

& GETAL & RUIMTE

B



Noordhoff

Getal & Ruimte

havo B deel 3

Twaalfde editie, 2021

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
E. Terlaak

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek havo B deel 3

Samen met de delen 1 en 2 van havo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma havo wiskunde B, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld. Bij het schrijven van dit boek is goed gekeken naar de examens die de laatste jaren zijn afgenomen. Dat betekent dat ervoor gezorgd is dat de theorie en de opgaven aansluiten bij de vraagstelling en het niveau dat op het centraal examen gangbaar is.

Nieuw is ook dat de leerling geholpen wordt bij het ontwikkelen van strategieën voor het oplossen van complexere problemen.

De totale studielast voor het vak havo wiskunde B is 360 uur.

In dit boek worden in de eerste drie hoofdstukken de gedeelten van de domeinen behandeld die in de delen 1 en 2 nog niet aan de orde zijn geweest. Bovendien wordt in deze hoofdstukken leerstof uit voorgaande delen herhaald. Deze drie hoofdstukken hebben elk een studielast van ongeveer 25 uur. Daarmee komt de totale studielast van de eerste 11 hoofdstukken op ongeveer 275 uur. Er blijft zo tijd over voor hoofdstuk 12 Examentraining.

In hoofdstuk 9 Exponentiële en logaritmische formules is er veel aandacht voor exponentiële groei en de rekenregels voor logaritmen. Ook wordt de verdubbelingstijd en de halveringstijd behandeld en komt het omwerken van formules met exponenten en logaritmen aan de orde. Daarbij worden tevens enkele toepassingen met formules met exponenten en logaritmen aangeboden.

Hoofdstuk 10 Meetkundige berekeningen bevat, naast herhaling van wat eerder in de hoofdstukken Hoeken en afstanden (havo B deel 1 hoofdstuk 3) en Lijnen en cirkels (havo B deel 2 hoofdstuk 7) aan de orde is geweest, ook enkele nieuwe onderwerpen. Zo wordt aandacht besteed aan dwarsverbanden tussen algebra en meetkunde, en analyse en meetkunde. Ook komen afstanden tussen cirkels aan bod. Verder wordt in dit hoofdstuk een begin gemaakt met het ontwikkelen van strategieën.

Hoofdstuk 11 Verbanden en functies bevat naast herhaling enkele niet in de vorige hoofdstukken behandelde onderwerpen, zoals evenredige en omgekeerd evenredige verbanden. Ook wordt het werken met strategieën uitgebouwd.

In hoofdstuk 12 Examentraining is de leerstof onderverdeeld in zeven onderwerpen die elk in een paragraaf aan de orde komen. In deze editie begint elke paragraaf met een of twee opgaven waarin korte vragen staan die betrekking hebben op de leerstof in de paragraaf en die geënt zijn op examenvragen. In de theorie die daarop volgt wordt elk onderwerp kort en bondig herhaald. Daarna volgen passende examenopgaven die gekozen zijn uit de examens van 2016 (pilotexamens) tot en met 2019.

De gemengde opgaven bij hoofdstuk 12 bestaan ook in deze editie uit een flink aantal korte opgaven, die niet gesorteerd staan op onderwerp. Hierin komen alle basisvaardigheden die een leerling voor het examen nodig heeft aan de orde.

Opbouw

De opbouw van de hoofdstukken 9, 10 en 11 is dezelfde als in de delen 1 en 2. Deze hoofdstukken hebben een begin- en eindopdracht en een paragraaf Voorkennis. De oriëntatie-opgaven staan voor elke nieuwe theorie en activeren het denken over een nieuw wiskundig begrip. Ook de reflectie-opgaven spelen een belangrijke rol bij het activeren van een wiskundige denkhouding. Naast de gewone opgaven zijn er nog de afsluitende opgaven en de extra opgaven. De afsluitende opgaven geven het beoogde eindniveau aan. De extra opgaven doorbreken de standaardaanpak en activeren zo het wiskundig denken. Elke paragraaf wordt afgesloten met een Terugblik, aan het eind van elk hoofdstuk staat een Diagnostische toets en achterin het boek staan de Gemengde opgaven.

Drie leerroutes

In deze editie wordt gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen. De basisroute geeft de leerling voldoende oefening om zich alle vaardigheden die bij de eindtermen horen eigen te maken.

In de middenroute worden enkele oefenopgaven overgeslagen en in plaats hiervan maakt de leerling opgaven die dieper op de stof ingaan.

De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder oefenopgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.

In hoofdstuk 12 Examentraining is geen routering aanwezig.

Het schoolexamen en het centraal examen

Het gehele programma van havo wiskunde B wordt centraal geëxamineerd. Het schoolexamen dient in elk geval betrekking te hebben op de domeinen A (Vaardigheden) en D (Toegepaste analyse).

Getal & Ruimte online

Alle opgaven kunnen ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant en klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets. Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

najaar 2020

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

02 Oriëntatie-opgave

   Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 Gewone opgave

   Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 Reflectie-opgave

   In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 Afsluitende opgave

   De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 Extra opgave

   Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute



2 Middenroute



3 Uitdagende route



NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgave zonder route-aanduiding

In de Voorkennis, de Diagnostische toets en de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding. Dit is ook het geval in hoofdstuk 12.

[ **WERKBLAD**] Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

9 Exponentiële en logaritmische formules 6

Beginopdracht CO ₂ -uitstoot in Nederland	8
Voorkennis Exponentiële groei	9
9.1 Groeifactoren en groeipercentsages	11
9.2 Werken met logaritmen	22
9.3 Rekenregels voor logaritmen	29
9.4 Formules omwerken	37
Eindopdracht Stralingsforcering	47
Diagnostische toets	48

10 Meetkundige berekeningen 50

Beginopdracht Afstand tot de horizon	52
Voorkennis Oppervlakte en omtrek	53
10.1 Afstanden en hoeken	55
10.2 Vergelijkingen bij meetkunde	62
10.3 Lijnen en cirkels in een assenstelsel	68
10.4 Cirkels, raaklijnen en functies	74
10.5 Afstanden bij cirkels	84
Eindopdracht Een rechte vlakke weg	89
Diagnostische toets	90

11 Verbanden en functies 92

Beginopdracht De meubelmaker	94
Voorkennis Evenredig en omgekeerd evenredig	95
11.1 Evenredigheden	98
11.2 Standaardgrafieken en transformaties	108
11.3 Tweede- en derdegraadsfuncties	115
11.4 Wortelfuncties	123
11.5 Gebroken functies	128
Eindopdracht Kosten bij de meubelmaker en de blikjesfabriek	137
Diagnostische toets	138

12 Examentraining 140

12.1 Vergelijkingen en ongelijkheden	142
12.2 Werken met formules	153
12.3 Differentiaalrekening	162
12.4 Exponenten en logaritmen	173
12.5 Goniometrie	190
12.6 Meetkunde zonder coördinaten	199
12.7 Meetkunde met coördinaten	206

Gemengde opgaven	213
Overzicht GR-modules	237
Overzicht routes	238
Examenwerkwoorden	241
Trefwoordenregister	242
Verantwoording	243

9

Exponentiële en logaritmische formules

Wat leer je?

- Werken met exponentiële formules.
- Groeipercents omzetten naar een andere tijdseenheid.
- Wat verdubbelingstijd en halveringstijd is.
- De rekenregels voor logaritmen.
- Omwerken van formules met exponenten en logaritmen.
- Werken met assenstelsels waarbij op een of twee assen logaritmen zijn uitgezet.



Beginopdracht CO₂-uitstoot in Nederland

In veel landen wordt steeds minder energie verbruikt in verhouding tot het bruto binnenlands product (bbp). Het bbp is de totale geldwaarde van alle in een land geproduceerde goederen en diensten. We zeggen dan dat de *energie-intensiteit* afneemt. De energie-intensiteit E wordt uitgedrukt in megawattuur (MWh) per 1000 dollar.

De energie-intensiteit neemt in de VS af met 2,1% per jaar. In de Eurozone is deze afname 1,2% per jaar.

Voor Nederland geldt $E = 1,677 \cdot 0,984^t$ met t de tijd in jaren en $t = 0$ in 1990.

Met deze formule kun je berekenen dat E in Nederland in de periode 2000-2020 met ruim 27% is afgenomen.

- Maak deze berekening.
- Licht toe hoe je aan de formule van E kunt zien dat de procentuele afname van E per jaar in Nederland ligt tussen de procentuele afnames van de Eurozone en de VS.

De Nederlandse economie gaat niet alleen zuiniger om met energie, maar stoot ook steeds minder CO₂ uit per eenheid energie. We zeggen dan dat de *CO₂-intensiteit* afneemt.

- Hoe zou het komen dat in Nederland de CO₂-intensiteit afneemt?

De CO₂-intensiteit C wordt uitgedrukt in kg CO₂ per MWh. Zo was de CO₂-intensiteit in Nederland in het jaar 2000 gelijk aan 200 kg CO₂ per MWh. In het jaar 2020 was dat afgenomen tot 188 kg CO₂ per MWh. De CO₂-intensiteit in Nederland kan beschreven worden met de formule

$C = \frac{342}{(t + 30)^{0,146}}$. In deze formule is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1990.

- Met hoeveel procent is de CO₂-intensiteit in Nederland afgenomen in 2020 vergeleken met 1990?

Met de formules van E en C kun je berekenen hoeveel kg CO₂ per 1000 dollar bbp wordt uitgestoten. In het jaar 2000 was dat ongeveer 285.

- Bereken met de formules van E en C hoeveel kg CO₂ per 1000 dollar er in Nederland in het jaar 1990 werd uitgestoten.

De Nederlandse regering heeft zich in 2019 ten doel gesteld om de uitstoot van broeikasgassen in 2030 met 49% te reduceren ten opzichte van 1990. We beperken ons in deze opdracht tot de uitstoot van CO₂. In 1990 was deze uitstoot 163 miljard kg. Met het bbp en de formules van E en C kun je berekenen wat de CO₂-uitstoot zal zijn in 2030.

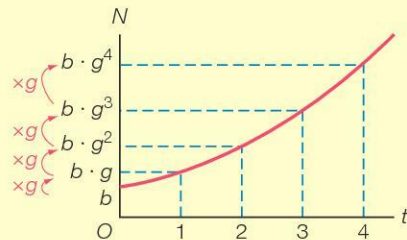
- Onderzoek of de doelstelling van de regering wordt gehaald. Gebruik dat in 2019 het bbp in Nederland 900 miljard dollar was en dat dit jaarlijks met 2% groeit.

Voorkennis Exponentiële groei

Theorie A Exponentiële groei en de groeifactor

Bij *exponentiële groei*

- wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal (de groeifactor) vermenigvuldigd
- hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, waarin b de beginwaarde (of beginhoeveelheid) is en g de groeifactor per tijdseenheid
- neemt de hoeveelheid toe als $g > 1$ en neemt de hoeveelheid af als $0 < g < 1$.



figuur 9.1

In de formule $N = 800 \cdot 1,3^t$ herken je

- de beginhoeveelheid is 800
- de groeifactor is 1,3.

Neemt een hoeveelheid N exponentieel af met groeifactor 0,92 per tijdseenheid en is de beginhoeveelheid 875, dan hoort hierbij de formule $N = 875 \cdot 0,92^t$.

Voor $t = 5$ is $N = 875 \cdot 0,92^5 \approx 577$.

- 1** Een hoeveelheid N wordt elk jaar met 1,05 vermenigvuldigd.

Op $t = 0$, met t in jaren, is $N = 87$.

- Stel de formule op van N als functie van t .
- Bereken N voor $t = 4$.
- Met hoeveel neemt N het tiende jaar toe?

Het tiende jaar loopt van $t = 9$ tot $t = 10$.

- 2** Een hoeveelheid N wordt elk jaar met 0,87 vermenigvuldigd.

Op $t = 0$, met t in jaren, is $N = 725$.

- Stel de formule op van N als functie van t .
- Bereken N voor $t = 5$.
- Met hoeveel neemt N het achtste jaar af?

- 3** Bolivia is een land in Zuid-Amerika. Op 1 januari 2020 had Bolivia 11,48 miljoen inwoners. Dit aantal wordt jaarlijks met 1,015 vermenigvuldigd.

- Stel de formule op van het aantal inwoners N in miljoenen. Neem hierin de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2020.

Gebruik bij de volgende vragen de formule van a.

- Bereken het aantal inwoners op 1 januari 2025.
- Hoeveel inwoners komen er bij in 2030?
- Hoeveel inwoners had Bolivia op 1 januari 2010?

Theorie B Tabellen bij exponentiële groei

De tabel hieronder gaat over de lengte van fietspaden in Nederland.

LENGTE FIETSPADEN IN NEDERLAND

jaar	2000	2005	2010	2015	2020
lengte L in km	20 000	24 000	29 000	35 000	42 000

Om te weten te komen of de tabel bij exponentiële groei hoort, voer je vier delingen uit.

$$\frac{24\,000}{20\,000} = 1,2; \frac{29\,000}{24\,000} \approx 1,21; \frac{35\,000}{29\,000} \approx 1,21; \frac{42\,000}{35\,000} = 1,2.$$

Elke vijf jaar is het aantal km met ongeveer 1,2 vermenigvuldigd. Je mag daarom uitgaan van exponentiële groei met groeifactor 1,2 per vijf jaar. Neem je $t = 0$ in het jaar 2000, dan is de bijbehorende formule $L = 20\,000 \cdot 1,2^t$, met t in vijftallen jaren.

- 4 De tabel hieronder gaat over de omzet van webwinkels in Nederland.

OMZET NEDERLANDSE WEBWINKELS IN MILJARDEN EURO'S

jaar	2014	2015	2016	2017	2018
omzet O	13,84	16,07	18,72	21,65	25,02

- Toon aan dat de tabel bij exponentiële groei hoort.
- Stel de formule op van O . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2014 en rond de groeifactor af op twee decimalen.
- In 2023 heeft Nederland naar verwachting 17,6 miljoen inwoners. Hoeveel zal in dat jaar de omzet van de webwinkels per Nederlander zijn, aangenomen dat de groei van de omzet zich op dezelfde wijze voortzet?

- 5 Een bioloog heeft gedurende een groot aantal jaren onderzoek gedaan naar het aantal kikkers in een waterrijk gebied. Zie de tabel, waarin telkens het aantal kikkers op 1 september is vermeld.

KIKKERS IN WATERRIJK GEBIED

jaar	2000	2004	2008	2012	2016	2020
N	15 000	10 750	7 700	5 500	3 950	2 850

De bioloog veronderstelt exponentiële afname.

- Toon aan dat deze veronderstelling in overeenstemming is met de waarnemingen in de tabel.
- Stel de formule op van N . Neem hierin de tijd t in viertallen jaren met $t = 0$ op 1 september 2000 en geef de groeifactor in twee decimalen.
- Bereken met de formule van b het aantal kikkers op 1 september 2024 en op 1 september 2030. Rond af op tientallen.

9.1 Groeifactoren en groeipercentages



01 Een bedrag B in euro's neemt elk jaar met 5% toe. Op 1 januari 2020 is het bedrag 1000 euro.

- a Hoeveel is het bedrag op 1 januari 2021? En op 1 januari 2025?
- b Bij B hoort een formule van de vorm $B = 1000 \cdot g^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2020. Welk getal is g ?

Theorie A Exponentiële groei en groeipercentages

In opgave 1 neemt het bedrag jaarlijks met 5% toe. Er is sprake van exponentiële groei met een **groeipercentage** van 5% per jaar. Bij een groeipercentage van 5% per jaar hoort een groeifactor van 1,05 per jaar. Immers $100\% + 5\% = 105\%$, dus jaarlijks vermenigvuldigen met 1,05.

Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 1,238 is, dan is het groeipercentage $(1,238 - 1) \cdot 100\% = 23,8\%$ per jaar.

Bij een jaarlijkse afname met 8,6% is de groeifactor 0,914 per jaar, want $100\% - 8,6\% = 91,4\%$, dus jaarlijks vermenigvuldigen met 0,914.

Omgekeerd hoort bij een groeifactor van 0,982 per jaar een procentuele verandering van $-1,8\%$, dus een afname van 1,8% per jaar.

Voorbeeld

Door verdwenen broedgebieden en intensivering van de landbouw zijn er steeds minder kieviten in Nederland.

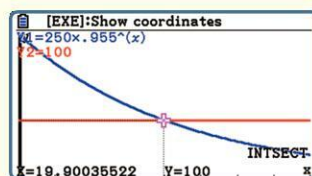
In maart 2000 waren er nog 250 000 broedparen kieviten in Nederland. Sindsdien neemt dat aantal jaarlijks met 4,5% af.

- a Stel de formule op van het aantal broedparen kieviten N in Nederland. Neem N in duizendtallen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in maart 2000.
- b Met hoeveel neemt het aantal broedparen af in de periode maart 2005-maart 2015? Rond af op duizendtallen.
- c In maart van welk jaar waren er voor het eerst minder dan 100 000 broedparen kieviten in Nederland?

Uitwerking

- a $N = b \cdot g^t$ met $b = 250$ en $g = 0,955$ geeft
 $N = 250 \cdot 0,955^t$
- b $t = 5$ geeft $N = 250 \cdot 0,955^5 = 198,5...$
 $t = 15$ geeft $N = 250 \cdot 0,955^{15} = 125,3...$
 $198,5... - 125,3... = 73,2...$, dus de afname is 73 000.
- c Voer in $y_1 = 250 \cdot 0,955^x$ en $y_2 = 100$.
De optie snijpunt geeft $x = 19,90...$
Dus in maart 2020.

4,5% eraf geeft
 $100\% - 4,5\% = 95,5\%$,
dus $\times 0,955$.



R2


Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

- Bij de uitwerking van het voorbeeld zie je een scherm van de GR. Tussen welke waarden van x en y is het venster op dit scherm genomen?
- In welk jaar was het aantal broedparen gehalveerd ten opzichte van het aantal in 2000?

3


- Vul de tabel in.

toename in procenten	13%	3,3%	120%	0,7%				
groefactor					1,12	1,06	2,5	1,237

- Vul de tabel in.

afname in procenten	13%	41,8%	6,2%	0,3%			
groefactor					0,98	0,999	0,246

4


- Een hoeveelheid neemt per jaar met 12,7% toe. Geef de groefactor per jaar.
- Een hoeveelheid neemt per maand met 6,8% af. Geef de groefactor per maand.
- Bij een exponentiële groei is de groefactor 1,735 per maand. Geef het groeipercentage per maand.
- Bij een exponentiële groei is de groefactor 0,845 per dag. Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per dag af?
- Bij een exponentiële groei is de groefactor 2,42 per jaar. Geef het groeipercentage per jaar.
- Een hoeveelheid neemt per dag met 0,7% af. Geef de groefactor per dag.

5


De halsbandparkiet komt van oorsprong niet in Nederland voor. Begin 1990 waren er naar schatting 400 halsbandparkieten in het wild in Nederland en dit aantal is elk jaar met 12% toegenomen.

N is het aantal in het wild voorkomende halsbandparkieten in Nederland.

- Stel de formule op van N . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ begin 1990.
- Hoeveel nam N toe in 2015? Rond af op honderdtallen.
- In welk jaar zijn er naar verwachting voor het eerst meer dan 20 000 halsbandparkieten in het wild in Nederland?



6 In 2014 brak in de Afrikaanse landen Guinee en Liberia ebola uit.

***** Op 22 maart van dat jaar waren er 78 besmettingsgevallen.

In de 237 dagen die volgden nam dit aantal toe met 2,3% per dag.

- a** Stel voor deze periode de formule op van het aantal besmettingsgevallen B . Neem de tijd t in dagen met $t = 0$ op 22 maart 2014.
- b** Bereken hoeveel dagen na 22 maart er voor het eerst meer dan 10000 mensen besmet waren.

Na 7 maanden nam de groei van het aantal besmettingsgevallen af doordat maatregelen waren genomen om het virus in te dammen.

Vanaf $t = 237$, met t in dagen en $t = 0$ op

22 maart 2014, geldt de formule

$$B = 700\sqrt{t - 233} + 15\,685.$$

Neem aan dat het aantal besmettingsgevallen exponentieel was blijven groeien als er geen maatregelen zouden zijn getroffen.

- c** Bereken hoeveel besmettingsgevallen er 500 dagen na 22 maart zijn voorkomen door de maatregelen.



7 De productie van zonne-energie in Nederland neemt toe.



Op 1 januari 2012 was het totale vermogen zonne-energie in Nederland 290 megawatt (MW). Per jaar neemt dat met 40% toe.

- a** Stel de formule op van het vermogen zonne-energie V_z in Nederland. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2012 en V_z in MW.

Op 1 januari 2012 was het totale vermogen windenergie in Nederland 2430 MW. Dat vermogen neemt jaarlijks met 310 MW toe.

Hieruit volgt dat de formule van het vermogen windenergie in Nederland van de vorm $V_w = at + b$ is, met t de tijd in jaren en V_w in MW.

- b** Licht dit toe, en stel de formule van V_w op. Neem $t = 0$ op 1 januari 2012.
- c** Bereken in welk jaar op 1 januari het totale vermogen aan zonne-energie voor het eerst meer dan twee keer zo groot is als het totale vermogen aan windenergie.

A8



Op 1 januari 2020 hadden de Verenigde Staten 333,5 miljoen inwoners.

Dit aantal neemt naar verwachting jaarlijks met 1,8 miljoen toe.

De bevolking van Rusland neemt juist af. Op 1 januari 2020 had Rusland 142,9 miljoen inwoners en dit aantal neemt naar verwachting jaarlijks met 0,4% af.

Bereken op basis van deze gegevens in welk jaar naar verwachting de Verenigde Staten drie keer zoveel inwoners hebben als Rusland.

E9



Op $t = 0$ zijn er in een vijver twee keer zoveel salamanders als kikkers.

Het aantal kikkers neemt per jaar met 6% toe en het aantal salamanders neemt per jaar met 6% af.

Bereken na hoeveel jaar er evenveel kikkers als salamanders in de vijver zijn. Rond af op één decimaal.

O10



Bij een exponentiële groei is de groeifactor per jaar gelijk aan 9.

De beginwaarde is 2.

a Vul de tabel in.

tijd in jaren	0	1	2	3	4
hoeveelheid N	2	18	162		

b Met welk getal wordt N per twee jaar vermenigvuldigd?

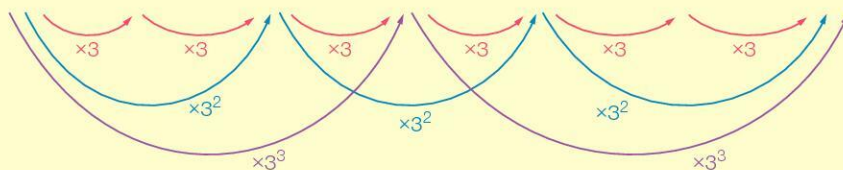
c Wordt N per halfjaar met meer of minder dan 4,5 vermenigvuldigd? Licht toe.

Theorie B Groeipercentsages omzetten naar een andere tijdseenheid

Een hoeveelheid groeit exponentieel met beginwaarde 100 en groeifactor 3 per uur.

EXPONENTIËLE GROEI

t	0	1	2	3	4	5	6
N	100	$100 \cdot 3^1$ = 300	$100 \cdot 3^2$ = 900	$100 \cdot 3^3$ = 2700	$100 \cdot 3^4$ = 8100	$100 \cdot 3^5$ = 24 300	$100 \cdot 3^6$ = 72 900



Je ziet per 2 uur is de groeifactor 3^2

per 3 uur is de groeifactor 3^3

⋮

per n uur is de groeifactor 3^n

Deze regel geldt ook voor niet-gehele waarden van n .

Zo geldt dat per kwartier de groeifactor $3^{\frac{1}{4}} \approx 1,316$ is,

immers $g_{\text{kwartier}} = 3^{\frac{1}{4}}$ geeft $g_{\text{uur}} = (3^{\frac{1}{4}})^4 = 3$

en per tien minuten is de groeifactor $3^{\frac{1}{6}} \approx 1,201$,

immers $g_{10 \text{ minuten}} = 3^{\frac{1}{6}}$ geeft $g_{\text{uur}} = (3^{\frac{1}{6}})^6 = 3$.

NORM DRIJF AUTO REEL RAD MN	
$3^{1/4}$	1.316074013
$3^{1/6}$	1.200936955

Bij exponentiële groei met groeifactor g per tijdseenheid is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Heb je te maken met een exponentiële groei met een groeifactor van 0,6 per dag, dan is

- de groeifactor per week $0,6^7 \approx 0,028$
- de groeifactor per uur $0,6^{\frac{1}{24}} \approx 0,979$
- de groeifactor per acht uur $0,6^{\frac{1}{3}} \approx 0,843$.

Om te berekenen wat het groeipercentage per dag is bij een toename van 70% per week, ga je als volgt te werk.

$$g_{\text{week}} = 1,70$$

$$g_{\text{dag}} = 1,70^{\frac{1}{7}} \approx 1,079$$

Het groeipercentage per dag is 7,9%.

NORM DRIJF AUTO REËEL RAD WN	
$\cdot 6^7$	0.0279936
$\cdot 6^{1/24}$	0.9789405133
$\cdot 6^{1/3}$	0.8434326653

Bij exponentiële groei gaat het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid via groeifactoren.

Voorbeeld

Een hoeveelheid neemt per zes uur met 18% toe.

- Hoeveel procent is de toename per dag?
- Hoeveel procent is de toename per uur?

Uitwerking

$$\text{a } g_{6 \text{ uur}} = 1,18$$

$$g_{\text{dag}} = 1,18^4 \approx 1,939$$

De toename is 93,9% per dag.

$$\text{b } g_{6 \text{ uur}} = 1,18$$

$$g_{\text{uur}} = 1,18^{\frac{1}{6}} \approx 1,028$$

De toename is 2,8% per uur.

- 1 Eerst de groeifactor per 6 uur.
- 2 Dan de groeifactor per dag.
- 3 Ten slotte het groeipercentage per dag.

11 Een hoeveelheid neemt per kwartier met 12% toe.



- Hoeveel procent is de toename per uur?
- Hoeveel is de procentuele toename per vijf minuten?
- Hoeveel procent is de toename per vijf uur?
Rond af op gehele.

Rond percentages af op één decimaal en rond groeifactoren af op drie decimalen, tenzij anders gevraagd.

12 Bij een exponentiële groei hoort een groeifactor van 1,3 per dag.



- Bereken het groeipercentage per week. Rond af op gehele.
- Bereken het groeipercentage per vier uur.

13 Een hoeveelheid neemt per dag met 16% af.



- Bereken de groeifactor per week.
- Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per uur af?
- Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per kwartier af?
Rond af op twee decimalen.

14
☐ ⊙ *

- a** Een hoeveelheid neemt per uur met 19,5% af.
Hoeveel procent is de afname per kwartier?
- b** Een hoeveelheid neemt per jaar met 8,6% toe.
Hoeveel procent is de toename per 25 jaar? Rond af op gehele.
- c** Een hoeveelheid neemt per week met 180% toe.
Bereken de groeifactor per dag.

R15
☐ ⊙ *

De volgende uitspraken zijn onjuist. Verbeter ze.

- a** Bij een toename van 5% per dag hoort een toename van $7 \times 5\%$ per week.
- b** Bij een groeifactor van 1,5 per dag hoort een groeifactor van $7 \times 1,5$ per week.
- c** Bij een afname van 20% per uur hoort een afname van $\frac{1}{4} \times 20\%$ per kwartier.
- d** Bij een groeifactor van 0,7 per uur hoort een groeifactor van $0,25 \times 0,7$ per kwartier.

A16
☐ ⊙ *

Ga bij de volgende vragen uit van exponentiële groei.

- a** Het beleid van de regering is erop gericht om de hoeveelheid opgewekte energie door particulieren met zonnecellen elke drie jaar met factor 2,5 te vermenigvuldigen.
Bereken het groeipercentage per jaar.
- b** In 2020 werd in Nederland twee keer zoveel elektriciteit door windmolens op land geproduceerd als in 2015.
Bereken het groeipercentage per jaar.
- c** Het aantal muziekwinkels in Nederland is in 12 jaar tijd met 22% afgenomen.
Hoeveel procent is de afname per jaar?

17
☐ ⊙ *

Een hoeveelheid N groeit exponentieel. Op $t = 0$ is $N = 500$ en elke vier jaar wordt N drie keer zo groot. De bijbehorende formule is $N = 500 \cdot 1,32^t$. Hierin is t de tijd in jaren en is de groeifactor afgerond op twee decimalen.

- a** Geef de formule van N waarbij de groeifactor is afgerond op drie decimalen.

Een hoeveelheid M groeit exponentieel. Op $t = 2$ is $M = 800$ en op $t = 5$ is $M = 1000$ met t de tijd in jaren. De formule is van de vorm $M = b \cdot g^t$ met t de tijd in jaren.

- b** Toon aan dat $g_{3 \text{ jaar}} = 1,25$ en dat $g = 1,077\dots$
- c** Licht toe dat geldt $b \cdot 1,077\dots^2 = 800$ en bereken b . Rond af tientallen.
- d** Geef de formule van M met b in tientallen en g in drie decimalen.

18
☐ ⊙

- a** Een hoeveelheid N groeit exponentieel. Op $t = 4$ is $N = 1500$ en op $t = 10$ is $N = 4500$. Hierbij is t de tijd in maanden.
Stel de formule op van N . Rond de beginwaarde af op tientallen en de groeifactor op drie decimalen.
- b** Een hoeveelheid A neemt exponentieel af.
Op $t = 6$ is $A = 8550$ en op $t = 15$ is $A = 7520$.
Hierbij is t de tijd in jaren.
Stel de formule op van A .
- c** Een hoeveelheid M neemt exponentieel toe.
Op $t = 0$ is $M = 75$ en elke 10 jaar wordt M drie keer zo groot.
Stel de formule op van M . Neem t de tijd in jaren.

Geef de beginwaarde in dezelfde nauwkeurigheid als de gegevens en de groeifactor in drie decimalen, tenzij anders vermeld.

19
☐ ⊙ *

- De luchtdruk neemt af met de hoogte. Er is een exponentieel verband tussen de luchtdruk en de hoogte. De bijbehorende formule is van de vorm $P = b \cdot g^h$. Hierin is P de luchtdruk in hPa en h de hoogte in km. Op 2 km hoogte is de luchtdruk 800 hPa en op 5 km hoogte is de luchtdruk 555 hPa.
- a** Stel de formule op van P .
- b** Een expeditie heeft op een hoogte van 7500 meter een kamp opgeslagen op de Mount Everest.
Bereken de luchtdruk op die hoogte.

A20
☐ ⊙ *

In de wereld wordt steeds meer plastic geproduceerd. De hoeveelheid jaarlijks geproduceerd plastic neemt al vanaf de jaren 70 van de vorige eeuw exponentieel toe. In 1970 werd 44 miljard kg geproduceerd en in 2009 was dat toegenomen tot 250 miljard kg.

Een deel van het plastic komt als afval in de oceaan terecht waar het mede onder invloed van de zon uiteenvalt in zeer kleine deeltjes, het zogenaamde microplastic.

Onderzoekers bestuderen hoeveel van dit microplastic neerdaalt op de bodem van de oceaan. In deze bodem kan men lagen onderscheiden. Elke laag hoort bij een jaar. In de bodem nabij de kust van Californië vond men in de laag die bij 1972 hoort 6 deeltjes microplastic per 100 cm^2 . In de laag van 1994 vond men 17 deeltjes per 100 cm^2 . Neem aan dat de toename exponentieel is.

Onderzoek of de hoeveelheid microplastic in de lagen van de bodem met hetzelfde percentage per jaar toeneemt als de wereldwijde productie van plastic.

A21
☐ *

Bij het helen van een wond blijkt de wondoppervlakte de eerste week exponentieel af te nemen.

De oppervlakte A van een wond was na drie dagen 31 mm^2 en na een week 11 mm^2 .

Wat was de oppervlakte van de wond na 60 uur?

Het aantal inwoners van Senegal wordt gegeven door de formule $N = 17,0 \cdot 1,031^t$. Hierin is N in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2019.

- a Na hoeveel jaar is het aantal inwoners verdubbeld ten opzichte van 1 januari 2019?
- b Op 1 januari 2010 had Senegal 12,9 miljoen inwoners. Hoeveel jaar na 1 januari 2010 is dit aantal verdubbeld? Ga uit van een groeipercentage van 3,1% per jaar.



Theorie C Verdubbelingstijd en halveringstijd

De groei van een bevolking wordt vaak gegeven met een groeipercentage. De sterkte van de groei is hiermee niet voor iedereen goed in te schatten. Met de **verdubbelingstijd** krijg je een betere indruk van de groei.

Bij een groei van 3,5% per jaar bereken je de verdubbelingstijd T door de vergelijking $1,035^T = 2$ op te lossen.

Voer in $y_1 = 1,035^x$ en $y_2 = 2$. De optie snijpunt geeft $x \approx 20,1$.

Dus bij een groei van 3,5% per jaar is de verdubbelingstijd iets meer dan 20 jaar.

$$b \cdot g^T = 2b$$

$$g^T = 2$$

Dus de verdubbelingstijd is onafhankelijk van b .

De verdubbelingstijd is de tijd waarin een hoeveelheid verdubbelt bij exponentiële groei.

Bij groeifactor g bereken je de verdubbelingstijd T door de vergelijking $g^T = 2$ op te lossen.

Bij exponentiële afname is het begrip **halveringstijd** van belang.

De halveringstijd is de tijd waarin de hoeveelheid gehalveerd wordt.

Bij groeifactor g bereken je de halveringstijd T door de vergelijking $g^T = \frac{1}{2}$ op te lossen.

De halveringstijd is de tijd waarin een hoeveelheid halveert bij exponentiële groei.

Bij groeifactor g bereken je de halveringstijd T door de vergelijking $g^T = \frac{1}{2}$ op te lossen.

Voorbeeld

- a** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 12% af.
Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.
- b** Van een hoeveelheid is de halveringstijd 15 jaar.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per jaar afneemt.

Uitwerking

- a** $g_{\text{jaar}} = 0,88$, dus los op $0,88^T = \frac{1}{2}$.
Voer in $y_1 = 0,88^x$ en $y_2 = \frac{1}{2}$.
De optie snijpunt geeft $x = 5,42\dots$
De halveringstijd is 5 jaar en
 $0,42\dots \times 12 \approx 5$ maanden.
- b** Er geldt $g^{15} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{15} = \frac{1}{2}$ geeft $g = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{15}} \approx 0,955$
De afname is 4,5% per jaar.

5,42... jaar =
 $5,42\dots \times 12$ maanden $\approx$
65 maanden is ook goed.

23



- a** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 13,1% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- b** Een hoeveelheid verdubbelt elke 25 jaar.
Bereken het groeipercentage per jaar.
- c** Een hoeveelheid neemt wekelijks met 8,5% af.
Bereken de halveringstijd in dagen nauwkeurig.
- d** De radioactieve stof strontium-90 heeft een halveringstijd van 28 jaar.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid radioactieve stof per jaar afneemt.

24



- a** De bevolking van Oeganda neemt jaarlijks met 3,25% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.
- b** De bevolking van Japan neemt naar verwachting elke tien jaar met 5,8% af.
Bereken de halveringstijd in jaren nauwkeurig.

25



- De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie.
De hoeveelheid radioactieve stof neemt met 8,3% per dag af.
- a** Bereken de halveringstijd.
 - b** Na hoeveel dagen is nog 10% van de beginhoeveelheid over?

26



- Uit een onderzoek in opdracht van Natuurmonumenten uit 2018 blijkt dat het aantal loopkevers in een natuurgebied in Drenthe dramatisch is afgenomen. De onderzoekers vonden een halveringstijd van 12 jaar.
Uit een onderzoek in Duitsland uit 2017 blijkt dat in 27 jaar 76% van de insecten is verdwenen.
Onderzoek of deze twee resultaten met elkaar in lijn zijn. Ga uit van een exponentiële afname.

A27
 *

Begin 2020 breidde het coronavirus zich razendsnel uit in China. In de tabel hiernaast staat de procentuele groei van het aantal besmettingsgevallen ten opzichte van de vorige dag. Uit de tabel blijkt dat 6 dagen na 22 januari het aantal besmettingsgevallen voor het eerst meer dan 10 keer zo veel was als op 22 januari.

- Toon dit aan met een berekening.
- Leg uit waarom je bij deze tabel geen verdubbelingstijd kunt berekenen.

Een vertienvoudiging in 6 dagen is ook mogelijk als een hoeveelheid met een vast percentage per dag toeneemt.

- Bereken op algebraïsche wijze dit groeipercentage.
- Wat is bij dit groeipercentage de verdubbelingstijd?
Geef je antwoord in uren nauwkeurig.

datum	groei
23 jan	46%
24 jan	56%
25 jan	53%
26 jan	39%
27 jan	64%
28 jan	32%
29 jan	29%
30 jan	26%
31 jan	22%

A28
 *

Alle organismen nemen in de loop van hun leven koolstof-14 op. Als het organisme sterft, stopt die opname en neemt de hoeveelheid koolstof-14 af. Door te meten hoeveel koolstof-14 er na verloop van tijd nog over is, kun je berekenen hoeveel jaar geleden het organisme is gestorven. Hierbij wordt gebruikt dat koolstof-14 radioactief is. Hoe ouder het materiaal, hoe minder radioactief koolstof-14 er is. Dit proces wordt beschreven door de formule $N = 12,5 \cdot 0,999879^t$, met N de radioactiviteit van koolstof-14 in cpm (counts per minute) per gram en t de tijd in jaren nadat het organisme is gestorven.

- Bereken de halveringstijd van koolstof-14 in jaren. Rond af op tientallen.
- Van een stuk hout van een doodskest is bekend dat het 3000 jaar oud is.
Bereken de radioactiviteit van de koolstof-14 in dit hout.

Is de ouderdom van organisch materiaal bekend, dan heeft een wetenschapper de mogelijkheid om de koolstof-14-datering op juistheid te controleren. Zo'n controle kan bijvoorbeeld worden uitgevoerd op stoffelijke resten die op een voormalig slagveld worden gevonden. Een mooi voorbeeld hiervan is de slag bij Trasimeno in Italië. In het jaar 217 voor Christus, in de ochtend van 24 juni, vernietigde het leger van Hannibal een Romeins leger van 25 000 man.

Een wetenschapper onderzocht op 24 juni 2006 de botten van een gesneuvelde Romeinse soldaat. Hij vond in de botten nog 77,3% van de oorspronkelijke hoeveelheid radioactieve koolstof.

- Hoeveel jaar afwijking levert dit meetresultaat op met de werkelijkheid?

Terugblik

Groeipercentage en groeifactor

Bij een groeipercentage van 5,8% hoort de groeifactor 1,058.

Bij een afname van 3,2% hoort de groeifactor 0,968.

Bij de groeifactor 2,42 hoort een groeipercentage van 142%.

Bij de groeifactor 0,42 hoort een afname van 58%.

Neemt een hoeveelheid N vanaf 2020 jaarlijks met 1,8% af en is N in 2020 gelijk aan 1640, dan hoort hierbij de formule $N = 1640 \cdot 0,982^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2020.

Groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid

Is g de groeifactor per tijdseenheid, dan is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n . Deze regel geldt ook voor niet-gehele waarden van n . Zo hoort bij een groeifactor van 1,8 per uur een groeifactor van $1,8^{\frac{1}{4}} \approx 1,158$ per kwartier.

Het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid gaat via groeifactoren. Is de afname per dag 20%, dan is de groeifactor per dag gelijk aan 0,8 en

- de groeifactor per week $0,8^7 \approx 0,210$, dus de afname per week is 79,0%
- de groeifactor per uur $0,8^{\frac{1}{24}} \approx 0,991$, dus de afname per uur is 0,9%.

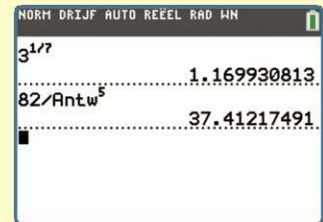
Weet je bij een exponentiële groei op twee tijdstippen de hoeveelheid, dan kun je de formule opstellen.

Is $N = 82$ voor $t = 5$ uur en is $N = 246$ voor $t = 12$ uur,

dan is $g_{7\text{uur}} = \frac{246}{82} = 3$, dus $g_{\text{uur}} = 3^{\frac{1}{7}} = 1,1699\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,1699\dots^t \\ t = 5 \text{ en } N = 82 \end{array} \right\} b \cdot 1,1699\dots^5 = 82$$
$$b = \frac{82}{1,1699\dots^5} \approx 37$$

Dus $N = 37 \cdot 1,170^t$.



Verdubbelingstijd en halveringstijd

De verdubbelingstijd T is de tijd die verloopt totdat de hoeveelheid verdubbeld is bij exponentiële groei. Bij groeifactor g bereken je deze verdubbelingstijd door de vergelijking $g^T = 2$ op te lossen.

Is $g = 1,073$ per jaar, dan voer je in $y_1 = 1,073^x$ en $y_2 = 2$. Met de optie snijpunt vind je $x = 9,83\dots$, dus de verdubbelingstijd is 9 jaar en $0,83\dots \times 12 \approx 10$ maanden.

De halveringstijd T bij groeifactor g is de tijd die verloopt totdat de hoeveelheid gehalveerd is en bereken je door de vergelijking $g^T = \frac{1}{2}$ op te lossen.

9.2 Werken met logaritmen

029 Je weet ${}^2\log(32) = 5$, want $2^5 = 32$ en ${}^3\log(\frac{1}{9}) = -2$, want $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

 Vul in.

- a ${}^2\log(16) = \dots$
- b ${}^3\log(81) = \dots$
- c ${}^5\log(\frac{1}{25}) = \dots$
- d ${}^6\log(1) = \dots$

030 Vul in.



- a ${}^2\log(\dots) = 3$
- b ${}^3\log(\dots) = 2$
- c ${}^5\log(\dots) = -1$
- d ${}^6\log(\dots) = \frac{1}{2}$

Theorie A Logaritmen en vergelijkingen

${}^2\log(32)$ is de exponent van een macht met grondtal 2 waarmee de macht gelijk is aan 32. Omdat $32 = 2^5$, is ${}^2\log(32) = 5$.

En zo is ${}^5\log(\frac{1}{125}) = -3$, want $5^{-3} = \frac{1}{125}$.

De oplossing van de vergelijking ${}^3\log(x) = 4$ is $x = 3^4$.

Immers ${}^3\log(3^4) = 4$.

En zo is van ${}^6\log(x) = -2$ de oplossing $x = 6^{-2} = \frac{1}{36}$.

Uit ${}^s\log(x) = y$ volgt $x = g^y$.

Met deze regel kun je vergelijkingen zoals ${}^3\log(2x - 5) = 0$ oplossen.

Je krijgt $2x - 5 = 3^0$

$$2x - 5 = 1$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Omdat uit ${}^s\log(x) = y$ volgt $x = g^y$, volgt uit ${}^2\log(30) = x$ dat $2^x = 30$.

Omgekeerd volgt uit $2^x = 30$ dat $x = {}^2\log(30)$.

Daarmee is de vergelijking $2^x = 30$ exact opgelost.

Exact oplossen van $g^x = a$ geeft $x = {}^s\log(a)$.

De regel ${}^s\log(g^a) = a$

$${}^3\log(9) = {}^3\log(3^2) = 2$$

$${}^6\log(\frac{1}{6}) = {}^6\log(6^{-1}) = -1$$

$$\frac{1}{2}\log(1) = \frac{1}{2}\log((\frac{1}{2})^0) = 0$$

Voorbeeld

Los exact op.

a ${}^2\log(3x) + 5 = 8$

b $5 + 2^{3x} = 25$

Uitwerking

a ${}^2\log(3x) + 5 = 8$

$${}^2\log(3x) = 3$$

$$3x = 2^3$$

$$3x = 8$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

b $5 + 2^{3x} = 25$

$$2^{3x} = 20$$

$$3x = {}^2\log(20)$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(20)$$

Bij sommige exponentiële vergelijkingen kun je toewerken naar de vorm

$g^A = g^B$ en dit geeft $A = B$.

Bij $5 \cdot 3^{2x-1} = 135$ krijg je $3^{2x-1} = 27$

$$3^{2x-1} = 3^3$$

$$2x - 1 = 3$$

$$x = 2$$

31 Los exact op.



a ${}^3\log(x-1) = 5$

b $5 + {}^5\log(x+3) = 7$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log(3x+4) = -2$

d $4 - 2 \cdot {}^3\log(x) = 3$

32 Los exact op.



a $3^{x-1} = 5$

b $4^x + 3 = 21$

c $5 + 4^{-x} = 17$

d $6 - 5^{3+x} = 1$

33 Los exact op.



a ${}^2\log(3x+7) = 4$

b $7 + 2^{x-3} = 10$

c $3 + {}^2\log(5 - 1\frac{1}{2}x) = 0$

d $3 \cdot 5^{2x+1} = 75$

e $9 \cdot 3^x = 3^{2x-3}$

f $2^{3x+1} = 4^{2x}$

A34 Los exact op.



a $2^{\frac{1}{2}x+1} + 3 = 5$

b ${}^3\log(2x-4) + 6 = 9$

c $1 - {}^4\log(2(x+1)) = -2$

d $3 + 2^{0,4x} = 12$

e ${}^2\log(x^2 - 6x + 12) - 5 = -3$

f $2 \cdot 5^{0,2x+3} = 34$

O35



a Je kunt bij de formule $y = 3^{x-1}$ de variabele x vrijmaken.

Je krijgt $x = 1 + {}^3\log(y)$.

Onderzoek hoe dit gaat.

b Je kunt bij de formule $y = {}^2\log(x-5)$ de variabele x vrijmaken.

Je krijgt $x = 2^y + 5$.

Onderzoek hoe dat gaat.

Theorie B Variabelen vrijmaken bij exponentiële en logaritmische formules

Je kunt bij de formule $Q = 6 - 2^x$ de variabele x vrijmaken.

Je gebruikt daarbij de regel $g^x = a$ geeft $x = {}^g\log(a)$.

Je krijgt $Q = 6 - 2^x$

$$2^x = 6 - Q$$

Gebruik $g^x = a$ geeft $x = {}^g\log(a)$.

$$x = {}^2\log(6 - Q)$$

Je kunt bij de formule $P = 5 + {}^2\log(n)$ de variabele n vrijmaken.

Je gebruikt daarbij de regel ${}^s\log(x) = y$ geeft $x = g^y$.

Je krijgt $P = 5 + {}^2\log(n)$

Verwissel linker- en rechterlid.

$$5 + {}^2\log(n) = P$$

$${}^2\log(n) = P - 5$$

Gebruik ${}^s\log(x) = y$ geeft $x = g^y$.

$$n = 2^{P-5}$$

Voorbeeld

a Druk x uit in y bij de formule $y = 8 + 3^{2x-1}$.

b Schrijf t als functie van N bij de formule $N = {}^2\log(5t + 3) - 4$.

Uitwerking

a $y = 8 + 3^{2x-1}$

$$3^{2x-1} = y - 8$$

$$2x - 1 = {}^3\log(y - 8)$$

$$2x = 1 + {}^3\log(y - 8)$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(y - 8)$$

b $N = {}^2\log(5t + 3) - 4$

$${}^2\log(5t + 3) = N + 4$$

$$5t + 3 = 2^{N+4}$$

$$5t = -3 + 2^{N+4}$$

$$t = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot 2^{N+4}$$

R36



In het voorbeeld zijn de regels $g^x = a$ geeft $x = {}^g\log(a)$ en

${}^s\log(x) = y$ geeft $x = g^y$ gebruikt.

Geef aan bij welke stappen.

37



Maak x vrij bij de volgende formules.

a $y = 2^{3x-4}$

c $y = 2 \cdot 5^{0,1x}$

b $y = 8 + 3^{x-2}$

d $y = 20 + 5 \cdot 3^{0,4x}$

38



Druk x uit in y bij de volgende formules.

a $y = {}^3\log(x) + 2$

c $y = {}^5\log(2x + 1)$

b $y = \frac{1}{5} \cdot {}^2\log(3x)$

d $y = 2 \cdot \frac{1}{3}\log(5 - 3x) - 1$

A39 Schrijf t als functie van N bij de volgende formules.



- a $N = 10 \cdot 5^{3t-1}$
- b $N = {}^3\log(2t+1) - 6$
- c $N = 100 + 2^{0,2t-1}$
- d $N = 4 - \frac{2}{3} \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(2(t+3))$

A40 a Maak B vrij bij de formule $A = 500 - 50 \cdot 1,75^{B-2,5}$.



- * b Druk S uit in C bij de formule $C = 20 + 0,4 \cdot {}^3\log(2 - 8S)$.
- c Herleid de formule $N = 50 \cdot 2^{4t-1}$ tot de vorm $t = a + b \cdot {}^4\log(cN)$.
- d De formule $y = 3 - {}^2\log(4x - 1)$ is om te werken tot de vorm $x = a + b \cdot g^y$.
Bereken a , b en g .

O41 a Los de vergelijking $3^x = 8$ op met de optie snijpunt van de GR. Rond af op drie decimalen.



- b Licht toe dat je in vraag a een benadering van ${}^3\log(8)$ hebt gevonden.

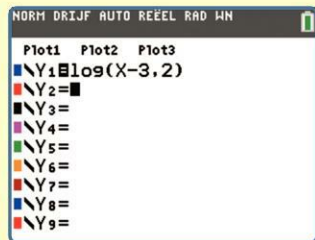
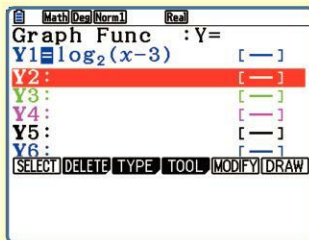
Theorie C Logaritmen met grondtal 10

Het is gebruikelijk om bij ${}^{10}\log$ het grondtal 10 niet te noteren. Dus $\log(10000) = \log(10^4) = 4$ en $\log(\frac{1}{100}) = \log(10^{-2}) = -2$.

De GR heeft een toets $\log$ (TI en Casio) of LOG (HP) waarbij grondtal 10 hoort. Hiermee kun je logaritmen met grondtal 10 berekenen. Zo krijg je bijvoorbeeld $\log(500) \approx 2,699$ en $\log(0,65) \approx -0,187$.

Bij de TI en HP kun je met deze toets ook logaritmen met een ander grondtal berekenen. Voor het berekenen van ${}^3\log(8)$ tik je in $\log(8, 3)$. Bij de Casio gebruik je de optie $\logab$ uit het OPTN-CALC-menu. Je krijgt ${}^3\log(8) \approx 1,893$. Het op deze manier benaderen van logaritmen gaat een stuk sneller dan zoals je in opgave 41 hebt gedaan.

Tevens kun je zo formules met logaritmen op de GR invoeren. De formule $y = {}^2\log(x - 3)$ voer je op de TI en op de HP in als $y_1 = \log(x - 3, 2)$ en op de Casio als $y_1 = \log_2(x - 3)$.



42 Bereken. Rond af op twee decimalen.



a ${}^3\log(5)$

c ${}^2\log(20) - {}^2\log(6)$

e $3 \cdot {}^2\log(7)$

b ${}^{\frac{1}{2}}\log(18)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(10) + \log(\frac{1}{3})$

f $\frac{5}{{}^4\log(12)}$

43 Rond zo nodig af op twee decimalen.



a Gegeven is de formule $N = \log(t) + 150$.
Bereken N voor $t = 30$.

b Gegeven is de formule $P = 11,8 - \frac{120}{{}^5\log(a)}$.
Bereken P voor $a = 12$.

c Gegeven is de formule $\log(K) = 0,25q - 30$.
Bereken q voor $K = 5 \cdot 10^{16}$.

d Gegeven is de formule $L = \log(M) + 3 \cdot \log(T) + 11$.
Neem $L = 12,4$ en $M = 100$ en bereken T .

A44



Volgens een veelgebruikte vuistregel geldt dat de hondenleeftijd keer zeven gelijk is aan de mensenleeftijd. Uit deze vuistregel volgt bijvoorbeeld dat een hondenleeftijd van 2 jaar vergelijkbaar is met een mensenleeftijd van 14 jaar. Uit onderzoek naar het DNA van honden en mensen blijkt dat deze regel niet klopt. Een betere benadering van de mensenleeftijd van een hond krijg je met de formule $m = 37 \cdot \log(h) + 31$ met $h > 0,5$. Hierin is h de hondenleeftijd en m de mensenleeftijd, beide in jaren.

a De oudste hond ooit was 29 jaar oud.

Bereken met de formule de mensenleeftijd die hierbij hoort.

b Bereken vanaf welke waarde van h de formule lagere mensenleeftijden geeft dan de vuistregel. Rond af op gehele.

De formule $m = 37 \cdot \log(h) + 31$ kan bij benadering worden geschreven als $h = 10^{0,027m - 0,838}$.

c Toon dit aan.

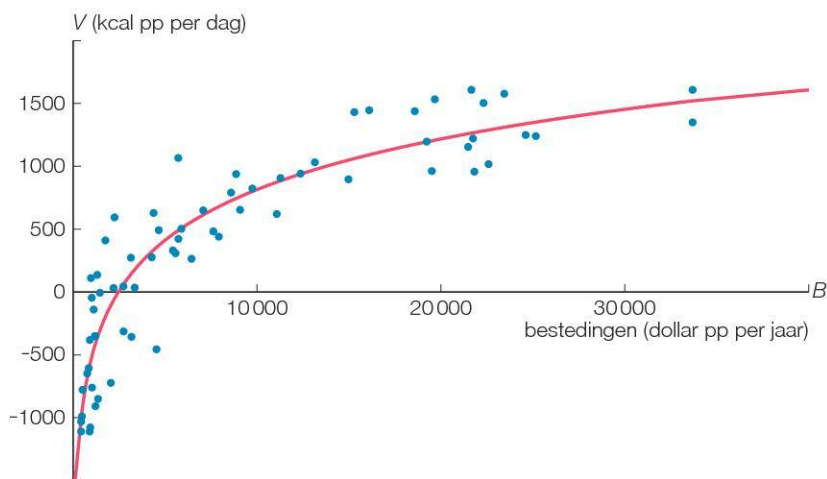
d Welke hondenleeftijd correspondeert volgens deze formule met een mensenleeftijd van 75 jaar? Rond af op gehele.



Hoe meer mensen te besteden hebben in een land, hoe meer voedsel ze verspillen.

In de figuur hieronder zie je voor een aantal landen wat de bestedingen zijn en wat de voedselverspilling is voor een bepaald jaar. Elk punt stelt een land voor.

In de figuur is ook de grafiek getekend die zo goed mogelijk bij de punten past. De formule bij deze grafiek is $V = 1339 \cdot \log(B) - 4539$. Hierin is V de voedselverspilling in kcal per persoon per dag in een land en B de bestedingen in dollar per persoon per jaar in het land.



figuur 9.2 Bron: PLOS ONE (2020)

- a In Estland zijn de bestedingen per persoon per jaar 11 275 dollar, terwijl er per persoon per dag 907 kcal voedsel verspild wordt. Hoeveel meer verspilling is dit dan volgens de formule verwacht mag worden?
- b In Nederland zijn de bestedingen 22 591 dollar per persoon per jaar en is de voedselverspilling 1017 kcal per persoon per dag. Bereken of Nederland zuiniger met voedsel omgaat dan op basis van de formule verwacht mag worden.

Neem aan dat een mens per dag gemiddeld 2600 kcal energie nodig heeft. Als mensen meer voedsel kopen dan ze op basis van deze aanname nodig hebben, noemen we dat verspilling.

- c In Zimbabwe is de voedselverspilling -1000 kcal per persoon per dag. Leg uit wat de betekenis is van deze waarde.
- d Bereken algebraïsch bij welke bestedingen in een land de voedselverspilling gelijk is aan 0.
- e Voor India is V gelijk aan 0. Leg uit waarom dit niet betekent dat niemand in India voedsel verspilt.

Terugblik

Logaritmen bij vergelijkingen

De vergelijking ${}^2\log(4x - 5) = 3$ los je exact op met de regel

${}^g\log(x) = y$ geeft $x = g^y$.

De vergelijking $2^{4x-5} = 3$ los je exact op met de regel

$g^x = a$ geeft $x = {}^g\log(a)$.

$${}^2\log(4x - 5) = 3$$

$$4x - 5 = 8$$

$$4x = 13$$

$$x = 3\frac{1}{4}$$

$$2^{4x-5} = 3$$

$$4x - 5 = {}^2\log(3)$$

$$4x = 5 + {}^2\log(3)$$

$$x = 1\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot {}^2\log(3)$$

Variabelen vrijmaken

Je kunt de regels ${}^g\log(x) = y$ geeft $x = g^y$ en $g^x = a$ geeft $x = {}^g\log(a)$ ook gebruiken om variabelen vrij te maken bij formules zoals $y = 5 + 2^{x-3}$ en $N = -3 + {}^2\log(x - 4)$.

$$y = 5 + 2^{x-3}$$

$$2^{x-3} = y - 5$$

$$x - 3 = {}^2\log(y - 5)$$

$$x = 3 + {}^2\log(y - 5)$$

$$N = -3 + {}^2\log(x - 4)$$

$${}^2\log(x - 4) = N + 3$$

$$x - 4 = 2^{N+3}$$

$$x = 4 + 2^{N+3}$$

Logaritmen met grondtal 10

$\log(a)$ betekent ${}^{10}\log(a)$.

Dus $\log(100) = \log(10^2) = 2$ en $\log(0,1) = \log(10^{-1}) = -1$.

De GR heeft een toets $\log$ (TI en Casio) of LOG (HP) waarbij grondtal 10 hoort. Hiermee kun je logaritmen met grondtal 10 berekenen.

Bijvoorbeeld $\log(75) \approx 1,875$ en $\log(0,043) \approx -1,367$.

Je kunt met de GR ook logaritmen met een ander grondtal berekenen.

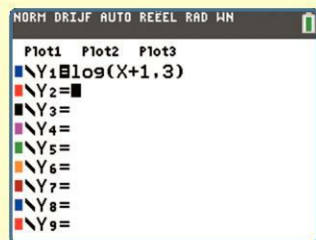
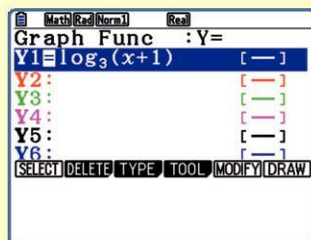
Voor het berekenen van ${}^5\log(40)$ tik je op de TI en de HP in $\log(40, 5)$.

Bij de Casio gebruik je de optie $\logab$ uit het OPTN-CALC -menu.

Je krijgt ${}^5\log(40) \approx 2,292$.

Je kunt op deze manier ook logaritmische formules op de GR invoeren.

Op de schermen hieronder is de formule $y = {}^3\log(x + 1)$ ingevoerd.



9.3 Rekenregels voor logaritmen



046 Onderzoek met de GR welke van de volgende beweringen waar zijn.

I $\log(8) \cdot \log(3) = \log(24)$

V $4 \cdot {}^3\log(5) = {}^3\log(5^4)$

II $\log(8) + \log(3) = \log(24)$

VI $4 \cdot {}^3\log(5) = ({}^3\log(5))^4$

III ${}^2\log(15) - {}^2\log(3) = {}^2\log(5)$

VII ${}^6\log(7) = \frac{\log(6)}{\log(7)}$

IV $\frac{{}^2\log(15)}{{}^2\log(3)} = {}^2\log(5)$

VIII ${}^6\log(7) = \frac{\log(7)}{\log(6)}$

Theorie A Rekenregels en herleiden

Je hebt geleerd uit ${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$.

Substitutie van $y = {}^g\log(x)$ in $x = g^y$ geeft $g^{{}^g\log(x)} = x$.

Deze laatste formule wordt in het informatief op bladzijde 31 gebruikt om de **rekenregels voor logaritmen** te bewijzen.

Rekenregels voor logaritmen

- ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$
- ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$
- ${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$

Deze rekenregels kun je gebruiken bij het herleiden van logaritmen.

Zo is

• ${}^3\log(5) + {}^3\log(10) = {}^3\log(5 \cdot 10) = {}^3\log(50)$

• $3 \cdot {}^2\log(6) - {}^2\log(9) = {}^2\log(6^3) - {}^2\log(9) = {}^2\log\left(\frac{216}{9}\right) = {}^2\log(24)$

• $4 - 3 \cdot \log(2) = \log(10000) - \log(2^3) = \log\left(\frac{10000}{8}\right) = \log(1250)$

De regel ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$ gebruik je van rechts naar links om $\log(500)$ te schrijven als $2 + \log(5)$.

Je krijgt $\log(500) = \log(100 \cdot 5) = \log(100) + \log(5) = 2 + \log(5)$.

En ${}^2\log(24) - {}^3\log(81) = {}^2\log(8 \cdot 3) - 4 = {}^2\log(8) + {}^2\log(3) - 4 = 3 + {}^2\log(3) - 4 = {}^2\log(3) - 1$.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde worden de rekenregels voor logaritmen gebruikt bij het herleiden van formules.

Voorbeeld

- a** Herleid de formule $K = 3,25 \cdot \log(M) - 0,30$ tot de vorm $K = \log(aM^b)$.
Rond a af op twee decimalen.
- b** Herleid de formule $N = {}^2\log(96x^3)$ tot de vorm $N = p + q \cdot {}^2\log(x)$.
Rond p af op twee decimalen.

Uitwerking

- a** $K = 3,25 \cdot \log(M) - 0,30$
 $K = \log(M^{3,25}) + \log(10^{-0,30})$
 $K = \log(10^{-0,30} \cdot M^{3,25})$
 $K \approx \log(0,50M^{3,25})$
Dus $K = \log(0,50M^{3,25})$.
- b** $N = {}^2\log(96x^3)$
 $N = {}^2\log(96) + {}^2\log(x^3)$
 $N \approx 6,58 + 3 \cdot {}^2\log(x)$
Dus $N = 6,58 + 3 \cdot {}^2\log(x)$.

R47



In de theorie op de vorige bladzijde staan onder de rekenregels voor logaritmen drie herleidingen van logaritmen met getallen.

- a** Welke van de rekenregels worden in de tweede herleiding gebruikt?
- b** Licht de stap $4 - 3 \cdot \log(2) = \log(10\,000) - \log(2^3)$ van de derde herleiding toe.
- c** Schrijf de uitkomst $\log(1250)$ van de derde herleiding in de vorm $1 + \log(a)$.

R48



Zie het voorbeeld.

- a** Herleid de formule $K = 3,25 \cdot \log(M) - 0,30$ tot de vorm $K = \log(aM^b)$ waarbij je a afrondt op drie decimalen.
- b** Herleid de formule $N = {}^2\log(96x^3)$ tot de vorm $N = p + q \cdot {}^2\log(x)$ waarbij je p afrondt op drie decimalen.

49



Herleid tot één logaritme.

- a** ${}^2\log(6) + {}^2\log(10)$ **c** $2 \cdot {}^5\log(3) + {}^5\log(\frac{1}{2})$
- b** ${}^3\log(30) - {}^3\log(6)$ **d** $\log(50) - 2 \cdot \log(5)$

50



Herleid tot één logaritme.

- a** $4 + {}^2\log(3)$ **c** ${}^2\log(12) - {}^3\log(9)$
- b** $2 - \log(5)$ **d** $\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(16) + {}^{\frac{1}{2}}\log(8)$

Bewijzen van rekenregels

- $g^{\text{glog}(a) + \text{glog}(b)} = g^{\text{glog}(a)} \cdot g^{\text{glog}(b)} = a \cdot b = ab = g^{\text{glog}(ab)}$
Dus $\text{glog}(a) + \text{glog}(b) = \text{glog}(ab)$.
- $g^{\text{glog}(a) - \text{glog}(b)} = \frac{g^{\text{glog}(a)}}{g^{\text{glog}(b)}} = \frac{a}{b} = g^{\text{glog}(\frac{a}{b})}$
Dus $\text{glog}(a) - \text{glog}(b) = \text{glog}(\frac{a}{b})$.
- $g^{p \cdot \text{glog}(a)} = (g^{\text{glog}(a)})^p = a^p = g^{\text{glog}(a^p)}$
Dus $p \cdot \text{glog}(a) = \text{glog}(a^p)$.
- $p^{\text{plog}(g) \cdot \text{glog}(a)} = (p^{\text{plog}(g)})^{\text{glog}(a)} = g^{\text{glog}(a)} = a = p^{\text{plog}(a)}$
Dus $\text{plog}(g) \cdot \text{glog}(a) = \text{plog}(a)$ oftewel $\text{glog}(a) = \frac{\text{plog}(a)}{\text{plog}(g)}$.

51 Herleid tot één logaritme.

- a $\frac{1}{3}\log(15) - 4 \cdot \frac{1}{3}\log(3)$
- b $-2 \cdot {}^4\log(6) + {}^4\log(12)$
- c $3 - \frac{1}{3}\log(10)$
- d $\log(500) - {}^5\log(125)$

52 a Herleid de formule $P = 1,4 \cdot {}^2\log(Q) + 3$ tot de vorm $P = {}^2\log(aQ^b)$.



- b Herleid de formule $N = {}^3\log(81x^2)$ tot de vorm $N = p + q \cdot {}^3\log(x)$.
- c Herleid de formule $V = 3,5 + {}^5\log(1,2a)$ tot de vorm $V = 3,5 + q \cdot \log(1,2a)$. Rond q af op twee decimalen.

A53



- a Herleid de formule $N = 2,3 - 0,7 \cdot \log(Q)$ tot de vorm $N = \log(aQ^b)$. Rond a af op gehelen.

- b Herleid de formule $A = \log\left(\frac{150}{B^3}\right)$ tot de vorm $A = p + q \cdot \log(B)$.

Rond p af op twee decimalen.

- c Herleid de formule $T = {}^{1,4}\log(8,3t) - 2,7$ tot de vorm $T = p + q \cdot \log(t)$. Rond p en q af op twee decimalen.

A54



- a Schrijf de formule $y = {}^2\log(48x)$ in de vorm $y = 4 + {}^2\log(ax)$.
- b Schrijf de formule $N = \log(300p) - 1$ in de vorm $N = a + \log(3p)$.
- c Schrijf de formule $R = 4 \cdot {}^3\log(54q)$ in de vorm $R = a + b \cdot {}^3\log(2q)$.
- d Schrijf de formule $P = {}^2\log(96s) + {}^2\log(48s)$ in de vorm $P = a + b \cdot {}^2\log(3s)$.

A55*****

a Schrijf de formule $W = 4,5 + 2,6 \cdot {}^2\log(N) - {}^2\log(P)$ in de vorm

$$W = {}^2\log\left(a \cdot \frac{N^b}{P}\right). \text{ Rond } a \text{ af op twee decimalen.}$$

b Schrijf de formule $G = 2 \cdot \log(T) - 1,2 \cdot \log(Q) + 3,2$ in de vorm

$$G = \log(aT^bQ^c). \text{ Rond } a \text{ af op gehele.}$$

O56**□ ⊗ ***

Los de vergelijking $\log(x) + \log(5) = 2$ exact op door eerst het linkerlid te herleiden tot één logaritme.

Theorie B Rekenregels en vergelijkingen

In opgave 56 heb je de vergelijking $\log(x) + \log(5) = 2$ exact opgelost door het linkerlid tot één logaritme te herleiden en vervolgens te gebruiken dat ${}^s\log(A) = B$ geeft $A = g^B$.

Soms is het handiger om toe te werken naar de vorm ${}^s\log(A) = {}^s\log(B)$. Je gebruikt dan:

$${}^s\log(A) = {}^s\log(B) \text{ geeft } A = B$$

Zo los je de vergelijking ${}^3\log(8x) - {}^3\log(2) = {}^3\log(x+1)$ als volgt op.

$${}^3\log(8x) - {}^3\log(2) = {}^3\log(x+1)$$

$${}^3\log\left(\frac{8x}{2}\right) = {}^3\log(x+1)$$

$${}^3\log(4x) = {}^3\log(x+1)$$

$${}^s\log(A) = {}^s\log(B) \text{ geeft } A = B$$

$$4x = x + 1$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Als je de rekenregels voor logaritmen gebruikt bij het oplossen van vergelijkingen, moet je controleren of de gevonden waarden voldoen.

Voorbeeld

Los exact op ${}^3\log(x-2) = 1 - {}^3\log(x-4)$.

Uitwerking

$${}^3\log(x-2) = 1 - {}^3\log(x-4)$$

$${}^3\log(x-2) + {}^3\log(x-4) = 1$$

$${}^3\log((x-2)(x-4)) = 1$$

$${}^3\log(x^2 - 6x + 8) = 1$$

$${}^s\log(A) = B \text{ geeft } A = g^B$$

$$x^2 - 6x + 8 = 3$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x-1)(x-5) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 5$$

vold. niet

R57
  *

- a Welke rekenregel voor logaritmen wordt in de theorie gebruikt bij het oplossen van de vergelijking ${}^3\log(8x) - {}^3\log(2) = {}^3\log(x+1)$?
 b Licht toe waarom in het voorbeeld $x = 1$ niet voldoet.

58
  *

Los exact op.

- a ${}^3\log(4x) + {}^3\log(5) = 2$
 b ${}^2\log(x) = 4 - {}^2\log(3)$
 c ${}^4\log(x) + {}^4\log(3) = {}^4\log(x+1)$
 d ${}^3\log(2x) = 1 + {}^3\log(x-1)$
 e ${}^2\log(x+6) = 4 - {}^2\log(x)$
 f ${}^3\log(2x+1) - {}^3\log(x-3) - 2 = 0$

A59
  *

Los exact op.

- a $\log(4x-30) + \log(x) = 2$
 b ${}^4\log(3x+4) = 3 - {}^4\log(x)$
 c $\frac{1}{3}\log(x-2) + 3 + \frac{1}{3}\log(x) = 0$
 d ${}^4\log(x) + {}^4\log(x-1) = {}^4\log(x+3)$

O60
  *

Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x+3}$.

- a Bij welke translatie ontstaat de grafiek van f uit die van $y = 2^x$?
 b De grafiek van f ontstaat ook uit die van $y = 2^x$ door de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 8.
 Licht dit toe.

Gegeven is de functie $g(x) = {}^2\log(8x)$.

- c Bij welke vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as ontstaat de grafiek van g uit die van $y = {}^2\log(x)$?
 d De grafiek van g ontstaat ook uit die van $y = {}^2\log(x)$ bij de translatie $(0, 3)$.
 Licht dit toe.

Theorie C Rekenregels en transformaties

De grafieken van de standaardfuncties $y = g^x$ en $y = {}^g\log(x)$ zijn standaardgrafieken. Je kent het effect van transformaties op deze standaardgrafieken.

transformatie	grafiek	beeldgrafiek
verm. x -as, a	$y = g^x$	$y = a \cdot g^x$
	$y = {}^g\log(x)$	$y = a \cdot {}^g\log(x)$
verm. y -as, b	$y = g^x$	$y = g^{\frac{1}{b}x}$
	$y = {}^g\log(x)$	$y = {}^g\log(\frac{1}{b}x)$
translatie $(c, 0)$	$y = g^x$	$y = g^{x-c}$
	$y = {}^g\log(x)$	$y = {}^g\log(x-c)$
translatie $(0, d)$	$y = g^x$	$y = g^x + d$
	$y = {}^g\log(x)$	$y = {}^g\log(x) + d$

In opgave 60 heb je gezien dat bij de grafiek van $y = 2^x$ de transformaties ‘vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met 8’ en ‘translatie $(-3, 0)$ ’ op hetzelfde neerkomen.

Dit kun je inzien met de rekenregel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

Immers $8 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 2^x = 2^{x+3}$.

Ook zag je in opgave 60 dat bij de grafiek van $y = {}^2\log(x)$ de transformaties ‘translatie $(0, 3)$ ’ en ‘vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{8}$ ’ op hetzelfde neerkomen.

Dit kun je inzien met de rekenregel ${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(ab)$.

Immers $3 + {}^2\log(x) = {}^2\log(8) + {}^2\log(x) = {}^2\log(8x)$.

Voorbeeld

- a Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as levert bij de grafiek van $y = 3^x$ dezelfde beeldgrafiek op als de translatie $(-4, 0)$?
- b Welke translatie levert bij de grafiek van ${}^3\log(x)$ dezelfde beeldgrafiek op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met 81?

Uitwerking

a $y = 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (-4, 0)} y = 3^{x+4}$

Er geldt $3^{x+4} = 3^x \cdot 3^4 = 81 \cdot 3^x$.

Dus de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 81.

b $y = {}^3\log(x) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 81} y = {}^3\log(\frac{1}{81}x)$

Er geldt ${}^3\log(\frac{1}{81}x) = {}^3\log(\frac{1}{81}) + {}^3\log(x) = -4 + {}^3\log(x)$.

Dus de translatie $(0, -4)$.

