

& GETAL RUIMTE

B



Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen **havo B** deel 3

Twaalfde editie, 2021

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
E. Terlaak

Inhoud

9	Exponentiële en logaritmische formules	4
10	Meetkundige berekeningen	27
11	Verbanden en functies	59
12	Examentraining	95
	Gemengde opgaven	131

9 Exponentiële en logaritmische formules

Voorkennis Exponentiële groei

Bladzijde 9

- 1 a $N = 87 \cdot 1,05^t$
b $t = 4$ geeft $N = 87 \cdot 1,05^4 \approx 106$
c $t = 9$ geeft $N = 87 \cdot 1,05^9 = 134,9...$
 $t = 10$ geeft $N = 87 \cdot 1,05^{10} = 141,7...$
De toename is $141,7... - 134,9... \approx 7$.
- 2 a $N = 725 \cdot 0,87^t$
b $t = 5$ geeft $N = 725 \cdot 0,87^5 \approx 361$
c $t = 7$ geeft $N = 725 \cdot 0,87^7 = 273,5...$
 $t = 8$ geeft $N = 725 \cdot 0,87^8 = 237,9...$
De afname is $273,5... - 237,9... \approx 36$.
- 3 a $N = 11,48 \cdot 1,015^t$
b $t = 5$ geeft $N = 11,48 \cdot 1,015^5 = 12,367...$
Dus ongeveer 12,37 miljoen inwoners op 1 januari 2025.
c 2030 is van $t = 10$ tot $t = 11$.
 $t = 10$ geeft $N = 11,48 \cdot 1,015^{10} = 13,323...$
 $t = 11$ geeft $N = 11,48 \cdot 1,015^{11} = 13,522...$
In 2030 komen er naar verwachting $13,522... - 13,323... \approx 0,20$ miljoen inwoners bij.
d 1 januari 2010 is tien jaar terug ten opzichte van 1 januari 2020.
Op 1 januari 2010 had Bolivia $\frac{11,48}{1,015^{10}} \approx 9,89$ miljoen inwoners.

Bladzijde 10

- 4 a $\frac{16,07}{13,84} \approx 1,16$; $\frac{18,72}{16,07} \approx 1,16$; $\frac{21,65}{18,72} \approx 1,16$ en $\frac{25,02}{21,65} \approx 1,16$
Elk jaar wordt de omzet met ongeveer 1,16 vermenigvuldigd, dus exponentiële groei.
b $O = 13,84 \cdot 1,16^t$
c $t = 9$ geeft $O = 13,84 \cdot 1,16^9 = 52,632...$
Verwachte omzet van de webwinkels per Nederlander in 2023 is $\frac{52,632... \cdot 10^9}{17,6 \cdot 10^6} \approx 2990$ euro.
- 5 a $\frac{10750}{15000} \approx 0,72$; $\frac{7700}{10750} \approx 0,72$; $\frac{5500}{7700} \approx 0,71$; $\frac{3950}{5500} \approx 0,72$ en $\frac{2850}{3950} \approx 0,72$
Elke vier jaar wordt het aantal kikkers met ongeveer 0,72 vermenigvuldigd, dus exponentiële afname.
b $N = 15000 \cdot 0,72^t$
c $t = 6$ geeft $N = 15000 \cdot 0,72^6 \approx 2090$
Dus ongeveer 2090 kikkers op 1 september 2024.
 $t = 7,5$ geeft $N = 15000 \cdot 0,72^{7,5} \approx 1277$
Dus ongeveer 1280 kikkers op 1 september 2030.

9.1 Groeifactoren en groeipercentsages

Bladzijde 11

- 1 a Jaarlijkse toename van 5%, dus de vermenigvuldigingsfactor is 1,05.
Het bedrag op 1 januari 2021 is $1000 \cdot 1,05 = 1050$ euro.
Het bedrag op 1 januari 2025 is $1000 \cdot 1,05^5 \approx 1276,28$ euro.
b $g = 1,05$

Bladzijde 12

- 2 a** x tussen 0 en 40.
 y tussen 0 en 250.
b Voer in $y_1 = 250 \cdot 0,955^x$ en $y_2 = 125$.
 De optie snijpunt geeft $x = 15,05\dots$
 Dus in 2015.

3 a

toename in procenten	13%	3,3%	120%	0,7%	12%	6%	150%	23,7%
groefactor	1,13	1,033	2,2	1,007	1,12	1,06	2,5	1,237

b

afname in procenten	13%	41,8%	6,2%	0,3%	2%	0,1%	75,4%
groefactor	0,87	0,582	0,938	0,997	0,98	0,999	0,246

- 4 a** De groefactor per jaar is $g = 1,127$.
b De groefactor per maand is $g = 0,932$.
c Het groeipercentage per maand is 73,5%.
d De afname per dag is 15,5%.
e Het groeipercentage per jaar is 142%.
f De groefactor per dag is $g = 0,993$.
- 5 a** $N = b \cdot g^t$ met $b = 400$ en $g = 1,12$ geeft $N = 400 \cdot 1,12^t$
b 2015 is van $t = 25$ tot $t = 26$.
 $t = 25$ geeft $N = 400 \cdot 1,12^{25} \approx 6800$
 $t = 26$ geeft $N = 400 \cdot 1,12^{26} \approx 7616$
 De toename is $7616 - 6800 \approx 800$.
c Voer in $y_1 = 400 \cdot 1,12^x$ en $y_2 = 20000$.
 De optie snijpunt geeft $x = 34,51\dots$
 Dus in 2024.

Bladzijde 13

- 6 a** $B = b \cdot g^t$ met $b = 78$ en $g = 1,023$ geeft $B = 78 \cdot 1,023^t$
b Voer in $y_1 = 78 \cdot 1,023^x$ en $y_2 = 10000$.
 De optie snijpunt geeft $x = 213,44\dots$
 Dus na 214 dagen.
c $t = 237$ geeft $B = 78 \cdot 1,023^{237} \approx 17085$
 Zonder maatregelen:
 $t = 500$ geeft $B = 78 \cdot 1,023^{500} \approx 6759452$
 toename = $6759452 - 17085 = 6742367$
 Met maatregelen:
 $t = 500$ geeft $B = 700\sqrt{500 - 233} + 15685 \approx 27123$
 toename = $27123 - 17085 = 10038$
 Dus er zijn $6742367 - 10038 = 6732328$ besmettingsgevallen voorkomen.
- 7 a** $V_z = b \cdot g^t$ met $b = 290$ en $g = 1,4$ geeft $V_z = 290 \cdot 1,4^t$
b De jaarlijkse toename is constant, dus de toename is lineair en dus is de formule van de vorm $V_w = at + b$.
 $a = 310$ en $b = 2430$ geeft $V_w = 310t + 2430$
c Gevraagd wordt op 1 januari van welk jaar voor het eerst geldt $V_z > 2V_w$.
 Voer in $y_1 = 290 \cdot 1,4^x$ en $y_2 = 2(310x + 2430)$.
 De optie snijpunt geeft $x = 10,98\dots$
 Dus op 1 januari 2023.

- 8** N_{VS} is het aantal inwoners van de Verenigde Staten in miljoenen.
 N_{Rus} is het aantal inwoners van Rusland in miljoenen.
 t is de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2020.
 $N_{VS} = at + b$ met $a = 1,8$ en $b = 333,5$ geeft $N_{VS} = 1,8t + 333,5$
 $N_{Rus} = b \cdot g^t$ met $b = 142,9$ en $g = 0,996$ geeft $N_{Rus} = 142,9 \cdot 0,996^t$
 Los op $N_{VS} = 3N_{Rus}$.
 Voer in $y_1 = 1,8x + 333,5$ en $y_2 = 3(142,9 \cdot 0,996^x)$.
 De optie snijpunt geeft $x = 27,7...$
 Dus in 2047.

Bladzijde 14

- 9** Stel op $t = 0$ zijn er b kikkers, dan zijn er dus $2b$ salamanders.
 aantal kikkers $= b \cdot 1,06^t$
 aantal salamanders $= 2b \cdot 0,94^t$
 aantal kikkers = aantal salamanders geeft $b \cdot 1,06^t = 2b \cdot 0,94^t$ oftewel $1,06^t = 2 \cdot 0,94^t$.
 Voer in $y_1 = 1,06^x$ en $y_2 = 2 \cdot 0,94^x$.
 De optie snijpunt geeft $x = 5,76...$
 Dus na 5,8 jaar.

10 **a**

tijd in jaren	0	1	2	3	4
hoeveelheid N	2	18	162	1458	13 122

- b** Per 2 jaar wordt N met 81 vermenigvuldigd.
c Minder, want $4,5^2 = 20,25$ en dat is groter dan 9.

Bladzijde 15

- 11** **a** $g_{\text{kwartier}} = 1,12$
 $g_{\text{uur}} = 1,12^4 \approx 1,574$
 De toename is 57,4% per uur.
b $g_{\text{kwartier}} = 1,12$
 $g_{5 \text{ minuten}} = 1,12^{\frac{1}{4}} \approx 1,038$
 De procentuele toename per vijf minuten is 3,8%.
c $g_{\text{kwartier}} = 1,12$
 $g_{5 \text{ uur}} = 1,12^{20} \approx 9,65$
 De toename is 865% per vijf uur.
- 12** **a** $g_{\text{dag}} = 1,3$
 $g_{\text{week}} = 1,3^7 \approx 6,27$
 Het groeipercentage per week is 527%.
b $g_{\text{dag}} = 1,3$
 $g_{4 \text{ uur}} = 1,3^{\frac{1}{6}} \approx 1,045$
 Het groeipercentage per vier uur is 4,5%.

- 13** **a** $g_{\text{dag}} = 0,84$
 $g_{\text{week}} = 0,84^7 \approx 0,295$
b $g_{\text{dag}} = 0,84$
 $g_{\text{uur}} = 0,84^{\frac{1}{24}} \approx 0,993$
 De hoeveelheid neemt met 0,7% per uur af.
c $g_{\text{dag}} = 0,84$
 $g_{\text{kwartier}} = 0,84^{\frac{1}{24 \cdot 4}} \approx 0,9982$
 De procentuele afname per kwartier is 0,18%.

Bladzijde 16

- 14** **a** $g_{\text{uur}} = 0,805$
 $g_{\text{kwartier}} = 0,805^{\frac{1}{4}} \approx 0,947$
 De afname is 5,3% per kwartier.

- b** $g_{\text{jaar}} = 1,086$
 $g_{25 \text{ jaar}} = 1,086^{25} \approx 7,87$
 De toename is 687% per 25 jaar.
- c** $g_{\text{week}} = 2,80$
 $g_{\text{dag}} = 2,80^{\frac{1}{7}} \approx 1,158$

- 15 a** $g_{\text{dag}} = 1,05$
 $g_{\text{week}} = 1,05^7 \approx 1,407$
 Bij een toename van 5% per dag hoort een toename van ongeveer 40,7% per week.
- b** Bij een groeifactor van 1,5 per dag hoort een groeifactor van $1,5^7 \approx 17,1$ per week.
- c** $g_{\text{uur}} = 0,8$
 $g_{\text{kwartier}} = 0,8^{\frac{1}{4}} \approx 0,946$
 Bij een afname van 20% per uur hoort een afname van ongeveer 5,4% per kwartier.
- d** Bij een groeifactor van 0,7 per uur hoort een groeifactor van $0,7^{\frac{1}{4}} \approx 0,915$ per kwartier.

- 16 a** $g_3 \text{ jaar} = 2,5$
 $g_{\text{jaar}} = 2,5^{\frac{1}{3}} \approx 1,357$
 Het groeipcentage per jaar is 35,7%.
- b** $g_5 \text{ jaar} = 2$
 $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{5}} \approx 1,149$
 Het groeipcentage per jaar is 14,9%.
- c** $g_{12 \text{ jaar}} = 0,78$
 $g_{\text{jaar}} = 0,78^{\frac{1}{12}} \approx 0,980$
 De afname per jaar is 2,0%.

- 17 a** $g_4 \text{ jaar} = 3$ geeft $g_{\text{jaar}} = 3^{\frac{1}{4}} \approx 1,316$
 Dus $N = 500 \cdot 1,316^t$.
- b** $g_3 \text{ jaar} = \frac{1000}{800} = 1,25$ geeft $g_{\text{jaar}} = 1,25^{\frac{1}{3}} = 1,077...$
- c** $t = 2$, $M = 800$ en $g = 1,077...$ invullen bij $M = b \cdot g^t$ geeft $b \cdot 1,077...^2 = 800$.
 $b = \frac{800}{1,077...^2} = 689,4... \approx 690$
- d** $M = 690 \cdot 1,077^t$

Bladzijde 17

- 18 a** Stel $N = b \cdot g^t$.
 $g_6 \text{ maanden} = \frac{4500}{1500} = 3$
 $g_{\text{maand}} = 3^{\frac{1}{6}} = 1,2009...$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,2009...^t \\ t = 4 \text{ en } N = 1500 \end{array} \right\} b \cdot 1,2009...^4 = 1500$$

$$b = \frac{1500}{1,2009...^4} \approx 720$$

 Dus $N = 720 \cdot 1,201^t$.
- b** Stel $A = b \cdot g^t$.
 $g_9 \text{ jaar} = \frac{7520}{8550} = 0,8795...$
 $g_{\text{jaar}} = 0,8795...^{\frac{1}{9}} = 0,9858...$

$$\left. \begin{array}{l} A = b \cdot 0,9858...^t \\ t = 6 \text{ en } A = 8550 \end{array} \right\} b \cdot 0,9858...^6 = 8550$$

$$b = \frac{8550}{0,9858...^6} \approx 9310$$

 Dus $A = 9310 \cdot 0,986^t$.
- c** Stel $M = b \cdot g^t$.
 $g_{10 \text{ jaar}} = 3$ geeft $g_{\text{jaar}} = 3^{\frac{1}{10}} = 1,1161...$
 Dus $M = 75 \cdot 1,116^t$.

19 a $g_{3 \text{ km}} = \frac{555}{800} = 0,69375$
 $g_{\text{km}} = 0,69375^{\frac{1}{3}} = 0,8852\dots$
 $P = b \cdot 0,8852\dots^h$
 $h = 2 \text{ en } P = 800 \} b \cdot 0,8852\dots^2 = 800$
 $b = \frac{800}{0,8852\dots^2} \approx 1021$

Dus $P = 1021 \cdot 0,8852^h$.

- b** $h = 7,5$ geeft $P = 1021 \cdot 0,8852^{7,5} \approx 408$
 Dus de luchtdruk op die hoogte is 408 hPa.

20 Voor de wereldproductie van plastic geldt $g_{39 \text{ jaar}} = \frac{250}{44} = 5,6818\dots$, dus $g_{\text{jaar}} = 5,6818\dots^{\frac{1}{39}} \approx 1,046$.

Dus de toename per jaar is 4,6%.

Voor de hoeveelheid microplastic in de lagen van de bodem geldt $g_{22 \text{ jaar}} = \frac{17}{6} = 2,8333\dots$,

dus $g_{\text{jaar}} = 2,8333\dots^{\frac{1}{22}} \approx 1,048$. Dus de toename per jaar is 4,8%.

Dus de hoeveelheid microplastic in de lagen van de bodem neemt ongeveer met hetzelfde percentage per jaar toe als de wereldwijde productie van plastic.

21 Stel $A = b \cdot g^t$.

$g_{4 \text{ dagen}} = \frac{11}{31} = 0,3548\dots$

$g_{\text{dag}} = 0,3548\dots^{\frac{1}{4}} = 0,7718\dots$

$A = b \cdot 0,7718\dots^t$
 $t = 3 \text{ en } A = 31 \} b \cdot 0,7718\dots^3 = 31$
 $b = \frac{31}{0,7718\dots^3} = 67,4\dots$

$60 \text{ uur} = \frac{60}{24} \text{ dag} = 2,5 \text{ dag}$

$t = 2,5$ geeft $A = 67,4\dots \cdot 0,7718\dots^{2,5} \approx 35$

Na 60 uur was de oppervlakte van de wond ongeveer 35 mm².

Bladzijde 18

22 a Voer in $y_1 = 17,0 \cdot 1,031^x$ en $y_2 = 34,0$.

De optie snijpunt geeft $x = 22,70\dots$

Na 22,7 jaar is het aantal verdubbeld.

b Voer in $y_1 = 12,9 \cdot 1,031^x$ en $y_2 = 25,8$.

De optie snijpunt geeft $x = 22,70\dots$

Na 22,7 jaar is het aantal verdubbeld.

Bladzijde 19

23 a $g_{\text{jaar}} = 1,131$, dus los op $1,131^T = 2$.

Voer in $y_1 = 1,131^x$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x = 5,63\dots$

De verdubbelingstijd is 5 jaar en $0,63\dots \times 12 \approx 8$ maanden.

b Er geldt $g^{25} = 2$ met g de groeifactor per jaar.

$g^{25} = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{25}} \approx 1,028$

Het groeipcentage per jaar is 2,8%.

c $g_{\text{week}} = 0,915$, dus los op $0,915^T = \frac{1}{2}$.

Voer in $y_1 = 0,915^x$ en $y_2 = \frac{1}{2}$.

De optie snijpunt geeft $x = 7,80\dots$

De halveringstijd is 7 weken en $0,80\dots \times 7 \approx 6$ dagen.

d Er geldt $g^{28} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.

$g^{28} = \frac{1}{2}$ geeft $g = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{28}} \approx 0,976$

De afname is 2,4% per jaar.

- 24 a** $g_{\text{jaar}} = 1,0325$, dus los op $1,0325^T = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,0325^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 21,67\dots$
 De verdubbelingstijd is 22 jaar.
- b** $g_{10 \text{ jaar}} = 0,942$, dus los op $0,942^T = \frac{1}{2}$.
 Voer in $y_1 = 0,942^x$ en $y_2 = \frac{1}{2}$.
 De optie snijpunt geeft $x = 11,60\dots$
 De halveringstijd is $11,60\dots \times 10 \text{ jaar} \approx 116 \text{ jaar}$.

- 25 a** $g_{\text{dag}} = 0,917$, dus los op $0,917^T = \frac{1}{2}$.
 Voer in $y_1 = 0,917^x$ en $y_2 = \frac{1}{2}$.
 De optie snijpunt geeft $x = 7,99\dots$
 De halveringstijd is 8 dagen.
- b** $g_{\text{dag}} = 0,917$, dus los op $0,917^T = 0,1$.
 Voer in $y_1 = 0,917^x$ en $y_2 = 0,1$.
 De optie snijpunt geeft $x = 26,57\dots$
 Na 27 dagen is nog 10% van de beginhoeveelheid over.

- 26** Volgens het onderzoek van Natuurmonumenten geldt $g^{12} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{12} = \frac{1}{2}$ geeft $g = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{12}} = 0,943\dots$
 $0,943\dots^{27} \approx 0,210$
 Dus een afname van 79,0% in 27 jaar.
 Dat is redelijk in lijn met het onderzoek in Duitsland.

Bladzijde 20

- 27 a** $1,46 \cdot 1,56 \cdot 1,53 \cdot 1,39 \cdot 1,64 \approx 7,9$
 $1,46 \cdot 1,56 \cdot 1,53 \cdot 1,39 \cdot 1,64 \cdot 1,32 \approx 10,5$
 Dus 6 dagen na 22 januari was het aantal besmettingsgevallen voor het eerst meer dan 10 keer zo veel als op 22 januari.
- b** Omdat de procentuele toename per dag niet constant is en er dus geen sprake is van exponentiële groei.
- c** Dan geldt $g^6 = 10$ met g de groeifactor per dag.
 $g^6 = 10$ geeft $g = 10^{\frac{1}{6}} = 1,467\dots \approx 1,468$
 Het groeipercentage is 46,8% per dag.
- d** $g_{\text{dag}} = 1,467\dots$, dus los op $1,467\dots^T = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,467\dots^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 1,806\dots$
 De verdubbelingstijd is $1,806\dots \times 24 \approx 43 \text{ uur}$.
- 28 a** $g_{\text{jaar}} = 0,999879\dots$, dus los op $0,999879^T = \frac{1}{2}$.
 Voer in $y_1 = 0,999879^x$ en $y_2 = \frac{1}{2}$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 5728$.
 De halveringstijd is ongeveer 5730 jaar.
- b** $t = 3000$ geeft $N = 12,5 \cdot 0,999879^{3000} = 8,69\dots$
 De radioactiviteit van de koolstof-14 in dit hout is ongeveer 8,7 cpm.
- c** Los op $0,999879^T = 0,773$.
 Voer in $y_1 = 0,999879^x$ en $y_2 = 0,773$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 2128$.
 $2006 + 217 = 2223$
 Dus $2223 - 2128 = 95 \text{ jaar}$ afwijking.

9.2 Werken met logaritmen

Bladzijde 22

29 a ${}^2\log(16) = 4$
b ${}^3\log(81) = 4$

c ${}^5\log(\frac{1}{25}) = -2$
d ${}^6\log(1) = 0$

30 a ${}^2\log(8) = 3$
b ${}^3\log(9) = 2$

c ${}^5\log(\frac{1}{5}) = -1$
d ${}^6\log(\sqrt{6}) = \frac{1}{2}$

Bladzijde 23

31 a ${}^3\log(x-1) = 5$
 $x-1 = 3^5$
 $x-1 = 243$
 $x = 244$
b $5 + {}^5\log(x+3) = 7$
 ${}^5\log(x+3) = 2$
 $x+3 = 5^2$
 $x+3 = 25$
 $x = 22$

c $\frac{1}{2}\log(3x+4) = -2$
 $3x+4 = (\frac{1}{2})^{-2}$
 $3x+4 = 4$
 $3x = 0$
 $x = 0$
d $4 - 2 \cdot {}^3\log(x) = 3$
 $-2 \cdot {}^3\log(x) = -1$
 ${}^3\log(x) = \frac{1}{2}$
 $x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

32 a $3^{x-1} = 5$
 $x-1 = {}^3\log(5)$
 $x = 1 + {}^3\log(5)$
b $4^x + 3 = 21$
 $4^x = 18$
 $x = {}^4\log(18)$

c $5 + 4^{-x} = 17$
 $4^{-x} = 12$
 $-x = {}^4\log(12)$
 $x = -{}^4\log(12)$
d $6 - 5^{3+x} = 1$
 $-5^{3+x} = -5$
 $5^{3+x} = 5^1$
 $3+x = 1$
 $x = -2$

33 a ${}^2\log(3x+7) = 4$
 $3x+7 = 2^4$
 $3x+7 = 16$
 $3x = 9$
 $x = 3$
b $7 + 2^{x-3} = 10$
 $2^{x-3} = 3$
 $x-3 = {}^2\log(3)$
 $x = 3 + {}^2\log(3)$
c $3 + {}^2\log(5 - 1\frac{1}{2}x) = 0$
 ${}^2\log(5 - 1\frac{1}{2}x) = -3$
 $5 - 1\frac{1}{2}x = 2^{-3}$
 $5 - 1\frac{1}{2}x = \frac{1}{8}$
 $-1\frac{1}{2}x = -4\frac{7}{8}$
 $x = 3\frac{1}{4}$

d $3 \cdot 5^{2x+1} = 75$
 $5^{2x+1} = 25$
 $5^{2x+1} = 5^2$
 $2x+1 = 2$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$
e $9 \cdot 3^x = 3^{2x-3}$
 $3^2 \cdot 3^x = 3^{2x-3}$
 $3^{2+x} = 3^{2x-3}$
 $2+x = 2x-3$
 $-x = -5$
 $x = 5$
f $2^{3x+1} = 4^{2x}$
 $2^{3x+1} = (2^2)^{2x}$
 $2^{3x+1} = 2^{4x}$
 $3x+1 = 4x$
 $-x = -1$
 $x = 1$

34 a $2^{\frac{1}{2}x+1} + 3 = 5$

$$2^{\frac{1}{2}x+1} = 2^1$$

$$\frac{1}{2}x + 1 = 1$$

$$\frac{1}{2}x = 0$$

$$x = 0$$

b $^3\log(2x-4) + 6 = 9$

$$^3\log(2x-4) = 3$$

$$2x-4 = 3^3$$

$$2x-4 = 27$$

$$2x = 31$$

$$x = 15\frac{1}{2}$$

c $1 - ^4\log(2(x+1)) = -2$

$$-^4\log(2(x+1)) = -3$$

$$^4\log(2(x+1)) = 3$$

$$2(x+1) = 4^3$$

$$2(x+1) = 64$$

$$x+1 = 32$$

$$x = 31$$

d $3 + 2^{0,4x} = 12$

$$2^{0,4x} = 9$$

$$0,4x = ^2\log(9)$$

$$x = 2\frac{1}{2} \cdot ^2\log(9)$$

e $^2\log(x^2 - 6x + 12) - 5 = -3$

$$^2\log(x^2 - 6x + 12) = 2$$

$$x^2 - 6x + 12 = 2^2$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x-4) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 4$$

f $2 \cdot 5^{0,2x+3} = 34$

$$5^{0,2x+3} = 17$$

$$0,2x + 3 = ^5\log(17)$$

$$0,2x = -3 + ^5\log(17)$$

$$x = -15 + 5 \cdot ^5\log(17)$$

35 a $y = 3^{x-1}$

$$3^{x-1} = y$$

$$x-1 = ^3\log(y)$$

$$x = 1 + ^3\log(y)$$

b $y = ^2\log(x-5)$

$$^2\log(x-5) = y$$

$$x-5 = 2^y$$

$$x = 2^y + 5$$

Bladzijde 24

36 De regel $g^x = a$ geeft $x = ^g\log(a)$ bij $3^{2x-1} = y-8$ geeft $2x-1 = ^3\log(y-8)$.

De regel $^g\log(x) = y$ geeft $x = g^y$ bij $^2\log(5t+3) = N+4$ geeft $5t+3 = 2^{N+4}$.

37 a $y = 2^{3x-4}$

$$2^{3x-4} = y$$

$$3x-4 = ^2\log(y)$$

$$3x = 4 + ^2\log(y)$$

$$x = 1\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot ^2\log(y)$$

b $y = 8 + 3^{x-2}$

$$3^{x-2} = y-8$$

$$x-2 = ^3\log(y-8)$$

$$x = 2 + ^3\log(y-8)$$

c $y = 2 \cdot 5^{0,1x}$

$$2 \cdot 5^{0,1x} = y$$

$$5^{0,1x} = \frac{1}{2}y$$

$$0,1x = ^5\log(\frac{1}{2}y)$$

$$x = 10 \cdot ^5\log(\frac{1}{2}y)$$

d $y = 20 + 5 \cdot 3^{0,4x}$

$$5 \cdot 3^{0,4x} = y-20$$

$$3^{0,4x} = \frac{1}{5}y-4$$

$$0,4x = ^3\log(\frac{1}{5}y-4)$$

$$x = 2\frac{1}{2} \cdot ^3\log(\frac{1}{5}y-4)$$

38 a $y = ^3\log(x) + 2$

$$^3\log(x) = y-2$$

$$x = 3^{y-2}$$

b $y = \frac{1}{5} \cdot ^2\log(3x)$

$$^2\log(3x) = 5y$$

$$3x = 2^{5y}$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot 2^{5y}$$

c $y = ^5\log(2x+1)$

$$^5\log(2x+1) = y$$

$$2x+1 = 5^y$$

$$2x = -1 + 5^y$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 5^y$$

d $y = 2 \cdot \frac{1}{2}\log(5-3x) - 1$

$$2 \cdot \frac{1}{2}\log(5-3x) = y+1$$

$$\frac{1}{2}\log(5-3x) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

$$5-3x = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}}$$

$$-3x = -5 + (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}}$$

$$x = 1\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}}$$

Bladzijde 25

- 39** **a** $N = 10 \cdot 5^{3t-1}$
 $5^{3t-1} = \frac{1}{10}N$
 $3t - 1 = {}^5\log(\frac{1}{10}N)$
 $3t = 1 + {}^5\log(\frac{1}{10}N)$
 $t = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot {}^5\log(\frac{1}{10}N)$
- b** $N = {}^3\log(2t + 1) - 6$
 ${}^3\log(2t + 1) = N + 6$
 $2t + 1 = 3^{N+6}$
 $2t = -1 + 3^{N+6}$
 $t = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^{N+6}$
- c** $N = 100 + 2^{0,2t-1}$
 $2^{0,2t-1} = N - 100$
 $0,2t - 1 = {}^2\log(N - 100)$
 $0,2t = 1 + {}^2\log(N - 100)$
 $t = 5 + 5 \cdot {}^2\log(N - 100)$
- d** $N = 4 - \frac{2}{3} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(2(t+3))$
 $\frac{2}{3} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(2(t+3)) = -N + 4$
 ${}^{\frac{1}{2}}\log(2(t+3)) = -\frac{1}{2}N + 6$
 $2(t+3) = (\frac{1}{2})^{-1\frac{1}{2}N+6}$
 $t+3 = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^{-1\frac{1}{2}N+6}$
 $t = -3 + (\frac{1}{2})^{-1\frac{1}{2}N+7}$

- 40** **a** $A = 500 - 50 \cdot 1,75^{B-2,5}$
 $50 \cdot 1,75^{B-2,5} = -A + 500$
 $1,75^{B-2,5} = -\frac{1}{50}A + 10$
 $B - 2,5 = {}^{1,75}\log(-\frac{1}{50}A + 10)$
 $B = 2,5 + {}^{1,75}\log(-\frac{1}{50}A + 10)$
- b** $C = 20 + 0,4 \cdot {}^3\log(2 - 8S)$
 $0,4 \cdot {}^3\log(2 - 8S) = C - 20$
 ${}^3\log(2 - 8S) = 2\frac{1}{2}C - 50$
 $2 - 8S = 3^{2\frac{1}{2}C-50}$
 $-8S = -2 + 3^{2\frac{1}{2}C-50}$
 $S = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdot 3^{2\frac{1}{2}C-50}$
- c** $N = 50 \cdot 2^{4t-1}$
 $N = 50 \cdot (4^{\frac{1}{2}})^{4t-1}$
 $N = 50 \cdot 4^{2t-\frac{1}{2}}$
 $4^{2t-\frac{1}{2}} = \frac{1}{50}N$
 $2t - \frac{1}{2} = {}^4\log(\frac{1}{50}N)$
 $2t = \frac{1}{2} + {}^4\log(\frac{1}{50}N)$
 $t = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(\frac{1}{50}N)$
- d** $y = 3 - {}^2\log(4x - 1)$
 ${}^2\log(4x - 1) = -y + 3$
 $4x - 1 = 2^{-y+3}$
 $4x = 1 + 2^{-y+3}$
 $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2^{-y+3}$
 $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2^{-y} \cdot 2^3$
 $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot (2^{-1})^y \cdot 8$
 $x = \frac{1}{4} + 2 \cdot (\frac{1}{2})^y$
Dus $a = \frac{1}{4}$, $b = 2$ en $g = \frac{1}{2}$.

- 41** **a** Voer in $y_1 = 3^x$ en $y_2 = 8$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 1,893$.
- b** $3^x = 8$ exact oplossen geeft $x = {}^3\log(8)$.
Dus ${}^3\log(8) \approx 1,893$.

Bladzijde 26

- 42** **a** ${}^3\log(5) \approx 1,46$
- b** ${}^{\frac{1}{2}}\log(18) \approx -1,49$
- c** ${}^2\log(20) - {}^2\log(6) \approx 1,74$
- d** ${}^{\frac{1}{3}}\log(10) + \log(\frac{1}{3}) \approx -2,57$
- e** $3 \cdot {}^2\log(7) \approx 8,42$
- f** $\frac{5}{4\log(12)} \approx 2,79$
- 43** **a** $t = 30$ geeft $N = \log(30) + 150 \approx 151,48$
- b** $a = 12$ geeft $P = 11,8 - \frac{120}{{}^5\log(12)} \approx -65,92$
- c** $K = 5 \cdot 10^{16}$ geeft $0,25q - 30 = \log(5 \cdot 10^{16})$
 $0,25q - 30 = 16,698\dots$
 $0,25q = 46,698\dots$
 $q \approx 186,80$
- d** $L = 12,4$ en $M = 100$ geeft $\log(100) + 3 \cdot \log(T) + 11 = 12,4$
 $2 + 3 \cdot \log(T) + 11 = 12,4$
 $3 \cdot \log(T) = -0,6$
 $\log(T) = -0,2$
 $T = 10^{-0,2} \approx 0,63$

- 44 a** $h = 29$ geeft $m = 37 \cdot \log(29) + 31 \approx 85$
 Hierbij hoort een mensenleeftijd van 85 jaar.
- b** Los op $37 \cdot \log(h) + 31 < 7h$.
 Voer in $y_1 = 37 \cdot \log(x) + 31$ en $y_2 = 7x$.
 De optie snijpunt geeft $x = 9,627\dots$
 Dus vanaf $h = 10$.
- c** $m = 37 \cdot \log(h) + 31$
 $37 \cdot \log(h) = m - 31$
 $\log(h) = \frac{1}{37}m - \frac{31}{37}$
 $h = 10^{\frac{1}{37}m - \frac{31}{37}}$
 $h \approx 10^{0,027m - 0,838}$
 Dus $h = 10^{0,027m - 0,838}$.
- d** $m = 75$ geeft $h = 10^{0,027 \cdot 75 - 0,838} \approx 15,4$
 Dus een hondenleeftijd van 15 jaar.

Bladzijde 27

- 45 a** $B = 11\,275$ geeft $V = 1339 \cdot \log(11\,275) - 4539 \approx 887$
 Dus $907 - 887 = 20$ kcal per persoon per dag meer.
- b** $B = 22\,591$ geeft $V = 1339 \cdot \log(22\,591) - 4539 \approx 1291$
 $1017 < 1291$, dus Nederland gaat zuiniger om met voedsel dan op basis van de formule verwacht mag worden.
- c** Dat betekent dat mensen in Zimbabwe minder voedsel kopen dan ze nodig hebben.
- d** $V = 0$ geeft $1339 \cdot \log(B) - 4539 = 0$
 $1339 \cdot \log(B) = 4539$
 $\log(B) = 3,389\dots$
 $B = 10^{3,389\dots} \approx 2454$
 Dus bij bestedingen van 2454 dollar per persoon per jaar is de voedselverspilling gelijk aan 0.
- e** Het gaat om voedselverspilling per persoon per dag. Dat is een gemiddelde. Er zullen in India zowel mensen zijn die minder voedsel kopen dan ze nodig hebben als mensen die meer voedsel kopen dan ze nodig hebben.

9.3 Rekenregels voor logaritmen

Bladzijde 29

- 46** De beweringen II, III, V en VIII zijn waar.

Bladzijde 30

- 47 a** $p \cdot {}^s\log(a) = {}^s\log(a^p)$ en ${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- b** Uit ${}^s\log(g^a) = a$ volgt $4 = \log(10^4) = \log(10\,000)$ en uit $p \cdot {}^s\log(a) = {}^s\log(a^p)$ volgt $3 \cdot \log(2) = \log(2^3)$.
- c** $\log(1250) = \log(10 \cdot 125) = \log(10) + \log(125) = 1 + \log(125)$
- 48 a** $10^{-0,30} = 0,5011\dots$, dus $K = \log(0,501M^{3,25})$.
- b** ${}^2\log(96) = 6,5849\dots$, dus $N = 6,585 + 3 \cdot {}^2\log(x)$.
- 49 a** ${}^2\log(6) + {}^2\log(10) = {}^2\log(60)$
- b** ${}^3\log(30) - {}^3\log(6) = {}^3\log(5)$
- c** $2 \cdot {}^5\log(3) + {}^5\log(\frac{1}{2}) = {}^5\log(3^2) + {}^5\log(\frac{1}{2}) = {}^5\log(9) + {}^5\log(\frac{1}{2}) = {}^5\log(4\frac{1}{2})$
- d** $\log(50) - 2 \cdot \log(5) = \log(50) - \log(5^2) = \log(50) - \log(25) = \log(2)$
- 50 a** $4 + {}^2\log(3) = {}^2\log(16) + {}^2\log(3) = {}^2\log(48)$
- b** $2 - \log(5) = \log(100) - \log(5) = \log(20)$
- c** ${}^2\log(12) - {}^3\log(9) = {}^2\log(12) - 2 = {}^2\log(12) - {}^2\log(4) = {}^2\log(3)$
- d** $\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(16) + \frac{1}{3}\log(8) = {}^3\log(16^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\log((\frac{1}{2})^{-3}) = {}^3\log(4) - 3 = {}^3\log(4) - {}^3\log(27) = {}^3\log(\frac{4}{27})$

Bladzijde 31

- 51** **a** $\frac{1}{2}\log(15) - 4 \cdot \frac{1}{2}\log(3) = \frac{1}{2}\log(15) - \frac{1}{2}\log(3^4) = \frac{1}{2}\log(15) - \frac{1}{2}\log(81) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{15}{81}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{5}{27}\right)$
b $-2 \cdot {}^4\log(6) + {}^4\log(12) = {}^4\log(6^{-2}) + {}^4\log(12) = {}^4\log\left(\frac{1}{36}\right) + {}^4\log(12) = {}^4\log\left(\frac{12}{36}\right) = {}^4\log\left(\frac{1}{3}\right)$
c $3 - \frac{1}{2}\log(10) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{2}\log(10) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{80}\right)$
d $\log(500) - {}^5\log(125) = \log(500) - 3 = \log(500) - \log(1000) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$

- 52** **a** $P = 1,4 \cdot {}^2\log(Q) + 3$
 $P = {}^2\log(Q^{1,4}) + {}^2\log(8)$
 $P = {}^2\log(8Q^{1,4})$
b $N = {}^3\log(81x^2)$
 $N = {}^3\log(81) + {}^3\log(x^2)$
 $N = 4 + 2 \cdot {}^3\log(x)$
c $V = 3,5 + {}^5\log(1,2a)$
 $V = 3,5 + \frac{\log(1,2a)}{\log(5)}$
 $V = 3,5 + \frac{1}{\log(5)} \cdot \log(1,2a)$
 $V \approx 3,5 + 1,43 \cdot \log(1,2a)$
Dus $V = 3,5 + 1,43 \cdot \log(1,2a)$.

- 53** **a** $N = 2,3 - 0,7 \cdot \log(Q)$
 $N = \log(10^{2,3}) + \log(Q^{-0,7})$
 $N = \log(10^{2,3} \cdot Q^{-0,7})$
 $N \approx \log(200Q^{-0,7})$
Dus $N = \log(200Q^{-0,7})$.
b $A = \log\left(\frac{150}{B^3}\right)$
 $A = \log(150) - \log(B^3)$
 $A \approx 2,18 - 3 \cdot \log(B)$
Dus $A = 2,18 - 3 \cdot \log(B)$.
c $T = {}^{1,4}\log(8,3t) - 2,7$
 $T = {}^{1,4}\log(8,3) + {}^{1,4}\log(t) - 2,7$
 $T = {}^{1,4}\log(8,3) - 2,7 + \frac{\log(t)}{\log(1,4)}$
 $T = {}^{1,4}\log(8,3) - 2,7 + \frac{1}{\log(1,4)} \cdot \log(t)$
 $T \approx 3,59 + 6,84 \cdot \log(t)$
Dus $T = 3,59 + 6,84 \cdot \log(t)$.

- 54** **a** $y = {}^2\log(48x)$
 $y = {}^2\log(16) + {}^2\log(3x)$
 $y = 4 + {}^2\log(3x)$
b $N = \log(300p) - 1$
 $N = \log(100) + \log(3p) - 1$
 $N = 2 + \log(3p) - 1$
 $N = 1 + \log(3p)$
c $R = 4 \cdot {}^3\log(54q)$
 $R = 4 \cdot ({}^3\log(27) + {}^3\log(2q))$
 $R = 4 \cdot (3 + {}^3\log(2q))$
 $R = 12 + 4 \cdot {}^3\log(2q)$
d $P = {}^2\log(96s) + {}^2\log(48s)$
 $P = {}^2\log(32) + {}^2\log(3s) + {}^2\log(16) + {}^2\log(3s)$
 $P = 5 + {}^2\log(3s) + 4 + {}^2\log(3s)$
 $P = 9 + 2 \cdot {}^2\log(3s)$

Bladzijde 32

- 55 a** $W = 4,5 + 2,6 \cdot {}^2\log(N) - {}^2\log(P)$
 $W = {}^2\log(2^{4,5}) + {}^2\log(N^{2,6}) - {}^2\log(P)$
 $W = {}^2\log\left(2^{4,5} \cdot \frac{N^{2,6}}{P}\right)$
 $W \approx {}^2\log\left(22,63 \cdot \frac{N^{2,6}}{P}\right)$
Dus $W = {}^2\log\left(22,63 \cdot \frac{N^{2,6}}{P}\right)$.
- b** $G = 2 \cdot \log(T) - 1,2 \cdot \log(Q) + 3,2$
 $G = \log(T^2) + \log(Q^{-1,2}) + \log(10^{3,2})$
 $G = \log(10^{3,2} T^2 Q^{-1,2})$
 $G \approx \log(1585 T^2 Q^{-1,2})$
Dus $G = \log(1585 T^2 Q^{-1,2})$.

- 56** $\log(x) + \log(5) = 2$
 $\log(5x) = 2$
 $5x = 10^2$
 $5x = 100$
 $x = 20$

Bladzijde 33

- 57 a** ${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- b** $x = 1$ geeft ${}^3\log(-1) = 1 - {}^3\log(-3)$, maar een logaritme van een getal kleiner dan of gelijk aan nul bestaat niet.
Dus $x = 1$ voldoet niet.
- 58 a** ${}^3\log(4x) + {}^3\log(5) = 2$
 ${}^3\log(20x) = 2$
 $20x = 9$
 $x = \frac{9}{20}$
- b** ${}^2\log(x) = 4 - {}^2\log(3)$
 ${}^2\log(x) + {}^2\log(3) = 4$
 ${}^2\log(3x) = 4$
 $3x = 16$
 $x = 5\frac{1}{3}$
- c** ${}^4\log(x) + {}^4\log(3) = {}^4\log(x+1)$
 ${}^4\log(3x) = {}^4\log(x+1)$
 $3x = x+1$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$
- d** ${}^3\log(2x) = 1 + {}^3\log(x-1)$
 ${}^3\log(2x) = {}^3\log(3) + {}^3\log(x-1)$
 ${}^3\log(2x) = {}^3\log(3(x-1))$
 $2x = 3(x-1)$
 $2x = 3x - 3$
 $-x = -3$
 $x = 3$
- e** ${}^2\log(x+6) = 4 - {}^2\log(x)$
 ${}^2\log(x+6) + {}^2\log(x) = 4$
 ${}^2\log(x(x+6)) = 4$
 $x(x+6) = 16$
 $x^2 + 6x - 16 = 0$
 $(x-2)(x+8) = 0$
 $x = 2 \vee x = -8$
vold. niet
- f** ${}^3\log(2x+1) - {}^3\log(x-3) - 2 = 0$
 ${}^3\log(2x+1) = 2 + {}^3\log(x-3)$
 ${}^3\log(2x+1) = {}^3\log(9) + {}^3\log(x-3)$
 ${}^3\log(2x+1) = {}^3\log(9(x-3))$
 $2x+1 = 9(x-3)$
 $2x+1 = 9x-27$
 $-7x = -28$
 $x = 4$

59 a $\log(4x - 30) + \log(x) = 2$
 $\log(x(4x - 30)) = 2$
 $x(4x - 30) = 100$
 $4x^2 - 30x - 100 = 0$
 $2x^2 - 15x - 50 = 0$
 $D = (-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -50 = 625$
 $x = \frac{15 + 25}{4} \vee x = \frac{15 - 25}{4}$
 $x = 10 \vee x = -2\frac{1}{2}$

b ${}^4\log(3x + 4) = 3 - {}^4\log(x)$
 ${}^4\log(3x + 4) + {}^4\log(x) = 3$
 ${}^4\log(x(3x + 4)) = 3$
 $x(3x + 4) = 64$
 $3x^2 + 4x - 64 = 0$
 $D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot -64 = 784$
 $x = \frac{-4 + 28}{6} \vee x = \frac{-4 - 28}{6}$
 $x = 4 \vee x = -5\frac{1}{3}$

vold. niet

c $\frac{1}{2}\log(x - 2) + 3 + \frac{1}{2}\log(x) = 0$
 $\frac{1}{2}\log(x(x - 2)) = -3$
 $x(x - 2) = 8$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x + 2)(x - 4) = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$

d ${}^4\log(x) + {}^4\log(x - 1) = {}^4\log(x + 3)$
 ${}^4\log(x(x - 1)) = {}^4\log(x + 3)$
 $x(x - 1) = x + 3$
 $x^2 - x = x + 3$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x + 1)(x - 3) = 0$
 $x = -1 \vee x = 3$

vold. niet

60 a $y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (-3, 0)} y = 2^{x+3}$

b $y = 2^x \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 8} y = 8 \cdot 2^x$
 Er geldt $8 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 2^x = 2^{x+3}$.

Dus de grafiek van f ontstaat ook uit die van $y = 2^x$ door de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 8.

c $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } \frac{1}{8}} y = {}^2\log(8x)$

d $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (0, 3)} y = 3 + {}^2\log(x)$
 Er geldt $3 + {}^2\log(x) = {}^2\log(8) + {}^2\log(x) = {}^2\log(8x)$.

Dus de grafiek van g ontstaat ook uit die van $y = {}^2\log(x)$ bij de translatie $(0, 3)$.

Bladzijde 34

61 a $y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (5, 0)} y = 2^{x-5}$

Er geldt $2^{x-5} = 2^x \cdot 2^{-5} = \frac{1}{32} \cdot 2^x$.

Dus de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met $\frac{1}{32}$.

b $y = 2^x \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } \frac{1}{2}} y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$

Er geldt $\frac{1}{2} \cdot 2^x = 2^{-1} \cdot 2^x = 2^{x-1}$.

Dus de translatie $(1, 0)$.

c $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } \frac{1}{32}} y = {}^2\log(32x)$

Er geldt ${}^2\log(32x) = {}^2\log(32) + {}^2\log(x) = 5 + {}^2\log(x)$.

Dus de translatie $(0, 5)$.

d $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (0, 4)} y = 4 + {}^2\log(x)$

Er geldt $4 + {}^2\log(x) = {}^2\log(16) + {}^2\log(x) = {}^2\log(16x)$.

Dus de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{16}$.

62 a $y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (-4, 0)} y = 2^{x+4} \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } \frac{1}{4}} y = \frac{1}{4} \cdot 2^{x+4}$

Er geldt $\frac{1}{4} \cdot 2^{x+4} = \frac{1}{4} \cdot 2^x \cdot 2^4 = \frac{1}{4} \cdot 2^x \cdot 16 = 4 \cdot 2^x$.

Dus $a = 4$.

b $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (3, 0)} y = {}^2\log(x - 3) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } \frac{1}{4}} y = {}^2\log(4x - 3)$

Er geldt ${}^2\log(4x - 3) = {}^2\log(4(x - \frac{3}{4})) = {}^2\log(4) + {}^2\log(x - \frac{3}{4}) = 2 + {}^2\log(x - \frac{3}{4})$.

Dus $p = 2$ en $q = -\frac{3}{4}$.

$$63 \quad a \quad y = 10 - 3^{2x-1} \xrightarrow{\text{translatie } (-2, -12)} y = 10 - 3^{2(x+2)-1} - 12$$

$$y = -2 - 3^{2x+4-1}$$

$$y = -2 - 3^{2x+3}$$

$$\text{Er geldt } -2 - 3^{2x+3} = -2 - 3^{2x} \cdot 3^3 = -2 - 3^3 \cdot (3^2)^x = -2 - 27 \cdot 9^x.$$

$$\text{Dus } a = -2, b = -27 \text{ en } g = 9.$$

$$b \quad y = {}^2\log(4x + 10) + 1$$

$$y = {}^2\log(4(x + 2\frac{1}{2})) + 1$$

$$y = {}^2\log(4) + {}^2\log(x + 2\frac{1}{2}) + 1$$

$$y = 2 + {}^2\log(x + 2\frac{1}{2}) + 1$$

$$y = {}^2\log(x + 2\frac{1}{2}) + 3$$

$$y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (-2\frac{1}{2}, 3)} y = {}^2\log(x + 2\frac{1}{2}) + 3$$

$$\text{Dus } m = -2\frac{1}{2} \text{ en } n = 3.$$

$$c \quad y = 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (-5, 36)} y = 3^{x+5} + 36 \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } \frac{1}{9}} y = \frac{1}{9}(3^{x+5} + 36)$$

$$y = \frac{1}{9} \cdot 3^{x+5} + 4$$

$$y = 3^{-2} \cdot 3^{x+5} + 4$$

$$y = 4 + 3^{x+3}$$

$$\text{Dus } p = 4 \text{ en } q = 3.$$

$$64 \quad a \quad f(x) = (\frac{1}{2})^{3-x} - 4$$

$$f(x) = (2^{-1})^{3-x} - 4$$

$$f(x) = 2^{-3+x} - 4$$

$$f(x) = 2^{x-3} - 4$$

$$y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (3, -4)} y = 2^{x-3} - 4$$

$$b \quad g(x) = 1 + \frac{1}{2}\log(4x + 6)$$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}\log(4(x + 1\frac{1}{2}))$$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}\log(4) + \frac{1}{2}\log(x + 1\frac{1}{2})$$

$$g(x) = 1 - 2 + \frac{1}{2}\log(x + 1\frac{1}{2})$$

$$g(x) = -1 + \frac{1}{2}\log(x + 1\frac{1}{2})$$

$$y = \frac{1}{2}\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (-1\frac{1}{2}, -1)} y = -1 + \frac{1}{2}\log(x + 1\frac{1}{2})$$

$$c \quad f(6) = (\frac{1}{2})^{3-6} - 4 = (\frac{1}{2})^{-3} - 4 = 8 - 4 = 4, \text{ dus } P(6, 4).$$

$$g(x) = 4 \text{ geeft } 1 + \frac{1}{2}\log(4x + 6) = 4$$

$$\frac{1}{2}\log(4x + 6) = 3$$

$$4x + 6 = \frac{1}{8}$$

$$4x = -5\frac{7}{8}$$

$$x = -1\frac{15}{32}$$

$$\text{Dus } Q(-1\frac{15}{32}, 4).$$

$$PQ = 6 - (-1\frac{15}{32}) = 7\frac{15}{32}$$

$$65 \quad a \quad y = (\frac{1}{5})^x \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } a} y = (\frac{1}{5})^{\frac{x}{a}}, \text{ dus } g(x) = (\frac{1}{5})^{\frac{x}{a}}.$$

$$g(3) = 25 \text{ geeft } (\frac{1}{5})^{\frac{3}{a}} = 25$$

$$(5^{-1})^{\frac{3}{a}} = 5^2$$

$$5^{-\frac{3}{a}} = 5^2$$

$$-\frac{3}{a} = 2$$

$$2a = -3$$

$$a = -1\frac{1}{2}$$

b $h(x) = 0$ geeft $^2\log(x^2 - 2x + 1) = 0$
 $x^2 - 2x + 1 = 1$
 $x^2 - 2x = 0$
 $x(x - 2) = 0$
 $x = 0 \vee x = 2$
 $(0, 0) \xrightarrow{\text{translatie } (3, 0)} (3, 0), \text{ dus } a = 3.$
 $(2, 0) \xrightarrow{\text{translatie } (1, 0)} (3, 0), \text{ dus } a = 1.$

9.4 Formules omwerken

Bladzijde 37

66 a $N = 200 \cdot 1,08^t$
 $\log(N) = \log(200 \cdot 1,08^t)$
 $\log(N) = \log(200) + \log(1,08^t)$
 $\log(N) = \log(200) + t \cdot \log(1,08)$

67 a $N = 8000 \cdot 1,18^t$
 $\log(N) = \log(8000 \cdot 1,18^t)$
 $\log(N) = \log(8000) + \log(1,18^t)$
 $\log(N) = \log(8000) + t \cdot \log(1,18)$
 $\log(N) \approx 3,90 + t \cdot 0,0719$
Dus $\log(N) = 0,0719t + 3,90$.

b $N = 22\,000 \cdot 0,83^t$
 $\log(N) = \log(22\,000 \cdot 0,83^t)$
 $\log(N) = \log(22\,000) + \log(0,83^t)$
 $\log(N) = \log(22\,000) + t \cdot \log(0,83)$
 $\log(N) \approx 4,34 + t \cdot -0,0809$
Dus $\log(N) = -0,0809t + 4,34$.

68 a $y = 50x^{1,35}$
 $\log(y) = \log(50x^{1,35})$
 $\log(y) = \log(50) + \log(x^{1,35})$
 $\log(y) = \log(50) + 1,35 \cdot \log(x)$
 $\log(y) \approx 1,70 + 1,35 \cdot \log(x)$
Dus $\log(y) = 1,70 + 1,35 \cdot \log(x)$.

b $y = \frac{500}{x^2}$
 $\log(y) = \log\left(\frac{500}{x^2}\right)$
 $\log(y) = \log(500) - \log(x^2)$
 $\log(y) = \log(500) - 2 \cdot \log(x)$
 $\log(y) \approx 2,70 - 2 \cdot \log(x)$
Dus $\log(y) = 2,70 - 2 \cdot \log(x)$.

Bladzijde 38

69 a $y = 600 \cdot 2,18^x$
 $\log(y) = \log(600 \cdot 2,18^x)$
 $\log(y) = \log(600) + \log(2,18^x)$
 $\log(y) = \log(600) + x \cdot \log(2,18)$
 $\log(y) \approx 2,78 + x \cdot 0,34$
Dus $\log(y) = 0,34x + 2,78$.

b $F = 20L^3$
 $\log(F) = \log(20L^3)$
 $\log(F) = \log(20) + \log(L^3)$
 $\log(F) = \log(20) + 3 \cdot \log(L)$

c $N = 6500 \cdot 1,25^{t-2}$
 $\log(N) = \log(6500 \cdot 1,25^{t-2})$
 $\log(N) = \log(6500) + \log(1,25^{t-2})$
 $\log(N) = \log(6500) + (t-2) \cdot \log(1,25)$
 $\log(N) = \log(6500) + t \cdot \log(1,25) - 2 \cdot \log(1,25)$
 $\log(N) \approx 3,62 + t \cdot 0,0969$
Dus $\log(N) = 0,0969t + 3,62$.

d $N = 18\,000 \cdot 0,74^{2t-3}$
 $\log(N) = \log(18\,000 \cdot 0,74^{2t-3})$
 $\log(N) = \log(18\,000) + \log(0,74^{2t-3})$
 $\log(N) = \log(18\,000) + (2t-3) \cdot \log(0,74)$
 $\log(N) = \log(18\,000) + 2t \cdot \log(0,74) - 3 \cdot \log(0,74)$
 $\log(N) \approx 4,65 + t \cdot -0,2615$
Dus $\log(N) = -0,2615t + 4,65$.

c $y = 260x^{-2,1}$
 $\log(y) = \log(260x^{-2,1})$
 $\log(y) = \log(260) + \log(x^{-2,1})$
 $\log(y) = \log(260) - 2,1 \cdot \log(x)$
 $\log(y) \approx 2,41 - 2,1 \cdot \log(x)$
Dus $\log(y) = 2,41 - 2,1 \cdot \log(x)$.

d $y = \frac{80}{x\sqrt{x}} = \frac{80}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{80}{x^{1\frac{1}{2}}}$
 $\log(y) = \log\left(\frac{80}{x^{1\frac{1}{2}}}\right)$
 $\log(y) = \log(80) - \log(x^{1\frac{1}{2}})$
 $\log(y) = \log(80) - 1\frac{1}{2} \cdot \log(x)$
 $\log(y) \approx 1,90 - 1,5 \cdot \log(x)$
Dus $\log(y) = 1,90 - 1,5 \cdot \log(x)$.

b $y = 600x^{2,18}$
 $\log(y) = \log(600x^{2,18})$
 $\log(y) = \log(600) + \log(x^{2,18})$
 $\log(y) = \log(600) + 2,18 \cdot \log(x)$
 $\log(y) \approx 2,78 + 2,18 \cdot \log(x)$
Dus $\log(y) = 2,78 + 2,18 \cdot \log(x)$.

$$\begin{aligned} \text{c } y &= 400 \cdot 1,75^{x-3} \\ \log(y) &= \log(400 \cdot 1,75^{x-3}) \\ \log(y) &= \log(400) + \log(1,75^{x-3}) \\ \log(y) &= \log(400) + (x-3) \cdot \log(1,75) \\ \log(y) &= \log(400) + x \cdot \log(1,75) - 3 \cdot \log(1,75) \\ \log(y) &\approx 1,87 + 0,24x \\ \text{Dus } \log(y) &= 0,24x + 1,87. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } y &= \frac{400}{x \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{400}{x \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{400}{x^{\frac{4}{3}}} \\ \log(y) &= \log\left(\frac{400}{x^{\frac{4}{3}}}\right) \\ \log(y) &= \log(400) - \log(x^{\frac{4}{3}}) \\ \log(y) &= \log(400) - \frac{4}{3} \cdot \log(x) \\ \log(y) &\approx 2,60 - 1,33 \cdot \log(x) \\ \text{Dus } \log(y) &= 2,60 - 1,33 \cdot \log(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 70 \quad H &= 7,7 \cdot 10^{-9} \cdot 1,0032^t \\ \log(H) &= \log(7,7 \cdot 10^{-9} \cdot 1,0032^t) \\ \log(H) &= \log(7,7 \cdot 10^{-9}) + \log(1,0032^t) \\ \log(H) &= \log(7,7 \cdot 10^{-9}) + t \cdot \log(1,0032) \\ \log(H) &= -8,11350... + t \cdot 0,00138... \\ \text{De pH is het tegengestelde van } \log(H) &\text{ geeft } P = 8,11350... - t \cdot 0,00138... \\ \text{Dus } P &= -0,0014t + 8,1135. \end{aligned}$$

- 71 a In opgave 66a is de formule $N = 200 \cdot 1,08^t$ herleid tot $\log(N) = \log(200) + t \cdot \log(1,08)$.
Dus deze formules komen op hetzelfde neer.
- b In opgave 66b is de formule $F = 20L^3$ herleid tot $\log(F) = \log(20) + 3 \cdot \log(L)$.
Dus deze formules komen op hetzelfde neer.

Bladzijde 39

$$\begin{aligned} 72 \quad \text{a } \log(N) &= 0,097t + 2,45 \\ N &= 10^{0,097t + 2,45} \\ N &= 10^{0,097t} \cdot 10^{2,45} \\ N &= 10^{2,45} \cdot (10^{0,097})^t \\ N &\approx 282 \cdot 1,25^t \\ \text{Dus } N &= 282 \cdot 1,25^t. \\ \text{b } \log(N) &= -0,022t + 3,75 \\ N &= 10^{-0,022t + 3,75} \\ N &= 10^{-0,022t} \cdot 10^{3,75} \\ N &= 10^{3,75} \cdot (10^{-0,022})^t \\ N &\approx 5623 \cdot 0,95^t \\ \text{Dus } N &= 5623 \cdot 0,95^t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } t &= 5 \cdot \log(N) - 11 \\ 5 \cdot \log(N) &= t + 11 \\ \log(N) &= 0,2t + 2,2 \\ N &= 10^{0,2t + 2,2} \\ N &= 10^{0,2t} \cdot 10^{2,2} \\ N &= 10^{2,2} \cdot (10^{0,2})^t \\ N &\approx 158 \cdot 1,58^t \\ \text{Dus } N &= 158 \cdot 1,58^t. \\ \text{d } t &= 30 - 8 \cdot \log(N) \\ 8 \cdot \log(N) &= -t + 30 \\ \log(N) &= -0,125t + 3,75 \\ N &= 10^{-0,125t + 3,75} \\ N &= 10^{-0,125t} \cdot 10^{3,75} \\ N &= 10^{3,75} \cdot (10^{-0,125})^t \\ N &\approx 5623 \cdot 0,75^t \\ \text{Dus } N &= 5623 \cdot 0,75^t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 73 \quad \text{a } \log(y) &= 1,70 + 1,45 \cdot \log(x) \\ \log(y) &= \log(10^{1,70}) + \log(x^{1,45}) \\ \log(y) &= \log(10^{1,70} \cdot x^{1,45}) \\ y &= 10^{1,70} \cdot x^{1,45} \\ y &\approx 50 \cdot x^{1,45} \\ \text{Dus } y &= 50x^{1,45}. \\ \text{b } \log(y) &= 3,50 - 1,12 \cdot \log(x) \\ \log(y) &= \log(10^{3,50}) + \log(x^{-1,12}) \\ \log(y) &= \log(10^{3,50} \cdot x^{-1,12}) \\ y &= 10^{3,50} \cdot x^{-1,12} \\ y &\approx 3162 \cdot x^{-1,12} \\ \text{Dus } y &= 3162x^{-1,12}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } \log(x) &= 0,5 \cdot \log(y) - 2,75 \\ 0,5 \cdot \log(y) &= \log(x) + 2,75 \\ \log(y) &= 2 \cdot \log(x) + 5,5 \\ \log(y) &= \log(x^2) + \log(10^{5,5}) \\ \log(y) &= \log(x^2 \cdot 10^{5,5}) \\ y &= 10^{5,5} \cdot x^2 \\ y &\approx 316228 \cdot x^2 \\ \text{Dus } y &= 316228x^2. \\ \text{d } 3 \cdot \log(x) - 4 \cdot \log(y) + 5 &= 0 \\ 4 \cdot \log(y) &= 3 \cdot \log(x) + 5 \\ \log(y) &= 0,75 \cdot \log(x) + 1,25 \\ \log(y) &= \log(x^{0,75}) + \log(10^{1,25}) \\ \log(y) &= \log(x^{0,75} \cdot 10^{1,25}) \\ y &= 10^{1,25} \cdot x^{0,75} \\ y &\approx 18 \cdot x^{0,75} \\ \text{Dus } y &= 18x^{0,75}. \end{aligned}$$

74 a $\log(y) = 0,19x + 2,74$

$$y = 10^{0,19x + 2,74}$$

$$y = 10^{0,19x} \cdot 10^{2,74}$$

$$y = 10^{2,74} \cdot (10^{0,19})^x$$

$$y \approx 550 \cdot 1,55^x$$

$$\text{Dus } y = 550 \cdot 1,55^x.$$

b $\log(y) = 0,65 \cdot \log(x) + 2,84$

$$\log(y) = \log(x^{0,65}) + \log(10^{2,84})$$

$$\log(y) = \log(x^{0,65} \cdot 10^{2,84})$$

$$y = 10^{2,84} \cdot x^{0,65}$$

$$y \approx 692 \cdot x^{0,65}$$

$$\text{Dus } y = 692x^{0,65}.$$

c $x = 2,5 \cdot \log(y) - 12$

$$2,5 \cdot \log(y) = x + 12$$

$$\log(y) = 0,4x + 4,8$$

$$y = 10^{0,4x + 4,8}$$

$$y = 10^{0,4x} \cdot 10^{4,8}$$

$$y = 10^{4,8} \cdot (10^{0,4})^x$$

$$y \approx 63\,096 \cdot 2,51^x$$

$$\text{Dus } y = 63\,096 \cdot 2,51^x.$$

d $2,2 \cdot \log(x) + 5 \cdot \log(y) = 12$

$$5 \cdot \log(y) = -2,2 \cdot \log(x) + 12$$

$$\log(y) = -0,44 \cdot \log(x) + 2,4$$

$$\log(y) = \log(x^{-0,44}) + \log(10^{2,4})$$

$$\log(y) = \log(x^{-0,44} \cdot 10^{2,4})$$

$$y = 10^{2,4} \cdot x^{-0,44}$$

$$y \approx 251 \cdot x^{-0,44}$$

$$\text{Dus } y = 251x^{-0,44}.$$

75 a $N = 25\,000 \cdot 0,82^{2t+3}$

$$\log(N) = \log(25\,000 \cdot 0,82^{2t+3})$$

$$\log(N) = \log(25\,000) + \log(0,82^{2t+3})$$

$$\log(N) = \log(25\,000) + (2t+3) \cdot \log(0,82)$$

$$\log(N) = \log(25\,000) + 2t \cdot \log(0,82) + 3 \cdot \log(0,82)$$

$$\log(N) \approx 4,14 + t \cdot -0,1724$$

$$\text{Dus } \log(N) = -0,1724t + 4,14.$$

b $\log(N) = 0,193t + 2,75$

$$N = 10^{0,193t + 2,75}$$

$$N = 10^{0,193t} \cdot 10^{2,75}$$

$$N = 10^{2,75} \cdot (10^{0,193})^t$$

$$N \approx 562 \cdot 1,56^t$$

$$\text{Dus } N = 562 \cdot 1,56^t.$$

c $6 \cdot \log(D) - \log(R) = 15$

$$6 \cdot \log(D) = \log(R) + 15$$

$$\log(D) = \frac{1}{6} \cdot \log(R) + 2,5$$

$$\log(D) = \log(R^{\frac{1}{6}}) + \log(10^{2,5})$$

$$\log(D) = \log(R^{\frac{1}{6}} \cdot 10^{2,5})$$

$$D = 10^{2,5} \cdot R^{\frac{1}{6}}$$

$$D \approx 316 \cdot R^{0,17}$$

$$\text{Dus } D = 316R^{0,17}.$$

d $L = 6 \cdot \log(K) - 27$

$$6 \cdot \log(K) = L + 27$$

$$\log(K) = \frac{1}{6}L + 4,5$$

$$K = 10^{\frac{1}{6}L + 4,5}$$

$$K = 10^{\frac{1}{6}L} \cdot 10^{4,5}$$

$$K = 10^{4,5} \cdot (10^{\frac{1}{6}})^L$$

$$K \approx 31\,623 \cdot 1,47^L$$

$$\text{Dus } K = 31\,600 \cdot 1,47^L.$$

e $N = \frac{1280}{t^2 \cdot \sqrt{t}} = \frac{1280}{t^2 \cdot t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1280}{t^{\frac{5}{2}}}$

$$\log(N) = \log\left(\frac{1280}{t^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$\log(N) = \log(1280) - \log(t^{\frac{5}{2}})$$

$$\log(N) = \log(1280) - 2\frac{1}{2} \cdot \log(t)$$

$$\log(N) \approx 3,1 - 2,5 \cdot \log(t)$$

$$\text{Dus } \log(N) = 3,1 - 2,5 \cdot \log(t).$$

f $\log(P) = 0,05h + 2,14$

$$P = 10^{0,05h + 2,14}$$

$$P = 10^{0,05h} \cdot 10^{2,14}$$

$$P = 10^{2,14} \cdot (10^{0,05})^h$$

$$P \approx 138 \cdot 1,12^h$$

$$\text{Dus } P = 138 \cdot 1,12^h.$$

Bladzijde 40

76 a $A = 1000$ en $P = 75\,000$ geeft $\log(C) = 3 + 0,79 \cdot \log(1000) - 0,79 \cdot \log(75\,000) = 1,51...$

$$\text{Dus } C = 10^{1,51...} \approx 33,014.$$

Dus de CO₂-uitstoot is ongeveer 33 000 kg per persoon per jaar.

b $C = 20$ en $P = 10\,000$ geeft $3 + 0,79 \cdot \log(A) - 0,79 \cdot \log(10\,000) = \log(20)$

$$0,79 \cdot \log(A) = \log(20) - 3 + 0,79 \cdot \log(10\,000)$$

$$0,79 \cdot \log(A) = 1,461...$$

$$\log(A) = 1,849...$$

$$A = 10^{1,849...} \approx 71$$

De oppervlakte van het gebied is ongeveer 71 km².

$$\begin{aligned}
\text{c } \log(C) &= 3 + 0,79 \cdot \log(A) - 0,79 \cdot \log(P) \\
\log(C) &= \log(10^3) + \log(A^{0,79}) - \log(P^{0,79}) \\
\log(C) &= \log\left(1000 \cdot \frac{A^{0,79}}{P^{0,79}}\right) \\
C &= 1000 \cdot \frac{A^{0,79}}{P^{0,79}} \\
C &= 1000 \cdot \frac{P^{-0,79}}{A^{-0,79}} \\
C &= 1000 \cdot \left(\frac{P}{A}\right)^{-0,79}
\end{aligned}$$

d Stel de bevolkingsdichtheid is B , dan is $B = \frac{P}{A}$.

Dit geeft $C = 1000B^{-0,79}$.

Verdubbelen, dus vervang in de formule B door $2B$.

Dit geeft $C = 1000 \cdot (2B)^{-0,79} = 1000 \cdot 2^{-0,79} \cdot B^{-0,79} \approx 0,578 \cdot 1000B^{-0,79}$.

De procentuele afname is 42,2%.

- 77** a $\log(N) = 3$ geeft $N = 10^3 = 1000$
Dus bij $t = 2$ hoort $N = 1000$.
- b Je leest af: bij $t = 4$ hoort $\log(N) = 2$.
 $\log(N) = 2$ geeft $N = 10^2 = 100$
Dus bij $t = 4$ hoort $N = 100$.
- c Je leest af: bij $t = 3$ hoort $\log(N) = 2,5$.
 $\log(N) = 2,5$ geeft $N = 10^{2,5} \approx 316$
Dus bij $t = 3$ hoort $N \approx 316$.

