LEERBOEK | WISKUNDE B | HAVO DEEL 1

GETAL & RUIMTE B

Noordhoff Uitgevers

Getal & Ruimte

havo B deel 1

Twaalfde editie, 2020

Noordhoff Uitgevers
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

© Noordhoff Uitgevers

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek havo B deel 1
Samen met de delen 2 en 3 van havo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma havo wiskunde B, zoals dat met ingang van 2015 is vastgesteld. De totale studielast voor het vak havo wiskunde B is 360 uur. Elk van de delen 1, 2 en 3 bevat vier hoofdstukken.
De vier hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 25 uur.
In hoofdstuk 1 Formules, grafieken en vergelijkingen en hoofdstuk 4 Werken met formules worden gedeelten uit de subdomeinen B1 (Standaardfuncties) en B2 (Vergelijkingen en ongelijkheden) behandeld.
In hoofdstuk 2 Veranderingen worden de subdomeinen D1 (Veranderingen) en D2 (Afgeleide functies) behandeld, evenals enkele gedeelten van het subdomein D3 (Bepaling afgeleide functies).
Het subdomein C1 (Afstanden en hoeken in concrete situaties) komt in hoofdstuk 3 Hoeken en afstanden aan bod.

Beginopdrachten en eindopdrachten
Elk hoofdstuk heeft een beginopdracht en een eindopdracht. In de beginopdracht komen aspecten van het betreffende hoofdstuk aan de orde, zonder dat er een beroep wordt gedaan op technieken die in het hoofdstuk worden geleerd. In de eindopdracht zijn deze technieken wel nodig. De begin- en eindopdrachten zijn geschikt voor groepswerk. In een klassengesprek kan worden gereflecteerd op de opdracht. De beginopdracht geeft de docent bovendien de mogelijkheid alvast enkele zaken van het hoofdstuk toe te lichten en de grote lijn hiervan te bespreken. De studielast van elk hoofdstuk is zodanig dat voor beide opdrachten een lesuur kan worden uitgetrokken. De uitwerkingen van deze opdrachten staan in het docentenmateriaal.

Drie leerroutes
In deze editie wordt gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen.
De basisroute geeft de leerling voldoende oefening om zich alle vaardigheden die bij de eindtermen horen eigen te maken.
In de middenroute worden enkele oefenopgaven overgeslagen en in plaats hiervan maakt de leerling opgaven die dieper op de stof ingaan.
De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder oefenopgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.

© Noordhoff Uitgevers

Om het niveau van de leerlingen in te schatten is het mogelijk om elke leerling in de middenroute te laten beginnen. Na enkele lessen kan dan duidelijk worden welke route voor een leerling de beste is. De docent kan ook de leerlingen zelf hun route laten kiezen. Het is van belang regelmatig te monitoren of de gekozen route de juiste is.

Verdere opbouw
De paragraaf Voorkennis is kort gehouden en sluit inhoudelijk meestal direct aan op de eerste paragraaf.
Gebleven zijn de oriëntatie-opgaven, de reflectie-opgaven en de afsluitende opgaven. Nieuw zijn de extra opgaven, aangegeven met E, die vooral in de uitdagende route voorkomen. Deze extra opgaven doorbreken de standaardaanpak en activeren zo het wiskundig denken. Hierbij is soms dankbaar gebruik gemaakt van Kangoeroe-opgaven en opgaven uit de Wiskunde Olympiade.
Elke paragraaf wordt afgesloten met een Terugblik, aan het eind van elk hoofdstuk staat een Diagnostische toets en achterin het boek staan de Gemengde opgaven.

Wiskundige denkactiviteiten
In de samenhang tussen de theorie en de daarop volgende opgaven wordt regelmatig een denkactieve houding van de leerling gevraagd. Zo zijn ten opzichte van de vorige editie enkele voorbeelden vervangen door opgaven waarin de leerling zelf tot een bepaalde aanpak komt.
De verschillende aspecten van wiskundige denkactiviteiten komen ook voor bij oriëntatie-opgaven, die immers het denken over een nieuw wiskundig begrip activeren. Ook de reflectie-opgaven doen een beroep op het denkvermogen, bijvoorbeeld omdat ze ingaan op de aanpak van een wiskundig probleem of de samenhang tussen wiskundige begrippen. Tot slot zijn de extra opgaven bij uitstek te typeren als denkopgaven.

Getal en Ruimte online
Alle opgaven kunnen ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.
Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant en klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

voorjaar 2019

© Noordhoff Uitgevers

Legenda

1 **Voorkennis**
Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

O2 **Oriëntatie-opgave**
Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 **Gewone opgave**
Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 **Reflectie-opgave**
In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 **Afsluitende opgave**
De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 **Extra opgave**
Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute

2 Middenroute

3 Uitdagende route

NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 **Opgaven zonder routeaanduiding**
In de Diagnostische toets en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▸GR] Verwijzing naar een module van de handleiding GR.

[▸WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

[▸DEMO] Verwijzing naar een demo/animatie.

© Noordhoff Uitgevers

Inhoud

1 Formules, grafieken en vergelijkingen *6*

Beginopdracht Twee fietsers *8*
Voorkennis Lineaire vergelijkingen en ongelijkheden *9*
1.1 Lineaire verbanden *11*
1.2 Een lijn door twee gegeven punten *18*
1.3 Stelsels vergelijkingen *24*
1.4 Kwadratische verbanden *34*
Eindopdracht Een tijdrit *45*
Diagnostische toets *46*

2 Veranderingen *48*

Beginopdracht Een optrekkende trein *50*
Voorkennis Snelheid *51*
2.1 Toenamediagrammen *53*
2.2 Differentiequotiënten en snelheden *65*
2.3 Raaklijnen en hellinggrafieken *75*
2.4 Differentiëren *86*
Eindopdracht Een hogesnelheidstrein *91*
Diagnostische toets *92*

3 Hoeken en afstanden *94*

Beginopdracht Een landmeter in actie *96*
Voorkennis Goniometrische verhoudingen *97*
3.1 Berekeningen in driehoeken *100*
3.2 De sinusregel en de cosinusregel *109*
3.3 Vergelijkingen in de meetkunde *118*
3.4 Lengte, omtrek en oppervlakte *127*
Eindopdracht De landmeter en de sinusregel *131*
Diagnostische toets *132*

4 Werken met formules *134*

Beginopdracht Tuinen en paden *136*
Voorkennis Grafieken verschuiven *137*
4.1 Kwadratische formules *139*
4.2 Hogeregraadsvergelijkingen en ongelijkheden *147*
4.3 Gebroken vormen *156*
4.4 Extreme waarden en wiskundige modellen *162*
Eindopdracht Lengte van paden in tuinen *171*
Diagnostische toets *172*

Gemengde opgaven *174*
Overzicht GR-modules *185*
Overzicht routes *186*
Trefwoordenregister *190*
Verantwoording *192*

© Noordhoff Uitgevers

1

Formules, grafieken en vergelijkingen

Wat leer je?

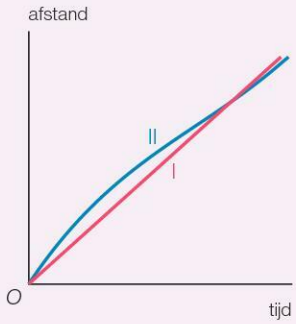
- De formule van een lijn opstellen.
- Wat stelsels vergelijkingen zijn en hoe je deze oplost.
- Kwadratische vergelijkingen oplossen.
- Hoe je de grafische rekenmachine gebruikt om grafieken te plotten en coördinaten van toppen en snijpunten te berekenen.

© Noordhoff Uitgevers

© Noordhoff Uitgevers

Beginopdracht Twee fietsers

Emma en Luuk fietsen hetzelfde traject van 50 km van A naar B. Ze beginnen op hetzelfde moment. Emma fietst met een constante snelheid van 18 km per uur, maar Luuk fietst met wisselende snelheden. In de figuur hiernaast zie je de grafieken die bij de fietstochten horen.



- Welke grafiek hoort bij de fietstocht van Emma? Licht toe.
- Wat kun je zeggen van de snelheid van Luuk vergeleken met die van Emma?

De fietstochten zijn ook te beschrijven met formules.
Bij de fietstocht van Emma hoort de formule $s = 18t$ en bij de fietstocht van Luuk hoort de formule $s = 2t^3 - 10t^2 + 30t$.
Hierin is s de afstand in km die in t uur wordt afgelegd.

- Hoeveel km heeft Emma afgelegd in anderhalf uur? En Luuk?
- Onderzoek met de formules wie na twee en een half uur voor ligt, Emma of Luuk.
- Onderzoek met de formules wie van de twee het eerst in B is.

Bij de snelheid van Luuk hoort de formule $v = 6t^2 - 20t + 30$. Hierin is v de snelheid in km per uur op het tijdstip t.

- Met welke snelheid vertrekt Luuk uit A?

Om te berekenen op welke tijdstippen Emma en Luuk even hard rijden, moet een vergelijking worden opgelost.

- Welke vergelijking? Hoeveel oplossingen heeft deze vergelijking, denk je? Licht toe.
- Welke vergelijking moet worden opgelost om te berekenen op welk tijdstip Emma Luuk inhaalt? Licht toe dat je deze vergelijking niet kunt oplossen met wat je in de onderbouw hebt geleerd.

© Noordhoff Uitgevers

Voorkennis Lineaire vergelijkingen en ongelijkheden

Theorie A Lineaire vergelijkingen

De vergelijking $6x - 8 = 2x - 7$ is een voorbeeld van een lineaire vergelijking. Je lost zo'n vergelijking als volgt op.

$6x - 8 = 2x - 7$ Term met x naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid.
$6x - 2x = -7 + 8$ Herleid beide leden.
$4x = 1$ Deel beide leden door het getal dat voor x staat.
$x = \frac{1}{4}$

Gebruik bij het oplossen van lineaire vergelijkingen het volgende werkschema.

Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

1. Werk de haakjes en de breuken weg.
2. Breng alle termen met x naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid.
3. Herleid beide leden.
4. Deel beide leden door het getal dat voor x staat.

In de vergelijking $\frac{2}{3}(x - 4) = \frac{1}{5}(2x + 5)$ staan zowel haakjes als breuken. Je kunt eerst de haakjes wegwerken en dan de breuken, maar het kan ook andersom.

Eerst de haakjes, dan de breuken.

$\frac{2}{3}(x - 4) = \frac{1}{5}(2x + 5)$
$\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = \frac{2}{5}x + 1$ $\times 15$
$10x - 40 = 6x + 15$
$4x = 55$
$x = 13\frac{3}{4}$

Eerst de breuken, dan de haakjes.

$\frac{2}{3}(x - 4) = \frac{1}{5}(2x + 5)$ $\times 15$
$10(x - 4) = 3(2x + 5)$
$10x - 40 = 6x + 15$
$4x = 55$
$x = 13\frac{3}{4}$

Vermenigvuldigen van $\frac{2}{3}(x - 4)$ met 15 betekent $15 \cdot \frac{2}{3} \cdot (x - 4)$ oftewel $10(x - 4)$.

1 Los op.

a $5x - 2 = 3x + 6$
b $4 - 5(x - 1) = 3(2x + 1)$
c $3x - 0{,}8 = 2{,}4x + 1{,}6$
d $10 - 3(x + 1) = 5x - (2x - 1)$
e $1{,}6(2x - 1) = 1{,}4x - 2$
f $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{2}x + 2$
g $\frac{4}{5}x - 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}x - 3$
h $\frac{2}{7}(4x - 1) = \frac{3}{4}(1 - 5x)$

© Noordhoff Uitgevers

Theorie B Lineaire ongelijkheden

De ongelijkheid $6x - 2 < 4x + 5$ is een voorbeeld van een lineaire ongelijkheid.
Deze ongelijkheid los je net zo op als de vergelijking $6x - 2 = 4x + 5$.

$6x - 2 < 4x + 5$ Term met x naar links, de rest naar rechts.
$2x < 7$ Deel door het getal voor x.
$x < 3\frac{1}{2}$

Bij de ongelijkheid $4x - 2 < 6x + 5$
krijg je $-2x < 7$
$x > -3\frac{1}{2}$

Je ziet dat bij de laatste stap het teken $<$ is omgeklapt in het teken $>$. Je klapt het ongelijkheidsteken alleen om als je beide leden door een *negatief* getal deelt of met een *negatief* getal vermenigvuldigt.

$5 < 6$
$5 + 2 < 6 + 2$
$5 - 2 < 6 - 2$
$5 \cdot 2 < 6 \cdot 2$
$5 \cdot -2 > 6 \cdot -2$
$5 : -2 > 6 : -2$

$6x > -18$ geeft $x > -3$ Delen door 6, dus $>$ niet omklappen.
$-5x < 20$ geeft $x > -4$ Delen door -5, dus $<$ omklappen.

Werkschema: lineaire ongelijkheden oplossen

1. Werk de haakjes en de breuken weg.
2. Breng alle termen met x naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid.
3. Herleid beide leden.
4. Deel beide leden door het getal dat voor x staat. Als dit getal negatief is, klap je het ongelijkheidsteken om.

Voorbeeld

Los op $5(x + 2) > 9x - 2(x - 5)$.

Uitwerking

$5(x + 2) > 9x - 2(x - 5)$
$5x + 10 > 9x - 2x + 10$
$-2x > 0$ Deel door -2, dus klap $>$ om in $<$.
$x < 0$

2 Los op.

a $4x + 5 < 6x - 3$

b $3x + 1 < 7x + 5$

c $\frac{1}{3}x + 10 > \frac{1}{2}x$

d $x + 6 > 2 - \frac{3}{4}x$

3 Los op.

a $5(x - 1) < 7x - 1$

b $2(3x - 1) < 5 - (2 - 9x)$

c $-3(4x - 1) > 2 - (x - 1)$

d $2(x - 1) - 3(x - 2) > 6$

© Noordhoff Uitgevers

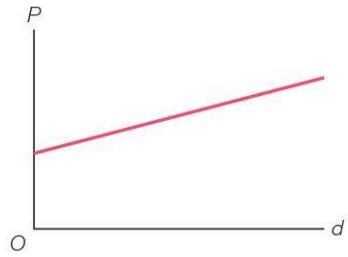
1.1 Lineaire verbanden

01

Hoe dieper je onder water komt, hoe hoger de druk wordt. Onder water neemt de druk per 10 meter met 1000 hPa toe. Neem aan dat de druk aan het wateroppervlak 1020 hPa is.

a Bereken de druk op een diepte van 2 meter en op een diepte van 14 meter.

b Welke formule geeft het verband tussen de druk P in hPa en de diepte d in meter?
Kies uit
I $P = 1000d + 1020$
II $P = 1020 - 100d$
III $P = 100d + 1020$
IV $P = 1020 - 0{,}01d$
V $P = 0{,}01d + 1020$



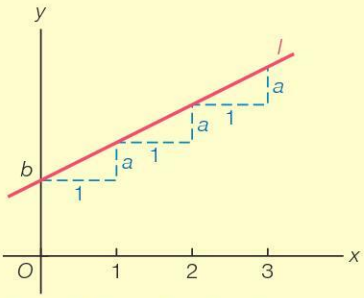
figuur 1.1

Theorie A Lineair verband en richtingscoëfficiënt

De druk van het water in opgave 1 neemt constant toe bij toenemende diepte. In de praktijk komen er veel situaties voor waarin een toename of een afname constant verloopt. Je hebt dan te maken met een **lineair verband**.
Hierbij horen **lineaire formules** zoals $h = 5t + 20$, $A = -3t + 18$, $y = 0{,}7t + 2$ en $y = -20t$.
De bijbehorende grafieken zijn (delen van) rechte lijnen.

Bij een formule van de vorm $y = ax + b$ is y een **lineaire functie** van x.
Voor de bijbehorende lijn l geldt:
- het snijpunt met de y-as is $(0, b)$
- ga je 1 naar rechts, dan ga je a omhoog.

Het getal a heet de **richtingscoëfficiënt** van lijn l.
In plaats van richtingscoëfficiënt zeggen we ook wel **helling**.
Voor de richtingscoëfficiënt van l is 3 schrijven we $\text{rc}_l = 3$.



figuur 1.2 rc = a betekent 1 naar rechts en a omhoog

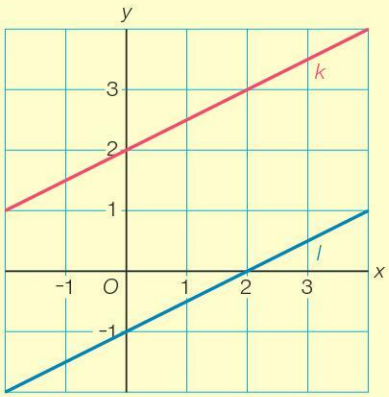
Van de lijn $y = ax + b$ is de richtingscoëfficiënt a.
rc = a betekent: 1 naar rechts en a omhoog.

Voor rc = −2 krijg je: 1 naar rechts en −2 omhoog, en dat is hetzelfde als 1 naar rechts en 2 omlaag. Bij rc = 0 hoort een horizontale lijn.

© Noordhoff Uitgevers

In de figuur hiernaast zijn de evenwijdige lijnen k: $y = \frac{1}{2}x + 2$ en l: $y = \frac{1}{2}x - 1$ getekend. Deze lijnen hebben beide rc $= \frac{1}{2}$.

Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.

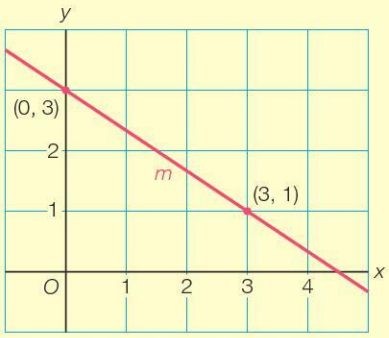


figuur 1.3

Om een lijn te tekenen, maak je een tabel met de coördinaten van twee punten.
Bij de lijn m: $y = -\frac{2}{3}x + 3$ krijg je
$x = 0$ geeft $y = 3$
$x = 3$ geeft $y = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 3 = 1$.

x	0	3
y	3	1

Dus de lijn gaat door (0, 3) en (3, 1).



figuur 1.4

2 Gegeven zijn de lijnen k: $y = -3x + 2$, l: $y = \frac{1}{2}x - 1$ en m: $y = 2x$.

a Teken deze lijnen in één figuur.

b Geef van elke lijn de richtingscoëfficiënt. Begin met $rc_k = ...$

c Om de coördinaten van het snijpunt A van k en l te berekenen, los je de vergelijking $-3x + 2 = \frac{1}{2}x - 1$ op.
Licht dit toe en bereken de coördinaten van A.

d Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en m en de coördinaten van het snijpunt C van l en m.

3 Van de lijnen p, q en r is $rc_p = rc_q = rc_r = \frac{1}{2}$. De lijnen p, q en r snijden de y-as achtereenvolgens in (0, 3), (0, 0) en (0, −2).

a Teken p, q en r in één figuur.

b Geef van elk van deze lijnen de formule.

© Noordhoff Uitgevers

4 ⊡⊙✱

Voor elke waarde van b is de grafiek van $y = 2x + b$ een lijn.

a Voor $b = -3$ krijg je de lijn $y = 2x - 3$.
Teken deze lijn.

b Voor welke b krijg je een lijn door de oorsprong?

c Om te berekenen voor welke b de lijn door het punt (3, 5) gaat, los je de vergelijking $2 \cdot 3 + b = 5$ op.
Licht deze vergelijking toe en bereken b.

d Voor welke b snijdt de lijn de x-as in het punt $(-3, 0)$?

5 ⊡⊙

Voor elke waarde van a is de grafiek van $y = ax - 6$ een lijn.

a Voor welke a snijdt de lijn de x-as in het punt (3, 0)?

b Voor welke a is de lijn evenwijdig met de lijn $y = 3x - 1$?

c Is er een waarde van a waarvoor de lijn door de oorsprong gaat?
Licht toe.

d Voor welke a en b snijdt de lijn $y = ax - 6$ de lijn $y = 4x + b$ in het punt $(2, -1)$?

A6 ⊡⊙✱

Gegeven zijn de lijnen k: $y = -\frac{1}{2}x - 2$, l: $y = ax + 1$ en m: $y = 1\frac{1}{2}x + b$.

a Voor welke a zijn k en l evenwijdig?

b Voor welke b gaat m door het punt $A(2, -3)$?

c Voor welke a hebben k en l hetzelfde snijpunt met de x-as?

d Voor welke a en b snijden l en m elkaar in het punt $B(4, -4)$?

A7 ⊡⊙✱

Gegeven zijn de lijnen k: $y = ax + 6$ en l: $y = \frac{1}{2}ax + 3a$.

a Voor welke a snijden k en l elkaar op de y-as?

b De lijnen k en l snijden elkaar in het punt P met $x_P = -2$.
Bereken y_P.

c Voor welke a snijden k en l elkaar op de x-as?

E8 ✱

Als 20 mensen samen een rekening betalen en ieder betaalt hetzelfde bedrag, dan betalen ze samen 3 euro te veel.
Als 21 mensen dezelfde rekening betalen en ieder betaalt 3 euro minder, dan betalen ze samen 10 euro te veel.
Wat is het bedrag van de rekening?

© Noordhoff Uitgevers

Theorie B De formule van een lijn opstellen

Bij het opstellen van een lineaire formule kunnen de volgende situaties voorkomen.

1 De formule volgt uit de tekst.

Een cilindervormige bak met water stroomt met constante snelheid leeg.
Op $t = 0$ is de waterhoogte 120 cm en per minuut daalt het water 5 cm.
De formule van de hoogte h in cm als functie van de tijd t in minuten is $h = 120 - 5t$, oftewel $h = -5t + 120$.

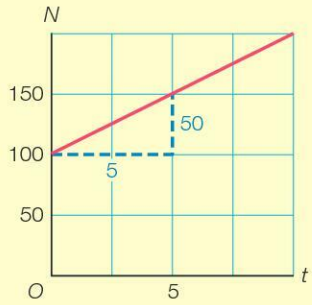
cm per minuut | beginhoogte

2 Uit de grafiek zijn het snijpunt met de verticale as en de richtingscoëfficiënt af te lezen.

Zie figuur 1.5.
Stel $N = at + b$.
Het snijpunt met de verticale as is (0, 100), dus $b = 100$.

$$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{50}{5} = 10$$

Dus $N = 10t + 100$.



figuur 1.5

3 Een punt en de richtingscoëfficiënt zijn gegeven.

De lijn k gaat door het punt (12, 7) en $\text{rc}_k = \frac{1}{3}$.
Stel k: $y = ax + b$.
$a = \text{rc}_k = \frac{1}{3}$, dus $y = \frac{1}{3}x + b$ door (12, 7)

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \cdot 12 + b = 7 \\ 4 + b = 7 \\ b = 3 \end{cases}$$

Dus k: $y = \frac{1}{3}x + 3$.

(12, 7) op de lijn $y = \frac{1}{3}x + b$ geeft de vergelijking $\frac{1}{3} \cdot 12 + b = 7$.

4 Twee punten zijn gegeven.

De aanpak in deze situatie leer je in de volgende paragraaf.

© Noordhoff Uitgevers

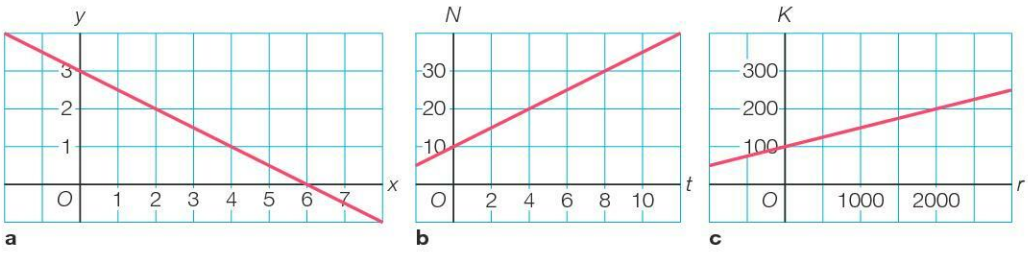
9 Jannie moet 40 opgaven als huiswerk maken. Om haar te stimuleren belooft haar moeder 50 cent voor elke opgave die ze goed doet. Maar voor elke fout gemaakte opgave gaat er 1 euro af. Ze maakt alle opgaven.

a Bereken hoeveel euro Jannie krijgt als ze 32 opgaven goed maakt.

b Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat Jannie krijgt als ze x opgaven goed maakt.

c Jannie krijgt uiteindelijk 2 euro van haar moeder. Hoeveel opgaven had Jannie goed?

10 Stel bij elk van de volgende lijnen de formule op.



a **b** **c**

figuur 1.6

11 De lijn k gaat door het punt $A(-5, 21)$ en de helling is 4. Stel de formule op van k.

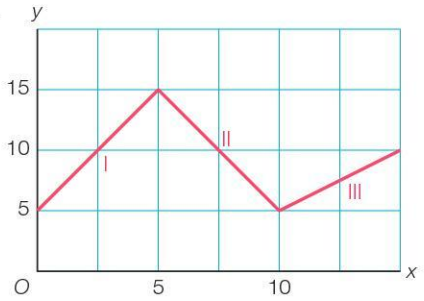
12 De lijn m met $rc_m = -\frac{1}{2}$ gaat door het punt $B(-18, 30)$.

a Stel de formule op van m.

b Bereken de coördinaten van de snijpunten van m met de x-as en de y-as.

A13 De lijn k: $y = ax + b$ gaat door het punt $Q(18, -10)$ en is evenwijdig met de lijn l: $y = -2x - 16$.
Bereken a en b.

A14 De grafiek in figuur 1.7 bestaat uit drie lijnstukken. Stel van elk lijnstuk de formule op.



figuur 1.7

E15 Op een groot stijldansbal zijn 420 personen aanwezig. Op zeker moment danst 60% van de vrouwen met 80% van de mannen.
Hoeveel personen zitten er dan aan de kant?

© Noordhoff Uitgevers

A16

Een cilindervormige bak met een hoogte van 80 cm wordt gevuld met water. Het water stroomt met een constante snelheid uit de kraan.
Op $t = 0$ is de waterhoogte 5 cm en per minuut stijgt het water 3 cm.

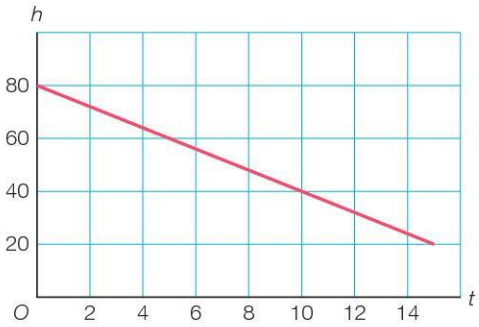
a Stel de formule op van de hoogte h van het water in cm t minuten nadat de kraan is opengezet.

b Na hoeveel minuten stroomt de bak over?

Nadat de bak vol is laat men de bak met een constante snelheid weer leegstromen. Zie de figuur hiernaast.

c Stel de formule op van h.

d Het leegstromen wordt gestopt als het water in de bak 20 cm hoog staat. Vanaf dat moment wordt de bak weer gevuld met een constante stroom water waardoor het water per minuut 2 cm stijgt.
Stel de formule op die hierbij hoort.
Neem de tijd t in minuten met $t = 0$ op het moment dat de bak vol was en het leegstromen begon.



figuur 1.8

A17

Baarzen kunnen leven in water waarvan de temperatuur maximaal 25 °C is. Bovendien hebben ze minstens 2 mg zuurstof per liter water nodig.
We bekijken in deze opgave baarzen die leven in een meer waarvan de diepte 4 meter is.
In het begin van een lange hete zomer is op 1 juli de temperatuur van het water alleen aan de oppervlakte 25 °C. Gedurende de zomer komt de diepte waarop de temperatuur 25 °C is elke drie dagen 10 cm lager te liggen.
Op 1 juli is overal in het meer voldoende zuurstof aanwezig. Vanaf dat moment ontwikkelt zich door rotting van organismen op de bodem een steeds dikkere laag met te weinig zuurstof. Deze laag neemt vanaf 1 juli elke dag met 5 cm toe.
In deze opgave is d_T de diepte waarop de temperatuur 25 °C is en d_Z de diepte waarboven er voldoende zuurstof voor de baarzen is. Neem t in dagen met $t = 0$ op 1 juli en de diepte d in meter. Aan het wateroppervlak is dus $d = 0$ en op de bodem van het meer is $d = 4$.

a Stel de formule op van d_T na t dagen.

b Stel de formule op van d_Z na t dagen.

c Teken de grafieken bij de formules van de vragen a en b voor de periode van 1 juli tot en met 31 augustus en onderzoek met behulp van deze grafieken vanaf welke datum de baarzen niet meer in het meer kunnen leven.

$t = 0$ is op 1 juli
$t = 30$ is op 31 juli
$t = 31$ is op 1 augustus
$t = 61$ is op 31 augustus

© Noordhoff Uitgevers

Terugblik

Richtingscoëfficiënt

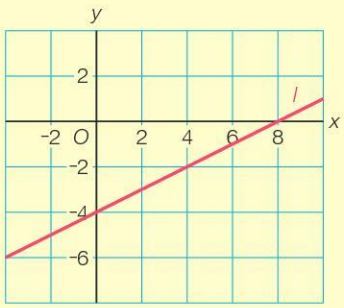
Bij een lineaire formule hoort als grafiek een rechte lijn.
Bij de lijn $y = ax + b$ is a de richtingscoëfficiënt en $(0, b)$ het snijpunt met de y-as.
rc = a betekent: 1 naar rechts en a omhoog.
Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.
Van een horizontale lijn is rc = 0.
Een ander woord voor richtingscoëfficiënt is helling.

Het tekenen van een lijn waarvan de formule bekend is

Om een lijn te tekenen waarvan de formule gegeven is, maak je een tabel met de coördinaten van twee punten.
Bij de lijn l: $y = \frac{1}{2}x - 4$ hoort de volgende tabel.

x	0	8
y	−4	0

Hiernaast zie je de grafiek.

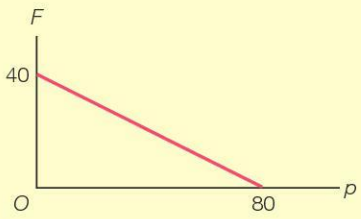


Het opstellen van een lineaire formule

Je hebt geleerd om bij de volgende situaties een lineaire formule op te stellen.

1 *Uit de tekst volgen de richtingscoëfficiënt en de coördinaten van het snijpunt met de verticale as.*
Een vliegtuig zet op $t = 0$ de landing in en daalt vanaf dat moment 10 meter per seconde. De beginhoogte is 10 km.
Dit geeft de formule $h = 10\,000 - 10t$ waarin h de hoogte in meter is en t de tijd in seconden.

2 *Uit de grafiek zijn het snijpunt met de verticale as en de richtingscoëfficiënt af te lezen.*
Bij de grafiek hiernaast krijg je $F = ap + b$.
Het snijpunt met de verticale as is (0, 40), dus $b = 40$.
$a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{-40}{80} = -\frac{1}{2}$
Dus $F = -\frac{1}{2}p + 40$.



3 *Een punt en de richtingscoëfficiënt zijn gegeven.*
Gaat de lijn l door (3, −12) en is $rc_l = 4$, dan ga je als volgt te werk.
Stel l: $y = ax + b$.
$a = rc_l = 4$, dus $y = 4x + b$ door (3, −12)
$4 \cdot 3 + b = -12$
$12 + b = -12$
$b = -24$
Dus l: $y = 4x - 24$.

© Noordhoff Uitgevers

1.2 Een lijn door twee gegeven punten

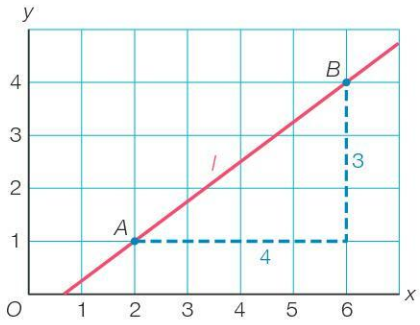
O18

De lijn l gaat door de punten $A(2, 1)$ en $B(6, 4)$. Zie figuur 1.9.

a Voor de lijn l geldt:
ga je 4 naar rechts, dan ga je 3 omhoog, dus
ga je 1 naar rechts, dan ga je ...
Dus $\text{rc}_l = ...$

b In figuur 1.9 is $x_B - x_A = 6 - 2 = 4$.
Hoeveel is $y_B - y_A$?

c Hoe kun je met $x_B - x_A$ en $y_B - y_A$ de richtingscoëfficiënt van l berekenen?



figuur 1.9

Theorie A De formule van een lijn door twee gegeven punten

Bij de opgaven die hierna komen heb je regelmatig je rekenmachine nodig. We gaan ervan uit dat je over een grafische rekenmachine (GR) beschikt. Om hiermee te leren werken, moet je af en toe een module uit de handleiding GR doornemen. Deze handleiding vind je in *Getal&Ruimte online*.

[▸GR] Neem de module **Berekeningen op het basisscherm** door.

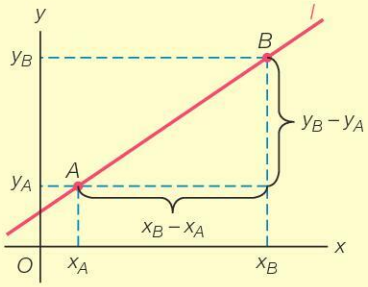
Van een lijn waarvan de coördinaten van twee punten bekend zijn, is de richtingscoëfficiënt als volgt te berekenen.
Voor de lijn l in figuur 1.10 geldt:
ga je $x_B - x_A$ naar rechts, dan ga je $y_B - y_A$ omhoog,
dus ga je 1 naar rechts, dan ga je $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ omhoog.

Dus $\text{rc}_l = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

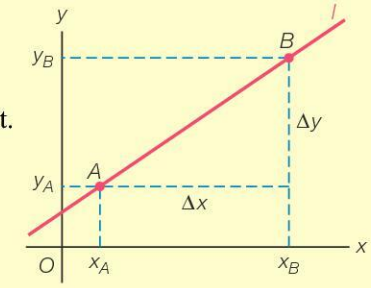
Voor $y_B - y_A$ schrijven we Δy, dus $\Delta y = y_B - y_A$.
Voor $x_B - x_A$ schrijven we Δx, dus $\Delta x = x_B - x_A$.

Δ is de Griekse hoofdletter D. Je spreekt Δ uit als *delta*.
D is de eerste letter van *differentie*, dat verschil betekent.

Van de lijn $y = ax + b$ door de punten A en B is de richtingscoëfficiënt $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



figuur 1.10



figuur 1.11

© Noordhoff Uitgevers

In het voorbeeld wordt gevraagd om een **vergelijking van de lijn** l door de punten A en B op te stellen. We gebruiken de begrippen formule van een lijn en vergelijking van een lijn door elkaar.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de lijn l door de punten $A(2, -1)$ en $B(6, 5)$.

Uitwerking

Stel $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - -1}{6 - 2} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$.

$y = 1\frac{1}{2}x + b$ door $A(2, -1)$:

$1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1$

$3 + b = -1$

$b = -4$

Dus l: $y = 1\frac{1}{2}x - 4$.

R19

Zie het voorbeeld.

a Lotte neemt $\Delta y = -1 - 5$.
Welke Δx hoort daarbij? Krijgt ze ook $rc_l = 1\frac{1}{2}$?

b Lars gebruikt de coördinaten van het punt B om b te berekenen in $y = 1\frac{1}{2}x + b$.
Welke berekening hoort daarbij?

20

Stel de formule op van de lijn.

a l door $A(-1, 1)$ en $B(1, 4)$

b m door $C(-3, 5)$ en $D(2, 0)$

21

Stel een vergelijking op van de lijn.

a k door $A(1, -3)$ en $B(5, 5)$

b l door $C(5, 3)$ en $D(-7, 3)$

c m door $E(180, 360)$ en $F(160, 250)$

d n door $G(15, 73)$ en $H(45, 58)$

R22

a Het opstellen van de formule van de lijn k door de punten $A(0, 2)$ en $B(5, 3)$ kan uit het hoofd.
Licht dit toe en geef de formule van k.

b Stel uit het hoofd de formule op van de lijn l door de punten $C(4, 0)$ en $D(0, 3)$.

A23

De lijn k gaat door de punten $A(8, 8)$ en $B(20, 11)$ en de lijn l gaat door de punten $C(2, 14)$ en $D(50, -10)$.
Stel van de lijnen k en l de formule op en bereken de coördinaten van het snijpunt E van deze lijnen.

A24

De lijn k gaat door de punten $A(0, 25)$ en $B(12, 7)$ en de lijn l gaat door de punten $C(4, 3)$ en $D(20, 43)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

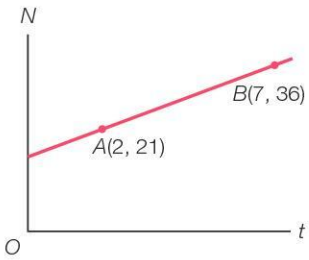
© Noordhoff Uitgevers

E25 ✱

De zusjes Janneke, Daniëlle en Anna waren in een hoedenwinkel. Ze wilden alle drie eenzelfde hoed kopen. Janneke kwam een derde van de prijs tekort, Daniëlle een kwart en Anna een vijfde. Tijdens de opruiming werden de hoeden €9,40 per stuk goedkoper. De drie zusjes deden hun geld bij elkaar en konden nu precies voor elk van hen zo'n hoed kopen. Al het geld ging op.
Hoeveel euro kostte zo'n hoed vóór de opruiming?

026 ✱

De lijn in de figuur hiernaast gaat door de punten $A(2, 21)$ en $B(7, 36)$.
De formule van deze lijn heeft de vorm $N = at + b$.
Bereken a en b.



figuur 1.12

Theorie B Lineaire formules opstellen

Bij toepassingen gebruik je vaak andere letters dan x en y, maar het opstellen van lineaire formules gaat nog steeds op dezelfde manier.

Is r een lineaire functie van s, dan is $r = as + b$ met $a = \frac{\Delta r}{\Delta s}$.

Is K een lineaire functie van m, dan is $K = am + b$ met $a = \frac{\Delta K}{\Delta m}$.

Bij de formule $K = am + b$ is K een functie van m. Je kunt ook zeggen dat K is **uitgedrukt in** m.

Voorbeeld

Een auto begint op $t = 0$ te remmen waarbij de snelheid lineair afneemt.
Op $t = 2$ is de snelheid 90 km/uur en op $t = 5$ is de snelheid 45 km/uur.
Hierbij is t de tijd in seconden.
Druk de snelheid v in km/uur uit in t.

Uitwerking

Stel $v = at + b$ met $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

bij $t = 2$ hoort $v = 90$
bij $t = 5$ hoort $v = 45$
$\Big\}\ a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{45 - 90}{5 - 2} = -15$

$v = -15t + b$
$t = 2$ en $v = 90$
$\Big\}\ -15 \cdot 2 + b = 90$
$-30 + b = 90$
$b = 120$

Dus $v = -15t + 120$.

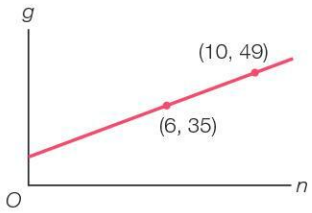
© Noordhoff Uitgevers

27

a K is een lineaire functie van m.
Voor $m = 5$ is $K = 10$ en voor $m = 12$ is $K = 115$.
Schrijf K als functie van m.

b F is een lineaire functie van R.
Voor $R = 15$ is $F = 300$ en voor $R = 42$ is $F = 138$.
Druk F uit in R.

c Zie de lijn in de figuur hiernaast.
Stel een vergelijking op van deze lijn.



figuur 1.13

28

Tussen p en q bestaat een lineair verband.
Bij $q = 150$ hoort $p = 7{,}75$ en bij $q = 425$ hoort $p = 2{,}25$.

a Druk p uit in q.

b Om q uit de drukken in p kun je op twee manieren te werk gaan.
1 Gebruik het antwoord van vraag a.
2 Begin als volgt: $q = ap + b$ met $a = \frac{\Delta q}{\Delta p}$.
Werk beide manieren uit.

c Bereken p voor $q = 250$ en bereken q voor $p = 4{,}25$.

29

Tijdens een vlucht van een Airbus A310 is er na 250 km vliegen 56 ton kerosine in de brandstoftanks aanwezig, 400 km verder is dat nog 49,6 ton.
Er bestaat een lineair verband tussen de aanwezige hoeveelheid kerosine k in ton en de vluchtafstand V in km.

a Stel de formule op van k als functie van V.

Als veiligheidsmaatregel gaat er in de cockpit een alarm af als er in de tanks nog maar 5 ton kerosine zit.

b Hoeveel km na de start gaat het alarm af?

A30

Een trein rijdt met een constante snelheid. Om 13:12 uur is de trein 18,2 km van het station in Houten verwijderd en om 13:17 uur is deze afstand nog 7,2 km.

a Hoe ver is de trein om 13:19 uur van het station in Houten verwijderd?

b De trein stopt niet in Houten en rijdt met onverminderde snelheid langs het station.
Bereken in tientallen seconden nauwkeurig hoe laat dit gebeurt.

© Noordhoff Uitgevers

A31 ⊙✱

De volwassen Nederlander wordt gemiddeld steeds langer en zwaarder. In 1986 had de Nederlandse man een gemiddelde lengte van 177,5 cm en een gemiddeld gewicht van 77,6 kg. In 2016 was dat 181,1 cm en 84,5 kg.
De Nederlandse vrouw woog in 2020 gemiddeld 72,0 kg. Dat was 4,5 kg meer dan in 1995. In 2020 was de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw 167,5 cm. Dat was 1,3 cm meer dan in 1994.
Neem in deze opgave aan dat er lineaire verbanden bestaan tussen de tijd t in jaren en het gewicht in kg, en tussen t en de lengte in cm.
Neem bovendien aan dat deze lineaire verbanden ook de komende jaren gelden. Neem $t = 0$ in het jaar 1980.

a Stel de formule op
van het gemiddelde gewicht G_m van de Nederlandse man,
van het gemiddelde gewicht G_v van de Nederlandse vrouw,
van de gemiddelde lengte L_m van de Nederlandse man en
van de gemiddelde lengte L_v van de Nederlandse vrouw
als functie van t.

Mannen zijn gemiddeld zwaarder dan vrouwen. In 2012 was het verschil ongeveer 13 kg.

b Bereken in welk jaar dit verschil 14 kg zal zijn. Wat is dan het gemiddelde gewicht van de Nederlandse man?

c Bereken de gemiddelde lengte van de Nederlandse man in het jaar dat de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw 168 cm zal zijn.

Een bekende maat om na te gaan of er sprake is van gezond gewicht of overgewicht is de Body Mass Index (BMI).
De BMI bereken je met de formule $\text{BMI} = \frac{\text{gewicht}}{\text{lengte}^2}$.
Hierin is het gewicht in kg en de lengte in meter.
Bij een BMI van 18,5 tot 25 is sprake van gezond gewicht, bij 25 tot 27 is er licht overgewicht en bij 27 tot 30 is er matig overgewicht.
Bram beweert dat tussen 1990 en 2020 de BMI van de Nederlandse man meer gestegen is dan de BMI van de Nederlandse vrouw.

d Onderzoek of Bram gelijk heeft.

E32 ✱

Een koudwaterkraan, geheel geopend, vult een vat in 10 minuten. Een warmwaterkraan, ook geheel geopend, vult hetzelfde vat in 12 minuten. Een stop in de bodem van het vat zorgt ervoor dat het vat niet leegloopt. Als de stop eruit is, loopt een vol vat in 20 minuten helemaal leeg.
Als nu bij een leeg vat beide kranen geheel opengezet worden en ook de stop uit de bodem getrokken wordt, hoeveel minuten duurt het dan tot het vat vol is?

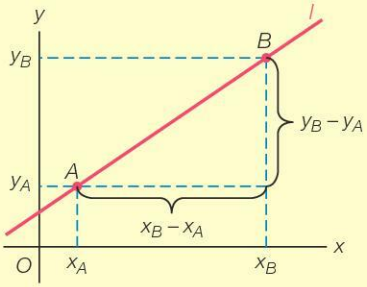
© Noordhoff Uitgevers

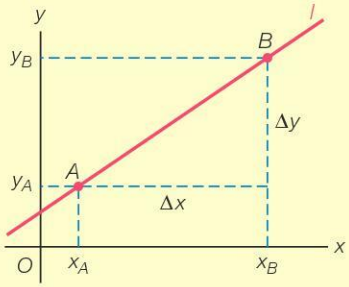
Terugblik

De formule van een lijn door twee gegeven punten

Van de lijn $y = ax + b$ is de richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Als de coördinaten van twee punten A en B bekend zijn, dan is
$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.





Bij de lijn l door de punten $A(2, -2)$ en $B(6, 0)$ krijg je $\text{rc}_l = \frac{0 - -2}{6 - 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Dus l: $y = \frac{1}{2}x + b$.
Door de coördinaten van A in de formule van l in te vullen, bereken je b.
Zo krijg je $\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -2$ en dit geeft $b = -3$.
Dus de formule van de lijn l is $y = \frac{1}{2}x - 3$.
Om b te berekenen, had je ook de coördinaten van B kunnen gebruiken.
In plaats van de formule van de lijn is $y = \frac{1}{2}x - 3$ zeggen we ook wel een vergelijking van de lijn is $y = \frac{1}{2}x - 3$.

In toepassingen kom je vaak andere letters tegen, bijvoorbeeld
$r = as + b$ met $a = \frac{\Delta r}{\Delta s}$ of $v = at + b$ met $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Is v een lineaire functie van t, hoort $v = 20$ bij $t = 3$ en hoort $v = 12$ bij $t = 13$, dan is $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12 - 20}{13 - 3} = \frac{-8}{10} = -0{,}8$.

$v = -0{,}8t + b$
bij $t = 3$ hoort $v = 20$ $\Big\}$ $-0{,}8 \cdot 3 + b = 20$
$-2{,}4 + b = 20$
$b = 22{,}4$

Dus $v = -0{,}8t + 22{,}4$.

© Noordhoff Uitgevers

1.3 Stelsels vergelijkingen

033

Een aannemer wil op een stuk grond van 10 000 m^2 twee typen huizen neerzetten. Voor een huis van type A is 500 m^2 grond nodig. Voor een huis van type B is dat 200 m^2.

a Hoeveel huizen van type B kan de aannemer nog neerzetten als hij kiest voor 16 huizen van type A?

b Hoeveel huizen van type A komen er als hij kiest voor 30 huizen van type B?

c Neem aan dat de aannemer x huizen van type A neerzet en y huizen van type B.
Vul in: tussen x en y bestaat het verband $...x + ...y = 10\,000$.

Theorie A Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

Bij een schouwburgvoorstelling zijn de entreeprijzen € 12 en € 15. De totale opbrengst van de kaartverkoop bedraagt € 2520. Stel x is het aantal verkochte kaartjes van € 12 en y is het aantal verkochte kaartjes van € 15, dan bestaat tussen x en y het verband $12x + 15y = 2520$.
Je kunt bij dit verband y uitdrukken in x.
Je werkt dan toe naar de vorm $y = ...$
$12x + 15y = 2520$
$15y = -12x + 2520$
$y = -0{,}8x + 168$
Je ziet dat er een lineair verband tussen x en y bestaat. De grafiek van $12x + 15y = 2520$ is dus een rechte lijn.
De vergelijking $12x + 15y = 2520$ is een voorbeeld van een **lineaire vergelijking met twee variabelen**.
Andere lineaire vergelijkingen met twee variabelen zijn $x + 7y = 60$, $3x - 2y = 5$ en $3p - 2q = 16\frac{1}{2}$.

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$.
De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.

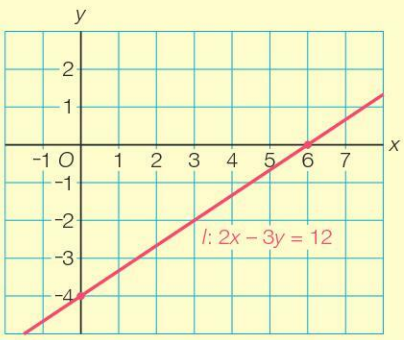
Voor $a = 2$, $b = -3$ en $c = 12$ krijg je $2x - 3y = 12$.
Bij deze vergelijking druk je als volgt y uit in x.
We zeggen ook wel: je gaat y **vrijmaken**.
$2x - 3y = 12$
$-3y = -2x + 12$
$y = \frac{2}{3}x - 4$
Uit deze formule kun je direct de richtingscoëfficiënt $\frac{2}{3}$ aflezen en de coördinaten van het snijpunt met de y-as $(0, -4)$.

© Noordhoff Uitgevers

Om de lijn l: $2x - 3y = 12$ te tekenen, is het niet nodig om y vrij te maken, want ook bij de vorm $2x - 3y = 12$ kun je een tabel maken met de coördinaten van twee punten.
$x = 0$ geeft $-3y = 12$, dus $y = -4$.
$y = 0$ geeft $2x = 12$, dus $x = 6$.

x	0	6
y	-4	0

De lijn l gaat door de punten $(0, -4)$ en $(6, 0)$.
Zie figuur 1.14.



figuur 1.14

Het punt $(9, 2)$ ligt op l, want invullen geeft $2 \cdot 9 - 3 \cdot 2 = 12$ en dit klopt.
We zeggen dat $(x, y) = (9, 2)$ een *oplossing* is van de vergelijking $2x - 3y = 12$.
Zo is ook $(x, y) = (7\frac{1}{2}, 1)$ een oplossing, want $2 \cdot 7\frac{1}{2} - 3 \cdot 1 = 12$ klopt.

De oplossingen van $2x - 3y = 12$ zijn de **getallenparen** (x, y) die aan de vergelijking **voldoen**.

Voorbeeld
Gegeven is de lijn l: $3x - 5y = 10$.
a Voor welke p ligt het punt $A(4, p)$ op l?
b Voor welke q is $(x, y) = (q, 6)$ een oplossing van $3x - 5y = 10$?
c Bereken de richtingscoëfficiënt van l.

Uitwerking
a $A(4, p)$ op l, dus $3 \cdot 4 - 5 \cdot p = 10$
$12 - 5p = 10$
$-5p = -2$
$p = \frac{2}{5}$

b $(x, y) = (q, 6)$ is een oplossing, dus $3 \cdot q - 5 \cdot 6 = 10$
$3q - 30 = 10$
$3q = 40$
$q = 13\frac{1}{3}$

c $3x - 5y = 10$
$-5y = -3x + 10$
$y = \frac{3}{5}x - 2$
Dus $\text{rc}_l = \frac{3}{5}$.

© Noordhoff Uitgevers

34

a Jan koopt bij een tuincentrum twaalf coniferen en vier appelboompjes. Hij moet hiervoor € 242,40 betalen.
Stel dat één conifeer x euro kost en één appelboompje y euro.
Welk verband tussen x en y volgt hieruit?

b Voor een concert zijn kaartjes te koop van 10 en 15 euro. De totale opbrengst op een avond is 4300 euro.
Stel bij deze gegevens een lineaire vergelijking op met de variabelen x en y.

35

a Maak y vrij bij $15x + 12y = 2520$.

b Druk p uit in q bij $3p - 2q = 16\frac{1}{2}$.

c Maak b vrij bij $5a - 2b = 16$.

36

Gegeven zijn de lijnen l: $3x - y = 6$, m: $x + y = 1$, n: $x - y = 0$ en p: $x + 2y = 4$.

a Teken l, m, n en p in één figuur.

b Bereken van elk van deze lijnen de richtingscoëfficiënt.

A37

Gegeven is de lijn l: $4x - 3y = 24$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de x-as en de y-as en teken l.

b Onderzoek welke van de punten $A(8, 3)$, $B(18, 16)$ en $C(-30, -48)$ op l liggen.

c Het getallenpaar $(16, p)$ voldoet aan de vergelijking $4x - 3y = 24$.
Bereken p.

d Voor welke q is $(x, y) = (q, 48)$ een oplossing van $4x - 3y = 24$?

38

Gegeven zijn de lijnen l: $3x - 4y = 7$ en m: $3x - 4y = -8$.

a Bereken rc_l en rc_m.

b Waarom zijn alle lijnen van de vorm $3x - 4y = c$ evenwijdig?

c Voor welke waarde van c ligt het punt $A(5, 1)$ op de lijn $3x - 4y = c$?

$A(5, 1)$ op $3x - 4y = c$, dus $c = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1$.

d De lijn k gaat door het punt $B(3, -1)$ en is evenwijdig met l.
Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

A39

De lijn m gaat door het punt $A(5, 8)$ en is evenwijdig met de lijn l: $2x + y = 8$.
Stel van m een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

E40

De lijn k gaat door het punt $A(-1, 3)$ en is evenwijdig met de lijn l door de punten $B(p, 3p)$ en $C(7p, -p)$.
Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

© Noordhoff Uitgevers

041

Gegeven zijn de lijnen l: $2x + y = 3$ en m: $x - 2y = 4$.

a Teken l en m in één figuur.

b Geef de coördinaten van het snijpunt van l en m.

c Welk getallenpaar (x, y) is zowel oplossing van $2x + y = 3$ als van $x - 2y = 4$?

