

& GETAL & RUIMTE

B



Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen **havo B** deel 1

Twaalfde editie, 2020

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J.H. Dijkhuis
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.M.H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. van Haren
B.W. van Laarhoven
R. Meijerink

Inhoud

1	Formules, grafieken en vergelijkingen	4
2	Veranderingen	36
3	Hoeken en afstanden	70
4	Werken met formules	94
	Gemengde opgaven	128

1 Formules, grafieken en vergelijkingen

Voorkennis Lineaire vergelijkingen en ongelijkheden

Bladzijde 9

- 1**
- | | |
|--|--|
| <p>a $5x - 2 = 3x + 6$
$2x = 8$
$x = 4$</p> <p>b $4 - 5(x - 1) = 3(2x + 1)$
$4 - 5x + 5 = 6x + 3$
$-11x = -6$
$x = \frac{6}{11}$</p> <p>c $3x - 0,8 = 2,4x + 1,6$
$0,6x = 2,4$
$x = 4$</p> <p>d $10 - 3(x + 1) = 5x - (2x - 1)$
$10 - 3x - 3 = 5x - 2x + 1$
$-6x = -6$
$x = 1$</p> | <p>e $1,6(2x - 1) = 1,4x - 2$
$3,2x - 1,6 = 1,4x - 2$
$1,8x = -0,4$
$x = -\frac{2}{9}$</p> <p>f $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{2}x + 2$
$2x - 6 = 3x + 12$
$-x = 18$
$x = -18$</p> <p>g $\frac{4}{5}x - 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}x - 3$
$12x - 20 = 35x - 45$
$-23x = -25$
$x = 1\frac{2}{23}$</p> <p>h $\frac{2}{7}(4x - 1) = \frac{3}{4}(1 - 5x)$
$8(4x - 1) = 21(1 - 5x)$
$32x - 8 = 21 - 105x$
$137x = 29$
$x = \frac{29}{137}$</p> |
|--|--|

Bladzijde 10

- 2**
- | | |
|---|--|
| <p>a $4x + 5 < 6x - 3$
$-2x < -8$
$x > 4$</p> <p>b $3x + 1 < 7x + 5$
$-4x < 4$
$x > -1$</p> | <p>c $\frac{1}{3}x + 10 > \frac{1}{2}x$
$2x + 60 > 3x$
$-x > -60$
$x < 60$</p> <p>d $x + 6 > 2 - \frac{3}{4}x$
$4x + 24 > 8 - 3x$
$7x > -16$
$x > -2\frac{2}{7}$</p> |
|---|--|
- 3**
- | | |
|---|--|
| <p>a $5(x - 1) < 7x - 1$
$5x - 5 < 7x - 1$
$-2x < 4$
$x > -2$</p> <p>b $2(3x - 1) < 5 - (2 - 9x)$
$6x - 2 < 5 - 2 + 9x$
$-3x < 5$
$x > -1\frac{2}{3}$</p> | <p>c $-3(4x - 1) > 2 - (x - 1)$
$-12x + 3 > 2 - x + 1$
$-11x > 0$
$x < 0$</p> <p>d $2(x - 1) - 3(x - 2) > 6$
$2x - 2 - 3x + 6 > 6$
$-x > 2$
$x < -2$</p> |
|---|--|

1.1 Lineaire verbanden

Bladzijde 11

- 1**
- a** Per 10 meter neemt de druk met 1000 hPa toe.
Per 1 meter stijgt de druk dus $\frac{1000}{10} = 100$ hPa.
Op 2 meter diepte is de druk $1020 + 2 \cdot 100 = 1220$ hPa.
Op 14 meter diepte is de druk $1020 + 14 \cdot 100 = 2420$ hPa.
- b** III $P = 100d + 1020$

2 a $k: y = -3x + 2$

x	0	1
y	2	1

$l: y = \frac{1}{2}x - 1$

x	0	2
y	1	0

$m: y = 2x$

x	0	1
y	0	2

Figuur, zie hiernaast.

b $rc_k = -3, rc_l = \frac{1}{2}, rc_m = 2$

c Bij de x -coördinaat van het snijpunt moet de y -coördinaat van het punt op k gelijk zijn aan de y -coördinaat van het punt op l .

$$-3x + 2 = \frac{1}{2}x - 1$$

$$-3\frac{1}{2}x = -3$$

$$x = \frac{6}{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + 2 \\ x = \frac{6}{7} \end{array} \right\} y = -3 \cdot \frac{6}{7} + 2 = -2\frac{4}{7} + 2 = -\frac{4}{7}$$

Dus $A(\frac{6}{7}, -\frac{4}{7})$.

d $-3x + 2 = 2x$

$$-5x = -2$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ x = \frac{2}{5} \end{array} \right\} y = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

Dus $B(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$.

$$\frac{1}{2}x - 1 = 2x$$

$$-1\frac{1}{2}x = 1$$

$$-3x = 2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ x = -\frac{2}{3} \end{array} \right\} y = 2 \cdot -\frac{2}{3} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

Dus $C(-\frac{2}{3}, -1\frac{1}{3})$.

3 a Figuur, zie hiernaast.

b Stel $p: y = ax + b$.

Snijpunt met de y -as is $(0, 3)$, dus $b = 3$.

$$a = rc_p = \frac{1}{2}$$

Dus $p: y = \frac{1}{2}x + 3$.

Stel $q: y = ax + b$.

Snijpunt met de y -as is $(0, 0)$, dus $b = 0$.

$$a = rc_q = \frac{1}{2}$$

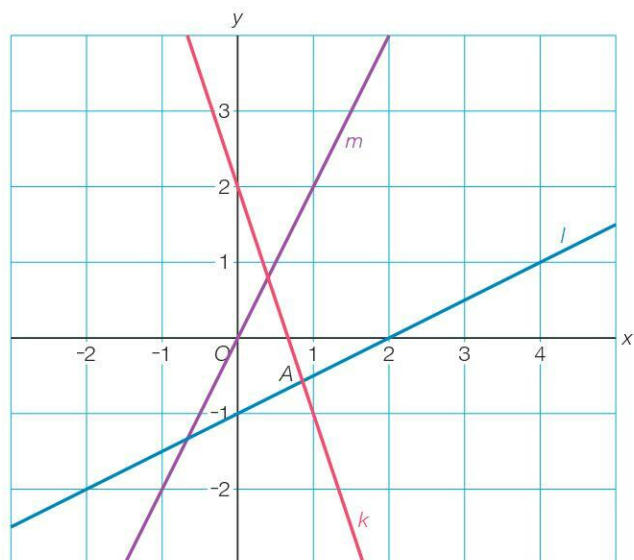
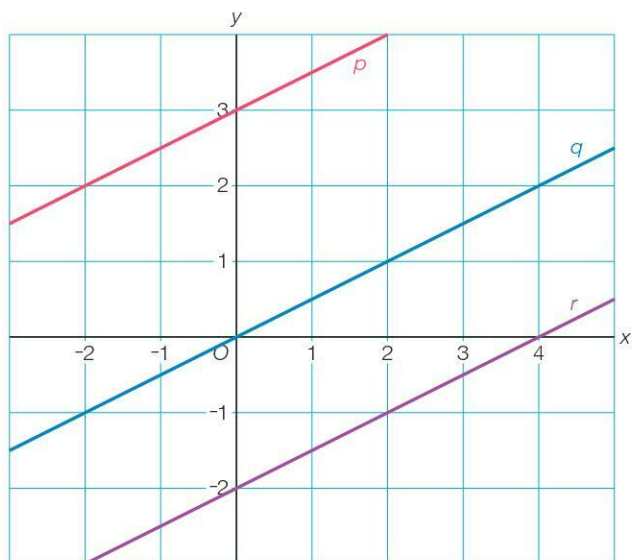
Dus $q: y = \frac{1}{2}x$.

Stel $r: y = ax + b$.

Snijpunt met de y -as is $(0, -2)$, dus $b = -2$.

$$a = rc_r = \frac{1}{2}$$

Dus $r: y = \frac{1}{2}x - 2$.



4 a $y = 2x - 3$

x	0	2
y	-3	1

Figuur, zie hiernaast.

- b** Een lijn door de oorsprong gaat door het punt $(0, 0)$.
Het snijpunt met de y -as is $(0, 0)$, dus $b = 0$.
- c** Het punt $(3, 5)$ ligt op de lijn $y = 2x + b$ als het invullen van $x = 3$ in de vergelijking $y = 2x + b$ geeft dat $y = 5$, dus

$$2 \cdot 3 + b = 5$$

$$2 \cdot 3 + b = 5$$

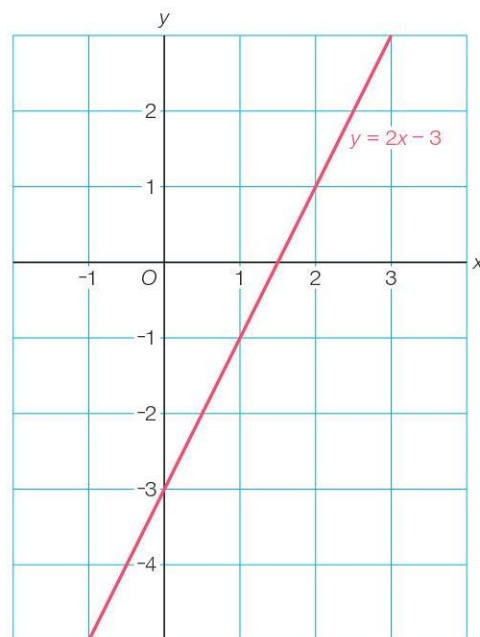
$$6 + b = 5$$

$$b = -1$$

$$\text{Dus } b = -1.$$

- d**
$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ x = -3 \text{ en } y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot -3 + b = 0 \\ -6 + b = 0 \\ b = 6 \end{array}$$

$$\text{Dus } b = 6.$$



5 a
$$\left. \begin{array}{l} y = ax - 6 \\ x = 3 \text{ en } y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 3 - 6 = 0 \\ 3a = 6 \\ a = 2 \end{array}$$

$$\text{Dus } a = 2.$$

- b** Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt.
Dus $a = 3$.
- c** Elke lijn $y = ax - 6$ snijdt de y -as in het punt $(0, -6)$.
Dus er is geen a waarvoor de lijn door de oorsprong $(0, 0)$ gaat.

- d**
$$\left. \begin{array}{l} y = ax - 6 \\ x = 2 \text{ en } y = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 2 - 6 = -1 \\ 2a = 5 \\ a = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ x = 2 \text{ en } y = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 2 + b = -1 \\ 8 + b = -1 \\ b = -9 \end{array}$$

$$\text{Dus } a = 2\frac{1}{2} \text{ en } b = -9.$$

6 a Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, dus $a = -\frac{1}{2}$.

- b**
$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ x = 2 \text{ en } y = -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -3 \\ 3 + b = -3 \\ b = -6 \end{array}$$

$$\text{Dus } b = -6.$$

- c**
$$\begin{array}{l} -\frac{1}{2}x - 2 = 0 \\ x + 4 = 0 \\ x = -4 \end{array}$$

Dus k snijdt de x -as in het punt $(-4, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = ax + 1 \\ x = -4 \text{ en } y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot -4 + 1 = 0 \\ -4a = -1 \\ a = \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\text{Dus } a = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad & \left. \begin{array}{l} y = ax + 1 \\ x = 4 \text{ en } y = -4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 4 + 1 = -4 \\ 4a = -5 \\ a = -1\frac{1}{4} \end{array} \\ & \left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ x = 4 \text{ en } y = -4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 4 + b = -4 \\ 6 + b = -4 \\ b = -10 \end{array} \\ & \text{Dus } a = -1\frac{1}{4} \text{ en } b = -10. \end{aligned}$$

- 7 a** k snijdt de y -as in het punt $(0, 6)$.
 l snijdt de y -as in het punt $(0, 6)$ geeft $3a = 6$
 $a = 2$

$$\text{b} \quad \left. \begin{array}{l} ax + 6 = \frac{1}{2}ax + 3a \\ x_P = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot -2 + 6 = \frac{1}{2}a \cdot -2 + 3a \\ -2a + 6 = -a + 3a \\ -4a = -6 \\ a = 1\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = 1\frac{1}{2}x + 6$.

$$y_P = 1\frac{1}{2} \cdot -2 + 6 = -3 + 6 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad & \left. \begin{array}{l} y = ax + 6 \\ y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} ax + 6 = 0 \\ ax = -6 \end{array} \\ & \left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}ax + 3a \\ ax = -6 \text{ en } y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot -6 + 3a = 0 \\ -3 + 3a = 0 \\ 3a = 3 \\ a = 1 \end{array} \end{aligned}$$

Dus $a = 1$.

- 8** Stel dat ieder van de 20 mensen x euro betaalt, dan betalen ze in totaal $20x$ euro.
 Het bedrag van de rekening is dus $20x - 3$ euro.
 De 21 mensen betalen ieder $x - 3$ euro en dat is in totaal $21(x - 3)$ euro.
 Het bedrag van de rekening is dus $21(x - 3) - 10$ euro.
 Dit geeft de vergelijking $20x - 3 = 21(x - 3) - 10$
 $20x - 3 = 21x - 63 - 10$
 $-x = -70$
 $x = 70$

Het bedrag van de rekening is dus $20 \cdot 70 - 3 = 1397$ euro.

Bladzijde 15

- 9 a** 32 opgaven goed, dus $40 - 32 = 8$ opgaven fout.
 Ze krijgt $32 \cdot 0,5 - 8 \cdot 1 = 8$ euro.
b $B = x \cdot \frac{1}{2} - (40 - x) \cdot 1 = \frac{1}{2}x - 40 + x = 1\frac{1}{2}x - 40$
c $1\frac{1}{2}x - 40 = 2$
 $1\frac{1}{2}x = 42$
 $x = 28$
 Dus Jannie had 28 opgaven goed.

- 10 a** Stel $y = ax + b$.
 Snijpunt met de y -as is $(0, 3)$, dus $b = 3$.
 Gebruik $(0, 3)$ en $(6, 0)$.
 $a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$
 Dus $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
b Stel $N = at + b$.
 Snijpunt met de N -as is $(0, 10)$, dus $b = 10$.
 Gebruik $(0, 10)$ en $(4, 20)$.
 $a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$
 Dus $N = 2\frac{1}{2}t + 10$.

c Stel $K = ar + b$.

Snijpunt met de K -as is $(0, 100)$, dus $b = 100$.

Gebruik $(0, 100)$ en $(2000, 200)$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{100}{2000} = \frac{1}{20}$$

$$\text{Dus } K = \frac{1}{20}r + 100.$$

11 Stel $k: y = ax + b$.

$$\begin{aligned} a = rc_k = 4, \text{ dus } y = 4x + b \\ \text{door } (-5, 21) \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot -5 + b = 21 \\ -20 + b = 21 \\ b = 41 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = 4x + 41.$$

12 a Stel $m: y = ax + b$.

$$\begin{aligned} a = rc_m = -\frac{1}{2}, \text{ dus } y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (-18, 30) \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot -18 + b = 30 \\ 9 + b = 30 \\ b = 21 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } m: y = -\frac{1}{2}x + 21.$$

b $y = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x + 21 = 0$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x &= -21 \\ x &= 42 \end{aligned}$$

Dus het snijpunt met de x -as is $(42, 0)$.

$x = 0$ geeft $y = 21$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, 21)$.

13 De lijnen zijn evenwijdig, dus $a = rc_k = rc_l = -2$.

$$\begin{aligned} y = -2x + b \\ \text{door } (18, -10) \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 18 + b = -10 \\ -36 + b = -10 \\ b = 26 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } a = -2 \text{ en } b = 26.$$

14 Stel I: $y = ax + b$.

Snijpunt met de y -as is $(0, 5)$, dus $b = 5$.

Gebruik $(0, 5)$ en $(5, 15)$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\text{Dus I: } y = 2x + 5.$$

Stel II: $y = ax + b$.

Gebruik $(5, 15)$ en $(10, 5)$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$\begin{aligned} y = -2x + b \\ \text{door } (5, 15) \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 5 + b = 15 \\ -10 + b = 15 \\ b = 25 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus II: } y = -2x + 25.$$

Stel III: $y = ax + b$.

Gebruik $(10, 5)$ en $(15, 10)$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\begin{aligned} y = x + b \\ \text{door } (10, 5) \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 10 + b = 5 \\ b = -5 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus III: } y = x - 5.$$

- 15** Stel er zijn x vrouwen, dan zijn er $420 - x$ mannen.
 60% van de vrouwen is $0,6x$.
 80% van de mannen is $0,8(420 - x)$.
 $0,6x = 0,8(420 - x)$
 $0,6x = 336 - 0,8x$
 $1,4x = 336$
 $x = 240$
 Dus er zijn 240 vrouwen en 180 mannen.
 Er zit 40% van de vrouwen en 20% van de mannen aan de kant.
 Dus er zitten $0,4 \cdot 240 + 0,2 \cdot 180 = 132$ personen aan de kant.

Bladzijde 16

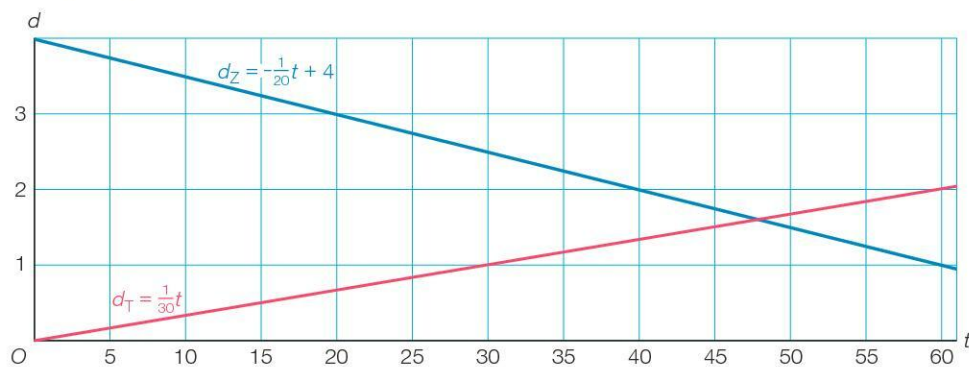
- 16** **a** De formule is $h = 3t + 5$.
b De bak heeft een hoogte van 80 cm.
 $3t + 5 = 80$
 $3t = 75$
 $t = 25$
 Na 25 minuten.
c Stel $h = at + b$.
 Snijpunt met de h -as is $(0, 80)$, dus $b = 80$.
 Gebruik $(0, 80)$ en $(10, 40)$.
 $a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{-40}{10} = -4$
 Dus $h = -4t + 80$.
d $-4t + 80 = 20$
 $-4t = -60$
 $t = 15$
 De lijn die bij deze formule hoort, gaat door $(15, 20)$.
 Stel $h = at + b$.
 $a = rc = 2$
 $\left. \begin{array}{l} h = 2t + b \\ \text{door } (15, 20) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 15 + b = 20 \\ 30 + b = 20 \\ b = -10 \end{array}$
 Dus $h = 2t - 10$.
- 17** **a** Op $t = 0$ is $d = 0$.
 Stel $d_T = at$.
 Elke 3 dagen wordt de diepte 0,1 meter meer, dus $a = \frac{0,1}{3} = \frac{1}{30}$.
 Dus $d_T = \frac{1}{30}t$.
b Het meer heeft een diepte van 4 meter. Op de eerste dag kunnen de baarzen nog leven op deze 4 meter diepte. Elke dag kunnen de baarzen 0,05 meter ($= \frac{1}{20}$ meter) minder diep komen.
 Dus $d_Z = -\frac{1}{20}t + 4$.

c $d_T = \frac{1}{30}t$

t	0	30
d_T	0	1

$$d_Z = -\frac{1}{20}t + 4$$

t	0	20
d_Z	4	3



$$\frac{1}{30}t = -\frac{1}{20}t + 4$$

$$\frac{1}{30}t + \frac{1}{20}t = 4$$

$$\frac{1}{12}t = 4$$

$$t = 48$$

Op $t = 48$ is het 18 augustus, dus vanaf 18 augustus.

1.2 Een lijn door twee gegeven punten

Bladzijde 18

- 18 a Ga je 4 naar rechts, dan ga je 3 omhoog, dus ga je $\frac{3}{4}$ omhoog.
Dus $rc_l = \frac{3}{4}$.

b $y_B - y_A = 4 - 1 = 3$

c Deel $y_B - y_A$ door $x_B - x_A$. Dus $rc_l = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{4}$.

Bladzijde 19

- 19 a Bij $\Delta y = -1 - 5$ hoort $\Delta x = 2 - 6$.

$$rc_l = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 5}{2 - 6} = \frac{-6}{-4} = 1\frac{1}{2}$$

Ze krijgt zo dus ook $rc_l = 1\frac{1}{2}$.

b $y = 1\frac{1}{2}x + b$ } $1\frac{1}{2} \cdot 6 + b = 5$
door $B(6, 5)$ } $9 + b = 5$
 $b = -4$

- 20 a Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 1}{1 - -1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

$$y = 1\frac{1}{2}x + b$$

door $B(1, 4)$ } $1\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 4$
 $b = 2\frac{1}{2}$

Dus $l: y = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.

- b Stel $m: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 5}{2 - -3} = \frac{-5}{5} = -1$.

$$y = -x + b$$

door $D(2, 0)$ } $-1 \cdot 2 + b = 0$
 $b = 2$

Dus $m: y = -x + 2$.

21 a Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - -3}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } B(5, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 5 + b = 5 \\ 10 + b = 5 \\ b = -5 \end{array}$$

Dus $k: y = 2x - 5$.

b Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 3}{-7 - 5} = \frac{0}{-12} = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} y = b \\ \text{door } C(5, 3) \end{array} \right\} b = 3$$

Dus $l: y = 3$.

c Stel $m: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{250 - 360}{160 - 180} = \frac{-110}{-20} = 5\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 5\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } E(180, 360) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5\frac{1}{2} \cdot 180 + b = 360 \\ 990 + b = 360 \\ b = -630 \end{array}$$

Dus $m: y = 5\frac{1}{2}x - 630$.

d Stel $n: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{58 - 73}{45 - 15} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } G(15, 73) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 15 + b = 73 \\ -7\frac{1}{2} + b = 73 \\ b = 80\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $n: y = -\frac{1}{2}x + 80\frac{1}{2}$.

22 a Ga je uit van $k: y = ax + b$, dan volgt uit $A(0, 2)$ direct dat $b = 2$. Verder kun je uit het hoofd berekenen dat uit $A(0, 2)$ en $B(5, 3)$ volgt $a = \frac{1}{5}$. De formule van k is $y = \frac{1}{5}x + 2$.

b $l: y = -\frac{3}{4}x + 3$

23 Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11 - 8}{20 - 8} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + b \\ \text{door } A(8, 8) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot 8 + b = 8 \\ 2 + b = 8 \\ b = 6 \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{1}{4}x + 6$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-10 - 14}{50 - 2} = \frac{-24}{48} = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } C(2, 14) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 14 \\ -1 + b = 14 \\ b = 15 \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{2}x + 15$.

Snijpunt berekenen van k en l .

$$\frac{1}{4}x + 6 = -\frac{1}{2}x + 15$$

$$x + 24 = -2x + 60$$

$$3x = 36$$

$$x = 12$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + 6 \\ x = 12 \end{array} \right\} y = \frac{1}{4} \cdot 12 + 6 = 3 + 6 = 9$$

Dus $E(12, 9)$.

24 Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7 - 25}{12 - 0} = \frac{-18}{12} = -1\frac{1}{2}$.

Door $A(0, 25)$, dus $k: y = -1\frac{1}{2}x + 25$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{43 - 3}{20 - 4} = \frac{40}{16} = 2\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } C(4, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 3 \\ 10 + b = 3 \\ b = -7 \end{array}$$

Dus $l: y = 2\frac{1}{2}x - 7$.

Snijpunt berekenen van k en l .

$$-1\frac{1}{2}x + 25 = 2\frac{1}{2}x - 7$$

$$-4x = -32$$

$$x = 8$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2\frac{1}{2}x - 7 \\ x = 8 \end{array} \right\} y = 2\frac{1}{2} \cdot 8 - 7 = 20 - 7 = 13$$

Dus $S(8, 13)$.

Bladzijde 20

25 Stel de prijs van een hoed voor de opruiming is x euro.

Janneke kwam een derde van de prijs tekort, dus Janneke had $\frac{2}{3}x$ euro.

Daniëlle had $\frac{3}{4}x$ euro en Anna had $\frac{4}{5}x$ euro.

Tijdens de opruiming is de prijs van een hoed $x - 9,40$ euro.

Nu hebben de zusjes precies genoeg geld voor 3 hoeden.

$$\text{Dus } \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x = 3 \cdot (x - 9,40)$$

$$40x + 45x + 48x = 180(x - 9,40)$$

$$40x + 45x + 48x = 180x - 1692$$

$$-47x = -1692$$

$$x = 36$$

Dus zo'n hoed kostte voor de opruiming 36 euro.

26 $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{36 - 21}{7 - 2} = \frac{15}{5} = 3$

$$\left. \begin{array}{l} N = 3t + b \\ \text{door } A(2, 21) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + b = 21 \\ 6 + b = 21 \\ b = 15 \end{array}$$

Dus $a = 3$ en $b = 15$.

Bladzijde 21

27 a Stel $K = am + b$ met $a = \frac{\Delta K}{\Delta m}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{bij } m = 5 \text{ hoort } K = 10 \\ \text{bij } m = 12 \text{ hoort } K = 115 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta K}{\Delta m} = \frac{115 - 10}{12 - 5} = \frac{105}{7} = 15$$

$$\left. \begin{array}{l} K = 15m + b \\ m = 5 \text{ en } K = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 15 \cdot 5 + b = 10 \\ 75 + b = 10 \\ b = -65 \end{array}$$

Dus $K = 15m - 65$.

b Stel $F = aR + b$ met $a = \frac{\Delta F}{\Delta R}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{bij } R = 15 \text{ hoort } F = 300 \\ \text{bij } R = 42 \text{ hoort } F = 138 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta F}{\Delta R} = \frac{138 - 300}{42 - 15} = \frac{-162}{27} = -6$$

$$\left. \begin{array}{l} F = -6R + b \\ R = 15 \text{ en } F = 300 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -6 \cdot 15 + b = 300 \\ -90 + b = 300 \\ b = 390 \end{array}$$

Dus $F = -6R + 390$.

c Stel $g = an + b$ met $a = \frac{\Delta g}{\Delta n} = \frac{49 - 35}{10 - 6} = \frac{14}{4} = 3\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} g = 3\frac{1}{2}n + b \\ \text{door } (6, 35) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\frac{1}{2} \cdot 6 + b = 35 \\ 21 + b = 35 \\ b = 14 \end{array}$$

Dus $g = 3\frac{1}{2}n + 14$.

28 a Stel $p = aq + b$ met $a = \frac{\Delta p}{\Delta q}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{bij } q = 150 \text{ hoort } p = 7,75 \\ \text{bij } q = 425 \text{ hoort } p = 2,25 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{2,25 - 7,75}{425 - 150} = \frac{-5,5}{275} = -0,02$$

$$\left. \begin{array}{l} p = -0,02q + b \\ q = 150 \text{ en } p = 7,75 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,02 \cdot 150 + b = 7,75 \\ -3 + b = 7,75 \\ b = 10,75 \end{array}$$

Dus $p = -0,02q + 10,75$ (I).

b 1 Uit $p = -0,02q + 10,75$ volgt $0,02q = -p + 10,75$ en dus $q = -50p + 537,5$ (II).

2 $q = ap + b$ met $a = \frac{\Delta q}{\Delta p}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{bij } q = 150 \text{ hoort } p = 7,75 \\ \text{bij } q = 425 \text{ hoort } p = 2,25 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{425 - 150}{2,25 - 7,75} = \frac{275}{-5,5} = -50$$

$$\left. \begin{array}{l} q = -50p + b \\ q = 150 \text{ en } p = 7,75 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -50 \cdot 7,75 + b = 150 \\ -387,5 + b = 150 \\ b = 537,5 \end{array}$$

Dus $q = -50p + 537,5$ (II).

c Met I: $p = -0,02 \cdot 250 + 10,75 = 5,75$.

Dus bij $q = 250$ hoort $p = 5,75$.

Met II: $q = -50 \cdot 4,25 + 537,5 = 325$.

Dus bij $p = 4,25$ hoort $q = 325$.

29 a Stel $k = aV + b$ met $a = \frac{\Delta k}{\Delta V}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{bij } V = 250 \text{ hoort } k = 56 \\ \text{bij } V = 650 \text{ hoort } k = 49,6 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta k}{\Delta V} = \frac{49,6 - 56}{650 - 250} = \frac{-6,4}{400} = -0,016$$

$$\left. \begin{array}{l} k = -0,016V + b \\ V = 250 \text{ en } k = 56 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,016 \cdot 250 + b = 56 \\ -4 + b = 56 \\ b = 60 \end{array}$$

Dus $k = -0,016V + 60$.

b $k = 5$ geeft $-0,016V + 60 = 5$

$$-0,016V = -55$$

$$V = 3437,5$$

Dus 3437,5 km na de start gaat het alarm af.

30 a Neem x de afstand in km tot het station in Houten en t de tijd in minuten met $t = 0$ om 13:00 uur.

Stel $x = at + b$ met $a = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{bij } t = 12 \text{ hoort } x = 18,2 \\ \text{bij } t = 17 \text{ hoort } x = 7,2 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{7,2 - 18,2}{17 - 12} = \frac{-11}{5} = -2,2$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -2,2t + b \\ t = 12 \text{ en } x = 18,2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2,2 \cdot 12 + b = 18,2 \\ -26,4 + b = 18,2 \\ b = 44,6 \end{array}$$

Dus $x = -2,2t + 44,6$.

Bij 13:19 uur hoort $t = 19$.

De afstand is dan $-2,2 \cdot 19 + 44,6 = 2,8$ km.

- b** $x = 0$ geeft $-2,2t + 44,6 = 0$
 $-2,2t = -44,6$
 $t = 20,272\dots$
 $0,272\dots$ minuten $= 0,272\dots \cdot 60$ seconden $= 16,36\dots$ seconden
 Dus om 13:20 uur en 20 seconden.

Bladzijde 22

- 31 a** Stel $G_m = at + b$ met $a = \frac{\Delta G_m}{\Delta t}$.
 bij $t = 6$ hoort $G_m = 77,6$
 bij $t = 36$ hoort $G_m = 84,5$ } $a = \frac{\Delta G_m}{\Delta t} = \frac{84,5 - 77,6}{36 - 6} = \frac{6,9}{30} = 0,23$
 $G_m = 0,23t + b$
 $t = 36$ en $G_m = 84,5$ } $0,23 \cdot 36 + b = 84,5$
 $8,28 + b = 84,5$
 $b = 76,22$
 Dus $G_m = 0,23t + 76,22$.
 Stel $G_v = at + b$ met $a = \frac{\Delta G_v}{\Delta t}$.
 bij $t = 15$ hoort $G_v = 67,5$
 bij $t = 40$ hoort $G_v = 72,0$ } $a = \frac{\Delta G_v}{\Delta t} = \frac{72,0 - 67,5}{40 - 15} = \frac{4,5}{25} = 0,18$
 $G_v = 0,18t + b$
 $t = 40$ en $G_v = 72,0$ } $0,18 \cdot 40 + b = 72,0$
 $7,2 + b = 72,0$
 $b = 64,8$
 Dus $G_v = 0,18t + 64,8$.
 Stel $L_m = at + b$ met $a = \frac{\Delta L_m}{\Delta t}$.
 bij $t = 6$ hoort $L_m = 177,5$
 bij $t = 36$ hoort $L_m = 181,1$ } $a = \frac{\Delta L_m}{\Delta t} = \frac{181,1 - 177,5}{36 - 6} = \frac{3,6}{30} = 0,12$
 $L_m = 0,12t + b$
 $t = 36$ en $L_m = 181,1$ } $0,12 \cdot 36 + b = 181,1$
 $4,32 + b = 181,1$
 $b = 176,78$
 Dus $L_m = 0,12t + 176,78$.
 Stel $L_v = at + b$ met $a = \frac{\Delta L_v}{\Delta t}$.
 bij $t = 14$ hoort $L_v = 166,2$
 bij $t = 40$ hoort $L_v = 167,5$ } $a = \frac{\Delta L_v}{\Delta t} = \frac{167,5 - 166,2}{40 - 14} = \frac{1,3}{26} = 0,05$
 $L_v = 0,05t + b$
 $t = 40$ en $L_v = 167,5$ } $0,05 \cdot 40 + b = 167,5$
 $2 + b = 167,5$
 $b = 165,5$
 Dus $L_v = 0,05t + 165,5$.
b $G_m - G_v = 14$
 $0,23t + 76,22 - (0,18t + 64,8) = 14$
 $0,23t + 76,22 - 0,18t - 64,8 = 14$
 $0,05t + 11,42 = 14$
 $0,05t = 2,58$
 $t = 51,6$
 Dus in het jaar 2031.
 $G_m = 0,23 \cdot 51,6 + 76,22 = 88,088$
 Dus het gemiddelde gewicht van de Nederlandse man is dan 88,1 kg.
c $0,05t + 165,5 = 168$
 $0,05t = 2,5$
 $t = 50$
 $L_m = 0,12 \cdot 50 + 176,78 = 182,78$
 Dus de gemiddelde lengte van de Nederlandse man is dan 182,8 cm.

d $t = 10$

$$G_m = 0,23 \cdot 10 + 76,22 = 78,52$$

$$G_v = 0,18 \cdot 10 + 64,8 = 66,6$$

$$L_m = 0,12 \cdot 10 + 176,78 = 177,98 \text{ cm} = 1,7798 \text{ m}$$

$$L_v = 0,05 \cdot 10 + 165,5 = 166 \text{ cm} = 1,66 \text{ m}$$

$$\text{BMI}_m = \frac{78,52}{1,7798^2} = 24,78...$$

$$\text{BMI}_v = \frac{66,6}{1,66^2} = 24,16...$$

$t = 40$

$$G_m = 0,23 \cdot 40 + 76,22 = 85,42$$

$$G_v = 0,18 \cdot 40 + 64,8 = 72$$

$$L_m = 0,12 \cdot 40 + 176,78 = 181,58 \text{ cm} = 1,8158 \text{ m}$$

$$L_v = 0,05 \cdot 40 + 165,5 = 167,5 \text{ cm} = 1,675 \text{ m}$$

$$\text{BMI}_m = \frac{85,42}{1,8158^2} = 25,90...$$

$$\text{BMI}_v = \frac{72}{1,675^2} = 25,66...$$

Bij de mannen is de toename $25,90... - 24,78... \approx 1,1$.

Bij de vrouwen is de toename $25,66... - 24,16... \approx 1,5$.

Bram heeft dus geen gelijk.

32 Stel de inhoud van het vat is 1 liter.

De koudwaterkraan vult het vat dan met een snelheid van $\frac{1}{10}$ liter water per minuut.

Voor de warmwaterkraan geldt $\frac{1}{12}$ liter per minuut en voor het leeglopen $\frac{1}{20}$ liter per minuut.

Stel het duurt t minuten, dan geldt $(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20}) \cdot t = 1$

$$\frac{2}{15}t = 1$$

$$t = 7\frac{1}{2}$$

Dus het duurt 7,5 minuten.

1.3 Stelsel vergelijkingen

Bladzijde 24

33 a Voor de huizen van type A is in totaal $16 \cdot 500 = 8000 \text{ m}^2$ grond nodig.
De aannemer heeft dan nog $10\,000 - 8000 = 2000 \text{ m}^2$ grond over.

Hij kan dan dus nog $\frac{2000}{200} = 10$ huizen van type B neerzetten.

b Voor de huizen van type B is in totaal $30 \cdot 200 = 6000 \text{ m}^2$ grond nodig.
De aannemer heeft dan nog $10\,000 - 6000 = 4000 \text{ m}^2$ grond over.

Hij kan dan dus nog $\frac{4000}{500} = 8$ huizen van type A neerzetten.

c Tussen x en y bestaat het verband $500x + 200y = 10\,000$.

Bladzijde 26

34 a $12x + 4y = 242,40$

b Stel x kaartjes van 10 euro en y kaartjes van 15 euro. Nu geldt $10x + 15y = 4300$.

35 a $15x + 12y = 2520$
 $12y = -15x + 2520$

$$y = -1\frac{1}{4}x + 210$$

b $3p - 2q = 16\frac{1}{2}$

$$3p = 2q + 16\frac{1}{2}$$

$$p = \frac{2}{3}q + 5\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{c } 5a - 2b &= 16 \\ -2b &= -5a + 16 \\ b &= 2\frac{1}{2}a - 8 \end{aligned}$$

36 a $l: 3x - y = 6$

x	0	2
y	-6	0

$m: x + y = 1$

x	0	1
y	1	0

$n: x - y = 0$

x	0	1
y	0	1

$p: x + 2y = 4$

x	0	4
y	2	0

Figuur, zie hiernaast.

b $l: 3x - y = 6$

$$-y = -3x + 6$$

$$y = 3x - 6$$

$$rc_l = 3$$

$m: x + y = 1$

$$y = -x + 1$$

$$rc_m = -1$$

$n: x - y = 0$

$$-y = -x$$

$$y = x$$

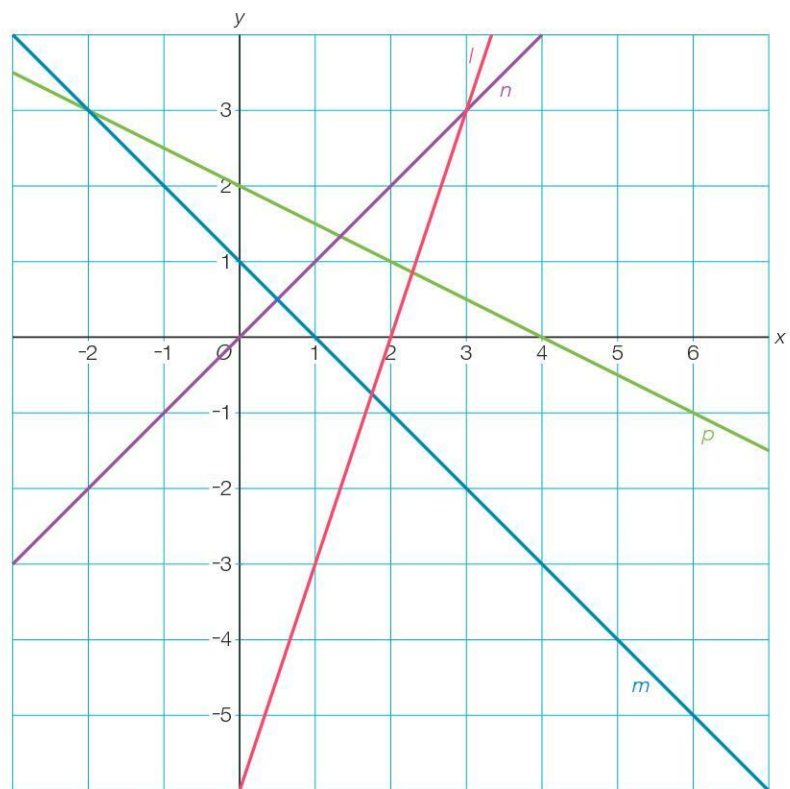
$$rc_n = 1$$

$p: x + 2y = 4$

$$2y = -x + 4$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$rc_p = -\frac{1}{2}$$



37 a $l: 4x - 3y = 24$

Snijden met de x -as, dus $y = 0$.

$$4x = 24$$

$$x = 6$$

Dus $(6, 0)$.

Snijden met de y -as, dus $x = 0$.

$$-3y = 24$$

$$y = -8$$

Dus $(0, -8)$.

Figuur, zie hiernaast.

b $A(8, 3)$ invullen geeft $4 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = 24$

$$32 - 24 = 24$$

Klopt niet, dus A ligt niet op l .

$B(18, 16)$ invullen geeft $4 \cdot 18 - 3 \cdot 16 = 24$

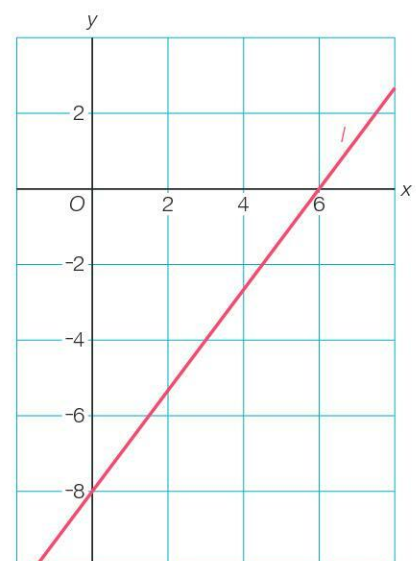
$$72 - 48 = 24$$

Klopt, dus B ligt op l .

$C(-30, -48)$ invullen geeft $4 \cdot -30 - 3 \cdot -48 = 24$

$$-120 + 144 = 24$$

Klopt, dus C ligt op l .



c $(16, p)$ voldoet, dus $4 \cdot 16 - 3 \cdot p = 24$

$$64 - 3p = 24$$

$$-3p = -40$$

$$p = 13\frac{1}{3}$$

d $(q, 48)$ is een oplossing, dus $4 \cdot q - 3 \cdot 48 = 24$

$$4q - 144 = 24$$

$$4q = 168$$

$$q = 42$$

38 a $l: 3x - 4y = 7$

$$-4y = -3x + 7$$

$$y = \frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4}$$

$$rc_l = \frac{3}{4}$$

$m: 3x - 4y = -8$

$$-4y = -3x - 8$$

$$y = \frac{3}{4}x + 2$$

$$rc_m = \frac{3}{4}$$

b Omdat ze dezelfde richtingscoëfficiënt hebben, namelijk $\frac{3}{4}$.

c $A(5, 1)$ op $3x - 4y = c$, dus $c = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 11$.

d $B(3, -1)$ invullen in $3x - 4y = c$ geeft $c = 3 \cdot 3 - 4 \cdot -1 = 13$.

Dus $k: 3x - 4y = 13$.

39 $A(5, 8)$ invullen in $2x + y = c$ geeft $c = 2 \cdot 5 + 8 = 18$.

Dus $m: 2x + y = 18$.

40 Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-p - 3p}{7p - p} = \frac{-4p}{6p} = -\frac{2}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(-1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot -1 + b = 3 \\ \frac{2}{3} + b = 3 \\ b = 2\frac{1}{3} \end{array}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{1}{3}$$

$$3y = -2x + 7$$

Dus $k: 2x + 3y = 7$.

Bladzijde 27

41 a $l: 2x + y = 3$

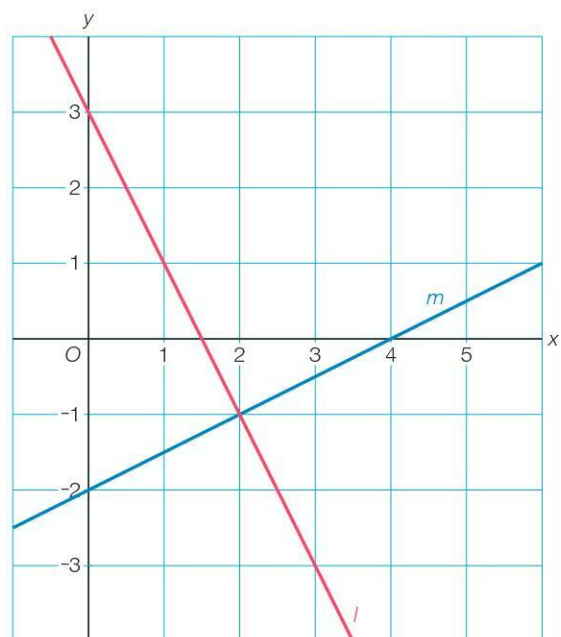
x	0	1
y	3	1

$m: x - 2y = 4$

x	0	4
y	-2	0

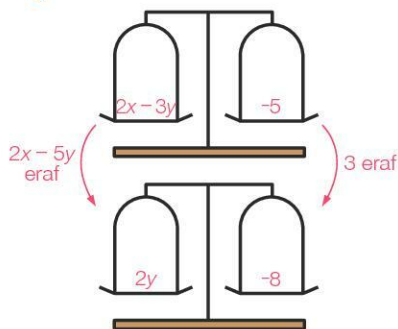
b Het snijpunt is $(2, -1)$.

c Het getallenpaar $(x, y) = (2, -1)$ is zowel oplossing van $2x + y = 3$ als van $x - 2y = 4$.



42

a



Eerst in evenwicht, want $2x - 3y = -5$.

Later weer in evenwicht, want $2x - 5y = 3$.

b Het aftrekken van de vergelijkingen levert $x = 17$, het optellen levert $3x - 6y = 13$.

Bij het aftrekken lukt het om de variabele y kwijt te raken.

c Het aftrekken van de vergelijkingen levert $-x + 6y = -1$, het optellen levert $3x = 15$.

Bij het optellen lukt het om de variabele y kwijt te raken.

43

a

$$\begin{cases} 5x - 4y = -8 \\ -x + 4y = -12 \end{cases} +$$

$$\frac{4x}{4x} = -20 +$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ -x + 4y = -12 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 5 + 4y = -12 \\ 4y = -17 \end{array} \right.$$

$$y = -4\frac{1}{4}$$

De oplossing is $(x, y) = (-5, -4\frac{1}{4})$.

b

$$\begin{cases} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} -$$

$$\frac{-2y}{-2y} = 8 -$$

$$\begin{cases} y = -4 \\ -2x + y = 7 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} -2x - 4 = 7 \\ -2x = 11 \end{array} \right.$$

$$x = -5\frac{1}{2}$$

De oplossing is $(x, y) = (-5\frac{1}{2}, -4)$.

c

$$\begin{cases} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} +$$

$$\frac{-3x}{-3x} = -9 +$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} -6 + 3y = -1 \\ 3y = 5 \end{array} \right.$$

$$y = 1\frac{2}{3}$$

De oplossing is $(x, y) = (3, 1\frac{2}{3})$.

44

a

'Leen heeft 50 munten' geeft $x + y = 50$.

'Het bedrag is € 87' geeft $x + 2y = 87$.

b

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x + 2y = 87 \end{cases} -$$

$$\frac{-y}{-y} = -37 -$$

$$\begin{cases} y = 37 \\ x + y = 50 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x + 37 = 50 \\ x = 13 \end{array} \right.$$

Leen heeft 13 munten van 1 euro.

- 45** Stel van elke driehoek de lengte van de basis x en de lengte van de benen y .

Omtrek driehoek is 14 geeft $x + 2y = 14$.

Omtrek figuur is 30 geeft $5x + 2y = 30$.

$$\begin{cases} x + 2y = 14 \\ 5x + 2y = 30 \end{cases} -$$

$$\begin{array}{r} -4x \quad \quad = -16 \\ x = 4 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 14 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 2y = 14 \\ 2y = 10 \\ y = 5 \end{cases}$$

De zijden zijn 4 (basis) en 5 (benen).

46
$$\begin{cases} a + b = 12 \\ a + c = 13 \end{cases} -$$

$$\begin{array}{r} b - c = -1 \\ b + c = 15 \end{array} +$$

$$\begin{array}{r} 2b \quad \quad = 14 \\ b = 7 \end{array}$$

$$\begin{cases} b = 7 \\ b + c = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 + c = 15 \\ c = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 7 \\ a + b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 7 = 12 \\ a = 5 \end{cases}$$

Dus $a = 5$, $b = 7$ en $c = 8$.

47 a
$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 5x - y = 23 \end{array}$$

Er is geen variabele geëlimineerd.

b
$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} -$$

$$\begin{array}{r} x - 7y = -9 \end{array}$$

Er is geen variabele geëlimineerd.

- c** Als je linker- en rechterlid van de bovenste vergelijking met 3 vermenigvuldigt en van de onderste vergelijking met 4, dan krijg je een stelsel waarmee je wel door optellen een variabele elimineert.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \begin{array}{l} |3| \\ |4| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 9x - 12y = 21 \\ 8x + 12y = 64 \end{cases}$$

Bladzijde 30

48 a
$$\begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \begin{array}{l} |1| \\ |5| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 10x + 5y = 0 \end{cases} -$$

$$\begin{array}{r} -7x \quad \quad = -7 \\ x = 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 + y = 0 \\ 2 + y = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

De oplossing is $(x, y) = (1, -2)$.

b
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - y = 19 \end{cases} \begin{array}{l} |1| \\ |2| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 6x - 2y = 38 \end{cases} -$$

$$\begin{array}{r} -5x \quad \quad = -35 \\ x = 7 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ 3x - y = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 7 - y = 19 \\ 21 - y = 19 \\ -y = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

De oplossing is $(x, y) = (7, 2)$.

$$\text{c } \begin{cases} 4x + y = 13 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right. \text{ geeft } \begin{cases} 8x + 2y = 26 \\ x - 2y = 1 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 9x = 27 \\ x = 3 \\ 4x + y = 13 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 9x = 27 \\ x = 3 \\ 4x + y = 13 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 3 + y = 13 \\ 12 + y = 13 \\ y = 1 \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (3, 1)$.

$$\text{49 a } \begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ x + 3y = -7 \end{cases} \begin{array}{c} 1 \\ 5 \end{array} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 5 \end{array} \right. \text{ geeft } \begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ 5x + 15y = -35 \end{cases} -$$

$$\begin{array}{r} -13y = 104 \\ y = -8 \\ x + 3y = -7 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} -13y = 104 \\ y = -8 \\ x + 3y = -7 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} x + 3 \cdot -8 = -7 \\ x - 24 = -7 \\ x = 17 \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (17, -8)$.

$$\text{b } \begin{cases} 2x - 5y = -19 \\ 5x + 4y = 35 \end{cases} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} \left| \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} \right. \text{ geeft } \begin{cases} 8x - 20y = -76 \\ 25x + 20y = 175 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 33x = 99 \\ x = 3 \\ 2x - 5y = -19 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 33x = 99 \\ x = 3 \\ 2x - 5y = -19 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3 - 5y = -19 \\ 6 - 5y = -19 \\ -5y = -25 \\ y = 5 \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (3, 5)$.

$$\text{c } \begin{cases} 0,8x + 0,2y = 1 \\ 0,3x - 0,3y = 1,5 \end{cases} \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \left| \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right. \text{ geeft } \begin{cases} 2,4x + 0,6y = 3 \\ 0,6x - 0,6y = 3 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 3x = 6 \\ x = 2 \\ 0,8x + 0,2y = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 3x = 6 \\ x = 2 \\ 0,8x + 0,2y = 1 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 0,8 \cdot 2 + 0,2y = 1 \\ 1,6 + 0,2y = 1 \\ 0,2y = -0,6 \\ y = -3 \end{array}$$

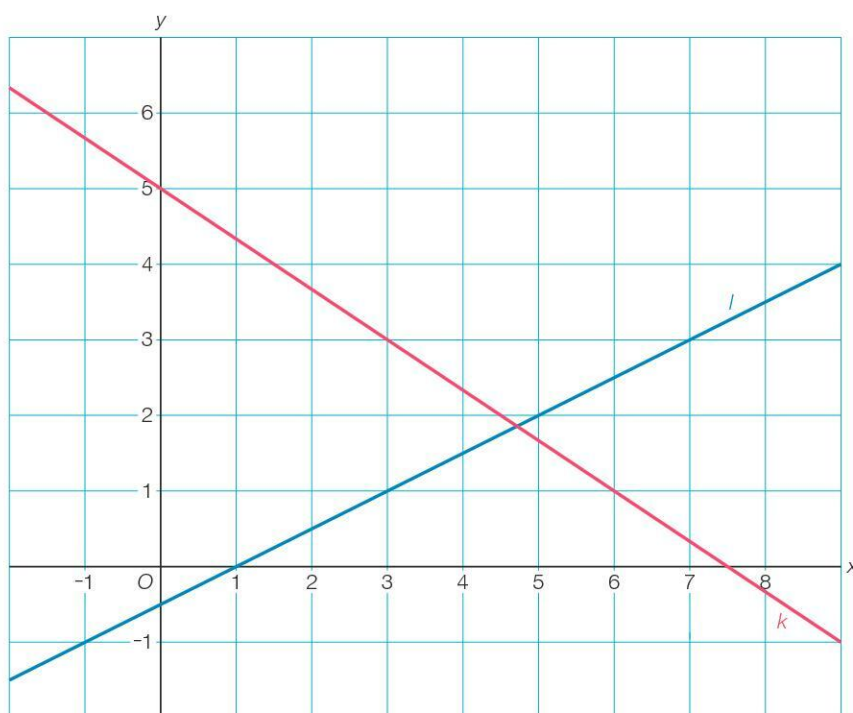
De oplossing is $(x, y) = (2, -3)$.

$$\text{50 a } k: 2x + 3y = 15$$

x	0	3
y	5	3

$$l: x - 2y = 1$$

x	-1	1
y	-1	0



b Je moet het stelsel $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ oplossen.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{geeft} \\ \end{array} \right. \begin{cases} 4x + 6y = 30 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases} +$$

$$\frac{7x}{7x} = 33 +$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 4\frac{5}{7} \\ 2x + 3y = 15 \end{array} \right\} 2 \cdot 4\frac{5}{7} + 3y = 15$$

$$9\frac{3}{7} + 3y = 15$$

$$3y = 5\frac{4}{7}$$

$$y = 1\frac{6}{7}$$

Het snijpunt is $(4\frac{5}{7}, 1\frac{6}{7})$.

51 a $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ x + 4y = 38 \end{cases} \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{geeft} \\ \end{array} \right. \begin{cases} 6x - 4y = -24 \\ x + 4y = 38 \end{cases} +$

$$\frac{7x}{7x} = 14 +$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ x + 4y = 38 \end{array} \right\} 2 + 4y = 38$$

$$4y = 36$$

$$y = 9$$

Het snijpunt is $(2, 9)$.

b $\begin{cases} 2x + 5y = 26 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \begin{array}{l} 2 \\ 5 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{geeft} \\ \end{array} \right. \begin{cases} 4x + 10y = 52 \\ 15x - 10y = 5 \end{cases} +$

$$\frac{19x}{19x} = 57 +$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ 2x + 5y = 26 \end{array} \right\} 2 \cdot 3 + 5y = 26$$

$$6 + 5y = 26$$

$$5y = 20$$

$$y = 4$$

Het snijpunt is $(3, 4)$.

Bladzijde 31

52 Stel het aantal kg appels dat de groenteman verkoopt x en het aantal kg peren y .

Uit de gegevens volgt het stelsel

$$\begin{cases} x + y = 295 \\ 1,4x + 1,7y = 452 \end{cases} \begin{array}{l} 1,7 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{geeft} \\ \end{array} \right. \begin{cases} 1,7x + 1,7y = 501,5 \\ 1,4x + 1,7y = 452 \end{cases} -$$

$$\frac{0,3x}{0,3x} = 49,5 -$$

$$x = 165$$

De groenteman heeft die dag 165 kg appels verkocht.

53 Het totale aantal jaren is $15 \cdot 16,4 = 246$.

Stel het aantal jongens x en het aantal meisjes y .

Uit de gegevens volgt het stelsel

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 15,6x + 16,8y = 246 \end{cases} \begin{array}{l} 16,8 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{geeft} \\ \end{array} \right. \begin{cases} 16,8x + 16,8y = 252 \\ 15,6x + 16,8y = 246 \end{cases} -$$

$$\frac{1,2x}{1,2x} = 6 -$$

$$x = 5$$

Er zijn dus 5 jongens op de verjaardag.

54 a $\begin{cases} 4x - y = 13 \\ 2x + 3y = -11 \end{cases} \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{geeft} \\ \end{array} \right. \begin{cases} 12x - 3y = 39 \\ 2x + 3y = -11 \end{cases} +$

$$\frac{14x}{14x} = 28 +$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ 4x - y = 13 \end{array} \right\} 4 \cdot 2 - y = 13$$

$$8 - y = 13$$

$$-y = 5$$

$$y = -5$$

Dus de oplossing is $(x, y) = (2, -5)$.

$$\mathbf{b} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x - 4y = 10 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 4y = 14 \\ 5x - 4y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x \\ 3x - 2y = 7 \end{array} = 4 \quad \left. \begin{array}{l} 3 \cdot 4 - 2y = 7 \\ 12 - 2y = 7 \\ -2y = -5 \\ y = 2\frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Dus het snijpunt is $(4, 2\frac{1}{2})$.

$$\mathbf{c} \quad \text{Stel de aannemer bouwt } x \text{ huizen van type A en } y \text{ van type B.}$$

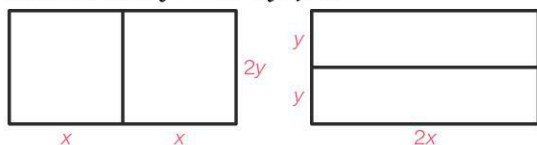
$$\begin{cases} 325x + 175y = 8800 \\ x + y = 40 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 175 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 325x + 175y = 8800 \\ 175x + 175y = 7000 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 150x \\ 325x + 175y = 8800 \\ 175x + 175y = 7000 \end{array} = 1800$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 12 \\ x + y = 40 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 12 + y = 40 \\ y = 28 \end{array}$$

Hij bouwt dus 12 huizen van type A en 28 van type B.

$\mathbf{d}$ Stel het velletje is $2x$ bij $2y$ cm.



Bij de linker figuur krijg je de vergelijking $2x + 4y = 40$.

Bij de rechter figuur $4x + 2y = 50$.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 40 \\ 4x + 2y = 50 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 0,5 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} x + 2y = 20 \\ 4x + 2y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -3x \\ x + 2y = 20 \\ 4x + 2y = 50 \end{array} = -30$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 10 \\ 4x + 2y = 50 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 10 + 2y = 50 \\ 40 + 2y = 50 \\ 2y = 10 \\ y = 5 \end{array}$$

Dus het oorspronkelijke velletje is 20 bij 10 cm.