61



- a Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as levert bij de grafiek van $y = 2^x$ dezelfde beeldgrafiek op als de translatie $(5, 0)$?
- b Welke translatie levert bij de grafiek van $y = 2^x$ dezelfde beeldgrafiek op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met $\frac{1}{2}$?
- c Welke translatie levert bij de grafiek van $y = {}^2\log(x)$ dezelfde beeldgrafiek op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{32}$?
- d Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as levert bij de grafiek van $y = {}^2\log(x)$ dezelfde beeldgrafiek op als de translatie $(0, 4)$?

62



- a De grafiek van de functie g ontstaat uit die van de functie $f(x) = 2^x$ bij de translatie $(-4, 0)$ gevolgd door de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met $\frac{1}{4}$. Het functievoorschrift van g is te schrijven in de vorm $g(x) = a \cdot 2^x$. Bereken a .
- b De grafiek van de functie g ontstaat uit die van de functie $f(x) = {}^2\log(x)$ bij de translatie $(3, 0)$ gevolgd door de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{4}$. Het functievoorschrift van g is te schrijven in de vorm $g(x) = p + {}^2\log(x + q)$. Bereken p en q .

63



- a De grafiek van de functie $f(x) = 10 - 3^{2x-1}$ wordt 2 naar links en 12 omlaag geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . Het functievoorschrift van g kan geschreven worden in de vorm $g(x) = a + b \cdot g^x$. Bereken a , b en g .
- b De grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(4x + 10) + 1$ ontstaat uit die van de functie $g(x) = {}^2\log(x)$ door de translatie (m, n) . Bereken m en n .
- c De grafiek van de functie $f(x) = 3^x$ wordt eerst 5 naar links en 36 omhoog geschoven en vervolgens ten opzichte van de x -as met $\frac{1}{9}$ vermenigvuldigd. Zo ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = p + 3^{x+q}$. Bereken p en q .

A64



Gegeven zijn de functies $f(x) = (\frac{1}{2})^{3-x} - 4$ en $g(x) = 1 + \frac{1}{2}\log(4x + 6)$.

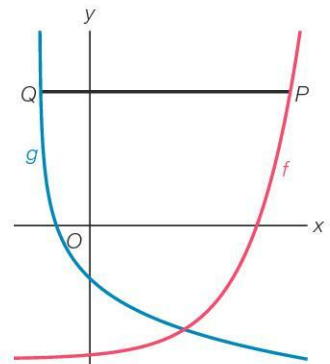
- a Geef aan met welke translatie de grafiek van f uit die van $y = 2^x$ ontstaat.
- b Geef aan met welke translatie de grafiek van g uit die van $y = \frac{1}{2}\log(x)$ ontstaat.

Op de grafiek van f ligt het punt P met $x_P = 6$.

De horizontale lijn door P snijdt de grafiek van g in het punt Q .

In de figuur hiernaast zijn de grafieken van f en g en het lijnstuk PQ getekend.

- c Bereken exact de lengte van PQ .



figuur 9.3

A65



- a De grafiek van de functie $f(x) = (\frac{1}{5})^x$ wordt met a vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie g . De grafiek van g gaat door het punt $(3, 25)$. Bereken exact de waarde van a .
- b De grafiek van de functie $h(x) = {}^2\log(x^2 - 2x + 1)$ wordt over een afstand a naar rechts geschoven. Bereken exact voor welke waarden van a de beeldgrafiek door het punt $P(3, 0)$ gaat.

Terugblik

Rekenregels voor logaritmen

$${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(ab)$$

$${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^s\log(a) = {}^s\log(a^p)$$

$${}^s\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$$

$$g^{{}^s\log(a)} = a \text{ en } {}^s\log(g^a) = a$$

Met deze rekenregels is bijvoorbeeld $4 \cdot {}^2\log(3) - \log(100)$ te herleiden tot één logaritme.

$$\text{Je krijgt } {}^2\log(3^4) - 2 = {}^2\log(81) - {}^2\log(4) = {}^2\log\left(\frac{81}{4}\right) = {}^2\log(20\frac{1}{4}).$$

Je gebruikt de rekenregels in omgekeerde volgorde om de formule

$$A = \log(\frac{1}{10}B^3) \text{ te herleiden tot de vorm } A = p + q \cdot \log(B).$$

$$\text{Je krijgt } A = \log(\frac{1}{10}) + \log(B^3) \text{ oftewel } A = -1 + 3 \cdot \log(B).$$

Rekenregels en vergelijkingen

De rekenregels voor logaritmen gebruik je om vergelijkingen zoals

$${}^2\log(x-2) = 3 - {}^2\log(x) \text{ op te lossen. Controleer of de gevonden}$$

waarden aan de oorspronkelijke vergelijking voldoen. Je krijgt

$${}^2\log(x-2) + {}^2\log(x) = 3$$

$${}^2\log(x(x-2)) = 3$$

$$x(x-2) = 2^3$$

$$x^2 - 2x = 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x+2)(x-4) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 4$$

vold. niet

Rekenregels en transformaties

Bij de grafiek van $y = 3^x$ leveren de translatie $(2, 0)$ en de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met $\frac{1}{9}$ dezelfde beeldfiguur op.

$$y = 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (2, 0)} y = 3^{x-2}$$

$$y = 3^x \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } \frac{1}{9}} y = \frac{1}{9} \cdot 3^x = 3^{-2} \cdot 3^x = 3^{x-2}$$

Bij de grafiek van $y = {}^3\log(x)$ leveren de translatie $(0, -2)$ en de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met 9 dezelfde beeldfiguur op.

$$y = {}^3\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (0, -2)} y = -2 + {}^3\log(x)$$

$$y = {}^3\log(x) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 9} y = {}^3\log(\frac{1}{9}x) = {}^3\log(\frac{1}{9}) + {}^3\log(x) = -2 + {}^3\log(x)$$

9.4 Formules omwerken



- 66** a Gegeven is de formule $N = 200 \cdot 1,08^t$.
Neem van het linker- en het rechterlid de logaritme en toon aan dat de formule te schrijven is als $\log(N) = \log(200) + t \cdot \log(1,08)$.
- b Gegeven is de formule $F = 20L^3$.
Neem van het linker- en het rechterlid de logaritme en toon aan dat de formule te schrijven is als $\log(F) = \log(20) + 3 \cdot \log(L)$.

Theorie A Exponentiële formules en machtsformules omwerken

Het is mogelijk de formule $N = b \cdot g^t$ te schrijven in de vorm

$$\log(N) = pt + q.$$

Je gebruikt daarbij de regels $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ en

$$\log(a^p) = p \cdot \log(a).$$

Hoe dat gaat bij de formule $N = 15\,000 \cdot 0,97^t$ zie je hieronder.

$$N = 15\,000 \cdot 0,97^t$$

$$\log(N) = \log(15\,000 \cdot 0,97^t)$$

$$\log(N) = \log(15\,000) + \log(0,97^t)$$

$$\log(N) = \log(15\,000) + t \cdot \log(0,97)$$

$$\log(N) \approx 4,18 + t \cdot -0,0132$$

$$\text{Dus } \log(N) = -0,0132t + 4,18.$$

Neem links en rechts de logaritme.

Gebruik de regel $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.

Gebruik de regel $\log(a^p) = p \cdot \log(a)$.

De formule $y = ax^p$ is te schrijven in de vorm $\log(y) = q + r \cdot \log(x)$.

Hoe dat gaat bij de formule $y = 25x^{1,16}$ zie je hieronder.

$$y = 25x^{1,16}$$

$$\log(y) = \log(25 \cdot x^{1,16})$$

$$\log(y) = \log(25) + \log(x^{1,16})$$

$$\log(y) = \log(25) + 1,16 \cdot \log(x)$$

$$\log(y) \approx 1,40 + 1,16 \cdot \log(x)$$

$$\text{Dus } \log(y) = 1,40 + 1,16 \cdot \log(x).$$

Neem links en rechts de logaritme.

Gebruik de regel $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.

Gebruik de regel $\log(a^p) = p \cdot \log(a)$.



67 Schrijf de volgende formules in de vorm $\log(N) = at + b$. Geef a in vier decimalen en b in twee decimalen.

a $N = 8000 \cdot 1,18^t$

c $N = 6500 \cdot 1,25^{t-2}$

b $N = 22\,000 \cdot 0,83^t$

d $N = 18\,000 \cdot 0,74^{2t-3}$



68 Schrijf de volgende formules in de vorm $\log(y) = a + b \cdot \log(x)$. Geef a in twee decimalen.

a $y = 50x^{1,35}$

c $y = 260x^{-2,1}$

b $y = \frac{500}{x^2}$

d $y = \frac{80}{x\sqrt{x}}$

A69
☐ ⊗ *

Schrijf de volgende formules in de vorm $\log(y) = ax + b$ of $\log(y) = p + q \cdot \log(x)$. Rond a , b , p en q af op twee decimalen.

a $y = 600 \cdot 2,18^x$

c $y = 400 \cdot 1,75^{x-3}$

b $y = 600x^{2,18}$

d $y = \frac{400}{x \cdot \sqrt[3]{x}}$

A70
☐ ⊗ *

De zuurgraad van oceaanwater wordt bepaald door het aantal mol H^+ per liter. Dit aantal neemt de laatste decennia exponentieel toe. Onderzoekers vonden het verband $H = 7,7 \cdot 10^{-9} \cdot 1,0032^t$ tussen de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1980 en H het aantal mol H^+ per liter.

Het is mogelijk deze formule te schrijven in de vorm $\log(H) = at + b$.

Door vervolgens te gebruiken dat het tegengestelde van $\log(H)$ de pH geeft, krijg je een formule waarbij de pH is uitgedrukt in t . De pH is een veel bekendere maat voor de zuurgraad dan H .

Schrijf de formule van H in de vorm $P = mt + n$ met P de pH van het oceaanwater en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1980. Rond af op vier decimalen.

071
☐ ⊗ *

Zie opgave 66.

a Licht toe dat de formule $\log(N) = \log(200) + t \cdot \log(1,08)$ te herleiden is tot de formule $N = 200 \cdot 1,08^t$.

b Licht toe dat de formule $\log(F) = \log(20) + 3 \cdot \log(L)$ te herleiden is tot de formule $F = 20L^3$.

Theorie B Formules met logaritmen omwerken

De formule $\log(N) = 0,0334t + 2,30$ is te schrijven in de vorm $N = b \cdot g^t$.

Dat gaat als volgt.

$$\log(N) = 0,0334t + 2,30$$

$$N = 10^{0,0334t + 2,30}$$

$$N = 10^{0,0334t} \cdot 10^{2,30}$$

$$N = (10^{0,0334})^t \cdot 10^{2,30}$$

$$N \approx 200 \cdot 1,08^t$$

$$\text{Dus } N = 200 \cdot 1,08^t.$$

Gebruik $\log(a) = b$ geeft $a = 10^b$.

Gebruik $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$.

Gebruik $a^{pq} = (a^p)^q$.

Bereken $10^{0,0334}$ en $10^{2,30}$.

De formule $\log(F) = 1,30 + 3 \cdot \log(L)$ is te schrijven in de vorm $F = aL^b$.

Dat gaat als volgt.

$$\log(F) = 1,30 + 3 \cdot \log(L)$$

$$\log(F) = \log(10^{1,30}) + \log(L^3)$$

$$\log(F) = \log(10^{1,30} \cdot L^3)$$

$$F = 10^{1,30} \cdot L^3$$

$$F \approx 20 \cdot L^3$$

$$\text{Dus } F = 20L^3.$$

Gebruik $a = \log(10^a)$ en $p \cdot \log(a) = \log(a^p)$.

Gebruik $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$.

Bereken $10^{1,30}$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $t = 4 \cdot \log(N) - 14$.

Schrijf de formule in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op tientallen en g op twee decimalen.

Uitwerking

$$t = 4 \cdot \log(N) - 14$$

$$4 \cdot \log(N) = t + 14$$

$$\log(N) = 0,25t + 3,5$$

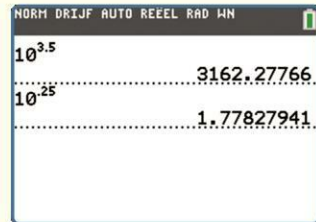
$$N = 10^{0,25t + 3,5}$$

$$N = 10^{0,25t} \cdot 10^{3,5}$$

$$N = 10^{3,5} \cdot (10^{0,25})^t$$

$$N \approx 3162 \cdot 1,78^t$$

$$\text{Dus } N = 3160 \cdot 1,78^t.$$



- 72** Schrijf de volgende formules in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op gehelen en g op twee decimalen.

a $\log(N) = 0,097t + 2,45$

c $t = 5 \cdot \log(N) - 11$

b $\log(N) = -0,022t + 3,75$

d $t = 30 - 8 \cdot \log(N)$

- 73** Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^b$. Rond a af op gehelen.

a $\log(y) = 1,70 + 1,45 \cdot \log(x)$

c $\log(x) = 0,5 \cdot \log(y) - 2,75$

b $\log(y) = 3,50 - 1,12 \cdot \log(x)$

d $3 \cdot \log(x) - 4 \cdot \log(y) + 5 = 0$

- A74** Schrijf de volgende formules in de vorm $y = a \cdot b^x$ of $y = px^q$. Geef a en p in gehelen en rond b en q af op twee decimalen.

a $\log(y) = 0,19x + 2,74$

c $x = 2,5 \cdot \log(y) - 12$

b $\log(y) = 0,65 \cdot \log(x) + 2,84$

d $2,2 \cdot \log(x) + 5 \cdot \log(y) = 12$

- A75** ***** **a** Schrijf de formule $N = 25\,000 \cdot 0,82^{2t+3}$ in de vorm $\log(N) = at + b$. Geef a in vier decimalen en b in twee decimalen.

- b** Schrijf de formule $\log(N) = 0,193t + 2,75$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Geef b in gehelen en g in twee decimalen.

- c** Schrijf de formule $6 \cdot \log(D) - \log(R) = 15$ in de vorm $D = aR^b$. Geef a in gehelen en b in twee decimalen.

- d** Schrijf de formule $L = 6 \cdot \log(K) - 27$ in de vorm $K = b \cdot g^L$. Geef b in honderdtallen en g in twee decimalen.

- e** Schrijf de formule $N = \frac{1280}{t^2 \cdot \sqrt{t}}$ in de vorm $\log(N) = a + b \cdot \log(t)$. Geef a en b in één decimaal.

- f** Schrijf de formule $\log(P) = 0,05h + 2,14$ in de vorm $P = b \cdot g^h$. Geef b in gehelen en g in twee decimalen.

A76
  *

De hoeveelheid CO₂-uitstoot per inwoner is in steden lager dan op het platteland. Het blijkt namelijk dat bij toenemende bevolkingsdichtheid de CO₂-uitstoot per persoon afneemt. De bevolkingsdichtheid is het aantal inwoners per vierkante kilometer. Dit verband wordt voor de Verenigde Staten beschreven door de formule $\log(C) = 3 + 0,79 \cdot \log(A) - 0,79 \cdot \log(P)$. Hierin is C de CO₂-uitstoot per persoon in duizenden kg per jaar, P het aantal inwoners in het gebied en A de oppervlakte van het gebied in km².

- Bereken algebraïsch de CO₂-uitstoot per persoon per jaar voor een gebied van 1000 km² met 75 000 inwoners.
- Bereken algebraïsch de oppervlakte van een gebied waarin de CO₂-uitstoot 20 000 kg per persoon per jaar is en het aantal inwoners 10 000.

De formule van C kan worden herschreven tot $C = 1000 \cdot \left(\frac{P}{A}\right)^{-0,79}$.

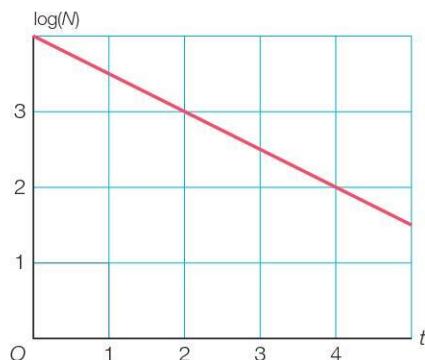
- Toon dit aan.
- Onderzoek met hoeveel procent de CO₂-uitstoot per persoon afneemt als de bevolkingsdichtheid verdubbelt.

O77
  *

In figuur 9.4 is $\log(N)$ uitgezet tegen t .

Je leest af: bij $t = 2$ hoort $\log(N) = 3$.

- Licht toe dat bij $t = 2$ hoort $N = 1000$.
- Bereken N bij $t = 4$.
- Bereken N bij $t = 3$. Rond af op gehele.



figuur 9.4

Theorie C $\log(B)$ uitzetten tegen A

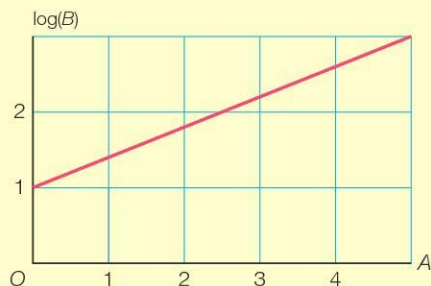
In de figuur hiernaast is $\log(B)$ uitgezet tegen A .

Je leest af: bij $A = 5$ hoort $\log(B) = 3$, dus $B = 1000$.

Bij $A = 3$ lees je af $\log(B) = 2,2$, dus bij $A = 3$ hoort $B = 10^{2,2} \approx 158$.

Weet je dat $B = 250$, dan is

$\log(B) = \log(250) \approx 2,4$ en hierbij lees je af dat $A \approx 3,5$.



figuur 9.5

Je kunt ook de formule van de getekende lijn opstellen.

De lijn gaat door de punten (0, 1) en (5, 3), dus de formule van de lijn is $\log(B) = 0,4A + 1$.

Deze formule is te schrijven in de vorm $B = b \cdot g^A$.

Je krijgt $\log(B) = 0,4A + 1$

$$B = 10^{0,4A + 1}$$

$$B = 10^{0,4A} \cdot 10^1$$

$$B = 10 \cdot (10^{0,4})^A$$

$$B \approx 10 \cdot 2,51^A$$

Dus $B = 10 \cdot 2,51^A$.

Voorbeeld

In figuur 9.6 is $\log(N)$ uitgezet tegen t .

- Bereken N bij $t = 3$. Rond af op tientallen.
- Bereken t bij $N = 150$. Rond af op één decimaal.
- De formule van de lijn in figuur 9.6 is van de vorm $\log(N) = pt + q$. Bereken p en q exact.

Uitwerking

- Lees af: $t = 3$ geeft $\log(N) \approx 2,7$, dus $N \approx 10^{2,7} \approx 500$.

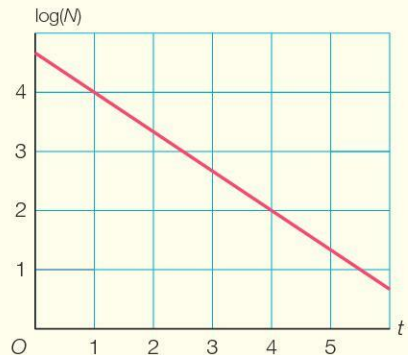
- $N = 150$ geeft $\log(N) = \log(150) \approx 2,2$
Lees af: $\log(N) = 2,2$ geeft $t \approx 3,7$.

- Gebruik de punten (1, 4) en (4, 2).

$$\log(N) = pt + q \text{ met } p = \frac{\Delta \log(N)}{\Delta t} = \frac{2 - 4}{4 - 1} = -\frac{2}{3}$$

$$\log(N) = -\frac{2}{3}t + q \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot 1 + q = 4 \\ -\frac{2}{3} + q = 4 \\ q = 4\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Dus $p = -\frac{2}{3}$ en $q = 4\frac{2}{3}$.



figuur 9.6



Zie het voorbeeld.

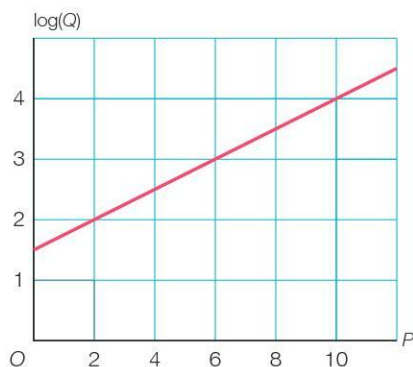
- De formule die bij c gevonden is, hoort bij exponentiële groei. Bereken de beginwaarde en de groeifactor. Rond de beginwaarde af op honderdtallen.
- De grafiek van $N = 150 \cdot 2,25^t$ is in een assenstelsel zoals in het voorbeeld een rechte lijn. Toon dit aan door de formule in de vorm $\log(N) = at + b$ te schrijven.

79



In figuur 9.7 is $\log(Q)$ uitgezet tegen P .

- Bereken Q bij $P = 4$. Rond af op gehele.
- Bereken P bij $Q = 3000$. Rond af op één decimaal.
- De formule van de lijn is van de vorm $\log(Q) = m \cdot P + n$. Bereken m en n exact.
- Stel bij de grafiek een formule op van de vorm $Q = b \cdot g^P$. Geef b in gehele en g in twee decimalen.



figuur 9.7

80

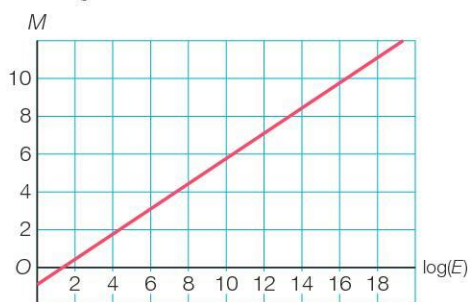


[▶ WERKBLAD] De hoeveelheid energie die bij een aardbeving vrijkomt, wordt uitgedrukt in kJ. Men spreekt bijvoorbeeld over een aardstok waarbij $1,25 \cdot 10^{13}$ kJ energie vrijkomt.

Seismologen werken liever met eenheden op de schaal van Richter.

In figuur 9.8 zie je het verband tussen de vrijgekomen energie E in kJ en M , de sterkte op de schaal van Richter.

Merk op dat op de horizontale as $\log(E)$ is uitgezet.



figuur 9.8

- Bereken E bij $M = 2$.
- Op 16 augustus 2012 werd in de omgeving van het Groningse plaatsje Huizinge een aardbeving geregistreerd met een sterkte van 3,6 op de schaal van Richter. Hoeveel energie kwam bij deze aardbeving vrij?
- De sterkste aardbeving die in de twintigste eeuw is gemeten, trof Chili in het jaar 1960. Bij deze aardbeving kwam $9,3 \cdot 10^{15}$ kJ energie vrij. Welke sterkte op de schaal van Richter had deze beving?
- Pas vanaf een energiehoeveelheid van 330 000 kJ kan een mens een aardstok voelen. Met welke sterkte op de schaal van Richter komt dit overeen?
- Herman beweert dat bij bevingen waarbij de hoeveelheden energie die vrijkomen een factor 1 000 000 schelen, de sterkten op de schaal van Richter 4 verschillen. Onderzoek of Herman gelijk heeft.
- Alaska werd in 1965 door twee aardbevingen getroffen. De tweede scoorde twee punten hoger op de schaal van Richter dan de eerste. Wat weet je van de hoeveelheid energie die bij de tweede beving vrijkwam in vergelijking met die van de eerste beving?
- De formule bij de lijn in figuur 9.8 is van de vorm $M = p \cdot \log(E) + q$. Bereken p en q en schrijf deze formule in de vorm $E = b \cdot g^M$. Geef b en g in gehele.

81



Walvissoorten worden ingedeeld in twee onderordes: tandwalvissen en baleinwalvissen. Tandwalvissen jagen op grote prooien, terwijl baleinwalvissen een soort filter in hun bovenkaak hebben waarmee ze plankton uit het water zeven. In de figuur is voor beide onderordes $\log(E)$ uitgezet tegen $\log(G)$. Hierin is E de energie die per hap uit voedsel wordt gehaald in kilojoule en G het gewicht van de walvissen in kg. E_T en G_T horen bij de tandwalvissen en E_B en G_B horen bij de baleinwalvissen.

- Hoeveel energie per hap krijgt de zwaarste walvis binnen?
- Bereken voor welke onderorde het verschil tussen de lichtste en zwaarste walvis het grootst is.

Het lijnstuk dat hoort bij de baleinwalvissen heeft de eindpunten $(3,8; 3,8)$ en $(5,0; 6,1)$. Hierbij hoort een formule van de vorm $\log(E_B) = a \cdot \log(G_B) + b$.

- Bereken a en b . Rond af op twee decimalen.

Voor tandwalvissen geldt de formule $\log(E_T) = 0,74 \cdot \log(G_T) + 0,45$.

- Toon aan dat de formule is om te werken tot $E_T = 2,82 \cdot G_T^{0,74}$.



figuur 9.9



E82



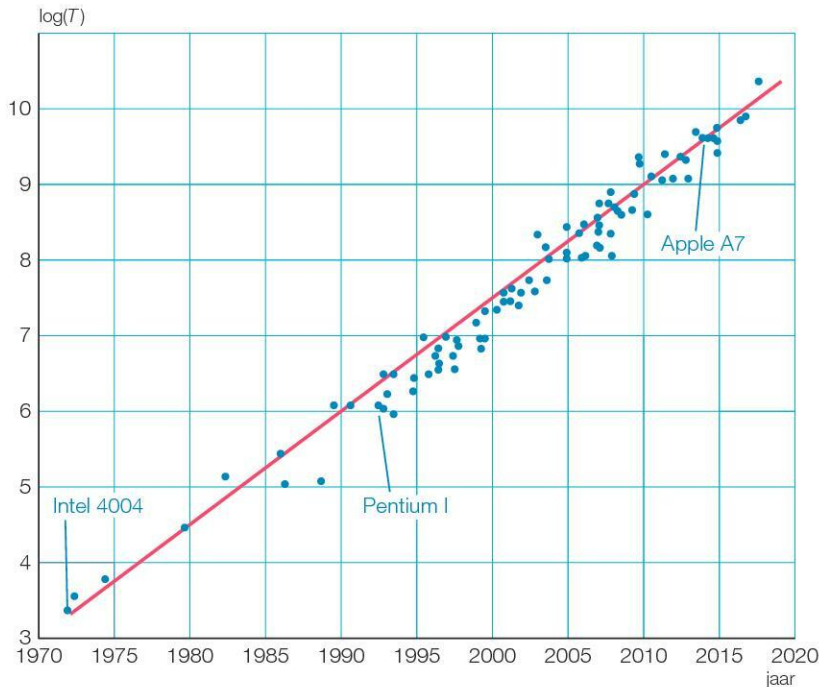
In opgave 81 heb je gezien dat voor de tandwalvissen geldt

$$E_T = 2,82 \cdot G_T^{0,74}.$$

Voor de baleinwalvissen geldt $E_B = 0,00033 \cdot G_B^{1,92}$.

Onderzoek hoe je aan de vorm van de grafieken van E_T en E_B kunt zien dat tandwalvissen te maken hebben met teruglopende opbrengsten per hap ten opzichte van hun lichaamsgewicht, terwijl baleinwalvissen juist steeds meer energie per hap binnenhalen per kilogram lichaamsgewicht.

Elke computer gebruikt transistoren om berekeningen te doen. Hoe meer transistoren, hoe sneller de computer. In de begintijd van computers ging het om enkele honderden transistoren per computer. Tegenwoordig zijn dat er vele miljarden, die in zogenaamde microprocessors zijn verwerkt. In 1965 voorspelde de wetenschapper Gordon Moore dat het aantal transistoren per microprocessor exponentieel zou gaan toenemen. Deze voorspelling staat bekend als de wet van Moore. In figuur 9.10 geeft de lijn de voorspelling van Moore weer en is een punt het aantal transistoren T op een microprocessor in een jaar t .



figuur 9.10

Aan de figuur is te zien dat de voorspelling van Moore ongeveer is uitgekomen.

Je leest af dat volgens de wet van Moore voor 1990 geldt dat $\log(T) = 6$ en dat 20 jaar later geldt dat $\log(T) = 9$.

Uit deze gegevens volgt dat het maandelijkse groeipercentage volgens Moore ongeveer 2,9% is.

- Bereken dit groeipercentage in twee decimalen.
- Bereken in hoeveel maanden het aantal transistoren per microprocessor volgens de wet van Moore verdubbelt. Rond af op gehele.
- Gebruik een formule van de lijn in de figuur om een voorspelling te doen van het aantal transistoren per microprocessor in 2025. Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.



Gordon Moore

Om de CO₂-uitstoot van een vliegreis te compenseren, kun je bomen laten planten. De hoeveelheid CO₂ die een boom opneemt hangt af van zijn gewicht.

Het bovengrondse gewicht van een boom kan gevonden worden door de hoogte van de boom en de diameter van de stam op borsthoogte te meten. Door omgezaagde bomen van een tropische beukensoort te wegen, hebben onderzoekers de formule $B = 0,035 \cdot \left(\frac{H}{D}\right)^{0,79} \cdot D^{2,98}$ opgesteld.

Hierin is B het bovengrondse gewicht van een boom in kg, H de hoogte in m en D de diameter van de stam op borsthoogte in cm.

- Vereenvoudig deze formule tot de vorm $B = a \cdot H^b \cdot D^c$.
- Bereken het bovengrondse gewicht van een boom die 26,4 meter hoog is en een diameter heeft van 43,6 cm.

Om het gewicht van het ondergrondse deel van een boom te bepalen, hebben onderzoekers een flink aantal boomstronken uitgegraven. Van deze boomstronken is het gewicht G in kg bepaald en was, voordat de bomen werden omgekapt, ook hun diameter D op borsthoogte gemeten. In de figuur hiernaast is $\log(G)$ uitgezet tegen $\log(D)$. Gebruik bij de volgende vragen de lijn in figuur 9.11.

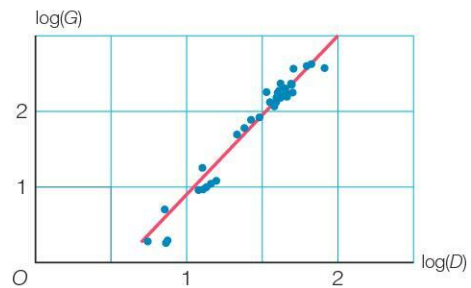
- Bereken de diameter van de stam van een boom met een ondergronds gewicht van 150 kg.

Bij de lijn hoort de formule $\log(G) = -1,2 + 2,1 \cdot \log(D)$.

- Toon dit aan en laat zien dat deze formule om te werken is tot $G = 0,063D^{2,1}$.

Een vliegvakantie naar Bali levert per passagier een uitstoot van 2700 kilogram CO₂ op. Om deze uitstoot te compenseren, wil een toerist tropische beuken laten planten die 14 meter hoog worden met een diameter van 17 centimeter. Neem aan dat het gewicht van een boom voor 33% uit koolstof bestaat en dat hiervoor 3,67 keer zoveel kg CO₂ uit de atmosfeer is gehaald.

- Onderzoek hoeveel tropische beuken de toerist moet laten planten om zijn CO₂-uitstoot te compenseren.



figuur 9.11

Terugblik

Exponentiële formules en machtsformules omwerken

De formule $N = b \cdot g^t$ is te schrijven in de vorm $\log(N) = pt + q$.

Dit gaat als volgt. $N = b \cdot g^t$

$$\log(N) = \log(b \cdot g^t)$$

$$\log(N) = \log(b) + \log(g^t)$$

$$\log(N) = \log(g) \cdot t + \log(b)$$

Bij $N = 750 \cdot 1,45^t$ krijg je $\log(N) = \log(1,45) \cdot t + \log(750)$

oftewel $\log(N) = 0,161t + 2,875$.

De formule $y = ax^p$ is te schrijven in de vorm $\log(y) = q + r \cdot \log(x)$.

Dit gaat als volgt. $y = ax^p$

$$\log(y) = \log(ax^p)$$

$$\log(y) = \log(a) + \log(x^p)$$

$$\log(y) = \log(a) + p \cdot \log(x)$$

Bij $K = 600L^{3,5}$ krijg je $\log(K) = \log(600) + 3,5 \cdot \log(L)$

oftewel $\log(K) = 2,778 + 3,5 \cdot \log(L)$.

Formules met logaritmen omwerken

De formule $\log(N) = 0,161t + 2,875$ is te schrijven in de vorm $N = b \cdot g^t$.

Je krijgt $N = 10^{0,161t + 2,875}$

$$N = 10^{0,161t} \cdot 10^{2,875}$$

$$N = 10^{2,875} \cdot (10^{0,161})^t$$

$$N \approx 750 \cdot 1,45^t, \text{ dus } N = 750 \cdot 1,45^t.$$

De formule $\log(K) = 2,778 + 3,5 \cdot \log(L)$ is te herleiden tot de vorm $K = aL^b$.

Je krijgt $\log(K) = \log(10^{2,778}) + \log(L^{3,5})$

$$\log(K) = \log(10^{2,778} \cdot L^{3,5})$$

$$K = 10^{2,778} \cdot L^{3,5} \text{ oftewel } K \approx 600 \cdot L^{3,5}, \text{ dus } K = 600L^{3,5}.$$

Logaritmen uitzetten op de assen

In de figuur hiernaast is $\log(M)$ uitgezet tegen t .

Aflezen geeft:

- bij $t = 10$ hoort $\log(M) = 2,5$, dus $M = 10^{2,5} \approx 316$
- bij $M = 32$ is $\log(M) = \log(32) \approx 1,5$, en hierbij hoort $t \approx 20$.

Bij de grafiek hoort een formule van de vorm $M = a \cdot b^t$.

Deze formule kun je als volgt krijgen.

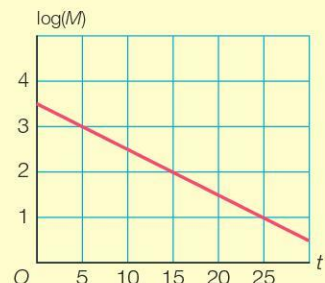
Gebruik de punten (5, 3) en (25, 1) van de grafiek.

Stel $\log(M) = pt + q$ met $p = \frac{\Delta \log(M)}{\Delta t} = \frac{1 - 3}{25 - 5} = -0,1$.

$$\left. \begin{array}{l} \log(M) = -0,1t + q \\ \text{door } (5, 3) \end{array} \right\} -0,1 \cdot 5 + q = 3, \text{ dus } q = 3,5.$$

Dus $\log(M) = -0,1t + 3,5$.

Herleiden van deze formule tot de vorm $M = b \cdot g^t$ geeft $M = 3162 \cdot 0,794^t$.



Eindopdracht Stralingsforcering

De aarde warmt op doordat zonnestralen de planeet bereiken, en koelt weer af doordat energie het heelal in wordt gestraald. Het verschil tussen beide wordt de stralingsforcering genoemd. Als er meer energie binnenkomt dan vertrekt, spreken we van positieve stralingsforcering. Een van de oorzaken van een grotere stralingsforcering is de toename van CO_2 in de atmosfeer.

Het effect van CO_2 op de stralingsforcering kan worden benaderd met de formule $F = 12,32 \cdot \log\left(\frac{C}{C_0}\right)$. Hierin is C_0 de hoeveelheid CO_2 in ppm

(aantal deeltjes per miljoen) in de atmosfeer in een beginjaar, C de hoeveelheid CO_2 in de atmosfeer in een bepaald jaar na het beginjaar en F de verandering van de stralingsforcering in watt per m^2 ten opzichte van het beginjaar.

De hoeveelheid CO_2 in de atmosfeer neemt exponentieel toe door het gebruik van fossiele brandstoffen. Bij de eerste meting in 1958 werden 316 deeltjes CO_2 per miljoen aangetroffen in de atmosfeer, in 2020 waren dat er 413. Neem aan dat deze toename nog een tijdje doorgaat. Met deze gegevens kan worden berekend dat de hoeveelheid CO_2 in de atmosfeer in het jaar 2040 ongeveer 450 ppm is en dat de bijbehorende stralingsforcering door CO_2 ongeveer 1,89 watt per m^2 is ten opzichte van 1958.

- Laat deze berekeningen zien.
- Bereken algebraïsch in welk jaar de verandering van de stralingsforcering 0,55 watt per m^2 was ten opzichte van 1958.

Om de opwarming van de aarde te remmen kunnen deeltjes CO_2 uit de atmosfeer gehaald worden door speciale koolstofafvangmachines. Dit proces is echter zeer kostbaar. Volgens een schatting kost het uiteindelijk 150 euro om 1000 kg CO_2 uit de atmosfeer te halen.

Stel dat in het jaar 2060 de positieve stralingsforcering door CO_2 in de atmosfeer ten opzichte van 1958 nog maar 0,55 watt per m^2 mag zijn. Ga er verder vanuit dat 1 ppm CO_2 gelijk is aan $7,8 \cdot 10^{12}$ kg CO_2 in de atmosfeer.

- Onderzoek wat de kosten zijn van het halen van de doelstelling voor 2060 door de inzet van koolstofafvangmachines als percentage van de wereldeconomie in 2060. Neem aan dat de wereldeconomie in 2060 een omvang zal hebben van $2 \cdot 10^{15}$ euro.



Diagnostische toets

9.1 Groeifactoren en groeipercentages

- 1** Astmapatiënten kunnen verlichting krijgen met het medicijn theofylline. Dit medicijn wordt door de lever afgebroken.

Een astmapatiënt krijgt een injectie van 60 mg theofylline. De concentratie theofylline C in mg per liter bloed neemt na de injectie met 15,3% per uur af. De astmapatiënt heeft 5 liter bloed.

- a** Stel de formule van C op. Neem hierin t de tijd in uren.
- b** Met hoeveel procent is de concentratie afgenomen vier uur na de injectie?
- c** Na hoeveel minuten is nog 20 mg theofylline in het bloed aanwezig?

- 2** Een hoeveelheid neemt per dag met 10% toe.

- a** Bereken het groeipercentage per week.
- b** Bereken het groeipercentage per 8 uur.

Een hoeveelheid neemt per jaar met 36% af.

- c** Hoeveel procent is de afname per maand?
- d** Hoeveel procent is de afname per 5 jaar?

- 3** Een met helium gevulde ballon loopt langzaam leeg. Drie dagen na het vullen bevat de ballon nog 2500 cm^3 en tien dagen later is dat afgenomen tot 1500 cm^3 . Neem aan dat er sprake is van exponentiële afname.

- a** Met hoeveel cm^3 helium werd de ballon gevuld? Rond af op gehelen.
- b** Hoeveel dagen na het vullen bevat de ballon nog 500 cm^3 helium?

- 4** **a** Bereken de verdubbelingstijd in jaren bij een toename van 0,2% per maand.
b Bereken de halveringstijd in dagen bij een afname van 20% per week.

9.2 Werken met logaritmen

- 5** Los exact op.

- a** $4 \cdot 3^{2x+1} = 20$
- c** $4^{x-1} = 2^{x+1}$
- b** $^2\log(3x-5) + 3 = 7$
- d** $^3\log(8x+1) + 2 = 0$

- 6** **a** Maak t vrij bij de formule $N = 75 - 1,5^{0,4t+3}$.
b Druk A uit in B bij de formule $B = ^5\log(2A+10) - 3$.

- 7** Onderzoekers hebben voor de levensverwachting bij de geboorte van wereldburgers het model $l = 29 + 23 \cdot \log(t)$ opgesteld. Hierin is l de levensverwachting in jaren en t de tijd in jaren met $t = 10$ in 1960 en $t \geq 10$.

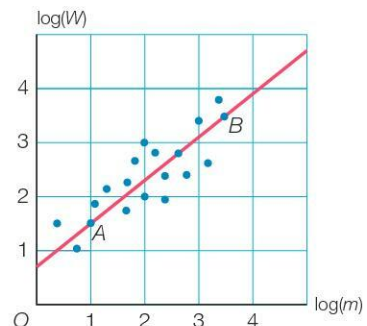
- a** Met hoeveel jaar is de levensverwachting toegenomen in de periode 1965-2015? Rond af op gehelen.
- b** Schrijf de formule in de vorm $t = 10^{a+l+b}$. Rond a en b af op vier decimalen.
- c** In welk jaar zal de levensverwachting voor het eerst 76 jaar zijn?

9.3 Rekenregels voor logaritmen

- 8** Herleid tot één logaritme.
- a** ${}^3\log(5) + 2 \cdot {}^3\log(2)$ **c** ${}^3\log(27) + {}^5\log(2)$
b $3 + {}^2\log(5)$ **d** ${}^2\log(3) - \frac{1}{2}\log(16)$
- 9** **a** Herleid de formule $y = 7,4 - 1,3 \cdot {}^2\log(5,7x)$ tot de vorm $y = {}^2\log(ax^b)$. Rond af op één decimaal.
b Herleid de formule $N = 2 \cdot {}^3\log(18t^{-1,4})$ tot de vorm $N = p + q \cdot \log(t)$. Rond af op twee decimalen.
- 10** Los exact op.
- a** ${}^3\log(2x) + 4 = {}^3\log(150x + 6)$ **b** ${}^2\log(x) = 3 - {}^2\log(x + 2)$
- 11** **a** Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as levert bij de grafiek van $y = {}^5\log(x)$ dezelfde beeldgrafiek op als de translatie $(0, 2)$?
b Welke translatie levert bij de grafiek van $y = 10^x$ dezelfde beeldgrafiek op als de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 1000?

9.4 Formules omwerken

- 12** **a** Schrijf de formule $N = 1000 \cdot 0,88^{3t-1}$ in de vorm $\log(N) = at + b$. Geef a en b in twee decimalen.
b Schrijf de formule $y = 200x^{-3,5}$ in de vorm $\log(y) = a + b \cdot \log(x)$. Geef a in twee decimalen.
- 13** Schrijf in de vorm $N = b \cdot g^t$. Geef b in gehelen.
- a** $\log(N) = 0,6t + 2,4$ **b** $2t + 2,5 \cdot \log(N) = 4$
- 14** Schrijf in de vorm $y = ax^p$. Geef a in gehelen.
- a** $\log(y) = 3,20 + 0,62 \cdot \log(x)$ **b** $1,6 \cdot \log(x) + 5 \cdot \log(y) - 8 = 0$
- 15** [**WERKBLAD**] In de figuur hiernaast is $\log(W)$ uitgezet tegen $\log(m)$. Elk punt representeert een zoogdier, m is de lichaamsmassa in kg van een dier, en W is de hoeveelheid drinkwater dat het dier nodig heeft in mL per uur.
- a** Bereken hoeveel mL drinkwater per dag het dier van 10 kg nodig heeft. Rond af op tientallen.
b Hoe zwaar is het dier dat per uur 1 liter water nodig heeft?



figuur 9.12

In de figuur is een lijn getekend. Bij deze lijn hoort de formule $\log(W) = 0,8 \cdot \log(m) + 0,7$.

- c** Toon dit aan. Gebruik de punten A en B .
d Schrijf de formule in de vorm $W = am^b$. Rond a af op gehelen.
e Een eland is vier keer zo zwaar als een schaap. Hoeveel keer zoveel water heeft een eland nodig als een schaap?

10

Meetkundige berekeningen

Wat leer je?

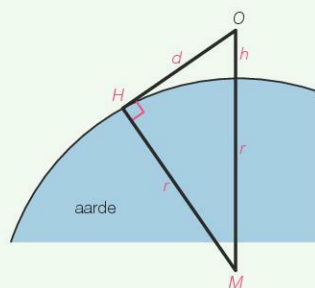
- Het maken van berekeningen in driehoeken met goniometrie, de sinusregel en de cosinusregel.
- Vergelijkingen gebruiken in de meetkunde.
- Hoeken en afstanden berekenen in situaties waarbij je met punten, lijnen en cirkels in een assenstelsel te maken hebt.
- Een strategie ontwikkelen om ingewikkelde problemen aan te pakken.
- Werken met raaklijnen aan cirkels en aan grafieken van functies.



Beginopdracht Afstand tot de horizon

Wanneer je vanaf het strand over de zee uitkijkt, zie je in de verte de horizon. Maar hoe groot is de afstand tot de horizon?

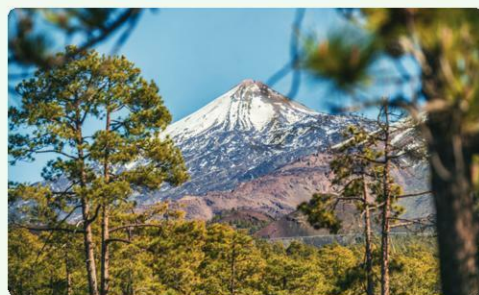
In de figuur hiernaast is M het middelpunt van de aarde, r de straal van de aarde in km, O het oog dat zich op een hoogte van h km boven zeeniveau bevindt (in het vervolg noemen we dit de ooghoogte), en d de afstand in km van het oog tot de horizon H .



Gebruik in deze opdracht dat de straal van de aarde 6378 km is.

- Miranda staat op een zomerse dag op het strand en kijkt uit over de zee. Haar ooghoogte is 1,7 meter.
Op welke afstand ziet zij de horizon?

Op het eiland Tenerife bevindt zich de Pico del Teide, de hoogste berg van Spanje. Ismaël is op Tenerife. Op een dag kijkt hij vanaf de Pico del Teide uit over de zee. Hij ziet de horizon op een afstand van 200 km.



Voor d geldt de formule $d = \sqrt{12756h + h^2}$.

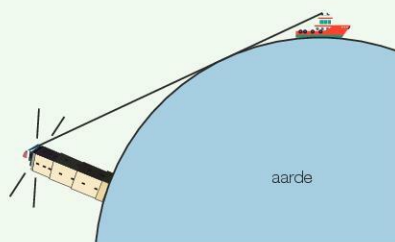
- Toon dit aan.

Voor kleine waarden van h kan de formule van d worden benaderd door $d = \sqrt{12756h}$ oftewel $d = 112,94\sqrt{h}$.

- Licht dit toe.
- Ga na dat je bij de eerste twee vragen van deze opdracht dezelfde antwoorden krijgt als je de formule $d = 112,94\sqrt{h}$ gebruikt.

De Brandaris op het waddeneiland Terschelling is de oudste nog werkende vuurtoren van Nederland. Het licht van de Brandaris bevindt zich op een hoogte van 55 meter boven zeeniveau.

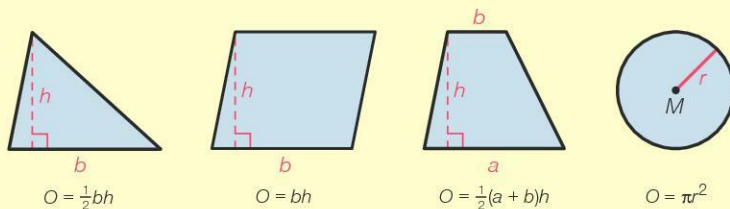
- Een bemanningslid van een schip staat op het dek en ziet het licht van de Brandaris. Zijn ooghoogte is 12 meter.
Wat kun je zeggen van de afstand van het schip tot de Brandaris?
- Onderzoek wat iemands ooghoogte kan zijn in het geval deze persoon het licht van de Brandaris over een afstand van 40 km waarneemt.



Voorkennis Oppervlakte en omtrek

Theorie A Oppervlakteformules

Hieronder worden de oppervlakteformules van de basisfiguren driehoek, parallellogram, trapezium en cirkel herhaald.



Verder ken je de formule voor de omtrek van een cirkel.

omtrek cirkel = $2\pi r$, met r de straal van de cirkel.

Voorbeeld

Op de cirkel met middelpunt M en straal 5 liggen de punten A en B waarbij de lengte van het lijnstuk AB gelijk is aan 6.

Bereken de lengte van de kortste cirkelboog tussen A en B . Rond af op twee decimalen.

Aanpak

Helemaal rond is 360° en omtrek cirkel = $2\pi r$ geeft

kortste boog $AB = \frac{\angle AMB}{360^\circ} \cdot 2\pi r$.

Je hebt dus $\angle AMB$ nodig.

Teken AM , BM en $MN \perp AB$. Hierbij is N het midden van AB .

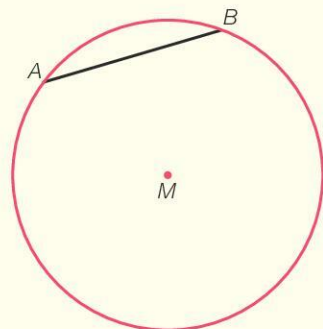
Bereken $\angle AMN$ met $\sin(\angle AMN) = \frac{AN}{AM}$ en vervolgens $\angle AMB$.

Uitwerking

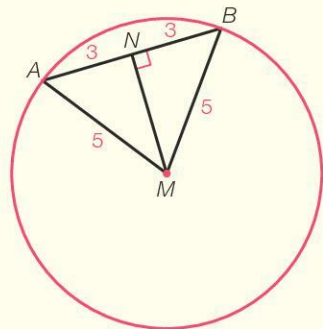
$\sin(\angle AMN) = \frac{AN}{AM} = \frac{3}{5}$ geeft $\angle AMN = 36,86...^\circ$

$\angle AMB = 2 \cdot 36,86...^\circ = 73,73...^\circ$

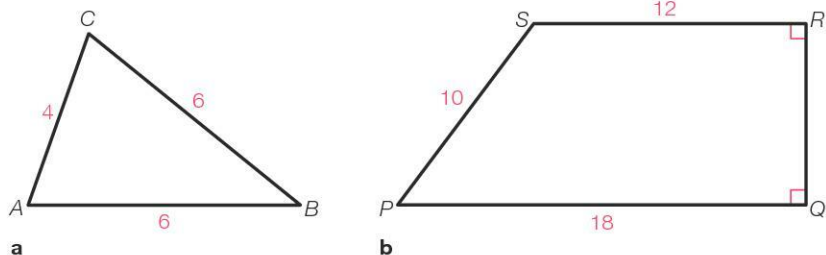
kortste boog $AB = \frac{73,73...}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 \approx 6,44$



figuur 10.1 De straal van de cirkel is 5 en $AB = 6$.



1 Zie figuur 10.2.

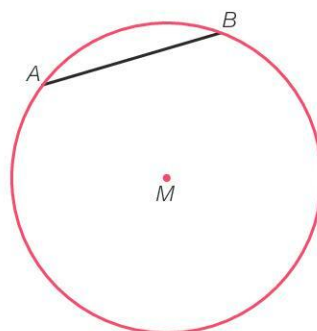


figuur 10.2

- a Bereken de oppervlakte van de gelijkbenige driehoek ABC . Rond af op twee decimalen.
- b Bereken de oppervlakte van het rechthoekig trapezium $PQRS$.

2 Hiernaast zie je nogmaals de figuur van het voorbeeld op de vorige bladzijde. Rond in deze opgave de eindantwoorden af op twee decimalen.

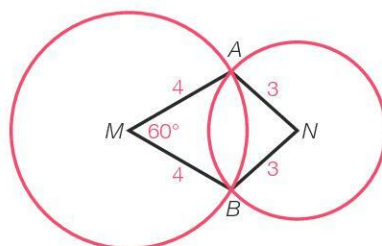
- a Bereken de lengte van de langste cirkelboog tussen A en B .
- b Bereken de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de lijnstukken AM en BM en de kortste cirkelboog tussen A en B .
- c Bereken de oppervlakte van het kleinste gebied dat wordt ingesloten door het lijnstuk AB en de cirkel.



figuur 10.3 De straal van de cirkel is 5 en $AB = 6$.

3 Gegeven zijn de cirkel met middelpunt M en straal 4 en de cirkel met middelpunt N en straal 3. De cirkels snijden elkaar in de punten A en B waarbij $\angle AMB = 60^\circ$. Zie de figuur hiernaast. Rond in deze opgave de eindantwoorden af op twee decimalen.

- a Bereken van de cirkel met middelpunt M de lengte van de kortste cirkelboog tussen A en B .
- b Bereken van de cirkel met middelpunt N de lengte van de kortste cirkelboog tussen A en B .
- c Bereken de oppervlakte van vierhoek $AMBN$.



figuur 10.4

10.1 Afstanden en hoeken

01 Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC met $AC = BC = 8$ en $\angle ACB = 54^\circ$. Zie de figuur hiernaast.

Je kunt AB berekenen met behulp van

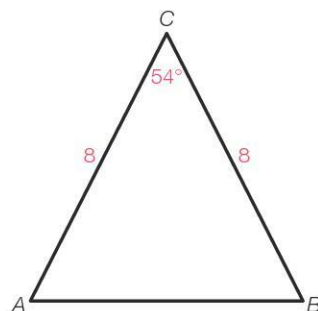
I een goniometrische verhouding

II de sinusregel

III de cosinusregel.

Bereken AB met behulp van een van deze drie methoden.

Rond af op twee decimalen.



figuur 10.5

Theorie A Goniometrische verhoudingen, sinusregel en cosinusregel

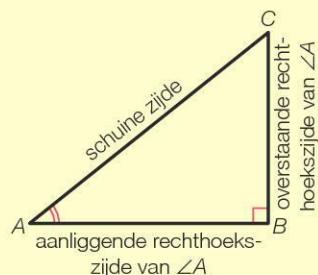
Voor het berekenen van hoeken en afstanden in rechthoekige driehoeken kun je de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens gebruiken.

In de rechthoekige driehoek ABC in figuur 10.6 is

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A} = \frac{BC}{AB}$$



figuur 10.6

Voor het berekenen van hoeken en afstanden in driehoeken die niet rechthoekig zijn, kun je de sinusregel of de cosinusregel gebruiken.

In elke driehoek ABC geldt de sinusregel.

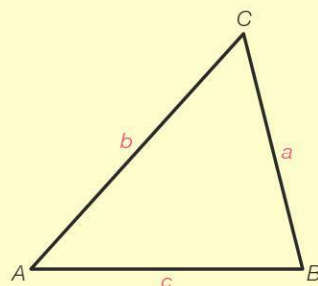
$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}$$

In elke driehoek ABC geldt de cosinusregel.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\angle A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\angle B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\angle C)$$



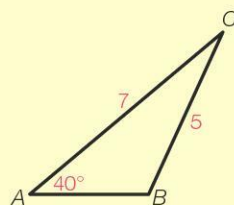
De sinusregel en de cosinusregel gelden ook in stomphoekige driehoeken.

Om de sinusregel te kunnen gebruiken, moet in elk geval een zijde met de overstaande hoek zijn gegeven. Dit is bijvoorbeeld het geval als van driehoek ABC is gegeven dat $\angle A = 40^\circ$, $AC = 7$ en $BC = 5$.

De sinusregel $\frac{BC}{\sin(\angle A)} = \frac{AC}{\sin(\angle B)} = \frac{AB}{\sin(\angle C)}$ geeft dan $\frac{5}{\sin(40^\circ)} = \frac{7}{\sin(\angle B)}$, dus $\sin(\angle B) = \frac{7 \sin(40^\circ)}{5}$.

De GR geeft $\angle B \approx 64,1^\circ$. In de figuur zie je dat dit niet klopt, want hoek B is stomp.

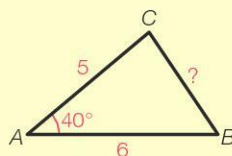
Omdat geldt $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$ is $\angle B \approx 180^\circ - 64,1^\circ = 115,9^\circ$.



figuur 10.7

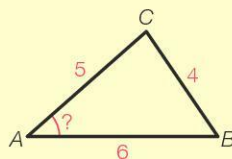
De cosinusregel gebruik je

- voor het berekenen van een zijde van een driehoek als twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven



figuur 10.8

- voor het berekenen van een hoek van een driehoek als de drie zijden zijn gegeven.

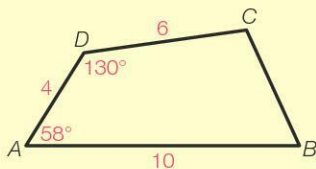


figuur 10.9

Soms heb je de sinusregel en/of de cosinusregel vaker nodig om tot het gevraagde antwoord te komen.

Om BC in figuur 10.10 te berekenen, kun je als volgt te werk gaan.

- 1 Teken BD en bereken BD met de cosinusregel in $\triangle ABD$.
- 2 Bereken $\angle BDC$ door eerst $\angle ADB$ in $\triangle ABD$ te berekenen en daarna gebruiken $\angle BDC = 130^\circ - \angle ADB$.
- 3 Bereken BC met de cosinusregel in $\triangle BCD$.



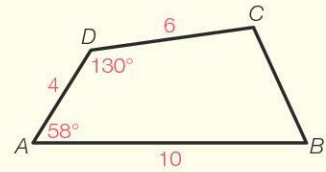
figuur 10.10

Afspraak

In dit hoofdstuk bereken je hoeken in graden. Rond daarbij het eindantwoord af op één decimaal, tenzij anders wordt gevraagd. Rond niet af in tussenstappen.

Voorbeeld

Gegeven is de vierhoek $ABCD$ in de figuur hiernaast.
Bereken BC in twee decimalen.



figuur 10.11

Uitwerking

De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft

$$BD^2 = 10^2 + 4^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \cos(58^\circ) = 73,60\dots$$

$$BD = 8,57\dots$$

De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft

$$10^2 = 4^2 + 73,60\dots - 2 \cdot 4 \cdot 8,57\dots \cdot \cos(\angle ADB)$$

$$100 = 89,60\dots - 68,63\dots \cdot \cos(\angle ADB)$$

$$68,63\dots \cdot \cos(\angle ADB) = -10,39\dots$$

$$\cos(\angle ADB) = -0,15\dots$$

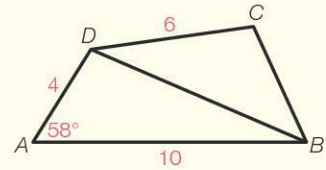
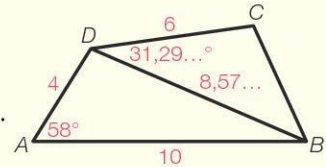
$$\angle ADB = 98,70\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle BDC = 130^\circ - 98,70\dots^\circ = 31,29\dots^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft

$$BC^2 = 73,60\dots + 6^2 - 2 \cdot 8,57\dots \cdot 6 \cdot \cos(31,29\dots^\circ) = 21,62\dots$$

$$BC \approx 4,65$$



R2 Zie de theorie op de vorige bladzijde.



a Bereken $\angle C$ in driehoek ABC in figuur 10.7.

b Bereken BC in figuur 10.8. Rond af op twee decimalen.

c Bereken $\angle A$ in figuur 10.9.

R3 Zie het voorbeeld.



a In de tweede stap van de uitwerking van het voorbeeld wordt de cosinusregel in $\triangle ABD$ gebruikt om $\angle ADB$ te berekenen. Je zou hier ook de sinusregel kunnen gebruiken.

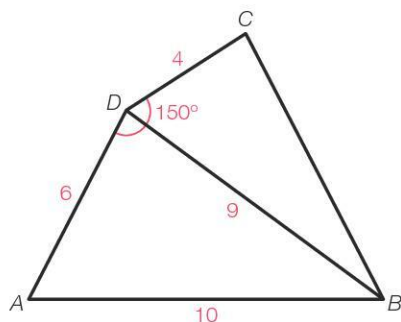
Doe dit. Welk probleem ontstaat?

b Bert begint met het tekenen van de diagonaal AC en gebruikt achtereenvolgens de cosinusregel, de sinusregel en de cosinusregel om BC te berekenen.

Waarom is het in dit geval na het gebruik van de sinusregel wel duidelijk welke van de twee hoeken de juiste is?

4

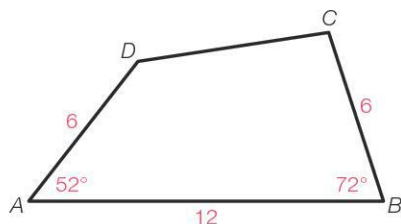
- Van vierhoek $ABCD$ is gegeven $AB = 10$, $AD = 6$, $CD = 4$, $BD = 9$ en $\angle ADC = 150^\circ$. Zie de figuur hiernaast.
- Afgerond op één decimaal is $\angle ADB \approx 80,9^\circ$.
- Bereken $\angle ADB$ in twee decimalen.
 - Bereken BC . Rond af op één decimaal.



figuur 10.12

5

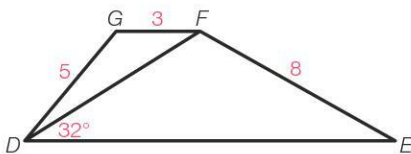
- Gegeven is de vierhoek $ABCD$ in de figuur hiernaast.
- Bereken CD en $\angle ADC$. Rond af op één decimaal.



figuur 10.13

A6

- Gegeven is het trapezium $DEFG$ in de figuur hiernaast met $EF = 8$, $FG = 3$ en $DG = 5$. Verder is $\angle EDF = 32^\circ$.
- Afgerond op één decimaal is $DF \approx 7,3$.
- Bereken DF in twee decimalen.
 - Bereken de oppervlakte van $DEFG$. Rond af op twee decimalen.



figuur 10.14

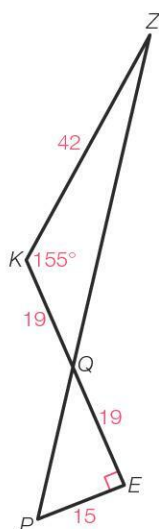
7

- Het instellen van de juiste zadelhoogte van een fiets is belangrijk. In de figuur hieronder is aangegeven wat er met de zadelhoogte wordt bedoeld. Bij de Holmer methode wordt uitgegaan van een hoek bij de knie van 155° in het geval de crankarm in het verlengde ligt van de zitbuis.



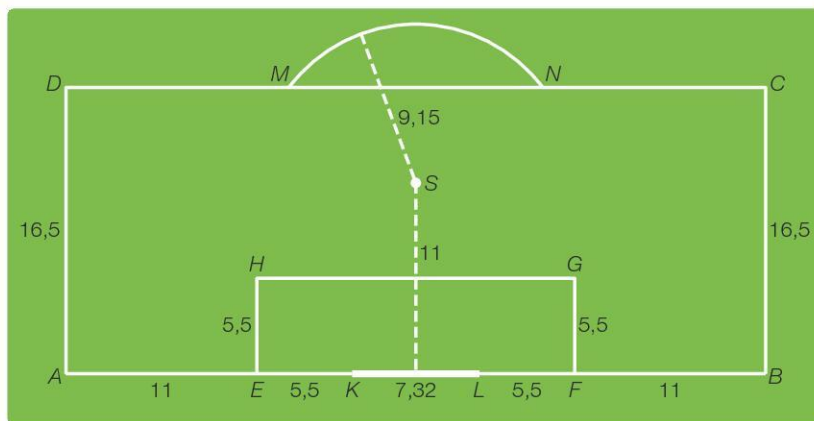
figuur 10.15

- In figuur 10.16 is de situatie weergegeven van een fietser met een lengte van het bovenbeen (afstand KZ) van 42 cm en een lengte van het onderbeen (afstand KE) van 38 cm. Verder is $\angle E = 90^\circ$, $EP = 15$ cm en snijdt de lijn PZ de lijn KE in het punt Q waarbij $KQ = EQ$. Bereken in cm nauwkeurig de zadelhoogte voor deze fietser.



figuur 10.16

In figuur 10.17 zie je een schematische tekening van het bovenaanzicht van een gedeelte van een voetbalveld. De afmetingen zijn in meters. Rechthoek $ABCD$ is het strafschopgebied. Punt S is de strafschopstip. Op het strafschopgebied bevindt zich een cirkelboog waarvan alle punten zich op een afstand van 9,15 meter van S bevinden. De eindpunten M en N van deze cirkelboog liggen op het lijnstuk CD . Rechthoek $EFGH$ is het doelgebied, K en L zijn de doelpalen en KL is de doellijn. De strafschopstip S bevindt zich op een afstand van 11 meter van het midden van de doellijn. In deze opgave verwaarlozen we de dikte van de doelpalen, de lijndikte en de afmetingen van de strafschopstip en van de bal.



figuur 10.17

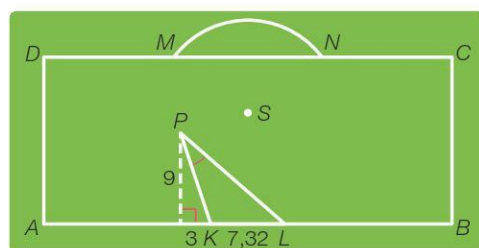
- a** De terreinknecht van een voetbalvereniging gaat alle niet-gestippelde lijnen van het gedeelte van het voetbalveld in figuur 10.17 kalken. Bereken hoeveel meter hij gaat kalken. Rond af op twee decimalen.

Voor een speler die probeert te scoren, is zowel zijn afstand tot de achterlijn als zijn positie ten opzichte van het doel van belang.

In figuur 10.18 bevindt speler P zich 9 meter van de achterlijn en 3 meter links van het doel. Hoek KPL noemen we de *schothoek*.

Bereken in graden nauwkeurig

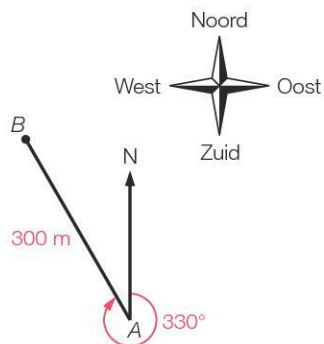
- b** de schothoek in figuur 10.18
c de grootst mogelijke schothoek die een speler kan hebben als hij zich op 9 meter van de achterlijn bevindt
d de schothoek van een speler die zich op 14,5 meter van doelpaal K en op 17 meter van doelpaal L bevindt.



figuur 10.18

A9


Maaïke wil van A naar B zeilen. De afstand van A naar B is 300 meter met een koers van 330° . Hierin is de koers de hoek ten opzichte van het noorden met de wijzers van de klok mee. Zie figuur 10.19.

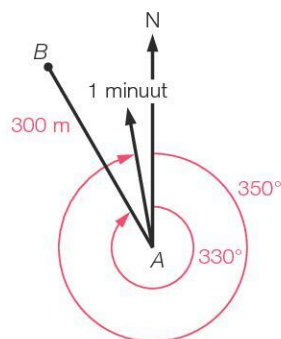


figuur 10.19

Na 1 minuut zeilen merkt Maaïke dat ze van de koers is afgeweken. In plaats van met een koers van 330° te varen, heeft ze met een koers van 350° gevaren. Zie figuur 10.20. Gedurende deze minuut heeft ze 100 meter afgelegd.

Maaïke stelt haar koers bij en zeilt nu rechtstreeks naar B .

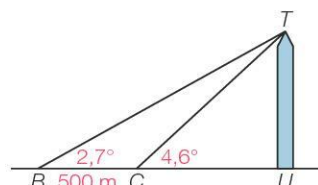
a Bereken hoeveel meter Maaïke extra heeft afgelegd.



figuur 10.20

In B aangekomen ziet Maaïke op het land een vuurtoren. Ze ziet de top T van de vuurtoren onder een hoek van $2,7^\circ$. Ze vaart vanuit B in een rechte lijn 500 meter in de richting van de vuurtoren en komt in punt C . Vanuit C ziet ze T onder een hoek van $4,6^\circ$. Zie figuur 10.21.

b Bereken in meter nauwkeurig de hoogte van T ten opzichte van de zee. Ga ervan uit dat Maaïke de top T waarneemt op een hoogte van 2 meter boven de zee.



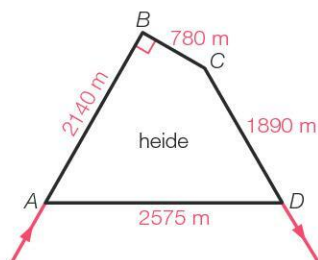
figuur 10.21

A10


Een gedeelte van de hardlooprouten van Jan gaat over de heide. Zie figuur 10.22. Hij komt bij A op de heide en loopt dan in een rechte lijn naar de brandtoren B . Daar slaat hij rechtsaf en gaat via C naar D , waar hij de heide weer verlaat.

Soms loopt hij ook wel eens langs de rand van de heide rechtstreeks van A naar D . Dan loopt hij 2235 meter minder ver.

Hij kan ook nog een tussenroute nemen. Dan loopt hij in een rechte lijn van het punt P dat precies halverwege AB ligt, naar het punt Q dat zo op AD ligt dat $DQ = 275$ meter. Bereken hoeveel meter Jan minder ver loopt via de route $APQD$ dan via de route $ABCD$.



figuur 10.22

Terugblik

De sinusregel en de cosinusregel

Voor het berekenen van hoeken en lijnstukken in rechthoekige driehoeken kun je de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens gebruiken.

Voor het berekenen van hoeken en afstanden in driehoeken die niet rechthoekig zijn, kun je de sinusregel of de cosinusregel gebruiken.

In elke driehoek ABC geldt

- de sinusregel

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}$$

- de cosinusregel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\angle A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\angle B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\angle C)$$

Om de sinusregel te kunnen gebruiken, moet in elk geval een zijde met de overstaande hoek zijn gegeven.

De cosinusregel gebruik je

- voor het berekenen van een zijde van een driehoek als twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven
- voor het berekenen van een hoek van een driehoek als de drie zijden zijn gegeven.

Soms heb je deze regels vaker nodig om een antwoord te vinden.

Om in de driehoek hiernaast $\angle A$ te berekenen, begin je met de cosinusregel om AB te berekenen.

Je krijgt $AB^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(58^\circ) = 26,56...$

$$AB = 5,15...$$

Nog een keer de cosinusregel gebruiken geeft

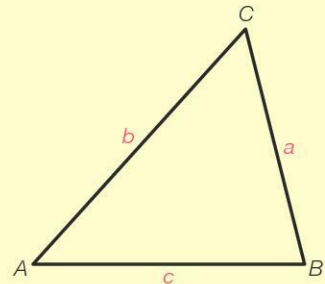
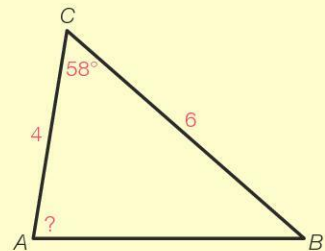
$$6^2 = 26,56... + 4^2 - 2 \cdot 5,15... \cdot 4 \cdot \cos(\angle A)$$

$$41,23... \cdot \cos(\angle A) = 6,56...$$

$$\cos(\angle A) = 0,15...$$

$$\angle A \approx 80,8^\circ$$

Zou je na het berekenen van AB de sinusregel gebruiken om $\angle A$ te berekenen, dan zijn er twee mogelijkheden voor $\angle A$ waaruit je de juiste moet kiezen.



10.2 Vergelijkingen bij meetkunde

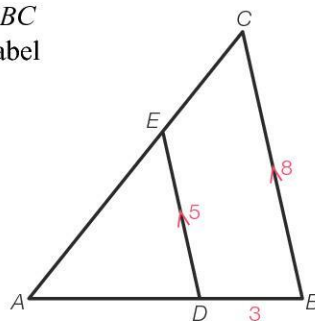
011
☐⊗*

Zie figuur 10.23 met de gelijkvormige driehoeken ABC en ADE . Uit $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ volgt de verhoudingstabel

$$\frac{AB}{AD} \Bigg| \frac{BC}{DE}$$

Waarom lukt het niet AD te berekenen met

$$AD = \frac{AB \times DE}{BC}?$$



figuur 10.23

Theorie A Vergelijkingen bij gelijkvormigheid

In opgave 11 lukte het niet om AD te berekenen met $AD = \frac{AB \times DE}{BC}$.

Door de lengte van AD gelijk te stellen aan x en AB uit te drukken in x , lukt het wel om AD te berekenen.

Stel $AD = x$, dan is $AB = x + 3$. Dit geeft de verhoudingstabel $\frac{x+3}{x} \Bigg| \frac{8}{5}$.

Door kruislings te vermenigvuldigen ontstaat de vergelijking

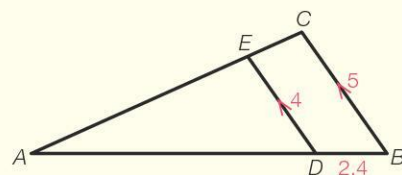
$8x = 5(x + 3)$. De oplossing van de vergelijking is $x = 5$.

Dus $AD = 5$.

Voorbeeld

Gegeven is driehoek ABC met $BC = 5$. Op de zijden AB en AC liggen de punten D en E waarbij $DE \parallel BC$, $BD = 2,4$ en $DE = 4$. Zie de figuur hiernaast.

Bereken AD .



figuur 10.24

Uitwerking

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ geeft $\frac{AD}{AB} \Bigg| \frac{DE}{BC}$

Stel $AD = x$, dan is $AB = x + 2,4$.

$$\frac{x}{x+2,4} \Bigg| \frac{4}{5} \text{ geeft } 5x = 4(x+2,4)$$

$$5x = 4x + 9,6$$

$$x = 9,6$$

Dus $AD = 9,6$.

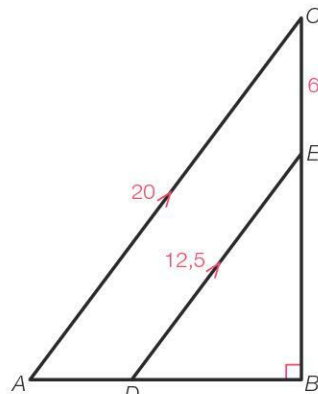
R12

Zie het voorbeeld.

- a** Licht toe dat $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.
b Gegeven is dat $AC = 10,2$.
 Bereken CE .