Theorie B Stelsels vergelijkingen oplossen door elimineren

In figuur 1.15 zie je de lijnen l: $3x + y = 15$ en m: $x + y = 7$.
Het punt $(4, 3)$ is het snijpunt van deze lijnen.
Daarom is $(x, y) = (4, 3)$ zowel oplossing van $3x + y = 15$ als van $x + y = 7$.
We zeggen dat $(x, y) = (4, 3)$ de oplossing is van het **stelsel** $\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x + y = 7 \end{cases}$

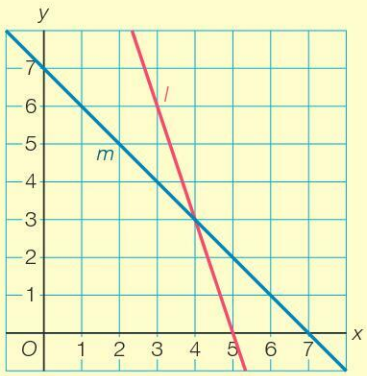
Niet altijd is de oplossing van een stelsel mooi uit een figuur af te lezen.
Je leert nu een manier om de oplossing van een stelsel te berekenen. Bij deze manier ga je vergelijkingen optellen of aftrekken.

Bij het stelsel $\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x + y = 7 \end{cases}$ begin je met de vergelijkingen van elkaar af te trekken, want dan valt de y weg. We zeggen dat y geëlimineerd wordt.
Elimineren betekent wegwerken.

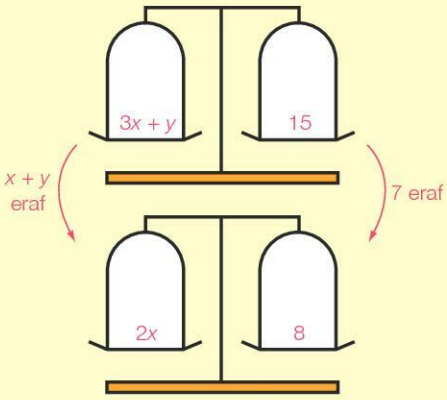
$$\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 3x + y = 15 \\ \quad x + y = 7 \end{array}\right. \\ \hline 2x \quad\quad = 8 \quad - \\ x = 4 \end{array}$$

Door vervolgens $x = 4$ in een van de vergelijkingen in te vullen, bereken je y.
Invullen in de eerste vergelijking geeft $3 \cdot 4 + y = 15$, oftewel $y = 3$.
Ga na dat $x = 4$ invullen in de tweede vergelijking ook $y = 3$ geeft. En zo krijg je met deze berekening ook $(x, y) = (4, 3)$.

Dat je de vergelijkingen $3x + y = 15$ en $x + y = 7$ van elkaar af mag trekken, wordt verduidelijkt in de figuur hiernaast.



figuur 1.15 Bij het oplossen van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen bereken je de coördinaten van het snijpunt van de twee lijnen.



figuur 1.16 Weer in evenwicht, want links en rechts is hetzelfde eraf gehaald, immers $x + y = 7$.

© Noordhoff Uitgevers

Bij het stelsel $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ -2x - 5y = 11 \end{cases}$ begin je met het optellen van de vergelijkingen, want dan wordt x geëlimineerd. Je krijgt

$$\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ -2x - 5y = 11 \end{cases} \quad \underline{+}$$
$$-2y = 4$$
$$y = -2$$

$3y + -5y = -2y$

Invullen van $y = -2$ in de eerste vergelijking geeft $2x + 3 \cdot -2 = -7$ en dit geeft $x = -\frac{1}{2}$.
Dus $(x, y) = (-\frac{1}{2}, -2)$ is de oplossing van het stelsel.

Schrijf bij de oplossing eerst x en dan y op.

In het voorbeeld hieronder zie je hoe je het oplossen van een stelsel opschrijft.

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$ op.

Uitwerking

$$\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases} \quad \underline{-}$$
$$2y = -8$$
$$y = -4$$

$-3y - -5y = -3y + 5y = 2y$

$2x - 3y = -5$
$2x - 3 \cdot -4 = -5$
$2x + 12 = -5$
$2x = -17$
$x = -8\frac{1}{2}$

De oplossing is $(x, y) = (-8\frac{1}{2}, -4)$.

R42

a Zie het voorbeeld.
Licht met een tekening zoals in figuur 1.16 toe dat je de vergelijkingen $2x - 3y = -5$ en $2x - 5y = 3$ van elkaar mag aftrekken.

b Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 15 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$
Hoe kun je hier een van de variabelen elimineren: door de vergelijkingen van elkaar af te trekken of door de vergelijkingen bij elkaar op te tellen? Licht toe.

c Gegeven is het stelsel $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$
Hoe kun je hier een van de variabelen elimineren: door de vergelijkingen van elkaar af te trekken of door de vergelijkingen bij elkaar op te tellen? Licht toe.

© Noordhoff Uitgevers

43

Los op.

a $\begin{cases} 5x - 4y = -8 \\ -x + 4y = -12 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$

44

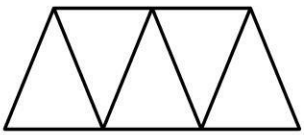
Leen heeft in zijn spaarpot uitsluitend munten van 1 en 2 euro.
Met 50 munten heeft hij een bedrag van € 87.
Stel het aantal munten van 1 euro is x en het aantal munten van 2 euro is y.

a Welke vergelijking volgt uit het gegeven dat Leen 50 munten heeft?
Welke vergelijking volgt uit het gegeven dat het bedrag € 87 is?

b Bereken hoeveel munten van 1 euro Leen heeft. Los hiertoe een stelsel op.

A45

De figuur hiernaast is opgebouwd uit vijf gelijkbenige driehoeken.
De omtrek van één zo'n driehoek is 14 en de omtrek van de figuur is 30.
Bereken de zijden van de gelijkbenige driehoeken.



figuur 1.17

E46

Los het volgende stelsel op.

$\begin{cases} a + b = 12 \\ a + c = 13 \\ b + c = 15 \end{cases}$

O47

Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$

a Tel de vergelijkingen van het stelsel bij elkaar op.
Is nu een van de variabelen geëlimineerd?

b Trek de vergelijkingen van het stelsel van elkaar af.
Is nu een van de variabelen geëlimineerd?

c Bedenk een manier om toch één van de variabelen te elimineren.

Theorie C Elimineren door optellen en aftrekken

In opgave 47 vallen zowel bij optellen als bij aftrekken geen van de variabelen weg. Maar als je de eerste vergelijking met 2 vermenigvuldigt en de tweede vergelijking met 3, dan staat in beide vergelijkingen $6x$. En dan wordt bij aftrekken de variabele x wel geëlimineerd. Je krijgt

$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x - 8y = 14 \\ 6x + 9y = 48 \end{cases}$ $-$

$-17y = -34$

$y = 2$ enzovoort

Tussen de verticale strepen staan de getallen waarmee vermenigvuldigd is.

© Noordhoff Uitgevers

Je kunt bij dit stelsel ook y elimineren. Daartoe vermenigvuldig je de eerste vergelijking met 3 en de tweede met 4. Dan krijg je

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 9x - 12y = 21 \\ 8x + 12y = 64 \end{cases} +$$

$$17x \quad = 85$$

$$x = 5 \qquad \text{enzovoort}$$

Ga bij het oplossen van een stelsel eerst na welke variabele je het beste kunt elimineren. Doe het zo, dat je zo weinig mogelijk rekenwerk krijgt.

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ op.

Het is niet nodig met 2 en 8 te vermenigvuldigen. Je kunt volstaan met een vermenigvuldiging met 1 en 4.

Uitwerking

$$\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 12x - 8y = 16 \end{cases} +$$

$$14x \quad = 21$$

$$x = 1\tfrac{1}{2}$$

$$2x + 8y = 5 \quad \left\} \begin{array}{l} 2 \cdot 1\frac{1}{2} + 8y = 5 \\ 3 + 8y = 5 \\ 8y = 2 \\ y = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

De oplossing is $(x, y) = (1\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

48 Los op.

a $\begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - y = 19 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} 4x + y = 13 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

49 Los op.

a $\begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 2x - 5y = -19 \\ 5x + 4y = 35 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}2y = 1 \\ 0{,}3x - 0{,}3y = 1{,}5 \end{cases}$

50 Gegeven zijn de lijnen k: $2x + 3y = 15$ en l: $x - 2y = 1$.

a Teken de lijnen k en l in één figuur.

b Welk stelsel moet je oplossen om de coördinaten van het snijpunt van k en l te berekenen? Bereken de coördinaten van het snijpunt.

A51 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen.

a k: $3x - 2y = -12$ en l: $x + 4y = 38$

b p: $2x + 5y = 26$ en q: $3x - 2y = 1$

© Noordhoff Uitgevers

52

Een groenteman verkoopt appels en peren. De appels kosten € 1,40 per kg en de peren € 1,70 per kg. Op een zaterdag verkoopt hij in totaal 295 kg appels en peren. De opbrengst is € 452.
Hoeveel kg appels heeft hij die dag verkocht?

A53

Op de verjaardag van Marjan is de gemiddelde leeftijd van de 15 aanwezige personen 16,4 jaar.
De jongens zijn gemiddeld 15,6 jaar en de meisjes 16,8 jaar.
Hoeveel jongens zijn er op de verjaardag?

A54

a Los het stelsel $\begin{cases} 4x - y = 13 \\ 2x + 3y = -11 \end{cases}$ op.

b Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen k: $3x - 2y = 7$ en l: $5x - 4y = 10$.

c Een aannemer wil op een stuk grond van 8800 m^2 twee typen huizen neerzetten. Voor een huis van type A is 325 m^2 grond nodig. Voor een huis van type B is dat 175 m^2. De aannemer wil in totaal 40 huizen op het stuk grond bouwen.
Hoeveel huizen van type A en van type B gaat de aannemer bouwen?

d Els en Fiona knippen beiden een rechthoekig velletje papier in tweeën. Els krijgt twee rechthoeken, elk met een omtrek van 40 cm. Fiona krijgt ook twee rechthoeken, maar dan elk met een omtrek van 50 cm. Toch hebben beiden eenzelfde velletje doorgeknipt.
Wat is de omtrek van het velletje papier waarmee ze begonnen?

A55

In deze opgave stellen a en b getallen voor.
Gegeven is de volgende rij getallen: a, b, $a + b$, $a + 2b$, $2a + 3b$, $3a + 5b$, ...

a Druk het zevende en het achtste getal van deze rij uit in a en b.

b Gegeven is dat het zevende getal 34 is en het achtste 55.
Bereken a en b.

A56

Gegeven is het stelsel $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$
Elimineer y, dus druk x uit in a, b, c, p, q en r.

057

Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l: $2x + 3y = 12$ en m: $y = 4x - 10$.

© Noordhoff Uitgevers

Theorie D Elimineren door substitutie

Je kunt het stelsel dat bij opgave 57 hoort oplossen met behulp van elimineren door optellen en aftrekken. Maar er is een handiger manier. Die gaat als volgt.
Omdat $y = 4x - 10$ kun je in de vergelijking $2x + 3y = 12$ de variabele y vervangen door $4x - 10$.
Je krijgt $2x + 3(4x - 10) = 12$ en hiermee is x te berekenen.
Dit geeft $x = 3$.
In plaats van

vervang y door $4x - 10$ in de vergelijking $2x + 3y = 12$

zeggen we ook wel

substitueer $y = 4x - 10$ in $2x + 3y = 12$.

Substitueren betekent vervangen door.

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$ op.

Uitwerking

$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$

Substitueren van $x = 2y + 1$ in $3x - y = 7$ geeft

$3(2y + 1) - y = 7$

$6y + 3 - y = 7$

$5y = 4$

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{4}{5} \\ x = 2y + 1 \end{array}\right\} x = 2 \cdot \frac{4}{5} + 1 = 2\frac{3}{5}$

De oplossing is $(x, y) = (2\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

58

Los op.

a $\begin{cases} 2x + 2y = 9 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ 3x + 6y = 8 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} x = 5y - 3 \\ 3x + 4y = 29 \end{cases}$

A59

Los op.

a $\begin{cases} y = x - 4 \\ 6x + 4y = 19 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 7x + 5y = 56 \\ x = 1\frac{1}{2}y + 8 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} x = 1\frac{1}{2}y + 20\frac{1}{2} \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

A60

Het stelsel $\begin{cases} y = ax + b \\ bx + ay = -22 \end{cases}$ heeft de oplossing $(x, y) = (5, 4)$.
Bereken a en b.

© Noordhoff Uitgevers

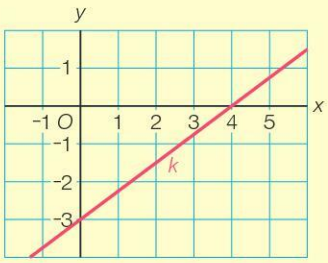
Terugblik

Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$.
De grafiek van $ax + by = c$ is een rechte lijn.
Om de lijn k: $3x - 4y = 12$ te tekenen, maak je een tabel.

x	0	4
y	-3	0

De lijn gaat door de punten $(0, -3)$ en $(4, 0)$.



Oplossingen van $ax + by = c$

Het getallenpaar $(x, y) = (12, 6)$ is een oplossing van $3x - 4y = 12$, want invullen geeft $3 \cdot 12 - 4 \cdot 6 = 12$ en dat klopt.
Dus $(x, y) = (12, 6)$ voldoet aan $3x - 4y = 12$ en het punt $(12, 6)$ ligt op de lijn $3x - 4y = 12$.

Lineaire vergelijkingen opstellen

Bij een pretpark is de toegangsprijs voor een volwassene € 17 en voor een kind € 12. Op een dag is er € 19 200 aan entreegeld binnengekomen.
Om hierbij een vergelijking op te stellen, voer je de variabelen x en y in.
x = het aantal volwassenen
y = het aantal kinderen
Bij de situatie hoort de vergelijking $17x + 12y = 19\,200$.

Stelsels oplossen

Voor het oplossen van stelsels van twee lineaire vergelijkingen met twee variabelen ken je twee methoden.

1 Elimineren door optellen of aftrekken

Het stelsel $\begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ x - 3y = 14 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ 3x - 9y = 42 \end{cases}$ $-$

$4y = -24$
$y = -6$

Invullen van $y = -6$ in $x - 3y = 14$ geeft $x + 18 = 14$, dus $x = -4$.
De oplossing is $(x, y) = (-4, -6)$.

2 Elimineren door substitutie

Bij het stelsel $\begin{cases} x = -3y + 2 \\ 2x - y = 11 \end{cases}$ vervang je in de onderste vergelijking x door $-3y + 2$.

Dat geeft $2(-3y + 2) - y = 11$
$-6y + 4 - y = 11$
$-7y = 7$
$y = -1$

Invullen van $y = -1$ in $x = -3y + 2$ geeft $x = 5$.
De oplossing is $(x, y) = (5, -1)$.

© Noordhoff Uitgevers

1.4 Kwadratische verbanden

061 De vergelijking $x^2 + 8x + 15 = 0$ kun je oplossen door deze te schrijven als $(x + 3)(x + 5) = 0$.

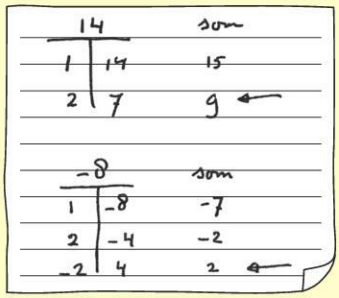
a Reken na dat $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$.

b Hoe volgt het getal 15 uit 3 en 5?
En hoe volgt het getal 8 uit 3 en 5?

c Geef de oplossingen van de vergelijking $x^2 + 8x + 15 = 0$.

Theorie A Kwadratische vergelijkingen oplossen met ontbinden in factoren

Sommige kwadratische vergelijkingen kun je oplossen met behulp van ontbinden in factoren.
Om $x^2 + 9x + 14$ te ontbinden in factoren gebruik je de **product-som-methode**.
Zoek dus twee getallen met product 14 en som 9.
Gebruik de tabel van 14.
Je krijgt $x^2 + 9x + 14 = (x + 2)(x + 7)$.



Om $x^2 + 2x - 8$ te ontbinden in factoren zoek je twee getallen met product -8 en som 2.
Gebruik de tabel van -8.
Je krijgt $x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$.

Bij het oplossen van de vergelijking $x^2 + 2x - 8 = 0$ gebruik je na het ontbinden in factoren de volgende regel.

$AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$

$\vee$ betekent of.

Bij $3x^2 - 3x - 6 = 0$ deel je eerst het linker- en het rechterlid door 3.
Daarna kun je ontbinden in factoren.
$3x^2 - 3x - 6 = 0$
$x^2 - x - 2 = 0$
$(x + 1)(x - 2) = 0$
$x + 1 = 0 \vee x - 2 = 0$
$x = -1 \vee x = 2$
Om de regel $AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$ te kunnen toepassen, moet het rechterlid nul zijn. Daarom maken we in het voorbeeld het rechterlid nul.

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Los op.

a $5x^2 = 12x$

b $-x^2 + 3x = 6x - 4$

Uitwerking

a
$5x^2 = 12x$
$5x^2 - 12x = 0$
$x(5x - 12) = 0$
$x = 0 \vee 5x - 12 = 0$
$x = 0 \vee 5x = 12$
$x = 0 \vee x = 2\frac{2}{5}$

b
$-x^2 + 3x = 6x - 4$
$-x^2 + 3x - 6x + 4 = 0$
$-x^2 - 3x + 4 = 0$ $\times -1$
$x^2 + 3x - 4 = 0$
$(x - 1)(x + 4) = 0$
$x - 1 = 0 \vee x + 4 = 0$
$x = 1 \vee x = -4$

62 Los op.

a $x^2 - 7x - 18 = 0$

b $x^2 + 5x = 6$

c $x^2 = 5x$

d $x^2 + x = 3x + 15$

e $4x^2 = 8x$

f $x^2 = x + 2$

63 Los op.

a $3x^2 - 12x = 36$

b $-x^2 = 13x - 48$

c $(3x - 1)(x + 2) = 0$

d $7x^2 + 8x = x + 84$

e $x(x - 2) = 48$

f $(x - 1)(x - 2) = 12$

064

a Het oplossen van de vergelijking $4x^2 - 25x = 0$ gaat anders dan het oplossen van de vergelijking $4x^2 - 25 = 0$.
Licht dit toe.

b Licht toe dat vergelijking $4x^2 + 25 = 0$ geen oplossing heeft.

c Licht toe dat het oplossen van de vergelijking $x(x + 2) = 0$ anders gaat dan het oplossen van de vergelijking $x(x + 2) = 8$.

Theorie B Typen kwadratische vergelijkingen

De algemene vorm van een **kwadratische vergelijking** oftewel **tweedegraadsvergelijking** is $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$.
Bij het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen kun je gebruik maken van het schema op de volgende bladzijde.
In het schema wordt onderscheid gemaakt tussen vergelijkingen met twee en met drie termen. Bij tweedegraadsvergelijkingen met drie termen gebruik je soms de ***abc*-formule**.

De *abc*-formule

$ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ geeft

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

met $D = b^2 - 4ac$.

Bij de *abc*-formule is aan de **discriminant** D te zien hoeveel oplossingen er zijn:

- voor $D > 0$ zijn er twee oplossingen
- voor $D = 0$ is er één oplossing
- voor $D < 0$ zijn er geen oplossingen.

Het oplossen van kwadratische vergelijkingen

Twee termen

$ax^2 + bx = 0$

Aanpak: breng x buiten haakjes.

a $5x^2 - 7x = 0$
$x(5x - 7) = 0$
$x = 0 \vee 5x = 7$
$x = 0 \vee x = 1\frac{2}{5}$

b $3x = x^2$
$3x - x^2 = 0$
$x(3 - x) = 0$
$x = 0 \vee x = 3$

$ax^2 + c = 0$

Aanpak: herleid tot de vorm $x^2 =$ getal.

a $3x^2 - 30 = 0$
$3x^2 = 30$
$x^2 = 10$
$x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$

b $4x^2 + 40 = 0$
$4x^2 = -40$
$x^2 = -10$
geen oplossing

Drie termen $ax^2 + bx + c = 0$

Het linkerlid is te ontbinden

Aanpak: gebruik de product-som-methode.

a $x^2 - 6x - 7 = 0$
$(x + 1)(x - 7) = 0$
$x = -1 \vee x = 7$

b $x^2 = x + 6$
$x^2 - x - 6 = 0$
$(x + 2)(x - 3) = 0$
$x = -2 \vee x = 3$

Het linkerlid is niet te ontbinden

Aanpak: gebruik de *abc*-formule.

a $2x^2 - 5x - 7 = 0$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -7 = 81$, dus $\sqrt{D} = 9$
$x = \frac{5 + 9}{4} = 3\frac{1}{2} \vee x = \frac{5 - 9}{4} = -1$

b $x^2 + 7x + 2 = 0$
$D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 41$
$x = \frac{-7 + \sqrt{41}}{2} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{41}}{2}$

Het stap voor stap oplossen van een vergelijking, zoals in het schema hierboven is gedaan, heet **algebraïsch oplossen**.
De opdracht **bereken exact de oplossingen** betekent dat je langs algebraïsche weg de oplossingen berekent en deze niet benadert.

Je laat dus oplossingen als $x = \sqrt{3}$, $x = \frac{1}{7}$ en $x = \frac{2 - \sqrt{7}}{6}$ staan.

Oplossingen als $x = \frac{18}{12}$ en $x = \frac{2 - \sqrt{36}}{4}$ vereenvoudig je.

Dus $x = \frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$ en $x = \frac{2 - \sqrt{36}}{4} = \frac{2 - 6}{4} = -1$.

De vergelijking $(x + 3)^2 = 16$ is op te lossen zonder eerst de haakjes weg te werken. Zie voorbeeld a.

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $(x+3)^2 = 16$

b $3x^2 - 6 = 3x$

c $4x^2 = 6x - 2$

d $x^2 = 2x + 9$

Uitwerking

a $(x+3)^2 = 16$

$x + 3 = 4 \vee x + 3 = -4$

$x = 1 \vee x = -7$

b $3x^2 - 6 = 3x$

$3x^2 - 3x - 6 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x+1)(x-2) = 0$

$x = -1 \vee x = 2$

c $4x^2 = 6x - 2$

$4x^2 - 6x + 2 = 0$

$2x^2 - 3x + 1 = 0$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$, dus $\sqrt{D} = 1$

$x = \frac{3+1}{4} = 1 \vee x = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

d $x^2 = 2x + 9$

$x^2 - 2x - 9 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -9 = 40$

$x = \frac{2+\sqrt{40}}{2} \vee x = \frac{2-\sqrt{40}}{2}$

Probeer bij een tweedegraadsvergelijking met drie termen eerst te ontbinden in factoren. Lukt dat niet, gebruik dan pas de *abc*-formule.

65 Bereken exact de oplossingen.

a $(x-4)^2 = 25$

b $(x-4)^2 = 2x$

c $x^2 + 6 = 5x$

d $x(x-1) = 12$

e $2x^2 = 5x$

f $x^2 + 4 = 1$

66 Los algebraïsch op.

a $3x^2 - 6x = 24$

b $3x^2 - 6x = -3(x-6)$

c $2x^2 - 3x = 2$

d $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$

e $x^2 - 3x = 5(x-3)$

f $2x^2 - 5x = 3x$

67 Bereken exact de oplossingen.

a $6 - x^2 = -2$

b $2x^2 = 9x + 5$

c $3(x+2)^2 + 5 = 80$

d $\frac{1}{2}(x-3)^2 - 3 = 5$

e $-(2x-1)^2 + 5 = 1$

f $8 - 3(4x-5)^2 = 5$

68 Bereken exact de oplossingen.

a $x^2 - 5x = 0$

b $x^2 - 5x = 14$

c $x^2 - 5 = 14$

d $x^2 - 5 = 14x$

e $(2x-1)(3x+6) = 0$

f $(2x-1)(3x+6) = 9x$

g $3x(2x-1) = 6$

h $3x(2x-1) = 6 - 9x$

© Noordhoff Uitgevers

INFORMATIEF

Het bewijs van de *abc*-formule

Je weet dat $x^2 = 10$ geeft $x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$.
Evenzo geldt $(2x - 3)^2 = 10$ geeft $2x - 3 = \sqrt{10} \vee 2x - 3 = -\sqrt{10}$.
En $(2ax + b)^2 = D$ geeft $2ax + b = \sqrt{D} \vee 2ax + b = -\sqrt{D}$.
Om de *abc*-formule te bewijzen, herleiden we de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ tot de vorm $(2ax + b)^2 = D$.
Dat gaat als volgt.

$ax^2 + bx + c = 0$	
$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$	Vermenigvuldig alle termen met $4a$.
$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$	Breng $4ac$ naar het rechterlid.
$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$	Tel bij beide leden b^2 op.
$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$	Bedenk dat $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$.
$(2ax + b)^2 = D$	Vervang $b^2 - 4ac$ door D.
$2ax + b = \sqrt{D} \vee 2ax + b = -\sqrt{D}$	Neem aan dat $D \geq 0$.
$2ax = -b + \sqrt{D} \vee 2ax = -b - \sqrt{D}$	Breng b naar het rechterlid.
	Deel beide leden door $2a$.

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

A69 ⊙∗

Los algebraïsch op.

a $2x^2 - 13x = 3(x - 10)$
b $3x^2 + 2x + 7 = 7(x + 1)$
c $100(x^2 - 1) = 525$
d $2(x - 3)^2 = 3x - 10$
e $5(4x - 1)(6x - 5) = 0$
f $\frac{1}{4}(2x - 3)^2 - 3 = 1$

A70 ▭⊙∗

Bereken exact de oplossingen.

a $(x + 3)^2 = 16x$
b $(2x + 3)^2 = -16$
c $2(x + 3)^2 = -4x$
d $(2x + 3)(4 - x) = 9$
e $(-4x + 3)^2 = 36$
f $-4(x + 3)^2 = 4x$
g $x^2 - (x + 1)^2 = (x + 3)^2$
h $(x + 3)^2 + (x + 2)^2 = 25$

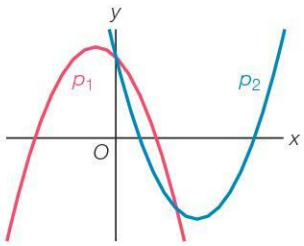
E71 ∗

Van een houten kubus wordt een kleinere kubus gemaakt door aan elk van de zes kanten een laag van 1 cm dikte af te zagen. Hierdoor wordt de totale inhoud van de kubus met 1538 cm^3 verminderd.
Hoeveel cm^3 was de inhoud van de kubus vóór de operatie?

© Noordhoff Uitgevers

072

Gegeven zijn de formules I: $y = x^2 - 4x + 2$ en II: $y = -x^2 - x + 2$. In de figuur hiernaast zijn de bijbehorende parabolen geschetst.
Zoek bij elke parabool de juiste formule.



figuur 1.18

Theorie C Parabolen

De formule $y = 3x^2 - 4x - 5$ is een voorbeeld van een **kwadratisch verband**. De bijbehorende grafiek is een **parabool**.
De algemene formule van een kwadratisch verband is $y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$.
Voor $a > 0$ is de grafiek een **dalparabool** en
voor $a < 0$ is de grafiek een **bergparabool**.

De grafiek van het kwadratisch verband $y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een parabool.
Voor $a > 0$ is de grafiek een dalparabool.
Voor $a < 0$ is de grafiek een bergparabool.

Om een parabool te tekenen, maak je eerst een tabel. Zo'n tabel krijg je snel met de GR. Nadat je de formule op de GR hebt ingevoerd, kun je ook de grafiek **plotten**.

[▸GR] Hoe je op de GR formules invoert, grafieken plot en tabellen krijgt, leer je in de module **Formules, grafieken en tabellen**. Neem eerst deze module door.

We maken onderscheid tussen plotten, schetsen en tekenen van een grafiek. Zie het schema.

Plot de grafiek	Schets de grafiek	Teken de grafiek
Laat de grafiek op het scherm van de GR tekenen. Kies het venster zo, dat alle bijzonderheden van de grafiek op het scherm te zien zijn.	Teken in je schrift een schets van de grafiek. Het gaat niet om precieze punten, maar alleen om de vorm van de grafiek en de ligging ten opzichte van de assen. Je mag daarbij de GR gebruiken.	Teken in je schrift nauwkeurig de grafiek en zet getallen en letters bij de assen. Maak eerst een tabel in je schrift. Gebruik daarbij de GR.

© Noordhoff Uitgevers

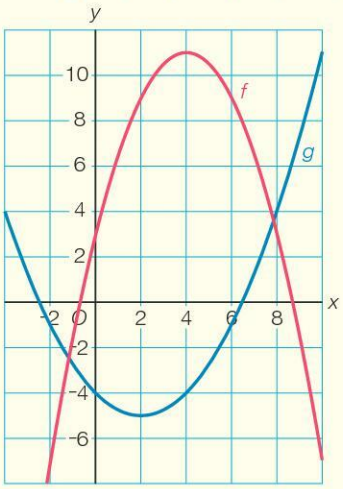
Voorbeeld

Teken de grafieken van $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$ en $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 4$ in één figuur.

Uitwerking

x	−2	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	−7	3	9	11	9	3	−7

x	−4	−2	0	2	4	6	8
$g(x)$	4	−1	−4	−5	−4	−1	4



In het voorbeeld is de functie f genoteerd met het **functievoorschrift** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$. Dit komt op hetzelfde neer als $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$.
Bij de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$ is $f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 3 = 9$.
Dus de **functiewaarde** van 2 is 9.
Je kunt ook zeggen dat bij het **origineel** 2 het **beeld** 9 hoort.

73 Teken de grafieken van $f(x) = -x^2 + 5x + 4$ en $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$ in één figuur.

Let op het verschil tussen tekenen en schetsen.

74 Schets de grafieken van $f(x) = -x^2 - 5x + 2$, $g(x) = 0{,}5x^2 - 4x + 10$ en $h(x) = -0{,}2x^2 + 2x - 5$ in één figuur.

75 Gegeven is de functie f met functievoorschrift $f(x) = x^2 + x - 5$.

a Bereken het beeld van het origineel 3.

b Bereken de originelen van het beeld 1.

© Noordhoff Uitgevers

76 *

a Teken de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$.

b Schets de grafieken van $g(x) = -x^2 + 5x + 1$ en $h(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 4$ in één figuur.

c Gegeven is de functie $k(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + 2$.
Bereken het beeld van het origineel −4 en bereken algebraïsch de originelen van het beeld 10.

077 ◘⊙*

Gegeven is de functie f met functievoorschrift $f(x) = -x^2 + 5x + 2$.

a Vul de volgende tabel in.

x	−1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$								

b Uit de tabel volgt dat de x-coördinaat van de top van de grafiek van f gelijk aan $2\frac{1}{2}$ is.
Licht dit toe en bereken de y-coördinaat van de top.

c Uit de tabel volgen de x-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de horizontale lijn $y = 6$.
Licht dit toe en geef deze x-coördinaten.
Waarom weet je nu ook de oplossingen van de vergelijking $-x^2 + 5x + 2 = 6$?

Theorie D Top, nulpunt en snijpunt

De coördinaten van de **top van een parabool** volgen niet altijd zo eenvoudig uit een tabel zoals in opgave 77. Gelukkig heeft de GR een optie waarmee de coördinaten van een top eenvoudig zijn te berekenen.
Ook de coördinaten van de snijpunten van een grafiek met een horizontale lijn zijn snel met de GR te berekenen.
Zoals je weet zijn de x-coördinaten van snijpunten van grafieken oplossingen van een vergelijking.

Een bijzondere situatie heb je bij de oplossingen van de vergelijking $f(x) = 0$. Deze oplossingen geven de x-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x-as.
Uit de oplossingen van de vergelijking $f(x) = 0$ volgen de **nulpunten** van f.

In de derde klas heb je geleerd dat voor de x-coördinaat van de top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ geldt $x_{top} = -\frac{b}{2a}$.
In deze paragraaf hoef je deze formule niet te gebruiken.
Je vindt de coördinaten van de top van een parabool met de optie minimum of maximum van de GR.

Een nulpunt van een functie f is een x-waarde waarvoor geldt $f(x) = 0$.

Een nulpunt is geen punt maar een getal.

© Noordhoff Uitgevers

[▸ GR] Hoe je met de GR nulpunten, coördinaten van toppen van grafieken en coördinaten van snijpunten van grafieken berekent, leer je in de module **Toppen en snijpunten**. Neem eerst deze module door.

Bij berekeningen die je met de GR maakt, hoort een toelichting. Zo vermeld je de formules die je invoert en de gebruikte opties.

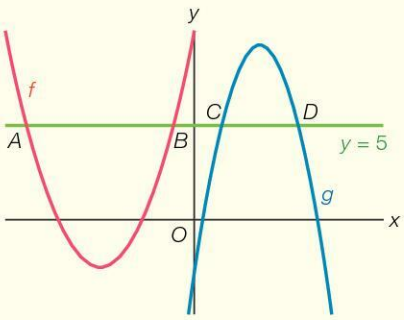
Afspraak
Bij gebruik van de GR
- noteer je welke formules je invoert
- noteer je welke opties je gebruikt.

Voorbeeld
Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 10$ en $g(x) = -x^2 + 7x - 3$ en de lijn $y = 5$. Zie de figuur hiernaast.

a Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f en van de top van de grafiek van g.

b Bereken de nulpunten van f. Rond af op twee decimalen.

c De lijn $y = 5$ snijdt de grafieken van f en g van links naar rechts in de punten A, B, C en D.
Bereken de lengte van het lijnstuk BC.
Rond af op twee decimalen.



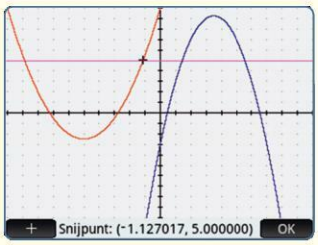
figuur 1.19

Uitwerking

a Voer in $y_1 = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 10$ en $y_2 = -x^2 + 7x - 3$.
De optie minimum geeft bij y_1 de top $(-5; -2{,}5)$.
De optie maximum geeft bij y_2 de top $(3{,}5; 9{,}25)$.

b De optie nulpunt geeft bij y_1 de nulpunten $-7{,}24$ en $-2{,}76$.

c Voer in $y_3 = 5$.
De optie snijpunt geeft bij y_1 en y_3 het punt $B(-1{,}1270...; 5)$ en bij y_2 en y_3 het punt $C(1{,}4384...; 5)$.
Dus $BC = 1{,}4384... - -1{,}1270... \approx 2{,}57$.



© Noordhoff Uitgevers

78 ⊡⊙✱

Zie het voorbeeld met de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 10$ en $g(x) = -x^2 + 7x - 3$.

a Bereken de nulpunten van g. Rond af op twee decimalen.

b Bereken de lengte van het lijnstuk AD. Rond af op twee decimalen.

c De horizontale lijn door de top van de grafiek van f snijdt de grafiek van g in de punten E en F.
Bereken de lengte van het lijnstuk EF. Rond af op twee decimalen.

A79 ⊡⊙

Gegeven is de functie $f(x) = -0{,}4x^2 + 2{,}4x + 6$.

a Schets de grafiek van f.

b Bereken de coördinaten van de top van de grafiek.

c Bereken de nulpunten van f. Rond af op twee decimalen.

d De horizontale lijn $y = n$ met n een geheel getal snijdt de grafiek van f in de punten A en B.
Onderzoek wat de kleinste waarde van n is waarvoor de lengte van het lijnstuk AB kleiner is dan 5.

A80 ⊙✱

Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$ en $g(x) = \frac{2}{5}x^2 + 3x - 8$.

a Onderzoek of de top van de grafiek van f op de grafiek van g ligt.

b De nulpunten van f zijn a en b met $a < b$ en de nulpunten van g zijn c en d met $c < d$.
Bereken $(b - a) - (d - c)$. Rond af op twee decimalen.

c De lijn $y = n$ met n een geheel getal tussen -8 en 6 snijdt de grafieken van f en g van links naar rechts in de punten K, L, M en N.
Bereken de grootste lengte van het lijnstuk LM. Rond af op drie decimalen.

E81 ✱

In een autorace rijden de auto's elk met een constante snelheid. Ze vertrekken om het uur van dezelfde startplaats. De eerste auto rijdt met een snelheid van 50 km/uur. De tweede auto vertrekt een uur later met een snelheid van 51 km/uur. De derde auto vertrekt weer een uur later met een snelheid van 52 km/uur. Zo gaat het door. De laatste auto vertrekt 50 uur na de eerste met een snelheid van 100 km/uur.
Wat is de snelheid van de auto die op kop ligt 100 uur na de start van de eerste auto?

© Noordhoff Uitgevers

Terugblik

Exact berekenen van oplossingen

Bij het exact berekenen van oplossingen van een vergelijking ga je algebraïsch te werk en rond je de oplossingen niet af. Met het algebraïsch oplossen van een vergelijking wordt bedoeld dat je al schrijvende stap voor stap naar de oplossing toewerkt.

Typen kwadratische vergelijkingen

De algemene vorm van een kwadratische vergelijking oftewel tweedegraadsvergelijking is $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$.
Deze vergelijkingen moet je algebraïsch kunnen oplossen.
Er zijn verschillende typen kwadratische vergelijkingen die elk hun eigen aanpak hebben bij het oplossen.

- $ax^2 + bx = 0$ Breng x buiten haakjes.
- $ax^2 + c = 0$ Herleid tot de vorm $x^2 =$ getal.
- $ax^2 + bx + c = 0$ Ontbind het linkerlid en gebruik $AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.
  Als het linkerlid niet is te ontbinden gebruik je de abc-formule.

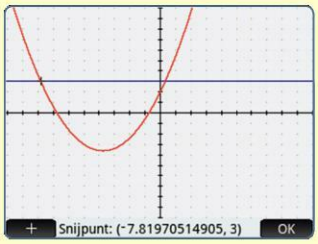
Parabolen

De grafiek van het kwadratisch verband $y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een parabool.
Voor $a > 0$ is de grafiek een dalparabool en voor $a < 0$ een bergparabool.
Door de formule in te voeren op de GR krijg je eenvoudig een tabel die je gebruikt bij het tekenen van de parabool.

Toppen, nulpunten en snijpunten

Met de opties maximum en minimum van de GR kun je coördinaten van toppen berekenen.
Bij de functie $f(x) = 0{,}4x^2 + 3x + 2$ geeft de optie minimum de top $(-3{,}75; -3{,}625)$.
Een nulpunt van een functie f is een x-waarde waarvoor $f(x) = 0$.
Nulpunten vind je op de GR met de optie nulpunt.
Bij de functie $f(x) = 0{,}4x^2 + 3x + 2$ zijn de nulpunten afgerond op twee decimalen $-6{,}76$ en $-0{,}74$.

Met de optie snijpunt van de GR vind je coördinaten van snijpunten van grafieken.
De x-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van $f(x) = 0{,}4x^2 + 3x + 2$ en de lijn $y = 3$ zijn afgerond op twee decimalen $-7{,}82$ en $0{,}32$, dus de coördinaten van de snijpunten zijn $(-7{,}82; 3)$ en $(0{,}32; 3)$.



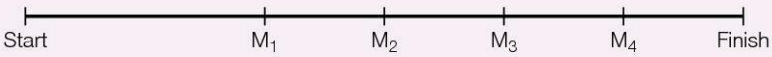
© Noordhoff Uitgevers

Eindopdracht Een tijdrit

Bij een wielerwedstrijd rijden de renners een tijdrit over een afstand van 28 km.
We bekijken de wielrenners A, B, C en D.
De renners starten om de drie minuten.
Renner A start als eerste en rijdt met een constante snelheid van 35 km/uur.
Renner B start drie minuten na A en rijdt met een constante snelheid van 36 km/uur.
Weer drie minuten later start C en die rijdt met een constante snelheid van 38 km/uur.
Drie minuten na C start D en die rijdt met een constante snelheid van 40 km/uur.

- Onderzoek of een van de renners een andere renner voor de finish inhaalt.

Op het parcours van 28 km zijn vier meetpunten: M_1, M_2, M_3 en M_4.
Op deze meetpunten worden de tussentijden gemeten.



Het meetpunt M_2 ligt precies halverwege het parcours.
Als renner A in M_2 is, dan is renner D in M_1.

- Hoeveel km ligt M_1 af van de start?

Als renner A bij de finish is, dan is renner D in M_4.
Verder doet renner B net zo lang over de afstand tussen de meetpunten M_2 en M_3 als renner D over de afstand tussen de meetpunten M_3 en M_4 doet.

- Hoe ver liggen de meetpunten M_3 en M_4 af van de start?

© Noordhoff Uitgevers

Diagnostische toets

1.1 Lineaire verbanden

1 Gegeven zijn de lijnen k: $y = ax + 4$, l: $y = -1\frac{1}{2}x + b$ en m: $y = 3x - 6$.

a Voor welke a zijn k en l evenwijdig?

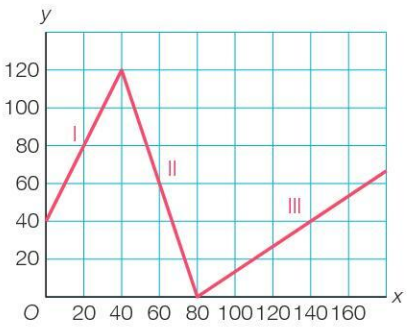
b Voor welke b snijden k en l elkaar op de y-as?

c Voor welke a en b snijden k en l elkaar in het punt $A(2, 6)$?

d Voor welke a snijden k en m elkaar op de x-as?

2 De lijn k: $y = ax + b$ gaat door het punt $A(1, -2)$ en is evenwijdig met de lijn l: $y = 4x - 3$.
Bereken a en b.

3 De grafiek in figuur 1.20 bestaat uit drie lijnstukken.
Stel van elk lijnstuk de formule op.



figuur 1.20

1.2 Een lijn door twee gegeven punten

4 Stel een vergelijking op van de lijn.

a k door $A(10, 15)$ en $B(12, 1)$

b l door $C(-800, 150)$ en $D(-200, 60)$

5 De lijn k gaat door de punten $A(3, 5)$ en $B(8, 25)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van k met de x-as.

6 Tussen p en q bestaat een lineair verband. Bij $q = 5$ hoort $p = 25$ en bij $q = 8$ hoort $p = 19$.
Druk p uit in q.

7 De gemiddelde jaartemperatuur T is in Nederland in de periode 1970-2020 vrijwel lineair gestegen. Was de gemiddelde jaartemperatuur in 1970 nog 9,3 °C, in 2020 was dat toegenomen tot 11,0 °C. Neem in deze opgave aan dat deze temperatuurstijging de komende tijd doorzet.

a Stel de formule op van de gemiddelde jaartemperatuur T als functie van de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1970.

b In welk jaar zal de gemiddelde jaartemperatuur naar verwachting voor het eerst hoger zijn dan 12 °C?

Tot 1970 was er ook sprake van een lineaire stijging. Neem aan dat deze stijging vele eeuwen heeft geduurd. De gemiddelde jaartemperatuur in 1920 was 9,0 °C.

c In welk jaar zou de gemiddelde jaartemperatuur 8,0 °C zijn geweest?

© Noordhoff Uitgevers

1.3 Stelsels vergelijkingen

8 Gegeven is de lijn l: $2x - 3y = -8$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de x-as en met de y-as.

b Bereken voor welke p het getallenpaar $(5, p)$ voldoet aan de vergelijking $2x - 3y = -8$.

c Voor welke q is $(x, y) = (q, 12)$ een oplossing van $2x - 3y = -8$?

9 Gegeven is de lijn k: $3x - 4y = 12$.

a Bereken rc_k.

b De lijn m gaat door $(3, -4)$ en is evenwijdig met k.
Stel van m een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

10 Los op.

a $\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$

b $\begin{cases} -3x + 2y = 9 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$

11 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen k: $3x + 2y = 10$ en m: $4x - 3y = 2$.

12 Los op.

a $\begin{cases} x = 2y - 4 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

b $\begin{cases} 3x + 2y = -10 \\ y = 1\frac{1}{2}x + 7 \end{cases}$

1.4 Kwadratische verbanden

13 Bereken exact de oplossingen.

a $(3x + 2)^2 = 25$

b $(4x + 3)^2 = 2x + 3$

c $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2 = (x + 4)^2$

d $5x^2 - (2x - 1)^2 = 11$

e $(2x - 3)(3x + 2) = (x + 1)(2x + 6)$

f $\frac{1}{4}(2x - 1)^2 - 9 = 0$

14 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 4$ en $g(x) = -3x^2 + 2x - 2$.

a Schets de grafieken van f en g in één figuur en bereken de coördinaten van de toppen. Rond zo nodig af op twee decimalen.

b Bereken de nulpunten van f. Rond af op twee decimalen.

c Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g. Rond af op twee decimalen.

d De horizontale lijn door de top van de grafiek van f snijdt de grafiek van g in de punten A en B.
Bereken de lengte van het lijnstuk AB. Rond af op twee decimalen.

e Voor welke waarden van a snijdt de lijn $y = a$ de grafieken van f en g in vier verschillende punten?

© Noordhoff Uitgevers

2

Veranderingen

Wat leer je?

- Hoe je veranderingen in beeld kunt brengen met toenamediagrammen.
- Wat het verschil is tussen gemiddelde snelheid en snelheid op één moment.
- Hoe je met de GR snelheden kunt berekenen.
- Hoe je hellinggrafieken kunt schetsen en plotten.
- Hoe je bij een formule de formule van de hellinggrafiek kunt vinden.

© Noordhoff Uitgevers

© Noordhoff Uitgevers

Beginopdracht Een optrekkende trein

Men heeft onderzocht hoe snel een trein optrekt.
In de tabel zie je de resultaten. Hierin is t de tijd in seconden en s de afgelegde afstand in meter.

t	0	5	10	15	20
s	0	8	56	158	300

- Teken een grafiek bij de tabel.

Naast de afgelegde afstand is men ook geïnteresseerd in de snelheid van de trein gedurende deze 20 seconden.
Uit de gegevens blijkt dat de gemiddelde snelheid in deze 20 seconden gelijk is aan 15 meter per seconde (m/s).

- Licht dit toe en bereken de gemiddelde snelheid in km/uur.
- Bereken in gehele km/uur de gemiddelde snelheid tussen $t = 5$ en $t = 10$. Bereken ook de gemiddelde snelheid in gehele km/uur tussen $t = 10$ en $t = 20$.

Men heeft een formule opgesteld bij de tabel. Deze formule is $s = -0{,}001875t^4 + 0{,}075t^3$.

- Onderzoek of deze formule klopt met de tabel.

Met de formule zijn gemiddelde snelheden te berekenen op kleinere tijdsintervallen dan met de tabel mogelijk is. En daarmee zijn snelheden op één bepaald tijdstip te benaderen.
Zo kun je de snelheid op $t = 5$ benaderen door de gemiddelde snelheid tussen $t = 4{,}9$ en $t = 5{,}1$ te berekenen.

- Benader op deze manier de snelheid van de trein op $t = 5$. Geef het antwoord in km/uur en rond af op gehelen.
- De maximale snelheid wordt bereikt op $t = 20$. Benader de maximale snelheid in gehele km/uur.

© Noordhoff Uitgevers

Voorkennis Snelheid

Theorie A Gemiddelde snelheid

Op 19 juli 2018 werd in de Tour de France de twaalfde etappe gereden van Bourg-Saint-Maurice naar Alpe d'Huez. De afstand van 175,5 km werd door de winnaar Geraint Thomas in 5 uur, 18 minuten en 37 seconden afgelegd.
Je kunt de gemiddelde snelheid waarmee Thomas deze etappe reed als volgt berekenen.
18 minuten is $\frac{18}{60}$ uur en 37 seconden is $\frac{37}{3600}$ uur.
De tijd is dus $5+\frac{18}{60}+\frac{37}{3600}=5{,}3102...$ uur.

De finish van de twaalfde etappe waarin Tom Dumoulin tweede werd.

De gemiddelde snelheid is $\frac{175{,}5}{5{,}3102...} \approx 33{,}049$ km/uur.
Je kunt de gemiddelde snelheid ook uitdrukken in meter per seconde.
Omdat 1 km/uur $= \frac{1000 \text{ meter}}{3600 \text{ seconden}} = \frac{1}{3{,}6}$ m/s is de gemiddelde snelheid $\frac{33{,}049}{3{,}6} \approx 9{,}18$ m/s.

1 In de twaalfde etappe van de Tour de France van 2018 kwam de Nederlander Ramon Sinkeldam 37 minuten en 36 seconden na Thomas over de eindstreep.
Bereken de gemiddelde snelheid van Ramon in km/uur en in m/s.
Rond af op twee decimalen.

2 De twaalfde etappe van de Tour de France van 2018 eindigde op Alpe d'Huez op een hoogte van 1850 meter. Deze berg is van de buitencategorie. Onderweg beklommen de renners nog twee andere bergen van de buitencategorie: de Col de la Madeleine (2000 m) en de Col de la Croix-de-Fer (2067 m). De Col de la Madeleine werd beklommen vanuit Albertville. Deze beklimming heeft een lengte van 25 km. De afdaling ging naar La Chambre en heeft een lengte van 19 km.
Neem aan dat een renner 1 uur en 12 minuten doet over de beklimming en 17 minuten over de afdaling

a Bereken zijn gemiddelde snelheid in gehele km/uur over de beklimming. Doe dit ook voor de afdaling.

b Bereken zijn gemiddelde snelheid in gehele km/uur over de beklimming en de afdaling samen.

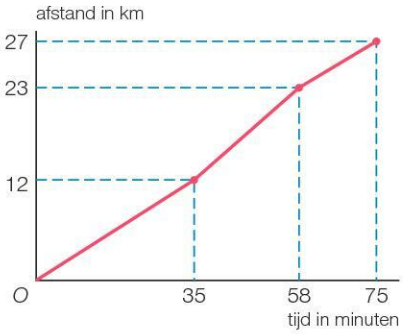
© Noordhoff Uitgevers

3 In de figuur hiernaast is de afstand die een wielrenner aflegt uitgezet tegen de tijd.
Er zijn drie lijnstukken getekend die elk behoren bij een gedeelte van de tocht.

a Hoe kun je in de figuur zien dat er op elk van de drie gedeelten met een constante snelheid is gereden?

b Bereken voor elk van de drie gedeelten de snelheid in km/uur. Rond af op twee decimalen.

c Bereken in km/uur en in m/s de gemiddelde snelheid over het hele traject.



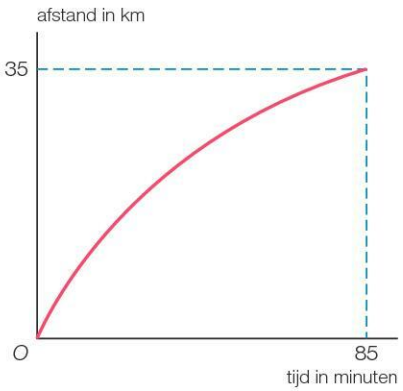
figuur 2.1

4 In de figuur hiernaast is de afstand die een wielrenner aflegt uitgezet tegen de tijd.

a Hoe kun je in de figuur zien dat er niet met een constante snelheid is gereden?

b Bereken in km/uur de gemiddelde snelheid gedurende deze tocht. Rond af op twee decimalen.

c Wat denk je, is er een tijdstip waarop de snelheid van de wielrenner gelijk is aan de gemiddelde snelheid? Licht toe.



figuur 2.2

© Noordhoff Uitgevers

2.1 Toenamediagrammen

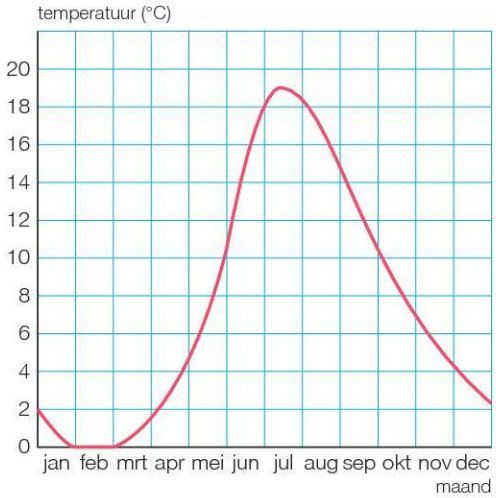
01

In figuur 2.3 zie je de grafiek van de temperatuur van het oppervlaktewater bij Helsinki in Finland.

a In welke maanden stijgt de temperatuur van het oppervlaktewater bij Helsinki?

b In mei verloopt de stijging anders dan in juni. Omschrijf dit verschil.

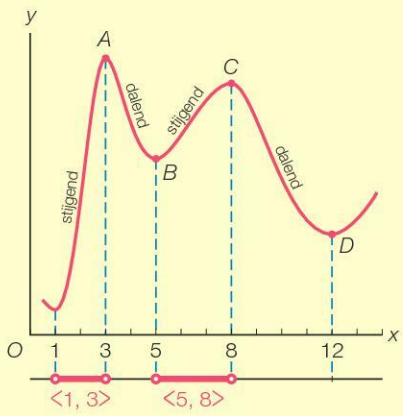
c Vanaf halverwege juli heb je te maken met verschillende soorten daling. Licht toe.



figuur 2.3

Theorie A Soorten van stijgen en dalen

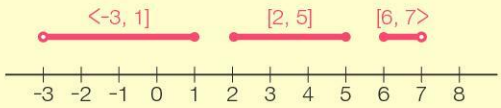
Laat je in de figuur hiernaast x toenemen van 1 tot 3, dan ga je langs de grafiek omhoog.
De grafiek is **stijgend** voor x tussen 1 en 3.
In plaats hiervan zeggen we ook:
de grafiek is stijgend op het **interval** $\langle 1, 3\rangle$.
Een interval is een deel van de getallenlijn.
Tot het **open interval** $\langle 1, 3\rangle$ behoren alle getallen die tussen 1 en 3 liggen. De grenzen 1 en 3 behoren niet tot het interval. Op de getallenlijn in figuur 2.4 is dat met open rondjes aangegeven.
De grafiek is ook stijgend op het interval $\langle 5, 8\rangle$.
Verder is de grafiek **dalend** op de intervallen $\langle 3, 5\rangle$ en $\langle 8, 12\rangle$.
Behalve open intervallen zijn er ook gesloten intervallen.
Bij een **gesloten interval** horen de grenzen er wel bij.



figuur 2.4

© Noordhoff Uitgevers

In figuur 2.5 zie je het gesloten interval [2, 5]. Met dichte rondjes is aangegeven dat de grenzen erbij horen. Ook zie je de intervallen ⟨-3, 1] en [6, 7⟩. Het interval ⟨-3, 1] spreek je uit als het links open rechts gesloten interval min drie één.



figuur 2.5

Je kunt het interval ⟨-3, 1] noteren met x. Je krijgt $-3 < x \leq 1$.
Dit spreek je uit als min drie kleiner dan x kleiner dan of gelijk aan één.
En zo noteer je het interval [2, 5] met $2 \leq x \leq 5$.