De omtrek daarvan is 60 cm.

55 a Telkens worden de laatste twee getallen bij elkaar geteld om het volgende getal te krijgen.

Het zevende getal is dus $2a + 3b + 3a + 5b = 5a + 8b$.

Het achtste getal is $3a + 5b + 5a + 8b = 8a + 13b$.

$$\mathbf{b} \quad \begin{cases} 5a + 8b = 34 \\ 8a + 13b = 55 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 8 \\ 5 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 40a + 64b = 272 \\ 40a + 65b = 275 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -b \\ 40a + 64b = 272 \\ 40a + 65b = 275 \end{array} = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} b = 3 \\ 5a + 8b = 34 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5a + 8 \cdot 3 = 34 \\ 5a + 24 = 34 \\ 5a = 10 \\ a = 2 \end{array}$$

Dus $a = 2$ en $b = 3$.

56 $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases} \left| \begin{array}{c} q \\ b \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} aqx + bqy = cq \\ bpx + bqy = br \end{cases}$

$$\begin{array}{r} aqx - bpx = cq - br \\ (aq - bp)x = cq - br \\ x = \frac{cq - br}{aq - bp} \end{array}$$

Dus $x = \frac{cq - br}{aq - bp}$.

$$\begin{aligned}
 & \text{57 } y = 4x - 10 \text{ geeft } -4x + y = -10 \\
 & \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ -4x + y = -10 \end{cases} \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 6y = 24 \\ -4x + y = -10 \end{cases} + \\
 & \qquad \qquad \qquad 7y = 14 \\
 & \qquad \qquad \qquad y = 2 \\
 & \qquad \qquad \qquad 2x + 3y = 12 \left. \begin{array}{l} y = 2 \\ 2x + 3 \cdot 2 = 12 \\ 2x + 6 = 12 \\ 2x = 6 \\ x = 3 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Het snijpunt is (3, 2).

Bladzijde 32

$$\begin{aligned}
 & \text{58 a } \begin{cases} 2x + 2y = 9 \\ y = 4x - 3 \end{cases} \\
 & \text{Substitueren van } y = 4x - 3 \text{ in } 2x + 2y = 9 \text{ geeft } 2x + 2(4x - 3) = 9 \\
 & \qquad \qquad \qquad 2x + 8x - 6 = 9 \\
 & \qquad \qquad \qquad 10x = 15 \\
 & \qquad \qquad \qquad x = 1\frac{1}{2} \\
 & \qquad \qquad \qquad y = 4x - 3 \left. \begin{array}{l} x = 1\frac{1}{2} \\ y = 4 \cdot 1\frac{1}{2} - 3 = 3 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

De oplossing is $(x, y) = (1\frac{1}{2}, 3)$.

$$\begin{aligned}
 & \text{b } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ 3x + 6y = 8 \end{cases} \\
 & \text{Substitueren van } y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ in } 3x + 6y = 8 \text{ geeft } 3x + 6(\frac{1}{2}x + 1) = 8 \\
 & \qquad \qquad \qquad 3x + 3x + 6 = 8 \\
 & \qquad \qquad \qquad 6x = 2 \\
 & \qquad \qquad \qquad x = \frac{1}{3} \\
 & \qquad \qquad \qquad y = \frac{1}{2}x + 1 \left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 = 1\frac{1}{6} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

De oplossing is $(x, y) = (\frac{1}{3}, 1\frac{1}{6})$.

$$\begin{aligned}
 & \text{c } \begin{cases} x = 5y - 3 \\ 3x + 4y = 29 \end{cases} \\
 & \text{Substitueren van } x = 5y - 3 \text{ in } 3x + 4y = 29 \text{ geeft } 3(5y - 3) + 4y = 29 \\
 & \qquad \qquad \qquad 15y - 9 + 4y = 29 \\
 & \qquad \qquad \qquad 19y = 38 \\
 & \qquad \qquad \qquad y = 2 \\
 & \qquad \qquad \qquad x = 5y - 3 \left. \begin{array}{l} y = 2 \\ x = 5 \cdot 2 - 3 = 7 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

De oplossing is $(x, y) = (7, 2)$.

$$\begin{aligned}
 & \text{59 a } \begin{cases} y = x - 4 \\ 6x + 4y = 19 \end{cases} \\
 & \text{Substitueren van } y = x - 4 \text{ in } 6x + 4y = 19 \text{ geeft } 6x + 4(x - 4) = 19 \\
 & \qquad \qquad \qquad 6x + 4x - 16 = 19 \\
 & \qquad \qquad \qquad 10x = 35 \\
 & \qquad \qquad \qquad x = 3\frac{1}{2} \\
 & \qquad \qquad \qquad y = x - 4 \left. \begin{array}{l} x = 3\frac{1}{2} \\ y = 3\frac{1}{2} - 4 = -\frac{1}{2} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

De oplossing is $(x, y) = (3\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned}
 & \text{b } \begin{cases} 7x + 5y = 56 \\ x = 1\frac{1}{2}y + 8 \end{cases} \\
 & \text{Substitueren van } x = 1\frac{1}{2}y + 8 \text{ in } 7x + 5y = 56 \text{ geeft } 7(1\frac{1}{2}y + 8) + 5y = 56 \\
 & \qquad \qquad \qquad 10\frac{1}{2}y + 56 + 5y = 56 \\
 & \qquad \qquad \qquad 15\frac{1}{2}y = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad y = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad x = 1\frac{1}{2}y + 8 \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 1\frac{1}{2} \cdot 0 + 8 = 8 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

De oplossing is $(x, y) = (8, 0)$.

$$\text{c} \quad \begin{cases} x = 1\frac{1}{2}y + 20\frac{1}{2} \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

Substitueren van $x = 1\frac{1}{2}y + 20\frac{1}{2}$ in $3x + 2y = 1$ geeft $3(1\frac{1}{2}y + 20\frac{1}{2}) + 2y = 1$

$$4\frac{1}{2}y + 61\frac{1}{2} + 2y = 1$$

$$6\frac{1}{2}y = -60\frac{1}{2}$$

$$13y = -121$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -9\frac{4}{13} \\ x = 1\frac{1}{2}y + 20\frac{1}{2} \end{array} \right\} x = 1\frac{1}{2} \cdot -9\frac{4}{13} + 20\frac{1}{2} = 6\frac{7}{13}$$

De oplossing is $(x, y) = (6\frac{7}{13}, -9\frac{4}{13})$.

$$\text{60} \quad x = 5 \text{ en } y = 4 \text{ invullen in } \begin{cases} y = ax + b \\ bx + ay = -22 \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} 4 = 5a + b \\ 5b + 4a = -22 \end{cases} \text{ oftewel}$$

$$\begin{cases} 5a + b = 4 \\ 4a + 5b = -22 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 5 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 25a + 5b = 20 \\ 4a + 5b = -22 \\ \hline 21a = 42 \\ a = 2 \\ 5a + b = 4 \end{cases} \left. \begin{array}{l} 5 \cdot 2 + b = 4 \\ 10 + b = 4 \\ b = -6 \end{array} \right\}$$

Dus $a = 2$ en $b = -6$.

1.4 Kwadratische verbanden

Bladzijde 34

$$\text{61} \quad \text{a} \quad (x+3)(x+5) = x^2 + 5x + 3x + 3 \cdot 5 = x^2 + 8x + 15$$

$$\text{b} \quad 15 = 3 \cdot 5$$

$$8 = 3 + 5$$

$$\text{c} \quad x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$(x+3)(x+5) = 0$$

$$x+3 = 0 \text{ of } x+5 = 0$$

$$x = -3 \text{ of } x = -5$$

De oplossingen zijn $x = -3$ en $x = -5$.

Bladzijde 35

$$\text{62} \quad \text{a} \quad x^2 - 7x - 18 = 0$$

$$(x+2)(x-9) = 0$$

$$x+2 = 0 \vee x-9 = 0$$

$$x = -2 \vee x = 9$$

$$\text{b} \quad x^2 + 5x = 6$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x-1)(x+6) = 0$$

$$x-1 = 0 \vee x+6 = 0$$

$$x = 1 \vee x = -6$$

$$\text{c} \quad x^2 = 5x$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0$$

$$x = 0 \vee x-5 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 5$$

$$\text{d} \quad x^2 + x = 3x + 15$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(x+3)(x-5) = 0$$

$$x+3 = 0 \vee x-5 = 0$$

$$x = -3 \vee x = 5$$

$$\text{e} \quad 4x^2 = 8x$$

$$4x^2 - 8x = 0$$

$$4x(x-2) = 0$$

$$4x = 0 \vee x-2 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

$$\text{f} \quad x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x+1 = 0 \vee x-2 = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

$$\text{63} \quad \text{a} \quad 3x^2 - 12x = 36$$

$$3x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x+2)(x-6) = 0$$

$$x+2 = 0 \vee x-6 = 0$$

$$x = -2 \vee x = 6$$

$$\text{b} \quad -x^2 = 13x - 48$$

$$-x^2 - 13x + 48 = 0$$

$$x^2 + 13x - 48 = 0$$

$$(x-3)(x+16) = 0$$

$$x-3 = 0 \vee x+16 = 0$$

$$x = 3 \vee x = -16$$

c $(3x - 1)(x + 2) = 0$
 $3x - 1 = 0 \vee x + 2 = 0$
 $3x = 1 \vee x = -2$
 $x = \frac{1}{3} \vee x = -2$

d $7x^2 + 8x = x + 84$
 $7x^2 + 7x - 84 = 0$
 $x^2 + x - 12 = 0$
 $(x - 3)(x + 4) = 0$
 $x - 3 = 0 \vee x + 4 = 0$
 $x = 3 \vee x = -4$

e $x(x - 2) = 48$
 $x^2 - 2x - 48 = 0$
 $(x + 6)(x - 8) = 0$
 $x + 6 = 0 \vee x - 8 = 0$
 $x = -6 \vee x = 8$

f $(x - 1)(x - 2) = 12$
 $x^2 - 3x + 2 = 12$
 $x^2 - 3x - 10 = 0$
 $(x + 2)(x - 5) = 0$
 $x + 2 = 0 \vee x - 5 = 0$
 $x = -2 \vee x = 5$

64 a Bij het oplossen van de vergelijking $4x^2 - 25x = 0$ breng je x buiten haakjes: $x(4x - 25) = 0$.

Bij het oplossen van de vergelijking $4x^2 - 25 = 0$ herleid je tot $x^2 = 6\frac{1}{4}$.

b $4x^2 + 25 = 0$
 $4x^2 = -25$

$x^2 = -6\frac{1}{4}$
 Er zijn geen oplossingen mogelijk.

c Bij het oplossen van de vergelijking $x(x + 2) = 0$ kun je direct gebruiken dat $AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

Bij het oplossen van $x(x + 2) = 8$ werk je eerst de haakje weg $x(x + 2) = 8$
 $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Bladzijde 37

65 a $(x - 4)^2 = 25$
 $x - 4 = 5 \vee x - 4 = -5$
 $x = 9 \vee x = -1$

b $(x - 4)^2 = 2x$
 $x^2 - 8x + 16 = 2x$
 $x^2 - 10x + 16 = 0$
 $(x - 2)(x - 8) = 0$
 $x = 2 \vee x = 8$

c $x^2 + 6 = 5x$
 $x^2 - 5x + 6 = 0$
 $(x - 2)(x - 3) = 0$
 $x = 2 \vee x = 3$

d $x(x - 1) = 12$
 $x^2 - x - 12 = 0$
 $(x + 3)(x - 4) = 0$
 $x = -3 \vee x = 4$

e $2x^2 = 5x$
 $2x^2 - 5x = 0$
 $x(2x - 5) = 0$
 $x = 0 \vee 2x - 5 = 0$
 $x = 0 \vee 2x = 5$
 $x = 0 \vee x = 2\frac{1}{2}$

f $x^2 + 4 = 1$
 $x^2 = -3$
 geen oplossing

66 a $3x^2 - 6x = 24$
 $3x^2 - 6x - 24 = 0$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x + 2)(x - 4) = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$

b $3x^2 - 6x = -3(x - 6)$
 $3x^2 - 6x = -3x + 18$
 $3x^2 - 3x - 18 = 0$
 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x + 2)(x - 3) = 0$
 $x = -2 \vee x = 3$

c $2x^2 - 3x = 2$
 $2x^2 - 3x - 2 = 0$
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$, dus $\sqrt{D} = 5$
 $x = \frac{3+5}{4} = 2 \vee x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$

d $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$
 $x^2 - 4x - 12 = 0$
 $(x + 2)(x - 6) = 0$
 $x = -2 \vee x = 6$

e $x^2 - 3x = 5(x - 3)$
 $x^2 - 3x = 5x - 15$
 $x^2 - 8x + 15 = 0$
 $(x - 3)(x - 5) = 0$
 $x = 3 \vee x = 5$

f $2x^2 - 5x = 3x$
 $2x^2 - 8x = 0$
 $2x(x - 4) = 0$
 $x = 0 \vee x = 4$

67 a $6 - x^2 = -2$
 $-x^2 = -8$
 $x^2 = 8$
 $x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}$

b $2x^2 = 9x + 5$
 $2x^2 - 9x - 5 = 0$
 $D = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 121$, dus $\sqrt{D} = 11$
 $x = \frac{9+11}{4} = 5 \vee x = \frac{9-11}{4} = -\frac{1}{2}$

c $3(x+2)^2 + 5 = 80$
 $3(x+2)^2 = 75$
 $(x+2)^2 = 25$
 $x+2 = 5 \vee x+2 = -5$
 $x = 3 \vee x = -7$

68 a $x^2 - 5x = 0$
 $x(x-5) = 0$
 $x = 0 \vee x = 5$

b $x^2 - 5x = 14$
 $x^2 - 5x - 14 = 0$
 $(x+2)(x-7) = 0$
 $x = -2 \vee x = 7$

c $x^2 - 5 = 14$
 $x^2 = 19$
 $x = \sqrt{19} \vee x = -\sqrt{19}$

d $x^2 - 5 = 14x$
 $x^2 - 14x - 5 = 0$
 $D = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -5 = 216$
 $x = \frac{14 + \sqrt{216}}{2} \vee x = \frac{14 - \sqrt{216}}{2}$

e $(2x-1)(3x+6) = 0$
 $2x-1 = 0 \vee 3x+6 = 0$
 $2x = 1 \vee 3x = -6$
 $x = \frac{1}{2} \vee x = -2$

Bladzijde 38

69 a $2x^2 - 13x = 3(x-10)$
 $2x^2 - 13x = 3x - 30$
 $2x^2 - 16x + 30 = 0$
 $x^2 - 8x + 15 = 0$
 $(x-3)(x-5) = 0$
 $x = 3 \vee x = 5$

b $3x^2 + 2x + 7 = 7(x+1)$
 $3x^2 + 2x + 7 = 7x + 7$
 $3x^2 - 5x = 0$
 $x(3x-5) = 0$
 $x = 0 \vee 3x-5 = 0$
 $x = 0 \vee 3x = 5$
 $x = 0 \vee x = \frac{5}{3}$

c $100(x^2 - 1) = 525$
 $100x^2 - 100 = 525$
 $100x^2 = 625$
 $x^2 = 6\frac{1}{4}$
 $x = 2\frac{1}{2} \vee x = -2\frac{1}{2}$

d $\frac{1}{2}(x-3)^2 - 3 = 5$
 $\frac{1}{2}(x-3)^2 = 8$
 $(x-3)^2 = 16$
 $x-3 = 4 \vee x-3 = -4$
 $x = 7 \vee x = -1$

e $-(2x-1)^2 + 5 = 1$
 $-(2x-1)^2 = -4$
 $(2x-1)^2 = 4$
 $2x-1 = 2 \vee 2x-1 = -2$
 $2x = 3 \vee 2x = -1$
 $x = 1\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

f $8 - 3(4x-5)^2 = 5$
 $-3(4x-5)^2 = -3$
 $(4x-5)^2 = 1$
 $4x-5 = 1 \vee 4x-5 = -1$
 $4x = 6 \vee 4x = 4$
 $x = 1\frac{1}{2} \vee x = 1$

f $(2x-1)(3x+6) = 9x$
 $6x^2 + 12x - 3x - 6 - 9x = 0$
 $6x^2 - 6 = 0$
 $6x^2 = 6$
 $x^2 = 1$
 $x = 1 \vee x = -1$

g $3x(2x-1) = 6$
 $6x^2 - 3x - 6 = 0$
 $2x^2 - x - 2 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 17$
 $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \vee x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}$

h $3x(2x-1) = 6 - 9x$
 $6x^2 - 3x - 6 + 9x = 0$
 $6x^2 + 6x - 6 = 0$
 $x^2 + x - 1 = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$
 $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

d $2(x-3)^2 = 3x - 10$
 $2(x^2 - 6x + 9) = 3x - 10$
 $2x^2 - 12x + 18 = 3x - 10$
 $2x^2 - 15x + 28 = 0$
 $D = (-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 28 = 1$, dus $\sqrt{D} = 1$
 $x = \frac{15+1}{4} = 4 \vee x = \frac{15-1}{4} = 3\frac{1}{2}$

e $5(4x-1)(6x-5) = 0$
 $4x-1 = 0 \vee 6x-5 = 0$
 $4x = 1 \vee 6x = 5$
 $x = \frac{1}{4} \vee x = \frac{5}{6}$

f $\frac{1}{4}(2x-3)^2 - 3 = 1$
 $\frac{1}{4}(2x-3)^2 = 4$
 $(2x-3)^2 = 16$
 $2x-3 = 4 \vee 2x-3 = -4$
 $2x = 7 \vee 2x = -1$
 $x = 3\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

70 a $(x+3)^2 = 16x$
 $x^2 + 6x + 9 = 16x$
 $x^2 - 10x + 9 = 0$
 $(x-1)(x-9) = 0$
 $x = 1 \vee x = 9$

b $(2x+3)^2 = -16$
geen oplossing

c $2(x+3)^2 = -4x$
 $2(x^2 + 6x + 9) = -4x$
 $2x^2 + 12x + 18 = -4x$
 $2x^2 + 16x + 18 = 0$
 $x^2 + 8x + 9 = 0$
 $D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 28$
 $x = \frac{-8 + \sqrt{28}}{2} \vee x = \frac{-8 - \sqrt{28}}{2}$

d $(2x+3)(4-x) = 9$
 $8x - 2x^2 + 12 - 3x = 9$
 $-2x^2 + 5x + 3 = 0$
 $D = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 49$, dus $\sqrt{D} = 7$
 $x = \frac{-5 + 7}{-4} = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{-5 - 7}{-4} = 3$

e $(-4x+3)^2 = 36$
 $-4x+3 = 6 \vee -4x+3 = -6$
 $-4x = 3 \vee -4x = -9$
 $x = -\frac{3}{4} \vee x = 2\frac{1}{4}$

f $-4(x+3)^2 = 4x$
 $-4(x^2 + 6x + 9) = 4x$
 $-4x^2 - 24x - 36 = 4x$
 $-4x^2 - 28x - 36 = 0$
 $x^2 + 7x + 9 = 0$
 $D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 13$
 $x = \frac{-7 + \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{13}}{2}$

g $x^2 - (x+1)^2 = (x+3)^2$
 $x^2 - (x^2 + 2x + 1) = x^2 + 6x + 9$
 $x^2 - x^2 - 2x - 1 = x^2 + 6x + 9$
 $-x^2 - 8x - 10 = 0$
 $x^2 + 8x + 10 = 0$
 $D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 24$
 $x = \frac{-8 + \sqrt{24}}{2} \vee x = \frac{-8 - \sqrt{24}}{2}$

h $(x+3)^2 + (x+2)^2 = 25$
 $x^2 + 6x + 9 + x^2 + 4x + 4 = 25$
 $2x^2 + 10x - 12 = 0$
 $x^2 + 5x - 6 = 0$
 $(x-1)(x+6) = 0$
 $x = 1 \vee x = -6$

71 Stel dat de houten kubus ribben heeft van x cm, dus inhoud $= x^3 \text{ cm}^3$.
Na het zagen blijft er een kubus over met ribben $x-2$ cm met inhoud $= (x-2)^3 \text{ cm}^3$.
Dus $x^3 - (x-2)^3 = 1538$

$$\begin{aligned} x^3 - (x-2)(x-2)^2 &= 1538 \\ x^3 - (x-2)(x^2 - 4x + 4) &= 1538 \\ x^3 - (x^3 - 4x^2 + 4x - 2x^2 + 8x - 8) &= 1538 \\ x^3 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) &= 1538 \\ x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 1538 &= 0 \\ 6x^2 - 12x - 1530 &= 0 \\ x^2 - 2x - 255 &= 0 \\ (x+15)(x-17) &= 0 \\ x = -15 \vee x = 17 \end{aligned}$$

$x = -15$ kan niet, dus $x = 17$ en dit geeft dat de inhoud van de oorspronkelijke kubus gelijk is aan $17^3 = 4913 \text{ cm}^3$.

Bladzijde 39

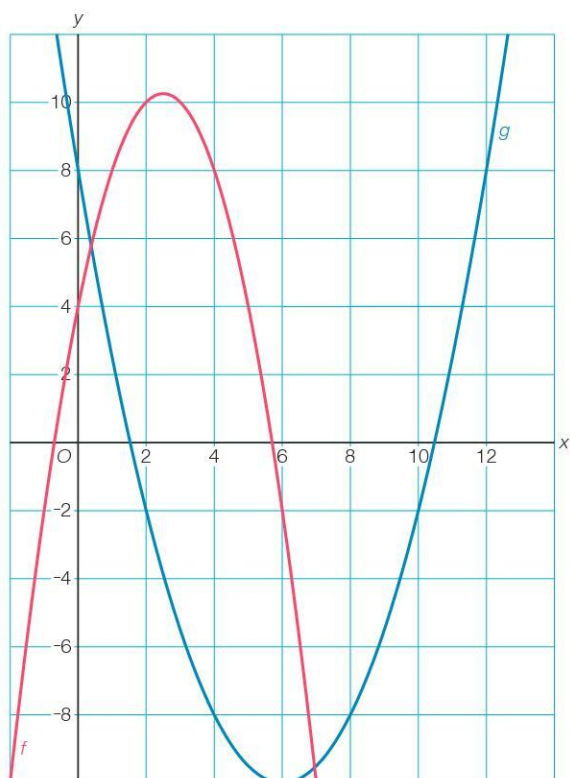
72 Parabool p_1 is een bergparabool, dus bij p_1 hoort formule II.
Parabool p_2 is een dalparabool, dus bij p_2 hoort formule I.

73

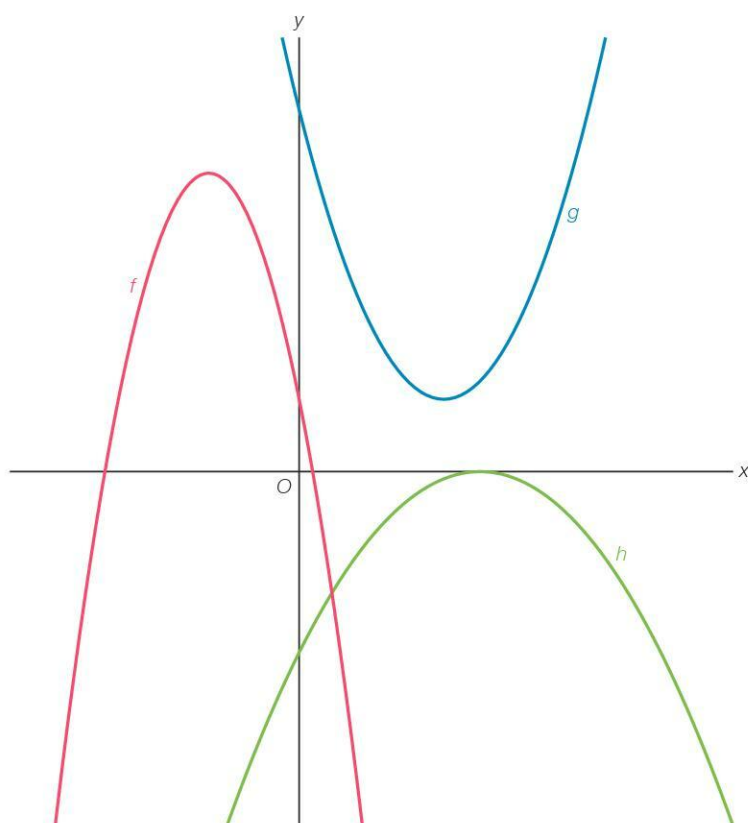
a

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-2	4	8	10	10	8	4	-2

x	0	2	4	6	8	10	12
$g(x)$	8	-2	-8	-10	-8	-2	8



74



75 a $f(3) = 3^2 + 3 - 5 = 9 + 3 - 5 = 7$
Dus het beeld van het origineel 3 is 7.

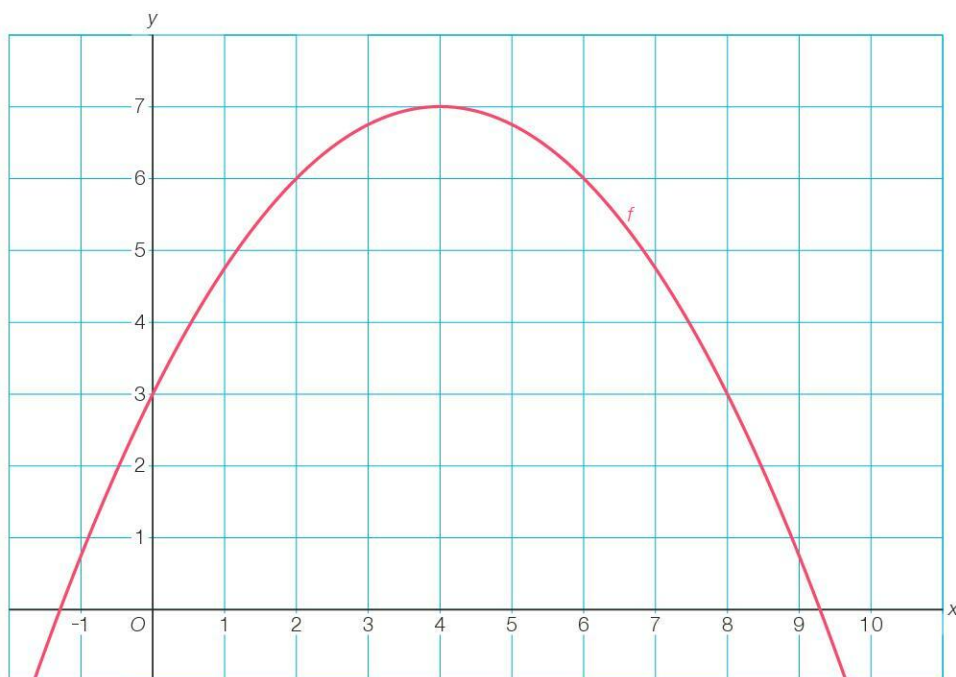
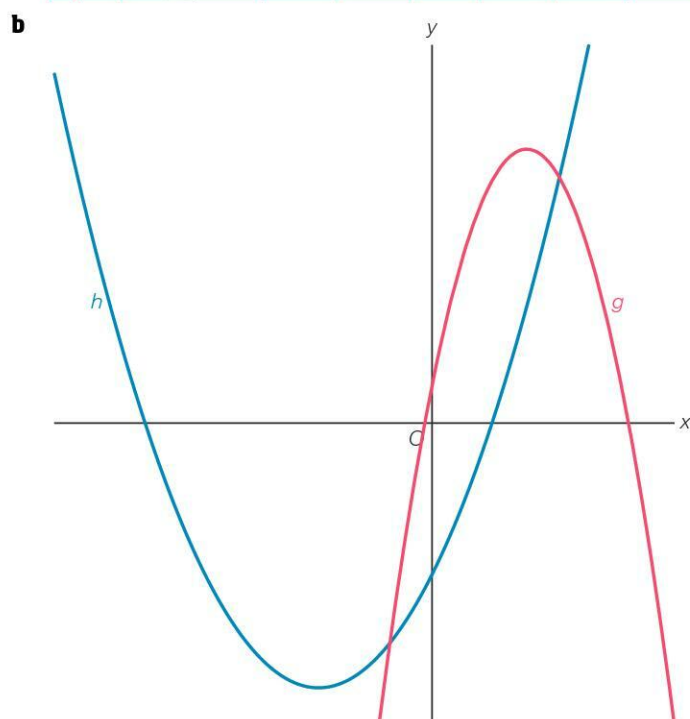
b $f(x) = 1$ geeft $x^2 + x - 5 = 1$
 $x^2 + x - 6 = 0$
 $(x - 2)(x + 3) = 0$
 $x = 2 \vee x = -3$

Dus de originelen van het beeld 1 zijn 2 en -3.

Bladzijde 41

76 a

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	3	$4\frac{3}{4}$	6	$6\frac{3}{4}$	7	$6\frac{3}{4}$	6	$4\frac{3}{4}$	3



c $k(-4) = -\frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 5 \cdot -4 + 2 = -8 - 20 + 2 = -26$
 Dus het beeld van het origineel -4 is -26 .
 $k(x) = 10$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 5x + 2 = 10$
 $-\frac{1}{2}x^2 + 5x - 8 = 0$
 $x^2 - 10x + 16 = 0$
 $(x - 2)(x - 8) = 0$
 $x = 2 \vee x = 8$

Dus de originelen van het beeld 10 zijn 2 en 8.

77

a

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-4	2	6	8	8	6	2	-4

b Uit de tabel volgt dat de grafiek van f symmetrisch is in de lijn $x = 2\frac{1}{2}$.
 Dus $x_{\text{top}} = 2\frac{1}{2}$ en $y_{\text{top}} = f(2\frac{1}{2}) = 8\frac{1}{4}$.

c $f(1) = 6$ en $f(4) = 6$, dus de gezochte x -coördinaten zijn $x = 1$ en $x = 4$.
 De x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de lijn $y = 6$ zijn de oplossingen van de vergelijking $f(x) = 6$. Dus $x = 1$ en $x = 4$ zijn de oplossingen van $-x^2 + 5x + 2 = 6$.

Bladzijde 43

78

a Voer in $y_1 = -x^2 + 7x - 3$.

De optie nulpunt geeft de nulpunten 0,46 en 6,54.

b Voer in $y_2 = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 10$ en $y_3 = 5$.

De optie snijpunt geeft bij y_2 en y_3 het punt $A(-8,8729...; 5)$ en bij y_1 en y_3 het punt $D(5,5615...; 5)$.
 Dus $AD = 5,5615... - (-8,8729...) \approx 14,43$.

c De optie minimum geeft bij y_2 de top $(-5; -2,5)$.

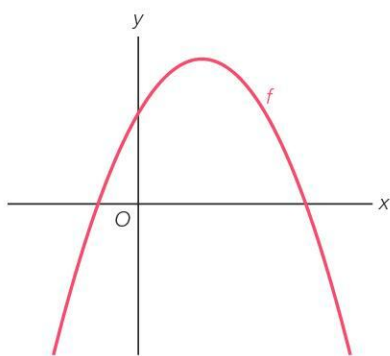
Voer in $y_4 = -2,5$.

De optie snijpunt geeft bij y_2 en y_4 de punten $E(0,072...; -2,5)$ en $F(6,927...; -2,5)$.

Dus $EF = 6,927... - 0,072... \approx 6,86$.

79

a



b Voer in $y_1 = -0,4x^2 + 2,4x + 6$.

De optie maximum geeft de top $(3; 9,6)$.

c De optie nulpunt geeft de nulpunten $-1,90$ en $7,90$.

d $2,5$ links van de top en $2,5$ rechts van de top geeft $x = 0,5$ en $x = 5,5$.

$$f(0,5) = f(5,5) = 7,1.$$

Dus $n > 7,1$.

De kleinste gehele waarde van n is dus 8.

80

a Voer in $y_1 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$.

De optie maximum geeft de top $(4; 10)$.

Voer in $y_2 = \frac{2}{5}x^2 + 3x - 8$.

$$g(4) = 10,4$$

Dus de top van de grafiek van f ligt niet op de grafiek van g .

b De optie nulpunt geeft bij y_1 de nulpunten $a = -2,324...$ en $b = 10,324...$

De optie nulpunt geeft bij y_2 de nulpunten $c = -9,586...$ en $d = 2,086...$

$$(b - a) - (d - c) = (10,324... - (-2,324...)) - (2,086... - (-9,586...)) \approx 0,98$$

c Uitproberen.

$$n = 0 \text{ geeft } LM = 2,086... - -2,324... \approx 4,411$$

$$n = -1 \text{ geeft } LM = 1,868... - -2,633... \approx 4,501$$

$$n = -2 \text{ geeft } LM = 1,640... - -2,928... \approx 4,569$$

$$n = -3 \text{ geeft } LM = 1,403... - -3,211... \approx 4,614$$

$$n = -4 \text{ geeft } LM = 1,155... - -3,483... \approx 4,639$$

$$n = -5 \text{ geeft } LM = 0,893... - -3,745... \approx 4,640$$

$$n = -6 \text{ geeft } LM = 0,616... - -4 \approx 4,616$$

Dus LM is maximaal 4,640 voor $n = -5$.

81 De eerste auto rijdt gedurende 100 uur met een snelheid van 50 km/uur.

De tweede auto rijdt gedurende 99 uur met een snelheid van 51 km/uur.

De derde auto rijdt gedurende 98 uur met een snelheid van 52 km/uur.

De n -de auto rijdt gedurende $101 - n$ uur met een snelheid van $49 + n$ km/uur.

De afgelegde afstand s die 100 uur na de start is afgelegd door de n -de auto is

$$s = (101 - n)(49 + n) = -n^2 + 52n + 4949 \text{ km.}$$

Voer in $y_1 = -x^2 + 52x + 4949$.

De optie maximum geeft $x = 26$ en $y = 5625$.

Dus s is maximaal voor $n = 26$.

De 26^{ste} auto heeft een snelheid van $49 + 26 = 75$ km/uur.

Diagnostische toets

Bladzijde 46

1 a Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, dus $a = -1\frac{1}{2}$.

b k snijdt de y -as in het punt $(0, 4)$.

$(0, 4)$ op l geeft $b = 4$.

$$\begin{aligned} \text{c } y = ax + 4 \\ x = 2 \text{ en } y = 6 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} a \cdot 2 + 4 &= 6 \\ 2a + 4 &= 6 \\ 2a &= 2 \\ a &= 1 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ x = 2 \text{ en } y = 6 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} -1\frac{1}{2} \cdot 2 + b &= 6 \\ -3 + b &= 6 \\ b &= 9 \end{aligned} \right.$$

Dus $a = 1$ en $b = 9$.

d $3x - 6 = 0$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

Dus m snijdt de x -as in $(2, 0)$.

$$\begin{aligned} y = ax + 4 \\ x = 2 \text{ en } y = 0 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} a \cdot 2 + 4 &= 0 \\ 2a + 4 &= 0 \\ 2a &= -4 \\ a &= -2 \end{aligned} \right.$$

Dus $a = -2$.

2 Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, dus $a = 4$.

$$\begin{aligned} y = 4x + b \\ x = 1 \text{ en } y = -2 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} 4 \cdot 1 + b &= -2 \\ 4 + b &= -2 \\ b &= -6 \end{aligned} \right.$$

Dus $a = 4$ en $b = -6$.

- 3** Stel I: $y = ax + b$.
 Snijpunt met de y -as is $(0, 40)$, dus $b = 40$.
 Gebruik $(0, 40)$ en $(40, 120)$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{80}{40} = 2$$

$$\text{Dus I: } y = 2x + 40.$$

$$\text{Stel II: } y = ax + b.$$

Gebruik $(40, 120)$ en $(80, 0)$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{-120}{40} = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } (80, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 80 + b = 0 \\ b = 240 \end{array}$$

$$\text{Dus II: } y = -3x + 240.$$

$$\text{Stel III: } y = ax + b.$$

Gebruik $(80, 0)$ en $(140, 40)$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } (80, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot 80 + b = 0 \\ b = -53\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus III: } y = \frac{2}{3}x - 53\frac{1}{3}.$$

- 4 a** Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 15}{12 - 10} = \frac{-14}{2} = -7$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -7x + b \\ \text{door } A(10, 15) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -7 \cdot 10 + b = 15 \\ -70 + b = 15 \\ b = 85 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -7x + 85.$$

- b** Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{60 - 150}{-200 - -800} = \frac{-90}{600} = -\frac{3}{20}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{3}{20}x + b \\ \text{door } D(-200, 60) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{20} \cdot -200 + b = 60 \\ 30 + b = 60 \\ b = 30 \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{3}{20}x + 30.$$

- 5** Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{25 - 5}{8 - 3} = \frac{20}{5} = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ \text{door } A(3, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 3 + b = 5 \\ 12 + b = 5 \\ b = -7 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 4x - 7.$$

$$4x - 7 = 0$$

$$4x = 7$$

$$x = 1\frac{3}{4}$$

Dus het snijpunt met de x -as is $(1\frac{3}{4}, 0)$.

- 6** Stel $p = aq + b$ met $a = \frac{\Delta p}{\Delta q}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{bij } q = 5 \text{ hoort } p = 25 \\ \text{bij } q = 8 \text{ hoort } p = 19 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{19 - 25}{8 - 5} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} p = -2q + b \\ q = 5 \text{ en } p = 25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 5 + b = 25 \\ -10 + b = 25 \\ b = 35 \end{array}$$

$$\text{Dus } p = -2q + 35.$$

- 7 a** In 1970 is $t = 0$ en in 2020 is $t = 50$.

Stel $T = at + b$ met $a = \frac{\Delta T}{\Delta t}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{bij } t = 0 \text{ hoort } T = 9,3 \\ \text{bij } t = 50 \text{ hoort } T = 11,0 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{11,0 - 9,3}{50 - 0} = \frac{1,7}{50} = 0,034$$

$$\left. \begin{array}{l} T = 0,034t + b \\ t = 0 \text{ en } T = 9,3 \end{array} \right\} b = 9,3$$

Dus $T = 0,034t + 9,3$.

- b** $0,034t + 9,3 = 12$

$$0,034t = 2,7$$

$$t = 79,41\dots$$

Dus in 2049.

- c** Stel $T = at + b$ met $a = \frac{\Delta T}{\Delta t}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{bij } t = 0 \text{ hoort } T = 9,3 \\ \text{bij } t = -50 \text{ hoort } T = 9,0 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{9,3 - 9,0}{0 - (-50)} = \frac{0,3}{50} = 0,006$$

$$\left. \begin{array}{l} T = 0,006t + b \\ t = 0 \text{ en } T = 9,3 \end{array} \right\} b = 9,3$$

Dus $T = 0,006t + 9,3$.

$$0,006t + 9,3 = 8,0$$

$$0,006t = -1,3$$

$$t = -216,6\dots$$

Dus in 1753.

Bladzijde 47

- 8 a** $l: 2x - 3y = -8$

Snijden met de x -as, dus $y = 0$.

$$2x = -8$$

$$x = -4$$

Dus $(-4, 0)$.

Snijden met de y -as, dus $x = 0$.

$$-3y = -8$$

$$y = 2\frac{2}{3}$$

Dus $(0, 2\frac{2}{3})$.

- b** $(5, p)$ voldoet, dus $2 \cdot 5 - 3 \cdot p = -8$

$$10 - 3p = -8$$

$$-3p = -18$$

$$p = 6$$

- c** $(q, 12)$ is een oplossing, dus $2 \cdot q - 3 \cdot 12 = -8$

$$2q - 36 = -8$$

$$2q = 28$$

$$q = 14$$

- 9 a** $k: 3x - 4y = 12$

$$-4y = -3x + 12$$

$$y = \frac{3}{4}x - 3$$

Dus $rc_k = \frac{3}{4}$.

- b** m is evenwijdig met k , dus $3x - 4y = c$.

$A(3, -4)$ invullen in $3x - 4y = c$ geeft $c = 3 \cdot 3 - 4 \cdot -4 = 25$.

Dus $m: 3x - 4y = 25$.

$$10 \quad \mathbf{a} \quad \begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases} \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{geeft} \\ \end{array} \right. \begin{cases} 10x - 4y = 16 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 13x = 26 \\ x = 2 \\ 3x + 4y = 10 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 13x = 26 \\ x = 2 \\ 3x + 4y = 10 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + 4y = 10 \\ 4y = 4 \\ y = 1 \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (2, 1)$.

$$\mathbf{b} \quad \begin{cases} -3x + 2y = 9 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases} \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{geeft} \\ \end{array} \right. \begin{cases} -6x + 4y = 18 \\ 6x + 15y = 39 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 19y = 57 \\ y = 3 \\ -3x + 2y = 9 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 19y = 57 \\ y = 3 \\ -3x + 2y = 9 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} -3x + 2 \cdot 3 = 9 \\ -3x = 3 \\ x = -1 \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (-1, 3)$.

$$11 \quad \begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases} \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{geeft} \\ \end{array} \right. \begin{cases} 9x + 6y = 30 \\ 8x - 6y = 4 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 17x = 34 \\ x = 2 \\ 3x + 2y = 10 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 17x = 34 \\ x = 2 \\ 3x + 2y = 10 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + 2y = 10 \\ 2y = 4 \\ y = 2 \end{array}$$

Dus het snijpunt is $(2, 2)$.

$$12 \quad \mathbf{a} \quad \begin{cases} x = 2y - 4 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Substitueren van $x = 2y - 4$ in $3x + 2y = 12$ geeft $3(2y - 4) + 2y = 12$

$$\begin{array}{l} 6y - 12 + 2y = 12 \\ 8y = 24 \\ y = 3 \\ x = 2y - 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 6y - 12 + 2y = 12 \\ 8y = 24 \\ y = 3 \\ x = 2y - 4 \end{array}} \right\} x = 2 \cdot 3 - 4 = 2$$

De oplossing is $(x, y) = (2, 3)$.

$$\mathbf{b} \quad \begin{cases} 3x + 2y = -10 \\ y = 1\frac{1}{2}x + 7 \end{cases}$$

Substitueren van $y = 1\frac{1}{2}x + 7$ in $3x + 2y = -10$ geeft $3x + 2(1\frac{1}{2}x + 7) = -10$

$$\begin{array}{l} 3x + 3x + 14 = -10 \\ 6x = -24 \\ x = -4 \\ y = 1\frac{1}{2}x + 7 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3x + 3x + 14 = -10 \\ 6x = -24 \\ x = -4 \\ y = 1\frac{1}{2}x + 7 \end{array}} \right\} y = 1\frac{1}{2} \cdot -4 + 7 = 1$$

De oplossing is $(x, y) = (-4, 1)$.

$$13 \quad \mathbf{a} \quad (3x + 2)^2 = 25$$

$$3x + 2 = 5 \vee 3x + 2 = -5$$

$$3x = 3 \vee 3x = -7$$

$$x = 1 \vee x = -2\frac{1}{3}$$

$$\mathbf{b} \quad (4x + 3)^2 = 2x + 3$$

$$16x^2 + 24x + 9 = 2x + 3$$

$$16x^2 + 22x + 6 = 0$$

$$8x^2 + 11x + 3 = 0$$

$$D = 11^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = 25, \text{ dus } \sqrt{D} = 5$$

$$x = \frac{-11 + 5}{16} = -\frac{3}{8} \vee x = \frac{-11 - 5}{16} = -1$$

c $(x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = (x+4)^2$
 $x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 = x^2 + 8x + 16$
 $2x^2 + 4x - 2 = 0$
 $x^2 + 2x - 1 = 0$
 $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 8$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} \vee x = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2}$$

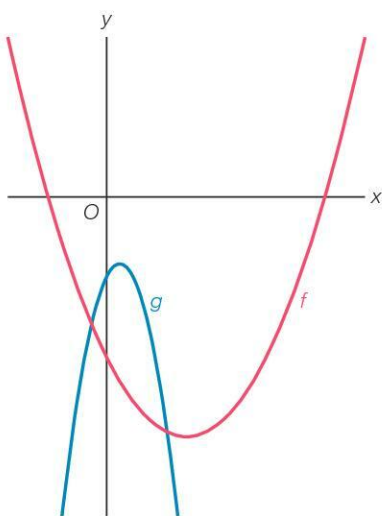
d $5x^2 - (2x-1)^2 = 11$
 $5x^2 - (4x^2 - 4x + 1) = 11$
 $5x^2 - 4x^2 + 4x - 1 = 11$
 $x^2 + 4x - 12 = 0$
 $(x-2)(x+6) = 0$
 $x = 2 \vee x = -6$

e $(2x-3)(3x+2) = (x+1)(2x+6)$
 $6x^2 + 4x - 9x - 6 = 2x^2 + 6x + 2x + 6$
 $4x^2 - 13x - 12 = 0$
 $D = (-13)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -12 = 361$, dus $\sqrt{D} = 19$
 $x = \frac{13 + 19}{8} = 4 \vee x = \frac{13 - 19}{8} = -\frac{3}{4}$

f $\frac{1}{4}(2x-1)^2 - 9 = 0$
 $(2x-1)^2 - 36 = 0$
 $(2x-1)^2 = 36$
 $2x-1 = 6 \vee 2x-1 = -6$
 $2x = 7 \vee 2x = -5$
 $x = 3\frac{1}{2} \vee x = -2\frac{1}{2}$

14

a



Voer in $y_1 = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 4$.

De optie minimum geeft de top $(2, -6)$.

Voer in $y_2 = -3x^2 + 2x - 2$.

De optie maximum geeft de top $(0,33; -1,67)$.

b De optie nulpunt geeft bij y_1 de nulpunten $-1,46$ en $5,46$.

c De optie snijpunt geeft de snijpunten $(-0,38; -3,18)$ en $(1,52; -5,88)$.

d Voer in $y_3 = -6$.

De optie snijpunt bij y_2 en y_3 geeft $x_A = -0,8685...$ en $x_B = 1,5351...$

De lengte van het lijnstuk AB is $1,5351... - -0,8685... \approx 2,40$.

e De horizontale lijn $y = a$ moet tussen de twee toppen liggen en mag niet door de snijpunten van de grafieken gaan.

Dus $-6 < a < -5,88 \vee -5,88 < a < -3,18 \vee -3,18 < a < -1,67$.

2 Veranderingen

Voorkennis Snelheid

Bladzijde 51

- 1** 18 minuten + 37 minuten = 55 minuten
37 seconden + 36 seconden = 73 seconden, oftewel 1 minuut en 13 seconden
Ramon deed 5 uur, 56 minuten en 13 seconden over de etappe.
Dat is $5 + \frac{56}{60} + \frac{13}{3600} = 5,9369\dots$ uur.
- De gemiddelde snelheid is $\frac{175,5}{5,9369\dots} \approx 29,56$ km/uur.
- Dat is $\frac{29,56\dots}{3,6} \approx 8,21$ m/s.

- 2 a** De beklimming van 25 km in $1 + \frac{12}{60} = 1,2$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{25}{1,2} \approx 21$ km/uur.
- De afdaling van 19 km in $\frac{17}{60} = 0,2833\dots$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{19}{0,2833\dots} \approx 67$ km/uur.
- b** De $25 + 19 = 44$ km van de beklimming en de afdaling samen in $1,2 + 0,2833\dots = 1,4833\dots$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{44}{1,4833\dots} \approx 30$ km/uur.

Bladzijde 52

- 3 a** Bij elk van de drie gedeelten van de tocht neemt de afstand lineair toe in de tijd, dus bij elk van de drie gedeelten van de tocht is met een constante snelheid gereden.
- b** 12 km in $\frac{35}{60} = 0,5833\dots$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{12}{0,5833\dots} \approx 20,57$ km/uur.
- $23 - 12 = 11$ km in $\frac{58 - 35}{60} = 0,3833\dots$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{11}{0,3833\dots} \approx 28,70$ km/uur.
- $27 - 23 = 4$ km in $\frac{75 - 58}{60} = 0,2833\dots$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{4}{0,2833\dots} \approx 14,12$ km/uur.
- c** 27 km in $\frac{75}{60} = 1,25$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{27}{1,25} = 21,6$ km/uur.
- Dat is $\frac{21,6}{3,6} = 6$ m/s.
- 4 a** De afstand neemt niet lineair toe in de tijd, dus er is niet met een constante snelheid gereden.
- b** 35 km in $\frac{85}{60} = 1,4166\dots$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{35}{1,4166\dots} \approx 24,71$ km/uur.
- c** Aan het begin van de tocht heeft de wielrenner een snelheid die hoger is dan de gemiddelde snelheid. Gedurende de tocht neemt zijn snelheid af. Op het eind van de tocht is zijn snelheid lager dan de gemiddelde snelheid. Dus er zal een tijdstip zijn waarop de snelheid van de wielrenner gelijk is aan zijn gemiddelde snelheid.

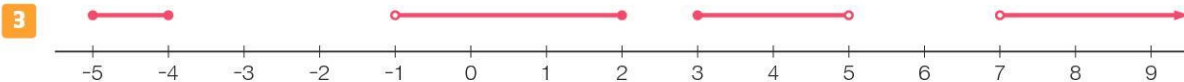
2.1 Toenamedigrammen

Bladzijde 53

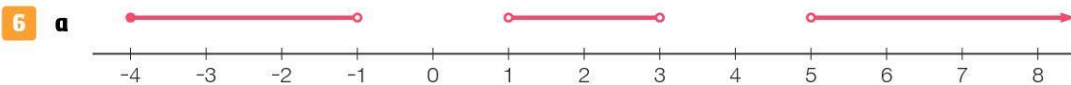
- 1 a** In de maanden maart, april, mei, juni en een deel van juli stijgt de temperatuur van het oppervlaktewater bij Helsinki.
- b** In mei neemt de stijging toe en in juni neemt de stijging af.
- c** Tot en met augustus neemt de daling toe en daarna neemt de daling af.

Bladzijde 55

- 2 $\langle -6, -2 \rangle$, $[-1, 0]$, $[1, 3)$ en $\langle 4, \rightarrow \rangle$

**Bladzijde 56**

- 4
- a Het interval $\langle -1, 2]$ wordt genoteerd als $-1 < x \leq 2$.
 - b Het interval $[6, 10)$ wordt genoteerd als $6 \leq x < 10$.
 - c Het interval $[5, 15]$ wordt genoteerd als $5 \leq x \leq 15$.
 - d Het interval $\langle \leftarrow; 4,5 \rangle$ wordt genoteerd als $x < 4,5$.
- 5
- a $-8 \leq x < 3$ wordt genoteerd als $[-8, 3)$.
 - b $4 < x \leq 4\frac{1}{2}$ wordt genoteerd als $\langle 4, 4\frac{1}{2}]$.
 - c $5,1 \leq x \leq 7,3$ wordt genoteerd als $[5,1; 7,3]$.
 - d $x \leq 2$ wordt genoteerd als $\langle \leftarrow, 2]$.

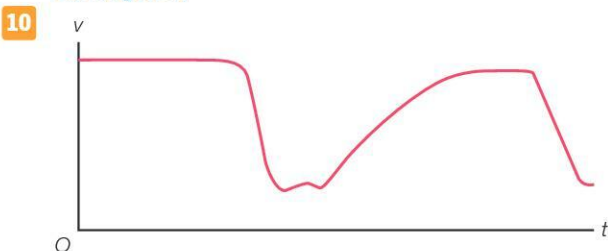


- b Het interval $\langle -2, 5]$ wordt genoteerd als $-2 < x \leq 5$.
 Het interval $[3, 7]$ wordt genoteerd als $3 \leq x \leq 7$.
 Het interval $\langle \leftarrow; 1,23 \rangle$ wordt genoteerd als $x < 1,23$.
- c $10 \leq x < 15$ wordt genoteerd als $[10, 15)$.
 $x \geq 3\frac{1}{2}$ wordt genoteerd als $[3\frac{1}{2}, \rightarrow)$.

- 7
- | | |
|---|--|
| $2x - 3 < 6$
$2x < 9$
$x < 4\frac{1}{2}$
Dus $-1\frac{1}{3} < x < 4\frac{1}{2}$.
Dit wordt genoteerd als $\langle -1\frac{1}{3}, 4\frac{1}{2} \rangle$. | $5 - 3x < 9$
$-3x < 4$
$x > -1\frac{1}{3}$ |
|---|--|

- 8
- Afnemend dalend op $\langle \leftarrow, -4 \rangle$ en op $\langle 3, 5 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle -4, -2 \rangle$ en op $\langle 5, \rightarrow \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle -2, 1 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 1, 3 \rangle$.

- 9
- a Constant stijgend op $\langle 0, 3 \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle 3, 4 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 4, 5 \rangle$.
 Afnemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle 7, 10 \rangle$.
 - b Bij de steilste klim is de snelheid het laagst. Dus na 7 minuten.

Bladzijde 57

In het begin is er geen stijging of daling, daarna achtereenvolgens toenemende daling, afnemende daling, constante stijging, constante daling, afnemende stijging, constante daling, afnemende daling.

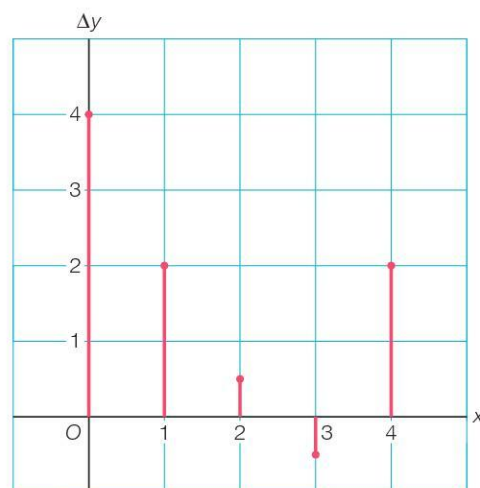
- 11 a** Op $[0, 1]$ is de toename $5,5$.
Op $[1, 2]$ is de toename $9 - 5,5 = 3,5$.
b Op $[4, 5]$ is de afname $10 - 7,5 = 2,5$.
c Op $[2, 7]$ is de afname $9 - -3,5 = 12,5$.

Bladzijde 60

- 12 a** Lisette heeft gelijk.
Je weet alleen dat de grafiek tussen $x = 0$ en $x = 1$ evenveel toeneemt als tussen $x = 1$ en $x = 2$.
Bij even lange staven hoeft de toename niet lineair te zijn.
b Het toenamediagram is puntsymmetrisch.

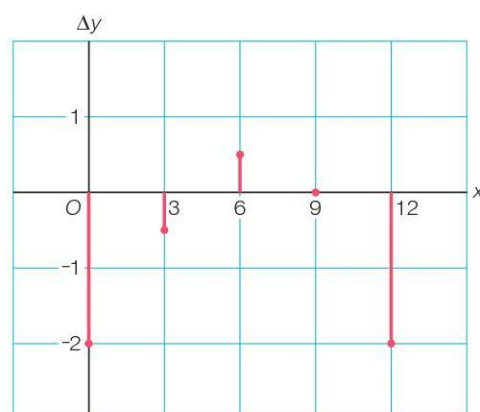
13 a

x -interval bij $\Delta x = 1$	Δy
$[-1, 0]$	4
$[0, 1]$	2
$[1, 2]$	0,5
$[2, 3]$	-0,5
$[3, 4]$	2



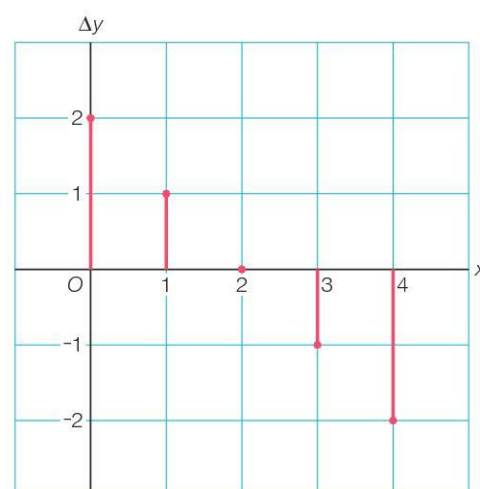
b

x -interval bij $\Delta x = 3$	Δy
$[-3, 0]$	-2
$[0, 3]$	-0,5
$[3, 6]$	0,5
$[6, 9]$	0
$[9, 12]$	-2



14 a

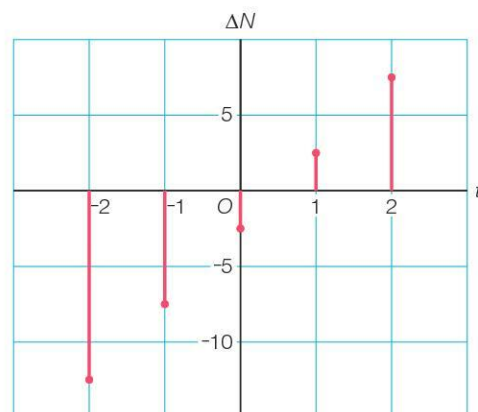
x -interval bij $\Delta x = 1$	Δy
$[-1, 0]$	2
$[0, 1]$	1
$[1, 2]$	0
$[2, 3]$	-1
$[3, 4]$	-2



b

t -interval bij $\Delta t = 1$	ΔN
$[-3, -2]$	$-12,5$
$[-2, -1]$	$-7,5$
$[-1, 0]$	$-2,5$
$[0, 1]$	$2,5$
$[1, 2]$	$7,5$

c De eindpunten van de toenames liggen op een rechte lijn.

