuis. Zij verloren gemiddeld 3,98 kg lichaamsgewicht met standaardafwijking 5,26 kg.

a Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in gewichtsverlies in de twee groepen groot, middelmatig of gering is.

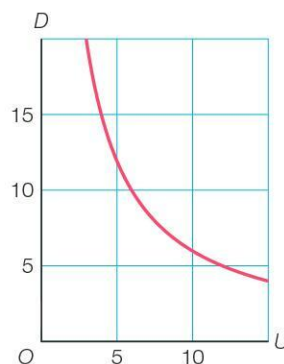
Bij de patiënten in de actieve groep was bij 43 patiënten sprake van verbetering van hun gezondheid tegenover 9 bij de controlegroep.

- b** Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil in verbetering van de gezondheid in de twee groepen groot, middelmatig of gering is.
- c** Licht toe of je op basis van de onderzoeksopzet en de resultaten mag concluderen dat intensieve begeleiding een oorzaak is van de verbetering van de gezondheid van diabetespatiënten.

11 Formules en variabelen

- 22** [**WERKBLAD**] Een hotel wil de gevel laten schilderen. Schilder Jan zegt dat dit een klus van minstens 60 uur is. Hij hanteert daarom de ongelijkheid $D \cdot U \geq 60$. Hierin is D het aantal dagen dat de klus duurt en U het aantal uur dat hij per dag aan het werk is. Verder wil Jan maximaal 8 uur per dag werken en wil het hotel graag dat de klus niet langer dan 14 werkdagen duurt.

- a** Welke andere twee ongelijkheden horen bij de situatie?
- b** Teken op het werkblad het gebied dat bij de drie ongelijkheden hoort. De grafiek van $D \cdot U = 60$ is al getekend.
- c** Laat met een berekening zien dat de klus maximaal 112 uur mag duren. Welk punt in het gebied van vraag b komt hiermee overeen?



figuur G.13

Jan rekent 20 euro per uur en 50 euro voorrijkosten per dag.

- d** Onderzoek wat de minimale kosten voor het hotel zijn als de klus 80 uur duurt.

Voor de totale kosten K in euro's geldt de formule $K = 50 \cdot D + 20 \cdot D \cdot U$.

- e** Licht dit toe.
- f** Het hotel wil dat de totale kosten maximaal 2500 euro zijn. Jan wil graag elke dag 6 uur werken. Onderzoek of dat mogelijk is als ook aan de andere voorwaarden wordt voldaan.

- 23** a Schrijf de formule $A = 5p - \frac{6}{p^2}$ als één breuk.
- b Herleid de formule $B = \frac{7q}{3q-12} \cdot (q-2) - \frac{1}{3} \cdot \frac{5q}{q-4}$ tot één breuk.
- c Toon aan dat $K = \frac{1}{3}q + 4 + \frac{5}{q}$ te schrijven is als $K = \frac{q^2 + 12q + 15}{3q}$.
- d Herleid de formule $N = \frac{2t^3}{\left(\frac{5}{3t^4}\right)} \cdot t^2$ tot de vorm $N = at^b$.
- e Druk C uit in v bij $v + 8 = \frac{2C}{4 + 2v}$.
- f Druk y uit in x bij $\frac{5y-6}{9x} = 2\frac{2}{3}$.
- 24** a Schrijf het rechterlid van de formule $N = \frac{1}{12}a \cdot \frac{(2a+3)a}{4a+4}$ als één breuk en werk de haakjes weg.
- b Schrijf het rechterlid van de formule $P = \frac{(a-5)(a+6)}{a-2} + a + 1$ als één breuk en werk de haakjes weg.
- c Maak p vrij bij de formule $Q = \frac{5}{3p+2}$.
- d Gegeven is $4 - \frac{H}{x^2+1} = 11$.
Maak H vrij.
- 25** a Gegeven is de formule $x = 3\sqrt{2y} - 8x + 3$.
Druk y uit in x .
- b Gegeven zijn de formules $F = \frac{0,1a}{2a-1} \cdot (2b+1)$ en $a = 0,25b + 2$.
Druk F uit in a , schrijf het rechterlid van de formule als één breuk en werk de haakjes weg.
- c De formules $G = \frac{k-p^2}{k^2}$ en $p = k + 2$ zijn te combineren tot een formule van de vorm $G = a + \frac{b}{k} + \frac{c}{k^2}$.
Bereken a , b en c .

- 26** Wetenschappers in de VS hebben onderzocht of krekels vaker tjirpen bij hogere temperaturen. Een tjirp is het karakteristieke geluid dat een mannetjeskrekkel maakt door zijn vleugels langs elkaar te wrijven. In de tabel zie je van krekels het aantal keer tjirpen A gedurende 15 seconden bij verschillende temperaturen T_F in graden Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$).

T_F	52	56	61	64	66	67	71	73	81
A	18	21	26	29	30	31	35	37	44

De onderzoekers vonden hierbij het model $A = 0,913T_F - 29,8$.

- Controleer of het model bij benadering klopt met de gegevens.
- Laat met een berekening zien dat een krekkel volgens het model meer dan 9000 keer per uur tjirpt bij een temperatuur van 75°F .

Leden van de scouting gebruiken de volgende methode voor het schatten van de temperatuur. Tel het aantal keren tjirpen van een krekkel gedurende 15 seconden en tel daar vervolgens 33 bij op. Het resultaat is de temperatuur in graden Fahrenheit.

