

& GETAL RUIMTE

A
C



Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen
vwo A/C deel 1

Twaalfde editie, 2020

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

Inhoud

1	Formules en grafieken	4
2	Statistiek	30
3	Rekenen en herleiden	48
4	Combinatoriek	65
	Gemengde Opgaven	80

1 Formules en grafieken

Voorkennis Lineaire vergelijkingen

Bladzijde 10

1 a $x + 5 = 20$
 $x = 15$

b $5x = 20$
 $x = 4$

c $\frac{1}{5}x = 20$
 $x = 100$

2 a $2(x - 1) = 3(x + 2)$
 $2x - 2 = 3x + 6$
 $-x = 8$
 $x = -8$

b $3(x - 80) = 100 - x$
 $3x - 240 = 100 - x$
 $4x = 340$
 $x = 85$

c $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{4}x$
 $4x - 12 = 3x$
 $x = 12$

3 a $8 - 3(2x - 1) = 3 + 2(1 - x)$
 $8 - 6x + 3 = 3 + 2 - 2x$
 $-4x = -6$
 $x = 1\frac{1}{2}$

b $2x - 1 = \frac{1}{2}x + 3$
 $4x - 2 = x + 6$
 $3x = 8$
 $x = 2\frac{2}{3}$

c $\frac{1}{3}(2x - 3) = \frac{1}{4}x + 4$
 $\frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{4}x + 4$
 $8x - 12 = 3x + 48$
 $5x = 60$
 $x = 12$

d $6x - 2 = 2x + 18$
 $4x = 20$
 $x = 5$

e $3 - 2x = 5x + 3$
 $-7x = 0$
 $x = 0$

f $5 - x = 2x - 1$
 $-3x = -6$
 $x = 2$

d $5 - 3(x + 1) = 15 - 2x$
 $5 - 3x - 3 = 15 - 2x$
 $-x = 13$
 $x = -13$

e $2(x - 3) - 7 = 3(x - 6) + 18$
 $2x - 6 - 7 = 3x - 18 + 18$
 $-x = 13$
 $x = -13$

f $5x + 5 = \frac{5}{6}(x - 1)$
 $5x + 5 = \frac{5}{6}x - \frac{5}{6}$
 $30x + 30 = 5x - 5$
 $25x = -35$
 $x = -1\frac{2}{5}$

d $2\frac{1}{3}x + 6 = \frac{1}{3}x - 8$
 $7x + 18 = x - 24$
 $6x = -42$
 $x = -7$

e $1,8x + 0,6 = -1,2x + 3$
 $3x = 2,4$
 $x = 0,8$

f $\frac{1}{8}x - 7 = 3$
 $x - 56 = 24$
 $x = 80$

1.1 Lineaire formules

Bladzijde 11

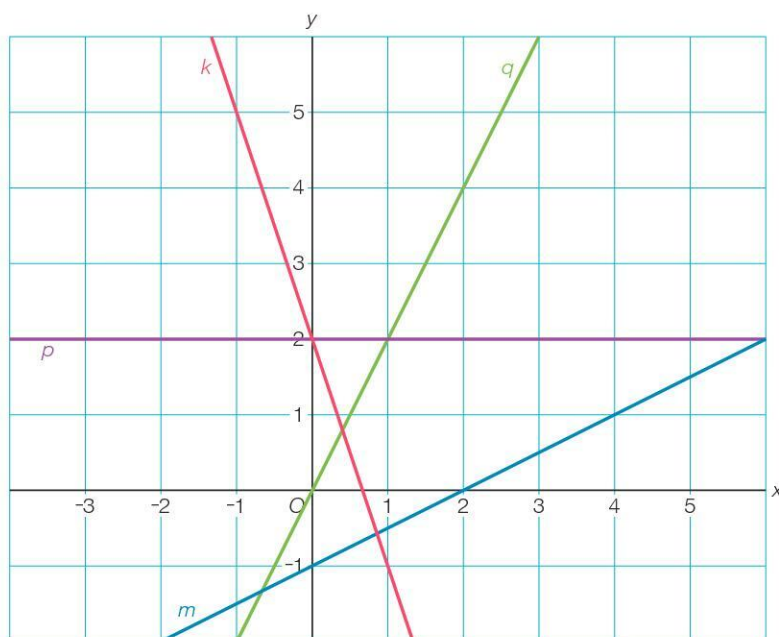
- 1 I-B, II-D, III-C en IV-A

Bladzijde 12

2 a	x	0	1
	$y = -3x + 2$	2	-1
	x	0	2
	$y = \frac{1}{2}x - 1$	-1	0
	x	0	1
	$y = 2x$	0	2

Zie de figuur hiernaast.

- b $rc_k = -3$
 $rc_m = \frac{1}{2}$
 $rc_p = 0$
 $rc_q = 2$

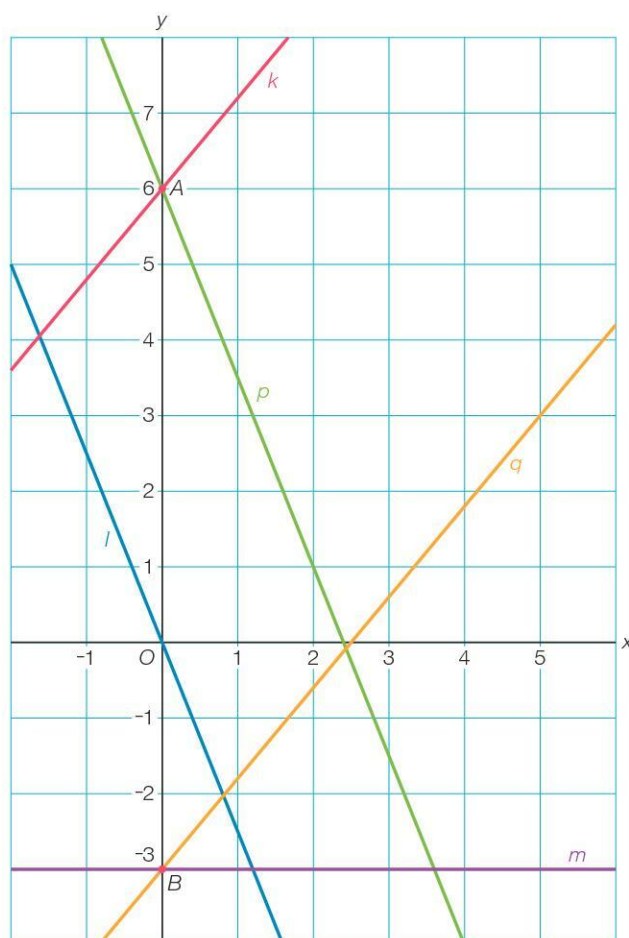


Bladzijde 13

3 a	x	0	2
	$y = 6 - 2,5x$	6	1
	x	0	5
	$y = 1,2x - 3$	-3	3

Zie de figuur hiernaast.

- b Zie de figuur hiernaast.
 $k: y = 1,2x + 6$
c $l: y = -2,5x$
d $m: y = -3$



4 a

x	0	5
$y = 0,6x - 3$	-3	0

x	0	2
$y = -1,5x + 4$	4	1

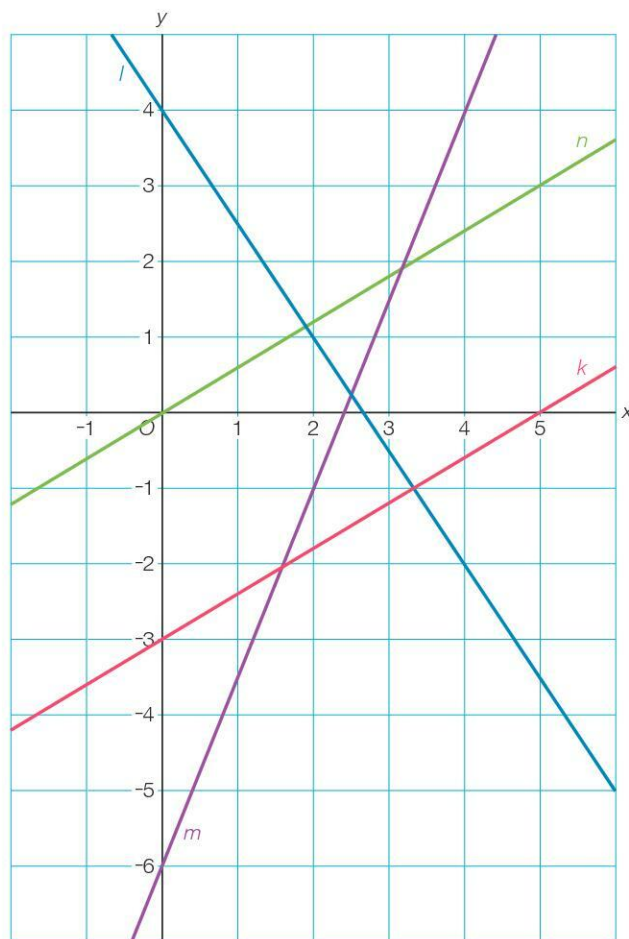
Zie de figuur hiernaast.

b Zie de figuur hiernaast.