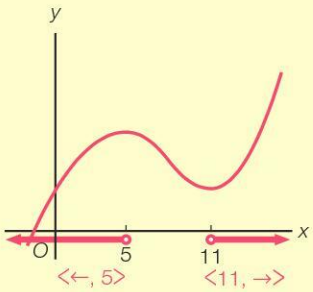
Voorbeeld

a Noteer het interval [-5, 7⟩ met x.
b Noteer $6 < x < 10$ als interval.

Uitwerking

a Het interval [-5, 7⟩ wordt genoteerd als $-5 \leq x < 7$.
b $6 < x < 10$ wordt genoteerd als ⟨6, 10⟩.

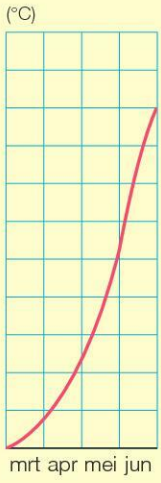
De grafiek in figuur 2.6 is stijgend voor elke x kleiner dan 5. We zeggen dat de grafiek stijgend is op het interval ⟨←, 5⟩.
We noemen ⟨←, 5⟩ het open interval min oneindig vijf.
De grafiek is ook stijgend op ⟨11, →⟩.



figuur 2.6

De complete getallenverzameling ⟨←, →⟩ heet de verzameling van de **reële getallen**. In plaats van ⟨←, →⟩ noteren we $\mathbb{R}$.

In de grafiek hiernaast zie je het stijgende deel van de grafiek van de temperatuur van het oppervlaktewater in Helsinki van opgave 1.
In de maanden maart, april en mei is er sprake van **toenemende stijging** en in de maand juni is er **afnemende stijging**.

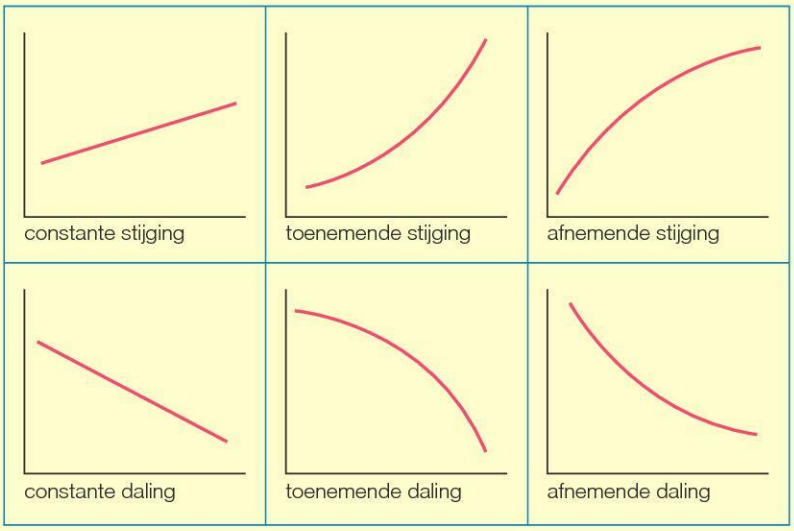


figuur 2.7

In het schema op de volgende bladzijde staan de zes soorten van stijgen en dalen.

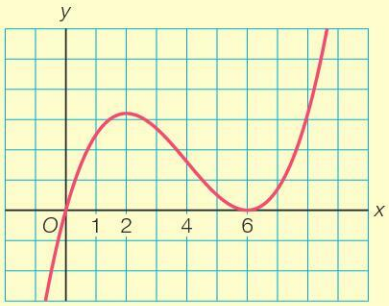
© Noordhoff Uitgevers

SOORTEN VAN STIJGEN EN DALEN



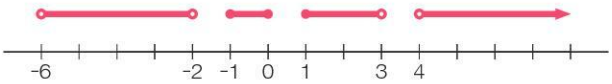
Afspraak
Op de vraag op welke intervallen een grafiek stijgend/dalend is, noem je de grootst mogelijke intervallen.

In figuur 2.8 kun je de volgende soorten van stijgen en dalen herkennen:
afnemend stijgend op $\langle \leftarrow, 2\rangle$
toenemend dalend op $\langle 2, 4\rangle$
afnemend dalend op $\langle 4, 6\rangle$
toenemend stijgend op $\langle 6, \rightarrow\rangle$.



figuur 2.8

2 Noteer de volgende intervallen.



figuur 2.9

3 Teken de volgende intervallen boven een getallenlijn.
$[-5, -4]$, $\langle -1, 2]$, $[3, 5\rangle$ en $\langle 7, \rightarrow\rangle$

© Noordhoff Uitgevers

4 Noteer de volgende intervallen met x.

a $\langle -1, 2]$ **c** $[5, 15]$

b $[6, 10\rangle$ **d** $\langle \leftarrow; 4{,}5\rangle$

5 Noteer als interval.

a $-8 \leq x < 3$ **c** $5{,}1 \leq x \leq 7{,}3$

b $4 < x \leq 4\frac{1}{2}$ **d** $x \leq 2$

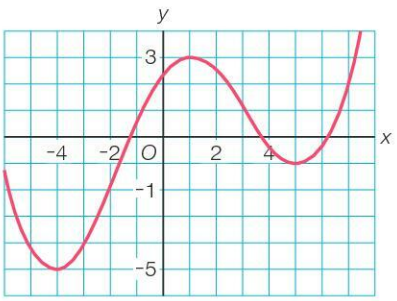
A6 **a** Teken de intervallen $[-4, -1\rangle$, $\langle 1, 3\rangle$ en $\langle 5, \rightarrow\rangle$ boven een getallenlijn.

b Noteer de intervallen $\langle -2, 5]$, $[3, 7]$ en $\langle \leftarrow; 1{,}23\rangle$ met x.

c Noteer $10 \leq x < 15$ en $x \geq 3\frac{1}{2}$ als interval.

A7 Alle getallen die zowel oplossing zijn van de ongelijkheid $2x - 3 < 6$ als van de ongelijkheid $5 - 3x < 9$ zijn te noteren met een interval. Geef dit interval.

8 Welke soorten van stijgen en dalen kun je in figuur 2.10 herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.

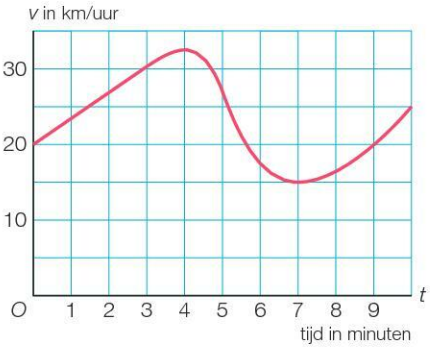


figuur 2.10

A9 De grafiek van figuur 2.11 gaat over de snelheid van een fietser tijdens een tocht door een glooiend landschap.

a Welke soorten van stijgen en dalen kun je in de figuur herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.

b Na hoeveel minuten heeft de fietser tijdens deze tocht te maken met de steilste klim? Licht toe.



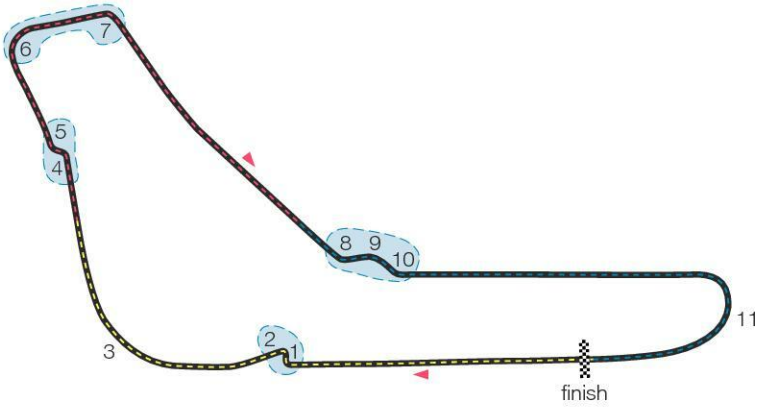
figuur 2.11

© Noordhoff Uitgevers

A10 ✱

In de figuur hieronder zie je het racecircuit van Monza in Italië. Op dit circuit met een lengte van 5,8 km wordt elk jaar een race van Formule 1 auto's gereden, de Grand Prix van Italië.
Het stuk van de finish tot aan de eerste bocht is 900 meter.
Bekijk het deel van een ronde halverwege de race vanaf de finish tot aan bocht 5. Neem aan dat een coureur hier 12 seconden over doet.

Max Verstappen op het circuit van Monza.



figuur 2.12

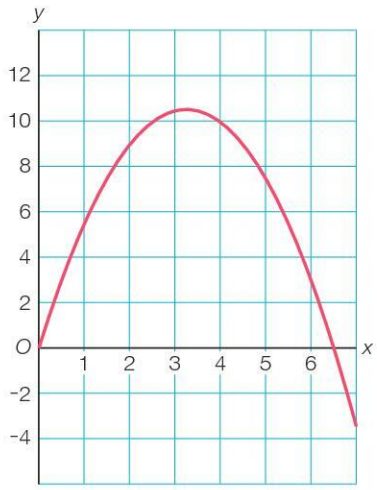
Teken een globale grafiek van de snelheid uitgezet tegen de tijd voor deze 12 seconden. Benoem hierin de verschillende soorten van stijgen en dalen.

O11 ✱

In de figuur hiernaast is op het interval $[0, 7]$ de grafiek van $y = -x^2 + 6\frac{1}{2}x$ getekend.
Hierbij hoort de volgende tabel.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	5,5	9	10,5	10	7,5	3	-3,5

a Wat is de toename van y op het interval $[0, 1]$? En op het interval $[1, 2]$?
b Op het interval $[4, 5]$ is er een afname. Hoe groot is deze afname?
c Bereken de verandering op het interval $[2, 7]$.



figuur 2.13

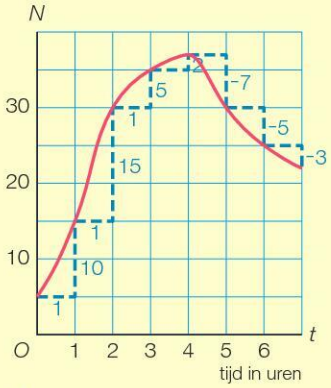
© Noordhoff Uitgevers

Theorie B Van grafiek naar toenamediagram

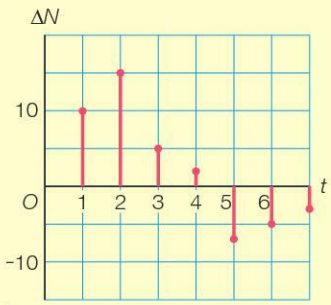
Het aantal radioluisteraars op een doordeweekse dag neemt in de loop van de ochtend tot 10:00 uur toe. Zie figuur 2.14a. Hierin is N het aantal luisteraars in duizendtallen en t de tijd in uren met $t = 0$ om 6:00 uur.
Van $t = 0$ tot $t = 1$ is de toename $\Delta N = 15 - 5 = 10$.
Dus op het interval $[0, 1]$ is $\Delta N = 10$.
Van $t = 1$ tot $t = 2$ is de toename $\Delta N = 30 - 15 = 15$.
Dus op $[1, 2]$ is $\Delta N = 15$.
Op het interval $[4, 5]$ is er een afname van 7.
Dus op $[4, 5]$ is $\Delta N = -7$.
In de tabel staat bij intervallen met $\Delta t = 1$ de bijbehorende ΔN.

interval	$[0, 1]$	$[1, 2]$	$[2, 3]$	$[3, 4]$	$[4, 5]$	$[5, 6]$	$[6, 7]$
ΔN	10	15	5	2	−7	−5	−3

In figuur 2.14b is bij de tabel een nieuw soort diagram getekend. Eerst is boven de rechtergrens van elk interval de bijbehorende ΔN uitgezet. Vervolgens zijn de punten door verticale lijnstukjes met de t-as verbonden.
Figuur 2.14b heet een **toenamediagram**. Bij dit toenamediagram is de **stapgrootte** $\Delta t = 1$.



a



b

figuur 2.14

Bij een toenamediagram
- **staan de verticale lijnstukjes boven de rechtergrens van het interval**
- **ligt bij een afname het verticale lijnstukje onder de horizontale as.**

In het volgende voorbeeld zie je hoe je bij een gegeven grafiek het toenamediagram tekent. Je maakt eerst een tabel met toenamen. Let erop dat je in het toenamediagram bij de verticale as Δy zet.

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Zie figuur 2.15.

a Teken het toenamediagram op $[0, 6]$.
Neem stapgrootte 1.

b Teken het toenamediagram op $\left[2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right]$.
Neem $\Delta x = \frac{1}{2}$.

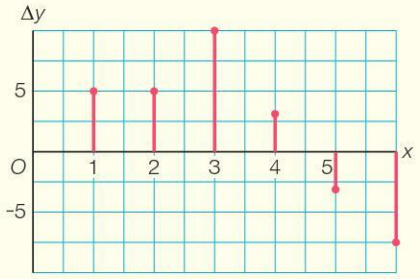
figuur 2.15

Uitwerking

a

x-interval bij $\Delta x = 1$	Δy
$[0, 1]$	5
$[1, 2]$	5
$[2, 3]$	10
$[3, 4]$	3
$[4, 5]$	-3
$[5, 6]$	$-7\frac{1}{2}$

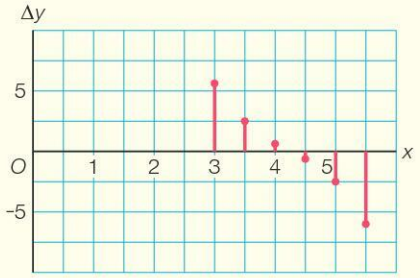
Zie de figuur hiernaast.



b

x-interval bij $\Delta x = \frac{1}{2}$	Δy
$\left[2\frac{1}{2}, 3\right]$	6
$\left[3, 3\frac{1}{2}\right]$	$2\frac{1}{2}$
$\left[3\frac{1}{2}, 4\right]$	$\frac{1}{2}$
$\left[4, 4\frac{1}{2}\right]$	$-\frac{1}{2}$
$\left[4\frac{1}{2}, 5\right]$	$-2\frac{1}{2}$
$\left[5, 5\frac{1}{2}\right]$	-6

Zie de figuur hiernaast.



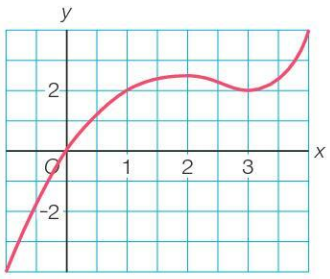
© Noordhoff Uitgevers

R12 Zie het voorbeeld.

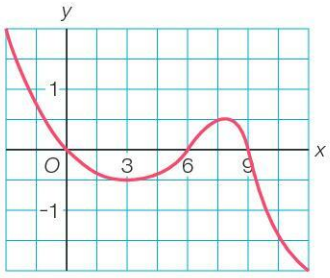
a In voorbeeld a zijn de staven bij $x = 1$ en $x = 2$ even lang.
Rob zegt: 'Hieraan kun je zien dat de grafiek tussen $x = 0$ en $x = 2$ een rechte lijn is.'
Lisette zegt: 'Omdat de grafiek tussen $x = 0$ en $x = 2$ een rechte lijn is, zijn de staven bij $x = 1$ en $x = 2$ even lang.'
Slechts één van de twee heeft gelijk.
Wie? Licht toe.

b De grafiek is tussen $x = 2\frac{1}{2}$ en $x = 5\frac{1}{2}$ lijnsymmetrisch.
Welk gevolg heeft dit voor het toenamediagram in vraag b?

13 **a** Teken op het interval $[-1, 4]$ het toenamediagram dat hoort bij figuur 2.16. Neem stapgrootte $\Delta x = 1$.



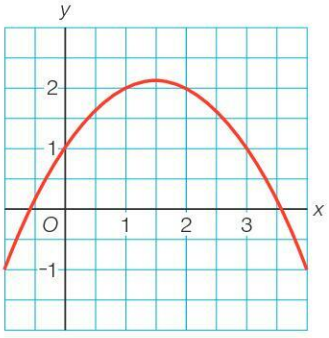
figuur 2.16



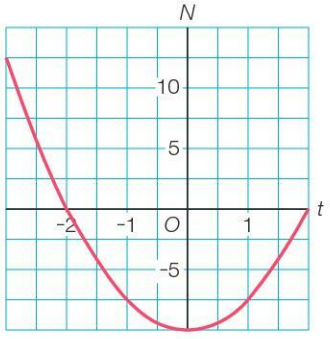
figuur 2.17

b Teken op $[-3, 12]$ het toenamediagram dat hoort bij figuur 2.17.
Neem $\Delta x = 3$.

14 **a** Teken op het interval $[-1, 4]$ het toenamediagram dat hoort bij figuur 2.18. Neem stapgrootte 1.



figuur 2.18 Een bergparabool



figuur 2.19 Een dalparabool.

b Teken op $[-3, 2]$ het toenamediagram dat hoort bij figuur 2.19. Neem $\Delta t = 1$.

c De toenamediagrammen die je bij a en b getekend hebt, vertonen een bijzonderheid. Welke?

© Noordhoff Uitgevers

R15

a Wat kun je zeggen van een toenamediagram dat hoort bij een parabool?

b Onderzoek wat je kunt zeggen van een toenamediagram dat hoort bij een rechte lijn.

16

De volgende tabel geeft informatie over het aantal grieppatiënten op een school. Hierbij is t de tijd in dagen en N het aantal grieppatiënten.

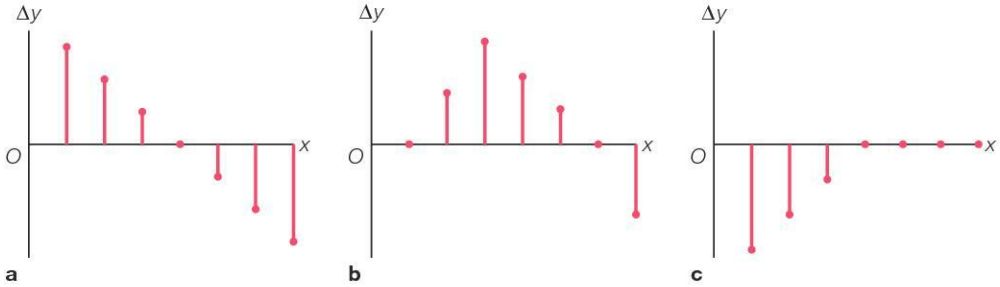
t	0	1	2	3	4	5
N	18	25	27	32	28	23

a Teken het toenamediagram op $[0, 5]$ met $\Delta t = 1$.

b Teken een mogelijk toenamediagram met $\Delta t = 0{,}5$.

17

Teken globale grafieken die horen bij de volgende toenamediagrammen.



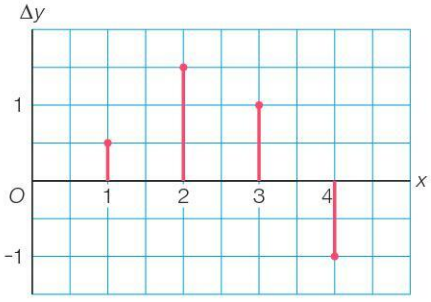
figuur 2.20

R18

Bij een gegeven toenamediagram kun je meerdere globale grafieken tekenen.
Teken bij het toenamediagram hiernaast

a twee grafieken die meerdere gemeenschappelijke punten hebben

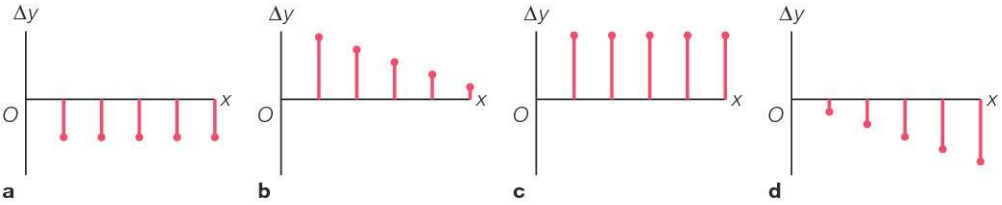
b twee grafieken die geen gemeenschappelijke punten hebben.



figuur 2.21

© Noordhoff Uitgevers

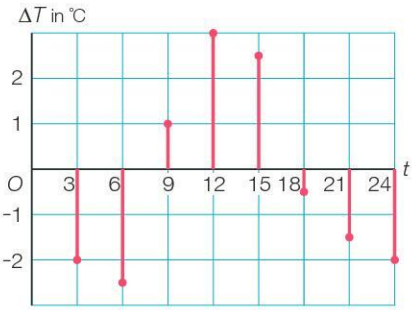
19 In een toenamediagram van een grafiek kun je de verschillende soorten van stijgen en dalen herkennen.
Zoek bij de toenamediagrammen in figuur 2.22 de juiste soort van stijgen of dalen. Kies uit: toenemend stijgend, afnemend stijgend, constant stijgend, toenemend dalend, afnemend dalend en constant dalend.



figuur 2.22

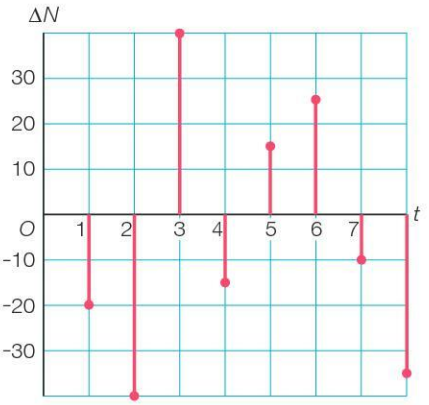
R20 Teken een toenamediagram bij een grafiek die
- **a** een hoogste punt heeft
- **b** een laagste punt heeft
- **c** een lijn is
- **d** afnemend dalend is.

21 In figuur 2.23 zie je een toenamediagram bij het temperatuurverloop op een dag.
Om 12:00 uur was de temperatuur 20 °C.
- **a** Mieke beweert dat de temperatuur aan het eind van de dag lager is dan aan het begin. Onderzoek of Mieke gelijk heeft.
- **b** Bereken de temperatuur om 0:00 uur.
- **c** Teken een mogelijke grafiek van het temperatuurverloop.



figuur 2.23

A22 In Nationaal Park De Hoge Veluwe kun je gebruik maken van witte leenfietsen. Op een aantal plekken in het park zijn stallingen waar je een fiets kunt meenemen of wegzetten. Een beheerder van het park houdt op een dag vanaf 9:00 uur bij hoeveel fietsen er in één van de stallingen staan. Zie figuur 2.24 waarin t de tijd in uren is met $t = 0$ om 9:00 uur en N het aantal fietsen in de stalling. Om 15:00 uur stonden er 110 fietsen in de stalling.
- **a** Hoeveel fietsen stonden er om 17:00 uur in de stalling? En om 9:00 uur?
- **b** Tussen 10 en 11 uur hebben in totaal 30 personen een fiets in de stalling gezet. Hoeveel fietsen zijn er tussen 10 en 11 uur meegenomen?



figuur 2.24

© Noordhoff Uitgevers

A23

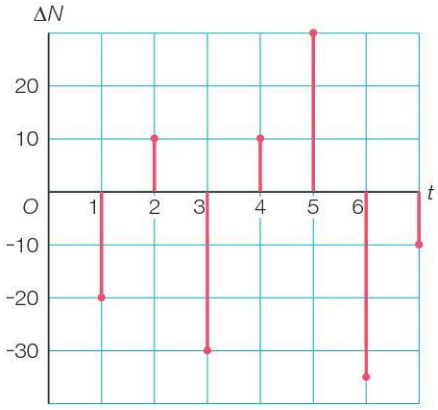
Tessa heeft een nieuwe smartphone gekocht. Iedere nacht laadt ze de accu van haar telefoon helemaal op, om de telefoon de volgende dag weer volop te kunnen gebruiken.

a Teken een mogelijk toenamediagram dat de verandering van haar batterijniveau in procenten gedurende één etmaal weergeeft. Neem stapgrootte 3 uur.

b Teken bij het gemaakte toenamediagram een mogelijke grafiek.

A24 *

Op een zonnige dag houdt Daan bij hoeveel mensen er op een groot terras zitten. Zie het toenamediagram in figuur 2.25. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 15:00 uur en N het aantal mensen op het terras.
Bereken hoeveel mensen er om 15:00 uur minstens op het terras hebben gezeten.



figuur 2.25

25 *

Een voorwerp wordt van een hoge toren naar beneden gegooid. Tijdens de val wordt de hoogte h van het voorwerp boven de grond gegeven door de formule $h = -5t^2 - 4t + 145$.
Hierin is h in meter en t de tijd in seconden.

a Vul de tabel hiernaast verder in. Gebruik de GR.

b Teken het toenamediagram van h. Neem t op $[0, 5]$ en $\Delta t = 1$.

t	h	Δh
0	145	–
1	136	-9
2		
3		
4		
5		

26

Gegeven is de formule $y = x^2 - 4x$.
Teken het toenamediagram op $[-2, 4]$ met $\Delta x = 1$. Maak daartoe een tabel met x en y en bereken telkens Δy.

A27 *

a Gegeven is de formule $y = -x^2 + 2x + 4$.
Teken het toenamediagram op $[-1, 5]$ met $\Delta x = 1$.

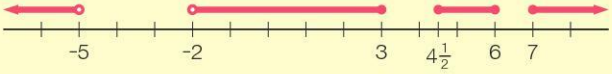
b Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 1$.
Teken het toenamediagram op $[-2, 5]$ met $\Delta x = 1$.

© Noordhoff Uitgevers

Terugblik

Intervallen

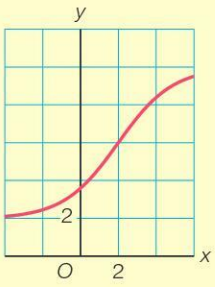
Een interval is een deel van de getallenlijn.
In de figuur hieronder zie je de intervallen $\langle \leftarrow, -5\rangle$, $\langle -2, 3]$, $\left[4\frac{1}{2}, 6\right]$ en $[7, \rightarrow\rangle$.



Je kunt deze intervallen ook met x noteren. Je krijgt $x < -5$, $-2 < x \leq 3$, $4\frac{1}{2} \leq x \leq 6$ en $x \geq 7$.

Stijgen en dalen

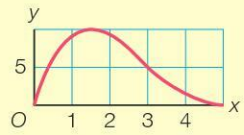
De intervalnotatie gebruik je om aan te geven waar een grafiek stijgend of dalend is.
Zowel bij stijgen als bij dalen onderscheiden we drie soorten: constant, afnemend en toenemend.
De grafiek in de figuur hiernaast is toenemend stijgend op het interval $\langle \leftarrow, 2\rangle$ en afnemend stijgend op $\langle 2, \rightarrow\rangle$.

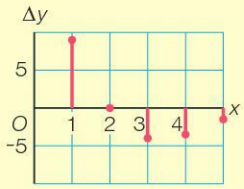


Toenamediagram bij grafiek

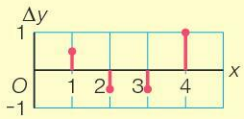
Bij een gegeven grafiek kun je een toenamediagram tekenen. Je maakt eerst een tabel. In de tabel staat bij elk interval de bijbehorende toename.
In het toenamediagram teken je deze toenamen als verticale lijnstukjes bij de rechtergrens van het interval.
Zo krijg je bij de grafiek in de figuur hiernaast de tabel hiernaast met stapgrootte 1 op het interval $[0, 5]$. Dit geeft het toenamediagram onder de grafiek.

interval	Δy
$[0, 1]$	9
$[1, 2]$	0
$[2, 3]$	−4
$[3, 4]$	−3,5
$[4, 5]$	−1,5





Bij een gegeven toenamediagram kun je een schets maken van de oorspronkelijke grafiek. Zo is hiernaast bij het toenamediagram een mogelijke grafiek getekend met beginpunt (0, 1).



Toenamediagram bij formule

Bij een gegeven formule kun je voor elke stapgrootte een tabel met x, y en Δy maken. Zo'n tabel gebruik je om het toenamediagram te tekenen.
Bij het maken van zo'n tabel is de GR een handig hulpmiddel.

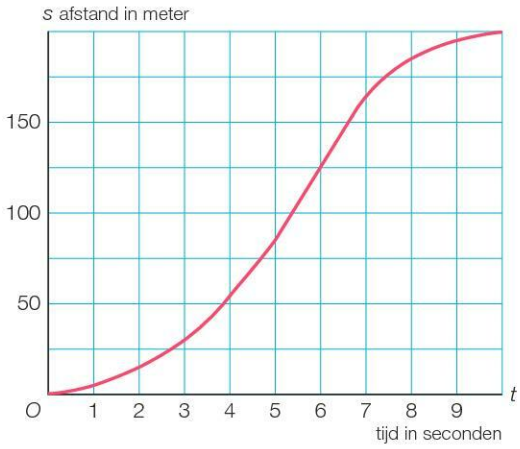
© Noordhoff Uitgevers

2.2 Differentiequotiënten en snelheden

028

In figuur 2.26 is de afgelegde afstand s van een motorcoureur uitgezet tegen de tijd t. In de eerste vijf seconden legt de coureur een afstand af van 85 meter. De gemiddelde snelheid in deze vijf seconden is $\frac{85}{5} = 17$ m/s.

Op het tijdsinterval [5, 10] is de afgelegde afstand $200 - 85 = 115$ m, dus de gemiddelde snelheid op [5, 10] is $\frac{115}{5} = 23$ m/s.



figuur 2.26

t	s
0	0
1	5
2	15
3	30
4	55
5	85
6	125
7	165
8	185
9	195
10	200

a Bereken de gemiddelde snelheid op het interval [0, 3] en op het interval [3, 7].

b Bereken de gemiddelde snelheid in de zesde seconde.

De zesde seconde is van $t = 5$ tot $t = 6$.

c Hoeveel m/s is de gemiddelde snelheid in de zevende seconde? Hoeveel km/uur is dat?

d Jan beweert dat de gemiddelde snelheid op het interval [5, 7] gelijk is aan de snelheid die de coureur op de snelheidsmeter op $t = 6$ kan aflezen.
Ben je het met Jan eens? Licht toe.

e In de derde seconde is de gemiddelde snelheid 15 m/s, dat is 54 km/uur. Wat denk je, wijst de snelheidsmeter van de motor gedurende de derde seconde steeds 54 km/uur aan? Licht toe.

Theorie A Gemiddelde verandering

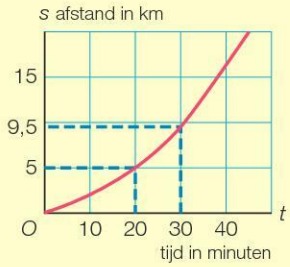
Bij tal van verschijnselen heb je te maken met verandering. Sommige veranderingen gaan langzaam, zoals het temperatuurverloop van het zeewater gedurende een jaar. Andere veranderingen gaan veel sneller, bijvoorbeeld de verandering van de temperatuur van theewater dat zojuist is opgezet. Bij allerlei veranderingen speelt de snelheid waarmee ze plaatsvinden een belangrijke rol.
Er zijn twee manieren om over snelheid te praten:
- gemiddelde snelheid over een periode
- snelheid op één moment.

© Noordhoff Uitgevers

Bij de snelheid op één moment kun je bijvoorbeeld denken aan de snelheid die je kunt aflezen op de snelheidsmeter van een auto of een scooter. We gaan ons eerst bezighouden met gemiddelde snelheden.

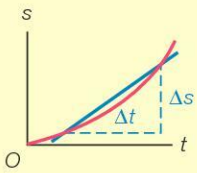
In figuur 2.27 is op het interval [20, 30] de afgelegde afstand $\Delta s = 9{,}5 - 5 = 4{,}5$ km, dus de gemiddelde snelheid op het interval [20, 30] is $\frac{4{,}5}{10} = 0{,}45$ km/minuut.

Je ziet dat je de gemiddelde snelheid op een interval krijgt door $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ te berekenen.

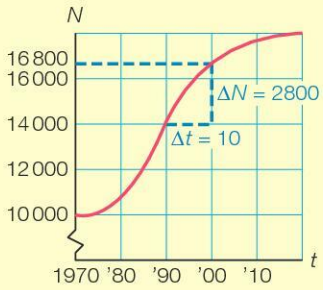


figuur 2.27

De gemiddelde snelheid bij een tijd-afstandgrafiek is $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.



In figuur 2.28 is het aantal inwoners van een plaats uitgezet tegen de tijd. Je ziet dat tussen 1990 en 2000 het aantal inwoners is toegenomen van 14 000 tot 16 800. De gemiddelde verandering in deze periode is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{2800}{10} = 280$ inwoners per jaar.



figuur 2.28

$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ is de gemiddelde verandering van N per tijdseenheid.

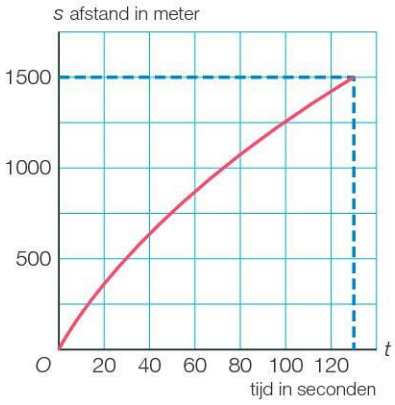
Afspraak
Bij gemiddelde snelheden en gemiddelde veranderingen moet je de eenheid vermelden.

29

Esmee doet mee aan een schaatswedstrijd op de langebaan en schaatst de 1500 meter. In figuur 2.29 zie je hoe haar race is verlopen.

a Bereken de gemiddelde snelheid van Esmee in km/uur gedurende de eerste minuut. Doe dat ook voor de laatste halve minuut van de race.

b Hoe kun je in de figuur zien dat Esmee steeds langzamer ging?



figuur 2.29

© Noordhoff Uitgevers

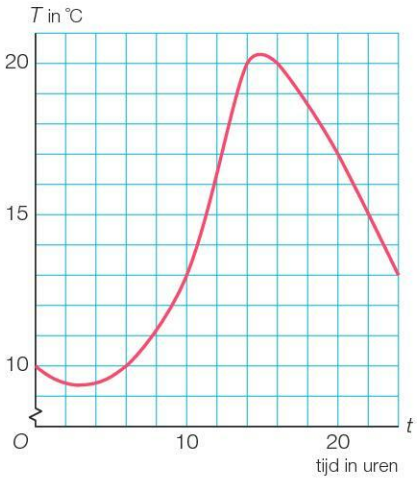
30 De grafiek in figuur 2.30 gaat over het verloop van de temperatuur op een dag in mei.

a Bereken de gemiddelde temperatuurverandering $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op [6, 10] en op [9, 14].

b Licht toe dat op [16, 20] geldt dat $\Delta T = -3$ en bereken $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op [16, 20].
Wat betekent het dat deze gemiddelde verandering negatief is?

c Geef twee intervallen waarop de gemiddelde verandering 0 °C/uur is.

d Geef een interval waarop de gemiddelde verandering 0,4 °C/uur is.



figuur 2.30

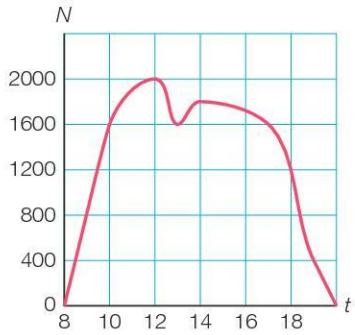
A31 In figuur 2.31 is het aantal auto's N op een parkeerterrein bij een dierentuin uitgezet tegen de tijd t in uren. Het betreft een zaterdag in mei.

a Bereken $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ op het interval [9, 13].

b Bereken de gemiddelde verandering $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ op het interval [12, 17].

c Geef een interval waarop de gemiddelde toename 100 auto's per uur is.

d Geef een interval waarop de gemiddelde afname 200 auto's per uur is.



figuur 2.31

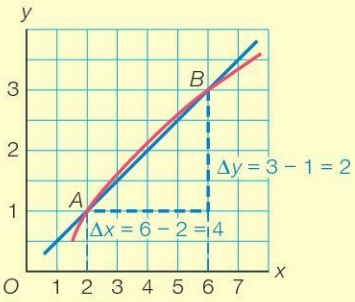
Theorie B Differentiequotiënt bij grafiek

Zie figuur 2.32. Op het interval [2, 6] is $\Delta x = 6 - 2 = 4$ en $\Delta y = 3 - 1 = 2$.

De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{4} = 0{,}5$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ heet het **differentiequotiënt** van y op het interval [2, 6].

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op het interval [2, 6] is de richtingscoëfficiënt van de lijn AB in figuur 2.32.



figuur 2.32

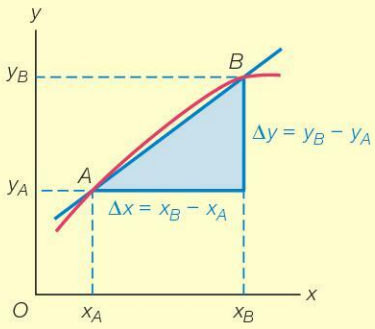
© Noordhoff Uitgevers

Het woord differentiequotiënt kun je als volgt begrijpen:

- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is een deling, dus een *quotiënt*
- onder en boven de breukstreep staan verschillen en een ander woord voor verschil is *differentie*.

Het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$ is

- **de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$**
- **de richtingscoëfficiënt (ook wel de helling) van de lijn AB**
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



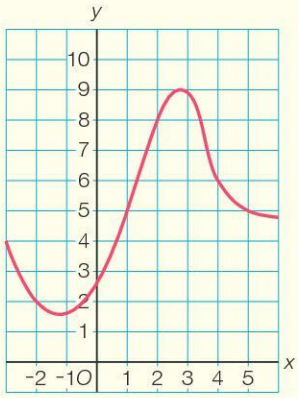
Voorbeeld

Zie figuur 2.33.

a Bereken de gemiddelde verandering van y op $[-2, 2]$.

b Bereken het differentiequotiënt van y op $[2, 4]$.

c Voor welke p is het differentiequotiënt van y op $[1, p]$ gelijk aan $\frac{1}{3}$?



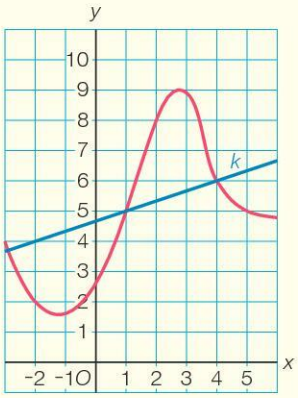
figuur 2.33

Uitwerking

a De gemiddelde verandering op $[-2, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8-2}{2--2} = \frac{6}{4} = 1{,}5$.

b Op $[2, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-8}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$.

c De lijn k door $(1, 5)$ met $\text{rc}_k = \frac{1}{3}$ snijdt de grafiek in het punt $(4, 6)$.
Dus voor $p = 4$.



© Noordhoff Uitgevers

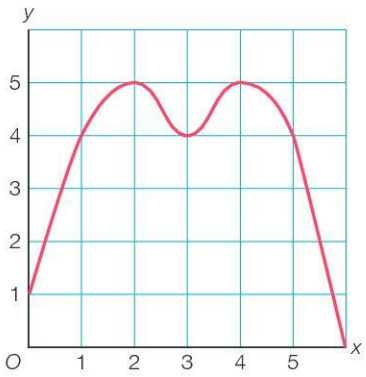
32 [▸ WERKBLAD] Zie figuur 2.34.

a Bereken de gemiddelde verandering van y op $[0, 4]$.

b Bereken het differentiequotiënt van y op $[2, 6]$.

c Voor welke p is het differentiequotiënt van y op $[0, p]$ gelijk aan 0,6?

d Licht toe dat er drie waarden van q zijn waarvoor het differentiequotiënt van y op $[1, q]$ gelijk is aan $\frac{1}{4}$.



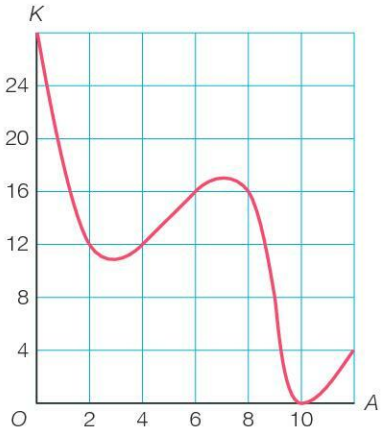
figuur 2.34

33 [▸ WERKBLAD] Zie figuur 2.35.

a Bereken de gemiddelde veranderingen van K op de intervallen $[0, 6]$ en $[4, 8]$.

b Bereken de differentiequotiënten op de intervallen $[2, 10]$ en $[6, 12]$.

c Hoeveel waarden van p zijn er waarvoor het differentiequotiënt van K op $[0, p]$ gelijk is aan -2? Licht toe.



figuur 2.35

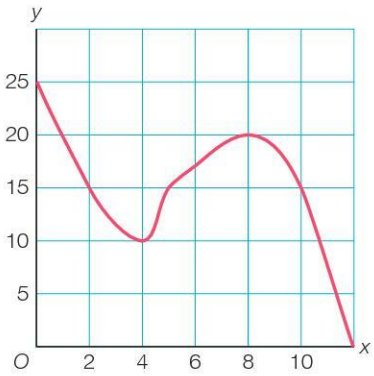
A34 [▸ WERKBLAD] Zie figuur 2.36.

a Bereken de gemiddelde verandering van y op $[2, 8]$.

b Bereken het differentiequotiënt van y op $[4, 12]$.

c Hoeveel waarden van p zijn er waarvoor het differentiequotiënt van y op $[2, p]$ gelijk is aan 0,5? Licht toe.

d Voor welke q is het differentiequotiënt van y op $[0, q]$ gelijk aan -1?



figuur 2.36

© Noordhoff Uitgevers

A35 ✱

Van een grafiek is het volgende bekend:

- de grafiek gaat door het punt $(0, 2)$
- op $[0, 2]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{4}$
- op $[0, 5]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{5}$
- op $[1, 3]$ is het differentiequotiënt $1\frac{1}{2}$
- op $[1, 5]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{2}$.

a Teken een mogelijke grafiek.
b Bereken het differentiequotiënt op $[3, 5]$.
c Is het mogelijk dat het differentiequotiënt op $[1, 4]$ gelijk is aan $1\frac{1}{2}$? Licht toe.

O36 🖩 ⊙ ✱

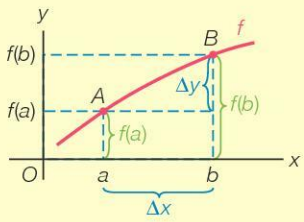
Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
a Bereken $f(1)$ en $f(5)$ en gebruik dit om het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[1, 5]$ te berekenen.
b Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[0, 4]$.

Theorie C Differentiequotiënten berekenen bij een functievoorschrift

Weet je van een functie het voorschrift, dan kun je daarmee differentiequotiënten berekenen. Je hebt de grafiek dan niet nodig.
Zo is bij de functie $f(x) = x^2$ het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-3, 1]$

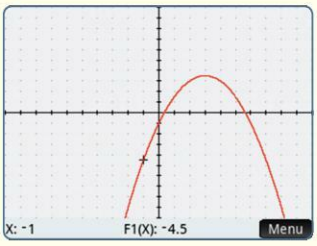
gelijk aan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - -3} = \frac{1^2 - (-3)^2}{4} = \frac{-8}{4} = -2$.

Het differentiequotiënt van $f(x)$ op het interval $[a, b]$ is gelijk aan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$.
Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-1, 4]$.



Uitwerking
Het differentiequotiënt op $[-1, 4]$ is

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-1)}{4 - -1} = \frac{3 - -4\frac{1}{2}}{5} = \frac{7\frac{1}{2}}{5} = 1\frac{1}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers

37

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x$.
Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op

a $[-1, 3]$ **c** $[-5, -1]$
b $[1, 4]$ **d** $[-5, 4]$

38

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x + 5$.

a Schets de grafiek van f.
b Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op $[1, 3]$.
c Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-2, 4]$.
d Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -3$ en $x_B = 1$.
Bereken de helling van de lijn AB.

A39

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}4x^4 - 2x^3 + x^2 + 6x - 5$.

a Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op $[-1, 1]$.
b Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-2, 2]$.
c Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = 0$ en $x_B = 3$.
Bereken de helling van de lijn AB.
d De lijn $y = 2x$ snijdt de grafiek van f in de punten C en D.
Wat weet je van de helling van de lijn CD?

A40

Voor elke a is gegeven de functie $f(x) = ax^2 + 4x - 3$.
Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[1, 4]$ is gelijk aan 2.
Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[0, 1]$.

041

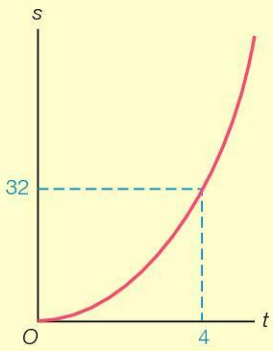
Voor een optrekkende motor is de afgelegde afstand s gegeven door de formule $s = t^3 + t$.
Hierin is s in meter en t de tijd in seconden.

a Bereken in m/s de gemiddelde snelheid op $[2, 3]$.
b Bereken de gemiddelde snelheden op de intervallen $[2; 2{,}5]$, $[2; 2{,}1]$, $[2; 2{,}01]$ en $[2; 2{,}001]$.
c In b is de gemiddelde snelheid berekend op een steeds kleiner interval $[2; 2 + \Delta t]$.
Achtereenvolgens was Δt gelijk aan 0,5, 0,1, 0,01 en 0,001.
Welk vermoeden krijg je over de gemiddelde snelheid als je Δt nog kleiner kiest?
Controleer je vermoeden voor $\Delta t = 0{,}0001$.
d Welke snelheid heeft de motor op $t = 2$, denk je?

© Noordhoff Uitgevers

Theorie D Snelheid op één moment

De tijd-afstandgrafiek in figuur 2.37 hoort bij de formule $s = \frac{1}{2}t^3$.
Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Je hebt al heel wat keren gemiddelde snelheden berekend op een gegeven tijdsinterval. Maar hoe kom je aan de snelheid op één moment, bijvoorbeeld op $t = 4$? Om dit probleem op te lossen, bekijk je de gemiddelde snelheid op steeds kleiner wordende intervallen [4, 5], [4; 4,5], [4; 4,1], [4; 4,01], ...
Zo krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = 4$.



figuur 2.37

De gemiddelde snelheid $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ op het interval

- [4, 5] is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 5^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{5 - 4} = \frac{62{,}5 - 32}{1} = 30{,}5$ m/s
- [4; 4,5] is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4{,}5^3 - 32}{0{,}5} = 27{,}125$ m/s
- [4; 4,1] is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4{,}1^3 - 32}{0{,}1} = 24{,}605$ m/s
- [4; 4,01] is $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4{,}01^3 - 32}{0{,}01} \approx 24{,}060$ m/s.

De gemiddelde snelheid op het intervalletje [4; 4,01] geeft een goede benadering van de snelheid op $t = 4$.
Je krijgt het vermoeden dat de snelheid op $t = 4$ gelijk is aan 24 m/s.
Dit vermoeden wordt bevestigd als je $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ berekent op een nog kleiner interval, bijvoorbeeld op [4; 4,001]. Je krijgt

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4{,}001^3 - 32}{0{,}001} \approx 24{,}006 \text{ m/s}.$$

Om de snelheid op $t = 2$ te krijgen, neem je een klein intervalletje $[2, 2 + \Delta t]$, bijvoorbeeld [2; 2,001]. De gemiddelde snelheid op dit interval geeft een goede benadering van de snelheid op $t = 2$.

Je krijgt $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2{,}001^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^3}{0{,}001} \approx 6$ m/s.

Bij een tijd-afstandformule benader je de snelheid op het tijdstip $t = a$ met het differentiequotiënt op het interval $[a, a + \Delta t]$, met bijvoorbeeld $\Delta t = 0{,}01$ of $\Delta t = 0{,}001$.

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

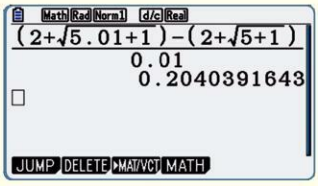
Gegeven is de formule $s = 2 + \sqrt{t+1}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Benader in m/s de snelheid op $t = 5$. Neem $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op twee decimalen.

Uitwerking

Op $[5; 5{,}01]$ is $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\left(2 + \sqrt{5{,}01 + 1}\right) - \left(2 + \sqrt{5 + 1}\right)}{0{,}01}$

$= 0{,}204...$

De snelheid op $t = 5$ is bij benadering 0,20 m/s.



42

Gegeven is de formule $s = 0{,}4t^2$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Benader in m/s de snelheid op $t = 3$ en op $t = 5$. Neem $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op twee decimalen.

43

Gegeven is de formule $s = 8 - \dfrac{5}{t+2}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Benader in m/s de snelheid op $t = 1$ en op $t = 2$. Neem $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op twee decimalen.

A44

Gegeven is de formule $s = 10\sqrt{4t+1} - 10$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Neem in deze opgave $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op twee decimalen.

a Benader in m/s de snelheid op $t = 2$ en op $t = 20$.

b Onderzoek of de snelheid op $t = 11$ gelijk is aan het gemiddelde van de snelheden op $t = 2$ en $t = 20$.

A45

De oppervlakte van het kroos in de vijver van de familie Damen groeit volgens de formule $A = 1{,}20 \cdot 1{,}15^t$. Hierin is A de oppervlakte in m^2 en t de tijd in dagen.
Benader de snelheid in m^2/dag waarmee de oppervlakte van het kroos toeneemt op $t = 3$. Neem $\Delta t = 0{,}001$ en rond af op twee decimalen.

E46

Gegeven is de formule $s = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden met $0 \leq t \leq 6$.
Er is een tijdstip op het interval $[0, 6]$ waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 6]$.
Toon dit aan.

© Noordhoff Uitgevers

Terugblik

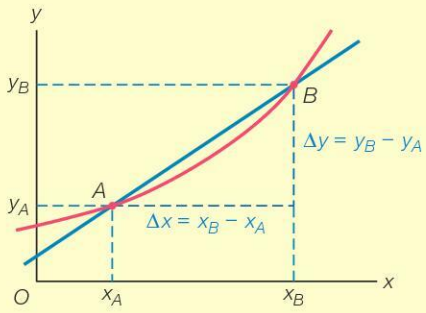
Gemiddelde verandering per tijdseenheid

De gemiddelde verandering van N per tijdseenheid is $\frac{\Delta N}{\Delta t}$.

Bij een tijd-afstandgrafiek is $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ de gemiddelde snelheid.

Differentiequotiënt

Het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

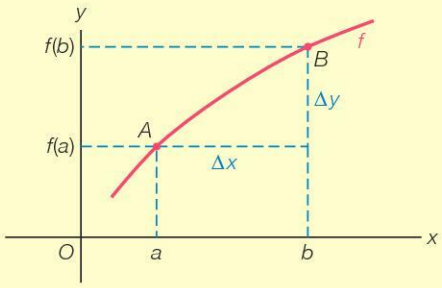


Het differentiequotiënt is gelijk aan de helling van de lijn AB.
Dus de begrippen

- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (helling) van de lijn AB

komen op hetzelfde neer.

Weet je van de grafiek de formule, dan gebruik je dat het differentiequotiënt van $f(x)$ op het interval $[a, b]$ gelijk is aan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Bij de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$ is het differentiequotiënt op het interval $[-1, 3]$ gelijk aan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - -1} = \frac{-10\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}}{4} = \frac{-18}{4} = -4\frac{1}{2}$.

Snelheid bij een tijd-afstandgrafiek

Bij een tijd-afstandgrafiek waarvan de formule bekend is, benader je de snelheid op het tijdstip $t = a$ door het differentiequotiënt te berekenen op een klein interval $[a, a + \Delta t]$ met bijvoorbeeld $\Delta t = 0{,}001$.

Bij de formule $s = \frac{1}{6}t^3$ met s de afgelegde afstand in meter na t seconden, benader je de snelheid op $t = 4$ met het differentiequotiënt op bijvoorbeeld $[4; 4{,}01]$.

Je krijgt $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 4{,}01^3 - \frac{1}{6} \cdot 4^3}{0{,}01} \approx 8{,}02$.
Dus de snelheid op $t = 4$ is ongeveer 8 m/s.