- Druk T_F uit in A bij de formule $A = 0,913T_F - 29,8$ en rond hierbij af op gehele. Komt de formule van T_F overeen met de methode van de scouting?
- Het is mogelijk tussen de temperatuur in graden Celsius T_C en graden Fahrenheit T_F te wisselen door de formule $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$ te gebruiken.
Schrijf de formule van A in de vorm $A = aT_C + b$. Rond a en b af op twee decimalen.
- Om de temperatuur in graden Celsius te schatten, gebruikt de scouting de volgende methode. Tel het aantal keren tjirpen van een krekkel gedurende 9 seconden. Dat is ongeveer gelijk aan de temperatuur in graden Celsius.
Komt deze methode ongeveer overeen met de formule die je hebt gevonden in vraag d?

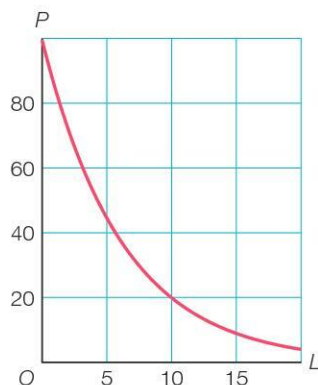
- 27**
- Gegeven zijn de formules $W = 18 - 7,5p + 2q$ en $3q - 15p = 5$.
Schrijf W in de vorm $W = aq + b$.
 - Combineer de formules $F = 3xy + 4xz + 8$, $y = 2x + 5$ en $x + z = 6$ tot de formule $F = 2x^2 + 39x + 8$.
 - Gegeven is de formule $P = \frac{2k(3l + 8)}{4 + 7m}$.
Neem $P = 6$ en $l = 4$ en herleid de formule tot de vorm $k = am + b$.
 - Schrijf de formule $G = 12 - 21 \cdot \frac{6 - 7,5h}{63}$ in de vorm $G = ah + b$.

28 De dagwaarde van een auto is het bedrag dat een verzekering zou uitkeren als de auto onherstelbaar beschadigd is (total loss). De dagwaarde is afhankelijk van de leeftijd van de auto. De grafiek hiernaast hoort bij het model dat verzekeraar A hanteert voor de dagwaarde P van een auto als percentage van de nieuwprijs. Op de horizontale as staat de leeftijd L van de auto in jaren.

- a** Boris vermoedt dat het model een omgekeerd evenredig verband is.

Licht met behulp van de grafiek toe waarom dat niet kan kloppen.

- b** Bij de grafiek hoort een exponentiële afname. Stel de formule van P op.



figuur G.14

Verzekeraar B hanteert voor een auto die tussen 3 en 15 jaar oud is een omgekeerd evenredig verband. Zie de tabel.

L	4	6	10
P	37,5%	25%	15%

- c** Stel de formule van P op van verzekeraar B.

Verzekeraar C hanteert het model $P = 95 \cdot 0,83^L + 5$.

- d** Beredeneer dat de grafiek bij dit model dalend is en beredeneer wat de grenswaarde is.

Jean heeft een auto met een nieuwprijs van 21 500 euro. Na een ongeluk is de auto total loss. De auto is dan 12 jaar oud.

- e** Onderzoek welke verzekeraar de hoogste dagwaarde zou uitkeren en bereken deze dagwaarde. Rond af op honderden euro's.

29 De verontreiniging V door uitlaatgassen op een weg hangt af van het aantal auto's A dat per minuut passeert en van de windsnelheid w in meter per seconde.

Onderzoek leverde de formule $V = -0,35Aw + 8,4A$ op, waarin V een maat is voor de verontreiniging.

- a** Op een dag meet men op de N328 een windsnelheid van 18 m/s en $V = 84$.

Hoeveel auto's passeren er per minuut?

- b** De dag ervoor passeerden 75 auto's per minuut en was $V = 160$. Wat was die dag de windsnelheid?

- c** Stel de formule op van V voor de situatie dat er 60 auto's per minuut passeren.

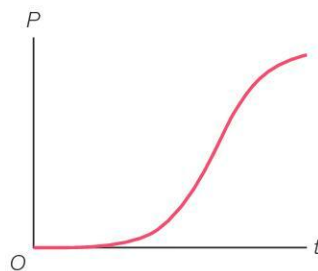
- d** Voor de situatie dat de windsnelheid 10 m/s is, is de formule te herleiden tot de vorm $A = aV$.

Bereken a . Rond af op drie decimalen.

30 In het jaar 2020 werden wereldwijd miljoenen mensen besmet met het coronavirus (SARS-CoV-2).

Wiskundigen hebben voor dit soort uitbraken vele modellen ontwikkeld.

In deze opgave bekijken we het logistische groeimodel. Dit model is geschikt om de ontwikkeling van het aantal mensen dat besmet is of ooit besmet is geweest met het virus in beeld te brengen. We gaan er hierbij van uit dat er geen maatregelen worden genomen om verspreiding van het virus tegen te gaan en dat uiteindelijk iedereen besmet zal worden.



figuur G.15

Voor het percentage van de bewoners van een dichtbevolkt gebied dat

besmet is (geweest) geldt $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}}$ met t de tijd in dagen en

$t = 0$ aan het begin van de eerste dag van de uitbraak.

- a** Hoeveel procent van de bewoners is besmet (geweest) na 10 dagen?
- b** Na hoeveel dagen is de helft van de bewoners besmet (geweest)?
- c** Beredeneer dat de grafiek van P stijgend is.

- d** Toon aan dat de formule van P te schrijven is als $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 0,812^t}$

en beredeneer met deze formule dat uiteindelijk alle bewoners besmet zullen zijn (geweest).

- e** Op 1 maart 2020 woonden in Nederland 17,4 miljoen mensen. Neem aan dat dit de eerste dag van de uitbraak was. Bereken hoeveel inwoners van Nederland besmet zouden zijn (geweest) op 25 maart 2020. Doe dat ook voor 24 april 2020. Geef je antwoorden in miljoenen en rond af op één decimaal.

- f** Joshua woont in de stad New York en wil het model graag als volgt aanpassen.

