

& GETAL & RUIMTE

B



Noordhoff

Getal & Ruimte

havo B deel 2

Twaalfde editie, 2020

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek havo B deel 2

Samen met de delen 1 en 3 van havo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma havo wiskunde B, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak havo wiskunde B is 360 uur. Elk van de delen 1, 2 en 3 bevat vier hoofdstukken, waarbij opgemerkt kan worden dat in het laatste hoofdstuk van deel 3 de examentraining aan bod komt.

De vier hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 25 uur en bevatten leerstof die in het Centraal Eindexamen wordt getoetst. In hoofdstuk 5 Machten, exponenten en logaritmen worden gedeelten van de subdomeinen B1 en B2 behandeld.

De domeinen D3 en D4 komen aan de orde in hoofdstuk 6 De afgeleide functie.

In hoofdstuk 7 Lijnen en cirkels staat subdomein C2 centraal.

In hoofdstuk 8 Goniometrie wordt het gehele subdomein B4 behandeld.

Afhankelijk van de verdeling van de studielast over het vierde en vijfde leerjaar kan deel 2 geheel of gedeeltelijk in de tweede helft van het vierde leerjaar worden doorgenomen.

Opbouw

De opbouw in deel 2 is dezelfde als in deel 1. Elk hoofdstuk heeft een begin- en eindopdracht en een paragraaf Voorkennis. De oriëntatie-opgaven staan voor elke nieuwe theorie en activeren het denken over een nieuw wiskundig begrip. Ook de reflectie-opgaven spelen een belangrijke rol bij het activeren van een wiskundige denkhouding. Naast de gewone opgaven en de afsluitende opgaven zijn er nog de extra opgaven. De afsluitende opgaven geven het beoogde eindniveau aan. De extra opgaven doorbreken de standaardaanpak en activeren zo het wiskundig denken.

Elke paragraaf wordt afgesloten met een Terugblik, aan het eind van elk hoofdstuk staat een Diagnostische toets en achterin het boek staan de Gemengde opgaven.

Drie leerroutes

In deze editie wordt gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen.

De basisroute geeft de leerling voldoende oefening om zich alle vaardigheden die bij de eindtermen horen eigen te maken.

In de middenroute worden enkele oefenopgaven overgeslagen en in plaats hiervan maakt de leerling opgaven die dieper op de stof ingaan.

De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder oefenopgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.

Getal en Ruimte online

Alle opgaven kunnen ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant en klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

herfst 2019

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

02 Oriëntatie-opgave

   Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 Gewone opgave

   Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 Reflectie-opgave

   In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 Afsluitende opgave

   De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 Extra opgave

   Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute



2 Middenroute



3 Uitdagende route



NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder route-aanduiding

In de Diagnostische toets en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▶GR] Verwijzing naar een module van de GR-handleiding.

[▶WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

[▶DEMO] Verwijzing naar een demo/animatie.

Inhoud

5 Machten, exponenten en logaritmen 6

Beginopdracht De trek van de grutto 8

Voorkennis Herleiden van machten 9

5.1 Machten met negatieve en gebroken exponenten 11

5.2 Grafieken van machtsfuncties veranderen 18

5.3 Wortelfuncties 24

5.4 Exponentiële functies 32

5.5 Logaritmen 40

Eindopdracht De Boeing 747-400 47

Diagnostische toets 48

6 De afgeleide functie 50

Beginopdracht Nulpunten benaderen met raaklijnen 52

Voorkennis Hellingen van grafieken en regels voor de afgeleide 53

6.1 Raaklijnen en toppen 55

6.2 De afgeleide van machtsfuncties 64

6.3 De kettingregel 73

6.4 Toepassingen van de afgeleide 79

Eindopdracht Nulpunten benaderen met Newton-Raphson 88

Diagnostische toets 90

7 Lijnen en cirkels 92

Beginopdracht Globen 94

Voorkennis Lijnen en stelsels 95

7.1 Lijnen en hoeken 97

7.2 Afstanden bij punten en lijnen 103

7.3 Cirkelvergelijkingen 110

7.4 Raaklijnen en snijpunten bij cirkels 117

Eindopdracht Interieur Globen 127

Diagnostische toets 128

8 Goniometrie 130

Beginopdracht Getijdenbeweging in Vlissingen en Harlingen 132

Voorkennis Periodieke verbanden en bijzondere hoeken 133

8.1 De eenheidscirkel en radialen 135

8.2 Sinusoïden 146

8.3 Formules van sinusoïden opstellen 156

8.4 Goniometrische vergelijkingen 163

8.5 Toepassingen van sinusoïden 171

Eindopdracht Een formule bij de getijdenbeweging 179

Diagnostische toets 180

Gemengde opgaven 182

Overzicht GR-modules 195

Overzicht routes 196

Trefwoordenregister 201

Verantwoording 202

5

Machten, exponenten en logaritmen

Wat leer je?

- Wat de betekenis is van machten met negatieve en gebroken exponenten.
- Werken met grafieken van machtsfuncties en wortelfuncties.
- Wortelvergelijkingen exact oplossen.
- Wat een logaritme is.
- Werken met grafieken van exponentiële functies en logaritmische functies.
- Exponentiële en logaritmische vergelijkingen exact oplossen.



Beginopdracht De trek van de grutto

De grutto is een weidevogel die in Nederland steeds minder voorkomt. Veel grutto's trekken in juli vanuit Nederland via Frankrijk en Spanje naar het zuiden. Sommige vliegen zelfs zonder te stoppen door naar West-Afrika, een tocht van 5000 km. Tijdens deze tocht vliegen de vogels op kruissnelheid, dat is de snelheid waarbij het energieverbruik minimaal is. De kruissnelheid wordt onder andere bepaald door het gewicht en de vleugeloppervlakte. Hierbij geldt bij benadering de formule $G = 0,038v^2A$. Hierin is G het gewicht in kg, v de kruissnelheid in m/s en A de vleugeloppervlakte in m^2 . Deze formule is ook te schrijven in de vorm $v = \sqrt{\frac{cG}{A}}$, waarin c een constante is.



- Toon aan dat c , afgerond op gehele, gelijk is aan 26.

Voordat de grutto's naar het zuiden vertrekken, eten ze zich helemaal vol. Dat is ook wel nodig, want tijdens een non-stop vlucht van 5000 km kan een grutto wel de helft van zijn gewicht verliezen.

We gaan uit van een grutto die vlak voor vertrek van een 5000 km lange non-stop vlucht 300 gram weegt, en aan het eind van de tocht 50% van zijn gewicht is kwijtgeraakt. De vleugeloppervlakte van de grutto is 250 cm^2 . Met deze gegevens kun je de kruissnelheid berekenen aan het begin en aan het eind van de tocht. We nemen aan dat de gemiddelde kruissnelheid het gemiddelde is van deze twee snelheden.

- Bereken hoeveel uur de grutto over deze tocht doet.

De kruissnelheid is ook afhankelijk van de luchtdichtheid, die niet op elke hoogte hetzelfde is. Voor de luchtdichtheid geldt de formule $d = 1,225 \cdot 0,88^h$. Hierin is d de luchtdichtheid in kg/m^3 en h de hoogte in km. De formule van v wordt hiermee $v = \sqrt{\frac{33G}{dA}}$.

We nemen aan dat de grutto die de non-stop tocht van 5000 km aflegt, de hele tocht op een hoogte van 3 km vliegt. Bij een hoogte van 3 km hoort de formule $v = \sqrt{\frac{40G}{A}}$.

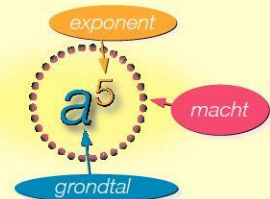
- Toon aan dat deze formule juist is en bereken hoeveel uur de grutto over de non-stop vlucht van 5000 km doet als hij steeds op een hoogte van 3 km vliegt.
- Stel dat de grutto de hele tocht op een hoogte van 6 km vliegt. Hoeveel uur doet hij dan over deze tocht?

Voorkennis Herleiden van machten

Theorie A Rekenregels voor machten

In de macht a^5 is a het grondtal en 5 de exponent.
 a^5 is een korte schrijfwijze voor $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$,
 dus voor het product van vijf factoren a .

Rekenen met machten gaat als volgt.



$a^2 \cdot a^5 = \underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ factoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5 \text{ factoren}} = a^7$	Bij het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten bij elkaar op.
$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^3$	Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af.
$(a^2)^5 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{5 \text{ factoren } a^2} = a^{10}$	Bij de macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten met elkaar.
$(ab)^4 = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab}_{4 \text{ factoren } ab} = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a^4 b^4$	Bij de macht van een product krijg je een product van machten.

Zo krijg je de volgende rekenregels voor machten.

Rekenregels voor machten

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad (a^p)^q = a^{pq}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad (ab)^p = a^p b^p$$

Hieronder zie je hoe je de rekenregels gebruikt bij het herleiden.

$$(-3a^3)^4 = (-3)^4 \cdot (a^3)^4 = 81a^{12}$$

$$(-3a^2)^3 = (-3)^3 \cdot (a^2)^3 = -27a^6$$

$$(2a^3)^2 - (a^2)^3 = 4a^6 - a^6 = 3a^6$$

$$a^5 \cdot a^2 + a^5 + a^2 = a^7 + a^5 + a^2 \quad \leftarrow \dots\dots\dots$$

$$\frac{12a^3b}{3ab} = 4a^2$$

$$(-2)^4 = 16 \text{ en } -2^4 = -16$$

$$(-3)^3 = -27 \text{ en } -3^3 = -27$$

Let op: $a^5 \cdot a^2 = a^7$ maar $a^5 + a^2$ kan niet korter.

1 Herleid.

a $x^2 \cdot x^3$

b $2p^3 \cdot 3p^2$

c $4a^2b \cdot 5a^3b^2$

d $-2p^4q^3 \cdot -3pq$

e $5x^2y \cdot 2x - 3x^3y$

f $12a^4b \cdot \frac{1}{4}ab - 8ab$

2 Herleid.

a $(p^2q)^3$

b $(3x^2)^3$

c $(-5x^2y^3)^2$

d $(-4ab^4)^2$

e $(3a)^2 \cdot (2a^2)^3$

f $(3a^3)^2 + (2a^2)^3$

3 Herleid.

a $\frac{12x^6}{4x^2}$

b $\frac{5x^{10}}{15x^5}$

c $\frac{24a^4b^2}{6ab}$

d $\frac{-15p^6q}{5p^2q}$

e $\frac{10x^3y^2}{5x^2y}$

f $\frac{(2ab)^3}{(3ab)^2}$

4 Herleid.

a $\frac{-28a^6}{7a}$

b $-(3a^4)^2$

c $(-2a^2)^5$

d $(-a^3)^3$

e $(5a)^3 \cdot -3a$

f $\left(\frac{9a^4}{a}\right)^2$

5 Herleid.

a $(ab)^4 \cdot a$

b $(-2ab)^3 \cdot b$

c $(3a)^2 + (2b)^2$

d $(3a)^3 - 8a^3$

e $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (-a)^2$

f $(5a^4)^2 + (-a^2)^4$

5.1 Machten met negatieve en gebroken exponenten



01 In de tabel hiernaast kun je zowel in de exponenten als in de getallen rechts van het = teken een regelmaat herkennen.

a Hoe volgt uit deze regelmaat dat $2^0 = 1$ en $2^{-2} = \frac{1}{4}$?

b Neem over en vul in: $2^{-3} = \frac{1}{2^{\dots}}$ en $2^{-4} = \frac{1}{2^{\dots}}$.

Op dezelfde manier kun je inzien dat $3^0 = 1$ en $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$.

c Neem over en vul in: voor $x \neq 0$ geldt $x^0 = \dots$, $x^{-1} = \frac{1}{\dots}$ en $x^{-3} = \frac{1}{\dots}$.

$$\begin{aligned} 2^5 &= 32 \\ 2^4 &= 16 \\ 2^3 &= 8 \\ 2^2 &= 4 \\ 2^1 &= \dots \\ 2^0 &= \dots \\ 2^{-1} &= \dots \\ 2^{-2} &= \dots \\ 2^{-3} &= \dots \end{aligned}$$

Theorie A Machten met negatieve exponenten

In opgave 1 komen de machten x^0 en x^{-3} voor.

Om de betekenis van x^0 te begrijpen, kijken we naar $\frac{x^2}{x^2}$.

Je weet $\frac{x^2}{x^2} = 1$ voor $x \neq 0$.

Gebruik je de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, dan krijg je $\frac{x^2}{x^2} = x^{2-2} = x^0$.

We spreken daarom af dat $x^0 = 1$ voor $x \neq 0$.

Om de betekenis van x^{-3} te begrijpen, kijken we naar $\frac{x^2}{x^5}$.

Je weet $\frac{x^2}{x^5} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^3}$.

Gebruik je de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, dan krijg je $\frac{x^2}{x^5} = x^{2-5} = x^{-3}$.

We spreken daarom af dat $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$. En zo is $x^{-6} = \frac{1}{x^6}$.

Algemeen geldt $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Voor $a \neq 0$ is $a^0 = 1$ en $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

In de opgaven mag je ervan uitgaan dat $a \neq 0$.

Rekenregels voor machten

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$x^0 = 1 \text{ voor } x \neq 0.$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} \text{ en } x^{-5} = \frac{1}{x^5}.$$

$$\text{Maar ook } \frac{1}{x^4} = x^{-4}$$

$$\text{en } \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Voorbeeld

Schrijf als macht van a .

a $a^2 \cdot \frac{1}{a^8}$

b $\frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)}{a}$

c $\frac{1}{a^p} \cdot (a^3)^2$

d $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a^{-n}}$

Uitwerking

a $a^2 \cdot \frac{1}{a^8} = a^2 \cdot a^{-8} = a^{-6}$

b $\frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)}{a} = \frac{a^{-2}}{a^1} = a^{-2-1} = a^{-3}$

c $\frac{1}{a^p} \cdot (a^3)^2 = a^{-p} \cdot a^6 = a^{-p+6}$

d $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a^{-n}} = \frac{a^{-5}}{a^{-n}} = a^{-5-(-n)} = a^{-5+n}$

Je schrijft $5a^{-3}b^2$ als volgt zonder negatieve exponenten.

$$5a^{-3}b^2 = 5 \cdot \frac{1}{a^3} \cdot b^2 = \frac{5b^2}{a^3}$$

Je mag hierbij de tussenstap weglaten.

Zonder tussenstappen:

$$3a^{-2}b^6 = \frac{3b^6}{a^2}$$

$$\frac{3}{5}a^{-2}b^6 = \frac{3b^6}{5a^2}$$

Voorbeeld

Schrijf zonder negatieve exponenten.

a $8a^{-5}b^3$

b $\frac{3}{4}a^{-1}$

c $\frac{2}{5}a^{-2}b$

Uitwerking

a $8a^{-5}b^3 = \frac{8b^3}{a^5}$

b $\frac{3}{4}a^{-1} = \frac{3}{4a}$

c $\frac{2}{5}a^{-2}b = \frac{2b}{5a^2}$



2 Schrijf als macht van a .

a $\frac{1}{a^2}$

d $\frac{a^8}{a^0}$

g $\frac{a}{a^{12}}$

b $a^4 \cdot \frac{1}{a^6}$

e $(a^3)^{-2}$

h $\frac{1}{a^8} \cdot (a^3)^n$

c $\frac{a^n}{\left(\frac{1}{a^4}\right)}$

f $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a}$

i $\frac{\left(\frac{1}{a^n}\right)}{a^{-3}}$

**3**

$6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$

$(\frac{1}{2})^{-3} = (2^{-1})^{-3} = 2^3 = 8 \quad (\frac{3}{4})^{-1} = \frac{1}{(\frac{3}{4})} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Bereken op dezelfde manier.

a 7^{-2}

c $3 \cdot 5^{-2}$

e $4 \cdot 10^{-3}$

b $(\frac{1}{3})^{-2}$

d $(\frac{2}{5})^{-2}$

f $\frac{1}{2} : 6^{-2}$

**4**

Schrijf zonder negatieve exponenten.

a $6a^{-5}b^3$

d $\frac{3}{5}a^{-4}$

g $-4 \cdot (3a)^{-2}$

b $\frac{1}{3}a^{-3}$

e $(\frac{1}{2}a)^{-3}$

h $(3a)^{-2}b^{-3}$

c $5a^{-4}b^2$

f $\frac{1}{6}a^{-2}b^4$

i $\frac{3}{8}a^{-1}b$

**05**Uit $(\sqrt{x})^2 = x$ en $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$ volgt $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.Licht op dezelfde manier toe dat $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Theorie B Machten met gebroken exponenten

Met de regel $(a^p)^q = a^{pq}$ lichten we de betekenis van $x^{\frac{1}{5}}$ toe.Je kiest daartoe $p = \frac{1}{5}$ en $q = 5$.

Je krijgt $(x^{\frac{1}{5}})^5 = x^1 = x$.
 Je weet $(\sqrt[5]{x})^5 = x$.
 } We spreken af dat $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$.

Algemeen is $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$. Verder is $x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p = \sqrt[q]{x^p}$.

$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ en $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Een macht met een gebroken exponent kun je dus herleiden tot een (hogeremachts)wortel. Zo is

$x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$ en $x^{-\frac{3}{7}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}$.

$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ en $x^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{x^4}$.

Maar ook

$\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$ en

$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}$.

Voorbeeld

Schrijf als macht van x .

a $x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

b $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

c $\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}$

Uitwerking

a $x \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^1 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{1\frac{2}{3}}$

b $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{2-\frac{1}{3}} = x^{1\frac{2}{3}}$

c $\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{12}}$

Voorbeeld

Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

a $5ab^{-\frac{1}{3}}$

b $4a^{\frac{2}{2}}$

c $\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}$

Uitwerking

a $5ab^{-\frac{1}{3}} = \frac{5a}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{5a}{\sqrt[3]{b}}$

b $4a^{\frac{2}{2}} = 4a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 4a^2 \cdot \sqrt{a}$

c $\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{4b^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{a}}{4 \cdot \sqrt[3]{b^2}}$

6 Schrijf als macht van a .



a $a \cdot \sqrt[3]{a}$

d $\frac{1}{a^3}$

g $\sqrt[3]{a^{12}}$

b $\frac{1}{\sqrt{a}}$

e $a^2 \cdot \sqrt{a}$

h $\frac{1}{a^4} \cdot \sqrt[3]{a}$

c $\frac{1}{a}$

f $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$

i $\frac{a^3}{\sqrt[3]{a}}$

7 Je kunt $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ als macht van 2 schrijven: $\frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-1\frac{1}{2}}$.



Schrijf als macht van 2, 3 of 10.

a $8\sqrt{2}$

d $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

g $\frac{1}{100}\sqrt{10}$

b $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

e $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$

h $\frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

c $\frac{8}{\sqrt{2}}$

f $\frac{4\sqrt[4]{1}}{9}$

i $10 \cdot \sqrt[3]{0,1}$

A8 Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.



a $5a^{\frac{3}{3}}$

c $3a^{-\frac{2}{3}}$

e $\frac{1}{5}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$

b $\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{4}}b$

d $\frac{2}{3}a^{-3}b^{\frac{1}{2}}$

f $(5a)^{-\frac{1}{2}}$

A9 Schrijf als macht van x .



a $\frac{x^6}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

d $x^4 \cdot \sqrt{x}$

g $x^2 \cdot \frac{1}{x^3}$

b $x \cdot \sqrt[7]{x^3}$

e $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

h $\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[3]{x}$

c $\frac{x}{\sqrt[5]{x}}$

f $\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}$

i $\frac{x^4 \cdot \sqrt[5]{x}}{x^5 \cdot \sqrt[4]{x}}$

A10 Herleid $\sqrt[3]{x^{14}}$ tot de vorm $x^a \cdot \sqrt[3]{x^b}$ met a een zo groot mogelijk geheel getal en b een zo klein mogelijk geheel getal.

E11 * Harry schrijft een rij getallen op. Hij begint met 1 en het tweede getal is 2. Elk getal daarna maakt hij als volgt. Hij deelt het voorlaatst opgeschreven getal door het laatst opgeschreven getal. Schrijf het tiende getal dat Harry opschrijft als macht van 2.

O12  * Gegeven is de formule $y = 2(3x^2)^3 \cdot \frac{5}{6x^{5,6}}$.

De formule is te herleiden tot $y = 45x^{0,4}$.
Welke regels voor machten zijn hierbij gebruikt?

Theorie C Formules met machten herleiden

De formule $y = 3(2x^2)^5 \cdot \frac{4}{x^{12,6}}$ is te schrijven in de vorm $y = ax^p$.

Je gebruikt hierbij de rekenregels voor machten. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Schrijf de formule $y = 3(2x^2)^5 \cdot \frac{4}{x^{12,6}}$ in de vorm $y = ax^p$.

Uitwerking

$$y = 3(2x^2)^5 \cdot \frac{4}{x^{12,6}} = 3 \cdot 2^5 \cdot (x^2)^5 \cdot 4 \cdot x^{-12,6} = 3 \cdot 32 \cdot x^{10} \cdot 4 \cdot x^{-12,6} = 384 \cdot x^{-2,6}$$

Dus $y = 384x^{-2,6}$.

$$\frac{4}{x^{12,6}} = 4 \cdot \frac{1}{x^{12,6}} = 4 \cdot x^{-12,6}$$

13  Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.

a $y = 5(2x^3)^2 \cdot \frac{3}{x^4}$

c $y = \frac{3}{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$

b $y = \frac{1}{3}(3x^2)^3 \cdot \frac{2}{x^{10}}$

d $y = 3(3x)^{-2} \cdot 4x^{1,2}$

A14  * Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.

a $y = \frac{5}{x\sqrt{x}}$

d $y = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3}$

b $y = 5x\sqrt{x^3}$

e $y = 5x^{-0,2} \cdot x^{1,3}$

c $y = \frac{5}{x^3} \cdot 2\sqrt{x}$

f $y = \frac{50x^{1,9}}{10x^{1,1}}$

Bij een tsunami hangt de golfhoogte af van de waterdiepte. Hoe minder diep het water is, hoe hoger de golf. Dus bij de kust krijg je met hoge golven te maken. Men heeft het verband $h = h_0 \cdot \left(\frac{d_0}{d}\right)^{0,25}$ gevonden.

Hierin zijn d_0 en h_0 de waterdiepte en golfhoogte op de plek waar de tsunami ontstaat en zijn d en h de waterdiepte en golfhoogte op een andere plek, met d , h , d_0 en h_0 in meter.

Op 24 december 2004 ontstond er een tsunami met een golfhoogte van 60 cm in een gebied met waterdiepte 1 km.

Met bovenstaande gegevens is voor het verdere verloop van deze tsunami het verband tussen de waterdiepte d en de golfhoogte h te beschrijven met de formule $h = 3,37d^{-0,25}$.

- Toon dit aan.
- Bereken in dm nauwkeurig de golfhoogte bij een waterdiepte van 300 meter.
- Bij welke waterdieptes is de golf meer dan 2 meter hoog?



Een tsunami kan rampzalige gevolgen voor kustgebieden hebben.

Terugblik

Machten met negatieve en gebroken exponenten

De rekenregels voor machten gelden ook voor machten met negatieve exponenten.

Dus $a^3 \cdot a^{-5} = a^{-2}$, $\frac{a^3}{a^5} = a^{-2}$, $(a^{-2})^3 = a^{-6}$ en $(ab)^{-2} = a^{-2}b^{-2}$.

Voor $a \neq 0$ is $a^0 = 1$ en $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. De regel $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ gebruik je om

bijvoorbeeld $\frac{5}{6}a^{-3}b^2$ zonder negatieve exponenten te schrijven.

Je krijgt $\frac{5}{6}a^{-3}b^2 = \frac{5b^2}{6a^3}$.

De rekenregels voor machten met gebroken exponenten zijn $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ en $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Dus $2x^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{x}$ en $(4x)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(4x)^2} = \sqrt[3]{16x^2}$.

Met de regels $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ en $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ kun je $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{4}{5}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten schrijven.

Je krijgt $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{4}{5}} = \frac{2a^{\frac{1}{4}}}{3b^{\frac{4}{5}}} = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{a}}{3 \cdot \sqrt[5]{b^4}}$.

$\frac{x^2}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}$ is als macht van x te schrijven. Dat gaat als volgt.

$$\frac{x^2}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{x^2}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^2}{x^{\frac{13}{4}}} = x^{2 - \frac{13}{4}} = x^{-\frac{5}{4}}$$

Formules met machten herleiden

De formule $y = \frac{2}{x^2} \cdot \sqrt[4]{x}$ is te herleiden tot de vorm $y = ax^p$.

Dat gaat als volgt.

$$y = \frac{2}{x^2} \cdot \sqrt[4]{x} = 2x^{-2} \cdot x^{\frac{1}{4}} = 2x^{-2 + \frac{1}{4}} = 2x^{-\frac{7}{4}}$$

5.2 Grafieken van machtsfuncties veranderen

016

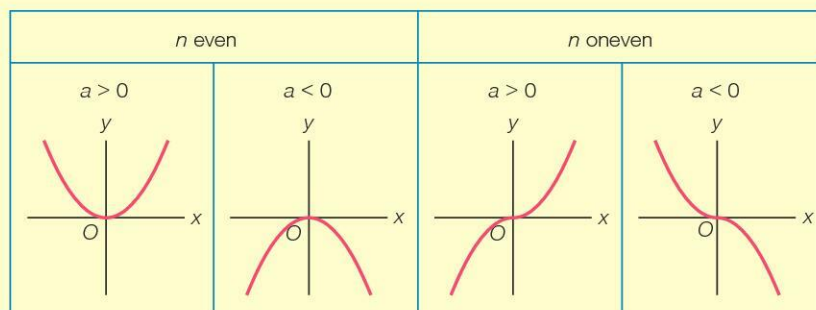

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^6$ en $k(x) = x^9$.

- Plot de grafieken van deze functies. Neem x tussen $-1,5$ en $1,5$ en y tussen -2 en 2 .
- Er zijn twee punten die op elk van de grafieken liggen. Schrijf de coördinaten van die punten op.
- Van welke van de grafieken ligt geen enkel punt onder de x -as?

Theorie A De grafiek van een machtsfunctie

Een functie van de vorm $f(x) = ax^n$ is een **machtsfunctie**.

In het schema hieronder zie je hoe de grafiek van f eruitziet voor $n > 1$ en n een geheel getal.

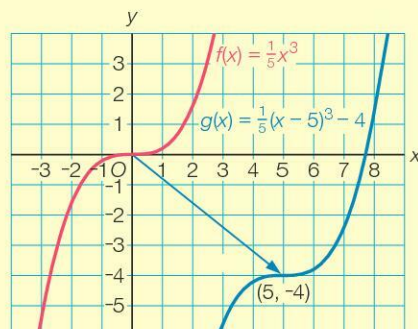


De functies $f(x) = ax^n$ zijn standaardfuncties en de bijbehorende grafieken zijn standaardgrafieken. Je mag standaardgrafieken zonder toelichting tekenen en schetsen.

Bij even waarden van n is de grafiek (lijn)symmetrisch met de y -as als symmetrieas. Bij oneven waarden van n is de grafiek puntsymmetrisch met de oorsprong als **punt van symmetrie**.

Een grafiek kun je verschuiven. Zo ontstaat een beeldgrafiek.

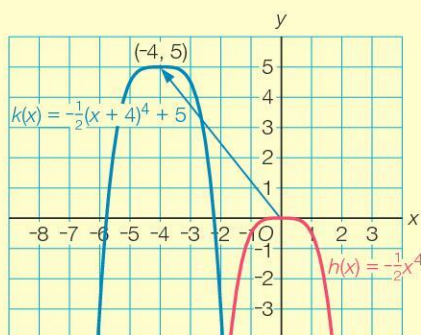
De grafiek van $g(x) = \frac{1}{5}(x-5)^3 - 4$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \frac{1}{5}x^3$ bij de translatie $(5, -4)$. Zie de figuur hiernaast. Bij de grafiek van g zijn de coördinaten van het punt van symmetrie genoteerd.



figuur 5.1

De grafiek van $k(x) = -\frac{1}{2}(x+4)^4 + 5$ ontstaat uit de grafiek van $h(x) = -\frac{1}{2}x^4$ bij de translatie $(-4, 5)$. Zie de figuur hiernaast. De top van de grafiek van k is $(-4, 5)$ en het maximum van k is $k(-4) = 5$.

Algemeen geldt: bij de translatie (p, q) vervang je in de formule x door $x - p$ en tel je q bij de functiewaarde op.



figuur 5.2

grafiek $y = ax^n$ $\xrightarrow{\text{translatie } (p, q)}$ **beeldgrafiek** $y = a(x - p)^n + q$

Dus

$$y = 5x^3 \xrightarrow{\text{translatie } (4, 7)} y = 5(x - 4)^3 + 7$$

$$y = -6x^4 \xrightarrow{\text{translatie } (-3, 8)} y = -6(x + 3)^4 + 8$$

$$y = -x^6 \xrightarrow{\text{translatie } (-5, 0)} y = -(x + 5)^6$$

Pas je op de grafiek van $y = 3(x + 7)^5 - 2$ de translatie $(8, 6)$ toe, dan

krijg je $y = 3(x + 7)^5 - 2 \xrightarrow{\text{translatie } (8, 6)} y = 3(x - 8 + 7)^5 - 2 + 6$, dus

$$y = 3(x - 1)^5 + 4.$$

Voorbeeld

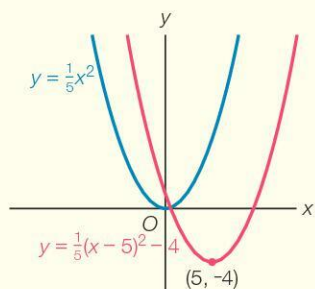
Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld hierin de coördinaten van de top of van het punt van symmetrie.

a $y = \frac{1}{5}(x - 5)^4 - 4$

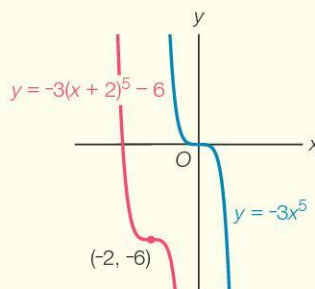
b $y = -3(x + 2)^5 - 6$

Uitwerking

a $y = \frac{1}{5}x^4$
 $\downarrow$ translatie $(5, -4)$
 $y = \frac{1}{5}(x - 5)^4 - 4$



b $y = -3x^5$
 $\downarrow$ translatie $(-2, -6)$
 $y = -3(x + 2)^5 - 6$



17
□ ⊙ *

Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld hierin de coördinaten van de top of van het punt van symmetrie.

a $y = \frac{1}{2}(x+2)^4 + 18$

d $y = -\frac{1}{3}(x-2)^4$

b $y = 6(x-8)^3 + 12$

e $y = 12 - (x+3)^5$

c $y = -(x-3)^8 - 10$

f $y = 3(x^4 - 2) + 5$

18
□ ⊙

a Op de grafiek van $y = 3x^7 - 5$ wordt de translatie (2, 9) toegepast. Stel de formule op van de beeldgrafiek.

b Op de grafiek van $y = 5(x-2)^4 - 2$ wordt de translatie (-5, 4) toegepast. Stel de formule op van de beeldgrafiek.

A19
□ ⊙ *

a De grafiek $g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^4 - 7$ is door een translatie ontstaan uit de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{2}x^4$. Geef deze translatie.

b De grafiek van $k(x) = 5(x-4)^9 + 3$ is door een translatie ontstaan uit de grafiek van $h(x) = 5(x+3)^9 + 9$. Geef deze translatie.

A20
*

Op de grafiek van $y = -\frac{1}{4}(x+2)^3 + 5$ wordt de translatie (p, 0) toegepast. De beeldgrafiek die zo ontstaat, gaat door het punt (-10, 21). Stel de formule op van de beeldgrafiek.

021
□ ⊙ *

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ en $g(x) = 1\frac{1}{2}x^3$.

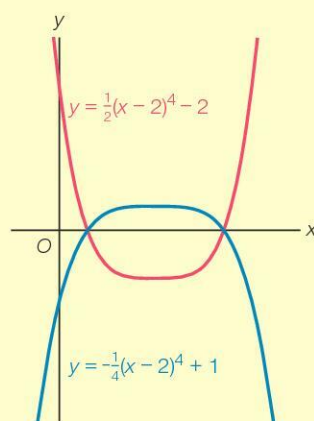
- Neem de tabel over en vul hem verder in.
- Teken de grafieken van f en g in één figuur.
- Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van f ?

x	-2	-1	0	1	2
f(x)					
g(x)					

Theorie B Vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as

In opgave 21 heb je de grafieken getekend van de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ en $g(x) = 1\frac{1}{2}x^3$. Je hebt daarbij gezien dat $g(-2) = 3 \cdot f(-2)$, $g(-1) = 3 \cdot f(-1)$, $g(0) = 3 \cdot f(0)$, enzovoort. Vermenigvuldig je van een punt van de grafiek van f de y-coördinaat met 3, dan krijg je dus een punt van de grafiek van g . Door de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ met 3 te **vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as**, ontstaat de grafiek van $g(x) = 1\frac{1}{2}x^3$.

Bij de vermenigvuldiging met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x -as heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}(x-2)^4 - 2$ als beeld de grafiek van $y = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(x-2)^4 - 2)$, dus van $y = -\frac{1}{4}(x-2)^4 + 1$. Zie de figuur hiernaast.



figuur 5.3

Bij de vermenigvuldiging met -2 ten opzichte van de x -as heeft de grafiek van $y = -4x^3 + 1$ als beeld de grafiek van $y = -2(-4x^3 + 1)$, dus van $y = 8x^3 - 2$.

Notatie: $y = -4x^3 + 1$

↓ verm. x -as, -2

$$y = 8x^3 - 2$$

grafiek verm. x -as, a **beeldgrafiek**

$$y = x^n \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } a} y = ax^n$$

Translaties en vermenigvuldigingen zijn voorbeelden van **transformaties**. De volgorde waarin je transformaties toepast, is van belang.

$$y = x^3$$

↓ verm. x -as, 4

$$y = 4x^3$$

↓ translatie $(2, 5)$

$$y = 4(x-2)^3 + 5$$

$$y = x^3$$

↓ translatie $(2, 5)$

$$y = (x-2)^3 + 5$$

↓ verm. x -as, 4

$$y = 4((x-2)^3 + 5) = 4(x-2)^3 + 20$$

Voorbeeld

Op de grafiek van $y = \frac{1}{4}x^6$ wordt eerst de translatie $(2, -3)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -2 ten opzichte van de x -as.

a Stel de formule op van de beeldgrafiek.

b Geef de coördinaten van de top van de beeldgrafiek.

Uitwerking

a $y = \frac{1}{4}x^6$

↓ translatie $(2, -3)$

$$y = \frac{1}{4}(x-2)^6 - 3$$

↓ verm. x -as, -2

$$y = -2(\frac{1}{4}(x-2)^6 - 3)$$

$$\text{oftewel } y = -\frac{1}{2}(x-2)^6 + 6$$

b De top is $(2, 6)$.

Bij de translatie $(2, -3)$ vervang je in de formule x door $x - 2$ en trek je 3 af van de functiewaarde.

Bij de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met -2 vermenigvuldig je de functiewaarde met -2 .

22

Op de grafiek van $y = -\frac{1}{2}x^3$ wordt eerst de translatie $(-3, -5)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -3 ten opzichte van de x -as.

- Stel de formule op van de beeldgrafiek.
- Geef de coördinaten van het punt van symmetrie van de beeldgrafiek.

23

a Op de grafiek van $y = 0,3x^4$ wordt eerst de translatie $(-5, 6)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -4 ten opzichte van de x -as. Stel van de beeldgrafiek de formule op en geef de coördinaten van de top.

b Op de grafiek van $y = 0,3x^4$ wordt eerst de vermenigvuldiging met -4 ten opzichte van de x -as toegepast en vervolgens de translatie $(-5, 6)$. Stel van de beeldgrafiek de formule op en geef de coördinaten van de top.

A24

a Op de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^5 + 7$ wordt eerst de translatie $(1, 2)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met -1 ten opzichte van de x -as.

Bereken de coördinaten van het punt van symmetrie van de beeldgrafiek.

b De grafiek van $g(x) = -2\frac{1}{2}(x+4)^6 - 1$ wordt eerst vermenigvuldigd met -4 ten opzichte van de x -as, vervolgens wordt de translatie $(-5, -4)$ toegepast. Zo ontstaat de grafiek van de functie h .

Bereken de extreme waarde van h .

A25

Gegeven zijn de functies $f(x) = -8(x+3)^7 + 4$ en $g(x) = 4(x-2)^7 + 11$.

a Door de grafiek van f te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en vervolgens een translatie toe te passen, ontstaat de grafiek van g . Geef deze transformaties.

b Door de grafiek van f te verschuiven en vervolgens te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as, ontstaat de grafiek van g . Geef deze transformaties.

E26

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 6$.

Op de grafiek van f wordt eerst de translatie (p, q) toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met a ten opzichte van de x -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie g .

De grafiek van g gaat door het punt $A(1, 310)$ en het minimum van g is -10 voor $x = 5$.

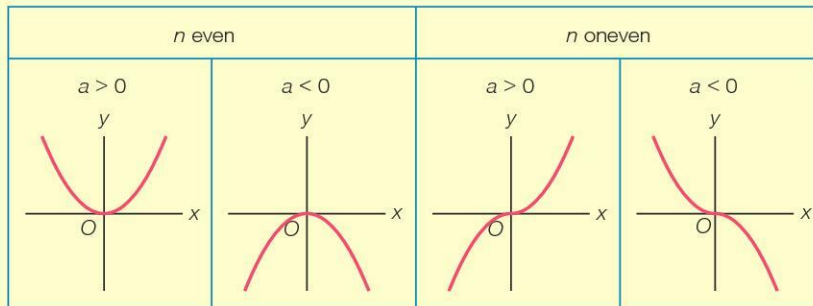
Bereken a , p en q .

Terugblik

De grafiek van een machtsfunctie

Een machtsfunctie heeft de vorm $f(x) = ax^n$. De bijbehorende grafieken zijn standaardgrafieken die je zonder toelichting mag tekenen en schetsen.

In het schema hieronder zie je hoe de grafiek van f eruitziet voor $n > 1$ en n een geheel getal.



Bij even waarden van n is de grafiek (lijn)symmetrisch met de y -as als symmetrieas. Bij oneven waarden van n is de grafiek puntsymmetrisch met de oorsprong als punt van symmetrie.

Transformaties

Met de translatie $(3, 2)$ wordt bedoeld de verschuiving 3 naar rechts en 2 omhoog.

Bij de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met $-\frac{1}{2}$ wordt elke functiewaarde met $-\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd.

Translaties en vermenigvuldigingen zijn voorbeelden van transformaties. Hieronder zie je dat de volgorde waarin je transformaties toepast van belang is.

$$y = 4x^5$$

↓ translatie $(3, 2)$

$$y = 4(x - 3)^5 + 2$$

↓ verm. x -as, $-\frac{1}{2}$

$$y = -\frac{1}{2}(4(x - 3)^5 + 2)$$

$$\text{oftewel } y = -2(x - 3)^5 - 1$$

$$y = 4x^5$$

↓ verm. x -as, $-\frac{1}{2}$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 4x^5 = -2x^5$$

↓ translatie $(3, 2)$

$$y = -2(x - 3)^5 + 2$$

5.3 Wortelfuncties

027
☐ ⊗ *

- Plot de grafiek van $y = \sqrt{x}$.
Welke waarden kan x aannemen? En welke waarden kan y aannemen?
- Plot de grafiek van $y = \sqrt{x+2} + 3$.
Welke waarden kan x aannemen? En welke waarden kan y aannemen?
- Hoe ontstaat de grafiek van $y = \sqrt{x+2} + 3$ uit die van $y = \sqrt{x}$?

Theorie A Domein en bereik van wortelfuncties

De eenvoudigste **wortelfunctie** is $f(x) = \sqrt{x}$.

De grafiek van f is een standaardgrafiek en is in figuur 5.4 getekend. Hierbij is de volgende tabel gebruikt.

x	0	1	2	4	6
$f(x) = \sqrt{x}$	0	1	1,4	2	2,4

De grafiek is een halve parabool die de y -as in het **randpunt** $O(0, 0)$ raakt.

Je mag voor x alleen getallen nemen groter of gelijk aan 0.

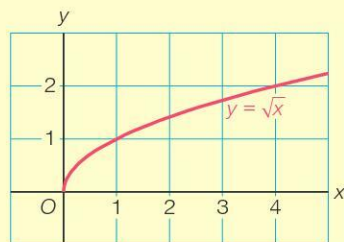
We zeggen dat het **domein** van $f(x) = \sqrt{x}$ het interval $[0, \rightarrow)$ is.

Notatie: $D_f = [0, \rightarrow)$.

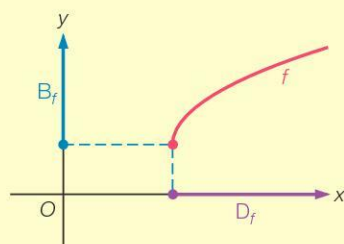
De functie $f(x) = \sqrt{x}$ kan alleen waarden groter of gelijk aan 0 aannemen. We zeggen dat het **bereik** van f het interval $[0, \rightarrow)$ is.

Notatie: $B_f = [0, \rightarrow)$.

Is de grafiek van een functie f getekend, dan lees je het domein van f af op de x -as en het bereik van f op de y -as. Zie figuur 5.5.



figuur 5.4 De grafiek van $y = \sqrt{x}$ is een standaardgrafiek.



figuur 5.5

Het domein van een functie bestaat uit alle originelen.

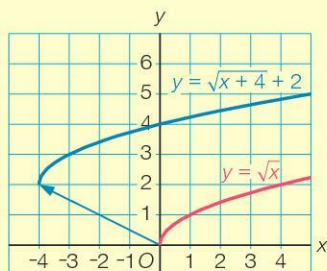
Het bereik van een functie bestaat uit alle beelden.

Uitgaande van de standaardgrafiek $y = \sqrt{x}$ zijn door transformaties grafieken van andere wortelfuncties te tekenen. Het effect van transformaties op het randpunt, het domein en het bereik zie je op de volgende bladzijde.

$$y = \sqrt{x}$$

↓ translatie $(-4, 2)$

$$y = \sqrt{x+4} + 2$$



Van $y = \sqrt{x+4} + 2$ is
het randpunt $(-4, 2)$,
het domein $[-4, \rightarrow)$ en
het bereik $[2, \rightarrow)$.

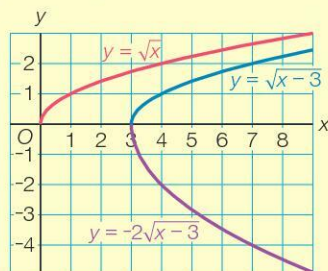
$$y = \sqrt{x}$$

↓ translatie $(3, 0)$

$$y = \sqrt{x-3}$$

↓ verm. x -as, -2

$$y = -2\sqrt{x-3}$$



Van $y = -2\sqrt{x-3}$ is
het randpunt $(3, 0)$,
het domein $[3, \rightarrow)$ en
het bereik $(-\infty, 0]$.

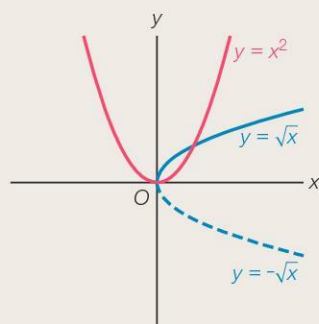
- 28** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$ en $g(x) = -2\sqrt{x+3}$.
- Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$?
 - Schets de grafieken van f en g en zet de coördinaten van de randpunten erbij.
 - Geef D_f , B_f , D_g en B_g .

- 29** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2\sqrt{x-3}$ en $g(x) = -\sqrt{x+5}$.
- Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$?
 - Schets de grafieken van f en g en zet de coördinaten van de randpunten erbij.
 - Geef D_f , B_f , D_g en B_g .

INFORMATIEF

Het verband tussen de grafieken van $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$

Je weet dat de grafiek van $y = x^2$ een parabool is die de x -as raakt in de oorsprong. Verwissel je x en y dan krijg je de parabool $x = y^2$ die de y -as raakt in de oorsprong. Uit $x = y^2$ volgt $y^2 = x$ en dit geeft $y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}$. Dus de grafiek van $y = \sqrt{x}$ is een halve parabool die de y -as raakt in de oorsprong.



A30
☐ ⊗ *

Geef van elk van de volgende functies de coördinaten van het randpunt van de grafiek. Geef ook het domein en het bereik.

a $f(x) = \sqrt{x+5} + 3$

b $g(x) = \sqrt{x+3} - 7$

c $h(x) = -2\sqrt{x+1}$

d $k(x) = 3\sqrt{x+1}$

e $l(x) = -\sqrt{x-1} - 1$

f $m(x) = -3 + \sqrt{x}$

031
☐ ⊗ *

Gegeven is de functie $f(x) = 5 - \sqrt{2x-6}$.

a Het domein is $D_f = [3, \rightarrow)$.

Licht dit toe.

b Het bereik is $B_f = \langle \leftarrow, 5]$.

Licht dit toe.

Theorie B De grafiek van een wortelfunctie

De grafiek van $f(x) = -2 + \sqrt{7-2x}$ is een halve parabool. Het is niet eenvoudig om door middel van transformaties de grafiek van f te krijgen uit die van $y = \sqrt{x}$. Het is daarom noodzakelijk bij een wortelfunctie de coördinaten van het randpunt exact te berekenen. Je berekent daartoe het domein en hieruit volgt het randpunt.

Bij $f(x) = -2 + \sqrt{7-2x}$ vind je het domein als volgt.

Onder het wortelteken moet een niet-negatief getal staan, dus

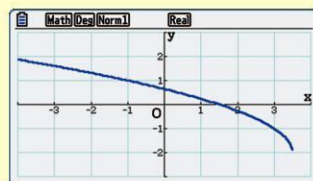
$$7 - 2x \geq 0$$

$$-2x \geq -7$$

$$x \leq 3\frac{1}{2}$$

Dus $D_f = \langle \leftarrow, 3\frac{1}{2}]$ en het randpunt is $(3\frac{1}{2}, -2)$.

$$f(3\frac{1}{2}) = -2 + \sqrt{0} = -2$$



figuur 5.6

Afspraak

Bij het tekenen van de grafiek van een wortelfunctie bereken je eerst het domein en vermeld je de coördinaten van het randpunt. Verder maak je een tabel.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - \sqrt{6 - 2x}$.

- a Teken de grafiek van f en geef B_f .
- b Los op $f(x) > -2$.
- c Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \geq -5$?

Uitwerking

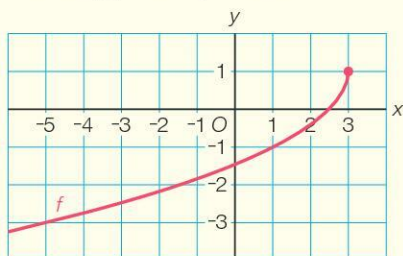
a $6 - 2x \geq 0$

$$-2x \geq -6$$

$$x \leq 3$$

$D_f = \langle \leftarrow, 3 \rangle$ en het randpunt is $(3, 1)$.

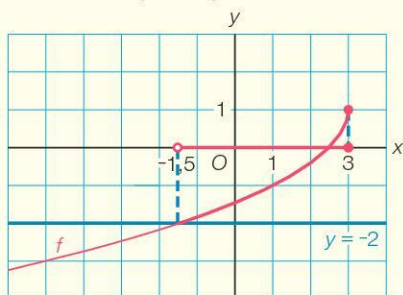
Voer in $y_1 = 1 - \sqrt{6 - 2x}$.



$$B_f = \langle \leftarrow, 1 \rangle$$

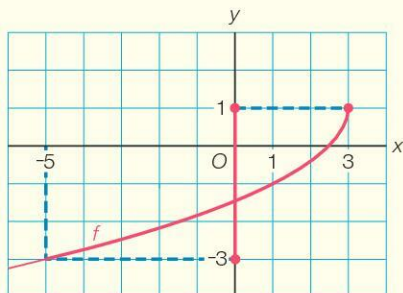
b Voer in $y_2 = -2$.

De optie snijpunt geeft $x = -1,5$.



$f(x) > -2$ geeft $-1,5 < x \leq 3$

c $f(-5) = -3$



$x \geq -5$ geeft $-3 \leq f(x) \leq 1$

x	-5	-2	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-2,2	-1,4	-1	-0,4	1

Kijk waar de grafiek van f boven de lijn $y = -2$ ligt en houd rekening met het domein.

Houd rekening met het bereik.

- R32** Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.
☐ ⊗ * Waarom staat er bij voorbeeld b 'houd rekening met het domein' en bij voorbeeld c 'houd rekening met het bereik'?

- 33** Geef van elk van de volgende functies het domein, het bereik en de coördinaten van het randpunt van de grafiek
☐ ⊗ *

a $f(x) = 3 + \sqrt{8 - 4x}$

b $g(x) = 3 + \sqrt{4x - 8}$

c $h(x) = 5 - \sqrt{2x + 6}$

d $k(x) = -2\sqrt{x} + 3$

- 34** Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \sqrt{2x + 5}$.
☐ ⊗
a Teken de grafiek van f en geef B_f .
b Los op $f(x) > -2$.
c Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x < 22$?

- A35** Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{7 - 3x} - 4$.
☐ ⊗ *
a Teken de grafiek van f en geef B_f .
b Los op $f(x) > -2$.
c Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \geq -3$?

- A36** Het randpunt van de grafiek van $f(x) = 4 - \sqrt{5 + ax}$ ligt op de lijn
***** $k: y = 2x - 1$.
Bereken a .

- O37** **a** Gegeven is de vergelijking $\sqrt{2x - 5} = 3$.
☐ ⊗ * Licht toe dat hieruit volgt $2x - 5 = 9$ en los deze vergelijking op.
b Gegeven is de vergelijking $\sqrt{2x - 5} = -3$.
Licht toe dat deze vergelijking geen oplossingen heeft.

Theorie C Wortelvergelijkingen oplossen

De vergelijking $\sqrt{2x - 3} = 5$ is een voorbeeld van een **wortelvergelijking**. Bij het exact oplossen van de vergelijking $\sqrt{2x - 3} = 5$ ga je als volgt te werk.

- Kwadrateer het linker- en rechterlid. $\sqrt{2x - 3} = 5$
Het wortelteken verdwijnt. $2x - 3 = 25$
- Los de verkregen vergelijking op. $2x = 28$
 $x = 14$

Bij de vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$ breng je voor het kwadrateren eerst x van het linkerlid naar het rechterlid. Je krijgt $\sqrt{x} = 12 - x$.

Je hebt $\sqrt{x}$ **geïsoleerd**. Kwadrateren geeft $x = (12 - x)^2$

$$x = 144 - 24x + x^2$$

$$x^2 - 25x + 144 = 0$$

$$(x - 9)(x - 16) = 0$$

$$x = 9 \vee x = 16$$

De getallen 9 en 16 zijn echter niet beide oplossing van de oorspronkelijke vergelijking.

Invullen van $x = 9$ in de vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$ geeft $9 + \sqrt{9} = 12$ en dit klopt.

Invullen van $x = 16$ in de vergelijking $x + \sqrt{x} = 12$ geeft $16 + \sqrt{16} = 12$ en dit klopt niet.

Daarom is $x = 9$ de enige oplossing die voldoet.

Door het kwadrateren is een oplossing ingevoerd.

Het exact oplossen van wortelvergelijkingen gaat in drie stappen: isoleren, kwadrateren, controleren.

Werkschema: wortelvergelijkingen exact oplossen

- 1** **Isoleer** de wortelvorm, dus zet de wortelvorm apart.
- 2** **Kwadrateer** het linker- en rechterlid en los de verkregen vergelijking op.
- 3** **Controleer** of de oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking.

Voorbeeld

Los exact op.

a $3x = 4\sqrt{2x + 1}$

b $2x - \sqrt{x} = 10$

Uitwerking

a $3x = 4\sqrt{2x + 1}$

kwadrateren geeft

$$9x^2 = 16(2x + 1)$$

$$9x^2 = 32x + 16$$

$$9x^2 - 32x - 16 = 0$$

$$D = (-32)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -16 = 1600$$

$$x = \frac{32 + 40}{18} = 4 \vee x = \frac{32 - 40}{18} = -\frac{4}{9}$$

$$x = 4 \text{ geeft } 12 = 4\sqrt{9} \text{ vold.}$$

$$x = -\frac{4}{9} \text{ geeft } -\frac{4}{3} = 4\sqrt{\frac{1}{9}} \text{ vold. niet}$$

b $2x - \sqrt{x} = 10$

isoleren

$$2x - 10 = \sqrt{x}$$

kwadrateren geeft

$$(2x - 10)^2 = x$$

$$4x^2 - 40x + 100 = x$$

$$4x^2 - 41x + 100 = 0$$

$$D = (-41)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 100 = 81$$

$$x = \frac{41 + 9}{8} = 6\frac{1}{4} \vee x = \frac{41 - 9}{8} = 4$$

$$x = 6\frac{1}{4} \text{ geeft } 12\frac{1}{2} - \sqrt{6\frac{1}{4}} = 10 \text{ vold.}$$

$$x = 4 \text{ geeft } 8 - \sqrt{4} = 10 \text{ vold. niet}$$

R38  ***** Bart denkt dat hij de vergelijking van voorbeeld b kan oplossen zonder de wortelvorm te isoleren. Daarom schrijft hij meteen op $4x^2 - x = 100$. Welke fout maakt Bart?

39  ***** Los exact op.
a $x = \sqrt{5x + 14}$

c $5\sqrt{x} = x$

b $3x = \sqrt{8x + 20}$

d $3x = \sqrt{18x + 72}$

40  ***** Los exact op.
a $4 - 3\sqrt{x} = 2$

c $2x - 5\sqrt{x} = 3$

b $5\sqrt{x} - 2x = 0$

d $5 - 2\sqrt{x} = 3$

A41  ***** Los exact op.
a $2x + \sqrt{x} = 10$

c $x + 2\sqrt{6 - 5x} = 6$

b $2\sqrt{3x + 1} = x + 3$

d $10 - x\sqrt{x} = 2$

A42  ***** Los exact op.

a $\frac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} = 2$

c $\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 3\sqrt{x} - \frac{15}{x}$

b $\frac{2}{\sqrt{5 - 2x}} = \frac{1}{2 - 2x}$

d $\frac{\sqrt{4x - 3}}{x - 1} = \frac{\sqrt{4x - 3}}{\sqrt{3 - x}}$

A43  ***** Gegeven is de functie $f(x) = 4 - \sqrt{3 - 2x}$.
a Schets de grafiek van f .
b Los exact op $f(x) > -1$.

A44  ***** Los exact op $2 + \sqrt{7 - 2x} < x$.

E45  ***** Los exact op $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{x + 6}$.

