

& GETAL & RUIMTE

B



Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen **havo B** deel 2

Twaalfde editie, 2020

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

Inhoud

5	Machten, exponenten en logaritmen	4
6	De afgeleide functie	33
7	Lijnen en cirkels	67
8	Goniometrie	101
	Gemengde opgaven	128

5 Machten, exponenten en logaritmen

Voorkennis Herleiden van machten

Bladzijde 10

- 1** a $x^2 \cdot x^3 = x^5$
b $2p^3 \cdot 3p^2 = 6p^5$
c $4a^2b \cdot 5a^3b^2 = 20a^5b^3$
d $-2p^4q^3 \cdot -3pq = 6p^5q^4$
e $5x^2y \cdot 2x - 3x^3y = 10x^3y - 3x^3y = 7x^3y$
f $12a^4b \cdot \frac{1}{4}ab - 8ab = 3a^5b^2 - 8ab$
- 2** a $(p^2q)^3 = p^6q^3$
b $(3x^2)^3 = 27x^6$
c $(-5x^2y^3)^2 = 25x^4y^6$
d $(-4ab^4)^2 = 16a^2b^8$
e $(3a)^2 \cdot (2a^2)^3 = 9a^2 \cdot 8a^6 = 72a^8$
f $(3a^3)^2 + (2a^2)^3 = 9a^6 + 8a^6 = 17a^6$
- 3** a $\frac{12x^6}{4x^2} = 3x^4$
b $\frac{5x^{10}}{15x^5} = \frac{x^5}{3} = \frac{1}{3}x^5$
c $\frac{24a^4b^2}{6ab} = 4a^3b$
d $\frac{-15p^6q}{5p^2q} = -3p^4$
e $\frac{10x^3y^2}{5x^2y} = 2xy$
f $\frac{(2ab)^3}{(3ab)^2} = \frac{8a^3b^3}{9a^2b^2} = \frac{8}{9}ab$
- 4** a $\frac{-28a^6}{7a} = -4a^5$
b $-(3a^4)^2 = -9a^8$
c $(-2a^2)^5 = -32a^{10}$
d $(-a^3)^3 = -a^9$
e $(5a)^3 \cdot -3a = 125a^3 \cdot -3a = -375a^4$
f $\left(\frac{9a^4}{a}\right)^2 = (9a^3)^2 = 81a^6$
- 5** a $(ab)^4 \cdot a = a^4b^4 \cdot a = a^5b^4$
b $(-2ab)^3 \cdot b = -8a^3b^3 \cdot b = -8a^3b^4$
c $(3a)^2 + (2b)^2 = 9a^2 + 4b^2$
d $(3a)^3 - 8a^3 = 27a^3 - 8a^3 = 19a^3$
e $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (-a)^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2 = 1\frac{1}{4}a^2$
f $(5a^4)^2 + (-a^2)^4 = 25a^8 + a^8 = 26a^8$

5.1 Machten met negatieve en gebroken exponenten

Bladzijde 11

1 a De exponenten worden telkens 1 minder en de getallen worden steeds door 2 gedeeld.

b $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

$2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

c $x^0 = 1$

$x^{-1} = \frac{1}{x}$

$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

Bladzijde 12

2 a $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$

b $a^4 \cdot \frac{1}{a^6} = a^4 \cdot a^{-6} = a^{-2}$

c $\frac{a^n}{\left(\frac{1}{a^4}\right)} = \frac{a^n}{a^{-4}} = a^{n+4}$

d $\frac{a^8}{a^0} = a^{8-0} = a^8$

e $(a^3)^{-2} = a^{-6}$

f $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a} = \frac{a^{-5}}{a^1} = a^{-5-1} = a^{-6}$

g $\frac{a}{a^{12}} = \frac{a^1}{a^{12}} = a^{1-12} = a^{-11}$

h $\frac{1}{a^8} \cdot (a^3)^n = a^{-8} \cdot a^{3n} = a^{-8+3n}$

i $\frac{\left(\frac{1}{a^n}\right)}{a^{-3}} = \frac{a^{-n}}{a^{-3}} = a^{-n-(-3)} = a^{-n+3}$

Bladzijde 13

3 a $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

b $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = 9$

c $3 \cdot 5^{-2} = 3 \cdot \frac{1}{5^2} = 3 \cdot \frac{1}{25} = \frac{3}{25}$

4 a $6a^{-5}b^3 = \frac{6b^3}{a^5}$

b $\frac{1}{3}a^{-3} = \frac{1}{3a^3}$

c $5a^{-4}b^2 = \frac{5b^2}{a^4}$

d $\frac{3}{5}a^{-4} = \frac{3}{5a^4}$

e $\left(\frac{1}{2}a\right)^{-3} = (2^{-1} \cdot a)^{-3} = 2^3 \cdot a^{-3} = 8 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{8}{a^3}$

d $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{25}} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

e $4 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot \frac{1}{10^3} = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250}$

f $\frac{1}{2} : 6^{-2} = \frac{1}{2} \cdot 6^2 = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$

f $\frac{1}{6}a^{-2}b^4 = \frac{b^4}{6a^2}$

g $-4 \cdot (3a)^{-2} = -4 \cdot \frac{1}{(3a)^2} = -4 \cdot \frac{1}{9a^2} = -\frac{4}{9a^2}$

h $(3a)^{-2}b^{-3} = \frac{1}{(3a)^2} \cdot \frac{1}{b^3} = \frac{1}{9a^2b^3}$

i $\frac{3}{8}a^{-1}b = \frac{3b}{8a}$

5 Uit $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ en $(x^{\frac{1}{3}})^3 = x$ volgt $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Bladzijde 14

6 a $a \cdot \sqrt[3]{a} = a^1 \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3}}$

b $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}}$

c $\frac{1}{a} = a^{-1}$

d $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$

e $a^2 \cdot \sqrt{a} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{2}}$

f $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} = \sqrt[3]{a^{-2}} = a^{-\frac{2}{3}}$

g $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$

h $\frac{1}{a^4} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{-4} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{-4+\frac{1}{3}} = a^{-\frac{11}{3}}$

i $\frac{a^3}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a^3}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{3-\frac{1}{3}} = a^{\frac{8}{3}}$

- 7** a $8\sqrt{2} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3\frac{1}{2}}$
 b $\frac{1}{3}\sqrt{3} = 3^{-1} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{-1+\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$
 c $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{2^3}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{3-\frac{1}{2}} = 2^{2\frac{1}{2}}$
 d $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{-1+\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}}$
 e $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{2\frac{1}{6}}$
 f $\sqrt[4]{\frac{1}{9}} = \sqrt[4]{3^{-2}} = 3^{-\frac{2}{4}} = 3^{-\frac{1}{2}}$
 g $\frac{1}{100}\sqrt{10} = 10^{-2} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{-2+\frac{1}{2}} = 10^{-1\frac{1}{2}}$
 h $\frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^{-2}} = 2^{-3} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{-3-\frac{2}{3}} = 2^{-3\frac{2}{3}}$
 i $10 \cdot \sqrt[3]{0,1} = 10^1 \cdot \sqrt[3]{10^{-1}} = 10^1 \cdot 10^{-\frac{1}{3}} = 10^{1-\frac{1}{3}} = 10^{\frac{2}{3}}$

- 8** a $5a^{3\frac{1}{3}} = 5a^3 \cdot a^{\frac{1}{3}} = 5a^3 \cdot \sqrt[3]{a}$
 b $\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{4}}b = \frac{b}{2a^{\frac{1}{4}}} = \frac{b}{2 \cdot \sqrt[4]{a}}$
 c $3a^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{a^2}}$

- d $\frac{2}{3}a^{-3}b^{\frac{1}{2}} = \frac{2b \cdot b^{\frac{1}{2}}}{3a^3} = \frac{2b\sqrt{b}}{3a^3}$
 e $\frac{1}{5}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{5a^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{5\sqrt{a}}$
 f $(5a)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(5a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5a}}$

- 9** a $\frac{x^6}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^6}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^6}{x^{2\frac{1}{2}}} = x^{6-2\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$
 b $x \cdot \sqrt[3]{x^3} = x^1 \cdot x^{\frac{3}{3}} = x^{1+1} = x^2$
 c $\frac{x}{\sqrt[5]{x}} = \frac{x^1}{x^{\frac{1}{5}}} = x^{1-\frac{1}{5}} = x^{\frac{4}{5}}$
 d $x^4 \cdot \sqrt{x} = x^4 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{4\frac{1}{2}}$
 e $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{6}}$

- f $\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-2-\frac{1}{2}} = x^{-2\frac{1}{2}}$
 g $x^2 \cdot \frac{1}{x^3} = x^2 \cdot x^{-3} = x^{2-3} = x^{-1}$
 h $\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}}$
 i $\frac{x^4 \cdot \sqrt[5]{x}}{x^5 \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{x^4 \cdot x^{\frac{1}{5}}}{x^5 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^{4\frac{1}{5}}}{x^{5\frac{1}{4}}} = x^{4\frac{1}{5}-5\frac{1}{4}} = x^{-1\frac{1}{20}}$

10 $\sqrt[3]{x^{14}} = x^{\frac{14}{3}} = x^{4\frac{2}{3}} = x^4 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

Bladzijde 15

- 11** De getallen als macht van 2 geschreven zijn: $2^0, 2^1, 2^{-1}, 2^2, 2^{-3}, 2^5, 2^{-8}, 2^{13}, 2^{-21}, 2^{34}, \dots$
 Het tiende getal is dus 2^{34} .

12 $y = 2(3x^2)^3 \cdot \frac{5}{6x^{5,6}} = 2 \cdot 3^3 \cdot (x^2)^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{x^{5,6}} = 45 \cdot x^6 \cdot x^{-5,6} = 45x^{0,4}$

Bij het herleiden van $(3x^2)^3$ tot $3^3 \cdot (x^2)^3$ is de regel $(ab)^p = a^p b^p$ gebruikt.

Bij het herleiden van $(x^2)^3$ tot x^6 is de regel $(a^p)^q = a^{pq}$ gebruikt.

Bij het herleiden van $\frac{1}{x^{5,6}}$ tot $x^{-5,6}$ is de regel $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ gebruikt.

Bij het herleiden van $x^6 \cdot x^{-5,6}$ tot $x^{0,4}$ is de regel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ gebruikt.

13 a $y = 5(2x^3)^2 \cdot \frac{3}{x^4} = 5 \cdot 4x^6 \cdot 3 \cdot x^{-4} = 60x^2$
 Dus $y = 60x^2$.

b $y = \frac{1}{3}(3x^2)^3 \cdot \frac{2}{x^{10}} = \frac{1}{3} \cdot 27x^6 \cdot 2 \cdot x^{-10} = 18x^{-4}$
 Dus $y = 18x^{-4}$.

$$\text{c } y = \frac{3}{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} = 3 \cdot x^{-1} \cdot x^{\frac{3}{4}} = 3x^{-\frac{1}{4}}$$

Dus $y = 3x^{-\frac{1}{4}}$.

$$\text{d } y = 3(3x)^{-2} \cdot 4x^{1,2} = 3 \cdot 3^{-2} \cdot x^{-2} \cdot 4x^{1,2} = 3^{-1} \cdot 4 \cdot x^{-0,8} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot x^{-0,8} = \frac{4}{3}x^{-0,8}$$

Dus $y = \frac{4}{3}x^{-0,8}$.

14 a $y = \frac{5}{x\sqrt{x}} = \frac{5}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{x^{1\frac{1}{2}}} = 5x^{-1\frac{1}{2}}$

Dus $y = 5x^{-1\frac{1}{2}}$.

b $y = 5x\sqrt{x^3} = 5x^1 \cdot x^{\frac{3}{2}} = 5x^{1+\frac{1}{2}} = 5x^{2\frac{1}{2}}$

Dus $y = 5x^{2\frac{1}{2}}$.

c $y = \frac{5}{x^3} \cdot 2\sqrt{x} = 5 \cdot x^{-3} \cdot 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 10x^{-3+\frac{1}{2}} = 10x^{-2\frac{1}{2}}$

Dus $y = 10x^{-2\frac{1}{2}}$.

d $y = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3} = 3x^{\frac{3}{4}}$

Dus $y = 3x^{\frac{3}{4}}$.

e $y = 5x^{-0,2} \cdot x^{1,3} = 5x^{-0,2+1,3} = 5x^{1,1}$

Dus $y = 5x^{1,1}$.

f $y = \frac{50x^{1,9}}{10x^{1,1}} = 5 \cdot x^{1,9-1,1} = 5x^{0,8}$

Dus $y = 5x^{0,8}$.

Bladzijde 16

15 a $h_0 = 0,6$ en $d_0 = 1000$ geeft $h = 0,6 \cdot \left(\frac{1000}{d}\right)^{0,25} = 0,6 \cdot \frac{1000^{0,25}}{d^{0,25}} = 3,374...d^{-0,25} \approx 3,37d^{-0,25}$

b $d = 300$ geeft $h = 3,37 \cdot 300^{-0,25} \approx 0,8$

Dus de golfhoogte is ongeveer 0,8 meter.

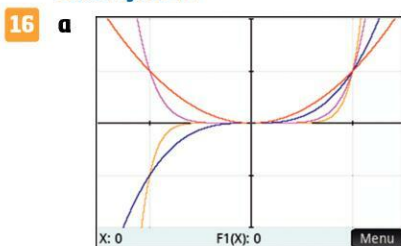
c Voer in $y_1 = 3,37x^{-0,25}$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x = 8,06...$

Dus bij waterdieptes van minder dan 8 meter.

5.2 Grafieken van machtsfuncties veranderen

Bladzijde 18

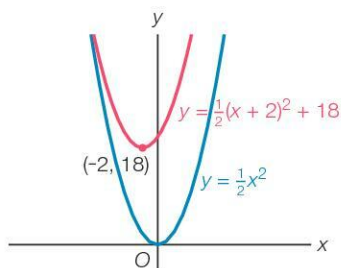


b $(0, 0)$ en $(1, 1)$

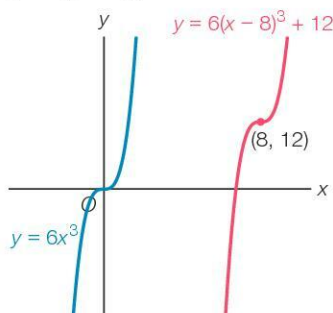
c Van de grafieken van f en h ligt geen enkel punt onder de x -as.

17

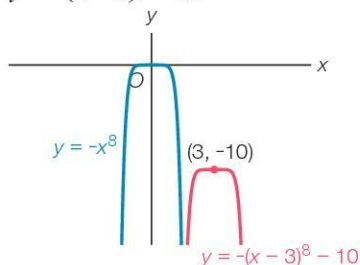
a $y = \frac{1}{2}x^2$
 $\downarrow$ translatie $(-2, 18)$
 $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 18$



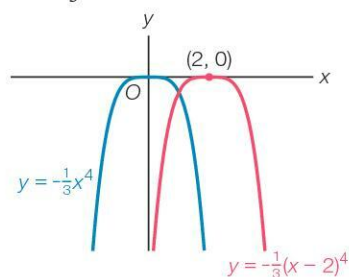
b $y = 6x^3$
 $\downarrow$ translatie $(8, 12)$
 $y = 6(x-8)^3 + 12$



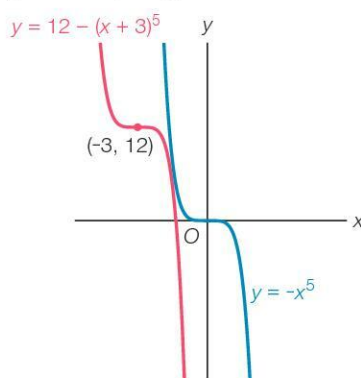
c $y = -x^8$
 $\downarrow$ translatie $(3, -10)$
 $y = -(x-3)^8 - 10$



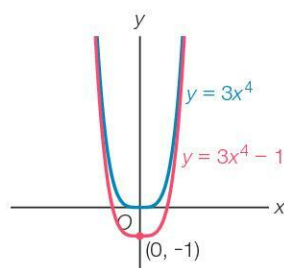
d $y = -\frac{1}{3}x^4$
 $\downarrow$ translatie $(2, 0)$
 $y = -\frac{1}{3}(x-2)^4$



e $y = -x^5$
 $\downarrow$ translatie $(-3, 12)$
 $y = 12 - (x+3)^5$



f $y = 3(x^4 - 2) + 5 = 3x^4 - 6 + 5 = 3x^4 - 1$
 $y = 3x^4$
 $\downarrow$ translatie $(0, -1)$
 $y = 3x^4 - 1$



18

a $y = 3x^7 - 5$
 $\downarrow$ translatie $(2, 9)$
 $y = 3(x-2)^7 - 5 + 9$
Dus beeldgrafiek: $y = 3(x-2)^7 + 4$.

b $y = 5(x-2)^4 - 2$
 $\downarrow$ translatie $(-5, 4)$
 $y = 5(x+5-2)^4 - 2 + 4$
Dus beeldgrafiek: $y = 5(x+3)^4 + 2$.

19

a $f(x) = -\frac{1}{2}x^4$
 $\downarrow$ translatie $(-2, -7)$
 $g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^4 - 7$
Dus de translatie $(-2, -7)$.

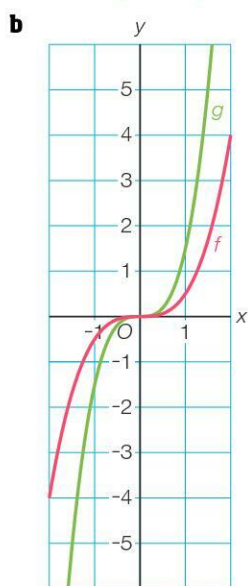
b $h(x) = 5(x+3)^9 + 9$
 $\downarrow$ translatie $(7, -6)$
 $k(x) = 5(x-7+3)^9 + 9 - 6$
oftewel $k(x) = 5(x-4)^9 + 3$
Dus de translatie $(7, -6)$.

20 $y = -\frac{1}{4}(x+2)^3 + 5$
 $\downarrow$ translatie $(p, 0)$
 $y = -\frac{1}{4}(x-p+2)^3 + 5$
 $y = -\frac{1}{4}(x-p+2)^3 + 5$
 door $(-10, 21)$ $\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{4}(-10-p+2)^3 + 5 = 21 \\ -\frac{1}{4}(-8-p)^3 = 16 \\ (-8-p)^3 = -64 \\ -8-p = -4 \\ -p = 4 \\ p = -4 \end{array} \right\}$

Dus beeldgrafiek: $y = -\frac{1}{4}(x+6)^3 + 5$.

21 a

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	4
$g(x)$	-12	$-1\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	12



- c De functiewaarden bij de functie g zijn 3 keer zo groot als die bij de functie f .
 De y -coördinaten van punten op de grafiek van g zijn dus 3 keer zo groot als die van punten op de grafiek van f bij dezelfde x .

Bladzijde 22

22 a $y = -\frac{1}{2}x^3$
 $\downarrow$ translatie $(-3, -5)$
 $y = -\frac{1}{2}(x+3)^3 - 5$
 $\downarrow$ verm. x -as, -3
 $y = -3(-\frac{1}{2}(x+3)^3 - 5)$
 oftewel $y = 1\frac{1}{2}(x+3)^3 + 15$

- b Het punt van symmetrie is $(-3, 15)$.

23 a $y = 0,3x^4$
 $\downarrow$ translatie $(-5, 6)$
 $y = 0,3(x+5)^4 + 6$
 $\downarrow$ verm. x -as, -4
 $y = -4(0,3(x+5)^4 + 6)$
 oftewel $y = -1,2(x+5)^4 - 24$
 De top is $(-5, -24)$.

b $y = 0,3x^4$
 $\downarrow$ verm. x-as, -4
 $y = -1,2x^4$
 $\downarrow$ translatie (-5, 6)
 $y = -1,2(x+5)^4 + 6$
 De top is (-5, 6).

24 a $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^5 + 7$
 $\downarrow$ translatie (1, 2)
 $y = \frac{1}{2}(x-1-3)^5 + 7 + 2$
 oftewel $y = \frac{1}{2}(x-4)^5 + 9$
 $\downarrow$ verm. x-as, -1
 $y = -\frac{1}{2}(x-4)^5 - 9$
 Het punt van symmetrie is (4, -9).

b $g(x) = -2\frac{1}{2}(x+4)^6 - 1$
 $\downarrow$ verm. x-as, -4
 $y = 10(x+4)^6 + 4$
 $\downarrow$ translatie (-5, -4)
 $h(x) = 10(x+5+4)^6 + 4 - 4$
 oftewel $h(x) = 10(x+9)^6$
 min. is $h(-9) = 0$

25 a $f(x) = -8(x+3)^7 + 4$
 $\downarrow$ verm. x-as, $-\frac{1}{2}$
 $y = 4(x+3)^7 - 2$
 $\downarrow$ translatie (5, 13)
 $g(x) = 4(x-2)^7 + 11$
 Dus verm. x-as, $-\frac{1}{2}$ en translatie (5, 13).

b $f(x) = -8(x+3)^7 + 4$
 $\downarrow$ translatie (5, -26)
 $y = -8(x-2)^7 - 22$
 $\downarrow$ verm. x-as, $-\frac{1}{2}$
 $g(x) = 4(x-2)^7 + 11$
 Dus translatie (5, -26) en verm. x-as, $-\frac{1}{2}$.

26 $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 6$
 $\downarrow$ translatie (p, q)
 $y = -\frac{1}{2}(x-p+2)^4 + 6 + q$
 $\downarrow$ verm. x-as, a
 $g(x) = -\frac{1}{2}a(x-p+2)^4 + 6a + aq$
 min. is $g(5) = -10$ geeft $-p+2 = -5$ oftewel $p = 7$ en $6a + aq = -10$.

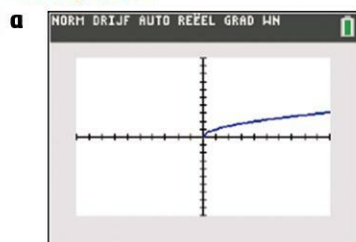
$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2}a(x-5)^4 - 10 \\ \text{door } A(1, 310) &\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2}a(1-5)^4 - 10 &= 310 \\ -\frac{1}{2}a \cdot (-4)^4 &= 320 \\ -128a &= 320 \\ a &= -2\frac{1}{2} \end{aligned} \right. \\ &\left\{ \begin{aligned} 6 \cdot -2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}q &= -10 \\ -15 - 2\frac{1}{2}q &= -10 \\ -2\frac{1}{2}q &= 5 \\ q &= -2 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dus $a = -2\frac{1}{2}$, $p = 7$ en $q = -2$.

5.3 Wortelfuncties

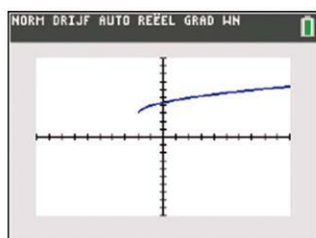
Bladzijde 24

27



$$x \geq 0 \text{ en } y \geq 0$$

b



$$x \geq -2 \text{ en } y \geq 0$$

c

$$y = \sqrt{x}$$

$$\downarrow \text{translatie } (-2, 3)$$

$$y = \sqrt{x+2} + 3$$

Bladzijde 25

28

a

$$y = \sqrt{x}$$

$$\downarrow \text{translatie } (3, -2)$$

$$f(x) = \sqrt{x-3} - 2$$

$$y = \sqrt{x}$$

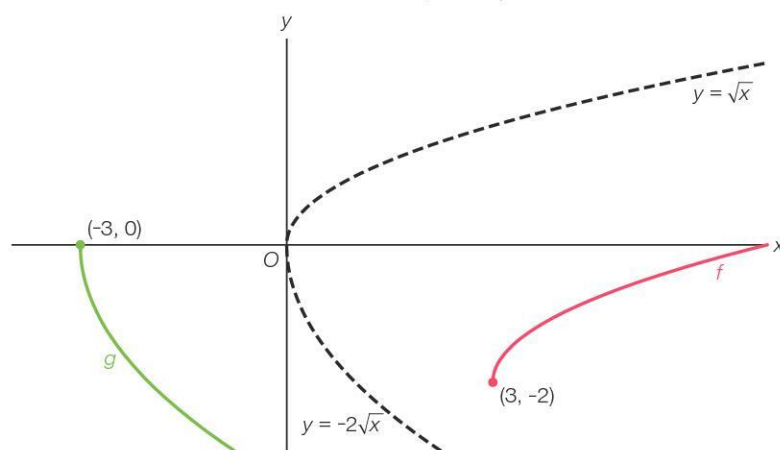
$$\downarrow \text{verm. } x\text{-as, } -2$$

$$y = -2\sqrt{x}$$

$$\downarrow \text{translatie } (-3, 0)$$

$$g(x) = -2\sqrt{x+3}$$

b



c $D_f = [3, \rightarrow)$, $B_f = [-2, \rightarrow)$, $D_g = [-3, \rightarrow)$ en $B_g = \langle \leftarrow, 0 \rangle$.

29

a

$$y = \sqrt{x}$$

$$\downarrow \text{verm. } x\text{-as, } 2$$

$$y = 2\sqrt{x}$$

$$\downarrow \text{translatie } (0, -3)$$

$$f(x) = 2\sqrt{x} - 3$$

$$y = \sqrt{x}$$

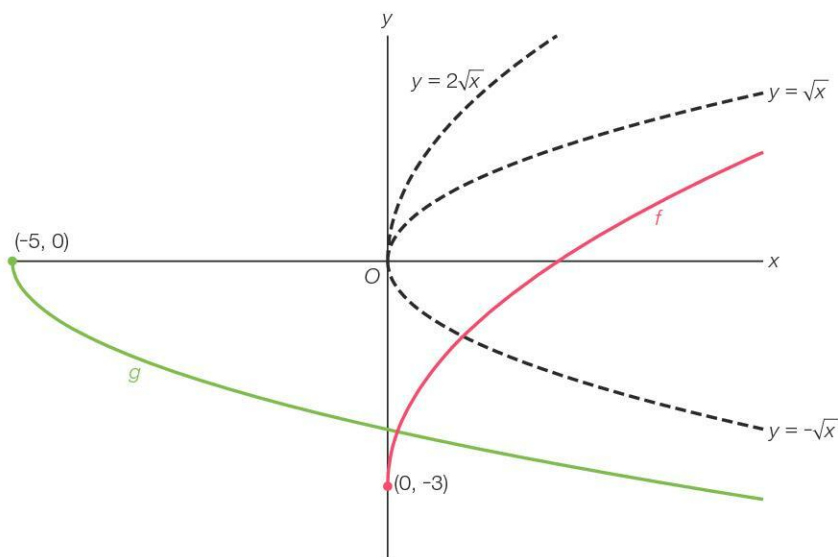
$$\downarrow \text{verm. } x\text{-as, } -1$$

$$y = -\sqrt{x}$$

$$\downarrow \text{translatie } (-5, 0)$$

$$g(x) = -\sqrt{x+5}$$

b



c $D_f = [0, \rightarrow)$, $B_f = [-3, \rightarrow)$, $D_g = [-5, \rightarrow)$ en $B_g = \langle \leftarrow, 0]$.

Bladzijde 26

- 30 a Randpunt $(-5, 3)$, $D_f = [-5, \rightarrow)$ en $B_f = [3, \rightarrow)$.
 b Randpunt $(-3, -7)$, $D_g = [-3, \rightarrow)$ en $B_g = [-7, \rightarrow)$.
 c Randpunt $(-1, 0)$, $D_h = [-1, \rightarrow)$ en $B_h = \langle \leftarrow, 0]$.
 d Randpunt $(0, 1)$, $D_k = [0, \rightarrow)$ en $B_k = [1, \rightarrow)$.
 e Randpunt $(1, -1)$, $D_l = [1, \rightarrow)$ en $B_l = \langle \leftarrow, -1]$.
 f Randpunt $(0, -3)$, $D_m = [0, \rightarrow)$ en $B_m = [-3, \rightarrow)$.

- 31 a Voor het domein van $f(x) = 5 - \sqrt{2x - 6}$ moet gelden $2x - 6 \geq 0$
 $2x \geq 6$
 $x \geq 3$

Dus het domein is $D_f = [3, \rightarrow)$.

- b De uitkomst van een wortel is minstens 0, dus de uitkomst van $f(x)$ is hoogstens 5.
 Dus het bereik is $B_f = \langle \leftarrow, 5]$.

Bladzijde 28

- 32 Bij een wortelfunctie is niet elke x toegestaan, dus bij voorbeeld b moet je rekening houden met het domein.
 Bij een wortelfunctie is niet elke uitkomst mogelijk, dus bij voorbeeld c moet je rekening houden met het bereik.

- 33 a $8 - 4x \geq 0$
 $-4x \geq -8$
 $x \leq 2$ dus $D_f = \langle \leftarrow, 2]$,
 randpunt $(2, 3)$ en $B_f = [3, \rightarrow)$.
 b $4x - 8 \geq 0$
 $4x \geq 8$
 $x \geq 2$ dus $D_g = [2, \rightarrow)$,
 randpunt $(2, 3)$ en $B_g = [3, \rightarrow)$.
 c $2x + 6 \geq 0$
 $2x \geq -6$
 $x \geq -3$ dus $D_h = [-3, \rightarrow)$,
 randpunt $(-3, 5)$ en $B_h = \langle \leftarrow, 5]$.
 d $x \geq 0$ dus $D_k = [0, \rightarrow)$,
 randpunt $(0, 3)$ en $B_k = \langle \leftarrow, 3]$.

34 a $2x + 5 \geq 0$

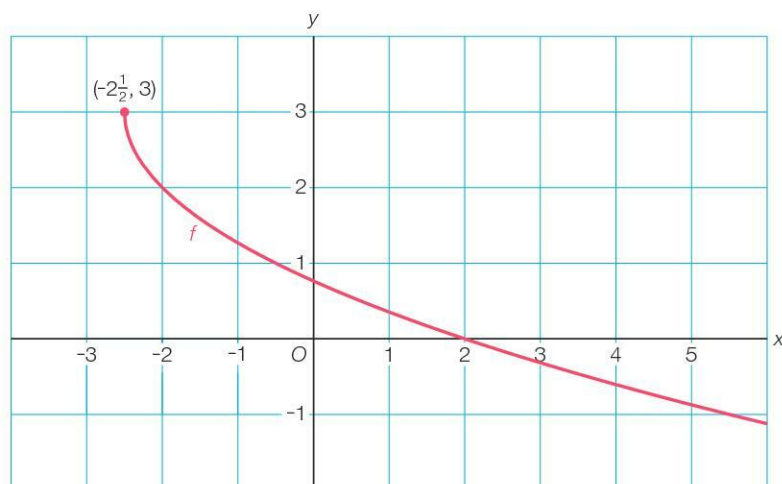
$$2x \geq -5$$

$$x \geq -2\frac{1}{2}$$

$D_f = [-2\frac{1}{2}, \rightarrow)$ en het randpunt is $(-2\frac{1}{2}, 3)$.

Voer in $y_1 = 3 - \sqrt{2x + 5}$.

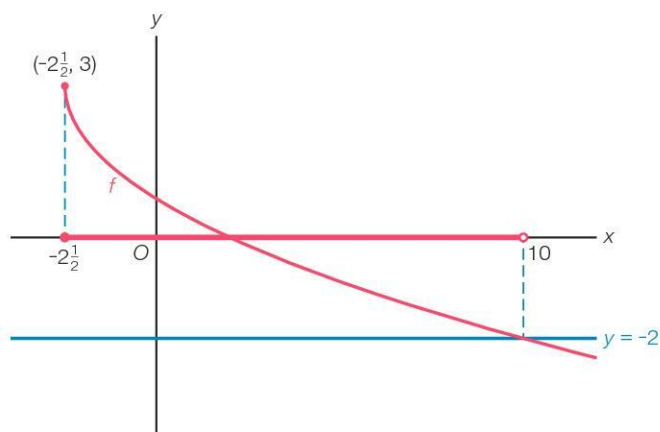
x	-2,5	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1,3	0,8	0,4	0	-0,3



$$B_f = \langle \leftarrow, 3 \rangle$$

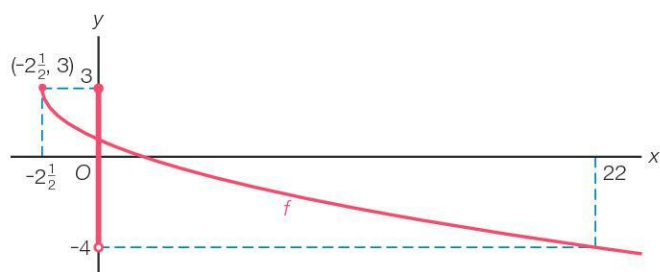
b Voer in $y_2 = -2$.

De optie snijpunt geeft $x = 10$.



$$f(x) > -2 \text{ geeft } -2\frac{1}{2} \leq x < 10$$

c $f(22) = -4$



$$x < 22 \text{ geeft } -4 < f(x) \leq 3$$

35 a $7 - 3x \geq 0$

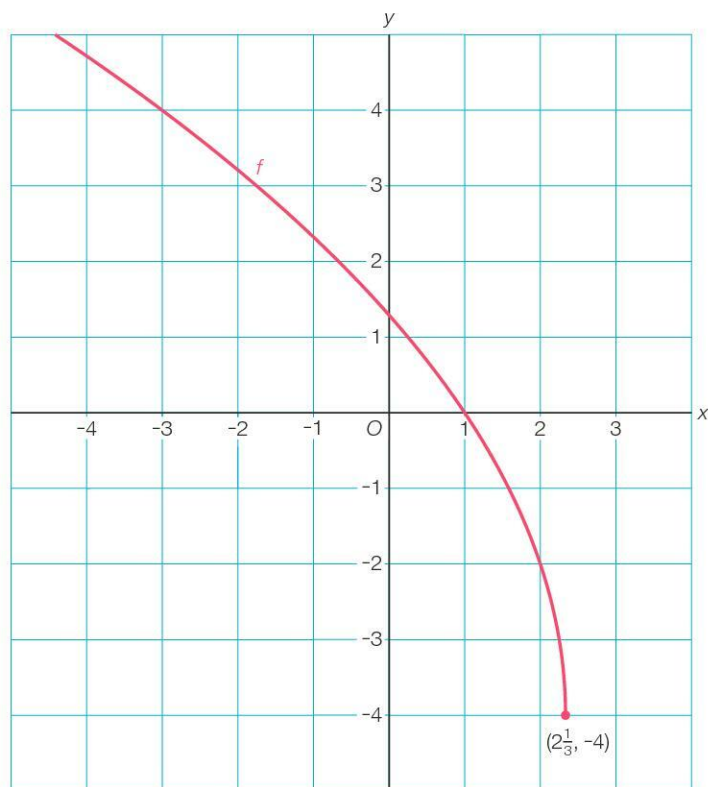
$$-3x \geq -7$$

$$x \leq 2\frac{1}{3}$$

$D_f = \langle \leftarrow, 2\frac{1}{3} \rangle$ en het randpunt is $(2\frac{1}{3}, -4)$.

Voer in $y_1 = 2\sqrt{7-3x} - 4$.

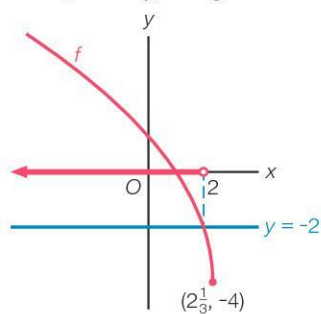
x	-3	-2	-1	0	1	2	$2\frac{1}{3}$
$f(x)$	4	3,2	2,3	1,3	0	-2	-4



$$B_f = [-4, \rightarrow)$$

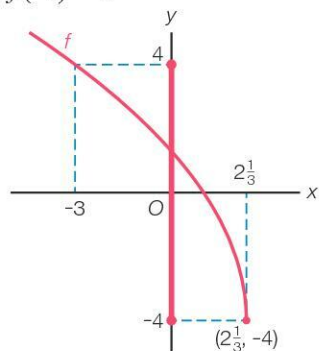
b Voer in $y_2 = -2$.

De optie snijpunt geeft $x = 2$.



$$f(x) > -2 \text{ geeft } x < 2$$

c $f(-3) = 4$



$$x \geq -3 \text{ geeft } -4 \leq f(x) \leq 4.$$

36 $5 + ax = 0$

$$ax = -5$$

$$x = -\frac{5}{a}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{randpunt} \left(-\frac{5}{a}, 4 \right) \\ y = 2x - 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot -\frac{5}{a} - 1 = 4 \\ -\frac{10}{a} = 5 \\ a = -2 \end{array}$$

37 a Het linker- en rechterlid van $\sqrt{2x-5} = 3$ kwadrateren geeft

$$2x - 5 = 9$$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

b De uitkomst van een wortel kan niet negatief zijn, dus $\sqrt{2x-5} = -3$ heeft geen oplossingen.

Bladzijde 30

38 Bart vergeet het dubbelproduct.

Kwadrateren van linker- en rechterlid van $2x - \sqrt{x} = 10$ geeft $4x^2 - 4x\sqrt{x} + x = 100$.

39 a $x = \sqrt{5x+14}$

kwadrateren geeft

$$x^2 = 5x + 14$$

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$(x+2)(x-7) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 7$$

$$x = -2 \text{ geeft } -2 = \sqrt{4} \text{ vold. niet}$$

$$x = 7 \text{ geeft } 7 = \sqrt{49} \text{ vold.}$$

b $3x = \sqrt{8x+20}$

kwadrateren geeft

$$9x^2 = 8x + 20$$

$$9x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -20 = 784$$

$$x = \frac{8+28}{18} = 2 \vee x = \frac{8-28}{18} = -1\frac{1}{9}$$

$$x = 2 \text{ geeft } 3 \cdot 2 = \sqrt{36} \text{ vold.}$$

$$x = -1\frac{1}{9} \text{ geeft } 3 \cdot -1\frac{1}{9} = \sqrt{11\frac{1}{9}} \text{ vold. niet}$$

c $5\sqrt{x} = x$

kwadrateren geeft

$$25x = x^2$$

$$x^2 - 25x = 0$$

$$x(x-25) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 25$$

$$x = 0 \text{ geeft } 5 \cdot 0 = 0 \text{ vold.}$$

$$x = 25 \text{ geeft } 5 \cdot 5 = 25 \text{ vold.}$$

d $3x = \sqrt{18x+72}$

kwadrateren geeft

$$9x^2 = 18x + 72$$

$$9x^2 - 18x - 72 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x+2)(x-4) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 4$$

$$x = -2 \text{ geeft } 3 \cdot -2 = \sqrt{36} \text{ vold. niet}$$

$$x = 4 \text{ geeft } 3 \cdot 4 = \sqrt{144} \text{ vold.}$$

40 a $4 - 3\sqrt{x} = 2$

$$3\sqrt{x} = 2$$

$$\sqrt{x} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{4}{9} \text{ vold.}$$

b $5\sqrt{x} - 2x = 0$

$$5\sqrt{x} = 2x$$

kwadrateren geeft

$$25x = 4x^2$$

$$4x^2 - 25x = 0$$

$$x(4x-25) = 0$$

$$x = 0 \vee 4x = 25$$

$$x = 0 \vee x = 6\frac{1}{4}$$

$$x = 0 \text{ geeft } 5\sqrt{0} - 0 = 0 \text{ vold.}$$

$$x = 6\frac{1}{4} \text{ geeft } 5\sqrt{6\frac{1}{4}} - 2 \cdot 6\frac{1}{4} = 0 \text{ vold.}$$

c $2x - 5\sqrt{x} = 3$

$$2x - 3 = 5\sqrt{x}$$

kwadrateren geeft

$$(2x-3)^2 = 25x$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 25x$$

$$4x^2 - 37x + 9 = 0$$

$$D = (-37)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 1225$$

$$x = \frac{37+35}{8} = 9 \vee x = \frac{37-35}{8} = \frac{1}{4}$$

$$x = 9 \text{ geeft } 2 \cdot 9 - 5\sqrt{9} = 3 \text{ vold.}$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ geeft } 2 \cdot \frac{1}{4} - 5\sqrt{\frac{1}{4}} = 3 \text{ vold. niet}$$

d $5 - 2\sqrt{x} = 3$

$$2\sqrt{x} = 2$$

$$\sqrt{x} = 1$$

$$x = 1 \text{ vold.}$$

41 a $2x + \sqrt{x} = 10$
 $\sqrt{x} = 10 - 2x$
 kwadrateren geeft
 $x = (10 - 2x)^2$
 $x = 100 - 40x + 4x^2$
 $4x^2 - 41x + 100 = 0$
 $D = (-41)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 100 = 81$
 $x = \frac{41 \pm 9}{8} = 6\frac{1}{4} \vee x = \frac{41 - 9}{8} = 4$
 $x = 6\frac{1}{4}$ geeft $2 \cdot 6\frac{1}{4} + \sqrt{6\frac{1}{4}} = 10$ vold. niet
 $x = 4$ geeft $2 \cdot 4 + \sqrt{4} = 10$ vold.
b $2\sqrt{3x+1} = x+3$
 kwadrateren geeft
 $4(3x+1) = (x+3)^2$
 $12x+4 = x^2+6x+9$
 $x^2-6x+5=0$
 $(x-1)(x-5)=0$
 $x=1 \vee x=5$
 $x=1$ geeft $2\sqrt{4} = 1+3$ vold.
 $x=5$ geeft $2\sqrt{16} = 5+3$ vold.

42 a $\frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} = 2$
 $\sqrt{x} = 2(3-\sqrt{x})$
 $\sqrt{x} = 6-2\sqrt{x}$
 $3\sqrt{x} = 6$
 $\sqrt{x} = 2$
 $x = 4$
 $x = 4$ geeft $\frac{\sqrt{4}}{3-\sqrt{4}} = 2$ vold.
b $\frac{2}{\sqrt{5-2x}} = \frac{1}{2-2x}$
 kruislings vermenigvuldigen geeft
 $4-4x = \sqrt{5-2x}$
 kwadrateren geeft
 $(4-4x)^2 = 5-2x$
 $16-32x+16x^2 = 5-2x$
 $16x^2-30x+11=0$
 $D = (-30)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 11 = 196$
 $x = \frac{30 \pm 14}{32} = 1\frac{3}{8} \vee x = \frac{30-14}{32} = \frac{1}{2}$
 $x = 1\frac{3}{8}$ geeft $\frac{2}{\sqrt{5-2\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2-2\frac{3}{4}}$ vold. niet
 $x = \frac{1}{2}$ geeft $\frac{2}{\sqrt{5-1}} = \frac{1}{2-1}$ vold.

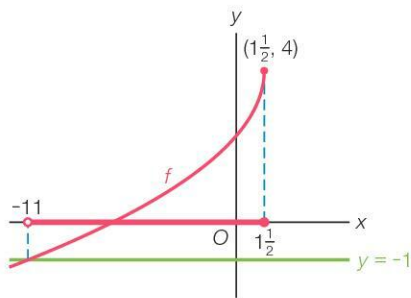
c $x + 2\sqrt{6-5x} = 6$
 $2\sqrt{6-5x} = 6-x$
 kwadrateren geeft
 $4(6-5x) = (6-x)^2$
 $24-20x = 36-12x+x^2$
 $x^2+8x+12=0$
 $(x+2)(x+6)=0$
 $x=-2 \vee x=-6$
 $x=-2$ geeft $-2+2\sqrt{6+10} = 6$ vold.
 $x=-6$ geeft $-6+2\sqrt{6+30} = 6$ vold.

d $10-x\sqrt{x} = 2$
 $x\sqrt{x} = 8$
 kwadrateren geeft
 $x^3 = 64$
 $x = 4$
 $x = 4$ geeft $10-4\sqrt{4} = 2$ vold.

c $\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 3\sqrt{x} - \frac{15}{x}$
 $\frac{16}{x} = 2\sqrt{x}$
 $2x\sqrt{x} = 16$
 $x\sqrt{x} = 8$
 kwadrateren geeft
 $x^3 = 64$
 $x = 4$
 $x = 4$ geeft $\sqrt{4} + \frac{1}{4} = 3\sqrt{4} - \frac{15}{4}$ vold.

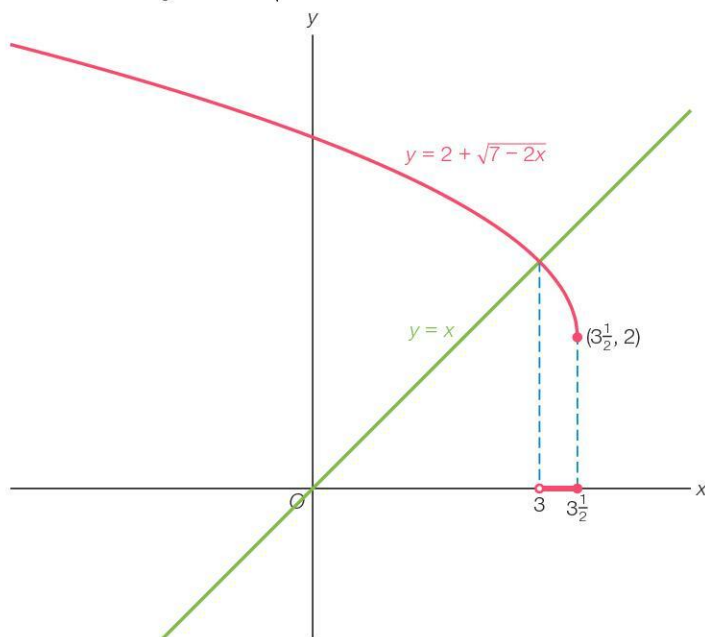
d $\frac{\sqrt{4x-3}}{x-1} = \frac{\sqrt{4x-3}}{\sqrt{3-x}}$
 $\sqrt{4x-3} = 0 \vee x-1 = \sqrt{3-x}$
 kwadrateren geeft
 $4x-3 = 0 \vee (x-1)^2 = 3-x$
 $4x = 3 \vee x^2-2x+1 = 3-x$
 $x = \frac{3}{4} \vee x^2-x-2 = 0$
 $x = \frac{3}{4} \vee (x+1)(x-2) = 0$
 $x = \frac{3}{4} \vee x = -1 \vee x = 2$
 $x = \frac{3}{4}$ geeft $\frac{0}{\frac{3}{4}-1} = \frac{0}{\sqrt{3-\frac{3}{4}}}$ vold.
 $x = -1$ geeft $\frac{\sqrt{-4-3}}{-1-1} = \frac{\sqrt{-4-3}}{\sqrt{3-1}}$ vold. niet
 $x = 2$ geeft $\frac{\sqrt{8-3}}{2-1} = \frac{\sqrt{8-3}}{\sqrt{3-2}}$ vold.

- 43 a** $3 - 2x \geq 0$
 $-2x \geq -3$
 $x \leq 1\frac{1}{2}$,
 $D_f = \langle \leftarrow, 1\frac{1}{2} \rangle$ en het randpunt is $(1\frac{1}{2}, 4)$.



- b** $f(x) = -1$ geeft $4 - \sqrt{3 - 2x} = -1$
 $-\sqrt{3 - 2x} = -5$
kwadrateren geeft
 $3 - 2x = 25$
 $-2x = 22$
 $x = -11$
 $x = -11$ geeft $4 - \sqrt{25} = -1$ vold.
 $f(x) > -1$ geeft $-11 < x \leq 1\frac{1}{2}$

- 44** $7 - 2x \geq 0$
 $-2x \geq -7$
 $x \leq 3\frac{1}{2}$
Los op $2 + \sqrt{7 - 2x} = x$
 $\sqrt{7 - 2x} = x - 2$
kwadrateren geeft
 $7 - 2x = (x - 2)^2$
 $7 - 2x = x^2 - 4x + 4$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x + 1)(x - 3) = 0$
 $x = -1 \vee x = 3$
 $x = -1$ geeft $2 + \sqrt{9} = -1$ vold. niet
 $x = 3$ geeft $2 + \sqrt{1} = 3$ vold.



$2 + \sqrt{7 - 2x} < x$ geeft $3 < x \leq 3\frac{1}{2}$

45 $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+6}$
kwadrateren geeft
 $x+1+2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2}+x-2=x+6$
 $2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2}=-x+7$
kwadrateren geeft
 $4(x+1)(x-2)=(-x+7)^2$
 $4(x^2-x-2)=x^2-14x+49$
 $4x^2-4x-8=x^2-14x+49$
 $3x^2+10x-57=0$
 $D=10^2-4 \cdot 3 \cdot -57=784$
 $x=\frac{-10 \pm 28}{6}=3 \vee x=\frac{-10-28}{6}=-6\frac{1}{3}$
 $x=3$ geeft $\sqrt{3+1} + \sqrt{3-2} = \sqrt{3+6}$ vold.
 $x=-6\frac{1}{3}$ geeft $\sqrt{-6\frac{1}{3}+1} + \sqrt{-6\frac{1}{3}-2} = \sqrt{-6\frac{1}{3}+6}$ vold. niet

46 a Je krijgt de maximale score als je alle wedstrijden wint.

Dus de maximale score is $S = \frac{1000(16 - \sqrt{16})}{16} = 750$.

b $\frac{1000(w - \sqrt{w})}{16} = 375$

$1000(w - \sqrt{w}) = 6000$

$w - \sqrt{w} = 6$

$w - 6 = \sqrt{w}$

kwadrateren geeft

$(w - 6)^2 = w$

$w^2 - 12w + 36 = w$

$w^2 - 13w + 36 = 0$

$(w - 4)(w - 9) = 0$

$w = 4 \vee w = 9$

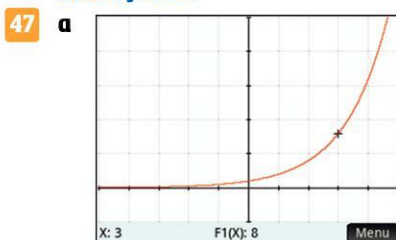
$w = 4$ geeft $\frac{1000(4 - \sqrt{4})}{16} = 375$ vold. niet

$w = 9$ geeft $\frac{1000(9 - \sqrt{9})}{16} = 375$ vold.

Dus Eline heeft 9 partijen gewonnen.

5.4 Exponentiële functies

Bladzijde 32



b De grafiek van f is stijgend.

c $f(-10) = 2^{-10} \approx 9,77 \cdot 10^{-4}$

$f(-20) = 2^{-20} \approx 9,54 \cdot 10^{-7}$

$f(-100) = 2^{-100} \approx 7,89 \cdot 10^{-31}$

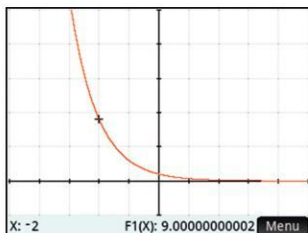
d $f(-500) = 2^{-500} = \frac{1}{2^{500}}$ en dit is groter dan 0.

De GR geeft $2^{-500} = 0$.

e Voor elke x is $2^x > 0$, dus er is geen origineel te vinden waarvan het beeld 0 is.

48

a



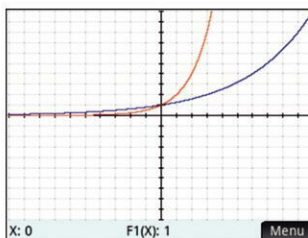
De grafiek van g is dalend.

- b** De lijn $y = 4$ snijdt de grafiek van g in één punt, dus de vergelijking $g(x) = 4$ heeft één oplossing.
De lijn $y = -4$ snijdt de grafiek van g niet, dus de vergelijking $g(x) = -4$ heeft geen oplossingen.

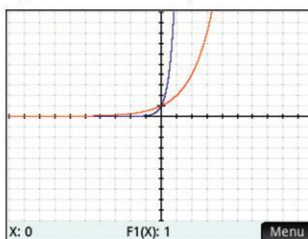
Bladzijde 33

49

a



- b** De grafiek van y_2 ontstaat uit de grafiek van y_1 door de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor 3.
c De grafiek van y_3 ontstaat uit de grafiek van y_1 door de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor $\frac{1}{4}$.



- d** De grafiek van y_4 ontstaat uit de grafiek van y_1 door de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor $\frac{1}{a}$.

Bladzijde 34

50

a

$$y = 3^x$$

↓ translatie $(-2, -1)$

$$y = 3^{x+2} - 1$$

De asymptoot is de lijn $y = -1$.

b

$$y = 3^x$$

↓ translatie $(1, 5)$

$$y = 3^{x-1} + 5$$

De asymptoot is de lijn $y = 5$.

c

$$y = 0,5^x$$

↓ verm. x -as, 2

$$y = 2 \cdot 0,5^x$$

↓ translatie $(0, 3)$

$$y = 2 \cdot 0,5^x + 3$$

De asymptoot is de lijn $y = 3$.

$$\mathbf{d} \quad y = 0,7^x$$

↓ verm. x -as, -3

$$y = -3 \cdot 0,7^x$$

↓ translatie $(0, 5)$

$$y = -3 \cdot 0,7^x + 5$$

De asymptoot is de lijn $y = 5$.

$$\mathbf{e} \quad y = 2^x$$

↓ verm. y -as, $\frac{1}{3}$

$$y = 2^{3x}$$

↓ verm. x -as, 3

$$y = 3 \cdot 2^{3x}$$

↓ translatie $(0, 4)$

$$y = 3 \cdot 2^{3x} + 4$$

De asymptoot is de lijn $y = 4$.

$$\mathbf{f} \quad y = 0,8^x$$

↓ verm. y -as, 2,5

$$y = 0,8^{0,4x}$$

↓ translatie $(0, -10)$

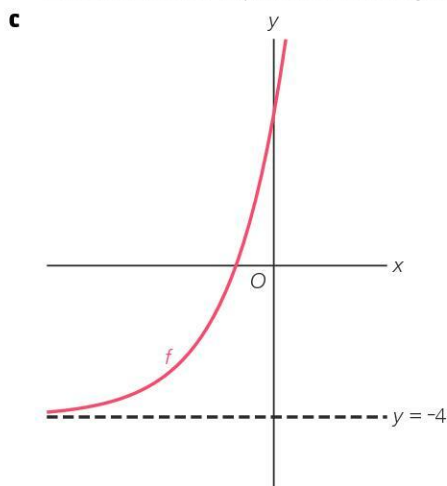
$$y = 0,8^{0,4x} - 10$$

De asymptoot is de lijn $y = -10$.

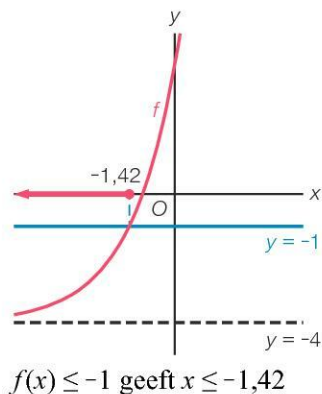
- 51** **a** Het bereik is $B_f = \langle -6, \rightarrow \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = -6$.
b Het bereik is $B_g = \langle \leftarrow, 5 \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 5$.
c Het bereik is $B_h = \langle \leftarrow, 1000 \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 1000$.
d Het bereik is $B_k = \langle \leftarrow, 1000 \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 1000$.

- 52** **a** $y = 3^x$
 $\downarrow$ spiegelen in de x -as
 $y = -3^x$
 $\downarrow$ translatie $(0, -1)$
 $y = -3^x - 1$
b $y = 3^x$
 $\downarrow$ translatie $(2, 5)$
 $y = 3^{x-2} + 5$
 $\downarrow$ verm. y -as, $\frac{1}{4}$
 $y = 3^{4x-2} + 5$
c $y = 3^x$
 $\downarrow$ translatie $(4, -5)$
 $y = 3^{x-4} - 5$
 $\downarrow$ verm. x -as, 3
 $y = 3(3^{x-4} - 5)$
 oftewel $y = 3 \cdot 3^{x-4} - 15$
 oftewel $y = 3^{x-3} - 15$
d $y = 3^x$
 $\downarrow$ verm. x -as, 3
 $y = 3 \cdot 3^x$
 $\downarrow$ translatie $(4, -5)$
 $y = 3 \cdot 3^{x-4} - 5$
 oftewel $y = 3^{x-3} - 5$

- 53** **a** $y = 2^x$
 $\downarrow$ translatie $(-3, -4)$
 $f(x) = 2^{x+3} - 4$
b $B_f = \langle -4, \rightarrow \rangle$
 De horizontale asymptoot is de lijn $y = -4$.



- d** $f(3) = 60$
 $x \leq 3$ geeft $-4 < f(x) \leq 60$
e Voer in $y_1 = 2^{x+3} - 4$ en $y_2 = -1$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx -1,42$.



54

a $y = 2^x$

↓ translatie (0, -2)

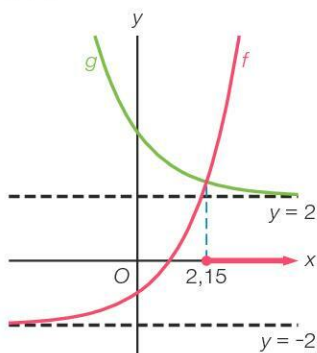
$$f(x) = 2^x - 2$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

↓ translatie (1, 2)

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$$

b



$$B_f = \langle -2, \rightarrow \rangle \text{ en } B_g = \langle 2, \rightarrow \rangle$$

c Voer in $y_1 = 2^x - 2$ en $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.