© Noordhoff Uitgevers

2.3 Raaklijnen en hellinggrafieken

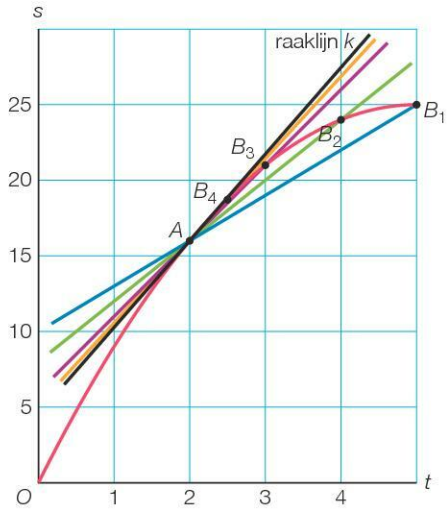
047

Gegeven is de formule $s = -t^2 + 10t$ met t op $[0, 5]$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.

a Bereken in m/s de gemiddelde snelheid op de intervallen $[2, 5]$, $[2, 4]$, $[2, 3]$ en $[2; 2{,}5]$.

In figuur 2.38 is de bijbehorende grafiek getekend. Ook zijn de lijnen AB_1, AB_2, AB_3 en AB_4 getekend met $A(2, 16)$, $B_1(5, 25)$, $B_2(4, 24)$, $B_3(3, 21)$ en $B_4(2{,}5; 18{,}75)$.

b Bij welke van deze lijnen komt de richtingscoëfficiënt het dichtst in de buurt van de richtingscoëfficiënt van de lijn k die de grafiek van f raakt in A?



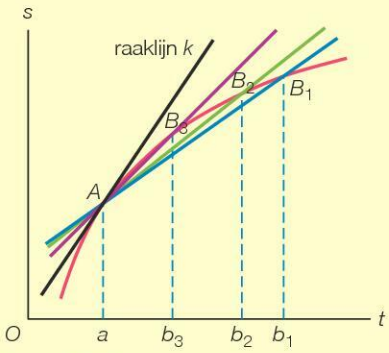
figuur 2.38

Theorie A Snelheid en richtingscoëfficiënt

In figuur 2.39 zie je een tijd-afstandgrafiek. Door de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$.

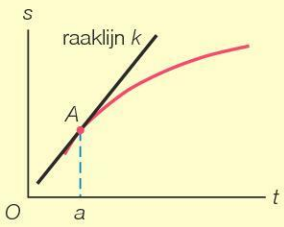
De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de richtingscoëfficiënten van de lijnen AB_1, AB_2, AB_3, ...

Hoe dichter B bij A komt te liggen, des te meer zal de lijn AB lijken op de lijn k die de grafiek in A **raakt**. De lijn k is de **raaklijn** van de grafiek in A. De snelheid op $t = a$ is dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A.



figuur 2.39

In een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.



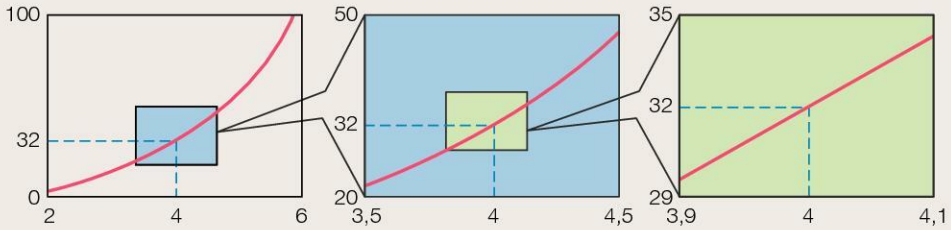
rc_k is de snelheid op $t = a$.

© Noordhoff Uitgevers

INFORMATIEF

Inzoomen op de grafiek

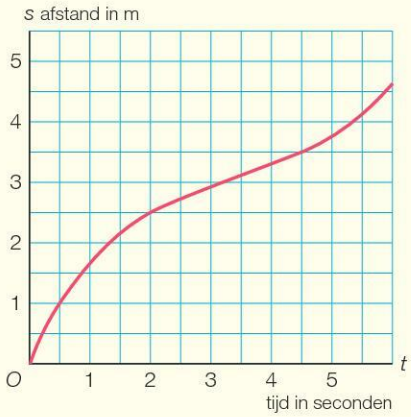
In de figuren hieronder is ingezoomd op de grafiek van $f(t) = \frac{1}{2}t^3$.



Hoe meer je inzoomt, hoe meer de grafiek op een rechte lijn gaat lijken. De helling van deze lijn geeft de snelheid op $t = 4$.
Zoom je in op de grafiek bij $t = 3$, dan geeft de helling de snelheid op $t = 3$.

Voorbeeld

Zie de grafiek in figuur 2.40.
Schat de snelheid op $t = 2$.

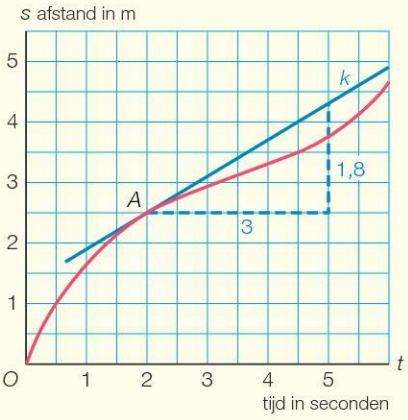


figuur 2.40

Aanpak

Teken de raaklijn k in het punt met $t = 2$, lees geschikte Δt en Δs af en bereken rc_k.

Uitwerking



$$\text{rc}_k = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{1{,}8}{3} = 0{,}6$$

De snelheid op $t = 2$ is ongeveer 0,6 m/s.

Voor Δs neem je het verschil van de s-coördinaten van twee punten op de raaklijn en dus niet op de grafiek. Je moet immers de rc van de raaklijn hebben.

In de [▸ DEMO] **Het tekenen van een raaklijn** wordt uitgelegd hoe je zo goed mogelijk een raaklijn in een punt van een grafiek kunt tekenen.

© Noordhoff Uitgevers

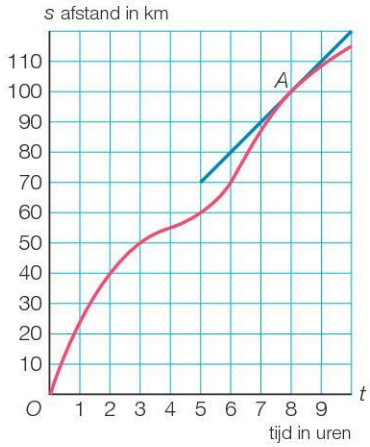
48 [▸ WERKBLAD] In figuur 2.41 zie je een tijd-afstandgrafiek.

a In het punt A is de raaklijn van de grafiek getekend.
Schat de snelheid op $t = 8$.

b Schat de snelheid op $t = 3$.

c Neemt de snelheid gedurende de eerste vier uur toe of af? Hoe zie je dat aan de grafiek?

d Voor welke t schat je dat de snelheid minimaal is? Licht toe.



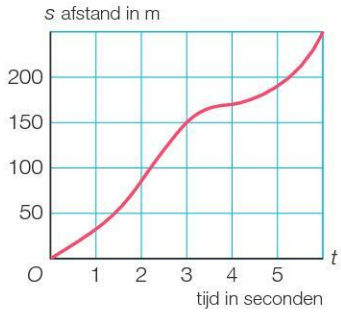
figuur 2.41

A49 [▸ WERKBLAD] Gegeven is de tijd-afstandgrafiek in figuur 2.42.

a Schat de snelheid in gehele m/s op $t = 3$ en op $t = 5$.

b Voor welke t is de snelheid minimaal? Hoe groot is deze snelheid in gehele m/s?

c Hoeveel tijdstippen zijn er tussen $t = 0$ en $t = 6$ waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval [0, 6]? Licht toe.



figuur 2.42

O50 [▸ WERKBLAD] Op het werkblad staat de grafiek van $y = \sqrt{x+4}$ en het punt $A(-3, 1)$ op de grafiek.

a Bereken het differentiequotiënt op $[-3; -2{,}99]$. Rond af op één decimaal.

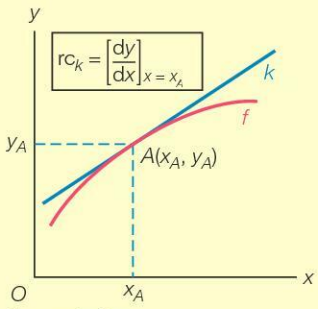
b Teken de raaklijn k in het punt A en geef rc_k.

c Vergelijk het antwoord van vraag a met rc_k. Wat valt je op?

Theorie B Raaklijn en richtingscoëfficiënt

In figuur 2.43 is de raaklijn k van de grafiek van f in het punt $A(x_A, y_A)$ getekend. Net als bij tijd-afstandgrafieken is de richtingscoëfficiënt van k de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = x_A$.
Voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A bestaat de notatie $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$.

Spreek uit: d y d x voor x is x a.



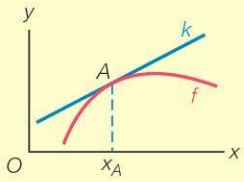
figuur 2.43

© Noordhoff Uitgevers

In plaats van
de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A
zeggen we ook
de **helling van de grafiek** in A.

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ **is**

- **de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A**
- **de helling van de grafiek in A**
- **de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.**



[▸GR] De GR bezit een optie om bij een gegeven formule $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ te berekenen. Hoe dat gaat leer je in de module **Helling**.

Voorbeeld

De lijn k raakt de grafiek van $f(x) = x^2 - 2x - 1$ in het punt A met $x_A = 3$.
Stel de formule op van k.

Uitwerking

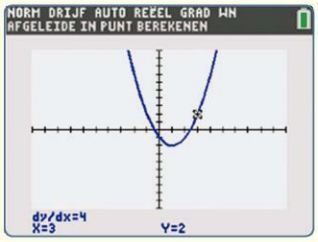
Voer in $y_1 = x^2 - 2x - 1$.

Stel k: $y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 4$.

$y = 4x + b$
$f(3) = 2$, dus $A(3, 2)$

$4 \cdot 3 + b = 2$
$12 + b = 2$
$b = -10$

Dus k: $y = 4x - 10$.



GESCHIEDENIS

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filosoof, natuur- en wiskundige, historicus, rechtsgeleerde en diplomaat, was een van de grootste denkers van zijn tijd. Veel notaties in de wiskunde die men nu nog gebruikt, zoals $\frac{dy}{dx}$, zijn afkomstig van Leibniz.

© Noordhoff Uitgevers

51

a De lijn k raakt de grafiek van $f(x) = x^2 + x - 2$ in het punt A met $x_A = -1$.
Stel de formule op van k.

b De lijn l raakt de grafiek van $g(x) = \frac{2}{x-1} + 3$ in het punt B met $x_B = 3$.
Stel de formule op van l.

52

Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \frac{5x^2}{x^2+1}$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -2$.
De lijn l raakt de grafiek van f in het punt B met $x_B = 1$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en l. Rond af op twee decimalen.

A53

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$ en $g(x) = \sqrt{9x-2}$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt S. De lijn k raakt de grafiek van f in S en de lijn l raakt de grafiek van g in S.
Stel van zowel k als van l de formule op.

A54

Bij sommige operaties in het onderlichaam krijgt de patiënt als verdoving een zogenaamde ruggenprik (spinale anesthesie). Er wordt dan een verdovend middel in het ruggenmergvocht gespoten.
Het is van belang een zodanige hoeveelheid van het verdovend middel in te spuiten, dat de verdoving lang genoeg werkt.
In deze opgave gebruiken we voor de hoeveelheid verdovend middel in het lichaam de formule $H = \frac{600t}{4^t}$. Hierin is H in mg en t de tijd in uren met $0 \leq t \leq 2$.

a Bereken met welke snelheid de hoeveelheid verdovend middel afneemt op $t = 1$. Rond af op één decimaal.

b Vanaf $t = 2$ is de snelheid waarmee de hoeveelheid verdovend middel afneemt constant.
Bereken voor welke waarde van t het verdovend middel uit het lichaam is verdwenen. Rond af op één decimaal.

© Noordhoff Uitgevers

O55 [▸ WERKBLAD] In figuur 2.44 zie je de grafiek van een functie f.
Op de grafiek ligt het punt A met $x_A = -3$. In A is de raaklijn k van de grafiek getekend.

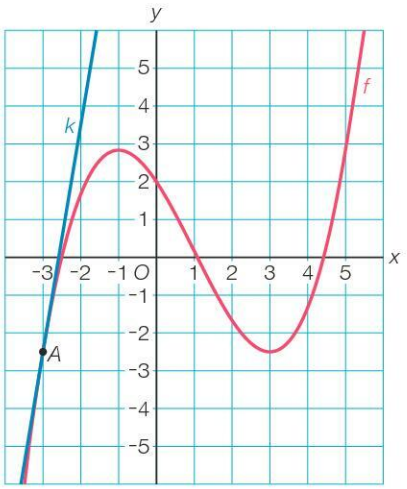
a Hoe kun je nagaan dat de helling van de grafiek in A gelijk is aan 6?

b Teken de raaklijn l van de grafiek in het punt B met $x_B = -2$. Laat zien dat de helling in B ongeveer gelijk is aan 2,5.

c Vul de tabel verder in.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
helling	6	2,5						

d Teken de punten die uit de tabel volgen en teken door deze punten een vloeiende kromme.



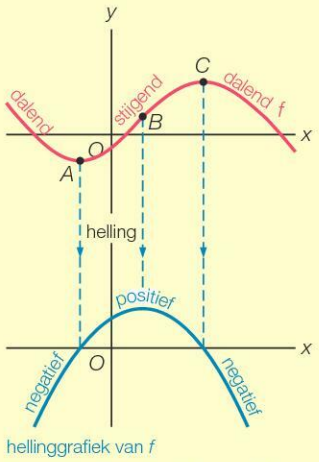
figuur 2.44 De helling in A is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k.

Theorie C Hellinggrafiek schetsen

Bij een gegeven functie kun je bij elke x de helling van de grafiek in het bijbehorende punt vinden.
Zo ontstaat een nieuwe functie: de **hellingfunctie**.
De grafiek van de hellingfunctie heet de **hellinggrafiek**.
Uit een gegeven grafiek van f kun je bijzonderheden van de hellinggrafiek afleiden.

- Bij een *dalend* deel van de grafiek van f horen *negatieve* hellingen, dus de hellinggrafiek ligt daar onder de x-as.
- In een *top* van de grafiek van f is de helling *nul*. De hellinggrafiek snijdt daar de x-as.
- Bij een *stijgend* deel van de grafiek van f horen *positieve* hellingen, dus de hellinggrafiek ligt daar boven de x-as.

Bekijk in figuur 2.45 hoe de hellinggrafiek samenhangt met de grafiek van f. Je ziet dat de toppen A en C de snijpunten opleveren van de hellinggrafiek met de x-as.
Tussen A en C stijgt de grafiek van f, dus daar ligt de hellinggrafiek boven de x-as.
In het punt B is de helling maximaal. Dit geeft het hoogste punt van de hellinggrafiek.



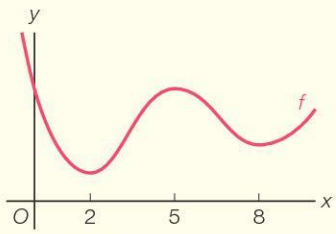
figuur 2.45 De hellinggrafiek van f hangt samen met de grafiek van f.

© Noordhoff Uitgevers

Het verband tussen de grafiek van f en de hellinggrafiek van f.
- **grafiek van f is stijgend hoort bij hellinggrafiek boven de x-as**
- **grafiek van f is dalend hoort bij hellinggrafiek onder de x-as**
- **grafiek van f heeft top hoort bij hellinggrafiek snijdt de x-as**

Voorbeeld

Zie de figuur hiernaast met de grafiek van de functie f.
Schets de hellinggrafiek van f.



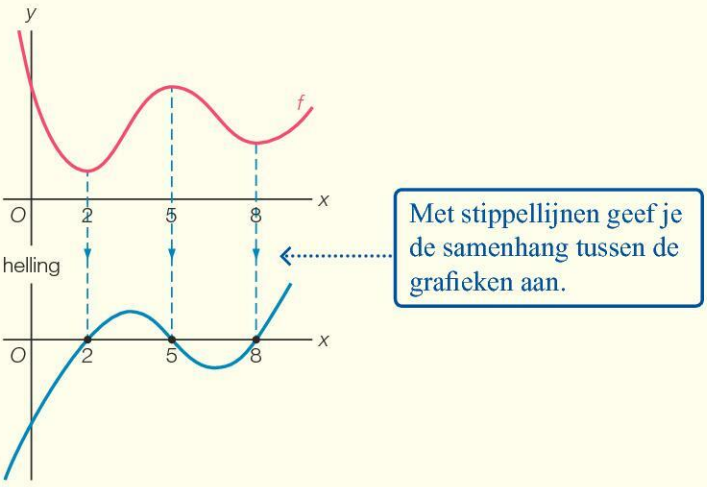
figuur 2.46

Aanpak

	grafiek van f	hellinggrafiek van f
$\langle \leftarrow, 2\rangle$	dalend	onder de x-as
$x = 2$	top	snijdt de x-as
$\langle 2, 5\rangle$	stijgend	boven de x-as
$x = 5$	top	snijdt de x-as
$\langle 5, 8\rangle$	dalend	onder de x-as
$x = 8$	top	snijdt de x-as
$\langle 8, \rightarrow\rangle$	stijgend	boven de x-as

Teken eerst de punten waar de hellinggrafiek de x-as snijdt.

Uitwerking

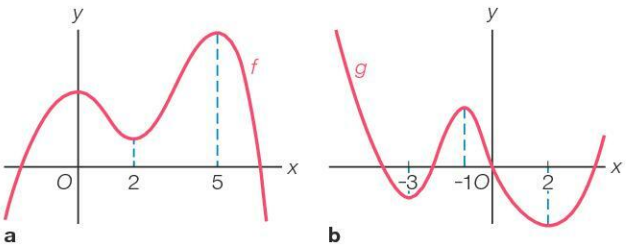


© Noordhoff Uitgevers

56 [▸ WERKBLAD]

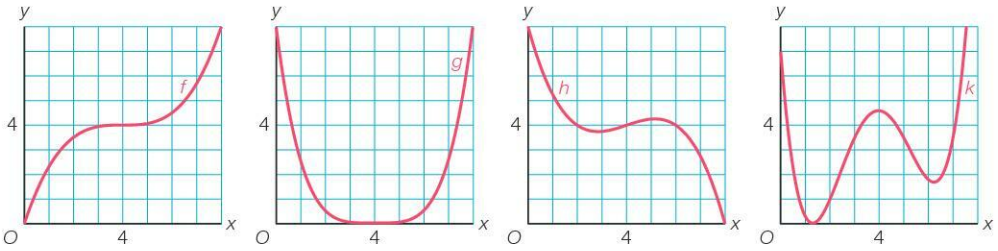
a In figuur 2.47a zie je de grafiek van een functie f. Schets de hellinggrafiek van f.

b In figuur 2.47b zie je de grafiek van een functie g. Schets de hellinggrafiek van g.

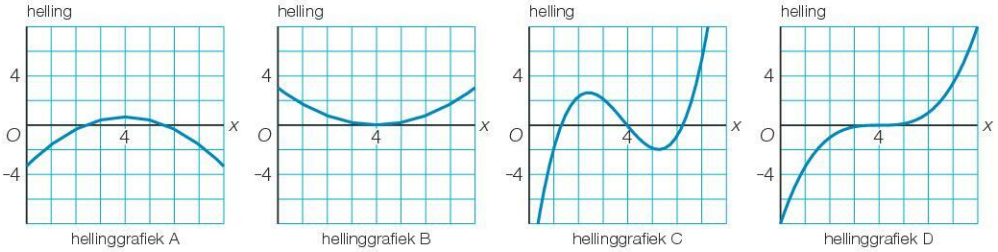


figuur 2.47

57 Van de functies f, g, h en k zijn in figuur 2.48 de grafieken getekend. De bijbehorende hellinggrafieken staan in een andere volgorde in figuur 2.49. Zoek bij elk van de functies f, g, h en k de juiste hellinggrafiek.



figuur 2.48



figuur 2.49

58 [▸ WERKBLAD] Hiernaast is de hellinggrafiek van een functie f getekend.

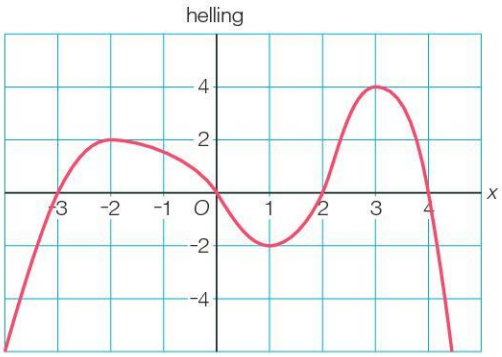
a Voor $x < -3$ ligt de hellinggrafiek onder de x-as.
Licht toe dat hieruit volgt dat de grafiek van f dalend is op $\langle \leftarrow, -3 \rangle$.

b Waarom heeft de grafiek van f een top bij $x = -3$? Is dat een hoogste of een laagste punt?

c Is de grafiek van f stijgend of dalend op $\langle -3, 0 \rangle$?

d Heeft de grafiek van f een hoogste of een laagste punt bij $x = 0$?

e Schets een mogelijke grafiek van f.



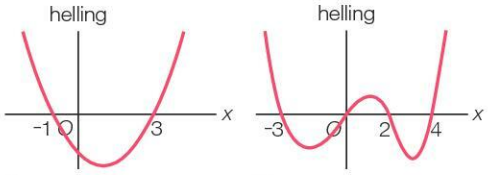
figuur 2.50

© Noordhoff Uitgevers

59 [▸ WERKBLAD]

a In figuur 2.51a zie je de hellinggrafiek van een functie f.
Schets een mogelijke grafiek van f.

b In figuur 2.51b zie je de hellinggrafiek van een functie g.
Schets een mogelijke grafiek van g.



a **b**

figuur 2.51

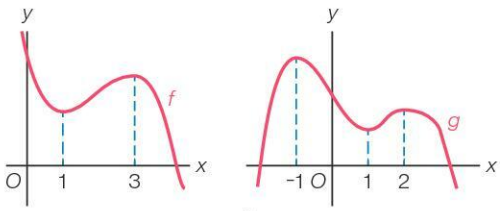
A60 [▸ WERKBLAD] Gegeven zijn de grafieken van de functies f en g in figuur 2.52.

a Schets de hellinggrafiek van f.

b Schets de hellinggrafiek van g.

c Neem aan dat de grafiek van f de hellinggrafiek is van een functie h.
Schets een mogelijke grafiek van h.

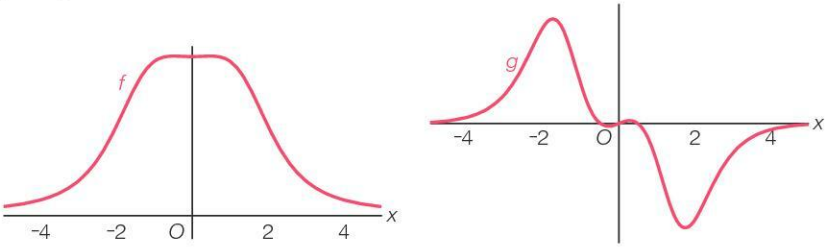
d Neem aan dat de grafiek van g de hellinggrafiek is van een functie k
Schets een mogelijke grafiek van k.



a **b**

figuur 2.52

A61 [▸ WERKBLAD] In de figuur hieronder zie je de grafieken van de functies f en g.



figuur 2.53

Lars beweert dat de grafiek van g de hellinggrafiek van f is.
Max beweert dat de grafiek van f de hellinggrafiek van g is.
Een van de twee heeft gelijk.

a Wie van de twee heeft gelijk? Licht toe.

Uit het antwoord van vraag a volgt dat van f of van g de hellinggrafiek niet in figuur 2.53 is getekend.

b Teken de ontbrekende hellinggrafiek.

© Noordhoff Uitgevers

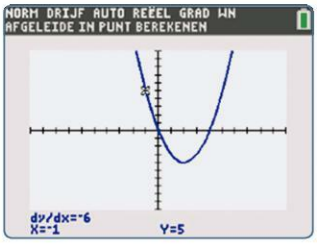
062

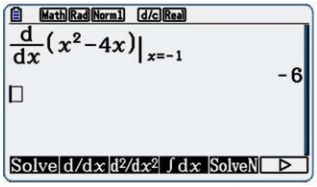
Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x$.

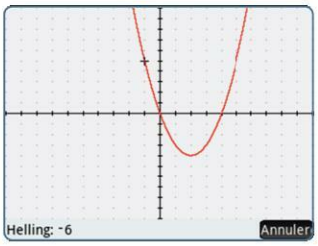
a Vul de volgende tabel verder in.

x	-1	0	1	2	3	4
helling	-6					

b Gebruik de tabel om de hellinggrafiek te tekenen.







Theorie D Hellinggrafieken plotten

[▸GR] De GR heeft een optie om bij een gegeven functie f de hellinggrafiek te plotten. Hoe dat gaat leer je in de module **Hellinggrafieken**.

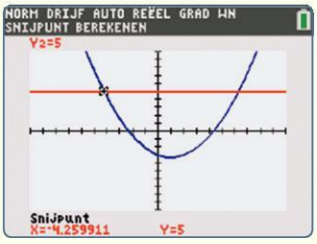
Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 - 3x + 2$.
Bereken voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 5.
Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

Voer in $y_1 = 0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 - 3x + 2$ en $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)\Big|_{x=x}$.

Voer in $y_3 = 5$ en zet y_1 uit.
De optie snijpunt met y_2 en y_3 geeft $x \approx -4{,}26$ en $x \approx 6{,}26$.
Dus voor $x \approx -4{,}26$ en voor $x \approx 6{,}26$ is de helling van de grafiek van f gelijk aan 5.



063

a Gegeven is de functie $f(x) = -0{,}1x^3 + x^2 - 2x + 5$.
Bereken de helling van de grafiek van f in het punt A met $x_A = 7$.

b Gegeven is de functie $g(x) = 0{,}1x^4 - 0{,}3x^3 - 4{,}5x^2 + 9x + 5$.
Bereken voor welke x de helling van de grafiek van g gelijk is aan 10.
Rond af op twee decimalen.

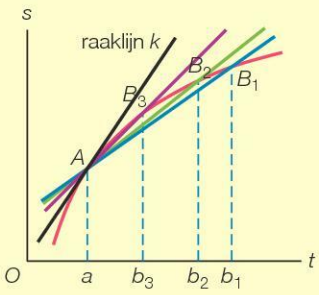
c Gegeven is de functie $h(x) = \frac{5x^2 - 38}{x^2 + 4}$.
Bereken voor welke x de helling van de grafiek van h gelijk is aan 3.
Rond af op drie decimalen.

© Noordhoff Uitgevers

Terugblik

Snelheid op $t = a$ en raaklijn

Door bij een tijd-afstandgrafiek de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$.
De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de hellingen van de lijnen AB_1, AB_2, AB_3, ...
Hoe dichter B bij A komt te liggen, des te meer de lijn AB gaat lijken op de lijn k die in A de grafiek raakt.
Bij een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.



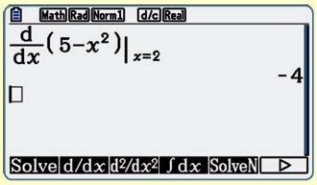
Richtingscoëfficiënt van raaklijn

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ is

- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A
- de helling van de grafiek in A
- de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.

Formule van raaklijn opstellen

De formule van de lijn k die de grafiek van $f(x) = 5 - x^2$ in het punt A met $x_A = 2$ raakt, vind je als volgt.



Stel k: $y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = -4$.

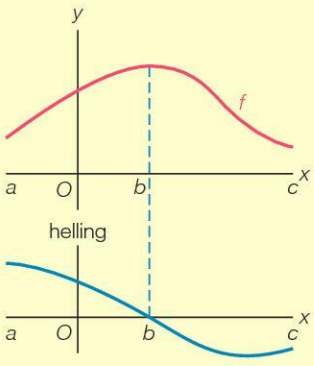
$$\left.\begin{array}{l} y = -4x + b \\ f(2) = 1, \text{ dus } A(2, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -4 \cdot 2 + b = 1 \\ -8 + b = 1 \\ b = 9 \end{array}$$

Dus k: $y = -4x + 9$.

Hellinggrafieken schetsen

Bij een functie f hoort een hellingfunctie die voor elke x de waarde geeft van de helling van de grafiek van f in het bijbehorende punt.
De grafiek van de hellingfunctie heet de hellinggrafiek van f.
Bij een gegeven grafiek van een functie f kun je de hellinggrafiek schetsen.
Je gebruikt:

	grafiek van f	hellinggrafiek
$\langle a, b\rangle$	stijgend	boven de x-as
$x = b$	top	snijdt de x-as
$\langle b, c\rangle$	dalend	onder de x-as



© Noordhoff Uitgevers

2.4 Differentiëren

O64

Gegeven is de functie $f(x) = 1{,}5x^2$.

a Voer in $y_1 = 1{,}5x^2$ en $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)\Big|_{x=x}$ en schets in één figuur de grafiek van f en de hellinggrafiek van f.

b De hellinggrafiek is een lijn.
Geef de formule van deze lijn. Controleer de formule door deze bij y_3 in te voeren en in een tabel y_2 en y_3 met elkaar te vergelijken.

O65

Gegeven is de functie $g(x) = 3x$.
De hellinggrafiek van g is een horizontale lijn.

a Geef hiervoor een verklaring.

b Welke formule heeft die lijn?

O66

Gegeven is de functie $h(x) = -4$.
De hellinggrafiek van h is een horizontale lijn.
Welke formule heeft die lijn?

Theorie A Afgeleide functie

Bij een functie hoort een hellingfunctie. In plaats van hellingfunctie wordt meestal de naam **afgeleide functie**, kortweg **afgeleide** gebruikt.
De afgeleide van f wordt genoteerd als f'. Spreek uit f accent.

Het is prettig als je van een functie f direct de formule van de afgeleide f' kunt opschrijven.
In opgave 64 heb je gezien:
van $f(x) = 1{,}5x^2$ is de afgeleide $f'(x) = 3x$.
Dit is een voorbeeld van de regel:
van $f(x) = ax^2$ is de afgeleide $f'(x) = a \cdot 2x$.

In opgave 65 heb je gezien:
van $g(x) = 3x$ is de afgeleide $g'(x) = 3$.
Dit is een voorbeeld van de regel:
van $f(x) = ax$ is de afgeleide $f'(x) = a$.

In opgave 66 heb je gezien:
van $h(x) = -4$ is de afgeleide $h'(x) = 0$.
Dit is een voorbeeld van de regel:
van $f(x) = a$ is de afgeleide $f'(x) = 0$.

Regels voor de afgeleide

$f(x) = a$	geeft	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	geeft	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2$	geeft	$f'(x) = a \cdot 2x$

© Noordhoff Uitgevers

Het berekenen van de formule van de afgeleide heet **differentiëren**.

Om $f(x) = 5x^2 - 8x + 3$ te differentiëren, neem je term voor term de afgeleide.
Dus $f(x) = 5x^2 - 8x + 3$ geeft $f'(x) = 5 \cdot 2x - 8 + 0 = 10x - 8$.
Je hebt hier een voorbeeld van de **somregel voor het differentiëren**.

Om $f(x) = (3x - 2)(5x + 3)$ te differentiëren, werk je eerst de haakjes weg.
Dus $f(x) = (3x - 2)(5x + 3) = 15x^2 + 9x - 10x - 6 = 15x^2 - x - 6$.
Dit geeft $f'(x) = 30x - 1$.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = -4x^2 - 3x + 17$

b $g(t) = (5t - 7)^2$

Uitwerking

a $f(x) = -4x^2 - 3x + 17$ geeft $f'(x) = -8x - 3$

b $g(t) = (5t - 7)^2 = 25t^2 - 70t + 49$ geeft $g'(t) = 50t - 70$

67

Differentieer.

a $f(x) = 5x^2 - 7x + 5$

b $g(x) = -2\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$

c $h(x) = 0{,}02x^2 + 1{,}7x$

d $k(x) = 7x + 10$

68

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = (2x - 7)(8 + x)$

b $g(p) = -12p^2 + 30p$

c $V(t) = 100 - (t^2 - 6t)$

d $K(q) = -0{,}01q^2 + 20q$

A69

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 3x - 2(x^2 + 1)$

b $P(q) = 0{,}05q^2 - 200q$

c $g(x) = 3(2x - 3)^2$

d $h(a) = 50 - (\frac{1}{2}a - 4)^2$

A70

Differentieer.

a $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x)$

b $g(x) = (3x + 6)^2$

c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(x - 1) + 8$

d $k(x) = -3(x - 1)(5 - 2x) - 8(x - 7)$

A71

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$.
De formule van de hellinggrafiek is $y = \frac{1}{2}x - 2$.

a Licht dit toe.

b Bereken met de formule van de hellinggrafiek de helling voor $x = 6$.

c Bereken algebraïsch voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -1.

© Noordhoff Uitgevers

R72 *

In de theorie wordt de somregel voor het differentiëren genoemd.
Je kunt deze regel als volgt noteren:
$f(x) = g(x) + h(x)$ geeft $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.

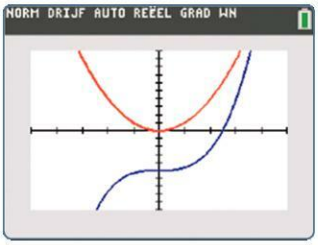
Onderzoek of ook de volgende regel geldt:
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ geeft $f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$.

O73 ◘⊙*

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$.

a Plot in één figuur de grafiek van f en de hellinggrafiek van f. Je krijgt figuur 2.54.

b Zo te zien is de grafiek van f' een parabool. Hierbij hoort een formule van de vorm $f'(x) = ax^2$.
Welk getal is a?
Voer de formule van f' in bij y_3 en controleer of je de juiste formule voor f' hebt bedacht.



figuur 2.54 De grafiek van $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$ en van zijn afgeleide met x tussen −5 en 5 en y tussen −10 en 10.

Theorie B De afgeleide van $f(x) = ax^n$

In opgave 73 heb je met behulp van de **numerieke afgeleide** kunnen nagaan dat $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$ geeft $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$.

Algemeen:
$f(x) = ax^3$ geeft $f'(x) = a \cdot 3x^2$.
En zo kun je nagaan dat
$f(x) = ax^4$ geeft $f'(x) = a \cdot 4x^3$ en
$f(x) = ax^5$ geeft $f'(x) = a \cdot 5x^4$.

$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$

In het voorbeeld moet bij onderdeel c de afgeleide van $h(x) = 3px^5 - 5x + p$ worden berekend.
Hierbij is p een constante.
Daarom is de afgeleide van $3px^5$ gelijk aan $3p \cdot 5x^4 = 15px^4$ en is de afgeleide van p gelijk aan 0.

De GR geeft met
$y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)\Big|_{x=x}$ de
numerieke afgeleide van y_1.

$f(x) = 4x^3$ geeft $f'(x) = 4 \cdot 3x^2$
(nieuwe exponent 1 minder; oude exponent ervoor)

$h(x) = 3px^5 - 5x + p$
oude exponent ervoor; nieuwe exponent 1 minder; p is een constante, dus afgeleide is 0
$h'(x) = 3p \cdot 5x^4 - 5$

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 10x^7 - 6x^4 - 3$

b $g(t) = -3t^5 + 3t^2 + 4$

c $h(x) = 3px^5 - 5x + p$

Uitwerking

a $f(x) = 10x^7 - 6x^4 - 3$ geeft $f'(x) = 70x^6 - 24x^3$

b $g(t) = -3t^5 + 3t^2 + 4$ geeft $g'(t) = -15t^4 + 6t$

c $h(x) = 3px^5 - 5x + p$ geeft $h'(x) = 15px^4 - 5$

74

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$

b $g(x) = -2x^7 - 3x^5 + 3{,}4$

c $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$

d $k(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3$

75

Differentieer.

a $f(x) = 3(2x + 1)^2$

b $g(x) = 7(3x - 2)(x^2 + 2x)$

c $h(x) = 3px^8 - px^4$

d $k(x) = x^3 + a$

A76

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = (4x^2 - 9)(4x^2 + 9)$

b $g(x) = 4x(x^2 - 4)(x^2 - 9)$

c $h(x) = (2x^3 - 4)^2$

d $k(x) = (3x^2 - 1)^2 - (2x^2 - 3)^2$

A77

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 5$.

a Bereken de formule van de hellinggrafiek.

b Bereken algebraïsch de helling voor $x = 4$.

c Bereken algebraïsch voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -1.

A78

De helling van de grafiek van $f(x) = ax^4 - 3x^2 + 2ax$ in het punt A met $x_A = 2$ is gelijk aan 5.

Bereken a.

E79

De regel $f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ is een voorbeeld van de algemene regel $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$, waarbij c een constante is.

Gegeven is dat van de functie $h(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$ de afgeleide is

$h'(x) = \dfrac{3}{(x + 1)^2}$.

Bereken de afgeleide van de functie $k(x) = \dfrac{4x - 2}{3x + 3}$.

© Noordhoff Uitgevers

Terugblik

Afgeleide functie

De hellingfunctie van een functie f wordt meestal de afgeleide functie van f genoemd, kortweg de afgeleide van f.
Voor de afgeleide bestaat de notatie f'.
Het berekenen van de formule van de afgeleide heet differentiëren.

De numerieke afgeleide

Door bij y_1 de formule van de functie f in te voeren en bij y_2 in te voeren $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_1)\Big|_{x=x}$ krijg je bij y_2 de numerieke afgeleide van f.
Door de grafiek van y_2 (dus de hellinggrafiek) te plotten, kun je een idee krijgen van de formule die bij de afgeleide van f hoort.

Met de numerieke afgeleide kun je de grafiek van de afgeleide plotten zonder de formule ervan op te stellen.

Regels voor differentiëren

Met de volgende regels kun je van enkele functies direct de formule van de afgeleide geven.

$f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$
$f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$
$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$

Met differentiëren krijg je de formule van de afgeleide.

De afgeleide van $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8x - 6$ krijg je door term voor term te differentiëren.
Dus $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8x - 6$ geeft $f'(x) = 15x^2 - 14x + 8$.

Om de afgeleide van $g(x) = 5(3x - 1)(x^3 - 4x)$ te berekenen, werk je eerst de haakjes weg.
$g(x) = 5(3x - 1)(x^3 - 4x) = 5(3x^4 - 12x^2 - x^3 + 4x) = 15x^4 - 5x^3 - 60x^2 + 20x$
Dus $g'(x) = 60x^3 - 15x^2 - 120x + 20$.

In $f(x) = 5x^3 + 4px^2 + p^2$ is p een constante. Daarom is van $4px^2$ de afgeleide $4p \cdot 2x = 8px$ en is van p^2 de afgeleide 0.
Dus $f(x) = 5x^3 + 4px^2 + p^2$ geeft $f'(x) = 15x^2 + 8px$.

© Noordhoff Uitgevers

Eindopdracht Een hogesnelheidstrein

In de beginopdracht van dit hoofdstuk heb je snelheden benaderd bij de formule $s = -0{,}001875t^4 + 0{,}075t^3$. In deze formule is s de afgelegde afstand van een optrekkende trein na t seconden. De formule geldt voor $0 \leq t \leq 20$.
Het benaderen van de snelheid deed je door de gemiddelde snelheid te berekenen op een klein tijdsinterval. Zo benaderde je de snelheid op $t = 5$ door de gemiddelde snelheid te berekenen op het tijdsinterval [4,9; 5,1].
In dit hoofdstuk heb je geleerd dat je de snelheid ook kunt berekenen met de optie $\frac{dy}{dx}$.

- Bereken met de optie $\frac{dy}{dx}$ de snelheid op $t = 5$. Geef het antwoord in gehele km/uur.

Je kunt ook de afgeleide berekenen van de formule $s = -0{,}001875t^4 + 0{,}075t^3$. Je krijgt dan de formule van de snelheid v in m/s.

- Bereken met de formule van v de snelheid op $t = 10$, $t = 15$ en $t = 20$. Geef de antwoorden in gehele km/uur.

De formule $s_{\text{intercity}} = -0{,}001875t^4 + 0{,}075t^3$ hoort bij een optrekkende intercity.
Bij de afgelegde afstand van een optrekkende hogesnelheidstrein heeft men een soortgelijke formule opgesteld. Deze formule is $s_{\text{hogesnelheidstrein}} = -0{,}002625t^4 + 0{,}105t^3$. Ook hierin is s de afgelegde afstand na t seconden met $0 \leq t \leq 20$.
Na 20 seconden veranderen de snelheden van beide treinen niet meer.
De hogesnelheidstrein vertrekt van treinstation A en rijdt naar station B dat 40 km verderop ligt.
We vragen ons af hoeveel tijd de hogesnelheidstrein minder nodig heeft dan de intercity die hetzelfde traject aflegt. Neem daarbij aan dat zowel de intercity als de hogesnelheidstrein 2 km voor station B vaart mindert en dat de afname van de snelheid in de laatste 2 km lineair verloopt.

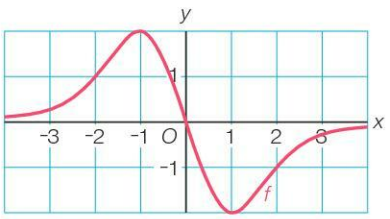
- Bereken hoeveel tijd de hogesnelheidstrein minder nodig heeft dan de intercity.

© Noordhoff Uitgevers

Diagnostische toets

2.1 Toenamediagrammen

1 Welke soorten van stijgen en dalen kun je in figuur 2.55 herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.



figuur 2.55

2 Teken het toenamediagram op [−3, 3] dat hoort bij figuur 2.55. Neem stapgrootte 1.

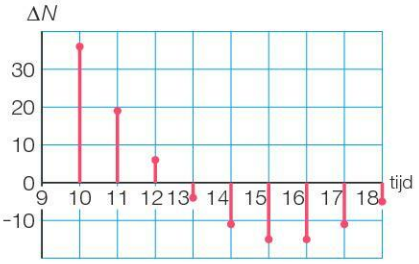
3 [▸ WERKBLAD] In figuur 2.56 zie je een toenamediagram bij het aantal bezoekers van een strandterras op een mooie zomerdag. Het terras is geopend van 9 tot 18 uur.

a Hoeveel bezoekers waren er om 14 uur?

b Teken een mogelijke grafiek van het aantal bezoekers.

c Op het drukste moment was 80% van de stoelen bezet.
Hoeveel stoelen zijn er minstens op het terras?

d Tussen 12 uur en 14 uur vertrokken er 80 bezoekers.
Hoeveel bezoekers kwamen er tussen 12 uur en 14 uur?



figuur 2.56

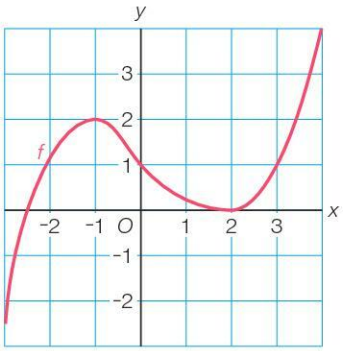
4 Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2$.
Teken het toenamediagram op het interval [−4, 2] met $\Delta x = 1$.

2.2 Differentiequotiënten en snelheden

5 [▸ WERKBLAD] Zie figuur 2.57.

a Bereken de gemiddelde verandering van y op [0, 4] en op [−1, 2].

b Noem een interval waarop het differentiequotiënt gelijk is aan $-\frac{1}{2}$.



figuur 2.57

6 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 8x + 14$.
Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op [3, 9].

7 Gegeven is de formule $s = \frac{200t^2}{0{,}1t^3 + 100}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Benader in m/s de snelheid op $t = 5$. Neem $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op één decimaal.

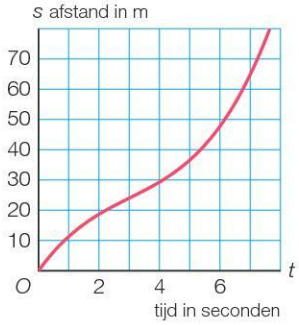
© Noordhoff Uitgevers

2.3 Raaklijnen en hellinggrafieken

8 [▸ WERKBLAD] In figuur 2.58 zie je een tijd-afstandgrafiek.

a Schat de snelheid op $t = 1$ en op $t = 6$.

b Voor welke t schat je dat de snelheid minimaal is? Hoe groot is deze minimale snelheid?



figuur 2.58

9 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{10 - x^2}$. Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -3$ en $x_B = 3$. De lijn k raakt de grafiek in het punt A en de lijn l raakt de grafiek in het punt B.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

10 De concentratie C van een medicijn in het bloed van een patiënt wordt gegeven door de formule $C = \frac{100}{t^2 + 2}$. Hierin is C in mg per liter en t de tijd in uren met $0 \leq t \leq 4$.
Vanaf $t = 4$ blijft de snelheid waarmee de concentratie afneemt constant.
Bereken voor welke t het medicijn uit het lichaam is verdwenen.

11 [▸ WERKBLAD] Zie de grafiek van de functie f in figuur 2.57.

a Schets de hellinggrafiek van f.

b Neem aan dat de grafiek van f de hellinggrafiek is van een functie g. Teken een mogelijke grafiek van g.

12 Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}4x^3 - 0{,}6x^2 - 2x - 1$.
Bereken voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 3.
Rond af op twee decimalen.

2.4 Differentiëren

13 Differentieer.

a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7$

b $g(p) = 4p^3 + \frac{1}{6}p^2 - 11p + 20$

c $h(q) = 3q - 2(q^2 - 4q)$

d $k(x) = ax^2 + bx + c$

14 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = (3 - x)(5 + 2x)$

b $g(x) = (3x + 1)^2$

c $h(x) = x(2x - 1)^2$

d $v(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + at + b$

15 Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}4x^3 - 0{,}6x^2 - 2x - 1$.
Bereken algebraïsch de helling in het punt A met $x_A = 2$.

© Noordhoff Uitgevers

3

Hoeken en afstanden

Wat leer je?

- Rekenen met de goniometrische verhoudingen en met gelijkvormige driehoeken.
- De sinusregel en de cosinusregel gebruiken.
- Werken met vergelijkingen in de meetkunde.
- Meetkunde toepassen in allerlei situaties.

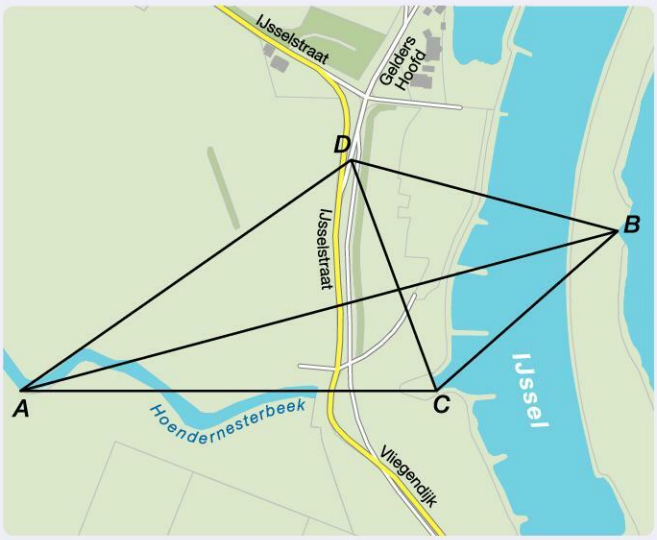
© Noordhoff Uitgevers

© Noordhoff Uitgevers

Beginopdracht Een landmeter in actie

In de figuur zie je een landschap waarin een landmeter de afstand tussen de punten A en B wil opmeten. Omdat, vanuit A gezien, B aan de overkant van het water ligt, kan hij de afstand AB niet rechtstreeks opmeten. Wel kan hij de afstand tussen de gemarkeerde punten C en D opmeten. Er geldt $CD = 250$ meter. Ook kan hij een aantal hoeken opmeten. Hij vindt $\angle CAB = 15°$, $\angle DAB = 20°$, $\angle ACD = 70°$ en $\angle ADB = 130°$.
Hoe je met deze gegevens AB kunt berekenen, onderzoek je in deze opdracht. Je gebruikt daarbij de hoogtelijn DE van driehoek ACD en de hoogtelijn AF van driehoek ABD.

Een hoogtelijn van een driehoek is een lijn die door een hoekpunt gaat en loodrecht op de overstaande zijde staat.



- Teken vierhoek $ACBD$ over en teken hierin de hoogtelijn DE van driehoek ACD. Merk op dat het punt E op AC ligt.

In driehoek CDE geldt $\sin(\angle ACD) = \frac{DE}{CD}$. Na het invullen van $\angle ACD = 70°$ en $CD = 250$ kun je DE berekenen. Afgerond op twee decimalen is $DE \approx 234{,}92$.

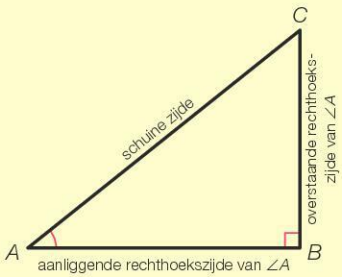
- Bereken DE. Rond af op drie decimalen.
- Bereken AD. Rond af op twee decimalen.
- Onderzoek hoe je AB kunt berekenen. Gebruik hierbij de hoogtelijn AF van driehoek ABD.

© Noordhoff Uitgevers

Voorkennis Goniometrische verhoudingen

Theorie A Hoeken berekenen

Bij hoekberekeningen in rechthoekige driehoeken gebruik je de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens.



figuur 3.1 De schuine zijde zit altijd tegenover de rechte hoek.

Sinus, cosinus en tangens

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{BC}{AC}$$

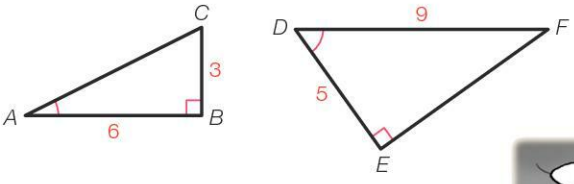
$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A} = \frac{BC}{AB}$$

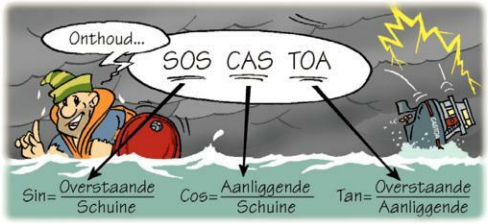
Om de GR te kunnen gebruiken bij hoekberekeningen moet je deze instellen op graden. Op de TI gaat dat in het MODE-menu waar je voor GRADEN kiest. Bij de Casio kies je in het SET UP-menu bij Angle voor Deg. Bij de HP kies je bij Settings bij Hoekmaat voor Graden.

Voorbeeld

Bereken de hoeken die met een boogje zijn aangegeven. Rond af op één decimaal.



figuur 3.2



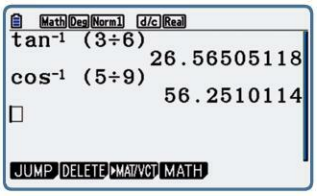
Aanpak

Ga eerst na of je sinus, cosinus of tangens nodig hebt.

Uitwerking

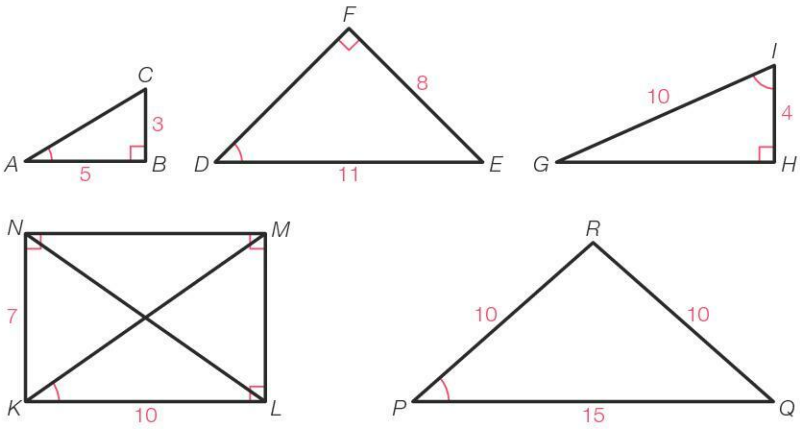
$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{6}$ geeft $\angle A \approx 26{,}6°$

$\cos(\angle D) = \frac{DE}{DF} = \frac{5}{9}$ geeft $\angle D \approx 56{,}3°$



© Noordhoff Uitgevers

1 Bereken de hoeken die met een boogje zijn aangegeven. Rond af op één decimaal.



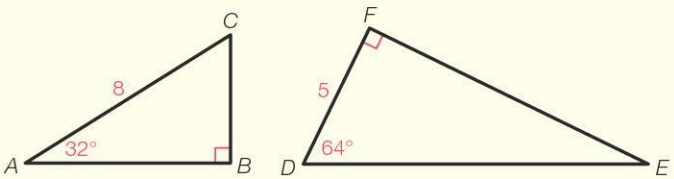
figuur 3.3

Theorie B Lijnstukken berekenen

Bij het berekenen van lijnstukken met behulp van de sinus, cosinus of tangens, kun je gebruik maken van een verhoudingstabel.

Voorbeeld

Bereken BC en DE. Rond af op één decimaal.



figuur 3.4

Aanpak

Ga eerst na of je sinus, cosinus of tangens nodig hebt.