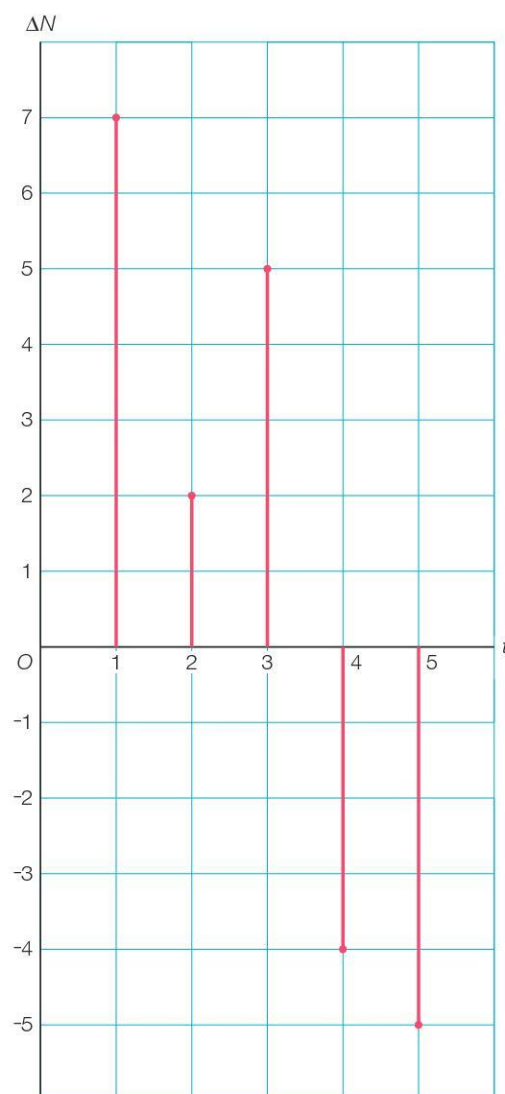


Bladzijde 61

- 15 a** Bij een parabool liggen in een toenamediaagram de eindpunten van de toenames op een rechte lijn die niet horizontaal is.
- b** Bij een rechte lijn liggen in een toenamediaagram de eindpunten van de toenames op een horizontale lijn.

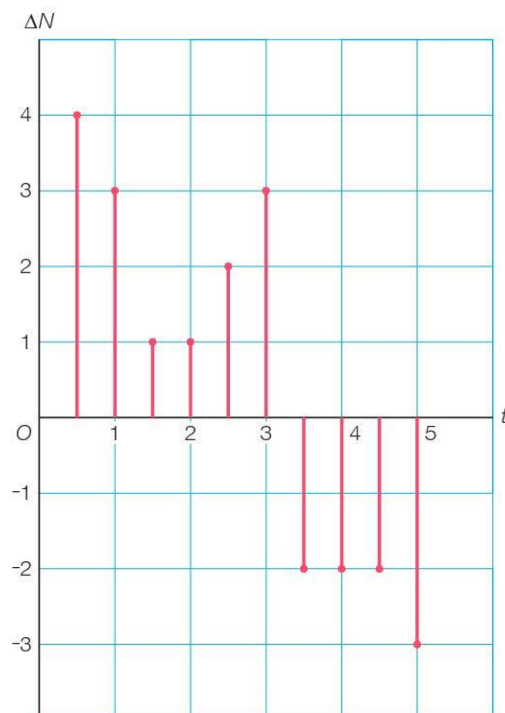
16 a

t -interval bij $\Delta t = 1$	ΔN
$[0, 1]$	7
$[1, 2]$	2
$[2, 3]$	5
$[3, 4]$	-4
$[4, 5]$	-5

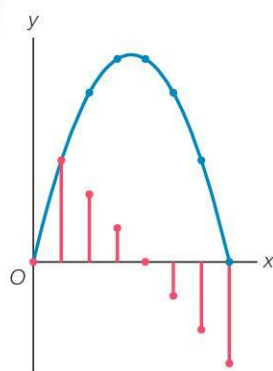


- b** Verdeel de toename 7 op $[0, 1]$ in twee toenames van bijvoorbeeld 4 en 3, enzovoort. Je kunt een tabel zoals hieronder maken, en krijgt dan het toenamediagram hiernaast.

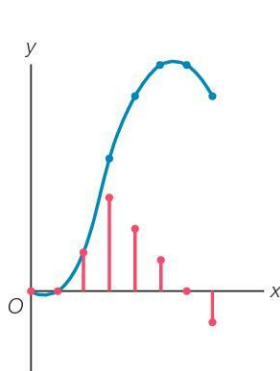
t -interval bij $\Delta t = 0,5$	ΔN
$[0; 0,5]$	4
$[0,5; 1]$	3
$[1; 1,5]$	1
$[1,5; 2]$	1
$[2; 2,5]$	2
$[2,5; 3]$	3
$[3; 3,5]$	-2
$[3,5; 4]$	-2
$[4; 4,5]$	-2
$[4,5; 5]$	-3



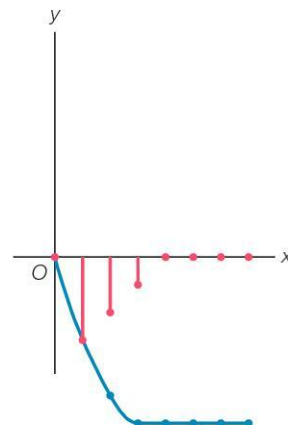
17



a

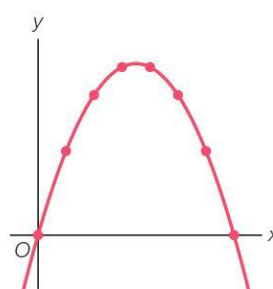


b

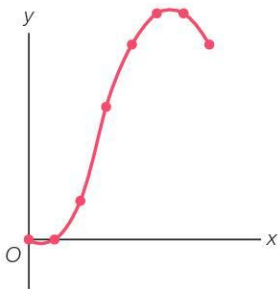


c

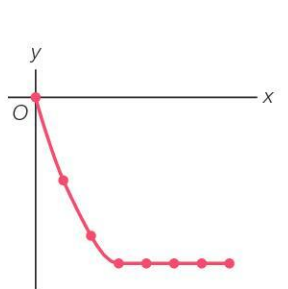
In de figuren hierboven zie je ook de toenamediagrammen. Zo kun je zien hoe de globale grafieken met de toenamediagrammen samenhangen. In het uiteindelijke antwoord denk je de toenamediagrammen weg. Zie hieronder.



a

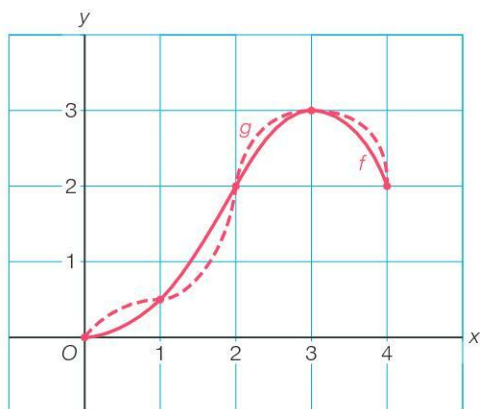


b

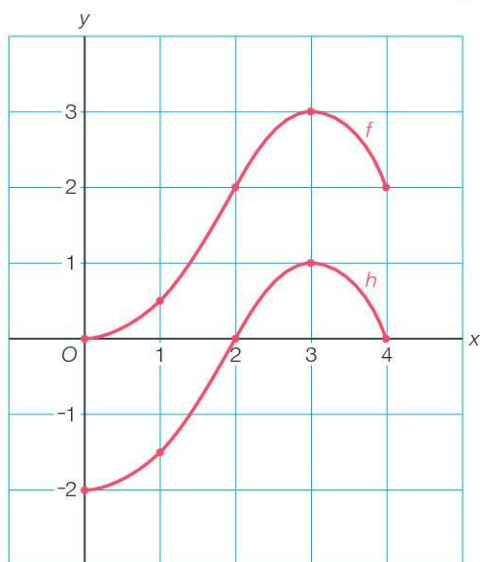


c

18 a



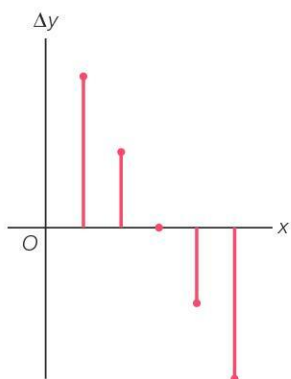
b



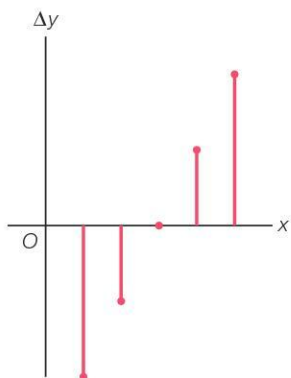
Bladzijde 62

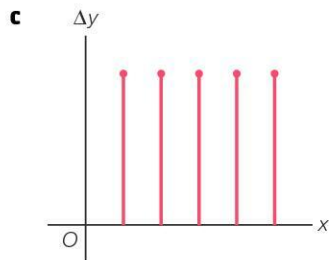
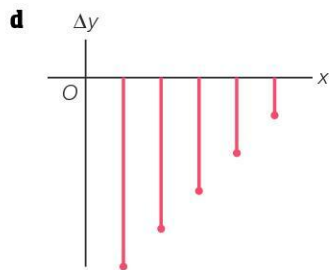
- 19 a constant dalend
 b afnemend stijgend
 c constant stijgend
 d toenemend dalend

20 a



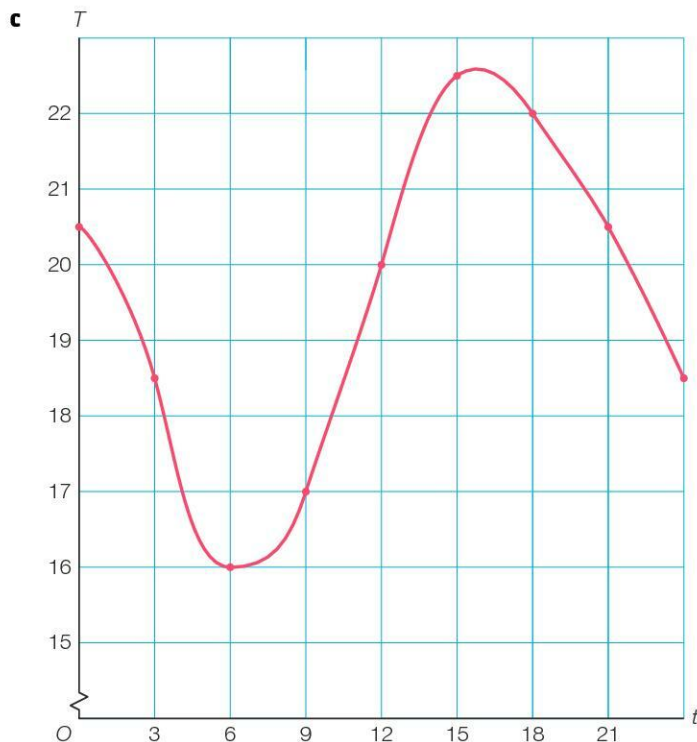
b





21 a Op $[0, 24]$ is $\Delta T = -2 - 2,5 + 1 + 3 + 2,5 - 0,5 - 1,5 - 2 = -2$.
Mieke heeft dus gelijk.

b Op $[0, 12]$ is $\Delta T = -2 - 2,5 + 1 + 3 = -0,5$.
Dus om 0:00 uur is $T = 20 + 0,5 = 20,5^\circ\text{C}$.

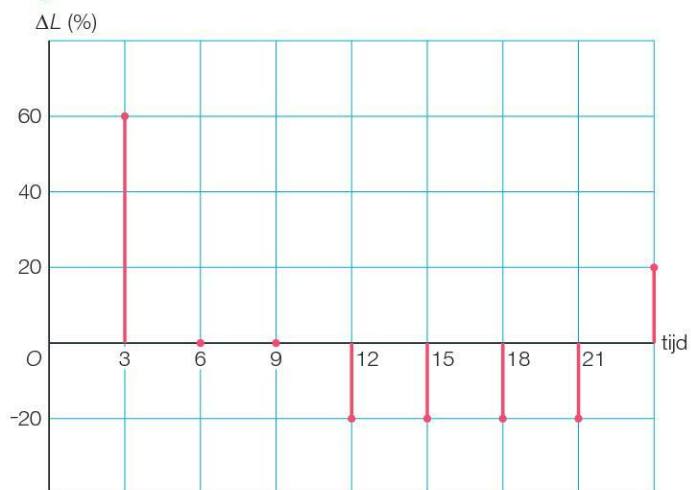


22 a Op $[6, 8]$ is $\Delta N = -10 - 35 = -45$.
Dus om 17:00 uur stonden er $110 - 45 = 65$ fietsen in de stalling.
Op $[0, 6]$ is $\Delta N = -20 - 40 + 40 - 15 + 15 + 25 = 5$.
Dus om 9:00 uur stonden er $110 - 5 = 105$ fietsen in de stalling.

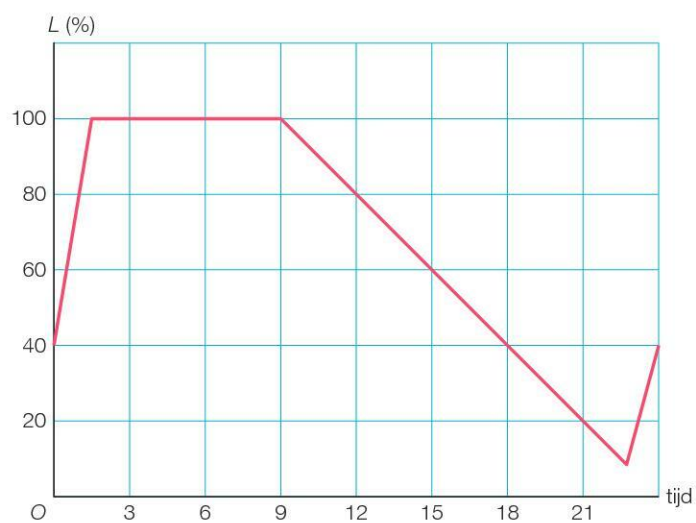
b Op $[1, 2]$ is $\Delta N = -40$.
Dus als er tussen 10 en 11 uur 30 personen een fiets in de stalling hebben
gezet, zijn er 70 fietsen meegenomen. Want $30 - 70 = -40$.

23

a



b



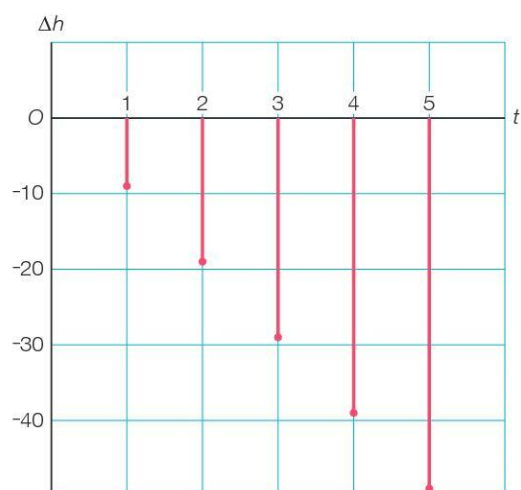
24

Op $[0, 7]$ is $\Delta N = -20 + 10 - 30 + 10 + 30 - 35 - 10 = -45$.
Dus er zaten om 15:00 uur minstens 45 mensen op het terras.

25

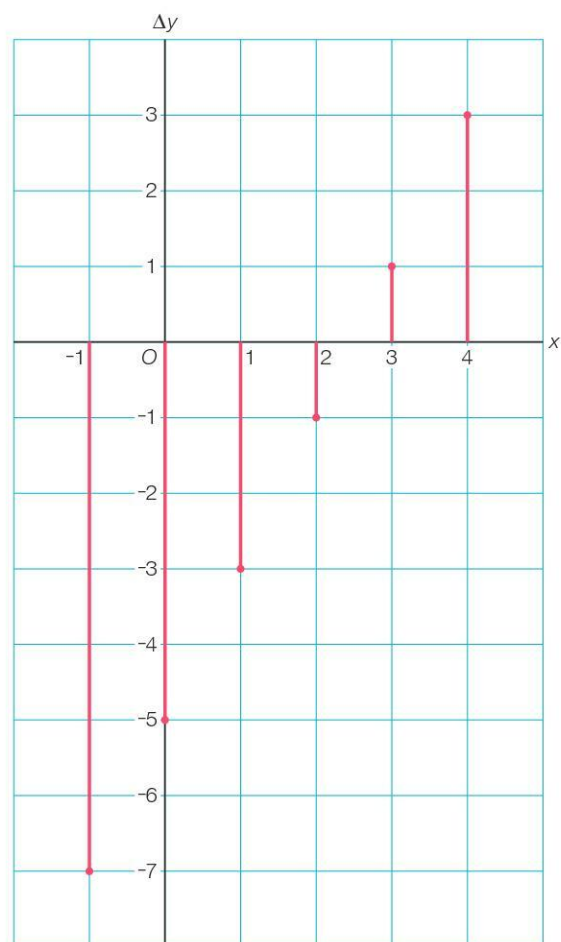
a,b

t	h	Δh
0	145	-
1	136	-9
2	117	-19
3	88	-29
4	49	-39
5	0	-49



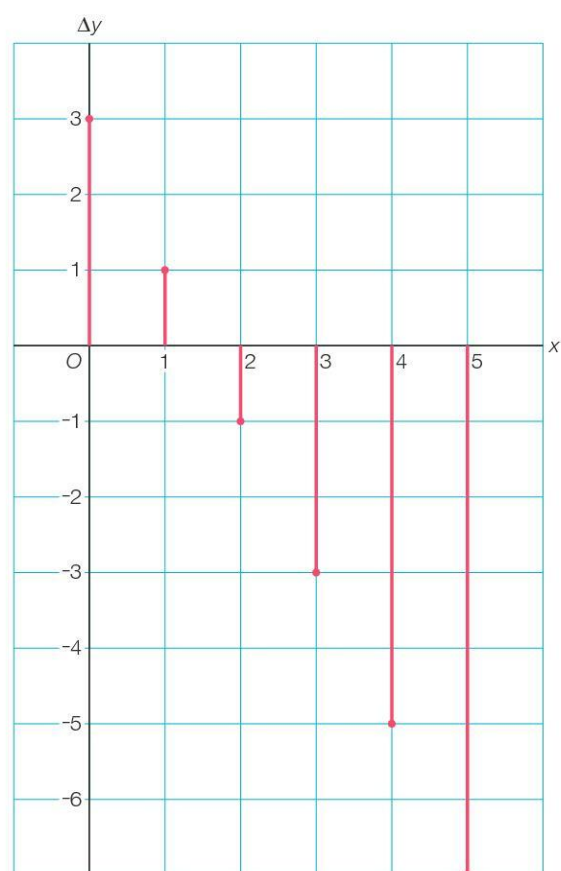
26

x	y	Δy
-2	12	-
-1	5	-7
0	0	-5
1	-3	-3
2	-4	-1
3	-3	1
4	0	3



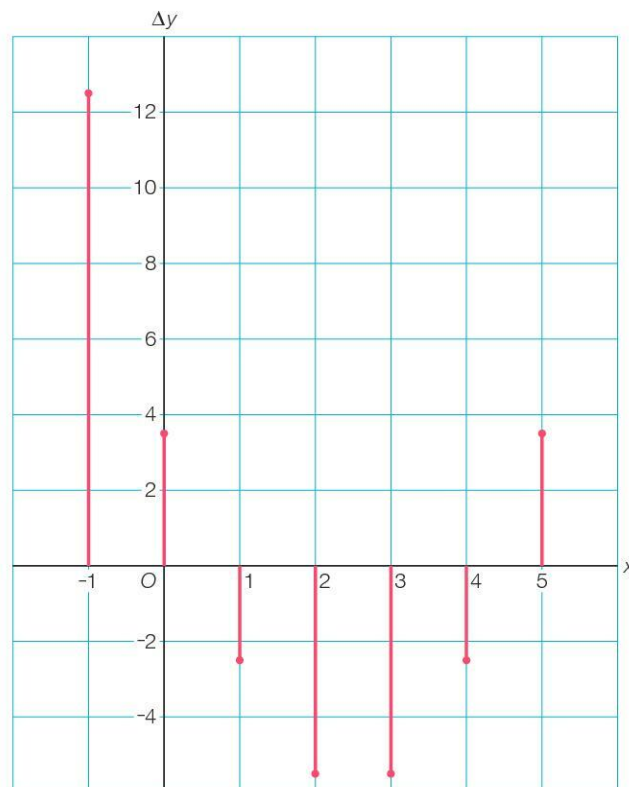
27 a

x	y	Δy
-1	1	-
0	4	3
1	5	1
2	4	-1
3	1	-3
4	-4	-5
5	-11	-7



b

x	y	Δy
-2	-15	-
-1	-2,5	12,5
0	1	3,5
1	-1,5	-2,5
2	-7	-5,5
3	-12,5	-5,5
4	-15	-2,5
5	-11,5	3,5



2.2 Differentiequotiënten en snelheden

Bladzijde 65

- 28 a** Op het interval $[0, 3]$ legt de motor 30 meter af.
 De gemiddelde snelheid is $\frac{30}{3} = 10$ m/s.
 Op het interval $[3, 7]$ legt de motor $165 - 30 = 135$ meter af.
 De gemiddelde snelheid is $\frac{135}{4} = 33,75 \approx 34$ m/s.
- b** In de zesde seconde legt de motor $125 - 85 = 40$ meter af.
 De gemiddelde snelheid is $\frac{40}{1} = 40$ m/s.
- c** In de zevende seconde legt de motor $165 - 125 = 40$ meter af.
 De gemiddelde snelheid is $\frac{40}{1} = 40$ m/s.
 $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/uur}$, dus dat is $40 \cdot 3,6 = 144 \text{ km/uur}$.
- d** Omdat de grafiek tussen $t = 5$ en $t = 7$ een rechte lijn is, heeft Jan gelijk.
- e** Nee, want de snelheid neemt toe in de derde seconde.

Bladzijde 66

- 29 a** Op het interval $[0, 60]$ legt Esmee 875 meter af.
 De gemiddelde snelheid is $\frac{875}{60} = 14,583\ldots$ m/s.
 Dat is $14,583\ldots \cdot 3,6 = 52,5 \text{ km/uur}$.
 Op het interval $[100, 130]$ legt Esmee $1500 - 1250 = 250$ meter af.
 De gemiddelde snelheid is $\frac{250}{30} = 8,333\ldots$ m/s.
 Dat is $8,333\ldots \cdot 3,6 = 30 \text{ km/uur}$.
- b** Naarmate de tijd vordert, verloopt de grafiek minder steil.

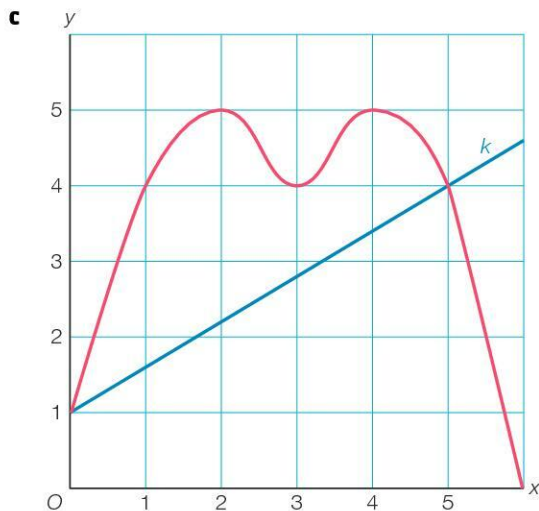
Bladzijde 67

- 30 a** Op $[6, 10]$ is $\Delta T = 13 - 10 = 3$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{3}{4} = 0,75^\circ\text{C}$ per uur.
 Op $[9, 14]$ is $\Delta T = 20 - 12 = 8$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{8}{5} = 1,6^\circ\text{C}$ per uur.
- b** Op $t = 16$ is $T = 20$ en op $t = 20$ is $T = 17$, dus op $[16, 20]$ is $\Delta T = 17 - 20 = -3$.
 Op $[16, 20]$ is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{-3}{4} = -0,75^\circ\text{C}$ per uur.
 Dit betekent dat tussen $t = 16$ en $t = 20$ de temperatuur daalt.
- c** Op $[0, 6]$ is $\Delta T = 10 - 10 = 0$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{0}{6} = 0^\circ\text{C}$ per uur.
 Op $[10, 24]$ is $\Delta T = 13 - 13 = 0$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{0}{14} = 0^\circ\text{C}$ per uur.
- d** Bijvoorbeeld op $[10, 20]$ is $\Delta T = 17 - 13 = 4$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{4}{10} = 0,4^\circ\text{C}$ per uur.
 Dus op het interval $[10, 20]$ is de gemiddelde verandering $0,4^\circ\text{C}$ per uur.

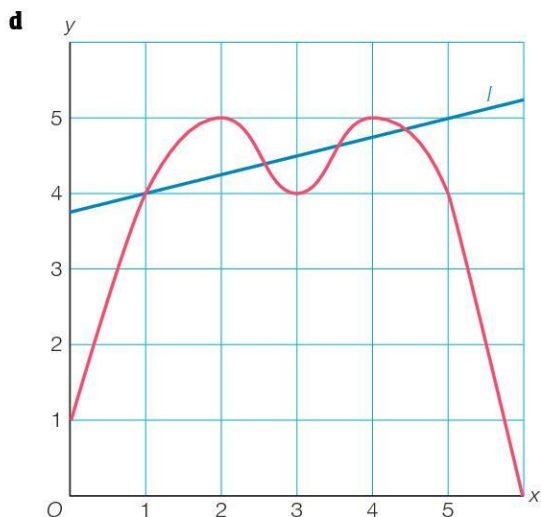
- 31 a** Op $[9, 13]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 800}{13 - 9} = \frac{800}{4} = 200$.
- b** Op $[12, 17]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 2000}{17 - 12} = \frac{-400}{5} = -80$.
- c** Op $[9, 17]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 800}{17 - 9} = \frac{800}{8} = 100$, dus $[9, 17]$.
- d** Op $[15, 18]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1200 - 1800}{18 - 15} = \frac{-600}{3} = -200$, dus $[15, 18]$.

Bladzijde 69

- 32 a** De gemiddelde verandering op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 1}{4 - 0} = \frac{4}{4} = 1$.
- b** Op $[2, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 5}{6 - 2} = \frac{-5}{4} = -1\frac{1}{4}$.



De lijn k door $(0, 1)$ met $rc_k = 0,6$ snijdt de grafiek in het punt $(5, 4)$.
 Dus voor $p = 5$.



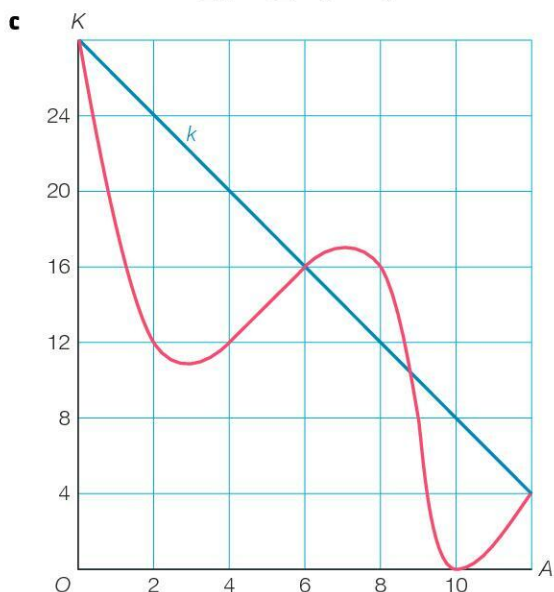
De lijn l door $(1, 4)$ met $rc_l = \frac{1}{4}$ snijdt de grafiek rechts van $x = 1$ in drie punten. Dus er zijn drie waarden van q waarvoor het differentiequotiënt van y op $[1, q]$ gelijk is aan $\frac{1}{4}$.

33 a De gemiddelde verandering op $[0, 6]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta A} = \frac{16 - 28}{6 - 0} = \frac{-12}{6} = -2$.

De gemiddelde verandering op $[4, 8]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta A} = \frac{16 - 12}{8 - 4} = \frac{4}{4} = 1$.

b Op $[2, 10]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta A} = \frac{0 - 12}{10 - 2} = \frac{-12}{8} = -1\frac{1}{2}$.

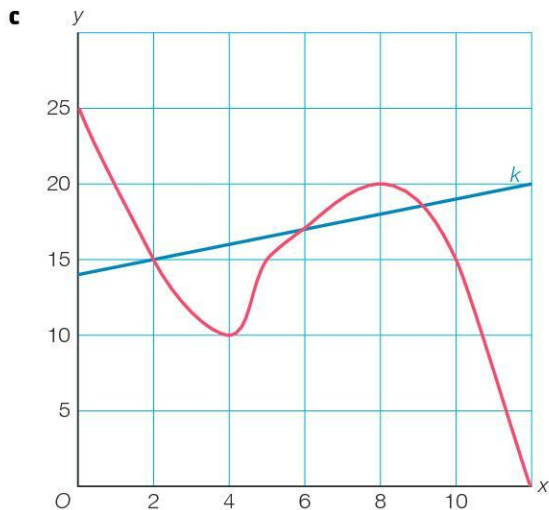
Op $[6, 12]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta A} = \frac{4 - 16}{12 - 6} = \frac{-12}{6} = -2$.



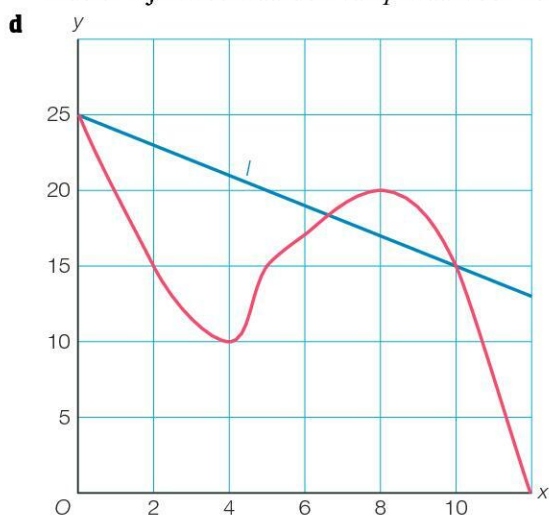
De lijn k door $(0, 28)$ met $rc_k = -2$ snijdt de grafiek rechts van $A = 0$ in drie punten. Dus er zijn drie waarden van p waarvoor het differentiequotiënt van K op $[0, p]$ gelijk is aan -2 .

34 a De gemiddelde verandering op $[2, 8]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20 - 15}{8 - 2} = \frac{5}{6}$.

b Op $[4, 12]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 10}{12 - 4} = \frac{-10}{8} = -1\frac{1}{4}$.



De lijn k door $(2, 15)$ met $rc_k = 0,5$ snijdt de grafiek rechts van $x = 2$ in twee punten.
Dus er zijn twee waarden van p waarvoor het differentiequotiënt van y op $[2, p]$ gelijk is aan $0,5$.



De lijn l door $(0, 25)$ met $rc_l = -1$ snijdt de grafiek bij $x = 6,5$ en bij $x = 10$.
Dus voor $q = 6,5$ en voor $q = 10$ is het differentiequotiënt van y op $[0, q]$ gelijk aan -1 .

Bladzijde 70

35 a Door $(0, 2)$.

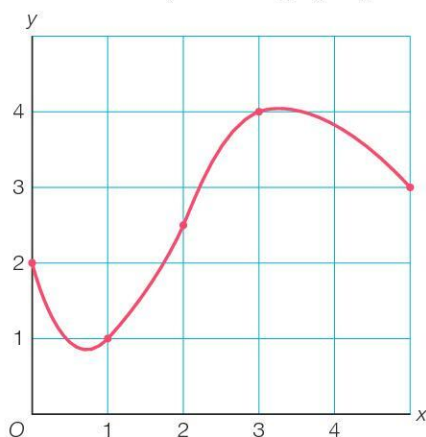
Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$, dus door $(2, 2 + 2 \cdot \frac{1}{4}) = (2, 2\frac{1}{2})$.

Op $[0, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{5}$, dus door $(5, 2 + 5 \cdot \frac{1}{5}) = (5, 3)$.

Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$, dus door $(1, 3 - 4 \cdot \frac{1}{2}) = (1, 1)$.

Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\frac{1}{2}$, dus door $(3, 1 + 2 \cdot 1\frac{1}{2}) = (3, 4)$.

Hieronder zie je een mogelijke grafiek.

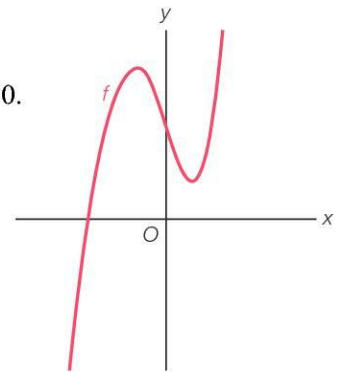


- b** Het differentiequotiënt op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-4}{5-3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.
- c** Dat is mogelijk, want bij $x = 4$ is elke y -coördinaat mogelijk, dus ook $y = 5\frac{1}{2}$.
En op $[1, 4]$ geeft dit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\frac{1}{2}-1}{4-1} = \frac{4\frac{1}{2}}{3} = 1\frac{1}{2}$.

- 36 a** $f(1) = -2$ en $f(5) = 6$, dus op de grafiek liggen de punten $(1, -2)$ en $(5, 6)$.
Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-(-2)}{5-1} = \frac{8}{4} = 2$.
- b** $f(0) = 1$ en $f(4) = 1$, dus op de grafiek liggen de punten $(0, 1)$ en $(4, 1)$.
Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-1}{4-0} = 0$.

Bladzijde 71

- 37 a** Het differentiequotiënt op $[-1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{-6-6}{4} = -3$.
- b** Het differentiequotiënt op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{-4-(-4)}{4-1} = \frac{0}{3} = 0$.
- c** Het differentiequotiënt op $[-5, -1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-1)-f(-5)}{-1-(-5)} = \frac{6-50}{4} = \frac{-44}{4} = -11$.
- d** Het differentiequotiënt op $[-5, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(-5)}{4-(-5)} = \frac{-4-50}{4+5} = \frac{-54}{9} = -6$.
- 38 a** Voer in $y_1 = x^3 - 3x + 5$.
Schets, zie hiernaast.
- b** De gemiddelde verandering van $f(x)$ op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{23-3}{2} = 10$.
- c** Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-2, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)} = \frac{57-3}{6} = 9$.
- d** De helling van de lijn AB is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)} = \frac{3-(-13)}{4} = 4$.



- 39 a** De gemiddelde verandering op $[-1, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{0,4-(-7,6)}{2} = \frac{8}{2} = 4$.
- b** Het differentiequotiënt op $[-2, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{1,4-9,4}{4} = \frac{-8}{4} = -2$.
- c** $f(0) = -5$, dus $A(0, -5)$.
 $f(3) = 0,4$, dus $B(3; 0,4)$.
De helling van de lijn AB is $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0,4 - (-5)}{3 - 0} = \frac{5,4}{3} = 1,8$.
- d** De helling van de lijn CD is gelijk aan de helling van de lijn $y = 2x$.
Dus de helling van de lijn CD is 2.

40 Op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ en

$$\text{op } [1, 4] \text{ is } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{16a + 16 - 3 - (a + 4 - 3)}{3} = \frac{16a + 16 - 3 - a - 4 + 3}{3} = \frac{15a + 12}{3}.$$

$$\text{Dus } \frac{15a + 12}{3} = 2$$

$$15a + 12 = 6$$

$$15a = -6$$

$$a = -\frac{2}{5}$$

Dit geeft $f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 4x - 3$.

Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[0, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\frac{3}{5} - -3}{1} = 3\frac{3}{5}$.

41 a De gemiddelde snelheid op $[2, 3]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(3^3 + 3) - (2^3 + 2)}{3 - 2} = \frac{30 - 10}{1} = 20$ m/s.

b De gemiddelde snelheid op $[2; 2,5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,5^3 + 2,5) - (2^3 + 2)}{2,5 - 2} = \frac{18,125 - 10}{0,5} = 16,25$ m/s.

De gemiddelde snelheid op $[2; 2,1]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,1^3 + 2,1) - (2^3 + 2)}{2,1 - 2} = \frac{11,361 - 10}{0,1} = 13,61$ m/s.

De gemiddelde snelheid op $[2; 2,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,01^3 + 2,01) - (2^3 + 2)}{2,01 - 2} = \frac{10,130601 - 10}{0,01} = 13,0601$ m/s.

De gemiddelde snelheid op $[2; 2,001]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,001^3 + 2,001) - (2^3 + 2)}{2,001 - 2} = \frac{10,013006001 - 10}{0,001} \approx 13,0060 \text{ m/s.}$$

c Op een kleiner wordend interval komt de gemiddelde snelheid steeds dichterbij 13 m/s.

De gemiddelde snelheid op $[2; 2,0001]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,0001^3 + 2,0001) - (2^3 + 2)}{2,0001 - 2} = \frac{10,00130006... - 10}{0,0001} \approx 13,0006 \text{ m/s.}$$

d 13 m/s

Bladzijde 73

42 Op $[3; 3,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,4 \cdot 3,01^2 - 0,4 \cdot 3^2}{0,01} = 2,404$.

De snelheid op $t = 3$ is bij benadering 2,40 m/s.

Op $[5; 5,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,4 \cdot 5,01^2 - 0,4 \cdot 5^2}{0,01} = 4,004$.

De snelheid op $t = 5$ is bij benadering 4,00 m/s.

43 Op $[1; 1,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(8 - \frac{5}{1,01 + 2}\right) - \left(8 - \frac{5}{1 + 2}\right)}{0,01} = 0,553...$

De snelheid op $t = 1$ is bij benadering 0,55 m/s.

Op $[2; 2,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(8 - \frac{5}{2,01 + 2}\right) - \left(8 - \frac{5}{2 + 2}\right)}{0,01} = 0,311...$

De snelheid op $t = 2$ is bij benadering 0,31 m/s.

44 a Op $[2; 2,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(10\sqrt{8,04+1} - 10) - (10\sqrt{8+1} - 10)}{0,01} = 6,659\dots$

De snelheid op $t = 2$ is bij benadering 6,66 m/s.

Op $[20; 20,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(10\sqrt{80,04+1} - 10) - (10\sqrt{80+1} - 10)}{0,01} = 2,221\dots$

De snelheid op $t = 20$ is bij benadering 2,22 m/s.

b Op $[11; 11,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(10\sqrt{44,04+1} - 10) - (10\sqrt{44+1} - 10)}{0,01} = 2,980\dots$

De snelheid op $t = 11$ is bij benadering 2,98 m/s.

Het gemiddelde van de snelheden op $t = 2$ en op $t = 20$ is $\frac{6,659\dots + 2,221\dots}{2} = 4,440\dots$

Dit is niet gelijk aan de snelheid op $t = 11$.

45 Op $[3; 3,001]$ is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1,20 \cdot 1,15^{3,001} - 1,20 \cdot 1,15^3}{0,001} = 0,2550\dots$

De snelheid op $t = 3$ is bij benadering 0,26 m²/dag.

46 De gemiddelde snelheid op $[0, 6]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-\frac{1}{3} \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2) - (-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 5 \cdot 0^2)}{6 - 0} = 18 \text{ m/s.}$

Benader de snelheid op $t = 0$. Neem bijvoorbeeld $\Delta t = 0,001$.

De snelheid op $t = 0$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-\frac{1}{3} \cdot 0,001^3 + 5 \cdot 0,001^2) - (-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 5 \cdot 0^2)}{0,001} = 0,004\dots \text{ m/s.}$

Benader de snelheid op $t = 6$. Neem bijvoorbeeld $\Delta t = 0,001$.

De snelheid op $t = 6$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-\frac{1}{3} \cdot 6,001^3 + 5 \cdot 6,001^2) - (-\frac{1}{3} \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2)}{0,001} = 23,99\dots \text{ m/s.}$

Op $t = 0$ is de snelheid minder dan de gemiddelde snelheid en op $t = 6$ is de snelheid meer dan de gemiddelde snelheid. Dus moet er op $[0, 6]$ een tijdstip zijn waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 6]$.

2.3 Raaklijnen en hellinggrafieken

Bladzijde 75

47 a De gemiddelde snelheid op $[2, 5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-5^2 + 10 \cdot 5) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{5 - 2} = \frac{25 - 16}{3} = 3 \text{ m/s.}$

De gemiddelde snelheid op $[2, 4]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-4^2 + 10 \cdot 4) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{4 - 2} = \frac{24 - 16}{2} = 4 \text{ m/s.}$

De gemiddelde snelheid op $[2, 3]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-3^2 + 10 \cdot 3) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{3 - 2} = \frac{21 - 16}{1} = 5 \text{ m/s.}$

De gemiddelde snelheid op $[2; 2,5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-2,5^2 + 10 \cdot 2,5) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{2,5 - 2} = \frac{18,75 - 16}{0,5} = 5,5 \text{ m/s.}$

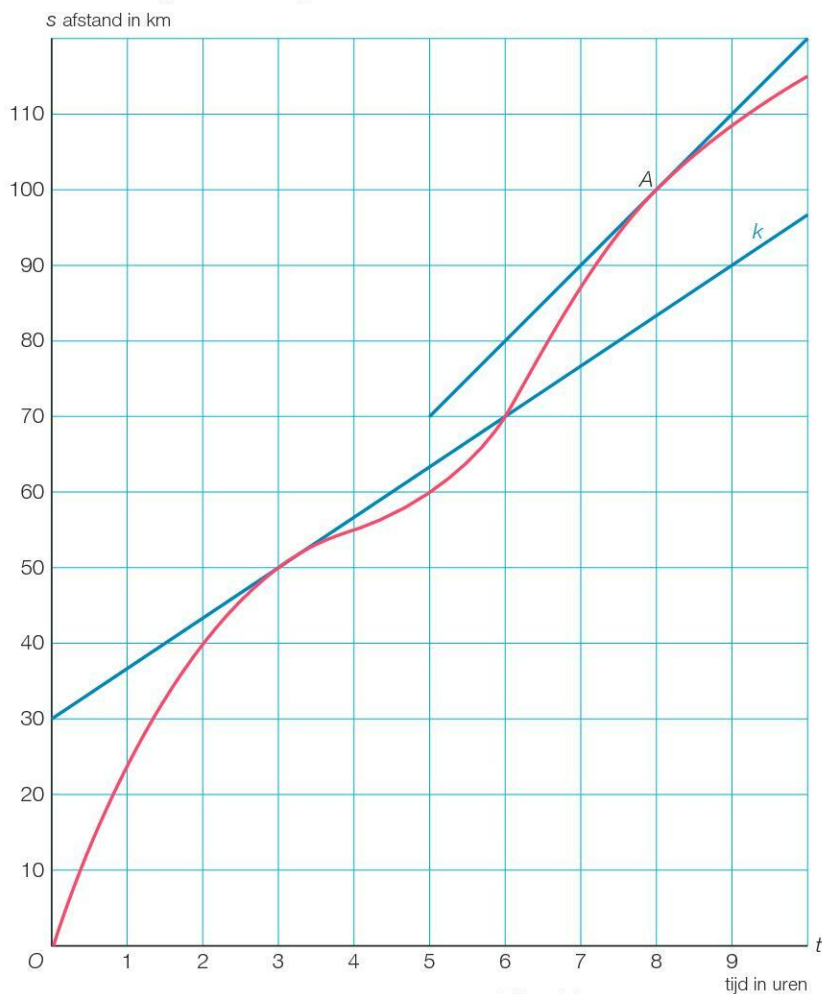
b De richtingscoëfficiënt van de lijn AB_4 komt het dichtst in de buurt bij die van k .

- 48 a** De raaklijn gaat door de punten (5, 70) en (10, 120).

De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{120 - 70}{10 - 5} = 10$.

De snelheid op $t = 8$ is ongeveer 10 km/uur.

b

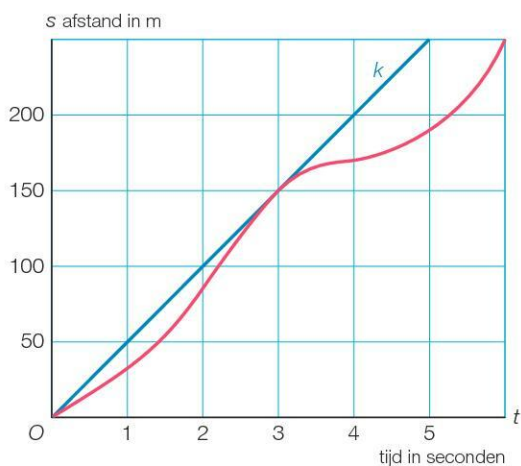


Raaklijn k door (0, 30) en (6, 70), dus $rc_k = \frac{70 - 30}{6 - 0} = 6,66\dots$

De snelheid op $t = 3$ is ongeveer 6,7 km/uur.

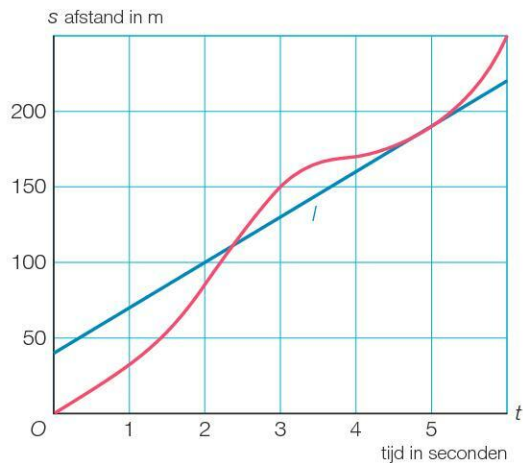
- c** Omdat de grafiek afnemend stijgend is op $[0, 4]$, neemt de snelheid gedurende de eerste vier uur af.
- d** Voor $t = 4$ is de snelheid minimaal omdat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn daar het kleinst is.

49 a



Raaklijn k door (0, 0) en (5, 250), dus $rc_k = \frac{250 - 0}{5 - 0} = 50$.

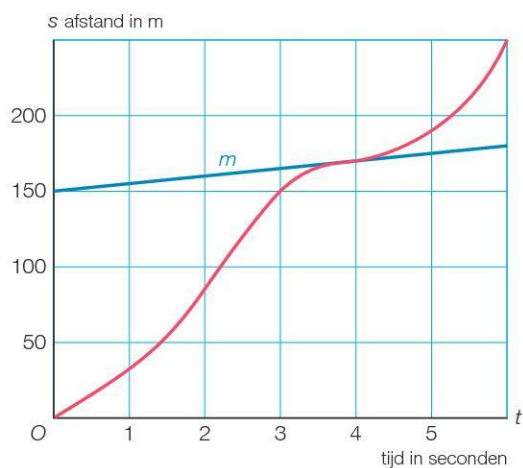
De snelheid op $t = 3$ is ongeveer 50 m/s.



Raaklijn l door $(0, 40)$ en $(5, 190)$, dus $rc_l = \frac{190 - 40}{5 - 0} = 30$.

De snelheid op $t = 5$ is ongeveer 30 m/s.

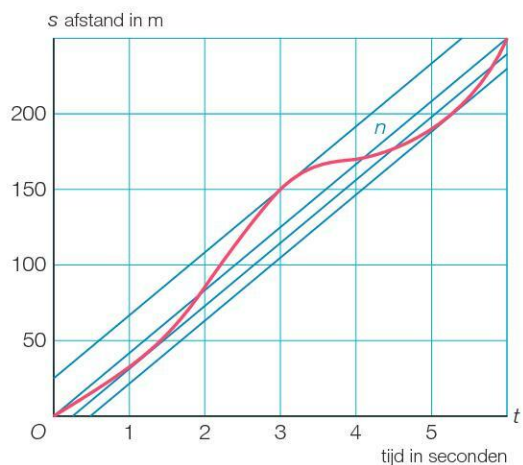
- b** Voor $t = 4$ krijg je de raaklijn met de kleinste richtingscoëfficiënt. Dus voor $t = 4$ is de snelheid minimaal.



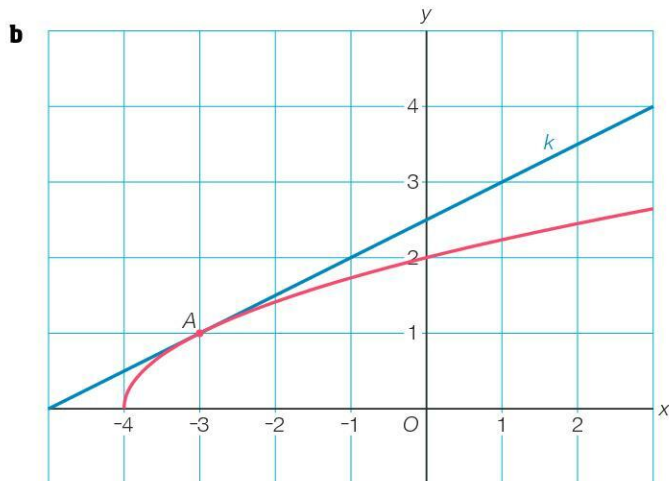
Raaklijn m door $(0, 150)$ en $(6, 180)$, dus $rc_m = \frac{180 - 150}{6 - 0} = 5$.

Dus de minimale snelheid is ongeveer 5 m/s.

- c** Teken de lijn n door $(0, 0)$ en $(6, 250)$. De grafiek heeft drie raaklijnen die evenwijdig zijn met n . Dus er zijn drie tijdstippen waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 6]$.



50 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{-2,99+4} - \sqrt{-3+4}}{0,01} \approx 0,5$



$$rc_k = \frac{1}{2}$$

c Die zijn gelijk.

Bladzijde 79

51 a Voer in $y_1 = x^2 + x - 2$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-1} = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x + b \\ f(-1) = -2, \text{ dus } A(-1, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 + b = -2 \\ 1 + b = -2 \\ b = -3 \end{array}$$

Dus $k: y = -x - 3$.

b Voer in $y_1 = \frac{2}{x-1} + 3$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = -0,5$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -0,5x + b \\ g(3) = 4, \text{ dus } B(3, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,5 \cdot 3 + b = 4 \\ -1,5 + b = 4 \\ b = 5,5 \end{array}$$

Dus $l: y = -0,5x + 5,5$.

52 Voer in $y_1 = 1 + \frac{5x^2}{x^2 + 1}$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-2} = -0,8$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -0,8x + b \\ f(-2) = 5, \text{ dus } A(-2, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,8 \cdot -2 + b = 5 \\ 1,6 + b = 5 \\ b = 3,4 \end{array}$$

Dus $k: y = -0,8x + 3,4$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1} = 2,5$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2,5x + b \\ f(1) = 3,5, \text{ dus } B(1; 3,5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2,5 \cdot 1 + b = 3,5 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $l: y = 2,5x + 1$.

Snijpunt berekenen van $k: y = -0,8x + 3,4$ en $l: y = 2,5x + 1$.

$$-0,8x + 3,4 = 2,5x + 1$$

$$-3,3x = -2,4$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0,727... \\ y = 2,5x + 1 \end{array} \right\} y = 2,818...$$

Dus snijpunt $(0,73; 2,82)$.

53 Voer in $y_1 = \frac{2x+4}{x-1}$ en $y_2 = \sqrt{9x-2}$.

De optie snijpunt geeft $x = 3$ en $y = 5$.

Zet y_2 uit.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = -1,5$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -1,5x + b \\ S(3, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,5 \cdot 3 + b = 5 \\ -4,5 + b = 5 \\ b = 9,5 \end{array}$$

Dus $k: y = -1,5x + 9,5$.

Zet y_1 uit en y_2 aan.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = 0,9$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 0,9x + b \\ S(3, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,9 \cdot 3 + b = 5 \\ 2,7 + b = 5 \\ b = 2,3 \end{array}$$

Dus $l: y = 0,9x + 2,3$.

54 a Voer in $y_1 = \frac{600x}{4^x}$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1} = -57,94...$$

De hoeveelheid neemt af met een snelheid van 57,9 mg/uur.

b Op $t = 2$ is er nog $\frac{600 \cdot 2}{4^2} = \frac{1200}{16} = 75$ mg aanwezig.

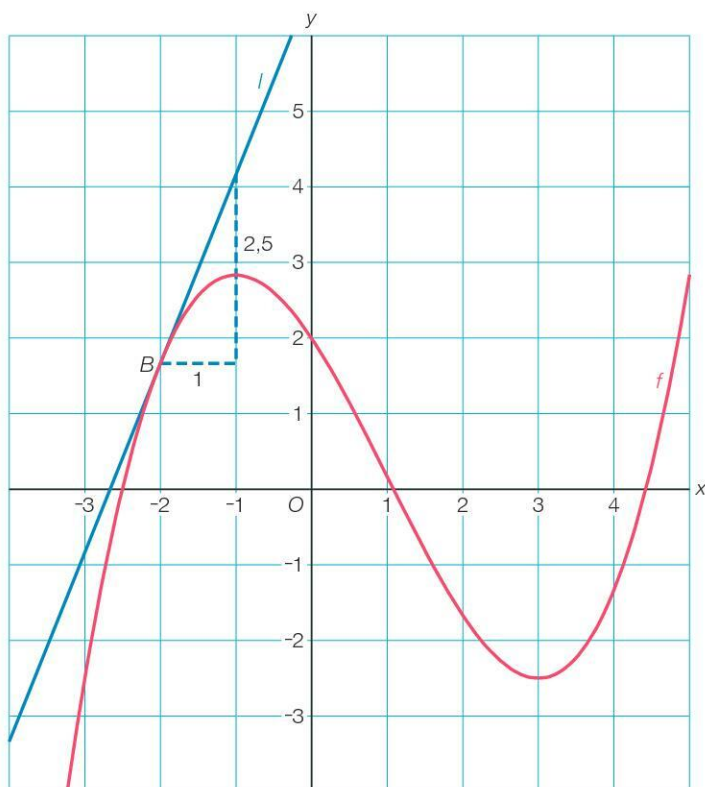
$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=2} = -66,47..., \text{ dus de hoeveelheid neemt vanaf } t = 2 \text{ af met } 66,47... \text{ mg/uur.}$$

Het duurt dan nog $\frac{75}{66,47...} \approx 1,1$ uur.

Dus $t \approx 1,1 + 2 = 3,1$ uur.

55 a De raaklijn k gaat door $(-3; -2,5)$ en $(-2; 3,5)$, dus $rc_k = \frac{3,5 - (-2,5)}{-2 - (-3)} = \frac{6}{1} = 6$.

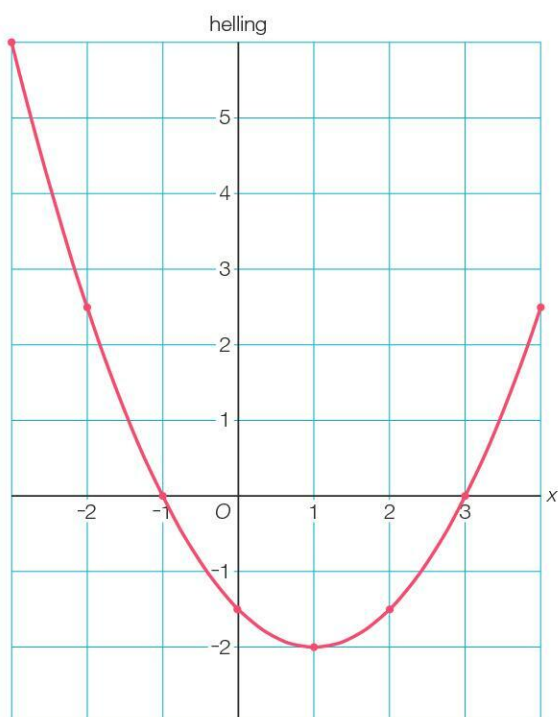
b



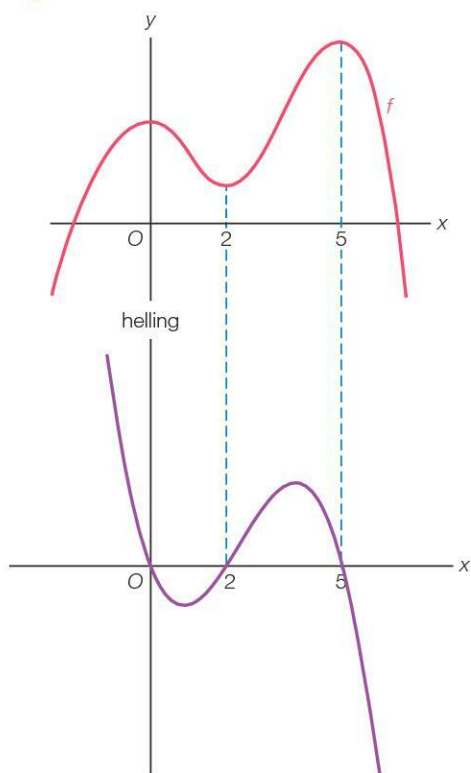
c

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
helling	6	2,5	0	-1,5	-2	-1,5	0	2,5

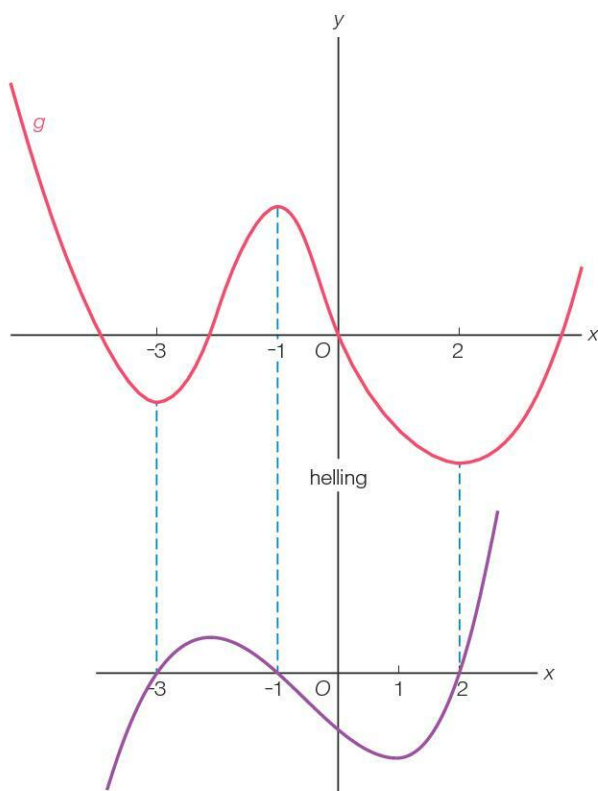
d



56 a



b

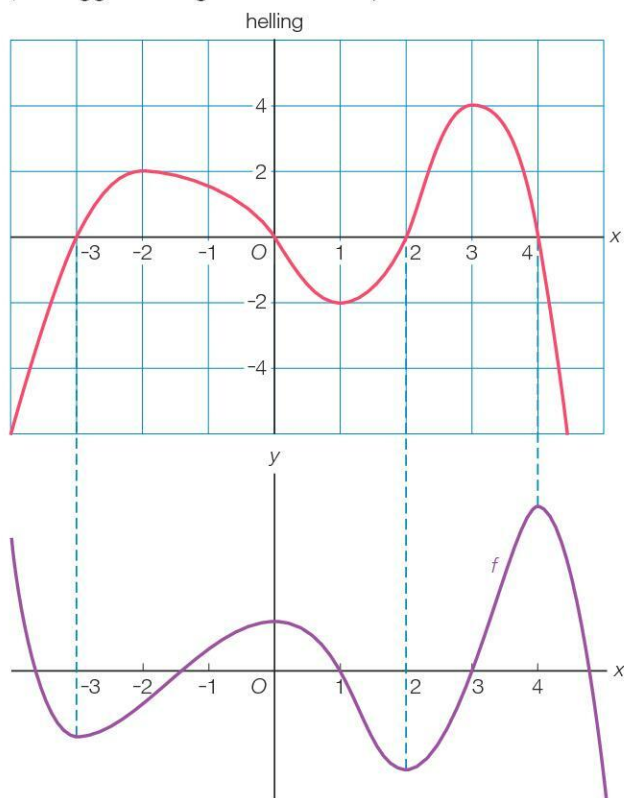


- 57 Bij f hoort hellinggrafiek B.
 Bij g hoort hellinggrafiek D.
 Bij h hoort hellinggrafiek A.
 Bij k hoort hellinggrafiek C.