- Hij wil direct het aantal besmette personen in New York berekenen in plaats van een percentage.
- Hij wil dat de tijd in weken wordt genomen in plaats van in dagen.

Hij krijgt een model van de vorm $I = \frac{a}{1 + 1450 \cdot 2^{cw}}$ met I het aantal inwoners van New York dat besmet is (geweest) en w de tijd in weken met $w = 0$ aan het begin van de eerste week van de uitbraak. Neem aan dat New York 10 miljoen inwoners heeft.

Bereken a en c .

- 31** Volgens sommige deskundigen verhoogt niet een te hoog lichaamsgewicht, maar een te hoog vetpercentage het risico op gezondheidsproblemen. Het vetpercentage geeft aan hoeveel procent van het lichaamsgewicht uit vet bestaat.

Een model voor het vetpercentage is $P = \frac{495}{D} - 450$.

Hierbij bereken je D als volgt.

- 1 Bereken de som van de dikte van vier huidplooien. De arts Durnin heeft in 1994 vastgelegd welke huidplooien dat zijn.
- 2 Bepaal de waarde van D met behulp van de tabel. Gebruik zo nodig lineair interpoleren.
- a Bij Alex zijn de diktes van de huidplooien 32 mm, 27 mm, 26 mm en 31 mm.
Bereken het vetpercentage van Alex.
- b Annelies heeft een vetpercentage van 31,7%.
Bereken de som van de huidplooien van Annelies.
- c Joep weegt 108 kg en de som van zijn huidplooien is 110 mm. Hij slaagt er in om dat terug te brengen tot 70 mm.
Bereken hoeveel kg hij is afgevallen. Neem aan dat hij alleen vet is kwijtgeraakt.

som huidplooien in mm	D
20	1,0666
30	1,0540
40	1,0450
50	1,0381
60	1,0324
70	1,0276
80	1,0234
90	1,0198
100	1,0165
110	1,0135
120	1,0108
150	1,0039
180	0,9926

Er bestaan ook andere manieren om het vetpercentage te bepalen. Een van de meest betrouwbare is een scan laten maken, maar dit is erg duur. Lieke weegt 60 kg en heeft een scan laten maken waaruit blijkt dat ze 16,8 kg vet heeft. Dat is minder dan volgens het model, want de som van haar huidplooien is 60 mm.

- d Bereken hoeveel procent minder.

12 Examentraining

- 32** Schrijf de formule $P = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3\frac{1}{3}a} \cdot \sqrt{6b}$ in de vorm $P = c\sqrt{ab}$.
- 33** De winst van een bedrijf was 31,25 miljoen euro in 2018. In 2019 was de winst 8,5% meer dan in 2018 en in 2020 was de winst 15,3% minder dan in 2019.
Hoeveel was de winst in 2020?
- 34** Gegeven zijn de formules $G = 10m^2n - 2m$ en $m = 2n - 1$.
Schrijf de formule van G in de vorm $G = an^3 + bn^2 + cn + d$.
- 35** Voorafgaand aan een onderzoek gaat men uit van een steekproefproportie van 0,28. Men wil een steekproef nemen die zo groot is dat de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval hoogstens 0,06 is.
Bereken de minimale steekproefomvang.

- 36** Aan 242 volwassenen is de stelling ‘Roken in de auto moet worden verboden’ voorgelegd. De resultaten zie je in de tabel hiernaast. Je ziet dat er verschil is tussen de mening van de mannen en de vrouwen.

Bepaal met behulp van het formuleblad of het verschil in mening groot, middelmatig of gering is.

	stelling		
	eens	oneens	
mannen	83	41	124
vrouwen	106	12	118
	189	53	242

- 37** In een bos zijn er drie keer zoveel eiken als beuken. De verhouding aantal eiken : aantal sparren is 2 : 5. Wat is de verhouding aantal beuken : aantal sparren?
- 38** Maak b vrij bij $6a - 5b = 18$.
- 39** Tussen het verbruik van drinkwater en het bedrag B dat je jaarlijks betaalt, bestaat een lineair verband. Bij een verbruik van 120 m^3 per jaar betaal je € 172,98 per jaar en bij een verbruik van 148 m^3 betaal je € 202,66. Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat je betaalt bij een verbruik van $V \text{ m}^3$ per jaar.
- 40** Gegeven zijn de formules $N = 0,06t^{1,4}$ en $t = 200p^{0,8}$. Schrijf de formule van N in de vorm $N = ap^b$. Rond a af op gehelen.
- 41** Ronald loopt 9,8 km in 49 minuten en 40 seconden. Bereken zijn gemiddelde snelheid in km/uur. Rond af op twee decimalen.
- 42** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 7,3% toe. Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- 43** Gegeven is $2,4y = 3 - 0,6\sqrt{x-2}$. Druk x uit in y .
- 44** Gegeven is de volgende tabel.

jaar	1995	2003	2014	2020
aantal	520	840	1165	1390

- a** Bereken het aantal in 2010 met lineair interpoleren. Rond af op gehelen.
- b** Bereken het aantal in 2025 met lineair extrapoleren. Rond af op gehelen.
- c** Bereken met lineair interpoleren in welk jaar het aantal 760 was.
- 45** Werk bij $(2a - 1)^2 - 4(3a - 1)$ de haakjes weg en herleid.

- 46** Geef van de volgende variabelen aan of ze nominaal of ordinaal zijn.
- a** het merk van een T-shirt
 - b** de maat van een T-shirt
 - c** de kleur van een T-shirt

- 47** Een hoeveelheid neemt toe van 115 tot 145.
Hoeveel procent is de toename?

- 48** De lijn k gaat door het punt $A(0, 9)$ en $rc_k = -\frac{1}{3}$.
Stel de formule op van k .