Uitwerking

$\sin(\angle A) = \dfrac{BC}{AC}$

$\sin(32°)$	BC
1	8

$BC = 8\sin(32°) \approx 4{,}2$

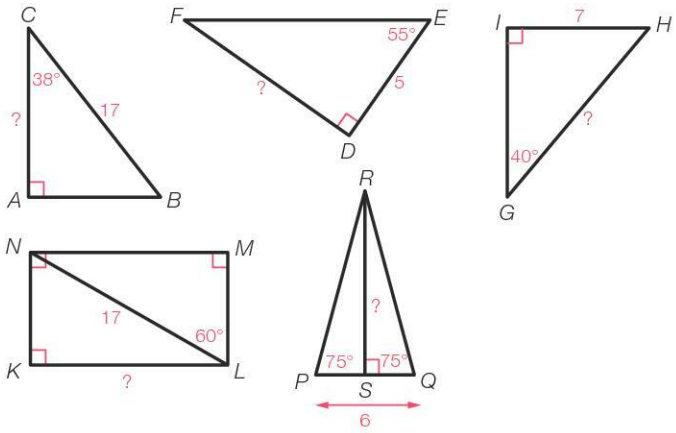
$\cos(\angle D) = \dfrac{DF}{DE}$

$\cos(64°)$	5
1	DE

$DE = \dfrac{5}{\cos(64°)} \approx 11{,}4$

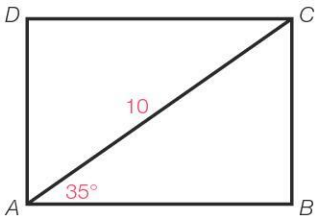
© Noordhoff Uitgevers

2 Bereken de lijnstukken met een vraagteken. Rond af op één decimaal.



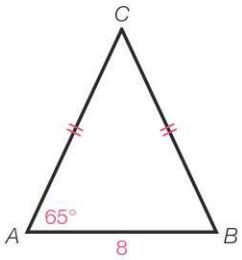
figuur 3.5

3 Gegeven is rechthoek $ABCD$ met diagonaal AC.
De lengte van AC is 10 en $\angle BAC = 35°$.
Bereken de omtrek van de rechthoek. Rond af op twee decimalen.



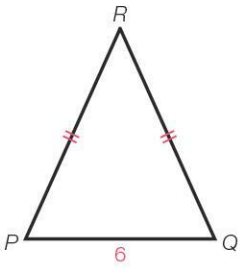
figuur 3.6

4 Gegeven is driehoek ABC met $AB = 8$, $AC = BC$ en $\angle A = 65°$.
Bereken de oppervlakte van de driehoek. Rond af op twee decimalen.



figuur 3.7

5 Gegeven is driehoek PQR met $PQ = 6$ en $PR = QR$.
De oppervlakte van driehoek PQR is 20.
Bereken de hoeken van de driehoek. Rond af op één decimaal.



figuur 3.8

© Noordhoff Uitgevers

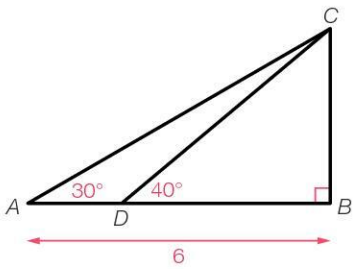
3.1 Berekeningen in driehoeken

01

In de rechthoekige driehoek ABC in figuur 3.9 is $AB = 6$ en $\angle BAC = 30°$.
Op AB ligt het punt D waarbij $\angle BDC = 40°$.
We vragen ons af wat de lengte van BD is.

a Licht toe dat $BC = 6\tan(30°)$ en bereken BC. Rond af op drie decimalen.

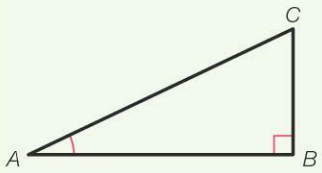
b Gebruik $\tan(\angle BDC)$ om BD te berekenen. Rond af op twee decimalen.



figuur 3.9

Theorie A Goniometrische berekeningen

Met de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens zijn hoeken en lijnstukken te berekenen.
Gebruik je bij berekeningen met de GR tussenresultaten, rond dan de tussenresultaten niet af maar gebruik Ans en geheugenplaatsen van de GR.



$$\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB}$$

[▸ GR] Neem uit de handleiding GR de module **Het gebruik van Ans en lettergeheugens** door.

Afspraak
Rond bij het berekenen van een hoek af op één decimaal.

Tot nu toe heb je bij het berekenen van lijnstukken met behulp van goniometrische verhoudingen gebruik gemaakt van verhoudingstabellen.
Vanaf nu doen we dat op een snellere manier.
Daarbij gebruiken we de regels:

- $a = \frac{b}{c}$ geeft $b = ac$
- $a = \frac{b}{c}$ geeft $c = \frac{b}{a}$.

$a = \frac{b}{c}$ → Vermenigvuldig beide leden met c. → $ac = b$

$ac = b$ → Deel beide leden door a. → $c = \frac{b}{a}$

Dus $\sin(40°) = \frac{AB}{6}$ geeft $AB = 6\sin(40°)$ en

$\cos(35°) = \frac{5}{BC}$ geeft $BC = \frac{5}{\cos(35°)}$.

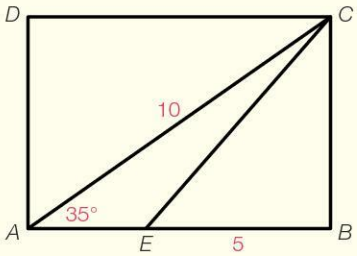
© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Gegeven is rechthoek $ABCD$ met diagonaal $AC = 10$ en $\angle BAC = 35°$.
Punt E ligt op AB waarbij $BE = 5$.

a Bereken $\angle BEC$.

b Bereken $\angle ACE$.



figuur 3.10

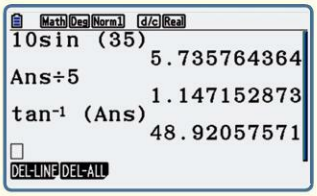
Uitwerking

a In $\triangle ABC$ is $\sin(35°) = \dfrac{BC}{10}$

$BC = 10\sin(35°) = 5{,}73...$

In $\triangle BEC$ is $\tan(\angle BEC) = \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{5{,}73...}{5}$

$\angle BEC \approx 48{,}9°$



b $\angle AEC = 180° - \angle BEC \approx 180° - 48{,}9° = 131{,}1°$

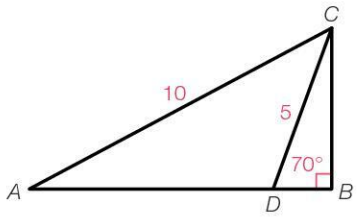
In $\triangle AEC$ is

$\angle ACE = 180° - \angle EAC - \angle AEC \approx 180° - 35° - 131{,}1° = 13{,}9°$.

2 Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur 3.11.
$AC = 10$ en het punt D ligt zo op AB dat $CD = 5$ en $\angle BDC = 70°$.

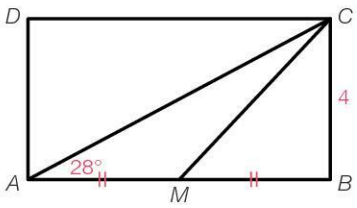
a Bereken $\angle BAC$.

b Bereken $\angle ACD$.



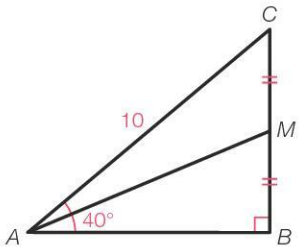
figuur 3.11

3 Gegeven is rechthoek $ABCD$ in figuur 3.12.
$BC = 4$, $\angle BAC = 28°$ en M is het midden van AB.
Bereken $\angle BMC$.



figuur 3.12

4 Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur 3.13.
$AC = 10$, $\angle BAC = 40°$ en M is het midden van BC.
Bereken $\angle BAM$.

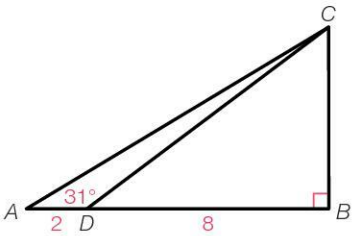


figuur 3.13

© Noordhoff Uitgevers

5 ▭⊙✱

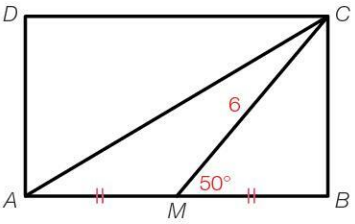
Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur 3.14.
$AB = 10$, $\angle A = 31°$ en punt D ligt op AB waarbij $AD = 2$.
Bereken $\angle ACD$.



figuur 3.14

A6 ▭⊙✱

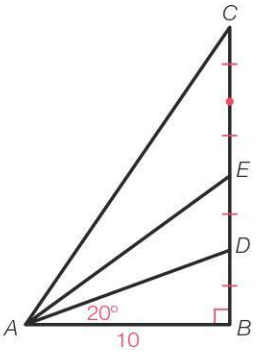
Gegeven is de rechthoek $ABCD$ met M het midden van AB, $CM = 6$ en $\angle BMC = 50°$.
Bereken $\angle BAC$ en $\angle ACM$.



figuur 3.15

A7 ⊙✱

Gegeven is driehoek ABC met $AB = 10$ en $\angle B = 90°$.
De punten D en E liggen op BC waarbij E het midden van BC is en D het midden van BE.
Verder is $\angle BAD = 20°$. Zie figuur 3.16.
Bereken $\angle CAE$.



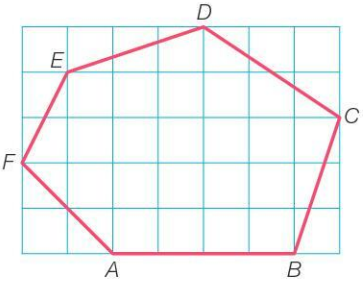
figuur 3.16

A8 ⊙✱

In figuur 3.17 is op een rooster de zeshoek $ABCDEF$ getekend.

a Bereken $\angle F$.

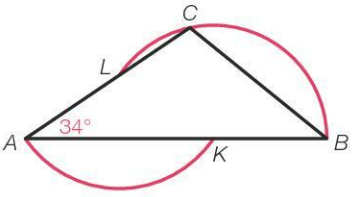
b De diagonalen AD en BE snijden elkaar in het punt S.
Bereken $\angle ASB$.



figuur 3.17

E9 ✱

Het punt L is het middelpunt van de cirkel waar de punten A en K op liggen. Het punt K is het middelpunt van de cirkel met daarop de punten B, C en L. Van driehoek ABC is $\angle A = 34°$.
Hoe groot is $\angle B$?

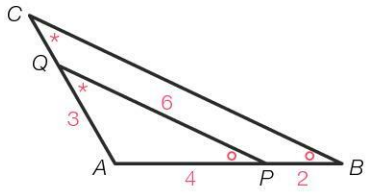


figuur 3.18

© Noordhoff Uitgevers

O10

In de figuur hiernaast is $\triangle ABC$ een vergroting van $\triangle APQ$.
Bereken AC en BC.



figuur 3.19

Theorie B Gelijkvormige driehoeken

Bij het vergroten van een figuur hebben origineel en beeld dezelfde vorm. Zo is in figuur 3.19 $\triangle ABC$ gelijkvormig met $\triangle APQ$. Notatie: $\triangle ABC \sim \triangle APQ$.
Bij gelijkvormige driehoeken zijn de overeenkomstige hoeken gelijk en kun je met de zijden een verhoudingstabel maken. Hierin staan de overeenkomstige zijden onder elkaar.
Uit $\triangle ABC \sim \triangle APQ$

$\triangle ABC \sim \triangle APQ$
$\angle A = \angle A$
$\angle B = \angle P$
$\angle C = \angle Q$

volgt dus de verhoudingstabel $\begin{array}{c|c|c} AB & AC & BC \\ \hline AP & AQ & PQ \end{array}$.

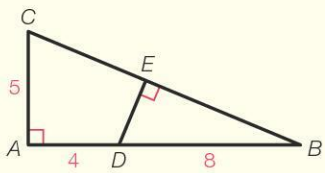
Om gelijkvormigheid van driehoeken aan te tonen, heb je twee paar gelijke hoeken nodig.

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee paar gelijke hoeken hebben.

Na het aantonen van gelijkvormigheid kun je met de daaruit volgende verhoudingstabel onbekende zijden berekenen. Soms heb je hierbij ook de stelling van Pythagoras nodig. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle A = 90°$, $AB = 12$ en $AC = 5$.
Het punt D ligt op AB en het punt E ligt op BC waarbij $AD = 4$ en $DE \perp BC$. Zie figuur 3.20.
Bereken DE en CE.



figuur 3.20

Aanpak

1 Zoek twee paar gelijke hoeken en toon hiermee gelijkvormigheid aan.
2 Schrijf de gelijkvormige driehoeken op. Let op de volgorde van de letters.
3 Schrijf de verhoudingstabel op die uit de gelijkvormigheid volgt en vul deze in. Bereken hierbij BC met de stelling van Pythagoras.
4 Bereken de gevraagde lijnstukken.

© Noordhoff Uitgevers

Uitwerking

$\left.\begin{array}{l}\angle ABC = \angle DBE \\ \angle A = \angle BED \text{ (rechte hoek)}\end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle EBD$

Schrijf erbij waarom hoeken gelijk zijn.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $BC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

AB	AC	BC
BE	DE	BD

geeft

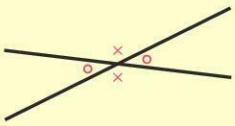
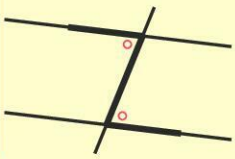
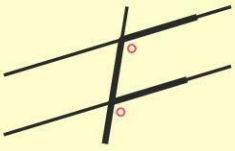
12	5	13
BE	DE	8

$\triangle ABC \sim \triangle EBD$, dus
onder ***AB*** hoort ***BE***,
onder ***AC*** hoort ***DE*** en
onder ***BC*** hoort ***BD***.

$DE = \frac{5 \cdot 8}{13} = 3\frac{1}{13}$

$BE = \frac{12 \cdot 8}{13} = 7\frac{5}{13}$, dus $CE = 13 - 7\frac{5}{13} = 5\frac{8}{13}$.

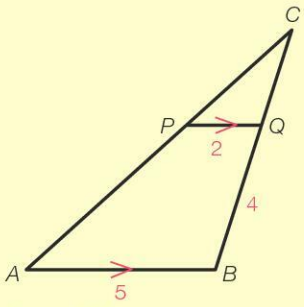
Om gelijkvormigheid aan te tonen, zoek je naar gelijke hoeken. Gebruik daarbij de volgende eigenschappen.

Overstaande hoeken	**Z-hoeken**	**F-hoeken**
Bij snijdende lijnen zijn overstaande hoeken gelijk.	Bij evenwijdige lijnen horen gelijke Z-hoeken.	Bij evenwijdige lijnen horen gelijke F-hoeken.
		

Om in de figuur hiernaast CQ te berekenen, gebruik je dat $\triangle ABC \sim \triangle PQC$. Bij het aantonen van deze gelijkvormigheid gebruik je F-hoeken.

Uit $\triangle ABC \sim \triangle PQC$ volgt $\frac{AB}{PQ} \mid \frac{BC}{CQ}$ oftewel $\frac{5}{2} \mid \frac{BC}{CQ}$.

Omdat BC en CQ beide onbekend zijn, lijkt het alsof je niet verder kunt. Maar door te bedenken dat $BC = BQ + CQ$, dus $BC = 4 + CQ$, lukt het toch om CQ te berekenen. Zie het voorbeeld.

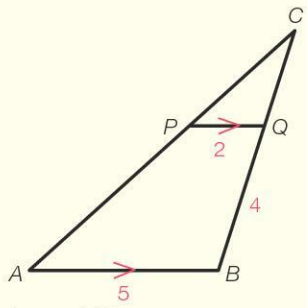


figuur 3.21

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 5$. Het punt P ligt op AC en het punt Q ligt op BC waarbij $PQ \parallel AB$. Verder is $PQ = 2$ en $BQ = 4$. Zie figuur 3.22.



figuur 3.22

Uitwerking

$\left.\begin{array}{l}\angle BAC = \angle QPC \text{ (F-hoeken)} \\ \angle ACB = \angle PCQ\end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle PQC$ dus $\begin{array}{c|c} AB & BC \\ \hline PQ & CQ \end{array}$

Stel $CQ = x$, dan is $BC = x + 4$.

Dit geeft $\begin{array}{c|c} 5 & x+4 \\ \hline 2 & x \end{array}$

$5x = 2(x + 4)$

$5x = 2x + 8$

$3x = 8$

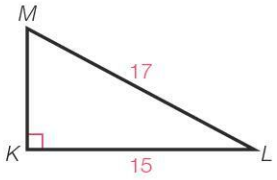
$x = 2\frac{2}{3}$

Dus $CQ = 2\frac{2}{3}$.

Om CQ te berekenen, heb je slechts een deel van de verhoudingstabel $\begin{array}{c|c|c} AB & AC & BC \\ \hline PQ & CP & CQ \end{array}$ nodig.

R11

a In het voorbeeld op de vorige bladzijde is bij het berekenen van BC met de stelling van Pythagoras de berekening kort genoteerd als $BC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$. Bereken op dezelfde korte manier KM in de figuur hiernaast.

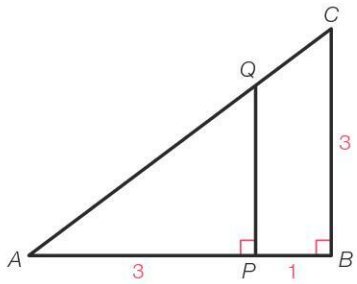


figuur 3.23

b In het voorbeeld hierboven is bij het berekenen van CQ de variabele x ingevoerd.
Je kunt CQ ook berekenen door uit te gaan van een parallellogram waarvan A, B en Q hoekpunten zijn. Bereken CQ op deze manier. Welke manier heeft je voorkeur?

12

Gegeven is driehoek ABC met $\angle B = 90°$, $AB = 4$ en $BC = 3$.
Het punt P ligt op AB waarbij $AP = 3$ en het punt Q ligt op AC waarbij $PQ \perp AB$.
Bereken PQ en CQ.

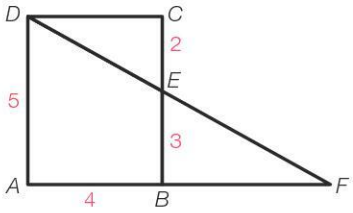


figuur 3.24

© Noordhoff Uitgevers

13

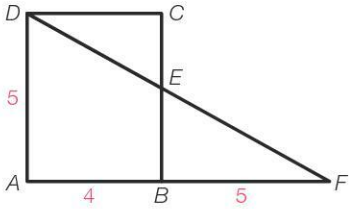
Zie figuur 3.25 met rechthoek $ABCD$.
DE snijdt het verlengde van AB in het punt F.
$AB = 4$, $AD = 5$ en $BE = 3$.
Bereken BF.



figuur 3.25

14

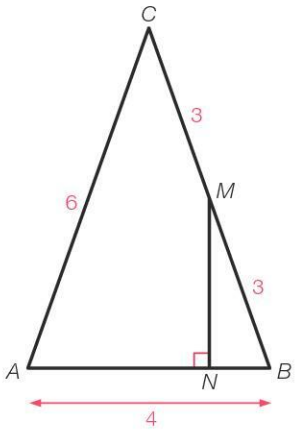
Zie figuur 3.26 met rechthoek $ABCD$.
DE snijdt het verlengde van AB in het punt F.
$AB = 4$, $AD = 5$ en $BF = 5$.
Bereken BE.



figuur 3.26

15

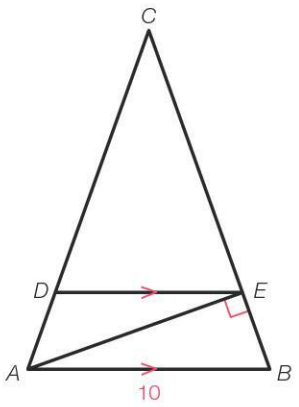
Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC in figuur 3.27. Het punt M is het midden van BC en $MN \perp AB$.
Bereken MN en AN. Rond zo nodig af op twee decimalen.



figuur 3.27

A16

Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC met $AB = 10$ en $AC = BC = 15$. De lijn AE staat loodrecht op BC en de lijn DE is evenwijdig met AB. Zie figuur 3.28.
Bereken DE.



figuur 3.28

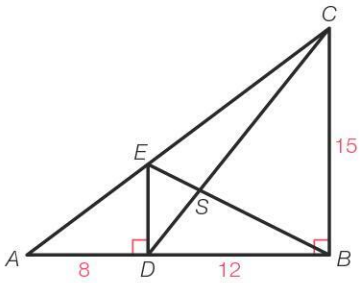
© Noordhoff Uitgevers

A17 ⊡⊙✱

Van driehoek ABC is $AB = 20$, $BC = 15$ en $\angle B = 90°$. Het punt D ligt op AB waarbij $AD = 8$. Het punt E ligt op AC waarbij $\angle ADE = 90°$. Het snijpunt van BE en CD is S. Zie figuur 3.29.

a Bereken AE.

b Bereken DS. Rond af op twee decimalen.



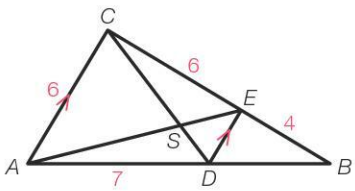
figuur 3.29

A18 ⊙✱

In driehoek ABC in figuur 3.30 is DE evenwijdig met AC en is S het snijpunt van AE en CD.
Verder is $AD = 7$, $BE = 4$, $CE = 6$ en $AC = 6$.

a Onderzoek met een berekening of $\angle C = 90°$.

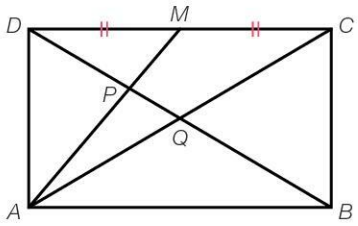
b Welke gedeelte is AS van AE?



figuur 3.30

E19 ✱

Gegeven is rechthoek $ABCD$ met M het midden van CD. De lijn AM snijdt de diagonaal BD in het punt P en de diagonaal AC snijdt de diagonaal BD in het punt Q.
Bereken welk deel PQ van BD is.



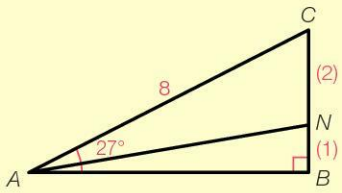
figuur 3.31

© Noordhoff Uitgevers

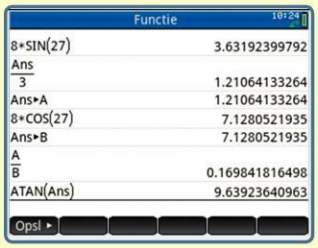
Terugblik

Goniometrische berekeningen

Met de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens zijn in rechthoekige driehoeken hoeken en zijden te berekenen.
Gebruik je bij goniometrische berekeningen tussenresultaten, rond dan niet tussentijds af, maar gebruik geheugenplaatsen en/of Ans.



In de figuur hiernaast is $BN = \frac{1}{3}\,BC$.
Bij het berekenen van $\angle BAN$ ga je als volgt te werk.



In $\triangle ABC$ is $\sin(27°) = \dfrac{BC}{8}$, dus

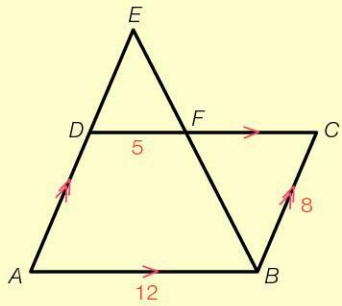
$BC = 8\sin(27°) = 3{,}63...$, dus $BN = \frac{1}{3} \cdot 3{,}63... = 1{,}21...$

In $\triangle ABC$ is $\cos(27°) = \dfrac{AB}{8}$, dus $AB = 8\cos(27°) = 7{,}12...$

In $\triangle ABN$ is $\tan(\angle BAN) = \dfrac{BN}{AB} = \dfrac{1{,}21...}{7{,}12...}$, dus $\angle BAN \approx 9{,}6°$.

Gelijkvormige driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee paar gelijke hoeken hebben.
Om in de figuur hiernaast DE te berekenen, kun je gebruiken dat $\triangle DEF \sim \triangle CBF$.



$\left.\begin{array}{l}\angle FDE = \angle FCB \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle DFE = \angle CFB \text{ (overstaande hoeken)}\end{array}\right\} \triangle DEF \sim \triangle CBF$

Uit $\triangle DEF \sim \triangle CBF$ volgt $\dfrac{DE \mid DF}{BC \mid CF}$

Omdat $DF = 5$ is $CF = 12 - 5 = 7$.

Dit geeft $\dfrac{DE \mid 5}{8 \mid 7}$ dus $DE = \dfrac{8 \cdot 5}{7} = 5\frac{5}{7}$.

Je kunt ook gebruiken dat $\triangle DFE \sim \triangle ABE$. Je stelt dan $DE = x$, dus $AE = x + 8$.

$\left.\begin{array}{l}\angle FDE = \angle BAE \text{ (F-hoeken)} \\ \angle DEF = \angle AEB\end{array}\right\} \triangle DFE \sim \triangle ABE$

Uit $\triangle DFE \sim \triangle ABE$ volgt $\dfrac{DE \mid DF}{AE \mid AB}$ en dit geeft $\dfrac{x \mid 5}{x+8 \mid 12}$

$12x = 5(x + 8)$
$12x = 5x + 40$
$7x = 40$
$x = 5\frac{5}{7}$

Dus $DE = 5\frac{5}{7}$.

© Noordhoff Uitgevers

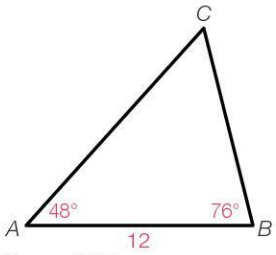
3.2 De sinusregel en de cosinusregel

O20

Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 12$, $\angle A = 48°$ en $\angle B = 76°$.
Om AC te berekenen kun je gebruik maken van de hoogtelijn AD, dat is de lijn door A loodrecht op BC.

a Bereken $\angle C$.

b Bereken AC. Rond af op twee decimalen.



figuur 3.32

Theorie A De sinusregel in scherphoekige driehoeken

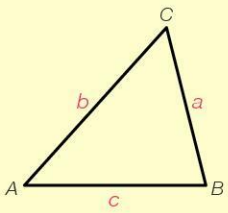
In opgave 20 heb je in driehoek ABC de lengte van de zijde AC berekend. Dit deed je door een hoogtelijn te tekenen en dan gebruik te maken van de twee rechthoekige driehoeken die ontstaan. Deze omslachtige manier was nodig omdat driehoek ABC niet gelijkbenig of rechthoekig is. De berekening wordt een stuk eenvoudiger door gebruik te maken van de **sinusregel**.
De sinusregel geldt in elke driehoek.
In opgave 22 geef je het bewijs voor scherphoekige driehoeken.

Bij bewijzen geef je een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

In de sinusregel hieronder is de zijde tegenover hoek A met de letter a aangegeven, b is de zijde tegenover hoek B en c is de zijde tegenover hoek C.

In elke driehoek ABC geldt de sinusregel

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}.$$



© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

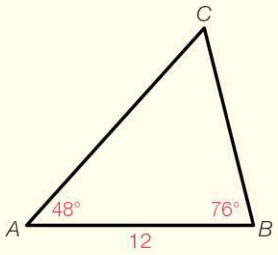
Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 12$, $\angle A = 48°$ en $\angle B = 76°$.
Bereken BC. Rond af op één decimaal.

Uitwerking

$\angle C = 180° - 48° - 76° = 56°$

De sinusregel geeft $\dfrac{BC}{\sin(48°)} = \dfrac{12}{\sin(56°)}$

$$BC = \frac{12\sin(48°)}{\sin(56°)} \approx 10{,}8$$



21 ⊡⊙✱

Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 50°$, $\angle B = 75°$ en $BC = 6{,}8$.

a Bereken $\angle C$.

b Bereken AB en AC. Rond af op één decimaal.

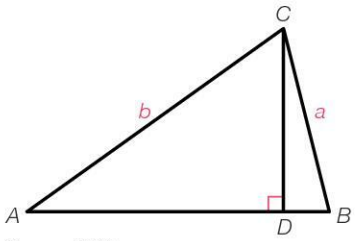
22 ⊡⊙✱

In deze opgave ga je de sinusregel bewijzen voor scherphoekige driehoeken.
Zie figuur 3.33.

a Licht toe dat $CD = b\sin(\angle A)$.

b Licht toe dat $CD = a\sin(\angle B)$.

c Licht toe dat uit a en b volgt $\dfrac{a}{\sin(\angle A)} = \dfrac{b}{\sin(\angle B)}$.



figuur 3.33

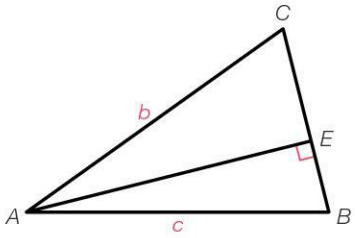
Zie figuur 3.34.

d Licht toe dat $AE = c\sin(\angle B)$.

e Licht toe dat $AE = b\sin(\angle C)$.

f Licht toe dat uit d en e volgt $\dfrac{b}{\sin(\angle B)} = \dfrac{c}{\sin(\angle C)}$.

g Hoe volgt uit c en f de sinusregel?



figuur 3.34

023 ⊡⊙✱

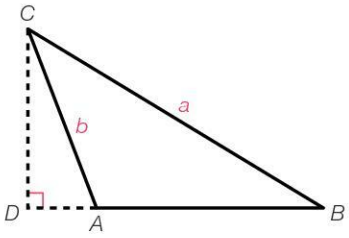
In figuur 3.35 is de stomphoekige driehoek ABC getekend.

a Licht toe dat $CD = b\sin(180° - \angle BAC)$.

b Licht toe dat $CD = a\sin(\angle B)$.

c Licht toe dat uit a en b volgt

$$\frac{a}{\sin(180° - \angle BAC)} = \frac{b}{\sin(\angle B)}.$$



figuur 3.35

© Noordhoff Uitgevers

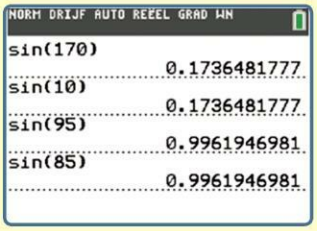
Theorie B De sinusregel in stomphoekige driehoeken

In opgave 23 heb je gezien dat $\frac{a}{\sin(180° - \angle BAC)} = \frac{b}{\sin(\angle B)}$.

Omdat is afgesproken dat $\sin(180° - \angle BAC) = \sin(\angle BAC)$, geldt de sinusregel ook in stomphoekige driehoeken.

Afspraak
$\sin(180° - \angle A) = \sin(\angle A)$

Dus bijvoorbeeld $\sin(170°) = \sin(10°)$ en $\sin(95°) = \sin(85°)$.
Op het GR-scherm hiernaast zie je dat de GR rekent volgens deze afspraak.



24
Van $\triangle KLM$ is $\angle K = 20°$, $\angle L = 110°$ en $LM = 5{,}3$.
Bereken KL en KM. Rond af op één decimaal.

25
Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 50°$, $BC = 5$ en $AC = 6$.
Er zijn twee driehoeken ABC mogelijk.

a Teken de twee mogelijke driehoeken. Gebruik een passer.

Noem de driehoek met de scherpe hoek B driehoek 1 en de driehoek met de stompe hoek B driehoek 2.

b Bereken voor driehoek 1 de hoeken B en C en de zijde AB. Rond af op één decimaal.

c Bereken voor driehoek 2 de hoeken B en C en de zijde AB. Rond af op één decimaal.

26
Van $\triangle ABC$ is $\angle B = 46°$, $BC = 10$ en $AC = 8$.

a Bereken beide mogelijkheden voor $\angle A$.

b Bereken beide mogelijkheden voor AB. Rond af op één decimaal.

c Judith wil een driehoek tekenen met $\angle B = 46°$, $BC = 10$ en $AC = 7$. Waarom is dit niet mogelijk?

A27
Bij de gegevens $\angle A = 30°$ en $AC = 6$ hangt het van de lengte van BC af of er

- geen driehoek ABC mogelijk is
- één driehoek ABC mogelijk is
- twee driehoeken ABC mogelijk zijn.

Wat weet je van de lengte van BC als

a er geen driehoek ABC mogelijk is

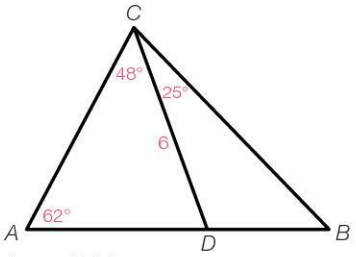
b er precies één driehoek ABC mogelijk is

c er twee driehoeken ABC mogelijk zijn?

© Noordhoff Uitgevers

A28

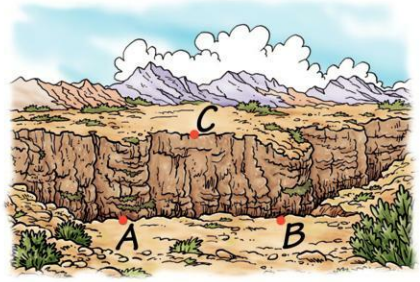
Bereken de omtrek van driehoek ABC in figuur 3.36.
Rond af op één decimaal.



figuur 3.36

29

In figuur 3.37 zie je de situatie op een plek bij de Grand Canyon. Een landmeter heeft opgemeten dat de afstand tussen de markante punten A en B gelijk is aan 420 meter. Aan de overkant van de kloof ligt het markante punt C. Hij wil de afstand van A tot C bepalen. Hij meet $\angle BAC = 88°$ en $\angle ABC = 81°$.
Bereken AC in meter nauwkeurig.

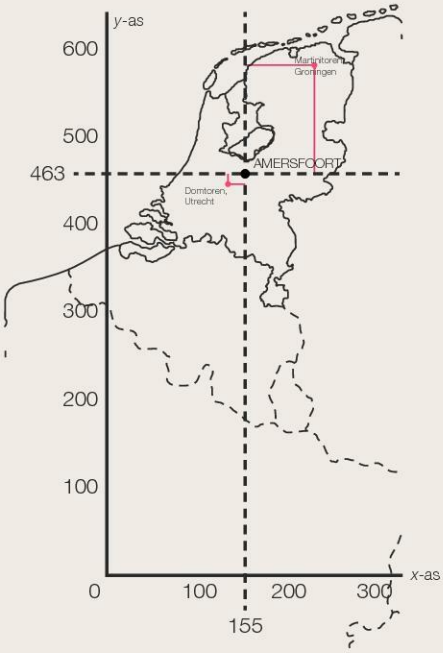


figuur 3.37

INFORMATIEF

Rijksdriehoeksmeting

Het coördinatensysteem van de Rijksdriehoeksmeting is vastgelegd met een netwerk van ongeveer 5600 RD-punten verspreid over Nederland. De locatie van een RD-punt wordt gemarkeerd door een kerktoren, een bronzen bout die is ingemetseld in de muur van een gebouw, een ingegraven betonnen zuil of een grondanker. Ook bestaan er 'actieve' RD-punten die satellietsignalen ontvangen en doorzenden, de GNSS-referentiestations. Van de RD-punten zijn de x- en y-coördinaat bekend. De x en y geven de afstand aan tot twee loodrecht op elkaar staande assen. Eén loopt van zuid naar noord (de y-as), de ander van west naar oost (de x-as). Vroeger sneden de assen elkaar in Amersfoort, maar om praktische redenen zijn ze zo verschoven dat in Nederland (op land) alle coördinaten positief zijn en de x altijd kleiner is dan de y.
bron: Kadaster

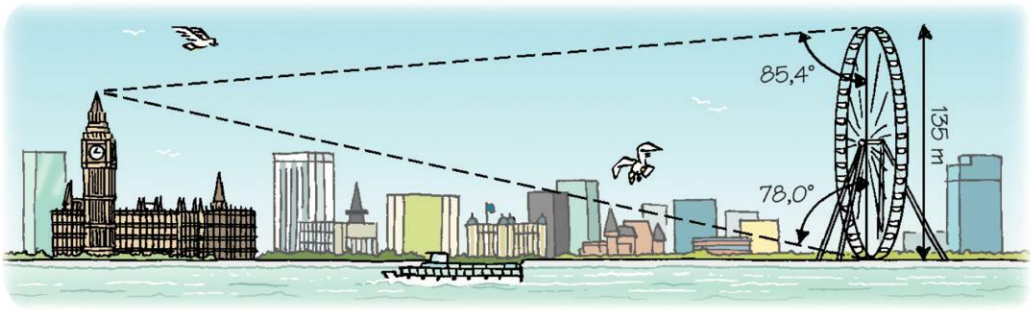


© Noordhoff Uitgevers

A30 Bram zit in het Millennium Wheel in Londen. Hij ziet aan de overkant van de rivier de Theems de Big Ben en vraagt zich af hoe hoog die is. Vanuit het Millennium Wheel heeft hij daartoe twee hoeken gemeten. Zie figuur 3.38.

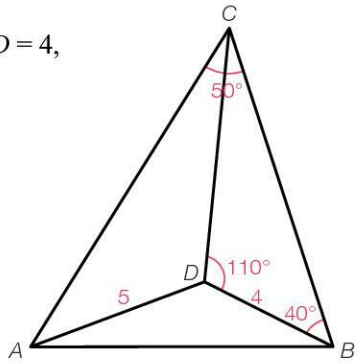
a Bereken hoeveel meter Bram van de top van de Big Ben is verwijderd als hij in het reuzenrad stapt. Rond af op gehelen.

b Bereken in meter nauwkeurig de hoogte van de Big Ben.



figuur 3.38

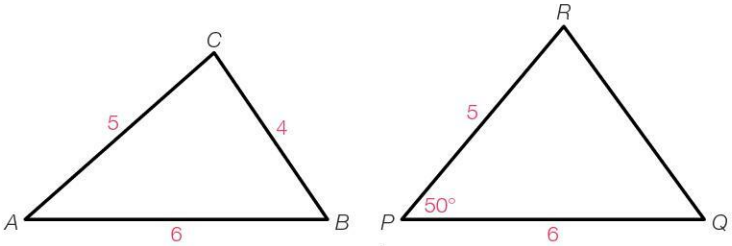
A31 Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle C = 50°$.
Binnen driehoek ABC ligt het punt D waarbij $AD = 5$, $BD = 4$, $\angle BDC = 110°$ en $\angle CBD = 40°$. Zie figuur 3.39.
Bereken AC. Rond af op twee decimalen.



figuur 3.39

O32 **a** Waarom kun je hoek A in figuur 3.40a niet met de sinusregel berekenen?

b Waarom kun je QR in figuur 3.40b niet met de sinusregel berekenen?



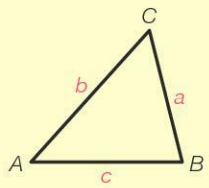
figuur 3.40

© Noordhoff Uitgevers

Theorie C De cosinusregel.

In opgave 32 kun je niets beginnen met de sinusregel. Maar gelukkig bestaat er ook nog de **cosinusregel**.

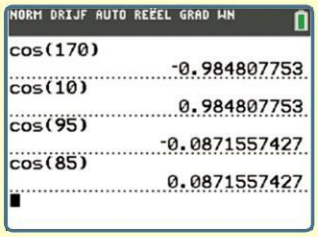
In elke driehoek ABC geldt de cosinusregel
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\angle A)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\angle B)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle C)$



Je ziet dat er drie versies van de cosinusregel zijn. In opgave 36 ga je de eerste versie van de cosinusregel bewijzen voor scherphoekige driehoeken. Het bewijs van de andere versies gaat net zo.
In opgave 37 geef je het bewijs voor stomphoekige driehoeken.
Je gebruikt daarbij de afspraak dat $\cos(180° - \angle A) = -\cos(\angle A)$.

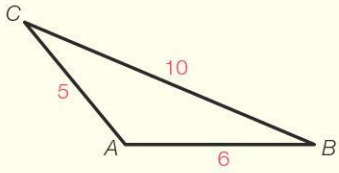
Afspraak
$\cos(180° - \angle A) = -\cos(\angle A)$

Dus bijvoorbeeld $\cos(170°) = -\cos(10°)$ en $\cos(100°) = -\cos(80°)$.
Op het GR-scherm hiernaast zie je dat de GR rekent volgens deze afspraak.
Omdat de cosinus van elke scherpe hoek positief is en van elke stompe hoek negatief, hoort bij iedere waarde van de cosinus van een hoek precies één hoek. De GR geeft dus altijd de hoek die je zoekt.
Zo krijg je bij $\cos(\angle A) = -0{,}6$ dat $\angle A \approx 126{,}9°$.
In het voorbeeld zie je hoe je de cosinusregel gebruikt om een hoek te berekenen.



Voorbeeld
Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 6$, $AC = 5$ en $BC = 10$.
Bereken $\angle A$.

Uitwerking
De cosinusregel geeft
$10^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(\angle A)$
$100 = 36 + 25 - 60\cos(\angle A)$
$60\cos(\angle A) = -39$
$\cos(\angle A) = -\frac{39}{60}$
$\angle A \approx 130{,}5°$



© Noordhoff Uitgevers

In de situatie dat van een driehoek twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven, gebruik je de cosinusregel om de derde zijde te berekenen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Van $\triangle PQR$ is $PQ = 6$, $PR = 5$ en $\angle P = 50°$.
Bereken QR. Rond af op twee decimalen.

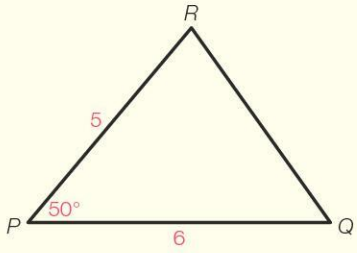
Uitwerking

De cosinusregel geeft

$QR^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(50°)$

$QR^2 = 22{,}43...$

$QR \approx 4{,}74$



33

a Van $\triangle ABC$ is $AB = 7$, $AC = 6$ en $BC = 5$.
Bereken de hoeken van de driehoek.

b Gegeven is $\triangle DEF$ met $DE = 5$, $EF = 4$ en $DF = 7$.
Bereken de hoeken van de driehoek.

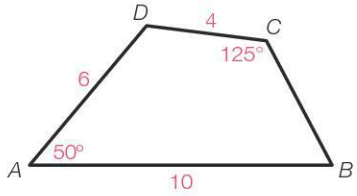
34

a Van $\triangle ABC$ is $AC = 4$, $BC = 6$ en $\angle C = 60°$.
Bereken AB. Rond af op twee decimalen.

b Van $\triangle PQR$ is $PQ = 4$, $QR = 3$ en $\angle Q = 150°$.
Bereken PR. Rond af op twee decimalen.

35

Gegeven is de vierhoek $ABCD$ in de figuur hiernaast.
$\angle A = 50°$, $\angle C = 125°$, $AB = 10$, $AD = 6$ en $CD = 4$.
In deze opgave ga je BC berekenen. Je berekent daartoe eerst BD en vervolgens $\angle CBD$.
Bereken BC. Rond af op één decimaal.



figuur 3.41

36

In deze opgave ga je de cosinusregel bewijzen voor scherphoekige driehoeken. In figuur 3.42 is $AD = x$ gesteld, dus $BD = c - x$.

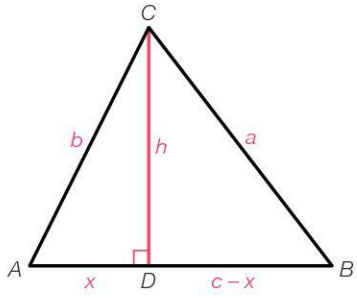
a Licht toe dat $x^2 + h^2 = b^2$.

b Licht toe dat $a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$.

c Licht toe dat uit a en b volgt $a^2 = c^2 + b^2 - 2cx$.

d Licht toe dat $x = b\cos(\angle A)$

e Licht toe dat uit c en d volgt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\angle A)$.



figuur 3.42

© Noordhoff Uitgevers

37

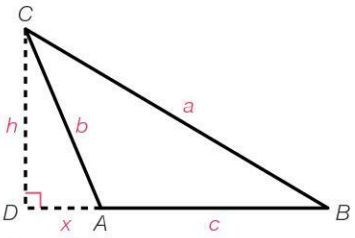
In figuur 3.43 is de stomphoekige driehoek ABC getekend.

a Licht toe dat $x^2 + h^2 = b^2$ en $a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2$.

b Licht toe dat uit a volgt dat $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$.

c Licht toe dat $x = b\cos(180° - \angle A)$.

d Licht toe: omdat is afgesproken dat $\cos(180° - \angle A) = -\cos(\angle A)$, geldt de cosinusregel ook voor stomphoekige driehoeken.



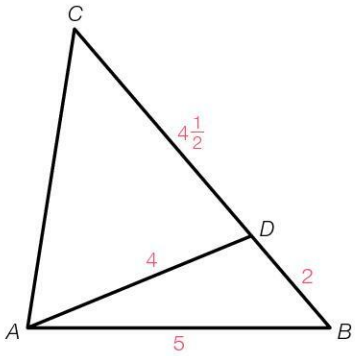
figuur 3.43

A38

Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 10$, $AC = 7$ en $BC = 8$. Bereken de hoogte CD. Rond af op twee decimalen.

A39

Van $\triangle ABC$ is $AB = 5$ en $BC = 6\frac{1}{2}$. Het punt D ligt op BC waarbij $BD = 2$. Verder is gegeven dat $AD = 4$. Zie figuur 3.44.
Bereken exact AC.



figuur 3.44

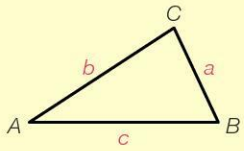
© Noordhoff Uitgevers

Terugblik

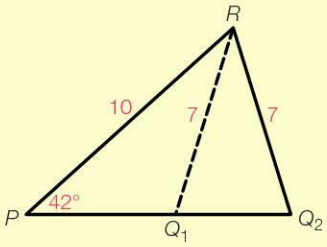
De sinusregel

In elke driehoek ABC is $\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}$.

Dit is de sinusregel.
Om de sinusregel te kunnen gebruiken, moet in elk geval een zijde met de overstaande hoek zijn gegeven.

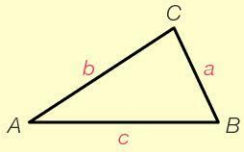


Soms zijn bij de gegevens twee driehoeken mogelijk.
Is van driehoek PQR gegeven dat $\angle P = 42°$, $PR = 10$ en $QR = 7$, dan kan $\angle Q$ scherp zijn, maar ook stomp.
Uit $\frac{7}{\sin(42°)} = \frac{10}{\sin(\angle Q)}$ volgt $\sin(\angle Q) = \frac{10\sin(42°)}{7}$.
Dit geeft $\angle Q \approx 72{,}9°$, maar ook
$\angle Q \approx 180° - 72{,}9° = 107{,}1°$.
Bij $\angle Q \approx 72{,}9°$ hoort $\angle R \approx 180° - 42° - 72{,}9° = 65{,}1°$
en bij $\angle Q \approx 107{,}1°$ hoort $\angle R \approx 180° - 42° - 107{,}1° = 30{,}9°$.

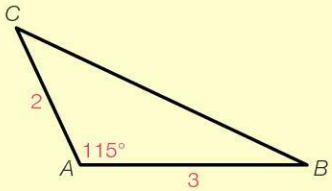


De cosinusregel

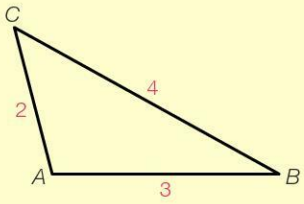
In elke driehoek ABC is
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\angle A)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\angle B)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle C)$.
Dit is de cosinusregel.



Je kunt met de cosinusregel een zijde berekenen als de twee andere zijden zijn gegeven en de overstaande hoek.
Zo is in de figuur hiernaast de zijde BC te berekenen.
Je krijgt $BC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos(115°)$
$BC^2 = 18{,}07...$
$BC \approx 4{,}25$



Ook kun je met de cosinusregel een hoek berekenen als de drie zijden zijn gegeven.
Zo is in de figuur hiernaast $\angle A$ te berekenen.
Je krijgt $4^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos(\angle A)$
$16 = 9 + 4 - 12\cos(\angle A)$
$12\cos(\angle A) = -3$
$\cos(\angle A) = \frac{-3}{12}$
$\angle A \approx 104{,}5°$



© Noordhoff Uitgevers

3.3 Vergelijkingen in de meetkunde

O40

Welke van de volgende beweringen zijn waar? Gebruik zo nodig je GR.

I $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$

II $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$

III $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}=\sqrt{7}$

IV $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=3$

V $\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{4}{5}}$

VI $\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{5}\sqrt{5}$

VII $(\sqrt{3}-1)^2=2$

VIII $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

Theorie A Rekenregels voor wortels

Voor vermenigvuldigen en delen van wortels gelden de volgende regels.

$\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}=\sqrt{AB}$ voor $A\geq 0\wedge B\geq 0$

$\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\sqrt{\dfrac{A}{B}}$ voor $A\geq 0\wedge B>0$

$\wedge$ betekent en.

Dus $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$ en $\dfrac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}}=\sqrt{11}$.

$\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ is te herleiden tot een vorm zonder wortelteken in de noemer.

Je vermenigvuldigt daartoe teller en noemer met $\sqrt{5}$.

$\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}\sqrt{5}$

Voorbeeld

Herleid.

a $3a\sqrt{2}\cdot 5a\sqrt{3}$ **b** $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$ **c** $\sqrt{12\frac{1}{2}}$

Uitwerking

a $3a\sqrt{2}\cdot 5a\sqrt{3}=15a^2\sqrt{6}$ $3a\cdot 5a=15a^2$ en $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$

b $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}=\frac{5}{6}\sqrt{3}$ $2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=2\cdot 3=6$

c $\sqrt{12\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{25}{2}}=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}=2\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\sqrt{\dfrac{A}{B}}$, dus ook $\sqrt{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

© Noordhoff Uitgevers

Bij het wegwerken van de haakjes bij $(\frac{1}{3}x\sqrt{6})^2$ gebruik je de regel $(ab)^2 = a^2b^2$.

Je krijgt $(\frac{1}{3}x\sqrt{6})^2 = (\frac{1}{3}x)^2 \cdot (\sqrt{6})^2 = \frac{1}{9}x^2 \cdot 6 = \frac{2}{3}x^2$.

Bij het wegwerken van de haakjes bij $(\sqrt{5}-2)^2$ gebruik je een merkwaardig product. Je krijgt

$(\sqrt{5}-2)^2 = (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + 2^2 =$

$5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}$.

Merkwaardige producten

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

41 Herleid.

a $3a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{7}$ **c** $(3-\sqrt{2})^2$ **e** $(\frac{1}{2}x\sqrt{2})^2$

b $\dfrac{5\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$ **d** $\sqrt{\frac{1}{2}}$ **f** $\dfrac{6}{5\sqrt{2}}$

A42 Herleid.

a $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **c** $\sqrt{4\frac{1}{2}}$ **e** $\frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

b $\dfrac{2\sqrt{14}}{3\sqrt{7}}$ **d** $(\frac{1}{2}\sqrt{5})^2$ **f** $(\frac{2}{3}a\sqrt{3})^2$

A43 Werk de haakjes weg en herleid.

a $2\sqrt{3}(4\sqrt{3}+2\sqrt{5})$ **c** $2(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **e** $(2+\sqrt{2})^2$

b $3\sqrt{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{3})$ **d** $(\sqrt{6}-3)^2$ **f** $(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})$

044 Sarah beweert dat $\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

a Ga met de rekenmachine na dat dit klopt.

b Uit $\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$ volgt $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Laat zien dat $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ door de regel $\sqrt{AB}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}$ te gebruiken.

Theorie B Rekenen met wortels

Je kunt bij $\sqrt{72}$ een **factor voor het wortelteken brengen**.

Omdat $72 = 36 \cdot 2$ is $\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Het kwadraat van 6.

Je brengt altijd een *zo groot mogelijke factor* voor het wortelteken.

Dus niet $\sqrt{72} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{8} = 3\sqrt{8}$.

© Noordhoff Uitgevers

Ook bij $\sqrt{2a^2}$ kun je een factor voor het wortelteken brengen.
Je krijgt $\sqrt{2a^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2}$. We nemen hierbij aan dat $a > 0$.

Afspraak
- Breng een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken.
- Werk breuken onder wortelteken weg.

Door een factor voor het wortelteken te brengen en door een wortel uit de noemer van een breuk weg te werken, kun je soms termen die ogenschijnlijk niet gelijksoortig zijn toch samennemen.