$n: y = 0,6x$

c $p: x = 5$

d $q: y = 4$

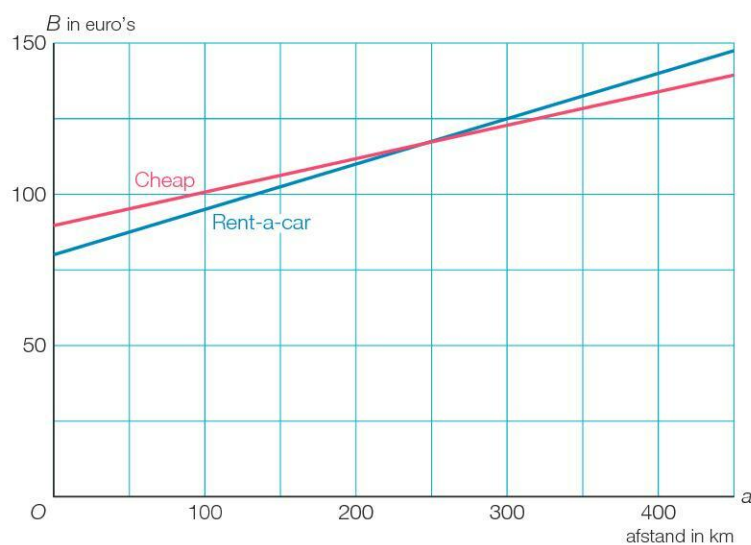


5 a $a = 50$ geeft $B = 0,15 \cdot 50 + 80 = €87,50$

b Bij $y = ax + b$ is de x -as horizontaal, dus bij $B = 0,15a + 80$ is de a -as horizontaal.

c,e

a	0	400
$B = 0,15a + 80$	80	140



Omdat a het aantal gereden km is, kan a niet negatief zijn.

d Het getal 0,15 geeft aan dat bij elke km die je meer rijdt, je €0,15 meer moet betalen. Het getal 80 geeft het vaste bedrag aan: dit bedrag moet je betalen onafhankelijk van het aantal gereden km.

- e De formule is $B = 0,11a + 90$.

a	0	400
$B = 0,11a + 90$	90	134

Zie de figuur bij vraag c.

- f $a = 150$ geeft bij Rent-a-car $B = 102,50$.
 $a = 150$ geeft bij Cheap $B = 106,50$.
 Dus bij een rit van 150 km is Rent-a-car het voordeligst.
 Het scheelt $106,50 - 102,50 = 4$ euro.
- g Los op $0,15a + 80 = 0,11a + 90$
 $0,04a = 10$
 $a = 250$
 Zie de grafiek: vanaf 250 km is Cheap voordeliger dan Rent-a-car.

Bladzijde 14

- 6 a $h = -5t + 80$
 b $P = 100d + 1015$
 c 2200 ha per dag is $0,0022 \cdot 365 = 0,803$ miljoen ha per jaar.
 $A = -0,8t + 550$
- 7 a Als Jannie 32 opgaven goed maakt, dan maakt ze $40 - 32 = 8$ opgaven fout. Voor de goed gemaakte opgaven krijgt ze $32 \cdot 0,5 = 16$ euro. Hier gaat 8 euro vanaf voor de fout gemaakte opgaven. Dus ze krijgt $16 - 8 = 8$ euro.
 b $B = 0,5x - 1 \cdot (40 - x) = 0,5x - 40 + x = 1,5x - 40$
 Dus de formule is $B = 1,5x - 40$.
 c $1,5x - 40 = 2$
 $1,5x = 42$
 $x = 28$
 Dus Jannie had 28 opgaven goed.
- 8 a $x = 12$ geeft $y = 1\frac{1}{2} \cdot 12 + 9 = 27$. Dus het punt $A(12, 27)$ ligt op m .
 b $x = -20$ geeft $y = -21$, dus $B(-20, -21)$ ligt op m .
 $x = -8$ geeft $y = -3$, dus $C(-8, 3)$ ligt niet op m .
 $x = 82$ geeft $y = 132$, dus $D(82, 132)$ ligt op m .
 c Als de lijnen snijden, is voor een bepaalde x -waarde de bijbehorende y -waarde hetzelfde.
 $1\frac{1}{2}x + 9 = -\frac{1}{2}x + 4$
 $2x = -5$
 $x = -2\frac{1}{2}$
 $x = -2\frac{1}{2}$ geeft $y = 1\frac{1}{2} \cdot -2\frac{1}{2} + 9 = 5\frac{1}{4}$.
 Dus $S(-2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4})$.

Bladzijde 15

- 9 Ja, omdat de lijnen elkaar snijden bij $x = 6$ zijn de y -waarden hetzelfde.
- 10 a $l: y = ax + b$ met $a = rc_l = -1\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(-2, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot -2 + b = 3 \\ 3 + b = 3 \\ b = 0 \end{array}$$

 Dus $l: y = -1\frac{1}{2}x$.
 b $k: y = ax + b$ met $a = rc_m = 4$

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ \text{door } B(-5, 21) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot -5 + b = 21 \\ -20 + b = 21 \\ b = 41 \end{array}$$

 Dus $k: y = 4x + 41$.

11 a $p: y = ax + b$ met $a = rc_q = -\frac{1}{3}$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } C(-18, 30) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot -18 + b = 30 \\ 6 + b = 30 \\ b = 24 \end{array}$$

Dus $p: y = -\frac{1}{3}x + 24$.

b Snijpunt met de x -as, dus $y = 0$.

$$-\frac{1}{3}x + 24 = 0$$

$$-\frac{1}{3}x = -24$$

$$x = 72$$

Dus het snijpunt van p met de x -as is $(72, 0)$.

Snijpunt met y -as, dus $x = 0$, geeft $y = -\frac{1}{3} \cdot 0 + 24 = 24$.

Dus het snijpunt van p met de y -as is $(0, 24)$.

Bladzijde 16

12 a $-0,8x + 3 = 1,7x - 4,25$
 $-2,5x = -7,25$
 $x = 2,9$

$x_S = 2,9$ geeft $y_S = -0,8 \cdot 2,9 + 3 = 0,68$, dus $S(2,9; 0,68)$.

b Snijpunt met de x -as, dus $y = 0$.

$$-0,8x + 3 = 0$$

$$-0,8x = -3$$

$$x = 3,75$$

Dus $A(3,75; 0)$.

c Snijpunt met de x -as, dus $y = 0$.

$$1,7x - 4,25 = 0$$

$$1,7x = 4,25$$

$$x = 2,5$$

Dus $B(2,5; 0)$.

13 a $2(x - 3) = 5 - 3x$
 $2x - 6 = 5 - 3x$
 $5x = 11$
 $x = 2,2$

$x = 2,2$ geeft $y = 5 - 3 \cdot 2,2 = -1,6$, dus snijpunt $(2,2; -1,6)$.

b $\frac{2}{3}x + 11 = -1\frac{1}{2}x - 15$
 $4x + 66 = -9x - 90$

$$13x = -156$$

$$x = -12$$

$x = -12$ geeft $y = \frac{2}{3} \cdot -12 + 11 = 3$, dus snijpunt $(-12, 3)$.

c $-2\frac{1}{2}x + 5 = 25$

$$-2\frac{1}{2}x = 20$$

$$x = -8$$

Dus snijpunt $(-8, 25)$.