A46  ***** Jaarlijks vinden in Nederland Go toernooien plaats. Eline doet mee aan een toernooi waarbij de score S berekend wordt met de formule $S = \frac{1000(w - \sqrt{w})}{g}$. Hierin is w het aantal gewonnen partijen en g het aantal gespeelde partijen. De score S wordt afgerond op gehele. Tijdens het toernooi speelt elke deelnemer 16 partijen.
a Wat is de maximale score die een deelnemer kan halen?
b Eline heeft een score van 375. Bereken algebraïsch hoeveel partijen zij gewonnen heeft.

Terugblik

Domein en bereik van wortelfuncties

De eenvoudigste wortelfunctie is de standaardfunctie $f(x) = \sqrt{x}$. De grafiek is een halve parabool die de y -as in het randpunt $(0, 0)$ raakt.

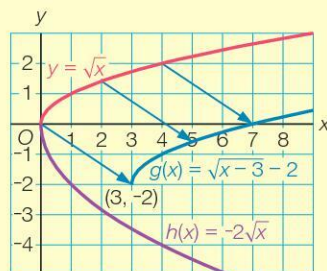
Het domein is $D_f = [0, \rightarrow)$ en het bereik is $B_f = [0, \rightarrow)$.

De grafiek van $g(x) = \sqrt{x-3} - 2$ ontstaat uit die van $y = \sqrt{x}$ bij de translatie $(3, -2)$.

Het randpunt is $(3, -2)$, $D_g = [3, \rightarrow)$ en $B_g = [-2, \rightarrow)$.

De grafiek van $h(x) = -2\sqrt{x}$ ontstaat uit die van $y = \sqrt{x}$ bij de vermenigvuldiging met -2 ten opzichte van de x -as.

Het randpunt is $(0, 0)$, $D_h = [0, \rightarrow)$ en $B_h = \langle \leftarrow, 0]$.



De grafiek van een wortelfunctie tekenen

Om de grafiek van $g(x) = 3 - \sqrt{5-2x}$ te tekenen, maak je een tabel waarin ook het randpunt staat. Daarom bereken je eerst het domein.

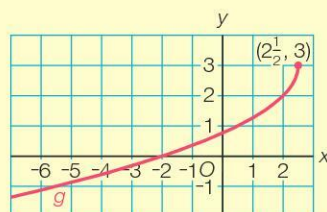
Uit $5-2x \geq 0$ volgt $-2x \geq -5$, dus $x \leq 2\frac{1}{2}$.

Dus $D_g = \langle \leftarrow, 2\frac{1}{2}]$.

Het randpunt is $(2\frac{1}{2}, 3)$.

x	-4	-2	0	2	$2\frac{1}{2}$
$g(x)$	-0,6	0	0,8	2	3

Hiernaast zie je de grafiek van g .



Wortelvergelijkingen

De drie stappen voor het exact oplossen van wortelvergelijkingen zijn isoleren, kwadrateren en controleren.

De vergelijking $3\sqrt{x} - x = 2$ los je als volgt op.

$$3\sqrt{x} - x = 2 \quad \text{isoleren}$$

$$3\sqrt{x} = x + 2$$

kwadrateren geeft

$$9x = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

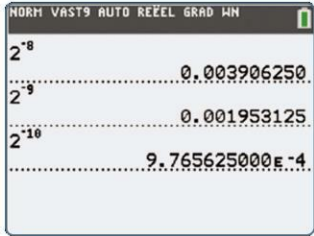
$$x = 1 \vee x = 4$$

$$x = 1 \text{ geeft } 3 \cdot 1 - 1 = 2 \text{ vold.}$$

$$x = 4 \text{ geeft } 3 \cdot 2 - 4 = 2 \text{ vold.}$$

5.4 Exponentiële functies

- O47** Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$.
-  **a** Plot de grafiek van f . Neem x tussen -5 en 5 en y tussen -5 en 25 .
- b** Is de grafiek van f stijgend of dalend?
- c** Bereken $f(-10)$, $f(-20)$ en $f(-100)$.
- d** Licht toe dat $f(-500)$ groter dan 0 is. Wat geeft de GR als beeld van -500 ?
- e** Is er een origineel te vinden waarvan het beeld 0 is?



2^{-8}	0.003906250
2^{-9}	0.001953125
2^{-10}	9.765625000E-4

- O48** Gegeven is de functie $g(x) = (\frac{1}{3})^x$.
-  **a** Is de grafiek van g stijgend of dalend?
- b** Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $g(x) = 4$?
- En de vergelijking $g(x) = -4$?

De GR geeft het antwoord in de wetenschappelijke notatie als het dicht bij 0 is.
 $9,7656\text{E}-4$ betekent
 $9,7656 \times 10^{-4} = 0,00097656$.

Theorie A De standaardfunctie $y = g^x$

Een functie van de vorm $f(x) = g^x$ met g constant en $g > 0$ is een **exponentiële functie**. Je ziet dat de variabele x in de exponent voorkomt.

De grafiek van $y = g^x$ is stijgend in het geval $g > 1$, de grafiek is dalend in het geval $0 < g < 1$.

In opgave 47 heb je gezien dat aan de linkerkant de grafiek van $f(x) = 2^x$ steeds dichterbij de x -as komt. De x -as is de horizontale asymptoot van de grafiek van f .

De functie $f(x) = 2^x$ kan elke waarde groter dan 0 aannemen.

Dus $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

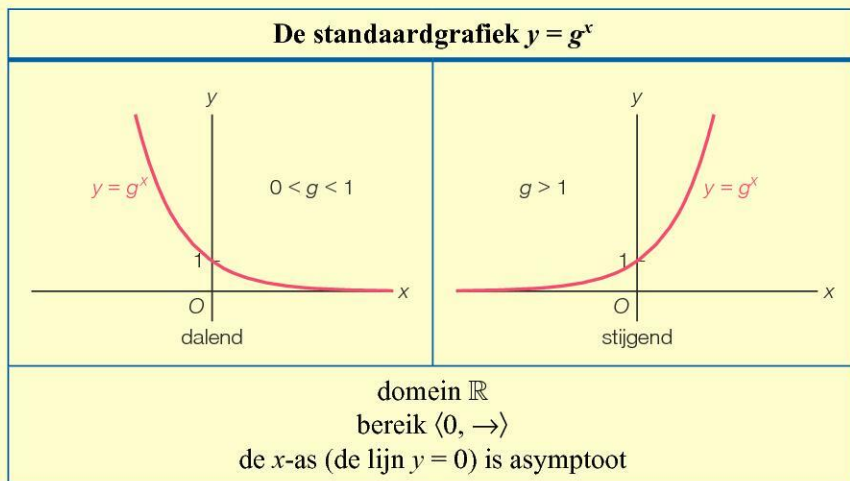
Omdat je bij de functie f voor x elk getal mag nemen, is het domein $\mathbb{R}$.

Notatie: $D_f = \mathbb{R}$.

Ook bij de functie $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ is het domein $\mathbb{R}$ en het bereik $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

Ook hier is de x -as asymptoot, maar nu komt de grafiek aan de rechterkant steeds dichterbij de x -as.

De functies $f(x) = g^x$ zijn standaardfuncties. De bijbehorende grafieken zijn standaardgrafieken, dus je mag ze zonder toelichting tekenen en schetsen.



049

Gegeven zijn de formules $y_1 = 2^x$ en $y_2 = 2^{\frac{1}{3}x}$.

- a Plot in één figuur de grafieken van y_1 en y_2 .
- b De grafiek van y_2 ontstaat uit de grafiek van y_1 door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as. Geef de bijbehorende factor.
- c De grafiek van y_1 wordt ten opzichte van de y -as vermenigvuldigd. Zo ontstaat de grafiek van $y_3 = 2^{4x}$. Met welke factor is vermenigvuldigd? Controleer je antwoord met de GR.
- d De grafiek van y_1 wordt ten opzichte van de y -as vermenigvuldigd. Zo ontstaat de grafiek van $y_4 = 2^{ax}$. Met welke factor is vermenigvuldigd?

Theorie B Transformaties bij exponentiële functies

Door op de standaardgrafiek $y = g^x$ transformaties uit te voeren, ontstaan andere grafieken.

Je krijgt te maken met de volgende translaties en vermenigvuldigingen.

- De verticale translatie, bijvoorbeeld

$$y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (0, 4)} y = 2^x + 4$$

- De horizontale translatie, bijvoorbeeld

$$y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (4, 0)} y = 2^{x-4}$$

- De vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as, bijvoorbeeld

$$y = 2^x \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 4} y = 4 \cdot 2^x$$

- De **vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as**, bijvoorbeeld

$$y = 2^x \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 4} y = 2^{\frac{1}{4}x} \quad \text{Vervang } x \text{ door } \frac{1}{4}x.$$

Op de volgende bladzijde staat een overzicht van deze transformaties.

Het effect van transformaties op de standaardgrafiek $y = g^x$

$y = g^x$ $\downarrow$ verm. x-as, a $y = a \cdot g^x$	Vermenigvuldig in de formule de functiewaarde met a .
$y = g^x$ $\downarrow$ verm. y-as, b $y = g^{\frac{1}{b} \cdot x}$	Vervang in de formule x door $\frac{1}{b} \cdot x$.
$y = g^x$ $\downarrow$ translatie $(c, 0)$ $y = g^{x-c}$	Vervang in de formule x door $x - c$.
$y = g^x$ $\downarrow$ translatie $(0, d)$ $y = g^x + d$	Tel in de formule d op bij de functiewaarde.

De grafiek van $y = g^x + d$ heeft als asymptoot de lijn $y = d$.

Bij het schetsen en tekenen van zo'n grafiek teken je deze asymptoot als stippellijn en zet je de formule erbij.

Je kunt transformaties met elkaar combineren. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 150 - 3 \cdot 0,7^x$.

Geef het bereik en de formule van de horizontale asymptoot van de grafiek.

Aanpak

formule	$y = 0,7^x$	$\xrightarrow{\text{verm. x-as, } -3}$	$y = -3 \cdot 0,7^x$	$\xrightarrow{\text{translatie } (0, 150)}$	$y = 150 - 3 \cdot 0,7^x$
asymptoot	$y = 0$		$y = 0$		$y = 150$
bereik	$\langle 0, \rightarrow \rangle$		$\langle \leftarrow, 0 \rangle$		$\langle \leftarrow, 150 \rangle$

Uitwerking

Het bereik is $\langle \leftarrow, 150 \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 150$.

50



Geef van de grafieken van de volgende functies aan hoe ze uit een standaardgrafiek ontstaan. Vermeld ook de formule van de asymptoot.

a $f(x) = 3^{x+2} - 1$

b $g(x) = 3^{x-1} + 5$

c $h(x) = 2 \cdot 0,5^x + 3$

d $k(x) = -3 \cdot 0,7^x + 5$

e $l(x) = 3 \cdot 2^{3x} + 4$

f $m(x) = 0,8^{0,4x} - 10$

51 Geef het bereik en de formule van de horizontale asymptoot van de grafiek.

- a $f(x) = 8 \cdot 1,5^x - 6$
- b $g(x) = 5 - 2 \cdot 0,8^x$
- c $h(x) = 1000 - 0,3^{x-1}$
- d $k(x) = 1000(1 - 0,3^x)$

A52 De volgende transformaties worden toegepast op de standaardgrafiek $y = 3^x$.

Geef telkens de formule van de beeldgrafiek.

- a Eerst spiegelen in de x -as, dan 1 omlaag schuiven.
- b Eerst de translatie $(2, 5)$ en dan de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{4}$.
- c Eerst 5 omlaag en 4 naar rechts schuiven, dan met 3 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.
- d Eerst met 3 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as, dan de verschuiving 5 omlaag en 4 naar rechts.

53 Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x+3} - 4$.

- a Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- b Geef het bereik en de formule van de horizontale asymptoot van de grafiek.
- c Schets de grafiek van f . Denk eraan de asymptoot als stippellijn in de schets op te nemen.
- d Bereken $f(3)$. Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \leq 3$? Houd rekening met het bereik.
- e Los op $f(x) \leq -1$. Rond af op twee decimalen.

A54 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x - 2$ en $g(x) = (\frac{1}{2})^{x-1} + 2$.

- a Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit een standaardgrafiek?
- b Schets de grafieken van f en g in één figuur en geef B_f en B_g .
- c Los op $f(x) \geq g(x)$. Rond af op twee decimalen.
- d Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ geen oplossingen?

A55 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x-2} - 3$ en $g(x) = 4 \cdot 0,5^{x-3} - 1$.

- a Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing en de vergelijking $g(x) = p$ geen oplossingen?
- b Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \leq 2$?
- c De lijn $x = 1$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .
Bereken de lengte van het lijnstuk AB .
- d De lijn $y = 5$ snijdt de grafiek van f in het punt P en de grafiek van g in het punt Q .
Bereken de lengte van het lijnstuk PQ . Rond af op drie decimalen.

O56
□ ⊙ *

$8 \cdot 4^x$ is te herleiden tot 2^{2x+3} .

a Toon dit aan.

b Welke regels voor machten heb je bij vraag a gebruikt?

Theorie C Herleiden tot de vorm $y = b \cdot g^x$

Bij het herleiden van $8 \cdot 4^x$ tot 2^{2x+3} in opgave 56 heb je de regels

$(a^p)^q = a^{pq}$ en $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ gebruikt.

Omgekeerd kun je 2^{2x+3} schrijven als $8 \cdot 4^x$. Je gebruikt dan de regels

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ en $(a^p)^q = a^{pq}$ van rechts naar links.

Zo krijg je $2^{2x+3} = 2^{2x} \cdot 2^3 = (2^2)^x \cdot 8 = 8 \cdot 4^x$.

Op dezelfde manier kun je een formule als $y = 40 \cdot 3^{-2x+1}$ schrijven in de vorm $y = b \cdot g^x$. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Schrijf de formule $y = 40 \cdot 3^{-2x+1}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$.

Uitwerking

$$y = 40 \cdot 3^{-2x+1} = 40 \cdot 3^{-2x} \cdot 3^1 = 40 \cdot (3^{-2})^x \cdot 3 = 120 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^x = 120 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x$$

$$\text{Dus } y = 120 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x.$$

57
□ ⊙

Schrijf de volgende formules in de vorm $y = b \cdot g^x$.

a $y = 15 \cdot 2^{3x+2}$

c $y = 260 \cdot 4^{\frac{1}{2}x-1}$

b $y = 50 \cdot 2^{3x-1}$

d $y = 8 \cdot 4^{-2x-1}$

58
□ ⊙ *

Schrijf de volgende formules in de vorm $y = b \cdot g^x$.

a $y = 2^x \cdot 2^{2x-3}$

c $y = 50\,000 \cdot 100^{-x-2\frac{1}{2}}$

b $y = 63 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-2}$

d $y = \frac{3}{4^{2x-1}}$

A59
⊙ *

De grafiek van $f(x) = 5 - 2^{\frac{1}{2}x+4}$ wordt 8 naar beneden en 12 naar rechts geschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie h . De functie h kan geschreven worden in de vorm $h(x) = a + b \cdot g^x$. Bereken exact a , b en g .

A60
*

Op de grafiek van $f(x) = 2^{x-3}$ wordt de translatie $(-5, 0)$ toegepast.

Zo ontstaat de grafiek van de functie g .

Je kunt de grafiek van g ook krijgen door de grafiek van f met a te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.

Bereken a .

O61
□ ⊙ *

Schrijf $4\sqrt{2}$ als macht van 2 en los de vergelijking $2^{x-1} = 4\sqrt{2}$ exact op.

Theorie D Exponentiële vergelijkingen

Bij het exact oplossen van **exponentiële vergelijkingen** zoals $2^{x-3} = \sqrt{2}$, $3^{x+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$ en $2 \cdot 3^{2x-1} = 18$ werk je toe naar een vorm waarin het linker- en rechterlid als macht met hetzelfde grondtal g zijn geschreven. Daarna gebruik je $g^A = g^B$ geeft $A = B$.

$g^A = g^B$ geeft $A = B$

Voorbeeld

Los exact op.

a $3^{x+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$

b $2 \cdot 3^{2x-1} = 18$

c $2 \cdot 9^{\frac{1}{2}x-3} = 6$

Uitwerking

a $3^{x+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$

$$3^{x+1} = 3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{x+1} = 3^{-1\frac{1}{2}}$$

$$x+1 = -1\frac{1}{2}$$

$$x = -2\frac{1}{2}$$

b $2 \cdot 3^{2x-1} = 18$

$$3^{2x-1} = 9$$

$$3^{2x-1} = 3^2$$

$$2x-1 = 2$$

$$2x = 3$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

c $2 \cdot 9^{\frac{1}{2}x-3} = 6$

$$9^{\frac{1}{2}x-3} = 3$$

$$(3^2)^{\frac{1}{2}x-3} = 3$$

$$3^{x-6} = 3^1$$

$$x-6 = 1$$

$$x = 7$$

62 Los exact op.



a $2^{x+1} = 64$

c $2^{2x} = 2$

e $2^x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

b $2^{x-3} = \frac{1}{8}$

d $2^x = 1$

f $5^{x+6} = (\frac{1}{5})^x$

63 Los exact op.



a $3^{2x+1} = 27\sqrt{3}$

c $3^x - 2 = 25$

e $10 \cdot 3^x = 270$

b $10^{2x+1} = 0,01$

d $5 \cdot 2^x = 80$

f $3 \cdot 8^{2-x} = 48$

A64 Los exact op.



a $3 \cdot 2^x + 4 = 28$

c $3 \cdot 7^{3x+1} = 147$

e $5 \cdot 4^{x-1} = 2\frac{1}{2}$

b $5^{2x-6} = 0,04$

d $32^{x-2} = \frac{1}{16}$

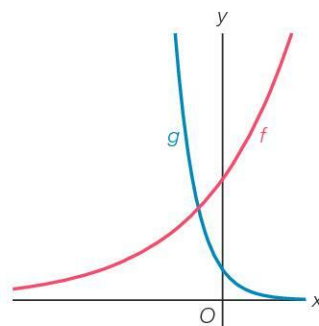
f $8 \cdot 2^x = 4^{x+1}$

A65
☐ ⊙ *

Hiernaast zie je de grafieken van

$$f(x) = (\sqrt{2})^{x+4} \text{ en } g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

- a Los exact op $f(x) \geq g(x)$.
- b Los exact op $g(x) \geq \sqrt{2}$.



figuur 5.7

A66
⊙ *

Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$.

De grafiek van f wordt eerst met 6 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as en daarna 10 omlaag geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g .

Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g .

A67
*

Op de grafiek van $f(x) = 3^{x+2} - 5$ wordt eerst de translatie $(3, 7)$

toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging met b ten opzichte van de y -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie g .

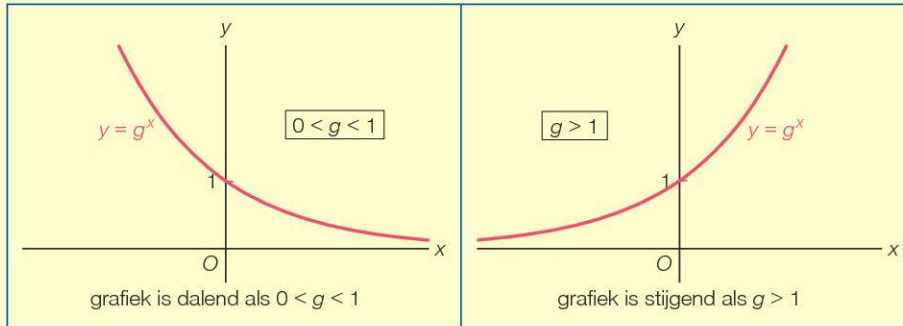
Het punt $A(-15, 83)$ ligt op de grafiek van g .

Bereken b exact.

Terugblik

Standaardgrafieken $y = g^x$

Bij de exponentiële standaardfuncties $y = g^x$ onderscheiden we $0 < g < 1$ en $g > 1$.



In beide gevallen is het domein $\mathbb{R}$, het bereik $\langle 0, \rightarrow \rangle$ en de x -as de horizontale asymptoot.

Transformaties

Bij de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor b vervang je in de formule x door $\frac{1}{b} \cdot x$.

Je krijgt de grafiek van $f(x) = 2^{\frac{1}{3}x-5} + 4$ als volgt uit de standaardgrafiek $y = 2^x$.

$$y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (5, 4)} y = 2^{x-5} + 4 \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 3} y = 2^{\frac{1}{3}x-5} + 4$$

Het bereik van f is $\langle 4, \rightarrow \rangle$ en de horizontale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = 4$.

Herleiden tot de vorm $y = b \cdot g^x$

Bij het herleiden van de formule $y = 120 \cdot 3^{2x-1}$ tot de vorm $y = b \cdot g^x$ gebruik je de regels $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ en $(a^p)^q = a^{pq}$ van rechts naar links.

Je krijgt $y = 120 \cdot 3^{2x-1} = 120 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{-1} = 120 \cdot (3^2)^x \cdot \frac{1}{3} = 40 \cdot 9^x$.

Exponentiële vergelijkingen

Bij het exact oplossen van de vergelijking $2 \cdot 3^{2x+4} = 54$ werk je toe naar de vorm $g^A = g^B$. Daarna gebruik je $g^A = g^B$ geeft $A = B$.

$$2 \cdot 3^{2x+4} = 54$$

$$3^{2x+4} = 27$$

$$3^{2x+4} = 3^3$$

$$2x + 4 = 3$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

5.5 Logaritmen

O68 Neem over en vul de exponent in.



a $2^{\dots} = 8$

d $3^{\dots} = 9$

b $2^{\dots} = \frac{1}{4}$

e $3^{\dots} = \frac{1}{27}$

c $2^{\dots} = \sqrt{2}$

f $3^{\dots} = \sqrt[5]{3}$

Theorie A De logaritme

In opgave 68a moet je invullen tot welke macht je 2 moet verheffen om 8 te krijgen. Voor deze opdracht bestaat de notatie ${}^2\log(8)$.

- De notatie log komt van **logaritme**.
- In ${}^2\log(8)$ is 2 het **grondtal van de logaritme**.
- ${}^2\log(8)$ spreek je uit als de tweede logaritme van acht of kortweg twee log acht.

${}^2\log(8)$ is een exponent. Het grondtal van de macht is 2 en de uitkomst is 8. Deze exponent is 3, dus ${}^2\log(8) = 3$. En zo is ${}^3\log(81)$ gelijk aan 4, want $3^4 = 81$.

${}^3\log(81)$ is de exponent van een macht met grondtal 3 waarmee de macht gelijk is aan 81.

${}^g\log(x)$ is de exponent van een macht met grondtal g waarmee de macht gelijk is aan x .

In ${}^g\log(x)$ heet g het grondtal van de logaritme.

Zoek je de uitkomst van ${}^3\log(\frac{1}{81})$, dan zoek je dus de exponent bij het grondtal 3 zodat je $\frac{1}{81}$ krijgt. Daartoe bedenk je dat $\frac{1}{81} = 3^{-4}$, dus

$${}^3\log(\frac{1}{81}) = {}^3\log(3^{-4}) = -4.$$

En zo is ${}^3\log(9\sqrt{3}) = {}^3\log(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^3\log(3^{2\frac{1}{2}}) = 2\frac{1}{2}$.

$${}^g\log(g^a) = a$$

Voorbeeld

Bereken.

a ${}^2\log(\frac{1}{8}\sqrt{2})$

b ${}^5\log(0,04)$

Uitwerking

a ${}^2\log(\frac{1}{8}\sqrt{2}) = {}^2\log(2^{-3} \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = {}^2\log(2^{-2\frac{1}{2}}) = -2\frac{1}{2}$

b ${}^5\log(0,04) = {}^5\log(\frac{4}{100}) = {}^5\log(\frac{1}{25}) = {}^5\log(5^{-2}) = -2$

69
☐⊗*

Bereken.

a $^5\log(125)$

d $^7\log(49)$

g $^4\log(0,25)$

b $^{10}\log(0,1)$

e $^2\log(\sqrt{2})$

h $^4\log(4)$

c $^2\log(4)$

f $^2\log(0,5)$

i $^4\log(1)$

70
☐⊗*

Bereken.

a $^2\log(64\sqrt{2})$

d $^5\log(\frac{1}{125})$

g $^2\log(\frac{1}{32} \cdot \sqrt[3]{2})$

b $^3\log(\frac{1}{9}\sqrt{3})$

e $^{\frac{1}{3}}\log(\frac{1}{27})$

h $^5\log(1)$

c $^3\log(3^{21,5})$

f $^{\frac{1}{2}}\log(\frac{1}{4})$

i $^3\log(81 \cdot \sqrt[5]{27})$

071
☐⊗*

Licht toe.

a $^3\log(x) = 2$ geeft $x = 9$

b $^5\log(x) = -2$ geeft $x = \frac{1}{25}$

Theorie B Logaritmische vergelijkingen

De **logaritmische vergelijking** $^2\log(x) = 5$ heeft als oplossing $x = 2^5$.

Immers $^2\log(2^5) = 5$.

En zo krijg je bij de vergelijking $^2\log(x + 3) = 5$ dat $x + 3 = 2^5$, dus $x = 2^5 - 3 = 29$.

$$\begin{aligned} ^2\log(x) = 5 &\text{ geeft } x = 2^5 \\ ^8\log(x) = 5 &\text{ geeft } x = 8^5 \\ ^8\log(x) = y &\text{ geeft } x = 8^y \end{aligned}$$

Uit $^8\log(x) = y$ volgt $x = 8^y$.

Voorbeeld

Los exact op.

a $^2\log(2x - 1) = 3$

b $1 + 2 \cdot ^5\log(x) = 7$

Uitwerking

a $^2\log(2x - 1) = 3$

$2x - 1 = 2^3$

$2x - 1 = 8$

$2x = 9$

$x = 4\frac{1}{2}$

b $1 + 2 \cdot ^5\log(x) = 7$

$2 \cdot ^5\log(x) = 6$

$^5\log(x) = 3$

$x = 5^3$

$x = 125$

R72
☐⊗*

Bereken x .

a $x = ^5\log(0,2)$

b $^9\log(x) = \frac{1}{2}$

c $^x\log(1000) = 3$

73

Los exact op.



a ${}^3\log(x+2) = 2$

b $1 + \frac{1}{2}\log(x) = 4$

c ${}^3\log(2x+1) = 4$

d $5 + {}^4\log(x) = 3$

e $\frac{1}{2}\log(x-1) = 3$

f ${}^2\log(x^2-4) = 5$

A74

Bereken exact de oplossingen.



a $4 \cdot {}^3\log(x) = 2$

b ${}^3\log(4x-1) = -2$

c $3 + {}^2\log(x) = -1$

d ${}^5\log(3x+2) = 1$

e ${}^3\log(0,4x-5) = 2$

f $4 + 2 \cdot {}^2\log(x) = 7$

E75

Los exact op ${}^2\log({}^3\log(x)) = -1$.

*

O76

Gegeven is de functie $f(x) = {}^2\log(x)$.**a** Neem de tabel over en vul hem in.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
${}^2\log(x)$							

b Teken de punten van de tabel en teken door deze punten een vloeiende kromme.

c Licht toe dat het domein $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

d Geef het bereik van f .

GESCHIEDENIS

John Napier

De Schotse landheer John Napier (1550-1617) heeft het begrip logaritme ingevoerd. Bij het zoeken naar een methode om het vermenigvuldigen van getallen te vereenvoudigen, kwam hij op het idee om met exponenten te werken waardoor bijvoorbeeld de vermenigvuldiging 32×256 is om te zetten in de optelling van de exponenten 5 en 8, immers $32 \times 256 = 2^5 \times 2^8 = 2^{5+8} = 2^{13}$. Door vervolgens op te zoeken welk getal bij de exponent 13 hoort, is de uitkomst 8192 van de vermenigvuldiging snel te geven. Om deze rekenmethode zinvol te kunnen toepassen, heeft Napier lange tabellen gemaakt van getallen met de bijbehorende exponenten van machten met het grondtal 2, ook voor minder mooie getallen. Na jaren rekenwerk publiceerde hij in 1614 deze exponenten die hij logaritmen noemde.



Theorie C Logaritmische functie

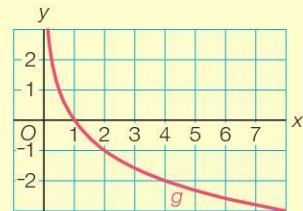
De functie $f(x) = {}^2\log(x)$ is een **logaritmische functie**.

Bij deze functie is het grondtal 2. In opgave 76 heb je gezien dat je te maken hebt met een functie met domein $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en bereik $B_f = \mathbb{R}$. De grafiek is stijgend.

Bij de functie $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ is het grondtal $\frac{1}{2}$.

In figuur 5.8 zie je de grafiek van g . Hierbij is de volgende tabel gebruikt.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
${}^{\frac{1}{2}}\log(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3

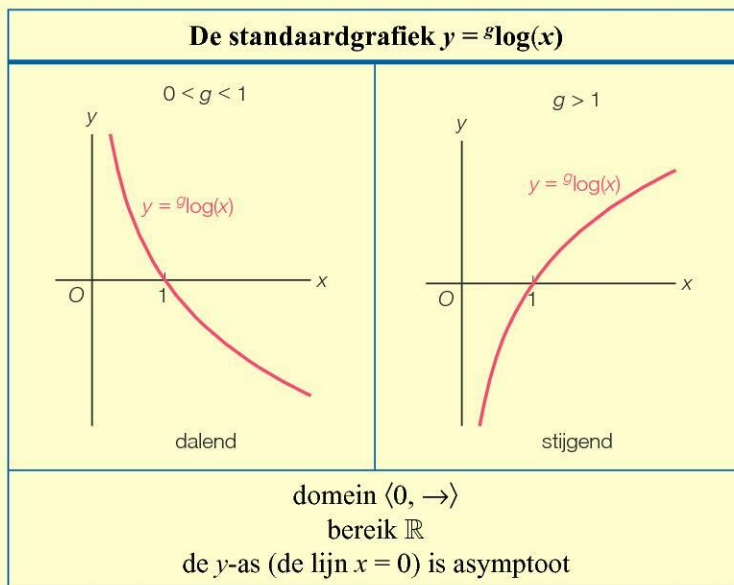


figuur 5.8 $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$

De lijn $x = 0$ is de verticale asymptoot van de grafiek.

De grafieken van $f(x) = {}^g\log(x)$ zijn standaardgrafieken.

Net als bij de functies $f(x) = g^x$ onderscheiden we twee situaties, namelijk $0 < g < 1$ en $g > 1$.



Op de standaardgrafiek kun je transformaties toepassen.

In opgave 77 maak je een schema met een overzicht van het effect van deze transformaties.

Bij het schetsen en tekenen van grafieken van logaritmische functies, teken je ook de verticale asymptoot (als stippellijn) en zet je de formule van de lijn erbij.

Bedenk dat de verticale asymptoot aan de rand van het domein zit.

Voorbeeld

Los de ongelijkheid $\frac{1}{2}\log(x+2) - 1 \geq -3$ exact op.

Aanpak

Voor het oplossen van de ongelijkheid heb je een schets van de grafiek van $y = \frac{1}{2}\log(x+2) - 1$ nodig.

Ga uit van de standaardgrafiek $y = \frac{1}{2}\log(x)$ en bedenk dat de grafiek van $y = \frac{1}{2}\log(x+2) - 1$ hieruit ontstaat bij de translatie $(-2, -1)$.

Uitwerking

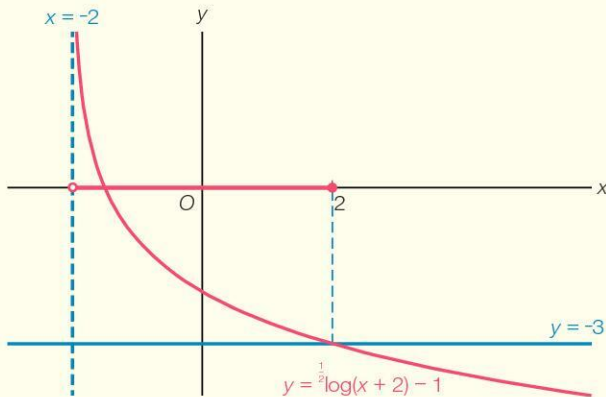
$$\frac{1}{2}\log(x+2) - 1 = -3$$

$$\frac{1}{2}\log(x+2) = -2$$

$$x+2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$x+2 = 4$$

$$x = 2$$



$$\frac{1}{2}\log(x+2) - 1 \geq -3 \text{ geeft } -2 < x \leq 2$$

Houd rekening met het domein.



R77 Maak een soortgelijk schema als op bladzijde 34 voor het effect van transformaties op de standaardgrafiek $y = {}^s\log(x)$.



78 Geef aan hoe de grafieken van de volgende functies uit een standaardgrafiek ontstaan. Geef ook de formule van de asymptoot.

a $f(x) = {}^3\log(x+2)$

b $g(x) = 5 \cdot {}^2\log(x-1)$

c $h(x) = 4 \cdot \frac{1}{2}\log(x) + 3$

d $k(x) = -\frac{1}{3}\log(x+1) - 2$

e $l(x) = {}^3\log(2x) + 5$

f $m(x) = 3 \cdot \frac{1}{4}\log(\frac{1}{2}x)$

79
□ ⊗ *

De volgende transformaties worden toegepast op de grafiek van

$$y = {}^3\log(x).$$

Geef telkens de formule van de beeldgrafiek.

- a Eerst met 2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as, dan de translatie $(0, -4)$.
- b Eerst spiegelen in de x -as, dan de translatie $(5, 0)$.
- c Eerst de translatie $(-3, 2)$, dan vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met $\frac{1}{2}$.
- d Eerst 5 omhoog, dan vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{4}$ en ten slotte 3 naar links.

80
□

Gegeven is de functie $f(x) = {}^3\log(x - 4) + 2$.

- a Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- b Schets de grafiek van f en geef het domein.
- c Los exact op $f(x) < 6$.
- d Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \leq 7$?

A81
□ ⊗ *

Los exact op.

- a ${}^4\log(x - 1) \leq 1\frac{1}{2}$
- b ${}^{\frac{1}{4}}\log(x - 3) + 2 \geq 1$
- c $3 - {}^2\log(x) \geq 0$

E82
*

Geef aan hoe de grafiek van de functie $f(x) = 6 - 4 \cdot {}^2\log(5x - 15)$ ontstaat uit een standaardgrafiek. Geef ook de formule van de asymptoot.

Terugblik

De logaritme

${}^g\log(x)$ is de exponent van een macht met grondtal g waarmee de macht gelijk is aan x .

Zo is ${}^3\log(81) = 4$, want ${}^3\log(3^4) = 4$.

En ${}^3\log(\frac{1}{9}\sqrt{3}) = {}^3\log(3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^3\log(3^{-1\frac{1}{2}}) = -1\frac{1}{2}$.

Je maakt gebruik van de regel ${}^g\log(g^a) = a$.

$${}^g\log(x) = a \text{ betekent } x = g^a$$

Logaritmische vergelijkingen

Bij het exact oplossen van vergelijkingen als ${}^4\log(5x - 6) = 2$ gebruik je ${}^g\log(x) = y$ geeft $x = g^y$. Je krijgt ${}^4\log(5x - 6) = 2$

$$5x - 6 = 4^2$$

$$5x = 22$$

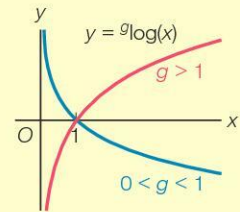
$$x = 4\frac{2}{5}$$

De grafiek van $y = {}^g\log(x)$

De standaardfunctie $y = {}^g\log(x)$

- heeft domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$
- de grafiek is stijgend als $g > 1$ en is dalend als $0 < g < 1$
- heeft bereik $\mathbb{R}$.

De bijbehorende grafiek heeft de y -as (de lijn $x = 0$) als verticale asymptoot.



De grafiek van $f(x) = {}^2\log(x + 1) + 2$

Om de grafiek van $f(x) = {}^2\log(x + 1) + 2$ te schetsen, ga je uit van de standaardgrafiek $y = {}^2\log(x)$.

Verschuif je de standaardgrafiek 1 naar links en 2 omhoog dan krijg je de grafiek van f .

Hieruit volgt $D_f = \langle -1, \rightarrow \rangle$ en de lijn $x = -1$ is de verticale asymptoot van de grafiek van f .

Teken in je schets de verticale asymptoot als stippellijn en zet de formule erbij.

Je kunt deze schets gebruiken om de ongelijkheid $f(x) \leq 0$ op te lossen.

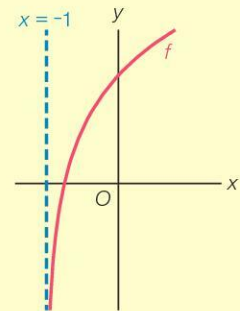
$$f(x) = 0 \text{ geeft } {}^2\log(x + 1) + 2 = 0$$

$${}^2\log(x + 1) = -2$$

$$x + 1 = \frac{1}{4}$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

$$f(x) \leq 0 \text{ geeft } -1 < x \leq -\frac{3}{4}$$



Eindopdracht De Boeing 747-400

De Boeing 747-400 is een van de grootste passagiersvliegtuigen ter wereld. Het heeft een lengte van 70,66 meter, een spanwijdte van 64,9 meter, een hoogte (vanaf de grond) van 19,06 meter en een vleugeloppervlakte van 541 m².

In de standaarduitvoering zijn er 416 stoelen voor passagiers en is het leeggewicht 178 756 kg. Het vliegbereik met volle belading is 13 450 km bij de kruissnelheid van 913 km/uur.

Tijdens de vlucht gebruiken de motoren 12 000 liter kerosine per uur. De dichtheid van kerosine is 0,8 kg per liter.



We bekijken in deze opdracht een vlucht van een Boeing 747-400 van Amsterdam naar Tokio, dat is een vliegafstand van 10 200 km.

We nemen aan dat de Boeing steeds met een snelheid van 900 km/uur vliegt. Na een uur vliegt het toestel op een hoogte van 10 km.

Met de formules $G = 0,03dv^2A$ en $d = 1,225 \cdot 0,88^h$ is te berekenen welk gewicht het toestel heeft na een uur vliegen. In deze formules is G het gewicht in kg, d de luchtdichtheid in kg/m³, v de snelheid in m/s, A de vleugeloppervlakte in m² en h de hoogte in km.

Uit deze gegevens volgt dat het startgewicht van deze Boeing 355 668 kg is.

- Toon dit aan met een berekening.

Na 5 uur vliegt het toestel op een hoogte van 10,9 km.

- Toon dit aan en bereken de vlieghoogte 10 uur na de start.

De hoogte h in km waarop de Boeing vliegt is een functie van de vliegtijd t in uren. We bekijken de tijd vanaf $t = 0,5$ tot aan een half uur voor de landing.

Met de gegevens is een formule op te stellen van de vorm $g^h = at + b$.

- Bereken g , a en b .

Diagnostische toets

5.1 Machten met negatieve en gebroken exponenten

1 Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

a $(a^{\frac{1}{4}})^3$

c $7a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{5}}$

e $\frac{3}{4}a^{-2}b^{\frac{2}{3}}$

b $a^{-2}b^{\frac{1}{5}}$

d $6a^{\frac{4}{3}}$

f $(3a^{-\frac{2}{3}})^{-2}$

2 Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.

a $y = \frac{1}{5x^2\sqrt{x}}$

b $y = \frac{12}{5x^{-3}} \cdot \sqrt[5]{x^3}$

c $y = 3x^{0,3} \cdot (4x^{0,5})^4$

5.2 Grafieken van machtsfuncties veranderen

3 a De grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^5 + 3$ wordt eerst vermenigvuldigd met -2 ten opzichte van de x -as, vervolgens wordt de translatie $(-3, 6)$ toegepast.

Bereken de coördinaten van het punt van symmetrie van de beeldgrafiek.

b Op de grafiek van de functie $g(x) = \frac{2}{3}(x+1)^4 - 2$ wordt eerst de translatie $(1, 5)$ toegepast, vervolgens wordt de grafiek met 5 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie h .

Bereken de extreme waarde van h .

5.3 Wortelfuncties

4 Geef van elk van de volgende functies de coördinaten van het randpunt van de grafiek. Geef ook het domein en het bereik.

a $f(x) = \sqrt{x-4} + 1$

b $g(x) = -3\sqrt{x+2} - 4$

c $h(x) = 5 - \sqrt{x-3}$

5 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{5-2x} - 1$.

a Teken de grafiek van f en geef B_f .

b Los op $f(x) < 3$.

c Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x > -2$?

6 Los exact op.

a $2x = \sqrt{2-7x}$

b $28 - x\sqrt{x} = 1$

c $2x - \sqrt{x} = 6$

5.4 Exponentiële functies

- 7** Gegeven zijn de functies $f(x) = 0,3 \cdot 2^{x-1} - 5$ en $g(x) = 2 + (\frac{1}{3})^{x-4}$.
- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
 - b** Geef van f het bereik en de formule van de horizontale asymptoot van de grafiek.
 - c** Los op $f(x) \leq g(x)$. Rond af op twee decimalen.
 - d** Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing en de vergelijking $g(x) = p$ geen oplossing?
 - e** Welke waarden neemt $g(x)$ aan voor $x \leq 3$?

- 8** Schrijf de volgende formules in de vorm $y = b \cdot g^x$.

a $y = 108 \cdot 3^{4x-3}$ **b** $y = \frac{250}{5^{-2x+3}}$ **c** $y = 2^{3x-2} \cdot 2^{-4x+3}$

- 9** Los exact op.

a $5^{x-1} = 125$ **b** $3^{2x-5} = \frac{1}{27}$ **c** $2 \cdot 4^{2x-1} - 3 = 61$

5.5 Logaritmen

- 10** Bereken.

a ${}^2\log(\frac{1}{4}\sqrt{8})$ **b** ${}^3\log(27\sqrt{3})$ **c** ${}^5\log(\frac{1}{125} \cdot \sqrt[3]{5})$

- 11** Los exact op.

a ${}^4\log(2x-3) = 2$ **b** ${}^{\frac{1}{2}}\log(x-3) = -4$ **c** $5 + 3 \cdot {}^2\log(x) = 20$

- 12** De volgende transformaties worden toegepast op de grafiek van $y = {}^2\log(x)$.

Geef telkens de formule van de beeldgrafiek.

- a** Vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met -3 , gevolgd door de translatie $(4, -2)$.
- b** Eerst de translatie $(-3, 2)$, dan de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met $\frac{1}{2}$.

- 13** Los exact op.

a $4 - {}^2\log(x+1) \leq 0$
b ${}^{\frac{1}{2}}\log(x+2) \geq 1$

6

De afgeleide functie

Wat leer je?

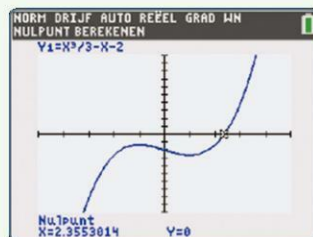
- Hoe je de afgeleide gebruikt om de formule van een raaklijn op te stellen en om punten van een grafiek op te sporen waarin de helling is gegeven.
- Extreme waarden berekenen en controleren met de afgeleide.
- De afgeleide berekenen van machtsfuncties met negatieve en gebroken exponenten.
- Wat de kettingregel is.
- Hoe je de afgeleide gebruikt om optimaliseringsproblemen op te lossen.



Beginopdracht Nulpunten benaderen met raaklijnen

In de figuur hiernaast zie je een schermafdruk van de GR waarop het nulpunt is berekend van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 2$. Je ziet dat het nulpunt bij benadering 2,3553014 is.

Je hebt je misschien wel eens afgevraagd hoe de GR een nulpunt berekent. In deze opdracht ga je één van de mogelijke methodes nader onderzoeken. Deze methode maakt gebruik van formules van raaklijnen.



We gaan uit van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 2$ en nemen aan dat bekend is dat het nulpunt in de buurt zit van 3. Daarom nemen we als startwaarde $x = 3$. Daarmee is 3 de *eerste benadering* van het nulpunt.

Bij $x = 3$ hoort $f(3) = 4$ en helling 8. Zoals je weet kun je deze helling berekenen met de optie dy/dx . Met deze gegevens kun je een vergelijking opstellen van de raaklijn k van de grafiek van f in het punt $(3, 4)$. Je krijgt $k: y = 8x - 20$.

- Toon dit aan.

Het snijpunt van k met de x -as is het punt $A(2,5; 0)$.

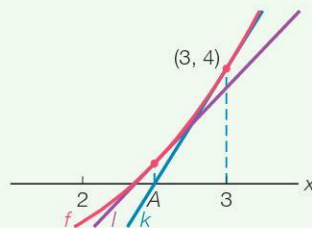
Zie de figuur hiernaast.

We nemen $x = 2,5$ als *tweede benadering* van het nulpunt en stellen een vergelijking op van de raaklijn l in het punt van de grafiek van f met x -coördinaat 2,5. Dit geeft

$l: y = 5,25x - 12,4166...$

Door l te snijden met de x -as krijg je de *derde benadering* van het nulpunt.

- Laat zien hoe je aan de vergelijking van l kunt komen en bereken de derde benadering. Hoeveel decimalen kloppen nu met het antwoord 2,355...?
- Bereken de vierde benadering. Zorg ervoor dat je in tussenstappen niet afrondt. Hoeveel decimalen kloppen nu?



Hierboven is startwaarde $x = 3$ genomen. Je kunt ook een andere startwaarde nemen.

- Neem startwaarde $x = -2$ (dat is dus de eerste benadering) en bereken de tweede en de derde benadering. Plot de grafiek van f en de raaklijnen die je hebt gebruikt om de tweede en de derde benadering te berekenen. Krijg je ook met startwaarde $x = -2$ uiteindelijk het nulpunt? Licht toe.
- Licht toe dat je met deze methode met startwaarde $x = 1$ niet het nulpunt krijgt. Is er nog een startwaarde waarbij je hetzelfde probleem krijgt als bij startwaarde $x = 1$?

Voorkennis Hellingen van grafieken en regels voor de afgeleide

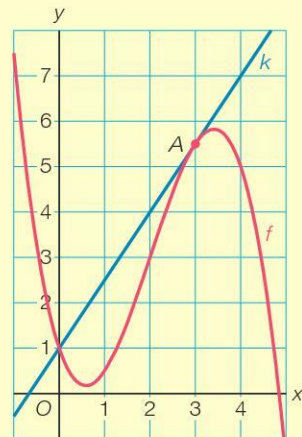
Theorie A Hellingen van grafieken

In figuur 6.1 is de grafiek van de functie $f(x) = -0,5x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ getekend. Op de grafiek ligt het punt $A(3; 5,5)$. De lijn k raakt de grafiek van f in A . Om de formule van k op te stellen, gebruik je de optie dy/dx van de GR. Met deze optie krijg je de helling van de grafiek in een punt, en dat is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 1,5$, dus $k: y = 1,5x + b$.

Invullen van $x = 3$ en $y = 5,5$ geeft $1,5 \cdot 3 + b = 5,5$ en hieruit volgt dat $b = 1$.

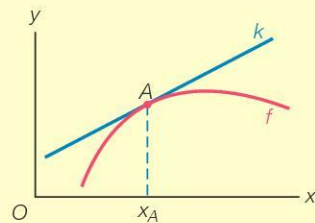
De formule van k is dus $y = 1,5x + 1$.



figuur 6.1

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ is

- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A
- de helling van de grafiek in A
- de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.



figuur 6.2 $rc_k = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$

Voorbeeld

De lijn k raakt de grafiek van $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ in het punt A met $x_A = 2$.

Stel de formule van k .

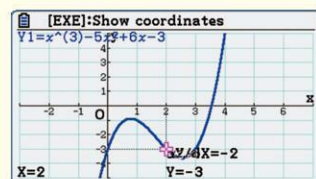
Uitwerking

Voer in $y_1 = x^3 - 5x^2 + 6x - 3$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(2) = -3, \text{ dus } A(2, -3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 2 + b = -3 \\ -4 + b = -3 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $k: y = -2x + 1$.



- 1** Gegeven is de functie $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x + 5$.
- a** De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 3$.
Stel de formule op van k .
 - b** De grafiek van f snijdt de y -as in het punt B .
De lijn l raakt de grafiek van f in B .
Stel de formule op van l .

Theorie B Hellinggrafiek en afgeleide functie

De hellingfunctie van f geeft bij elke x de helling van de grafiek van f in dat punt.

De grafiek van de hellingfunctie heet de hellinggrafiek.

Een ander woord voor hellingfunctie is afgeleide functie of afgeleide.

Het berekenen van de formule van de afgeleide heet differentiëren. Je gebruikt hierbij de volgende regels.

$$f(x) = a \text{ geeft } f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax \text{ geeft } f'(x) = a$$

$$f(x) = ax^n \text{ geeft } f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$$

In het voorbeeld worden verder de somregel en de verschilregel van het differentiëren gebruikt.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x + 8$

b $g(x) = (3x^2 - 1)^2$

Uitwerking

a $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x + 8$ geeft $f'(x) = 12x^2 - 14x + 5$

b $g(x) = (3x^2 - 1)^2 = 9x^4 - 6x^2 + 1$ geeft $g'(x) = 36x^3 - 12x$

- 2** Differentieer.
- a** $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6x - 1$
 - b** $g(x) = (5x^2 - 2)^2$
 - c** $h(p) = -\frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{5}p^2 - 8$
 - d** $k(q) = 10 - 5q^2 + 9q^3 - a^4$
- 3** Gegeven is de functie $f(x) = 1\frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 7x + 5$.
- a** Bereken de formule van de hellinggrafiek.
 - b** Bereken algebraïsch de helling van de grafiek van f voor $x = 1$.

6.1 Raaklijnen en toppen



Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 4$.

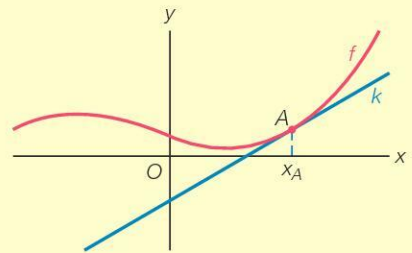
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$.

- Bereken de y -coördinaat van A .
- Bereken de formule van de hellinggrafiek van f .
- Bereken algebraïsch de helling van de grafiek van f in het punt A .
- Om de formule van k op te stellen gebruik je de antwoorden van de vragen a en c.
Licht dit toe en stel de formule op van k .

Theorie A Formule van raaklijn met behulp van de afgeleide

Je weet dat de afgeleide f' voor elke x de helling in het bijbehorende punt van de grafiek van f geeft. Je kunt dus ook zeggen dat $f'(x)$ de richtingscoëfficiënt is van de raaklijn in het bijbehorende punt.

$f'(a)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek van f in het punt $A(a, f(a))$.



figuur 6.3 $y_A = f(x_A)$ en $rc_k = f'(x_A)$

Het punt A met $x_A = 3$ ligt op de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$. Zie figuur 6.4.

Je krijgt y_A door $f(3)$ te berekenen.

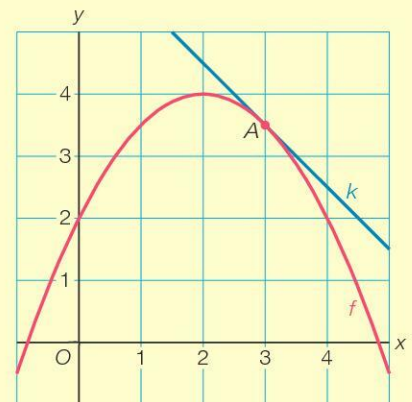
$$f(3) = -\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = 3\frac{1}{2}, \text{ dus } A(3, 3\frac{1}{2}).$$

Met $f'(3)$ krijg je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A .

$$f'(x) = -x + 2, \text{ dus } f'(3) = -3 + 2 = -1.$$

$$\text{Je weet dus } k: y = -x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} -3 + b = 3\frac{1}{2} \\ A(3, 3\frac{1}{2}) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} b = 6\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = -x + 6\frac{1}{2}.$$



figuur 6.4

Bij het algebraïsch opstellen van de formule van een raaklijn ga je te werk zoals in het voorbeeld op de volgende bladzijde.

Je berekent dus de afgeleide en je laat zien wanneer je $f(x)$ en wanneer je $f'(x)$ gebruikt.

Voorbeeld

Stel algebraïsch een vergelijking op van de lijn k die de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 5$ raakt in het punt A met $x_A = 2$.

Uitwerking

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 5 \text{ geeft } f'(x) = 2x^3 - 3x^2$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 4.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(2) = 5, \text{ dus } A(2, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 2 + b = 5 \\ 8 + b = 5 \\ b = -3 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 4x - 3.$$

Je mag $f(2)$ op de GR berekenen.

2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2$.

-  **a** Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = 4$.
Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k in A .
- b** Stel algebraïsch een vergelijking op van de lijn l die de grafiek van f raakt in het punt B met $x_B = -1$.

3 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

-  **a** Stel algebraïsch de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt $A(2, 1)$.
- b** De grafiek van f snijdt de y -as in het punt B .
Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn l in B .

4 Gegeven is de functie $g(x) = 2x^2 - 6x$. De grafiek van g snijdt de x -as behalve in de oorsprong ook nog in het punt A .

-  **a** Bereken algebraïsch de coördinaten van A .
- b** Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k in A .

A5 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 4x$ en het punt A met $x_A = 1$ op de grafiek van f .

-  **a** Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k in A .
- b** De grafiek van f snijdt de positieve x -as in het punt B .
Stel algebraïsch een vergelijking op van de raaklijn l in B .

A6 Gegeven is de functie $f(x) = ax^2 - 4x + 2$.

-  ***** Stel algebraïsch een vergelijking op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt $A(6, -4)$.

07
□ ⊗ *

In figuur 6.5 is de grafiek geschetst van de functie

$$h(x) = -x^2 + 5x - 4.$$

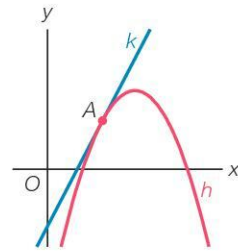
De lijn k met $rc_k = 2$ raakt de grafiek van h in het punt A .

a Bereken $h'(x)$.

b $rc_k = 2$, dus $h'(x_A) = 2$.

$$\text{Ook is } h'(x_A) = -2x_A + 5, \text{ dus } -2x_A + 5 = 2.$$

Bereken x_A en y_A .



figuur 6.5 De lijn k heeft richtingscoëfficiënt 2.

Theorie B Raaklijn met gegeven richtingscoëfficiënt

In figuur 6.6 zie je de grafiek van de functie

$$f(x) = x^2 - 3x + 1.$$

Verder zijn enkele lijnen met richtingscoëfficiënt 2 getekend. Eén van die lijnen raakt de grafiek van f . Het raakpunt is B . Om de coördinaten van B te berekenen gebruik je dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in B gelijk is aan 2, dus $f'(x_B) = 2$. Om x_B te berekenen los je dus de vergelijking $f'(x) = 2$ op.