Bladzijde 41

- 78** a $\log(N) = -\frac{2}{3}t + 4\frac{2}{3}$
 $N = 10^{-\frac{2}{3}t + 4\frac{2}{3}}$
 $N = 10^{-\frac{2}{3}t} \cdot 10^{4\frac{2}{3}}$
 $N = 10^{4\frac{2}{3}} \cdot (10^{-\frac{2}{3}})^t$
 $N \approx 46400 \cdot 0,215^t$
Dus de beginwaarde is 46400 en de groeifactor is 0,215.
- b $N = 150 \cdot 2,25^t$
 $\log(N) = \log(150 \cdot 2,25^t)$
 $\log(N) = \log(150) + \log(2,25^t)$
 $\log(N) = \log(150) + t \cdot \log(2,25)$
 $\log(N) = \log(2,25) \cdot t + \log(150)$
Deze formule is van de vorm $\log(N) = at + b$, dus de grafiek is in de figuur van het voorbeeld een rechte lijn.

Bladzijde 42

- 79** a $P = 4$ geeft $\log(Q) \approx 2,5$, dus $Q \approx 10^{2,5} \approx 316$.
- b $Q = 3000$ geeft $\log(Q) = \log(3000) \approx 3,5$
 $\log(Q) = 3,5$ geeft $P \approx 8,0$
- c De lijn gaat door de punten $(2, 2)$ en $(10, 4)$.
 $\log(Q) = m \cdot P + n$ met $m = \frac{4-2}{10-2} = \frac{1}{4}$
 $\log(Q) = \frac{1}{4}P + n$
door $(10, 4)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot 10 + n = 4 \\ 2\frac{1}{2} + n = 4 \end{array} \right.$
 $n = 1\frac{1}{2}$
Dus $m = \frac{1}{4}$ en $n = 1\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 d \quad \log(Q) &= \frac{1}{4}P + 1\frac{1}{2} \\
 Q &= 10^{\frac{1}{4}P + 1\frac{1}{2}} \\
 Q &= 10^{\frac{1}{4}P} \cdot 10^{1\frac{1}{2}} \\
 Q &= 10^{1\frac{1}{2}} \cdot (10^{\frac{1}{4}})^P \\
 Q &\approx 32 \cdot 1,78^P \\
 \text{Dus } Q &= 32 \cdot 1,78^P.
 \end{aligned}$$

- 80 a** Lees af: $M = 2$ geeft $\log(E) \approx 4,4$, dus $E \approx 10^{4,4} \approx 25\,000$ kJ.
b Lees af: $M = 3,6$ geeft $\log(E) \approx 6,8$, dus $E \approx 10^{6,8} \approx 6 \cdot 10^6$ kJ.
c $E = 9,3 \cdot 10^{15}$ geeft $\log(E) = \log(9,3 \cdot 10^{15}) \approx 16,0$
 Lees af: $\log(E) = 16,0$ geeft $M \approx 9,8$.
d $E = 330\,000$ geeft $\log(E) = \log(330\,000) \approx 5,5$
 Lees af: $\log(E) = 5,5$ geeft $M \approx 2,8$.
 Dit komt overeen met 2,8 op de schaal van Richter.
e Neem bijvoorbeeld $E = 10^{10}$ en $E = 10^6 \cdot 10^{10} = 10^{16}$.
 $E = 10^{10}$ geeft $\log(E) = \log(10^{10}) = 10$, aflezen geeft $M \approx 5,8$.
 $E = 10^{16}$ geeft $\log(E) = \log(10^{16}) = 16$, aflezen geeft $M \approx 9,8$.
 Dus het klopt voor $E = 10^{10}$ en $E = 10^{16}$.
 Zie de grafiek. Als $\log(E)$ met 6 toeneemt, neemt M met 4 toe.
 Dus de bewering is algemeen ook waar.
f Uit het voorgaande volgt: als M met 2 toeneemt, dan neemt $\log(E)$ met 3 toe.
 Dus de hoeveelheid energie die bij de tweede beving vrijkwam was $10^3 = 1000$ keer zoveel als bij de eerste beving.
g Door $(6; 3,1)$ en $(18; 11,1)$ geeft $p = \frac{\Delta M}{\Delta \log(E)} = \frac{11,1 - 3,1}{18 - 6} = 0,666\dots$

$$\left. \begin{aligned}
 M &= 0,666\dots \cdot \log(E) + q \\
 \text{door } (6; 3,1) \quad &\left\{ \begin{aligned} 0,666\dots \cdot 6 + q &= 3,1 \\ 4 + q &= 3,1 \\ q &= -0,9 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 M &= 0,666\dots \cdot \log(E) - 0,9 \\
 0,666\dots \cdot \log(E) &= M + 0,9 \\
 \log(E) &= 1,5M + 1,35 \\
 E &= 10^{1,5M + 1,35} \\
 E &= 10^{1,5M} \cdot 10^{1,35} \\
 E &= 10^{1,35} \cdot (10^{1,5})^M \\
 E &\approx 22 \cdot 32^M \\
 \text{Dus } E &= 22 \cdot 32^M.
 \end{aligned}$$

Bladzijde 43

- 81 a** Bij de zwaarste walvis in de figuur is $\log(E) \approx 6,1$.
 Dit geeft $E = 10^{6,1} \approx 1\,258\,925$.
 Dus de zwaarste walvis in de figuur krijgt per hap voedsel ongeveer 1 259 000 kJ energie binnen.
b $\log(G) = 5$ geeft $G = 100\,000$ kg
 $\log(G) = 3,8$ geeft $G \approx 6310$ kg
 Dus voor de baleinwalvissen is het verschil ongeveer 93 690 kg.
 $\log(G) = 4,3$ geeft $G \approx 19\,950$ kg
 $\log(G) = 1,6$ geeft $G \approx 40$ kg
 Dus voor de tandwalvissen is het verschil ongeveer 19 910 kg.
 Het grootste verschil in gewicht is dus bij de baleinwalvissen.
c $a = \frac{\Delta \log(E_B)}{\Delta \log(G_B)} = \frac{6,1 - 3,8}{5,0 - 3,8} = 1,916\dots$

$$\left. \begin{aligned}
 \log(E_B) &= 1,916\dots \cdot \log(G_B) + b \\
 \text{door } (3,8; 3,8) \quad &\left\{ \begin{aligned} 1,916\dots \cdot 3,8 + b &= 3,8 \\ 7,283\dots + b &= 3,8 \\ b &= -3,483\dots \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \right\}$$
 Dus $a \approx 1,92$ en $b \approx -3,48$.

$$\begin{aligned}
d \quad & \log(E_T) = 0,74 \cdot \log(G_T) + 0,45 \\
& \log(E_T) = \log(G_T^{0,74}) + \log(10^{0,45}) \\
& \log(E_T) = \log(G_T^{0,74} \cdot 10^{0,45}) \\
& E_T = 10^{0,45} \cdot G_T^{0,74} \\
& E_T \approx 2,82 \cdot G_T^{0,74} \\
& \text{Dus } E_T = 2,82 \cdot G_T^{0,74}.
\end{aligned}$$

- 82** De grafiek van E_T is afnemend stijgend.
 De grafiek van E_B is toenemend stijgend.
 Dus tandwalvissen hebben te maken met teruglopende opbrengsten per hap ten opzichte van hun lichaamsgewicht, en baleinwalvissen halen steeds meer energie per hap binnen per kilogram lichaamsgewicht.

Bladzijde 44

- 83 a** Bij 1990 hoort $T = 10^6$ en bij 2010 hoort $T = 10^9$.
 20 jaar komt overeen met 240 maanden.

$$g_{240 \text{ maanden}} = \frac{10^9}{10^6} = 1000 \text{ geeft } g_{\text{maand}} = 1000^{\frac{1}{240}} \approx 1,0292$$

 Dus in twee decimalen is dit groeipercentage 2,92%.
- b** $1,029^T = 2$ geeft $T = {}^{1,029}\log(2) \approx 24$
 Dus in 24 maanden.
- c** Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1990.
 Stel $\log(T) = at + b$ met $a = \frac{\Delta \log(T)}{t} = \frac{6-3}{20} = 0,15$.

$$\left. \begin{aligned} \log(T) &= 0,15t + b \\ t = 0 \text{ en } \log(T) &= 6 \end{aligned} \right\} \log(T) = 0,15t + 6$$

 Bij 2025 hoort $t = 2025 - 1990 = 35$.
 Dit geeft $\log(T) = 0,15 \cdot 35 + 6 = 11,25$, dus $T = 10^{11,25} \approx 1,8 \cdot 10^{11}$.
 Dus een voorspelling van het aantal transistoren per microprocessor in 2025 is $1,8 \cdot 10^{11}$.

Bladzijde 45

- 84 a** $B = 0,035 \cdot \left(\frac{H}{D}\right)^{0,79} \cdot D^{2,98}$

$$\begin{aligned}
B &= 0,035 \cdot (H \cdot D^{-1})^{0,79} \cdot D^{2,98} \\
B &= 0,035 \cdot H^{0,79} \cdot D^{-0,79} \cdot D^{2,98} \\
B &= 0,035 \cdot H^{0,79} \cdot D^{2,19}
\end{aligned}$$
- b** $H = 26,4$ en $D = 43,6$ geeft $B = 0,035 \cdot 26,4^{0,79} \cdot 43,6^{2,19} \approx 1810$
 Het bovengrondse gewicht is ongeveer 1810 kg.
- c** $G = 150$ geeft $\log(G) \approx 2,2$
 Aflezen geeft: bij $\log(G) \approx 2,2$ hoort $\log(D) \approx 1,6$.
 $\log(D) = 1,6$ geeft $D = 10^{1,6} \approx 40$
 De diameter is ongeveer 40 cm.
- d** Gebruik de punten $(1; 0,9)$ en $(2, 3)$.
 Stel $\log(G) = m + n \cdot \log(D)$ met $n = \frac{\Delta \log(G)}{\Delta \log(D)} = \frac{3 - 0,9}{2 - 1} = 2,1$.

$$\left. \begin{aligned} \log(G) &= m + 2,1 \cdot \log(D) \\ \text{door } (2, 3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} m + 2,1 \cdot 2 &= 3 \\ m + 4,2 &= 3 \\ m &= -1,2 \end{aligned}$$

 Dus $\log(G) = -1,2 + 2,1 \cdot \log(D)$.

$$\begin{aligned}
\log(G) &= -1,2 + 2,1 \cdot \log(D) \\
\log(G) &= \log(10^{-1,2}) + \log(D^{2,1}) \\
\log(G) &= \log(10^{-1,2} \cdot D^{2,1}) \\
G &= 10^{-1,2} \cdot D^{2,1} \\
G &\approx 0,063 \cdot D^{2,1} \\
\text{Dus } G &= 0,063 D^{2,1}.
\end{aligned}$$

- e $H = 14$ en $D = 17$ geeft $B = 0,035 \cdot 14^{0,79} \cdot 17^{2,19} = 139,3..$
 $D = 17$ geeft $G = 0,063 \cdot 17^{2,1} = 24,1...$
 Zo'n tropische beuk bevat $0,33 \cdot (139,3... + 24,1...) = 53,9... \text{ kg koolstof}$.
 Dat betekent dat er $3,67 \cdot 53,9... = 198,0... \text{ kg CO}_2$ uit de atmosfeer is gehaald.
 Dus de toerist moet $\frac{2700}{198,0...} \approx 14$ tropische beuken laten planten.

Diagnostische toets

Bladzijde 48

- 1 a Op $t = 0$ is de concentratie $60 : 5 = 12 \text{ mg per liter bloed}$.
 $C = b \cdot g^t$ met $b = 12$ en $g = 0,847$ geeft $C = 12 \cdot 0,847^t$
 b $t = 4$ geeft $C = 12 \cdot 0,847^4 = 6,17...$
 procentuele afname = $\frac{12 - 6,17...}{12} \times 100\% \approx 48,5\%$

Alternatieve uitwerking

$0,847^4 \approx 0,515$ en hierbij hoort een procentuele afname van $48,5\%$.

- c De concentratie is dan $20 : 5 = 4 \text{ mg per liter}$.
 Voer in $y_1 = 12 \cdot 0,847^x$ en $y_2 = 4$.
 De optie snijpunt geeft $x = 6,61...$
 Dus na $6,61... \times 60 \approx 397$ minuten.

- 2 a $g_{\text{dag}} = 1,1$
 $g_{\text{week}} = 1,1^7 \approx 1,949$
 Het groeipercentage per week is $94,9\%$.
 b $g_{8 \text{ uur}} = 1,1^{\frac{1}{3}} \approx 1,032$
 Het groeipercentage per 8 uur is $3,2\%$.
 c $g_{\text{jaar}} = 0,64$
 $g_{\text{maand}} = 0,64^{\frac{1}{12}} \approx 0,963$
 De afname per maand is $3,7\%$.
 d $g_{5 \text{ jaar}} = 0,64^5 \approx 0,107$
 De afname per 5 jaar is $89,3\%$.

- 3 a H is de hoeveelheid helium in cm^3 na t dagen.
 $g_{10 \text{ dagen}} = \frac{1500}{2500} = 0,6$, dus $g_{\text{dag}} = 0,6^{\frac{1}{10}} = 0,9502...$

$$\left. \begin{array}{l} H = b \cdot 0,9502...^t \\ t = 3 \text{ en } H = 2500 \end{array} \right\} b \cdot 0,9502...^3 = 2500$$

$$b = \frac{2500}{0,9502...^3} \approx 2914$$

Dus de ballon werd gevuld met 2914 cm^3 helium.

- b Los op $2914 \cdot 0,950^t = 500$.
 Voer in $y_1 = 2914 \cdot 0,950^x$ en $y_2 = 500$.
 De optie snijpunt geeft $x = 34,3...$
 Dus na 34 dagen.
 (Reken je met niet-afgeronde waarden, dan krijg je na 35 dagen.)

- 4 a $g_{\text{maand}} = 1,002$, dus los op $1,002^T = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,002^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 346,92...$
 De verdubbelingstijd is $346,92... : 12 \approx 29$ jaar.
 b $g_{\text{week}} = 0,8$, dus los op $0,8^T = \frac{1}{2}$.
 Voer in $y_1 = 0,8^x$ en $y_2 = \frac{1}{2}$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3,10...$
 De halveringstijd is $3,10... \times 7 \approx 22$ dagen.

5 a $4 \cdot 3^{2x+1} = 20$
 $3^{2x+1} = 5$
 $2x+1 = {}^3\log(5)$
 $2x = -1 + {}^3\log(5)$
 $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(5)$

b ${}^2\log(3x-5) + 3 = 7$
 ${}^2\log(3x-5) = 4$
 $3x-5 = 16$
 $3x = 21$
 $x = 7$

c $4^{x-1} = 2^{x+1}$
 $(2^2)^{x-1} = 2^{x+1}$
 $2^{2x-2} = 2^{x+1}$
 $2x-2 = x+1$
 $x = 3$

d ${}^3\log(8x+1) + 2 = 0$
 ${}^3\log(8x+1) = -2$
 $8x+1 = \frac{1}{9}$
 $8x = -\frac{8}{9}$
 $x = -\frac{1}{9}$

6 a $N = 75 - 1,5^{0,4t+3}$
 $1,5^{0,4t+3} = 75 - N$
 $0,4t+3 = {}^{1,5}\log(75-N)$
 $0,4t = -3 + {}^{1,5}\log(75-N)$
 $t = -7,5 + 2,5 \cdot {}^{1,5}\log(75-N)$

b $B = {}^5\log(2A+10) - 3$
 ${}^5\log(2A+10) = B+3$
 $2A+10 = 5^{B+3}$
 $2A = -10 + 5^{B+3}$
 $A = -5 + \frac{1}{2} \cdot 5^{B+3}$

7 a $t = 15$ geeft $l = 29 + 23 \cdot \log(15) = 56,0\dots$
 $t = 65$ geeft $l = 29 + 23 \cdot \log(65) = 70,6\dots$
De toename is $70,6\dots - 56,0\dots \approx 15$ jaar.

b $l = 29 + 23 \cdot \log(t)$
 $23 \cdot \log(t) = l - 29$
 $\log(t) = \frac{1}{23}l - \frac{29}{23}$
 $t = 10^{\frac{1}{23}l - \frac{29}{23}}$
 $t \approx 10^{0,0435l - 1,2609}$
Dus $t = 10^{0,0435l - 1,2609}$.

c $l = 76$ geeft $t = 10^{0,0435 \cdot 76 - 1,2609} \approx 111$
Dus in 2061.

Bladzijde 49

8 a ${}^3\log(5) + 2 \cdot {}^3\log(2) = {}^3\log(5) + {}^3\log(2^2) = {}^3\log(5) + {}^3\log(4) = {}^3\log(20)$

b $3 + {}^2\log(5) = {}^2\log(8) + {}^2\log(5) = {}^2\log(40)$

c ${}^3\log(27) + {}^5\log(2) = 3 + {}^5\log(2) = {}^5\log(125) + {}^5\log(2) = {}^5\log(250)$

d ${}^2\log(3) - \frac{1}{2}\log(16) = {}^2\log(3) - 4 = {}^2\log(3) + 4 = {}^2\log(3) + {}^2\log(16) = {}^2\log(48)$

9 a $y = 7,4 - 1,3 \cdot {}^2\log(5,7x)$
 $y = {}^2\log(2^{7,4}) + {}^2\log((5,7x)^{-1,3})$
 $y = {}^2\log(2^{7,4} \cdot 5,7^{-1,3} \cdot x^{-1,3})$
 $y \approx {}^2\log(17,6 \cdot x^{-1,3})$
Dus $y = {}^2\log(17,6x^{-1,3})$.

b $N = 2 \cdot {}^3\log(18t^{1,4})$
 $N = 2 \cdot ({}^3\log(18) + {}^3\log(t^{1,4}))$
 $N = 2 \cdot ({}^3\log(18) - 1,4 \cdot {}^3\log(t))$
 $N = 2 \cdot {}^3\log(18) - 2,8 \cdot {}^3\log(t)$
 $N = 2 \cdot {}^3\log(18) - 2,8 \cdot \frac{\log(t)}{\log(3)}$
 $N = 2 \cdot {}^3\log(18) - \frac{2,8}{\log(3)} \cdot \log(t)$
 $N \approx 5,26 - 5,87 \cdot \log(t)$
Dus $N = 5,26 - 5,87 \cdot \log(t)$.

10 a ${}^3\log(2x) + 4 = {}^3\log(150x + 6)$
 ${}^3\log(2x) + {}^3\log(81) = {}^3\log(150x + 6)$
 ${}^3\log(162x) = {}^3\log(150x + 6)$
 $162x = 150x + 6$
 $12x = 6$
 $x = \frac{1}{2}$

b ${}^2\log(x) = 3 - {}^2\log(x+2)$
 ${}^2\log(x) + {}^2\log(x+2) = 3$
 ${}^2\log(x(x+2)) = 3$
 $x(x+2) = 8$
 $x^2 + 2x - 8 = 0$
 $(x-2)(x+4) = 0$
 $x = 2 \vee x = -4$
vold. niet

11 a $y = {}^5\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (0, 2)} y = 2 + {}^5\log(x)$
Er geldt $2 + {}^5\log(x) = {}^5\log(25) + {}^5\log(x) = {}^5\log(25x)$.
Dus de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{25}$ levert dezelfde beeldgrafiek op.

b $y = 10^x \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 1000} y = 1000 \cdot 10^x$
 Er geldt $1000 \cdot 10^x = 10^3 \cdot 10^x = 10^{x+3}$.
 Dus de translatie $(-3, 0)$ levert dezelfde beeldgrafiek op.

12 a $N = 1000 \cdot 0,88^{3t-1}$
 $\log(N) = \log(1000 \cdot 0,88^{3t-1})$
 $\log(N) = \log(1000) + \log(0,88^{3t-1})$
 $\log(N) = 3 + (3t-1) \cdot \log(0,88)$
 $\log(N) = 3 + 3t \cdot \log(0,88) - \log(0,88)$
 $\log(N) \approx -0,17 \cdot t + 3,06$
 Dus $\log(N) = -0,17t + 3,06$.

b $y = 200x^{-3,5}$
 $\log(y) = \log(200 \cdot x^{-3,5})$
 $\log(y) = \log(200) + \log(x^{-3,5})$
 $\log(y) \approx 2,30 - 3,5 \cdot \log(x)$
 Dus $\log(y) = 2,30 - 3,5 \cdot \log(x)$.

13 a $\log(N) = 0,6t + 2,4$
 $N = 10^{0,6t+2,4}$
 $N = 10^{0,6t} \cdot 10^{2,4}$
 $N = 10^{2,4} \cdot (10^{0,6})^t$
 $N \approx 251 \cdot 3,981^t$
 Dus $N = 251 \cdot 3,981^t$.

b $2t + 2,5 \cdot \log(N) = 4$
 $2,5 \cdot \log(N) = -2t + 4$
 $\log(N) = -0,8t + 1,6$
 $N = 10^{-0,8t+1,6}$
 $N = 10^{-0,8t} \cdot 10^{1,6}$
 $N = 10^{1,6} \cdot (10^{-0,8})^t$
 $N \approx 40 \cdot 0,158^t$
 Dus $N = 40 \cdot 0,158^t$.

14 a $\log(y) = 3,20 + 0,62 \cdot \log(x)$
 $\log(y) = \log(10^{3,2}) + \log(x^{0,62})$
 $\log(y) = \log(10^{3,2} \cdot x^{0,62})$
 $y = 10^{3,2} \cdot x^{0,62}$
 $y \approx 1585 \cdot x^{0,62}$
 Dus $y = 1585x^{0,62}$.

b $1,6 \cdot \log(x) + 5 \cdot \log(y) - 8 = 0$
 $5 \cdot \log(y) = 8 - 1,6 \cdot \log(x)$
 $\log(y) = 1,6 - 0,32 \cdot \log(x)$
 $\log(y) = \log(10^{1,6}) + \log(x^{-0,32})$
 $\log(y) = \log(10^{1,6} \cdot x^{-0,32})$
 $y = 10^{1,6} \cdot x^{-0,32}$
 $y \approx 40 \cdot x^{-0,32}$
 Dus $y = 40x^{-0,32}$.

15 a $m = 10$ geeft $\log(m) = \log(10) = 1$
 Aflezen geeft: bij $\log(m) = 1$ hoort $\log(W) \approx 1,5$.
 $\log(W) = 1,5$ geeft $W = 10^{1,5}$
 Dit dier heeft $24 \cdot 10^{1,5} \approx 760$ mL drinkwater per dag nodig.

b $1 \text{ L} = 1000 \text{ mL}$
 $W = 1000$ geeft $\log(W) = \log(1000) = 3$
 Aflezen geeft: bij $\log(W) = 3$ hoort $\log(m) = 2$.
 $\log(m) = 2$ geeft $m = 10^2 = 100$
 Dit dier is 100 kg.

c De lijn gaat door de punten $(1; 1,5)$ en $(3,5; 3,5)$.
 Stel $\log(W) = a \cdot \log(m) + b$ met $a = \frac{3,5 - 1,5}{3,5 - 1} = \frac{2}{2,5} = 0,8$.
 $\log(W) = 0,8 \cdot \log(m) + b$
 door $(1; 1,5)$ $\left\{ \begin{array}{l} 0,8 \cdot 1 + b = 1,5 \\ 0,8 + b = 1,5 \\ b = 0,7 \end{array} \right.$

Dus $\log(W) = 0,8 \cdot \log(m) + 0,7$.

d $\log(W) = \log(m^{0,8}) + \log(10^{0,7})$
 $\log(W) = \log(m^{0,8} \cdot 10^{0,7})$
 $W = 10^{0,7} \cdot m^{0,8}$
 $W \approx 5 \cdot m^{0,8}$
 Dus $W = 5m^{0,8}$.

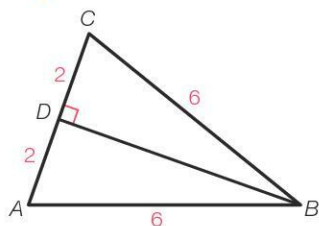
e Vervang in de formule m door $4m$.
 Dit geeft $W = 5 \cdot (4m)^{0,8}$
 $W = 5 \cdot 4^{0,8} \cdot m^{0,8}$
 $W = 4^{0,8} \cdot 5m^{0,8}$
 $W \approx 3 \cdot 5m^{0,8}$
 Dus ongeveer 3 keer zoveel.

10 Meetkundige berekeningen

Voorkennis Oppervlakte en omtrek

Bladzijde 54

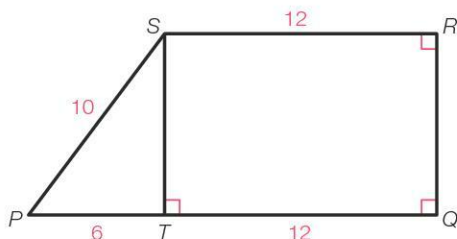
1 a



$$BD = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32}$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{32} \approx 11,31$$

b



$$ST = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

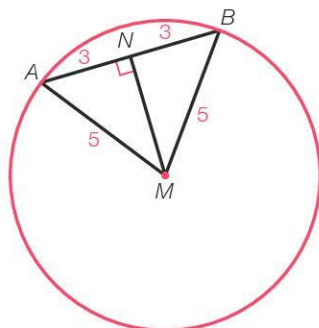
$$O(PQRS) = \frac{1}{2}(18 + 12) \cdot 8 = 120$$

2 a

langste boog $AB = \frac{360 - 73,73...}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 \approx 24,98$

b oppervlakte $= \frac{73,73...}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 \approx 16,09$

c



$$MN = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ en } O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12.$$

De gevraagde oppervlakte is $16,09 - 12 = 4,09$.

3 a

kortste boog $AB = \frac{60}{360} \cdot 2\pi \cdot 4 \approx 4,19$

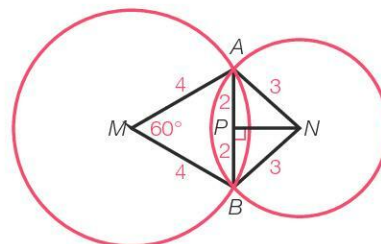
b $AM = BM$, dus $\angle MAB = \angle MBA = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.

Dus driehoek ABM is gelijkzijdig met zijde 4, dus $AB = 4$.
Zie de figuur hiernaast.

$$\sin(\angle ANP) = \frac{AP}{AN} = \frac{2}{3} \text{ geeft } \angle ANP = 41,81...^\circ$$

$$\angle ANB = 2 \cdot 41,81...^\circ = 83,62...^\circ$$

$$\text{kortste boog } AB = \frac{83,62...}{360} \cdot 2\pi \cdot 3 \approx 4,38$$



c $MP = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$ en $O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{12} = 2\sqrt{12}$.
 $NP = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ en $O(\triangle ABN) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.
 $O(\triangle AMBN) = O(\triangle ABM) + O(\triangle ABN) = 2\sqrt{12} + 2\sqrt{5} \approx 11,40$

10.1 Afstanden en hoeken

Bladzijde 55

1 I $\sin(27^\circ) = \frac{\frac{1}{2}AB}{8}$ geeft $\frac{1}{2}AB = 8 \sin(27^\circ)$, dus $AB = 16 \sin(27^\circ) \approx 7,26$.

II $\angle A = \angle B = \frac{180^\circ - 54^\circ}{2} = 63^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{AB}{\sin(\angle C)} = \frac{BC}{\sin(\angle A)}$
 $\frac{AB}{\sin(54^\circ)} = \frac{8}{\sin(63^\circ)}$
 $AB = \frac{8 \sin(54^\circ)}{\sin(63^\circ)} \approx 7,26$

III De cosinusregel geeft $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\angle C)$
 $AB^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos(54^\circ)$
 $AB^2 = 52,76...$
 $AB = \sqrt{52,76...} \approx 7,26$

Bladzijde 57

2 a $\angle C \approx 180^\circ - 40^\circ - 115,9^\circ = 24,1^\circ$
b De cosinusregel geeft $BC^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(40^\circ) = 15,03...$
 $BC \approx 3,88$

c De cosinusregel geeft $4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(\angle A)$
 $16 = 36 + 25 - 60 \cdot \cos(\angle A)$
 $60 \cos(\angle A) = 45$
 $\cos(\angle A) = 0,75$
 $\angle A \approx 41,4^\circ$

3 a De sinusregel in $\triangle ABD$ geeft $\frac{10}{\sin(\angle ADB)} = \frac{8,57...}{\sin(58^\circ)}$
 $\sin(\angle ADB) = \frac{10 \sin(58^\circ)}{8,57...}$

De GR geeft $81,29...^\circ$.

Dus $\angle ADB = 81,29...^\circ$ of $\angle ADB = 180^\circ - 81,29...^\circ = 98,70...^\circ$.

Het probleem is dat je niet weet welke de juiste is.

b In $\triangle ACD$ is $\angle D$ stomp.

Het is niet mogelijk om in een driehoek twee stompe hoeken te hebben, dus vervalt in dit geval de tweede mogelijkheid bij het berekenen van een hoek met de sinusregel.

Bladzijde 58

4 a De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $10^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos(\angle ADB)$
 $100 = 36 + 81 - 108 \cdot \cos(\angle ADB)$
 $108 \cos(\angle ADB) = 17$
 $\cos(\angle ADB) = 0,15...$
 $\angle ADB \approx 80,94^\circ$

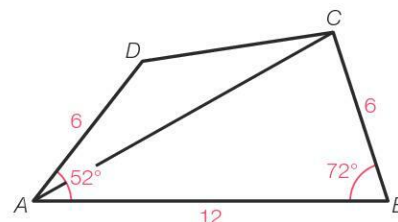
b $\angle BDC = 150^\circ - 80,94...^\circ = 69,05...^\circ$
De cosinusregel in $\triangle BDC$ geeft $BC^2 = 9^2 + 4^2 - 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot \cos(69,05...^\circ) = 71,26...$
 $BC \approx 8,4$

- 5 De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft
 $AC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos(72^\circ) = 135,5...$
 $AC = 11,64...$

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft
 $6^2 = 12^2 + 135,5... - 2 \cdot 12 \cdot 11,64... \cdot \cos(\angle BAC)$
 $36 = 279,5... - 279,3... \cdot \cos(\angle BAC)$
 $279,3... \cdot \cos(\angle BAC) = 243,5...$
 $\cos(\angle BAC) = 0,87...$
 $\angle BAC = 29,35...^\circ$

$\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC = 52^\circ - 29,35...^\circ = 22,64...^\circ$
De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft $CD^2 = 135,5... + 6^2 - 2 \cdot 11,64... \cdot 6 \cdot \cos(22,64...^\circ) = 42,58...$
 $CD \approx 6,5$

De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft $135,5... = 36 + 42,58... - 2 \cdot 6 \cdot 6,52... \cdot \cos(\angle ADC)$
 $135,5... = 78,58... - 78,30... \cdot \cos(\angle ADC)$
 $78,30... \cdot \cos(\angle ADC) = -56,91...$
 $\cos(\angle ADC) = -0,72...$
 $\angle ADC \approx 136,6^\circ$



- 6 a $\angle GFD = \angle EDF = 32^\circ$ (Z-hoeken)

De sinusregel in $\triangle DFG$ geeft $\frac{5}{\sin(32^\circ)} = \frac{3}{\sin(\angle FDG)}$
 $\sin(\angle FDG) = \frac{3 \sin(32^\circ)}{5}$

De GR geeft $18,53...^\circ$.

Dus $\angle FDG = 18,53...^\circ$.

$\angle FGD = 180^\circ - \angle DFG - \angle FDG = 180^\circ - 32^\circ - 18,53...^\circ = 129,46...^\circ$

De sinusregel in $\triangle DFG$ geeft $\frac{DF}{\sin(129,46...^\circ)} = \frac{5}{\sin(32^\circ)}$
 $DF = \frac{5 \sin(129,46...^\circ)}{\sin(32^\circ)} \approx 7,28$

Alternatieve uitwerking

$\angle GFD = \angle EDF = 32^\circ$ (Z-hoeken)

Stel $DF = x$.

De cosinusregel in $\triangle DFG$ geeft $5^2 = 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos(32^\circ)$
 $25 = 9 + x^2 - 6x \cos(32^\circ)$

Voer in $y_1 = 25$ en $y_2 = 9 + x^2 - 6x \cos(32^\circ)$.

De optie snijpunt geeft $x = 7,284...$

Dus $DF \approx 7,28$.

- b In $\triangle DFH$ is $\cos(32^\circ) = \frac{DH}{7,284...}$, dus

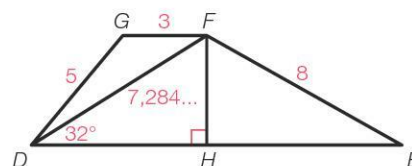
$DH = 7,284... \cdot \cos(32^\circ) = 6,17...$

In $\triangle DFH$ is $\sin(32^\circ) = \frac{FH}{7,284...}$, dus

$FH = 7,284... \cdot \sin(32^\circ) = 3,86...$

In $\triangle EFH$ is $EH = \sqrt{8^2 - 3,86...^2} = 7,00...$

$O(DEFH) = \frac{1}{2}(DE + FH) \cdot FH = \frac{1}{2}(DH + EH + FG) \cdot FH = \frac{1}{2}(6,17... + 7,00... + 3) \cdot 3,86... \approx 31,24$



- 7 De stelling van Pythagoras in $\triangle PEQ$ geeft $PQ = \sqrt{15^2 + 19^2} = 24,20...$
De cosinusregel in $\triangle KQZ$ geeft $QZ^2 = 19^2 + 42^2 - 2 \cdot 19 \cdot 42 \cdot \cos(155^\circ) = 3571,46...$
 $QZ = 59,76...$

De zadelhoogte is $PQ + QZ = 24,20... + 59,76... \approx 84$ cm.

Bladzijde 59

- 8 a** omtrek $ABCD = 2 \cdot 16,5 + 2 \cdot (11 + 5,5 + 7,32 + 5,5 + 11) = 113,64$
 $EH + GH + FG = 4 \cdot 5,5 + 7,32 = 29,32$
 $\cos(\frac{1}{2} \angle MSN) = \frac{16,5 - 11}{9,15} = \frac{5,5}{9,15}$ geeft $\frac{1}{2} \angle MSN = 53,05...^\circ$, dus $\angle MSN = 2 \cdot 53,05...^\circ = 106,10...^\circ$.
 boog $MN = \frac{106,10...}{360} \cdot 2\pi \cdot 9,15 = 16,944...$
 Hij gaat $113,64 + 29,32 + 16,944... \approx 159,90$ meter kalken.
- b** De loodrechte projectie van P op AB is punt U .
 $\tan(\angle KPU) = \frac{3}{9}$ geeft $\angle KPU = 18,4...^\circ$
 $\tan(\angle LPU) = \frac{10,32}{9}$ geeft $\angle LPU = 48,9...^\circ$
 De schothoek is $48,9...^\circ - 18,4...^\circ \approx 30^\circ$.
- c** In dat geval bevindt een speler zich midden voor het doel en is $KU = LU = 3,66$.
 $\tan(\angle KPU) = \frac{3,66}{9}$ geeft $\angle KPU = 22,1...^\circ$
 De grootste mogelijke schothoek is dan $2 \cdot 22,1...^\circ \approx 44^\circ$.
- d** De cosinusregel geeft $7,32^2 = 14,5^2 + 17^2 - 2 \cdot 14,5 \cdot 17 \cdot \cos(\angle P)$
 $53,5824 = 210,25 + 289 - 493 \cdot \cos(\angle P)$
 $493 \cdot \cos(\angle P) = 445,6676$
 $\cos(\angle P) = 0,903...$
 $\angle P = 25,3...^\circ$
 Dus de schothoek is dan 25° .

Bladzijde 60

- 9 a** Ze heeft 100 meter met een koers van 350° gevaren.
 Noem het punt vanaf waar ze haar koers bijstelt P .
 $\angle BAP = 350^\circ - 330^\circ = 20^\circ$
 De cosinusregel in $\triangle ABP$ geeft $BP^2 = 300^2 + 100^2 - 2 \cdot 300 \cdot 100 \cdot \cos(20^\circ) = 43618,44...$
 $BP = 208,85...$
 Maaïke heeft dus $100 + 208,85... - 300 \approx 9$ meter extra afgelegd.
- b** $\angle BCT = 180^\circ - \angle TCU = 180^\circ - 4,6^\circ = 175,4^\circ$
 $\angle BTC = 180^\circ - \angle CBT - \angle BCT = 180^\circ - 2,7^\circ - 175,4^\circ = 1,9^\circ$
 De sinusregel in $\triangle BCT$ geeft $\frac{CT}{\sin(2,7^\circ)} = \frac{500}{\sin(1,9^\circ)}$
 $CT = \frac{500 \sin(2,7^\circ)}{\sin(1,9^\circ)} = 710,39...$
 In $\triangle CUT$ is $\sin(4,6^\circ) = \frac{TU}{710,39...}$, dus $TU = 710,39... \cdot \sin(4,6^\circ) = 56,97...$
 Dus de gevraagde hoogte van T ten opzichte van het water is 59 meter.

Alternatieve uitwerking

Stel $CU = x$.

In driehoek CUT is $\tan(4,6^\circ) = \frac{TU}{x}$, dus $TU = x \tan(4,6^\circ)$.

In driehoek BUT is $\tan(2,7^\circ) = \frac{TU}{x + 500}$, dus $TU = (x + 500) \tan(2,7^\circ)$.

Hieruit volgt $x \tan(4,6^\circ) = (x + 500) \tan(2,7^\circ)$.

Voer in $y_1 = x \tan(4,6^\circ)$ en $y_2 = (x + 500) \tan(2,7^\circ)$.

De optie snijpunt geeft $x = 708,10...$ en $y = 56,97...$

Dus $TU = 56,97...$ en de gevraagde hoogte van T ten opzichte van het water is 59 meter.

- 10** Teken AC .
 De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft
 $AC = \sqrt{2140^2 + 780^2} = 2277,7\dots$
 $\tan(\angle BAC) = \frac{780}{2140}$ geeft $\angle BAC = 20,02\dots^\circ$

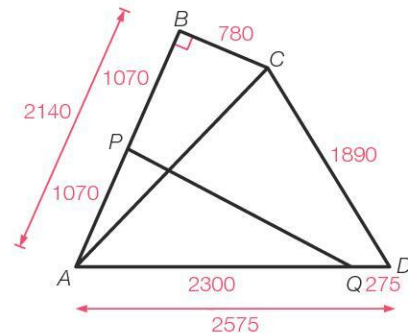
De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft
 $1890^2 = 2277,7\dots^2 + 2575^2 - 2 \cdot 2277,7\dots \cdot 2575 \cdot \cos(\angle CAD)$
 $11\,730\,248,5\dots \cdot \cos(\angle CAD) = 8\,246\,525$
 $\cos(\angle CAD) = 0,703\dots$
 $\angle CAD = 45,33\dots^\circ$
 $\angle PAQ = 20,02\dots^\circ + 45,33\dots^\circ = 65,35\dots^\circ$
 $AQ = AD - DQ = 2575 - 275 = 2300$

De cosinusregel in $\triangle APQ$ geeft
 $PQ^2 = 1070^2 + 2300^2 - 2 \cdot 1070 \cdot 2300 \cdot \cos(65,35\dots^\circ) = 4382\,591,89\dots$
 $PQ = 2093,46\dots$

De normale route is $2140 + 780 + 1890 = 4810$ meter.

De ingekorte route is $1070 + 2093,46\dots + 275 = 3438,46\dots$ meter.

Het verschil is $4810 - 3438,46\dots \approx 1372$ meter.



10.2 Vergelijkingen bij meetkunde

Bladzijde 62

- 11** Omdat je AB niet weet.

Bladzijde 63

- 12 a** $\angle A$ (in $\triangle ADE$) = $\angle A$ (in $\triangle ABC$) en $\angle ADE = \angle ABC$ (F-hoeken), dus $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

- b** $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ geeft $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ oftewel $\frac{AE}{10,2} = \frac{4}{5}$, dus $AE = \frac{4 \cdot 10,2}{5} = 8,16$.

Dus $CE = 10,2 - 8,16 = 2,04$.

- 13** $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ geeft $\frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$

Stel $BE = x$, dan is $BC = x + 6$.

$$\begin{array}{r|l} x & 12,5 \\ x+6 & 20 \end{array} \text{ geeft } 20x = 12,5(x+6)$$

$$20x = 12,5x + 75$$

$$7,5x = 75$$

$$x = 10$$

Dus $BE = 10$ en $BC = 16$.

$$BD = \sqrt{12,5^2 - 10^2} = 7,5 \text{ en } AB = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12.$$

Dus $AD = 12 - 7,5 = 4,5$.

- 14** $\triangle PQR \sim \triangle TQS$ geeft $\frac{PQ}{QT} = \frac{QR}{QS}$

Stel $QT = x$, dan is $QR = x + 4$.

$$\begin{array}{r|l} 32 & x+4 \\ x & 15 \end{array} \text{ geeft } x(x+4) = 15 \cdot 32$$

$$x^2 + 4x = 480$$

$$x^2 + 4x - 480 = 0$$

$$(x-20)(x+24) = 0$$

$$x = 20 \vee x = -24 \text{ (vold. niet)}$$

Dus $QT = 20$.

$$\triangle PQR \sim \triangle TQS \text{ geeft } \frac{PQ}{QT} = \frac{PR}{ST} \text{ oftewel } \frac{32}{20} = \frac{16}{ST}, \text{ dus } ST = \frac{16 \cdot 20}{32} = 10.$$

$$CD = 9 - 5 = 4$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DEC \text{ geeft } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CD} \text{ oftewel } \frac{12}{DE} = \frac{9}{4}, \text{ dus } DE = \frac{4 \cdot 12}{9} = 5\frac{1}{3}.$$

$$\triangle ABS \sim \triangle EDS \text{ geeft } \frac{AB}{DE} = \frac{BS}{DS}$$

$$BD = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

Stel $BS = x$, dan is $DS = 13 - x$.

$$\begin{array}{c|c} 12 & x \\ \hline 5\frac{1}{3} & 13-x \end{array} \text{ geeft } 5\frac{1}{3}x = 12(13-x)$$

$$5\frac{1}{3}x = 156 - 12x$$

$$17\frac{1}{3}x = 156$$

$$x = 9$$

Dus $BS = 9$.

16 Stel $BC = x$, dan is $CD = 12 - x$.

Stel $AC = v$, dan is $CE = 10,4 - v$.

$$\triangle ABC \sim \triangle DEC \text{ geeft } \frac{AB}{DE} \mid \frac{AC}{CD} \mid \frac{BC}{CE} \text{ oftewel } \frac{4}{7,2} \mid \frac{y}{12-x} \mid \frac{x}{10,4-y}.$$

Uit $\frac{4}{7,2} \mid \frac{y}{12-x}$ volgt $4(12-x) = 7,2y$
 $12-x = 1,8y$
 $x = 12 - 1,8y$

Uit $\frac{4}{7,2} \mid \frac{x}{10,4 - y}$ en $x = 12 - 1,8y$ volgt $\frac{4}{7,2} \mid \frac{12 - 1,8y}{10,4 - y}$

$$4(10,4 - y) = 7,2(12 - 1,8y)$$

$$41,6 - 4y = 86,4 - 12,96y$$

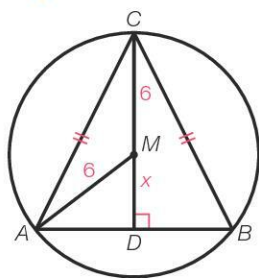
$$8,96y = 44,8$$

$\nu = 5$

Dus $BC = x = 12 - 1,8 \cdot 5 = 3$.

Bladzijde 64

17 a



$$\mathbf{b} \quad AB = CD = DM + CM = x + 6$$

$$AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}x + 3$$

c De stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ geeft $AD^2 + DM^2 = AM^2$

$$(\frac{1}{2}x + 3)^2 + x^2 = 6^2$$

$$\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 + x^2 = 36$$

$$1\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$$

d $1\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$

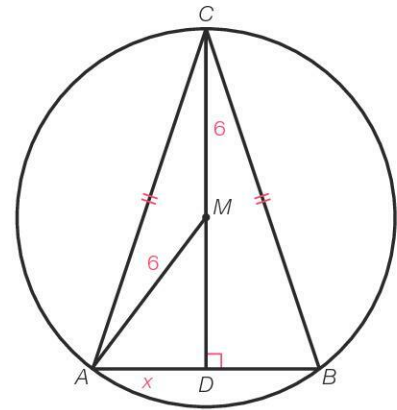
$$5x^2 + 12x - 108 = 0$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 5 \cdot -108 = 2304, \text{ dus } \sqrt{D} = 48$$

$$x = \frac{-12 + 48}{10} = 3\frac{3}{5} \vee x = \frac{-12 - 48}{10} = -6 \text{ (vold. niet)}$$

$$AB = x + 6 = 9\frac{3}{5}$$

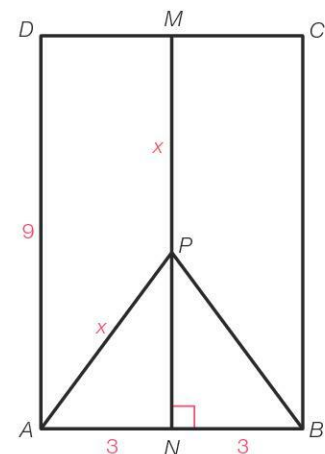
- 18** Zie de figuur hiernaast.
 M is het middelpunt van de cirkel.
 Dus $AM = CM = 6$.
 Stel $AD = x$, dan is $AB = 2x$, $CD = 3x$ en $DM = 3x - 6$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ geeft
 $AD^2 + DM^2 = AM^2$
 $x^2 + (3x - 6)^2 = 6^2$
 $x^2 + 9x^2 - 36x + 36 = 36$
 $10x^2 - 36x = 0$
 $2x(5x - 18) = 0$
 $2x = 0 \vee 5x = 18$
 $x = 0 \vee x = 3\frac{3}{5}$
 Dus $AB = 2 \cdot 3\frac{3}{5} = 7\frac{1}{5}$.



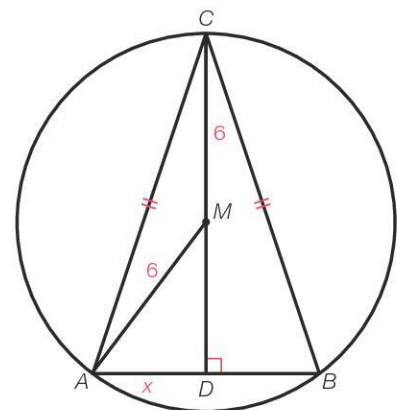
Bladzijde 65

- 19** Verleng MP . Zie de figuur hiernaast.
 Stel $AP = x$. Dan is $MP = x$ en $NP = MN - MP = 9 - x$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle ANP$ geeft $AN^2 + NP^2 = AP^2$
 $3^2 + (9 - x)^2 = x^2$
 $9 + 81 - 18x + x^2 = x^2$
 $-18x = -90$
 $x = 5$

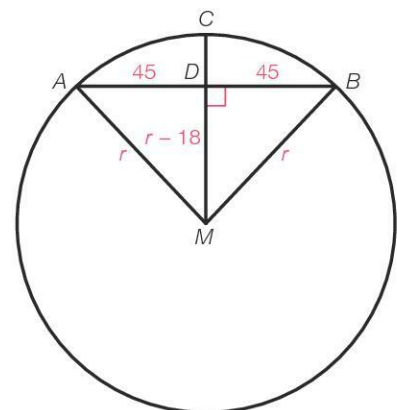
Dus $AP = 5$.



- 20** Zie de figuur hiernaast. Hierin is M het middelpunt van de cirkel.
 Stel $AD = x$. Dan is $AC = 1\frac{1}{2}AB = 1\frac{1}{2} \cdot 2x = 3x$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft
 $AD^2 + CD^2 = AC^2$
 $x^2 + CD^2 = (3x)^2$
 $CD^2 = 9x^2 - x^2$
 $CD^2 = 8x^2$
 $CD = \sqrt{8x^2} = 2x\sqrt{2}$
 $DM = CD - CM = 2x\sqrt{2} - 6$
 De stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ geeft
 $AD^2 + DM^2 = AM^2$
 $x^2 + (2x\sqrt{2} - 6)^2 = 6^2$
 Voer in $y_1 = x^2 + (2x\sqrt{2} - 6)^2$ en $y_2 = 36$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3,771...$
 Dus $AB = 2x = 2 \cdot 3,771... \approx 7,54$.



- 21** Zie de figuur hiernaast.
 Stel de straal van de cirkel r .
 Dan is $MD = r - 18$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ geeft
 $AD^2 + DM^2 = AM^2$
 $45^2 + (r - 18)^2 = r^2$
 $2025 + r^2 - 36r + 324 = r^2$
 $-36r = -2349$
 $r = 65\frac{1}{4}$
 Dus de gevraagde straal is 65 cm.



Bladzijde 66

- 22 Zie de figuur hiernaast.
Stel $AP = DP = PQ = BQ = CQ = x$.

$$PR = \frac{13-x}{2} = 6\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle APR$ geeft

$$PR^2 + AR^2 = AP^2$$

$$(6\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x)^2 + 3^2 = x^2$$

$$42\frac{1}{4} - 6\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + 9 = x^2$$

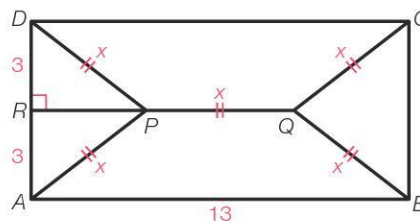
$$\frac{3}{4}x^2 + 6\frac{1}{2}x - 51\frac{1}{4} = 0$$

$$3x^2 + 26x - 205 = 0$$

$$D = 26^2 - 4 \cdot 3 \cdot -205 = 3136, \text{ dus } \sqrt{D} = 56$$

$$x = \frac{-26 + 56}{6} = 5 \vee x = \frac{-26 - 56}{6} = -13\frac{2}{3} \text{ (vold. niet)}$$

Dus $AP = 5$.



- 23 Zie de figuur hiernaast.
 M is het middelpunt van de cirkels.
Stel de breedte van het vlot is x , dan is de breedte van de gracht $2x$.
Er geldt $MR = x + 37$ en $MP = 2x + 37$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle MPR$ geeft

$$PR^2 + MR^2 = MP^2$$

$$28^2 + (x + 37)^2 = (2x + 37)^2$$

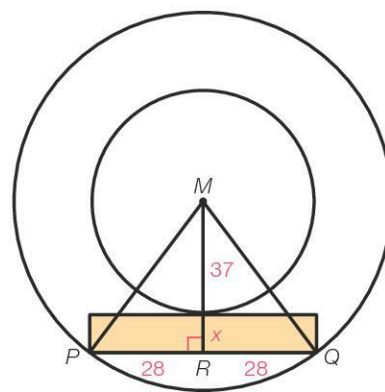
$$784 + x^2 + 74x + 1369 = 4x^2 + 148x + 1369$$

$$-3x^2 - 74x + 784 = 0$$

$$D = (-74)^2 - 4 \cdot -3 \cdot 784 = 14884, \text{ dus } \sqrt{D} = 122$$

$$x = \frac{74 + 122}{-6} = -32\frac{2}{3} \text{ (vold. niet)} \vee x = \frac{74 - 122}{-6} = 8$$

Dus de gracht is $2x = 2 \cdot 8 = 16$ meter breed.



- 24 Stel $BN = x$, dan is $AN = CN = 16 - x$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ABN$ geeft $AB^2 + BN^2 = AN^2$
- $$4^2 + x^2 = (16 - x)^2$$
- $$16 + x^2 = 256 - 32x + x^2$$
- $$32x = 240$$
- $$x = 7\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } BN = 7\frac{1}{2} \text{ en } AN = 16 - 7\frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}.$$

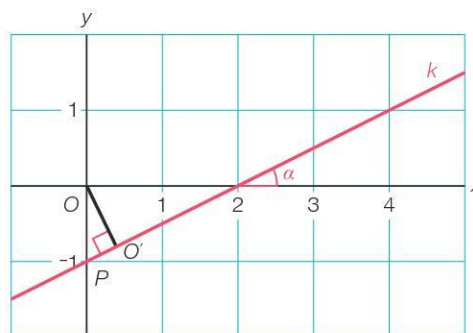
$$\text{Verder is } AD' = CD = 4 \text{ en } D'M = 7\frac{1}{2}.$$

$$O(ABNMD') = O(\triangle ABN) + O(\triangle ANMD') = \frac{1}{2} \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} (8\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2}) \cdot 4 = 47$$

10.3 Lijnen en cirkels in een assenstelsel

Bladzijde 68

- 25 a $\tan(\text{hoek}) = \frac{1}{2}$ geeft hoek $\approx 26,6^\circ$
b Noem het snijpunt van k met de y -as P .
De afstand van O tot k is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen O en de loodrechte projectie O' van O op k .
Teken je OO' , dan ontstaat de rechthoekige driehoek $OO'P$ waarvan OO' een rechthoekszijde is en OP de schuine zijde.
Dus $OO' < OP$, met $OP = 1$.
Dus de afstand van de oorsprong tot k is kleiner dan 1.



26 k snijden met l geeft

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - 3y = -3 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 3y = 12 \\ x - 3y = -3 \end{cases} -$$

$$\begin{array}{r} 5x = 15 \\ x = 3 \\ 2x - y = 4 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3 - y = 4 \\ 6 - y = 4 \\ y = 2 \end{array}$$

Dus $S(3, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} n: x + 2y = c \\ \text{door } A(5, 6) \end{array} \right\} c = 5 + 2 \cdot 6 = 17$$

Dus $n: x + 2y = 17$. n snijden met l geeft

$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ x + 2y = 17 \end{cases} -$$

$$\begin{array}{r} -5y = -20 \\ y = 4 \\ x + 2y = 17 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 2 \cdot 4 = 17 \\ x + 8 = 17 \\ x = 9 \end{array}$$

Dus $T(9, 4)$.

$$d(S, T) = \sqrt{(9-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

27 a $k: 2x - 5y = -7$

$$-5y = -2x - 7$$

$$y = \frac{2}{5}x + 1\frac{2}{5}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{5} \text{ geeft } \alpha = 21,80...^\circ$$

$$l: x + 3y = 2$$

$$3y = -x + 2$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\tan(\beta) = -\frac{1}{3} \text{ geeft } \beta = -18,43...^\circ$$

De hoek tussen k en l is $21,80...^\circ - (-18,43...^\circ) \approx 40,2^\circ$.**b** k snijden met l geeft

$$\begin{cases} 2x - 5y = -7 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 15y = -21 \\ 5x + 15y = 10 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 11x = -11 \\ x = -1 \\ x + 3y = 2 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 + 3y = 2 \\ 3y = 3 \\ y = 1 \end{array}$$

Dus $A(-1, 1)$.

$$d(A, B) = \sqrt{(4-(-1))^2 + (3-1)^2} = \sqrt{29}$$

c Lijn m door B loodrecht op l .

$$\left. \begin{array}{l} m: 3x - y = c \\ \text{door } B(4, 3) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 4 - 3 = 9$$

 $m: 3x - y = 9$ snijden met l geeft het punt C .

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 9x - 3y = 27 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 10x = 29 \\ x = 2\frac{9}{10} \\ x + 3y = 2 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\frac{9}{10} + 3y = 2 \\ 3y = -\frac{9}{10} \\ y = -\frac{3}{10} \end{array}$$

Dus $C(2\frac{9}{10}, -\frac{3}{10})$.

$$d(B, l) = d(B, C) = \sqrt{(2\frac{9}{10} - 4)^2 + (-\frac{3}{10} - 3)^2} = \sqrt{12\frac{1}{10}}$$

$$28 \quad a \quad \left. \begin{aligned} rc_{OC} &= \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2} \\ rc_{BC} &= \frac{1-3}{5-2} = -\frac{2}{3} \end{aligned} \right\} rc_{OC} \cdot rc_{BC} = \frac{3}{2} \cdot -\frac{2}{3} = -1$$

Dus $\angle OCB = 90^\circ$.

$$b \quad rc_{OA} = \frac{-1-0}{3-0} = -\frac{1}{3}$$

$\tan(\alpha) = -\frac{1}{3}$ geeft $\alpha = -18,43\dots^\circ$

$$rc_{AB} = \frac{1-1}{5-3} = 1$$

$\tan(\beta) = 1$ geeft $\beta = 45^\circ$

De hoek tussen de lijn door O en A en de lijn door A en B is $45^\circ - (-18,43\dots^\circ) = 63,43\dots^\circ$.

$\angle OAB$ is stomp, dus $\angle OAB = 180^\circ - 63,43\dots^\circ \approx 116,6^\circ$.

$$c \quad \text{Stel } AB: y = ax + b \text{ met } a = \frac{1-1}{5-3} = 1.$$

$$\left. \begin{aligned} y &= x + b \\ \text{door } A(3, -1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3 + b &= -1 \\ b &= -4 \end{aligned}$$

Dus $AB: y = x - 4$.

Lijn l door C loodrecht op AB .

$$\left. \begin{aligned} l: y &= -x + b \\ \text{door } C(2, 3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -2 + b &= 3 \\ b &= 5 \end{aligned}$$

Dus $l: y = -x + 5$.

l snijden met AB geeft het punt D .

$$x - 4 = -x + 5$$

$$2x = 9$$

$$x = 4\frac{1}{2}$$

$$x = 4\frac{1}{2} \text{ geeft } y = \frac{1}{2}, \text{ dus } D(4\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

$$d(C, AB) = d(C, D) = \sqrt{(4\frac{1}{2} - 2)^2 + (\frac{1}{2} - 3)^2} = \sqrt{12\frac{1}{2}} \approx 3,54$$

$$29 \quad a \quad rc_{AP} = \frac{0 - 2\frac{1}{2}}{6 - 3\frac{1}{2}} = -1$$

$$\tan(\alpha) = -1 \text{ geeft } \alpha = -45^\circ$$

$$rc_{BP} = \frac{6 - 2\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}$$

$$\tan(\beta) = 3\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = 74,05\dots^\circ$$

$$\beta - \alpha = 74,05\dots^\circ - (-45^\circ) = 119,05\dots^\circ$$

$\angle APB$ is stomp, dus $\angle APB = 119,05\dots^\circ$.

$$rc_{CP} = \frac{2\frac{1}{2} - 2}{3\frac{1}{2} - 0} = \frac{1}{7}$$

$$\tan(\gamma) = \frac{1}{7} \text{ geeft } \gamma = 8,13\dots^\circ$$

$$\gamma - \alpha = 8,13\dots^\circ - (-45^\circ) = 53,13\dots^\circ$$

$$\angle APC \text{ is stomp, dus } \angle APC = 180^\circ - 53,13\dots^\circ = 126,86\dots^\circ$$

$$\angle BPC = 360^\circ - \angle APB - \angle APC = 360^\circ - 119,05\dots^\circ - 126,86\dots^\circ = 114,07\dots^\circ$$

Dus $\angle APC$ is de grootste hoek.

$$b \quad d(P, A) = \sqrt{(6 - 3\frac{1}{2})^2 + (0 - 2\frac{1}{2})^2} = \sqrt{12\frac{1}{2}} = 3,535\dots$$

$$\text{Stel } AC: y = ax + b \text{ met } a = \frac{0-2}{6-0} = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Door } C(0, 2), \text{ dus } AC: y = -\frac{1}{3}x + 2.$$

Lijn k door P loodrecht op AC .

$$\left. \begin{aligned} k: y &= 3x + b \\ \text{door } P(3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3 \cdot 3\frac{1}{2} + b &= 2\frac{1}{2} \\ 10\frac{1}{2} + b &= 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$b = -8$$

Dus $k: y = 3x - 8$.

k snijden met AC geeft het punt D .

$$3x - 8 = -\frac{1}{3}x + 2$$

$$3\frac{1}{3}x = 10$$

$$x = 3$$

$x = 3$ geeft $y = 1$, dus $D(3, 1)$.

$$d(P, AC) = d(P, D) = \sqrt{(3\frac{1}{2} - 3)^2 + (2\frac{1}{2} - 1)^2} = \sqrt{2\frac{1}{2}} = 1,581...$$

$2 \cdot d(P, AC) = 2 \cdot 1,581... = 3,162...$ en dit is niet gelijk aan $d(P, A) = 3,535...$

Dus $d(P, A) \neq 2 \cdot d(P, AC)$.

Alternatieve uitwerking

De loodlijn uit P op AC snijdt AC in het punt D .

$$rc_{AC} = \frac{0 - 2}{6 - 0} = -\frac{1}{3}$$

$$\tan(\alpha) = -\frac{1}{3} \text{ geeft } \alpha = -18,43...^\circ$$

$$rc_{AP} = -1$$

$$\tan(\beta) = -1 \text{ geeft } \beta = -45^\circ$$

$$\alpha - \beta = -18,43...^\circ - -45^\circ = 26,56...^\circ$$

Dus $\angle PAD = 26,56...^\circ$.

$$\text{In } \triangle APD \text{ is } \sin(26,56...^\circ) = \frac{d(P, AC)}{d(P, A)}.$$

$$\text{Dit geeft } d(P, A) = \frac{d(P, AC)}{\sin(26,56...^\circ)} = \frac{d(P, AC)}{0,447...} = 2,23... \cdot d(P, AC).$$

Dus $d(P, A) \neq 2 \cdot d(P, AC)$.

30 a $rc_{PR} = \frac{6 - 3}{9 - 0} = \frac{1}{3}$

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{3} \text{ geeft } \alpha = 18,43...^\circ$$

$$rc_{ST} = \frac{4 - 6}{10 - 2} = -\frac{1}{4}$$

$$\tan(\beta) = -\frac{1}{4} \text{ geeft } \beta = -14,03...^\circ$$

$$\alpha - \beta = 18,43...^\circ - -14,03...^\circ = 32,47...^\circ$$

Dus de hoek tussen de routes is $32,5^\circ$.

b $rc_{PR} = \frac{1}{3}$ en $P(0, 3)$ geeft $PR: y = \frac{1}{3}x + 3$.

$$rc_{FE} = \frac{3 - 2}{7 - 3} = \frac{1}{4}$$

$rc_{FE} < rc_{PR}$, dus het punt F ligt het dichtst bij de route van schip I.

$rc_{PR} = \frac{1}{3}$, dus van de lijn k door F loodrecht op route PR is $rc_k = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } F(3, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 3 + b = 2 \\ -9 + b = 2 \\ b = 11 \end{array}$$

Dus $k: y = -3x + 11$.

k snijden met PR geeft het punt G .

$$\frac{1}{3}x + 3 = -3x + 11$$

$$3\frac{1}{3}x = 8$$

$$x = 2\frac{2}{5}$$

$$x = 2\frac{2}{5} \text{ geeft } y = \frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{5} + 3 = 3\frac{4}{5}, \text{ dus } G(2\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5}).$$

$$d(F, \text{route I}) = d(F, G) = \sqrt{(2\frac{2}{5} - 3)^2 + (3\frac{4}{5} - 2)^2} = \sqrt{3\frac{3}{5}} = 1,89...$$

De afstand is korter dan de voorgeschreven minimale afstand van 200 meter.

Route I voldoet dus niet aan de eis.

31 $A(0, 4)$ ligt op k .

Lijn m door A loodrecht op l .

$$m: 2x - y = c \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } A(0, 4) \end{array} \right\} c = 2 \cdot 0 - 4 = -4$$

$m: 2x - y = -4$ snijden met l geeft het punt B .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 13 \\ 2x - y = -4 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 13 \\ 4x - 2y = -8 \end{array} \right. + \frac{5x = 5}{5x = 5} + \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ x + 2y = 13 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 + 2y = 13 \\ 2y = 12 \\ y = 6 \end{array}$$

Dus $B(1, 6)$.

$$d(k, l) = d(A, l) = d(A, B) = \sqrt{(1-0)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{5}$$

Bladzijde 71

32 a $\text{rc}_{k_1} = 3$, dus $\tan(\alpha) = 3$ geeft $\alpha = 71,56\dots^\circ$

$\text{rc}_{k_3} = 1$, dus $\tan(\beta) = 1$ geeft $\alpha = 45^\circ$.

$$\angle(k_1, k_3) = 71,56\dots^\circ - 45^\circ = 26,56\dots^\circ$$

$\text{rc}_{k_9} = \frac{1}{3}$, dus $\tan(\gamma) = \frac{1}{3}$ geeft $\gamma = 18,43\dots^\circ$

$$\angle(k_3, k_9) = 45^\circ - 18,43\dots^\circ = 26,56\dots^\circ$$

Dus Maud heeft gelijk.

b $\text{rc}_{k_4} = \frac{3}{4}$, dus $\text{rc}_{\text{loodlijn}} = -1\frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{loodlijn: } y = -1\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(4, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{3} \cdot 4 + b = 6 \\ -5\frac{1}{3} + b = 6 \\ b = 11\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus loodlijn: $y = -1\frac{1}{3}x + 11\frac{1}{3}$.

k_4 snijden met de loodlijn geeft $\frac{3}{4}x = -1\frac{1}{3}x + 11\frac{1}{3}$

$$2\frac{1}{12}x = 11\frac{1}{3}$$

$$x = 5\frac{11}{25}$$

$$x = 5\frac{11}{25} \text{ geeft } y = \frac{3}{4} \cdot 5\frac{11}{25} = 4\frac{2}{25}$$

$$d(A, k_4) = d(A, (5\frac{11}{25}, 4\frac{2}{25})) = \sqrt{(5\frac{11}{25} - 4)^2 + (4\frac{2}{25} - 6)^2} = 2\frac{2}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2\frac{1}{2} \cdot d(A, k_4) = 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{5} = 6 \\ d(A, x\text{-as}) = 6 \end{array} \right\} \text{Ischa heeft dus gelijk.}$$

c $\tan(\alpha) < \tan(10^\circ)$

$$\frac{3}{a} < \tan(10^\circ)$$

Voer in $y_1 = \frac{3}{x}$ en $y_2 = \tan(10^\circ)$.

De optie snijpunt geeft $x = 17,013\dots$

Dus vanaf $a = 18$ maakt k_a een hoek met de x -as die kleiner is dan 10° .

33 a $f(-2) = -\frac{1}{3} \cdot -8 - \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 + 1 = -\frac{1}{3}$, dus $A(-2, -\frac{1}{3})$.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \text{ geeft } f'(x) = -x^2 - x + 1$$

$$\text{rc}_k = f'(-2) = -4 + 2 + 1 = -1$$

$$\text{rc}_l = -1, \text{ dus } f'(x) = -1$$

$$-x^2 - x + 1 = -1$$

$$-x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x-1)(x+2) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -2$$

$$f(1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 + 1 = 1\frac{1}{6}, \text{ dus } B(1, 1\frac{1}{6}).$$

$$d(A, B) = \sqrt{(1-(-2))^2 + (1\frac{1}{6} - (-\frac{1}{3}))^2} = \sqrt{11\frac{1}{4}}$$

b $rc_{AO} = \frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$
 $\tan(\alpha) = \frac{1}{6}$ geeft $\alpha = 9,46\dots^\circ$
 $rc_{OB} = \frac{1\frac{1}{6}}{1} = 1\frac{1}{6}$
 $\tan(\beta) = 1\frac{1}{6}$ geeft $\beta = 49,39\dots^\circ$
 $49,39\dots^\circ - 9,46\dots^\circ = 39,93\dots^\circ$
Dus $\angle AOB = 180^\circ - 39,93\dots^\circ \approx 140,1^\circ$.

Alternatieve uitwerking

$$AO^2 = (-2 - 0)^2 + (-\frac{1}{3} - 0)^2 = 4\frac{1}{9}$$

$$BO^2 = (1 - 0)^2 + (1\frac{1}{6} - 0)^2 = 2\frac{13}{36}$$

De cosinusregel in $\triangle ABO$ geeft $11\frac{1}{4} = 4\frac{1}{9} + 2\frac{13}{36} - 2 \cdot \sqrt{4\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{2\frac{13}{36}} \cdot \cos(\angle AOB)$

$$6,23\dots \cdot \cos(\angle AOB) = -4,77\dots$$

$$\cos(\angle AOB) = -0,76\dots$$

$$\angle AOB \approx 140,1^\circ$$

c $k: y = -x + b$
door $A(-2, -\frac{1}{3})$ $\left. \begin{array}{l} 2 + b = -\frac{1}{3} \\ b = -2\frac{1}{3} \end{array} \right\}$

Dus $k: y = -x - 2\frac{1}{3}$.

Lijn m door B loodrecht op k .