LENGTE JONGENS IN CM

lengte	frequentie
[70, 72)	5
[72, 74)	13
[74, 76)	16
[76, 78)	40
[78, 80)	38
[80, 82)	25
[82, 84)	13

- 49** Van 150 jongens van 1 jaar is de lengte bepaald. Zie de frequentietabel hiernaast.
- a** Geef de modale klasse.
 - b** In welke klasse ligt de mediaan?
 - c** Welke standaardafwijking hoort bij de tabel? Kies uit 1,0 cm, 3,0 cm, 5,0 cm en 7,0 cm.
 - d** Bereken de relatieve cumulatieve frequentie van de klasse [74, 76).

- 50** Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 3$ is $N = 326$ en op $t = 11$ is $N = 77$. Hierbij is t in jaren.
Stel de formule op van N .

- 51** Een hoeveelheid wordt in drie jaar verdubbeld.
Bereken het groeipercentage per jaar in het geval er sprake is van exponentiële groei.

- 52** Schrijf bij de volgende formules het rechterlid als één wortel.

a $A = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{2\frac{1}{2}q}$

b $B = \frac{\sqrt{30xy}}{\sqrt{2y}}$

- 53** Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort.

a $N = 50 + \frac{100}{t^2 + 1}$ met $t > 0$

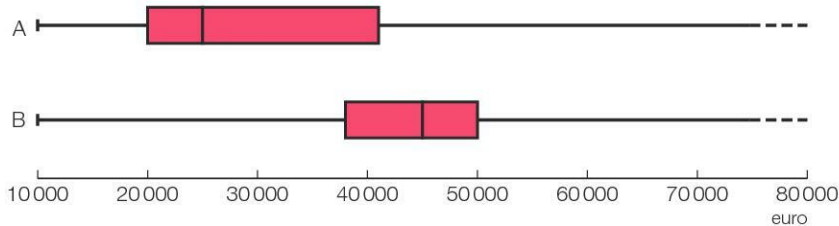
b $y = 300 - \frac{57}{x + 10}$ met $x > 0$

- 54** Gegeven is de formule $N = \frac{562}{25 \cdot 1,3^t}$.

Schrijf de formule in de vorm $N = b \cdot g^t$ waarbij je g afrondt op drie decimalen en noteer welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek van N hoort.

- 55** Teken een boxplot die bij een rechts-scheve verdeling hoort.
- 56** Voor een concert zijn de kaartjes 15 euro en 20 euro. Er zijn in totaal 705 kaartjes verkocht. De opbrengst kwam daarmee op 11 500 euro. Bereken hoeveel kaartjes van 20 euro zijn verkocht.
- 57** Gegeven zijn de formules $R = 2p - 3q + 50$ en $q = 10 - 4p$. Schrijf de formule van R in de vorm $R = aq + b$.
- 58** Op een school is de populatieproportie van het aantal leerlingen dat verder dan 3 km van school woont gelijk aan 0,36. Het blijkt namelijk dat 450 leerlingen verder dan 3 km van school wonen. Bij een steekproef van 25 leerlingen uit de havo-5 klassen blijken er 12 leerlingen verder dan 3 km van school te wonen. Bereken het totale aantal leerlingen op deze school en de steekproefproportie van het aantal leerlingen in de havo-5 klassen dat verder dan 3 km van school woont.
- 59** Bij een steekproef van 80 leaseauto's van één jaar oud is het gemiddeld aantal gereden kilometer 38 500 en de standaardafwijking 14 300 km. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het aantal gereden km bij één jaar oude leaseauto's. Rond af op honderden km.
- 60** Gegeven zijn de formules $F = \frac{50m^{0,54}}{17n^{1,4}}$ en $n = 12m^{0,6}$. Schrijf de formule van F in de vorm $F = am^b$. Rond a af op twee decimalen.
- 61** Beredeneer aan de hand van de formules of de grafieken van de volgende formules voor $t \geq 0$ stijgend of dalend zijn.
- a** $N = \frac{1500}{1 + 20 \cdot 0,91^t}$
- b** $N = 10 + 20(1 - 0,98^t)$
- 62** Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen $k: y = 3(0,5x - 2)$ en $l: y = 0,6x + 12$.
- 63** Gegeven zijn de formules $N = 0,15b - 0,05(2a - 3)$ en $b = 0,8a + 4$. Schrijf de formule van N in de vorm $N = pa + q$.
- 64** Schrijf $(a^{-2})^4 \cdot a^5$ als macht van a .
- 65** Teken het gebied waarvoor geldt $1 \leq x \leq 5$ en $2 \leq 2x - y \leq 10$.

- 66** Een hoeveelheid neemt af van 820 tot 750.
Hoeveel procent is de afname?
- 67** Een hoeveelheid van 649 is 5,64% van het totaal.
Hoeveel is het totaal?
- 68** In de boxplots zie je de inkomensverdeling van de huishoudens in plaats A en plaats B.



figuur G.16

Vergelijk de boxplots en noteer of het verschil tussen de inkomens groot, middelmatig of gering is.

- 69** Herleid de formule.
- a** $P = (4a - 1) \cdot \frac{2b}{4a - 1}$
- b** $A = 5p \cdot \frac{3}{q} \cdot \frac{1 - q}{q}$
- 70** Geef aan of de variabele continu of discreet is.
- a** de hoogte van de kerktorens in Nederland
- b** het aantal treden in een kerktoeren
- c** de toonhoogte van de kerkklokken in Nederland
- 71** Toon aan dat de formule $F = \frac{2a^2 - 3a + 4}{2a} + 4a + 1\frac{1}{2}$ te herleiden is tot $F = 5a + \frac{2}{a}$.
- 72** Bij twee kledingzaken in een winkelcentrum is onderzocht hoeveel het aankoopbedrag per klant is.
Bij winkel A is het gemiddeld aankoopbedrag 112 euro. De standaardafwijking is 38 euro.
Bij winkel B is het gemiddelde 85 euro en de standaardafwijking 24 euro.
Onderzoek of het verschil in aankoopbedrag per klant tussen de winkels A en B groot, middelmatig of gering kan worden genoemd.
- 73** Een hoeveelheid groeit lineair. Op $t = 8$ is $N = 52$ en op $t = 12$ is $N = 63$.
Stel de formule op van N .