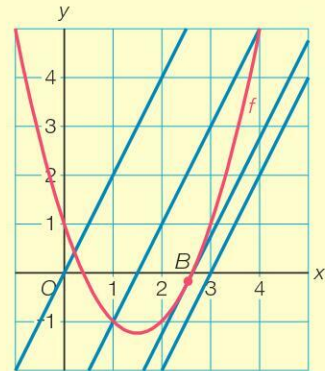
$$f(x) = x^2 - 3x + 1 \text{ geeft } f'(x) = 2x - 3$$

$$f'(x) = 2 \text{ geeft } 2x - 3 = 2$$

$$2x = 5$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$x_B = 2\frac{1}{2} \text{ geeft } y_B = f(2\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}, \text{ dus } B(2\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}).$$



figuur 6.6 Eén van de lijnen met $rc = 2$ raakt de grafiek van f .

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 15$.

In de punten A en B van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 3.

Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B .

Uitwerking

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 15 \text{ geeft } f'(x) = 3x^2 - 6x - 6$$

$$rc_{\text{raaklijn}} = 3, \text{ dus } f'(x) = 3$$

$$3x^2 - 6x - 6 = 3$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

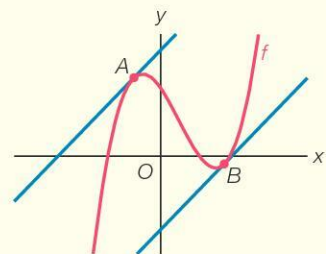
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 3$$

$$x_A = -1 \text{ geeft } y_A = f(-1) = 17, \text{ dus } A(-1, 17).$$

$$x_B = 3 \text{ geeft } y_B = f(3) = -3 \text{ dus } B(3, -3).$$



figuur 6.7

8 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

- a** In het punt A van de grafiek is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 4.

Bereken algebraïsch de coördinaten van A .

- b** Op de grafiek ligt het punt B waarin de raaklijn evenwijdig is met de lijn $k: y = -6x + 8$.

Waarom is $f'(x_B) = -6$? Bereken algebraïsch de coördinaten van B .

9 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x - 2$.

- a** Er zijn twee punten op de grafiek waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 3.

Bereken algebraïsch de coördinaten van die punten.

A10 In figuur 6.8 is de grafiek getekend van de functie

a $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$.

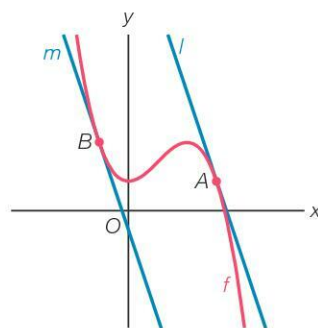
Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = 3$.

De lijn l raakt de grafiek in A .

- a** Stel algebraïsch de formule op van l .

- b** De lijn m is evenwijdig met l en raakt de grafiek van f in het punt B .

Bereken algebraïsch de coördinaten van B en stel algebraïsch een vergelijking op van m .



figuur 6.8 De raaklijnen l en m zijn evenwijdig.

A11 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 5$.

- a** De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt 1.

Stel van elk van deze raaklijnen algebraïsch de formule op.

- b** Onderzoek met een berekening of de grafiek van f een raaklijn heeft met richtingscoëfficiënt -4.

A12 Gegeven is de functie $f(x) = ax^2 + bx$.

***** De lijn $k: y = 2x - 2$ raakt de grafiek van f in het punt $A(-2, -6)$.

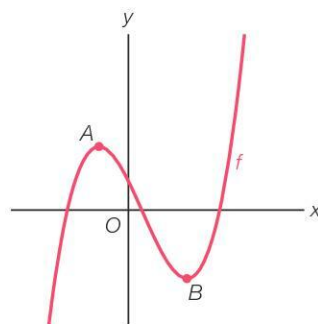
Bereken a en b .

013 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$.

- a** Op de grafiek van f liggen de punten A en B waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 0. Zie figuur 6.9.

a Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B .

b Geef van iedere horizontale raaklijn de formule.



figuur 6.9

Theorie C Extreme waarden berekenen met behulp van de afgeleide

Je kunt met de GR snel de coördinaten van toppen van grafieken opsporen. Je gebruikt dan de opties maximum en minimum.

Maar soms wordt gevraagd de coördinaten van toppen algebraïsch te berekenen. Je gebruikt dan dat de raaklijn in een top horizontaal is. Dat betekent dat de afgeleide nul is. Zoals je weet zijn de y -coördinaten van toppen van een grafiek extreme waarden. Bij het algebraïsch berekenen van extreme waarden van een functie f gebruik je dus $f'(x) = 0$.

Werkschema: algebraïsch berekenen van extreme waarden

- 1 Bereken $f'(x)$.
- 2 Los algebraïsch de vergelijking $f'(x) = 0$ op.
- 3 Voer de formule van f in op de GR, plot de grafiek en schets de grafiek in je schrift. Kijk in de grafiek of je met een maximum of een minimum te maken hebt.
- 4 Bereken de y -coördinaten van de toppen en noteer het antwoord in de vorm max. is $f(\dots) = \dots$ en min. is $f(\dots) = \dots$

Is de grafiek van de functie gegeven, dan is het niet nodig een schets van de grafiek te maken. Wel is het verstandig om de formule in te voeren op de GR en achteraf met de opties maximum en minimum te controleren of je de extreme waarden goed hebt berekend.

Voorbeeld

Bereken exact de extreme waarden van de functie

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2x + 4.$$

Uitwerking

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2x + 4 \text{ geeft } f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 2$$

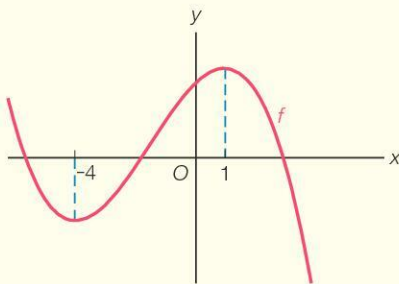
$$f'(x) = 0 \text{ geeft } -\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 2 = 0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x - 1)(x + 4) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -4$$

Exact, dus algebraïsch
en niet afronden.



min. is $f(-4) = -5\frac{1}{3}$ en max. is $f(1) = 5\frac{1}{12}$.



14 Bereken exact de extreme waarden.



a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 + 10x + 5$

b $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + 3\frac{3}{4}x + 3$

Vergeet niet een schets te maken.

A15 In figuur 6.10 zie je de grafiek van de functie



$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 40$ met de toppen A , B en C .

a Bereken exact de coördinaten van A , B en C .

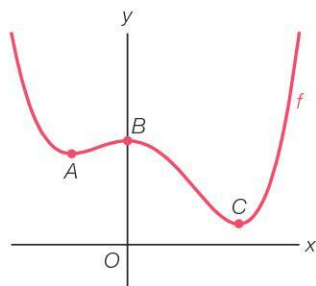
b Geef het bereik van f .

c De lijn k gaat door de toppen B en C en snijdt de grafiek van f ook nog in de punten D en E . Bereken de coördinaten van D en E . Rond zo nodig af op twee decimalen.

De lijn l raakt de grafiek van f in het punt F met $x_F = 1$ en snijdt de grafiek in de punten G en H .

d Stel langs algebraïsche weg de formule op van l .

e Bereken de coördinaten van G en H . Rond af op twee decimalen.



figuur 6.10

O16 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 4x + 3$.

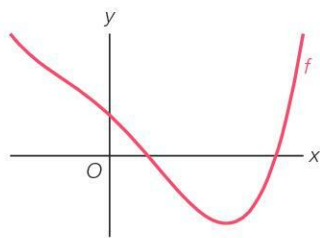


In de figuur hiernaast zie je een schets van de grafiek van f .

a Bereken $f'(x)$.

b Toon met een berekening aan dat $f'(2) = 0$.

c Hoe volgt uit vraag b en de schets in figuur 6.11 dat de grafiek van f een extreme waarde heeft voor $x = 2$?



figuur 6.11

Theorie D Aantonen van extreme waarden

Bij het bewijzen of met de afgeleide aantonen dat de functie f een extreme waarde heeft voor $x = a$ volg je het werkschema op de volgende bladzijde.

Aantonen

Bij aantonen geef je een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.

Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

Het geven van enkele getallenvoorbeelden is niet voldoende.

Bewijzen

Bij bewijzen geef je een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.

Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

Werkschema: met de afgeleide aantonen dat de functie f een extreme waarde heeft voor $x = a$

- 1 Bereken $f'(x)$.
- 2 Laat met een berekening zien dat $f'(a) = 0$.
- 3 Schets de grafiek van f en laat zien dat de grafiek een top heeft voor $x = a$.

In het voorbeeld wordt bewezen dat de functie

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 7$ een extreme waarde heeft voor $x = 2\frac{1}{2}$.

Voorbeeld

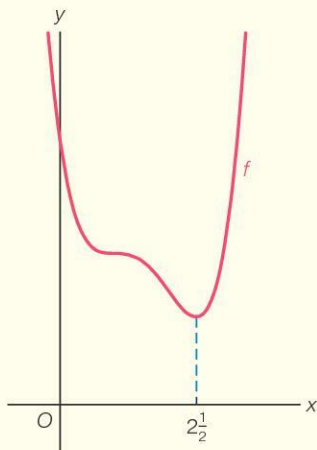
Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 7$.

Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = 2\frac{1}{2}$.

Uitwerking

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 7$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 10$

$$f'(2\frac{1}{2}) = 4 \cdot (2\frac{1}{2})^3 - 18 \cdot (2\frac{1}{2})^2 + 24 \cdot 2\frac{1}{2} - 10 = 62\frac{1}{2} - 112\frac{1}{2} + 60 - 10 = 0$$



$f'(2\frac{1}{2}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = 2\frac{1}{2}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = 2\frac{1}{2}$.



Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 7$ van het voorbeeld.

- a** Toon aan dat $f'(1) = 0$.

Heeft de functie een extreme waarde voor $x = 1$? Licht toe.

- b** De grafiek van f heeft twee horizontale raaklijnen.

Stel van deze lijnen een vergelijking op.

18


- a Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - 7x$.
 Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{2}$.
 b Gegeven is de functie $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x$.
 Toon met de afgeleide aan dat g een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{3}$.

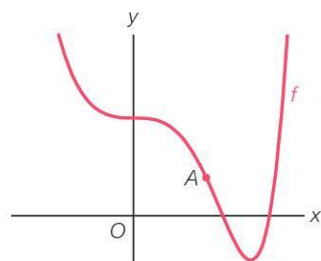
19


- De grafiek van de functie $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$ snijdt de x -as in de punten A en B .
 a Stel algebraïsch vergelijkingen op van de raaklijnen van de grafiek in A en B .
 b Toon met de afgeleide aan dat de functie f geen extreme waarde heeft voor $x = 1$.
 c Bewijs dat de functie een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

A20


Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{2}x^3 - 4)^2 - 5$. Zie de schets hiernaast.

- a Stel algebraïsch de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het punt A met $x_A = 1$.
 b Toon met de afgeleide aan dat de functie f geen extreme waarde heeft voor $x = 0$.
 c Bewijs dat de functie f een extreme waarde heeft voor $x = 2$.
 d Bereken het bereik van f .



figuur 6.12

GESCHIEDENIS

Johannes Hudde (1628-1704)

Johannes Hudde was een veelzijdig man met grote belangstelling voor wiskunde, natuurkunde, techniek en sterrenkunde. Het grootste deel van zijn leven was hij burgemeester van Amsterdam.

Bekend is Huddes methode om toppen te bepalen van grafieken van functies met gehele machten van x , zoals bijvoorbeeld $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$. De door hem bedachte methode wordt de regel van Hudde genoemd. Hudde gebruikte hierbij onbewust de afgeleide van dit soort functies. Het toepassen van de regel op de functie $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ leidt tot het oplossen van de vergelijking $6x^2 - 6 = 0$, dus tot het oplossen van de vergelijking $f'(x) = 0$.

De oplossingen $x = -1$ en $x = 1$ zijn de x -coördinaten van de toppen van de grafiek van f .



Terugblik

Formule van raaklijn

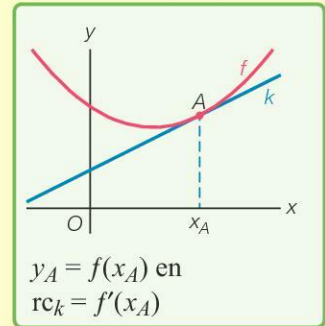
Bij het algebraïsch opstellen van de formule van een raaklijn van een grafiek gebruik je de afgeleide.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is gelijk aan de afgeleide in het raakpunt. Dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A is $f'(x_A)$.

Bij de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 5$ krijg je de formule van de raaklijn k in het punt A met $x_A = 3$ als volgt.

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 5$ geeft $f'(x) = -x + 1$ en dus is $rc_k = f'(3) = -3 + 1 = -2$.

Door bij $y = -2x + b$ de coördinaten $(3, 3\frac{1}{2})$ van A in te vullen, krijg je $k: y = -2x + 9\frac{1}{2}$.



Raaklijn met gegeven richtingscoëfficiënt

In de figuur hiernaast is de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 5$ geschetst.

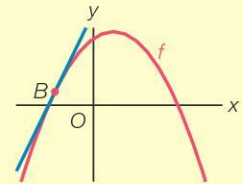
De grafiek heeft een raaklijn met richtingscoëfficiënt 3.

Deze lijn raakt de grafiek in het punt B .

Om de coördinaten van B te berekenen gebruik je dat

$f'(x) = 3$, dus $-x + 1 = 3$ en dit geeft $x = -2$.

$x_B = -2$ geeft $y_B = f(-2) = 1$, dus $B(-2, 1)$.



Extreme waarden

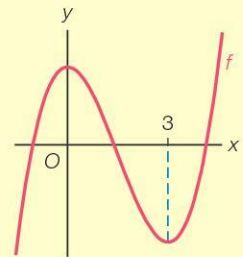
Bij het algebraïsch berekenen van extreme waarden gebruik je dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een top van de grafiek nul is, dus $f'(x) = 0$. Nadat je de vergelijking $f'(x) = 0$ hebt opgelost, kijk je in een schets van de grafiek of je met een maximum of een minimum te maken hebt.

Bij de functie $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4$ krijg je $f'(x) = 2x^2 - 6x$.

$f'(x) = 0$ geeft $2x^2 - 6x = 0$ en dit geeft $x = 0 \vee x = 3$.

Zie de schets hiernaast.

Je krijgt max. is $f(0) = 4$ en min. is $f(3) = -5$.



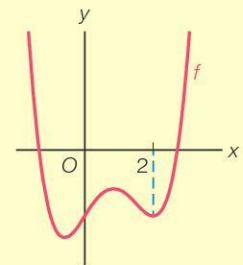
Bij het bewijzen dat de functie $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x - 5$ voor $x = 2$ een extreme waarde heeft, ga je als volgt te werk.

1 Bereken $f'(x)$. Je krijgt $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4$.

2 Bereken $f'(2)$. Je krijgt

$$f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 4 = 32 - 36 + 4 = 0.$$

3 $f'(2) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek van f een top heeft voor $x = 2$, dus f heeft een extreme waarde voor $x = 2$.



6.2 De afgeleide van machtsfuncties

021
☐ ⊗ *

Gegeven is de functie $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

Het functievoorschrift van g is te schrijven als $g(x) = x^{-2}$.

a Licht dit toe.

b Gebruik de regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ om de afgeleide van g te berekenen en licht toe dat de formule die je zo krijgt te schrijven is als

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3}.$$

c Controleer of inderdaad geldt $g(x) = \frac{1}{x^2}$ geeft

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3} \text{ door bij } y_1 \text{ de formule van } g \text{ in te voeren,}$$

bij y_2 de numerieke afgeleide van g en bij y_3 de formule die je hebt gevonden voor g' . Maak vervolgens tabellen bij y_2 en y_3 .

Wat is je conclusie?

De GR geeft met

$y_1 = \frac{d}{dx}(v_1) \Big|_{x=x}$ de
numerieke afgeleide
van y_1 .

Theorie A De afgeleide van $f(x) = x^n$ voor negatieve n

In opgave 21 heb je gezien dat de regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ ook geldt voor $n = -2$.

Op dezelfde manier kun je laten zien dat de regel ook geldt voor $n = -3$, dus dat geldt $h(x) = x^{-3}$ geeft $h'(x) = -3x^{-4}$.

Men heeft aangetoond dat de regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ geldt voor elk negatief getal n .

Je kunt nu de afgeleide berekenen van bijvoorbeeld $f(x) = \frac{2}{x}$, want $f(x) = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$ en dit geeft $f'(x) = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$.

Afspraak

Bij het differentiëren mag je in het antwoord alleen negatieve exponenten laten staan als de functie zelf ook met negatieve exponenten is gegeven.

Om de afgeleide van $g(x) = \frac{x^4 + 1}{2x^2}$ te berekenen, schrijf je eerst het functievoorschrift als $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^{-2}$. Dat doe je met behulp van **uitdelen** en gaat als volgt.

$$g(x) = \frac{x^4 + 1}{2x^2} = \frac{x^4}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^{-2}$$

Nu kun je de afgeleide berekenen. Je krijgt $g'(x) = x - x^{-3}$.

Volgens de afspraak herleid je dit tot $g'(x) = x - \frac{1}{x^3}$.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = \frac{6}{x^3}$

b $g(x) = \frac{x^3 + 1}{3x^2}$

Uitwerking

a $f(x) = \frac{6}{x^3} = 6x^{-3}$ geeft $f'(x) = -18x^{-4} = -\frac{18}{x^4}$

b $g(x) = \frac{x^3 + 1}{3x^2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^{-2}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3}$

$$\frac{x^3 + 1}{3x^2} = \frac{x^3}{3x^2} + \frac{1}{3x^2}$$

Bij het exact berekenen van de extreme waarden van de functie

$f(x) = \frac{x^2 + 16}{4x}$ krijg je te maken met een gebroken vergelijking.

$$f(x) = \frac{x^2 + 16}{4x} = \frac{1}{4}x + 4x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{4} - 4x^{-2} = \frac{1}{4} - \frac{4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{4} - \frac{4}{x^2} = 0$$

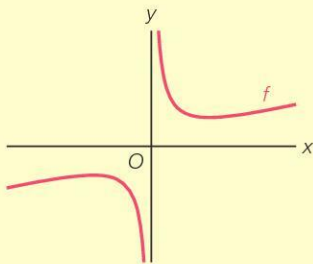
$$\frac{1}{4} = \frac{4}{x^2}$$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

vold. vold.



figuur 6.13

Je krijgt max. is $f(-4) = -2$ en min. is $f(4) = 2$.

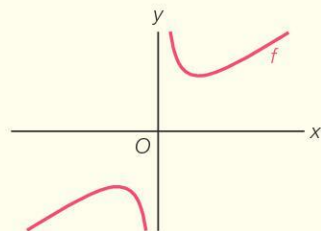
Merk op dat het maximum kleiner is dan het minimum.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x}$.

De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt $1\frac{4}{5}$.

Bereken algebraïsch de coördinaten van de raakpunten.



figuur 6.14

Aanpak

$rc_{\text{raaklijn}} = 1\frac{4}{5}$, dus los de vergelijking $f'(x) = 1\frac{4}{5}$ op.

Uitwerking

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x} = 2x + 5x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = 2 - 5x^{-2} = 2 - \frac{5}{x^2}$$

$$rc_{\text{raaklijn}} = 1\frac{4}{5}, \text{ dus } f'(x) = 1\frac{4}{5}$$

$$2 - \frac{5}{x^2} = 1\frac{4}{5}$$

$$-\frac{5}{x^2} = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{5}{x^2} = \frac{1}{5}$$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \vee x = -5$$

vold. vold.

$f(5) = 11$ en $f(-5) = -11$, dus de raakpunten zijn $(5, 11)$ en $(-5, -11)$.

22 Differentieer.



a $f(x) = \frac{5}{x^3}$

b $g(x) = \frac{1}{5x^3}$

c $h(x) = 5x^2 - \frac{5}{x^2}$

23 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = \frac{x^4 - 5}{x^3}$

b $g(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^3}$

c $h(x) = \frac{x+2}{3x}$

A24 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = \frac{2x-1}{3x^2}$

b $g(x) = 6 - \frac{x^2-1}{x}$

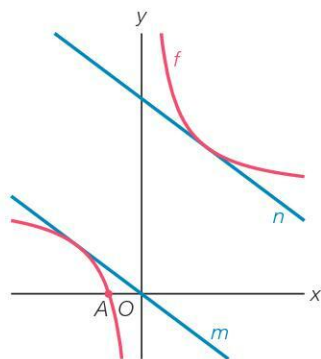
c $h(x) = \frac{5}{2x^2} - \frac{2x^2}{5}$

25
□ ⊗ *

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x+3}{x}$.

De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A .

- Stel algebraïsch een vergelijking op van de raaklijn k van de grafiek in het punt A .
- De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt $-\frac{3}{4}$. Bereken algebraïsch de coördinaten van de raakpunten.

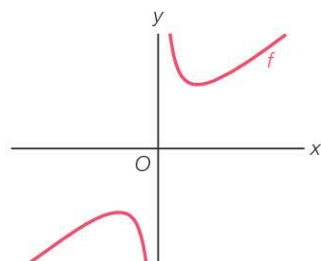


figuur 6.15

A26
□ ⊗ *

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$.

- Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k van de grafiek in het punt A met $x_A = 3$.
- De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -3 . Bereken algebraïsch de coördinaten van de raakpunten.
- Bereken algebraïsch de extreme waarden van f .
- Toon algebraïsch aan dat de grafiek van f geen raaklijn heeft met richtingscoëfficiënt 2 .



figuur 6.16

A27
*

Voor $a > 0$ zijn gegeven de functies $f(x) = \frac{x^2}{a} + \frac{a}{x^2}$.

Bewijs dat voor elke waarde van a de toppen van de grafiek van f op de lijn $y = 2$ liggen.

O28
□ ⊗ *

Schrijf als macht van x .

- $\sqrt{x}$
- $x^2 \cdot \sqrt{x}$
- $\frac{1}{x\sqrt{x}}$
- $x^3 \cdot \sqrt{x}$

O29
□ ⊗ *

Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponent.

- $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
- $2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$
- $-1\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
- $1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}$

Fleur moet de afgeleide van $g(x) = \sqrt{x}$ berekenen.

Ze krijgt $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ door de regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ en opgave 28a en 29a te gebruiken.

a Onderzoek hoe dat gaat.

b Controleer of inderdaad geldt $g(x) = \sqrt{x}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ door bij y_1 de formule van g in te voeren, bij y_2 de numerieke afgeleide van g en bij y_3 de formule voor de afgeleide die Fleur heeft gevonden. Maak vervolgens tabellen bij y_2 en y_3 . Wat is je conclusie?

Theorie B De afgeleide van $f(x) = x^n$ voor elke n van $\mathbb{R}$

De regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ geldt ook voor gebroken waarden van n . Hiervan heb je in opgave 30 een voorbeeld gezien. De regel geldt zelfs voor elk getal n van $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ voor elke n van $\mathbb{R}$.

Om $f(x) = x\sqrt{x}$ te differentiëren, schrijf je eerst $x\sqrt{x}$ als macht van x .

Je krijgt $f(x) = x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$ en dit geeft $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

Vervolgens schrijf je $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ zonder gebroken exponent, dus $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

Afspraak

Bij het differentiëren mag je in het antwoord alleen gebroken exponenten laten staan als de functie zelf ook met gebroken exponenten is gegeven.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

b $g(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

c $h(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 4}{x^2}$

Uitwerking

a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$

b $g(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{7}{3}}$ geeft $g'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} = \frac{7}{3} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}} = \frac{7}{3}x \cdot \sqrt[3]{x}$

c $h(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 4}{x^2} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2} + \frac{4}{x^2} = x^{-\frac{5}{3}} + 4x^{-2}$ geeft

$$h'(x) = -\frac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}} - 8x^{-3} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{8}{3}}} - \frac{8}{x^3} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x^2 \cdot x^{\frac{2}{3}}} - \frac{8}{x^3} = -\frac{5}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{8}{x^3}$$

31 Differentieer.

- a** $f(x) = x + \sqrt{x}$ **c** $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
b $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$ **d** $k(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3}$

32 Bereken de afgeleide.

- a** $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x}$ **c** $h(x) = (x^2 + 1)(1 + \sqrt{x})$
b $g(x) = \frac{4x^2 + 1}{x\sqrt{x}}$ **d** $k(x) = \frac{x - 4}{\sqrt[3]{x}}$

33 Differentieer.

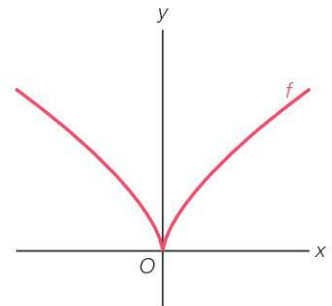
- a** $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ **c** $h(x) = \frac{x^2 - 2}{x\sqrt{x}}$
b $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ **d** $k(x) = x^2(x\sqrt{x} - 3)$

A34 Bereken de afgeleide.

- a** $f(x) = (x\sqrt{x} - 3)^2$ **c** $h(x) = (x - \sqrt[3]{x})^2$
b $g(x) = \frac{2x - 3}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$ **d** $k(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt[4]{x}}$

35 Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

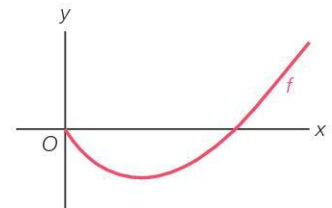
- a** De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = \frac{1}{8}$.
 De lijn l raakt de grafiek van f in het punt B met $x_B = 8$.
 De lijnen k en l snijden elkaar in het punt C .
 Bereken langs algebraïsche weg de coördinaten van C .



figuur 6.17

36 Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$.

- a** Bereken algebraïsch het minimum van f .
b Stel algebraïsch de formule op van de lijn k die de grafiek van f raakt in de oorsprong.
c De lijn l met richtingscoëfficiënt 3 raakt de grafiek van f in het punt A .
 Bereken algebraïsch de coördinaten van A en stel de formule op van l .



figuur 6.18

A37
□ ⊙ *

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^3 + 2}{\sqrt{x}}$.

- a De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$.
Stel algebraïsch de formule op van k .
- b De x -coördinaat van de top van de grafiek is te schrijven als $\sqrt[3]{p}$.
Bereken p .

A38
□ ⊙ *

Een magneetzweeftrein trekt op. Gedurende de eerste negen seconden is de afgelegde afstand s in meter te benaderen door de formule $s(t) = 10t\sqrt{t}$ met t in seconden. Na negen seconden verandert de snelheid niet meer.

- a Bereken exact de snelheid na acht seconden.
- b Bereken algebraïsch na hoeveel seconden de snelheid gelijk is aan 108 km/uur.
- c Hoeveel meter legt de trein af in de eerste minuut?



E39
*

Voor elke waarde van p is gegeven de functie $f(x) = (2x - p\sqrt{x})^2$.

Bereken exact voor welke p de functie een maximum heeft voor $x = 2\frac{1}{4}$ en bereken dit maximum.

Differentiaalrekening

In de differentiaalrekening bestudeert men veranderingen van functies. Daarbij spelen begrippen als snelheid, helling van een grafiek en raaklijn van een grafiek een grote rol.

Het heeft lang geduurd voor men het begrip snelheid wist te doorgronden.

De beroemde geleerden Isaac Newton (1642-1727) en Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) hebben onafhankelijk van elkaar de differentiaalrekening ontwikkeld.

Newton geldt als de grootste en invloedrijkste wetenschapper aller tijden. In zijn belangrijkste werk, de 'Principia Mathematica' uit 1687, zet hij de wiskundige beginselen van de natuurwetenschappen uiteen. Hij verklaart in dit boek hoe het zonnestelsel in elkaar zit en legt er de wetten van de zwaartekracht en de bewegingsleer (mechanica) in vast.

Newton werd geboren op 25 december 1642 in Lincolnshire in Engeland. Zijn vader stierf al voor zijn geboorte. Zijn moeder liet hem over aan de zorgen van zijn grootmoeder.

Al vroeg werd duidelijk dat hij voor het werk thuis op de boerderij ongeschikt was. Hij had er geen belangstelling voor en verdiepte zich geheel in lezen en knutselen.

Newton schreef in 1671 een verhandeling over raaklijnen, maar deze werd pas negen jaar na zijn dood gepubliceerd.

Leibniz wordt gezien als een van de meest invloedrijke figuren in de westerse cultuur. Behalve aan wiskunde leverde hij ook belangrijke bijdragen aan filosofie, fysica, geologie, rechten, geschiedenis en geneeskunde. Hij was actief als politicus en raadsheer aan het hof van Hannover bij hertog Johann Friedrich. Hij ontwierp nieuwe soorten rijtuigen en drainagesystemen voor de mijnen in de Harz. Ook bedacht hij een manier om fosfor te produceren en was hij de uitvinder van de eerste rekenmachine die in staat was op te tellen, af te trekken, te vermenigvuldigen en te delen. In 1684 publiceerde hij het eerste artikel over de differentiaalrekening. Veel van de huidige notaties in de wiskunde zijn van hem afkomstig.

De vraag wie de ontdekker is van de differentiaalrekening heeft heel wat twistgesprekken opgeleverd. Terwijl de Engelsen Newton als de ontdekker beschouwden, ging men er in Duitsland vanuit dat dit Leibniz was. Deze vete heeft zelfs bijna een oorlog veroorzaakt tussen Engeland en Duitsland.



Newton



Leibniz

Terugblik

De afgeleide van $f(x) = x^n$

De regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ geldt voor elk getal n van $\mathbb{R}$.

Dus bij $f(x) = \frac{1}{x^4}$ krijg je $f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$ geeft $f'(x) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$ en bij $g(x) = x^3 \cdot \sqrt{x}$ krijg je $g(x) = x^3 \cdot \sqrt{x} = x^{3\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = 3\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x}$.

Bij het berekenen van de afgeleide van $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$ deel je eerst uit.

Je krijgt $h(x) = \frac{x^2+1}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ geeft $h'(x) = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$.

Bij het berekenen van de afgeleide van $k(x) = \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$ krijg je

$$k(x) = \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}} = \frac{x^2+1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \text{ geeft}$$

$$k'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}.$$

Raaklijnen en toppen

Bij de functie $f(x) = \frac{x^2+9}{2x}$ bereken je als volgt algebraïsch de coördinaten van de punten van de grafiek waarin de raaklijn richtingscoëfficiënt -4 heeft.

$$f(x) = \frac{x^2+9}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{9}{2}x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2x^2}$$

$$f'(x) = -4 \text{ geeft } \frac{1}{2} - \frac{9}{2x^2} = -4$$

$$-\frac{9}{2x^2} = -4\frac{1}{2}$$

$$\frac{9}{2x^2} = \frac{9}{2}$$

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

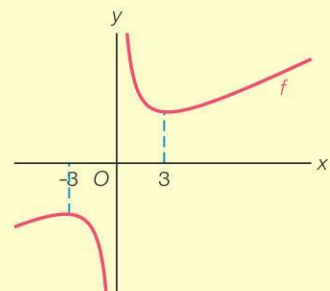
$$x = 1 \vee x = -1$$

$f(-1) = -5$ en $f(1) = 5$, dus de punten zijn $(-1, -5)$ en $(1, 5)$.

Voor het algebraïsch berekenen van de extreme waarden stel je $f'(x) = 0$.

Je krijgt $\frac{1}{2} - \frac{9}{2x^2} = 0$ en dit geeft $x = 3 \vee x = -3$.

Dus max. is $f(-3) = -3$ en min. is $f(3) = 3$.



6.3 De kettingregel



Gegeven zijn de functies $f(x) = 0,05x^3$ en $g(x) = 0,05(4x - 16)^3$.

Zoals je weet is $f'(x) = 0,15x^2$.

Fleur beweert dat $g'(x) = 0,15(4x - 16)^2 \cdot 4$ oftewel $g'(x) = 0,6(4x - 16)^2$.

Controleer of inderdaad geldt $g(x) = 0,05(4x - 16)^3$ geeft

$g'(x) = 0,6(4x - 16)^2$ door bij y_1 de formule van g in te voeren, bij y_2 de

numerieke afgeleide van g en bij y_3 de formule van g' die Fleur heeft

gevonden. Maak vervolgens tabellen bij y_2 en y_3 .

Wat is je conclusie?

Theorie A De afgeleide van $f(x) = (ax + b)^n$ met n geheel

De afgeleide van de functie $f(x) = 0,05x^3$ is $f'(x) = 0,15x^2$.

In opgave 40 heb je gezien dat de afgeleide van de functie

$g(x) = 0,05(4x - 16)^3$ gelijk is aan $g'(x) = 0,15(4x - 16)^2 \cdot 4$.

En zo is de afgeleide van $h(x) = (5x - 1)^3$ gelijk aan $h'(x) = 3(5x - 1)^2 \cdot 5$.

Algemeen is de afgeleide van $f(x) = (ax + b)^n$ gelijk aan

$$f'(x) = n(ax + b)^{n-1} \cdot a.$$

En de afgeleide van $f(x) = c \cdot (ax + b)^n$ is $f'(x) = c \cdot n(ax + b)^{n-1} \cdot a$.

Zo is de afgeleide van $k(x) = 7(2x - 3)^4$ gelijk aan

$$k'(x) = 7 \cdot 4(2x - 3)^3 \cdot 2 = 56(2x - 3)^3.$$

Functies zoals $g(x) = 0,05(4x - 16)^3$, $h(x) = (5x - 1)^3$ en $k(x) = 7(2x - 3)^4$ heten **samengestelde functies**.

Zo is de functie $g(x) = 0,05(4x - 16)^3$ samengesteld uit de functies $f(x) = 0,05x^3$ en $l(x) = 4x - 16$.

Er geldt $g(x) = f(l(x)) = f(4x - 16) = 0,05(4x - 16)^3$.

Let op of je bij het differentiëren met een samengestelde functie te maken hebt, want dan moet je bovendien nog vermenigvuldigen met een getal.

$$f(x) = 0,05x^3$$

$$\text{Net als } f(10) = 0,05 \cdot 10^3 \text{ is}$$

$$f(4x - 16) = 0,05 \cdot (4x - 16)^3.$$

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = x^2 - (3x - 1)^4$

b $g(x) = 4x + \frac{10}{(2x - 1)^3}$

Let op!
Vermenigvuldig met 3.

Uitwerking

a $f(x) = x^2 - (3x - 1)^4$ geeft $f'(x) = 2x - 4(3x - 1)^3 \cdot 3 = 2x - 12(3x - 1)^3$

b $g(x) = 4x + \frac{10}{(2x - 1)^3} = 4x + 10(2x - 1)^{-3}$ geeft

$$g'(x) = 4 + 10 \cdot -3(2x - 1)^{-4} \cdot 2 = 4 - \frac{60}{(2x - 1)^4}$$

Denk aan de afspraak op bladzijde 64.

41 Differentieer.



- a $f(x) = (4x + 3)^3$
- b $g(x) = (5x - 2)^{-3}$
- c $h(x) = 6(\frac{1}{2}x - 4)^5$
- d $k(x) = -3(\frac{1}{6}x + 5)^{-4}$

42 Bereken de afgeleide.



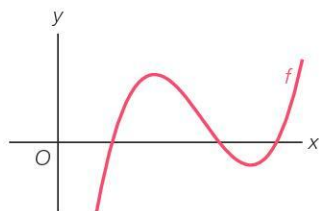
- a $f(x) = 3x^2 - (\frac{1}{4}x - 2)^3$
- b $g(x) = \frac{5}{(3x - 1)^4}$
- c $h(x) = (4x - 3)^4 - (2x - 5)^3$
- d $k(x) = 5x - \frac{4}{(3x + 2)^3}$

43 Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{2}x - 3)^3 - 1\frac{1}{2}x + 10$.



In figuur 6.19 zie je de grafiek van f .

- a Toon aan dat de afgeleide van f gelijk is aan $f'(x) = 1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 3)^2 - 1\frac{1}{2}$.
- b Toon aan dat uit $f'(x) = 0$ volgt $\frac{1}{2}x - 3 = 1 \vee \frac{1}{2}x - 3 = -1$.
- c Bereken de extreme waarden van f .



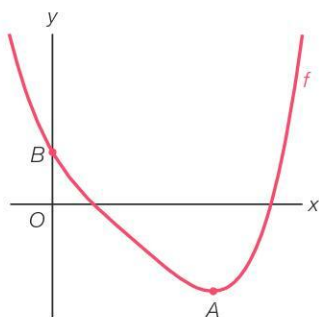
figuur 6.19

44 Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2$.



In figuur 6.20 zie de grafiek van f . De grafiek heeft top A en snijdt de y -as in het punt B .

- a Bereken exact het bereik van f .
- b De lijn k gaat door de punten A en B .
Stel langs algebraïsche weg de formule op van k .
- c De lijn l raakt de grafiek van f en is evenwijdig met de lijn $m: y = -x$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van l .



figuur 6.20

A45
□ ⊗ *

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}(2x - 5)^3 + 2$ en

$$g(x) = -\frac{1}{4}(3x - 10)^4 + 2\frac{1}{2}.$$

Het punt $A(3, 2\frac{1}{4})$ ligt zowel op de grafiek van f als op de grafiek van g .

- a Ga dit na met een berekening.
- b Emma beweert dat de grafieken van f en g elkaar raken in het punt A .
Onderzoek langs algebraïsche weg of Emma gelijk heeft.
- c Er zijn twee punten op de grafiek van f waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan $13\frac{1}{2}$.

Bereken exact de coördinaten van die punten.

Grafieken die elkaar raken in een punt A hebben in A een gemeenschappelijke raaklijn.

E46
*

Bereken exact voor welke waarde van a de functie

$$f(x) = (ax - 2)^4 + \frac{1}{2}ax \text{ een extreme waarde heeft voor } x = 3.$$

O47
□ ⊗ *

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \sqrt{3x + 1}$.

$$\text{Je kunt nagaan dat } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

- a Ga met de GR na dat geldt $g'(5) = \frac{3}{8}$.

$$\text{Fleur beweert dat } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3.$$

- b Onderzoek of de formule $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3$ klopt met $g'(5) = \frac{3}{8}$.

Theorie B De afgeleide van $f(x) = (ax + b)^n$ voor elke n van $\mathbb{R}$

De regel $f(x) = c \cdot (ax + b)^n$ geeft $f'(x) = c \cdot n(ax + b)^{n-1} \cdot a$ geldt voor elke n van $\mathbb{R}$.

Hiervan heb je in opgave 47 een voorbeeld gezien. Deze regel is een bijzonder geval van de **kettingregel**. Zie het informatief op bladzijde 77.

$$\boxed{f(x) = c \cdot (ax + b)^n \text{ geeft } f'(x) = c \cdot n(ax + b)^{n-1} \cdot a \text{ voor elke } n \text{ van } \mathbb{R}.}$$

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = 3(5x - 6)^{\frac{2}{3}}$

b $g(x) = x^2 - \sqrt{6x - 1}$

Uitwerking

a $f(x) = 3(5x - 6)^{\frac{2}{3}}$ geeft $f'(x) = 3 \cdot \frac{2}{3}(5x - 6)^{-\frac{1}{3}} \cdot 5 = 10(5x - 6)^{-\frac{1}{3}}$

b $g(x) = x^2 - \sqrt{6x - 1} = x^2 - (6x - 1)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$g'(x) = 2x - \frac{1}{2}(6x - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 = 2x - 3 \cdot \frac{1}{(6x - 1)^{\frac{1}{2}}} = 2x - \frac{3}{\sqrt{6x - 1}}$$

R48
□ ⊗ *

De afgeleide van $f(x) = \sqrt{ax + b}$ is $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$.

a Bewijs dit.

b Schrijf in een keer de afgeleide op van $g(x) = \sqrt{3x + 1}$ en van $h(x) = \sqrt{4 - 7x}$.

Je mag de regel hiernaast ook bij de volgende opgaven gebruiken.

49
□ ⊗

Differentieer.

a $f(x) = \sqrt{4x - 5}$

c $h(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3x}$

b $g(x) = 3x + \sqrt{2x + 1}$

d $k(x) = 3x^2 - \sqrt{2 - 5x}$

50
□ ⊗ *

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = (2x - 5)^{\frac{1}{3}}$

c $h(x) = (2x + 1)^{\frac{1}{2}}$

b $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - (3x)^{\frac{1}{4}}$

d $k(x) = (3x - 1)\sqrt{3x - 1}$

51
□ ⊗ *

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x + 4 - \sqrt{3x + 4}$.

In figuur 6.21 zie je de grafiek van f .

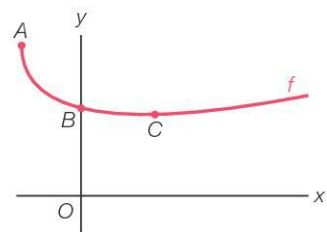
Het punt A is het randpunt van de grafiek, B is het snijpunt van de grafiek met de y -as en het punt C is de top van de grafiek.

a Bereken de coördinaten van A .

b De lijn k raakt de grafiek van f in B .

Stel langs algebraïsche weg de formule op van k .

c Bereken exact de coördinaten van C .



figuur 6.21

52



Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{4x + 12} - \frac{1}{2}x$.

- Bereken van de grafiek van f de coördinaten van het randpunt en schets de grafiek.
- De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 6$.
Stel langs algebraïsche weg een vergelijking op van k .
- Bereken exact het maximum van f en geef het bereik van f .
- Los algebraïsch op $f(x) < 3$.

A53



Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{4}x + 4 - \sqrt{6x - 8}$.

- Bereken van de grafiek van f de coördinaten van het randpunt en schets de grafiek.
- Bereken exact het bereik van f .
- De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 12$.
Onderzoek langs algebraïsche weg of k door de oorsprong gaat.
- Los exact op $f(x) > 3\frac{1}{2}$.

E54



Gegeven is de functie $f(x) = ax + b + \sqrt{ax + b}$ met $x \neq -\frac{b}{a}$.

Bewijs dat f voor geen enkele a en b een extreme waarde heeft.

INFORMATIEF

De kettingregel

De regel $f(x) = c \cdot (ax + b)^n$ geeft $f'(x) = c \cdot n(ax + b)^{n-1} \cdot a$ is een bijzonder geval van de kettingregel. De kettingregel zegt dat voor de samengestelde functie $f(x) = g(h(x))$ geldt $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

Bij de samengestelde functie $f(x) = (3x - 7)^5$ is $g(x) = x^5$ en $h(x) = 3x - 7$ en dit geeft volgens de kettingregel $f'(x) = 5(3x - 7)^4 \cdot 3 = 15(3x - 7)^4$.

Hiervan heb je in deze paragraaf al veel voorbeelden gezien.

Heb je te maken met de samengestelde functie $k(x) = (3x^2 - 7x)^5$, dan krijg je met de kettingregel $k'(x) = 5(3x^2 - 7x)^4 \cdot (6x - 7)$.

En zo geeft de kettingregel bij de functie $j(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ de afgeleide

$$j'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Terugblik

De afgeleide van $f(x) = c \cdot (ax + b)^n$

De afgeleide van $f(x) = c \cdot (ax + b)^n$ is $f'(x) = c \cdot n(ax + b)^{n-1} \cdot a$.

Deze regel geldt voor elke n van $\mathbb{R}$.

Dus

$$f(x) = 10\left(\frac{1}{5}x - 3\right)^6 \text{ geeft } f'(x) = 10 \cdot 6\left(\frac{1}{5}x - 3\right)^5 \cdot \frac{1}{5} = 12\left(\frac{1}{5}x - 3\right)^5$$

$$g(x) = 3x^2 - \frac{6}{(2x+1)^4} = 3x^2 - 6(2x+1)^{-4} \text{ geeft}$$

$$g'(x) = 6x - 6 \cdot -4(2x+1)^{-5} \cdot 2 = 6x + \frac{48}{(2x+1)^5}$$

$$h(x) = (5x-3)^{\frac{3}{4}} \text{ geeft } h'(x) = \frac{3}{4}(5x-3)^{-\frac{1}{4}} \cdot 5 = 3\frac{3}{4}(5x-3)^{-\frac{1}{4}}$$

$$k(x) = \sqrt{3x+18} = (3x+18)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } k'(x) = \frac{1}{2}(3x+18)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+18}}$$

Bij de laatste functie mag je direct opschrijven $k(x) = \sqrt{3x+18}$ geeft

$$k'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+18}}.$$

Je gebruikt dan de regel $f(x) = \sqrt{ax+b}$ geeft $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

Raaklijnen en toppen

De lijn k raakt de grafiek van $f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^3 - 3x + 2$ in het snijpunt van de grafiek met de y -as. Bij het langs algebraïsche weg opstellen van een vergelijking van k gebruik je dat $rc_k = f'(0)$.

$$f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^3 - 3x + 2 \text{ geeft } f'(x) = 3(\frac{1}{4}x - 1)^2 \cdot \frac{1}{4} - 3 = \frac{3}{4}(\frac{1}{4}x - 1)^2 - 3, \\ \text{dus } f'(0) = \frac{3}{4}(0 - 1)^2 - 3 = \frac{3}{4} - 3 = -2\frac{1}{4}.$$

Omdat $f(0) = 2$ krijg je $k: y = -2\frac{1}{4}x + 2$.

Voor het algebraïsch berekenen van de extreme waarden van f los je de vergelijking $f'(x) = 0$ op en schets je de grafiek van f .

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{3}{4}(\frac{1}{4}x - 1)^2 - 3 = 0$$

$$\frac{3}{4}(\frac{1}{4}x - 1)^2 = 3$$

$$(\frac{1}{4}x - 1)^2 = 4$$

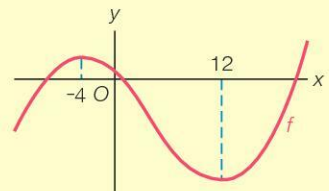
$$\frac{1}{4}x - 1 = 2 \vee \frac{1}{4}x - 1 = -2$$

$$\frac{1}{4}x = 3 \vee \frac{1}{4}x = -1$$

$$x = 12 \vee x = -4$$

Aflezen uit de schets geeft

max. is $f(-4) = 6$ en min. is $f(12) = -26$.



6.4 Toepassingen van de afgeleide

O55
  *

Gegeven zijn de lijnen $k: y = 2x - 2$ en $l: y = -\frac{1}{2}x + 3$.

- Teken de lijnen in één figuur.
- Bram beweert dat de lijnen k en l loodrecht op elkaar staan. Ben je het daarmee eens?
- De lijn m gaat door het punt $A(4, 0)$ en staat loodrecht op k . Stel van m de formule op.
- Stel de formule op van de lijn n die door het punt $B(1, 3)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $p: y = \frac{1}{4}x + 5$.

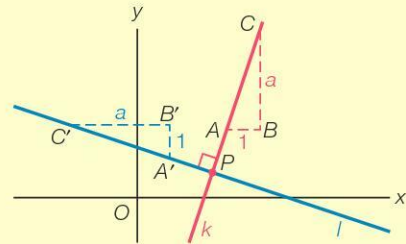
Theorie A Onderling loodrechte lijnen

In opgave 55 heb je gezien dat de lijnen k met $rc_k = 2$ en l met $rc_l = -\frac{1}{2}$ loodrecht op elkaar staan. Ook de lijnen p met $rc_p = \frac{1}{4}$ en n met $rc_n = -4$ staan loodrecht op elkaar.

In het algemeen staan de lijnen k en l met $rc_k = a$

en $rc_l = -\frac{1}{a}$ loodrecht op elkaar.

Dus als $rc_k \cdot rc_l = -1$, dan staan de lijnen k en l loodrecht op elkaar. In het geval $rc_k \neq 0$ en $rc_l \neq 0$ geldt: als $k \perp l$, dan $rc_k \cdot rc_l = -1$.



figuur 6.22 $k \perp l$

**Voor de lijnen k en l met $rc_k \neq 0$ en $rc_l \neq 0$ geldt:
 $rc_k \cdot rc_l = -1$ en $k \perp l$ komen op hetzelfde neer.**

Om een vergelijking van lijn k op te stellen die door het punt $A(6, 5)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $l: y = 4x - 1$, ga je als volgt te werk.

$$\left. \begin{array}{l} k \perp l, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1 \\ rc_l = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} rc_k \cdot 4 = -1 \\ rc_k = -\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -\frac{1}{4}x + b \\ \text{door } A(6, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \cdot 6 + b = 5 \\ -1\frac{1}{2} + b = 5 \\ b = 6\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{4}x + 6\frac{1}{2}$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{5}{2x-8}$ en het punt

$A(6, 1\frac{1}{4})$ op de grafiek van f . De lijn k raakt de grafiek in A .

Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn l die loodrecht op k staat en door de oorsprong gaat.

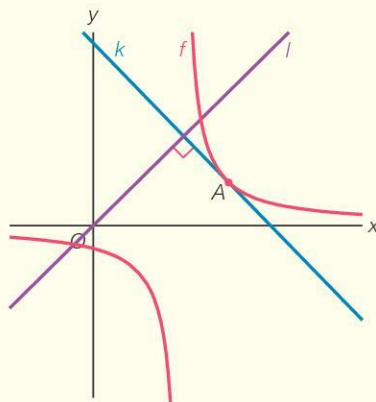
Uitwerking

$$f(x) = \frac{5}{2x-8} = 5(2x-8)^{-1} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = 5 \cdot -1(2x-8)^{-2} \cdot 2 = \frac{-10}{(2x-8)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} rc_k = f'(6) &= \frac{-10}{(12-8)^2} = -\frac{5}{8} \\ l \perp k, \text{ dus } rc_l \cdot rc_k &= -1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} rc_l \cdot -\frac{5}{8} &= -1 \\ rc_l &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Dus $rc_l = \frac{8}{5}$ en omdat l door de oorsprong gaat, is $l: y = 1\frac{3}{5}x$.



figuur 6.23

56



Stel een vergelijking op van de lijn

a k die door het punt $A(6, 7)$ gaat en loodrecht staat op de lijn

$$l: y = 3x - 2$$

b m die door het punt $B(-3, 4)$ gaat en loodrecht staat op de lijn

$$n: y = \frac{1}{2}x + 2$$

c p die door het punt $C(2, -5)$ gaat en loodrecht staat op de lijn

$$q: y = -\frac{2}{7}x + 3.$$

57



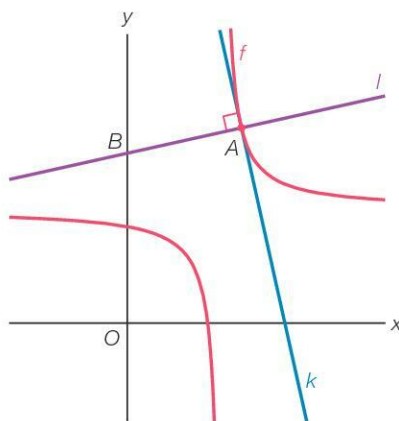
Gegeven is de functie $f(x) = \frac{6}{3x-10} + 4$ en het

punt $A(4, 7)$ op de grafiek van f .

De lijn k raakt de grafiek van f in A .

De lijn l gaat door A , staat loodrecht op k en snijdt de y -as in het punt B . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de coördinaten van B .

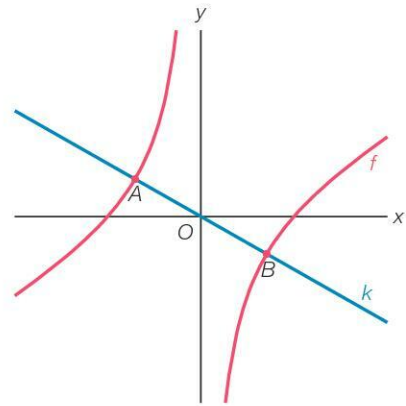


figuur 6.24

58




Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x}$ en de lijn $k: y = -\frac{1}{2}x$ die de grafiek van f snijdt in de punten A en B . Zie de figuur hiernaast. De lijn l raakt de grafiek van f in A en de lijn m raakt de grafiek van f in B . Onderzoek op algebraïsche wijze of k loodrecht staat op l en of k loodrecht staat op m .



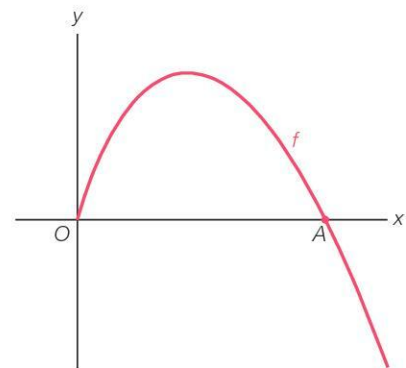
figuur 6.25

A59




Gegeven is de functie $f(x) = 4x - 2x\sqrt{x}$. De grafiek van f snijdt de x -as behalve in de oorsprong ook nog in het punt A . Zie de figuur hiernaast.

- Bereken exact het bereik van f .
- De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A . De lijn l gaat door A en staat loodrecht op k . Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van l met de y -as.
- De lijn m met richtingscoëfficiënt 2 snijdt de grafiek van f in het punt B . De lijn n door B staat loodrecht op m en raakt de grafiek van f in B . Bereken exact de coördinaten van B .



figuur 6.26

E60

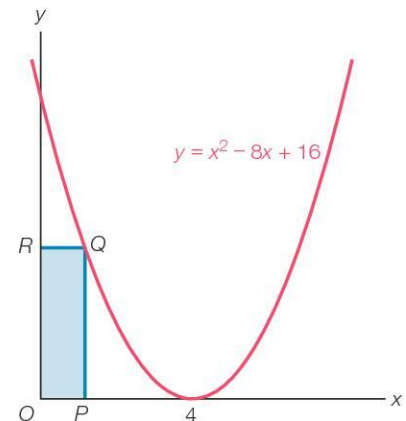

Gegeven is de functie f van opgave 59 en de lijn $p: y = ax$. Onderzoek voor welke waarden van a de lijn p twee punten gemeenschappelijk heeft met de grafiek van f .

061




In figuur 6.27 zie je de parabool $y = x^2 - 8x + 16$ en de rechthoek $OPQR$, waarbij P op de x -as ligt, Q op de parabool en R op de y -as. De oppervlakte A van $OPQR$ hangt af van de x -coördinaat p van P . Hierbij is $0 < p < 4$. Neem je $p = \frac{1}{2}$, dan is $PQ = 12\frac{1}{4}$ en $A = 6\frac{1}{8}$.

- Licht dit toe.
- Neem $p = 1$ en bereken A .
- Neem $p = 2$ en bereken A .



figuur 6.27

Theorie B Optimaliseren van oppervlakten bij grafieken

In opgave 61 is de oppervlakte van de rechthoek $OPQR$ afhankelijk van p . Je kunt je afvragen voor welke waarde van p de oppervlakte maximaal is en hoeveel de maximale oppervlakte is. Het berekenen van de maximale oppervlakte is een voorbeeld van een **optimaliseringsprobleem**.

Bij een optimaliseringsprobleem hangt het van de vraagstelling af hoe je te werk moet gaan. Zie het schema hieronder.