14 a $p: y = ax + b$ met $a = rc_n = -2,5$

$$\left. \begin{array}{l} y = -2,5x + b \\ \text{door } A(18, -27) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2,5 \cdot 18 + b = -27 \\ -45 + b = -27 \\ b = 18 \end{array}$$

Dus $p: y = -2,5x + 18$.

b Snijpunt met de x -as, dus $y = 0$.

$$-2,5x + 18 = 0$$

$$-2,5x = -18$$

$$x = 7,2$$

Dus $P(7,2, 0)$.

Snijpunt met de y -as, dus $x = 0$, geeft $y = -2,5 \cdot 0 + 18 = 18$.

Dus $Q(0, 18)$.

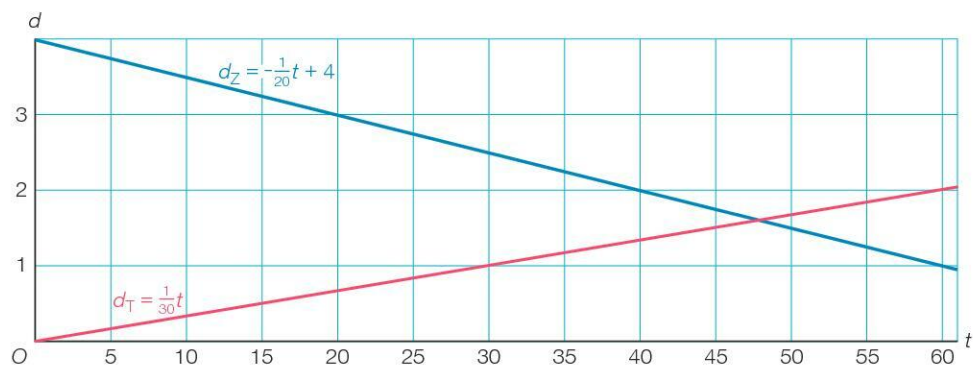
- c $y_R = -2,5 \cdot -20 + 35 = 85$
 d Los op $-2,5x + 35 = 45$
 $-2,5x = 10$
 $x = -4$
 Dus $x_S = -4$.
 e $y = x$, dus los op $-2,5x + 35 = x$
 $-3,5x = -35$
 $x = 10$
 Dus $T(10, 10)$.

- 15 a $-1,8x + 6 = 1,2x + 3,6$
 $-3x = -2,4$
 $x = 0,8$
 $x_S = 0,8$ geeft $y_S = -1,8 \cdot 0,8 + 6 = 4,56$, dus $S(0,8; 4,56)$.
 b $-1,8x + 6 = 2,4$ $1,2x + 3,6 = 2,4$
 $-1,8x = -3,6$ $1,2x = -1,2$
 $x = 2$ $x = -1$
 Dus $x_A = 2$. Dus $x_B = -1$.
 De lengte van AB is $2 - (-1) = 3$.
 c Snijpunten met de x -as, dus $y = 0$.
 $-1,8x + 6 = 0$ $1,2x + 3,6 = 0$
 $-1,8x = -6$ $1,2x = -3,6$
 $x = 3\frac{1}{3}$ $x = -3$
 Dus $x_C = 3\frac{1}{3}$. Dus $x_D = -3$.
 De lengte van CD is $3\frac{1}{3} - (-3) = 6\frac{1}{3}$.

Bladzijde 17

- 16 a Op de eerste dag is het alleen aan de oppervlakte 25°C , dus bij $t = 0$ hoort $d_T = 0$.
 Elke drie dagen ligt dat niveau 0,10 meter dieper, per dag is dat $\frac{0,10}{3} = \frac{1}{30}$ meter.
 Dus $d_T = \frac{1}{30}t$.
 b Het meer heeft een diepte van 4 meter. Op de eerste dag is er nog voldoende zuurstof op deze 4 meter diepte, dus bij $t = 0$ hoort $d_Z = 4$. Elke dag ligt dat niveau 0,05 meter ($= \frac{1}{20}$) minder diep.
 Dus $d_Z = -\frac{1}{20}t + 4$.

- c $d_T = \frac{1}{30}t$
- | | | |
|-----|---|----|
| t | 0 | 30 |
| d | 0 | 1 |
- $d_Z = -\frac{1}{20}t + 4$
- | | | |
|-----|---|----|
| t | 0 | 20 |
| d | 4 | 3 |
- Zie de figuur hiernaast.



De baarzen kunnen niet meer in het meer leven als het niveau waarop er voldoende zuurstof is gelijk is aan het niveau waarop de temperatuur 25°C is.

$$\begin{aligned} \frac{1}{30}t &= -\frac{1}{20}t + 4 \\ 2t &= -3t + 240 \\ 5t &= 240 \\ t &= 48 \end{aligned}$$

Op $t = 48$ is het 18 augustus, dus vanaf 18 augustus.

17 Lijn k

x	0	6
y	1	3

Lijn l

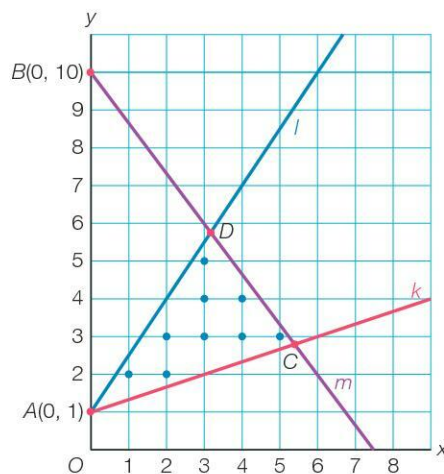
x	0	6
y	1	10

Lijn m

x	0	6
y	10	2

Zie de figuur hiernaast.

Er vallen 9 roosterpunten binnen driehoek ACD .



1.2 Een lijn door twee gegeven punten

Bladzijde 19

- 18 a** dan ga je $\frac{3}{4}$ omhoog.

Dus $rc_l = \frac{3}{4}$.

b $y_B - y_A = 4 - 1 = 3$

c $rc_l = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Bladzijde 20

- 19 a** $\Delta x = 2 - 6 = -4$

$rc_l = \frac{-1 - 5}{2 - 6} = \frac{-6}{-4} = 1\frac{1}{2}$

Dus ja, ze krijgen dezelfde rc .

b $y = 1\frac{1}{2}x + b$ } $1\frac{1}{2} \cdot 6 + b = 5$
 door $B(6, 5)$ } $9 + b = 5$
 $b = -4$

- 20 a** $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 1}{1 - -1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

$y = 1\frac{1}{2}x + b$ } $1\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 4$
 door $B(1, 4)$ } $b = 2\frac{1}{2}$

Dus $l: y = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.

- b** $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 5}{2 - -3} = \frac{-5}{5} = -1$

$y = -x + b$ } $-1 \cdot 2 + b = 0$
 door $D(2, 0)$ } $b = 2$

Dus $m: y = -x + 2$.

- c** Horizontale lijn met y -coördinaat 3, dus $n: y = 3$.

- d** $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 3}{5 - 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$y = 2x + b$ } $2 \cdot 5 + b = 5$
 door $H(5, 5)$ } $10 + b = 5$
 $b = -5$

Dus $p: y = 2x - 5$.

21 a $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{250 - 360}{160 - 180} = \frac{-110}{-20} = 5\frac{1}{2}$
 $y = 5\frac{1}{2}x + b$
 door $P(180, 360)$ $\left. \begin{array}{l} 5\frac{1}{2} \cdot 180 + b = 360 \\ 990 + b = 360 \\ b = -630 \end{array} \right\}$

Dus $l: y = 5\frac{1}{2}x - 630$.

b $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{58 - 73}{45 - 15} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$
 $y = -\frac{1}{2}x + b$
 door $R(15, 73)$ $\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 15 + b = 73 \\ -7\frac{1}{2}x + b = 73 \\ b = 80\frac{1}{2} \end{array} \right\}$

Dus $m: y = -\frac{1}{2}x + 80\frac{1}{2}$.