$m: y = x + b$
door $B(1, 1\frac{1}{6})$ $\left. \begin{array}{l} 1 + b = 1\frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{6} \end{array} \right\}$

Dus $m: y = x + \frac{1}{6}$.

m snijden met k geeft het punt C .

$$x + \frac{1}{6} = -x - 2\frac{1}{3}$$

$$2x = -2\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -1\frac{1}{4} \\ y = x + \frac{1}{6} \end{array} \right\} y = -1\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = -1\frac{1}{12}$$

Dus $C(-1\frac{1}{4}, -1\frac{1}{12})$.

$$d(k, l) = d(B, k) = d(B, C) = \sqrt{(-1\frac{1}{4} - 1)^2 + (-1\frac{1}{12} - 1\frac{1}{6})^2} = \sqrt{(-2\frac{1}{4})^2 + (-2\frac{1}{4})^2} = 2\frac{1}{4}\sqrt{2}$$

34 a $r = \sqrt{36} = 6$ en $M(3, 4)$

b $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$$

Dus $a = -6$, $b = -8$ en $c = -11$.

Bladzijde 72

35 a $x = 2$ en $y = 0$ invullen in de cirkelvergelijking geeft $(2 - 2)^2 + (0 + 4)^2 = 16$ klopt.

Dus $A(2, 0)$ ligt op c .

b $d(B, M) = \sqrt{(2 - -2)^2 + (-4 - -3)^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$

$$r = 4$$

$\sqrt{17} > 4$, dus $d(B, M) > r$, dus B ligt buiten c .

c $d(C, M) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (-4 - -1)^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

$d(C, M) < r$, dus C ligt binnen c .

36 a $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 10 = 0$

$$x^2 - 8x + y^2 - 2y + 10 = 0$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 + 10 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 7$$

Dus de straal is $\sqrt{7}$ en het middelpunt is $(4, 1)$.

$$\begin{aligned} \text{b } x^2 + y^2 + 6x - 5y + 13 &= 0 \\ x^2 + 6x + y^2 - 5y + 13 &= 0 \\ (x+3)^2 - 9 + (y-2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + 13 &= 0 \\ (x+3)^2 + (y-2\frac{1}{2})^2 &= 2\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dus de straal is $1\frac{1}{2}$ en het middelpunt is $(-3, 2\frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned} \text{c } x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 &= 0 \\ x^2 - 9x + y^2 - 3y + 10 &= 0 \\ (x-4\frac{1}{2})^2 - 20\frac{1}{4} + (y-1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 10 &= 0 \\ (x-4\frac{1}{2})^2 + (y-1\frac{1}{2})^2 &= 12\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus de straal is $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ en het middelpunt is $(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.

37 a $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 6 = 0$
 $(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 6 = 0$
 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$
 Cirkel met middelpunt $M(3, 1)$ en straal $r = 2$.
 $d(A, M) = \sqrt{(3-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$
 $d(A, M) < r$, dus A ligt binnen c_1 .

b $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 21 = 0$
 $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 21 = 0$
 $(x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 - 21 = 0$
 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 26$
 Cirkel met middelpunt $M(-1, 2)$ en straal $r = \sqrt{26}$.
 $d(B, M) = \sqrt{(-1-4)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$
 $d(B, M) = r$, dus B ligt op c_2 .

c $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 23$
 $x^2 - 2x + y^2 - 8y = 23$
 $(x-1)^2 - 1 + (y-4)^2 - 16 = 23$
 $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 40$
 Cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal $r = \sqrt{40}$.
 $d(C, M) = \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{45}$
 $d(C, M) > r$, dus C ligt buiten c_3 .

38 a $(x-6)^2 + (y-3)^2 = r^2$ } $r^2 = (0-6)^2 + (0-3)^2 = 45$
 door $O(0, 0)$
 $c_1: (x-6)^2 + (y-3)^2 = 45$
 $x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = 45$
 $x^2 + y^2 - 12x - 6y = 0$

b $(x+3)^2 + (y-5)^2 = r^2$ } $r^2 = (0+3)^2 + (3-5)^2 = 13$
 door $(0, 3)$
 $c_2: (x+3)^2 + (y-5)^2 = 13$
 $x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 13$
 $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 21 = 0$

c Middellijn AB met $A(2, 0)$ en $B(8, 0)$ geeft middelpunt $M(5, 0)$ en straal $r = 3$.
 $c_3: (x-5)^2 + y^2 = 9$
 $x^2 - 10x + 25 + y^2 = 9$
 $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$

d Middellijn CD met $C(1, 2)$ en $D(7, 4)$ geeft middelpunt $M(4, 3)$ en straal
 $r = d(C, M) = \sqrt{(4-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$.
 $c_4: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 10$
 $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 10$
 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$

39

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \quad & x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0 \\ & x^2 - 10x + y^2 - 6y + 24 = 0 \\ & (x-5)^2 - 25 + (y-3)^2 - 9 + 24 = 0 \\ & (x-5)^2 + (y-3)^2 = 10 \end{aligned}$$

Cirkel met middelpunt $M(5, 3)$.

$$d(M, x\text{-as}) = 3$$

$$\mathbf{b} \quad d(M, y\text{-as}) = 5$$

$\mathbf{c}$ De lijn m gaat door M en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -x + b \\ \text{door } M(5, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -5 + b = 3 \\ b = 8 \end{array}$$

$$\text{Dus } m: y = -x + 8.$$

m snijden met k geeft $x = -x + 8$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$x = 4 \text{ geeft } y = 4$$

Dus m snijdt k in het punt $S(4, 4)$.

$$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(4-5)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$$

$\mathbf{d}$ De lijn n gaat door M en staat loodrecht op l .

$$\left. \begin{array}{l} n: 3x - y = c \\ \text{door } M(5, 3) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 5 - 3 = 12$$

$$\text{Dus } n: 3x - y = 12.$$

n snijden met l geeft het punt T .

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 12 \\ x + 3y = 6 \end{array} \right. \begin{array}{l} | 3 \\ | 1 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 9x - 3y = 36 \\ x + 3y = 6 \end{array} \right. +$$

$$10x = 42$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 4\frac{1}{5} \\ x + 3y = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4\frac{1}{5} + 3y = 6 \\ 3y = 1\frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{array}$$

$$\text{Dus } T(4\frac{1}{5}, \frac{3}{5}).$$

$$d(M, l) = d(M, T) = \sqrt{(4\frac{1}{5} - 5)^2 + (\frac{3}{5} - 3)^2} = \sqrt{6\frac{2}{5}}$$

40

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \quad & x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12 \\ & x^2 + 4x + y^2 - 6y = 12 \\ & (x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 = 12 \\ & (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25 \end{aligned}$$

Cirkel met middelpunt $M(-2, 3)$ en straal $r = 5$.

$$d(A, M) = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{32}$$

$d(A, M) > r$, dus A ligt buiten c .

$\mathbf{b}$ De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} l: 2x - 3y = c \\ \text{door } M(-2, 3) \end{array} \right\} c = 2 \cdot -2 - 3 \cdot 3 = -13$$

$$\text{Dus } l: 2x - 3y = -13.$$

l snijden met k geeft het punt S .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = -13 \\ 3x + 2y = 13 \end{array} \right. \begin{array}{l} | 2 \\ | 3 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x - 6y = -26 \\ 9x + 6y = 39 \end{array} \right. +$$

$$13x = 13$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ 3x + 2y = 13 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 + 2y = 13 \\ 2y = 10 \\ y = 5 \end{array}$$

$$\text{Dus } S(1, 5).$$

$$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(1-(-2))^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}$$

c De x-as snijden, dus $y = 0$ geeft $x^2 + 4x = 12$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$(x - 2)(x + 6) = 0$$

$$x = 2 \vee x = -6$$

Dus $P(-6, 0)$ en $Q(2, 0)$, dus $PQ = 8$.

$$BP^2 = (-6 - (-3))^2 + (0 - 2)^2 = 13$$

$$BQ^2 = (2 - (-3))^2 + (0 - 2)^2 = 29$$

De cosinusregel in $\triangle BPQ$ geeft $8^2 = 13 + 29 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{29} \cdot \cos(\angle PBQ)$

$$2\sqrt{377} \cos(\angle PBQ) = -22$$

$$\cos(\angle PBQ) = -0,566\dots$$

$$\angle PBQ \approx 124,5^\circ$$

41 Middellijn PR , dus middelpunt is het midden van PR , dus $M(2, \frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2})$.

De straal is

$$r = d(R, M) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (\frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2} - 7)^2} = \sqrt{9 + (\frac{1}{2}p - 3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{9 + \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 12\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}}$$

$$\text{Dus } c: (x - 2)^2 + (y - \frac{1}{2}p - 3\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}$$

$$c \text{ door } Q(-2, 6) \text{ geeft } (-4)^2 + (2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}$$

$$16 + 6\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}$$

$$p = -1$$

$$p = -1 \text{ geeft } M(2, \frac{1}{2} \cdot -1 + 3\frac{1}{2}) = M(2, 3) \text{ en } r = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (-1)^2 - 3\frac{1}{2} \cdot -1 + 21\frac{1}{4}} = \sqrt{25} = 5.$$

$$d(O, M) = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{13}$$

$d(O, M) < r$, dus de oorsprong ligt binnen c .

10.4 Cirkels, raaklijnen en functies

Bladzijde 74

42 a $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 7 = 0$$

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 - 7 = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 20$$

Dus de straal is $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

b De lijn k gaat door M en staat loodrecht op l .

$$\left. \begin{array}{l} k: x + 2y = c \\ \text{door } M(-2, 3) \end{array} \right\} c = -2 + 2 \cdot 3 = 4$$

Dus $k: x + 2y = 4$.

k snijden met l geeft het punt A .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right\} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ 2x + 4y = 8 \end{array} \right. -$$
$$\begin{array}{r} -5y = -5 \\ y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ 2x + 4y = 8 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} x + 2 \cdot 1 = 4 \\ x = 2 \end{array}$$

Dus $A(2, 1)$.

$$d(M, l) = d(M, A) = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

c De afstand van M tot l is gelijk aan de straal van c , dus l raakt c .

Bladzijde 75

- 43 a** Lijn l door M loodrecht op k .

$$l: 3x - 2y = c \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } M(2, 5) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = -4$$

$$\text{Dus } l: 3x - 2y = -4.$$

l snijden met k geeft het punt A .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 6 \\ 3x - 2y = -4 \end{array} \right. \begin{array}{l} |2| \\ |3| \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x + 6y = 12 \\ 9x - 6y = -12 \end{array} \right. +$$

$$13x = 0$$

$$x = 0$$

$$2x + 3y = 6 \quad \left. \begin{array}{l} \\ 3y = 6 \\ y = 2 \end{array} \right\}$$

$$\text{Dus } A(0, 2).$$

$$r = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(0-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Dus } c_1: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 13.$$

- b** c_2 is de cirkel met middelpunt $M(-1, 3)$ en straal $\sqrt{29}$.

$$rc_{BM} = \frac{3-1}{-1-4} = -\frac{2}{5}, \text{ dus } rc_l = 2\frac{1}{2}.$$

$$l: y = 2\frac{1}{2}x + b \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } B(4, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 1 \\ 10 + b = 1 \\ b = -9 \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = 2\frac{1}{2}x - 9.$$

- 44** Lijn l door M loodrecht op k .

$$l: 2x + 3y = c \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } M(2, 1) \end{array} \right\} c = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$$

$$\text{Dus } l: 2x + 3y = 7.$$

l snijden met k geeft het punt A .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = -9 \end{array} \right. \begin{array}{l} |2| \\ |3| \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x + 6y = 14 \\ 9x - 6y = -27 \end{array} \right. +$$

$$13x = -13$$

$$x = -1$$

$$2x + 3y = 7 \quad \left. \begin{array}{l} 2 \cdot -1 + 3y = 7 \\ 3y = 9 \\ y = 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{Dus } A(-1, 3).$$

$$r = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Dus } c: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 13.$$

Bladzijde 76

- 45 a** $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 12 = 0$

$$x^2 - 10x + y^2 - 4y + 12 = 0$$

$$(x-5)^2 - 25 + (y-2)^2 - 4 + 12 = 0$$

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 17$$

$$\text{Dus } M(5, 2).$$

$$rc_{AM} = \frac{2-3}{5-1} = -\frac{1}{4}, \text{ dus } rc_k = 4.$$

$$k: y = 4x + b \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } A(1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 1 + b = 3 \\ b = -1 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 4x - 1.$$

$$rc_{BM} = \frac{2-2}{5-6} = -4, \text{ dus } rc_l = \frac{1}{4}.$$

$$l: y = \frac{1}{4}x + b \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } B(6, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot 6 + b = -2 \\ 1\frac{1}{2} + b = -2 \\ b = -3\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = \frac{1}{4}x - 3\frac{1}{2}.$$

- b** $\tan(\alpha) = 4$ geeft $\alpha = 75,96\dots^\circ$
 $\tan(\beta) = \frac{1}{4}$ geeft $\beta = 14,03\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 75,96\dots^\circ - 14,03\dots^\circ = 61,92\dots^\circ$
 Dus de hoek tussen k en l is ongeveer $61,9^\circ$.

- 46 a** Lijn m door M loodrecht op k .

$$m: x - 4y = c \quad \left\{ \begin{array}{l} c = 4 - 4 \cdot 3 = -8 \\ \text{door } M(4, 3) \end{array} \right.$$

Dus $m: x - 4y = -8$.

m snijden met k geeft het punt A .

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + y = 36 \\ x - 4y = -8 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array} \right. \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 16x + 4y = 144 \\ x - 4y = -8 \end{array} \right. +$$

$$\frac{17x = 136}{x = 8} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 8 + y = 36 \\ 32 + y = 36 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 4 \end{array} \right.$$

Dus $A(8, 4)$.

$$r_1 = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(8-4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{17}$$

Dus $c_1: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.

c_1 snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $(x-4)^2 + (-3)^2 = 17$

$$(x-4)^2 + 9 = 17$$

$$(x-4)^2 = 8$$

$$x-4 = \sqrt{8} \vee x-4 = -\sqrt{8}$$

$$x-4 = 2\sqrt{2} \vee x-4 = -2\sqrt{2}$$

$$x = 4 + 2\sqrt{2} \vee x = 4 - 2\sqrt{2}$$

Dus $B(4-2\sqrt{2}, 0)$ en $C(4+2\sqrt{2}, 0)$.

- b** Het middelpunt N van c_2 is $N(\frac{1}{2}(4-2\sqrt{2}+4+2\sqrt{2}), 0) = N(4, 0)$.

De straal r_2 van c_2 is $r_2 = \frac{1}{2} \cdot d(B, C) = \frac{1}{2} \cdot (4+2\sqrt{2} - (4-2\sqrt{2})) = 2\sqrt{2}$.

Dus $c_2: (x-4)^2 + y^2 = 8$.

$x = 2$ geeft $(2-4)^2 + y^2 = 8$

$$4 + y^2 = 8$$

$$y^2 = 4$$

$$y = 2 \vee y = -2$$

Dus $D(2, 2)$.

Van de lijn n door D en N is $rc_n = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-2}{4-2} = -1$.

$l \perp n$, dus $rc_l \cdot rc_n = -1$, dus $rc_l = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} l: y = x + b \\ \text{door } D(2, 2) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 + b = 2 \\ b = 0 \end{array} \right.$$

Dus $l: y = x$, dus l gaat door de oorsprong.

- 47 a** Substitutie van $y = -2x + 5$ in $x^2 + y^2 = 5$ geeft $x^2 + (-2x+5)^2 = 5$
 $x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 5$
 $5x^2 - 20x + 20 = 0$
 $x^2 - 4x + 4 = 0$

- b** $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

De vergelijking die na de substitutie is ontstaan, heeft één oplossing.

Dus de lijn l en de cirkel c hebben één punt gemeenschappelijk.

Dus l raakt c .

Bladzijde 77

- 48 a** $D = 484$, dus $\sqrt{D} = 22$.

Dit geeft $x = \frac{12+22}{10} = 3\frac{2}{5} \vee x = \frac{12-22}{10} = -1$.

$x = 3\frac{2}{5}$ geeft $y = 2 \cdot 3\frac{2}{5} - 3 = 3\frac{4}{5}$ en $x = -1$ geeft $y = 2 \cdot -1 - 3 = -5$.

Dus de snijpunten zijn $(3\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5})$ en $(-1, -5)$.

- b** $b = 5$ bij $5x^2 + (4b - 10)x + b^2 - 4b = 0$ geeft
 $5x^2 + (4 \cdot 5 - 10)x + 5^2 - 4 \cdot 5 = 0$
 $5x^2 + 10x + 5 = 0$
 $x^2 + 2x + 1 = 0$
 $(x + 1)^2 = 0$
 $x = -1$
 $x = -1$ geeft $y = 2 \cdot -1 + 5 = 3$
Dus het raakpunt is $(-1, 3)$.

Bladzijde 78

- 49 a** $x^2 + 9x^2 + 6bx + b^2 - 5x + 18x + 6b - 10 = 0$
 $10x^2 + 6bx + 13x + b^2 + 6b - 10 = 0$
 $10x^2 + (6b + 13)x + b^2 + 6b - 10 = 0$
 $A = 10, B = 6b + 13$ en $C = b^2 + 6b - 10$
- b** $x^2 + x^2 - 2bx + b^2 - 6x - 2x + 2b + 5 = 0$
 $2x^2 - 2bx - 8x + b^2 + 2b + 5 = 0$
 $2x^2 + (-2b - 8)x + b^2 + 2b + 5 = 0$
 $A = 2, B = -2b - 8$ en $C = b^2 + 2b + 5$
- c** $x^2 + a^2x^2 - 6ax + 9 + 2x - 8ax + 24 - 7 = 0$
 $a^2x^2 + x^2 - 14ax + 2x + 26 = 0$
 $(a^2 + 1)x^2 + (-14a + 2)x + 26 = 0$
 $A = a^2 + 1, B = -14a + 2$ en $C = 26$
- 50 a** Substitutie van $y = x - 4$ in $x^2 + y^2 = 13$ geeft
 $x^2 + (x - 4)^2 = 13$
 $x^2 + x^2 - 8x + 16 = 13$
 $2x^2 - 8x + 3 = 0$
 $D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 40$
 $D > 0$, dus k snijdt c_1 in twee punten.
- b** Substitutie van $y = -4x - 3$ in $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 4$ geeft
 $x^2 + (-4x - 3)^2 - 6x - 4(-4x - 3) = 4$
 $x^2 + 16x^2 + 24x + 9 - 6x + 16x + 12 = 4$
 $17x^2 + 34x + 17 = 0$
 $x^2 + 2x + 1 = 0$
 $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$
 $D = 0$, dus l raakt c_2 .
- c** $m: 2x - y = 1$ oftewel $m: y = 2x - 1$
Substitutie van $y = 2x - 1$ in $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$ geeft
 $x^2 + (2x - 1)^2 + 6x - 4(2x - 1) = 0$
 $x^2 + 4x^2 - 4x + 1 + 6x - 8x + 4 = 0$
 $5x^2 - 6x + 5 = 0$
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = -64$
 $D < 0$, dus m heeft geen punten gemeenschappelijk met c_3 .
- 51** Stel $y = 3x + b$.
Substitutie van $y = 3x + b$ in $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ geeft
 $x^2 + (3x + b)^2 - 4x - 2(3x + b) - 5 = 0$
 $x^2 + 9x^2 + 6bx + b^2 - 4x - 6x - 2b - 5 = 0$
 $10x^2 + (6b - 10)x + b^2 - 2b - 5 = 0$
 $D = (6b - 10)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (b^2 - 2b - 5)$
 $= 36b^2 - 120b + 100 - 40b^2 + 80b + 200$
 $= -4b^2 - 40b + 300$
 $D = 0$ geeft $-4b^2 - 40b + 300 = 0$
 $b^2 + 10b - 75 = 0$
 $(b - 5)(b + 15) = 0$
 $b = 5 \vee b = -15$
Dus de lijnen zijn $y = 3x + 5$ en $y = 3x - 15$.

52 a Stel $y = -2x + b$.
 Substitutie van $y = -2x + b$ in $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 29 = 0$ geeft
 $x^2 + (-2x + b)^2 - 10x - 6(-2x + b) + 29 = 0$
 $x^2 + 4x^2 - 4bx + b^2 - 10x + 12x - 6b + 29 = 0$
 $5x^2 + (2 - 4b)x + b^2 - 6b + 29 = 0$
 $D = (2 - 4b)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (b^2 - 6b + 29)$
 $= 4 - 16b + 16b^2 - 20b^2 + 120b - 580$
 $= -4b^2 + 104b - 576$
 $D = 0$ geeft $-4b^2 + 104b - 576 = 0$
 $b^2 - 26b + 144 = 0$
 $(b - 8)(b - 18) = 0$
 $b = 8 \vee b = 18$

Dus de lijnen zijn $y = -2x + 8$ en $y = -2x + 18$.

b $\left. \begin{array}{l} y = ax + b \\ \text{door } A(0, 3) \end{array} \right\} b = 3$
 Dus de lijnen $y = ax + 3$ gaan door $A(0, 3)$.
 Substitutie van $y = ax + 3$ in $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 29 = 0$ geeft
 $x^2 + (ax + 3)^2 - 10x - 6(ax + 3) + 29 = 0$
 $x^2 + a^2x^2 + 6ax + 9 - 10x - 6ax - 18 + 29 = 0$
 $(1 + a^2)x^2 - 10x + 20 = 0$
 $D = (-10)^2 - 4 \cdot (1 + a^2) \cdot 20$
 $= 100 - 80 - 80a^2$
 $= 20 - 80a^2$
 $D = 0$ geeft $20 - 80a^2 = 0$
 $-80a^2 = -20$
 $a^2 = \frac{1}{4}$
 $a = \frac{1}{2} \vee a = -\frac{1}{2}$

Bladzijde 79

53 a $k: x - 2y = 1$ oftewel $k: x = 2y + 1$
 Substitutie van $x = 2y + 1$ in $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 5$ geeft
 $(2y - 5)^2 + (y - 5)^2 = 5$
 $4y^2 - 20y + 25 + y^2 - 10y + 25 = 5$
 $5y^2 - 30y + 45 = 0$
 $y^2 - 6y + 9 = 0$
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$
 Dus dat is inderdaad het geval.

b $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 5$
 $x^2 - 12x + 36 + y^2 - 10y + 25 = 5$
 $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 56 = 0$
 $k: x - 2y = 1$ oftewel $k: -2y = -x + 1$ oftewel $k: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
 $l \perp k$, dus $\text{rc}_l \cdot \text{rc}_k = -1$, dus $\text{rc}_l = -2$.
 Stel $l: y = -2x + b$.
 Substitutie van $y = -2x + b$ in $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 56 = 0$ geeft
 $x^2 + (-2x + b)^2 - 12x - 10(-2x + b) + 56 = 0$
 $x^2 + 4x^2 - 4bx + b^2 - 12x + 20x - 10b + 56 = 0$
 $5x^2 - 4bx + 8x + b^2 - 10b + 56 = 0$
 $5x^2 + (-4b + 8)x + b^2 - 10b + 56 = 0$
 $D = (-4b + 8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (b^2 - 10b + 56)$
 $= 16b^2 - 64b + 64 - 20b^2 + 200b - 1120$
 $= -4b^2 + 136b - 1056$
 $D = 0$ geeft $-4b^2 + 136b - 1056 = 0$
 $b^2 - 34b + 264 = 0$
 $(b - 12)(b - 22) = 0$
 $b = 12 \vee b = 22$
 Dus $l_1: y = -2x + 12$ en $l_2: y = -2x + 22$.

c Stel $m: y = ax + 4\frac{1}{2}$.

Substitutie van $y = ax + 4\frac{1}{2}$ in $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 56 = 0$ geeft

$$x^2 + (ax + 4\frac{1}{2})^2 - 12x - 10(ax + 4\frac{1}{2}) + 56 = 0$$

$$x^2 + a^2x^2 + 9ax + 20\frac{1}{4} - 12x - 10ax - 45 + 56 = 0$$

$$a^2x^2 + x^2 - ax - 12x + 31\frac{1}{4} = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 + (-a - 12)x + 31\frac{1}{4} = 0$$

$$D = (-a - 12)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 31\frac{1}{4}$$

$$= a^2 + 24a + 144 - 125a^2 - 125$$

$$= -124a^2 + 24a + 19$$

$$D = 0 \text{ geeft } -124a^2 + 24a + 19 = 0$$

$$D = 24^2 - 4 \cdot -124 \cdot 19 = 10000$$

$$a = \frac{-24 \pm 100}{-248} = -\frac{19}{62} \vee a = \frac{-24 - 100}{-248} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } m_1: y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} \text{ en } m_2: y = -\frac{19}{62}x + 4\frac{1}{2}.$$

54 Punt $A(2, 1)$ ligt op k .

Lijn m door A loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} m: 4x - 3y = c \\ \text{door } A(2, 1) \end{array} \right\} c = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 5$$

$$\text{Dus } m: 4x - 3y = 5 \text{ oftewel } m: y = \frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}.$$

De cirkel c met middelpunt A en straal 5 heeft vergelijking $c: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

c snijden met m .

$$\text{Substitutie van } y = \frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3} \text{ in } (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \text{ geeft } (x - 2)^2 + (\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3} - 1)^2 = 25$$

$$(x - 2)^2 + (\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3})^2 = 25$$

$$x^2 - 4x + 4 + 1\frac{7}{9}x^2 - 7\frac{1}{9}x + 7\frac{1}{9} = 25$$

$$2\frac{7}{9}x^2 - 11\frac{1}{9}x - 13\frac{8}{9} = 0$$

$$25x^2 - 100x - 125 = 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x + 1)(x - 5) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 5$$

$$x = -1 \text{ geeft } y = \frac{1}{3} \cdot -1 - 1\frac{2}{3} = -3 \text{ en } x = 5 \text{ geeft } y = \frac{1}{3} \cdot 5 - 1\frac{2}{3} = 5.$$

$$\left. \begin{array}{l} l_1: 3x + 4y = c \\ \text{door } (-1, -3) \end{array} \right\} c = 3 \cdot -1 + 4 \cdot -3 = -15$$

$$\text{Dus } l_1: 3x + 4y = -15.$$

$$\left. \begin{array}{l} l_2: 3x + 4y = c \\ \text{door } (5, 5) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 35$$

$$\text{Dus } l_2: 3x + 4y = 35.$$

55 Substitutie van $y = \frac{1}{2}x + 2$ in $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 5$ geeft

$$(x - 5)^2 + (\frac{1}{2}x + 2 - 2)^2 = 5$$

$$(x - 5)^2 + (\frac{1}{2}x)^2 = 5$$

$$x^2 - 10x + 25 + \frac{1}{4}x^2 = 5$$

$$1\frac{1}{4}x^2 - 10x + 20 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$$

$$D = 0, \text{ dus } k \text{ is raaklijn van } c.$$

56 Stel $m: y = -\frac{1}{2}x + b$.

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \text{ geeft } -\frac{2}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ f(-2) = -1, \text{ dus } C(-2, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot -2 + b = -1 \\ 1 + b = -1 \\ b = -2 \end{array}$$

Dus $m: y = -\frac{1}{2}x - 2$.

Substitutie van $y = -\frac{1}{2}x - 2$ in $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ geeft

$$(x-2)^2 + (-\frac{1}{2}x-1)^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{4}x^2 + x + 1 - 4 = 0$$

$$1\frac{1}{4}x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$5x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 64$$

$$x = \frac{12 \pm 8}{10} = 2 \vee x = \frac{12 - 8}{10} = \frac{2}{5}$$

$$x = 2 \text{ geeft } y = -\frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = -3 \text{ en } x = \frac{2}{5} \text{ geeft } y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 2 = -2\frac{1}{5}.$$

Dus $D(\frac{2}{5}, -2\frac{1}{5})$ en $E(2, -3)$.

57 Van d is de straal 2 en $y_N = y_A + r = 1 + 2 = 3$, dus $d: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

Substitutie van $y = -\frac{1}{2}x + 2$ in $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ geeft

$$(x-2)^2 + (-\frac{1}{2}x-1)^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{4}x^2 + x + 1 - 4 = 0$$

$$1\frac{1}{4}x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$5x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 64$$

$$x = \frac{12 \pm 8}{10} = 2 \vee x = \frac{12 - 8}{10} = \frac{2}{5}$$

$$x = \frac{2}{5} \text{ geeft } y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + 2 = 1\frac{4}{5}$$

Dus $F(\frac{2}{5}, 1\frac{4}{5})$.

58 a $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 6\frac{2}{3}x + 18$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{3}x - 6\frac{2}{3}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(4) = 1\frac{1}{3} \cdot 4 - 6\frac{2}{3} = -1\frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -1\frac{1}{3}x + b \\ f(4) = 2, \text{ dus } A(4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{3} \cdot 4 + b = 2 \\ -5\frac{1}{3} + b = 2 \\ b = 7\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $k: y = -1\frac{1}{3}x + 7\frac{1}{3}$.

b 1 Stel de formule op van de lijn l door A loodrecht op k .

2 Bereken met behulp van de formule van l de y -coördinaat van M .

3 Bereken de afstand tussen M en A .

c Lijn l door A loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} l: y = \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } A(4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 4 + b = 2 \\ 3 + b = 2 \\ b = -1 \end{array}$$

Dus $l: y = \frac{3}{4}x - 1$.

M ligt op l .

$$x = 3 \text{ geeft } y = \frac{3}{4} \cdot 3 - 1 = 1\frac{1}{4}, \text{ dus } M(3, 1\frac{1}{4}).$$

$$r = d(M, A) = \sqrt{(4-3)^2 + (2-1\frac{1}{4})^2} = \sqrt{1\frac{9}{16}} = 1\frac{1}{4}$$

Er geldt $y_M = r$, dus c raakt de x -as.

59

- a 1 Stel met behulp van de afgeleide van f de formule op van k .
 2 Stel met behulp van de coördinaten van M en R een vergelijking op van c .
 3 Substitueer de formule van k in de vergelijking van c .
 4 Toon aan dat de discriminant gelijk is aan nul.

b $f(x) = 1 + \sqrt{x-2} = 1 + (x-2)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{4} \text{ geeft } \frac{1}{2\sqrt{x-2}} &= \frac{1}{4} \\ 2\sqrt{x-2} &= 4 \\ \sqrt{x-2} &= 2 \\ x-2 &= 4 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k: y &= \frac{1}{4}x + b \\ f(6) = 3, \text{ dus } A(6, 3) &\left. \vphantom{\begin{aligned} k: y &= \frac{1}{4}x + b \\ f(6) = 3, \text{ dus } A(6, 3) \end{aligned}} \right\} \frac{1}{4} \cdot 6 + b = 3 \\ &\left. \vphantom{\begin{aligned} k: y &= \frac{1}{4}x + b \\ f(6) = 3, \text{ dus } A(6, 3) \end{aligned}} \right\} \frac{1}{2} + b = 3 \\ &\left. \vphantom{\begin{aligned} k: y &= \frac{1}{4}x + b \\ f(6) = 3, \text{ dus } A(6, 3) \end{aligned}} \right\} b = 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus $k: y = \frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} M(0, -7) \text{ geeft } x^2 + (y+7)^2 &= r^2 \\ \text{door } R(2, 1) &\left. \vphantom{\begin{aligned} M(0, -7) \text{ geeft } x^2 + (y+7)^2 &= r^2 \\ \text{door } R(2, 1) \end{aligned}} \right\} r^2 = 2^2 + 8^2 = 68 \end{aligned}$$

Dus $c: x^2 + (y+7)^2 = 68$.

Substitutie van $y = \frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}$ in $x^2 + (y+7)^2 = 68$ geeft

$$x^2 + \left(\frac{1}{4}x + 8\frac{1}{2}\right)^2 = 68$$

$$x^2 + \frac{1}{16}x^2 + 4\frac{1}{4}x + 72\frac{1}{4} - 68 = 0$$

$$1\frac{1}{16}x^2 + 4\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

$$D = 0, \text{ dus } k \text{ raakt } c.$$

c $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$x = -2$$

$$x = -2 \text{ geeft } y = \frac{1}{4} \cdot -2 + 1\frac{1}{2} = 1, \text{ dus } B(-2, 1).$$

$$k \text{ raakt } c, \text{ dus } \angle ABM = 90^\circ.$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-2-6)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{68}$$

$$d(M, B) = r = \sqrt{68}$$

Dus driehoek ABM is een gelijkbenige rechthoekige driehoek.

60

$y_A = 7$, dus $f(x) = 7$

$$1 + \sqrt{6x-12} = 7$$

$$\sqrt{6x-12} = 6$$

$$6x-12 = 36$$

$$6x = 48$$

$$x = 8$$

Dus $A(8, 7)$.

$$f(x) = 1 + \sqrt{6x-12} = 1 + (6x-12)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}(6x-12)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 = \frac{3}{\sqrt{6x-12}}$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'(8) = \frac{3}{\sqrt{6 \cdot 8 - 12}} = \frac{3}{\sqrt{36}} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} k: y &= \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(8, 7) &\left. \vphantom{\begin{aligned} k: y &= \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(8, 7) \end{aligned}} \right\} \frac{1}{2} \cdot 8 + b = 7 \\ &\left. \vphantom{\begin{aligned} k: y &= \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(8, 7) \end{aligned}} \right\} 4 + b = 7 \\ &\left. \vphantom{\begin{aligned} k: y &= \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(8, 7) \end{aligned}} \right\} b = 3 \end{aligned}$$

Dus $k: y = \frac{1}{2}x + 3$.

$6x - 12 = 0$ geeft $x = 2$, dus randpunt $M(2, 1)$.

Lijn m door M loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -2x + b \\ \text{door } M(2, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 + b = 1 \\ b = 5 \end{array}$$

Dus $m: y = -2x + 5$.

m snijden met k geeft $\frac{1}{2}x + 3 = -2x + 5$

$$2\frac{1}{2}x = 2$$

$$x = \frac{4}{5}$$

$x = \frac{4}{5}$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + 3 = 3\frac{2}{5}$, dus $B(\frac{4}{5}, 3\frac{2}{5})$.

$$r = d(M, k) = d(M, B) = \sqrt{(\frac{4}{5} - 2)^2 + (3\frac{2}{5} - 1)^2} = \sqrt{7\frac{1}{5}}$$

Dus $c: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 7\frac{1}{5}$.

$MBSC$ is een vierkant met $BS = CS = r = \sqrt{7\frac{1}{5}}$, dus $O(MBSC) = 7\frac{1}{5}$.

De oppervlakte van het deel van de cirkel dat wordt ingesloten door de lijnstukken BM

en CM en de cirkelboog BC is $\frac{1}{4}\pi \cdot 7\frac{1}{5} = 1\frac{4}{5}\pi$.

Dus $O(V) = 7\frac{1}{5} - 1\frac{4}{5}\pi \approx 1,55$.

10.5 Afstanden bij cirkels

Bladzijde 84

61 a $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 9 = 0$

$$x^2 - 10x + y^2 - 8y + 9 = 0$$

$$(x - 5)^2 - 25 + (y - 4)^2 - 16 + 9 = 0$$

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 32$$

Dus de straal is $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ en $M(5, 4)$.

$$d(A, M) = \sqrt{(5 - 10)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{29}$$

b $d(A, M) < r$, dus A ligt binnen de cirkel.

$$d(A, c) = r - d(A, M) = 4\sqrt{2} - \sqrt{29}$$

Bladzijde 85

62 M op k , dus $2 + 4y_M = 16$ en dit geeft $y_M = 3\frac{1}{2}$.

Dus de straal r_1 van c_1 is $3\frac{1}{2}$ en $M(2, 3\frac{1}{2})$.

N op k , dus $8 + 4y_N = 16$ en dit geeft $y_N = 2$.

Dus de straal r_2 van c_2 is 2 en $N(8, 2)$.

$$d(M, N) = \sqrt{(8 - 2)^2 + (2 - 3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{36 + 2\frac{1}{4}} = \sqrt{38\frac{1}{4}}$$

Dus $d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = \sqrt{38\frac{1}{4}} - 3\frac{1}{2} - 2 \approx 0,685$.

63 a c_1 raakt de x -as en het middelpunt is $M(4, 2)$, dus de straal van c_1 is 2.

$$c_1: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

b Substitutie van $y = 1\frac{1}{3}x$ in $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$ geeft $(x - 4)^2 + (1\frac{1}{3}x - 2)^2 = 4$

$$x^2 - 8x + 16 + 1\frac{7}{9}x^2 - 5\frac{1}{3}x + 4 = 4$$

$$2\frac{7}{9}x^2 - 13\frac{1}{3}x + 16 = 0$$

$$25x^2 - 120x + 144 = 0$$

$$D = (-120)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 144 = 0$$

Dus c_1 raakt l .

- c** Lijn n door P loodrecht op k .

$$rc_k = \frac{1}{2}, \text{ dus } rc_n = -2.$$

$$\begin{aligned} n: y = -2x + b \\ \text{door } P(6, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 6 + b = 5 \\ -12 + b = 5 \\ b = 17 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } n: y = -2x + 17.$$

n snijden met k geeft het punt B .

$$\frac{1}{2}x = -2x + 17$$

$$x = -4x + 34$$

$$5x = 34$$

$$x = 6\frac{4}{5}$$

$$x = 6\frac{4}{5} \text{ geeft } y = \frac{1}{2} \cdot 6\frac{4}{5} = 3\frac{2}{5}, \text{ dus } B(6\frac{4}{5}, 3\frac{2}{5}).$$

$$d(P, k) = d(P, B) = \sqrt{(6\frac{4}{5} - 6)^2 + (3\frac{2}{5} - 5)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + 2\frac{14}{25}} = \sqrt{3\frac{1}{5}} = 1,78...$$

De lijn p door P loodrecht op l .

$$rc_l = 1\frac{1}{3}, \text{ dus } rc_p = -\frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned} p: y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } P(6, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 6 + b = 5 \\ -4\frac{1}{2} + b = 5 \\ b = 9\frac{1}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } p: y = -\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}.$$

p snijden met l geeft het punt C .

$$1\frac{1}{3}x = -\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}$$

$$16x = -9x + 114$$

$$25x = 114$$

$$x = 4\frac{14}{25}$$

$$x = 4\frac{14}{25} \text{ geeft } y = 1\frac{1}{3} \cdot 4\frac{14}{25} = 6\frac{2}{25}, \text{ dus } C(4\frac{14}{25}, 6\frac{2}{25}).$$

$$d(P, l) = d(P, C) = \sqrt{(4\frac{14}{25} - 6)^2 + (6\frac{2}{25} - 5)^2} = \sqrt{2\frac{46}{625} + 1\frac{104}{625}} = \sqrt{3\frac{6}{25}} = 1\frac{4}{5} = 1,8$$

$$d(P, M) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$d(P, c_1) = \sqrt{13} - 2 = 1,60...$$

Dus $d(P, c_1)$ is de kortste.

- d** Substitutie van $y = 1\frac{1}{3}x$ in $x^2 + y^2 + 2x - 14y + 25 = 0$ geeft $x^2 + (1\frac{1}{3}x)^2 + 2x - 14 \cdot 1\frac{1}{3}x + 25 = 0$

$$x^2 + 1\frac{7}{9}x^2 + 2x - 18\frac{2}{3}x + 25 = 0$$

$$2\frac{7}{9}x^2 - 16\frac{2}{3}x + 25 = 0$$

$$25x^2 - 150x + 225 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

Dus l is raaklijn van c_2 .

- e** $c_2: x^2 + y^2 + 2x - 14y + 25 = 0$

$$x^2 + 2x + y^2 - 14y + 25 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 1 + (y - 7)^2 - 49 + 25 = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y - 7)^2 = 25$$

Van c_2 is het middelpunt $N(-1, 7)$ en de straal $r_2 = 5$.

$$d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (7 - 2)^2} - 2 - 5 = 5\sqrt{2} - 7$$

64

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 &= 0 \\
 x^2 - 8x + y^2 - 4y + 10 &= 0 \\
 (x-4)^2 - 16 + (y-2)^2 - 4 + 10 &= 0 \\
 (x-4)^2 + (y-2)^2 &= 10 \\
 \text{Dus } M(4, 2) \text{ en } r &= \sqrt{10}.
 \end{aligned}$$

Lijn l door M loodrecht op k .

$$\left. \begin{aligned} l: 3x - y &= c \\ \text{door } M(4, 2) \end{aligned} \right\} c = 3 \cdot 4 - 2 = 10$$

$$\text{Dus } l: 3x - y = 10.$$

l snijden met k geeft het punt S .

$$\left\{ \begin{aligned} x + 3y &= -10 \\ 3x - y &= 10 \end{aligned} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{aligned} x + 3y &= -10 \\ 9x - 3y &= 30 \end{aligned} \right. + \frac{10x = 20}{x = 2} + \left. \begin{aligned} 2 + 3y &= -10 \\ 3y &= -12 \end{aligned} \right\} y = -4$$

$$\text{Dus } S(2, -4).$$

$$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(2-4)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$d(k, c) = d(M, k) - r = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$$

65

a $M(4, 4)$ en $r = 4$ geeft $c_1: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$.

$N(1, 4)$ en $r = 1$ geeft $c_2: (x-1)^2 + (y-4)^2 = 1$.

b Stel $T(p, 2)$.

$$\begin{aligned}
 MT = 4 + 2 \text{ geeft } \sqrt{(p-4)^2 + (2-4)^2} &= 6 \\
 (p-4)^2 + (2-4)^2 &= 36 \\
 (p-4)^2 + 4 &= 36 \\
 (p-4)^2 &= 32 \\
 p-4 &= \sqrt{32} \vee p-4 = -\sqrt{32} \\
 p-4 &= 4\sqrt{2} \vee p-4 = -4\sqrt{2} \\
 p &= 4 + 4\sqrt{2} \vee p = 4 - 4\sqrt{2} \\
 &\text{vold. niet}
 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } x_T = 4 + 4\sqrt{2}.$$

c $d(c_2, c_3) = d(N, T) - 1 - 2 = \sqrt{(4 + 4\sqrt{2} - 1)^2 + (2 - 4)^2} - 3 = \sqrt{(3 + 4\sqrt{2})^2 + 4} - 3 \approx 5,885$

66

a $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0$
 $(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 9 = 0$
 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$

$$\text{Dus } M(3, 1) \text{ en } r_1 = 1.$$

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 &= 0 \\
 x^2 - 12x + y^2 - 4y + 36 &= 0 \\
 (x-6)^2 - 36 + (y-2)^2 - 4 + 36 &= 0 \\
 (x-6)^2 + (y-2)^2 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } N(6, 2) \text{ en } r_2 = 2.$$

$$d(M, N) = \sqrt{(6-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\text{Dus } d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = \sqrt{10} - 1 - 2 = \sqrt{10} - 3.$$

- b** $l: 3x - 4y = 0$ oftewel $l: y = \frac{3}{4}x$

$$\begin{aligned} \text{Substitutie van } y = \frac{3}{4}x \text{ in } x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \text{ geeft } x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 - 6x - 2 \cdot \frac{3}{4}x + 9 = 0 \\ x^2 + \frac{9}{16}x^2 - 6x - 1\frac{1}{2}x + 9 = 0 \\ 1\frac{9}{16}x^2 - 7\frac{1}{2}x + 9 = 0 \\ 25x^2 - 120x + 144 = 0 \\ D = (-120)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 144 = 0 \end{aligned}$$

Dus l raakt c_1 .

$$\begin{aligned} \text{Substitutie van } y = \frac{3}{4}x \text{ in } x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0 \text{ geeft } x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 - 12x - 4 \cdot \frac{3}{4}x + 36 = 0 \\ x^2 + \frac{9}{16}x^2 - 12x - 3x + 36 = 0 \\ 1\frac{9}{16}x^2 - 15x + 36 = 0 \\ 25x^2 - 240x + 576 = 0 \\ D = (-240)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 576 = 0 \end{aligned}$$

Dus l raakt c_2 .

- c** Lijn n door P loodrecht op l heeft richtingscoëfficiënt $-1\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} n: y = -1\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } P(2, 5) \quad \left\{ \begin{aligned} -1\frac{1}{3} \cdot 2 + b &= 5 \\ -2\frac{2}{3} + b &= 5 \\ b &= 7\frac{2}{3} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } n: y = -1\frac{1}{3}x + 7\frac{2}{3}.$$

n snijden met l geeft het punt T .

$$\frac{3}{4}x = -1\frac{1}{3}x + 7\frac{2}{3}$$

$$9x = -16x + 92$$

$$25x = 92$$

$$x = 3\frac{17}{25}$$

$$x = 3\frac{17}{25} \text{ geeft } y = \frac{3}{4} \cdot 3\frac{17}{25} = 2\frac{19}{25}, \text{ dus } T(3\frac{17}{25}, 2\frac{19}{25}).$$

$$d(P, T) = \sqrt{(3\frac{17}{25} - 2)^2 + (2\frac{19}{25} - 5)^2} = \sqrt{2\frac{514}{625} + 5\frac{11}{625}} = \sqrt{7\frac{21}{25}} = 2\frac{4}{5}$$

De straal van c_3 is gelijk aan $d(P, T) = 2\frac{4}{5}$.

$$\text{Dus } c_3: (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 7\frac{21}{25}.$$

Bladzijde 87

- 67 a** $A(-8, -8)$ en $B(12, 2)$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - (-8)}{12 - (-8)} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} k: y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(12, 2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 12 + b &= 2 \\ 6 + b &= 2 \\ b &= -4 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{2}x - 4.$$

l loodrecht op k geeft $l: y = -2x + b$.

l door $P(0, 6)$ geeft $l: y = -2x + 6$.

k snijden met l geeft $\frac{1}{2}x - 4 = -2x + 6$

$$2\frac{1}{2}x = 10$$

$$x = 4$$

$x = 4$ geeft $y = -2 \cdot 4 + 6 = -2$, dus $Q(4, -2)$.

$$d(a, l) = d(A, Q) - r_a = \sqrt{(4 - (-8))^2 + (-2 - (-8))^2} - 11 = \sqrt{12^2 + 6^2} - 11 = \sqrt{180} - 11 = 6\sqrt{5} - 11$$

$$d(b, l) = d(B, Q) - r_b = \sqrt{(4 - 12)^2 + (-2 - 2)^2} - 7 = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2} - 7 = \sqrt{80} - 7 = 4\sqrt{5} - 7$$

$$d(a, l) - d(b, l) = 6\sqrt{5} - 11 - (4\sqrt{5} - 7) = 2\sqrt{5} - 4$$

- b** $d(A, C) = \sqrt{(0 - (-8))^2 + (q - (-8))^2} = \sqrt{8^2 + (q + 8)^2} = \sqrt{64 + q^2 + 16q + 64} = \sqrt{q^2 + 16q + 128}$

$$r = d(A, C) - r_a = \sqrt{q^2 + 16q + 128} - 11$$

- c** $d(B, C) = \sqrt{(0 - 12)^2 + (q - 2)^2} = \sqrt{144 + q^2 - 4q + 4} = \sqrt{q^2 - 4q + 148}$

$$r = d(B, C) - r_b = \sqrt{q^2 - 4q + 148} - 7$$

Voer in $y_1 = \sqrt{x^2 + 16x + 128} - 11$ en $y_2 = \sqrt{x^2 - 4x + 148} - 7$.

De optie snijpunt geeft $x = 7$ en $y = 6$.

$$q = 7 \text{ en } r = 6 \text{ geeft } c: x^2 + (y - 7)^2 = 36.$$

68 a $c: x^2 + y^2 - 8x - 6y - 20 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 6y - 20 = 0$
 $(x-4)^2 - 16 + (y-3)^2 - 9 - 20 = 0$
 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 45$

Dus $M(4, 3)$ en straal $r_c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

$y = 0$ geeft $x^2 - 8x - 20 = 0$

$$(x+2)(x-10) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 10$$

Dus $A(10, 0)$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = r_c = \frac{0-3}{10-4} = -\frac{1}{2}$.

$$k: y = -\frac{1}{2}x + b \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 10 + b = 0 \\ \text{door } A(10, 0) \end{array} \right. \quad b = 5$$

Dus $k: y = -\frac{1}{2}x + 5$.

$$d: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y + 5 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + 5 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$$

Dus $N(3, -1)$ en straal $r_d = \sqrt{5}$.

Lijn m door N loodrecht op k .

$$m: y = 2x + b \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 3 + b = -1 \\ \text{door } N(3, -1) \end{array} \right. \quad b = -7$$

Dus $m: y = 2x - 7$.

m snijden met k geeft het punt Q .

$$-\frac{1}{2}x + 5 = 2x - 7$$

$$-2\frac{1}{2}x = -12$$

$$x = 4\frac{4}{5}$$

$x = 4\frac{4}{5}$ geeft $y = 2 \cdot 4\frac{4}{5} - 7 = 2\frac{3}{5}$, dus $Q(4\frac{4}{5}, 2\frac{3}{5})$.

$$d(k, N) = d(Q, N) = \sqrt{(3 - 4\frac{4}{5})^2 + (-1 - 2\frac{3}{5})^2} = \sqrt{16\frac{1}{5}} = 4\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$d(k, l) = d(k, N) - d(l, N) = 4\sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{5} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$$

b $d(c, d) = r_c - d(M, N) - r_d$

$$d(M, N) = \sqrt{(3-4)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{17}$$

$$\text{Dus } d(c, d) = 3\sqrt{5} - \sqrt{17} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5} - \sqrt{17}.$$

Diagnostische toets

Bladzijde 90

1 $\angle BDC = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

De sinusregel in $\triangle BCD$ geeft $\frac{8}{\sin(\angle C)} = \frac{10}{\sin(130^\circ)}$

$$\sin(\angle C) = \frac{8 \sin(130^\circ)}{10}$$

De GR geeft $37,79\dots^\circ$.

Dus $\angle C \approx 37,8^\circ$.

2 Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft

$$BD^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(42^\circ) = 16,41...$$

$$BD = 4,05...$$

De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft

$$5^2 = 6^2 + 16,41... - 2 \cdot 6 \cdot 4,05... \cdot \cos(\angle ABD)$$

$$48,61... \cdot \cos(\angle ABD) = 27,41...$$

$$\cos(\angle ABD) = 0,56...$$

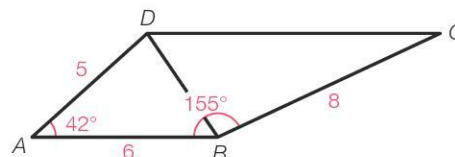
$$\angle ABD = 55,67...^\circ$$

$$\angle CBD = 155^\circ - 55,67...^\circ = 99,32...^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft $CD^2 = 8^2 + 16,41... - 2 \cdot 8 \cdot 4,05... \cdot \cos(99,32...^\circ) = 90,91...$

$$CD = 9,53...$$

Dus $CD \approx 9,5$.



3 $\triangle ADS \sim \triangle CES$ geeft $\frac{AD}{CE} = \frac{AS}{CS}$

Stel $CE = x$, dan is $AD = BC = x + 2$.

$$\frac{x+2}{x} = \frac{4}{2\frac{1}{2}} \text{ geeft } 4x = 2\frac{1}{2}x + 5$$

$$1\frac{1}{2}x = 5$$

$$x = 3\frac{1}{3}$$

Dus $CE = 3\frac{1}{3}$.

4 Stel $AB = x$, dan is $AC = 2\frac{1}{2}x$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$x^2 + BC^2 = (2\frac{1}{2}x)^2$$

$$x^2 + BC^2 = 6\frac{1}{4}x^2$$

$$BC^2 = 5\frac{1}{4}x^2$$

$$BC = x\sqrt{5\frac{1}{4}}$$

$O(ABCD) = \sqrt{21}$ geeft $AB \cdot BC = \sqrt{21}$

$$x \cdot x\sqrt{5\frac{1}{4}} = \sqrt{21}$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5\frac{1}{4}}} = \sqrt{4}$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \text{ (vold. niet)}$$

Dus de straal is $AM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

5 a $\text{rc}_{BC} = \frac{2-4}{5-4} = -2$

$$\tan(\alpha) = -2 \text{ geeft } \alpha = -63,43...^\circ$$

$$\text{rc}_{CD} = \frac{4-3}{4-0} = \frac{1}{4}$$

$$\tan(\beta) = \frac{1}{4} \text{ geeft } \beta = 14,03...^\circ$$

De hoek tussen de lijn door B en C en de lijn door C en D is

$$14,03...^\circ - -63,43...^\circ = 77,47...^\circ$$

$\angle BCD$ is stomp, dus $\angle BCD = 180^\circ - 77,47...^\circ \approx 102,5^\circ$.

Alternatieve uitwerking

$$BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, CD = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \text{ en } BD = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft $26 = 5 + 17 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{17} \cdot \cos(\angle BCD)$

$$2\sqrt{85} \cdot \cos(\angle BCD) = -4$$

$$\cos(\angle BCD) = \frac{-4}{2\sqrt{85}}$$

$$\angle BCD \approx 102,5^\circ$$

- b** Stel $BD: y = ax + b$ met $a = \frac{2-3}{5-0} = -\frac{1}{5}$.

$$\left. \begin{array}{l} BD: y = -\frac{1}{5}x + b \\ \text{door } D(0, 3) \end{array} \right\} BD: y = -\frac{1}{5}x + 3$$

Lijn l door A loodrecht op BD .

$$\left. \begin{array}{l} l: y = 5x + b \\ \text{door } A(2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \cdot 2 + b = 0 \\ b = -10 \end{array}$$

Dus $l: y = 5x - 10$.

l snijden met BD geeft het punt E .

$$5x - 10 = -\frac{1}{5}x + 3$$

$$5\frac{1}{5}x = 13$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ geeft } y = 5 \cdot 2\frac{1}{2} - 10 = 2\frac{1}{2}, \text{ dus } E(2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}).$$

$$d(A, BD) = d(A, E) = \sqrt{(2\frac{1}{2} - 2)^2 + (2\frac{1}{2} - 0)^2} = \sqrt{6\frac{1}{2}} \approx 2,55$$

Bladzijde 91

- 6 a** $c_1: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 4 = 0$
 $(x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 + 4 = 0$
 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$
Dus $M(-2, 3)$ en straal $r_1 = 3$.
 $d(A, M) = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{9+0} = 3$
 $d(A, M) = r_1$, dus A ligt op c_1 .
- b** $d(B, M) = \sqrt{(-2-5)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
 $d(B, M) > r_1$, dus B ligt buiten c_1 .
- c** $r_2 = d(O, A) = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$
Dus $c_2: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$.
- d** Het midden van AB is $N(\frac{1}{2}(1+5), \frac{1}{2}(3+5)) = N(3, 4)$.
 $r_3 = d(A, N) = \sqrt{(-2-3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$
Dus $c_3: (x+2)^2 + (y-4)^2 = 10$.

- 7 a** Lijn m door M loodrecht op k .
 $m: x - 2y = c$
door $M(4, -3)$ } $c = 4 - 2 \cdot -3 = 10$
Dus $m: x - 2y = 10$.
 m snijden met k geeft het punt A .
 $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 10 \\ 2x + y = 10 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right. \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 10 \\ 4x + 2y = 20 \end{array} \right. +$

$$\begin{array}{r} 5x = 30 \\ x = 6 \\ x - 2y = 10 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 6 - 2y = 10 \\ -2y = 4 \\ y = -2 \end{array} \right.$$

Dus $A(6, -2)$.

De straal r_1 van c_1 is $r_1 = d(M, A) = \sqrt{(6-4)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Dus $c_1: (x-4)^2 + (y+3)^2 = 5$.

- b** Substitutie van $y = -x + 3$ in $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ geeft
 $x^2 + (-x+3)^2 - 4x + 6(-x+3) + 4 = 0$
 $x^2 + x^2 - 6x + 9 - 4x - 6x + 18 + 4 = 0$
 $2x^2 - 16x + 31 = 0$
 $D = (-16)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 31 = 8$
 $D > 0$, dus l raakt c_2 niet maar snijdt c_2 in twee punten.

$$\begin{aligned}
 \text{8 a } c: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 &= 0 \\
 x^2 - 8x + y^2 - 6y + 15 &= 0 \\
 (x-4)^2 - 16 + (y-3)^2 - 9 + 15 &= 0 \\
 (x-4)^2 + (y-3)^2 &= 10
 \end{aligned}$$

Het middelpunt van c is $M(4, 3)$.

$$\text{Van de lijn } n \text{ door } A \text{ en } M \text{ is } rc_n = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-3}{5-4} = -3.$$

$$k \perp n, \text{ dus } rc_k \cdot rc_n = -1, \text{ dus } rc_k = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}
 k: y = \frac{1}{3}x + b \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot 5 + b = 0 \\ \text{door } A(5, 0) \end{array} \right\} b = -1\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}.$$

b Substitutie van $y = -3x + b$ in $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$ geeft

$$\begin{aligned}
 x^2 + (-3x + b)^2 - 8x - 6(-3x + b) + 15 &= 0 \\
 x^2 + 9x^2 - 6bx + b^2 - 8x + 18x - 6b + 15 &= 0 \\
 10x^2 - 6bx + 10x + b^2 - 6b + 15 &= 0 \\
 10x^2 + (-6b + 10)x + b^2 - 6b + 15 &= 0 \\
 D = (-6b + 10)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (b^2 - 6b + 15) & \\
 = 36b^2 - 120b + 100 - 40b^2 + 240b - 600 & \\
 = -4b^2 + 120b - 500 &
 \end{aligned}$$

$$D = 0 \text{ geeft } -4b^2 + 120b - 500 = 0$$

$$b^2 - 30b + 125 = 0$$

$$(b-5)(b-25) = 0$$

$$b = 5 \vee b = 25$$

c Stel $y = ax + 1$.

Substitutie van $y = ax + 1$ in $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$ geeft

$$\begin{aligned}
 x^2 + (ax + 1)^2 - 8x - 6(ax + 1) + 15 &= 0 \\
 x^2 + a^2x^2 + 2ax + 1 - 8x - 6ax - 6 + 15 &= 0 \\
 a^2x^2 + x^2 - 4ax - 8x + 10 &= 0 \\
 (a^2 + 1)x^2 + (-4a - 8)x + 10 &= 0 \\
 D = (-4a - 8)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 10 & \\
 = 16a^2 + 64a + 64 - 40a^2 - 40 & \\
 = -24a^2 + 64a + 24 &
 \end{aligned}$$

$$D = 0 \text{ geeft } -24a^2 + 64a + 24 = 0$$

$$3a^2 - 8a - 3 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$

$$a = \frac{8 \pm 10}{6} = 3 \vee a = \frac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } m_1: y = 3x + 1 \text{ en } m_2: y = -\frac{1}{3}x + 1.$$

$$\text{9 } f(x) = \sqrt{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$rc_k = f'(4) = \frac{1}{\sqrt{8+1}} = \frac{1}{3}$$

Lijn l door A en M staat loodrecht op k .

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l \cdot rc_k = -1, \text{ dus } rc_l = -3.$$

$$\begin{aligned}
 l: y = -3x + b \quad \left. \begin{array}{l} -3 \cdot 4 + b = 3 \\ f(4) = 3, \text{ dus } A(4, 3) \end{array} \right\} b = 15
 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } l: y = -3x + 15.$$

$$l \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } -3x + 15 = 0$$

$$-3x = -15$$

$$x = 5$$

$$\text{Dus } M(5, 0).$$

$$\text{De straal } r \text{ van } c \text{ is } d(A, M) = \sqrt{(5-4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

$$\text{Dus } c: (x-5)^2 + y^2 = 10.$$

10 a $c_1: x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 2y + 12 = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 + 12 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 5$

Het middelpunt van c_1 is $M(4, 1)$ en de straal is $r_1 = \sqrt{5}$.

$$d(A, M) = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$d(A, c_1) = d(A, M) - r_1 = \sqrt{26} - \sqrt{5}.$$

b $c_2: x^2 + y^2 - 4x - 10y + 27 = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 - 10y + 27 = 0$
 $(x - 2)^2 - 4 + (y - 5)^2 - 25 + 27 = 0$
 $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 2$

Het middelpunt van c_2 is $N(2, 5)$ en de straal is $r_2 = \sqrt{2}$.

$$d(M, N) = \sqrt{(2 - 4)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

c Lijn l door M loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} l: x - y = c \\ \text{door } M(4, 1) \end{array} \right\} c = 4 - 1 = 3$$

Dus $l: x - y = 3$.

k snijden met l geeft het punt B .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{array} \right. + \frac{2x = 4}{x = 2} \left. \begin{array}{l} \\ x + y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 + y = 1 \\ y = -1 \end{array}$$

Dus $B(2, -1)$.

$$d(B, M) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$d(k, c_1) = d(B, c_1) = d(B, M) - r_1 = 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$$

11 Verbanden en functies

Voorkennis Evenredig en omgekeerd evenredig

Bladzijde 96

- 1 a $\frac{15}{23} \mid \frac{60}{y}$ dus $y = \frac{23 \cdot 60}{15} = 92$
- b $\frac{6}{3,6} \mid \frac{x}{30}$ dus $x = \frac{6 \cdot 30}{3,6} = 50$
- 2 a $\left. \begin{array}{l} W \text{ evenredig met } S, \text{ dus } W = aS \\ S = 50 \text{ en } W = 5,6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 50 = 5,6 \\ a = 0,112 \end{array}$
- Dus $W = 0,112S$.
- b $S = 80$ geeft $W = 0,112 \cdot 80 = 8,96$
Dus ongeveer 9 cm.

Bladzijde 97

- 3 a y is omgekeerd evenredig met x , dus $xy = a$.
 $a = 15 \cdot 23 = 345$
 $xy = 345$ en $x = 60$ geeft $60y = 345$, dus $y = 5,75$.
- b y is omgekeerd evenredig met x , dus $xy = a$.
 $a = 6 \cdot 3,6 = 21,6$
 $xy = 21,6$ en $y = 30$ geeft $30x = 21,6$, dus $x = 0,72$.
- 4 a T is omgekeerd evenredig met d , dus $T = \frac{a}{d}$.
 $a = Td = 1,6 \cdot 2,5 = 4$, dus $T = \frac{4}{d}$.
- b $d = 4,835$ geeft $T = \frac{4}{4,835} \approx 0,8$
De temperatuur op 4835 meter diepte is ongeveer $0,8^\circ\text{C}$.
- c $T = 1,4$ geeft $1,4 = \frac{4}{d}$
 $1,4d = 4$
 $d \approx 2,857$
Dus op ongeveer 2857 meter diepte is de temperatuur $1,4^\circ\text{C}$.
- 5 a recht evenredig
b omgekeerd evenredig
c omgekeerd evenredig
d recht evenredig
e omgekeerd evenredig

11.1 Evenredigheden

Bladzijde 98

- 1 a $\frac{7}{2} = 3,5; \frac{17,5}{5} = 3,5; \frac{28}{8} = 3,5; \frac{35}{10} = 3,5$ en $\frac{52,5}{15} = 3,5$
Dus N is evenredig met t .
De evenredigheidsconstante is 3,5.
- b $2 \cdot 150 = 300; 5 \cdot 60 = 300; 8 \cdot 37,5 = 300; 10 \cdot 30 = 300$ en $15 \cdot 20 = 300$
Dus M is omgekeerd evenredig met t .
De formule van M is $M = \frac{300}{t}$.

2 $p = {}^3\log(2,5) \approx 0,834$

3 a
$$\left. \begin{array}{l} y = ax^{1,8} \\ x = 6 \text{ en } y = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 6^{1,8} = 12 \\ a = \frac{12}{6^{1,8}} \approx 0,48 \end{array}$$

De formule is $y = 0,48x^{1,8}$.

b
$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{a}{t^2} \\ t = 0,3 \text{ en } P = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{0,3^2} = 10 \\ a = 10 \cdot 0,3^2 = 0,9 \end{array}$$

De formule is $P = \frac{0,9}{t^2}$.

c
$$\left. \begin{array}{l} y = 180x^p \\ x = 4 \text{ en } y = 900 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 180 \cdot 4^p = 900 \\ 4^p = 5 \\ p = {}^4\log(5) \approx 1,16 \end{array}$$

De formule is $y = 180x^{1,16}$.

4 a
$$\left. \begin{array}{l} y = ax^{2,15} \\ x = 8 \text{ en } y = 600 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 8^{2,15} = 600 \\ a = \frac{600}{8^{2,15}} \approx 6,86 \end{array}$$

b
$$\left. \begin{array}{l} y = 50x^b \\ x = 8 \text{ en } y = 600 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 50 \cdot 8^b = 600 \\ 8^b = 12 \\ b = {}^8\log(12) \approx 1,19 \end{array}$$

5 a
$$\left. \begin{array}{l} N = \frac{a}{t^{1,8}} \\ t = 6 \text{ en } N = 100 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{6^{1,8}} = 100 \\ a = 100 \cdot 6^{1,8} \approx 2516 \end{array}$$

b
$$\left. \begin{array}{l} N = \frac{3000}{t^b} \\ t = 6 \text{ en } N = 100 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3000}{6^b} = 100 \\ 6^b = 30 \\ b = {}^6\log(30) \approx 1,90 \end{array}$$

c
$$\left. \begin{array}{l} N = \frac{2000b}{t^b} \\ t = 6 \text{ en } N = 100 \end{array} \right\} \frac{2000b}{6^b} = 100$$

Voer in $y_1 = \frac{2000x}{6^x}$ en $y_2 = 100$.

De optie snijpunt geeft $x = 2,080...$

Dus $b \approx 2,08$ en $a = 2000 \cdot 2,080... \approx 4162$.

6
$$\left. \begin{array}{l} v = ax^{0,5} \\ x = 950 \text{ en } v = 480 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 950^{0,5} = 480 \\ a = \frac{480}{950^{0,5}} = 15,57... \end{array}$$

Dus $v = 15,57... x^{0,5}$.

Voer in $y_1 = 15,57... x^{0,5}$ en $y_2 = 141$.

De optie snijpunt geeft $x = 81,97...$

Dus de Iguazu watervallen zijn ongeveer 82 meter hoog.

Bladzijde 100

7 a $720 \text{ km/uur is } \frac{720}{3,6} = 200 \text{ m/s.}$

$$\left. \begin{array}{l} W_1 = av^2 \\ v = 200 \text{ en } W_1 = 120\,000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 200^2 = 120\,000 \\ a = \frac{120\,000}{200^2} = 3 \end{array}$$

Dus $W_1 = 3v^2$.

$$\left. \begin{array}{l} W_i = \frac{b}{v^2} \\ v = 200 \text{ en } W_i = 300\,000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{b}{200^2} = 300\,000 \\ b = 300\,000 \cdot 200^2 = 1,2 \cdot 10^{10} \end{array}$$

Dus $W_i = \frac{1,2 \cdot 10^{10}}{v^2}$.

b $W = W_1 + W_i = 3v^2 + \frac{1,2 \cdot 10^{10}}{v^2}$

Voer in $y_1 = 3x^2 + \frac{1,2 \cdot 10^{10}}{x^2}$.

De optie minimum geeft $x = 251,48\dots$ en $y_1 = 379\,473,3\dots$

Dus bij een snelheid van $3,6 \cdot 251,48\dots \approx 905 \text{ km/uur}$ is de totale weerstand minimaal.

c $v = 251,48\dots$ geeft $W_1 = 3 \cdot 251,48\dots^2 \approx 189\,737 \text{ N}$

$v = 251,48\dots$ geeft $W_i = \frac{1,2 \cdot 10^{10}}{251,48\dots^2} \approx 189\,737 \text{ N}$

Dus bij minimale totale weerstand geldt $W_1 = W_i$.

8 $y = 2,5x^{\frac{1}{3}}$

$2,5x^{\frac{1}{3}} = y$

$x^{\frac{1}{3}} = 0,4y$

$(x^{\frac{1}{3}})^3 = (0,4y)^3$

$x = 0,4^3 \cdot y^3$

$x = 0,064y^3$

9 a $y = 5x^{2,6}$

$5x^{2,6} = y$

$x^{2,6} = 0,2y$

$x = (0,2y)^{\frac{1}{2,6}} = 0,2^{\frac{1}{2,6}} \cdot y^{\frac{1}{2,6}} \approx 0,54 \cdot y^{0,38}$

Dus $x = 0,54y^{0,38}$.

b $y = 0,2x^{-1,4}$

$0,2x^{-1,4} = y$

$x^{-1,4} = 5y$

$x = (5y)^{-\frac{1}{1,4}} = 5^{-\frac{1}{1,4}} \cdot y^{-\frac{1}{1,4}} \approx 0,32 \cdot y^{-0,71}$

Dus $x = 0,32y^{-0,71}$.

c $y = 1,5x^{0,9}$

$1,5x^{0,9} = y$

$x^{0,9} = \frac{1}{1,5}y$

$x = (\frac{1}{1,5}y)^{\frac{1}{0,9}} = (\frac{1}{1,5})^{\frac{1}{0,9}} \cdot y^{\frac{1}{0,9}} \approx 0,64 \cdot y^{1,11}$

Dus $x = 0,64y^{1,11}$.