- 58 a De grafiek van f is dalend op $\langle \leftarrow, -3 \rangle$ omdat de helling van de grafiek op $\langle \leftarrow, -3 \rangle$ kleiner is dan 0.
 b De grafiek van f heeft een top bij $x = -3$ omdat de hellinggrafiek daar de x -as snijdt. Dat is een laagste punt.
 c De grafiek van f is stijgend op $\langle -3, 0 \rangle$.

- d** De grafiek van f heeft een hoogste punt bij $x = 0$. De grafiek gaat bij $x = 0$ over van stijgend (hellinggrafiek ligt boven de x -as) naar dalend (hellinggrafiek ligt onder de x -as).

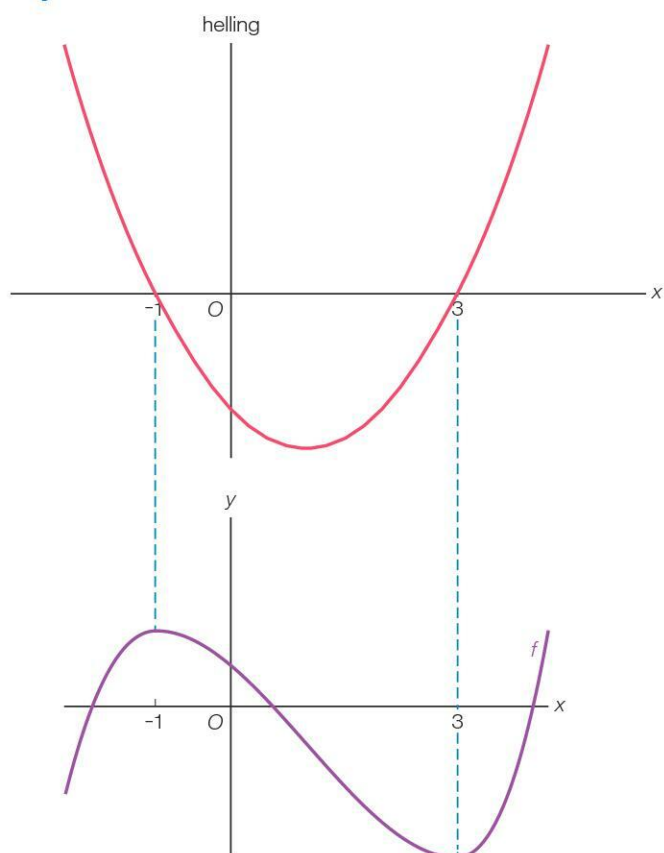
e

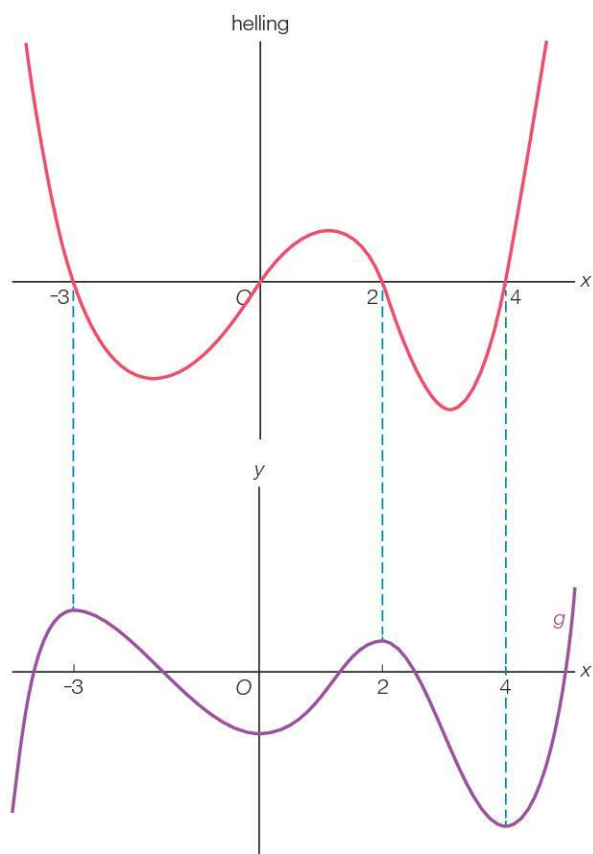
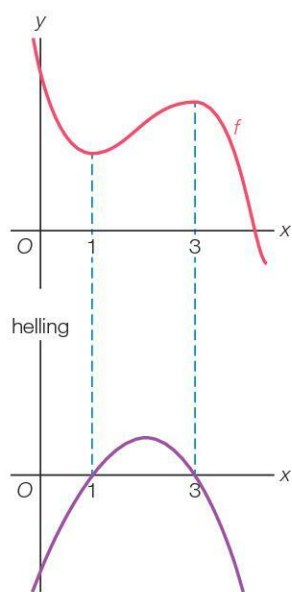


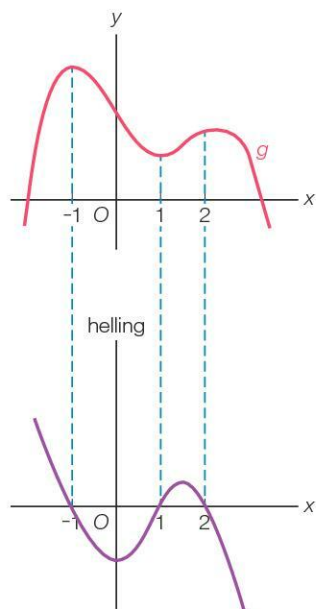
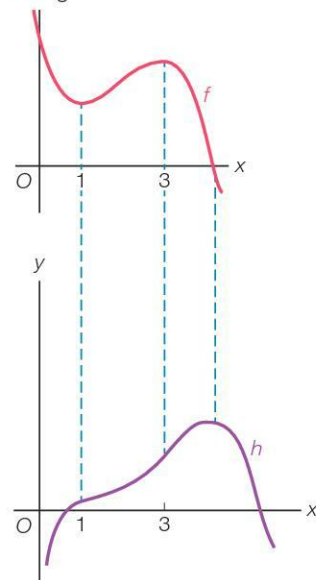
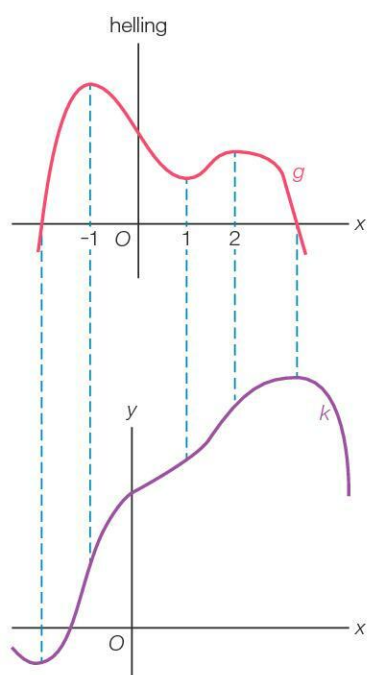
Bladzijde 83

59

a

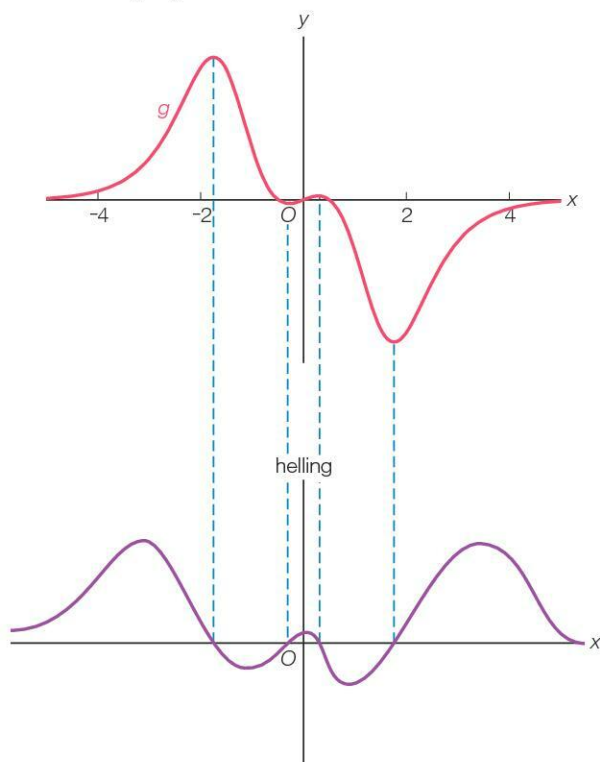


b**60 a**

b**c** helling**d**

- 61 a** De grafiek van g heeft vier toppen. De hellinggrafiek van g moet de x -as vier keer snijden. Dus de grafiek van f kan niet de hellinggrafiek van g zijn. De grafiek van f heeft drie toppen. De grafiek van g snijdt de x -as drie keer. Dus de grafiek van g is de hellinggrafiek van f . Lars heeft gelijk.

b

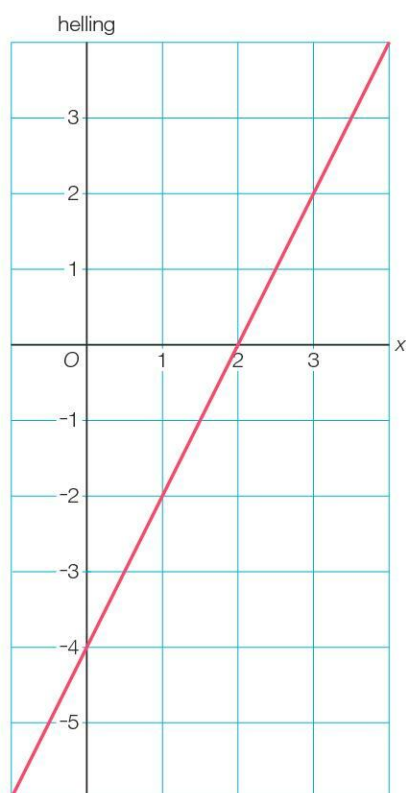


Bladzijde 84

62 a

x	-1	0	1	2	3	4
helling	-6	-4	-2	0	2	4

b



63 a Voer in $y_1 = -0,1x^3 + x^2 - 2x + 5$.

$$\text{helling} = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=7} = -2,7$$

b Voer in $y_1 = 0,1x^4 - 0,3x^3 - 4,5x^2 + 9x + 5$ en $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) \Big|_{x=x}$.

Voer in $y_3 = 10$ en zet y_1 uit.

De optie snijpunt met y_2 en y_3 geeft $x \approx -3,68$, $x \approx -0,11$ en $x \approx 6,04$.

Dus voor $x \approx -3,68$, voor $x \approx -0,11$ en voor $x \approx 6,04$ is de helling van de grafiek gelijk aan 10.

c Voer in $y_1 = \frac{5x^2 - 38}{x^2 + 4}$ en $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) \Big|_{x=x}$.

Voer in $y_3 = 3$ en zet y_1 uit.

De optie snijpunt met y_2 en y_3 geeft $x \approx 0,458$ en $x \approx 2,354$.

Dus voor $x \approx 0,458$ en voor $x \approx 2,354$ is de helling van de grafiek gelijk aan 3.

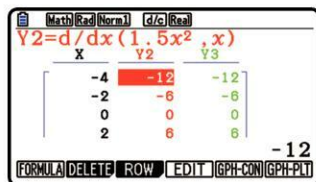
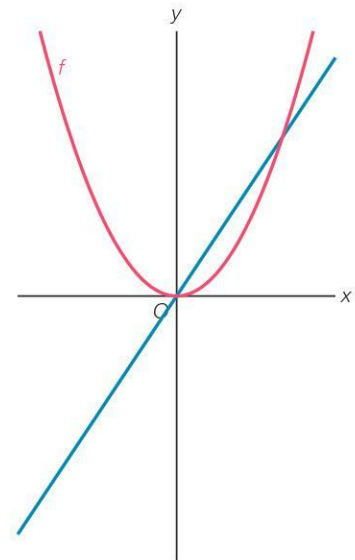
2.4 Differentiëren

Bladzijde 86

64 a Voer in $y_1 = 1,5x^2$ en $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) \Big|_{x=x}$.

Zie de figuur hiernaast.

b De formule is $y = 3x$.



65 a In elk punt van de grafiek van g is de helling 3, want de grafiek van g is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt 3.

b $y = 3$

66 $y = 0$

Bladzijde 87

67 a $f(x) = 5x^2 - 7x + 5$ geeft $f'(x) = 10x - 7$

b $g(x) = -2\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$ geeft $g'(x) = -5x + 4$

c $h(x) = 0,02x^2 + 1,7x$ geeft $h'(x) = 0,04x + 1,7$

d $k(x) = 7x + 10$ geeft $k'(x) = 7$

68 a $f(x) = (2x - 7)(8 + x) = 16x + 2x^2 - 56 - 7x = 2x^2 + 9x - 56$ geeft $f'(x) = 4x + 9$

b $g(p) = -12p^2 + 30p$ geeft $g'(p) = -24p + 30$

c $V(t) = 100 - (t^2 - 6t) = 100 - t^2 + 6t$ geeft $V'(t) = -2t + 6$

d $K(q) = -0,01q^2 + 20q$ geeft $K'(q) = -0,02q + 20$

69 a $f(x) = 3x - 2(x^2 + 1) = 3x - 2x^2 - 2$ geeft $f'(x) = 3 - 4x$

b $P(q) = 0,05q^2 - 200q$ geeft $P'(q) = 0,1q - 200$

c $g(x) = 3(2x - 3)^2 = 3(4x^2 - 12x + 9) = 12x^2 - 36x + 27$ geeft $g'(x) = 24x - 36$

d $h(a) = 50 - (\frac{1}{2}a - 4)^2 = 50 - (\frac{1}{4}a^2 - 4a + 16) = -\frac{1}{4}a^2 + 4a + 34$ geeft $h'(a) = -\frac{1}{2}a + 4$

- 70** a $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x) = 20x - 15x^2 + 28 - 21x = -15x^2 - x + 28$ geeft $f'(x) = -30x - 1$
 b $g(x) = (3x + 6)^2 = 9x^2 + 36x + 36$ geeft $g'(x) = 18x + 36$
 c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(x - 1) + 8 = 5(x^2 - 6x + 9) + 5x - 5 + 8 = 5x^2 - 30x + 45 + 5x - 5 + 8 = 5x^2 - 25x + 48$ geeft $h'(x) = 10x - 25$
 d $k(x) = -3(x - 1)(5 - 2x) - 8(x - 7) = -3(5x - 2x^2 - 5 + 2x) - 8x + 56 = -15x + 6x^2 + 15 - 6x - 8x + 56 = 6x^2 - 29x + 71$ geeft $k'(x) = 12x - 29$

- 71** a $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x - 2$
 Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = \frac{1}{2}x - 2$.
 b $x = 6$ geeft helling $= \frac{1}{2} \cdot 6 - 2 = 1$
 c helling $= -1$ geeft $\frac{1}{2}x - 2 = -1$
 $\frac{1}{2}x = 1$
 $x = 2$

Bladzijde 88

- 72** Neem bijvoorbeeld $g(x) = 3$ en $h(x) = x^2$, dan is $f(x) = 3x^2$ en $f'(x) = 6x$.
 Maar $g'(x) = 0$ en $h'(x) = 2x$ zodat $g'(x) \cdot h'(x) = 0$.
 Dus de regel $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ geeft $f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$ geldt niet.

- 73** a *
 b Je kunt nagaan dat de grafiek van f' door het punt $(1, 1)$ gaat.
 $f'(1) = 1$ geeft $a \cdot 1^2 = 1$, dus $a = 1$.
 *

Bladzijde 89

- 74** a $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$ geeft $f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2$
 b $g(x) = -2x^7 - 3x^5 + 3,4$ geeft $g'(x) = -14x^6 - 15x^4$
 c $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$ geeft $h'(t) = -t^2 + 13t$
 d $k(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3$ geeft $k'(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2$
- 75** a $f(x) = 3(2x + 1)^2 = 3(4x^2 + 4x + 1) = 12x^2 + 12x + 3$ geeft $f'(x) = 24x + 12$
 b $g(x) = 7(3x - 2)(x^2 + 2x) = 7(3x^3 + 6x^2 - 2x^2 - 4x) = 7(3x^3 + 4x^2 - 4x) = 21x^3 + 28x^2 - 28x$ geeft $g'(x) = 63x^2 + 56x - 28$
 c $h(x) = 3px^8 - px^4$ geeft $h'(x) = 24px^7 - 4px^3$
 d $k(x) = x^3 + a$ geeft $k'(x) = 3x^2$
- 76** a $f(x) = (4x^2 - 9)(4x^2 + 9) = 16x^4 - 81$ geeft $f'(x) = 64x^3$
 b $g(x) = 4x(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 4x(x^4 - 9x^2 - 4x^2 + 36) = 4x(x^4 - 13x^2 + 36) = 4x^5 - 52x^3 + 144x$ geeft $g'(x) = 20x^4 - 156x^2 + 144$
 c $h(x) = (2x^3 - 4)^2 = 4x^6 - 16x^3 + 16$ geeft $h'(x) = 24x^5 - 48x^2$
 d $k(x) = (3x^2 - 1)^2 - (2x^2 - 3)^2 = 9x^4 - 6x^2 + 1 - (4x^4 - 12x^2 + 9) = 9x^4 - 6x^2 + 1 - 4x^4 + 12x^2 - 9 = 5x^4 + 6x^2 - 8$ geeft $k'(x) = 20x^3 + 12x$
- 77** a $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 5$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$
 Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.
 b $x = 4$ geeft helling $= -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = -24 + 8 + 1 = -15$
 c helling $= -1$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -1$
 $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$
 $3x^2 - 4x - 4 = 0$
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -4 = 64$, dus $\sqrt{D} = 8$
 $x = \frac{4 + 8}{6} = 2 \vee x = \frac{4 - 8}{6} = -\frac{2}{3}$

78 $f(x) = ax^4 - 3x^2 + 2ax$ geeft $f'(x) = 4ax^3 - 6x + 2a$
 $f'(2) = 5$ geeft $4a \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 + 2a = 5$
 $32a - 12 + 2a = 5$
 $34a = 17$
 $a = \frac{1}{2}$

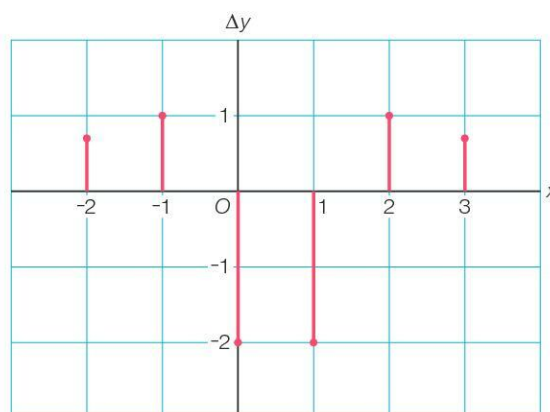
79 $k(x) = \frac{4x-2}{3x+3} = \frac{2(2x-1)}{3(x+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2}{3} \left(\frac{2x-1}{x+1} \right) = \frac{2}{3} \cdot h(x)$ geeft
 $k'(x) = \frac{2}{3} \cdot h'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

Diagnostische toets

Bladzijde 92

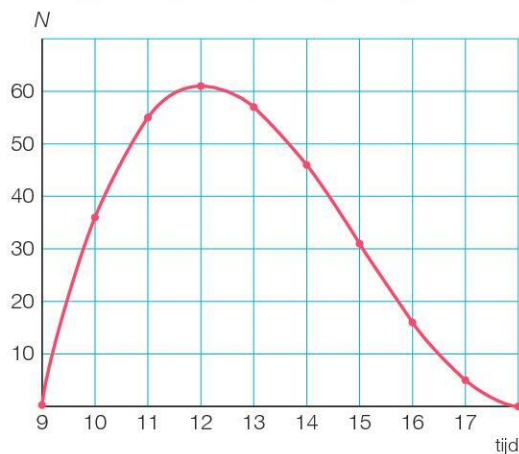
- 1 Toenemend stijgend op $\langle \leftarrow, -2 \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle -2, -1 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle -1, 0 \rangle$.
 Afnemend dalend op $\langle 0, 1 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle 1, 2 \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle 2, \rightarrow \rangle$.

2	x-interval bij $\Delta x = 1$	Δy
	$[-3, -2]$	0,8
	$[-2, -1]$	1
	$[-1, 0]$	-2
	$[0, 1]$	-2
	$[1, 2]$	1
	$[2, 3]$	0,8



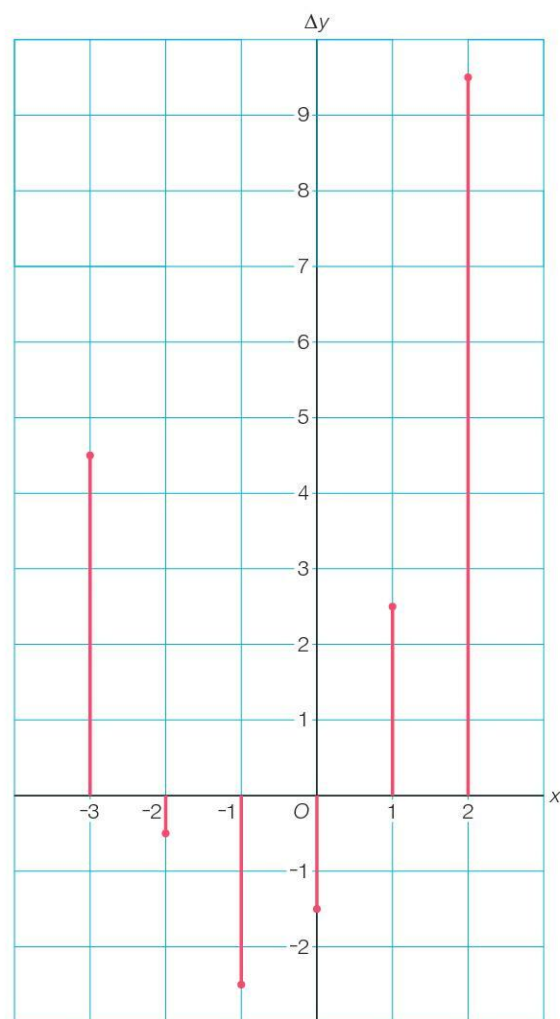
- 3 a Om 14 uur waren er $36 + 19 + 6 - 4 - 11 = 46$ bezoekers.

b	t	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	ΔN	—	36	19	6	-4	-11	-15	-15	-11	-5
	N	0	36	55	61	57	46	31	16	5	0



- c Op het terras zijn er minstens $\frac{61}{0,8} \approx 76$ stoelen.
 d Tussen 12 uur en 14 uur nam het totale aantal bezoekers van het terras af met 15.
 Dus tussen 12 uur en 14 uur kwamen er $80 - 15 = 65$ bezoekers.

4	x	y	Δy
	-4	0	-
	-3	4,5	4,5
	-2	4	-0,5
	-1	1,5	-2,5
	0	0	-1,5
	1	2,5	2,5
	2	12	9,5



5 a De gemiddelde verandering op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 1}{4 - 0} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$.

De gemiddelde verandering op $[-1, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 2}{2 - -1} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$.

b Op de grafiek liggen de punten $(0, 1)$ en $(2, 0)$.

Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 1}{2 - 0} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$, dus $[0, 2]$ is een mogelijk interval.

6 Het differentiequotient van $f(x)$ op $[3, 9]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(9) - f(3)}{9 - 3} = \frac{23 - -1}{6} = \frac{24}{6} = 4$.

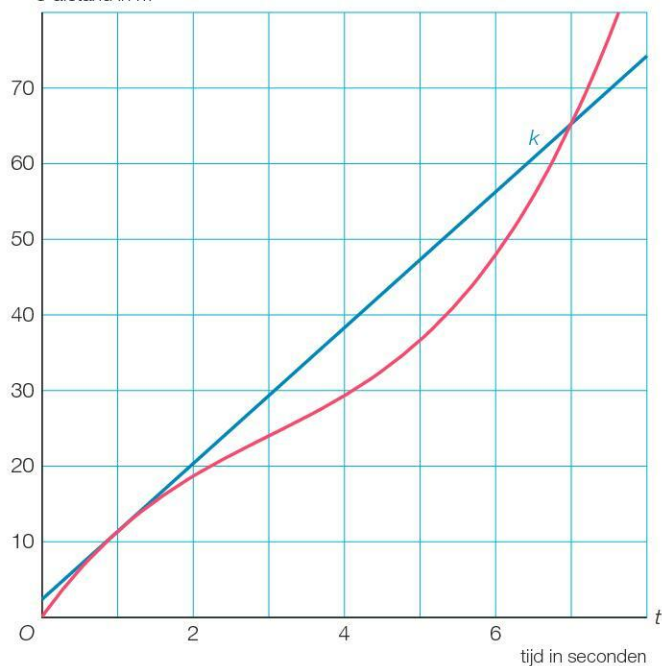
7 Op $[5; 5,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{200 \cdot 5,01^2}{0,1 \cdot 5,01^3 + 100} - \frac{200 \cdot 5^2}{0,1 \cdot 5^3 + 100}}{0,01} = 14,81\dots$

De snelheid op $t = 5$ is bij benadering 14,8 m/s.

8

a

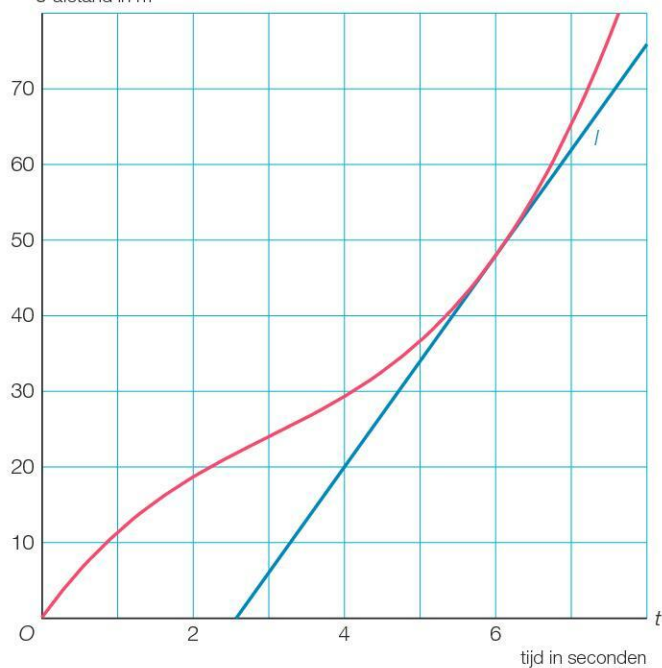
s afstand in m



Raaklijn k door $(0, 2)$ en $(8, 74)$, dus $rc_k = \frac{74 - 2}{8 - 0} = 9$.

De snelheid op $t = 1$ is ongeveer 9 m/s.

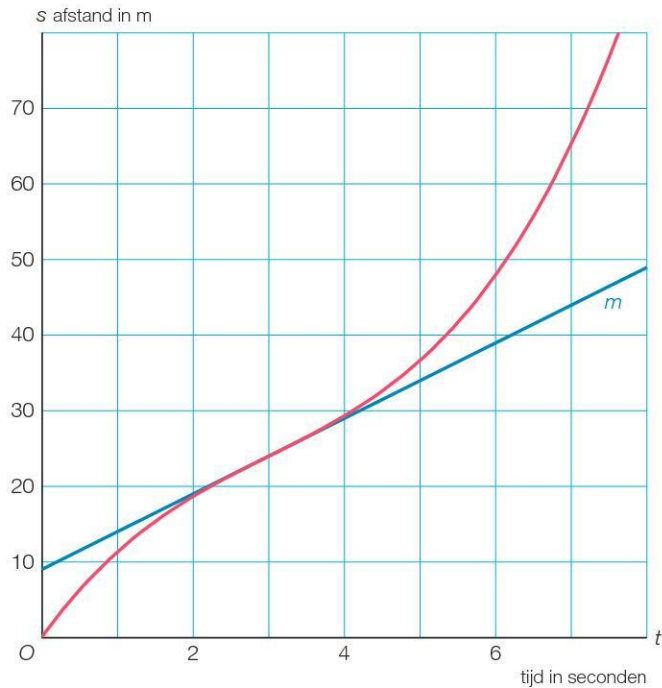
s afstand in m



Raaklijn l door $(4, 20)$ en $(8, 76)$, dus $rc_l = \frac{76 - 20}{8 - 4} = 14$.

De snelheid op $t = 6$ is ongeveer 14 m/s.

- b** Voor $t = 3$ krijg je de raaklijn met de kleinste richtingscoëfficiënt.
Dus voor $t = 3$ is de snelheid minimaal.



Raaklijn m door $(0, 9)$ en $(8, 49)$, dus $rc_m = \frac{49 - 9}{8 - 0} = 5$.

Dus de minimale snelheid is ongeveer 5 m/s.

- 9** Voer in $y_1 = \sqrt{10 - x^2}$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-3} = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + b \\ f(-3) = 1, \text{ dus } A(-3, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot (-3) + b = 1 \\ -9 + b = 1 \\ b = 10 \end{array}$$

Dus $k: y = 3x + 10$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ f(3) = 1, \text{ dus } B(3, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 3 + b = 1 \\ -9 + b = 1 \\ b = 10 \end{array}$$

Dus $l: y = -3x + 10$.

Het snijpunt van k en l is $S(0, 10)$.

- 10** Voer in $y_1 = \frac{100}{x^2 + 2}$.

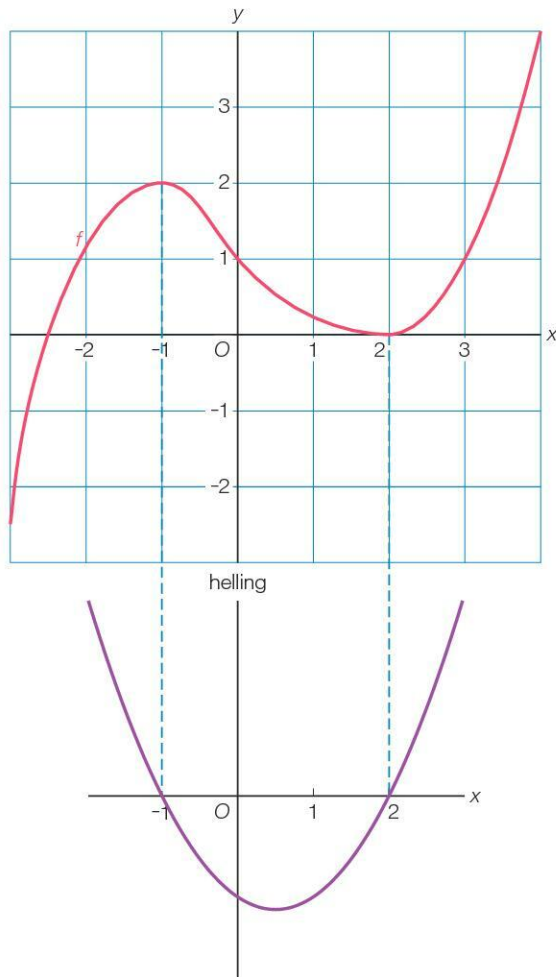
$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=4} = -2,469...$$

$$t = 4 \text{ geeft } C = \frac{100}{4^2 + 2} = 5,555...$$

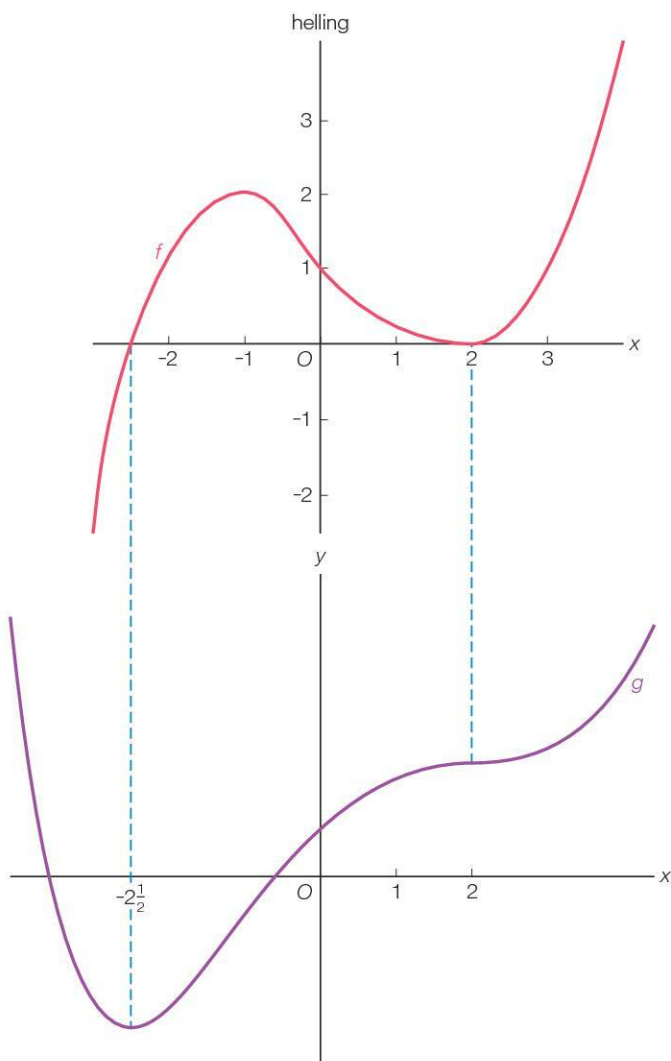
Na $t = 4$ duurt het nog $\frac{5,555...}{2,469...} \approx 2,25$ uur.

Dus op $t \approx 6,25$ is het medicijn uit het lichaam verdwenen.

11 a



b



12 Voer in $y_1 = 0,4x^3 - 0,6x^2 - 2x - 1$ en $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) \Big|_{x=x}$.

Voer in $y_3 = 3$ en zet y_1 uit.

De optie snijpunt met y_2 en y_3 geeft $x = -1,601...$ en $x = 2,601...$

Dus voor $x \approx -1,60$ en voor $x \approx 2,60$ is de helling van de grafiek gelijk aan 3.

13 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7$ geeft $f'(x) = x^2 - 6x$

b $g(p) = 4p^3 + \frac{1}{6}p^2 - 11p + 20$ geeft $g'(p) = 12p^2 + \frac{1}{3}p - 11$

c $h(q) = 3q - 2(q^2 - 4q) = 3q - 2q^2 + 8q = -2q^2 + 11q$ geeft $h'(q) = -4q + 11$

d $k(x) = ax^2 + bx + c$ geeft $k'(x) = 2ax + b$

14 a $f(x) = (3 - x)(5 + 2x) = 15 + 6x - 5x - 2x^2 = -2x^2 + x + 15$ geeft $f'(x) = -4x + 1$

b $g(x) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$ geeft $g'(x) = 18x + 6$

c $h(x) = x(2x - 1)^2 = x(4x^2 - 4x + 1) = 4x^3 - 4x^2 + x$ geeft $h'(x) = 12x^2 - 8x + 1$

d $v(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + at + b$ geeft $v'(t) = t^2 + 4t + a$

15 $f(x) = 0,4x^3 - 0,6x^2 - 2x - 1$ geeft $f'(x) = 1,2x^2 - 1,2x - 2$

$f'(2) = 1,2 \cdot 2^2 - 1,2 \cdot 2 - 2 = 0,4$

Dus de helling in het punt A is 0,4.

3 Hoeken en afstanden

Voorkennis Goniometrische verhoudingen

Bladzijde 98

1 $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$ geeft $\angle A \approx 31,0^\circ$
 $\sin(\angle D) = \frac{EF}{DE} = \frac{8}{11}$ geeft $\angle D \approx 46,7^\circ$
 $\cos(\angle I) = \frac{HI}{GI} = \frac{4}{10}$ geeft $\angle I \approx 66,4^\circ$
 $\tan(\angle K) = \frac{LM}{KL} = \frac{7}{10}$ geeft $\angle K \approx 35,0^\circ$
 $\cos(\angle P) = \frac{\frac{1}{2}PQ}{PR} = \frac{7,5}{10}$ geeft $\angle P \approx 41,4^\circ$

Bladzijde 99

2 $\cos(\angle C) = \frac{AC}{BC}$

$\cos(38^\circ)$	AC
1	17

$$AC = 17 \cos(38^\circ) \approx 13,4$$

$$\tan(\angle E) = \frac{DF}{DE}$$

$\tan(55^\circ)$	DF
1	5

$$DF = 5 \tan(55^\circ) \approx 7,1$$

$$\sin(\angle G) = \frac{HI}{GH}$$

$\sin(40^\circ)$	7
1	GH

$$GH = \frac{7}{\sin(40^\circ)} \approx 10,9$$

$$\sin(\angle MLN) = \frac{MN}{LN}$$

$\sin(60^\circ)$	MN
1	17

$$KL = MN = 17 \sin(60^\circ) \approx 14,7$$

$$PS = QS = 3$$

$$\tan(\angle P) = \frac{RS}{PS}$$

$\tan(75^\circ)$	RS
1	3

$$RS = 3 \tan(75^\circ) \approx 11,2$$

$$\boxed{3} \quad \cos(\angle BAC) = \frac{AB}{AC}$$

$\cos(35^\circ)$	AB
1	10

$$AB = 10 \cos(35^\circ) = 8,191...$$

$$\sin(\angle BAC) = \frac{BC}{AC}$$

$\sin(35^\circ)$	BC
1	10

$$BC = 10 \sin(35^\circ) = 5,735...$$

$$\text{omtrek rechthoek} = 2 \cdot 8,191... + 2 \cdot 5,735... \approx 27,85$$

$\boxed{4}$ CD is de bij zijde AB horende hoogte.

$$\tan(\angle A) = \frac{CD}{\frac{1}{2}AB}$$

$\tan(65^\circ)$	CD
1	4

$$CD = 4 \tan(65^\circ) = 8,578...$$

$$\text{opp } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8,578... \approx 34,31$$

$\boxed{5}$ RS is de bij zijde PQ horende hoogte.

$$\left. \begin{array}{l} \text{opp } \triangle PQR = 20 \\ \text{opp } \triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot RS \end{array} \right\} \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot RS = 20$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot RS = 20$$

$$RS = 6\frac{2}{3}$$

$$\tan(\angle P) = \frac{RS}{\frac{1}{2}PQ} = \frac{6\frac{2}{3}}{3} \text{ geeft } \angle P = 65,77...^\circ \approx 65,8^\circ$$

$$\angle Q = \angle P \approx 65,8^\circ$$

$$\angle R = 180^\circ - \angle P - \angle Q = 180^\circ - 2 \cdot 65,77...^\circ \approx 48,5^\circ$$

3.1 Berekeningen in driehoeken

Bladzijde 100

$\boxed{1}$ **a** In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB}$.

$$\angle A = 30^\circ \text{ en } AB = 6, \text{ dus je krijgt } \tan(30^\circ) = \frac{BC}{6}.$$

Hieruit volgt de verhoudingstabel

$\tan(30^\circ)$	BC
1	6

 en dit geeft $BC = 6 \tan(30^\circ) = 3,4641... \approx 3,464$.

b $\tan(\angle BDC) = \frac{BC}{BD}$

$\tan(40^\circ)$	$3,4641...$
1	BD

$$BD = \frac{3,4641...}{\tan(40^\circ)} \approx 4,13$$

Bladzijde 101

2 a In $\triangle BCD$ is $\sin(70^\circ) = \frac{BC}{5}$

$$BC = 5 \sin(70^\circ) = 4,69...$$

In $\triangle ABC$ is $\sin(\angle BAC) = \frac{BC}{AC} = \frac{4,69...}{10}$

$$\angle BAC \approx 28,0^\circ$$

b $\angle ADC = 180^\circ - \angle BDC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

$$\angle ACD = 180^\circ - \angle ADC - \angle DAC \approx 180^\circ - 110^\circ - 28,0^\circ = 42,0^\circ$$

3 In $\triangle ABC$ is $\tan(28^\circ) = \frac{4}{AB}$

$$AB = \frac{4}{\tan(28^\circ)} = 7,52...$$

$$BM = \frac{1}{2}AB = 3,76...$$

In $\triangle BCM$ is $\tan(\angle BMC) = \frac{BC}{BM} = \frac{4}{3,76...}$

$$\angle BMC \approx 46,8^\circ$$

4 In $\triangle ABC$ is $\sin(40^\circ) = \frac{BC}{10}$

$$BC = 10 \sin(40^\circ) = 6,42...$$

$$BM = \frac{1}{2}BC = 3,21...$$

In $\triangle ABC$ is $\cos(40^\circ) = \frac{AB}{10}$

$$AB = 10 \cos(40^\circ) = 7,66...$$

In $\triangle ABM$ is $\tan(\angle BAM) = \frac{BM}{AB} = \frac{3,21...}{7,66...}$

$$\angle BAM \approx 22,8^\circ$$

Bladzijde 102

5 $\angle ACB = 180^\circ - \angle CAB - \angle ABC = 180^\circ - 31^\circ - 90^\circ = 59^\circ$

In $\triangle ABC$ is $\tan(31^\circ) = \frac{BC}{10}$

$$BC = 10 \tan(31^\circ) = 6,00...$$

In $\triangle BCD$ is $\tan(\angle BCD) = \frac{BD}{BC} = \frac{8}{6,00...}$

$$\angle BCD \approx 53,1^\circ$$

$$\angle ACD = \angle ACB - \angle BCD \approx 59^\circ - 53,1^\circ = 5,9^\circ$$

6 In $\triangle BCM$ is $\sin(50^\circ) = \frac{BC}{6}$

$$BC = 6 \sin(50^\circ) = 4,59...$$

In $\triangle BCM$ is $\cos(50^\circ) = \frac{BM}{6}$

$$BM = 6 \cos(50^\circ) = 3,85...$$

$$AB = 2BM = 7,71...$$

In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle BAC) = \frac{BC}{AB} = \frac{4,59...}{7,71...}$

$$\angle BAC \approx 30,8^\circ$$

$$\angle AMC = 180^\circ - \angle BMC = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\angle ACM = 180^\circ - \angle AMC - \angle MAC \approx 180^\circ - 130^\circ - 30,8^\circ = 19,2^\circ$$

7 In $\triangle ABD$ is $\tan(20^\circ) = \frac{BD}{10}$

$$BD = 10 \tan(20^\circ) = 3,63...$$

$$BE = 2BD = 7,27...$$

$$\text{In } \triangle ABE \text{ is } \tan(\angle BAE) = \frac{BE}{AB} = \frac{7,27...}{10}$$

$$\angle BAE = 36,05...^\circ$$

$$BC = 2BE = 14,55...$$

$$\text{In } \triangle ABC \text{ is } \tan(\angle BAC) = \frac{BC}{AB} = \frac{14,55...}{10}$$

$$\angle BAC = 55,51...^\circ$$

$$\angle CAE = \angle BAC - \angle BAE = 55,51...^\circ - 36,05...^\circ \approx 19,5^\circ$$

8 a Zie de figuur hiernaast.

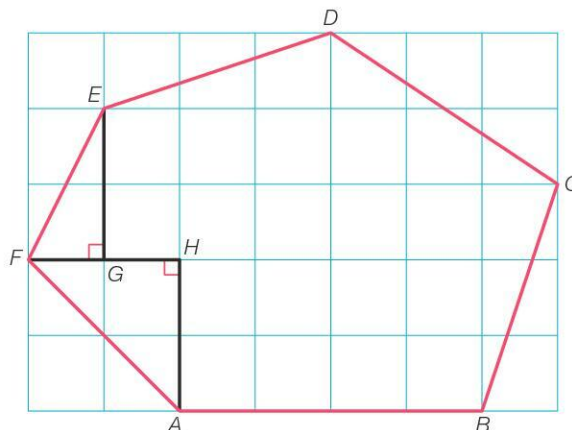
$$\text{In } \triangle EFG \text{ is } \tan(\angle EFG) = \frac{EG}{FG} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\angle EFG = 63,43...^\circ$$

$$\text{In } \triangle AFH \text{ is } \tan(\angle AFH) = \frac{AH}{FH} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\angle AFH = 45^\circ$$

$$\angle F = \angle EFG + \angle AFH = 63,43...^\circ + 45^\circ \approx 108,4^\circ$$



b Zie de figuur hiernaast.

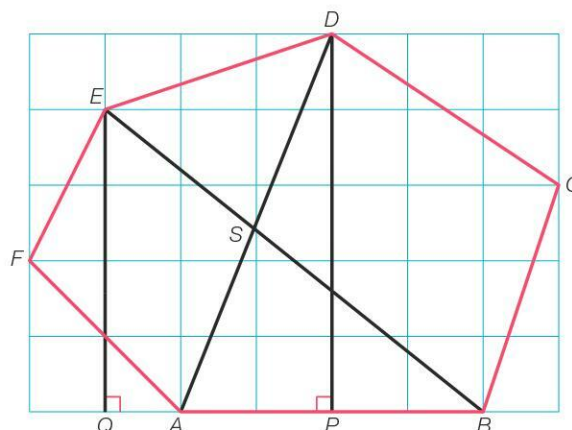
$$\text{In } \triangle ADP \text{ is } \tan(\angle PAD) = \frac{DP}{AP} = \frac{5}{2}$$

$$\angle PAD = 68,19...^\circ$$

$$\text{In } \triangle BEQ \text{ is } \tan(\angle QBE) = \frac{EQ}{BQ} = \frac{4}{5}$$

$$\angle QBE = 38,65...^\circ$$

$$\begin{aligned} \angle ASB &= 180^\circ - \angle SAB - \angle SBA \\ &= 180^\circ - 68,19...^\circ - 38,65...^\circ \approx 73,1^\circ \end{aligned}$$



9 A en K liggen op de cirkel met middelpunt L, dus $AL = KL$.

Dus driehoek AKL is gelijkbenig.

B, C en L liggen op de cirkel met middelpunt K, dus $KB = KC = KL$.

Dus de driehoeken CKL en BCK zijn gelijkbenig.

In de berekening wordt gebruikt dat de basishoeken van een gelijkbenige driehoek gelijk zijn.

$$\angle AKL = \angle KAL = 34^\circ$$

$$\angle ALK = 180^\circ - \angle AKL - \angle KAL = 180^\circ - 2 \cdot 34^\circ = 112^\circ$$

$$\angle CLK = 180^\circ - \angle ALK = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$$

$$\angle LCK = \angle CLK = 68^\circ$$

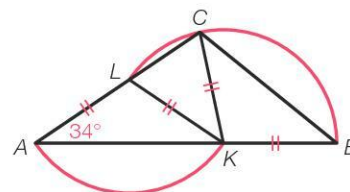
$$\angle LKC = 180^\circ - \angle CLK - \angle LCK = 180^\circ - 2 \cdot 68^\circ = 44^\circ$$

$$\angle BKC = 180^\circ - \angle LKC - \angle AKL = 180^\circ - 44^\circ - 34^\circ = 102^\circ$$

$$\angle KBC = \angle KCB$$

$$\left. \begin{aligned} \angle KBC + \angle KCB &= 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ \end{aligned} \right\} \angle KBC = 39^\circ$$

Dus $\angle B = 39^\circ$.

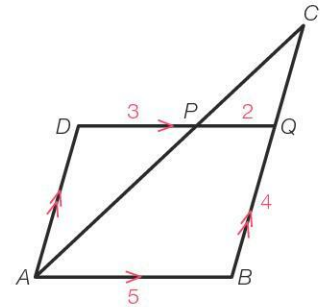


Bladzijde 103

- 10 De vergrotingsfactor is $\frac{AB}{AP} = \frac{4+2}{4} = 1\frac{1}{2}$.
 $AC = 1\frac{1}{2}AQ = 1\frac{1}{2} \cdot 3 = 4\frac{1}{2}$
 $BC = 1\frac{1}{2}PQ = 1\frac{1}{2} \cdot 6 = 9$

Bladzijde 105

- 11 a $KM = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$
 b Zie de figuur hiernaast met parallellogram $ABQD$.
 $\left. \begin{array}{l} \angle ADP = \angle CQP \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle APD = \angle CPQ \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ADP \sim \triangle CQP$
- | | | | | |
|-----------------|-----------------|-------|----------------|---------------|
| $\frac{AD}{CQ}$ | $\frac{DP}{QP}$ | geeft | $\frac{4}{CQ}$ | $\frac{3}{2}$ |
|-----------------|-----------------|-------|----------------|---------------|
- $$CQ = \frac{2 \cdot 4}{3} = 2\frac{2}{3}$$

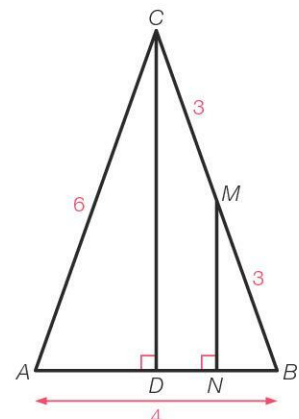


- 12 $\left. \begin{array}{l} \angle PAQ = \angle BAC \\ \angle APQ = \angle ABC \text{ (rechte hoek)} \end{array} \right\} \triangle APQ \sim \triangle ABC$
 De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
- | | | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-------|---------------|----------------|----------------|
| $\frac{AP}{AB}$ | $\frac{AQ}{AC}$ | $\frac{PQ}{BC}$ | geeft | $\frac{3}{4}$ | $\frac{AQ}{5}$ | $\frac{PQ}{3}$ |
|-----------------|-----------------|-----------------|-------|---------------|----------------|----------------|
- $$PQ = \frac{3 \cdot 3}{4} = 2\frac{1}{4}$$
- $$AQ = \frac{3 \cdot 5}{4} = 3\frac{3}{4}, \text{ dus } CQ = 5 - 3\frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

Bladzijde 106

- 13 $\left. \begin{array}{l} \angle DCE = \angle FBE \text{ (rechte hoek)} \\ \angle DEC = \angle FEB \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \triangle CDE \sim \triangle BFE$
- | | | | | |
|-----------------|-----------------|-------|----------------|---------------|
| $\frac{CD}{BF}$ | $\frac{CE}{BE}$ | geeft | $\frac{4}{BF}$ | $\frac{2}{3}$ |
|-----------------|-----------------|-------|----------------|---------------|
- $$BF = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$
- 14 $\left. \begin{array}{l} \angle FAD = \angle FBE \text{ (rechte hoek)} \\ \angle AFD = \angle BFE \end{array} \right\} \triangle ADF \sim \triangle BEF$
- | | | | | |
|-----------------|-----------------|-------|----------------|---------------|
| $\frac{AD}{BE}$ | $\frac{AF}{BF}$ | geeft | $\frac{5}{BE}$ | $\frac{9}{5}$ |
|-----------------|-----------------|-------|----------------|---------------|
- $$BE = \frac{5 \cdot 5}{9} = 2\frac{7}{9}$$

- 15 Zie de figuur hiernaast met hoogtelijn CD .
 $\left. \begin{array}{l} \angle MBN = \angle CBD \\ \angle BNM = \angle BDC \text{ (rechte hoek)} \end{array} \right\} \triangle BMN \sim \triangle BCD$
 De stelling van Pythagoras in $\triangle BCD$ geeft $CD = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32}$.
- | | | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-------|---------------|------------------------|----------------|
| $\frac{BM}{BC}$ | $\frac{MN}{CD}$ | $\frac{BN}{BD}$ | geeft | $\frac{3}{6}$ | $\frac{MN}{\sqrt{32}}$ | $\frac{BN}{2}$ |
|-----------------|-----------------|-----------------|-------|---------------|------------------------|----------------|
- $$MN = \frac{3 \cdot \sqrt{32}}{6} \approx 2,83$$
- $$BN = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1, \text{ dus } AN = 4 - 1 = 3.$$



- 16** Zie de figuur hiernaast met hoogtelijn CF .
 $\left. \begin{array}{l} \angle FBC = \angle EBA \\ \angle BFC = \angle BEA \text{ (rechte hoek)} \end{array} \right\} \triangle BCF \sim \triangle BAE$

$$\frac{BC}{AB} \mid \frac{BF}{BE} \text{ geeft } \frac{15}{10} \mid \frac{5}{BE}$$

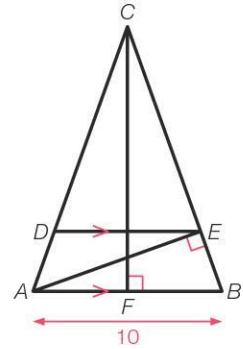
$$BE = \frac{5 \cdot 10}{15} = 3\frac{1}{3}$$

$$CE = BC - BE = 15 - 3\frac{1}{3} = 11\frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACB = \angle DCE \\ \angle CAB = \angle CDE \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DEC$$

$$\frac{AB}{DE} \mid \frac{BC}{CE} \text{ geeft } \frac{10}{DE} \mid \frac{15}{11\frac{2}{3}}$$

$$DE = \frac{10 \cdot 11\frac{2}{3}}{15} = 7\frac{7}{9}$$



Bladzijde 107

- 17 a** $\left. \begin{array}{l} \angle BAC = \angle DAE \\ \angle ABC = \angle ADE \text{ (rechte hoek)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle ADE \text{ dus } \frac{AB}{AD} \mid \frac{AC}{AE}$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AC = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

$$\frac{20}{8} \mid \frac{25}{AE} \text{ geeft } AE = \frac{8 \cdot 25}{20} = 10$$

- b** De stelling van Pythagoras in $\triangle ADE$ geeft $DE = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle BCD$ geeft $CD = \sqrt{12^2 + 15^2} = \sqrt{369}$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle EDC = \angle BCD \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle DEB = \angle CBE \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle DES \sim \triangle CBS \text{ dus } \frac{DE}{BC} \mid \frac{DS}{CS}$$

Stel $DS = x$, dan is $CS = \sqrt{369} - x$.

$$\begin{aligned} \text{Dit geeft } & \frac{6}{15} \mid \frac{x}{\sqrt{369} - x} \\ & 15x = 6(\sqrt{369} - x) \\ & 15x = 6\sqrt{369} - 6x \\ & 21x = 6\sqrt{369} \\ & x = \frac{6\sqrt{369}}{21} \approx 5,49 \end{aligned}$$

Dus $DS \approx 5,49$.

18 a $\left. \begin{array}{l} \angle ABC = \angle DBE \\ \angle ACB = \angle DEB \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DBE \text{ dus } \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$
 Stel $BD = x$, dan is $AB = x + 7$.

Dit geeft $\frac{x+7}{x} = \frac{10}{4}$

$$10x = 4(x+7)$$

$$10x = 4x + 28$$

$$6x = 28$$

$$x = 4\frac{2}{3}$$

Dus $BD = 4\frac{2}{3}$ en $AB = 11\frac{2}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} AC^2 + BC^2 = 6^2 + 10^2 = 136 \\ AB^2 = (11\frac{2}{3})^2 = 136\frac{1}{9} \end{array} \right\} AC^2 + BC^2 \neq AB^2, \text{ dus } \angle C \neq 90^\circ.$$

b Uit $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ volgt $\frac{AC}{DE} = \frac{BC}{BE}$ oftewel $\frac{6}{DE} = \frac{10}{4}$.

Dit geeft $DE = \frac{4 \cdot 6}{10} = 2\frac{2}{5}$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle CAE = \angle DEA \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle ACD = \angle EDC \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ACS \sim \triangle EDS$$

$\frac{AC}{DE} = \frac{AS}{ES}$ geeft $\frac{6}{2\frac{2}{5}} = \frac{AS}{ES}$

Hieruit volgt $AS : ES = 6 : 2\frac{2}{5} = 30 : 12 = 5 : 2$.

Dus AS is $\frac{5}{7}$ deel van AE .

19 De diagonalen in een rechthoek delen elkaar middendoor, dus $DQ = \frac{1}{2}BD$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle ABD = \angle CDB \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle APB = \angle DPM \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABP \sim \triangle MDP$$

$\frac{AB}{DM} = \frac{BP}{DP}$ en $DM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$ geeft $DP = \frac{1}{2}BP$.