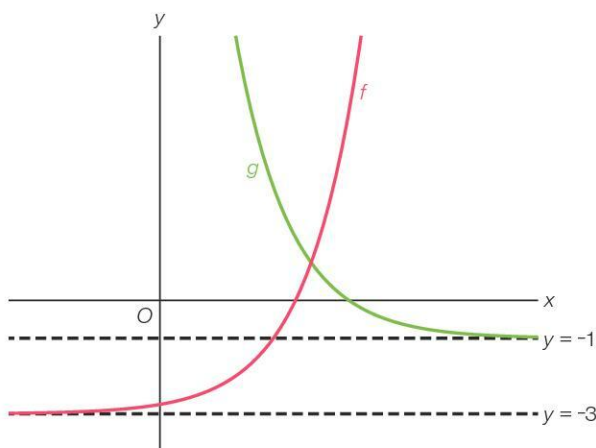
De optie snijpunt geeft $x \approx 2,15$.

$$f(x) \geq g(x) \text{ geeft } x \geq 2,15$$

d $B_f = \langle -2, \rightarrow \rangle$, dus $f(x) = p$ heeft geen oplossingen voor $p \leq -2$.

55

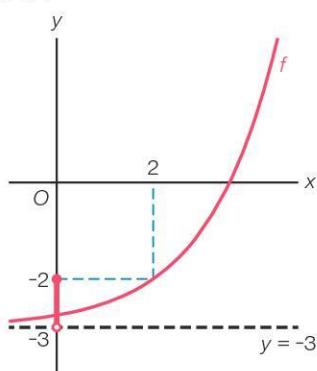
a



$B_f = \langle -3, \rightarrow \rangle$ en $B_g = \langle -1, \rightarrow \rangle$, dus $f(x) = p$ heeft één oplossing voor $p > -3$ en $g(x) = p$ heeft geen oplossing voor $p \leq -1$.

Dus het antwoord is voor $-3 < p \leq -1$.

b $f(2) = -2$



$$x \leq 2 \text{ geeft } -3 < f(x) \leq -2$$

c $f(1) = -2,5$ en $g(1) = 15$, dus $A(1; -2,5)$ en $B(1, 15)$.

$$AB = y_B - y_A = 15 - (-2,5) = 17,5$$

d Voer in $y_1 = 2^{x-2} - 3$, $y_2 = 4 \cdot 0,5^{x-3} - 1$ en $y_3 = 5$.

De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x = 5$, dus $P(5, 5)$.

De optie snijpunt met y_2 en y_3 geeft $x \approx 2,415$, dus $Q(2,415; 5)$.

$$PQ = x_P - x_Q \approx 5 - 2,415 = 2,585$$

Bladzijde 36

- 56 a** $8 \cdot 4^x = 2^3 \cdot (2^2)^x = 2^3 \cdot 2^{2x} = 2^{2x+3}$
b Bij de herleiding van $(2^2)^x$ tot 2^{2x} is de regel $(a^p)^q = a^{pq}$ gebruikt.
 Bij de herleiding van $2^3 \cdot 2^{2x}$ tot 2^{2x+3} is de regel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ gebruikt.
- 57 a** $y = 15 \cdot 2^{3x+2} = 15 \cdot 2^{3x} \cdot 2^2 = 15 \cdot (2^3)^x \cdot 4 = 60 \cdot 8^x$
 Dus $y = 60 \cdot 8^x$.
b $y = 50 \cdot 2^{3x-1} = 50 \cdot 2^{3x} \cdot 2^{-1} = 50 \cdot (2^3)^x \cdot \frac{1}{2} = 25 \cdot 8^x$
 Dus $y = 25 \cdot 8^x$.
c $y = 260 \cdot 4^{1\frac{1}{2}x-1} = 260 \cdot 4^{1\frac{1}{2}x} \cdot 4^{-1} = 260 \cdot (4^{1\frac{1}{2}})^x \cdot \frac{1}{4} = 65 \cdot 8^x$
 Dus $y = 65 \cdot 8^x$.
d $y = 8 \cdot 4^{-2x-1} = 8 \cdot 4^{-2x} \cdot 4^{-1} = 8 \cdot (4^{-2})^x \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot (\frac{1}{16})^x$
 Dus $y = 2 \cdot (\frac{1}{16})^x$.
- 58 a** $y = 2^x \cdot 2^{2x-3} = 2^x \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-3} = 2^{3x} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot (2^3)^x = \frac{1}{8} \cdot 8^x$
 Dus $y = \frac{1}{8} \cdot 8^x$.
b $y = 63 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-2} = 63 \cdot 3^{\frac{1}{2}x} \cdot 3^{-2} = 63 \cdot (3^{\frac{1}{2}})^x \cdot \frac{1}{9} = 7 \cdot (\sqrt{3})^x$
 Dus $y = 7 \cdot (\sqrt{3})^x$.
c $y = 50\,000 \cdot 100^{-x-2\frac{1}{2}} = 50\,000 \cdot 100^{-x} \cdot 100^{-2\frac{1}{2}} = 50\,000 \cdot (100^{-1})^x \cdot \frac{1}{100\,000} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{100})^x$
 Dus $y = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{100})^x$.
d $y = \frac{3}{4^{2x-1}} = 3 \cdot 4^{-2x+1} = 3 \cdot 4^{-2x} \cdot 4^1 = 3 \cdot (4^{-2})^x \cdot 4 = 12 \cdot (\frac{1}{16})^x$
 Dus $y = 12 \cdot (\frac{1}{16})^x$.
- 59** $f(x) = 5 - 2^{\frac{1}{2}x+4}$
 $\downarrow$ translatie (12, -8)
 $h(x) = 5 - 2^{\frac{1}{2}(x-12)+4} - 8 = -3 - 2^{\frac{1}{2}x-6+4} = -3 - 2^{\frac{1}{2}x-2} = -3 - (2^{\frac{1}{2}})^x \cdot \frac{1}{4} = -3 - \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{2})^x$
 Dus $a = -3$, $b = -\frac{1}{4}$ en $g = \sqrt{2}$.
- 60** $f(x) = 2^{x-3}$
 $\downarrow$ translatie (-5, 0)
 $g(x) = 2^{x+5-3} = 2^{x-3} \cdot 2^5 = 32 \cdot 2^{x-3}$
 De vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 32 toepassen op de grafiek van f geeft de grafiek van g .
 Dus $a = 32$.
- 61** $4\sqrt{2} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2\frac{1}{2}}$
 $2^{x-1} = 4\sqrt{2}$
 $2^{x-1} = 2^{2\frac{1}{2}}$
 $x-1 = 2\frac{1}{2}$
 $x = 3\frac{1}{2}$

Bladzijde 37

- 62 a** $2^{x+1} = 64$
 $2^{x+1} = 2^6$
 $x+1 = 6$
 $x = 5$
b $2^{x-3} = \frac{1}{8}$
 $2^{x-3} = 2^{-3}$
 $x-3 = -3$
 $x = 0$
c $2^{2x} = 2$
 $2^{2x} = 2^1$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$
- d** $2^x = 1$
 $2^x = 2^0$
 $x = 0$
e $2^x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$
 $2^x = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
 $2^x = 2^{-1\frac{1}{2}}$
 $x = -1\frac{1}{2}$
f $5^{x+6} = (\frac{1}{5})^x$
 $5^{x+6} = (5^{-1})^x$
 $5^{x+6} = 5^{-x}$
 $x+6 = -x$
 $2x = -6$
 $x = -3$

63 a $3^{2x+1} = 27\sqrt{3}$
 $3^{2x+1} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$
 $3^{2x+1} = 3^{3\frac{1}{2}}$
 $2x+1 = 3\frac{1}{2}$
 $2x = 2\frac{1}{2}$
 $x = 1\frac{1}{4}$

b $10^{2x+1} = 0,01$
 $10^{2x+1} = 10^{-2}$
 $2x+1 = -2$
 $2x = -3$
 $x = -1\frac{1}{2}$

c $3^x - 2 = 25$
 $3^x = 27$
 $3^x = 3^3$
 $x = 3$

64 a $3 \cdot 2^x + 4 = 28$
 $3 \cdot 2^x = 24$
 $2^x = 8$
 $2^x = 2^3$
 $x = 3$

b $5^{2x-6} = 0,04$
 $5^{2x-6} = \frac{1}{25}$
 $5^{2x-6} = 5^{-2}$
 $2x-6 = -2$
 $2x = 4$
 $x = 2$

c $3 \cdot 7^{3x+1} = 147$
 $7^{3x+1} = 49$
 $7^{3x+1} = 7^2$
 $3x+1 = 2$
 $3x = 1$
 $x = \frac{1}{3}$

Bladzijde 38

65 a $f(x) = g(x)$
 $(\sqrt{2})^{x+4} = (\frac{1}{4})^x$
 $(2^{\frac{1}{2}})^{x+4} = 4^{-x}$
 $2^{\frac{1}{2}x+2} = (2^2)^{-x}$
 $2^{\frac{1}{2}x+2} = 2^{-2x}$
 $\frac{1}{2}x+2 = -2x$
 $2\frac{1}{2}x = -2$
 $x = -\frac{4}{5}$
 $f(x) \geq g(x)$ geeft $x \geq -\frac{4}{5}$

d $5 \cdot 2^x = 80$
 $2^x = 16$
 $2^x = 2^4$
 $x = 4$

e $10 \cdot 3^x = 270$
 $3^x = 27$
 $3^x = 3^3$
 $x = 3$

f $3 \cdot 8^{2-x} = 48$
 $8^{2-x} = 16$
 $(2^3)^{2-x} = 2^4$
 $2^{6-3x} = 2^4$
 $6-3x = 4$
 $-3x = -2$
 $x = \frac{2}{3}$

d $32^{x-2} = \frac{1}{16}$
 $(2^5)^{x-2} = 2^{-4}$
 $2^{5x-10} = 2^{-4}$
 $5x-10 = -4$
 $5x = 6$
 $x = 1\frac{1}{5}$

e $5 \cdot 4^{x-1} = 2\frac{1}{2}$
 $4^{x-1} = \frac{1}{2}$
 $(2^2)^{x-1} = 2^{-1}$
 $2^{2x-2} = 2^{-1}$
 $2x-2 = -1$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$

f $8 \cdot 2^x = 4^{x+1}$
 $2^3 \cdot 2^x = (2^2)^{x+1}$
 $2^{3+x} = 2^{2x+2}$
 $3+x = 2x+2$
 $-x = -1$
 $x = 1$

b $g(x) = \sqrt{2}$
 $(\frac{1}{4})^x = \sqrt{2}$
 $2^{-2x} = 2^{\frac{1}{2}}$
 $-2x = \frac{1}{2}$
 $x = -\frac{1}{4}$
 $g(x) \geq \sqrt{2}$ geeft $x \leq -\frac{1}{4}$

66 $f(x) = 2^x$
 $\downarrow$ verm. x-as, 6
 $y = 6 \cdot 2^x$
 $\downarrow$ translatie (0, -10)
 $g(x) = 6 \cdot 2^x - 10$
 $f(x) = g(x)$ geeft $2^x = 6 \cdot 2^x - 10$
 $-5 \cdot 2^x = -10$
 $2^x = 2$
 $x = 1$

$f(1) = 2$, dus het snijpunt is (1, 2).

67 $f(x) = 3^{x+2} - 5$
 $\downarrow$ translatie (3, 7)
 $y = 3^{x-1} + 2$
 $\downarrow$ verm. y-as, b
 $g(x) = 3^{\frac{1}{b}x-1} + 2$
 $g(x) = 3^{\frac{1}{b}x-1} + 2 \left\{ \begin{array}{l} 3^{\frac{-15}{b}-1} + 2 = 83 \\ \text{door } A(-15, 83) \end{array} \right.$
 $3^{\frac{-15}{b}-1} = 81$
 $3^{\frac{-15}{b}-1} = 3^4$
 $\frac{-15}{b} - 1 = 4$
 $\frac{-15}{b} = 5$
 $b = -3$

5.5 Logaritmen

Bladzijde 40

68 a $2^3 = 8$
b $2^{-2} = \frac{1}{4}$
c $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
d $3^2 = 9$
e $3^{-3} = \frac{1}{27}$
f $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$

Bladzijde 41

69 a ${}^5\log(125) = {}^5\log(5^3) = 3$
b ${}^{10}\log(0,1) = {}^{10}\log(10^{-1}) = -1$
c ${}^2\log(4) = {}^2\log(2^2) = 2$
d ${}^7\log(49) = {}^7\log(7^2) = 2$
e ${}^2\log(\sqrt{2}) = {}^2\log(2^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$
f ${}^2\log(0,5) = {}^2\log(2^{-1}) = -1$
g ${}^4\log(0,25) = {}^4\log(4^{-1}) = -1$
h ${}^4\log(4) = {}^4\log(4^1) = 1$
i ${}^4\log(1) = {}^4\log(4^0) = 0$

70 a ${}^2\log(64\sqrt{2}) = {}^2\log(2^6 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = {}^2\log(2^{6\frac{1}{2}}) = 6\frac{1}{2}$
b ${}^3\log(\frac{1}{9}\sqrt{3}) = {}^3\log(3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^3\log(3^{-1\frac{1}{2}}) = -1\frac{1}{2}$
c ${}^3\log(3^{21,5}) = 21,5$
d ${}^5\log(\frac{1}{125}) = {}^5\log(5^{-3}) = -3$
e ${}^{\frac{1}{3}}\log(\frac{1}{27}) = {}^{\frac{1}{3}}\log((\frac{1}{3})^3) = 3$
f ${}^{\frac{1}{2}}\log(\frac{1}{4}) = {}^{\frac{1}{2}}\log((\frac{1}{2})^2) = 2$
g ${}^2\log(\frac{1}{32} \cdot \sqrt[3]{2}) = {}^2\log(2^{-5} \cdot 2^{\frac{1}{3}}) = {}^2\log(2^{-4\frac{2}{3}}) = -4\frac{2}{3}$
h ${}^5\log(1) = {}^5\log(5^0) = 0$
i ${}^3\log(81 \cdot \sqrt[5]{27}) = {}^3\log(3^4 \cdot \sqrt[5]{3^3}) = {}^3\log(3^4 \cdot 3^{\frac{3}{5}}) = {}^3\log(3^{4\frac{3}{5}}) = 4\frac{3}{5}$

- 71 a** ${}^3\log(9) = {}^3\log(3^2) = 2$
 Dus ${}^3\log(x) = 2$ geeft $x = 9$.
b ${}^5\log(\frac{1}{25}) = {}^5\log(5^{-2}) = -2$
 Dus ${}^5\log(x) = -2$ geeft $x = \frac{1}{25}$.

- 72 a** $x = {}^5\log(0,2) = {}^5\log(\frac{1}{5}) = {}^5\log(5^{-1}) = -1$
b ${}^9\log(x) = \frac{1}{2}$
 $x = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$
c ${}^x\log(1000) = 3$
 $x^3 = 1000$
 $x = 10$

Bladzijde 42

- 73 a** ${}^3\log(x+2) = 2$
 $x+2 = 3^2$
 $x+2 = 9$
 $x = 7$
b $1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 4$
 ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 3$
 $x = (\frac{1}{2})^3$
 $x = \frac{1}{8}$
c ${}^3\log(2x+1) = 4$
 $2x+1 = 3^4$
 $2x+1 = 81$
 $2x = 80$
 $x = 40$

- 74 a** $4 \cdot {}^3\log(x) = 2$
 ${}^3\log(x) = \frac{1}{2}$
 $x = 3^{\frac{1}{2}}$
 $x = \sqrt{3}$
b ${}^3\log(4x-1) = -2$
 $4x-1 = 3^{-2}$
 $4x-1 = \frac{1}{9}$
 $4x = 1\frac{1}{9}$
 $x = \frac{5}{18}$
c $3 + {}^2\log(x) = -1$
 ${}^2\log(x) = -4$
 $x = 2^{-4}$
 $x = \frac{1}{16}$

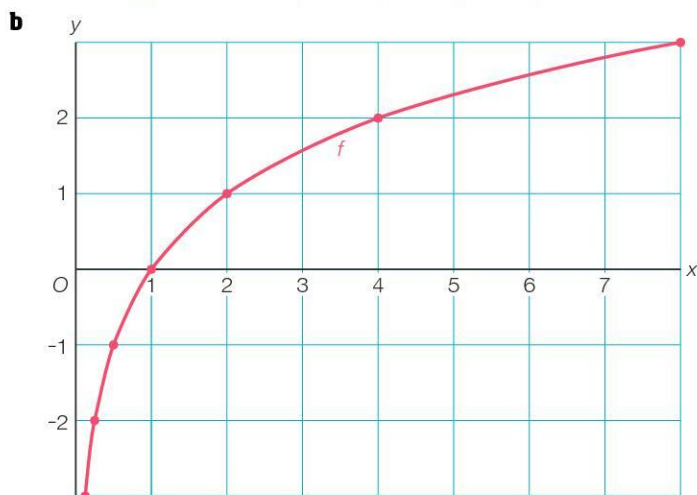
- 75** ${}^2\log({}^3\log(x)) = -1$
 ${}^3\log(x) = 2^{-1}$
 ${}^3\log(x) = \frac{1}{2}$
 $x = 3^{\frac{1}{2}}$
 $x = \sqrt{3}$

- d** $5 + {}^4\log(x) = 3$
 ${}^4\log(x) = -2$
 $x = 4^{-2}$
 $x = \frac{1}{16}$
e ${}^{\frac{1}{2}}\log(x-1) = 3$
 $x-1 = (\frac{1}{2})^3$
 $x-1 = \frac{1}{8}$
 $x = 1\frac{1}{8}$
f ${}^2\log(x^2-4) = 5$
 $x^2-4 = 2^5$
 $x^2-4 = 32$
 $x^2 = 36$
 $x = 6 \vee x = -6$

- d** ${}^5\log(3x+2) = 1$
 $3x+2 = 5^1$
 $3x+2 = 5$
 $3x = 3$
 $x = 1$
e ${}^3\log(0,4x-5) = 2$
 $0,4x-5 = 3^2$
 $0,4x-5 = 9$
 $0,4x = 14$
 $x = 35$
f $4 + 2 \cdot {}^2\log(x) = 7$
 $2 \cdot {}^2\log(x) = 3$
 ${}^2\log(x) = 1\frac{1}{2}$
 $x = 2^{1\frac{1}{2}}$
 $x = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
 $x = 2\sqrt{2}$

76 a

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
${}^2\log(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3



c Bij ${}^2\log(x)$ moet $x > 0$ zijn, dus $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

d $B_f = \mathbb{R}$

Bladzijde 44

77 Het effect van transformaties op de standaardgrafiek $y = {}^g\log(x)$

$y = {}^g\log(x)$ $\downarrow$ verm. x -as, a $y = a \cdot {}^g\log(x)$	Vermenigvuldig in de formule de functiewaarde met a .
$y = {}^g\log(x)$ $\downarrow$ verm. y -as, b $y = {}^g\log\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$	Vervang in de formule x door $\frac{1}{b} \cdot x$.
$y = {}^g\log(x)$ $\downarrow$ translatie $(c, 0)$ $y = {}^g\log(x - c)$	Vervang in de formule x door $x - c$.
$y = {}^g\log(x)$ $\downarrow$ translatie $(0, d)$ $y = {}^g\log(x) + d$	Tel in de formule d op bij de functiewaarde.

78 a $y = {}^3\log(x)$
 $\downarrow$ translatie $(-2, 0)$
 $f(x) = {}^3\log(x + 2)$
 De lijn $x = -2$ is verticale asymptoot.

b $y = {}^2\log(x)$
 $\downarrow$ translatie $(1, 0)$
 $y = {}^2\log(x - 1)$
 $\downarrow$ verm. x -as, 5
 $g(x) = 5 \cdot {}^2\log(x - 1)$
 De lijn $x = 1$ is verticale asymptoot.

c $y = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$
 $\downarrow$ verm. x -as, 4
 $y = 4 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$
 $\downarrow$ translatie $(0, 3)$
 $h(x) = 4 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(x) + 3$
 De lijn $x = 0$ is verticale asymptoot.

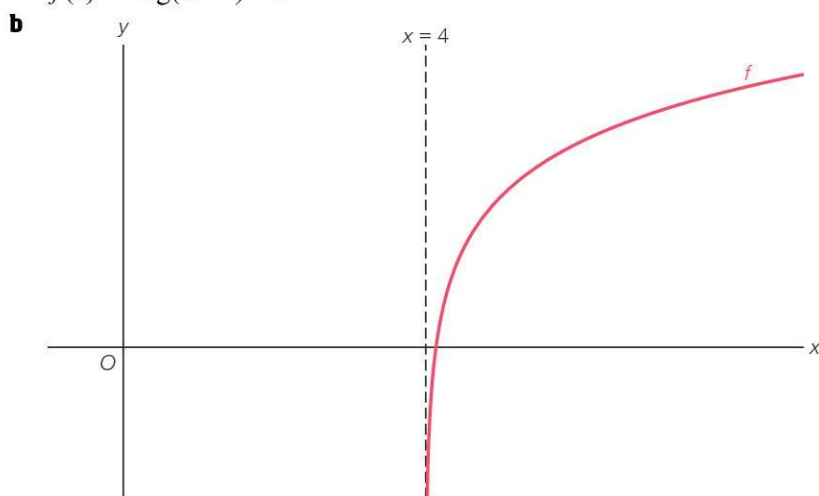
d $y = {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$
 $\downarrow$ verm. x -as, -1
 $y = -{}^{\frac{1}{3}}\log(x)$
 $\downarrow$ translatie $(-1, -2)$
 $k(x) = -{}^{\frac{1}{3}}\log(x + 1) - 2$
 De lijn $x = -1$ is verticale asymptoot.

e $y = {}^3\log(x)$
 $\downarrow$ verm. y -as, $\frac{1}{2}$
 $y = {}^3\log(2x)$
 $\downarrow$ translatie $(0, 5)$
 $l(x) = {}^3\log(2x) + 5$
 De lijn $x = 0$ is verticale asymptoot.

f $y = {}^{\frac{1}{4}}\log(x)$
 $\downarrow$ verm. y -as, 2
 $y = {}^{\frac{1}{4}}\log(\frac{1}{2}x)$
 $\downarrow$ verm. x -as, 3
 $m(x) = 3 \cdot {}^{\frac{1}{4}}\log(\frac{1}{2}x)$
 De lijn $x = 0$ is verticale asymptoot.

- 79 a** $y = {}^3\log(x)$
 $\downarrow$ verm. x -as, 2
 $y = 2 \cdot {}^3\log(x)$
 $\downarrow$ translatie $(0, -4)$
 $y = 2 \cdot {}^3\log(x) - 4$
- b** $y = {}^3\log(x)$
 $\downarrow$ spiegelen in de x -as
 $y = -{}^3\log(x)$
 $\downarrow$ translatie $(5, 0)$
 $y = -{}^3\log(x - 5)$
- c** $y = {}^3\log(x)$
 $\downarrow$ translatie $(-3, 2)$
 $y = {}^3\log(x + 3) + 2$
 $\downarrow$ verm. x -as, $\frac{1}{2}$
 $y = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(x + 3) + 1$
- d** $y = {}^3\log(x)$
 $\downarrow$ 5 omhoog
 $y = {}^3\log(x) + 5$
 $\downarrow$ verm. y -as, $\frac{1}{4}$
 $y = {}^3\log(4x) + 5$
 $\downarrow$ 3 naar links
 $y = {}^3\log(4(x + 3)) + 5$
 oftewel $y = {}^3\log(4x + 12) + 5$

- 80 a** $y = {}^3\log(x)$
 $\downarrow$ translatie $(4, 2)$
 $f(x) = {}^3\log(x - 4) + 2$



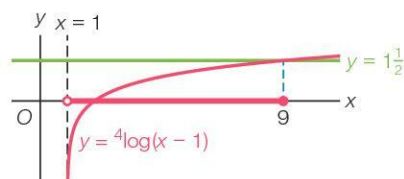
- $D_f = \langle 4, \rightarrow \rangle$
- c** $f(x) = 6$ geeft ${}^3\log(x - 4) + 2 = 6$
 ${}^3\log(x - 4) = 4$
 $x - 4 = 3^4$
 $x - 4 = 81$
 $x = 85$
- $f(x) < 6$ geeft $4 < x < 85$
- d** $f(7) = {}^3\log(3) + 2 = 1 + 2 = 3$
 $x \leq 7$ geeft $f(x) \leq 3$

81 a ${}^4\log(x-1) = 1\frac{1}{2}$

$$x-1 = 4^{1\frac{1}{2}}$$

$$x-1 = 8$$

$$x = 9$$



$${}^4\log(x-1) \leq 1\frac{1}{2} \text{ geeft } 1 < x \leq 9$$

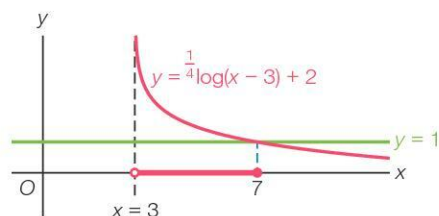
b $\frac{1}{4}\log(x-3) + 2 = 1$

$$\frac{1}{4}\log(x-3) = -1$$

$$x-3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$

$$x-3 = 4$$

$$x = 7$$

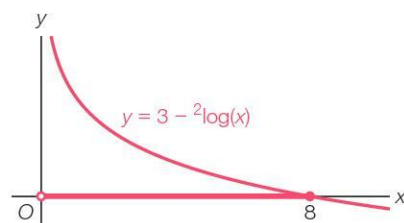


$$\frac{1}{4}\log(x-3) + 2 \geq 1 \text{ geeft } 3 < x \leq 7$$

c $3 - {}^2\log(x) = 0$

$${}^2\log(x) = 3$$

$$x = 2^3 = 8$$



$$3 - {}^2\log(x) \geq 0 \text{ geeft } 0 < x \leq 8$$

82 $y = {}^2\log(x)$
 $\downarrow$ translatie (15, 0)

$$y = {}^2\log(x-15)$$

$$\downarrow \text{verm. } y\text{-as, } \frac{1}{5}$$

$$y = {}^2\log(5x-15)$$

$$\downarrow \text{verm. } x\text{-as, } -4$$

$$y = -4 \cdot {}^2\log(5x-15)$$

$$\downarrow \text{translatie } (0, 6)$$

$$y = 6 - 4 \cdot {}^2\log(5x-15)$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 3$.

of $y = {}^2\log(x)$
 $\downarrow$ verm. y -as, $\frac{1}{5}$

$$y = {}^2\log(5x)$$

$$\downarrow \text{verm. } x\text{-as, } -4$$

$$y = -4 \cdot {}^2\log(5x)$$

$$\downarrow \text{translatie } (3, 6)$$

$$y = 6 - 4 \cdot {}^2\log(5(x-3))$$

$$\text{oftewel } y = 6 - 4 \cdot {}^2\log(5x-15)$$

Diagnostische toets

Bladzijde 48

1 a $(a^{-\frac{1}{4}})^3 = a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

b $a^{-2}b^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{a^2} \cdot \sqrt[5]{b} = \frac{\sqrt[5]{b}}{a^2}$

c $7a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{5}} = 7 \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[5]{b^3} = \frac{7 \cdot \sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[3]{a}}$

d $6a^{4\frac{2}{3}} = 6a^4 \cdot a^{\frac{2}{3}} = 6a^4 \cdot \sqrt[3]{a^2}$

e $\frac{3}{4}a^{-2}b^{2\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot b^2 \cdot b^{\frac{1}{3}} = \frac{3b^2 \cdot \sqrt[3]{b}}{4a^2}$

f $(3a^{-2\frac{1}{2}})^{-2} = 3^{-2} \cdot a^5 = \frac{1}{9}a^5$

2 a $y = \frac{1}{5x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{5}x^{-2\frac{1}{2}}$

Dus $y = \frac{1}{5}x^{-2\frac{1}{2}}$.

b $y = \frac{12}{5x^{-3}} \cdot \sqrt[5]{x^3} = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{x^{-3}} \cdot x^{\frac{3}{5}} = 2\frac{2}{5} \cdot x^3 \cdot x^{\frac{3}{5}} = 2\frac{2}{5}x^{3\frac{3}{5}}$

Dus $y = 2\frac{2}{5}x^{3\frac{3}{5}}$.

c $y = 3x^{0,3} \cdot (4x^{0,5})^4 = 3x^{0,3} \cdot 4^4 \cdot x^2 = 768x^{2,3}$
Dus $y = 768x^{2,3}$.

3 a $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^5 + 3$

↓ verm. x-as, -2

$y = (x-2)^5 - 6$

↓ translatie (-3, 6)

$y = (x+1)^5$

Het punt van symmetrie is (-1, 0).

b $g(x) = \frac{2}{3}(x+1)^4 - 2$

↓ translatie (1, 5)

$y = \frac{2}{3}x^4 + 3$

↓ verm. x-as, 5

$h(x) = 3\frac{1}{3}x^4 + 15$

min. is $h(0) = 15$

4 a $x - 4 \geq 0$

$x \geq 4$

Dus randpunt (4, 1), $D_f = [4, \rightarrow\rangle$ en $B_f = [1, \rightarrow\rangle$.

b $x + 2 \geq 0$

$x \geq -2$

Dus randpunt (-2, -4), $D_g = [-2, \rightarrow\rangle$ en $B_g = \langle \leftarrow, -4]$.

c $x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

Dus randpunt (3, 5), $D_h = [3, \rightarrow\rangle$ en $B_h = \langle \leftarrow, 5]$.

5 a $5 - 2x \geq 0$

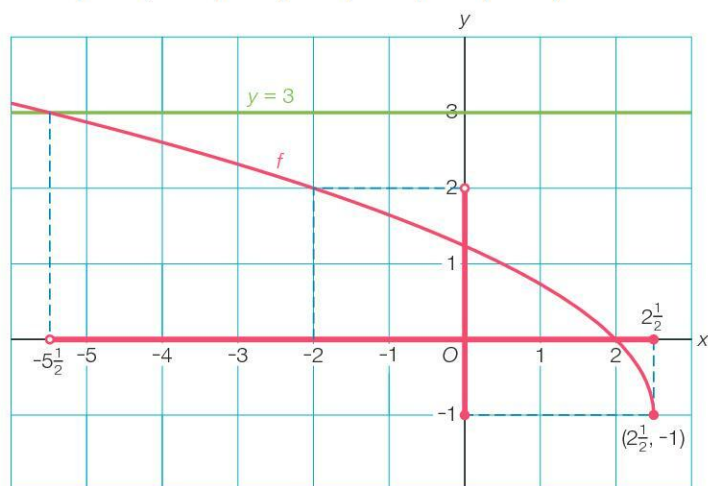
$$-2x \geq -5$$

$$x \leq 2\frac{1}{2}$$

Dus $D_f = \langle \leftarrow, 2\frac{1}{2} \rangle$ en randpunt $(2\frac{1}{2}, -1)$.

Voer in $y_1 = \sqrt{5 - 2x} - 1$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$2\frac{1}{2}$
$f(x)$	2,6	2,3	2	1,6	1,2	0,7	0	-1



$$B_f = [-1, \rightarrow)$$

b Voer in $y_2 = 3$.

De optie snijpunt geeft $x = -5\frac{1}{2}$.

$$f(x) < 3 \text{ geeft } -5\frac{1}{2} < x \leq 2\frac{1}{2}$$

c $f(-2) = 2$

$$x > -2 \text{ geeft } -1 \leq f(x) < 2$$

6 a $2x = \sqrt{2 - 7x}$

kwadrateren geeft

$$4x^2 = 2 - 7x$$

$$4x^2 + 7x - 2 = 0$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot -2 = 81$$

$$x = \frac{-7 + 9}{8} = \frac{1}{4} \vee x = \frac{-7 - 9}{8} = -2$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ geeft } \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} \text{ vold.}$$

$$x = -2 \text{ geeft } -4 = \sqrt{16} \text{ vold. niet}$$

b $28 - x\sqrt{x} = 1$

$$-x\sqrt{x} = -27$$

kwadrateren geeft

$$x^3 = 729$$

$$x = 9 \text{ geeft } 28 - 9\sqrt{9} = 1 \text{ vold.}$$

c $2x - \sqrt{x} = 6$

$$2x - 6 = \sqrt{x}$$

kwadrateren geeft

$$(2x - 6)^2 = x$$

$$4x^2 - 24x + 36 = x$$

$$4x^2 - 25x + 36 = 0$$

$$D = 25^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 49$$

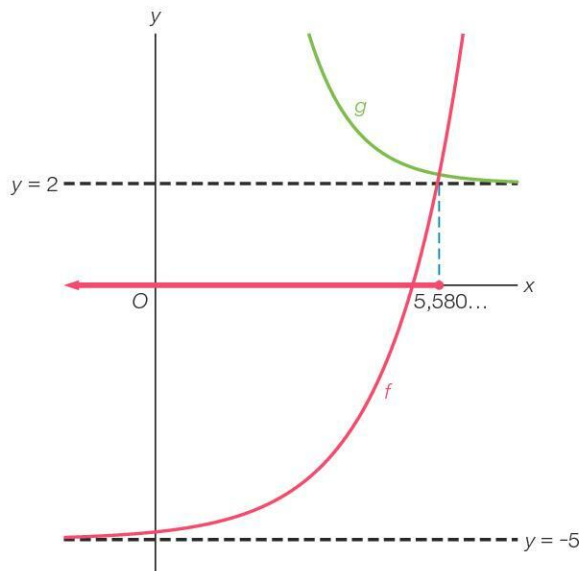
$$x = \frac{25 + 7}{8} = 4 \vee x = \frac{25 - 7}{8} = 2\frac{1}{4}$$

$$x = 4 \text{ geeft } 8 - \sqrt{4} = 6 \text{ vold.}$$

$$x = 2\frac{1}{4} \text{ geeft } 4\frac{1}{2} - \sqrt{2\frac{1}{4}} = 6 \text{ vold. niet}$$

Bladzijde 49

- 7 a** $y = 2^x$
 $\downarrow$ verm. x -as, $0,3$
 $y = 0,3 \cdot 2^x$
 $\downarrow$ translatie $(1, -5)$
 $f(x) = 0,3 \cdot 2^{x-1} - 5$
- b** $B_f = \langle -5, \rightarrow \rangle$
 De horizontale asymptoot is de lijn $y = -5$.
- c** Voer in $y_1 = 0,3 \cdot 2^{x-1} - 5$ en $y_2 = 2 + (\frac{1}{3})^{x-4}$.
 De optie snijpunt geeft $x = 5,580...$



$f(x) \leq g(x)$ geeft $x \leq 5,58$

- d** $f(x) = p$ heeft één oplossing als $p > -5$.
 $g(x) = p$ heeft geen oplossing als $p \leq 2$.
 Dus $-5 < p \leq 2$.
- e** $g(3) = 2 + (\frac{1}{3})^{3-4} = 2 + (\frac{1}{3})^{-1} = 2 + 3 = 5$
 $x \leq 3$ geeft $g(x) \geq 5$

- 8 a** $y = 108 \cdot 3^{4x-3} = 108 \cdot 3^{4x} \cdot 3^{-3} = 108 \cdot (3^4)^x \cdot \frac{1}{27} = 4 \cdot 81^x$
 Dus $y = 4 \cdot 81^x$.
- b** $y = \frac{250}{5^{-2x+3}} = \frac{250}{125 \cdot 5^{-2x}} = 2 \cdot 5^{2x} = 2 \cdot (5^2)^x = 2 \cdot 25^x$
 Dus $y = 2 \cdot 25^x$.
- c** $y = 2^{3x-2} \cdot 2^{-4x+3} = 2^{-x+1} = 2 \cdot 2^{-x} = 2 \cdot (\frac{1}{2})^x$
 Dus $y = 2 \cdot (\frac{1}{2})^x$.

- 9 a** $5^{x-1} = 125$
 $5^{x-1} = 5^3$
 $x-1 = 3$
 $x = 4$
- b** $3^{2x-5} = \frac{1}{27}$
 $3^{2x-5} = 3^{-3}$
 $2x-5 = -3$
 $2x = 2$
 $x = 1$
- c** $2 \cdot 4^{2x-1} - 3 = 61$
 $2 \cdot 4^{2x-1} = 64$
 $4^{2x-1} = 32$
 $(2^2)^{2x-1} = 2^5$
 $2^{4x-2} = 2^5$
 $4x-2 = 5$
 $4x = 7$
 $x = 1\frac{3}{4}$

10 a ${}^2\log(\frac{1}{4}\sqrt{8}) = {}^2\log(2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = {}^2\log(2^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{3}{2}$
b ${}^3\log(27\sqrt{3}) = {}^3\log(3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^3\log(3^{\frac{7}{2}}) = \frac{7}{2}$
c ${}^5\log(\frac{1}{125} \cdot \sqrt[3]{5}) = {}^5\log(5^{-3} \cdot 5^{\frac{1}{3}}) = {}^5\log(5^{-\frac{8}{3}}) = -\frac{8}{3}$

11 a ${}^4\log(2x-3) = 2$
 $2x-3 = 4^2$
 $2x-3 = 16$
 $2x = 19$
 $x = 9\frac{1}{2}$

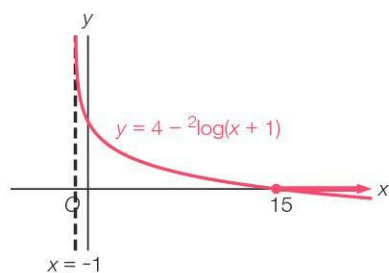
b ${}^{\frac{1}{2}}\log(x-3) = -4$
 $x-3 = (\frac{1}{2})^{-4}$
 $x-3 = (2^{-1})^{-4}$
 $x-3 = 2^4$
 $x-3 = 16$
 $x = 19$

c $5 + 3 \cdot {}^2\log(x) = 20$
 $3 \cdot {}^2\log(x) = 15$
 ${}^2\log(x) = 5$
 $x = 2^5$
 $x = 32$

12 a $y = {}^2\log(x)$
↓ verm. x-as, -3
 $y = -3 \cdot {}^2\log(x)$
↓ translatie (4, -2)
 $y = -3 \cdot {}^2\log(x-4) - 2$

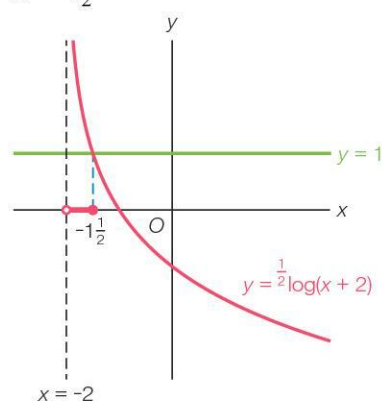
b $y = {}^2\log(x)$
↓ translatie (-3, 2)
 $y = {}^2\log(x+3) + 2$
↓ verm. x-as, $\frac{1}{2}$
 $y = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(x+3) + 1$

13 a $4 - {}^2\log(x+1) = 0$
 ${}^2\log(x+1) = 4$
 $x+1 = 16$
 $x = 15$



$4 - {}^2\log(x+1) \leq 0$ geeft $x \geq 15$

b ${}^{\frac{1}{2}}\log(x+2) = 1$
 $x+2 = \frac{1}{2}$
 $x = -1\frac{1}{2}$



${}^{\frac{1}{2}}\log(x+2) \geq 1$ geeft $-2 < x \leq -1\frac{1}{2}$

6 De afgeleide functie

Voorkennis Hellingen van grafieken en regels voor de afgeleide

Bladzijde 54

- 1 a** Voer in $y_1 = -x^3 + 5x^2 - 6x + 5$.
Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = -3$.
$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ f(3) = 5, \text{ dus } A(3, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 3 + b = 5 \\ -9 + b = 5 \\ b = 14 \end{array}$$

Dus $k: y = -3x + 14$.
- b** Stel $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = -6$ en $b = 5$.
Dus $l: y = -6x + 5$.
- 2 a** $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6x - 1$ geeft $f'(x) = 2x^3 - 6x + 6$
- b** $g(x) = (5x^2 - 2)^2 = 25x^4 - 20x^2 + 4$ geeft $g'(x) = 100x^3 - 40x$
- c** $h(p) = -\frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{5}p^2 - 8$ geeft $h'(p) = -\frac{1}{2}p^2 + \frac{2}{5}p$
- d** $k(q) = 10 - 5q^2 + 9q^3 - a^4$ geeft $k'(q) = -10q + 27q^2$
- 3 a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 7x + 5$ geeft $f'(x) = 4x^2 - 12x + 7$
De formule van de hellinggrafiek is $y = 4x^2 - 12x + 7$.
- b** $x = 1$ geeft helling $= 4 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 7 = 4 - 12 + 7 = -1$

6.1 Raaklijnen en toppen

Bladzijde 55

- 1 a** $y_A = f(1) = 1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1 - 4 = 1 - 1 + 2 - 4 = -2$
- b** $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 4$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$
De formule van de hellinggrafiek van f is $y = 3x^2 - 2x + 2$.
- c** $x = 1$ geeft helling $= 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 3 - 2 + 2 = 3$
- d** De formule van k is van de vorm $y = ax + b$.
 a is gelijk aan de helling van de grafiek van f in A , dus $a = 3$.
 $A(1, -2)$ ligt op k , en hiermee bereken je b .
$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + b \\ A(1, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 1 + b = -2 \\ 3 + b = -2 \\ b = -5 \end{array}$$

Dus $k: y = 3x - 5$.

Bladzijde 56

- 2 a** $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x$
Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 = 8$.
$$\left. \begin{array}{l} y = 8x + b \\ f(4) = 2, \text{ dus } A(4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 \cdot 4 + b = 2 \\ 32 + b = 2 \\ b = -30 \end{array}$$

Dus $k: y = 8x - 30$.
- b** Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5\frac{1}{2}$.
$$\left. \begin{array}{l} y = 5\frac{1}{2}x + b \\ f(-1) = -\frac{1}{2}, \text{ dus } B(-1, -\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5\frac{1}{2} \cdot (-1) + b = -\frac{1}{2} \\ -5\frac{1}{2} + b = -\frac{1}{2} \\ b = 5 \end{array}$$

Dus $l: y = 5\frac{1}{2}x + 5$.

- 3 a** $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = 7$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 7x + b \\ A(2, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7 \cdot 2 + b = 1 \\ 14 + b = 1 \\ b = -13 \end{array}$$

 Dus $k: y = 7x - 13$.
b Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(0) = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x + b \\ B(0, -1) \end{array} \right\} l: y = -x - 1$$

- 4 a** $g(x) = 0$ geeft $2x^2 - 6x = 0$

$$2x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

 Dus $A(3, 0)$.
b $g(x) = 2x^2 - 6x$ geeft $g'(x) = 4x - 6$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = g'(3) = 4 \cdot 3 - 6 = 6$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 6x + b \\ A(3, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6 \cdot 3 + b = 0 \\ 18 + b = 0 \\ b = -18 \end{array}$$

 Dus $k: y = 6x - 18$.

- 5 a** $f(x) = x^3 - 4x$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 4$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x + b \\ f(1) = -3, \text{ dus } A(1, -3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 + b = -3 \\ b = -2 \end{array}$$

 Dus $k: y = -x - 2$.
b $f(x) = 0$ geeft $x^3 - 4x = 0$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 = 4$$

$$x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$$

 Dus $B(2, 0)$.
 Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 8x + b \\ B(2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 \cdot 2 + b = 0 \\ 16 + b = 0 \\ b = -16 \end{array}$$

 Dus $l: y = 8x - 16$.

- 6** $A(6, -4)$ op de grafiek van f geeft $f(6) = -4$

$$a \cdot 6^2 - 4 \cdot 6 + 2 = -4$$

$$36a - 24 + 2 = -4$$

$$36a = 18$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Dus $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$ en dit geeft $f'(x) = x - 4$.
 Stel $k: y = px + q$ met $p = f'(6) = 6 - 4 = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + q \\ A(6, -4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 6 + q = -4 \\ 12 + q = -4 \\ q = -16 \end{array}$$

 Dus $k: y = 2x - 16$.

Bladzijde 57

- 7 a** $h(x) = -x^2 + 5x - 4$ geeft $h'(x) = -2x + 5$
b $-2x_A + 5 = 2$
 $-2x_A = -3$
 $x_A = 1\frac{1}{2}$
 $y_A = h(1\frac{1}{2}) = -(1\frac{1}{2})^2 + 5 \cdot 1\frac{1}{2} - 4 = 1\frac{1}{4}$

Bladzijde 58

- 8 a** $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ geeft $f'(x) = -2x + 2$
 $rc_{\text{raaklijn}} = 4$, dus $f'(x) = 4$
 $-2x + 2 = 4$
 $-2x = 2$
 $x = -1$
 $x_A = -1$ geeft $y_A = f(-1) = 0$, dus $A(-1, 0)$.
b De helling in het punt B van de grafiek van f is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in B . Deze raaklijn is evenwijdig met de lijn k : $y = -6x + 8$.
Dus $f'(x_B) = rc_{\text{raaklijn}} = rc_k = -6$.
 $f'(x) = -6$
 $-2x + 2 = -6$
 $-2x = -8$
 $x = 4$
 $x_B = 4$ geeft $y_B = f(4) = -5$, dus $B(4, -5)$.

- 9** $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x - 2$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$
 $rc_{\text{raaklijn}} = 3$, dus $f'(x) = 3$
 $\frac{1}{2}x^2 - 3 = 3$
 $\frac{1}{2}x^2 = 6$
 $x^2 = 12$
 $x = 2\sqrt{3}$ of $x = -2\sqrt{3}$
 $f(2\sqrt{3}) = -4$ en $f(-2\sqrt{3}) = 0$
Dus de punten zijn $(2\sqrt{3}, -4)$ en $(-2\sqrt{3}, 0)$.

- 10 a** $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$ geeft $f'(x) = -x^2 + 2x$
Stel l : $y = ax + b$ met $a = f'(3) = -3^2 + 2 \cdot 3 = -3$.
 $y = -3x + b$
 $f(3) = 1$, dus $A(3, 1)$ } $-3 \cdot 3 + b = 1$
 $-9 + b = 1$
 $b = 10$

Dus l : $y = -3x + 10$.

- b** $rc_m = rc_l = -3$, dus $f'(x) = -3$
 $-x^2 + 2x = -3$
 $-x^2 + 2x + 3 = 0$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x + 1)(x - 3) = 0$
 $x = -1$ of $x = 3$
 $x_B = -1$ geeft $y_B = f(-1) = 2\frac{1}{3}$, dus $B(-1, 2\frac{1}{3})$.
 $y = -3x + b$
 $B(-1, 2\frac{1}{3})$ } $-3 \cdot (-1) + b = 2\frac{1}{3}$
 $3 + b = 2\frac{1}{3}$
 $b = -\frac{2}{3}$
Dus m : $y = -3x - \frac{2}{3}$.

11 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 5$ geeft $f'(x) = x^2 - 2x - 2$
 $rc_{\text{raaklijn}} = 1$, dus $f'(x) = 1$
 $x^2 - 2x - 2 = 1$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x+1)(x-3) = 0$
 $x = -1 \vee x = 3$

Raaklijn k in het punt met x -coördinaat -1 .

$$\left. \begin{array}{l} rc_k = 1, \text{ dus } k: y = x + b \\ f(-1) = 5\frac{2}{3}, \text{ dus } (-1, 5\frac{2}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 + b = 5\frac{2}{3} \\ b = 6\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $k: y = x + 6\frac{2}{3}$.

Raaklijn l in het punt met x -coördinaat 3 .

$$\left. \begin{array}{l} rc_l = 1, \text{ dus } l: y = x + b \\ f(3) = -1, \text{ dus } (3, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 + b = -1 \\ b = -4 \end{array}$$

Dus $l: y = x - 4$.

b Onderzoek of de vergelijking $f'(x) = -4$ oplossingen heeft.

$$\begin{aligned} f'(x) = -4 \text{ geeft } x^2 - 2x - 2 &= -4 \\ x^2 - 2x + 2 &= 0 \\ D &= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 \end{aligned}$$

$D < 0$, dus de vergelijking $f'(x) = -4$ heeft geen oplossingen en dus heeft de grafiek van f geen raaklijn met richtingscoëfficiënt -4 .

12 $f(x) = ax^2 + bx$ geeft $f'(x) = 2ax + b$
 $f(-2) = -6$ geeft $4a - 2b = -6$
 $-2b = -4a - 6$
 $b = 2a + 3$
 $f'(-2) = 2$ geeft $-4a + b = 2$
 $b = 4a + 2$
 Hieruit volgt $2a + 3 = 4a + 2$
 $-2a = -1$
 $a = \frac{1}{2}$
 $a = \frac{1}{2}$ geeft $b = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 4$

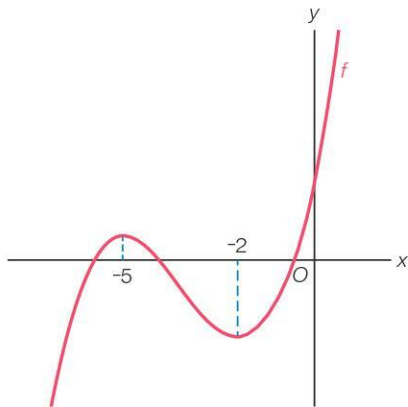
13 a $f(x) = x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$
 $rc_{\text{raaklijn}} = 0$, dus $f'(x) = 0$
 $3x^2 - 3x - 6 = 0$
 $x^2 - x - 2 = 0$
 $(x+1)(x-2) = 0$
 $x = -1 \vee x = 2$

$x_A = -1$ geeft $y_A = f(-1) = 6\frac{1}{2}$, dus $A(-1, 6\frac{1}{2})$.

$x_B = 2$ geeft $y_B = f(2) = -7$, dus $B(2, -7)$.

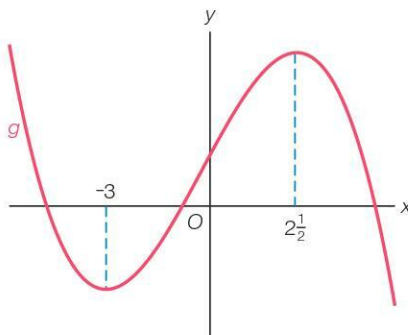
b De formule van de raaklijn in A is $y = 6\frac{1}{2}$.
 De formule van de raaklijn in B is $y = -7$.

- 14 a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 + 10x + 5$ geeft $f'(x) = x^2 + 7x + 10$
 $f'(x) = 0$ geeft $x^2 + 7x + 10 = 0$
 $(x+2)(x+5) = 0$
 $x = -2 \vee x = -5$



max. is $f(-5) = \frac{5}{6}$ en min. is $f(-2) = -3\frac{2}{3}$.

- b** $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + 3\frac{3}{4}x + 3$ geeft $g'(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + 3\frac{3}{4}$
 $g'(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + 3\frac{3}{4} = 0$
 $2x^2 + x - 15 = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -15 = 121$, dus $\sqrt{D} = 11$
 $x = \frac{-1 \pm 11}{4} = 2\frac{1}{2} \vee x = -3$



min. is $g(-3) = -4\frac{7}{8}$ en max. is $g(2\frac{1}{2}) = 8\frac{95}{96}$.

- 15 a** $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 40$ geeft $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$
 $f'(x) = 0$ geeft $12x^3 - 12x^2 - 24x = 0$
 $12x(x^2 - x - 2) = 0$
 $12x(x+1)(x-2) = 0$
 $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$

$x_A = -1$ geeft $y_A = f(-1) = 35$, dus $A(-1, 35)$.

$x_B = 0$ geeft $y_B = f(0) = 40$, dus $B(0, 40)$.

$x_C = 2$ geeft $y_C = f(2) = 8$, dus $C(2, 8)$.

- b** $B_f = [8, \rightarrow)$

- c** Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 40}{2 - 0} = -16$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -16x + b \\ B(0, 40) \end{array} \right\} k: y = -16x + 40$$

k snijden met de grafiek van f geeft $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 40 = -16x + 40$.

Voer in $y_1 = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 40$ en $y_2 = -16x + 40$.

De optie snijpunt geeft $D(-2, 72)$ en $E(1, 33; 18, 67)$.

d Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(1) = 12 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 = -24$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -24x + b \\ f(1) = 27, \text{ dus } F(1, 27) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -24 \cdot 1 + b = 27 \\ -24 + b = 27 \\ b = 51 \end{array}$$

Dus $l: y = -24x + 51$.

e l snijden met de grafiek van f geeft $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 40 = -24x + 51$.

Voer in $y_1 = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 40$ en $y_2 = -24x + 51$.

De optie snijpunt geeft $G(-2,28; 105,65)$ en $H(1,61; 12,35)$.

16 a $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 4x + 3$ geeft $f'(x) = x^3 - 2x - 4$

b $f'(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

c Uit de schets blijkt dat er een laagste punt is met een horizontale raaklijn en omdat $f'(2) = 0$ is er dus een extreme waarde voor $x = 2$.

Bladzijde 61

17 a $f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 18 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 - 10 = 4 - 18 + 24 - 10 = 0$

De functie heeft geen extreme waarde voor $x = 1$, want de grafiek heeft geen top voor $x = 1$.

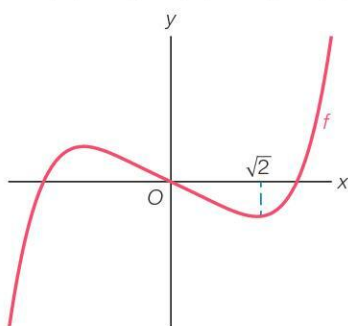
b $f(1) = 4$, dus horizontale raaklijn $y = 4$.

$f(2\frac{1}{2}) = 2\frac{5}{16}$, dus horizontale raaklijn $y = 2\frac{5}{16}$.

Bladzijde 62

18 a $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - 7x$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{2}x^4 - 1\frac{1}{2}x^2 - 7$

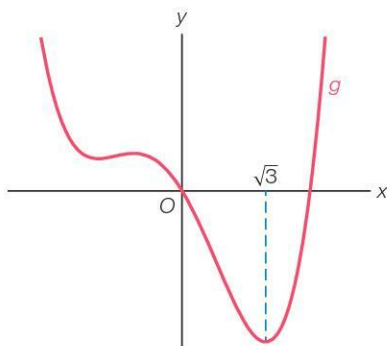
$f'(\sqrt{2}) = 2\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^4 - 1\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 - 7 = 10 - 3 - 7 = 0$



$f'(\sqrt{2}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{2}$.
Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{2}$.

b $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 3x$ geeft $g'(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$

$g'(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 - 3 \cdot \sqrt{3} - 3 = 3\sqrt{3} + 3 - 3\sqrt{3} - 3 = 0$



$g'(\sqrt{3}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{3}$.
Dus g heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{3}$.

19 a $f(x) = 0$ geeft $(x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0$
 $x^2 + 1 = 0 \vee x^2 - 4 = 0$
 $x^2 = -1 \vee x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$

$A(-2, 0)$ en $B(2, 0)$

$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2 + x^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 6x$

Stel raaklijn in A is $k: y = ax + b$ met $a = f'(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 6 \cdot (-2) = -20$.

$$\begin{aligned} y = -20x + b \\ A(-2, 0) \quad \left. \begin{aligned} -20 \cdot (-2) + b &= 0 \\ 40 + b &= 0 \\ b &= -40 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Dus $k: y = -20x - 40$.

Stel raaklijn in B is $l: y = ax + b$ met $a = f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 = 20$.

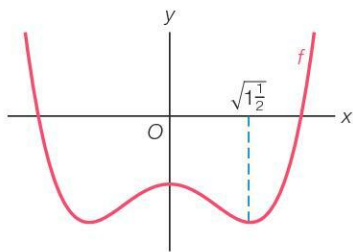
$$\begin{aligned} y = 20x + b \\ B(2, 0) \quad \left. \begin{aligned} 20 \cdot 2 + b &= 0 \\ 40 + b &= 0 \\ b &= -40 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Dus $l: y = 20x - 40$.

b $f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 = 4 - 6 = -2$

$f'(1)$ is niet gelijk aan 0, dus f heeft geen extreme waarde voor $x = 1$.

c $f'(\sqrt{1\frac{1}{2}}) = 4 \cdot (\sqrt{1\frac{1}{2}})^3 - 6 \cdot \sqrt{1\frac{1}{2}} = 4 \cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{1\frac{1}{2}} - 6\sqrt{1\frac{1}{2}} = 6\sqrt{1\frac{1}{2}} - 6\sqrt{1\frac{1}{2}} = 0$



$f'(\sqrt{1\frac{1}{2}}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

20 a $f(x) = (\frac{1}{2}x^3 - 4)^2 - 5 = \frac{1}{4}x^6 - 4x^3 + 11$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^5 - 12x^2$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^5 - 12 \cdot 1^2 = -10\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} y = -10\frac{1}{2}x + b \\ f(1) = 7\frac{1}{4}, \text{ dus } A(1, 7\frac{1}{4}) \quad \left. \begin{aligned} -10\frac{1}{2} \cdot 1 + b &= 7\frac{1}{4} \\ -10\frac{1}{2} + b &= 7\frac{1}{4} \\ b &= 17\frac{3}{4} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Dus $k: y = -10\frac{1}{2}x + 17\frac{3}{4}$.

b $f'(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^5 - 12 \cdot 0^2 = 0$

$f'(0) = 0$ en in de schets in het leerboek is te zien dat de grafiek geen top heeft voor $x = 0$.

Dus f heeft geen extreme waarde voor $x = 0$.

c $f'(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^5 - 12 \cdot 2^2 = \frac{1}{2} \cdot 32 - 12 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

$f'(2) = 0$ en in de schets in het leerboek is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = 2$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = 2$.

d $f(2) = (\frac{1}{2} \cdot 2^3 - 4)^2 - 5 = -5$

Zie de schets in het leerboek: $B_f = [-5, \rightarrow)$.