13

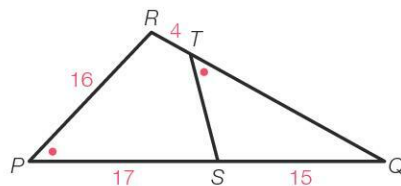
Gegeven is driehoek ABC met $\angle B = 90^\circ$ en $AC = 20$. Op de zijden AB en BC liggen de punten D en E waarbij $DE \parallel AC$, $DE = 12,5$ en $CE = 6$. Zie de figuur hiernaast. Bereken AD .



figuur 10.25

14

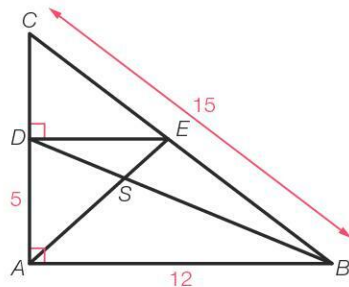
Van driehoek PQR is $PQ = 32$ en $PR = 16$. Op de zijden PQ en QR liggen de punten S en T zodanig dat $PS = 17$, $RT = 4$ en $\angle P = \angle QTS$. Zie de figuur hiernaast. Bereken ST .



figuur 10.26

A15

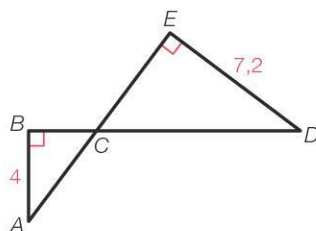
Van driehoek ABC is $\angle A = 90^\circ$, $AB = 12$ en $BC = 15$. Het punt D ligt op AC waarbij $AD = 5$. Het punt E ligt op BC waarbij $\angle CDE = 90^\circ$. Het snijpunt van AE en BD is S . Zie de figuur hiernaast. Bereken BS .



figuur 10.27

E16

Gegeven is de figuur hiernaast met $\angle B = \angle E = 90^\circ$, $AB = 4$ en $DE = 7,2$. Verder is gegeven dat $AE = 10,4$ en $BD = 12$. Bereken BC op algebraïsche wijze.



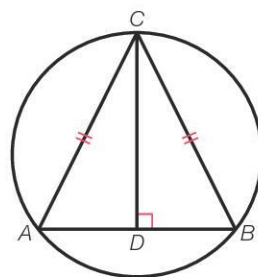
figuur 10.28

In het vervolg mag je gelijkvormige driehoeken gebruiken zonder de gelijkvormigheid eerst aan te tonen.

017

In figuur 10.29 is de gelijkbenige driehoek ABC met $AC = BC$ getekend, waarvan de hoogte CD gelijk is aan AB . Verder is de omgeschreven cirkel van deze driehoek getekend. De straal van deze cirkel is 6. We vragen ons af wat de lengte van AB is.

- Teken figuur 10.29 over en noem het middelpunt van de cirkel M .
- Stel $DM = x$ en licht toe dat hieruit volgt $AD = \frac{1}{2}x + 3$.
- Gebruik de stelling van Pythagoras in driehoek ADM en toon aan dat je de vergelijking $\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$ krijgt.
- Los de vergelijking $\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$ op. Wat is de lengte van AB ?



figuur 10.29 De straal van de cirkel is 6 en $AB = CD$.

Theorie B Vergelijkingen en de stelling van Pythagoras

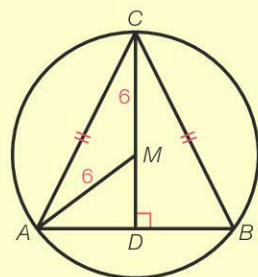
In figuur 10.30 is de cirkel met de gelijkbenige driehoek ABC van opgave 17 nog eens getekend. In opgave 17 is $DM = x$ gesteld om AB te berekenen. Je kunt ook bijvoorbeeld $AD = x$ stellen. Dan is $CD = AB = 2x$, dus $DM = 2x - 6$. De stelling van Pythagoras in driehoek ADM geeft dan $AD^2 + DM^2 = AM^2$

$$\begin{aligned} x^2 + (2x - 6)^2 &= 6^2 \\ x^2 + 4x^2 - 24x + 36 &= 36 \\ 5x^2 - 24x &= 0 \\ x(5x - 24) &= 0 \\ x = 0 \vee 5x &= 24 \\ x = 0 \vee x &= 4\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Dus $AD = 4\frac{4}{5}$ en $AB = 2 \cdot 4\frac{4}{5} = 9\frac{3}{5}$.

Je ziet dat deze uitwerking eenvoudiger is dan wat je in opgave 17 hebt gedaan.

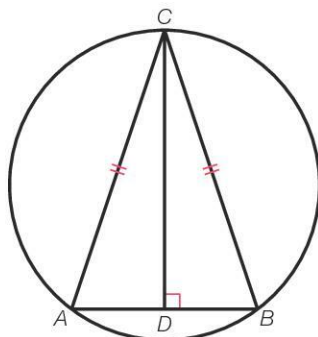
In het algemeen is het raadzaam om na te gaan welk lijnstuk je x stelt voor een zo eenvoudig mogelijke uitwerking.



figuur 10.30 De hoogte CD is gelijk aan AB .

18

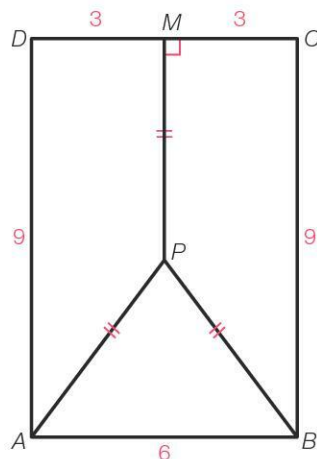
Gegeven is de cirkel met straal 6 in figuur 10.31. De punten A , B en C liggen op de cirkel waarbij $AC = BC$. Verder is de hoogtelijn CD in driehoek ABC getekend. Er geldt $CD = \frac{1}{2}AB$. Bereken AB exact.



figuur 10.31

19
 

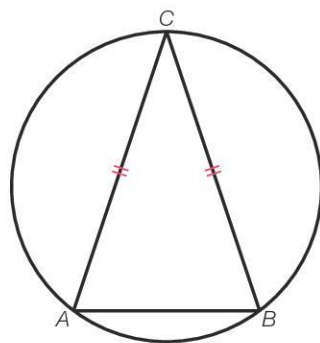
Gegeven is de rechthoek $ABCD$ met $AB = 6$ en $AD = 9$. Het punt M is het midden van CD . Het punt P ligt binnen de rechthoek waarbij $AP = BP = MP$. Bereken AP algebraïsch.



figuur 10.32

20
  *

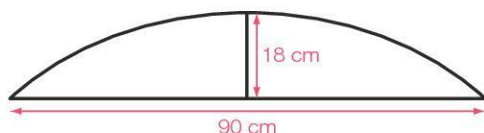
Gegeven is een cirkel met straal 6. De punten A , B en C liggen op de cirkel waarbij $AC = BC$. Verder is $AC = 1\frac{1}{2}AB$. Zie figuur 10.33. Bereken AB . Rond af op twee decimalen.



figuur 10.33

21
  *

In sommige gebouwen zijn boven een raam of een deur bakstenen gemetseld in de vorm van een cirkelboog. Om deze bakstenen tijdens de bouw op de juiste wijze te kunnen plaatsen, wordt gebruikgemaakt van een houten mal, een zogenoemde metselboog. Zie figuur 10.34. De metselaar vraagt aan een timmerman om een metselboog te maken. De breedte moet 90 cm worden en de hoogte 18 cm. In figuur 10.35 is het vooraanzicht van de metselboog met de genoemde maten weergegeven.



figuur 10.35

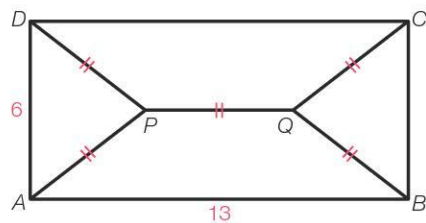
De bovenrand van de metselboog is een deel van een cirkel. Om de metselboog te kunnen maken, moet de timmerman de straal van deze cirkel berekenen. Bereken algebraïsch deze straal in cm nauwkeurig.



figuur 10.34

A22

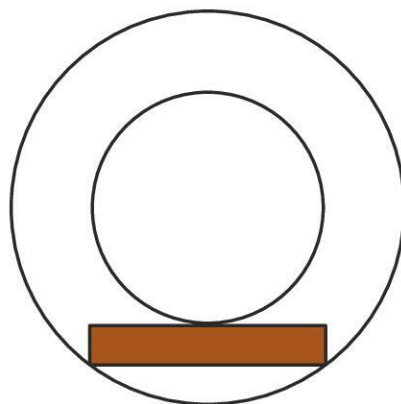
In de rechthoek $ABCD$ met $AB = 13$ en $AD = 6$ liggen de punten P en Q waarbij $AP = DP = BQ = CQ = PQ$. Bereken exact AP .



figuur 10.36

A23

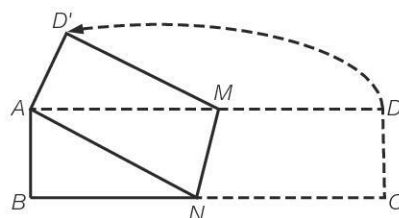
In de figuur hiernaast is een ringvormige gracht getekend waarin precies een rechthoekig vlot past. Het vlot is 56 meter lang en half zo breed als de gracht. De straal van de binnencirkel van de gracht is 37 meter. Bereken algebraïsch de breedte van de gracht.



figuur 10.37

E24

Een strook papier $ABCD$ van 16 bij 4 cm wordt zo langs het lijnstuk MN gevouwen, dat punt C op punt A komt te liggen. De plaats waar punt D terechtkomt, noemen we D' . Zie de figuur hiernaast. Bereken algebraïsch de oppervlakte van de vijfhoek $ABNMD'$.



figuur 10.38

Terugblik

Vergelijkingen bij gelijkvormigheid

In de figuur hiernaast zie je de gelijkvormige driehoeken ADE en CBE . Uit deze gelijkvormigheid volgt de

verhoudingstabel $\frac{AD}{BC} \mid \frac{AE}{CE} \mid \frac{DE}{BE}$ oftewel $\frac{7}{5} \mid \frac{AE}{CE} \mid \frac{DE}{BE}$.

Om AE te vinden, bereken je eerst AC met de stelling van Pythagoras in driehoek ABC . Je krijgt $AC = 13$.

Vervolgens stel je $AE = x$ en druk je CE uit in x .

Dit geeft de verhoudingstabel $\frac{7}{5} \mid \frac{x}{13-x}$.

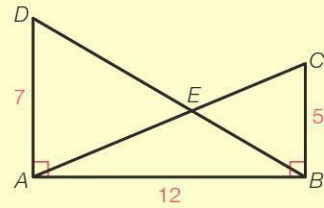
Kruislings vermenigvuldigen geeft $5x = 7(13 - x)$

$$5x = 91 - 7x$$

$$12x = 91$$

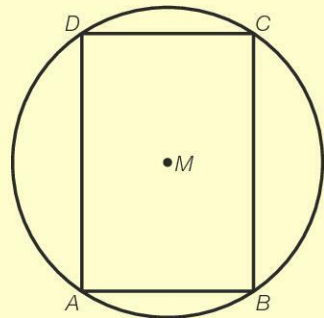
$$x = 7\frac{7}{12}$$

Dus $AE = 7\frac{7}{12}$.



Vergelijkingen en de stelling van Pythagoras

In de cirkel met straal $6\frac{1}{2}$ is rechthoek $ABCD$ getekend met $BC = \frac{1}{2}AB$.



Om AB algebraïsch te berekenen, kun je als volgt te werk gaan.

Stel $AB = 2x$, dan is $BC = 3x$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$(2x)^2 + (3x)^2 = 13^2$$

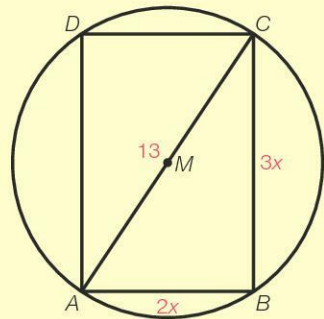
$$4x^2 + 9x^2 = 169$$

$$13x^2 = 169$$

$$x^2 = 13$$

$$x = \sqrt{13}$$

Dus $AB = 2x = 2\sqrt{13}$.

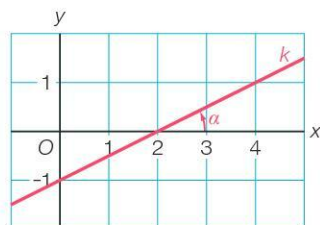


10.3 Lijnen en cirkels in een assenstelsel

O25


In figuur 10.39 is de lijn $k: y = \frac{1}{2}x - 1$ getekend.

- De hoek die k met de x -as maakt, is ongeveer 27° . Bereken deze hoek in graden in één decimaal.
- Is de afstand van de oorsprong tot k kleiner dan, groter dan of gelijk aan 1? Licht toe.



figuur 10.39

Theorie A Lijnen, hoeken en afstanden

De hoek tussen twee lijnen

De richtingshoek van een lijn is de hoek waarover je de x -as moet draaien om de x -as te laten samenvallen met de lijn.

Voor de richtingshoek α van de lijn k geldt $\tan(\alpha) = rc_k$ en $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

Voor de hoek φ tussen twee lijnen nemen we een niet-stompe hoek. Dus $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$.

De hoek tussen twee lijnen waarvan de vergelijkingen zijn gegeven, bereken je met behulp van richtingshoeken.

Voor de hoek φ tussen twee lijnen met richtingshoeken α en β , waarbij $\alpha > \beta$, geldt

$$\varphi = \alpha - \beta \text{ als } \alpha - \beta \leq 90^\circ$$

$$\varphi = 180^\circ - (\alpha - \beta) \text{ als } \alpha - \beta > 90^\circ.$$

Voor de lijnen k en l met $rc_k \neq 0$ en $rc_l \neq 0$ geldt:

$rc_k \cdot rc_l = -1$ en $k \perp l$ komt op hetzelfde neer.

Hieruit volgt dat de lijnen $ax + by = c$ en $bx - ay = d$ loodrecht op elkaar staan.

Afstanden bij punten en lijnen

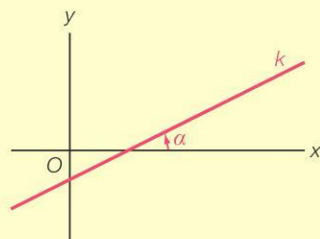
De afstand tussen de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ is

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Voor het berekenen van de afstand van een punt tot een lijn gebruik je het volgende werkschema.

Werkschema: de afstand van het punt A tot de lijn k berekenen

- Stel een vergelijking op van de lijn l door A die loodrecht staat op k .
- Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en l .
- Gebruik $d(A, k) = d(A, B)$.



figuur 10.40

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $k: 2x - y = 4$ en $l: x - 3y = -3$. Het punt $A(5, 6)$ ligt op k . Zie figuur 10.41.

- a Bereken de hoek tussen k en l .
- b Bereken exact $d(A, l)$.

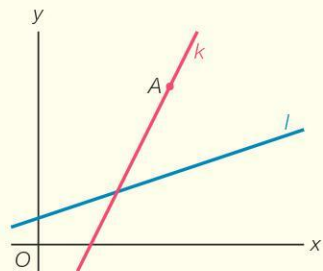
Uitwerking

- a $k: 2x - y = 4$
 $-y = -2x + 4$
 $y = 2x - 4$
 $\tan(\alpha) = 2$ geeft $\alpha = 63,43\dots^\circ$
- $l: x - 3y = -3$
 $-3y = -x - 3$
 $y = \frac{1}{3}x + 1$
 $\tan(\beta) = \frac{1}{3}$ geeft $\beta = 18,43\dots^\circ$
De hoek tussen k en l is $63,43\dots^\circ - 18,43\dots^\circ = 45^\circ$.

- b Lijn m door A loodrecht op l .
 $m: 3x + y = c \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } A(5, 6) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 5 + 6 = 21$
 $m: 3x + y = 21$ snijden met l geeft het punt B .
 $\left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 21 \\ x - 3y = -3 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 9x + 3y = 63 \\ x - 3y = -3 \end{array} \right. +$
 $\left. \begin{array}{l} 10x = 60 \\ x = 6 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 18 + y = 21 \\ y = 3 \end{array} \right\}$

Dus $B(6, 3)$.

$$d(A, l) = d(A, B) = \sqrt{(6-5)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{10}$$

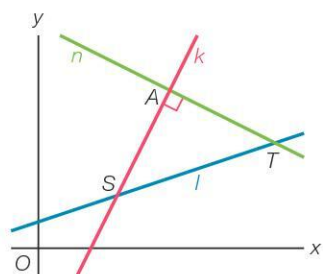


figuur 10.41

26
☐◎*

Zie het voorbeeld.

De lijnen k en l snijden elkaar in het punt S .
De lijn n snijdt k loodrecht in A en l in het punt T .
Bereken exact $d(S, T)$.

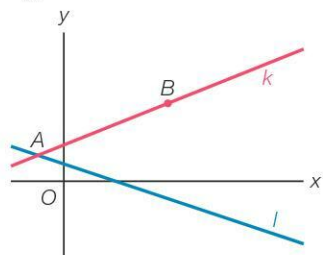


figuur 10.42

27
☐

Gegeven zijn de lijnen $k: 2x - 5y = -7$ en $l: x + 3y = 2$. De lijnen snijden elkaar in het punt A . Het punt $B(4, 3)$ ligt op k . Zie figuur 10.43.

- a Bereken de hoek tussen k en l .
- b Bereken exact $d(A, B)$.
- c Bereken exact $d(B, l)$.



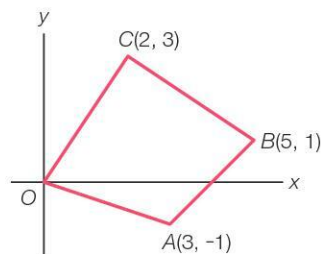
figuur 10.43

28



Gegeven is vierhoek $OABC$ met de punten $A(3, -1)$, $B(5, 1)$ en $C(2, 3)$. Zie figuur 10.44.

- Toon aan dat $\angle OCB = 90^\circ$.
- Bereken $\angle OAB$.
- Bereken in twee decimalen de afstand van C tot de lijn door A en B .



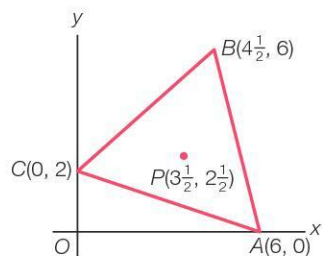
figuur 10.44

29



Gegeven is driehoek ABC met $A(6, 0)$, $B(4\frac{1}{2}, 6)$ en $C(0, 2)$. Het punt $P(3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$ ligt binnen de driehoek. Zie figuur 10.45.

- Bekijk $\angle APB$, $\angle APC$ en $\angle BPC$.
Onderzoek met een berekening welke van deze hoeken het grootst is.
- Onderzoek met een berekening of $d(P, A) = 2 \cdot d(P, AC)$.



figuur 10.45

30

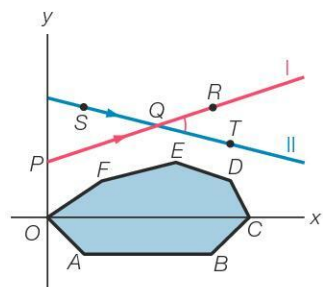


In figuur 10.46 is het eiland $OABCDEF$ in een assenstelsel getekend. De eenheid is 100 meter en $A(2, -2)$, $B(9, -2)$, $C(11, 0)$, $D(10, 2)$, $E(7, 3)$ en $F(3, 2)$. Schip I volgt route PQR met $P(0, 3)$, $Q(6, 5)$ en $R(9, 6)$. Schip II volgt route SQT met $S(2, 6)$ en $T(10, 4)$.

- Bereken de hoek tussen de twee routes.

De schepen moeten op zijn minst 200 meter uit de kust blijven.

- Onderzoek met een berekening of de route van schip I aan deze eis voldoet.



figuur 10.46



31



Gegeven zijn de lijnen $k: x + 2y = 8$ en $l: x + 2y = 13$. Bereken exact de afstand tussen k en l .

De afstand tussen twee evenwijdige lijnen is gelijk aan de afstand van een punt op de ene lijn tot de andere lijn.

A32
  *

Voor $a = 1, 2, 3, \dots$ zijn gegeven de lijnen

$k_a: 3x - ay = 0$. Zie figuur 10.47.

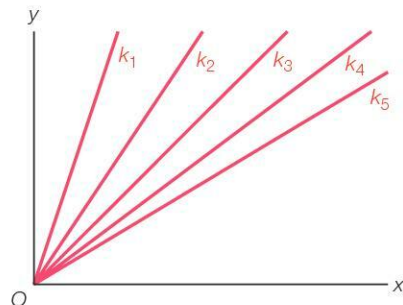
- a** Maud beweert dat de hoek tussen de lijnen k_1 en k_3 even groot is als de hoek tussen de lijnen k_3 en k_5 .

Onderzoek met een berekening of Maud gelijk heeft.

- b** Ischa beweert dat voor het punt $A(4, 6)$ op k_2 geldt dat $d(A, x\text{-as}) = 2\frac{1}{2} \cdot d(A, k_4)$.

Onderzoek algebraïsch of Ischa gelijk heeft.

- c** Bereken vanaf welke waarde van a de hoek die de lijn k_a met de x -as maakt kleiner is dan 10° .



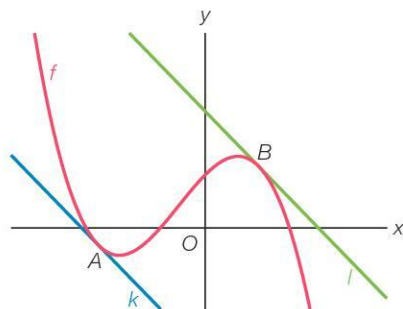
figuur 10.47

A33
  *

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -2$. De lijn l is evenwijdig met k en raakt de grafiek van f in het punt B .

- a** Bereken exact $d(A, B)$.
b Bereken $\angle AOB$.
c Bereken exact $d(k, l)$.



figuur 10.48

O34
  *

Gegeven is de cirkel $c: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$.

- a** Geef van c de straal r en de coördinaten van het middelpunt M .
b De vergelijking van c is te schrijven in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
 Bereken a , b en c .

Theorie B Cirkelvergelijkingen

In opgave 34 is de cirkel c gegeven in de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

Het middelpunt van de cirkel is $M(x_M, y_M)$ en de straal is r . Door de haakjes weg te werken is de cirkelvergelijking te schrijven in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Is een cirkel gegeven in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, dan kun je deze met kwadraat afsplitsen schrijven in de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ waaruit de straal en de coördinaten van het middelpunt zijn af te lezen.

Bij de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$ gaat dat als volgt.

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 8y + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 4)^2 - 16 + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$$

Dus het middelpunt is $M(2, -4)$ en de straal is $r = 4$.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= x^2 - 4x + 4 - 4 = (x - 2)^2 - 4 \\ y^2 + 8y &= y^2 + 8y + 16 - 16 = (y + 4)^2 - 16 \end{aligned}$$

35 Gegeven is de cirkel c met middelpunt $M(2, -4)$ en straal $r = 4$ uit de theorie op de vorige bladzijde.



- a Licht toe dat het punt $A(2, 0)$ op c ligt.
- b De afstand tussen de punten $B(-2, -3)$ en M is $d(B, M) = \sqrt{17}$. Toon dit aan en licht toe dat hieruit volgt dat B buiten c ligt.
- c Onderzoek met een berekening of het punt $C(1, -1)$ op, binnen of buiten c ligt.

36 Bereken van de volgende cirkels de straal en de coördinaten van het middelpunt.



- a $c_1: x^2 + y^2 - 8x - 2y + 10 = 0$
- b $c_2: x^2 + y^2 + 6x - 5y + 13 = 0$
- c $c_3: x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$

37 Onderzoek met een berekening of



- a het punt $A(2, 0)$ op, binnen of buiten de cirkel
 $c_1: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ ligt
- b het punt $B(4, 1)$ op, binnen of buiten de cirkel
 $c_2: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 21 = 0$ ligt
- c het punt $C(-5, 1)$ op, binnen of buiten de cirkel
 $c_3: x^2 + y^2 - 2x - 8y = 23$ ligt.

38 Stel een vergelijking op van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ van de cirkel



- a c_1 met middelpunt $M_1(6, 3)$ die door de oorsprong gaat
- b c_2 met middelpunt $M_2(-3, 5)$ die door het punt $(0, 3)$ gaat
- c c_3 waarvan het lijnstuk AB met $A(2, 0)$ en $B(8, 0)$ een middellijn is
- d c_4 waarvan het lijnstuk CD met $C(1, 2)$ en $D(7, 4)$ een middellijn is.

39 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0$.



Bereken exact de afstand van het middelpunt M van de cirkel

- a tot de x -as
- b tot de y -as
- c tot de lijn $k: y = x$
- d tot de lijn $l: x + 3y = 6$.

A40 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$, de lijn $k: 3x + 2y = 13$ en de punten $A(2, -1)$ en $B(-3, 2)$.



- a Onderzoek met een berekening of A op, binnen of buiten c ligt.
- b Bereken exact de afstand van het middelpunt M van c tot k .
- c De cirkel snijdt de x -as in de punten P en Q .
Bereken $\angle PBQ$.

E41 De cirkel c gaat door de punten $P(-1, p)$, $Q(-2, 6)$ en $R(5, 7)$.



Onderzoek met een exacte berekening of de oorsprong op, binnen of buiten c ligt in het geval PR een middellijn van c is.

Terugblik

Lijnen en hoeken

Voor het berekenen van de hoek tussen de lijnen $k: 3x - y = 5$ en

$l: 3x + 4y = 6$ gebruik je de richtingshoeken α en β van k en l .

Uit $3x - y = 5$ volgt $y = 3x - 5$, dus $\tan(\alpha) = 3$ en $\alpha = 71,56\dots^\circ$.

Uit $3x + 4y = 6$ volgt $y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}$, dus $\tan(\beta) = -\frac{3}{4}$ en $\beta = -36,86\dots^\circ$.

Dus $\alpha - \beta = 71,56\dots^\circ - (-36,86\dots^\circ) = 108,43\dots^\circ$.

De hoek tussen k en l is $180^\circ - 108,43\dots^\circ \approx 71,6^\circ$.

Lijnen en afstanden

Voor het berekenen van de afstand van het punt $A(9, 1)$ tot de lijn

$l: 3x + 4y = 6$ ga je als volgt te werk.

- Stel een vergelijking op van de lijn m door A die loodrecht staat op l .

Je krijgt $m: 4x - 3y = 33$.

- Bereken de coördinaten van het snijpunt B van m en l .

Oplossen van het stelsel $\begin{cases} 4x - 3y = 33 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$ geeft het punt $B(6, -3)$.

- $d(A, l) = d(A, B) = \sqrt{(6-9)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{25} = 5$

Om de afstand tussen de evenwijdige lijnen $l: 3x + 4y = 6$ en

$n: 3x + 4y = 31$ te berekenen, neem je een punt P op l of n en bereken je vervolgens de afstand van dat punt tot de andere lijn.

- $P(2, 0)$ ligt op l .
- De lijn $p: 4x - 3y = 8$ gaat door P en staat loodrecht op l en n .
- Het snijpunt van n en p is $S(5, 4)$.

Dus $d(l, n) = d(P, n) = d(P, S) = \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Cirkelvergelijkingen

Uit een cirkelvergelijking van de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ zijn de straal r en de coördinaten (x_M, y_M) van het middelpunt M af te lezen.

Werk je de haakjes weg, dan krijg je een cirkelvergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Om van de cirkel $c: x^2 + y^2 - 7x - 3y + 6 = 0$ de straal en de coördinaten van het middelpunt te vinden, ga je kwadraatafsplitsen. Je krijgt

$$x^2 - 7x + y^2 - 3y + 6 = 0$$

$$(x - 3\frac{1}{2})^2 - 12\frac{1}{4} + (y - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 6 = 0$$

$$(x - 3\frac{1}{2})^2 + (y - 1\frac{1}{2})^2 = 8\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } M(3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}) \text{ en } r = \sqrt{8\frac{1}{2}}.$$

Om te onderzoeken of het punt $A(3, 4)$ op, binnen of buiten c ligt, vergelijk je $d(A, M)$ met r .

$$d(A, M) = \sqrt{(3\frac{1}{2} - 3)^2 + (1\frac{1}{2} - 4)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 6\frac{1}{4}} = \sqrt{6\frac{1}{2}}$$

$d(A, M) < r$, dus A ligt binnen c .

10.4 Cirkels, raaklijnen en functies

O42 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$ en de lijn $l: 2x - y = 3$.



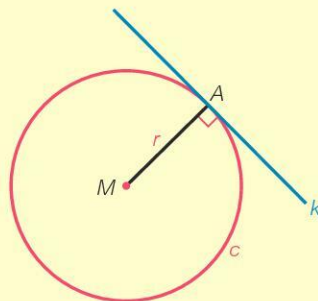
- Bereken de straal van c .
- Bereken de afstand van het middelpunt M van c tot l .
- Hoe volgt uit a en b dat l de cirkel raakt?

Theorie A Cirkels en raaklijnen

Een raaklijn van een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt. Dus in figuur 10.49 staat de lijn door M en A loodrecht op k . Ook is $d(M, A) = r$, waarbij r de straal van de cirkel is.

Deze eigenschappen gebruik je bij het oplossen van de volgende twee raaklijnproblemen.

- Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven zijn
 - een cirkel
 - een punt op de cirkel waarin k de cirkel raakt.
- Stel een vergelijking op van de cirkel c als gegeven zijn
 - het middelpunt van c
 - een lijn waaraan c raakt.



figuur 10.49 De lijn k raakt de cirkel in het punt A .

Bij het eerste raaklijnprobleem gebruik je het werkschema hieronder. Het tweede raaklijnprobleem wordt behandeld in het voorbeeld op de volgende bladzijde.

Werkschema: een vergelijking opstellen van een raaklijn k aan een cirkel c met middelpunt M in een gegeven punt A op c

- Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A .
- Gebruik $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, om de richtingscoëfficiënt rc_k van k te berekenen.
- Gebruik rc_k en de coördinaten van A om een vergelijking van k op te stellen.

Is gegeven dat de lijn k de cirkel $c: (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 17$ raakt in het punt $A(2, 0)$, dan gebruik je de lijn l door het middelpunt $(-2, -1)$ van c

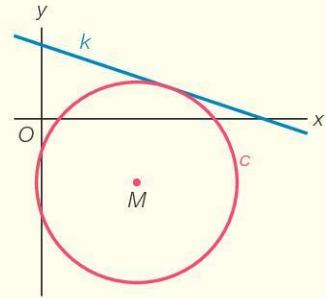
en $A(2, 0)$. Er geldt $rc_l = \frac{0 - (-1)}{2 - (-2)} = \frac{1}{4}$, dus $rc_k = -4$.

$k: y = -4x + b$ door $A(2, 0)$ geeft $-4 \cdot 2 + b = 0$, dus $b = 8$.

Een vergelijking van k is $k: y = -4x + 8$.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(3, -2)$ die de lijn $k: x + 3y = 7$ raakt.



figuur 10.50

Uitwerking

$$c: (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = r^2 \text{ met } r = d(M, k)$$

Lijn l door M loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} l: 3x - y = c \\ \text{door } M(3, -2) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 3 - (-2) = 11$$

$$\text{Dus } l: 3x - y = 11.$$

l snijden met k geeft het punt A .

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 11 \\ x + 3y = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 9x - 3y = 33 \\ x + 3y = 7 \end{array} \right. \\ \hline 10x = 40 \\ x = 4 \\ 3x - y = 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 4 - y = 11 \\ 12 - y = 11 \\ y = 1 \end{array}$$

$$\text{Dus } A(4, 1).$$

$$r = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(4 - 3)^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Dus } c: (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 10.$$

43
☐

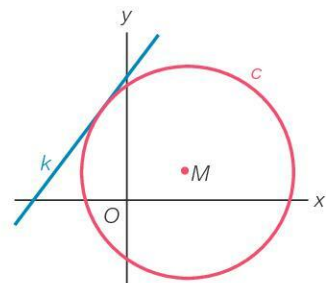
a Stel een vergelijking op de van de cirkel c_1 met middelpunt $M(2, 5)$ die de lijn $k: 2x + 3y = 6$ raakt.

b Stel een vergelijking op van de lijn l die de cirkel $c_2: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 29$ raakt in het punt $B(4, 1)$.

44
☐ ⊗ *

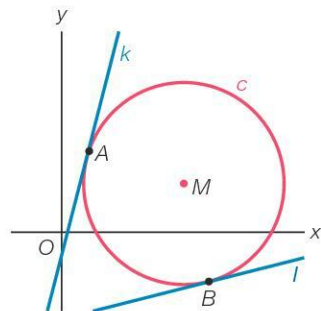
Cirkel c heeft middelpunt $M(2, 1)$ en raakt de lijn $k: 3x - 2y = -9$.

Stel een vergelijking op van c .



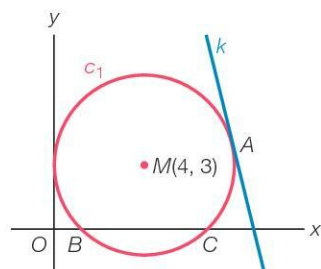
figuur 10.51

- 45** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 12 = 0$ en de punten $A(1, 3)$ en $B(6, -2)$ op c .
 De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B .
a Stel van k en van l een vergelijking op.
b Bereken de hoek tussen k en l .



figuur 10.52

- A46** Het middelpunt van cirkel c_1 is $M(4, 3)$. Cirkel c_1 raakt de lijn $k: 4x + y = 36$ in het punt A en snijdt de x -as in de punten B en C . Zie figuur 10.53.
 Uit de gegevens volgt $B(4 - 2\sqrt{2}, 0)$ en $C(4 + 2\sqrt{2}, 0)$.
a Bewijs dit.
b Het lijnstuk BC is een middellijn van cirkel c_2 .
 Het punt D met $x_D = 2$ en $y_D > 0$ ligt op c_2 .
 De lijn l raakt c_2 in D .
 Bewijs dat l door de oorsprong gaat.



figuur 10.53

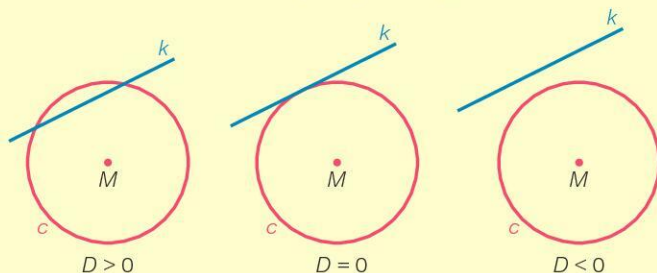
- O47** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 = 5$ en de lijn $l: y = -2x + 5$.
 Substitutie van $y = -2x + 5$ in $x^2 + y^2 = 5$ geeft de vergelijking $x^2 - 4x + 4 = 0$.
a Toon dit aan.
b Bereken van $x^2 - 4x + 4 = 0$ de discriminant. Hoe volgt hieruit dat l de cirkel raakt?

Theorie B De ligging van een lijn ten opzichte van een cirkel

Voor de ligging van een lijn ten opzichte van een cirkel zijn er drie mogelijkheden.

Krijg je na substitutie van $y = ax + b$ in een cirkelvergelijking een tweedegraadsvergelijking waarvan de discriminant

- groter is dan 0, dan zijn er twee snijpunten
- gelijk is aan 0, dan raakt de lijn de cirkel
- kleiner is dan 0, dan zijn er geen snijpunten.



Om te bewijzen dat de lijn $k: y = 2x - 3$ de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$ in twee punten snijdt, ga je als volgt te werk.

Substitutie van $y = 2x - 3$ in $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$ geeft

$$x^2 + (2x - 3)^2 - 4x + 2(2x - 3) = 20$$

$$x^2 + 4x^2 - 12x + 9 - 4x + 4x - 6 = 20$$

$$5x^2 - 12x - 17 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -17 = 484$$

$D > 0$, dus lijn k snijdt cirkel c in twee punten.

In het voorbeeld worden vergelijkingen opgesteld van lijnen met richtingscoëfficiënt 2 die een gegeven cirkel raken.

Er wordt uitgegaan van $y = 2x + b$. Na substitutie in de cirkelvergelijking wordt gebruikt dat voor raken geldt $D = 0$. Hiermee is b te berekenen.

Voorbeeld

Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

Er zijn twee lijnen met richtingscoëfficiënt 2 die c raken.

Stel van elk van deze lijnen een vergelijking op.

Uitwerking

Stel $y = 2x + b$.

Substitutie van $y = 2x + b$ in $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ geeft

$$x^2 + (2x + b)^2 - 2x - 4(2x + b) = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + 4bx + b^2 - 2x - 8x - 4b = 0 \quad \text{Schrijf in de vorm } Ax^2 + Bx + C = 0.$$

$$5x^2 + 4bx - 10x + b^2 - 4b = 0$$

$$5x^2 + (4b - 10)x + b^2 - 4b = 0$$

Merk op dat $A = 5$, $B = 4b - 10$ en $C = b^2 - 4b$.

$$D = (4b - 10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (b^2 - 4b)$$

$$= 16b^2 - 80b + 100 - 20b^2 + 80b$$

$$= -4b^2 + 100$$

$$D = 0 \text{ geeft } -4b^2 + 100 = 0$$

$$-4b^2 = -100$$

$$b^2 = 25$$

$$b = 5 \vee b = -5$$

De vergelijkingen zijn $y = 2x + 5$ en $y = 2x - 5$.



a Zie de theorie.

Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de lijn $k: y = 2x - 3$ en de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$.

b Zie het voorbeeld.

Bereken exact de coördinaten van het raakpunt van de lijn $y = 2x + 5$ en de cirkel $c: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

49 In het voorbeeld op de vorige bladzijde wordt de vergelijking $x^2 + 4x^2 + 4bx + b^2 - 2x - 8x - 4b = 0$ geschreven in de vorm $Ax^2 + Bx + C = 0$ waarmee $D = B^2 - 4AC$ is te berekenen.

Schrijf in de vorm $Ax^2 + Bx + C = 0$ en geef A , B en C .

a $x^2 + 9x^2 + 6bx + b^2 - 5x + 18x + 6b - 10 = 0$

b $x^2 + x^2 - 2bx + b^2 - 6x - 2x + 2b + 5 = 0$

c $x^2 + a^2x^2 - 6ax + 9 + 2x - 8ax + 24 - 7 = 0$

50 Bewijs dat

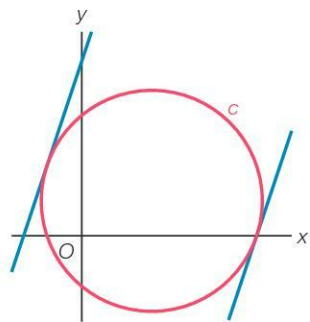
a de lijn k : $y = x - 4$ de cirkel c_1 : $x^2 + y^2 = 13$ snijdt in twee punten

b de lijn l : $y = -4x - 3$ de cirkel c_2 : $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 4$ raakt

c de lijn m : $2x - y = 1$ geen punten gemeenschappelijk heeft met de cirkel c_3 : $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$.

51 Gegeven is de cirkel c : $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$.

a Er zijn twee lijnen met richtingscoëfficiënt 3 die c raken. Stel van elk van deze lijnen een vergelijking op.



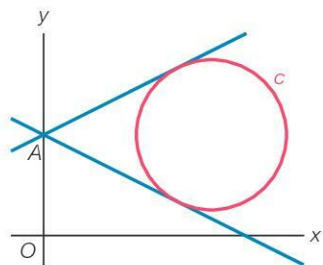
figuur 10.54

52 Gegeven is de cirkel c : $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 29 = 0$.

a Stel vergelijkingen op van de lijnen met richtingscoëfficiënt -2 die c raken.

Om vergelijkingen op te stellen van de lijnen die door het punt $A(0, 3)$ gaan en c raken, stel je $y = ax + 3$.

b Licht de vergelijking $y = ax + 3$ toe en bereken de waarden van a door $y = ax + 3$ te substitueren in de vergelijking van c en vervolgens de discriminant van de verkregen vergelijking gelijk aan nul te stellen.

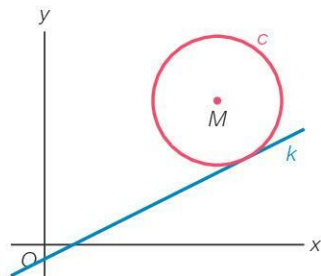


figuur 10.55

A53
  *

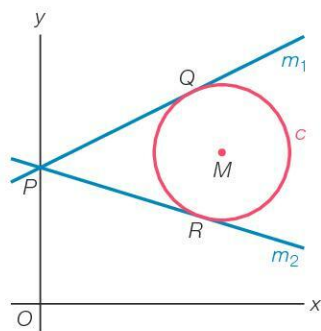
Gegeven zijn de cirkel $c: (x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 5$ en de lijn $k: x - 2y = 1$. Zie de figuur hiernaast.

- Het lijkt erop dat k de cirkel raakt. Onderzoek op algebraïsche wijze of dat inderdaad het geval is.
- Stel vergelijkingen op van de lijnen l_1 en l_2 die loodrecht staan op k en c raken.



figuur 10.56

- De lijnen m_1 en m_2 gaan door het punt $P(0, 4\frac{1}{2})$ en raken c . Zie de figuur hiernaast. Stel vergelijkingen op van m_1 en m_2 .



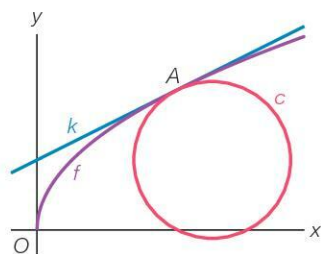
figuur 10.57

E54
 *

Stel vergelijkingen op van de lijnen l_1 en l_2 die de afstand 5 hebben tot de lijn $k: 3x + 4y = 10$.

O55
  *

Gegeven zijn de functie $f(x) = 2\sqrt{x}$, de cirkel $c: (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 5$ en de lijn $k: y = \frac{1}{2}x + 2$ die de grafiek van f raakt in het punt $A(4, 4)$. Zie figuur 10.58. Bewijs dat k ook raaklijn is van c .



figuur 10.58

Theorie C Cirkels en functies

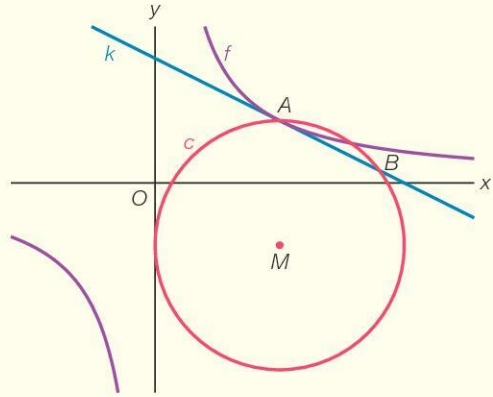
In opgave 55 is de lijn $k: y = \frac{1}{2}x + 2$ zowel raaklijn van de grafiek van de functie $f(x) = 2\sqrt{x}$ als van de cirkel $c: (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

In het voorbeeld en de opgaven krijg je ook te maken met situaties waarin zowel cirkels als grafieken van functies voorkomen. Dit zijn over het algemeen problemen waarbij de uitwerking uit verschillende stappen bestaat. Het is verstandig te bedenken welke stappen dit zijn en in welke volgorde je deze moet uitvoeren. We zeggen dan dat je een **strategie** hebt ontwikkeld. Kijk tijdens je uitwerking regelmatig of je de gekozen strategie nog volgt en met welke stap van de strategie je bezig bent.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde staat in de aanpak een strategie die bestaat uit drie stappen.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2}{x}$. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$. De cirkel c heeft middelpunt M met $x_M = x_A$ en $y_M < 0$, gaat door A , en raakt de y -as. De lijn k snijdt c behalve in A ook in het punt B . Bereken exact de coördinaten van B .



figuur 10.59

Aanpak

- 1 Stel met behulp van de afgeleide van f een vergelijking op van k .
- 2 Stel een vergelijking op van c .
- 3 Bereken de coördinaten van B met behulp van de vergelijkingen van k en c .

Uitwerking

- 1 Stel met behulp van de afgeleide van f een vergelijking op van k .

$$f(x) = \frac{2}{x} = 2x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'(2) = -\frac{1}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ f(2) = 1, \text{ dus } A(2, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 1 \\ b = 2 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

- 2 Stel een vergelijking op van c .

Van c is de straal 2 en $y_M = y_A - r = 1 - 2 = -1$, dus

$$c: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4.$$

- 3 Bereken de coördinaten van B met behulp van de vergelijkingen van k en c .

Substitutie van $y = -\frac{1}{2}x + 2$ in $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ geeft

$$(x - 2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 - 4 = 0$$

$$1\frac{1}{4}x^2 - 7x + 9 = 0$$

$$5x^2 - 28x + 36 = 0$$

$$D = (-28)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 36 = 64$$

$$x = \frac{28 + 8}{10} = 3\frac{3}{5} \vee x = \frac{28 - 8}{10} = 2$$

$$x = 3\frac{3}{5} \text{ geeft } y = -\frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{5} + 2 = \frac{1}{5}, \text{ dus } B(3\frac{3}{5}, \frac{1}{5}).$$

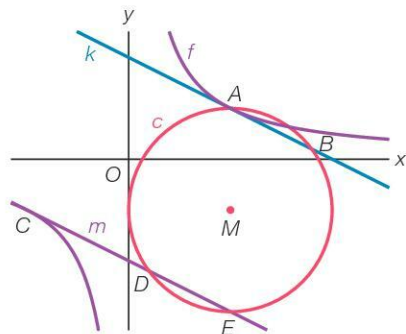
56



Gegeven zijn de functie f , de lijn k en de cirkel c van het voorbeeld.

De lijn m met $rc_m = rc_k$ raakt de grafiek van f in het punt C en snijdt c in de punten D en E . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de coördinaten van D en E .



figuur 10.60

57



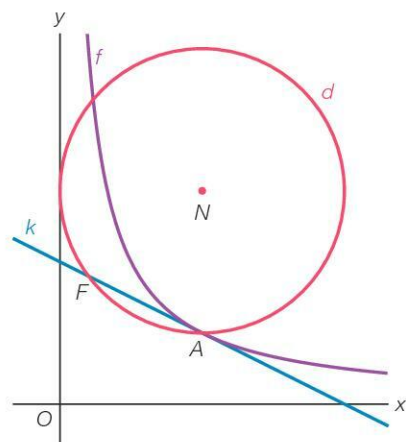
In figuur 10.61 zie je nogmaals de grafiek van de functie f en de lijn k van het voorbeeld.

Verder is de cirkel d met middelpunt N met $x_N = x_A$ en $y_N > 0$ getekend.

De cirkel d gaat door A en raakt de y -as.

De lijn k snijdt d behalve in A ook in het punt F .

Bereken exact de coördinaten van F .



figuur 10.61

58



Gegeven zijn de functie $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 6\frac{2}{3}x + 18$ en de lijn $k: y = -1\frac{1}{3}x + 7\frac{1}{3}$. Het punt A met $x_A = 4$ ligt op de grafiek van f . De lijn k raakt de grafiek van f in A .

a Bewijs dit.

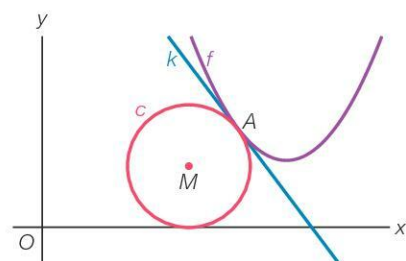
De cirkel c heeft middelpunt M met $x_M = 3$. Gegeven is dat k en c elkaar raken in A . Zie de figuur hiernaast.

Om te bewijzen dat c de x -as raakt, bedenk je dat er moet gelden

- $d(M, x\text{-as}) = r$ waarbij r de straal van c is
- M ligt op de lijn l door A , loodrecht op k
- $r = d(M, A)$.

b Formuleer uit het bovenstaande een strategie die bestaat uit drie stappen.

c Bewijs dat c de x -as raakt.



figuur 10.62

A59
  *

Gegeven zijn de functie $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ en de lijn k met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{4}$ die de grafiek van f raakt in het punt A . Verder is gegeven dat de cirkel c met middelpunt $M(0, -7)$ door het randpunt R van de grafiek van f gaat. Zie de figuur hiernaast.

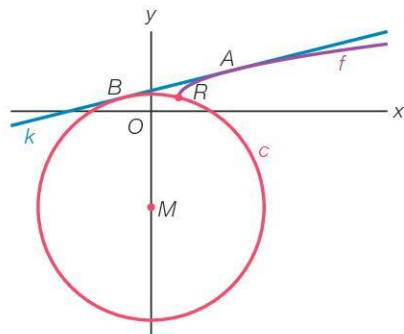
Het lijkt erop dat k de cirkel raakt.

Om te bewijzen dat k de cirkel c raakt, kun je een strategie gebruiken die uit vier stappen bestaat.

- Noteer de vier stappen van deze strategie
- Bewijs dat de lijn k de cirkel c raakt.

Het punt B is het raakpunt van k en c .

- Bewijs dat driehoek ABM een gelijkbenige rechthoekige driehoek is.



figuur 10.63

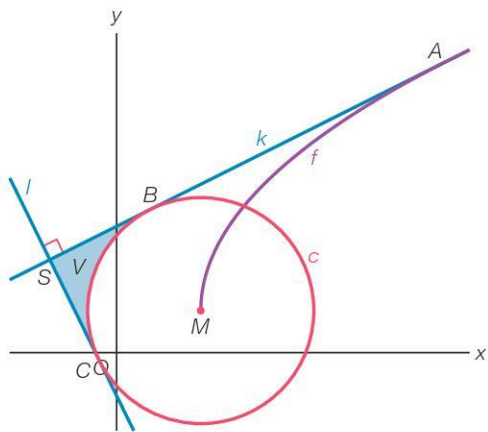
A60
 *

Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \sqrt{6x-12}$.

Het punt A met $y_A = 7$ ligt op de grafiek van f . De lijn k raakt de grafiek van f in A .

Het randpunt van de grafiek van f is het middelpunt van de cirkel c die de lijn k raakt in het punt B .

De lijn l snijdt k loodrecht in het punt S en raakt c in het punt C . De lijnstukken BS en CS en de cirkelboog BC sluiten het gebied V in. Zie figuur 10.64.



figuur 10.64

Bereken algebraïsch de oppervlakte van V . Rond af op twee decimalen. Gebruik dat $MBSC$ een vierkant is.

Terugblik

Cirkels en raaklijnen

Om een vergelijking van de lijn k op te stellen die de cirkel $c: (x - 3\frac{1}{2})^2 + (y - 1\frac{1}{2})^2 = 8\frac{1}{2}$ raakt in het punt $B(1, 3)$, ga je als volgt te werk.

- 1 Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en B .

$$M(3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}) \text{ en } B(1, 3), \text{ dus } rc_l = \frac{1\frac{1}{2} - 3}{3\frac{1}{2} - 1} = \frac{-1\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}} = -\frac{3}{5}.$$

- 2 Gebruik $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, om rc_k te berekenen.

$$rc_k = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

- 3 Stel een vergelijking op van k .

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 1\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } B(1, 3) \end{array} \right\} 1\frac{2}{3} \cdot 1 + b = 3, \text{ dus } b = 1\frac{1}{3}$$

Dus $k: y = 1\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

Ook heb je geleerd om

- een vergelijking op te stellen van een cirkel met een gegeven middelpunt die een gegeven lijn raakt
- een vergelijking op te stellen van een lijn met een gegeven richting die een gegeven cirkel raakt
- een vergelijking op te stellen van een lijn door een gegeven punt op de y -as die een gegeven cirkel raakt.

Bij de laatste twee raaklijnproblemen gebruik je dat de discriminant bij raken gelijk is aan 0.

Cirkels en functies

Is gegeven dat de lijn k de grafiek van de functie $f(x) = 2\sqrt{x}$ raakt in het punt $A(1, 2)$, dan kun je met de volgende strategie bewijzen dat k de cirkel $c: x^2 + (y + 3)^2 = 8$ raakt.

- 1 Stel met behulp van de afgeleide van f de formule op van k .
- 2 Substitueer de formule van k in de vergelijking van c .
- 3 Toon aan dat de discriminant gelijk is aan nul.

$$1 \quad f(x) = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = 1$.

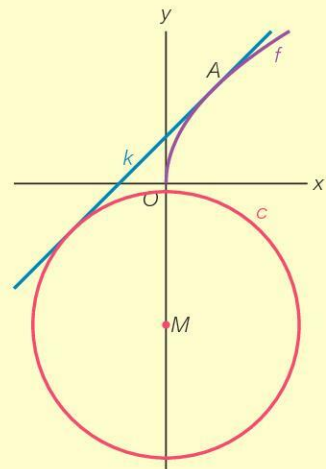
$A(1, 2)$ op $k: y = x + b$ geeft $b = 1$, dus $k: y = x + 1$.

- 2 Substitutie van $y = x + 1$ in $x^2 + (y + 3)^2 = 8$ geeft $x^2 + (x + 4)^2 = 8$.

Herleiden geeft $x^2 + 4x + 4 = 0$.

- 3 $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

Dus k en c raken elkaar.



10.5 Afstanden bij cirkels

061
☐ ⊗ *

Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 8y + 9 = 0$ en het punt $A(10, 2)$.

- Bereken van c de straal en de coördinaten van het middelpunt M en bereken exact de afstand tussen A en M .
- Licht toe dat A binnen de cirkel ligt en bereken exact de afstand van A tot c .

Theorie A Cirkels en afstanden

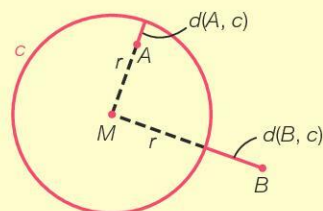
De afstand tussen twee meetkundige figuren is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen deze twee figuren.

Je hebt geleerd hoe je de afstand van een punt tot een cirkel berekent.

Afstand van punt tot cirkel c met middelpunt M en straal r

Voor punt A binnen c geldt $d(A, c) = r - d(M, A)$.

Voor punt B buiten c geldt $d(B, c) = d(M, B) - r$.



In figuur 10.65 zie je cirkel c_1 met middelpunt $M(1, 2)$ en straal $r_1 = 2$ en cirkel c_2 met middelpunt $N(6, 1)$ en straal $r_2 = 1\frac{1}{2}$.

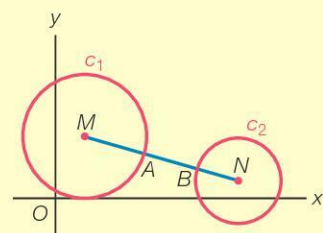
Het lijnstuk MN snijdt c_1 in A en c_2 in B . De lengte van het lijnstuk AB is de afstand tussen c_1 en c_2 , dus $d(c_1, c_2) = d(A, B)$.

Er geldt $d(c_1, c_2) = d(M, N) - d(M, A) - d(N, B)$.

Omdat $d(M, N) = \sqrt{(6-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}$,

$d(M, A) = r_1 = 2$ en $d(N, B) = r_2 = 1\frac{1}{2}$ is

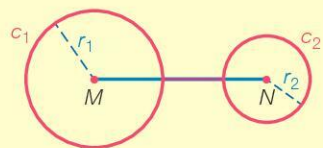
$d(c_1, c_2) = \sqrt{26} - 2 - 1\frac{1}{2} = \sqrt{26} - 3\frac{1}{2}$.



figuur 10.65

Afstand tussen twee cirkels

$d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2$



Voorbeeld

Op de lijn $k: x + 4y = 16$ ligt het punt M met $x_M = 1$ en het punt N met $x_N = 9$. De cirkels c_1 met middelpunt M en c_2 met middelpunt N raken de x -as.

Bereken algebraïsch de afstand tussen c_1 en c_2 . Rond het antwoord af op twee decimalen.

Uitwerking

M op k , dus $1 + 4y_M = 16$ en dit geeft $y_M = 3\frac{3}{4}$.

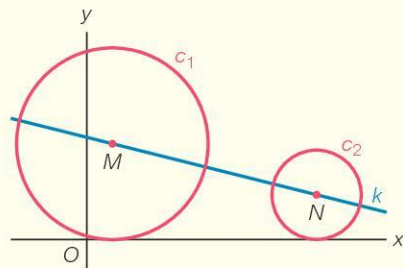
Dus de straal r_1 van c_1 is $3\frac{3}{4}$ en $M(1, 3\frac{3}{4})$.

N op k , dus $9 + 4y_N = 16$ en dit geeft $y_N = 1\frac{3}{4}$.

Dus de straal r_2 van c_2 is $1\frac{3}{4}$ en $N(9, 1\frac{3}{4})$.

$$d(M, N) = \sqrt{(9-1)^2 + (1\frac{3}{4} - 3\frac{3}{4})^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}$$

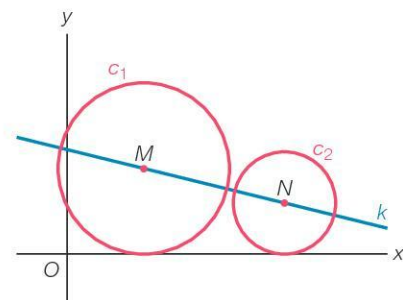
$$\text{Dus } d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = \sqrt{68} - 3\frac{3}{4} - 1\frac{3}{4} \approx 2,75.$$



figuur 10.66

- 62** Op de lijn $k: x + 4y = 16$ ligt het punt M met $x_M = 2$ en het punt N met $x_N = 8$. De cirkels c_1 met middelpunt M en c_2 met middelpunt N raken de x -as.

Bereken algebraïsch de afstand tussen c_1 en c_2 . Rond het antwoord af op drie decimalen.



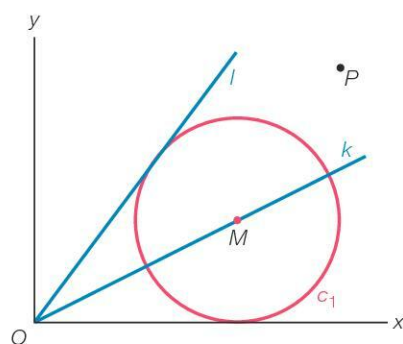
figuur 10.67

- 63** Gegeven zijn de lijnen $k: y = \frac{1}{2}x$ en $l: y = \frac{1}{3}x$. Het punt $M(4, 2)$ ligt op k . De cirkel c_1 heeft middelpunt M en raakt de x -as. Verder is gegeven het punt $P(6, 5)$. Zie figuur 10.68.

- Stel een vergelijking op van c_1 .
- Toon aan dat c_1 lijn l raakt.
- Onderzoek met een berekening welke van de volgende drie afstanden de kortste is. $d(P, k)$, $d(P, l)$ en $d(P, c_1)$

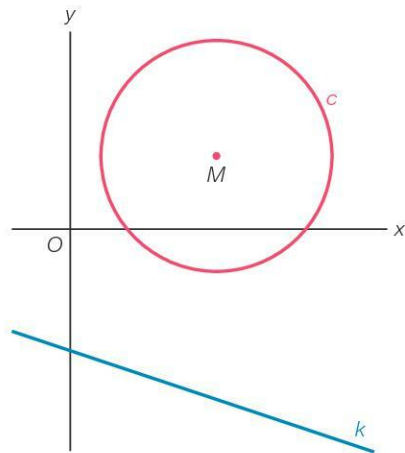
Verder is gegeven de cirkel $c_2: x^2 + y^2 + 2x - 14y + 25 = 0$.

- Onderzoek met een berekening of l raaklijn is van c_2 .
- Bereken exact $d(c_1, c_2)$.



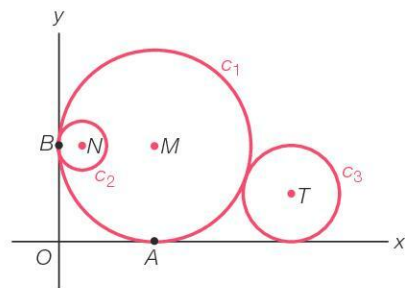
figuur 10.68

- 64** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$ en de lijn $k: x + 3y = -10$. Bereken exact $d(k, c)$.



figuur 10.69

- 65** Cirkel c_1 met middelpunt M raakt de x -as in het punt $A(4, 0)$ en de y -as in het punt $B(0, 4)$. Cirkel c_2 met middelpunt N en straal 1 raakt de y -as in het punt B . Cirkel c_3 met middelpunt T en straal 2 raakt c_1 en de x -as. Zie figuur 10.70.



figuur 10.70

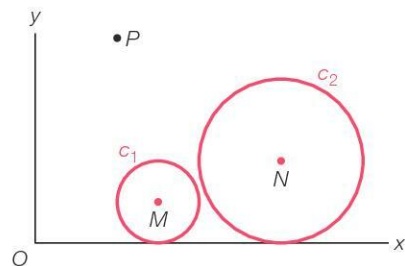
- a** Stel van c_1 en van c_2 een vergelijking op.

Voor de x -coördinaat van T geldt $x_T = 4 + 4\sqrt{2}$.

- b** Toon dit aan.

- c** Bereken $d(c_2, c_3)$ in drie decimalen.

- A66** Gegeven zijn de cirkels $c_1: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ en $c_2: x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$ en het punt $P(2, 5)$. Zie figuur 10.71.



figuur 10.71

- a** Bereken exact $d(c_1, c_2)$.

De lijn $l: 3x - 4y = 0$ raakt beide cirkels.

- b** Toon met een berekening aan dat dit klopt.

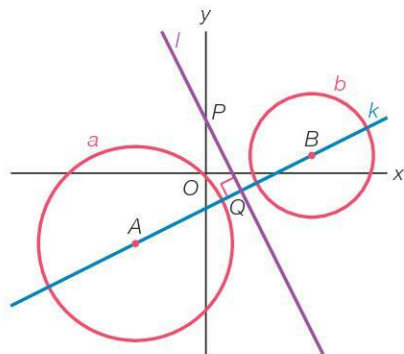
- c** Stel een vergelijking op van de cirkel c_3 met middelpunt P die l raakt.

A67
 *

Gegeven zijn de cirkels a : $(x + 8)^2 + (y + 8)^2 = 121$ en b : $(x - 12)^2 + (y - 2)^2 = 49$ met middelpunten A en B .

Op de y -as ligt het punt $P(0, 6)$. De lijn l door P staat loodrecht op de lijn k door A en B . Het snijpunt is Q . Zie de figuur hiernaast.

a Bewijs dat $d(a, l) - d(b, l) = 2\sqrt{5} - 4$.



figuur 10.72

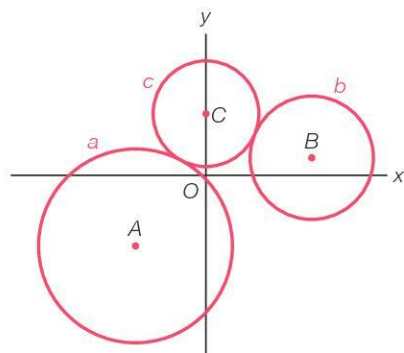
Van de cirkel c is gegeven dat het middelpunt $C(0, q)$ op de y -as ligt en dat c zowel a als b raakt. Zie de figuur hiernaast.

Uit het gegeven dat de cirkels a en c elkaar raken, volgt dat voor de straal r van c geldt

$$r = \sqrt{q^2 + 16q + 128} - 11.$$

b Bewijs dit.

c Stel een vergelijking op van c .



figuur 10.73

A68
 *

Gegeven zijn de cirkels

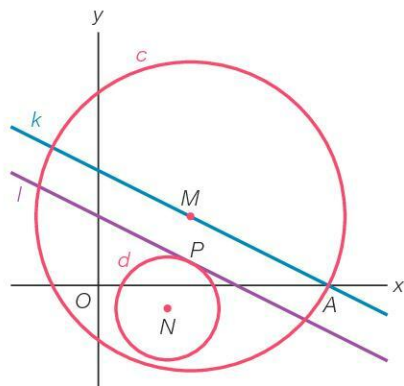
$$c: x^2 + y^2 - 8x - 6y - 20 = 0 \text{ en}$$

$$d: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0. \text{ Het middelpunt van } c \text{ is } M \text{ en het middelpunt van } d \text{ is } N.$$

De lijn k gaat door M en snijdt c op de positieve x -as in het punt A . De lijn l is evenwijdig met k en raakt d in het punt P . Zie figuur 10.74.

a Bereken exact de afstand tussen k en l .

b Bereken exact de afstand tussen c en d .



figuur 10.74

Terugblik

De afstand van een punt tot een cirkel

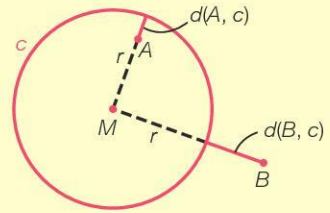
Voor een punt A binnen cirkel c met middelpunt M en straal r geldt $d(A, c) = r - d(A, M)$.

Voor een punt B buiten cirkel c met middelpunt M en straal r geldt $d(B, c) = d(B, M) - r$.

Bij de cirkel $c: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 17$ en de punten $A(4, 3)$ en $B(10, 5)$ geldt

$$d(A, M) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{5}, \quad d(A, c) = \sqrt{17} - \sqrt{5},$$

$$d(B, M) = \sqrt{(6 - 10)^2 + (2 - 5)^2} = 5 \text{ en } d(B, c) = 5 - \sqrt{17}.$$



De afstand van een lijn tot een cirkel

Om de afstand tussen lijn $k: y = -\frac{1}{2}x$ en de cirkel $c: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 17$ te berekenen, stel je een vergelijking op van de lijn l door M die k loodrecht snijdt in A . Dan geldt $d(k, c) = d(A, M) - r$, met r de straal van c .

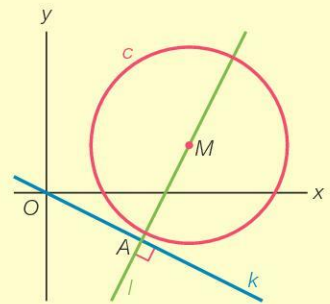
$l \perp k$, dus $rc_l = 2$.

$l: y = 2x + b$ door $M(6, 2)$ geeft $2 \cdot 6 + b = 2$, dus $b = -10$.

k en l snijden geeft $-\frac{1}{2}x = 2x - 10$ oftewel $-2\frac{1}{2}x = -10$, dus $x = 4$ en $A(4, -2)$.

$$d(A, M) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ en } r = \sqrt{17},$$

$$\text{dus } d(k, c) = 2\sqrt{5} - \sqrt{17}.$$



De afstand tussen twee cirkels

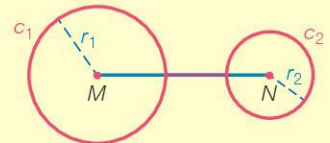
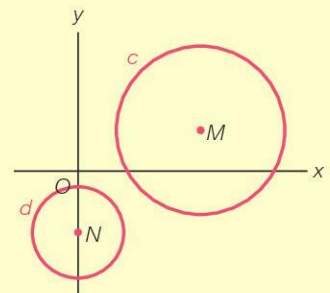
Voor de afstand tussen de cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M en N en stralen r_1 en r_2 in de figuur hiernaast geldt $d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2$.

Bij het berekenen van de afstand tussen de cirkels

$c: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 17$ en $d: x^2 + (y + 3)^2 = 5$ krijg je

$$d(M, N) = \sqrt{(0 - 6)^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{61}, \quad r_c = \sqrt{17} \text{ en}$$

$$r_d = \sqrt{5}. \text{ Dus } d(c, d) = \sqrt{61} - \sqrt{17} - \sqrt{5} \approx 1,45.$$



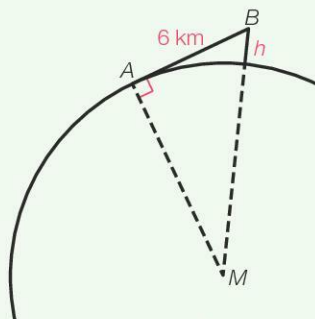
Eindopdracht Een rechte vlakke weg

John Körmeling, een Nederlandse architect en kunstenaar, heeft zichzelf ten doel gesteld om in het noorden van de provincie Groningen een rechte vlakke weg van 6 km lang en 1,2 meter breed te realiseren. Om recht en vlak te zijn, mag de weg geen bochten hebben en bovendien de kromming van de aarde niet volgen.

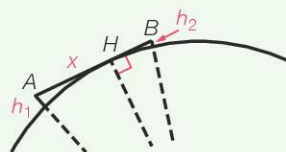
In de figuur hiernaast is zo'n mogelijke rechte vlakke weg aangegeven met het lijnstuk AB . De weg is aan de kant van uiteinde B opgehoogd.

Gebruik dat de straal van de aarde 6378 km is en de formule $d = 112,94\sqrt{h}$ uit de beginopdracht.

- Hoeveel cm ligt uiteinde B boven het oorspronkelijke aardoppervlak?



In de figuur hiernaast zie je een situatie waarbij de weg zowel aan de kant van uiteinde A als aan de kant van uiteinde B is opgehoogd. Het punt H bevindt zich ter hoogte van het aardoppervlak. De afstand AH is x gesteld.



Voor $h_T = h_1 + h_2$ geldt bij benadering de formule

$$h_T = \frac{x^2 - 6x + 18}{6378}. \text{ Hierbij zijn } h_1, h_2, h_T \text{ en } x \text{ in km.}$$

- Leid deze formule af uit de gegevens.
- Bereken algebraïsch voor welke waarde van x de waarde van h_T minimaal is. Hoeveel cm is in dat geval de ophoging bij de uiteinden A en B samen?

Rond bij de volgende twee vragen niet af in de tussenstappen.

Een mogelijkheid om de weg te realiseren is door schelpen te storten.

- Bereken hoeveel m^3 schelpen hiervoor minimaal nodig is.

De weg kan ook worden ingegraven.

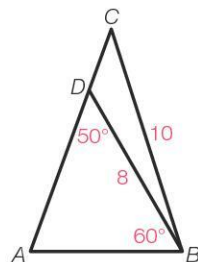
- Bereken hoeveel m^3 grond er in dat geval minimaal zal moeten worden afgevoerd.



Diagnostische toets

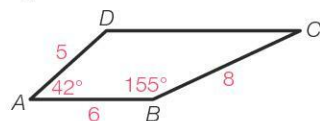
10.1 Afstanden en hoeken

- 1** Gegeven is driehoek ABC met $BC = 10$. Op de zijde AC ligt het punt D waarbij $BD = 8$, $\angle ABD = 60^\circ$ en $\angle ADB = 50^\circ$. Zie figuur 10.75. Bereken $\angle C$.



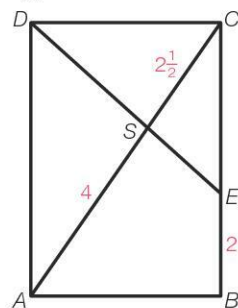
figuur 10.75

- 2** Gegeven is vierhoek $ABCD$ in figuur 10.76. Bereken CD in één decimaal.



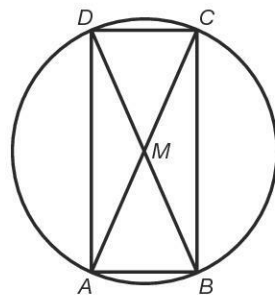
figuur 10.76

- 3** Gegeven is de rechthoek $ABCD$ met $AC = 6\frac{1}{2}$. Het punt E ligt op de zijde BC waarbij $BE = 2$. Het punt S is het snijpunt van DE en AC waarbij $AS = 4$ en $CS = 2\frac{1}{2}$. Zie figuur 10.77. Bereken CE .



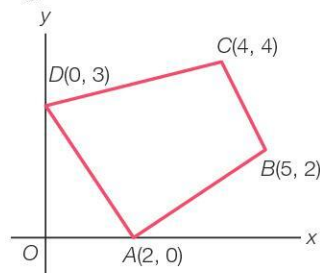
figuur 10.77

- 4** In een cirkel met middelpunt M is de rechthoek $ABCD$ getekend zo, dat $AC = 2\frac{1}{2}AB$. De oppervlakte van de rechthoek is $\sqrt{21}$. Bereken exact de straal van de cirkel.



figuur 10.78

- 10.3 Lijnen en cirkels in een assenstelsel**
- 5** Gegeven is de vierhoek $ABCD$ met de punten $A(2, 0)$, $B(5, 2)$, $C(4, 4)$ en $D(0, 3)$. Zie figuur 10.79.
- Bereken $\angle BCD$.
 - Bereken in twee decimalen de afstand van A tot de lijn door B en D .



figuur 10.79

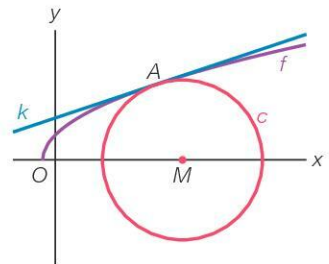
- 6** Gegeven is de cirkel $c_1: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ met middelpunt M en de punten $A(1, 3)$ en $B(-5, 5)$.
- Onderzoek of A op, binnen of buiten c_1 ligt.
 - Onderzoek of B op, binnen of buiten c_1 ligt.
 - Stel een vergelijking op van de cirkel c_2 met middelpunt A die door de oorsprong gaat.
 - Stel een vergelijking op van de cirkel c_3 waarvan AB een middellijn is.