Voorbeeld

In deze opgave is $a > 0$. Herleid.

a $4\sqrt{20} - 2\sqrt{45}$ **b** $\frac{15}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}$ **c** $\sqrt{2a^2} + \sqrt{8a^2}$

Uitwerking

a $4\sqrt{20} - 2\sqrt{45} = 4 \cdot 2\sqrt{5} - 2 \cdot 3\sqrt{5} = 8\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ en $\sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

b $\frac{15}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} = \frac{15}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} = \frac{15\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

c $\sqrt{2a^2} + \sqrt{8a^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{4a^2} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2} + 2a\sqrt{2} = 3a\sqrt{2}$

45 Herleid.

a $5\sqrt{28} - 2\sqrt{63}$ **c** $\sqrt{8} - \sqrt{\frac{1}{2}}$

b $10\sqrt{27} - \frac{1}{2}\sqrt{48}$ **d** $\sqrt{80} - \frac{10}{\sqrt{5}}$

46 In deze opgave is $a > 0$. Herleid.

a $\sqrt{6a^2}$ **c** $\sqrt{54a^2} - \sqrt{24a^2}$

b $\sqrt{12a^2} + a\sqrt{3}$ **d** $\sqrt{80a^2} - \sqrt{20a^2}$

A47 In deze opgave is $a > 0$. Herleid.

a $\frac{15}{\sqrt{5}} + \sqrt{20}$ **d** $\frac{21}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{12}$

b $2\sqrt{24} - \frac{8}{\sqrt{6}}$ **e** $a\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$

c $\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{3})$ **f** $a\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$

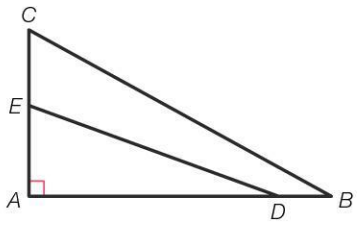
© Noordhoff Uitgevers

E48 ✱

Gegeven is driehoek ABC met $\angle A = 90°$, $AB = 15$ en $AC = 8$. Op zijde AB ligt punt D en op zijde AC ligt punt E waarbij

- de oppervlakte van driehoek ADE gelijk is aan $\frac{3}{4}$ van de oppervlakte van driehoek ABC
- de omtrek van driehoek ADE gelijk is aan de omtrek van vierhoek $BCED$.

Bereken exact de lengte van DE.



figuur 3.45

O49 ◻⊙✱

Los exact op.

a $2x = 16 - 8\sqrt{3}$ **b** $5x - 10\sqrt{2} = 50$

Theorie C Vergelijkingen met wortels

In opgave 49 komen lineaire vergelijkingen met wortels voor.
Ook de vergelijking $x\sqrt{2} - 3 = \sqrt{6}$ is een lineaire vergelijking.
Bij het oplossen van deze vergelijking laat je de term met x in het linkerlid staan en zorg je ervoor dat de overige termen in het rechterlid komen. Zie voorbeeld a.
Bij de vergelijking $x\sqrt{2} + 2x = 8$ breng je eerst x buiten haakjes. Zie voorbeeld b.

Voorbeeld

Los exact op.

a $x\sqrt{2} - 3 = \sqrt{6}$ **b** $x\sqrt{2} + 2x = 8$

Uitwerking

a $x\sqrt{2} - 3 = \sqrt{6}$ Breng -3 naar het rechterlid.

$x\sqrt{2} = 3 + \sqrt{6}$ Deel beide leden door $\sqrt{2}$.

$x = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ Herleid de breuken.

$x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}$

$x = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}$

$x = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}$

b $x\sqrt{2} + 2x = 8$ Breng x buiten haakjes.

$x(\sqrt{2} + 2) = 8$ Deel beide leden door $\sqrt{2} + 2$.

$x = \frac{8}{\sqrt{2} + 2}$

© Noordhoff Uitgevers

De oplossing $x = \dfrac{8}{\sqrt{2}+2}$ in voorbeeld b hoeft niet verder herleid te worden.

Als de oplossing benaderd moet worden, dan tik je $\dfrac{8}{\sqrt{2}+2}$ in op de GR.

Je krijgt $x \approx 2{,}34$.

50 Los exact op.

a $x\sqrt{5}+2=\sqrt{10}$

b $7-x\sqrt{3}=\sqrt{2}$

c $\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\sqrt{10}=0$

d $x\sqrt{8}+x\sqrt{2}=12$

51 Los exact op.

a $8x-2x\sqrt{3}=\sqrt{6}$

b $\frac{1}{2}x\sqrt{2}+x\sqrt{10}=10$

c $x\sqrt{5}+x\sqrt{2}=\sqrt{10}$

d $x-\sqrt{2}=x\sqrt{3}$

A52 Los exact op.

a $2x\sqrt{6}-6=4\sqrt{6}$

b $3x\sqrt{2}-2x=6$

c $3\sqrt{2}+x\sqrt{2}=4\sqrt{10}$

d $4x\sqrt{3}+6=2x$

E53 Hierboven staat dat $x = \dfrac{8}{\sqrt{2}+2}$ niet verder herleid hoeft te worden.

Dit is echter wel mogelijk, namelijk door de oplossing te schrijven zonder wortel in de noemer. Je gebruikt daarbij het merkwaardige product $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

Je krijgt

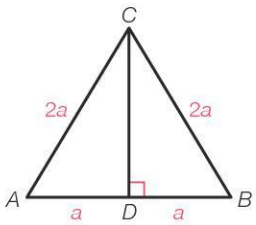
$$x=\frac{8}{\sqrt{2}+2}=\frac{8}{\sqrt{2}+2}\cdot\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-2}=\frac{8(\sqrt{2}-2)}{2-4}=\frac{8\sqrt{2}-16}{-2}=-4\sqrt{2}+8.$$

Schrijf de oplossingen van de opgaven 51d, 52b en 52d zonder wortel in de noemer.

O54 Gegeven is de gelijkzijdige driehoek ABC met zijde $2a$. Zie figuur 3.46.

a Laat met een berekening zien dat $CD = a\sqrt{3}$.

b Gegeven is $CD = 7\sqrt{3}$.
Bereken AC.



figuur 3.46

© Noordhoff Uitgevers

Theorie D Bijzondere rechthoekige driehoeken

In figuur 3.47 is de gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC met rechthoekszijden a getekend.

In $\triangle ABC$ is $AC^2 = AB^2 + BC^2$

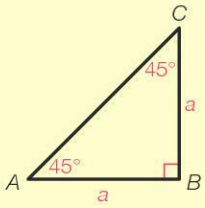
$AC^2 = a^2 + a^2$

$AC^2 = 2a^2$

$AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

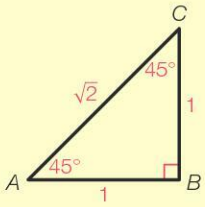
In figuur 3.47 zijn de lengten van de zijden dus a, a en $a\sqrt{2}$.

De verhouding van de zijden is dus $1 : 1 : \sqrt{2}$.



figuur 3.47

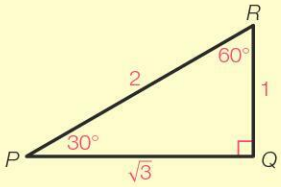
De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.



In opgave 54 heb je ontdekt dat de zijden van een halve gelijkzijdige driehoek de lengten a, $2a$ en $a\sqrt{3}$ hebben.

De verhouding van de zijden is dus $1 : 2 : \sqrt{3}$.

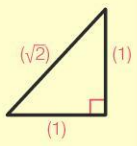
De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.

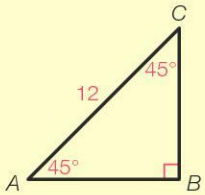


In figuur 3.48 is $AC = 12$.

Dit geeft $AB = \dfrac{12}{\sqrt{2}} = \dfrac{12}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$.

Van AB naar AC keer $\sqrt{2}$, dus van AC naar AB gedeeld door $\sqrt{2}$.



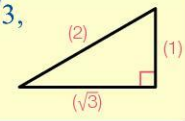


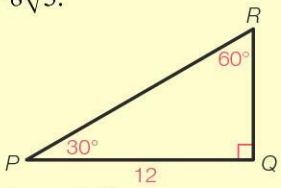
figuur 3.48

In figuur 3.49 is $PQ = 12$.

Dit geeft $QR = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = \dfrac{12}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ en $PR = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Van QR naar PQ keer $\sqrt{3}$, dus van PQ naar QR gedeeld door $\sqrt{3}$.



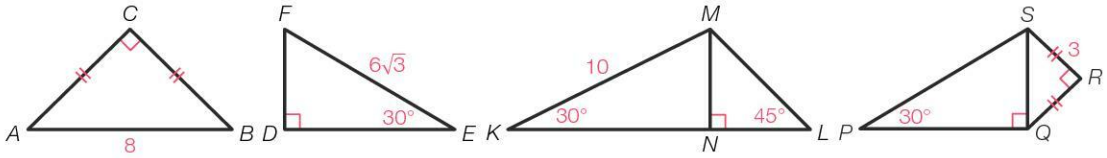


figuur 3.49

© Noordhoff Uitgevers

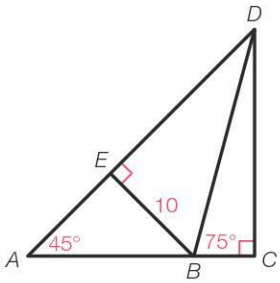
In de volgende opgaven komt soms de opdracht ‘Toon aan’ voor.
Bij aantonen geef je een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.
Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Het geven van enkele getallenvoorbeelden is niet voldoende.

55 Zie figuur 3.50.
Bereken AC, DE, KL en PQ.



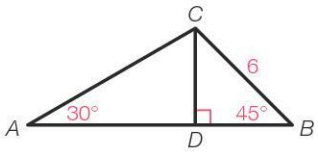
figuur 3.50

A56 Zie figuur 3.51.
a Toon aan dat $AD = 10 + 10\sqrt{3}$.
b Bereken AC en BC.



figuur 3.51

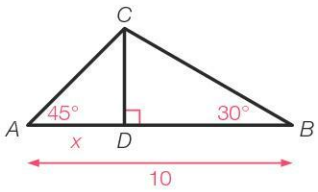
A57 Gegeven is driehoek ABC met $BC = 6$, $\angle A = 30°$ en $\angle B = 45°$. Zie figuur 3.52.
Bewijs dat de oppervlakte van driehoek ABC gelijk is aan $9\sqrt{3} + 9$.



figuur 3.52 De oppervlakte van driehoek ABC is $\frac{1}{2}AB \cdot CD$.

58 Gegeven is $\triangle ABC$ met hoogtelijn CD, $AB = 10$, $\angle A = 45°$ en $\angle B = 30°$. Zie figuur 3.53.
Je gaat de oppervlakte van $\triangle ABC$ exact berekenen. Stel $AD = x$.
a Licht toe dat $BD = x\sqrt{3}$.

Uit het bovenstaande volgt $x + x\sqrt{3} = 10$.
b Licht dit toe en los deze vergelijking exact op.
c Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$.

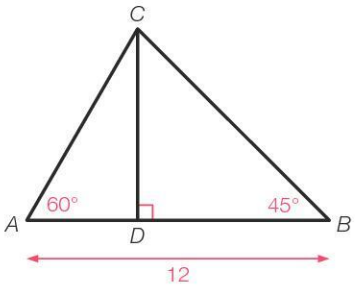


figuur 3.53

© Noordhoff Uitgevers

59

Gegeven is driehoek ABC met hoogtelijn CD. Verder is $AB = 12$, $\angle A = 60°$ en $\angle B = 45°$. Zie figuur 3.54. Stel $AD = x$ en bewijs dat de oppervlakte van driehoek ABC gelijk is aan $\dfrac{72\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.



figuur 3.54

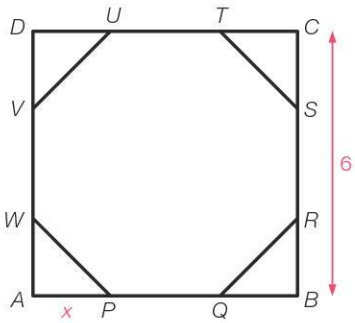
60

Van het vierkant $ABCD$ met zijde 6 worden bij de hoekpunten driehoeken weggelaten zodat een regelmatige achthoek ontstaat. Zie figuur 3.55.

a Stel $AP = x$ en druk PW uit in x.

b Toon aan dat $AB = 2x + x\sqrt{2}$.

c Bereken exact de zijde van de achthoek.

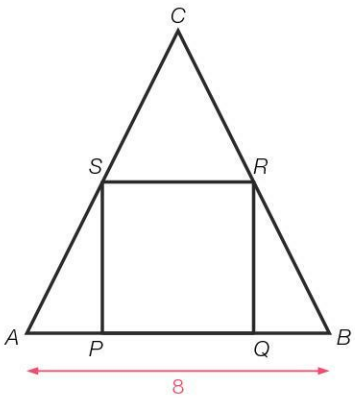


figuur 3.55

A61

Gegeven is de gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 8. In de driehoek past precies het vierkant $PQRS$. Zie de figuur hiernaast.

Bewijs dat $PQ = \dfrac{8\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.



figuur 3.56

E62

Schrijf de antwoorden van de opgaven 58c, 59, 60c en 61 zonder wortel in de noemer.

© Noordhoff Uitgevers

Terugblik

Rekenen met wortels

Bij het rekenen met wortels gebruik je de volgende regels.

$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$ voor $A \geq 0 \wedge B \geq 0$ en $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$ voor $A \geq 0 \wedge B > 0$

Zo is $2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{6}$ en $\dfrac{6\sqrt{10}}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{5}$. Verder is $(\frac{1}{4}\sqrt{10})^2 = \frac{1}{16} \cdot 10 = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

Bij het wegwerken van de haakjes bij $(3 + \sqrt{2})^2$ krijg je
$(3 + \sqrt{2})^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 9 + 6\sqrt{2} + 2 = 11 + 6\sqrt{2}$. ⟵ $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Je kunt een factor voor het wortelteken brengen als het getal onder het wortelteken het product is van een kwadraat en een geheel getal. Je gebruikt dan $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.

Zo is $\sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ en $\sqrt{80} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.
Daarmee is $3\sqrt{80} - 2\sqrt{45}$ te herleiden.
$3\sqrt{80} - 2\sqrt{45} = 3 \cdot 4\sqrt{5} - 2 \cdot 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

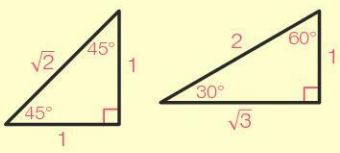
Vergelijkingen met wortels

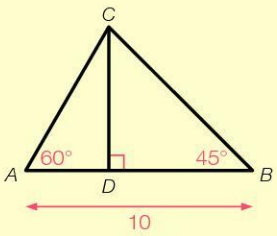
De vergelijkingen $2x\sqrt{3} - 5 = 6\sqrt{15}$ en $2x\sqrt{3} - x = 6\sqrt{15}$ zijn voorbeelden van lineaire vergelijkingen met wortels. Hieronder zie je hoe je deze vergelijkingen oplost.

$2x\sqrt{3} - 5 = 6\sqrt{15}$	$2x\sqrt{3} - x = 6\sqrt{15}$
$2x\sqrt{3} = 5 + 6\sqrt{15}$	$x(2\sqrt{3} - 1) = 6\sqrt{15}$
$x = \dfrac{5}{2\sqrt{3}} + \dfrac{6\sqrt{15}}{2\sqrt{3}}$	$x = \dfrac{6\sqrt{15}}{2\sqrt{3} - 1}$
$x = \frac{5}{6}\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$	$x \approx 9{,}43$ ⟵ Benader alleen als dat wordt gevraagd.

Bijzondere rechthoekige driehoeken

De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.
De zijden van een rechthoekige driehoek met scherpe hoeken van 30° en 60° verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.
Je gebruikt deze verhoudingen om de oppervlakte van $\triangle ABC$ hiernaast exact te berekenen.





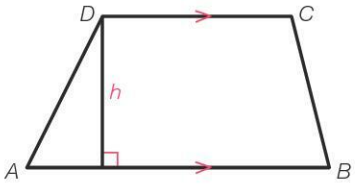
Stel $AD = x$. Dit geeft $CD = x\sqrt{3}$ en $BD = x\sqrt{3}$.
Omdat $AD + BD = 10$ krijg je $x + x\sqrt{3} = 10$.
Dit geeft $x(1 + \sqrt{3}) = 10$ oftewel $x = \dfrac{10}{1 + \sqrt{3}}$,
dus $CD = \dfrac{10}{1 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{10\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ en
$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \dfrac{10\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \dfrac{50\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$.

© Noordhoff Uitgevers

3.4 Lengte, omtrek en oppervlakte

063

In de figuur hiernaast zie je het trapezium $ABCD$ met hoogte h.
Bewijs dat $O(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h$.

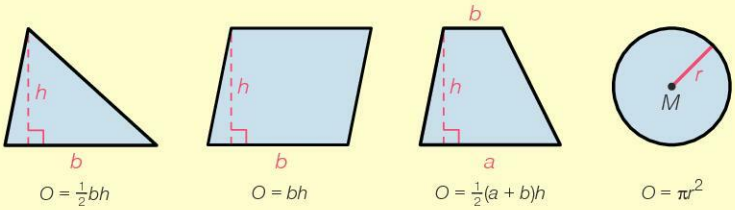


figuur 3.57

Theorie A Omtrek en oppervlakte

In opgave 63 heb je bewezen $O_{\text{trapezium}} = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$. Hierin zijn a en b de lengten van de evenwijdige zijden en is h de hoogte.
We herhalen de oppervlakteformules van de basisfiguren driehoek, parallellogram, trapezium en cirkel.

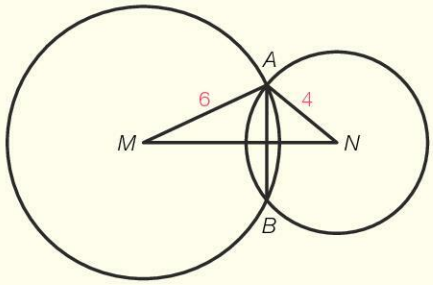
omtrek cirkel is $2\pi r$



figuur 3.58 Oppervlakteformules van de vier basisfiguren.

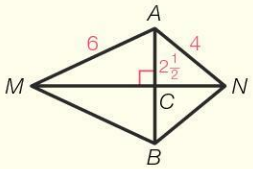
Voorbeeld

De cirkel met middelpunt M en straal 6 snijdt de cirkel met middelpunt N en straal 4 in de punten A en B. Zie de figuur hiernaast.
De lengte van het lijnstuk AB is 5.
Bereken van de cirkel met middelpunt M de lengte van de kortste cirkelboog tussen A en B.
Rond af op drie decimalen. Gebruik dat MN het lijnstuk AB in het midden loodrecht snijdt.



figuur 3.59 $AB = 5$

Uitwerking
Punt C is het midden van AB.



$$\sin(\angle AMC) = \frac{2\frac{1}{2}}{6}$$

$$\angle AMC = 24{,}62...^\circ$$

$$\angle AMB = 2 \cdot 24{,}62...^\circ = 49{,}24...^\circ$$

$$\text{boog } AB = \frac{49{,}24...}{360} \cdot 2\pi \cdot 6 \approx 5{,}157$$

© Noordhoff Uitgevers

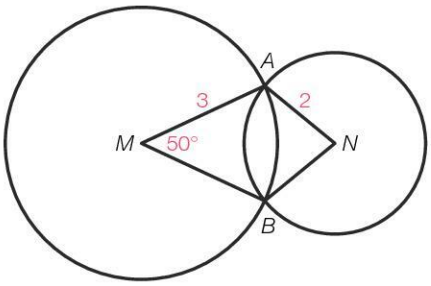
64

a Zie het voorbeeld.
Bereken van de cirkel met middelpunt N de lengte van de kortste cirkelboog tussen A en B. Rond af op drie decimalen.

b Bereken de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de kortste cirkelbogen AB. Rond af op twee decimalen.

65

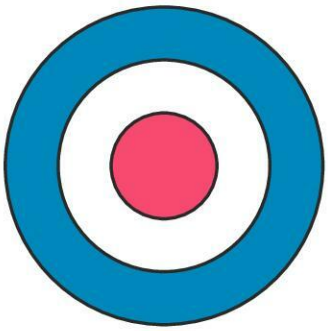
Gegeven zijn de cirkel met middelpunt M en straal 3 en de cirkel met middelpunt N en straal 2. De cirkels snijden elkaar in de punten A en B waarbij $\angle AMB = 50°$.
We bekijken de kortste cirkelbogen tussen A en B. De cirkelboog van de cirkel met middelpunt N is langer dan de cirkelboog van de cirkel met middelpunt M.
Bereken het verschil in lengte. Rond af op vier decimalen.



figuur 3.60

66

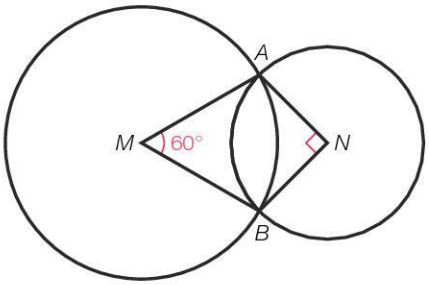
Zie de figuur hiernaast met drie concentrische cirkels. Van de witte ring en van de blauwe ring is de breedte gelijk aan de straal van de rode cirkel.
Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de blauwe ring als de oppervlakte van de rode cirkel?



figuur 3.61 Concentrische cirkels zijn cirkels met hetzelfde middelpunt.

A67

Zie figuur 3.62.
De cirkels met middelpunten M en N snijden elkaar in de punten A en B waarbij $\angle AMB = 60°$ en $\angle ANB = 90°$.
Bereken de verhouding van de oppervlakten van de cirkels.



figuur 3.62

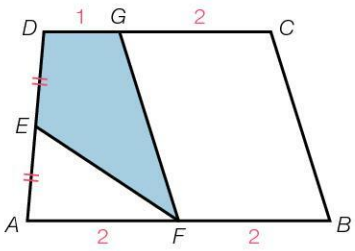
68

Van $\triangle ABC$ is $AB = 5$, $\angle A = 25°$ en $\angle B = 125°$.
Bereken de oppervlakte van de driehoek. Rond af op twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers

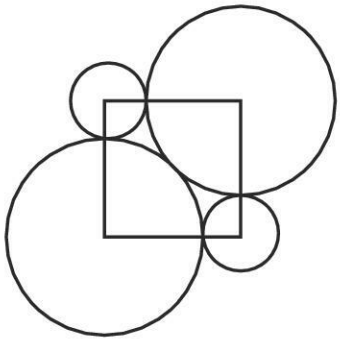
A69 Van parallellogram $ABCD$ is $AB = 10$. De lengte van diagonaal AC is 14 en de lengte van diagonaal BD is 9.
Bereken de oppervlakte van $ABCD$. Rond af op één decimaal.

A70 Gegeven is het trapezium $ABCD$ in de figuur hiernaast.
$AB = 4$, $CD = 3$ en de oppervlakte van $ABCD$ is 14.
Het punt E is het midden van AD, het punt F is het midden van AB en het punt G ligt op CD waarbij $DG = 1$.
Bereken de oppervlakte van vierhoek $DEFG$.



figuur 3.63

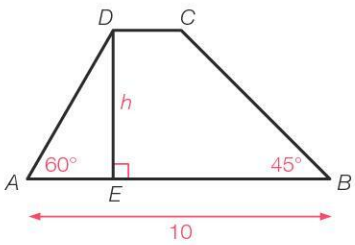
A71 De hoekpunten van het vierkant in de figuur hiernaast zijn de middelpunten van de cirkels. De grote cirkels raken elkaar en de beide kleine cirkels. De straal van de kleine cirkels is gelijk aan 1.
Bereken exact de straal van de grote cirkels.


figuur 3.64

A72 Gegeven is het trapezium $ABCD$ met $AB = 10$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$ en hoogte h.

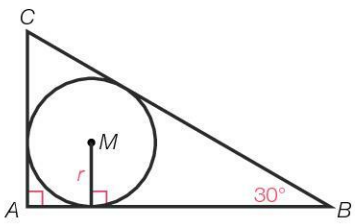
a Druk CD uit in h.

b De oppervlakte van het trapezium is 25.
Bereken CD. Rond af op twee decimalen.



figuur 3.65

A73 Gegeven is driehoek ABC met $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$ en $AB = 10$. In de figuur hiernaast is de ingeschreven cirkel van de driehoek getekend.
Bereken exact de straal r van deze ingeschreven cirkel.



figuur 3.66

© Noordhoff Uitgevers

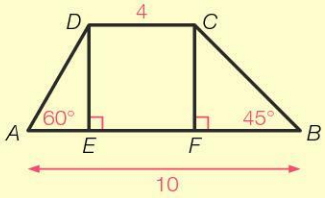
Terugblik

Oppervlakteformules

Bij oppervlakteberekeningen gebruik je de oppervlakteformules van de basisfiguren driehoek, parallellogram, trapezium en cirkel.
Soms kun je bij het berekenen van een oppervlakte de figuur opsplitsen in basisfiguren of aanvullen tot een basisfiguur.

$O_{\text{driehoek}} = \frac{1}{2}bh$
$O_{\text{parallellogram}} = bh$
$O_{\text{trapezium}} = \frac{1}{2}(a+b)h$
$O_{\text{cirkel}} = \pi r^2$

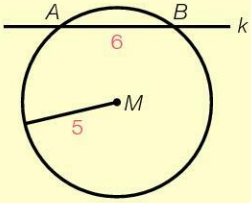
In de figuur hiernaast zie je het trapezium $ABCD$ met $AB = 10$, $\angle A = 60°$ en $\angle B = 45°$. Om de oppervlakte van het trapezium te berekenen, kun je $AE = x$ stellen.
Dan is $DE = x\sqrt{3}$ en ook $BF = CF = x\sqrt{3}$.
Omdat $AE + EF + BF = AB$ geldt $x + 4 + x\sqrt{3} = 10$ en dit geeft $x(1 + \sqrt{3}) = 6$, dus $x = \dfrac{6}{1+\sqrt{3}}$.



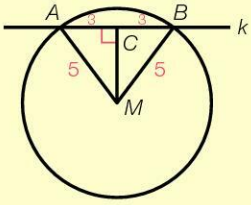
Nu is $DE = \dfrac{6\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ en $O(ABCD) = \frac{1}{2}(10+4) \cdot \dfrac{6\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{42\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

De omtrek van een cirkel

De omtrek van een cirkel met straal r is $2\pi r$.
In de figuur hiernaast snijdt de lijn k de cirkel met middelpunt M en straal 5 in de punten A en B waarbij $AB = 6$.
Om de lengte van de kortste cirkelboog AB te berekenen, teken je MC loodrecht op k. Zie de figuur hiernaast.

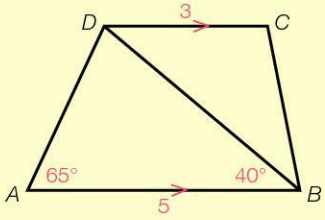


$\sin(\angle AMC) = \frac{3}{5}$ geeft $\angle AMC = 36{,}86...°$,
dus $\angle AMB = 2 \cdot 36{,}86...° = 73{,}73...°$
De lengte van de kortste cirkelboog AB is
$\dfrac{73{,}73...}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 \approx 6{,}435$.



Oppervlakte en de sinusregel

In het trapezium $ABCD$ in de figuur hiernaast is $AB = 5$, $CD = 3$, $\angle A = 65°$ en $\angle ABD = 40°$.
Om de oppervlakte van het trapezium te berekenen, gebruik je de sinusregel in $\triangle ABD$.
$\angle ADB = 180° - 65° - 40° = 75°$
$\dfrac{AB}{\sin(\angle ADB)} = \dfrac{AD}{\sin(\angle ABD)}$ geeft $\dfrac{5}{\sin(75°)} = \dfrac{AD}{\sin(40°)}$,

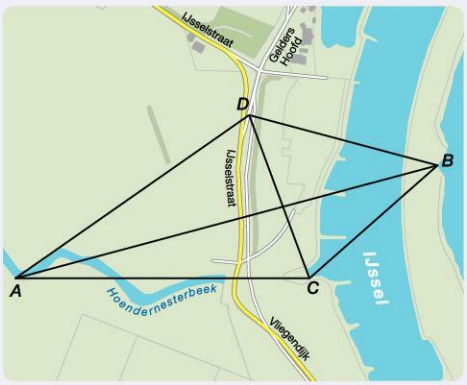


dus $AD = \dfrac{5\sin(40°)}{\sin(75°)} = 3{,}327...$ Stel de hoogte van het trapezium is h.

Er geldt $\sin(65°) = \dfrac{h}{3{,}327...}$, dus $h = 3{,}327... \cdot \sin(65°) = 3{,}015...$ en
$O(ABCD) = \frac{1}{2}(5+3) \cdot 3{,}015... \approx 12{,}06$.

© Noordhoff Uitgevers

Eindopdracht De landmeter en de sinusregel



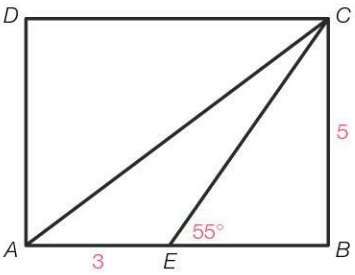
In de figuur zie je nog eens het landschap van de beginopdracht van dit hoofdstuk. Bij de beginopdracht heb je AB berekend door twee keer een hoogtelijn te gebruiken: de hoogtelijn DE in driehoek ACD en een hoogtelijn in driehoek ABD. Door daarna in rechthoekige driehoeken met goniometrische verhoudingen enkele zijden te berekenen, lukte het (hopelijk) om uiteindelijk AB te berekenen.
Maar deze hoogtelijnen en deze omweg heb je niet nodig als je de sinusregel gebruikt.
Hier komen nog eens de gegevens die je nodig hebt.
$CD = 250$ meter, $\angle CAB = 15°$, $\angle DAB = 20°$, $\angle ACD = 70°$ en $\angle ADB = 130°$.
Onderzoek hoe je met de sinusregel AB kunt berekenen.

© Noordhoff Uitgevers

Diagnostische toets

3.1 Berekeningen in driehoeken

1 Gegeven is rechthoek $ABCD$ in figuur 3.67.
$BC = 5$ en punt E ligt op AB waarbij $AE = 3$ en $\angle BEC = 55°$.
Bereken $\angle BAC$ en $\angle ACE$.

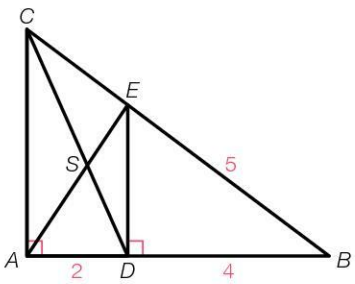


figuur 3.67

2 Van driehoek ABC is $\angle A = 90°$ en $AB = 6$.
Het punt D ligt op AB waarbij $AD = 2$. Het punt E ligt op BC waarbij $BE = 5$ en $\angle BDE = 90°$.
Het snijpunt van AE en CD is S. Zie figuur 3.68.

a Bereken AC en CE.

b Bereken AS. Rond af op twee decimalen.



figuur 3.68

3.2 De sinusregel en de cosinusregel

3 Van driehoek ABC is $\angle A = 40°$, $\angle B = 55°$ en $BC = 6$.
Bereken de omtrek van driehoek ABC. Rond af op twee decimalen.

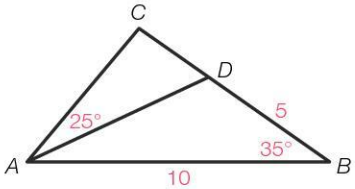
4 Rond in deze opgave af op twee decimalen.
Bij de gegevens $\angle A = 50°$ en $AB = 10$ hangt het van de lengte van BC af of er geen, één of twee driehoeken ABC mogelijk zijn.
Wat weet je van de lengte van BC als

a er precies één driehoek ABC mogelijk is

b er twee driehoeken ABC mogelijk zijn?

5 Van driehoek PQR is $PQ = 4$, $PR = 5$ en $QR = 6$. Het punt M is het midden van QR.
Bereken PM. Rond af op twee decimalen.

6 Van driehoek ABC is $AB = 10$ en $\angle B = 35°$.
Het punt D ligt op zijde BC waarbij $BD = 5$ en $\angle CAD = 25°$. Zie figuur 3.69.
Bereken $\angle C$.



figuur 3.69

© Noordhoff Uitgevers

3.3 Vergelijkingen in de meetkunde

7 Herleid.

a $\sqrt{4\frac{1}{4}}$ **c** $\dfrac{6\sqrt{18}}{4\sqrt{3}}$ **e** $3\sqrt{2}(\sqrt{2}-2\sqrt{5})$

b $8a\sqrt{5}\cdot 3a\sqrt{2}$ **d** $(\frac{1}{2}a\sqrt{6})^2$ **f** $(5-\sqrt{3})^2$

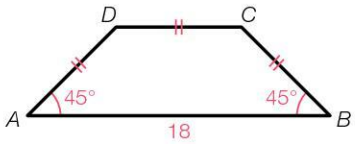
8 In deze opgave is $x > 0$. Herleid.

a $3\sqrt{24}-\sqrt{150}$ **b** $\sqrt{32x^2}-\sqrt{8x^2}$ **c** $x\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}x^2}$

9 Los exact op.

a $x\sqrt{3}+3=5\sqrt{6}$ **b** $x\sqrt{2}+2x\sqrt{5}=5\sqrt{10}$ **c** $3x-2\sqrt{2}=2x\sqrt{5}$

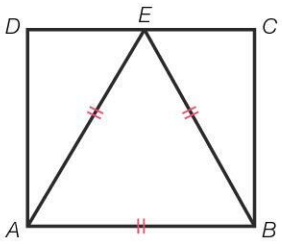
10 In het gelijkbenig trapezium $ABCD$ is $\angle A=\angle B=45°$, $AB=18$ en $AD=BC=CD$. Zie figuur 3.70.
Bereken exact de lengte van AD.



figuur 3.70

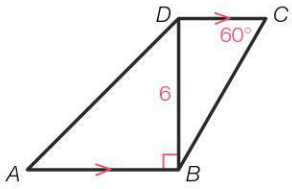
3.4 Lengte, omtrek en oppervlakte

11 In rechthoek $ABCD$ met omtrek 10 past precies de gelijkzijdige driehoek ABE. Zie figuur 3.71.
Bewijs dat de omtrek van driehoek ABE gelijk is aan $\dfrac{30}{2+\sqrt{3}}$.



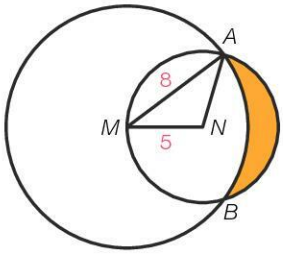
figuur 3.71

12 De oppervlakte van het trapezium $ABCD$ in de figuur hiernaast is 30.
Bereken exact de lengte van AB.



figuur 3.72

13 De cirkel met middelpunt M en straal 8 snijdt de cirkel met middelpunt N en straal 5 in de punten A en B.
Hierbij ligt het punt M op de cirkel met middelpunt N.
Zie figuur 3.73.
Bereken de omtrek van het gebied dat wordt ingesloten door de kortste cirkelbogen AB. Rond af op twee decimalen.



figuur 3.73

© Noordhoff Uitgevers

4 Werken met formules

Wat leer je?

- Werken met kwadratische formules.
- Oplossen van enkele typen hogeregraadsvergelijkingen.
- Hoe je vergelijkingen en ongelijkheden oplost met grafieken op de GR.
- Algebraïsch oplossen van gebroken vergelijkingen.
- Werken met wiskundige modellen.

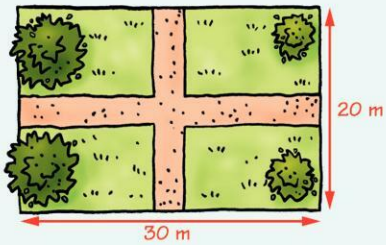
© Noordhoff Uitgevers

© Noordhoff Uitgevers

Beginopdracht Tuinen en paden

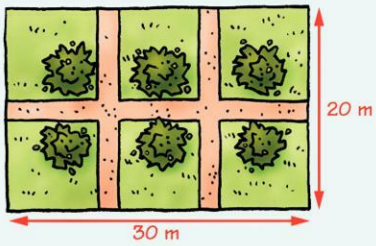
In deze opdracht onderzoek je hoe op verschillende manieren paden kunnen worden aangebracht in een rechthoekige tuin van 30 bij 20 meter. Daarbij geldt dat de paden overal even breed zijn en 16% van de oppervlakte van de tuin in beslag nemen.
We stellen de breedte van de paden x meter. Je zult zien dat je dan vergelijkingen op kunt stellen waarmee je de breedte van de paden kunt berekenen.
In de figuur hiernaast zie je een mogelijkheid om de paden aan te leggen. Bij deze situatie hoort de vergelijking $50x - x^2 = 96$.

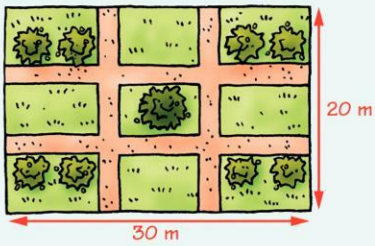
- Toon dit aan en los de vergelijking op. Hoe breed zijn de paden in dit geval?



In de twee figuren hieronder zie je nog twee mogelijkheden om paden in deze tuin aan te leggen.

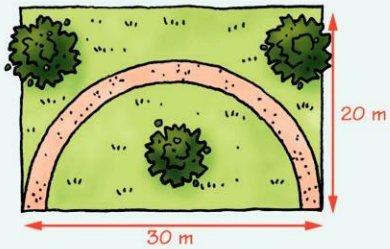
- Stel bij elk van deze situaties een vergelijking op en bereken de breedte van de paden. Rond zo nodig af op gehele cm.

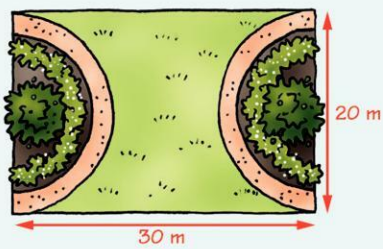




In de twee figuren hieronder zie je paden waarbij de randen halve cirkels zijn. Ook bij deze situaties kun je vergelijkingen opstellen.

- Stel bij elk van deze situaties een vergelijking op en bereken de breedte van de paden. Rond af op gehele cm.





© Noordhoff Uitgevers

Voorkennis Grafieken verschuiven

Theorie A Verticaal en horizontaal verschuiven

Door de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$

- 4 omhoog te schuiven krijg je de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$
- 3 omlaag te schuiven krijg je de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$
- 2 naar rechts te schuiven krijg je de grafiek van $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$
- 5 naar links te schuiven krijg je de grafiek van $y = \frac{1}{2}(x + 5)^2$.

De grafiek die je na verschuiven krijgt heet de beeldgrafiek.

Voorbeeld

a De grafiek van $y = \frac{1}{3}x^2 - 6$ wordt 4 naar links geschoven.
Stel de formule op van de beeldgrafiek.

b De grafiek van $y = -1\frac{1}{2}x^2 + 4$ wordt eerst 2 naar rechts geschoven en vervolgens 6 omlaag.
Stel de formule op van de beeldgrafiek.

Uitwerking

a $y = \frac{1}{3}x^2 - 6$
↓ 4 naar links — Vervang x door $x + 4$.
$y = \frac{1}{3}(x + 4)^2 - 6$

b $y = -1\frac{1}{2}x^2 + 4$
↓ 2 naar rechts — Vervang x door $x - 2$.
$y = -1\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 4$
↓ 6 omlaag — Trek er 6 vanaf.
$y = -1\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2$

1 **a** De grafiek van $y = \frac{1}{4}x^2 + 3$ wordt 5 naar links geschoven.
Stel de formule op van de beeldgrafiek.

b De grafiek van $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4$ wordt eerst 3 naar rechts geschoven en vervolgens 5 omhoog.
Stel de formule op van de beeldgrafiek.

2 De grafiek van $y = -1\frac{1}{4}x^2 + 5$ wordt telkens verschoven.
Stel de formule op van de beeldgrafiek.

a 4 omhoog
b 3 naar rechts
c 2 naar links en 3 omlaag
d 1 naar rechts en 5 omlaag

© Noordhoff Uitgevers

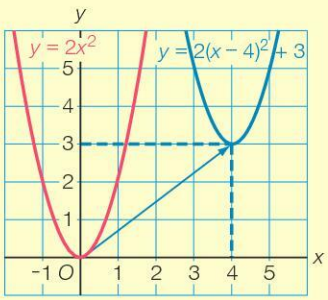
3 **a** Hoe moet je de grafiek van $y = 2x^2$ verschuiven om de grafiek van $y = 2(x - 3)^2 + 4$ te krijgen?

b Hoe moet je de grafiek van $y = -x^2 + 1$ verschuiven om de grafiek van $y = -(x + 2)^2$ te krijgen?

c Hoe moet je de grafiek van $y = 1\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 5$ verschuiven om de grafiek van $y = 1\frac{1}{2}(x + 1)^2 - 3$ te krijgen?

Theorie B De top van de parabool $y = a(x - p)^2 + q$

De top van de parabool $y = 2x^2$ is $O(0, 0)$.
Ook van de parabool $y = 2(x - 4)^2 + 3$ kun je direct de coördinaten van de top opschrijven. Immers
$y = 2x^2$
$\downarrow$ 4 naar rechts en 3 omhoog
$y = 2(x - 4)^2 + 3$.
Zie de grafiek hiernaast. De top is het punt (4, 3).



figuur 4.1

De top van de parabool $y = -1\frac{1}{2}x^2$ is (0, 0), dus de top van de parabool $y = -1\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 5$ is het punt (-3, 5).

De top van de parabool $y = a(x - p)^2 + q$ is het punt (p, q).

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 4(x + 5)^2 - 3$.

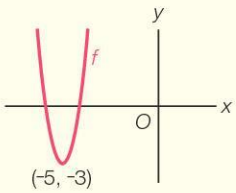
a Schrijf de coördinaten op van de top van de grafiek van f.

b Schets de grafiek van f.

Uitwerking

a De top is (-5, -3).

b $a = 4$, dus $a > 0$ en dit geeft een dalparabool.



4 Schrijf van elk van de volgende functies de coördinaten op van de top van de grafiek en schets de grafiek.

a $f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$

b $g(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 4$

c $h(x) = 5(x + 3)^2 + 2$

d $k(x) = 2x^2 - 5$

e $p(x) = 2(x - 5)^2$

f $q(x) = 4 - 3(x + 2)^2$

Bij een schets teken je de grafiek op de juiste plaats ten opzichte van de assen. Je zet ook de coördinaten van de top in je schets.

© Noordhoff Uitgevers

4.1 Kwadratische formules

01 Gegeven is de parabool $y = \frac{1}{2}(x-2)(x-4)$.
Uit deze formule kun je de snijpunten van de parabool met de x-as aflezen.

a Licht dit toe en geef de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x-as.

b Bereken de coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y-as.

c Schrijf de formule in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

Theorie A De parabool $y = a(x-d)(x-e)$.

De formule van de parabool $y = -2(x+3)(x-5)$ is geschreven in de vorm $y = a(x-d)(x-e)$. Bij deze vorm zijn de coördinaten van de snijpunten met de x-as direct af te lezen.
Bij $y = -2(x+3)(x-5)$ zijn de snijpunten met de x-as $(-3, 0)$ en $(5, 0)$.

Je weet nu ook dat $x_{top} = \frac{-3+5}{2} = 1$.

$-2(x+3)(x-5) = 0$
$x+3 = 0 \vee x-5 = 0$
$x = -3 \vee x = 5$

De parabool $y = a(x-d)(x-e)$ snijdt de x-as in de punten $(d, 0)$ en $(e, 0)$. Verder is $x_{top} = \frac{d+e}{2}$.

Voorbeeld

Een parabool snijdt de x-as in de punten $(-2, 0)$ en $(4, 0)$ en gaat door het punt $(6, 12)$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de top en van het snijpunt met de y-as.

Uitwerking
Snijpunten met de x-as $(-2, 0)$ en $(4, 0)$, dus $y = a(x+2)(x-4)$.
Door $(6, 12)$, dus $a(6+2)(6-4) = 12$ $x = 6$ en $y = 12$ invullen in de formule.
$a \cdot 8 \cdot 2 = 12$
$16a = 12$
$a = \frac{3}{4}$
Dus $y = \frac{3}{4}(x+2)(x-4)$.
$x_{top} = \frac{-2+4}{2} = 1$ en $y_{top} = \frac{3}{4}(1+2)(1-4) = \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot -3 = -6\frac{3}{4}$
Dus top $(1, -6\frac{3}{4})$.
$x = 0$ geeft $y = \frac{3}{4}(0+2)(0-4) = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot -4 = -6$
Dus het snijpunt met de y-as is $(0, -6)$.

© Noordhoff Uitgevers

2 Bereken algebraïsch van de grafieken van de volgende functies de coördinaten van de snijpunten met de x-as en de y-as en de coördinaten van de top.

a $f(x) = 2(x + 4)(x - 6)$ **c** $h(x) = -\frac{1}{4}x(x - 8)$

b $g(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)(x - 5)$ **d** $k(x) = \frac{1}{50}(x + 2)(x + 10)$

3 Een parabool snijdt de x-as in de punten $(-4, 0)$ en $(8, 0)$ en gaat door het punt $(6, -5)$.

a Bereken algebraïsch de coördinaten van de top en van het snijpunt met de y-as.

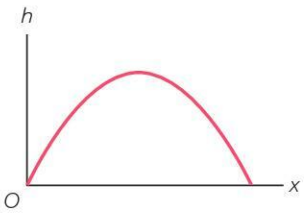
b Schrijf de formule van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

4 Tim trapt een bal weg. Bij de baan hoort de formule $h = -0{,}02x(x - 50)$ met x en h in meter.

a Hoe ver van Tim komt de bal op de grond?

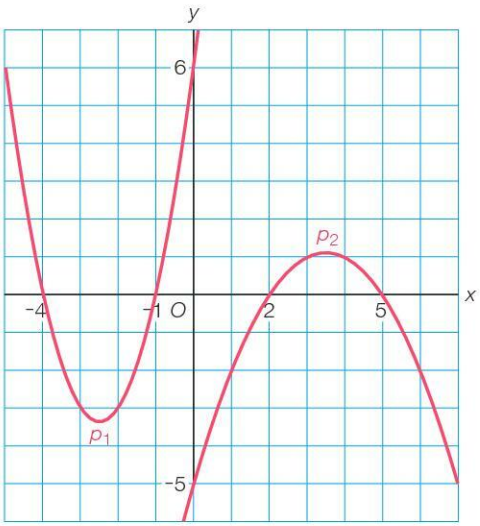
b Hoe hoog komt de bal?

c Schrijf de formule van h in de vorm $h = ax^2 + bx + c$.



figuur 4.2

A5 Stel van de parabolen in figuur 4.3 de formule op in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.



figuur 4.3 De parabolen p_1 en p_2.

E6 Een parabool snijdt de x-as in de punten $(-p, 0)$ en $(2p, 0)$ en gaat door het punt $(4p, p^2)$.
Druk de coördinaten van de top uit in p.

07 **a** Beredeneer dat de top van de parabool $y = (x - 4)^2 + 5$ het punt $(4, 5)$ is.

b Geef de coördinaten van de top van de parabool $y = (x + 3)^2 - 4$.

c Wat zijn de coördinaten van de top van de parabool $y = 2(x - 3)^2 + 6$?

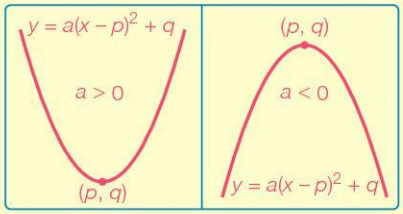
© Noordhoff Uitgevers

Theorie B De formule $y = a(x - p)^2 + q$

Je weet:

De top van de parabool $y = a(x - p)^2 + q$ is het punt (p, q).

Dit gebruik je om de formule op te stellen van een parabool waarvan de coördinaten van de top bekend zijn.



figuur 4.4

Zo stel je van de parabool met top (4, 5) die door het punt (1, 23) gaat als volgt een formule op.
De top is (4, 5), dus $y = a(x - 4)^2 + 5$.
Door (1, 23), dus $a(1 - 4)^2 + 5 = 23$

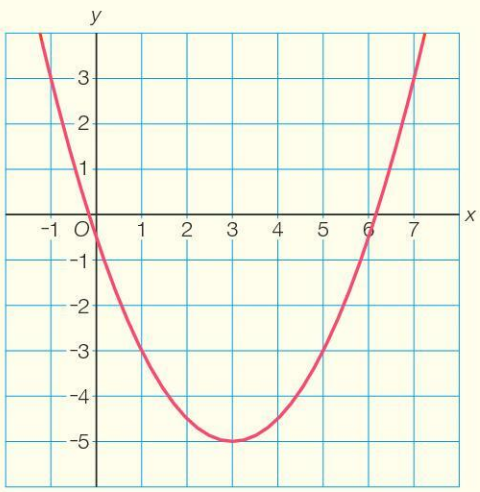
$$a(-3)^2 + 5 = 23$$
$$9a + 5 = 23$$
$$9a = 18$$
$$a = 2$$

Dus de formule is $y = 2(x - 4)^2 + 5$.

De formule $y = 2(x - 4)^2 + 5$ is te schrijven in de vorm $y = ax^2 + bx + c$ door de haakjes weg te werken.
Je krijgt $y = 2(x - 4)^2 + 5 = 2(x^2 - 8x + 16) + 5 = 2x^2 - 16x + 32 + 5 = 2x^2 - 16x + 37$.
Dus $y = 2x^2 - 16x + 37$.

Voorbeeld

Stel de formule op van de parabool hiernaast.



figuur 4.5

Aanpak
Lees de coördinaten van de top af.
Hiermee krijg je p en q bij de formule $y = a(x - p)^2 + q$.
Lees daarna de coördinaten van nog een punt af en bereken a.

Uitwerking
De top is (3, -5), dus $y = a(x - 3)^2 - 5$.
Door (-1, 3), dus $a(-1 - 3)^2 - 5 = 3$

$$16a - 5 = 3$$
$$16a = 8$$
$$a = \tfrac{1}{2}$$

De formule is $y = \tfrac{1}{2}(x - 3)^2 - 5$.

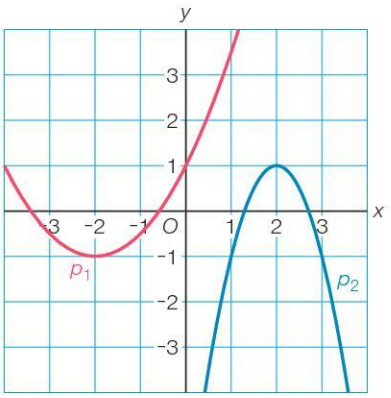
© Noordhoff Uitgevers

R8 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

a Voor de berekening van a kun je ook een ander punt dan $(-1, 3)$ gebruiken, bijvoorbeeld $(1, -3)$.
Doe dit.

b Wat gaat er mis als je voor de berekening van a het punt $(3, -5)$ gebruikt?

9 Stel formules op van de parabolen in de figuur hiernaast.



figuur 4.6

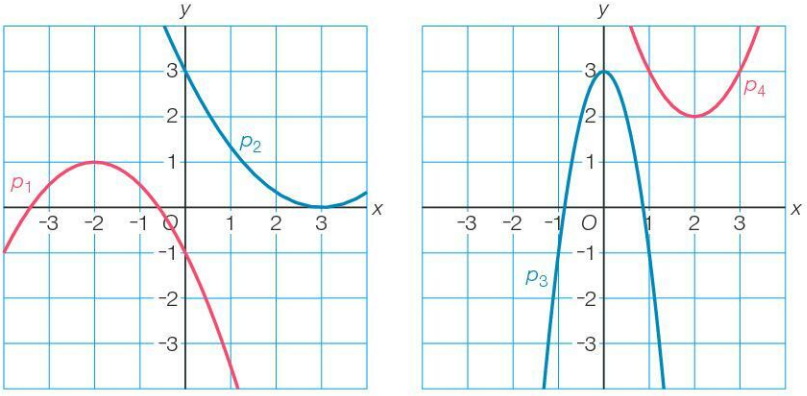
10 Een parabool heeft top $(2, 6)$ en gaat door het punt $(4, 4)$.

a Stel de formule op in de vorm $y = a(x - p)^2 + q$.

b Schrijf de formule van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

11 Stel van elk van de parabolen in figuur 4.7 de formule op in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.



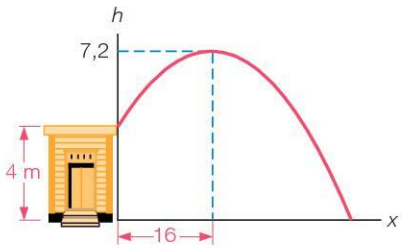
figuur 4.7

A12 Een parabool heeft top $(-3, 4)$ en snijdt de y-as in het punt $(0, -5)$.
Stel de formule op van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

© Noordhoff Uitgevers

A13 ✱ Onderzoek of het punt (10, −17) op de parabool ligt die door de punten $(0, 3)$, $(2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$ en $(5, 3)$ gaat.

A14 ⊙✱ Daan trapt een bal van een 4 meter hoog schuurtje. Zie figuur 4.8. De bal volgt de baan van een parabool en bereikt een maximale hoogte van 7,2 meter op een afstand van 16 meter van het schuurtje.
Bereken algebraïsch hoeveel meter van het schuurtje de bal op de grond komt.



figuur 4.8

A15 ⊙✱ Gegeven is de parabool $y = 2(x - 2)^2 - 32$.

a Schrijf de formule van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

b Schrijf de formule van de parabool in de vorm $y = a(x - d)(x - e)$.

c Hierboven staan drie vormen waarin de formule van de parabool is geschreven.
Geef van elk van de drie vormen een voordeel.

A16 ✱ Een parabool heeft top $(1\frac{1}{2}, 6\frac{3}{4})$ en gaat door het punt $(-6, -12)$.
Stel de formule van de parabool op in de vorm $y = a(x - d)(x - e)$.

17 ⊙✱ Van de parabool $y = ax^2 + bx$ is de top het punt (10, 6).
Ga uit van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$.