74 Los de vergelijking $6x - 33 = -4(x - 12) + 15$ op.

75 Schrijf de formule $M = 200\left(4 + \frac{74}{25 \cdot 0,95^t}\right)$ in de vorm $M = a + b \cdot g^t$.
Rond g af op twee decimalen.

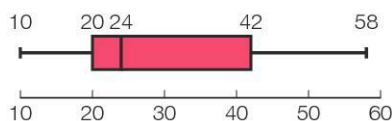
76 Los de vergelijking $1\frac{1}{4}(6t - 1) = 2\frac{1}{2}t + 6$ op.

77 Gegeven is dat y evenredig is met x . Voor $x = 12$ is $y = 69$.
Stel de formule van y op en bereken y voor $x = 42$.

78 Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. Op $t = 4$ is $N = 101$ en op $t = 12$ is $N = 161$. Hierbij is t in dagen.
Stel de formule op van N .

79 De formule $A = 5x^{-1,15} \cdot \frac{3x^{4,25}}{x^2}$ is te herleiden tot de vorm $A = ax^b$.
Bereken a en b .

80 In de boxplot hieronder zijn 1060 waarnemingsgetallen verwerkt.



figuur G.17

- a** Bereken hoeveel keer zo groot de spreidingsbreedte is als de interkwartielafstand. Rond af op één decimaal.
- b** Hoeveel waarnemingsgetallen liggen tussen 20 en 24?
- c** Volgens Leonie ligt het gemiddelde van de waarnemingsgetallen tussen 24 en 36.
Onderzoek of dat klopt.
- d** Geef een schatting van de standaardafwijking van de waarnemingsgetallen. Kies uit 4, 14, 24 en 34.

81 Maak n vrij bij de formule $A = 8 - \frac{12}{n}$.

82 Stel de formule op van de lijn l door de punten $A(8, 70)$ en $B(20, 55)$.

83 België heeft een oppervlakte van $30\,689 \text{ km}^2$ en 11,46 miljoen inwoners.
Hoeveel m^2 is de oppervlakte per inwoner? Rond af op gehelen.

84 Gegeven zijn de formules $F = 5p^2 - 2q^2 + 10$ en $q = p - 3$.
Schrijf de formule van F in de vorm $F = ap^2 + bp + c$.

- 85** Beredeneer bij de volgende formules wat de grenswaarde is.

a $y = 100 + \frac{50}{x^2 + 1}$

b $N = 50 - \frac{30}{t + 2}$

- 86** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatie-gemiddelde bij

a $\bar{X} = 1200$, $S = 85$ en $n = 625$

b $\bar{X} = 25,62$ en $\frac{S}{\sqrt{n}} = 1,45$.

- 87** Een hoeveelheid neemt met 18,4% toe tot 3015.
Hoeveel was de oorspronkelijke hoeveelheid?

- 88** Voor een onderzoek naar geluidshinder zijn 800 mensen uit de stad en 640 mensen van het platteland ondervraagd. De hinder kon worden aangegeven op een schaal van 1 tot en met 5, waarbij 1 geen hinder was en 5 veel hinder. De resultaten zie je in de tabel. Je ziet dat 16 mensen uit de stad aangaven geen geluidshinder te ondervinden. Onderzoek of de grootte van het verschil in het ervaren van geluidshinder tussen de mensen in de stad en op het platteland groot, middelmatig of gering is.

ERVARING GELUIDSHINDER

	stad	platteland
1	16	112
2	56	128
3	112	320
4	120	48
5	496	32

- 89** Beredeneer bij de volgende formules wat het verzadigingsniveau is.

a $N = \frac{600}{3 + 14 \cdot 0,96^t}$

b $N = 450(3 - 0,81^t)$

- 90** Neem $y = 2x - 1$ in de formule $K = \frac{x + y}{4x - y}$ en herleid.

- 91** Schrijf de formule $N = 3\sqrt{2a} \cdot \sqrt{5b}$ in de vorm $N = c\sqrt{ab}$. Rond c af op twee decimalen.

- 92** Een bedrag wordt verdeeld onder A, B en C in de verhouding $A : B : C = 2 : 3 : 7$.
Zo krijgt C 25 euro meer dan B.
Welk bedrag werd verdeeld?

- 93** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie bij

a $\hat{p} = 0,83$ en $n = 280$

b $\hat{p} = \frac{83}{112}$ en $n = 52$.

- 94** Een hoeveelheid neemt per jaar met 5,8% af.
Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.

95 Maak y vrij bij $\frac{2x}{3y} = \frac{5}{7}$.

- 96** Gegeven is de volgende tabel. Hierin is t de tijd in dagen.

t	2	6	9	14
N	20,60	14,80	10,45	3,20

Toon aan dat bij de tabel lineaire groei hoort en stel de formule op van N .

- 97** Een bedrijf verkoopt per jaar tussen 150 en 550 van zijn artikelen. De jaarlijkse winst wordt gegeven door de formule $W = -0,01q^2 + 7,5q - 650$. Hierin is q het aantal verkochte artikelen en W de winst in honderden euro's.

- Bereken hoeveel winst per artikel het bedrijf maakt als de jaarverkoop 400 stuks is.
- Bereken de maximale jaarlijkse winst.