10.4 Cirkels, raaklijnen en functies

- 7** **a** Stel een vergelijking op van de cirkel c_1 met middelpunt $M(4, -3)$ die de lijn $k: 2x + y = 10$ raakt.
- b** Onderzoek of de lijn $l: y = -x + 3$ de cirkel $c_2: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ raakt.

- 8** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$.
- Stel een vergelijking op van de lijn k die c raakt in het punt $A(5, 0)$.
 - Bereken voor welke waarden van b de lijn $l: y = -3x + b$ de cirkel raakt.
 - Stel vergelijkingen op van de lijnen m_1 en m_2 die door het punt $B(0, 1)$ gaan en c raken.

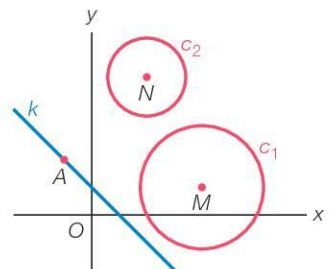
- 9** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x+1}$. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 4$. De cirkel c raakt k in A . Het middelpunt M van c ligt op de x -as. Stel een vergelijking op van c .



figuur 10.80

10.5 Afstanden bij cirkels

- 10** Gegeven zijn de cirkels $c_1: x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ en $c_2: x^2 + y^2 - 4x - 10y + 27 = 0$ met middelpunten M en N , het punt $A(-1, 2)$ en de lijn $k: x + y = 1$.
- Bereken exact $d(A, c_1)$.
 - Bereken exact $d(c_1, c_2)$.
 - Bereken exact $d(k, c_1)$.



figuur 10.81

11

Verbanden en functies

Wat leer je?

- Werken met evenredige en omgekeerd evenredige verbanden.
- Welke standaardgrafieken er zijn en hoe hieruit andere grafieken ontstaan via transformaties.
- Wat somfuncties, verschilfuncties en kettingfuncties zijn.
- Allerlei problemen oplossen bij tweede- en derdegraadsfuncties.
- Werken met wortelfuncties en gebroken functies.



Beginopdracht De meubelmaker

Anja is meubelmaker en maakt laden voor kasten die bestemd zijn voor kantoren.

De laden moeten een inhoud krijgen van 40 dm^3 . Anja vraagt zich af bij welke afmetingen van de laden de hoeveelheid materiaal in dm^2 zo klein mogelijk is. Rond in deze opdracht afmetingen af op gehele cm.

We bekijken eerst de situatie waarbij de lengte twee keer de breedte is. Zie de figuur hiernaast. Hierin zijn x en h in dm. De hoeveelheid materiaal in dm^2 noemen we M . Je kunt M uitdrukken in x en h . Je krijgt $M = 2x^2 + 6xh$.

- Laat zien hoe je aan deze formule kunt komen.

Door te gebruiken dat de inhoud 40 dm^3 is, krijg je $2x^2h = 40$.

- Druk M uit in x en toon aan dat $\frac{dM}{dx} = 4x - \frac{120}{x^2}$.
- Bereken algebraïsch bij welke afmetingen M minimaal is.

We bekijken nu de situatie waarbij de lengte anderhalf keer de breedte is. Zie de figuur hiernaast.

- Stel voor deze situatie de formule op van M uitgedrukt in x en bereken met behulp van de afgeleide bij welke afmetingen M minimaal is.

We bekijken nu de algemene situatie dat de lengte a keer zo lang is als de breedte.

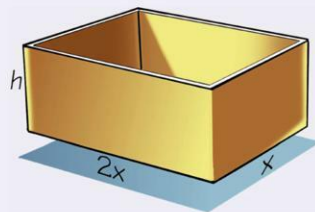
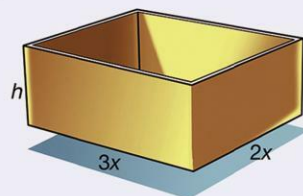
Je kunt nu M uitdrukken in a en x .

Je krijgt $M = ax^2 + \frac{80}{x} + \frac{80}{ax}$, waarin x de breedte in dm is.

- Toon aan dat deze formule juist is.

Voor het geval M minimaal is, geldt $x^3 = \frac{40a + 40}{a^2}$.

- Bewijs dit.
- Anja wil laden maken die een breedte hebben van 30 cm. Bereken wat de lengte en de hoogte van deze laden moeten zijn.



Voorkennis Evenredig en omgekeerd evenredig

Theorie A Evenredig

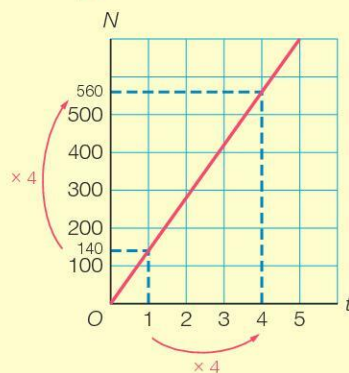
Een machine vult 560 flessen in vier minuten.

De verhoudingstabel hiernaast past bij deze situatie.

tijd t in minuten	4	8	1	3	...
aantal flessen N	560	1120	140	420	...

Diagram showing relationships between values in the table:
 From 4 to 8: $\times 2$
 From 8 to 1: $: 4$
 From 1 to 3: $\times 3$
 From 560 to 1120: $\times 2$
 From 1120 to 140: $: 8$
 From 140 to 420: $\times 3$

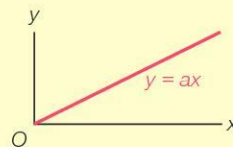
De grafiek die bij deze verhoudingstabel hoort, zie je in figuur 11.1. De grafiek is de rechte lijn door het punt $O(0, 0)$ met richtingscoëfficiënt 140. De formule is $N = 140t$. Vermenigvuldig je in de verhoudingstabel de tijd t met een getal k , dan moet je N ook met k vermenigvuldigen. We zeggen dat N evenredig is met t . In plaats van N is evenredig met t zeggen we ook N is recht evenredig met t . Is y evenredig met x , dan hoort daarbij een formule van de vorm $y = ax$. Hierin is a de evenredigheidsconstante.



figuur 11.1

y is (recht) evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
- De bijbehorende tabel is een verhoudingstabel.
- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.



Voorbeeld

- Gegeven is dat y evenredig is met x . Voor $x = 8$ is $y = 12$. Bereken y voor $x = 30$.
- Gegeven is dat N evenredig is met t . Bij $t = 12$ hoort $N = 99$. Stel de formule van N op.

Uitwerking

a $\frac{8}{12} \mid \frac{30}{y}$ dus $y = \frac{12 \cdot 30}{8} = 45$

b N evenredig met t , dus $N = at$ $\left\{ \begin{array}{l} a \cdot 12 = 99 \\ a = 8,25 \end{array} \right.$

Dus $N = 8,25t$.

1 Gegeven is dat y evenredig is met x .

a Voor $x = 15$ is $y = 23$.

Bereken y voor $x = 60$.

b Voor $x = 6$ is $y = 3,6$.

Bereken x voor $y = 30$.

2 Als je sneeuw in een cilinder laat smelten, is de uiteindelijke waterhoogte W evenredig met de oorspronkelijke sneeuwhoogte S . Bij een sneeuwhoogte van 50 cm krijg je na het smelten een waterhoogte van 5,6 cm.

a Stel de formule van W op.

b Hoe hoog komt het water als er 80 cm sneeuw in de cilinder zit?

Theorie B Omgekeerd evenredig

Martijn maakt een fietstocht van 60 km. Bij een snelheid van

10 km/uur doet hij er 6 uur over
20 km/uur doet hij er 3 uur over
30 km/uur doet hij er 2 uur over

$\times 3$ $\times 2$ $: 2$ $: 3$

Maak je de snelheid k maal zo groot, dan moet je de tijd door k delen.

We zeggen dat de snelheid v *omgekeerd evenredig* is met de tijd t .

In de volgende tabel kun je nagaan dat het product $v \cdot t$ telkens 60 is.

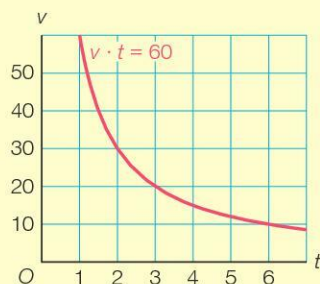
t	1	2	3	4	5	6
v	60	30	20	15	12	10

In figuur 11.2 is de grafiek getekend. De grafiek is een (deel van een) *hyperbool*. Tussen v en t bestaat het *hyperbolische verband* $v \cdot t = 60$.

Je kunt dit verband ook schrijven met de formule

$$v = \frac{60}{t} \text{ of met de formule } t = \frac{60}{v}.$$

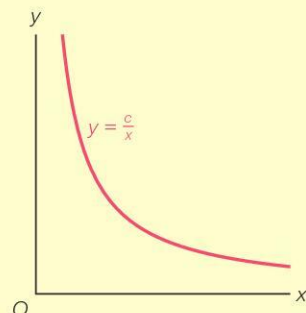
Hierin is 60 de evenredigheidsconstante.



figuur 11.2

y is omgekeerd evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y door hetzelfde getal delen.
- Het product xy is constant, dus $xy = c$ oftewel $y = \frac{c}{x}$.
- De grafiek is (een deel van) een hyperbool.



figuur 11.3

Voorbeeld

- a** Gegeven is dat y omgekeerd evenredig is met x .
Voor $x = 8$ is $y = 12$.
Bereken y voor $x = 30$.
- b** Gegeven is dat N omgekeerd evenredig is met t .
Bij $t = 12$ hoort $N = 99$.
Stel de formule van N op.

Uitwerking

- a** y is omgekeerd evenredig met x , dus $xy = a$.
 $a = 8 \cdot 12 = 96$
 $xy = 96$ en $x = 30$ geeft $30y = 96$, dus $y = 3,2$.
- b** N is omgekeerd evenredig met t , dus $N = \frac{a}{t}$.
 $a = Nt = 99 \cdot 12 = 1188$, dus $N = \frac{1188}{t}$.

- 3** Gegeven is dat y omgekeerd evenredig is met x .
- a** Voor $x = 15$ is $y = 23$.
Bereken y voor $x = 60$.
- b** Voor $x = 6$ is $y = 3,6$.
Bereken x voor $y = 30$.
- 4** Onderzoek in de Stille Oceaan heeft uitgewezen dat de watertemperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ omgekeerd evenredig is met de diepte d in km. Dit verband blijkt alleen te gelden voor diepten groter dan 500 meter. Op een diepte van 2500 meter is de watertemperatuur $1,6^{\circ}\text{C}$.
- a** Stel de formule op van de temperatuur T op een diepte van d km.
- b** Hoeveel is de watertemperatuur op 4835 meter diepte?
- c** Op welke diepte is de watertemperatuur $1,4^{\circ}\text{C}$?



- 5** In welke van de volgende situaties is sprake van recht evenredig en in welke van omgekeerd evenredig?
- a** Het aantal pakken melk dat je koopt en de prijs van het totaal.
- b** Het aantal even grote volkstuintjes op een complex van 1 ha en de grootte van zo'n volkstuintje.
- c** Het aantal mensen dat van één noodrantsoen moet leven en de hoeveelheid voedsel per persoon.
- d** Het aantal producten dat een machine aflevert en de tijd die de machine draait.
- e** Het aantal auto's op een veerboot en de beschikbare plaats per auto.

11.1 Evenredigheden



Gegeven is de tabel hiernaast.

- Toon aan dat N evenredig is met t en bereken de evenredigheidsconstante.
- Toon aan dat M omgekeerd evenredig is met t en stel de formule van M op.

t	2	5	8	10	15
N	7	17,5	28	35	52,5
M	150	60	37,5	30	20

Theorie A Evenredig en omgekeerd evenredig met een macht van x

Als grootte P evenredig is met grootte Q bestaat er een getal a waarvoor $P = aQ$. En zo volgt uit y is evenredig met $x^{0,75}$ dat er een getal a bestaat waarvoor $y = ax^{0,75}$.

y is evenredig met x^p betekent dat er een getal a bestaat waarvoor $y = ax^p$.

Voor omgekeerd evenredig geldt een soortgelijke eigenschap.

y is omgekeerd evenredig met x^p betekent dat er een getal a bestaat waarvoor $y = \frac{a}{x^p}$.

Als gegeven is dat y evenredig is met $x^{1,73}$ en er geldt dat $y = 820$ voor $x = 5$, dan kun je als volgt de formule van y opstellen.

Omdat y evenredig is met $x^{1,73}$ geldt $y = ax^{1,73}$.

Invullen van $x = 5$ en $y = 820$ geeft $a \cdot 5^{1,73} = 820$, dus $a = \frac{820}{5^{1,73}} \approx 50,7$.

Dus $y = 50,7x^{1,73}$.

Als gegeven is dat y omgekeerd evenredig is met x^3 en er geldt dat $y = 18$ voor $x = 5$, dan kun je als volgt de formule van y opstellen.

Omdat y omgekeerd evenredig is met x^3 geldt $y = \frac{a}{x^3}$.

Invullen van $x = 5$ en $y = 18$ geeft $\frac{a}{5^3} = 18$, dus $a = 18 \cdot 5^3 = 2250$.

Dus $y = \frac{2250}{x^3}$.

Voorbeeld

Gegeven is dat N evenredig is met t^p . De evenredigheidsconstante is 20.

Voor $t = 3$ is $N = 50$.

Bereken p algebraïsch. Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} N = 20t^p \\ t = 3 \text{ en } N = 50 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 20 \cdot 3^p = 50 \\ 3^p = 2,5 \\ p = {}^3\log(2,5) \approx 0,83 \end{array}$$

$$g^x = a \text{ geeft } x = {}^g\log(a)$$

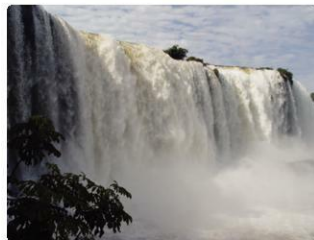
- R2** Zie het voorbeeld.
Bereken p in drie decimalen.

- 3** a Gegeven is dat y evenredig is met $x^{1,8}$.
Voor $x = 6$ is $y = 12$.
Stel de formule van y op. Rond de evenredigheidsconstante af op twee decimalen.
- b Gegeven is dat P omgekeerd evenredig is met t^2 .
Voor $t = 0,3$ is $P = 10$.
Stel de formule van P op.
- c Gegeven is dat y evenredig is met x^p . De evenredigheidsconstante is 180. Voor $x = 4$ is $y = 900$.
Stel de formule op van y . Rond p af op twee decimalen.

- 4** Voor $x = 8$ en $y = 600$ is gegeven de formule $y = ax^b$.
- a Neem $b = 2,15$ en bereken a . Rond af op twee decimalen.
- b Neem $a = 50$ en bereken b . Rond af op twee decimalen.

- 5** Voor $t = 6$ en $N = 100$ is gegeven de formule $N = \frac{a}{t^b}$ met $b > 1$.
- a Neem $b = 1,8$ en bereken a . Rond af op gehele.
- b Neem $a = 3000$ en bereken b . Rond af op twee decimalen.
- c Neem $a = 2000b$ en bereken a en b . Rond a af op gehele en b op twee decimalen.

- A6** De snelheid waarmee het water van een waterval het oppervlak bereikt is evenredig met $x^{0,5}$. Hierbij is x de hoogte van de waterval in m. De waterval Angel Falls in Venezuela is 950 m hoog. Het water bereikt het oppervlak met een snelheid van 480 km/uur. Het water van de Iguazu watervallen op de grens van Brazilië en Argentinië bereikt met een snelheid van 141 km/uur het oppervlak. Bereken de hoogte van de Iguazu watervallen.



De Iguazu watervallen.



Een vliegtuig ondervindt twee soorten weerstand.

- De luchtweerstand W_l in newton, die evenredig is met het kwadraat van de snelheid v in m/s.
- De inductieweerstand W_i in newton, die omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de snelheid v in m/s.

Een Boeing 747 ondervindt bij een snelheid van 720 km/uur een luchtweerstand van 120 000 N en een inductieweerstand van 300 000 N.

a Stel van W_l en W_i de formule op.

De totale weerstand is $W = W_l + W_i$.

b Bereken bij welke snelheid in km/uur de totale weerstand minimaal is.

c Onderzoek of bij minimale totale weerstand geldt $W_l = W_i$.



De formule $y = 2,5x^{\frac{1}{3}}$ is te herleiden tot $x = 0,064y^3$.

Zoek uit hoe dat gaat.

Theorie B Variabele vrijmaken bij $y = ax^p$

Om bij de formule $y = 10x^{0,8}$ de variabele x vrij te maken, verwissel je eerst beide leden en deel je beide leden door 10. Daarna gebruik je de regel

$$A^p = B \text{ geeft } A = B^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned} A^p &= B \\ (A^p)^{\frac{1}{p}} &= B^{\frac{1}{p}} \\ A &= B^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Je krijgt $y = 10x^{0,8}$

$$10x^{0,8} = y$$

$$x^{0,8} = 0,1y$$

Gebruik $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$.

$$x = (0,1y)^{\frac{1}{0,8}} = 0,1^{\frac{1}{0,8}} \cdot y^{\frac{1}{0,8}} \approx 0,056 \cdot y^{1,25}$$

Dus de formule is $x = 0,056y^{1,25}$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $k = 125m^{1,4}$.

Schrijf de formule in de vorm $m = ak^b$. Rond af op drie decimalen.

Uitwerking

$$k = 125m^{1,4}$$

$$125m^{1,4} = k$$

$$m^{1,4} = 0,008k$$

$$m = (0,008k)^{\frac{1}{1,4}} = 0,008^{\frac{1}{1,4}} \cdot k^{\frac{1}{1,4}} \approx 0,032 \cdot k^{0,714}$$

$$\text{Dus } m = 0,032k^{0,714}.$$



Maak telkens x vrij. Schrijf je antwoord in de vorm $x = ay^b$.

Rond a en b af op twee decimalen.

a $y = 5x^{2,6}$

b $y = 0,2x^{-1,4}$

c $y = 1,5x^{0,9}$

10
  *

Rond a en b af op twee decimalen.

- a Schrijf de formule $K = 16p^{1,18}$ in de vorm $p = aK^b$.
- b Schrijf de formule $l = 0,2 \cdot (2F)^{-1,5}$ in de vorm $F = al^b$.
- c Schrijf de formule $D = 15 \cdot (0,2y)^{1,75}$ in de vorm $y = aD^b$.

A11
  *

Rond a en b af op twee decimalen.

- a Schrijf de formule $h = \frac{10n^{-2,1}}{1,13}$ in de vorm $n = ah^b$.
- b Schrijf de formule $s = 0,008(2t)^{5,12}$ in de vorm $t = as^b$.
- c Schrijf de formule $x = 3,5y\sqrt{y}$ in de vorm $y = ax^b$.

A12
 *

Maak x vrij. Schrijf je antwoord in de vorm $x = ay^b$.

Rond zo nodig a en b af op twee decimalen.

- a $y = 15x \cdot \sqrt[3]{x}$
- b $y = \frac{12}{x \cdot \sqrt[4]{x}}$

013
  *

Planken is een fitnessoefening waarbij je voornamelijk je buikspieren traint. Manon doet de oefening elke dag één keer. Ze heeft bijgehouden hoe lang ze de oefening kan volhouden. Zie de tabel.

aantal n	5	10	15	20
tijd t in seconden	65	100	130	150



Je ziet dat ze het bij de 20^e keer al twee en een halve minuut kan volhouden.

Manon heeft bij de tabel de formule $t = 25n^{0,6}$ gemaakt.

- a Onderzoek of deze formule past bij de tabel.
- b Manon beweert dat de tijd dat ze de oefening kan volhouden met ongeveer 50% toeneemt als n verdubbelt. Klopt dit? Licht toe.

Theorie C Berekeningen met evenredigheidsverbanden

In opgave 13 hoort bij de fitnessoefening van Manon de formule $t = 25n^{0,6}$. Hierin is t de tijd in seconden dat ze de n^e oefening kan volhouden.

Met deze formule is te berekenen met welk percentage de tijd toeneemt als n verdubbelt.

Ook is te berekenen hoeveel keer zo groot n wordt als t verdubbelt. Hiertoe druk je eerst n uit in t . Zie het voorbeeld op de volgende bladzijde.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $t = 25n^{0,6}$. Hierin is t de tijd in seconden dat Manon de n^e oefening bij planken kan volhouden.

- a Bereken met welk percentage de tijd toeneemt als n verdubbelt. Rond af op gehele.
- b Bereken hoeveel keer zo groot n wordt als t verdubbelt. Rond af op één decimaal.

Aanpak

- a Neem in de formule $2n$ voor n en schrijf de formule van t in de vorm $t = a \cdot 25n^{0,6}$.
- b Druk n uit in t en neem $2t$ voor t .

Uitwerking

- a Neem in de formule $2n$ voor n .
Je krijgt $t = 25 \cdot (2n)^{0,6} = 25 \cdot 2^{0,6} \cdot n^{0,6} = 2^{0,6} \cdot 25n^{0,6} \approx 1,516 \cdot 25n^{0,6}$.
De tijd neemt met ongeveer 52% toe.
- b $t = 25n^{0,6}$
 $25n^{0,6} = t$
 $n^{0,6} = 0,04t$
 $n = (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}$
Neem in deze formule $2t$ voor t .
Je krijgt $n = (0,04 \cdot 2t)^{\frac{1}{0,6}} = 2^{\frac{1}{0,6}} \cdot (0,04t)^{\frac{1}{0,6}} \approx 3,2 \cdot (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}$.
Dus n wordt ongeveer 3,2 keer zo groot.

R14 Zie het voorbeeld.



- a Met hoeveel procent neemt de tijd t toe als n verdrievoudigt? Rond af op gehele.
- b Met welke factor moet n vermenigvuldigd worden om te zorgen dat de tijd dat Manon de oefening kan volhouden met 40% toeneemt? Rond af op twee decimalen.

15



- a Voor de remweg van een auto geldt de formule $r = 0,016v^{1,75}$. Hierin is r de remweg in m bij een snelheid van v km/uur.
Bereken hoeveel keer zo lang de remweg is als de snelheid verdubbelt. Rond af op één decimaal.
- b Bij het maken van een bepaald type vliegtuig geldt voor het aantal metingen dat nodig is voor het produceren van één toestel de formule $M = 150000n^{-0,3}$. Hierin is M het aantal metingen dat nodig is voor het produceren van het n^e toestel.
Bereken met hoeveel procent M afneemt als het aantal geproduceerde toestellen verdubbelt.

16
□ ⊗ *

Op de eilanden in het Caribisch gebied vonden biologen een verband tussen de oppervlakte van het eiland en het aantal soorten amfibieën en reptielen dat er voorkomt. Hierbij hoort de formule $N = 4,4A^{0,3}$ met N het aantal soorten op het eiland en A de oppervlakte van het eiland in km^2 . Op eiland P komen 25% meer soorten voor dan op eiland Q. Bereken hoeveel keer zo groot eiland P is als eiland Q. Rond af op één decimaal.



17
□ ⊗ *

In deze opgave gaan we uit van een eiken plank met een dikte van 2,5 cm. Met de formule $d = 0,0005gl^4$ is te berekenen hoeveel zo'n plank doorbuigt als deze gelijkmatig belast wordt. In de formule is d de doorbuiging in mm, g het gewicht in kg per mm plank gerekend in de lengterichting en l de lengte van de plank in dm.

- Op een plank met een lengte van 2 meter liggen 20 stenen van elk 4 kg. Hoeveel mm is de doorbuiging?
- Op een plank met een lengte van 2,5 meter liggen zoveel stenen dat de doorbuiging 2,5 mm is. Hoeveel is het totale gewicht van de stenen?

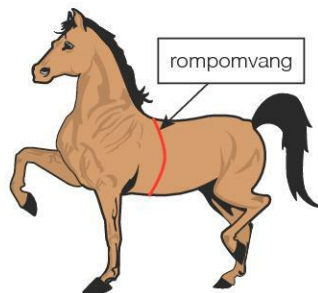
Bij de vragen c, d en e is $g = 0,05$.

- Bereken de lengte van de plank die 2,2 mm doorbuigt. Rond af op gehele cm.
- Met hoeveel procent neemt de doorbuiging van een plank toe als de plank 20% langer zou zijn?
- Schrijf de formule $d = 2,5 \cdot 10^{-5}l^4$ in de vorm $l = a \cdot \sqrt[n]{d}$. Rond a af op gehele.

A18
□ ⊗ *

Er zijn heel wat formules in omloop om uit de afmetingen van een paard een schatting van het gewicht te krijgen. Eén daarvan is de formule van Marcenac en Aublet. Deze formule is van de vorm $G = aR^3$, waarin G het gewicht in kg is en R de rompomvang in m.

- Van een paard is de rompomvang 1,2 keer zo groot als van een ander paard. Hoeveel keer zo groot is het gewicht?
- Van een paard is het gewicht twee keer zo groot als van een ander paard. Hoeveel keer zo groot is de rompomvang? Rond af op twee decimalen.



figuur 11.4

Van een paard met een rompomvang van 2,03 m is het gewicht 670 kg. Hieruit volgt dat a in gehelen gelijk is aan 80.

- Bereken a . Rond af op één decimaal.
- Bereken in cm nauwkeurig de rompomvang van een paard van 580 kg.
- Schrijf de formule $G = 80R^3$ in de vorm $R = bG^c$. Rond b af op drie decimalen.

A19 * Bekend is dat de geluidssterkte L omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand d tot de geluidsbron. Hierin is L in W/m^2 en d in m.

- a** Daniëlle krijgt bij een concert last van haar oren en gaat drie keer zover van de luidsprekers staan.
Welke invloed heeft dat op de geluidssterkte die zij waarneemt?
- b** Patrick staat op een afstand van 3 meter van een geluidsbron. Hij wil dat de geluidssterkte die hij waarneemt de helft minder wordt. Op hoeveel meter van de geluidsbron moet hij gaan staan? Rond af op één decimaal.

O20   * Murat beweert dat in de tabel hiernaast y evenredig is met $x^{1,5}$, dus dat geldt $y = ax^{1,5}$.

In deze opgave ga je onderzoeken of dat klopt.

- a** Ga uit van $y = ax^{1,5}$ en bereken a die hoort bij $x = 9$ en $y = 162$.
- b** Bereken op dezelfde manier de waarde van a die hoort bij de andere punten van de tabel.
- c** Klopt de bewering van Murat? Licht toe.

x	9	16	25
y	162	384	750

Theorie D Evenredigheid aantonen bij tabellen

Bij een onderzoek komt de tabel hiernaast met onderzoeksresultaten tevoorschijn. Volgens de onderzoeker is y evenredig met x^3 .

x	1,8	2,3	3,7	4,1	5,3	6,1
y	1,75	3,65	15,2	20,7	44,7	68,1

Je kunt dat als volgt aantonen.

- Uit y is evenredig met x^3 volgt $y = ax^3$ oftewel $\frac{y}{x^3} = a$.
- Bereken bij elk onderzoeksresultaat het quotiënt $\frac{y}{x^3}$.
- Verschillen deze quotiënten weinig, dan kun je aannemen dat inderdaad y evenredig is met x^3 .

Je krijgt de quotiënten $\frac{1,75}{1,8^3} \approx 0,3$, $\frac{3,65}{2,3^3} \approx 0,3$, $\frac{15,2}{3,7^3} \approx 0,3$, $\frac{20,7}{4,1^3} \approx 0,3$,

$\frac{44,7}{5,3^3} \approx 0,3$ en $\frac{68,1}{6,1^3} \approx 0,3$. Telkens is $\frac{y}{x^3} \approx 0,3$.

De conclusie is dat y evenredig is met x^3 .

De bijbehorende formule is $y = 0,3x^3$.

Werkschema: aantonen dat y evenredig is met x^p bij een tabel

- 1 Bereken bij elk paar (x, y) het quotiënt $\frac{y}{x^p}$.
- 2 Verschillen deze quotiënten weinig, dan is y evenredig met x^p .

21


Een bioloog doet onderzoek naar de lengte l in mm en de oppervlakte A in mm^2 van ligusterbladen. De resultaten staan in de tabel.

l	8	12	18	32	46
A	19	43	99	305	635

- a Toon aan dat A evenredig is met l^2 en stel de formule van A op.
 b Een ligusterblad heeft een oppervlakte van 2 cm^2 .
 Geef een schatting van de lengte van het blad in mm nauwkeurig.

A22


In de tabel zie je voor enkele dieren de hersenmassa H in gram en de lichaamsmassa G in kg.

- a Toon aan dat H evenredig is met $G^{0,67}$ en stel de formule van H op.
 b Een chimpansee is 60 kg.
 Bereken zijn hersenmassa in gram nauwkeurig.

dier	H	G
konijn	19	2
hond	56	10
schaap	142	40
leeuw	380	175
gorilla	490	250

A23


In de tabel zie je voor enkele dieren het lichaamsgewicht G in gram en het energieverbruik E in joule per gram per km. Het energieverbruik E is omgekeerd evenredig met $G^{0,4}$.

- a Toon dit aan en stel de formule van E op.
 b Een giraffe is 10 keer zo zwaar als een kangoeroe.
 Hoeveel keer zoveel energie per km verbruikt een giraffe als een kangoeroe?
 c Een nijlpaard verbruikt per gram lichaamsgewicht per km 35% minder energie dan een paard.
 Hoeveel keer zo zwaar is een nijlpaard als een paard?

dier	G	E
rat	300	19,4
egel	800	13,1
vos	8000	5,22
jachtluipaard	60 000	2,33

Ga in de rest van deze opgave uit van de formule $E = \frac{200}{G^{0,4}}$.

- d Een konijn weegt 4 kg.
 Hoeveel joule energie verbruikt het konijn als hij 500 meter loopt?
 e Druk E^* uit in G^* waarbij G^* het lichaamsgewicht is in kg en E^* het energieverbruik in joule per kg per km.



O24


Gegeven is het stelsel $\begin{cases} xy = 15 \\ (\frac{1}{3})^x \cdot y = 1,2 \end{cases}$

- a Maak y vrij bij beide vergelijkingen.
 b Bereken x en y . Rond af op twee decimalen.

Theorie E Stelsels bij evenredigheid

We bekijken de situatie waarbij y evenredig is met een macht van x , maar waarbij het niet bekend is welke macht dat is. In de formule $y = ax^p$ zijn dus zowel a als p onbekend. Daarom heb je twee punten nodig om a en p te berekenen.

Bij de tabel hiernaast is gegeven dat N evenredig is met een macht van t .

Stel $N = at^p$. Gebruik twee punten van de tabel om a en p te berekenen.

$t = 2$ en $N = 1,82$ geeft $a \cdot 2^p = 1,82$

$t = 5$ en $N = 19,7$ geeft $a \cdot 5^p = 19,7$

Dit levert het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} a \cdot 2^p = 1,82 \\ a \cdot 5^p = 19,7 \end{cases}$

Om dit stelsel op te lossen maak je bij beide vergelijkingen a vrij.

Je krijgt $a = \frac{1,82}{2^p}$ en $a = \frac{19,7}{5^p}$.

Voer in $y_1 = \frac{1,82}{2^x}$ en $y_2 = \frac{19,7}{5^x}$.

De optie snijpunt geeft $x = 2,599...$ en $y = 0,300...$

Dus de formule is $N = 0,3t^{2,6}$.

t	2	4	5
N	1,82	11,0	19,7

- 25** Bij de tabel hiernaast hoort een formule van de vorm $F = am^p$.
Bereken a en p . Rond a af op gehele en p op één decimaal.

m	3	5
F	552	1615

- 26** In de tabel hiernaast is P omgekeerd evenredig met een macht van Q .

- Stel de formule op van P . Rond af op twee decimalen.
- Bereken welke waarde van Q hoort bij $P = 7,4$.
- Met hoeveel procent neemt P af als Q verdubbelt?

P	2,0	3,8
Q	0,30	0,06

- A27** De benodigde hoeveelheid drinkwater W van een zoogdier hangt af van de lichaamsmassa m . Onderzoek heeft uitgewezen dat W evenredig is met een macht van m . Hierbij is W in mL per uur en m in kg.
- Een geit van 30 kg heeft per uur 90 mL water nodig en een varken van 70 kg heeft per uur 190 mL water nodig.
- Een gazelle heeft per dag 1,2 liter water nodig. Wat volgt hieruit voor de massa van de gazelle?



Terugblik

Evenredig en omgekeerd evenredig met een macht van x

y is evenredig met x^p betekent dat er een getal a bestaat waarvoor $y = ax^p$. Het getal a heet de evenredigheidsconstante.

Is y evenredig met $x^{2,3}$ en hoort bij $x = 3$ de y -waarde 8, dan is $a \cdot 3^{2,3} = 8$ oftewel $a = \frac{8}{3^{2,3}} \approx 0,64$. De formule is dus $y = 0,64x^{2,3}$.

y is omgekeerd evenredig met x^p betekent dat er een getal a bestaat waarvoor $y = \frac{a}{x^p}$.

Is y omgekeerd evenredig met $x^{2,3}$ en hoort bij $x = 3$ de y -waarde 8, dan is $\frac{a}{3^{2,3}} = 8$ oftewel $a = 8 \cdot 3^{2,3} \approx 100$. De formule is dus $y = \frac{100}{x^{2,3}}$.

Variabele vrijmaken bij $y = ax^p$

Bij het vrijmaken van de variabele x bij de formule $y = 250x^{-1,6}$ gebruik je de regel $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$.

Verwissel eerst beide leden en deel door 250. Dit geeft $x^{-1,6} = 0,004y$.

Vervolgens krijg je $x = (0,004y)^{\frac{1}{-1,6}} = 0,004^{\frac{1}{-1,6}} \cdot y^{\frac{1}{-1,6}} \approx 31,5 \cdot y^{-0,625}$.

Met $x = 31,5y^{-0,625}$ is de formule $y = 250x^{-1,6}$ geschreven in de vorm $x = ay^b$.

Berekeningen met evenredigheidsverbanden

Om bij de formule $y = 0,64x^{2,3}$ te berekenen hoeveel keer zo groot y wordt als je x drie keer zo groot neemt, vervang je in de formule x door $3x$ en schrijf je de formule die je zo krijgt in de vorm $y = a \cdot 0,64x^{2,3}$. Je krijgt $y = 0,64 \cdot (3x)^{2,3} = 0,64 \cdot 3^{2,3} \cdot x^{2,3} = 3^{2,3} \cdot 0,64x^{2,3} \approx 12,5 \cdot 0,64x^{2,3}$. Dus y wordt ongeveer 12,5 keer zo groot.

Om bij de formule $y = 250x^{-1,6}$ te berekenen met hoeveel procent x verandert als y verdubbelt, druk je eerst x uit in y . Je krijgt $x = 31,5y^{-0,625}$.

Verdubbelen van y , dus

$$x = 31,5 \cdot (2y)^{-0,625} = 31,5 \cdot 2^{-0,625} \cdot y^{-0,625} = 2^{-0,625} \cdot 31,5y^{-0,625}.$$

Dit geeft $x \approx 0,65 \cdot 31,5y^{-0,625}$.

Dus x neemt met ongeveer 35% af als y verdubbelt.

Aantonen dat y evenredig is met x^p bij een tabel

- Bereken bij elk onderzoeksresultaat het quotiënt $\frac{y}{x^p}$.
- In het geval de quotiënten (bij benadering) gelijk zijn, weet je de evenredigheidsconstante a en dus ook de formule $y = ax^p$.

11.2 Standaardgrafieken en transformaties



- 028** a Hoe ontstaat de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ uit de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$?
b Hoe ontstaat de grafiek van $y = \sqrt{x-3}$ uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$?
c Hoe ontstaat de grafiek van $y = \frac{2}{x}$ uit de grafiek van $y = \frac{1}{x}$?
d Hoe ontstaat de grafiek van $y = 2^{\frac{1}{3}x}$ uit de grafiek van $y = 2^x$?

Theorie A Overzicht standaardfuncties

Je kent de volgende standaardfuncties.

- Machtsfuncties $f(x) = ax^n$
- Wortelfunctie $f(x) = \sqrt{x}$
- Gebroken functie $f(x) = \frac{1}{x}$
- Exponentiële functies $f(x) = g^x$
- Logaritmische functies $f(x) = {}^g\log(x)$
- Goniometrische functies $f(x) = \sin(x)$ en $f(x) = \cos(x)$.

Op de volgende bladzijde zie je een overzicht van deze standaardfuncties met hun eigenschappen.

Zoals je weet mag je de grafiek van een standaardfunctie tekenen of schetsen zonder nadere toelichting.

Op een standaardgrafiek kun je de volgende transformaties toepassen.

Het effect van transformaties op een standaardgrafiek

Vermenigvuldiging t.o.v. de x -as met a .	Vermenigvuldig in de formule de functiewaarde met a .
Vermenigvuldiging t.o.v. de y -as met b .	Vervang in de formule x door $\frac{1}{b}x$.
Translatie $(c, 0)$.	Vervang in de formule x door $x - c$.
Translatie $(0, d)$.	Tel in de formule d op bij de functiewaarde.

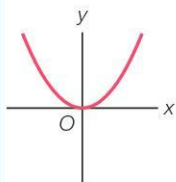
Standaardfuncties

Machtsfuncties $f(x) = ax^n$ met $n > 1$ en n geheel

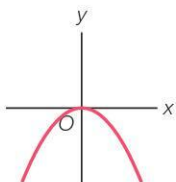
Voor n is even is de grafiek (lijn)symmetrisch.

Voor n is oneven is de grafiek puntsymmetrisch.

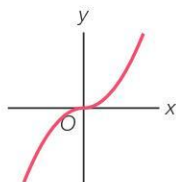
$a > 0$



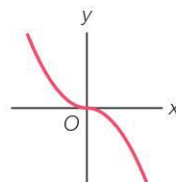
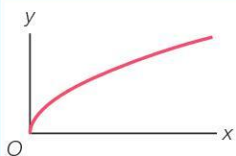
$a < 0$



$a > 0$



$a < 0$

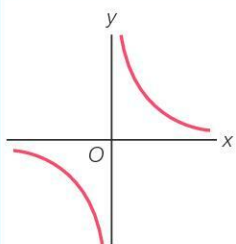


Wortelfunctie $f(x) = \sqrt{x}$

liggende halve parabool

domein $= [0, \rightarrow)$

bereik $= [0, \rightarrow)$



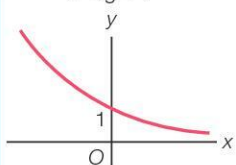
Gebroken functie $f(x) = \frac{1}{x}$

hyperbool

verticale asymptoot $x = 0$

horizontale asymptoot $y = 0$

$0 < g < 1$



Exponentiële functies $f(x) = g^x$

$0 < g < 1$

grafiek is dalend

domein $= \mathbb{R}$

bereik $= \langle 0, \rightarrow)$

hor. asymptoot $y = 0$

$g > 1$

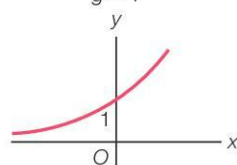
grafiek is stijgend

domein $= \mathbb{R}$

bereik $= \langle 0, \rightarrow)$

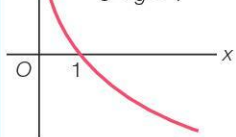
hor. asymptoot $y = 0$

$g > 1$



y

$0 < g < 1$



Logaritmische functies $f(x) = {}^g\log(x)$

$0 < g < 1$

grafiek is dalend

domein $= \langle 0, \rightarrow)$

bereik $= \mathbb{R}$

vert. asymptoot $x = 0$

$g > 1$

grafiek is stijgend

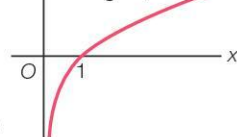
domein $= \langle 0, \rightarrow)$

bereik $= \mathbb{R}$

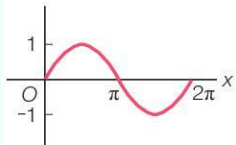
vert. asymptoot $x = 0$

y

$g > 1$



y



Goniometrische functies

$f(x) = \sin(x)$

ev. stand 0

amplitude 1

periode 2π

beginpunt $(0, 0)$

$f(x) = \cos(x)$

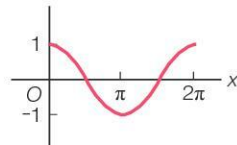
ev. stand 0

amplitude 1

periode 2π

beginpunt $(0, 1)$

y



- 29**  **a** Op de grafiek van $y = 0,3x^4$ wordt eerst de translatie $(-5, 6)$ toegepast en vervolgens de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 3. Stel van de beeldgrafiek de formule op en geef de coördinaten van de top.
- b** Op de grafiek van $y = 0,3x^4$ wordt eerst de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 3 toegepast en vervolgens de translatie $(-5, 6)$. Stel van de beeldgrafiek de formule op en geef de coördinaten van de top.

- 30**   Gegeven is de functie $f(x) = 0,01(3x - 8)^4 - 5$.
- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van de functie $g(x) = 0,01x^4$?
- b** De grafiek van f wordt a naar rechts geschoven en b omhoog. Zo ontstaat de grafiek van de functie h . De top van de grafiek van h is het punt $(4, 0)$. Bereken exact de waarden van a en b .

- 31**  Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3} - 1$.
- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- b** Geef het domein en het bereik van f .
- c** De grafiek van f wordt 3 naar rechts en 5 omhoog geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . Geef het functievoorschrift van g .
- d** De grafiek van f wordt 1 naar links en b omlaag geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie h . De grafiek van h gaat door het punt $(1, 0)$. Bereken b .

- 32**   Gegeven is de functie $f(x) = 3\sqrt{2x - 1} + 2$.
- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- b** Geef het domein en het bereik van f .
- c** De grafiek van f wordt b naar links en 11 naar beneden geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . De grafiek van g gaat door de oorsprong. Bereken exact de waarde van b .

- 33**  Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2}{x-3} + 4$.
- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- b** Geef de formules van de asymptoten van de grafiek van f .
- c** De grafiek van de functie $g(x) = \frac{4}{2x-1}$ ontstaat uit de grafiek van f door een of meer transformaties na elkaar toe te passen. Geef aan welke transformatie(s) dit kunnen zijn en in welke volgorde ze moeten worden toegepast.

34



Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2x}$ en $g(x) = \frac{3}{x-5} + 2$.

- De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door enkele transformaties na elkaar toe te passen.
Geef aan welke transformaties dit kunnen zijn en in welke volgorde ze moeten worden toegepast.
- De grafiek van de functie h ontstaat uit de grafiek van f door enkele transformaties na elkaar toe te passen. De asymptoten van de grafiek van h zijn de lijnen $x = 2$ en $y = 4$ en de grafiek van h gaat door het punt $A(3, 9)$.
Geef de transformaties en ook de volgorde waarin ze moeten worden toegepast.

35



Gegeven is de functie $f(x) = 4 \cdot 3^{x-1} - 6$.

- Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- Geef de formule van de asymptoot van de grafiek van f en geef het bereik van f .
- De grafiek van f wordt eerst 3 naar links geschoven en daarna met $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = 4(3^{x+1} - \frac{1}{2})$.
Toon dit op algebraïsche wijze aan.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

36



Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}\log(x+3) - 2$.

- Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?
- Geef de formule van de asymptoot van de grafiek van f en geef het domein van f .
- De grafiek van f wordt a omhoog geschoven en met b vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . De grafiek van g gaat door het punt $A(2\frac{3}{4}, -2)$ en de asymptoot van de grafiek van g is de lijn $x = 3$.
Bereken exact a en b .
- De grafiek van f wordt eerst c naar rechts geschoven en daarna met d vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie $h(x) = \frac{1}{2}\log(x)$.
Bereken exact de waarden van c en d .

$${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(ab)$$

$${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^s\log(a) = {}^s\log(a^p)$$

$${}^s\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$$

37



Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 3\sin(2x - \frac{1}{2}\pi)$.

- De grafiek van de functie g is een sinusöïde waarvan de periode een derde is van de periode van de grafiek van f , de amplitude de helft is van de amplitude van de grafiek van f en een beginpunt $\frac{1}{6}\pi$ rechts en 2 boven een beginpunt van de grafiek van f ligt.
- Stel een functievoorschrift op van g in de vorm $g(x) = a + b\sin(cx - d)$.

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 4x$ en $g(x) = 2x - 1$.
 Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de grafiek van de functie

- a $s(x) = f(x) + g(x)$
- b $v(x) = f(x) - g(x)$
- c $k(x) = f(g(x))$.

Theorie B Somfuncties, verschilfuncties en kettingfuncties

Bij de functies $f(x) = x^2 + 6x$ en $g(x) = 4 - x$ kun je de functievoorschriften opstellen van de **somfunctie** $s(x) = f(x) + g(x)$, de **verschilfunctie** $v(x) = f(x) - g(x)$ en de **kettingfunctie** $k(x) = f(g(x))$.

Je krijgt

$$\begin{aligned} s(x) &= f(x) + g(x) = x^2 + 6x + 4 - x = x^2 + 5x + 4 \\ v(x) &= f(x) - g(x) = x^2 + 6x - (4 - x) = x^2 + 6x - 4 + x = x^2 + 7x - 4 \\ k(x) &= f(g(x)) = (4 - x)^2 + 6(4 - x) = 16 - 8x + x^2 + 24 - 6x = x^2 - 14x + 40. \end{aligned}$$

De somfunctie van de functies $f(x) = \frac{2}{x-1}$ en $g(x) = \frac{5x}{x+2}$ is

$$s(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{5x}{x+2}.$$

Je kunt het functievoorschrift van s herleiden tot één breuk. De nieuwe noemer wordt $(x-1)(x+2)$.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$$

Je krijgt

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{2}{x-1} + \frac{5x}{x+2} = \frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{5x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2(x+2) + 5x(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{2x+4+5x^2-5x}{(x-1)(x+2)} = \frac{5x^2-3x+4}{(x-1)(x+2)}. \end{aligned}$$

Het herleiden van het functievoorschrift van de verschilfunctie

$v(x) = m(x) - n(x)$ met $m(x) = \frac{2}{x}$ en $n(x) = \frac{x-1}{x+1}$ gaat als volgt.

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{2}{x} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x(x-1)}{x(x+1)} = \frac{2(x+1) - x(x-1)}{x(x+1)} \\ &= \frac{2x+2-x^2+x}{x(x+1)} = \frac{-x^2+3x+2}{x(x+1)} \end{aligned}$$

De kettingfunctie $k(x) = m(n(x))$ is $k(x) = \frac{2}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2(x+1)}{x-1} = \frac{2x+2}{x-1}$.

Vermenigvuldig teller en noemer met $x+1$

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x+3}$, $g(x) = 2^{x-1}$ en $h(x) = {}^2\log(x)$.

- a Schrijf het functievoorschrift van de functie $s(x) = f(x) + g(x)$ in de vorm $s(x) = a \cdot 2^x$.
- b Schrijf het functievoorschrift van de functie $m(x) = 3 \cdot f(x) - 16 \cdot g(x)$ in de vorm $m(x) = 2^{x+b}$.
- c Bewijs dat $k(x) = f(h(x))$ te schrijven is als $k(x) = 8x$ met $x > 0$.

Uitwerking

- a $s(x) = f(x) + g(x) = 2^{x+3} + 2^{x-1} = 2^x \cdot 2^3 + 2^x \cdot 2^{-1} = 8 \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x = 8\frac{1}{2} \cdot 2^x$
- b $m(x) = 3 \cdot f(x) - 16 \cdot g(x) = 3 \cdot 8 \cdot 2^x - 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^x = 24 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x = 16 \cdot 2^x = 2^4 \cdot 2^x = 2^{x+4}$
- c $f(x) = 2^{x+3} = 8 \cdot 2^x$ en het domein van h is $x > 0$, dus $k(x) = f(h(x)) = 8 \cdot 2^{2\log(x)} = 8 \cdot x = 8x$ met $x > 0$.

39



Zie het voorbeeld.

- a Schrijf het functievoorschrift van de functie $n(x) = f(x) + 6 \cdot g(x)$ in de vorm $n(x) = a \cdot 2^x$.
- b Schrijf het functievoorschrift van de functie $p(x) = f(x) - 12 \cdot g(x)$ in de vorm $p(x) = 2^{x+b}$.
- c Bewijs dat $l(x) = g(h(x))$ te schrijven is als $l(x) = \frac{1}{2}x$ met $x > 0$.

40



Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$, $g(x) = \frac{a}{x}$, $s(x) = f(x) + g(x)$,

$v(x) = f(x) - g(x)$ en $k(x) = f(g(x))$.

Bereken algebraïsch voor welke waarde van a

- a de grafiek van s door het punt $(1, 1\frac{1}{2})$ gaat
- b $v(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+x}$ het functievoorschrift van v is
- c de grafiek van k door het punt $(4, -2)$ gaat.

A41



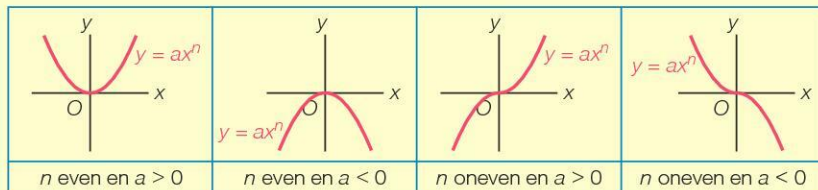
Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(6x)$, $g(x) = {}^3\log(4,5x)$, $h(x) = 3^{x+1}$, $s(x) = f(x) + g(x)$, $v(x) = f(x) - g(x)$ en $k(x) = f(h(x))$.

- a Het functievoorschrift van s is te schrijven in de vorm $s(x) = a + b \cdot {}^3\log(x)$.
Bereken a en b .
- b Het functievoorschrift van v is te schrijven in de vorm $v(x) = c + {}^3\log(d)$.
Bereken c en d .
- c Het functievoorschrift van k is te schrijven in de vorm $k(x) = x + p$ met $x > 0$.
Bereken p . Rond af op twee decimalen.

Terugblik

Standaardfuncties

Een machtsfunctie heeft de vorm $f(x) = ax^n$. De bijbehorende grafieken zijn standaardgrafieken die je dus zonder toelichting mag tekenen.



Andere standaardfuncties zijn

- de wortelfunctie $f(x) = \sqrt{x}$
- de gebroken functie $f(x) = \frac{1}{x}$
- de exponentiële functies $f(x) = g^x$
- de logaritmische functies $f(x) = {}^g\log(x)$
- de sinusfunctie $f(x) = \sin(x)$
- de cosinusfunctie $f(x) = \cos(x)$.

Transformaties

- Vermenigvuldiging t.o.v. de x -as met a
Vermenigvuldig in de formule de functiewaarde met a .
- Vermenigvuldiging t.o.v. de y -as met b
Vervang in de formule x door $\frac{1}{b}x$.
- Translatie $(c, 0)$
Vervang in de formule x door $x - c$.
- Translatie $(0, d)$
Tel in de formule d op bij de functiewaarde.

Somfuncties, verschilfuncties en kettingfuncties

Bij de functies $f(x) = x^2 + 3x$ en $g(x) = x - 4$ is

$$\text{de somfunctie } s(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x + x - 4 = x^2 + 4x - 4$$

$$\text{de verschilfunctie } v(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 3x - (x - 4) = x^2 + 3x - x + 4 = x^2 + 2x + 4$$

$$\text{de kettingfunctie } f(g(x)) = (x - 4)^2 + 3(x - 4) = x^2 - 8x + 16 + 3x - 12 = x^2 - 5x + 4.$$

Om te berekenen voor welke waarde van a de x -coördinaat van de top van de grafiek van de functie $m(x) = f(x) + a \cdot g(x)$ gelijk is aan 4, stel je eerst het functievoorschrift van m op.

$$\text{Je krijgt } m(x) = x^2 + 3x + a(x - 4) = x^2 + 3x + ax - 4a = x^2 + (3 + a)x - 4a.$$

$$x_{\text{top}} = -\frac{3+a}{2}, \text{ dus er geldt dat } -\frac{3+a}{2} = 4. \text{ Dit geeft } 3 + a = -8, \text{ dus } a = -11.$$

11.3 Tweede- en derdegraadsfuncties

O42
  *

Gegeven zijn de functies $f(x) = (x - 3)^2 + 4$ en $g(x) = 2(x - 1)(x - 3)$.

- Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek $y = x^2$? Wat volgt hieruit voor de coördinaten van de top van de grafiek van f ?
- Schrijf het functievoorschrift van f in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Waarom kun je uit deze vorm direct de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de y -as aflezen?
- Hoe volgen de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as direct uit het functievoorschrift van g ?
- Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van g .

Theorie A Tweedegraadsfuncties

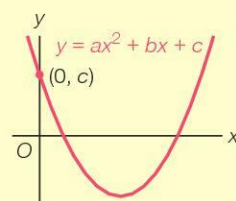
De algemene formule van een kwadratische functie is $y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$. Uit deze formule kun je direct de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de y -as aflezen.

Dit snijpunt is $(0, c)$. Ook kun je met de formule $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$ de x -coördinaat van de top van de grafiek berekenen.

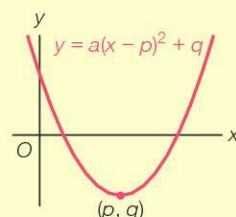
De formule van een kwadratische functie is ook te schrijven in de vorm $y = a(x - p)^2 + q$. Uit deze vorm lees je direct de coördinaten van de top af. De top is het punt (p, q) .

De formule is ook te schrijven in de vorm $y = a(x - d)(x - e)$. Uit deze vorm lees je direct de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x -as af. Deze snijpunten zijn $(d, 0)$ en $(e, 0)$. Ook kun je met de formule $x_{\text{top}} = \frac{d+e}{2}$ de x -coördinaat van de top van de grafiek berekenen.

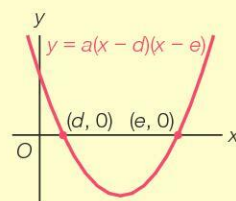
In het voorbeeld op de volgende bladzijde worden de coördinaten van een snijpunt van een lijn k en een parabool p gevraagd. Omdat de formules van k en p niet gegeven zijn, worden deze formules eerst opgesteld.



figuur 11.5



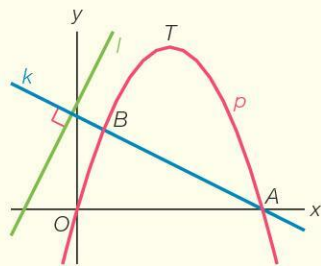
figuur 11.6



figuur 11.7

Voorbeeld

De parabool p snijdt de x -as in de oorsprong en in het punt $A(14, 0)$. De y -coördinaat van de top T is $12\frac{1}{4}$. De lijn k gaat door A en snijdt de lijn l : $y = 2x + 8$ loodrecht. De lijn k snijdt de parabool behalve in A ook in het punt B . Zie de figuur hiernaast.



figuur 11.8

- a Geef de stappen van een strategie waarmee je de coördinaten van B kunt berekenen.
- b Bereken exact de coördinaten van B .

Uitwerking

- a 1 Stel een formule van p op.
- 2 Stel de formule van k op.
- 3 Bereken de coördinaten van B met de formules van p en k .
- b 1 Stel een formule van p op.
 p door $O(0, 0)$ en $A(14, 0)$, dus $p: y = a(x - 0)(x - 14)$ oftewel $p: y = ax(x - 14)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{0 + 14}{2} = 7, \text{ dus } T(7, 12\frac{1}{4}).$$

$$T \text{ op } p \text{ geeft } a \cdot 7 \cdot (7 - 14) = 12\frac{1}{4}$$
$$-49a = 12\frac{1}{4}$$
$$a = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Dus } p: y = -\frac{1}{4}x(x - 14).$$

- 2 Stel de formule van k op.

$$k \perp l \text{ en } rc_l = 2, \text{ dus } rc_k = -\frac{1}{2}.$$

$$k: y = -\frac{1}{2}x + b \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 14 + b = 0 \\ \text{door } A(14, 0) \end{array} \right. \quad b = 7$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{1}{2}x + 7.$$

- 3 Bereken de coördinaten van B met de formules van p en k .

$$k \text{ snijden met } p \text{ geeft } -\frac{1}{2}x + 7 = -\frac{1}{4}x(x - 14)$$

$$-\frac{1}{2}x + 7 = -\frac{1}{4}x^2 + 3\frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7 = 0$$

$$x^2 - 16x + 28 = 0$$

$$(x - 2)(x - 14) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 14$$

$$x_B = 2 \text{ geeft } y_B = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 7 = 6, \text{ dus } B(2, 6).$$



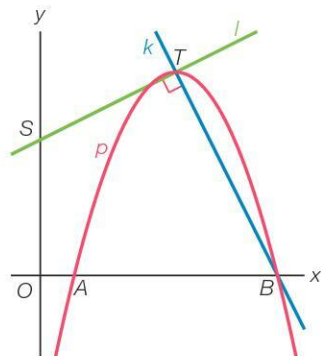
R43 In de theorie zijn drie vormen van kwadratische formules genoemd.

Welke vorm is in het voorbeeld gebruikt en waarom is voor deze vorm gekozen?

44
  

De parabool p snijdt de x -as in de punten $A(1, 0)$ en $B(7, 0)$ en gaat door het punt $C(10, -18)$. De lijn k gaat door de top T van de parabool en door B . De lijn l snijdt k loodrecht in T en de y -as in het punt S . Zie de figuur hiernaast.

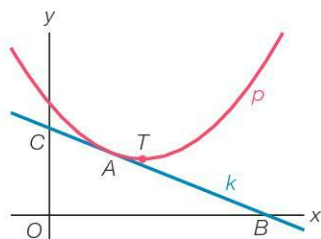
- Geef de stappen van een strategie waarmee je de coördinaten van S kunt berekenen.
- Bereken exact de coördinaten van S .



figuur 11.9

45
  

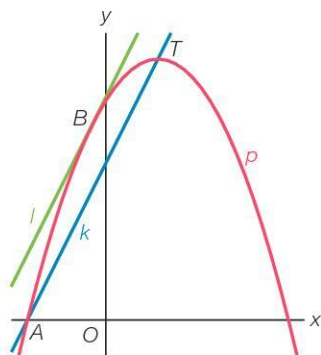
Van de parabool p is de top $T(3, 1\frac{4}{5})$. Het punt $A(2, 2)$ ligt op p . De lijn k raakt p in A en snijdt de assen in de punten B en C . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de oppervlakte van driehoek OBC .



figuur 11.10

A46
  

De top van de parabool p is $T(2, 10)$ en p snijdt de negatieve x -as in het punt $A(-3, 0)$. De lijn k gaat door A en T . De lijn l is evenwijdig met k en raakt de parabool in het punt B . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de coördinaten van B .



figuur 11.11

O47
  

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ en $g(x) = 2(\frac{1}{3}x - 1)^3$.

- Hoe ontstaat de grafiek van g uit de grafiek van f ?
- De lijn k raakt de grafiek van f in het punt $A(2, 2)$. Stel langs algebraïsche weg de formule op van k .
- De lijn l raakt de grafiek van g in het punt $B(6, 2)$. Stel langs algebraïsche weg een vergelijking op van l .

Theorie B Derdegraadsfuncties

De algemene formule van een derdegraadsfunctie is

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ met } a \neq 0.$$

De grafiek van een derdegraadsfunctie kan de x -as drie keer snijden en heeft maximaal twee toppen.

De x -coördinaten van de toppen van de derdegraadsfunctie

$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$ bereken je op algebraïsche wijze door de vergelijking $f'(x) = 0$ op te lossen.

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3 \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$$

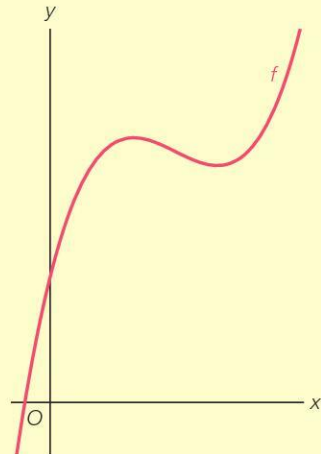
$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 4$$

De toppen zijn $(2, 6\frac{1}{3})$ en $(4, 5\frac{2}{3})$.



figuur 11.12

In het voorbeeld op de volgende bladzijde wordt de vergelijking

$\frac{1}{2}(x^2 - 1)(x - 5) = \frac{1}{4}(x - 1)$ algebraïsch opgelost. Daartoe wordt de vergelijking geschreven als $\frac{1}{2}(x - 1)(x + 1)(x - 5) = \frac{1}{4}(x - 1)$.

Deze vergelijking heeft de vorm $A \cdot B = A \cdot C$,

waarbij $A = x - 1$, $B = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 5)$ en $C = \frac{1}{4}$.

Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0 \vee B = C$. Zie hiernaast.

Je krijgt dus $x - 1 = 0 \vee \frac{1}{2}(x + 1)(x - 5) = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A \cdot C \\ A \cdot B - A \cdot C &= 0 \\ A(B - C) &= 0 \\ A = 0 \vee B &= C \end{aligned}$$

De regel $A \cdot B = A \cdot C$ geeft $A = 0 \vee B = C$ is een van de regels die je kunt gebruiken bij het algebraïsch oplossen van vergelijkingen.

Regels voor het algebraïsch oplossen van vergelijkingen

$$A \cdot B = 0 \text{ geeft } A = 0 \vee B = 0$$

$$A^2 = B^2 \text{ geeft } A = B \vee A = -B$$

$$A \cdot B = A \cdot C \text{ geeft } A = 0 \vee B = C$$

$$A \cdot B = A \text{ geeft } A = 0 \vee B = 1$$

Voorbeeld

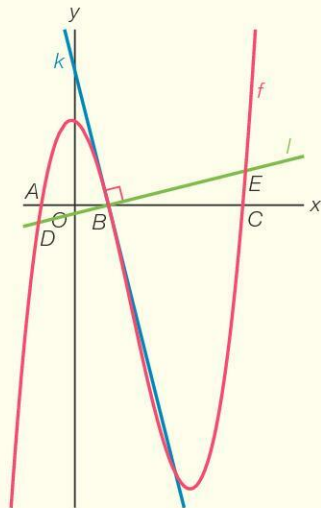
Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)(x - 5)$.

De grafiek van f snijdt de x -as van links naar rechts in de punten A , B en C .

De lijn k raakt de grafiek in B .

De lijn l snijdt k loodrecht in B en snijdt de grafiek van f in de punten D en E . Zie de figuur hiernaast.

Bereken exact de x -coördinaten van D en E .



figuur 11.13

Uitwerking

$$\begin{aligned}f(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2}(x^2 - 1)(x - 5) &= 0 \\(x - 1)(x + 1)(x - 5) &= 0 \\x - 1 = 0 \vee x + 1 = 0 \vee x - 5 = 0 \\x = 1 \vee x = -1 \vee x = 5\end{aligned}$$

Dus $B(1, 0)$.

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 1)(x - 5) = \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 - x + 5) \\&= \frac{1}{2}x^3 - 2\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$rc_k = f'(1) = \frac{1}{2} - 5 - \frac{1}{2} = -4$$

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l = \frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{aligned}l: y &= \frac{1}{4}x + b \\ \text{door } B(1, 0)\end{aligned} \right\} \frac{1}{4} \cdot 1 + b = 0, \text{ dus } b = -\frac{1}{4}$$

$l: y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ snijden met de grafiek van f geeft

$$\frac{1}{2}(x^2 - 1)(x - 5) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}(x - 1)(x + 1)(x - 5) = \frac{1}{4}(x - 1)$$

$$x - 1 = 0 \vee \frac{1}{2}(x + 1)(x - 5) = \frac{1}{4}$$

$$x = 1 \vee (x + 1)(x - 5) = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \vee x^2 - 4x - 5\frac{1}{2} = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -5\frac{1}{2} = 38$$

$$x = 1 \vee x = \frac{4 + \sqrt{38}}{2} \vee x = \frac{4 - \sqrt{38}}{2}$$

$$\text{Dus } x_D = \frac{4 - \sqrt{38}}{2} \text{ en } x_E = \frac{4 + \sqrt{38}}{2}.$$

$$A \cdot B = A \cdot C \text{ geeft } A = 0 \vee B = C$$

R48 Zie het voorbeeld.



a Er is een strategie gevolgd waarin je vier stappen kunt onderscheiden. Welke stappen zijn dat?

b Je kunt de vergelijking $\frac{1}{2}(x^2 - 1)(x - 5) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ ook oplossen door eerst het linkerlid en het rechterlid met 4 te vermenigvuldigen. Je krijgt dan $2(x^2 - 1)(x - 5) = x - 1$.

Werk dit verder uit en laat zien dat je zo dezelfde oplossingen krijgt.

R49
  *

Zie de theorie op bladzijde 118.

- a** Laat zien hoe de regel $A \cdot B = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$ volgt uit de regel $A \cdot B = A \cdot C$ geeft $A = 0 \vee B = C$.
- b** In de theorie staat dat de grafiek van een derdegraadsfunctie de x -as drie keer kan snijden.
Onderzoek of er nog meer mogelijkheden zijn en licht elk van de mogelijkheden toe met een schets.
- c** In de theorie staat dat de grafiek van een derdegraadsfunctie maximaal twee toppen heeft.
Onderzoek welke mogelijkheden er nog meer zijn en licht elk van de mogelijkheden toe met een schets.

50
 

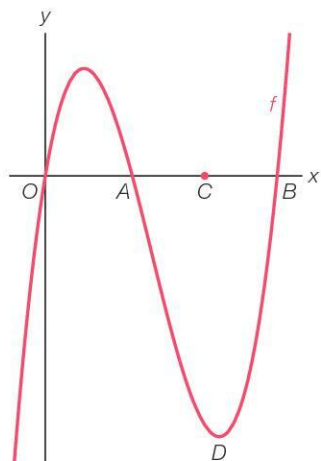
Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

Bewijs dat de lijn k door de toppen van de grafiek van f , de grafiek ook snijdt in het punt $A(2, 4)$.

51
  *

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x$.

De grafiek van f snijdt de positieve x -as in de punten A en B . Het punt C is het midden van het lijnstuk AB . Het punt D is een top van de grafiek. Zie de figuur hiernaast. Bereken exact het verschil tussen de x -coördinaten van C en D .

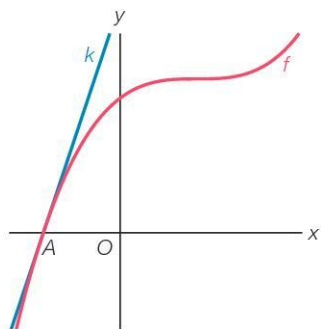


figuur 11.14

52
  *

Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^3 + 8$.

De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A . De lijn k raakt de grafiek van f in A . Bereken exact de afstand tussen de oorsprong en k .

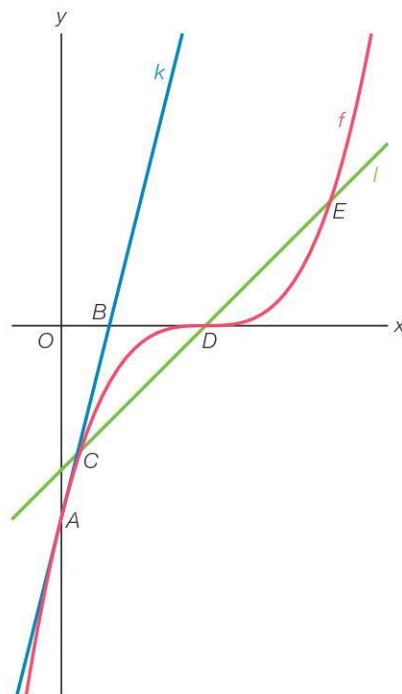


figuur 11.15

A53
☐ ⊙ *

Gegeven is de functie $f(x) = 4(\frac{1}{3}x - 1)^3$.

- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $y = x^3$?
- b** De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A .
De lijn k raakt de grafiek van f in A en snijdt de x -as in het punt B .
Bereken algebraïsch de coördinaten van B .
- c** De lijn l : $y = x - 3$ snijdt de grafiek van f in de punten C , D en E .
Bereken exact het verschil tussen de x -coördinaten van C en E .



figuur 11.16

E54
*

In de theorie staat dat de grafiek van een derdegraadsfunctie de x -as drie keer kan snijden.

Dat betekent dat een derdegraadsvergelijking drie oplossingen kan hebben. Het is ook mogelijk dat een derdegraadsvergelijking twee oplossingen heeft, of één oplossing.

Gegeven is de vergelijking $x^3 + px^2 + 9x = 0$.

Onderzoek algebraïsch voor welke waarden van p deze vergelijking

- a** één oplossing heeft
- b** twee oplossingen heeft
- c** drie oplossingen heeft.

Terugblik

Tweedegraadsfuncties

De formule van een tweedegraadsfunctie kun je als volgt noteren.

I $y = ax^2 + bx + c$ Het snijpunt met de y -as is $(0, c)$ en $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$.

II $y = a(x - p)^2 + q$ De top is het punt (p, q) .

III $y = a(x - d)(x - e)$ De snijpunten met de x -as zijn $(d, 0)$ en $(e, 0)$ en $x_{\text{top}} = \frac{d+e}{2}$.

De parabool p snijdt de x -as in de punten $A(-3, 0)$ en $B(5, 0)$ en de y -as in het punt $C(0, 5\frac{5}{8})$. De lijn k gaat door A en de top T van p .

Gevraagd wordt de formule op te stellen van de lijn l door B die loodrecht op k staat.

Strategie met stappen van de uitwerking:

- 1 Stel de formule van p op door uit te gaan van de vorm $y = a(x - d)(x - e)$.

Je krijgt $y = a(x + 3)(x - 5)$.

Invullen van $x = 0$ en $y = 5\frac{5}{8}$ geeft $a = -\frac{3}{8}$.

Dus de formule van p is $y = -\frac{3}{8}(x + 3)(x - 5)$.

- 2 Bereken de coördinaten van T . Gebruik hierbij $x_{\text{top}} = \frac{d+e}{2}$.

Je krijgt $x_{\text{top}} = \frac{-3+5}{2} = 1$ en $y_{\text{top}} = -\frac{3}{8} \cdot 4 \cdot -4 = 6$, dus $T(1, 6)$.

- 3 Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn k door A en T .

Je krijgt $rc_k = \frac{6-0}{1-(-3)} = \frac{3}{2}$.

- 4 Gebruik $l \perp k$ en l door B om de formule van l op te stellen.

Je krijgt $rc_l = -\frac{2}{3}$ en $l: y = -\frac{2}{3}x + 3\frac{1}{3}$.

Derdegraadsfuncties

De algemene formule van een derdegraadsfunctie is

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ met } a \neq 0.$$

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$f(x) = x^3 - 7\frac{1}{2}x^2 + 12x. \text{ Het punt } A \text{ is een top van de grafiek.}$$

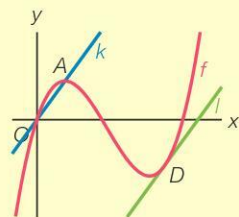
De lijn k gaat door de oorsprong en A . Gevraagd wordt een exacte berekening van de x -coördinaat van het punt D waarin de raaklijn l van de grafiek evenwijdig is met k .

1 $f(x) = x^3 - 7\frac{1}{2}x^2 + 12x$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 15x + 12$

2 $f'(x) = 0$ geeft $x = 1 \vee x = 4$, dus $x_A = 1$ en dit geeft $A(1, 5\frac{1}{2})$.

3 De lijn k door O en A heeft $rc_k = 5\frac{1}{2}$, dus er moet gelden dat $f'(x) = 5\frac{1}{2}$.

4 $f'(x) = 5\frac{1}{2}$ geeft $x = \frac{15 + \sqrt{147}}{6} \vee x = \frac{15 - \sqrt{147}}{6}$, dus $x_D = \frac{15 + \sqrt{147}}{6}$.



11.4 Wortelfuncties

O55
  *

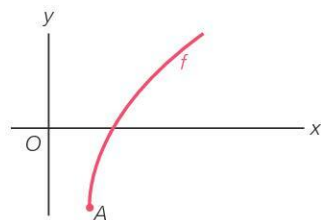
Gegeven is de functie $f(x) = -3 + 2\sqrt{4x - 5}$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f .