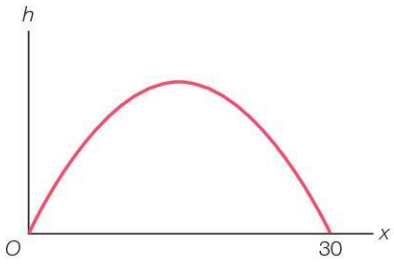
a Geef p en q.

b Licht toe dat uit de vorm $y = ax^2 + bx$ volgt dat de parabool door de oorsprong gaat en gebruik dit om a te berekenen.

c Bereken b.

A18 ⊙ Jan trapt een bal omhoog.
De bal komt 28,8 meter hoog. Deze hoogte wordt na 2,4 seconde bereikt.
De formule van de hoogte is van de vorm $h = at^2 + bt$. Hierin is h de hoogte in meter en t de tijd in seconden.
Bereken a en b.

A19 ⊙✱ Rob trapt een bal weg. De baan van de bal is een parabool. Zie figuur 4.9.
De bal bereikt een hoogte van 9 meter en komt 30 meter verder weer op de grond terecht.
De formule van de baan is van de vorm $h = ax^2 + bx$. Hierin zijn x en h in meter.
Bereken a en b.



figuur 4.9

© Noordhoff Uitgevers

020

Gegeven zijn de parabolen $p_1: y = 2x^2 - 12x$ en $p_2: y = 2x^2 - 12x + 13$.
De parabool p_1 snijdt de x-as in de punten $(0, 0)$ en $(6, 0)$.

a Licht dit toe met een berekening.

b Licht toe dat x_{top} van p_1 gelijk is aan 3 en bereken van p_1 de y-coördinaat van de top.

c Beredeneer dat p_1 en p_2 dezelfde x_{top} hebben en bereken van p_2 de y-coördinaat van de top.

021

Gegeven zijn de parabolen $p_1: y = ax^2 + bx$ en $p_2: y = ax^2 + bx + c$.
De parabool p_1 snijdt de x-as in de punten $(0, 0)$ en $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

a Licht dit toe met een berekening.

Uit het bovenstaande volgt dat x_{top} van p_1 gelijk is aan $-\frac{b}{2a}$.

b Licht dit toe.

c Beredeneer dat p_1 en p_2 dezelfde x_{top} hebben, dus dat ook voor p_2 geldt $x_{top} = -\frac{b}{2a}$.

Theorie C De top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$

In opgave 21 heb je aangetoond dat voor de top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ geldt $x_{top} = -\frac{b}{2a}$.

Voor de top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ geldt $x_{top} = -\frac{b}{2a}$.

Voorbeeld

De parabool $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + 5$ gaat door het punt $(6, 11)$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.

Uitwerking

Door $(6, 11)$, dus $-\frac{1}{2} \cdot 6^2 + b \cdot 6 + 5 = 11$

$-18 + 6b + 5 = 11$

$6b = 24$

$b = 4$

Dus $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$.

$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = 4$

$y_{top} = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 5 = -8 + 16 + 5 = 13$

De top is $(4, 13)$.

© Noordhoff Uitgevers

22 De parabool $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + c$ snijdt de x-as in het punt $(2, 0)$.

a Bereken c.

b Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.

c Bereken algebraïsch de coördinaten van het andere snijpunt van de parabool met de x-as.

23 De parabool $y = ax^2 + 11x - 12$ gaat door het punt $(1, -3)$.

a Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.

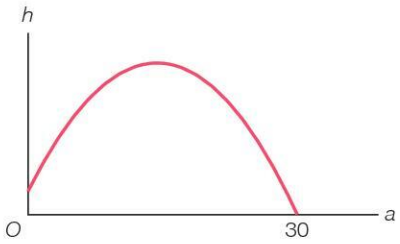
b Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x-as.

A24 De parabool $y = ax^2 + \frac{1}{2}x + 2$ gaat door het punt $(6, -4)$.

a Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.

b Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x-as.

A25 Lisa doet aan speerwerpen.
Bij een van haar worpen hoort een formule van de vorm $h = -0{,}04a^2 + pa + 1{,}5$. Hierin zijn a en h in meter.
De speer komt 30 meter ver.
Bereken in cm nauwkeurig hoe hoog de speer komt.



figuur 4.10

A26 **a** Van de parabool $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + c$ is $y_{top} = -9$.
Bereken c.

b Van de parabool $y = -\frac{1}{5}x^2 + bx - 8$ is $y_{top} = 12$.
Bereken x_{top}.

A27 **a** De parabool $y = ax^2 + bx + 1$ gaat door de punten $(-1, 9)$ en $(5, 21)$.
Bereken de coördinaten van de top van de parabool.

b De top van de parabool $y = ax^2 + bx + 3\frac{1}{2}$ is $(3, 8)$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x-as.

© Noordhoff Uitgevers

Terugblik

De formule $y = a(x - d)(x - e)$

De parabool $y = a(x - d)(x - e)$ snijdt de x-as in de punten $(d, 0)$ en $(e, 0)$.
Is gegeven dat een parabool door de punten $(2, 0)$, $(3, 1)$ en $(6, 0)$ gaat, dan gebruik je de punten $(2, 0)$ en $(6, 0)$ om te noteren $y = a(x - 2)(x - 6)$.
Invullen van $(3, 1)$ geeft $a(3 - 2)(3 - 6) = 1$, dus $a \cdot 1 \cdot -3 = 1$ en dit geeft $a = -\frac{1}{3}$.
De formule van de parabool is dus $y = -\frac{1}{3}(x - 2)(x - 6)$.
Deze formule is te schrijven in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.
Je krijgt $y = -\frac{1}{3}(x - 2)(x - 6)$

$$y = -\tfrac{1}{3}(x^2 - 6x - 2x + 12)$$

$$y = -\tfrac{1}{3}(x^2 - 8x + 12)$$

$$y = -\tfrac{1}{3}x^2 + 2\tfrac{2}{3}x - 4$$

De formule $y = a(x - p)^2 + q$

De top van de parabool $y = a(x - p)^2 + q$ is het punt (p, q).
Dus een formule van de parabool met top $(2, 2\frac{1}{2})$ is van de vorm $y = a(x - 2)^2 + 2\frac{1}{2}$.
Weet je bovendien dat de parabool door het punt $(4, -7\frac{1}{2})$ gaat, dan is a te berekenen.
Je krijgt $a(4 - 2)^2 + 2\frac{1}{2} = -7\frac{1}{2}$, dus $4a = -10$ en dit geeft $a = -2\frac{1}{2}$.
De formule van de parabool is dus $y = -2\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2\frac{1}{2}$.
Deze formule is te schrijven in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.
Je krijgt $y = -2\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) + 2\frac{1}{2}$

$$y = -2\tfrac{1}{2}x^2 + 10x - 10 + 2\tfrac{1}{2}$$

$$y = -2\tfrac{1}{2}x^2 + 10x - 7\tfrac{1}{2}$$

De vorm $y = ax^2 + bx + c$ kun je vervolgens gebruiken om de coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y-as af te lezen.
Bij $y = -2\frac{1}{2}x^2 + 10x - 7\frac{1}{2}$ is het snijpunt met de y-as $(0, -7\frac{1}{2})$.

De formule $y = ax^2 + bx + c$

Bij een formule van een parabool die gegeven is in de vorm $y = ax^2 + bx + c$ bereken je de x-coördinaat van de top met de formule $x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a}$.

Gaat de parabool $y = ax^2 - 2x + 6$ door het punt $(-5, 21)$, dan zijn de coördinaten van de top als volgt te berekenen.
Door $(-5, 21)$ geeft $a \cdot (-5)^2 - 2 \cdot -5 + 6 = 21$ oftewel $25a = 5$, dus $a = \frac{1}{5}$.
De formule van de parabool is dus $y = \frac{1}{5}x^2 - 2x + 6$.

Dus $x_{\text{top}} = -\dfrac{-2}{2 \cdot \frac{1}{5}} = 5$ en $y_{\text{top}} = \frac{1}{5} \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 + 6 = 1$.

© Noordhoff Uitgevers

4.2 Hogeregraadsvergelijkingen en ongelijkheden

028 ▯⊙✱

Gegeven zijn de formules $y = x^4$, $y = 40$ en $y = -40$.

a Schets de bijbehorende grafieken in één figuur.

b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = 40$?
Bereken de oplossingen. Rond af op twee decimalen.

c Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = -40$? Licht toe.

029 ▯⊙✱

Gegeven zijn de formules $y = x^5$, $y = 250$ en $y = -250$.

a Schets de bijbehorende grafieken in één figuur.

b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^5 = 250$? Licht toe.

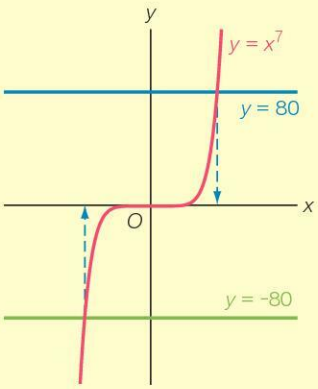
c Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^5 = -250$? Licht toe.

Theorie A Hogeremachtswortels

Worteltrekken heeft te maken met kwadrateren. Zo zijn van de vergelijking $x^2 = 5$ de oplossingen $x = \sqrt{5}$ en $x = -\sqrt{5}$.

$(\sqrt{5})^2 = 5$
$(-\sqrt{5})^2 = 5$

Omdat kwadrateren hetzelfde is als tot de tweede macht verheffen, heet $\sqrt{5}$ ook wel de **tweedemachtswortel** van 5.
Er zijn ook **hogeremachtswortels** zoals derdemachtswortels en vierdemachtswortels.
Een zevendemachtswortel heeft te maken met 'tot de zevende macht verheffen'.
De vergelijking $x^7 = 80$ heeft één oplossing die we noteren als $x = \sqrt[7]{80}$. Dus $\left(\sqrt[7]{80}\right)^7 = 80$.
De oplossing van $x^7 = -80$ is $x = \sqrt[7]{-80}$.
Dus $\left(\sqrt[7]{-80}\right)^7 = -80$.
Je kunt een benadering van de oplossing van de vergelijking $x^7 = 80$ vinden door de grafieken van $y_1 = x^7$ en $y_2 = 80$ te plotten en met de optie snijpunt de coördinaten van het snijpunt te berekenen.
Je vindt $x \approx 1{,}87$.
Maar het gebruik van $\sqrt[x]{\ }$ of $\sqrt[n]{\ }$ van de GR is handiger.
Hoe dat gaat, zie je op de volgende bladzijde.



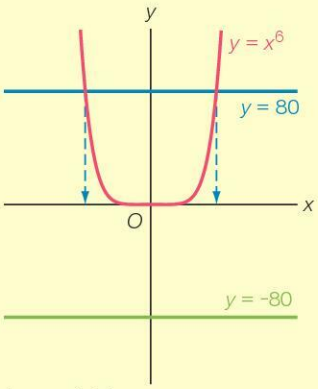
figuur 4.11 De vergelijking $x^7 = 80$ heeft één oplossing, ook de vergelijking $x^7 = -80$ heeft één oplossing.

© Noordhoff Uitgevers

TI	Casio	HP
7 MATH $\sqrt[x]{}$ 80 ENTER	7 $\sqrt[x]{}$ 80 EXE	$\sqrt[x]{}$ 7 ▶ 80 ENTER

Je krijgt $\sqrt[7]{80} \approx 1{,}87$.

Je begrijpt dat $x = \sqrt[6]{80}$ een oplossing is van de vergelijking $x^6 = 80$.
In figuur 4.12 zie je dat ook $x = -\sqrt[6]{80}$ een oplossing is.
De oplossingen van $x^6 = 80$ zijn dus $x = \sqrt[6]{80}$ en $x = -\sqrt[6]{80}$.
De vergelijking $x^6 = -80$ heeft geen oplossingen, omdat x^6 niet negatief kan zijn.



figuur 4.12

De oplossingen van $x^n = p$ met $n = 2, 3, 4, \ldots$
n oneven $x^n = p$ **geeft** $x = \sqrt[n]{p}$
n even en $p > 0$ $x^n = p$ **geeft** $x = \sqrt[n]{p} \vee x = -\sqrt[n]{p}$
n even en $p < 0$ $x^n = p$ **heeft geen oplossingen**

Voor $\sqrt[2]{p}$ schrijven we $\sqrt{p}$.

Voorbeeld

a Los exact op $5x^4 + 8 = 43$.
b Los de vergelijking $\frac{1}{4}x^6 - 1 = 5$ algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

a
$5x^4 + 8 = 43$
$5x^4 = 35$
$x^4 = 7$
$x = \sqrt[4]{7} \vee x = -\sqrt[4]{7}$

b
$\frac{1}{4}x^6 - 1 = 5$
$\frac{1}{4}x^6 = 6$
$x^6 = 24$
$x = \sqrt[6]{24} \vee x = -\sqrt[6]{24}$
$x \approx 1{,}70 \vee x \approx -1{,}70$

De oplossing van de vergelijking $x^3 = 8$ is $x = \sqrt[3]{8}$.
Maar omdat $2^3 = 8$ kun je hiervoor noteren $x = 2$.
En zo heeft de vergelijking $x^4 = 81$ als oplossingen $x = 3$ en $x = -3$, omdat $3^4 = 81$ en ook $(-3)^4 = 81$.
Je laat een antwoord als $x = \sqrt[4]{81}$ niet staan.

© Noordhoff Uitgevers

Bij het algebraïsch oplossen van de vergelijking $3(2x + 1)^6 = 192$ ga je net zo te werk als bij het oplossen van $3x^6 = 192$.
Je krijgt $3(2x + 1)^6 = 192$
$(2x + 1)^6 = 64$
$2x + 1 = 2 \vee 2x + 1 = -2$
$2x = 1 \vee 2x = -3$
$x = \frac{1}{2} \vee x = -1\frac{1}{2}$

Voorbeeld

Los algebraïsch op.

a $\frac{1}{3}x^4 - 2 = 25$

b $2(3x - 1)^4 = 32$

Uitwerking

a $\frac{1}{3}x^4 - 2 = 25$
$\frac{1}{3}x^4 = 27$
$x^4 = 81$
$x = 3 \vee x = -3$

b $2(3x - 1)^4 = 32$
$(3x - 1)^4 = 16$
$3x - 1 = 2 \vee 3x - 1 = -2$
$3x = 3 \vee 3x = -1$
$x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$

30

Bereken exact de oplossingen.

a $x^6 = 20$

b $5x^3 = 100$

c $x^2 + 7 = 18$

d $3x^7 + 25 = 4$

e $\frac{1}{2}x^6 + 12 = 9$

f $0{,}3x^8 + 5 = 11$

31

Los algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

a $3x^5 + 10 = 16$

b $2x^5 + 9 = 1$

c $3x^4 - 5 = 10$

d $3x^4 + 10 = 4$

e $\frac{1}{3}x^6 + 2 = 6$

f $-\frac{1}{2}x^6 + 6 = 2$

A32

Los algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

a $7x^3 + 2 = 30$

b $5x^4 - 3 = 12$

c $\frac{1}{6}x^5 + 8 = 1$

d $15 - \frac{1}{3}x^6 = 2$

© Noordhoff Uitgevers

33 De oplossing van de vergelijking $x^3 = 64$ is $x = \sqrt[3]{64}$.

a Ga na dat $\sqrt[3]{64} = 4$.

b Noteer de oplossing van de vergelijking $x^3 = 125$ zonder wortelteken.

c Neem de tabel hiernaast over en vul hem in. Controleer of je de tabel juist hebt ingevuld en leer hem uit het hoofd, zodat je de getallen voortaan herkent als macht.

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1					
2					
3					
4					
5					
6					

A34 Los algebraïsch op.

a $\frac{1}{2}x^3 - 8 = 100$

b $\frac{1}{9}x^6 - 1 = 80$

c $82 - \frac{1}{3}x^5 = 1$

d $3(2x - 1)^2 = 147$

e $5(x + 2)^3 - 36 = 99$

f $\frac{1}{5}(4x + 1)^4 - 25 = 100$

O35 Gegeven is de vergelijking $x^3 - x^2 - 6x = 0$.
Het linkerlid van de vergelijking is te ontbinden in $x(x + 2)(x - 3)$.

a Toon dit aan.

b Geef de oplossingen van de vergelijking $x^3 - x^2 - 6x = 0$.

O36 Gegeven is de vergelijking $x^4 - x^2 - 6 = 0$.
Stel je $x^2 = u$, dan krijg je $u^2 - u - 6 = 0$.

a Licht dit toe.

De vergelijking $u^2 - u - 6 = 0$ heeft de oplossingen $u = -2$ en $u = 3$.

b Toon dit aan.

c Licht toe dat de vergelijking $x^4 - x^2 - 6 = 0$ de oplossingen $x = \sqrt{3}$ en $x = -\sqrt{3}$ heeft.

Theorie B Hogeregraadsvergelijkingen en ontbinden in factoren

De derdegraadsvergelijking $x^3 - x^2 - 2x = 0$ is algebraïsch op te lossen door x buiten de haakjes te brengen. Je krijgt

$x^3 - x^2 - 2x = 0$
$x(x^2 - x - 2) = 0$
$x(x + 1)(x - 2) = 0$
$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$

© Noordhoff Uitgevers

Ook de vergelijking $x^4 - x^2 - 2 = 0$ is algebraïsch op te lossen.
Je gebruikt de substitutie $x^2 = u$.
Je krijgt $u^2 - u - 2 = 0$ ← $x^2 = u$, dus $x^4 = (x^2)^2 = u^2$.
$(u + 1)(u - 2) = 0$
$u = -1 \vee u = 2$
$x^2 = -1 \vee x^2 = 2$
geen opl. $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$
Dus $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

b $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Uitwerking

a $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$
$x(x^2 - 3x + 2) = 0$
$x(x - 1)(x - 2) = 0$
$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$

b $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - 3u + 2 = 0$
$(u - 1)(u - 2) = 0$
$u = 1 \vee u = 2$
$x^2 = 1 \vee x^2 = 2$
$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

37

Los algebraïsch op.

a $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

b $x^3 - 5x^2 = 6x$

c $x^3 = 4x^2 + 12x$

d $x^3 + x^2 = 12x$

38

Bereken exact de oplossingen.

a $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

c $x^4 + 16 = 10x^2$

d $x^4 + x^2 = 12$

A39

Los algebraïsch op.

a $x^3 + 25x = 10x^2$

b $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c $x^4 - 16x^3 = 36x^2$

d $x^3 + 6x^2 = 16x$

A40

Bereken exact de oplossingen.

a $x^3 = x^2 + 20x$

b $x^4 + 30 = 13x^2$

c $x^4 = 2x^3 + 24x^2$

d $x^4 + 3x^2 = 4$

© Noordhoff Uitgevers

E41 ✱

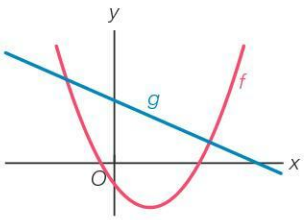
Van een rechthoek is de lengte van een diagonaal 15 en de oppervlakte 90.
Bereken exact de lengten van de zijden.

042 ◫⊙✱

Gegeven is de ongelijkheid $x^2 - 3x - 2 < -x + 6$.
In de figuur hiernaast zijn de grafieken van de functies $f(x) = x^2 - 3x - 2$ en $g(x) = -x + 6$ geschetst.

a Los de vergelijking $x^2 - 3x - 2 = -x + 6$ algebraïsch op.

b Lees de oplossing van de ongelijkheid $x^2 - 3x - 2 < -x + 6$ af uit de figuur.



figuur 4.13

Theorie C Ongelijkheden algebraïsch oplossen

De ongelijkheid $x^2 > 2x + 3$ kun je algebraïsch oplossen door het linkerlid $f(x)$ te stellen en het rechterlid $g(x)$, dus $f(x) = x^2$ en $g(x) = 2x + 3$.
Nadat je de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch hebt opgelost en de grafieken van f en g hebt geschetst, lees je uit de figuur af waar de grafiek van f boven de grafiek van g ligt.

Bij het oplossen van een ongelijkheid lees je het antwoord af op de x-as.
Bij $f(x) < g(x)$ kijk je waar de grafiek van f onder die van g ligt.
Bij $f(x) > g(x)$ kijk je waar de grafiek van f boven die van g ligt.

Gebruik bij het oplossen van niet-lineaire ongelijkheden het volgende werkschema.

Werkschema: het oplossen van de ongelijkheden $f(x) < g(x)$ en $f(x) > g(x)$

1 Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ op.
2 Schets de grafieken van f en g.
3 Lees uit de schets de oplossing af.

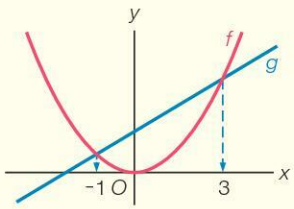
Voorbeeld

Los algebraïsch op $x^2 > 2x + 3$.

Uitwerking

$\underbrace{x^2}_{f(x)} = \underbrace{2x + 3}_{g(x)}$

$x^2 = 2x + 3$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x + 1)(x - 3) = 0$
$x = -1 \vee x = 3$
$x^2 > 2x + 3$ geeft $x < -1 \vee x > 3$



© Noordhoff Uitgevers

43 Los algebraïsch op.

a $x^2 + x > 6$ **c** $x^4 > 81$

b $x^2 < 2x + 8$ **d** $x^3 < -8$

A44 Los algebraïsch op.

a $2x^2 + x - 10 > x^2 - 4$ **c** $\frac{1}{2}x^4 + 1 < 9$

b $2x^2 + 7 < 3 - x^2$ **d** $\frac{1}{3}(x - 1)^3 > 9$

A45 Los algebraïsch op.

a $\frac{1}{9}x^4 - 4 > 5$ **c** $x^3 + 2x^2 < 3x$

b $(2x - 3)^2 < 4$ **d** $x^4 - 3x^2 < 4$

046 Gegeven is de vergelijking $x^4 = x^3 + 1$.
Lukt het om deze vergelijking algebraïsch op te lossen? Licht toe.

Theorie D Vergelijkingen en ongelijkheden grafisch-numeriek oplossen

De oplossingen van de vergelijking $x^4 = x^3 + 1$ zijn de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken van $f(x) = x^4$ en $g(x) = x^3 + 1$.
Het oplossen van deze vergelijking met behulp van grafieken op de GR heet **grafisch-numeriek oplossen**. Daarbij gebruik je de optie snijpunt.

Werkschema: vergelijkingen grafisch-numeriek oplossen

1. Voer het linkerlid van de vergelijking in bij y_1 en het rechterlid bij y_2.
2. Noteer welke optie van de GR je gebruikt.
3. Geef alle oplossingen in het gevraagde aantal decimalen of rond zelf verstandig af.

Om de vergelijking $f(x) = 0$ grafisch-numeriek op te lossen, voer je de formule in bij y_1 en gebruik je de optie nulpunt.

Voorbeeld

Los op. Rond af op drie decimalen.

a $0{,}2x^3 - 2x + 2 = 0$

b $x^3 - 8x = 5 - x^2$

Uitwerking

a Voer in $y_1 = 0{,}2x^3 - 2x + 2$.
De optie nulpunt geeft $x \approx -3{,}577 \vee x \approx 1{,}153 \vee x \approx 2{,}424$.

b Voer in $y_1 = x^3 - 8x$ en $y_2 = 5 - x^2$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -3{,}074 \vee x \approx -0{,}607 \vee x \approx 2{,}680$.

© Noordhoff Uitgevers

Bij het oplossen van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ waarbij je niet algebraïsch te werk hoeft te gaan, mag je de vergelijking $f(x) = g(x)$ grafisch-numeriek oplossen. Ga verder te werk zoals je bij het algebraïsch oplossen van ongelijkheden hebt geleerd, dus schets de grafieken van f en g en lees uit de schets de oplossing af.

47

a Los de vergelijking $0{,}3x^4 - 6x + 5 = 3x^2$ op. Rond af op drie decimalen.

b Bereken de nulpunten van de functie $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 - 5x + 10$. Rond af op drie decimalen.

48

Los op. Rond af op twee decimalen.

a $x^2 < 2x + 7$

b $5 - x^2 < x$

c $x^3 > 3x + 1$

d $x^4 + 1 > x^3 - x$

A49

Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $x^3 - 4x^2 < 2x - 12$

b $4x - x^3 > x^2 - 2$

c $x^4 - 5x < x^2 + 5$

d $x^5 - 2x^3 > 7x + 2$

A50

a Een voetballer trapt een bal de lucht in. De hoogte h van de bal als functie van de tijd t kan beschreven worden door de formule $h = -5t^2 + 15t$. Hierbij is h in meter en t in seconden.
Hoelang is de bal hoger dan 9 meter? Geef je antwoord in tienden van seconden nauwkeurig.

b De snelheid van een auto wordt gegeven door de formule $v = 0{,}022t^3 - 0{,}94t^2 + 10t$. Hierin is v in m/s en t de tijd in seconden met $0 \leq t \leq 20$.
Bereken gedurende hoeveel seconden de snelheid groter is dan 90 km/uur. Rond af op één decimaal.

E51

a Beredeneer dat het aantal diagonalen van een regelmatige n-hoek gelijk is aan $\frac{1}{2}n(n-3)$.

b Het aantal diagonalen van een regelmatige n-hoek ligt tussen 3100 en 3200.
Bereken n.

© Noordhoff Uitgevers

Terugblik

Hogeremachtswortels

De oplossing van de vergelijking $x^3 = 20$ is $x = \sqrt[3]{20}$.
De oplossing van de vergelijking $x^5 = -50$ is $x = \sqrt[5]{-50}$.
$\sqrt[4]{12}$ is de vierdemachtswortel van 12. Met de GR krijg je $\sqrt[4]{12} \approx 1{,}86$.
$\sqrt[4]{-12}$ bestaat niet, want er is geen getal a zo, dat $a^4 = -12$.
Sommige hogeremachtswortels komen mooi uit. Zo is $\sqrt[5]{32} = 2$, want $2^5 = 32$.
Voor de oplossing van de vergelijking $x^5 = 32$ schrijf je $x = 2$ en niet $x = \sqrt[5]{32}$.

De vergelijking $x^n = p$ met $n = 2, 3, 4, \ldots$

Onderscheid de gevallen n is oneven en n is even.
Bij oneven n heeft de vergelijking $x^n = p$ precies één oplossing.
Bij even n heeft de vergelijking $x^n = p$

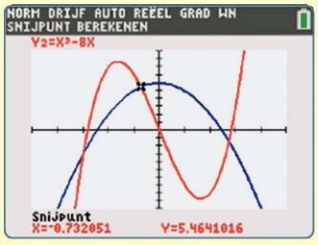
- twee oplossingen als $p > 0$, bijvoorbeeld $x^4 = 18$ geeft $x = \sqrt[4]{18} \vee x = -\sqrt[4]{18}$
- geen oplossingen als $p < 0$, bijvoorbeeld $x^4 = -18$ heeft geen oplossingen.

Hogeregraadsvergelijkingen oplossen

Om de vergelijking $\frac{1}{4}(x-2)^6 + 7 = 23$ exact op te lossen, ga je op dezelfde manier te werk als bij het oplossen van de vergelijking $\frac{1}{4}x^6 + 7 = 23$.
Bij de vergelijking $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$ schrijf je eerst $x(x^2 - 7x + 10) = 0$.
Bij de vergelijking $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ stel je $x^2 = u$. Je krijgt $u^2 + 3u - 10 = 0$.

Grafisch-numeriek oplossen van vergelijkingen

Met de GR is een vergelijking als $6 - x^2 = x^3 - 8x$ op te lossen.
Je plot de grafieken van $y_1 = 6 - x^2$ en $y_2 = x^3 - 8x$ waarna je de x-coördinaten van de snijpunten, dus de oplossingen van de vergelijking, kunt berekenen.
Je gebruikt hierbij de optie snijpunt.
Deze manier van oplossen heet de grafisch-numerieke methode.



Het oplossen van niet-lineaire ongelijkheden

1 Staat er 'los algebraïsch op', dan bereken je algebraïsch de x-coördinaten van de snijpunten.
Staat er 'los op', dan mag je de x-coördinaten van de snijpunten grafisch-numeriek berekenen.
2 Schets grafieken. Gebruik hierbij de GR.
3 Lees het antwoord af op de x-as.
Bij $f(x) < g(x)$ kijk je waar de grafiek van f onder die van g ligt.
Bij $f(x) > g(x)$ kijk je waar de grafiek van f boven die van g ligt.

© Noordhoff Uitgevers

4.3 Gebroken vormen

052

a Plot de grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$ op het standaardscherm.

b Wat kun je van $f(x)$ zeggen als je x steeds groter kiest? En wat als je voor x steeds kleinere getallen (bijvoorbeeld -1000, $-10\,000$, ...) kiest?

c Maak een tabel op de GR. Neem beginwaarde $-0{,}1$ en stapgrootte 0,01. Wat gebeurt er met $f(x)$ als je x dicht bij 0 kiest?

d Lees de tekst hiernaast en verklaar dat in de tabel op de GR bij $x = 0$ ERROR staat.

$\frac{12}{3} = 4$, want $4 \cdot 3 = 12$

$\frac{-18}{3} = -6$, want ...

$\frac{0}{6} = 0$, want ...

$\frac{3}{0} = ...$, want ...

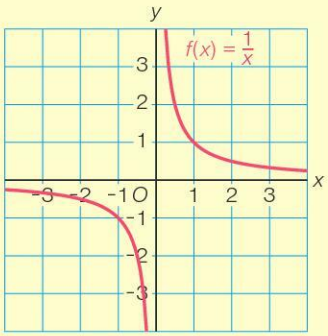
Theorie A Gebroken functies

Functies als $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{5}{x+3}$ en $h(x) = 5 + \frac{x}{2x-1}$ zijn voorbeelden van **gebroken functies**.
In een gebroken functie komt de variabele in de noemer van de breuk voor.

De eenvoudigste gebroken functie is $f(x) = \frac{1}{x}$.

De functie f is een **standaardfunctie**.
De grafiek van deze functie is een **standaardgrafiek** en heet **hyperbool**. Je mag een standaardgrafiek zonder toelichting tekenen en schetsen.
Omdat $f(0)$ niet kan, bestaat de grafiek uit twee losse delen. Deze delen heten de **takken van de hyperbool**.

Bij de grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$ spelen de x-as en de y-as een belangrijke rol.
Neem je x heel groot, bijvoorbeeld 1000, dan ligt het bijbehorende punt van de grafiek heel dicht bij de x-as.
Neem je x heel sterk negatief, bijvoorbeeld -1000, dan ligt het bijbehorende punt van de grafiek ook heel dicht bij de x-as.
De x-as (de lijn $y = 0$) is de **horizontale asymptoot** van de grafiek van f. In figuur 4.14 zie je dat de y-as (de lijn $x = 0$) de **verticale asymptoot** van de grafiek is.



figuur 4.14 De grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$ heeft de x-as en de y-as als asymptoot.

Een asymptoot is een lijn waarmee de grafiek op den duur vrijwel samenvalt.

© Noordhoff Uitgevers

Ook de grafiek van $y = \frac{1}{x+1} - 4$ heeft twee asymptoten.

De formules van de asymptoten vind je door te kijken hoe de grafiek uit die van $y = \frac{1}{x}$ ontstaat.

$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{1 naar links en 4 omlaag}} y = \frac{1}{x+1} - 4$

De asymptoten van de hyperbool verschuiven met de grafiek mee, dus de asymptoten van $y = \frac{1}{x+1} - 4$ zijn $x = -1$ en $y = -4$.

3 naar rechts,
vervang x door $x - 3$.

5 naar links,
vervang x door $x + 5$.

Een ander woord voor verschuiving is **translatie**.
In plaats van 'de verschuiving 1 naar links en 4 omlaag' zeggen we in het vervolg 'de translatie $(-1, -4)$'.
Bij de translatie $(-1, -4)$ vervang je x door $x + 1$ en trek je 4 af van de functiewaarde.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ en $g(x) = \frac{1}{x}$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit die van g?
b Geef van beide asymptoten van de grafiek van f de formule en schets de grafiek van f.

Uitwerking

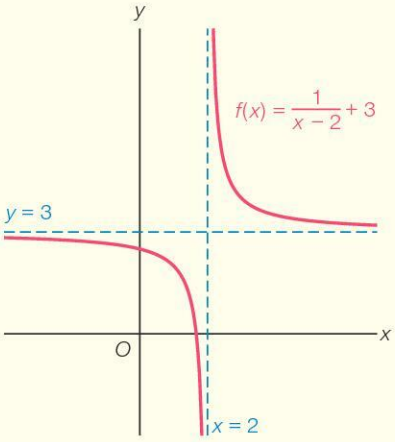
a $y = \frac{1}{x}$

$\downarrow$ translatie $(2, 3)$

$y = \frac{1}{x-2} + 3$

b De asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $y = 3$.

Teken de asymptoten als stippellijnen en zet de formules erbij.



53

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$ en $g(x) = \frac{1}{x}$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit die van g?
b Geef van beide asymptoten van de grafiek van f de formule en schets de grafiek van f.

© Noordhoff Uitgevers

54 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{x-4} + 2$ en $g(x) = \frac{1}{x}$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit die van g?

b Geef van beide asymptoten van de grafiek van f de formule en schets de grafiek van f.

A55 Geef van de grafieken van de volgende functies de formules van de asymptoten en schets de grafieken in aparte figuren.

a $f(x) = \frac{1}{x-5} + 6$ **b** $g(x) = \frac{1}{x+1} - 3$ **c** $h(x) = \frac{1}{x} - 3$

A56 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{x+3} - 4$ en $g(x) = \frac{1}{x-2} + 5$.

Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van f?

057 Bij de vergelijking $\frac{x}{2} = \frac{x+4}{x}$ hoort de verhoudingstabel hiernaast.

x	$x+4$
2	x

a Licht toe dat uit deze verhoudingstabel volgt $x^2 - 2x - 8 = 0$.

b Bereken x.

Theorie B Gebroken vergelijkingen

De vergelijking $\frac{x+2}{x+1} = \frac{6}{x+3}$ is een **gebroken vergelijking**.

Je kunt deze vergelijking algebraïsch oplossen met **kruislings vermenigvuldigen**. Hierdoor kunnen **oplossingen worden ingevoerd**. Zie het informatief hieronder.
Daarom moet je bij gebroken vergelijkingen controleren of de gevonden waarden van x **voldoen**. Ga daartoe na of er voor de gevonden waarden van x geen noemer nul wordt.

Vervang je in een vergelijking de variabele door een getal en klopt het, dan zeggen we dat het getal voldoet aan de vergelijking. Het getal is dus een oplossing van de vergelijking.

INFORMATIEF

Oplossingen invoeren bij kruislings vermenigvuldigen

Kruislings vermenigvuldigen bij $\frac{2}{x^2+x} = \frac{7}{x^2+2x}$ geeft

$$2(x^2+2x) = 7(x^2+x)$$
$$2x^2 + 4x = 7x^2 + 7x$$
$$-5x^2 - 3x = 0$$
$$-x(5x+3) = 0$$
$$x = 0 \vee x = -\tfrac{3}{5}$$

Invullen van $x = 0$ in de oorspronkelijke vergelijking geeft $\frac{2}{0} = \frac{7}{0}$ en dit klopt niet.

Door het kruislings vermenigvuldigen is een oplossing ingevoerd.

© Noordhoff Uitgevers

Afspraak
Controleer bij het oplossen van gebroken vergelijkingen of de gevonden getallen geen noemer nul maken.

Voorbeeld

Los algebraïsch op $\frac{x+2}{x+1} = \frac{6}{x+3}$.

Uitwerking

$\frac{x+2}{x+1} = \frac{6}{x+3}$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$(x+2)(x+3) = 6(x+1)$

$x^2 + 5x + 6 = 6x + 6$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0 \vee x = 1$

vold. vold.

Zowel $x = 0$ als $x = 1$ voldoet omdat ze geen noemer nul maken.

Dat een oplossing voldoet geef je aan met vold.

Ook de vergelijking $\frac{x+3}{x+1} = 0$ is een gebroken vergelijking. Omdat een breuk nul is als de teller nul is, krijg je $x + 3 = 0$, dus de oplossing van deze vergelijking is $x = -3$.

Bij de vergelijking $\frac{2x-4}{x+1} = \frac{x+3}{x+1}$ zijn de noemers gelijk. Daarom krijg je een oplossing als ook de tellers aan elkaar gelijk zijn.
Dus $2x - 4 = x + 3$ en dit geeft $x = 7$.

Bij de vergelijking $\frac{x+3}{2x-4} = \frac{x+3}{x+1}$ zijn de tellers gelijk.

Als deze tellers gelijk zijn aan 0 staat er $\frac{0}{2x-4} = \frac{0}{x+1}$

en dit levert een oplossing. Deze oplossing is $x = -3$.
Maar ook als de noemers gelijk zijn heb je een oplossing.
Dit geeft $2x - 4 = x + 1$, dus $x = 5$.

$\frac{0}{1} = 0$

$\frac{1}{0}$ kan niet

$\frac{0}{0}$ kan niet

$\frac{0}{10} = 0$

Een breuk is nul als de teller nul is en de noemer niet.

Regels voor het algebraïsch oplossen van gebroken vergelijkingen

$\frac{A}{B} = 0$ geeft $A = 0$ $\qquad$ $\frac{A}{B} = \frac{C}{B}$ geeft $A = C$

$\frac{A}{B} = C$ geeft $A = BC$ $\qquad$ $\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ geeft $A = 0 \vee B = C$

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ geeft $AD = BC$

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{6x^2-12}{x^2-12}=0$

b $\frac{x^2-1}{x^2+4}=\frac{x^2-1}{2x+4}$

Uitwerking

a $\frac{6x^2-12}{x^2-12}=0$ $\quad\frac{A}{B}=0$ geeft $A=0$

$6x^2-12=0$

$6x^2=12$

$x^2=2$

$x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2}$

vold vold.

b $\frac{x^2-1}{x^2+4}=\frac{x^2-1}{2x+4}$

$x^2-1=0 \vee x^2+4=2x+4$

$x^2=1 \vee x^2-2x=0$

$x=1 \vee x=-1 \vee x(x-2)=0$

$x=1 \vee x=-1 \vee x=0 \vee x=2$

vold. vold. vold. vold.

58 Los algebraïsch op.

a $\frac{x+3}{x-1}=\frac{10}{x}$

b $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2x+2}{x-1}$

c $\frac{x-3}{x+1}=1\frac{1}{2}$

d $\frac{x-1}{x}+1=3$

e $\frac{3x+4}{x-1}=\frac{x+18}{x}$

f $\frac{2x-5}{4-x}=\frac{x+2}{3x-4}$

59 Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{5x^2-15}{x^2+5}=0$

b $\frac{x^2-3}{x^2+1}=\frac{x-1}{x^2+1}$

c $\frac{x^2-4}{2x+5}=\frac{x^2-4}{x+4}$

A60 Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{3x^2-10}{x^2+1}=2$

b $\frac{x^3-8}{x^2+2}=\frac{x^3-8}{x+8}$

c $\frac{3x^2-10}{x^2+1}=\frac{2x^2}{x^2+1}$

d $\frac{3x+1}{2x-1}=\frac{3x+5}{2x+1}$

E61

a Anna heeft net 8 km gewandeld met een snelheid van 4 km/uur. Nu gaat ze joggen met een snelheid van 8 km/uur. Ze wil zolang joggen totdat over de gehele afstand (wandelen en joggen) de gemiddelde snelheid 5 km/uur is.
Hoeveel minuten moet Anna gaan joggen?

b Van een aantal personen is de gemiddelde leeftijd in jaren precies gelijk aan het aantal personen. Nadat er iemand van 29 jaar bij is gekomen, is de gemiddelde leeftijd nog steeds gelijk aan het aantal personen.
Hoeveel personen waren er oorspronkelijk aanwezig?

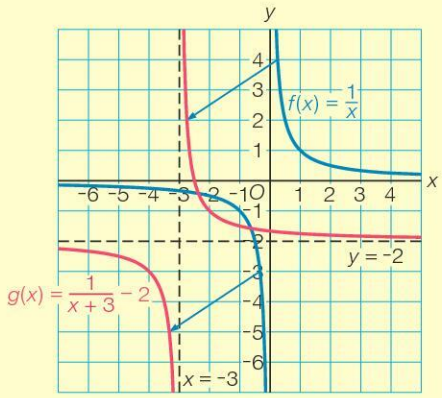
© Noordhoff Uitgevers

Terugblik

De functie $f(x) = \frac{1}{x}$

De grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$ heeft de asymptoten $x = 0$ en $y = 0$.

De grafiek van $g(x) = \frac{1}{x+3} - 2$ ontstaat uit de standaardgrafiek $y = \frac{1}{x}$ bij de translatie $(-3, -2)$, dat wil zeggen de verschuiving 3 naar links en 2 omlaag.
De asymptoten zijn de lijnen $x = -3$ en $y = -2$.



Gebroken vergelijkingen

Er zijn vijf regels voor het algebraïsch oplossen van gebroken vergelijkingen.

$\frac{A}{B} = 0$ geeft $A = 0$

$\frac{4x^2 - x}{x^2 - 4} = 0$ geeft $4x^2 - x = 0$
$x(4x - 1) = 0$
$x = 0 \vee x = \frac{1}{4}$
vold. vold.

$\frac{A}{B} = C$ geeft $A = BC$

$\frac{2x^2 + 13}{x^2 - 1} = 3$ geeft $2x^2 + 13 = 3(x^2 - 1)$
$2x^2 + 13 = 3x^2 - 3$
$x^2 = 16$
$x = 4 \vee x = -4$
vold. vold.

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ geeft $AD = BC$

$\frac{x - 5}{x + 5} = \frac{12}{x}$ geeft $x(x - 5) = 12(x + 5)$
$x^2 - 5x = 12x + 60$
$x^2 - 17x - 60 = 0$
$(x + 3)(x - 20) = 0$
$x = -3 \vee x = 20$
vold. vold.

$\frac{A}{B} = \frac{C}{B}$ geeft $A = C$

$\frac{x^2 - 6}{x^2 - 4} = \frac{x}{x^2 - 4}$ geeft $x^2 - 6 = x$
$x^2 - x - 6 = 0$
$(x + 2)(x - 3) = 0$
$x = -2 \vee x = 3$
vold. vold.

$\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ geeft $A = 0 \vee B = C$

$\frac{x^2 - 16}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 16}{2x + 1}$ geeft $x^2 - 16 = 0 \vee x^2 + 1 = 2x + 1$
$x^2 = 16 \vee x^2 - 2x = 0$
$x = 4 \vee x = -4 \vee x(x - 2) = 0$
$x = 4 \vee x = -4 \vee x = 0 \vee x = 2$
vold. vold. vold. vold.

Bij het oplossen van gebroken vergelijkingen controleer je achteraf of de gevonden waarden voldoen. Je kijkt dan of noemers nul worden.

© Noordhoff Uitgevers

4.4 Extreme waarden en wiskundige modellen

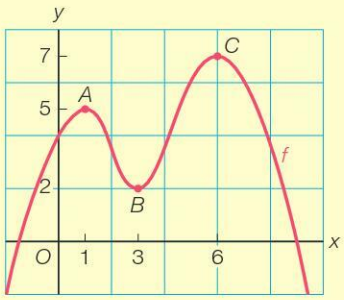
062 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 20x - 10$.

a Schets de grafiek. Neem x tussen -5 en 8 en y tussen -50 en 100.

b De grafiek heeft drie toppen. De x-coördinaten van de toppen zijn -2, 2 en 5.
Bereken de bijbehorende y-coördinaten en zet de coördinaten bij de toppen. Rond af op twee decimalen.

Theorie A Extreme waarden

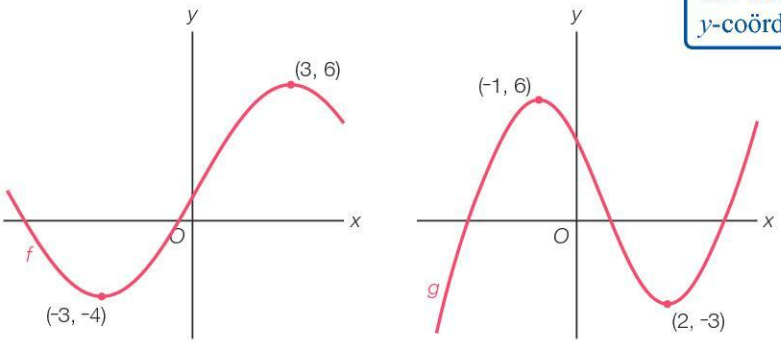
Toppen zijn hoogste of laagste punten van een grafiek. Bij een hoogste punt van een grafiek hoort een **maximum** van de functie. In figuur 4.15 is het maximum bij A gelijk aan 5 en is het maximum bij C gelijk aan 7. Je ziet dat er twee maxima zijn. Je moet een maximum plaatselijk opvatten.
Bij top B is er sprake van een **minimum** van 2. Ook een minimum moet je plaatselijk opvatten.
Maxima en minima heten **uiterste waarden** of **extreme waarden**.
Ze worden kortweg **extremen** genoemd. Als er naar extremen wordt gevraagd, geef je ook aan of het een maximum of een minimum is en voor welke waarde van x het extreem bereikt wordt.
Zo noteer je van de functie f in figuur 4.15
max. is $f(1) = 5$, min. is $f(3) = 2$ en max. is $f(6) = 7$.



figuur 4.15

63 In figuur 4.16 zijn de grafieken van de functies f en g getekend.
De coördinaten van de toppen staan in de figuur.
Geef van deze functies de extreme waarden.
Begin als volgt: min. is $f(-3) = -4$.

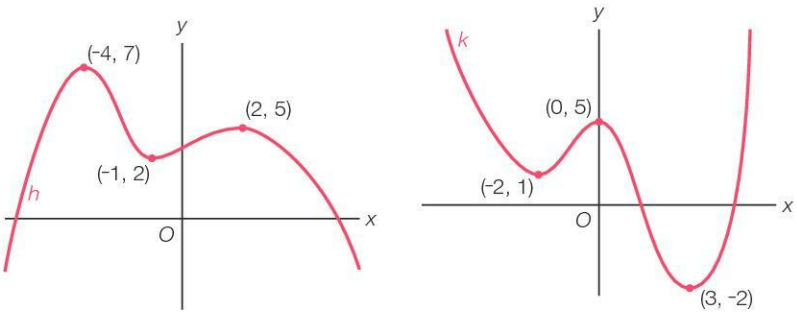
Een minimum is een kleinste functiewaarde, dus een minimum is een y-coördinaat.



figuur 4.16

© Noordhoff Uitgevers

64 Geef van de functies h en k in figuur 4.17 de extreme waarden.



figuur 4.17

Theorie B Extreme waarden berekenen

Weet je van een functie de formule, dan kun je met de GR de coördinaten van toppen berekenen.

Werkschema: extreme waarden van een functie *f* berekenen met de GR

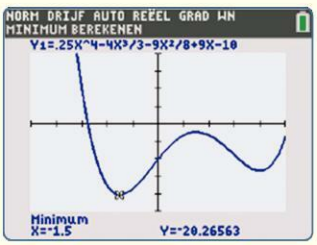
1. Voer de formule in bij y_1.
2. Gebruik de opties maximum en/of minimum bij het berekenen van de extreme waarden.
3. Noteer de extreme waarden in de vorm min. is $f(...) = ...$ of max. is $f(...) = ...$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 1\frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{8}x^2 + 9x - 10$.
De functie heeft drie extreme waarden.
Bereken de extreme waarden. Rond af op twee decimalen.

Uitwerking
Voer in $y_1 = \frac{1}{4}x^4 - 1\frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{8}x^2 + 9x - 10$.
De optie minimum geeft $x = -1{,}5$ en $y \approx -20{,}27$.
De optie maximum geeft $x = 1{,}5$ en $y \approx -2{,}27$.
De optie minimum geeft $x = 4$ en $y \approx -13{,}33$.
min. is $f(-1{,}5) \approx -20{,}27$
max. is $f(1{,}5) \approx -2{,}27$
min. is $f(4) \approx -13{,}33$

Je kunt $1\frac{1}{3}$ invoeren als $\frac{4}{3}$ en $1\frac{1}{8}$ als $\frac{9}{8}$.



© Noordhoff Uitgevers

65

Gegeven is de functie $f(x) = -0{,}3x^4 + 0{,}4x^3 + 15x^2 - 30x - 50$.
De functie heeft drie extreme waarden.

a Plot de grafiek. Neem x tussen -10 en 10 en y tussen -200 en 300.

b Bereken de extreme waarden.

66

Gegeven is de functie $f(x) = 1\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 40x + 28$.
De functie heeft twee extreme waarden.

a Plot de grafiek. Neem x tussen -10 en 10 en y tussen -100 en 100.

b Bereken de extreme waarden. Rond af op twee decimalen.

A67

De functie $f(x) = -x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + 36x + 25$ heeft twee extreme waarden.

a Bereken die extreme waarden.

b De functie $g(x) = \frac{1}{5}x^4 + x^3 - 9\frac{1}{7}x^2 - 50x + 75$ heeft drie extreme waarden.
Bereken die extreme waarden. Rond af op twee decimalen.

A68

De functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2\frac{1}{4}x^2 + 5x + p$ heeft een maximum van $6\frac{1}{2}$ voor $x = 1$ en twee minima.
Bereken deze minima. Rond zo nodig af op twee decimalen.

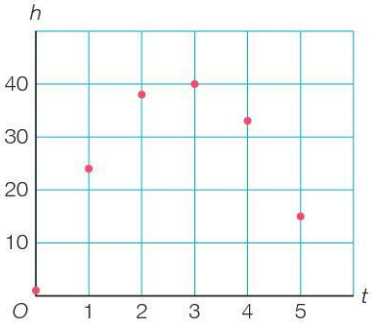
A69

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ heeft de toppen A en B.
De lijn k gaat door A en B.
Stel een vergelijking op van k.

070

Bij een experiment wordt een tennisbal weggeslagen. Op verschillende tijden wordt de hoogte van de bal gemeten. Zie de tabel met de tijd t in seconden en h de hoogte van de bal in meter. In de figuur eronder zijn de punten van de tabel in een assenstelsel getekend.

t	0	1	2	3	4	5
h	1	24	38	40	33	15



figuur 4.18

Op grond van deze grafiek gaat men uit van een formule van de vorm $h = at^2 + bt + 1$.

a Gebruik de gegevens van $t = 1$ en $t = 3$ om aan te tonen dat geldt $a + b = 23$ en $3a + b = 13$.

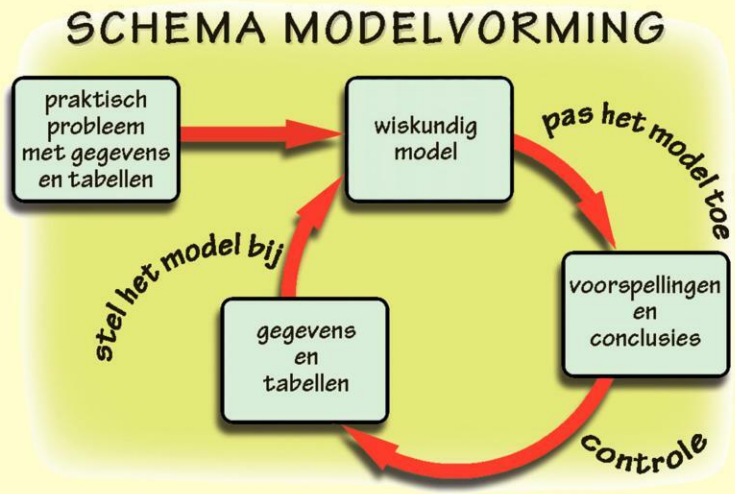
b Los het stelsel $\begin{cases} a + b = 23 \\ 3a + b = 13 \end{cases}$ op.

c Gebruik de gevonden waarden van a en b om de hoogte op $t = 5$ te berekenen.
Klopt dit met de tabel?

© Noordhoff Uitgevers

Theorie C Wiskundig model

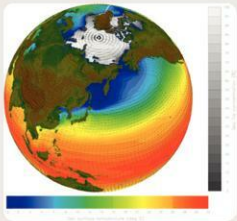
In opgave 70 heb je een formule opgesteld bij de hoogte van een tennisbal. Zo kreeg je een **wiskundig model** van de hoogte als functie van de tijd. De opgestelde formule blijkt niet helemaal te kloppen met alle punten van de tabel. Dat kan liggen aan meetfouten. Als er een structurele afwijking is, dan kun je proberen het model bij te stellen, zodat de formule beter past bij de meetwaarden. Daarna kun je de nieuw opgestelde formule weer vergelijken met de punten van de tabel. Dit proces kun je zo nodig nog enkele keren herhalen. Zie het schema modelvorming hieronder.



figuur 4.19 Bij het werken met wiskundige modellen moet je voortdurend rekening houden met de verschillende elementen uit dit schema modelvorming.

INFORMATIEF

Klimaatmodellen



Hét instrument om voorspellingen over klimaatveranderingen te doen, is een computermodel. Een model is een vereenvoudigde voorstelling van een complex systeem, in dit geval van het aardoppervlak, de atmosfeer, de oceanen en de processen die er werkzaam zijn. Klimaatmodellen zijn niets anders dan computersystemen (lees: software) van ingewikkelde wiskundeformules gebaseerd op de wetten van de fysica, de chemie en de beweging van vloeistoffen en gassen. Wetenschappers voeren verschillende gegevens in het klimaatmodel in om te kijken hoe ons klimaat zou reageren op bijvoorbeeld een verdubbeling van CO_2 in de atmosfeer, of hoe het gat in de ozonlaag van invloed is op het klimaat.