Bladzijde 101

10 a $K = 16p^{1,18}$

$16p^{1,18} = K$

$p^{1,18} = \frac{1}{16}K$

$p = (\frac{1}{16}K)^{\frac{1}{1,18}} = (\frac{1}{16})^{\frac{1}{1,18}} \cdot K^{\frac{1}{1,18}} \approx 0,10 \cdot K^{0,85}$

Dus $p = 0,10K^{0,85}$.

b $l = 0,2 \cdot (2F)^{-1,5}$
 $0,2 \cdot (2F)^{-1,5} = l$
 $(2F)^{-1,5} = 5l$
 $2F = (5l)^{-\frac{1}{1,5}}$
 $F = \frac{1}{2} \cdot (5l)^{-\frac{1}{1,5}} = \frac{1}{2} \cdot 5^{-\frac{1}{1,5}} \cdot l^{-\frac{1}{1,5}} \approx 0,17 \cdot l^{-0,67}$
Dus $F = 0,17l^{-0,67}$.

c $D = 15 \cdot (0,2y)^{1,75}$
 $15 \cdot (0,2y)^{1,75} = D$
 $(0,2y)^{1,75} = \frac{1}{15}D$
 $0,2y = (\frac{1}{15}D)^{\frac{1}{1,75}}$
 $y = 5 \cdot (\frac{1}{15})^{\frac{1}{1,75}} \cdot D^{\frac{1}{1,75}} \approx 1,06 \cdot D^{0,57}$
Dus $y = 1,06D^{0,57}$.

11 a $h = \frac{10n^{-2,1}}{1,13}$
 $10n^{-2,1} = 1,13h$
 $n^{-2,1} = 0,113h$
 $n = (0,113h)^{-\frac{1}{2,1}} = 0,113^{-\frac{1}{2,1}} \cdot h^{-\frac{1}{2,1}} \approx 2,82 \cdot h^{-0,48}$
Dus $n = 2,82h^{-0,48}$.

b $s = 0,008(2t)^{5,12}$
 $0,008(2t)^{5,12} = s$
 $(2t)^{5,12} = 125s$
 $2t = (125s)^{\frac{1}{5,12}}$
 $t = \frac{1}{2} \cdot 125^{\frac{1}{5,12}} \cdot s^{\frac{1}{5,12}} \approx 1,28 \cdot s^{0,20}$
Dus $t = 1,28s^{0,20}$.

c $x = 3,5y\sqrt{y}$
 $3,5y\sqrt{y} = x$
 $y^{1,5} = \frac{1}{3,5}x$
 $y = \left(\frac{1}{3,5}x\right)^{\frac{1}{1,5}} = \left(\frac{1}{3,5}\right)^{\frac{1}{1,5}} \cdot x^{\frac{1}{1,5}} \approx 0,43 \cdot x^{0,67}$
Dus $y = 0,43x^{0,67}$.

12 a $y = 15x \cdot \sqrt[3]{x}$
 $15x \cdot \sqrt[3]{x} = y$
 $15x^{\frac{4}{3}} = y$
 $x^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{15}y$
 $x = \left(\frac{1}{15}y\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}} \approx 0,13 \cdot y^{0,75}$
Dus $x = 0,13y^{0,75}$.

b $y = \frac{12}{x \cdot \sqrt[4]{x}}$
 $x \cdot \sqrt[4]{x} \cdot y = 12$
 $x \cdot x^{\frac{1}{4}} = \frac{12}{y}$
 $x^{\frac{5}{4}} = 12y^{-1}$
 $x = (12y^{-1})^{\frac{4}{5}} = 12^{\frac{4}{5}} \cdot y^{-\frac{4}{5}} \approx 7,30 \cdot y^{-0,8}$
Dus $x = 7,30y^{-0,8}$.

13 a De formule $t = 25n^{0,6}$ geeft (t afgerond op gehele):

n	5	10	15	20
t	66	100	127	151

Dus de formule past bij de tabel.

- b** n verdubbelen van $n = 5$ naar $n = 10$ geeft een toename van de tijd van 65 naar 100 seconden.

Dat is een procentuele toename van $\frac{100 - 65}{65} \times 100\% \approx 54\%$.

n verdubbelen van $n = 10$ naar $n = 20$ geeft een toename van de tijd van 100 naar 150 seconden. Dat is een procentuele toename van 50%.

Manon heeft dus gelijk.

Bladzijde 102

- 14 a** Neem $3n$ voor n in de formule $t = 25n^{0,6}$.
Je krijgt $t = 25 \cdot (3n)^{0,6} = 25 \cdot 3^{0,6} \cdot n^{0,6} = 3^{0,6} \cdot 25n^{0,6} \approx 1,93 \cdot 25n^{0,6}$.
Dus de tijd neemt met ongeveer 93% toe.
- b** Neem $1,4t$ voor t in de formule $n = (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}$.
Je krijgt $n = (0,04 \cdot 1,4t)^{\frac{1}{0,6}} = 1,4^{\frac{1}{0,6}} \cdot (0,04t)^{\frac{1}{0,6}} \approx 1,75 \cdot (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}$.
Dus n moet met 1,75 worden vermenigvuldigd.
- 15 a** Neem in de formule $2v$ voor v .
Je krijgt $r = 0,016 \cdot (2v)^{1,75} = 0,016 \cdot 2^{1,75} \cdot v^{1,75} = 2^{1,75} \cdot 0,016v^{1,75} \approx 3,4 \cdot 0,016v^{1,75}$.
Dus de remweg is ongeveer 3,4 keer zo lang.
- b** Neem in de formule $2n$ voor n .
Je krijgt $M = 150\,000 \cdot (2n)^{-0,3} = 150\,000 \cdot 2^{-0,3} \cdot n^{-0,3} = 2^{-0,3} \cdot 150\,000n^{-0,3} \approx 0,812 \cdot 150\,000n^{-0,3}$.
Dus M neemt met ongeveer 18,8% af.

Bladzijde 103

- 16** $N = 4,4A^{0,3}$
 $4,4A^{0,3} = N$
 $A^{0,3} = \frac{1}{4,4}N$
 $A = (\frac{1}{4,4}N)^{\frac{1}{0,3}}$
Neem in deze formule $1,25N$ voor N .
Je krijgt $A = (\frac{1}{4,4} \cdot 1,25N)^{\frac{1}{0,3}} = 1,25^{\frac{1}{0,3}} \cdot (\frac{1}{4,4}N)^{\frac{1}{0,3}} \approx 2,1 \cdot (\frac{1}{4,4}N)^{\frac{1}{0,3}}$.
Dus eiland P is ongeveer 2,1 keer zo groot als eiland Q.

- 17 a** 2 meter = 20 dm, dus $l = 20$.
 $20 \cdot 4 = 80$ kg, dus $g = \frac{80}{2000} = 0,04$.
 $d = 0,0005 \cdot 0,04 \cdot 20^4 = 3,2$
De doorbuiging is 3,2 mm.
- b** $0,0005g \cdot 25^4 = 2,5$
 $195,3125g = 2,5$
 $g = 0,0128$
Het totale gewicht van de stenen is $0,0128 \cdot 2500 = 32$ kg.
- c** $g = 0,05$ geeft $d = 0,0005 \cdot 0,05 \cdot l^4 = 2,5 \cdot 10^{-5}l^4$
 $2,5 \cdot 10^{-5}l^4 = 2,2$
 $l^4 = 88\,000$
 $l = \sqrt[4]{88\,000} \approx 17,2$
De lengte is ongeveer 17,2 dm = 172 cm.
- d** Neem $1,2l$ voor l in de formule van vraag c.
Je krijgt $d = 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot (1,2l)^4 = 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 1,2^4 \cdot l^4 = 1,2^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-5}l^4 \approx 2,07 \cdot 2,5 \cdot 10^{-5}l^4$.
Dus de doorbuiging neemt toe met ongeveer 107%.
- e** $d = 2,5 \cdot 10^{-5}l^4$
 $2,5 \cdot 10^{-5}l^4 = d$
 $l^4 = 40\,000d$
 $l = \sqrt[4]{40\,000d}$
 $l = \sqrt[4]{40\,000} \cdot \sqrt[4]{d}$
 $l \approx 14 \cdot \sqrt[4]{d}$
Dus $l = 14 \cdot \sqrt[4]{d}$.

- 18 a** Neem in de formule $1,2R$ voor R .
 Je krijgt $G = a \cdot (1,2R)^3 = a \cdot 1,2^3 \cdot R^3 = 1,2^3 \cdot aR^3 = 1,728 \cdot aR^3$.
 Dus het gewicht is 1,728 keer zo groot.
- b** $G = aR^3$
 $aR^3 = G$
 $R^3 = \frac{1}{a}G$
 $R = (\frac{1}{a}G)^{\frac{1}{3}}$
 Neem in deze formule $2G$ voor G .
 Je krijgt $R = (\frac{1}{a} \cdot 2G)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot (\frac{1}{a}G)^{\frac{1}{3}} \approx 1,26 \cdot (\frac{1}{a}G)^{\frac{1}{3}}$.
 Dus de rompomvang is 1,26 keer zo groot.
- c** $G = aR^3$
 $R = 2,03$ en $G = 670$ $\left\{ \begin{array}{l} a \cdot 2,03^3 = 670 \\ a = \frac{670}{2,03^3} \approx 80,1 \end{array} \right.$
- d** $80R^3 = 580$
 $R^3 = 7,25$
 $R = \sqrt[3]{7,25} \approx 1,94$
 Dus de rompomvang is 1,94 meter.
 (Met $G = 80,1R^3$ krijg je een rompomvang van 1,93 meter.)

Alternatieve uitwerking

$80R^3 = 580$
 Voer in $y_1 = 80x^3$ en $y_2 = 580$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 1,94$.
 Dus de rompomvang is 1,94 meter.

e $G = 80R^3$
 $R^3 = \frac{1}{80}G$
 $R = (\frac{1}{80}G)^{\frac{1}{3}} = (\frac{1}{80})^{\frac{1}{3}} \cdot G^{\frac{1}{3}} \approx 0,232 \cdot G^{\frac{1}{3}}$
 Dus $R = 0,232G^{\frac{1}{3}}$.

Bladzijde 104

- 19 a** $L = \frac{a}{d^2}$
 Neem in de formule $3d$ voor d .
 Je krijgt $L = \frac{a}{(3d)^2} = \frac{a}{9d^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{a}{d^2}$.
 Dus de geluidssterkte wordt 9 keer zo klein.
- b** $L = \frac{a}{d^2}$
 $d^2 = \frac{a}{L}$
 $d = \sqrt{\frac{a}{L}}$
 Neem in deze formule $\frac{1}{2}L$ voor L .
 Je krijgt $d = \sqrt{\frac{a}{\frac{1}{2}L}} = \sqrt{\frac{2a}{L}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{L}}$.
 Dus d wordt $\sqrt{2} \cdot 3 = 4,24...$
 Dus op een afstand van 4,2 meter.

Alternatieve uitwerking

$L_1 = \frac{a}{3^2}$ en $L_2 = \frac{a}{d^2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{d^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3^2} \\ \frac{a}{d^2} = \frac{a}{18} \\ d^2 = 18 \\ d = \sqrt{18} = 4,24... \end{array} \right.$
 Dus op een afstand van 4,2 meter.

$$20 \quad a \quad \left. \begin{array}{l} y = ax^{1,5} \\ x = 9 \text{ en } y = 162 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 9^{1,5} = 162 \\ a = \frac{162}{9^{1,5}} = 6 \end{array}$$

$$b \quad \left. \begin{array}{l} y = ax^{1,5} \\ x = 16 \text{ en } y = 384 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 16^{1,5} = 384 \\ a = \frac{384}{16^{1,5}} = 6 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = ax^{1,5} \\ x = 25 \text{ en } y = 750 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 25^{1,5} = 750 \\ a = \frac{750}{25^{1,5}} = 6 \end{array}$$

c De bewering van Murat klopt, want elke keer is a hetzelfde.

Bladzijde 105

$$21 \quad a \quad \text{Uit } A = al^2 \text{ volgt } a = \frac{A}{l^2}.$$

Bereken daarom steeds $\frac{A}{l^2}$.

$$\frac{19}{8^2} \approx 0,297$$

$$\frac{99}{18^2} \approx 0,306$$

$$\frac{635}{46^2} \approx 0,300$$

$$\frac{43}{12^2} \approx 0,299$$

$$\frac{305}{32^2} \approx 0,298$$

Telkens is $\frac{A}{l^2} \approx 0,30$.

Dus A is evenredig met l^2 en de formule is $A = 0,30l^2$.

$$b \quad 2 \text{ cm}^2 = 200 \text{ mm}^2$$

$$0,30l^2 = 200$$

$$l^2 = \frac{200}{0,3}$$

$$l = \sqrt{\frac{200}{0,3}} \approx 26$$

De lengte is ongeveer 26 mm.

$$22 \quad a \quad \text{Uit } H = aG^{0,67} \text{ volgt } a = \frac{H}{G^{0,67}}.$$

Bereken daarom steeds $\frac{H}{G^{0,67}}$.

$$\frac{19}{20^{0,67}} \approx 11,94$$

$$\frac{142}{40^{0,67}} \approx 11,99$$

$$\frac{490}{250^{0,67}} \approx 12,12$$

$$\frac{56}{10^{0,67}} \approx 11,97$$

$$\frac{380}{175^{0,67}} \approx 11,94$$

Telkens is $\frac{H}{G^{0,67}} \approx 12$.

Dus H is evenredig met $G^{0,67}$ en de formule is $H = 12G^{0,67}$.

$$b \quad G = 60 \text{ geeft } H = 12 \cdot 60^{0,67} \approx 186$$

De hersenmassa is ongeveer 186 gram.

$$23 \quad a \quad \text{Uit } E = \frac{a}{G^{0,4}} \text{ volgt } a = E \cdot G^{0,4}.$$

Bereken daarom steeds $E \cdot G^{0,4}$.

$$19,4 \cdot 300^{0,4} = 189,95...$$

$$5,22 \cdot 8000^{0,4} = 190,06...$$

$$13,1 \cdot 800^{0,4} = 189,89...$$

$$2,33 \cdot 60000^{0,4} = 189,93...$$

Telkens is $E \cdot G^{0,4} \approx 190$, dus E is omgekeerd evenredig met $G^{0,4}$ en de formule is $E = \frac{190}{G^{0,4}}$.

b Neem in de formule $10G$ voor G .

$$\text{Je krijgt } E = \frac{190}{(10G)^{0,4}} = \frac{190}{10^{0,4} \cdot G^{0,4}} = \frac{1}{10^{0,4}} \cdot \frac{190}{G^{0,4}} \approx 0,4 \cdot \frac{190}{G^{0,4}}.$$

Dus een giraffe verbruikt ongeveer 0,4 keer zoveel energie per km als een kangoeroe.

$$\begin{aligned} \text{c} \quad E &= \frac{190}{G^{0,4}} \\ G^{0,4} &= \frac{190}{E} \\ G &= \left(\frac{190}{E} \right)^{2,5} \end{aligned}$$

Neem in deze formule $0,65E$ voor E .

$$\text{Je krijgt } G = \left(\frac{190}{0,65E} \right)^{2,5} = \frac{1}{0,65^{2,5}} \cdot \left(\frac{190}{E} \right)^{2,5} \approx 3 \cdot \left(\frac{190}{E} \right)^{2,5}.$$

Dus een nijlpaard is ongeveer 3 keer zo zwaar als een paard.

$$\text{d} \quad G = 4000 \text{ geeft } E = \frac{200}{4000^{0,4}} = 7,247 \dots$$

Dus het konijn verbruikt 7,247... joule per gram per km, oftewel $7,247 \dots \cdot 4000 : 2 \approx 15\,000$ joule per 500 meter.

$$\text{e} \quad G^* = 0,001G, \text{ oftewel } G = 1000G^*.$$

$$E^* = \frac{200}{(1000G^*)^{0,4}} = \frac{200}{1000^{0,4}} \cdot \frac{1}{(G^*)^{0,4}} \approx \frac{12,6}{(G^*)^{0,4}}$$

$$\text{Dus } E^* = \frac{12,6}{(G^*)^{0,4}}.$$

$$\text{24 a} \quad xy = 15 \text{ geeft } y = \frac{15}{x}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot y = 1,2 \text{ geeft } y = \frac{1,2}{\left(\frac{1}{3}\right)^x}$$

$$\text{b} \quad \text{Voer in } y_1 = \frac{15}{x} \text{ en } y_2 = \frac{1,2}{\left(\frac{1}{3}\right)^x}.$$

De optie snijpunt geeft $x = 1,776 \dots$ en $y = 8,445 \dots$

Dus $x \approx 1,78$ en $y \approx 8,45$.

Bladzijde 106

$$\text{25} \quad m = 3 \text{ en } F = 552 \text{ geeft } a \cdot 3^p = 552$$

$$m = 5 \text{ en } F = 1615 \text{ geeft } a \cdot 5^p = 1615$$

$$\text{Dit levert het stelsel vergelijkingen } \begin{cases} a \cdot 3^p = 552 \\ a \cdot 5^p = 1615 \end{cases}$$

$$\text{Je krijgt } a = \frac{552}{3^p} \text{ en } a = \frac{1615}{5^p}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{552}{3^x} \text{ en } y_2 = \frac{1615}{5^x}.$$

De optie snijpunt geeft $x = 2,101 \dots$ en $y = 54,856 \dots$

Dus $a \approx 55$ en $p \approx 2,1$.

$$\text{26 a} \quad \left. \begin{aligned} P &= \frac{a}{Q^b} \\ P &= 2,0 \text{ en } Q = 0,30 \end{aligned} \right\} \frac{a}{0,30^b} = 2,0$$

$$a = 2,0 \cdot 0,30^b$$

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{a}{Q^b} \\ P &= 3,8 \text{ en } Q = 0,06 \end{aligned} \right\} \frac{a}{0,06^b} = 3,8$$

$$a = 3,8 \cdot 0,06^b$$

$$\text{Voer in } y_1 = 2,0 \cdot 0,30^x \text{ en } y_2 = 3,8 \cdot 0,06^x.$$

De optie snijpunt geeft $x = 0,398 \dots$ en $y = 1,237 \dots$

$$\text{Dus } P = \frac{1,24}{Q^{0,40}}.$$

$$\text{b} \quad P = 7,4 \text{ geeft } \frac{1,24}{Q^{0,40}} = 7,4$$

$$\text{Voer in } y_3 = \frac{1,24}{x^{0,40}} \text{ en } y_4 = 7,4.$$

De optie snijpunt met y_3 en y_4 geeft $x = 0,011 \dots$

Dus $Q \approx 0,01$.

- c Neem $2Q$ voor Q in de formule $P = \frac{1,24}{Q^{0,40}}$.
 Je krijgt $P = \frac{1,24}{(2Q)^{0,40}} = \frac{1}{2^{0,40}} \cdot \frac{1,24}{Q^{0,40}} \approx 0,758 \cdot \frac{1,24}{Q^{0,40}}$.
 Dus P neemt ongeveer met 24,2% af.

27
$$\left. \begin{array}{l} W = am^p \\ m = 30 \text{ en } W = 90 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 30^p = 90 \\ a = \frac{90}{30^p} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} W = am^p \\ m = 70 \text{ en } W = 190 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 70^p = 190 \\ a = \frac{190}{70^p} \end{array}$$

Voer in $y_1 = \frac{90}{30^x}$ en $y_2 = \frac{190}{70^x}$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,881...$ en $y = 4,483...$

De formule is $W = 4,483...m^{0,881...}$.

1,2 liter per dag is $1200 : 24 = 50$ mL per uur.

Voer in $y_1 = 4,483...x^{0,881...}$ en $y_2 = 50$.

De optie snijpunt geeft $x = 15,40...$

Dus de massa van de gazelle is ongeveer 15,4 kg.

11.2 Standaardgrafieken en transformaties

Bladzijde 108

- 28 a $y = \frac{1}{2}x^2$
 $\downarrow$ translatie (0, 3)
 $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$
- b $y = \sqrt{x}$
 $\downarrow$ translatie (3, 0)
 $y = \sqrt{x - 3}$
- c $y = \frac{1}{x}$
 $\downarrow$ verm. x-as, 2
 $y = \frac{2}{x}$
- d $y = 2^x$
 $\downarrow$ verm. y-as, 3
 $y = 2^{\frac{1}{3}x}$

Bladzijde 110

- 29 a $y = 0,3x^4$
 $\downarrow$ translatie (-5, 6)
 $y = 0,3(x + 5)^4 + 6$
 $\downarrow$ verm. x-as, 3
 $y = 3(0,3(x + 5)^4 + 6)$
 oftewel $y = 0,9(x + 5)^4 + 18$
 De top is (-5, 18).
- b $y = 0,3x^4$
 $\downarrow$ verm. x-as, 3
 $y = 3 \cdot 0,3x^4 = 0,9x^4$
 $\downarrow$ translatie (-5, 6)
 $y = 0,9(x + 5)^4 + 6$
 De top is (-5, 6).

- 30 a** $g(x) = 0,01x^4$
 $\downarrow$ translatie $(8, -5)$
 $y = 0,01(x - 8)^4 - 5$
 $\downarrow$ verm. y -as, $\frac{1}{3}$
 $f(x) = 0,01(3x - 8)^4 - 5$
- b** De top van de grafiek van f is $(2\frac{2}{3}, -5)$.
 $(2\frac{2}{3}, -5)$
 $\downarrow$ translatie (a, b)
 $(4, 0)$
Dus $a = 1\frac{1}{3}$ en $b = 5$.

- 31 a** $y = \sqrt{x}$
 $\downarrow$ translatie $(-3, -1)$
 $y = \sqrt{x + 3} - 1$
 $\downarrow$ verm. y -as, 2
 $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3} - 1$
- b** $D_f = [-6, \rightarrow)$ en $B_f = [-1, \rightarrow)$
- c** $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3} - 1$.
 $\downarrow$ translatie $(3, 5)$
 $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(x - 3) + 3} - 1 + 5$ oftewel $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}} + 4$
- d** $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3} - 1$
 $\downarrow$ translatie $(-1, -b)$
 $h(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(x + 1) + 3} - 1 - b$ oftewel $h(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}} - b - 1$
 $h(1) = 0$ geeft $\sqrt{4 - b - 1} = 0$
 $2 - b - 1 = 0$
 $b = 1$

- 32 a** $y = \sqrt{x}$
 $\downarrow$ verm. x -as, 3
 $y = 3\sqrt{x}$
 $\downarrow$ translatie $(1, 2)$
 $y = 3\sqrt{x - 1} + 2$
 $\downarrow$ verm. y -as, $\frac{1}{2}$
 $f(x) = 3\sqrt{2x - 1} + 2$
- b** $D_f = [\frac{1}{2}, \rightarrow)$ en $B_f = [2, \rightarrow)$
- c** $f(x) = 3\sqrt{2x - 1} + 2$
 $\downarrow$ translatie $(-b, -11)$
 $g(x) = 3\sqrt{2(x + b) - 1} + 2 - 11$ oftewel $g(x) = 3\sqrt{2x + 2b - 1} - 9$
 $g(0) = 0$ geeft $3\sqrt{2b - 1} - 9 = 0$
 $3\sqrt{2b - 1} = 9$
 $\sqrt{2b - 1} = 3$
 $2b - 1 = 9$
 $2b = 10$
 $b = 5$

- 33 a** $y = \frac{1}{x}$
 $\downarrow$ verm. x -as, 2
 $y = \frac{2}{x}$
 $\downarrow$ translatie $(3, 4)$
 $f(x) = \frac{2}{x - 3} + 4$

- b** verticale asymptoot $x = 3$
horizontale asymptoot $y = 4$

c $f(x) = \frac{2}{x-3} + 4$

↓ translatie $(-2, -4)$

$$y = \frac{2}{x+2-3} + 4 - 4 \text{ oftewel } y = \frac{2}{x-1}$$

↓ verm. x -as, 2

$$y = \frac{4}{x-1}$$

↓ verm. y -as, $\frac{1}{2}$

$$g(x) = \frac{4}{2x-1}$$

Alternatieve uitwerking

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + 4 = \frac{4}{2x-6} + 4$$

↓ translatie $(-2\frac{1}{2}, -4)$

$$g(x) = \frac{4}{2(x+2\frac{1}{2})-6} \text{ oftewel } g(x) = \frac{4}{2x-1}$$

Bladzijde 111

34 a $f(x) = \frac{1}{2x}$

↓ verm. x -as, 6

$$y = 6 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{3}{x}$$

↓ translatie $(5, 2)$

$$g(x) = \frac{3}{x-5} + 2$$

- b** De asymptoten zijn $x = 2$ en $y = 4$, dus $h(x) = \frac{a}{x-2} + 4$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{3-2} + 4 = 9 \\ \text{door } A(3, 9) \\ a = 5 \end{array} \right.$

$$\text{Dus } h(x) = \frac{5}{x-2} + 4.$$

$$f(x) = \frac{1}{2x}$$

↓ verm. x -as, 10

$$y = 10 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{5}{x}$$

↓ translatie $(2, 4)$

$$h(x) = \frac{5}{x-2} + 4$$

35 a $y = 3^x$

↓ verm. x -as, 4

$$y = 4 \cdot 3^x$$

↓ translatie $(1, -6)$

$$f(x) = 4 \cdot 3^{x-1} - 6$$

- b** horizontale asymptoot $y = -6$
 $B_f = \langle -6, \rightarrow \rangle$

c $f(x) = 4 \cdot 3^{x-1} - 6$
 $\downarrow$ translatie $(-3, 0)$
 $y = 4 \cdot 3^{x+2} - 6$
 $\downarrow$ verm. x -as, $\frac{1}{3}$
 $g(x) = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3^{x+2} - 2$
 $g(x) = 3^{-1} \cdot 4 \cdot 3^{x+2} - 2$
 $g(x) = 4 \cdot 3^{x+1} - 2$
 $g(x) = 4(3^{x+1} - \frac{1}{2})$

36 a $y = \frac{1}{2}\log(x)$
 $\downarrow$ translatie $(-3, -2)$
 $f(x) = \frac{1}{2}\log(x+3) - 2$

b verticale asymptoot $x = -3$
 $D_f = \langle -3, \rightarrow \rangle$

c $f(x) = \frac{1}{2}\log(x+3) - 2$
 $\downarrow$ translatie $(0, a)$
 $y = \frac{1}{2}\log(x+3) - 2 + a$
 $\downarrow$ verm. y -as, b
 $g(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{b} + 3\right) + a - 2$

$x = 3$ is asymptoot geeft $\frac{3}{b} + 3 = 0$

$$\frac{3}{b} = -3$$

$$b = -1$$

$g(x) = \frac{1}{2}\log(-x+3) + a - 2$
 door $A(2\frac{3}{4}, -2)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\log(-2\frac{3}{4}+3) + a - 2 = -2 \\ \frac{1}{2}\log(\frac{1}{4}) + a = 0 \\ 2 + a = 0 \\ a = -2 \end{array} \right.$

d $h(x) = \frac{1}{2}\log(x+3) - 2$
 $\downarrow$ translatie $(c, 0)$
 $y = \frac{1}{2}\log(x-c+3) - 2$
 $\downarrow$ verm. y -as, d
 $y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{d}x - c + 3\right) - 2 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{d}x - c + 3\right) + \frac{1}{2}\log(4) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{d}x - 4c + 12\right)$

Dit moet zijn $f(x) = \frac{1}{2}\log(x)$, dus $-4c + 12 = 0$ en $\frac{4}{d} = 1$
 $-4c = -12$ en $d = 4$
 $c = 3$ en $d = 4$

Alternatieve uitwerking

Door achterstevoren te werken, krijg je

$$h(x) = \frac{1}{2}\log(x)$$

$\downarrow$ verm. y -as, $\frac{1}{d}$

$$y = \frac{1}{2}\log(dx)$$

$\downarrow$ translatie $(-c, 0)$

$$y = \frac{1}{2}\log(d(x+c)) = \frac{1}{2}\log(x+c) + \frac{1}{2}\log(d)$$

Dit moet zijn $f(x) = \frac{1}{2}\log(x+3) - 2$, dus $c = 3$ en $\frac{1}{2}\log(d) = -2$
 $c = 3$ en $d = 4$

37 $f(x) = 1 + 3 \sin(2x - \frac{1}{2}\pi) = 1 + 3 \sin(2(x - \frac{1}{4}\pi))$

Voor de grafiek van f geldt:

evenwichtsstand 1

amplitude 3

periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$

beginpunt $(\frac{1}{4}\pi, 1)$

Dus voor de grafiek van g geldt:

evenwichtsstand $1 + 2 = 3$

amplitude $\frac{1}{2} \cdot 3 = 1\frac{1}{2}$

periode $\frac{1}{3}\pi$

beginpunt $(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi, 1 + 2) = (\frac{5}{12}\pi, 3)$

Dit geeft $g(x) = 3 + 1\frac{1}{2} \sin(6(x - \frac{5}{12}\pi))$ oftewel $g(x) = 3 + 1\frac{1}{2} \sin(6x - 2\frac{1}{2}\pi)$.

Bladzijde 112

38 a $s(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 4x + 2x - 1 = x^2 - 2x - 1$

$x_{\text{top}} = -\frac{-2}{2} = 1$ en $y_{\text{top}} = s(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 1 = -2$

De top is $(1, -2)$.

b $v(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 4x - (2x - 1) = x^2 - 4x - 2x + 1 = x^2 - 6x + 1$

$x_{\text{top}} = -\frac{-6}{2} = 3$ en $y_{\text{top}} = v(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 1 = -8$

De top is $(3, -8)$.

c $k(x) = f(g(x)) = (2x - 1)^2 - 4(2x - 1) = 4x^2 - 4x + 1 - 8x + 4 = 4x^2 - 12x + 5$

$x_{\text{top}} = -\frac{-12}{8} = 1\frac{1}{2}$ en $y_{\text{top}} = k(1\frac{1}{2}) = 4 \cdot (1\frac{1}{2})^2 - 12 \cdot 1\frac{1}{2} + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$

De top is $(1\frac{1}{2}, -4)$.

Bladzijde 113

39 a $n(x) = f(x) + 6 \cdot g(x) = 2^{x+3} + 6 \cdot 2^{x-1} = 8 \cdot 2^x + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^x = 11 \cdot 2^x$

b $p(x) = f(x) - 12 \cdot g(x) = 2^{x+3} - 12 \cdot 2^{x-1} = 8 \cdot 2^x - 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^x = 2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$

c $l(x) = g(h(x)) = 2^{\log(x)-1} = 2^{\log(x)} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}x$ met $x > 0$

40 a $s(x) = f(x) + g(x) = \frac{2x-3}{x+1} + \frac{a}{x} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2-3}{1+1} + \frac{a}{1} = 1\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + a = 1\frac{1}{2} \\ a = 2 \end{array} \right.$

door $(1, 1\frac{1}{2})$

b $v(x) = f(x) - g(x) = \frac{2x-3}{x+1} - \frac{a}{x} = \frac{x(2x-3) - a(x+1)}{x(x+1)} = \frac{2x^2 - 3x - ax - a}{x^2 + x} = \frac{2x^2 - (a+3)x - a}{x^2 + x}$

$v(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+x}$ geeft $a+3=0$ en $-a=3$, dus $a=-3$.

c $k(x) = f(g(x)) = \frac{2 \cdot \frac{a}{x} - 3}{\frac{a}{x} + 1} = \frac{2a - 3x}{a + x} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2a-12}{a+4} = -2 \\ 2a-12 = -2a-8 \\ 4a = 4 \\ a = 1 \end{array} \right.$

door $(4, -2)$

- 41 a** $s(x) = f(x) + g(x) = {}^3\log(6x) + {}^3\log(4,5x) = {}^3\log(6x \cdot 4,5x) = {}^3\log(27x^2)$
 $= {}^3\log(27) + {}^3\log(x^2) = 3 + 2 \cdot {}^3\log(x)$
 Dus $a = 3$ en $b = 2$.
- b** $v(x) = f(x) - g(x) = {}^3\log(6x) - {}^3\log(4,5x) = {}^3\log\left(\frac{6x}{4,5x}\right) = {}^3\log\left(\frac{4}{3}\right) = {}^3\log(4) - {}^3\log(3)$
 $= {}^3\log(4) - 1 = -1 + {}^3\log(4)$
 Dus $c = -1$ en $d = 4$.
- c** $k(x) = f(h(x)) = {}^3\log(6(3^{x+1})) = {}^3\log(6 \cdot 3^{x+1}) = {}^3\log(6 \cdot 3^x \cdot 3) = {}^3\log(3^x \cdot 18) = {}^3\log(3^x) + {}^3\log(18) = x + {}^3\log(18)$
 Dus $p = {}^3\log(18) \approx 2,63$.

11.3 Tweede- en derdegraadsfuncties

Bladzijde 115

- 42 a** $y = x^2$
 $\downarrow$ translatie $(3, 4)$
 $f(x) = (x - 3)^2 + 4$
 Dus top $(3, 4)$ is nu af te lezen.
- b** $f(x) = (x - 3)^2 + 4 = x^2 - 6x + 9 + 4 = x^2 - 6x + 13$
 $f(0) = 13$, dus de coördinaten van het snijpunt met de y -as $(0, 13)$ zijn direct af te lezen.
- c** $g(x) = 0$ geeft $2(x - 1)(x - 3) = 0$
 $x - 1 = 0 \vee x - 3 = 0$
 $x = 1 \vee x = 3$
 Omdat het functievoorschrift ontbonden is in factoren, zijn de coördinaten van de snijpunten met de x -as direct af te lezen.
- d** $x_{\text{top}} = \frac{1+3}{2} = 2$ en $y_{\text{top}} = 2(2 - 1)(2 - 3) = -2$
 Dus de top is $(2, -2)$.

Bladzijde 116

- 43** In het voorbeeld is de vorm $y = a(x - d)(x - e)$ gekozen omdat de snijpunten met de x -as bekend zijn.

Bladzijde 117

- 44 a** 1 Stel een formule van p op.
 2 Bereken de richtingscoëfficiënt van k .
 3 Stel de formule van l op en geef de coördinaten van S .
- b** p door $A(1, 0)$ en $B(7, 0)$, dus $p: y = a(x - 1)(x - 7)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = a(x - 1)(x - 7) \\ \text{door } C(10, -18) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 9 \cdot 3 = -18 \\ a = -\frac{2}{3} \end{array}$$

 Dus $p: y = -\frac{2}{3}(x - 1)(x - 7)$.
 $x_{\text{top}} = \frac{1+7}{2} = 4$ en $y_{\text{top}} = -\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot -3 = 6$, dus $T(4, 6)$.
 $rc_k = \frac{0-6}{7-4} = -2$, dus $rc_l = \frac{1}{2}$, dus $l: y = \frac{1}{2}x + b$
 l door $T(4, 6)$
$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 4 + b = 6 \\ 2 + b = 6 \\ b = 4 \end{array} \right\}$$

 Dus $l: y = \frac{1}{2}x + 4$ en $S(0, 4)$.

- 45** De top van p is $T(3, 1\frac{4}{5})$, dus $p: y = a(x-3)^2 + 1\frac{4}{5}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = a(x-3)^2 + 1\frac{4}{5} \\ \text{door } A(2, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a(2-3)^2 + 1\frac{4}{5} = 2 \\ a = \frac{1}{5} \end{array}$$

$$\text{Dus } p: y = \frac{1}{5}(x-3)^2 + 1\frac{4}{5} = \frac{1}{5}(x^2 - 6x + 9) + 1\frac{4}{5} = \frac{1}{5}x^2 - 1\frac{1}{5}x + 3\frac{3}{5}.$$

$$\text{Dit geeft } y' = \frac{2}{5}x - 1\frac{1}{5}.$$

$$\text{rc}_k = y'(2) = \frac{4}{5} - 1\frac{1}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{2}{5}x + b \\ \text{door } A(2, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{5} \cdot 2 + b = 2 \\ b = 2\frac{4}{5} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5}.$$

$$x = 0 \text{ geeft } y = 2\frac{4}{5}$$

$$y = 0 \text{ geeft } -\frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5} = 0$$

$$-\frac{2}{5}x = -2\frac{4}{5}$$

$$x = 7$$

$$O(\triangle OBC) = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2\frac{4}{5} = 9\frac{4}{5}$$

- 46** De top van p is $T(2, 10)$, dus $p: y = a(x-2)^2 + 10$.

$$\left. \begin{array}{l} y = a(x-2)^2 + 10 \\ \text{door } A(-3, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a(-3-2)^2 + 10 = 0 \\ 25a = -10 \\ a = -\frac{2}{5} \end{array}$$

$$\text{Dus } p: y = -\frac{2}{5}(x-2)^2 + 10.$$

$$\text{Dit geeft } y' = -\frac{4}{5}(x-2).$$

$$\text{rc}_l = \text{rc}_k = \frac{10-0}{2-(-3)} = 2$$

$$y' = 2 \text{ geeft } -\frac{4}{5}(x-2) = 2$$

$$x-2 = -2\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ geeft } y = -\frac{2}{5}(-\frac{1}{2}-2)^2 + 10 = -\frac{2}{5} \cdot \frac{25}{4} + 10 = 7\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } B(-\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}).$$

- 47 a** $f(x) = \frac{1}{4}x^3$
 $\downarrow$ translatie $(1, 0)$
 $y = \frac{1}{4}(x-1)^3$
 $\downarrow$ verm. y -as, 3
 $y = \frac{1}{4}(\frac{1}{3}x-1)^3$
 $\downarrow$ verm. x -as, 8
 $g(x) = 2(\frac{1}{3}x-1)^3$

- b** $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ geeft $f'(x) = \frac{3}{4}x^2$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 3x + b \\ \text{door } A(2, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + b = 2 \\ b = -4 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 3x - 4.$$

- c** $g(x) = 2(\frac{1}{3}x-1)^3$ geeft $g'(x) = 6(\frac{1}{3}x-1)^2 \cdot \frac{1}{3} = 2(\frac{1}{3}x-1)^2$
 Stel $l: y = ax + b$ met $a = g'(6) = 2(2-1)^2 = 2$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = 2x + b \\ \text{door } B(6, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 6 + b = 2 \\ b = -10 \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = 2x - 10.$$

Bladzijde 119

- 48 a** 1 Bereken de coördinaten van B .
 2 Bereken met behulp van de afgeleide van f de richtingscoëfficiënt van k .
 3 Stel een vergelijking op van l .
 4 Bereken de x -coördinaten van D en E door l te snijden met de grafiek van f .

b $\frac{1}{2}(x^2 - 1)(x - 5) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

$$2(x^2 - 1)(x - 5) = x - 1$$

$$2(x - 1)(x + 1)(x - 5) = x - 1$$

$$x - 1 = 0 \vee 2(x + 1)(x - 5) = 1$$

$$x = 1 \vee 2(x^2 - 4x - 5) = 1$$

$$x = 1 \vee 2x^2 - 8x - 10 = 1$$

$$x = 1 \vee 2x^2 - 8x - 11 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -11 = 152$$

$$x = 1 \vee x = \frac{8 + \sqrt{152}}{4} \vee x = \frac{8 - \sqrt{152}}{4}$$

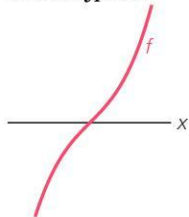
$$x = 1 \vee x = \frac{8 + 2\sqrt{38}}{4} \vee x = \frac{8 - 2\sqrt{38}}{4}$$

$$x = 1 \vee x = \frac{4 + \sqrt{38}}{2} \vee x = \frac{4 - \sqrt{38}}{2}$$

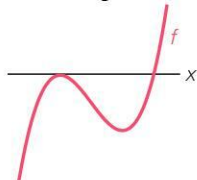
Bladzijde 120

- 49 a** $A \cdot B = A \cdot C$ geeft $A = 0 \vee B = C$
 Met $C = 1$ krijg je $A \cdot B = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$.

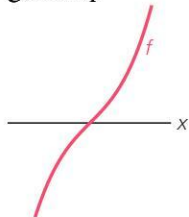
- b** één snijpunt



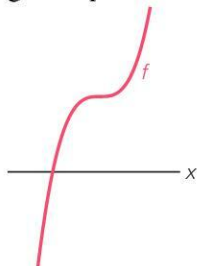
één raakpunt en één snijpunt



- c** geen top



geen top maar wel een punt met horizontale raaklijn



50 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0$ geeft $3x^2 - 12x + 9 = 0$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 3$$

$f(1) = 6$ en $f(3) = 2$, dus toppen $(1, 6)$ en $(3, 2)$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{2-6}{3-1} = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -2x + b \\ \text{door } (1, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + b = 6 \\ b = 8 \end{array}$$

Dus $k: y = -2x + 8$.

$x = 2$ geeft $y = -2 \cdot 2 + 8 = 4$, dus $A(2, 4)$ op k .

$f(2) = 8 - 24 + 18 + 2 = 4$, dus $A(2, 4)$ op de grafiek van f .

Dus k snijdt de grafiek van f in $A(2, 4)$.

51 $f(x) = 0$ geeft $2x^3 - 11x^2 + 12x = 0$

$$x(2x^2 - 11x + 12) = 0$$

$$x = 0 \vee 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 25$$

$$x = 0 \vee x = \frac{11+5}{4} = 4 \vee x = \frac{11-5}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$x_C = \frac{4 + 1\frac{1}{2}}{2} = 2\frac{3}{4}$$

$f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x$ geeft $f'(x) = 6x^2 - 22x + 12$

$f'(x) = 0$ geeft $6x^2 - 22x + 12 = 0$

$$3x^2 - 11x + 6 = 0$$

$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 49$$

$$x = \frac{11+7}{6} = 3 \vee x = \frac{11-7}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x_D = 3$$

$$x_D - x_C = 3 - 2\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

52 $f(x) = 0$ geeft $(\frac{1}{4}x - 1)^3 + 8 = 0$

$$(\frac{1}{4}x - 1)^3 = -8$$

$$\frac{1}{4}x - 1 = -2$$

$$\frac{1}{4}x = -1$$

$$x = -4$$

Dus $A(-4, 0)$.

$f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^3 + 8$ geeft $f'(x) = 3(\frac{1}{4}x - 1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(\frac{1}{4}x - 1)^2$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(-4) = \frac{3}{4}(-1 - 1)^2 = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 3x + b \\ \text{door } A(-4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot -4 + b = 0 \\ b = 12 \end{array}$$

Dus $k: y = 3x + 12$.

Lijn l door O loodrecht op k heeft vergelijking $l: y = -\frac{1}{3}x$.

Het snijpunt van k en l is S .

$$3x + 12 = -\frac{1}{3}x$$

$$3\frac{1}{3}x = -12$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -3\frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{3}x \end{array} \right\} y = 1\frac{1}{5}$$

Dus $S(-3\frac{3}{5}, 1\frac{1}{5})$.

$$d(O, k) = d(O, S) = \sqrt{(-3\frac{3}{5})^2 + (1\frac{1}{5})^2} = \sqrt{14\frac{2}{5}}$$

Bladzijde 121**53**

- a** $y = x^3$
 $\downarrow$ translatie (1, 0)
 $y = (x - 1)^3$
 $\downarrow$ verm. x-as, 4
 $y = 4(x - 1)^3$
 $\downarrow$ verm. y-as, 3
 $f(x) = 4(\frac{1}{3}x - 1)^3$
- b** $f(0) = 4(0 - 1)^3 = -4$, dus $A(0, -4)$.
 $f(x) = 4(\frac{1}{3}x - 1)^3$ geeft $f'(x) = 12(\frac{1}{3}x - 1)^2 \cdot \frac{1}{3} = 4(\frac{1}{3}x - 1)^2$
 $f'(0) = 4(0 - 1)^2 = 4$, dus $k: y = 4x - 4$.
 $y = 0$ geeft $4x - 4 = 0$
 $4x = 4$
 $x = 1$
Dus $B(1, 0)$.

- c** l snijden met de grafiek van f geeft $4(\frac{1}{3}x - 1)^3 = x - 3$
 $4(\frac{1}{3}x - 1)^3 = 3(\frac{1}{3}x - 1)$
 $\frac{1}{3}x - 1 = 0 \vee 4(\frac{1}{3}x - 1)^2 = 3$
 $\frac{1}{3}x = 1 \vee (\frac{1}{3}x - 1)^2 = \frac{3}{4}$
 $x = 3 \vee \frac{1}{3}x - 1 = \sqrt{\frac{3}{4}} \vee \frac{1}{3}x - 1 = -\sqrt{\frac{3}{4}}$
 $x = 3 \vee \frac{1}{3}x = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee \frac{1}{3}x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $x = 3 \vee x = 3 + 1\frac{1}{2}\sqrt{3} \vee x = 3 - 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$
- Dus $x_C = 3 - 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $x_E = 3 + 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
 $x_E - x_C = 3 + 1\frac{1}{2}\sqrt{3} - (3 - 1\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$

54

- a** $x^3 + px^2 + 9x = 0$
 $x(x^2 + px + 9) = 0$
 $x = 0 \vee x^2 + px + 9 = 0$
Van $x^2 + px + 9 = 0$ is $D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = p^2 - 36$.
één oplossing als $D < 0$
 $p^2 - 36 < 0$
 $p^2 < 36$
 $-6 < p < 6$
- b** twee oplossingen als $D = 0$
 $p = 6 \vee p = -6$
- c** drie oplossingen als $D > 0$
 $p < -6 \vee p > 6$

11.4 Wortelfuncties**Bladzijde 123****55**

- a** $4x - 5 = 0$
 $4x = 5$
 $x = 1\frac{1}{4}$
 $f(1\frac{1}{4}) = -3 + 2 \cdot 0 = -3$, dus $A(1\frac{1}{4}, -3)$.
- b** $D_f = [1\frac{1}{4}, \rightarrow)$ en $B_f = [-3, \rightarrow)$

Bladzijde 124

- 56 a** $D_f = \langle \leftarrow, 1\frac{1}{2} \rangle$ en $B_f = \langle \leftarrow, 3 \rangle$
- b** $f(x) = 0$ geeft $3 - \frac{1}{2}\sqrt{6-4x} = 0$
 $-\frac{1}{2}\sqrt{6-4x} = -3$
 $\sqrt{6-4x} = 6$
 $6-4x = 36$
 $-4x = 30$
 $x = -7\frac{1}{2}$
 $f(x) > 0$ geeft $-7\frac{1}{2} < x \leq 1\frac{1}{2}$
- c** $f(-2\frac{1}{2}) = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{6-4 \cdot -2\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{16} = 3 - 2 = 1$
 $x \geq -2\frac{1}{2}$ geeft $1 \leq f(x) \leq 3$

- 57 a** $y = 4 - 2\sqrt{3x-6}$
 $2\sqrt{3x-6} = 4 - y$
Omdat $2\sqrt{3x-6} \geq 0$, is $4 - y \geq 0$.
- b** $x = -y^2 + 6y - 7\frac{1}{2}$ is afgeleid uit $\frac{1}{2}\sqrt{6-4x} = 3 - y$.
Omdat $\frac{1}{2}\sqrt{6-4x} \geq 0$, is $3 - y \geq 0$.
Dus $y \leq 3$.

Bladzijde 125

- 58 a** $10 - 4x = 0$ geeft $-4x = -10$, dus $x = 2\frac{1}{2}$.
Het randpunt is $(2\frac{1}{2}, 3)$.
- b** $f(x) = -5$ geeft $3 - 2\sqrt{10-4x} = -5$
 $-2\sqrt{10-4x} = -8$
 $\sqrt{10-4x} = 4$
 $10-4x = 16$
 $-4x = 6$
 $x = -1\frac{1}{2}$
 $f(x) > -5$ geeft $-1\frac{1}{2} < x \leq 2\frac{1}{2}$
- c** $f(-6\frac{1}{2}) = 3 - 2\sqrt{10-4 \cdot -6\frac{1}{2}} = 3 - 2\sqrt{36} = 3 - 12 = -9$
 $x \geq -6\frac{1}{2}$ geeft $-9 \leq f(x) \leq 3$
- d** $f(x) = 3 - 2\sqrt{10-4x} = 3 - 2(10-4x)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = -(10-4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -4 = \frac{4}{(10-4x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{\sqrt{10-4x}}$
Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1\frac{1}{2}) = \frac{4}{\sqrt{10-6}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2$.
 $\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ f(1\frac{1}{2}) = -1, \text{ dus } A(1\frac{1}{2}, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 1\frac{1}{2} + b = -1 \\ b = -4 \end{array}$
Dus $k: y = 2x - 4$.
- e** $y = 3 - 2\sqrt{10-4x}$
 $2\sqrt{10-4x} = 3 - y$
kwadrateren geeft
 $4(10-4x) = 9 - 6y + y^2$
 $40 - 16x = 9 - 6y + y^2$
 $-16x = -31 - 6y + y^2$
 $x = -\frac{1}{16}y^2 + \frac{3}{8}y + 1\frac{15}{16}$

59 a $f(x) = 3$ geeft $\sqrt{3x-8} = 3$
 $3x-8 = 9$
 $3x = 17$
 $x = 5\frac{2}{3}$

Dus $A(5\frac{2}{3}, 3)$.

$$f(x) = \sqrt{3x-8} = (3x-8)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}(3x-8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2(3x-8)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-8}}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(5\frac{2}{3}) = \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 5\frac{2}{3} - 8}} = \frac{3}{2\sqrt{9}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(5\frac{2}{3}, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 5\frac{2}{3} + b = 3 \\ 2\frac{5}{6} + b = 3 \\ b = \frac{1}{6} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$.

b $rc_l = 1\frac{1}{2}$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}$
 $\frac{3}{2\sqrt{3x-8}} = \frac{3}{2}$
 $2\sqrt{3x-8} = 2$
 $\sqrt{3x-8} = 1$
 $3x-8 = 1$
 $3x = 9$
 $x = 3$
 $f(3) = 1$, dus $B(3, 1)$.

60 a $f(x) = a + b\sqrt{2x+c}$ geeft randpunt $(-\frac{1}{2}c, a)$
Dus $a = 2$ en $-\frac{1}{2}c = 2\frac{1}{2}$ oftewel $c = -5$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2 + b\sqrt{2x-5} \\ \text{door } B(3, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 + b\sqrt{6-5} = -1 \\ b = -3 \end{array}$$

b $f(x) = 3 - 1\frac{1}{2}\sqrt{2x+3}$
 $f(x) = 0$ geeft $3 - 1\frac{1}{2}\sqrt{2x+3} = 0$
 $1\frac{1}{2}\sqrt{2x+3} = 3$
 $\sqrt{2x+3} = 2$
 $2x+3 = 4$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$

Dus het snijpunt met de x -as is $(\frac{1}{2}, 0)$.

$$f(x) = 3 - 1\frac{1}{2}\sqrt{2x+3} = 3 - 1\frac{1}{2}(2x+3)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = -\frac{3}{4} \cdot (2x+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = -\frac{3}{2(2x+3)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2\sqrt{2x+3}}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2\sqrt{1+3}} = -\frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } (\frac{1}{2}, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + b = 0 \\ b = \frac{3}{8} \end{array}$$

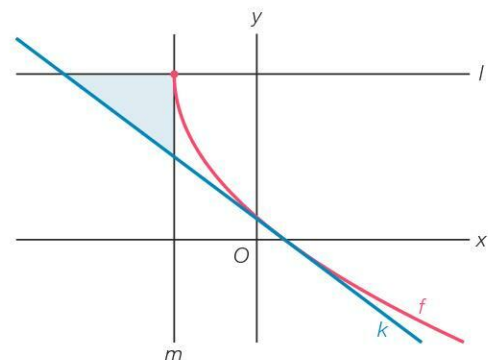
Dus $k: y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$.

Het randpunt is $(-1\frac{1}{2}, 3)$.

k en $l: y = 3$ snijden geeft $-\frac{3}{4}x + \frac{3}{8} = 3$
 $-6x + 3 = 24$
 $-6x = 21$
 $x = -3\frac{1}{2}$

k en $m: x = -1\frac{1}{2}$ snijden geeft $y = -\frac{3}{4} \cdot -1\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = 1\frac{1}{2}$.

De oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot (-1\frac{1}{2} - -3\frac{1}{2})(3 - 1\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.



61 a $4x + 6 \geq 0$

$$4x \geq -6$$

$$x \geq -1\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } D_f = [-1\frac{1}{2}, \rightarrow).$$

Het randpunt is $(-1\frac{1}{2}, 6)$ en $B_f = \langle \leftarrow, 6 \rangle$.

b $f(x) = 0$ geeft $6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{4x+6} = 0$

$$-1\frac{1}{2}\sqrt{4x+6} = -6$$

$$\sqrt{4x+6} = 4$$

$$4x+6 = 16$$

$$4x = 10$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$f(x) > 0 \text{ geeft } -1\frac{1}{2} \leq x < 2\frac{1}{2}$$

c $f(7\frac{1}{2}) = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 7\frac{1}{2} + 6} = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{36} = 6 - 1\frac{1}{2} \cdot 6 = 6 - 9 = -3$

$$x \leq 7\frac{1}{2} \text{ geeft } -3 \leq f(x) \leq 6$$

d $y = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{4x+6}$

$$1\frac{1}{2}\sqrt{4x+6} = 6 - y$$

$$\sqrt{4x+6} = 4 - \frac{2}{3}y$$

kwadrateren geeft

$$4x+6 = 16 - 5\frac{1}{3}y + \frac{4}{9}y^2$$

$$4x = 10 - 5\frac{1}{3}y + \frac{4}{9}y^2$$

$$x = \frac{1}{9}y^2 - 1\frac{1}{3}y + 2\frac{1}{2}$$

e $f(x) = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{4x+6} = 6 - 1\frac{1}{2}(4x+6)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = -\frac{3}{4}(4x+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = -\frac{3}{(4x+6)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{\sqrt{4x+6}}$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{\sqrt{-2+6}} = -\frac{3}{\sqrt{4}} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ f(-\frac{1}{2}) = 3, \text{ dus } A(-\frac{1}{2}, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} + b = 3 \\ \frac{3}{4} + b = 3 \\ b = 2\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}.$$

f $rc_f = -1\frac{1}{5}$ geeft $f'(x) = -1\frac{1}{5}$

$$-\frac{3}{\sqrt{4x+6}} = -1\frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{\sqrt{4x+6}} = \frac{6}{5}$$

$$6\sqrt{4x+6} = 15$$

$$\sqrt{4x+6} = 2\frac{1}{2}$$

$$4x+6 = 6\frac{1}{4}$$

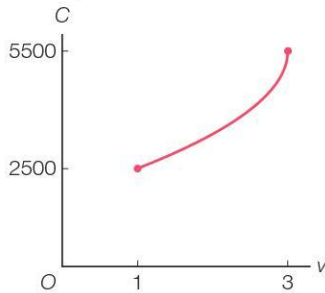
$$4x = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{16}$$

$$f(\frac{1}{16}) = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{6\frac{1}{4}} = 6 - 1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}, \text{ dus raakpunt } (\frac{1}{16}, 2\frac{1}{4}).$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{5}x + b \\ \text{door } (\frac{1}{16}, 2\frac{1}{4}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{16} + b = 2\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{40} + b = 2\frac{1}{4} \\ b = 2\frac{13}{40} \end{array}$$

- 62 a** $v = 1$ geeft $C = 2500$ en $v = 3$ geeft $C = 5500$.



Het bereik van C is $[2500, 5500]$.

- b** $p_4 = 0,3$, $p_2 = 0,5$ en $p_3 = 0,2$ geeft $v = 0,3 \cdot 3 + 0,5 \cdot 2 + 0,2 \cdot 1 = 2,1$.
 $v = 2,1$ geeft $C = 5500 - 1500\sqrt{6 - 2 \cdot 2,1} = 3487,5\dots$

Dus de capaciteit is 3488 voertuigen per uur.

- c** $C = 4000$ geeft $5500 - 1500\sqrt{6 - 2v} = 4000$
 $-1500\sqrt{6 - 2v} = -1500$
 $\sqrt{6 - 2v} = 1$
 $6 - 2v = 1$
 $-2v = -5$
 $v = 2,5$

- d** $\left. \begin{array}{l} p_4 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_4 = 0,2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,2 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_3 = 0,8 - p_2 \end{array}$

- e** $C = 3250$ geeft $5500 - 1500\sqrt{6 - 2v} = 3250$
 $-1500\sqrt{6 - 2v} = -2250$
 $\sqrt{6 - 2v} = 1,5$
 $6 - 2v = 2,25$
 $-2v = -3,75$
 $v = 1,875$

$v = 1,875$ geeft $0,2 \cdot 3 + p_2 \cdot 2 + (0,8 - p_2) \cdot 1 = 1,875$

$$0,6 + 2p_2 + 0,8 - p_2 = 1,875$$

$$p_2 = 0,475$$

Dus 47,5% van de voertuigen gaat in deze situatie rechtdoor.

- f** 40% neemt de rotonde een kwart, dus $p_4 = 0,4$.

Er geldt dan dat $p_3 = 1 - 0,4 - p_2 = 0,6 - p_2$.

$C = 2800$ geeft $5500 - 1500\sqrt{6 - 2v} = 2800$

$$-1500\sqrt{6 - 2v} = -2700$$

$$\sqrt{6 - 2v} = 1,8$$

$$6 - 2v = 3,24$$

$$-2v = -2,76$$

$$v = 1,38$$

$v = 1,38$ en $p_3 = 0,6 - p_2$ geeft $0,4 \cdot 3 + p_2 \cdot 2 + (0,6 - p_2) \cdot 1 = 1,38$

$$1,2 + 2p_2 + 0,6 - p_2 = 1,38$$

$$p_2 = -0,42$$

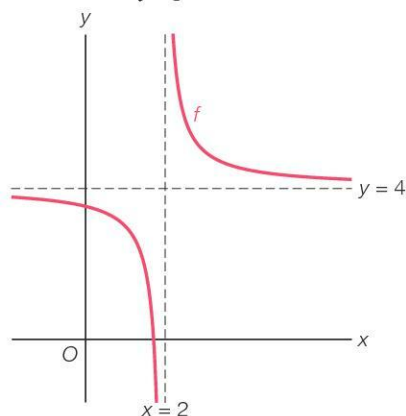
$p_2 < 0$, dus deze situatie past niet binnen het gegeven model.

- 63 a** $y = 1 + \sqrt{-x^2 + 8x + 9}$
 $y - 1 = \sqrt{-x^2 + 8x + 9}$
kwadrateren geeft
 $(y - 1)^2 = -x^2 + 8x + 9$
 $(y - 1)^2 + x^2 - 8x = 9$
 $(y - 1)^2 + (x - 4)^2 - 16 = 9$
 $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$
 $y - 1 \geq 0$ } De grafiek van $f(x) = 1 + \sqrt{-x^2 + 8x + 9}$ is een halve cirkel.
- b** $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$
kwadrateren geeft
 $y^2 = x^2 - 6x + 8$
 $y^2 = (x - 3)^2 - 9 + 8$
 $(x - 3)^2 - y^2 = 1$
Dus de grafiek van $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ is geen halve cirkel.
 $y = \sqrt{-x^2 - 6x + 8}$
kwadrateren geeft
 $y^2 = -x^2 - 6x + 8$
 $x^2 + 6x + y^2 = 8$
 $(x + 3)^2 - 9 + y^2 = 8$
 $(x + 3)^2 + y^2 = 17$
 $y \geq 0$ } De grafiek van $h(x) = \sqrt{-x^2 - 6x + 8}$ is een halve cirkel.

11.5 Gebroken functies

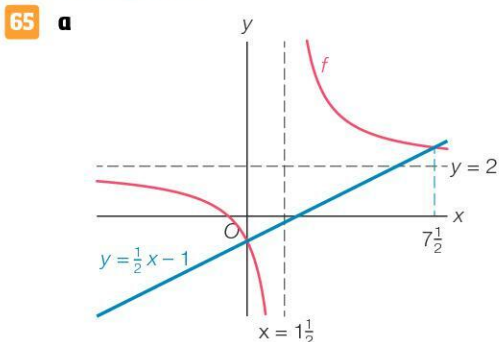
Bladzijde 128

- 64 a** De grafiek van $f(x) = 4 + \frac{1}{x-2}$ ontstaat uit de standaardgrafiek $y = \frac{1}{x}$ door de translatie $(2, 4)$.
- b** horizontale asymptoot $y = 4$
verticale asymptoot $x = 2$



c $f(x) = 4 + \frac{1}{x-2} = \frac{4(x-2)}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{4x-8+1}{x-2} = \frac{4x-7}{x-2}$

Bladzijde 130



$f(x) \leq \frac{1}{2}x - 1$ geeft $0 \leq x < 1\frac{1}{2} \vee x \geq 7\frac{1}{2}$

$$\text{b } 2 + \frac{9}{2x-3} = \frac{2(2x-3)+9}{2x-3} = \frac{4x-6+9}{2x-3} = \frac{4x+3}{2x-3}$$

$$f(x) = 2 + \frac{9}{2x-3} = 2 + 9(2x-3)^{-1} \text{ geeft } f'(x) = -9(2x-3)^{-2} \cdot 2 = \frac{-18}{(2x-3)^2}$$

66 a noemer = 0 geeft $4 - x = 0$
 $x = 4$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 4$.

Voor grote x is $f(x) \approx \frac{3x}{-x} = -3$.

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -3$.

b noemer = 0 geeft $2x + 5 = 0$
 $2x = -5$
 $x = -2\frac{1}{2}$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -2\frac{1}{2}$.

Voor grote x is $g(x) \approx \frac{2x}{2x} = 1$.

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

c noemer = 0 geeft $4x - 1 = 0$
 $4x = 1$
 $x = \frac{1}{4}$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{1}{4}$.

Voor grote x is $h(x) \approx 2 - \frac{x}{4x} = 2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$.

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 1\frac{3}{4}$.

67 a $y = \frac{3x}{4-x}$

$$\frac{3x}{4-x} = y$$

$$3x = y(4-x)$$

$$3x = 4y - xy$$

$$xy + 3x = 4y$$

$$x(y+3) = 4y$$

$$x = \frac{4y}{y+3}$$

b $y = \frac{2x-3}{2x+5}$

$$\frac{2x-3}{2x+5} = y$$

$$2x-3 = y(2x+5)$$

$$2x-3 = 2xy+5y$$

$$2x-2xy = 5y+3$$

$$x(2-2y) = 5y+3$$

$$x = \frac{5y+3}{2-2y}$$

c $y = 2 - \frac{x+3}{4x-1}$

$$\frac{x+3}{4x-1} = 2-y$$

$$x+3 = (4x-1)(2-y)$$

$$x+3 = 8x-4xy-2+y$$

$$4xy-7x = y-5$$

$$x(4y-7) = y-5$$

$$x = \frac{y-5}{4y-7}$$

68 a $\log(y) = \frac{x}{x+3}$

$$\frac{x}{x+3} = \log(y)$$

$$x = (x+3)\log(y)$$

$$x = x\log(y) + 3\log(y)$$

$$x - x\log(y) = 3\log(y)$$

$$x(1 - \log(y)) = 3\log(y)$$

$$x = \frac{3\log(y)}{1 - \log(y)}$$

b $2^y = 3 + \frac{1}{5-x}$

$$2^y - 3 = \frac{1}{5-x}$$

$$5-x = \frac{1}{2^y-3}$$

$$-x = -5 + \frac{1}{2^y-3}$$

$$x = 5 - \frac{1}{2^y-3}$$

c $\sin(y) = \frac{2\pi}{2x+1}$

$$2x+1 = \frac{2\pi}{\sin(y)}$$

$$2x = \frac{2\pi}{\sin(y)} - 1$$

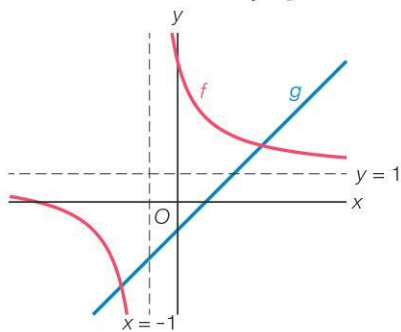
$$x = \frac{\pi}{\sin(y)} - \frac{1}{2}$$

69 a noemer = 0 geeft $x+1=0$
 $x=-1$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x=-1$.

Voor grote x is $f(x) \approx \frac{x}{x} = 1$.

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y=1$.



b $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{x+5}{x+1} = x-1$
 $x+5 = (x+1)(x-1)$
 $x+5 = x^2-1$
 $x^2-x-6=0$
 $(x+2)(x-3)=0$
 $x=-2 \vee x=3$

Zie de figuur bij a.

$f(x) \leq g(x)$ geeft $-2 \leq x < -1 \vee x \geq 3$

$$\begin{aligned}
 \text{c } y &= \frac{x+5}{x+1} \\
 \frac{x+5}{x+1} &= y \\
 x+5 &= y(x+1) \\
 x+5 &= xy+y \\
 x-xy &= y-5 \\
 x(1-y) &= y-5 \\
 x &= \frac{y-5}{1-y}
 \end{aligned}$$

Bladzijde 131

$$\begin{aligned}
 70 \quad f(x) = 0 \text{ geeft } \frac{10}{2x-1} + 5 &= 0 \\
 10 + 5(2x-1) &= 0 \\
 10 + 10x - 5 &= 0 \\
 10x &= -5 \\
 x &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Dus $A(-\frac{1}{2}, 0)$.

$$f(x) = \frac{10}{2x-1} + 5 = 10(2x-1)^{-1} + 5 \text{ geeft } f'(x) = -10(2x-1)^{-2} \cdot 2 = \frac{-20}{(2x-1)^2}$$

$$rc_k = f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-20}{(2 \cdot -\frac{1}{2} - 1)^2} = \frac{-20}{4} = -5$$

$l \perp k$ geeft $rc_l = \frac{1}{5}$

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{5}x + b \\ \text{door } A(-\frac{1}{2}, 0) \end{aligned} \right\} \frac{1}{5} \cdot -\frac{1}{2} + b = 0 \\
 b &= \frac{1}{10}$$

Dus $l: y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{10}$.

l snijden met de grafiek van f geeft $\frac{1}{5}x + \frac{1}{10} = \frac{10}{2x-1} + 5$

$$2x+1 = \frac{100}{2x-1} + 50$$

$$(2x+1)(2x-1) = 100 + 50(2x-1)$$

$$4x^2 - 1 = 100 + 100x - 50$$

$$4x^2 - 100x - 51 = 0$$

$$D = (-100)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -51 = 10816$$

$$x = \frac{100 \pm 104}{8} = 25\frac{1}{2} \vee x = \frac{100 - 104}{8} = -\frac{1}{2}$$

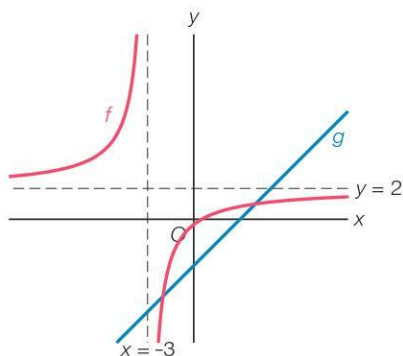
$x = 25\frac{1}{2}$ geeft $y = \frac{1}{5} \cdot 25\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 5\frac{1}{5}$, dus $B(25\frac{1}{2}, 5\frac{1}{5})$.

$$\begin{aligned}
 71 \quad \text{a } \text{noemer} = 0 \text{ geeft } x+3 &= 0 \\
 x &= -3
 \end{aligned}$$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -3$.

Voor grote x is $f(x) \approx \frac{2x}{x} = 2$.

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.



$$\text{b } f(x) = g(x) \text{ geeft } \frac{2x-1}{x+3} = x-3$$

$$2x-1 = (x+3)(x-3)$$

$$2x-1 = x^2-9$$

$$x^2-2x-8 = 0$$

$$(x+2)(x-4) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 4$$

$$f(x) \leq g(x) \text{ geeft } -3 < x \leq -2 \vee x \geq 4$$

$$\text{c } h(x) = f(x) + g(x) = \frac{2x-1}{x+3} + x-3 = \frac{2x-1}{x+3} + \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \frac{2x-1+x^2-9}{x+3} = \frac{x^2+2x-10}{x+3}$$

$$\text{d } j(x) = f(g(x)) = \frac{2(x-3)-1}{x-3+3} = \frac{2x-6-1}{x} = \frac{2x-7}{x} = 2 - \frac{7}{x}$$

$$\text{e } k(x) = g(f(x)) = \frac{2x-1}{x+3} - 3 = \frac{2x-1}{x+3} - \frac{3(x+3)}{x+3} = \frac{2x-1-3(x+3)}{x+3} = \frac{2x-1-3x-9}{x+3} = \frac{-x-10}{x+3}$$

$$\text{72 } f(x) = \frac{32}{3x+12} = 32(3x+12)^{-1} \text{ geeft } f'(x) = -32(3x+12)^{-2} \cdot 3 = \frac{-96}{(3x+12)^2}$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'(0) = \frac{-96}{144} = -\frac{2}{3}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + b \\ f(0) = 2\frac{2}{3}, \text{ dus } A(0, 2\frac{2}{3}) \end{array} \right\} b = 2\frac{2}{3}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}.$$

Lijn l door O loodrecht op k heeft vergelijking $y = \frac{1}{2}x$.

l snijden met k geeft

$$\frac{1}{2}x = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$$

$$9x = -4x + 16$$

$$13x = 16$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{16}{13} \\ y = \frac{1}{2}x \end{array} \right\} y = \frac{8}{13}$$

Het snijpunt is $S(\frac{16}{13}, \frac{8}{13})$.

$$d(O, k) = d(O, S) = \sqrt{(\frac{16}{13})^2 + (\frac{8}{13})^2} = \sqrt{4\frac{12}{13}}$$

$$\text{73 a } f(x) = \frac{4x+2}{2x-3} - 2 = \frac{4x+2-2(2x-3)}{2x-3} = \frac{4x+2-4x+6}{2x-3} = \frac{8}{2x-3}$$

$$\text{b } g(x) = \frac{4x+2}{2x-3} = f(x) + 2 = \frac{8}{2x-3} + 2 = 8(2x-3)^{-1} + 2 \text{ geeft}$$

$$g'(x) = -8(2x-3)^{-2} \cdot 2 = \frac{-16}{(2x-3)^2}$$

$$g'(x) = -1 \text{ geeft } \frac{-16}{(2x-3)^2} = -1$$

$$(2x-3)^2 = 16$$

$$2x-3 = 4 \vee 2x-3 = -4$$

$$2x = 7 \vee 2x = -1$$

$$x = 3\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$g(3\frac{1}{2}) = 4 \text{ en } g(-\frac{1}{2}) = 0$$

Dus $A(3\frac{1}{2}, 4)$ en $B(-\frac{1}{2}, 0)$.