Hieruit volgt $DP : BP = 1 : 2$, en dus $DP = \frac{1}{3}BD$.

$$PQ = DQ - DP = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{3}BD = \frac{1}{6}BD$$

3.2 De sinusregel en de cosinusregel

Bladzijde 109

20 a $\angle C = 180^\circ - 48^\circ - 76^\circ = 56^\circ$

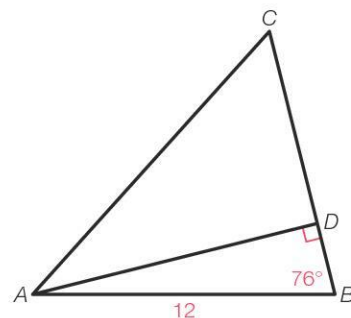
b Zie de figuur hiernaast met hoogtelijn AD .

In $\triangle ABD$ is $\sin(76^\circ) = \frac{AD}{12}$

$$AD = 12 \sin(76^\circ) = 11,64...$$

In $\triangle ADC$ is $\sin(56^\circ) = \frac{11,64...}{AC}$

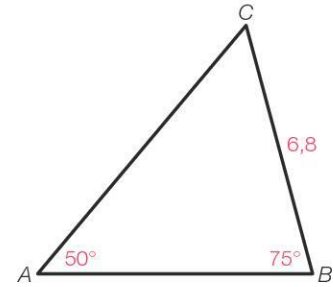
$$AC = \frac{11,64...}{\sin(56^\circ)} \approx 14,04$$



Bladzijde 110

21 a $\angle C = 180^\circ - 50^\circ - 75^\circ = 55^\circ$

b De sinusregel geeft $\frac{6,8}{\sin(50^\circ)} = \frac{AB}{\sin(55^\circ)}$
 $AB = \frac{6,8 \sin(55^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 7,3$
 en ook
 $\frac{6,8}{\sin(50^\circ)} = \frac{AC}{\sin(75^\circ)}$
 $AC = \frac{6,8 \sin(75^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 8,6$



22 a In $\triangle ACD$ is $\sin(\angle A) = \frac{CD}{b}$, dus $CD = b \sin(\angle A)$.

b In $\triangle BCD$ is $\sin(\angle B) = \frac{CD}{a}$, dus $CD = a \sin(\angle B)$.

c Uit a en b volgt $a \sin(\angle B) = b \sin(\angle A)$.

Linker- en rechterlid delen door $\sin(\angle A) \cdot \sin(\angle B)$ geeft $\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)}$.

d In $\triangle ABE$ is $\sin(\angle B) = \frac{AE}{c}$, dus $AE = c \sin(\angle B)$.

e In $\triangle ACE$ is $\sin(\angle C) = \frac{AE}{b}$, dus $AE = b \sin(\angle C)$.

f Uit e en f volgt $b \sin(\angle C) = c \sin(\angle B)$.

Linker- en rechterlid delen door $\sin(\angle B) \cdot \sin(\angle C)$ geeft $\frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}$.

g $\left. \begin{array}{l} \frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} \\ \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} \end{array} \right\}$ dus $\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}$

23 a In $\triangle ACD$ is $\sin(\angle DAC) = \sin(180^\circ - \angle BAC) = \frac{CD}{b}$, dus $CD = b \sin(180^\circ - \angle BAC)$.

b In $\triangle BCD$ is $\sin(\angle B) = \frac{CD}{a}$, dus $CD = a \sin(\angle B)$.

c Uit a en b volgt $b \sin(180^\circ - \angle BAC) = a \sin(\angle B)$.

Linker- en rechterlid delen door $\sin(180^\circ - \angle BAC) \cdot \sin(\angle B)$ geeft $\frac{a}{\sin(180^\circ - \angle BAC)} = \frac{b}{\sin(\angle B)}$.

Bladzijde 111

24 $\angle M = 180^\circ - 20^\circ - 110^\circ = 50^\circ$

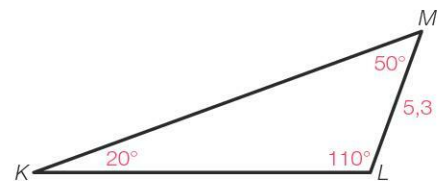
De sinusregel geeft $\frac{5,3}{\sin(20^\circ)} = \frac{KL}{\sin(50^\circ)}$

$KL = \frac{5,3 \sin(50^\circ)}{\sin(20^\circ)} \approx 11,9$

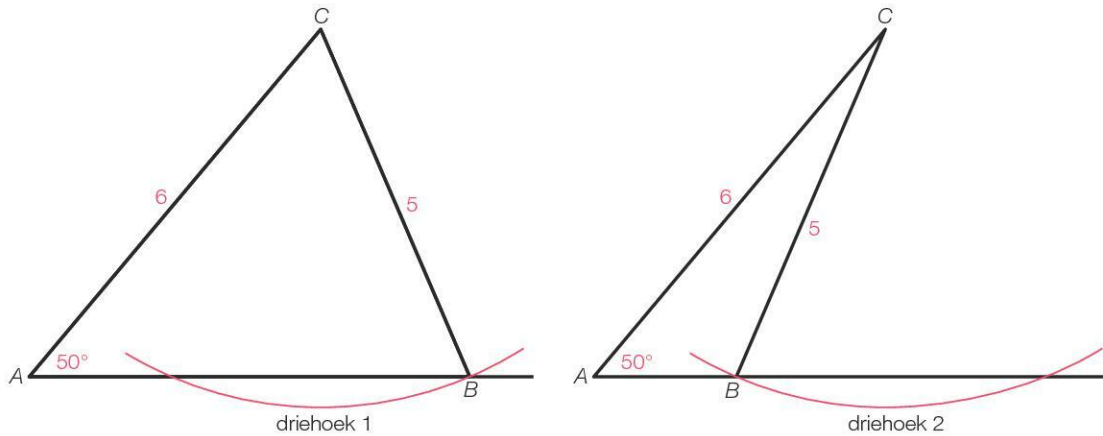
en ook

$\frac{5,3}{\sin(20^\circ)} = \frac{KM}{\sin(110^\circ)}$

$KM = \frac{5,3 \sin(110^\circ)}{\sin(20^\circ)} \approx 14,6$



25 a



b De sinusregel in driehoek 1 geeft $\frac{5}{\sin(50^\circ)} = \frac{6}{\sin(\angle B)}$
 $\sin(\angle B) = \frac{6 \sin(50^\circ)}{5} = 0,91...$
 $\angle B \approx 66,8^\circ$

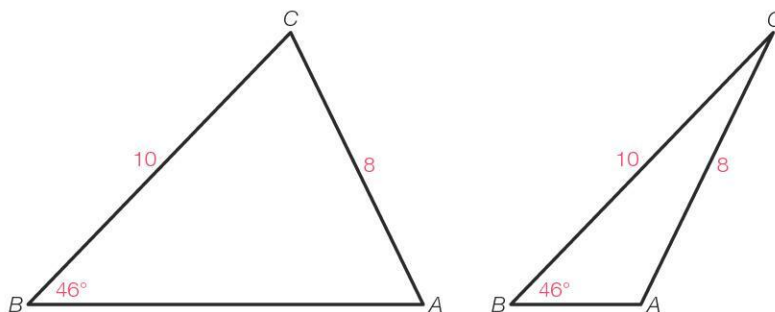
$\angle C \approx 180^\circ - 50^\circ - 66,8^\circ = 63,2^\circ$

De sinusregel in driehoek 1 geeft $\frac{5}{\sin(50^\circ)} = \frac{AB}{\sin(63,1...^\circ)}$
 $AB = \frac{5 \sin(63,1...^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 5,8$

c $\angle B \approx 180^\circ - 66,8^\circ = 113,2^\circ$
 $\angle C \approx 180^\circ - 50^\circ - 113,2^\circ = 16,8^\circ$

De sinusregel in driehoek 2 geeft $\frac{5}{\sin(50^\circ)} = \frac{AB}{\sin(16,8...^\circ)}$
 $AB = \frac{5 \sin(16,8...^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 1,9$

26 a



De sinusregel in de scherphoekige driehoek geeft $\frac{8}{\sin(46^\circ)} = \frac{10}{\sin(\angle A)}$
 $\sin(\angle A) = \frac{10 \sin(46^\circ)}{8}$
 $\angle A = 64,04...^\circ \approx 64,0^\circ$

In de stomphoekige driehoek is $\angle A = 180^\circ - 64,04...^\circ = 115,95...^\circ \approx 116,0^\circ$.

b In de scherphoekige driehoek is $\angle C = 180^\circ - 46^\circ - 64,04\dots^\circ = 69,95\dots^\circ$.

De sinusregel in de scherphoekige driehoek geeft $\frac{8}{\sin(46^\circ)} = \frac{AB}{\sin(69,95\dots^\circ)}$

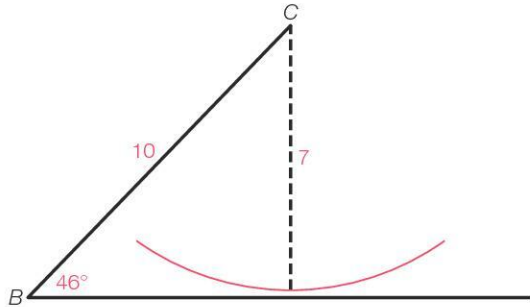
$$AB = \frac{8 \sin(69,95\dots^\circ)}{\sin(46^\circ)} \approx 10,4$$

In de stomphoekige driehoek is $\angle C = 180^\circ - 46^\circ - 115,95\dots^\circ = 18,04\dots^\circ$.

De sinusregel in de stomphoekige driehoek geeft $\frac{8}{\sin(46^\circ)} = \frac{AB}{\sin(18,04\dots^\circ)}$

$$AB = \frac{8 \sin(18,04\dots^\circ)}{\sin(46^\circ)} \approx 3,4$$

c



De cirkel met middelpunt C en straal 7 snijdt niet het andere been van hoek B .

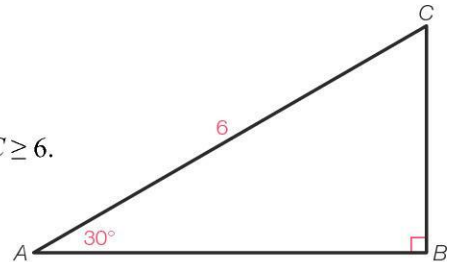
27 a Zie de figuur hiernaast.

$$\sin(30^\circ) = \frac{BC}{6}, \text{ dus } BC = 6 \sin(30^\circ) = 3.$$

Als er geen driehoek ABC mogelijk is, dan is $BC < 3$.

b Als er precies één driehoek ABC mogelijk is, dan is $BC = 3 \vee BC \geq 6$.

c Als er twee driehoeken ABC mogelijk zijn, dan is $3 < BC < 6$.



Bladzijde 112

28 $\angle ADC = 180^\circ - 62^\circ - 48^\circ = 70^\circ$

De sinusregel in $\triangle ACD$ geeft $\frac{6}{\sin(62^\circ)} = \frac{AD}{\sin(48^\circ)}$

$$AD = \frac{6 \sin(48^\circ)}{\sin(62^\circ)} = 5,04\dots$$

en ook

$$\frac{6}{\sin(62^\circ)} = \frac{AC}{\sin(70^\circ)}$$

$$AC = \frac{6 \sin(70^\circ)}{\sin(62^\circ)} = 6,38\dots$$

$$\angle BDC = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\angle DBC = 180^\circ - 110^\circ - 25^\circ = 45^\circ$$

De sinusregel in $\triangle BCD$ geeft $\frac{6}{\sin(45^\circ)} = \frac{BD}{\sin(25^\circ)}$

$$BD = \frac{6 \sin(25^\circ)}{\sin(45^\circ)} = 3,58\dots$$

en ook

$$\frac{6}{\sin(45^\circ)} = \frac{BC}{\sin(110^\circ)}$$

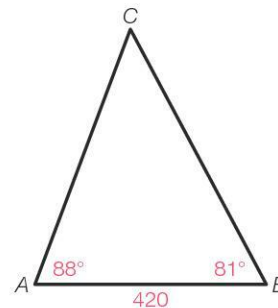
$$BC = \frac{6 \sin(110^\circ)}{\sin(45^\circ)} = 7,97\dots$$

$$\text{omtrek } \triangle ABC = AD + BD + BC + AC = 5,04\dots + 3,58\dots + 7,97\dots + 6,38\dots \approx 23,0$$

29 $\angle ACB = 180^\circ - 88^\circ - 81^\circ = 11^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{420}{\sin(11^\circ)} = \frac{AC}{\sin(81^\circ)}$

$$AC = \frac{420 \sin(81^\circ)}{\sin(11^\circ)} \approx 2174 \text{ meter}$$



Bladzijde 113

30 a Zie de schets hiernaast.

BG wordt gevraagd.

$$\angle GBT = 180^\circ - 78,0^\circ - 85,4^\circ = 16,6^\circ$$

De sinusregel in $\triangle BGT$ geeft

$$\frac{135}{\sin(16,6^\circ)} = \frac{BG}{\sin(85,4^\circ)}$$

$$BG = \frac{135 \sin(85,4^\circ)}{\sin(16,6^\circ)} = 471,02...$$

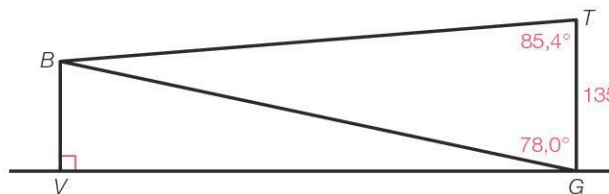
Bram bevindt zich op 471 meter van de top van de Big Ben als hij in het reuzenrad stapt.

b In $\triangle BGV$ is $\angle BGV = 90^\circ - 78,0^\circ = 12,0^\circ$ en $\angle BVG = 90^\circ$.

$$\sin(\angle BGV) = \frac{BV}{BG} \text{ geeft } \sin(12,0^\circ) = \frac{BV}{471,02...}$$

$$BV = 471,02... \cdot \sin(12,0^\circ) = 97,9...$$

De Big Ben is 98 meter hoog.



31 $\angle BCD = 180^\circ - \angle BDC - \angle CBD = 180^\circ - 110^\circ - 40^\circ = 30^\circ$

De sinusregel in $\triangle BCD$ geeft $\frac{CD}{\sin(40^\circ)} = \frac{4}{\sin(30^\circ)}$

$$CD = \frac{4 \sin(40^\circ)}{\sin(30^\circ)} = 5,14...$$

$$\angle ACD = \angle ACB - \angle BCD = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$$

De sinusregel in $\triangle ACD$ geeft $\frac{5,14...}{\sin(\angle CAD)} = \frac{5}{\sin(20^\circ)}$

$$\sin(\angle CAD) = \frac{5,14... \cdot \sin(20^\circ)}{5} = 0,35...$$

$$\angle CAD = 20,59...^\circ$$

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle DAC - \angle ACD = 180^\circ - 20,59...^\circ - 20^\circ = 139,40...^\circ$$

De sinusregel in $\triangle ACD$ geeft $\frac{AC}{\sin(139,40...^\circ)} = \frac{5}{\sin(20^\circ)}$

$$AC = \frac{5 \sin(139,40...^\circ)}{\sin(20^\circ)} \approx 9,51$$

32 a De sinusregel geeft $\frac{4}{\sin(\angle A)} = \frac{5}{\sin(\angle B)} = \frac{6}{\sin(\angle C)}$.

Bij elke combinatie van twee breuken zijn er twee onbekenden.

Je kunt de sinusregel dus niet gebruiken.

b De sinusregel geeft $\frac{QR}{\sin(50^\circ)} = \frac{5}{\sin(\angle Q)} = \frac{6}{\sin(\angle R)}$.

Bij elke combinatie van twee breuken zijn er twee onbekenden.

Je kunt de sinusregel dus niet gebruiken.

33

a De cosinusregel geeft

$$5^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos(\angle A)$$

$$25 = 49 + 36 - 84 \cos(\angle A)$$

$$84 \cos(\angle A) = 60$$

$$\cos(\angle A) = \frac{60}{84}$$

$$\angle A = 44,41...^\circ \approx 44,4^\circ$$

en ook

$$6^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos(\angle B)$$

$$36 = 49 + 25 - 70 \cos(\angle B)$$

$$70 \cos(\angle B) = 38$$

$$\cos(\angle B) = \frac{38}{70}$$

$$\angle B = 57,12...^\circ \approx 57,1^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 44,41...^\circ - 57,12...^\circ \approx 78,5^\circ$$

b De cosinusregel geeft

$$4^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(\angle D)$$

$$16 = 25 + 49 - 70 \cos(\angle D)$$

$$70 \cos(\angle D) = 58$$

$$\cos(\angle D) = \frac{58}{70}$$

$$\angle D = 34,04...^\circ \approx 34,0^\circ$$

en ook

$$7^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos(\angle E)$$

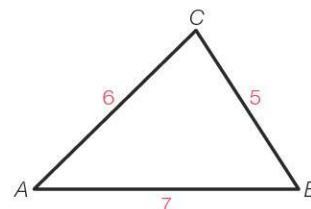
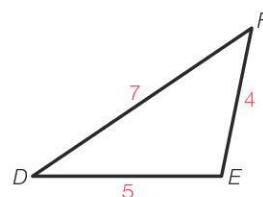
$$49 = 25 + 16 - 40 \cos(\angle E)$$

$$40 \cos(\angle E) = -8$$

$$\cos(\angle E) = \frac{-8}{40}$$

$$\angle E = 101,53...^\circ \approx 101,5^\circ$$

$$\angle F = 180^\circ - 101,53...^\circ - 34,04...^\circ \approx 44,4^\circ$$



34

a De cosinusregel geeft $AB^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(60^\circ)$

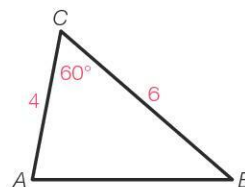
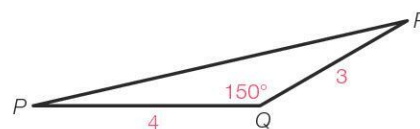
$$AB^2 = 28$$

$$AB \approx 5,29$$

b De cosinusregel geeft $PR^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(150^\circ)$

$$PR^2 = 45,78...$$

$$PR \approx 6,77$$



35

De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $BD^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos(50^\circ)$

$$BD^2 = 58,86...$$

$$BD = 7,67...$$

De sinusregel in $\triangle BCD$ geeft $\frac{4}{\sin(\angle CBD)} = \frac{7,67...}{\sin(125^\circ)}$

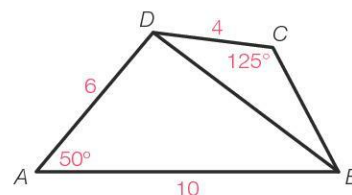
$$\sin(\angle CBD) = \frac{4 \sin(125^\circ)}{7,67...} = 0,42...$$

$$\angle CBD = 25,28...^\circ$$

$$\angle BDC = 180^\circ - \angle BCD - \angle CBD = 180^\circ - 125^\circ - 25,28...^\circ = 29,71...^\circ$$

De sinusregel in $\triangle BCD$ geeft $\frac{BC}{\sin(29,71...^\circ)} = \frac{4}{\sin(25,28...^\circ)}$

$$BC = \frac{4 \sin(29,71...^\circ)}{\sin(25,28...^\circ)} \approx 4,6$$



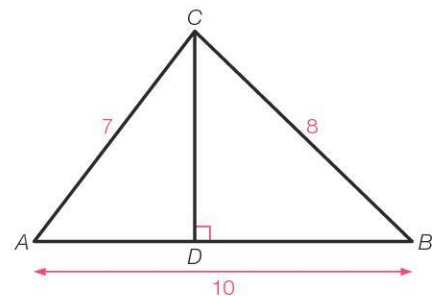
- 36** a De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft $AD^2 + CD^2 = AC^2$
 $x^2 + h^2 = b^2$
- b De stelling van Pythagoras in $\triangle BCD$ geeft $BC^2 = BD^2 + CD^2$
 $a^2 = (c - x)^2 + h^2$
 $a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$
- c Vervangen van $x^2 + h^2$ door b^2 in $a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$ geeft $a^2 = c^2 - 2cx + b^2$,
 oftewel $a^2 = c^2 + b^2 - 2cx$.
- d In $\triangle ACD$ is $\cos(\angle A) = \frac{x}{b}$, dus $x = b \cos(\angle A)$.
- e Vervangen van x door $b \cos(\angle A)$ in $a^2 = c^2 + b^2 - 2cx$ geeft $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cos(\angle A)$,
 oftewel $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\angle A)$.

Bladzijde 116

- 37** a De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft $AD^2 + CD^2 = AC^2$
 $x^2 + h^2 = b^2$
- De stelling van Pythagoras in $\triangle BCD$ geeft $BC^2 = BD^2 + CD^2$
 $a^2 = (c + x)^2 + h^2$
 $a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2$
- b Vervangen van $x^2 + h^2$ door b^2 in $a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2$ geeft $a^2 = c^2 + 2cx + b^2$,
 oftewel $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$.
- c In $\triangle ACD$ is $\angle CAD = 180^\circ - \angle CAB$ en $\cos(\angle CAD) = \frac{AD}{AC}$.
 Dus $\cos(180^\circ - \angle CAB) = \frac{x}{b}$ oftewel $x = b \cos(180^\circ - \angle CAB)$.
- d $\left. \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 + 2cx \\ x = -b \cos(\angle CAB) \end{array} \right\} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\angle CAB)$

Dus de cosinusregel geldt ook voor stomphoekige driehoeken.

- 38** De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft
 $8^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos(\angle A)$
 $64 = 49 + 100 - 140 \cos(\angle A)$
 $140 \cos(\angle A) = 85$
 $\cos(\angle A) = \frac{85}{140}$
 $\angle A = 52,61\dots^\circ$
- In $\triangle ACD$ is $\sin(52,61\dots^\circ) = \frac{CD}{7}$, dus $CD = 7 \sin(52,61\dots^\circ) \approx 5,56$.



- 39** De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $4^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \cos(\angle B)$
 $16 = 25 + 4 - 20 \cos(\angle B)$
 $20 \cos(\angle B) = 13$
 $\cos(\angle B) = \frac{13}{20}$

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $AC^2 = 5^2 + (6\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{20}$
 $AC^2 = 25$
 $AC = 5$

3.3 Vergelijkingen in de meetkunde

Bladzijde 118

- 40** II, III, IV, V, VI, VIII

Bladzijde 119

- 41** a $3a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{7} = 3a^2\sqrt{14}$
- b $\frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{2}$
- c $(3 - \sqrt{2})^2 = 9 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad \sqrt{\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \text{e} \quad \left(\frac{1}{2}x\sqrt{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{4}x^2 \cdot 2 = \frac{1}{2}x^2 \\ \text{f} \quad \frac{6}{5\sqrt{2}} &= \frac{6}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{10} = \frac{3}{5}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 42 \quad \text{a} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \text{b} \quad \frac{2\sqrt{14}}{3\sqrt{7}} &= \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ \text{c} \quad \sqrt{4\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \text{d} \quad \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = \frac{1}{4} \cdot 5 = 1\frac{1}{4} \\ \text{e} \quad \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3} &= \frac{1}{4}a^2\sqrt{6} \\ \text{f} \quad \left(\frac{2}{3}a\sqrt{3}\right)^2 &= \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = \frac{4}{9}a^2 \cdot 3 = 1\frac{1}{3}a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 43 \quad \text{a} \quad 2\sqrt{3}(4\sqrt{3} + 2\sqrt{5}) &= 8\sqrt{9} + 4\sqrt{15} = 8 \cdot 3 + 4\sqrt{15} = 24 + 4\sqrt{15} \\ \text{b} \quad 3\sqrt{2}(3\sqrt{2} - \sqrt{3}) &= 9\sqrt{4} - 3\sqrt{6} = 9 \cdot 2 - 3\sqrt{6} = 18 - 3\sqrt{6} \\ \text{c} \quad 2(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} &= (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10} - \sqrt{6} \\ \text{d} \quad (\sqrt{6} - 3)^2 &= 6 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot 3 + 9 = 15 - 6\sqrt{6} \\ \text{e} \quad (2 + \sqrt{2})^2 &= 4 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 2 = 6 + 4\sqrt{2} \\ \text{f} \quad (5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3}) &= 25 - 3 = 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 44 \quad \text{a} \quad &* \\ \text{b} \quad \sqrt{8} &= \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Bladzijde 120

$$\begin{aligned} 45 \quad \text{a} \quad 5\sqrt{28} - 2\sqrt{63} &= 5 \cdot 2\sqrt{7} - 2 \cdot 3\sqrt{7} = 10\sqrt{7} - 6\sqrt{7} = 4\sqrt{7} \\ \text{b} \quad 10\sqrt{27} - \frac{1}{2}\sqrt{48} &= 10 \cdot 3\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 30\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 28\sqrt{3} \\ \text{c} \quad \sqrt{8} - \sqrt{\frac{1}{2}} &= 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \text{d} \quad \sqrt{80} - \frac{10}{\sqrt{5}} &= 4\sqrt{5} - \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} - \frac{10\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 46 \quad \text{a} \quad \sqrt{6a^2} &= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{6} = a\sqrt{6} \\ \text{b} \quad \sqrt{12a^2} + a\sqrt{3} &= \sqrt{4a^2} \cdot \sqrt{3} + a\sqrt{3} = 2a\sqrt{3} + a\sqrt{3} = 3a\sqrt{3} \\ \text{c} \quad \sqrt{54a^2} - \sqrt{24a^2} &= \sqrt{9a^2} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{4a^2} \cdot \sqrt{6} = 3a\sqrt{6} - 2a\sqrt{6} = a\sqrt{6} \\ \text{d} \quad \sqrt{80a^2} - \sqrt{20a^2} &= \sqrt{16a^2} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{4a^2} \cdot \sqrt{5} = 4a\sqrt{5} - 2a\sqrt{5} = 2a\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 47 \quad \text{a} \quad \frac{15}{\sqrt{5}} + \sqrt{20} &= \frac{15}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{5} = \frac{15\sqrt{5}}{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5} \\ \text{b} \quad 2\sqrt{24} - \frac{8}{\sqrt{6}} &= 2 \cdot 2\sqrt{6} - \frac{8}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 4\sqrt{6} - \frac{8\sqrt{6}}{6} = 4\sqrt{6} - 1\frac{1}{3}\sqrt{6} = 2\frac{2}{3}\sqrt{6} \\ \text{c} \quad \sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{3}) &= \sqrt{12} - \sqrt{6} = 2\sqrt{3} - \sqrt{6} \\ \text{d} \quad \frac{21}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{12} &= \frac{21}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{21\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = 7\sqrt{3} - \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{e } a\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = a\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{4}a^2} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$\text{f } a\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = a\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}a^2} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2} + \frac{1}{2}a\sqrt{2} = 1\frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

Bladzijde 121

$$\begin{aligned} 48 \quad \text{opp } \triangle ADE &= \frac{3}{4} \cdot \text{opp } \triangle ABC = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 = 45 \\ \text{opp } \triangle ADE &= \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AE \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AE = 45 \\ & AD \cdot AE = 90 \end{aligned}$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $BC = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$.

omtrek $\triangle ADE$ = omtrek $BCED$ geeft $AD + AE + DE = BC + CE + DE + BD$

$$AD + AE + DE = BC + AC - AE + DE + AB - AD$$

$$2AD + 2AE = BC + AC + AB$$

$$2AD + 2AE = 17 + 8 + 15$$

$$AD + AE = 20$$

$$AD + AE = 20 \text{ oftewel } AE = 20 - AD$$

$$AD \cdot AE = 90 \text{ en } AE = 20 - AD \text{ geeft } AD(20 - AD) = 90$$

$$20AD - AD^2 = 90$$

$$AD^2 - 20AD + 90 = 0$$

$$D = \frac{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 90}{2} = 40, \text{ dus } \sqrt{D} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$AD = \frac{20 + 2\sqrt{10}}{2} \vee AD = \frac{20 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$AD = 10 + \sqrt{10} \vee AD = 10 - \sqrt{10}$$

$$AD = 10 + \sqrt{10} \text{ geeft } AE = 20 - (10 + \sqrt{10}) = 10 - \sqrt{10}$$

$$AD = 10 - \sqrt{10} \text{ geeft } AE = 20 - (10 - \sqrt{10}) = 10 + \sqrt{10} \text{ en dit kan niet.}$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ADE$ geeft $DE^2 = (10 + \sqrt{10})^2 + (10 - \sqrt{10})^2$

$$DE^2 = 100 + 2 \cdot 10 \cdot \sqrt{10} + 10 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot \sqrt{10} + 10$$

$$DE^2 = 220$$

$$DE = \sqrt{220} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{55} = 2\sqrt{55}$$

$$49 \quad \text{a } \begin{aligned} 2x &= 16 - 8\sqrt{3} \\ x &= 8 - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } 5x - 10\sqrt{2} &= 50 \\ 5x &= 50 + 10\sqrt{2} \\ x &= 10 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Bladzijde 122

$$50 \quad \text{a } x\sqrt{5} + 2 = \sqrt{10}$$

$$x\sqrt{5} = -2 + \sqrt{10}$$

$$x = \frac{-2}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{-2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \sqrt{2}$$

$$x = \frac{-2\sqrt{5}}{5} + \sqrt{2}$$

$$x = -\frac{2}{5}\sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$\text{b } 7 - x\sqrt{3} = \sqrt{2}$$

$$x\sqrt{3} = 7 - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$x = 2\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad \frac{1}{2}x\sqrt{2} + \sqrt{10} &= 0 \\ \frac{1}{2}x\sqrt{2} &= -\sqrt{10} \\ x\sqrt{2} &= -2\sqrt{10} \\ x &= \frac{-2\sqrt{10}}{\sqrt{2}} \\ x &= -2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad x\sqrt{8} + x\sqrt{2} &= 12 \\ x \cdot 2\sqrt{2} + x\sqrt{2} &= 12 \\ 2x\sqrt{2} + x\sqrt{2} &= 12 \\ 3x\sqrt{2} &= 12 \\ x &= \frac{12}{3\sqrt{2}} \\ x &= \frac{12}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ x &= \frac{12\sqrt{2}}{6} \\ x &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{51 a} \quad 8x - 2x\sqrt{3} &= \sqrt{6} \\ x(8 - 2\sqrt{3}) &= \sqrt{6} \\ x &= \frac{\sqrt{6}}{8 - 2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad \frac{1}{2}x\sqrt{2} + x\sqrt{10} &= 10 \\ x\sqrt{2} + 2x\sqrt{10} &= 20 \\ x(\sqrt{2} + 2\sqrt{10}) &= 20 \\ x &= \frac{20}{\sqrt{2} + 2\sqrt{10}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad x\sqrt{5} + x\sqrt{2} &= \sqrt{10} \\ x(\sqrt{5} + \sqrt{2}) &= \sqrt{10} \\ x &= \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad x - \sqrt{2} &= x\sqrt{3} \\ x - x\sqrt{3} &= \sqrt{2} \\ x(1 - \sqrt{3}) &= \sqrt{2} \\ x &= \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{52 a} \quad 2x\sqrt{6} - 6 &= 4\sqrt{6} \\ 2x\sqrt{6} &= 6 + 4\sqrt{6} \\ x &= \frac{6}{2\sqrt{6}} + \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \\ x &= \frac{6}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} + 2 \\ x &= \frac{6\sqrt{6}}{12} + 2 \\ x &= \frac{1}{2}\sqrt{6} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad 3x\sqrt{2} - 2x &= 6 \\ x(3\sqrt{2} - 2) &= 6 \\ x &= \frac{6}{3\sqrt{2} - 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad 3\sqrt{2} + x\sqrt{2} &= 4\sqrt{10} \\ x\sqrt{2} &= 4\sqrt{10} - 3\sqrt{2} \\ x &= \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ x &= 4\sqrt{5} - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad 4x\sqrt{3} + 6 &= 2x \\ 4x\sqrt{3} - 2x &= -6 \\ -2x(1 - 2\sqrt{3}) &= -6 \\ x(1 - 2\sqrt{3}) &= 3 \\ x &= \frac{3}{1 - 2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

53 Bij 51d krijg je $x - \sqrt{2} = x\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} x - x\sqrt{3} &= \sqrt{2} \\ x(1 - \sqrt{3}) &= \sqrt{2} \\ x &= \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{-2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{Bij 52b krijg je } x = \frac{6}{3\sqrt{2} - 2} \cdot \frac{3\sqrt{2} + 2}{3\sqrt{2} + 2} = \frac{6(3\sqrt{2} + 2)}{18 - 4} = \frac{18\sqrt{2} + 12}{14} = \frac{18}{14}\sqrt{2} + \frac{12}{14} = 1\frac{2}{7}\sqrt{2} + \frac{6}{7}.$$

$$\text{Bij 52d krijg je } x = \frac{3}{1 - 2\sqrt{3}} \cdot \frac{1 + 2\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}} = \frac{3(1 + 2\sqrt{3})}{1 - 12} = \frac{3 + 6\sqrt{3}}{-11} = -\frac{3}{11} - \frac{6}{11}\sqrt{3}.$$

54 a In $\triangle ACD$ is $CD^2 = AC^2 - AD^2$
 $CD^2 = (2a)^2 - a^2$
 $CD^2 = 4a^2 - a^2$
 $CD^2 = 3a^2$
 $CD = \sqrt{3a^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{3}$

b $\left. \begin{array}{l} CD = a\sqrt{3} \\ CD = 7\sqrt{3} \end{array} \right\} a\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$
 $a = 7$
 $AC = 2a = 2 \cdot 7 = 14$

Bladzijde 124

55 $AC = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$
 $DF = \frac{EF}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ en $DE = \sqrt{3} \cdot DF = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 3 \cdot 3 = 9$
 $\left. \begin{array}{l} MN = \frac{KM}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ en } KN = \sqrt{3} \cdot MN = 5\sqrt{3} \\ NL = MN = 5 \end{array} \right\} KL = KN + NL = 5\sqrt{3} + 5$
 $QS = RS \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ en $PQ = QS \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{6}$

56 a $\angle BDC = 180^\circ - \angle BCD - \angle CBD = 180^\circ - 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$
 $\angle BDE = \angle ADC - \angle BDC = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$
In $\triangle BDE$ is $DE = \sqrt{3} \cdot BE = \sqrt{3} \cdot 10 = 10\sqrt{3}$.
In $\triangle ABE$ is $AE = BE = 10$.
 $AD = AE + DE = 10 + 10\sqrt{3}$

b In $\triangle ACD$ is $AC = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{10 + 10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{10 + 10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2} + 10\sqrt{6}}{2} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{6}$.
In $\triangle ABE$ is $AB = \sqrt{2} \cdot BE = \sqrt{2} \cdot 10 = 10\sqrt{2}$.
 $BC = AC - AB = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{6} - 10\sqrt{2} = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}$

57 In $\triangle BCD$ is $BD = CD = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.
In $\triangle ACD$ is $AD = \sqrt{3} \cdot CD = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} = 3\sqrt{6}$.
 $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot (AD + BD) \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}) \cdot 3\sqrt{2} = 4\frac{1}{2}\sqrt{12} + 9 = 4\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} + 9 = 9\sqrt{3} + 9$

58 a In $\triangle ACD$ is $CD = AD = x$.
In $\triangle BCD$ is $BD = \sqrt{3} \cdot CD = \sqrt{3} \cdot x = x\sqrt{3}$.

b $\left. \begin{array}{l} AB = AD + BD = x + x\sqrt{3} \\ AB = 10 \end{array} \right\} x + x\sqrt{3} = 10$
 $x + x\sqrt{3} = 10$
 $x(1 + \sqrt{3}) = 10$
 $x = \frac{10}{1 + \sqrt{3}}$

c $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left(\frac{10}{1 + \sqrt{3}} \right) = \frac{50}{1 + \sqrt{3}}$

Bladzijde 125

59 In $\triangle ACD$ is $CD = \sqrt{3} \cdot AD = \sqrt{3} \cdot x = x\sqrt{3}$.

In $\triangle BCD$ is $BD = CD = x\sqrt{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} AB = AD + BD = x + x\sqrt{3} \\ AB = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + x\sqrt{3} = 12 \\ x(1 + \sqrt{3}) = 12 \\ x = \frac{12}{1 + \sqrt{3}} \end{array}$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \left(\frac{12}{1 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{72\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

60 a In $\triangle APW$ is $PW = \sqrt{2} \cdot AP = \sqrt{2} \cdot x = x\sqrt{2}$.

b Het is een regelmatige achthoek, dus $PQ = PW = x\sqrt{2}$.

$$AB = AP + PQ + BQ = x + x\sqrt{2} + x = 2x + x\sqrt{2}$$

c $2x + x\sqrt{2} = 6$

$$x(2 + \sqrt{2}) = 6$$

$$x = \frac{6}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\text{De zijde van de achthoek is } x\sqrt{2} = \frac{6}{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}.$$

61 Stel $AP = x$, dan is ook $BQ = x$.

In $\triangle APS$ is $PS = \sqrt{3} \cdot AP = \sqrt{3} \cdot x = x\sqrt{3}$.

$PQRS$ is een vierkant, dus $PQ = PS = x\sqrt{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} AB = AP + PQ + BQ = x + x\sqrt{3} + x = 2x + x\sqrt{3} \\ AB = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x + x\sqrt{3} = 8 \\ x(2 + \sqrt{3}) = 8 \\ x = \frac{8}{2 + \sqrt{3}} \end{array}$$

$$PQ = x\sqrt{3} = \frac{8}{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

62 Bij 58c krijg je $O(\triangle ABC) = \frac{50}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{50(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{50 - 50\sqrt{3}}{-2} = -25 + 25\sqrt{3}$.

Bij 59 krijg je $O(\triangle ABC) = \frac{72\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{72\sqrt{3}(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{72\sqrt{3} - 216}{-2} = 108 - 36\sqrt{3}$.

Bij 60c krijg je zijde $= \frac{6\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = \frac{12\sqrt{2} - 12}{2} = 6\sqrt{2} - 6$.

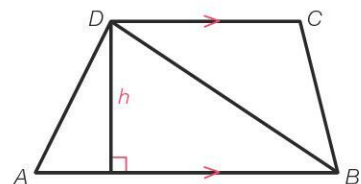
Bij 61 krijg je $PQ = \frac{8\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = \frac{16\sqrt{3} - 24}{1} = 16\sqrt{3} - 24$.

3.4 Lengte, omtrek en oppervlakte

Bladzijde 127

63 Zie de figuur hiernaast met diagonaal BD .

$$\left. \begin{array}{l} O(\triangle ABD) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h \\ O(\triangle BCD) = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot h \\ O(ABCD) = O(\triangle ABD) + O(\triangle BCD) \end{array} \right\} \begin{array}{l} O(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h + \frac{1}{2} \cdot CD \cdot h = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h \end{array}$$



64 a $\sin(\angle ANC) = \frac{2\frac{1}{2}}{4}$

$$\angle ANC = 38,68\dots^\circ$$

$$\angle ANB = 2 \cdot 38,68\dots^\circ = 77,36\dots^\circ$$

$$\text{boog } AB = \frac{77,36\dots}{360} \cdot 2\pi \cdot 4 \approx 5,401$$

b $O(\text{cirkelsector } MAB) = \frac{49,24\dots}{360} \cdot \pi \cdot 6^2 = 15,47\dots$

$$\text{De stelling van Pythagoras in } \triangle ACM \text{ geeft } CM = \sqrt{6^2 - (2\frac{1}{2})^2} = \sqrt{29\frac{3}{4}}.$$

$$O(\triangle MAB) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{29\frac{3}{4}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{29\frac{3}{4}}$$

$$O(\text{cirkelsector } NAB) = \frac{77,36\dots}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = 10,80\dots$$

$$\text{De stelling van Pythagoras in } \triangle ACN \text{ geeft } CN = \sqrt{4^2 - (2\frac{1}{2})^2} = \sqrt{9\frac{3}{4}}.$$

$$O(\triangle NAB) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CN = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{9\frac{3}{4}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{9\frac{3}{4}}$$

$$\text{De gevraagde oppervlakte is } 15,47\dots - 2\frac{1}{2}\sqrt{29\frac{3}{4}} + 10,80\dots - 2\frac{1}{2}\sqrt{9\frac{3}{4}} \approx 4,83.$$

65 Van de cirkel met middelpunt M en straal 3 is

$$\text{kortste boog } AB = \frac{50}{360} \cdot 2\pi \cdot 3 = 2,61799\dots$$

$$\sin(25^\circ) = \frac{\frac{1}{2}AB}{3}, \text{ dus } \frac{1}{2}AB = 3 \sin(25^\circ).$$

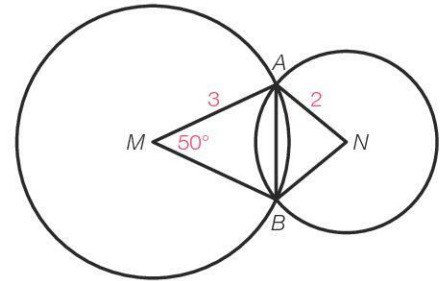
$$\sin(\frac{1}{2}\angle ANB) = \frac{3 \sin(25^\circ)}{2}, \text{ dus } \frac{1}{2}\angle ANB = 39,34\dots^\circ.$$

$$\angle ANB = 2 \cdot 39,34\dots^\circ = 78,68\dots^\circ$$

Van de cirkel met middelpunt N en straal 2 is

$$\text{kortste boog } AB = \frac{78,68\dots}{360} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2,74648\dots$$

$$\text{Het gevraagde verschil in lengte is } 2,74648\dots - 2,61799\dots \approx 0,1285.$$



66 Stel de straal van de rode cirkel is r .

Dan is de straal van rode cirkel en de witte ring samen $2r$, en de straal van de grootste cirkel $3r$.

$$O(\text{rode cirkel}) = \pi r^2$$

$$O(\text{rode cirkel en witte ring samen}) = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2$$

$$O(\text{grootste cirkel}) = \pi(3r)^2 = 9\pi r^2$$

$$O(\text{blauwe ring}) = O(\text{grootste cirkel}) - O(\text{rode cirkel en witte ring samen}) = 9\pi r^2 - 4\pi r^2 = 5\pi r^2$$

Dus de oppervlakte van de blauwe ring is 5 keer zo groot als de oppervlakte van de rode cirkel.

67 Stel de straal van de grote cirkel is r .

Dan is $O(\text{grote cirkel}) = \pi r^2$.

$\triangle ABM$ is gelijkbenig (want $MA = MB$) met tophoek $= 60^\circ$, dus $\triangle ABM$ is gelijkzijdig en dus $AB = r$.

$$\text{In } \triangle ABN \text{ is } NA = NB = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Dus } O(\text{kleine cirkel}) = \pi \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = \pi \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{1}{2}\pi r^2.$$

$$\text{De verhouding van de oppervlakten is } \pi r^2 : \frac{1}{2}\pi r^2 = 2 : 1.$$

68 Zie de figuur hiernaast.

$$\angle ACB = 180^\circ - 25^\circ - 125^\circ = 30^\circ$$

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\frac{5}{\sin(30^\circ)} = \frac{BC}{\sin(25^\circ)}$

$$BC = \frac{5 \sin(25^\circ)}{\sin(30^\circ)} = 4,22...$$

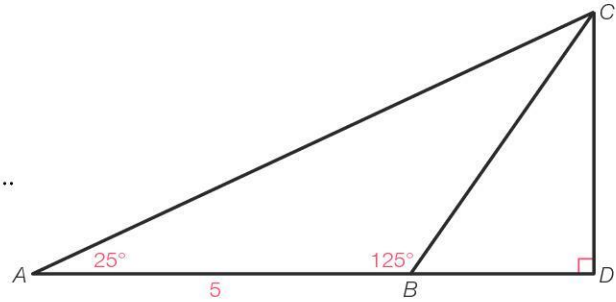
$$\angle CBD = 180^\circ - \angle CBA = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

In $\triangle BCD$ is $\sin(\angle CBD) = \frac{CD}{BC}$

$$\sin(55^\circ) = \frac{CD}{4,22...}$$

$$CD = 4,22... \cdot \sin(55^\circ) = 3,46...$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3,46... \approx 8,65$$



Bladzijde 129

69 Zie de figuur hiernaast.

De diagonalen AC en BD snijden elkaar in het punt S met midden van AC en van BD .

De cosinusregel in $\triangle ABS$ geeft

$$4,5^2 = 10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cos(\angle BAS)$$

$$20,25 = 100 + 49 - 140 \cos(\angle BAS)$$

$$140 \cos(\angle BAS) = 128,75$$

$$\cos(\angle BAS) = \frac{128,75}{140}$$

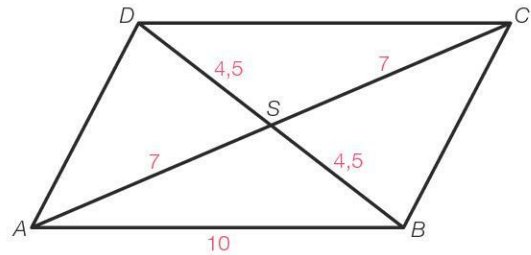
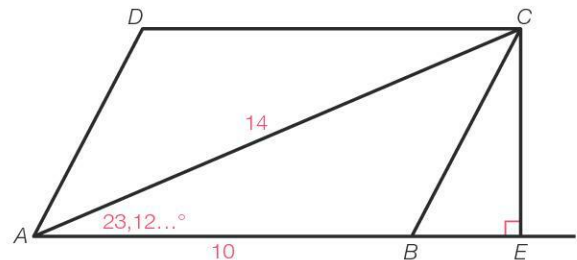
$$\angle BAS = 23,12...^\circ$$

Zie de figuur hiernaast.

In $\triangle ACE$ is $\sin(23,12...^\circ) = \frac{CE}{14}$

$$CE = 14 \sin(23,12...^\circ) = 5,49...$$

$$O(ABCD) = AB \cdot CE = 10 \cdot 5,49... \approx 55,0$$



70 Stel de hoogte van trapezium $ABCD$ is h .

$$\left. \begin{array}{l} O(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h \\ AB = 4 \\ CD = 3 \\ O(ABCD) = 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2}(4 + 3) \cdot h = 14 \\ 3\frac{1}{2}h = 14 \\ h = 4 \end{array}$$

$AB \parallel CD$ oftewel $BF \parallel CG$ en $BF = CG = 2$, dus $BCGF$ is een parallellogram.

$$O(BCGF) = BF \cdot h = 2 \cdot 4 = 8$$

E is het midden van AD , dus de hoogte van $\triangle AEF$ is de helft van de hoogte van trapezium $ABCD$.

$$O(\triangle AEF) = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

$$O(DEFG) = O(ABCD) - O(BCGF) - O(\triangle AEF) = 14 - 8 - 2 = 4$$

71 Stel de straal van een grote cirkel is r .

Zie de figuur.

$$\text{In } \triangle ABC \text{ is } AC = 2r \text{ en } AB = \frac{2r}{\sqrt{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}.$$

Ook is $AB = r + 1$.

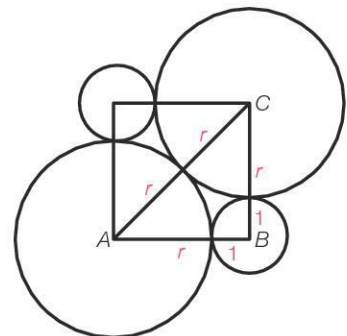
$$\text{Dit geeft } r\sqrt{2} = r + 1$$

$$r\sqrt{2} - r = 1$$

$$r(\sqrt{2} - 1) = 1$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

Dus de straal van de grote cirkels is $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.



72 a In $\triangle ADE$ is $AE = \frac{DE}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

In $\triangle BCF$ is $BF = CF = h$.

$$CD = EF = AB - AE - BF = 10 - \frac{h}{\sqrt{3}} - h$$

b $O(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h = \frac{1}{2}\left(10 + 10 - \frac{h}{\sqrt{3}} - h\right) \cdot h$

Gegeven is $O(ABCD) = 25$, dus los op $\frac{1}{2}\left(10 + 10 - \frac{h}{\sqrt{3}} - h\right) \cdot h = 25$.

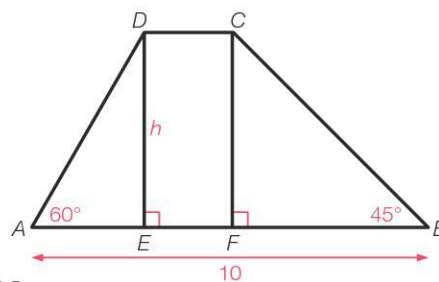
Voer in $y_1 = \frac{1}{2}\left(10 + 10 - \frac{x}{\sqrt{3}} - x\right) \cdot x$ en $y_2 = 25$.

De optie snijpunt geeft $x = 3,42...$ en $x = 9,25...$

$h = 3,42...$ geeft $CD = 10 - \frac{3,42...}{\sqrt{3}} - 3,42... \approx 4,60$

$h = 9,25...$ geeft $CD = 10 - \frac{9,25...}{\sqrt{3}} - 9,25... \approx -4,60$ kan niet

Dus $CD \approx 4,60$.



73 In $\triangle ABC$ is $AC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$.

$$\angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

M is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$, dus

CM is de bissectrice van $\angle ACB$, dus $\angle ACM = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.

Zie de figuur hiernaast met $MN \perp AC$.

In $\triangle CMN$ is $MN = r$ en $CN = r\sqrt{3}$.

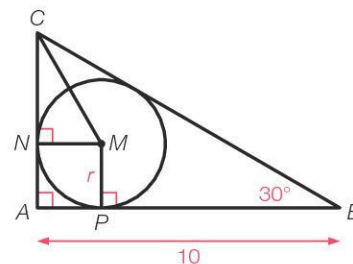
$$AN = MP = r$$

$$AC = AN + CN = r + r\sqrt{3}$$

Dus moet gelden $r + r\sqrt{3} = \frac{10}{\sqrt{3}}$

$$r(1 + \sqrt{3}) = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{\frac{10}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3} + 3}$$



Diagnostische toets

Bladzijde 132

1 In $\triangle BCE$ is $\tan(55^\circ) = \frac{5}{BE}$

$$BE = \frac{5}{\tan(55^\circ)} = 3,50...$$

$$AB = AE + BE = 3 + 3,50... = 6,50...$$

In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle BAC) = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{6,50...}$

$$\angle BAC \approx 37,6^\circ$$

$$\angle AEC = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

$$\angle ACE \approx 180^\circ - 125^\circ - 37,6^\circ = 17,4^\circ$$

- 2 a** $\left. \begin{array}{l} \angle ABC = \angle DBE \\ \angle BAC = \angle BDE \text{ (rechte hoek)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DBE$
De stelling van Pythagoras in $\triangle BDE$ geeft $DE = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

$\frac{AB}{BD}$	$\frac{AC}{DE}$	$\frac{BC}{BE}$	geeft	$\frac{6}{4}$	$\frac{AC}{3}$	$\frac{BC}{5}$
-----------------	-----------------	-----------------	-------	---------------	----------------	----------------

$$AC = \frac{6 \cdot 3}{4} = 4\frac{1}{2}$$

$$BC = \frac{6 \cdot 5}{4} = 7\frac{1}{2}, \text{ dus } CE = BC - BE = 7\frac{1}{2} - 5 = 2\frac{1}{2}.$$

- b** $\left. \begin{array}{l} \angle ASC = \angle DSE \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle CAS = \angle DES \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ACS \sim \triangle EDS \text{ dus } \frac{AC}{DE} = \frac{AS}{ES}$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AC = \sqrt{(7\frac{1}{2})^2 - 6^2} = 4\frac{1}{2}$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ADE$ geeft $AE = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Stel $AS = x$, dan is $ES = \sqrt{13} - x$.

$$\text{Dit geeft } \frac{4\frac{1}{2}}{3} = \frac{x}{\sqrt{13} - x}$$

$$3x = 4\frac{1}{2}(\sqrt{13} - x)$$

$$3x = 4\frac{1}{2}\sqrt{13} - 4\frac{1}{2}x$$

$$7\frac{1}{2}x = 4\frac{1}{2}\sqrt{13}$$

$$x \approx 2,16$$

Dus $AS \approx 2,16$.

- 3** Zie de figuur hiernaast.
 $\angle C = 180^\circ - 40^\circ - 55^\circ = 85^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{6}{\sin(40^\circ)} = \frac{AC}{\sin(55^\circ)}$

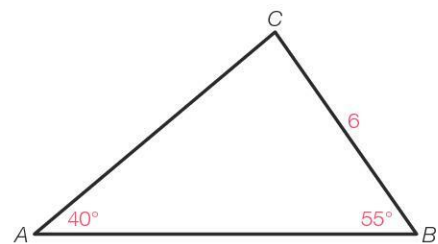
$$AC = \frac{6 \sin(55^\circ)}{\sin(40^\circ)} = 7,64...$$

en ook

$$\frac{6}{\sin(40^\circ)} = \frac{AB}{\sin(85^\circ)}$$

$$AB = \frac{6 \sin(85^\circ)}{\sin(40^\circ)} = 9,29...$$

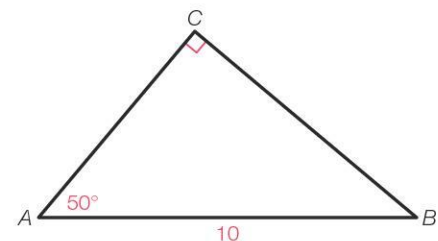
De omtrek van driehoek ABC is $9,29... + 6 + 7,64... \approx 22,95$



- 4 a** Zie de figuur hiernaast.
 $\sin(50^\circ) = \frac{BC}{10}$, dus $BC = 10 \sin(50^\circ) = 7,660...$

Als er precies één driehoek ABC mogelijk is, dan is $BC \approx 7,66 \vee BC \geq 10$.

- b** Als er twee driehoeken ABC mogelijk zijn, dan is $7,66 < BC < 10$.

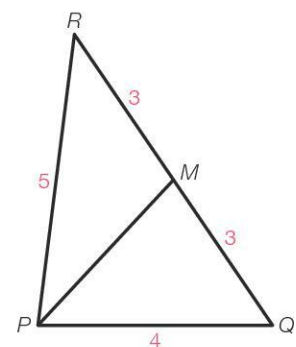


- 5** Zie de figuur hiernaast.
De cosinusregel in $\triangle PQR$ geeft $5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(\angle Q)$
 $25 = 16 + 36 - 48 \cos(\angle Q)$
 $48 \cos(\angle Q) = 27$
 $\cos(\angle Q) = \frac{9}{16}$

De cosinusregel in $\triangle PQM$ geeft $PM^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{9}{16}$

$$PM^2 = 11\frac{1}{2}$$

$$PM \approx 3,39$$



- 6** De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $AD^2 = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \cos(35^\circ)$

$$AD^2 = 43,08...$$

$$AD = 6,56...$$

De sinusregel in $\triangle ABD$ geeft $\frac{10}{\sin(\angle ADB)} = \frac{6,56...}{\sin(35^\circ)}$
 $\sin(\angle ADB) = \frac{10 \sin(35^\circ)}{6,56...} = 0,87...$

De GR geeft $60,90...^\circ$, dus $\angle ADB = 180^\circ - 60,90...^\circ \approx 119,1^\circ$.

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ADB \approx 180^\circ - 119,1^\circ = 60,9^\circ.$$

$$\angle C = 180^\circ - \angle ADC - \angle DAC \approx 180^\circ - 60,9^\circ - 25^\circ = 94,1^\circ$$

Bladzijde 133

7 a $\sqrt{4\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{17}$

b $8a\sqrt{5} \cdot 3a\sqrt{2} = 24a^2\sqrt{10}$

c $\frac{6\sqrt{18}}{4\sqrt{3}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{6}$

d $(\frac{1}{2}a\sqrt{6})^2 = (\frac{1}{2}a)^2 \cdot (\sqrt{6})^2 = \frac{1}{4}a^2 \cdot 6 = 1\frac{1}{2}a^2$

e $3\sqrt{2}(\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) = 3\sqrt{4} - 6\sqrt{10} = 3 \cdot 2 - 6\sqrt{10} = 6 - 6\sqrt{10}$

f $(5 - \sqrt{3})^2 = 25 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + 3 = 28 - 10\sqrt{3}$

8 a $3\sqrt{24} - \sqrt{150} = 3 \cdot 2\sqrt{6} - 5\sqrt{6} = 6\sqrt{6} - 5\sqrt{6} = \sqrt{6}$

b $\sqrt{32x^2} - \sqrt{8x^2} = \sqrt{16x^2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{4x^2} \cdot \sqrt{2} = 4x\sqrt{2} - 2x\sqrt{2} = 2x\sqrt{2}$

c $x\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{3}x^2} = x\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{9}x^2} \cdot \sqrt{3} = x\sqrt{3} + \frac{1}{3}x\sqrt{3} = 1\frac{1}{3}x\sqrt{3}$

9 a $x\sqrt{3} + 3 = 5\sqrt{6}$

$$x\sqrt{3} = 5\sqrt{6} - 3$$

$$x = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$x = 5\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = 5\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 5\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

b $x\sqrt{2} + 2x\sqrt{5} = 5\sqrt{10}$

$$x(\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) = 5\sqrt{10}$$

$$x = \frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}$$

c $3x - 2\sqrt{2} = 2x\sqrt{5}$

$$3x - 2x\sqrt{5} = 2\sqrt{2}$$

$$x(3 - 2\sqrt{5}) = 2\sqrt{2}$$

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{5}}$$

10 Zie de figuur hiernaast.

Stel $AE = x$, dan is ook $BF = x$.

In $\triangle ADE$ is $AD = x\sqrt{2}$.