- 98** **a** Voor een proportie is het 95%-betrouwbaarheidsinterval $0,65 \pm 0,06$. Schrijf dit betrouwbaarheidsinterval in de intervalnotatie en bereken de standaardafwijking σ .
- b** Voor een gemiddelde is het 95%-betrouwbaarheidsinterval $[1280, 1340]$. Schrijf dit betrouwbaarheidsinterval in de $\pm$ -notatie en bereken de standaardafwijking S .

- 99** Op een dag met zware neerslag viel er in De Bilt 55 mm regen. Hoeveel liter regen viel er die dag in de gemeente De Bilt? Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op twee decimalen. Gebruik dat de oppervlakte van de gemeente De Bilt $67,13 \text{ km}^2$ is.

- 100** Een hoeveelheid neemt per 8 uur met 10,9% af.
- Hoeveel procent is de afname per 50 uur?
 - Hoeveel procent is de afname per 20 minuten?

- 101** Gegeven zijn de formules $B = \frac{6x^2 - y^2}{y^2 + 1}$ en $y = 2x - 1$.
Druk B uit in x en werk de haakjes weg.

- 102** Op een decemberochtend controleert de politie bij 140 fietsers of de lichten in orde zijn.
Het blijkt dat bij 78 de lichten niet in orde zijn.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie fietsers waarvan het licht niet in orde is.

- 103** Herleid de formule $N = 18 \cdot \frac{2x-3}{6} + 3x - 5$ tot de vorm $N = ax + b$.
- 104** Door de uitbraak van een virus komen er veel mensen op de intensive care (ic) terecht. Het aantal patiënten N op de ic dat besmet is met het virus, kan worden beschreven met de formule $N = \frac{90\,000t}{t^2 + 900}$. Hierin is t de tijd in dagen vanaf het moment dat de eerste patiënt op de ic kwam te liggen met t tussen 0 en 100.
- Na hoeveel dagen werd het maximale aantal besmette patiënten op de ic bereikt? Om hoeveel patiënten ging het?
 - Gedurende hoeveel dagen lagen er meer dan 1400 besmette patiënten op de ic?
- 105** Het aantal meloenen dat een marktkoopman op een dag verkoopt is omgekeerd evenredig met de prijs. Bij een prijs van 80 cent per stuk verkoopt hij 135 meloenen op een dag. Hoeveel meloenen verkoopt hij op een dag bij een prijs van € 1,10 per stuk?
- 106** Een hoeveelheid halveert elke vijf jaar en vier maanden. Bereken hoeveel procent de afname per jaar is.
- 107** Schrijf het rechterlid van de formule $K = \frac{24x}{x-4} \cdot (x+4) \cdot \frac{1}{8}$ als één breuk en werk de haakjes weg.
- 108** De lijn l gaat door het punt $A(6, 9)$ en $rc_l = -\frac{1}{3}$. Stel de formule op van l .
- 109** De staatsschuld van de VS neemt per seconde met 45 486 dollar toe. Hoeveel dollar is dat per dag? Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.
- 110** Schrijf de formule $N = \frac{200}{133 \cdot 0,6^t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b en g af op drie decimalen.
- 111** Stel de formule op van de lijn k door de punten $A(2, 18)$ en $B(10, 30)$.
- 112** Een hoeveelheid neemt per dag met 8,6% toe.
- Hoeveel procent is de toename per week?
 - Hoeveel procent is de toename per 10 uur?

- 113** De formules $T = 6xy - 20x + 15y$ en $2x - 3y = 10$ zijn te combineren tot de vorm $T = ax^2 + bx + c$.
Bereken a , b en c .

- 114** Sandra loopt een afstand van 6,5 km met een gemiddelde snelheid van 14,6 km/uur.
Hoeveel minuten en seconden doet zij hierover?

- 115** In een snelkoker wordt water aan de kook gebracht. Daarbij wordt op verschillende tijdstippen de temperatuur gemeten. Zie de tabel, waarin T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ is na t seconden.

t	0	30	60	80	100	110
T	5	20	53	77	95	100

- a** Licht toe dat bij de tabel geen lineair verband hoort.
b Laat zien dat bij de tabel geen exponentieel verband hoort.

De onderzoeker gaat uit van het model $T = -0,00011t^3 + 0,02t^2 + 5$.

- c** Controleer of het model klopt voor $t = 30$ en $t = 100$.
d Gebruik de formule om te berekenen na hoeveel seconden de temperatuur 85°C is.

- 116** Tussen t en A bestaat een lineair verband. Voor $t = 12$ is $A = 78$ en voor $t = 28$ is $A = 22$.
Stel de formule op van A .

- 117** Gegeven zijn de formules $N = 2k - 3l + 50$ en $k + 2l = 40$.
Schrijf de formule van N in de vorm $N = ak + b$.

- 118** Van 6000 kiwi's is het gewicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 128 gram en een standaardafwijking van 6 gram.
Hoeveel van deze kiwi's hebben een gewicht tussen 122 en 140 gram?

- 119** Herleid.
- a** $5a^3 \cdot 4a^2$
- b** $(-4a^3)^2 - 8a^5 - 10a^6$
- c** $\frac{16x^2y^3}{24xy}$

- 120** Los de ongelijkheid $2,56x + 30 > 83 - 5(x - 10)$ op. Rond af op twee decimalen.