6.2 De afgeleide van machtsfuncties

Bladzijde 64

- 21 a Uit $x^{-p} = \frac{1}{x^p}$ volgt $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, dus $g(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$.
 b $g(x) = x^{-2}$ geeft $g'(x) = -2x^{-3}$
 Uit $x^{-p} = \frac{1}{x^p}$ volgt $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, dus $g'(x) = -2x^{-3} = -2 \cdot \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$.

c

X	Y ₂	Y ₃	FOOT
0	0	-2	
1	-0.25	-0.074	
2	-0.074	-0.031	
3	-0.031	-0.016	
4	-0.016	-0.009	
5	-0.009	-0.006	
6	-0.006	-0.004	
7	-0.004	-0.003	
8	-0.003	-0.002	
9	-0.002		
10			

$Y_2 \leftarrow \frac{d}{dx}(Y_1) \Big|_{x=x}$

Conclusie: er lijkt inderdaad te gelden dat $g(x) = \frac{1}{x^2}$ geeft $g'(x) = -\frac{2}{x^3}$.

Bladzijde 66

- 22 a $f(x) = \frac{5}{x^3} = 5x^{-3}$ geeft $f'(x) = -15x^{-4} = -\frac{15}{x^4}$
 b $g(x) = \frac{1}{5x^3} = \frac{1}{5}x^{-3}$ geeft $g'(x) = -\frac{3}{5}x^{-4} = -\frac{3}{5x^4}$
 c $h(x) = 5x^2 - \frac{5}{x^2} = 5x^2 - 5x^{-2}$ geeft $h'(x) = 10x + 10x^{-3} = 10x + \frac{10}{x^3}$
- 23 a $f(x) = \frac{x^4 - 5}{x^3} = x - 5x^{-3}$ geeft $f'(x) = 1 + 15x^{-4} = 1 + \frac{15}{x^4}$
 b $g(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^3} = 2x^{-1} - 3x^{-3}$ geeft $g'(x) = -2x^{-2} + 9x^{-4} = -\frac{2}{x^2} + \frac{9}{x^4}$
 c $h(x) = \frac{x+2}{3x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^{-1}$ geeft $h'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} = -\frac{2}{3x^2}$
- 24 a $f(x) = \frac{2x-1}{3x^2} = \frac{2}{3}x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-2}$ geeft $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} + \frac{2}{3}x^{-3} = -\frac{2}{3x^2} + \frac{2}{3x^3}$
 b $g(x) = 6 - \frac{x^2-1}{x} = 6 - x + x^{-1}$ geeft $g'(x) = -1 - x^{-2} = -1 - \frac{1}{x^2}$
 c $h(x) = \frac{5}{2x^2} - \frac{2x^2}{5} = \frac{5}{2}x^{-2} - \frac{2}{5}x^2$ geeft $h'(x) = -5x^{-3} - \frac{4}{5}x = -\frac{5}{x^3} - \frac{4}{5}x$

Bladzijde 67

- 25 a $f(x) = 0$ geeft $\frac{3x+3}{x} = 0$
 $3x+3=0$
 $3x=-3$
 $x=-1$ vold.

Dus $A(-1, 0)$.

$$f(x) = \frac{3x+3}{x} = 3 + 3x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(-1) = -\frac{3}{(-1)^2} = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ A(-1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot -1 + b = 0 \\ 3 + b = 0 \end{array}$$

$$b = -3$$

Dus $k: y = -3x - 3$.

b $rc_{\text{raaklijn}} = -\frac{3}{4}$, dus $f'(x) = -\frac{3}{4}$

$$-\frac{3}{x^2} = -\frac{3}{4}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

vold. vold.

$$f(2) = 4\frac{1}{2} \text{ en } f(-2) = 1\frac{1}{2}, \text{ dus de raakpunten zijn } (2, 4\frac{1}{2}) \text{ en } (-2, 1\frac{1}{2}).$$

26 a $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x} = x + 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(3) = 1 - \frac{4}{3^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{5}{9}x + b \\ f(3) = \frac{13}{3}, \text{ dus } A(3, \frac{13}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{5}{9} \cdot 3 + b = \frac{13}{3} \\ \frac{5}{3} + b = \frac{13}{3} \end{array}$$

$$b = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Dus $k: y = \frac{5}{9}x + 2\frac{2}{3}$.

b $rc_{\text{raaklijn}} = -3$, dus $f'(x) = -3$

$$1 - \frac{4}{x^2} = -3$$

$$-\frac{4}{x^2} = -4$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

vold. vold.

$$f(1) = 5 \text{ en } f(-1) = -5, \text{ dus de raakpunten zijn } (1, 5) \text{ en } (-1, -5).$$

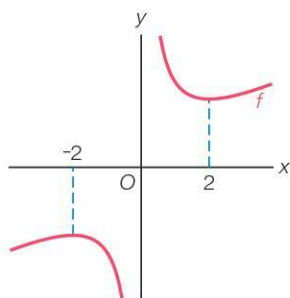
c $f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{4}{x^2} = 0$

$$1 = \frac{4}{x^2}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

vold. vold.



max. is $f(-2) = -4$ en min. is $f(2) = 4$.

d $f'(x) = 2$ geeft $1 - \frac{4}{x^2} = 2$

$$-\frac{4}{x^2} = 1$$

$$x^2 = -4$$

geen oplossingen

Dus er is geen raaklijn met richtingscoëfficiënt 2.

27 $f(x) = \frac{x^2}{a} + \frac{a}{x^2} = \frac{1}{a}x^2 + ax^{-2}$ geeft $f'(x) = \frac{2}{a}x - 2ax^{-3} = \frac{2x}{a} - \frac{2a}{x^3}$

$f'(x) = 0$ geeft $\frac{2x}{a} - \frac{2a}{x^3} = 0$

$\frac{2x}{a} = \frac{2a}{x^3}$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$2x^4 = 2a^2$

$x^4 = a^2$

$x^2 = a \vee x^2 = -a$

$x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}$

vold. vold.

$x_{\text{top}} = \sqrt{a}$ geeft $y_{\text{top}} = f(\sqrt{a}) = \frac{(\sqrt{a})^2}{a} + \frac{a}{(\sqrt{a})^2} = \frac{a}{a} + \frac{a}{a} = 1 + 1 = 2$

$x_{\text{top}} = -\sqrt{a}$ geeft $y_{\text{top}} = f(-\sqrt{a}) = \frac{(-\sqrt{a})^2}{a} + \frac{a}{(-\sqrt{a})^2} = \frac{a}{a} + \frac{a}{a} = 1 + 1 = 2$

Dus voor elke waarde van a liggen de toppen van de grafiek van f op de lijn $y = 2$.

28 a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

b $x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2\frac{1}{2}}$

c $\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{-1\frac{1}{2}}$

d $x^3 \cdot \sqrt{x} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$

29 a $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b $2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$

c $-1\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

d $1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

Bladzijde 68

30 a $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b

X	Y ₂	Y ₃
0	0.5	0.5
1	0.3536	0.3536
2	0.2887	0.2887
3	0.25	0.25
4	0.2236	0.2236
5	0.2041	0.2041
6	0.189	0.189
7	0.1768	0.1768
8	0.1667	0.1667
9	0.1581	0.1581

$Y_2 = \frac{d}{dx}(Y_1) \Big|_{x=X}$

Conclusie: er lijkt inderdaad te gelden dat $g(x) = \sqrt{x}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Bladzijde 69

31 a $f(x) = x + \sqrt{x} = x + x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x} = x \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{1\frac{1}{3}}$ geeft $g'(x) = 1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

c $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

d $k(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3} = x^3 \cdot x^{\frac{3}{5}} = x^{3\frac{3}{5}}$ geeft $k'(x) = 3\frac{3}{5}x^{2\frac{3}{5}} = 3\frac{3}{5} \cdot x^2 \cdot x^{\frac{3}{5}} = 3\frac{3}{5}x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3}$

32 a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{2\frac{1}{4}}$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4}x \cdot \sqrt[4]{x}$

b $g(x) = \frac{4x^2 + 1}{x\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{4x^2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = 4x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ geeft

$$g'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2x^{\frac{5}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2 \cdot x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

c $h(x) = (x^2 + 1)(1 + \sqrt{x}) = x^2 + x^2 \cdot \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} = x^2 + x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{\frac{1}{2}} = x^2 + x^{2\frac{1}{2}} + 1 + x^{\frac{1}{2}}$

geeft $h'(x) = 2x + 2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 2x + 2\frac{1}{2} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = 2x + 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d $k(x) = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{4}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{2}{3}} - 4x^{-\frac{1}{3}}$ geeft

$$k'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3x^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} + \frac{4}{3 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} + \frac{4}{3x \cdot \sqrt[3]{x}}$$

33 a $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}}$ geeft $f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3}{2 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

b $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

c $h(x) = \frac{x^2 - 2}{x\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

d $k(x) = x^2(x\sqrt{x} - 3) = x^3 \cdot \sqrt{x} - 3x^2 = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x^2 = x^{3\frac{1}{2}} - 3x^2$ geeft

$$k'(x) = 3\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6x = 3\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6x = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x} - 6x$$

34 a $f(x) = (x\sqrt{x} - 3)^2 = x^3 - 6x\sqrt{x} + 9 = x^3 - 6x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 9 = x^3 - 6x^{\frac{3}{2}} + 9$ geeft

$$f'(x) = 3x^2 - 9x^{\frac{1}{2}} = 3x^2 - 9\sqrt{x}$$

b $g(x) = \frac{2x-3}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{2x}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x}{x^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{x^{\frac{5}{2}}} = 2x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{5}{2}}$ geeft

$$g'(x) = -3x^{-\frac{3}{2}} + 7\frac{1}{2}x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{15}{2x^{\frac{7}{2}}} = -\frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} + \frac{15}{2 \cdot x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{x^2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{15}{2x^3 \cdot \sqrt{x}}$$

c $h(x) = (x - \sqrt[3]{x})^2 = (x - x^{\frac{1}{3}})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}} + (x^{\frac{1}{3}})^2 = x^2 - 2x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$ geeft

$$h'(x) = 2x - 2\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 2x - 2\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = 2x - 2\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

d $k(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt[4]{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{1\frac{3}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}$ geeft

$$k'(x) = 1\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{1}{4}} = 1\frac{3}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = 1\frac{3}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{x \cdot \sqrt[4]{x}}$$

35 $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} = 3x^{\frac{2}{3}}$ geeft $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{8}) = \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(\frac{1}{8}) = \frac{3}{4}, \text{ dus } A(\frac{1}{8}, \frac{3}{4}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot \frac{1}{8} + b = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} + b = \frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $k: y = 4x + \frac{1}{4}$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(8) = \frac{2}{\sqrt[3]{8}} = \frac{2}{2} = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} y = x + b \\ f(8) = 12, \text{ dus } B(8, 12) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 + b = 12 \\ b = 4 \end{array}$$

Dus $l: y = x + 4$.

Snijden van k en l geeft $4x + \frac{1}{4} = x + 4$

$$3x = \frac{15}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} \\ y = x + 4 \end{array} \right\} y = 1\frac{1}{4} + 4 = 5\frac{1}{4}$$

Dus $C(1\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4})$.

36 a $f(x) = x\sqrt{x} - 3x = x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x = x^{1\frac{1}{2}} - 3x$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3$

$f'(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$

$$1\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

$$f(4) = 4\sqrt{4} - 3 \cdot 4 = 8 - 12 = -4$$

Zie figuur 6.18 in het leerboek.

min. is $f(4) = -4$.

b Stel $k: y = ax$ met $a = f'(0) = 1\frac{1}{2}\sqrt{0} - 3 = -3$.

Dus $k: y = -3x$.

c $rc_f = 3$, dus $f'(x) = 3$

$$1\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 3$$

$$1\frac{1}{2}\sqrt{x} = 6$$

$$\sqrt{x} = 4$$

$$x = 16$$

$$\left. \begin{array}{l} f(16) = 16, \text{ dus } A(16, 16) \\ y = 3x + b \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 16 + b = 16 \\ 48 + b = 16 \\ b = -32 \end{array}$$

Dus $l: y = 3x - 32$.

Bladzijde 70

37 a $f(x) = \frac{x^3 + 2}{\sqrt{x}} = \frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{2\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = 2\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{1} - \frac{1}{1 \cdot \sqrt{1}} = 2\frac{1}{2} - 1 = 1\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ f(1) = 3, \text{ dus } A(1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 3 \\ 1\frac{1}{2} + b = 3 \\ b = 1\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = 1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{b } f'(x) = 0 \text{ geeft } 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} &= 0 \\ 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} &= \frac{1}{x\sqrt{x}} \\ 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} \cdot x\sqrt{x} &= 1 \\ 2\frac{1}{2}x^3 &= 1 \\ x^3 &= \frac{2}{5} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \text{ vold.} \end{aligned}$$

Er is gegeven dat de grafiek een top heeft en de vergelijking $f'(x) = 0$ heeft één oplossing, dus deze oplossing moet de x -coördinaat van de top zijn.

$$\text{Dus } x_{\text{top}} = \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \text{ en } p = \frac{2}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{38 a } s(t) &= 10t\sqrt{t} = 10t \cdot t^{\frac{1}{2}} = 10t^{\frac{3}{2}} \text{ geeft } s'(t) = 15t^{\frac{1}{2}} = 15\sqrt{t} \\ s'(8) &= 15\sqrt{8} = 15 \cdot 2\sqrt{2} = 30\sqrt{2} \\ \text{Dus de snelheid na acht seconden is } 30\sqrt{2} \text{ m/s.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } 108 \text{ km/uur is } \frac{108}{3,6} &= 30 \text{ m/s.} \\ s'(t) = 30 \text{ geeft } 15\sqrt{t} &= 30 \\ \sqrt{t} &= 2 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

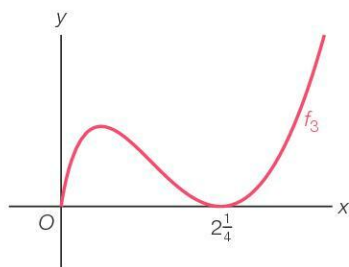
Dus na vier seconden is de snelheid 108 km/uur.

$$\begin{aligned} \text{c } s(9) &= 10 \cdot 9 \cdot \sqrt{9} = 90 \cdot 3 = 270 \text{ en } s'(9) = 15 \cdot \sqrt{9} = 15 \cdot 3 = 45 \\ \text{Dus in de eerste negen seconden legt de trein } 270 \text{ meter af en in de volgende } 51 \\ \text{seconden } 51 \cdot 45 &= 2295 \text{ meter.} \\ \text{Dus in de eerste minuut legt de trein } 270 + 2295 &= 2565 \text{ meter af.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{39 } f(x) &= (2x - p\sqrt{x})^2 = 4x^2 - 4px\sqrt{x} + p^2x = 4x^2 - 4p \cdot x^{\frac{1}{2}} + p^2x \text{ geeft} \\ f'(x) &= 8x - 6p \cdot x^{\frac{1}{2}} + p^2 = 8x - 6p\sqrt{x} + p^2 \\ \text{Een maximum voor } x &= 2\frac{1}{4}, \text{ dus } f'(2\frac{1}{4}) = 0 \end{aligned}$$

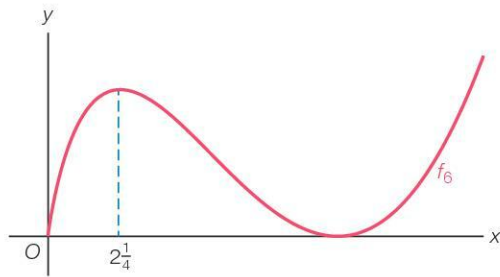
$$\begin{aligned} 8 \cdot 2\frac{1}{4} - 6p\sqrt{2\frac{1}{4}} + p^2 &= 0 \\ 18 - 6p \cdot 1\frac{1}{2} + p^2 &= 0 \\ p^2 - 9p + 18 &= 0 \\ (p - 3)(p - 6) &= 0 \\ p &= 3 \vee p = 6 \end{aligned}$$

$$p = 3 \text{ geeft } f_3(x) = (2x - 3\sqrt{x})^2$$



Voor $p = 3$ heeft f_3 geen maximum voor $x = 2\frac{1}{4}$.

$p = 6$ geeft $f_6(x) = (2x - 6\sqrt{x})^2$



Voor $p = 6$ heeft f_6 een maximum voor $x = 2\frac{1}{4}$.
max. is $f(2\frac{1}{4}) = 20\frac{1}{4}$.

6.3 De kettingregel

Bladzijde 73

40

X	Y ₂	Y ₃
0	153.6	153.6
1	86.4	86.4
2	38.4	38.4
3	9.6	9.6
4	3.2E-6	0
5	9.6	9.6
6	38.4	38.4
7	86.4	86.4
8	153.6	153.6
9	240	240
10	345.6	345.6

$Y_2 \stackrel{d}{=} \frac{d}{dx}(Y_1) \Big|_{x=x}$

Conclusie: er lijkt inderdaad te gelden dat $g(x) = 0,05(4x - 16)^3$ geeft $g'(x) = 0,6(4x - 16)^2$.

Bladzijde 74

- 41
- a $f(x) = (4x + 3)^3$ geeft $f'(x) = 3(4x + 3)^2 \cdot 4 = 12(4x + 3)^2$
 - b $g(x) = (5x - 2)^{-3}$ geeft $g'(x) = -3(5x - 2)^{-4} \cdot 5 = -15(5x - 2)^{-4}$
 - c $h(x) = 6(\frac{1}{2}x - 4)^5$ geeft $h'(x) = 6 \cdot 5(\frac{1}{2}x - 4)^4 \cdot \frac{1}{2} = 15(\frac{1}{2}x - 4)^4$
 - d $k(x) = -3(\frac{1}{6}x + 5)^{-4}$ geeft $k'(x) = -3 \cdot -4(\frac{1}{6}x + 5)^{-5} \cdot \frac{1}{6} = 2(\frac{1}{6}x + 5)^{-5}$
- 42
- a $f(x) = 3x^2 - (\frac{1}{4}x - 2)^3$ geeft $f'(x) = 6x - 3(\frac{1}{4}x - 2)^2 \cdot \frac{1}{4} = 6x - \frac{3}{4}(\frac{1}{4}x - 2)^2$
 - b $g(x) = \frac{5}{(3x - 1)^4} = 5(3x - 1)^{-4}$ geeft $g'(x) = 5 \cdot -4(3x - 1)^{-5} \cdot 3 = -\frac{60}{(3x - 1)^5}$
 - c $h(x) = (4x - 3)^4 - (2x - 5)^3$ geeft
 $h'(x) = 4(4x - 3)^3 \cdot 4 - 3(2x - 5)^2 \cdot 2 = 16(4x - 3)^3 - 6(2x - 5)^2$
 - d $k(x) = 5x - \frac{4}{(3x + 2)^3} = 5x - 4(3x + 2)^{-3}$ geeft $k'(x) = 5 - 4 \cdot -3(3x + 2)^{-4} \cdot 3 = 5 + \frac{36}{(3x + 2)^4}$
- 43
- a $f(x) = (\frac{1}{2}x - 3)^3 - 1\frac{1}{2}x + 10$ geeft $f'(x) = 3(\frac{1}{2}x - 3)^2 \cdot \frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 3)^2 - 1\frac{1}{2}$
 - b $f'(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 3)^2 - 1\frac{1}{2} = 0$
 $1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 3)^2 = 1\frac{1}{2}$
 $(\frac{1}{2}x - 3)^2 = 1$
 $\frac{1}{2}x - 3 = 1 \vee \frac{1}{2}x - 3 = -1$
 - c $f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{2}x - 3 = 1 \vee \frac{1}{2}x - 3 = -1$
 $\frac{1}{2}x = 4 \vee \frac{1}{2}x = 2$
 $x = 8 \vee x = 4$

Zie figuur 6.19 in het leerboek.

max. is $f(4) = 3$ en min. is $f(8) = -1$.

44 a $f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2$ geeft $f'(x) = 4(\frac{1}{4}x - 1)^3 \cdot \frac{1}{4} - 1 = (\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1$
 $f'(x) = 0$ geeft $(\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = 0$
 $(\frac{1}{4}x - 1)^3 = 1$
 $\frac{1}{4}x - 1 = 1$
 $\frac{1}{4}x = 2$
 $x = 8$

Zie figuur 6.20 in het leerboek.

min. is $f(8) = -5$, dus $B_f = [-5, \rightarrow)$.

b Uit vraag a volgt $A(8, -5)$.

$f(0) = (\frac{1}{4} \cdot 0 - 1)^4 - 0 + 2 = 3$, dus $B(0, 3)$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5 - 3}{8 - 0} = -1$.

$\left. \begin{array}{l} y = -x + b \\ B(0, 3) \end{array} \right\} k: y = -x + 3$

c Stel $l: y = ax + b$ met $a = rc_l = rc_m = -1$.

$rc_l = -1$, dus $f'(x) = -1$

$(\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = -1$

$(\frac{1}{4}x - 1)^3 = 0$

$\frac{1}{4}x - 1 = 0$

$\frac{1}{4}x = 1$

$x = 4$

$\left. \begin{array}{l} y = -x + b \\ f(4) = -2, \text{ dus raakpunt } (4, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 + b = -2 \\ b = 2 \end{array}$

Dus $l: y = -x + 2$.

Bladzijde 75

45 a $f(3) = \frac{1}{4}(2 \cdot 3 - 5)^3 + 2 = \frac{1}{4} \cdot 1^3 + 2 = 2\frac{1}{4}$

$g(3) = -\frac{1}{4}(3 \cdot 3 - 10)^4 + 2\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$

Dus A ligt zowel op de grafiek van f als op de grafiek van g .

b $f(x) = \frac{1}{4}(2x - 5)^3 + 2$ geeft $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 3(2x - 5)^2 \cdot 2 = 1\frac{1}{2}(2x - 5)^2$

$f'(3) = 1\frac{1}{2}(2 \cdot 3 - 5)^2 = 1\frac{1}{2}$

$g(x) = -\frac{1}{4}(3x - 10)^4 + 2\frac{1}{2}$ geeft $g'(x) = -\frac{1}{4} \cdot 4(3x - 10)^3 \cdot 3 = -3(3x - 10)^3$

$g'(3) = -3(3 \cdot 3 - 10)^3 = 3$

$f'(3) \neq g'(3)$, dus de raaklijnen in A zijn niet evenwijdig, dus de grafieken hebben in A geen gemeenschappelijke raaklijn. De grafieken raken elkaar dus niet.

c $rc_{\text{raaklijn}} = 13\frac{1}{2}$, dus $f'(x) = 13\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2}(2x - 5)^2 = 13\frac{1}{2}$

$(2x - 5)^2 = 9$

$2x - 5 = 3 \vee 2x - 5 = -3$

$2x = 8 \vee 2x = 2$

$x = 4 \vee x = 1$

$f(4) = 8\frac{3}{4}$ en $f(1) = -4\frac{3}{4}$

Dus de punten zijn $(4, 8\frac{3}{4})$ en $(1, -4\frac{3}{4})$.

46 $f(x) = (ax - 2)^4 + \frac{1}{2}ax$ geeft $f'(x) = 4(ax - 2)^3 \cdot a + \frac{1}{2}a = 4a(ax - 2)^3 + \frac{1}{2}a$

Een extreme waarde voor $x = 3$, dus $f'(3) = 0$.

Dit geeft $4a(a \cdot 3 - 2)^3 + \frac{1}{2}a = 0$

$$4a(3a - 2)^3 + \frac{1}{2}a = 0$$

$$\frac{1}{2}a(8(3a - 2)^3 + 1) = 0$$

$$\frac{1}{2}a = 0 \vee 8(3a - 2)^3 + 1 = 0$$

$$a = 0 \vee 8(3a - 2)^3 = -1$$

$$a = 0 \vee (3a - 2)^3 = -\frac{1}{8}$$

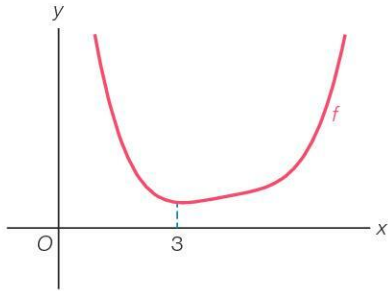
$$a = 0 \vee 3a - 2 = -\frac{1}{2}$$

$$a = 0 \vee 3a = \frac{1}{2}$$

$$a = 0 \vee a = \frac{1}{6}$$

$a = 0$ geeft $f(x) = (-2)^4 + 0 = 16$ en deze functie heeft geen extreme waarde voor $x = 3$.

$a = \frac{1}{6}$ geeft $f(x) = (\frac{1}{6}x - 2)^4 + \frac{1}{12}x$



f heeft een extreme waarde voor $x = 3$ als $a = \frac{1}{6}$.

47 a Voer in $y_1 = \sqrt{3x + 1}$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=5} = \frac{3}{8}$$

Dus $g'(5) = \frac{3}{8}$.

b De formule geeft $g'(5) = \frac{1}{2\sqrt{3 \cdot 5 + 1}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{16}} = \frac{3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$.

Dus de formule $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x + 1}} \cdot 3$ klopt met $g'(5) = \frac{3}{8}$.

Bladzijde 76

48 a $f(x) = \sqrt{ax + b} = (ax + b)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(ax + b)^{-\frac{1}{2}} \cdot a = \frac{a}{2(ax + b)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$

b $g(x) = \sqrt{3x + 1}$ geeft $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}$

$h(x) = \sqrt{4 - 7x}$ geeft $h'(x) = \frac{-7}{2\sqrt{4 - 7x}}$

49 a $f(x) = \sqrt{4x - 5}$ geeft $f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x - 5}} = \frac{2}{\sqrt{4x - 5}}$

b $g(x) = 3x + \sqrt{2x + 1}$ geeft $g'(x) = 3 + \frac{2}{2\sqrt{2x + 1}} = 3 + \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$

c $h(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3x}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt{3x}}$

d $k(x) = 3x^2 - \sqrt{2 - 5x}$ geeft $k'(x) = 6x - \frac{-5}{2\sqrt{2 - 5x}} = 6x + \frac{5}{2\sqrt{2 - 5x}}$

- 50** a $f(x) = (2x - 5)^{\frac{1}{3}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{3}(2x - 5)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3}(2x - 5)^{-\frac{2}{3}}$
 b $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - (3x)^{\frac{1}{4}}$ geeft $g'(x) = x - \frac{1}{4}(3x)^{-\frac{3}{4}} \cdot 3 = x - \frac{3}{4}(3x)^{-\frac{3}{4}}$
 c $h(x) = (2x + 1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{2}(2x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$
 d $k(x) = (3x - 1)\sqrt{3x - 1} = (3x - 1)^{\frac{3}{2}}$ geeft $k'(x) = \frac{3}{2}(3x - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 3 = 4\frac{1}{2}\sqrt{3x - 1}$

51 a $3x + 4 = 0$ geeft $3x = -4$
 $x = -1\frac{1}{3}$

$$f(-1\frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \cdot -1\frac{1}{3} + 4 - 0 = 3\frac{1}{3}$$

Het randpunt is $A(-1\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3})$.

b $f(x) = \frac{1}{2}x + 4 - \sqrt{3x + 4}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3x + 4}}$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(0) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x + b \\ f(0) = 2, \text{ dus } B(0, 2) \end{array} \right\} k: y = -\frac{1}{4}x + 2$$

c $f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3x + 4}} = 0$
 $\frac{1}{2} = \frac{3}{2\sqrt{3x + 4}}$
 kruislings vermenigvuldigen geeft
 $2\sqrt{3x + 4} = 6$
 $\sqrt{3x + 4} = 3$
 $3x + 4 = 9$
 $3x = 5$
 $x = 1\frac{2}{3}$ vold.

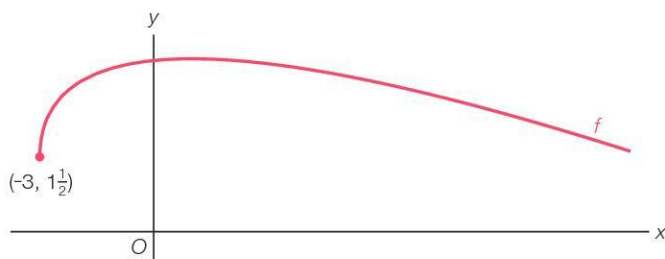
$$f(1\frac{2}{3}) = 1\frac{5}{6}, \text{ dus } C(1\frac{2}{3}, 1\frac{5}{6}).$$

Bladzijde 77

52 a $4x + 12 = 0$
 $4x = -12$
 $x = -3$

$$f(-3) = 1\frac{1}{2}, \text{ dus het randpunt is } (-3, 1\frac{1}{2}).$$

Voer in $y_1 = \sqrt{4x + 12} - \frac{1}{2}x$ en plot de grafiek.

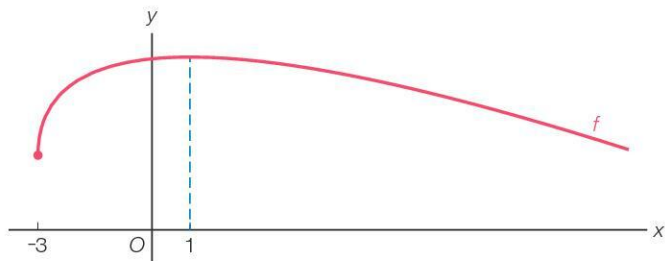


b $f(x) = \sqrt{4x + 12} - \frac{1}{2}x$ geeft $f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x + 12}} - \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{4x + 12}} - \frac{1}{2}$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(6) = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 6 + 12}} - \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{36}} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{6}x + b \\ f(6) = 3, \text{ dus } A(6, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{6} \cdot 6 + b = 3 \\ -1 + b = 3 \\ b = 4 \end{array}$$

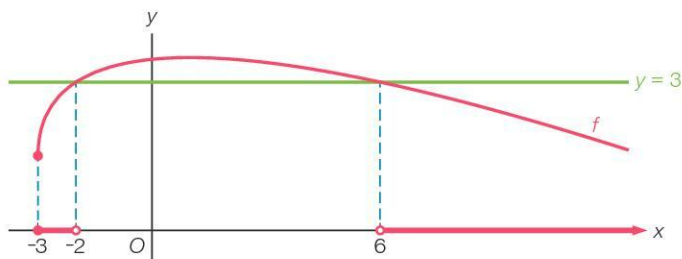
Dus $k: y = -\frac{1}{6}x + 4$.

c $f'(x) = 0$ geeft $\frac{2}{\sqrt{4x+12}} - \frac{1}{2} = 0$
 $\frac{2}{\sqrt{4x+12}} = \frac{1}{2}$
 kruislings vermenigvuldigen geeft
 $\sqrt{4x+12} = 4$
 $4x+12 = 16$
 $4x = 4$
 $x = 1$ vold.



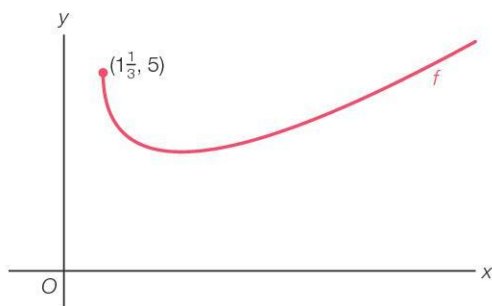
max. is $f(1) = 3\frac{1}{2}$ en $B_f = \langle \leftarrow, 3\frac{1}{2} \rangle$.

d $f(x) = 3$ geeft $\sqrt{4x+12} - \frac{1}{2}x = 3$
 $\sqrt{4x+12} = \frac{1}{2}x + 3$
 kwadrateren geeft
 $4x+12 = \frac{1}{4}x^2 + 3x + 9$
 $\frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0$
 $x^2 - 4x - 12 = 0$
 $(x+2)(x-6) = 0$
 $x = -2 \vee x = 6$
 vold. vold.



$f(x) < 3$ geeft $-3 \leq x < -2 \vee x > 6$

53 a $6x - 8 = 0$
 $6x = 8$
 $x = 1\frac{1}{3}$
 $f(1\frac{1}{3}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} + 4 - \sqrt{0} = 1 + 4 = 5$, dus randpunt $(1\frac{1}{3}, 5)$.
 Voer in $y_1 = \frac{3}{4}x + 4 - \sqrt{6x-8}$ en plot de grafiek.



b $f(x) = \frac{3}{4}x + 4 - \sqrt{6x-8}$ geeft $f'(x) = \frac{3}{4} - \frac{6}{2\sqrt{6x-8}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{\sqrt{6x-8}}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{3}{4} - \frac{3}{\sqrt{6x-8}} = 0$$

$$\frac{3}{\sqrt{6x-8}} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{6x-8} = 4$$

$$6x-8 = 16$$

$$6x = 24$$

$$x = 4 \text{ vold.}$$

Zie de schets bij a.

min. is $f(4) = 3$, dus $B_f = [3, \rightarrow)$.

c Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(12) = \frac{3}{4} - \frac{3}{\sqrt{6 \cdot 12 - 8}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{\sqrt{64}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{8}x + b \\ f(12) = 5, \text{ dus } A(12, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{8} \cdot 12 + b = 5 \\ 4\frac{1}{2} + b = 5 \\ b = \frac{1}{2} \end{array}$$

De lijn $k: y = \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}$ gaat niet door de oorsprong.

d $f(x) = 3\frac{1}{2}$ geeft $\frac{3}{4}x + 4 - \sqrt{6x-8} = 3\frac{1}{2}$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \sqrt{6x-8}$$

$$3x + 2 = 4\sqrt{6x-8}$$

kwadrateren geeft

$$9x^2 + 12x + 4 = 16(6x-8)$$

$$9x^2 + 12x + 4 = 96x - 128$$

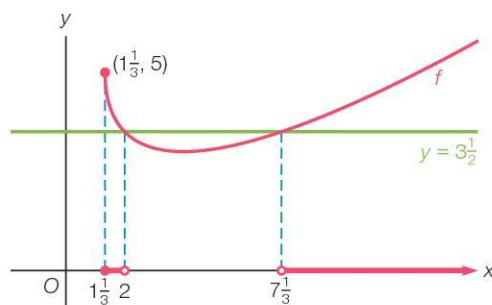
$$9x^2 - 84x + 132 = 0$$

$$3x^2 - 28x + 44 = 0$$

$$D = (-28)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 44 = 256$$

$$x = \frac{28 \pm 16}{6} = 7\frac{1}{3} \vee x = \frac{28 - 16}{6} = 2$$

vold. vold.



$$f(x) > 3\frac{1}{2} \text{ geeft } 1\frac{1}{3} \leq x < 2 \vee x > 7\frac{1}{3}$$

54 $f(x) = ax + b + \sqrt{ax+b}$ geeft $f'(x) = a + \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } a + \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} = 0$$

$$a \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{ax+b}} \right) = 0$$

$$a = 0 \vee \frac{1}{2\sqrt{ax+b}} = -1$$

$$a = 0 \vee 2\sqrt{ax+b} = -1$$

$$a = 0 \vee \sqrt{ax+b} = -\frac{1}{2}$$

$a = 0$ geeft $f(x) = b + \sqrt{b}$ en dit is voor elke b een constante functie, dus f heeft geen extreme waarde in het geval $a = 0$.

$\sqrt{ax+b} = -\frac{1}{2}$ heeft geen oplossingen, dus ook in dit geval heeft f geen extreme waarde.

6.4 Toepassingen van de afgeleide

Bladzijde 79

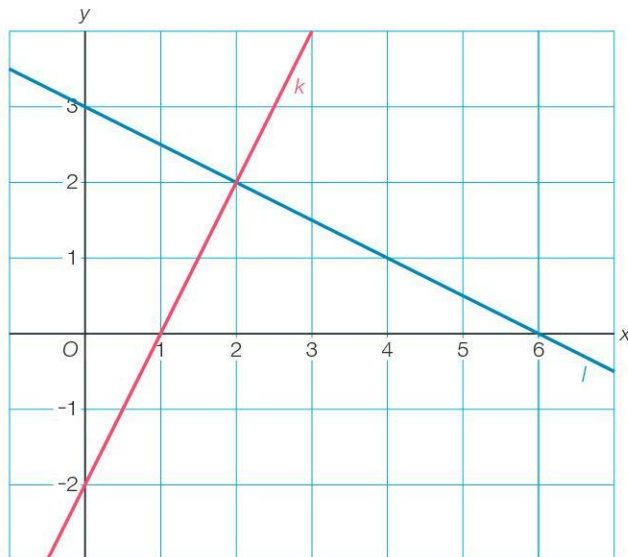
55

a lijn k

x	0	2
y	-2	2

lijn l

x	0	2
y	3	2



b Ja, de lijnen k en l staan loodrecht op elkaar.

c Stel $m: y = ax + b$.

$$m \parallel l, \text{ dus } a = \text{rc}_m = \text{rc}_l = -\frac{1}{2}.$$

$$y = -\frac{1}{2}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 0 \\ -2 + b = 0 \end{array} \right.$$

$$b = 2$$

$$\text{Dus } m: y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

d $\text{rc}_p = \frac{1}{4}$, dus bij p ga je 4 naar rechts en 1 omhoog.

Dus bij n ga je 1 naar rechts en 4 omlaag.

Stel $n: y = ax + b$ met $a = \text{rc}_n = -4$.

$$y = -4x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} -4 \cdot 1 + b = 3 \\ -4 + b = 3 \end{array} \right.$$

$$b = 7$$

$$\text{Dus } n: y = -4x + 7.$$

Bladzijde 80

56

a Stel $k: y = ax + b$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{rc}_l = 3 \\ k \perp l, \text{ dus } \text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{rc}_k \cdot 3 = -1 \\ \text{rc}_k = -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 6 + b = 7 \\ -2 + b = 7 \end{array} \right.$$

$$b = 9$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{1}{3}x + 9.$$

b Stel $m: y = ax + b$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{rc}_n = \frac{1}{2} \\ m \perp n, \text{ dus } \text{rc}_m \cdot \text{rc}_n = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{rc}_m \cdot \frac{1}{2} = -1 \\ \text{rc}_m = -2 \end{array}$$

$$y = -2x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot -3 + b = 4 \\ 6 + b = 4 \end{array} \right.$$

$$b = -2$$

$$\text{Dus } m: y = -2x - 2.$$

c Stel $p: y = ax + b$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{rc}_q = -\frac{2}{7} \\ p \perp q, \text{ dus } \text{rc}_p \cdot \text{rc}_q = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{rc}_p \cdot -\frac{2}{7} = -1 \\ \text{rc}_p = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 3\frac{1}{2}x + b \\ C(2, -5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -5 \\ 7 + b = -5 \\ b = -12 \end{array}$$

Dus $p: y = 3\frac{1}{2}x - 12$.

57 $f(x) = \frac{6}{3x-10} + 4 = 6(3x-10)^{-1} + 4$ geeft $f'(x) = 6 \cdot -1(3x-10)^{-2} \cdot 3 = \frac{-18}{(3x-10)^2}$

Stel $l: y = ax + b$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{rc}_k = f'(4) = \frac{-18}{(12-10)^2} = -4\frac{1}{2} \\ l \perp k, \text{ dus } \text{rc}_l \cdot \text{rc}_k = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{rc}_l \cdot -4\frac{1}{2} = -1 \\ \text{rc}_l \cdot -\frac{9}{2} = -1 \\ \text{rc}_l = \frac{2}{9} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{9}x + b \\ A(4, 7) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{9} \cdot 4 + b = 7 \\ \frac{8}{9} + b = 7 \\ b = 6\frac{1}{9} \end{array}$$

Dus $l: y = \frac{2}{9}x + 6\frac{1}{9}$ en $B(0, 6\frac{1}{9})$.

Bladzijde 81

58 k snijden met de grafiek van f geeft $\frac{x^2-4}{2x} = -\frac{1}{2}x$

$$x^2 - 4 = -x^2$$

$$2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

$$\text{vold.} \quad \text{vold.}$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{2x} = \frac{1}{2}x - \frac{2}{x} = \frac{1}{2}x - 2x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2} + 2x^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}$$

$$\text{rc}_l = f'(-\sqrt{2}) = \frac{1}{2} + \frac{2}{(-\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = 1\frac{1}{2} \text{ en } \text{rc}_m = f'(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} + \frac{2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

$$\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = \text{rc}_k \cdot \text{rc}_m = -\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \neq -1, \text{ dus } k \text{ staat niet loodrecht op } l \text{ en ook niet loodrecht op } m.$$

59 a $f(x) = 4x - 2x\sqrt{x} = 4x - 2x^{1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 4 - 3x^{\frac{1}{2}} = 4 - 3\sqrt{x}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 4 - 3\sqrt{x} = 0$$

$$3\sqrt{x} = 4$$

$$\sqrt{x} = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{16}{9}$$

Zie figuur 6.26 in het leerboek.

$$\text{max. is } f(\frac{16}{9}) = 2\frac{10}{27} \text{ en } B_f = \langle \leftarrow, 2\frac{10}{27} \rangle.$$

b $f(x) = 0$ geeft $4x - 2x\sqrt{x} = 0$

$$2x(2 - \sqrt{x}) = 0$$

$$2x = 0 \vee \sqrt{x} = 2$$

$$x = 0 \vee x = 4$$

$$rc_k = f'(4) = 4 - 3\sqrt{4} = 4 - 6 = -2$$

Stel $l: y = ax + b$.

$$\left. \begin{array}{l} rc_k = -2 \\ l \perp k, \text{ dus } rc_l \cdot rc_k = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} rc_l \cdot -2 = -1 \\ rc_l = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ A(4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 4 + b = 0 \\ 2 + b = 0 \end{array}$$

$$b = -2$$

Dus $l: y = \frac{1}{2}x - 2$ en het snijpunt van l met de y -as is $S(0, -2)$.

c $rc_m = 2$
 $n \perp m$, dus $rc_n \cdot rc_m = -1$ $\left\{ \begin{array}{l} rc_n \cdot 2 = -1 \\ rc_n = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$

n raakt de grafiek van f in B , dus in B geldt $f'(x) = rc_n = -\frac{1}{2}$.

Dit geeft $4 - 3\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$

$$-3\sqrt{x} = -4\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x} = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{4}$$

$$x_B = 2\frac{1}{4} \text{ geeft } y_B = f(2\frac{1}{4}) = 4 \cdot 2\frac{1}{4} - 2 \cdot 2\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} = 9 - 4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = 9 - 6\frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}, \text{ dus } B(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}).$$

60 De lijn p heeft twee punten met de grafiek van f gemeenschappelijk als de vergelijking $f(x) = ax$ twee oplossingen heeft.

$$f(x) = ax \text{ geeft } 4x - 2x\sqrt{x} = ax$$

$$4x - ax - 2x\sqrt{x} = 0$$

$$x(4 - a - \sqrt{x}) = 0$$

$$x = 0 \vee 4 - a - \sqrt{x} = 0$$

$$x = 0 \vee \sqrt{x} = 4 - a$$

De vergelijking $f(x) = ax$ heeft twee oplossingen als $\sqrt{x} = 4 - a$ een oplossing heeft die niet gelijk is aan 0, dus als $4 - a > 0$

$$-a > -4$$

$$a < 4$$

Dus voor $a < 4$ heeft de lijn p twee punten gemeenschappelijk met de grafiek van f .

61 a $p = \frac{1}{2}$ geeft $PQ = y_Q = (\frac{1}{2})^2 - 8 \cdot \frac{1}{2} + 16 = \frac{1}{4} - 4 + 16 = 12\frac{1}{4}$ en

$$A = OP \cdot PQ = x_P \cdot y_Q = \frac{1}{2} \cdot 12\frac{1}{4} = 6\frac{1}{8}.$$

b $p = 1$ geeft $y_Q = 1^2 - 8 \cdot 1 + 16 = 1 - 8 + 16 = 9$ en $A = x_P \cdot y_Q = 1 \cdot 9 = 9$.

c $p = 2$ geeft $y_Q = 2^2 - 8 \cdot 2 + 16 = 4 - 16 + 16 = 4$ en $A = x_P \cdot y_Q = 2 \cdot 4 = 8$.

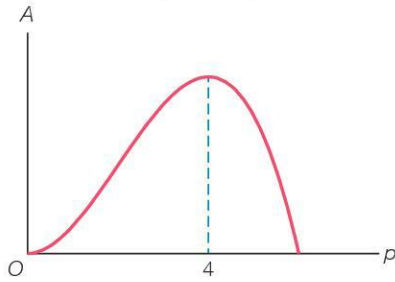
Bladzijde 83

62 a Uit $x_P = x_Q = p$ volgt $y_P = -\frac{1}{2}p^2 + 3p$.

$$A = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot x_Q \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (-\frac{1}{2}p^2 + 3p) = -\frac{1}{4}p^3 + 1\frac{1}{2}p^2$$

b $A = -\frac{1}{4}p^3 + 1\frac{1}{2}p^2$ geeft $\frac{dA}{dp} = -\frac{3}{4}p^2 + 3p$

$$\begin{aligned} \text{c } \frac{dA}{dp} = 0 & \text{ geeft } -\frac{3}{4}p^2 + 3p = 0 \\ & -\frac{3}{4}p(p-4) = 0 \\ & p = 0 \vee p = 4 \end{aligned}$$



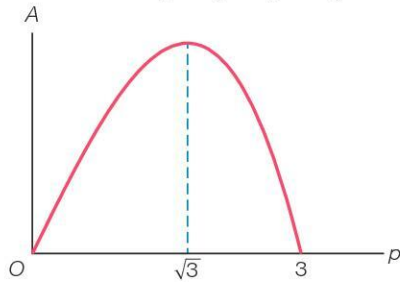
De oppervlakte van driehoek OPQ is maximaal voor $p = 4$.

De maximale oppervlakte is $A_{\max} = -\frac{1}{4} \cdot 4^3 + 1\frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$.

Bladzijde 84

63 Uit $x_P = x_Q = p$ volgt $y_P = 9 - p^2$, dus $A = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (9 - p^2) = 4\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p^3$.
 $A = 4\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p^3$ geeft $\frac{dA}{dp} = 4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}p^2$

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dp} = 0 & \text{ geeft } 4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}p^2 = 0 \\ & -1\frac{1}{2}p^2 = -4\frac{1}{2} \\ & p^2 = 3 \\ & p = \sqrt{3} \vee p = -\sqrt{3} \end{aligned}$$



De oppervlakte van driehoek OPQ is maximaal voor $p = \sqrt{3}$.

De maximale oppervlakte is $A_{\max} = 4\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3})^3 = 4\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\frac{1}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

64 a $-x^2 + 6x = 0$
 $x(-x + 6) = 0$
 $x = 0 \vee x = 6$

Wegens de symmetrie van de parabool geldt $PQ = 6 - 2OP = 6 - 2p$.

Uit $x_S = x_P = p$ volgt $y_S = -p^2 + 6p$, dus
 $A = PQ \cdot PS = PQ \cdot y_S = (6 - 2p)(-p^2 + 6p)$.

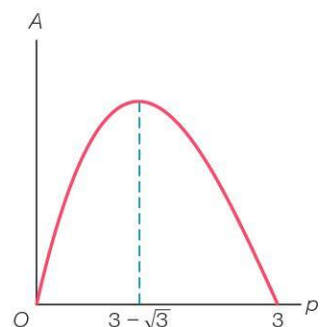
b $A = (6 - 2p)(-p^2 + 6p) = -6p^2 + 36p + 2p^3 - 12p^2 = 2p^3 - 18p^2 + 36p$ geeft
 $\frac{dA}{dp} = 6p^2 - 36p + 36$

c $\frac{dA}{dp} = 0$ geeft $6p^2 - 36p + 36 = 0$

$$\begin{aligned} p^2 - 6p + 6 &= 0 \\ D &= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 12, \text{ dus } \sqrt{D} = 2\sqrt{3} \\ p &= \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2} \vee p = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2} \\ p &= 3 + \sqrt{3} \vee p = 3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Zie de figuur hiernaast.

De oppervlakte is maximaal voor $p = 3 - \sqrt{3}$.



65 a $P(p, 0)$ en $Q(4, 0)$ geeft $PQ = 4 - p$.

Uit $x_R = x_P = p$ volgt $y_R = p^2 - 2p + 3$, dus

$$A = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot PR = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot y_R = \frac{1}{2}(4-p)(p^2 - 2p + 3) = \frac{1}{2}(4p^2 - 8p + 12 - p^3 + 2p^2 - 3p) \\ = \frac{1}{2}(-p^3 + 6p^2 - 11p + 12) = -\frac{1}{2}p^3 + 3p^2 - 5\frac{1}{2}p + 6$$

b $A = -\frac{1}{2}p^3 + 3p^2 - 5\frac{1}{2}p + 6$ geeft $\frac{dA}{dp} = -\frac{1}{2}p^2 + 6p - 5\frac{1}{2}$

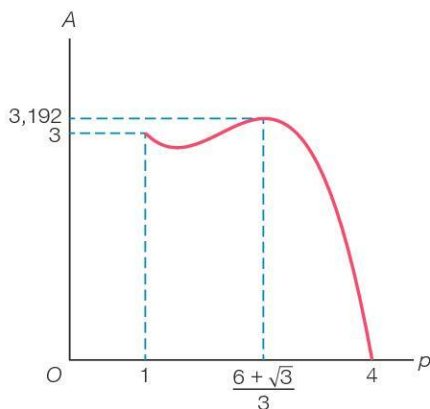
$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } -\frac{1}{2}p^2 + 6p - 5\frac{1}{2} = 0$$

$$3p^2 - 12p + 11 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11 = 12, \text{ dus } \sqrt{D} = 2\sqrt{3}$$

$$p = \frac{12 \pm 2\sqrt{3}}{6} \vee p = \frac{12 - 2\sqrt{3}}{6}$$

$$p = \frac{6 + \sqrt{3}}{3} \vee p = \frac{6 - \sqrt{3}}{3}$$



$$p = 1 \text{ geeft } A = 3 \text{ en } p = \frac{6 + \sqrt{3}}{3} \text{ geeft } A \approx 3,192.$$

Dus A is maximaal voor $p = \frac{6 + \sqrt{3}}{3}$ en $A_{\max} \approx 3,192$.

66 Voer in $y_1 = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 5\frac{1}{2}x + 6$ en $y_2 = y_1\left(\frac{6 + \sqrt{3}}{3}\right)$.

Neem x tussen 0 en 1.

De optie snijpunt geeft $x = 0,845\dots$

Dus voor $p \approx 0,85$ is de oppervlakte van driehoek PQR net zo groot als de maximale oppervlakte die in opgave 65 is berekend.

67 $\left. \begin{array}{l} f(1) = \sqrt{1} = 1, \text{ dus } A(1, 1) \\ g(1) = \frac{1}{5}, \text{ dus } B(1, \frac{1}{5}) \end{array} \right\} L = y_A - y_B = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$$\left. \begin{array}{l} f(2\frac{1}{4}) = \sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } A(2\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}) \\ g(2\frac{1}{4}) = \frac{9}{20}, \text{ dus } B(2\frac{1}{4}, \frac{9}{20}) \end{array} \right\} L = y_A - y_B = 1\frac{1}{2} - \frac{9}{20} = 1\frac{1}{20}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(9) = \sqrt{9} = 3, \text{ dus } A(9, 3) \\ g(9) = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}, \text{ dus } B(9, 1\frac{4}{5}) \end{array} \right\} L = y_A - y_B = 3 - 1\frac{4}{5} = 1\frac{1}{5}$$

68

a $f(x) = g(x)$ geeft $x + 2 = \sqrt{6x + 12}$

kwadrateren geeft

$$(x + 2)^2 = 6x + 12$$

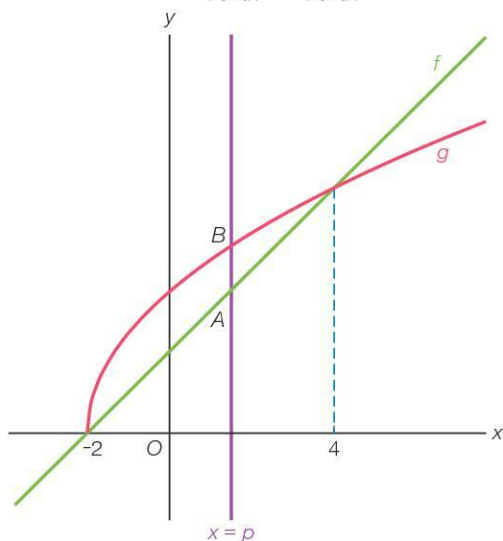
$$x^2 + 4x + 4 = 6x + 12$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x + 2)(x - 4) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 4$$

vold. vold.



Voor $x = p$ met $-2 < p < 4$ ligt de grafiek van g boven die van f , dus

$$L = y_B - y_A = g(p) - f(p) = \sqrt{6p + 12} - (p + 2) = \sqrt{6p + 12} - p - 2.$$

$$\text{b } \frac{dL}{dp} = \frac{6}{2\sqrt{6p + 12}} - 1 = \frac{3}{\sqrt{6p + 12}} - 1$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{3}{\sqrt{6p + 12}} - 1 = 0$$

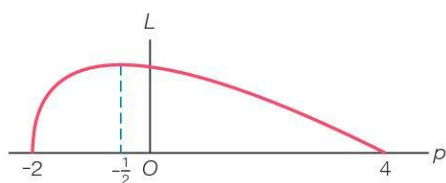
$$\frac{3}{\sqrt{6p + 12}} = 1$$

$$\sqrt{6p + 12} = 3$$

$$6p + 12 = 9$$

$$6p = -3$$

$$p = -\frac{1}{2} \text{ vold.}$$



L is maximaal voor $p = -\frac{1}{2}$.

$$L_{\max} = \sqrt{6 \cdot -\frac{1}{2} + 12} - -\frac{1}{2} - 2 = \sqrt{9} + \frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}$$

69 a $f(x) = g(x)$ geeft $6 - \sqrt{3x+6} = -\frac{1}{2}x + 5$

$$\frac{1}{2}x + 1 = \sqrt{3x+6}$$

$$x + 2 = 2\sqrt{3x+6}$$

kwadrateren geeft

$$(x+2)^2 = 4(3x+6)$$

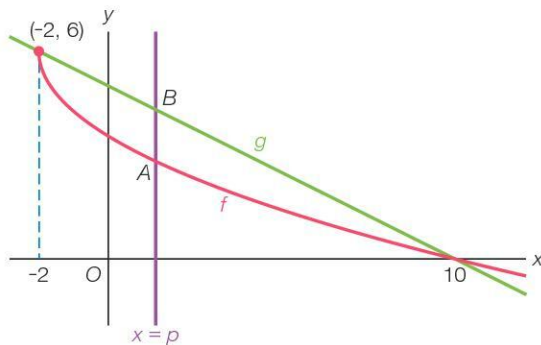
$$x^2 + 4x + 4 = 12x + 24$$

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$(x+2)(x-10) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 10$$

vold. vold.



Voor $x = p$ met $-2 < p < 10$ ligt de grafiek van g boven die van f , dus

$$L = y_B - y_A = g(p) - f(p) = -\frac{1}{2}p + 5 - (6 - \sqrt{3p+6}) = -\frac{1}{2}p + 5 - 6 + \sqrt{3p+6} = \sqrt{3p+6} - \frac{1}{2}p - 1.$$

b $L = \sqrt{3p+6} - \frac{1}{2}p - 1$ geeft $\frac{dL}{dp} = \frac{3}{2\sqrt{3p+6}} - \frac{1}{2}$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{3}{2\sqrt{3p+6}} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3p+6}} = \frac{1}{2}$$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$$2\sqrt{3p+6} = 6$$

$$\sqrt{3p+6} = 3$$

$$3p+6 = 9$$

$$3p = 3$$

$$p = 1 \text{ vold.}$$



L is maximaal voor $p = 1$.

$$L_{\max} = \sqrt{3 \cdot 1 + 6} - \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 = 3 - \frac{1}{2} - 1 = 1\frac{1}{2}$$

Bladzijde 86

70 $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{1}{4}x^2 = 4\sqrt{2x}$

$$x^2 = 16\sqrt{2x}$$

kwadrateren geeft

$$x^4 = 256 \cdot 2x$$

$$x^4 = 512x$$

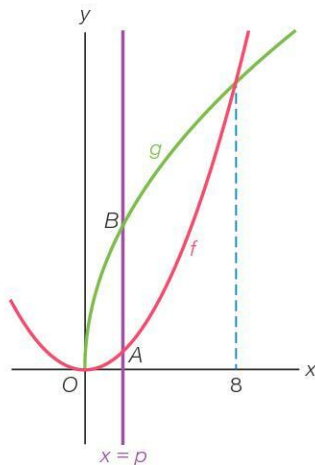
$$x^4 - 512x = 0$$

$$x(x^3 - 512) = 0$$

$$x = 0 \vee x^3 = 512$$

$$x = 0 \vee x = \sqrt[3]{512} = 8$$

vold. vold.



Voor $x = p$ met $0 < p < 8$ ligt de grafiek van g boven die van f , dus

$$L = y_B - y_A = g(p) - f(p) = 4\sqrt{2p} - \frac{1}{4}p^2.$$

$$L = 4\sqrt{2p} - \frac{1}{4}p^2 \text{ geeft } \frac{dL}{dp} = 4 \cdot \frac{2}{2\sqrt{2p}} - \frac{1}{2}p = \frac{4}{\sqrt{2p}} - \frac{1}{2}p$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{4}{\sqrt{2p}} - \frac{1}{2}p = 0$$

$$\frac{4}{\sqrt{2p}} = \frac{p}{2}$$

kruislings vermenigvuldigen geeft

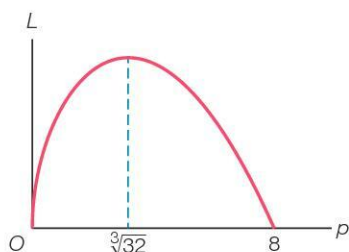
$$p\sqrt{2p} = 8$$

kwadrateren geeft

$$p^2 \cdot 2p = 64$$

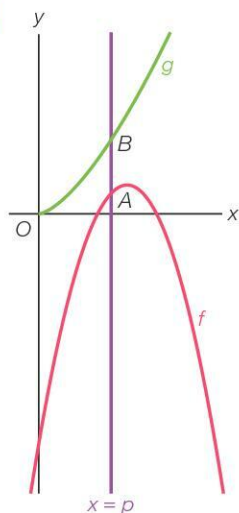
$$p^3 = 32$$

$$p = \sqrt[3]{32} \text{ vold.}$$



L is maximaal voor $p = \sqrt[3]{32}$.