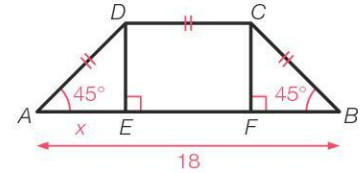
Dus ook $EF = CD = AD = x\sqrt{2}$.

$$\left. \begin{aligned} AB &= AE + EF + BF = x + x\sqrt{2} + x = 2x + x\sqrt{2} \\ AB &= 18 \end{aligned} \right\} 2x + x\sqrt{2} = 18$$

$$x(2 + \sqrt{2}) = 18$$

$$x = \frac{18}{2 + \sqrt{2}}$$

$$AD = x\sqrt{2} = \frac{18}{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{18\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{18 \cdot 2}{2\sqrt{2} + 2} = \frac{36}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{18}{\sqrt{2} + 1}$$



11 $\triangle ABE$ is gelijkzijdig, dus $\angle EAB = \angle EBA = \angle AEB = 60^\circ$.

$\angle DAE = 90^\circ - \angle EAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ en $\angle D = 90^\circ$

Stel $AB = BE = AE = x$.

Dan geldt in $\triangle ADE$ dat $DE = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$ en $AD = \frac{1}{2}x\sqrt{3}$.

$$\left. \begin{aligned} \text{omtrek } ABCD &= AB + BC + CD + AD = x + \frac{1}{2}x\sqrt{3} + x + \frac{1}{2}x\sqrt{3} = 2x + x\sqrt{3} \\ \text{omtrek } ABCD &= 10 \end{aligned} \right\} 2x + x\sqrt{3} = 10$$

$$x(2 + \sqrt{3}) = 10$$

$$x = \frac{10}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\text{Dus de omtrek van driehoek } ABE \text{ is } 3 \cdot \frac{10}{2 + \sqrt{3}} = \frac{30}{2 + \sqrt{3}}.$$

12 In $\triangle BCD$ is $CD = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

$$\left. \begin{aligned} \text{opp } ABCD &= \frac{1}{2}(AB + 2\sqrt{3}) \cdot 6 = 3(AB + 2\sqrt{3}) \\ \text{opp } ABCD &= 30 \end{aligned} \right\} 3(AB + 2\sqrt{3}) = 30$$

$$AB + 2\sqrt{3} = 10$$

$$AB = 10 - 2\sqrt{3}$$

13 $\cos(\angle AMN) = \frac{\frac{1}{2}AM}{MN} = \frac{4}{5}$

$$\angle AMN = 36,86...^\circ$$

$$\angle AMB = 2 \cdot \angle AMN = 2 \cdot 36,86...^\circ = 73,73...^\circ$$

Van de cirkel met middelpunt M en straal 8 is

$$\text{kortste boog } AB = \frac{73,73...}{360} \cdot 2\pi \cdot 8 = 10,29...$$

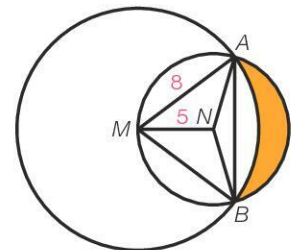
$$\angle ANM = 180^\circ - 2 \cdot 36,86...^\circ = 106,26...^\circ$$

$$\angle ANB = 360^\circ - 2 \cdot 106,26...^\circ = 147,47...^\circ$$

Van de cirkel met middelpunt N en straal 5 is

$$\text{kortste boog } AB = \frac{147,47...}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 = 12,87...$$

De gevraagde omtrek is $10,20... + 12,87... \approx 23,17$.



4 Werken met formules

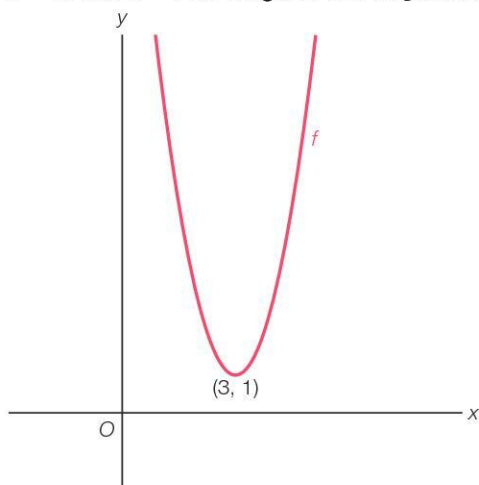
Voorkennis Grafieken verschuiven

Bladzijde 137

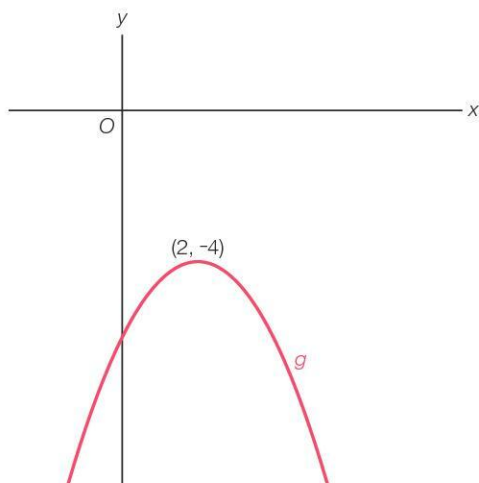
- 1 a $y = \frac{1}{4}x^2 + 3 \xrightarrow{5 \text{ naar links}} y = \frac{1}{4}(x + 5)^2 + 3$
 b $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4 \xrightarrow{3 \text{ naar rechts}} y = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 - 4 \xrightarrow{5 \text{ omhoog}} y = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 1$
- 2 a $y = -1\frac{1}{4}x^2 + 5 \xrightarrow{4 \text{ omhoog}} y = -1\frac{1}{4}x^2 + 9$
 b $y = -1\frac{1}{4}x^2 + 5 \xrightarrow{3 \text{ naar rechts}} y = -1\frac{1}{4}(x - 3)^2 + 5$
 c $y = -1\frac{1}{4}x^2 + 5 \xrightarrow{2 \text{ naar links}} y = -1\frac{1}{4}(x + 2)^2 + 5 \xrightarrow{3 \text{ omlaag}} y = -1\frac{1}{4}(x + 2)^2 + 2$
 d $y = -1\frac{1}{4}x^2 + 5 \xrightarrow{1 \text{ naar rechts}} y = -1\frac{1}{4}(x - 1)^2 + 5 \xrightarrow{5 \text{ omlaag}} y = -1\frac{1}{4}(x - 1)^2$

Bladzijde 138

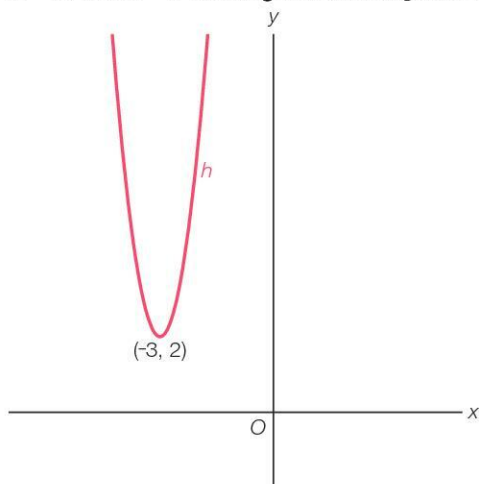
- 3 a $y = 2x^2 \xrightarrow{3 \text{ naar rechts}} y = 2(x - 3)^2 \xrightarrow{4 \text{ omhoog}} y = 2(x - 3)^2 + 4$
 Dus 3 naar rechts en 4 omhoog.
 b $y = -x^2 + 1 \xrightarrow{2 \text{ naar links}} y = -(x + 2)^2 + 1 \xrightarrow{1 \text{ omlaag}} y = -(x + 2)^2$
 Dus 2 naar links en 1 omlaag.
 c $y = 1\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 5 \xrightarrow{5 \text{ naar links}} y = 1\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 5 \xrightarrow{8 \text{ omlaag}} y = 1\frac{1}{2}(x + 1)^2 - 3$
 Dus 5 naar links en 8 omlaag.
- 4 a De top is (3, 1).
 $a = 2$, dus $a > 0$ en dit geeft een dalparabool.



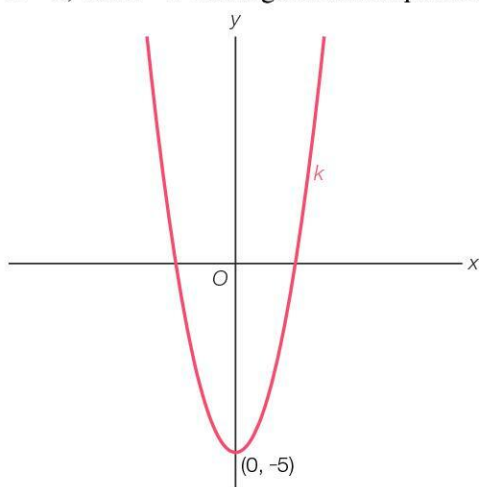
- b De top is (2, -4).
 $a = -\frac{1}{2}$, dus $a < 0$ en dit geeft een bergparabool.



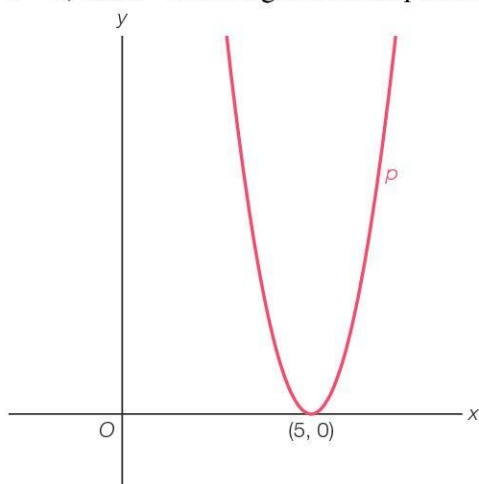
- c** De top is $(-3, 2)$.
 $a = 5$, dus $a > 0$ en dit geeft een dalparabool.



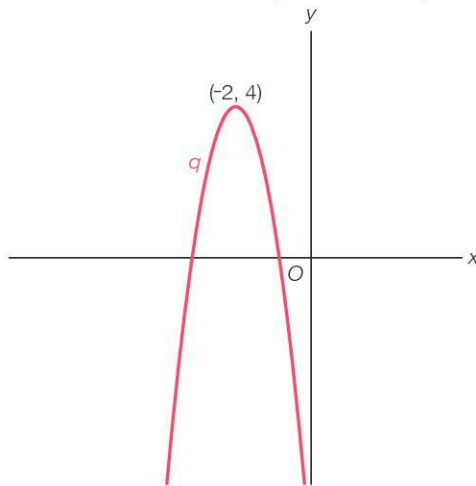
- d** De top is $(0, -5)$.
 $a = 2$, dus $a > 0$ en dit geeft een dalparabool.



- e** De top is $(5, 0)$.
 $a = 2$, dus $a > 0$ en dit geeft een dalparabool.



- f** De top is $(-2, 4)$.
 $a = -3$, dus $a < 0$ en dit geeft een bergparabool.



4.1 Kwadratische formules

Bladzijde 139

- 1 a** Snijden met de x -as, dus $y = 0$.
 $\frac{1}{2}(x-2)(x-4) = 0$ geeft $x = 2 \vee x = 4$
 De snijpunten met de x -as zijn $(2, 0)$ en $(4, 0)$.
b $x = 0$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot (0-2) \cdot (0-4) = 4$
 Het snijpunt met de y -as is $(0, 4)$.
c $y = \frac{1}{2}(x-2)(x-4) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x - 2x + 8) = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 8) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$
 De formule is $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$.

Bladzijde 140

- 2 a** De snijpunten met de x -as zijn $(-4, 0)$ en $(6, 0)$.
 $x = 0$ geeft $y = 2(0+4)(0-6) = 2 \cdot 4 \cdot -6 = -48$
 Het snijpunt met de y -as is $(0, -48)$.
 $x_{\text{top}} = \frac{-4+6}{2} = 1$ en $y_{\text{top}} = 2(1+4)(1-6) = 2 \cdot 5 \cdot -5 = -50$
 Dus top $(1, -50)$.
b De snijpunten met de x -as zijn $(1, 0)$ en $(5, 0)$.
 $x = 0$ geeft $y = -\frac{1}{2}(0-1)(0-5) = -\frac{1}{2} \cdot -1 \cdot -5 = -2\frac{1}{2}$
 Het snijpunt met de y -as is $(0, -2\frac{1}{2})$.
 $x_{\text{top}} = \frac{1+5}{2} = 3$ en $y_{\text{top}} = -\frac{1}{2}(3-1)(3-5) = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot -2 = 2$
 Dus top $(3, 2)$.
c De snijpunten met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(8, 0)$.
 $x = 0$ geeft $y = -\frac{1}{4} \cdot 0 \cdot (0-8) = 0$
 Het snijpunt met de y -as is $(0, 0)$.
 $x_{\text{top}} = \frac{0+8}{2} = 4$ en $y_{\text{top}} = -\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (4-8) = -\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot -4 = 4$
 Dus top $(4, 4)$.
d De snijpunten met de x -as zijn $(-2, 0)$ en $(-10, 0)$.
 $x = 0$ geeft $y = \frac{1}{50}(0+2)(0+10) = \frac{1}{50} \cdot 2 \cdot 10 = \frac{2}{5}$
 Het snijpunt met de y -as is $(0, \frac{2}{5})$.
 $x_{\text{top}} = \frac{-2+(-10)}{2} = -6$ en $y_{\text{top}} = \frac{1}{50}(-6+2)(-6+10) = \frac{1}{50} \cdot -4 \cdot 4 = -\frac{8}{25}$
 Dus top $(-6, -\frac{8}{25})$.

- 3 a** Snijpunten met de x -as $(-4, 0)$ en $(8, 0)$, dus $y = a(x + 4)(x - 8)$.

Door $(6, -5)$, dus $a(6 + 4)(6 - 8) = -5$

$$a \cdot 10 \cdot -2 = -5$$

$$-20a = -5$$

$$a = \frac{1}{4}$$

Dus $y = \frac{1}{4}(x + 4)(x - 8)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{-4 + 8}{2} = 2 \text{ en } y_{\text{top}} = \frac{1}{4}(2 + 4)(2 - 8) = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot -6 = -9$$

Dus top $(2, -9)$.

$$x = 0 \text{ geeft } y = \frac{1}{4}(0 + 4)(0 - 8) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot -8 = -8$$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, -8)$.

b $y = \frac{1}{4}(x + 4)(x - 8) = \frac{1}{4}(x^2 - 8x + 4x - 32) = \frac{1}{4}(x^2 - 4x - 32) = \frac{1}{4}x^2 - x - 8$

De formule is $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 8$.

- 4 a** $h = 0$ geeft $-0,02x(x - 50) = 0$

$$x = 0 \vee x = 50$$

De bal komt 50 meter van Tim op de grond.

b $x_{\text{top}} = \frac{0 + 50}{2} = 25$ en $h_{\text{top}} = -0,02 \cdot 25 \cdot (25 - 50) = -0,02 \cdot 25 \cdot -25 = 12,5$

De bal komt 12,5 meter hoog.

c $h = -0,02x(x - 50) = -0,02x^2 + x$

De formule is $h = -0,02x^2 + x$.

- 5** Parabool p_1 snijdt de x -as in $(-4, 0)$ en $(-1, 0)$, dus $y = a(x + 4)(x + 1)$.

Door $(0, 6)$, dus $a(0 + 4)(0 + 1) = 6$

$$a \cdot 4 \cdot 1 = 6$$

$$4a = 6$$

$$a = 1\frac{1}{2}$$

Dus $y = 1\frac{1}{2}(x + 1)(x + 4)$.

$$y = 1\frac{1}{2}(x + 1)(x + 4) = 1\frac{1}{2}(x^2 + 4x + x + 4) = 1\frac{1}{2}(x^2 + 5x + 4) = 1\frac{1}{2}x^2 + 7\frac{1}{2}x + 6$$

De formule is $p_1: y = 1\frac{1}{2}x^2 + 7\frac{1}{2}x + 6$.

Parabool p_2 snijdt de x -as in $(2, 0)$ en $(5, 0)$, dus $y = a(x - 2)(x - 5)$.

Door $(0, -5)$, dus $a(0 - 2)(0 - 5) = -5$

$$a \cdot -2 \cdot -5 = -5$$

$$10a = -5$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Dus $y = -\frac{1}{2}(x - 2)(x - 5)$.

$$y = -\frac{1}{2}(x - 2)(x - 5) = -\frac{1}{2}(x^2 - 5x - 2x + 10) = -\frac{1}{2}(x^2 - 7x + 10) = -\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{2}x - 5$$

De formule is $p_2: y = -\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{2}x - 5$.

- 6** Snijpunten met de x -as $(-p, 0)$ en $(2p, 0)$, dus $y = a(x + p)(x - 2p)$.

Door $(4p, p^2)$, dus $a(4p + p)(4p - 2p) = p^2$

$$a \cdot 5p \cdot 2p = p^2$$

$$10p^2a = p^2$$

$$a = \frac{1}{10}$$

Dus $y = \frac{1}{10}(x + p)(x - 2p)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{-p + 2p}{2} = \frac{1}{2}p \text{ en } y_{\text{top}} = \frac{1}{10}(\frac{1}{2}p + p)(\frac{1}{2}p - 2p) = \frac{1}{10} \cdot 1\frac{1}{2}p \cdot -1\frac{1}{2}p = -\frac{9}{40}p^2$$

Dus top $(\frac{1}{2}p, -\frac{9}{40}p^2)$.

- 7 a** $y = x^2$ $\xrightarrow{4 \text{ naar rechts en } 5 \text{ omhoog}}$ $y = (x - 4)^2 + 5$
 top (0, 0) top (4, 5)
b De top is (-3, -4).
c De top is (3, 6).

Bladzijde 142

- 8 a** Door (1, -3), dus $a(1 - 3)^2 - 5 = -3$
 $4a - 5 = -3$
 $4a = 2$
 $a = \frac{1}{2}$
b Door (3, -5), dus $a(3 - 3)^2 - 5 = -5$
 $0a - 5 = -5$
 $0a = 0$

Door het punt (3, -5) te gebruiken ontstaat een vergelijking die oneindig veel oplossingen heeft, dus a is dan niet te berekenen.

- 9** De top van p_1 is (-2, -1), dus $y = a(x + 2)^2 - 1$.
 Door (0, 1), dus $a(0 + 2)^2 - 1 = 1$
 $4a - 1 = 1$
 $4a = 2$
 $a = \frac{1}{2}$

Dus $p_1: y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$.

De top van p_2 is (2, 1), dus $y = a(x - 2)^2 + 1$.

Door (3, -1), dus $a(3 - 2)^2 + 1 = -1$
 $a + 1 = -1$
 $a = -2$

Dus $p_2: y = -2(x - 2)^2 + 1$.

- 10 a** De top is (2, 6) dus $y = a(x - 2)^2 + 6$.
 Door (4, 4), dus $a(4 - 2)^2 + 6 = 4$
 $4a + 6 = 4$
 $4a = -2$
 $a = -\frac{1}{2}$

Dus $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 6$.

b $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 6 = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) + 6 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 + 6 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$
 Dus $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$.

- 11** De top van p_1 is (-2, 1), dus $y = a(x + 2)^2 + 1$.
 Door (0, -1), dus $a(0 + 2)^2 + 1 = -1$
 $4a + 1 = -1$
 $4a = -2$
 $a = -\frac{1}{2}$

Dit geeft $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 1$.

$y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 1 = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) + 1 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 + 1 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$

Dus $p_1: y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$.

De top van p_2 is (3, 0), dus $y = a(x - 3)^2$.

Door (0, 3), dus $a(0 - 3)^2 = 3$
 $9a = 3$
 $a = \frac{1}{3}$

Dit geeft $y = \frac{1}{3}(x - 3)^2$.

$y = \frac{1}{3}(x - 3)^2 = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$

Dus $p_2: y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$.

De top van p_3 is $(0, 3)$, dus $y = ax^2 + 3$.

Door $(1, -1)$, dus $a \cdot 1^2 + 3 = -1$

$$a = -4$$

Dus $p_3: y = -4x^2 + 3$.

De top van p_4 is $(2, 2)$, dus $y = a(x - 2)^2 + 2$.

Door $(1, 3)$, dus $a(1 - 2)^2 + 2 = 3$

$$a + 2 = 3$$

$$a = 1$$

Dit geeft $y = (x - 2)^2 + 2$.

$$y = (x - 2)^2 + 2 = x^2 - 4x + 4 + 2 = x^2 - 4x + 6$$

Dus $p_4: y = x^2 - 4x + 6$.

12 De top is $(-3, 4)$, dus $y = a(x + 3)^2 + 4$.

Door $(0, -5)$, dus $a(0 + 3)^2 + 4 = -5$

$$9a + 4 = -5$$

$$9a = -9$$

$$a = -1$$

Dit geeft $y = -(x + 3)^2 + 4$.

$$y = -(x + 3)^2 + 4 = -(x^2 + 6x + 9) + 4 = -x^2 - 6x - 9 + 4 = -x^2 - 6x - 5$$

Dus $y = -x^2 - 6x - 5$.

Bladzijde 143

13 De top is $(2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$, dus $y = a(x - 2\frac{1}{2})^2 + 5\frac{1}{2}$.

Door $(0, 3)$, dus $a(0 - 2\frac{1}{2})^2 + 5\frac{1}{2} = 3$

$$6\frac{1}{4}a + 5\frac{1}{2} = 3$$

$$6\frac{1}{4}a = -2\frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{2}{5}$$

Dus $y = -\frac{2}{5}(x - 2\frac{1}{2})^2 + 5\frac{1}{2}$.

$$x = 10 \text{ geeft } y = -\frac{2}{5}(10 - 2\frac{1}{2})^2 + 5\frac{1}{2} = -17$$

Dus $(10, -17)$ ligt op de parabool.

14 De top is $(16; 7,2)$, dus $h = a(x - 16)^2 + 7,2$.

Door $(0, 4)$, dus $a(0 - 16)^2 + 7,2 = 4$

$$256a + 7,2 = 4$$

$$256a = -3,2$$

$$a = -0,0125$$

Dus $h = -0,0125(x - 16)^2 + 7,2$.

$h = 0$ geeft $-0,0125(x - 16)^2 + 7,2 = 0$

$$-0,0125(x - 16)^2 = -7,2$$

$$(x - 16)^2 = 576$$

$$x - 16 = 24 \vee x - 16 = -24$$

$$x = 40 \vee x = -8 \text{ (kan niet)}$$

De bal komt 40 meter van het schuurtje op de grond.

15 a $y = 2(x - 2)^2 - 32 = 2(x^2 - 4x + 4) - 32 = 2x^2 - 8x + 8 - 32 = 2x^2 - 8x - 24$

De formule is $y = 2x^2 - 8x - 24$.

b $y = 2x^2 - 8x - 24 = 2(x^2 - 4x - 12) = 2(x + 2)(x - 6)$

De formule is $y = 2(x + 2)(x - 6)$.

- c Uit $y = 2(x-2)^2 - 32$ kun je eenvoudig de coördinaten van de top van de grafiek aflezen.
 Uit $y = 2(x+2)(x-6)$ kun je eenvoudig de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x -as aflezen.
 Uit $y = 2x^2 - 8x - 24$ kun je eenvoudig de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de y -as aflezen.

16 De top is $(1\frac{1}{2}, 6\frac{3}{4})$, dus $y = a(x - 1\frac{1}{2})^2 + 6\frac{3}{4}$.

Door $(-6, -12)$, dus $a(-6 - 1\frac{1}{2})^2 + 6\frac{3}{4} = -12$

$$56\frac{1}{4}a + 6\frac{3}{4} = -12$$

$$56\frac{1}{4}a = -18\frac{3}{4}$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

Dit geeft $y = -\frac{1}{3}(x - 1\frac{1}{2})^2 + 6\frac{3}{4}$.

Herleiden geeft $y = -\frac{1}{3}(x - 1\frac{1}{2})^2 + 6\frac{3}{4} = -\frac{1}{3}(x^2 - 3x + 2\frac{1}{4}) + 6\frac{3}{4} = -\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{3}{4} + 6\frac{3}{4} = -\frac{1}{3}x^2 + x + 6$
 $= -\frac{1}{3}(x^2 + 3x - 18) = -\frac{1}{3}(x-3)(x+6)$.

Dus $y = -\frac{1}{3}(x+3)(x-6)$.

17 a $p = 10$ en $q = 6$

b $x = 0$ geeft $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 = 0$

Dus de parabool gaat door de oorsprong.

$p = 10$ en $q = 6$ geeft $y = a(x - 10)^2 + 6$

Door $(0, 0)$, dus $a(0 - 10)^2 + 6 = 0$

$$100a + 6 = 0$$

$$100a = -6$$

$$a = -\frac{3}{50}$$

c $a = -\frac{3}{50}$ geeft $y = -\frac{3}{50}(x - 10)^2 + 6$

Herleiden geeft $y = -\frac{3}{50}(x - 10)^2 + 6 = -\frac{3}{50}(x^2 - 20x + 100) + 6 = -\frac{3}{50}x^2 + 1\frac{1}{5}x - 6 + 6 = -\frac{3}{50}x^2 + 1\frac{1}{5}x$.

Dus $b = 1\frac{1}{5}$.

18 De top is $(2,4; 28,8)$, dus $h = a(t - 2,4)^2 + 28,8$.

Door $(0, 0)$, dus $a(0 - 2,4)^2 + 28,8 = 0$

$$5,76a = -28,8$$

$$a = -5$$

Dus $h = -5(t - 2,4)^2 + 28,8$.

Herleiden geeft $h = -5(t - 2,4)^2 + 28,8 = -5(t^2 - 4,8t + 5,76) + 28,8 = -5t^2 + 24t - 28,8 + 28,8 = -5t^2 + 24t$.

Dus $a = -5$ en $b = 24$

19 De top is $(15, 9)$, dus $h = a(x - 15)^2 + 9$.

Door $(0, 0)$, dus $a(0 - 15)^2 + 9 = 0$

$$225a = -9$$

$$a = -\frac{1}{25}$$

Dus $h = -\frac{1}{25}(x - 15)^2 + 9$.

Herleiden geeft $h = -\frac{1}{25}(x - 15)^2 + 9 = -\frac{1}{25}(x^2 - 30x + 225) + 9 = -\frac{1}{25}x^2 + 1\frac{1}{5}x - 9 + 9 = -\frac{1}{25}x^2 + 1\frac{1}{5}x$.

Dus $a = -\frac{1}{25}$ en $b = 1\frac{1}{5}$.

Bladzijde 144

20 a Snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $2x^2 - 12x = 0$

$$2x(x - 6) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 6$$

De snijpunten met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(6, 0)$.

b $x_{\text{top}} = \frac{0+6}{2} = 3$ en $y_{\text{top}} = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 = 18 - 36 = -18$

Dus top $(3, -18)$

- c $y = 2x^2 - 12x \xrightarrow{13 \text{ omhoog}} y = 2x^2 - 12x + 13$
 Dus beide parabolen hebben dezelfde x_{top} en voor p_2 geldt $y_{\text{top}} = -18 + 13 = -5$.

21 a Snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $ax^2 + bx = 0$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \vee ax + b = 0$$

$$x = 0 \vee ax = -b$$

$$x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

De snijpunten met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(-\frac{b}{a}, 0)$.

b $x_{\text{top}} = \frac{0 + (-\frac{b}{a})}{2} = -\frac{b}{2a}$

- c $p_1: y = ax^2 + bx \xrightarrow{c \text{ omhoog}} p_2: y = ax^2 + bx + c$
 Uit de verschuiving volgt dat beide parabolen dezelfde x_{top} hebben, dus ook voor p_2 geldt $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$.

Bladzijde 145

22 a Door $(2, 0)$, dus $\frac{1}{4} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + c = 0$

$$1 - 4 + c = 0$$

$$c = 3$$

Dus $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$.

b $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 4$ en $y_{\text{top}} = \frac{1}{4} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

De top is $(4, -1)$.

c Snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x - 2)(x - 6) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 6$$

Het andere snijpunt met de x -as is $(6, 0)$.

23 a Door $(1, -3)$, dus $a \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 12 = -3$

$$a + 11 - 12 = -3$$

$$a = -2$$

Dus $y = -2x^2 + 11x - 12$.

$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = \frac{-11}{2 \cdot -2} = 2\frac{3}{4}$ en $y_{\text{top}} = -2 \cdot (2\frac{3}{4})^2 + 11 \cdot 2\frac{3}{4} - 12 = 3\frac{1}{8}$

De top is $(2\frac{3}{4}, 3\frac{1}{8})$.

b Snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $-2x^2 + 11x - 12 = 0$

$$2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 25, \text{ dus } \sqrt{D} = 5$$

$$x = \frac{11 \pm 5}{4} = 4 \vee x = \frac{11 - 5}{4} = 1\frac{1}{2}$$

De snijpunten met de x -as zijn $(4, 0)$ en $(1\frac{1}{2}, 0)$.

24 a Door $(6, -4)$, dus $a \cdot 6^2 + \frac{1}{2} \cdot 6 + 2 = -4$

$$36a + 3 + 2 = -4$$

$$36a = -9$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

Dus $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$.

$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{1}{2}}{2 \cdot -\frac{1}{4}} = 1$ en $y_{\text{top}} = -\frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 = 2\frac{1}{4}$

De top is $(1, 2\frac{1}{4})$.

b Snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x + 2)(x - 4) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 4$$

De snijpunten met de x -as zijn $(-2, 0)$ en $(4, 0)$.

25 Door $(30, 0)$ geeft $-0,04 \cdot 30^2 + p \cdot 30 + 1,5 = 0$

$$-36 + 30p + 1,5 = 0$$

$$30p = 34,5$$

$$p = 1,15$$

Dus $h = -0,04a^2 + 1,15a + 1,5$.

Voer in $y_1 = -0,04x^2 + 1,15x + 1,5$.

De optie maximum geeft $x \approx 14,38$ en $y \approx 9,77$.

De speer komt 9,77 meter hoog.

26 a $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -4$, dus de top is $(-4, -9)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + c \\ \text{door } (-4, -9) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot (-4)^2 + 2 \cdot -4 + c = -9 \\ 4 - 8 + c = -9 \\ c = -5 \end{array}$$

Dus $c = -5$.

b $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = \frac{-b}{2 \cdot -\frac{1}{5}} = 2\frac{1}{2}b$ en $y_{\text{top}} = -\frac{1}{5} \cdot (2\frac{1}{2}b)^2 + b \cdot 2\frac{1}{2}b - 8 = -1\frac{1}{4}b^2 + 2\frac{1}{2}b^2 - 8 = 1\frac{1}{4}b^2 - 8$

$y_{\text{top}} = 12$ geeft $1\frac{1}{4}b^2 - 8 = 12$

$$1\frac{1}{4}b^2 = 20$$

$$b^2 = 16$$

$$b = 4 \vee b = -4$$

$b = 4$ geeft $x_{\text{top}} = 2\frac{1}{2} \cdot 4 = 10$ en $b = -4$ geeft $x_{\text{top}} = 2\frac{1}{2} \cdot -4 = -10$.

Dus $x_{\text{top}} = 10 \vee x_{\text{top}} = -10$.

27 a Door $(-1, 9)$ geeft $a - b + 1 = 9$

$$a - b = 8$$

Door $(5, 21)$ geeft $25a + 5b + 1 = 21$

$$25a + 5b = 20$$

$$5a + b = 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b = 8 \\ 5a + b = 4 \end{array} \right. \rightarrow \frac{5a + b}{6a} = \frac{4}{12} +$$
$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ a - b = 8 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 - b = 8 \\ -b = 6 \\ b = -6 \end{array} \right.$$

Dus $y = 2x^2 - 6x + 1$.

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 2} = 1\frac{1}{2} \text{ en } y_{\text{top}} = 2 \cdot (1\frac{1}{2})^2 - 6 \cdot 1\frac{1}{2} + 1 = 4\frac{1}{2} - 9 + 1 = -3\frac{1}{2}$$

De top is $(1\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned}
 \text{b } x_{\text{top}} &= -\frac{b}{2a} \left\{ \begin{aligned} -\frac{b}{2a} &= 3 \\ -b &= 6a \\ 6a + b &= 0 \end{aligned} \right. \\
 x_{\text{top}} &= 3 \\
 y_{\text{top}} &= a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3\frac{1}{2} = 9a + 3b + 3\frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} 9a + 3b + 3\frac{1}{2} &= 8 \\ 9a + 3b &= 4\frac{1}{2} \\ 6a + 2b &= 3 \end{aligned} \right. \\
 y_{\text{top}} &= 8 \\
 \left\{ \begin{aligned} 6a + b &= 0 \\ 6a + 2b &= 3 \end{aligned} \right. &\quad \begin{aligned} &- \\ &-b = -3 \\ &b = 3 \end{aligned} \\
 6a + b &= 0 \left\{ \begin{aligned} 6a + 3 &= 0 \\ 6a &= -3 \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dus $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3\frac{1}{2}$.

Snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3\frac{1}{2} = 0$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x+1)(x-7) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 7$$

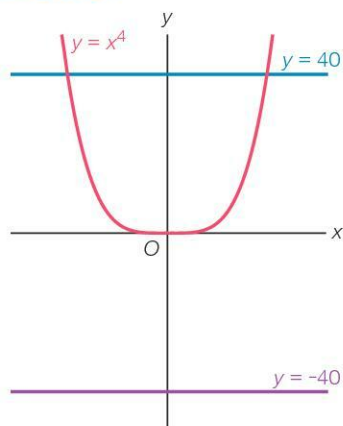
De snijpunten met de x -as zijn $(-1, 0)$ en $(7, 0)$.

4.2 Hogeregraadsvergelijkingen en ongelijkheden

Bladzijde 147

28

a



b Zie de figuur bij a: de grafieken van $y = x^4$ en $y = 40$ hebben twee snijpunten, dus de vergelijking $x^4 = 40$ heeft twee oplossingen.

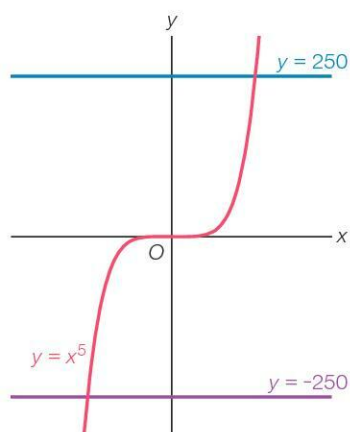
Voer in $y_1 = x^4$ en $y_2 = 40$.

De optie snijpunt geeft $x \approx -2,51$ en $x \approx 2,51$.

c Zie de figuur bij a: de grafieken van $y = x^4$ en $y = -40$ snijden elkaar niet, dus de vergelijking $x^4 = -40$ heeft geen oplossingen.

29

a



- b** Zie de figuur bij a: de grafieken van $y = x^5$ en $y = 250$ hebben één snijpunt, dus de vergelijking $x^5 = 250$ heeft één oplossing.
- c** Zie de figuur bij a: de grafieken van $y = x^5$ en $y = -250$ hebben één snijpunt, dus de vergelijking $x^5 = -250$ heeft één oplossing.

Bladzijde 149

- 30**
- a** $x^6 = 20$
 $x = \sqrt[6]{20} \vee x = -\sqrt[6]{20}$
- b** $5x^3 = 100$
 $x^3 = 20$
 $x = \sqrt[3]{20}$
- c** $x^2 + 7 = 18$
 $x^2 = 11$
 $x = \sqrt{11} \vee x = -\sqrt{11}$
- d** $3x^7 + 25 = 4$
 $3x^7 = -21$
 $x^7 = -7$
 $x = \sqrt[7]{-7}$
- e** $\frac{1}{2}x^6 + 12 = 9$
 $\frac{1}{2}x^6 = -3$
 $x^6 = -6$
 geen oplossingen
- f** $0,3x^8 + 5 = 11$
 $0,3x^8 = 6$
 $x^8 = 20$
 $x = \sqrt[8]{20} \vee x = -\sqrt[8]{20}$
- 31**
- a** $3x^5 + 10 = 16$
 $3x^5 = 6$
 $x^5 = 2$
 $x = \sqrt[5]{2}$
 $x \approx 1,15$
- b** $2x^5 + 9 = 1$
 $2x^5 = -8$
 $x^5 = -4$
 $x = \sqrt[5]{-4}$
 $x \approx -1,32$
- c** $3x^4 - 5 = 10$
 $3x^4 = 15$
 $x^4 = 5$
 $x = \sqrt[4]{5} \vee x = -\sqrt[4]{5}$
 $x \approx 1,50 \vee x \approx -1,50$
- d** $3x^4 + 10 = 4$
 $3x^4 = -6$
 $x^4 = -2$
 geen oplossingen
- e** $\frac{1}{3}x^6 + 2 = 6$
 $\frac{1}{3}x^6 = 4$
 $x^6 = 12$
 $x = \sqrt[6]{12} \vee x = -\sqrt[6]{12}$
 $x \approx 1,51 \vee x \approx -1,51$
- f** $-\frac{1}{2}x^6 + 6 = 2$
 $-\frac{1}{2}x^6 = -4$
 $x^6 = 8$
 $x = \sqrt[6]{8} \vee x = -\sqrt[6]{8}$
 $x \approx 1,41 \vee x \approx -1,41$
- 32**
- a** $7x^3 + 2 = 30$
 $7x^3 = 28$
 $x^3 = 4$
 $x = \sqrt[3]{4}$
 $x \approx 1,59$
- b** $5x^4 - 3 = 12$
 $5x^4 = 15$
 $x^4 = 3$
 $x = \sqrt[4]{3} \vee x = -\sqrt[4]{3}$
 $x \approx 1,32 \vee x \approx -1,32$
- c** $\frac{1}{6}x^5 + 8 = 1$
 $\frac{1}{6}x^5 = -7$
 $x^5 = -42$
 $x = \sqrt[5]{-42}$
 $x \approx -2,11$
- d** $15 - \frac{1}{3}x^6 = 2$
 $-\frac{1}{3}x^6 = -13$
 $x^6 = 39$
 $x = \sqrt[6]{39} \vee x = -\sqrt[6]{39}$
 $x \approx 1,84 \vee x \approx -1,84$

33 a $4^3 = 64$, dus $\sqrt[3]{64} = 4$.

b $x^3 = 125$ geeft $x = 5$

c

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	
5	25	125	625		
6	36	216			

34 a $\frac{1}{2}x^3 - 8 = 100$

$\frac{1}{2}x^3 = 108$

$x^3 = 216$

$x = 6$

b $\frac{1}{9}x^6 - 1 = 80$

$\frac{1}{9}x^6 = 81$

$x^6 = 729$

$x = 3 \vee x = -3$

c $82 - \frac{1}{3}x^5 = 1$

$-\frac{1}{3}x^5 = -81$

$x^5 = 243$

$x = 3$

d $3(2x - 1)^2 = 147$

$(2x - 1)^2 = 49$

$2x - 1 = 7 \vee 2x - 1 = -7$

$2x = 8 \vee 2x = -6$

$x = 4 \vee x = -3$

e $5(x + 2)^3 - 36 = 99$

$5(x + 2)^3 = 135$

$(x + 2)^3 = 27$

$x + 2 = 3$

$x = 1$

f $\frac{1}{5}(4x + 1)^4 - 25 = 100$

$\frac{1}{5}(4x + 1)^4 = 125$

$(4x + 1)^4 = 625$

$4x + 1 = 5 \vee 4x + 1 = -5$

$4x = 4 \vee 4x = -6$

$x = 1 \vee x = -1\frac{1}{2}$

35 a $x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x + 2)(x - 3)$

b $x^3 - x^2 - 6x = 0$

$x(x + 2)(x - 3) = 0$

$x = 0 \vee x + 2 = 0 \vee x - 3 = 0$

$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 3$

36 a $x^4 - x^2 - 6 = 0$ is te schrijven als $(x^2)^2 - x^2 - 6 = 0$.

$x^2 = u$ geeft vervolgens $u^2 - u - 6 = 0$.

b $u^2 - u - 6 = 0$

$(u + 2)(u - 3) = 0$

$u + 2 = 0 \vee u - 3 = 0$

$u = -2 \vee u = 3$

c $x^2 = u$ en $u = -2$ geeft $x^2 = -2$, dus geen oplossingen.

$x^2 = u$ en $u = 3$ geeft $x^2 = 3$, dus $x = \sqrt{3}$ en $x = -\sqrt{3}$.

Dus de vergelijking $x^4 - x^2 - 6 = 0$ heeft de oplossingen $x = \sqrt{3}$ en $x = -\sqrt{3}$.

37 a $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$
 $x(x^2 - 5x + 6) = 0$
 $x(x - 2)(x - 3) = 0$
 $x = 0 \vee x = 2 \vee x = 3$

b $x^3 - 5x^2 = 6x$
 $x^3 - 5x^2 - 6x = 0$
 $x(x^2 - 5x - 6) = 0$
 $x(x + 1)(x - 6) = 0$
 $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 6$

38 a $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 10u + 9 = 0$
 $(u - 1)(u - 9) = 0$
 $u = 1 \vee u = 9$
 $x^2 = 1 \vee x^2 = 9$
 $x = 1 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = -3$

b $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 8u - 9 = 0$
 $(u + 1)(u - 9) = 0$
 $u = -1 \vee u = 9$
 $x^2 = -1 \vee x^2 = 9$
 $x = 3 \vee x = -3$

39 a $x^3 + 25x = 10x^2$
 $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$
 $x(x^2 - 10x + 25) = 0$
 $x(x - 5)(x - 5) = 0$
 $x = 0 \vee x = 5$

b $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 13u + 36 = 0$
 $(u - 4)(u - 9) = 0$
 $u = 4 \vee u = 9$
 $x^2 = 4 \vee x^2 = 9$
 $x = 2 \vee x = -2 \vee x = 3 \vee x = -3$

40 a $x^3 = x^2 + 20x$
 $x^3 - x^2 - 20x = 0$
 $x(x^2 - x - 20) = 0$
 $x(x + 4)(x - 5) = 0$
 $x = 0 \vee x = -4 \vee x = 5$

b $x^4 + 30 = 13x^2$
 $x^4 - 13x^2 + 30 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 13u + 30 = 0$
 $(u - 3)(u - 10) = 0$
 $u = 3 \vee u = 10$
 $x^2 = 3 \vee x^2 = 10$
 $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$

c $x^3 = 4x^2 + 12x$
 $x^3 - 4x^2 - 12x = 0$
 $x(x^2 - 4x - 12) = 0$
 $x(x + 2)(x - 6) = 0$
 $x = 0 \vee x = -2 \vee x = 6$

d $x^3 + x^2 = 12x$
 $x^3 + x^2 - 12x = 0$
 $x(x^2 + x - 12) = 0$
 $x(x - 3)(x + 4) = 0$
 $x = 0 \vee x = 3 \vee x = -4$

c $x^4 + 16 = 10x^2$
 $x^4 - 10x^2 + 16 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 10u + 16 = 0$
 $(u - 2)(u - 8) = 0$
 $u = 2 \vee u = 8$
 $x^2 = 2 \vee x^2 = 8$
 $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}$

d $x^4 + x^2 = 12$
 $x^4 + x^2 - 12 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 + u - 12 = 0$
 $(u - 3)(u + 4) = 0$
 $u = 3 \vee u = -4$
 $x^2 = 3 \vee x^2 = -4$
 $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

c $x^4 - 16x^3 = 36x^2$
 $x^4 - 16x^3 - 36x^2 = 0$
 $x^2(x^2 - 16x - 36) = 0$
 $x^2(x + 2)(x - 18) = 0$
 $x = 0 \vee x = -2 \vee x = 18$

d $x^3 + 6x^2 = 16x$
 $x^3 + 6x^2 - 16x = 0$
 $x(x^2 + 6x - 16) = 0$
 $x(x - 2)(x + 8) = 0$
 $x = 0 \vee x = 2 \vee x = -8$

c $x^4 = 2x^3 + 24x^2$
 $x^4 - 2x^3 - 24x^2 = 0$
 $x^2(x^2 - 2x - 24) = 0$
 $x^2(x + 4)(x - 6) = 0$
 $x = 0 \vee x = -4 \vee x = 6$

d $x^4 + 3x^2 = 4$
 $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 + 3u - 4 = 0$
 $(u - 1)(u + 4) = 0$
 $u = 1 \vee u = -4$
 $x^2 = 1 \vee x^2 = -4$
 $x = 1 \vee x = -1$

Bladzijde 152

- 41** Stel de lengte x en de breedte y .
Dan geldt $xy = 90$ en $x^2 + y^2 = 15^2$.

Uit $xy = 90$ volgt $y = \frac{90}{x}$.

Substitutie van $y = \frac{90}{x}$ in $x^2 + y^2 = 15^2$ geeft

$$x^2 + \left(\frac{90}{x}\right)^2 = 15^2$$

$$x^2 + \frac{8100}{x^2} = 225$$

$$x^4 + 8100 = 225x^2$$

$$x^4 - 225x^2 + 8100 = 0$$

Stel $x^2 = u$.

$$u^2 - 225u + 8100 = 0$$

$$D = (-225)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8100 = 18225, \text{ dus } \sqrt{D} = 135$$

$$u = \frac{225 + 135}{2} = 180 \vee u = \frac{225 - 135}{2} = 45$$

$$x^2 = 180 \vee x^2 = 45$$

$$x = \sqrt{180} \vee x = -\sqrt{180} \vee x = \sqrt{45} \vee x = -\sqrt{45}$$

$$x = 6\sqrt{5} \vee x = -6\sqrt{5} \text{ (kan niet)} \vee x = 3\sqrt{5} \vee x = -3\sqrt{5} \text{ (kan niet)}$$

$$x = 6\sqrt{5} \text{ geeft } y = \frac{90}{6\sqrt{5}} = \frac{90}{6\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{90\sqrt{5}}{30} = 3\sqrt{5}$$

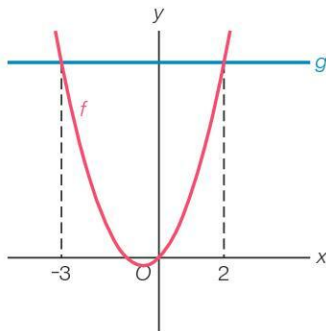
$$x = 3\sqrt{5} \text{ geeft } y = \frac{90}{3\sqrt{5}} = \frac{90}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{90\sqrt{5}}{15} = 6\sqrt{5}$$

Dus de lengten van de zijden van de rechthoek zijn $6\sqrt{5}$ en $3\sqrt{5}$.

- 42 a** $x^2 - 3x - 2 = -x + 6$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x + 2)(x - 4) = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$
- b** $-2 < x < 4$

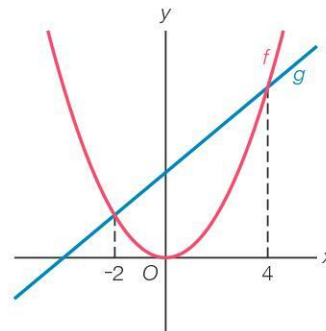
Bladzijde 153

- 43 a** $\underbrace{x^2 + x}_{f(x)} > \underbrace{6}_{g(x)}$
 $x^2 + x = 6$
 $x^2 + x - 6 = 0$
 $(x - 2)(x + 3) = 0$
 $x = 2 \vee x = -3$



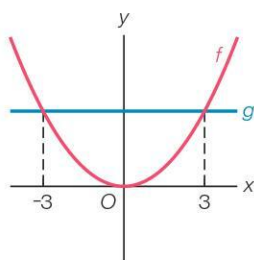
$x^2 + x > 6$ geeft $x < -3 \vee x > 2$

- b** $\underbrace{x^2}_{f(x)} < \underbrace{2x + 8}_{g(x)}$
 $x^2 = 2x + 8$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x + 2)(x - 4) = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$



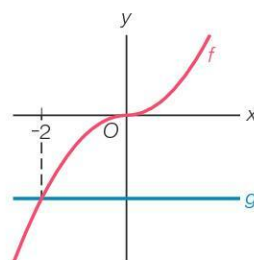
$x^2 < 2x + 8$ geeft $-2 < x < 4$

c $\underbrace{x^4}_{f(x)} > \underbrace{81}_{g(x)}$
 $x^4 = 81$
 $x = 3 \vee x = -3$



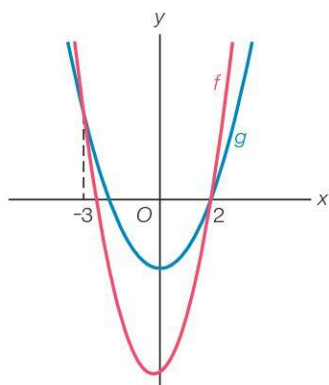
$x^4 > 81$ geeft $x < -3 \vee x > 3$

d $\underbrace{x^3}_{f(x)} < \underbrace{-8}_{g(x)}$
 $x^3 = -8$
 $x = -2$



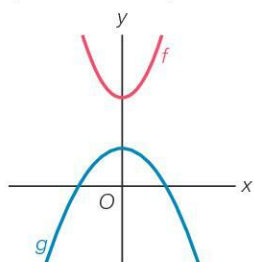
$x^3 < -8$ geeft $x < -2$

44 a $\underbrace{2x^2 + x - 10}_{f(x)} > \underbrace{x^2 - 4}_{g(x)}$
 $2x^2 + x - 10 = x^2 - 4$
 $x^2 + x - 6 = 0$
 $(x - 2)(x + 3) = 0$
 $x = 2 \vee x = -3$



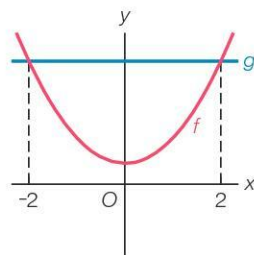
$2x^2 + x - 10 > x^2 - 4$ geeft $x < -3 \vee x > 2$

b $\underbrace{2x^2 + 7}_{f(x)} < \underbrace{3 - x^2}_{g(x)}$
 $2x^2 + 7 = 3 - x^2$
 $3x^2 = -4$
 $x^2 = -\frac{4}{3}$
 geen oplossingen



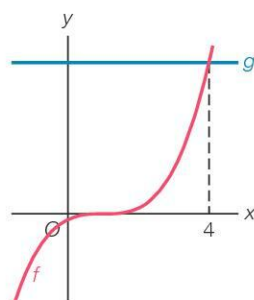
$2x^2 + 7 < 3 - x^2$ heeft geen oplossingen.

c $\underbrace{\frac{1}{2}x^4 + 1}_{f(x)} < \underbrace{9}_{g(x)}$
 $\frac{1}{2}x^4 + 1 = 9$
 $\frac{1}{2}x^4 = 8$
 $x^4 = 16$
 $x = 2 \vee x = -2$



$\frac{1}{2}x^4 + 1 < 9$ geeft $-2 < x < 2$

d $\underbrace{\frac{1}{3}(x - 1)^3}_{f(x)} > \underbrace{9}_{g(x)}$
 $\frac{1}{3}(x - 1)^3 = 9$
 $(x - 1)^3 = 27$
 $x - 1 = 3$
 $x = 4$



$\frac{1}{3}(x - 1)^3 > 9$ geeft $x > 4$

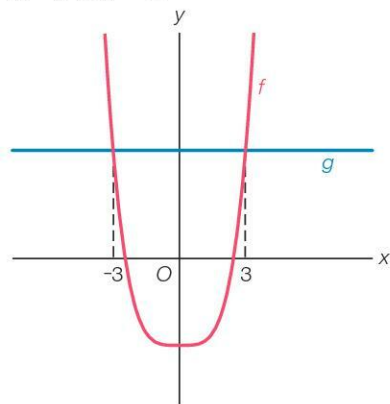
45 a $\underbrace{\frac{1}{9}x^4}_{f(x)} - \underbrace{4}_{g(x)} > 5$

$$\frac{1}{9}x^4 - 4 = 5$$

$$\frac{1}{9}x^4 = 9$$

$$x^4 = 81$$

$$x = 3 \vee x = -3$$



$$\frac{1}{9}x^4 - 4 > 5 \text{ geeft } x < -3 \vee x > 3$$

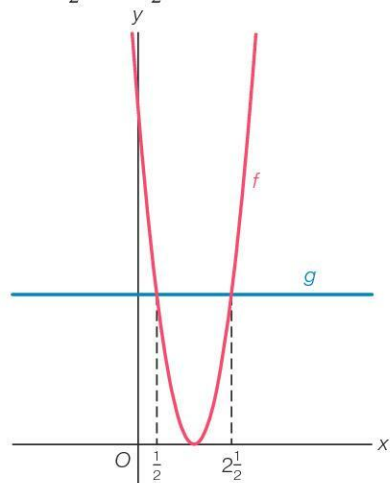
b $\underbrace{(2x-3)^2}_{f(x)} < \underbrace{4}_{g(x)}$

$$(2x-3)^2 = 4$$

$$2x-3 = 2 \vee 2x-3 = -2$$

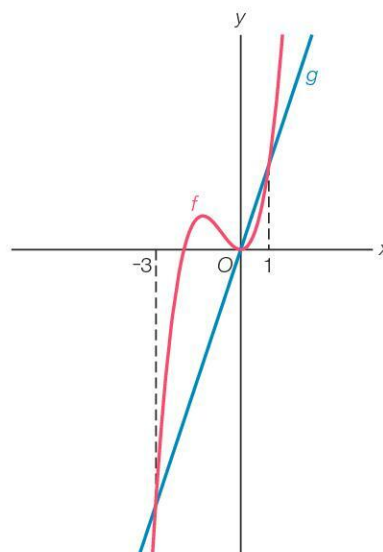
$$2x = 5 \vee 2x = 1$$

$$x = 2\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$$



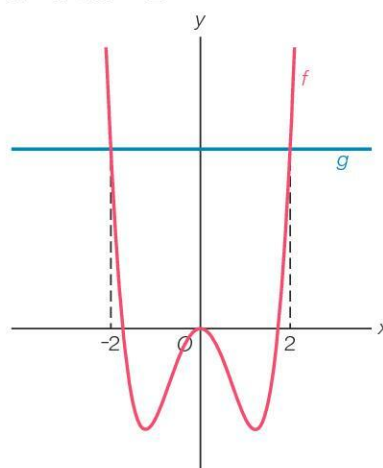
$$(2x-3)^2 < 4 \text{ geeft } \frac{1}{2} < x < 2\frac{1}{2}$$

c $\underbrace{x^3 + 2x^2}_{f(x)} < \underbrace{3x}_{g(x)}$
 $x^3 + 2x^2 = 3x$
 $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$
 $x(x^2 + 2x - 3) = 0$
 $x(x-1)(x+3) = 0$
 $x = 0 \vee x = 1 \vee x = -3$



$$x^3 + 2x^2 < 3x \text{ geeft } x < -3 \vee 0 < x < 1$$

d $\underbrace{x^4 - 3x^2}_{f(x)} < \underbrace{4}_{g(x)}$
 $x^4 - 3x^2 = 4$
 $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 3u - 4 = 0$
 $(u+1)(u-4) = 0$
 $u = -1 \vee u = 4$
 $x^2 = -1 \vee x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$



$$x^4 - 3x^2 < 4 \text{ geeft } -2 < x < 2$$

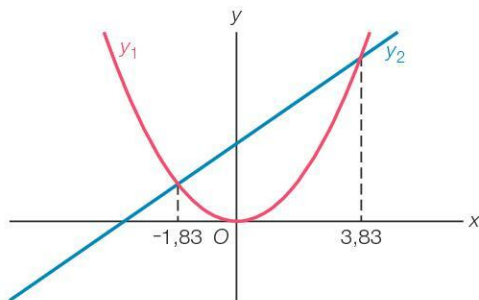
46 $x^4 = x^3 + 1$ geeft $x^4 - x^3 - 1 = 0$

Het lukt niet deze vergelijking op te lossen, want je kunt niet ontbinden in factoren en je kunt geen gebruik maken van de substitutie $x^2 = u$.

Bladzijde 154

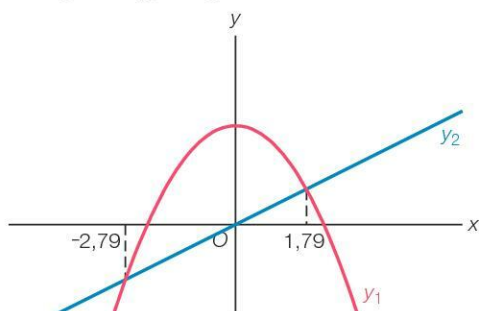
- 47 a** Voer in $y_1 = 0,3x^4 - 6x + 5$ en $y_2 = 3x^2$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 0,638 \vee x \approx 3,760$.
- b** Voer in $y_1 = 0,1x^3 - 0,5x^2 - 5x + 10$.
De optie nulpunt geeft $x \approx -6,034 \vee x \approx 1,794 \vee x \approx 9,240$.
Dus de nulpunten zijn $-6,034$, $1,794$ en $9,240$.

- 48 a** $x^2 < 2x + 7$
Voer in $y_1 = x^2$ en $y_2 = 2x + 7$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -1,83 \vee x \approx 3,83$.



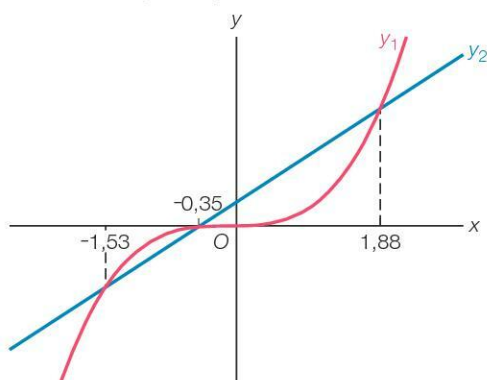
$x^2 < 2x + 7$ geeft $-1,83 < x < 3,83$

- b** $5 - x^2 < x$
Voer in $y_1 = 5 - x^2$ en $y_2 = x$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -2,79 \vee x \approx 1,79$.