22 a l door $(1, 2)$ en $(5, 4)$
 $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 2}{5 - 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 $y = \frac{1}{2}x + b$
 door $(1, 2)$ $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 1 + b = 2 \\ b = 1\frac{1}{2} \end{array} \right\}$

Dus $l: y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.

b m door $(50, 40)$ en $(250, 10)$
 $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10 - 40}{250 - 50} = \frac{-30}{200} = -0,15$
 $y = -0,15x + b$
 door $(50, 40)$ $\left. \begin{array}{l} -0,15 \cdot 50 + b = 40 \\ -7,5 + b = 40 \\ b = 47,5 \end{array} \right\}$

Dus $m: y = -0,15x + 47,5$.

c n door $(2, 5)$ en $(8, 15)$
 $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{15 - 5}{8 - 2} = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3}$
 $y = 1\frac{2}{3}x + b$
 door $(2, 5)$ $\left. \begin{array}{l} 1\frac{2}{3} \cdot 2 + b = 5 \\ 3\frac{1}{3} + b = 5 \\ b = 1\frac{2}{3} \end{array} \right\}$

Dus $n: y = 1\frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}$.

23 a $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{155 - (-125)}{17 - (-23)} = \frac{280}{40} = 7$
 $y = 7x + b$
 door $A(-23, -125)$ $\left. \begin{array}{l} 7 \cdot (-23) + b = -125 \\ -161 + b = -125 \\ b = 36 \end{array} \right\}$

Dus $m: y = 7x + 36$.

b $y = ax$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-30 - (-27)}{12 - 18} = \frac{-3}{-6} = 0,5$
 Dus $p: y = 0,5x$.

c $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 0}{-12 - 0} = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3}$
 $y = -\frac{1}{3}x + b$
 door $E(-8, 14)$ $\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot (-8) + b = 14 \\ 2\frac{2}{3} + b = 14 \\ b = 11\frac{1}{3} \end{array} \right\}$

Dus $q: y = -\frac{1}{3}x + 11\frac{1}{3}$.

Bladzijde 21

24 $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7 - 22}{12 - 2} = \frac{-15}{10} = -1\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(12, 7) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot 12 + b = 7 \\ -18 + b = 7 \\ b = 25 \end{array}$$

Dus $k: y = -1\frac{1}{2}x + 25$.

$l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{43 - 3}{20 - 4} = \frac{40}{16} = 2\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } C(4, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 3 \\ 10 + b = 3 \\ b = -7 \end{array}$$

Dus $l: y = 2\frac{1}{2}x - 7$.

Snijpunt van k en l , dus los op $-1\frac{1}{2}x + 25 = 2\frac{1}{2}x - 7$

$$\begin{array}{rcl} -4x & = & -32 \\ x & = & 8 \end{array}$$

$x_S = 8$ geeft $y_S = 2\frac{1}{2} \cdot 8 - 7 = 13$, dus $S(8, 13)$.

25 $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3p - 2p}{3p - p} = \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(p, 2p) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot p + b = 2p \\ b = 1\frac{1}{2}p \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}p$.

Snijpunt met de x -as, dus $y = 0$.

$$\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}p = 0$$

$$\frac{1}{2}x = -1\frac{1}{2}p$$

$$x = -3p$$

Dus $(-3p, 0)$.

Snijpunt met de y -as, dus $x = 0$, geeft $y = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1\frac{1}{2}p = 1\frac{1}{2}p$.

Dus $(0, 1\frac{1}{2}p)$.

26 $N = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{36 - 21}{7 - 2} = \frac{15}{5} = 3$

$$\left. \begin{array}{l} N = 3t + b \\ \text{door } A(2, 21) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + b = 21 \\ 6 + b = 21 \\ b = 15 \end{array}$$

Dus $N = 3t + 15$.

Bladzijde 22

27 a $F = an + b$ met $a = \frac{\Delta F}{\Delta n} = \frac{2,25 - 7,75}{425 - 150} = \frac{-5,5}{275} = -0,02$

$$\left. \begin{array}{l} F = -0,02n + b \\ n = 150 \text{ en } F = 7,75 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,02 \cdot 150 + b = 7,75 \\ -3 + b = 7,75 \\ b = 10,75 \end{array}$$

Dus $F = -0,02n + 10,75$.

b Manier 1:

$$F = -0,02n + 10,75$$

$$-0,02n + 10,75 = F$$

$$-0,02n = F - 10,75$$

$$n = -50F + 537,5$$

Manier 2:

$$n = aF + b \text{ met } a = \frac{\Delta n}{\Delta F} = \frac{425 - 150}{2,25 - 7,75} = \frac{275}{-5,5} = -50$$

$$\left. \begin{array}{l} n = -50F + b \\ F = 7,75 \text{ en } n = 150 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -50 \cdot 7,75 + b = 150 \\ -387,5 + b = 150 \\ b = 537,5 \end{array}$$

Dus $n = -50F + 537,5$.

- c** $n = 250$ geeft $F = -0,02 \cdot 250 + 10,75 = 5,75$
 $F = 4,25$ geeft $n = -50 \cdot 4,25 + 537,5 = 325$

28 a $K = am + b$ met $a = \frac{\Delta K}{\Delta m} = \frac{115 - 10}{12 - 5} = \frac{105}{7} = 15$

$$\left. \begin{array}{l} K = 15m + b \\ m = 5 \text{ en } K = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 15 \cdot 5 + b = 10 \\ 75 + b = 10 \\ b = -65 \end{array}$$

Dus $K = 15m - 65$.

b $F = aR + b$ met $a = \frac{\Delta F}{\Delta R} = \frac{138 - 300}{42 - 15} = \frac{-162}{27} = -6$

$$\left. \begin{array}{l} F = -6R + b \\ R = 15 \text{ en } F = 300 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -6 \cdot 15 + b = 300 \\ -90 + b = 300 \\ b = 390 \end{array}$$

Dus $F = -6R + 390$.

- c** Lijn door (6, 35) en (10, 49).

$$g = an + b \text{ met } a = \frac{\Delta g}{\Delta n} = \frac{49 - 35}{10 - 6} = \frac{14}{4} = 3,5$$

$$\left. \begin{array}{l} g = 3,5n + b \\ \text{door } (6, 35) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3,5 \cdot 6 + b = 35 \\ 21 + b = 35 \\ b = 14 \end{array}$$

Dus $g = 3,5n + 14$.

29 a $k = aV + b$ met $a = \frac{\Delta k}{\Delta V}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bij } V = 250 \text{ hoort } k = 56. \\ \text{Bij } V = 650 \text{ hoort } k = 49,6. \end{array} \right\} a = \frac{\Delta k}{\Delta V} = \frac{49,6 - 56}{650 - 250} = \frac{-6,4}{400} = -0,016$$

$$\left. \begin{array}{l} k = -0,016V + b \\ V = 250 \text{ en } k = 56 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,016 \cdot 250 + b = 56 \\ -4 + b = 56 \\ b = 60 \end{array}$$

Dus $k = -0,016V + 60$.

- b** $k = 5$ geeft $-0,016V + 60 = 5$
 $-0,016V = -55$
 $V = 3437,5$

Dus 3437,5 km na de start gaat het alarm af.

Per kilometer wordt er 0,016 ton kerosine verbruikt, dus er kan dan nog

$$\frac{5}{0,016} = 312,5 \text{ km gevlogen worden.}$$

Bladzijde 23

30 a bedrag = $0,3665 \cdot 20\,384 \approx € 7470,74$.

- b** Hij betaalde over 20 384 euro belasting in schijf 1 en over $50\,000 - 20\,384 = 29\,616$ euro in schijf 2/3.

In box 1 betaalde hij dus $0,3665 \cdot 20\,384 + 0,3810 \cdot 29\,616 \approx € 18\,754,43$ belasting.

- c** In schijf 1 betaalde ze € 7470,74 belasting.

In schijf 2/3 betaalde ze $18\,000 - 7470,74 = € 10\,529,26$.

Dat is 38,10%, dus totaal in schijf 2/3 is $\frac{10\,529,26}{0,3810} \approx € 27\,635,85$.

Haar belastbaar inkomen was $20\,384 + 27\,635,85 = € 48\,019,85$.

d In schijf 1 betaalden zij € 7470,74.

In schijf 2/3 betaalden zij $(68\,507 - 20\,384) \cdot 0,3810 \approx € 18\,334,86$.