71



Voor $x = p$ met $p \geq 0$ ligt de grafiek van g boven die van f , dus

$$L = y_B - y_A = g(p) - f(p) = \frac{2}{3}p\sqrt{p} - (-p^2 + 6p - 8) = \frac{2}{3}p\sqrt{p} + p^2 - 6p + 8.$$

$$L = \frac{2}{3}p\sqrt{p} + p^2 - 6p + 8 = \frac{2}{3}p^{1\frac{1}{2}} + p^2 - 6p + 8 \text{ geeft } \frac{dL}{dp} = p^{\frac{1}{2}} + 2p - 6 = \sqrt{p} + 2p - 6$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \sqrt{p} + 2p - 6 = 0$$

$$\sqrt{p} = -2p + 6$$

kwadrateren geeft

$$p = (-2p + 6)^2$$

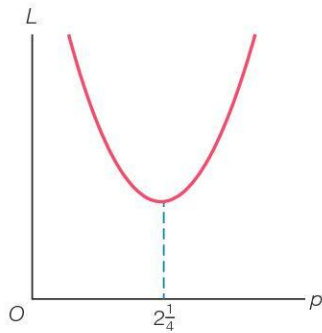
$$p = 4p^2 - 24p + 36$$

$$4p^2 - 25p + 36 = 0$$

$$D = (-25)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 49$$

$$p = \frac{25 \pm 7}{8} = 4 \vee p = \frac{25 - 7}{8} = 2\frac{1}{4}$$

vold. niet vold.



L is minimaal voor $p = 2\frac{1}{4}$.

$$L_{\min} = \frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} + (2\frac{1}{4})^2 - 6 \cdot 2\frac{1}{4} + 8 = 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} + 5\frac{1}{16} - 13\frac{1}{2} + 8 = 1\frac{13}{16}$$

Diagnostische toets

Bladzijde 90

- 1 a** $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 + 4 = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(2) = 9\frac{2}{3}, \text{ dus } A(2, 9\frac{2}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 2 + b = 9\frac{2}{3} \\ 8 + b = 9\frac{2}{3} \\ b = 1\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $k: y = 4x + 1\frac{2}{3}$.

- b** $l \parallel k$, dus $rc_l = rc_k = 4$, dus $f'(x) = 4$

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 4$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + x = 0$$

$$-\frac{1}{2}x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

$f(0) = 1$, dus $B(0, 1)$.

- c** $rc_{\text{raaklijn}} = 0$, dus $f'(x) = 0$

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$$

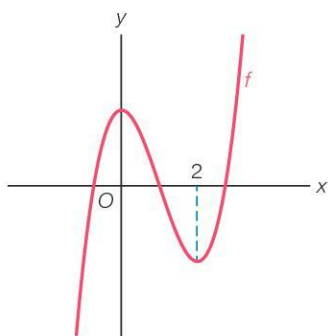
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x + 2)(x - 4) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 4$$

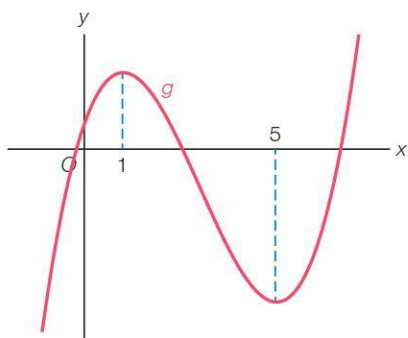
$f(-2) = -3\frac{2}{3}$ en $f(4) = 14\frac{1}{3}$, dus de punten zijn $(-2, -3\frac{2}{3})$ en $(4, 14\frac{1}{3})$.

- 2 a** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 6x$
 $f'(x) = 0$ geeft $3x^2 - 6x = 0$
 $3x(x - 2) = 0$
 $x = 0 \vee x = 2$



max. is $f(0) = 2$ en min. is $f(2) = -2$.

- b** $g(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 4$ geeft $g'(x) = 3x^2 - 18x + 15$
 $g'(x) = 0$ geeft $3x^2 - 18x + 15 = 0$
 $x^2 - 6x + 5 = 0$
 $(x - 1)(x - 5) = 0$
 $x = 1 \vee x = 5$



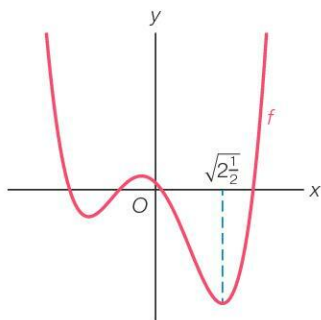
max. is $g(1) = 11$ en min. is $g(5) = -21$.

- 3 a** $f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 45x^2 - 30x + 5$ geeft $f'(x) = 36x^3 + 12x^2 - 90x - 30$

$$f'(1\frac{1}{2}) = 36 \cdot (1\frac{1}{2})^3 + 12 \cdot (1\frac{1}{2})^2 - 90 \cdot 1\frac{1}{2} - 30 = 121\frac{1}{2} + 27 - 135 - 30 = -16\frac{1}{2}$$

$f'(1\frac{1}{2}) \neq 0$, dus f heeft geen extreme waarde voor $x = 1\frac{1}{2}$.

- b** $f'(\sqrt{2\frac{1}{2}}) = 36 \cdot (\sqrt{2\frac{1}{2}})^3 + 12 \cdot (\sqrt{2\frac{1}{2}})^2 - 90 \cdot \sqrt{2\frac{1}{2}} - 30 = 36 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\frac{1}{2}} + 12 \cdot 2\frac{1}{2} - 90 \cdot \sqrt{2\frac{1}{2}} - 30$
 $= 90\sqrt{2\frac{1}{2}} + 30 - 90\sqrt{2\frac{1}{2}} - 30 = 0$



$f'(\sqrt{2\frac{1}{2}}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{2\frac{1}{2}}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{2\frac{1}{2}}$.

4 a $f(x) = \frac{3}{x^4} = 3x^{-4}$ geeft $f'(x) = -12x^{-5} = -\frac{12}{x^5}$

b $g(x) = 4x^3 - \frac{3x-2}{x^3} = 4x^3 - (3x^{-2} - 2x^{-3}) = 4x^3 - 3x^{-2} + 2x^{-3}$ geeft

$$g'(x) = 12x^2 + 6x^{-3} - 6x^{-4} = 12x^2 + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

c $h(x) = \frac{8x^4 - 2x^2}{\sqrt{x}} = \frac{8x^4}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^2}{x^{\frac{1}{2}}} = 8x^{3\frac{1}{2}} - 2x^{1\frac{1}{2}}$ geeft

$$h'(x) = 28x^{2\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} = 28 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3\sqrt{x} = 28x^2 \cdot \sqrt{x} - 3\sqrt{x}$$

d $k(x) = \frac{6\sqrt{x} - x^2}{x} = \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{x} - x = 6x^{-\frac{1}{2}} - x$ geeft

$$k'(x) = -3x^{-1\frac{1}{2}} - 1 = -\frac{3}{x^{1\frac{1}{2}}} - 1 = -\frac{3}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} - 1 = -\frac{3}{x\sqrt{x}} - 1$$

e $l(x) = (x^2 + 2\sqrt{x})^2 = x^4 + 4x^2 \cdot \sqrt{x} + 4x = x^4 + 4x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 4x = x^4 + 4x^{2\frac{1}{2}} + 4x$ geeft

$$l'(x) = 4x^3 + 10x^{1\frac{1}{2}} + 4 = 4x^3 + 10 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 4 = 4x^3 + 10x\sqrt{x} + 4$$

f $m(x) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^2}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{2x}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{1\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}$ geeft

$$m'(x) = 1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} = 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

5 a $f(x) = \frac{2x+4}{\sqrt{x}} = \frac{2x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{x^{\frac{1}{2}}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x^{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{2}{4\sqrt{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + b \\ f(4) = 6, \text{ dus } A(4, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot 4 + b = 6 \\ 1 + b = 6 \\ b = 5 \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{1}{4}x + 5$.

b $f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

kruislings vermenigvuldigen geeft

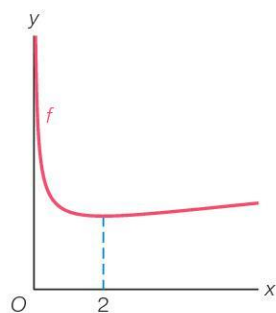
$$x\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$$

$$x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x}(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

vold. niet vold.



$$\text{min. is } f(2) = \frac{2 \cdot 2 + 4}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

6 a $f(x) = (6x - 1)^5$ geeft $f'(x) = 5(6x - 1)^4 \cdot 6 = 30(6x - 1)^4$

b $g(x) = 6x^3 - \frac{5}{(2x - 1)^4} = 6x^3 - 5(2x - 1)^{-4}$ geeft
 $g'(x) = 18x^2 - 5 \cdot -4(2x - 1)^{-5} \cdot 2 = 18x^2 + \frac{40}{(2x - 1)^5}$

c $h(x) = 6(\frac{1}{3}x - 2)^4$ geeft $h'(x) = 6 \cdot 4(\frac{1}{3}x - 2)^3 \cdot \frac{1}{3} = 8(\frac{1}{3}x - 2)^3$

7 a $f(x) = (\frac{1}{3}x - 2)^3 - 9x + 40$ geeft $f'(x) = 3(\frac{1}{3}x - 2)^2 \cdot \frac{1}{3} - 9 = (\frac{1}{3}x - 2)^2 - 9$

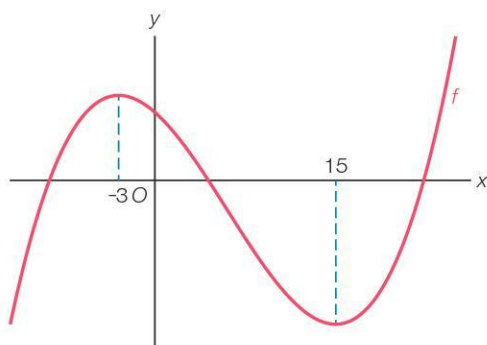
$f'(x) = 0$ geeft $(\frac{1}{3}x - 2)^2 - 9 = 0$

$(\frac{1}{3}x - 2)^2 = 9$

$\frac{1}{3}x - 2 = 3 \vee \frac{1}{3}x - 2 = -3$

$\frac{1}{3}x = 5 \vee \frac{1}{3}x = -1$

$x = 15 \vee x = -3$



max. is $f(-3) = 40$ en min. is $f(15) = -68$.

b Stel $k: y = 7x + b$ en $l: y = 7x + b$.

$f'(x) = rc_k = rc_l = 7$

$(\frac{1}{3}x - 2)^2 - 9 = 7$

$(\frac{1}{3}x - 2)^2 = 16$

$\frac{1}{3}x - 2 = 4 \vee \frac{1}{3}x - 2 = -4$

$\frac{1}{3}x = 6 \vee \frac{1}{3}x = -2$

$x = 18 \vee x = -6$

$k: y = 7x + b$

$f(18) = -58$, dus $(18, -58)$ $\left. \begin{array}{l} 7 \cdot 18 + b = -58 \\ 126 + b = -58 \\ b = -184 \end{array} \right\}$

Dus $k: y = 7x - 184$.

$l: y = 7x + b$

$f(-6) = 30$, dus $(-6, 30)$ $\left. \begin{array}{l} 7 \cdot -6 + b = 30 \\ -42 + b = 30 \\ b = 72 \end{array} \right\}$

Dus $l: y = 7x + 72$.

Bladzijde 91

8 a $f(x) = \frac{1}{3}x^6 - (3x - 1)^{\frac{1}{3}}$ geeft $f'(x) = 2x^5 - \frac{1}{3}(3x - 1)^{\frac{1}{3}} \cdot 3 = 2x^5 - (3x - 1)^{\frac{1}{3}}$

b $g(x) = \sqrt{3x - 4} + x^2 - 6x$ geeft $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 4}} + 2x - 6$

c $h(x) = (2x + 1)^2 \cdot \sqrt{2x + 1} = (2x + 1)^2 \cdot (2x + 1)^{\frac{1}{2}} = (2x + 1)^{\frac{5}{2}}$ geeft

$h'(x) = 2\frac{1}{2}(2x + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = 5 \cdot (2x + 1) \cdot (2x + 1)^{\frac{1}{2}} = 5(2x + 1)\sqrt{2x + 1}$

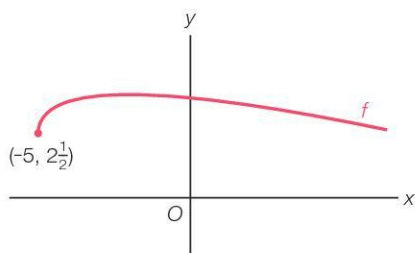
9 a $3x + 15 = 0$

$$3x = -15$$

$$x = -5$$

$$f(-5) = 2\frac{1}{2}, \text{ dus het randpunt is } (-5, 2\frac{1}{2}).$$

Voer in $y_1 = \sqrt{3x+5} - \frac{1}{2}x$ en plot de grafiek.



b $f(x) = \sqrt{3x+15} - \frac{1}{2}x$ geeft $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+15}} - \frac{1}{2}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(7) = \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 7 + 15}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x + b \\ f(7) = 2\frac{1}{2}, \text{ dus } A(7, 2\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \cdot 7 + b = 2\frac{1}{2} \\ -1\frac{3}{4} + b = 2\frac{1}{2} \\ b = 4\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4}$.

c $f'(x) = 0$ geeft $\frac{3}{2\sqrt{3x+15}} - \frac{1}{2} = 0$

$$\frac{3}{2\sqrt{3x+15}} = \frac{1}{2}$$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$$2\sqrt{3x+15} = 6$$

$$\sqrt{3x+15} = 3$$

$$3x + 15 = 9$$

$$3x = -6$$

$$x = -2 \text{ vold.}$$

Zie de schets bij a.

max. is $f(-2) = 4$.

10 a $f(x) = 4x\sqrt{x} - x^2 = 4x^{\frac{1}{2}} - x^2$ geeft $f'(x) = 6x^{\frac{1}{2}} - 2x = 6\sqrt{x} - 2x$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 6\sqrt{x} - 2x = 0$$

$$6\sqrt{x} = 2x$$

kwadrateren geeft

$$36x = 4x^2$$

$$36x - 4x^2 = 0$$

$$4x(9 - x) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 9$$

$$\text{vold.} \quad \text{vold.}$$

Zie figuur 6.34 in het leerboek.

max. is $f(9) = 27$ en $B_f = \langle \leftarrow, 27 \rangle$.

b Stel $l: y = ax + b$.

$$\left. \begin{aligned} rc_k = f'(4) = 6\sqrt{4} - 2 \cdot 4 = 4 \\ l \perp k, \text{ dus } rc_l \cdot rc_k = -1 \end{aligned} \right\} rc_l \cdot 4 = -1$$

$$rc_l = -\frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + b \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{4} \cdot 4 + b &= 16 \\ -1 + b &= 16 \end{aligned} \right.$$

$$b = 17$$

Dus $l: y = -\frac{1}{4}x + 17$.

l snijden met de x -as geeft $-\frac{1}{4}x + 17 = 0$

$$-\frac{1}{4}x = -17$$

$$x = 68$$

Dus $B(68, 0)$.

11 a $P(-1, 0)$ en $Q(p, 0)$, dus $PQ = p + 1$.

Uit $x_R = x_Q = p$ volgt $y_R = -p^2 + 3p + 4$, dus

$$A = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot QR = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot y_R = \frac{1}{2}(p+1)(-p^2 + 3p + 4) = \frac{1}{2}(-p^3 + 3p^2 + 4p - p^2 + 3p + 4)$$

$$= \frac{1}{2}(-p^3 + 2p^2 + 7p + 4) = -\frac{1}{2}p^3 + p^2 + 3\frac{1}{2}p + 2$$

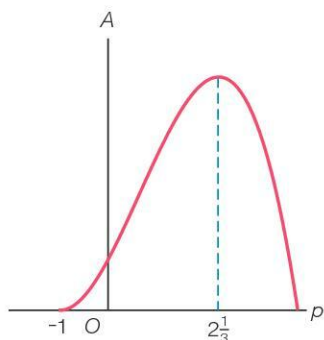
b $A = -\frac{1}{2}p^3 + p^2 + 3\frac{1}{2}p + 2$ geeft $\frac{dA}{dp} = -1\frac{1}{2}p^2 + 2p + 3\frac{1}{2}$

$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } -1\frac{1}{2}p^2 + 2p + 3\frac{1}{2} = 0$$

$$3p^2 - 4p - 7 = 0$$

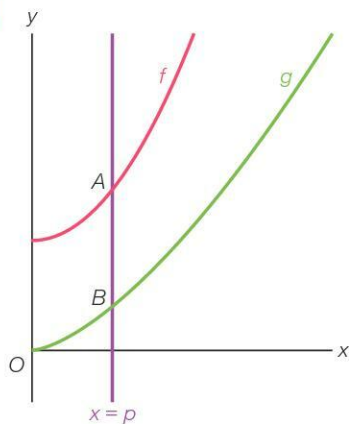
$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -7 = 100$$

$$p = \frac{4 + 10}{6} = 2\frac{1}{3} \vee p = \frac{4 - 10}{6} = -1$$



De oppervlakte van driehoek PQR is maximaal voor $p = 2\frac{1}{3}$.

12



Voor $x = p$ met $p \geq 0$ ligt de grafiek van f boven die van g , dus

$$L = y_A - y_B = f(p) - g(p) = p^2 + 4 - p\sqrt{p}.$$

$$L = p^2 + 4 - p\sqrt{p} = p^2 + 4 - p^{1\frac{1}{2}} \text{ geeft } \frac{dL}{dp} = 2p - 1\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}} = 2p - 1\frac{1}{2}\sqrt{p}$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } 2p - 1\frac{1}{2}\sqrt{p} = 0$$

$$2p = 1\frac{1}{2}\sqrt{p}$$

$$4p = 3\sqrt{p}$$

kwadrateren geeft

$$16p^2 = 9p$$

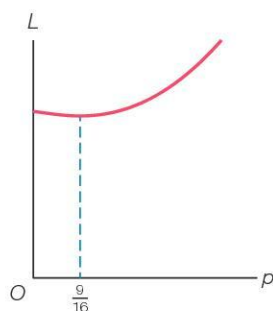
$$16p^2 - 9p = 0$$

$$p(16p - 9) = 0$$

$$p = 0 \vee 16p = 9$$

$$p = 0 \vee p = \frac{9}{16}$$

vold. vold.



Dus de lengte van lijnstuk AB is minimaal voor $p = \frac{9}{16}$.

7 Lijnen en cirkels

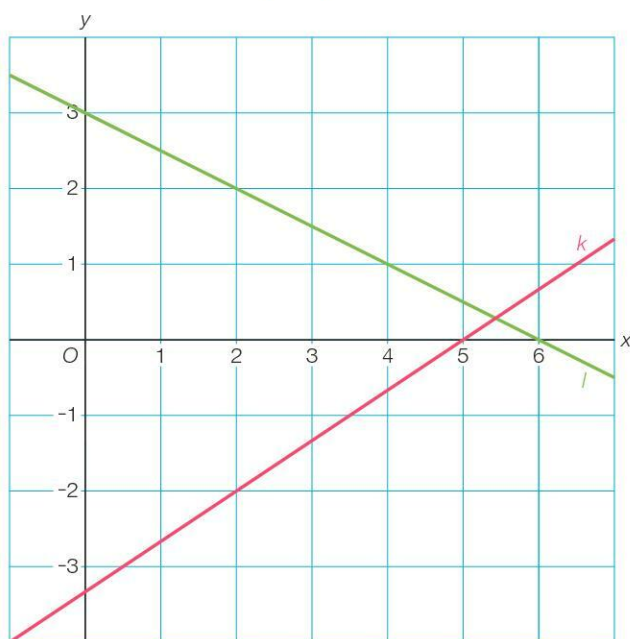
Voorkennis Lijnen en stelsels

Bladzijde 96

- 1 a** $A(2, p)$ op k , dus $2 \cdot 2 - 3 \cdot p = 10$
 $4 - 3p = 10$
 $-3p = 6$
 $p = -2$
- b** $(q, -3)$ op l , dus $q + 2 \cdot -3 = 6$
 $q - 6 = 6$
 $q = 12$
- c** $(x, y) = (r, 2r)$ is een oplossing, dus $2 \cdot r - 3 \cdot 2r = 10$
 $2r - 6r = 10$
 $-4r = 10$
 $r = -2\frac{1}{2}$

d $k: 2x - 3y = 10$ geeft $\begin{array}{c|c|c} x & 5 & 2 \\ \hline y & 0 & -2 \end{array}$

$l: x + 2y = 6$ geeft $\begin{array}{c|c|c} x & 6 & 0 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$



- e** m evenwijdig met $k: 2x - 3y = 10$ geeft
 $\left. \begin{array}{l} m: 2x - 3y = c \\ \text{door } O(0, 0) \end{array} \right\} c = 0$
Dus $m: 2x - 3y = 0$.
- f** n evenwijdig met $l: x + 2y = 6$ geeft
 $\left. \begin{array}{l} n: x + 2y = c \\ \text{door } C(2, -3) \end{array} \right\} c = 2 + 2 \cdot -3 = -4$
Dus $n: x + 2y = -4$.

2 a $x - 3y = 6$
 $-3y = -x + 6$
 $y = \frac{1}{3}x - 2$
Dus $rc_k = \frac{1}{3}$.

b $2x + 5y = 20$
 $5y = -2x + 20$
 $y = -\frac{2}{5}x + 4$
Dus $rc_l = -\frac{2}{5}$.

c $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1$
 $\frac{1}{3}y = -\frac{1}{2}x + 1$
 $y = -1\frac{1}{2}x + 3$
Dus $rc_m = -1\frac{1}{2}$.

3 a $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 20x - 28y = 4 \\ 20x - 15y = 30 \end{cases}$
 $-13y = -26$
 $y = 2$
 $5x - 7y = 1$ } $\begin{cases} 5x - 7 \cdot 2 = 1 \\ 5x - 14 = 1 \\ 5x = 15 \\ x = 3 \end{cases}$

De oplossing is $(x, y) = (3, 2)$.

b $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x + 9y = 45 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases} +$
 $16x = 40$
 $x = 2\frac{1}{2}$
 $2x + 3y = 15$ } $\begin{cases} 2 \cdot 2\frac{1}{2} + 3y = 15 \\ 5 + 3y = 15 \\ 3y = 10 \\ y = 3\frac{1}{3} \end{cases}$

De oplossing is $(x, y) = (2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3})$.

c $\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x - 15y = 48 \\ 6x + 8y = 20 \end{cases} -$
 $-23y = 28$
 $y = -1\frac{5}{23}$
 $2x - 5y = 16$ } $\begin{cases} 2x - 5 \cdot -1\frac{5}{23} = 16 \\ 2x + 6\frac{2}{23} = 16 \\ 2x = 9\frac{21}{23} \\ x = 4\frac{22}{23} \end{cases}$

De oplossing is $(x, y) = (4\frac{22}{23}, -1\frac{5}{23})$.

4 a $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 4y = 11 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x + 4y = 10 \\ x - 4y = 11 \end{cases} +$
 $7x = 21$
 $x = 3$
 $3x + 2y = 5$ } $\begin{cases} 9 + 2y = 5 \\ 2y = -4 \\ y = -2 \end{cases}$

Dus $P(3, -2)$.

$$\text{b } \begin{cases} 4x - 5y = 6 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 12x - 15y = 18 \\ 12x - 8y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -7y &= 14 \\ y &= -2 \\ 4x - 5y &= 6 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} -7y &= 14 \\ y &= -2 \\ 4x - 5y &= 6 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} 4x + 10 &= 6 \\ 4x &= -4 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Dus $Q(-1, -2)$.

7.1 Lijnen en hoeken

Bladzijde 97

- 1 a** $x - 2y = 4$
 $-2y = -x + 4$
 $y = \frac{1}{2}x - 2$
Dus $rc_k = \frac{1}{2}$.
 $x - 2y = 5$
 $-2y = -x + 5$
 $y = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$
Dus $rc_l = \frac{1}{2}$.
 $rc_k = rc_l$, dus k en l zijn evenwijdig.
- b** De evenwijdige lijnen k en l hebben geen gemeenschappelijk punt, dus het stelsel $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ heeft geen oplossingen.

Bladzijde 98

- 2 a** Geen gemeenschappelijk punt, dus $\frac{2}{4} = \frac{p}{3} \neq \frac{5}{q}$.
Dit geeft, zie het voorbeeld, $p = 1\frac{1}{2}$ en $q \neq 10$.
- b** $p = 2$ en $q = 9$ geeft $\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 4x + 4y = 10 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$
- $$\begin{aligned} y &= 1 \\ 2x + 2y &= 5 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} y &= 1 \\ 2x + 2y &= 5 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} 2x + 2 &= 5 \\ 2x &= 3 \\ x &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus het snijpunt is $(1\frac{1}{2}, 1)$.

- c** $\begin{cases} 2x + py = 5 \\ \text{door } (3, 1) \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} 2x + py = 5 \\ \text{door } (3, 1) \end{cases}} \right\} \begin{aligned} 6 + p &= 5 \\ p &= -1 \end{aligned}$
 $\begin{cases} 4x + 3y = q \\ \text{door } (3, 1) \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} 4x + 3y = q \\ \text{door } (3, 1) \end{cases}} \right\} \begin{aligned} q &= 12 + 3 = 15 \end{aligned}$
Dus $p = -1$ en $q = 15$.

- 3 a** Samenvallen, dus $\frac{p}{5} = \frac{-3}{1} = \frac{6}{q}$.
 $\frac{p}{5} = \frac{-3}{1}$ geeft $p = -15$
 $\frac{-3}{1} = \frac{6}{q}$ geeft $q = \frac{1 \cdot 6}{-3} = -2$
- b** Een snijpunt, dus $\frac{p}{5} \neq \frac{-3}{1}$ geeft $p \neq -15$.
Een snijpunt voor $p \neq -15$ en q mag elk getal zijn.
- c** Geen gemeenschappelijk punt, dus $\frac{p}{5} = \frac{-3}{1} \neq \frac{6}{q}$.
 $\frac{p}{5} = \frac{-3}{1}$ geeft $p = -15$
 $\frac{-3}{1} \neq \frac{6}{q}$ geeft $q \neq -2$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad & \left. \begin{array}{l} px - 3y = 6 \\ \text{door } (2, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2p - 3 \cdot 4 = 6 \\ 2p - 12 = 6 \\ 2p = 18 \\ p = 9 \end{array} \\ & \left. \begin{array}{l} 5x + y = q \\ \text{door } (2, 4) \end{array} \right\} q = 5 \cdot 2 + 4 = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad \text{a} \quad & \left. \begin{array}{l} y = ax + 4 \\ \text{door } (1, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 1 + 4 = 6 \\ a = 2 \end{array} \\ & \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = c \\ \text{door } (1, 6) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 6 = -9 \end{aligned}$$

$$\text{b} \quad \begin{array}{l} k: y = ax + 4 \\ -ax + y = 4 \end{array}$$

Geen gemeenschappelijk punt, dus $\frac{-a}{3} = \frac{1}{-2} \neq \frac{4}{c}$.

$$\frac{-a}{3} = \frac{1}{-2} \text{ geeft } -a = \frac{1 \cdot 3}{-2} = -1\frac{1}{2}, \text{ dus } a = 1\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{-2} \neq \frac{4}{c} \text{ geeft } c \neq -8$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad k: y = 2x + 4 \text{ snijden met } l: 3x - 2y = c \text{ geeft } & \begin{array}{l} 3x - 2(2x + 4) = c \\ 3x - 4x - 8 = c \\ -x = c + 8 \\ x = -c - 8 \end{array} \\ & \left. \begin{array}{l} x = -c - 8 \\ y = 2x + 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 2(-c - 8) + 4 \\ y = -2c - 16 + 4 \\ y = -2c - 12 \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Snijpunt boven de } x\text{-as geeft } y &> 0 \\ -2c - 12 &> 0 \\ -2c &> 12 \\ c &< -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad \text{a} \quad & \begin{array}{l} q: y = 2x + b \\ -2x + y = b \end{array} \\ \text{Een snijpunt, dus } & \frac{a}{-2} \neq \frac{-5}{1} \\ & a \neq 10 \end{aligned}$$

Een snijpunt voor $a \neq 10$ en b mag elk getal zijn.

$$\begin{aligned} \text{b} \quad & \left. \begin{array}{l} ax - 5y = 10 \\ \text{door } (3, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3a - 5 \cdot 4 = 10 \\ 3a - 20 = 10 \\ 3a = 30 \\ a = 10 \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } (3, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3 + b = 4 \\ 6 + b = 4 \\ b = -2 \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad p: 5x - 5y = 10 \text{ snijden met } q: y = 2x + b \text{ geeft } & \begin{array}{l} 5x - 5(2x + b) = 10 \\ 5x - 10x - 5b = 10 \\ -5x = 5b + 10 \\ x = -b - 2 \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Het snijpunt rechts van de lijn } x = 4 \text{ geeft } & -b - 2 > 4 \\ & -b > 6 \\ & b < -6 \end{aligned}$$

Bladzijde 99

6 Samenvallen, dus $\frac{a}{2} = \frac{8}{a} = \frac{12}{pa}$.

$$\frac{a}{2} = \frac{8}{a} \text{ geeft } a^2 = 16$$

$$a = 4 \vee a = -4$$

$$a = 4 \text{ geeft } \frac{4}{2} = \frac{12}{4p}$$

$$16p = 24$$

$$p = 1\frac{1}{2}$$

$$a = -4 \text{ geeft } \frac{-4}{2} = \frac{12}{-4p}$$

$$16p = 24$$

$$p = 1\frac{1}{2}$$

Dus $p = 1\frac{1}{2}$ en $a = 4 \vee a = -4$.

7 $k: y = \frac{1}{2}x + b$

$$2y = x + 2b$$

$$-x + 2y = 2b$$

$$l: 2x + qy = b + 10$$

Samenvallen, dus $\frac{-1}{2} = \frac{2}{q} = \frac{2b}{b+10}$.

$$\frac{-1}{2} = \frac{2}{q} \text{ geeft } -q = 4$$

$$q = -4$$

$$\frac{-1}{2} = \frac{2b}{b+10} \text{ geeft } 4b = -b - 10$$

$$5b = -10$$

$$b = -2$$

8 a $\tan(\angle CAB) = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{1} = 2$

$$\angle CAB = 63,4349\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle CAB \approx 63,435^\circ.$$

b De tangens van de hoek tussen l en de x -as is $\frac{1}{4}$.

$$\text{Dit geeft dat de hoek gelijk is aan } 14,0362\dots^\circ.$$

c Dus de hoek tussen k en l is $63,4349\dots^\circ + 14,0362\dots^\circ \approx 77,5^\circ$.

Bladzijde 100

9 Als de eenheden langs de assen verschillend zijn, dan maakt bijvoorbeeld de lijn $y = x$ geen hoek van 45° met de x -as, maar is elke hoek mogelijk.

Bladzijde 101

10 a $k: y = 3x + 4$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 3 \text{ geeft } \alpha = 71,5\dots^\circ$$

$$l: y = 2x - 1$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = 2 \text{ geeft } \beta = 63,4\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 71,5\dots^\circ - 63,4\dots^\circ \approx 8^\circ$$

$$\text{De gevraagde hoek is } 8^\circ.$$

b $m: y = 1\frac{1}{2}x + 2$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_m = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = 56,3\dots^\circ$$

$$n: y = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_n = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = -26,5\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 56,3\dots^\circ - (-26,5\dots^\circ) \approx 83^\circ$$

$$\text{De gevraagde hoek is } 83^\circ.$$

c $p: y = 3\frac{1}{2}x - 1$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_p = 3\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 74,0\dots^\circ$
 $q: y = -1\frac{1}{4}x + 5$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_q = -1\frac{1}{4}$ geeft $\beta = -51,3\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 74,0\dots^\circ - (-51,3\dots^\circ) \approx 125^\circ$
 De gevraagde hoek is $180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$.

11 a $k: 3x - 2y = 5$
 $-2y = -3x + 5$
 $y = 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 1\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 56,30\dots^\circ$
 $l: 4x - 3y = 6$
 $-3y = -4x + 6$
 $y = 1\frac{1}{3}x - 2$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_l = 1\frac{1}{3}$ geeft $\beta = 53,13\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 56,30\dots^\circ - 53,13\dots^\circ \approx 3,2^\circ$
 De gevraagde hoek is $3,2^\circ$.

b $m: 4x + y = 1$
 $y = -4x + 1$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_m = -4$ geeft $\alpha = -75,96\dots^\circ$
 $n: 3x + 4y = 2$
 $4y = -3x + 2$
 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_n = -\frac{3}{4}$ geeft $\beta = -36,86\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = -36,86\dots^\circ - (-75,96\dots^\circ) \approx 39,1^\circ$
 De gevraagde hoek is $39,1^\circ$.

c $p: 5x + 3y = 4$
 $3y = -5x + 4$
 $y = -1\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_p = -1\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = -59,03\dots^\circ$
 $q: 6x - 5y = 1$
 $-5y = -6x + 1$
 $y = 1\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_q = 1\frac{1}{5}$ geeft $\beta = 50,19\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = 50,19\dots^\circ - (-59,03\dots^\circ) \approx 109,2^\circ$
 De gevraagde hoek is $180^\circ - 109,2^\circ = 70,8^\circ$.

12 a $k: y = \frac{2}{3}x + 4$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33,69\dots^\circ$
 $l: 6x - 5y = 3$
 $-5y = -6x + 3$
 $y = 1\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_l = 1\frac{1}{5}$ geeft $\beta = 50,19\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = 50,19\dots^\circ - 33,69\dots^\circ \approx 16,5^\circ$
 De gevraagde hoek is $16,5^\circ$.

b $\text{rc}_m = \frac{0-5}{4-0} = -1\frac{1}{4}$
 $\tan(\alpha) = -1\frac{1}{4}$ geeft $\alpha = -51,34\dots^\circ$
 $\text{rc}_n = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$
 $\tan(\beta) = -\frac{1}{2}$ geeft $\beta = 26,56\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = 26,56\dots^\circ - (-51,34\dots^\circ) \approx 77,9^\circ$
 De gevraagde hoek is $77,9^\circ$.

$$\text{c } rc_p = \frac{6-1}{5-2} = 1\frac{2}{3}$$

$$\tan(\alpha) = 1\frac{2}{3} \text{ geeft } \alpha = 59,03\dots^\circ$$

$$rc_q = \frac{-6-1}{2-3} = -1\frac{2}{5}$$

$$\tan(\beta) = -1\frac{2}{5} \text{ geeft } \beta = -54,46\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 59,03\dots^\circ - (-54,46\dots^\circ) \approx 113,5^\circ$$

De gevraagde hoek is $180^\circ - 113,5^\circ = 66,5^\circ$.

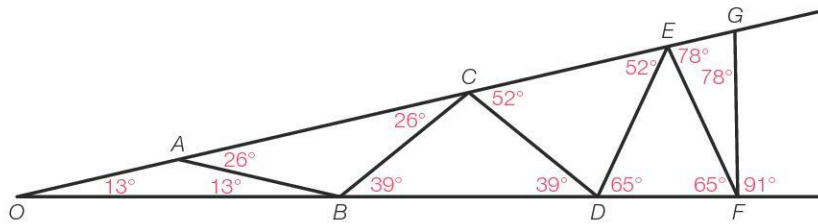
- 13** De richtingshoek van k is α en de richtingshoek van l is β .

$$\tan(\alpha) = rc_k = 2 \text{ geeft } \alpha = 63,434\dots^\circ$$

$$\beta = \alpha + 20^\circ = 63,434\dots^\circ + 20^\circ = 83,434\dots^\circ \text{ en dit geeft } rc_l = \tan(83,434\dots^\circ) \approx 8,69.$$

$$\beta = \alpha - 20^\circ = 63,434\dots^\circ - 20^\circ = 43,434\dots^\circ \text{ en dit geeft } rc_l = \tan(43,434\dots^\circ) \approx 0,95.$$

- 14** De hoeken die de sprongen maken met de benen van de hoek zijn opeenvolgende veelvouden van 13° . Zie de figuur.

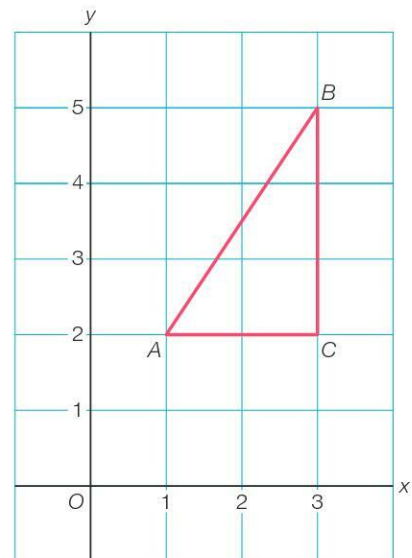


Youssef stopt bij de letter G .

7.2 Afstanden bij punten en lijnen

Bladzijde 103

- 15 a** In $\triangle ABC$ geeft de stelling van Pythagoras
 $AB^2 = AC^2 + BC^2$
 $AB^2 = 2^2 + 3^2$
 $AB^2 = 13$
 $AB = \sqrt{13}$
- b** $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$
 $M(2, 3\frac{1}{2})$
- c** $x_N = \frac{1}{2}(83 + 89) = 86$ en $y_N = \frac{1}{2}(61 + 69) = 65$,
dus $N(86, 65)$.



Bladzijde 104

- 16 a** $d(A, B) = \sqrt{(12-0)^2 + (7-12)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$
- b** $M_1(\frac{1}{2}(0 + -2), \frac{1}{2}(-2 + 7)) = M_1(-1, 2\frac{1}{2})$
- c** $d(A, B) = \sqrt{(4-0)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
 $d(A, M_2) = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2\frac{1}{2}$
- d** $M_3(\frac{1}{2}(0 + p), \frac{1}{2}(p + 7)) = M_3(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2})$
- e** $d(A, B) = \sqrt{(p-0)^2 + (7-p)^2} = \sqrt{p^2 + 49 - 14p + p^2} = \sqrt{2p^2 - 14p + 49}$

17 a $M(\frac{1}{2}(p+p+2), \frac{1}{2}(3+2p)) = M(p+1, p+1\frac{1}{2})$

b $d(A, B) = \sqrt{(p+2-p)^2 + (2p-3)^2} = \sqrt{2^2 + 4p^2 - 12p + 9} = \sqrt{4p^2 - 12p + 13}$

c Voer in $y_1 = \sqrt{4x^2 - 12x + 13}$ en $y_2 = 5$.
De optie snijpunt geeft $x = 3,791\dots$
Dus $p \approx 3,79$.

18 a $x_M = 10$

$$\frac{1}{2}(3+p+5) = 10$$

$$\frac{1}{2}p + 4 = 10$$

$$\frac{1}{2}p = 6$$

$$p = 12$$

$$y_M = \frac{1}{2}(4+14) = 9$$

b $M(\frac{1}{2}(3+p+5), \frac{1}{2}(4+p+2))$

$$\left. \begin{array}{l} M(\frac{1}{2}p+4, \frac{1}{2}p+3) \\ M \text{ op } k: y = 2x - 3 \end{array} \right\} 2(\frac{1}{2}p+4) - 3 = \frac{1}{2}p + 3$$

$$p + 8 - 3 = \frac{1}{2}p + 3$$

$$\frac{1}{2}p = -2$$

$$p = -4$$

c $d = \sqrt{(p+5-3)^2 + (p+2-4)^2} = \sqrt{(p+2)^2 + (p-2)^2} = \sqrt{p^2 + 4p + 4 + p^2 - 4p + 4} = \sqrt{2p^2 + 8}$
Dus $a = 2$ en $b = 8$.

19 a $k: 2x - y = 2$

$$-y = -2x + 2$$

$$y = 2x - 2$$

$$rc_k = 2$$

$$l: x + 2y = 3$$

$$2y = -x + 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$$

$$rc_l = -\frac{1}{2}$$

b Er geldt $rc_k \cdot rc_l = 2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$, dus $k \perp l$.

Bladzijde 105

20 In de theorie gaat het over de breuken $-\frac{a}{b}$ en $\frac{b}{a}$, dus $b \neq 0$ en $a \neq 0$.

Als in de kernzin

- $b = 0$, dan is k een verticale lijn en l een horizontale lijn, dus staan k en l loodrecht op elkaar;
- $a = 0$, dan is k een horizontale lijn en l een verticale lijn, dus staan k en l loodrecht op elkaar.

Dus in de kernzin zijn de voorwaarden $b \neq 0$ en $a \neq 0$ niet nodig.

21 a $k \perp l$, dus $k: 3x + 2y = c$ } $c = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14$
door $A(4, 1)$

Dus $k: 3x + 2y = 14$.

b $m \perp n$, dus $m: 5x - 4y = c$ } $c = 5 \cdot 3 - 4 \cdot -1 = 19$
door $B(3, -1)$

Dus $m: 5x - 4y = 19$.

c $p \perp q$, dus $p: x + 2y = c$ } $c = -4 + 2 \cdot 3 = 2$
door $C(-4, 3)$

$$x + 2y = 2$$

$$2y = -x + 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Dus $p: y = -\frac{1}{2}x + 1$.

22 a $rc_k = \frac{5-3}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$l \perp k, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1$$

$$\frac{1}{2} \cdot rc_l = -1$$

$$rc_l = -2$$

$$l: y = -2x + b \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 4 + b = 6 \\ -8 + b = 6 \\ b = 14 \end{array} \right.$$

Dus $l: y = -2x + 14$.

b $rc_m = \frac{-6-4}{2-3} = \frac{-10}{-1} = 10$

$$n \perp m, \text{ dus } rc_m \cdot rc_n = -1$$

$$10 \cdot rc_n = -1$$

$$rc_n = -\frac{1}{10}$$

$$n: y = \frac{1}{10}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{10} \cdot 3 + b = 7 \\ \frac{1}{10} + b = 7 \\ b = 6\frac{9}{10} \end{array} \right.$$

$$y = \frac{1}{10}x + 6\frac{9}{10}$$

$$2y = x + 11$$

$$-x + 2y = 11$$

Dus $n: x - 2y = -11$.

23 a $rc_k \cdot rc_l = -1$ geeft $rc_k \cdot -\frac{3}{5} = -1$

$$rc_k = \frac{5}{3}$$

$$k: y = \frac{5}{3}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{3} \cdot 6 + b = 15 \\ 10 + b = 15 \\ b = 5 \end{array} \right.$$

$$y = \frac{5}{3}x + 5$$

$$3y = 5x + 15$$

$$-5x + 3y = 15$$

Dus $k: 5x - 3y = -15$.

b $m \perp n$, dus $m: 7x + 6y = c \left\{ \begin{array}{l} c = 7 \cdot 2 + 6 \cdot -2 = 2 \end{array} \right.$

Dus $m: 7x + 6y = 2$.

c $rc_{DE} = \frac{-1-5}{5-1} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$

$$p \perp DE, \text{ dus } rc_p = \frac{2}{3}$$

$$p: y = \frac{2}{3}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot -6 + b = 4 \\ -4 + b = 4 \\ b = 8 \end{array} \right.$$

$$y = \frac{2}{3}x + 8$$

$$3y = 2x + 24$$

$$-2x + 3y = 24$$

Dus $p: 2x - 3y = -24$.

d $q \parallel r$, dus $rc_q = rc_r = \frac{2}{5}$.

$$q: y = \frac{2}{5}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{5} \cdot -2 + b = 5 \\ -\frac{4}{5} + b = 5 \\ b = 5\frac{4}{5} \end{array} \right.$$

$$y = \frac{2}{5}x + 5\frac{4}{5}$$

$$5y = 2x + 29$$

$$-2x + 5y = 29$$

Dus $q: 2x - 5y = -29$.

$$\begin{aligned} \text{e } s // t, \text{ dus } s: 4x - 2y = c \\ \text{door } G(1, -4) \} c = 4 - 2 \cdot -4 = 12 \\ \text{Dus } s: 4x - 2y = 12 \text{ oftewel } s: 2x - y = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24 \quad rc_k &= \frac{5 - -3}{-2 - 5} = \frac{8}{-7} \\ l \perp k, \text{ dus } rc_l &= -\frac{3}{8} \\ l: y &= -\frac{3}{8}x + b \\ \text{door } B(-2, 5) \} -\frac{3}{8} \cdot -2 + b &= 5 \\ \frac{3}{4} + b &= 5 \\ b &= 4\frac{1}{4} \\ l: y &= -\frac{3}{8}x + 4\frac{1}{4} \\ \text{door } C(6, 2)? \} -\frac{3}{8} \cdot 6 + 4\frac{1}{4} &= 2 \\ -2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{4} &= 2 \\ \text{klopt} \end{aligned}$$

Dus l gaat door C .

$$\begin{aligned} 25 \quad k: 3x + py = -7 \\ \text{door } A(1, -5) \} 3 - 5p = -7 \\ -5p = -10 \\ p &= 2 \\ \text{Dus } k: 3x + 2y &= -7. \\ l \perp k, \text{ dus } l: 2x - 3y &= c \\ \text{door } A(1, -5) \} c &= 2 - 3 \cdot -5 = 17 \\ \text{Dus } l: 2x - 3y &= 17. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26 \quad \text{a } rc_k &= \frac{3p - 0}{0 - 2p} = \frac{3p}{-2p} = -\frac{3}{2} \\ rc_l &= \frac{aq - 0}{0 - 3q} = \frac{aq}{-3q} = -\frac{a}{3} \\ k \perp l \text{ geeft } rc_k \cdot rc_l &= -1 \\ -\frac{3}{2} \cdot -\frac{a}{3} &= -1 \\ \frac{1}{2}a &= -1 \\ a &= -2 \\ \text{b } rc_k &= rc_l \text{ geeft } -\frac{3}{2} = -\frac{1}{3}a \\ a &= 4\frac{1}{2} \\ \text{Geen punten gemeenschappelijk, dus } 3q \neq 2p = 6 \text{ oftewel } q \neq 2. \\ \text{c } \tan(\alpha) &= rc_k = -\frac{3}{2} \text{ geeft } \alpha = -56,30...^\circ \\ \beta &= -56,30...^\circ + 45^\circ = -11,30...^\circ \\ rc_l &= \tan(-11,30...^\circ) = -0,2 \\ rc_l &= -\frac{1}{3}a \} a = 0,6 \\ -56,30...^\circ - 45^\circ &= -101,30...^\circ \text{ geeft } \beta = -101,30...^\circ + 180^\circ = 78,69...^\circ \\ rc_l &= \tan(78,69...^\circ) = 5 \\ rc_l &= -\frac{1}{3}a \} a = -15 \\ \text{Dus } a &= 0,6 \text{ of } a = -15. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27 \quad \text{a } rc_k \cdot rc_l &= \frac{1}{2} \cdot -2 = -1, \text{ dus } l \perp k. \\ l: y &= -2x + 5 \\ \text{door } A(1, 3)? \} -2 \cdot 1 + 5 &= 3 \\ -2 + 5 &= 3 \\ \text{klopt} \\ \text{Dus } l &\text{ gaat door } A(1, 3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad & \frac{1}{2}x = -2x + 5 \\ & 2\frac{1}{2}x = 5 \\ & \left. \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= \frac{1}{2}x \end{aligned} \right\} y = 1 \end{aligned}$$

Dus $B(2, 1)$.

$$\mathbf{c} \quad AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Dus de afstand van A tot k is $\sqrt{5}$.

Bladzijde 107

28 a De lijn p gaat door A en staat loodrecht op k .
 $rc_k \cdot rc_p = -1$ geeft $\frac{1}{2} \cdot rc_p = -1$, dus $rc_p = -2$.

$$\left. \begin{aligned} p: y &= -2x + b \\ \text{door } A(3, 0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -2 \cdot 3 + b &= 0 \\ -6 + b &= 0 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

Dus $p: y = -2x + 6$.

k en p snijden geeft het punt C .

$$\frac{1}{2}x + 1 = -2x + 6$$

$$2\frac{1}{2}x = 5$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= \frac{1}{2}x + 1 \end{aligned} \right\} y = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$$

Dus $C(2, 2)$.

$$d(A, k) = d(A, C) = \sqrt{(2-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

b De lijn q gaat door B en staat loodrecht op l .

$$\left. \begin{aligned} q: x - 2y &= c \\ \text{door } B(6, 0) \end{aligned} \right\} c = 6 - 2 \cdot 0 = 6$$

Dus $q: x - 2y = 6$.

l en q snijden geeft het punt D .

$$\left\{ \begin{array}{l|l} 2x + y = 2 & 2 \\ x - 2y = 6 & 1 \end{array} \right\} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{rcl} 5x & = & 10 \\ x = 2 & & \\ 2x + y = 2 & \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + y = 2 \\ 4 + y = 2 \end{array} \right. & \\ & y = -2 & \end{array}$$

Dus $D(2, -2)$.

$$d(B, l) = d(B, D) = \sqrt{(2-6)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

c De lijn r gaat door O en staat loodrecht op m .

$$rc_m \cdot rc_r = -1 \text{ geeft } -3 \cdot rc_r = -1, \text{ dus } rc_r = \frac{1}{3}.$$

r door O geeft $r: y = \frac{1}{3}x$.

m en r snijden geeft het punt E .

$$\frac{1}{3}x = -3x + 10$$

$$3\frac{1}{3}x = 10$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= \frac{1}{3}x \end{aligned} \right\} y = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

Dus $E(3, 1)$.

$$d(O, m) = d(O, E) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

- 29 De lijn k door de punten $B(2, 1)$ en $C(7, 3)$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{3-1}{7-2} = \frac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} k: y &= \frac{2}{5}x + b \\ \text{door } B(2, 1) \quad &\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{5} \cdot 2 + b &= 1 \\ \frac{4}{5} + b &= 1 \\ b &= \frac{1}{5} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dus $k: y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$.

De lijn l gaat door A en staat loodrecht op k .

$rc_k \cdot rc_l = -1$ geeft $\frac{2}{5} \cdot rc_l = -1$, dus $rc_l = -\frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} l: y &= -\frac{5}{2}x + b \\ \text{door } A(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}) \quad &\left\{ \begin{aligned} -\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} + b &= \frac{9}{2} \\ -8\frac{3}{4} + b &= 4\frac{1}{2} \\ b &= 13\frac{1}{4} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dus $l: y = -2\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{4}$.

k en l snijden geeft het punt D .

$$\frac{2}{5}x + \frac{1}{5} = -2\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{4}$$

$$8x + 4 = -50x + 265$$

$$58x = 261$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{9}{2} \\ y &= \frac{2}{5}x + \frac{1}{5} \end{aligned} \right\} y = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{2} + \frac{1}{5} = 2$$

Dus $D(4\frac{1}{2}, 2)$.

$$d(A, k) = d(A, D) = \sqrt{(4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2})^2 + (2 - 4\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1^2 + (-2\frac{1}{2})^2} \approx 2,69$$

- 30 De lijn m gaat door A en staat loodrecht op k .

$$\begin{aligned} m: 3x - y &= c \\ \text{door } A(1, 4) \quad &\left\{ c = 3 \cdot 1 - 4 = -1 \right. \end{aligned}$$

Dus $m: 3x - y = -1$.

k en m snijden geeft het punt B .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \quad &\left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 9x - 3y = -3 \end{cases} + \\ &\quad \quad \quad 10x = 0 \\ &\quad \quad \quad \left. \begin{aligned} x &= 0 \\ x + 3y &= 3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \end{aligned}$$

Dus $B(0, 1)$.

$$d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{(0-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

De lijn n gaat door A en staat loodrecht op l .

$$\begin{aligned} n: x - y &= c \\ \text{door } A(1, 4) \quad &\left\{ c = 1 - 4 = -3 \right. \end{aligned}$$

Dus $n: x - y = -3$.

l en n snijden geeft het punt C .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -3 \end{cases} + \\ \quad \quad \quad 2x = 6 \\ \quad \quad \quad x = 3 \\ \quad \quad \quad \left. \begin{aligned} x &= 3 \\ x + y &= 9 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3 + y &= 9 \\ y &= 6 \end{aligned} \end{aligned}$$

Dus $C(3, 6)$.

$$d(A, l) = d(A, C) = \sqrt{(3-1)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

Het punt A ligt dichterbij l dan bij k .

Dus Frans heeft niet gelijk.

- 31 a** De lijn k door $A(1, 0)$ en $B(7, 4)$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{4-0}{7-1} = \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} k: y = \frac{2}{3}x + b \Bigg\} & \frac{2}{3} \cdot 1 + b = 0 \\ \text{door } A(1, 0) \Bigg\} & \frac{2}{3} + b = 0 \\ & b = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dus $k: y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

De lijn l gaat door C en staat loodrecht op k .

$rc_k \cdot rc_l = -1$ geeft $\frac{2}{3} \cdot rc_l = -1$, $rc_l = -\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} l: y = -\frac{3}{2}x + b \Bigg\} & -\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} + b = 6 \\ \text{door } C(3\frac{1}{2}, 6) \Bigg\} & -\frac{21}{4} + b = 6 \\ & b = 11\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dus $l: y = -1\frac{1}{2}x + 11\frac{1}{4}$.

k en l snijden geeft het punt D .

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = -1\frac{1}{2}x + 11\frac{1}{4}$$

$$8x - 8 = -18x + 135$$

$$26x = 143$$

$$\begin{aligned} x = 5\frac{1}{2} \Bigg\} & y = \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{2} - \frac{2}{3} = 3 \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \Bigg\} & \end{aligned}$$

Dus $D(5\frac{1}{2}, 3)$.

$$d(C, k) = d(C, D) = \sqrt{(5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2})^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

b $d(A, B) = \sqrt{(7-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot d(A, B) \cdot d(C, AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$$

- 32** De lijnen k en l zijn evenwijdig, dus de afstand tussen k en l is gelijk aan de afstand van een punt van k tot l .

Neem het punt $A(1, 0)$ op k .

De lijn m gaat door A en staat loodrecht op k .

$$\begin{aligned} m: 3x + y = c \Bigg\} & c = 3 + 0 = 3 \\ \text{door } A(1, 0) \Bigg\} & \end{aligned}$$

Dus $m: 3x + y = 3$.

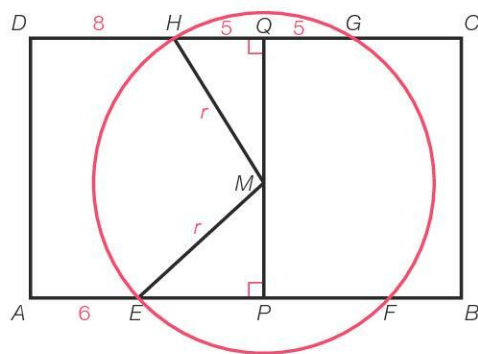
l en m snijden geeft het punt B .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - 3y = 6 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \Bigg\} & \begin{cases} x - 3y = 6 \\ 9x + 3y = 9 \end{cases} + \\ & 10x = 15 \\ & x = 1\frac{1}{2} \Bigg\} 3 \cdot 1\frac{1}{2} + y = 3 \\ & 4\frac{1}{2} + y = 3 \\ & y = -1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus $B(1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$.

$$d(k, l) = d(A, B) = \sqrt{(1\frac{1}{2} - 1)^2 + (-1\frac{1}{2} - 0)^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

- 33 a** Teken het lijnstuk PQ door M loodrecht op AB .



Q is het midden van GH , dus $HQ = 5$.

$APQD$ is een rechthoek, dus $AP = DQ$

$$6 + EP = 8 + 5$$

$$EP = 7$$

P is het midden van EF , dus $EF = 14$.

- b** De stelling van Pythagoras in $\triangle EPM$ geeft $MP = \sqrt{r^2 - 49}$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle HQM$ geeft $MQ = \sqrt{r^2 - 25}$.

$$PQ = AD = 14,5 \text{ geeft } \sqrt{r^2 - 49} + \sqrt{r^2 - 25} = 14,5.$$

Voer in $y_1 = \sqrt{x^2 - 49} + \sqrt{x^2 - 25}$ en $y_2 = 14,5$.

De optie snijpunt geeft $x = 9,499\dots$

Dus $r = 9,499\dots$ en $d(M, AB) = MP = \sqrt{9,499\dots^2 - 49} \approx 6,4$.

7.3 Cirkelvergelijkingen

Bladzijde 110

- 34 a** Dit volgt rechtstreeks uit de formule van de afstand tussen twee punten.
b Als de afstand van $P(x, y)$ tot $M(1, 4)$ gelijk is aan 5, dan ligt P op de cirkel met middelpunt M en straal 5.
c Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal 10 is $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10^2$, oftewel $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 100$.
d Middelpunt $(-2, 3)$ en straal $\sqrt{16} = 4$.