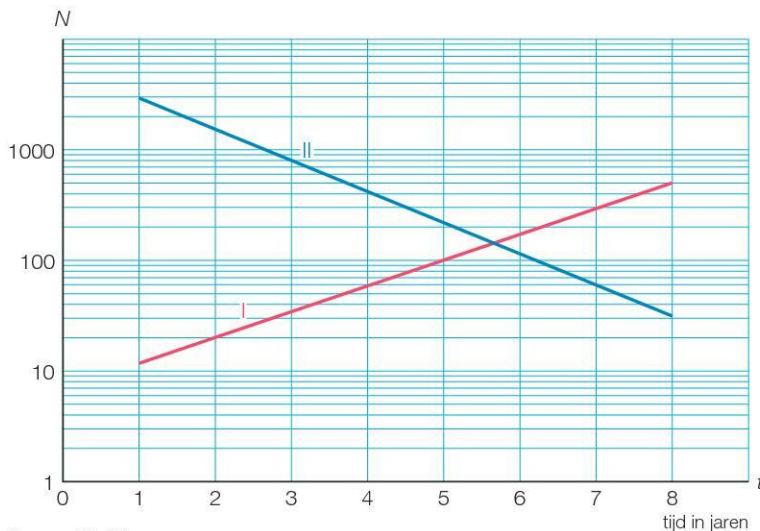
- 121** Schets een cumulatieve verdelingskromme bij een links-scheve verdeling.

122 Op een school met 1350 leerlingen zitten voor elke 11 leerlingen in de tweede en de derde klas, er 6 leerlingen in de eerste klas. Verder zitten voor elke 5 leerlingen in de bovenbouw, er 3 leerlingen in de eerste klas. Hoeveel leerlingen zitten er in de bovenbouw?

123 De politie controleert bij 140 scooters of ze zijn opgevoerd. Het blijkt dat van de proportie scooters die zijn opgevoerd het 95%-betrouwbaarheids-interval $[0,177; 0,323]$ is. Bereken het aantal scooters in de steekproef dat is opgevoerd.

124 Gegeven zijn de formules $A = \frac{4x}{x-1} \cdot (2y-3)$ en $y = 4x + 5$. Druk A uit in x en schrijf de formule als één breuk.

125 Hieronder zie je de grafieken I en II op logaritmisch papier.



figuur G.18

- a Stel de formule op van grafiek I.
- b Stel de formule op van grafiek II.

126 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.

- a $A = 5x - \frac{4}{3x}$
- b $B = \frac{7}{2x} - \frac{5}{3x}$
- c $D = 5a^2 - \frac{3}{a^2}$
- d $E = \frac{2}{p} + 3p \cdot \frac{5q}{2p^2}$

127 In Nederland heeft 23% van de bevolking bloedgroep A. Er worden heel veel steekproeven genomen van 283 Nederlanders, waarbij steeds de proportie met bloedgroep A wordt berekend. Bereken bij welk percentage van deze steekproeven de steekproefproportie tussen 0,18 en 0,28 zal liggen.

128 De kosten per passagier op een cruiseschip bij een tocht van een week worden berekend met de formule $K = 450 + \frac{30000}{n}$. Hierin is K in euro's en n het aantal passagiers.

- Bereken hoe uit de formule van K volgt dat de grafiek dalend is. Licht toe dat dit met de praktijk overeenkomt.
- Bereken wat de grenswaarde is. Welke praktische betekenis heeft de grenswaarde?
- Op het cruiseschip kunnen maximaal 2500 passagiers. Welke prijs per passagier moet de cruisemaatschappij vragen om een winst van 100000 euro te maken op deze tocht bij het maximale aantal passagiers?

129 Bereken of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en bereken wat de grenswaarde is. Neem $x > 0$.

- $y = 20 - \frac{5}{x}$
- $y = \frac{12 \cdot 0,6^x}{\sqrt{x}}$
- $y = 25 - \frac{80}{x^2 + 2}$

130 Gegeven is de volgende tabel. Hierin is t de tijd in dagen.

t	3	8	12	15
N	446	345	281	241

- Toon aan dat bij de tabel exponentiële groei hoort.
- Stel de formule op van N .

131 De diameter van een virusdeeltje is 50 keer zo klein als de diameter van een bacterie. De bacterie heeft een diameter van 2 micrometer. Wat is de diameter van het virusdeeltje? Geef het antwoord in meters in de wetenschappelijke notatie. Gebruik dat 1 micrometer = $\frac{1}{1000}$ mm.

132 Maak a vrij bij de formule $P = \frac{3}{4a-1}$ en schrijf de formule als één breuk.

133 Gegeven is de tabel hiernaast.

- Laat zien dat A niet omgekeerd evenredig is met B .
- Bij de tabel hoort een verband van de vorm $A = \frac{90}{c^B}$.

B	2	3	4	6
A	40	26,7	17,8	7,9

Bereken c en gebruik dit om A bij $B = 5$ te berekenen. Rond A af op één decimaal.

- 134** Op $t = 0$ zijn er 1560 dieren van soort A en 1450 van soort B. Soort A neemt jaarlijks met 25 dieren toe en het aantal dieren van soort B groeit jaarlijks met 7,8%. Bereken hoeveel jaar na $t = 0$ er twee keer zoveel dieren van soort B zijn als van soort A. Rond af op één decimaal.

- 135** Gegeven zijn de formules $K = \frac{350 - 2p}{6,13}$ en $L = \frac{5p + 380}{8,27}$. Bereken voor welke waarden van p geldt dat $K < L$. Rond af op twee decimalen.

Formuleblad

Vuistregels bij de grootte van het verschil van twee groepen

2×2 -kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $\phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$, waarin a, b, c en d absolute aantallen zijn.

- als $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Maximale verschil in cumulatief percentage (max.Vcp) (met steekproefomvang $n > 100$)

- als max.Vcp > 40 , dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $20 < \text{max.Vcp} \leq 40$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als max.Vcp ≤ 20 , dan zeggen we “het verschil is gering”.

Effectgrootte $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2)}}$ met $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ de steekproefgemiddelden

($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen¹ elkaar niet overlappen, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- in alle andere gevallen zeggen we “het verschil is gering”.