In schijf 4 betaalden zij $42\,103,23 - 18\,334,86 - 7470,74 = € 16\,297,63$.

Over $100\,000 - 68\,507 = 31\,493$ euro in schijf 4 betaalden ze dus € 16 297,63 belasting.

Dat is $\frac{16\,297,63}{31\,493} \times 100\% \approx 51,75\%$.

Het belastingpercentage in schijf 4 is 51,75%, dus $a = 0,5175$.

Het verdiende belastbaar inkomen in schijf 4 is $i - 68\,507$ euro.

Je krijgt $B = 0,5175 \cdot (i - 68\,507) = 0,5175i - 35\,452,37$.

e In schijf 1 betaalden ze € 7470,74 belasting en in schijf 2/3 was dat € 18 334,86.

In schijf 4 betaalden ze dus nog $60\,000 - 7470,74 - 18\,334,86 = € 34\,194,40$.

Los op: $0,5175i - 35\,452,37 = 34\,194,40$

$$0,5175i = 69\,646,77$$

$$i \approx 134\,583,13$$

Het belastbaar inkomen van deze familie was dus € 134 583,13.

Bladzijde 24

31

a $G_m = at + b$ met $a = \frac{\Delta G_m}{\Delta t}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bij } t = 6 \text{ hoort } G_m = 77,6. \\ \text{Bij } t = 36 \text{ hoort } G_m = 84,5. \end{array} \right\} a = \frac{\Delta G_m}{\Delta t} = \frac{84,5 - 77,6}{36 - 6} = \frac{6,9}{30} = 0,23$$

$$\left. \begin{array}{l} G_m = 0,23t + b \\ t = 36 \text{ en } G_m = 84,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,23 \cdot 36 + b = 84,5 \\ 8,28 + b = 84,5 \\ b = 76,22 \end{array}$$

Dus $G_m = 0,23t + 76,22$.

$$G_v = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta G_v}{\Delta t}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bij } t = 15 \text{ hoort } G_v = 67,5. \\ \text{Bij } t = 40 \text{ hoort } G_v = 72. \end{array} \right\} a = \frac{\Delta G_v}{\Delta t} = \frac{72 - 67,5}{40 - 15} = \frac{4,5}{25} = 0,18$$

$$\left. \begin{array}{l} G_v = 0,18t + b \\ t = 40 \text{ en } G_v = 72 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,18 \cdot 40 + b = 72 \\ 7,2 + b = 72 \\ b = 64,8 \end{array}$$

Dus $G_v = 0,18t + 64,8$.

$$L_m = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta L_m}{\Delta t}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bij } t = 6 \text{ hoort } L_m = 177,5. \\ \text{Bij } t = 36 \text{ hoort } L_m = 181,1. \end{array} \right\} a = \frac{\Delta L_m}{\Delta t} = \frac{181,1 - 177,5}{36 - 6} = \frac{3,6}{30} = 0,12$$

$$\left. \begin{array}{l} L_m = 0,12t + b \\ t = 6 \text{ en } L_m = 177,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,12 \cdot 6 + b = 177,5 \\ 0,72 + b = 177,5 \\ b = 176,78 \end{array}$$

Dus $L_m = 0,12t + 176,78$.

$$L_v = at + b \text{ met } a = \frac{\Delta L_v}{\Delta t}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bij } t = 14 \text{ hoort } L_v = 166,2. \\ \text{Bij } t = 40 \text{ hoort } L_v = 167,5. \end{array} \right\} a = \frac{\Delta L_v}{\Delta t} = \frac{167,5 - 166,2}{40 - 14} = \frac{1,3}{26} = 0,05$$

$$\left. \begin{array}{l} L_v = 0,05t + b \\ t = 40 \text{ en } L_v = 167,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,05 \cdot 40 + b = 167,5 \\ 2 + b = 167,5 \\ b = 165,5 \end{array}$$

Dus $L_v = 0,05t + 165,5$.

b $G_m - G_v = 14$

$$0,23t + 76,22 - (0,18t + 64,8) = 14$$

$$0,23t + 76,22 - 0,18t - 64,8 = 14$$

$$0,05t = 2,58$$

$$t = 51,6$$

Dus in 2031.

$$t = 51,6 \text{ geeft } G_m = 0,23 \cdot 51,6 + 76,22 \approx 88,1 \text{ kg.}$$

c $L_v = 168$

$$0,05t + 165,5 = 168$$

$$0,05t = 2,5$$

$$t = 50$$

$$\text{Dus } L_m = 0,12 \cdot 50 + 176,78 \approx 182,8 \text{ cm.}$$

d In 1990 geldt $t = 10$ en daarbij hoort

$$G_m = 0,23 \cdot 10 + 76,22 = 78,52$$

$$G_v = 0,18 \cdot 10 + 64,8 = 66,6$$

$$L_m = 0,12 \cdot 10 + 176,78 = 177,98$$

$$L_v = 0,05 \cdot 10 + 165,5 = 166.$$

$$\text{De BMI voor de man is } \frac{78,52}{1,7798^2} \approx 24,79 \text{ en voor de vrouw } \frac{66,6}{1,66^2} \approx 24,17.$$

In 2020 geldt $t = 40$ en daarbij hoort

$$G_m = 0,23 \cdot 40 + 76,22 = 85,42$$

$$G_v = 0,18 \cdot 40 + 64,8 = 72$$

$$L_m = 0,12 \cdot 40 + 176,78 = 181,58 \text{ cm}$$

$$L_v = 0,05 \cdot 40 + 165,5 = 167,5 \text{ cm.}$$

$$\text{De BMI voor de man is } \frac{85,42}{1,8158^2} \approx 25,91 \text{ en voor de vrouw } \frac{72}{1,675^2} \approx 25,67.$$

$$\text{De toename voor de man is } 25,91 - 24,79 = 1,12 \text{ en de toename voor de vrouw is } 25,67 - 24,17 = 1,5.$$

Dus de toename voor de man is kleiner en Bram heeft geen gelijk.

32 De instroom door de koudwaterkraan is $\frac{1}{10}$ vat per minuut.

De instroom door warmwaterkraan is $\frac{1}{12}$ vat per minuut.

Door het gat in de bodem is de uitstroom $\frac{1}{20}$ vat per minuut.

Als beide kranen geheel open staan en de stop uit de bodem is getrokken, is de totale

instroom $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{2}{15}$ vat per minuut.

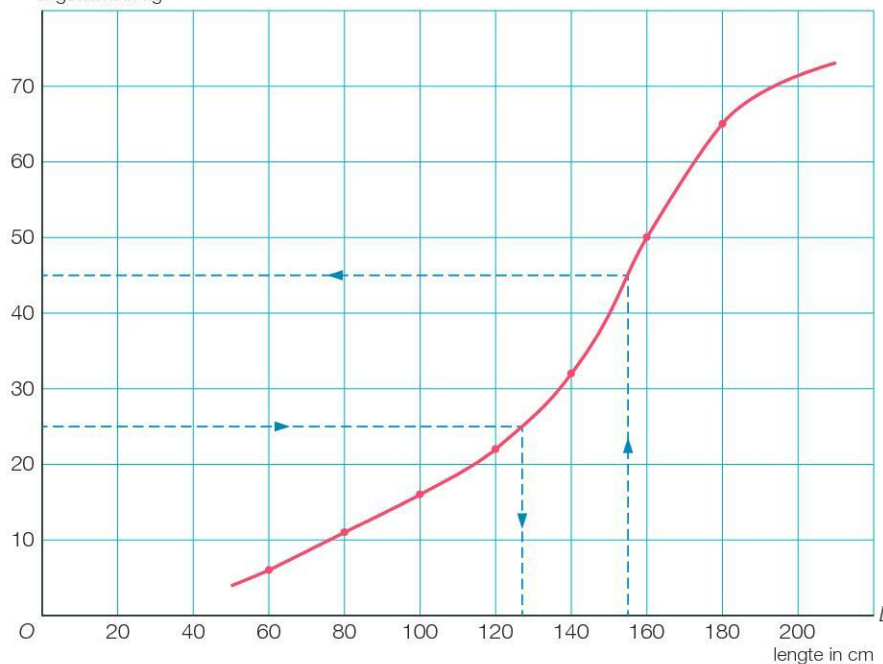
Dus het vat is dan vol in $\frac{1}{\left(\frac{2}{15}\right)} = 7,5$ minuten.