Het punt A is het randpunt van de grafiek.

a Licht toe: het punt A heeft coördinaten $(1\frac{1}{4}, -3)$.

b Geef het domein en het bereik van f .



figuur 11.17

Theorie A Functies van de vorm $f(x) = a + b\sqrt{cx + d}$

Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$f(x) = 4 - 2\sqrt{3x - 6}.$$

De grafiek heeft een randpunt. Om de coördinaten

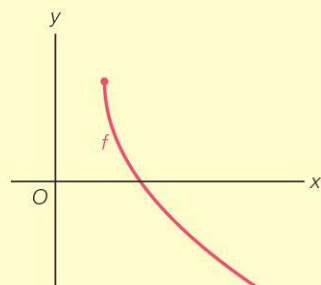
hiervan te berekenen, los je de vergelijking $3x - 6 = 0$ op.

Dit geeft $3x = 6$, dus $x = 2$.

$$f(2) = 4 - 2 \cdot 0 = 4, \text{ dus het randpunt is } (2, 4).$$

Uit de coördinaten van het randpunt en de schets volgt

$$D_f = [2, \rightarrow) \text{ en } B_f = \langle \leftarrow, 4 \rangle.$$



figuur 11.18

Je kunt bij de formule $y = 4 - 2\sqrt{3x - 6}$ de variabele x vrijmaken en de formule herleiden tot de vorm $x = ay^2 + by + c$. Dat gaat als volgt.

$$y = 4 - 2\sqrt{3x - 6}$$

Zet de term met x apart (isoleren).

$$2\sqrt{3x - 6} = 4 - y$$

Deel beide leden door 2.

$$\sqrt{3x - 6} = 2 - \frac{1}{2}y$$

Kwadrateer beide leden.

$$3x - 6 = (2 - \frac{1}{2}y)^2$$

$$3x - 6 = 4 - 2y + \frac{1}{4}y^2$$

$$3x = \frac{1}{4}y^2 - 2y + 10$$

$$x = \frac{1}{12}y^2 - \frac{2}{3}y + 3\frac{1}{3}$$

In deze formule is $4 - y \geq 0$, dus $y \leq 4$.

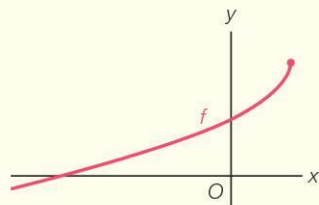
Deze voorwaarde hoeft je niet te vermelden.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{6-4x}$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f .

- a Bereken de coördinaten van het randpunt van de grafiek.
- b De lijn k raakt de grafiek van f in het punt $A(\frac{1}{2}, 2)$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van k .
- c Schrijf de formule $y = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{6-4x}$ in de vorm $x = ay^2 + by + c$.



figuur 11.19

Uitwerking

- a $6 - 4x = 0$ geeft $-4x = -6$ oftewel $x = 1\frac{1}{2}$.

Dus het randpunt is $(1\frac{1}{2}, 3)$.

- b $f(x) = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{6-4x} = 3 - \frac{1}{2}(6-4x)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$f'(x) = -\frac{1}{4}(6-4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -4 = \frac{1}{(6-4x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6-4x}}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{6-2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(\frac{1}{2}, 2) \end{array} \right\} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + b = 2$$
$$b = 1\frac{3}{4}$$

Dus $k: y = \frac{1}{2}x + 1\frac{3}{4}$.

- c $y = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{6-4x}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{6-4x} = 3 - y$$

$$\sqrt{6-4x} = 6 - 2y$$

kwadrateren geeft

$$6 - 4x = 36 - 24y + 4y^2$$

$$-4x = 30 - 24y + 4y^2$$

$$x = -y^2 + 6y - 7\frac{1}{2}$$

Je mag de afgeleide ook berekenen met de regel $f(x) = \sqrt{ax+b}$ geeft

$$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}.$$

56 Zie het voorbeeld.



- a Geef het domein en het bereik van f .
- b Los algebraïsch op $f(x) > 0$.
- c Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \geq -2\frac{1}{2}$?

R57



Zie de theorie met het vrijmaken van x bij de formule $y = 4 - 2\sqrt{3x-6}$.

- a Waarom moet gelden dat $4 - y \geq 0$?
- b Zie voorbeeld c met het vrijmaken van x bij de formule $y = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{6-4x}$.
Voor welke waarden van y geldt de formule $x = -y^2 + 6y - 7\frac{1}{2}$?

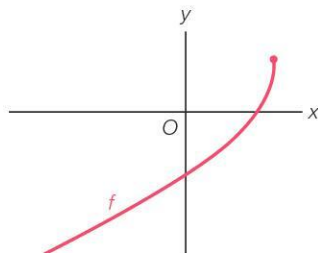
58



Gegeven is de functie $f(x) = 3 - 2\sqrt{10 - 4x}$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f .

- Bereken de coördinaten van het randpunt van de grafiek.
- Los algebraïsch op $f(x) > -5$.
- Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \geq -6\frac{1}{2}$?
- De lijn k raakt de grafiek in het punt A met $x_A = 1\frac{1}{2}$.
Stel lang algebraïsche weg de formule op van k .
- Schrijf de formule $y = 3 - 2\sqrt{10 - 4x}$ in de vorm $x = ay^2 + by + c$.



figuur 11.20

59

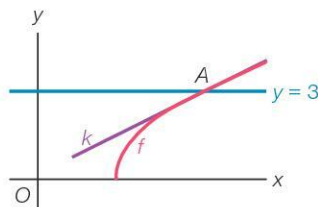


Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{3x - 8}$.

In figuur 11.21 zie je de grafiek van f .

De lijn $y = 3$ snijdt de grafiek in het punt A . De lijn k raakt de grafiek van f in A .

- Stel lang algebraïsche weg de formule op van k .
- De lijn $l: y = \frac{1}{2}x + b$ raakt de grafiek in het punt B .
Bereken langs algebraïsche weg de coördinaten van B .



figuur 11.21

60



De functie f heeft een functievoorschrift van de vorm

$$f(x) = a + b\sqrt{2x + c}.$$

- Bereken de waarden van a , b en c in het geval het randpunt van de grafiek van f het punt $A(2\frac{1}{2}, 2)$ is en de grafiek door het punt $B(3, -1)$ gaat.
- Neem $a = 3$, $b = -1\frac{1}{2}$ en $c = 3$.

De lijn k raakt de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek met de x -as.

De lijn l is de horizontale lijn door het randpunt van de grafiek van f en de lijn m is de verticale lijn door het randpunt.

Bereken exact de oppervlakte van de driehoek die ingesloten wordt door de lijnen k , l en m .

Maak zo nodig een schets.

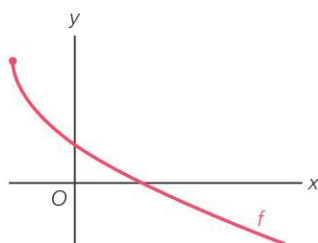
A61



Gegeven is de functie $f(x) = 6 - \frac{1}{2}\sqrt{4x + 6}$.

In figuur 11.22 zie je de grafiek van f .

- Bereken het domein en het bereik van f .
- Los algebraïsch op $f(x) > 0$.
- Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \leq 7\frac{1}{2}$?
- Schrijf de formule $y = 6 - \frac{1}{2}\sqrt{4x + 6}$ in de vorm $x = ay^2 + by + c$.
- De lijn k raakt de grafiek in het punt A met $x_A = -\frac{1}{2}$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van k .
- De lijn $l: y = -1\frac{1}{5}x + b$ raakt de grafiek.
Bereken b langs algebraïsche weg.



figuur 11.22

A62*****

De capaciteit van een rotonde wordt gegeven door de formule $C = 5500 - 1500\sqrt{6 - 2v}$. Hierin is C het aantal voertuigen dat per uur de rotonde kan passeren en v de gewogen verdeling over de richtingen met $1 \leq v \leq 3$.

a Schets de grafiek van C en geef het bereik van C .

Nemen alle voertuigen de rotonde een kwart, dan is $v = 3$, gaan alle voertuigen rechtdoor, dan is $v = 2$ en nemen alle voertuigen de rotonde driekwart, dan is $v = 1$.

In het geval 40% van de voertuigen de rotonde een kwart neemt, 50% rechtdoor gaat en 10% de rotonde driekwart neemt, is $v = 0,4 \cdot 3 + 0,5 \cdot 2 + 0,1 \cdot 1 = 2,3$.

In het algemeen is $v = p_{\frac{1}{4}} \cdot 3 + p_{\frac{1}{2}} \cdot 2 + p_{\frac{3}{4}} \cdot 1$ waarin bijvoorbeeld $p_{\frac{1}{4}}$ het gedeelte van de voertuigen is dat de rotonde een kwart neemt.

b Bereken de capaciteit van de rotonde in het geval

$$p_{\frac{1}{4}} = 0,3, p_{\frac{1}{2}} = 0,5 \text{ en } p_{\frac{3}{4}} = 0,2.$$

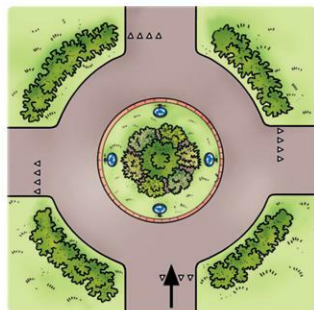
c Bereken langs algebraïsche weg de waarde van v in het geval per uur 4000 voertuigen de rotonde kunnen passeren.

In een situatie dat 20% van de voertuigen de rotonde een kwart neemt, is de capaciteit 3250. We vragen ons af hoeveel procent van de voertuigen rechtdoor gaat oftewel wat de waarde van $p_{\frac{1}{2}}$ is.

d Licht toe dat $p_{\frac{3}{4}} = 0,8 - p_{\frac{1}{2}}$.

e Bereken algebraïsch hoeveel procent van de voertuigen in deze situatie rechtdoor gaat.

f Daan beweert dat op een gegeven moment de capaciteit 2800 is, terwijl 40% van de voertuigen de rotonde een kwart neemt. Laat met een berekening zien dat deze situatie binnen het gegeven model niet mogelijk is.



figuur 11.23

A63*****

a Bewijs dat de grafiek van de functie $f(x) = 1 + \sqrt{-x^2 + 8x + 9}$ een halve cirkel is.

b Onderzoek of de grafieken van de functies $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ en $h(x) = \sqrt{-x^2 - 6x + 8}$ halve cirkels zijn.

Terugblik

Functies van de vorm $f(x) = a + b\sqrt{cx + d}$

Het domein van de functie $f(x) = 5 - 3\sqrt{4 - 2x}$ krijg je door de ongelijkheid $4 - 2x \geq 0$ op te lossen.

Je krijgt $-2x \geq -4$, dus $x \leq 2$.

Dus het domein is $D_f = \langle \leftarrow, 2 \rangle$.

Het randpunt is $(2, 5)$ en $B_f = \langle \leftarrow, 5 \rangle$. Zie de schets hiernaast.

Bij het algebraïsch oplossen van de ongelijkheid $f(x) > -4$ los je de vergelijking $f(x) = -4$ op en lees je het antwoord uit de schets af. Houd daarbij rekening met het domein.

$$f(x) = -4 \text{ geeft } 5 - 3\sqrt{4 - 2x} = -4$$

$$-3\sqrt{4 - 2x} = -9$$

$$\sqrt{4 - 2x} = 3$$

$$4 - 2x = 9$$

$$-2x = 5$$

$$x = -2\frac{1}{2}$$

Lees af dat $f(x) > -4$ geeft $-2\frac{1}{2} < x \leq 2$.

Bij het vrijmaken van x bij de formule $y = 5 - 3\sqrt{4 - 2x}$ krijg je $3\sqrt{4 - 2x} = 5 - y$.

kwadrateren geeft

$$9(4 - 2x) = 25 - 10y + y^2$$

$$36 - 18x = 25 - 10y + y^2$$

$$-18x = y^2 - 10y - 11$$

$$x = -\frac{1}{18}y^2 + \frac{5}{9}y + \frac{11}{18}$$

De afgeleide van een wortelfunctie

Bij het berekenen van de afgeleide van $f(x) = 5 - 3\sqrt{4 - 2x}$ heb je de kettingregel nodig.

$$f(x) = 5 - 3(4 - 2x)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = -1\frac{1}{2}(4 - 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2 = \frac{3}{(4 - 2x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{4 - 2x}}$$

Om te berekenen in welk punt van de grafiek van f de helling gelijk is aan $\frac{3}{4}$, los je de vergelijking $f'(x) = \frac{3}{4}$ op.

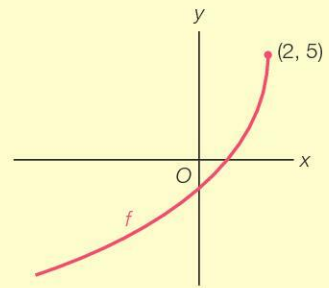
$$\text{Je krijgt } \frac{3}{\sqrt{4 - 2x}} = \frac{3}{4}, \text{ dus } \sqrt{4 - 2x} = 4$$

$$4 - 2x = 16$$

$$-2x = 12$$

$$x = -6$$

$f(-6) = 5 - 3\sqrt{4 + 12} = -7$, dus in het punt $(-6, -7)$ van de grafiek van f is de helling gelijk aan $\frac{3}{4}$.



11.5 Gebroken functies



Gegeven is de functie $f(x) = 4 + \frac{1}{x-2}$.

- Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek $y = \frac{1}{x}$?
- Geef van de grafiek van f de formules van de asymptoten en schets de grafiek van f .
- Toon aan dat het functievoorschrift van f is te schrijven als $f(x) = \frac{4x-7}{x-2}$.

Theorie A Functies van de vorm $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Een **gebroken lineaire functie** is van de vorm $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ met $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$.

Men kan aantonen dat de grafiek van elke gebroken lineaire functie door transformaties (translaties en vermenigvuldigingen) kan ontstaan uit de standaardgrafiek $y = \frac{1}{x}$. Dus de grafiek van een gebroken lineaire functie is een hyperbool en heeft een verticale en een horizontale asymptoot.

Bij de grafiek van de functie $f(x) = \frac{15x+4}{3x-6}$ vind je de asymptoten als volgt.

De verticale asymptoot krijg je door de noemer gelijk aan nul te stellen. Dit geeft $3x - 6 = 0$ oftewel $3x = 6$. Dus de lijn $x = 2$ is de verticale asymptoot.

De horizontale asymptoot krijg je door te bedenken dat voor hele grote x de 4 in de teller te verwaarlozen is ten opzichte van de $15x$. En in de noemer is de -6 te verwaarlozen ten opzichte van de $3x$.

Dus voor grote x is $f(x) \approx \frac{15x}{3x} = 5$. <.....

Hieruit volgt dat de horizontale asymptoot de lijn $y = 5$ is.

Ook voor sterk negatieve x krijg je $f(x) \approx \frac{15x}{3x}$.

Asymptoten vinden bij grafieken van gebroken functies

Verticale asymptoot Stel de noemer gelijk aan 0.

Horizontale asymptoot Beredeneer wat de functiewaarde wordt voor grote x .

Afspraak

Bij het tekenen of schetsen van de grafiek van een gebroken functie stel je eerst de formules op van de asymptoten. Je tekent de asymptoten als stippellijnen in de figuur en zet de formules erbij.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x+3}{2x-3}$.

Zie de grafiek van f in de figuur hiernaast.

- a** Stel de formules op van de asymptoten van de grafiek van f .

Gegeven is dat de afgeleide van f gelijk is aan

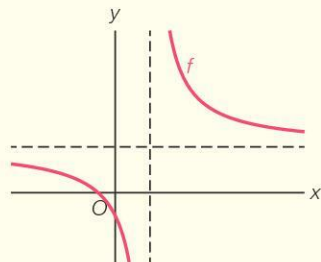
$$f'(x) = \frac{-18}{(2x-3)^2}.$$

De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A .

De lijn k raakt de grafiek van f in A .

De lijn l gaat door A , staat loodrecht op k en snijdt de grafiek van f behalve in A ook in het punt B .

- b** Bereken exact de coördinaten van B .



figuur 11.24

Uitwerking

- a** noemer = 0 geeft $2x - 3 = 0$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 1\frac{1}{2}$.

Voor grote x is $f(x) \approx \frac{4x}{2x} = 2$, dus de horizontale asymptoot

is de lijn $y = 2$.

- b** $rc_k = f'(0) = \frac{-18}{(0-3)^2} = -2$ en $l \perp k$, dus $rc_l = \frac{1}{2}$.

$l: y = \frac{1}{2}x + b$ en $f(0) = -1$, dus $l: y = \frac{1}{2}x - 1$.

l snijden met de grafiek van f geeft $\frac{4x+3}{2x-3} = \frac{1}{2}x - 1$

$$4x + 3 = (\frac{1}{2}x - 1)(2x - 3)$$

$$4x + 3 = x^2 - 1\frac{1}{2}x - 2x + 3$$

$$x^2 - 7\frac{1}{2}x = 0$$

$$x(x - 7\frac{1}{2}) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 7\frac{1}{2}$$

$f(7\frac{1}{2}) = 2\frac{3}{4}$, dus $B(7\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4})$.

Je kunt bij de formule $y = \frac{4x+3}{2x-3}$ de variabele x uitdrukken in y .

Dat gaat als volgt.

$$y = \frac{4x+3}{2x-3}$$

Verwissel beide leden.

$$\frac{4x+3}{2x-3} = y$$

Gebruik $\frac{A}{B} = C$ geeft $A = BC$.

$$4x+3 = y(2x-3)$$

Werk de haakjes weg.

$$4x+3 = 2xy-3y$$

Breng de termen met x naar links, de rest naar rechts.

$$4x-2xy = -3y-3$$

Breng x buiten haakjes.

$$x(4-2y) = -3y-3$$

Deel beide leden door $4-2y$.

$$x = \frac{-3y-3}{4-2y} \text{ oftewel } x = \frac{3y+3}{2y-4}$$

65 Zie het voorbeeld.



a Geef de exacte oplossing van $f(x) \leq \frac{1}{2}x - 1$.

b Het functievoorschrift van f is te schrijven als $f(x) = 2 + \frac{9}{2x-3}$.

Toon dit aan door $2 + \frac{9}{2x-3}$ te herleiden tot $\frac{4x+3}{2x-3}$ en toon met het

functievoorschrift $f(x) = 2 + \frac{9}{2x-3}$ aan dat $f'(x) = \frac{-18}{(2x-3)^2}$.

66 Stel de formules op van de asymptoten van de grafiek.



a $f(x) = \frac{3x}{4-x}$

b $g(x) = \frac{2x-3}{2x+5}$

c $h(x) = 2 - \frac{x+3}{4x-1}$

67 Druk x uit in y bij de volgende formules.



a $y = \frac{3x}{4-x}$

b $y = \frac{2x-3}{2x+5}$

c $y = 2 - \frac{x+3}{4x-1}$

68 Druk x uit in y bij de volgende formules.



a $\log(y) = \frac{x}{x+3}$

b $2^y = 3 + \frac{1}{5-x}$

c $\sin(y) = \frac{2\pi}{2x+1}$

69 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ en $g(x) = x-1$.



a Schets de grafieken van f en g in één figuur.

b Los algebraïsch op $f(x) \leq g(x)$.

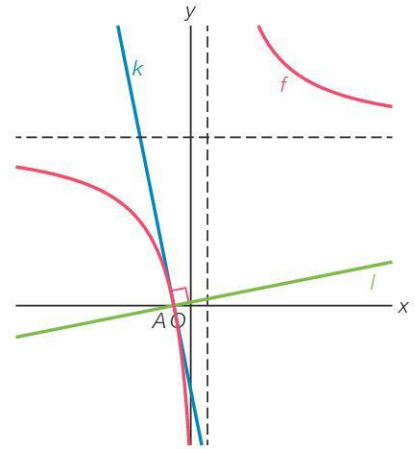
c Druk x uit in y bij de formule $y = \frac{x+5}{x+1}$.

70




Gegeven is de functie $f(x) = \frac{10}{2x-1} + 5$.

De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A . De lijn k raakt de grafiek van f in A . De lijn l gaat door A , staat loodrecht op k en snijdt de grafiek van f behalve in A ook in het punt B . Bereken exact de coördinaten van B .



figuur 11.25

A71




Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ en $g(x) = x-3$.

- Schets de grafieken van f en g in één figuur.
- Los algebraïsch op $f(x) \leq g(x)$.
- De functie h is de somfunctie van f en g , dus $h(x) = f(x) + g(x)$. Schrijf het functievoorschrift van h als één breuk.
- De functie j is gegeven door $j(x) = f(g(x))$.

Schrijf het functievoorschrift van j in de vorm $j(x) = a + \frac{b}{x}$.

- De functie k is gegeven door $k(x) = g(f(x))$.

Schrijf het functievoorschrift van k in de vorm $k(x) = \frac{ax+b}{x+3}$.

A72




Gegeven is de functie $f(x) = \frac{32}{3x+12}$. De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A . De lijn k raakt de grafiek van f in A . Bereken exact de afstand van de oorsprong tot k .

E73


Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x+2}{2x-3} - 2$.

Het functievoorschrift van f is ook te schrijven als $f(x) = \frac{8}{2x-3}$.

- Bewijs dit.

Gegeven is de functie $g(x) = \frac{4x+2}{2x-3}$.

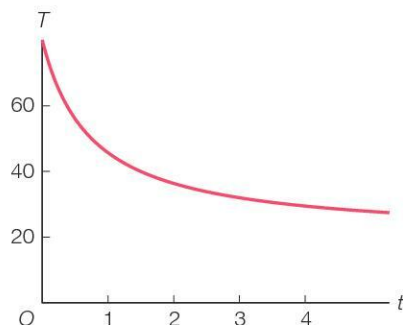
De lijnen k en l met richtingscoëfficiënt -1 raken de grafiek van g in de punten A en B .

- Bereken exact de coördinaten van A en B .

A74
  *

Bij het testen van een thermoskan meet men de temperatuur van de vloeistof in de kan gedurende enkele uren. De temperatuur blijkt te benaderen door de formule $T = \frac{80t + 240}{4t + 3}$. Hierin is t de tijd in uren en T de temperatuur in graden Celsius.

- a De grafiek van T heeft een horizontale asymptoot. Welke lijn is dat? Wat is de praktische betekenis van deze lijn?
- b Druk t uit in T en bereken na hoeveel minuten de temperatuur 25°C is.



figuur 11.26

Voor $t \geq 3$ kan de temperatuur ook benaderd worden door een lineaire formule, dus een formule van de vorm $T_{\text{lin}} = at + b$. In deze formule is $a = T'(3)$.

De waarde van $T'(3)$ kan benaderd worden door het differentiequotient $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op een heel klein interval.

- c Stel met behulp van het differentiequotient op het interval $[3; 3,001]$ deze lineaire formule op. Rond zo nodig af op één decimaal.

O75
  *

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 18}{2x}$.

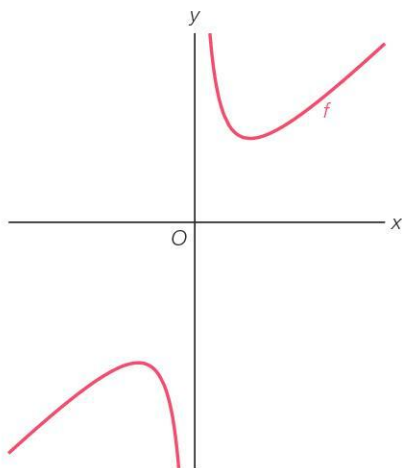
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f . Het functievoorschrift van f is te schrijven als

$$f(x) = x - \frac{3}{2} + \frac{9}{x}.$$

- a Toon dit aan.

De afgeleide van f is $f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$.

- b Toon dit aan en bereken exact de extreme waarden van f .



figuur 11.27

Theorie B Gebroken functies met extremen

Hiernaast zie je de grafiek van de functie

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 8}{4x}. \text{ De functie heeft twee}$$

extremen. Je ziet dat het maximum kleiner is dan het minimum.

Om de extremen te berekenen, ga je eerst uitdelen.

Je krijgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2 + 3x + 8}{4x} \\ &= \frac{2x^2}{4x} + \frac{3x}{4x} + \frac{8}{4x} \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{2}{x} \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + 2x^{-1}. \end{aligned}$$

Je kunt nu de afgeleide berekenen.

$$\text{Dit geeft } f'(x) = \frac{1}{2} - 2x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}.$$

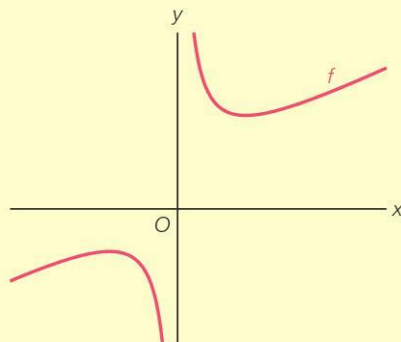
$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{x^2}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

Dus max. is $f(-2) = -1\frac{1}{4}$ en min. is $f(2) = 2\frac{3}{4}$.

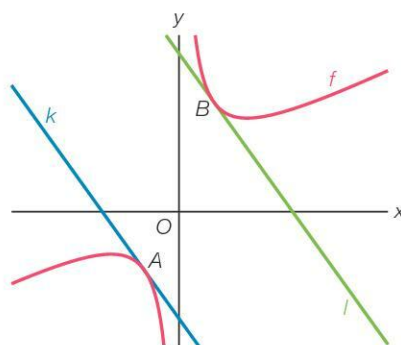


figuur 11.28

76
□ ⊗ *

Zie de theorie met de functie $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 8}{4x}$.

- De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt $-1\frac{1}{2}$. De raakpunten zijn A en B . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de coördinaten van A en B .
- De lijn $y = \frac{1}{2}x$ snijdt de grafiek van f in één punt. Bereken exact de coördinaten van dit punt.
- Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ de grafiek van f snijdt.



figuur 11.29

77

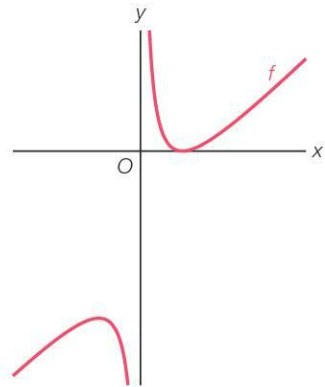



Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$.

Zie de grafiek van f in de figuur hiernaast.

De coördinaten van de toppen van de grafiek zijn $(-2, -8)$ en $(2, 0)$.

- Bewijs dit.
- De lijn k gaat door de toppen van de grafiek. Bereken exact de afstand van k tot de oorsprong.
- De lijn $y = x$ snijdt de grafiek van f in het punt A . De lijn l raakt de grafiek in A . Bereken exact de coördinaten van het snijpunt B van l met de x -as.
- De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt $\frac{3}{4}$. Bereken exact de coördinaten van de bijbehorende raakpunten.
- Gegeven is de functie $g(x) = x - 4$ met domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$. De grafiek van g snijdt de grafiek van f niet, maar komt voor steeds grotere waarden van x steeds dichterbij de grafiek van f . Er zijn waarden van x waarvoor $f(x) - g(x) < \frac{1}{10}$. Bereken exact voor welke waarden van x dit het geval is.



figuur 11.30

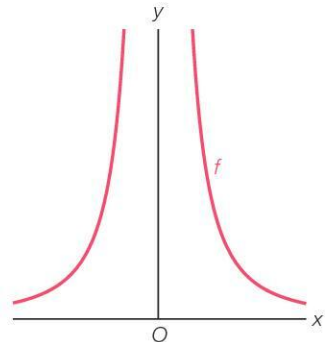
78




Gegeven is de functie $f(x) = \frac{25}{2x^2}$. De grafiek van f is

symmetrisch in de y -as. Zie de figuur hiernaast.

- De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B . De afstand tussen A en B is 3. Bereken exact de waarde van p .
- De lijn $y = 8$ snijdt de grafiek van f in de punten C en D . Bereken exact de afstand tussen C en D .
- De lijn k raakt de grafiek van f in het punt E met $x_E = 2$. Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van k met de y -as.
- De lijn l met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{5}$ raakt de grafiek van f . Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van l met de y -as.



figuur 11.31

79



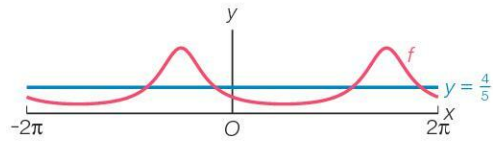

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2}{3 \sin(x) + 4}$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f en de lijn $y = \frac{4}{5}$.

- a** Los in $[-2\pi, 2\pi]$ exact op $f(x) > \frac{4}{5}$.

Het minimum van f treedt op voor de waarden van x waarvoor de noemer $3 \sin(x) + 4$ maximaal is.

- b** Bereken exact voor welke waarden van x de functie minimaal is en geef dit minimum.
c Bereken exact voor welke waarden van x de functie maximaal is en geef dit maximum.



figuur 11.32

A80




Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + a}{2x}$.

Er geldt $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}$.

- a** Bewijs dit.

Neem $a = 12$ in de vragen b, c, d en e.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f voor $a = 12$.

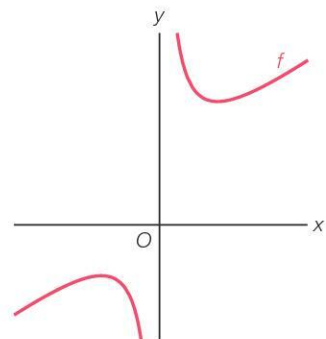
- b** Bereken exact de extreme waarden van f .
c De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -1$.
 Bereken algebraïsch de afstand van O tot k . Rond af op twee decimalen.
d De lijn l met richtingscoëfficiënt $1\frac{1}{8}$ raakt de grafiek in het punt B met $x_B > 0$.
 Onderzoek op algebraïsche wijze of l nog een ander punt met de grafiek van f gemeenschappelijk heeft.
e Bewijs dat de lijn $m: y = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ de grafiek van f niet snijdt.

De grafiek van f heeft een top voor $x = 1$.

- f** Bereken exact de y -coördinaten van de twee toppen van de grafiek.

De y -coördinaat van een van de toppen van de grafiek van f is 7.

- g** Bereken exact de x -coördinaat van deze top.



figuur 11.33

Terugblik

Functies van de vorm $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Voor het berekenen van de formules van de asymptoten van de grafiek

van de gebroken lineaire functie $f(x) = \frac{6x-8}{2x+1}$ ga je als volgt te werk.

- De verticale asymptoot

Stel de noemer nul. Je krijgt $2x+1=0$, dus $2x=-1$, dus $x=-\frac{1}{2}$.

De verticale asymptoot is de lijn $x=-\frac{1}{2}$.

- De horizontale asymptoot

Beredeneer wat de functiewaarde wordt voor grote waarden van x .

Een grote x geeft $f(x) \approx \frac{6x}{2x} = 3$, dus de horizontale asymptoot is de

lijn $y=3$.

Je kunt bij de formule $y = \frac{6x-8}{2x+1}$ de variabele x uitdrukken in y .

Verwissel daartoe eerst beide leden en gebruik vervolgens de regel

$$\frac{A}{B} = C \text{ geeft } A = BC.$$

Je krijgt $\frac{6x-8}{2x+1} = y$

$$6x-8 = y(2x+1)$$

$$6x-8 = 2xy + y$$

$$6x-2xy = y+8$$

$$x(6-2y) = y+8$$

$$x = \frac{y+8}{6-2y}$$

Functies van de vorm $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx}$

Door bij de functie $f(x) = \frac{x^2+6x+9}{2x}$ uit te delen kun je de afgeleide berekenen.

$$\text{Je krijgt } f(x) = \frac{x^2+6x+9}{2x} = \frac{x^2}{2x} + \frac{6x}{2x} + \frac{9}{2x} = \frac{1}{2}x + 3 + \frac{9}{2x} = \frac{1}{2}x + 3 + 4\frac{1}{2}x^{-1}$$

$$\text{en dit geeft } f'(x) = \frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2x^2}.$$

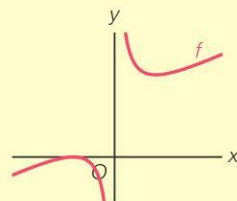
De extreme waarden krijg je door de vergelijking $f'(x) = 0$ op te lossen.

$$\frac{1}{2} - \frac{9}{2x^2} = 0 \text{ geeft } \frac{9}{2x^2} = \frac{1}{2}, \text{ dus } 2x^2 = 18 \text{ en hieruit volgt}$$

$$x = 3 \vee x = -3.$$

Uit de figuur hiernaast volgt max. is $f(-3) = 0$ en

min. is $f(3) = 6$.



Eindopdracht Kosten bij de meubelmaker en de blikjesfabriek

Meubelmaker Anja maakt houten kistjes met een bodem waarvan de verhouding van de zijden 3 : 2 is. De inhoud is 15 dm^3 .

Zo'n kistje krijgt een deksel waarvan de kosten 40 cent per dm^2 bedragen. De kosten van de bodem en de zijkanten zijn 30 cent per dm^2 .

Stel de bodem is $3x$ bij $2x$ dm. Zie de figuur hiernaast.

Voor de materiaalkosten K in centen van zo'n kistje geldt

$$\text{de formule } K = 420x^2 + \frac{750}{x}.$$



- Toon aan dat deze formule juist is en bereken algebraïsch voor welke waarde van x de materiaalkosten minimaal zijn. Wat zijn dan de afmetingen van het kistje? Rond af op gehele cm.

Anja maakt ook kistjes met een metalen deksel. De kistjes hebben een vierkante bodem en de inhoud is 12 dm^3 . De kostprijs van het hout is 25 cent per dm^2 en van het metaal 50 cent per dm^2 .

- Bereken op algebraïsche wijze bij welke afmetingen de materiaalkosten minimaal zijn. Wat zijn de minimale kosten per kistje?

Van een cilindervormig blikje met een inhoud van 33 cL zijn de kosten van de zijkant en de bodem 0,3 cent per dm^2 en van de bovenkant 0,6 cent per dm^2 .

- Druk de kosten K uit in de straal van het blikje en bereken algebraïsch de minimale materiaalkosten van een blikje.



Op de foto hiernaast zie je enkele cilindervormige blikken waarvan de hoogte ongeveer net zo groot is als de diameter.

- Bewijs dat de totale oppervlakte van een cilindervormig blik minimaal is in het geval de hoogte gelijk is aan de diameter. Stel hiertoe de inhoud van een blik I , de hoogte h en de straal r en bewijs dat in het geval van minimale oppervlakte geldt dat $h = 2r$.



Diagnostische toets

11.1 Evenredigheden

- 1** **a** A is evenredig met $p^{0,55}$. Voor $p = 10$ is $A = 20$.
Stel de formule op van A . Rond af op twee decimalen.
- b** B is omgekeerd evenredig met r^3 . Voor $r = 6$ is $B = 0,5$.
Stel de formule op van B .
- 2** Gegeven is de formule $N = 3t^{2,1}$.
- a** Bereken hoeveel keer zo groot N wordt als t verdubbelt. Rond af op één decimaal.
- b** Bereken hoeveel keer zo groot t wordt als N verdubbelt. Rond af op één decimaal.

- 3** Een groot kerkorgel telt soms duizenden orgelpijpen. Onderzoekers hebben van een orgel dat moet worden gerestaureerd van een aantal pijpen de lengte L in mm en de diameter D in mm opgemeten. De resultaten staan in de tabel.
- Toon aan dat D evenredig is met $L^{0,82}$ en stel de formule van D op.

L	D
150	15
220	21
290	26
440	37
570	45
870	64

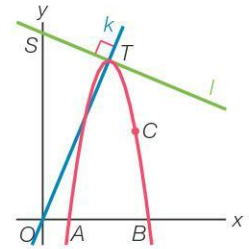
- 4** De gemiddelde afstand A van een planeet tot de zon in miljoenen km is evenredig met een macht van de omwentelingstijd T rond de zon in dagen. Voor Venus geldt $A = 108$ en $T = 225$ en voor Saturnus geldt $A = 1427$ en $T = 10\,753$.
- a** Stel de formule op van A . Rond in de formule af op drie decimalen.
- b** De omwentelingstijd van de planeet Uranus is 30 690 dagen.
Bereken voor Uranus de gemiddelde afstand tot de zon. Rond af op miljoenen km.

11.2 Standaardgrafieken en transformaties

- 5** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 2 \sin(3x - \pi)$.
- a** Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek $y = \sin(x)$?
- De grafiek van de functie g is een sinusoïde waarvan de periode twee keer zo groot is als de periode van de grafiek van f , de amplitude de helft is van die van de grafiek van f en een beginpunt $\frac{1}{2}\pi$ rechts en 5 onder een beginpunt van de grafiek van f ligt.
- b** Stel een functievoorschrift op van g in de vorm $g(x) = a + b \sin(cx - d)$.
- 6** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^{x+2}$, $g(x) = 3^{x-1}$ en $h(x) = {}^3\log(x) - 2$.
- a** Schrijf het functievoorschrift van de functie $s(x) = f(x) + g(x)$ in de vorm $s(x) = a \cdot 3^x$.
- b** Schrijf het functievoorschrift van de functie $v(x) = 4 \cdot f(x) - 27 \cdot g(x)$ in de vorm $v(x) = 3^{x+b}$.
- c** Bewijs dat $k(x) = h(f(x))$ te schrijven is als $k(x) = x$.

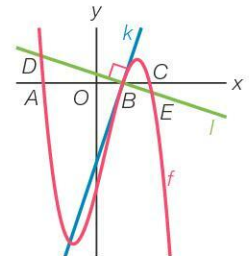
11.3 Tweede- en derdegraadsfuncties

- 7** De parabool p snijdt de x -as in de punten $A(2, 0)$ en $B(8, 0)$ en gaat door het punt $C(7, 6\frac{2}{3})$. De lijn k gaat door de top T van de parabool en door de oorsprong. De lijn l snijdt k loodrecht in T en de y -as in het punt S . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact de coördinaten van S .



figuur 11.34

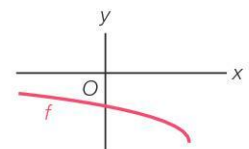
- 8** Gegeven is de functie $f(x) = -(x^2 - 4)(x - 1)$. De grafiek van f snijdt de x -as van links naar rechts in de punten A , B en C . De lijn k raakt de grafiek in B . De lijn l snijdt k loodrecht in B en snijdt de grafiek van f ook nog in de punten D en E . Zie de figuur hiernaast. Bereken exact het verschil tussen de x -coördinaten van D en E .



figuur 11.35

11.4 Wortelfuncties

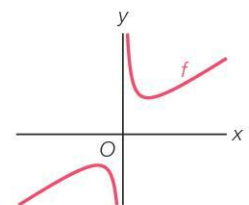
- 9** Gegeven is de functie $f(x) = -2 + \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2x}$.
- Bereken het domein van f en geef het bereik.
 - Los algebraïsch op $f(x) < 0$.
 - Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k die de grafiek raakt in het punt A met $x_A = 2$.
 - Schrijf de formule $y = -2 + \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2x}$ in de vorm $x = ay^2 + by + c$.



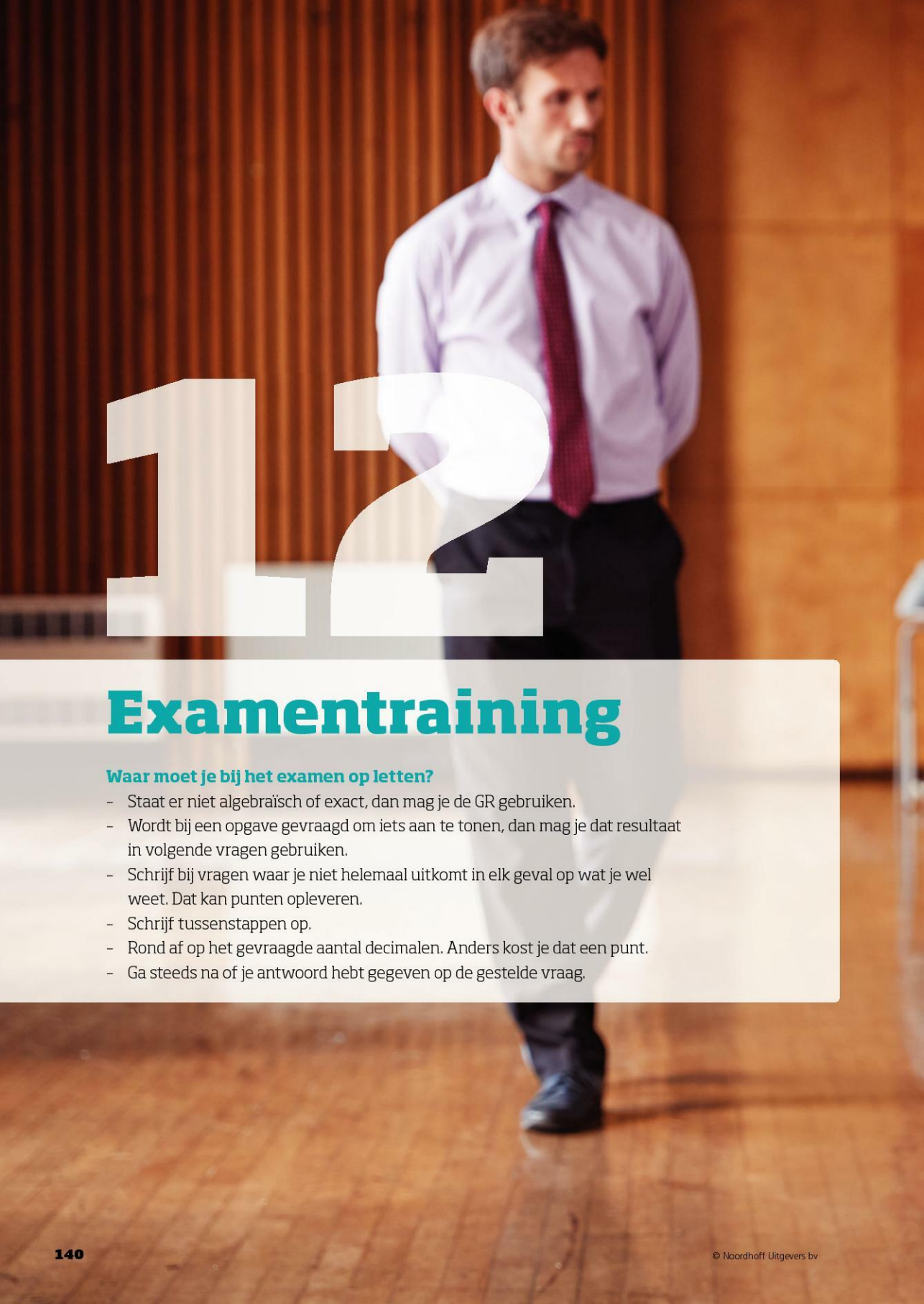
figuur 11.36

11.5 Gebroken functies

- 10** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$ en $g(x) = x + 4$.
- Schets de grafieken van f en g in één figuur.
 - Los algebraïsch op $f(x) \geq g(x)$.
 - Maak x vrij bij de formule $y = \frac{3x+2}{x-4}$.
- 11** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^2 + x + 18}{2x}$. Hiernaast zie je de grafiek van f . De coördinaten van de toppen van de grafiek zijn $(-3, -5\frac{1}{2})$ en $(3, 6\frac{1}{2})$.
- Bewijs dit.
 - De lijn k gaat door de toppen van de grafiek van f . Bereken de afstand van de oorsprong tot k . Rond af op drie decimalen.
 - De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -5 . Bereken exact de x -coördinaten van de bijbehorende raakpunten.



figuur 11.37



12

Examentraining

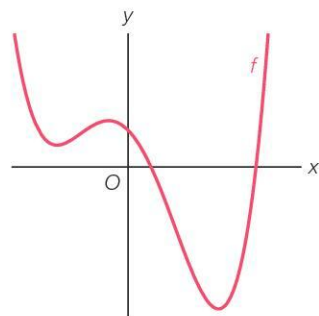
Waar moet je bij het examen op letten?

- Staat er niet algebraïsch of exact, dan mag je de GR gebruiken.
- Wordt bij een opgave gevraagd om iets aan te tonen, dan mag je dat resultaat in volgende vragen gebruiken.
- Schrijf bij vragen waar je niet helemaal uitkomt in elk geval op wat je wel weet. Dat kan punten opleveren.
- Schrijf tussenstappen op.
- Rond af op het gevraagde aantal decimalen. Anders kost je dat een punt.
- Ga steeds na of je antwoord hebt gegeven op de gestelde vraag.



12.1 Vergelijkingen en ongelijkheden

- 1 a** De grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x$ snijdt de x -as behalve in de oorsprong ook in de punten A en B .
Bereken exact de afstand tussen A en B .
- b** Los het stelsel $\begin{cases} a + 2b = 5 \\ \frac{1}{4}a + b = 4 \end{cases}$ exact op.
- c** Los exact op $\frac{5}{12x^4} = \frac{1}{6}$.
- d** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{9 - 4x}$ en $g(x) = -\frac{2}{3}x + 2\frac{5}{6}$.
- e** Los exact op $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 6x} = 0$.
- f** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x}$ en $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$.
Los exact op $f(x) - g(x) = \frac{1}{10}$.
- g** Los exact op $\sqrt{500 - \frac{5}{9}(x - 6)^2} = 0$.
- h** Bewijs dat de lijn $y = -2\frac{1}{2}x - 5$ precies één punt gemeenschappelijk heeft met de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x + 4} - 1\frac{1}{2}x + 1$.
- i** Met domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ zijn gegeven de functies $f(x) = \frac{5}{4}x + \frac{3}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{8}x + \frac{5}{x}$.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g .
- j** De lijn $y = \frac{1}{4}x - 5$ snijdt de grafiek van de functie $f(x) = (\frac{1}{4}x - 5)^3$ van links naar rechts in de punten A , B en C .
Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB .
- k** Los op $0,0045x(x + 50)^2 = 251$. Rond af op twee decimalen.
- l** Gegeven is de formule $D = \frac{3 + 0,6p}{(2 - p)^4}$ met $p > 2$.
Los op $D = 5\frac{2}{13}$. Rond af op vier decimalen.
- m** Gegeven is de functie $f(x) = 0,1x^4 - x^2 - x + 1$.
De grafiek van f zie je in figuur 12.1.
Bereken voor welke p de lijn $y = p$ de grafiek van f in twee punten snijdt. Rond af op twee decimalen.



figuur 12.1

- n** Gegeven is de formule $K = 15 \cdot \log(p - 3) + \frac{18}{p - 3} + \frac{6}{5(p - 3)^2}$ met $p > 6$.
Los op $K > 35$. Rond af op gehele.

Typen vergelijkingen

De volgende typen vergelijkingen moet je algebraïsch kunnen oplossen.

- eerstegraadsvergelijkingen
- tweedegraadsvergelijkingen
- sommige hogeregraadsvergelijkingen
- wortelvergelijkingen
- gebroken vergelijkingen

Verder ook nog

- exponentiële vergelijkingen
- logaritmische vergelijkingen
- goniometrische vergelijkingen.

Deze laatste drie typen komen in volgende paragrafen aan de orde.

Met het algebraïsch oplossen van een vergelijking wordt bedoeld dat je al schrijvende stap voor stap naar de oplossing toewerkt.

Bij het exact oplossen van een vergelijking ga je algebraïsch te werk en rond je niet af.

Eerstegraadsvergelijkingen

- 1 Werk haakjes en breuken weg.
- 2 Breng alle termen met x naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid.
- 3 Herleid beide leden.
- 4 Deel beide leden door het getal dat voor x staat.

Tweedegraadsvergelijkingen

$ax^2 + bx = 0$ Breng x buiten haakjes.

$ax^2 + c = 0$ Herleid tot de vorm $x^2 = \text{getal}$.

$ax^2 + bx + c = 0$ en het linkerlid is te ontbinden.
Ontbind het linkerlid.

$ax^2 + bx + c = 0$ en het linkerlid is niet te ontbinden.
Gebruik de abc -formule

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ met } D = b^2 - 4ac.$$

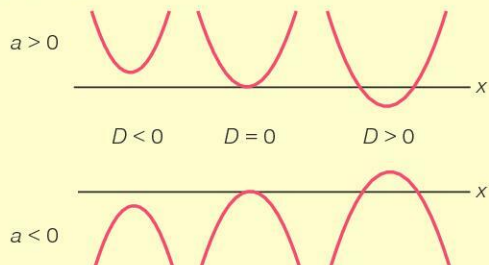
Aantal oplossingen van tweedegraadsvergelijkingen

Aan de discriminant $D = b^2 - 4ac$ is te zien hoeveel oplossingen de tweedegraadsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft.

voor $D < 0$ zijn er geen oplossingen

voor $D = 0$ is er één oplossing

voor $D > 0$ zijn er twee oplossingen



Algemene vormen van vergelijkingen

$A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$

$A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$

$A \cdot B = A \cdot C$ geeft $A = 0 \vee B = C$

$A \cdot B = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$

Bij $(2x - 3)(x^2 - 4) = 0$ gebruik je $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

Dus $2x - 3 = 0 \vee x^2 - 4 = 0$

$$2x = 3 \vee x^2 = 4$$

$$x = 1\frac{1}{2} \vee x = 2 \vee x = -2$$

Bij $(2x - 3)^2 = (x - 4)^2$ gebruik je $A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$.

Dus $2x - 3 = x - 4 \vee 2x - 3 = -x + 4$

$$x = -1 \vee 3x = 7$$

$$x = -1 \vee x = 2\frac{1}{3}$$

Bij $(2x - 3)^2 = (2x - 3)(x - 4)$ gebruik je $A \cdot B = A \cdot C$ geeft $A = 0 \vee B = C$.

Dus $2x - 3 = 0 \vee 2x - 3 = x - 4$

$$2x = 3 \vee x = -1$$

$$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -1$$

Bij $(2x - 3)(x - 4) = 2x - 3$ gebruik je $A \cdot B = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$.

Dus $2x - 3 = 0 \vee x - 4 = 1$

$$2x = 3 \vee x = 5$$

$$x = 1\frac{1}{2} \vee x = 5$$

Hogeregraadsvergelijkingen

$x^n = p$ met n geheel.

n oneven $x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p}$

n even en $p > 0$ $x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p} \vee x = -\sqrt[n]{p}$

n even en $p < 0$ $x^n = p$ heeft geen oplossingen

Bij $x^3 - x^2 - 2x = 0$ breng je x buiten haakjes.

Bij $x^4 - x^2 - 2 = 0$ gebruik je de substitutie $x^2 = u$.

Wortelvergelijkingen

- 1 isoleer de wortelvorm, dus zet de wortelvorm apart.
- 2 Kwadrateer het linker- en rechterlid en los de verkregen vergelijking op.
- 3 Controleer of de oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking.

Gebroken vergelijkingen

$$\frac{A}{B} = 0 \text{ geeft } A = 0$$

$$\frac{A}{B} = C \text{ geeft } A = B \cdot C$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ geeft } A \cdot D = B \cdot C$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{B} \text{ geeft } A = C$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{C} \text{ geeft } A = 0 \vee B = C$$

Stelsels vergelijkingen

Voor het oplossen van stelsels van twee lineaire vergelijkingen met twee variabelen ken je twee methoden.

Elimineren door optellen of aftrekken

$$\text{Het stelsel } \begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ x - 3y = 14 \end{cases} \begin{array}{l} \left| \begin{array}{r} 1 \\ 3 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{array}{r} 3x - 5y = 18 \\ 3x - 9y = 42 \end{array} \\ \hline 4y = -24 \\ y = -6 \end{array}$$

Invullen van $y = -6$ in $x - 3y = 14$ geeft $x + 18 = 14$, dus $x = -4$.

De oplossing is $(x, y) = (-4, -6)$.

Elimineren door substitutie

Bij het stelsel $\begin{cases} x = -3y + 2 \\ 2x - y = 11 \end{cases}$ vervang je in de onderste vergelijking x door $-3y + 2$.

Dat geeft $2(-3y + 2) - y = 11$

$$-6y + 4 - y = 11$$

$$-7y = 7$$

$$y = -1$$

Invullen van $y = -1$ in $x = -3y + 2$ geeft $x = 5$.

De oplossing is $(x, y) = (5, -1)$.

Ongelijkheden

Bij het algebraïsch oplossen van ongelijkheden los je de bijbehorende vergelijking algebraïsch op en lees je de oplossingen af uit een figuur.

Op het examen is deze figuur meestal gegeven.

Grafisch-numerieke methoden

Aan de vraagstelling is te zien of je een vergelijking algebraïsch op moet lossen of dat je anders te werk mag gaan. Staat er niet 'algebraïsch' of 'exact', dan mag je de speciale opties van de GR gebruiken om een vergelijking op te lossen.

Bij het grafisch-numeriek oplossen van een vergelijking ga je als volgt te werk.

- 1 Voer het linkerlid van de vergelijking in bij y_1 en het rechterlid bij y_2 .
- 2 Noteer de optie van de GR die je gebruikt.
- 3 Geef alle oplossingen in het gevraagde aantal decimalen of rond zelf verstandig af.

Ook de coördinaten van toppen van grafieken mag je soms grafisch-numeriek (dus zonder de afgeleide te gebruiken) berekenen. Je gebruikt dan de opties maximum en minimum.

Weet je de y -coördinaten van de toppen van de grafiek van een functie, dan kun je het bereik van de functie aflezen uit de grafiek.

Het bereik van een functie bestaat uit alle beelden.

Het domein van een functie bestaat uit alle originelen.

Onderzoeken, aantonen en bewijzen

Onderzoeken

Bij onderzoeken geef je een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.

Aantonen

Bij aantonen geef je een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.

Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

Het geven van enkele getallenvoorbeelden is niet voldoende.

Bewijzen

Bij bewijzen geef je een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.

Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

2 2016-I

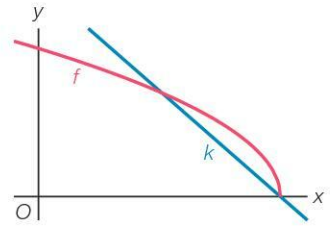
De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{-3x + 6}$.

Lijn k heeft vergelijking $y = -\frac{7}{4}x + \frac{7}{2}$.

In figuur 12.2 zie je de grafiek van f en lijn k .

Lijn k en de grafiek van f hebben twee punten gemeenschappelijk.

Bereken exact de x -coördinaten van deze twee punten.



figuur 12.2

3 2016-II

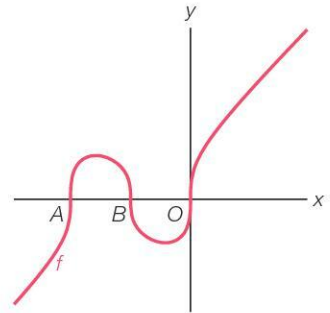
De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x}$.

De grafiek van f snijdt de x -as achtereenvolgens in de punten A , B en O . Zie figuur 12.3.

a Onderzoek of AB en BO even lang zijn.

Verder is gegeven de horizontale lijn l met vergelijking $y = p$. De grafiek van f snijdt l in drie punten.

b Bereken voor welke waarden van p dit het geval is.
Rond de getallen in je antwoord af op drie decimalen.



figuur 12.3

4 2016-II

Op het domein $\langle 0, \infty \rangle$ zijn de functies f en g gegeven

door $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x}$ en $g(x) = x - 1$. Voor steeds

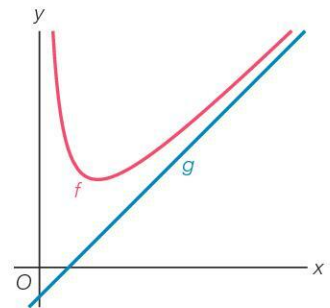
groter wordende waarden van x komen de grafieken van f en g steeds dicht bij elkaar. Zie figuur 12.4.

Voor bepaalde waarden van x geldt $f(x) - g(x) < \frac{1}{100}$.

a Bereken exact voor welke waarden van x dit het geval is.

Ondanks dat de grafieken van f en g voor steeds groter wordende waarden van x steeds dicht bij elkaar komen, snijden ze elkaar niet.

b Toon op exacte wijze aan dat de grafieken van f en g elkaar niet snijden.

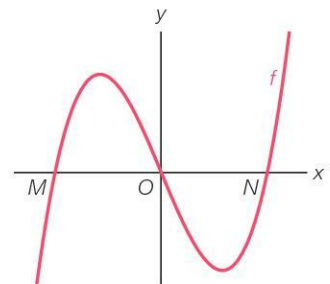


figuur 12.4

5 2017-II

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x$. De grafiek van f snijdt de x -as achtereenvolgens in M , de oorsprong $O(0, 0)$ en N . Zie figuur 12.5.

Bereken exact de afstand tussen M en N .



figuur 12.5

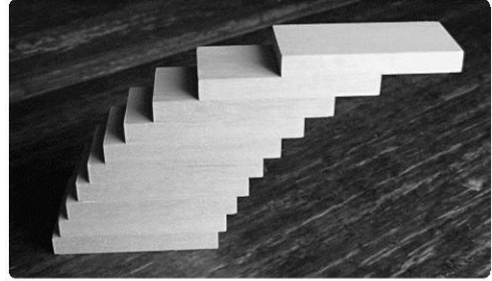
6 2018-II

Op het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ zijn de functies f en g gegeven door $f(x) = x + \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$.

Op het gegeven domein hebben de grafieken van f en g één snijpunt. Bereken exact de x -coördinaat van dit snijpunt.

7 2017-II

Door gelijke rechthoekige tegels ‘netjes’ op elkaar te stapelen kan een toren gebouwd worden die naar één kant overhelt. Zie de foto.

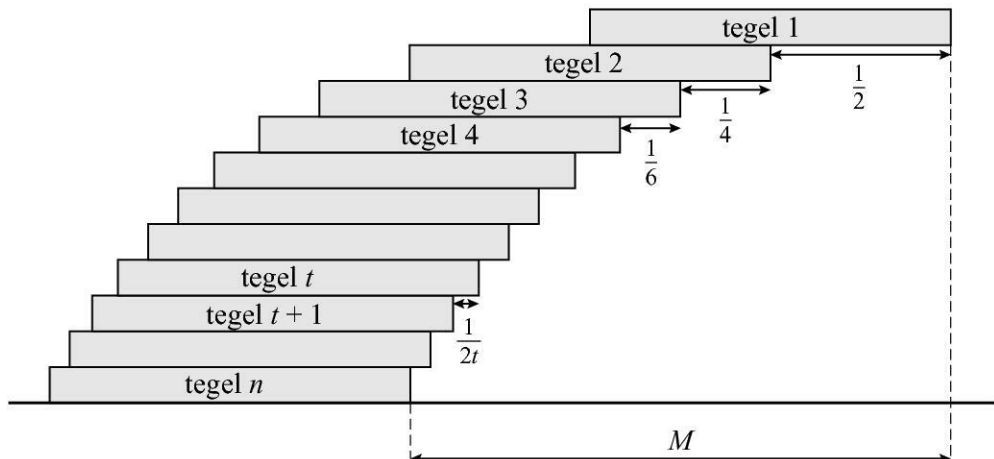


Het uitsteken van de gestapelde tegels vanaf de onderste tegel wordt de *overhang* genoemd. De overhang is maximaal als de stapel tegels nog net in evenwicht is, dus net niet omvalt.

De maximale overhang M bij een stapel van n tegels ontstaat als volgt:

- laat tegel 1 (de bovenste tegel) een halve tegellengte uitsteken ten opzichte van tegel 2 (de eronder liggende tegel);
- laat tegel 2 een kwart uitsteken ten opzichte van tegel 3;
- laat tegel 3 een zesde uitsteken ten opzichte van tegel 4;
- enzovoort.

Algemeen geldt dan: tegel t steekt $\frac{1}{2t}$ -deel van een tegellengte uit ten opzichte van tegel $t + 1$. Zie figuur 12.6.



figuur 12.6

Bij een bepaald aantal tegels is de maximale overhang meer dan één tegellengte.

- Bereken vanaf welk aantal tegels dit het geval is.

In de rest van deze opgave nemen we tegels van 30 cm lang en 15 cm breed met een dikte van 3 cm. Deze tegels stapelen we weer ‘netjes’ op elkaar, zoals op de foto en in figuur 12.6.

Bij deze tegels kan de maximale overhang M benaderd worden met de formule $M = 34,54 \cdot \log(n - 1) + 8,658 + \frac{15}{2(n - 1)} + \frac{5}{4(n - 1)^2}$ (1)

Hierin is M de maximale overhang in cm en is n het totale aantal tegels in de stapel, met $n \geq 2$.

Wanneer er voldoende tegels beschikbaar zijn, kan in theorie de maximale overhang zo groot worden gemaakt als gewenst.

Met de genoemde 3 cm dikke tegels wordt een overhang van 1 meter gemaakt.

- b** Bereken hoeveel cm hoog de stapel tegels in dit geval minstens moet worden volgens formule (1).

Voor grote waarden van n kan M benaderd worden met de formule $M = 34,54 \cdot \log(n - 1) + 8,658$ (2)

Hierin is M weer de maximale overhang in cm en is n weer het totaal aantal tegels in de stapel.

- c** Bereken voor welke waarde van n de benadering van M met formule (2) voor het eerst minder dan 0,1 centimeter afwijkt van de benadering met formule (1).

8 2017-II

De dwergplaneet Pluto beweegt om de zon. De afstand van Pluto tot de zon is niet altijd even groot.

De plaats waar Pluto zich het dichtst bij de zon bevindt wordt het *perihelium* genoemd, de plaats waar Pluto zich het verst van de zon af bevindt het *aphelium*.

De baan van Pluto wordt in een assenstelsel weergegeven met de zon in de oorsprong en het perihelium en het aphelium op de x -as.

In figuur 12.7 is een mogelijke positie van Pluto (P) weergegeven.

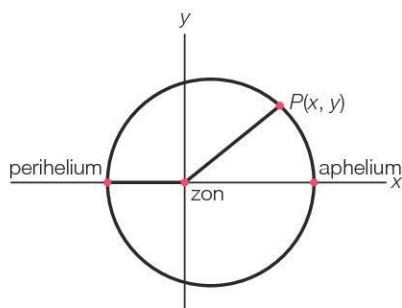
Bij de bovenste helft van deze baan in het assenstelsel hoort (bij benadering) de formule

$$y = \sqrt{1500 - \frac{15}{16}(x - 10)^2}.$$

Hierbij zijn x en y in astronomische eenheden AE (1 AE = 150 miljoen km).

Uit de formule volgt dat de afstand van Pluto tot de zon in het perihelium 30 AE is en in het aphelium 50 AE.

Bewijs dit.



figuur 12.7

9 2018-II

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{3}{16x^4}$.

De horizontale lijn met vergelijking $y = \frac{1}{32}$ snijdt de grafiek van f in twee punten.

Bereken exact de afstand tussen deze twee punten.

10 2019-II

Om tegen de wind in te fietsen, moet je flink hard trappen.

In deze opgave gaan we ervan uit dat de snelheid van een fietser constant is en dat de snelheid van de tegenwind constant is.

Als je op een vlakke weg tegen de wind in fietst, moet je vermogen leveren. Je kunt dit vermogen berekenen met de formule

$$P_{\text{vlak}} = 0,00386 \cdot v \cdot (v + v_{\text{wind}})^2.$$

Hierin is P_{vlak} het vermogen in watt (W), v de snelheid van de fietser in km/uur en v_{wind} de snelheid van de tegenwind in km/uur.

Zowel v als v_{wind} zijn positief.

Elk jaar wordt, als het hard genoeg waait, het NK (Nederlands Kampioenschap) Tegenwindfietsen georganiseerd. Hierbij fietsen de deelnemers 8,5 km tegen de wind in.



In 2016 werd het NK Tegenwindfietsen gewonnen door Teun Sweere in een tijd van 22 minuten en 30 seconden bij een tegenwind met een snelheid van 80 km/uur.

Stel dat Sweere bij een toekomstige deelname aan het NK Tegenwindfietsen een tegenwind heeft met een snelheid die 5% groter is dan in 2016, maar dat hij met dezelfde snelheid wil fietsen als in 2016. Hij zal dan een groter vermogen moeten leveren dan tijdens de wedstrijd in 2016.

- Bereken hoeveel procent méér vermogen hij dan zou moeten leveren. Geef je eindantwoord als een heel getal.

Wanneer je bergop fietst, moet je ook flink wat vermogen leveren. We gaan er in de rest van de opgave vanuit dat er bij bergop fietsen geen wind is. Ook nemen we aan dat de berg overall even steil is.



Het vermogen dat een fietser moet leveren bij bergop fietsen, kun je dan berekenen met de formule $P_{\text{bergop}} = 0,0273 \cdot m \cdot h \cdot v$.

Hierin is P_{bergop} het vermogen in watt (W), m de totale massa van de fietser en zijn fiets in kg, h het hellingspercentage van de weg en v de snelheid van de fietser in km/uur.

In Zuid-Limburg ligt de Keutenberg. De weg naar de top is 1,2 km lang en heeft een hellingspercentage van 5,9%. Ibrahim is een amateurwielrenner. Hij legt de weg naar de top van de Keutenberg af met een vermogen van 210 W. De massa van Ibrahim en zijn fiets is in totaal 72 kg.

- b** Bereken hoe lang Ibrahim over de beklimming doet. Geef je eindantwoord in gehele minuten.

De Alpe d'Huez is een berg in Frankrijk die zeer bekend is van de Tour de France. De weg naar de top heeft een lengte van 13,4 km en een hellingspercentage van 8,4%.

Tom wil de Alpe d'Huez met zijn racefiets beklimmen. Hij heeft zich als doel gesteld om dat met een snelheid van 19 km/uur te gaan doen.

Als onderdeel van zijn training neemt hij deel aan het NK Tegenwindfietsen, waarbij de wind een snelheid heeft van 70 km/uur. Hij wil daarbij evenveel vermogen leveren als hij bij de rit op de Alpe d'Huez moet leveren om zijn doel te halen. Tom en zijn racefiets hebben samen een massa van 78 kg.

- c** Bereken de snelheid waarmee Tom moet fietsen bij het NK Tegenwindfietsen in km/uur. Geef je eindantwoord in één decimaal.

11 2018-I

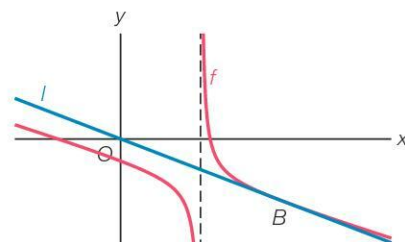
De functie f is gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{2x-3} - x - 1.$$

De lijn l met vergelijking $y = -\frac{11}{9}x$ raakt de rechtertak van de grafiek van f in het punt B . Zie figuur 12.8.

Lijn l snijdt de linkertak van de grafiek van f niet.

Bewijs dit.



figuur 12.8

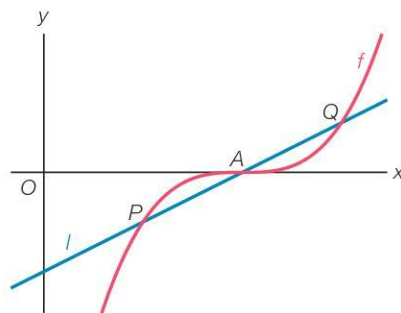
12 2019-I

De functie f is gegeven door $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^3$.

De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A .

De lijn l met vergelijking $y = \frac{1}{2}x - 2$ snijdt de grafiek van f behalve in A ook in de punten P en Q . Zie figuur 12.9.

Bereken de lengte van PQ . Geef je eindantwoord in twee decimalen.



figuur 12.9

13 2019-II

Er wordt veel onderzoek gedaan naar de *viscositeit* van vloeistoffen.

De viscositeit van een vloeistof is een getal dat aangeeft hoe stroperig die vloeistof is: hoe groter de viscositeit, hoe stroperiger die vloeistof.

Suiker kun je in water oplossen. De concentratie suiker bepaalt de viscositeit van de vloeistof die zo ontstaat. Aan het begin van de twintigste eeuw is het volgende theoretische verband afgeleid tussen de concentratie suiker en de

$$\text{viscositeit: } V = \frac{1 + 0,5C}{(1 - C)^4}.$$

Hierin is V de viscositeit en C de concentratie suiker.

Hierbij wordt met een concentratie van bijvoorbeeld $C = 0,3$ bedoeld dat het volume van de suiker 30% van het totale volume van de vloeistof is.

Tessa heeft een glas water gekregen waarin suiker is opgelost.

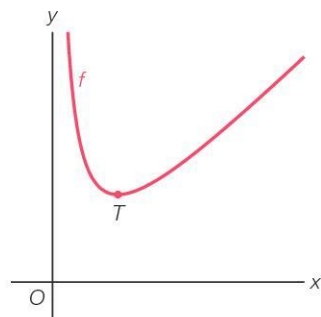
De concentratie suiker in het water is 0,17. Vervolgens voegt ze nog meer suiker toe. Na deze toevoeging blijkt de viscositeit verdubbeld te zijn.

Bereken de concentratie suiker in het water na deze toevoeging. Geef je eindantwoord in twee decimalen.



12.2 Werken met formules

- 14** a Stel een vergelijking op van de lijn k door de punten $A(\frac{1}{3}\pi, 3)$ en $B(\frac{5}{3}\pi, -5)$.
- b Gegeven is de parabool $p: y = -\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{2}x$. De parabool snijdt de x -as in de oorsprong en het punt A . Het punt T is de top van p . De lijn k gaat door A en T .
Stel langs algebraïsche weg de formule op van k .
- c De parabool p heeft de top $T(3, 1)$ en gaat door het punt $A(5, 4)$.
Stel een formule op van p .
- d De parabool p gaat door de punten $A(-6,5; 3)$ en $B(6,5; 3)$ en snijdt de y -as in het punt $C(0; 1,31)$.
Stel een formule op van p .
- e De parabool $y = ax^2 + bx$ snijdt de x -as in de oorsprong en in het punt $A(125, 0)$. De y -coördinaat van de top is $44,92$.
Bereken a en b . Rond af op vier decimalen.
- f De grafiek van de functie $f(x) = (1\frac{1}{2}x - 4)^3$ ontstaat uit de grafiek van de functie $g(x) = x^3$ door twee transformaties na elkaar toe te passen.
Geef aan welke twee transformaties dit kunnen zijn en in welke volgorde ze moeten worden toegepast.
- g Het punt $T(3, 4)$ is de top van de grafiek van de functie f in figuur 12.10.
De grafiek van f wordt ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd met een factor a . Hierdoor ontstaat de grafiek van een functie g . Het punt P is de top van de grafiek van g . Er geldt $OP = 7$.
Bereken exact de mogelijke waarden van a .



figuur 12.10

- h De formules $A = 0,9pq - 8,1q^2$ en $b = 1,8pq$ zijn te combineren tot de formule $A = 0,5b - \frac{2,5}{p^2} \cdot b^2$.
Toon dit op algebraïsche wijze aan.
- i Gegeven is dat R evenredig is met $Q^{4,15}$.
Voor $Q = 85$ is R groter dan voor $Q = 15$.
Bereken hoeveel keer zo groot. Rond af op gehele.
- j Er bestaat een evenredig verband tussen b en $\sqrt{d}$.
Voor $d = 342$ is $b = 370$.
Bereken d voor $b = 500$. Rond af op gehele.

Formule van lijn

Bij het opstellen van de formule van de lijn door de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ ga je als volgt te werk.

- 1 Stel $y = ax + b$ en bereken $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- 2 Bereken b door de coördinaten van A of B te gebruiken.

Formules van parabool

- $y = a(x - p)^2 + q$ top (p, q)
- $y = a(x - d)(x - e)$ snijpunten x -as $(d, 0)$ en $(e, 0)$
- $y = ax^2 + bx + c$ $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$ en snijpunt y -as $(0, c)$

Transformaties

Je kent de volgende transformaties.

- Vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met a .
Vermenigvuldig in de formule de functiewaarde met a .
- Vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met b .
Vervang in de formule x door $\frac{1}{b} \cdot x$.
- Translatie $(c, 0)$.
Vervang in de formule x door $x - c$.
- Translatie $(0, d)$.
Tel in de formule d op bij de functiewaarde.

De grafiek van een gebroken lineaire functie $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ heeft twee asymptoten.

- Verticale asymptoot. Stel de noemer gelijk aan 0.
- Horizontale asymptoot. Beredeneer wat de functiewaarde wordt voor grote x .

Formules combineren

Je kunt de formules $A = 2t^2 + 5$ en $t = 3p - 1$ combineren tot de vorm $A = ap^2 + bp + c$.

Je krijgt $A = 2(3p - 1)^2 + 5 = 2(9p^2 - 6p + 1) + 5 = 18p^2 - 12p + 7$.

Ook de formules $N = 20\sqrt{9 - \frac{p}{12}}$ en $p = 60 - 8t$ zijn te combineren.

Je krijgt $N = 20\sqrt{9 - \frac{60 - 8t}{12}} = 20\sqrt{9 - 5 + \frac{2}{3}t} = 20\sqrt{\frac{2}{3}t + 4}$.

Formules omwerken

Bij het omwerken van formules kun je met de volgende situaties te maken krijgen.

- Een gebroken formule omwerken tot een andere gebroken formule.

Bijvoorbeeld $A = \frac{2B}{B-1}$ omwerken tot $B = \frac{A}{A-2}$.

- Vrijmaken van variabelen bij wortelformules.

Bijvoorbeeld $y = \sqrt{2x-1}$ omwerken tot $x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$.