Afspraak

Vraagstelling	Uitwerking
Bereken (zonder nadere toevoeging)	Je bent vrij in de manier van uitwerken. Een toelichting is vereist. Bij gebruik van de GR vermeld je de ingevoerde formules en de gebruikte opties. Zo nodig geef je het antwoord in het gevraagde aantal decimalen.
Bereken met de afgeleide Bereken met behulp van differentiëren	Je moet de formule van de afgeleide berekenen. Daarna mag je de vergelijking 'afgeleide = 0' wel grafisch-numeriek oplossen.
Bereken algebraïsch	Ga stap voor stap te werk zonder gebruik te maken van specifieke opties en de grafische mogelijkheden van de GR. Zo nodig geef je het antwoord in het gevraagde aantal decimalen.
Bereken exact	Ga algebraïsch te werk en rond niet af.

Bij het algebraïsch berekenen van een extreme waarde gebruiken we verschillende notaties voor de afgeleide. Zo noteren we in het voorbeeld op de volgende bladzijde de afgeleide van $A = p^3 - 8p^2 + 16p$ als

$$\frac{dA}{dp} = 3p^2 - 16p + 16.$$

Notaties voor de afgeleide van $y = f(x)$

$f'(x)$	y'	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{df(x)}{dx}$	$\frac{d}{dx}f(x)$
---------	------	-----------------	--------------------	--------------------

Voorbeeld

Gegeven is nogmaals de parabool $y = x^2 - 8x + 16$ van opgave 61 met de rechthoek $OPQR$.

Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte A van de rechthoek maximaal is en de maximale oppervlakte.

Uitwerking

Uit $x_Q = x_P = p$ volgt $y_Q = p^2 - 8p + 16$, dus

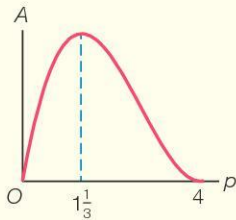
$$A = OP \cdot PQ = p(p^2 - 8p + 16) = p^3 - 8p^2 + 16p.$$

$$A = p^3 - 8p^2 + 16p \text{ geeft } \frac{dA}{dp} = 3p^2 - 16p + 16$$

$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } 3p^2 - 16p + 16 = 0$$

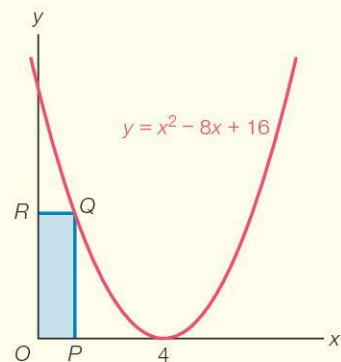
$$D = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 64$$

$$p = \frac{16 \pm 8}{6} = 4 \vee p = \frac{16 - 8}{6} = 1\frac{1}{3}$$



De oppervlakte van $OPQR$ is maximaal voor $p = 1\frac{1}{3}$.

De maximale oppervlakte is $A_{\max} = (1\frac{1}{3})^3 - 8 \cdot (1\frac{1}{3})^2 + 16 \cdot 1\frac{1}{3} = 9\frac{13}{27}$.



figuur 6.28

In de opgaven moet je soms de juistheid van een formule aantonen. Het is dan de bedoeling dat je de formule stap voor stap afleidt. De formule controleren met één of meer voorbeelden is dus niet voldoende.

62 In figuur 6.29 is de parabool $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ getekend met daarop het punt P met $x_P = p$, waarbij $0 < p < 6$. Q is het punt $(p, 0)$.

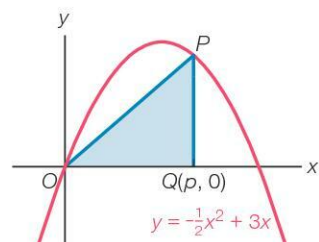
Voor de oppervlakte A van driehoek OPQ geldt

$$A = -\frac{1}{4}p^3 + 1\frac{1}{2}p^2.$$

a Toon aan dat deze formule juist is.

b Bereken $\frac{dA}{dp}$.

c Bereken exact de maximale oppervlakte van driehoek OPQ .



figuur 6.29

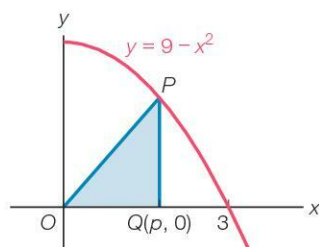
63


Gegeven is de parabool $y = 9 - x^2$.

Op de parabool ligt het punt P met $x_P = p$, waarbij $0 < p < 3$.

Op de x -as ligt het punt $Q(p, 0)$.

Bereken exact de maximale oppervlakte van driehoek OPQ .



figuur 6.30

64


In figuur 6.31 is de parabool $y = -x^2 + 6x$ getekend met de rechthoek $PQRS$. De punten R en S liggen op de parabool en P is het punt $(p, 0)$ waarbij $0 < p < 3$.

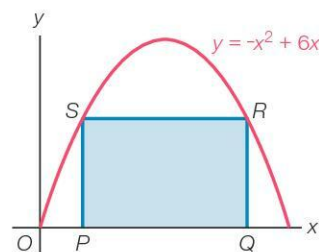
Voor de oppervlakte A van rechthoek $PQRS$ geldt $A = (6 - 2p)(-p^2 + 6p)$.

a Toon aan dat deze formule juist is.

Voor de afgeleide $\frac{dA}{dp}$ geldt $\frac{dA}{dp} = 6p^2 - 36p + 36$.

b Toon aan dat deze formule juist is.

c Bereken exact de waarde van p waarvoor de oppervlakte van $PQRS$ maximaal is.



figuur 6.31

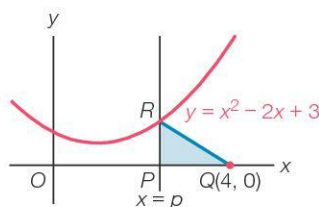
A65


De lijn $x = p$ met $1 \leq p < 4$ snijdt de x -as in het punt P en de parabool $y = x^2 - 2x + 3$ in het punt R . Verder is gegeven het punt $Q(4, 0)$.

Voor de oppervlakte A van driehoek PQR geldt de formule $A = -\frac{1}{2}p^3 + 3p^2 - 5\frac{1}{2}p + 6$.

a Bewijs dat deze formule juist is.

b Bereken algebraïsch de maximale oppervlakte van driehoek PRQ . Rond af op drie decimalen.



figuur 6.32

E66


Zie opgave 65.

Bereken voor welke waarde van p tussen 0 en 1 de oppervlakte van driehoek PQR net zo groot is als de maximale oppervlakte die je in opgave 65 hebt berekend. Rond af op twee decimalen.

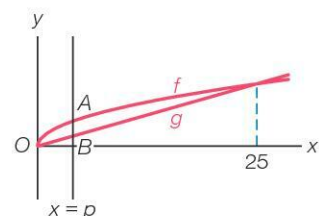
O67


Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{1}{5}x$.

De lijn $x = p$ met $0 < p < 25$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B . Zie figuur 6.33.

De lengte van het lijnstuk AB noemen we L .

Bereken L voor $p = 1$, $p = 2\frac{1}{4}$ en $p = 9$.



figuur 6.33

Theorie C Verticale afstanden bij grafieken

Omdat in opgave 67 voor $0 < x < 25$ de grafiek van f boven de grafiek van g ligt, is de lengte L van het lijnstuk AB gelijk aan

$$L = f(p) - g(p), \text{ dus } L = \sqrt{p} - \frac{1}{5}p.$$

Er is een waarde voor p met $0 < p < 25$ waarvoor L maximaal is. Om

deze waarde exact te berekenen stel je de afgeleide $\frac{dL}{dp}$ gelijk aan nul.

$$\text{Je krijgt } L = \sqrt{p} - \frac{1}{5}p \text{ geeft } \frac{dL}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{p}} - \frac{1}{5}$$

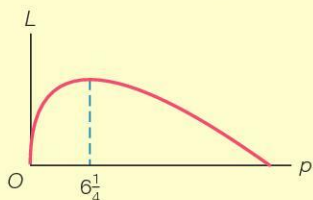
$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2\sqrt{p}} - \frac{1}{5} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{p}} = \frac{1}{5}$$

$$2\sqrt{p} = 5$$

$$\sqrt{p} = 2\frac{1}{2}$$

$$p = 6\frac{1}{4}$$



Uit de schets van L volgt dat L maximaal is voor $p = 6\frac{1}{4}$.

$$L_{\max} = \sqrt{6\frac{1}{4}} - \frac{1}{5} \cdot 6\frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$$

68 Gegeven zijn de functies $f(x) = x + 2$ en

$$g(x) = \sqrt{6x + 12}.$$

De lijn $x = p$ met $-2 < p < 4$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .

Voor de lengte L van het lijnstuk AB geldt de formule $L = \sqrt{6p + 12} - p - 2$.

- Toon aan dat deze formule juist is.
- Bereken exact de maximale waarde van L .

Laat in een schets zien dat voor $-2 < x < 4$ geldt dat de grafiek van g boven de grafiek van f ligt.

69 Gegeven zijn de functies $f(x) = 6 - \sqrt{3x + 6}$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x + 5$.

De lijn $x = p$ met $-2 < p < 10$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .

Voor de lengte L van het lijnstuk AB geldt de formule

$$L = \sqrt{3p + 6} - \frac{1}{2}p - 1.$$

- Toon aan dat deze formule juist is.
- Bereken exact de maximale waarde van L .

A70
□ ⊙ *

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ en $g(x) = 4\sqrt{2x}$.

De lijn $x = p$ met $0 < p < 8$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .

Bereken exact voor welke waarde van p de lengte van het lijnstuk AB maximaal is.

A71
□ ⊙ *

Gegeven zijn de functies $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ en $g(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

De lijn $x = p$ met $p \geq 0$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .

Bereken exact de minimale lengte van het lijnstuk AB .

Terugblik

Onderling loodrechte lijnen

Voor de lijnen k en l met $rc_k \neq 0$ en $rc_l \neq 0$ geldt: $rc_k \cdot rc_l = -1$ en $k \perp l$ komen op hetzelfde neer.

De lijn k raakt de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$ in het punt $A(4, 4)$. Om de formule op te stellen van de lijn l door A die loodrecht staat op k , ga je als volgt te werk.

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{x}$$

$$rc_k = f'(4) = \frac{3}{4}\sqrt{4} = \frac{3}{2}, \text{ dus } rc_l = -\frac{2}{3}.$$

$$l: y = -\frac{2}{3}x + b \text{ door } A(4, 4) \text{ geeft } b = 6\frac{2}{3}, \text{ dus } l: y = -\frac{2}{3}x + 6\frac{2}{3}.$$

Optimaliseren van oppervlakten bij grafieken

In de figuur hiernaast is de parabool $y = -x^2 + 2x + 8$ getekend met de rechthoekige driehoek OPQ .

Voor de x -coördinaat p van P geldt $0 < p < 4$.

Voor de oppervlakte A van de driehoek geldt

$$A = \frac{1}{2}p(-p^2 + 2p + 8) = -\frac{1}{2}p^3 + p^2 + 4p.$$

Om exact p te berekenen waarvoor A maximaal is, los je

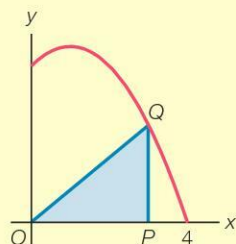
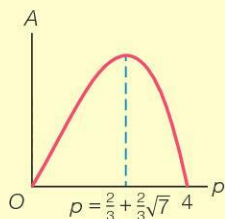
algebraïsch de vergelijking $\frac{dA}{dp} = 0$ op.

$$A = -\frac{1}{2}p^3 + p^2 + 4p \text{ geeft } \frac{dA}{dp} = -\frac{3}{2}p^2 + 2p + 4$$

$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } p = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{7} \vee p = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{7}$$

Omdat $0 < p < 4$ is $p = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{7}$.

Uit de schets van de grafiek van A volgt dat de oppervlakte van de driehoek maximaal is voor $p = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{7}$.



Afstanden bij grafieken

Snijdt de lijn $x = p$ de grafieken van f en g in de punten A en B , dan is de lengte L van AB uit te drukken in p .

Je krijgt $L = f(p) - g(p)$ of $L = g(p) - f(p)$.

Zo hoort bij de lengte L van het lijnstuk AB in de figuur hiernaast de formule $L = \sqrt{3}p - p + 6$.

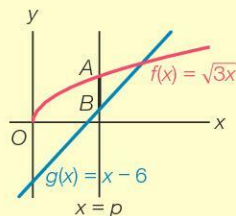
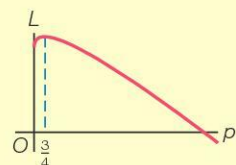
Bij het exact berekenen van de maximale lengte van L krijg je

$$\frac{dL}{dp} = \frac{3}{2\sqrt{3}p} - 1.$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{3}{2\sqrt{3}p} = 1, \text{ dus } 2\sqrt{3}p = 3 \text{ en dit geeft } p = \frac{3}{4}.$$

Uit de schets van L blijkt dat er sprake is van een maximum.

De maximale waarde van L is $\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + 6 = 6\frac{3}{4}$.



Eindopdracht Nulpunten benaderen met Newton-Raphson

In de beginopdracht van dit hoofdstuk heb je het nulpunt benaderd van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 2$ door vergelijkingen van raaklijnen op te stellen. Daarbij berekende je telkens de richtingscoëfficiënt van een raaklijn met de optie dy/dx van de GR.

In het hoofdstuk heb je geleerd dat de richtingscoëfficiënt van een raaklijn berekend kan worden met de afgeleide. Hiermee kan de berekening van de beginopdracht veel sneller worden gemaakt.

Je gebruikt dan de formule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Voor $n = 1$ krijg je $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ en

voor $n = 2$ krijg je $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$.

Voordat je de formule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ gaat gebruiken, leid je deze eerst af.

Stel de eerste benadering van het nulpunt is x_1 .

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $(x_1, f(x_1))$ is $f'(x_1)$, dus een vergelijking van de raaklijn is $y = f'(x_1) \cdot x + b$.

Je kunt nu b uitdrukken in $x_1, f(x_1)$ en $f'(x_1)$ door te gebruiken dat de raaklijn door het punt $(x_1, f(x_1))$ gaat.

- Toon aan dat $b = f(x_1) - f'(x_1) \cdot x_1$ en toon vervolgens aan dat

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Op dezelfde manier kun je aantonen dat $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$.

Algemeen is dus $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Met deze formule bereken je telkens een volgende benadering van het gezochte nulpunt totdat de gewenste nauwkeurigheid is bereikt.

Het principe van deze rekentechniek is omstreeks 1665 ontwikkeld door Isaac Newton en is in 1690 verbeterd door Joseph Raphson.

Daarom heet deze methode om nulpunten te benaderen de *methode van Newton-Raphson*. Het is een *iteratieve methode*, dat wil zeggen dat je steeds hetzelfde proces uitvoert en dat je bij een volgende stap gebruik maakt van het resultaat van de stap ervoor.

Door handig gebruik te maken van de mogelijkheden van de GR is snel een benadering te krijgen die zeer nauwkeurig is. Hierbij roep je ingevoerde formules op. Hoe dat gaat kun je lezen in de module *Allerlei* van de GR-handleiding.

We laten zien hoe je met deze methode snel een goede benadering van het nulpunt van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 2$ kunt krijgen.

- Voer in $y_1 = \frac{1}{3}x^3 - x - 2$ en $y_2 = x^2 - 1$ (dat is de afgeleide van f).
- Voer in op het basisscherm 3 (dat is de eerste benadering) en sla dit op in geheugenplaats A.
- Voer in $A - Y_1(A) / Y_2(A)$ en sla dit op in geheugenplaats A.
- Druk vervolgens enkele keren op [enter] of [EXE].

NORM DRIJF AUTO REEEL GRAD MN	
3→A	3
A-Y1(A)/Y2(A)→A	2.5
A-Y1(A)/Y2(A)→A	2.365079365
A-Y1(A)/Y2(A)→A	2.355301399

Je ziet dat de vierde benadering al in acht decimalen klopt met het juiste antwoord 2,355301398...

- Neem als startwaarde $x = -2$. In welke benadering kloppen voor het eerst minstens vijf decimalen?
- Neem nog een andere startwaarde om een benadering van het nulpunt te vinden.
- Bereken met de methode van Newton-Raphson de drie nulpunten van de functie $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 5$. Noteer wat je invoert, welke startwaarden je neemt en hoeveel benaderingen nodig zijn om de nulpunten in vijf decimalen nauwkeurig te krijgen.

Diagnostische toets

6.1 Raaklijnen en toppen

- 1** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.
- a** Stel algebraïsch de formule op van k .
 - b** De lijn l is evenwijdig met k en raakt de grafiek van f in het punt B .
Bereken algebraïsch de coördinaten van B .
 - c** Bereken algebraïsch de coördinaten van de punten van de grafiek waarin de raaklijn horizontaal is.

- 2** Bereken exact de extreme waarden.

- a** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
- b** $g(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 4$

- 3** Gegeven is de functie $f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 45x^2 - 30x + 5$.

- a** Toon met de afgeleide aan dat de functie f geen extreme waarde heeft voor $x = 1\frac{1}{2}$.
- b** Bewijs dat de functie f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{2\frac{1}{2}}$.

6.2 De afgeleide van machtsfuncties

- 4** Differentieer.

- | | | |
|---|--|--|
| a $f(x) = \frac{3}{x^4}$ | c $h(x) = \frac{8x^4 - 2x^2}{\sqrt{x}}$ | e $l(x) = (x^2 + 2\sqrt{x})^2$ |
| b $g(x) = 4x^3 - \frac{3x-2}{x^3}$ | d $k(x) = \frac{6\sqrt{x} - x^2}{x}$ | f $m(x) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt[3]{x^2}}$ |

- 5** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x+4}{\sqrt{x}}$.

- a** Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn van de grafiek van f in het punt A met $x_A = 4$.
- b** Bereken exact de extreme waarde van f .

6.3 De kettingregel

- 6** Differentieer.

- | | | |
|----------------------------|---|---------------------------------------|
| a $f(x) = (6x-1)^5$ | b $g(x) = 6x^3 - \frac{5}{(2x-1)^4}$ | c $h(x) = 6(\frac{1}{3}x-2)^4$ |
|----------------------------|---|---------------------------------------|

- 7** Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{3}x-2)^3 - 9x + 40$.

- a** Bereken algebraïsch de extreme waarden van f .
- b** Stel langs algebraïsche weg vergelijkingen op van de lijnen k en l die de grafiek raken en evenwijdig zijn met de lijn $y = 7x - 2$.

8 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = \frac{1}{3}x^6 - (3x - 1)^{\frac{1}{3}}$

b $g(x) = \sqrt{3x - 4} + x^2 - 6x$

c $h(x) = (2x + 1)^2 \cdot \sqrt{2x + 1}$

9 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{3x + 15} - \frac{1}{2}x$.

a Bereken van de grafiek van f de coördinaten van het randpunt en schets de grafiek.

b De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 7$.
Stel langs algebraïsche weg een vergelijking op van k .

c Bereken exact het maximum van f .

6.4 Toepassingen van de afgeleide

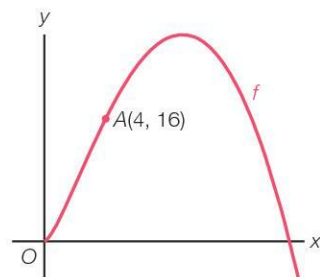
10 Gegeven is de functie $f(x) = 4x\sqrt{x} - x^2$.

a Bereken exact het bereik van f .

De lijn k raakt de grafiek in het punt $A(4, 16)$.

De lijn l gaat door A , staat loodrecht op k en snijdt de x -as in het punt B .

b Bereken exact de coördinaten van B .



figuur 6.34

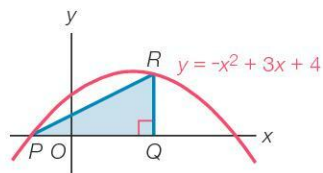
11 Gegeven is de parabool $y = -x^2 + 3x + 4$.

Van de rechthoekige driehoek PQR is P het punt $(-1, 0)$, ligt Q op de x -as met $-1 < x_Q < 4$ en ligt R op de parabool. Zie figuur 6.35.

Stel $x_Q = p$. Voor de oppervlakte A van driehoek PQR geldt dan $A = -\frac{1}{2}p^3 + p^2 + 3\frac{1}{2}p + 2$.

a Toon aan dat deze formule juist is.

b Bereken exact voor welke p de oppervlakte van driehoek PQR maximaal is.



figuur 6.35

12 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + 4$ en $g(x) = x\sqrt{x}$.

De lijn $x = p$ met $p > 0$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .

Bereken exact voor welke waarde van p de lengte van het lijnstuk AB minimaal is

7

Lijnen en cirkels

Wat leer je?

- Hoe het aantal oplossingen van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen verband houdt met de onderlinge ligging van de bijbehorende lijnen.
- Hoeken berekenen tussen lijnen waarvan vergelijkingen zijn gegeven.
- Werken met vergelijkingen van cirkels.
- Berekenen van afstanden tussen punten, lijnen en cirkels in een assenstelsel.
- Opstellen van vergelijkingen van raaklijnen aan cirkels.
- Berekenen van de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel.



SHAMN
STA
3

ENSKED
Globen
Slakthusområdet

SSON G

Beginopdracht Globen

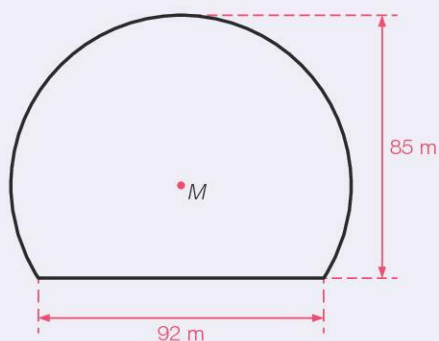
De Ericsson Globe in Stockholm (voorheen de Stockholm Globe Arena), de Zweden zeggen zelf simpelweg Globen, is een grote bolvormige hal waarin evenementen en sportwedstrijden worden gehouden. Bij shows en concerten heeft de hal een capaciteit van 16000 plaatsen, bij ijshockeywedstrijden is er plek voor 13 850 toeschouwers.

In 2000 en 2016 werd hier het Eurovisiesongfestival gehouden.



Globen is het grootste bolvormige gebouw ter wereld. In de figuur hiernaast is een doorsnede van Globen getekend. Je ziet dat het gebouw ruim een halve bol is. Het grondvlak is cirkelvormig en heeft een diameter van 92 meter, de hoogte van het gebouw is 85 meter. Met deze gegevens is te berekenen hoeveel meter het middelpunt M van de bol boven het grondvlak zit.

- Bereken hoeveel meter het middelpunt M van de bol boven het grondvlak zit.

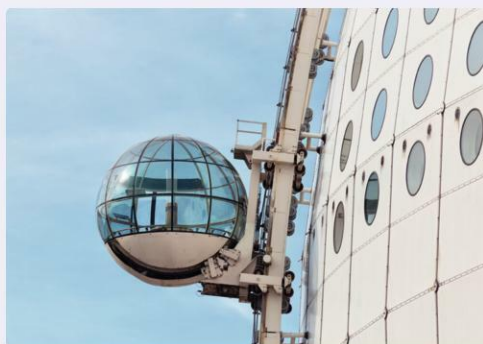


Er zijn twee bolvormige gondels die via rails naar de top van Globen gaan. De rails zijn tot de hoogte van het middelpunt van Globen verticaal en lopen daarna op een afstand van 1 meter buiten Globen tot de top.

Elke 10 minuten vertrekt een gondel met maximaal 16 personen omhoog. Een gondel is na 4 minuten op de top en blijft daar enige tijd staan zodat je goed van het uitzicht kunt genieten.

- Hoeveel km/uur gaat de gondel?
- De vier rails van de twee gondels wegen samen 70 ton.

Hoeveel kg weegt 1 meter rail?



Voorkennis Lijnen en stelsels

Theorie A De vergelijking $ax + by = c$

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$. De bijbehorende grafiek is een lijn. Om de lijn k : $3x - 4y = 12$ te tekenen, maak je een tabel met de coördinaten van twee punten, bijvoorbeeld

x	0	4
y	-3	0

We zeggen dat $(x, y) = (0, -3)$ en $(x, y) = (4, 0)$ oplossingen zijn van de vergelijking $3x - 4y = 12$.

De oplossingen van $3x - 4y = 12$ zijn de getallenparen (x, y) die aan de vergelijking voldoen.

De richtingscoëfficiënt van k kun je als volgt berekenen.

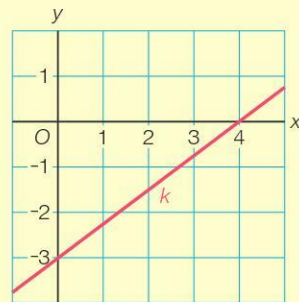
$$3x - 4y = 12$$

$$-4y = -3x + 12$$

$$y = \frac{3}{4}x - 3$$

$$\text{Dus } rc_k = \frac{3}{4}.$$

Alle lijnen van de vorm $3x - 4y = c$ zijn evenwijdig, want al deze lijnen hebben richtingscoëfficiënt $\frac{3}{4}$.



figuur 7.1

Voorbeeld

Gegeven is de lijn l : $2x - 5y = 12$.

- a Bereken p in het geval het punt $A(3, p)$ op l ligt.
- b Bereken q in het geval $(x, y) = (q, 4)$ een oplossing is van $2x - 5y = 12$.
- c De lijn m is evenwijdig met l en gaat door het punt $B(4, -1)$.
Stel van m een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

Uitwerking

- a $A(3, p)$ op l , dus $2 \cdot 3 - 5 \cdot p = 12$

$$6 - 5p = 12$$

$$-5p = 6$$

$$p = -1\frac{1}{5}$$

- b $(x, y) = (q, 4)$ is een oplossing, dus $2 \cdot q - 5 \cdot 4 = 12$

$$2q - 20 = 12$$

$$2q = 32$$

$$q = 16$$

- c $m \parallel l$, dus $m: 2x - 5y = c$
door $B(4, -1)$ $\left. \vphantom{\begin{array}{l} m \parallel l \\ m: 2x - 5y = c \end{array}} \right\} c = 2 \cdot 4 - 5 \cdot (-1) = 13$
Dus $m: 2x - 5y = 13$.

$m \parallel l$ betekent
 m is evenwijdig met l .

- 1** Gegeven zijn de lijnen $k: 2x - 3y = 10$ en $l: x + 2y = 6$.
- a** Bereken p in het geval het punt $A(2, p)$ op k ligt.
 - b** Bereken q in het geval het punt $B(q, -3)$ op l ligt.
 - c** Bereken r in het geval $(x, y) = (r, 2r)$ een oplossing is van $2x - 3y = 10$.
 - d** Teken k en l in één figuur.
 - e** De lijn m gaat door de oorsprong en is evenwijdig met k .
Stel van m een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.
 - f** De lijn n gaat door het punt $C(2, -3)$ en is evenwijdig met l .
Stel van n een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.
- 2** Bereken van elk van de volgende lijnen de richtingscoëfficiënt.
- a** $k: x - 3y = 6$
 - b** $l: 2x + 5y = 20$
 - c** $m: \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1$

Theorie B Stelsels lineaire vergelijkingen

Het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ kun je oplossen met behulp van elimineren door optellen of aftrekken.

Om y te elimineren, vermenigvuldig je de eerste vergelijking met 2 en de tweede met 3. Daarna tel je de vergelijkingen bij elkaar op.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \begin{array}{l} |2| \\ |3| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 4x - 6y = 20 \\ 3x + 6y = 18 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 7x = 38 \\ x = 5\frac{3}{7} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ x + 2y = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5\frac{3}{7} + 2y = 6 \\ 2y = \frac{4}{7} \\ y = \frac{2}{7} \end{array}$$

De lijnen $k: 2x - 3y = 10$ en $l: x + 2y = 6$ snijden elkaar in het punt $(5\frac{3}{7}, \frac{2}{7})$.

De oplossing is $(x, y) = (5\frac{3}{7}, \frac{2}{7})$.

Je kunt bij dit stelsel ook x elimineren. Daartoe vermenigvuldig je de eerste vergelijking met 1 en de tweede met 2. Daarna trek je de vergelijkingen van elkaar af.

- 3** Los op.
- a** $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$
 - b** $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases}$
 - c** $\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$
- 4**
- a** De lijnen $k: 3x + 2y = 5$ en $l: x - 4y = 11$ snijden elkaar in het punt P .
Bereken de coördinaten van P .
 - b** De lijnen $m: 4x - 5y = 6$ en $n: 3x - 2y = 1$ snijden elkaar in het punt Q .
Bereken de coördinaten van Q .

7.1 Lijnen en hoeken

01 Gegeven zijn de lijnen $k: x - 2y = 4$ en $l: x - 2y = 5$.



a Licht toe dat k en l evenwijdig zijn.

b Wat weet je van het aantal oplossingen van het stelsel $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$?

Theorie A Onderlinge ligging van lijnen

De lijnen $m: 3x - y = 8$ en $n: 3x - y = 6$ zijn evenwijdig, want $rc_m = rc_n = 3$. De lijnen vallen niet samen en daarom heeft het stelsel $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$ geen oplossing.

Elimineren geeft $3x - y = 8$

$$\begin{array}{r} 3x - y = 8 \\ 3x - y = 6 \\ \hline 0 = 2 \end{array}$$

Geen enkele (x, y) voldoet.

De lijnen $p: x - 4y = 12$ en $q: y = \frac{1}{4}x - 3$ vallen samen. Dat kun je inzien door beide vergelijkingen in dezelfde vorm te zetten.

$$\begin{array}{ll} p: x - 4y = 12 & \text{of} \quad q: y = \frac{1}{4}x - 3 \\ -4y = -x + 12 & \frac{1}{4}x - y = 3 \\ y = \frac{1}{4}x - 3 & x - 4y = 12 \end{array}$$

Omdat de vergelijkingen van p en q op hetzelfde neerkomen, vallen de lijnen samen en heeft het stelsel $\begin{cases} x - 4y = 12 \\ y = \frac{1}{4}x - 3 \end{cases}$ oneindig veel oplossingen.

Substitutie van $y = \frac{1}{4}x - 3$ in

$$\begin{array}{l} x - 4y = 12 \text{ geeft} \\ x - 4\left(\frac{1}{4}x - 3\right) = 12 \\ x - x + 12 = 12 \\ 0 = 0 \end{array}$$

Elke (x, y) voldoet.

Bij twee lijnen kunnen de volgende situaties voorkomen.

De lijnen $k: ax + by = c$ en $l: px + qy = r$ en het stelsel $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$

- De lijnen hebben een snijpunt en het stelsel heeft één oplossing als $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$.
- De lijnen hebben geen punt gemeenschappelijk en het stelsel heeft geen oplossing als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$.
- De lijnen vallen samen en het stelsel heeft oneindig veel oplossingen als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $k: 2x + py = 5$ en $l: 4x + 3y = q$.

Bereken voor welke p en q

- a de lijnen samenvallen
- b de lijnen een snijpunt hebben.

Uitwerking

- a Samenvallen, dus $\frac{2}{4} = \frac{p}{3} = \frac{5}{q}$.

$$\frac{2}{4} = \frac{p}{3} \text{ geeft } p = \frac{2 \cdot 3}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{5}{q} \text{ geeft } q = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

- b Een snijpunt, dus $\frac{2}{4} \neq \frac{p}{3}$ oftewel $4p \neq 6$ en dit geeft $p \neq 1\frac{1}{2}$.

Een snijpunt voor $p \neq 1\frac{1}{2}$ en q mag elk getal zijn.

R2 Zie het voorbeeld.



- a Voor welke p en q hebben de lijnen k en l geen gemeenschappelijk punt?
- b Bereken het snijpunt van de lijnen in het geval $p = 2$ en $q = 9$.
- c Het snijpunt van de lijnen is $(3, 1)$.
Bereken p en q .

3 Gegeven zijn de lijnen $m: px - 3y = 6$ en $n: 5x + y = q$.



- Bereken voor welke p en q
- a de lijnen samenvallen
 - b de lijnen een snijpunt hebben
 - c de lijnen geen punt gemeenschappelijk hebben
 - d de lijnen elkaar snijden in het punt $(2, 4)$.

4 Gegeven zijn de lijnen $k: y = ax + 4$ en $l: 3x - 2y = c$.



- a Bereken voor welke a en c de lijnen elkaar snijden in het punt $(1, 6)$.
- b Bereken voor welke a en c de lijnen geen punt gemeenschappelijk hebben.
- c Neem $a = 2$ en bereken voor welke waarden van c de lijnen elkaar snijden in een punt dat boven de x -as ligt.

A5 Gegeven zijn de lijnen $p: ax - 5y = 10$ en $q: y = 2x + b$.

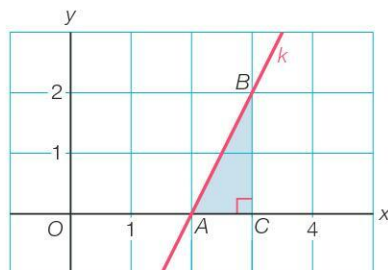


- a Bereken voor welke a en b de lijnen een snijpunt hebben.
- b Bereken voor welke a en b de lijnen elkaar snijden in het punt $(3, 4)$.
- c Neem $a = 5$ en bereken voor welke waarden van b de lijnen een snijpunt hebben dat rechts van de lijn $x = 4$ ligt.

A6 Gegeven zijn de lijnen $k: ax + 8y = 12$ en $l: 2x + ay = pa$.
⊗* Bereken a en p in het geval de lijnen samenvallen.

A7 Bereken voor welke b en q de lijnen $k: y = \frac{1}{2}x + b$ en
***** $l: 2x + qy = b + 10$ samenvallen.

O8 In figuur 7.2 zijn de lijn $k: y = 2x - 4$ en het punt
⊠⊗* $C(3, 0)$ getekend.
 Het punt $A(2, 0)$ is het snijpunt van k met de x -as,
 het punt $B(3, 2)$ ligt op k .
 Er geldt $\angle CAB \approx 63,435^\circ$.
a Toon dit aan.



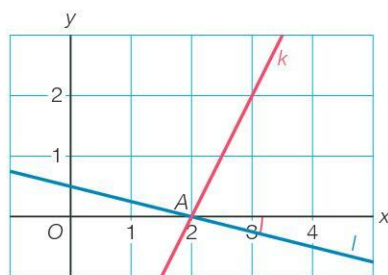
figuur 7.2

In figuur 7.3 is bovendien de lijn $l: y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ getekend. De hoek tussen l en de x -as is met een boogje aangegeven.

Deze hoek is ongeveer $14,036^\circ$.

b Toon dit aan.

c Bereken de hoek tussen de lijnen k en l . Rond af op één decimaal.



figuur 7.3

Theorie B De hoek tussen twee lijnen

In figuur 7.4 is de lijn $k: y = \frac{1}{2}x - 1$ getekend. De **richtingshoek** van deze lijn is de hoek α waarover je de x -as moet draaien om de x -as te laten samenvallen met k .

Hierbij is $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

Je ziet dat $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ en dit geeft $\alpha = 26,56\dots^\circ$.

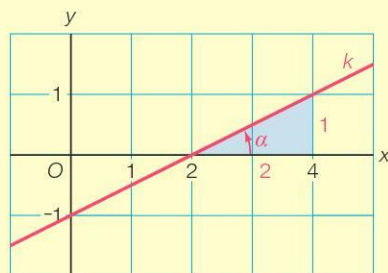
Voor de richtingshoek α van de lijn k geldt $\tan(\alpha) = r_k$ en $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

De richtingshoek van de lijn $l: y = -\frac{2}{3}x + 1$ in figuur 7.5 is aangegeven met β .

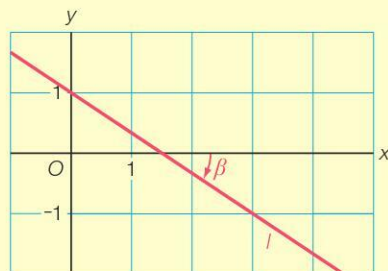
Er geldt $\tan(\beta) = r_l$, dus $\tan(\beta) = -\frac{2}{3}$ en dit geeft $\beta = -33,69\dots^\circ$.

De richtingshoek van de lijn l is dus negatief.

Bij berekeningen met richtingshoeken nemen we aan dat de eenheden op de assen gelijk zijn.



figuur 7.4



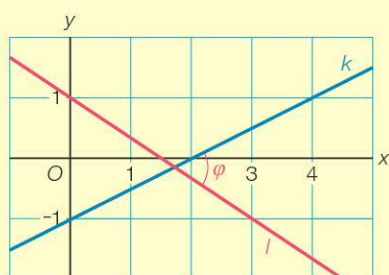
figuur 7.5

In figuur 7.6 is zowel de lijn $k: y = \frac{1}{2}x - 1$ als de lijn $l: y = -\frac{2}{3}x + 1$ getekend.

De **hoek tussen de lijnen** k en l is aangegeven met φ . Hier is

$$\varphi = \alpha - \beta = 26,56\dots^\circ - -33,69\dots^\circ \approx 60,3^\circ.$$

Voor de hoek φ tussen twee lijnen nemen we altijd de hoek waarvoor geldt $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

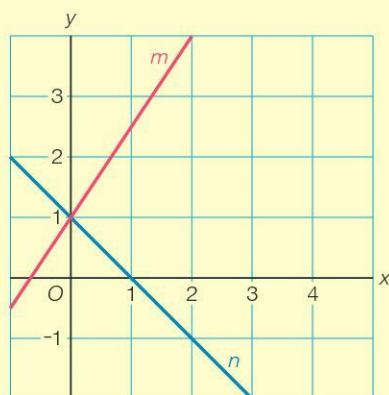


figuur 7.6

In figuur 7.7 zie je de lijnen $m: y = \frac{1}{2}x + 1$ en $n: y = -x + 1$.

Voor de richtingshoek α van m geldt $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$, dus $\alpha = 56,30\dots^\circ$, en voor de richtingshoek β van n geldt $\tan(\beta) = -1$, dus $\beta = -45^\circ$.

Omdat $\alpha - \beta = 56,30\dots^\circ - -45^\circ \approx 101,3^\circ$ geldt voor de hoek φ tussen m en n dat $\varphi \approx 180^\circ - 101,3^\circ = 78,7^\circ$.



figuur 7.7

Voor de hoek φ tussen twee lijnen met richtingshoeken α en β , waarbij $\alpha > \beta$, geldt

- $\varphi = \alpha - \beta$ als $\alpha - \beta \leq 90^\circ$
- $\varphi = 180^\circ - (\alpha - \beta)$ als $\alpha - \beta > 90^\circ$.

Voorbeeld

Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen

$k: 5x - 4y = 6$ en $l: 5x + 3y = 2$.

Uitwerking

$$k: 5x - 4y = 6$$

$$-4y = -5x + 6$$

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = \frac{1}{4} \text{ geeft } \alpha = 51,34\dots^\circ$$

$$l: 5x + 3y = 2$$

$$3y = -5x + 2$$

$$y = -1\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = -1\frac{2}{3} \text{ geeft } \beta = -59,03\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 51,34\dots^\circ - -59,03\dots^\circ \approx 110^\circ$$

De gevraagde hoek is $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.



Bij het berekenen van richtingshoeken wordt aangenomen dat de eenheden op de assen gelijk zijn.

Licht toe dat deze aanname nodig is.

10 Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen.



a $k: y = 3x + 4$ en $l: y = 2x - 1$

b $m: y = 1\frac{1}{2}x + 2$ en $n: y = -\frac{1}{2}x + 3$

c $p: y = 3\frac{1}{2}x - 1$ en $q: y = -1\frac{1}{4}x + 5$

11 Bereken in graden de hoek tussen de lijnen. Rond af op één decimaal.



a $k: 3x - 2y = 5$ en $l: 4x - 3y = 6$

b $m: 4x + y = 1$ en $n: 3x + 4y = 2$

c $p: 5x + 3y = 4$ en $q: 6x - 5y = 1$

A12 Bereken in graden de hoek tussen de lijnen. Rond af op één decimaal.



a $k: y = \frac{2}{3}x + 4$ en $l: 6x - 5y = 3$

b m door $(4, 0)$ en $(0, 5)$ en n door $(-2, 0)$ en $(0, 1)$

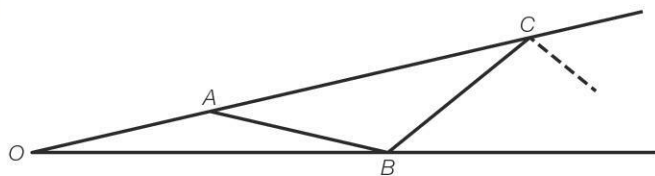
c p door $(2, 1)$ en $(5, 6)$ en q door $(-3, 1)$ en $(2, -6)$

A13 De lijnen $k: y = 2x - 3$ en l snijden elkaar onder een hoek van 20° .



***** Bereken mogelijke richtingscoëfficiënten van l . Rond af op twee decimalen.

E14 Twee halve lijnen maken in het punt O een hoek van 13° . Zie figuur 7.8.



figuur 7.8

Youssef springt vanuit O om en om op de twee lijnen. Vanuit O naar A , naar B , naar C , enzovoort. Al zijn sprongen zijn even groot. Als hij zo ver mogelijk van O is gekomen, stopt hij met springen.

Bij welke letter stopt Youssef?

Terugblik

Onderlinge ligging van lijnen

De lijnen k : $ax + by = c$ en l : $px + qy = r$

- hebben een snijpunt als geldt $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$,
het bijbehorende stelsel heeft dan één oplossing
- hebben geen punt gemeenschappelijk als geldt $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$,
het bijbehorende stelsel heeft dan geen oplossing
- vallen samen als geldt $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$,
het bijbehorende stelsel heeft dan oneindig veel oplossingen.

De lijnen k : $ax - 10y = 5$ en l : $3x + 4y = c$

- vallen samen als $\frac{a}{3} = \frac{-10}{4} = \frac{5}{c}$

Dit geeft $a = \frac{-10 \cdot 3}{4} = -7\frac{1}{2}$ en $c = \frac{4 \cdot 5}{-10} = -2$.

- hebben geen punt gemeenschappelijk als $\frac{a}{3} = \frac{-10}{4} \neq \frac{5}{c}$

Dus als $a = -7\frac{1}{2}$ en $c \neq -2$.

- hebben een snijpunt als $\frac{a}{3} \neq \frac{-10}{4}$

Dus als $a \neq -7\frac{1}{2}$ en c mag elk getal zijn.

De hoek tussen twee lijnen

Voor de richtingshoek α van een lijn l geldt $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$
en $\tan(\alpha) = rc_l$.

De lijn k : $y = \frac{2}{3}x + 1$ in de figuur hiernaast heeft richtingshoek α .

Er geldt $\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ en dit geeft $\alpha = 33,69\dots^\circ$.

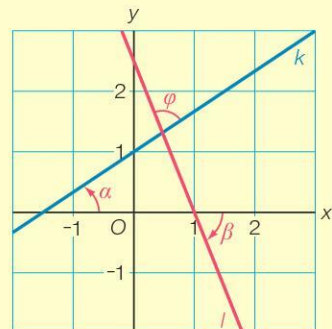
De lijn l : $y = -2\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ heeft richtingshoek β .

Er geldt $\tan(\beta) = -2\frac{1}{2}$ en dit geeft $\beta = -68,19\dots^\circ$.

De hoek tussen k en l is in de figuur aangegeven met φ .

De hoek tussen twee lijnen is de niet-stompe hoek tussen de lijnen.

Omdat $\alpha - \beta = 33,69\dots^\circ - (-68,19\dots^\circ) \approx 101,9^\circ$ is
 $\varphi \approx 180^\circ - 101,9^\circ = 78,1^\circ$.



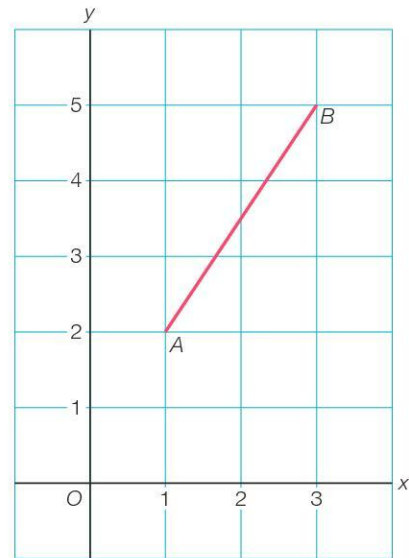
7.2 Afstanden bij punten en lijnen

015




Gegeven zijn de punten $A(1, 2)$ en $B(3, 5)$. Zie figuur 7.9.

- Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB .
- Het punt M is het midden van het lijnstuk AB . Hoe volgen de coördinaten van M uit de coördinaten van A en B ? Geef de coördinaten van M .
- Geef de coördinaten van het midden N van het lijnstuk CD met $C(83, 61)$ en $D(89, 69)$.



figuur 7.9

Theorie A De afstand tussen twee punten

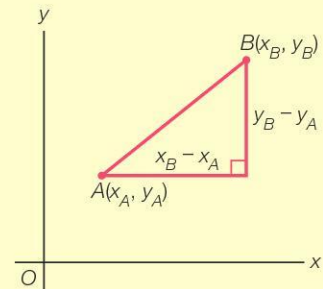
De afstand tussen de punten A en B is de lengte van het lijnstuk AB . Voor de lengte van het lijnstuk AB bestaat de notatie $d(A, B)$. In deze notatie is de letter d van distance (afstand) gebruikt.

In figuur 7.10 zijn de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ getekend. Met de stelling van Pythagoras in de getekende driehoek vind je $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, dus de afstand tussen de punten A en B is

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Om de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB te berekenen, neem je het gemiddelde van de x -coördinaten van A en B en het gemiddelde van de y -coördinaten van A en B .

Zo krijg je $M(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B))$.



figuur 7.10

Voor de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ geldt

- de afstand tussen A en B is $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB zijn $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de punten $A(p, 3)$ en $B(4, q)$.

- a Neem $p = 2$ en $q = 6$ en bereken de afstand tussen A en B .
- b Druk de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB uit in p en q .
- c Neem $q = 2p$ en druk de afstand tussen A en B uit in p .

Uitwerking

- a $A(2, 3)$ en $B(4, 6)$ geeft $d(A, B) = \sqrt{(4-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
- b $M(\frac{1}{2}(p+4), \frac{1}{2}(3+q)) = M(\frac{1}{2}p+2, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}q)$
- c $A(p, 3)$ en $B(4, 2p)$ geeft $d(A, B) = \sqrt{(4-p)^2 + (2p-3)^2} = \sqrt{16-8p+p^2+4p^2-12p+9} = \sqrt{5p^2-20p+25}$

16 Gegeven zijn de punten $A(0, p)$ en $B(p, 7)$.



- a Neem $p = 12$ en bereken de afstand tussen A en B .
- b Neem $p = -2$ en bereken de coördinaten van het midden M_1 van het lijnstuk AB .
- c Neem $p = 4$ en bereken de afstand tussen A en het midden M_2 van het lijnstuk AB .
- d Druk de coördinaten van het midden M_3 van het lijnstuk AB uit in p .
- e Druk de afstand tussen A en B uit in p .

17 Gegeven zijn de punten $A(p, 3)$ en $B(p+2, 2p)$.



- a Druk de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB uit in p .

Voor de afstand tussen A en B geldt $d(A, B) = \sqrt{4p^2 - 12p + 13}$.

- b Toon dit aan.
- c Bereken voor welke p de afstand tussen A en B gelijk is aan 5. Rond af op twee decimalen.

A18 Gegeven zijn de punten $A(3, 4)$ en $B(p+5, p+2)$.



- a Bereken y_M in het geval voor het midden M van het lijnstuk AB geldt $x_M = 10$.
- b Bereken voor welke p het midden M van het lijnstuk AB op de lijn $k: y = 2x - 3$ ligt.
- c De afstand d tussen de punten A en B is te schrijven in de vorm $d = \sqrt{ap^2 + b}$.
Bereken a en b .

019 Gegeven zijn de lijnen $k: 2x - y = 2$ en $l: x + 2y = 3$.



- a Bereken rc_k en rc_l .
- b Hoe volgt uit vraag a dat k en l loodrecht op elkaar staan?

Theorie B Onderling loodrechte lijnen

Je weet:

Voor de lijnen k en l met $rc_k \neq 0$ en $rc_l \neq 0$ geldt:
 $rc_k \cdot rc_l = -1$ en $k \perp l$ komt op hetzelfde neer.

Van de lijn k : $ax + by = c$ met $b \neq 0$ is $rc_k = -\frac{a}{b}$.

Van de lijn l : $bx - ay = d$ met $a \neq 0$ is $rc_l = \frac{b}{a}$.

Hieruit volgt $rc_k \cdot rc_l = -\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = -1$, dus $k \perp l$.

De lijnen k : $ax + by = c$ en l : $bx - ay = d$ staan loodrecht op elkaar.

Voorbeeld

De lijn k gaat door het punt $A(2, -5)$ en staat loodrecht op de lijn
 l : $3x + 4y = 12$.

Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

Uitwerking

$k \perp l$, dus k : $4x - 3y = c$ } $c = 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-5) = 23$
door $A(2, -5)$

Dus k : $4x - 3y = 23$.

R20 In de theorie hierboven staan de voorwaarden $b \neq 0$ en $a \neq 0$.

 In de rode kernzin ontbreken deze voorwaarden.

Waarom zijn deze voorwaarden wel nodig in de theorie en zijn ze in de kernzin niet nodig?

21  **a** De lijn k gaat door het punt $A(4, 1)$ en staat loodrecht op de lijn
 l : $2x - 3y = 5$.

Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

b De lijn m gaat door het punt $B(3, -1)$ en staat loodrecht op de lijn
 n : $4x + 5y = 6$.

Stel van m een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

c De lijn p gaat door het punt $C(-4, 3)$ en staat loodrecht op de lijn
 q : $2x - y = 6$.

Stel van p een vergelijking op van de vorm $y = ax + b$.

22
☐ ⊙ *

- a** De lijn k gaat door de punten $A(2, 3)$ en $B(6, 5)$.
De lijn l gaat door het punt $C(4, 6)$ en staat loodrecht op k .
Stel van l een vergelijking op van de vorm $y = ax + b$.
- b** De lijn m gaat door de punten $D(-3, 4)$ en $E(2, -6)$.
De lijn n gaat door het punt $F(3, 7)$ en staat loodrecht op m .
Stel van n een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$
met a , b en c geheel.

A23
☐ ⊙ *

Stel een vergelijking van de vorm $ax + by = c$ op van de lijn

- a** k die door het punt $A(6, 15)$ gaat en loodrecht staat op de lijn l : $y = -\frac{3}{5}x + 1$
- b** m die door het punt $B(2, -2)$ gaat en loodrecht staat op de lijn n : $6x - 7y = 3$
- c** p die door het punt $C(-6, 4)$ gaat en loodrecht staat op de lijn door de punten $D(1, 5)$ en $E(5, -1)$
- d** q die door het punt $F(-2, 5)$ gaat en evenwijdig is met de lijn r : $y = \frac{2}{5}x - 3$
- e** s die door het punt $G(1, -4)$ gaat en evenwijdig is met de lijn t : $4x - 2y + 3 = 0$.

Neem in de vorm
 $ax + by = c$ voor a , b en
 c gehele getallen en
vereenvoudig de vorm
zo ver mogelijk.

A24
☐ ⊙ *

Gegeven zijn de punten $A(-5, -3)$, $B(-2, 5)$ en $C(6, 2)$.

De lijn k gaat door A en B .

De lijn l snijdt k loodrecht in B .

Onderzoek met een berekening of l door C gaat.

A25
⊙ *

De lijn k : $3x + py = -7$ snijdt de lijn l loodrecht in het punt $A(1, -5)$.

Stel van l een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

A26
*

In deze opgave is $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

De lijn k gaat door de punten $(2p, 0)$ en $(0, 3p)$.

De lijn l gaat door de punten $(3q, 0)$ en $(0, aq)$.

a Bereken a in het geval k en l loodrecht op elkaar staan.

b Neem $p = 3$.

Voor welke a en q hebben k en l geen punten gemeenschappelijk?

c Bereken a in het geval k en l elkaar snijden onder een hoek van 45° .

O27
☐ ⊙ *

Gegeven zijn de lijn k : $y = \frac{1}{2}x$ en het punt $A(1, 3)$.

De lijn l : $y = -2x + 5$ gaat door A en staat loodrecht op k .

a Toon dit aan.

De lijnen k en l snijden elkaar in het punt $B(2, 1)$.

b Toon dit aan.

De afstand van A tot k is de lengte van het lijnstuk AB .

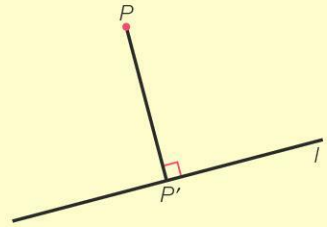
c Bereken exact de afstand van A tot k .

Theorie C De afstand van een punt tot een lijn

Bij de afstand van een punt tot een lijn speelt het begrip **loodrechte projectie** een rol.

In figuur 7.11 is P' de loodrechte projectie van het punt P op de lijn l .

De afstand van het punt P tot de lijn l is gelijk aan de lengte van het lijnstuk PP' . Notatie: $d(P, l) = PP'$.



figuur 7.11

De afstand van een punt P tot een lijn l is de afstand van P tot zijn loodrechte projectie P' op l .

Gebruik voor de berekening van de afstand van een punt tot een lijn het volgende werkschema.

Werkschema: berekenen van de afstand van een punt A tot een lijn k

- 1 Stel een vergelijking op van de lijn l door A die loodrecht staat op k .
- 2 Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en l .
- 3 Gebruik $d(A, k) = d(A, B)$.

Voorbeeld

Bereken exact de afstand van het punt $A(5, 5)$ tot de lijn $k: 3x + 2y = 12$.

Uitwerking

De lijn l gaat door A en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} l: 2x - 3y = c \\ \text{door } A(5, 5) \end{array} \right\} c = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = -5$$

$$\text{Dus } l: 2x - 3y = -5.$$

k en l snijden geeft het punt B .

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 12 \\ 2x - 3y = -5 \end{array} \right. \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right. \\ \text{geeft} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 9x + 6y = 36 \\ 4x - 6y = -10 \end{array} \right. +$$
$$\frac{13x}{13} = \frac{26}{13} \quad \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ 3x + 2y = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + 2y = 12 \\ 2y = 6 \\ y = 3 \end{array}$$

$$\text{Dus } B(2, 3) \text{ en } d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{(2-5)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

28



Bereken exact de afstand van

- a het punt $A(3, 0)$ tot de lijn $k: y = \frac{1}{2}x + 1$
- b het punt $B(6, 0)$ tot de lijn $l: 2x + y = 2$
- c de oorsprong tot de lijn $m: y = -3x + 10$.

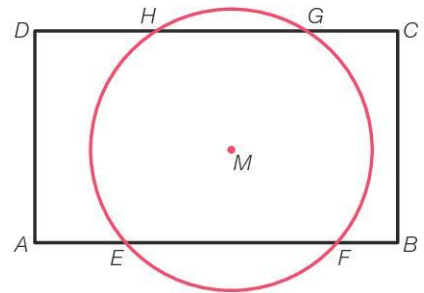
29 Bereken de afstand van het punt $A(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ tot de lijn door de punten $B(2, 1)$ en $C(7, 3)$. Rond af op twee decimalen.