Bladzijde 132

$$\text{74 a } \text{Voor grote } t \text{ is } T \approx \frac{80t}{4t} = 20, \text{ dus de horizontale asymptoot is de lijn } T = 20.$$

Op den duur daalt de temperatuur tot vrijwel 20°C .

$$\text{b } T = \frac{80t + 240}{4t + 3}$$

$$\frac{80t + 240}{4t + 3} = T$$

$$80t + 240 = 4tT + 3T$$

$$80t - 4tT = 3T - 240$$

$$t(80 - 4T) = 3T - 240$$

$$t = \frac{3T - 240}{80 - 4T}$$

$$T = 25 \text{ geeft } t = \frac{75 - 240}{80 - 100} = \frac{-165}{-20} = 8,25$$

Dus na $8,25 \cdot 60 = 495$ minuten.

$$\text{c } a = T'(3) \approx \frac{T(3,001) - T(3)}{0,001} = \frac{31,9968... - 32}{0,001} = -3,199...$$

$$\left. \begin{array}{l} T_{\text{lin}} = -3,199...t + b \\ t = 3 \text{ en } T = 32 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3,199... \cdot 3 + b = 32 \\ -9,597... + b = 32 \\ b = 41,597... \end{array}$$

$$\text{Dus } T_{\text{lin}} = -3,2t + 41,6.$$

$$\text{75 a } f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 18}{2x} = \frac{2x^2}{2x} - \frac{3x}{2x} + \frac{18}{2x} = x - \frac{3}{2} + \frac{9}{x}$$

$$\text{b } f(x) = x - \frac{3}{2} + 9x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = 1 - 9x^{-2} = 1 - \frac{9}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 1 - \frac{9}{x^2} = 0$$

$$\frac{9}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

$$\text{max. is } f(-3) = -7\frac{1}{2} \text{ en min. is } f(3) = 4\frac{1}{2}.$$

Bladzijde 133

$$\text{76 a } f'(x) = -1\frac{1}{2} \text{ geeft } \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = -1\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{x^2} = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

$$f(1) = 3\frac{1}{4} \text{ en } f(-1) = -1\frac{3}{4}$$

Dus de raakpunten zijn $A(-1, -1\frac{3}{4})$ en $B(1, 3\frac{1}{4})$.

$$\text{b } f(x) = \frac{1}{2}x \text{ geeft } \frac{2x^2 + 3x + 8}{4x} = \frac{1}{2}x$$

$$2x^2 + 3x + 8 = 2x^2$$

$$3x = -8$$

$$x = -2\frac{2}{3}$$

$$x = -2\frac{2}{3} \text{ geeft } y = \frac{1}{2} \cdot -2\frac{2}{3} = -1\frac{1}{3}, \text{ dus het punt is } (-2\frac{2}{3}, -1\frac{1}{3}).$$

$$\text{c } f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \text{ geeft } \frac{2x^2 + 3x + 8}{4x} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

$$2x^2 + 3x + 8 = 2x^2 + 3x$$

$$8 = 0$$

geen oplossing

Dus de lijn $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ snijdt de grafiek van f niet.

77 a $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = x - 4 + \frac{4}{x} = x - 4 + 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 1 - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\frac{4}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

$$f(2) = 0, \text{ dus top } (2, 0).$$

$$f(-2) = -8, \text{ dus top } (-2, -8).$$

b Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - -8}{2 - -2} = \frac{8}{4} = 2.$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } (2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + b = 0 \\ b = -4 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 2x - 4.$$

$$\text{De lijn } m \text{ door } O \text{ loodrecht op } k \text{ heeft vergelijking } y = -\frac{1}{2}x.$$

$$m \text{ snijden met } k \text{ geeft } -\frac{1}{2}x = 2x - 4$$

$$-2\frac{1}{2}x = -4$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1\frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{2}x \end{array} \right\} y = -\frac{4}{5}$$

$$\text{Het snijpunt is } S(1\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}).$$

$$d(k, O) = d(S, O) = \sqrt{(1\frac{3}{5})^2 + (-\frac{4}{5})^2} = \sqrt{3\frac{1}{5}}$$

c $f(x) = x$ geeft $\frac{x^2 - 4x + 4}{x} = x$

$$x^2 - 4x + 4 = x^2$$

$$-4x = -4$$

$$x = 1$$

$$\text{Dus } A(1, 1).$$

$$\text{Stel } l: y = ax + b \text{ met } a = f'(1) = 1 - \frac{4}{1^2} = -3.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } A(1, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 1 + b = 1 \\ b = 4 \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = -3x + 4.$$

$$-3x + 4 = 0$$

$$-3x = -4$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } B(1\frac{1}{3}, 0).$$

d $f'(x) = \frac{3}{4}$ geeft $1 - \frac{4}{x^2} = \frac{3}{4}$

$$\frac{4}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

$$f(4) = 1, \text{ dus raakpunt } (4, 1).$$

$$f(-4) = -9, \text{ dus raakpunt } (-4, -9).$$

e $f(x) - g(x) < \frac{1}{10}$

$$x - 4 + \frac{4}{x} - (x - 4) < \frac{1}{10}$$

$$\frac{4}{x} < \frac{1}{40}$$

$$x > 40$$

78 a $p = f(1\frac{1}{2}) = \frac{25}{2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9}$

b $f(x) = 8$ geeft $\frac{25}{2x^2} = 8$
 $16x^2 = 25$
 $x^2 = \frac{25}{16}$
 $x = \frac{5}{4} \vee x = -\frac{5}{4}$

$d(C, D) = \frac{5}{4} - (-\frac{5}{4}) = 2\frac{1}{2}$

c $f(x) = \frac{25}{2x^2} = 12\frac{1}{2}x^{-2}$ geeft $f'(x) = -25x^{-3} = -\frac{25}{x^3}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = -\frac{25}{8}$.

$y = -3\frac{1}{8}x + b$
 $f(2) = 3\frac{1}{8}$, dus $E(2, 3\frac{1}{8}) \left\{ \begin{array}{l} -3\frac{1}{8} \cdot 2 + b = 3\frac{1}{8} \\ b = 9\frac{3}{8} \end{array} \right.$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, 9\frac{3}{8})$.

d $f'(x) = \frac{1}{5}$ geeft $-\frac{25}{x^3} = \frac{1}{5}$
 $x^3 = -125$
 $x = -5$

$y = \frac{1}{5}x + b$
 $f(-5) = \frac{1}{2}$, dus door $(-5, \frac{1}{2}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5} \cdot -5 + b = \frac{1}{2} \\ -1 + b = \frac{1}{2} \\ b = 1\frac{1}{2} \end{array} \right.$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, 1\frac{1}{2})$.

Bladzijde 135

79 a $f(x) = \frac{4}{5}$ geeft $\frac{2}{3 \sin(x) + 4} = \frac{4}{5}$

$12 \sin(x) + 16 = 10$

$12 \sin(x) = -6$

$\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

x in $[-2\pi, 2\pi]$ geeft $x = -\frac{5}{6}\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$

$f(x) > \frac{4}{5}$ geeft $-\frac{5}{6}\pi < x < -\frac{1}{6}\pi \vee 1\frac{1}{6}\pi < x < 1\frac{5}{6}\pi$

b $\sin(x)$ is maximaal 1 voor $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$, dus

$3 \sin(x) + 4$ is maximaal 7 voor $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Dus $f(x)$ is minimaal $\frac{2}{7}$ voor $x = -1\frac{1}{2}\pi$ en $x = \frac{1}{2}\pi$.

c $\sin(x)$ is minimaal -1 voor $x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$, dus

$3 \sin(x) + 4$ is minimaal 1 voor $x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Dus $f(x)$ is maximaal 2 voor $x = -\frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

80 a $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + a}{2x} = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} + \frac{a}{2x} = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a \cdot x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a \cdot x^{-2} = 1\frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}$

b $a = 12$ geeft $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 12}{2x}$ en $f'(x) = 1\frac{1}{2} - \frac{6}{x^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{2} - \frac{6}{x^2} = 0$

$\frac{3}{2} = \frac{6}{x^2}$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$

max. is $f(-2) = -3\frac{1}{2}$ en min. is $f(2) = 8\frac{1}{2}$

- c** Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(-1) = -4\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -4\frac{1}{2}x + b \\ f(-1) = -5, \text{ dus } A(-1, -5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4\frac{1}{2} + b = -5 \\ b = -9\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = -4\frac{1}{2}x - 9\frac{1}{2}$.

De lijn l door O loodrecht op k heeft vergelijking $l: y = \frac{2}{9}x$.

$$\begin{array}{l} l \text{ snijden met } k \text{ geeft } \frac{2}{9}x = -4\frac{1}{2}x - 9\frac{1}{2} \\ \frac{85}{18}x = -\frac{19}{2} \\ x = -\frac{171}{85} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ y = \frac{2}{9}x \end{array} \right\} y = -\frac{38}{85}$$

Het snijpunt is $S(-\frac{171}{85}, -\frac{38}{85})$.

$$d(O, k) = d(O, S) = \sqrt{(-\frac{171}{85})^2 + (-\frac{38}{85})^2} \approx 2,06$$

- d** $f'(x) = 1\frac{1}{8}$ geeft $1\frac{1}{2} - \frac{6}{x^2} = 1\frac{1}{8}$

$$\begin{array}{l} \frac{6}{x^2} = \frac{3}{8} \\ 3x^2 = 48 \\ x^2 = 16 \\ x = 4 \vee x = -4 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{8}x + b \\ f(4) = 10, \text{ dus door } B(4, 10) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{8} \cdot 4 + b = 10 \\ 4\frac{1}{2} + b = 10 \\ b = 5\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $l: y = 1\frac{1}{8}x + 5\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{l} l \text{ snijden met de grafiek van } f \text{ geeft } \frac{3x^2 + 5x + 12}{2x} = 1\frac{1}{8}x + 5\frac{1}{2} \\ 3x^2 + 5x + 12 = 2\frac{1}{4}x^2 + 11x \\ \frac{3}{4}x^2 - 6x + 12 = 0 \\ x^2 - 8x + 16 = 0 \\ (x - 4)^2 = 0 \\ x = 4 \end{array}$$

Dus geen ander punt gemeenschappelijk.

- e** $\frac{3x^2 + 5x + 12}{2x} = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

$$3x^2 + 5x + 12 = 3x^2 + 5x$$

$$12 = 0$$

geen oplossing

Dus m snijdt de grafiek van f niet.

- f** $f'(1) = 0$ geeft $1\frac{1}{2} - \frac{a}{2 \cdot 1^2} = 0$

$$\begin{array}{l} \frac{a}{2} = \frac{3}{2} \\ a = 3 \end{array}$$

$$a = 3 \text{ geeft } f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 3}{2x} \text{ en } f'(x) = 1\frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 1\frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2} = 0$$

$$1\frac{1}{2} = \frac{3}{2x^2}$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

$$f(1) = 5\frac{1}{2} \text{ en } f(-1) = -\frac{1}{2}, \text{ dus de gevraagde } y\text{-coördinaten zijn } 5\frac{1}{2} \text{ en } -\frac{1}{2}.$$

g $f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2} = 0$

$$\frac{a}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

$$2a = 6x^2$$

$$a = 3x^2$$

$f(x) = 7$ en $a = 3x^2$ geeft $\frac{3x^2 + 5x + 3x^2}{2x} = 7$

$$3x^2 + 5x + 3x^2 = 14x$$

$$6x^2 - 9x = 0$$

$$3x(2x - 3) = 0$$

$$x = 0 \vee 2x = 3$$

$$x = 0 \vee x = 1\frac{1}{2}$$

vold. niet

Dus de x-coördinaat van de top is $1\frac{1}{2}$.

Diagnostische toets

Bladzijde 138

1 a $A = ap^{0,55}$
 $p = 10$ en $A = 20$ $\left\{ \begin{array}{l} a \cdot 10^{0,55} = 20 \\ a = \frac{20}{10^{0,55}} \approx 5,64 \end{array} \right.$

De formule is $A = 5,64p^{0,55}$.

b $B = \frac{a}{r^3}$
 $r = 6$ en $B = 0,5$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{6^3} = 0,5 \\ a = 108 \end{array} \right.$

De formule is $B = \frac{108}{r^3}$.

2 a Neem in de formule $2t$ voor t .
 Je krijgt $N = 3 \cdot (2t)^{2,1} = 2^{2,1} \cdot 3t^{2,1} \approx 4,3 \cdot 3t^{2,1}$.
 Dus N wordt ongeveer 4,3 keer zo groot.

b $N = 3t^{2,1}$
 $3t^{2,1} = N$
 $t^{2,1} = \frac{1}{3}N$
 $t = (\frac{1}{3}N)^{\frac{1}{2,1}}$
 Neem in deze formule $2N$ voor N .
 Je krijgt $t = (\frac{1}{3} \cdot 2N)^{\frac{1}{2,1}} = 2^{\frac{1}{2,1}} \cdot (\frac{1}{3}N)^{\frac{1}{2,1}} \approx 1,4 \cdot (\frac{1}{3}N)^{\frac{1}{2,1}}$.
 Dus t wordt ongeveer 1,4 keer zo groot.

3 Uit $D = aL^{0,82}$ volgt $a = \frac{D}{L^{0,82}}$.

Bereken daarom steeds $\frac{D}{L^{0,82}}$.

$$\frac{15}{150^{0,82}} \approx 0,246$$

$$\frac{26}{290^{0,82}} \approx 0,249$$

$$\frac{45}{570^{0,82}} \approx 0,247$$

$$\frac{21}{220^{0,82}} \approx 0,252$$

$$\frac{37}{440^{0,82}} \approx 0,252$$

$$\frac{64}{870^{0,82}} \approx 0,249$$

Telkens is $\frac{D}{L^{0,82}} \approx 0,25$.

Dus D is evenredig met $L^{0,82}$ en de formule is $D = 0,25L^{0,82}$.

$$4 \quad a \quad \left. \begin{array}{l} A = aT^b \\ A = 108 \text{ en } T = 225 \end{array} \right\} a \cdot 225^b = 108$$

$$a = \frac{108}{225^b}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = aT^b \\ A = 1427 \text{ en } T = 10\,753 \end{array} \right\} a \cdot 10\,753^b = 1427$$

$$a = \frac{1427}{10\,753^b}$$

Voer in $y_1 = \frac{108}{225^x}$ en $y_2 = \frac{1427}{10\,753^x}$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,6675\dots$ en $y = 2,9059\dots$

Dus $a \approx 2,906$ en $b \approx 0,668$ en dit geeft de formule $A = 2,906T^{0,668}$.

b $T = 30\,690$ geeft $A = 2,9059\dots \cdot 30\,690^{0,6675\dots} = 2873,8\dots$

Dus de gemiddelde afstand van Uranus tot de zon is 2874 miljoen km.

$$5 \quad a \quad y = \sin(x)$$

↓ translatie $(\pi, 0)$

$$y = \sin(x - \pi)$$

↓ verm. y-as, $\frac{1}{3}$

$$y = \sin(3x - \pi)$$

↓ verm. x-as, 2

$$y = 2 \sin(3x - \pi)$$

↓ translatie $(0, 1)$

$$f(x) = 1 + 2 \sin(3x - \pi)$$

b $f(x) = 1 + 2 \sin(3x - \pi) = 1 + 2 \sin(3(x - \frac{1}{3}\pi))$

Voor de grafiek van f geldt:

evenwichtsstand 1

amplitude 2

periode $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

beginpunt $(\frac{1}{3}\pi, 1)$

Dus voor de grafiek van g geldt:

amplitude $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

periode $2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$

beginpunt $(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi, 1 - 5) = (\frac{5}{6}\pi, -4)$

evenwichtsstand -4

Dit geeft $g(x) = -4 + \sin\left(\frac{2\pi}{\frac{4}{3}\pi}(x - \frac{5}{6}\pi)\right)$ oftewel $g(x) = -4 + \sin(1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{4}\pi)$.

$$6 \quad a \quad s(x) = f(x) + g(x) = 3^{x+2} + 3^{x-1} = 3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^{-1} = 9 \cdot 3^x + \frac{1}{3} \cdot 3^x = 9\frac{1}{3} \cdot 3^x$$

$$b \quad v(x) = 4 \cdot f(x) - 27 \cdot g(x) = 4 \cdot 3^{x+2} - 27 \cdot 3^{x-1} = 4 \cdot 9 \cdot 3^x - 27 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3^x = 36 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^x$$

$$= 27 \cdot 3^x = 3^3 \cdot 3^x = 3^{x+3}$$

$$c \quad k(x) = h(f(x)) = {}^3\log(3^{x+2}) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

Bladzijde 139

7 p door $A(2, 0)$ en $B(8, 0)$, dus $p: y = a(x - 2)(x - 8)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = a(x - 2)(x - 8) \\ \text{door } C(7, 6\frac{2}{3}) \end{array} \right\} a \cdot 5 \cdot -1 = 6\frac{2}{3}$$

$$a = -1\frac{1}{3}$$

Dus $p: y = -1\frac{1}{3}(x - 2)(x - 8)$.

$x_{\text{top}} = \frac{2+8}{2} = 5$ en $y_{\text{top}} = -1\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot -3 = 12$, dus $T(5, 12)$.

$rc_k = \frac{12-0}{5-0} = \frac{12}{5}$, dus $rc_l = -\frac{5}{12}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{5}{12}x + b \\ \text{door } T(5, 12) \end{array} \right\} -\frac{5}{12} \cdot 5 + b = 12$$

$$b = 14\frac{1}{12}$$

Dus $l: y = -\frac{5}{12}x + 14\frac{1}{12}$ en $S(0, 14\frac{1}{12})$.

$$\begin{aligned} 8 \quad f(x) = 0 \text{ geeft } -(x^2 - 4)(x - 1) &= 0 \\ -(x + 2)(x - 2)(x - 1) &= 0 \\ x = -2 \vee x = 2 \vee x &= 1 \end{aligned}$$

Dus $B(1, 0)$.

$$f(x) = -(x^2 - 4)(x - 1) = -(x^3 - x^2 - 4x + 4) = -x^3 + x^2 + 4x - 4 \text{ geeft } f'(x) = -3x^2 + 2x + 4$$

$$rc_k = f'(1) = -3 + 2 + 4 = 3, \text{ dus } rc_l = -\frac{1}{3}.$$

$$l: y = -\frac{1}{3}x + b \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 1 + b = 0 \\ b = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$

$$l \text{ snijden met de grafiek van } f \text{ geeft } -(x^2 - 4)(x - 1) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$-(x^2 - 4)(x - 1) = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$x - 1 = 0 \vee -(x^2 - 4) = -\frac{1}{3}$$

$$x = 1 \vee x^2 - 4 = \frac{1}{3}$$

$$x = 1 \vee x^2 = 4\frac{1}{3}$$

$$x = 1 \vee x = \sqrt{4\frac{1}{3}} \vee x = -\sqrt{4\frac{1}{3}}$$

$$\text{Dus } x_D = -\sqrt{4\frac{1}{3}} \text{ en } x_E = \sqrt{4\frac{1}{3}} \text{ en dit geeft } x_E - x_D = 2\sqrt{4\frac{1}{3}}.$$

$$9 \quad a \quad 5 - 2x \geq 0 \text{ geeft } -2x \geq -5 \text{ oftewel } x \leq 2\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } D_f = \langle \leftarrow, 2\frac{1}{2} \rangle \text{ en } B_f = [-2, \rightarrow).$$

$$b \quad f(x) = 0 \text{ geeft } -2 + \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2x} = 0$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{5 - 2x} = 2$$

$$\sqrt{5 - 2x} = 6$$

$$5 - 2x = 36$$

$$-2x = 31$$

$$x = -15\frac{1}{2}$$

$$f(x) < 0 \text{ geeft } -15\frac{1}{2} < x \leq 2\frac{1}{2}$$

$$c \quad f(x) = -2 + \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2x} = -2 + \frac{1}{3}(5 - 2x)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = \frac{1}{6}(5 - 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(5 - 2x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{3\sqrt{5 - 2x}}$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'(2) = -\frac{1}{3\sqrt{5 - 4}} = -\frac{1}{3\sqrt{1}} = -\frac{1}{3}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ f(2) = -1\frac{2}{3}, \text{ dus } A(2, -1\frac{2}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 2 + b = -1\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} + b = -1\frac{2}{3} \\ b = -1 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{1}{3}x - 1.$$

$$d \quad y = -2 + \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2x}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{5 - 2x} = y + 2$$

$$\sqrt{5 - 2x} = 3y + 6$$

kwadrateren geeft

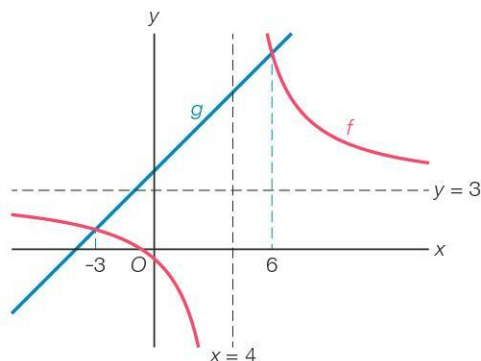
$$5 - 2x = 9y^2 + 36y + 36$$

$$-2x = 9y^2 + 36y + 31$$

$$x = -4\frac{1}{2}y^2 - 18y - 15\frac{1}{2}$$

- 10 a** noemer = 0 geeft $x = 4$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 4$.

Voor grote x is $f(x) \approx \frac{3x}{x} = 3$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 3$.



b $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{3x+2}{x-4} = x+4$
 $3x+2 = (x+4)(x-4)$
 $3x+2 = x^2 - 16$
 $x^2 - 3x - 18 = 0$
 $(x+3)(x-6) = 0$
 $x = -3 \vee x = 6$

Zie de figuur bij a.

$f(x) \geq g(x)$ geeft $x \leq -3 \vee 4 < x \leq 6$

c $y = \frac{3x+2}{x-4}$
 $\frac{3x+2}{x-4} = y$
 $3x+2 = y(x-4)$
 $3x+2 = xy - 4y$
 $3x - xy = -4y - 2$
 $x(3-y) = -4y - 2$
 $x = \frac{-4y-2}{3-y}$ oftewel $x = \frac{4y+2}{y-3}$

11 a $f(x) = \frac{2x^2+x+18}{2x} = x + \frac{1}{2} + \frac{9}{x} = x + \frac{1}{2} + 9x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 9x^{-2} = 1 - \frac{9}{x^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{9}{x^2} = 0$

$$\frac{9}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

$f(-3) = -5\frac{1}{2}$ en $f(3) = 6\frac{1}{2}$, dus de toppen zijn $(-3, -5\frac{1}{2})$ en $(3, 6\frac{1}{2})$.

b Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6\frac{1}{2} - (-5\frac{1}{2})}{3 - (-3)} = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } (3, 6\frac{1}{2}) \end{array} \right\} 2 \cdot 3 + b = 6\frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

Dus $k: y = 2x + \frac{1}{2}$.

De lijn l door O loodrecht op k heeft vergelijking $l: y = -\frac{1}{2}x$.

Het snijpunt van k en l is het punt S .

$$2x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x$$

$$2\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -\frac{1}{5} \\ y = -\frac{1}{2}x \end{array} \right\} y = \frac{1}{10}, \text{ dus } S(-\frac{1}{5}, \frac{1}{10})$$

$$d(O, k) = d(O, S) = \sqrt{(-\frac{1}{5})^2 + (\frac{1}{10})^2} \approx 0,224$$

$$\text{c } f'(x) = -5 \text{ geeft } 1 - \frac{9}{x^2} = -5$$

$$-\frac{9}{x^2} = -6$$

$$x^2 = 1\frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$$

Dus de x -coördinaten van de raakpunten zijn $\sqrt{1\frac{1}{2}}$ en $-\sqrt{1\frac{1}{2}}$.

12 Examentraining

12.1 Vergelijkingen en ongelijkheden

Bladzijde 142

1 a $f(x) = 0$ geeft $\frac{1}{3}x^3 - 5x = 0$
 $\frac{1}{3}x(x^2 - 15) = 0$
 $\frac{1}{3}x = 0 \vee x^2 - 15 = 0$
 $x = 0 \vee x^2 = 15$
 $x = 0 \vee x = \sqrt{15} \vee x = -\sqrt{15}$

Dus $AB = 2\sqrt{15}$.

b $\begin{cases} a + 2b = 5 \\ \frac{1}{4}a + b = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} a + 2b = 5 \\ \frac{1}{2}a + 2b = 8 \end{cases}$
 $\frac{1}{2}a = -3$
 $a = -6$
 $a + 2b = 5 \Rightarrow -6 + 2b = 5$
 $2b = 11$
 $b = 5\frac{1}{2}$

Dus $(a, b) = (-6, 5\frac{1}{2})$.

c $\frac{5}{12x^4} = \frac{1}{6}$
 $12x^4 = 5 \cdot 6$
 $12x^4 = 30$
 $x^4 = 2\frac{1}{2}$
 $x = \sqrt[4]{2\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt[4]{2\frac{1}{2}}$

d $f(x) = g(x)$ geeft $\sqrt{9 - 4x} = -\frac{2}{3}x + 2\frac{5}{6}$
 $6\sqrt{9 - 4x} = -4x + 17$
kwadrateren geeft
 $36(9 - 4x) = 16x^2 - 136x + 289$
 $324 - 144x = 16x^2 - 136x + 289$
 $16x^2 + 8x - 35 = 0$
 $D = 8^2 - 4 \cdot 16 \cdot -35 = 2304$
 $x = \frac{-8 \pm 48}{32} = 1\frac{1}{4} \vee x = \frac{-8 - 48}{32} = -1\frac{3}{4}$

$f(1\frac{1}{4}) = \sqrt{9 - 4 \cdot 1\frac{1}{4}} = 2$ en $f(-1\frac{3}{4}) = \sqrt{9 - 4 \cdot -1\frac{3}{4}} = 4$

Dus de snijpunten zijn $(1\frac{1}{4}, 2)$ en $(-1\frac{3}{4}, 4)$.

e $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 6x} = 0$
 $x^3 + x^2 - 6x = 0$
 $x(x^2 + x - 6) = 0$
 $x(x - 2)(x + 3) = 0$
 $x = 0 \vee x = 2 \vee x = -3$

f $f(x) - g(x) = \frac{1}{10}$ geeft $\frac{x^2 - 2x + 5}{2x} - (\frac{1}{2}x - 1) = \frac{1}{10}$
 $\frac{1}{2}x - 1 + \frac{5}{2x} - \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{10}$
 $\frac{5}{2x} = \frac{1}{10}$
 $2x = 50$
 $x = 25$

g $\sqrt{500 - \frac{5}{9}(x - 6)^2} = 0$
 $500 - \frac{5}{9}(x - 6)^2 = 0$
 $\frac{5}{9}(x - 6)^2 = 500$
 $(x - 6)^2 = 900$
 $x - 6 = 30 \vee x - 6 = -30$
 $x = 36 \vee x = -24$

h $f(x) = -2\frac{1}{2}x - 5$ geeft $\frac{1}{x+4} - 1\frac{1}{2}x + 1 = -2\frac{1}{2}x - 5$

$$\frac{1}{x+4} = -x - 6$$

$$(x+4)(-x-6) = 1$$

$$-x^2 - 6x - 4x - 24 = 1$$

$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$$

$D = 0$, dus de vergelijking heeft één oplossing en dus hebben de lijn en de grafiek van f precies één punt gemeenschappelijk.

i $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{5}{4}x + \frac{3}{x} = \frac{1}{8}x + \frac{5}{x}$

$$\frac{9}{8}x = \frac{2}{x}$$

$$9x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{16}{9}$$

$$x = \frac{4}{3} \vee x = -\frac{4}{3} \text{ (vold. niet)}$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} + \frac{3}{\left(\frac{4}{3}\right)} = 3\frac{11}{12}$$

Het snijpunt is $\left(1\frac{1}{3}, 3\frac{11}{12}\right)$.

j $f(x) = \frac{1}{4}x - 5$ geeft $\left(\frac{1}{4}x - 5\right)^3 = \frac{1}{4}x - 5$

$$\frac{1}{4}x - 5 = 0 \vee \left(\frac{1}{4}x - 5\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{4}x = 5 \vee \frac{1}{4}x - 5 = 1 \vee \frac{1}{4}x - 5 = -1$$

$$x = 20 \vee \frac{1}{4}x = 6 \vee \frac{1}{4}x = 4$$

$$x = 20 \vee x = 24 \vee x = 16$$

$x = 16$ geeft $y = \frac{1}{4} \cdot 16 - 5 = -1$, dus $A(16, -1)$.

$x = 24$ geeft $y = \frac{1}{4} \cdot 24 - 5 = 1$, dus $B(24, 1)$.

$$\text{Dus } AB = \sqrt{(24-16)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}.$$

k Voer in $y_1 = 0,0045x(x+50)^2$ en $y_2 = 251$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 13,73$.

l Voer in $y_1 = \frac{3+0,6x}{(2-x)^4}$ en $y_2 = 5\frac{2}{13}$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 2,9818$, dus $p \approx 2,9818$.

m Voer in $y_1 = 0,1x^4 - x^2 - x + 1$.

De optie minimum geeft $x = -1,923...$ en $y = 0,592...$

De optie maximum geeft $x = -0,592...$ en $y = 1,256...$

De optie minimum geeft $x = 2,453...$ en $y = -3,849...$

Voor $-3,85 < p < 0,59 \vee p > 1,26$ snijdt de lijn $y = p$ de grafiek van f in twee punten.

n Voer in $y_1 = 15 \cdot \log(x-3) + \frac{18}{x-3} + \frac{6}{5(x-3)^2}$ en $y_2 = 35$.

De optie snijpunt geeft $x = 215,6...$

$K > 35$ geeft $p \geq 216$

Bladzijde 147

2 $f(x) = -\frac{7}{4}x + \frac{7}{2}$ geeft $\sqrt{-3x+6} = -\frac{7}{4}x + \frac{7}{2}$

$$4\sqrt{-3x+6} = -7x + 14$$

kwadrateren geeft

$$16(-3x+6) = 49x^2 - 196x + 196$$

$$-48x + 96 = 49x^2 - 196x + 196$$

$$49x^2 - 148x + 100 = 0$$

$$D = (-148)^2 - 4 \cdot 49 \cdot 100 = 2304$$

$$x = \frac{148 \pm 48}{98} = 2 \vee x = \frac{148 - 48}{98} = 1\frac{1}{49}$$

De x -coördinaten van deze twee punten zijn 2 en $1\frac{1}{49}$.

3 a $f(x) = 0$ geeft $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x} = 0$
 $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$
 $x(x^2 + 3x + 2) = 0$
 $x = 0 \vee x^2 + 3x + 2 = 0$
 $x = 0 \vee (x + 1)(x + 2) = 0$
 $x = 0 \vee x = -1 \vee x = -2$

$x_A = -2$ en $x_B = -1$ geeft $AB = 1$

$x_B = -1$ en $x_O = 0$ geeft $BO = 1$

Dus AB en BO zijn even lang.

- b** Voer in $y_1 = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x}$.
 De optie maximum geeft $x = -1,577...$ en $y = 0,7274...$
 De optie minimum geeft $x = -0,422...$ en $y = -0,7274...$
 Dit is het geval voor $-0,727 < p < 0,727$.

4 a $f(x) - g(x) = \frac{1}{100}$ geeft $\frac{x^2 - x + 4}{x} - (x - 1) = \frac{1}{100}$
 $x - 1 + \frac{4}{x} - x + 1 = \frac{1}{100}$
 $\frac{4}{x} = \frac{1}{100}$
 $x = 400$

$f(x) - g(x) < \frac{1}{100}$ geeft $x > 400$

b $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{x^2 - x + 4}{x} = x - 1$
 $x^2 - x + 4 = x(x - 1)$
 $x^2 - x + 4 = x^2 - x$
 $4 = 0$ kan niet

De vergelijking $f(x) = g(x)$ geeft geen oplossingen, dus de grafieken van f en g snijden elkaar niet.

5 $f(x) = 0$ geeft $\frac{1}{2}x^3 - 4x = 0$
 $\frac{1}{2}x(x^2 - 8) = 0$
 $\frac{1}{2}x = 0 \vee x^2 - 8 = 0$
 $x = 0 \vee x^2 = 8$
 $x = 0 \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$
 $x_M = -2\sqrt{2}$ en $x_N = 2\sqrt{2}$ geeft $MN = 4\sqrt{2}$

Bladzijde 148

6 $f(x) = g(x)$ geeft $x + \frac{1}{x} = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$
 $\frac{3}{4}x = \frac{3}{x}$
 $\frac{3}{4}x^2 = 3$
 $x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$ (vold. niet)

Dus de x -coördinaat van dit snijpunt is 2.

- 7 a** Bij 4 tegels is de maximale overhang $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$.
 Bij 5 tegels is de maximale overhang $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{25}{24}$.
 Dus vanaf 5 tegels.

Bladzijde 149**b** $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$

Voer in $y_1 = 34,54 \cdot \log(x-1) + 8,658 + \frac{15}{2(x-1)} + \frac{5}{4(x-1)^2}$ en maak een tabel.

Hieruit volgt

$n = 441$ geeft $M \approx 99,98$

$n = 442$ geeft $M \approx 100,01$.

Dus minstens $442 \cdot 3 = 1326 \text{ cm}$.

c Het verschil tussen formule (1) en formule (2) is $\frac{15}{2(n-1)} + \frac{5}{4(n-1)^2}$.

Voer in $y_1 = \frac{15}{2(x-1)} + \frac{5}{4(x-1)^2}$ en maak een tabel.

Heruit volgt

$n = 76$ geeft verschil $\approx 0,1002$

$n = 77$ geeft verschil $\approx 0,099$.

Dus voor $n = 77$.

$$\begin{aligned} \text{8 } y = 0 \text{ geeft } \sqrt{1500 - \frac{15}{16}(x-10)^2} &= 0 \\ 1500 - \frac{15}{16}(x-10)^2 &= 0 \\ \frac{15}{16}(x-10)^2 &= 1500 \\ (x-10)^2 &= 1600 \\ x-10 &= 40 \vee x-10 = -40 \\ x &= 50 \vee x = -30 \end{aligned}$$

Dus in het perihelium is de afstand 30 AE en in het aphelium 50 AE.

Bladzijde 150

$$\begin{aligned} \text{9 } f(x) = \frac{1}{32} \text{ geeft } \frac{3}{16x^4} &= \frac{1}{32} \\ 16x^4 &= 96 \\ x^4 &= 6 \\ x &= \sqrt[4]{6} \vee x = -\sqrt[4]{6} \end{aligned}$$

Dus de afstand is $2 \cdot \sqrt[4]{6}$.

$$\text{10 a } \text{Zijn tijd in 2016 was } \frac{22,5}{60} = 0,375 \text{ uur.}$$

$$\text{Zijn snelheid in 2016 was } \frac{8,5}{0,375} = 22,66... \text{ km/uur.}$$

Het vermogen dat hij in 2016 leverde was

$$P = 0,00386 \cdot 22,66... \cdot (22,66... + 80)^2 = 922,2... \text{ W.}$$

Het vermogen dat hij moet leveren is

$$P = 0,00386 \cdot 22,66... \cdot (22,66... + 1,05 \cdot 80)^2 = 995,4... \text{ W.}$$

$$\text{Hij zou dan } \frac{995,4... - 922,2...}{922,2...} \times 100\% \approx 8\% \text{ meer vermogen moeten leveren.}$$

Bladzijde 151

$$\text{b } h = 5,9, P_{\text{bergop}} = 210 \text{ en } m = 72 \text{ geeft } 0,0273 \cdot 72 \cdot 5,9 \cdot v = 210$$

$$v = \frac{210}{0,0273 \cdot 72 \cdot 5,9} = 18,1...$$

$$\frac{1,2 \text{ km}}{18,1... \text{ km/uur}} = 0,066... \text{ uur, dus hij doet er } 0,066... \cdot 60 \approx 4 \text{ minuten over.}$$

$$\text{c } \text{Los op } 0,00386 \cdot v \cdot (v + 70)^2 = 0,0273 \cdot 78 \cdot 8,4 \cdot 19.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 0,00386 \cdot x \cdot (x + 70)^2 \text{ en } y_2 = 0,0273 \cdot 78 \cdot 8,4 \cdot 19.$$

De optie snijpunt geeft $x = 12,83...$

De snelheid is 12,8 km/uur.

Bladzijde 152

- 11** $2x - 3 = 0$ geeft $x = 1\frac{1}{2}$, dus de verticale asymptoot van de grafiek van f is $x = 1\frac{1}{2}$.

$$f(x) = -\frac{11}{9}x \text{ geeft } \frac{1}{2x-3} - x - 1 = -\frac{11}{9}x$$

$$\frac{1}{2x-3} = 1 - \frac{2}{9}x$$

$$(2x-3)(1 - \frac{2}{9}x) = 1$$

$$2x - \frac{4}{9}x^2 - 3 + \frac{2}{3}x = 1$$

$$-\frac{4}{9}x^2 + 2\frac{2}{3}x - 4 = 0$$

$$4x^2 - 24x + 36 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

$3 > 1\frac{1}{2}$, dus lijn l snijdt de linkertak van de grafiek van f niet.

- 12** Los op $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

Voer in $y_1 = (\frac{1}{2}x - 2)^3$ en $y_2 = \frac{1}{2}x - 2$.

De optie snijpunt geeft $x = 2$ en $y = -1$, $x = 4$ en $y = 0$, en $x = 6$ en $y = 1$.

$P(2, -1)$ en $Q(6, 1)$ geeft $PQ = \sqrt{(6-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4,47$

Alternatieve uitwerking

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2 \text{ geeft } (\frac{1}{2}x - 2)^3 = \frac{1}{2}x - 2$$

$$\frac{1}{2}x - 2 = 0 \vee (\frac{1}{2}x - 2)^2 = 1$$

$$\frac{1}{2}x = 2 \vee \frac{1}{2}x - 2 = 1 \vee \frac{1}{2}x - 2 = -1$$

$$x = 4 \vee \frac{1}{2}x = 3 \vee \frac{1}{2}x = 1$$

$$x = 4 \vee x = 6 \vee x = 2$$

$$x_P = 2 \text{ geeft } y_P = \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = -1$$

$$x_Q = 6 \text{ geeft } y_Q = \frac{1}{2} \cdot 6 - 2 = 1$$

$$PQ = \sqrt{(6-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4,47$$

- 13** $C = 0,17$ geeft $V = \frac{1 + 0,5 \cdot 0,17}{(1 - 0,17)^4} = 2,28...$

Los op $V = 2 \cdot 2,28...$ oftewel $V = 4,57...$

Voer in $y_1 = \frac{1 + 0,5x}{(1-x)^4}$ en $y_2 = 4,57...$

De optie snijpunt geeft $x = 0,292...$

Dus $C \approx 0,29$.

12.2 Werken met formules**Bladzijde 153**

- 14 a** Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5-3}{\frac{5}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi} = \frac{-8}{\frac{4}{3}\pi} = -\frac{6}{\pi}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -\frac{6}{\pi}x + b \\ \text{door } A(\frac{1}{3}\pi, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{3}\pi + b = 3 \\ -2 + b = 3 \\ b = 5 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{6}{\pi}x + 5.$$

$$\mathbf{b} \quad -\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{2}x = 0$$

$$\frac{1}{2}x(-x + 7) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 7$$

Dus $A(7, 0)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{0+7}{2} = 3\frac{1}{2} \text{ en } y_{\text{top}} = -\frac{1}{2} \cdot (3\frac{1}{2})^2 + 3\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} = 6\frac{1}{8}, \text{ dus } T(3\frac{1}{2}, 6\frac{1}{8}).$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 6\frac{1}{8}}{7 - 3\frac{1}{2}} = -1\frac{3}{4}.$$

$$k: y = -1\frac{3}{4}x + b \left\{ \begin{array}{l} -1\frac{3}{4} \cdot 7 + b = 0 \\ -12\frac{1}{4} + b = 0 \\ b = 12\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = -1\frac{3}{4}x + 12\frac{1}{4}.$$

$$\mathbf{c} \quad \text{Stel } p: y = a(x - p)^2 + q.$$

$$\text{Top } T(3, 1) \text{ geeft } p: y = a(x - 3)^2 + 1.$$

$$\text{Door } A(5, 4), \text{ dus } a(5 - 3)^2 + 1 = 4$$

$$4a + 1 = 4$$

$$4a = 3$$

$$a = \frac{3}{4}$$

$$\text{Dus } p: y = \frac{3}{4}(x - 3)^2 + 1.$$

$$\mathbf{d} \quad \text{Door } A(-6, 5; 3) \text{ en } B(6, 5; 3), \text{ dus de parabool heeft een top met } x\text{-coördinaat } 0 \text{ en is dus van de vorm } p: y = ax^2 + c.$$

$$\text{Door } C(0; 1,31) \text{ geeft } c = 1,31.$$

$$p: y = ax^2 + 1,31 \text{ door } (6,5; 3) \text{ geeft } a \cdot 6,5^2 + 1,31 = 3$$

$$42,25a = 1,69$$

$$a = 0,04$$

$$\text{Dus } p: y = 0,04x^2 + 1,31.$$

$$\mathbf{e} \quad \text{Door } O(0, 0) \text{ en } A(125, 0) \text{ geeft } y = ax(x - 125).$$

$$x_{\text{top}} = \frac{0+125}{2} = 62,5 \text{ en } y_{\text{top}} = 44,92 \text{ geeft } a \cdot 62,5 \cdot (62,5 - 125) = 44,92$$

$$a \cdot 62,5 \cdot -62,5 = 44,92$$

$$-3906,25a = 44,92$$

$$a = \frac{44,92}{-3906,25} = -0,01149...$$

$$\text{Dit geeft } y = -0,01149...x(x - 125) \text{ oftewel } y = -0,01149...x^2 + 1,43744x.$$

$$\text{Dus } a \approx -0,0115 \text{ en } b \approx 1,4374.$$

$$\mathbf{f} \quad y = x^3 \xrightarrow{\text{translatie } (4, 0)} y = (x - 4)^3 \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } \frac{2}{3}} y = (1\frac{1}{2}x - 4)^3$$

$$\mathbf{g} \quad T(3, 4) \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } a} P(3, 4a)$$

$$\left. \begin{array}{l} OP = \sqrt{3^2 + (4a)^2} = \sqrt{9 + 16a^2} \\ OP = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 9 + 16a^2 = 49 \\ 16a^2 = 40 \end{array}$$

$$a^2 = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$$

$$a = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10} \vee a = -\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$$\mathbf{h} \quad b = 1,8pq \text{ oftewel } 1,8pq = b \text{ geeft } pq = \frac{b}{1,8} \text{ en } q = \frac{b}{1,8p}.$$

$$\text{Substitutie van } pq = \frac{b}{1,8} \text{ en } q = \frac{b}{1,8p} \text{ in } A = 0,9pq - 8,1q^2 \text{ geeft } A = 0,9 \cdot \frac{b}{1,8} - 8,1 \cdot \left(\frac{b}{1,8p}\right)^2$$

$$A = \frac{0,9b}{1,8} - 8,1 \cdot \frac{b^2}{(1,8p)^2}$$

$$A = 0,5b - \frac{8,1}{3,24p^2} \cdot b^2$$

$$A = 0,5b - \frac{2,5}{p^2} \cdot b^2$$

i R is evenredig met $Q^{4,15}$, dus $R = aQ^{4,15}$.

$$Q = 15 \text{ geeft } R = a \cdot 15^{4,15}$$

$$Q = 85 \text{ geeft } R = a \cdot 85^{4,15}$$

$$\frac{a \cdot 85^{4,15}}{a \cdot 15^{4,15}} = \frac{85^{4,15}}{15^{4,15}} \approx 1338$$

Dus 1338 keer zo groot.

j Evenredig verband tussen b en $\sqrt{d}$, dus $b = a\sqrt{d}$.

$$d = 342 \text{ en } b = 370 \text{ geeft } a\sqrt{342} = 370, \text{ dus } a = \frac{370}{\sqrt{342}} = 20,0\dots$$

$$a = 20,0\dots \text{ en } b = 500 \text{ geeft } 20,0\dots \cdot \sqrt{d} = 500$$

$$\sqrt{d} = \frac{500}{20,0\dots} = 24,99\dots$$

$$d \approx 625$$

Bladzijde 156

15 G is evenredig met $L^{3,13}$, dus $G = aL^{3,13}$.

$$L = 10 \text{ geeft } G = a \cdot 10^{3,13}$$

$$L = 94 \text{ geeft } G = a \cdot 94^{3,13}$$

$$\frac{a \cdot 94^{3,13}}{a \cdot 10^{3,13}} = \frac{94^{3,13}}{10^{3,13}} \approx 1100$$

Dus 1100 keer.

16 $T(2, 3) \xrightarrow{\text{verm. x-as, } a} P(2, 3a)$

$$\left. \begin{array}{l} OP = \sqrt{2^2 + (3a)^2} = \sqrt{4 + 9a^2} \\ OP = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 + 9a^2 = 25 \\ 9a^2 = 21 \\ a^2 = \frac{21}{9} \end{array}$$

$$a = \sqrt{\frac{21}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{21} \vee a = -\frac{1}{3}\sqrt{21}$$

17 Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 - 2}{\frac{9}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi} = \frac{-4}{2\pi} = -\frac{2}{\pi}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -\frac{2}{\pi}x + b \\ \text{door } A(\frac{1}{4}\pi, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4}\pi + b = 2 \\ -\frac{1}{2} + b = 2 \\ b = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{5}{2}.$$

18 $f(x) = 0$ geeft $x^2 - 6x = 0$

$$x(x - 6) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 6$$

Dus $A(6, 0)$.

$$\text{Verder is } x_{\text{top}} = \frac{0 + 6}{2} = 3 \text{ en } y_{\text{top}} = 3^2 - 6 \cdot 3 = -9, \text{ dus } T(3, -9).$$

$$\text{Stel } g(x) = a(x - p)^2 + q.$$

$$\text{De grafiek van } g \text{ raakt de } x\text{-as in } A(6, 0), \text{ dus } g(x) = a(x - 6)^2.$$

$$\text{De grafiek van } g \text{ gaat door } T(3, -9), \text{ dus } g(3) = -9$$

$$a(3 - 6)^2 = -9$$

$$9a = -9$$

$$a = -1$$

$$\text{Dus } g(x) = -(x - 6)^2.$$

- 19** Substitutie van $t = \frac{d}{0,707 \cdot b}$ in $h = 0,707 \cdot b \cdot t - 4,91 \cdot t^2$ geeft

$$h = 0,707 \cdot b \cdot \frac{d}{0,707 \cdot b} - 4,91 \cdot \left(\frac{d}{0,707 \cdot b}\right)^2$$

$$h = d - 4,91 \cdot \frac{d^2}{(0,707 \cdot b)^2}$$

$$h = d - \frac{4,91d^2}{0,499849b^2}$$

$$h \approx d - \frac{9,8d^2}{b^2}$$

$$\text{Dus } h = d - \frac{9,8d^2}{b^2}.$$

Bladzijde 157

- 20 a** Voer in $y_1 = 0,00623x^3 - 0,58274x^2 + 16,47524x - 46,76666$.

De optie maximum geeft $x = 21,65...$

$T = 19,65...$ geeft $P \approx 99,2$

$T = 23,65...$ geeft $P \approx 99,3$

Dus de productiviteit neemt het meest af bij twee graden daling ten opzichte van de ideale temperatuur.

- b** $T = 30$ geeft $P = 91,23...$ en $T = 35$ geeft $P = 83,12...$

$$a = \frac{83,12... - 91,23...}{35 - 30} = -1,6226...$$

$$\left. \begin{array}{l} P_{\text{benaderd}} = -1,6226... \cdot T + b \\ T = 30 \text{ en } P_{\text{benaderd}} = 91,23... \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,6226... \cdot 30 + b = 91,23... \\ -48,67... + b = 91,23... \\ b = 139,91... \end{array}$$

Dus $a \approx -1,623$ en $b \approx 139,9$.

Bladzijde 158

- 21 a** $40 \text{ km} = 40\,000 \text{ m}$

Aflezen geeft: bij $a = 40\,000$ hoort $\sqrt{h} \approx 10,7$.

$\sqrt{h} \approx 10,7$ geeft $h \approx 10,7^2 = 114,49$

De gevraagde kijkhoogte is 114 meter.

Bladzijde 159

- b** $a = 1000k$ geeft $1000k = 3741\sqrt{h}$

$$k = 3,741\sqrt{h}$$

$$k = \sqrt{3,741^2 \cdot h}$$

$$k = \sqrt{3,741^2 \cdot h}$$

$$k \approx \sqrt{14 \cdot h}$$

Dus $c \approx 14$.

- c** 30 zeemijl komt overeen met $30 \cdot 1,852 = 55,56 \text{ km}$.

$d = 55,56$ en $h = 2$ geeft $3,74 \cdot (\sqrt{H} + \sqrt{2}) = 55,56$

Voer in $y_1 = 3,74 \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2})$ en $y_2 = 55,56$.

De optie snijpunt geeft $x = 180,67...$

Dus $\frac{180,67...}{57} \approx 3,2$ keer zo hoog.

Alternatieve uitwerking

30 zeemijl komt overeen met $30 \cdot 1,852 = 55,56 \text{ km}$.

$d = 55,56$ en $h = 2$ geeft $3,74 \cdot (\sqrt{H} + \sqrt{2}) = 55,56$

$$\sqrt{H} + \sqrt{2} = 14,85...$$

$$\sqrt{H} = 13,44...$$

$$H = 180,67...$$

Dus $\frac{180,67...}{57} \approx 3,2$ keer zo hoog.

Bladzijde 160

22 Bij $x = 0$ hoort $y = 0,91$, dus $q = 0,91$.

$$\left. \begin{array}{l} y = px^2 + 0,91 \\ x = 5,03 \text{ en } y = 1,07 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p \cdot 5,03^2 + 0,91 = 1,07 \\ 25,3009p = 0,16 \\ p \approx 0,006 \end{array}$$

23 $y = x^3 \xrightarrow{\text{translatie } (2, 0)} y = (x - 2)^3 \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 2} y = (\frac{1}{2}x - 2)^3$

Bladzijde 161

24 De parabool gaat door $(0, 0)$ en $(165, 0)$.
 Dit geeft een formule van de vorm $y = ax(x - 165)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{0 + 165}{2} = 82,5 \text{ en } y_{\text{top}} = 51,858, \text{ dus } a \cdot 82,5 \cdot (82,5 - 165) = 51,858$$

$$a \cdot 82,5 \cdot -82,5 = 51,858$$

$$-6806,25a = 51,858$$

$$a = -0,00761...$$

 Dit geeft $y = -0,00761...x(x - 165)$ oftewel $y = -0,00761...x^2 + 1,25716...$.
 Dus $a \approx -0,0076$ en $b \approx 1,2572$.

12.3 Differentiaalrekening**Bladzijde 162**

25 a Op maandag werden er $3 + 2 = 5$ fietsen verkocht.
 Op dinsdag $5 + 3 = 8$.
 Op woensdag $8 - 1 = 7$.
 In de tweede helft van week 15 werden er $32 - 5 - 8 - 7 = 12$ fietsen verkocht.

b $f(x) = (x + 2)(x^2 - 6x + 12) = x^3 - 6x^2 + 12x + 2x^2 - 12x + 24 = x^3 - 4x^2 + 24$ geeft
 $f'(x) = 3x^2 - 8x$
 $f'(x) = 0$ geeft $3x^2 - 8x = 0$
 $x(3x - 8) = 0$
 $x = 0 \vee 3x - 8 = 0$
 $x = 0 \vee 3x = 8$
 $x = 0 \vee x = 2\frac{2}{3}$
 De x -coördinaten van de toppen zijn 0 en $2\frac{2}{3}$.

c $f(x) = \sqrt{2x} + \frac{3}{x} = (2x)^{\frac{1}{2}} + 3x^{-1}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 - 3x^{-2} = \frac{1}{(2x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{3}{x^2}$
 $f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{3}{x^2} = 0$
 $\frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{3}{x^2}$
 $x^2 = 3\sqrt{2x}$
 kwadrateren geeft
 $x^4 = 9 \cdot 2x$
 $x^4 = 18x$
 $x^4 - 18x = 0$
 $x(x^3 - 18) = 0$
 $x = 0 \vee x^3 - 18 = 0$
 $x = 0 \vee x^3 = 18$
 $x = 0 \vee x = \sqrt[3]{18}$
 vold. niet
 Dus de x -coördinaat van de top is $\sqrt[3]{18}$.

d $f(x) = \frac{5}{4x + 6} = 5(4x + 6)^{-1}$ geeft $f'(x) = -5(4x + 6)^{-2} \cdot 4 = \frac{-20}{(4x + 6)^2}$
 Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(0) = \frac{-20}{(0 + 6)^2} = -\frac{5}{9}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{5}{9}x + b \\ f(0) = \frac{5}{6} \end{array} \right\} l: y = -\frac{5}{9}x + \frac{5}{6}$$

e $f(x) = -x^3 + x^2 + 2$ geeft $f'(x) = -3x^2 + 2x$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = -3 + 2 = -1$.
 $k: y = -x + b$
 $f(1) = 2$, dus $A(1, 2)$ $\left. \begin{array}{l} -1 + b = 2 \\ b = 3 \end{array} \right\}$

Dus $k: y = -x + 3$.

Lijn l staat loodrecht op k en gaat door de oorsprong geeft $l: y = x$.

Het snijpunt van k en l is punt B .

$$-x + 3 = x$$

$$-2x = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1\frac{1}{2} \\ y = x \end{array} \right\} y = 1\frac{1}{2}$$

Dus $B(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.

$$d(O, k) = d(O, B) = \sqrt{(1\frac{1}{2})^2 + (1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{4\frac{1}{2}}$$

f $f(x) = \sqrt[3]{2x - 10} = (2x - 10)^{\frac{1}{3}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{3}(2x - 10)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3(2x - 10)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x - 10)^2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{6} \text{ geeft } \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x - 10)^2}} = \frac{1}{6}$$

$$3 \cdot \sqrt[3]{(2x - 10)^2} = 12$$

$$\sqrt[3]{(2x - 10)^2} = 4$$

$$(2x - 10)^2 = 64$$

$$2x - 10 = 8 \vee 2x - 10 = -8$$

$$2x = 18 \vee 2x = 2$$

$$x = 9 \vee x = 1$$

$$f(1) = \sqrt[3]{2 - 10} = \sqrt[3]{-8} = -2 \text{ en } f(9) = \sqrt[3]{18 - 10} = \sqrt[3]{8} = 2$$

De raakpunten zijn $(1, -2)$ en $(9, 2)$.

g $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x} = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{5}{2x} = \frac{1}{2}x - 1 + 2\frac{1}{2}x^{-1}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2}$

$$f'(x) = \frac{2}{5} \text{ geeft } \frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{5}{2x^2}$$

$$2x^2 = 50$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \vee x = -5 \text{ (vold. niet)}$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \frac{2}{5}x + b \\ f(5) = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{5} \cdot 5 + b = 2 \\ 2 + b = 2 \end{array}$$

$$b = 0$$

Dus $k: y = \frac{2}{5}x$ en dus gaat k door de oorsprong.

h $f(x) = \frac{10}{2x - 5} + 2 = 10(2x - 5)^{-1} + 2$ geeft $f'(x) = -10(2x - 5)^{-2} \cdot 2 = \frac{-20}{(2x - 5)^2}$

$$rc_k = f'(0) = \frac{-20}{(0 - 5)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l \cdot rc_k = -1 \text{ en dit geeft } rc_l = 1\frac{1}{4}.$$

Dus $l: y = 1\frac{1}{4}x$.

$$f(x) = 1\frac{1}{4}x \text{ geeft } \frac{10}{2x - 5} + 2 = 1\frac{1}{4}x$$

$$10 + 2(2x - 5) = 1\frac{1}{4}x(2x - 5)$$

$$10 + 4x - 10 = 2\frac{1}{2}x^2 - 6\frac{1}{4}x$$

$$2\frac{1}{2}x^2 - 10\frac{1}{4}x = 0$$

$$x(2\frac{1}{2}x - 10\frac{1}{4}) = 0$$

$$x = 0 \vee 2\frac{1}{2}x - 10\frac{1}{4} = 0$$

$$x = 0 \vee 2\frac{1}{2}x = 10\frac{1}{4}$$

$$x = 0 \vee x = 4\frac{1}{10}$$

$$x = 4\frac{1}{10} \text{ geeft } y = 1\frac{1}{4} \cdot 4\frac{1}{10} = 5\frac{1}{8}, \text{ dus } A(4\frac{1}{10}, 5\frac{1}{8}).$$

Bladzijde 165

- 26** $y_A = -\frac{7}{4}p + \frac{7}{2}$ en $y_B = \sqrt{-3p+6}$
Stel de afstand tussen A en B is L.

Dan is $L = y_B - y_A = \sqrt{-3p+6} - (-\frac{7}{4}p + \frac{7}{2}) = \sqrt{-3p+6} + \frac{7}{4}p - \frac{7}{2} = (-3p+6)^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{4}p - \frac{7}{2}$ en

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2}(-3p+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot -3 + \frac{7}{4} = \frac{-3}{2(-3p+6)^{\frac{1}{2}}} + \frac{7}{4} = \frac{-3}{2\sqrt{-3p+6}} + \frac{7}{4}.$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{-3}{2\sqrt{-3p+6}} + \frac{7}{4} = 0$$

$$\frac{-3}{2\sqrt{-3p+6}} = -\frac{7}{4}$$

$$14\sqrt{-3p+6} = 12$$

$$\sqrt{-3p+6} = \frac{6}{7}$$

$$-3p+6 = \frac{36}{49}$$

$$-3p = -5\frac{13}{49}$$

$$p = 1\frac{37}{49}$$

- 27** $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x} = x - 1 + \frac{4}{x} = x - 1 + 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{3}{4} \text{ geeft } 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4 \text{ (vold. niet)}$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = \frac{3}{4}x + b \\ f(4) = 4, \text{ dus } R(4, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 4 + b = 4 \\ 3 + b = 4 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $l: y = \frac{3}{4}x + 1$ en $y_S = 1$.

Bladzijde 166

- 28 a** $f(x) = \frac{12}{x-3} + 4 = 12(x-3)^{-1} + 4$ geeft $f'(x) = -12(x-3)^{-2} = \frac{-12}{(x-3)^2}$

$$rc_l = f'(0) = \frac{-12}{(-3)^2} = \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3}$$

- b** $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, dus $rc_k = \frac{3}{4}$.

k door de oorsprong, dus $k: y = \frac{3}{4}x$.

$$f(x) = \frac{3}{4}x \text{ geeft } \frac{12}{x-3} + 4 = \frac{3}{4}x$$

$$12 + 4(x-3) = \frac{3}{4}x(x-3)$$

$$12 + 4x - 12 = \frac{3}{4}x^2 - 2\frac{1}{4}x$$

$$\frac{3}{4}x^2 - 6\frac{1}{4}x = 0$$

$$x(\frac{3}{4}x - 6\frac{1}{4}) = 0$$

$$x = 0 \vee \frac{3}{4}x - 6\frac{1}{4} = 0$$

$$x = 0 \vee \frac{3}{4}x = 6\frac{1}{4}$$

$$x = 0 \vee x = 8\frac{1}{3}$$

$$x = 8\frac{1}{3} \text{ geeft } y = \frac{3}{4} \cdot 8\frac{1}{3} = 6\frac{1}{4}$$

De coördinaten van dit punt zijn $(8\frac{1}{3}, 6\frac{1}{4})$.

29 a $f(x) = 0$ geeft $(x+1)(x^2 - 5x + 5) = 0$

$$x+1 = 0 \vee x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$x = -1 \quad D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 5$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee x = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$x_A = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ en } x_B = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ geeft } x_M = \frac{2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

b $f(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 5) = x^3 - 5x^2 + 5x + x^2 - 5x + 5 = x^3 - 4x^2 + 5$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 8x$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3x^2 - 8x = 0$$

$$x(3x - 8) = 0$$

$$x = 0 \vee 3x - 8 = 0$$

$$x = 0 \vee 3x = 8$$

$$x = 0 \vee x = 2\frac{2}{3}$$

$$x_C - x_M = 2\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{4}{6} - 2\frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

30 $f(x) = \frac{1}{2x+3} = (2x+3)^{-1}$ geeft $f'(x) = -(2x+3)^{-2} \cdot 2 = \frac{-2}{(2x+3)^2}$

Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(0) = \frac{-2}{(0+3)^2} = -\frac{2}{9}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{2}{9}x + b \\ f(0) = \frac{1}{3}, \text{ dus } A(0, \frac{1}{3}) \end{array} \right\} l: y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$$

Bladzijde 167

31 $f(x) = g(x)$ geeft $\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 3\sqrt{x} - \frac{3}{x}$

$$-2\sqrt{x} = -\frac{4}{x}$$

$$2x\sqrt{x} = 4$$

kwadrateren geeft

$$4x^3 = 16$$

$$x^3 = 4$$

$$x = \sqrt[3]{4}$$

Dus $x_S = \sqrt[3]{4}$.

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2}$$

$$2\sqrt{x} = x^2$$

kwadrateren geeft

$$4x = x^4$$

$$4x - x^4 = 0$$

$$x(4 - x^3) = 0$$

$$x = 0 \vee 4 - x^3 = 0$$

vold. niet $x^3 = 4$

$$x = \sqrt[3]{4}$$

Dus $x_{\text{top}} = \sqrt[3]{4}$.

Dus S is een top van de grafiek van f .

32 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x$ geeft $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(-2) = \frac{3}{2} \cdot 4 - 4 = 2$.

$$\begin{aligned} k: y &= 2x + b \\ A(-2, 4) \quad &\left\{ \begin{aligned} 2 \cdot -2 + b &= 4 \\ -4 + b &= 4 \end{aligned} \right. \\ &b = 8 \end{aligned}$$

Dus $k: y = 2x + 8$.

De lijn door O die loodrecht staat op k heeft vergelijking $y = -\frac{1}{2}x$.

Deze lijn snijden met k geeft $2x + 8 = -\frac{1}{2}x$

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}x &= -8 \\ x &= -3\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$x = -3\frac{1}{5} \text{ geeft } y = -\frac{1}{2} \cdot -3\frac{1}{5} = 1\frac{3}{5}$$

$$d(O, k) = d(O, (-3\frac{1}{5}, 1\frac{3}{5})) = \sqrt{(-3\frac{1}{5})^2 + (1\frac{3}{5})^2} = \sqrt{12\frac{4}{5}}$$

$$\text{Dus } d(k, l) = 2 \cdot d(O, k) = 2 \cdot \sqrt{12\frac{4}{5}} \approx 7,16.$$

33 $f(x) = \frac{2x^2 + 18}{3x} = \frac{2}{3}x + 6x^{-1}$ geeft $f'(x) = \frac{2}{3} - 6x^{-2} = \frac{2}{3} - \frac{6}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{2}{3} - \frac{6}{x^2} = 0$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{x^2}$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

$$f(3) = \frac{18 + 18}{9} = 4 \text{ en } f(-3) = \frac{18 + 18}{-9} = -4$$

Dus $A(-3, -4)$ en $B(3, 4)$.

Bladzijde 168

34 a $f(0) = \sqrt[3]{-27} = -3$, dus $A(0, -3)$.

$$f(x) = 0 \text{ geeft } \sqrt[3]{9x - 27} = 0$$

$$9x - 27 = 0$$

$$9x = 27$$

$$x = 3$$

Dus $B(3, 0)$.

$$rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - (-3)}{3 - 0} = 1$$

b $f(x) = \sqrt[3]{9x - 27} = (9x - 27)^{\frac{1}{3}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{3}(9x - 27)^{-\frac{2}{3}} \cdot 9 = 3(9x - 27)^{-\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = 1 \text{ geeft } 3(9x - 27)^{-\frac{2}{3}} = 1$$

$$\text{Voer in } y_1 = 3(9x - 27)^{-\frac{2}{3}} \text{ en } y_2 = 1.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 2,42$ en $x \approx 3,58$.

Dus $x_P \approx 2,42$ en $x_Q \approx 3,58$.

35 a $h(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{1}{a} \cdot x + ax^{-1}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{a} - ax^{-2} = \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2}{ax^2} - \frac{a^2}{ax^2} = \frac{x^2 - a^2}{ax^2}$

b $h'(x) = 0$ geeft $\frac{x^2 - a^2}{ax^2} = 0$

$$x^2 - a^2 = 0$$

$$x^2 = a^2$$

$$x = a \vee x = -a$$

vold. niet

$$y_{\text{top}} = h(a) = \frac{a}{a} + \frac{a}{a} = 1 + 1 = 2$$

Bladzijde 169

- 36** In januari 2012 was de elektriciteitsopbrengst $520 + 300 = 820$ kWh.
 In februari 2012 was dat $820 + 875 = 1695$ kWh.
 In maart 2012 was dat $1695 + 2575 = 4270$ kWh.
 In april 2012 was dat $4270 + 550 = 4820$ kWh.
 In mei 2012 was dat $4820 + 1875 = 6695$ kWh.
 In juni 2012 was dat $6695 - 1000 = 5695$ kWh.
 In het eerste halfjaar van 2012 was de elektriciteitsopbrengst dus
 $820 + 1695 + 4270 + 4820 + 6695 + 5695 = 23\,995$ kWh.
 Dus in het tweede halfjaar van 2012 werd er $45\,000 - 5000 - 23\,995 \approx 16\,000$ kWh geproduceerd.

Bladzijde 170

- 37** $g(x) = -1 + \sqrt{16x - 8} = -1 + (16x - 8)^{\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{2}(16x - 8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 16 = \frac{8}{(16x - 8)^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{\sqrt{16x - 8}}$
 $g(x) = 0$ geeft $-1 + \sqrt{16x - 8} = 0$
 $\sqrt{16x - 8} = 1$
 $16x - 8 = 1$
 $16x = 9$
 $x = \frac{9}{16}$
 helling $= g'(\frac{9}{16}) = \frac{8}{\sqrt{9 - 8}} = 8$

- 38** $f(x) = \frac{2}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{2}x$ geeft $f'(x) = 2(x - 1)^2 - \frac{1}{2}$
 $f'(x) = 3\frac{1}{2}$ geeft $2(x - 1)^2 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$
 $2(x - 1)^2 = 4$
 $(x - 1)^2 = 2$
 $x - 1 = \sqrt{2} \vee x - 1 = -\sqrt{2}$
 $x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}$

De helling van de grafiek van f is groter dan $3\frac{1}{2}$ voor $x < 1 - \sqrt{2} \vee x > 1 + \sqrt{2}$.

- 39** $f(x) = \frac{1}{2x - 3} - x - 1 = (2x - 3)^{-1} - x - 1$ geeft $f'(x) = -(2x - 3)^{-2} \cdot 2 - 1 = \frac{-2}{(2x - 3)^2} - 1$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = \frac{-2}{(-1)^2} - 1 = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -3x + b \\ A(1, -3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 1 + b = -3 \\ b = 0 \end{array}$$

Dus $k: y = -3x$, dus k gaat door de oorsprong.

- 40** $f(x) = \frac{3}{16x^4} = \frac{3}{16}x^{-4}$ geeft $f'(x) = -\frac{12}{16}x^{-5} = -\frac{3}{4x^5}$

Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(1) = -\frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{3}{4}x + b \\ A(1, \frac{3}{16}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 1 + b = \frac{3}{16} \\ -\frac{12}{16} + b = \frac{3}{16} \\ b = \frac{15}{16} \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{16}$ en $y_B = \frac{15}{16}$.

- 41** $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^3$ geeft $f'(x) = 3(\frac{1}{2}x - 2)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 2)^2$

$$f(x) = 0 \text{ geeft } (\frac{1}{2}x - 2)^3 = 0$$

$$\frac{1}{2}x - 2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x = 2$$

$$x = 4$$

$$f'(x_A) = f'(4) = 1\frac{1}{2}(2 - 2)^2 = 0$$

Dus de grafiek van f heeft een horizontale raaklijn in A .