- Vrijmaken van variabelen bij formules met machten.

Bijvoorbeeld $P = 50(2 + 0,3q)^{1,25}$ omwerken tot $q = -6,67 + 0,15P^{0,8}$.

Evenredig en omgekeerd evenredig

y is (recht) evenredig met x betekent dat er een getal a bestaat waarvoor $y = ax$. Het getal a heet de evenredigheidsconstante.

De tabel die bij een evenredigheidsverband hoort, is een verhoudingstabel.

y is evenredig met x^p betekent dat er een getal a bestaat waarvoor $y = ax^p$.

Gegeven is dat in de volgende tabel M evenredig is met een macht van N .

N	15	20	25	40
M	4,3	13,6	33,2	217,6

Om de formule van M op te stellen ga je uit van $M = aN^p$.

Invullen van $N = 15$ en $M = 4,3$ geeft $a \cdot 15^p = 4,3$, dus $a = \frac{4,3}{15^p}$.

Invullen van $N = 40$ en $M = 217,6$ geeft $a \cdot 40^p = 217,6$, dus $a = \frac{217,6}{40^p}$.

Invoeren van $y_1 = \frac{4,3}{15^x}$ en $y_2 = \frac{217,6}{40^x}$ en de optie snijpunt geeft

$x = 4,00\dots$ en $y = 8,47\dots \cdot 10^{-5}$.

Dus $p \approx 4$ en $a \approx 8,5 \cdot 10^{-5}$ en de formule is $M = 8,5 \cdot 10^{-5} \cdot N^4$.

y is omgekeerd evenredig met x betekent dat er een getal a bestaat

waarvoor $y = \frac{a}{x}$. Dit kun je ook schrijven als $xy = a$, dus het product van x en y is de evenredigheidsconstante.

De grafiek van $y = \frac{a}{x}$ is een hyperbool.

y is omgekeerd evenredig met x^p betekent dat er een getal a bestaat

waarvoor $y = \frac{a}{x^p}$.

15 2016-I

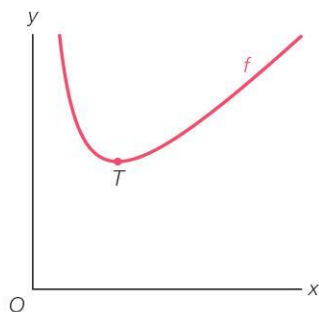
Voor volwassen karpers met lengte L , waarbij $10 \leq L \leq 94$, is G evenredig met $L^{3,13}$. Hierbij is L in cm en G het gewicht in gram. Bereken hoeveel keer zo zwaar een volwassen karper van 94 cm is in vergelijking met een volwassen karper van 10 cm. Rond je antwoord af op honderdtallen.

16 2016-II

Het punt $T(2, 3)$ is de top van de grafiek van de functie f in figuur 12.11.

De grafiek van f wordt ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd met een factor a . Hierdoor ontstaat de grafiek van een functie h . Het punt P is de top van de grafiek van h . Er geldt $OP = 5$.

Bereken exact de mogelijke waarden van a .



figuur 12.11

17 2016-II

De lijn k gaat door de punten $A(\frac{1}{4}\pi, 2)$ en $B(\frac{9}{4}\pi, -2)$.

Een vergelijking voor k is $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{5}{2}$.

Toon aan dat deze vergelijking voor k met behulp van de coördinaten van A en B opgesteld kan worden.

18 2016-II

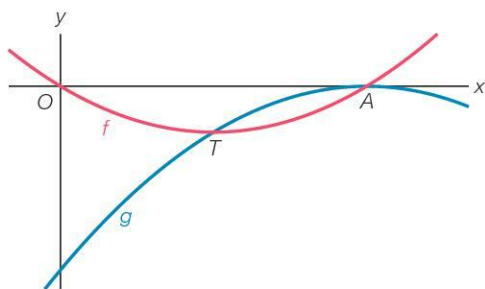
De functie f is gegeven door $f(x) = x^2 - 6x$.

De grafiek van f snijdt de x -as in de oorsprong en in het punt A .

De grafiek van de functie g raakt de x -as in A en gaat door de top T van de grafiek van f . Zie figuur 12.12.

De grafiek van g is een parabool.

Bepaal op exacte wijze een functievoorschrift voor g .



figuur 12.12

19 2017-I

Door de formule $t = \frac{d}{0,707 \cdot b}$ te substitueren in de formule

$h = 0,707 \cdot b \cdot t - 4,91 \cdot t^2$ kan worden aangetoond dat (bij benadering)

geldt $h = d - \frac{9,8}{b^2} \cdot d^2$.

Toon dit op algebraïsche wijze aan.

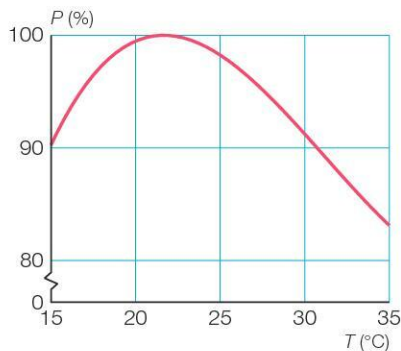
20 2018-II

Werken op een hete zomerdag kost meer moeite dan op een dag met een temperatuur van een graad of twintig.

In deze opgave kijken we hoe de omgevingstemperatuur invloed heeft op de *productiviteit*. Met dit begrip bedoelen we de hoeveelheid werk die een mens gemiddeld verzet.

Op de Helsinki University of Technology is hier onderzoek naar gedaan.

De resultaten van het onderzoek zijn verwerkt in de grafiek in figuur 12.13. De productiviteit P op de verticale as geeft aan hoe hoog de productiviteit is ten opzichte van de maximale productiviteit. Zo zie je dat bij een temperatuur van 15°C de productiviteit 90% is van wat maximaal mogelijk is.



figuur 12.13

De grafiek in de figuur kan worden benaderd met de formule

$$P = 0,00623T^3 - 0,58274T^2 + 16,47524T - 46,76666.$$

Hierbij is P de productiviteit in procenten ten opzichte van de maximale productiviteit en T de temperatuur in graden Celsius ($^\circ\text{C}$). De formule geldt voor $15 \leq T \leq 35$.

De temperatuur waarbij de productiviteit volgens de formule maximaal is, noemt men de *ideale temperatuur*.

Iemand vraagt zich af door welke verandering van de temperatuur de productiviteit het meest afneemt:

- twee graden daling ten opzichte van de ideale temperatuur
óf

- twee graden stijging ten opzichte van de ideale temperatuur.

a Onderzoek, zonder gebruik te maken van de figuur, door welke van deze twee veranderingen de productiviteit het meest afneemt.

Voor temperaturen vanaf 30°C tot en met 35°C kan P goed benaderd worden door een formule van de vorm $P_{\text{benaderd}} = a \cdot T + b$.

Hierbij kunnen a en b zo gekozen worden dat P_{benaderd} voor $T = 30$ en $T = 35$ dezelfde uitkomsten geeft als de formule voor P .

b Bereken deze waarden van a en b . Rond in je eindantwoord a af op drie decimalen en b op één decimaal.

21 2018-I

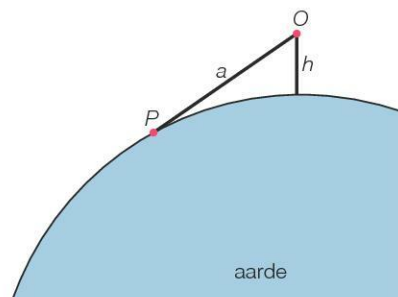
Als men vanaf bijvoorbeeld een hoog gebouw of een berg vrij zicht heeft tot aan de horizon, is de horizon verder weg dan wanneer er vanaf de grond naar de horizon gekeken wordt.

Het kijken naar de horizon gebeurt vanuit het oog O in een rechte lijn naar een punt P op de horizon. De hoogte waarop het oog zich bevindt noemen we de *kijkhoogte*.

De afstand OP tot aan de horizon noemen we de *horizonafstand*.

De horizonafstand a in meters hangt af van de kijkhoogte h in meters boven de grond. Zie figuur 12.14.

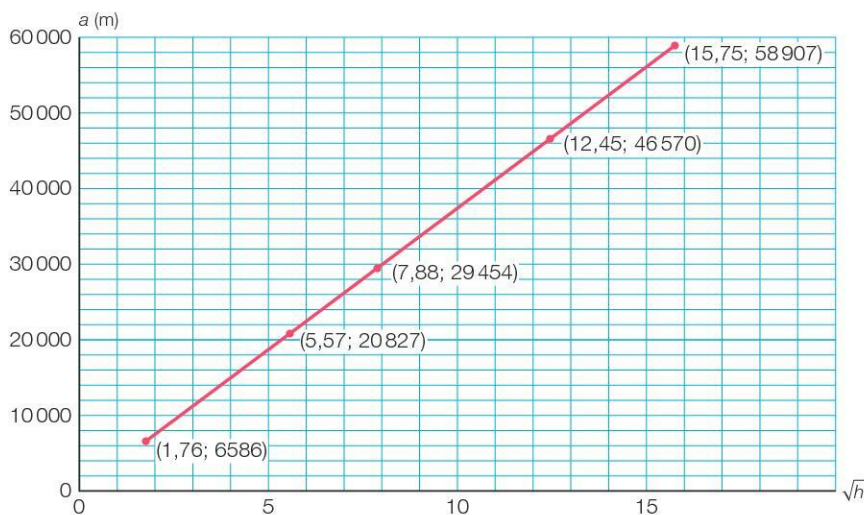
Hoe groter de kijkhoogte, hoe groter de horizonafstand.



figuur 12.14

De horizonafstand a is bij benadering evenredig met $\sqrt{h}$.

In figuur 12.15 is dit evenredige verband tussen a en $\sqrt{h}$ door middel van een rechte lijn weergegeven. Bovendien zijn van een aantal punten op deze lijn de coördinaten gegeven.



figuur 12.15

- a Bepaal met behulp van figuur 12.15 welke kijkhoogte hoort bij een horizonafstand van 40 km. Geef je eindantwoord in hele meters nauwkeurig.

Bij benadering geldt $a = 3741 \sqrt{h}$.

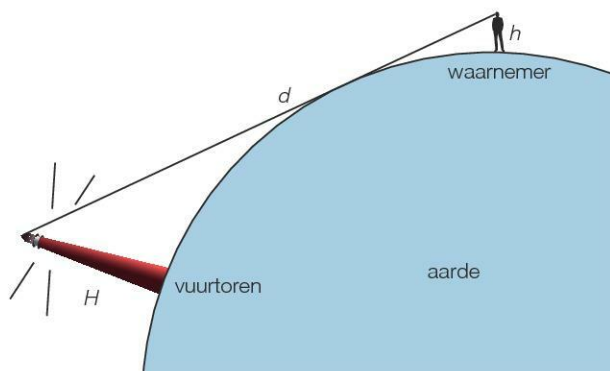
Hierin is a weer de horizonafstand in m en h weer de kijkhoogte in m. De horizonafstand kan ook in kilometers uitgedrukt worden. Het verband tussen de horizonafstand k in kilometers en h kan worden beschreven met een formule van de vorm $k = \sqrt{c \cdot h}$.

- b** Bereken algebraïsch de waarde van c . Geef je eindantwoord in helen nauwkeurig.

Het licht van de Lange Jaap, een vuurtoren bij Den Helder, reikt 30 zeemijl ver. Een zeemijl is 1852 m.

De lamp van de Lange Jaap bevindt zich op een hoogte van 57 m. Vanaf een kijkhoogte van 2 m is het licht van de Lange Jaap op een afstand van 30 zeemijl niet (rechtstreeks) te zien, omdat de vuurtoren zich dan achter de horizon bevindt.

De maximale afstand d waarop het licht van een vuurtoren een waarnemer (rechtstreeks) kan bereiken is afhankelijk van de hoogte H waarop de lamp van een vuurtoren zich bevindt, en van de kijkhoogte h van de waarnemer. Zie figuur 12.16.



figuur 12.16

Bij benadering geldt $d = 3,74 \cdot (\sqrt{H} + \sqrt{h})$.

Hierin is d de maximale afstand in km waarop het licht van een vuurtoren een waarnemer (rechtstreeks) kan bereiken, H de hoogte van het licht van de vuurtoren in m en h nog steeds de kijkhoogte in m. Wanneer het licht van de Lange Jaap op een afstand van 30 zeemijl vanaf een kijkhoogte van 2 m wel (rechtstreeks) zichtbaar zou zijn, zou de lamp zich een stuk hoger moeten bevinden.

- c** Bereken hoeveel keer zo hoog de lamp zich dan minstens zou moeten bevinden. Geef je eindantwoord in één decimaal nauwkeurig.

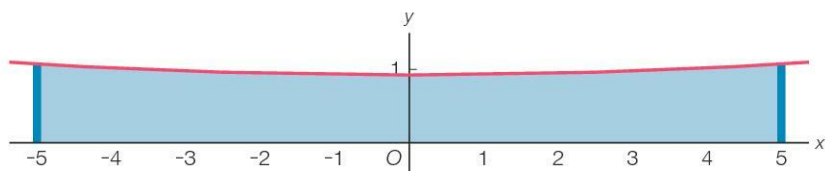
22 2019-I

Bij tennis is het net aan de zijkanten hoger dan in het midden. Zie de foto.

De bovenrand van het net hangt aan de zijkanten op een hoogte van 1,07 meter en in het midden op een hoogte van 0,91 meter.

Het net is 10,06 meter breed.

We plaatsen dit net in een assenstelsel met het midden van het net op de y -as en de onderkant van het net op de x -as. Zie figuur 12.17.



figuur 12.17

De hoogte y van een willekeurig punt op de bovenrand van het net is te benaderen door een parabool met een formule van de vorm $y = px^2 + q$ met $-5,03 \leq x \leq 5,03$. Hierbij zijn x en y in meters.

Bereken de waarden van p en q die uit de gegevens volgen. Geef p in drie decimalen en q in twee decimalen.

23 2019-I

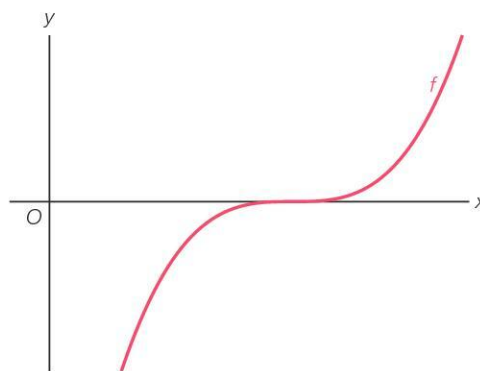
De functie f is gegeven door

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3. \text{ Zie figuur 12.18.}$$

De functie g is gegeven door $g(x) = x^3$.

De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van g door twee transformaties na elkaar toe te passen.

Geef aan welke twee transformaties dit kunnen zijn *en* in welke volgorde ze moeten worden toegepast.



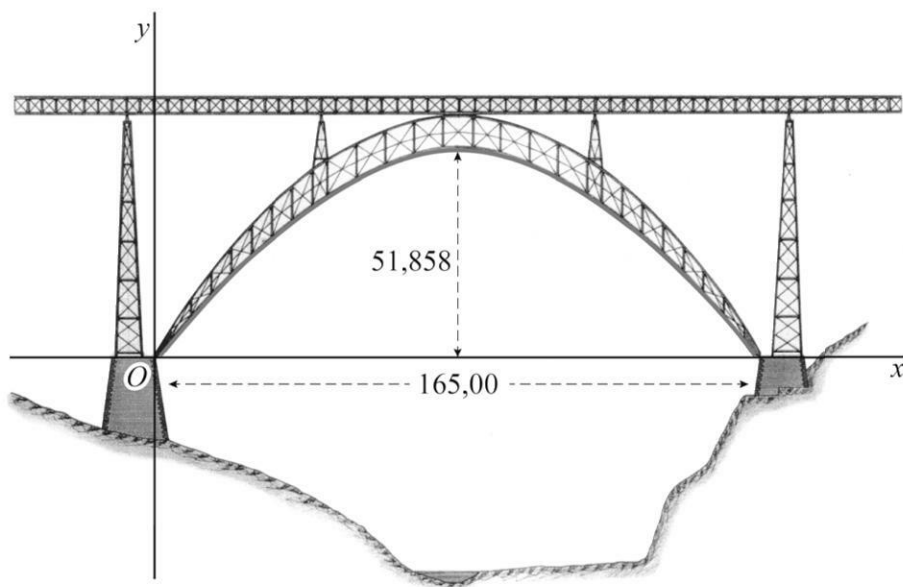
figuur 12.18

24 2019-II

Het Viaduc de Garabit is een spoorbrug die tussen 1880 en 1884 over de rivier de Truyère in Frankrijk is gebouwd. Zie de foto.



De onderste boog is bij benadering een deel van een parabool. We plaatsen de parabool in een assenstelsel, zodanig dat het beginpunt van de boog zich in de oorsprong bevindt. Zie figuur 12.19. Verder is de afstand tussen beginpunt en eindpunt van de boog 165,00 m en bevindt de top van de onderste boog zich 51,858 m boven de x -as.

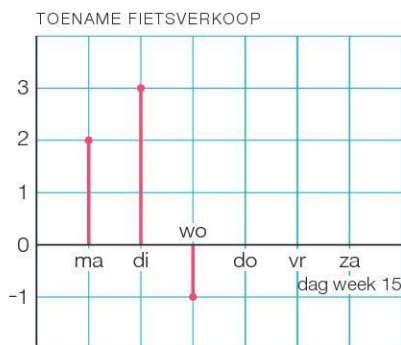


figuur 12.19

De parabool is te beschrijven met een formule van de vorm $y = ax^2 + bx$. Bereken algebraïsch de waarden van a en b . Geef je eindantwoorden in vier decimalen.

12.3 Differentiaalrekening

- 25 a** Bij fietshandel Jansma zijn in week 14 in totaal 25 fietsen verkocht, waarvan 3 op zaterdag (de winkel is op zondag gesloten). In het toenamediagram in figuur 12.20 zijn de gegevens van de eerste helft van week 15 verwerkt. Je ziet dat er op maandag twee fietsen meer zijn verkocht dan op de zaterdag ervoor. In week 15 werden in totaal 32 fietsen verkocht.



figuur 12.20

- Hoeveel fietsen zijn er in de tweede helft van week 15 verkocht?
- b** Gegeven is de functie $f(x) = (x+2)(x^2 - 6x + 12)$.
De grafiek van f heeft twee toppen.
Bereken exact de x -coördinaten van deze toppen.
- c** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x} + \frac{3}{x}$.
Bereken exact de x -coördinaat van de top van de grafiek van f .
- d** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{5}{4x+6}$.
De lijn l raakt de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek met de y -as.
Stel langs algebraïsche weg een vergelijking op van l .
- e** Gegeven is de functie $f(x) = -x^3 + x^2 + 2$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$.
Bereken exact de afstand van de oorsprong tot k .
- f** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt[3]{2x} - 10$.
Er zijn twee lijnen met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{6}$ die de grafiek van f raken.
Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.
- g** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x}$ met domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
De lijn k met richtingscoëfficiënt $\frac{2}{5}$ raakt de grafiek van f .
Bewijs dat k door de oorsprong gaat.
- h** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{10}{2x-5} + 2$.
De lijn k raakt de grafiek van f in de oorsprong.
De lijn l staat loodrecht op k , gaat door de oorsprong en snijdt de grafiek van f ook nog in het punt A .
Bereken exact de coördinaten van A .

Toenamedigrammen

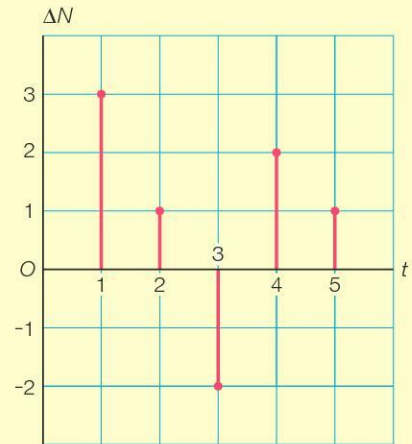
In een toenamediagram worden de veranderingen met staafjes aangegeven.

Weet je dat op $t = 0$ geldt dat $N = 4$, dan kun je met het toenamediagram in figuur 12.21 de waarde van N berekenen op $t = 5$.

Je krijgt $N = 4 + 3 + 1 - 2 + 2 + 1 = 9$.

Weet je dat $N = 15$ op $t = 4$, dan is N op $t = 0$ te berekenen.

Je krijgt $N = 15 - 2 + 2 - 1 - 3 = 11$.

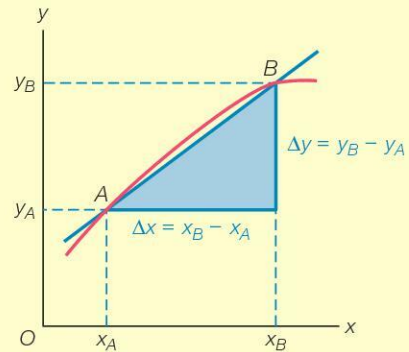


figuur 12.21

Het differentiequotiënt

Het differentiequotiënt van y op het interval $[x_A, x_B]$ is

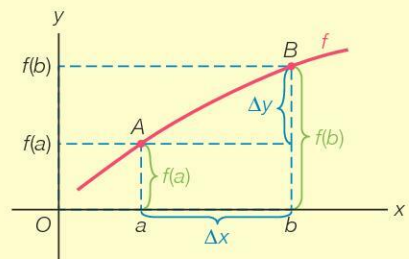
- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (helling) van de lijn AB
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



figuur 12.22

Het differentiequotiënt van $f(x)$ op het interval $[a, b]$ is gelijk aan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Neem je het interval $[a, b]$ heel klein, bijvoorbeeld $[a, a + \Delta x]$ met $\Delta x = 0,01$ of $\Delta x = 0,001$, dan geeft het differentiequotiënt een benadering van de helling van de grafiek in het punt A met $x_A = a$.



figuur 12.23

Bij een tijd-afstandformule benader je de snelheid op het tijdstip $t = a$ met het differentiequotiënt op het interval $[a, a + \Delta t]$ met bijvoorbeeld $\Delta t = 0,01$ of $\Delta t = 0,001$.

Differentiëren, hellingen en raaklijnen

Je kent de volgende regels voor het differentiëren.

$f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ voor elke n van $\mathbb{R}$.

$f(x) = c \cdot (ax + b)^n$ geeft $f'(x) = c \cdot n(ax + b)^{n-1} \cdot a$ voor elke n van $\mathbb{R}$.

De afgeleide van de functie f voor $x = x_A$, dus $f'(x_A)$, is

- de helling van de grafiek in A
- de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$
- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A .

Als de lijn k de grafiek van de functie f in het punt A raakt, dan gebruik je $rc_k = f'(x_A)$ bij het algebraïsch opstellen van de formule van k .

Als de lijn l met richtingscoëfficiënt a de grafiek van de functie f raakt, dan kun je de x -coördinaat van het raakpunt berekenen door de vergelijking $f'(x) = a$ op te lossen.

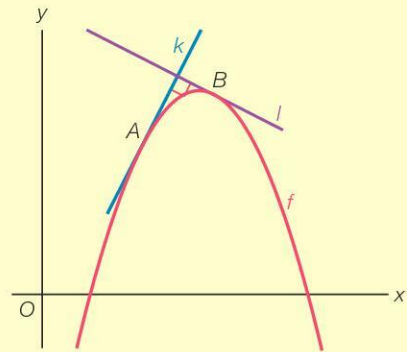
In figuur 12.24 is de grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 10$ getekend. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt $A(4, 6)$. De lijn l staat loodrecht op k en raakt de grafiek van f in het punt B . Om de coördinaten van B te berekenen gebruik je dat $rc_k \cdot rc_l = -1$.

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 10$ geeft $f'(x) = -x + 6$, dus $rc_k = f'(4) = 2$.

$k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$ en dit geeft $rc_l = -\frac{1}{2}$.

Oplossen van de vergelijking $f'(x) = -\frac{1}{2}$ geeft $-x + 6 = -\frac{1}{2}$, dus $x = 6\frac{1}{2}$.

Het punt B is $B(6\frac{1}{2}, 7\frac{7}{8})$.



figuur 12.24

Extreme waarden en optimaliseren

Bij het algebraïsch berekenen van extreme waarden bereken je de afgeleide en los je de vergelijking ‘afgeleide = 0’ algebraïsch op.

Beoordeel aan de hand van een schets van de grafiek of je met een minimum of een maximum hebt te maken. Op het examen is de grafiek vaak gegeven. Als dit niet het geval is, maak je zelf een schets. Gebruik daarbij de GR.

Bij optimaliseringsproblemen gaat het om het vinden van een maximum of een minimum, soms in praktische situaties.

In figuur 12.25 zijn de lijn $k: y = \frac{1}{2}x + 4$ en de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{3x}$ getekend. De lijn $x = p$ snijdt k in het punt A en de grafiek van f in het punt B .

De lengte L van het lijnstuk AB uitgedrukt in p is $L = \frac{1}{2}p + 4 - \sqrt{3p}$.

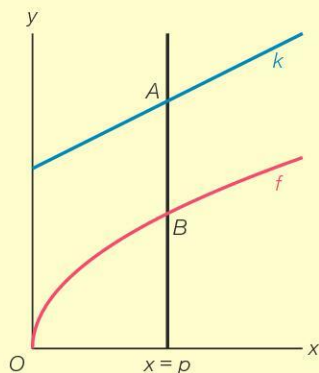
Om langs algebraïsche weg de minimale lengte van L te berekenen, stel je de afgeleide $\frac{dL}{dp}$ gelijk aan nul.

Je krijgt $L = \frac{1}{2}p + 4 - \sqrt{3p} = \frac{1}{2}p + 4 - (3p)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(3p)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3p}}.$$

Oplossen van de vergelijking $\frac{dL}{dp} = 0$ geeft $p = 3$.

De minimale lengte is $L(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 + 4 - \sqrt{3 \cdot 3} = 2\frac{1}{2}$.



figuur 12.25

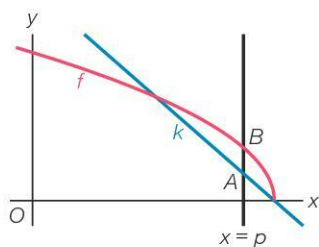
26 2016-I

Gegeven zijn de functie $f(x) = \sqrt{-3x + 6}$ en de lijn $k: y = -\frac{7}{4}x + \frac{7}{2}$.

De verticale lijn met vergelijking $x = p$ snijdt k in punt A en de grafiek van f in punt B . De y -coördinaat van B is groter dan de y -coördinaat van A . Zie figuur 12.26.

Er is een waarde van p waarvoor de afstand tussen A en B maximaal is.

Bereken met behulp van differentiëren deze waarde van p .



figuur 12.26

27 2016-II

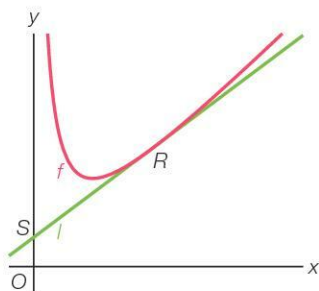
Op het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ is gegeven de functie

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x}.$$

De lijn l met richtingscoëfficiënt $\frac{3}{4}$ raakt de grafiek van f in het punt R .

Het punt S is het snijpunt van l met de y -as. Zie figuur 12.27.

Bereken exact de y -coördinaat van S .



figuur 12.27

28 2016-I

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{12}{x-3} + 4$.

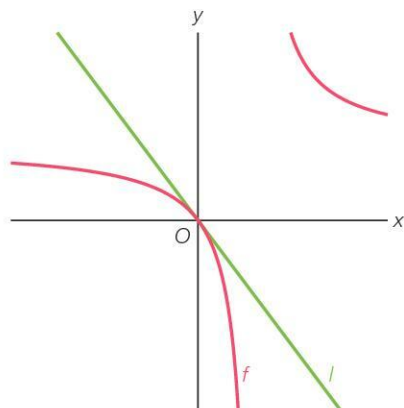
Lijn l raakt in de oorsprong aan de grafiek van f . Zie figuur 12.28.

De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{4}{3}$.

- a** Toon met behulp van differentiëren aan dat de richtingscoëfficiënt van l inderdaad $-\frac{4}{3}$ is.

Lijn k staat loodrecht op l en gaat door de oorsprong. k snijdt de grafiek van f in de oorsprong, en ook nog in een ander punt.

- b** Bereken exact de coördinaten van dit punt.



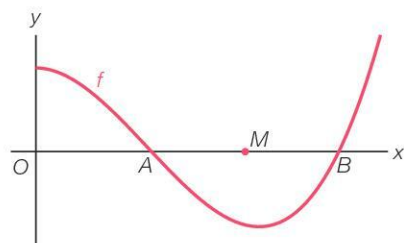
figuur 12.28

29 2016-II

De functie f is gegeven door

$f(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 5)$. De grafiek van f snijdt de positieve x -as in de punten A en B . Het punt M is het midden van lijnstuk AB . Zie figuur 12.29. De x -coördinaat van M is gelijk aan $2\frac{1}{2}$.

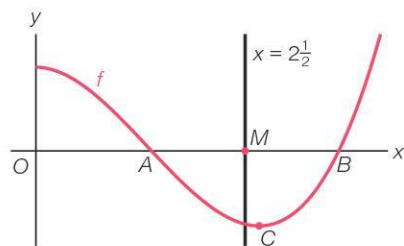
- a** Toon dit met een exacte berekening aan.



figuur 12.29

Het punt C is een top van de grafiek van f . De verticale lijn door M gaat niet door C . Zie figuur 12.30.

- b** Bereken exact het verschil tussen de x -coördinaten van M en C .



figuur 12.30

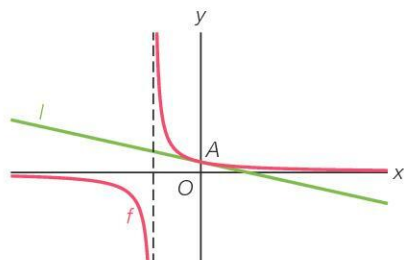
30 2017-I

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{2x+3}$.

De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A . De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in A . Zie figuur 12.31.

Een vergelijking van l is $y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$.

Toon dit op algebraïsche wijze aan.



figuur 12.31

31 2017-I

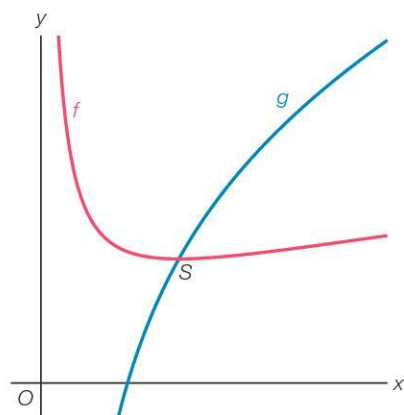
De functies f en g zijn gegeven door

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} \text{ en } g(x) = 3\sqrt{x} - \frac{3}{x}.$$

Het punt S is het snijpunt van de grafieken van f en g . Zie figuur 12.32.

De grafiek van f heeft één top. Dit blijkt het punt S te zijn.

Bewijs dat S een top is van de grafiek van f .



figuur 12.32

32 2017-II

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x$.

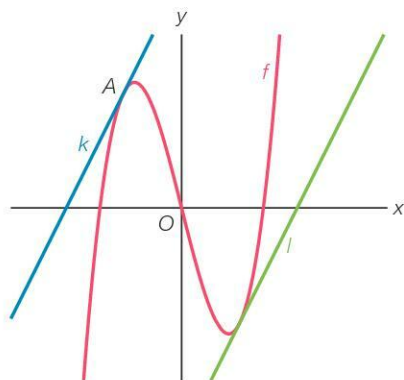
De lijnen k en l zijn evenwijdige raaklijnen aan de grafiek van f .

Lijn k raakt de grafiek van f in het punt $A(-2, 4)$. Zie figuur 12.33.

De afstand van O tot k is de helft van de afstand tussen k en l .

Bereken algebraïsch de afstand tussen k en l .

Geef je eindantwoord in twee decimalen nauwkeurig.



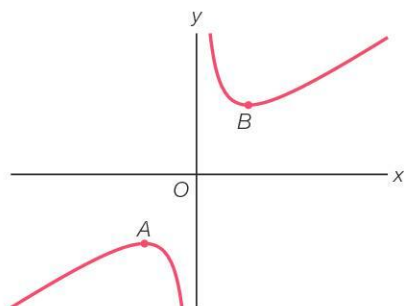
figuur 12.33

33 2017-II

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{2x^2 + 18}{3x}$.

De punten A en B zijn de toppen van de grafiek van f . Zie figuur 12.34.

Bereken exact de coördinaten van A en B .



figuur 12.34

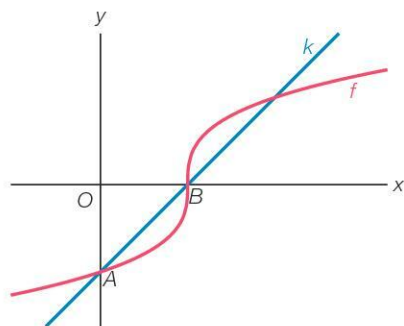
34 2017-I

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt[3]{9x - 27}$.
De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A en de x -as in het punt B .

De lijn k gaat door A en B . Zie figuur 12.35.

De richtingscoëfficiënt van k is 1.

a Toon dit op algebraïsche wijze aan.

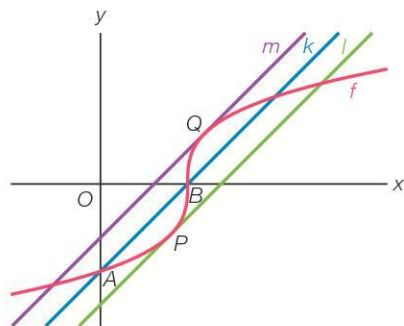


figuur 12.35

De lijnen l en m zijn de twee raaklijnen aan de grafiek van f die evenwijdig zijn aan lijn k .

l raakt de grafiek van f in het punt P en m raakt de grafiek van f in het punt Q . Zie figuur 12.36.

b Bereken met behulp van differentiëren de x -coördinaten van P en Q . Rond je antwoorden af op twee decimalen.



figuur 12.36

35 2018-II

Gegeven zijn de functies met een functievoorschrift van de vorm

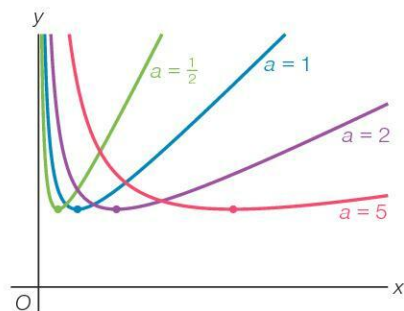
$$h(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x} \text{ met } a > 0 \text{ en domein } (0, \rightarrow).$$

In figuur 12.37 is voor een aantal waarden van a de grafiek van h getekend.

De afgeleide van h wordt gegeven door

$$h'(x) = \frac{x^2 - a^2}{ax^2}.$$

a Bewijs dit.



figuur 12.37

Voor elke waarde van a heeft de grafiek van h één top. In figuur 12.37 is voor enkele waarden van a de top met een stip aangegeven. De y -coördinaat van elke top in de figuur is gelijk aan 2.

Het is zelfs zo dat voor *elke* waarde van a (met $a > 0$) de y -coördinaat van de top van de grafiek van h gelijk is aan 2.

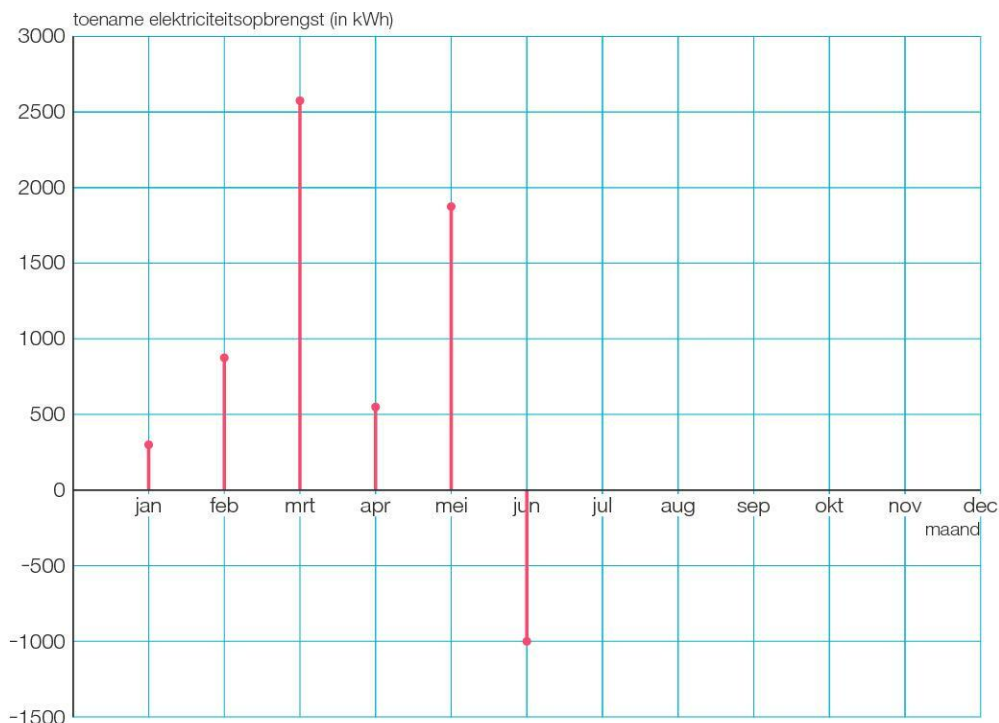
b Bewijs dit.

36 2017-II

Een school heeft veel zonnepanelen op het dak staan.

In het jaar 2011 was de elektriciteitsopbrengst van deze zonnepanelen in totaal 45 000 kWh, waarvan 520 kWh in de maand december.

In het toenamediagram in figuur 12.38 zijn de gegevens van het eerste halfjaar van 2012 verwerkt.



figuur 12.38

Uiteindelijk bleek dat in het jaar 2012 er 5000 kWh minder elektriciteit werd geproduceerd dan in 2011.

Bereken hoeveel elektriciteit er in het tweede halfjaar van 2012 is geproduceerd. Geef je eindantwoord in honderden kWh nauwkeurig.



37 2017-II

De functie g is gegeven door $g(x) = -1 + \sqrt{16x - 8}$.
 Bereken exact de helling van de grafiek van g in het
 snijpunt van de grafiek van g met de x -as.

38 2018-I

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{2}x$.
 Bereken exact voor welke waarden van x de helling
 van de grafiek van f groter is dan $3\frac{1}{2}$.

39 2018-I

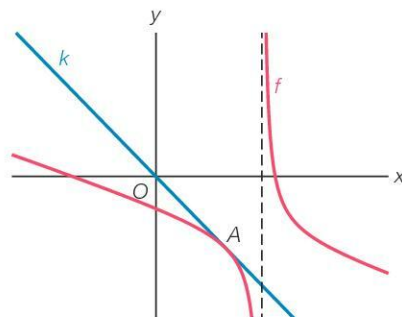
De functie f is gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{2x-3} - x - 1.$$

De lijn k raakt de grafiek van f in het punt
 $A(1, -3)$. Zie figuur 12.39.

De lijn k gaat door de oorsprong.

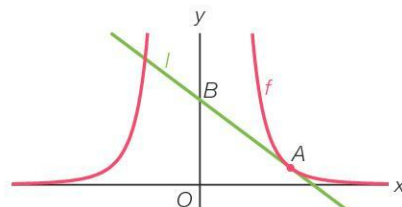
Bewijs dit met behulp van differentiëren.



figuur 12.39

40 2018-II

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{3}{16x^4}$. Op de
 grafiek van f ligt het punt $A(1, \frac{3}{16})$. De lijn l is de
 raaklijn aan de grafiek van f in het punt A . Lijn l
 snijdt de y -as in het punt B . Zie figuur 12.40.
 Bereken exact de y -coördinaat van B .



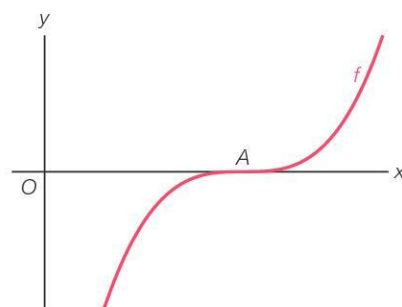
figuur 12.40

41 2019-I

De functie f is gegeven door $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^3$.
 De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A .
 Zie figuur 12.41.

De grafiek van f heeft een horizontale raaklijn
 in A .

Bewijs dit.



figuur 12.41

42 2019-I

De geluidssnelheid in zeewater kan worden benaderd met de formule

$$\text{van Wilson } v = 1449,2 + 4,623T - 0,0546T^2 + 1,391(Z - 35) + \frac{D}{60}.$$

Hierin is

- v de geluidssnelheid in m/s;
- T de watertemperatuur in $^{\circ}\text{C}$;
- Z het zoutgehalte van het zeewater in promille (‰);
- D de waterdiepte in m.

In enkele gesloten zeeën (zoals de Kaspische Zee en de Dode Zee) wijkt het zoutgehalte sterk af van het zoutgehalte van open zeeën. Zo is het zoutgehalte van de Dode Zee met 337‰ ongeveer 10 keer zo hoog als het zoutgehalte van gewoon zeewater.

De Kaspische Zee is met een gemiddeld zoutgehalte van 12‰ veel minder zout dan gewoon zeewater.

- a** Bereken bij gelijke watertemperatuur (T) en gelijke waterdiepte (D) het verschil tussen de geluidssnelheid in de Dode Zee en in de Kaspische Zee. Geef je eindantwoord in een geheel aantal m/s.

Bij een bepaalde watertemperatuur zal de geluidssnelheid in zeewater maximaal zijn. Deze watertemperatuur is onafhankelijk van de waterdiepte en het zoutgehalte. Daarom mogen Z en D als constanten worden beschouwd bij het berekenen van deze watertemperatuur.

- b** Bereken algebraïsch de temperatuur in graden Celsius waarbij de geluidssnelheid in zeewater maximaal is. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Vanuit een onderzeeboot kan men door middel van een sonarapparaat afstanden bepalen. Hiervoor zendt de onderzeeboot een geluidssignaal uit. Door een ander object in het water wordt dit signaal teruggekaatst. Men meet het tijdsverschil tussen het moment van uitzenden van het signaal en het moment waarop het teruggekaatste signaal weer ontvangen wordt.



Een onderzeeboot en een object bevinden zich op 20 meter diepte in zeewater van 10°C met een zoutgehalte van 35‰. De onderzeeboot zendt een geluidssignaal uit, dat door het object wordt teruggekaatst. 12,45 seconden nadat het is uitgezonden wordt het teruggekaatste signaal weer opgevangen.

- c** Bereken hoe ver het object van de onderzeeboot verwijderd is. Geef je eindantwoord in honderden meters.

43 2019-II

Er wordt veel onderzoek gedaan naar de *viscositeit* van vloeistoffen. De viscositeit van een vloeistof is een getal dat aangeeft hoe stroperig die vloeistof is: hoe groter de viscositeit, hoe stroperiger die vloeistof. Suiker kun je in water oplossen. De concentratie suiker bepaalt de viscositeit van de vloeistof die zo ontstaat. Aan het begin van de twintigste eeuw is het volgende theoretische verband afgeleid tussen de concentratie suiker en de viscositeit: $V = \frac{1 + 0,5C}{(1 - C)^4}$.

Hierin is V de viscositeit en C de concentratie suiker.

Hierbij wordt met een concentratie van bijvoorbeeld $C = 0,3$ bedoeld dat het volume van de suiker 30% van het totale volume van de vloeistof is.

Ongeveer gelijktijdig met de vondst van de formule voor V stelde de scheikundige Emil Hatschek een lineaire formule op voor het verband tussen de viscositeit en de concentratie suiker: $V_{\text{lin}} = a \cdot C + b$.

Hierin is V_{lin} een benadering van V .

Voor dit lineaire verband geldt $a = V'(0)$ en $b = V(0)$.

De waarde van $V'(0)$ kan benaderd worden door het differentiequotient

$\frac{\Delta V}{\Delta C}$ op een heel klein interval.

Stel met behulp van het differentiequotient op het interval $[0; 0,001]$ een formule op voor V_{lin} . Geef de getallen in je eindantwoord zo nodig in één decimaal.

44 2019-II

De functie f wordt gegeven door

$$f(x) = -(2x - 3)^3 + 3x^2 - 6x + 4.$$

Voor de afgeleide functie van f geldt

$$f'(x) = -24x^2 + 78x - 60.$$

a Bewijs dat inderdaad geldt

$$f'(x) = -24x^2 + 78x - 60.$$

De grafiek van f heeft twee toppen. Dit zijn de punten A en B . De lijn k is de lijn door A en B . Het punt $P(1, 2)$ ligt op de grafiek van f .

De lijn l is evenwijdig met lijn k en gaat door P .

Lijn k snijdt de x -as in punt K en de y -as in punt M .

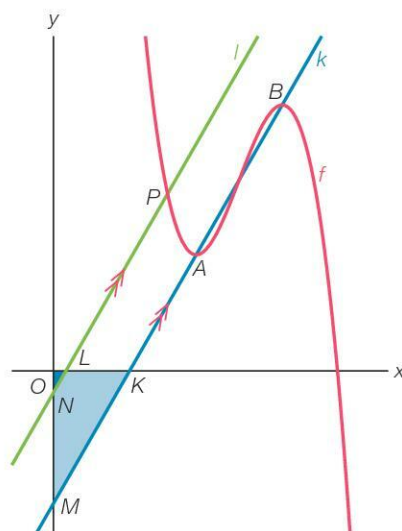
Lijn l snijdt de x -as in punt L en de y -as in punt N .

Vanwege de evenwijdigheid van lijn k en lijn l is driehoek OKM gelijkvormig met driehoek OLN .

Zie figuur 12.42.

Lijnstuk KM is z keer zo lang als lijnstuk LN .

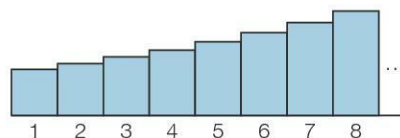
b Bereken exact de waarde van z .



figuur 12.42

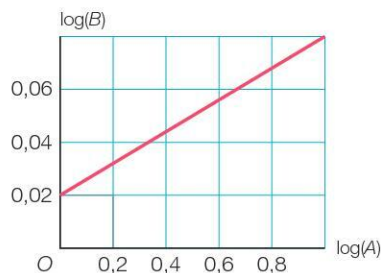
12.4 Exponenten en logaritmen

- 45** **a** Een hoeveelheid groeit exponentieel met 7,5% per week. Bereken de verdubbelingstijd in dagen nauwkeurig.
- b** Een hoeveelheid groeit eerst 6 jaar met 7,5% per jaar en daarna 4 jaar met 6,8% per jaar. Onderzoek of de hoeveelheid in deze 10 jaar is verdubbeld.
- c** Een hoeveelheid N groeit exponentieel waarbij de hoeveelheid elke 10 jaar 5 keer zo groot wordt. Op 1 januari 2020 is $N = 3 \cdot 10^8$. Bereken in welk jaar geldt dat $N = 4,5 \cdot 10^{10}$.
- d** De staafjes in figuur 12.43 worden van links naar rechts steeds hoger. Het staafje met nummer 1 heeft een hoogte van 5,5 mm en het staafje met nummer 50 heeft een hoogte van 170 cm. Het verband tussen het nummer van het staafje en de hoogte is exponentieel, dat wil zeggen dat de hoogte van links naar rechts steeds met hetzelfde percentage toeneemt. Bereken dit percentage.
- e** Los de vergelijking $3^{x+7} = 9^x$ exact op.
- f** Los de vergelijking $5^{2x-1} - 25 = 3100$ exact op.
- g** De grafiek van de functie $f(x) = 2^x$ wordt eerst 2 naar rechts en 12 omlaag geschoven en daarna met $\frac{1}{8}$ vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as. Zo ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = 2^{x+a} + b$. Bereken a en b .
- h** De grafiek van de functie $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ wordt met a vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie g . De grafiek van g gaat door het punt $P(-16, 16)$. Bereken de waarde van a .
- i** Gegeven is de functie $f(x) = 5 - 3^{0,4x-1}$. De grafiek van f wordt 10 naar links en 6 omhoog geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . De functie g kan geschreven worden in de vorm $g(x) = a + b \cdot 3^{0,4x}$. Bereken a en b .
- j** Gegeven is de formule $F = 0,15 \cdot K^b$. Bereken b algebraïsch als gegeven is dat bij $K = 2,4$ hoort $F = 3,5$. Rond af op één decimaal.
- k** Los de vergelijking $70 \cdot 10^{-x} = 65$ algebraïsch op. Rond af op drie decimalen.
- l** Druk x uit in y bij de formule $y = 3^{\frac{1}{3}x+2}$.



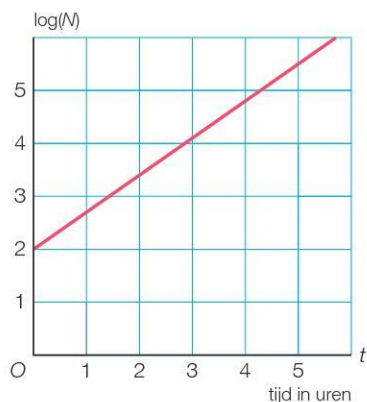
figuur 12.43

- 46 a** In figuur 12.44 is het verband tussen $\log(A)$ en $\log(B)$ weergegeven.
Gebruik deze figuur om B te berekenen bij $A = 5$. Rond af op twee decimalen.



figuur 12.44

- b** Herleid de formule $N = 0,25 \cdot M^{1,75}$ tot de vorm $\log(N) = a + b \cdot \log(M)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- c** Gegeven is de formule $\log(P) = 0,006q + 12,5$. Bereken q voor $P = 5,6 \cdot 10^{18}$. Rond af op gehelen.
- d** De hoeveelheid N neemt exponentieel toe. In figuur 12.45 is $\log(N)$ uitgezet tegen de tijd t in uren. Bereken met hoeveel procent N per minuut toeneemt.



figuur 12.45

- e** Los de vergelijking $3 + {}^2\log(5x + 1) = 8$ exact op.
- f** De grafiek van de functie $f(x) = 3 + {}^2\log(4x + 5)$ ontstaat uit de grafiek van $y = {}^2\log(x)$ door een horizontale en een verticale translatie. Bereken deze translaties.
- g** Gegeven is de formule $G = \log(A) + 5 \cdot \log(B) - 8,5$. Neem $A = 500$ en $G = 7$ en bereken B algebraïsch. Rond af op gehelen.
- h** Gegeven is de formule $H = \log(P) + 1,75 \cdot \log(Q) - 0,25$. De formule is te schrijven in de vorm $H = \log(a \cdot P \cdot Q^b)$. Bereken a en b . Geef je eindantwoorden in twee decimalen.
- i** Bewijs dat de grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(x^2 - 4x + 5)$ geen verticale asymptoot heeft.
- j** Bereken exact de nulpunten van de functie $f(x) = {}^2\log(x^2 - 5x + 4)$.

Groepercentages en groeifactoren

Een hoeveelheid neemt exponentieel toe met 6,5% per jaar.
De bijbehorende groeifactor is 1,065 per jaar.
Omgekeerd hoort bij een groeifactor van 1,126 per jaar een groeipcentage van 12,6% per jaar.

Groeipercenages omzetten naar andere tijdseenheden gaat via groeifactoren.

Weet je dat bij een exponentiële groei een afname in 7 jaar van 25% hoort, dan is $g_{7\text{ jaar}} = 0,75$ en dit geeft $g_{\text{jaar}} = 0,75^{\frac{1}{7}} \approx 0,960$. Dus de afname per jaar is 4,0%.

Verdubbelingstijden en halveringstijden

De verdubbelingstijd is de tijd waarin een hoeveelheid verdubbelt bij exponentiële groei.

Bij een groeifactor g bereken je de verdubbelingstijd T door de vergelijking $g^T = 2$ op te lossen.

Om bij een exponentiële groei met 6,5% per jaar de verdubbelingstijd T te berekenen, los je op $1,065^T = 2$. Je krijgt $T \approx 11,0$, dus de verdubbelingstijd is 11 jaar.

Om het groeipcentage per jaar te berekenen dat hoort bij een verdubbelingstijd van 15 jaar, los je de vergelijking $g^{15} = 2$ op. Je krijgt $g = 2^{\frac{1}{15}} \approx 1,047$, dus het percentage is 4,7%.

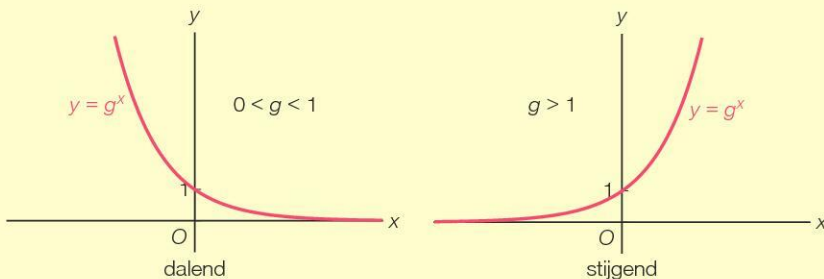
Bij halveringstijden heb je te maken met de vergelijking $g^T = \frac{1}{2}$.

Om bij een exponentiële afname met 3,5% per jaar de halveringstijd te berekenen, los je op $0,965^T = \frac{1}{2}$. Je krijgt $T \approx 19,5$, dus de halveringstijd is 19,5 jaar.

Bij een exponentiële afname met een halveringstijd van 12 jaar bereken je als volgt het afnamepercentage per jaar. Los de vergelijking $g^{12} = \frac{1}{2}$ op. Je krijgt $g = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{12}} \approx 0,944$, dus het percentage is 5,6%.

Exponentiële functies

Bij de standaardgrafiek $y = g^x$ onderscheiden we $0 < g < 1$ en $g > 1$.
De horizontale asymptoot van de grafiek van de functie $f(x) = g^x$ is de lijn $y = 0$.



figuur 12.46

Algebraïsch oplossen van exponentiële vergelijkingen

$g^x = a$ geeft $x = {}^g\log(a)$

Herleid tot $g^A = g^B$

$$2^{3x-1} = 15$$

$$3x - 1 = {}^2\log(15)$$

$$3x = 1 + {}^2\log(15)$$

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(15)$$

$$2^{x-3} = 8 \cdot 4^x$$

$$2^{x-3} = 2^3 \cdot 2^{2x}$$

$$2^{x-3} = 2^{3+2x}$$

$$x - 3 = 3 + 2x$$

$$-x = 6$$

$$x = -6$$

Bij de vergelijking $10^{-0,3x} = 0,8$ krijg je $-0,3x = \log(0,8)$, dus

$$x = \frac{\log(0,8)}{-0,3} \approx 0,323.$$

Logaritmische functies

Bij de standaardgrafiek $y = {}^g\log(x)$ onderscheiden we $0 < g < 1$ en $g > 1$. Zie figuur 12.47.

Het domein van de functie

$f(x) = {}^g\log(ax + b)$ volgt uit $ax + b > 0$.

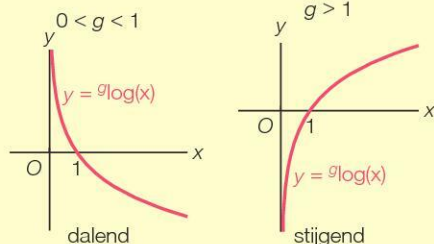
De verticale asymptoot van de grafiek van

$f(x) = {}^g\log(ax + b)$ volgt uit $ax + b = 0$.

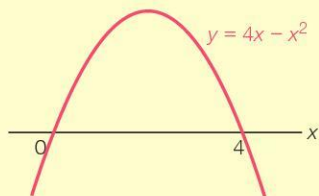
Om het domein van de functie

$f(x) = {}^2\log(4x - x^2)$ te berekenen los je de ongelijkheid $4x - x^2 > 0$ op.

Uit $4x - x^2 = 0$ volgt $x = 0 \vee x = 4$.



figuur 12.47

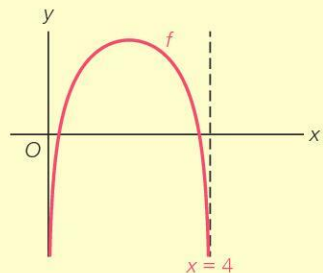


figuur 12.48

Uit figuur 12.48 volgt $4x - x^2 > 0$ geeft $0 < x < 4$, dus het domein van f is $D_f = \langle 0, 4 \rangle$.

Zie de grafiek van $f(x) = {}^2\log(4x - x^2)$ in figuur 12.49.

De verticale asymptoten van de grafiek van f zijn de lijnen $x = 0$ en $x = 4$.



figuur 12.49 $f(x) = {}^2\log(4x - x^2)$

Logaritmische vergelijkingen

Bij het oplossen van de logaritmische vergelijking ${}^3\log(x+2) = -2$ gebruik je ${}^g\log(x) = y$ geeft $x = g^y$.

$${}^3\log(x+2) = -2$$

$$x+2 = 3^{-2}$$

$$x = \frac{1}{9} - 2 = -1\frac{8}{9}$$

Bij de vergelijking $\log(5x-2) = 0$ krijg je $5x-2 = 10^0$ oftewel $5x-2 = 1$ en dit geeft $x = \frac{3}{5}$.

Bij de vergelijking ${}^2\log(4x-x^2) = 0$ krijg je ${}^2\log(4x-x^2) = 0$

$$4x - x^2 = 1$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \vee x = 2 - \sqrt{3}$$

Rekenregels voor logaritmen

De rekenregels voor logaritmen zijn

- ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$
- ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$
- ${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$

Deze regels gebruik je bij het oplossen van vergelijkingen en het herleiden van formules.

Los op ${}^3\log(x+2) = 2 \cdot {}^3\log(x) + 1$.

Herleid $N = 2 \cdot \log(x-1) - \log(x)$.

Uitwerking

$${}^3\log(x+2) = 2 \cdot {}^3\log(x) + 1$$

$${}^3\log(x+2) = {}^3\log(x^2) + {}^3\log(3)$$

$${}^3\log(x+2) = {}^3\log(3x^2)$$

$$x+2 = 3x^2$$

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -2 = 25$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{6} = 1 \vee x = \frac{1-5}{6} = -\frac{2}{3}$$

vold. niet



Gebruik je de rekenregels bij het oplossen van vergelijkingen, dan moet je de gevonden waarden controleren.

Als een waarde voldoet, dan hoeft je dat niet te noteren.

Uitwerking

$$N = 2 \cdot \log(x-1) - \log(x)$$

$$N = \log((x-1)^2) - \log(x)$$

$$N = \log(x^2 - 2x + 1) - \log(x)$$

$$N = \log\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x}\right)$$

$$N = \log\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)$$

Formules omwerken

Je kunt formules van de vorm $N = b \cdot g^t$ omwerken tot de vorm

$$\log(N) = pt + q.$$

Bij $N = 166 \cdot 2,24^t$ krijg je $\log(N) = \log(166 \cdot 2,24^t)$

$$\log(N) = \log(166) + \log(2,24^t)$$

$$\log(N) = \log(166) + t \cdot \log(2,24)$$

$$\log(N) = 2,220... + t \cdot 0,350...$$

$$\text{Dus } \log(N) = 0,35t + 2,22.$$

Je kunt formules van de vorm $\log(N) = pt + q$ omwerken tot de vorm

$$N = b \cdot g^t.$$

Bij $\log(N) = 0,35t + 2,22$ krijg je $N = 10^{0,35t + 2,22}$

$$N = 10^{0,35t} \cdot 10^{2,22}$$

$$N = 10^{2,22} \cdot (10^{0,35})^t$$

$$N = 165,9... \cdot 2,238...^t$$

$$\text{Dus } N = 166 \cdot 2,24^t.$$

Je kunt formules van de vorm $y = ax^p$ omwerken tot de vorm

$$\log(y) = q + r \cdot \log(x).$$

Bij $A = 50B^{1,6}$ krijg je $\log(A) = \log(50B^{1,6})$

$$\log(A) = \log(50) + \log(B^{1,6})$$

$$\log(A) = \log(50) + 1,6 \cdot \log(B)$$

$$\log(A) = 1,698... + 1,6 \cdot \log(B)$$

$$\text{Dus } \log(A) = 1,7 + 1,6 \cdot \log(B).$$

Je kunt formules van de vorm $\log(y) = q + r \cdot \log(x)$ omwerken tot de vorm $y = ax^p$.

Bij $\log(A) = 1,7 + 1,6 \cdot \log(B)$ krijg je $\log(A) = \log(10^{1,7}) + \log(B^{1,6})$

$$\log(A) = \log(10^{1,7} \cdot B^{1,6})$$

$$A = 10^{1,7} \cdot B^{1,6}$$

$$A = 50,1... \cdot B^{1,6}$$

$$\text{Dus } A = 50B^{1,6}.$$

$\log(Q)$ uitzetten tegen P

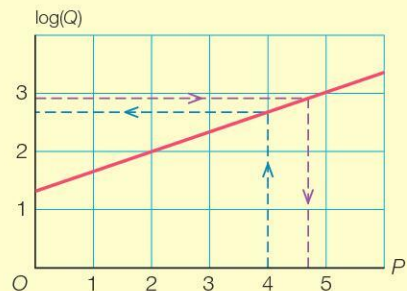
In figuur 12.50 is $\log(Q)$ uitgezet tegen P .

Aflezende geeft

- voor $P = 4$ is $\log(Q) \approx 2,7$
dus $Q \approx 10^{2,7} \approx 500$
- voor $Q = 800$ is $\log(Q) \approx 2,9$
en dit geeft $P \approx 4,7$.

De formule van de lijn is $\log(Q) = \frac{1}{3}P + 1\frac{1}{3}$.

Deze formule is om te werken tot $Q = 22 \cdot 2,15^P$.



figuur 12.50

47 2016-I

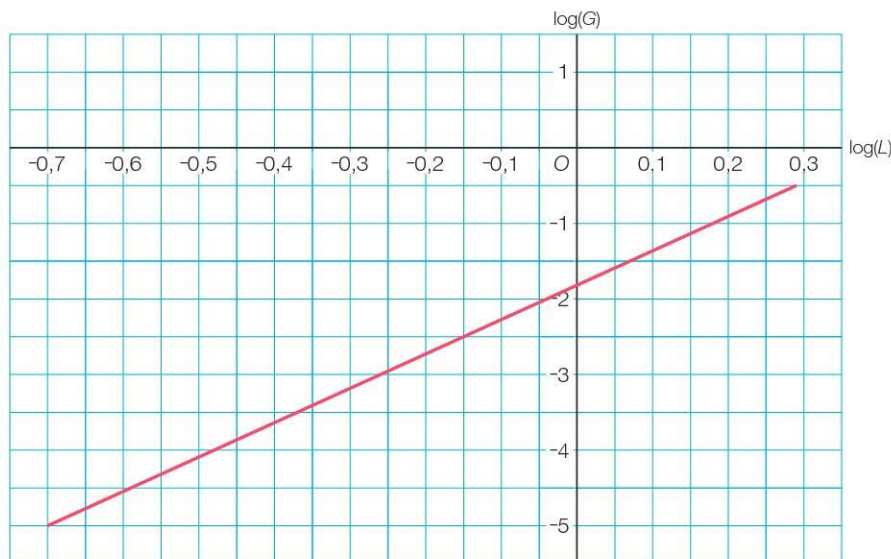
In het begin van hun leven ontwikkelen karpers zich van larve tot klein visje. Aan het einde van deze ontwikkeling heeft het visje een lengte van ongeveer 1,9 cm.

De lengte van de karperlarve in centimeter noemen we L .

Het gewicht van de karperlarve in gram noemen we G .

In figuur 12.51 is het verband tussen $\log(L)$ en $\log(G)$

weergegeven.



figuur 12.51

- a** Bepaal met figuur 12.51 het gewicht van een karperlarve met een lengte van 0,8 cm. Geef je antwoord in hele milligrammen nauwkeurig.

Examenwoord
Bepalen
Zie bladzijde 241.

Het verband tussen de lengte van karperlarven en hun gewicht kan beschreven worden met een formule van de vorm $G = 0,014 \cdot L^b$ met $0,2 \leq L \leq 1,9$. Hierin is L de lengte in centimeter, G het gewicht in gram en b een constante.

Een karperlarve van 1,9 cm weegt ongeveer 0,25 g.

Hieruit volgt dat b afgerond op één decimaal gelijk is aan 4,5.

- b** Bereken b met behulp van deze gegevens in twee decimalen.

De formule $G = 0,014 \cdot L^{4,5}$ is te herleiden tot een formule van de vorm $\log(G) = p + q \cdot \log(L)$.

- c** Bereken de waarden van p en q . Geef beide waarden in één decimaal.

48 2016-II

Sinds het begin van de industriële revolutie is het totale jaarlijkse energieverbruik in de Verenigde Staten (VS) nagenoeg exponentieel toegenomen.

E is het totale energieverbruik per jaar in de VS in joule per jaar. In figuur 12.52 is voor een aantal jaren $\log(E)$ aangegeven.

- a** Bepaal met behulp van de figuur het totale energieverbruik in de VS in het jaar 1950 in hele exajoules nauwkeurig. Licht je antwoord toe. Gebruik dat 1 exajoule gelijk is aan 10^{18} joule.

De punten in figuur 12.52 liggen bij benadering op een rechte lijn. Deze lijn l is in figuur 12.53 getekend.

Een formule voor lijn l is

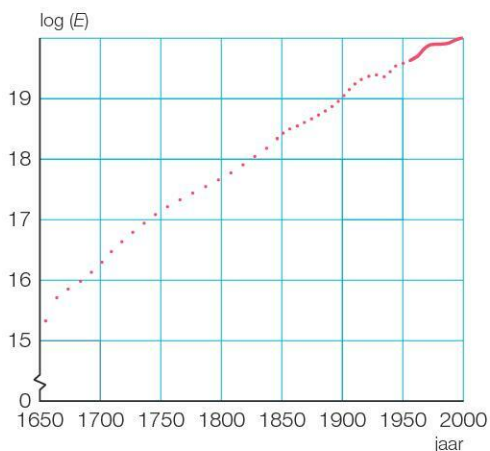
$$\log(E) = 0,0125t + 15,8.$$

Hierin is E het totale energieverbruik per jaar in de VS in joule per jaar en t het aantal jaren met $t = 0$ voor het jaar 1650.

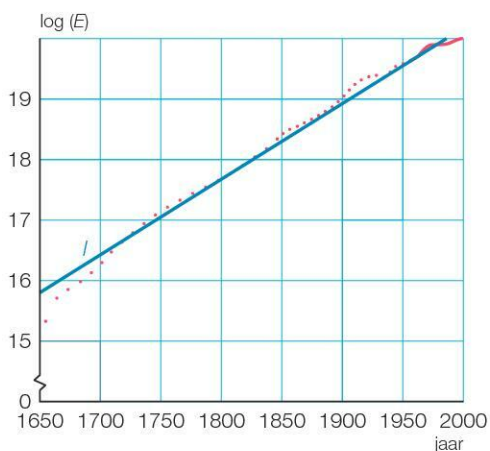
- b** Bereken in welk jaar volgens de formule in de VS voor het eerst meer dan $3,0 \cdot 10^{20}$ joule aan energie zal worden verbruikt.

Een onderzoeker voorspelt dat het wereldwijde energieverbruik na 2010 exponentieel groeit, waarbij het elke honderd jaar tien keer zo hoog wordt. Op 1 januari 2010 was het wereldwijde energieverbruik $1,2 \cdot 10^{13}$ joule per seconde. De aarde ontvangt van de zon veel meer energie, maar liefst $1,7 \cdot 10^{17}$ joule per seconde. Als alle energie die de aarde van de zon ontvangt door de mens gebruikt zou kunnen worden, dan zouden we nu theoretisch gezien alleen met zonne-energie kunnen volstaan. Volgens bovengenoemde voorspelling zullen we in de toekomst op een gegeven moment toch meer energie verbruiken dan de aarde van de zon ontvangt.

- c** Bereken over hoeveel eeuwen dit volgens deze voorspelling het geval zal zijn.



figuur 12.52



figuur 12.53



49 2017-I

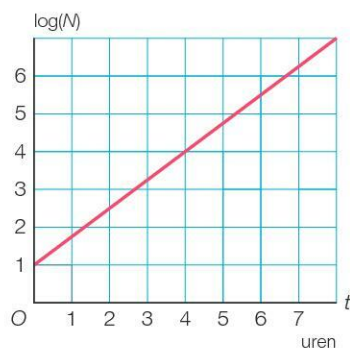
[▶ WERKBLAD] Wanneer men bij een experiment bepaalde bacteriën in een reageerbuis plaatst en voldoende voeding toedient, neemt het aantal bacteriën in de reageerbuis exponentieel toe.

Van zo'n experiment is in figuur 12.54 $\log(N)$ uitgezet tegen t . Hierin is N het aantal bacteriën in de reageerbuis en t de tijd in uren.

In figuur 12.54 is af te lezen dat aan het begin van het experiment geldt dat $\log(N) = 1$ en dat na 8 uur geldt dat $\log(N) = 7$.

Uit het verband in figuur 12.54 volgt dat het aantal bacteriën in de reageerbuis tijdens het experiment met ongeveer 3% per minuut toeneemt.

- Bereken dit percentage in één decimaal.
- Bereken in hoeveel minuten het aantal bacteriën in de reageerbuis verdubbelt. Rond je eindantwoord af op hele minuten.



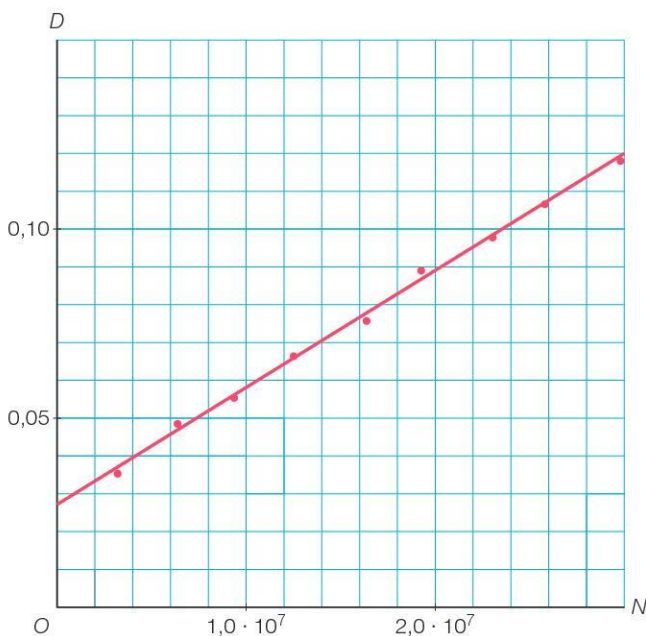
figuur 12.54

Om het aantal bacteriën in een reageerbuis te bepalen meet men het percentage doorgelaten licht. Er bestaat een verband tussen het percentage licht dat door een reageerbuis met bacteriën wordt doorgelaten en de zogeheten *optische dichtheid*. Dit verband wordt gegeven door de formule $L = 100 \cdot 10^{-D}$. Hierin is L het percentage doorgelaten licht en D de optische dichtheid.

Verder heeft men op basis van eerdere experimenten het verband tussen de optische dichtheid D en het aantal bacteriën in de reageerbuis N gevonden. Dit verband is weergegeven in figuur 12.55. Deze figuur staat ook vergroot op het werkblad.

Tijdens een experiment laat een reageerbuis met bacteriën 84% van het licht door.

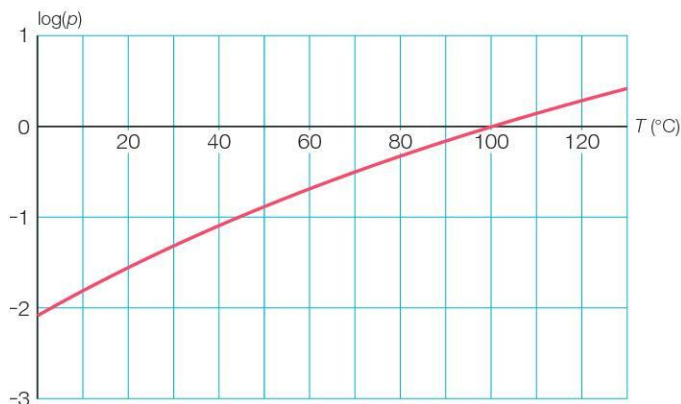
- Bepaal het aantal bacteriën in de reageerbuis. Geef je antwoord in miljoenen nauwkeurig en licht je antwoord toe. Maak daarbij gebruik van de figuur op het werkblad.



figuur 12.55

50 2017-I

Het kookpunt van water is de temperatuur waarbij water gaat koken. Het kookpunt T is afhankelijk van de luchtdruk p met p in bar en T in $^{\circ}\text{C}$. In figuur 12.56 is het verband tussen $\log(p)$ en T weergegeven.



figuur 12.56

Onder normale omstandigheden is de luchtdruk op zeeniveau 1,0 bar en is het kookpunt van water bij deze luchtdruk 100°C .