30 Gegeven zijn de lijnen $k: x + 3y = 3$ en $l: x + y = 9$.
***** Frans beweert dat het punt $A(1, 4)$ dichterbij k ligt dan bij l .
 Onderzoek met een berekening of Frans gelijk heeft.

A31 Gegeven is $\triangle ABC$ met de hoekpunten $A(1, 0)$, $B(7, 4)$ en $C(3\frac{1}{2}, 6)$.
***** **a** Bereken exact de afstand van C tot de lijn door A en B .
b Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$.

A32 Bereken exact de afstand tussen de lijnen $k: x - 3y = 1$ en $l: x - 3y = 6$.
***** Schrijf het antwoord in de vorm $p\sqrt{q}$ met q een zo klein mogelijk geheel getal.

E33 In figuur 7.12 snijdt de cirkel met middelpunt M de rechthoek $ABCD$ in de punten E, F, G en H met $AE = 6$, $DH = 8$ en $GH = 10$.
***** **a** Bereken EF .
b Neem $AD = 14,5$.
 Bereken $d(M, AB)$. Rond af op één decimaal.



figuur 7.12

Terugblik

De afstand tussen twee punten

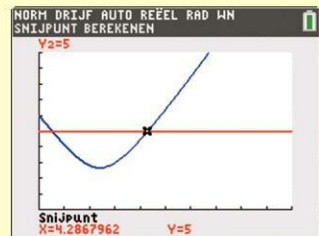
Voor de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ geldt

- de afstand tussen A en B is $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB zijn $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$.

Voor de punten $A(p, 3p)$ en $B(2p, p + 6)$ geldt dus

- het midden M van het lijnstuk AB is $M(\frac{1}{2}(p + 2p), \frac{1}{2}(3p + p + 6)) = M(\frac{1}{2}p, 2p + 3)$
- $d(A, B) = \sqrt{(2p - p)^2 + (p + 6 - 3p)^2} = \sqrt{p^2 + (6 - 2p)^2}$
 $= \sqrt{p^2 + 36 - 24p + 4p^2} = \sqrt{5p^2 - 24p + 36}$.

Om te berekenen voor welke p geldt $d(A, B) = 5$,
voer je de formules $y_1 = \sqrt{5x^2 - 24x + 36}$ en $y_2 = 5$
in op de GR en gebruik je de optie snijpunt.
Je krijgt $p \approx 0,51$ en $p \approx 4,29$.



Onderling loodrechte lijnen

De lijnen $k: ax + by = c$ en $l: bx - ay = d$ staan loodrecht op elkaar.

De lijn q die loodrecht staat op de lijn $p: 2x - 5y = 1$ is van de vorm $5x + 2y = c$. Is gegeven dat q door het punt $S(4, -3)$ gaat, dan is $c = 5 \cdot 4 + 2 \cdot -3 = 14$ en $q: 5x + 2y = 14$.

De afstand van een punt tot een lijn

De afstand van een punt P tot een lijn l is de afstand van P tot zijn loodrechte projectie P' op l .

Om de afstand van het punt $A(2, 5)$ tot de lijn $k: y = \frac{1}{3}x + 1$ te berekenen, ga je als volgt te werk.

- 1 Stel een vergelijking op van de lijn l door $A(2, 5)$ die loodrecht staat op k . Omdat $rc_k = \frac{1}{3}$ is $rc_l = -3$.
 $l: y = -3x + b$ door $(2, 5)$ geeft $b = 11$, dus $l: y = -3x + 11$.
- 2 Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en l .
 $y = \frac{1}{3}x + 1$ en $y = -3x + 11$ snijden geeft $\frac{1}{3}x + 1 = -3x + 11$, dus $3\frac{1}{3}x = 10$, en dit geeft $x = 3$. Dus $B(3, 2)$.
- 3 De afstand van A tot k , dus $d(A, k)$, is de afstand van A tot B .
 $d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

7.3 Cirkelvergelijkingen



Gegeven is het punt $M(1, 4)$ en het variabele punt $P(x, y)$.

Voor de afstand d tussen M en P geldt $d^2 = (x - 1)^2 + (y - 4)^2$.

a Licht dit toe.

In het geval $d = 5$ krijg je de vergelijking $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

b Licht toe dat deze vergelijking hoort bij de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal $r = 5$.

c Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal 10.

d Geef van de cirkel met vergelijking $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ de coördinaten van het middelpunt en de lengte van de straal.

Theorie A De cirkelvergelijking $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

Voor een punt $P(x, y)$ op afstand r van $M(x_M, y_M)$ geldt

$$d(M, P) = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} \text{ en } d(M, P) = r, \text{ dus}$$

$$\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} = r.$$

$$\text{Kwadrateren geeft } (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2.$$

Hiermee is een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r opgesteld.

De cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r heeft vergelijking $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

In figuur 7.13 zie je de cirkel c met middelpunt $M(3, 4)$ die door het punt $A(5, 3)$ gaat.

Omdat $M(3, 4)$ is de vergelijking van c van de vorm $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$.

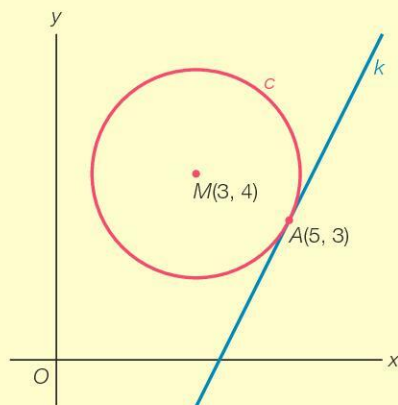
$A(5, 3)$ ligt op c , dus

$$r = d(A, M) = \sqrt{(3 - 5)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Dus } c: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5.$$

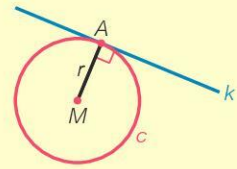
Verder zie je in de figuur de lijn k die de cirkel raakt in A .

Omdat een raaklijn van een cirkel loodrecht staat op de straal naar het raakpunt, is de straal van de cirkel gelijk aan de afstand van M tot k , dus $r = d(M, k)$.



figuur 7.13

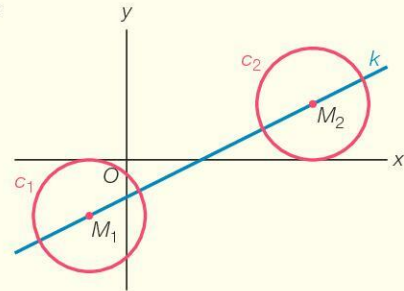
Raakt de lijn k de cirkel c met middelpunt M en straal r in het punt A , dan geldt $MA \perp k$ en $d(M, k) = r$.



Voorbeeld

Er zijn twee cirkels c_1 en c_2 waarvan het middelpunt op de lijn $k: y = \frac{1}{2}x - 2$ ligt, die straal 3 hebben en die de x -as raken.

Stel van zowel c_1 als c_2 een vergelijking op.



figuur 7.14

Uitwerking

De cirkels raken de x -as en straal $= 3$, dus $y_M = -3$ of $y_M = 3$.

$y_M = -3$ en M op k geeft $\frac{1}{2}x_M - 2 = -3$

$$\frac{1}{2}x_M = -1$$

$$x_M = -2$$

Dus $M_1(-2, -3)$ en $c_1: (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

$y_M = 3$ en M op k geeft $\frac{1}{2}x_M - 2 = 3$

$$\frac{1}{2}x_M = 5$$

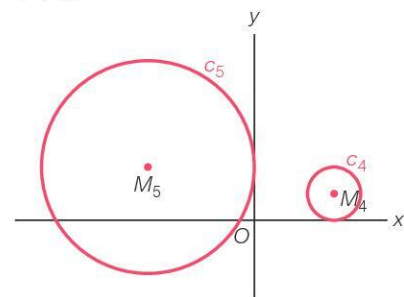
$$x_M = 10$$

Dus $M_2(10, 3)$ en $c_2: (x - 10)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

35 Stel een vergelijking op van de cirkel



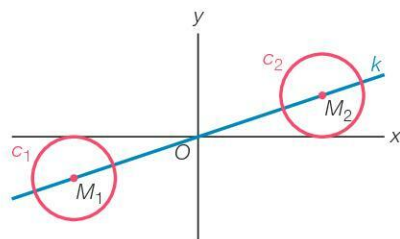
- c_1 met middelpunt $M_1(2, -5)$ en straal 3
- c_2 met middelpunt $M_2(3, 4)$ die door de oorsprong gaat
- c_3 met middelpunt $M_3(-3, 5)$ die door het punt $A(-1, 2)$ gaat
- c_4 met middelpunt $M_4(3, 1)$ die de x -as raakt
- c_5 met middelpunt $M_5(-4, 2)$ die de y -as raakt.



figuur 7.15

36
 

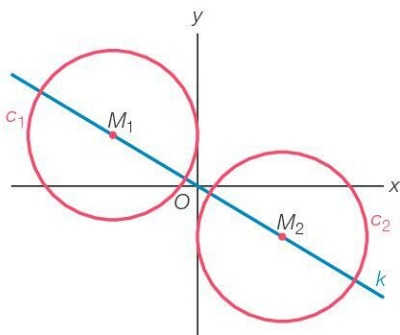
Gegeven is de lijn $k: y = \frac{1}{3}x$.
 Er zijn twee cirkels c_1 en c_2 waarvan het middelpunt op k ligt, die straal 2 hebben en die de x -as raken.
 Stel van zowel c_1 als c_2 een vergelijking op.



figuur 7.16

37
 

Er zijn twee cirkels c_1 en c_2 waarvan het middelpunt op de lijn $k: y = -\frac{3}{5}x$ ligt, die straal 10 hebben en die de y -as raken.
 Stel van zowel c_1 als c_2 een vergelijking op.



figuur 7.17

A38
 

Gegeven zijn de punten $A(3, 7)$ en $B(9, 1)$ en de lijn $k: 5x + 2y = 12$.
 Stel een vergelijking op van de
 a cirkel c_1 met middelpunt A die de x -as raakt
 b cirkel c_2 met middelpunt B die door A gaat
 c cirkel c_3 met middellijn AB
 d cirkels c_4 en c_5 waarvan de middelpunten op k liggen, die straal 2 hebben en die de y -as raken.

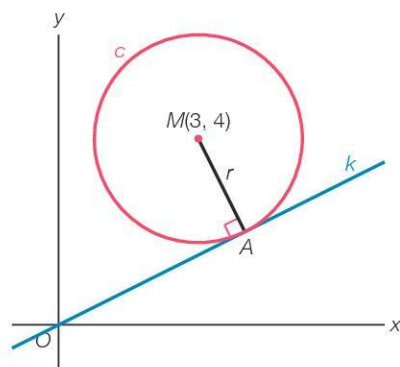
39
 

Gegeven is de lijn $k: y = \frac{1}{2}x$. De cirkel c met middelpunt $M(3, 4)$ raakt k in het punt A . Zie de figuur hiernaast.

In deze opgave ga je een vergelijking van c opstellen.

Bij c hoort een vergelijking van de vorm $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ met $r = d(A, M)$.

- Licht dit toe.
- Stel een vergelijking op van de lijn l door M die loodrecht staat op k , licht toe dat k en l elkaar snijden in A , en bereken de coördinaten van A .
- Bereken $d(M, k)$ en geef een vergelijking van c .



figuur 7.18 $d(M, k) = r$

40
 

- Stel een vergelijking op van de cirkel c_1 met middelpunt $M_1(5, 3)$ die de lijn $k: y = x$ raakt.
- Stel een vergelijking op van de cirkel c_2 met middelpunt $M_2(-1, 3)$ die de lijn $m: y = -\frac{1}{2}x$ raakt.

A41
  *

Gegeven is de lijn $k: 2x + 3y = 12$ die de x -as snijdt in het punt A en de y -as snijdt in het punt B .

Stel een vergelijking op van de

- cirkel c_1 met middelpunt $M_1(8, 3)$ die k raakt
- cirkels c_2 en c_3 waarvan de middelpunten op k liggen, die straal 8 hebben en die de x -as raken
- cirkel c_4 met middellijn AB .

A42
 *

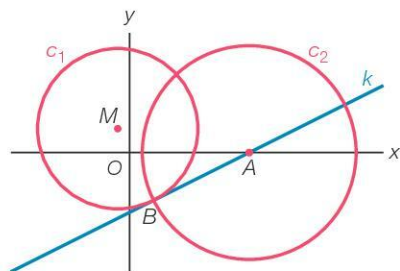
Gegeven is de lijn $k: x - 2y = 10$ die de x -as snijdt in het punt A .

Cirkel c_1 met middelpunt $M(-1, 2)$ raakt k in het punt B .

Cirkel c_2 met middelpunt A gaat door B .

Zie de figuur hiernaast.

- Stel van zowel c_1 als c_2 een vergelijking op.
- Van cirkel c_3 is het lijnstuk AM een middellijn. Onderzoek met een berekening of c_3 door B gaat.



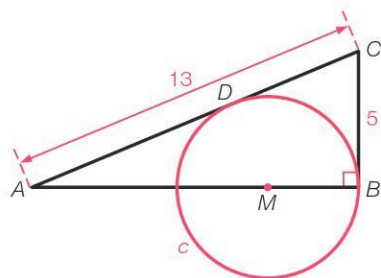
figuur 7.19

E43
 *

Zie de figuur hiernaast met driehoek ABC met $\angle B = 90^\circ$, $BC = 5$ en $AC = 13$.

Cirkel c met middelpunt M op AB gaat door B en raakt AC in het punt D .

Bereken de straal van c .



figuur 7.20

O44
  *

Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $(2, -3)$ en straal 4 is $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.

Laat zien dat ook de vergelijking

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ bij deze cirkel hoort.

Theorie B Kwadraatafsplitsen

In opgave 44 heb je gezien dat de cirkelvergelijkingen $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ en $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ op hetzelfde neerkomen. Je kreeg de tweede vorm door bij de eerste vorm de haakjes weg te werken. Maar hoe krijg je de eerste vorm uit de tweede vorm? De eerste vorm heeft immers als voordeel dat je meteen de coördinaten van het middelpunt en de lengte van de straal kunt aflezen.

Bij het herleiden van de vergelijking $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ tot de vorm $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ gebruik je de techniek van het

kwadraatafsplitsen.

Om bij $x^2 - 4x$ een kwadraat af te splitsen, vul je eerst $x^2 - 4x$ aan tot een kwadraat. Je krijgt $x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4$.

Bij $y^2 + 6y$ krijg je $y^2 + 6y = y^2 + 6y + 9 - 9 = (y+3)^2 - 9$.

Dus bij $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ krijg je

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 3 = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 - 3 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

Om in het voorbeeld hieronder het kwadraat af te splitsen bij $x^2 + 8x$, vul je eerst $x^2 + 8x$ aan tot $x^2 + 8x + 16$, want dit is $(x+4)^2$. Merk op dat 4 de helft is van 8 en dat 16 het kwadraat is van 4.

Je krijgt $x^2 + 8x = x^2 + 8x + 16 - 16 = (x+4)^2 - 16$.

En omdat de helft van -3 gelijk is aan $-1\frac{1}{2}$, krijg je

$$y^2 - 3y = y^2 - 3y + (1\frac{1}{2})^2 - (1\frac{1}{2})^2 = (y - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4}.$$

Voorbeeld

Schrijf $x^2 + y^2 + 8x - 3y + 6 = 0$ in de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = c$.

Uitwerking

$$x^2 + y^2 + 8x - 3y + 6 = 0$$

$$x^2 + 8x + y^2 - 3y + 6 = 0$$

$$x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 - 3y + 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} + 6 = 0$$

$$(x+4)^2 - 16 + (y - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 6 = 0$$

$$(x+4)^2 + (y - 1\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{4}$$

45 Schrijf in de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = c$.

- a** $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$ **c** $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$
b $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 13 = 0$ **d** $x^2 + y^2 - 5x + 5y + 10 = 0$

46 Bereken van de volgende cirkels de straal en de coördinaten van het middelpunt.

- a** $c_1: x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ **c** $c_3: x^2 + y^2 + 5x + 3y + 3 = 0$
b $c_2: x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$ **d** $c_4: x^2 + y^2 - 7x + 8y = 0$

47 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$ en de punten $A(0, 4)$, $B(-3, 0)$ en $C(-2, 1)$.

Van c is het middelpunt $M(-3, 4)$ en de straal $r = \sqrt{10}$.

- a** Toon dit aan.
b Bereken $d(A, M)$. Ligt A op, binnen of buiten c ? Licht toe.
c Bereken $d(B, M)$. Ligt B op, binnen of buiten c ? Licht toe.
d Ligt C op, binnen of buiten c ? Licht toe.

A48 Onderzoek met een berekening of

- a** het punt $A(-1, 2)$ op, binnen of buiten de cirkel
 $c_1: x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ ligt
b de oorsprong op, binnen of buiten de cirkel
 $c_2: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0$ ligt
c het punt $B(1, 4)$ op, binnen of buiten de cirkel
 $c_3: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ ligt.

A49 **a** Bereken algebraïsch voor welke p het punt $P(1, p)$ binnen de cirkel

$c_1: x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ ligt.

b Bereken algebraïsch voor welke q het punt $Q(1, 5)$ buiten de cirkel

$c_2: x^2 + y^2 - 8x - 2y + q = 0$ ligt.

INFORMATIEF

Kwadraatafsplitsen en tweedegraadsvergelijkingen

Elke tweedegraadsvergelijking is op te lossen met kwadraatafsplitsen.

Je hebt dan de abc -formule niet nodig.

Bij het oplossen van $x^2 - 6x - 4 = 0$ met kwadraatafsplitsen krijg je

$$x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 - 9 - 4 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 13$$

$$x - 3 = \sqrt{13} \vee x - 3 = -\sqrt{13}$$

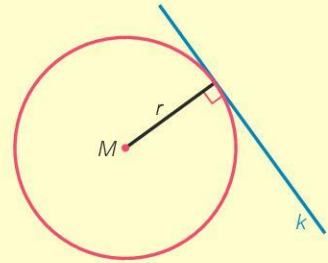
$$x = 3 + \sqrt{13} \vee x = 3 - \sqrt{13}$$

Terugblik

De cirkelvergelijking $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

De cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r heeft vergelijking $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt. In de figuur hiernaast geldt $d(M, k) = r$.



Is van cirkel c gegeven dat $M(-2, 4)$ het middelpunt is, dan hoort bij c een vergelijking van de vorm

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = r^2$. Is verder gegeven dat c door het punt $A(1, 2)$ gaat, dan is

$$r = d(A, M) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Dus $c: (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 13$.

Gegeven is de lijn $k: 2x + 3y = 1$.

Er zijn twee cirkels c_1 en c_2 waarvan de middelpunten M en N op k liggen, die straal 3 hebben en die de x -as raken. Zie de figuur hiernaast.

c_1 raakt de x -as en de straal van c_1 is 3, dus $y_M = 3$.

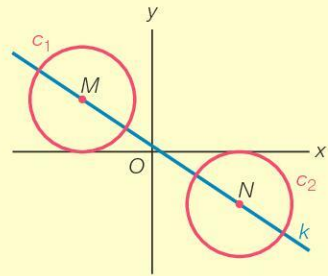
M ligt op k en $y_M = 3$ geeft $2x_M + 3 \cdot 3 = 1$, en hieruit volgt $x_M = -4$.

Dus $c_1: (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

c_2 raakt de x -as en de straal van c_2 is 3, dus $y_N = -3$.

N ligt op k en $y_N = -3$ geeft $2x_N + 3 \cdot -3 = 1$, en hieruit volgt $x_N = 5$.

Dus $c_2: (x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 9$.



De cirkelvergelijking $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Om de vergelijking $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$ te herleiden tot de vorm

$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ ga je kwadraatafsplitsen.

Je krijgt $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$

$$x^2 - 10x + y^2 - 4y + 9 = 0$$

$$(x - 5)^2 - 25 + (y - 2)^2 - 4 + 9 = 0$$

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 20$$

Je hebt dus te maken met de cirkel met middelpunt $M(5, 2)$ en straal

$$r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Om na te gaan of het punt $A(1, 6)$ binnen, op, of buiten de cirkel

$c: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$ ligt, gebruik je de afstand van A tot $M(5, 2)$.

$$d(A, M) = \sqrt{(5 - 1)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Omdat $d(A, M) > r$ ligt A buiten c .

7.4 Raaklijnen en snijpunten bij cirkels

O50
  *

Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$ en de punten $P(1, 6)$ en $Q(6, -2)$.

Van c is het middelpunt $M(5, 3)$ en de straal $r = 4$.

a Toon dit aan.

P en Q liggen buiten c .

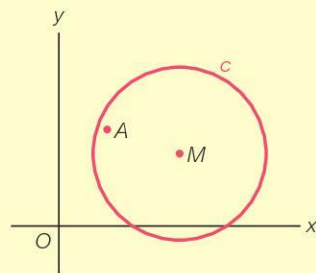
b Toon dit aan.

c Is de afstand van P tot c groter of kleiner dan de afstand van Q tot c ?
 Licht toe.

Theorie A De afstand van een punt tot een cirkel

In figuur 7.21 is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$ met middelpunt $M(5, 3)$ en straal 4 van opgave 50 getekend. Verder zie je het punt $A(2, 4)$.

Om de afstand van het punt A tot de cirkel te berekenen, gebruik je dat de afstand van A tot c gelijk is aan de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen A en c .



figuur 7.21

De afstand van een punt tot een kromme is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen het punt en de kromme.

Dit betekent dat in figuur 7.21 de afstand van A tot c , dus $d(A, c)$, gelijk is aan $d(M, c) - d(A, M)$, oftewel $d(A, c) = r - d(A, M)$. Omdat $r = 4$ en $d(A, M) = \sqrt{(5-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ is $d(A, c) = 4 - \sqrt{10}$.

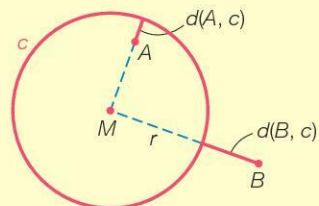
Als je te maken hebt met een punt B buiten c , dan is $d(B, c) = d(B, M) - r$.

Omdat in figuur 7.21 geldt $d(O, M) = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ is $d(O, c) = \sqrt{34} - 4$.

De afstand van een punt tot een cirkel c met middelpunt M en straal r

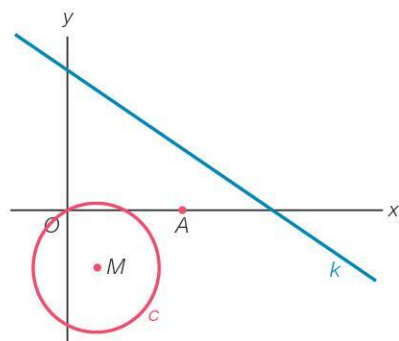
Voor punt A binnen c geldt $d(A, c) = r - d(A, M)$.

Voor punt B buiten c geldt $d(B, c) = d(B, M) - r$.



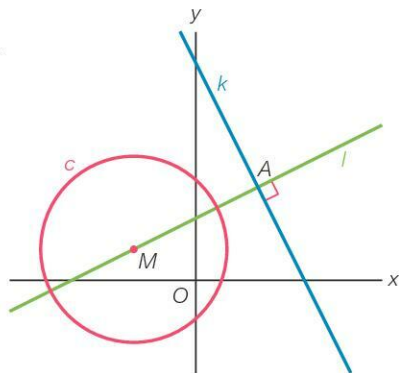
- 51** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ en de punten $A(2, 1)$, $B(-1, 5)$ en $C(9, 4)$. Bereken exact.
- a** $d(A, c)$ **b** $d(B, c)$ **c** $d(C, c)$

- A52** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, de lijn $k: 4x + 6y = 29$ en het punt $A(4, 0)$. Zie figuur 7.22.
- Toon op algebraïsche wijze aan dat A dichterbij c dan bij k ligt.



figuur 7.22

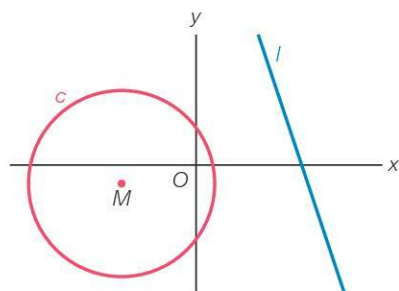
- 53** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ met middelpunt M en straal r , en de lijn $k: 2x + y = 7$. De lijn l door M snijdt k loodrecht in het punt A . Zie figuur 7.23.
- a** Bereken r en de coördinaten van M .
b Bereken de coördinaten van A .
c Bereken exact de afstand van de lijn k tot de cirkel c . Gebruik $d(k, c) = d(A, M) - r$.



figuur 7.23

- A54** Gegeven zijn de lijn $k: x - 2y = -13$ en de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$. Bewijs dat de afstand van k tot c gelijk is aan $4(\sqrt{5} - 1)$.

- A55** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$ en de lijn $l: y = -3x + 17$. Zie figuur 7.24. Onderzoek op algebraïsche wijze of de afstand van l tot c groter dan, kleiner dan, of gelijk is aan de straal van c .



figuur 7.24

- E56** Er zijn twee punten op de lijn $k: y = x$ die afstand 5 hebben tot de cirkel $c: x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$. Bereken algebraïsch de coördinaten van deze punten.

057




Gegeven zijn de cirkel $c: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ en het punt $A(5, 2)$ op c . De lijn k raakt c in A . Zie figuur 7.25.

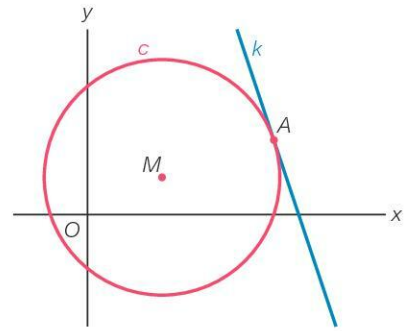
a Hoe kun je controleren dat A op c ligt?

De lijn l gaat door M en A .

b Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van l .

De lijn k staat loodrecht op l .

c Stel een vergelijking van k op.



figuur 7.25

Theorie B Raaklijnen aan cirkels

In opgave 57 heb je een vergelijking opgesteld van een raaklijn aan een cirkel in een gegeven raakpunt.

Gebruik bij dit soort situaties het volgende werkschema.

Werkschema: opstellen van een vergelijking van een raaklijn k aan een cirkel c met middelpunt M in een gegeven punt A op c

- 1 Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A .
- 2 Gebruik $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, om de richtingscoëfficiënt rc_k van k te berekenen.
- 3 Gebruik rc_k en de coördinaten van A om een vergelijking van k op te stellen.

GESCHIEDENIS

Analytische meetkunde

Meetkunde waarbij de principes van algebra, vaak in combinatie met assenstelsels, worden gebruikt wordt analytische meetkunde genoemd. Met de coördinaten van het assenstelsel worden vergelijkingen van bijvoorbeeld lijnen en cirkels opgesteld. Een assenstelsel wordt ook wel een *Cartesisch coördinatenstelsel* genoemd en dankt zijn naam aan René Descartes (1596–1650). Veel wiskundigen zijn van mening dat de introductie van de analytische meetkunde door Descartes het begin van de moderne wiskunde is. In 1637 publiceerde Descartes het belangrijke *Discours de la Méthode*. In het bijbehorende essay *La Géométrie* formuleerde hij de volgende drie stellingen.

- 1 Ieder vraagstuk over grootheden kan teruggebracht worden tot een meetkundig probleem.
- 2 Ieder meetkundig probleem kan worden teruggebracht tot een algebraïsch probleem.
- 3 Ieder algebraïsch probleem kan worden teruggebracht tot het oplossen van één of meer vergelijkingen.



René Descartes

Voorbeeld

Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$.
De lijn k raakt c in het punt A met $x_A = 2$ en $y_A > 0$.
Stel van k een vergelijking op.

Uitwerking

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 &= 0 \\ x = 2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} 2^2 + y^2 - 6 \cdot 2 - 2y + 5 &= 0 \\ y^2 - 2y - 3 &= 0 \\ (y+1)(y-3) &= 0 \\ y = -1 \vee y = 3 \end{aligned} \right.$$

Dus $A(2, 3)$.

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 5 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 5 = 0$$

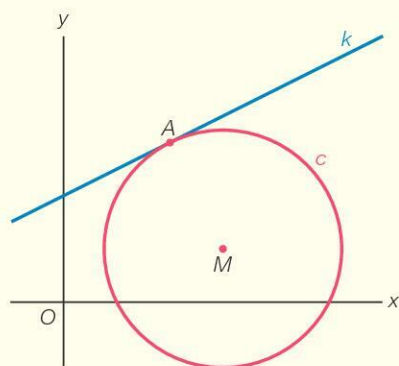
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$$

Dus c heeft middelpunt $M(3, 1)$.

Lijn m door M en A heeft $rc_m = \frac{3-1}{2-3} = -2$, dus $rc_k = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} k: y &= \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, 3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 2 + b &= 3 \\ 1 + b &= 3 \\ b &= 2 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dus $k: y = \frac{1}{2}x + 2$.



figuur 7.26



R58 Zie het voorbeeld met de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$.

Op c ligt het punt B met $x_B = 2$ en $y_B < 0$.

Een vergelijking van de lijn l die c raakt in B is $l: y = -\frac{1}{2}x$.

a Toon dit aan.

In figuur 7.27 zijn c , de punten A en B en de raaklijnen k en l getekend.

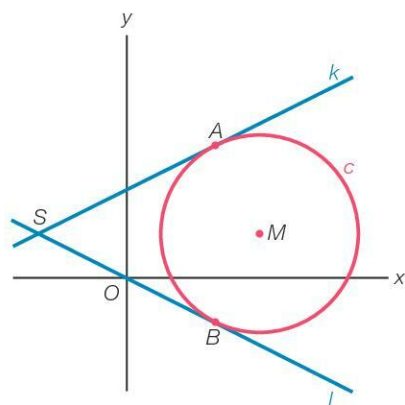
b Bereken de hoek tussen k en l door gebruik te maken van de richtingshoeken van k en l . Rond af op één decimaal.

Het snijpunt van k en l is $S(-2, 1)$.

c Toon dit aan.

Door gebruik te maken van de lengte van het lijnstuk MS en de straal van de cirkel is $\angle MSA$ in $\triangle AMS$ te berekenen.

d Bereken op deze manier $\angle MSA$ en gebruik dit om de hoek tussen k en l te berekenen. Rond af op één decimaal.



figuur 7.27

59


Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$.

De punten A en B met $x_A = x_B = 3$ en $y_A > y_B$ liggen op c .

De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B .

- Stel van k en van l een vergelijking op.
- Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen k en l .
- Er zijn twee raaklijnen aan c die door de oorsprong gaan.
Bereken in graden nauwkeurig de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken.

60


Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 + 6x - 6y - 7 = 0$.

c snijdt de x -as in de punten A en B met $x_A < x_B$.

De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B .

- Stel van k en van l een vergelijking op.

c snijdt de y -as in de punten C en D met $y_C < y_D$.

De lijn p raakt c in C en de lijn q raakt c in D .

- Stel van p en van q een vergelijking op.
- Onderzoek met een berekening of de hoek tussen k en l groter dan, kleiner dan, of gelijk is aan de hoek tussen p en q .

A61


Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$

met middelpunt M .

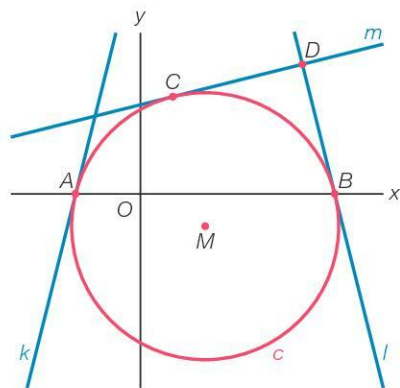
c snijdt de negatieve x -as in het punt A en de positieve x -as in het punt B .

Verder ligt het punt $C(1, 3)$ op c .

De lijn k raakt c in A , de lijn l raakt c in B en de lijn m raakt c in C .

De lijnen l en m snijden elkaar in het punt D .
Zie figuur 7.28.

- Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen k en m .
- Bereken in graden nauwkeurig $\angle AMB$.
- Bereken exact de afstand van D tot c .



figuur 7.28

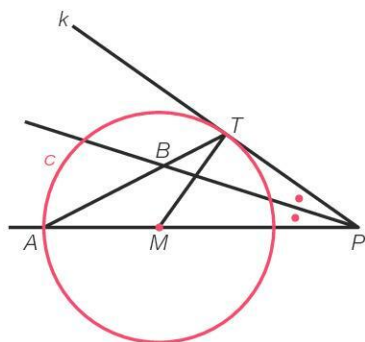
E62


Gegeven is de cirkel c met middelpunt M en het punt P buiten c . De lijn door P en M snijdt c in het punt A .

De lijn k door P raakt c in het punt T . De bissectrice van $\angle APT$ snijdt AT in het punt B . Zie figuur 7.29.

Bereken $\angle TBP$.

Bereken $\angle TBP$.



figuur 7.29

O63
□ ⊙ *

Gegeven zijn de cirkel

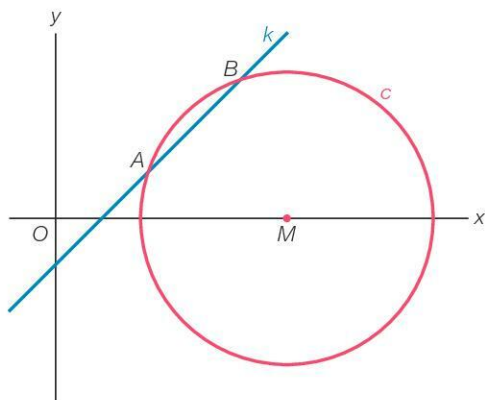
$c: x^2 + y^2 - 10x + 15 = 0$ en de lijn

$k: y = x - 1$.

Door $y = x - 1$ te substitueren in de cirkelvergelijking krijg je de vergelijking $x^2 - 6x + 8 = 0$.

a Toon dit aan.

b Los de vergelijking $x^2 - 6x + 8 = 0$ op en bereken de coördinaten van de snijpunten A en B van k en c .



figuur 7.30

Theorie C Snijpunten van lijnen met cirkels

In opgave 63 heb je de coördinaten van de snijpunten van de lijn $k: y = x - 1$ en de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x + 15 = 0$ berekend. Dit deed je door $y = x - 1$ te substitueren in de cirkelvergelijking. Zo kreeg je een vergelijking met alleen de variabele x .

Heb je te maken met de lijn $l: y = x + 1$ en c , dan krijg je

$$x^2 + (x + 1)^2 - 10x + 15 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 10x + 15 = 0$$

$$2x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -16 < 0$$

Hieruit volgt dat l en c geen gemeenschappelijke punten hebben.

Heb je te maken met de lijn $m: y = 3x - 5$ en c , dan krijg je

$$x^2 + (3x - 5)^2 - 10x + 15 = 0$$

$$x^2 + 9x^2 - 30x + 25 - 10x + 15 = 0$$

$$10x^2 - 40x + 40 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

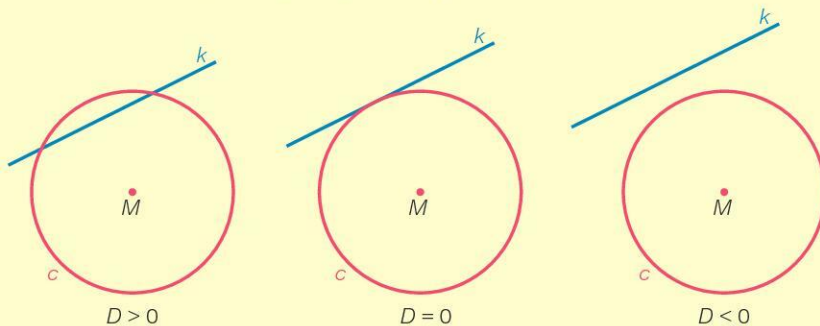
$$x = 2$$

Hieruit volgt dat m precies één gemeenschappelijk punt met c heeft, dus dat m de cirkel raakt. Het raakpunt is $(2, 1)$. Merk op dat de discriminant van de vergelijking $x^2 - 4x + 4 = 0$ gelijk is aan nul.

De ligging van de lijn $y = ax + b$ ten opzichte van een cirkel

Ontstaat na substitutie van $y = ax + b$ in de cirkelvergelijking een tweedegraadsvergelijking waarvan de discriminant

- groter is dan nul, dan zijn er twee snijpunten
- gelijk is aan nul, dan raakt de lijn de cirkel
- kleiner is dan nul, dan zijn er geen snijpunten.



Voorbeeld

Gegeven is de cirkel $c: (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 17$.

Bereken voor welke waarden van q de lijn $4x - y = q$ de cirkel raakt.

Aanpak

Gebruik de vergelijking van de cirkel in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ en gebruik de vergelijking van de lijn in de vorm $y = ax + b$.

Uitwerking

$$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 17$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = 17$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$$

Uit $4x - y = q$ volgt $y = 4x - q$.

Substitutie van $y = 4x - q$ in $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$ geeft

$$x^2 + (4x - q)^2 - 10x - 2(4x - q) + 9 = 0$$

$$x^2 + 16x^2 - 8qx + q^2 - 10x - 8x + 2q + 9 = 0$$

$$17x^2 + (-8q - 18)x + q^2 + 2q + 9 = 0$$

$$D = (-8q - 18)^2 - 4 \cdot 17 \cdot (q^2 + 2q + 9)$$
$$= 64q^2 + 288q + 324 - 68q^2 - 136q - 612$$

$$= -4q^2 + 152q - 288$$

$$D = 0 \text{ geeft } -4q^2 + 152q - 288 = 0$$

$$q^2 - 38q + 72 = 0$$

$$(q - 2)(q - 36) = 0$$

$$q = 2 \vee q = 36$$

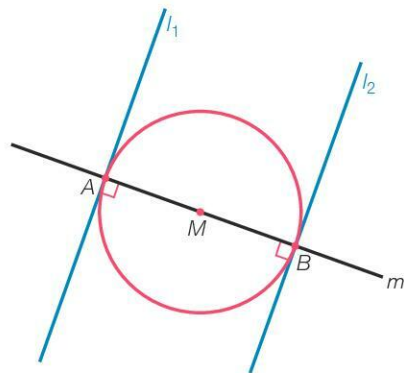
R64
  *

Zie het voorbeeld.

Je kunt q ook op een andere manier berekenen. Daartoe stel je een vergelijking op van de lijn m door het middelpunt M van c die loodrecht staat op $4x - y = q$.

De snijpunten A en B van m en c zijn raakpunten.

- a Bereken de coördinaten van A en B .
- b Gebruik dat de lijn $4x - y = q$ door A of B gaat om de waarden van q te berekenen.



figuur 7.31

65
  *

Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van

- a de lijn k : $y = x + 1$ en de cirkel c_1 : $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$
- b de lijn l : $2x - y = 1$ en de cirkel c_2 : $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$.

66
  *

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn en de cirkel. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- a De lijn k : $2x - 3y + 4 = 0$ en de cirkel c_1 : $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 26$.
- b De lijn l : $3x + 4y = 19$ en de cirkel c_2 : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.
- c De lijn m : $y = 2x$ en de cirkel c_3 : $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Bij opgave 66 staat niet dat het algebraïsch of exact moet, dus je mag de GR gebruiken.

67
  *

Gegeven is de cirkel c : $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 6 = 0$.

Bereken voor welke a de lijn $y = ax + 1$

- a raaklijn is van c
- b geen punten gemeenschappelijk heeft met c
- c twee snijpunten heeft met c .

A68
  *

Gegeven is de cirkel c : $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 6 = 0$.

Bereken voor welke b de lijn $y = \frac{1}{2}x + b$

- a raaklijn is van c
- b geen punten gemeenschappelijk heeft met c
- c twee snijpunten heeft met c .

A69
  *

Het lijnstuk AB met $A(-1, 3)$ en $B(7, -1)$ is een middellijn van de cirkel c .

- a Bereken voor welke p de lijn $y = -2x + p$ de cirkel c raakt.
- b Bereken voor welke q de lijn $y = qx - 5\frac{1}{2}$ geen punten gemeenschappelijk heeft met c .

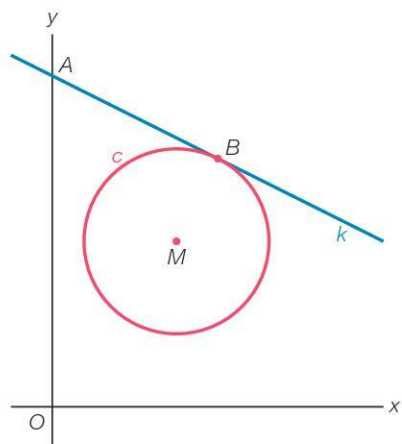
A70*****

Gegeven zijn de cirkel

$c: x^2 + y^2 - 12x - 16y + 80 = 0$ en het punt $A(0, 16)$.

De lijn k door A raakt c in het punt B . Zie figuur 7.32.

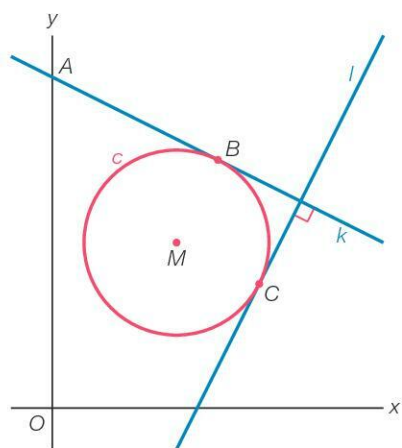
a Stel een vergelijking op van k .



figuur 7.32

De lijn l staat loodrecht op k en raakt de cirkel in het punt C . Zie figuur 7.33.

b Bereken exact de lengte van het lijnstuk BC .



figuur 7.33

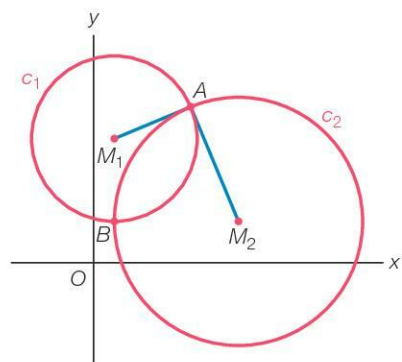
E71*****

Gegeven zijn de cirkels

$c_1: x^2 + y^2 - 2x - 12y + 21 = 0$ met middelpunt M_1 en $c_2: x^2 + y^2 - 14x - 4y + 17 = 0$ met middelpunt M_2 .

De cirkels snijden elkaar in de punten A en B . Zie figuur 7.34.

Bewijs dat $\angle M_1 A M_2 = 90^\circ$.



figuur 7.34

Terugblik

De afstand van een punt tot een cirkel

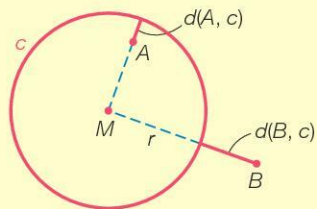
Voor een punt A binnen cirkel c met middelpunt M en straal r geldt $d(A, c) = r - d(A, M)$.

Voor een punt B buiten cirkel c met middelpunt M en straal r geldt $d(B, c) = d(B, M) - r$.

Heb je te maken met de cirkel $c: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 17$ met middelpunt $M(6, 2)$ en straal $r = \sqrt{17}$ en de punten $A(4, 3)$ en $B(10, 5)$, dan geldt

$$d(A, M) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{5} \text{ en } d(A, c) = \sqrt{17} - \sqrt{5}$$

$$d(B, M) = \sqrt{(6 - 10)^2 + (2 - 5)^2} = 5 \text{ en } d(B, c) = 5 - \sqrt{17}.$$



Een vergelijking van een raaklijn aan een cirkel opstellen

Bij het opstellen van een vergelijking van de raaklijn k aan een cirkel c met middelpunt M in een gegeven punt A op c ga je als volgt te werk.

- 1 Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A .
- 2 Bereken rc_k met behulp van $rc_k \cdot rc_l = -1$.
- 3 Stel een vergelijking op van k met behulp van rc_k en de coördinaten van A .

Bij het opstellen van een vergelijking van de lijn k die de cirkel

$c: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 17$ raakt in het punt $A(2, 3)$, krijg je:

1 $M(6, 2)$, dus van de lijn l door M en A is $rc_l = \frac{3 - 2}{2 - 6} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$.

2 Uit $rc_l = -\frac{1}{4}$ en $k \perp l$ volgt $rc_k = 4$.

3 $k: y = 4x + b$ door $A(2, 3)$ geeft $4 \cdot 2 + b = 3$ oftewel $b = -5$.

Dus $k: y = 4x - 5$.

Snijpunten van lijnen met cirkels

Om de coördinaten van de snijpunten van de lijn $l: y = -x + 3$ en de cirkel

$c: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 17$ te berekenen, substitueer je $y = -x + 3$ in de cirkelvergelijking. Je krijgt $(x - 6)^2 + (-x + 3 - 2)^2 = 17$.

Oplossen van deze vergelijking geeft $x = 2 \vee x = 5$.

De snijpunten van l en c zijn $(2, 1)$ en $(5, -2)$.

Om te berekenen voor welke p de lijn $y = px + 5$ de cirkel

$c: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 12 = 0$ raakt, substitueer je $y = px + 5$ in de cirkelvergelijking en gebruik je dat bij de vergelijking die je krijgt geldt $D = 0$.

Substitutie geeft $x^2 + (px + 5)^2 - 10x - 4(px + 5) + 12 = 0$.

Herleiden geeft $(p^2 + 1)x^2 + (6p - 10)x + 17 = 0$.

Hierbij hoort $D = -32p^2 - 120p + 32$.

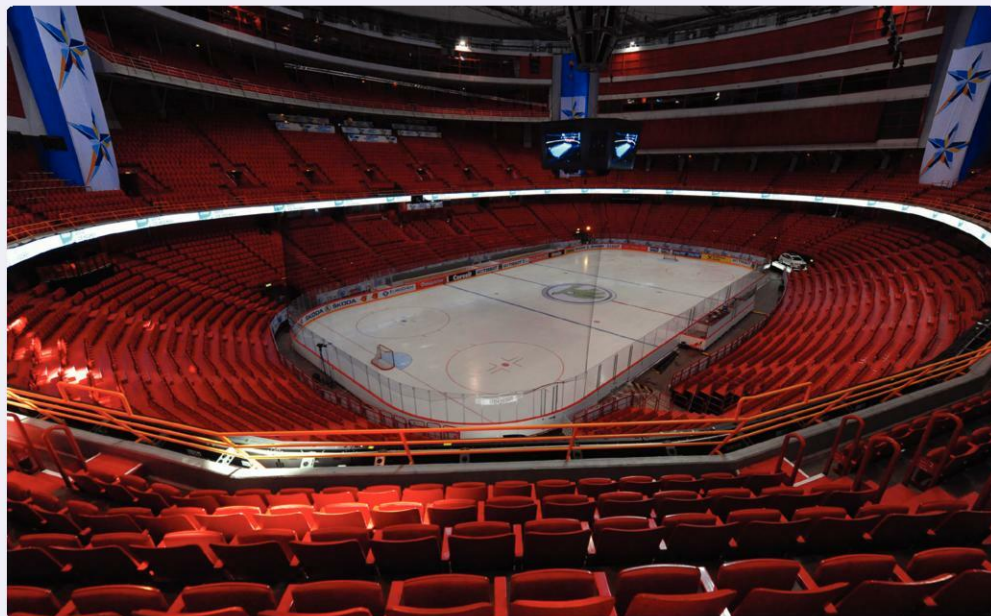
$D = 0$ geeft $-32p^2 - 120p + 32 = 0$ oftewel $4p^2 + 15p - 4 = 0$.

Oplossen van deze vergelijking geeft $p = -4 \vee p = \frac{1}{4}$.

Dus de lijnen $y = -4x + 5$ en $y = \frac{1}{4}x + 5$ raken de cirkel.

Eindopdracht Interieur Globen

Op de foto zie je het interieur van Globen zoals het eruit ziet bij een ijshockeywedstrijd.



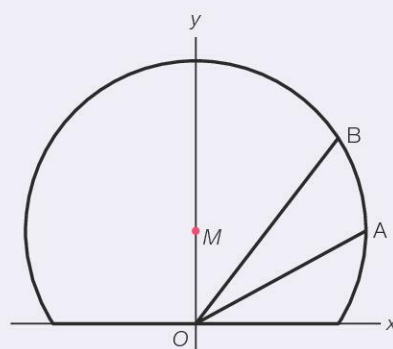
Zoals je in de beginopdracht hebt kunnen vinden, is het middelpunt van de bol (waarvan Globen een gedeelte is) op een hoogte van 30 meter boven de begane grond en is de straal van de bol 55 meter. In de figuur hiernaast is een doorsnede van Globen getekend. In de doorsnede is een assenstelsel aangebracht waarbij de x -as samenvalt met de begane grond en de y -as door het middelpunt M van de bol gaat. Dus de coördinaten van M zijn $(0, 30)$.

A en B zijn televisiecamera's.

Camera A bevindt zich 30 meter boven de begane grond en camera B bevindt zich 60 meter boven de begane grond.

Camera B zit verder van de middenstip van het ijshockeyveld af dan camera A.

- Bereken hoeveel meter camera B verder van de middenstip afzit dan camera A.



Diagnostische toets

7.1 Lijnen en hoeken

- 1** Gegeven zijn de lijnen $k: y = ax + 12$ en $l: 4x + 5y = b$.
Bereken voor welke a en b de lijnen
- a** een snijpunt hebben
 - b** samenvallen
 - c** elkaar snijden in het punt $(2, 8)$.
- 2** Bereken in graden de hoek tussen de lijnen. Rond af op één decimaal.
- a** $k: y = 4x + 2$ en $l: y = -\frac{1}{2}x + 6$
 - b** m door $(3, 0)$ en $(0, -2)$ en n door $(2, 0)$ en $(0, 5)$
 - c** $p: 2x + 3y = 6$ en $q: y = -8x - 6$

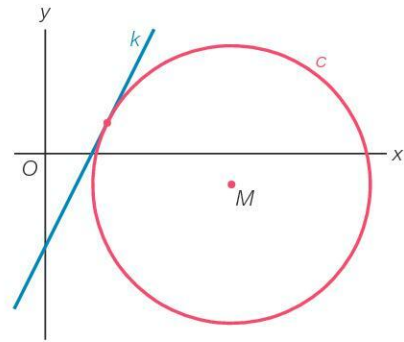
7.2 Afstanden bij punten en lijnen

- 3** Gegeven zijn de punten $A(2p, 0)$ en $B(3, p + 1)$.
Voor de afstand tussen A en B geldt $d(A, B) = \sqrt{5p^2 - 10p + 10}$.
- a** Toon dit aan.
 - b** Bereken langs algebraïsche weg voor welke p de afstand tussen A en B gelijk is aan 5.
 - c** Bereken voor welke p het midden van lijnstuk AB op de lijn $k: x + y = 6$ ligt.
- 4** Stel een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$ van de lijn
- a** k die door het punt $A(2, -4)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $l: 3x + 2y = 6$
 - b** m die door het punt $B(2, 3)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $n: y = -\frac{1}{3}x + 5$.
- 5** Bereken exact de afstand van
- a** het punt $A(6, -1)$ tot de lijn $k: 2x - y = 3$
 - b** het punt $B(3, 5)$ tot de lijn m door de punten $C(2, 1)$ en $D(-2, 5)$.

7.3 Cirkelvergelijkingen

- 6** Gegeven zijn de punten $A(2, -3)$ en $B(8, 2)$ en de lijn $k: y = 3x - 6$.
Stel een vergelijking op van de cirkel
- a** c_1 met middelpunt A die door B gaat
 - b** c_2 met middelpunt B die de y -as raakt
 - c** c_3 met middellijn AB
 - d** c_4 met middelpunt op k die de x -as in $C(5, 0)$ raakt.

- 7** Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(6, -1)$ die de lijn $k: y = 2x - 3$ raakt.



figuur 7.35

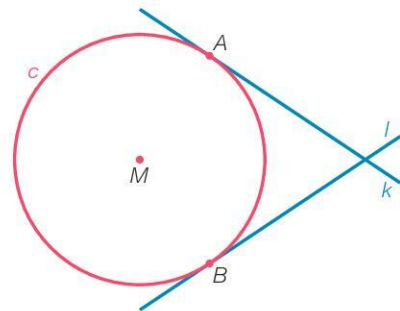
- 8** Bereken van de volgende cirkels de straal en de coördinaten van het middelpunt.
- $c_1: x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$
 - $c_2: x^2 + y^2 + 3x - 7y = 0$
- 9** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 16x + 8y - 1 = 0$ en de punten $A(3, -4)$, $B(2, 5)$ en $C(8, 5)$. Onderzoek met een berekening voor elk van de punten of het op, binnen of buiten de cirkel ligt.

7.4 Raaklijnen en snijpunten bij cirkels

- 10** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$, de lijn $k: 2x + y = 13$ en de punten $A(5, 5)$ en $B(1, -2)$. Bereken exact.

- $d(A, c)$
- $d(B, c)$
- $d(k, c)$

- 11** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$. De punten A en B met $x_A = x_B = 4$ en $y_A > y_B$ liggen op c . De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B .
- Stel van k en van l een vergelijking op.
 - Bereken in graden de hoek tussen k en l . Rond af op één decimaal.



figuur 7.36

- 12** Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van
- de lijn $k: y = -2x + 13$ en de cirkel $c_1: x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$
 - de lijn $l: x - y = 4$ en de cirkel $c_2: x^2 + (y + 3)^2 = 5$.
- 13** Gegeven is de cirkel c met middelpunt $M(1, 2)$ en straal $r = \sqrt{5}$.
- Bereken voor welke a de lijn $k: y = ax - 1$ raaklijn is van c .
 - Bereken voor welke b de lijn $l: y = -2x + b$ geen gemeenschappelijke punten met c heeft.

8

Goniometrie

Wat leer je?

- Wat de definities zijn van sinus en cosinus in de eenheidscirkel.
- Rekenen met de hoekenheid radiaal.
- Wat een sinusoïde is, hoe je deze tekent bij een gegeven formule en hoe je een formule opstelt bij een gegeven sinusoïde.
- Exact oplossen van enkele goniometrische vergelijkingen.
- Sinusoïden gebruiken in allerlei praktische situaties.



Beginopdracht Getijdenbeweging in Vlissingen en Harlingen

De getijdenbeweging (het getij) is een periodiek verschijnsel. Deze beweging wordt veroorzaakt door de aantrekkingskracht van de maan en, in mindere mate, door de aantrekkingskracht van de zon.