1.3 Interpoleren, extrapoleren en evenredigheid

Bladzijde 26

33

a G gewicht in kg



b Zie de grafiek. Het gewicht is ongeveer 45 kg.

c Zie de grafiek. De lengte is ongeveer 127 cm.

d Nee, want dat gewicht ligt te ver van de bekende gegevens af om een goede schatting te kunnen maken.

Bladzijde 27

34

a Neem N het aantal en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2006.

$$N = at + 281 \text{ met } a = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bij } t = 0 \text{ hoort } N = 281. \\ \text{Bij } t = 5 \text{ hoort } N = 220. \end{array} \right\} a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{220 - 281}{5 - 0} = \frac{-61}{5} = -12,2$$

$$\text{Dus } N = -12,2t + 281.$$

$$\text{Bij } 2009 \text{ hoort } t = 3 \text{ en } N = -12,2 \cdot 3 + 281 = 244,4 \approx 244.$$

b Neem N het aantal en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2011.

$$N = at + 220 \text{ met } a = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bij } t = 0 \text{ hoort } N = 220. \\ \text{Bij } t = 9 \text{ hoort } N = 193. \end{array} \right\} a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{193 - 220}{9 - 0} = \frac{-27}{9} = -3$$

$$\text{Dus } N = -3t + 220.$$

35

a $\Delta x = 1$ geeft $\Delta y = \frac{6,0 - 2,5}{78 - 46} = \frac{3,5}{32}$ en $\Delta x = 2$ geeft $\Delta y = 2 \cdot \frac{3,5}{32}$.

$$\text{Dus } y = 2,5 + 2 \cdot \frac{3,5}{32} \approx 2,72.$$

b $\Delta x = 1$ geeft $\Delta y = \frac{9,8 - 8,4}{103 - 90} = \frac{1,4}{13}$ en $\Delta x = 7$ geeft $\Delta y = 7 \cdot \frac{1,4}{13}$.

$$\text{Dus } y = 8,4 + 7 \cdot \frac{1,4}{13} \approx 9,15.$$

c $\Delta x = 1$ geeft $\Delta y = \frac{1,4}{13}$ en $\Delta x = 20$ geeft $\Delta y = 20 \cdot \frac{1,4}{13}$.

$$\text{Dus } y = 9,8 + 20 \cdot \frac{1,4}{13} \approx 11,95.$$

Bladzijde 28

- 36 a** $\Delta L = 1$ geeft $\Delta g = \frac{11,3 - 6,7}{4,83 - 3,62} = \frac{4,6}{1,21}$ en $\Delta L = 0,29$ geeft $\Delta g = 0,29 \cdot \frac{4,6}{1,21}$.
Dus $g = 6,7 + 0,29 \cdot \frac{4,6}{1,21} \approx 7,8$.
- b** $\Delta L = 1$ geeft $\Delta g = \frac{27,1 - 18,7}{9,81 - 6,12} = \frac{8,4}{3,69}$ en $\Delta L = 5,79$ geeft $\Delta g = 5,79 \cdot \frac{8,4}{3,69}$.
Dus $g = 27,1 + 5,79 \cdot \frac{8,4}{3,69} \approx 40,3$.
- c** $\Delta g = 1$ geeft $\Delta L = \frac{9,81 - 6,12}{27,1 - 18,7} = \frac{3,69}{8,4}$ en $\Delta g = 3,2$ geeft $\Delta L = 3,2 \cdot \frac{3,69}{8,4}$.
Dus $L = 6,12 + 3,2 \cdot \frac{3,69}{8,4} \approx 7,5$.

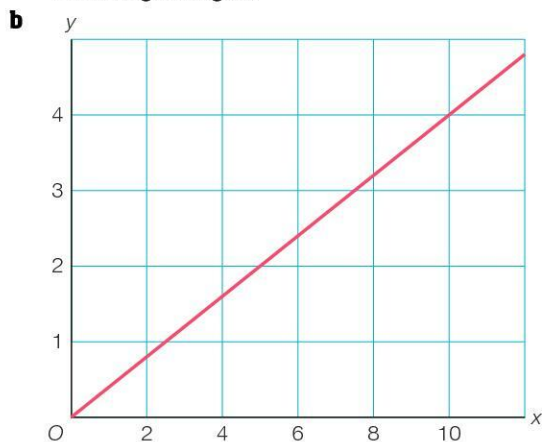
- 37 a** In 4 uur 6,8 meer, dus in 1 uur $\frac{6,8}{4}$ meer.
9:30 uur is 2,5 uur na 7:00 uur, dus is $T = -4,5 + 2,5 \cdot \frac{6,8}{4} \approx -0,3$.
Om 9:30 uur was de temperatuur $-0,3^\circ\text{C}$.
- b** In 4 uur 6,8 meer, dus in 1 uur $\frac{6,8}{4}$ meer.
14:00 uur is 3 uur na 11:00 uur, dus is $T = 2,3 + 3 \cdot \frac{6,8}{4} = 7,4$.
Om 14:00 uur was de temperatuur $7,4^\circ\text{C}$.
- c** De temperatuur neemt 's avonds af.
Bovendien ligt 20:00 uur ver van 11:00 uur af.

- 38 a** In 16 jaar 577 minder, dus in 1 jaar $\frac{577}{16}$ minder.
2010 is 10 jaar na 2010, dus in 2010 is het aantal $658 - 10 \cdot \frac{577}{16} \approx 297$.
Het aantal meldingen van hepatitis A in 2010 is 297.
- b** In 16 jaar 554 minder, dus in 1 jaar $\frac{554}{16}$ minder.
2015 is 15 jaar na 2010, dus in 2015 is het aantal $1443 - 15 \cdot \frac{554}{16} \approx 924$.
Het aantal meldingen van tuberculose in 2015 is 924.
- c** In 46 jaar 1681 minder, dus in 1 jaar $\frac{1681}{46}$ minder.
Geen meldingen meer $\frac{889}{\frac{1681}{46}} \approx 24,3$ jaar na 2016.
Dus er zijn geen meldingen van tuberculose meer in 2041.

Bladzijde 29

- 39** In 7 jaar $\frac{3}{17} - \frac{1}{7}$ meer, dus in 1 jaar $\frac{\frac{3}{17} - \frac{1}{7}}{7} = 0,0048...$ meer.
Een toename van $\frac{1}{5} - \frac{3}{17}$ duurt vanaf 2024 $\frac{\frac{1}{5} - \frac{3}{17}}{0,0048...} = 4,9$ jaar.
Dus in 2028.

- 40 a** Als je x met een getal vermenigvuldigt, dan moet je y met datzelfde getal vermenigvuldigen.



De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.

- c** De formule is $y = 0,4x$.

Bladzijde 30

41 a $\frac{15}{23} \mid \frac{60}{y}$ dus $y = \frac{23 \cdot 60}{15} = 92$

b $\frac{6}{3,6} \mid \frac{x}{30,6}$ dus $x = \frac{6 \cdot 30,6}{3,6} = 51$

c $\frac{128}{56} \mid \frac{520}{y}$ dus $y = \frac{56 \cdot 520}{128} = 227,5$

42 a K is evenredig met A , dus $K = aA$. $\left. \begin{array}{l} \text{Bij } A = 84 \text{ hoort } K = 1890. \\ a \cdot 84 = 1890 \\ 84a = 1890 \\ a = 22,5 \end{array} \right\}$

Dus $K = 22,5A$.

b $K = 2700$, dus $22,5A = 2700$
 $A = 120$

De vloeroppervlakte is 120 m^2 .

c Totale vloeroppervlakte $= \frac{75}{0,012} = 6250 \text{ m}^2$.

$A = 6250$ geeft $K = 22,5 \cdot 6250 = 140625$

De jaarlijkse servicekosten van het gehele complex zijn 140625 euro.

Bladzijde 31

43 a Tijd over eerste 10 km $= 40 \text{ minuten } 25 \text{ seconden} = \frac{40}{60} + \frac{25}{60 \cdot 60} \text{ uur} \approx 0,67361 \text{ uur}$.