Bladzijde 111

- 35 a** $c_1: (x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$
b $c_2: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ } $r^2 = (0 - 3)^2 + (0 - 4)^2 = 9 + 16 = 25$
 door $O(0, 0)$
 Dus $c_2: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.
c $c_3: (x + 3)^2 + (y - 5)^2 = r^2$ } $r^2 = (-1 + 3)^2 + (2 - 5)^2 = 4 + 9 = 13$
 door $A(-1, 2)$
 Dus $c_3: (x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 13$.
d c_4 raakt de x -as, dus $r = d(M_4, x\text{-as}) = 1$.
 $c_4: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$
e c_5 raakt de y -as, dus $r = d(M_5, y\text{-as}) = 4$.
 $c_5: (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$

Bladzijde 112

- 36** De cirkels raken de x -as en de straal is 2, dus $y_M = -2$ of $y_M = 2$.
 M op k , dus $M_1(-6, -2)$ en $M_2(6, 2)$.
 $c_1: (x + 6)^2 + (y + 2)^2 = 4$ en $c_2: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 4$
37 De cirkels raken de y -as en de straal is 10, dus $x_M = -10$ of $x_M = 10$.
 M op k , dus $M_1(-10, 6)$ en $M_2(10, -6)$.
 $c_1: (x + 10)^2 + (y - 6)^2 = 100$ en $c_2: (x - 10)^2 + (y + 6)^2 = 100$

- 38 a** Middelpunt A en c_1 raakt de x -as, dus $r = y_A = 7$.
 $c_1: (x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 49$
- b** Middelpunt B en c_2 door A , dus de straal is
 $d(A, B) = \sqrt{(9 - 3)^2 + (1 - 7)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$.
 $c_2: (x - 9)^2 + (y - 1)^2 = 72$
- c** Middellijn AB dus het middelpunt is het midden van AB , dus $M(6, 4)$.
De straal is $d(A, M) = \sqrt{(6 - 3)^2 + (4 - 7)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$.
 $c_3: (x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 18$
- d** De cirkels raken de y -as en de straal is 2, dus $x_M = -2$ of $x_M = 2$.
 $x_M = -2$ en M op k geeft $5 \cdot -2 + 2y_M = 12$
 $-10 + 2y_M = 12$
 $2y_M = 22$
 $y_M = 11$
Dus $M_4(-2, 11)$ en $c_4: (x + 2)^2 + (y - 11)^2 = 4$.
 $x_M = 2$ en M op k geeft $5 \cdot 2 + 2y_M = 12$
 $10 + 2y_M = 12$
 $2y_M = 2$
 $y_M = 1$
Dus $M_5(2, 1)$ en $c_5: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

- 39 a** Omdat een raaklijn van een cirkel loodrecht staat op de straal naar het raakpunt, is de straal van de cirkel gelijk aan de afstand van M tot k , dus $r = d(M, A)$.
- b** De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .
 $rc_k = \frac{1}{2}$, dus $rc_l = -2$.
 $l: y = -2x + b$
door $M(3, 4)$ $\left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 3 + b = 4 \\ -6 + b = 4 \end{array} \right.$
 $b = 10$
Dus $l: y = -2x + 10$.
Een raaklijn staat loodrecht op de straal naar het raakpunt, dus het snijpunt van k en l is het raakpunt A .
 k en l snijden geeft $\frac{1}{2}x = -2x + 10$
 $2\frac{1}{2}x = 10$
 $\left. \begin{array}{l} x = 4 \\ y = \frac{1}{2}x \end{array} \right\} y = 2$
Dus $A(4, 2)$.
- c** $r = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(4 - 3)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
Dus $c: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$.

- 40 a** De lijn l gaat door $M_1(5, 3)$ en staat loodrecht op $k: y = x$.
 $rc_k = 1$, dus $rc_l = -1$.
 $l: y = -x + b$
door $M_1(5, 3)$ $\left\{ \begin{array}{l} -5 + b = 3 \\ b = 8 \end{array} \right.$
Dus $l: y = -x + 8$.
 k en l snijden geeft het punt A .
 $x = -x + 8$
 $2x = 8$
 $\left. \begin{array}{l} x = 4 \\ y = x \end{array} \right\} y = 4$
Dus $A(4, 4)$.
 $r = d(M_1, l) = d(M_1, A) = \sqrt{(4 - 5)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
Dus $c_1: (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 2$.

- b** De lijn n gaat door $M_2(-1, 3)$ en staat loodrecht op $m: y = -\frac{1}{2}x$.
 $rc_m = -\frac{1}{2}$, dus $rc_n = 2$.
 $n: y = 2x + b$
 door $M_2(-1, 3)$ $\left. \begin{array}{l} 2 \cdot -1 + b = 3 \\ -2 + b = 3 \end{array} \right\} b = 5$
 Dus $n: y = 2x + 5$.
 m en n snijden geeft het punt B .
 $-\frac{1}{2}x = 2x + 5$
 $-2\frac{1}{2}x = 5$
 $x = -2$
 $y = -\frac{1}{2}x$ $\left. \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{array} \right\} y = 1$
 Dus $B(-2, 1)$.
 $r = d(M_2, n) = d(M_2, B) = \sqrt{(-2 - (-1))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
 Dus $c_2: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Bladzijde 113

- 41 a** De lijn l gaat door M_1 en staat loodrecht op k .
 $l: 3x - 2y = c$
 door $M_1(8, 3)$ $\left. \begin{array}{l} c = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 3 = 18 \end{array} \right\}$
 Dus $l: 3x - 2y = 18$.
 k en l snijden geeft
 $\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 18 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right|$ geeft $\left\{ \begin{array}{l} 4x + 6y = 24 \\ 9x - 6y = 54 \end{array} \right. +$
 $13x = 78$
 $x = 6$
 $2x + 3y = 12$ $\left. \begin{array}{l} x = 6 \\ 2x + 3y = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 6 + 3y = 12 \\ 12 + 3y = 12 \\ 3y = 0 \\ y = 0 \end{array}$
 Dus het snijpunt is $A(6, 0)$.
 $r = d(M_1, k) = d(M_1, A) = \sqrt{(6 - 8)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$
 Dus $c_1: (x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 13$.
b De cirkels raken de x -as en straal = 8, dus $y_M = -8$ of $y_M = 8$.
 $y_M = -8$ en M op k geeft $2x_M + 3 \cdot -8 = 12$
 $2x_M - 24 = 12$
 $2x_M = 36$
 $x_M = 18$
 Dus $M_2(18, -8)$ en $c_2: (x - 18)^2 + (y + 8)^2 = 64$.
 $y_M = 8$ en M op k geeft $2x_M + 3 \cdot 8 = 12$
 $2x_M + 24 = 12$
 $2x_M = -12$
 $x_M = -6$
 Dus $M_3(-6, 8)$ en $c_3: (x + 6)^2 + (y - 8)^2 = 64$.
c k snijden met de x -as geeft $A(6, 0)$.
 k snijden met de y -as geeft $B(0, 4)$.
 M_4 is het midden van AB , dus $M_4(3, 2)$.
 $r = d(A, M_4) = \sqrt{(3 - 6)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$
 Dus $c_4: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$.

- 42 a** k snijden met de x -as geeft $A(10, 0)$.
 k raakt c_1 , dus $MB \perp k$.
 $MB: 2x + y = c$
 door $M(-1, 2)$ } $c = 2 \cdot -1 + 2 = 0$
 Dus $MB: 2x + y = 0$ oftewel $MB: y = -2x$.
 MB snijden met k geeft $x - 2 \cdot -2x = 10$
 $x + 4x = 10$
 $5x = 10$
 $x = 2$ } $y = -4$
 $y = -2x$

Dus $B(2, -4)$.

$$r_1 = d(M, B) = \sqrt{(2 - -1)^2 + (-4 - 2)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

$$r_2 = d(A, B) = \sqrt{(2 - 10)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$$

Dus $c_1: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 45$ en $c_2: (x - 10)^2 + y^2 = 80$.

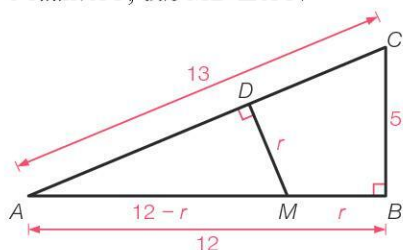
- b** Het midden van AM is $M_3(\frac{1}{2}(10 + -1), \frac{1}{2}(0 + 2)) = M_3(4\frac{1}{2}, 1)$.

$$r_3 = d(M_3, A) = \sqrt{(10 - 4\frac{1}{2})^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{30\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{31\frac{1}{4}}$$

$$d(M_3, B) = \sqrt{(2 - 4\frac{1}{2})^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{6\frac{1}{4} + 25} = \sqrt{31\frac{1}{4}}$$

Dus c_3 gaat door B .

- 43** De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AB = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
 c raakt AC , dus $MD \perp AC$.



$$\left. \begin{array}{l} \angle BAC = \angle DAM \\ \angle B = \angle D (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle ADM$$

Hieruit volgt $\frac{BC}{DM} = \frac{AC}{AM}$ en dit geeft $\frac{5}{r} = \frac{13}{12 - r}$
 $13r = 5(12 - r)$
 $13r = 60 - 5r$
 $18r = 60$
 $r = 3\frac{1}{3}$

- 44** $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$
 $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 16$
 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

Bladzijde 115

- 45 a** $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 + 10y - 6 = 0$
 $x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 10y + 25 - 25 - 6 = 0$
 $(x - 2)^2 - 4 + (y + 5)^2 - 25 - 6 = 0$
 $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 35$
b $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 13 = 0$
 $x^2 + 8x + y^2 - 6y + 13 = 0$
 $x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 13 = 0$
 $(x + 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 + 13 = 0$
 $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 12$

$$\begin{aligned}
\text{c} \quad & x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0 \\
& x^2 + 3x + y^2 - y - 1 = 0 \\
& x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 = 0 \\
& (x + \frac{3}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0 \\
& (x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 3\frac{1}{2} \\
\text{d} \quad & x^2 + y^2 - 5x + 5y + 10 = 0 \\
& x^2 - 5x + y^2 + 5y + 10 = 0 \\
& x^2 - 5x + 6\frac{1}{4} - 6\frac{1}{4} + y^2 + 5y + 6\frac{1}{4} - 6\frac{1}{4} + 10 = 0 \\
& (x - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y + 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + 10 = 0 \\
& (x - 2\frac{1}{2})^2 + (y + 2\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

46

$$\begin{aligned}
\text{a} \quad & x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0 \\
& x^2 + 6x + y^2 - 4y + 4 = 0 \\
& x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 4 = 0 \\
& (x + 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 4 = 0 \\
& (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9 \\
& \text{Dus van } c_1 \text{ is het middelpunt } (-3, 2) \text{ en de straal } 3. \\
\text{b} \quad & x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0 \\
& x^2 - 8x + y^2 + 10y + 31 = 0 \\
& x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 + 10y + 25 - 25 + 31 = 0 \\
& (x - 4)^2 - 16 + (y + 5)^2 - 25 + 31 = 0 \\
& (x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 10 \\
& \text{Dus van } c_2 \text{ is het middelpunt } (4, -5) \text{ en de straal } \sqrt{10}. \\
\text{c} \quad & x^2 + y^2 + 5x + 3y + 3 = 0 \\
& x^2 + 5x + y^2 + 3y + 3 = 0 \\
& x^2 + 5x + 6\frac{1}{4} - 6\frac{1}{4} + y^2 + 3y + 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} + 3 = 0 \\
& (x + 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y + 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 3 = 0 \\
& (x + 2\frac{1}{2})^2 + (y + 1\frac{1}{2})^2 = 5\frac{1}{2} \\
& \text{Dus van } c_3 \text{ is het middelpunt } (-2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}) \text{ en de straal } \sqrt{5\frac{1}{2}}. \\
\text{d} \quad & x^2 + y^2 - 7x + 8y = 0 \\
& x^2 - 7x + y^2 + 8y = 0 \\
& x^2 - 7x + 12\frac{1}{4} - 12\frac{1}{4} + y^2 + 8y + 16 - 16 = 0 \\
& (x - 3\frac{1}{2})^2 - 12\frac{1}{4} + (y + 4)^2 - 16 = 0 \\
& (x - 3\frac{1}{2})^2 + (y + 4)^2 = 28\frac{1}{4} \\
& \text{Dus van } c_4 \text{ is het middelpunt } (3\frac{1}{2}, -4) \text{ en de straal } \sqrt{28\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

47

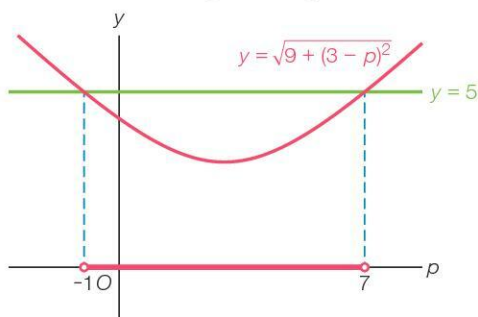
$$\begin{aligned}
\text{a} \quad & x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0 \\
& x^2 + 6x + y^2 - 8y + 15 = 0 \\
& x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 8y + 16 - 16 + 15 = 0 \\
& (x + 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 + 15 = 0 \\
& (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 10 \\
& \text{Dus } M(-3, 4) \text{ en } r = \sqrt{10}. \\
\text{b} \quad & d(A, M) = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{9 + 0} = 3 \\
& A \text{ ligt binnen } c \text{ want } d(A, M) < r. \\
\text{c} \quad & d(B, M) = \sqrt{(-3 - -3)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{0 + 16} = 4 \\
& B \text{ ligt buiten } c \text{ want } d(B, M) > r. \\
\text{d} \quad & d(C, M) = \sqrt{(-3 - -2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \\
& C \text{ ligt op } c \text{ want } d(C, M) = r.
\end{aligned}$$

48 a $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$
 $x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 8y + 16 - 16 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 = 0$
 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
Dus $r = 5$ en $M(3, 4)$.
 $d(A, M) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$
 $d(A, M) < r$, dus A ligt binnen de cirkel c_1 .

b $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 4y + 2 = 0$
 $x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 2 = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y - 2)^2 - 4 + 2 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 18$
Dus $r = \sqrt{18}$ en $M(4, 2)$.
 $d(O, M) = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$
 $d(O, M) > r$, dus O ligt buiten de cirkel c_2 .

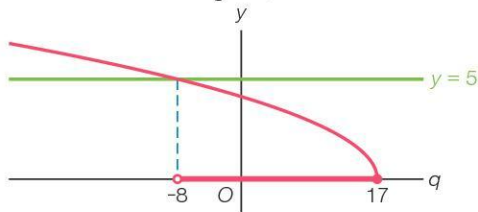
c $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 3 = 0$
 $x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 3 = 0$
 $(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 3 = 0$
 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$
Dus $r = \sqrt{10}$ en $M(-2, 3)$.
 $d(B, M) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$
 $d(B, M) = r$, dus B ligt op de cirkel c_3 .

49 a $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$
 $x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 - 12 = 0$
 $(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 - 12 = 0$
 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$
Dus $r = 5$ en $M(-2, 3)$.
 $d(P, M) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - p)^2} = \sqrt{9 + (3 - p)^2}$
 $d(P, M) = r$ geeft $\sqrt{9 + (3 - p)^2} = 5$
 $\sqrt{9 + 9 - 6p + p^2} = 5$
 $\sqrt{p^2 - 6p + 18} = 5$
 $p^2 - 6p + 18 = 25$
 $p^2 - 6p - 7 = 0$
 $(p + 1)(p - 7) = 0$
 $p = -1 \vee p = 7$



$d(P, M) < 5$ geeft $-1 < p < 7$
Dus voor $-1 < p < 7$ ligt P binnen c_1 .

$$\begin{aligned}
 \text{b } & x^2 + y^2 - 8x - 2y + q = 0 \\
 & x^2 - 8x + y^2 - 2y + q = 0 \\
 & x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 - 2y + 1 - 1 + q = 0 \\
 & (x - 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 + q = 0 \\
 & (x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 17 - q \\
 & \text{Dus } r = \sqrt{17 - q} \text{ en } M(4, 1). \\
 & d(Q, M) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \\
 & d(Q, M) = r \text{ geeft } 5 = \sqrt{17 - q} \\
 & 25 = 17 - q \\
 & q = -8
 \end{aligned}$$



$d(Q, M) > r$ oftewel $5 > \sqrt{17 - q}$ geeft $-8 < q \leq 17$.
Dus voor $-8 < q \leq 17$ ligt Q buiten c_2 .

7.4 Raaklijnen en snijpunten bij cirkels

Bladzijde 117

- 50 a** $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$
 $x^2 - 10x + y^2 - 6y + 18 = 0$
 $(x - 5)^2 - 25 + (y - 3)^2 - 9 + 18 = 0$
 $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$
Dus $M(5, 3)$ en $r = \sqrt{16} = 4$.
- b** $d(P, M) = \sqrt{(5 - 1)^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
 $d(P, M) > r$, dus P ligt buiten c .
 $d(Q, M) = \sqrt{(5 - 6)^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$
 $d(Q, M) > r$, dus Q ligt buiten c .
- c** $5 < \sqrt{26}$, dus P ligt dichterbij het middelpunt M dan Q .
Dus $d(P, c) < d(Q, c)$.

Bladzijde 118

- 51 a** $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 3 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 3 = 0$
 $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$
Dus $M(3, 2)$ en $r = \sqrt{10}$.
 $d(A, M) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
 $d(A, c) = r - d(A, M) = \sqrt{10} - \sqrt{2}$
- b** $d(B, M) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
 $d(B, c) = d(B, M) - r = 5 - \sqrt{10}$
- c** $d(C, M) = \sqrt{(3 - 9)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
 $d(C, c) = d(C, M) - r = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$

52

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

Dus $M(1, -2)$ en $r = \sqrt{5}$.

$$d(A, M) = \sqrt{(1-4)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$d(A, c) = d(A, M) - r = \sqrt{13} - \sqrt{5}$$

De lijn l gaat door A en staat loodrecht op k .

$$l: 6x - 4y = c \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } A(4, 0) \end{array} \right\} c = 6 \cdot 4 - 4 \cdot 0 = 24$$

Dus $l: 6x - 4y = 24$ oftewel $l: 3x - 2y = 12$.

l snijden met k geeft het punt S .

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 12 \\ 4x + 6y = 29 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 9x - 6y = 36 \\ 4x + 6y = 29 \end{array} \right. + \\ \quad \quad \quad 13x = 65 \\ \quad \quad \quad x = 5 \\ \quad \quad \quad \left. \begin{array}{l} 4x + 6y = 29 \\ 20 + 6y = 29 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 5 + 6y = 29 \\ 20 + 6y = 29 \\ 6y = 9 \\ y = 1\frac{1}{2} \end{array} \end{array}$$

Dus $S(5, 1\frac{1}{2})$.

$$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(5-4)^2 + (1\frac{1}{2}-0)^2} = \sqrt{1+2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

Geldt $d(A, c) < d(A, k)$ oftewel $\sqrt{13} - \sqrt{5} < \frac{1}{2}\sqrt{13}$?

$$\sqrt{13} - \sqrt{5} < \frac{1}{2}\sqrt{13} \text{ geeft } \frac{1}{2}\sqrt{13} < \sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{13}{4}} < \sqrt{5}$$

$$\sqrt{3\frac{1}{4}} < \sqrt{5}$$

Dit klopt, dus A ligt dichterbij c dan bij k .

53

a $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

$$x^2 + 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 4 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

Dus $r = 3$ en $M(-2, 1)$.

b $l \perp k$, dus $l: x - 2y = c$ $\left. \begin{array}{l} \\ \text{door } M(-2, 1) \end{array} \right\} c = -2 - 2 \cdot 1 = -4$

Dus $l: x - 2y = -4$.

l snijden met k geeft het punt A .

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = -4 \\ 2x + y = 7 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = -4 \\ 4x + 2y = 14 \end{array} \right. + \\ \quad \quad \quad 5x = 10 \\ \quad \quad \quad x = 2 \\ \quad \quad \quad \left. \begin{array}{l} 2x + y = 7 \\ 4 + y = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + y = 7 \\ 4 + y = 7 \\ y = 3 \end{array} \end{array}$$

Dus $A(2, 3)$.

c $d(A, M) = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Dus $d(k, c) = d(A, M) - r = 2\sqrt{5} - 3$.

$$\begin{aligned}
 54 \quad & x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0 \\
 & x^2 - 6x + y^2 + 4y - 3 = 0 \\
 & (x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 - 3 = 0 \\
 & (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16
 \end{aligned}$$

Dus $r = 4$ en $M(3, -2)$.

De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{aligned} l: 2x + y = c \\ \text{door } M(3, -2) \end{aligned} \right\} c = 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

Dus $l: 2x + y = 4$.

k en l snijden geeft het punt A .

$$\left\{ \begin{aligned} x - 2y = -13 \\ 2x + y = 4 \end{aligned} \right. \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right. \text{ geeft } \left\{ \begin{aligned} x - 2y &= -13 \\ 4x + 2y &= 8 \end{aligned} \right. + \\
 \begin{array}{r} 5x \quad \quad = -5 \\ x = -1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ 2x + y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot (-1) + y = 4 \\ -2 + y = 4 \\ y = 6 \end{array}$$

Dus $A(-1, 6)$.

$$d(A, M) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-2 - 6)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$d(k, c) = d(A, c) = d(A, M) - r = 4\sqrt{5} - 4 = 4(\sqrt{5} - 1)$$

$$\begin{aligned}
 55 \quad & x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0 \\
 & x^2 + 8x + y^2 + 2y - 8 = 0 \\
 & (x+4)^2 - 16 + (y+1)^2 - 1 - 8 = 0 \\
 & (x+4)^2 + (y+1)^2 = 25
 \end{aligned}$$

Dus $r = 5$ en $M(-4, -1)$.

Van de lijn k door M loodrecht op l is $rc_k = \frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{aligned} y = \frac{1}{3}x + b \\ \text{door } M(-4, -1) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot -4 + b = -1 \\ -1\frac{1}{3} + b = -1 \\ b = \frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

k en l snijden geeft het punt A .

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = -3x + 17$$

$$3\frac{1}{3}x = 16\frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 5 \\ y &= -3x + 17 \end{aligned} \right\} y = -3 \cdot 5 + 17 = 2$$

Dus $A(5, 2)$.

$$d(A, M) = \sqrt{(-4 - 5)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}$$

$$d(l, c) = d(A, c) = d(A, M) - r = \sqrt{90} - 5$$

Is $\sqrt{90} - 5 < 5$ oftewel $\sqrt{90} < 10$?

Ja, dit klopt, dus $d(l, c) < r$.

$$\begin{aligned}
 56 \quad & x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0 \\
 & x^2 + 8x + y^2 + 4y - 5 = 0 \\
 & (x+4)^2 - 16 + (y+2)^2 - 4 - 5 = 0 \\
 & (x+4)^2 + (y+2)^2 = 25
 \end{aligned}$$

Dus $r = 5$ en $M(-4, -2)$.

Stel de punten $P(p, p)$.

$$d(P, M) = \sqrt{(-4 - p)^2 + (-2 - p)^2} = \sqrt{16 + 8p + p^2 + 4 + 4p + p^2} = \sqrt{2p^2 + 12p + 20}$$

$$d(P, c) = d(P, M) - r = \sqrt{2p^2 + 12p + 20} - 5$$

$$d(P, c) = 5 \text{ geeft } \sqrt{2p^2 + 12p + 20} - 5 = 5$$

$$\sqrt{2p^2 + 12p + 20} = 10$$

$$2p^2 + 12p + 20 = 100$$

$$2p^2 + 12p - 80 = 0$$

$$p^2 + 6p - 40 = 0$$

$$(p-4)(p+10) = 0$$

$$p = 4 \vee p = -10$$

Dus de punten zijn $(4, 4)$ en $(-10, -10)$.

Bladzijde 119

$$\begin{aligned} 57 \quad a \quad & \left. \begin{aligned} (x-2)^2 + (y-1)^2 &= 10 \\ A(5, 2) \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} (5-2)^2 + (2-1)^2 &= 10 \\ 3^2 + 1^2 &= 10 \\ 10 &= 10 \\ \text{klopt} \end{aligned} \end{aligned}$$

Dus A op c .

$$b \quad M(2, 1) \text{ en } A(5, 2), \text{ dus } rc_l = \frac{2-1}{5-2} = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} c \quad & k \text{ staat loodrecht op } l \text{ geeft } rc_k \cdot \frac{1}{3} = -1, \text{ dus } rc_k = -3. \\ & \left. \begin{aligned} k: y &= -3x + b \\ \text{door } A(5, 2) \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} -3 \cdot 5 + b &= 2 \\ -15 + b &= 2 \\ b &= 17 \end{aligned} \end{aligned}$$

Dus $k: y = -3x + 17$.

Bladzijde 120

$$58 \quad a \quad y_B = -1, \text{ dus } B(2, -1).$$

$$\text{Lijn } m \text{ door } M \text{ en } B \text{ heeft } rc_m = \frac{-1-1}{2-3} = 2, \text{ dus } rc_l = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} l: y &= -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(2, -1) \end{aligned} \left\} \begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b &= -1 \\ -1 + b &= -1 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{1}{2}x.$$

b De richtingshoek van k is α .

$$\tan(\alpha) = rc_k = \frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = 26,56\dots^\circ$$

De richtingshoek van l is β .

$$\tan(\beta) = rc_l = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = -26,56\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 53,13\dots^\circ, \text{ dus de hoek tussen } k \text{ en } l \text{ is } 53,1^\circ.$$

$$\begin{aligned} c \quad & k: y = \frac{1}{2}x + 2 \text{ snijden met } l: y = -\frac{1}{2}x \text{ geeft } \frac{1}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}x \\ & \left. \begin{aligned} x &= -2 \\ y &= -\frac{1}{2}x \end{aligned} \right\} y = 1 \end{aligned}$$

Dus $S(-2, 1)$.

$$\begin{aligned} d \quad & MS = x_M - x_S = 3 - (-2) = 5 \text{ en } AM = \sqrt{5} \text{ geeft } \sin(\angle MSA) = \frac{AM}{MS} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ dus } \angle MSA = 26,56\dots^\circ. \\ & \text{Op dezelfde manier is } \angle MSB = 26,56\dots^\circ. \\ & \text{De hoek tussen } k \text{ en } l \text{ is } \angle ASB = 2 \cdot 26,56\dots^\circ \approx 53,1^\circ. \end{aligned}$$

Bladzijde 121

$$\begin{aligned} 59 \quad a \quad & \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 12x + 11 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} 3^2 + y^2 - 12 \cdot 3 + 11 &= 0 \\ 9 + y^2 - 36 + 11 &= 0 \\ y^2 &= 16 \\ y &= 4 \vee y = -4 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$y_A > y_B, \text{ dus } A(3, 4) \text{ en } B(3, -4).$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$x^2 - 12x + y^2 + 11 = 0$$

$$(x-6)^2 - 36 + y^2 + 11 = 0$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 25$$

Dus c heeft middelpunt $M(6, 0)$.

$$\text{Lijn } m \text{ door } M \text{ en } A \text{ heeft } rc_m = \frac{0-4}{6-3} = -\frac{4}{3}, \text{ dus } rc_k = \frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned} k: y &= \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } A(3, 4) \end{aligned} \left\} \begin{aligned} \frac{3}{4} \cdot 3 + b &= 4 \\ 2\frac{1}{4} + b &= 4 \\ b &= 1\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}.$$

Lijn n door M en B heeft $rc_n = \frac{0 - -4}{6 - 3} = \frac{4}{3}$, dus $rc_l = -\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} l: y = -\frac{3}{4}x + b \quad & \left. \begin{array}{l} \text{door } B(3, -4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 3 + b = -4 \\ -2\frac{1}{4} + b = -4 \\ b = -1\frac{3}{4} \end{array} \end{aligned}$$

Dus $l: y = -\frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4}$.

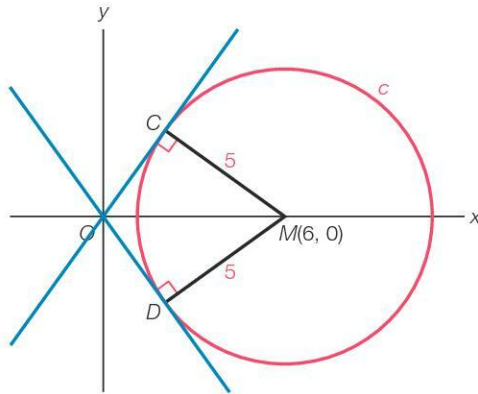
- b** De richtingshoek van k is α en de richtingshoek van l is β .

$\tan(\alpha) = rc_k = \frac{3}{4}$ geeft $\alpha = 36,86...^\circ$

$\tan(\beta) = rc_l = -\frac{3}{4}$ geeft $\beta = -36,86...^\circ$

Dus de hoek tussen k en l is $36,86...^\circ - (-36,86...^\circ) \approx 74^\circ$.

- c** De raaklijnen door O raken de cirkel in de punten C en D .



In $\triangle OMC$ is $\angle C = 90^\circ$, $OM = 6$ en $MC = 5$.

$\sin(\angle MOC) = \frac{5}{6}$ geeft $\angle MOC = 56,44...^\circ$

$\angle COD = 2 \cdot \angle MOC = 2 \cdot 56,44...^\circ \approx 113^\circ$

De hoek tussen de raaklijnen door O is $180^\circ - 113^\circ = 67^\circ$.

60

a $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 7 = 0$

$$x^2 + 6x + y^2 - 6y - 7 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 9 + (y - 3)^2 - 9 - 7 = 0$$

$$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

Dus c heeft middelpunt $M(-3, 3)$.

$y = 0$ geeft $x^2 + 6x - 7 = 0$

$$(x - 1)(x + 7) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -7$$

Dus $A(-7, 0)$ en $B(1, 0)$.

$$rc_{MA} = \frac{3 - 0}{-3 - -7} = \frac{3}{4}$$

$k \perp MA$, dus $rc_k = -\frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned} y = -\frac{4}{3}x + b \quad & \left. \begin{array}{l} \text{door } A(-7, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{4}{3} \cdot -7 + b = 0 \\ \frac{28}{3} + b = 0 \\ b = -9\frac{1}{3} \end{array} \end{aligned}$$

Dus $k: y = -\frac{4}{3}x - 9\frac{1}{3}$.

$$rc_{MB} = \frac{0 - 3}{1 - -3} = -\frac{3}{4}$$

$l \perp MB$, dus $rc_l = \frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned} y = \frac{4}{3}x + b \quad & \left. \begin{array}{l} \text{door } B(1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{4}{3} \cdot 1 + b = 0 \\ b = -\frac{4}{3} \end{array} \end{aligned}$$

Dus $l: y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$.

- b** $x = 0$ geeft $y^2 - 6y - 7 = 0$
 $(y + 1)(y - 7) = 0$
 $y = -1 \vee y = 7$
Dus $C(0, -1)$ en $D(0, 7)$.
 $rc_{MC} = \frac{-1 - 3}{0 - -3} = -\frac{4}{3}$
 $p \perp MC$, dus $rc_p = \frac{3}{4}$.
 $p: y = \frac{3}{4}x + b$ door $C(0, -1)$, dus $p: y = \frac{3}{4}x - 1$.
 $rc_{MD} = \frac{7 - 3}{0 - -3} = \frac{4}{3}$
 $q \perp MD$, dus $rc_q = -\frac{3}{4}$.
 $q: y = -\frac{3}{4}x + b$ door $D(0, 7)$, dus $q: y = -\frac{3}{4}x + 7$.
- c** $\tan(\alpha_k) = rc_k = -1\frac{1}{3}$ geeft $\alpha_k = 53,13...^\circ$
 $\tan(\alpha_l) = rc_l = 1\frac{1}{3}$ geeft $\alpha_l = 53,13...^\circ$
 $\alpha_l - \alpha_k = 53,13...^\circ - 53,13...^\circ = 0^\circ$
De hoek tussen k en l is $180^\circ - 0^\circ = 180^\circ$.
 $\tan(\alpha_p) = rc_p = \frac{3}{4}$ geeft $\alpha_p = 36,86...^\circ$
 $\tan(\alpha_q) = rc_q = -\frac{3}{4}$ geeft $\alpha_q = 36,86...^\circ$
 $\alpha_p - \alpha_q = 36,86...^\circ - 36,86...^\circ = 0^\circ$
De hoek tussen p en q is $180^\circ - 0^\circ = 180^\circ$.
Dus de hoek tussen k en l is gelijk aan de hoek tussen p en q .

- 61 a** $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 12 = 0$
 $(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 - 12 = 0$
 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 17$
Dus van c is het middelpunt $M(2, -1)$
 $y = 0$ geeft $x^2 - 4x - 12 = 0$
 $(x + 2)(x - 6) = 0$
 $x = -2 \vee x = 6$
Dus $A(-2, 0)$ en $B(6, 0)$.
 $rc_{MA} = \frac{0 - -1}{-2 - 2} = -\frac{1}{4}$
 $k \perp MA$, dus $rc_k = 4$ en dit geeft richtingshoek $\alpha = 75,9...^\circ$
 $rc_{MC} = \frac{3 - -1}{1 - 2} = -4$
 $m \perp MC$, dus $rc_m = \frac{1}{4}$ en dit geeft richtingshoek $\beta = 14,0...^\circ$
 $\alpha - \beta = 75,9...^\circ - 14,0...^\circ \approx 62^\circ$
Dus de gevraagde hoek is 62° .
- b** $rc_{MA} = -\frac{1}{4}$ geeft $\angle BAM = 14,0...^\circ$
Ook $\angle ABM = 14,0...^\circ$
Dus $\angle AMB = 180^\circ - 2 \cdot 14,0...^\circ \approx 152^\circ$.
- c** $m: y = \frac{1}{4}x + b$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} + b = 3 \\ b = 2\frac{3}{4} \end{array} \right.$
door $C(1, 3)$
Dus $m: y = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$.
 $rc_{MB} = \frac{0 - -1}{6 - 2} = \frac{1}{4}$
 $l \perp MB$, dus $rc_l = -4$.
 $l: y = -4x + b$ $\left\{ \begin{array}{l} -4 \cdot 6 + b = 0 \\ -24 + b = 0 \end{array} \right.$
door $(6, 0)$
 $b = 24$
Dus $l: y = -4x + 24$.

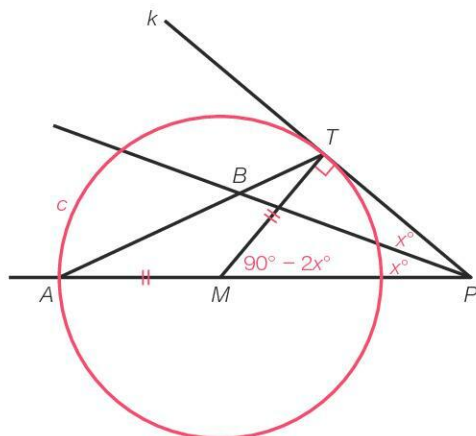
$$\begin{aligned}
 l \text{ en } m \text{ snijden geeft } -4x + 24 &= \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4} \\
 -4\frac{1}{4}x &= -21\frac{1}{4} \\
 x &= 5 \\
 y &= -4x + 24
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} -4x + 24 \\ x = 5 \\ y = -4x + 24 \end{aligned}} \right\} y = -4 \cdot 5 + 24 = 4$$

Dus $D(5, 4)$.

$$d(D, M) = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$d(D, c) = d(D, M) - r = \sqrt{34} - \sqrt{17}$$

- 62** Stel $\angle APB = \angle BPT = x^\circ$.
 $k \perp MT$, dus $\angle PMT = 180^\circ - 90^\circ - 2x^\circ = 90^\circ - 2x^\circ$.



AMP is een gestrekte hoek, dus $\angle AMT = 180^\circ - (90^\circ - 2x^\circ) = 90^\circ + 2x^\circ$

$\triangle AMT$ is een gelijkbenige driehoek, dus

$$\angle ATM = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ + 2x^\circ)) = \frac{1}{2}(90^\circ - 2x^\circ) = 45^\circ - x^\circ$$

In $\triangle BPT$ is $\angle TBP = 180^\circ - \angle BPT - 90^\circ - \angle ATM = 90^\circ - x^\circ - (45^\circ - x^\circ) = 45^\circ$.

Dus $\angle TBP = 45^\circ$.

Bladzijde 122

63 a $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 15 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (x-1)^2 - 10x + 15 = 0 \\ x^2 + x^2 - 2x + 1 - 10x + 15 = 0 \\ 2x^2 - 12x + 16 = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases}$

b $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$(x-2)(x-4) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 4$$

De snijpunten zijn $A(2, 1)$ en $B(4, 3)$.

Bladzijde 124

64 a m loodrecht op $4x - y = q$ geeft $m: x + 4y = c$.

$$\begin{cases} x + 4y = c \\ \text{door } M(5, 1) \end{cases} \Rightarrow c = 5 + 4 \cdot 1 = 9$$

Dus $m: x + 4y = 9$ oftewel $y = -\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}$.

Substitutie van $y = -\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}$ in $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 17$ geeft

$$(x-5)^2 + (-\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{4})^2 = 17$$

$$x^2 - 10x + 25 + \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{25}{16} = 17$$

$$1\frac{1}{16}x^2 - 10\frac{5}{8}x + 9\frac{9}{16} = 0$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x-1)(x-9) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 9$$

$$x = 1 \text{ geeft } y = -\frac{1}{4} \cdot 1 + 2\frac{1}{4} = 2$$

$$x = 9 \text{ geeft } y = -\frac{1}{4} \cdot 9 + 2\frac{1}{4} = 0$$

Dus $A(1, 2)$ en $B(9, 0)$.

$$\begin{aligned} \text{b} \quad & \left. \begin{array}{l} 4x - y = q \\ \text{door } A(1, 2) \end{array} \right\} q = 4 \cdot 1 - 2 = 2 \\ & \left. \begin{array}{l} 4x - y = q \\ \text{door } B(9, 0) \end{array} \right\} q = 4 \cdot 9 - 0 = 36 \end{aligned}$$

65 a Substitutie van $y = x + 1$ in $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$ geeft

$$\begin{aligned} x^2 + (x + 1)^2 - 10x - 2(x + 1) + 9 &= 0 \\ x^2 + x^2 + 2x + 1 - 10x - 2x - 2 + 9 &= 0 \\ 2x^2 - 10x + 8 &= 0 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ (x - 1)(x - 4) &= 0 \\ x = 1 \vee x = 4 \end{aligned}$$

$$x = 1 \text{ geeft } y = 1 + 1 = 2$$

$$x = 4 \text{ geeft } y = 4 + 1 = 5$$

De snijpunten zijn (1, 2) en (4, 5).

b Uit $2x - y = 1$ volgt $y = 2x - 1$.

Substitutie van $y = 2x - 1$ in $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$ geeft

$$\begin{aligned} x^2 + (2x - 1)^2 - 8x - 4(2x - 1) + 10 &= 0 \\ x^2 + 4x^2 - 4x + 1 - 8x - 8x + 4 + 10 &= 0 \\ 5x^2 - 20x + 15 &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x - 1)(x - 3) &= 0 \\ x = 1 \vee x = 3 \end{aligned}$$

$$x = 1 \text{ geeft } y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$x = 3 \text{ geeft } y = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

De snijpunten zijn (1, 1) en (3, 5).

66 a $2x - 3y + 4 = 0$ geeft $2x = 3y - 4$, oftewel $x = 1\frac{1}{2}y - 2$.

Substitutie van $x = 1\frac{1}{2}y - 2$ in $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 26$ geeft $(1\frac{1}{2}y - 2 - 6)^2 + (y - 1)^2 = 26$.

Voer in $y_1 = (1\frac{1}{2}x - 8)^2 + (x - 1)^2$ en $y_2 = 26$.

De optie snijpunt geeft $x = 2$ en $x = 6$.

Dus $y = 2$ en $y = 6$.

$$y = 2 \text{ geeft } x = 1\frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = 1$$

$$y = 6 \text{ geeft } x = 1\frac{1}{2} \cdot 6 - 2 = 7$$

De snijpunten zijn (1, 2) en (7, 6).

b $3x + 4y = 19$ geeft $4y = -3x + 19$, oftewel $y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$.

Substitutie van $y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$ in $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ geeft

$$x^2 + (-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4})^2 - 4x + 6(-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}) - 12 = 0.$$

Voer in $y_1 = x^2 + (-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4})^2 - 4x + 6(-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}) - 12$.

De optie nulpunt geeft $x = 5$.

$$x = 5 \text{ geeft } y = 1$$

Het gemeenschappelijke punt is (5, 1).

c Substitutie van $y = 2x$ in $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$ geeft

$$(x - 3)^2 + (2x - 1)^2 = 9$$

$$x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 4x + 1 = 9$$

$$5x^2 - 10x + 1 = 0$$

Voer in $y_1 = 5x^2 - 10x + 1$.

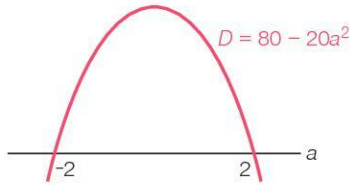
De optie nulpunt geeft $x = 0,105...$ en $x = 1,894...$

$x = 0,105$ geeft $y = 0,211...$ en $x = 1,894...$ geeft $y = 3,788...$

De snijpunten zijn (0,11; 0,21) en (1,89; 3,79).

- 67 a** Substitutie van $y = ax + 1$ in $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 6 = 0$ geeft
 $x^2 + (ax + 1)^2 - 10x - 2(ax + 1) + 6 = 0$
 $x^2 + a^2x^2 + 2ax + 1 - 10x - 2ax - 2 + 6 = 0$
 $(a^2 + 1)x^2 - 10x + 5 = 0$
 $D = (-10)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 5 = 100 - 20 - 20a^2 = 80 - 20a^2$
 $D = 0$ geeft $20a^2 = 80$
 $a^2 = 4$
 $a = 2 \vee a = -2$

- b** Geen gemeenschappelijke punten als $80 - 20a^2 < 0$.



Dus $a < -2 \vee a > 2$.

- c** Twee snijpunten als $80 - 20a^2 > 0$.
 Zie de figuur bij b.
 Dus $-2 < a < 2$.

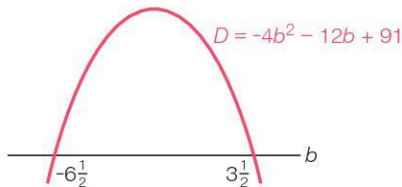
- 68 a** Substitutie van $y = \frac{1}{2}x + b$ in $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 6 = 0$ geeft
 $x^2 + (\frac{1}{2}x + b)^2 - 10x - 2(\frac{1}{2}x + b) + 6 = 0$
 $x^2 + \frac{1}{4}x^2 + bx + b^2 - 10x - x - 2b + 6 = 0$
 $1\frac{1}{4}x^2 + (b - 11)x + b^2 - 2b + 6 = 0$
 $D = (b - 11)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{4} \cdot (b^2 - 2b + 6) = b^2 - 22b + 121 - 5b^2 + 10b - 30 = -4b^2 - 12b + 91$
 $D = 0$ geeft $-4b^2 - 12b + 91 = 0$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot -4 \cdot 91 = 1600$$

$$b = \frac{12 + 40}{-8} \vee b = \frac{12 - 40}{-8}$$

$$b = -6\frac{1}{2} \vee b = 3\frac{1}{2}$$

- b** Geen gemeenschappelijke punten als $-4b^2 - 12b + 91 < 0$.



Dus $b < -6\frac{1}{2} \vee b > 3\frac{1}{2}$.

- c** Twee snijpunten als $-4b^2 - 12b + 91 > 0$.
 Zie de figuur bij b.
 Dus $-6\frac{1}{2} < b < 3\frac{1}{2}$.

- 69 a** Het midden M van het lijnstuk AB is $M(\frac{1}{2}(-1 + 7), \frac{1}{2}(3 + -1)) = M(3, 1)$.

$$r = d(A, M) = \sqrt{(3 - -1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \text{ en } M(3, 1) \text{ geeft}$$

$$c: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 - 20 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 = 0$$

Substitutie van $y = -2x + p$ in $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 = 0$ geeft

$$x^2 + (-2x + p)^2 - 6x - 2(-2x + p) - 10 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 - 4px + p^2 - 6x + 4x - 2p - 10 = 0$$

$$5x^2 + (-4p - 2)x + p^2 - 2p - 10 = 0$$

$$D = (-4p - 2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (p^2 - 2p - 10) = 16p^2 + 16p + 4 - 20p^2 + 40p + 200 = -4p^2 + 56p + 204$$

$$D = 0 \text{ geeft } -4p^2 + 56p + 204 = 0$$

$$p^2 - 14p - 51 = 0$$

$$(p + 3)(p - 17) = 0$$

$$p = -3 \vee p = 17$$

- b** Substitutie van $y = qx - 5\frac{1}{2}$ in $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 = 0$ geeft

$$x^2 + (qx - 5\frac{1}{2})^2 - 6x - 2(qx - 5\frac{1}{2}) - 10 = 0$$

$$x^2 + q^2x^2 - 11qx + 30\frac{1}{4} - 6x - 2qx + 11 - 10 = 0$$

$$(q^2 + 1)x^2 + (-13q - 6)x + 31\frac{1}{4} = 0$$

De lijn $y = qx - 5\frac{1}{2}$ heeft geen punten met c gemeenschappelijk als

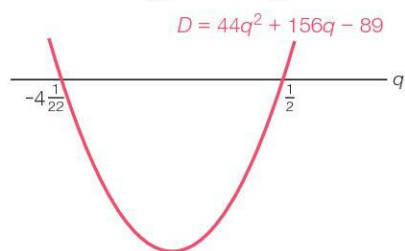
$$(q^2 + 1)x^2 + (-13q - 6)x + 31\frac{1}{4} = 0 \text{ geen oplossingen heeft.}$$

$$D = (-13q - 6)^2 - 4 \cdot (q^2 + 1) \cdot 31\frac{1}{4} = (13q + 6)^2 - 125(q^2 + 1)$$

$$\text{Voer in } y_1 = (13x + 6)^2 - 125(x^2 + 1).$$

De optie nulpunt geeft $x = -4,04...$ en $x = 0,5$.

$$-4,04... = -4\frac{1}{22} \text{ en } 0,5 = \frac{1}{2}$$



$$44q^2 + 156q - 89 < 0 \text{ geeft } -4\frac{1}{22} < q < \frac{1}{2}$$

Bladzijde 125

- 70 a** k door $A(0, 16)$, dus $k: y = ax + 16$.

Substitutie van $y = ax + 16$ in $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 80 = 0$ geeft

$$x^2 + (ax + 16)^2 - 12x - 16(ax + 16) + 80 = 0$$

$$x^2 + a^2x^2 + 32ax + 256 - 12x - 16ax - 256 + 80 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 + (16a - 12)x + 80 = 0$$

$$D = (16a - 12)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 80 = 256a^2 - 384a + 144 - 320a^2 - 320 = -64a^2 - 384a - 176$$

$$D = 0 \text{ geeft } -64a^2 - 384a - 176 = 0$$

$$4a^2 + 24a + 11 = 0$$

$$D = 24^2 - 4 \cdot 4 \cdot 11 = 400$$

$$a = \frac{-24 \pm 20}{8} = -\frac{1}{2} \vee a = \frac{-24 - 20}{8} = -5\frac{1}{2}$$

Mogelijke raaklijnen zijn $y = -\frac{1}{2}x + 16$ en $y = -5\frac{1}{2}x + 16$.

Uit de figuur in het leerboek volgt $k: y = -\frac{1}{2}x + 16$.

- b** Het snijpunt van k en l is S .

$$\left. \begin{array}{l} MB = MC \\ \angle B = 90^\circ \\ \angle C = 90^\circ \\ k \perp l \end{array} \right\} \text{ vierhoek } MBSC \text{ is een vierkant.}$$

Dus $BS = CS = r$ en $BC = r\sqrt{2}$.

$$x^2 + y^2 - 12x - 16y + 80 = 0$$

$$x^2 - 12x + y^2 - 16y + 80 = 0$$

$$(x - 6)^2 - 36 + (y - 8)^2 - 64 + 80 = 0$$

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 20$$

$$\text{Dus } r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$BC = r\sqrt{2} = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{10}$$

$$\begin{aligned}
 71 \quad & x^2 + y^2 - 2x - 12y + 21 = 0 \\
 & x^2 - 2x + y^2 - 12y + 21 = 0 \\
 & (x-1)^2 - 1 + (y-6)^2 - 36 + 21 = 0 \\
 & (x-1)^2 + (y-6)^2 = 16
 \end{aligned}$$

Dus $M_1(1, 6)$ en $r_1 = 4$.

$$x^2 + y^2 - 14x - 4y + 17 = 0$$

$$x^2 - 14x + y^2 - 4y + 17 = 0$$

$$(x-7)^2 - 49 + (y-2)^2 - 4 + 17 = 0$$

$$(x-7)^2 + (y-2)^2 = 36$$

Dus $M_2(7, 2)$ en $r_2 = 6$.

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(7-1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 A^2 + M_2 A^2 &= r_1^2 + r_2^2 = 16 + 36 = 52 \\ M_1 M_2^2 &= (\sqrt{52})^2 = 52 \end{aligned} \right\} M_1 A^2 + M_2 A^2 = M_1 M_2^2$$

Dus uit de omgekeerde stelling van Pythagoras in $\triangle M_1 M_2 A$ volgt dat $\angle M_1 A M_2 = 90^\circ$.

Diagnostische toets

Bladzijde 128

- 1 a $k: y = ax + 12$ oftewel $k: -ax + y = 12$ en $l: 4x + 5y = b$ hebben een snijpunt als geldt

$$\frac{-a}{4} \neq \frac{1}{5}$$

$$-5a \neq 4$$

$$a \neq -\frac{4}{5}$$

b mag elk getal zijn.

- b k en l vallen samen als geldt $\frac{-a}{4} = \frac{1}{5} = \frac{12}{b}$.

$$\frac{-a}{4} = \frac{1}{5} \text{ geeft } a = -\frac{4}{5} \text{ en } \frac{1}{5} = \frac{12}{b} \text{ geeft } b = 60.$$

- c $y = ax + 12$ } $2a + 8 = 12$
 door $(2, 8)$ } $2a = -4$
 $a = -2$

$$\begin{aligned}
 4x + 5y &= b \\
 \text{door } (2, 8) &\} b = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 8 = 48
 \end{aligned}$$

Dus $a = -2$ en $b = 48$.

- 2 a $k: y = 4x + 2$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 4 \text{ geeft } \alpha = 75,96\dots^\circ$$

$$l: y = -\frac{1}{2}x + 6$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = -26,56\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 75,96\dots^\circ - (-26,56\dots^\circ) \approx 102,5^\circ$$

Dus de gevraagde hoek is $180^\circ - 102,5^\circ = 77,5^\circ$.

- b $\text{rc}_m = \frac{0 - (-2)}{3 - 0} = \frac{2}{3}$

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{3} \text{ geeft } \alpha = 33,69\dots^\circ$$

$$\text{rc}_n = \frac{0 - 5}{2 - 0} = -2\frac{1}{2}$$

$$\tan(\beta) = -2\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = -68,19\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 33,69\dots^\circ - (-68,19\dots^\circ) \approx 101,9^\circ$$

Dus de gevraagde hoek is $180^\circ - 101,9^\circ = 78,1^\circ$.

- c $p: 2x + 3y = 6$ geeft $3y = -2x + 6$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_p = -\frac{2}{3} \text{ geeft } \alpha = -33,69\dots^\circ$$

$$q: y = 8x - 6$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_q = 8 \text{ geeft } \beta = 82,87\dots^\circ$$

$$\beta - \alpha = 82,87\dots^\circ - (-33,69\dots^\circ) \approx 116,6^\circ$$

Dus de gevraagde hoek is $180^\circ - 116,6^\circ = 63,4^\circ$.

3 a $d(A, B) = \sqrt{(3-2p)^2 + (p+1-0)^2} = \sqrt{9-12p+4p^2+p^2+2p+1} = \sqrt{5p^2-10p+10}$

b $d(A, B) = 5$ geeft $\sqrt{5p^2-10p+10} = 5$
 $5p^2-10p+10 = 25$
 $5p^2-10p-15 = 0$
 $p^2-2p-3 = 0$
 $(p+1)(p-3) = 0$
 $p = -1 \vee p = 3$

c Het midden van het lijnstuk AB is $M(\frac{1}{2}(2p+3), \frac{1}{2}(0+p+1)) = M(p+1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}p+\frac{1}{2})$.

M op $x+y=6$ geeft $p+1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}=6$
 $1\frac{1}{2}p = 4$
 $p = 2\frac{2}{3}$

4 a k loodrecht op l : $3x+2y=6$ geeft k : $2x-3y=c$.

$\left. \begin{array}{l} 2x-3y=c \\ \text{door } A(2, -4) \end{array} \right\} c = 2 \cdot 2 - 3 \cdot -4 = 16$
Dus k : $2x-3y=16$.

b m loodrecht op n : $y=-\frac{1}{3}x+5$ geeft $rc_m=3$.

$\left. \begin{array}{l} m: y=3x+b \\ \text{door } B(2, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + b = 3 \\ 6 + b = 3 \\ b = -3 \end{array}$

Dus m : $y=3x-3$.

5 a De lijn l staat loodrecht op k en gaat door $A(6, -1)$.

$\left. \begin{array}{l} l: x+2y=c \\ \text{door } A(6, -1) \end{array} \right\} c = 6 + 2 \cdot -1 = 4$
Dus l : $x+2y=4$.

k en l snijden geeft het punt S .

$\left\{ \begin{array}{l} 2x-y=3 \\ x+2y=4 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right. \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x-2y=6 \\ x+2y=4 \end{array} \right. +$
 $\begin{array}{rcl} 5x & & = 10 \\ x=2 & & \\ x+2y=4 & \left. \begin{array}{l} \\ 2y=2 \\ y=1 \end{array} \right\} & \end{array}$

Dus $S(2, 1)$.

$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(2-6)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b $rc_m = \frac{1-5}{2-(-2)} = \frac{-4}{4} = -1$

$\left. \begin{array}{l} m: y=-x+b \\ \text{door } C(2, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2+b=1 \\ b=3 \end{array}$

Dus m : $y=-x+3$.

De lijn n staat loodrecht op m en gaat door $B(3, 5)$.

Dus $rc_n = 1$.

$\left. \begin{array}{l} n: y=x+b \\ \text{door } B(3, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3+b=5 \\ b=2 \end{array}$

Dus n : $y=x+2$.

n en m snijden geeft het punt T .

$x+2=-x+3$

$2x=1$

$\left. \begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ y=x+2 \end{array} \right\} y=\frac{1}{2}+2=2\frac{1}{2}$

Dus $T(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.

$d(B, m) = d(B, T) = \sqrt{(\frac{1}{2}-3)^2 + (2\frac{1}{2}-5)^2} = \sqrt{(-2\frac{1}{2})^2 + (-2\frac{1}{2})^2} = \sqrt{6\frac{1}{4}+6\frac{1}{4}} = \sqrt{12\frac{1}{2}}$

- 6 a** De straal is gelijk aan $d(A, B)$, dus $r = \sqrt{(8-2)^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$.
Dus $c_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 61$.
- b** De cirkel heeft middelpunt B en raakt de y -as, dus $r = d(B, y\text{-as}) = 8$.
Dus $c_2: (x-8)^2 + (y-2)^2 = 64$.
- c** Het middelpunt M_3 van c_3 is het midden van het lijnstuk AB , dus $M_3(\frac{1}{2}(2+8), \frac{1}{2}(-3+2)) = M_3(5, -\frac{1}{2})$.
De straal van c_3 is de helft van $d(A, B)$, dus $r = \frac{1}{2}\sqrt{61}$. Dit geeft $r^2 = \frac{1}{4} \cdot 61 = 15\frac{1}{4}$.
Dus $c_3: (x-5)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 15\frac{1}{4}$.
- d** De cirkel raakt de x -as in $C(5, 0)$, dus $x_{M_4} = 5$ en $M_4(5, r)$.
$$\left. \begin{array}{l} y = 3x - 6 \\ \text{door } M_4(5, r) \end{array} \right\} r = 3 \cdot 5 - 6 = 9$$

Dus $c_4: (x-5)^2 + (y-9)^2 = 81$.

Bladzijde 129

- 7** De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .
 $rc_k = 2$ en $l \perp k$, dus $rc_l = -\frac{1}{2}$.
$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } M(6, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 6 + b = -1 \\ -3 + b = -1 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{2}x + 2$.
 k snijden met l geeft het punt S .
$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 2 \\ 2\frac{1}{2}x = 5 \\ x = 2 \end{array} \right\} y = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

Dus $S(2, 1)$.
 $r = d(S, M) = \sqrt{(6-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$
Dus $c: (x-6)^2 + (y+1)^2 = 20$.
- 8 a** $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 + 8y - 11 = 0$
 $(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 - 11 = 0$
 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$
Dus het middelpunt is $(3, -4)$ en de straal is 6.
- b** $x^2 + y^2 + 3x - 7y = 0$
 $x^2 + 3x + y^2 - 7y = 0$
 $(x+1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + (y-3\frac{1}{2})^2 - 12\frac{1}{4} = 0$
 $(x+1\frac{1}{2})^2 + (y-3\frac{1}{2})^2 = 14\frac{1}{2}$
Dus het middelpunt is $(-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$ en de straal is $\sqrt{14\frac{1}{2}}$.

- 9** $x^2 + y^2 - 16x + 8y - 1 = 0$
 $x^2 - 16x + y^2 + 8y - 1 = 0$
 $(x-8)^2 - 64 + (y+4)^2 - 16 - 1 = 0$
 $(x-8)^2 + (y+4)^2 = 81$
Dus $M(8, -4)$ en $r = 9$.
 $d(A, M) = \sqrt{(8-3)^2 + (-4-(-4))^2} = \sqrt{25+0} = 5 < r$
Dus A ligt binnen de cirkel.
 $d(B, M) = \sqrt{(8-2)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} > r$
Dus B ligt buiten de cirkel.
 $d(C, M) = \sqrt{(8-8)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{0+81} = 9 = r$
Dus C ligt op de cirkel.