De periode van het stijgen van het water heet vloed of opkomend tij, die van het dalen eb of afgaand tij. De maximale waterhoogte heet hoogwater of hoogtij, de minimale hoogte heet laagwater of laagtij. Het getij vertoont van plaats tot plaats grote verschillen. Dit wordt veroorzaakt door factoren zoals de afstand tot de evenaar, de waterdiepte en de aanwezigheid en de vorm van landmassa's.

In Nederland hebben we te maken met een zogenaamd dubbeldaags getij, dat wil zeggen dat het ongeveer per etmaal twee keer hoogwater is en twee keer laagwater.

De getijdenbeweging in de Noordzee is gecompliceerd, omdat er een getijgolf vanuit het zuiden via het Nauw van Calais komt en een getijgolf vanuit het noorden om Schotland heen.

Het is langs de Noordzeekust niet overal op hetzelfde moment hoogwater en ook het verschil in waterhoogte van hoog- en laagwater varieert van plaats tot plaats. Dit verschil is bij Vlissingen gemiddeld ongeveer 382 cm en bij Den Helder 174 cm.

In Vlissingen was het op 1 januari 2019 om 04:05 uur laagwater en op 3 januari 2019 was het de tweede keer laagwater om 18:42 uur.

- Bereken met behulp van deze gegevens de periode van de getijdenbeweging in Vlissingen en gebruik dit om te berekenen op welke tijdstippen het op 2 januari 2019 laagwater was in Vlissingen.

De periode van het stijgen van het water duurt korter dan de periode van het dalen van het water. Neem aan dat in Vlissingen eb 35 minuten langer duurt dan vloed.

- Bereken hoe laat het op 1 januari 2019 in Vlissingen hoogwater was.

In de tabel hiernaast zie je de getijden bij Harlingen op 1 en 2 januari 2019.

De hoogwater- en laagwaterstanden zijn in cm ten opzichte van NAP.

- Gebruik deze tabel om te berekenen hoeveel minuten in Harlingen vloed korter duurt dan eb en bereken welke invloed dit heeft op de hoeveelheden zand en slib in de Waddenzee.

Getijdentabel Harlingen

datum	hoogwater	laagwater
ma 01 jan		
05:10	106	
12:34		-86
17:44	74	
di 02 jan		
00:56		-83
06:09	104	
13:40		-86
18:49	82	

Voorkennis Periodieke verbanden en bijzondere hoeken

Theorie A Periodieke verbanden

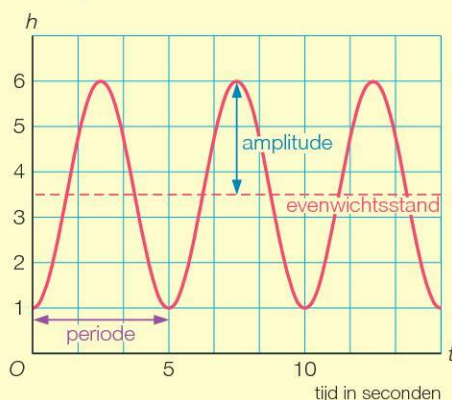
Er bestaan verschijnselen die zich met vaste regelmaat herhalen. Je hebt dan te maken met een periodiek verband.

Bij een periodiek verband hoort een grafiek die zich steeds herhaalt. De kortste tijd die het duurt tot herhaling optreedt, heet de *periode*.

In figuur 8.1 zie je de grafiek van een periodiek verband. De periode is 5 seconden. De horizontale stippellijn hoort bij de *evenwichtsstand*.

De hoogste en laagste punten van de grafiek liggen even ver van deze stippellijn. De grafiek schommelt als het ware om de evenwichtsstand. In de figuur hiernaast is de evenwichtsstand $\frac{6+1}{2} = 3,5$.

Het verschil tussen de hoogste stand en de evenwichtsstand heet de *amplitude*. In figuur 8.1 is de amplitude dus $6 - 3,5 = 2,5$.

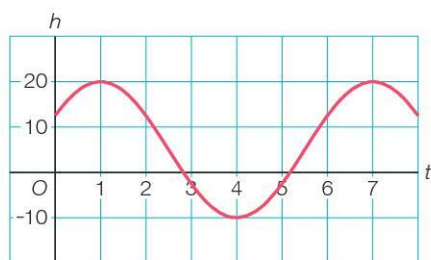


figuur 8.1

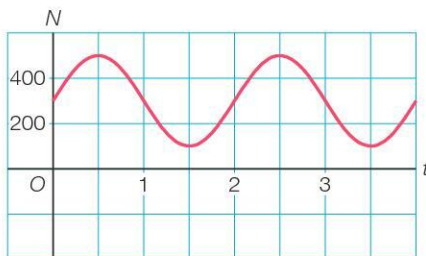
$$\text{evenwichtsstand} = \frac{\text{hoogste stand} + \text{laagste stand}}{2}$$

$$\text{amplitude} = \text{hoogste stand} - \text{evenwichtsstand}$$

- 1 a Zie figuur 8.2a.
Lees de periode, de evenwichtsstand en de amplitude af.
- b Zie figuur 8.2b.
Lees de periode, de evenwichtsstand en de amplitude af.



a



b

figuur 8.2

- 2 Van een periodiek verband is de periode 4, de evenwichtsstand 1 en de amplitude 2. De grafiek gaat stijgend door het punt (0, 1).

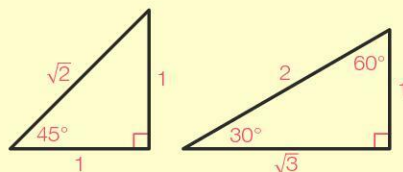
- a Teken drie perioden van de grafiek. Neem t op de horizontale as en h op de verticale as.
b Neem de tabel over en vul hem in. Licht toe.

t	22	33	35	1002
h				

Theorie B Hoeken van 30° , 45° en 60°

De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.

De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.



Je kunt met deze verhoudingen de sinus en de cosinus van hoeken van 45° , 30° en 60° exact berekenen.

Je krijgt bijvoorbeeld $\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Omdat $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, is $\sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

- 3 Bereken exact.

a $\sin(30^\circ)$

b $\sin(60^\circ)$

c $\cos(30^\circ)$

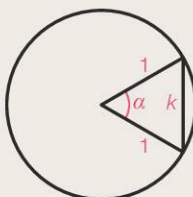
d $\cos(45^\circ)$

GESCHIEDENIS

Sinus

Vraagstukken uit de sterrenkunde en op het terrein van navigeren op zee hebben de ontwikkeling van de goniometrie vanaf de Oudheid gestimuleerd. De Griekse astronoom Ptolemeus (ca. 85-165) rekende aan planeetbanen. Als hulpmiddel ontwikkelde hij koordentafels waarin hij lengten van koorden in de eenheidscirkel tot op vijf decimalen nauwkeurig berekende.

hoek	koorde
59°	0,98485
$59^\circ 30'$	0,99243
60°	1
$60^\circ 30'$	1,00755
61°	1,001508



In de vijfde eeuw hebben Indiase wiskundigen het begrip sinus ingevoerd. De sinustafel verving de koordentafel. De notaties die tegenwoordig in de goniometrie gangbaar zijn, hebben we aan Leonhard Euler (1707-1783) te danken. Tegenwoordig bereken je de lengte van koorde k in de figuur hierboven simpel op je GR met $k = 2 \sin(\frac{1}{2}\alpha)$.

8.1 De eenheidscirkel en radialen



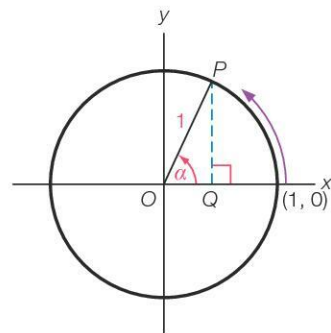
01 Rond in deze opgave de lengten van lijnstukken en de coördinaten van punten af op twee decimalen.

In figuur 8.3 is de cirkel getekend met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1. Het punt P draait tegen de wijzers van de klok in over de cirkel en begint daarbij in $(1, 0)$. De hoek waarover gedraaid is geven we aan met de Griekse letter α . In figuur 8.3 is $\alpha = 65^\circ$.

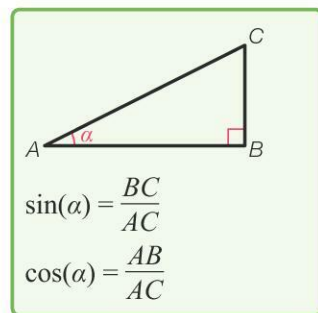
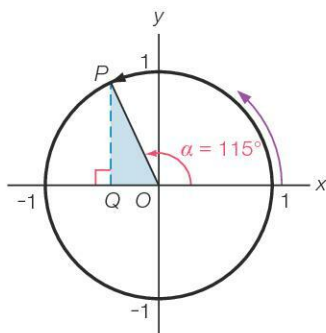
- Bereken PQ en OQ .
- Geef de coördinaten van P .

In figuur 8.4a zie je de situatie met $\alpha = 115^\circ$ en in figuur 8.4b die met $\alpha = 245^\circ$.

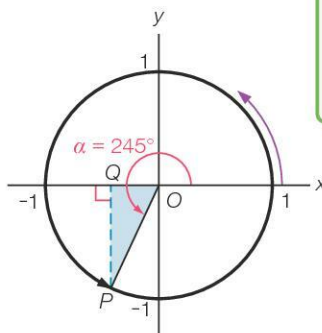
- Hoeveel graden is $\angle POQ$ in figuur 8.4a? Geef PQ , OQ en de coördinaten van P .
- Wat is het resultaat als je de GR $\cos(115^\circ)$ en $\sin(115^\circ)$ laat berekenen? Vergelijk de resultaten met de coördinaten van het punt P van vraag b. Wat valt je op?



figuur 8.3



a



b

figuur 8.4

- Zie figuur 8.4b.
Hoeveel graden is $\angle POQ$?
Geef de coördinaten van P .
Ga na dat je deze coördinaten op je GR kunt krijgen door $\cos(245^\circ)$ en $\sin(245^\circ)$ te berekenen.

Theorie A Sinus en cosinus

De cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1 heet de **eenheidscirkel**.

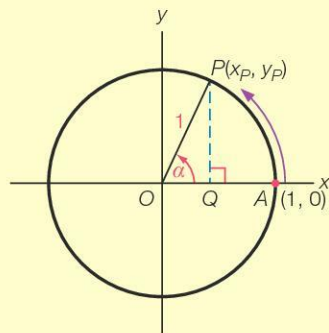
Het punt P beweegt over de eenheidscirkel en begint in het punt $A(1, 0)$. Zie figuur 8.5. Hierdoor ontstaat hoek AOP die we de **draaiingshoek** van P noemen. We geven deze hoek aan met α . Het eerste been van een draaiingshoek is altijd de positieve x -as, het tweede been gaat door het punt P .

In figuur 8.5 is de draaiingshoek α scherp. Voor deze

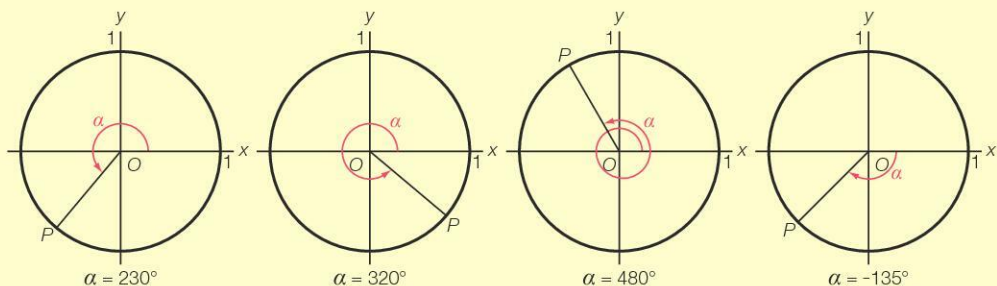
scherpe hoek weet je $\sin(\alpha) = \frac{PQ}{OP} = \frac{y_P}{1} = y_P$ en

$$\cos(\alpha) = \frac{OQ}{OP} = \frac{x_P}{1} = x_P.$$

De draaiingshoek α neemt allerlei waarden aan. Hieronder zie je enkele voorbeelden. Je ziet dat α ook groter dan 360° kan zijn.



figuur 8.5

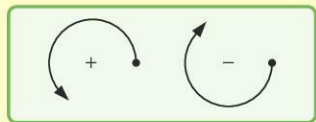


figuur 8.6 Draaiingshoeken kunnen zowel positief als negatief zijn.

Afspraak

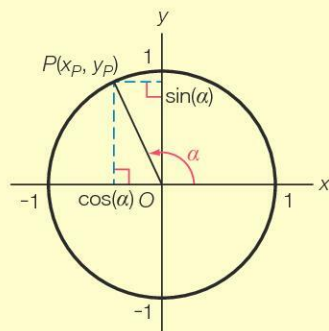
Draait P

- tegen de wijzers van de klok in, dan is α positief
- met de wijzers van de klok mee, dan is α negatief.



Voor alle hoeken α is afgesproken $\sin(\alpha) = y_P$ en $\cos(\alpha) = x_P$.

Snijdt het tweede been van de draaiingshoek α de eenheidscirkel in het punt $P(x_P, y_P)$, dan is $\sin(\alpha) = y_P$ en $\cos(\alpha) = x_P$.

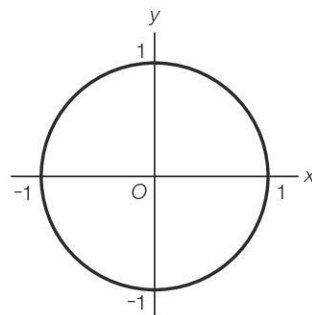


Van sommige draaiingshoeken zoals 180° en -90° kun je de sinus en de cosinus eenvoudig uit de eenheidscirkel aflezen. Zo hoort bij $\alpha = 180^\circ$ het punt $P(-1, 0)$, dus $\sin(180^\circ) = 0$ en $\cos(180^\circ) = -1$. Maar meestal moet je de GR gebruiken. Je krijgt dan benaderingen. Zo is $\sin(215^\circ) \approx -0,57$. Ga dit na.

2 Lees uit de eenheidscirkel af.

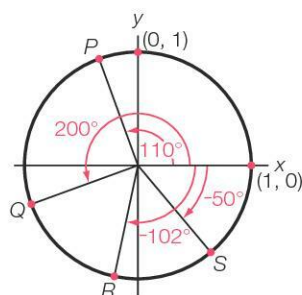


- | | | |
|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| a $\sin(0^\circ)$ | f $\cos(270^\circ)$ | k $\sin(-540^\circ)$ |
| b $\cos(0^\circ)$ | g $\sin(360^\circ)$ | l $\cos(1080^\circ)$ |
| c $\sin(90^\circ)$ | h $\cos(360^\circ)$ | m $\sin(1980^\circ)$ |
| d $\cos(90^\circ)$ | i $\sin(450^\circ)$ | n $\cos(-180^\circ)$ |
| e $\sin(270^\circ)$ | j $\cos(-90^\circ)$ | o $\sin(990^\circ)$ |

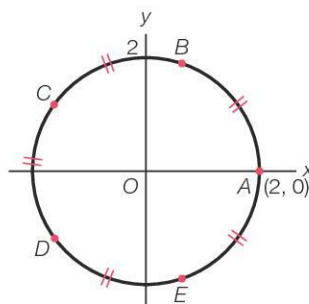


figuur 8.7

3 Op de eenheidscirkel in figuur 8.8 liggen de punten P , Q , R en S . Bereken de coördinaten van P , Q , R en S . Rond af op twee decimalen.



figuur 8.8



figuur 8.9

A4 Op de cirkel met middelpunt O en straal 2 van figuur 8.9 liggen de punten A , B , C , D en E waarbij de cirkel wordt verdeeld in vijf cirkelbogen van gelijke lengte. Het punt A is het punt $(2, 0)$. Bereken de coördinaten van B , C , D en E . Rond af op twee decimalen.



05 Op de eenheidscirkel liggen de punten P en Q met $y_P = y_Q = 0,5$, $x_P > 0$ en $x_Q < 0$.

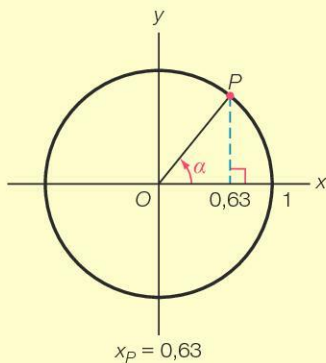


- Teken de eenheidscirkel met de punten P en Q .
- Voor de draaiingshoek α van P geldt $\alpha = 30^\circ$. Gebruik dit en symmetrie om de draaiingshoek β van Q , met $0 \leq \beta \leq 360^\circ$, af te lezen uit de figuur van vraag a.

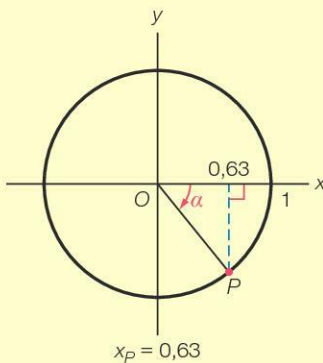
Theorie B Hoek berekenen bij gegeven x_P of y_P

In figuur 8.10 zie je het punt P met $x_P = 0,63$. Dus $\cos(\alpha) = 0,63$.

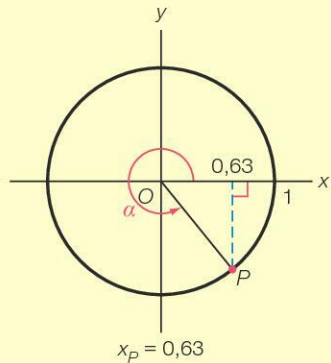
Je berekent α op de GR met $\cos^{-1}(0,63)$ of $\text{ACOS}(0,63)$. Je krijgt $\alpha \approx 51^\circ$.



figuur 8.10



figuur 8.11



figuur 8.12

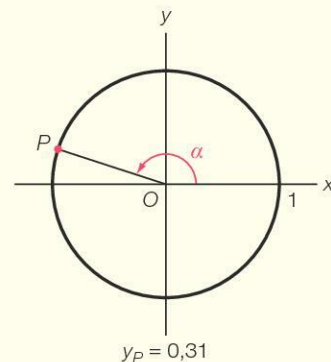
Ook in figuur 8.11 is $\cos(\alpha) = 0,63$. Maar de bijbehorende hoek $\alpha \approx -51^\circ$ krijg je niet met de GR. Je moet dit zelf bedenken. Je gebruikt daarbij symmetrie.

Bij $x_P = 0,63$ in figuur 8.12 hoort $\alpha \approx 360^\circ - 51^\circ = 309^\circ$.

Voorbeeld

In figuur 8.13 is $y_P = 0,31$.

Bereken α in graden. Rond af op één decimaal.

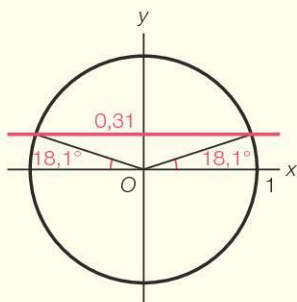


figuur 8.13

Uitwerking

$y_P = 0,31$ dus $\sin(\alpha) = 0,31$.

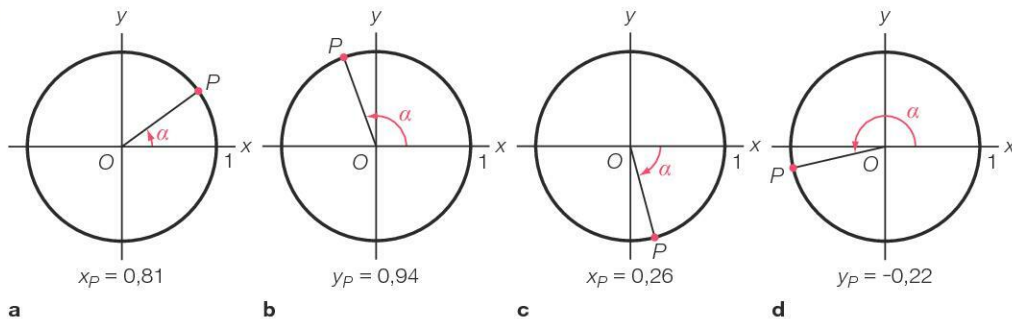
De GR geeft $18,05\dots^\circ$.



Dus $\alpha = 180^\circ - 18,05\dots^\circ \approx 161,9^\circ$.

6


Zie figuur 8.14. Bereken α in graden. Rond af op één decimaal.

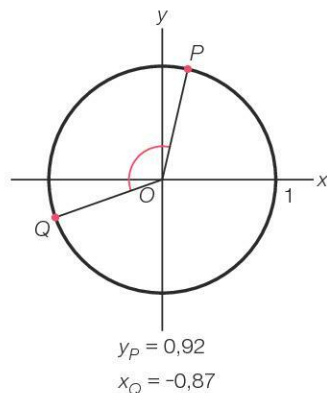


figuur 8.14

A7


In figuur 8.15 is $y_P = 0,92$ en $x_Q = -0,87$.

Bereken $\angle POQ$ in graden. Rond af op één decimaal.



figuur 8.15

08

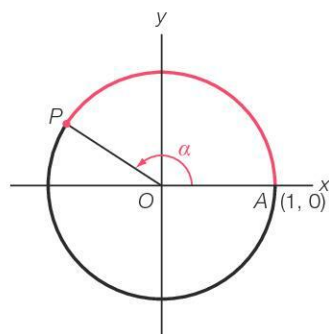

a Licht toe dat de omtrek van de eenheidscirkel gelijk is aan 2π .

Het punt P begint in $A(1, 0)$ en doorloopt de eenheidscirkel. De draaiingshoek α is positief. De lengte van de cirkelboog hangt af van α .

b Licht toe dat bij $\alpha = 90^\circ$ de lengte van de door P doorlopen cirkelboog gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi$.

c Vul de tabel verder in.

draaiingshoek α	0°	90°	180°	270°	360°
lengte cirkelboog b		$\frac{1}{2}\pi$			2π



figuur 8.16

Theorie C De hoekeenheid radiaal

In opgave 8c heb je een verhoudingstabel ingevuld.

Uit $\frac{\alpha}{b} \mid \frac{180^\circ}{\pi}$ volgt $b = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}$ oftewel $b = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$.

Neem je $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi}$, dan krijg je $b = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 1$.

Dus bij een draaiingshoek van $\frac{180^\circ}{\pi}$ is de lengte van de

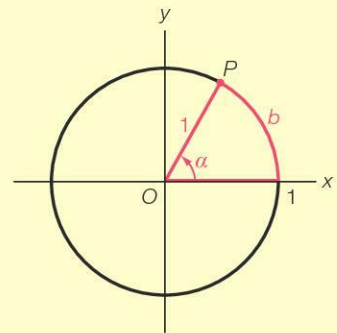
cirkelboog gelijk aan de straal van de eenheidscirkel.

De hoekeenheid waarbij de lengte van de cirkelboog gelijk is aan de straal heet **radiaal**, afgekort **rad**.

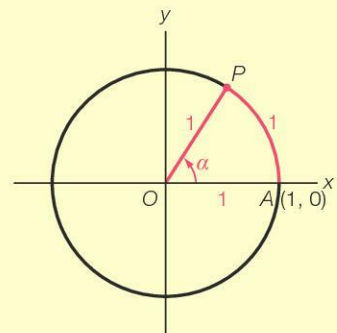
De radiaal is dus zo gekozen, dat bij een booglengte van 1 op de eenheidscirkel een middelpuntshoek van 1 radiaal hoort.

Bij een booglengte van 2 op de eenheidscirkel hoort een middelpuntshoek van 2 rad.

En bij een booglengte van π op de eenheidscirkel hoort een middelpuntshoek van π rad.

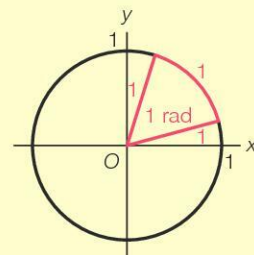


figuur 8.17

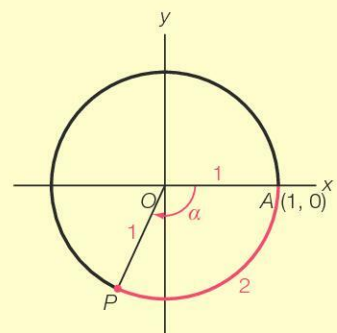


figuur 8.18

De middelpuntshoek in de eenheidscirkel die hoort bij een cirkelboog met lengte 1 is een hoek van 1 radiaal.



In figuur 8.19 is α negatief. De booglengte $AP = 2$. Hierbij hoort een draaiingshoek $\alpha = -2$ rad.



figuur 8.19

Voorbeeld

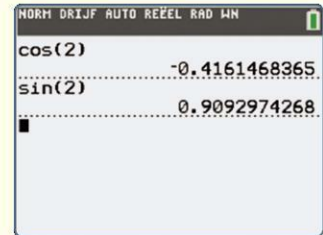
Het punt P begint in $(1, 0)$ en doorloopt de eenheidscirkel.
De draaiingshoek is positief en de afgelegde afstand over de cirkel is 2.
Bereken de coördinaten van P . Rond af op twee decimalen.

Aanpak

De door P afgelegde afstand is 2, dus $\alpha = 2$ rad.
Stel de hoekeenheid van je GR in op radialen, op de TI in het mode-menu, op de Casio in het SET-UP-menu en op de HP in het Settings menu.

Uitwerking

$x_P = \cos(2 \text{ rad}) \approx -0,42$ en $y_P = \sin(2 \text{ rad}) \approx 0,91$.
Dus $P(-0,42; 0,91)$.



Rond in deze opgave af op twee decimalen.
Het punt P begint in $(1, 0)$ en doorloopt de eenheidscirkel.
De draaiingshoek is positief.
Bereken de coördinaten van P bij een afgelegde afstand

- a 5
- b 6
- c 20

GESCHIEDENIS

Hoekeenheden

Bij de graad als hoekeenheid is uitgegaan van een verdeling van een cirkel in 360 gelijke stukken. Men vermoedt dat deze verdeling afkomstig is uit de astronomie.

In de Soemerische periode (ongeveer 2100 voor Christus) verdeelden astronomen een jaar in 12 maanden van elk 30 dagen ($12 \times 30 = 360$).

De Soemeriërs waren woonachtig in het huidige Irak. Ze waren al bedreven in het rekenen, waarbij ze een zestigtallig stelsel hadden ontwikkeld. Dit getallenstelsel verschilt in principe niet veel van het tientallig stelsel dat we tegenwoordig gebruiken. Er zijn duizenden teksten uit deze periode gevonden met verslagen over de levering van vee en graan, vergezeld van bijbehorende berekeningen in het zestigtallig stelsel.

De hoekeenheid radiaal werd door James Thomson in 1873 gedefinieerd. James was wiskundeprofessor aan het Queens College in Belfast. Zijn broer is de bekende natuurkundige William Thomson, Lord Kelvin.

Het punt P begint in $(1, 0)$ en doorloopt de eenheidscirkel. De draaiingshoek is positief.

Bereken de coördinaten van P bij een afgelegde afstand

a $\frac{1}{2}\pi$

b π

c $1\frac{1}{2}\pi$

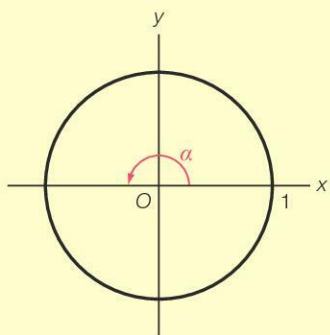
Theorie D Radiaal en graad

De omtrek van een cirkel is $2\pi r$. De straal van de eenheidscirkel is 1, dus de hele eenheidscirkel heeft booglengte $2\pi \cdot 1 = 2\pi$.

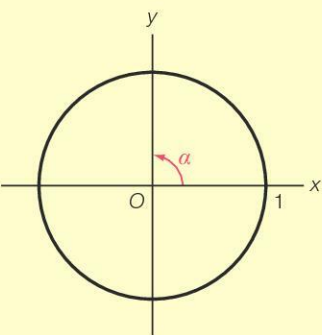
Bij deze booglengte hoort dus een draaiingshoek van 2π rad.

Hieruit volgt direct 2π rad = 360° , dus π rad = 180° .

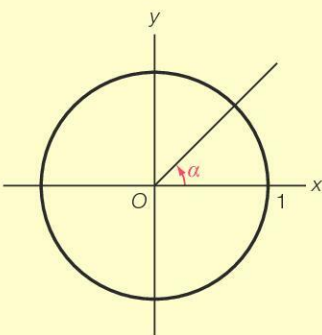
π rad = 180°



figuur 8.20 booglengte π
 $\alpha = \pi$ rad = 180°



figuur 8.21 booglengte $\frac{1}{2}\pi$
 $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ rad = 90°

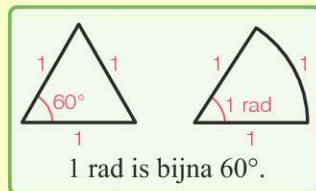


figuur 8.22 booglengte $\frac{1}{4}\pi$
 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ rad = 45°

Dus	$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$	$\approx$	$57,3^\circ$
	$1^\circ = \frac{1}{180} \pi \text{ rad}$	$\approx$	$0,017 \text{ rad}$
	exact		afgerond

Let op het verschil tussen $\frac{1}{3}$ rad en $\frac{1}{3}\pi$ rad.

$$\frac{1}{3} \text{ rad} = \frac{1}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 19,1^\circ \text{ en } \frac{1}{3}\pi \text{ rad} = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ.$$



omzetten van radialen in graden	omzetten van graden in radialen (benaderd)	omzetten van graden in radialen (exact)
$\frac{2}{3}\pi \text{ rad} = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ$	$107^\circ = \frac{107}{180}\pi \text{ rad} \approx 1,87 \text{ rad}$	$20^\circ = \frac{20}{180}\pi \text{ rad} = \frac{1}{9}\pi \text{ rad}$
$\frac{3}{4} \text{ rad} = \frac{3}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 43,0^\circ$	$-26^\circ = -\frac{26}{180}\pi \text{ rad} \approx -0,45 \text{ rad}$	$75^\circ = \frac{75}{180}\pi \text{ rad} = \frac{5}{12}\pi \text{ rad}$

11 Druk uit in graden. Rond zo nodig af op één decimaal.

- a** $\frac{1}{6}\pi \text{ rad}$ **c** $2\pi \text{ rad}$ **e** $1\frac{1}{4}\pi \text{ rad}$ **g** $-2\frac{1}{3}\pi \text{ rad}$
b $\frac{1}{4}\pi \text{ rad}$ **d** 2 rad **f** $1\frac{1}{4} \text{ rad}$ **h** $-2\frac{1}{3} \text{ rad}$

12 Druk uit in radialen. Geef een exact antwoord.

- a** 360° **e** 90° **i** 300° **m** 210°
b 30° **f** 135° **j** 720° **n** -5°
c -45° **g** -75° **k** 400° **o** 540°
d 60° **h** 240° **l** 0° **p** 1°

13 Druk uit in radialen. Rond af op twee decimalen.

- a** 7° **c** $-51,3^\circ$ **e** -320° **g** 90°
b 18° **d** $1,7^\circ$ **f** 1030° **h** 57°

Afspraak

In het vervolg laten we bij een hoek in radialen de eenheid rad meestal weg.
Dus $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ betekent $\alpha = \frac{1}{2}\pi \text{ rad}$.

14 Vul de tabel verder in. Laat π in de antwoorden staan.

hoek in graden	0°	30°		60°	90°			240°	315°	360°
hoek in radialen	0		$\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π			2π

15 Bereken. Rond af op twee decimalen.

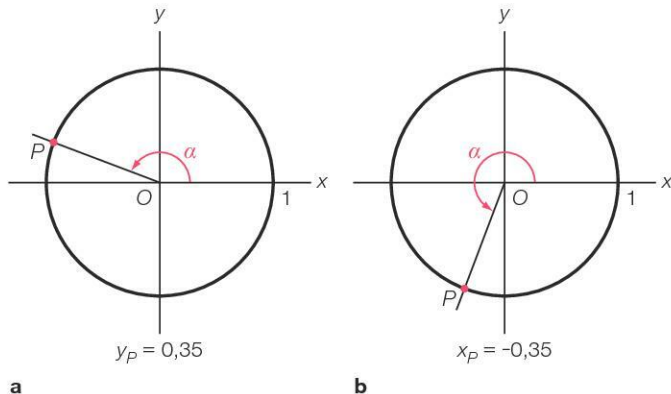
- a** $\cos(\frac{2}{3}\pi)$ **c** $\sin(\frac{4}{5}\pi)$ **e** $\cos(7,6\pi)$
b $\cos(\frac{2}{3})$ **d** $\sin(\frac{4}{5})$ **f** $\cos(7,6)$

16 Bereken α met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Rond af op twee decimalen.

- a** $\sin(\alpha) = 0,92$ **c** $\sin(\alpha) = \frac{5}{12}$ **e** $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{5}$
b $\cos(\alpha) = 0,85$ **d** $\cos(\alpha) = \frac{3}{17}$ **f** $\cos(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

17 Zie figuur 8.23.

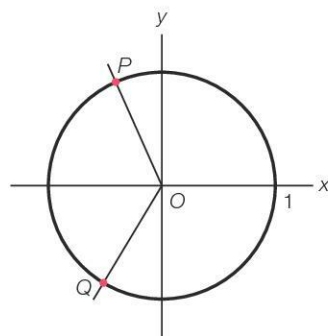
 Bereken α in radialen. Rond af op twee decimalen.



figuur 8.23

A18 In figuur 8.24 is $x_P = -0,32$ en $y_Q = -0,88$.

 Bereken $\angle POQ$ in radialen. Rond af op twee decimalen.

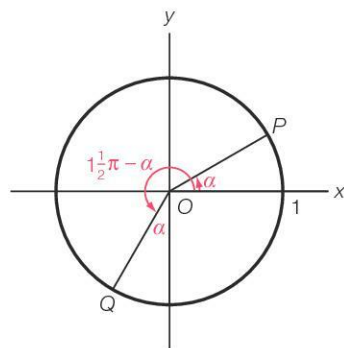


figuur 8.24

E19 Om $\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$ uit te drukken in $\sin(\alpha)$ of $\cos(\alpha)$ gebruik je de figuur hiernaast. Je ziet dat $x_Q = -y_P$, dus $\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = -\sin(\alpha)$.

Druk uit in $\sin(\alpha)$ of $\cos(\alpha)$.

- | | |
|--------------------------------|--|
| a $\sin(\pi - \alpha)$ | e $\sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$ |
| b $\cos(\pi - \alpha)$ | f $\cos(\frac{1}{2}\pi + \alpha)$ |
| c $\sin(2\pi - \alpha)$ | g $\sin(\frac{1}{2}\pi + \alpha)$ |
| d $\cos(2\pi - \alpha)$ | h $\cos(\frac{1}{2}\pi + \alpha)$ |



figuur 8.25

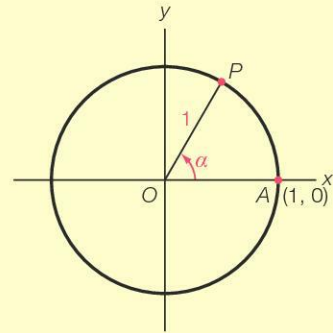
Terugblik

Eenheidscirkel en draaiingshoek

De eenheidscirkel is de cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1.

$\angle AOP$ in de figuur hiernaast heet de draaiingshoek van P . Het eerste been van de draaiingshoek α is de positieve x -as, het tweede been snijdt de eenheidscirkel in het punt P .

Hiernaast is α positief, want het punt P draait tegen de wijzers van de klok in.

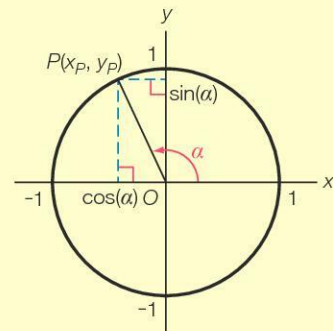


Sinus en cosinus

In de eenheidscirkel is voor alle hoeken afgesproken wat de sinus en de cosinus zijn. Zie de figuur hiernaast. Er geldt $\sin(\alpha) = y_P$ en $\cos(\alpha) = x_P$.

Is α een veelvoud van 90° , dan ligt P op de x -as of de y -as. Je kunt dan de sinus en de cosinus uit de eenheidscirkel aflezen.

Voor andere hoeken gebruik je de GR.



De GR geeft niet altijd de juiste hoek. Je gebruikt dan de symmetrie in de x -as of de y -as om de juiste hoek te vinden. Zo geeft de GR bij $x_P = -0,45$ een hoek van $116,74\dots^\circ$. Zoek je de andere hoek tussen 0° en 360° waarvoor $x_P = -0,45$, dan bereken je $360^\circ - 116,74\dots^\circ \approx 243^\circ$.

Radialen

De radiaal is een hoekeenheid.

De middelpuntshoek in de eenheidscirkel die hoort bij een cirkelboog met lengte 1, is een hoek van 1 radiaal.

Bij een draaiingshoek van 2,5 rad hoort een punt P op de eenheidscirkel met coördinaten $(\cos(2,5 \text{ rad}), \sin(2,5 \text{ rad})) \approx (-0,80; 0,60)$.

Stel hierbij je GR in op radialen.

Maak bij het omzetten van graden in radialen en omgekeerd gebruik van $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.

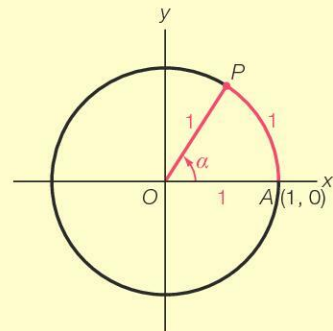
Zo is $\frac{1}{3}\pi \text{ rad} = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$ en

$$135^\circ = \frac{135}{180} \cdot \pi \text{ rad} = \frac{3}{4}\pi \text{ rad}.$$

Bij 2,2 rad hoort $2,2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 126^\circ$ en bij 147° hoort $\frac{147}{180} \cdot \pi \text{ rad} \approx 2,57 \text{ rad}$.

De hoekeenheid radialen mag weggelaten worden, maar de hoekeenheid graden niet.

Dus $\sin(2,5) \approx 0,60$ en $\sin(2,5^\circ) \approx 0,04$.



Een hoek van 1 radiaal hoort bij een boog met lengte $1 \times$ de straal.

8.2 Sinusoïden

020
 *

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[-7, 7]$.

- Voer op de GR in $y_1 = \sin(x)$, neem y tussen -2 en 2 en plot de grafiek. Zorg wel eerst voor de instelling op radialen.
- Bereken $f(\frac{1}{6}\pi)$, $f(\frac{5}{6}\pi)$, $f(1\frac{1}{6}\pi)$ en $f(1\frac{5}{6}\pi)$.
- Teken de grafiek en zet de coördinaten van de vier toppen van de grafiek erbij.
- Welke nulpunten zie je in de grafiek? Geef exacte antwoorden.

Theorie A Grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$

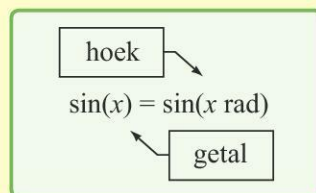
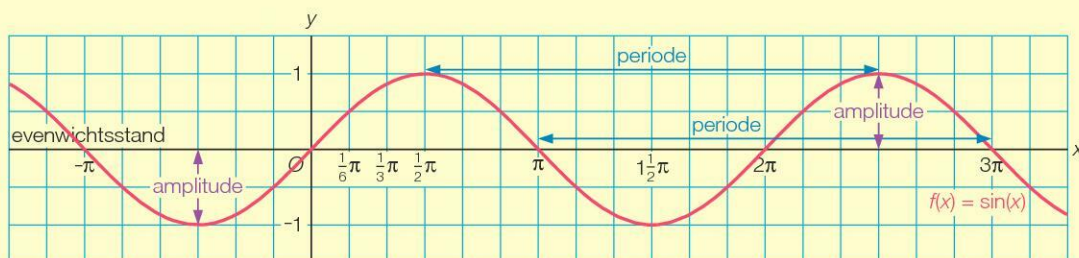
Het sinusbegrip wordt niet alleen bij hoeken, maar ook bij getallen gebruikt. De sinus van het getal 2 is de sinus van een hoek van 2 radialen. Je kunt op deze manier praten over de functie $f(x) = \sin(x)$, die bij elk getal de sinus van dat getal geeft.

Hieronder is de grafiek van de **goniometrische functie** $f(x) = \sin(x)$ getekend. Op de horizontale as is 3 cm rechts van de oorsprong het getal π gezet.

De nulpunten zijn ..., -2π , $-\pi$, 0 , π , 2π , 3π , ...

De grafiek is periodiek met **periode** 2π .

De **evenwichtsstand** is 0 en de **amplitude** is 1.



figuur 8.26 Op de x -as is 1 cm rechts van de oorsprong $\frac{1}{3}\pi$ gezet. Merk op dat $\frac{1}{3}\pi \approx 1,047 \approx 1$.

21
 *

Gegeven is de functie $g(x) = \cos(x)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$.

- Plot de grafiek. Neem y tussen -2 en 2 .
- Teken de grafiek. Gebruik de schaalverdeling van figuur 8.26
- Geef de coördinaten van de vijf toppen. Geef exacte antwoorden.
- Welke nulpunten zie je in de grafiek? Geef exacte antwoorden.

$$\cos(x) = \cos(x \text{ rad})$$

22


Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$, beide met domein $[0, 3\pi]$.

- Teken de grafieken van f en g in één figuur. Gebruik de schaalverdeling van figuur 8.26.
- De grafieken van f en g snijden elkaar in vier punten. Licht toe dat de x -coördinaat van één van die snijpunten $\frac{1}{4}\pi$ is en geef de exacte waarden van de x -coördinaten van de andere drie snijpunten.

023


Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.

- Hoe ontstaat de grafiek van $g(x) = 2 + \sin(x)$ uit de grafiek van f ? Geef de evenwichtsstand van de grafiek van g .
- Hoe ontstaat de grafiek van $h(x) = \sin(x - 3)$ uit de grafiek van f ?
- Hoe ontstaat de grafiek van $k(x) = 4 \sin(x)$ uit de grafiek van f ? Geef de amplitude van de grafiek van k .
- Hoe ontstaat de grafiek van $l(x) = \sin(5x)$ uit de grafiek van f ? Geef de periode van de grafiek van l .

Theorie B Transformaties bij goniometrische functies

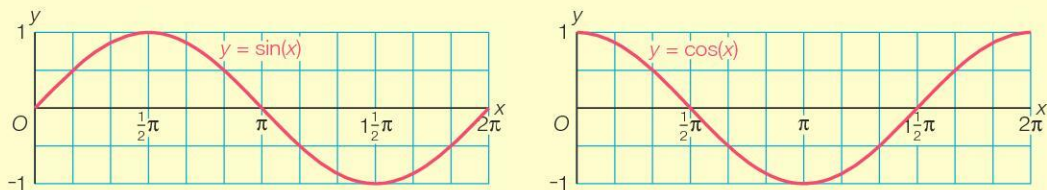
De functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ zijn standaardfuncties.

De bijbehorende grafieken mag je zonder toelichting tekenen.

Bij beide grafieken hoort evenwichtsstand 0, amplitude 1 en periode 2π .

Een punt waar de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ stijgend door de evenwichtsstand gaat, noemen we een **beginpunt** van de grafiek.

Een hoogste punt van de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ noemen we een beginpunt van de grafiek van g .



figuur 8.27 Van de standaardgrafieken $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ is één periode getekend.

Op deze grafieken kun je de vier bekende transformaties toepassen.

Effect van transformaties op de standaardgrafiek $y = \sin(x)$		
transformatie	beeldgrafiek	kenmerk
translatie $(0, a)$	$y = a + \sin(x)$	evenwichtsstand a
verm. x -as, b	$y = b \sin(x)$	amplitude b ($b > 0$)
verm. y -as, $\frac{1}{c}$	$y = \sin(cx)$	periode $\frac{2\pi}{c}$ ($c > 0$)
translatie $(d, 0)$	$y = \sin(x - d)$	beginpunt $(d, 0)$

Pas je meer transformaties na elkaar toe, let dan op de volgorde.

$y = \sin(x)$ $\downarrow$ verm. x -as, 3 $y = 3 \sin(x)$ $\downarrow$ translatie (0, 2) $y = 2 + 3 \sin(x)$	$y = \sin(x)$ $\downarrow$ translatie (0, 2) $y = 2 + \sin(x)$ $\downarrow$ verm. x -as, 3 $y = 3(2 + \sin(x))$ oftewel $y = 6 + 3 \sin(x)$
--	--

Ook bij de combinatie van een horizontale translatie en een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as is de volgorde van belang.

$y = \sin(x)$ $\downarrow$ translatie $(\frac{1}{3}\pi, 0)$ $y = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$ $\downarrow$ verm. y -as, 2 $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi)$	$y = \sin(x)$ $\downarrow$ verm. y -as, 2 $y = \sin(\frac{1}{2}x)$ $\downarrow$ translatie $(\frac{1}{3}\pi, 0)$ $y = \sin(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}\pi))$ oftewel $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi)$
--	---

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2} + \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$.

Geef van de grafiek de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

Aanpak

Bedenk hoe de grafiek van f uit een standaardgrafiek ontstaat.

$$y = \sin(x) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } \frac{1}{2}} y = \sin(2x)$$

Dus de periode wordt π .

$$y = \sin(2x) \xrightarrow{\text{translatie } (\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})} y = \frac{1}{2} + \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$$

Dus de evenwichtsstand wordt $\frac{1}{2}$ en een beginpunt wordt $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$.

De amplitude is niet veranderd, dus de amplitude blijft 1.

Uitwerking

De evenwichtsstand is $\frac{1}{2}$, de amplitude is 1, de periode is π en een beginpunt is $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$.



Zie het voorbeeld met de functie $f(x) = \frac{1}{2} + \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$.

Volgens José hoort bij de grafiek van $g(x) = \frac{1}{2} + \cos(2(x - \frac{1}{3}\pi))$ dezelfde evenwichtsstand, dezelfde amplitude en dezelfde periode als bij de grafiek van f .

a Ben je het met José eens?

b Geef de coördinaten van een beginpunt van de grafiek van g .

25 Geef van de grafiek de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.



a $f(x) = 2 \sin(x + 3)$

c $h(x) = \cos(3(x - 4))$

b $g(x) = \frac{1}{3} \sin(x) + \frac{1}{5}$

d $j(x) = 1\frac{1}{2} \cos(\frac{1}{4}x)$

26 Geef van de grafiek de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.



a $f(x) = 5 + 1,2 \cos(x - \frac{1}{6}\pi)$

c $h(x) = 0,29 \cos(3(x + 1,4))$

b $g(x) = 0,4 + \sin(\frac{1}{5}(x + \frac{1}{3}\pi))$

d $j(x) = -0,8 + 2 \sin(3(x - \frac{1}{2}\pi))$

27 **a** De grafiek van f ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door eerst de translatie $(\frac{1}{4}\pi, 4)$ en dan de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 3 toe te passen.



Stel het functievoorschrift van f op.

b De grafiek van g ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 3 en dan de translatie $(\frac{1}{4}\pi, 4)$ toe te passen.

Stel het functievoorschrift van g op.

A28 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2} + \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$ met domein $[0, 3\pi]$.



a Geef van de grafiek van f de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

b Geef de exacte coördinaten van de punten waar de grafiek van f de lijn van de evenwichtsstand snijdt.

c Geef de exacte coördinaten van de drie toppen van de grafiek van f .

d De grafiek van f snijdt de x -as achtereenvolgens in de punten A , B en C . Geef de exacte afstand tussen A en C .

A29 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 + 4 \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$ en



$g(x) = -2 + 4 \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$. Je kunt een translatie (m, n) op de grafiek van f toepassen zo, dat het beeld van de grafiek van f samenvalt met de grafiek van g .

Bereken mogelijke waarden van m en n .

O30 Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 + 3 \sin(2(x - \frac{1}{4}\pi))$ en



$g(x) = 4 + 3 \cos(2(x - \frac{1}{4}\pi))$.

Om de grafieken van f en g op het domein $[0, 2\pi]$ te tekenen, gebruik je de vier kenmerken van de grafieken.

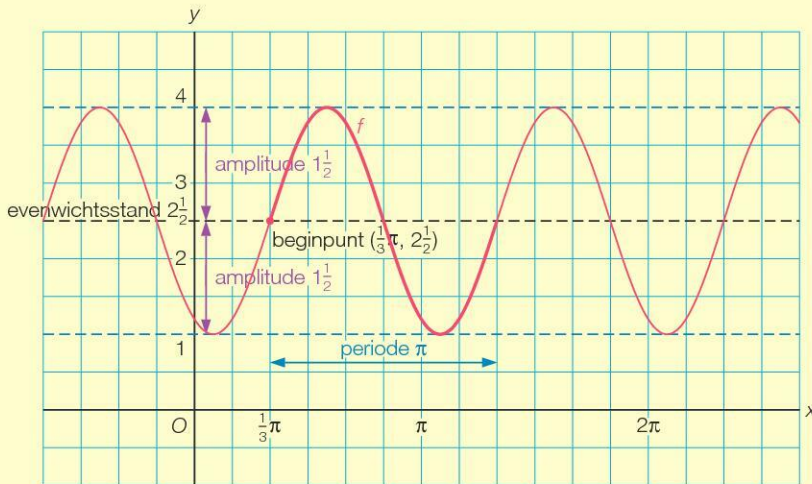
a Welke vier kenmerken worden bedoeld?

b Geef zowel van de grafiek van f als van de grafiek van g de vier kenmerken.

Theorie C Sinusoiden tekenen

Bij het tekenen van de grafiek van de functie $f(x) = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$ gebruik je de kenmerken

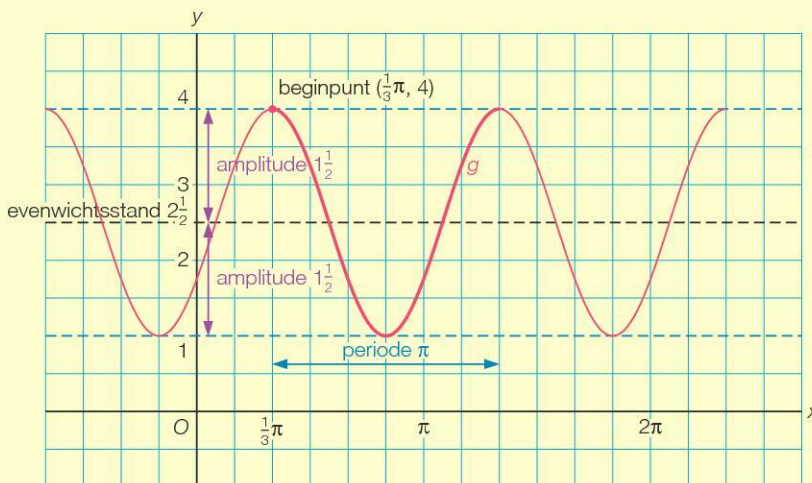
- evenwichtsstand $2\frac{1}{2}$
- amplitude $1\frac{1}{2}$
- periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- beginpunt $(\frac{1}{3}\pi, 2\frac{1}{2})$



figuur 8.28

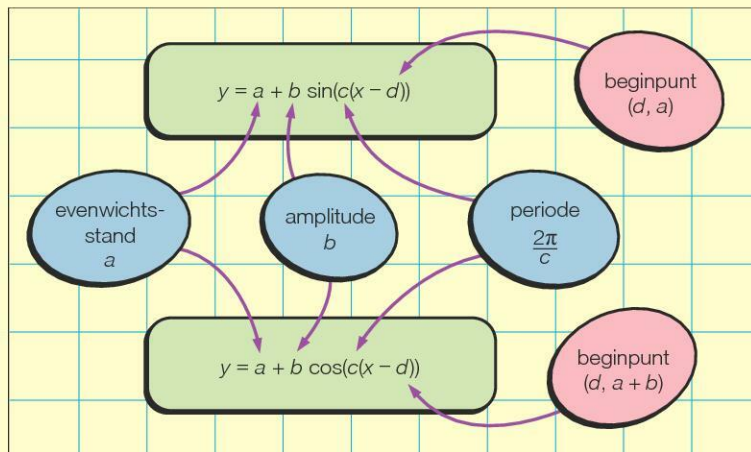
Bij het tekenen van de grafiek van de functie $g(x) = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\cos(2(x - \frac{1}{3}\pi))$ krijg je

- evenwichtsstand $2\frac{1}{2}$
- amplitude $1\frac{1}{2}$
- periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- beginpunt $(\frac{1}{3}\pi, 4)$



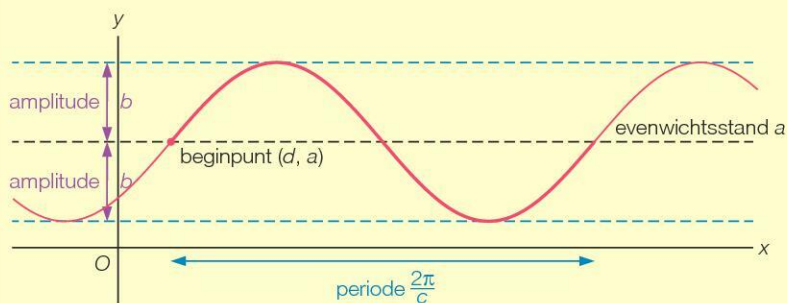
figuur 8.29 Je hebt met een cosinus te maken, dus een beginpunt is een hoogste punt.

In het algemeen heb je te maken met formules van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$ en van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$. Het schema hieronder geldt voor $b > 0$ en $c > 0$.



Kenmerken van de grafiek van $y = a + b \sin(c(x - d))$ met $b > 0$ en $c > 0$

- evenwichtsstand a
- amplitude b
- periode $\frac{2\pi}{c}$
- beginpunt (d, a)



De grafieken van $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ heten **sinusoïden**.

Hoe je zo'n sinusoïde tekent zie je in het volgende voorbeeld.

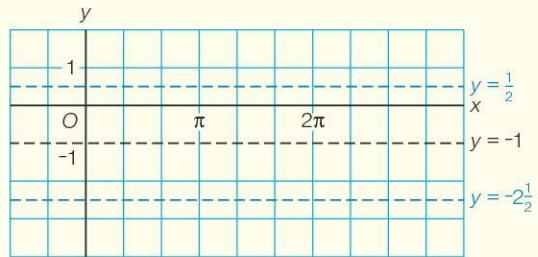
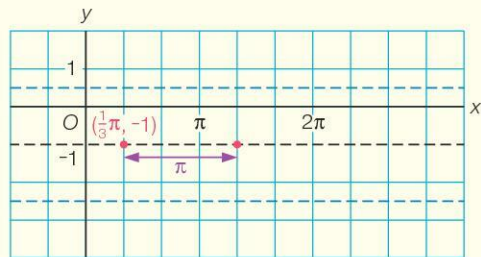
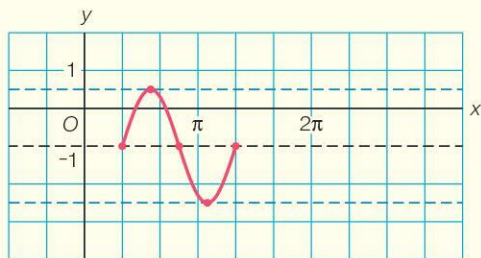
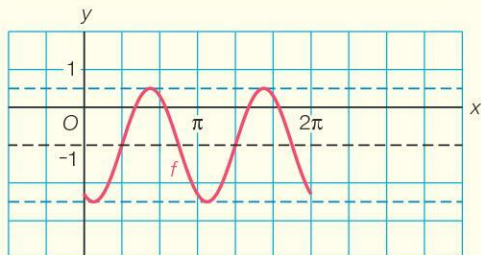
Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.