Bladzijde 171

- 42 a** Gelijke watertemperatuur en gelijke waterdiepte, dus het verschil wordt bepaald door het verschil in zoutgehalte.
Het gevraagde verschil is $1,391(337 - 35) - 1,391(12 - 35) \approx 452 \text{ m/s}$.
- b** $v = 1449,2 + 4,623T - 0,0546T^2 + 1,391(Z - 35) + \frac{D}{60}$ waarbij Z en D constanten zijn geeft
- $$\frac{dv}{dT} = 4,623 - 0,1092T$$
- $$\frac{dv}{dT} = 0 \text{ geeft } 4,623 - 0,1092T = 0$$
- $$0,1092T = 4,623$$
- $$T \approx 42,3$$
- Dus bij een temperatuur van $42,3^\circ\text{C}$ is de geluidssnelheid in zeewater maximaal.
- c** $D = 20$, $T = 10$ en $Z = 35$ geeft
- $$v = 1449,2 + 4,623 \cdot 10 - 0,0546 \cdot 10^2 + 1,391(35 - 35) + \frac{20}{60} = 1490,3...$$
- De door het geluid afgelegde afstand is $12,45 \cdot 1490,3... = 18\,554,2...$ meter.
Dus het object is $18\,554,2... : 2 \approx 9300$ meter van de onderzeeboot verwijderd.

Bladzijde 172

- 43** Op $[0; 0,001]$ is $\frac{\Delta V}{\Delta C} = \frac{V(0,001) - V(0)}{0,001} = \frac{1,004512... - 1}{0,001} = 4,51...$, dus $a \approx 4,5$.

$$b = V(0) = \frac{1 + 0,5 \cdot 0}{(1 - 0)^4} = 1$$

Dus $V_{\text{lin}} = 4,5C + 1$.

- 44 a** $f(x) = -(2x - 3)^3 + 3x^2 - 6x + 4$ geeft $f'(x) = -3(2x - 3)^2 \cdot 2 + 6x - 6$
- $$= -6(4x^2 - 12x + 9) + 6x - 6$$
- $$= -24x^2 + 72x - 54 + 6x - 6$$
- $$= -24x^2 + 78x - 60$$

- b** $f'(x) = 0$ geeft $-24x^2 + 78x - 60 = 0$
- $$4x^2 - 13x + 10 = 0$$
- $$D = (-13)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 10 = 9$$
- $$x = \frac{13 \pm 3}{8} = 2 \vee x = \frac{13 - 3}{8} = 1\frac{1}{4}$$
- $f(1\frac{1}{4}) = 1\frac{5}{16}$, dus $A(1\frac{1}{4}, 1\frac{5}{16})$ en $f(2) = 3$, dus $B(2, 3)$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 1\frac{5}{16}}{2 - 1\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 2\frac{1}{4}x + b \\ B(2, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{4} \cdot 2 + b = 3 \\ 4\frac{1}{2} + b = 3 \\ b = -1\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = 2\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$ en $M(0, -1\frac{1}{2})$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = rc_l = rc_k = 2\frac{1}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = 2\frac{1}{4}x + b \\ P(1, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{4} \cdot 1 + b = 2 \\ 2\frac{1}{4} + b = 2 \\ b = -\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $l: y = 2\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ en $N(0, -\frac{1}{4})$.

Uit de gelijkvormigheid volgt $z = \frac{OM}{ON} = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 6$.

12.4 Exponenten en logaritmen

Bladzijde 173

45

a $g_{\text{week}} = 1,075$, dus los op $1,075^T = 2$.

Voer in $y_1 = 1,075^x$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x = 9,58\dots$

De verdubbelingstijd is $9,58\dots \times 7 \approx 67$ dagen.

b $1,075^6 \cdot 1,068^4 = 2,007\dots$

Dus de hoeveelheid is in deze 10 jaar verdubbeld.

c $g_{10 \text{ jaar}} = 5$

$g_{\text{jaar}} = 5^{\frac{1}{10}} = 1,174\dots$

Los op $3 \cdot 10^8 \cdot 1,174\dots^t = 4,5 \cdot 10^{10}$ oftewel $1,174\dots^t = 150$.

Voer in $y_1 = 1,174\dots^x$ en $y_2 = 150$.

De optie snijpunt geeft $x = 31,1\dots$

Dus in het jaar 2051.

d $170 \text{ cm} = 1700 \text{ mm}$

$\left(\frac{1700}{5,5}\right)^{\frac{1}{49}} \approx 1,124$

Het gevraagde percentage is 12,4%.

e $3^{\frac{1}{4}x+7} = 9^x$

$3^{\frac{1}{4}x+7} = (3^2)^x$

$3^{\frac{1}{4}x+7} = 3^{2x}$

$\frac{1}{4}x + 7 = 2x$

$-1\frac{3}{4}x = -7$

$x = 4$

f $5^{2x-1} - 25 = 3100$

$5^{2x-1} = 3125$

$5^{2x-1} = 5^5$

$2x - 1 = 5$

$2x = 6$

$x = 3$

g $y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (2, -12)} y = 2^{x-2} - 12 \xrightarrow{\text{verm. } x \text{-as, } \frac{1}{8}} y = \frac{1}{8}(2^{x-2} - 12)$

Er geldt $\frac{1}{8}(2^{x-2} - 12) = \frac{1}{8} \cdot 2^{x-2} - 1\frac{1}{2} = 2^{-3} \cdot 2^{x-2} - 1\frac{1}{2} = 2^{x-5} - 1\frac{1}{2}$.

Dus $g(x) = 2^{x-5} - 1\frac{1}{2}$ en $a = -5$ en $b = -1\frac{1}{2}$.

h $y = (\frac{1}{2})^x \xrightarrow{\text{verm. } y \text{-as, } a} y = (\frac{1}{2})^{\frac{x}{a}}$, dus $g(x) = (\frac{1}{2})^{\frac{x}{a}}$.

$g(-16) = 16$ geeft $(\frac{1}{2})^{\frac{-16}{a}} = 16$

$(2^{-1})^{\frac{-16}{a}} = 2^4$

$2^{\frac{16}{a}} = 2^4$

$\frac{16}{a} = 4$

$a = 4$

i $y = 5 - 3^{0,4x-1} \xrightarrow{\text{translatie } (-10, 6)} y = 5 - 3^{0,4(x+10)-1} + 6$

Er geldt $5 - 3^{0,4(x+10)-1} + 6 = 11 - 3^{0,4x+4-1} = 11 - 3^{0,4x+3} = 11 - 3^{0,4x} \cdot 3^3 = 11 - 27 \cdot 3^{0,4x}$.

Dus $a = 11$ en $b = -27$.

j Bij $K = 2,4$ hoort $F = 3,5$ geeft $0,15 \cdot 2,4^b = 3,5$

$2,4^b = \frac{3,5}{0,15}$

$b = {}^{2,4}\log\left(\frac{3,5}{0,15}\right) \approx 3,6$

k $70 \cdot 10^{-x} = 65$

$10^{-x} = \frac{65}{70}$

$-x = \log(\frac{65}{70})$

$x = -\log(\frac{65}{70}) \approx 0,032$

$$\begin{aligned}
 \text{I} \quad y &= 3^{\frac{1}{4}x+2} \\
 3^{\frac{1}{4}x+2} &= y \\
 \frac{1}{4}x + 2 &= {}^3\log(y) \\
 \frac{1}{4}x &= -2 + {}^3\log(y) \\
 x &= -8 + 4 \cdot {}^3\log(y)
 \end{aligned}$$

Bladzijde 174

- 46 a** $A = 5$ geeft $\log(A) = \log(5) \approx 0,7$
 Aflezen: bij $\log(A) = 0,7$ hoort $\log(B) \approx 0,06$.
 $\log(B) = 0,06$ geeft $B = 10^{0,06} \approx 1,15$
- b** $N = 0,25 \cdot M^{1,75}$
 $\log(N) = \log(0,25 \cdot M^{1,75})$
 $\log(N) = \log(0,25) + \log(M^{1,75})$
 $\log(N) \approx -0,60 + 1,75 \cdot \log(M)$
 Dus $\log(N) = -0,60 + 1,75 \cdot \log(M)$.
- c** $P = 5,6 \cdot 10^{18}$ geeft $\log(5,6 \cdot 10^{18}) = 0,006q + 12,5$
 $18,748... = 0,006q + 12,5$
 $-0,006q = -6,248...$
 $q \approx 1041$
- d** Lees af: $g_{5 \text{ uur}} = \frac{10^{5,5}}{10^2} = 10^{3,5}$.
 Dit geeft $g_{\text{minuut}} = (10^{3,5})^{\frac{1}{300}} \approx 1,027$.
 Dus N neemt per minuut met 2,7% toe.
- e** $3 + {}^2\log(5x + 1) = 8$
 ${}^2\log(5x + 1) = 5$
 $5x + 1 = 32$
 $5x = 31$
 $x = 6\frac{1}{5}$
- f** $f(x) = 3 + {}^2\log(4x + 5) = 3 + {}^2\log(4(x + 1\frac{1}{4})) = 3 + {}^2\log(4) + {}^2\log(x + 1\frac{1}{4})$
 $= 3 + 2 + {}^2\log(x + 1\frac{1}{4}) = 5 + {}^2\log(x + 1\frac{1}{4})$
 $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (-1\frac{1}{4}, 5)} y = 5 + {}^2\log(x + 1\frac{1}{4})$
 Dus de horizontale translatie is $1\frac{1}{4}$ naar links en de verticale translatie is 5 omhoog.
- g** $A = 500$ en $G = 7$ geeft $\log(500) + 5 \cdot \log(B) - 8,5 = 7$
 $5 \cdot \log(B) = 15,5 - \log(500)$
 $\log(B) = \frac{15,5 - \log(500)}{5} = 2,560...$
 $B = 10^{2,560...} \approx 363$
- h** $H = \log(P) + 1,75 \cdot \log(Q) - 0,25$
 $H = \log(P) + \log(Q^{1,75}) + \log(10^{-0,25})$
 $H = \log(10^{-0,25} \cdot P \cdot Q^{1,75})$
 $H \approx \log(0,56 \cdot P \cdot Q^{1,75})$
 Dus $a \approx 0,56$ en $b = 1,75$.
- i** Voor een verticale asymptoot zou moeten gelden $x^2 - 4x + 5 = 0$.
 Van deze vergelijking is de discriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$.
 $D < 0$, dus geen oplossingen en dus heeft de grafiek van f geen verticale asymptoot.
- j** $f(x) = 0$ geeft ${}^2\log(x^2 - 5x + 4) = 0$
 $x^2 - 5x + 4 = 1$
 $x^2 - 5x + 3 = 0$
 $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13$
 $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$
 De nulpunten van f zijn $\frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ en $\frac{5 + \sqrt{13}}{2}$.

Bladzijde 179

- 47 a** $L = 0,8$ geeft $\log(L) = \log(0,8) \approx -0,1$
 Aflezen geeft: bij $\log(L) = 0,1$ hoort $\log(G) \approx -2,3$.
 $\log(G) = -2,3$ geeft $G = 10^{-2,3} \approx 0,005$
 Het gevraagde gewicht is 5 mg.
- b** $L = 1,9$ en $G = 0,25$ geeft $0,014 \cdot 1,9^b = 0,25$
 Voer in $y_1 = 0,014 \cdot 1,9^x$ en $y_2 = 0,25$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 4,49$.
 Dus $b \approx 4,49$.
- c** $G = 0,014 \cdot L^{4,5}$
 $\log(G) = \log(0,014 \cdot L^{4,5})$
 $\log(G) = \log(0,014) + \log(L^{4,5})$
 $\log(G) = -1,85... + 4,5 \cdot \log(L)$
 Dus $p \approx -1,9$ en $q = 4,5$.

Bladzijde 180

- 48 a** Aflezen geeft: bij 1950 hoort $\log(E) \approx 19,6$.
 $\log(E) = 19,6$ geeft $E = 10^{19,6} \approx 3,98 \cdot 10^{19}$
 Het gevraagde energieverbruik is 40 exajoule.
- b** $E = 3,0 \cdot 10^{20}$ geeft $\log(3,0 \cdot 10^{20}) = 0,0125t + 15,8$
 $20,47... = 0,0125t + 15,8$
 $-0,0125t = -4,67...$
 $t \approx 374,2$
 Dus in het jaar 2025.
- c** Los op $1,2 \cdot 10^{13} \cdot 10^t = 1,7 \cdot 10^{17}$. Hierin is t in honderden jaren.
 Dit geeft $10^t = 14166,6...$
 $t = \log(14166,6...) \approx 4,15$
 Dus over ruim 4 eeuwen.

Bladzijde 181

- 49 a** Bij $t = 0$ hoort $\log(N) = 1$, dus $N = 10$.
 Bij $t = 8$ hoort $\log(N) = 7$, dus $N = 10^7$.
 8 uur = 480 minuten
 $g_{480 \text{ minuten}} = \frac{10^7}{10} = 10^6$
 $g_{\text{minuut}} = (10^6)^{\frac{1}{480}} \approx 1,029$
 Dus het gevraagde percentage is 2,9%.
- b** Los op $1,029^T = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,029^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 24,2...$
 De verdubbelingstijd is ongeveer 24 minuten.
- c** $L = 84$ geeft $100 \cdot 10^{-D} = 84$
 Voer in $y_1 = 100 \cdot 10^{-x}$ en $y_2 = 84$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 0,076$.
 Aflezen geeft: bij $D = 0,076$ hoort $N \approx 1,6 \cdot 10^7$.
 Dus 16 miljoen bacteriën in de reageerbuis.

Alternatieve uitwerking

$L = 84$ geeft $100 \cdot 10^{-D} = 84$
 $10^{-D} = 0,84$
 $-D = \log(0,84)$
 $D = -\log(0,84) \approx 0,076$
 Aflezen geeft: bij $D = 0,076$ hoort $N \approx 1,6 \cdot 10^7$.
 Dus 16 miljoen bacteriën in de reageerbuis.

Bladzijde 182

- 50 a** $p = 0,31$ geeft $\log(p) = \log(0,31) \approx -0,51$
 Aflezen geeft: bij $\log(p) = -0,51$ hoort $T \approx 69$.
 Dus bij een temperatuur van 69°C .
- b** $T = 130$ geeft $\log(p) = 5,68 - \frac{2120}{273 + 130} = 0,419\dots$
 $p = 10^{0,419\dots} \approx 2,6$
 Dus de gevraagde druk is 2,6 bar.
- c** $\log(p) = 5,68 - \frac{2120}{273 + T}$
 $\frac{2120}{273 + T} = 5,68 - \log(p)$
 $\frac{2120}{5,68 - \log(p)} = 273 + T$
 $\frac{2120}{5,68 - \log(p)} - 273 = T$
 $T = \frac{2120}{5,68 - \log(p)} - 273$

Bladzijde 183

- 51 a** $1,02 \cdot 1,01 \cdot 1,07 \cdot 1,14 \cdot 1,26 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,05 \cdot 1,08 \cdot 1,06 \approx 2,02$
 Dus de prijs is in 10 jaar tijd ongeveer verdubbeld.
- b** $g_{10\text{ jaar}} = \frac{2}{1}$
 $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{10}} \approx 1,072$
 Het gevraagde percentage per jaar is 7,2%.
- c** $B = 13\,000$, $V = 2250$ en $P = 7$ geeft $\frac{19,9 \cdot 2250}{7} \cdot \left(\left(1 + \frac{7}{100} \right)^t - 1 \right) = 13\,000$
 Voer in $\frac{19,9 \cdot 2250}{7} \cdot \left(\left(1 + \frac{7}{100} \right)^x - 1 \right)$ en $y_2 = 13\,000$.
 De optie snijpunt geeft $x = 16,3\dots$
 Dus na 17 jaar.

Bladzijde 184

- 52 a** $f(x) = 2$ geeft $4 - 2^{0,3x-2} = 2$
 $2^{0,3x-2} = 2^1$
 $0,3x - 2 = 1$
 $0,3x = 3$
 $x = 10$
 Dus $x_R = 10$.
- b** Voer in $y_1 = 4 - 2^{0,3x-2}$.
 De optie nulpunt geeft $x = 13,33\dots$, dus $Q(13,33\dots; 0)$.
 Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 5}{13,33\dots - 0} = -0,375$.
 $l: y = -0,375x + b$
 door $P(0, 5)$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} l: y = -0,375x + b \\ l: y = -0,375x + 5 \end{matrix}} \right\} l: y = -0,375x + 5$
 Voer in $y_2 = -0,375x + 5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 4,295\dots$ en $y = 3,389\dots$
 Dus $S(4,30; 3,39)$.
- c** $y = 4 - 2^{0,3x-2} \xrightarrow{\text{translatie } (-20, 10)} y = 4 - 2^{0,3(x+20)-2} + 10$
 Er geldt $4 - 2^{0,3(x+20)-2} + 10 = 14 - 2^{0,3x+6-2} = 14 - 2^{0,3x+4} = 14 - 2^{0,3x} \cdot 2^4 = 14 - 16 \cdot 2^{0,3x}$.
 Dus $a = 14$ en $b = -16$.
- 53 a** $s_2 = 2s_1$ geeft $v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{0,06} \approx 0,959v_1$
 De afname is ongeveer 4,1%, dus de formule voldoet niet aan deze vuistregel.

Bladzijde 185

- b** 2 uur = 7200 seconden en 2 minuten = 120 seconden, dus de wereldrecordtijd op de marathon is $7200 + 120 + 57 = 7377$ seconden.

$$\frac{7377 \text{ seconden}}{42,195 \text{ km}} \approx 175 \text{ seconden/km}$$

Dus het looptempo is 2 minuten en 55 seconden.

- c** $s = 50$ geeft $\log(s) = \log(50) \approx 1,7$
 Aflezen geeft: bij $\log(s) = 1,7$ hoort $\log(t) \approx 0,39$
 $\log(t) = 0,39$ geeft $t = 10^{0,39} = 2,45...$
 Dus het verwachte wereldrecord is 2 uur en $0,45... \times 60 \approx 27$ minuten.

Bladzijde 186

- 54 a** Voor een verticale asymptoot zou moeten gelden $x^2 - 3x + 3 = 0$.
 Van deze vergelijking is de discriminant $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3$.
 $D < 0$, dus geen oplossingen en dus heeft de grafiek van f geen verticale asymptoot.

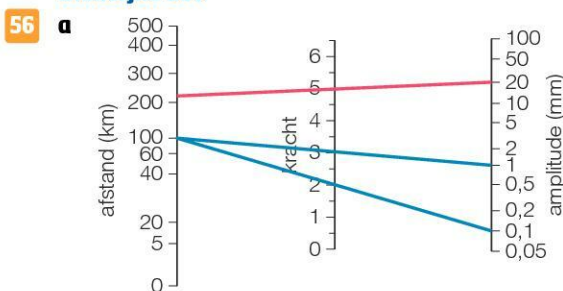
- b** $f(x) = 0$ geeft ${}^2\log(x^2 - 3x + 3) = 0$
 $x^2 - 3x + 3 = 1$
 $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $(x - 1)(x - 2) = 0$
 $x = 1 \vee x = 2$
 $(1, 0) \xrightarrow{\text{translatie } (3, 0)} (4, 0)$, dus $a = 3$.
 $(2, 0) \xrightarrow{\text{translatie } (2, 0)} (4, 0)$, dus $a = 2$.

- 55 a** $f(x) = g(x)$ geeft $2^{\frac{1}{2}x+3} = 4^x$
 $2^{\frac{1}{2}x+3} = (2^2)^x$
 $2^{\frac{1}{2}x+3} = 2^{2x}$
 $\frac{1}{2}x + 3 = 2x$
 $-1\frac{1}{2}x = -3$
 $x = 2$

$$g(2) = 4^2 = 16$$

Dus $A(2, 16)$.

- b** $y = 2^{\frac{1}{2}x+3}$
 $2^{\frac{1}{2}x+3} = y$
 $\frac{1}{2}x + 3 = {}^2\log(y)$
 $\frac{1}{2}x = -3 + {}^2\log(y)$
 $x = -6 + 2 \cdot {}^2\log(y)$

Bladzijde 187

De beving met amplitude 1 mm heeft kracht 3,0.
 De beving met amplitude 0,1 mm heeft kracht 2,0.
 Het verschil in kracht is 1,0.

- b** $K = 7,85$ en $A = 1000$ geeft $\log(1000) + 3 \cdot \log(D) - 3,38 = 7,85$
 Voer in $y_1 = \log(1000) + 3 \cdot \log(x) - 3,38$ en $y_2 = 7,85$.
 De optie snijpunt geeft $x = 553,7...$
 Dus de gevraagde oppervlakte van het rampgebied is $\pi \cdot 553,7...^2 \approx 963\,000 \text{ km}^2$.

Alternatieve uitwerking

$$\begin{aligned} K = 7,85 \text{ en } A = 1000 \text{ geeft } \log(1000) + 3 \cdot \log(D) - 3,38 &= 7,85 \\ 3 + 3 \cdot \log(D) - 3,38 &= 7,85 \\ 3 \cdot \log(D) &= 8,23 \\ \log(D) &= 2,74... \\ D &= 10^{2,74...} = 553,7... \end{aligned}$$

Dus de gevraagde oppervlakte van het rampgebied is $\pi \cdot 553,7...^2 \approx 963\,000 \text{ km}^2$.

- c** $K = \log(A) + 1,6 \cdot \log(D) - 0,15$
 $K = \log(A) + \log(D^{1,6}) + \log(10^{-0,15})$
 $K = \log(A \cdot D^{1,6} \cdot 10^{-0,15})$
 $K = \log(0,70... \cdot A \cdot D^{1,6})$
 Dus $p \approx 0,7$ en $q = 1,6$.

Bladzijde 188

57 a $g^{48} = \frac{440}{27,5}$ geeft $g = \left(\frac{440}{27,5}\right)^{\frac{1}{48}} \approx 1,0595$

Het gevraagde percentage is 5,95%.

- b** Voer in $y_1 = 440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(x-69)}$ en maak een tabel.
 Hieruit volgt
 $m = 15$ geeft $f \approx 19,4$
 $m = 16$ geeft $f \approx 20,6$
 $m = 135$ geeft $f \approx 19\,912$
 $m = 136$ geeft $f \approx 21\,096$.
 Het laagste MIDI-nummer is dus 16 en het hoogste is 135.
 Dus zo'n piano zal 120 toetsen hebben.

Bladzijde 189

58 a $f(x) = 13$ geeft $4^{x+1} - 3 = 13$

$$4^{x+1} = 16$$

$$4^{x+1} = 4^2$$

$$x + 1 = 2$$

$$x = 1$$

$g(x) = 13$ geeft $8 + {}^2\log(4(x + 1\frac{1}{2})) = 13$

$${}^2\log(4(x + 1\frac{1}{2})) = 5$$

$$4(x + 1\frac{1}{2}) = 32$$

$$x + 1\frac{1}{2} = 8$$

$$x = 6\frac{1}{2}$$

$x_A = 1$ en $x_B = 6\frac{1}{2}$ geeft $AB = 5\frac{1}{2}$

b $g(x) = 8 + {}^2\log(4(x + 1\frac{1}{2})) = 8 + {}^2\log(4) + {}^2\log(x + 1\frac{1}{2}) = 8 + 2 + {}^2\log(x + 1\frac{1}{2}) = {}^2\log(x + 1\frac{1}{2}) + 10$

$y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (-1\frac{1}{2}, 10)} y = {}^2\log(x + 1\frac{1}{2}) + 10$

Dus door de translatie $1\frac{1}{2}$ naar links en 10 omhoog.

59 a $f(x) = 241$ geeft $3^{x-1} - 2 = 241$

$$3^{x-1} = 243$$

$$3^{x-1} = 3^5$$

$$x - 1 = 5$$

$$x = 6$$

b $y = 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (0, -6)} y = 3^x - 6 \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } \frac{1}{3}} y = \frac{1}{3}(3^x - 6)$

Er geldt $\frac{1}{3}(3^x - 6) = \frac{1}{3} \cdot 3^x - 2 = 3^{-1} \cdot 3^x - 2 = 3^{x-1} - 2$.

Dus $h(x) = 3^{x-1} - 2$.

c $y = 3^x \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } a} y = 3^{\frac{1}{a} \cdot x}$, dus $k(x) = 3^{\frac{x}{a}}$.
 $k(-20) = 81$ geeft $3^{\frac{-20}{a}} = 81$
 $3^{\frac{-20}{a}} = 3^4$
 $\frac{-20}{a} = 4$
 $a = -5$

12.5 Goniometrie

Bladzijde 190

60 a $f(x) = 0$ geeft $3 \cos(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi) = 0$

$$\begin{aligned}\cos(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi) &= 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \\ \frac{2}{3}x &= \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi \\ x &= 1\frac{1}{8}\pi + k \cdot 1\frac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{8}\pi$

Dus de gevraagde x -coördinaat is $1\frac{1}{8}\pi$.

b Voor het hoogste punt geldt $\cos(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi) = 1$

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi &= k \cdot 2\pi \\ \frac{2}{3}x &= \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \\ x &= \frac{3}{8}\pi + k \cdot 3\pi\end{aligned}$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{3}{8}\pi$ en top $(\frac{3}{8}\pi, 3)$.

Voor het laagste punt geldt $\cos(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi) = -1$

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi &= \pi + k \cdot 2\pi \\ \frac{2}{3}x &= 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \\ x &= 1\frac{7}{8}\pi + k \cdot 3\pi\end{aligned}$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{7}{8}\pi$ en top $(1\frac{7}{8}\pi, -3)$.

c $f(x) = 0$ geeft $2 + 4 \sin(1\frac{1}{2}\pi x) = 0$

$$\begin{aligned}4 \sin(1\frac{1}{2}\pi x) &= -2 \\ \sin(1\frac{1}{2}\pi x) &= -\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2}\pi x &= -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 1\frac{1}{2}\pi x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \\ x &= -\frac{1}{9} + k \cdot 1\frac{1}{3} \vee x = \frac{7}{9} + k \cdot 1\frac{1}{3}\end{aligned}$$

x in $[0, 1\frac{1}{2}]$ geeft $x = \frac{7}{9} \vee x = 1\frac{2}{9}$

Dus de gevraagde x -coördinaten zijn $\frac{7}{9}$ en $1\frac{2}{9}$.

d Voor het hoogste punt geldt $\sin(1\frac{1}{2}\pi x) = 1$

$$\begin{aligned}1\frac{1}{2}\pi x &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\ x &= \frac{1}{3} + k \cdot 1\frac{1}{3}\end{aligned}$$

x in $[0, 1\frac{1}{2}]$ geeft $x = \frac{1}{3}$ en top $(\frac{1}{3}, 6)$.

Voor het laagste punt geldt $\sin(1\frac{1}{2}\pi x) = -1$

$$\begin{aligned}1\frac{1}{2}\pi x &= 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\ x &= 1 + k \cdot 1\frac{1}{3}\end{aligned}$$

x in $[0, 1\frac{1}{2}]$ geeft $x = 1$ en top $(1, -2)$.

e $f(x) = \frac{2}{11}$ geeft $\frac{1}{3 \sin(x) + 4} = \frac{2}{11}$
 $2(3 \sin(x) + 4) = 11$
 $6 \sin(x) + 8 = 11$
 $6 \sin(x) = 3$
 $\sin(x) = \frac{1}{2}$
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$, dus $x_A = \frac{1}{6}\pi$.

$f(x) = \frac{2}{5}$ geeft $\frac{1}{3 \sin(x) + 4} = \frac{2}{5}$
 $2(3 \sin(x) + 4) = 5$
 $6 \sin(x) + 8 = 5$
 $6 \sin(x) = -3$
 $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
 $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{7}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$, dus $x_D = \frac{5}{6}\pi$.

$x_D - x_A = \frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$

f $\cos(\alpha)$ is maximaal 1, dus $1 + 0,15 \cdot \cos(\alpha)$ is maximaal 1,15, dus $\frac{391}{1 + 0,15 \cdot \cos(\alpha)}$ is minimaal $\frac{391}{1,15} = 340$.

$\cos(\alpha)$ is minimaal -1, dus $1 + 0,15 \cdot \cos(\alpha)$ is minimaal 0,85, dus $\frac{391}{1 + 0,15 \cdot \cos(\alpha)}$ is maximaal $\frac{391}{0,85} = 460$.

Dus de minimale waarde van F is 340 en de maximale waarde van F is 460.

g Voer in $y_1 = 1 + 3 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) - \cos(2x + \frac{1}{4}\pi)$.

De optie maximum geeft $x = 1,2764...$ en $y = 4,9743...$

De optie minimum geeft $x = 2,8472...$ en $y = -2,9743...$

evenwichtsstand = $\frac{4,9743... + (-2,9743...)}{2} = 1$, dus $a = 1$.

amplitude = $4,9743... - 1 = 3,9743...$, dus $b \approx 3,974$.

$\frac{1}{2} \cdot \text{periode} = 2,8472... - 1,2764... = 1,5707...$, dus periode = $3,1415...$ en $c = \frac{2\pi}{3,1415...} = 2$.

Voer in $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat voor

$x = 0,4910...$, dus $d \approx 0,491$.

Bladzijde 191

h $g(x) = a + b \cdot \cos(c(x - d))$

De periode is 3, dus $c = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

De amplitude van de grafiek van f is 2, dus de amplitude van de grafiek van g is 8, dus $b = 8$.

Het hoogste punt van de grafiek van f heeft y -coördinaat 5, dus het hoogste punt van de grafiek van g heeft y -coördinaat 5. Uit evenwichtsstand = hoogste stand - amplitude volgt voor de grafiek van g dat evenwichtsstand = $5 - 8 = -3$, dus $a = -3$.

De x -coördinaat van het hoogste punt van de grafiek van f is $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$, dus de

x -coördinaat van het hoogste punt van de grafiek van g is $\frac{5}{6}$, dus $d = \frac{5}{6}$.

i $f(x) = 0$ geeft $4 \sin(\frac{2}{3}\pi(x-1)) = 0$

$$\sin(\frac{2}{3}\pi(x-1)) = 0$$

$$\frac{2}{3}\pi(x-1) = k \cdot \pi$$

$$x-1 = k \cdot 1\frac{1}{2}$$

$$x = 1 + k \cdot 1\frac{1}{2}$$

x in $[0, 3]$ geeft $x = 1 \vee x = 2\frac{1}{2}$

Dus $A(1, 0)$ en $B(2\frac{1}{2}, 0)$.

Verder is $T(\frac{1}{2}(1+2\frac{1}{2}), 4) = T(1\frac{3}{4}, 4)$.

Stel $p: y = a(x-p)^2 + q$.

top $T(1\frac{3}{4}, 4)$ geeft $y = a(x - 1\frac{3}{4})^2 + 4$

Door $A(1, 0)$ geeft $a(1 - 1\frac{3}{4})^2 + 4 = 0$

$$a(-\frac{3}{4})^2 + 4 = 0$$

$$\frac{9}{16}a = -4$$

$$a = -7\frac{1}{9}$$

Dus $p: y = -7\frac{1}{9}(x - 1\frac{3}{4})^2 + 4$.

$$-7\frac{1}{9}(x - 1\frac{3}{4})^2 + 4 = -7\frac{1}{9}(x^2 - 3\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{16}) + 4 = -7\frac{1}{9}x^2 + 24\frac{8}{9}x - 21\frac{7}{9} + 4 = -7\frac{1}{9}x^2 + 24\frac{8}{9}x - 17\frac{7}{9}$$

Dus $a = -7\frac{1}{9}$, $b = 24\frac{8}{9}$ en $c = -17\frac{7}{9}$.

Bladzijde 194

61 $g(x) = \frac{1}{4}$ geeft $\frac{1}{2\sin(x)+3} = \frac{1}{4}$

$$2\sin(x) + 3 = 4$$

$$2\sin(x) = 1$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[-2\pi, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = -1\frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = -1\frac{1}{6}\pi$

$x_B = -1\frac{5}{6}\pi$ en $x_E = \frac{5}{6}\pi$ geeft $BE = \frac{5}{6}\pi - (-1\frac{5}{6}\pi) = 2\frac{2}{3}\pi$

Bladzijde 195

62 a $\frac{2\pi}{0,212769} = 29,53\dots$

29 dagen

$$0,53\dots \cdot 24 \text{ uur} = 12,73\dots \text{ uur}$$

$$0,73\dots \cdot 60 \text{ minuten} \approx 44 \text{ minuten}$$

De periode van P is 29 dagen, 12 uur en 44 minuten.

b $P = 0$ geeft $50 + 50 \sin(0,212769t - 1,042563) = 0$

Voer in $y_1 = 50 + 50 \sin(0,212769x - 1,042563)$.

De optie nulpunt geeft $x = 27,04\dots$

Dus op 28 januari 2017.

c 22 februari ligt tussen $t = 52$ en $t = 53$.

$t = 52$ geeft $P = 21,9\dots$

$t = 53$ geeft $P = 13,8\dots$

$P < 50$ en P neemt af, dus de maan bevindt zich op 22 februari 2017 tussen laatste kwartier en nieuwe maan.

63 a $f(x) = 0$ geeft $1 - 2 \sin(\pi x) = 0$

$$2 \sin(\pi x) = 1$$

$$\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$$

$$\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6} + k \cdot 2 \vee x = \frac{5}{6} + k \cdot 2$$

x in $[0, 2]$ geeft $x = \frac{1}{6} \vee x = \frac{5}{6}$

De nulpunten zijn $\frac{1}{6}$ en $\frac{5}{6}$.

b Voor P geldt $\sin(\pi x) = 1$

$$\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2} + k \cdot 2$$

x in $[0, 2]$ geeft $x = \frac{1}{2}$ en $P(\frac{1}{2}, -1)$.

$g(\frac{1}{2}) = -1 + \sqrt{8-8} = -1$, dus P op de grafiek van g .

Voor Q geldt $\sin(\pi x) = -1$

$$\pi x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1\frac{1}{2} + k \cdot 2$$

x in $[0, 2]$ geeft $x = 1\frac{1}{2}$ en $Q(1\frac{1}{2}, 3)$.

$g(1\frac{1}{2}) = -1 + \sqrt{24-8} = -1 + \sqrt{16} = 3$, dus Q op de grafiek van g .

Bladzijde 196

64 a $f(x) = 0$ geeft $2\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi) = 0$

$$\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi) = 0$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{8}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

x in $[0, \frac{5}{2}\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{4}\pi$

De x -coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de x -as is $1\frac{1}{4}\pi$.

b Voor het hoogste punt van de grafiek van g geldt $\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = 1$

$$x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, \frac{5}{2}\pi]$ geeft $x = \frac{3}{4}\pi$ en top $(\frac{3}{4}\pi, 1)$.

$x = \frac{3}{4}\pi$ geeft $y = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$, dus $(\frac{3}{4}\pi, 1)$ op k .

Voor het laagste punt van de grafiek van g geldt $\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = -1$

$$x - \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, \frac{5}{2}\pi]$ geeft $x = 1\frac{3}{4}\pi$ en top $(1\frac{3}{4}\pi, -1)$.

$x = 1\frac{3}{4}\pi$ geeft $y = -\frac{2}{\pi} \cdot 1\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{5}{2} = -1$, dus $(1\frac{3}{4}\pi, -1)$ op k .

Dus de toppen van de grafiek van g liggen op k .

65 $\cos(\alpha)$ is maximaal 1, dus $1 + 0,25 \cdot \cos(\alpha)$ is maximaal 1,25, dus $\frac{37,5}{1 + 0,25 \cdot \cos(\alpha)}$ is minimaal $\frac{37,5}{1,25} = 30$.

$\cos(\alpha)$ is minimaal -1, dus $1 + 0,25 \cdot \cos(\alpha)$ is minimaal 0,75, dus $\frac{37,5}{1 + 0,25 \cdot \cos(\alpha)}$ is maximaal $\frac{37,5}{0,75} = 50$.

Dus de minimale afstand van Pluto tot de zon is 30 AE en de maximale afstand 50 AE.

Bladzijde 197

66 a $f(x) = \frac{7}{2}$ geeft $2 + 3\sin(\pi(x + \frac{1}{4})) = \frac{7}{2}$

$$3\sin(\pi(x + \frac{1}{4})) = \frac{3}{2}$$

$$\sin(\pi(x + \frac{1}{4})) = \frac{1}{2}$$

$$\pi(x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \pi(x + \frac{1}{4}) = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x + \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + k \cdot 2 \vee x + \frac{1}{4} = \frac{5}{6} + k \cdot 2$$

$$x = -\frac{1}{12} + k \cdot 2 \vee x = \frac{7}{12} + k \cdot 2$$

x in $[0, 2]$ geeft $x = 1\frac{11}{12} \vee x = \frac{7}{12}$

De x -coördinaten van deze punten zijn $\frac{7}{12}$ en $1\frac{11}{12}$.

b $g(x) = p + q \cdot \cos(r(x-s))$

De periode is 4, dus $r = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

De amplitude van de grafiek van f is 3, dus de amplitude van de grafiek van g is 6, dus $q = 6$.

Het hoogste punt van de grafiek van f heeft y -coördinaat 5, dus het hoogste punt van de grafiek van g heeft y -coördinaat 5. Uit evenwichtsstand = hoogste stand – amplitude volgt voor de grafiek van g dat evenwichtsstand = $5 - 6 = -1$, dus $p = -1$.

De x -coördinaat van het hoogste punt van de grafiek van f is $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, dus de x -coördinaat van het hoogste punt van de grafiek van g is $\frac{1}{4}$, dus $s = \frac{1}{4}$.

67 a $f(x) = \frac{3}{2}$ geeft $3 \sin(\pi x) = \frac{3}{2}$

$$\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$$

$$\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6} + k \cdot 2 \vee x = \frac{5}{6} + k \cdot 2$$

$$x \text{ in } [-\frac{8}{7}, \frac{8}{7}] \text{ geeft } x = \frac{1}{6} \vee x = \frac{5}{6}$$

$$\text{Dus } x_P = \frac{1}{6} \text{ en } x_Q = \frac{5}{6}.$$

b $f(x) = 0$ geeft $3 \sin(\pi x) = 0$

$$\sin(\pi x) = 0$$

$$\pi x = k \cdot \pi$$

$$x = k \cdot 1$$

$$x \text{ in } [-\frac{8}{7}, \frac{8}{7}] \text{ geeft } x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1, \text{ dus } x_A = 1 \text{ en } A(1, 0).$$

$$\text{Verder is } T(\frac{1}{2}(0+1), 3) = T(\frac{1}{2}, 3).$$

$$g(1) = 0 \text{ geeft } a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = 0 \text{ oftewel } a + b = 0.$$

$$g(\frac{1}{2}) = 3 \text{ geeft } a \cdot (\frac{1}{2})^3 + b \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ oftewel } \frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b = 3.$$

c $a + b = 0$ oftewel $a = -b$

$$\text{Substitutie van } a = -b \text{ in } \frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b = 3 \text{ geeft } -\frac{1}{8}b + \frac{1}{2}b = 3$$

$$\frac{3}{8}b = 3$$

$$b = 8$$

$$b = 8 \text{ geeft } a = -8$$

Bladzijde 198

68 a $f(x) = 0$ geeft $1 + 2 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 0$

$$2 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = -1$$

$$\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$2x + \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \frac{1}{3}\pi = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$$

$$x_P = \frac{1}{6}\pi \text{ en } x_S = 1\frac{1}{2}\pi \text{ geeft } PS = 1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{6}\pi = 1\frac{1}{3}\pi$$

$$x_Q = \frac{1}{2}\pi \text{ en } x_R = 1\frac{1}{6}\pi \text{ geeft } QR = 1\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{Dus } a = \frac{1\frac{1}{3}\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 2.$$

b $g(x) = 1 + 2 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) - 2 + 5 \cos(2(x - \frac{1}{4}\pi)) = -1 + 2 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) + 5 \cos(2(x - \frac{1}{4}\pi))$

$$\text{Voer in } y_1 = -1 + 2 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) + 5 \cos(2(x - \frac{1}{4}\pi)).$$

$$\text{De optie maximum geeft } x = 0,6369... \text{ en } y = 2,4175..., \text{ dus } s \approx 0,637.$$

$$\text{De optie minimum geeft } x = 2,2077... \text{ en } y = -4,4175...$$

$$\text{evenwichtsstand} = \frac{2,4175... + (-4,4175...)}{2} = -1, \text{ dus } p = -1.$$

$$\text{amplitude} = 2,4175... - (-1) = 3,4175..., \text{ dus } q \approx 3,418.$$

$$\frac{1}{2} \cdot \text{periode} = 2,2077... - 0,6369... = 1,5707..., \text{ dus periode} = 3,1415... \text{ en } r = \frac{2\pi}{3,1415...} = 2.$$

$$\begin{aligned}
 \text{69 a } f(x) = -\frac{1}{2} \text{ geeft } -1 + \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) &= -\frac{1}{2} \\
 \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) &= \frac{1}{2} \\
 2x - \frac{1}{6}\pi &= \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \\
 2x &= \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi + k \cdot 2\pi \\
 x &= \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi
 \end{aligned}$$

Deze vier waarden van x zijn $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$.

$$\begin{aligned}
 \text{b } f(x) = 0 \text{ geeft } -1 + \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) &= 0 \\
 \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) &= 1 \\
 2x - \frac{1}{6}\pi &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\
 2x &= \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \\
 x &= \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi
 \end{aligned}$$

Dus $x_A = \frac{1}{3}\pi$.

In $\triangle OAB$ is $\angle OAB = 75^\circ$ (overstaande hoeken), dus $\cos(75^\circ) = \frac{\frac{1}{3}\pi}{AB}$

$$AB = \frac{\frac{1}{3}\pi}{\cos(75^\circ)} \approx 4,05$$

- c $g(x) = d + a \cdot \cos(bx)$
 De periode van de grafiek van g is drie keer zo klein als de periode van de grafiek van f , dus $b = 3 \cdot 2 = 6$.
 De amplitude van de grafiek van f is 1, dus de amplitude van de grafiek van g is $\frac{1}{4}$.
 $f(0) = -1\frac{1}{2}$, dus een laagste punt van de grafiek van g is $(0, -1\frac{1}{2})$ en dus $a = -\frac{1}{4}$.
 Uit evenwichtsstand = laagste stand + amplitude volgt voor de grafiek van g dat
 evenwichtsstand $= \frac{1}{4} + -1\frac{1}{2} = -1\frac{1}{4}$, dus $d = -1\frac{1}{4}$.

12.6 Meetkunde zonder coördinaten

Bladzijde 199

$$\begin{aligned}
 \text{70 a } AM &= r \\
 AN &= \frac{1}{2}AB = 38 \\
 MN &= r - NP = r - 15 \\
 \text{De stelling van Pythagoras in driehoek } AMN \text{ geeft } AM^2 &= AN^2 + MN^2 \\
 r^2 &= 38^2 + (r - 15)^2 \\
 r^2 &= 1444 + r^2 - 30r + 225 \\
 30r &= 1669 \\
 r &= 55,63...
 \end{aligned}$$

De gevraagde straal is 55,6.

$$\begin{aligned}
 \text{b } \angle ADC &= 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ \\
 \angle ACD &= 180^\circ - 25^\circ - 145^\circ = 10^\circ
 \end{aligned}$$

De sinusregel in driehoek ACD geeft $\frac{6}{\sin(10^\circ)} = \frac{CD}{\sin(25^\circ)}$

$$CD = \frac{6 \sin(25^\circ)}{\sin(10^\circ)} = 14,60...$$

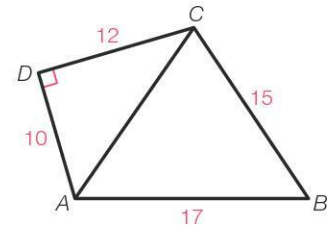
In driehoek BCD is $\sin(35^\circ) = \frac{BC}{14,60...}$, dus $BC = 14,60... \cdot \sin(35^\circ) \approx 8,38$.

$$\begin{aligned}
 \text{c } \text{De cosinusregel geeft } BC^2 &= 1^2 + 6^2 - 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot \cos(25^\circ) = 26,12... \\
 BC &\approx 5,111
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d } \text{De cosinusregel in driehoek } OAB \text{ geeft } AB^2 &= 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(75^\circ - 35^\circ) = 15,22... \\
 AB &\approx 3,90
 \end{aligned}$$

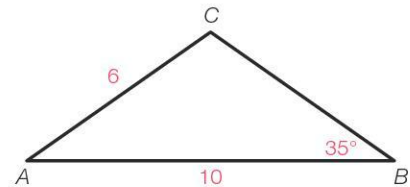
$$\begin{aligned}
 \text{e } \text{De cosinusregel in driehoek } OBC \text{ geeft } 8^2 &= 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos(\angle BOC) \\
 64 &= 36 + 16 - 48 \cdot \cos(\angle BOC) \\
 48 \cdot \cos(\angle BOC) &= -12 \\
 \cos(\angle BOC) &= -\frac{1}{4} \\
 \angle BOC &\approx 104,5^\circ
 \end{aligned}$$

- f** Teken diagonaal AC , zie de figuur hiernaast.
 De stelling van Pythagoras in driehoek ACD geeft
 $AC^2 = 10^2 + 12^2 = 244$.
 De cosinusregel in driehoek ABC geeft
 $244 = 15^2 + 17^2 - 2 \cdot 15 \cdot 17 \cdot \cos(\angle B)$
 $244 = 225 + 289 - 510 \cdot \cos(\angle B)$
 $510 \cdot \cos(\angle B) = 270$
 $\cos(\angle B) = 0,529...$
 $\angle B \approx 58,0^\circ$



- g** Zie de figuur hiernaast.

De sinusregel geeft $\frac{6}{\sin(35^\circ)} = \frac{10}{\sin(\angle C)}$
 $\sin(\angle C) = \frac{10 \sin(35^\circ)}{6} = 0,955...$

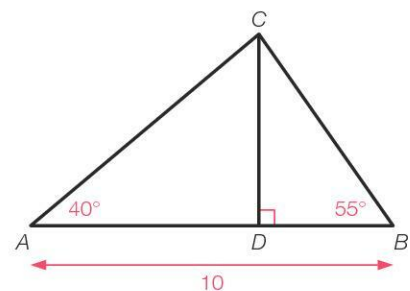


De GR geeft $72,93...^\circ$.
 Dus $\angle C = 180^\circ - 72,93...^\circ = 107,06...^\circ$.
 $\angle A = 180^\circ - 35 - 107,06...^\circ \approx 37,9^\circ$

- h** Zie de figuur hiernaast.

$\angle C = 180^\circ - 40^\circ - 55^\circ = 85^\circ$

De sinusregel in driehoek ABC geeft $\frac{10}{\sin(85^\circ)} = \frac{AC}{\sin(55^\circ)}$
 $AC = \frac{10 \sin(55^\circ)}{\sin(85^\circ)} = 8,222...$



In driehoek ACD is $\sin(40^\circ) = \frac{CD}{8,222...}$, dus

$CD = 8,222... \cdot \sin(40^\circ) = 5,285...$

De oppervlakte van driehoek ABC is $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5,285... \approx 26,43$.

i $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ geeft $\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BD}$
 $\frac{10}{6} = \frac{8}{BD}$

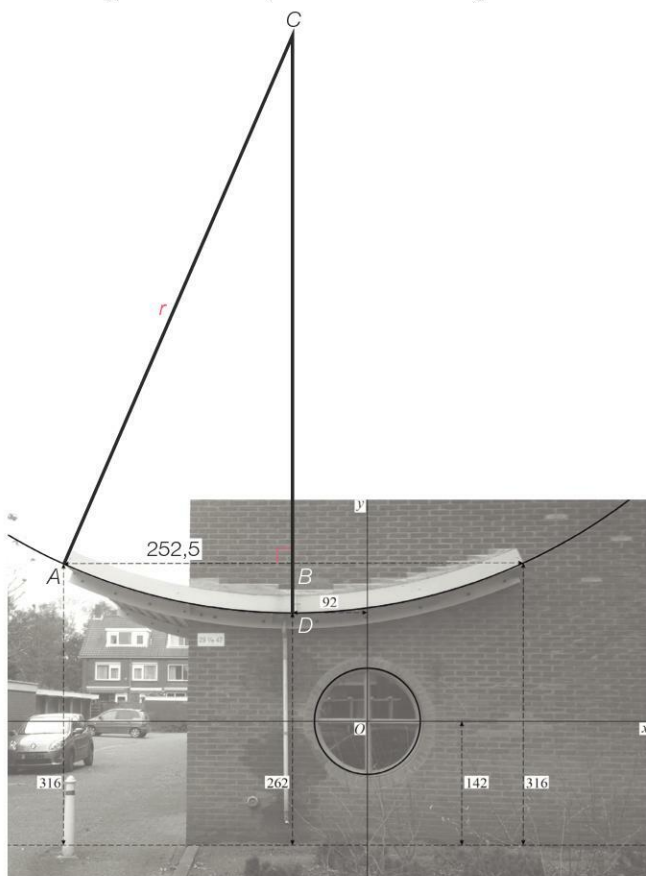
$BD = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$

De cosinusregel in driehoek BDE geeft $DE^2 = 4,8^2 + 6^2 - 2 \cdot 4,8 \cdot 6 \cdot \cos(40^\circ) = 14,91...$
 $DE \approx 3,86$

Bladzijde 201

- 71** Om 0:00 uur staan beide wijzers precies op 12.
 Ten opzichte van deze stand heeft de grote wijzer $\frac{25}{60} \cdot 360^\circ = 150^\circ$ gedraaid
 en de kleine wijzer $\frac{2}{12} \cdot 360^\circ + \frac{25}{60} \cdot \frac{1}{12} \cdot 360^\circ = 72,5^\circ$.
 Dus de hoek tussen de wijzers is $150^\circ - 72,5^\circ = 77,5^\circ$.
 De cosinusregel geeft $AB^2 = 8,5^2 + 12,5^2 - 2 \cdot 8,5 \cdot 12,5 \cdot \cos(77,5^\circ) = 182,50...$
 $AB = 13,50...$
 Dus de gevraagde afstand tussen A en B is 135 mm.

- 72 a** Zie de figuur hieronder, waarin $AC = r$ is gesteld.



$$AB = 505 : 2 = 252,5$$

$$CD = r \text{ en } BD = 316 - 262 = 54 \text{ geeft } BC = r - 54$$

De stelling van Pythagoras in driehoek ABC geeft $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$r^2 = 252,5^2 + (r - 54)^2$$

$$r^2 = 63\,756,25 + r^2 - 108r + 2916$$

$$108r = 66\,672,25$$

$$r = 617,3\dots$$

Dus de straal van de cirkel is ongeveer 617 cm.

- b** Van het middelpunt M van de cirkel is $y_M = 262 - 142 + 617,3\dots = 737,3\dots$

$$d(O, M) = \sqrt{92^2 + 737,3\dots^2} = 743,0\dots$$

De straal van de cirkel is 617,3... cm en de straal van het raam is 60 cm.

Dus de afstand tussen het raam en het afdakje is $743,0\dots - 617,3\dots - 60 \approx 66$ cm.

Bladzijde 202

73 $\angle ABT = 180^\circ - 7,4^\circ = 172,6^\circ$

$$\angle ATB = 180^\circ - 5,3^\circ - 172,6^\circ = 2,1^\circ$$

De sinusregel in driehoek ABT geeft $\frac{10}{\sin(2,1^\circ)} = \frac{BT}{\sin(5,3^\circ)}$

$$BT = \frac{10 \sin(5,3^\circ)}{\sin(2,1^\circ)} = 25,20\dots$$

In de rechthoekige driehoek met schuine zijde BT is $\sin(7,4^\circ) = \frac{h}{25,20\dots}$

$$h = 25,20\dots \cdot \sin(7,4^\circ) = 3,2466\dots$$

De gevraagde hoogte is 3250 meter.

74 a De sinusregel in driehoek ABC geeft $\frac{6}{\sin(\angle ACB)} = \frac{5}{\sin(55^\circ)}$

$$\sin(\angle ACB) = \frac{6 \sin(55^\circ)}{5}$$

De GR geeft $79,4146\dots^\circ$, dus $\angle ACB = 180^\circ - 79,4146\dots^\circ = 100,5853\dots^\circ$.

$$\angle BAC = 180^\circ - 55^\circ - 100,5853\dots^\circ = 24,4146\dots^\circ \approx 24,415^\circ$$

b Zie de figuur hiernaast.

$$\text{In driehoek } ACE \text{ is } \sin(24,4146\dots^\circ) = \frac{h}{5}$$

$$h = 5 \sin(24,4146\dots^\circ) = 2,066\dots$$

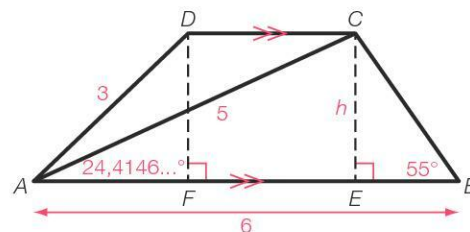
$$\text{In driehoek } ADF \text{ is } AF = \sqrt{3^2 - 2,066\dots^2} = 2,174\dots$$

$$\text{In driehoek } BCE \text{ is } \tan(55^\circ) = \frac{2,066\dots}{BE}$$

$$BE = \frac{2,066\dots}{\tan(55^\circ)} = 1,447\dots$$

$$CD = EF = AB - AF - BE = 6 - 2,174\dots - 1,447\dots = 2,378\dots$$

$$\text{De oppervlakte van het trapezium is } 2,066\dots \cdot \frac{6 + 2,378\dots}{2} \approx 8,7.$$



Bladzijde 203

75 De cosinusregel geeft

$$(\text{werkelijk geworpen afstand})^2 = 8^2 + (84,58 + 8)^2 - 2 \cdot 8 \cdot (84,58 + 8) \cdot \cos(28,65^\circ)$$

$$(\text{werkelijk geworpen afstand})^2 = 7335,137\dots$$

$$\text{werkelijk geworpen afstand} = 85,645\dots$$

$$\text{Het gevraagde verschil is } 85,645\dots - 84,58 \approx 1,07 \text{ meter, oftewel } 107 \text{ cm.}$$

76 De cosinusregel in driehoek ABC geeft $8^2 = 11^2 + 5^2 - 2 \cdot 11 \cdot 5 \cdot \cos(\angle BAC)$

$$64 = 121 + 25 - 110 \cos(\angle BAC)$$

$$110 \cos(\angle BAC) = 82$$

$$\cos(\angle BAC) = \frac{82}{110}$$

$$\text{In driehoek } ACD \text{ is } \cos(\angle BAC) = \frac{AD}{5}, \text{ dus } AD = 5 \cdot \frac{82}{110} = \frac{41}{11}.$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \text{ geeft } \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{\frac{41}{11}}{11} = \frac{DE}{8}$$

$$DE = \frac{8 \cdot \frac{41}{11}}{11} \approx 2,71$$

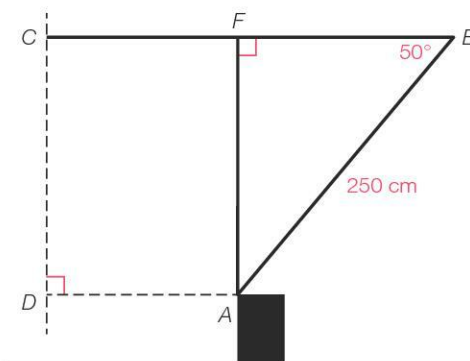
Bladzijde 204

77 a Zie de figuur hiernaast.

$$\text{In driehoek } ABF \text{ is } \cos(50^\circ) = \frac{BF}{250}$$

$$BF = 250 \cos(50^\circ) \approx 161$$

$$AD = CF = BC - BF \approx 300 - 161 = 139 \text{ cm}$$



b Zie de figuur hiernaast.

De stelling van Pythagoras in driehoek ACD geeft

$$AC^2 = 139^2 + 292^2 = 104\,585.$$

De cosinusregel in driehoek ABC geeft

$$104\,585 = 250^2 + 300^2 - 2 \cdot 250 \cdot 300 \cdot \cos(\angle ABC)$$

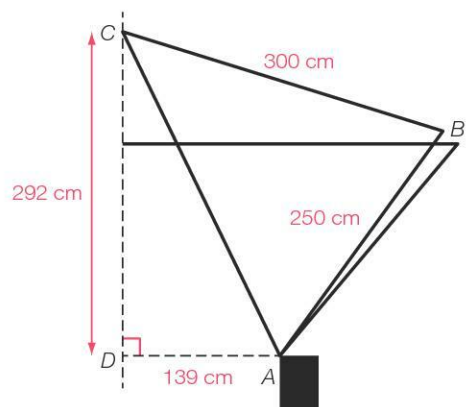
$$104\,585 = 62\,500 + 90\,000 - 150\,000 \cos(\angle ABC)$$

$$150\,000 \cos(\angle ABC) = 47\,915$$

$$\cos(\angle ABC) = 0,319\dots$$

$$\angle ABC \approx 71^\circ$$

$$\text{De gevraagde toename is } 71^\circ - 50^\circ = 21^\circ.$$



78 $\angle ATB = 180^\circ - 45,4^\circ - 44,2^\circ = 90,4^\circ$

De sinusregel in driehoek ABT geeft $\frac{AT}{\sin(44,2^\circ)} = \frac{10,97}{\sin(90,4^\circ)}$

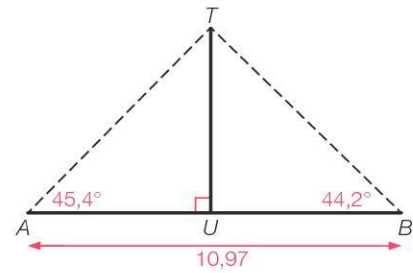
$$AT = \frac{10,97 \sin(44,2^\circ)}{\sin(90,4^\circ)} = 7,648...$$

In driehoek ATU is $\sin(45,4^\circ) = \frac{TU}{7,648...}$

$$TU = 7,648... \cdot \sin(45,4^\circ) = 5,445... \text{ meter}$$

$$d(P, AB) = 11,89 - 6,40 = 5,49 \text{ meter.}$$

$d(T, AB) = TU < d(P, AB)$, dus de bal is niet in rechthoek $PQDR$ op de grond gekomen.



12.7 Meetkunde met coördinaten

79 a $rc_l = \frac{0-5}{3-0} = -\frac{5}{3}$

$k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, dus $rc_k = \frac{3}{5}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \frac{3}{5}x + b \\ \text{door } A(-2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{5} \cdot -2 + b = 0 \\ -1\frac{1}{5} + b = 0 \end{array}$$

$$b = 1\frac{1}{5}$$

Dus $k: y = \frac{3}{5}x + 1\frac{1}{5}$ en het snijpunt van k met de y -as is $(0, 1\frac{1}{5})$.

b $\left. \begin{array}{l} (x - 2\frac{1}{2})^2 + (y - 3\frac{1}{2})^2 = r^2 \\ \text{door } A(1, 6) \end{array} \right\} r^2 = (1 - 2\frac{1}{2})^2 + (6 - 3\frac{1}{2})^2 = 8\frac{1}{2}$

$$\text{Dus } (x - 2\frac{1}{2})^2 + (y - 3\frac{1}{2})^2 = 8\frac{1}{2}.$$

c $d(M, N) = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = 5$

$$d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = 5 - 1 - 2 = 2$$

d Substitutie van $y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3}$ in $x^2 + y^2 = 13$ geeft $x^2 + (-\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3})^2 = 13$

$$x^2 + \frac{4}{9}x^2 - 5\frac{7}{9}x + 18\frac{7}{9} = 13$$

$$1\frac{4}{9}x^2 - 5\frac{7}{9}x + 5\frac{7}{9} = 0$$

$$13x^2 - 52x + 52 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

Dus lijn k raakt cirkel c .

e $rc_l = \frac{0-5}{3\frac{1}{3}-0} = 1\frac{1}{2}$

$$rc_k \cdot rc_l = -\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = -1$$

Dus l snijdt k loodrecht.

f Lijn l gaat door de oorsprong en snijdt k loodrecht in het punt A .

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l \cdot rc_k = -1, \text{ dus } rc_l = 2\frac{1}{2}.$$

$$l: y = 2\frac{1}{2}x \text{ snijden met } k \text{ geeft } 2\frac{1}{2}x = -\frac{2}{5}x + 4$$

$$2\frac{9}{10}x = 4$$

$$29x = 40$$

$$x = 1\frac{11}{29}$$

$$x = 1\frac{11}{29} \text{ geeft } y = 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{11}{29} = 3\frac{13}{29}, \text{ dus } A(1\frac{11}{29}, 3\frac{13}{29}).$$

$$d(k, O) = d(A, O) = \sqrt{(1\frac{11}{29})^2 + (3\frac{13}{29})^2} = \sqrt{(\frac{40}{29})^2 + (\frac{100}{29})^2} = \sqrt{\frac{40^2}{29^2} + \frac{100^2}{29^2}} = \sqrt{\frac{100}{29^2} (16 + 100)} = \frac{10}{29} \sqrt{116}$$

g Van de lijn l door het middelpunt $M(3, 1)$ van c en A is $rc_l = \frac{4-1}{5-3} = 1\frac{1}{2}$.

$k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, dus $rc_k = -\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} k: y = -\frac{2}{3}x + b \quad & \left. \begin{array}{l} \text{door } A(5, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot 5 + b = 4 \\ -3\frac{1}{3} + b = 4 \\ b = 7\frac{1}{3} \end{array} \end{aligned}$$

Dus $k: y = -\frac{2}{3}x + 7\frac{1}{3}$.

$$-\frac{2}{3}x + 7\frac{1}{3} = 0$$

$$-\frac{2}{3}x = -7\frac{1}{3}$$

$$x = 11$$

Dus $B(11, 0)$.

h $x^2 + y^2 - 20x - 12y + 120 = 0$

$$x^2 - 20x + y^2 - 12y + 120 = 0$$

$$(x-10)^2 - 100 + (y-6)^2 - 36 + 120 = 0$$

$$(x-10)^2 + (y-6)^2 = 16$$

De cirkel heeft middelpunt $(10, 6)$ en straal 4.

Dus de afstand van c tot de x -as is $6 - 4 = 2$.

i $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 = 0$

$$x^2 - 6x + y^2 - 12y + 20 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y-6)^2 - 36 + 20 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$$

Dus $M(3, 6)$ en de straal is 5.

$$\cos(\frac{1}{2}\angle AMB) = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{2}\angle AMB = 53,13\dots^\circ$$

$$\angle AMB \approx 106,3^\circ$$

j De lijn l door M en A staat loodrecht op k .

$l \perp k$, dus $rc_l \cdot rc_k = -1$, dus $rc_l = -2$.

$$\begin{aligned} l: y = -2x + b \quad & \left. \begin{array}{l} \text{door } A(6, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 6 + b = 3 \\ -12 + b = 3 \\ b = 15 \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l: y = -2x + 15 \quad & \left. \begin{array}{l} y_M = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2x_M + 15 = 7 \\ -2x_M = -8 \\ x_M = 4 \end{array} \end{aligned}$$

$$M(4, 7) \text{ en } r = d(A, M) = \sqrt{(4-6)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{20}$$

Dus $c: (x-4)^2 + (y-7)^2 = 20$.

$$x = 0 \text{ geeft } (0-4)^2 + (y-7)^2 = 20$$

$$16 + (y-7)^2 = 20$$

$$(y-7)^2 = 4$$

$$y-7 = 2 \vee y-7 = -2$$

$$y = 9 \vee y = 5$$

Dus $B(0, 5)$ en $C(0, 9)$.

$$\begin{aligned} k: y = 2\frac{1}{2}x + b \quad & \left. \begin{array}{l} \text{door } A(3, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{2} \cdot 3 + b = 3 \\ 7\frac{1}{2} + b = 3 \\ b = -4\frac{1}{2} \end{array} \end{aligned}$$

Dus $k: y = 2\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}$.

Substitutie van $y = 2\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}$ in $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 29$ geeft

$$(x-10)^2 + (2\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2} - 6)^2 = 29$$

$$(x-10)^2 + (2\frac{1}{2}x - 10\frac{1}{2})^2 = 29$$

$$x^2 - 20x + 100 + 6\frac{1}{4}x^2 - 52\frac{1}{2}x + 110\frac{1}{4} = 29$$

$$7\frac{1}{4}x^2 - 72\frac{1}{2}x + 181\frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$$

Dus k raakt de cirkel.

80 $f(x) = \frac{1}{2x+3} = (2x+3)^{-1}$ geeft $f'(x) = -(2x+3)^{-2} \cdot 2 = \frac{-2}{(2x+3)^2}$

Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(0) = \frac{-2}{(0+3)^2} = -\frac{2}{9}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{2}{9}x + b \\ f(0) = \frac{1}{3}, \text{ dus } A(0, \frac{1}{3}) \end{array} \right\} l: y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$$

De lijn k gaat door de oorsprong en snijdt l loodrecht in het punt B .

$k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, dus $rc_k = 4\frac{1}{2}$.

$k: y = 4\frac{1}{2}x$ snijden met l geeft $4\frac{1}{2}x = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$

$$4\frac{13}{18}x = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{6}{85}$$

$x = \frac{6}{85}$ geeft $y = 4\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{85} = \frac{27}{85}$, dus $B(\frac{6}{85}, \frac{27}{85})$.

$d(l, O) = d(B, O) = \sqrt{(\frac{6}{85})^2 + (\frac{27}{85})^2} = \sqrt{\frac{9}{85}}$

81 **a** $c: (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = r^2$ } $r^2 = (0 - \frac{1}{2})^2 + (4 - \frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{2}$
door $A(0, 4)$

Dus $c: (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{2}$.

b $x = \frac{1}{3}$ geeft $y = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{5} = \frac{4}{3}$, dus S ligt op k .

$P(\frac{1}{2}(0 + -3), \frac{1}{2}(4 + 0)) = P(-1\frac{1}{2}, 2)$

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 2}{4 - -1\frac{1}{2}} = -\frac{4}{11}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{4}{11}x + b \\ \text{door } C(4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{4}{11} \cdot 4 + b = 0 \\ -\frac{16}{11} + b = 0 \\ b = \frac{16}{11} \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{4}{11}x + \frac{16}{11}$.

$x = \frac{1}{3}$ geeft $y = -\frac{4}{11} \cdot \frac{1}{3} + \frac{16}{11} = \frac{4}{3}$, dus S ligt op l .

Dus $S(\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3})$ is het snijpunt van k en l .

c De lijn m gaat door M en S .

Stel $m: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = -5$.

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -5x + b \\ \text{door } M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -5 \cdot \frac{1}{2} + b = \frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{2} + b = \frac{1}{2} \\ b = 3 \end{array}$$

Dus $m: y = -5x + 3$.

$rc_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 0}{0 - -3} = 1\frac{1}{3}$

$n \perp AB$, dus $rc_n \cdot rc_{AB} = -1$, dus $rc_n = -\frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} n: y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } C(4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 4 + b = 0 \\ -3 + b = 0 \\ b = 3 \end{array}$$

Dus $n: y = -\frac{3}{4}x + 3$ en $T(0, 3)$.

$T(0, 3)$ ligt op de lijn $m: y = -5x + 3$.

Dus M , S en T liggen op één lijn.

- 82 a** Lijn k gaat door P en staat loodrecht op l .

$$k \perp l, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1, \text{ dus } rc_k = -1\frac{1}{3}.$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -1\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } P(6, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{3} \cdot 6 + b = 1 \\ -8 + b = 1 \\ b = 9 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -1\frac{1}{3}x + 9.$$

k en l snijden geeft het punt Q .

$$-1\frac{1}{3}x + 9 = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

$$-2\frac{1}{12}x = -6\frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4} \end{array} \right\} y = \frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{11}{4} = 5$$

Dus $Q(3, 5)$.

$$d(P, l) = d(P, Q) = \sqrt{(3-6)^2 + (5-1)^2} = 5$$

- b** $x^2 + y^2 - 28x - 32y = -308$

$$x^2 - 28x + y^2 - 32y + 308 = 0$$

$$(x-14)^2 - 196 + (y-16)^2 - 256 + 308 = 0$$

$$(x-14)^2 + (y-16)^2 = 144$$

Dus $M(14, 16)$.

$$d(M, x\text{-as}) = y_M = 16$$

$$d(M, P) = \sqrt{(6-14)^2 + (1-16)^2} = 17$$

Het gevraagde verschil is 1.

Bladzijde 210

- 83 a** Substitutie van $y = -\frac{4}{3}x + 5$ in $x^2 + y^2 = 9$ geeft $x^2 + (-\frac{4}{3}x + 5)^2 = 9$

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 - 13\frac{1}{3}x + 25 = 9$$

$$2\frac{7}{9}x^2 - 13\frac{1}{3}x + 16 = 0$$

$$25x^2 - 120x + 144 = 0$$

$$D = (-120)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 144 = 0$$

Dus l raakt aan c .

- b** $x = 0$ geeft bij c dat $y^2 = 9$

$$y = 3 \vee y = -3$$

Dus $A(0, -3)$.