$5 - x^2 < x$ geeft $x < -2,79 \vee x > 1,79$

- c** $x^3 > 3x + 1$
Voer in $y_1 = x^3$ en $y_2 = 3x + 1$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -1,53 \vee x \approx -0,35 \vee x \approx 1,88$.

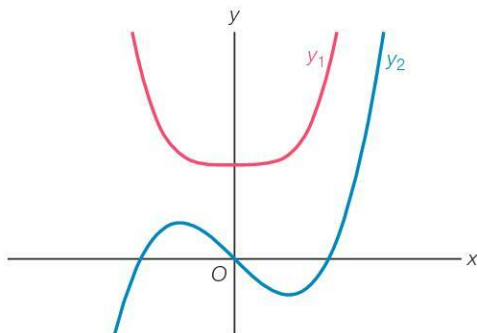


$x^3 > 3x + 1$ geeft $-1,53 < x < -0,35 \vee x > 1,88$

d $x^4 + 1 > x^3 - x$

Voer in $y_1 = x^4 + 1$ en $y_2 = x^3 - x$.

De optie snijpunt geeft geen oplossingen.

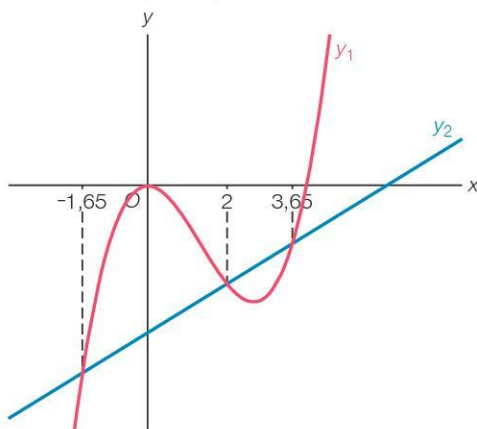


$x^4 + 1 > x^3 - x$ heeft elke x als oplossing.

49 a $x^3 - 4x^2 < 2x - 12$

Voer in $y_1 = x^3 - 4x^2$ en $y_2 = 2x - 12$.

De optie snijpunt geeft $x \approx -1,65 \vee x = 2 \vee x \approx 3,65$.

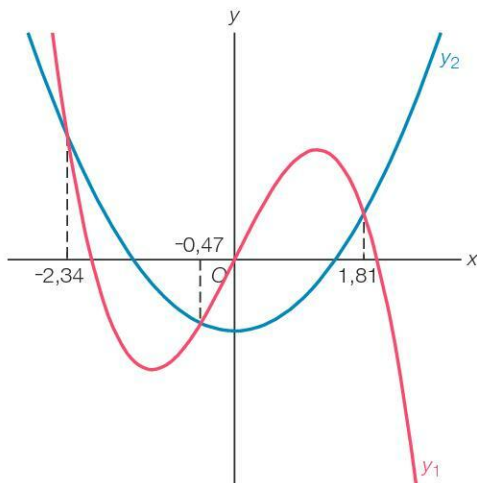


$x^3 - 4x^2 < 2x - 12$ geeft $x < -1,65 \vee 2 < x < 3,65$

b $4x - x^3 > x^2 - 2$

Voer in $y_1 = 4x - x^3$ en $y_2 = x^2 - 2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx -2,34 \vee x \approx -0,47 \vee x \approx 1,81$.

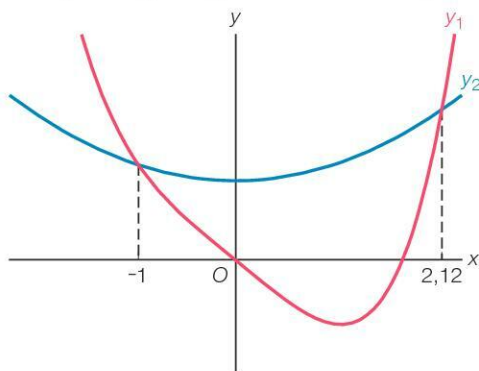


$4x - x^3 > x^2 - 2$ geeft $x < -2,34 \vee -0,47 < x < 1,81$

c $x^4 - 5x < x^2 + 5$

Voer in $y_1 = x^4 - 5x$ en $y_2 = x^2 + 5$.

De optie snijpunt geeft $x = -1 \vee x \approx 2,12$.

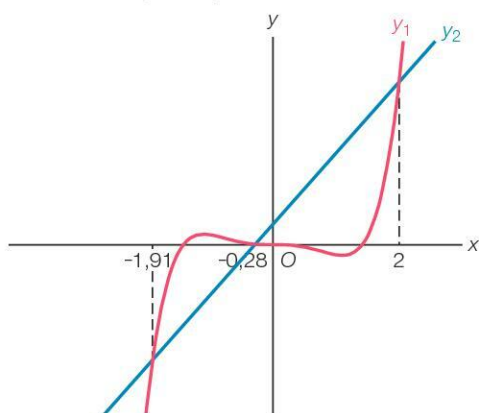


$x^4 - 5x < x^2 + 5$ geeft $-1 < x < 2,12$

d $x^5 - 2x^3 > 7x + 2$

Voer in $y_1 = x^5 - 2x^3$ en $y_2 = 7x + 2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx -1,91 \vee x \approx -0,28 \vee x = 2$.

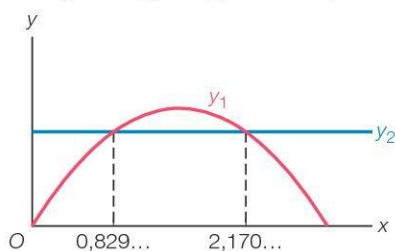


$x^5 - 2x^3 > 7x + 2$ geeft $-1,91 < x < -0,28 \vee x > 2$

50 a $h > 9$ geeft $-5t^2 + 15t > 9$

Voer in $y_1 = -5x^2 + 15x$ en $y_2 = 9$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,829... \vee x = 2,170...$



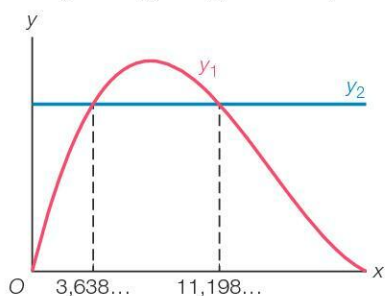
De bal is $2,170... - 0,829... \approx 1,3$ seconden hoger dan 9 meter.

b $90 \text{ km/uur} = \frac{90}{3,6} = 25 \text{ m/s}$

$v > 25$ geeft $0,022t^3 - 0,94t^2 + 10t > 25$

Voer in $y_1 = 0,022x^3 - 0,94x^2 + 10x$ en $y_2 = 25$.

De optie snijpunt geeft $x = 3,638... \vee x = 11,198...$



De snelheid is gedurende $11,198... - 3,638... \approx 7,6$ seconden groter dan 90 km/uur.

- 51 a** Zie bijvoorbeeld de regelmatige zeshoek hiernaast. Een diagonaal is een lijnstuk tussen twee niet-aanliggende hoekpunten.

Ga uit van hoekpunt A .

AB en AF zijn zijden en geen diagonalen.

Dus er zijn $6 - 3 = 3$ diagonalen vanuit hoekpunt A .

Een regelmatige zeshoek heeft zes hoekpunten, dus dit geeft $6 \cdot 3 = 18$ diagonalen.

Maar dan tel je alle diagonalen dubbel, want bijvoorbeeld de diagonaal AE is dezelfde als de diagonaal EA .

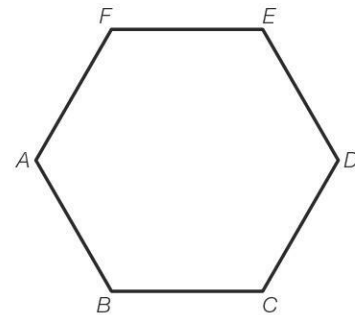
Dus een regelmatige zeshoek heeft $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$ diagonalen.

Je kunt net zo'n redenering houden voor een regelmatige n -hoek.

Een regelmatige n -hoek heeft n hoeken en vanuit elk hoekpunt zijn er $n - 3$ diagonalen.

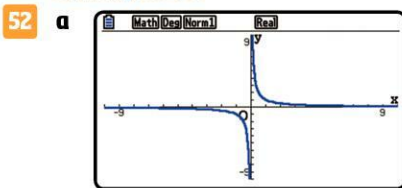
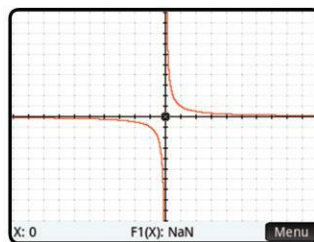
Dit geeft $n(n - 3)$ diagonalen. Maar omdat je dan alle diagonalen dubbel telt, moet je nog delen door twee. Dus het aantal diagonalen van een regelmatige n -hoek is $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

- b** Voer in $y_1 = \frac{1}{2}x(x - 3)$, $y_2 = 3100$ en $y_3 = 3200$.
De optie snijpunt met y_1 en y_2 geeft $x = 80,25...$
De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x = 81,51...$
Dus $n = 81$.



4.3 Gebroken vormen

Bladzijde 156



- b** Als je x steeds groter kiest dan komt $f(x)$ steeds dichterbij 0.
Ook voor heel kleine x komt $f(x)$ heel dichtbij 0.

c

X	F1
-0.1	-10
-0.09	-11.1111111111
-0.08	-12.5
-0.07	-14.2857142857
-0.06	-16.6666666667
-0.05	-20
-0.04	-25
-0.03	-33.3333333333
-0.02	-50
-0.01	-100
-0.1	-10

$f(x)$ wordt heel klein als een negatieve waarde van x heel dichtbij 0 komt.

$f(x)$ wordt heel groot als een positieve waarde van x heel dichtbij 0 komt.

- d** Bij $\frac{1}{0} = \dots$ hoort $\dots \times 0 = 1$.

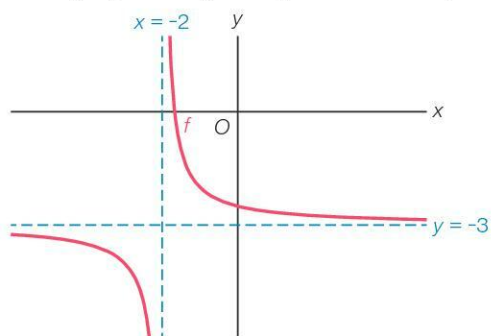
Maar er is geen getal dat vermenigvuldigd met 0 de uitkomst 1 geeft.

Je kunt dus niet door 0 delen.

Bladzijde 157

- 53 a** $y = \frac{1}{x}$
 $\downarrow$ translatie $(-2, -3)$
 $y = \frac{1}{x+2} - 3$

- b** De asymptoten zijn de lijnen $x = -2$ en $y = -3$.



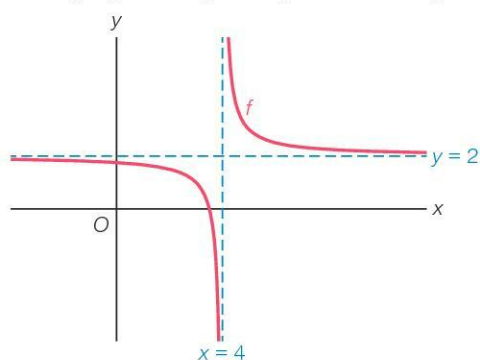
Bladzijde 158

54 a $y = \frac{1}{x}$

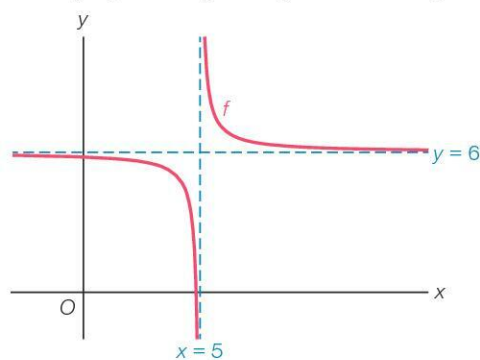
↓ translatie (4, 2)

$$y = \frac{1}{x-4} + 2$$

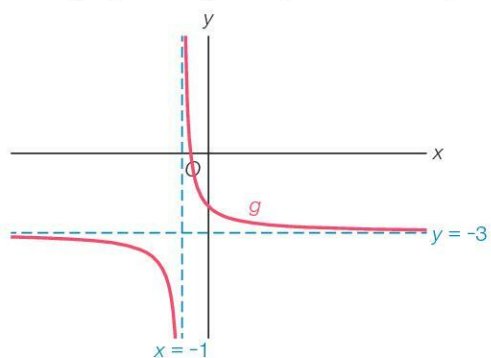
- b** De asymptoten zijn de lijnen $x = 4$ en $y = 2$.



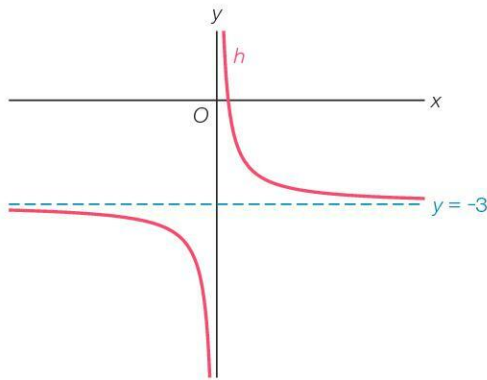
- 55 a** De asymptoten zijn de lijnen $x = 5$ en $y = 6$.



- b** De asymptoten zijn de lijnen $x = -1$ en $y = -3$.



- c De asymptoten zijn de lijnen $x = 0$ en $y = -3$.



56 $y = \frac{1}{x+3} - 4$

↓ translatie (5, 0)

$$y = \frac{1}{x-5+3} - 4 = \frac{1}{x-2} - 4$$

↓ translatie (0, 9)

$$y = \frac{1}{x-2} - 4 + 9 = \frac{1}{x-2} + 5$$

Dus de grafiek van g ontstaat door de translatie (5, 9) uit de grafiek van f .

- 57 a Bij een verhoudingstabel zijn de kruisproducten gelijk.

Kruislings vermenigvuldigen bij de verhoudingstabel $\frac{x}{2} \mid \frac{x+4}{x}$ geeft

$$x \cdot x = 2 \cdot (x+4)$$

$$x^2 = 2x + 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

b $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$(x+2)(x-4) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 4$$

Bladzijde 160

58 a $\frac{x+3}{x-1} = \frac{10}{x}$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$$x(x+3) = 10(x-1)$$

$$x^2 + 3x = 10x - 10$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 5$$

vold. vold.

b $\frac{2x+3}{x+1} = \frac{2x+2}{x-1}$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$$(2x+3)(x-1) = (x+1)(2x+2)$$

$$2x^2 - 2x + 3x - 3 = 2x^2 + 2x + 2x + 2$$

$$-3x = 5$$

$$x = -1\frac{2}{3}$$

vold.

c $\frac{x-3}{x+1} = 1\frac{1}{2}$

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{3}{2}$$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$$3(x+1) = 2(x-3)$$

$$3x+3 = 2x-6$$

$$x = -9$$

vold.

d $\frac{x-1}{x} + 1 = 3$

$$\frac{x-1}{x} = 2$$

$$x-1 = 2x$$

$$-x = 1$$

$$x = -1$$

vold.

$$\text{e } \frac{3x+4}{x-1} = \frac{x+18}{x}$$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$$x(3x+4) = (x-1)(x+18)$$

$$3x^2 + 4x = x^2 + 18x - x - 18$$

$$2x^2 - 13x + 18 = 0$$

$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 25, \text{ dus } \sqrt{D} = 5$$

$$x = \frac{13+5}{4} = 4\frac{1}{2} \vee x = \frac{13-5}{4} = 2$$

vold.

vold.

$$\text{f } \frac{2x-5}{4-x} = \frac{x+2}{3x-4}$$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$$(2x-5)(3x-4) = (4-x)(x+2)$$

$$6x^2 - 8x - 15x + 20 = 4x + 8 - x^2 - 2x$$

$$7x^2 - 25x + 12 = 0$$

$$D = (-25)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 12 = 289, \text{ dus } \sqrt{D} = 17$$

$$x = \frac{25+17}{14} = 3 \vee x = \frac{25-17}{14} = \frac{4}{7}$$

vold.

vold.

$$\text{59 a } \frac{5x^2-15}{x^2+5} = 0$$

$$5x^2 - 15 = 0$$

$$5x^2 = 15$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

vold. vold.

$$\text{b } \frac{x^2-3}{x^2+1} = \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$x^2 - 3 = x - 1$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

vold. vold.

$$\text{c } \frac{x^2-4}{2x+5} = \frac{x^2-4}{x+4}$$

$$x^2 - 4 = 0 \vee 2x + 5 = x + 4$$

$$x^2 = 4 \vee x = -1$$

$$x = 2 \vee x = -2 \vee x = -1$$

vold. vold. vold.

$$\text{60 a } \frac{3x^2-10}{x^2+1} = 2$$

$$3x^2 - 10 = 2(x^2 + 1)$$

$$3x^2 - 10 = 2x^2 + 2$$

$$x^2 = 12$$

$$x = \sqrt{12} \vee x = -\sqrt{12}$$

$$x = 2\sqrt{3} \vee x = -2\sqrt{3}$$

vold. vold.

$$\text{b } \frac{x^3-8}{x^2+2} = \frac{x^3-8}{x+8}$$

$$x^3 - 8 = 0 \vee x^2 + 2 = x + 8$$

$$x^3 = 8 \vee x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = 2 \vee (x+2)(x-3) = 0$$

$$x = 2 \vee x = -2 \vee x = 3$$

vold. vold. vold.

$$\text{c } \frac{3x^2-10}{x^2+1} = \frac{2x^2}{x^2+1}$$

$$3x^2 - 10 = 2x^2$$

$$x^2 = 10$$

$$x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$$

vold. vold.

$$\text{d } \frac{3x+1}{2x-1} = \frac{3x+5}{2x+1}$$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$$(3x+1)(2x+1) = (3x+5)(2x-1)$$

$$6x^2 + 3x + 2x + 1 = 6x^2 - 3x + 10x - 5$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$

vold.

$$\text{61 a } \text{Ze heeft } \frac{8}{4} = 2 \text{ uur gewandeld.}$$

Stel ze jogg t uur.

Dan is ze in totaal $2 + t$ uur onderweg.

t uur joggen met een snelheid van 8 km/uur geeft $8t$ km joggen.

Dus in totaal legt ze $8 + 8t$ km af.

$$\text{gemiddelde snelheid} = \frac{\text{afstand in km}}{\text{tijd in uren}} = \frac{8+8t}{2+t} \left\{ \begin{array}{l} \frac{8+8t}{2+t} = 5 \\ 8+8t = 5(2+t) \\ 8+8t = 10+5t \\ 3t = 2 \\ t = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

gemiddelde snelheid = 5 km/uur

$$8+8t = 5(2+t)$$

$$8+8t = 10+5t$$

$$3t = 2$$

$$t = \frac{2}{3}$$

Dus Anna moet $\frac{2}{3} \cdot 60 = 40$ minuten joggen.

- b** Stel het aantal personen is x .

Dan is de gemiddelde leeftijd in jaren x , en de totale leeftijd in jaren x^2 .
Nadat er iemand van 29 jaar bij is gekomen, is het aantal personen $x + 1$,
de gemiddelde leeftijd in jaren $x + 1$ en de totale leeftijd in jaren $x^2 + 29$.

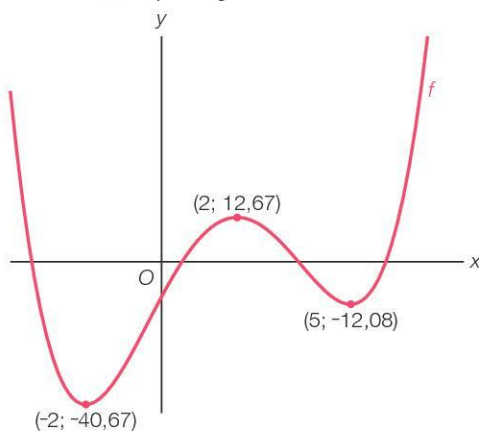
$$\begin{aligned} \text{gemiddelde leeftijd} &= \frac{\text{totale leeftijd}}{\text{aantal personen}} = \frac{x^2 + 29}{x + 1} \\ \text{gemiddelde leeftijd} &= x + 1 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x^2 + 29}{x + 1} &= x + 1 \\ x^2 + 29 &= (x + 1)(x + 1) \\ x^2 + 29 &= x^2 + 2x + 1 \\ -2x &= -28 \\ x &= 14 \end{aligned} \right.$$

Dus er waren oorspronkelijk 14 personen aanwezig.

4.4 Extreme waarden en wiskundige modellen

Bladzijde 162

- 62 a** Voer in $y_1 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 20x - 10$.



- b** Bij $x = -2$ hoort $y \approx -40,67$.
Bij $x = 2$ hoort $y \approx 12,67$.
Bij $x = 5$ hoort $y \approx -12,08$.

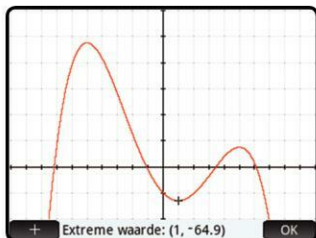
- 63** min. is $f(-3) = -4$ en max. is $f(3) = 6$.
max. is $g(-1) = 6$ en min. is $g(2) = -3$.

Bladzijde 163

- 64** max. is $h(-4) = 7$, min. is $h(-1) = 2$ en max. is $h(2) = 5$.
min. is $k(-2) = 1$, max. is $k(0) = 5$ en min. is $k(3) = -2$.

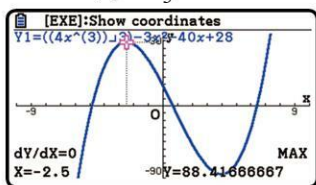
Bladzijde 164

- 65 a** Voer in $y_1 = -0,3x^4 + 0,4x^3 + 15x^2 - 30x - 50$.



- b** De optie maximum geeft $x = -5$ en $y = 237,5$.
De optie minimum geeft $x = 1$ en $y = -64,9$.
De optie maximum geeft $x = 5$ en $y = 37,5$.
max. is $f(-5) = 237,5$
min. is $f(1) = -64,9$
max. is $f(5) = 37,5$

- 66 a Voer in $y_1 = 1\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 40x + 28$.



- b De optie maximum geeft $x = -2,5$ en $y \approx 88,42$.
De optie minimum geeft $x = 4$ en $y \approx -94,67$.
max. is $f(-2,5) \approx 88,42$
min. is $f(4) \approx -94,67$

- 67 a Voer in $y_1 = -x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + 36x + 25$.

De optie minimum geeft $x = -4$ en $y = -79$.

De optie maximum geeft $x = 3$ en $y = 92,5$.

min. is $f(-4) = -79$

max. is $f(3) = 92,5$

- b Voer in $y_1 = \frac{1}{5}x^4 + x^3 - 9\frac{1}{7}x^2 - 50x + 75$.

De optie minimum geeft $x \approx -5,83$ en $y \approx 88,64$.

De optie maximum geeft $x \approx -2,39$ en $y \approx 135,15$.

De optie minimum geeft $x \approx 4,48$ en $y \approx -162,02$.

min. is $g(-5,83) \approx 88,64$

max. is $g(-2,39) \approx 135,15$

min. is $g(4,48) \approx -162,02$

- 68 $f(1) = 6\frac{1}{2}$ geeft $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} + 5 + p = 6\frac{1}{2}$

$$2\frac{1}{2} + p = 6\frac{1}{2}$$

$$p = 4$$

Dus $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2\frac{1}{4}x^2 + 5x + 4$.

Voer in $y_1 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2\frac{1}{4}x^2 + 5x + 4$.

De optie minimum geeft $x = -2$ en $y = -7$.

De optie minimum geeft $x = 2,5$ en $y \approx 4,39$.

min. is $f(-2) = -7$

min. is $f(2,5) \approx 4,39$

- 69 Voer in $y_1 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$.

De optie maximum geeft $x = -1$ en $y = 5\frac{2}{3}$, dus $A(-1, 5\frac{2}{3})$.

De optie minimum geeft $x = 3$ en $y = -5$, dus $B(3, -5)$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5 - 5\frac{2}{3}}{3 - (-1)} = -2\frac{2}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -2\frac{2}{3}x + b \\ B(3, -5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2\frac{2}{3} \cdot 3 + b = -5 \\ -8 + b = -5 \\ b = 3 \end{array}$$

Dus $k: y = -2\frac{2}{3}x + 3$.

- 70 a $t = 1$ en $h = 24$ invullen in $h = at^2 + bt + 1$ geeft $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 = 24$

$$a + b + 1 = 24$$

$$a + b = 23$$

$t = 3$ en $h = 40$ invullen in $h = at^2 + bt + 1$ geeft $a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 1 = 40$

$$9a + 3b + 1 = 40$$

$$9a + 3b = 39$$

$$3a + b = 13$$

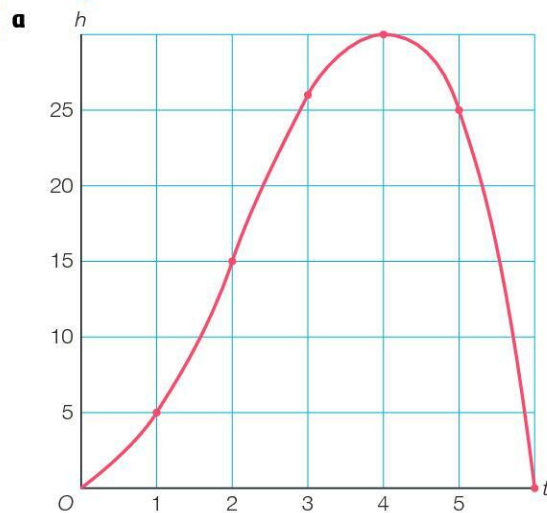
$$\begin{array}{l} \text{b} \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b = 23 \\ 3a + b = 13 \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad \begin{array}{r} -2a = 10 \\ a = -5 \end{array} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} -5 + b = 23 \\ a + b = 23 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} b = 28 \\ b = 28 \end{array}$$

Dus $a = -5$ en $b = 28$.

- c $t = 5$ invullen in $h = -5t^2 + 28t + 1$ geeft $h = -5 \cdot 5^2 + 28 \cdot 5 + 1 = 16$
Dit klopt niet met de tabel.

Bladzijde 166

71



De grafiek heeft niet de vorm van een parabool, dus je hebt waarschijnlijk niet te maken met een formule van de vorm $h = at^2 + bt$.

- b Met de formule krijg je de volgende tabel.

t	0	1	2	3	4	5	6
h	0	5	16	27	32	25	0

Dus de punten (2, 15), (3, 26) en (4, 30) van de tabel komen niet overeen met de formule.

- c Voer in $y_1 = -x^3 + 6x^2$.

De optie maximum geeft $x = 4$ en $y = 32$.

Dus met de formule vind je een maximale hoogte van 32 meter.

Deze wordt bereikt voor $t = 4$.

- d $t = 2$ en $h = 15$ invullen geeft $a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 = 15$ oftewel $8a + 4b = 15$.

$t = 4$ en $h = 30$ invullen geeft $a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 = 30$ oftewel $64a + 16b = 30$, dus $32a + 8b = 15$.

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 8a + 4b = 15 \\ 32a + 8b = 15 \end{array} \right. \begin{array}{l} |2| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 16a + 8b = 30 \\ 32a + 8b = 15 \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad \begin{array}{r} -16a = 15 \\ a = -\frac{15}{16} \end{array} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 16 \cdot -\frac{15}{16} + 8b = 30 \\ -15 + 8b = 30 \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad \begin{array}{r} 8b = 45 \\ b = 5\frac{5}{8} \end{array}$$

Dus $h = -\frac{15}{16}t^3 + 5\frac{5}{8}t^2$.

- e Voer in $y_1 = -\frac{15}{16}x^3 + 5\frac{5}{8}x^2$.

De optie maximum geeft $x = 4$ en $y = 30$.

Dus met deze formule vind je een maximale hoogte van 30 meter.

De optie nulpunt geeft $x = 6$.

Dus volgens deze formule komt de vuurpijl na 6 seconden weer op de grond.

- f *

72

- a** $x = 10$ en $h = 3,5$ invullen geeft $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 = 3,5$ oftewel $100a + 10b = 3,5$.
 $x = 60$ en $h = 6,0$ invullen geeft $a \cdot 60^2 + b \cdot 60 = 6$ oftewel $3600a + 60b = 6$, dus $600a + 10b = 1$.
- $$\begin{cases} 100a + 10b = 3,5 \\ 600a + 10b = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ -500a = 2,5 \\ a = -\frac{1}{200} \end{array}$$
- $$\begin{cases} 600a + 10b = 1 \\ 600 \cdot -\frac{1}{200} + 10b = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} -3 + 10b = 1 \\ 10b = 4 \\ b = \frac{2}{5} \end{array}$$
- Dus $a = -\frac{1}{200}$ en $b = \frac{2}{5}$.

- b** Voer in $y_1 = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{2}{5}x$.
 De optie maximum geeft $x = 40$ en $y = 8$.
 Volgens de formule komt de bal maximaal 8 meter hoog.
- c** De optie nulpunt geeft $x = 80$.
 Dus volgens de formule komt de bal 80 meter vanaf de afslag weer op de grond.
- d** Met de formule krijg je de volgende tabel.

x	0	10	25	50	60
h	0	3,5	6,875	7,5	6

Dus voor $x = 25$ wijkt de hoogte die de formule geeft af van de meetwaarde.

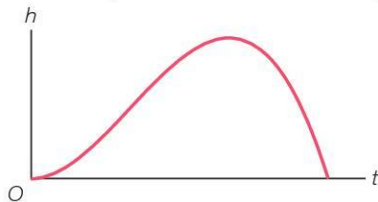
Dit is een afwijking van $\frac{7,0 - 6,875}{7,0} \times 100\% \approx 1,8\%$.

73

- a** $t = 5$ en $h = 75$ invullen geeft $a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 = 75$ oftewel $125a + 25b = 75$, dus $5a + b = 3$.
 $t = 8$ en $h = 0$ invullen geeft $a \cdot 8^3 + b \cdot 8^2 = 0$ oftewel $a \cdot 8 + b = 0$, dus $b = -8a$.
 Substitutie van $b = -8a$ in $5a + b = 3$ geeft $5a - 8a = 3$
 $-3a = 3$
 $a = -1$

$a = -1$ geeft $b = 8$.

- b** Voer in $y_1 = -x^3 + 8x^2$ en plot de grafiek.



- c** De optie maximum geeft $x = 5,33...$ en $y = 75,851...$
 Dus na ongeveer 5,3 seconden is de pijl op het hoogste punt.
 De pijl is dan op een hoogte van ongeveer 75,9 meter.
- d** Voer in $y_2 = 50$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3,24...$ en $x = 6,97...$
 Volgens de formule is de pijl gedurende $6,97... - 3,24... \approx 3,7$ seconden hoger dan 50 meter.
 Dus de metingen komen overeen met de formule.

- 74** Stel het grondvlak van de doos is x bij y cm, dan geldt $xy = 8$.
Stel de hoogte van de doos is h cm, dan geldt $xh = 6$ en $yh = 3$.

Uit $xh = 6$ volgt $x = \frac{6}{h}$.

Uit $yh = 3$ volgt $y = \frac{3}{h}$.

Substitutie van $x = \frac{6}{h}$ en $y = \frac{3}{h}$ in $xy = 8$ geeft $\frac{6}{h} \cdot \frac{3}{h} = 8$

$$\frac{18}{h^2} = 8$$

$$18 = 8h^2$$

$$h^2 = 2\frac{1}{4}$$

$$h = 1\frac{1}{2} \vee h = -1\frac{1}{2}$$

vold. vold. niet

De inhoud van de doos is dus $8 \cdot 1\frac{1}{2} = 12 \text{ cm}^3$.

Bladzijde 168

- 75 a** $t = 1$ en $N = 193$ invullen geeft $a \cdot 1^3 + b \cdot 1 + 200 = 193$ oftewel $a + b = -7$.
 $t = 5$ en $N = 285$ invullen geeft $a \cdot 5^3 + b \cdot 5 + 200 = 285$ oftewel $125a + 5b = 85$,
dus $25a + b = 17$.

$$\begin{cases} a + b = -7 \\ 25a + b = 17 \end{cases} \quad \begin{array}{r} -24a \quad = -24 \\ a = 1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} a = 1 \\ a + b = -7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 + b = -7 \\ b = -8 \end{array}$$

Dit geeft de formule $N = t^3 - 8t + 200$.

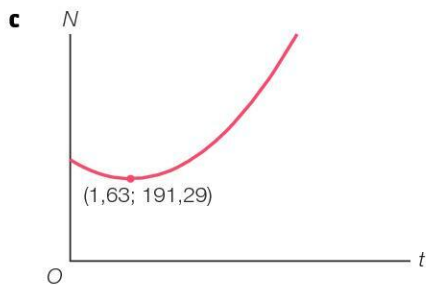
$t = 6$ geeft $N = 6^3 - 8 \cdot 6 + 200 = 368$, en dit komt overeen met de gemeten waarde op 7 september om 0:00 uur.

Dus er zijn waarden van a en b waarmee de formule overeenkomt met alle gegeven meetwaarden.

- b** Voer in $y_1 = x^3 - 8x + 200$, maak een tabel, en bereken ΔN . Je krijgt

t	N	ΔN
0	200	-
1	193	-7
2	192	-1
3	203	11
4	232	29
5	285	53
6	368	83
7	487	119
8	648	161
9	857	209

Dus op 9 september is volgens de gevonden formule de toename voor het eerst meer dan 200 miljoen.



De optie minimum geeft $x \approx 1,63$ en $y \approx 191,29$.
Het minimale aantal bacteriën is ongeveer 191 miljoen.

- 76 a** In de tabel zie je dat de temperatuur niet steeds in hetzelfde aantal minuten met 10°C daalt.
Dus bij de tabel hoort geen lineair verband.

- b** $c = 20$, $t = 0$ en $T = 100$ invullen in $T = a \cdot b^t + c$ geeft $a \cdot b^0 + 20 = 100$

$$a \cdot 1 + 20 = 100$$

$$a + 20 = 100$$

$$a = 80$$

- c** $t = 65$ en $T = 50$ invullen in $T = 80 \cdot b^t + 20$ geeft $80 \cdot b^{65} + 20 = 50$

$$80 \cdot b^{65} = 30$$

$$b^{65} = \frac{3}{8}$$

$$b = \sqrt[65]{\frac{3}{8}} \approx 0,985$$

- d** $T = 80 \cdot 0,985^t + 20$

$t = 9$ invullen geeft $T \approx 90$

$t = 19$ invullen geeft $T \approx 80$

$t = 31$ invullen geeft $T \approx 70$

$t = 46$ invullen geeft $T \approx 60$

Dus de bij c gevonden formule past ook bij de andere gegevens van de tabel.

- e** Voer in $y_1 = 80 \cdot 0,985^x + 20$ en $y_2 = 40$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 91,7$.

Dus na ongeveer 92 minuten is de temperatuur van het water gedaald tot 40°C .

Bladzijde 169

- 77 a** $N = -3,35t^3 + 132t^2 - 1240t + 5000$

$t = 0$ invullen geeft $N = 5000$, dus geen afwijking.

$t = 6$ invullen geeft $N \approx 1588$, dus de afwijking is $1588 - 1450 = 138$.

$t = 12$ invullen geeft $N \approx 3339$, dus de afwijking is $3500 - 3339 = 161$.

$t = 19$ invullen geeft $N \approx 6114$, dus de afwijking is $6114 - 6000 = 114$.

$t = 24$ invullen geeft $N \approx 4962$, dus de afwijking is $5000 - 4962 = 38$.

De formule past niet goed bij de gegevens.

De afwijking is het grootst om 12 uur.

In dat geval wijkt de formule $\frac{161}{3500} \times 100\% = 4,6\%$ af van het gegeven.

- b** $N = 0,0577t^4 - 6,17t^3 + 174t^2 - 1430t + 5000$

$t = 0$ invullen geeft $N = 5000$, dus geen afwijking.

$t = 6$ invullen geeft $N \approx 1426$, dus de afwijking is $1450 - 1426 = 24$.

$t = 12$ invullen geeft $N \approx 3431$, dus de afwijking is $3500 - 3431 = 69$.

$t = 19$ invullen geeft $N \approx 5843$, dus de afwijking is $6000 - 5843 = 157$.

$t = 24$ invullen geeft $N \approx 4753$, dus de afwijking is $5000 - 4753 = 247$.

Op $t = 6$ en $t = 12$ geeft dit model een betere benadering van de werkelijkheid dan het eerste model, en op $t = 19$ en $t = 24$ een slechtere.

Diagnostische toets

Bladzijde 172

- 1 a** Snijpunten met de x -as $(-3, 0)$ en $(5, 0)$, dus $y = a(x + 3)(x - 5)$.

Door $(-1, 3)$, dus $a(-1 + 3)(-1 - 5) = 3$

$$a \cdot 2 \cdot -6 = 3$$

$$-12a = 3$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

Dus $y = -\frac{1}{4}(x + 3)(x - 5)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{-3 + 5}{2} = 1 \text{ en } y_{\text{top}} = -\frac{1}{4}(1 + 3)(1 - 5) = -\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot -4 = 4$$

De top is $(1, 4)$.

$$x = 0 \text{ geeft } y = -\frac{1}{4}(0 + 3)(0 - 5) = -\frac{1}{4} \cdot 3 \cdot -5 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Het snijpunt met de y -as is $(0, 3\frac{3}{4})$.

- b** $y = -\frac{1}{4}(x + 3)(x - 5) = -\frac{1}{4}(x^2 - 5x + 3x - 15) = -\frac{1}{4}(x^2 - 2x - 15) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3\frac{3}{4}$

De formule is $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3\frac{3}{4}$.

- 2 a** De top van p_1 is $(-1, -3)$, dus $y = a(x + 1)^2 - 3$.

Door $(0, -1)$, dus $a(0 + 1)^2 - 3 = -1$

$$a - 3 = -1$$

$$a = 2$$

Dit geeft $y = 2(x + 1)^2 - 3$.

$$y = 2(x + 1)^2 - 3 = 2(x^2 + 2x + 1) - 3 = 2x^2 + 4x + 2 - 3 = 2x^2 + 4x - 1$$

Dus $p_1: y = 2x^2 + 4x - 1$.

- b** De top van p_2 is $(1, 2)$, dus $y = a(x - 1)^2 + 2$.

Door $(3, 0)$, dus $a(3 - 1)^2 + 2 = 0$

$$4a = -2$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Dit geeft $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$.

$$y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}$$

Dus $p_2: y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}$.

- 3** Door $(2, 8)$, dus $-\frac{3}{4} \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 2 = 8$

$$-3 + 2b + 2 = 8$$

$$2b = 9$$

$$b = 4\frac{1}{2}$$

Dus $y = -\frac{3}{4}x^2 + 4\frac{1}{2}x + 2$.

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = \frac{-4\frac{1}{2}}{2 \cdot -\frac{3}{4}} = 3 \text{ en } y_{\text{top}} = -\frac{3}{4} \cdot 3^2 + 4\frac{1}{2} \cdot 3 + 2 = 8\frac{3}{4}$$

De top is $(3, 8\frac{3}{4})$.

- 4 a** $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2 \cdot \frac{1}{3}} = 4\frac{1}{2}$, dus top $(4\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$.

$$y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + c \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot (4\frac{1}{2})^2 - 3 \cdot 4\frac{1}{2} + c = -\frac{3}{4} \\ \text{door } (4\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}) \end{array} \right.$$

$$6\frac{3}{4} - 13\frac{1}{2} + c = -\frac{3}{4}$$

$$c = 6$$

- b** $c = 6$ geeft $y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 6$

Snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $\frac{1}{3}x^2 - 3x + 6 = 0$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$(x - 3)(x - 6) = 0$$

$$x = 3 \vee x = 6$$

De snijpunten met de x -as zijn $(3, 0)$ en $(6, 0)$.

5 a $3x^3 + 5 = 20$
 $3x^3 = 15$
 $x^3 = 5$
 $x = \sqrt[3]{5}$

b $5x^6 + 20 = 30$
 $5x^6 = 10$
 $x^6 = 2$
 $x = \sqrt[6]{2} \vee x = -\sqrt[6]{2}$

c $(2x + 9)^5 = 243$
 $2x + 9 = 3$
 $2x = -6$
 $x = -3$

6 a $8x^5 - 6 = 10$
 $8x^5 = 16$
 $x^5 = 2$
 $x = \sqrt[5]{2}$
 $x \approx 1,15$

b $\frac{1}{4}x^6 - 8 = 9$
 $\frac{1}{4}x^6 = 17$
 $x^6 = 68$
 $x = \sqrt[6]{68} \vee x = -\sqrt[6]{68}$
 $x \approx 2,02 \vee x = -2,02$

c $10 - 4(x + 1)^7 = 20$
 $-4(x + 1)^7 = 10$
 $(x + 1)^7 = -2\frac{1}{2}$
 $x + 1 = \sqrt[7]{-2\frac{1}{2}}$
 $x = -1 + \sqrt[7]{-2\frac{1}{2}}$
 $x \approx -2,14$

7 a $x^3 - 6x^2 = 7x$
 $x^3 - 6x^2 - 7x = 0$
 $x(x^2 - 6x - 7) = 0$
 $x(x + 1)(x - 7) = 0$
 $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 7$

b $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 5u + 4 = 0$
 $(u - 1)(u - 4) = 0$
 $u = 1 \vee u = 4$
 $x^2 = 1 \vee x^2 = 4$
 $x = 1 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = -2$

c $x^4 + 10x^2 = 24$
 $x^4 + 10x^2 - 24 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 + 10u - 24 = 0$
 $(u - 2)(u + 12) = 0$
 $u = 2 \vee u = -12$
 $x^2 = 2 \vee x^2 = -12$
 $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

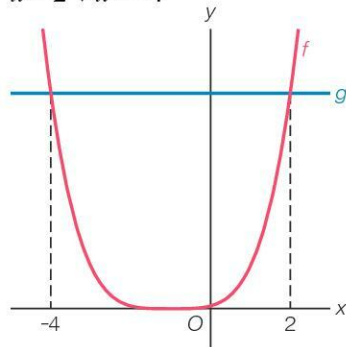
8 a $\underbrace{\frac{1}{3}(x+1)^4}_{f(x)} > \underbrace{27}_{g(x)}$

$$\frac{1}{3}(x+1)^4 = 27$$

$$(x+1)^4 = 81$$

$$x+1 = 3 \vee x+1 = -3$$

$$x = 2 \vee x = -4$$



b $\underbrace{x^3 - 4x^2}_{f(x)} > \underbrace{5x}_{g(x)}$

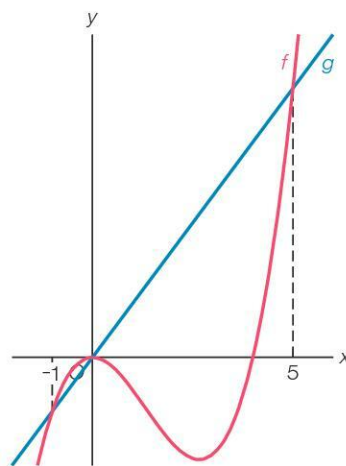
$$x^3 - 4x^2 = 5x$$

$$x^3 - 4x^2 - 5x = 0$$

$$x(x^2 - 4x - 5) = 0$$

$$x(x+1)(x-5) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 5$$

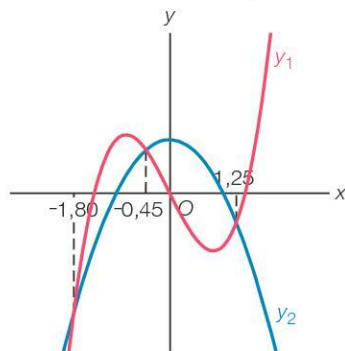


$$x^3 - 4x^2 > 5x \text{ geeft } -1 < x < 0 \vee x > 5$$

9 a $x^3 - 2x < -x^2 + 1$

Voer in $y_1 = x^3 - 2x$ en $y_2 = -x^2 + 1$.

De optie snijpunt geeft $x \approx -1,80 \vee x \approx -0,45 \vee x \approx 1,25$.

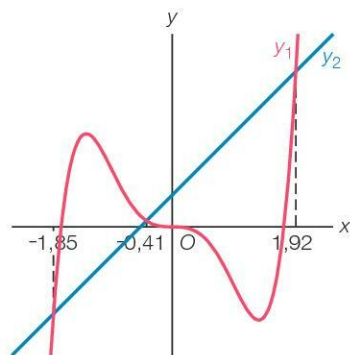


$$x^3 - 2x < -x^2 + 1 \text{ geeft } x < -1,80 \vee -0,45 < x < 1,25$$

b $x^5 - 3x^3 > 2x + 1$

Voer in $y_1 = x^5 - 3x^3$ en $y_2 = 2x + 1$.

De optie snijpunt geeft $x \approx -1,85 \vee x \approx -0,41 \vee x \approx 1,92$.

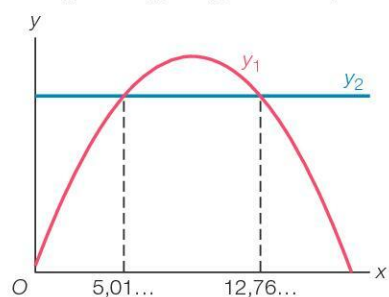


$x^5 - 3x^3 > 2x + 1$ geeft $-1,85 < x < -0,41 \vee x > 1,92$

Bladzijde 173

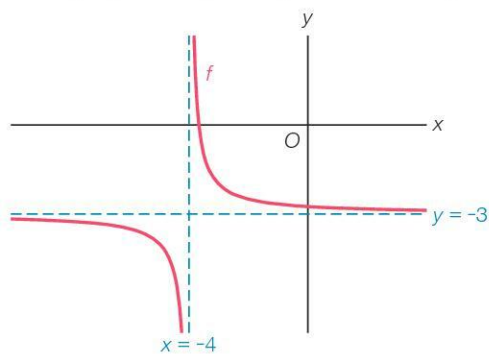
10 Voer in $y_1 = -4,5x^2 + 80x + 12$ en $y_2 = 300$.

De optie snijpunt geeft $x = 5,014...$ en $x = 12,763...$

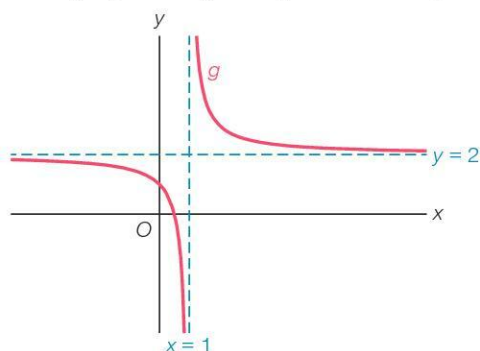


De pijl is gedurende $12,763... - 5,014... = 7,749... \approx 7,7$ seconden hoger dan 300 meter.

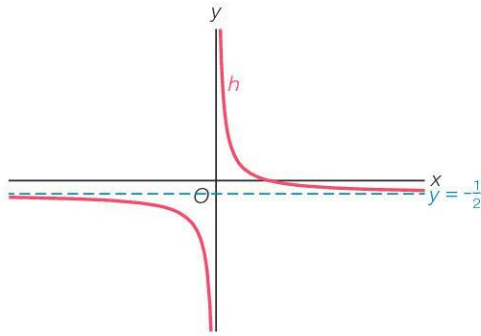
11 a De asymptoten zijn de lijnen $x = -4$ en $y = -3$.



b De asymptoten zijn de lijnen $x = 1$ en $y = 2$.



- c De asymptoten zijn de lijnen $x = 0$ en $y = -\frac{1}{2}$.



12 a $\frac{4x^2 - 6}{x + 3} = x$

$$4x^2 - 6 = x(x + 3)$$

$$4x^2 - 6 = x^2 + 3x$$

$$3x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

vold. vold.

b $\frac{x^2 - 1}{x + 2} = \frac{x^2 - 1}{3x - 6}$

$$x^2 - 1 = 0 \vee x + 2 = 3x - 6$$

$$x^2 = 1 \vee -2x = -8$$

$$x = 1 \vee x = -1 \vee x = 4$$

vold. vold. vold.

c $\frac{x^2 - 6}{x^2 + 5} = \frac{4x + 6}{x^2 + 5}$

$$x^2 - 6 = 4x + 6$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x + 2)(x - 6) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 6$$

vold. vold.

13 Voer in $y_1 = \frac{1}{4}x^4 - 4\frac{1}{2}x^2 + 8$.

De optie minimum geeft $x = -3$ en $y = -12,25$, en $x = 3$ en $y = -12,25$.

De optie maximum geeft $x = 0$ en $y = 8$.

Dus min. is $f(-3) = -12,25$, max. is $f(0) = 8$ en min. is $f(3) = -12,25$.

14 $x = 10$ en $h = 2,7$ invullen geeft $a \cdot 10^2 + b \cdot 10^3 = 2,7$ oftewel $100a + 1000b = 2,7$.

$x = 100$ en $h = 0$ invullen geeft $a \cdot 100^2 + b \cdot 100^3 = 0$ oftewel $a + b \cdot 100 = 0$,

dus $a = -100b$.

Substitutie van $a = -100b$ in $100a + 1000b = 2,7$ geeft $100 \cdot -100b + 1000b = 2,7$

$$-10\,000b + 1000b = 2,7$$

$$-9000b = 2,7$$

$$b = -0,0003$$

$b = -0,0003$ geeft $a = -100 \cdot -0,0003 = 0,03$

Dus $h = 0,03x^2 - 0,0003x^3$.

Voer in $y_1 = 0,03x^2 - 0,0003x^3$.

De optie maximum geeft $x = 66,6\dots$ en $y = 44,4\dots$

Dus de maximale hoogte van de drone is 44 meter.

Gemengde opgaven

1 Formules, grafieken en vergelijkingen

Bladzijde 174

- 1 Stel $k: y = ax + b$ met $a = rc_k = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } A(1, -4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + b = -4 \\ -2 + b = -4 \\ b = -2 \end{array}$$

Dus $k: y = -2x - 2$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - -1}{1 - -5} = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} y = x + b \\ \text{door } C(1, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 + b = 5 \\ b = 4 \end{array}$$

Dus $l: y = x + 4$.

k en l snijden geeft $-2x - 2 = x + 4$

$$\left. \begin{array}{l} -3x = 6 \\ x = -2 \\ y = x + 4 \end{array} \right\} y = -2 + 4 = 2$$

Dus het snijpunt is $S(-2, 2)$.

- 2 a $\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + a + 1 \\ \text{door } A(12, -6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 12 + a + 1 = -6 \\ 6 + a + 1 = -6 \\ a = -13 \end{array}$

$$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(12, -6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot 12 + b = -6 \\ -18 + b = -6 \\ b = 12 \end{array}$$

Dus $a = -13$ en $b = 12$.

- b l en m zijn evenwijdig geeft $rc_m = rc_l$

$$\begin{aligned} 3a &= -1\frac{1}{2} \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus $m: y = -1\frac{1}{2}x - 6 \cdot (-\frac{1}{2})^2$ oftewel $m: y = -1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$.

De lijn m snijdt de y -as in het punt $(0, -1\frac{1}{2})$.

- c $\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + a + 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2}x + a + 1 = 0 \\ \frac{1}{2}x = -a - 1 \\ x = -2a - 2 \end{array}$
- $$\left. \begin{array}{l} y = 3ax - 6a^2 \\ y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3ax - 6a^2 = 0 \\ 3ax = 6a^2 \\ x = 2a \end{array} \quad a \neq 0$$
- $$\left. \begin{array}{l} x = -2a - 2 \\ x = 2a \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2a - 2 = 2a \\ -4a = 2 \\ a = -\frac{1}{2} \end{array}$$

- 3 a $\left. \begin{array}{l} 3x - ay = b \\ \text{door } A(2, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 2 - a \cdot -1 = b \\ a - b = -6 \end{array}$
- $$\left. \begin{array}{l} x + 3y = b \\ \text{door } A(2, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 + 3 \cdot -1 = b \\ b = -1 \end{array}$$
- $$\left. \begin{array}{l} a - b = -6 \\ b = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a - -1 = -6 \\ a = -7 \end{array}$$
- Dus $a = -7$ en $b = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = b \\ \text{door } C(4, 0) \end{array} \right\} b = 4 + 3 \cdot 0 = 4$$

k snijden met l geeft

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{7} \\ x + 3y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 3 \cdot 1\frac{1}{7} = 4 \\ x + 3\frac{3}{7} = 4 \\ x = \frac{4}{7} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \quad & 3x - ay = b \\ & -ay = -3x + b \\ & y = \frac{3}{a} \cdot x - \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}b$$

k evenwijdig met l geeft $rc_k = rc_l$

$$\frac{3}{a} = -\frac{1}{3}$$
$$a = -9$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 9y = b \\ x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 9y = b \\ y = \frac{1}{9}b \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = b \\ x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3y = b \\ y = \frac{1}{3}b \end{array}$$

Er gilt $\frac{1}{3}b - \frac{1}{9}b = 2 \vee \frac{1}{9}b - \frac{1}{3}b = 2$

$$\frac{2}{9}b = 2 \vee -\frac{2}{9}b = 2$$

$$b = 9 \vee b = -9$$

4 a $\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 2x + 5y = 17 \end{cases} \left| \begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix} \right|$ geeft $\begin{cases} 25x + 10y = 55 \\ 4x + 10y = 34 \end{cases}$

$$\frac{21x}{21} = \frac{21}{21}$$
$$\begin{cases} x = 1 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases} \begin{cases} 5 \cdot 1 + 2y = 11 \\ 5 + 2y = 11 \end{cases}$$
$$2y = 6$$
$$y = 3$$

De oplossing is $(x, y) = (1, 3)$.

$$\text{b } \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + 4y = 38 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 8x - 4y = 28 \\ 3x + 4y = 38 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 11x = 66 \\ x = 6 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ 2x - y = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 6 - y = 7 \\ 12 - y = 7 \\ -y = -5 \\ y = 5 \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (6, 5)$.

$$\text{c } \begin{cases} x = 3y - 10 \\ y = 3x - 10 \end{cases}$$

Substitueren van $y = 3x - 10$ in $x = 3y - 10$ geeft $x = 3(3x - 10) - 10$

$$x = 9x - 30 - 10$$

$$-8x = -40$$

$$x = 5$$

$$y = 3x - 10 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} y = 3 \cdot 5 - 10 = 5$$

De oplossing is $(x, y) = (5, 5)$.

$$\text{d } \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = -1 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y = 5 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 12 \\ 20 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 4y = -12 \\ 5x + 4y = 100 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 11x = 88 \\ x = 8 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ 5x + 4y = 100 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \cdot 8 + 4y = 100 \\ 40 + 4y = 100 \\ 4y = 60 \\ y = 15 \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (8, 15)$.

$$\text{5 a I } rc_I = \frac{5}{1} = 5$$

door $(0, 0)$, dus I: $y = 5x$.

$$\text{II } rc_{II} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$\begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } (1, 5) \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 1 + b = 5 \\ -3 + b = 5 \\ b = 8 \end{array}$$

Dus II: $y = -3x + 8$.

$$\text{III } rc_{III} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } (2, 2) \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + b = 2 \\ 4 + b = 2 \\ b = -2 \end{array}$$

Dus III: $y = 2x - 2$.

$$\text{IV } rc_{IV} = \frac{-6}{1} = -6$$

$$\begin{array}{l} y = -6x + b \\ \text{door } (5, 0) \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} -6 \cdot 5 + b = 0 \\ -30 + b = 0 \\ b = 30 \end{array}$$

Dus IV: $y = -6x + 30$.

b $y = 5x$ snijden met $y = -6x + 30$ geeft $5x = -6x + 30$

$$11x = 30$$

$$x = 2\frac{8}{11}$$

$$\begin{array}{l} x = 2\frac{8}{11} \\ y = 5x \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} y = 5 \cdot 2\frac{8}{11} = 13\frac{7}{11}$$

Het snijpunt is $(2\frac{8}{11}, 13\frac{7}{11})$ en dit ligt onder de lijn $y = 14$.

Luuk heeft dus geen gelijk.

- 6 Stel x leerlingen lopen 5 km en y leerlingen lopen 3 km.

$$\text{Hieruit volgt het stelsel } \begin{cases} x + y = 30 \\ 5x + 3y = 126 \end{cases} \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 3x + 3y = 90 \\ 5x + 3y = 126 \\ \hline -2x = -36 \\ x = 18 \end{cases}$$

Er lopen dus 18 leerlingen de 5 km.

Bladzijde 175

- 7 De lijn k is evenwijdig met $l: x + 3y = 2$, dus stel $k: x + 3y = c$.

$$\begin{cases} x + 3y = c \\ \text{door } A(4, 8) \end{cases} \Rightarrow c = 4 + 3 \cdot 8 = 28$$

Dus $k: x + 3y = 28$.

$$\text{Stel } m: y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 8}{6 - 2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(2, 8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 8 \\ -1 + b = 8 \\ b = 9 \end{cases}$$

Dus $m: y = -\frac{1}{2}x + 9$.

$$y = -\frac{1}{2}x + 9 \text{ substitueren in } x + 3y = 28 \text{ geeft } x + 3(-\frac{1}{2}x + 9) = 28$$

$$x - 1\frac{1}{2}x + 27 = 28$$

$$-\frac{1}{2}x = 1$$

$$x = -2$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 9 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot -2 + 9 = 10$$

Dus $S(-2, 10)$.