Teken de grafiek van f .

Aanpak

- 1 Schrijf de formule in de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$ en vermeld de vier kenmerken.
- 2 Stippel in een assenstelsel de lijn van de evenwichtsstand en de horizontale lijnen waarop de toppen liggen.
- 3 Teken een beginpunt en het punt dat één periode verder ligt.
- 4 Teken één periode van de grafiek. Gebruik dat de grafiek $\frac{1}{4}$ periode na een beginpunt een hoogste punt heeft, $\frac{1}{2}$ periode na een beginpunt weer door de lijn van de evenwichtsstand gaat en $\frac{3}{4}$ periode na een beginpunt een laagste punt heeft.
- 5 Teken de grafiek op het gegeven domein. Gebruik de periodiciteit.



Uitwerking

$$f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$$

$$= -1 + 1\frac{1}{2}\sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$$

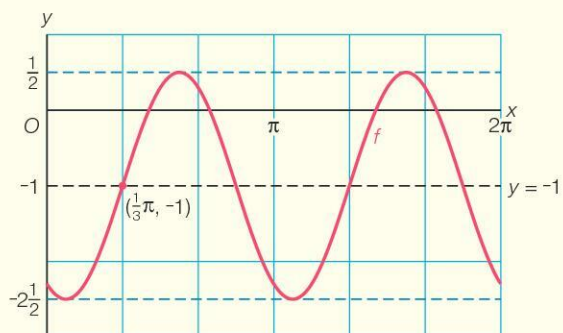
evenwichtsstand -1

amplitude $1\frac{1}{2}$

periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$

beginpunt $(\frac{1}{3}\pi, -1)$

Zie de grafiek hiernaast.



31
□ ⊗ *

- a Teken de grafiek van $f(x) = -2 + 3 \sin(3x + \pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
b Teken de grafiek van $g(x) = 1 + 3 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[-\pi, \pi]$.

Controleer de grafiek met de GR.

32
□ ⊗ *

- Gegeven is de formule $A = 40 + 25 \sin(\pi(t - 1\frac{1}{2}))$ met domein $[0, 6]$.
a Teken de grafiek van A .
b Los op $A < 30$. Rond af op twee decimalen.
c Bereken de grootste helling van de grafiek. Rond af op één decimaal.

De grafiek van een sinusoidale is het steilst in de snijpunten van de grafiek met de lijn van de evenwichtsstand.

A33
□ ⊗ *

- Gegeven is de formule $N = 1\frac{1}{2} \cos(\frac{2}{3}\pi(t - \frac{1}{2})) + 3\frac{1}{2}$ met domein $[0, 10]$.
a Teken de grafiek van N .
b Los op $N > 4$. Rond af op twee decimalen.
c Bereken de helling van de grafiek in het snijpunt met de verticale as. Rond af op twee decimalen.
d Bereken de grootste helling van de grafiek. Rond af op twee decimalen.

De helling bereken je op de GR met dy/dx (TI), d/dx (Casio) of met de optie helling (HP).

O34
□ ⊗ *

- Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + 3 \sin(x)$ en $g(x) = 2 - 3 \sin(x)$.
a Plot de grafieken. Neem x tussen 0 en 2π .
b De amplitude is een positief getal.
Geef van de grafiek van f en de grafiek van g de amplitude.

Theorie D Amplituden van sinusoiden

De amplitude is een positief getal, dus de grafiek van $y = -3 \sin(x)$ heeft de amplitude 3.

De amplitude van de grafiek van $f(x) = b \sin(x)$ is voor $b > 0$ gelijk aan b en voor $b < 0$ gelijk aan $-b$.

	$y = a + b \sin(c(x - d))$	$y = a + b \cos(c(x - d))$
$b > 0$	stijgend door (d, a)	$(d, a + b)$ is een hoogste punt
$b < 0$	dalend door (d, a)	$(d, a + b)$ is een laagste punt

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3 \sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Teken de grafiek van f .

Aanpak

Omdat $b < 0$ in $y = a + b \sin(c(x - d))$ gaat de grafiek dalend door het punt (d, a) .

Uitwerking

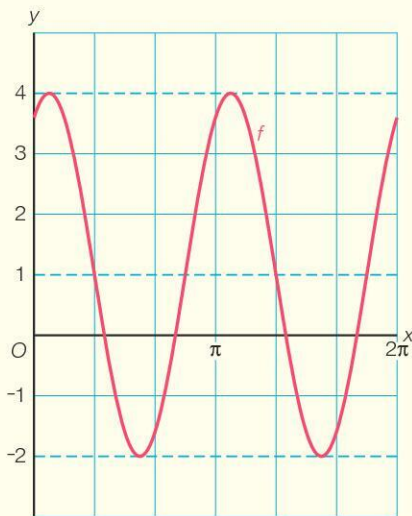
$$f(x) = 1 - 3 \sin(2x - \frac{2}{3}\pi) = 1 - 3 \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$$

evenwichtsstand 1

amplitude 3

$$\text{periode } \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$-3 < 0$, dus grafiek dalend door het punt $(\frac{1}{3}\pi, 1)$.



Bereken met de GR
 $f(0) \approx 3,6$ en $f(2\pi) \approx 3,6$
en gebruik dat bij je
tekening.

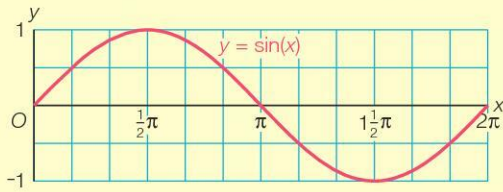
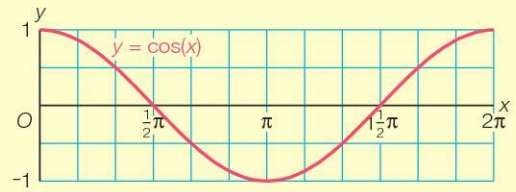
- 35** a Teken de grafiek van $f(x) = 1 - 2 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
b Teken de grafiek van $g(x) = 3 - 4 \cos(\pi x)$ met domein $[0, 6]$.

- A36** a Teken de grafiek van $f(x) = -2 - \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$ met domein $[0, 3\pi]$.
b Teken de grafiek van $g(x) = 5 - 3 \sin(\frac{1}{4}\pi x)$ met domein $[0, 10]$.

- E37** [▶ WERKBLAD] Op het werkblad is de sinusoid $y = 2 - 3 \sin(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi)$ met
* domein $[-\pi, 3\pi]$ op een rooster, maar zonder assenstelsel getekend.
Teken het assenstelsel op de juiste plaats.

Terugblik

Grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$



Hierboven is van de standaardgrafieken $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ één periode getekend.

Hierbij hoort evenwichtsstand 0, amplitude 1 en periode 2π .

Op deze grafieken kun je de vier bekende transformaties toepassen.

Effect van transformaties op de standaardgrafiek $y = \sin(x)$		
<i>transformatie</i>	<i>beeldgrafiek</i>	<i>kenmerk</i>
translatie $(0, a)$	$y = a + \sin(x)$	evenwichtsstand a
verm. x -as, b	$y = b \sin(x)$	amplitude b ($b > 0$)
verm. y -as, $\frac{1}{c}$	$y = \sin(cx)$	periode $\frac{2\pi}{c}$ ($c > 0$)
translatie $(d, 0)$	$y = \sin(x - d)$	beginpunt $(d, 0)$

Kenmerken van sinusoiden

De grafieken van $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$ heten sinusoiden.

De vier kenmerken van sinusoiden zijn

- evenwichtsstand is a
- amplitude is b als $b > 0$ en is $-b$ als $b < 0$
- periode is $\frac{2\pi}{c}$, dus $c = \frac{2\pi}{\text{periode}}$ ($c > 0$)
- een beginpunt bij een sinusgrafiek is (d, a)
- een beginpunt bij een cosinusgrafiek is $(d, a + b)$.

Deze vier kenmerken gebruik je bij het tekenen van sinusoiden.

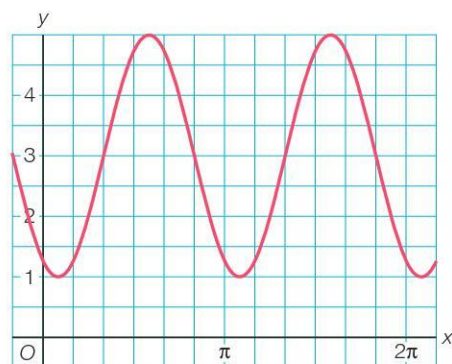
	$y = a + b \sin(c(x - d))$	$y = a + b \cos(c(x - d))$
$b > 0$	stijgend door (d, a)	$(d, a + b)$ is een hoogste punt
$b < 0$	dalend door (d, a)	$(d, a + b)$ is een laagste punt

8.3 Formules van sinusoiden opstellen

038


Gegeven is de sinusoiden in figuur 8.30.

- Lees de evenwichtsstand, de amplitude en de periode af.
- De formule is van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$.
Geef mogelijke waarden van a , b , c en d .



figuur 8.30

Theorie A Een formule van een sinusoiden opstellen

In het voorbeeld zie je hoe je bij een sinusoiden een formule opstelt.

Voorbeeld

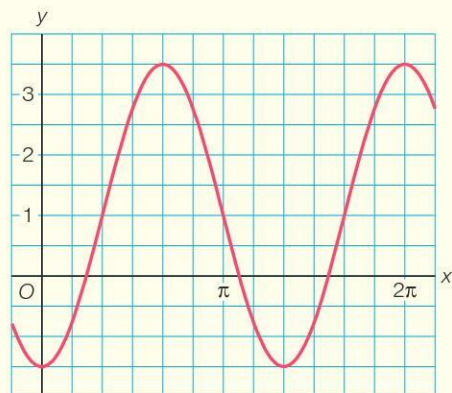
In figuur 8.31 is een sinusoiden getekend. Stel bij de sinusoiden een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$.

Uitwerking

$$a = \frac{3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}}{2} = 1$$

$$b = 3\frac{1}{2} - 1 = 2\frac{1}{2}$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij opvolgend $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$.



figuur 8.31

De periode is $1\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi$, dus $c = \frac{2\pi}{1\frac{1}{3}\pi} = 1\frac{1}{2}$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{3}\pi$, dus $d = \frac{1}{3}\pi$.

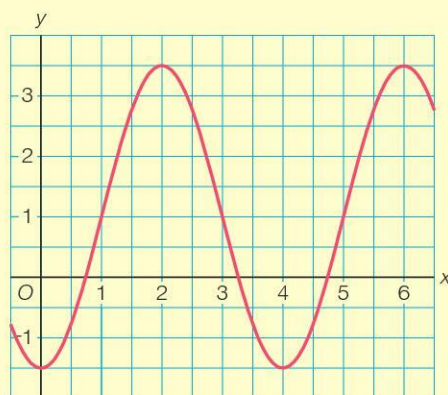
Dus $y = 1 + 2\frac{1}{2} \sin(1\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}\pi))$.

Bij de sinusoiden van het voorbeeld is ook een formule van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$ op te stellen. Je neemt dan een hoogste punt als beginpunt. Een hoogste punt is $(\frac{2}{3}\pi, 3\frac{1}{2})$, dus $d = \frac{2}{3}\pi$ en de formule is $y = 1 + 2\frac{1}{2} \cos(1\frac{1}{2}(x - \frac{2}{3}\pi))$.

In figuur 8.32 zie je een sinusoïde zoals in het voorbeeld, maar nu staan bij de horizontale as de getallen 1, 2, 3, ...

De periode is $5 - 1 = 4$, dus $c = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

Je krijgt $y = 1 + 2\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}\pi(x-1))$ en ook $y = 1 + 2\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}\pi(x-2))$.



figuur 8.32

39 Zie het voorbeeld.
☐ ⊗ * Stel bij figuur 8.31 een formule op van de vorm

a $y = a + b \sin(c(x-d))$ met $b < 0$

b $y = a + b \cos(c(x-d))$ met $b < 0$.

40 Zie de theorie hierboven met figuur 8.32.

☐ ⊗ * Stel bij deze figuur een formule op van de vorm

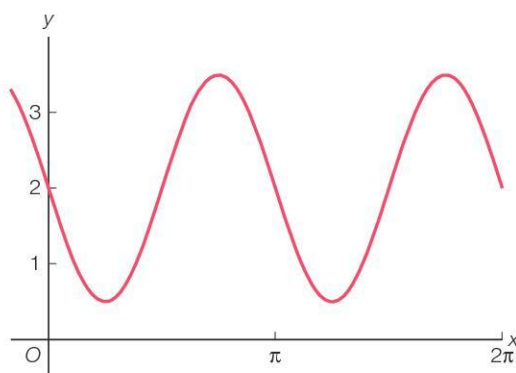
a $y = a + b \sin(c(x-d))$ met $b < 0$

b $y = a + b \cos(c(x-d))$ met $b < 0$.

41 Bij de sinusoïde in figuur 8.33 zijn twee opeenvolgende toppen $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ en $(\frac{3}{4}\pi, 3\frac{1}{2})$. Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm

a $y = a + b \sin(c(x-d))$ met $b > 0$

b $y = a + b \cos(c(x-d))$ met $b > 0$.

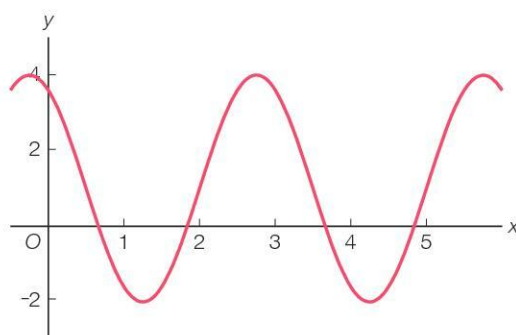


figuur 8.33

42 Bij de sinusoïde in figuur 8.34 zijn twee opeenvolgende toppen $(1\frac{1}{4}, -2)$ en $(2\frac{3}{4}, 4)$. Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm

a $y = a + b \sin(c(x-d))$ met $b > 0$

b $y = a + b \sin(c(x-d))$ met $b < 0$.



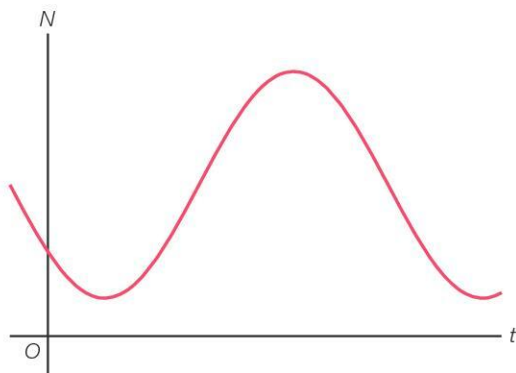
figuur 8.34

A43
  *

Bij de sinusöide in figuur 8.35 geldt voor de toppen dat $N = 25$ en $N = 175$. De grafiek gaat door de evenwichtsstand bij $t = 4$ en bij $t = 9$.

Stel bij de sinusöide een formule op van de vorm

- a $N = a + b \sin(c(t - d))$ met $b > 0$
- b $N = a + b \cos(c(t - d))$ met $b > 0$.



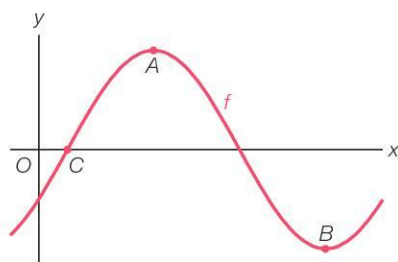
figuur 8.35

A44
 *

- a Van een sinusöide zijn de punten $(3, 12)$ en $(18, 12)$ twee opeenvolgende hoogste punten, die op afstand 4 van de evenwichtsstand liggen.
 Stel een formule op van deze sinusöide.
- b Van een sinusöide is de evenwichtsstand 650 en de periode 48.
 Het punt $(16, 812)$ is een top.
 Stel een formule op van deze sinusöide.
- c Van een sinusöide zijn de punten $(2, 250)$ en $(26, 110)$ twee opeenvolgende toppen.
 Stel een formule op van deze sinusöide.

O45
  *

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x) + \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$. De grafiek van f is een sinusöide. Zie figuur 8.36. De punten A en B zijn toppen van de grafiek. Het punt C is een snijpunt van de grafiek met de x -as.



figuur 8.36

- a Bereken de coördinaten van A en B . Rond af op drie decimalen.
- b Licht toe dat uit vraag a volgt dat de evenwichtsstand van de sinusöide gelijk is aan 0 en dat de amplitude ongeveer 1,732 is.
- c Uit de coördinaten van vraag a volgt ook de periode van de grafiek.
 Bereken deze periode door in tussenstappen niet af te ronden.
 Waarom mag je aannemen dat de periode gelijk is aan 2π ?
- d Bereken de x -coördinaat van C . Rond af op drie decimalen.

Uit het bovenstaande volgt dat $y = 1,732 \sin(x - 0,524)$ een formule is die bij de grafiek van f hoort.

- e Licht dit toe en geef een formule bij de grafiek van f van de vorm $y = b \cos(x - d)$.

Theorie B Kenmerken opsporen met de GR

In figuur 8.37 zie je de grafiek van de functie $f(x) = 3(\sin(x))^2 + 1$.

We noteren dit ook als $f(x) = 3\sin^2(x) + 1$.

De grafiek van f is een sinusoïde.

Door de formule van f in te voeren op de GR en enkele opties van de GR te gebruiken, kun je een formule van f opsporen van de vorm

$$y = a + b \sin(c(x - d)).$$

Met de optie maximum krijg je de coördinaten van de top A en met de optie minimum krijg je de coördinaten van de top B .

Je vindt $A(1,57...; 4)$ en $B(3,14...; 1)$.

Hieruit volgt dat de evenwichtsstand $\frac{4+1}{2} = 2,5$ is en dat de amplitude $4 - 2,5 = 1,5$ is.

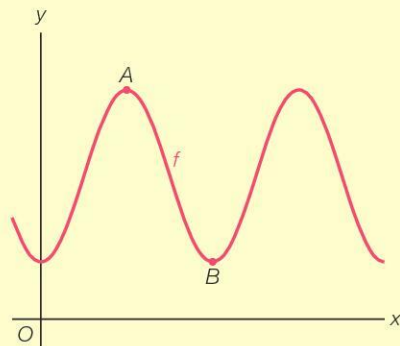
De halve periode is $3,14... - 1,57... = 1,57...$, dus

de periode is $2 \cdot 1,57... = 3,14...$ en $c = \frac{2\pi}{3,14...} = 2$.

Door vervolgens bij y_2 de evenwichtsstand in te voeren en de optie snijpunt te gebruiken, vind je dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat in het punt $(0,79; 2,5)$.

Een formule bij de sinusoïde in figuur 8.37 is dus

$$y = 2,5 + 1,5 \sin(2(x - 0,79)).$$



figuur 8.37

INFORMATIEF

Een verdubbelingsformule gebruiken

Een van de zogenaamde verdubbelingsformules van de goniometrie is $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$. Hieruit volgt dat $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

Gebruik je deze formule bij $f(x) = 3\sin^2(x) + 1$, dan krijg je $f(x) = 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)) + 1 = 1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}\cos(2x) + 1 = 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}\cos(2x)$.

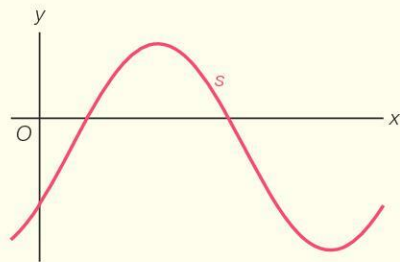
Hoe kun je met de GR nagaan dat deze formule inderdaad bij de sinusoïde in figuur 8.37 hoort?

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + 3 \sin(x)$ en $g(x) = -3 + 2 \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$.

In de figuur hiernaast is de grafiek van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$ getekend. De grafiek van s is een sinusoïde.

Stel bij de grafiek van s een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.



figuur 8.38

Uitwerking

Voer in $y_1 = 2 + 3 \sin(x) - 3 + 2 \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$.

De optie maximum geeft $x = 2,158...$ en $y = 2,605...$

De optie minimum geeft $x = 5,300...$ en $y = -4,605...$

$$a = \frac{2,605... + (-4,605...)}{2} = -1$$

$$b = 2,605... - (-1) \approx 3,61$$

$$\frac{1}{2} \text{ periode} = 5,300... - 2,158... = 3,141...,$$

$$\text{dus de periode is } 2 \cdot 3,141... = 6,283... \text{ en } c = \frac{2\pi}{6,283...} = 1.$$

Voer in $y_2 = -1$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,588...$, dus $d \approx 0,59$.

Dus $y = -1 + 3,61 \sin(x - 0,59)$.

46



Zie het voorbeeld.

- a** Stel bij de grafiek van s een formule op van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- b** Voor de verschilfunctie v geldt $v(x) = f(x) - g(x)$. De grafiek van v is een sinusoïde. Stel bij de grafiek van v een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.



47
  *

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 \cos(x) - 3$ en $g(x) = \cos(x - \frac{1}{4}\pi) - 2$.

De somfunctie is $s(x) = f(x) + g(x)$ en de verschilfunctie is

$$v(x) = f(x) - g(x).$$

De grafieken van de somfunctie en de verschilfunctie zijn beide sinusoiden.

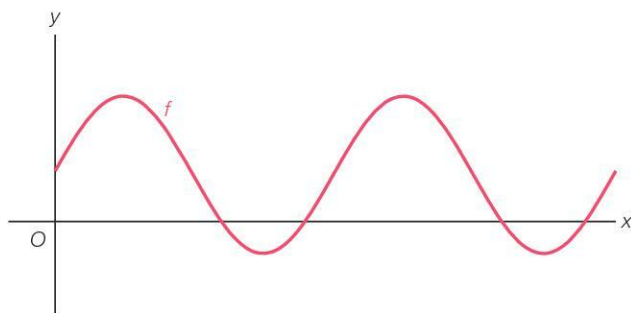
- Stel bij de grafiek van s een formule op van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- Stel bij de grafiek van v een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

Voer bij y_1 en y_2 de formules van f en g in. Voer bij y_3 de formule van s in als $y_3 = y_1 + y_2$. Zet y_1 en y_2 uit.

A48
  *

Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x) + \cos(2x - 1)$ met domein $[0, 2\pi]$.

De grafiek van f is een sinusoid. Zie figuur 8.39.



figuur 8.39

- Los op $f(x) \leq 0$. Rond af op drie decimalen.
- Stel bij de grafiek van f een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op drie decimalen.
- Stel bij de grafiek van f een formule op van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$. Rond zo nodig af op drie decimalen.

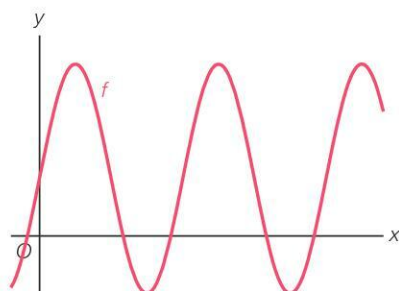
A49
 *

In de figuur hiernaast is de grafiek van de functie

$$f(x) = 8 \cos^2(\frac{1}{5}\pi(x - 1\frac{1}{4})) - 2 \text{ getekend.}$$

De grafiek van f is een sinusoid.

Stel bij de grafiek van f een formule op van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$.



figuur 8.40

Terugblik

Een formule van een sinusoïde opstellen

Om bij de sinusoïde in de figuur hiernaast een formule van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$ met $b > 0$ op te stellen lees je af

$$a = \text{evenwichtsstand} = \frac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2} \\ = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

$$b = \text{amplitude} = \text{maximum} - \text{evenwichtsstand} \\ = 4 - 1 = 3$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij opvolgend

$$x = 2 \text{ en } x = 7, \text{ dus periode} = 7 - 2 = 5 \text{ en } c = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi.$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 2$, dus $d = 2$.

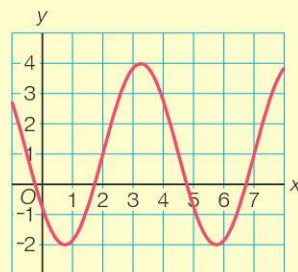
$$\text{Dus } y = 1 + 3 \sin\left(\frac{2}{5}\pi(x - 2)\right).$$

Voor een formule van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$ met $b < 0$ gebruik je dat de grafiek dalend door de evenwichtsstand gaat bij $x = 4\frac{1}{2}$.

$$\text{De formule is } y = 1 - 3 \sin\left(\frac{2}{5}\pi(x - 4\frac{1}{2})\right).$$

Voor een formule van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$ met $b > 0$ gebruik je dat $(3\frac{1}{4}, 4)$ een hoogste punt is. De formule is $y = 1 + 3 \cos(\frac{2}{5}\pi(x - 3\frac{1}{4}))$.

Voor een formule van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$ met $b < 0$ gebruik je dat $(\frac{3}{4}, -2)$ een laagste punt is. De formule is $y = 1 - 3 \cos(\frac{2}{5}\pi(x - \frac{3}{4}))$.



Kenmerken opsporen met de GR

De grafiek van de functie $f(x) = 4 \cos^2(x - \frac{1}{6}\pi) - 1$ is een sinusoïde. Hiernaast zie je deze grafiek met de toppen A en B. Bij deze grafiek is een formule van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$ op te stellen.

$$\text{Voer in } y_1 = 4 \cos^2(x - \frac{1}{6}\pi) - 1.$$

De optie maximum geeft A(0,523...; 3) en de optie minimum geeft B(2,094...; -1).

$$\text{Dus } a = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \text{ en } b = 3 - 1 = 2.$$

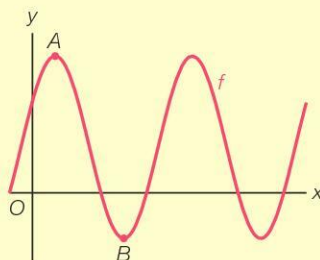
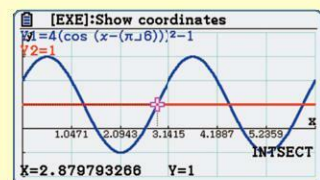
$$\frac{1}{2} \text{ periode} = 2,094... - 0,523... = 1,570...,$$

$$\text{dus periode} = 2 \cdot 1,570... = 3,141... \text{ en } c = \frac{2\pi}{3,141...} = 2.$$

$$\text{Voer in } y_2 = 1.$$

De optie snijpunt geeft $x = 2,879...$, dus $d \approx 2,88$.

$$\text{De formule is } y = 1 + 2 \sin(2(x - 2,88)).$$



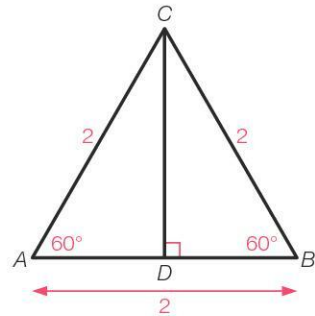
8.4 Goniometrische vergelijkingen

O50




Gegeven is de gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 2 en hoogtelijn CD . Zie figuur 8.41.

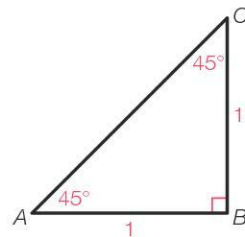
- a Licht toe dat $AD = 1$ en $CD = \sqrt{3}$.
- b Licht toe dat $\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$.
- c Bereken exact $\sin(30^\circ)$ en $\cos(30^\circ)$.



figuur 8.41

In figuur 8.42 is de rechthoekige driehoek ABC getekend met $AB = BC = 1$.

- d Licht toe dat $AC = \sqrt{2}$ en $\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.



figuur 8.42

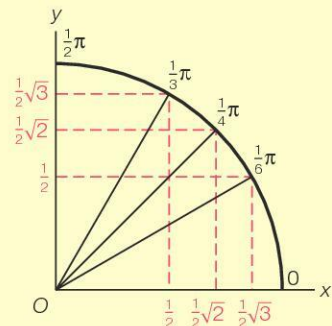
Theorie A De exacte-waarden-cirkel

Uit opgave 50 volgt de tabel hiernaast. Deze tabel breiden we uit met hoeken van 0° en 90° . Verder gebruiken we radialen in plaats van graden. Zo krijg je de tabel hieronder. Leer deze tabel uit het hoofd.

hoek	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

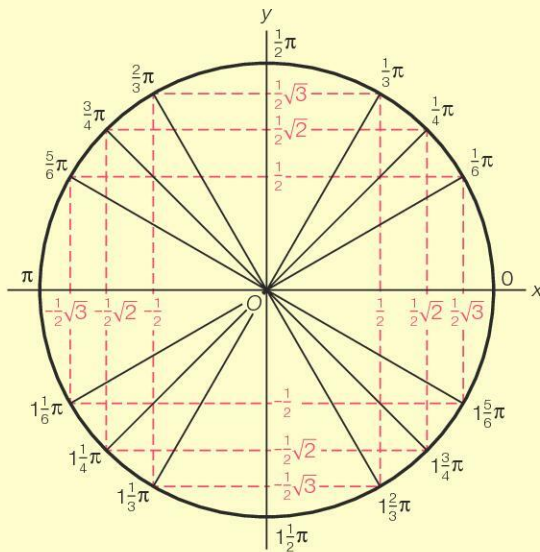
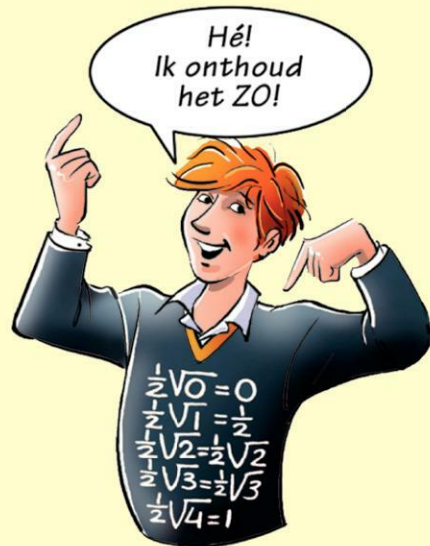
In de kwartcirkel hiernaast zijn de sinus en de cosinus van de hoeken uit de tabel verwerkt.

hoek	30°	45°	60°
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cosinus	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$



figuur 8.43

Door te spiegelen in de y -as en de x -as krijg je de **exakte-waarden-cirkel**.



figuur 8.44

Je leest af $\cos(\frac{5}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\sin(-\frac{3}{4}\pi) = \sin(1\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

51 Geef de exacte waarde.



- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a $\sin(\frac{3}{4}\pi)$ | c $\sin(1\frac{1}{3}\pi)$ | e $\cos(1\frac{1}{3}\pi)$ |
| b $\cos(1\frac{1}{6}\pi)$ | d $\cos(1\frac{2}{3}\pi)$ | f $\sin(-\frac{1}{4}\pi)$ |

52 Geef de exacte waarden van α met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.



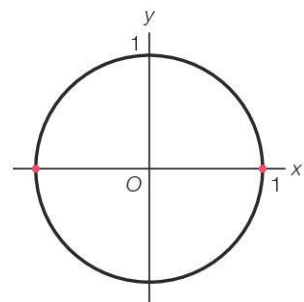
- | | | |
|---|--|---|
| a $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ | c $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | e $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| b $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ | d $\cos(\alpha) = 0$ | f $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ |

053 De eenheidscirkel snijdt de x -as in de punten $(1, 0)$ en $(-1, 0)$.



Bij deze punten horen de draaiingshoeken $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ en ook $-\pi, -2\pi, -3\pi, \dots$

Welke draaiingshoeken horen bij de snijpunten van de eenheidscirkel met de y -as?



figuur 8.45

Theorie B $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$

In opgave 53 heb je gezien dat bij de snijpunten van de eenheidscirkel met de x -as de draaiingshoeken $\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ horen.

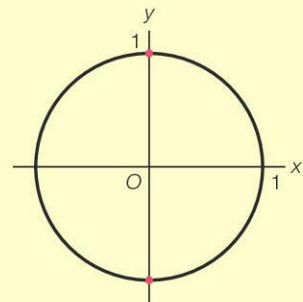
Dit noteren we kort als $k \cdot \pi$, waarin k een geheel getal is.

De getallen $k \cdot \pi$ zijn oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = 0$.

Hiermee heb je alle oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = 0$, want de sinus van een hoek is de y -coördinaat van het bijbehorende punt op de eenheidscirkel en de punten $(-1, 0)$ en $(1, 0)$ zijn alle punten op de eenheidscirkel met y -coördinaat 0.

En zo heeft de vergelijking $\cos(x) = 0$ als oplossing $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

k is in dit hoofdstuk een geheel getal.



figuur 8.46 Bij $\cos(x) = 0$ horen punten op de eenheidscirkel met x -coördinaat 0.

Bij de vergelijking $\sin(x) = 1$ hoort het punt op de eenheidscirkel met y -coördinaat 1, dus het punt $(0, 1)$.

Dus de vergelijking $\sin(x) = 1$ heeft als oplossing $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Bij het punt $(0, 1)$ horen de draaiingshoeken $\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi, 4\frac{1}{2}\pi, \dots$ en ook $-1\frac{1}{2}\pi, -3\frac{1}{2}\pi, -5\frac{1}{2}\pi, \dots$

De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ los je op met behulp van de eenheidscirkel.

$\sin(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$

$\sin(A) = 1$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\sin(A) = -1$ geeft $A = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = 0$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$\cos(A) = 1$ geeft $A = k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = -1$ geeft $A = \pi + k \cdot 2\pi$

Voor A kun je elke uitdrukking invullen.

Bij de vergelijking $\sin(4x - \frac{1}{3}\pi) = 0$ is $A = 4x - \frac{1}{3}\pi$.

Je krijgt $4x - \frac{1}{3}\pi = k \cdot \pi$, dus $4x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$ oftewel $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$.

In voorbeeld a wordt de vergelijking $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1$ opgelost in $[0, 2\pi]$. Dat wil zeggen dat alle oplossingen in het interval $[0, 2\pi]$ moeten worden gegeven.

Na gebruik van de regel $\sin(A) = 1$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ krijg je $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$.

Dit geeft voor $k = \dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

$\vdots$

$$x = \frac{5}{12}\pi + -1 \cdot \pi = -\frac{7}{12}\pi \text{ niet in } [0, 2\pi]$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + 0 \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi \text{ wel in } [0, 2\pi]$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + 1 \cdot \pi = 1\frac{5}{12}\pi \text{ wel in } [0, 2\pi]$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + 2 \cdot \pi = 2\frac{5}{12}\pi \text{ niet in } [0, 2\pi]$$

$\vdots$

Dus de oplossingen in $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{5}{12}\pi$ en $x = 1\frac{5}{12}\pi$.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1$

b $\cos^2(x) = 1$

Uitwerking

a $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$$

Deel alle termen door 2,
dus $k \cdot 2\pi$ wordt $k \cdot \pi$.

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{5}{12}\pi \vee x = 1\frac{5}{12}\pi$$

b $\cos^2(x) = 1$

$$\cos(x) = 1 \vee \cos(x) = -1$$

$$x = k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 0 \vee x = 2\pi \vee x = \pi$$

54 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.



a $\sin(3x) = 1$

b $\sin(2x) = 0$

c $\sin^2(x) = 1$

d $\sin(\frac{3}{4}x) = -1$

e $\sin(3x - \frac{1}{2}\pi) = 0$

f $\sin(\pi x) = -1$

55 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.



a $\cos(3x) = 0$

b $\cos(4x) = 1$

c $\cos^2(2x) = 1$

d $\cos(\frac{2}{3}x) = -1$

e $\cos(2x - \frac{1}{6}\pi) = 0$

f $\cos(2\pi x) = -1$

A56 Bereken exact de oplossingen in $[-\pi, \pi]$.



a $3 \sin(2x + \frac{1}{6}\pi) = 0$

b $2 \cos(3x - \frac{1}{4}\pi) = 0$

c $\sin(\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}\pi) = -1$

d $\cos(\frac{1}{2}x - \pi) = -1$

e $\sin^2(2x) = 1$

f $\cos^2(\frac{1}{2}x) = 1$

g $\sin(\frac{1}{2}\pi x) = 0$

h $\cos(\frac{1}{2}\pi x + \pi) = 0$

A57 Gegeven is de functie $f(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(2x)$ met domein $[0, 2\pi]$.

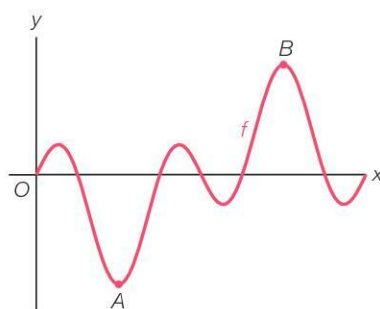


In figuur 8.47 zie je de grafiek van f met de toppen $A(\frac{1}{2}\pi, -2)$ en $B(1\frac{1}{2}\pi, 2)$.

- a** Bereken exact de nulpunten van f .
b Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn door A en B de x -as snijdt in een snijpunt van de grafiek van f met de x -as.

Op de grafiek van f liggen de punten $C(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2})$ en $D(1\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{2})$.

- c** Toon dit aan.
d Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn door C en D de x -as snijdt in een snijpunt van de grafiek van f met de x -as.



figuur 8.47

E58 Gegeven is de functie $g(x) = 2 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$ met domein $[0, 2\pi]$.



Rik beweert dat de functie g dezelfde functie is als de functie f van opgave 57.

Onderzoek op algebraïsche wijze of dit zou kunnen kloppen. Gebruik ook dat de afgeleide van g is $g'(x) = 2 \cos(x) - 12 \sin^2(x) \cos(x)$.

O59 Gegeven is de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$.



- a** Licht toe dat $x = \frac{1}{6}\pi$ een oplossing is.
b Waarom is $x = 2\frac{1}{6}\pi$ een oplossing? En waarom $x = 4\frac{1}{6}\pi$?
c Licht toe dat $x = \frac{5}{6}\pi$ een oplossing is.
d Waarom is $x = 2\frac{5}{6}\pi$ een oplossing? En waarom $x = -1\frac{1}{6}\pi$?

Theorie C $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

In opgave 59 heb je gezien dat bij de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$ twee rijtjes oplossingen horen.

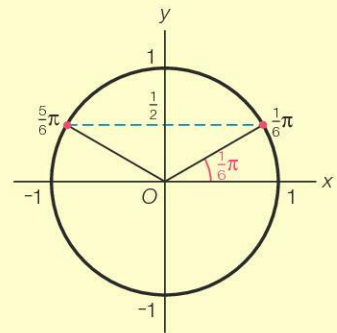
Omdat $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ is het ene rijtje $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Omdat ook $\sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ is het andere rijtje

$$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi.$$

De oplossingen $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{5}{6}\pi$ zijn gevonden met de exacte-waarden-cirkel.

Merk op dat $\frac{5}{6}\pi = \pi - \frac{1}{6}\pi$.

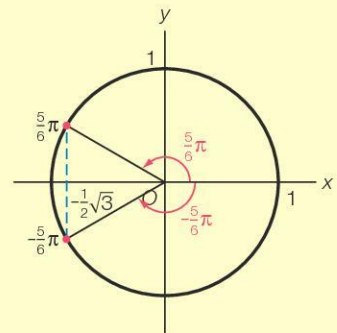


figuur 8.48

Bij het vinden van de rijtjes oplossingen van de vergelijking $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ gebruik je figuur 8.49.

Je krijgt

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ geeft } x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi.$$



figuur 8.49

De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ los je op door uit de exacte-waarden-cirkel één oplossing B af te lezen.

Daarna gebruik je

$$\sin(A) = C \text{ geeft } A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$$

$$\cos(A) = C \text{ geeft } A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi.$$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $2 \sin(3x) = \sqrt{3}$

b $2 \cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\sqrt{2}$

Uitwerking

a $2 \sin(3x) = \sqrt{3}$

$$\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft

$$x = \frac{1}{9}\pi \vee x = \frac{7}{9}\pi \vee x = 1\frac{4}{9}\pi \vee x = \frac{2}{9}\pi \vee x = \frac{8}{9}\pi \vee x = 1\frac{5}{9}\pi$$

b $2 \cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\sqrt{2}$

$$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

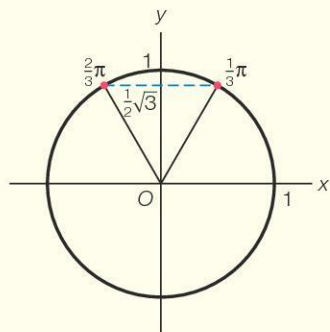
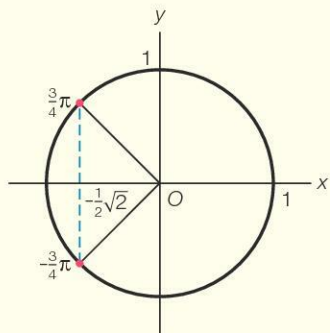
$$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{13}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{13}{24}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{5}{24}\pi + k \cdot \pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft

$$x = \frac{13}{24}\pi \vee x = 1\frac{13}{24}\pi \vee x = \frac{19}{24}\pi \vee x = 1\frac{19}{24}\pi$$



60 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.



a $2 \sin(\frac{1}{2}x) = 1$

b $2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 1$

c $2 \sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{3}$

d $2 \cos(3x - \pi) = -1$

61 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.



a $2 \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \sqrt{2}$

b $2 \cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = \sqrt{3}$

c $\sin(\frac{2}{3}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

d $\cos(\frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

A62 Gegeven is de functie



$f(x) = 4 \sin(x - \frac{1}{3}\pi) \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.

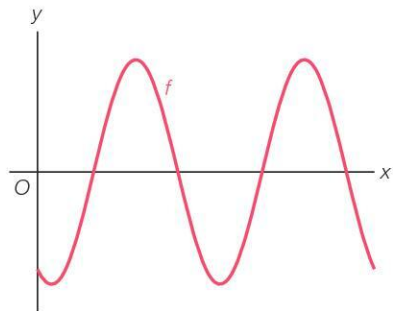
In figuur 8.50 is de grafiek van f getekend. De grafiek is een sinusöide.

a Bereken exact de nulpunten van f .

Het functievoorschrift kan ook geschreven worden als $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{2}{3}\pi)$.

b Toon dit aan.

c Bereken exact de oplossingen van de vergelijking $f(x) = 1$.



figuur 8.50

Terugblik

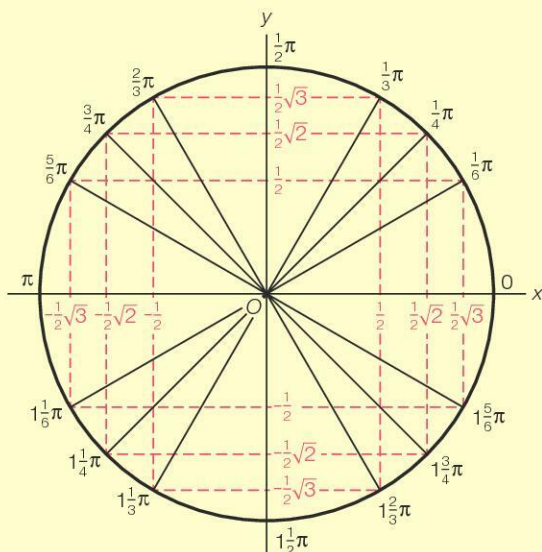
Exacte-waarden-cirkel

Bij hoeken die een veelvoud zijn van $\frac{1}{6}\pi$ of van $\frac{1}{4}\pi$ moet je de exacte waarde weten van de sinus en de cosinus. Je gebruikt hierbij de exacte-waarden-cirkel.

Je leest bijvoorbeeld af

$$\cos(1\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ en}$$

$$\sin(-\frac{2}{3}\pi) = \sin(1\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$



De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$

Vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ los je op met de eenheidscirkel.

Bij $\sin(x) = -1$ hoort het punt met y -coördinaat -1 op de eenheidscirkel, dus het punt $(0, -1)$ en hierbij hoort een draaiingshoek van $1\frac{1}{2}\pi$.

Zo krijg je $\sin(x) = -1$ geeft $x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$. Hierin is k een geheel getal.

Uit $\cos(A) = 0$ volgt $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

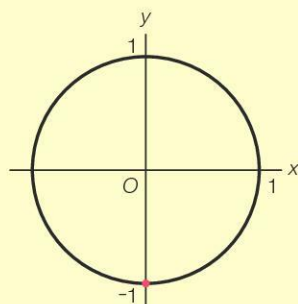
Dit gebruik je bij het oplossen van $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 0$.

Je krijgt $2x + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$$2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{12}\pi \vee x = \frac{7}{12}\pi \vee x = 1\frac{1}{12}\pi \vee x = 1\frac{7}{12}\pi$



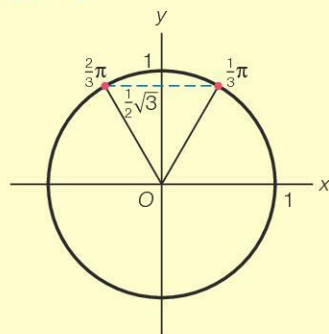
De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ los je op met de exacte-waarden-cirkel.

Bij $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ horen de draaiingshoeken $\frac{1}{3}\pi$ en $\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$.

Er zijn twee rijtjes oplossingen:

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi.$$



8.5 Toepassingen van sinusoiden



Gegeven is de formule $y = 2 + 3 \sin(\frac{1}{5}\pi(x - 1))$ met $0 \leq x \leq 10$.

- Plot de grafiek en bereken de coördinaten van het hoogste punt van de grafiek.
- Bereken y voor $x = 1,8$. Rond af op twee decimalen.
- Voor welke x is $y = 3,6$? Rond af op twee decimalen.

Theorie A Berekeningen met de sinus en de cosinus

Bij een formule als $y = 3 + 2 \sin(\frac{1}{4}\pi(x - 1,5))$ met $0 \leq x \leq 10$ moet je de volgende vragen kunnen beantwoorden.

1 Bereken algebraïsch $y_{\max}$ en de bijbehorende x .

$y_{\max} = \text{evenwichtsstand} + \text{amplitude} = 3 + 2 = 5$

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$.

y is maximaal een kwart periode nadat de evenwichtsstand stijgend is gepasseerd, dus y is maximaal voor $x = 1,5 + \frac{1}{4} \cdot 8 = 3,5$.

2 Bereken algebraïsch $y_{\min}$ en de bijbehorende x .

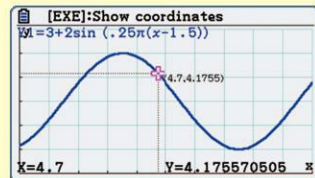
$y_{\min} = \text{evenwichtsstand} - \text{amplitude} = 3 - 2 = 1$

y is minimaal driekwart periode nadat de evenwichtsstand stijgend is gepasseerd, dus y is minimaal voor $x = 1,5 + \frac{3}{4} \cdot 8 = 7,5$.

3 Bereken y voor $x = 4,7$.

Voer in $y_1 = 3 + 2 \sin(\frac{1}{4}\pi(x - 1,5))$ en plot de grafiek in een venster met x tussen 0 en 10.

De GR geeft $y \approx 4,18$.



4 Voor welke x is $y = 4,6$?

Voer in $y_2 = 4,6$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 2,68$ en $x \approx 4,32$.

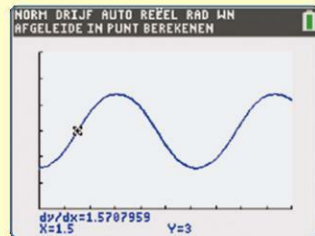
5 Bereken de helling van de grafiek voor $x = 5$.

De helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5} \approx -1,45$.

6 Bereken de maximale helling van de grafiek.

De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Dat is bij $x = 1,5$.

De maximale helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1,5} \approx 1,57$.



64 Gegeven is de formule $y = 5 + 2 \sin(\frac{2}{5}\pi(x - 0,8))$ met $0 \leq x \leq 5$.

 Rond in deze opgave zo nodig af op twee decimalen.

- a Bereken algebraïsch $y_{\max}$ en de bijbehorende x .
- b Bereken algebraïsch $y_{\min}$ en de bijbehorende x .
- c Bereken y voor $x = 4,62$.
- d Voor welke x is $y = 6$?
- e Bereken de y -coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de y -as.
- f Bereken de helling van de grafiek voor $x = 4$.
- g Bereken de maximale helling van de grafiek.

65 Gegeven is de formule $P = 25 + 6 \sin(\frac{1}{2}q - 1)$ met $0 \leq q \leq 15$.

 Rond in deze opgave zo nodig af op twee decimalen.

- a Bereken algebraïsch $P_{\max}$ en de bijbehorende q .
- b Bereken algebraïsch $P_{\min}$ en de bijbehorende q .
- c Bereken voor welke q geldt $P > 30$.
- d Bereken de maximale helling van de grafiek.

A66 Gegeven is de formule $N = 30,8 + 6,3 \cos(\frac{2}{15}\pi(t - 5,1))$ met $0 \leq t \leq 15$.

 Rond in deze opgave zo nodig af op twee decimalen.

- a Bereken algebraïsch $N_{\max}$ en de bijbehorende t .
- b Bereken algebraïsch $N_{\min}$ en de bijbehorende t .
- c Bereken N voor $t = 7,2$.
- d Bereken voor welke t de waarde van N groter is dan 35.
- e Bereken de helling van de grafiek voor $t = 10$.
- f Bereken de maximale helling van de grafiek.

67 De afgeleide van de formule $N = 30,8 + 6,3 \cos(\frac{2}{15}\pi(t - 5,1))$ in

 opgave 66 is $\frac{dN}{dt} = -\frac{21}{25}\pi \sin(\frac{2}{15}\pi(t - 5,1))$.

Gebruik de afgeleide om de maximale helling van de grafiek van N exact te geven.

O68 Van de sinusöide $y = a + b \sin(c(x - d))$ zijn de punten $(1, 10)$ en $(5, 4)$ twee opeenvolgende toppen.

- a Licht toe dat hieruit volgt dat $a = 7$ en $b = 3$.
- b Licht toe dat $c = \frac{1}{4}\pi$.

Je hebt nu $y = 7 + 3 \sin(\frac{1}{4}\pi(x - d))$.

- c Geef een mogelijke waarde van d en controleer of de punten $(1, 10)$ en $(5, 4)$ inderdaad twee opeenvolgende toppen zijn door de sinusöide te plotten.

Theorie B Sinusoïden gebruiken

De gemiddelde dagtemperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ in Napels kan worden benaderd door het model $T = a + b \sin(c(n - d))$. Hierin is n het dagnummer met $n = 1$ op 1 januari.

Gegeven is dat T maximaal is op 20 juli en dat $T_{\max} = 25^{\circ}\text{C}$.

Verder is T minimaal op 19 januari en $T_{\min} = 9^{\circ}\text{C}$.

Uit deze gegevens volgt dat $a = \frac{25 + 9}{2} = 17$ en $b = 25 - 17 = 8$.

Omdat de periode 365 dagen is, is $c = \frac{2\pi}{365}$.

De grafiek van T gaat $\frac{1}{4}$ periode voor 20 juli ($n = 201$) stijgend door de evenwichtsstand. Dat is dus $\frac{1}{4} \cdot 365 \approx 91$ dagen voor $n = 201$, dus $d = 201 - 91 = 110$.

Zo krijg je de formule $T = 17 + 8 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(n - 110)\right)$.



Napels

69
☐ ⊗ *

Zie de theorie met de formule $T = 17 + 8 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(n - 110)\right)$.

In de tabel hiernaast is voor een niet-schrikkeljaar bij elke datum het bijbehorende dagnummer te vinden.

- a Bereken de gemiddelde dagtemperatuur op 1 maart en op 18 mei. Rond af op één decimaal.
- b Tussen welke data is de gemiddelde dagtemperatuur meer dan 12°C ?
- c Bereken de grootste snelheid waarmee de gemiddelde dagtemperatuur stijgt. Geef het antwoord in graden Celsius per week en rond af op twee decimalen.

maand	dagnummer
januari	1-31
februari	32-59
maart	60-90
april	91-120
mei	121-151
juni	152-181
juli	182-212
augustus	213-243
september	244-273
oktober	274-304
november	305-334
december	335-365

70



De daglengte L in Kristiansand in Noorwegen als functie van het

dagnummer n is gegeven door $L = 11,9 + 6,1 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(n - 80)\right)$.

Hierin is de daglengte L de tijd in uren tussen zonsopkomst en zonsondergang en $n = 1$ op 1 januari.

Geef bij de volgende vragen over de daglengte het antwoord in minuten nauwkeurig.

- Hoelang duurt de langste dag in Kristiansand?
- Hoeveel is de langste dag in Kristiansand langer dan de kortste dag?
- Bereken de daglengte op 1 maart.
- Op welke datum duurt de dag in Kristiansand volgens de formule het langst?
- Bereken de grootste snelheid waarmee de dagen in Kristiansand lengen. Geef het antwoord in gehele seconden per dag.

A71



De daglengte, dat is de tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang, varieert in Nederland tussen 8 uur op 21 december en 16 uur op 21 juni.

Deze daglengte kan worden beschreven met het model

$l = a + b \sin(c(t - d))$ met l in uren en t in maanden met $t = 0$ op 21 januari.

- Bereken a , b , c en d .
- Bereken gedurende hoeveel dagen in het jaar de daglengte meer is dan 15 uur.
- Toon met berekeningen aan dat de daglengte op 21 maart sneller toeneemt dan op 21 februari.
- Bereken in gehele seconden per dag de snelheid waarmee de daglengte toeneemt op 1 april.

72



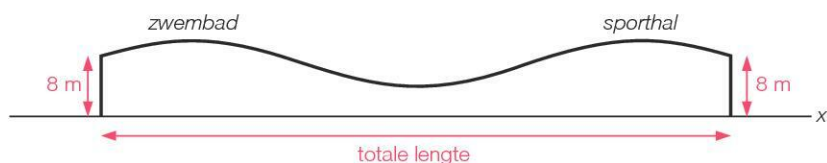
Op de foto zie je een zwembad met sporthal, samen onder één golvend dak. Het golvende dak bereikt boven het zwembad dezelfde hoogte als boven de sporthal. In figuur 8.51 op de volgende bladzijde is een schematisch vooraanzicht getekend. In dit vooraanzicht heeft de rand van het dak de vorm van een sinusoïde met als formule $h = 3 \sin\left(\frac{\pi}{30}x\right) + 7$.