10 a $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$
 $(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 = 0$
 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$
Dus $M(2, -1)$ en $r = \sqrt{5}$.
 $d(A, M) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
 $d(A, c) = d(A, M) - r = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

b $d(B, M) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (-1 - -2)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
 $d(B, c) = r - d(B, M) = \sqrt{5} - \sqrt{2}$

c De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .
 $l \perp k$, dus $l: x - 2y = c$
door $M(2, -1)$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} l \perp k \\ \text{door } M \end{matrix}} \right\} c = 2 - 2 \cdot -1 = 4$
Dus $l: x - 2y = 4$.
 k en l snijden geeft het punt C .

$$\begin{cases} 2x + y = 13 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 2y = 26 \\ x - 2y = 4 \end{cases} +$$

$$\begin{matrix} 5x = 30 \\ x = 6 \\ 2x + y = 13 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 5x = 30 \\ x = 6 \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} y = 1 \\ 2 \cdot 6 + y = 13 \end{matrix}$$

Dus $C(6, 1)$.
 $d(C, M) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 $d(k, c) = d(C, M) - r = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$

11 a $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$
 $x = 4$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0 \\ x = 4 \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} 4^2 + y^2 - 4 \cdot 4 + 6y = 0 \\ 16 + y^2 - 16 + 6y = 0 \\ y^2 + 6y = 0 \\ y(y + 6) = 0 \\ y = 0 \vee y = -6 \end{matrix}$

$y_A > y_B$, dus $A(4, 0)$ en $B(4, -6)$.
 $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$
 $(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 = 0$
 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$
Dus $M(2, -3)$.

$rc_{MA} = \frac{0 - -3}{4 - 2} = \frac{3}{2}$, dus $rc_k = -\frac{2}{3}$.

$k: y = -\frac{2}{3}x + b$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} k: y = -\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} -\frac{2}{3} \cdot 4 + b = 0 \\ -2\frac{2}{3} + b = 0 \\ b = 2\frac{2}{3} \end{matrix}$

Dus $k: y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$.

$rc_{MB} = \frac{-6 - -3}{4 - 2} = -\frac{3}{2}$, dus $rc_l = \frac{2}{3}$.

$l: y = \frac{2}{3}x + b$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} l: y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } B \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} \frac{2}{3} \cdot 4 + b = -6 \\ 2\frac{2}{3} + b = -6 \\ b = -8\frac{2}{3} \end{matrix}$

Dus $l: y = \frac{2}{3}x - 8\frac{2}{3}$.

b $\tan(\alpha) = rc_k = -\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = -33,69...^\circ$
 $\tan(\beta) = rc_l = \frac{2}{3}$ geeft $\beta = 33,69...^\circ$
 $\beta - \alpha = 33,69...^\circ - -33,69...^\circ \approx 67,4^\circ$
Dus de hoek tussen k en l is $67,4^\circ$.

- 12 a** Substitutie van $y = -2x + 13$ in $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$ geeft

$$\begin{aligned}x^2 + (-2x + 13)^2 - 4x - 8(-2x + 13) + 10 &= 0 \\x^2 + 4x^2 - 52x + 169 - 4x + 16x - 104 + 10 &= 0 \\5x^2 - 40x + 75 &= 0 \\x^2 - 8x + 15 &= 0 \\(x - 3)(x - 5) &= 0 \\x = 3 \vee x = 5\end{aligned}$$

$$x = 3 \text{ geeft } y = -2 \cdot 3 + 13 = 7$$

$$x = 5 \text{ geeft } y = -2 \cdot 5 + 13 = 3$$

Dus de snijpunten zijn (3, 7) en (5, 3).

- b** $l: x - y = 4$ oftewel $l: y = x - 4$

Substitutie van $y = x - 4$ in $x^2 + (y + 3)^2 = 5$ geeft $x^2 + (x - 4 + 3)^2 = 5$

$$\begin{aligned}x^2 + (x - 1)^2 &= 5 \\x^2 + x^2 - 2x + 1 &= 5 \\2x^2 - 2x - 4 &= 0 \\x^2 - x - 2 &= 0 \\(x + 1)(x - 2) &= 0 \\x = -1 \vee x = 2\end{aligned}$$

$$x = -1 \text{ geeft } y = -1 - 4 = -5$$

$$x = 2 \text{ geeft } y = 2 - 4 = -2$$

Dus de snijpunten zijn (-1, -5) en (2, -2).

- 13 a** $c: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

Substitutie van $y = ax - 1$ in $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ geeft

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 + (ax - 1 - 2)^2 &= 5 \\(x - 1)^2 + (ax - 3)^2 &= 5 \\x^2 - 2x + 1 + a^2x^2 - 6ax + 9 - 5 &= 0 \\(a^2 + 1)x^2 + (-6a - 2)x + 5 &= 0 \\D = (-6a - 2)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 5 &= 36a^2 + 24a + 4 - 20a^2 - 20 = 16a^2 + 24a - 16 \\D = 0 \text{ geeft } 16a^2 + 24a - 16 &= 0 \\2a^2 + 3a - 2 &= 0 \\D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 &= 25 \\a = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \vee a = \frac{-3 - 5}{4} &= -2\end{aligned}$$

- b** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

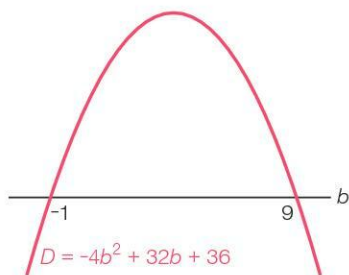
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 5$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$$

Substitutie van $y = -2x + b$ in $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ geeft

$$\begin{aligned}x^2 + (-2x + b)^2 - 2x - 4(-2x + b) &= 0 \\x^2 + 4x^2 - 4bx + b^2 - 2x + 8x - 4b &= 0 \\5x^2 + (-4b + 6)x + b^2 - 4b &= 0 \\D = (-4b + 6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (b^2 - 4b) &= 16b^2 - 48b + 36 - 20b^2 + 80b = -4b^2 + 32b + 36 \\D = 0 \text{ geeft } -4b^2 + 32b + 36 &= 0 \\b^2 - 8b - 9 &= 0 \\(b + 1)(b - 9) &= 0 \\b = -1 \vee b = 9\end{aligned}$$

Geen gemeenschappelijke punten als $D < 0$.



$D < 0$ geeft $b < -1 \vee b > 9$

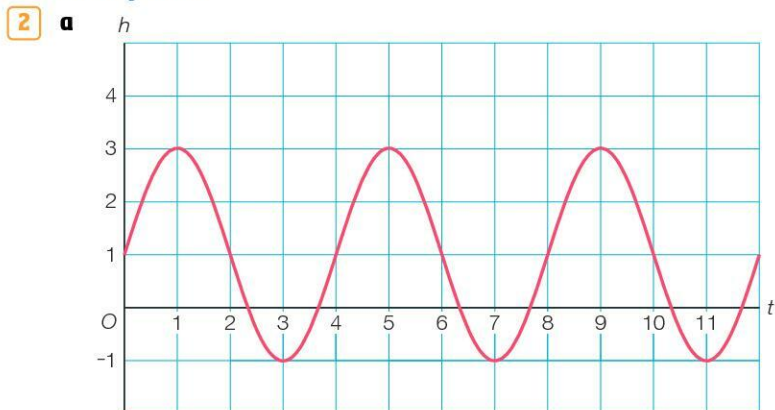
8 Goniometrie

Voorkennis Periodieke verbanden en bijzondere hoeken

Bladzijde 133

- 1 a periode = 6, evenwichtsstand = 5 en amplitude = 15
b periode = 2, evenwichtsstand = 300 en amplitude = 200

Bladzijde 134



- b De periode is 4.
 $22 - 5 \cdot 4 = 2$, dus op $t = 22$ is h hetzelfde als op $t = 2$.
 $33 - 8 \cdot 4 = 1$, dus op $t = 33$ is h hetzelfde als op $t = 1$.
 $35 - 8 \cdot 4 = 3$, dus op $t = 35$ is h hetzelfde als op $t = 3$.
 $1002 - 250 \cdot 4 = 2$, dus op $t = 1002$ is h hetzelfde als op $t = 2$.

t	22	33	35	1002
h	1	3	-1	1

- 3 a $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$
b $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
c $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
d $\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

8.1 De eenheidscirkel en radialen

Bladzijde 135

- 1 a $\sin(\alpha) = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{1} = PQ$, dus $PQ = \sin(65^\circ) \approx 0,91$.
 $\cos(\alpha) = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = OQ$, dus $OQ = \cos(65^\circ) \approx 0,42$.
b $P(0,42; 0,91)$
c $\angle POQ = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$
 $PQ \approx 0,91$, $OQ \approx 0,42$ en $P(-0,42; 0,91)$.
d $\cos(115^\circ) \approx -0,42$ en $\sin(115^\circ) \approx 0,91$
Dezelfde y -coördinaat en tegengestelde x -coördinaat, oftewel $x_P = \cos(115^\circ)$ en $y_P = \sin(115^\circ)$.
e $\angle POQ = 245^\circ - 180^\circ = 65^\circ$
 $P(-0,42; -0,91)$
De GR geeft $\cos(245^\circ) \approx -0,42$ en $\sin(245^\circ) \approx -0,91$, oftewel $x_P = \cos(245^\circ)$ en $y_P = \sin(245^\circ)$.

Bladzijde 137

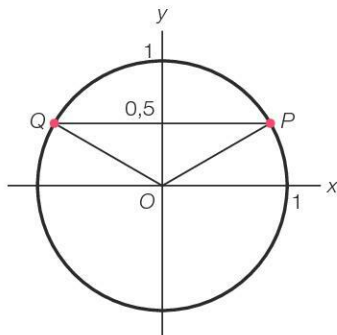
- 2 **a** $\sin(0^\circ) = 0$ **f** $\cos(270^\circ) = 0$ **k** $\sin(-540^\circ) = 0$
b $\cos(0^\circ) = 1$ **g** $\sin(360^\circ) = 0$ **l** $\cos(1080^\circ) = 1$
c $\sin(90^\circ) = 1$ **h** $\cos(360^\circ) = 1$ **m** $\sin(1980^\circ) = 0$
d $\cos(90^\circ) = 0$ **i** $\sin(450^\circ) = 1$ **n** $\cos(-180^\circ) = -1$
e $\sin(270^\circ) = -1$ **j** $\cos(-90^\circ) = 0$ **o** $\sin(990^\circ) = -1$

- 3 $P(\cos(110^\circ), \sin(110^\circ)) \approx P(-0,34; 0,94)$
 $Q(\cos(200^\circ), \sin(200^\circ)) \approx Q(-0,94; -0,34)$
 $R(\cos(-102^\circ), \sin(-102^\circ)) \approx R(-0,21; -0,98)$
 $S(\cos(-50^\circ), \sin(-50^\circ)) \approx S(0,64; -0,77)$

- 4 $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ $2 \cdot 72^\circ = 144^\circ$ $3 \cdot 72^\circ = 216^\circ$ $4 \cdot 72^\circ = 288^\circ$

$B(2 \cos(72^\circ), 2 \sin(72^\circ)) \approx B(0,62; 1,90)$
 $C(2 \cos(144^\circ), 2 \sin(144^\circ)) \approx C(-1,62; 1,18)$
 $D(2 \cos(216^\circ), 2 \sin(216^\circ)) \approx D(-1,62; -1,18)$
 $E(2 \cos(288^\circ), 2 \sin(288^\circ)) \approx E(0,62; -1,90)$

- 5 **a**



- b** $\beta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

Bladzijde 139

- 6 **a** $x_P = 0,81$, dus $\cos(\alpha) = 0,81$.
De GR geeft $35,90...^\circ$.
Dus $\alpha \approx 35,9^\circ$.
b $y_P = 0,94$, dus $\sin(\alpha) = 0,94$.
De GR geeft $70,05...^\circ$.
Dus $\alpha = 180^\circ - 70,05...^\circ \approx 109,9^\circ$.
c $x_P = 0,26$, dus $\cos(\alpha) = 0,26$.
De GR geeft $74,92...^\circ$.
Dus $\alpha \approx -74,9^\circ$.
d $y_P = -0,22$, dus $\sin(\alpha) = -0,22$.
De GR geeft $-12,70...^\circ$.
Dus $\alpha = 180^\circ + 12,70...^\circ \approx 192,7^\circ$.

- 7 $y_P = 0,92$, dus $\sin(\alpha_P) = 0,92$.
De GR geeft $66,926...^\circ$, dus $\alpha_P = 66,926...^\circ$.
 $x_Q = -0,87$, dus $\cos(\alpha_Q) = -0,87$.
De GR geeft $150,458...^\circ$, dus $\alpha_Q = 360^\circ - 150,458...^\circ = 209,541...^\circ$.
 $\angle POQ = \alpha_Q - \alpha_P = 209,541...^\circ - 66,926...^\circ \approx 142,6^\circ$

- 8 **a** omtrek cirkel $= 2\pi r$
In de eenheidscirkel is $r = 1$, dus omtrek $= 2\pi \cdot 1 = 2\pi$.
b Bij $\alpha = 90^\circ$ hoort een kwart cirkelboog, dus lengte cirkelboog $= \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}\pi$.

draaiingshoek α	0°	90°	180°	270°	360°
lengte cirkelboog b	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1\frac{1}{2}\pi$	2π

Bladzijde 141

- 9** **a** $x_P = \cos(5 \text{ rad}) \approx 0,28$ en $y_P = \sin(5 \text{ rad}) \approx -0,96$
Dus $P(0,28; -0,96)$.
b $x_P = \cos(6 \text{ rad}) \approx 0,96$ en $y_P = \sin(6 \text{ rad}) \approx -0,28$
Dus $P(0,96; -0,28)$.
c $x_P = \cos(20 \text{ rad}) \approx 0,41$ en $y_P = \sin(20 \text{ rad}) \approx 0,91$
Dus $P(0,41; 0,91)$.

Bladzijde 142

- 10** **a** afstand = $\frac{1}{2}\pi$ geeft $P(0, 1)$
b afstand = π geeft $P(-1, 0)$
c afstand = $1\frac{1}{2}\pi$ geeft $P(0, -1)$

Bladzijde 143

- 11** **a** $\frac{1}{6}\pi \text{ rad} = \frac{1}{6} \cdot 180^\circ = 30^\circ$
b $\frac{1}{4}\pi \text{ rad} = \frac{1}{4} \cdot 180^\circ = 45^\circ$
c $2\pi \text{ rad} = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$
d $2 \text{ rad} = 2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 114,6^\circ$
e $1\frac{1}{4}\pi \text{ rad} = 1\frac{1}{4} \cdot 180^\circ = 225^\circ$
f $1\frac{1}{4} \text{ rad} = 1\frac{1}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 71,6^\circ$
g $-2\frac{1}{3}\pi \text{ rad} = -2\frac{1}{3} \cdot 180^\circ = -420^\circ$
h $-2\frac{1}{3} \text{ rad} = -2\frac{1}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx -133,7^\circ$
- 12** **a** $360^\circ = \frac{360}{180}\pi \text{ rad} = 2\pi \text{ rad}$
b $30^\circ = \frac{30}{180}\pi \text{ rad} = \frac{1}{6}\pi \text{ rad}$
c $-45^\circ = \frac{-45}{180}\pi \text{ rad} = -\frac{1}{4}\pi \text{ rad}$
d $60^\circ = \frac{60}{180}\pi \text{ rad} = \frac{1}{3}\pi \text{ rad}$
e $90^\circ = \frac{90}{180}\pi \text{ rad} = \frac{1}{2}\pi \text{ rad}$
f $135^\circ = \frac{135}{180}\pi \text{ rad} = \frac{3}{4}\pi \text{ rad}$
g $-75^\circ = \frac{-75}{180}\pi \text{ rad} = -\frac{5}{12}\pi \text{ rad}$
h $240^\circ = \frac{240}{180}\pi \text{ rad} = 1\frac{1}{3}\pi \text{ rad}$
i $300^\circ = \frac{300}{180}\pi \text{ rad} = 1\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$
j $720^\circ = \frac{720}{180}\pi \text{ rad} = 4\pi \text{ rad}$
k $400^\circ = \frac{400}{180}\pi \text{ rad} = 2\frac{2}{9}\pi \text{ rad}$
l $0^\circ = 0 \text{ rad}$
m $210^\circ = \frac{210}{180}\pi \text{ rad} = 1\frac{1}{6}\pi \text{ rad}$
n $-5^\circ = \frac{-5}{180}\pi \text{ rad} = -\frac{1}{36}\pi \text{ rad}$
o $540^\circ = \frac{540}{180}\pi \text{ rad} = 3\pi \text{ rad}$
p $1^\circ = \frac{1}{180}\pi \text{ rad}$
- 13** **a** $7^\circ = \frac{7}{180}\pi \text{ rad} \approx 0,12 \text{ rad}$
b $18^\circ = \frac{18}{180}\pi \text{ rad} \approx 0,31 \text{ rad}$
c $-51,3^\circ = \frac{-51,3}{180}\pi \text{ rad} \approx -0,90 \text{ rad}$
d $1,7^\circ = \frac{1,7}{180}\pi \text{ rad} \approx 0,03 \text{ rad}$
e $-320^\circ = \frac{-320}{180}\pi \text{ rad} \approx -5,59 \text{ rad}$
f $1030^\circ = \frac{1030}{180}\pi \text{ rad} \approx 17,98 \text{ rad}$
g $90^\circ = \frac{90}{180}\pi \text{ rad} \approx 1,57 \text{ rad}$
h $57^\circ = \frac{57}{180}\pi \text{ rad} \approx 0,99 \text{ rad}$

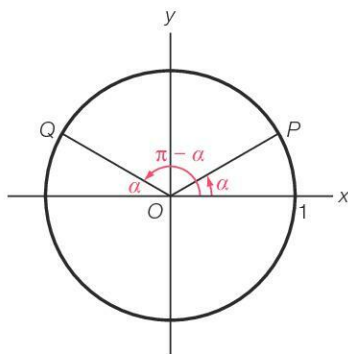
14 hoek in graden	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	240°	315°	360°
hoek in radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$1\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$	2π

- 15** **a** $\cos(\frac{2}{3}\pi) = -0,50$ **c** $\sin(\frac{4}{5}\pi) \approx 0,59$ **e** $\cos(7,6\pi) \approx 0,31$
b $\cos(\frac{2}{3}) \approx 0,79$ **d** $\sin(\frac{4}{5}) \approx 0,72$ **f** $\cos(7,6) \approx 0,25$
- 16** **a** $\alpha \approx 1,17$ **c** $\alpha \approx 0,43$ **e** $\alpha \approx 0,84$
b $\alpha \approx 0,55$ **d** $\alpha \approx 1,39$ **f** $\alpha \approx 1,21$

- 17 a** $y_P = 0,35$, dus $\sin(\alpha) = 0,35$.
De GR geeft $0,357\dots$
Dus $\alpha = \pi - 0,357\dots \approx 2,78$.
- b** $x_P = -0,35$, dus $\cos(\alpha) = -0,35$.
De GR geeft $1,928\dots$
Dus $\alpha = 2\pi - 1,928\dots \approx 4,35$.

- 18** $x_P = -0,32$, dus $\cos(\alpha_P) = -0,32$.
De GR geeft $1,896\dots$
Dus $\alpha_P = 1,896\dots$
 $y_Q = -0,88$, dus $\sin(\alpha_Q) = -0,88$.
De GR geeft $-1,075\dots$
Dus $\alpha_Q = \pi + 1,075\dots = 4,217\dots$
 $\angle POQ = \alpha_Q - \alpha_P = 4,217\dots - 1,896\dots \approx 2,32$

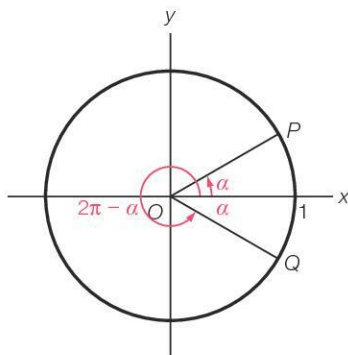
19 a



In de figuur zie je dat $y_Q = y_P$.
Dus $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$.

- b** In de figuur van vraag a zie je dat $x_Q = -x_P$.
Dus $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

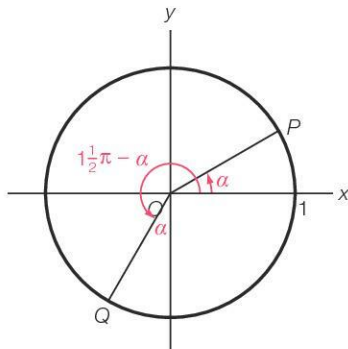
c



In de figuur zie je dat $y_Q = -y_P$.
Dus $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin(\alpha)$.

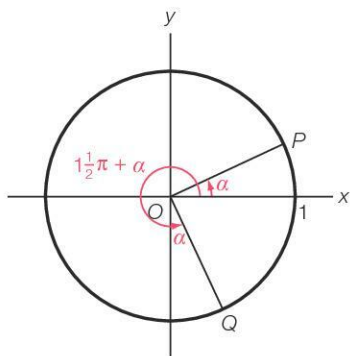
- d** In de figuur van vraag c zie je dat $x_Q = x_P$.
Dus $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$.

e



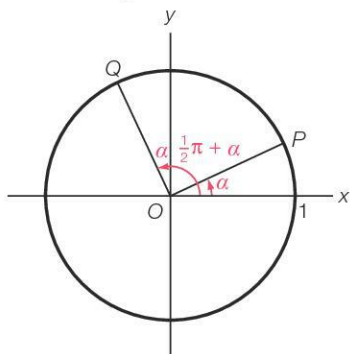
In de figuur zie je dat $y_Q = -y_P$.
Dus $\sin(1\frac{1}{2}\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

f



In de figuur zie je dat $x_Q = y_P$.
Dus $\cos(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$.

g



In de figuur zie je dat $y_Q = x_P$.
Dus $\sin(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$.

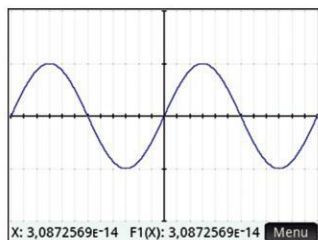
h In de figuur van vraag g zie je dat $x_Q = -y_P$.
Dus $\cos(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$.

8.2 Sinusoïden

Bladzijde 146

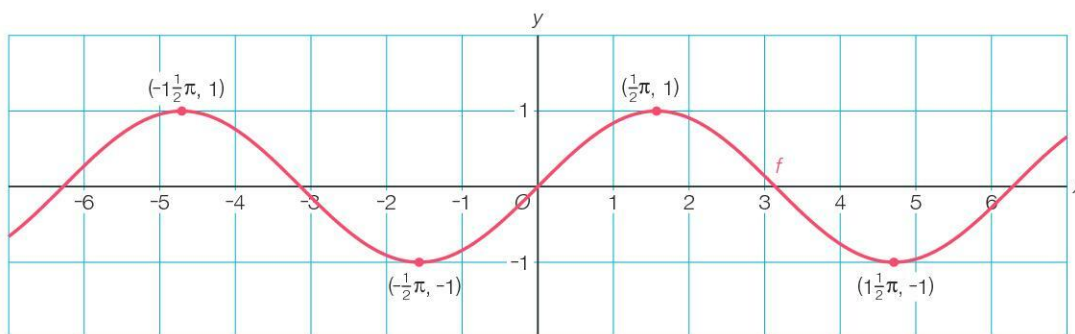
20

a



b $f(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$ en $f(\frac{5}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$.

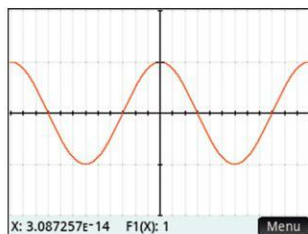
c



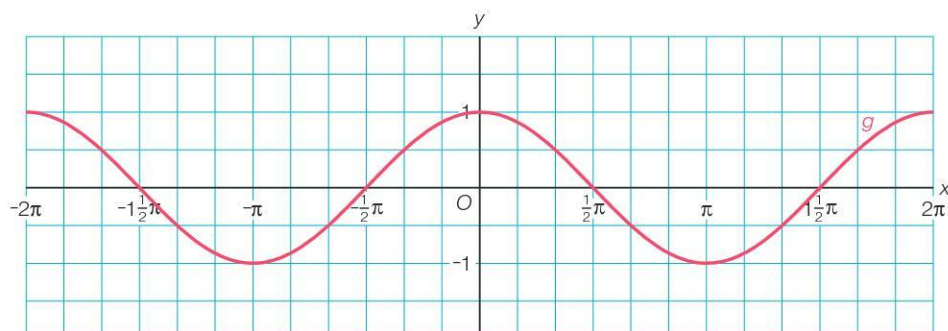
d De nulpunten zijn -2π , $-\pi$, 0 , π en 2π .

21

a



b



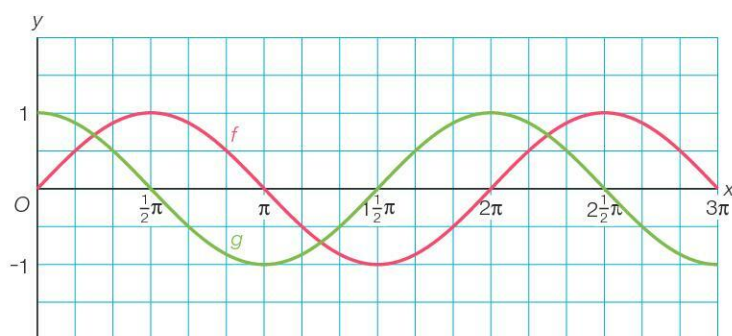
c De toppen zijn $(-2\pi, 1)$, $(-\pi, -1)$, $(0, 1)$, $(\pi, -1)$ en $(2\pi, 1)$.

d De nulpunten zijn $-1\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ en $1\frac{1}{2}\pi$.

Bladzijde 147

22

a



b Bij de draaiingshoek $\frac{1}{4}\pi$ geldt voor het bijbehorende punt P op de eenheidscirkel dat $x_P = y_P$, oftewel $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$.

De x -coördinaten van de andere snijpunten zijn $1\frac{1}{4}\pi$ en $2\frac{1}{4}\pi$.

23

a $f(x) = \sin(x)$

↓ translatie $(0, 2)$

$g(x) = 2 + \sin(x)$

evenwichtsstand = 2

b $f(x) = \sin(x)$

↓ translatie $(3, 0)$

$h(x) = \sin(x - 3)$

c $f(x) = \sin(x)$

↓ verm. x -as, 4

$k(x) = 4 \sin(x)$

amplitude = 4

d $f(x) = \sin(x)$

↓ verm. y -as, $\frac{1}{5}$

$l(x) = \sin(5x)$

periode = $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$

Bladzijde 148

24

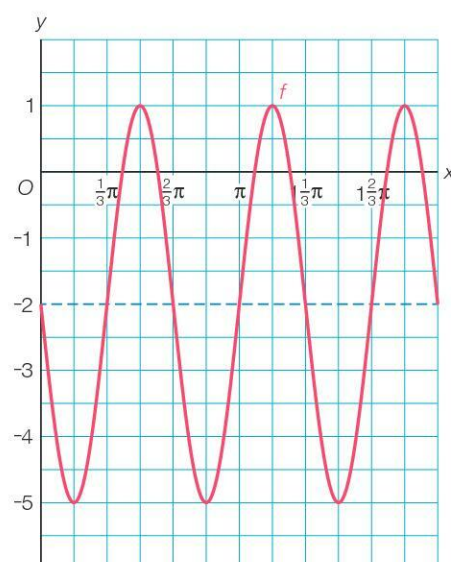
a Ja, ik ben het met José eens.

b $(\frac{1}{3}\pi, 1\frac{1}{2})$

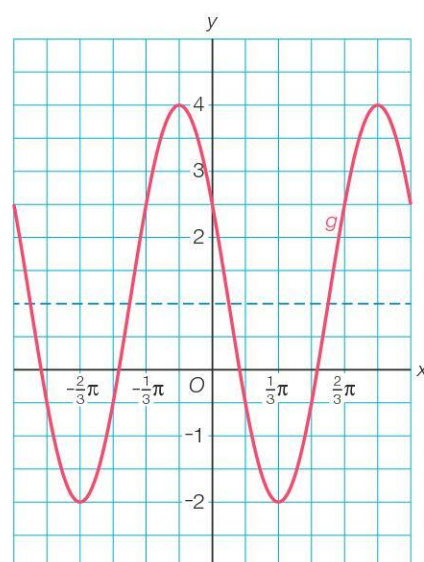
- 25**
- a** De evenwichtsstand is 0, de amplitude is 2, de periode is 2π en een beginpunt is $(-3, 0)$.
 - b** De evenwichtsstand is $\frac{1}{5}$, de amplitude is $\frac{1}{3}$, de periode is 2π en een beginpunt is $(0, \frac{1}{5})$.
 - c** De evenwichtsstand is 0, de amplitude is 1, de periode is $\frac{2}{3}\pi$ en een beginpunt is $(4, 1)$.
 - d** De evenwichtsstand is 0, de amplitude is $1\frac{1}{2}$, de periode is 8π en een beginpunt is $(0, 1\frac{1}{2})$.
- 26**
- a** De evenwichtsstand is 5, de amplitude is 1,2, de periode is 2π en een beginpunt is $(\frac{1}{6}\pi; 6,2)$.
 - b** De evenwichtsstand is 0,4, de amplitude is 1, de periode is 10π en een beginpunt is $(-\frac{1}{3}\pi; 0,4)$.
 - c** De evenwichtsstand is 0, de amplitude is 0,29, de periode is $\frac{2}{3}\pi$ en een beginpunt is $(-1,4; 0,29)$.
 - d** De evenwichtsstand is -0,8, de amplitude is 2, de periode is $\frac{2}{3}\pi$ en een beginpunt is $(\frac{1}{2}\pi; -0,8)$.
- 27**
- a** $y = \cos(x)$
 $\downarrow$ translatie $(\frac{1}{4}\pi, 4)$
 $y = 4 + \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$
 $\downarrow$ verm. x -as, 3
 $y = 3(4 + \cos(x - \frac{1}{4}\pi))$
oftewel $y = 12 + 3\cos(x - \frac{1}{4}\pi)$
Dus $f(x) = 12 + 3\cos(x - \frac{1}{4}\pi)$.
 - b** $y = \cos(x)$
 $\downarrow$ verm. x -as, 3
 $y = 3\cos(x)$
 $\downarrow$ translatie $(\frac{1}{4}\pi, 4)$
 $y = 4 + 3\cos(x - \frac{1}{4}\pi)$
Dus $g(x) = 4 + 3\cos(x - \frac{1}{4}\pi)$.
- 28**
- a** De evenwichtsstand is $-\frac{1}{2}$, de amplitude is 1, de periode is 2π en een beginpunt is $(\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2})$.
 - b** De grafiek van f snijdt de lijn van de evenwichtsstand in de punten $(\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2})$, $(1\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2})$ en $(2\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2})$.
 - c** De toppen van de grafiek van f zijn $(\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2})$, $(1\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2})$ en $(2\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2})$.
 - d** De afstand tussen A en C is gelijk aan de periode, dus $AC = 2\pi$.
- 29** $f(x) = 3 + 4\sin(x - \frac{1}{2}\pi)$
 $\downarrow$ translatie $(-\frac{3}{4}\pi, -5)$
 $y = -5 + 3 + 4\sin(x + \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi)$
oftewel $y = -2 + 4\sin(x + \frac{1}{4}\pi)$
Dus $m = -\frac{3}{4}\pi$ en $n = -5$ zijn mogelijke waarden van m en n .
- 30**
- a** Evenwichtsstand, amplitude, periode en beginpunt.
 - b** Van de grafiek van f is de evenwichtsstand 4, de amplitude 3, de periode π en een beginpunt $(\frac{1}{4}\pi, 4)$.
Van de grafiek van g is de evenwichtsstand 4, de amplitude 3, de periode π en een beginpunt $(\frac{1}{4}\pi, 7)$.

Bladzijde 153

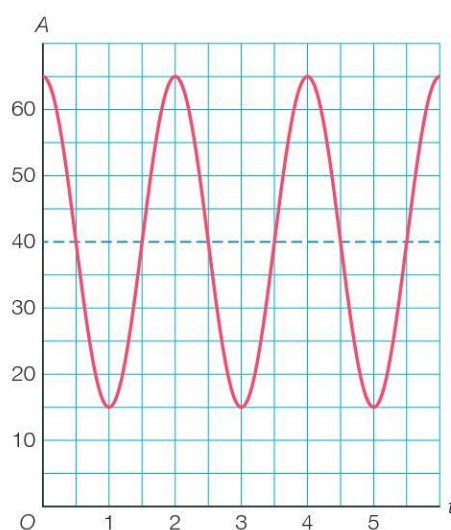
- 31 a** $f(x) = -2 + 3 \sin(3x + \pi) = -2 + 3 \sin(3(x + \frac{1}{3}\pi))$
 evenwichtsstand -2
 amplitude 3
 periode $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$
 beginpunt $(-\frac{1}{3}\pi, -2)$



- b** $g(x) = 1 + 3 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 1 + 3 \cos(2(x + \frac{1}{6}\pi))$
 evenwichtsstand 1
 amplitude 3
 periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
 beginpunt $(-\frac{1}{6}\pi, 4)$



- 32 a** $A = 40 + 25 \sin(\pi(t - 1\frac{1}{2}))$
 evenwichtsstand 40
 amplitude 25
 periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
 beginpunt $(1\frac{1}{2}, 40)$



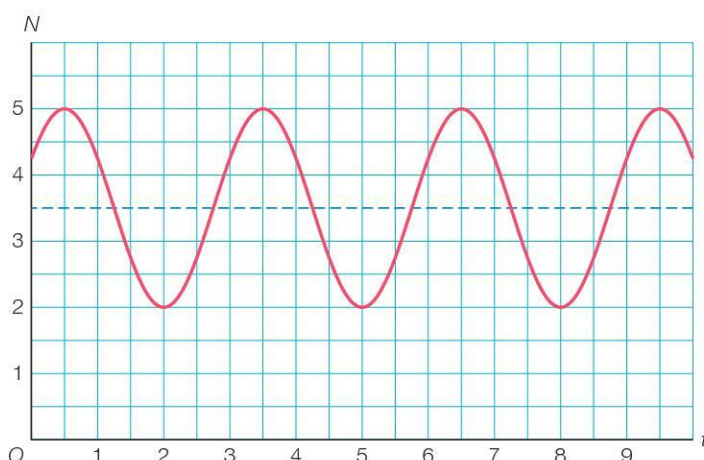
- b** Voer in $y_1 = 40 + 25 \sin(\pi(x - 1\frac{1}{2}))$ en $y_2 = 30$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 0,63$, $x \approx 1,37$, $x \approx 2,63$, $x \approx 3,37$, $x \approx 4,63$ en $x \approx 5,37$.
 $A < 30$ geeft $0,63 < t < 1,37 \vee 2,63 < t < 3,37 \vee 4,63 < t < 5,37$

- c De grafiek heeft de grootste helling als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Dit is bijvoorbeeld bij $t = 1\frac{1}{2}$.

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1\frac{1}{2}} \approx 78,5$$

Dus de grootste helling van de grafiek is 78,5.

- 33 a $N = 1\frac{1}{2} \cos(\frac{2}{3}\pi(t - \frac{1}{2})) + 3\frac{1}{2}$
 evenwichtsstand $3\frac{1}{2}$
 amplitude $1\frac{1}{2}$
 periode $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$
 beginpunt $(\frac{1}{2}, 5)$



- b Voer in $y_1 = 1\frac{1}{2} \cos(\frac{2}{3}\pi(x - \frac{1}{2})) + 3\frac{1}{2}$ en $y_2 = 4$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 1,09, x \approx 2,91, x \approx 4,09, x \approx 5,91, x \approx 7,09$ en $x \approx 8,91$.
 $N > 4$ geeft $0 \leq t < 1,09 \vee 2,91 < t < 4,09 \vee 5,91 < t < 7,09 \vee 8,91 < t \leq 10$

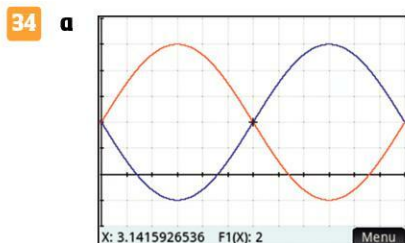
c $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} \approx 2,72$

De gevraagde helling is 2,72.

- d De grafiek heeft de grootste helling als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Dit is bijvoorbeeld bij $t = 2,75$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2,75} \approx 3,14$$

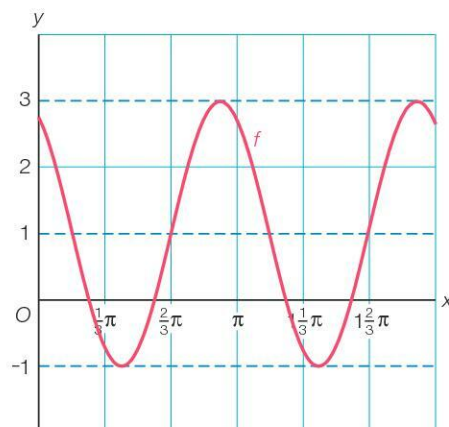
Dus de grootste helling van de grafiek is 3,14.



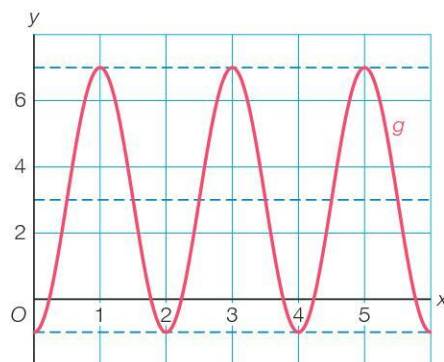
- b Van de grafiek van $f(x) = 2 + 3 \sin(x)$ is de amplitude 3 en van de grafiek van $g(x) = 2 - 3 \sin(x)$ is de amplitude 3.

Bladzijde 154

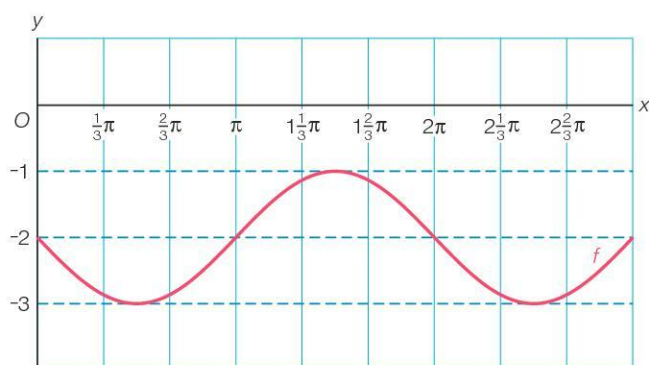
- 35 a $f(x) = 1 - 2 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1 - 2 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$
 evenwichtsstand 1
 amplitude 2
 periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
 $-2 < 0$, dus dalend door het punt $(\frac{1}{6}\pi, 1)$.



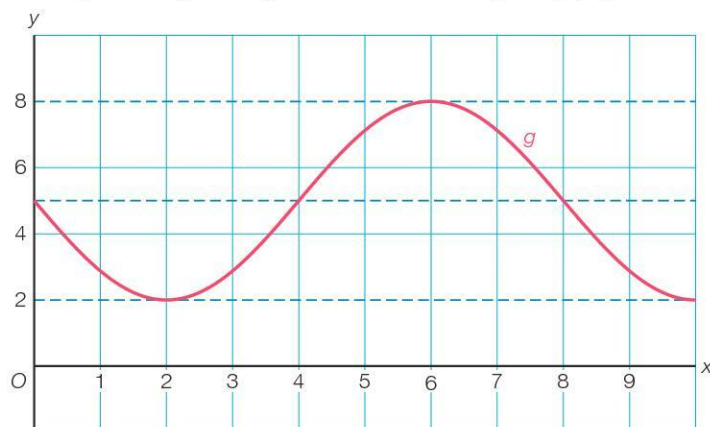
- b** $g(x) = 3 - 4 \cos(\pi x)$
 evenwichtsstand 3
 amplitude 4
 periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
 $-4 < 0$, dus het punt $(0, -1)$ is een laagste punt.



- 36 a** $f(x) = -2 - \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$
 evenwichtsstand -2
 amplitude 1
 periode 2π
 $-1 < 0$, dus het punt $(\frac{1}{2}\pi, -3)$ is een laagste punt.



- b** $g(x) = 5 - 3 \sin(\frac{1}{4}\pi x)$
 evenwichtsstand 5
 amplitude 3
 periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$
 $-3 < 0$, dus de grafiek gaat dalend door het punt $(0, 5)$.



- 37** $y = 2 - 3 \sin(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi)$ oftewel $y = 2 - 3 \sin(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{3}\pi))$
 evenwichtsstand 2
 amplitude 3
 Dalend door de evenwichtsstand bij $x = -\frac{1}{3}\pi$.
 periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

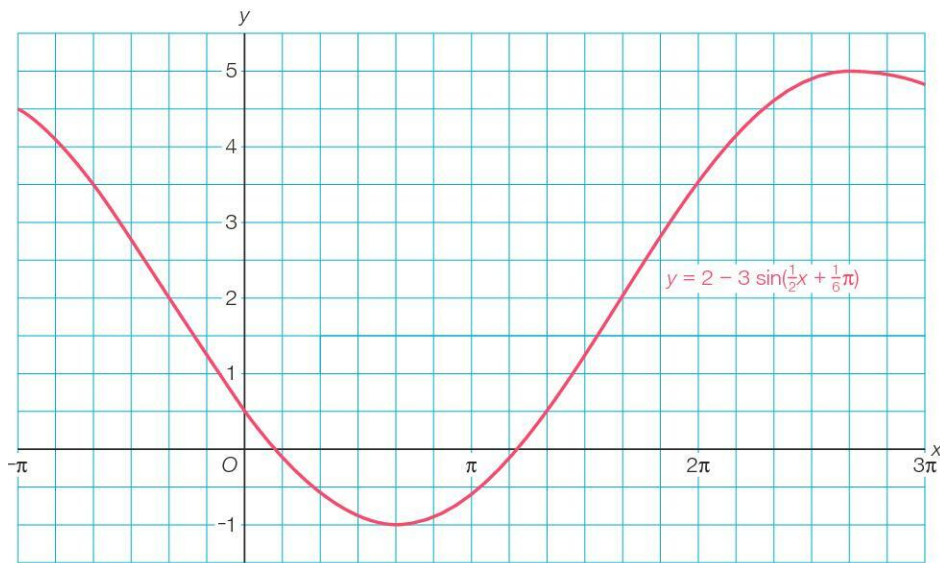
Tussen het laagste en het hoogste punt zitten horizontaal 12 roosterhokjes, dus $\frac{1}{2}$ periode $= 2\pi$
 komt overeen met 12 roosterhokjes, dus horizontaal komt 1 roosterhokje overeen met $\frac{1}{6}\pi$.

Tussen het laagste en het hoogste punt zitten verticaal 12 roosterhokjes, dus $2 \cdot \text{amplitude} = 6$

komt overeen met 12 roosterhokjes, dus verticaal komt 1 roosterhokje overeen met $\frac{1}{2}$.

Het laagste punt is $(-\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4} \cdot 4\pi, 2 - 3) = (\frac{2}{3}\pi, -1)$. Teken de verticale as 4 roosterhokjes links van het laagste punt en teken de horizontale as

2 roosterhokjes boven het laagste punt. Je krijgt de figuur hieronder.



8.3 Formules van sinusoiden opstellen

Bladzijde 156

- 38 a** evenwichtsstand 3
amplitude 2
periode π
- b** $a = 3$
 $b = 2$
 $c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
 $d = \frac{1}{3}\pi$

Bladzijde 157

- 39 a** De grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand bij $x = \pi$, dus $y = 1 - 2\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}(x - \pi))$.
- b** Het punt $(0, -1\frac{1}{2})$ is een laagste punt, dus $y = 1 - 2\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}x)$.
- 40 a** De grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand bij $x = 3$, dus $y = 1 - 2\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}\pi(x - 3))$.
- b** Het punt $(0, -1\frac{1}{2})$ is een laagste punt, dus $y = 1 - 2\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}\pi x)$.
- 41 a** $a = \frac{3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = 2$
 $b = 3\frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}$ periode $= \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$, dus periode $= \pi$, dus $c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.
- Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{\frac{1}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi$, dus $d = \frac{1}{2}\pi$.
- Dus $y = 2 + 1\frac{1}{2}\sin(2(x - \frac{1}{2}\pi))$.
- b** Een hoogste punt is $(\frac{3}{4}\pi, 3\frac{1}{2})$, dus $y = 2 + 1\frac{1}{2}\cos(2(x - \frac{3}{4}\pi))$.

42 a $a = \frac{4 + -2}{2} = 1$

$b = 4 - 1 = 3$

$\frac{1}{2}$ periode $= 2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$, dus periode $= 3$, dus $c = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1\frac{1}{4} + 2\frac{3}{4}}{2} = 2$, dus $d = 2$.

Dus $y = 1 + 3 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - 2))$.

- b** De grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand bij $x = 2 - \frac{1}{2} \cdot \text{periode} = 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2}$,
dus $y = 1 - 3 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - \frac{1}{2}))$.

Bladzijde 158

43 a $a = \frac{175 + 25}{2} = 100$

$b = 175 - 100 = 75$

$\frac{1}{2}$ periode $= 9 - 4 = 5$, dus periode $= 10$, dus $c = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 4$, dus $d = 4$.

Dus $N = 100 + 75 \sin(\frac{1}{5}\pi(t - 4))$.

- b** Er is een hoogste punt bij $t = 4 + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 4 + \frac{1}{4} \cdot 10 = 6\frac{1}{2}$.
Dus $N = 100 + 75 \cos(\frac{1}{5}\pi(t - 6\frac{1}{2}))$.

44 a Stel $y = a + b \cos(c(x - d))$.

$a = 12 - 4 = 8$

$b = 4$

De periode is $18 - 3 = 15$, dus $c = \frac{2\pi}{15} = \frac{2}{15}\pi$.

Het punt $(3, 12)$ is een hoogste punt, dus $d = 3$.

Dus $y = 8 + 4 \cos(\frac{2}{15}\pi(x - 3))$.

b Stel $y = a + b \cos(c(x - d))$.

$a = 650$

$b = 812 - 650 = 162$

De periode is 48, dus $c = \frac{2\pi}{48} = \frac{1}{24}\pi$.

Het punt $(16, 812)$ is een hoogste punt, dus $d = 16$.

Dus $y = 650 + 162 \cos(\frac{1}{24}\pi(x - 16))$.

c Stel $y = a + b \cos(c(x - d))$.

$a = \frac{250 + 110}{2} = 180$

$b = 250 - 180 = 70$

$\frac{1}{2}$ periode $= 26 - 2 = 24$, dus periode $= 48$, dus $c = \frac{2\pi}{48} = \frac{1}{24}\pi$.

Het punt $(2, 250)$ is een hoogste punt, dus $d = 2$.

Dus $y = 180 + 70 \cos(\frac{1}{24}\pi(x - 2))$.

45 a Voer in $y_1 = \sin(x) + \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$.

De optie maximum geeft $x = 2,0943...$ en $y = 1,7320...$, dus $A(2,094; 1,732)$.

De optie minimum geeft $x = 5,2359...$ en $y = -1,7320...$, dus $B(5,236; -1,732)$.

b evenwichtsstand $= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1,7320... + -1,7320...}{2} = 0$

amplitude $= 1,7320... - 0 \approx 1,732$

c periode $= 2(x_B - x_A) = 2(5,2359... - 2,0943...) = 2 \cdot 3,141... = 6,283...$

$2\pi = 6,283...$, en omdat zowel de periode van $y = \sin(x)$ als van $y = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$

gelijk is aan 2π mag je aannemen dat de periode van de grafiek van

$f(x) = \sin(x) + \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$ ook gelijk is aan 2π .

d De optie nulpunt geeft $x = 0,5235...$, dus $x_C \approx 0,524$.

e periode $= 2\pi$ geeft $c = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$, dus $y = 1,732 \sin(x - 0,524)$.

$A(2,094; 1,732)$ is een hoogste punt, dus $y = 1,732 \cos(x - 2,094)$.

Bladzijde 160

- 46 a** Het punt $(2,16; 2,61)$ is een hoogste punt, dus $d \approx 2,16$.
 Dus $y = -1 + 3,61 \cos(x - 2,16)$.
- b** Voer in $y_1 = 2 + 3 \sin(x) + 3 - 2 \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$.
 De optie maximum geeft $x = 0,982...$ en $y = 8,605...$
 De optie minimum geeft $x = 4,124...$ en $y = 1,394...$

$$a = \frac{8,605... + 1,394...}{2} = 5$$

 $b = 8,605... - 5 \approx 3,61$
 $\frac{1}{2}$ periode $= 4,124... - 0,982... = 3,141...$, dus de periode $= 2 \cdot 3,141... = 6,283...$ en

$$c = \frac{2\pi}{6,283...} = 1.$$

 Voer in $y_2 = 5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 5,695...$, dus $d \approx 5,70$.
 Dus $y = 5 + 3,61 \sin(x - 5,70)$.

Bladzijde 161

- 47 a** Voer in $y_1 = 2 \cos(x) - 3$, $y_2 = \cos(x - \frac{1}{4}\pi) - 2$ en $y_3 = y_1 + y_2$ en zet y_1 en y_2 uit.
 De optie maximum geeft $x = 0,255...$ en $y = -2,202...$
 De optie minimum geeft $x = 3,397...$ en $y = -7,797...$

$$a = \frac{-2,202... + -7,797...}{2} = -5$$

 $b = -2,202... - -5 \approx 2,80$
 $\frac{1}{2}$ periode $= 3,397... - 0,255... = 3,141...$, dus de periode $= 2 \cdot 3,141... = 6,283...$ en

$$c = \frac{2\pi}{6,283...} = 1.$$

 Het punt $(0,255..., -2,202...)$ is een hoogste punt, dus $d = 0,255... \approx 0,26$.
 Dus $y = -5 + 2,80 \cos(x - 0,26)$.
- b** Voer in $y_3 = y_1 - y_2$.
 De optie maximum geeft $x = 5,782...$ en $y = 0,473...$
 De optie minimum geeft $x = 2,641...$ en $y = -2,473...$

$$a = \frac{0,473... + -2,473...}{2} = -1$$

 $b = 0,473... - -1 \approx 1,47$
 $\frac{1}{2}$ periode $= 5,782... - 2,641... = 3,141...$, dus de periode $= 2 \cdot 3,141... = 6,283...$ en

$$c = \frac{2\pi}{6,283...} = 1.$$

 Voer in $y_4 = -1$.
 De optie snijpunt geeft $x = 4,211...$, dus $d \approx 4,21$.
 Dus $y = -1 + 1,47 \sin(x - 4,21)$.
- 48 a** Voer in $y_1 = \sin^2(x) + \cos(2x - 1)$.
 De optie nulpunt geeft $x = 1,8645..., x = 2,7999..., x = 5,0061...$ en $x = 5,9415...$
 $f(x) \leq 0$ geeft $1,865 \leq x \leq 2,800 \vee 5,006 \leq x \leq 5,942$
- b** De optie maximum geeft $x = 0,7614...$ en $y = 1,3424...$
 De optie minimum geeft $x = 2,3322...$ en $y = -0,3424...$

$$a = \frac{1,3424... + -0,3424...}{2} = \frac{1}{2}$$

 $b = 1,3424... - \frac{1}{2} \approx 0,842$
 $\frac{1}{2}$ periode $= 2,3424... - 0,7614... = 1,5707...$, dus de periode $= 2 \cdot 1,5707... = 3,1415...$
 en $c = \frac{2\pi}{3,1415...} = 2.$
 Voer in $y_2 = 0,5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3,1176...$, dus $d \approx 3,118$.
 Dus $y = \frac{1}{2} + 0,842 \sin(2(x - 3,118))$.
- c** Het punt $(0,761; 1,342)$ is een hoogste punt, dus $y = \frac{1}{2} + 0,842 \cos(2(x - 0,761))$.

- 49** Voer in $y_1 = 8 \cos^2(\frac{1}{5}\pi(x - 1\frac{1}{4})) - 2$.
 De optie maximum geeft $x = 1,25$ en $y = 6$.
 De optie minimum geeft $x = 3,75$ en $y = -2$.
 $a = \frac{6 + (-2)}{2} = 2$
 $b = 6 - 2 = 4$
 $\frac{1}{2}$ periode = $3,75 - 1,25 = 2,5$, dus de periode = 5 en $c = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.
 Het punt $(1,25; 6)$ is een hoogste punt, dus $d = 1,25$.
 Dus $y = 2 + 4 \cos(\frac{2}{5}\pi(x - 1,25))$.

8.4 Goniometrische vergelijkingen

Bladzijde 163

- 50 a** De hoogtelijn CD verdeelt AB in twee gelijke stukken.
 Dus $AD = BD = 1$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.
- b** In $\triangle ACD$ geldt $\sin(\angle A) = \frac{CD}{AC}$ oftewel $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, en $\cos(\angle A) = \frac{AD}{AC}$ oftewel $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$.
- c** In $\triangle ACD$ geldt $\sin(\angle C) = \frac{AD}{AC}$ oftewel $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, en $\cos(\angle C) = \frac{CD}{AC}$ oftewel $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
- d** De stelling van Pythagoras geeft $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.
 $\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC}$ geeft $\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $\cos(\angle A) = \frac{AB}{AC}$ geeft $\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Bladzijde 164

- 51 a** $\sin(\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **d** $\cos(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$
b $\cos(\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **e** $\cos(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$
c $\sin(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **f** $\sin(-\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- 52 a** $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $\alpha = \frac{1}{3}\pi \vee \alpha = \frac{2}{3}\pi$ **d** $\cos(\alpha) = 0$ geeft $\alpha = \frac{1}{2}\pi \vee \alpha = \frac{3}{2}\pi$
b $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = \frac{2}{3}\pi \vee \alpha = \frac{4}{3}\pi$ **e** $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $\alpha = \frac{1}{6}\pi \vee \alpha = \frac{5}{6}\pi$
c $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $\alpha = \frac{3}{4}\pi \vee \alpha = \frac{5}{4}\pi$ **f** $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $\alpha = \frac{1}{4}\pi \vee \alpha = \frac{7}{4}\pi$
- 53** $\dots, -3\frac{1}{2}\pi, -2\frac{1}{2}\pi, -1\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi, 3\frac{1}{2}\pi, \dots$

Bladzijde 166

- 54 a** $\sin(3x) = 1$
 $3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi$
- b** $\sin(2x) = 0$
 $2x = k \cdot \pi$
 $x = k \cdot \frac{1}{2}\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \pi \vee x = \frac{3}{2}\pi \vee x = 2\pi$

c $\sin^2(x) = 1$

$$\sin(x) = 1 \vee \sin(x) = -1$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$$

d $\sin(\frac{3}{4}x) = -1$

$$\frac{3}{4}x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 2\pi + k \cdot 2\frac{2}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 2\pi$$

e $\sin(3x - \frac{1}{2}\pi) = 0$

$$3x - \frac{1}{2}\pi = k \cdot \pi$$

$$3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$$

f $\sin(\pi x) = -1$

$$\pi x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1\frac{1}{2} + k \cdot 2$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 1\frac{1}{2} \vee x = 3\frac{1}{2} \vee x = 5\frac{1}{2}$$

55

a $\cos(3x) = 0$

$$3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$$

b $\cos(4x) = 1$

$$4x = k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 0 \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = 2\pi$$

c $\cos^2(2x) = 1$

$$\cos(2x) = 1 \vee \cos(2x) = -1$$

$$2x = k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$$

d $\cos(\frac{2}{5}x) = -1$

$$\frac{2}{5}x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 2\frac{1}{2}\pi + k \cdot 5\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft geen oplossingen}$$

e $\cos(2x - \frac{1}{6}\pi) = 0$

$$2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$$

f $\cos(2\pi x) = -1$

$$2\pi x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2} + k \cdot 1$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{2} \vee x = 1\frac{1}{2} \vee x = 2\frac{1}{2} \vee x = 3\frac{1}{2} \vee x = 4\frac{1}{2} \vee x = 5\frac{1}{2}$$

a $3 \sin(2x + \frac{1}{6}\pi) = 0$

$$\sin(2x + \frac{1}{6}\pi) = 0$$

$$2x + \frac{1}{6}\pi = k \cdot \pi$$

$$2x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$x \text{ in } [-\pi, \pi] \text{ geeft } x = -\frac{7}{12}\pi \vee x = -\frac{1}{12}\pi \vee x = \frac{5}{12}\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi$$

b $2 \cos(3x - \frac{1}{4}\pi) = 0$

$$\cos(3x - \frac{1}{4}\pi) = 0$$

$$3x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$3x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [-\pi, \pi] \text{ geeft } x = -\frac{3}{4}\pi \vee x = -\frac{5}{12}\pi \vee x = -\frac{1}{12}\pi \vee x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{7}{12}\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi$$

c $\sin(\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}\pi) = -1$

$$\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{3}{5}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{17}{18}\pi + k \cdot \frac{10}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [-\pi, \pi] \text{ geeft } x = -\frac{7}{18}\pi$$

d $\cos(\frac{1}{2}x - \pi) = -1$

$$\frac{1}{2}x - \pi = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}x = 2\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}x = k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot 1\frac{1}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [-\pi, \pi] \text{ geeft } x = 0$$

e $\sin^2(2x) = 1$

$$\sin(2x) = 1 \vee \sin(2x) = -1$$

$$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [-\pi, \pi] \text{ geeft } x = -\frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{1}{4}\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi$$

f $\cos^2(\frac{1}{2}x) = 1$

$$\cos(\frac{1}{2}x) = 1 \vee \cos(\frac{1}{2}x) = -1$$

$$\frac{1}{2}x = k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot 4\pi \vee x = 2\pi + k \cdot 4\pi$$

$$x \text{ in } [-\pi, \pi] \text{ geeft } x = 0$$

g $\sin(\frac{1}{2}\pi x) = 0$

$$\frac{1}{2}\pi x = k \cdot \pi$$

$$x = k \cdot 2$$

$$x \text{ in } [-\pi, \pi] \text{ geeft } x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$$

h $\cos(\frac{1}{2}\pi x + \pi) = 0$

$$\frac{1}{2}\pi x + \pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\frac{1}{2}\pi x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = -\frac{1}{3} + k \cdot \frac{2}{3}$$

$$x \text{ in } [-\pi, \pi] \text{ geeft}$$

$$x = -3 \vee x = -2\frac{1}{3} \vee x = -1\frac{2}{3} \vee x = -1 \vee x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{3} \vee x = 1 \vee x = 1\frac{2}{3} \vee x = 2\frac{1}{3} \vee x = 3$$

57 a $2 \sin(x) \cdot \cos(2x) = 0$
 $\sin(x) = 0 \vee \cos(2x) = 0$
 $x = k \cdot \pi \vee 2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
 $x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = 1\frac{3}{4}\pi$
De nulpunten zijn $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi, 1\frac{1}{4}\pi, 1\frac{3}{4}\pi$ en 2π .

b $rc_{AB} = \frac{2 - -2}{1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{\pi}$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{4}{\pi}x + b \\ \text{door } A(\frac{1}{2}\pi, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\pi + b = -2 \\ 2 + b = -2 \\ b = -4 \end{array}$$

Dus $AB: y = \frac{4}{\pi}x - 4$.