Bron: Climatechallenge.be

© Noordhoff Uitgevers

Voorbeeld

Bij het afschieten van een vuurwerkpijl heeft men de hoogte gemeten als functie van de tijd. Zie de tabel met t de tijd in seconden en h de hoogte in meter.

t	0	1	2	3	4	5	6
h	0	5	15	26	30	25	0

De onderzoekers gaan uit van een formule van de vorm $h = at^3 + bt^2$.
Gebruik de gegevens van $t = 1$ en $t = 5$ om a en b te berekenen.

Uitwerking

$t = 1$ en $h = 5$ invullen geeft $a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 = 5$ oftewel $a + b = 5$.
$t = 5$ en $h = 25$ invullen geeft $a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 = 25$ oftewel
$125a + 25b = 25$, dus $5a + b = 1$.

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 5a + b = 1 \end{cases} \; \underline{\;-\;}$$
$$-4a = 4$$
$$a = -1$$
$$a + b = 5 \;\Big\}\; -1 + b = 5$$
$$b = 6$$

Dus $a = -1$ en $b = 6$.

71 Zie het voorbeeld.

a Teken de punten van de tabel en teken door deze punten een vloeiende kromme.
Hoe kun je aan de grafiek zien dat je waarschijnlijk niet met een formule van de vorm $h = at^2 + bt$ hebt te maken?

In het voorbeeld is de formule $h = -t^3 + 6t^2$ gevonden.

b Onderzoek welke punten van de tabel niet overeenkomen met deze formule.

c Welke maximale hoogte van de vuurwerkpijl vind je met de formule? Voor welke waarde van t wordt deze maximale hoogte bereikt?

In de rest van de opgave gaan we uit van de gegevens van $t = 2$ en $t = 4$ van de tabel en een formule van de vorm $h = at^3 + bt^2$.

d Welke formule van h vind je als je de gegevens van $t = 2$ en $t = 4$ gebruikt?

e Welke maximale hoogte vind je met deze formule? Op welk tijdstip komt de vuurpijl volgens deze formule weer op de grond?

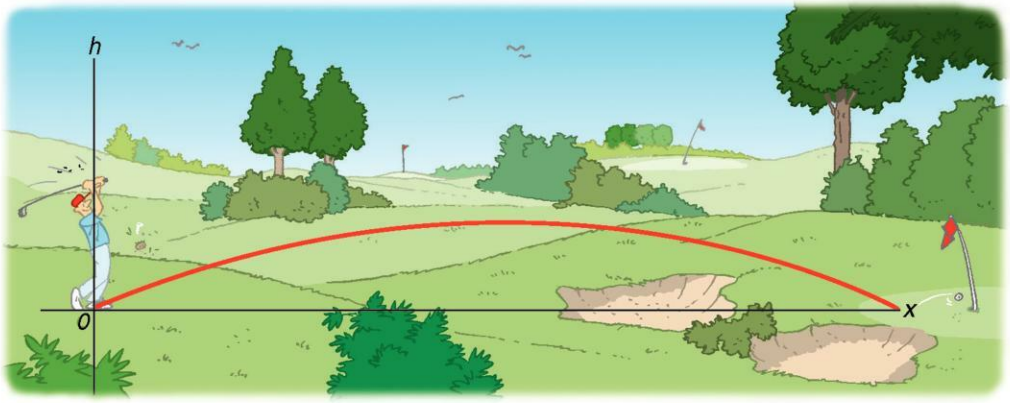
f Welke formule hoort volgens jou het beste bij de tabel, die van het voorbeeld of die van vraag d?

© Noordhoff Uitgevers

72

Bij het bestuderen van de baan van een golfbal heeft men de tabel hiernaast opgesteld.
Hierin zijn x en h in meter. Zie ook de figuur hieronder.

x	0	10	25	50	60
h	0	3,5	7,0	7,5	6,0



figuur 4.20

Omdat men aanneemt dat de baan een parabool is, gaat men uit van het model $h = ax^2 + bx$.

a Bereken a en b door uit te gaan van de gegevens bij $x = 10$ en $x = 60$.

b Hoe hoog komt de bal maximaal volgens de gevonden formule?

c Hoeveel meter vanaf de afslag komt de bal volgens de gevonden formule weer op de grond?

d De formule komt niet overeen met één van de meetwaarden van de tabel.
Voor welke waarde van x is dat? Hoeveel procent wijkt de hoogte die de formule geeft af van de gemeten waarde?

73

Bij het opstellen van een formule van de hoogte waarop een vuurwerkpijl is, gaat men uit van het model $h = at^3 + bt^2$. Hierin is h de hoogte in meter en t de tijd in seconden. De pijl wordt afgeschoten op $t = 0$ en komt op $t = 8$ weer op de grond. Op $t = 5$ is de pijl op een hoogte van 75 meter.

a Bereken met deze gegevens de waarden van a en b.

b Schets de grafiek bij de gevonden formule.

c Na hoeveel seconden is de pijl op het hoogste punt? Op welke hoogte is de pijl dan?

d Metingen geven aan dat, afgerond op één decimaal, de pijl gedurende 3,7 seconden hoger is dan 50 meter.
Onderzoek of dit overeen komt met de gevonden formule.

E74 *

Van een balkvormige doos heeft de bodem een oppervlakte van 8 cm^2. De oppervlakte van de voorkant is 6 cm^2 en die van de zijkant is 3 cm^2. Hoeveel cm^3 is de inhoud van de doos?

© Noordhoff Uitgevers

A75

In een laboratorium begint op 1 september om 0:00 uur een experiment met 200 miljoen bacteriën. Uit metingen blijkt dat het aantal bacteriën op 1 september met 7 miljoen afneemt en op 6 september toeneemt van 285 miljoen tot 368 miljoen.
De laborant neemt op grond van deze metingen aan dat het aantal bacteriën wordt gegeven door een model van de vorm $N = at^3 + bt + 200$.
Hierin is N het aantal in miljoenen en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 september om 0:00 uur.

a Toon aan dat er waarden van a en b zijn waarmee de formule overeenkomt met alle gegeven meetwaarden.

b Op welke datum neemt volgens de gevonden formule het aantal bacteriën voor het eerst met meer dan 200 miljoen toe?

c Maak een schets van de grafiek bij de formule waaruit blijkt dat er een tijdstip is waarop het aantal bacteriën minimaal is en bereken het minimale aantal bacteriën.

A76

Een thermosfles wordt getest door deze te vullen met kokend water. Daarna wordt op verschillende tijdstippen de temperatuur van het water in de fles gemeten. Zie de tabel, waarin T de temperatuur in °C is na t minuten.

t	0	9	19	31	46	65
T	100	90	80	70	60	50

a Licht toe dat bij de tabel geen lineair verband hoort.

De onderzoeker gaat uit van een model van de vorm $T = a \cdot b^t + c$.
Omdat de omgevingstemperatuur 20 °C is, neemt hij $c = 20$.

b Licht toe dat uit $t = 0$ en $T = 100$ volgt dat $a = 80$. Gebruik dat $b^0 = 1$.

c Gebruik de formule $T = 80 \cdot b^t + 20$ en het gegeven dat na 65 minuten de temperatuur 50 °C is om b te berekenen. Rond af op drie decimalen.

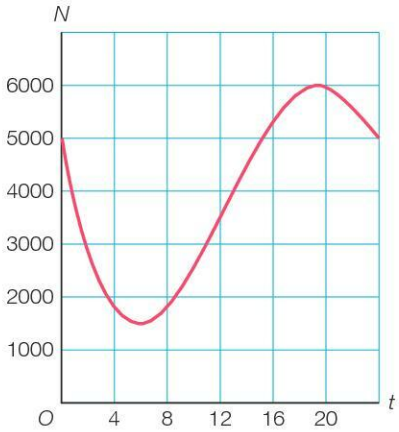
d Onderzoek of de bij c gevonden formule past bij de andere gegevens van de tabel.

e Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van het water in de thermosfles gedaald is tot 40 °C.

© Noordhoff Uitgevers

A77

In de figuur hiernaast is het aantal bezoekers van een internetsite op een doordeweekse dag uitgezet tegen de tijd in uren met $t = 0$ om 0:00 uur. Om zes uur 's morgens is het aantal bezoekers met 1450 minimaal en om zeven uur 's avonds is het aantal bezoekers met 6000 maximaal. Verder is om 12 uur het aantal bezoekers 3500. Door daarnaast gebruik te maken van het gegeven dat om 0 uur en om 24 uur het aantal bezoekers 5000 is, is het model $N = -3{,}35t^3 + 132t^2 - 1240t + 5000$ opgesteld.



figuur 4.21

a Onderzoek of deze formule goed past bij de gegevens. Bij welk van de genoemde tijdstippen vind je de grootste afwijking? Hoeveel procent wijkt in dat geval de formule af van het gegeven?

Een andere wiskundige komt met het model $N = 0{,}0577t^4 - 6{,}17t^3 + 174t^2 - 1430t + 5000$ voor het aantal bezoekers van de site.

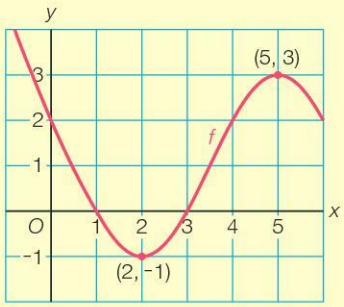
b Onderzoek op welk van de genoemde tijdstippen dit model een betere benadering geeft van de werkelijkheid dan het eerste model. En op welke tijdstippen geeft dit model een slechtere benadering?

© Noordhoff Uitgevers

Terugblik

Extreme waarden

Bij toppen van een grafiek horen extreme waarden. De y-coördinaat van een hoogste punt is een maximum en de y-coördinaat van een laagste punt is een minimum. In de figuur hiernaast is min. is $f(2) = -1$ en max. is $f(5) = 3$.
Je moet extreme (uiterste) waarden plaatselijk opvatten. Met behulp van de opties minimum en maximum op de GR kun je extremen berekenen.



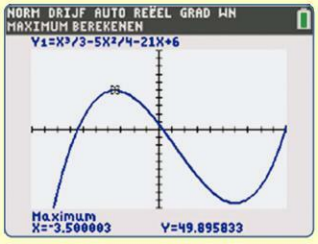
Extreme waarden berekenen met de GR

Bij het berekenen van extreme waarden met de GR

- voer je de formule in bij y_1
- gebruik je de opties maximum en minimum
- noteer je de extreme waarden zoals is afgesproken.

Is gegeven dat de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{4}x^2 - 21x + 6$ twee extreme waarden heeft, dan ga je als volgt te werk bij het berekenen van deze extremen.

- Voer in $y_1 = \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{4}x^2 - 21x + 6$.
- Zoek een geschikt venster, zodat de toppen te zien zijn. Neem bijvoorbeeld x tussen -10 en 10 en y tussen -100 en 100.
- De optie maximum geeft $x = -3{,}5$ en $y \approx 49{,}90$. De optie minimum geeft $x = 6$ en $y = -93$.
- Je krijgt max. is $f(-3{,}5) \approx 49{,}90$
  min. is $f(6) = -93$.



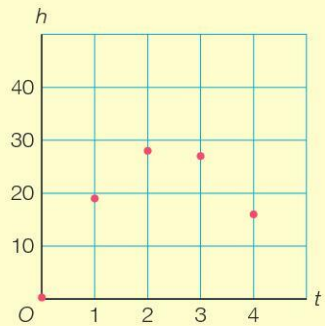
Wiskundige modellen gebruiken

Bij allerlei praktische problemen kunnen wiskundige modellen opgesteld worden. Vaak bestaat zo'n model uit een formule die een vereenvoudigde voorstelling van de werkelijkheid geeft. Met zo'n formule kunnen berekeningen worden uitgevoerd waarmee bijvoorbeeld voorspellingen worden gedaan.
Bij het wegtrappen van een voetbal is de hoogte van de bal op een aantal tijdstippen gemeten. Zie de tabel hiernaast, waarin t de tijd in seconden is en h de hoogte in meter. Door de punten uit te zetten in een assenstelsel kom je op het idee om uit te gaan van een formule van de vorm $h = at^2 + bt$. Gebruik je de gegevens bij $t = 1$ en $t = 4$, dan krijg je het stelsel

$$\begin{cases} a + b = 19 \\ 16a + 4b = 16 \end{cases} \text{ oftewel } \begin{cases} a + b = 19 \\ 4a + b = 4 \end{cases}$$

Oplossen van het stelsel geeft $a = -5$ en $b = 24$, dus de formule is $h = -5t^2 + 24t$.

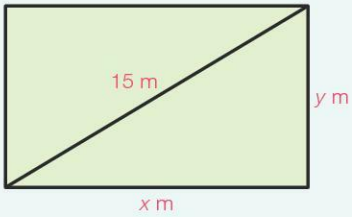
t	0	1	2	3	4
h	0	19	28	27	16



© Noordhoff Uitgevers

Eindopdracht Lengte van paden in tuinen

In deze opdracht onderzoek je wat de afmetingen van rechthoekige tuinen zijn. Daarbij is telkens de oppervlakte van de tuin bekend. Ook is gegeven welke lengte de getekende paden in de tuin hebben. Zo is van de rechthoekige tuin hiernaast de oppervlakte 108 m^2. De lengte van het getekende pad is 15 meter.
Je ziet dat de tuin x bij y meter is.



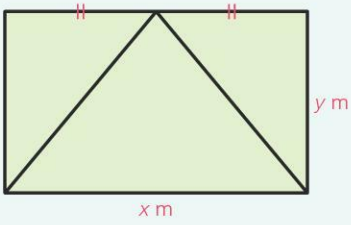
- Licht toe dat uit de gegevens volgt dat $y = \frac{108}{x}$.

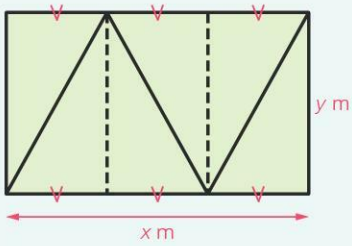
Door de stelling van Pythagoras te gebruiken, kun je de vergelijking $x^2 + \left(\frac{108}{x}\right)^2 = 225$ opstellen.

- Licht dit toe, herleid de vergelijking tot $x^4 - 225x^2 + 11\,664 = 0$ en los deze vergelijking exact op. Wat zijn de afmetingen van de tuin?

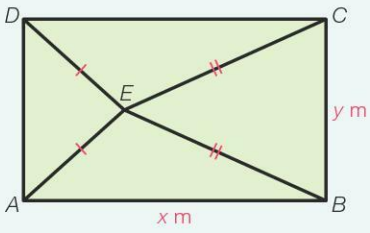
In de twee figuren hieronder zie je nog twee rechthoekige tuinen met paden. De tuin links heeft een oppervlakte van 96 m^2 en de totale lengte van de twee paden is 20 meter. De tuin rechts heeft een oppervlakte van 180 m^2 en de totale lengte van de drie paden is 39 meter.

- Stel bij deze tuinen vergelijkingen op waarmee je de afmetingen van de tuinen kunt berekenen. Los de vergelijkingen exact op. Wat zijn de afmetingen van de tuinen?





In de figuur hiernaast zie je de rechthoekige tuin $ABCD$.
Het punt E ligt zo in de tuin dat de paden AE en DE even lang zijn. Ook de paden BE en CE zijn even lang. Verder is BE twee keer zo lang als AE.
De oppervlakte van de tuin is 320 m^2 en de totale lengte van de paden is 60 meter.



- Bereken de afmetingen van de tuin in cm nauwkeurig.

© Noordhoff Uitgevers

Diagnostische toets

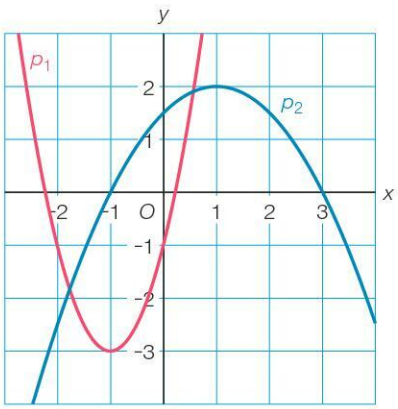
4.1 Kwadratische formules

1 Een parabool snijdt de x-as in de punten $(-3, 0)$ en $(5, 0)$ en gaat door het punt $(-1, 3)$.

a Bereken algebraïsch van de parabool de coördinaten van de top en van het snijpunt met de y-as.

b Schrijf de formule van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

2 Stel van de parabolen in figuur 4.22 de formule op in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.



figuur 4.22

3 De parabool $y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + 2$ gaat door het punt $(2, 8)$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.

4 Van de parabool $y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + c$ is $y_{top} = -\frac{3}{4}$.

a Bereken c.

b Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x-as.

4.2 Hogeregraadsvergelijkingen en ongelijkheden

5 Bereken exact de oplossingen.

a $3x^3 + 5 = 20$ **b** $5x^6 + 20 = 30$ **c** $(2x + 9)^5 = 243$

6 Los algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

a $8x^5 - 6 = 10$ **b** $\frac{1}{4}x^6 - 8 = 9$ **c** $10 - 4(x + 1)^7 = 20$

7 Bereken exact de oplossingen.

a $x^3 - 6x^2 = 7x$ **b** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **c** $x^4 + 10x^2 = 24$

8 Los algebraïsch op.

a $\frac{1}{3}(x + 1)^4 > 27$ **b** $x^3 - 4x^2 > 5x$

9 Los op. Rond af op twee decimalen.

a $x^3 - 2x < -x^2 + 1$ **b** $x^5 - 3x^3 > 2x + 1$

© Noordhoff Uitgevers

10 Harm schiet op oudjaarsavond vanaf zijn dakterras een Dream Rocket vuurpijl af. De hoogte waarop de pijl zich bevindt, is gegeven door de formule $h = -4{,}5t^2 + 80t + 12$. Hierin is h in meter en t in seconden. Gedurende hoeveel seconden is de pijl hoger dan 300 meter? Rond af op één decimaal.

4.3 Gebroken vormen

11 Geef van de grafieken van de volgende functies de formules van de asymptoten en schets de grafieken in aparte figuren.

a $f(x) = \frac{1}{x+4} - 3$ **b** $g(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ **c** $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

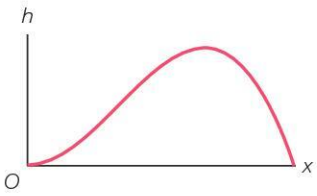
12 Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{4x^2-6}{x+3} = x$ **b** $\frac{x^2-1}{x+2} = \frac{x^2-1}{3x-6}$ **c** $\frac{x^2-6}{x^2+5} = \frac{4x+6}{x^2+5}$

4.4 Extreme waarden en wiskundige modellen

13 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4\frac{1}{2}x^2 + 8$. De functie heeft drie extreme waarden.
Bereken de extreme waarden.

14 Marc heeft een drone. Bij een van de vluchten laat Marc de drone opstijgen en 100 meter verder weer landen. Bij deze vlucht hoort een formule van de vorm $h = ax^2 + bx^3$. Zie figuur 4.23. In de formule zijn x en h in meter. Voor $x = 10$ is $h = 2{,}7$ en voor $x = 100$ is $h = 0$. Bereken de maximale hoogte van de drone in meter nauwkeurig.



figuur 4.23

© Noordhoff Uitgevers

Gemengde opgaven

1 Formules, grafieken en vergelijkingen

1 De lijn k met richtingscoëfficiënt -2 gaat door het punt $A(1, -4)$.
De lijn l gaat door de punten $B(-5, -1)$ en $C(1, 5)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

2 Gegeven zijn de lijnen k: $y = \frac{1}{2}x + a + 1$, l: $y = -1\frac{1}{2}x + b$ en m: $y = 3ax - 6a^2$.

a Voor welke a en b snijden k en l elkaar in het punt $A(12, -6)$?

b Bereken de coördinaten van het snijpunt van m met de y-as als l en m evenwijdig zijn.

c Voor welke $a \neq 0$ snijden k en m elkaar op de x-as?

3 Gegeven zijn de lijnen k: $3x - ay = b$ en l: $x + 3y = b$.

a Voor welke a en b snijden k en l elkaar in het punt $A(2, -1)$?

b De lijn k snijdt de y-as in het punt $B(0, 2)$ en de lijn l snijdt de x-as in het punt $C(4, 0)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

c Voor welke a en b zijn k en l evenwijdig en is de afstand tussen de snijpunten van k en l met de y-as gelijk aan 2?

4 Los op.

a $\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 2x + 5y = 17 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + 4y = 38 \end{cases}$

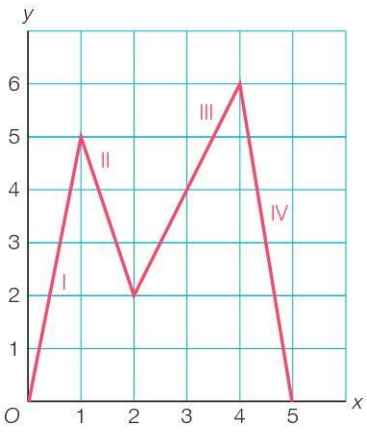
c $\begin{cases} x = 3y - 10 \\ y = 3x - 10 \end{cases}$

d $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = -1 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y = 5 \end{cases}$

5 Zie de figuur hiernaast.

a Stel van elk van de lijnstukken I tot en met IV de formule op.

b Luuk verlengt de lijnstukken I en IV. Hij beweert dat het snijpunt boven de lijn $y = 14$ ligt.
Onderzoek of Luuk gelijk heeft.



figuur G.1

6 Bij een sponsorloop kunnen de 30 leerlingen uit klas 4hd kiezen uit het lopen van 3 of van 5 kilometer.
Ze hebben in totaal 126 km gelopen.
Hoeveel leerlingen uit 4hd hebben de 5 kilometer gelopen?

© Noordhoff Uitgevers

7 De lijn k gaat door het punt $A(4, 8)$ en is evenwijdig met de lijn l: $x + 3y = 2$.
De lijn m gaat door de punten $B(2, 8)$ en $C(6, 6)$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt S van k en m.

8 Bereken exact de oplossingen.

a $3(\frac{1}{2}x - 4)^2 - 10 = 20$

b $(2x + 3)^2 = 10x + 29$

c $(2x - 1)(x + 6) - 7 = (x + 4)(x - 1)$

d $(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2 = 8x$

e $2x^2 + 5 = 9x$

f $(x^2 - 8)(x^2 + 8) = (x^2 - 18)(x^2 - 2)$

9 Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$ en $g(x) = 2x^2 - 4x$.

a Schets de grafieken van f en g in één figuur.

b Bereken de nulpunten van f. Rond af op twee decimalen.

c Onderzoek met een berekening of de top van de grafiek van f op de grafiek van g ligt.

d De horizontale lijn $y = 4$ snijdt de grafieken van f en g van links naar rechts in de punten A, B, C en D.
Onderzoek of de lijnstukken AB en CD even lang zijn.

e De top van de grafiek van $h(x) = 2x^2 - 4x + c$ ligt op de grafiek van f.
Bereken c.

f De horizontale lijn door de top van de grafiek van g snijdt de grafiek van f in de punten E en F.
Bereken de lengte van het lijnstuk EF. Rond af op twee decimalen.

10 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 3\frac{1}{2}x^2 - 12x$. De functie heeft drie extreme waarden.

a Bereken de extreme waarden. Rond zo nodig af op twee decimalen.

b De lijn $y = a$ met a een geheel getal snijdt de grafiek van f in de punten A en B, waarbij $AB < 1\frac{1}{2}$.
Onderzoek welke waarden a kan aannemen.

11 Harm en Marc rijden op hun racefiets van Noord-Holland naar Friesland over de 30 kilometer lange Afsluitdijk. Harm vertrekt om 8:00 uur en rijdt met een constante snelheid van 30 km/uur. Marc vertrekt 5 minuten na Harm en rijdt met een constante snelheid van 33 km/uur. Voor Harm geldt de formule $s = \frac{1}{2}t$. Hierin is s in km en t de tijd in minuten met $t = 0$ om 8:00 uur.

a Licht de formule $s = \frac{1}{2}t$ toe.

b Bereken hoe laat Harm door Marc wordt ingehaald.

c Gerrit vertrekt om 8:00 uur op zijn pedelec uit Friesland richting Noord-Holland over de Afsluitdijk. Gerrit rijdt 42 km/uur.
Hoe laat komen Harm en Gerrit elkaar tegen?

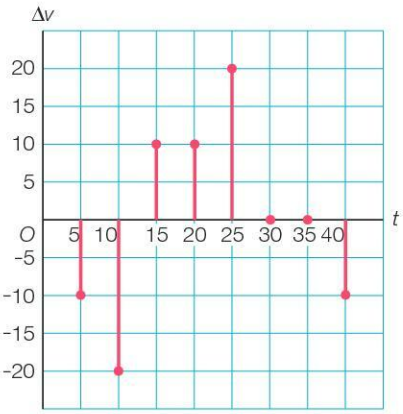
© Noordhoff Uitgevers

12 Dion en Jaap hebben meegedaan aan een hardloopwedstrijd. Het aantal hardlopers dat eerder dan Dion bij de finish kwam, is gelijk aan het aantal hardlopers dat na hem eindigde. Het aantal hardlopers dat eerder dan Jaap bij de finish kwam, is driemaal zo groot als het aantal hardlopers dat na hem eindigde. In de eindranglijst staan tussen Dion en Jaap tien andere deelnemers. Er zijn geen hardlopers tegelijk over de finish gekomen en iedereen is gefinisht.
Hoeveel hardlopers deden er mee aan deze wedstrijd?

2 Veranderingen

13 Hiernaast zie je een toenamediagram bij de snelheid in km/uur van een mountainbiker tijdens een klim gevolgd door een steile afdaling. Hierin is t de tijd in seconden. Op $t = 10$, dat is nog tijdens de klim, viel de mountainbiker in het zand naast het parcours.

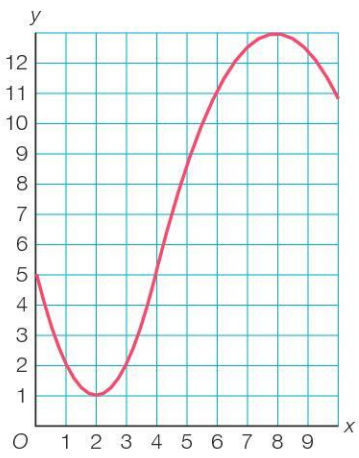
- **a** Wat weet je van de snelheid waarmee hij aan de klim begon op $t = 0$?
- **b** Teken een mogelijke grafiek bij de snelheid van de mountainbiker.
- **c** De mountainbiker beweert dat hij tijdens de hele afdaling sneller dan 40 km/uur ging. Onderzoek of hij gelijk kan hebben.
- **d** Teken een mogelijk toenamediagram op [0, 20] met $\Delta t = 2\frac{1}{2}$.



figuur G.2

14 [▸ WERKBLAD] Gegeven is de grafiek in de figuur hiernaast.

- **a** Welke soorten van stijgen en dalen kun je herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.
- **b** Geef een interval $[p, 10]$ waarop de gemiddelde verandering gelijk is aan 1.
- **c** Geef het kleinste interval $[a, b]$ met a en b gehele getallen waarop het differentiequotiënt gelijk is aan 0.
- **d** In de punten A en B van de grafiek is de helling van de grafiek gelijk aan 2.
  Geef de coördinaten van A en B.
- **e** Onderzoek of er een punt op de grafiek ligt waarin de helling van de grafiek gelijk is aan −7.

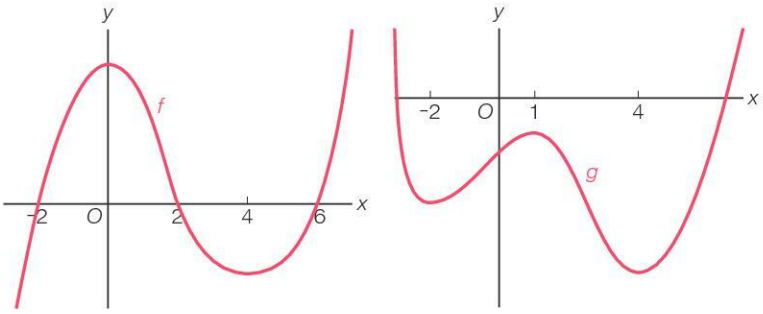


figuur G.3

© Noordhoff Uitgevers

15 Van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is het volgende bekend:
op $[0, 4]$ is het differentiequotiënt van $f(x)$ gelijk aan 2
op $[2, 3]$ is het differentiequotiënt van $f(x)$ gelijk aan 4.
Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[1, 5]$.

16 [▸ WERKBLAD] In figuur G.4 zie je de grafieken van de functies f en g.

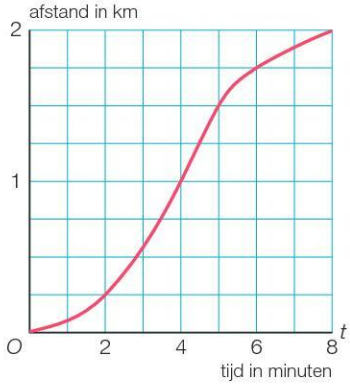


figuur G.4

a Schets de hellinggrafieken van f en g.
b De grafiek van f is de hellinggrafiek van de functie h.
Schets een mogelijke grafiek van h.

17 [▸ WERKBLAD] In het Belgische Malmedy is bij het NK berglopen een parcours uitgezet met flinke hoogteverschillen. In figuur G.5 zie je de tijd-afstandgrafiek van Bjorn over de eerste twee kilometer.

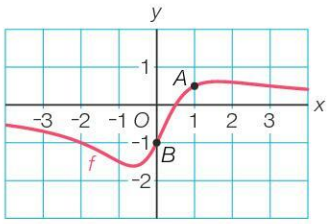
a Bereken in gehele km/uur de gemiddelde snelheid over deze twee kilometer.
b Schat in gehele km/uur de snelheid op $t = 2$.
c Op welk tijdstip is de snelheid maximaal? Schat deze snelheid in gehele km/uur.
d Op welke tijdstippen is de snelheid gelijk aan 12 km/uur?



figuur G.5

18 In figuur G.6 zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$. De lijn k raakt de grafiek in het punt A met $x_A = 1$ en de lijn l raakt de grafiek in het snijpunt B van de grafiek met de y-as.

a Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l. Rond af op twee decimalen.
b Bereken voor welke x de helling van de grafiek gelijk is aan $-0{,}5$. Rond zo nodig af op twee decimalen.



figuur G.6

© Noordhoff Uitgevers

19 Een motorboot vaart weg. Gedurende de eerste acht seconden wordt de afgelegde afstand gegeven door de formule $s = 2t\sqrt{t+1}$.
Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.

a Bereken de snelheid op $t = 3$.

Na acht seconden verandert de snelheid niet meer.

b Bereken na hoeveel seconden de boot 126 meter heeft afgelegd.

c Schets de grafiek van de afgelegde afstand voor de eerste 20 seconden.

d Schets de grafiek van de snelheid v voor de eerste 20 seconden.

20 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 - 3x^2$

b $g(t) = -5t^6 + 6t^3 - 3$

c $h(x) = (3x - p)(3x + p)(9x^2 + p^2)$

d $k(q) = (2q^2 - 1)^2$

21 Differentieer.

a $f(x) = 4x^2(3x - 2)(x + 5)$

b $g(x) = (x^2 + 2x)^2 - (2x - 3)^2$

c $h(x) = x^5 + p^4 + q^3$

d $s(t) = (2t^2 - 4)^2 + 4t^4 + 16t^2$

22 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7x - 2$.

a Bereken de formule van de hellinggrafiek van f.

b Bereken algebraïsch in welke punten van de grafiek van f de helling gelijk is aan 2.

23 Voor het alcoholpromillage in het bloed van een proefpersoon heeft een onderzoeker de formule $P = 0{,}0025t^3 - 0{,}08t^2 + 0{,}64t$ opgesteld.
Hierin is t de tijd in kwartieren na het innemen van de alcohol en P het alcoholpromillage in het bloed van de proefpersoon. De formule geldt voor de eerste vier uren.

a Schets de grafiek van P.

b Na hoeveel minuten is het alcoholpromillage maximaal?

c Bereken $\left[\frac{dP}{dt}\right]_{t=7}$. Wat is de betekenis van dit getal?

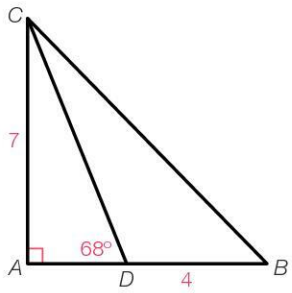
Het is verboden met een alcoholpromillage van meer dan 0,5 een auto te besturen.

d Na hoeveel kwartier mag de proefpersoon weer autorijden?
Met welke snelheid neemt het alcoholpromillage dan af?

© Noordhoff Uitgevers

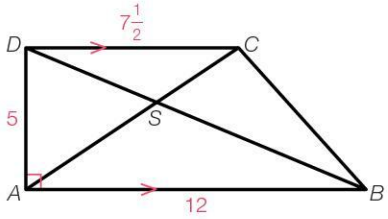
3 Hoeken en afstanden

24 Van driehoek ABC in figuur G.7 is $\angle A = 90°$ en $AC = 7$. Het punt D ligt zo op AB dat $BD = 4$ en $\angle ADC = 68°$.
Bereken $\angle BCD$.



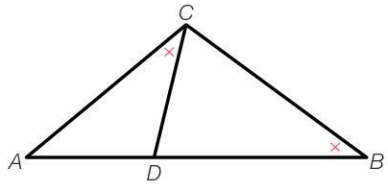
figuur G.7

25 Gegeven is het rechthoekig trapezium $ABCD$ in figuur G.8 met $AB = 12$, $AD = 5$ en $CD = 7\frac{1}{2}$.
S is het snijpunt van AC en BD.
Toon aan dat $\triangle ADS$ gelijkbenig is.



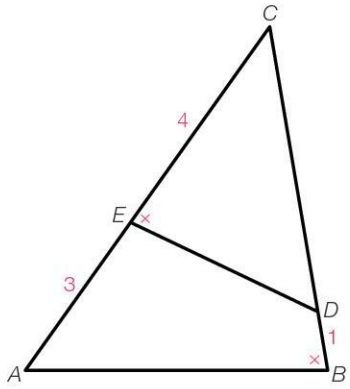
figuur G.8

26 Gegeven is driehoek ABC in figuur G.9.
Het punt D ligt zo op AB dat $\angle ACD = \angle CBD$.
Toon aan dat $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$.



figuur G.9

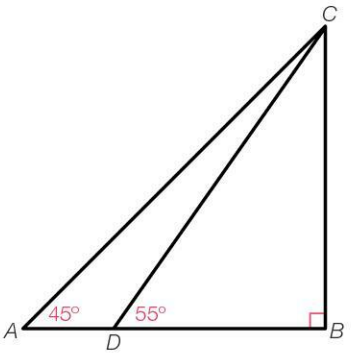
27 Gegeven is driehoek ABC met $AC = 7$. De punten D en E liggen zo op BC en AC dat $AE = 3$, $BD = 1$ en $\angle ABC = \angle CED$.
Zie figuur G.10.
Bereken CD. Rond af op één decimaal.



figuur G.10

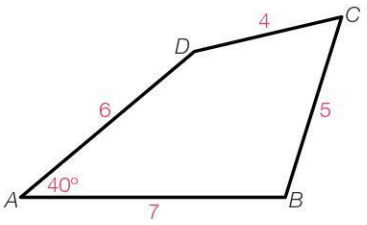
© Noordhoff Uitgevers

28 Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur G.11 met $\angle A = 45°$. Het punt D ligt op AB waarbij $\angle BDC = 55°$. Verder is $BD = AD + 2$. Bereken CD. Rond af op twee decimalen.



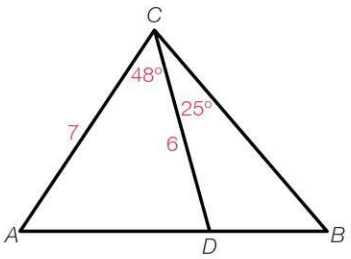
figuur G.11

29 Van vierhoek $ABCD$ is $AB = 7$, $BC = 5$, $CD = 4$ en $AD = 6$. Verder is $\angle A = 40°$.
Bereken $\angle C$.



figuur G.12

30 Bereken de omtrek van $\triangle ABC$ in figuur G.13. Rond af op twee decimalen.

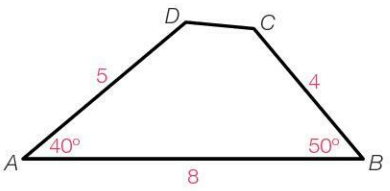


figuur G.13

31 Gegeven is vierhoek $ABCD$ in de figuur hiernaast. $\angle A = 40°$, $\angle B = 50°$, $AB = 8$, $AD = 5$ en $BC = 4$.

a Bereken AC. Rond af op twee decimalen.

b Bereken CD. Rond af op twee decimalen.



figuur G.14

32 In deze opgave is $a > 0$. Herleid.

a $\sqrt{4\frac{1}{2}} + \sqrt{12\frac{1}{2}} + \sqrt{24\frac{1}{2}}$

b $2\sqrt{\frac{2}{3}} + 3\sqrt{24}$

c $(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3})^2$

d $\sqrt{\frac{5}{9}a^2} + \sqrt{20a^2}$

e $3\sqrt{800} - 30\sqrt{8}$

f $\dfrac{6\sqrt{12}}{4\sqrt{\frac{1}{3}}}$

© Noordhoff Uitgevers

33 Los exact op.

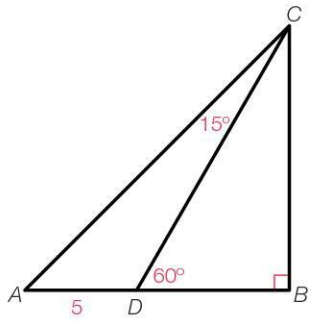
a $x\sqrt{3} - 8 = \sqrt{48}$

b $3x\sqrt{24} - x\sqrt{6} = \sqrt{18}$

c $(x - \sqrt{2})^2 = (x + 2)^2 - 3$

34 Van driehoek ABC is $\angle A = 60°$ en $\angle B = 45°$.
De oppervlakte is 12.
Bereken de omtrek van driehoek ABC. Rond af op twee decimalen.

35 Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur G.15. Het punt D ligt op AB waarbij $\angle BDC = 60°$, $\angle ACD = 15°$ en $AD = 5$.
Bereken exact de oppervlakte van driehoek ADC.

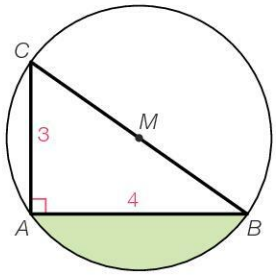


figuur G.15

36 Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur G.16 met $\angle A = 90°$, $AB = 4$ en $AC = 3$.
Het midden M van BC is het middelpunt van de cirkel die door A, B en C gaat.

a Bereken de omtrek van het groene gebied.
Rond af op twee decimalen.

b Bereken de oppervlakte van het groene gebied.
Rond af op twee decimalen.



figuur G.16

4 Werken met formules

37 **a** Een parabool met top (5, 8) snijdt de x-as in het punt (9, 0).
Bereken de coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y-as.

b Een parabool snijdt de x-as in de punten (5, 0) en (9, 0) en gaat door het punt (3, −6).
Stel de formule op van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

c Een parabool gaat door de punten (−4, 2), (1, 12) en (2, 2).
Bereken de coördinaten van de top van de parabool.

d Een parabool snijdt de x-as in het punt (4, 0) en de y-as in het punt (0, 6). Verder gaat de parabool ook nog door het punt (6, 1).
Stel de formule op van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

© Noordhoff Uitgevers

38 Een vuurpijl wordt verticaal omhoog geschoten. De formule van de hoogte waarop de vuurpijl zich bevindt is van de vorm $h = at^2 + bt$ met h in meter en t in seconden. De maximale hoogte van 105,8 meter wordt na 4,6 seconde bereikt.

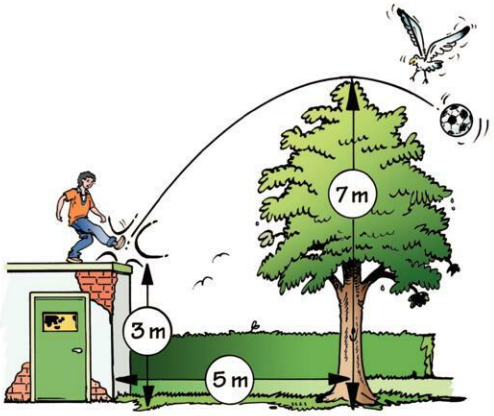
a Bereken de hoogte van de pijl na 2 seconden.

b Bereken de gemiddelde snelheid van de pijl op het tijdsinterval $[0, \frac{1}{10}]$.

c Bereken gedurende hoeveel seconden de pijl hoger is dan 75 meter. Rond af op één decimaal.

39 Parabool p kan worden beschreven door de formules $y = a(x - d)(x - 3)$, $y = a(x - 1)^2 + q$ en $y = ax^2 + 2\frac{1}{2}x + c$. Stel de formule op van p in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

40 Timo trapt een bal van het dak van een schuur. De bal beschrijft een paraboolbaan en gaat in het hoogste punt juist over een boom die 5 meter van de schuur staat. De boom is 7 meter hoog en de schuur is 3 meter hoog. Bereken op welke afstand van de schuur de bal op de grond komt. Geef je antwoord in dm nauwkeurig.



figuur G.17

41 Bereken exact de oplossingen.

a $6x^3 = 216$

b $2x^4 + 5 = 17$

c $(3x + 1)^5 = -32$

d $81(1 - 4x)^4 = 1$

42 Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $x^4 - 4x^2 + 3 < 2 - x^2$

b $(2 - x^2)(x^3 + 1) > x + 1$

43 Los algebraïsch op.

a $\frac{1}{2}(2x - 1)^5 < -16$

b $(x^2 - 4)(x^2 + 4) > -6x^2$

44 Bereken exact de oplossingen.

a $x^4 + 14 = 9x^2$

b $x^3 = x^2 + 20x$

c $4x^4 + 44x^2 - 48 = 0$

d $2x^2 - x^3 = x$

e $(x^2 + 1)(x - 3) = 5x - 3$

f $(x^2 - 6)(x^2 + 6) = 5x^2$

© Noordhoff Uitgevers

45 Vroeger hadden geleerden geen problemen met het optellen van een inhoud bij een oppervlakte of een lengte. Zo was van een kubus met ribbe 2 de som van de inhoud, de oppervlakte en de ribben gelijk aan 56.

a Laat met een berekening zien hoe men aan de som 56 kwam.

Van een kubus is de som van de inhoud en drie keer de oppervlakte gelijk aan 144 ribben.

b Bereken exact de ribbe van deze kubus.

46 De grafiek van de functie f ontstaat uit die van $y = \frac{1}{x}$ na de translatie $(3, 4)$.

Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en de lijn $y = 2x - 1$.

47 Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+5}$

b $\frac{x^2+2x}{x^2+3} = \frac{4-x}{x^2+3}$

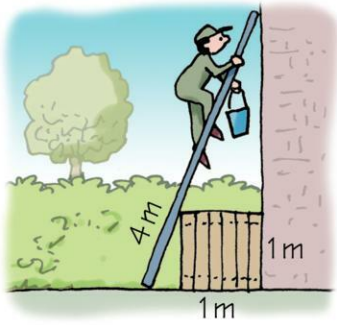
c $\frac{18x-6x^3}{2x^2+1} = 0$

d $\frac{7}{3x^2-5x} = \frac{2}{x^2-3x}$

e $\frac{2x^2-8}{3x+4} = \frac{2x^2-8}{x-2}$

f $\frac{4+2x}{x} = \frac{12}{x+1}$

48 Een schilder zet een 4 meter lange ladder tegen een huis. Voor het huis staat een berging van 1 meter breed en 1 meter hoog. De ladder staat op de grond, raakt de berging en staat tegen het huis. Zie figuur G.18. We vragen ons af hoe hoog de ladder tegen het huis staat.



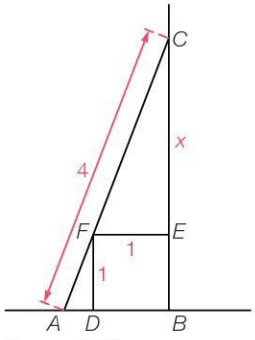
figuur G.18

In figuur G.19 zie je een schets van de situatie. Hierin is $CE = x$ gesteld.

a Toon met gelijkvormigheid aan dat $AD = \frac{1}{x}$.

b Stel een vergelijking op met behulp van de stelling van Pythagoras.

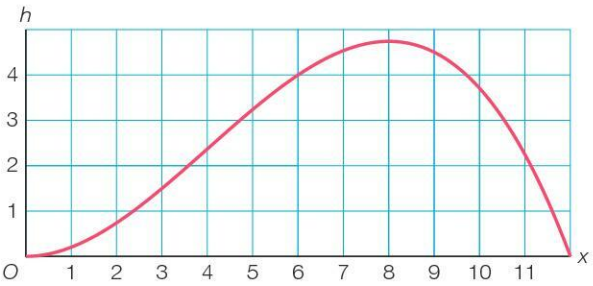
c Bereken hoe hoog de ladder tegen het huis staat. Rond af op gehele cm.



figuur G.19

© Noordhoff Uitgevers

49 In Delft staat de grootste golfmachine ter wereld. Onderdeel van deze machine is een betonnen goot van 300 meter lang, 5 meter breed en 9,5 meter diep. In deze goot worden golven opgewekt waarmee dijken en andere zeeweringen kunnen worden getest.
In figuur G.20 zie je een doorsnede van een golf.



figuur G.20

Om bij deze golf een formule op te stellen, gaan de onderzoekers uit van het model $h = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hierin zijn h en x in meter.

a Licht toe dat $d = 0$.

Om c te berekenen, gebruik je dat de helling van de grafiek in de oorsprong gelijk is aan 0.

b Bereken de formule van de hellinggrafiek en toon aan dat $c = 0$.

Om a en b te berekenen, kun je roosterpunten gebruiken waar de grafiek doorheen gaat.

c Bereken a en b.

d Bereken in cm nauwkeurig de maximale hoogte van de golf.

Metingen geven aan dat bij het passeren van de golf het water gedurende 0,7 seconde hoger staat dan 4 meter en dat de voortplantingssnelheid van de golf gelijk is aan 5 m/s.
Uit het gegeven dat het water gedurende 0,7 seconde hoger staat dan 4 meter kun je met het gevonden model de voortplantingssnelheid van de golf berekenen.

e Hoeveel procent wijkt de berekende snelheid af van de gemeten snelheid?

© Noordhoff Uitgevers

Overzicht GR-modules

Module	
Berekeningen op het basisscherm • Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen • De toets Ans en fouten verbeteren • Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen • Decimaal getal omzetten in breuk	havo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 18
Formules, grafieken en tabellen • Formules invoeren en grafieken plotten • Functiewaarden berekenen op het grafiekenscherm en op het basisscherm • Tabellen maken en de tabelinstelling veranderen	havo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 39
Toppen en snijpunten • Toppen en snijpunten van grafieken • Berekenen van nulpunten	havo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 42
Helling • De richtingscoëfficiënt van een raaklijn	havo B deel 1 hoofdstuk 2 bladzijde 78
Hellinggrafieken • Hellinggrafieken plotten	havo B deel 1 hoofdstuk 2 bladzijde 84
Het gebruik van Ans en lettergeheugens • De toets Ans • Het gebruik van lettergeheugens	havo B deel 1 hoofdstuk 3 bladzijde 100
Allerlei • Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR	

© Noordhoff Uitgevers

Overzicht routes

1 Formules, grafieken en vergelijkingen

1.1 Lineaire verbanden

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
⍞ basis																	
⊙ midden																	
∗ uitdagend																	

1.2 Een lijn door twee gegeven punten

opgave	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
⍞ basis															
⊙ midden															
∗ uitdagend															

1.3 Stelsels vergelijkingen

opgave	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
⍞ basis														
⊙ midden														
∗ uitdagend														

47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

1.4 Kwadratische verbanden

opgave	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
⍞ basis											
⊙ midden											
∗ uitdagend											

72	73	74	75	76	77	78	79	80	81

© Noordhoff Uitgevers

2 Veranderingen

2.1 Toenamediagrammen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
⏍ basis															
⊙ midden															
∗ uitdagend															

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

2.2 Differentiequotiënten en snelheden

opgave	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
⏍ basis													
⊙ midden													
∗ uitdagend													

41	42	43	44	45	46

2.3 Raaklijnen en hellinggrafieken

opgave	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
⏍ basis																	
⊙ midden																	
∗ uitdagend																	

2.4 Differentiëren

opgave	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
⏍ basis																
⊙ midden																
∗ uitdagend																

© Noordhoff Uitgevers

3 Hoeken en afstanden

3.1 Berekeningen in driehoeken

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9
⍁ basis									
⊙ midden									
∗ uitdagend									

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

3.2 De sinusregel en de cosinusregel

opgave	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
⍁ basis												
⊙ midden												
∗ uitdagend												

32	33	34	35	36	37	38	39

3.3 Vergelijkingen in de meetkunde

opgave	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
⍁ basis														
⊙ midden														
∗ uitdagend														

54	55	56	57	58	59	60	61	62

3.4 Lengte, omtrek en oppervlakte

opgave	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
⍁ basis											
⊙ midden											
∗ uitdagend											

© Noordhoff Uitgevers

4 Werken met formules

4.1 Kwadratische formules

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
◘ basis													
⊙ midden													
∗ uitdagend													

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

4.2 Hogeregraadsvergelijkingen en ongelijkheden

opgave	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
◘ basis														
⊙ midden														
∗ uitdagend														

42	43	44	45	46	47	48	49	50	51

4.3 Gebroken vormen

opgave	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
◘ basis										
⊙ midden										
∗ uitdagend										

4.4 Extreme waarden en wiskundige modellen

opgave	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
◘ basis																
⊙ midden																
∗ uitdagend																

© Noordhoff Uitgevers

Trefwoordenregister

A
aantonen *124*
abc-formule *35*
afgeleide *86*
afgeleide functie *86*
afnemende daling *55*
afnemende stijging *54*
algebraïsch oplossen *36*
asymptoot *156*

B
beeld *40*
bereken exact de oplossing *36*
bergparabool *39*
bewijs van *abc*-formule *38*
bewijzen *109*

C
constante daling *55*
constante stijging *55*
cosinusregel *114*

D
dalend *53*
dalparabool *39*
differentie *18*
differentiequotiënt *67, 68, 70*
differentiëren *87*
discriminant *36*

E
elimineren *27*
evenwijdig *12*
extreem *162*
extreme waarde *162*

F
factor voor het wortelteken brengen *119*
F-hoeken *104*
functievoorschrift *40*
functiewaarde *40*

G
gebroken functie *156*
gebroken vergelijking *158*
gelijkvormig *103*
gemiddelde snelheid *66*
gemiddelde verandering *66*
gesloten interval *53*
getallenpaar *25*
grafisch-numeriek oplossen *153*

H
helling van grafiek *78*
helling van lijn *11*
hellingfunctie *80*
hellinggrafiek *80*
hogeremachtswortel *147*
horizontale asymptoot *156*
hyperbool *156*

I
interval *53*

K
klimaatmodellen *165*
kruislings vermenigvuldigen *158*
kwadratisch verband *39*
kwadratische vergelijking *35*

L
Leibniz, Gottfried Wilhelm *78*
lineair verband *11*
lineaire formule *11*
lineaire functie *11*
lineaire vergelijking met twee variabelen *24*

M
maximum *162*
minimum *162*

N
nulpunt *41*
numerieke afgeleide *88*

O
open interval *53*
oplossing invoeren *158*
origineel *40*
overstaande hoeken *104*

P
parabool *39, 139*
plotten *39*
product-som-methode *34*

R
raaklijn *75*
raken *75*
reële getallen *54*
regels voor de afgeleide *86, 88*
rekenregels voor wortels *118*
richtingscoëfficiënt *11, 18*
Rijksdriehoeksmeting *112*

S
sinusregel *109*
somregel voor het differentiëren *87*
standaardfunctie *156*
standaardgrafiek *156*
stapgrootte *58*
stelsel *27*
stijgend *53*
substitueren *32*

© Noordhoff Uitgevers

T
takken van hyperbool *156*
tijd-afstandformule *72*
toenamediagram *58*
toenemende daling *55*
toenemende stijging *54*
top van parabool *41, 141, 144*
translatie *157*
tweedegraadsvergelijking *35*
tweedemachtswortel *147*

U
uitdrukken in *20*
uiterste waarde *162*

V
vergelijking van lijn *19*
verticale asymptoot *156*
voldoen *25, 158*
vrijmaken *24*

W
wiskundig model *165*

Z
Z-hoeken *104*

© Noordhoff Uitgevers

Verantwoording

Illustraties: Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: Integra Software Services
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Colofon
Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Foto's
iStock: p. 6-7, 21, 48-49, 53, 91
Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 31
ANP Foto, Den Haag: p. 45, 50, 51, 134-135
Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 57, 71, 79, 184
Getty Images: p. 78
Dreamstime: p. 94-95, 131
(c) UCAR, Image courtesy Gary Strand, NCAR: p. 165
Shutterstock: p. 175

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlenen.

0 / 19

© 2019 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-57478-9

LEERBOEK | WISKUNDE B | HAVO DEEL 1

Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.

Noordhoff Uitgevers

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189
FSC www.fsc.org

www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-57478-9
9 789001 574789