De hoogte h en de lengte x zijn allebei in meter.

De lengte x wordt van links naar rechts over de grond gemeten langs de voorkant van het gebouw, vanaf een punt O dat links van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw ligt.

Aan beide uiteinden van het gebouw is het dak 8 meter hoog.

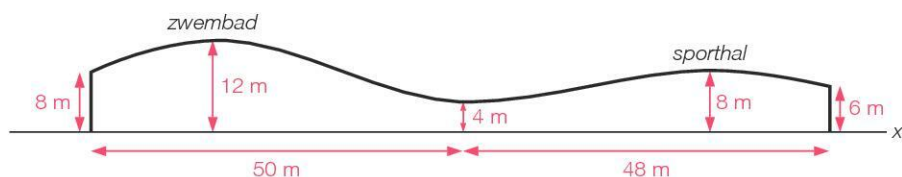




figuur 8.51

- Bereken exact de minimale en de maximale hoogte van het dak.
- Bereken de totale lengte van het gebouw in meter nauwkeurig.

Voordat het zwembad met sporthal werd gebouwd, heeft een architect een ontwerp gemaakt van het gebouw. In het eerste ontwerp dat de architect had gemaakt, was het dak boven het zwembad hoger dan het dak boven de sporthal. Ook de lengte van de voorkant van het gebouw in dit eerste ontwerp was anders dan die van het uiteindelijke gebouw. In figuur 8.52 staan de afmetingen van het gebouw volgens het eerste ontwerp.



figuur 8.52

Het gedeelte van het dak dat boven het zwembad ligt, heeft in het vooraanzicht de vorm van een sinusoïde. Dit geldt ook voor het gedeelte van het dak boven de sporthal.

De twee sinusoïden gaan vloeiend in elkaar over op de grens tussen zwembad en sporthal op een hoogte van 4 meter. Op die grens is de hoogte van het dak minimaal. Boven de sporthal heeft het dak een maximale hoogte van 8 meter.

Met behulp van deze gegevens kun je een formule opstellen die hoort bij het vooraanzicht van het gedeelte van het dak boven de sporthal volgens het eerste ontwerp.

- Stel deze formule op. Je mag zelf de oorsprong kiezen. Licht je werkwijze toe.

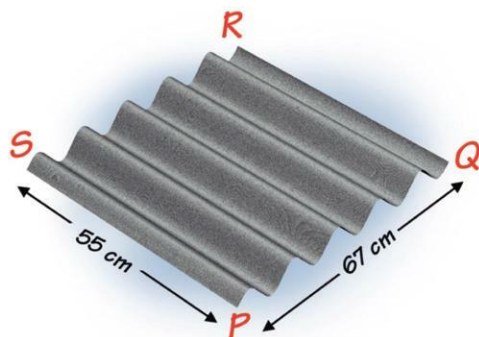
73 Zie opgave 72c.

Stel de formule op die hoort bij het gedeelte van het dak boven het zwembad volgens het eerste ontwerp. Neem hetzelfde assenstelsel (dus ook dezelfde oorsprong) als je bij opgave 72c hebt genomen. Licht je werkwijze toe.

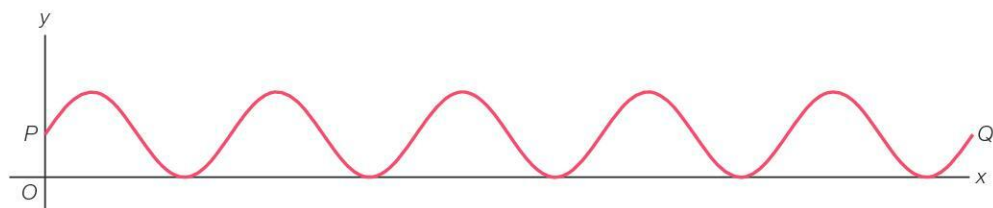
Golfplaat is een bouw materiaal dat gebruikt wordt voor het afdekken van eenvoudige bouwwerken. In figuur 8.53 is een rechthoekig stuk golfplaat getekend.

In figuur 8.54 is het vooraanzicht van dit stuk golfplaat in een assenstelsel getekend. Hierbij is de dikte verwaarloosd.

In het assenstelsel zijn x en y uitgedrukt in cm. Bij deze grafiek hoort de formule $y = 3 + 3 \sin(0,469x)$.



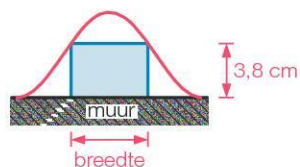
figuur 8.53



figuur 8.54

De golfplaat uit figuur 8.53 wordt als afdakje gebruikt. De plaat wordt horizontaal neergelegd en steunt aan de randen PQ en RS op een muur.

De ruimtes tussen de bovenrand van de muur en de golfplaat worden afgedicht met houten blokjes. Deze blokjes zijn 3,8 cm hoog en hebben een zo groot mogelijke breedte. In figuur 8.55 is dit geschetst.



figuur 8.55

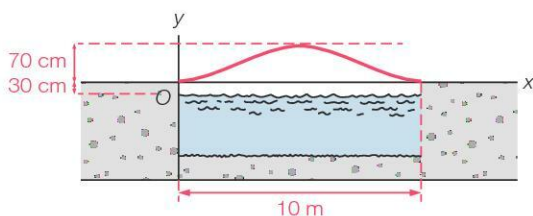
a Bereken in mm nauwkeurig de breedte van zo'n blokje.

Het bovenaanzicht van het stuk golfplaat uit figuur 8.53 is de rechthoek $PQRS$ met $PQ = 67$ cm en $PS = 55$ cm.

Dit stuk golfplaat wordt diagonaal doorgezaagd. In het bovenaanzicht is de zaagsnede een rechte lijn van S naar Q . De werkelijke vorm van de doorsnede is een sinusoïde.

b Stel een formule op van deze sinusoïde van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$ met x en y in cm. Rond zo nodig af op drie decimalen.

Men wil een voetgangersbrug ontwerpen over een gracht met een breedte van 10 meter. Zie figuur 8.56. Er is een assenstelsel aangebracht waarbij de oorsprong aan het begin van de brug is genomen en de x -as samenvalt met het maaiveld.



figuur 8.56

Het wegdek van de brug kan worden

beschreven door een formule van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$.

Het hoogste punt van het wegdek zit 1 meter boven het wateroppervlak en het water staat 30 cm onder de kade.

Voor een brug waarbij de gracht nog juist wordt overspannen geldt

$y = 0,35 + 0,35 \sin(\frac{1}{5}\pi(x - 2,5))$ met x en y in meter.

a Licht de formule $y = 0,35 + 0,35 \sin(\frac{1}{5}\pi(x - 2,5))$ toe.

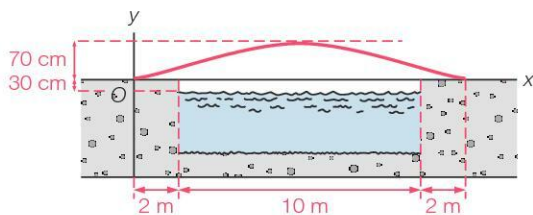
b Toon aan dat de maximale hellingshoek van het wegdek $12,4^\circ$ is.

De hellingshoek van het wegdek mag maximaal 8° zijn.

Om dit te bereiken maakt men de brug zo, dat de overspanning van de gehele brug meer is dan 10 meter.

Het hoogste punt van het wegdek blijft hierbij 1 meter boven het wateroppervlak in het midden van de gracht.

Alex beweert dat de brug dan 2 meter vanaf de oever kan beginnen.



figuur 8.57



Terugblik

Berekeningen met de sinus en de cosinus

Bij de formule $N = 18 + 5 \sin(\frac{4}{15}\pi(t-4))$ met $0 \leq t \leq 8$ geldt

- de evenwichtsstand is 18
- de amplitude is 5
- de periode is $\frac{2\pi}{\frac{4}{15}\pi} = 7\frac{1}{2}$
- de grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 4$.

Hieruit volgt

- N is maximaal $18 + 5 = 23$ voor $t = 4 + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 4 + \frac{1}{4} \cdot 7\frac{1}{2} = 5\frac{7}{8}$
- N is minimaal $18 - 5 = 13$ voor $t = 4 - \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 4 - \frac{1}{4} \cdot 7\frac{1}{2} = 2\frac{1}{8}$
- voor $t = 4,5$ is $N \approx 20,03$ (met de GR)
- $N = 15$ voor $t \approx 1,02$ en $t \approx 3,23$ (met de optie snijpunt op de GR)
- de helling van de grafiek voor $t = 3$ is $\left[\frac{dN}{dt}\right]_{t=3} \approx 2,80$ (met de optie dy/dx op de GR)
- de helling van de grafiek is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, dus voor $t = 4$, en de maximale helling is $\left[\frac{dN}{dt}\right]_{t=4} \approx 4,19$.

Sinusoiden gebruiken

De temperatuur van het zeewater langs de Nederlandse kust is te beschrijven met een model van de vorm $T = a + b \sin(c(t-d))$ met T in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari.

De laagste temperatuur van het zeewater is $4,5^{\circ}\text{C}$ halverwege februari.

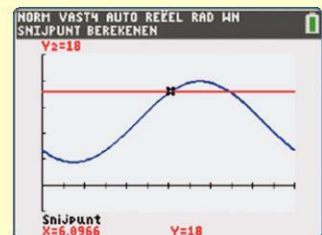
De hoogste temperatuur van het zeewater is $20,0^{\circ}\text{C}$ halverwege augustus.

Zo krijg je

- $a = \frac{20,0 + 4,5}{2} = 12,25$
- $b = 20,0 - 12,25 = 7,75$
- $c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$
- $d = 1,5 + \frac{1}{4} \cdot 12 = 1,5 + 3 = 4,5$.

Dus $T = 12,25 + 7,75 \sin(\frac{1}{6}\pi(t-4,5))$.

Om te berekenen hoeveel dagen volgens dit model de temperatuur van het zeewater meer is dan 18°C voer je in $y_1 = 12,25 + 7,75 \sin(\frac{1}{6}\pi(x-4,5))$ en $y_2 = 18$ en gebruik je de optie snijpunt. Je krijgt $x = 6,09...$ en $x = 8,90...$. Dus de temperatuur is meer dan 18°C gedurende $8,90... - 6,09... = 2,80...$ maanden. Dit is ongeveer $2,80... \times 30 \text{ dagen} \approx 84 \text{ dagen}$.

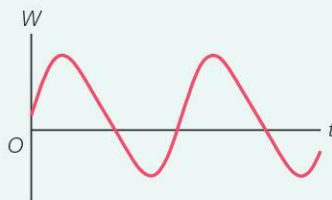


Eindopdracht Een formule bij de getijdenbeweging

In de beginopdracht van dit hoofdstuk heb je gezien dat bij getijdenbewegingen vloed (de periode van het stijgen van het water) korter duurt dan eb (de periode van het dalen van het water).

In deze eindopdracht probeer je een formule te vinden die dit verschijnsel beschrijft.

Het zal duidelijk zijn dat een gewone sinusoïde niet voldoet.



Als we uitgaan van een periode van 12 uur en 30 minuten, dan is een algemene formule die wel een juiste beschrijving geeft van de vorm $W = a(\sin(\frac{2}{12,5}\pi t) + b \sin(\frac{2}{6,25}\pi t)) + c$. Hierin is W de waterhoogte in meter ten opzichte van NAP en t de tijd in uren met $t = 0$ het tijdstip dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. De letters a , b en c zijn constanten die afhangen van de getijdenbeweging die je wilt beschrijven.

Je gaat a , b en c opsporen bij een getijdenbeweging die aan de volgende voorwaarden voldoet.

- I Hoogwater is 150 cm boven NAP en laagwater is 90 cm onder NAP.
- II De duur van vloed is 5 uur en 15 minuten en de duur van eb is 7 uur en 15 minuten.

We beginnen met de formule $h = \sin(\frac{2}{12,5}\pi t) + b \sin(\frac{2}{6,25}\pi t)$.

In deze formule wordt nog geen rekening gehouden met voorwaarde I. Wel kun je aan voorwaarde II voldoen door de juiste waarde van b te kiezen.

Begin met het kiezen van $b = 0,20$.

- Laat zien dat bij de formule $h = \sin(\frac{2}{12,5}\pi t) + 0,20 \sin(\frac{2}{6,25}\pi t)$ de duur van eb 7 uur en 32 minuten is en de duur van vloed 4 uur en 58 minuten.
- Onderzoek al probeerend met je GR welke waarde van b je moet nemen zodat aan voorwaarde II is voldaan. Geef het antwoord in twee decimalen.

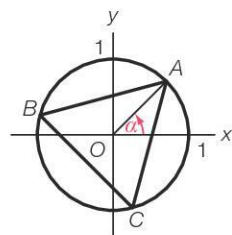
Nu gaan we uit van de formule $W = a(\sin(\frac{2}{12,5}\pi t) + b \sin(\frac{2}{6,25}\pi t)) + c$ met de gevonden waarde van b .

- Bereken de waarden van a en c zo, dat ook aan voorwaarde I is voldaan. Geef a in twee decimalen.
Controleer de gevonden formule door met de GR het maximum en het minimum te berekenen.

Diagnostische toets

8.1 De eenheidscirkel en radialen

- 1** De hoekpunten van de gelijkzijdige driehoek ABC liggen op de eenheidscirkel. De draaiingshoek α is 40° . Zie figuur 8.58. Bereken de coördinaten van de punten A , B en C . Rond af op twee decimalen.



figuur 8.58

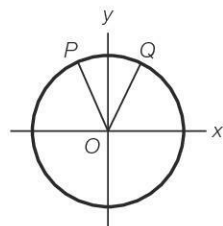
- 2** Druk uit in graden. Rond zo nodig af op één decimaal.

- a** $\frac{3}{4}\pi$ rad **c** 0,6 rad **e** $\frac{2}{3}\pi$ rad
b $\frac{1}{5}\pi$ rad **d** 26π rad **f** $\frac{2}{3}$ rad

- 3** Druk uit in radialen. Geef een exact antwoord.

- a** 270° **c** 150° **e** 40°
b -60° **d** 330° **f** -70°

- 4** De punten P en Q liggen op de eenheidscirkel zo, dat $x_P = -0,4$ en $y_Q = 0,9$ en $\angle POQ$ scherp is. Zie figuur 8.59. Bereken $\angle POQ$ in radialen. Rond af op twee decimalen.



figuur 8.59

8.2 Sinusoïden

- 5** Geef van de grafiek de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

- a** $f(x) = -2 + 3 \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$
b $g(x) = 3 + 4 \cos(2(x - \frac{1}{4}))$

- 6** Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[-\pi, 3\pi]$.

- a** Geef de exacte coördinaten van de punten waar de grafiek van f de lijn van de evenwichtsstand snijdt.
b Geef de exacte coördinaten van de vier toppen van de grafiek van f .
c De grafiek van f snijdt de x -as van links naar rechts in de punten O , P , Q en R .
 Geef de exacte afstand tussen O en Q .

- 7** Gegeven is de formule $A = 4 + 2 \sin(\pi(t - 1))$ met domein $[-4, 4]$.

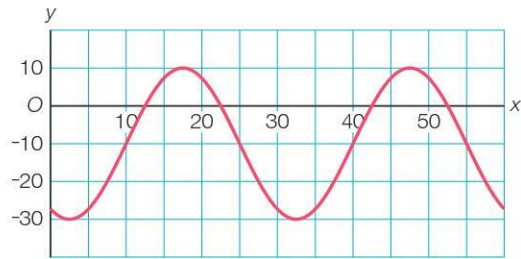
- a** Teken de grafiek van A .
b Los op $A \geq 5$. Rond af op twee decimalen.
c Bereken de grootste helling van de grafiek. Rond af op twee decimalen.

- 8** Teken de grafiek van $f(x) = 2 - 3 \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$.

8.3 Formules van sinusoiden opstellen

- 9** In figuur 8.60 is een sinusoid getekend. Stel bij de sinusoid een formule op van de vorm

- a** $y = a + b \sin(c(x - d))$ met $b > 0$
- b** $y = a + b \cos(c(x - d))$ met $b > 0$
- c** $y = a + b \sin(c(x - d))$ met $b < 0$
- d** $y = a + b \cos(c(x - d))$ met $b < 0$



figuur 8.60

- 10** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 - 2 \sin(x)$ en $g(x) = 3 + 2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$. De grafieken van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$ en de verschilfunctie $v(x) = f(x) - g(x)$ zijn sinusoiden.
- a** Stel een formule op bij de grafiek van s van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op drie decimalen.
 - b** Stel een formule op bij de grafiek van v van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$. Rond zo nodig af op drie decimalen

8.4 Goniometrische vergelijkingen

- 11** Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.
- a** $\cos(\frac{1}{2}x) = -1$
 - b** $\sin^2(2x) = 1$
- 12** Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.
- a** $4 \sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = 2\sqrt{2}$
 - b** $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

8.5 Toepassingen van sinusoiden

- 13** Gegeven is de formule $A = 3,9 + 2,7 \cos(\frac{2}{9}\pi(t - 2,4))$ met $0 \leq t \leq 10$.
- a** Bereken algebraïsch $A_{\max}$ en $A_{\min}$ en de bijbehorende t -waarden.
 - b** Los op $A < 2$. Rond af op twee decimalen.
 - c** Bereken de maximale helling van de grafiek. Rond af op drie decimalen.
- 14** De temperatuur van het zeewater langs de Griekse kust is te beschrijven met het model $T = a + b \sin(c(t - d))$ met T in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari. De laagste temperatuur is 10°C op 15 januari en de hoogste temperatuur is 28°C .
- a** Bereken a , b , c en d .
 - b** Gedurende hoeveel dagen per jaar is de temperatuur volgens het model hoger dan 25°C ?
 - c** Bereken de maximale snelheid waarmee de watertemperatuur stijgt. Geef het antwoord in $^{\circ}\text{C}$ per dag en rond af op drie decimalen.

Gemengde opgaven

5 Machten, exponenten en logaritmen

1 Schrijf als macht van a .

a $a^2 \cdot \sqrt[4]{a}$ **b** $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ **c** $\frac{\sqrt[3]{a}}{a^2}$ **d** $\frac{\sqrt{a}}{a \cdot \sqrt[4]{a^3}}$

2 Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

a $a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{2}{3}}$ **b** $(a^{-\frac{1}{3}})^9$ **c** $(16a^2)^{-\frac{1}{4}}$ **d** $\frac{6b^{-2}}{3a^{-1\frac{1}{4}}}$

3 a Schrijf $y = \frac{6x^4}{(2\sqrt{x})^3}$ in de vorm $y = ax^p$.

b Schrijf $y = (\frac{1}{4})^{2-\frac{1}{2}x}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$.

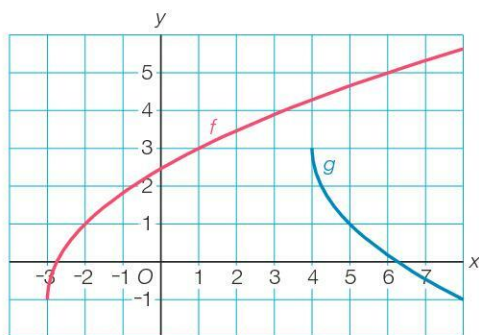
c Schrijf $y = 0,4x^{2,3} \cdot (3x^{4,1})^3$ in de vorm $y = ax^p$.

d Schrijf $y = 12 \cdot 4^{2x-1} \cdot (\frac{1}{2})^{2-3x}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$.

4 De grafieken van de functies f en g in figuur G.1 zijn ontstaan uit de standaardgrafiek $y = \sqrt{x}$.

a Welke transformaties horen bij de grafiek van f ? En welke bij de grafiek van g ?

b Welke transformaties moet je achtereenvolgens op de grafiek van f toepassen om de grafiek van g te krijgen?



figuur G.1

5 Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^4 - 4$ en $g(x) = \frac{1}{3}(x+1)^5 + 3$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?

b Los op $f(x) > g(x)$. Rond af op twee decimalen.

c De grafiek van f wordt eerst vermenigvuldigd met -4 ten opzichte van de x -as en vervolgens wordt de translatie $(4, -8)$ toegepast. Bereken de coördinaten van de top van de beeldgrafiek.

d De grafiek van g wordt eerst vermenigvuldigd met -3 ten opzichte van de x -as en vervolgens wordt de translatie (a, b) toegepast. Het punt van symmetrie van de beeldgrafiek is het punt $(4, 6)$. Bereken a en b .

- 6** Gegeven zijn de functies $f(x) = -2 + \sqrt{6 - 3x}$ en $g(x) = 3 - \sqrt{4x + 10}$.
- a** Teken de grafieken van f en g in één figuur.
 - b** Los op $f(x) \geq g(x)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
 - c** Los op $f(x) - g(x) < \frac{1}{4}$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
 - d** Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x > -10$?

7 Bereken exact de oplossingen.

- a** $3\sqrt{2 - 4x} = 21$
- b** $2^{\frac{1}{2}x - 2} = 2\sqrt{2}$
- c** $5 \cdot {}^2\log(x) = 15$
- d** $2\sqrt{x - 1} + 7 = 15$
- e** $3^{5 - 2x} = 81$
- f** ${}^4\log(2x + 3) = 3$

8 Uit een onderzoek is gebleken dat er voor zoogdieren een verband bestaat tussen de levensverwachting en het gewicht. De bijbehorende formule is $L = 7,5G^{0,25}$. Hierin is L de levensverwachting van de diersoort in jaren en G het gemiddelde gewicht in kg van volwassen exemplaren.

- a** Volwassen Aziatische olifanten wegen gemiddeld 4000 kg.
Bereken de levensverwachting van deze olifanten in gehele jaren.
- b** De ijsbeer heeft een levensverwachting van 34 jaar.
Bereken het gemiddelde gewicht in gehele kg.

Een ander onderzoek wees uit dat er ook een verband bestaat tussen de gemiddelde hartslag H in slagen per minuut en G . De bijbehorende formule is $H = 280G^{-0,25}$.

- c** Volwassen wilde paarden wegen gemiddeld 300 kg.
Hoeveel hartslagen heeft een wild paard naar verwachting in zijn gehele leven?
- d** De spitsmuis heeft een hartslag van 900 slagen per minuut.
Hoeveel hartslagen heeft een spitsmuis naar verwachting in zijn gehele leven?

Een bioloog beweert dat uit de formules volgt dat elk zoogdier in zijn totale leven ongeveer evenveel hartslagen heeft.

- e** Licht toe dat dit betekent dat $L \cdot H$ voor elk zoogdier hetzelfde getal is en bereken dit getal.



9 Los algebraïsch op.

- a** $\sqrt{2 - 2x} + 2x = 0$
- b** $0,2^{2x+1} = 0,04$
- c** $5^{0,02x} = 5\sqrt{5}$
- d** $3x = \sqrt{8x + 1}$
- e** $6^{2x} + 4 = 220$
- f** ${}^3\log(8x + \sqrt{3}) = 2\frac{1}{2}$

10 Bereken exact de oplossingen.

a $2 + 3x\sqrt{x} = 26$

b $3 \cdot 2^{x^2-2} + 12 = 60$

c ${}^2\log(x^2 - 2) = 3$

d $\frac{2\sqrt{x}}{4 + \sqrt{x}} = \frac{2}{3}$

e $128 - 4 \cdot 3^{x+1} = 20$

f $5 - {}^3\log(4x - 7) = 3$

11 Gegeven zijn de functies $f(x) = 0,4 \cdot 2^{x-2} - 4$ en $g(x) = 5 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x+1}$.

a Hoe ontstaan de grafieken van f en g uit een standaardgrafiek?

b Los algebraïsch op $f(x) \geq 2,4$.

c De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B .

Bereken voor welke p de lengte van het lijnstuk AB gelijk is aan 3.
Rond af op twee decimalen.

d Voor welke q heeft de vergelijking $f(x) = q$ één oplossing en de vergelijking $g(x) = q$ geen oplossing?

12 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + {}^3\log(x + 4)$ en $g(x) = 3 + {}^2\log(x - 1)$.

a Geef van beide functies het domein en de formule van de asymptoot van de grafiek.

b Los algebraïsch op $f(x) \leq 5$.

c De lijn $y = 2$ snijdt de grafiek van f in het punt P en de grafiek van g in het punt Q .

Bereken algebraïsch de lengte van het lijnstuk PQ .

d De grafiek van g wordt eerst 4 naar rechts verschoven en vervolgens ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd. Zo ontstaat de grafiek van de functie h .

Stel het functievoorschrift op van h .

13 Op de grafieken van $f(x) = 2^x - 2$ en $g(x) = 3^x + b$ wordt eerst de vermenigvuldiging met a ten opzichte van de x -as toegepast en vervolgens de translatie $(4, 1)$.

De beeldgrafieken snijden elkaar in het punt $S(6, 5)$.

Bereken exact de waarden van a en b .

6 De afgeleide functie

- 14** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ en het punt A met $x_A = 4$ op de grafiek van f .

a De lijn k raakt de grafiek van f in A en de lijn l gaat door A en staat loodrecht op k .

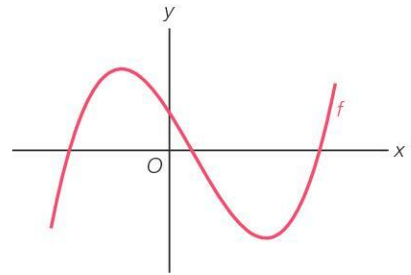
l snijdt de y -as in het punt B .

Bereken algebraïsch de coördinaten van B .

b Bereken algebraïsch de coördinaten van de punten van de grafiek waarin de raaklijn horizontaal is.

c De raaklijnen van de grafiek in de punten C en D zijn evenwijdig met de lijn $m: y = 4x + 10$.

Bereken algebraïsch de coördinaten van C en D .



figuur G.2

- 15** Gegeven is de functie $f(x) = x^3 + 12x^2 + 45x + 17$.

a Bereken algebraïsch de extreme waarden van f .

b Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ drie oplossingen?

c Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ één oplossing?

d Voor welke waarden van a raakt de grafiek van $g(x) = x^3 + 12x^2 + 45x + a$ de x -as?

- 16** Bereken de afgeleide.

a $f(x) = \frac{2x+5}{x^2}$

b $f(x) = \frac{6x^2}{5} - \frac{x^2+2}{5x^3}$

c $f(x) = 4(3x-1)^5$

d $f(x) = \frac{5}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

e $f(x) = \frac{5}{(6-2x)^4}$

f $f(x) = 3\sqrt{5x+10} + (5x+10)^3$

- 17** Gegeven is functie $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x}$.

a Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k van de grafiek van f in het punt A met $x_A = 4$.

b Bereken algebraïsch de extreme waarden van f .

c De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -3 . Bereken algebraïsch de coördinaten van de raakpunten.

d Toon algebraïsch aan dat de grafiek geen raaklijn heeft met richtingscoëfficiënt groter dan 1.

- 18** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{4x+16}$ en $g_a(x) = 4 + \frac{8}{(ax-2)^2}$.

De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A en de grafiek van g_a snijdt de y -as in het punt B .

- Bereken de coördinaten van A en B .
- Bereken algebraïsch voor welke waarde van a de raaklijnen van de grafieken van f en g_a in de punten A en B evenwijdig zijn.

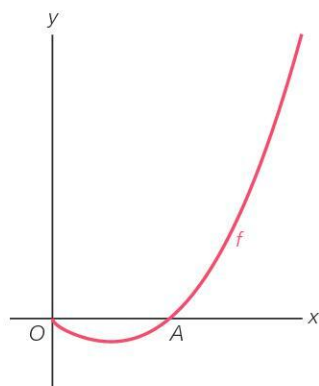
- 19** Gegeven zijn de functie $f(x) = \sqrt{6-2x}$ en de lijnen $k: y = -x + 5$ en $l: y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.

- Stel een vergelijking op van de lijn m die evenwijdig is met k en die de grafiek van f raakt.
- De lijn $x = p$ met $-5 < p < 3$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de lijn l in het punt B .
Bereken exact de maximale lengte van het lijnstuk AB .

- 20** Gegeven is functie $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{\sqrt{x}}$.

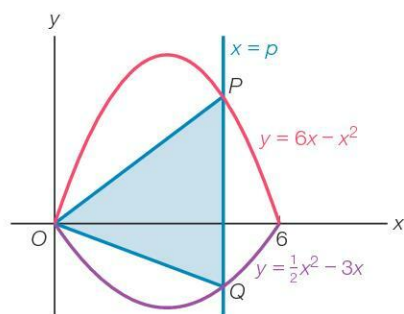
Voor de afgeleide geldt $f'(x) = \frac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}}$.

- Bewijs dit.
- Bereken exact het minimum van f .
- De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A .
Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn k in A .
- De lijn l met richtingscoëfficiënt $16\frac{1}{2}$ raakt de grafiek van f in het punt B .
Bereken de coördinaten van B .



figuur G.3

- 21** Gegeven zijn de parabolen $y = 6x - x^2$ en $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$.
De lijn $x = p$ met $0 < p < 6$ snijdt de parabolen in de punten P en Q . Zie figuur G.4.
Toon aan dat $PQ = -1\frac{1}{2}p^2 + 9p$ en bereken algebraïsch de maximale oppervlakte van driehoek OPQ .



figuur G.4

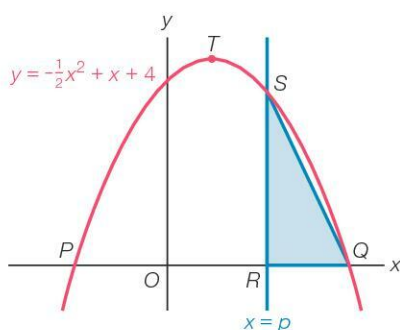
- 22** De parabool $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ snijdt de x -as in de punten P en Q . De lijn $x = p$ met $x_P < p < x_Q$ snijdt de x -as in het punt R en de parabool in het punt S . Zie figuur G.5.

Voor de oppervlakte A van driehoek QRS geldt de formule $A = \frac{1}{4}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + 8$.

- a** Toon aan dat deze formule juist is.

De top van de parabool is het punt T .

- b** Toon algebraïsch aan dat de oppervlakte van driehoek QRS niet maximaal is als $p = x_T$.
c Bereken algebraïsch de maximale oppervlakte van driehoek QRS .



figuur G.5

- 23** Gegeven is functie $f(x) = \sqrt{8x + 12} - x^2$.

- a** De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 3$.
 De lijn l snijdt k loodrecht in A .

Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van l en de y -as.

- b** Bewijs dat f een extreme waarde heeft voor $x = \frac{1}{2}$.

- 24** Gegeven is functie $f(x) = \frac{4}{x}$. Op de grafiek van f ligt het punt P met $x_P = p$ en $p > 0$. Voor de lengte L van het lijnstuk OP geldt

$$L = \sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}.$$

- a** Toon aan dat deze formule juist is.

De lijn k raakt de grafiek van f in het punt P waarvoor L minimaal is.

Gebruik in vraag b dat L minimaal is als $g(p) = p^2 + \frac{16}{p^2}$ minimaal is.

- b** Bereken exact de coördinaten van P en onderzoek algebraïsch of k en OP loodrecht op elkaar staan.

- 25** Gegeven is functie $f(x) = 2x + 7 - 4\sqrt{2x + 5}$.

- a** Bereken van de grafiek van f de coördinaten van het randpunt en schets de grafiek.

- b** De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.
 Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt B van k met de x -as.

- c** Bereken algebraïsch het bereik van f .

- d** De lijn m raakt de grafiek van f in het punt C en staat loodrecht op de lijn $p: y = \frac{1}{2}x + 1$.

Bereken algebraïsch de coördinaten van C .

7 Lijnen en cirkels

- 26** Bereken in graden de hoek tussen de lijnen. Rond af op één decimaal.
- a $k: 3x + y = 6$ en $l: y = -2x + 3$
 - b m door $(3, 0)$ en $(0, 4)$ en n door $(1, 1)$ en $(3, 3)$
 - c $p: 3x + 2y = 7$ en q door $(2, 3)$ en $(6, 2)$
- 27** Gegeven zijn de punten $A(7, 9)$, $B(2, 4)$ en $C(3, 1)$.
- a Bereken exact $d(A, B)$.
 - b Bereken exact $d(A, BC)$.
 - c Bereken de oppervlakte van driehoek ABC .
 - d Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt A , die BC raakt.
 - e Bereken in graden $\angle ABC$. Rond af op één decimaal.
- 28** Stel een vergelijking op van de lijn
- a k die door het punt $A(1, 2)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $l: 2x - 3y = 6$
 - b m die door het punt $B(3, 2)$ gaat en de cirkel met middellijn OB raakt
 - c n die door het punt $C(3, -1)$ gaat en die evenwijdig is met de lijn p door de punten $(5, 0)$ en $(0, -3)$.
- 29** Voor $p > -1\frac{1}{2}$ zijn gegeven de punten $A(2p + 3, 0)$ en $B(2, p + 6)$. Het midden van lijnstuk AB is het punt M .
- a Bereken voor welke waarde van p de cirkel c_1 met middelpunt M de x -as en de y -as raakt.
 - b Het punt A ligt op de cirkel c_2 met middelpunt B die door de oorsprong gaat. Bereken p .
 - c Voor welke p staat de lijn AB loodrecht op de lijn $k: y = \frac{9}{10}x + 1$?
 - d Vierhoek $OABC$ is een rechthoek. Bereken de coördinaten van het punt C .
- 30** Gegeven zijn de lijnen $k: ax + 4y = 8$ en $l: y = bx + 2a$. Bereken voor welke a en b
- a k en l samenvallen
 - b k en l elkaar snijden in het punt $(4, -3)$
 - c k en l elkaar loodrecht snijden in een punt op de y -as.
- 31** Bereken exact de afstand van het punt $A(3, 4)$ tot
- a het punt $B(6, 8)$
 - b de cirkel $c_1: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$
 - c de cirkel $c_2: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$
 - d de lijn $k: 3x + 4y = 15$.

- 32** In de figuur hiernaast zijn in een assenstelsel de cirkels c_1 en c_2 getekend.

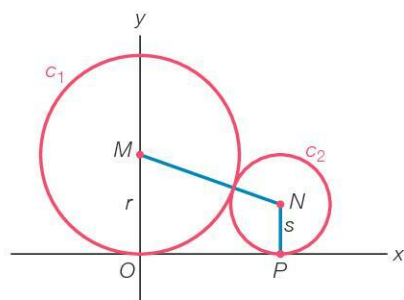
Het middelpunt M van c_1 ligt op de y -as en de straal van c_1 is r . Het middelpunt van c_2 is N en de straal van c_2 is s .

Er geldt $r > s$.

De cirkels raken de x -as in de punten O en P .

De cirkels raken elkaar, dus $d(M, N) = r + s$.

- Neem $r = 9$ en $s = 4$ en bereken exact de oppervlakte van vierhoek $OPNM$.
- Toon op algebraïsche wijze aan dat de oppervlakte van vierhoek $OPNM$ gelijk is aan $(r + s)\sqrt{rs}$.
- Voor welke r en s geldt dat $MN = 25$ en $OP = 15$?

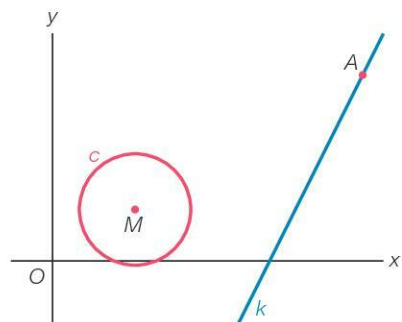


figuur G.6

- 33** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$, de lijn $k: 2x - y = 21$ en het punt $A(15, 9)$ op k .

Onderzoek op algebraïsche wijze of

$$d(A, c) > 2\frac{1}{2} \cdot d(k, c).$$



figuur G.7

- 34** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$.

- Bereken voor welke p de lijn $k: x + y = p$ door het middelpunt van c gaat.
- Bereken voor welke q de lijn $l: x - 3y = q$ de cirkel raakt.
- Bereken voor welke r de lijn $m: 3x + y = r$ geen gemeenschappelijke punten met c heeft.

- 35** Gegeven zijn de punten $A(0, 2)$, $B(0, 8)$ en $C(4, 0)$. De cirkel c_1 gaat door A en B en raakt de x -as in C . De cirkel c_2 heeft middellijn AB . Zie de figuur hiernaast.

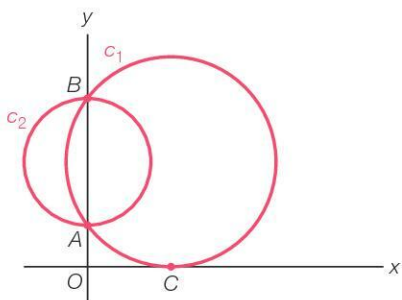
- Stel van zowel c_1 als van c_2 een vergelijking op.

Er zijn twee raaklijnen aan c_2 die door $O(0, 0)$ gaan.

- Bereken in graden de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken. Rond af op één decimaal.

- De cirkel c_3 raakt de y -as in A en gaat door het middelpunt van c_1 .

Stel een vergelijking op van c_3 .



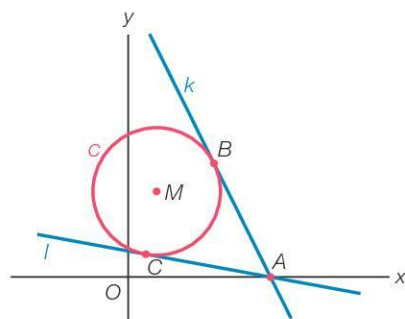
figuur G.8

36 Om een vergelijking op te stellen van de cirkel die door de punten A , B en C gaat kun je het volgende werkschema gebruiken.

- 1 Stel een vergelijking op van de lijn k die AB loodrecht snijdt in het midden van lijnstuk AB .
 - 2 Stel een vergelijking op van de lijn l die AC loodrecht snijdt in het midden van lijnstuk AC .
 - 3 Bereken de coördinaten van het snijpunt M van k en l .
 - 4 Bereken $d(M, A)$.
 - 5 Geef de vergelijking van de cirkel.
- a** Licht bovenstaand werkschema toe.
- b** Stel een vergelijking op van de cirkel c door de punten $A(6, 8)$, $B(7, 1)$ en $C(-2, 4)$.

37 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ met middelpunt M en het punt $A(5, 0)$. De lijnen k en l gaan door A en raken c in de punten B en C . Zie de figuur hiernaast.

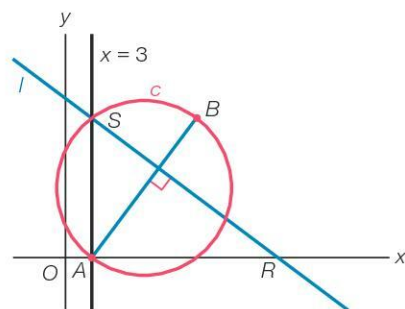
- a** Bereken in graden $\angle OMA$. Rond af op één decimaal.
- b** Bereken in graden de hoek φ tussen k en l . Rond af op één decimaal.
- c** De cirkel d raakt de x -as en gaat door A en M . Onderzoek of d de y -as raakt.



figuur G.9

38 Gegeven zijn de punten $A(3, 0)$ en $B(15, 16)$. Lijnstuk AB is middellijn van cirkel c . De lijn $x = 3$ snijdt c in de punten A en S . De lijn l gaat door S en staat loodrecht op de lijn AB . R is het snijpunt van l met de x -as. Zie de figuur hiernaast.

- a** Onderzoek algebraïsch of vierhoek $ARBS$ een trapezium is.
- b** Bereken algebraïsch de coördinaten van R .
- c** Bereken de oppervlakte van vierhoek $ARBS$.
- d** Bereken $d(A, l)$.



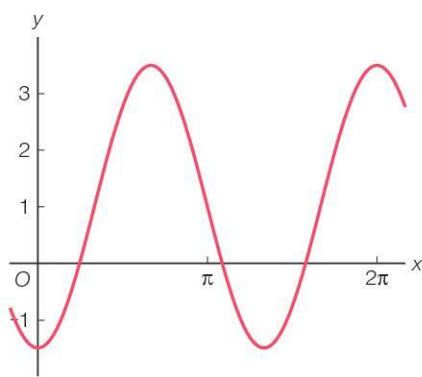
figuur G.10

8 Goniometrie

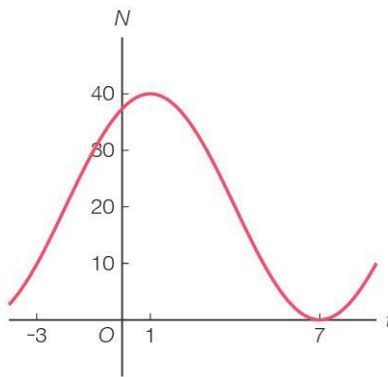
39 De punten P en Q liggen op de eenheidscirkel zo, dat $x_P = -0,4$ en $y_Q = 0,6$ en $\angle POQ$ scherp is. Bereken $\angle POQ$ in radialen. Rond af op twee decimalen.

- 40** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + 3 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$ en $g(x) = -1 + 4 \cos(x + \frac{1}{6}\pi)$, beide met domein $[0, 2\pi]$.
- Teken de grafieken van f en g in één figuur.
 - Stel bij f een formule op van de vorm $y = p + q \cos(r(x - s))$.
 - Bereken de maximale helling van de grafiek van f .
 - Los algebraïsch op $g(x) < 1$.

- 41** a Bij de sinusöide in figuur G.11a zijn twee opeenvolgende toppen $(\frac{2}{3}\pi, 3\frac{1}{2})$ en $(\frac{4}{3}\pi, -1\frac{1}{2})$.
Stel bij de sinusöide een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$ met $b < 0$.
- b De sinusöide in figuur G.11b heeft top $(1, 40)$ en gaat voor $t = 4$ dalend door de evenwichtsstand.
Stel bij de sinusöide een formule op van de vorm $N = a + b \sin(c(t - d))$ met $b > 0$.



a

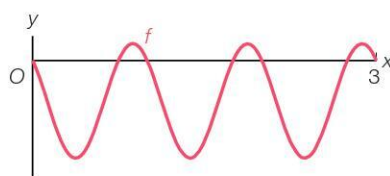


b

figuur G.11

- 42** Op het interval $[0, 3]$ is de functie f gegeven door $f(x) = \sin(\pi(x - 1)) \cdot \cos(\pi(x - \frac{1}{4}))$.
In figuur G.12 zie je de grafiek van f .

- Bereken op algebraïsche wijze de x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.



figuur G.12

De grafiek van f is een sinusöide.

- Bereken mogelijke waarden van a , b , c en d zodat $y = a + b \sin(c(x - d))$ een formule is van deze sinusöide. Licht je werkwijze toe en rond zo nodig af op twee decimalen.
- Bereken de maximale helling van de grafiek van f . Rond af op twee decimalen.

43 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

- a $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- b $\sin(2x - \frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi(x + \frac{1}{3})) = 0$
- c $5\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\frac{5}{2}\sqrt{3}$
- d $\sin^2(\frac{1}{2}x) + \sin(\frac{1}{2}x) = 0$
- e $\sin(\pi(x - 1)) \cdot \sin(\frac{3}{2}x) = 0$
- f $(\cos(x) + \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot (\cos(x) + \sqrt{2}) = 0$

44 Gegeven is de functie $f(x) = -2\sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ met domein $D_f = [0, 2\pi]$.

In figuur G.13 zijn de grafiek van f en de grafiek van $y = \cos(x)$ getekend op het interval $[0, 2\pi]$. De grafiek van f kan ontstaan uit de grafiek van $y = \cos(x)$ door hierop een verschuiving en een vermenigvuldiging toe te passen.

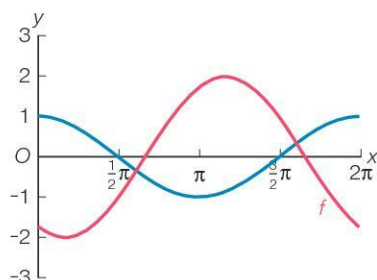
- a Onderzoek welke verschuiving en vermenigvuldiging dit kunnen zijn.

Verder is de functie $g(x) = \sin(x) - \cos(x)$ gegeven met domein $D_g = [0, 2\pi]$.

- b Los op $f(x) < g(x)$. Rond af op twee decimalen.

De grafiek van g is een sinusoïde. Het functievoorschrift van g is te schrijven in de vorm $g(x) = a \cdot \sin(x - b)$.

- c Bereken mogelijke waarden van a en b . Rond af op twee decimalen.



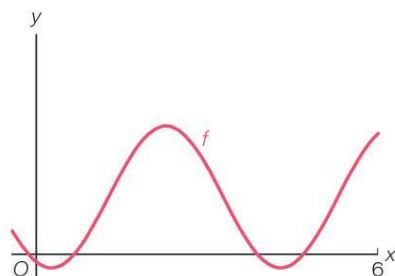
figuur G.13

45 Op het domein $[0, 6]$ is gegeven de functie $f(x) = 1 + 2\sin(\frac{1}{2}\pi(x - 1)) + \cos(\frac{1}{2}\pi(x + \frac{1}{3}))$. Zie de figuur hiernaast. De grafiek van f is een sinusoïde en is te beschrijven met een formule van de vorm $y = p + q \sin(r(x - s))$.

- a Bereken mogelijke waarden van p , q , r en s . Rond zo nodig af op twee decimalen.

Voor de functie g geldt het volgende:

- De grafiek van g is te beschrijven met een formule van de vorm $y = a + b \cos(c(x - d))$.
- De periode van g is 3 keer zo groot als de periode van f .
- Een hoogste punt van de grafiek van g is ook het hoogste punt van de grafiek van f .
- De grafiek van g raakt de x -as.
- b Bereken mogelijke waarden van a , b , c en d . Rond zo nodig af op twee decimalen.



figuur G.14

- 46** De jachthaven van Vlissingen kan worden afgesloten door vloeddeuren. Als een boot de haven binnenvaart dan passeert hij de drempel van deze deuren. Voor de waterhoogte h in meter boven de drempel geldt $h = 2,4 + 0,6 \sin(0,51(t - 3))$. Hierin is t in uren met $t = 0$ om 0:00 uur op 2 mei.

- a Teken de grafiek van h voor 2 mei.
- b Op 2 mei is het twee keer hoogwater. Bereken in minuten nauwkeurig op welke tijdstippen dit het geval is.
- c Op 5 mei is het ook twee keer hoogwater. Bereken in minuten nauwkeurig op welk tijdstip het op 5 mei voor de tweede keer hoogwater is.



Een schip met een diepgang van 2,60 meter moet bij het uitvaren van de haven nog een speling van minimaal 30 cm boven de sluisdrempel hebben.

- d Bereken in minuten nauwkeurig tussen welke tijdstippen 's morgens op 2 mei het schip kan uitvaren.

- 47** Het verloop van de temperatuur kan gedurende een etmaal nogal grillig zijn. In vereenvoudigde vorm is het temperatuurverloop gedurende een etmaal redelijk te benaderen door een sinusoïde met een periode van 24 uur. Het KNMI hanteert voor De Bilt voor de dagen in de maand juni de volgende waarden: de maximumtemperatuur is $21,0^\circ\text{C}$, deze wordt bereikt om 3 uur 's middags; de minimumtemperatuur is $12,2^\circ\text{C}$. T is de temperatuur in graden Celsius op een dag in juni en u het aantal uren na middernacht.

- a Schets de grafiek van T als functie van u .
- b Stel een formule op van T als functie van u .

Voor een dag in april geldt bij benadering de formule

$T = 7,6 + 4,3 \sin(\frac{1}{12}\pi(u - 10))$. Hierin is T de temperatuur in $^\circ\text{C}$ en u het aantal uren na middernacht.

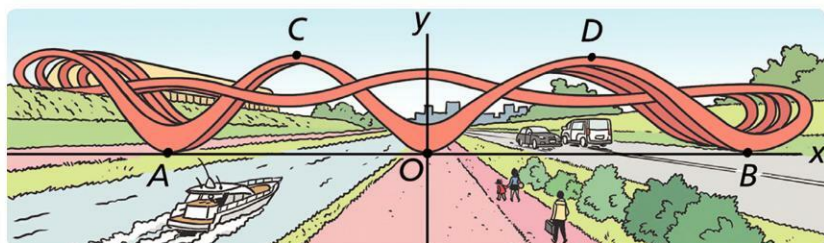
- c Bereken hoe lang het volgens deze formule op een dag in april warmer is dan $11,5^\circ\text{C}$. Rond af op een geheel aantal minuten.

Op een bepaald moment op de dag is de temperatuurstijging maximaal.

- d Hoe groot is volgens bovenstaande formule de maximale stijging van de temperatuur in april? Geef je antwoord in $^\circ\text{C}$ per uur. Rond af op één decimaal. Licht je antwoord toe.

48 Het architectenbureau NEXT architects uit Amsterdam heeft een prijsvraag gewonnen voor het ontwerp van een voetgangersbrug bij Changsha, een stad in het zuidoosten van China. De voetgangersbrug overspant een kanaal en een weg.

Via verschillende niveaus kunnen voetgangers de rivier en de weg oversteken. Het ontwerp bestaat uit een sinusvormige structuur.



figuur G.14

In de tekening hierboven is een assenstelsel aangebracht. De afstand tussen de punten A en B is 150 meter en de punten C en D liggen 24 meter boven AB . De bogen in de figuur zijn te benaderen door sinusoiden.

- Stel een formule op van de sinusöide waarop de punten A , B , C en D liggen.
- Bereken in graden nauwkeurig de maximale hellingshoek van deze boog.

De andere boog heeft recht onder de punten C en D laagste punten die 12 meter boven de lijn AB liggen. De hoogste punten van deze boog liggen 18 meter boven AB . De sinusoiden snijden elkaar twee keer tussen de punten C en D .

- Bereken de afstand tussen deze snijpunten in meter nauwkeurig.

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen
- De toets Ans en fouten verbeteren
- Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen
- Decimaal getal omzetten in breuk

havo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 18

Formules, grafieken en tabellen

- Formules invoeren en grafieken plotten
- Functiewaarden berekenen op het grafiekenscherf en op het basisscherm
- Tabellen maken en de tabelinstelling veranderen

havo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 39

Toppen en snijpunten

- Toppen en snijpunten van grafieken
- Berekenen van nulpunten

havo B deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 42

Helling

- De richtingscoëfficiënt van een raaklijn

havo B deel 1
hoofdstuk 2
bladzijde 78

Hellinggrafieken

- Hellinggrafieken plotten

havo B deel 1
hoofdstuk 2
bladzijde 84

Het gebruik van Ans en lettergeheugens

- De toets Ans
- Het gebruik van lettergeheugens

havo B deel 1
hoofdstuk 3
bladzijde 100

Allerlei

- Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR

Overzicht routes

5 Machten, exponenten en logaritmen

5.1 Machten met negatieve en gebroken exponenten

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

5.2 Grafieken van machtsfuncties veranderen

opgave	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
□ basis											
⊙ midden											
* uitdagend											

5.3 Wortelfuncties

opgave	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
□ basis										
⊙ midden										
* uitdagend										

37	38	39	40	41	42	43	44	45	46

5.4 Exponentiële functies

opgave	47	48	49	50	51	52	53	54	55
□ basis									
⊙ midden									
* uitdagend									

56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67

5.5 Logaritmen

opgave	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
▣ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

6 De afgeleide functie

6.1 Raaklijnen en toppen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

13	14	15	16	17	18	19	20

6.2 De afgeleide van machtsfuncties

opgave	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

35	36	37	38	39

6.3 De kettingregel

opgave	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

6.4 Toepassingen van de afgeleide

opgave	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

7 Lijnen en cirkels

7.1 Lijnen en hoeken

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

7.2 Afstanden bij punten en lijnen

opgave	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

27	28	29	30	31	32	33

7.3 Cirkelvergelijkingen

opgave	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
□ basis																
⊙ midden																
* uitdagend																

7.4 Raaklijnen en snijpunten bij cirkels

opgave	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

63	64	65	66	67	68	69	70	71

8 Goniometrie

8.1 De eenheidscirkel en radialen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

	15	16	17	18	19

8.2 Sinusoïden

opgave	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
□ basis																		
⊙ midden																		
* uitdagend																		

8.3 Formules van sinusoiden opstellen

opgave	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

8.4 Goniometrische vergelijkingen

opgave	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

8.5 Toepassingen van sinusoiden

opgave	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

Trefwoordenregister

A

aantonen 60
afstand tussen punten 103
afstand van punt tot
cirkel 117
afstand van punt tot
kromme 117
afstand van punt tot
lijn 107
amplitude 146
analytische meetkunde 119

B

beeldgrafiek 19
beginpunt 147
bereik 24
bewijzen 60

C

cirkelvergelijking 110

D

Descartes, René 119
differentiaalrekening 71
domein 24
draaiingshoek 136

E

eenheidscirkel 136
evenwichtsstand 146
exacte-waarden-cirkel 164
exponentiële functie 32
exponentiële
vergelijking 37

G

gebroken exponent 13
goniometrische
functie 146
grondtal van logaritme 40

H

hoek tussen lijnen 100
hoekeenheden 141
Hudde, Johannes 62

I

isoleren 29
iteratieve methode 88

K

kettingregel 75, 77
kwadraatafsplitsen 114

L

Leibniz, Gottfried
Wilhelm 71
logaritme 40
logaritmische functie 43
logaritmische
vergelijking 41
loodrechte lijnen 79, 105
loodrechte projectie 107

M

machtsfunctie 18
methode van
Newton-Raphson 88

N

Napier, John 42
negatieve exponent 11
Newton, Isaac 71

O

onderling loodrechte
lijnen 79, 105
onderlinge ligging van
lijnen 97
onderlinge ligging van
lijnen en cirkels 123
optimaliserings-
probleem 82

P

periode 146
Ptolemeus 134
punt van symmetrie 18

R

raaklijn aan cirkel 119
radiaal 140, 142
randpunt 24
richtingshoek 99

S

samengestelde functie 73
sinus 134
sinusoïde 151

T

transformatie 21

U

uitdelen 64

V

verdubbelingsformule 159
vermenigvuldigen ten
opzichte van de x -as 20
vermenigvuldiging ten
opzichte van de y -as 33

W

wortelfunctie 24
wortelvergelijking 28

Verantwoording

Illustraties: Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Richard van de Pol, Tilburg
Technisch tekenwerk: Integra Software Services
Beeldresearch: B en U International Picture
Service, Amsterdam

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Foto's:

iStock: p. 6-7, 8
Shutterstock: p. 16, 50-51, 94 (2x), 183
John Napier: p. 42
ANP Foto, Den Haag: p. 47, 92-93
Rijksmuseum, Amsterdam: p. 62, 71 o
Imageselect, Wassenaar: p. 70, 71 b, 127, 134
Frans Hals - portrait René Descartes
(Louvre): p. 119
Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 130-131
Dreamstime: p. 173, 177
CITO: p. 174
Gerrit de Jong, Middelburg: p. 193
NEXT architects, Amsterdam: p. 194

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv,
Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73538-8



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



Noordhoff



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-73538-8