Snijden met de x -as geeft $\frac{4}{\pi}x - 4 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi}x &= 4 \\ x &= \pi \end{aligned}$$

Dus de lijn door A en B snijdt de x -as in $(\pi, 0)$, een van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.

c $f(\frac{1}{6}\pi) = 2 \sin(\frac{1}{6}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{3}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, dus C ligt op de grafiek van f .
 $f(1\frac{1}{6}\pi) = 2 \sin(1\frac{1}{6}\pi) \cdot \cos(2\frac{1}{3}\pi) = 2 \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, dus D ligt op de grafiek van f .

d $rc_{CD} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi} = \frac{-1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{\pi}x + b \\ \text{door } C(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{6}\pi + b = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} + b = \frac{1}{2} \\ b = \frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $CD: y = -\frac{1}{\pi}x + \frac{2}{3}$.

Snijden met de x -as geeft $-\frac{1}{\pi}x + \frac{2}{3} = 0$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi}x &= -\frac{2}{3} \\ x &= \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

Dus de lijn door C en D snijdt de x -as in $(\frac{2}{3}\pi, 0)$, dat is geen snijpunt van de grafiek van f met de x -as.

58 $g(\frac{1}{2}\pi) = 2 \sin(\frac{1}{2}\pi) - 4 \sin^3(\frac{1}{2}\pi) = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1^3 = 2 - 4 = -2$
 $g'(\frac{1}{2}\pi) = 2 \cos(\frac{1}{2}\pi) - 12 \sin^2(\frac{1}{2}\pi) \cos(\frac{1}{2}\pi) = 2 \cdot 0 - 12 \cdot 1^2 \cdot 0 = 0$

Dus het punt $(\frac{1}{2}\pi, -2)$ zou ook een top van de grafiek van g kunnen zijn.

$g(1\frac{1}{2}\pi) = 2 \sin(1\frac{1}{2}\pi) - 4 \sin^3(1\frac{1}{2}\pi) = 2 \cdot -1 - 4 \cdot (-1)^3 = -2 - 4 \cdot -1 = -2 + 4 = 2$

$g'(1\frac{1}{2}\pi) = 2 \cos(1\frac{1}{2}\pi) - 12 \sin^2(1\frac{1}{2}\pi) \cos(1\frac{1}{2}\pi) = 2 \cdot 0 - 12 \cdot (-1)^2 \cdot 0 = 0$

Dus het punt $(1\frac{1}{2}\pi, 2)$ zou ook een top van de grafiek van g kunnen zijn.

$$g(0) = 2 \sin(0) - 4 \sin^3(0) = 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0^3 = 0$$

$$g(\frac{1}{4}\pi) = 2 \sin(\frac{1}{4}\pi) - 4 \sin^3(\frac{1}{4}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - 4 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$g(\frac{3}{4}\pi) = 2 \sin(\frac{3}{4}\pi) - 4 \sin^3(\frac{3}{4}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - 4 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$g(\pi) = 2 \sin(\pi) - 4 \sin^3(\pi) = 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0^3 = 0$$

$$g(1\frac{1}{4}\pi) = 2 \sin(1\frac{1}{4}\pi) - 4 \sin^3(1\frac{1}{4}\pi) = 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 4 \cdot (-\frac{1}{2}\sqrt{2})^3 = -\sqrt{2} - 4 \cdot -\frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$$

$$g(1\frac{3}{4}\pi) = 2 \sin(1\frac{3}{4}\pi) - 4 \sin^3(1\frac{3}{4}\pi) = 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 4 \cdot (-\frac{1}{2}\sqrt{2})^3 = -\sqrt{2} - 4 \cdot -\frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$$

$$g(2\pi) = 2 \sin(2\pi) - 4 \sin^3(2\pi) = 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0^3 = 0$$

Dus de nulpunten van f zijn ook nulpunten van g , en de lijn door $(\frac{1}{2}\pi, -2)$ en $(1\frac{1}{2}\pi, 2)$ snijdt de grafiek van g op de x -as ook in het punt $(\pi, 0)$.

$g(\frac{1}{6}\pi) = 2 \sin(\frac{1}{6}\pi) - 4 \sin^3(\frac{1}{6}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot (\frac{1}{2})^3 = 1 - 4 \cdot \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, dus het punt $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2})$ ligt ook op de grafiek van g .

$g(1\frac{1}{6}\pi) = 2 \sin(1\frac{1}{6}\pi) - 4 \sin^3(1\frac{1}{6}\pi) = 2 \cdot -\frac{1}{2} - 4 \cdot (-\frac{1}{2})^3 = -1 - 4 \cdot -\frac{1}{8} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, dus het punt $(1\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{2})$ ligt ook op de grafiek van g .

$$g(\frac{2}{3}\pi) = 2 \sin(\frac{2}{3}\pi) - 4 \sin^3(\frac{2}{3}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - 4 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{3})^3 = \sqrt{3} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3} - 1\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

dus het punt $(\frac{2}{3}\pi, 0)$, dat op de lijn door $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2})$ en $(1\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{2})$ ligt, ligt ook niet op de grafiek van g .

Conclusie: de bewering van Rik zou kunnen kloppen.

- 59 a** $x = \frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, dus $x = \frac{1}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
b $x = 2\frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin(2\frac{1}{6}\pi) = \sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, dus $x = 2\frac{1}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
 $x = 4\frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin(4\frac{1}{6}\pi) = \sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, dus $x = 4\frac{1}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
c $x = \frac{5}{6}\pi$ geeft $\sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, dus $x = \frac{5}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
d $x = 2\frac{5}{6}\pi$ geeft $\sin(2\frac{5}{6}\pi) = \sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, dus $x = 2\frac{5}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
 $x = -1\frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin(-1\frac{1}{6}\pi) = \sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, dus $x = -1\frac{1}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

Bladzijde 169

- 60 a** $2 \sin(\frac{1}{2}x) = 1$
 $\sin(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$
b $2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 1$
 $\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$
 $x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = k \cdot 2\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 0 \vee x = 2\pi$
c $2 \sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{3}$
 $\sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $2x - \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = 1\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{19}{24}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{24}\pi + k \cdot \pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{19}{24}\pi \vee x = 1\frac{19}{24}\pi \vee x = \frac{23}{24}\pi \vee x = 1\frac{23}{24}\pi$

d $2 \cos(3x - \pi) = -1$
 $\cos(3x - \pi) = -\frac{1}{2}$
 $3x - \pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x - \pi = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{5}{9}\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi \vee x = \frac{8}{9}\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi \vee x = \frac{7}{9}\pi \vee x = \frac{4}{9}\pi$

61 a $2 \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \sqrt{2}$
 $\sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{24}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{11}{24}\pi + k \cdot \pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{5}{24}\pi \vee x = \frac{11}{24}\pi \vee x = \frac{11}{24}\pi \vee x = \frac{11}{24}\pi$

b $2 \cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = \sqrt{3}$
 $\cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $3x - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x - \frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $3x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{2}{9}\pi \vee x = \frac{8}{9}\pi \vee x = \frac{5}{9}\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi \vee x = \frac{7}{9}\pi \vee x = \frac{4}{9}\pi$

c $\sin(\frac{2}{3}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{2}{3}x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{7}{8}\pi + k \cdot 3\pi \vee x = -\frac{3}{8}\pi + k \cdot 3\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{7}{8}\pi$

d $\cos(\frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $\frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 4\pi \vee x = -\frac{5}{3}\pi + k \cdot 4\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{5}{3}\pi$

62 a $4 \sin(x - \frac{1}{3}\pi) \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 0$
 $\sin(x - \frac{1}{3}\pi) = 0 \vee \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 0$
 $x - \frac{1}{3}\pi = k \cdot \pi \vee x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$
De nulpunten zijn $\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi$ en $\frac{5}{6}\pi$.

b Stel $f(x) = a + b \sin(c(x - d))$.
Voer in $y_1 = 4 \sin(x - \frac{1}{3}\pi) \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$.
De optie minimum geeft $x = 0,261...$ en $y = -2$.
De optie maximum geeft $x = 1,832...$ en $y = 2$.
 $a = \frac{2 + -2}{2} = 0$
 $b = 2 - 0 = 2$

Uit a volgt periode $= \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi = \pi$, dus $c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{3}\pi$, dus $d = \frac{1}{3}\pi$.

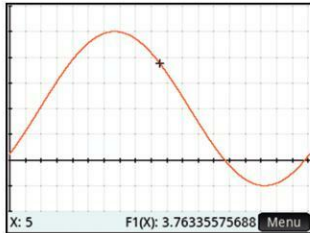
Zo krijg je $f(x) = 2 \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$ oftewel $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$.

c $f(x) = 1$ geeft $2 \sin(2x - \frac{2}{3}\pi) = 1$
 $\sin(2x - \frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}$
 $2x - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{5}{12}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{17}{12}\pi \vee x = \frac{7}{4}\pi$

8.5 Toepassingen van sinusoiden

Bladzijde 171

- 63 a Voer in $y_1 = 2 + 3 \sin(\frac{1}{5}\pi(x-1))$.



De optie maximum geeft $x = 3,5$ en $y = 5$, dus het hoogste punt is $(3,5; 5)$.

- b $x = 1,8$ geeft $y \approx 3,45$
c Voer in $y_2 = 3,6$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 1,90$ en $x \approx 5,10$.

Bladzijde 172

- 64 a $y_{\max} = \text{evenwichtsstand} + \text{amplitude} = 5 + 2 = 7$

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{2}{5}\pi} = 5$.

y is maximaal een kwart periode nadat de evenwichtsstand stijgend is gepasseerd, dus y is maximaal voor $x = 0,8 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 2,05$.

- b $y_{\min} = \text{evenwichtsstand} - \text{amplitude} = 5 - 2 = 3$

y is minimaal driekwart periode nadat de evenwichtsstand stijgend is gepasseerd, dus y is minimaal voor $x = 0,8 + \frac{3}{4} \cdot 5 = 4,55$.

- c Voer in $y_1 = 5 + 2 \sin(\frac{2}{5}\pi(x-0,8))$.
 $x = 4,62$ geeft $y \approx 3,01$

- d Voer in $y_2 = 6$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,22$ en $x \approx 2,88$.

- e $x = 0$ geeft $y \approx 3,31$

- f De helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} \approx -1,60$.

- g De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
Dat is bij $x = 0,8$.

De maximale helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0,8} \approx 2,51$.

- 65 a $P = 25 + 6 \sin(\frac{1}{2}q - 1) = 25 + 6 \sin(\frac{1}{2}(q-2))$
 $P_{\max} = \text{evenwichtsstand} + \text{amplitude} = 25 + 6 = 31$

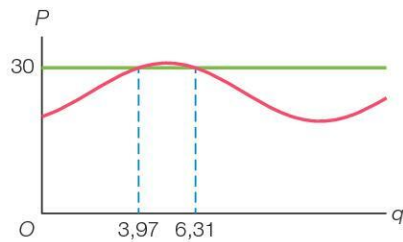
De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

P is maximaal een kwart periode nadat de evenwichtsstand stijgend is gepasseerd, dus P is maximaal voor $q = 2 + \pi \approx 5,14$.

- b $P_{\min} = \text{evenwichtsstand} - \text{amplitude} = 25 - 6 = 19$

P is minimaal driekwart periode nadat de evenwichtsstand stijgend is gepasseerd, dus P is minimaal voor $q = 2 + 3\pi \approx 11,42$.

- c Voer in $y_1 = 25 + 6 \sin(\frac{1}{2}x - 1)$ en $y_2 = 30$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 3,97$ en $x \approx 6,31$.



Dus $P > 30$ voor $3,97 < q < 6,31$.

- d De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
Dat is bij $q = 2$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=2} = 3, \text{ dus de maximale helling is } 3.$$

- 66 a $N_{\max} = \text{evenwichtsstand} + \text{amplitude} = 30,8 + 6,3 = 37,1$
 N is maximaal voor $t = 5,1$.

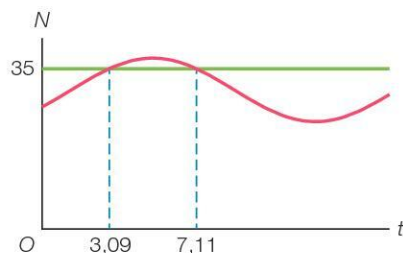
- b $N_{\min} = \text{evenwichtsstand} - \text{amplitude} = 30,8 - 6,3 = 24,5$

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{2}{15}\pi} = 15$.

N is minimaal een halve periode na een hoogste punt, dus N is minimaal voor $t = 5,1 + \frac{1}{2} \cdot 15 = 12,6$.

- c Voer in $y_1 = 30,8 + 6,3 \cos(\frac{2}{15}\pi(x - 5,1))$.
 $t = 7,2$ geeft $N \approx 34,82$

- d Voer in $y_2 = 35$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 3,09$ en $x \approx 7,11$.



Dus $N > 35$ voor $3,09 < t < 7,11$.

- e $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x \approx 10} \approx -2,34$

De gevraagde helling is $-2,34$.

- f De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
Dat is bij $t = 5,1 - \frac{1}{4} \cdot 15 = 1,35$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1,35} \approx 2,64, \text{ dus de maximale helling is } 2,64.$$

- 67 De amplitude van de grafiek van $\frac{dN}{dt} = -\frac{21}{25}\pi \sin(\frac{2}{15}\pi(t - 5,1))$ is $\frac{21}{25}\pi$ en de evenwichtsstand is 0,
dus het maximum van $\frac{dN}{dt}$ is $\frac{21}{25}\pi$, dus de maximale helling van de grafiek van N is $\frac{21}{25}\pi$.

- 68 a $a = \text{evenwichtsstand} = \frac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2} = \frac{10 + 4}{2} = 7$

$$b = \text{amplitude} = \text{maximum} - \text{evenwichtsstand} = 10 - 7 = 3$$

- b $\frac{1}{2}$ periode $= 5 - 1 = 4$, dus de periode $= 8$ en $c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi$.

- c De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand een kwart periode nadat een laagste punt is bereikt, dus bij $t = 5 + \frac{1}{4} \cdot 8 = 7$. Dus een mogelijke waarde voor d is 7.
Plotten van de grafiek van $y = 7 + 3 \sin(\frac{1}{4}\pi(x - 7))$ geeft inderdaad een sinusoiden waarvan $(1, 10)$ en $(5, 4)$ twee opeenvolgende toppen zijn.

Bladzijde 173

- 69 a** 1 maart heeft dagnummer 60 en 18 mei heeft dagnummer 138.

$$\text{Voer in } y_1 = 17 + 8 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(x - 110)\right).$$

$x = 60$ geeft $y \approx 10,9$, dus op 1 maart is de gemiddelde dagtemperatuur $10,9^\circ\text{C}$.

$x = 138$ geeft $y \approx 20,7$, dus op 18 mei is de gemiddelde dagtemperatuur $20,7^\circ\text{C}$.

- b** Voer in $y_2 = 12$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 71$ en $x \approx 332$.

Bij $n = 71$ hoort 12 maart en bij $n = 332$ hoort 28 november.

Dus tussen 12 maart en 28 november is de gemiddelde dagtemperatuur meer dan 12°C .

- c** De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Dat is bij $n = 110$.

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=110} = 0,137...^\circ\text{C/dag}$$

De grootste snelheid is $7 \cdot 0,137... \approx 0,96^\circ\text{C/week}$.

Bladzijde 174

- 70 a** De langste dag duurt $11,9 + 6,1 = 18$ uur.

- b** Het verschil is $2 \cdot 6,1 = 12,2$ uur, dat is 12 uur en 12 minuten.

- c** Bij 1 maart hoort $n = 60$.

$n = 60$ geeft $L = 9,841...$, dus 9 uur en 50 minuten.

- d** De periode is 365 dagen.

L is maximaal voor $n = 80 + \frac{1}{4} \cdot 365 = 171,25$.

Bij $n = 171$ hoort 20 juni.

- e** De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Dat is bij $n = 80$.

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=80} = 0,105... \text{ uur/dag}$$

De grootste snelheid is $3600 \cdot 0,105... \approx 378$ seconden/dag.

- 71 a** $a = \frac{16+8}{2} = 12$

$$b = 16 - 12 = 4$$

$$c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$$

$$d = -1 + \frac{1}{4} \cdot 12 = 2$$

- b** Voer in $y_1 = 12 + 4 \sin\left(\frac{1}{6}\pi(x - 2)\right)$ en $y_2 = 15$.

De optie snijpunt geeft $x = 3,619...$ en $x = 6,380...$

$6,380... - 3,619... = 2,760...$ maanden, dat is $2,760... \cdot 30 \approx 83$ dagen

Dus gedurende 83 dagen is de daglengte meer dan 15 uur.

- c** Bij 21 maart hoort $t = 2$ en bij 21 februari hoort $t = 1$.

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 2,09... \text{ en } \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 1,81...$$

Dus op 21 maart neemt de daglengte sneller toe dan op 1 februari.

- d** Bij 1 april hoort $t = 2\frac{11}{30}$.

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2\frac{11}{30}} = 2,055... \text{ uur/maand}$$

De snelheid is $2,055... \cdot 3600 : 30 \approx 247$ seconden/dag.

Bladzijde 175

- 72 a** De evenwichtsstand is 7 meter.

De amplitude is 3 meter.

De minimale hoogte is $7 - 3 = 4$ meter en de maximale hoogte is $7 + 3 = 10$ meter.

- b** Voer in $y_1 = 3 \sin\left(\frac{1}{30}\pi x\right) + 7$ en $y_2 = 8$.

De optie snijpunt geeft (onder andere) $x = 3,245...$ en $x = 86,754...$

De lengte van het gebouw is $86,754... - 3,245... \approx 84$ meter.

c Stel $h = a + b \sin(c(x - d))$.

De evenwichtsstand is $\frac{8+4}{2} = 6$ meter, dus $a = 6$.

De amplitude is 2 meter, dus $b = 2$.

Uit de gegevens volgt dat $\frac{3}{4} \cdot \text{periode} = 48$ meter, dus de periode is $\frac{4}{3} \cdot 48 = 64$ meter.

Dit geeft $c = \frac{2\pi}{64} = \frac{1}{32}\pi$.

Kies de oorsprong zo, dat $d = 0$.

Dit geeft $h = 6 + 2 \sin(\frac{1}{32}\pi x)$.

73 Stel $h = a + b \cos(c(x - d))$.

De evenwichtsstand is $\frac{12+4}{2} = 8$ meter, dus $a = 8$.

De amplitude is 4 meter, dus $b = 4$.

Uit de gegevens volgt dat $\frac{3}{4} \cdot \text{periode} = 50$ meter, dus de periode is $\frac{4}{3} \cdot 50 = 66\frac{2}{3}$ meter.

Dit geeft $c = \frac{2\pi}{66\frac{2}{3}} = 0,03\pi$.

De periode van het dak van de sporthal is 64 meter, dus het dak van de sporthal heeft een laagste punt bij $x = 0 - \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 0 - \frac{1}{4} \cdot 64 = -16$.

Dus $h = 8 - 4 \cos(0,03\pi(x + 16))$.

Bladzijde 176

74 a Voer in $y = 3 + 3 \sin(0,469x)$ en $y_2 = 3,8$.

De optie snijpunt geeft opeenvolgend $x = 0,575\dots$ en $x = 6,122\dots$

De breedte van zo'n blokje is $6,122\dots - 0,575\dots \approx 5,5$ cm.

b De stelling van Pythagoras geeft $QS = \sqrt{67^2 + 55^2} = 86,683\dots$

De periode is $\frac{86,683\dots}{5} = 17,336\dots$ cm. Dit geeft $c = \frac{2\pi}{17,336\dots} = 0,3624\dots$

De amplitude is 3 cm.

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 0$.

Dus $y = 3 + 3 \sin(0,362x)$.

Bladzijde 177

75 a Stel $y = a + b \sin(c(x - d))$.

evenwichtsstand = $\frac{0,70 + 0}{2} = 0,35$ meter

amplitude = $0,70 - 0,35 = 0,35$ meter

periode = 10 meter, dus $c = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi$.

De grafiek gaat een kwart periode na het laagste punt stijgend door de evenwichtsstand.

Dat is bij $x = 2,5$.

Zo krijg je $y = 0,35 + 0,35 \sin(\frac{1}{5}\pi(x - 2,5))$.

b Voer in $y_1 = 0,35 + 0,35 \sin(\frac{1}{5}\pi(x - 2,5))$.

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2,5} = 0,219\dots$, dus de tangens van de maximale hellingshoek is 0,219...

De GR geeft $12,40\dots^\circ$.

Dus de maximale hellingshoek is ongeveer $12,4^\circ$.

c Volgens Alex is de periode 14 meter, dus $c = \frac{2\pi}{14} = \frac{1}{7}\pi$.

De grafiek gaat een kwart periode na het laagste punt stijgend door de evenwichtsstand.

Dus bij $x = 3,5$.

Dit geeft $y = 0,35 + 0,35 \sin(\frac{1}{7}\pi(x - 3,5))$.

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3,5} = 0,157\dots$, dus de tangens van de maximale hellingshoek is 0,157...

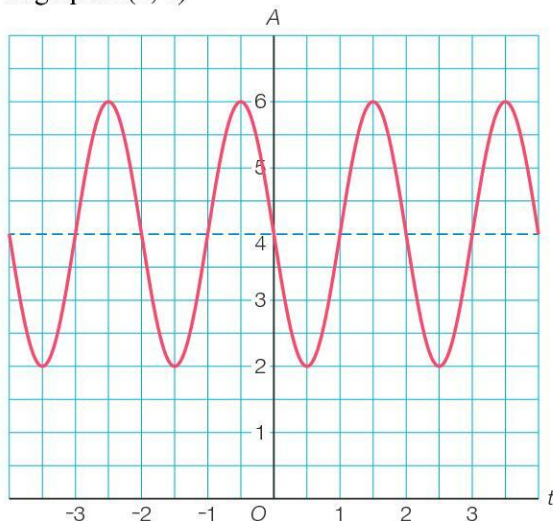
De GR geeft $8,92\dots^\circ$, dus de maximale hellingshoek is ongeveer $8,9^\circ$.

Dus Alex heeft geen gelijk.

Diagnostische toets

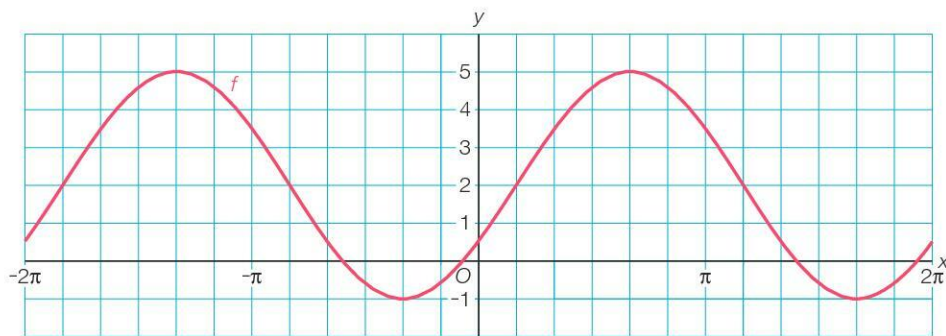
Bladzijde 180

- 1** $A(\cos(40^\circ), \sin(40^\circ)) \approx A(0,77; 0,64)$
 De draaiingshoek die bij het punt B hoort is $40^\circ + 120^\circ = 160^\circ$.
 $B(\cos(160^\circ), \sin(160^\circ)) \approx B(-0,94; 0,34)$
 De draaiingshoek die bij het punt C hoort is $40^\circ + 240^\circ = 280^\circ$.
 $C(\cos(280^\circ), \sin(280^\circ)) \approx C(0,17; -0,98)$
- 2** **a** $\frac{3}{4}\pi \text{ rad} = \frac{3}{4} \cdot 180^\circ = 135^\circ$ **d** $26\pi \text{ rad} = 26 \cdot 180^\circ = 4680^\circ$
b $\frac{1}{5}\pi \text{ rad} = \frac{1}{5} \cdot 180^\circ = 36^\circ$ **e** $\frac{2}{3}\pi \text{ rad} = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ$
c $0,6 \text{ rad} = 0,6 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 34,4^\circ$ **f** $\frac{2}{3} \text{ rad} = \frac{2}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 38,2^\circ$
- 3** **a** $270^\circ = \frac{270}{180}\pi \text{ rad} = 1\frac{1}{2}\pi \text{ rad}$ **d** $330^\circ = \frac{330}{180}\pi \text{ rad} = 1\frac{5}{6}\pi \text{ rad}$
b $-60^\circ = \frac{-60}{180}\pi \text{ rad} = -\frac{1}{3}\pi \text{ rad}$ **e** $40^\circ = \frac{40}{180}\pi \text{ rad} = \frac{2}{9}\pi \text{ rad}$
c $150^\circ = \frac{150}{180}\pi \text{ rad} = \frac{5}{6}\pi \text{ rad}$ **f** $-70^\circ = \frac{-70}{180}\pi \text{ rad} = -\frac{7}{18}\pi \text{ rad}$
- 4** $x_P = -0,4$, dus $\cos(\alpha_P) = -0,4$.
 De GR geeft 1,982...
 Dus $\alpha_P = 1,982...$
 $y_Q = 0,9$, dus $\sin(\alpha_Q) = 0,9$.
 De GR geeft 1,119...
 Dus $\alpha_Q = 1,119...$
 $\angle POQ = \alpha_P - \alpha_Q = 1,982... - 1,119... \approx 0,86$
- 5** **a** De evenwichtsstand is -2 , de amplitude is 3 , de periode is 2π en een beginpunt is $(\frac{1}{3}\pi, -2)$.
b De evenwichtsstand is 3 , de amplitude is 4 , de periode is π en een beginpunt is $(\frac{1}{4}, 7)$.
- 6** **a** De grafiek van f snijdt de lijn van de evenwichtsstand de punten $(-\frac{1}{6}\pi, -1)$, $(\frac{5}{6}\pi, -1)$, $(1\frac{5}{6}\pi, -1)$ en $(2\frac{5}{6}\pi, -1)$.
b De vier toppen van de grafiek van f zijn $(-\frac{2}{3}\pi, -3)$, $(\frac{1}{3}\pi, 1)$, $(1\frac{1}{3}\pi, -3)$ en $(2\frac{1}{3}\pi, 1)$.
c De periode van de grafiek van f is 2π , dus de afstand tussen O en Q is 2π .
- 7** **a** $A = 4 + 2\sin(\pi(t-1))$
 evenwichtsstand 4
 amplitude 2
 periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
 beginpunt $(1, 4)$



- b** Voer in $y_1 = 4 + 2 \sin(\pi(x-1))$ en $y_2 = 5$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -2,83$, $x \approx -2,17$, $x \approx -0,83$, $x \approx -0,17$, $x \approx 1,17$, $x \approx 1,83$,
 $x \approx 3,17$ en $x \approx 3,83$.
 $A \geq 5$ geeft $-2,83 \leq t \leq -2,17 \vee -0,83 \leq t \leq -0,17 \vee 1,17 \leq t \leq 1,83 \vee 3,17 \leq t \leq 3,83$
- c** $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} \approx 6,28$, dus de grootste helling is 6,28.

- 8** $f(x) = 2 - 3 \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$
evenwichtsstand 2
amplitude 3
periode 2π
beginpunt $(-\frac{1}{3}\pi, -1)$



Bladzijde 181

- 9 a** $a = \frac{10 + -30}{2} = -10$
 $b = 10 - -10 = 20$
 $c = \frac{2\pi}{30} = \frac{1}{15}\pi$
 $y = a + b \sin(c(x-d))$ met $b > 0$
Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 10$, dus $d = 10$.
 $y = -10 + 20 \sin(\frac{1}{15}\pi(x-10))$
- b** $y = a + b \cos(c(x-d))$ met $b > 0$
Hoogste punt is $(17\frac{1}{2}, 10)$, dus $d = 17\frac{1}{2}$.
 $y = -10 + 20 \cos(\frac{1}{15}\pi(x-17\frac{1}{2}))$
- c** $y = a + b \sin(c(x-d))$ met $b < 0$
Dalend door de evenwichtsstand bij $x = 25$, dus $d = 25$.
 $y = -10 - 20 \sin(\frac{1}{15}\pi(x-25))$
- d** $y = a + b \cos(c(x-d))$ met $b < 0$
Laagste punt is $(2\frac{1}{2}, -30)$, dus $d = 2\frac{1}{2}$.
 $y = -10 - 20 \cos(\frac{1}{15}\pi(x-2\frac{1}{2}))$
- 10 a** Voer in $y_1 = 3 - 2 \sin(x)$, $y_2 = 3 + 2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$ en $y_3 = y_1 + y_2$, en zet y_1 en y_2 uit.
 $y = a + b \sin(c(x-d))$
De optie minimum geeft $x = 2,8797...$ en $y = 4,9647...$
De optie maximum geeft $x = 6,0213...$ en $y = 7,0352...$
 $a = \frac{7,0352... + 4,9647...}{2} = 6$
 $b = 7,0352... - 6 \approx 1,035$
 $\frac{1}{2}$ periode = $6,0213... - 2,8797... = 3,1415...$, dus periode = $2 \cdot 3,1415... = 6,2831...$
en $c = \frac{2\pi}{6,2831...} = 1$.
Voer in $y_4 = 6$.
De optie snijpunt geeft $x = 4,4505...$, dus $d \approx 4,451$.
Dus $y = 6 + 1,035 \sin(x - 4,451)$.

- b** Voer in $y_3 = y_1 - y_2$.
 $y = a + b \cos(c(x - d))$
 De optie minimum geeft $x = 1,3089...$ en $y = -3,8637...$
 De optie maximum geeft $x = 4,4505...$ en $y = 3,8637...$

$$a = \frac{3,8637... + -3,8637...}{2} = 0$$

$$b = 3,8637... - 0 \approx 3,864$$

$$\frac{1}{2} \text{ periode} = 4,4505... - 1,3089... = 3,1415..., \text{ dus periode} = 2 \cdot 3,1415... = 6,2831...$$

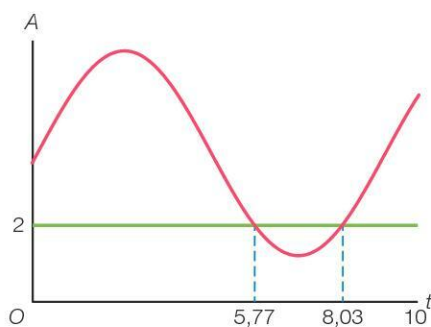
$$\text{en } c = \frac{2\pi}{6,2831...} = 1.$$

$$d \approx 4,451$$
 Dus $y = 3,864 \cos(x - 4,451)$.

- 11 a** $\cos(\frac{1}{2}x) = -1$
 $\frac{1}{2}x = \pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 2\pi$
- b** $\sin^2(2x) = 1$
 $\sin(2x) = 1 \vee \sin(2x) = -1$
 $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{4}\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi \vee x = 1\frac{3}{4}\pi$

- 12 a** $4 \sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = 2\sqrt{2}$
 $\sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $2x + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{7}{8}\pi \vee x = 1\frac{7}{8}\pi \vee x = \frac{1}{8}\pi \vee x = 1\frac{1}{8}\pi$
- b** $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $x - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi$

- 13 a** $A_{\max} = 3,9 + 2,7 = 6,6$ voor $t = 2,4$.
 periode $= \frac{2\pi}{\frac{2}{9}\pi} = 9$
 $A_{\min} = 3,9 - 2,7 = 1,2$ voor $t = 2,4 + \frac{1}{2} \cdot 9 = 6,9$.
- b** Voer in $y_1 = 3,9 + 2,7 \cos(\frac{2}{9}\pi(x - 2,4))$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 5,77$ en $x \approx 8,03$.



Dus $A < 2$ voor $5,77 < t < 8,03$.

- c** De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
Dit is bij $t = 2,4 - \frac{1}{4} \cdot 9 = 2,4 - 2,25 = 0,15$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0,15} \approx 1,885$$

Dus de maximale helling is ongeveer 1,885.

14 a $T = a + b \sin(c(t - d))$

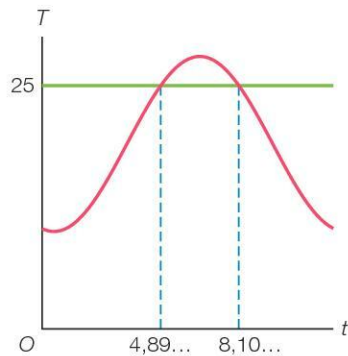
$$a = \frac{10 + 28}{2} = 19$$

$$b = 28 - 19 = 9$$

$$\text{periode} = 12, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi.$$

Stijgend door de evenwichtsstand 3 maanden na 15 januari, dus $d = 3\frac{1}{2}$.

- b** Voer in $y_1 = 19 + 9 \sin(\frac{1}{6}\pi(x - 3\frac{1}{2}))$ en $y_2 = 25$.
De optie snijpunt geeft $x = 4,89\dots$ en $x = 8,10\dots$



Dus gedurende $8,10\dots - 4,89\dots = 3,21\dots$ maanden, oftewel $3,21\dots \cdot 30 \approx 96$ dagen.

c $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3,5} = 4,71\dots \text{ } ^\circ\text{C/maand.}$

De maximale snelheid is $\frac{4,71\dots}{30} \approx 0,157 \text{ } ^\circ\text{C/dag.}$

Gemengde opgaven

5 Machten, exponenten en logaritmen

Bladzijde 182

1 a $a^2 \cdot \sqrt[4]{a} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{2\frac{1}{4}}$
b $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{-\frac{2}{3}}$
c $\frac{\sqrt[3]{a}}{a^2} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^2} = a^{-1\frac{2}{3}}$
d $\frac{\sqrt{a}}{a \cdot \sqrt[4]{a^3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{7}{4}}} = a^{-1\frac{1}{4}}$

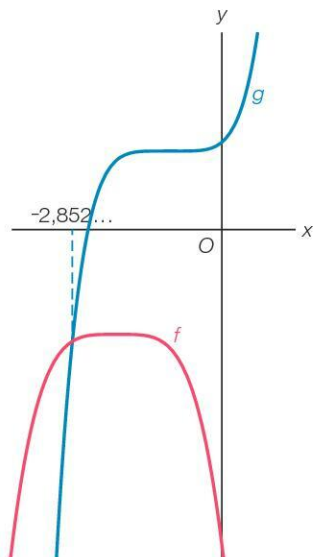
2 a $a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b^2}}$
b $(a^{-\frac{1}{3}})^9 = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$
c $(16a^2)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{(16a^2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$
d $\frac{6b^{-2}}{3a^{-1\frac{1}{4}}} = 2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot a^{1\frac{1}{4}} = \frac{2a \cdot \sqrt[4]{a}}{b^2}$

3 a $y = \frac{6x^4}{(2\sqrt{x})^3} = \frac{6x^4}{2^3 \cdot (x^{\frac{1}{2}})^3} = \frac{6x^4}{8x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4}x^{2\frac{1}{2}}$
Dus $y = \frac{3}{4}x^{2\frac{1}{2}}$.
b $y = (\frac{1}{4})^{2-\frac{1}{2}x} = (4^{-1})^{2-\frac{1}{2}x} = 4^{-2+\frac{1}{2}x} = 4^{-2} \cdot 4^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{16} \cdot (4^{\frac{1}{2}})^x = \frac{1}{16} \cdot 2^x$
Dus $y = \frac{1}{16} \cdot 2^x$.
c $y = 0,4x^{2,3} \cdot (3x^{4,1})^3 = 0,4x^{2,3} \cdot 3^3 \cdot (x^{4,1})^3 = 0,4 \cdot 27 \cdot x^{2,3} \cdot x^{12,3} = 10,8x^{14,6}$
Dus $y = 10,8x^{14,6}$.
d $y = 12 \cdot 4^{2x-1} \cdot (\frac{1}{2})^{2-3x} = 12 \cdot \frac{4^{2x}}{4^1} \cdot (2^{-1})^{2-3x} = 3 \cdot 4^{2x} \cdot 2^{-2+3x} = 3 \cdot (2^2)^{2x} \cdot 2^{-2} \cdot 2^{3x} = 3 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot 2^{4x} \cdot 2^{3x}$
 $= \frac{3}{4} \cdot 2^{7x} = \frac{3}{4} \cdot (2^7)^x = \frac{3}{4} \cdot 128^x$
Dus $y = \frac{3}{4} \cdot 128^x$.

4 a $y = \sqrt{x}$ $y = \sqrt{x}$
 $\downarrow$ verm. x-as, 2 $\downarrow$ verm. x-as, -2
 $y = 2\sqrt{x}$ $y = -2\sqrt{x}$
 $\downarrow$ translatie (-3, -1) $\downarrow$ translatie (4, 3)
 $y = f(x)$ $y = g(x)$
b Bijvoorbeeld achtereenvolgens verm. x-as, -1 en translatie (7, 2).

5 a $y = x^4$
 $\downarrow$ verm. x-as, $-\frac{1}{2}$
 $y = -\frac{1}{2}x^4$
 $\downarrow$ translatie $(-2, -4)$
 $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^4 - 4$

- b** Voer in $y_1 = -\frac{1}{2}(x+2)^4 - 4$ en $y_2 = \frac{1}{3}(x+1)^5 + 3$.
 De optie snijpunt geeft $x = -2,852...$



$f(x) > g(x)$ geeft $x < -2,85$

- c** De top van de grafiek van f is het punt $(-2, -4)$.
 $(-2, -4) \xrightarrow{\text{verm. x-as, } -4} (-2, 16) \xrightarrow{\text{translatie } (4, -8)} (2, 8)$
 De top van de beeldgrafiek is het punt $(2, 8)$.
- d** Het punt van symmetrie van de grafiek van g is het punt $(-1, 3)$.
 $(-1, 3) \xrightarrow{\text{verm. x-as, } -3} (-1, -9) \xrightarrow{\text{translatie } (a, b)} (-1 + a, -9 + b)$
 Het punt $(-1 + a, -9 + b)$ is het punt $(4, 6)$ geeft $a = 5$ en $b = 15$.

Bladzijde 183

6 a $6 - 3x \geq 0$
 $-3x \geq -6$
 $x \leq 2$, dus $D_f = \langle \leftarrow, 2 \rangle$
 randpunt $(2, -2)$
 Voer in $y_1 = -2 + \sqrt{6 - 3x}$.

x	-5	-1	0	1	2
$f(x)$	2,6	1	0,4	-0,3	-2

$4x + 10 \geq 0$

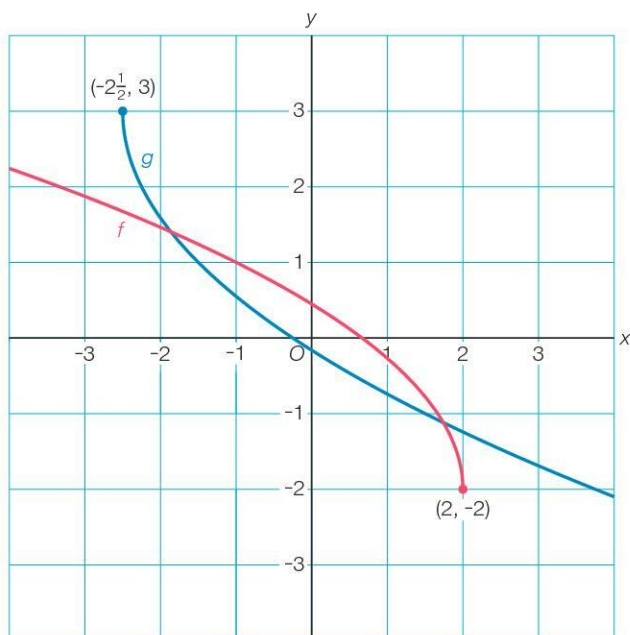
$4x \geq -10$

$x \geq -2\frac{1}{2}$, dus $D_g = [-2\frac{1}{2}, \rightarrow)$

randpunt $(-2\frac{1}{2}, 3)$

Voer in $y_2 = 3 - \sqrt{4x + 10}$.

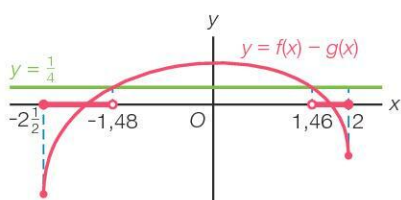
x	$-2\frac{1}{2}$	-2	-1	0	1	2	5
$g(x)$	3	1,6	0,6	-0,2	-0,7	-1,2	-2,5



b De optie snijpunt geeft $x = -1,863...$ en $x = 1,741...$

$f(x) \geq g(x)$ geeft $-1,86 \leq x \leq 1,74$

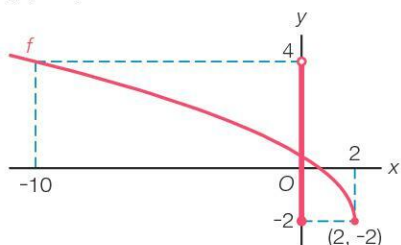
c Zet y_1 en y_2 uit en voer in $y_3 = y_1 - y_2$ en $y_4 = \frac{1}{4}$.



De optie snijpunt geeft $x = -1,481...$ en $x = 1,464...$

$f(x) - g(x) < \frac{1}{4}$ geeft $-2\frac{1}{2} \leq x < -1,48 \vee 1,46 < x \leq 2$

d $f(-10) = 4$



$x > -10$ geeft $-2 \leq f(x) < 4$

7 a $3\sqrt{2-4x} = 21$

$$\sqrt{2-4x} = 7$$

$$2-4x = 49$$

$$-4x = 47$$

$$x = -11\frac{3}{4}$$

b $2^{\frac{1}{2}x-2} = 2\sqrt{2}$

$$2^{\frac{1}{2}x-2} = 2^{1\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}x - 2 = 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x = 3\frac{1}{2}$$

$$x = 7$$

c $5 \cdot {}^2\log(x) = 15$

$${}^2\log(x) = 3$$

$$x = 2^3$$

$$x = 8$$

d $2\sqrt{x-1} + 7 = 15$

$$2\sqrt{x-1} = 8$$

$$\sqrt{x-1} = 4$$

$$x-1 = 16$$

$$x = 17$$

e $3^{5-2x} = 81$

$$3^{5-2x} = 3^4$$

$$5-2x = 4$$

$$-2x = -1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

f ${}^4\log(2x+3) = 3$

$$2x+3 = 4^3$$

$$2x+3 = 64$$

$$2x = 61$$

$$x = 30\frac{1}{2}$$

- 8 a** $G = 4000$ geeft $L = 7,5 \cdot 4000^{0,25} = 59,64...$
Dus de levensverwachting van deze olifanten is 60 jaar.
- b** Voer in $y_1 = 7,5x^{0,25}$ en $y_2 = 34$.
De optie snijpunt geeft $x = 422,34...$
Dus het gemiddelde gewicht is 422 kg.
- c** $G = 300$ geeft $H = 280 \cdot 300^{-0,25} = 67,27...$
 $G = 300$ geeft $L = 7,5 \cdot 300^{0,25} = 31,21...$
 $67,27...$ hartslagen per minuut geeft $67,27... \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 31,21... \approx 1,1$ miljard hartslagen in zijn gehele leven.
- d** Voer in $y_3 = 280x^{-0,25}$ en $y_4 = 900$.
De optie snijpunt geeft $x = 0,00936...$
 $G = 0,00936...$ geeft $L = 7,5 \cdot 0,00936...^{0,25} = 2,33...$
 900 hartslagen per minuut geeft $900 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 2,33... = 1,1$ miljard hartslagen in zijn gehele leven.
- e** L is de levensverwachting in jaren, dus $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot L$ is de levensverwachting in minuten.
 H is het aantal hartslagen per minuut, dus $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot L \cdot H$ is het aantal hartslagen in het hele leven.
Als dit voor elk zoogdier gelijk is, dan moet $L \cdot H$ constant zijn.
Er geldt $L \cdot H = 7,5 G^{0,25} \cdot 280 G^{-0,25} = 2100 \cdot G^0 = 2100 \cdot 1 = 2100$.
Dus is inderdaad $L \cdot H$ constant en het is gelijk aan 2100.

- 9 a** $\sqrt{2-2x} + 2x = 0$
 $\sqrt{2-2x} = -2x$
kwadrateren geeft
 $2 - 2x = 4x^2$
 $-4x^2 - 2x + 2 = 0$
 $2x^2 + x - 1 = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$
 $x = \frac{-1 \pm 3}{4} = \frac{1}{2} \vee x = \frac{-1 - 3}{4} = -1$
 $x = \frac{1}{2}$ geeft $\sqrt{2 - 2 \cdot \frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$ vold. niet
 $x = -1$ geeft $\sqrt{2 - 2 \cdot -1} + 2 \cdot -1 = 0$ vold.
- b** $0,2^{2x+1} = 0,04$
 $0,2^{2x+1} = 0,2^2$
 $2x + 1 = 2$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$
- c** $5^{0,02x} = 5\sqrt{5}$
 $5^{0,02x} = 5^{1\frac{1}{2}}$
 $0,02x = 1\frac{1}{2}$
 $x = 75$
- d** $3x = \sqrt{8x+1}$
kwadrateren geeft
 $9x^2 = 8x + 1$
 $9x^2 - 8x - 1 = 0$
 $D = (-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -1 = 100$
 $x = \frac{8 \pm 10}{18} = 1 \vee x = \frac{8 - 10}{18} = -\frac{1}{9}$
 $x = 1$ geeft $3 = \sqrt{8+1}$ vold.
 $x = -\frac{1}{9}$ geeft $-\frac{1}{3} = \sqrt{-\frac{8}{9}+1}$ vold. niet
- e** $6^{2x} + 4 = 220$
 $6^{2x} = 216$
 $6^{2x} = 6^3$
 $2x = 3$
 $x = 1\frac{1}{2}$
- f** ${}^3\log(8x + \sqrt{3}) = 2\frac{1}{2}$
 $8x + \sqrt{3} = 3^{2\frac{1}{2}}$
 $8x = 9\sqrt{3} - \sqrt{3}$
 $8x = 8\sqrt{3}$
 $x = \sqrt{3}$

Bladzijde 184

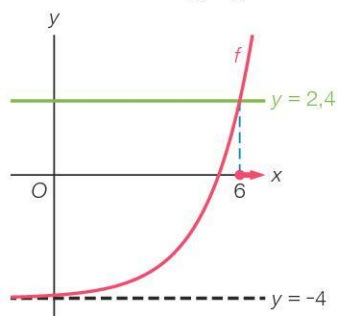
- 10 a** $2 + 3x\sqrt{x} = 26$
 $3x\sqrt{x} = 24$
 $x\sqrt{x} = 8$
 $x^3 = 64$
 $x = 4$
- b** $3 \cdot 2^{x^2-2} + 12 = 60$
 $3 \cdot 2^{x^2-2} = 48$
 $2^{x^2-2} = 16$
 $2^{x^2-2} = 2^4$
 $x^2 - 2 = 4$
 $x^2 = 6$
 $x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$
- c** ${}^2\log(x^2 - 2) = 3$
 $x^2 - 2 = 2^3$
 $x^2 - 2 = 8$
 $x^2 = 10$
 $x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$
- d** $\frac{2\sqrt{x}}{4 + \sqrt{x}} = \frac{2}{3}$
kruislings vermenigvuldigen geeft
 $3 \cdot 2\sqrt{x} = 2(4 + \sqrt{x})$
 $6\sqrt{x} = 8 + 2\sqrt{x}$
 $4\sqrt{x} = 8$
 $\sqrt{x} = 2$
 $x = 4$ vold.

$$\begin{aligned} \text{e } 128 - 4 \cdot 3^{x+1} &= 20 \\ -4 \cdot 3^{x+1} &= -108 \\ 3^{x+1} &= 27 \\ 3^{x+1} &= 3^3 \\ x+1 &= 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } 5 - {}^3\log(4x-7) &= 3 \\ -{}^3\log(4x-7) &= -2 \\ {}^3\log(4x-7) &= 2 \\ 4x-7 &= 3^2 \\ 4x-7 &= 9 \\ 4x &= 16 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{11 a } y &= 2^x & y &= 3^x \\ \downarrow \text{verm. } x\text{-as, } 0,4 & & \downarrow \text{verm. } x\text{-as, } -0,2 \\ y &= 0,4 \cdot 2^x & y &= -0,2 \cdot 3^x \\ \downarrow \text{translatie } (2, -4) & & \downarrow \text{translatie } (-1, 5) \\ f(x) &= 0,4 \cdot 2^{x-2} - 4 & y &= -0,2 \cdot 3^{x+1} + 5 \\ & & \downarrow \text{verm. } y\text{-as, } 2 \\ & & g(x) &= 5 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } f(x) = 2,4 \text{ geeft } 0,4 \cdot 2^{x-2} - 4 &= 2,4 \\ 0,4 \cdot 2^{x-2} &= 6,4 \\ 2^{x-2} &= 16 \\ 2^{x-2} &= 2^4 \\ x-2 &= 4 \\ x &= 6 \end{aligned}$$



$$f(x) \geq 2,4 \text{ geeft } x \geq 6$$

$$\text{c } AB = f(p) - g(p) \vee AB = g(p) - f(p)$$

$$\text{Voer in } y_1 = 0,4 \cdot 2^{x-2} - 4 - (5 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x+1}), y_2 = 5 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x+1} - (0,4 \cdot 2^{x-2} - 4) \text{ en } y_3 = 3.$$

De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x = 4,923\dots$ en met y_2 en y_3 geeft de optie snijpunt $x = 3,735\dots$

Dus $p \approx 4,92$ of $p \approx 3,74$.

$$\text{d } f(x) = q \text{ één oplossing geeft } q > -4.$$

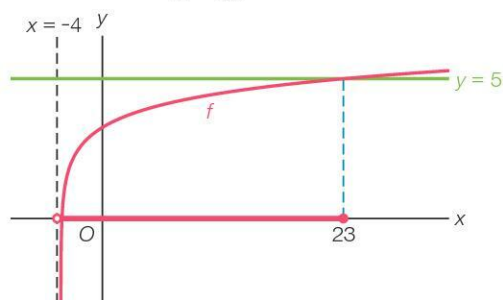
$$g(x) = q \text{ geen oplossing geeft } q \geq 5.$$

$$\text{Dus } q \geq 5.$$

$$\text{12 a } D_f = \langle -4, \rightarrow \rangle \text{ en verticale asymptoot } x = -4.$$

$$D_g = \langle 1, \rightarrow \rangle \text{ en verticale asymptoot } x = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{b } f(x) = 5 \text{ geeft } 2 + {}^3\log(x+4) &= 5 \\ {}^3\log(x+4) &= 3 \\ x+4 &= 3^3 \\ x+4 &= 27 \\ x &= 23 \end{aligned}$$



$$f(x) \leq 5 \text{ geeft } -4 < x \leq 23$$

$$\begin{aligned} \text{c } f(x) = 2 \text{ geeft } 2 + {}^3\log(x+4) &= 2 \\ {}^3\log(x+4) &= 0 \\ x+4 &= 3^0 \\ x+4 &= 1 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Dus $P(-3, 2)$.

$$\begin{aligned} g(x) = 2 \text{ geeft } 3 + {}^2\log(x-1) &= 2 \\ {}^2\log(x-1) &= -1 \\ x-1 &= 2^{-1} \\ x-1 &= \frac{1}{2} \\ x &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus $Q(1\frac{1}{2}, 2)$.

$$PQ = x_Q - x_P = 1\frac{1}{2} - (-3) = 4\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{d } y &= 3 + {}^2\log(x-1) \\ \downarrow \text{translatie } (4, 0) \\ y &= 3 + {}^2\log(x-4-1), \text{ oftewel } y = 3 + {}^2\log(x-5) \\ \downarrow \text{verm. } y\text{-as, } \frac{1}{2} \\ y &= 3 + {}^2\log(2x-5) \\ \text{Dus } h(x) &= 3 + {}^2\log(2x-5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{13 } f(x) &= 2^x - 2 \\ \downarrow \text{verm. } x\text{-as, } a \\ y &= a \cdot 2^x - 2a \\ \downarrow \text{translatie } (4, 1) \\ y &= a \cdot 2^{x-4} - 2a + 1 \\ y &= a \cdot 2^{x-4} - 2a + 1 \left. \vphantom{\begin{aligned} y &= a \cdot 2^{x-4} - 2a + 1 \\ \text{door } S(6, 5) \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} a \cdot 2^{6-4} - 2a + 1 &= 5 \\ 4a - 2a &= 4 \\ 2a &= 4 \\ a &= 2 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 3^x + b \\ \downarrow \text{verm. } x\text{-as, } 2 \\ y &= 2 \cdot 3^x + 2b \\ \downarrow \text{translatie } (4, 1) \\ y &= 2 \cdot 3^{x-4} + 2b + 1 \\ y &= 2 \cdot 3^{x-4} + 2b + 1 \left. \vphantom{\begin{aligned} y &= 2 \cdot 3^{x-4} + 2b + 1 \\ \text{door } S(6, 5) \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} 2 \cdot 3^{6-4} + 2b + 1 &= 5 \\ 18 + 2b + 1 &= 5 \\ 2b &= -14 \\ b &= -7 \end{aligned} \end{aligned}$$

Dus $a = 2$ en $b = -7$.

6 De afgeleide functie

Bladzijde 185

$$\begin{aligned} \text{14 a } f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \text{ geeft } f'(x) = x^2 - x - 2 \\ \text{rc}_k &= f'(4) = 4^2 - 4 - 2 = 10 \\ l \perp k, \text{ dus } \text{rc}_l \cdot \text{rc}_k &= -1 \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{rc}_k &= f'(4) = 4^2 - 4 - 2 = 10 \\ l \perp k, \text{ dus } \text{rc}_l \cdot \text{rc}_k &= -1 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} \text{rc}_l \cdot 10 &= -1 \\ \text{rc}_l &= -\frac{1}{10} \end{aligned} \\ y &= -\frac{1}{10}x + b \\ f(4) &= 6\frac{1}{3}, \text{ dus } A(4, 6\frac{1}{3}) \left. \vphantom{\begin{aligned} y &= -\frac{1}{10}x + b \\ f(4) &= 6\frac{1}{3}, \text{ dus } A(4, 6\frac{1}{3}) \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} -\frac{1}{10} \cdot 4 + b &= 6\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5} + b &= 6\frac{1}{3} \\ b &= 6\frac{11}{15} \end{aligned} \end{aligned}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{10}x + 6\frac{11}{15}$ en $B(0, 6\frac{11}{15})$.

- b** Raaklijn horizontaal, dus $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

$$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 2\frac{1}{6}$$

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = -2\frac{1}{3}$$

De punten zijn $(-1, 2\frac{1}{6})$ en $(2, -2\frac{1}{3})$.

- c** Raaklijn evenwijdig met $m: y = 4x + 10$, dus $rc_{\text{raaklijn}} = 4$.

Dit geeft van $f'(x) = 4$

$$x^2 - x - 2 = 4$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 3$$

$$x_C = -2 \text{ geeft } y_C = f(-2) = \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1 = \frac{1}{3}, \text{ dus } C(-2, \frac{1}{3}).$$

$$x_D = 3 \text{ geeft } y_D = f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = -\frac{1}{2}, \text{ dus } D(3, -\frac{1}{2}).$$

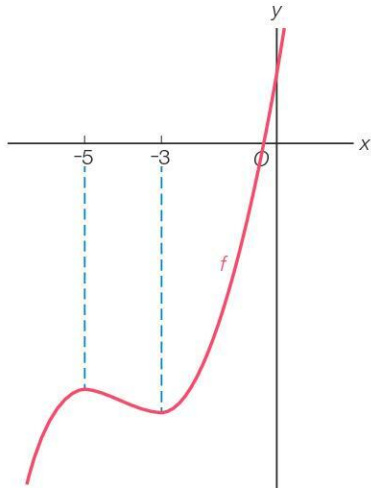
- 15 a** $f(x) = x^3 + 12x^2 + 45x + 17$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 24x + 45$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3x^2 + 24x + 45 = 0$$

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$(x+3)(x+5) = 0$$

$$x = -3 \vee x = -5$$



max. is $f(-5) = -33$ en min. is $f(-3) = -37$.