8 a $3(\frac{1}{2}x - 4)^2 - 10 = 20$

$$3(\frac{1}{2}x - 4)^2 = 30$$

$$(\frac{1}{2}x - 4)^2 = 10$$

$$\frac{1}{2}x - 4 = \sqrt{10} \vee \frac{1}{2}x - 4 = -\sqrt{10}$$

$$\frac{1}{2}x = 4 + \sqrt{10} \vee \frac{1}{2}x = 4 - \sqrt{10}$$

$$x = 8 + 2\sqrt{10} \vee x = 8 - 2\sqrt{10}$$

b $(2x + 3)^2 = 10x + 29$

$$4x^2 + 12x + 9 = 10x + 29$$

$$4x^2 + 2x - 20 = 0$$

$$2x^2 + x - 10 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -10 = 81, \text{ dus } \sqrt{D} = 9$$

$$x = \frac{-1 + 9}{4} = 2 \vee x = \frac{-1 - 9}{4} = -2\frac{1}{2}$$

c $(2x - 1)(x + 6) - 7 = (x + 4)(x - 1)$

$$2x^2 + 12x - x - 6 - 7 = x^2 - x + 4x - 4$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$(x - 1)(x + 9) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -9$$

d $(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2 = 8x$

$$4x^2 - 4x + 1 + 4x^2 + 4x + 1 = 8x$$

$$8x^2 - 8x + 2 = 0$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(2x - 1)^2 = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

e $2x^2 + 5 = 9x$

$$2x^2 - 9x + 5 = 0$$

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 41$$

$$x = \frac{9 + \sqrt{41}}{4} \vee x = \frac{9 - \sqrt{41}}{4}$$

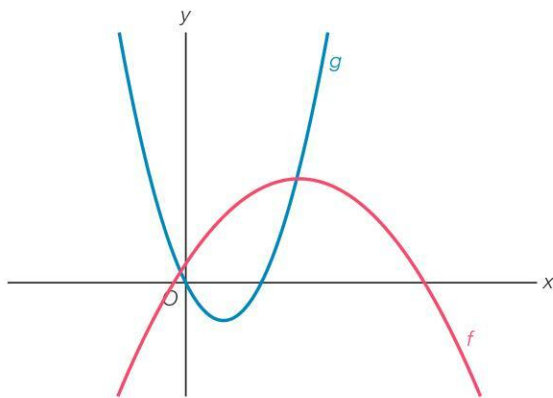
f $(x^2 - 8)(x^2 + 8) = (x^2 - 18)(x^2 - 2)$

$$x^4 - 64 = x^4 - 2x^2 - 18x^2 + 36$$

$$20x^2 = 100$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$

9 a

- b** Voer in $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$.
De optie nulpunt geeft de nulpunten $-0,32$ en $6,32$.
- c** De optie maximum geeft de top $(3; 5,5)$.
 $g(3) = 6$, dus de top van de grafiek van f ligt niet op de grafiek van g .
- d** Voer in $y_2 = 2x^2 - 4x$ en $y_3 = 4$.
De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft de punten $B(1,267...; 4)$ en $D(4,732...; 4)$.
De optie snijpunt met y_2 en y_3 geeft de punten $A(-0,732...; 4)$ en $C(2,732...; 4)$.
 $AB = 1,267... - (-0,732...) = 2$
 $CD = 4,732... - 2,732... = 2$
Dus de lijnstukken AB en CD zijn even lang.
- e** De optie minimum bij y_2 geeft de top $(1, -2)$.
De top van de grafiek van h is dus $(1, -2 + c)$.
 $f(1) = 3,5$, dus $-2 + c = 3,5$
 $c = 5,5$
Dus $c = 5,5$.
- f** De top van de grafiek van g is $(1, -2)$, dus voer in $y_4 = -2$.
De optie snijpunt met y_1 en y_4 geeft de punten $E(-0,872...; -2)$ en $F(6,872...; -2)$.
 $EF = 6,872... - (-0,872...) \approx 7,75$

- 10 a** Voer in $y_1 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 3\frac{1}{2}x^2 - 12x$.
De optie minimum geeft de toppen $(-3; 6,75)$ en $(2,65; -31,74)$.
De optie maximum geeft de top $(-1,56; 9,15)$.
- b** $a > -31,735...$, dus $a = -31, -30, -29, -28, ...$
Uitproberen geeft
 $a = -26$ geeft $x_A = 1,765...$ en $x_B = 3,209...$, dus $AB = 3,209... - 1,765... = 1,443... < 1,5$
 $a = -25$ geeft $x_A = 1,688...$ en $x_B = 3,259...$, dus $AB = 3,259... - 1,688... = 1,570... > 1,5$.
Dus a kan de waarden $-31, -30, -29, -28, -27$ of -26 aannemen.

- 11 a** 30 km/uur oftewel $30 \text{ km}/60 \text{ minuten}$, dus $\frac{1}{2} \text{ km/minuut}$.
Dus voor Harm geldt de formule $s = \frac{1}{2}t$ met s de afgelegde afstand in km en t de tijd in minuten.
- b** Stel $s = at + b$ met $a = \frac{33}{60} = \frac{11}{20}$.
$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{11}{20}t + b \\ t = 5 \text{ en } s = 0 \end{array} \right\} \frac{11}{20} \cdot 5 + b = 0$$
$$b = -2\frac{3}{4}$$

Dus voor Marc geldt de formule $s = \frac{11}{20}t - 2\frac{3}{4}$.
$$\frac{11}{20}t - 2\frac{3}{4} = \frac{1}{2}t$$
$$11t - 55 = 10t$$
$$t = 55$$

Dus om 8:55 uur wordt Harm door Marc ingehaald.

c Stel $s = at + b$ met $a = -\frac{42}{60} = -\frac{7}{10}$.

Op $t = 0$ is $s = 30$, dus $b = 30$ en voor Gerrit geldt de formule $s = -\frac{7}{10}t + 30$.

$$\frac{1}{2}t = -\frac{7}{10}t + 30$$

$$5t = -7t + 300$$

$$12t = 300$$

$$t = 25$$

Dus om 8:25 uur komen Harm en Gerrit elkaar tegen.

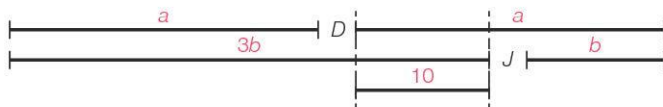
Bladzijde 176

12 Stel dat er a lopers voor Dion bij de finish kwamen en dus ook a lopers erna.

Stel het aantal lopers dat na Jaap bij de finish kwam b , dan zijn er dus $3b$ voor Jaap bij de finish gekomen.

Tussen Dion en Jaap staan 10 andere deelnemers.

Dit geeft het volgende schema.



Hieruit volgt de vergelijking $2a + 1 = 4b + 1$ oftewel $2a = 4b$ en dus $a = 2b$.

Verder zie je dat $3b - 10 = a + 1$ oftewel $-a + 3b = 11$.

Hieruit volgt het stelsel
$$\begin{cases} a = 2b \\ -a + 3b = 11 \end{cases}$$

Substitueren van $a = 2b$ in $-a + 3b = 11$ geeft $-2b + 3b = 11$

$$\begin{matrix} b = 11 \\ a = 2b \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} b = 11 \\ a = 2b \end{matrix}} \right\} a = 2 \cdot 11 = 22$$

Het totale aantal lopers is $2a + 1 = 2 \cdot 22 + 1 = 45$.

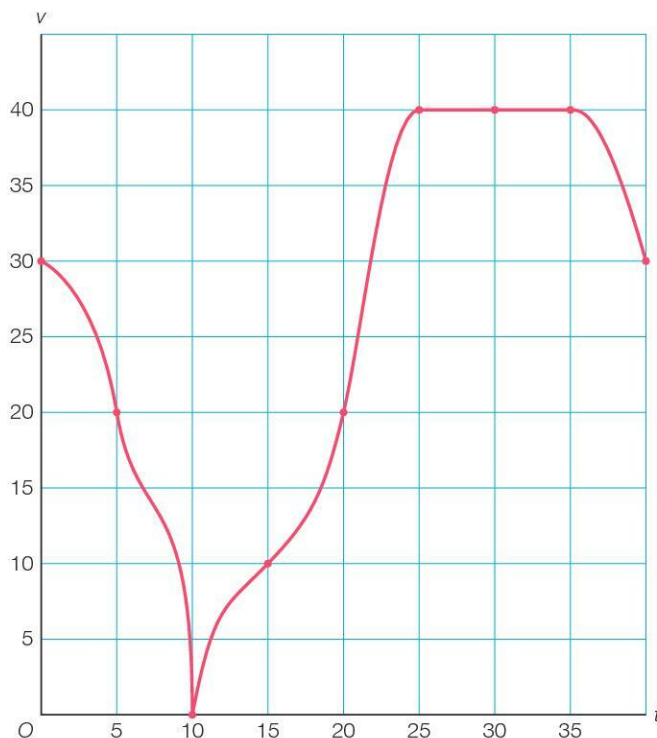
2 Veranderingen

13 a Op $t = 10$ is $v = 0$ km/uur, dus op $t = 0$ is $v = 20 + 10 = 30$ km/uur.

Dus de snelheid waarmee hij aan de klim begon was 30 km/uur.

b

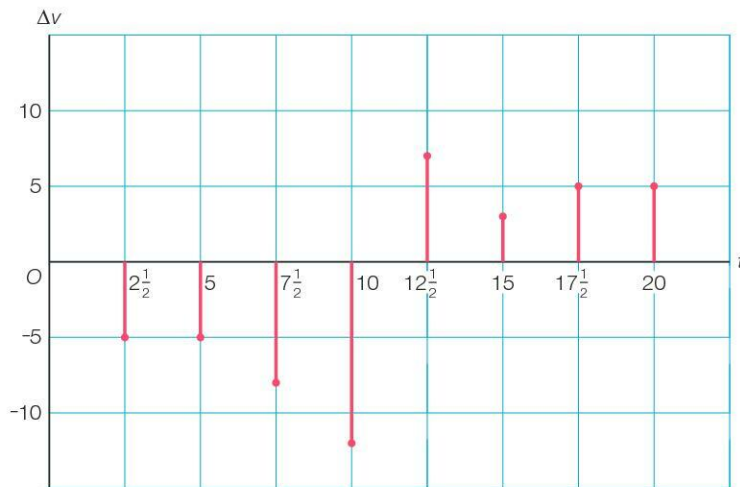
t	Δv	v
0	-	30
5	-10	20
10	-20	0
15	10	10
20	10	20
25	20	40
30	0	40
35	0	40
40	-10	30



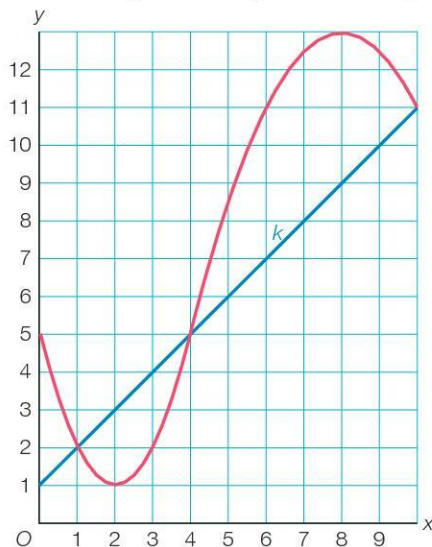
- c** Hij kan geen gelijk hebben. Uit het toenamediagram volgt dat zijn gemiddelde snelheid tijdens de afdaling 40 km/uur was, dus dan kan hij niet gedurende de hele afdaling sneller dan 40 km/uur hebben gereden. Tevens lag zijn snelheid aan het begin van de afdaling sowieso lager.
- d** Zie een mogelijk toenamediagram hieronder.

Merk op: bij $t = 2\frac{1}{2}$ is $\Delta v = -5$, bij $t = 5$ is $\Delta v = -5$, dat geeft samen $\Delta v = -10$;

bij $t = 7\frac{1}{2}$ is $\Delta v = -8$, bij $t = 10$ is $\Delta v = -12$, dat geeft samen $\Delta v = -20$; enzovoort.



- 14 a** Afnemend dalend op $\langle \leftarrow, 2 \rangle$.
Toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$.
Afnemend stijgend op $\langle 4, 8 \rangle$.
Toenemend dalend op $\langle 8, \rightarrow \rangle$.
- b** Teken de lijn k met $rc_k = 1$ door het punt $(10, 11)$ van de grafiek.



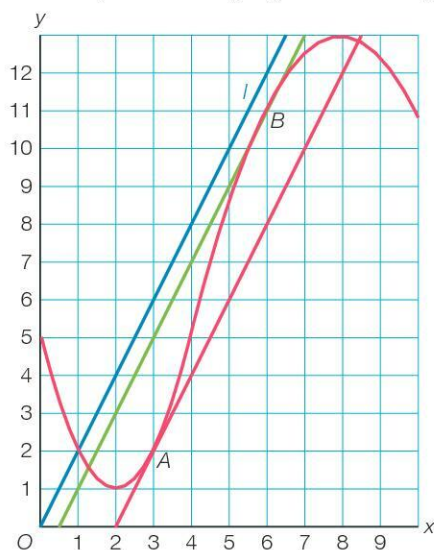
k snijdt de grafiek links van $(10, 11)$ in de punten $(1, 2)$ en $(4, 5)$.

Dus op $[1, 10]$ en op $[4, 10]$ is de gemiddelde verandering gelijk aan 1.

- c** De intervallen $[0, 4]$, $[1, 3]$ en $[6, 10]$ zijn de intervallen waarvan de grenzen gehele getallen zijn en waarop het differentiequotiënt gelijk is aan 0.
Dus $[1, 3]$ is het gevraagde interval.

- d** Teken een lijn met richtingscoëfficiënt 2, bijvoorbeeld lijn l met $rc_l = 2$ door O in de figuur hieronder.

Teken lijnen evenwijdig met l die de grafiek raken.



In de raakpunten $A(3, 2)$ en $B(6, 11)$ is de helling van de grafiek gelijk aan 2.

- e** Er zijn geen lijnen met richtingscoëfficiënt -7 die de grafiek raken,
Dus er ligt geen punt op de grafiek waarin de helling van de grafiek gelijk is aan -7 .

Bladzijde 177

15 Op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{16a + 4b + c - (0 + 0 + c)}{4} = \frac{16a + 4b}{4}$.

Dus $\frac{16a + 4b}{4} = 2$ oftewel $16a + 4b = 8$, dus $4a + b = 2$.

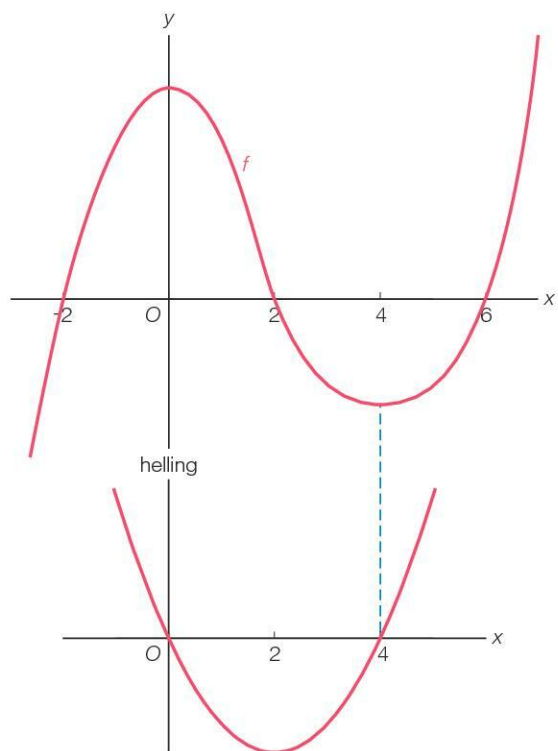
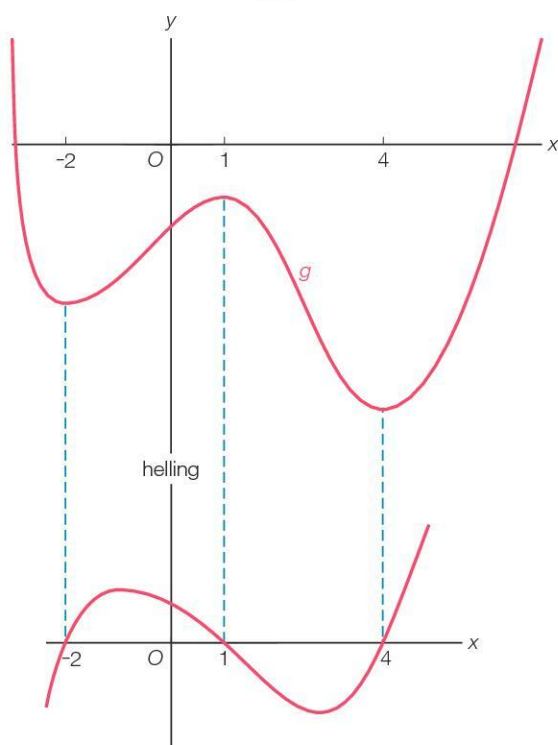
Op $[2, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9a + 3b + c - (4a + 2b + c)}{1} = \frac{5a + b}{1} = 5a + b$.

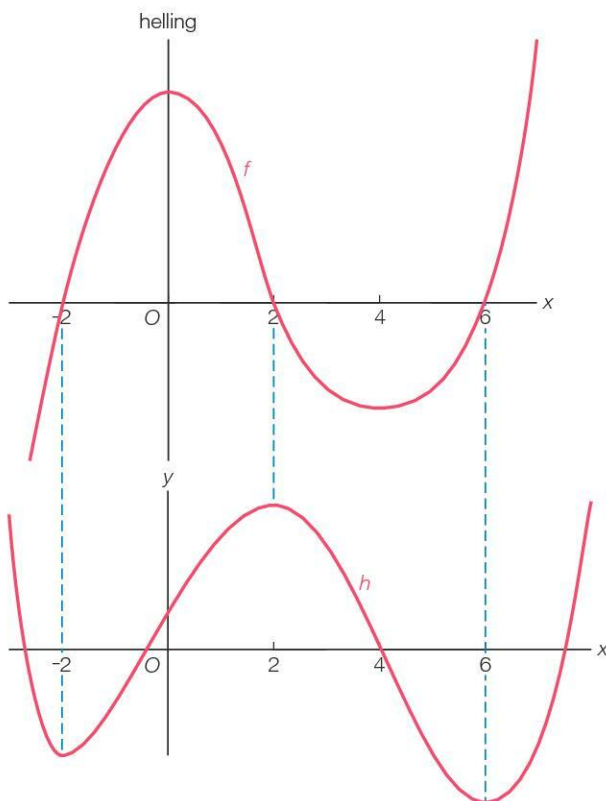
Dus $5a + b = 4$.

$$\begin{cases} 5a + b = 4 \\ 4a + b = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \underline{ -} \\ a = 2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} a = 2 \\ 5a + b = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \cdot 2 + b = 4 \\ 10 + b = 4 \\ b = -6 \end{array}$$

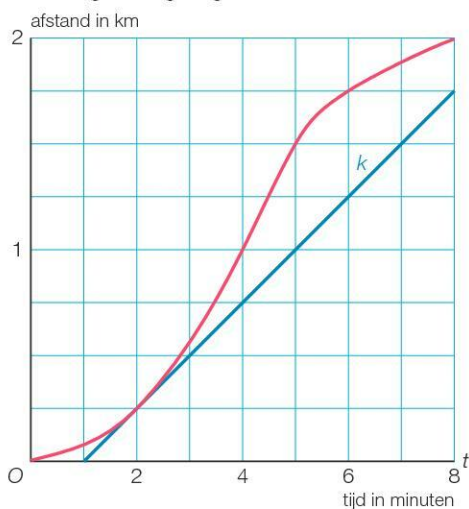
Dus $f(x) = 2x^2 - 6x + c$.

Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{50 - 30 + c - (2 - 6 + c)}{4} = \frac{24}{4} = 6$.



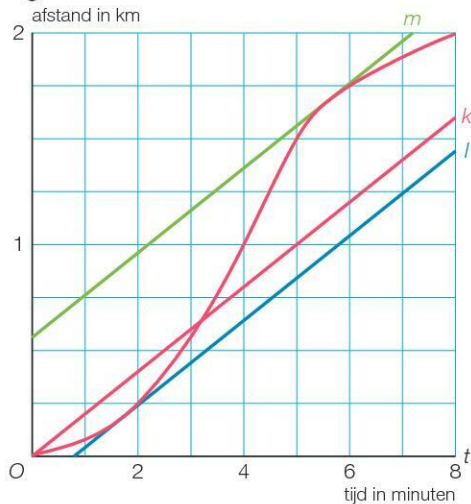
b**17****a** $\frac{2}{8} = 0,25$ km/minuut, dat is $60 \cdot 0,25 = 15$ km/uur.

Dus de gevraagde gemiddelde snelheid is 15 km/uur.

bRaaklijn k door $(1, 0)$ en $(5, 1)$, dus $rc_k = \frac{1-0}{5-1} = 0,25$.De snelheid op $t = 2$ is 0,25 km/minuut oftewel 15 km/uur.**c** Tussen $t = 4$ en $t = 5$ is de helling van de grafiek het grootst, waarbij de grafiek tussen $t = 4$ en $t = 5$ constant stijgend is.Dus de snelheid is maximaal tussen $t = 4$ en $t = 5$. Deze maximale snelheid is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van het constant stijgende deel van de grafiek.Op $[4, 5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,5 - 1}{5 - 4} = 0,5$ km/minuut.Dus de maximale snelheid is $60 \cdot 0,5 = 30$ km/uur.

d 12 km/uur = 0,2 km/minuut

Teken een lijn met $rc = 0,2$, dus bijvoorbeeld de lijn k door $(0, 0)$ en $(5, 1)$ in de figuur hieronder.



Teken de lijnen l en m evenwijdig met k , waarbij l en m de tijd-afstandgrafiek raken. l raakt de tijd-afstandgrafiek voor $t \approx 1,5$ en m raakt de tijd-afstandgrafiek voor $t \approx 5,5$. Dus op $t \approx 1,5$ en op $t \approx 5,5$ is de snelheid 12 km/uur.

18 a Voer in $y_1 = \frac{2x-1}{x^2+1}$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1} = 0,5$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 0,5x + b \\ f(1) = 0,5, \text{ dus } A(1; 0,5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,5 + b = 0,5 \\ b = 0 \end{array}$$

Dus $k: y = 0,5x$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ f(0) = -1, \text{ dus } B(0, -1) \end{array} \right\} b = -1$$

Dus $l: y = 2x - 1$.

Snijden van k en l geeft $0,5x = 2x - 1$

$$-1,5x = -1$$

$$x = 0,666\dots$$

$x = 0,666\dots$ geeft $y = 0,5 \cdot 0,666\dots = 0,333\dots$

Dus $S(0,67; 0,33)$.

b Voer in $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) \Big|_{x=x}$ en $y_3 = -0,5$ en zet y_1 uit.

De optie snijpunt geeft $x \approx -1,59$ en $x = -1$.

Dus voor $x \approx -1,59$ en voor $x = -1$ is de helling van de grafiek gelijk aan $-0,5$.

Bladzijde 178

19 a Voer in $y_1 = 2x\sqrt{x+1}$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = 5,5$$

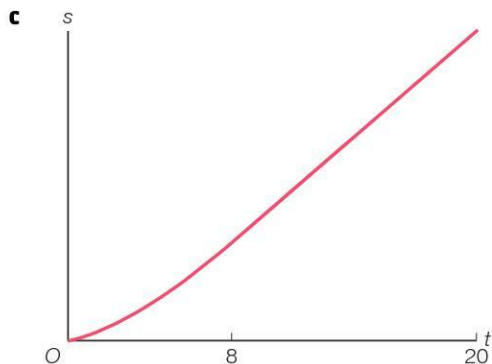
Op $t = 3$ is de snelheid 5,5 m/s.

b $t = 8$ geeft $s = 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{8+1} = 48$

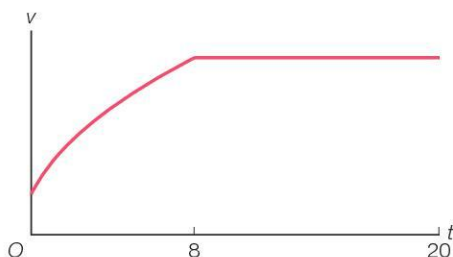
$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=8} = 8,66\dots, \text{ dus op } t = 8 \text{ is de snelheid } 8,66\dots \text{ m/s.}$$

$$\frac{126 - 48}{8,66\dots} = 9$$

Dus $8 + 9 = 17$ seconden na $t = 0$ heeft de boot 126 meter afgelegd.



d Voer in $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) \Big|_{x=x}$ en zet y_1 uit.



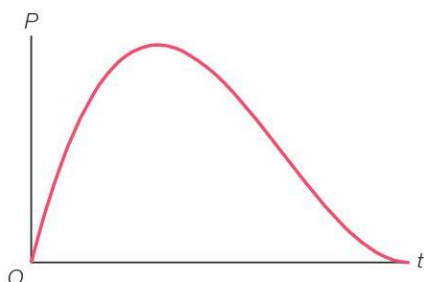
- 20**
- a** $f(x) = 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 - 3x^2$ geeft $f'(x) = 20x^4 - 24x^3 + 6x^2 - 6x$
 - b** $g(t) = -5t^6 + 6t^3 - 3$ geeft $g'(t) = -30t^5 + 18t^2$
 - c** $h(x) = (3x - p)(3x + p)(9x^2 + p^2) = (9x^2 - p^2)(9x^2 + p^2) = 81x^4 - p^4$ geeft $h'(x) = 324x^3$
 - d** $k(q) = (2q^2 - 1)^2 = 4q^4 - 4q^2 + 1$ geeft $k'(q) = 16q^3 - 8q$
- 21**
- a** $f(x) = 4x^2(3x - 2)(x + 5) = 4x^2(3x^2 + 15x - 2x - 10) = 4x^2(3x^2 + 13x - 10) = 12x^4 + 52x^3 - 40x^2$ geeft $f'(x) = 48x^3 + 156x^2 - 80x$
 - b** $g(x) = (x^2 + 2x)^2 - (2x - 3)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - (4x^2 - 12x + 9) = x^4 + 4x^3 + 12x - 9$ geeft $g'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12$
 - c** $h(x) = x^5 + p^4 + q^3$ geeft $h'(x) = 5x^4$
 - d** $s(t) = (2t^2 - 4)^2 + 4t^4 + 16t^2 = 4t^4 - 16t^2 + 16 + 4t^4 + 16t^2 = 8t^4 + 16$ geeft $s'(t) = 32t^3$
- 22**
- a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7x - 2$ geeft $f'(x) = x^2 - 6x + 7$
Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = x^2 - 6x + 7$.
 - b** helling = 2 geeft $x^2 - 6x + 7 = 2$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 5$$

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 2 = 2\frac{1}{3} \text{ en } f(5) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 + 7 \cdot 5 - 2 = -\frac{1}{3}$$
Dus in de punten $(1, 2\frac{1}{3})$ en $(5, -\frac{1}{3})$ is de helling van de grafiek gelijk aan 2.
- 23**
- a** Voer in $y_1 = 0,0025x^3 - 0,08x^2 + 0,64x$.



- b** De optie maximum geeft $x = 5,33...$
Dus na $5,33... \cdot 15 = 80$ minuten is het alcoholpromillage maximaal.
- c** $\left[\frac{dP}{dt} \right]_{t=7} = -0,1125$
De snelheid waarmee P op $t = 7$ afneemt, is ongeveer 0,1 promille per kwartier.

d Voer in $y_2 = 0,5$.

De optie snijpunt geeft $x = 11,90\dots$

Dus na ongeveer 12 kwartier mag de proefpersoon weer autorijden.

$$\left[\frac{dP}{dt} \right]_{t=11,90\dots} = -0,201\dots$$

De snelheid waarmee het alcoholpromillage dan afneemt, is ongeveer 0,2 promille per kwartier.

3 Hoeken en afstanden

Bladzijde 179

24 In $\triangle ACD$ is $\tan(68^\circ) = \frac{7}{AD}$, dus $AD = \frac{7}{\tan(68^\circ)} = 2,82\dots$

$$AB = AD + BD = 2,82\dots + 4 = 6,82\dots$$

In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle ACB) = \frac{AB}{AC} = \frac{6,82\dots}{7}$

$$\angle ACB \approx 44,3^\circ$$

$$\angle ACD = 180^\circ - 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ$$

$$\angle BCD = \angle ACB - \angle ACD \approx 44,3^\circ - 22^\circ = 22,3^\circ$$

25 $\left. \begin{array}{l} \angle ABS = \angle CDS \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle BAS = \angle DCS \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABS \sim \triangle CDS \text{ dus } \frac{AB}{CD} = \frac{BS}{DS}$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABD$ geeft $BD = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

Stel $DS = x$, dan is $BS = 13 - x$.

Dit geeft $\frac{12}{7\frac{1}{2}} = \frac{13-x}{x}$

$$12x = 7\frac{1}{2}(13-x)$$

$$12x = 97\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}x$$

$$19\frac{1}{2}x = 97\frac{1}{2}$$

$$x = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} DS = 5 \\ AD = 5 \end{array} \right\} \text{ dus } \triangle ADS \text{ is gelijkbenig.}$$

26 $\left. \begin{array}{l} \angle BAC = \angle CAD \\ \angle ABC = \angle ACD \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle ACD$

Dit geeft $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$

$$AC \cdot AC = AB \cdot AD$$

$$AC^2 = AB \cdot AD$$

$$AC = \sqrt{AB \cdot AD}$$

27 $\left. \begin{array}{l} \angle ACB = \angle DCE \\ \angle ABC = \angle CED \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DEC \text{ dus } \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE}$

Stel $CD = x$, dan is $BC = x + 1$.

Dit geeft $\frac{7}{x} = \frac{x+1}{4}$

$$x(x+1) = 28$$

$$x^2 + x = 28$$

$$x^2 + x - 28 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -28 = 113$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{113}}{2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{113}}{2}$$

$$x \approx 4,8 \vee x \approx -5,8 \text{ (kan niet)}$$

Dus $CD \approx 4,8$.

Bladzijde 180

- 28** Stel $AD = x$, dan is $BD = x + 2$.
 $BC = AB = AD + BD = x + x + 2 = 2x + 2$

In $\triangle BCD$ is $\tan(55^\circ) = \frac{2x+2}{x+2}$.

Voer in $y_1 = \tan(55^\circ)$ en $y_2 = \frac{2x+2}{x+2}$.

De optie snijpunt geeft $x = 1,497...$

In $\triangle BCD$ is $\cos(55^\circ) = \frac{x+2}{CD} = \frac{1,497... + 2}{CD}$.

Dus $CD = \frac{1,497... + 2}{\cos(55^\circ)} \approx 6,10$.

- 29** Teken BD . Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $BD^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos(40^\circ)$

$$BD^2 = 20,65...$$

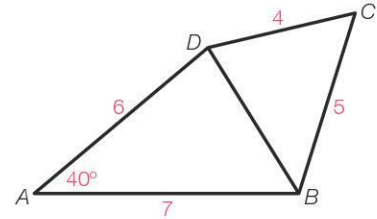
De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft $20,65... = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos(\angle C)$

$$20,65... = 16 + 25 - 40 \cos(\angle C)$$

$$40 \cos(\angle C) = 20,34...$$

$$\cos(\angle C) = \frac{20,34...}{40}$$

$$\angle C \approx 59,4^\circ$$



- 30** De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft $AD^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos(48^\circ)$

$$AD^2 = 28,793...$$

$$AD = 5,365...$$

De sinusregel in $\triangle ACD$ geeft $\frac{7}{\sin(\angle ADC)} = \frac{5,365...}{\sin(48^\circ)}$

$$\sin(\angle ADC) = \frac{7 \sin(48^\circ)}{5,365...} = 0,969...$$

$$\angle ADC = 75,80...^\circ$$

$$\angle BDC = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - 75,80...^\circ = 104,19...^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - \angle BDC - \angle BCD = 180^\circ - 104,19...^\circ - 25^\circ = 50,80...^\circ$$

De sinusregel in $\triangle BCD$ geeft $\frac{BD}{\sin(25^\circ)} = \frac{6}{\sin(50,80...^\circ)}$

$$BD = \frac{6 \sin(25^\circ)}{\sin(50,80...^\circ)} = 3,272...$$

en ook

$$\frac{BC}{\sin(104,19...^\circ)} = \frac{6}{\sin(50,80...^\circ)}$$

$$BC = \frac{6 \sin(104,19...^\circ)}{\sin(50,80...^\circ)} = 7,505...$$

De omtrek van driehoek ABC is

$$AC + AD + BD + BC = 7 + 5,365... + 3,272... + 7,505... \approx 23,14.$$

- 31 a** Teken AC . Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft
 $AC^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos(50^\circ)$
 $AC^2 = 38,861\dots$
 $AC = 6,233\dots \approx 6,23$

- b** De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft

$$\frac{6,233\dots}{\sin(50^\circ)} = \frac{4}{\sin(\angle BAC)}$$

$$\sin(\angle BAC) = \frac{4 \sin(50^\circ)}{6,233\dots} = 0,491\dots$$

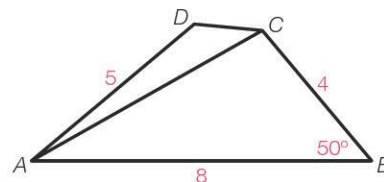
$$\angle BAC = 29,44\dots^\circ$$

$$\angle CAD = 40^\circ - \angle BAC = 40^\circ - 29,44\dots^\circ = 10,55\dots^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle CAD$ geeft $CD^2 = 38,861\dots + 5^2 - 2 \cdot 6,233\dots \cdot 5 \cdot \cos(10,55\dots^\circ)$

$$CD^2 = 2,578\dots$$

$$CD \approx 1,61$$



32 a $\sqrt{4\frac{1}{2}} + \sqrt{12\frac{1}{2}} + \sqrt{24\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}} + \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{2} = 7\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $2\sqrt{\frac{2}{3}} + 3\sqrt{24} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 3 \cdot 2\sqrt{6} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 6\sqrt{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3} + 6\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6} + 6\sqrt{6} = 6\frac{2}{3}\sqrt{6}$

c $(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3})^2 = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\sqrt{6}$

d $\sqrt{\frac{5}{9}a^2} + \sqrt{20a^2} = \sqrt{\frac{1}{9}a^2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{4a^2} \cdot \sqrt{5} = \frac{1}{3}a\sqrt{5} + 2a\sqrt{5} = 2\frac{1}{3}a\sqrt{5}$

e $3\sqrt{800} - 30\sqrt{8} = 3 \cdot 20\sqrt{2} - 30 \cdot 2\sqrt{2} = 60\sqrt{2} - 60\sqrt{2} = 0$

f $\frac{6\sqrt{12}}{4\sqrt{\frac{1}{3}}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{36} = 1\frac{1}{2} \cdot 6 = 9$

Bladzijde 181

33 a $x\sqrt{3} - 8 = \sqrt{48}$

$$x\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 8$$

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$x = 4 + \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = 4 + \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 4 + 2\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

b $3x\sqrt{24} - x\sqrt{6} = \sqrt{18}$

$$3x \cdot 2\sqrt{6} - x\sqrt{6} = 3\sqrt{2}$$

$$6x\sqrt{6} - x\sqrt{6} = 3\sqrt{2}$$

$$5x\sqrt{6} = 3\sqrt{2}$$

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{5}\sqrt{3}$$

c $(x - \sqrt{2})^2 = (x + 2)^2 - 3$

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = x^2 + 4x + 4 - 3$$

$$4x + 2x\sqrt{2} = 1$$

$$x(4 + 2\sqrt{2}) = 1$$

$$x = \frac{1}{4 + 2\sqrt{2}}$$

34

Stel $AD = x$.

In $\triangle ACD$ is $CD = \sqrt{3} \cdot AD = x\sqrt{3}$ en $AC = 2 \cdot AD = 2x$.

In $\triangle BCD$ is $BD = CD = x\sqrt{3}$ en $BC = \sqrt{2} \cdot CD = \sqrt{2} \cdot x\sqrt{3} = x\sqrt{6}$.

$$AB = AD + BD = x + x\sqrt{3}$$

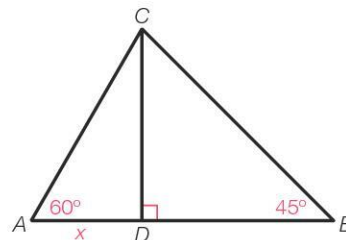
$$\left. \begin{array}{l} \text{opp } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot (x + x\sqrt{3}) \cdot x\sqrt{3} \\ \text{opp } \triangle ABC = 12 \end{array} \right\} \frac{1}{2} \cdot (x + x\sqrt{3}) \cdot x\sqrt{3} = 12$$

Voer in $y_1 = \frac{1}{2} \cdot (x + x\sqrt{3}) \cdot x\sqrt{3}$ en $y_2 = 12$.

De optie snijpunt geeft $x = 2,25 \dots$

De omtrek van driehoek ABC is $AD + BD + BC + AC =$

$$x + x\sqrt{3} + x\sqrt{6} + 2x = 2,25... + 2,25... \cdot \sqrt{3} + 2,25... \cdot \sqrt{6} + 2 \cdot 2,25... \approx 16,17.$$



35

$$\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$$

Stel $BD = x$, dan is $AB = x + 5$.

In $\triangle ABC$ is $BC = AB = x + 5$.

In $\triangle BCD$ is $BC = \sqrt{3} \cdot BD = x\sqrt{3}$.

$$x\sqrt{3} = x + 5$$

$$x\sqrt{3} - x = 5$$

$$x(\sqrt{3} - 1) = 5$$

$$x = \frac{5}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\text{Dus } BC = \frac{5}{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \text{ en } O(\triangle ADC) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{25\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}.$$

36

$$BM = \frac{1}{2}BC = 2,5$$

$$BM = \frac{1}{2}BC = 2,5$$

Zie de figuur hiernaast.

$$AM = BM = 2,5 \text{ (straal cirkel)}$$

In $\triangle AMN$ is $\sin(\angle AMN) = \frac{2}{2,5}$

$$\angle AMN = 53,13...^\circ$$

$$\angle AMB = 2 \cdot \angle AMN = 2 \cdot 53,13\dots^\circ = 106,26\dots^\circ$$

De lengte van de kortste cirkelboog AB is $\frac{106,26...}{360} \cdot 2\pi \cdot 2,5 = 4,636...$

De omtrek van het groene gebied is $4 + 4,636... \approx 8,64$.

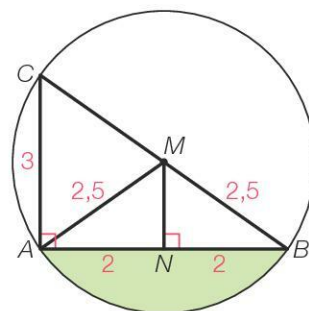
b De oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door AM , BM en de kortste cirkelboog AB is

$$\frac{106,26...}{360} \cdot \pi \cdot 2,5^2 = 5,795...$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle AMN$ geeft $MN = \sqrt{2,5^2 - 2^2} = 1,5$.

$$\text{opp } \triangle ABM = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,5 = 3$$

De oppervlakte van het groene gebied is $5,795... - 3 \approx 2,80$.



4 Werken met formules

37

Door $(9, 0)$, dus $a(9 - 5)^2 + 8 = 0$

$$16a = -8$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Dus $y = -\frac{1}{2}(x - 5)^2 + 8$.

$$x = 0 \text{ geeft } y = -\frac{1}{2}(0 - 5)^2 + 8 = -4\frac{1}{2}$$

Het snijpunt met de y -as is $(0, -4\frac{1}{2})$.

- b** Snijpunten met de x -as $(5, 0)$ en $(9, 0)$, dus $y = a(x - 5)(x - 9)$.

Door $(3, -6)$, dus $a(3 - 5)(3 - 9) = -6$

$$a \cdot -2 \cdot -6 = -6$$

$$12a = -6$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Dit geeft $y = -\frac{1}{2}(x - 5)(x - 9) = -\frac{1}{2}(x^2 - 9x - 5x + 45) = -\frac{1}{2}(x^2 - 14x + 45) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 22\frac{1}{2}$.

De formule is $y = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 22\frac{1}{2}$.

- c** Voor de top geldt $x_{\text{top}} = \frac{-4 + 2}{2} = -1$, dus $y = a(x + 1)^2 + q$.

Door $(1, 12)$ geeft $a(1 + 1)^2 + q = 12$ oftewel $4a + q = 12$.

Door $(2, 2)$ geeft $a(2 + 1)^2 + q = 2$ oftewel $9a + q = 2$.

$$\begin{cases} 4a + q = 12 \\ 9a + q = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ -5a = 10 \end{array}$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ 4a + q = 12 \end{cases} \quad \begin{array}{r} -8 + q = 12 \\ q = 20 \end{array}$$

Dus $y = -2(x + 1)^2 + 20$.

De top is $(-1, 20)$.

- d** $y = ax^2 + bx + c$ door $(0, 6)$ geeft $c = 6$, dus $y = ax^2 + bx + 6$.

Door $(4, 0)$ geeft $16a + 4b + 6 = 0$ oftewel $8a + 2b = -3$.

Door $(6, 1)$ geeft $36a + 6b + 6 = 1$ oftewel $36a + 6b = -5$.

$$\begin{cases} 8a + 2b = -3 \\ 36a + 6b = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{r} |3| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 24a + 6b = -9 \\ 36a + 6b = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ -12a = -4 \end{array}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ 36a + 6b = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{r} 12 + 6b = -5 \\ 6b = -17 \\ b = -2\frac{5}{6} \end{array}$$

De formule is $y = \frac{1}{3}x^2 - 2\frac{5}{6}x + 6$.

Bladzijde 182

- 38 a** De top is $(4,6; 105,8)$, dus $h = a(t - 4,6)^2 + 105,8$.

Door $(0, 0)$, dus $a(0 - 4,6)^2 + 105,8 = 0$

$$21,16a = -105,8$$

$$a = -5$$

Dus $h = -5(t - 4,6)^2 + 105,8$.

$t = 2$ geeft $h = -5(2 - 4,6)^2 + 105,8 = 72$

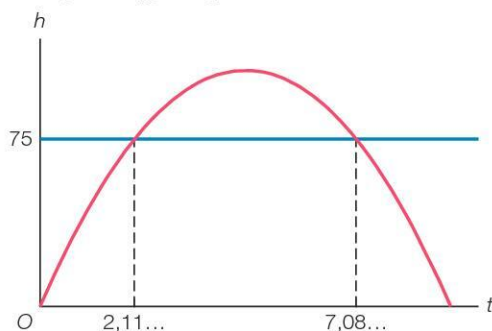
Dus na 2 seconden is de hoogte 72 meter.

- b** $t = \frac{1}{10}$ geeft $h = -5(\frac{1}{10} - 4,6)^2 + 105,8 = 4,55$

De gemiddelde snelheid op $[0, \frac{1}{10}]$ is $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{4,55}{\frac{1}{10}} = 45,5$ m/s.

- c** Voer in $y_1 = -5(x - 4,6)^2 + 105,8$ en $y_2 = 75$.

De optie snijpunt geeft $x = 2,11\dots$ en $x = 7,08\dots$



De pijl is gedurende $7,08\dots - 2,11\dots \approx 5,0$ seconden hoger dan 75 meter.

39 Uit $y = a(x - 1)^2 + q$ volgt $x_{\text{top}} = 1$.

$$\text{Uit } y = ax^2 + 2\frac{1}{2}x + c \text{ volgt } x_{\text{top}} = -\frac{2\frac{1}{2}}{2a}.$$

$$-\frac{2\frac{1}{2}}{2a} = 1$$

$$2a = -2\frac{1}{2}$$

$$a = -1\frac{1}{4}$$

$$a = -1\frac{1}{4} \text{ geeft } y = -1\frac{1}{4}x^2 + 2\frac{1}{2}x + c \left\{ \begin{array}{l} -1\frac{1}{4} \cdot 3^2 + 2\frac{1}{2} \cdot 3 + c = 0 \\ \text{door } (3, 0) \end{array} \right. \\ c = 3\frac{3}{4}$$

De formule is $y = -1\frac{1}{4}x^2 + 2\frac{1}{2}x + 3\frac{3}{4}$.

40 Breng een assenstelsel aan zoals in de figuur hiernaast.

De top is $(5, 7)$, dus $h = a(x - 5)^2 + 7$.

Door $(0, 3)$, dus $a(0 - 5)^2 + 7 = 3$

$$25a = -4$$

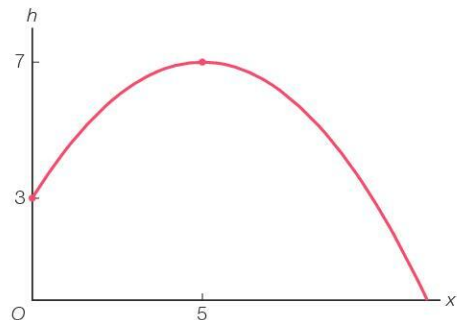
$$a = -0,16$$

Dus $h = -0,16(x - 5)^2 + 7$.

Voer in $y_1 = -0,16(x - 5)^2 + 7$.

De optie nulpunt geeft $x = 11,61...$

Dus de bal komt op 11,6 meter van de schuur op de grond.



41 a $6x^3 = 216$

$$x^3 = 36$$

$$x = \sqrt[3]{36}$$

b $2x^4 + 5 = 17$

$$2x^4 = 12$$

$$x^4 = 6$$

$$x = \sqrt[4]{6} \vee x = -\sqrt[4]{6}$$

c $(3x + 1)^5 = -32$

$$3x + 1 = -2$$

$$3x = -3$$

$$x = -1$$

d $81(1 - 4x)^4 = 1$

$$(1 - 4x)^4 = \frac{1}{81}$$

$$1 - 4x = \frac{1}{3} \vee 1 - 4x = -\frac{1}{3}$$

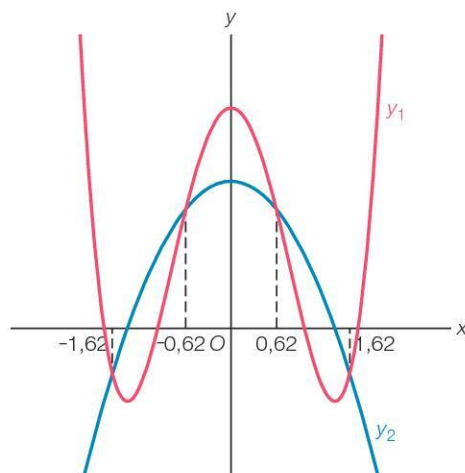
$$-4x = -\frac{2}{3} \vee -4x = -1\frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{6} \vee x = \frac{1}{3}$$

42 a $x^4 - 4x^2 + 3 < 2 - x^2$

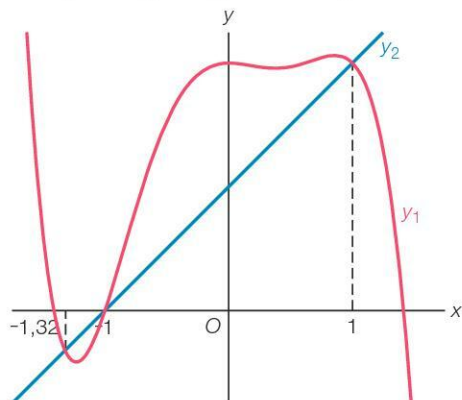
Voer in $y_1 = x^4 - 4x^2 + 3$ en $y_2 = 2 - x^2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx -1,62 \vee x \approx -0,62 \vee x \approx 0,62 \vee x \approx 1,62$.



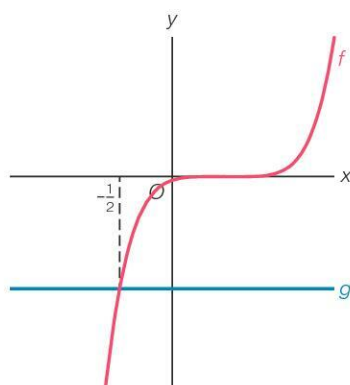
$$x^4 - 4x^2 + 3 < 2 - x^2 \text{ geeft } -1,62 < x < -0,62 \vee 0,62 < x < 1,62$$

- b** $(2 - x^2)(x^3 + 1) > x + 1$
 Voer in $y_1 = (2 - x^2)(x^3 + 1)$ en $y_2 = x + 1$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx -1,32 \vee x = -1 \vee x = 1$.

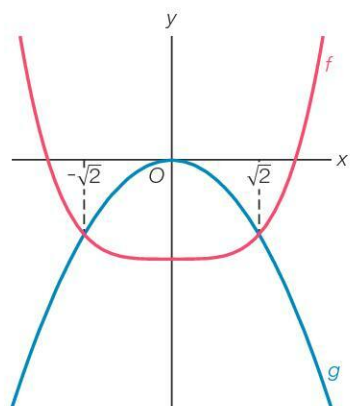


$(2 - x^2)(x^3 + 1) > x + 1$ geeft $x < -1,32 \vee -1 < x < 1$

- 43 a** $\underbrace{\frac{1}{2}(2x - 1)^5}_{f(x)} < \underbrace{-16}_{g(x)}$
 $\frac{1}{2}(2x - 1)^5 = -16$
 $(2x - 1)^5 = -32$
 $2x - 1 = -2$
 $2x = -1$
 $x = -\frac{1}{2}$
 Schets, zie hiernaast.
 $\frac{1}{2}(2x - 1)^5 < -16$ geeft $x < -\frac{1}{2}$



- b** $\underbrace{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}_{f(x)} > \underbrace{-6x^2}_{g(x)}$
 $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = -6x^2$
 $x^4 - 16 = -6x^2$
 $x^4 + 6x^2 - 16 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 + 6u - 16 = 0$
 $(u - 2)(u + 8) = 0$
 $u = 2 \vee u = -8$
 $x^2 = 2 \vee x^2 = -8$
 $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$
 Schets, zie hiernaast.
 $(x^2 - 4)(x^2 + 4) > -6x^2$ geeft $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$



44 a $x^4 + 14 = 9x^2$
 $x^4 - 9x^2 + 14 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 9u + 14 = 0$
 $(u - 2)(u - 7) = 0$
 $u = 2 \vee u = 7$
 $x^2 = 2 \vee x^2 = 7$
 $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{7} \vee x = -\sqrt{7}$

b $x^3 = x^2 + 20x$
 $x^3 - x^2 - 20x = 0$
 $x(x^2 - x - 20) = 0$
 $x(x + 4)(x - 5) = 0$
 $x = 0 \vee x = -4 \vee x = 5$

c $4x^4 + 44x^2 - 48 = 0$
 $x^4 + 11x^2 - 12 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 + 11u - 12 = 0$
 $(u - 1)(u + 12) = 0$
 $u = 1 \vee u = -12$
 $x^2 = 1 \vee x^2 = -12$
 $x = 1 \vee x = -1$

d $2x^2 - x^3 = x$
 $x^3 - 2x^2 + x = 0$
 $x(x^2 - 2x + 1) = 0$
 $x(x - 1)(x - 1) = 0$
 $x = 0 \vee x = 1$

e $(x^2 + 1)(x - 3) = 5x - 3$
 $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 5x - 3$
 $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$
 $x(x^2 - 3x - 4) = 0$
 $x(x + 1)(x - 4) = 0$
 $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 4$

f $(x^2 - 6)(x^2 + 6) = 5x^2$
 $x^4 - 36 = 5x^2$
 $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 5u - 36 = 0$
 $(u + 4)(u - 9) = 0$
 $u = -4 \vee u = 9$
 $x^2 = -4 \vee x^2 = 9$
 $x = 3 \vee x = -3$

Bladzijde 183

45 a inhoud kubus $= 2^3 = 8$
 oppervlakte kubus $= 6 \cdot 2^2 = 24$
 lengte ribben $= 12 \cdot 2 = 24$
 Zo krijg je som $= 8 + 24 + 24 = 56$.

b Stel de ribbe x .
 inhoud kubus $= x^3$
 oppervlakte kubus $= 6x^2$
 lengte ribben $= 12x$
 Er geldt $x^3 + 3 \cdot 6x^2 = 144x$
 $x^3 + 18x^2 - 144x = 0$
 $x(x^2 + 18x - 144) = 0$
 $x(x - 6)(x + 24) = 0$
 $x = 0 \vee x = 6 \vee x = -24$
 Dus de ribbe is 6.

46 $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (3, 4)} y = \frac{1}{x - 3} + 4$
 $\frac{1}{x - 3} + 4 = 2x - 1$
 $\frac{1}{x - 3} = 2x - 5$
 $1 = (2x - 5)(x - 3)$
 $1 = 2x^2 - 6x - 5x + 15$
 $2x^2 - 11x + 14 = 0$
 $D = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 14 = 9$
 $x = \frac{11 \pm 3}{4} = 3\frac{1}{2} \vee x = \frac{11 - 3}{4} = 2$
 vold. vold.
 $x = 3\frac{1}{2}$ geeft $y = 2 \cdot 3\frac{1}{2} - 1 = 6$ en $x = 2$ geeft $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.
 De snijpunten zijn $(3\frac{1}{2}, 6)$ en $(2, 3)$.

47 a $\frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+5}$
 kruislings vermenigvuldigen geeft
 $(x+2)(x+5) = x(x-1)$
 $x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 - x$
 $8x = -10$
 $x = -1\frac{1}{4}$

vold.
b $\frac{x^2+2x}{x^2+3} = \frac{4-x}{x^2+3}$
 $x^2+2x = 4-x$
 $x^2+3x-4 = 0$
 $(x-1)(x+4) = 0$
 $x = 1 \vee x = -4$
 vold. vold.

c $\frac{18x-6x^3}{2x^2+1} = 0$
 $18x-6x^3 = 0$
 $6x(3-x^2) = 0$
 $6x = 0 \vee x^2 = 3$
 $x = 0 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$
 vold. vold. vold.

d $\frac{7}{3x^2-5x} = \frac{2}{x^2-3x}$
 kruislings vermenigvuldigen geeft
 $7(x^2-3x) = 2(3x^2-5x)$
 $7x^2-21x = 6x^2-10x$
 $x^2-11x = 0$
 $x(x-11) = 0$
 $x = 0 \vee x = 11$
 vold. niet vold.

e $\frac{2x^2-8}{3x+4} = \frac{2x^2-8}{x-2}$
 $2x^2-8 = 0 \vee 3x+4 = x-2$
 $x^2 = 4 \vee 2x = -6$
 $x = 2 \vee x = -2 \vee x = -3$
 vold. niet vold. vold.

f $\frac{4+2x}{x} = \frac{12}{x+1}$
 kruislings vermenigvuldigen geeft
 $(x+1)(4+2x) = 12x$
 $4x+2x^2+4+2x = 12x$
 $2x^2-6x+4 = 0$
 $x^2-3x+2 = 0$
 $(x-1)(x-2) = 0$
 $x = 1 \vee x = 2$
 vold. vold.

48 a $\left. \begin{array}{l} \angle ADF = \angle FEC \text{ (rechte hoek)} \\ \angle DAF = \angle EFC \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ADF \sim \triangle FEC$

Dit geeft $\frac{AD}{EF} \left| \frac{DF}{CE} \right.$ oftewel $\frac{AD}{1} \left| \frac{1}{x} \right.$, dus $AD = \frac{1}{x}$.

b $AB = AD + BD = \frac{1}{x} + 1$

$BC = BE + CE = 1 + x$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right)^2 + (1+x)^2 = 4^2$$

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right)^2 + (1+x)^2 = 16$$

c Voer in $y_1 = \left(\frac{1}{x} + 1\right)^2 + (1+x)^2$ en $y_2 = 16$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,362...$ en $x = 2,760...$

Dus $BC = 1,362...$ of $BC = 3,760...$

Zie de figuur in het leerboek. De ladder staat op een hoogte van 376 cm tegen de muur.

49

a De grafiek gaat door $(0, 0)$. $x = 0$ en $h = 0$ invullen in $h = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geeft $0 + 0 + 0 + d = 0$, dus $d = 0$.**b** $h = ax^3 + bx^2 + cx$ geeft $h' = 3ax^2 + 2bx + c$ Bij $x = 0$ hoort $h' = 0$. Dit geeft $0 + 0 + c = 0$, dus $c = 0$.**c** De grafiek gaat door de punten $(6, 4)$ en $(12, 0)$. $x = 6$ en $h = 4$ invullen in $h = ax^3 + bx^2$ geeft $216a + 36b = 4$ oftewel $54a + 9b = 1$. $x = 12$ en $h = 0$ invullen in $h = ax^3 + bx^2$ geeft $1728a + 144b = 0$ oftewel $b = -12a$.Substitutie van $b = -12a$ in $54a + 9b = 1$ geeft $54a + 9 \cdot -12a = 1$

$$54a - 108a = 1$$

$$-54a = 1$$

$$a = -\frac{1}{54}$$

$$a = -\frac{1}{54} \text{ geeft } b = -12 \cdot -\frac{1}{54} = \frac{2}{9}$$

d Uit a, b en c volgt $h = -\frac{1}{54}x^3 + \frac{2}{9}x^2$.

$$\text{Voer in } y_1 = -\frac{1}{54}x^3 + \frac{2}{9}x^2.$$

De optie maximum geeft $x = 8$ en $y = 4,740...$

De maximale hoogte is 474 cm.

e Voer in $y_2 = 4$.De optie snijpunt geeft $x = 6$ en $x = 9,708...$ Dus de snelheid waarmee de golf voortbeweegt is $9,708... - 6 = 3,708...$ meter per 0,7 seconden.

$$\text{Dat is } \frac{3,708...}{0,7} = 5,297... \text{ m/s.}$$

$$\text{De gevraagde procentuele afwijking is } \frac{5,297... - 5}{5} \times 100\% \approx 5,9\%.$$

Verantwoording

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

*De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie.
Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontleen.*

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73553-1



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.