$y = 0$ geeft bij l dat $-\frac{4}{3}x + 5 = 0$

$$-\frac{4}{3}x = -5$$

$$x = 3\frac{3}{4}$$

Dus $B(3\frac{3}{4}, 0)$.

$$rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - -3}{3\frac{3}{4} - 0} = \frac{4}{5}$$

$$rc_k \cdot rc_l = \frac{4}{5} \cdot -\frac{4}{3} = -\frac{16}{15} \neq -1$$

Dus k en l snijden elkaar niet loodrecht.

- 84 a** Van de lijn m door M en D is $rc_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8-5}{4-0} = \frac{3}{4}$.

$l \perp m$, dus $rc_l \cdot rc_m = -1$, dus $rc_l = -1\frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -1\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } D(4, 8) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{3} \cdot 4 + b = 8 \\ -5\frac{1}{3} + b = 8 \\ b = 13\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = -1\frac{1}{3}x + 13\frac{1}{3}.$$

$$y = 0 \text{ geeft } -1\frac{1}{3}x + 13\frac{1}{3} = 0$$

$$-1\frac{1}{3}x = -13\frac{1}{3}$$

$$x = 10$$

Dus $B(10, 0)$.

b $d(B, D) = \sqrt{(10-4)^2 + (0-8)^2} = 10$

$d(A, C) = d(B, D) = 10$

Zie de figuur hiernaast.

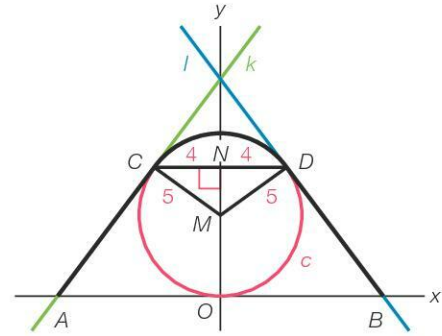
In driehoek CMN is $\sin(\angle CMN) = \frac{4}{5}$

$\angle CMN = 53,13\dots^\circ$

$\angle CMD = 2 \cdot 53,13\dots^\circ = 106,26\dots^\circ$

boog $CD = \frac{106,26\dots}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 \approx 9,3$

De gevraagde lengte van het touwtje is $10 + 10 + 9,3 = 29,3$.



Bladzijde 211

85 a $R(-4, 5)$ en $T(p, 0)$ geeft

$$d(R, T) = \sqrt{(p-(-4))^2 + (0-5)^2} = \sqrt{(p+4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{p^2 + 8p + 16 + 25} = \sqrt{p^2 + 8p + 41}$$

b $r_c = 7$ geeft $r_e = d(R, T) - r_c = \sqrt{p^2 + 8p + 41} - 7$

$r_d = 4$ geeft $r_e = d(S, T) - r_d = \sqrt{p^2 - 28p + 260} - 4$

Dus er geldt $\sqrt{p^2 + 8p + 41} - 7 = \sqrt{p^2 - 28p + 260} - 4$.

Voer in $y_1 = \sqrt{x^2 + 8x + 41} - 7$ en $y_2 = \sqrt{x^2 - 28x + 260} - 4$.

De optie snijpunt geeft $x = 8$ en $y = 6$.

Dus de straal van e is 6.

86 a $\left. \begin{array}{l} l: y = -x + b \\ \text{door } A(4, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 + b = 4 \\ b = 8 \end{array}$

Dus $l: y = -x + 8$.

Substitutie van $y = -x + 8$ in $x^2 + y^2 - 10x + 16y = 56$ geeft $x^2 + (-x + 8)^2 - 10x + 16(-x + 8) = 56$

$$x^2 + x^2 - 16x + 64 - 10x - 16x + 128 = 56$$

$$2x^2 - 42x + 136 = 0$$

$$x^2 - 21x + 68 = 0$$

$$(x-4)(x-17) = 0$$

$$x = 4 \vee x = 17$$

$x = 17$ geeft $y = -17 + 8 = -9$, dus $B(17, -9)$.

b $x^2 + y^2 - 10x + 16y = 56$

$$x^2 - 10x + y^2 + 16y = 56$$

$$(x-5)^2 - 25 + (y+8)^2 - 64 = 56$$

$$(x-5)^2 + (y+8)^2 = 145$$

Dus $M(5, -8)$ en $r = \sqrt{145}$.

$$\cos\left(\frac{1}{2}\angle CMD\right) = \frac{8}{\sqrt{145}}$$

$$\frac{1}{2}\angle CMD = 48,36\dots^\circ$$

$$\angle CMD \approx 96,7^\circ$$

Bladzijde 212

87 a $f(x) = -3 + 3\sqrt{x} = -3 + 3x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x_A) = f'(4) = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$$

$x = 4$ geeft $y = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$, dus A ligt op l .

Dus l raakt de grafiek in A .

- b** De lijn k door A en M staat loodrecht op l .

$$k \perp l, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1, \text{ dus } rc_k = -1\frac{1}{3}.$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -1\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(4, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{3} \cdot 4 + b = 3 \\ -5\frac{1}{3} + b = 3 \\ b = 8\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -1\frac{1}{3}x + 8\frac{1}{3}.$$

$$M \text{ op } k \text{ en } x_M = 5 \text{ geeft } y_M = -1\frac{1}{3} \cdot 5 + 8\frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}, \text{ dus } M(5, 1\frac{2}{3}).$$

$$\text{Van } c \text{ is de straal } r = d(A, M) = \sqrt{(5-4)^2 + (1\frac{2}{3}-3)^2} = \sqrt{2\frac{7}{9}} = 1\frac{2}{3}.$$

Omdat ook $y_M = 1\frac{2}{3}$ raakt de cirkel de x -as.

- 88** De lijn m door M en A staat loodrecht op l .

$$m \perp l, \text{ dus } rc_m \cdot rc_l = -1, \text{ dus } rc_m = -2.$$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -2x + b \\ \text{door } M(-1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot -1 + b = 3 \\ 2 + b = 3 \\ b = 1 \end{array}$$

$$\text{Dus } m: y = -2x + 1.$$

m snijden met l geeft het punt A .

$$-2x + 1 = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$$

$$-2\frac{1}{2}x = -2\frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

$$x = 1 \text{ geeft } y = -2 \cdot 1 + 1 = -1, \text{ dus } A(1, -1).$$

$$d(A, M) = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$d(B, M) = d(A, M) = \sqrt{8}$$

$$\text{De lengte van de kortste cirkelboog } AB \text{ is } \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{8} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{8}.$$

$$\text{De gevraagde omtrek is } \sqrt{8} + \sqrt{8} + \frac{1}{2}\pi\sqrt{8} \approx 15,97.$$

- 89 a** $f(x) = 1 + 4\sqrt{x} = 1 + 4x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

$$\text{Stel } l: y = ax + b \text{ met } a = f'(4) = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = x + b \\ \text{door } A(4, 9) \end{array} \right\} l: y = x + 5$$

$$\text{Substitutie van } y = x + 5 \text{ in } (x+2)^2 + (y+1)^2 = 8 \text{ geeft } (x+2)^2 + (x+6)^2 = 8$$

$$x^2 + 4x + 4 + x^2 + 12x + 36 = 8$$

$$2x^2 + 16x + 32 = 0$$

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$$

Dus l en c raken elkaar.

- b** $x = 0$ geeft $(0+2)^2 + (y+1)^2 = 8$

$$4 + (y+1)^2 = 8$$

$$(y+1)^2 = 4$$

$$y+1 = 2 \vee y+1 = -2$$

$$y = 1 \vee y = -3$$

Dus $S(0, -3)$.

$$S(0, -3) \text{ als randpunt van de grafiek van } g(x) = p\sqrt{x} + q \text{ geeft } q = -3.$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = p\sqrt{x} - 3 \\ g(4) = 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p\sqrt{4} - 3 = 9 \\ 2p = 12 \\ p = 6 \end{array}$$

Gemengde opgaven

9 Exponentiële en logaritmische formules

Bladzijde 213

- 1 a** $g_{\text{jaar}} = 1,096$ geeft $g_{10\text{jaar}} = 1,096^{10} \approx 2,501$
De toename per 10 jaar is 150,1%.
- b** $g_{\text{jaar}} = 1,096$ geeft $g_{\text{maand}} = 1,096^{\frac{1}{12}} \approx 1,008$
De toename per maand is 0,8%.
- c** Los op $1,096^t = 2$, met t in jaren.
Voer in $y_1 = 1,096^x$ en $y_2 = 2$.
De optie snijpunt geeft $x = 7,561...$
Dus na $7,561... \times 12 \approx 91$ maanden is de hoeveelheid verdubbeld.
- d** Los op $1,096^t = 10$, met t in jaren.
Voer in $y_3 = 10$ en zet y_2 uit.
De optie snijpunt geeft $x = 25,11...$
Dus na ruim 25 jaar is de hoeveelheid vertienvoudigd.
- 2 a** $g_{\text{dag}} = 0,83$ geeft $g_{\text{week}} = 0,83^7 \approx 0,271$
De afname per week is 72,9%.
- b** $g_{\text{dag}} = 0,83$ geeft $g_{\text{uur}} = 0,83^{\frac{1}{24}} \approx 0,992$
De afname per uur is 0,8%.
- c** Los op $0,83^t = 0,5$, met t in dagen.
Voer in $y_1 = 0,83^x$ en $y_2 = 0,5$.
De optie snijpunt geeft $x = 3,720...$
Dus na $3,720... \times 24 \approx 89$ uur is de hoeveelheid gehalveerd.
- d** Los op $0,83^t = 0,25$, met t in dagen.
Voer in $y_3 = 0,25$ en zet y_2 uit.
De optie snijpunt geeft $x = 7,440...$
Dus na ruim 7 dagen is er nog een kwart van de beginhoeveelheid over.
- 3 a** Los op $0,4^d = 0,5$, met d de diepte in meter.
 $d = {}^{0,4}\log(0,5) \approx 0,76$
Dus van rood licht is op 76 cm nog 50% van de oorspronkelijke hoeveelheid licht zichtbaar.
Los op $0,9^d = 0,5$, met d de diepte in meter.
 $d = {}^{0,9}\log(0,5) \approx 6,58$
Dus van blauw licht is op 658 cm nog 50% van de oorspronkelijke hoeveelheid licht zichtbaar.
- b** P_{rood} is het percentage rood licht, P_{blauw} is het percentage blauw licht en d is de diepte in meter.
 $P_{\text{rood}} = 100 \cdot 0,4^d$ en $P_{\text{blauw}} = 100 \cdot 0,9^d$
Los op $P_{\text{blauw}} = 10 \cdot P_{\text{rood}}$.
Voer in $y_1 = 100 \cdot 0,9^x$ en $y_2 = 1000 \cdot 0,4^x$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 2,84$.
Dus op een diepte van 284 cm.
- c** $0,4^d = 0,1$ geeft $d = {}^{0,4}\log(0,1) = 2,512...$
 $0,9^d = 0,1$ geeft $d = {}^{0,9}\log(0,1) = 21,854...$
De blauwe vis zwemt $\frac{21,854...}{2,512...} \approx 8,7$ keer zo diep als de rode vis.

- 4 a** ${}^3\log(4-3x) = {}^2\log(\frac{1}{4})$
 ${}^3\log(4-3x) = -2$
 $4-3x = \frac{1}{9}$
 $-3x = -3\frac{8}{9}$
 $x = 1\frac{8}{27}$
- b** $1 + {}^{\frac{1}{4}}\log(5x-1) + {}^{\frac{1}{4}}\log(3x-2) = 0$
 ${}^{\frac{1}{4}}\log(5x-1) + {}^{\frac{1}{4}}\log(3x-2) = -1$
 ${}^{\frac{1}{4}}\log((5x-1)(3x-2)) = -1$
 $(5x-1)(3x-2) = 4$
 $15x^2 - 10x - 3x + 2 = 4$
 $15x^2 - 13x - 2 = 0$
 $D = (-13)^2 - 4 \cdot 15 \cdot -2 = 289$
 $x = \frac{13 \pm 17}{30} = 1 \vee x = \frac{13-17}{30} = -\frac{2}{15}$
vold. niet
- c** $4 \cdot 2^{3x+2} = 4^{x-2}$
 $2^2 \cdot 2^{3x+2} = (2^2)^{x-2}$
 $2^{3x+4} = 2^{2x-4}$
 $3x+4 = 2x-4$
 $x = -8$

Bladzijde 214

- 5 a** $N = 500 \cdot 3,28^t$
 $\log(N) = \log(500 \cdot 3,28^t)$
 $\log(N) = \log(500) + \log(3,28^t)$
 $\log(N) = \log(500) + t \cdot \log(3,28)$
 $\log(N) \approx 2,70 + t \cdot 0,52$
Dus $\log(N) = 0,52t + 2,70$.
- b** $N = 180 \cdot t^{1,75}$
 $\log(N) = \log(180 \cdot t^{1,75})$
 $\log(N) = \log(180) + \log(t^{1,75})$
 $\log(N) = \log(180) + 1,75 \cdot \log(t)$
 $\log(N) \approx 2,26 + 1,75 \cdot \log(t)$
Dus $\log(N) = 2,26 + 1,75 \cdot \log(t)$.
- 6 a** $\log(y) = 0,16x + 2,64$
 $y = 10^{0,16x+2,64}$
 $y = 10^{0,16x} \cdot 10^{2,64}$
 $y = (10^{0,16})^x \cdot 10^{2,64}$
 $y \approx 1,45^x \cdot 437$
Dus $y = 437 \cdot 1,45^x$.
- b** $0,8 \cdot \log(y) = 3 \cdot \log(x) + 1$
 $\log(y) = 3,75 \cdot \log(x) + 1,25$
 $\log(y) = \log(x^{3,75}) + \log(10^{1,25})$
 $\log(y) = \log(x^{3,75} \cdot 10^{1,25})$
 $y = x^{3,75} \cdot 10^{1,25}$
 $y \approx x^{3,75} \cdot 18$
Dus $y = 18x^{3,75}$.
- d** $3^{x-5} = {}^5\log(25)$
 $3^{x-5} = 2$
 $x-5 = {}^3\log(2)$
 $x = 5 + {}^3\log(2)$
- e** $\log(x-4) + 2 = \log(25x+50)$
 $\log(x-4) + \log(100) = \log(25x+50)$
 $\log((x-4) \cdot 100) = \log(25x+50)$
 $\log(100x-400) = \log(25x+50)$
 $100x-400 = 25x+50$
 $75x = 450$
 $x = 6$
- f** ${}^5\log(x+30) = 3 \cdot {}^5\log(2) + {}^5\log(2x)$
 ${}^5\log(x+30) = {}^5\log(2^3) + {}^5\log(2x)$
 ${}^5\log(x+30) = {}^5\log(2^3 \cdot 2x)$
 ${}^5\log(x+30) = {}^5\log(16x)$
 $x+30 = 16x$
 $-15x = -30$
 $x = 2$
- c** $N = 123 \cdot 4,5^{6t-7}$
 $\log(N) = \log(123 \cdot 4,5^{6t-7})$
 $\log(N) = \log(123) + \log(4,5^{6t-7})$
 $\log(N) = \log(123) + (6t-7) \cdot \log(4,5)$
 $\log(N) = \log(123) + 6t \cdot \log(4,5) - 7 \cdot \log(4,5)$
 $\log(N) \approx -2,48 + 3,92t$
Dus $\log(N) = 3,92t - 2,48$.
- d** $N = 2t \cdot (3\sqrt{t})^{4,18}$
 $N = 2t \cdot 3^{4,18} \cdot (t^{\frac{1}{2}})^{4,18}$
 $N = 2t \cdot 3^{4,18} \cdot t^{2,09}$
 $N = 2 \cdot 3^{4,18} \cdot t^{3,09}$
 $\log(N) = \log(2 \cdot 3^{4,18} \cdot t^{3,09})$
 $\log(N) = \log(2 \cdot 3^{4,18}) + \log(t^{3,09})$
 $\log(N) \approx 2,30 + 3,09 \cdot \log(t)$
Dus $\log(N) = 2,30 + 3,09 \cdot \log(t)$.
- c** $x = 2^{\frac{1}{2}} \cdot {}^3\log(y) - 14$
 $2^{\frac{1}{2}} \cdot {}^3\log(y) = x + 14$
 ${}^3\log(y) = 0,4x + 5,6$
 $y = 3^{0,4x+5,6}$
 $y = 3^{0,4x} \cdot 3^{5,6}$
 $y = (3^{0,4})^x \cdot 3^{5,6}$
 $y \approx 1,55^x \cdot 470$
Dus $y = 470 \cdot 1,55^x$.
- d** ${}^2\log(\sqrt{x}) + {}^2\log(\sqrt{y}) = \sqrt{2}$
 ${}^2\log(\sqrt{xy}) = \sqrt{2}$
 $\sqrt{xy} = 2^{\sqrt{2}}$
 $xy = (2^{\sqrt{2}})^2$
 $xy = 2^{2\sqrt{2}}$
 $y = 2^{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x}$
 $y \approx 7 \cdot x^{-1}$
Dus $y = 7x^{-1}$.

7 a $f(x) = 2$ geeft $2^{x-3} - 1 = 2$

$$2^{x-3} = 3$$

$$x - 3 = {}^2\log(3)$$

$$x = 3 + {}^2\log(3)$$

Dus $A(3 + {}^2\log(3), 2)$.

$$g(x) = 2 \text{ geeft } {}^3\log(3x + 12) = 2$$

$$3x + 12 = 9$$

$$3x = -3$$

$$x = -1$$

Dus $B(-1, 2)$.

$$AB = 3 + {}^2\log(3) - (-1) = 4 + {}^2\log(3)$$

b Voer in $y_1 = 2^{x-3} - 1$ en $y_2 = {}^3\log(3x + 12)$.

De optie snijpunt geeft $x = -3,887\dots$ en $x = 5$.

$$f(x) < g(x) \text{ geeft } -3,89 < x < 5$$

c $g(x) = {}^3\log(3x + 12) = {}^3\log(3(x + 4)) = {}^3\log(3) + {}^3\log(x + 4) = 1 + {}^3\log(x + 4)$

Dus de grafiek van g ontstaat uit die van $y = {}^3\log(x)$ door de translatie $(-4, 1)$.

d $f(0) = 2^{-3} - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$

$$C(0, 7), \text{ dus er moet gelden } a \cdot -\frac{7}{8} = 7$$

$$a = 7 \cdot -\frac{8}{7} = -8$$

8 a $f(x) = 0$ geeft $2^{x^2-2x-1} - 4 = 0$

$$2^{x^2-2x-1} = 4$$

$$2^{x^2-2x-1} = 2^2$$

$$x^2 - 2x - 1 = 2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 3$$

$$f(x) < 0 \text{ geeft } -1 < x < 3$$

b $f(x) = -3\frac{1}{2}$ geeft $2^{x^2-2x-1} - 4 = -3\frac{1}{2}$

$$2^{x^2-2x-1} = \frac{1}{2}$$

$$2^{x^2-2x-1} = 2^{-1}$$

$$x^2 - 2x - 1 = -1$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

$$(2, -3\frac{1}{2}) \xrightarrow{\text{verm. } y=\text{as}, a} (5, -3\frac{1}{2}) \text{ geeft } a \cdot 2 = 5, \text{ dus } a = 2\frac{1}{2}.$$

c Voer in $y_1 = 2^{x^2-2x-1} - 4$.

De optie minimum geeft $x = 1$ en $y = -3\frac{3}{4}$.

$$f(x) = 2^{x^2-2x-1} - 4 \xrightarrow{\text{translatie } (-1, 3\frac{3}{4})} y = 2^{(x+1)^2-2(x+1)-1} - 4 + 3\frac{3}{4}$$

$$y = 2^{x^2+2x+1-2x-2-1} - \frac{1}{4}$$

$$y = 2^{x^2-2} - \frac{1}{4}$$

Dus de formule van de beeldgrafiek is $y = 2^{x^2-2} - \frac{1}{4}$.

d $g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{x^2} - 4 = 2^{-2} \cdot 2^{x^2} - 4 = 2^{x^2-2} - 4$

$$y = 2^{x^2-2x-1} - 4 \xrightarrow{\text{translatie } (-p, 0)} y = 2^{(x+p)^2-2(x+p)-1} - 4$$

$$y = 2^{x^2+2px+p^2-2x-2p-1} - 4$$

$$y = 2^{x^2+(2p-2)x+p^2-2p-1} - 4$$

Er moet gelden $2p - 2 = 0$ en $p^2 - 2p - 1 = -2$.

Uit $2p - 2 = 0$ volgt $p = 1$.

$p = 1$ invullen bij $p^2 - 2p - 1 = -2$ geeft $-2 = -2$ klopt.

Dus $p = 1$.

Alternatieve uitwerking

$$f(x) = 2^{x^2-2x-1} - 4 = 2^{(x-1)^2-1-1} - 4 = 2^{(x-1)^2-2} - 4$$

$$g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{x^2} - 4 = 2^{-2} \cdot 2^{x^2} - 4 = 2^{x^2-2} - 4$$

$$f(x) = 2^{(x-1)^2-2} - 4 \xrightarrow{\text{translatie } (-1, 0)} g(x) = 2^{x^2-2} - 4$$

Dus $p = 1$.

9 a $a = \frac{\log(27\,500) - \log(90)}{31} = 0,080\dots$

Bij 16 maart hoort $t = 29 + 16 = 45$.

$$\left. \begin{array}{l} \log(N) = 0,080\dots t + b \\ t = 45 \text{ en } N = 90 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,080\dots \cdot 45 + b = \log(90) \\ 3,607\dots + b = \log(90) \\ b = -1,653\dots \end{array}$$

Dus $\log(N) = 0,080\dots t - 1,653\dots$

Bij 30 april hoort $t = 61 + 29 = 90$.

Dit geeft $\log(N) = 0,080\dots \cdot 90 - 1,653\dots = 5,561\dots$, dus $N = 10^{5,561\dots} \approx 364\,445$.

Een schatting van het aantal besmette personen op 30 april is 364 000.

b $\log(N) = 0,080\dots t - 1,653\dots$

$$N = 10^{0,080\dots t - 1,653\dots}$$

$$N = 10^{0,080\dots t} \cdot 10^{-1,653\dots}$$

Los op $10^{0,080\dots t} = 2$.

Voer in $y_1 = 10^{0,080\dots x}$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x = 3,75\dots$

De gevraagde verdubbelingstijd is 3,8 dagen.

c Vanaf D zijn effecten van maatregelen zichtbaar, want vanaf D neemt de toename van het aantal besmettingen af.

Bij D hoort 29 maart.

Het duurt ruim 2 weken voordat effecten van maatregelen zichtbaar zijn.

Dus ruim 14 dagen eerder dan 29 maart, dus rond 13 maart zijn er maatregelen genomen.

d $N = 1000$ geeft $\log(N) = \log(1000) = 3$

Aflezen geeft: bij $\log(N) = 3$ hoort $t \approx 46$.

Dus op 17 maart.

e $a = \frac{\log(10\,800) - \log(560)}{15} = 0,085\dots$

Bij 14 maart hoort $t = 43$.

$$\left. \begin{array}{l} \log(N) = 0,085\dots t + b \\ t = 43 \text{ en } N = 560 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,085\dots \cdot 43 + b = \log(560) \\ 3,684\dots + b = \log(560) \\ b = -0,936\dots \end{array}$$

$\log(N) = 0,085\dots t - 0,936\dots$

$$N = 10^{0,085\dots t - 0,936\dots}$$

$$N = 10^{0,085\dots t} \cdot 10^{-0,936\dots}$$

$$N = (10^{0,085\dots})^t \cdot 10^{-0,936\dots}$$

$$N \approx 1,218^t \cdot 0,116$$

$$\text{Dus } N = 0,116 \cdot 1,218^t$$

f Bij 16 april hoort $t = 76$.

Dit geeft $N = 0,116 \cdot 1,218^{76} \approx 374\,673$.

Dus $374\,673 - 34\,800 \approx 340\,000$ meer.

10 a Aflezen geeft: bij $t = 60$ hoort $\log(Z) = 1,5$.

$$\log(Z) = 1,5 \text{ geeft } Z \approx 10^{1,5} \approx 32$$

Dus ongeveer 32 liter zuur.

b Stel $\log(Z) = at + b$ met $a = \frac{0-3}{120-0} = -\frac{1}{40}$.

$$\left. \begin{array}{l} \log(Z) = -\frac{1}{40}t + b \\ \text{door } (0, 3) \end{array} \right\} \log(Z) = -\frac{1}{40}t + 3$$

$$\log(Z) = -\frac{1}{40}t + 3$$

$$Z = 10^{-\frac{1}{40}t + 3}$$

$$Z = 10^{-\frac{1}{40}t} \cdot 10^3$$

$$Z = 1000 \cdot 10^{-\frac{1}{40}t}$$

Voer in $y_1 = 1000 \cdot 10^{-\frac{1}{40}x}$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=120} = -0,0575...$$

De gevraagde snelheid is $60 \cdot 0,0575... \approx 3,5$ liter per minuut.

c $10^{-\frac{1}{40}x} = \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{40}x = \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = -40 \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) \approx 12,0$$

De halveringstijd is ongeveer 12 seconden.

d 0,1% van 2000 liter is 2 liter.

Los op $1000 \cdot 10^{-\frac{1}{40}t} = 2$

$$10^{-\frac{1}{40}t} = \frac{1}{500}$$

$$-\frac{1}{40}t = \log\left(\frac{1}{500}\right)$$

$$t = -40 \cdot \log\left(\frac{1}{500}\right) \approx 108$$

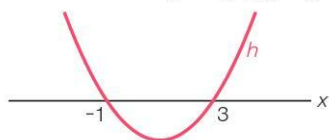
Dus na 108 seconden.

11 a $\underbrace{x^2 - 2x - 3}_{h(x)} > 0$

$h(x) = 0$ geeft $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 3$$



$h(x) > 0$ geeft $x < -1 \vee x > 3$

Dus het domein van f bestaat uit de intervallen $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en $\langle 3, \rightarrow \rangle$.

$x + 7 > 0$ geeft $x > -7$, dus $D_g = \langle -7, \rightarrow \rangle$.

$f(x) = g(x)$ geeft ${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = 1 + {}^3\log(x + 7)$

$${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = {}^3\log(3) + {}^3\log(x + 7)$$

$${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = {}^3\log(3(x + 7))$$

$${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = {}^3\log(3x + 21)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 3x + 21$$

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$(x+3)(x-8) = 0$$

$$x = -3 \vee x = 8$$

$f(x) \leq g(x)$ geeft $-3 \leq x < -1 \vee 3 < x \leq 8$

b $g(5) = 1 + {}^3\log(5 + 7) = 1 + {}^3\log(12)$

$x \leq 5$ geeft $g(x) \leq 1 + {}^3\log(12)$

c $f(-2) = {}^3\log(4 + 4 - 3) = {}^3\log(5)$

$g(-2) = 1 + {}^3\log(-2 + 7) = 1 + {}^3\log(5)$

Dus $AB = 1$.

d $f(x) = 3$ geeft ${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = 3$

$$x^2 - 2x - 3 = 27$$

$$x^2 - 2x - 30 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -30 = 124$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{124}}{2} \vee x = \frac{2 - \sqrt{124}}{2}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{31}}{2} \vee x = \frac{2 - 2\sqrt{31}}{2}$$

$$x = 1 + \sqrt{31} \vee x = 1 - \sqrt{31}$$

$$CD = 1 + \sqrt{31} - (1 - \sqrt{31}) = 2\sqrt{31}$$

e Los op $1 + {}^3\log(x + 7) = \frac{1}{4}x + 2$.

Voer in $y_1 = 1 + {}^3\log(x + 7)$ en $y_2 = \frac{1}{4}x + 2$.

De optie snijpunt geeft $E(-6,496...; 0,375...)$ en $F(5,068...; 3,267...)$.

$$EF = \sqrt{(5,068... - (-6,496...))^2 + (3,267... - 0,375...)^2} \approx 11,920$$

Bladzijde 217

12 a Voor elke t is $0,99936^t > 0$, dus $69 - 69 \cdot 0,99936^t < 69$ en dus $100 - (69 - 69 \cdot 0,99936^t) > 31$.

Dus je behoudt altijd minstens 31% botdichtheid.

b $B = 69 - 69 \cdot 0,99936^t$

$$69 \cdot 0,99936^t = 69 - B$$

$$0,99936^t = 1 - \frac{1}{69}B$$

$$t = {}^{0,99936}\log\left(1 - \frac{1}{69}B\right)$$

$$B = 10 \text{ geeft } t = {}^{0,99936}\log\left(1 - \frac{1}{69} \cdot 10\right) \approx 245$$

Dus na 245 dagen.

c $t = 500$ geeft $B = 69 - 69 \cdot 0,99936^{500} = 18,90...$

$$V = 0,840 \text{ en } B = 18,90... \text{ geeft } T = \frac{\left(\frac{100 - 18,90...}{100}\right) \cdot 0,840 - 0,858}{0,120} \approx -1,47$$

Deze T-score is acceptabel.

$$t = 1000 \text{ geeft } B = 69 - 69 \cdot 0,99936^{1000} = 32,62...$$

$$V = 0,840 \text{ en } B = 32,62... \text{ geeft } T = \frac{\left(\frac{100 - 32,62...}{100}\right) \cdot 0,840 - 0,858}{0,120} \approx -2,43$$

Deze T-score is niet acceptabel.

d Los op $\frac{\left(\frac{100 - B}{100}\right) \cdot 0,840 - 0,858}{0,120} = -2$.

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{\left(\frac{100 - x}{100}\right) \cdot 0,840 - 0,858}{0,120} \text{ en } y_2 = -2.$$

De optie snijpunt geeft $x = 26,42...$, dus $B = 26,42...$

$$B = 26,42... \text{ geeft } t = {}^{0,99936}\log\left(1 - \frac{1}{69} \cdot 26,42...\right) = 754,3...$$

Dus 754 dagen.

10 Meetkundige berekeningen

Bladzijde 218

- 13 a $\angle CDB = \angle ABD = 40^\circ$ (Z-hoeken)

De sinusregel in $\triangle BCD$ geeft $\frac{3}{\sin(\angle CBD)} = \frac{5}{\sin(40^\circ)}$

$$\sin(\angle CBD) = \frac{3 \sin(40^\circ)}{5}$$

$$\angle CBD = 22,68...^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 40^\circ - 22,68...^\circ = 117,31...^\circ$$

De sinusregel in $\triangle BCD$ geeft $\frac{BD}{\sin(117,31...^\circ)} = \frac{5}{\sin(40^\circ)}$

$$BD = \frac{5 \sin(117,31...^\circ)}{\sin(40^\circ)} \approx 6,91$$

- b De sinusregel in $\triangle ABD$ geeft $\frac{6,91...}{\sin(\angle A)} = \frac{6}{\sin(40^\circ)}$

$$\sin(\angle A) = \frac{6,91... \cdot \sin(40^\circ)}{6}$$

$$\angle A = 47,76...^\circ$$

Zie de figuur hiernaast.

$$\text{In } \triangle BDE \text{ is } \sin(40^\circ) = \frac{DE}{6,91...}$$

$$DE = 6,91... \cdot \sin(40^\circ) = 4,44...$$

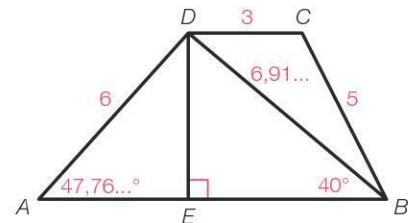
$$\cos(40^\circ) = \frac{BE}{6,91...}$$

$$BE = 6,91... \cdot \cos(40^\circ) = 5,29...$$

$$\text{In } \triangle ADE \text{ is } \cos(47,76...^\circ) = \frac{AE}{6}$$

$$AE = 6 \cos(47,76...^\circ) = 4,03...$$

$$O(ABCD) = \frac{1}{2}(4,03... + 5,29... + 3) \cdot 4,44... \approx 27,38$$



- 14 Stel $AD = x$, dan is $BC = 2x$.

Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $BD^2 = 5^2 + x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x \cdot \cos(65^\circ)$ oftewel $BD^2 = 25 + x^2 - 10x \cos(65^\circ)$.

De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft

$$BD^2 = 4^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2x \cdot \cos(75^\circ) \text{ oftewel}$$

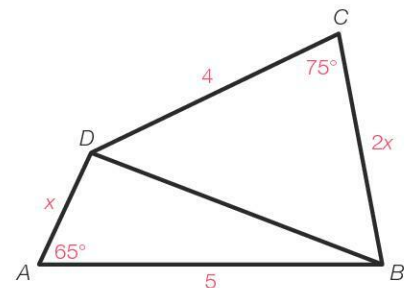
$$BD^2 = 16 + 4x^2 - 16x \cos(75^\circ).$$

$$\text{Dus } 25 + x^2 - 10x \cos(65^\circ) = 16 + 4x^2 - 16x \cos(75^\circ).$$

$$\text{Voer in } y_1 = 25 + x^2 - 10x \cos(65^\circ) \text{ en } y_2 = 16 + 4x^2 - 16x \cos(75^\circ).$$

De optie snijpunt geeft $x = 1,717...$

Dus $AD \approx 1,72$ en $BC \approx 3,44$.



- 15 $f(2) = \frac{6}{2} = 3$, dus $A(2, 3)$.

$$f(x) = \frac{6}{x} = 6x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = -6x^{-2} = -\frac{6}{x^2}$$

$$rc_l = rc_k = f'(2) = -\frac{6}{4} = -1\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -1\frac{1}{2} \text{ geeft } -\frac{6}{x^2} = -\frac{3}{2}$$

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

$$f(-2) = \frac{6}{-2} = -3, \text{ dus } B(-2, -3).$$

$rc_l = -1\frac{1}{2}$, dus $\tan(\alpha) = -1\frac{1}{2}$ en dit geeft $\alpha = -56,30\dots^\circ$.

$rc_{AB} = \frac{3 - -3}{2 - -2} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$, dus $\tan(\beta) = 1\frac{1}{2}$ en dit geeft $\beta = 56,30\dots^\circ$.

$\beta - \alpha = 56,30\dots^\circ - -56,30\dots^\circ \approx 112,6^\circ$

Dus $\angle ABS \approx 180^\circ - 112,6^\circ = 67,4^\circ$.

16 a $c: x^2 + y^2 - 20x - 6y + 104 = 0$
 $x^2 - 20x + y^2 - 6y + 104 = 0$
 $(x - 10)^2 - 100 + (y - 3)^2 - 9 + 104 = 0$
 $(x - 10)^2 + (y - 3)^2 = 5$
Dus $M(10, 3)$ en $r = \sqrt{5}$.
Dit geeft $d: (x - 10)^2 + (y - 3)^2 = 20$.
Stel $k: y = ax + 3$.
Substitutie van $y = ax + 3$ in $(x - 10)^2 + (y - 3)^2 = 20$ geeft
 $(x - 10)^2 + (ax)^2 = 20$
 $x^2 - 20x + 100 + a^2x^2 = 20$
 $(a^2 + 1)x^2 - 20x + 80 = 0$
 $D = (-20)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 80 = 400 - 320a^2 - 320 = 80 - 320a^2$
 $D = 0$ geeft $80 - 320a^2 = 0$
 $320a^2 = 80$
 $a^2 = \frac{1}{4}$
 $a = \frac{1}{2} \vee a = -\frac{1}{2}$

Dus $k_1: y = -\frac{1}{2}x + 3$ en $k_2: y = \frac{1}{2}x + 3$.

b De cirkel met middelpunt N en straal $\sqrt{10}$ heeft vergelijking $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 10$.

Stel $l: y = ax + 2$.

Substitutie van $y = ax + 2$ in $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 10$ geeft

$$(x - 4)^2 + (ax - 2)^2 = 10$$

$$x^2 - 8x + 16 + a^2x^2 - 4ax + 4 = 10$$

$$a^2x^2 + x^2 - 4ax - 8x + 10 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 + (-4a - 8)x + 10 = 0$$

$$D = (-4a - 8)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 10 = 16a^2 + 64a + 64 - 40a^2 - 40 = -24a^2 + 64a + 24$$

$$D = 0 \text{ geeft } -24a^2 + 64a + 24 = 0$$

$$3a^2 - 8a - 3 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$

$$a = \frac{8 + 10}{6} = 3 \vee a = \frac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$$

Dus $l_1: y = 3x + 2$ en $l_2: y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Bladzijde 219

17 $f(x) = x^2 - 5x$ geeft $f'(x) = 2x - 5$

$$rc_k = f'(2) = 2 \cdot 2 - 5 = -1$$

De lijn l door A en M staat loodrecht op k , dus $rc_l = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = x + b \\ f(2) = -6, \text{ dus } A(2, -6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 + b = -6 \\ b = -8 \end{array}$$

Dus $l: y = x - 8$ en $M(0, -8)$.

$$r_c = d(M, A) = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-6 - -8)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

De lijn door M en N heeft vergelijking $y = -x - 8$.

Deze lijn snijden met de x -as geeft $-x - 8 = 0$, dus $x = -8$ en $N(-8, 0)$.

$$d(M, N) = \sqrt{(-8 - 0)^2 + (0 - -8)^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$r_d = d(M, N) - r_c = 8\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Dus $d: (x + 8)^2 + y^2 = 72$.

- 18 a** Substitutie van $y = -3x + 16$ in $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ geeft
- $$x^2 + (-3x + 16)^2 - 6x - 4(-3x + 16) + 8 = 0$$
- $$x^2 + 9x^2 - 96x + 256 - 6x + 12x - 64 + 8 = 0$$
- $$10x^2 - 90x + 200 = 0$$
- $$x^2 - 9x + 20 = 0$$
- $$(x - 4)(x - 5) = 0$$
- $$x = 4 \vee x = 5$$
- $x = 4$ geeft $y = -3 \cdot 4 + 16 = 4$, dus $A(4, 4)$.
 $x = 5$ geeft $y = -3 \cdot 5 + 16 = 1$, dus $B(5, 1)$.
- c : $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 8 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 8 = 0$
 $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$
- Dus $M(3, 2)$.
- $$rc_{AM} = \frac{4 - 2}{4 - 3} = 2 \text{ en } rc_{BM} = \frac{1 - 2}{5 - 3} = -\frac{1}{2}, \text{ dus } AM \perp BM \text{ oftewel } \angle AMB = 90^\circ.$$
- l en m zijn raaklijnen aan c , dus $AM \perp l$ en $BM \perp m$.
 Uit $AM = BM$, $\angle AMB = 90^\circ$, $AM \perp l$ en $BM \perp m$ volgt dat $AMBS$ een vierkant is.
- b** De gevraagde omtrek is $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$.
- c** De gevraagde oppervlakte is $(\sqrt{5})^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (\sqrt{5})^2 = 5 - \frac{1}{4}\pi$.

- 19 a** $rc_{AC} = \frac{2 - 3}{4 - 1} = -\frac{1}{3}$
 $\tan(\alpha) = -\frac{1}{3}$ geeft $\alpha = -18,43\dots^\circ$
 $rc_{BD} = \frac{0 - 6}{3 - 2} = -6$
 $\tan(\beta) = -6$ geeft $\beta = -80,53\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = -18,43\dots^\circ - (-80,53\dots^\circ) = 62,10\dots^\circ$
 Dus de hoek tussen AC en BD is ongeveer $62,1^\circ$.

- b** Stel $CD: y = ax + b$ met $a = \frac{2 - 6}{4 - 2} = -2$.
- $$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } C(4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 4 + b = 2 \\ -8 + b = 2 \\ b = 10 \end{array}$$
- Dus $CD: y = -2x + 10$.
 De lijn k gaat door A en staat loodrecht op CD .
 $k: y = \frac{1}{2}x + b$
 $\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} + b = 3 \\ b = 2\frac{1}{2} \end{array}$
 Dus $k: y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.
 CD snijden met k geeft het punt S .
 $-2x + 10 = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$
 $-2\frac{1}{2}x = -7\frac{1}{2}$
 $x = 3$
 $\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2x + 10 \end{array} \right\} y = -2 \cdot 3 + 10 = 4$
 Dus $S(3, 4)$.
 $d(A, CD) = d(A, S) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{5}$
- c** Stel $AB: y = ax + b$ met $a = \frac{0 - 3}{3 - 1} = -1\frac{1}{2}$.
- $$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} + b = 3 \\ b = 4\frac{1}{2} \end{array}$$
- Dus $AB: y = -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$.
 $y = 1$ geeft $-1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} = 1$
 $-1\frac{1}{2}x = -3\frac{1}{2}$
 $x = 2\frac{1}{3}$
 Dus $E(2\frac{1}{3}, 1)$.

Stel $BC: y = ax + b$ met $a = \frac{2-0}{4-3} = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } B(3, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3 + b = 0 \\ b = -6 \end{array}$$

Dus $BC: y = 2x - 6$.

$y = 1$ geeft $2x - 6 = 1$

$$2x = 7$$

$$x = 3\frac{1}{2}$$

Dus $F(3\frac{1}{2}, 1)$.

$$d(E, F) = x_F - x_E = 3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} = 1\frac{1}{6}$$

Alternatieve uitwerking

Van B naar A gaat 3 omhoog en 2 naar links.

Als je 1 omhoog gaat, ga je dus $\frac{2}{3}$ naar links, dus $x_E = 3 - \frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Van B naar C gaat 2 omhoog en 1 naar rechts.

Als je 1 omhoog gaat, ga je dus $\frac{1}{2}$ naar rechts, dus $x_F = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$.

$$d(E, F) = x_F - x_E = 3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} = 1\frac{1}{6}$$

20 a $r_c = d(M, A) = \sqrt{(5-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{13}$

$$c: (x-3)^2 + (y-5)^2 = 13$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 13$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$$

$$r_d = y_A = 2$$

$$d: (x-5)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$$

b $rc_{AM} = \frac{2-5}{5-3} = -\frac{3}{2}$

k gaat door A en staat loodrecht op AM , dus $rc_k = \frac{2}{3}$.

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{3} \text{ geeft } \alpha = 33,69\dots^\circ$$

Dus de hoek waaronder k de y -as snijdt is $180^\circ - 90^\circ - 33,69\dots^\circ \approx 56,3^\circ$.

c $d(M, d) = r_c - r_d = \sqrt{13} - 2$

Bladzijde 220

21 $\angle ADB = 180^\circ - 52^\circ - 26^\circ - 61^\circ = 41^\circ$

De sinusregel in $\triangle ABD$ geeft $\frac{250}{\sin(41^\circ)} = \frac{BD}{\sin(52^\circ + 26^\circ)}$

$$BD = \frac{250 \sin(78^\circ)}{\sin(41^\circ)} = 372,7\dots$$

$$\angle ACB = 180^\circ - 26^\circ - 61^\circ - 50^\circ = 43^\circ$$

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\frac{250}{\sin(43^\circ)} = \frac{BC}{\sin(26^\circ)}$

$$BC = \frac{250 \sin(26^\circ)}{\sin(43^\circ)} = 160,6\dots$$

De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft

$$CD^2 = 160,6\dots^2 + 372,7\dots^2 - 2 \cdot 160,6\dots \cdot 372,7\dots \cdot \cos(50^\circ) = 87753,4\dots$$

$$CD = 296,2\dots$$

Dus de lengte CD van het eiland is ongeveer 296 meter.

22 a Stel $l: y = 3x + b$.
 Substitutie van $y = 3x + b$ in $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ geeft
 $x^2 + (3x + b)^2 - 6x - 4(3x + b) + 3 = 0$
 $x^2 + 9x^2 + 6bx + b^2 - 6x - 12x - 4b + 3 = 0$
 $10x^2 + 6bx - 18x + b^2 - 4b + 3 = 0$
 $10x^2 + (6b - 18)x + b^2 - 4b + 3 = 0$
 $D = (6b - 18)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (b^2 - 4b + 3)$
 $= 36b^2 - 216b + 324 - 40b^2 + 160b - 120$
 $= -4b^2 - 56b + 204$
 $D = 0$ geeft $-4b^2 - 56b + 204 = 0$
 $b^2 + 14b - 51 = 0$
 $(b - 3)(b + 17) = 0$
 $b = 3 \vee b = -17$

Dus $l_1: y = 3x + 3$ en $l_2: y = 3x - 17$.

b $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 3 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 3 = 0$
 $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$
 Dus $M(3, 2)$ en $r = \sqrt{10}$.
 De lijn p gaat door M en staat loodrecht op k .
 $p: y = -\frac{1}{3}x + b$
 door $M(3, 2)$ $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 3 + b = 2 \\ -1 + b = 2 \\ b = 3 \end{array} \right.$

Dus $p: y = -\frac{1}{3}x + 3$.

k snijden met p geeft het snijpunt S .

$$3x + 13 = -\frac{1}{3}x + 3$$

$$3\frac{1}{3}x = -10$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 3x + 13 \end{array} \right\} y = 3 \cdot -3 + 13 = 4$$

Dus $S(-3, 4)$.

$$d(c, k) = d(M, k) - r = d(M, S) - r = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (4 - 2)^2} - \sqrt{10} = \sqrt{40} - \sqrt{10} = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$$

c $x = 0$ geeft $y^2 - 4y + 3 = 0$
 $(y - 1)(y - 3) = 0$
 $y = 1 \vee y = 3$

Dus $A(0, 1)$ en $B(0, 3)$.

$$\text{rc}_{MA} = \frac{2 - 1}{3 - 0} = \frac{1}{3}, \text{ dus } \text{rc}_m = -3.$$

$$\tan(\alpha) = -3 \text{ geeft } \alpha = -71,56\dots^\circ$$

$$\text{rc}_{MB} = \frac{2 - 3}{3 - 0} = -\frac{1}{3}, \text{ dus } \text{rc}_n = 3.$$

$$\tan(\beta) = 3 \text{ geeft } \beta = 71,56\dots^\circ$$

$$\beta - \alpha = 143,13\dots^\circ$$

Dus de hoek tussen m en n is $180^\circ - 143,13\dots^\circ \approx 36,9^\circ$.

23 a $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$
 $x^2 - 2x + y^2 - 2y - 8 = 0$
 $(x - 1)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 - 8 = 0$
 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$
 Dus $M(1, 1)$ en $r_c = \sqrt{10}$.

Van d is het middelpunt O en de straal 1.

$$d(c, d) = r_c - r_d - d(O, M) = \sqrt{10} - 1 - \sqrt{(1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{10} - 1 - \sqrt{2}$$

b $y = 0$ geeft $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x + 2)(x - 4) = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$

Dus $A(-2, 0)$ en $B(4, 0)$.

Op een soortgelijke manier vind je $C(0, 4)$ en $D(0, -2)$.

$$O(ABCD) = O(\triangle OAD) + O(\triangle OBD) + O(\triangle OBC) + O(\triangle OAC)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 2 + 4 + 8 + 4 = 18.$$

c $rc_{MA} = \frac{1-0}{1-2} = \frac{1}{3}$, dus $rc_k = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -3x + b \\ \text{door } M(1, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 + b = 1 \\ b = 4 \end{array}$$

Dus $k: y = -3x + 4$.

k snijdt de y -as in het punt $(0, 4)$.

Dat is het punt C , dus C ligt op k .

11 Verbanden en functies

Bladzijde 221

24 a $E = aN^{1,63}$

Neem in de formule $2N$ voor N .

Je krijgt $E = a(2N)^{1,63} = a \cdot 2^{1,63} \cdot N^{1,63} = 2^{1,63} \cdot aN^{1,63} \approx 3,1 \cdot aN^{1,63}$.

Dus E wordt ongeveer 3,1 keer zo groot.

b $E = aN^{1,63}$

$$aN^{1,63} = E$$

$$N^{1,63} = \frac{E}{a}$$

$$N = \left(\frac{E}{a} \right)^{\frac{1}{1,63}}$$

Neem in deze formule $\frac{1}{2}E$ voor E .

$$\text{Je krijgt } N = \left(\frac{\frac{1}{2}E}{a} \right)^{\frac{1}{1,63}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{1,63}} \cdot \left(\frac{E}{a} \right)^{\frac{1}{1,63}} \approx 0,654 \cdot \left(\frac{E}{a} \right)^{\frac{1}{1,63}}.$$

Dus 34,6% afname.

c $\frac{2 \cdot 10^{13}}{7 \cdot 10^{11}} = 28,57\dots$

Dus E wordt 28,57... keer zo groot.

Neem $28,57\dots E$ voor E in de formule $N = \left(\frac{E}{a} \right)^{\frac{1}{1,63}}$.

$$\text{Je krijgt } N = \left(\frac{28,57\dots E}{a} \right)^{\frac{1}{1,63}} = 28,57\dots^{\frac{1}{1,63}} \cdot \left(\frac{E}{a} \right)^{\frac{1}{1,63}} = 7,82\dots \cdot \left(\frac{E}{a} \right)^{\frac{1}{1,63}}.$$

Dus het aantal inwoners is dan 7,8 keer zo groot als in 1800.

Dus bij ongeveer 7,8 miljard inwoners is het energieverbruik per seconde $2 \cdot 10^{13}$.

25 a $f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 4)(x + 2) = -\frac{1}{2}(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 2x + 4$ geeft

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 2x + 2$$

b $f'(x) = 0$ geeft $-\frac{3}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot -\frac{3}{2} \cdot 2 = 16$$

$$x = \frac{2+4}{-3} = -2 \vee x = \frac{2-4}{-3} = \frac{2}{3}$$

$f(-2) = 0$, dus een top ligt op de x -as.

- c Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = -1\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ f(1) = 4\frac{1}{2}, \text{ dus } A(1, 4\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 4\frac{1}{2} \\ b = 6 \end{array}$$

Dus $k: y = -1\frac{1}{2}x + 6$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = rc_l = rc_k = -1\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ f(0) = 4, \text{ dus } B(0, 4) \end{array} \right\} l: y = -1\frac{1}{2}x + 4$$

$$-1\frac{1}{2}x + 6 = 0$$

$$-1\frac{1}{2}x = -6$$

$$x = 4$$

Dus $C(4, 0)$.

$$-1\frac{1}{2}x + 4 = 0$$

$$-1\frac{1}{2}x = -4$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

Dus $D(2\frac{2}{3}, 0)$.

$$x_C - x_D = 4 - 2\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$$

26

a $y = x^4$

↓ verm. x-as, -1

$$y = -x^4$$

↓ translatie (1, 6)

$$y = -(x - 1)^4 + 6$$

↓ verm. y-as, $\frac{1}{2}$

$$f(x) = -(2x - 1)^4 + 6$$

b max. is $f(\frac{1}{2}) = 6$

$$B_f = \langle \leftarrow, 6 \rangle$$

c $f(x) = -10$ geeft $-(2x - 1)^4 + 6 = -10$

$$(2x - 1)^4 = 16$$

$$2x - 1 = 2 \vee 2x - 1 = -2$$

$$2x = 3 \vee 2x = -1$$

$$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

d $f(x) = -(2x - 1)^4 + 6$ geeft $f'(x) = -4(2x - 1)^3 \cdot 2 = -8(2x - 1)^3$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = -8$.

$$y = -8x + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 5, \text{ dus } A(1, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -8 \cdot 1 + b = 5 \\ b = 13 \end{array}$$

Dus $k: y = -8x + 13$ en $C(0, 13)$.

k snijden met de x -as geeft $-8x + 13 = 0$

$$-8x = -13$$

$$x = 1\frac{5}{8}$$

Dus $B(1\frac{5}{8}, 0)$.

$$O(\triangle OBC) = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{5}{8} \cdot 13 = 10\frac{9}{16}$$

e De top van de grafiek van f is het punt $(\frac{1}{2}, 6)$.

a naar rechts en b naar beneden schuiven geeft het punt $(3, 0)$.

Dus $a = 2\frac{1}{2}$ en $b = 6$.

27

a Als V evenredig is met een macht van D geldt $V = aD^p$ oftewel $a = \frac{V}{D^p}$, met a de evenredigheidsconstante.

$$D = 2,0 \text{ en } V = 2 \text{ geeft } a = \frac{2}{2^p}$$

$$D = 5,5 \text{ en } V = 42 \text{ geeft } a = \frac{42}{5,5^p}$$

Voer in $y_1 = \frac{2}{2^x}$ en $y_2 = \frac{42}{5,5^x}$.

De optie snijpunt geeft $x = 3,00\dots$ en $y = 0,248\dots$

Dus $a \approx 0,25$ en $p \approx 3$.

Dit geeft de formule $V = 0,25D^3$.

Controle of de andere punten van de tabel voldoen geeft

$D = 2,8$ geeft $V = 0,25 \cdot 2,8^3 = 5,488 \approx 5,5$ klopt

$D = 3,1$ geeft $V = 0,25 \cdot 3,1^3 = 7,447\dots \approx 7,5$ klopt

$D = 4,4$ geeft $V = 0,25 \cdot 4,4^3 = 21,296 \approx 21$ klopt

$D = 5,2$ geeft $V = 0,25 \cdot 5,2^3 = 35,152 \approx 36$ klopt.

Dus V is evenredig met D^3 .

- b** Voer in $y_1 = 0,25x^3$, $y_2 = 25$ en $y_3 = 35$.

De optie snijpunt met y_1 en y_2 geeft $x = 4,64\dots$

De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x = 5,19\dots$

Dus diameters van 4,7 cm tot en met 5,1 cm komen in klasse II voor.

Bladzijde 222

28 a $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x} = x + 2 - \frac{4}{x} = x + 2 - 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 + 4x^{-2} = 1 + \frac{4}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 1 + \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\frac{4}{x^2} = -1$$

$$x^2 = -4$$

geen oplossing

Dus de grafiek van f heeft geen toppen.

- b** $rc_l = f'(-2) = 2$

$k \perp l$, dus $rc_k = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -\frac{1}{2}x + b \\ f(-2) = 2, \text{ dus } A(-2, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot -2 + b = 2 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{2}x + 1$.

k snijden met de grafiek van f geeft $\frac{x^2 + 2x - 4}{x} = -\frac{1}{2}x + 1$

$$x^2 + 2x - 4 = -\frac{1}{2}x^2 + x$$

$$1\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot -4 = 25$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{3} = 1\frac{1}{3} \vee x = \frac{-1 - 5}{3} = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ x = 1\frac{1}{3} \end{array} \right\} y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

Dus $B(1\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

- c** Stel $m: y = ax + b$ met $a = f'(4) = 1 + \frac{4}{16} = 1\frac{1}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{4}x + b \\ f(4) = 5, \text{ dus } C(4, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{4} \cdot 4 + b = 5 \\ b = 0 \end{array}$$

Dus $m: y = 1\frac{1}{4}x$ gaat door de oorsprong.

29 $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{8}{x} = 2x^{\frac{1}{2}} + 8x^{-1}$ geeft $f'(x) = x^{-\frac{1}{2}} - 8x^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{8}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{8}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{8}{x^2}$$

$$x^2 = 8\sqrt{x}$$

kwadrateren geeft

$$x^4 = 64x$$

$$x = 0 \vee x^3 = 64$$

vold. niet $x = 4$

$$f(4) = 6, \text{ dus } A(4, 6).$$

$$rc_k = \frac{6-0}{4-0} = 1\frac{1}{2}$$

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l = -\frac{2}{3}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(4, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot 4 + b = 6 \\ b = 8\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{2}{3}x + 8\frac{2}{3}.$$

$$l \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } -\frac{2}{3}x + 8\frac{2}{3} = 0$$

$$-\frac{2}{3}x = -\frac{26}{3}$$

$$x = 13$$

$$\text{Dus } B(13, 0).$$

$$\text{De top van } p \text{ is } A(4, 6), \text{ dus } p: y = a(x-4)^2 + 6.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = a(x-4)^2 + 6 \\ \text{door } B(13, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a(13-4)^2 + 6 = 0 \\ 81a = -6 \\ a = -\frac{2}{27} \end{array}$$

$$\text{Dus } p: y = -\frac{2}{27}(x-4)^2 + 6.$$

30 a 120 gram = 0,12 kg

$$G = 0,12 \text{ geeft } H = \frac{280}{0,12^{0,25}} = 475,7...$$

$$\text{Dus } \frac{475,7...}{60} \approx 8 \text{ slagen per seconde.}$$

b $G = 70\,000$ geeft $H = \frac{280}{70\,000^{0,25}} \approx 17$

Dus een verschil van 4 slagen per minuut.

c Neem in de formule $2G$ voor G .

$$\text{Je krijgt } H = \frac{280}{(2G)^{0,25}} = \frac{1}{2^{0,25}} \cdot \frac{280}{G^{0,25}} \approx 0,84 \cdot \frac{280}{G^{0,25}}.$$

Dus ongeveer 0,84 keer zo hoog.

d $H = \frac{280}{G^{0,25}}$

$$G^{0,25} = \frac{280}{H}$$

$$G = \left(\frac{280}{H}\right)^4$$

$$G \approx \frac{6,1 \cdot 10^9}{H^4}$$

$$\text{Dus } G = \frac{6,1 \cdot 10^9}{H^4}.$$

e Neem $3H$ voor H in de formule van vraag d.

$$\text{Je krijgt } G = \frac{6,1 \cdot 10^9}{(3H)^4} = \frac{1}{3^4} \cdot \frac{6,1 \cdot 10^9}{H^4} = \frac{1}{81} \cdot \frac{6,1 \cdot 10^9}{H^4}.$$

Dus de verhouding van de gewichten is 1 : 81.

Bladzijde 223

31 $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + 2\frac{1}{2}x + 1$ geeft $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2\frac{1}{2}$
 $f'(x) = 0$ geeft $-\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2\frac{1}{2} = 0$

$$9x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -5 = 196$$

$$x = \frac{4 \pm 14}{18} = 1 \vee x = \frac{4 - 14}{18} = -\frac{5}{9}$$

$$f(1) = 3, \text{ dus } B(1, 3).$$

$$rc_k = f'(-1) = -4\frac{1}{2} - 2 + 2\frac{1}{2} = -4$$

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l = \frac{1}{4}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + b \\ \text{door } B(1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot 1 + b = 3 \\ b = 2\frac{3}{4} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4} \text{ en } C(0, 2\frac{3}{4}).$$

32 a $5 - 2x \geq 0$ geeft $-2x \geq -5$ oftewel $x \leq 2\frac{1}{2}$, dus $D_f = \langle \leftarrow, 2\frac{1}{2} \rangle$.

Het randpunt is $(2\frac{1}{2}, -1)$ en het bereik is $B_f = [-1, \rightarrow)$.

noemer = 0 geeft $5 - 2x = 0$ oftewel $x = 2\frac{1}{2}$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 2\frac{1}{2}$.

Voor grote x is $g(x) \approx \frac{2x}{-2x} = -1$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -1$.

b $f(x) = 0$ geeft $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{5-2x} = 0$

$$\frac{1}{2}\sqrt{5-2x} = 1$$

$$\sqrt{5-2x} = 2$$

$$5-2x = 4$$

$$-2x = -1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$g(x) = 0$ geeft $2x - 1 = 0$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Beide grafieken snijden de x -as in het punt $(\frac{1}{2}, 0)$, dus de grafieken snijden elkaar in een punt op de x -as.

c $f(-10) = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5-2 \cdot -10} = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{25} = -1 + \frac{1}{2} \cdot 5 = 1\frac{1}{2}$

$x > -10$ geeft $-1 \leq f(x) < 1\frac{1}{2}$

d $f(x) = -\frac{1}{2}$ geeft $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{5-2x} = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{5-2x} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{5-2x} = 1$$

$$5-2x = 1$$

$$-2x = -4$$

$$x = 2$$

Dus $A(2, -\frac{1}{2})$.

$$f(x) = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5-2x} = -1 + \frac{1}{2}(5-2x)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{4}(5-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2 = \frac{-1}{2(5-2x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{5-2x}}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = -\frac{1}{2\sqrt{5-2 \cdot 2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, -\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

e $g(x) = x + 1$ geeft $\frac{2x-1}{5-2x} = x + 1$

$$2x-1 = (x+1)(5-2x)$$

$$2x-1 = 5x-2x^2+5-2x$$

$$2x^2-x-6=0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -6 = 49$$

$$x = \frac{1+7}{4} = 2 \vee x = \frac{1-7}{4} = -1\frac{1}{2}$$

$x = -1\frac{1}{2}$ geeft $y = -1\frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$, dus $B(-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

$x = 2$ geeft $y = 2 + 1 = 3$, dus $C(2, 3)$.

$$BC = \sqrt{(2 - (-1\frac{1}{2}))^2 + (3 - (-\frac{1}{2}))^2} = \sqrt{24\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{f } y &= -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5-2x} \\ \frac{1}{2}\sqrt{5-2x} &= y+1 \\ \sqrt{5-2x} &= 2y+2 \\ \text{kwadrateren geeft} \\ 5-2x &= 4y^2+8y+4 \\ -2x &= 4y^2+8y-1 \\ x &= -2y^2-4y+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g } y &= \frac{2x-1}{5-2x} \\ \frac{2x-1}{5-2x} &= y \\ 2x-1 &= y(5-2x) \\ 2x-1 &= 5y-2xy \\ 2xy+2x &= 5y+1 \\ x(2y+2) &= 5y+1 \\ x &= \frac{5y+1}{2y+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{33 a } f(x) = 0 \text{ geeft } \frac{2x-6}{x+2} - x + 3 &= 0 \\ \frac{2x-6}{x+2} &= x-3 \\ 2x-6 &= (x+2)(x-3) \\ 2x-6 &= x^2-3x+2x-6 \\ -x^2+3x &= 0 \\ -x(x-3) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Dus de snijpunten zijn (0, 0) en (3, 0).

$$\begin{aligned} \text{b } k(x) = f(g(x)) &= \frac{2(x-5)-6}{x-5+2} - (x-5) + 3 \\ &= \frac{2x-10-6}{x-3} - x + 8 \\ &= \frac{2x-16+(x-3)(-x+8)}{x-3} \\ &= \frac{2x-16-x^2+8x+3x-24}{x-3} \\ &= \frac{-x^2+13x-40}{x-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } v(x) = f(x) - g(x) &= \frac{2x-6}{x+2} - x + 3 - (x-5) \\ &= \frac{2x-6}{x+2} - 2x + 8 \\ &= \frac{2x-6+(-2x+8)(x+2)}{x+2} \\ &= \frac{2x-6-2x^2-4x+8x+16}{x+2} \\ &= \frac{-2x^2+6x+10}{x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d } l(x) = f(h(x)) &= \frac{2 \cdot \frac{a}{x} - 6}{\frac{a}{x} + 2} - \frac{a}{x} + 3 = \frac{2a - 6x}{a + 2x} - \frac{a}{x} + 3 \\
 \text{door } \left(\frac{1}{2}, -4\right) &\left\{ \begin{aligned} \frac{2a - 6 \cdot \frac{1}{2}}{a + 2 \cdot \frac{1}{2}} - \frac{a}{\frac{1}{2}} + 3 &= -4 \\ \frac{2a - 3}{a + 1} - 2a &= -7 \\ \frac{2a - 3}{a + 1} &= 2a - 7 \\ 2a - 3 &= (2a - 7)(a + 1) \\ 2a - 3 &= 2a^2 + 2a - 7a - 7 \\ -2a^2 + 7a + 4 &= 0 \\ 2a^2 - 7a - 4 &= 0 \\ D &= (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -4 = 81 \\ a &= \frac{7 + 9}{4} = 4 \vee a = \frac{7 - 9}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Bladzijde 224

- 34 a** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$ geeft $f'(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$
 $(x^2 + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 + x + 2 = f'(x)$
- b** $f'(x) = 0$ geeft $(x^2 + 1)(x + 2) = 0$, dus $x = -2$.
 $f(-2) = \frac{1}{4} \cdot 16 + \frac{2}{3} \cdot -8 + \frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \cdot -2 = 4 - 5\frac{1}{3} + 2 - 4 = -3\frac{1}{3}$, dus $A(-2, -3\frac{1}{3})$.
 $g(-2) = \frac{1}{3} \cdot -8 - 2 + 1\frac{1}{3} = -2\frac{2}{3} - 2 + 1\frac{1}{3} = -3\frac{1}{3}$, dus de grafiek van g gaat door A .
- c** $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 1\frac{1}{3}$ geeft $g'(x) = x^2 + 1$
 $f'(p) = g'(p)$ geeft $(p^2 + 1)(p + 2) = p^2 + 1$
 $p^2 + 1 = 0 \vee p + 2 = 1$
 $p^2 = -1 \vee p = -1$
geen opl.

Voor de lengte L van het lijnstuk CD geldt $L = g(p) - f(p)$.

$$\frac{dL}{dp} = g'(p) - f'(p)$$

L is minimaal voor de waarde van p die volgt uit $\frac{dL}{dp} = 0$.

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } g'(p) - f'(p) = 0 \text{ oftewel } f'(p) = g'(p).$$

Dus L is minimaal voor $p = -1$.

12 Examentraining

$$\begin{aligned}
 \text{35 } y &= ax + 3 \\
 \text{door } A(4, 9) &\left\{ \begin{aligned} 4a + 3 &= 9 \\ 4a &= 6 \\ a &= 1\frac{1}{2} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\text{36 } \text{Uit } \triangle BEF \sim \triangle CED \text{ volgt } \frac{BE}{CE} = \frac{BF}{CD} \text{ oftewel } \frac{4}{2} = \frac{BF}{6}.$$

$$\text{Dus } BF = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12.$$

$$\begin{aligned}
 \text{37 } \frac{x^2 - 10}{x - 2} &= \frac{3x}{x - 2} \\
 x^2 - 10 &= 3x \\
 x^2 - 3x - 10 &= 0 \\
 (x + 2)(x - 5) &= 0 \\
 x &= -2 \vee x = 5
 \end{aligned}$$

$$\text{38 } f(x) = 5x^2 - (2x + 3)^4 \text{ geeft } f'(x) = 10x - 4(2x + 3)^3 \cdot 2 = 10x - 8(2x + 3)^3$$

39 evenwichtsstand = $\frac{5 + -1}{2} = 2$, dus $a = 2$

amplitude = $5 - 2 = 3$, dus $b = 3$

periode = $1\frac{1}{3}\pi$, dus $c = \frac{2\pi}{1\frac{1}{3}\pi} = 1\frac{1}{2}$

stijgend door de evenwichtsstand voor $x = \frac{1}{3}\pi$, dus $d = \frac{1}{3}\pi$

Dit geeft $y = 2 + 3 \sin(1\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}\pi))$.

Bladzijde 225

40 $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 8 = 0$

$x^2 - 6x + y^2 + 8y - 8 = 0$

$(x - 3)^2 - 9 + (y + 4)^2 - 16 - 8 = 0$

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 33$

Het middelpunt is $M(3, -4)$ en de straal is $r = \sqrt{33}$.

$d(A, M) = \sqrt{(3 - 3)^2 + (-4 - 2)^2} = 6$

$d(A, M) > r$, dus A buiten c .

41 Stel $A = at + b$ met $a = \frac{200 - 100}{15 - 5} = 10$.

$$\left. \begin{array}{l} A = 10t + b \\ t = 5 \text{ en } A = 100 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 10 \cdot 5 + b = 100 \\ b = 50 \end{array}$$

Dus $A = 10t + 50$.

42 $\frac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{1\frac{1}{4}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{2}{5}\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{2}{5}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{9}{10}\sqrt{5}$

43 $\frac{1}{4}a^{-\frac{2}{3}} \cdot (b^{-5})^6 \cdot c^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} \cdot b^{-30} \cdot c \cdot c^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \frac{1}{b^{30}} \cdot c\sqrt{c} = \frac{c\sqrt{c}}{4b^{30} \cdot \sqrt[3]{a^2}}$

44 De lengte van het lijnstuk AB is L .

$L = \sqrt{2p + 7} - (\frac{2}{3}p + \frac{7}{3}) = (2p + 7)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}p - \frac{7}{3}$ geeft

$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2}(2p + 7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{(2p + 7)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{2p + 7}} - \frac{2}{3}$

$\frac{dL}{dp} = 0$ geeft $\frac{1}{\sqrt{2p + 7}} - \frac{2}{3} = 0$

$\frac{1}{\sqrt{2p + 7}} = \frac{2}{3}$

$2\sqrt{2p + 7} = 3$

$\sqrt{2p + 7} = 1\frac{1}{2}$

$2p + 7 = 2\frac{1}{4}$

$2p = -4\frac{3}{4}$

$p = -2\frac{3}{8}$

45 evenwichtsstand = $\frac{15 + 9}{2} = 12$, dus $a = 12$

amplitude = $15 - 12 = 3$, dus $b = 3$

periode = 12, dus $c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$

beginpunt $(3, 12)$, dus $d = 3$

46 $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$
 $(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = 0$
 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$
Dus van c is het middelpunt $M(-2, 1)$ en de straal $r_c = \sqrt{5}$.
 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 6y + 15 = 0$
 $(x-4)^2 - 16 + (y-3)^2 - 9 + 15 = 0$
 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 10$
Dus van d is het middelpunt $N(4, 3)$ en de straal $r_d = \sqrt{10}$.
 $d(M, N) = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
 $d(c, d) = 2\sqrt{10} - \sqrt{5} - \sqrt{10} = \sqrt{10} - \sqrt{5}$

47 $(2x-1)^2 = 10x+1$
 $4x^2 - 4x + 1 = 10x + 1$
 $4x^2 - 14x = 0$
 $2x(2x-7) = 0$
 $2x = 0 \vee 2x = 7$
 $x = 0 \vee x = 3\frac{1}{2}$

48 $\angle C = 180^\circ - 75^\circ - 35^\circ = 70^\circ$
Teken de hoogtelijn BD , zie de figuur.