- b** $f(x) = p$ heeft drie oplossingen voor $-37 < p < -33$.

- c** $f(x) = p$ heeft één oplossing voor $p < -37 \vee p > -33$.

- d** Door op de grafiek van f de translatie $(0, 33)$ of de translatie $(0, 37)$ toe te passen, raakt de beeldgrafiek van f de x -as.

Dus $a = 17 + 33 = 50$ of $a = 17 + 37 = 54$.

- 16 a** $f(x) = \frac{2x+5}{x^2} = 2x^{-1} + 5x^{-2}$ geeft $f'(x) = -2x^{-2} - 10x^{-3} = -\frac{2}{x^2} - \frac{10}{x^3}$

$$\text{b } f(x) = \frac{6x^2}{5} - \frac{x^2+2}{5x^3} = \frac{6}{5}x^2 - \frac{1}{5}x^{-1} - \frac{2}{5}x^{-3} \text{ geeft } f'(x) = \frac{12}{5}x + \frac{1}{5}x^{-2} + \frac{6}{5}x^{-4} = \frac{12}{5}x + \frac{1}{5x^2} + \frac{6}{5x^4}$$

$$\text{c } f(x) = 4(3x-1)^5 \text{ geeft } f'(x) = 4 \cdot 5(3x-1)^4 \cdot 3 = 60(3x-1)^4$$

$$\text{d } f(x) = \frac{5}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{5}{x^{2\frac{1}{2}}} = 5x^{-2\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = -12\frac{1}{2}x^{-3\frac{1}{2}} = -\frac{25}{2x^{3\frac{1}{2}}} = -\frac{25}{2x^3 \cdot \sqrt{x}}$$

$$\text{e } f(x) = \frac{5}{(6-2x)^4} = 5(6-2x)^{-4} \text{ geeft } f'(x) = 5 \cdot -4(6-2x)^{-5} \cdot -2 = \frac{40}{(6-2x)^5}$$

$$\text{f } f(x) = 3\sqrt{5x+10} + (5x+10)^3 \text{ geeft}$$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{5}{2\sqrt{5x+10}} + 3(5x+10)^2 \cdot 5 = \frac{15}{2\sqrt{5x+10}} + 15(5x+10)^2$$

17 a $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x} = x - 3 + 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(4) = 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ f(4) = 2, \text{ dus } A(4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 4 + b = 2 \\ 3 + b = 2 \\ b = -1 \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{3}{4}x - 1$.

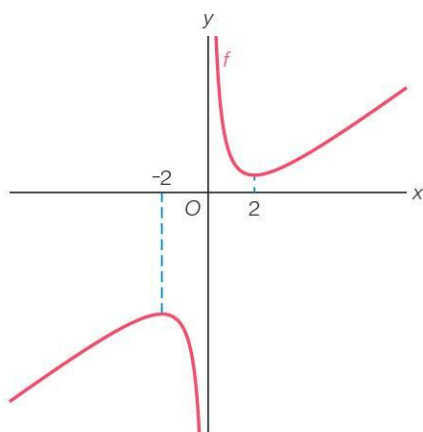
b $f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{4}{x^2} = 0$

$$-\frac{4}{x^2} = -1$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

vold. vold.



max. is $f(-2) = -7$ en min. is $f(2) = 1$.

c $rc_{\text{raaklijn}} = -3$, dus $f'(x) = -3$

$$1 - \frac{4}{x^2} = -3$$

$$-\frac{4}{x^2} = -4$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

vold. vold.

$$f(1) = \frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 4}{1} = 2, \text{ dus raakpunt } (1, 2).$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 4}{-1} = -8, \text{ dus raakpunt } (-1, -8).$$

d $rc > 1$, dus $f'(x) > 1$

$$1 - \frac{4}{x^2} > 1$$

$$-\frac{4}{x^2} > 0$$

Omdat $-\frac{4}{x^2}$ voor elke x kleiner is dan 0 heeft $-\frac{4}{x^2} > 0$ geen oplossingen.

Dus de grafiek heeft geen raaklijn met richtingscoëfficiënt groter dan 1.

18 a $f(0) = \sqrt{16} = 4$, dus $A(0, 4)$.

$$g_a(0) = 4 + \frac{8}{(-2)^2} = 4 + 2 = 6, \text{ dus } B(0, 6).$$

b $f(x) = \sqrt{4x+16}$ geeft $f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+16}} = \frac{2}{\sqrt{4x+16}}$, dus $f'(0) = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$.

$$g_a(x) = 4 + \frac{8}{(ax-2)^2} = 4 + 8(ax-2)^{-2} \text{ geeft } g_a'(x) = 8 \cdot -2(ax-2)^{-3} \cdot a = -\frac{16a}{(ax-2)^3},$$

$$\text{dus } g_a'(0) = -\frac{16a}{(-2)^3} = 2a.$$

De raaklijnen in A en B zijn evenwijdig geeft $f'(0) = g_a'(0)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 2a \\ a &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

19 a Stel $m: y = ax + b$ met $a = rc_m = rc_k = -1$.

$$f(x) = \sqrt{6-2x} \text{ geeft } f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{6-2x}} = -\frac{1}{\sqrt{6-2x}}$$

$$rc_m = -1, \text{ dus } f'(x) = -1$$

$$-\frac{1}{\sqrt{6-2x}} = -1$$

$$\sqrt{6-2x} = 1$$

$$6-2x = 1$$

$$-2x = -5$$

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ vold.}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= -x + b \\ f(2\frac{1}{2}) &= \sqrt{6-5} = 1, \text{ dus } (2\frac{1}{2}, 1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -2\frac{1}{2} + b &= 1 \\ b &= 3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } m: y = -x + 3\frac{1}{2}.$$

b $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$ geeft $\sqrt{6-2x} = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

$$2\sqrt{6-2x} = -x + 3$$

kwadrateren geeft

$$4(6-2x) = (-x+3)^2$$

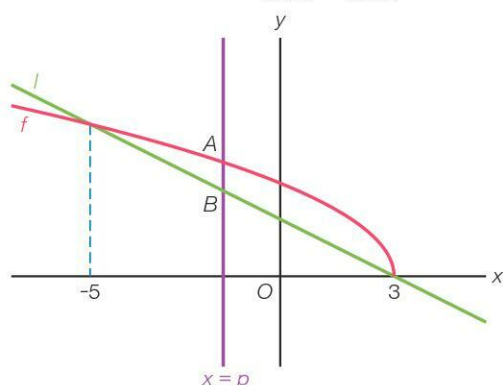
$$24 - 8x = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x-3)(x+5) = 0$$

$$x = 3 \vee x = -5$$

vold. vold.



Stel L is de lengte van het lijnstuk AB .

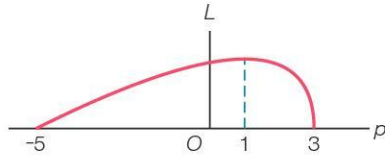
$$x = p \text{ geeft } y_A = \sqrt{6-2p} \text{ en } y_B = -\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{2}.$$

Voor $x = p$ met $-5 < p < 3$ ligt de grafiek van f boven de lijn l , dus

$$L = y_A - y_B = \sqrt{6-2p} - (-\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{2}) = \sqrt{6-2p} + \frac{1}{2}p - 1\frac{1}{2}.$$

$$\frac{dL}{dp} = \frac{-2}{2\sqrt{6-2p}} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{\sqrt{6-2p}} + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{-1}{\sqrt{6-2p}} + \frac{1}{2} &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6-2p}} &= \frac{1}{2} \\ \sqrt{6-2p} &= 2 \\ 6-2p &= 4 \\ 2p &= 2 \\ p &= 1 \text{ vold.}\end{aligned}$$



L is maximaal voor $p = 1$.

$$L_{\max} = \sqrt{6-2} + \frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 1$$

20 a $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{\sqrt{x}} = \frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} - 1\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{3x}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}}$$

b $f'(x) = 0$ geeft $\frac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}} = 0$
 $5x^2 - 3x - 2 = 0$
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -2 = 49$
 $x = \frac{3 \pm 7}{10} = 1 \vee x = \frac{3-7}{10} = -\frac{2}{5}$
 vold. vold. niet

Zie figuur G.3 in het leerboek.

min. is $f(1) = -2$.

c $f(x) = 0$ geeft $\frac{x^3 - x^2 - 2x}{\sqrt{x}} = 0$
 $x^3 - x^2 - 2x = 0$
 $x(x^2 - x - 2) = 0$
 $x(x+1)(x-2) = 0$
 $x = 0 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 2$
 vold. niet vold. niet vold.

Dus $A(2, 0)$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = \frac{5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 2}{2\sqrt{2}} = \frac{12}{2\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

$$\left. \begin{aligned} y &= 3\sqrt{2} \cdot x + b \\ \text{door } A(2, 0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3\sqrt{2} \cdot 2 + b &= 0 \\ 6\sqrt{2} + b &= 0 \\ b &= -6\sqrt{2} \end{aligned}$$

Dus $k: y = 3x\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$.

d $rc_I = 16\frac{1}{2}$, dus $f'(x) = 16\frac{1}{2}$.

Voer in $y_1 = \frac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}}$ en $y_2 = 16\frac{1}{2}$.

De optie snijpunt geeft $x = 4$.

$f(4) = 20$, dus $B(4, 20)$.

21 $x = p$ geeft $y_P = 6p - p^2$ en $y_Q = \frac{1}{2}p^2 - 3p$.

$$PQ = y_P - y_Q = 6p - p^2 - (\frac{1}{2}p^2 - 3p) = 6p - p^2 - \frac{1}{2}p^2 + 3p = -\frac{1}{2}p^2 + 9p$$

Stel A is de oppervlakte van driehoek OPQ .

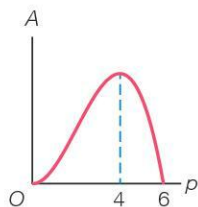
$$A = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot p = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}p^2 + 9p) \cdot p = -\frac{3}{4}p^3 + 4\frac{1}{2}p^2$$

Dit geeft $\frac{dA}{dp} = -2\frac{1}{4}p^2 + 9p$.

$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } -2\frac{1}{4}p^2 + 9p = 0$$

$$-2\frac{1}{4}p(p - 4) = 0$$

$$p = 0 \vee p = 4$$



$$p = 4 \text{ geeft } A = -\frac{3}{4} \cdot 4^3 + 4\frac{1}{2} \cdot 4^2 = 24$$

Dus de maximale oppervlakte van driehoek OPQ is 24.

Bladzijde 187

22 a $-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x + 2)(x - 4) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 4$$

Dus $P(-2, 0)$, $Q(4, 0)$ en $-2 < p < 4$.

$$QR = OQ - OR = 4 - p$$

$$RS = y_S = -\frac{1}{2}p^2 + p + 4$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot RS = \frac{1}{2} \cdot (4 - p) \cdot (-\frac{1}{2}p^2 + p + 4) = (2 - \frac{1}{2}p) \cdot (-\frac{1}{2}p^2 + p + 4)$$

$$= -p^2 + 2p + 8 + \frac{1}{4}p^3 - \frac{1}{2}p^2 - 2p = \frac{1}{4}p^3 - 1\frac{1}{2}p^2 + 8$$

b $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ geeft $\frac{dy}{dx} = -x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ geeft } x = 1$$

Dus $x_T = 1$.

$$A = \frac{1}{4}p^3 - 1\frac{1}{2}p^2 + 8 \text{ geeft } \frac{dA}{dp} = \frac{3}{4}p^2 - 3p$$

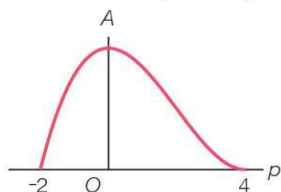
$$\left[\frac{dA}{dp} \right]_{p=1} = \frac{3}{4} \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -2\frac{1}{4}$$

$\frac{dA}{dp}$ is ongelijk aan 0 voor $p = x_T$, dus A is niet maximaal voor $p = x_T$.

c $\frac{dA}{dp} = 0$ geeft $\frac{3}{4}p^2 - 3p = 0$

$$\frac{3}{4}p(p - 4) = 0$$

$$p = 0 \vee p = 4$$



A is maximaal voor $p = 0$.

De maximale oppervlakte is 8.

23 a $f(x) = \sqrt{8x+12} - x^2$ geeft $f'(x) = \frac{8}{2\sqrt{8x+12}} - 2x = \frac{4}{\sqrt{8x+12}} - 2x$

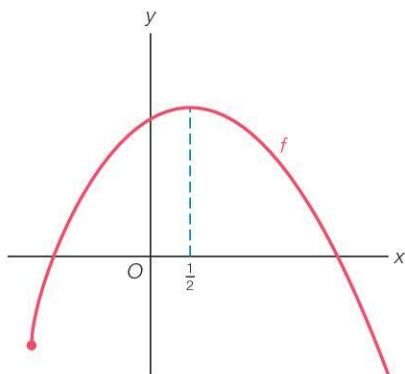
Stel $l: y = ax + b$.

$$\left. \begin{aligned} \text{rc}_k = f'(3) &= \frac{4}{\sqrt{24+12}} - 6 = -5\frac{1}{3} \\ l \perp k, \text{ dus } \text{rc}_l \cdot \text{rc}_k &= -1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{rc}_l \cdot -5\frac{1}{3} &= -1 \\ \text{rc}_l \cdot -\frac{16}{3} &= -1 \\ \text{rc}_l &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{3}{16}x + b \\ f(3) &= -3, \text{ dus } A(3, -3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{3}{16} \cdot 3 + b &= -3 \\ \frac{9}{16} + b &= -3 \\ b &= -3\frac{9}{16} \end{aligned}$$

Dus $l: y = \frac{3}{16}x - 3\frac{9}{16}$ en $S(0, -3\frac{9}{16})$.

b $f'(\frac{1}{2}) = \frac{4}{\sqrt{8 \cdot \frac{1}{2} + 12}} - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{\sqrt{16}} - 1 = 1 - 1 = 0$



$f'(\frac{1}{2}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \frac{1}{2}$.
Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \frac{1}{2}$.

24 a $x_P = p$ geeft $y_P = f(p) = \frac{4}{p}$

Met de stelling van Pythagoras krijg je $L = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = \sqrt{p^2 + \left(\frac{4}{p}\right)^2} = \sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}$.

b $g(p) = p^2 + \frac{16}{p^2} = p^2 + 16p^{-2}$ geeft $g'(p) = 2p - 32p^{-3} = 2p - \frac{32}{p^3}$

$g'(p) = 0$ geeft $2p - \frac{32}{p^3} = 0$

$$2p = \frac{32}{p^3}$$

$$2p^4 = 32$$

$$p^4 = 16$$

$$p = 2 \vee p = -2$$

vold. vold. niet

Zie de figuur hiernaast.

g is minimaal voor $p = 2$, dus L is minimaal voor $p = 2$.

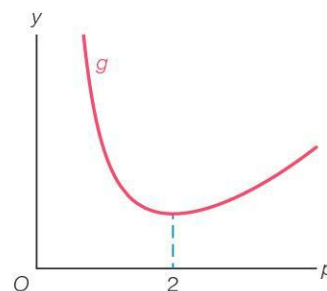
$p = 2$ geeft $x_P = 2$ en $y_P = f(2) = \frac{4}{2} = 2$, dus $P(2, 2)$.

$$\text{rc}_{OP} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{2-0} = 1$$

$$f(x) = \frac{4}{x} = 4x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$$

$$\text{rc}_k = f'(2) = -\frac{4}{2^2} = -1$$

$\text{rc}_k \cdot \text{rc}_{OP} = -1 \cdot 1 = -1$, dus k en OP staan loodrecht op elkaar.



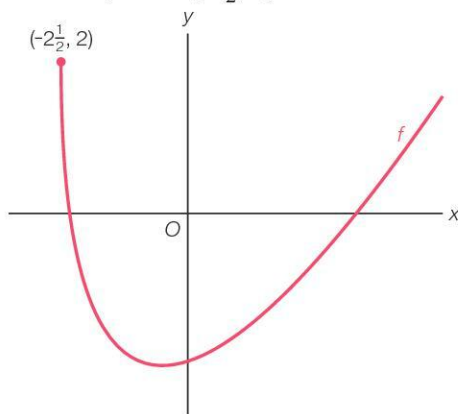
25 a $2x + 5 = 0$

$$2x = -5$$

$$x = -2\frac{1}{2}$$

$$f(-2\frac{1}{2}) = 2 \cdot -2\frac{1}{2} + 7 - 4 \cdot 0 = 2$$

Het randpunt is $(-2\frac{1}{2}, 2)$.



b $f(x) = 2x + 7 - 4\sqrt{2x+5}$ geeft $f'(x) = 2 - 4 \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = 2 - \frac{4}{\sqrt{2x+5}}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = 2 - \frac{4}{\sqrt{4+5}} = 2 - 1\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + b \\ f(2) = -1, \text{ dus } A(2, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot 2 + b = -1 \\ 1\frac{1}{3} + b = -1 \\ b = -2\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{2}{3}x - 2\frac{1}{3}$.

k snijden met de x -as geeft $\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{3} = 0$

$$\frac{2}{3}x = 2\frac{1}{3}$$

$$2x = 7$$

$$x = 3\frac{1}{2}$$

Dus $B(3\frac{1}{2}, 0)$.

c $f'(x) = 0$ geeft $2 - \frac{4}{\sqrt{2x+5}} = 0$

$$\frac{4}{\sqrt{2x+5}} = 2$$

$$\sqrt{2x+5} = 2$$

$$2x+5 = 4$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ vold.}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = -1 + 7 - 4\sqrt{-1+5} = -1 + 7 - 4 \cdot 2 = -2$$

Zie de schets bij a.

$$B_f = [-2, \rightarrow)$$

d m loodrecht op p , dus $rc_m \cdot rc_p = -1$

$$rc_m \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$rc_m = -2$$

$rc_m = -2$, dus $f'(x) = -2$

$$2 - \frac{4}{\sqrt{2x+5}} = -2$$

$$\frac{4}{\sqrt{2x+5}} = 4$$

$$\sqrt{2x+5} = 1$$

$$2x+5 = 1$$

$$2x = -4$$

$$x = -2 \text{ vold.}$$

$x_C = -2$ geeft $y_C = f(-2) = -4 + 7 - 4\sqrt{-4+5} = -4 + 7 - 4 \cdot 1 = -1$, dus $C(-2, -1)$.

7 Lijnen en cirkels

Bladzijde 188

26 a $k: 3x + y = 6$ oftewel $k: y = -3x + 6$ geeft $rc_k = -3$.

$\tan(\alpha) = -3$ geeft $\alpha = -71,56\dots^\circ$

$l: y = -2x + 3$ geeft $rc_l = -2$

$\tan(\beta) = -2$ geeft $\beta = -63,43\dots^\circ$

$\beta - \alpha = -63,43\dots - -71,56\dots \approx 8,1^\circ$

De gevraagde hoek is $8,1^\circ$.

b $rc_m = \frac{0-4}{3-0} = -1\frac{1}{3}$

$\tan(\alpha) = -1\frac{1}{3}$ geeft $\alpha = -53,13\dots^\circ$

$$rc_n = \frac{3-1}{3-1} = 1$$

$\tan(\beta) = 1$ geeft $\beta = 45^\circ$

$\beta - \alpha = 45^\circ - -53,13\dots \approx 98,1^\circ$

De gevraagde hoek is $180^\circ - 98,1^\circ = 81,9^\circ$.

c $p: 3x + 2y = 7$ oftewel $p: y = -1\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$ geeft $rc_p = -1\frac{1}{2}$

$\tan(\alpha) = -1\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = -56,30\dots^\circ$

$$rc_q = \frac{2-3}{6-2} = -\frac{1}{4}$$

$\tan(\beta) = -\frac{1}{4}$ geeft $\beta = -14,03\dots^\circ$

$\beta - \alpha = -14,03\dots - -56,30\dots \approx 42,3^\circ$

De gevraagde hoek is $42,3^\circ$.

27 a $d(A, B) = \sqrt{(2-7)^2 + (4-9)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

b $rc_{BC} = \frac{1-4}{3-2} = -3$

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } B(2, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 2 + b = 4 \\ -6 + b = 4 \end{array}$$

$$b = 10$$

Dus $BC: y = -3x + 10$.

De lijn k door A loodrecht op BC heeft dus $rc_k = \frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(7, 9) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot 7 + b = 9 \\ 2\frac{1}{3} + b = 9 \end{array}$$

$$b = 6\frac{2}{3}$$

Dus $k: y = \frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$.

k snijden met BC geeft het punt S .

$$\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3} = -3x + 10$$

$$3\frac{1}{3}x = 3\frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -3x + 10 \end{array} \right\} y = -3 \cdot 1 + 10 = 7$$

Dus $S(1, 7)$.

$$d(A, BC) = d(A, S) = \sqrt{(1-7)^2 + (7-9)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{c } BC = d(B, C) = \sqrt{(3-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot d(A, BC) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = 10$$

$$\text{d } r = d(A, BC) = 2\sqrt{10} \text{ geeft } r^2 = 40$$

Dus $c: (x-7)^2 + (y-9)^2 = 40$.

$$\text{e } AB = \sqrt{50} \text{ (zie a)}, BC = \sqrt{10} \text{ (zie c)} \text{ en } AC = \sqrt{(3-7)^2 + (1-9)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

De cosinusregel geeft $(\sqrt{80})^2 = (\sqrt{50})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos(\angle ABC)$

$$80 = 50 + 10 - 20\sqrt{5} \cdot \cos(\angle ABC)$$

$$20\sqrt{5} \cdot \cos(\angle ABC) = -20$$

$$\cos(\angle ABC) = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\angle ABC \approx 116,6^\circ$$

$$\text{28 a } \left. \begin{array}{l} k \perp l, \text{ dus } k: 3x + 2y = c \\ \text{door } A(1, 2) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$$

Dus $k: 3x + 2y = 7$.

$$\text{b } rc_{OB} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3}, \text{ dus } rc_m = -1\frac{1}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(3, 2) \end{array} \right\} -1\frac{1}{2} \cdot 3 + b = 2$$

$$-4\frac{1}{2} + b = 2$$

$$b = 6\frac{1}{2}$$

Dus $m: y = -1\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$.

$$\text{c } rc_n = rc_p = \frac{0-3}{5-0} = \frac{3}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} n: y = \frac{3}{5}x + b \\ \text{door } C(3, -1) \end{array} \right\} \frac{3}{5} \cdot 3 + b = -1$$

$$1\frac{4}{5} + b = -1$$

$$b = -2\frac{4}{5}$$

Dus $n: y = \frac{3}{5}x - 2\frac{4}{5}$.

$$\text{29 a } M(\frac{1}{2}(2p+3+2), \frac{1}{2}(0+p+6)) = M(p+2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}p+3)$$

c_1 raakt de x -as en de y -as, dus $x_M = y_M \vee x_M = -y_M$.

Dit geeft $p+2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}p+3 \vee p+2\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}p-3$

$$\frac{1}{2}p = \frac{1}{2} \vee 1\frac{1}{2}p = -5\frac{1}{2}$$

$$p = 1 \vee p = -3\frac{2}{3}$$

$p > -1\frac{1}{2}$, dus $p = 1$.

$$\text{b } d(A, B) = d(O, B) \text{ geeft } \sqrt{(2-(2p+3))^2 + (p+6-0)^2} = \sqrt{2^2 + (p+6)^2}$$

$$\sqrt{(-1-2p)^2 + (p+6)^2} = \sqrt{4 + (p+6)^2}$$

Voer in $y_1 = \sqrt{(-1-2x)^2 + (x+6)^2}$ en $y_2 = \sqrt{4 + (x+6)^2}$.

De optie snijpunt geeft $x = \frac{1}{2}$

Dus $p = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{c } \text{rc}_{AB} &= \frac{p+6-0}{2-(2p+3)} = \frac{p+6}{-2p-1} \\ AB \perp k \text{ geeft } \text{rc}_{AB} \cdot \text{rc}_k &= -1 \\ \frac{p+6}{-2p-1} \cdot \frac{9}{10} &= -1 \\ \frac{9p+54}{-20p-10} &= -1 \\ 9p+54 &= 20p+10 \\ -11p &= -44 \\ p &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } \left. \begin{array}{l} OABC \text{ is een rechthoek} \\ OA \text{ ligt op de } x\text{-as} \end{array} \right\} & \begin{array}{l} x_A = x_B \\ 2p+3 = 2 \\ 2p = -1 \\ p = -\frac{1}{2} \end{array} \end{aligned}$$

$p = -\frac{1}{2}$ geeft $A(2, 0)$ en $B(2, 5\frac{1}{2})$, dus $C(0, 5\frac{1}{2})$.

30 a $k: ax + 4y = 8$ en $l: y = bx + 2a$ oftewel $l: -bx + y = 2a$ vallen samen als $\frac{a}{-b} = \frac{4}{1} = \frac{8}{2a}$.

$$\frac{4}{1} = \frac{8}{2a} \text{ geeft } 8a = 8, \text{ dus } a = 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{-b} &= \frac{4}{1} \text{ en } a = 1 \text{ geeft } \frac{1}{-b} = \frac{4}{1} \\ -4b &= 1 \\ b &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dus $a = 1$ en $b = -\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{b } \left. \begin{array}{l} k: ax + 4y = 8 \\ \text{door } (4, -3) \end{array} \right\} & \begin{array}{l} 4a + 4 \cdot -3 = 8 \\ 4a - 12 = 8 \\ 4a = 20 \\ a = 5 \end{array} \end{aligned}$$

Dus $l: y = bx + 10$.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} l: y = bx + 10 \\ \text{door } (4, -3) \end{array} \right\} & \begin{array}{l} 4 \cdot b + 10 = -3 \\ 4b = -13 \\ b = -3\frac{1}{4} \end{array} \end{aligned}$$

Dus $a = 5$ en $b = -3\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{c } \left. \begin{array}{l} k: ax + 4y = 8 \\ x = 0 \end{array} \right\} & \begin{array}{l} 4y = 8 \\ y = 2 \end{array} \end{aligned}$$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, 2)$.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} l: y = bx + 2a \\ \text{door } (0, 2) \end{array} \right\} & \begin{array}{l} 0 + 2a = 2 \\ a = 1 \end{array} \end{aligned}$$

Dus $k: x + 4y = 8$

$$4y = -x + 8$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 2$$

$k \perp l$ geeft $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$

$$-\frac{1}{4} \cdot b = -1$$

$$b = 4$$

Dus $a = 1$ en $b = 4$.

- 31 a** $d(A, B) = \sqrt{(6-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
b $c_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$ geeft $M_1(2, 3)$ en $r = \sqrt{10}$
 $d(A, M_1) = \sqrt{(2-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
 $d(A, c_1) = r - d(A, M_1) = \sqrt{10} - \sqrt{2}$
c $c_2: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$
 $(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = 0$
 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$
Dus $M_2(2, -1)$ en $r = \sqrt{5}$.
 $d(A, M_2) = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$
 $d(A, c_2) = d(A, M_2) - r = \sqrt{26} - \sqrt{5}$
d $l \perp k$, dus $l: 4x - 3y = c$
door $A(3, 4)$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} l \perp k \\ l: 4x - 3y = c \end{matrix}} \right\} c = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 0$

Dus $l: 4x - 3y = 0$.

k en l snijden geeft het punt S .

$$\begin{cases} 3x + 4y = 15 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \begin{matrix} |3| \\ |4| \end{matrix} \text{ geeft } \begin{cases} 9x + 12y = 45 \\ 16x - 12y = 0 \end{cases} +$$

$$\begin{matrix} 25x & = & 45 \\ x = \frac{9}{5} & & \\ 4x - 3y = 0 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 25x = 45 \\ x = \frac{9}{5} \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} 4 \cdot \frac{9}{5} - 3y = 0 \\ \frac{36}{5} - 3y = 0 \\ -3y = -\frac{36}{5} \\ y = \frac{12}{5} \end{matrix}$$

Dus $S(\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$.

$$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(\frac{9}{5} - 3)^2 + (\frac{12}{5} - 4)^2} = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$$

Bladzijde 189

- 32 a** De loodlijn uit N op de y -as snijdt de y -as in het punt $Q(0, 4)$.
In driehoek MNQ geeft de stelling van Pythagoras $QN^2 + QM^2 = MN^2$
 $QN^2 + 5^2 = 13^2$
 $QN^2 = 169 - 25 = 144$
 $QN = 12$

Vierhoek $OPNM$ is een trapezium.

De oppervlakte van $OPNM$ is $\frac{1}{2}(9+4) \cdot 12 = 78$.

- b** De loodlijn uit N op de y -as snijdt de y -as in het punt $Q(0, s)$.
In driehoek MNQ geeft de stelling van Pythagoras $QN^2 + QM^2 = MN^2$
 $QN^2 + (r-s)^2 = (r+s)^2$
 $QN^2 + r^2 - 2rs + s^2 = r^2 + 2rs + s^2$
 $QN^2 = 4rs$
 $QN = \sqrt{4rs} = 2\sqrt{rs}$

De oppervlakte van $OPNM$ is $\frac{1}{2}(r+s) \cdot 2\sqrt{rs} = (r+s)\sqrt{rs}$.

- c** In driehoek QNM geeft de stelling van Pythagoras $QM^2 + QN^2 = MN^2$
 $(r-s)^2 + QN^2 = MN^2$
 $(r-s)^2 + 15^2 = 25^2$
 $(r-s)^2 = 625 - 225$
 $(r-s)^2 = 400$
 $r-s = 20$

$MN = 25$ geeft $r+s = 25$

$$\begin{cases} r+s = 25 \\ r-s = 20 \end{cases} +$$

$$\begin{matrix} 2r = 45 \\ r = 22\frac{1}{2} \\ r+s = 25 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 2r = 45 \\ r = 22\frac{1}{2} \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} 22\frac{1}{2} + s = 25 \\ s = 2\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Dus $r = 22\frac{1}{2}$ en $s = 2\frac{1}{2}$.

33 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 4y + 15 = 0$
 $(x-4)^2 - 16 + (y-2)^2 - 4 + 15 = 0$
 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 5$
Dus $M(4, 2)$ en $r = \sqrt{5}$.

$$d(A, M) = \sqrt{(4-15)^2 + (2-9)^2} = \sqrt{121 + 49} = \sqrt{170}$$

$$d(A, c) = d(A, M) - r = \sqrt{170} - \sqrt{5}$$

De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} l: x + 2y = c \\ \text{door } M(4, 2) \end{array} \right\} c = 4 + 2 \cdot 2 = 8$$

Dus $l: x + 2y = 8$.

k en l snijden geeft het punt B .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 21 \\ x + 2y = 8 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x - 2y = 42 \\ x + 2y = 8 \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{rcl} 5x & = & 50 \\ x = 10 & & \\ x + 2y = 8 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} x = 10 \\ x + 2y = 8 \end{array}} \right\} & \begin{array}{l} 10 + 2y = 8 \\ 2y = -2 \\ y = -1 \end{array} \end{array}$$

Dus $B(10, -1)$.

$$d(B, M) = \sqrt{(4-10)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$d(k, c) = d(B, c) = d(B, M) - r = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Geldt $d(A, c) > 2\frac{1}{2} \cdot d(k, c)$?

$$\sqrt{170} - \sqrt{5} > 2\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{170} - \sqrt{5} > 5\sqrt{5}$$

$$\sqrt{170} > 6\sqrt{5}$$

$$\sqrt{170} > \sqrt{180}$$

Dit klopt niet dus $d(A, c) > 2\frac{1}{2} \cdot d(k, c)$ geldt niet.

34 a $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$
 $x^2 + 2x + y^2 + 4y - 5 = 0$
 $(x+1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 5 = 0$
 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$

Dus middelpunt $(-1, -2)$.

$(-1, -2)$ op k geeft $p = -1 + -2 = -3$.

b $l: x - 3y = q$ oftewel $l: x = 3y + q$
 $x = 3y + q$ substitueren in $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$ geeft

$$(3y + q)^2 + y^2 + 2(3y + q) + 4y - 5 = 0$$

$$9y^2 + 6qy + q^2 + y^2 + 6y + 2q + 4y - 5 = 0$$

$$10y^2 + (6q + 10)y + q^2 + 2q - 5 = 0$$

$$D = (6q + 10)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (q^2 + 2q - 5) = 36q^2 + 120q + 100 - 40q^2 - 80q + 200 = -4q^2 + 40q + 300$$

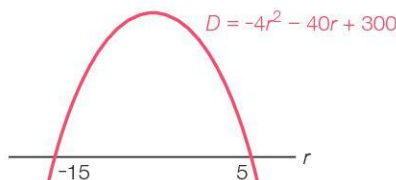
$$D = 0 \text{ geeft } -4q^2 + 40q + 300 = 0$$

$$q^2 - 10q - 75 = 0$$

$$(q + 5)(q - 15) = 0$$

$$q = -5 \vee q = 15$$

c $m: 3x + y = r$ oftewel $m: y = -3x + r$
 $y = -3x + r$ substitueren in $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$ geeft
 $x^2 + (-3x + r)^2 + 2x + 4(-3x + r) - 5 = 0$
 $x^2 + 9x^2 - 6rx + r^2 + 2x - 12x + 4r - 5 = 0$
 $10x^2 + (-6r - 10)x + r^2 + 4r - 5 = 0$
 $D = (-6r - 10)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (r^2 + 4r - 5) = 36r^2 + 120r + 100 - 40r^2 - 160r + 200 = -4r^2 - 40r + 300$
 $D = 0$ geeft $-4r^2 - 40r + 300 = 0$
 $r^2 + 10r - 75 = 0$
 $(r - 5)(r + 15) = 0$
 $r = 5 \vee r = -15$



Geen gemeenschappelijke punten, dus $D < 0$.
Dus $r < -15 \vee r > 5$.

- 35 a** c_1 gaat door A en B , dus het middelpunt M_1 ligt op de lijn $y = 5$.
 c_1 raakt de x -as in C , dus M_1 ligt op de lijn $x = 4$.
Dus is $M_1(4, 5)$ en is de straal gelijk aan 5.
Dit geeft $c_1: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$.
Het middelpunt M_2 van c_2 is $M_2(0, 5)$ en de straal is gelijk aan 3.
Dit geeft $c_2: x^2 + (y - 5)^2 = 9$.

- b** Noem de raakpunten D en E .

$$\sin(\angle DOM_2) = \frac{DM_2}{OM_2} = \frac{3}{5} \text{ geeft } \angle DOM_2 = 36,86...^\circ$$

De hoek tussen de raaklijnen is $2 \cdot 36,86...^\circ \approx 73,7^\circ$.

- c** c_3 raakt de y -as in $A(0, 2)$, dus $x_{M_3} = r$ en $y_{M_3} = 2$, dus $M_3(r, 2)$.
 c_3 gaat door $M_1(4, 5)$, dus $d(M_1, M_3) = r$.

$$d(M_1, M_3) = r$$

$$\sqrt{(r - 4)^2 + (2 - 5)^2} = r$$

$$(r - 4)^2 + (-3)^2 = r^2$$

$$r^2 - 8r + 16 + 9 = r^2$$

$$-8r = -25$$

$$r = 3\frac{1}{8}$$

$$\text{Dus } c_3: (x - 3\frac{1}{8})^2 + (y - 2)^2 = 9\frac{49}{64}.$$

Bladzijde 190

- 36 a** Met dit werkschema wordt het middelpunt M van de cirkel gevonden door de coördinaten van het snijpunt van twee middelloodlijnen van driehoek ABC te berekenen. Daarna geeft $d(M, A)$ de straal van de cirkel.

- b** $rc_{AB} = \frac{1 - 8}{7 - 6} = -7$, dus $rc_k = \frac{1}{7}$.

Het midden van AB is $(\frac{1}{2}(6 + 7), \frac{1}{2}(8 + 1)) = (6\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \frac{1}{7}x + b \\ \text{door } (6\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{7} \cdot 6\frac{1}{2} + b = 4\frac{1}{2} \\ \frac{13}{14} + b = 4\frac{1}{2} \\ b = 3\frac{4}{7} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{7}x + 3\frac{4}{7}.$$

$$rc_{AC} = \frac{4 - 8}{-2 - 6} = \frac{1}{2}, \text{ dus } rc_l = -2.$$

Het midden van AC is $(\frac{1}{2}(6 + -2), \frac{1}{2}(8 + 4)) = (2, 6)$.

$$\begin{aligned} l: y = -2x + b \bigg\} & \begin{aligned} -2 \cdot 2 + b &= 6 \\ -4 + b &= 6 \end{aligned} \\ \text{door } (2, 6) & \\ b &= 10 \end{aligned}$$

Dus $l: y = -2x + 10$.

k en l snijden geeft

$$\frac{1}{7}x + 3\frac{4}{7} = -2x + 10$$

$$2\frac{1}{7}x = 6\frac{3}{7}$$

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= -2x + 10 \end{aligned} \bigg\} y = -2 \cdot 3 + 10 = 4$$

Dus $M(3, 4)$.

$$d(M, A) = \sqrt{(6-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Dus } c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

37 a $c: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$
 $x^2 - 2x + y^2 - 6y + 5 = 0$
 $(x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 5 = 0$
 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$

Dus $M(1, 3)$ en $r = \sqrt{5}$.

$$\text{rc}_{AM} = \frac{3-0}{1-5} = -\frac{3}{4}, \text{ dus } \angle OAM = 36,86\dots^\circ.$$

$$\text{rc}_{OM} = \frac{3-0}{1-0} = 3, \text{ dus } \angle AOM = 71,56\dots^\circ.$$

$$\angle OMA = 180^\circ - 36,86\dots^\circ - 71,56\dots^\circ \approx 71,6^\circ$$

b $d(A, M) = \sqrt{(1-5)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$$\sin(\angle BAM) = \frac{BM}{AM} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \text{ geeft } \angle BAM = 26,56\dots^\circ$$

$$\varphi = 2 \cdot \angle BAM = 2 \cdot 26,56\dots^\circ \approx 53,1^\circ$$

c De cirkel die de x -as in A raakt en ook de y -as raakt heeft middelpunt $N(5, 5)$ en straal 5.

$$d(M, N) = \sqrt{(5-1)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \neq 5$$

Deze cirkel gaat niet door M . Dit is dus niet cirkel d . Dus d raakt niet de y -as.

38 a Het middelpunt van de cirkel is het midden M van AB , dus $M(9, 8)$.
 S ligt even ver boven de lijn $y = 8$ als A eronder ligt, dus $S(3, 16)$.
 $y_S = y_B$, dus BS is horizontaal en hieruit volgt $BS \parallel AR$.
Dus $ARBS$ is een trapezium.

b $\text{rc}_{AB} = \frac{16-0}{15-3} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$, dus $\text{rc}_l = -\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} l: y = -\frac{3}{4}x + b \bigg\} & \begin{aligned} -\frac{3}{4} \cdot 3 + b &= 16 \\ -2\frac{1}{4} + b &= 16 \end{aligned} \\ \text{door } S(3, 16) & \\ b &= 18\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{3}{4}x + 18\frac{1}{4}.$$

$$y = 0 \text{ geeft } -\frac{3}{4}x + 18\frac{1}{4} = 0$$

$$-\frac{3}{4}x = -18\frac{1}{4}$$

$$x = 24\frac{1}{3}$$

Dus $R(24\frac{1}{3}, 0)$.

c $AR = 24\frac{1}{3} - 3 = 21\frac{1}{3}$, $BS = 15 - 3 = 12$ en $AS = 16$, dus

$$O(ARBS) = \frac{1}{2}(AR + BS) \cdot AS = \frac{1}{2}(21\frac{1}{3} + 12) \cdot 16 = \frac{1}{2} \cdot 33\frac{1}{3} \cdot 16 = 266\frac{2}{3}.$$

$$\text{d } AB: y = \frac{4}{3}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{3} \cdot 3 + b = 0 \\ b = -4 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } AB: y = \frac{4}{3}x - 4.$$

AB snijden met l geeft het punt T .

$$\frac{4}{3}x - 4 = -\frac{3}{4}x + 18\frac{1}{4}$$

$$\frac{25}{12}x = 22\frac{1}{4}$$

$$x = 10,68$$

$$x = 10,68 \text{ geeft } y = \frac{4}{3} \cdot 10,68 - 4 = 10,24$$

$$\text{Dus } T(10,68; 10,24).$$

$$d(A, l) = d(A, T) = \sqrt{(10,68 - 3)^2 + (10,24 - 0)^2} = \sqrt{163,84} = 12,8$$

8 Goniometrie

39 $x_P = -0,4$, dus $\cos(\alpha_P) = -0,4$.

De GR geeft 1,982...

$$\text{Dus } \alpha_P = 1,982...$$

$$y_Q = 0,6, \text{ dus } \sin(\alpha_Q) = 0,6.$$

De GR geeft 0,643...

$$\text{Dus } \alpha_Q = 0,643...$$

$$\alpha_P - \alpha_Q = 1,982... - 0,643... \approx 1,34$$

$$\text{Bij } y_Q = 0,6 \text{ hoort ook } \alpha_Q = \pi - 0,643... = 2,498...$$

$$\alpha_Q - \alpha_P = 2,498... - 1,982... \approx 0,52$$

$$1,34 < \frac{1}{2}\pi \text{ en } 0,52 < \frac{1}{2}\pi$$

$$\text{Dus } \angle POQ \approx 0,52 \text{ of } \angle POQ \approx 1,34.$$

Bladzijde 191

40 a $f(x) = 2 + 3 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$

evenwichtsstand 2

amplitude 3

$$\text{periode } \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{beginpunt } (\frac{1}{6}\pi, 2)$$

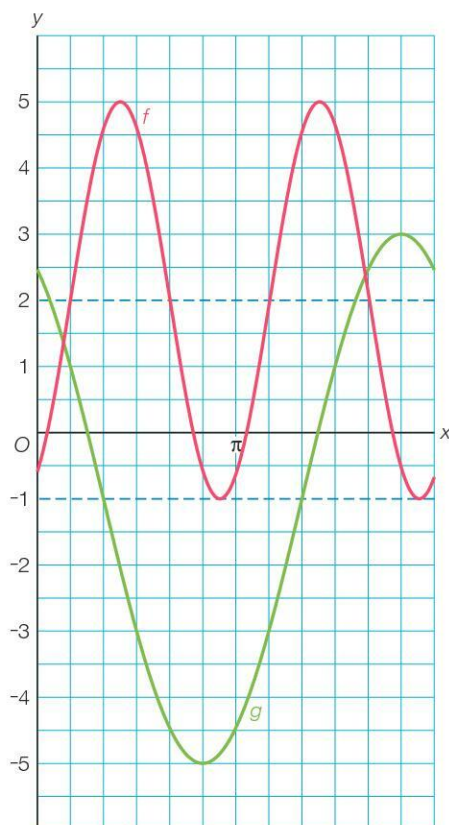
$$g(x) = -1 + 4 \cos(x + \frac{1}{6}\pi)$$

evenwichtsstand -1

amplitude 4

$$\text{periode } 2\pi$$

$$\text{beginpunt } (-\frac{1}{6}\pi, 3)$$



- b** $p = 2, q = 3$ en $r = 2$.

De grafiek van $f(x) = 2 + 3 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$ heeft een hoogste punt bij $x = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{12}\pi$, dus een hoogste punt is $(\frac{5}{12}\pi, 5)$.

Dus $y = 2 + 3 \cos(2(x - \frac{5}{12}\pi))$.

- c** De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Dat is bij $x = \frac{1}{6}\pi$.

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=\frac{1}{6}\pi} = 6$$

Dus de maximale helling is 6.

- d** $g(x) = 1$ geeft $-1 + 4 \cos(x + \frac{1}{6}\pi) = 1$

$$4 \cos(x + \frac{1}{6}\pi) = 2$$

$$\cos(x + \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$

Zie de figuur bij a.

$g(x) < 1$ geeft $\frac{1}{6}\pi < x < 1\frac{1}{2}\pi$

41 a $a = \frac{3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}}{2} = 1$

$$b = 3\frac{1}{2} - 1 = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \text{ periode} = \frac{4}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi, \text{ dus periode} = 1\frac{1}{3}\pi, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{1\frac{1}{3}\pi} = 1\frac{1}{2}.$$

Dalend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi = \pi$, dus $d = \pi$.

Dit geeft $y = 1 - 2\frac{1}{2} \sin(1\frac{1}{2}(x - \pi))$.

b $a = \frac{40 + 0}{2} = 20$

$$b = 40 - 20 = 20$$

$$\frac{1}{4} \text{ periode} = 4 - 1 = 3, \text{ dus periode} = 12, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi.$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 4 - \frac{1}{2} \cdot \text{periode} = 4 - \frac{1}{2} \cdot 12 = -2$, dus $d = -2$.

Dit geeft $N = 20 + 20 \sin(\frac{1}{6}\pi(t + 2))$.

42 a $f(x) = 0$ geeft $\sin(\pi(x - 1)) \cdot \cos(\pi(x - \frac{1}{4})) = 0$

$$\sin(\pi(x - 1)) = 0 \vee \cos(\pi(x - \frac{1}{4})) = 0$$

$$\pi(x - 1) = k \cdot \pi \vee \pi(x - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x - 1 = k \cdot 1 \vee x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + k \cdot 1$$

$$x = 1 + k \cdot 1 \vee x = \frac{3}{4} + k \cdot 1$$

x in $[0, 3]$ geeft $x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = \frac{3}{4} \vee x = 1\frac{3}{4} \vee x = 2\frac{3}{4}$

- b** Voer in $f(x) = \sin(\pi(x - 1)) \cdot \cos(\pi(x - \frac{1}{4}))$.

De optie minimum geeft $x = 0,375$ en $y = -0,853...$

De optie maximum geeft $x = 0,875$ en $y = 0,146...$

$$a = \frac{0,146... + -0,853...}{2} = -0,353... \approx -0,35$$

$$b = 0,146... - -0,353... = 0,5$$

$$\frac{1}{2} \text{ periode} = 0,875 - 0,375 = 0,5, \text{ dus periode} = 1, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{1} \approx 6,28$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 0,375 + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 0,375 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 0,625$, dus $d \approx 0,63$.

- c De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Dat is bij $x = 0,625$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0,625} \approx 3,14$$

Dus de maximale helling is ongeveer 3,14.

Bladzijde 192

43 a $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = 1\frac{3}{4}\pi$$

b $\sin(2x - \frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi(x + \frac{1}{3})) = 0$

$$\sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = 0 \vee \cos(\frac{1}{4}\pi(x + \frac{1}{3})) = 0$$

$$2x - \frac{1}{4}\pi = k \cdot \pi \vee \frac{1}{4}\pi(x + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee x + \frac{1}{3} = 2 + k \cdot 4$$

$$x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{2}{3} + k \cdot 4$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{8}\pi \vee x = \frac{5}{8}\pi \vee x = 1\frac{1}{8}\pi \vee x = 1\frac{5}{8}\pi \vee x = 1\frac{2}{3} \vee x = 5\frac{2}{3}$$

c $5\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\frac{5}{2}\sqrt{3}$

$$\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$$

d $\sin^2(\frac{1}{2}x) + \sin(\frac{1}{2}x) = 0$

$$\sin(\frac{1}{2}x) \cdot (\sin(\frac{1}{2}x) + 1) = 0$$

$$\sin(\frac{1}{2}x) = 0 \vee \sin(\frac{1}{2}x) = -1$$

$$\frac{1}{2}x = k \cdot \pi \vee \frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot 2\pi \vee x = 3\pi + k \cdot 4\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 0 \vee x = 2\pi$$

e $\sin(\pi(x - 1)) \cdot \sin(\frac{3}{2}x) = 0$

$$\sin(\pi(x - 1)) = 0 \vee \sin(\frac{3}{2}x) = 0$$

$$\pi(x - 1) = k \cdot \pi \vee \frac{3}{2}x = k \cdot \pi$$

$$x - 1 = k \cdot 1 \vee x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$x = 1 + k \cdot 1 \vee x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft}$$

$$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = 4 \vee x = 5 \vee x = 6 \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi \vee x = 2\pi$$

f $(\cos(x) + \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot (\cos(x) + \sqrt{2}) = 0$

$$\cos(x) + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0 \vee \cos(x) + \sqrt{2} = 0$$

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \cos(x) = -\sqrt{2}$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{3}{4}\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi$$

44 a Van de grafiek van $y = \cos(x)$ is de evenwichtsstand 0, de amplitude 1 en de periode 2π .

Verder gaat de grafiek van $y = \cos(x)$ stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

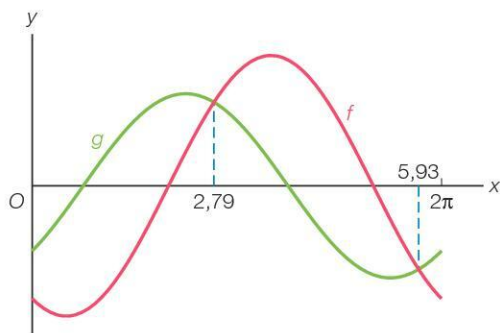
Dus de formule $y = \cos(x)$ is ook te schrijven als $y = \sin(x - 1\frac{1}{2}\pi)$.

$$y = \sin(x - 1\frac{1}{2}\pi) \xrightarrow{\text{translatie } (-1\frac{5}{6}\pi, 0)} y = \sin(x + 1\frac{5}{6}\pi - 1\frac{1}{2}\pi) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi) \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } -2} y = -2\sin(x + \frac{1}{3}\pi)$$

Dus de grafiek van f kan ontstaan uit de grafiek van $y = \cos(x)$ door hierop de verschuiving

$1\frac{5}{6}\pi$ naar links en de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met -2 toe te passen.

- b** Voer in $y_1 = -2 \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ en $y_2 = \sin(x) - \cos(x)$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 2,79$ en $x \approx 5,93$.



$f(x) < g(x)$ geeft $0 \leq x < 2,79 \vee 5,93 < x \leq 2\pi$

- c** Zet y_1 uit.
De optie maximum geeft $x \approx 2,36$ en $y \approx 1,41$, dus $a \approx 1,41$.
De optie nulpunt geeft $x \approx 0,79$, dus $b \approx 0,79$.

- 45 a** Voer in $y_1 = 1 + 2 \sin(\frac{1}{2}\pi(x-1)) + \cos(\frac{1}{2}\pi(x+\frac{1}{3}))$.
De optie minimum geeft $x = 0,264...$ en $y = -0,239...$
De optie maximum geeft $x = 2,264...$ en $y = 2,239...$

$$p = \frac{2,239... + -0,239...}{2} = 1$$

$$q = 2,239... - 1 \approx 1,24$$

$$\frac{1}{2} \text{ periode} = 2,264... - 0,264... = 2, \text{ dus periode} = 4, \text{ dus } r = \frac{2\pi}{4} \approx 1,57.$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij

$$x = 0,264... + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 0,264... + \frac{1}{4} \cdot 4 = 1,264..., \text{ dus } s \approx 1,26.$$

- b** $a = \frac{2,239... + 0}{2} = 1,119... \approx 1,12$

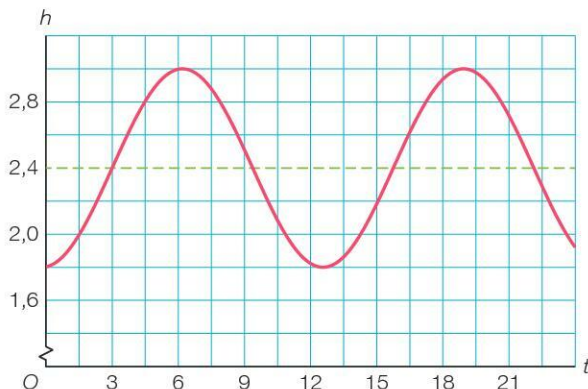
$$b = 2,239... - 1,119... \approx 1,12$$

$$\text{periode} = 3 \cdot 4 = 12, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{12} \approx 0,52.$$

Een hoogste punt bij $x = 2,264...$, dus $d \approx 2,26$.

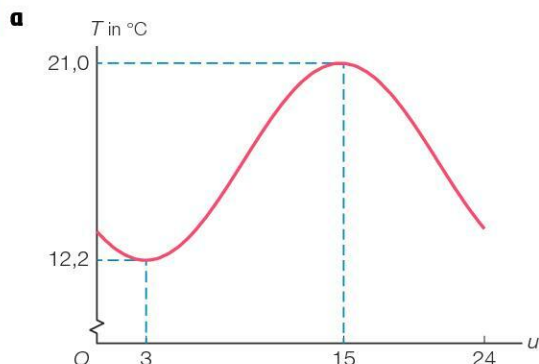
Bladzijde 193

- 46 a** $h = 2,4 + 0,6 \sin(0,51(t-3))$
evenwichtsstand 2,4
amplitude 0,6
periode $\frac{2\pi}{0,51} = 12,319... \approx 12,32$
beginpunt (3; 2,4)



- b** Voer in $y_1 = 2,4 + 0,6 \sin(0,51(x - 3))$.
 De optie maximum geeft $x = 6,079...$ en $x = 18,399...$
 $0,079... \text{ uur} = 0,079... \cdot 60 = 4,799... \text{ minuten} \approx 5 \text{ minuten}$
 $0,399... \text{ uur} = 0,399... \cdot 60 = 23,997... \text{ minuten} \approx 24 \text{ minuten}$
 Dus om 6:05 uur en om 18:24 uur.
- c** De periode is $12,319... \text{ uur} = 12 \text{ uur en } 19,19... \text{ minuten}$.
 Elke dag komt er dus $2 \cdot 19,19... = 38,39... \text{ minuten}$ bij.
 Dus op 5 mei is het voor de tweede keer hoogwater om
 $18:24 \text{ uur} + 3 \cdot 38,39... \text{ minuten} = 18:24 \text{ uur} + 115,18... \text{ minuten} \approx 20:19 \text{ uur}$.
- d** Er moet gelden dat $h > 2,60 + 0,30$, dus $h > 2,90$.
 Voer in $y_2 = 2,90$.
 De optie snijpunt geeft $x = 4,931...$ en $x = 7,228...$
 $0,931... \cdot 60 = 55,89...$
 $0,228... \cdot 60 = 13,70...$
 Dus tussen 4:56 uur en 7:14 uur.

47



- b** Stel $T = a + b \sin(c(u - d))$.

$$a = \frac{21,0 + 12,2}{2} = 16,6$$

$$b = 21,0 - 16,6 = 4,4$$

 De periode is 24 uur, dus $c = \frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $u = \frac{3 + 15}{2} = 9$, dus $d = 9$.
 Dus $T = 16,6 + 4,4 \sin(\frac{1}{12}\pi(u - 9))$.
- c** Voer in $y_1 = 7,6 + 4,3 \sin(\frac{1}{12}\pi(x - 10))$ en $y_2 = 11,5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 14,339...$ en $x = 17,660...$
 $17,660... - 14,339... = 3,321...$
 Dus gedurende $3,321... \cdot 60 \approx 199 \text{ minuten}$.
- d** De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $u = 10$, dus maximale stijging bij $u = 10$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=10} \approx 1,1$$

 Dus de maximale stijging is ongeveer $1,1 \text{ °C/uur}$.

Bladzijde 194

48

- a** Uit de gegevens volgt dat $O(0, 0)$ en $B(75, 0)$ laagste punten zijn en dat $D(37\frac{1}{2}, 24)$ een hoogste punt is.
 Stel $y = a + b \sin(c(x - d))$.

$$a = \frac{24 + 0}{2} = 12$$

$$b = 24 - 12 = 12$$

 De periode is 75 meter, dus $c = \frac{2\pi}{75} = \frac{2}{75}\pi$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{2} \cdot 37\frac{1}{2} = 18\frac{3}{4}$, dus $d = 18\frac{3}{4}$.
 Dus $y = 12 + 12 \sin(\frac{2}{75}\pi(x - 18\frac{3}{4}))$.

b Voer in $y_1 = 12 + 12 \sin(\frac{2}{75}\pi(x - 18\frac{3}{4}))$.

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=18\frac{3}{4}} = 1,005...$$

$\tan(\alpha) = 1,005...$ geeft $\alpha \approx 45^\circ$

Dus de maximale hellingshoek is 45° .

c Uit de gegevens volgen het hoogste punt $(0, 18)$ en het laagste punt $(37\frac{1}{2}, 12)$.

Stel $y = a + b \cos(c(x - d))$.

$$a = \frac{18 + 12}{2} = 15$$

$$b = 18 - 15 = 3$$

De halve periode is $37\frac{1}{2}$ meter, dus $c = \frac{2\pi}{2 \cdot 37\frac{1}{2}} = \frac{2}{75}\pi$.

Het hoogste punt is $(0, 18)$, dus $d = 0$.

Dus $y = 15 + 3 \cos(\frac{2}{75}\pi x)$.

Voer in $y_2 = 15 + 3 \cos(\frac{2}{75}\pi x)$.

De optie snijpunt geeft $x = -21,15...$ en $x = 21,15...$

$$21,15... - (-21,15...) = 42,30...$$

Dus de afstand is ongeveer 42 meter.

Verantwoording

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie.
Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom
hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89598-3



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.