Op de top van Mount Everest is de luchtdruk 0,31 bar. Hierdoor is het kookpunt van water op de top van Mount Everest een stuk lager dan op zeeniveau.

- a** Onderzoek met behulp van figuur 12.56 bij welke temperatuur water op de top van Mount Everest gaat koken. Geef je antwoord in hele $^{\circ}\text{C}$ nauwkeurig.

Het verband dat in de figuur is weergegeven, kan benaderd worden met de formule $\log(p) = 5,68 - \frac{2120}{273 + T}$. Hierin is p de luchtdruk in bar en T het kookpunt van water in $^{\circ}\text{C}$.

Op zeeniveau, bij een luchtdruk van 1,0 bar, kookt rijst in water bij een temperatuur van 100°C . Als de rijst in een hogedrukpan wordt bereid onder dezelfde omstandigheden, maar bij een temperatuur van 130°C , is de rijst sneller gaar als gevolg van de hogere druk.

- b** Bereken de druk in bar in een hogedrukpan als de rijst aan het koken is. Geef je antwoord in bar in één decimaal.

In de gegeven formule is $\log(p)$ uitgedrukt in T .

- c** Druk T uit in p .



51 2017-II

De prijs van elektrische energie – gewoonlijk *elektriciteit* genoemd – stijgt niet elk jaar met hetzelfde percentage.

In de tabel staan de groeipercentages ten opzichte van het voorafgaande jaar voor de periode van 1997 tot en met 2006.

Uit de gegevens in de tabel volgt dat de prijs van elektriciteit in 10 jaar tijd ongeveer is verdubbeld.

a Toon dit aan.

Een verdubbeling in 10 jaar kan ook bereikt worden door de prijs van elektriciteit jaarlijks met een vast percentage te laten stijgen.

b Bereken op algebraïsche wijze dit percentage.

Rond je eindantwoord af op één decimaal.

Met zonnepanelen kan worden bespaard op de elektriciteitskosten.

Hoeveel er met zonnepanelen kan worden bespaard, hangt in deze opgave alleen af van de prijsstijging van elektriciteit en van de elektriciteitsopbrengst van de zonnepanelen.

Zonder rekening te houden met de kosten van aankoop en installatie kan de totale besparing vanaf het moment van installatie worden berekend met behulp van de

$$\text{formule } B = \frac{19,9V}{P} \cdot \left(\left(1 + \frac{P}{100} \right)^t - 1 \right).$$

Hierin is B de totale besparing in euro's, V de elektriciteitsopbrengst van de zonnepanelen in kWh per jaar, P het percentage waarmee de elektriciteitsprijs jaarlijks stijgt en t het aantal jaren na 2006.

In januari 2006 worden zonnepanelen geplaatst.

De kosten voor de aankoop en installatie hiervan zijn 13 000 euro. De zonnepanelen leveren 2250 kWh per jaar.

We nemen aan dat de elektriciteitsprijs jaarlijks met 7% stijgt.

Na een aantal jaren zal de totale besparing groter zijn dan de aanschafprijs van de zonnepanelen.

c Bereken na welk geheel aantal jaren dit voor het eerst het geval is.

jaar	prijsstijging ten opzichte van het voorafgaande jaar in gehele procenten
1996	
1997	2
1998	1
1999	7
2000	14
2001	26
2002	3
2003	3
2004	5
2005	8
2006	6

Examenwoordwoord
Aantonen dat
Zie bladzijde 241.



52 2018-I

De functie f is gegeven door $f(x) = 4 - 2^{0,3x-2}$.

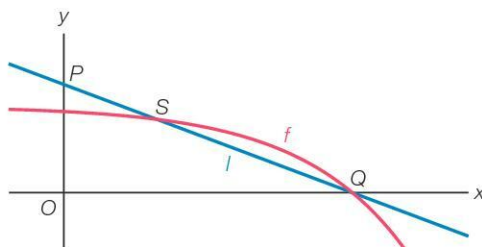
Op de grafiek van f ligt een punt R . De y -coördinaat van R is 2.

a Bereken exact de x -coördinaat van R .

De grafiek van f snijdt de x -as in het punt Q . Verder zijn gegeven het punt $P(0, 5)$ en de lijn l door P en Q .

Lijn l en de grafiek van f snijden elkaar behalve in Q ook in het punt S .
Zie figuur 12.57.

b Bereken de coördinaten van S . Rond deze coördinaten af op twee decimalen.



figuur 12.57

De grafiek van f wordt 20 naar links en 10 omhoog geschoven.

Hierdoor ontstaat de grafiek van een functie g .

De functie g kan geschreven worden in de vorm $g(x) = a + b \cdot 2^{0,3x}$.

c Bereken de waarden van a en b .

53 2018-I

[► WERKBLAD] Hardlopers die regelmatig een bepaalde afstand lopen, zijn vaak nieuwsgierig naar hun eindtijd op een andere afstand.

De Amerikaanse onderzoeker Pete Riegel stelde in 1977 de formule $v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{0,06}$

op. Hiermee kan met behulp van de bekende gemiddelde snelheid v_1 op een bepaalde afstand s_1 , de te verwachten gemiddelde snelheid v_2 op een andere afstand s_2 worden uitgerekend.

Hardlopers gebruiken vaak de volgende vuistregel: als de afstand verdubbelt, dan neemt je gemiddelde snelheid met 6% af.

a Onderzoek of de bovenstaande formule aan deze vuistregel voldoet.

In de tabel op de volgende bladzijde staan de wereldrecords hardlopen op de weg bij de heren op een aantal afstanden zoals ze in het jaar 2015 waren.



Examenwerkwoord
Onderzoeken of
Zie bladzijde 241.

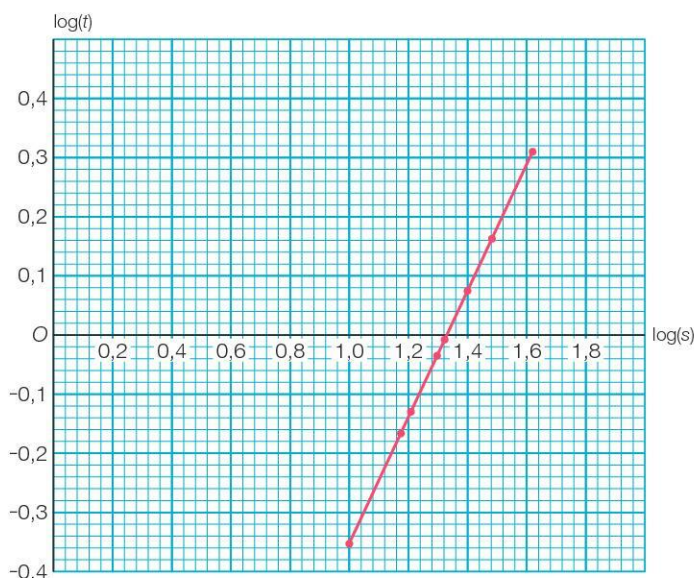
wedstrijd	afstand (in m)	wereldrecordtijd in 2015		
		uren	minuten	seconden
10 km	10 000		26	44
15 km	15 000		41	13
10 mijl	16 093		44	23
20 km	20 000		55	21
halve marathon	21 097		58	23
25 km	25 000	1	11	18
30 km	30 000	1	27	37
marathon	42 195	2	02	57

In de hardloepsport wordt vaak gekeken naar de tijd die een hardloper gemiddeld over een kilometer doet. Dit wordt het *looptempo* genoemd.

- b** Bereken het looptempo van het wereldrecord op de marathon in het jaar 2015. Geef je eindantwoord in hele minuten en seconden nauwkeurig.

In onderstaande figuur is de logaritme van de tijd t in uren tegen de logaritme van de afstand s in kilometers van de wereldrecords op de afstanden uit de tabel uitgezet. Deze punten liggen bij benadering op een rechte lijn, die ook in figuur 12.58 is getekend.

Deze figuur staat ook vergroot op het werkblad.



figuur 12.58

- c** Bepaal met behulp van de lijn in de figuur op het werkblad het te verwachten wereldrecord hardlopen op een afstand van 50 kilometer. Geef je eindantwoord in hele uren en minuten nauwkeurig.

54 2018-II

De functie f wordt gegeven door

$$f(x) = {}^2\log(x^2 - 3x + 3).$$

In figuur 12.59 is de grafiek van f weergegeven.

De grafiek van f lijkt geen verticale asymptoot te hebben. De grafiek van de standaardfunctie

$y = {}^2\log(x)$ heeft wél een verticale asymptoot.

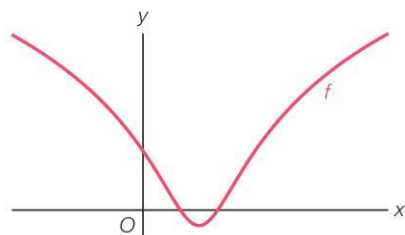
- a** Bewijs dat de grafiek van f inderdaad geen verticale asymptoot heeft.

Gegeven is het punt $P(4, 0)$.

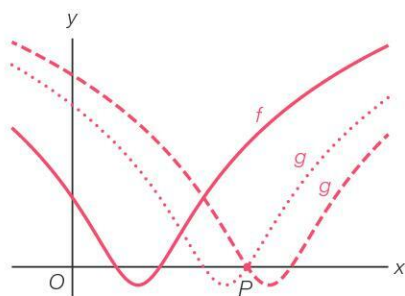
De grafiek van f wordt over een afstand a naar rechts verschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie g .

Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van g door P gaat. Zie figuur 12.60.

- b** Bereken exact deze twee waarden van a .



figuur 12.59



figuur 12.60

55 2019-I

De functies f en g zijn gegeven door

$$f(x) = 2^{\frac{1}{2}x+3} \text{ en } g(x) = 4^x.$$

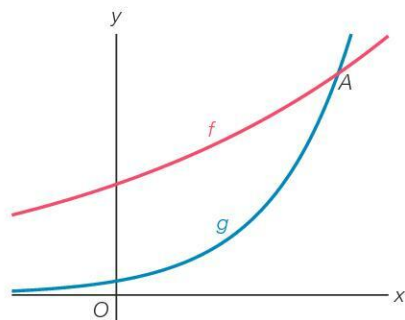
Het punt A is het snijpunt van de grafieken van f en g . Zie figuur 12.61.

- a** Bereken exact de coördinaten van A .

Bij de grafiek van f hoort de formule $y = 2^{\frac{1}{2}x+3}$.

Deze formule kan worden herschreven zodat x wordt uitgedrukt in y .

- b** Druk x uit in y .



figuur 12.61

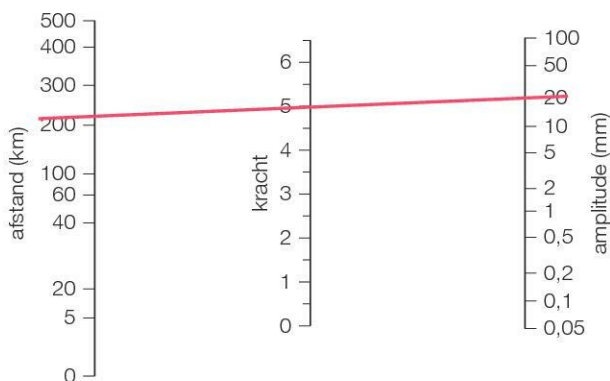
56 2019-I

[►WERKBLAD] Charles Richter heeft in 1935 een schaal opgesteld die de kracht van een aardbeving in een getal uitdrukt. Dit wordt *de schaal van Richter* genoemd.

De plaats waar een aardbeving ontstaat heet het epicentrum. Het is mogelijk om op een bepaalde afstand tot het epicentrum de kracht van een aardbeving te bepalen. Hiervoor wordt de grootte van de beweging van de aardkorst in verticale richting gemeten. Deze verticale uitwijking is de zogeheten amplitude.

De kracht van een aardbeving kan bepaald worden met behulp van een *nomogram*. Hierbij wordt de afstand van de plaats van meting tot het epicentrum als punt op de as ‘afstand’ in het nomogram aangegeven. De gemeten amplitude wordt als punt op de as ‘amplitude’ in het nomogram aangegeven. Het snijpunt van de lijn door deze twee punten met de middelste as (kracht) geeft de kracht van de aardbeving. Zie figuur 12.62.

In het nomogram zie je bijvoorbeeld dat als op een afstand van ongeveer 220 km vanaf het epicentrum de amplitude 20 mm is, er een aardbeving heeft plaatsgevonden met een kracht van 5 op de schaal van Richter. Er geldt: als de *amplitude* van de ene aardbeving tien keer zo groot is als de amplitude van een andere aardbeving, dan is de *kracht* van de zwaarste



figuur 12.62

beving 1,0 groter dan de kracht van de lichtste beving.

- a** Laat dit zien voor twee aardbevingen waarvan op 100 km van het epicentrum de ene een amplitude van 0,1 mm heeft en de andere een amplitude van 1 mm. Gebruik de figuur op het werkblad.

Examenwerkwoord
Laten zien dat
Zie bladzijde 241.

Ook met behulp van een formule kan uit de afstand D tot het epicentrum en de amplitude A de kracht op de schaal van Richter berekend worden. Deze kracht wordt in één decimaal nauwkeurig gegeven.

Voor de kracht op de schaal van Richter geldt:

$$K = \log(A) + 1,6 \cdot \log(D) - 0,15 \quad \text{voor } D \leq 200 \quad \dots (1)$$

$$K = \log(A) + 3 \cdot \log(D) - 3,38 \quad \text{voor } D > 200 \quad \dots (2)$$

Hierin is K de kracht op de schaal van Richter, A de amplitude in mm en D de afstand tot het epicentrum in km.

De hoeveelheid schade die een aardbeving aanricht, hangt af van de amplitude. Bij een amplitude van meer dan 1000 mm is er grote kans op schade aan gebouwen. Hoe verder men van het epicentrum verwijderd is, hoe kleiner de amplitude.

Op 12 mei 2008 was er in de regio Sichuan in China een aardbeving met een kracht van 7,9 op de schaal van Richter. Het cirkelvormige gebied rond het epicentrum waar de amplitude minstens 1000 mm bedroeg, werd tot rampgebied uitgeroepen.

- b** Bereken met behulp van formule (2) de oppervlakte van het rampgebied in vierkante kilometers. Geef je eindantwoord in duizendtallen.

Formule (1) is te schrijven in de vorm $K = \log(p \cdot A \cdot D^q)$.

- c** Bereken p en q . Geef je eindantwoorden in één decimaal.

57 2018-II

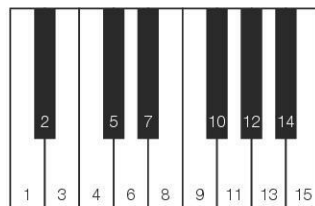
In figuur 12.63 zijn de witte en zwarte toetsen van een gewone piano getekend. In totaal heeft deze piano 88 toetsen.



figuur 12.63

De toetsen worden genummerd van links naar rechts. Zie figuur 12.64, waarin de eerste vijftien toetsen met de bijbehorende volgnummers zijn getekend.

De tonen die met de toetsen van de piano voortgebracht worden, hebben verschillende frequenties. Hoe verder een toets naar rechts zit, hoe groter de frequentie van de bijbehorende toon. Bij de toets met volgnummer 1 hoort een toon met een frequentie van 27,5 Hz (hertz). Bij de toets met volgnummer 49 hoort een toon met een frequentie van 440 Hz.



figuur 12.64 Toetsen met volgnummers.

Het verband tussen het volgnummer van een toets en de frequentie van de bijbehorende toon is exponentieel. Dus: wanneer je achtereenvolgens de toetsen van links naar rechts bespeelt, neemt de frequentie van de opeenvolgende tonen telkens met hetzelfde percentage toe.

a Bereken algebraïsch dit percentage in twee decimalen.

In de twintigste eeuw is de digitale piano ontwikkeld. Dit instrument, dat ook 88 toetsen heeft, bootst een gewone piano na. Bij digitale piano's wordt een andere nummering voor de toetsen gebruikt: elke toets van de digitale piano heeft een zogeheten *MIDI-nummer*. Zie figuur 12.65, waarin de eerste vijftien toetsen met de bijbehorende MIDI-nummers zijn getekend.

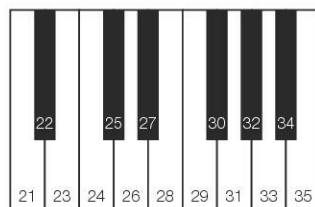
De frequentie van de toon die bij een bepaalde toets

hoort, kan worden berekend met de formule

$f = 440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(m-69)}$. Hierin is f de frequentie van de toon in Hz en m het MIDI-nummer van de bijbehorende toets.

Algemeen wordt gesteld dat het menselijk gehoor in staat is om tonen met een frequentie tussen 20 Hz en 20 000 Hz waar te nemen. Iemand wil daarom de digitale piano uitbreiden met een aantal toetsen met MIDI-nummers zodat zoveel mogelijk tonen met frequenties tussen 20 Hz en 20 000 Hz voorkomen.

b Bereken met bovenstaande formule hoeveel toetsen zo'n piano dan zal hebben.



figuur 12.65 Toetsen met MIDI-nummers.

58 2019-II

De functies f en g worden gegeven door $f(x) = 4^{x+1} - 3$ en $g(x) = 8 + {}^2\log(4(x + 1\frac{1}{2}))$. Op de grafiek van f ligt een punt met y -coördinaat 13. Dat is het punt A .

Op de grafiek van g ligt ook een punt met y -coördinaat 13. Dat is het punt B .

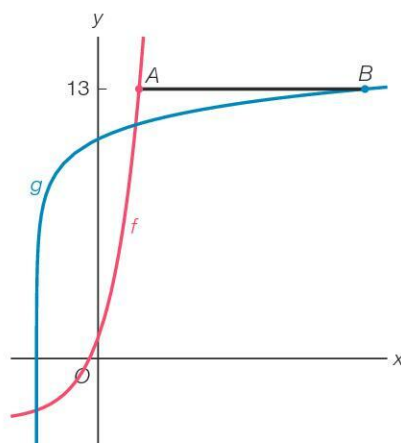
Zie figuur 12.66, waarin het lijnstuk AB is getekend.

a Bereken exact de lengte van lijnstuk AB .

De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van de standaardfunctie $y = {}^2\log(x)$ door een horizontale en een verticale translatie.

Door het functievoorschrift van g te herleiden tot de vorm $g(x) = {}^2\log(x + a) + b$ kun je op exacte wijze berekenen om welke horizontale en verticale translatie het gaat.

b Bereken op exacte wijze door welke horizontale en verticale translatie de grafiek van g ontstaat uit de grafiek van de standaardfunctie $y = {}^2\log(x)$.



figuur 12.66

59 2016-I

De functie f is gegeven door $f(x) = 3^{x-1} - 2$. Zie figuur 12.67.

a Bereken exact de waarde van x waarvoor geldt dat $f(x) = 241$.

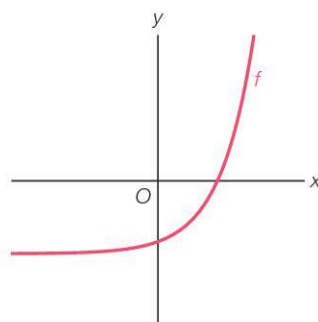
De functie g is gegeven door $g(x) = 3^x$.

Op de grafiek van g worden de volgende transformaties uitgevoerd: eerst de verschuiving 6 omlaag gevolgd door de vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de x -as. Op deze manier ontstaat de grafiek van de functie h .

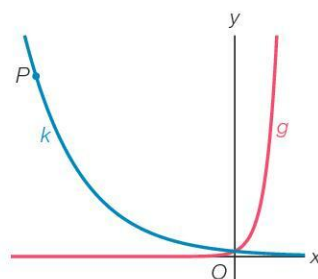
b Toon op algebraïsche wijze aan dat h dezelfde functie is als f .

De grafiek van g wordt met a vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie k . Het punt $P(-20, 81)$ ligt op de grafiek van k .

c Bereken exact de waarde van a .



figuur 12.67

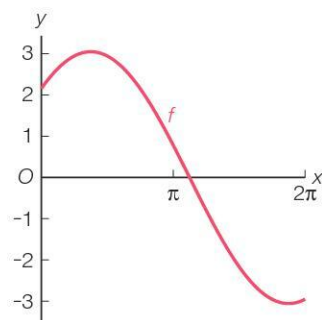


figuur 12.68

12.5 Goniometrie

- 60 a** Op het domein $[0, 2\pi]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 3 \cos(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi)$. Zie figuur 12.69.
Bereken exact de x -coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.

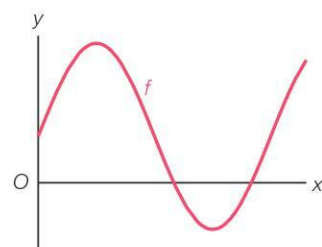
- b** Op het domein $[0, 2\pi]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 3 \cos(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi)$. Zie figuur 12.69.
Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f .



figuur 12.69

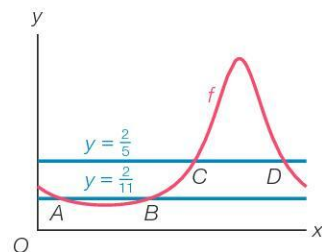
- c** Op het domein $[0, 1\frac{1}{2}]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2 + 4 \sin(\frac{1}{2}\pi x)$. Zie figuur 12.70.
Bereken exact de x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.

- d** Op het domein $[0, 1\frac{1}{2}]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2 + 4 \sin(\frac{1}{2}\pi x)$. Zie figuur 12.70.
Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f .



figuur 12.70

- e** Op het domein $[0, 2\pi]$ is de functie f gegeven door $f(x) = \frac{1}{3 \sin(x) + 4}$. De lijnen $y = \frac{2}{11}$ en $y = \frac{2}{5}$ snijden de grafiek van f in de punten A, B, C en D . Zie figuur 12.71.
De x -coördinaat van A is x_A en de x -coördinaat van D is x_D .
Bereken exact $x_D - x_A$.



figuur 12.71

- f** Gegeven is de formule $F = \frac{391}{1 + 0,15 \cdot \cos(a)}$.
Beredeneer op algebraïsche wijze dat de minimale waarde van F gelijk is aan 340 en dat de maximale waarde van F gelijk is aan 460.

- g** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 3 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) - \cos(2x + \frac{1}{4}\pi)$.
De grafiek van f is een sinusöide, dus f heeft een functievoorschrift van de vorm $f(x) = a + b \sin(c(x - d))$.
Bereken mogelijke waarden van a, b, c en d . Rond zo nodig af op drie decimalen.

Examenwerkwoord
Beredeneren
Zie bladzijde 241.

h Op het domein $[0, 2]$ is de functie f gegeven door

$$f(x) = 3 + 2 \sin(\pi(x - \frac{1}{3})).$$

Een functie g heeft een functievoorschrift van de vorm

$$g(x) = a + b \cdot \cos(c(x - d)).$$

Voor de functie g geldt:

- de periode is 3
- het hoogste punt van de grafiek valt samen met het hoogste punt van de grafiek van f
- de amplitude van de grafiek van g is vier keer zo groot als de amplitude van de grafiek van f .

Bereken mogelijke exacte waarden van a , b , c en d .

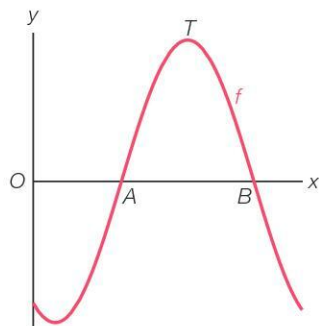
i Op het domein $[0, 3]$ is de functie f gegeven door

$$f(x) = 4 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - 1)).$$

De grafiek snijdt de x -as in de punten A en B en heeft een top T . Zie figuur 12.72.

De parabool $p: y = ax^2 + bx + c$ heeft top T en snijdt de x -as in A en B .

Bereken exact de waarden van a , b en c .



figuur 12.72

Kenmerken van sinusoiden

Van de goniometrische standaardgrafieken

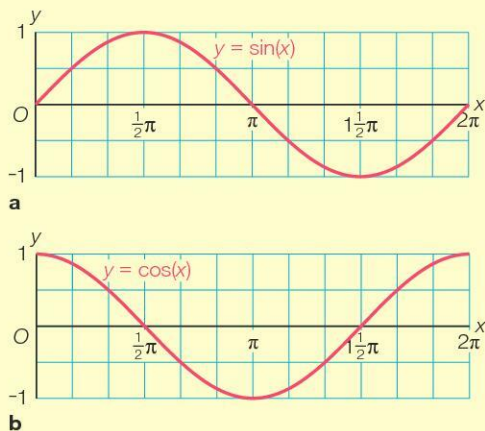
$y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ zijn

- evenwichtsstand 0
- amplitude 1
- periode 2π
- beginpunt sinus is $(0, 0)$
- beginpunt cosinus is $(0, 1)$.

De sinusoiden $y = a + b \sin(c(x - d))$ en

$y = a + b \cos(c(x - d))$ ontstaan via transformaties uit de standaardgrafieken.

We nemen steeds $c > 0$.



figuur 12.73

De sinusoiden $y = a + b \sin(c(x - d))$ en $y = a + b \cos(c(x - d))$

	$b > 0$	$b < 0$
sin	stijgend door (d, a)	dalend door (d, a)
cos	$(d, a + b)$ is een hoogste punt	$(d, a + b)$ is een laagste punt

Uit de formule $y = 4 + 3 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$ lees je de vier kenmerken van de sinusöide af.

- evenwichtsstand is 4
- amplitude is 3
- periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- stijgend door $(\frac{1}{6}\pi, 4)$

Sinusöiden tekenen

Je moet een sinusöide kunnen tekenen

I als de formule is gegeven

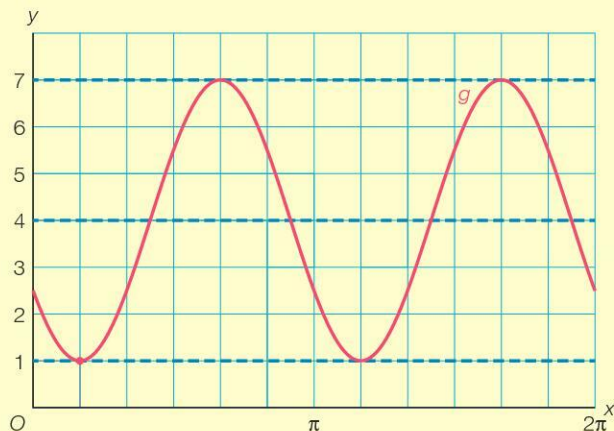
II op grond van een omschrijving in woorden.

Daarbij gebruik je de vier kenmerken van een sinusöide.

Om de grafiek te tekenen van de functie $g(x) = 4 - 3 \cos(2x - \frac{1}{3}\pi)$ herleid je het functievoorschrift tot $g(x) = 4 - 3 \cos(2(x - \frac{1}{6}\pi))$ en noteer je de vier kenmerken:

- evenwichtsstand 4
- amplitude 3
- periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- $(\frac{1}{6}\pi, 1)$ is een laagste punt.

Daarna teken je de grafiek.



figuur 12.74

Is gegeven dat het temperatuurverloop op een dag wordt beschreven door een sinusoïde, dat om 4 uur 's middags de maximale temperatuur van 20°C wordt bereikt en dat de minimale temperatuur 8°C is, dan bedenk je het volgende om de grafiek te tekenen.

- de periode is 24 uur
- de evenwichtsstand is $\frac{20+8}{2} = 14^\circ\text{C}$
- het minimum wordt bereikt op
 $t = 16 - \frac{1}{2} \cdot \text{periode} = 16 - 12 = 4$
- de grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand op
 $t = 16 - \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 16 - 6 = 10$
- de grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand op
 $t = 16 + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 16 + 6 = 22$.

Zo krijg je de grafiek hiernaast.



figuur 12.75

Formule opstellen bij sinusoïde

Je moet in de volgende gevallen de formule van een sinusoïde kunnen opstellen.

- de grafiek is gegeven
- er is een omschrijving in woorden gegeven
- de grafiek is te plotten op de GR

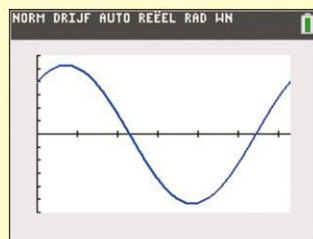
Daarbij gebruik je de vier kenmerken van een sinusoïde.

Is gegeven dat het functievoorschrift van de functie $f(x) = 2 \cos(x) + 4 \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$ te schrijven is in de vorm $f(x) = a \cos(x + b)$, dan bereken je als volgt mogelijke waarden van a en b in twee decimalen.

1 Voer de formule $y_1 = 2 \cos(x) + 4 \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$ in op de GR en plot de grafiek in een geschikt venster. Zie figuur 12.76.

2 Gebruik de optie maximum. Je krijgt $x \approx 0,71$ en $y \approx 5,29$.

Dus $a \approx 5,29$ en $b \approx -0,71$.



figuur 12.76 De grafiek van f in het venster met $0 \leq x \leq 2\pi$ en $-6 \leq y \leq 6$.

Kies je $a < 0$ dan gebruik je de optie minimum. Je krijgt

$$f(x) = -5,29 \cos(x - 3,86).$$

Een mogelijk functievoorschrift van de vorm $f(x) = a \sin(x + b)$ is

$$f(x) = 5,29 \sin(x - 5,43).$$

Goniometrische vergelijkingen exact oplossen

De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ los je op met behulp van de eenheidscirkel.

$\sin(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$

$\sin(A) = 1$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\sin(A) = -1$ geeft $A = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = 0$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$\cos(A) = 1$ geeft $A = k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = -1$ geeft $A = \pi + k \cdot 2\pi$

De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

los je op door uit de exacte-waarden-cirkel één oplossing B af te lezen.

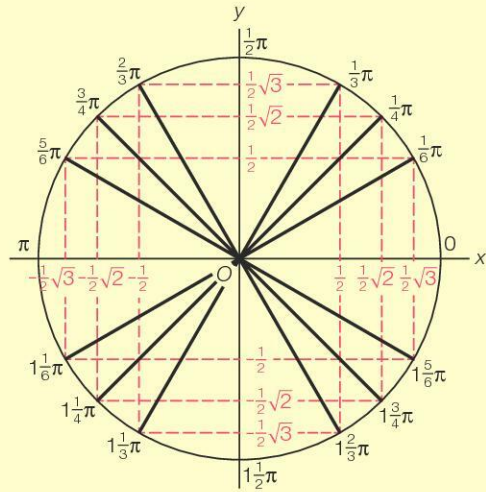
Daarna gebruik je

$\sin(A) = C$ geeft

$A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$

$\cos(A) = C$ geeft

$A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$.



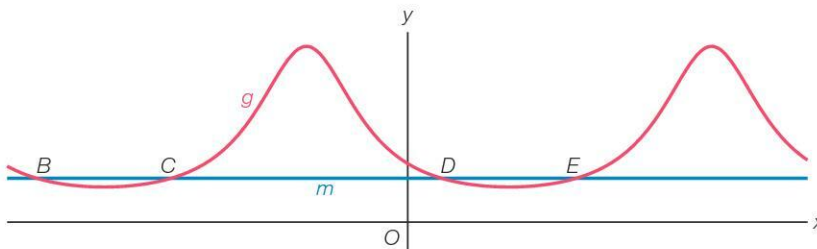
figuur 12.77

61 2017-I

De functie g is gegeven door $g(x) = \frac{1}{2\sin(x) + 3}$.

De lijn m is gegeven door $y = \frac{1}{4}$.

Op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ snijdt m de grafiek van g achtereenvolgens in de punten B, C, D en E . Zie figuur 12.78.



figuur 12.78

Bereken exact de afstand tussen B en E .

62 2016-I

Van de maan is ook bij een wolkeloze hemel niet altijd een even groot gedeelte zichtbaar. Het percentage van de maan dat zichtbaar is, verloopt bij benadering periodiek. Voor het jaar 2017 is dit percentage in Nederland te benaderen met de formule $P = 50 + 50 \sin(0,212769t - 1,042563)$.

Hierin is P het percentage van de maan dat zichtbaar is en is t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 januari 2017 om 0:00 uur.

a Bereken de periode van P in hele minuten nauwkeurig.

De vorm van het zichtbare gedeelte van de maan wordt de *schijngestalte* van de maan genoemd. Vier speciale schijngestalten zijn *nieuwe maan*, *eerste kwartier*, *volle maan* en *laatste kwartier*. Zie figuur 12.79, waarin ze op volgorde staan afgebeeld, elk met het bijbehorende percentage van de maan dat zichtbaar is.



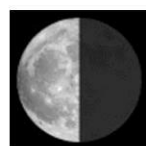
nieuwe maan
0% zichtbaar



eerste kwartier
50% zichtbaar



volle maan
100% zichtbaar



laatste kwartier
50% zichtbaar



nieuwe maan
0% zichtbaar

figuur 12.79

De volgorde waarin deze schijngestalten voorkomen, is dus altijd: eerst nieuwe maan, dan eerste kwartier, dan volle maan en daarna laatste kwartier. Daarna volgt opnieuw nieuwe maan, enzovoort.

b Bereken met behulp van de formule voor P op welke datum in 2017 het voor het eerst nieuwe maan was.

c Onderzoek met behulp van de formule voor P tussen welke twee opeenvolgende schijngestalten de maan zich op 22 februari 2017 bevond.

63 2017-II

Op het domein $[0, 2]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 1 - 2 \sin(\pi x)$.

a Bereken exact de nulpunten van f .

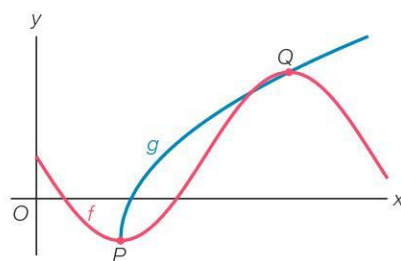
Verder is gegeven de functie g door

$$g(x) = -1 + \sqrt{16x - 8}.$$

Zie figuur 12.80.

De punten P en Q zijn de toppen van de grafiek van f .

b Bewijs dat P en Q op de grafiek van g liggen.

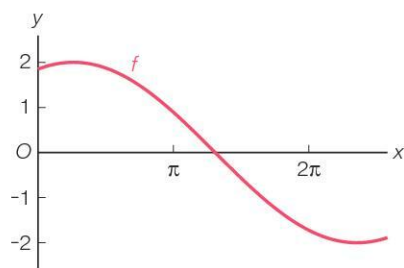


figuur 12.80

64 2016-II

Op het domein $[0, \frac{5}{2}\pi]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2 \cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi)$. Zie figuur 12.81.

- a** Bereken exact de x -coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.



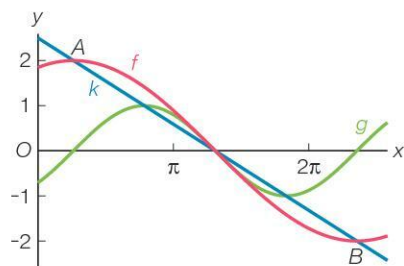
figuur 12.81

De punten A en B zijn de toppen van de grafiek van f . De lijn $k: y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{5}{2}$ gaat door A en B .

Op hetzelfde domein is de functie g gegeven door $g(x) = \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$.

De toppen van de grafiek van g liggen ook op k . Zie figuur 12.82.

- b** Toon dit met een exacte berekening aan.



figuur 12.82

65 2017-II

De dwergplaneet Pluto beweegt om de zon. De afstand van Pluto tot de zon is niet altijd even groot.

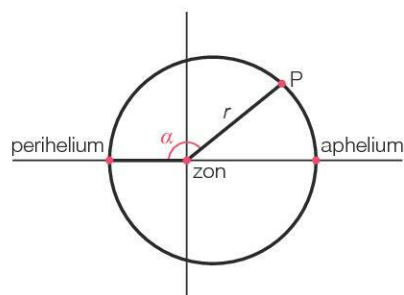
De plaats waar Pluto zich het dichtst bij de zon bevindt wordt het *perihelium* genoemd, de plaats waar Pluto zich het verst van de zon af bevindt het *aphelium*. De baan van Pluto wordt in een assenstelsel weergegeven met de zon in de oorsprong en het perihelium en het aphelium op de x -as.

Een model voor de afstand van Pluto tot de zon

luit $r = \frac{37,5}{1 + 0,25 \cdot \cos(\alpha)}$. Hierin is r de afstand

van Pluto tot de zon in astronomische eenheden AE (1 AE = 150 miljoen km) en is α de hoek tussen het lijnstuk zon-Pluto en het lijnstuk zon-perihelium. Zie figuur 12.83.

Beredeneer op algebraïsche wijze met behulp van de formule dat de minimale afstand van Pluto tot de zon gelijk is aan 30 AE en de maximale afstand 50 AE.



figuur 12.83



Pluto

66 2018-I

Op het domein $[0, 2]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2 + 3 \sin(\pi(x + \frac{1}{4}))$.

Verder is de lijn l gegeven door de vergelijking $y = \frac{7}{2}$. Zie figuur 12.84.

Op het gegeven domein snijden l en de grafiek van f elkaar in twee punten.

- a** Bereken exact de x -coördinaten van deze punten.

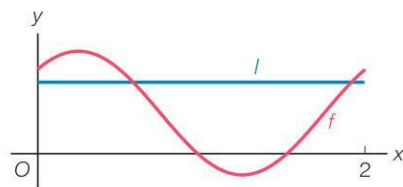
Een functie g heeft een functievoorschrift van de vorm $g(x) = p + q \cdot \cos(r(x - s))$.

Er geldt:

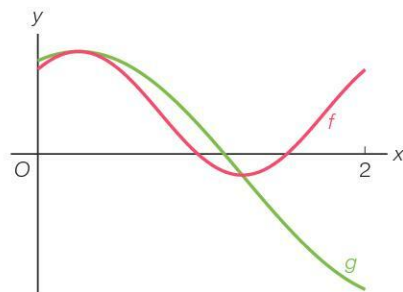
- De periode van g is 4.
- Het hoogste punt van de grafiek van g valt samen met het hoogste punt van de grafiek van f .
- De amplitude van de grafiek van g is twee keer zo groot als de amplitude van de grafiek van f .

Zie figuur 12.85.

- b** Bereken mogelijke exacte waarden van p , q , r en s .



figuur 12.84



figuur 12.85

67 2018-II

Op het domein $[-\frac{8}{7}, \frac{8}{7}]$ wordt de functie f gegeven door $f(x) = 3 \sin(\pi x)$.

De lijn l is de lijn met vergelijking $y = \frac{3}{2}$. Lijn l snijdt de grafiek van f in de punten P en Q . Zie figuur 12.86.

- a** Bereken exact de x -coördinaten van P en Q .

De grafiek van f snijdt de positieve x -as in het punt A . De grafiek van f heeft een top rechts van de y -as. Dit is punt T . De punten A en T zijn in figuur 12.87 aangegeven.

Er bestaat één derdegraadsfunctie g waarvoor geldt:

- het functievoorschrift is van de vorm $g(x) = ax^3 + bx$

én

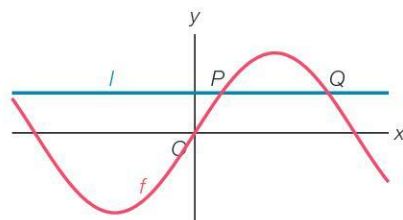
- de grafiek gaat door A en T .

De grafiek van g is gestippeld getekend in figuur 12.87

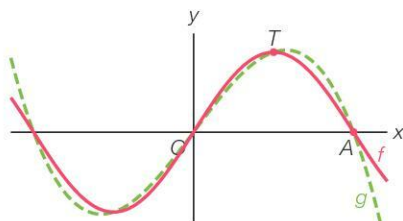
Uit bovenstaande gegevens volgt $a + b = 0$ en $\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b = 3$.

- b** Toon dit aan.

- c** Bereken exact de waarden van a en b .



figuur 12.86



figuur 12.87

68 2019-I

Op het domein $[0, 2\pi]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 1 + 2\cos(2x + \frac{1}{3}\pi)$.

De grafiek van f snijdt de x -as achtereenvolgens in de punten P , Q , R en S . Zie figuur 12.88.

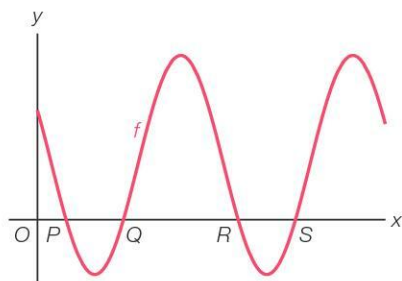
De afstand PS is a keer zo groot als de afstand QR .

a Bereken de waarde van a .

Op hetzelfde domein $[0, 2\pi]$ is functie g gegeven door $g(x) = f(x) - 2 + 5\cos(2(x - \frac{1}{4}\pi))$.

De grafiek van g is ook een sinusoïde. Met andere woorden: g heeft een functievoorschrift van de vorm $g(x) = p + q \cdot \cos(r(x - s))$.

b Bereken mogelijke waarden van p , q , r en s . Geef deze waarden zo nodig in drie decimalen.



figuur 12.88

69 2019-II

De functie f wordt gegeven door $f(x) = -1 + \sin(2x - \frac{1}{6}\pi)$.

De grafiek van f is in figuur 12.89 weergegeven.

Er zijn vier waarden van x in het interval $0 \leq x \leq 2\pi$ waarvoor geldt $f(x) = -\frac{1}{2}$.

a Bereken exact deze vier waarden van x .

De grafiek van f raakt de x -as in oneindig veel punten.

Van deze raakpunten is het punt A het punt met de kleinste positieve x -coördinaat. Door A gaat een stijgende lijn l die een hoek van 75° met de x -as maakt. Punt B is het snijpunt van lijn l met de y -as. Zie figuur 12.90.

b Bereken de afstand tussen A en B . Geef je eindantwoord in twee decimalen.

We bekijken nu de functie g . Deze heeft de volgende eigenschappen:

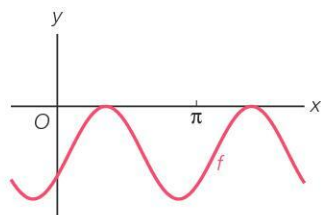
- De grafiek van g is een sinusoïde.
- De periode van de grafiek van g is drie keer zo klein als de periode van de grafiek van f .
- De amplitude van de grafiek van g is vier keer zo klein als de amplitude van de grafiek van f .
- Een laagste punt van de grafiek van g valt samen met het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.

Zie figuur 12.91.

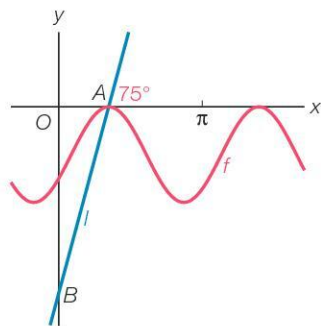
Functie g heeft een functievoorschrift van de vorm $g(x) = d + a \cdot \cos(bx)$.

Hierin zijn a , b en d getallen.

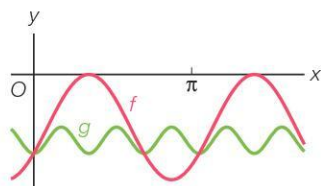
c Bereken exact voor elk van deze drie getallen een mogelijke waarde.



figuur 12.89



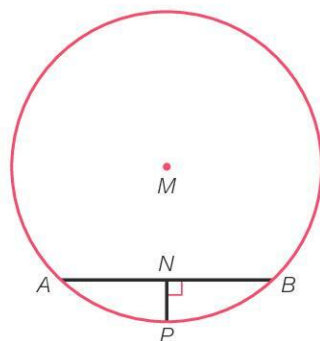
figuur 12.90



figuur 12.91

12.6 Meetkunde zonder coördinaten

- 70 a** In figuur 12.92 is de cirkel met middelpunt M getekend. De punten A en B liggen op de cirkel en $AB = 76$. Het punt N is het midden van AB en de loodlijn door N snijdt de cirkel in het punt P . Er geldt dat $NP = 15$. Bereken de straal van de cirkel. Rond af op één decimaal.

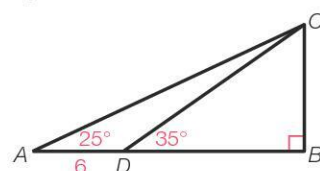


figuur 12.92

- b** In driehoek ABC is $\angle A = 25^\circ$ en $\angle B = 90^\circ$. Op AB ligt het punt D waarbij $AD = 6$ en $\angle BDC = 35^\circ$. Zie figuur 12.93.

Bereken BC . Rond af op twee decimalen.

- c** Van driehoek ABC is $AB = 1$, $AC = 6$ en $\angle A = 25^\circ$. Bereken BC . Rond af op drie decimalen.

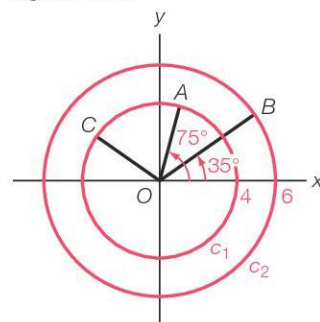


figuur 12.93

- d** Gegeven is de cirkel c_1 met middelpunt O en straal 4 en de cirkel c_2 met middelpunt O en straal 6. Het punt A ligt op c_1 en de draaiingshoek van A is 75° . Het punt B ligt op c_2 en de draaiingshoek van B is 35° . Zie figuur 12.94.

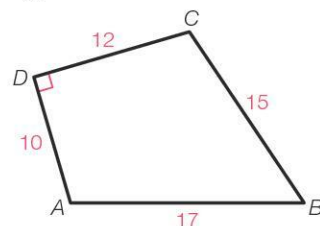
Bereken AB . Rond af op twee decimalen.

- e** In figuur 12.94 is het punt C op c_1 getekend waarbij $BC = 8$. Bereken $\angle BOC$. Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.



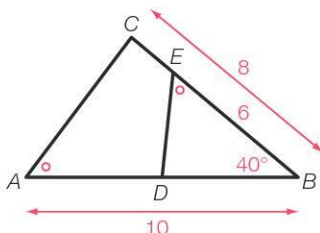
figuur 12.94

- f** Zie de vierhoek $ABCD$ in figuur 12.95. Bereken hoek B in graden. Rond af op één decimaal.
- g** Van driehoek ABC is $AB = 10$, $AC = 6$, $\angle B = 35^\circ$ en $\angle C > 90^\circ$. Bereken $\angle A$ in graden. Rond af op één decimaal.
- h** Van driehoek ABC is $AB = 10$, $\angle A = 40^\circ$ en $\angle B = 55^\circ$. Bereken de oppervlakte van de driehoek. Rond af op twee decimalen.



figuur 12.95

- i** Van driehoek ABC is $AB = 10$, $BC = 8$ en $\angle B = 40^\circ$. Het punt D ligt op AB en het punt E ligt op BC , zo dat $BE = 6$ en $\angle BED = \angle A$. Zie figuur 12.96. Bereken DE . Rond af op twee decimalen.



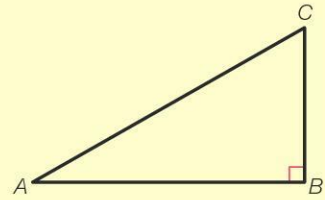
figuur 12.96

Goniometrie, Pythagoras en oppervlakte

In rechthoekige driehoeken zijn hoeken en zijden te berekenen met goniometrie en de stelling van Pythagoras.

In figuur 12.97 geldt

$$\begin{aligned}\sin(\angle A) &= \frac{BC}{AC} & \tan(\angle A) &= \frac{BC}{AB} \\ \cos(\angle A) &= \frac{AB}{AC} & AB^2 + BC^2 &= AC^2\end{aligned}$$



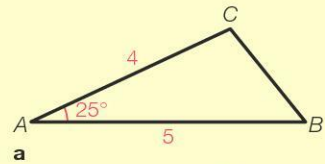
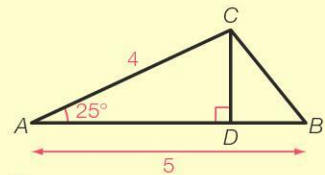
figuur 12.97

Om de oppervlakte van $\triangle ABC$ in figuur 12.98a te berekenen, gebruik je $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD$. Hierin is CD de hoogte die hoort bij de basis AB . Zie figuur 12.98b.

In de rechthoekige driehoek ACD is $\sin(25^\circ) = \frac{CD}{4}$,

dus $CD = 4 \sin(25^\circ)$.

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \sin(25^\circ) \approx 4,23$$



figuur 12.98

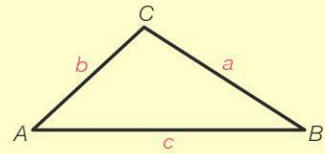
De sinusregel en de cosinusregel

In elke driehoek ABC geldt de sinusregel.

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}$$

Om de sinusregel te kunnen gebruiken moet in elk geval een zijde met een overstaande hoek zijn gegeven.

In het geval één hoek en twee zijden zijn gegeven, kan het zijn dat er twee driehoeken mogelijk zijn.



figuur 12.99

In elke driehoek ABC geldt de cosinusregel.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\angle A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\angle B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\angle C)$$

De cosinusregel gebruik je

- I voor het berekenen van een zijde van een driehoek als twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven
- II voor het berekenen van een hoek van een driehoek als de drie zijden zijn gegeven.

71 2016-I

De klok in figuur 12.100 heeft een kleine wijzer met een lengte van 8,5 cm en een grote wijzer met een lengte van 12,5 cm. Het uiteinde van de kleine wijzer noemen we A ; het uiteinde van de grote wijzer noemen we B .

Als het bijvoorbeeld 2:00 uur is, dan wijst de kleine wijzer precies naar 2 en staat de grote wijzer precies op 12.

Is het bijvoorbeeld 2:15 uur (kwart over twee), dan heeft de kleine wijzer precies een kwart van de hoek tussen de 2 en de 3 afgelegd; de grote wijzer staat dan precies op 3.

Op de klok in figuur 12.100 is het precies 2:25 uur (vijf voor half drie).

Bereken in deze situatie de afstand tussen A en B . Geef je antwoord in gehele millimeters nauwkeurig.



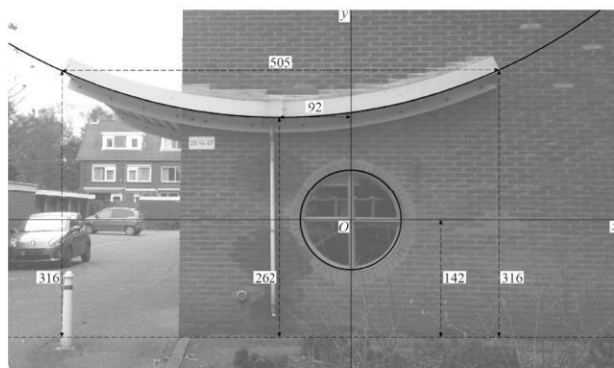
figuur 12.100

72 2016-II

In de zijgevel van een flat zit een cirkelvormig raam met daarboven een afdakje.

De diameter van het raam is 120 cm. Het middelpunt van het raam zit 142 cm boven de grond.

De uiteinden van het afdakje bevinden zich 316 cm boven de grond en liggen 505 cm uit elkaar. Het laagste punt van het afdakje bevindt zich 262 cm boven de grond en 92 cm links van het middelpunt van het raam. Er wordt een assenstelsel aangebracht zodanig dat het middelpunt van het raam samenvalt met de oorsprong. De eenheden in dit assenstelsel zijn in cm. Zie figuur 12.101, waarin bovendien een aantal maten is gegeven.



figuur 12.101

De onderrand van het afdakje heeft de vorm van een deel van een cirkel. Uit de gegevens volgt dat de straal van deze cirkel afgerond op hele cm gelijk is aan 617 cm.

- Toon dit op algebraïsche wijze aan.
- Bereken de afstand tussen het afdakje en het raam. Geef je antwoord in gehele cm nauwkeurig.

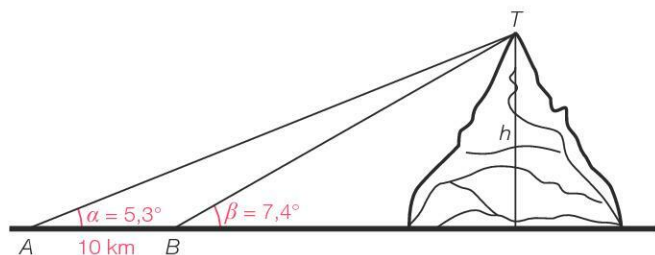
73 2016-II

De vulkaan Etna op Sicilië is vanaf de Middellandse Zee zichtbaar.

De hoogte van de Etna kan worden bepaald door middel van een zogeheten *driehoeksmeting*.

Vanaf een boot op zee wordt twee keer de hoek gemeten waaronder de top T van de Etna te zien is. Eerst wordt hoek $\alpha = 5,3^\circ$ gemeten, vervolgens wordt 10 km in een rechte lijn richting de Etna gevaren en hoek $\beta = 7,4^\circ$ gemeten.

Zie figuur 12.102, waarin ook de hoogte h van de top T ten opzichte van de Middellandse Zee is weergegeven. Deze figuur is niet op schaal.



figuur 12.102

In dit model worden de kromming van de aarde en de ooghoogte van de waarnemer boven de zee verwaarloosd.

Bereken de hoogte van de Etna ten opzichte van de Middellandse Zee.

Geef je antwoord in tientallen meters nauwkeurig.

74 2018-II

Een *trapezium* is een vierhoek met twee evenwijdige zijden.

Gegeven is trapezium $ABCD$ waarvan de zijden AB en CD evenwijdig zijn. Verder geldt: $AB = 6$, $AC = 5$, $AD = 3$, $\angle B = 55^\circ$ en $\angle ACB > 90^\circ$.

De afstand tussen AB en CD , de hoogte van het trapezium, is h .

Zie figuur 12.103.

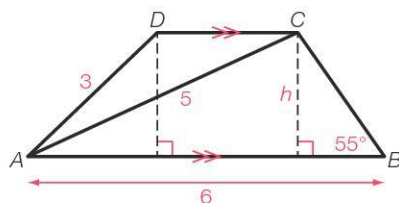
Afgerond op twee decimalen is $\angle BAC$ gelijk aan $24,41^\circ$.

- a** Bereken $\angle BAC$ algebraïsch en rond je eindantwoord af op drie decimalen.

De oppervlakte van het trapezium is te berekenen met de formule

$$\text{oppervlakte} = h \cdot \frac{AB + CD}{2}.$$

- b** Bereken de oppervlakte van het trapezium met behulp van deze formule. Rond je eindantwoord af op één decimaal.



figuur 12.103

75 2017-I

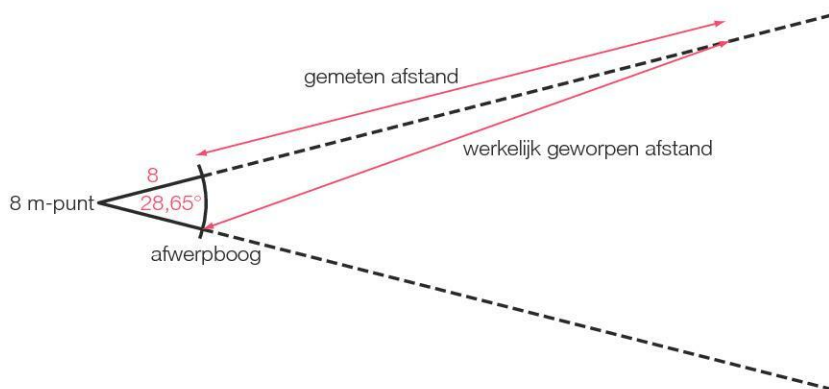
Een atleet gooit een speer vanaf de *afwerpboog*. Dit is een deel van de cirkel met het zogeheten 8m-punt als middelpunt en een straal van 8 meter. De speer moet landen in het gebied binnen twee lijnen die een hoek van $28,65^\circ$ met elkaar maken. Deze twee lijnen snijden elkaar in het 8m-punt.

De *gemeten afstand* wordt als volgt gemeten:

- trek een rechte lijn vanaf de plek waar de speer landt tot het 8m-punt;
- de lengte van het deel van deze lijn van de plek waar de speer landt tot de afwerpboog, is de gemeten afstand.

Door deze manier van meten kan het voorkomen dat er een verschil is tussen de werkelijk geworpen afstand en de gemeten afstand.

In figuur 12.104 staat hiervan een bovenaanzicht.



figuur 12.104

De winnaar van het speerwerpen bij de mannen op de Olympische Spelen van 2012 won met een gemeten afstand van 84,58 meter. Als hij zou hebben geworpen volgens de situatie in de figuur, dan zou zijn werkelijk geworpen afstand groter zijn geweest.

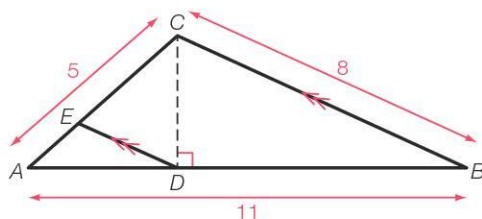
Bereken in hele centimeters nauwkeurig het verschil tussen de gemeten afstand en de werkelijk geworpen afstand in deze situatie.

76 2019-II

Gegeven is driehoek ABC met $AB = 11$, $BC = 8$ en $AC = 5$.

Het punt D ligt op zijde AB , zo dat lijnstuk CD loodrecht op zijde AB staat. Het punt E ligt op zijde AC , zo dat lijnstuk DE evenwijdig is met zijde BC . Zie figuur 12.105.

Bereken algebraïsch de lengte van lijnstuk DE . Geef je eindantwoord in twee decimalen.



figuur 12.105

77 2018-I

[► WERKBLAD] Met behulp van een hoogwerker kan een monteur bepaalde werkzaamheden op hoogte uitvoeren. Zie de foto.

Hierbij staat de monteur in een bak, die is bevestigd aan twee scharnierende draagarmen. De twee draagarmen draaien ten opzichte van elkaar en ten opzichte van het wagentje waaraan de onderste draagarm bevestigd is.

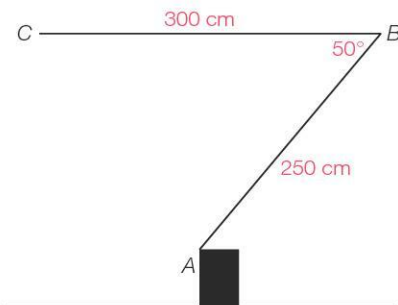


In deze opgave bekijken we een vereenvoudigd 2-dimensionaal model van de situatie. Zie figuur 12.106, waarin dit is weergegeven.

Punt A is het scharnierpunt op het wagentje, punt B het scharnierpunt van de twee draagarmen en punt C het einde van de bovenste draagarm waaraan de bak bevestigd is.

- De lengte van draagarm AB is 250 cm.
- De lengte van draagarm BC is 300 cm.

In de situatie zoals weergegeven in figuur 12.106 geldt dat BC horizontaal is. Hoek ABC is dan 50 graden.

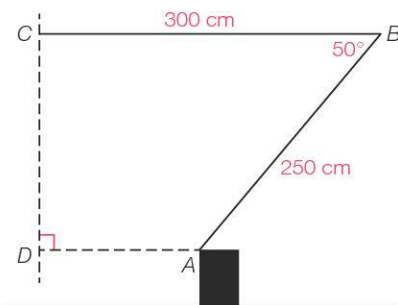


figuur 12.106

In figuur 12.107 is ook het punt D weergegeven. D is de loodrechte projectie van A op de verticale lijn door C . Deze verticale lijn is in figuur 12.107 gestippeld weergegeven. Deze figuur staat ook op het werkblad.

De afstand AD is ongeveer 139 cm.

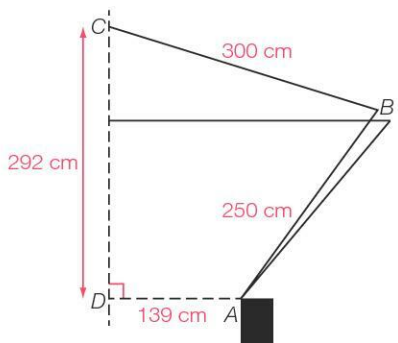
- a** Toon dit aan. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op het werkblad.



figuur 12.107

Wanneer de monteur de bak recht omhoog verplaatst, zal hoek ABC toenemen. Zie figuur 12.108. Deze figuur staat ook op het werkblad. De monteur verplaatst de bak recht omhoog tot $CD = 292$ cm.

- b** Bereken in dit geval de toename van hoek ABC in hele graden nauwkeurig. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op het werkblad.



figuur 12.108

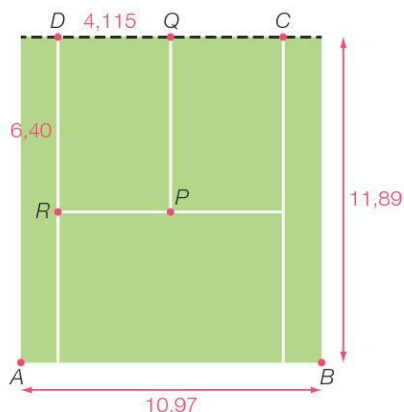
78 2019-I

Bij tennis is het soms moeilijk om te beoordelen of een bal binnen of buiten de lijnen de grond raakt. Vaak wordt met behulp van camera's vastgesteld waar een bal de grond raakt.

Om een idee te krijgen hoe zo'n systeem werkt, bekijken we een sterk vereenvoudigd tweedimensionaal model met twee camera's. In figuur 12.109 is een bovenaanzicht van één helft van het rechthoekige speelveld weergegeven.

Bovendien zijn in deze figuur enkele maten gegeven. Alle maten zijn in meters.

Ook zijn de witte lijnen op het speelveld aangegeven. In het vervolg van deze opgave verwaarlozen we de breedte van deze lijnen. De bal beschouwen we als een punt.



figuur 12.109

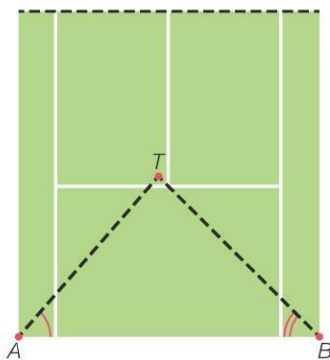
In figuur 12.109 geldt:

- de stippellijn door CD geeft de plaats van het net aan;
- de lengte van de achterlijn AB is 10,97 m;
- de afstand van de achterlijn tot aan het net is 11,89 m;
- $DQ = 4,115$ m en $DR = 6,40$ m;
- rechthoek $PQDR$ is het servicevak, waarin de bal volgens de regels van het spel na de eerste slag op de grond moet komen.

In figuur 12.110 is hetzelfde speelveld als in figuur 12.109 nogmaals weergegeven. De camera's zijn boven de punten A en B gemonteerd.

In figuur 12.110 geldt:

- A is de positie van camera 1 en B is de positie van camera 2;
- het punt T is de plaats waar de bal na de eerste slag op de grond komt;
- $\angle A$ is de hoek ten opzichte van de achterlijn waaronder camera 1 de bal waarneemt;
- $\angle B$ is de hoek ten opzichte van de achterlijn waaronder camera 2 de bal waarneemt;
- in de situatie zoals weergegeven in figuur 12.110 is de bal nog net in het servicevak $PQDR$ op de grond gekomen.



figuur 12.110

We bekijken nu een andere situatie, waarbij $\angle A = 45,4^\circ$ en $\angle B = 44,2^\circ$. Onderzoek met behulp van een berekening of in deze situatie de bal in rechthoek $PQDR$ op de grond is gekomen.

12.7 Meetkunde met coördinaten

- 79 a** De lijn k gaat door het punt $A(-2, 0)$ en staat loodrecht op de lijn l door de punten $B(3, 0)$ en $C(0, 5)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van k met de y -as.

- b** Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$ die door het punt $A(1, 6)$ gaat.

- c** In figuur 12.111 is $M(0, 3)$ het middelpunt van de cirkel c_1 met straal 1 en $N(4, 0)$ het middelpunt van de cirkel c_2 met straal 2.

Bereken de afstand tussen de cirkels.

- d** Toon aan dat de lijn $k: y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3}$ de cirkel $c: x^2 + y^2 = 13$ raakt.

- e** De lijn l gaat door de punten $A(0, -5)$ en $B(3\frac{1}{3}, 0)$.
Onderzoek of l de lijn $k: y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3}$ loodrecht snijdt.

- f** Bereken exact de afstand van de lijn $k: y = -\frac{2}{3}x + 4$ tot de oorsprong.

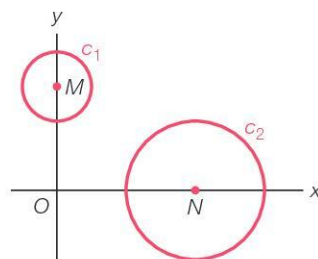
- g** Gegeven is de cirkel $c: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 13$. De lijn k raakt c in het punt $A(5, 4)$ en snijdt de x -as in het punt B .

Bereken de coördinaten van B .

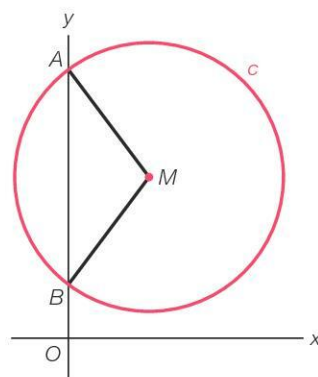
- h** Bereken exact de afstand van de cirkel $c: x^2 + y^2 - 20x - 12y + 120 = 0$ tot de x -as.

- i** De cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 = 0$ met middelpunt M snijdt de y -as in de punten A en B . Zie figuur 12.112.

Bereken $\angle AMB$. Geef het antwoord in graden en rond af op één decimaal.

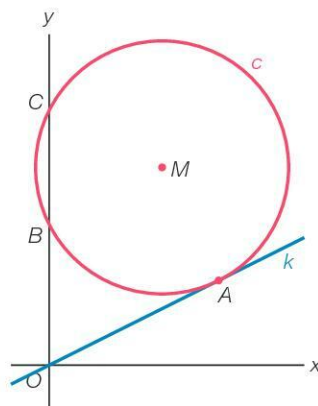


figuur 12.111



figuur 12.112

- j** De cirkel c heeft middelpunt M met $y_M = 7$. Deze cirkel raakt de lijn $k: y = \frac{1}{2}x$ in het punt $A(6, 3)$ en snijdt de y -as in de punten B en C . Zie figuur 12.113.
Bereken exact de coördinaten van B en C .



figuur 12.113

- k** Gegeven is de cirkel $c: (x-10)^2 + (y-6)^2 = 29$.
Bewijs dat de lijn k met $r_k = 2\frac{1}{2}$ door het punt $A(3, 3)$ de cirkel raakt.

De hoek tussen twee lijnen

De hoek tussen twee lijnen waarvan de vergelijkingen zijn gegeven, bereken je met behulp van richtingshoeken.

Voor de richtingshoek α van de lijn k geldt $\tan(\alpha) = rc_k$ en $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

Voor de hoek φ tussen twee lijnen met richtingshoeken α en β , waarbij $\alpha > \beta$, geldt

$$\varphi = \alpha - \beta \text{ als } \alpha - \beta \leq 90^\circ$$

$$\varphi = 180^\circ - (\alpha - \beta) \text{ als } \alpha - \beta > 90^\circ.$$

Als voor de lijnen k en l geldt $rc_k \cdot rc_l = -1$, dan staan de lijnen loodrecht op elkaar.

Afstand van punt tot lijn

Voor het berekenen van de afstand van punt A tot lijn k ga je als volgt te werk.

- 1 Stel een vergelijking op van de lijn l door A die loodrecht staat op k .
- 2 Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en l .
- 3 Gebruik $d(A, k) = d(A, B)$.

Voor het berekenen van de afstand tussen de twee punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ gebruik je $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Afstanden bij cirkels

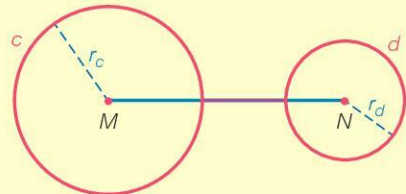
Voor de afstand van een punt A tot een cirkel c met middelpunt M en straal r geldt

$$d(A, c) = r - d(M, A) \text{ als } A \text{ binnen } c \text{ ligt}$$

$$d(A, c) = d(M, A) - r \text{ als } A \text{ buiten } c \text{ ligt.}$$

Voor de afstand tussen cirkel c met middelpunt M en straal r_c en cirkel d met middelpunt N en straal r_d in figuur 12.114 geldt

$$d(c, d) = d(M, N) - r_c - r_d.$$



figuur 12.114

Cirkelvergelijkingen

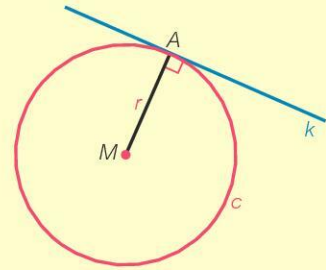
De vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r is $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

Door de haakjes weg te werken is de cirkelvergelijking te schrijven in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Is een cirkel gegeven in deze laatste vorm, dan is deze met kwadraatafsplitsen te schrijven in de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ en hieruit zijn de straal en de coördinaten van het middelpunt af te lezen.

Cirkels en raaklijnen

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt. Dus in figuur 12.115 is de lijn door M en A loodrecht op k . Ook is $d(M, A) = r$, waarbij r de straal van de cirkel is. Deze eigenschappen gebruik je bij het oplossen van de raaklijnproblemen I en II hieronder. Bij de raaklijnproblemen III en IV gebruik je dat voor raken geldt dat de discriminant gelijk is aan nul.



figuur 12.115 De lijn k raakt de cirkel c in het punt A .

- I Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven zijn
 - een cirkel
 - een punt op de cirkel waar k de cirkel raakt.
- II Stel een vergelijking op van de cirkel c als gegeven zijn
 - het middelpunt van c
 - een lijn waaraan c raakt.
- III Stel vergelijkingen op van de lijnen k als gegeven zijn
 - een cirkel waaraan k raakt
 - de richting van k .
- IV Stel vergelijkingen op van de lijnen k als gegeven zijn
 - een cirkel waaraan k raakt
 - het snijpunt van k met de y -as.

Bij het opstellen van een vergelijking van een raaklijn k aan een cirkel c met middelpunt M in een gegeven punt A op c (raaklijnprobleem I) ga je als volgt te werk.

- 1 Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A .
- 2 Gebruik $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, om de richtingscoëfficiënt rc_k van k te berekenen.
- 3 Gebruik rc_k en de coördinaten van A om een vergelijking van k op te stellen.

80 2017-I

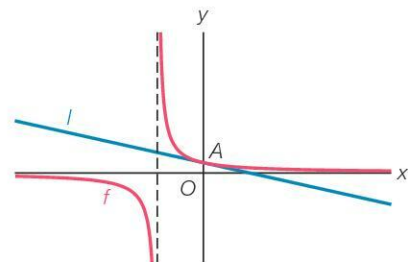
De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{2x+3}$.

De grafiek van f snijdt de y -as in het punt A .

De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in A .

Zie figuur 12.116.

Bereken exact de afstand van l tot de oorsprong.



figuur 12.116

81 2016-I

Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ die door het punt $A(0, 4)$ gaat.

a Stel een vergelijking op van c .

De punten $B(-3, 0)$ en $C(4, 0)$ liggen op c .

Punt Q is het midden van lijnstuk AC .

Lijn k is de lijn door B en Q . Een vergelijking van k is $y = \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$.

Punt P is het midden van lijnstuk AB .

Lijn l is de lijn door C en P .

Punt S is het snijpunt van k en l . Zie figuur 12.117.

De coördinaten van S zijn $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

b Bewijs dat de coördinaten van S inderdaad $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ zijn.

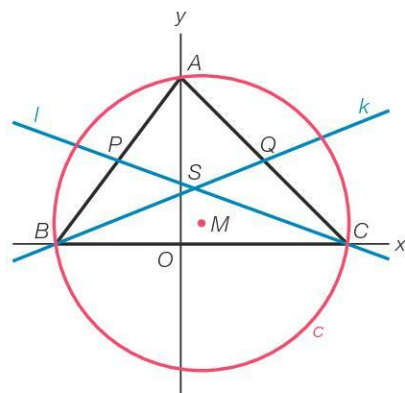
Lijn n gaat door C en staat loodrecht op AB .

Bovendien snijdt lijn n de y -as in punt T .

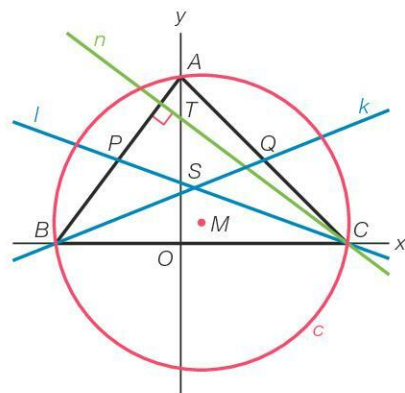
Zie figuur 12.118.