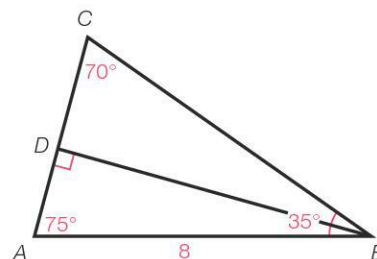
In $\triangle ABD$ is $\sin(75^\circ) = \frac{BD}{8}$

$$BD = 8 \sin(75^\circ) = 7,72...$$

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\frac{AC}{\sin(35^\circ)} = \frac{8}{\sin(70^\circ)}$

$$AC = \frac{8 \sin(35^\circ)}{\sin(70^\circ)} = 4,88...$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 4,88... \cdot 7,72... \approx 18,87$$



49 $5\sqrt{x} - x = 6$
 $5\sqrt{x} = x + 6$
kwadrateren geeft
 $25x = x^2 + 12x + 36$
 $x^2 - 13x + 36 = 0$
 $(x-4)(x-9) = 0$
 $x = 4 \vee x = 9$
 $x = 4$ geeft $5\sqrt{4} - 4 = 6$ vold.
 $x = 9$ geeft $5\sqrt{9} - 9 = 6$ vold.

50 De lijn l staat loodrecht op k en gaat door A .

$$\left. \begin{array}{l} l: 2x - y = c \\ \text{door } A(4, 5) \end{array} \right\} c = 2 \cdot 4 - 5 = 3$$

Dus $l: 2x - y = 3$.

k snijden met l geeft het snijpunt S .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 4x - 2y = 6 \end{array} \right. +$$

$$\frac{5x = 10}{x = 2} + \left\{ \begin{array}{l} 2 + 2y = 4 \\ 2y = 2 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

Dus $S(2, 1)$.

$$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(2-4)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}
 51 \quad & 5 - {}^2\log(5x+2) = 0 \\
 & {}^2\log(5x+2) = 5 \\
 & 5x+2 = 2^5 \\
 & 5x = 30 \\
 & x = 6
 \end{aligned}$$

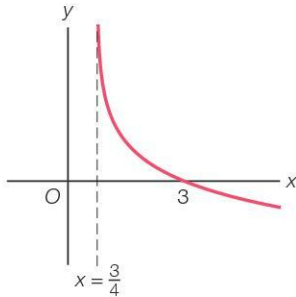
$$\begin{aligned}
 52 \quad & y = \sqrt{x} \\
 & \downarrow \text{verm. } x\text{-as, } 5 \\
 & y = 5\sqrt{x} \\
 & \downarrow \text{translatie } (-4, -5) \\
 & y = 5\sqrt{x+4} - 5 \\
 & \downarrow \text{verm. } y\text{-as, } 2 \\
 & f(x) = 5\sqrt{\frac{1}{2}x+4} - 5
 \end{aligned}$$

Bladzijde 226

$$53 \quad \text{De helling van de lijn } AB \text{ is } \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{5,2-(-4,8)}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 54 \quad & 4(5x-2)^3 = 500 \\
 & (5x-2)^3 = 125 \\
 & 5x-2 = 5 \\
 & 5x = 7 \\
 & x = 1\frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 55 \quad & 4x-3=0 \\
 & 4x=3 \\
 & x=\frac{3}{4} \\
 & \text{De verticale asymptoot is de lijn } x=\frac{3}{4}. \\
 & 2 - {}^3\log(4x-3) = 0 \text{ geeft } {}^3\log(4x-3) = 2 \\
 & \quad 4x-3=9 \\
 & \quad 4x=12 \\
 & \quad x=3
 \end{aligned}$$

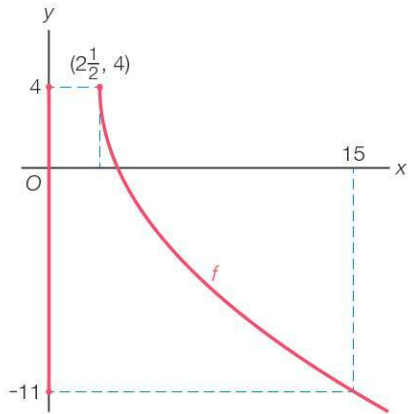


$$2 - {}^3\log(4x-3) \geq 0 \text{ geeft } \frac{3}{4} < x \leq 3$$

$$\begin{aligned}
 56 \quad & \text{Substitutie van } y = ax + 1 \text{ in } x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0 \text{ geeft} \\
 & x^2 + (ax+1)^2 - 8x + 2(ax+1) + 7 = 0 \\
 & x^2 + a^2x^2 + 2ax + 1 - 8x + 2ax + 2 + 7 = 0 \\
 & a^2x^2 + x^2 + 4ax - 8x + 10 = 0 \\
 & (a^2+1)x^2 + (4a-8)x + 10 = 0 \\
 & D = (4a-8)^2 - 4 \cdot (a^2+1) \cdot 10 = 16a^2 - 64a + 64 - 40a^2 - 40 = -24a^2 - 64a + 24 \\
 & D = 0 \text{ geeft } -24a^2 - 64a + 24 = 0 \\
 & \quad 3a^2 + 8a - 3 = 0 \\
 & \quad D = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100 \\
 & \quad a = \frac{-8+10}{6} = \frac{1}{3} \vee a = \frac{-8-10}{6} = -3
 \end{aligned}$$

57 $f(x) = {}^2\log(x)$
 $\downarrow$ translatie (4, 0)
 $y = {}^2\log(x - 4)$
 $\downarrow$ verm. y-as, 2
 $g(x) = {}^2\log(\frac{1}{2}x - 4) = {}^2\log(\frac{1}{2}(x - 8)) = {}^2\log(\frac{1}{2}) + {}^2\log(x - 8) = -1 + {}^2\log(x - 8)$
Dus $a = -1$ en $b = 8$.

58 $2x - 5 = 0$
 $2x = 5$
 $x = 2\frac{1}{2}$
Dus het randpunt is $(2\frac{1}{2}, 4)$ en $B_f = \langle \leftarrow, 4 \rangle$.
 $f(15) = 4 - 3\sqrt{30 - 5} = 4 - 3\sqrt{25} = 4 - 15 = -11$



$x \leq 15$ geeft $-11 \leq f(x) \leq 4$

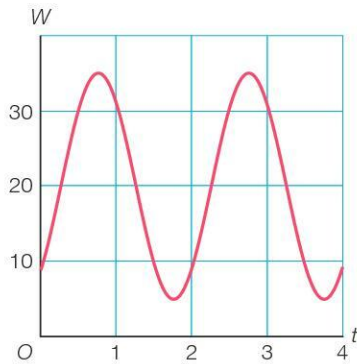
59 $f(x) = ax^2 + 6x + a$ geeft $f'(x) = 2ax + 6$
 $f'(3) = 4$ geeft $2a \cdot 3 + 6 = 4$
 $6a = -2$
 $a = -\frac{1}{3}$

60 $f(x) = \frac{1}{x+4} + 2$
 $\downarrow$ translatie (9, 6)
 $g(x) = \frac{1}{x-9+4} + 2 + 6 = \frac{1}{x-5} + 8$

61 $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3} = 0$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x+1)(x-3) = 0$
 $x = -1 \vee x = 3$

62 $f(x) = (2x+1)(\sqrt{x}-1) = 2x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x} - 1 = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x + x^{\frac{1}{2}} - 1$ geeft
 $f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - 2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} - 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

63 $W = 20 + 15\cos(\pi(t - \frac{3}{4}))$
evenwichtsstand = 20
amplitude = 15
periode = $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
beginpunt $(\frac{3}{4}, 35)$ is een hoogste punt



Voer in $y_1 = 20 + 15 \cos(\pi(x - \frac{3}{4}))$ en $y_2 = 30$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,48$, $x \approx 1,02$, $x \approx 2,48$ en $x \approx 3,02$.

$W > 30$ geeft $0,48 < t < 1,02 \vee 2,48 < t < 3,02$

64 $k: y = 3x - 4$
 $\tan(\alpha) = 3$ geeft $\alpha = 71,56...^\circ$
 $l: 4x - 3y = 5$
 $-3y = -4x + 5$
 $y = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}$

$\tan(\beta) = 1\frac{1}{3}$ geeft $\beta = 53,13...^\circ$

$\alpha - \beta = 71,56...^\circ - 53,13...^\circ \approx 18,4^\circ$

Dus de hoek tussen k en l is ongeveer $18,4^\circ$.

65 $l: 2x - 3y = 27$
 door $A(3, p)$ $\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 3 - 3 \cdot p = 27 \\ 6 - 3p = 27 \\ -3p = 21 \\ p = -7 \end{array} \right.$

66 De cosinusregel geeft $6^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(\angle A)$
 $36 = 16 + 9 - 24 \cos(\angle A)$
 $24 \cos(\angle A) = -11$
 $\cos(\angle A) = -\frac{11}{24}$
 $\angle A \approx 117,3^\circ$

67 $\frac{a^3}{a^5} \cdot (a^4)^n = a^{-2} \cdot a^{4n} = a^{4n-2}$

Bladzijde 227

68 $f(x) = \frac{4}{x+1} - 2 = 4(x+1)^{-1} - 2$ geeft $f'(x) = -4(x+1)^{-2} = -\frac{4}{(x+1)^2}$

$rc_k = f'(3) = -\frac{1}{4}$

$l \perp k$, dus $rc_l = 4$.

$y = 4x + b$
 door $A(3, -1)$ $\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 3 + b = -1 \\ b = -13 \end{array} \right.$

Dus $l: y = 4x - 13$.

$4x - 13 = 0$ geeft $4x = 13$

$x = 3\frac{1}{4}$

Dus $B(3\frac{1}{4}, 0)$.

69 $\sin(\frac{3}{4}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $\frac{3}{4}x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{3}{4}x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{4}{9}\pi + k \cdot 2\frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{7}{9}\pi + k \cdot 2\frac{2}{3}\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{7}{9}\pi$

70 Substitutie van $y = x$ in $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ geeft $x^2 + x^2 + 4x - 6x + 3 = 0$
 $2x^2 - 2x + 3 = 0$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20$

$D < 0$, dus geen oplossingen.

Dus k heeft geen punten gemeenschappelijk met c .

71 $\frac{1}{2}(2x - 5)^2 + 3 = 5$
 $\frac{1}{2}(2x - 5)^2 = 2$
 $(2x - 5)^2 = 4$
 $2x - 5 = 2 \vee 2x - 5 = -2$
 $2x = 7 \vee 2x = 3$
 $x = 3\frac{1}{2} \vee x = 1\frac{1}{2}$

72 Stel $EF = x$, dan is $FG = 2x$ en $BF = \frac{2x}{\sqrt{2}} = x\sqrt{2}$.

$$AE + EF + BF = 8$$

$$x\sqrt{2} + x + x\sqrt{2} = 8$$

$$2x\sqrt{2} + x = 8$$

$$x(2\sqrt{2} + 1) = 8$$

$$x = \frac{8}{2\sqrt{2} + 1}$$

Dus $EF = \frac{8}{2\sqrt{2} + 1}$.

73 $2x - 3 \geq 0$
 $2x \geq 3$
 $x \geq 1\frac{1}{2}$
Dus $D_f = [1\frac{1}{2}, \rightarrow)$.

Het randpunt is $(1\frac{1}{2}, 6)$ en $B_f = \langle \leftarrow, 6]$.

74 $d(P, Q) = \sqrt{(q-2)^2 + (2q-3)^2} = \sqrt{q^2 - 4q + 4 + 4q^2 - 12q + 9} = \sqrt{5q^2 - 16q + 13}$

Voer in $y_1 = \sqrt{5x^2 - 16x + 13}$.

De optie minimum geeft $x = 1,6$ en $y \approx 0,45$.

Dus de minimale afstand tussen P en Q is ongeveer 0,45.

75 $g_{\text{jaar}} = 0,947$

$0,947^T = \frac{1}{2}$ geeft $T = {}^{0,947}\log(\frac{1}{2}) = 12,728\dots$

De halveringstijd is 12 jaar en $0,728\dots \times 12 \approx 9$ maanden.

76 $N = aF^{1,5}$ oftewel $a = \frac{N}{F^{1,5}}$, dus bereken telkens $\frac{N}{F^{1,5}}$.

$$\frac{13,0}{3^{1,5}} \approx 2,5; \frac{46,3}{7^{1,5}} \approx 2,5; \frac{67,5}{9^{1,5}} = 2,5 \text{ en } \frac{145,2}{15^{1,5}} \approx 2,5$$

De uitkomsten zijn vrijwel gelijk, dus N is evenredig met $F^{1,5}$ en de formule is $N = 2,5F^{1,5}$.

77 Op $[3, 5]$ is de toename $2 \cdot 4 = 8$.

Op $[3, 10]$ is de toename $7 \cdot -2 = -14$.

Op $[5, 10]$ is de toename $-14 - 8 = -22$.

Het differentiequotiënt op $[5, 10]$ is $\frac{-22}{5} = -4,4$.

$$\begin{aligned} 78 \quad & \left. \begin{aligned} y &= ax^2 + 1\frac{1}{2}x + 3 \\ \text{door } (2, 9) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 4a + 3 + 3 &= 9 \\ 4a &= 3 \\ a &= \frac{3}{4} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } y = \frac{3}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x + 3.$$

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}} = -1 \text{ en } y_{\text{top}} = \frac{3}{4} \cdot (-1)^2 + 1\frac{1}{2} \cdot (-1) + 3 = 2\frac{1}{4}$$

$$\text{Dus de top is } (-1, 2\frac{1}{4}).$$

$$\begin{aligned} 79 \quad & 5 \cdot 2^{3x-2} = 80 \\ & 2^{3x-2} = 16 \\ & 2^{3x-2} = 2^4 \\ & 3x - 2 = 4 \\ & 3x = 6 \\ & x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 80 \quad & x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \\ & x^2 - 2x + y^2 + 2y - 3 = 0 \\ & (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 - 3 = 0 \\ & (x-1)^2 + (y+1)^2 = 5 \\ & \text{Dus het middelpunt is } M(1, -1) \text{ en de straal is } r = \sqrt{5}. \\ & d(A, M) = \sqrt{(1-4)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \\ & d(A, c) = d(A, M) - r = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Bladzijde 228

$$81 \quad N = \frac{1}{2}\log(16x^3) = \frac{1}{2}\log(16) + \frac{1}{2}\log(x^3) = -4 + 3 \cdot \frac{1}{2}\log(x)$$

$$\begin{aligned} 82 \quad & f(x) = 0 \text{ geeft } (\frac{1}{2}x - 1)^3 - 1 = 0 \\ & (\frac{1}{2}x - 1)^3 = 1 \\ & \frac{1}{2}x - 1 = 1 \\ & \frac{1}{2}x = 2 \\ & x = 4 \end{aligned}$$

$$f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)^3 - 1 \text{ geeft } f'(x) = 3(\frac{1}{2}x - 1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 1)^2$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'(4) = 1\frac{1}{2}.$$

$$\left. \begin{aligned} y &= 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(4, 0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 1\frac{1}{2} \cdot 4 + b &= 0 \\ b &= -6 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } k: y = 1\frac{1}{2}x - 6.$$

De lijn l gaat door B en staat loodrecht op k .

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l = -\frac{2}{3}.$$

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } B(-1, -1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -\frac{2}{3} \cdot -1 + b &= -1 \\ b &= -1\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}.$$

Het snijpunt van k en l is het punt S .

$$1\frac{1}{2}x - 6 = -\frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$$

$$2\frac{1}{6}x = 4\frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1\frac{1}{2}x - 6 \end{aligned} \right\} y = -3$$

$$\text{Dus } S(2, -3).$$

$$d(k, B) = d(S, B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-(-3))^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

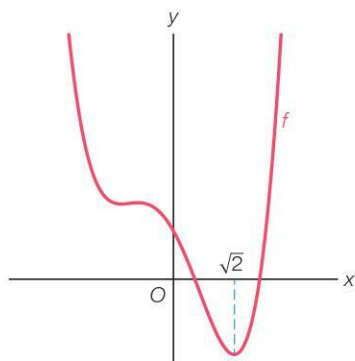
83 Voer in $y_1 = \frac{10x^2}{x^2 + 10}$, $y_2 = \left[\frac{dy_1}{dx} \right]_{x=x}$ en $y_3 = 1$.

De optie snijpunt met y_2 en y_3 geeft $x \approx 0,528$ en $x \approx 4,455$.

84 Voer in $y_1 = -0,2x^3 + 0,3x^2 + 2x - 2$.

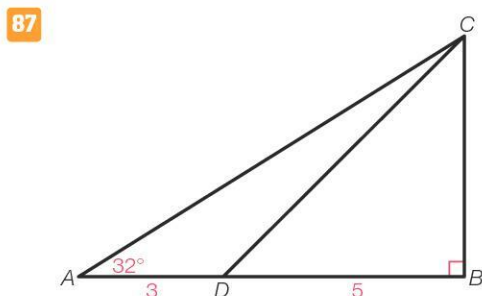
De optie nulpunt geeft de nulpunten $-2,98$, $0,95$ en $3,53$.

85 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 1$ geeft $f'(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$
 $f'(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} - 2 = 0$



Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{2}$.

86 $y = \sin(x)$
 $\downarrow$ translatie $(\frac{1}{3}\pi, 2)$
 $y = \sin(x - \frac{1}{3}\pi) + 2$
 $\downarrow$ verm. x-as, $1\frac{1}{2}$
 $f(x) = 1\frac{1}{2}\sin(x - \frac{1}{3}\pi) + 3$



In $\triangle ABC$ is $\tan(32^\circ) = \frac{BC}{8}$

$$BC = 8 \tan(32^\circ) = 4,99...$$

In $\triangle BCD$ is $\tan(\angle BCD) = \frac{5}{4,99...}$

$$\angle BCD = 45,00...^\circ$$

$$\angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$$

$$\angle ACD = \angle ACB - \angle BCD = 58^\circ - 45,00...^\circ \approx 13,0^\circ$$

88
$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{2}{x+3} - \frac{x-1}{2x+1} = \frac{2(2x+1) - (x-1)(x+3)}{(x+3)(2x+1)} = \frac{4x+2 - (x^2+3x-x-3)}{(x+3)(2x+1)}$$

$$= \frac{4x+2-x^2-3x+x+3}{(x+3)(2x+1)} = \frac{-x^2+2x+5}{(x+3)(2x+1)}$$

89 Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{13 - 3}{6 - 1} = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } A(1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 1 + b = 3 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $k: y = 2x + 1$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3 - 1}{6 - 4} = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } C(4, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 4 + b = 1 \\ b = 9 \end{array}$$

Dus $l: y = -2x + 9$.

k snijden met l geeft $2x + 1 = -2x + 9$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2x + 1 \end{array} \right\} y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

Dus $S(2, 5)$.

90 $\angle R = 180^\circ - 62^\circ - 48^\circ = 70^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{PQ}{\sin(70^\circ)} = \frac{8,4}{\sin(48^\circ)}$, dus $PQ = \frac{8,4 \sin(70^\circ)}{\sin(48^\circ)} \approx 10,6$.

91 Voer in $y_1 = x^3 - 8x^2 + 4x + 6$.

De optie maximum geeft $x \approx 0,26$ en $y \approx 6,52$.

De optie minimum geeft $x \approx 5,07$ en $y \approx -49,04$.

Dus max. is $f(0,26) \approx 6,52$ en min. is $f(5,07) \approx -49,04$.

92 $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1} = (2x-1)^{\frac{1}{2}} + (2x+1)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 + \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

93 $c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$ met $r = d(M, k)$

De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} l: 2x - y = c \\ \text{door } M(3, 4) \end{array} \right\} c = 2 \cdot 3 - 4 = 2$$

Dus $l: 2x - y = 2$.

k en l snijden geeft het punt S .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 6 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right\} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 6 \\ 4x - 2y = 4 \end{array} \right. + \frac{5x = 10}{5} + \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ x + 2y = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 + 2y = 6 \\ 2y = 4 \\ y = 2 \end{array}$$

Dus $S(2, 2)$.

$$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(2-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}$$

Dus $c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Bladzijde 229

94 Voer in $y_1 = 3 + 4 \sin(x) - 2 + 3 \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$.

De optie maximum geeft $x = 1,904...$ en $y = 7,478...$

De optie minimum geeft $x = 5,045...$ en $y = -5,478...$

$$a = \frac{7,478... + (-5,478...)}{2} = 1$$

$$b = 7,478... - 1 \approx 6,48$$

$$\frac{1}{2} \text{ periode} = 5,045... - 1,904... = 3,141..., \text{ dus periode} = 2 \cdot 3,141... = 6,283..., \text{ dus } c = \frac{2\pi}{6,283...} = 1.$$

Voer in $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft beginpunt $(0,333...; 1)$, dus $d \approx 0,33$.

Dus $s(x) = 1 + 6,48 \sin(x - 0,33)$.

95 Substitutie van $y = 4x + 11$ in $5x + 6y = 18$ geeft $5x + 6(4x + 11) = 18$

$$\begin{aligned} 5x + 24x + 66 &= 18 \\ 29x &= -48 \\ x &= -1\frac{19}{29} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 5x + 24x + 66 &= 18 \\ 29x &= -48 \\ x &= -1\frac{19}{29} \end{aligned}} \right\} y = 4 \cdot -1\frac{19}{29} + 11 = 4\frac{11}{29}$$

$$y = 4x + 11$$

Dus de oplossing is $(x, y) = (-1\frac{19}{29}, 4\frac{11}{29})$.

96 $2x\sqrt{3} - x\sqrt{2} = 12$

$$x(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 12$$

$$x = \frac{12}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

97 $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)^5 + 16$

↓ translatie (6, -10)

$$g(x) = \frac{1}{3}(x-6+2)^5 + 16 - 10$$

oftewel $g(x) = \frac{1}{3}(x-4)^5 + 6$

98 $k: 2x + y = 3$

$$y = -2x + 3$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = -2 \text{ geeft } \alpha = -63,43\dots^\circ$$

$$l: 3x - 2y = 5$$

$$-2y = -3x + 5$$

$$y = 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = 56,30\dots^\circ$$

$$\beta - \alpha = 56,30\dots^\circ - (-63,43\dots^\circ) \approx 119,7^\circ$$

Dus de gevraagde hoek is $180^\circ - 119,7^\circ = 60,3^\circ$.

99 $g_{\text{week}} = 0,72$ geeft $g_{\text{dag}} = 0,72^{\frac{1}{7}} \approx 0,954$

Dus de afname per dag is 4,6%.

100 $p = 10q^{1,36}$

$$10q^{1,36} = p$$

$$q^{1,36} = 0,1p$$

$$q = (0,1p)^{\frac{1}{1,36}} = 0,1^{\frac{1}{1,36}} \cdot p^{\frac{1}{1,36}} \approx 0,18 \cdot p^{0,74}$$

Dus $q = 0,18p^{0,74}$.

101 $3x + 2 \leq 11$ $\frac{1}{2}x - 3 < 1\frac{1}{2}x + 4$

$$3x \leq 9$$

$$-x < 7$$

$$x \leq 3$$

$$x > -7$$

Dus $\langle -7, 3 \rangle$.

102 De top is (4, 3), dus stel $y = a(x-4)^2 + 3$.

$$\left. \begin{aligned} y &= a(x-4)^2 + 3 \\ \text{door } (2, -3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a(2-4)^2 + 3 &= -3 \\ 4a &= -6 \\ a &= -1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$y = -1\frac{1}{2}(x-4)^2 + 3 = -1\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16) + 3 = -1\frac{1}{2}x^2 + 12x - 24 + 3 = -1\frac{1}{2}x^2 + 12x - 21$$

Dus de formule is $y = -1\frac{1}{2}x^2 + 12x - 21$.

103 Het bereik van f is $B_f = \langle -5, \rightarrow \rangle$ en de grafiek van f is dalend.

$$f(1) = (\frac{1}{2})^{1-3} - 5 = -1$$

$x \geq 1$ geeft $-5 < f(x) \leq -1$

104 $c: (x-3)^2 + (y+2)^2 = r^2$ met $r = d(M, k)$
 De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} l: 2x - y = c \\ \text{door } M(3, -2) \end{array} \right\} c = 2 \cdot 3 + 2 = 8$$

 Dus $l: 2x - y = 8$.
 k en l snijden geeft het punt S .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 4x - 2y = 16 \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{l} 5x = 20 \\ x = 4 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ x + 2y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 + 2y = 4 \\ y = 0 \end{array}$$

 Dus $S(4, 0)$.
 $d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(4-3)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{5}$
 Dus $c: (x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$.

105 $y = \frac{1}{4} \cdot {}^3\log(2x-3)$
 $\frac{1}{4} \cdot {}^3\log(2x-3) = y$
 ${}^3\log(2x-3) = 4y$
 $2x-3 = 3^{4y}$
 $2x = 3^{4y} + 3$
 $x = \frac{1}{2} \cdot 3^{4y} + 1\frac{1}{2}$

106 Voer in $y_1 = \frac{100x^2}{x^2+4}$.
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=4} = 8$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 8x + b \\ f(4) = 80, \text{ dus } A(4, 80) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 \cdot 4 + b = 80 \\ 32 + b = 80 \\ b = 48 \end{array}$$

 Dus $k: y = 8x + 48$.

107 $h(x) = g(f(x)) = \frac{a}{(3^{x-2})^2}$
 $h(3) = 1$ geeft $\frac{a}{(3^{3-2})^2} = 1$

$$\frac{a}{(3^1)^2} = 1$$

$$\frac{a}{3^2} = 1$$

$$\frac{a}{9} = 1$$

$$a = 9$$

Bladzijde 230

108 $x^4 + 5 = 6x^2$
 $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 6u + 5 = 0$
 $(u-1)(u-5) = 0$
 $u = 1 \vee u = 5$
 $x^2 = 1 \vee x^2 = 5$
 $x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$

109 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ geeft $f'(x) = x^2 - x$
 $f'(x) = 6$ geeft $x^2 - x = 6$

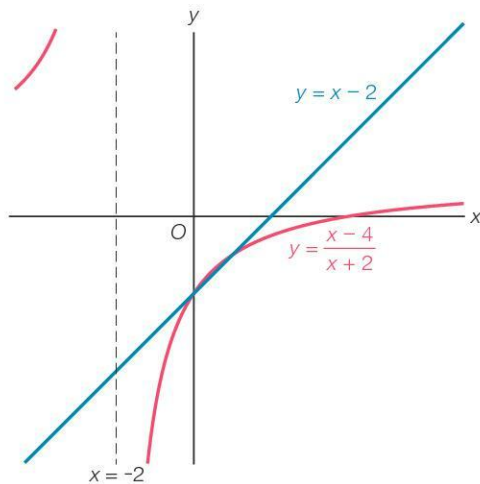
$$\begin{array}{l} x^2 - x - 6 = 0 \\ (x+2)(x-3) = 0 \\ x = -2 \vee x = 3 \end{array}$$

 $f(-2) = -2\frac{2}{3}$ en $f(3) = 6\frac{1}{2}$
 Dus $A(-2, -2\frac{2}{3})$ en $B(3, 6\frac{1}{2})$.

110 $y_P = 0,95$, dus $\sin(\alpha_P) = 0,95$.
 De GR geeft 1,253...
 Uit figuur G.28 in het leerboek volgt $\alpha_P = \pi - 1,253... = 1,888...$
 $x_Q = -0,47$, dus $\cos(\alpha_Q) = -0,47$.
 De GR geeft 2,060...
 Uit figuur G.28 in het leerboek volgt $\alpha_Q = 2\pi - 2,06... = 4,223...$
 $\angle POQ = \alpha_Q - \alpha_P = 4,223... - 1,888... \approx 2,33$

111 $N = 8500 \cdot 0,925^t$
 $\log(N) = \log(8500 \cdot 0,925^t)$
 $\log(N) = \log(8500) + \log(0,925^t)$
 $\log(N) = \log(8500) + t \cdot \log(0,925)$
 $\log(N) = 3,929... + t \cdot -0,0338...$
 Dus $\log(N) = -0,034t + 3,93$.

112 $\frac{x-4}{x+2} = x-2$
 $x-4 = (x-2)(x+2)$
 $x-4 = x^2-4$
 $x^2-x=0$
 $x(x-1)=0$
 $x=0 \vee x=1$



$\frac{x-4}{x+2} \geq x-2$ geeft $x < -2 \vee 0 \leq x \leq 1$

113 $k \parallel l$, dus $a = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } P(-2, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot -2 + b = 5 \\ 1 + b = 5 \\ b = 4 \end{array}$$

114 Uit $\triangle BFE \sim \triangle AFD$ volgt $\frac{BF}{AF} = \frac{BE}{AD}$ oftewel $\frac{10}{16} = \frac{BE}{6}$.
 Dus $BE = \frac{6 \cdot 10}{16} = 3\frac{3}{4}$.

115 $\frac{x^2-2}{x^2+2} = \frac{x^2-2}{x+4}$
 $x^2-2 = 0 \vee x^2+2 = x+4$
 $x^2 = 2 \vee x^2-x-2 = 0$
 $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee (x+1)(x-2) = 0$
 $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = -1 \vee x = 2$

$$116 \quad f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{1}{(3x-1)^2} = 4x^{-2} - (3x-1)^{-2} \text{ geeft } f'(x) = -8x^{-3} + 2(3x-1)^{-3} \cdot 3 = -\frac{8}{x^3} + \frac{6}{(3x-1)^3}$$

$$117 \quad \text{Stel } y = a + b \sin(c(x-d)).$$

$$a = \frac{160+90}{2} = 125$$

$$b = 160 - 125 = 35$$

$$\frac{1}{2} \text{ periode} = 15 - 3 = 12, \text{ dus periode} = 24, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi.$$

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 3 - \frac{1}{4} \cdot 24 = -3$, dus $d = -3$.

Dit geeft de formule $y = 125 + 35 \sin(\frac{1}{12}\pi(x+3))$.

Bladzijde 231

$$118 \quad x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$$

$$x^2 + 2x + y^2 + 6y = 0$$

$$(x+1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 10$$

$$\text{Dus } M(-1, -3) \text{ en } r = \sqrt{10}.$$

De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$l: 2x - 3y = a \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } M(-1, -3) \end{array} \right\} a = 2 \cdot -1 - 3 \cdot -3 = 7$$

$$\text{Dus } l: 2x - 3y = 7.$$

k snijden met l geeft het punt S .

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 9x + 6y = 12 \\ 4x - 6y = 14 \end{cases} + \\ \hline 13x = 26 \\ x = 2 \\ \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 3 \cdot 2 + 2y = 4 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 6 + 2y = 4 \\ 2y = -2 \\ y = -1 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } S(2, -1).$$

$$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-1 - (-3))^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$119 \quad \begin{cases} 2x + y = 6 \\ 12x - 5y = 3 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 5 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 10x + 5y = 30 \\ 12x - 5y = 3 \end{cases} + \\ \hline 22x = 33 \\ x = 1\frac{1}{2} \\ \begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2 \cdot 1\frac{1}{2} + y = 6 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 3 + y = 6 \\ y = 3 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } S(1\frac{1}{2}, 3).$$

$$120 \quad 4\sqrt{20a^2} - \sqrt{45a^2} = 4 \cdot 2a\sqrt{5} - 3a\sqrt{5} = 5a\sqrt{5}$$

$$121 \quad y = \frac{1}{4} \cdot (3x)^{-2} \cdot \frac{8}{x^{-5}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(3x)^2} \cdot 8x^5 = \frac{8x^5}{4 \cdot 9x^2} = \frac{2}{9}x^3$$

$$\text{Dus } y = \frac{2}{9}x^3.$$

$$122 \quad \text{Samenvallen, dus } \frac{2}{1} = \frac{a}{-2} = \frac{8}{b}.$$

$$\frac{2}{1} = \frac{a}{-2} \text{ geeft } a = -4$$

$$\frac{2}{1} = \frac{8}{b} \text{ geeft } 2b = 8 \text{ oftewel } b = 4$$

$$123 \quad g_{\text{jaar}} = 1,25 \text{ geeft } g_{\text{kwartaal}} = 1,25^{\frac{1}{4}} \approx 1,057$$

Dus de hoeveelheid neemt per kwartaal met 5,7% toe.

124 y is omgekeerd evenredig met $x\sqrt{x}$, dus $y = \frac{a}{x\sqrt{x}}$ oftewel $a = y \cdot x\sqrt{x}$.

$$x = 2 \text{ en } y = 6 \text{ geeft } a = 6 \cdot 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

$$\text{Dus } y = \frac{12\sqrt{2}}{x\sqrt{x}}.$$

$$x = 8 \text{ geeft } y = \frac{12\sqrt{2}}{8\sqrt{8}} = \frac{12\sqrt{2}}{8 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

125 $f(x) = 0,2x^2 - 2x + 1$

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{0,4} = 5 \text{ en } y_{\text{top}} = f(5) = 0,2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 + 1 = -4$$

$$g(5) = -0,3 \cdot 5^2 + 0,5 \cdot 5 + 1 = -7,5 + 2,5 + 1 = -4$$

Dus de top van de grafiek van f ligt op de grafiek van g .

126 Door $(2, 0)$ en $(5, 0)$, dus stel $y = a(x-2)(x-5)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = a(x-2)(x-5) \\ \text{door } (6, -3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a(6-2)(6-5) = -3 \\ a \cdot 4 \cdot 1 = -3 \\ a = -\frac{3}{4} \end{array}$$

$$\text{Dus } y = -\frac{3}{4}(x-2)(x-5).$$

$$x = 0 \text{ geeft } y = -\frac{3}{4} \cdot -2 \cdot -5 = -7\frac{1}{2}$$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, -7\frac{1}{2})$.

127 $y = (\frac{1}{4})^x$

↓ translatie $(-2, -3)$

$$f(x) = (\frac{1}{4})^{x+2} - 3$$

128 c met middelpunt $M(4, -2)$ raakt de x -as, dus $r = 2$.

$$\text{Dus } c: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 4.$$

129 $2^{5x-4} = 16^{x+1}$

$$2^{5x-4} = (2^4)^{x+1}$$

$$2^{5x-4} = 2^{4x+4}$$

$$5x-4 = 4x+4$$

$$x = 8$$

130 $f(x) = {}^2\log(x-2) + 3 \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } a} y = {}^2\log\left(\frac{1}{a} \cdot x - 2\right) + 3 \xrightarrow{b \text{ omhoog}} y = {}^2\log\left(\frac{1}{a} \cdot x - 2\right) + 3 + b$

$$x = 4 \text{ is asymptoot geeft } \frac{1}{a} \cdot 4 - 2 = 0$$

$$\frac{4}{a} = 2$$

$$a = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} y = {}^2\log(\frac{1}{2}x - 2) + 3 + b \\ \text{door } A(12, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} {}^2\log(\frac{1}{2} \cdot 12 - 2) + 3 + b = 2 \\ {}^2\log(4) + 3 + b = 2 \end{array}$$

$$2 + 3 + b = 2$$

$$b = -3$$

$$131 \quad \frac{s(5,01) - s(5)}{0,01} = 8,885\dots$$

De gevraagde snelheid is 8,89 m/s.

$$132 \quad \begin{aligned} x^3 + 10x &= 7x^2 \\ x^3 - 7x^2 + 10x &= 0 \\ x(x^2 - 7x + 10) &= 0 \\ x(x-2)(x-5) &= 0 \\ x = 0 \vee x = 2 \vee x = 5 \end{aligned}$$

$$133 \quad \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{5}x^4 - 2x^3 + x \text{ geeft } f'(x) = \frac{4}{5}x^3 - 6x^2 + 1 \\ \text{Stel } k: y &= ax + b \text{ met } a = f'(-1) = -\frac{4}{5} - 6 + 1 = -5\frac{4}{5}. \\ y &= -5\frac{4}{5}x + b \\ f(-1) &= 1\frac{1}{5}, \text{ dus } A(-1, 1\frac{1}{5}) \end{aligned} \left. \begin{aligned} & -5\frac{4}{5} \cdot -1 + b = 1\frac{1}{5} \\ & 5\frac{4}{5} + b = 1\frac{1}{5} \\ & b = -4\frac{3}{5} \end{aligned} \right\}$$

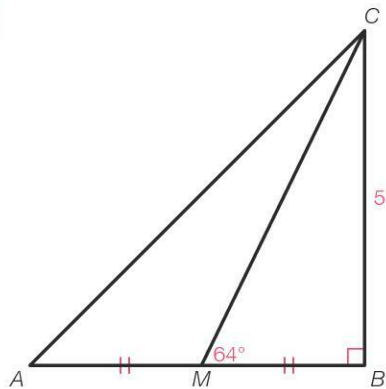
$$\text{Dus } k: y = -5\frac{4}{5}x - 4\frac{3}{5}.$$

$$134 \quad \begin{aligned} \text{Substitutie van } y &= \frac{1}{3}x + b \text{ in } x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0 \text{ geeft} \\ x^2 + (\frac{1}{3}x + b)^2 - 8x + 2(\frac{1}{3}x + b) + 7 &= 0 \\ x^2 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}bx + b^2 - 8x + \frac{2}{3}x + 2b + 7 &= 0 \\ 1\frac{1}{9}x^2 + (\frac{2}{3}b - 7\frac{1}{3})x + b^2 + 2b + 7 &= 0 \\ D = (\frac{2}{3}b - 7\frac{1}{3})^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{9} \cdot (b^2 + 2b + 7) &= \frac{4}{9}b^2 - 9\frac{7}{9}b + 53\frac{7}{9} - 4\frac{4}{9}b^2 - 8\frac{8}{9}b - 31\frac{1}{9} = -4b^2 - 18\frac{2}{3}b + 22\frac{2}{3} \\ D = 0 \text{ geeft } -4b^2 - 18\frac{2}{3}b + 22\frac{2}{3} &= 0 \\ 6b^2 + 28b - 34 &= 0 \\ D = 28^2 - 4 \cdot 6 \cdot -34 &= 1600 \\ b = \frac{-28 \pm 40}{12} = 1 \vee b = \frac{-28 - 40}{12} &= -5\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$135 \quad \begin{aligned} \log(N) &= -0,035t + 1,54 \\ N &= 10^{-0,035t + 1,54} \\ N &= 10^{-0,035t} \cdot 10^{1,54} \\ N &= 10^{1,54} \cdot (10^{-0,035})^t \\ N &\approx 35 \cdot 0,923^t \\ \text{Dus } N &= 35 \cdot 0,923^t. \end{aligned}$$

$$136 \quad \begin{aligned} y &= \frac{2x-3}{x-1} \\ \frac{2x-3}{x-1} &= y \\ 2x-3 &= y(x-1) \\ 2x-3 &= xy-y \\ 2x-xy &= 3-y \\ x(2-y) &= 3-y \\ x &= \frac{3-y}{2-y} \end{aligned}$$

$$137 \quad \begin{aligned} y &= \cos(x) \\ \downarrow \text{verm. } y\text{-as, } \frac{1}{2} \\ y &= \cos(2x) \\ \downarrow \text{translatie } (\frac{1}{6}\pi, -3) \\ f(x) &= \cos(2(x - \frac{1}{6}\pi)) - 3 \text{ oftewel } f(x) = \cos(2x - \frac{1}{3}\pi) - 3 \end{aligned}$$



In $\triangle BCM$ is $\tan(64^\circ) = \frac{5}{BM}$

$$BM = \frac{5}{\tan(64^\circ)} = 2,438\dots$$

$$AB = 2BM = 2 \cdot 2,438\dots = 4,877\dots$$

In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle A) = \frac{5}{4,877\dots}$

$$\angle A \approx 45,7^\circ$$

139 $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = 2$

$$x^2 - 2x = 2(x^2 - 4)$$

$$x^2 - 2x = 2x^2 - 8$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x - 2)(x + 4) = 0$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -4$$

vold. niet

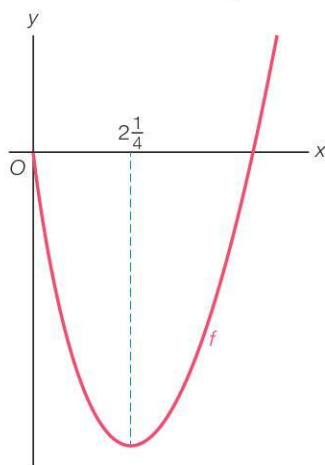
140 $f(x) = 4x\sqrt{x} - 9x = 4x^{1\frac{1}{2}} - 9x$ geeft $f'(x) = 6x^{\frac{1}{2}} - 9 = 6\sqrt{x} - 9$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 6\sqrt{x} - 9 = 0$$

$$6\sqrt{x} = 9$$

$$\sqrt{x} = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{4}$$



$$\text{min. is } f(2\frac{1}{4}) = 4 \cdot 2\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} - 9 \cdot 2\frac{1}{4} = -6\frac{3}{4}$$

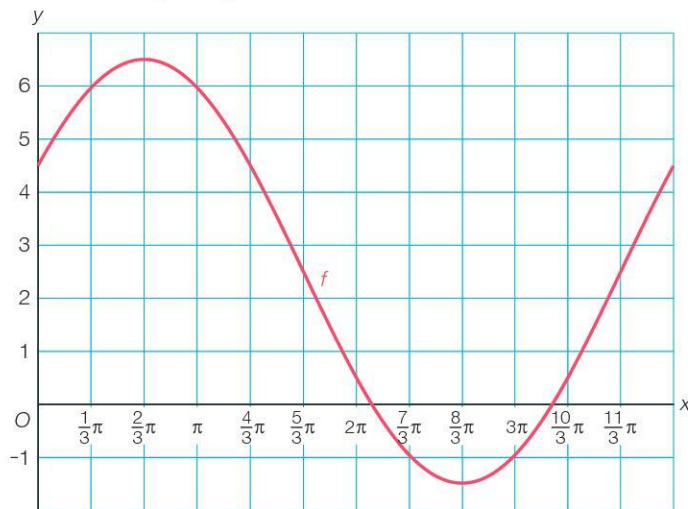
141 $f(x) = 2\frac{1}{2} - 4 \cos(\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{3}\pi) = 2\frac{1}{2} - 4 \cos(\frac{1}{2}(x - 2\frac{2}{3}\pi))$

evenwichtsstand $2\frac{1}{2}$

amplitude 4

periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

beginpunt $(2\frac{2}{3}\pi, -1\frac{1}{2})$ is laagste punt



142 Het punt $A(0, 4)$ ligt op k .

De lijn m door A loodrecht op k heeft vergelijking $m: y = \frac{1}{3}x + 4$.

m snijden met l geeft het punt B .

$$\frac{1}{3}x + 4 = -3x - 6$$

$$3\frac{1}{3}x = -10$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -3 \\ y = \frac{1}{3}x + 4 \end{array} \right\} y = \frac{1}{3} \cdot -3 + 4 = 3$$

Dus $B(-3, 3)$.

$$d(k, l) = d(A, B) = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

143 $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 5x + 2y = 18 \end{cases} \begin{array}{l} |2| \\ |3| \end{array}$ geeft $\begin{cases} 4x - 6y = 22 \\ 15x + 6y = 54 \end{cases} +$

$$19x = 76$$

$$x = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 4 \\ 2x - 3y = 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 4 - 3y = 11 \\ 8 - 3y = 11 \end{array}$$

$$-3y = 3$$

$$y = -1$$

Dus de oplossing is $(x, y) = (4, -1)$.

144 De cosinusregel geeft $BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(115^\circ) = 35,142\dots$

$$BC = \sqrt{35,142\dots} \approx 5,93$$

Bladzijde 233

145 $\frac{2}{5}a^{-2} \cdot (b^{-3})^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot b^{-6} = \frac{2}{5a^2b^6}$

146 $PQ = 6 - 2p$ en $PS = y_s = -\frac{1}{2}p^2 + 3p$
 $A = PQ \cdot PS = (6 - 2p)(-\frac{1}{2}p^2 + 3p) = -3p^2 + 18p + p^3 - 6p^2 = p^3 - 9p^2 + 18p$

Dit geeft $\frac{dA}{dp} = 3p^2 - 18p + 18$.

$\frac{dA}{dp} = 0$ geeft $3p^2 - 18p + 18 = 0$

$p^2 - 6p + 6 = 0$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 12$

$p = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3} \vee p = 3 - \sqrt{3}$

$0 < p < 3$, dus $p = 3 - \sqrt{3}$.

147 $a = \frac{60 + 110}{2} = 85$

$b = 110 - 85 = 25$

$\frac{1}{2}$ periode = $15 - 5 = 10$, dus periode = 20 en $c = \frac{2\pi}{20} = \frac{1}{10}\pi$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 10$, dus $d = 10$.

Dus $N = 85 + 25 \sin(\frac{1}{10}\pi(t - 10))$.

$t = 7$ geeft $N \approx 64,77$

Voer in $y_1 = 85 + 25 \sin(\frac{1}{10}\pi(x - 10))$.

De helling van de grafiek is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Dat is bij $t = 10$.

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=10} \approx 7,85$, dus de maximale helling is ongeveer 7,85.

148 Stel $y = 3x + b$.

Substitutie van $y = 3x + b$ in $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ geeft

$x^2 + (3x + b)^2 + 4x - 6(3x + b) + 3 = 0$

$x^2 + 9x^2 + 6bx + b^2 + 4x - 18x - 6b + 3 = 0$

$10x^2 + (6b - 14)x + b^2 - 6b + 3 = 0$

$D = (6b - 14)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (b^2 - 6b + 3) = 36b^2 - 168b + 196 - 40b^2 + 240b - 120 = -4b^2 + 72b + 76$

$D = 0$ geeft $-4b^2 + 72b + 76 = 0$

$b^2 - 18b - 19 = 0$

$(b + 1)(b - 19) = 0$

$b = -1 \vee b = 19$

De raaklijnen zijn $y = 3x - 1$ en $y = 3x + 19$.

149 $(4x - 3)(3x + 5) = 0$

$4x - 3 = 0 \vee 3x + 5 = 0$

$4x = 3 \vee 3x = -5$

$x = \frac{3}{4} \vee x = -1\frac{2}{3}$

150 M is het midden van BC , dus $BM = CM = 5$.

Dus ook $AM = 5$ (straal cirkel).

Zie de figuur hiernaast met N het midden van AB ,

dus $AN = BN = 4$ en $MN = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

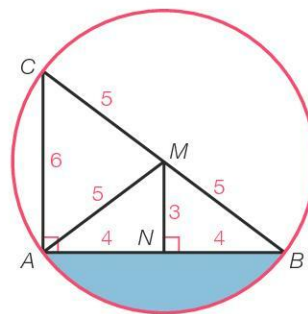
$\tan(\angle AMN) = \frac{4}{3}$ geeft $\angle AMN = 53,13\dots^\circ$

$\angle AMB = 2 \cdot 53,13\dots^\circ = 106,26\dots^\circ$

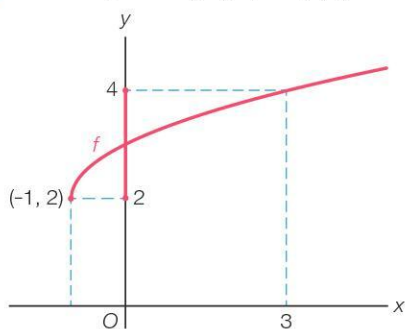
$O(\text{sector } AMB) = \frac{106,26\dots}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 = 23,182\dots$

$O(\triangle AMB) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$

$O(\text{gebied}) = 23,182\dots - 12 \approx 11,18$



- 151 Het randpunt is $(-1, 2)$ en $f(3) = 4$.



$x \leq 3$ geeft $2 \leq f(x) \leq 4$

- 152 $k \perp l$, dus $k: 3x - 4y = c$
 door $A(-1, 3)$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} k \perp l \\ k: 3x - 4y = c \end{matrix}} \right\} c = 3 \cdot -1 - 4 \cdot 3 = -15$
 Dus $k: 3x - 4y = -15$.

- 153 $g_{103 \text{ jaar}} = \frac{1}{2}$ geeft $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{103}} \approx 0,9933$.
 Dus de hoeveelheid neemt per jaar met ongeveer 0,67% af.

- 154 y is omgekeerd evenredig met een macht van x , dus $y = \frac{a}{x^p}$ oftewel $a = y \cdot x^p$.
 $x = 3$ en $y = 125$ geeft $a = 125 \cdot 3^p$
 $x = 5$ en $y = 27$ geeft $a = 27 \cdot 5^p$
 Voer in $y_1 = 125 \cdot 3^x$ en $y_2 = 27 \cdot 5^x$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3$ en $y = 3375$.
 Dus $a = 3375$ en $p = 3$.
 De formule is $y = \frac{3375}{x^3}$.

- 155 Voer in $y_1 = -0,1x^3 + 0,1x^2 + 3x - 2$.

$$\text{Op } [-2, 4] \text{ is } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{5,2 - -6,8}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

Bladzijde 234

- 156 $3x^4 - 5 = 16$
 $3x^4 = 21$
 $x^4 = 7$
 $x = \sqrt[4]{7} \vee x = -\sqrt[4]{7}$

- 157 $\frac{1}{3}\log(2x - 1) + 3 = 0$
 $\frac{1}{3}\log(2x - 1) = -3$
 $2x - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
 $2x - 1 = 8$
 $2x = 9$
 $x = 4\frac{1}{2}$

- 158 Substitutie van $y = x$ in $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$ geeft $x^2 + x^2 - 8x - 6x + 12 = 0$
 $2x^2 - 14x + 12 = 0$
 $x^2 - 7x + 6 = 0$
 $(x - 1)(x - 6) = 0$
 $x = 1 \vee x = 6$

Dus $A(1, 1)$ en $B(6, 6)$.

$$\begin{aligned}
 159 \quad & \log(25x) = 2 + \log(x-1) \\
 & \log(25x) = \log(100) + \log(x-1) \\
 & \log(25x) = \log(100(x-1)) \\
 & 25x = 100(x-1) \\
 & 25x = 100x - 100 \\
 & -75x = -100 \\
 & x = 1\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$160 \quad f(x) = \sqrt{2x+6} = (2x+6)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}(2x+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{(2x+6)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \text{ geeft } \frac{1}{\sqrt{2x+6}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2x+6} = 2$$

$$2x+6 = 4$$

$$2x = -2$$

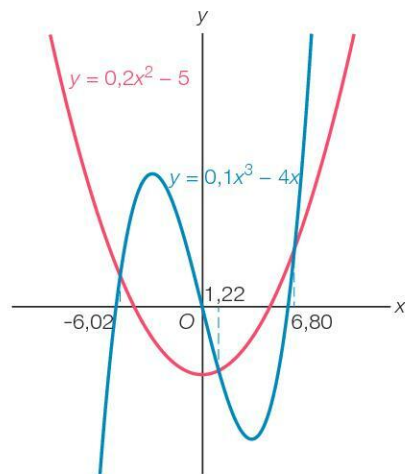
$$x = -1$$

$$f(-1) = \sqrt{-2+6} = 2, \text{ dus } A(-1, 2).$$

$$161 \quad f(x) = 2x^3 - (2x^2 + 1)(x-2) = 2x^3 - (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = 4x^2 - x + 2 \text{ geeft } f'(x) = 8x - 1$$

$$162 \quad \text{Voer in } y_1 = 0,1x^3 - 4x \text{ en } y_2 = 0,2x^2 - 5.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx -6,02 \vee x \approx 1,22 \vee x \approx 6,80$.



$$0,1x^3 - 4x < 0,2x^2 - 5 \text{ geeft } x < -6,02 \vee 1,22 < x < 6,80$$

$$163 \quad f(x) = x^2 - \frac{2x^2 - 1}{x} = x^2 - 2x + \frac{1}{x} = x^2 - 2x + x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = 2x - 2 - x^{-2} = 2x - 2 - \frac{1}{x^2}$$

$$164 \quad f(x) = \frac{3x^2 + 4}{2x} = 1\frac{1}{2}x + \frac{2}{x} = 1\frac{1}{2}x + 2x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = 1\frac{1}{2} - 2x^{-2} = 1\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'(1) = 1\frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x + b \\ f(1) &= 3\frac{1}{2}, \text{ dus } A(1, 3\frac{1}{2}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -\frac{1}{2} + b &= 3\frac{1}{2} \\ b &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

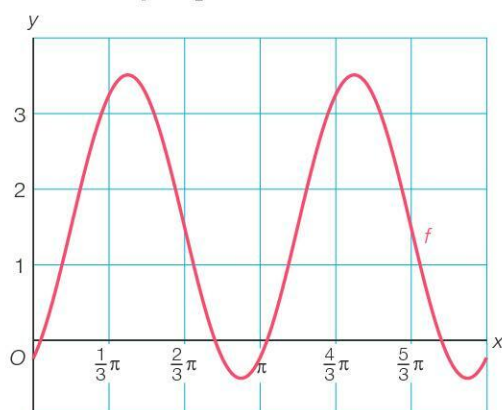
165 $f(x) = 1\frac{1}{2} + 2 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1\frac{1}{2} + 2 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$

evenwichtsstand $1\frac{1}{2}$

amplitude 2

periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$

beginpunt $(\frac{1}{6}\pi, 1\frac{1}{2})$



166 De lijn door E en F snijdt AD in het punt M . Dit geeft $AM = 3$.

Stel $AE = x$, dan is $EF = 2x$ en $EM = \frac{1}{2}(10 - 2x) = 5 - x$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle AEM$ geeft $AM^2 + EM^2 = AE^2$

$$3^2 + (5 - x)^2 = x^2$$

$$9 + 25 - 10x + x^2 = x^2$$

$$-10x = -34$$

$$x = 3,4$$

Dus $EF = 2x = 6,8$.

167 $6x - 4y = 5$

$$-4y = -6x + 5$$

$$y = 1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{4}$$

168 $\angle F = 180^\circ - 100^\circ - 35^\circ = 45^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{DE}{\sin(45^\circ)} = \frac{10,2}{\sin(100^\circ)}$

$$DE = \frac{10,2 \sin(45^\circ)}{\sin(100^\circ)} = 7,32...$$

en

$$\frac{DF}{\sin(35^\circ)} = \frac{10,2}{\sin(100^\circ)}$$

$$DF = \frac{10,2 \sin(35^\circ)}{\sin(100^\circ)} = 5,94...$$

De omtrek van driehoek DEF is $7,32... + 10,2 + 5,94... \approx 23,5$.

169 $t = 1$ en $h = 40$ geeft $a + b = 40$

$t = 6$ en $h = 0$ geeft $216a + 36b = 0$ oftewel $6a + b = 0$ dus $b = -6a$.

Substitutie van $b = -6a$ in $a + b = 40$ geeft $a - 6a = 40$

$$-5a = 40$$

$$a = -8$$

$a = -8$ geeft $b = -6 \cdot -8 = 48$

$$170 \quad f(x) = 4x - \sqrt{2x-1} = 4x - (2x-1)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{2} (2x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = 4 - \frac{1}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}} = 4 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 4 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = 0$$

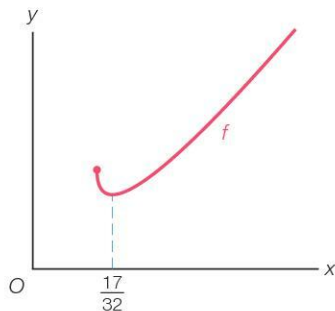
$$\frac{1}{\sqrt{2x-1}} = 4$$

$$\sqrt{2x-1} = \frac{1}{4}$$

$$2x-1 = \frac{1}{16}$$

$$2x = \frac{17}{16}$$

$$x = \frac{17}{32}$$



$$\text{min. is } f\left(\frac{17}{32}\right) = 1\frac{7}{8}, \text{ dus } B_f = \left[1\frac{7}{8}, \rightarrow\right).$$

$$171 \quad \sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right) = 1$$

$$3x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$3x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi \vee x = 1\frac{7}{12}\pi$$

$$172 \quad x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 8 = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 + 8 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$$

Dus middelpunt is $M(2, -3)$.

$$rc_{AM} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3 - (-1)}{2 - 1} = -2$$

$$k \perp AM, \text{ dus } rc_k \cdot rc_{AM} = -1, \text{ dus } rc_k = \frac{1}{2}.$$

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = 26,56\dots^\circ$$

$$rc_{BM} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4 - (-3)}{4 - 2} = -\frac{1}{2}$$

$$l \perp BM, \text{ dus } rc_l \cdot rc_{BM} = -1, \text{ dus } rc_l = 2.$$

$$\tan(\beta) = 2 \text{ geeft } \beta = 63,43\dots^\circ$$

$$\beta - \alpha = 63,43\dots^\circ - 26,56\dots^\circ \approx 36,9^\circ$$

Dus de gevraagde hoek is $36,9^\circ$.

$$173 \quad 10x^2 + 1 = 7x$$

$$10x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 1 = 9$$

$$x = \frac{7+3}{20} = \frac{1}{2} \vee x = \frac{7-3}{20} = \frac{1}{5}$$

174 $y = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{4-3x}$
 $\frac{1}{2}\sqrt{4-3x} = 2 - y$
 $\sqrt{4-3x} = 4 - 2y$
kwadrateren geeft
 $4 - 3x = (4 - 2y)^2$
 $4 - 3x = 16 - 16y + 4y^2$
 $-3x = 4y^2 - 16y + 12$
 $x = -\frac{1}{3}y^2 + \frac{16}{3}y - 4$

175 $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^4 + 2$
↓ verm. x-as, 4
 $y = -2(x+1)^4 + 8$
↓ translatie (2, -5)
 $g(x) = -2(x-2+1)^4 + 8 - 5$ oftewel $g(x) = -2(x-1)^4 + 3$
max. is $g(1) = 3$

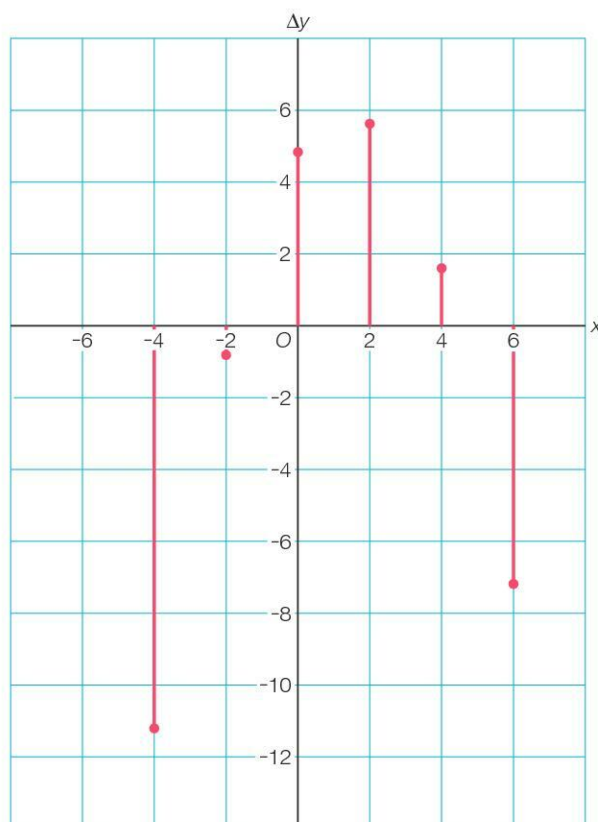
176 $rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$
 $\tan(\alpha) = -\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33,69...^\circ$
 $rc_l = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-2}{4-1} = \frac{7}{3}$
 $\tan(\beta) = \frac{7}{3}$ geeft $\beta = 66,80...^\circ$
 $\beta - \alpha = 66,80...^\circ - 33,69...^\circ \approx 33,1^\circ$
De gevraagde hoek is $33,1^\circ$.

177 $g_{\text{jaar}} = 1,075$, dus los op $1,075^T = 2$.
 $1,075^T = 2$ geeft $T = {}^{1,075}\log(2) = 9,584...$
De verdubbelingstijd is 9 jaar en $0,584... \times 12 \approx 7$ maanden.

178 Neem $2x$ voor x in de formule.
Je krijgt $y = 0,025 \cdot (2x)^{3,41} = 0,025 \cdot 2^{3,41} \cdot x^{3,41} = 2^{3,41} \cdot 0,025x^{3,41} \approx 10,6 \cdot 0,025x^{3,41}$.
Dus ongeveer 10,6 keer zo groot.

179 Voer in $y_1 = -0,1x^3 + 0,1x^2 + 3x - 2$.

x	y	Δy
-6	5,2	-
-4	-6	-11,2
-2	-6,8	-0,8
0	-2	4,8
2	3,6	5,6
4	5,2	1,6
6	-2	-7,2



$$180 \quad \left. \begin{array}{l} y = a(x-p)^2 + q \\ \text{top } (4, 4) \end{array} \right\} y = a(x-4)^2 + 4$$

$$\left. \begin{array}{l} y = a(x-4)^2 + 4 \\ \text{door } (0, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a(0-4)^2 + 4 = 0 \\ 16a = -4 \\ a = -\frac{1}{4} \end{array}$$

$$y = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 4 = -\frac{1}{4}(x^2 - 8x + 16) + 4 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 + 4 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$$

Dus $a = -\frac{1}{4}$ en $b = 2$.

$$181 \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$$

↓ translatie $(3, 0)$

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$$

Dus $a = 27$.

$$182 \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 + 3x - 4y - 37 &= 0 \\ x^2 + 3x + y^2 - 4y - 37 &= 0 \\ (x + 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + (y-2)^2 - 4 - 37 &= 0 \\ (x + 1\frac{1}{2})^2 + (y-2)^2 &= 43\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dus middelpunt $M(-1\frac{1}{2}, 2)$ en straal $r = \sqrt{43\frac{1}{4}}$.

$$d(A, M) = \sqrt{(-1\frac{1}{2} - 5)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{(-6\frac{1}{2})^2 + 1^2} = \sqrt{42\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{43\frac{1}{4}}$$

$d(A, M) = r$, dus A ligt op c .

$$183 \quad \begin{aligned} N &= 3 \cdot 5^{2t-6} \\ 3 \cdot 5^{2t-6} &= N \\ 5^{2t-6} &= \frac{1}{3}N \\ 2t - 6 &= {}^5\log(\frac{1}{3}N) \\ 2t &= 6 + {}^5\log(\frac{1}{3}N) \\ t &= 3 + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(\frac{1}{3}N) \end{aligned}$$

$$184 \quad \left. \begin{array}{l} y = a(x-p)^2 + q \\ \text{top } T(4, 6) \end{array} \right\} y = a(x-4)^2 + 6$$

$$\left. \begin{array}{l} y = a(x-4)^2 + 6 \\ \text{door } A(8, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a(8-4)^2 + 6 = 3 \\ 16a = -3 \\ a = -\frac{3}{16} \end{array}$$

Dus $p: y = -\frac{3}{16}(x-4)^2 + 6$.

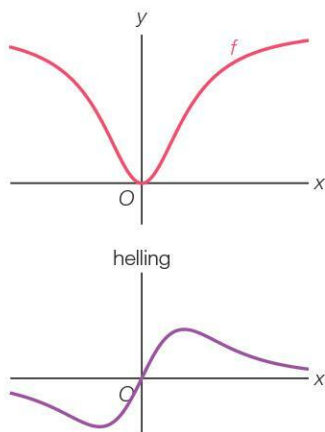
$y = -\frac{3}{16}(x-4)^2 + 6$ geeft $y' = -\frac{3}{8}(x-4)$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = y'(8) = -\frac{3}{8}(8-4) = -1\frac{1}{2}$.

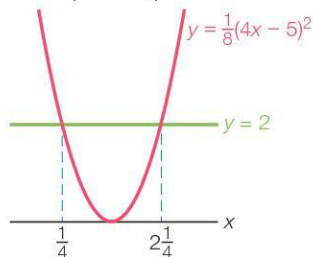
$$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(8, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot 8 + b = 3 \\ -12 + b = 3 \\ b = 15 \end{array}$$

Dus $k: y = -1\frac{1}{2}x + 15$ en $S(0, 15)$.

185 Voer in $y_1 = \frac{10x^2}{x^2 + 10}$ en $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) \Big|_{x=x}$.

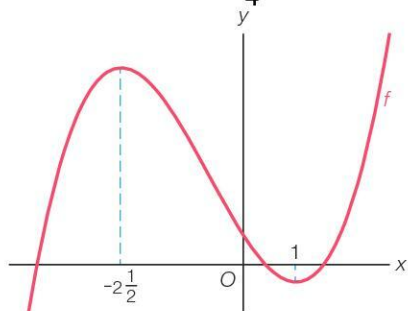


186 $\frac{1}{8}(4x-5)^2 = 2$
 $(4x-5)^2 = 16$
 $4x-5 = 4 \vee 4x-5 = -4$
 $4x = 9 \vee 4x = 1$
 $x = 2\frac{1}{4} \vee x = \frac{1}{4}$



$\frac{1}{8}(4x-5)^2 < 2$ geeft $\frac{1}{4} < x < 2\frac{1}{4}$

187 $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 30x + 10$ geeft $f'(x) = 12x^2 + 18x - 30$
 $f'(x) = 0$ geeft $12x^2 + 18x - 30 = 0$
 $2x^2 + 3x - 5 = 0$
 $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 49$
 $x = \frac{-3+7}{4} = 1 \vee x = \frac{-3-7}{4} = -2\frac{1}{2}$



max. is $f(-2\frac{1}{2}) = 78\frac{3}{4}$ en min. is $f(1) = -7$

188 $f(x) = 0,4 + 2,3 \sin(4x + 2,4) = 0,4 + 2,3 \sin(4(x + 0,6))$
 evenwichtsstand 0,4
 amplitude 2,3
 periode $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$
 beginpunt $(-0,6; 0,4)$

189 $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 9}{x} = x + 5 + \frac{9}{x} = x + 5 + 9x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 9x^{-2} = 1 - \frac{9}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 1 - \frac{9}{x^2} = 0$$

$$1 = \frac{9}{x^2}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

$$f(3) = \frac{9 + 15 + 9}{3} = 11 \text{ en } f(-3) = \frac{9 - 15 + 9}{-3} = -1$$

Dus de toppen zijn $(-3, -1)$ en $(3, 11)$.

190 De lijn gaat door de punten $(3, 3)$ en $(11, 2)$.

Stel $\log(N) = aM + b$ met $a = \frac{\Delta \log(N)}{\Delta M} = \frac{2 - 3}{11 - 3} = -\frac{1}{8}$.

$$\left. \begin{array}{l} \log(N) = -\frac{1}{8}M + b \\ \text{door } (3, 3) \end{array} \right\} -\frac{1}{8} \cdot 3 + b = 3$$

$$b = 3\frac{3}{8}$$

Dit geeft $\log(N) = -\frac{1}{8}M + 3\frac{3}{8}$

$$N = 10^{-\frac{1}{8}M + 3\frac{3}{8}}$$

$$N = 10^{-\frac{1}{8}M} \cdot 10^{3\frac{3}{8}}$$

$$N = 10^{3\frac{3}{8}} \cdot (10^{-\frac{1}{8}})^M$$

$$N \approx 2371 \cdot 0,75^M$$

Dus $N = 2371 \cdot 0,75^M$.

191 Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft

$$AC^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos(65^\circ) = 65,666...$$

$$AC = 8,103...$$

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\frac{8,103...}{\sin(65^\circ)} = \frac{7}{\sin(\angle BAC)}$

$$\sin(\angle BAC) = \frac{7 \sin(65^\circ)}{8,103...}$$

De GR geeft $51,52...^\circ$, dus $\angle BAC = 51,52...^\circ$.

$$\angle CAD = 75^\circ - 51,52...^\circ = 23,47...^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft $CD^2 = 4^2 + 8,103...^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8,103... \cdot \cos(23,47...^\circ) = 22,203...$

$$CD = 4,712... \approx 4,7$$

De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos(\angle D)$

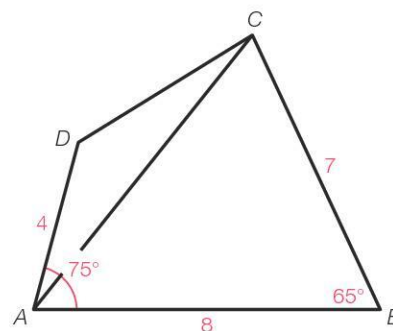
$$65,666... = 4^2 + 22,203... - 2 \cdot 4 \cdot 4,712... \cdot \cos(\angle D)$$

$$37,696... \cdot \cos(\angle D) = -27,462...$$

$$\cos(\angle D) = \frac{-27,462...}{37,696...}$$

$$\angle D \approx 136,8^\circ$$

Dus $CD \approx 4,7$ en $\angle D \approx 136,8^\circ$.



Verantwoording

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:

Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,

9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlenen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 21

© 2021 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73763-4



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.