¹ De ‘box’ is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \text{ met } p \text{ de steekproefproportie en } n \text{ de steekproefomvang.}$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ met } \bar{X} \text{ het steekproefgemiddelde, } n \text{ de steekproefomvang en } S \text{ de steekproefstandaardafwijking.}$$

Overzicht GR-modules

Module	
Berekeningen op het basisscherm <ul style="list-style-type: none">Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen.De toets Ans en fouten verbeteren.Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen.Decimaal getal omzetten in breuk.	havo A deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 11
Formules, grafieken en snijpunten <ul style="list-style-type: none">Formules invoeren en grafieken plotten.De optie snijpunt gebruiken.	havo A deel 1 hoofdstuk 3 bladzijde 122
Formules en tabellen <ul style="list-style-type: none">Bij een formule een tabel maken.	havo A deel 2 hoofdstuk 5 bladzijde 26
Grafieken, toppen en snijpunten <ul style="list-style-type: none">Het kiezen van een geschikt venster.De opties snijpunt, nulpunt, maximum en minimum.	havo A deel 2 hoofdstuk 6 bladzijde 53
Allerlei <ul style="list-style-type: none">Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR	

Overzicht routes

9 Exponentiële verbanden

9.1 Lineaire en exponentiële groei

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
□ basis											
⊙ midden											
* uitdagend											

12	13	14	15	16	17	18	19

9.2 Groeipercentages

opgave	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

33	34	35	36	37	38	39	40	41

9.3 Formules bij exponentiële groei

opgave	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

55	56	57	58	59	60	61	62

9.4 Logaritmisch papier en redeneren met groeiformules

opgave	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
▣ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

10 Statistiek gebruiken

10.1 Statistische diagrammen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
▣ basis										
⊙ midden										
* uitdagend										

10.2 Causaliteit en groepen vergelijken

opgave	11	12	13	14	15
▣ basis					
⊙ midden					
* uitdagend					

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

10.3 De normale verdeling en betrouwbaarheidsintervallen

opgave	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
▣ basis											
⊙ midden											
* uitdagend											

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57

11 Formules en variabelen

11.1 Grafieken en gebieden

opgave	1	2	3	4	5	6
□ basis						
⊙ midden						
* uitdagend						

7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

11.2 Herleiden en combineren van formules

opgave	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
□ basis																
⊙ midden																
* uitdagend																

11.3 Evenredigheden

opgave	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

11.4 Redeneren met formules

opgave	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

11.5 Wiskundige modellen

opgave	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

Trefwoordenregister

A

associatiemaat 68

B

betrouwbaarheidsinterval 86

C

causaal verband 64

causaliteit 64

combineren van formules 118

D

dotplot 55

E

evenredig 123

omgekeerd - 123

evenwijdige lijnen 103

exponentiële groei 11

formule opstellen bij - 12

F

formules combineren 118

G

gemeenschappelijke factor 65

grenswaarde 42, 129

groefactor 12

groeipercentage 20

- omzetten 29

groepen vergelijken 68

H

halfvlak 107

- met rand 107

halveringstijd 27

L

lineaire groei 11

logaritmisch papier 38

logaritmische schaalverdeling 37

M

modelvorming 136

N

normale verdeling 79, 83

O

omgekeerd evenredig 123

- verband 123

oorzakelijk verband 64

P

populatieproportie 83

puntenwolk 55

R

redeneren met formules 42, 131

S

samenhang 64

spreidingsdiagram 55

steekproefproportie 83

U

uitdelen 114

V

variabelen vrijmaken 114

verdubbelingstijd 23

verzadigingsniveau 42

vrijmaken van variabelen 114

vuistregels bij de normale verdeling 79

W

wiskundig model 136

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Richard van de Pol, Tilburg; Haasart, Wim de Haas, Rhenen

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Shutterstock: p. 6-7, 15 b, 16, 22, 25, 35, 53, 54, 60, 61, 70 b, 73, 80, 89, 92 b, 96, 105, 110, 119, 120, 125, 127, 134, 139, 164, 189, 238, 242

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Harold Versteeg: p. 14

Nationale Beeldbank: p. 15 o

iStockphoto: p. 20, 21, 26, 31, 74, 84 b, 98-99, 136, 148-149, 157, 163, 197, 244

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Jan Luit: p. 27

ANP Foto / Hollandse Hoogte / EPA / Legnan Koula: p. 33

Sabine de Waal, Hendrik Ido Ambacht: p. 34

Mark Haneveld, Lochem: p. 37

Getty Images: p. 50-51, 52 b, 71

Granger / F1online / Imageselect: p. 52 o

ANP Foto / Hollandse Hoogte / AFP Photo: p. 70 o

World History Archive / F1online / Imageselect: p. 72 b

ANP Foto / Hollandse Hoogte / David Rozing: p. 72 o

2019 Kojima et al - journal.pone: p. 76

ANP Foto / Hollandse Hoogte / AFP Photo / Axel Heinken: p. 84 o

Richard van de Pol: p. 92 o

ANP Foto / Hollandse Hoogte / AP / Sport / Charlie Neibergall: p. 95

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Marco Okhuizen: p. 145

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Michiel Wijnbergh: p. 156

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Lex van Lieshout: p. 161

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Huisman Media: p. 173

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Fred Hoogervorst Fotografie: p. 177

University Archives Photograph Collection. College of Textiles (UA023.017),

Special Collections Research Center at NC State University Libraries: p. 184

ANP Foto / Hollandse Hoogte / EyeEm: p. 214

ANP Foto / Hollandse Hoogte / AFP Photo / Jewel Samad: p. 223

ANP Foto / Eyevine / Jeff Moore: p. 240

NASA / Bill Ingalls: p. 241

ANP Foto / Hollandse Hoogte / AP / Lee Jin-man: p. 245

Dr Andrew Turner / Edi Terlaak, Groningen: p. 248

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer
13,9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 21

© 2021 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73713-9



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



Noordhoff



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-73713-9



9 789001 737139