Gemiddelde snelheid over eerste 10 km $= \frac{10 \text{ km}}{0,67361 \text{ uur}} \approx 14,845 \text{ km/uur}$.

Gemiddelde snelheid over eerste 20 km $= \frac{20 \text{ km}}{1 + \frac{21}{60} + \frac{8}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,790 \text{ km/uur}$.

Gemiddelde snelheid over eerste 30 km $= \frac{30 \text{ km}}{2 + \frac{1}{60} + \frac{36}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,803 \text{ km/uur}$.

$$\text{b Gemiddelde snelheid over eerste 40 km} = \frac{40 \text{ km}}{2 + \frac{41}{60} + \frac{42}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,842 \text{ km/uur.}$$

$$\text{Gemiddelde snelheid over eerste 50 km} = \frac{50 \text{ km}}{3 + \frac{22}{60} + \frac{3}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,848 \text{ km/uur.}$$

$$\text{Gemiddelde snelheid over eerste 60 km} = \frac{60 \text{ km}}{4 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,825 \text{ km/uur.}$$

$$\text{Gemiddelde snelheid over eerste 70 km} = \frac{70 \text{ km}}{4 + \frac{44}{60} + \frac{26}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,766 \text{ km/uur.}$$

$$\text{Gemiddelde snelheid over eerste 80 km} = \frac{80 \text{ km}}{5 + \frac{27}{60} + \frac{44}{60 \cdot 60} \text{ uur}} \approx 14,646 \text{ km/uur.}$$

Dus het evenredige verband gaat op tot en met 70 kilometer.

- 44** Met de actie betaalt ze voor 7 bonbons maar $6 \cdot 0,40 = € 2,40$.

Ze heeft $\frac{100}{7} = 14\frac{2}{7}$ keer 7 bonbons nodig.

Ze kan dus 14 keer 7 bonbons kopen en moet dan nog 2 losse voor 40 cent kopen.

Ze geeft in totaal $14 \cdot 2,40 + 2 \cdot 0,40 = € 34,40$ uit.

Dus Tess houdt nog € 5,60 over.

- 45** **a** Bij I wordt y vier keer zo klein.
Bij II wordt y vier keer zo groot.
b Bij situatie II is sprake van evenredige grootheden.

Bladzijde 33

- 46** **a** Voor de benodigde oplossing geldt $c \cdot V = 65 \cdot 450 = 29\,250$.

Gebruik van de aanwezige oplossing V mL, dan is $95 \cdot V = 29\,250$, dus

$$V = \frac{29\,250}{95} = 307,89...$$

Dus vul 308 mL van de aanwezige oplossing aan met water.

- b** Voor de benodigde oplossing geldt $c \cdot V = 0,2 \cdot 500 = 100$.

Gebruik van de aanwezige oplossing V mL, dan is $3 \cdot V = 100$, dus $V = \frac{100}{3} = 33,33...$

Dus vul 33 mL van de aanwezige oplossing aan met water.

- 47** **a** Als je een fietstocht van 60 km maakt, dan doe je er 6 uur over bij een snelheid van 10 km/uur.

Bij een snelheid van 20 km/uur is dat 3 uur en bij 30 km/uur maar 2 uur.

Het product van snelheid en tijd is steeds 60, dus is er sprake van een omgekeerd evenredig verband.

- b** Bij het langzame schema hoort een tijdsduur van 5 uur en 15 minuten $= 5\frac{1}{4}$ uur.

De werkelijke tijdsduur is 4 uur en 40 minuten $= 4\frac{2}{3}$ uur.

Snelheid is omgekeerd evenredig met de tijd, dus voor de etappe geldt $5\frac{1}{4} \cdot 42 = 220,5$.

De werkelijke snelheid is v km/uur, dan is $4\frac{2}{3} \cdot v = 220,5$, dus $v = \frac{220,5}{4\frac{2}{3}} = 47,25$.

Dus in de etappe is met een gemiddelde snelheid van 47,25 km/uur gereden.

- 48 a** T is omgekeerd evenredig met d , dus $T = \frac{a}{d}$.

$$\left. \begin{array}{l} T = \frac{a}{d} \\ d = 2,5 \text{ en } T = 1,6 \end{array} \right\} \frac{a}{2,5} = 1,6$$

$$a = 1,6 \cdot 2,5 = 4$$

$$\text{Dus } T = \frac{4}{d}.$$

- b** $T = \frac{4}{d}$ en $d = 4,835$ geeft $T = \frac{4}{4,835} \approx 0,8$.

De temperatuur op 4835 meter diepte is $0,8^\circ\text{C}$.

- c** $T = \frac{4}{d}$ en $T = 1,4$ geeft $1,4 = \frac{4}{d}$
- $$1,4d = 4$$
- $$d \approx 2,857$$

Dus op 2857 meter diepte is de temperatuur $1,4^\circ\text{C}$.

- 49 a** p is omgekeerd evenredig met t , dus $p = \frac{a}{t}$.

$$\left. \begin{array}{l} p = \frac{a}{t} \\ t = 3 \text{ en } p = 38 \end{array} \right\} \frac{a}{3} = 38$$

$$a = 38 \cdot 3 = 114$$

$$\text{Dus } p = \frac{114}{t}.$$

- b** $p = \frac{114}{t}$ en $t = 5,5$ geeft $p = \frac{114}{5,5} \approx 20,7\%$.

Er is nog $20,7\%$ van de olie aanwezig.

- c** 95% van de olie is verdwenen, dus er is nog 5% aanwezig.

$$p = \frac{114}{t} \text{ en } p = 5 \text{ geeft } 5 = \frac{114}{t}$$

$$5t = 114$$

$$t = 22,8$$

Het duurt bijna 23 jaar.

- 50 a** h is omgekeerd evenredig met r , dus $h = \frac{a}{r}$.

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{a}{r} \\ r = 750 \text{ en } h = 120 \end{array} \right\} \frac{a}{750} = 120$$

$$a = 120 \cdot 750 = 90\,000$$

$$\text{Dus } h = \frac{90\,000}{r}.$$

- b** $h = \frac{90\,000}{r}$ en $r = 500$ geeft $h = \frac{90\,000}{500} = 180$.

Het hoogteverschil is 180 mm .

- c** 15 cm , dus $h = 150$.

$$h = \frac{90\,000}{r} \text{ en } h = 150 \text{ geeft } 150 = \frac{90\,000}{r}$$

$$150r = 90\,000$$

$$r = 600$$

Een straal van 600 m .

- d** $h = \frac{a}{r}$
- $$\left. \begin{array}{l} r = 3320 \text{ en } h = 170 \end{array} \right\} \frac{a}{3320} = 170$$
- $$a = 170 \cdot 3320 = 564\,400$$

$$\text{Dus } h = \frac{564\,400}{r}.$$

Bladzijde 35

- 51 a** De prijs is omgekeerd evenredig met $T + a$ en moet worden vermenigvuldigd met a om B te krijgen. Dus $B = \frac{ca}{T+a}$, waarbij c een constante is.

$$\left. \begin{array}{l} B = \frac{ca}{T+a} \\ a = 750 \text{ en } T = 5000 \\ B = 750 \cdot 0,60 = 450 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{c \cdot 750}{5000 + 750} = 450 \\ \frac{750c}{5750} = 450 \\ 750c = 450 \cdot 5750 \\ c = \frac{450 \cdot 5750}{750} \\ c = 3450 \end{array}$$

Dus de formule is $B = \frac{3450a}{T+a}$.

- b** $B = \frac{3450a}{T+a}$, $a = 1000$ en $T = 5000$ geeft $B = \frac{3450 \cdot 1000}{5000 + 1000} = 575$.

Per roos is dat $\frac{575}{1000} = \text{€}0,575$.

Dus Jansma ontvangt 57,5 cent per roos.

- c** $B = \frac{3450a}{T+a}$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{3450a}{8000+a} = 0,35a \\ B = 0,35a \text{ en } T = 8000 \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{3450}{8000+a} = 0,35 \\ 3450 = 2800 + 0,35a \\ 650 = 0,35a \\ a \approx 1857 \end{array}$

Dus Jansma heeft die vrijdag 1857 rozen op de veiling verkocht.