Volgens de achttiende-eeuwse wiskundige Euler liggen de punten M , S en T op één lijn.

c Bewijs dat M , S en T inderdaad op één lijn liggen.



figuur 12.117



figuur 12.118

82 2018-I

De lijn l is gegeven door de vergelijking $y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$.

Verder is gegeven het punt $P(6, 1)$.

De afstand tussen l en P is 5.

a Bewijs dit.

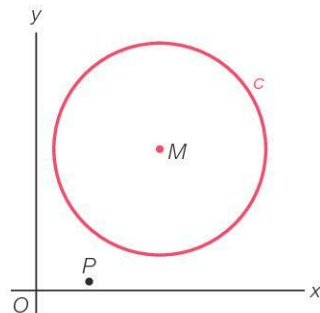
De cirkel c met middelpunt M is gegeven door

$$x^2 + y^2 - 28x - 32y = -308.$$

In figuur 12.119 zijn punt P en cirkel c met middelpunt M weergegeven. De afstand tussen c en P is ook 5.

De afstand tussen M en P is groter dan de afstand tussen M en de x -as.

b Bereken exact het verschil tussen deze twee afstanden.



figuur 12.119

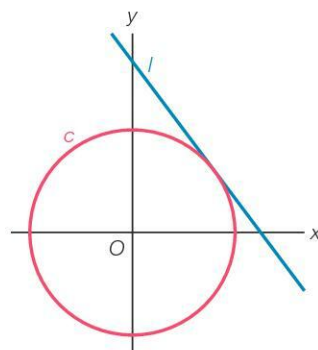
83 2017-I

De cirkel c en de lijn l worden gegeven door

$$c: x^2 + y^2 = 9 \text{ en } l: y = -\frac{4}{3}x + 5.$$

Zie figuur 12.120.

- a** Toon aan dat l raakt aan c .

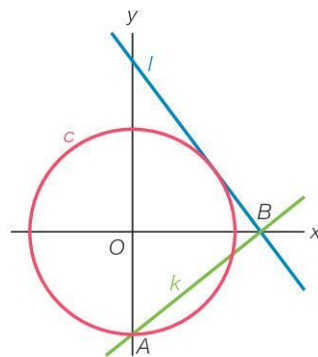


figuur 12.120

Cirkel c snijdt de negatieve y -as in het punt A . Lijn l snijdt de x -as in het punt B . De lijn k is de lijn door A en B . Zie figuur 12.121.

Lijnen k en l lijken elkaar loodrecht te snijden.

- b** Onderzoek of dit het geval is.



figuur 12.121

84 2017-II

De cirkel c met middelpunt $M(0, 5)$ is gegeven door

$$x^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

De punten $C(-4, 8)$ en $D(4, 8)$ liggen op de cirkel. De lijn k is de raaklijn aan c in punt C en de lijn l is de raaklijn aan c in punt D . Punt A is het snijpunt van k met de x -as en punt B is het snijpunt van l met de x -as. Zie figuur 12.122.

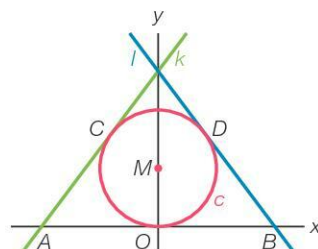
De coördinaten van punt B zijn $(10, 0)$.

- a** Bewijs dit.

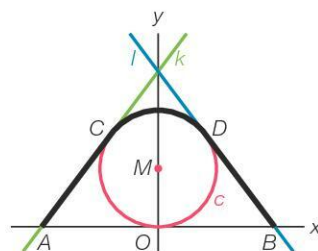
Tussen A en B wordt denkbeeldig een touwtje gespannen dat over de cirkel heen gaat. Het touwtje is zo gespannen dat het tussen C en D precies over de cirkel ligt.

Het touwtje is recht tussen A en C en tussen D en B . Zie figuur 12.123

- b** Bereken de lengte van het touwtje. Rond af op één decimaal.



figuur 12.122



figuur 12.123

85 2017-II

De cirkel c met middelpunt R is gegeven door $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 49$ en de cirkel d met middelpunt S is gegeven door $(x - 14)^2 + (y - 8)^2 = 16$.

Een derde cirkel e , met middelpunt T op de x -as, raakt aan beide cirkels.

Verder liggen c en d buiten e .

Zie figuur 12.124.

De x -coördinaat van T noemen we p , dus $OT = p$.

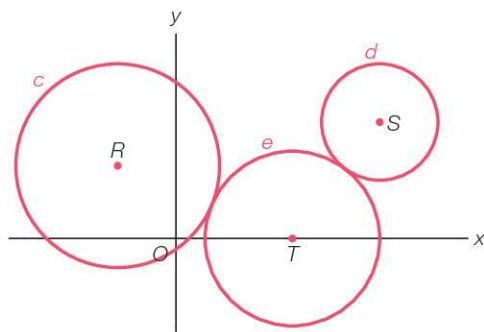
Er geldt: de afstand van R tot T is gelijk aan $\sqrt{p^2 + 8p + 41}$.

a Bewijs dit.

De lijn door R en T gaat door het raakpunt van de cirkels c en e .

Bovendien gaat de lijn door S en T door het raakpunt van de cirkels d en e . Verder is de afstand van S tot T gelijk aan $\sqrt{p^2 - 28p + 260}$.

b Bereken de straal van cirkel e .



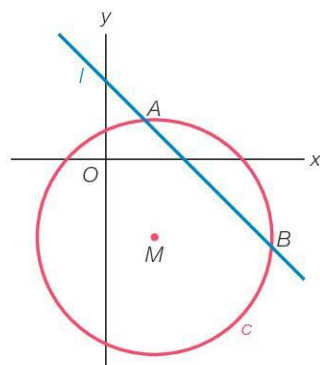
figuur 12.124

86 2018-II

De cirkel c met middelpunt M is gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 - 10x + 16y = 56$.

Lijn l is de lijn door het punt $A(4, 4)$ met richtingscoëfficiënt -1 . Deze lijn snijdt de cirkel behalve in het punt A ook in het punt B . Zie figuur 12.125.

a Bereken exact de coördinaten van B .

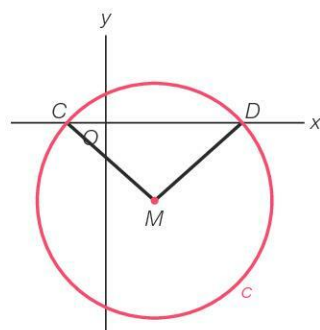


figuur 12.125

De cirkel heeft twee snijpunten met de x -as. Dit zijn de punten $C(-4, 0)$ en $D(14, 0)$.

In figuur 12.126 zijn de stralen MC en MD getekend.

b Bereken $\angle CMD$. Geef je eindantwoord in graden en rond af op één decimaal.



figuur 12.126

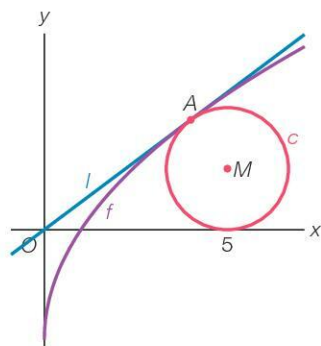
87 2019-I

De functie f is gegeven door $f(x) = -3 + 3\sqrt{x}$.
 Het punt $A(4, 3)$ ligt op de grafiek van f .
 Verder is de lijn l met vergelijking $y = \frac{3}{4}x$ gegeven.
 Lijn l raakt de grafiek van f in A .

a Bewijs dit.

De cirkel c heeft middelpunt M met $x_M = 5$.
 Bovendien raakt lijn l cirkel c in punt A .
 Zie figuur 12.127.

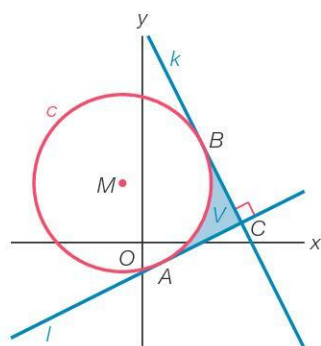
b Bewijs dat c de x -as raakt.



figuur 12.127

88 2019-I

Cirkel c met middelpunt $M(-1, 3)$ raakt lijn l met vergelijking $y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$ in punt A .
 Lijn k staat loodrecht op l en raakt c in punt B .
 Punt C is het snijpunt van k en l .
 Lijnstukken AC en BC en cirkelboog AB sluiten het vlak V in. Zie figuur 12.128, waarin vlak V is gekleurd.
 Bereken algebraïsch de omtrek van V . Geef je eindantwoord in twee decimalen.



figuur 12.128

89 2019-II

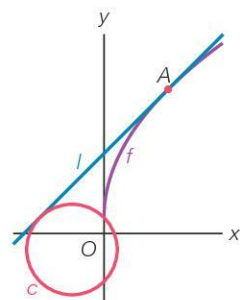
De functie f wordt gegeven door $f(x) = 1 + 4\sqrt{x}$.
 De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $A(4, 9)$.

Verder is gegeven de cirkel c met vergelijking $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 8$.

Zie figuur 12.129.

Lijn l en cirkel c raken elkaar.

a Bewijs dit.



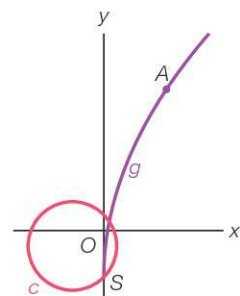
figuur 12.129

Cirkel c heeft twee snijpunten met de y -as. Een van die twee punten ligt onder de x -as. Dit is het punt S . Zie figuur 12.130.

De functie g heeft een functievoorschrift van de vorm $g(x) = p\sqrt{x} + q$.

De grafiek van g heeft S als randpunt en gaat bovendien door A .
 In figuur 12.130 is ook de grafiek van g weergegeven.

b Bereken exact de waarden van p en q .



figuur 12.130

Gemengde opgaven

9 Exponentiële en logaritmische formules

- 1** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 9,6% toe.
- a** Hoeveel procent is de toename per 10 jaar?
 - b** Hoeveel procent is de toename per maand?
 - c** Na hoeveel maanden is de hoeveelheid verdubbeld?
 - d** Na hoeveel jaar is de hoeveelheid vertienvoudigd?
- 2** Een hoeveelheid neemt per dag met 17% af.
- a** Hoeveel procent is de afname per week?
 - b** Hoeveel procent is de afname per uur?
 - c** Na hoeveel uren is de hoeveelheid gehalveerd?
 - d** Na hoeveel dagen is er nog een kwart van de beginhoeveelheid over?

- 3** Wit licht is een mengsel van de kleuren van de regenboog. Gaat wit licht door water, dan worden de verschillende kleuren licht met verschillende percentages per meter geabsorbeerd waardoor het licht van kleur lijkt te veranderen. Van rood licht wordt per meter 60% geabsorbeerd en van blauw licht 10%.

- a** Bereken voor rood en voor blauw licht op welke diepte nog 50% van de oorspronkelijke hoeveelheid licht zichtbaar is. Rond af op gehele cm.
- b** Bereken op welke diepte de hoeveelheid blauw licht tien keer zo groot is als de hoeveelheid rood licht. Neem aan dat de hoeveelheden boven water gelijk zijn en rond af op gehele cm.
- c** De kleur van een vis is van dichtbij niet meer waarneembaar als deze voor meer dan 90% is geabsorbeerd. Van een rode en een blauwe vis zijn van dichtbij de kleuren net niet meer waarneembaar. Hoeveel keer zo diep zwemt de blauwe vis als de rode vis? Rond af op één decimaal.



- 4** Los exact op.
- a** ${}^3\log(4 - 3x) = {}^2\log(\frac{1}{4})$
 - b** $1 + {}^{\frac{1}{4}}\log(5x - 1) + {}^{\frac{1}{4}}\log(3x - 2) = 0$
 - c** $4 \cdot 2^{3x+2} = 4^{x-2}$
 - d** $3^{x-5} = {}^5\log(25)$
 - e** $\log(x - 4) + 2 = \log(25x + 50)$
 - f** ${}^5\log(x + 30) = 3 \cdot {}^5\log(2) + {}^5\log(2x)$

- 5** Schrijf de volgende formules in de vorm $\log(N) = at + b$ of $\log(N) = p + q \cdot \log(t)$. Geef a , b , p en q in twee decimalen.

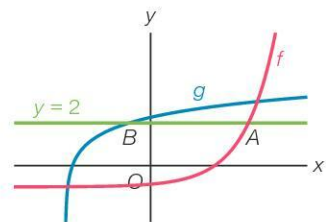
- a $N = 500 \cdot 3,28^t$
- b $N = 180 \cdot t^{-1,75}$
- c $N = 123 \cdot 4,5^{6t-7}$
- d $N = 2t \cdot (3\sqrt{t})^{4,18}$

- 6** Schrijf de volgende formules in de vorm $y = a \cdot b^x$ of $y = px^q$. Geef a en p in gehelen en b en q zo nodig in twee decimalen.

- a $\log(y) = 0,16x + 2,64$
- b $0,8 \cdot \log(y) = 3 \cdot \log(x) + 1$
- c $x = 2\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(y) - 14$
- d ${}^2\log(\sqrt{x}) + {}^2\log(\sqrt{y}) = \sqrt{2}$

- 7** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x-3} - 1$ en $g(x) = {}^3\log(3x + 12)$. De lijn $y = 2$ snijdt de grafieken van f en g in de punten A en B . Zie figuur G.1.

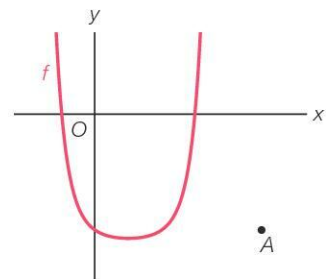
- a Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB .
- b Los op $f(x) < g(x)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- c Bereken door welke translatie de grafiek van g ontstaat uit de grafiek van $y = {}^3\log(x)$.
- d De grafiek van f wordt ten opzichte van de x -as met a vermenigvuldigd waarbij de beeldgrafiek door het punt $C(0, 7)$ gaat. Bereken exact de waarde van a .



figuur G.1

- 8** Gegeven zijn de functie $f(x) = 2^{x^2-2x-1} - 4$ en het punt $A(5, -3\frac{1}{2})$.

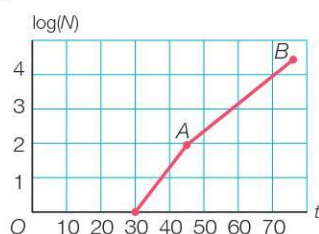
- a Los exact op $f(x) < 0$.
- b De grafiek van f wordt ten opzichte van de y -as met a vermenigvuldigd waarbij de beeldgrafiek door A gaat. Bereken exact de waarde van a .
- c De grafiek van f wordt zo geschoven dat de beeldgrafiek de x -as raakt in de oorsprong. Stel de formule op van de beeldgrafiek. Herleid de formule zo ver mogelijk.
- d De grafiek van f wordt p naar links geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{x^2} - 4$. Bereken exact de waarde van p .



figuur G.2

[▶ WERKBLAD] In het voorjaar van 2020 werd de wereld getroffen door de coronapandemie. De manier waarop deze pandemie werd bestreden verschilde van land tot land. Sommige landen voerden snel een volledige lockdown in, terwijl andere landen in een later stadium ingrijpende maatregelen namen. De effecten hiervan kun je zien als je een grafiek maakt van $\log(N)$, waarin N het aantal geconstateerde besmettingen in het land is en t de tijd in dagen, met $t = 0$ op 31 januari 2020. Vanwege de incubatietijd van het coronavirus zijn de effecten van de genomen maatregelen pas na ruim twee weken zichtbaar in de grafiek.

We nemen aan dat het aantal besmette personen exponentieel groeit als er geen maatregelen worden genomen. In figuur G.3 zie je een grafiek bij het aantal besmette personen N in Rusland. Rusland nam pas laat maatregelen om de verspreiding tegen te gaan. Het punt A hoort bij 16 maart, er waren toen 90 personen besmet, en het punt B hoort bij 16 april, er waren toen 27 500 personen besmet.



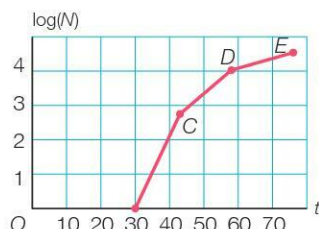
figuur G.3

datum	t
1 februari	1
1 maart	30
1 april	61

- Stel bij het lijnstuk AB een formule op van de vorm $\log(N) = at + b$ en gebruik deze formule om het aantal besmette personen te schatten op 30 april. Rond af op duizendtallen.
- Bereken voor de periode 16 maart-16 april de verdubbelingstijd van N voor Rusland. Geef het antwoord in dagen en rond af op één decimaal.

In figuur G.4 zie je de grafiek die hoort bij het aantal besmette personen N in België.

Het punt C hoort bij 14 maart, er waren toen 560 personen besmet. Het punt D hoort bij 29 maart, er waren toen 10 800 personen besmet. Het punt E hoort bij 16 april, er waren toen 34 800 personen besmet.



figuur G.4

- Hoe kun je aan deze grafiek zien dat België rond 13 maart strenge maatregelen heeft genomen om de verspreiding van het virus te bestrijden?
- Bepaal met behulp van de figuur op het werkblad op welke dag er 1000 besmette personen in België waren.

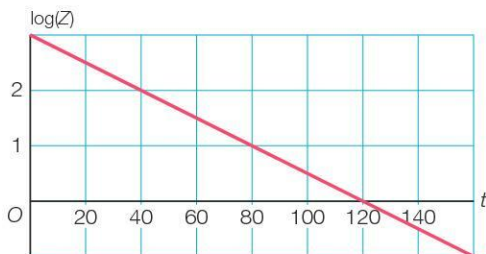
Bij het lijnstuk CD is een formule van de vorm $\log(N) = at + b$ op te stellen.

- Stel deze formule op en werk de formule om tot de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b en g af op drie decimalen.

Als België rond 13 maart geen strenge maatregelen had ingevoerd, dan zouden er op 16 april veel meer besmette personen in België zijn geweest.

- Hoeveel meer? Rond af op duizendtallen.

- 10** Een volledig gevulde opslagtank met een inhoud van 2000 liter bevat een oplossing die voor 50% uit water en voor 50% uit een zuur bestaat. Bovenin de tank stroomt schoon water de tank in. Met dezelfde snelheid wordt onderin de tank het mengsel afgetapt. Door dit proces wordt de tank geleidelijk schoongespoeld. In figuur G.5 zie je de grafiek van $\log(Z)$ als functie van t . Hierin is Z het aantal liter zuur in de tank op tijdstip t met t in seconden.

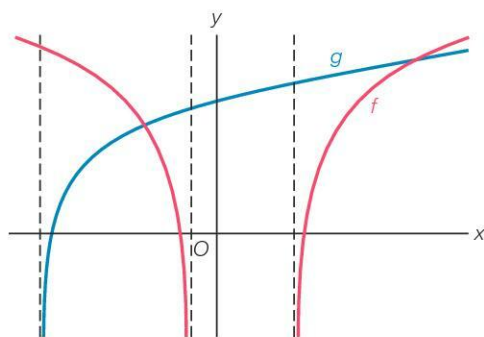


figuur G.5

- Hoeveel liter zuur bevat de tank na 60 seconden?
- Stel de formule van Z op en bereken met welke snelheid de hoeveelheid zuur in de tank na 2 minuten afneemt. Geef het antwoord in liters per minuut en rond af op één decimaal.
- Bereken de halveringstijd van het aantal liter zuur in de tank.
- Na hoeveel seconden bestaat de inhoud van de tank nog maar voor 0,1% uit zuur?

- 11** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(x^2 - 2x - 3)$ en $g(x) = 1 + {}^3\log(x + 7)$. Zie figuur G.6.

- Los exact op $f(x) \leq g(x)$.
- Welke waarden neemt $g(x)$ aan voor $x \leq 5$? Geef een exact antwoord.
- De grafieken van f en g snijden van de lijn $x = -2$ het lijnstuk AB af. Bereken de lengte van AB .
- De lijn $y = 3$ snijdt de grafiek van f in de punten C en D . Bereken exact de lengte van het lijnstuk CD .
- De lijn $y = \frac{1}{4}x + 2$ snijdt de grafiek van g in de punten E en F . Bereken de lengte van het lijnstuk EF in drie decimalen.



figuur G.6

12 Tijdens ruimtereizen is de zwaartekracht die op het lichaam van astronauten werkt zeer gering. Als gevolg hiervan neemt de dichtheid van hun botten af. Het verloop van deze afname tijdens ruimtereizen wordt gegeven door de formule $B = 69 - 69 \cdot 0,99936^t$. Hierin is B de procentuele afname van de botdichtheid en t de tijd in dagen.

- a** Beredeneer met behulp van de formule dat je altijd minstens 31% botdichtheid behoudt.
- b** Maak t vrij bij $B = 69 - 69 \cdot 0,99936^t$ en bereken met de gevonden formule na hoeveel dagen de botdichtheid met 10% is afgenomen.

Het gevaar van botbreuken door afname van de botdichtheid wordt uitgedrukt in een T-score. Hierbij wordt de botdichtheid van astronauten vergeleken met de gemiddelde botdichtheid van de bevolking. Er geldt

de formule $T = \frac{\left(\frac{100 - B}{100}\right)V - 0,858}{0,120}$ met T de afwijking van het gemiddelde en V de botdichtheid van een astronaut voor aanvang van een missie. De ruimtevaartorganisatie NASA vindt T-scores boven de -2 acceptabel.

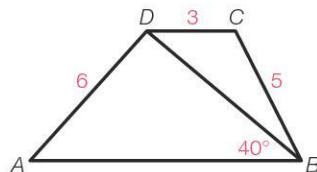
De T-score is relevant voor lange ruimtereizen, zoals een expeditie naar Mars. Voor een reis naar deze planeet zijn twee scenario's uitgewerkt: een reis van 500 dagen en een reis van 1000 dagen. Het nadeel van een snelle reis is dat deze meer energie kost en daardoor moeilijker uit te voeren is. Neem aan dat een astronaut voorafgaand aan een missie een botdichtheid heeft van 0,840.

- c** Onderzoek voor beide scenario's of deze acceptabele T-scores opleveren.
- d** Bereken hoeveel dagen de astronaut in de ruimte mag zijn als hij boven de norm voor de T-score van de NASA moet blijven.



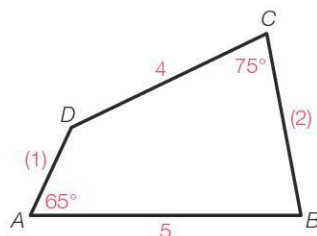
10 Meetkundige berekeningen

- 13** Gegeven is het trapezium $ABCD$ met $AD = 6$, $BC = 5$, $CD = 3$, $\angle ABD = 40^\circ$ en $AB \parallel CD$. Afgerond op één decimaal is $BD = 6,9$.
- Bereken BD in twee decimalen.
 - Bereken de oppervlakte van $ABCD$. Rond af op twee decimalen.



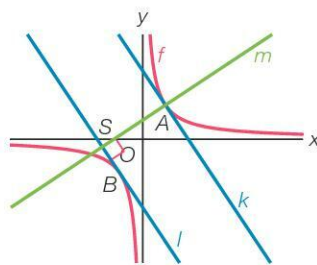
figuur G.7

- 14** Van vierhoek $ABCD$ is gegeven $AB = 5$, $CD = 4$, $\angle A = 65^\circ$, $\angle C = 75^\circ$ en $BC = 2 \cdot AD$. Bereken AD en BC . Rond af op twee decimalen.



figuur G.8

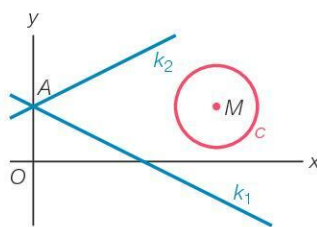
- 15** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{6}{x}$. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$. De lijn l is evenwijdig met k en raakt de grafiek van f in het punt B . De lijn m gaat door A en snijdt de lijn l loodrecht in het punt S . Zie figuur G.9. Bereken $\angle ABS$ in graden. Rond af op één decimaal.



figuur G.9

- 16** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 20x - 6y + 104 = 0$ met middelpunt M en straal r . Om vergelijkingen van de lijnen k_1 en k_2 op te stellen die door het punt $A(0, 3)$ gaan en afstand $\sqrt{5}$ tot c hebben, kun je de volgende strategie gebruiken.

- Stel een vergelijking op van de cirkel d met middelpunt M en straal $r + \sqrt{5}$.
- Stel vergelijkingen op van de lijnen k_1 en k_2 die d raken.
 - Stel vergelijkingen op van de lijnen k_1 en k_2 door A die afstand $\sqrt{5}$ tot c hebben.
 - Stel vergelijkingen op van de lijnen l_1 en l_2 door het punt $B(0, 2)$ die afstand $\sqrt{10}$ tot het punt $N(4, 4)$ hebben.



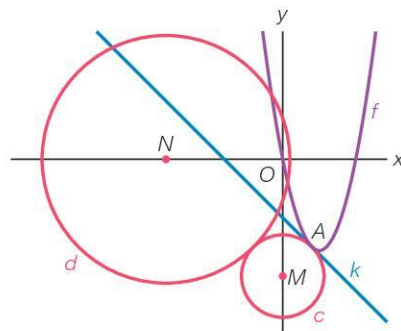
figuur G.10

- 17** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x$. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$. De cirkel c heeft middelpunt M op de y -as en raakt k in A .

Het punt N ligt op de x -as waarbij $MN \parallel k$.

De cirkel d met middelpunt N raakt c .

Stel een vergelijking op van d .



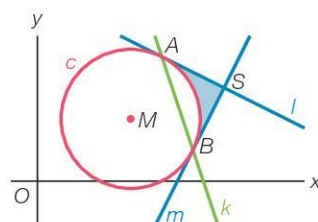
figuur G.11

- 18** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ met middelpunt M en de lijn $k: y = -3x + 16$ die c snijdt in de punten A en B .

De lijnen l en m raken c in A en B en snijden elkaar in het punt S . Zie de figuur hiernaast.

Vierhoek $AMBS$ is een vierkant.

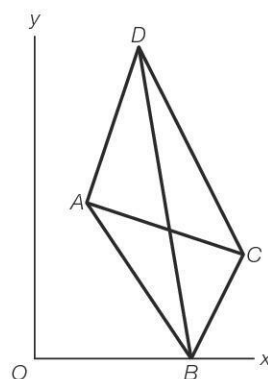
- Bewijs dit door aan te tonen dat $AMBS$ drie rechte hoeken en twee aanliggende gelijke zijden heeft.
- Bereken exact de omtrek van het gebied dat wordt ingesloten door de lijnen l en m en de cirkel.
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de lijnen l en m en de cirkel.



figuur G.12

- 19** Gegeven is de vierhoek $ABCD$ met $A(1, 3)$, $B(3, 0)$, $C(4, 2)$ en $D(2, 6)$. Zie figuur G.13.

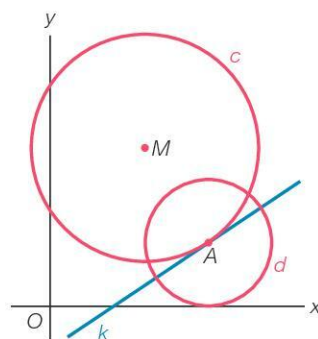
- Bereken de hoek tussen de lijnen AC en BD .
- Bereken $d(A, CD)$.
- De lijn $k: y = 1$ snijdt vierhoek $ABCD$ in de punten E en F .
Bereken exact $d(E, F)$.



figuur G.13

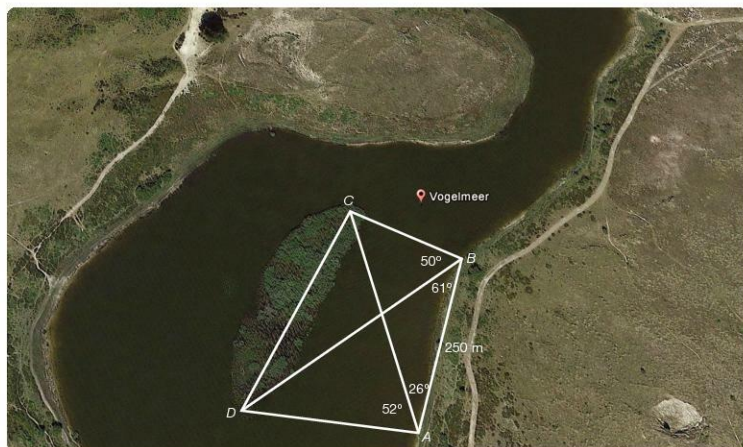
- 20** Gegeven zijn de cirkel c met middelpunt $M(3, 5)$ die door het punt $A(5, 2)$ gaat en de cirkel d met middelpunt A die de x -as raakt. Zie figuur G.14.

- Stel een vergelijking op van c en van d van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
- De lijn k raakt c in A .
Bereken de hoek waaronder k de y -as snijdt.
- Bereken exact $d(M, d)$.



figuur G.14

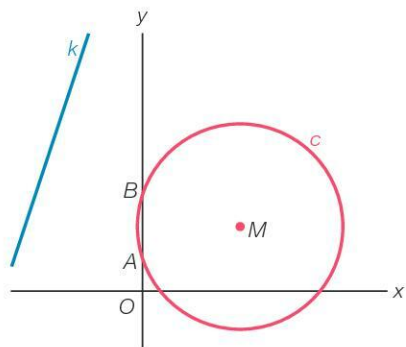
- 21** Koen wil de lengte van het eiland in het Vogelmeer in de duinen van Schoorl bepalen. Hij heeft op de grond vier hoeken en een afstand bepaald. Verder gebruikt hij een luchtfoto. Zie hieronder. Bereken de lengte CD van het eiland in het Vogelmeer. Rond af op gehele meters.



figuur G.15

- 22** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ met middelpunt M en de lijn $k: y = 3x + 13$. Zie figuur G.16.

- Stel vergelijkingen op van de lijnen l_1 en l_2 die evenwijdig zijn met k en c raken.
- Bereken $d(c, k)$.
- De cirkel c snijdt de y -as in de punten A en B . De lijnen m en n raken c in de punten A en B . Bereken de hoek tussen m en n .



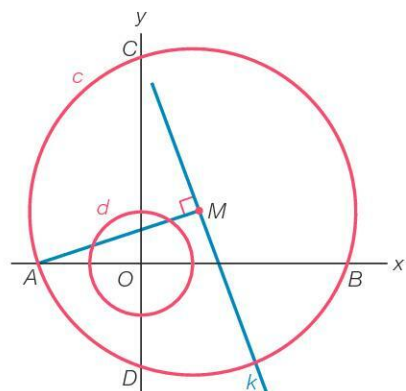
figuur G.16

- 23** Gegeven zijn de cirkels $c: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$ en $d: x^2 + y^2 = 1$.

M is het middelpunt van c .

De cirkel c snijdt de x -as in de punten A en B en de y -as in de punten C en D . De lijn k gaat door M en staat loodrecht op AM . Zie figuur G.17.

- Bereken exact de afstand tussen de cirkels.
- Bereken algebraïsch de oppervlakte van vierhoek $ADBC$.
- Onderzoek met een berekening of het punt C op k ligt.



figuur G.17

11 Verbanden en functies

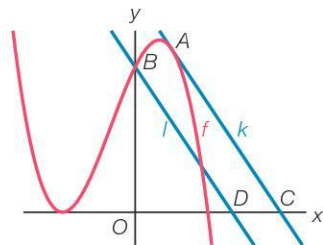
- 24** Onderzoekers hebben gevonden dat het wereldwijde energieverbruik E per seconde evenredig is met $N^{1,63}$. Hierin is N de wereldbevolking.
- Bereken hoeveel keer zo groot E wordt als N verdubbelt. Rond af op één decimaal.
 - Met hoeveel procent zou de wereldbevolking moeten afnemen om het energieverbruik per seconde te halveren?
 - In 1800 waren er een miljard mensen op aarde en was het energieverbruik per seconde $7 \cdot 10^{11}$ watt. Bereken bij hoeveel wereldbewoners het energieverbruik per seconde $2 \cdot 10^{13}$ watt is.

- 25** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 4)(x + 2)$.

De afgeleide van f is $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 2x + 2$.

- Toon dit aan.
- Bewijs dat een top van de grafiek van f op de x -as ligt.
- De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$. De lijn l is evenwijdig met k en gaat door het snijpunt B van de grafiek van f met de y -as. De lijnen k en l snijden de x -as in de punten C en D . Zie figuur G.18.

Bereken exact het verschil tussen de x -coördinaten van C en D .



figuur G.18

- 26** Gegeven is de functie $f(x) = -(2x - 1)^4 + 6$.
- Hoe ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $y = x^4$?
 - Geef de extreme waarde en het bereik van f .
 - Los de vergelijking $f(x) = -10$ algebraïsch op.
 - De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 1$, snijdt de x -as in het punt B en de y -as in het punt C . Bereken exact de oppervlakte van driehoek OBC .
 - De grafiek van f wordt a naar rechts geschoven en b naar beneden. Zo ontstaat de grafiek van de functie h . De top van de grafiek van h is het punt $(3, 0)$. Bereken exact de waarden van a en b .

- 27** Van een grote partij tomaten is van enkele exemplaren de diameter en het volume gemeten. Zie de volgende tabel.

diameter D in cm	2,0	2,8	3,1	4,4	5,2	5,5
volume V in cm^3	2	5,5	7,5	21	36	42

- Toon aan dat V evenredig is met een macht van D .
- Tomaten met een volume tussen 25 en 35 cm^3 behoren tot klasse II. Welke diameters (in mm nauwkeurig) komen er in klasse II voor?

28 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x}$.

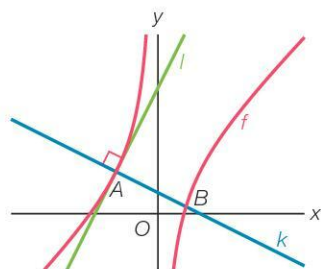
a Bewijs dat de grafiek van f geen toppen heeft.

De lijn l raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -2$.
De lijn k snijdt l loodrecht in A en snijdt de grafiek van f ook in het punt B .

b Bereken op exacte wijze de coördinaten van B .

De lijn m raakt de grafiek van f in het punt C met $x_C = 4$.

c Bewijs dat m door de oorsprong gaat.



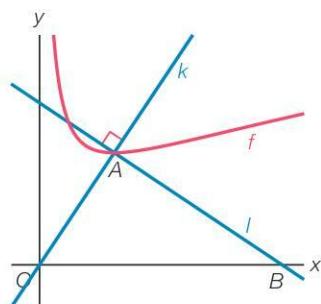
figuur G.19

29 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{8}{x}$.

De lijn k gaat door de oorsprong en door de top A van de grafiek van f . De lijn l snijdt k loodrecht in A en de x -as in het punt B .

De parabool p heeft top A en gaat door B .

Stel op exacte wijze een formule op van p .



figuur G.20

30 Het verband tussen de hartslag en het gewicht van dieren kan worden

beschreven met de formule $H = \frac{280}{G^{0,25}}$. Hierin is H de hartslag in slagen

per minuut en G het gewicht in kilogram. Rond in deze opgave af op gehelen, tenzij anders vermeld.

a Bereken de hartslag die je op basis van de formule zou verwachten bij een hamster die 120 gram weegt. Geef het antwoord in slagen per seconde.

b Onderzoekers hebben in 2019 voor het eerst de hartslag van een walvis nauwkeurig gemeten door sensoren te plaatsen. De onderzochte walvis was 70 000 kg en had een hartslag van 13 slagen per minuut.

Bereken het verschil tussen deze meting en de hartslag die je zou verwachten op basis van de formule.

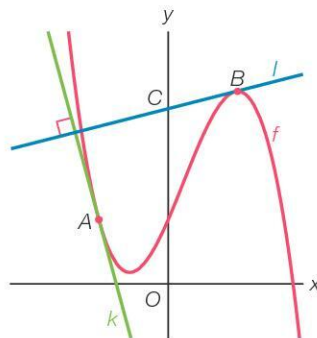
c Een haas is twee keer zo zwaar als een konijn. Bereken hoeveel keer zo hoog de hartslag van het konijn is als die van de haas.

d Schrijf de formule $H = \frac{280}{G^{0,25}}$ in de vorm $G = \frac{a}{H^b}$. Geef a in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.

e Een dier heeft een drie keer zo hoge hartslag als een ander dier. Bereken de verhouding van de gewichten van deze dieren.



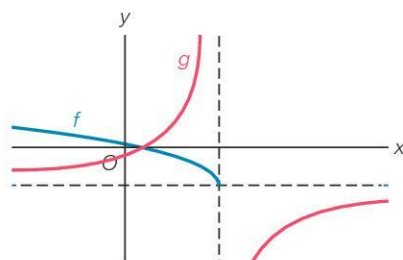
- 31** Gegeven is de functie $f(x) = -1\frac{1}{2}x^3 + x^2 + 2\frac{1}{2}x + 1$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt $A(-1, 1)$.
De lijn l staat loodrecht op k , gaat door de top B van de grafiek van f en snijdt de y -as in het punt C . Zie figuur G.21.
Bereken algebraïsch de coördinaten van C .



figuur G.21

- 32** Gegeven zijn de functies $f(x) = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5-2x}$
en $g(x) = \frac{2x-1}{5-2x}$.

- Bereken het domein en het bereik van f en stel formules op van de asymptoten van de grafiek van g .
- Toon op algebraïsche wijze aan dat de grafieken van f en g elkaar snijden in een punt op de x -as.
- Bereken welke waarden $f(x)$ aanneemt voor $x > -10$.
- De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $y_A = -\frac{1}{2}$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van k .
- De lijn $y = x + 1$ snijdt de grafiek van g in de punten B en C .
Bereken exact de lengte van het lijnstuk BC .
- Schrijf de formule $y = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5-2x}$ in de vorm $x = ay^2 + by + c$.
- Druk x uit in y bij de formule $y = \frac{2x-1}{5-2x}$.



figuur G.22

- 33** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2x-6}{x+2} - x + 3$, $g(x) = x - 5$ en $h(x) = \frac{a}{x}$.
- Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
 - De functie k is gegeven door $k(x) = f(g(x))$.
Schrijf het functievoorschrift van k als één breuk.
 - Gegeven is de verschilfunctie $v(x) = f(x) - g(x)$.
Schrijf het functievoorschrift van v als één breuk.
 - De functie l is gegeven door $l(x) = f(h(x))$.
Bereken exact voor welke waarden van a de grafiek van l door het punt $(\frac{1}{2}, -4)$ gaat.

- 34** Gegeven zijn de functies
 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$ en $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 1\frac{1}{3}$.
 Zie de grafieken in figuur G.23.

De afgeleide van f is te schrijven als

$$f'(x) = (x^2 + 1)(x + 2).$$

- a** Bewijs dit. Werk daarbij de haakjes in $(x^2 + 1)(x + 2)$ weg.

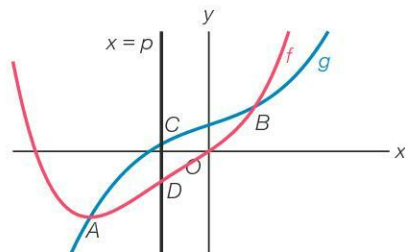
Het punt A is de top van de grafiek van f .

- b** Bewijs dat de grafiek van g door A gaat.

Het andere snijpunt van de grafieken is het punt B met $x_B \approx 0,78$.

De lijn $x = p$ met $x_A < p < x_B$ snijdt de grafieken in de punten C en D .

- c** Bereken algebraïsch voor welke p geldt $f'(p) = g'(p)$ en bereedeneer dat voor deze waarde van p de lengte van het lijnstuk CD maximaal is.

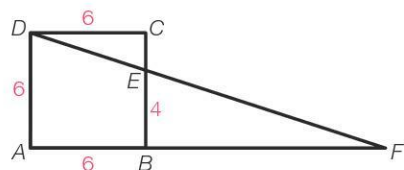


figuur G.23

12 Examentraining

- 35** Voor welke waarde van a gaat de lijn $k: y = ax + 3$ door het punt $A(4, 9)$?

- 36** Van het vierkant $ABCD$ is de zijde 6. Het punt E ligt op BC waarbij $BE = 4$. Het verlengde van DE snijdt het verlengde van AB in het punt F . Bereken BF .

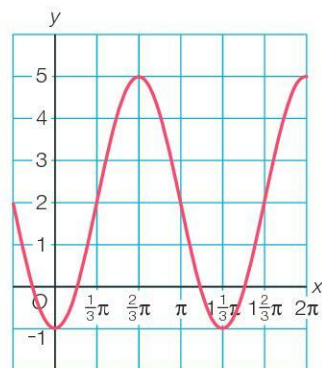


figuur G.24

- 37** Los algebraïsch op $\frac{x^2 - 10}{x - 2} = \frac{3x}{x - 2}$.

- 38** Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = 5x^2 - (2x + 3)^4$.

- 39** In de figuur hiernaast is een sinusoïde getekend. Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$ met $b > 0$.



figuur G.25

40 Onderzoek met een berekening of het punt $A(3, 2)$ op, binnen of buiten de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x + 8y - 8 = 0$ ligt.

41 A is een lineaire functie van t . Voor $t = 5$ is $A = 100$ en voor $t = 15$ is $A = 200$. Druk A uit in t .

42 Herleid $\frac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$.

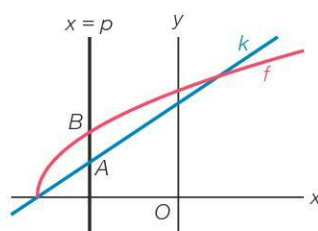
43 Schrijf $\frac{1}{4}a^{-\frac{2}{3}} \cdot (b^{-5})^6 \cdot c^{\frac{1}{2}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

44 De lijn $k: y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ en de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{2x+7}$ hebben twee punten gemeenschappelijk.

Zie de figuur hiernaast.

De verticale lijn met vergelijking $x = p$ snijdt k in het punt A en de grafiek van f in het punt B . De y -coördinaat van B is groter dan de y -coördinaat van A . Er is een waarde van p waarvoor de afstand tussen A en B maximaal is.

Bereken met behulp van differentiëren deze waarde van p .



figuur G.26

45 De daglengte, dat is de tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang, varieert in Zuid-Frankrijk tussen 9 uur op 21 december en 15 uur op 21 juni.

Deze daglengte kan worden beschreven met het model

$L = a + b \sin(c(t-d))$. Hierin is L in uren en t in maanden met $t = 0$ op 21 december.

Bereken mogelijke waarden voor a , b , c en d .

46 Gegeven zijn de cirkels $c: x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ en $d: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$.

Bereken exact de afstand tussen c en d .

47 Bereken exact de oplossingen van $(2x-1)^2 = 10x+1$.

48 Van driehoek ABC is $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 35^\circ$ en $AB = 8$. Bereken de oppervlakte van de driehoek in twee decimalen.

49 Los algebraïsch op $5\sqrt{x} - x = 6$.

50 Bereken exact de afstand van het punt $A(4, 5)$ tot de lijn $k: x + 2y = 4$.

51 Los $5 - {}^2\log(5x+2) = 0$ exact op.

52 Hoe ontstaat de grafiek van de functie $f(x) = 5\sqrt{\frac{1}{2}x+4} - 5$ uit een standaardgrafiek?

- 53** Gegeven is de functie $f(x) = -0,1x^3 + 0,1x^2 + 3x - 2$.
Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -1$ en $x_B = 3$.
Bereken de helling van de lijn AB .
- 54** Los algebraïsch op $4(5x - 2)^3 = 500$.
- 55** Los exact op $2 - {}^3\log(4x - 3) \geq 0$.
- 56** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0$.
Bereken voor welke a de lijn $y = ax + 1$ raaklijn is van c .
- 57** De grafiek van de functie g ontstaat uit die van de functie $f(x) = {}^2\log(x)$ bij de translatie $(4, 0)$, gevolgd door de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met 2.
Het functievoorschrift van g is te schrijven in de vorm $g(x) = a + {}^2\log(x - b)$.
Bereken a en b .
- 58** Welke waarden neemt $f(x) = 4 - 3\sqrt{2x - 5}$ aan voor $x \leq 15$?
- 59** De helling van de grafiek van de functie $f(x) = ax^2 + 6x + a$ in het punt A met $x_A = 3$ is gelijk aan 4.
Bereken a .
- 60** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{x+4} + 2$ en $g(x) = \frac{1}{x-5} + 8$.
Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van f ?
- 61** Los algebraïsch op $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3} = 0$.
- 62** Differentieer $f(x) = (2x + 1)(\sqrt{x} - 1)$.
- 63** Gegeven is de formule $W = 20 + 15 \cos(\pi(t - \frac{3}{4}))$ met domein $[0, 4]$.
Teken de grafiek van W en los op $W > 30$. Rond af op twee decimalen.
- 64** Bereken in graden de hoek tussen de lijnen $k: y = 3x - 4$ en $l: 4x - 3y = 5$.
- 65** Voor welke p ligt het punt $A(3, p)$ op de lijn $l: 2x - 3y = 27$?
- 66** Van driehoek ABC is $AB = 4$, $AC = 3$ en $BC = 6$.
Bereken $\angle A$.
- 67** Schrijf $\frac{a^3}{a^5} \cdot (a^4)^n$ als macht van a .

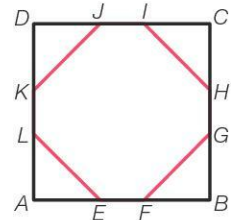
- 68** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4}{x+1} - 2$ en het punt $A(3, -1)$ op de grafiek van f . De lijn k raakt de grafiek van f in A .
De lijn l gaat door A , staat loodrecht op k en snijdt de x -as in het punt B .
Bereken exact de coördinaten van B .

- 69** Bereken algebraïsch de oplossing in $[0, 2\pi]$ van $\sin(\frac{3}{4}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

- 70** Bewijs dat de lijn $k: y = x$ geen punten gemeenschappelijk heeft met de cirkel $c: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$.

- 71** Los algebraïsch op $\frac{1}{2}(2x - 5)^2 + 3 = 5$.

- 72** Gegeven is het vierkant $ABCD$ met zijde 8. Op de zijden van het vierkant liggen de punten van achthoek $EFGHIJKL$ met $EF = GH = IJ = KL$ en $FG = HI = JK = EL$.
Bereken exact EF als gegeven is dat $FG = 2 \cdot EF$.



figuur G.27

- 73** Geef van de functie $f(x) = 6 - \sqrt{2x - 3}$ het domein en het bereik, en de coördinaten van het randpunt van de grafiek.

- 74** Gegeven zijn de punten $P(2, 3)$ en $Q(q, 2q)$.
Druk de afstand tussen P en Q uit in q en bereken in twee decimalen de minimale afstand tussen P en Q .

- 75** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 5,3% af.
Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.

- 76** Zie de tabel hiernaast.
Toon aan dat N evenredig is met $F^{1,5}$ en stel de formule van N op. Rond af op één decimaal.

F	3	7	9	15
N	13,0	46,3	67,5	145,2

- 77** Van een grafiek is bekend dat het differentiequotiënt op $[3, 5]$ gelijk is aan 4 en het differentiequotiënt op $[3, 10]$ gelijk is aan -2.
Bereken het differentiequotiënt op $[5, 10]$.

- 78** De parabool $y = ax^2 + \frac{1}{2}x + 3$ gaat door het punt $(2, 9)$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van de top van de parabool.

- 79** Los algebraïsch op $5 \cdot 2^{3x-2} = 80$.

- 80** Bereken exact de afstand van het punt $A(4, 5)$ tot de cirkel $c: x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$.

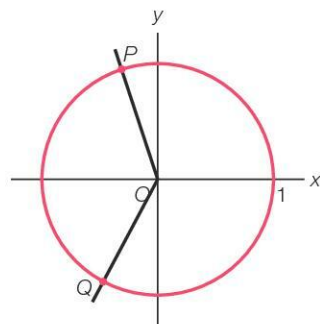
- 81** Herleid de formule $N = \frac{1}{3}\log(16x^3)$ tot de vorm $N = p + q \cdot \frac{1}{3}\log(x)$.
- 82** Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)^3 - 1$. De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A . De lijn k raakt de grafiek in A . Bereken exact de afstand van k tot het punt $B(-1, -1)$.
- 83** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{10x^2}{x^2 + 10}$. Bereken voor welke waarden van x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 1. Rond af op drie decimalen.
- 84** Bereken van de functie $f(x) = -0,2x^3 + 0,3x^2 + 2x - 2$ de nulpunten in twee decimalen.
- 85** Toon met de afgeleide aan dat de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 1$ een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{2}$.
- 86** De grafiek van de functie f ontstaat uit die van $y = \sin(x)$ door eerst de translatie $(\frac{1}{3}\pi, 2)$ en dan de vermenigvuldiging met $1\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x -as toe te passen. Stel het functievoorschrift van f op.
- 87** Van driehoek ABC is $AB = 8$, $\angle A = 32^\circ$ en $\angle B = 90^\circ$. Het punt D ligt op AB waarbij $AD = 3$. Bereken $\angle ACD$.
- 88** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2}{x+3}$, $g(x) = \frac{x-1}{2x+1}$ en $h(x) = f(x) - g(x)$. Herleid het functievoorschrift van h tot één breuk.
- 89** De lijn k gaat door de punten $A(1, 3)$ en $B(6, 13)$ en de lijn l gaat door de punten $C(4, 1)$ en $D(6, -3)$. Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt S van k en l .
- 90** Van driehoek PQR is $\angle P = 62^\circ$, $\angle Q = 48^\circ$ en $PR = 8,4$. Bereken PQ in één decimaal.
- 91** De functie $f(x) = x^3 - 8x^2 + 4x + 6$ heeft twee extreme waarden. Bereken die extreme waarden. Rond af op twee decimalen.
- 92** Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1}$.
- 93** De cirkel c heeft middelpunt $M(3, 4)$ en raakt de lijn $k: x + 2y = 6$. Stel een vergelijking op van c .

- 94** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 + 4 \sin(x)$ en $g(x) = -2 + 3 \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$. Voor de somfunctie s geldt $s(x) = f(x) + g(x)$. De grafiek van s is een sinusoidale.
Stel bij de grafiek van s een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- 95** Los het stelsel $\begin{cases} 5x + 6y = 18 \\ y = 4x + 11 \end{cases}$ exact op.
- 96** Los algebraïsch op $2x\sqrt{3} - x\sqrt{2} = 12$.
- 97** De grafiek van de functie $g(x) = \frac{1}{3}(x - 4)^5 + 6$ is ontstaan uit de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}(x + 2)^5 + 16$ door een translatie uit te voeren. Geef deze translatie.
- 98** Bereken in graden in één decimaal de hoek tussen de lijnen $k: 2x + y = 3$ en $l: 3x - 2y = 5$.
- 99** Een hoeveelheid neemt per week met 28% af.
Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per dag af?
- 100** Schrijf de formule $p = 10q^{1,36}$ in de vorm $q = ap^b$. Rond a en b af op twee decimalen.
- 101** Noteer met een interval alle getallen die zowel oplossing zijn van $3x + 2 \leq 11$ als oplossing van $\frac{1}{2}x - 3 < 1\frac{1}{2}x + 4$.
- 102** Een parabool heeft top $(4, 3)$ en gaat door het punt $(2, -3)$.
Stel de formule op van de parabool in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.
- 103** Welke waarden neemt de functie $f(x) = (\frac{1}{2})^{x-3} - 5$ aan voor $x \geq 1$?
- 104** Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(3, -2)$ die de lijn $k: x + 2y = 4$ raakt.
- 105** Druk x uit in y bij de formule $y = \frac{1}{4} \cdot {}^3\log(2x - 3)$.
- 106** De lijn k raakt de grafiek van de functie $f(x) = \frac{100x^2}{x^2 + 4}$ in het punt A met $x_A = 4$.
Stel de formule op van k .
- 107** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^{x-2}$, $g(x) = \frac{a}{x^2}$ en $h(x) = g(f(x))$.
De grafiek van h gaat door het punt $A(3, 1)$.
Bereken algebraïsch de waarde van a .

108 Los algebraïsch op $x^4 + 5 = 6x^2$.

109 In de punten A en B van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 6. Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B .

110 In figuur G.28 is $y_P = 0,95$ en $x_Q = -0,47$. Bereken $\angle POQ$ in radialen. Rond af op twee decimalen.



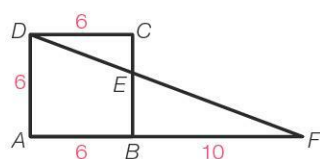
figuur G.28

111 Gegeven is de formule $N = 8500 \cdot 0,925^t$. Schrijf de formule in de vorm $\log(N) = at + b$. Geef a in drie decimalen en b in twee decimalen.

112 Los algebraïsch op $\frac{x-4}{x+2} \geq x-2$.

113 De lijn $k: y = ax + b$ gaat door het punt $P(-2, 5)$ en is evenwijdig met de lijn $l: y = -\frac{1}{2}x - 1$. Bereken a en b .

114 Van het vierkant $ABCD$ is de zijde 6. Het punt F ligt op het verlengde van AB zo, dat $BF = 10$. De lijn DF snijdt BC in het punt E . Bereken BE .



figuur G.29

115 Bereken exact de oplossingen van $\frac{x^2-2}{x^2+2} = \frac{x^2-2}{x+4}$.

116 Differentieer $f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{1}{(3x-1)^2}$.

117 Van een sinusöide zijn de punten $(3, 160)$ en $(15, 90)$ twee opeenvolgende toppen. Stel een formule op bij deze sinusöide.

- 118** Bereken exact de afstand van het middelpunt M van de cirkel $c: x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$ tot de lijn $k: 3x + 2y = 4$.
- 119** Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen $k: 2x + y = 6$ en $l: 12x - 5y = 3$.
- 120** In deze opgave is $a > 0$.
Herleid $4\sqrt{20a^2} - \sqrt{45a^2}$.
- 121** Schrijf de formule $y = \frac{1}{4} \cdot (3x)^{-2} \cdot \frac{8}{x^{-5}}$ in de vorm $y = ax^p$.
- 122** Bereken voor welke a en b de lijnen $k: 2x + ay = 8$ en $l: x - 2y = b$ samenvallen.
- 123** Een hoeveelheid neemt per jaar met 25% toe.
Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per kwartaal toe?
- 124** Gegeven is dat y omgekeerd evenredig is met $x\sqrt{x}$. Voor $x = 2$ is $y = 6$.
Bereken y voor $x = 8$.
- 125** Onderzoek langs algebraïsche weg of de top van de grafiek van de functie $f(x) = 0,2x^2 - 2x + 1$ op de grafiek van de functie $g(x) = -0,3x^2 + 0,5x + 1$ ligt.
- 126** Een parabool snijdt de x -as in de punten $(2, 0)$ en $(5, 0)$ en gaat door het punt $(6, -3)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van de parabool met de y -as.
- 127** Hoe ontstaat de grafiek van de functie $f(x) = (\frac{1}{4})^{x+2} - 3$ uit een standaardgrafiek?
- 128** Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(4, -2)$ die de x -as raakt.
- 129** Los $2^{5x-4} = 16^{x+1}$ exact op.
- 130** De grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(x-2) + 3$ wordt met a vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as en vervolgens b omhoog geschoven.
De beeldgrafiek heeft de lijn $x = 4$ als asymptoot en gaat door het punt $A(12, 2)$.
Bereken a en b .

- 131** Gegeven is de formule $s = \frac{100t^2}{t^2 + 50}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Benader met een differentiequotiënt in m/s de snelheid op $t = 5$. Neem $\Delta t = 0,01$ en rond af op twee decimalen.
- 132** Los algebraïsch op $x^3 + 10x = 7x^2$.
- 133** Stel langs algebraïsche weg een vergelijking op van de lijn k die de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 2x^3 + x$ raakt in het punt A met $x_A = -1$.
- 134** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0$.
Bereken voor welke b de lijn $y = \frac{1}{3}x + b$ raaklijn is van c .
- 135** Gegeven is de formule $\log(N) = -0,035t + 1,54$.
Schrijf de formule in de vorm $N = b \cdot g^t$. Geef b in gehelen en g in drie decimalen.
- 136** Gegeven is de formule $y = \frac{2x - 3}{x - 1}$.
Druk x uit in y .
- 137** De grafiek van de functie f ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door eerst de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{2}$ en dan de translatie $(\frac{1}{6}\pi, -3)$ toe te passen.
Stel het functievoorschrift van f op.
- 138** Van driehoek ABC is $BC = 5$ en $\angle B = 90^\circ$. Het punt M is het midden van AB en $\angle BMC = 64^\circ$.
Bereken $\angle A$.
- 139** Los algebraïsch op $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = 2$.
- 140** Bereken algebraïsch het minimum van de functie $f(x) = 4x\sqrt{x} - 9x$.
- 141** Teken de grafiek van de functie $f(x) = 2\frac{1}{2} - 4\cos(\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{3}\pi)$ met domein $[0, 4\pi]$.
- 142** Bereken exact de afstand tussen de lijnen $k: y = -3x + 4$ en $l: y = -3x - 6$.
- 143** Los het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 5x + 2y = 18 \end{cases}$ op.
- 144** Van driehoek ABC is $\angle A = 115^\circ$, $AB = 4$ en $AC = 3$.
Bereken BC in twee decimalen.

145 Schrijf $\frac{2}{3}a^{-2} \cdot (b^{-3})^2$ zonder negatieve exponenten.

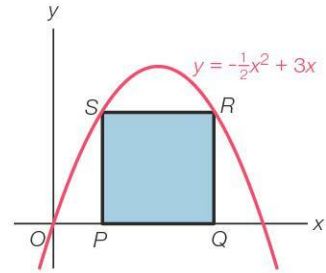
146 In de figuur hiernaast is de parabool $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ getekend met de rechthoek $PQRS$, waarbij P en Q op de x -as liggen en R en S op de parabool.

Neem $x_P = p$ met $0 < p < 3$.

Voor de oppervlakte A van de rechthoek geldt

$$A = p^3 - 9p^2 + 18p.$$

Toon aan dat deze formule juist is en bereken exact voor welke p de oppervlakte van de rechthoek maximaal is.



figuur G.30

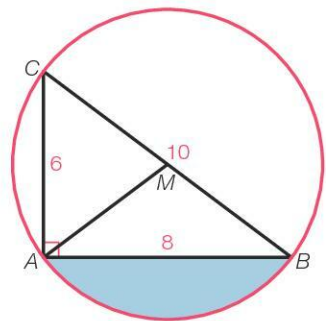
147 Van een sinusoidale is de formule van de vorm $N = a + b \sin(c(t-d))$. Twee opeenvolgende toppen van de sinusoidale zijn $(5, 60)$ en $(15, 110)$. Bereken bij $t = 7$ de waarde van N en de maximale helling van de grafiek. Rond af op twee decimalen.

148 Stel vergelijkingen op van de lijnen met richtingscoëfficiënt 3 die de cirkel $c: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ raken.

149 Bereken algebraïsch de oplossingen van $(4x - 3)(3x + 5) = 0$.

150 Van de rechthoekige driehoek ABC met $AB = 8$, $AC = 6$ en $BC = 10$ is het midden M van BC het middelpunt van de cirkel die door A , B en C gaat.

Bereken de oppervlakte van het kleinste gebied dat wordt ingesloten door AB en de cirkel. Rond af op twee decimalen.



figuur G.31

151 Gegeven is de functie $f(x) = 2 + \sqrt{x+1}$. Welke waarden neemt $f(x)$ aan voor $x \leq 3$?

152 Stel een vergelijking op van de lijn k door het punt $A(-1, 3)$ die loodrecht staat op de lijn $l: 4x + 3y = 20$.

153 De halveringstijd van het isotoop polonium-209 is 103 jaar. Bereken in twee decimalen met hoeveel procent een hoeveelheid polonium-209 per jaar afneemt.

154 Gegeven is dat in de tabel hiernaast y omgekeerd evenredig is met een macht van x . Stel de formule op van y .

x	3	5
y	125	27

155 Gegeven is de functie $f(x) = -0,1x^3 + 0,1x^2 + 3x - 2$. Bereken het differentiequotient van $f(x)$ op $[-2, 4]$.

156 Bereken exact de oplossingen van $3x^4 - 5 = 16$.

157 Los algebraïsch op $\frac{1}{3}\log(2x - 1) + 3 = 0$.

158 De lijn $y = x$ snijdt de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$ in de punten A en B .

Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B .

159 Los $\log(25x) = 2 + \log(x - 1)$ algebraïsch op.

160 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x + 6}$. De lijn $k: y = \frac{1}{2}x + b$ raakt de grafiek van f in het punt A .

Bereken algebraïsch de coördinaten van A .

161 Bereken de afgeleide van $f(x) = 2x^3 - (2x^2 + 1)(x - 2)$.

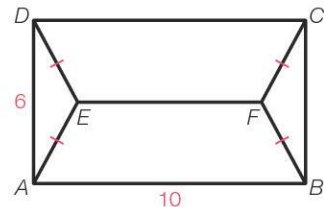
162 Los op $0,1x^3 - 4x < 0,2x^2 - 5$. Rond af op twee decimalen.

163 Bereken de afgeleide van $f(x) = x^2 - \frac{2x^2 - 1}{x}$.

164 Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k die de grafiek van de functie $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{2x}$ raakt in het punt A met $x_A = 1$.

165 Gegeven is de functie $f(x) = 1\frac{1}{2} + 2\sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ met domein $[0, 2\pi]$. Teken de grafiek van f .

166 In de rechthoek in de figuur hiernaast is $AE = BF = CF = DE$ en $EF = 2 \cdot AE$. Bereken EF algebraïsch.



figuur G.32

167 Maak y vrij bij $6x - 4y = 5$.

168 Van driehoek DEF is $\angle D = 100^\circ$, $\angle E = 35^\circ$ en $EF = 10,2$. Bereken de omtrek van driehoek DEF in één decimaal.

169 Een vuurwerkpijl wordt afgeschoten op $t = 0$ en valt op $t = 6$ weer op de grond. Op $t = 1$ is de pijl 40 meter hoog. De formule van de hoogte van de pijl is van de vorm $h = at^3 + bt^2$. Bereken a en b .

- 170** Bereken exact het bereik van de functie $f(x) = 4x - \sqrt{2x - 1}$.
- 171** Bereken algebraïsch de oplossingen in $[0, 2\pi]$ van $\sin(3x - \frac{1}{4}\pi) = 1$.
- 172** Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ en de punten $A(1, -1)$ en $B(4, -4)$ op de cirkel. De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B . Bereken in graden de hoek tussen k en l . Rond af op één decimaal.
- 173** Bereken exact de oplossingen van $10x^2 + 1 = 7x$.
- 174** Schrijf de formule $y = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - 3x}$ in de vorm $x = ay^2 + by + c$.
- 175** De grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^4 + 2$ wordt eerst vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met 4, vervolgens wordt de translatie $(2, -5)$ toegepast. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . Bereken de extreme waarde van g .
- 176** Bereken in graden in één decimaal de hoek tussen de lijnen k door $(-3, 0)$ en $(0, 2)$ en l door $(1, -2)$ en $(4, 5)$.
- 177** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 7,5% toe. Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- 178** Gegeven is de formule $y = 0,025x^{3,41}$. Hoeveel keer zo groot wordt y als x verdubbelt? Rond af op één decimaal.
- 179** Gegeven is de formule $y = -0,1x^3 + 0,1x^2 + 3x - 2$. Teken het toenamediagram op $[-6, 6]$ met $\Delta x = 2$.
- 180** Van de parabool $y = ax^2 + bx$ is de top $(4, 4)$. Bereken a en b .
- 181** Op de grafiek van de functie $f(x) = (\frac{1}{3})^{x+2}$ wordt de translatie $(3, 0)$ toegepast. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . De grafiek van de functie g ontstaat ook door de grafiek van f ten opzichte van de x -as te vermenigvuldigen met a . Bereken a .
- 182** Onderzoek met een berekening of het punt $A(5, 1)$ op, binnen of buiten de cirkel $c: x^2 + y^2 + 3x - 4y - 37 = 0$ ligt.
- 183** Maak t vrij bij de formule $N = 3 \cdot 5^{2t-6}$.
- 184** De parabool p heeft top $T(4, 6)$ en gaat door het punt $A(8, 3)$. De lijn k raakt de parabool in A . Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van k met de y -as.

- 185** Schets in twee aparte figuren onder elkaar de grafiek van de functie

$$f(x) = \frac{10x^2}{x^2 + 10} \text{ en de hellinggrafiek van } f.$$

- 186** Los algebraïsch op $\frac{1}{8}(4x - 5)^2 < 2$.

- 187** Bereken exact de extreme waarden van de functie

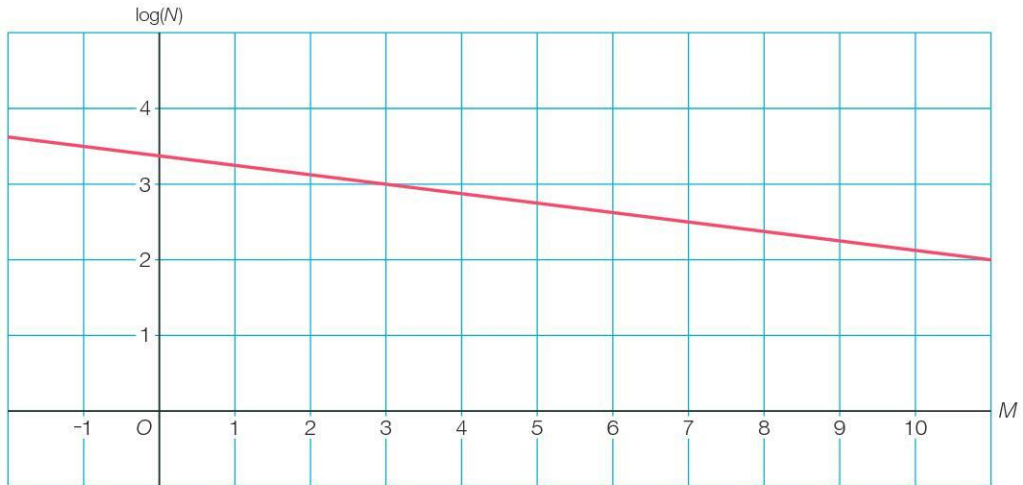
$$f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 30x + 10.$$

- 188** Geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt van de grafiek van de functie $f(x) = 0,4 + 2,3 \sin(4x + 2,4)$.

- 189** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 9}{x}$.

Bewijs dat $(-3, -1)$ en $(3, 11)$ de toppen van de grafiek van f zijn.

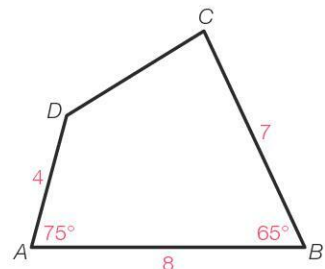
- 190** In de figuur hieronder is $\log(N)$ uit gezet tegen M .



figuur G.33

Stel bij de grafiek een formule op van de vorm $N = b \cdot g^M$. Geef b in gehelen en g in twee decimalen.

- 191** Gegeven is de vierhoek in de figuur hiernaast. Bereken CD en $\angle D$ in één decimaal.



figuur G.34

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm	havo B deel 1
<ul style="list-style-type: none">• Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen• De toets Ans en fouten verbeteren• Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen• Decimaal getal omzetten in breuk	hoofdstuk 1 bladzijde 18

Formules, grafieken en tabellen	havo B deel 1
<ul style="list-style-type: none">• Formules invoeren en grafieken plotten• Functiewaarden berekenen op het grafiekenschermb en op het basisscherm• Tabellen maken en de tabelinstelling veranderen	hoofdstuk 1 bladzijde 39

Toppen en snijpunten	havo B deel 1
<ul style="list-style-type: none">• Toppen en snijpunten van grafieken• Berekenen van nulpunten	hoofdstuk 1 bladzijde 42

Helling	havo B deel 1
<ul style="list-style-type: none">• De richtingscoëfficiënt van een raaklijn	hoofdstuk 2 bladzijde 78

Hellinggrafieken	havo B deel 1
<ul style="list-style-type: none">• Hellinggrafieken plotten	hoofdstuk 2 bladzijde 84

Het gebruik van Ans en lettergeheugens	havo B deel 1
<ul style="list-style-type: none">• De toets Ans• Het gebruik van lettergeheugens	hoofdstuk 3 bladzijde 100

Allerlei	
<ul style="list-style-type: none">• Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR	

Overzicht routes

9 Exponentiële en logaritmische formules

9.1 Groeifactoren en groeipercentages

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
□ basis																
⊙ midden																
* uitdagend																

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

9.2 Werken met logaritmen

opgave	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

9.3 Rekenregels voor logaritmen

opgave	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

60	61	62	63	64	65

9.4 Formules omwerken

opgave	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
□ basis																			
⊙ midden																			
* uitdagend																			

10 Meetkundige berekeningen

10.1 Afstanden en hoeken

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
□ basis										
⊙ midden										
* uitdagend										

10.2 Vergelijkingen bij meetkunde

opgave	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

10.3 Lijnen en cirkels in een assenstelsel

opgave	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

10.4 Cirkels, raaklijnen en functies

opgave	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

55	56	57	58	59	60

10.5 Afstanden bij cirkels

opgave	61	62	63	64	65	66	67	68
□ basis								
⊙ midden								
* uitdagend								

11 Verbanden en functies

11.1 Evenredigheden

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

11.2 Standaardgrafieken en transformaties

opgave	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

11.3 Tweede- en derdegraadsfuncties

opgave	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

11.4 Wortelfuncties

opgave	55	56	57	58	59	60	61	62	63
□ basis									
⊙ midden									
* uitdagend									

11.5 Gebroken functies

opgave	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

Examenwerkwoorden

In onderstaande lijst staan relevante examenwerkwoorden voor wiskunde B. Als in een wiskunde-examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, geldt de betekenis die hiervan in deze lijst is gegeven. Deze lijst met examenwerkwoorden is niet uitputtend.

Algebraïsch/ op algebraïsche wijze	Zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen benaderd opgeschreven worden.
Exact/op exacte wijze	Zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen niet benaderd opgeschreven worden.
Aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
Berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Bewijzen (dat)	Het geven van een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden voldoet niet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
Herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.
Onderzoeken of	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.

Trefwoordenregister

A

afstand tussen cirkels 84
afstand tussen evenwijdige lijnen 70
afstand van punt tot cirkel 84
afstand van punt tot lijn 68
asymptoten bij gebroken functies 128

B

bewijzen van rekenregels 31

C

cosinusregel 55

E

evenredig 95
evenredigheidsconstante 95
evenredig met een macht van x 98

G

gebroken lineaire functie 128
gelijkvormige driehoeken 62
groeipercentage 11

H

halveringstijd 18
hoek tussen lijnen 68
hyperbolisch verband 96
hyperbool 96

K

kettingfunctie 112

L

logaritme met grondtal 10 25

M

Moore, Gordon 44

O

omgekeerd evenredig 96
omgekeerd evenredig met een
macht van x 98

R

raaklijn aan cirkel 74
recht evenredig 95
regels voor het algebraïsch oplossen
van vergelijkingen 118
rekenregels voor logaritmen 29

S

sinusregel 55
somfunctie 112
standaardfuncties 108, 109
strategie 79

V

verdubbelingstijd 18
vergelijkingen bij gelijkvormigheid 62
vergelijkingen en de stelling van
Pythagoras 64
verschilfunctie 112

Verantwoording

Illustraties: Richard van de Pol Illustratie & Vormgeving, Tilburg; Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: Integra Software Services
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Foto's

ANP Foto / Leo Vogelzang: p. 6-7
iStockphoto: p. 12, 43, 92-93, 97, 140-141, 182, 213
ANP Foto / Hollandse Hoogte / AFP / Pascal Guyot: p. 13
Shutterstock: p. 18, 26, 50-51, 52, 101, 105, 106, 151, 169, 171, 179, 183, 184, 196, 202
Getty Images: p. 44
Hungda / Wikipedia: p. 45
Climeworks: p. 47
Gerrit de Jong, Middelburg: p. 70, 99, 103 b, 137 o
ANP Foto / Hollandse Hoogte / Dolph Cantrijn: p. 89
ANP Foto / Hollandse Hoogte / Corné Sparidaens: p. 150
Alamy / Imageselect: p. 160
ANP Foto / Hollandse Hoogte / PhotoNonStop: p. 161
ANP Foto / Hollandse Hoogte / Flip Franssen: p. 180
SpaceX: p. 217
Google Earth: p. 220
Duke Marine Robotics and Remote Sensing Lab, taken under permit by NOAA: p. 222
Cito: p. 148, 152, 201, 204

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 21

© 2021 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/
Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73714-6



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



Noordhoff



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-73714-6



9 789001 737146