- d** $B = \frac{3450a}{T+a}$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{3450a}{8000+a} = 0,5a \\ B = 0,5a \text{ en } T = 8000 \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{3450}{8000+a} = 0,5 \\ 3450 = 4000 + 0,5a \\ -0,5a = 550 \\ a = -1100 \end{array}$

Een negatief aantal rozen is niet mogelijk, dus een prijs van 50 cent per roos ook niet.

1.4 Wiskundige modellen

Bladzijde 37

- 52** I-C, II-B, III-A en IV-D

Bladzijde 38

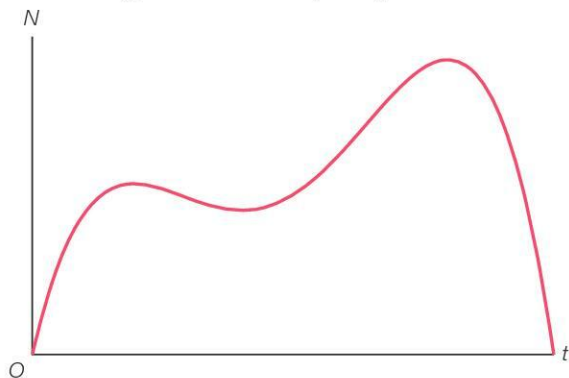
- 53 a** Voer in $y_1 = -0,093x^3 + 1,39x^2 - 3,28x + 4,7$.
De optie maximum geeft $x = 8,59...$ en $y = 20,14...$
Dus in september. De maximale temperatuur is $20,1^\circ\text{C}$.
- b** Voer in $y_2 = 19$.
De optie snijpunt geeft $x = 7,47...$ en $x = 9,61...$
Dus $9,61... - 7,47... = 2,14...$ maanden ≈ 65 dagen.

Bladzijde 39

54

a Voer in $y_1 = -0,15x^4 + 3,35x^3 - 24x^2 + 65x$.

Voor x neem je waarden tussen 0 (als de winkel opengaat) en 14 (omdat de meeste supermarkten niet later dan 10 uur's avonds dichtgaan). Het gedeelte waar het aantal klanten negatief wordt laat je weg.



b De optie maximum geeft $x \approx 9,579$ en $y \approx 102,0$.

9,579 uur is 9 uur en 35 minuten.

Dus om 17:35 uur is het drukst.

Er zijn dan 102 klanten.

c De optie nulpunt geeft $x \approx 12,024$.

Dus om 20:01 uur verlaten de laatste klanten de supermarkt.

d Bij 15:15 uur hoort $t = 7,25$. Dat geeft $N \approx 72$.

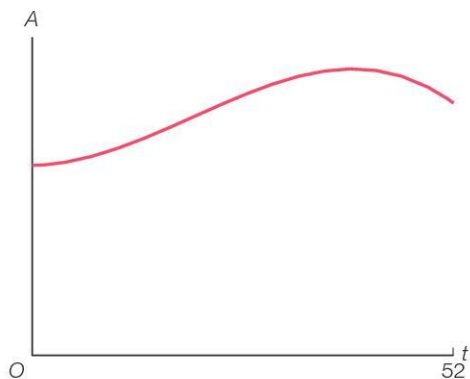
Voer in $y_2 = 72$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 11,037$.

Dus om 19:02 uur zijn er evenveel klanten in de supermarkt als om kwart over drie.

55

a Voer in $y_1 = 9 + \frac{5}{(0,05x - 2)^2 + 1}$.



b De optie maximum geeft $x = 40$ en $y = 14$.

Dus 40 weken na de start is de losse verkoop het grootst.

De verkoop is dan 14 000 exemplaren.

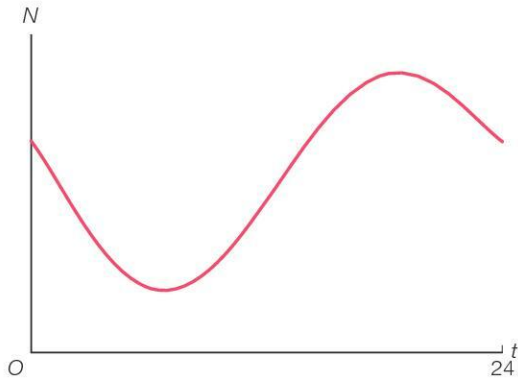
c Voer in $y_2 = 13,5$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 33,33$ en $x \approx 46,67$.

Tussen $t = 33,33$ en $t = 46,67$ liggen de waarden $t = 34, 35, \dots, 46$.

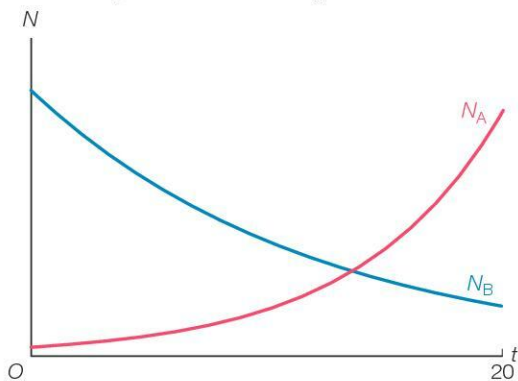
Dus gedurende 13 weken is de verkoop meer dan 13 500 exemplaren.

- 56 a** Voer in $y_1 = 0,02x^5 - 1,225x^4 + 22,5x^3 - 84x^2 - 646x + 5000$.



- b** 's Middags om half één is $t = 12,5$.
 $t = 12,5$ geeft $N \approx 3942$.
 Dus er zijn ongeveer 3942 bezoekers.
- c** De optie maximum geeft $x \approx 18,716$ en $y \approx 6615$.
 Dus om 18:43 uur is het aantal bezoekers het grootst.
 Er zijn dan 6615 bezoekers.
- d** Voer in $y_2 = 6000$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 15,977$ en $x \approx 21,561$.
 Dus het kan 15:59 uur of 21:34 uur zijn.

- 57 a** Voer in $y_1 = 20 \cdot 1,18^x$ en $y_2 = 600 \cdot 0,92^x$.



- b** In de tabel kijken bij y_1 geeft:
 $x = 10$ geeft $y_1 \approx 105$
 $x = 11$ geeft $y_1 \approx 124$
 $x = 12$ geeft $y_1 \approx 146$.
 Van $t = 11$ tot $t = 12$ komen er voor het eerst meer dan 20 planten per ha van plantensoort A bij, dat is dus in 2026.
- c** De optie snijpunt geeft $x \approx 13,665$ en $y \approx 192$.
 Dat is in augustus 2028.
 Er waren toen $2 \cdot 192 = 384$ planten per ha van soort A en B samen.
- d** Voer in $y_3 = 20 \cdot 1,18^x + 600 \cdot 0,92^x$.
 De optie minimum geeft $x \approx 10,91$ en $y \approx 363$.
 Dus het minimum aantal planten per ha is 363.
- e** $N_A = N_B + 200$
 Voer in $y_2 = 600 \cdot 0,92^x + 200$.
 De optie snijpunt met y_1 en y_2 geeft $x \approx 17,2$.
 In 2032 zijn er voor het eerst meer dan 200 planten per ha meer van soort A dan van soort B.

Alternatieve uitwerking

$$N_A - N_B = 200$$

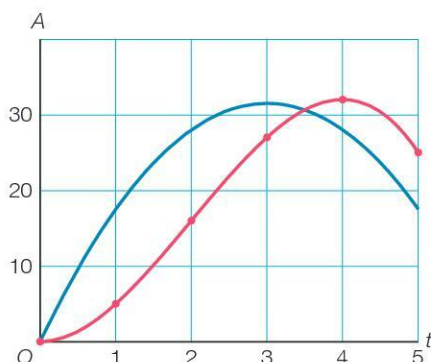
Voer in $y_4 = 20 \cdot 1,18^x - 600 \cdot 0,92^x$ en $y_5 = 200$.

De optie snijpunt met y_4 en y_5 geeft $x \approx 17,2$.

In 2032 zijn er voor het eerst meer dan 200 planten per ha meer van soort A dan van soort B.

58

a



b Zie de figuur bij vraag a.

De formule past niet goed bij de sprong, want de top van de grafiek ligt te ver naar links.

c $t = 0$ geeft $A = 6 \cdot 0^2 - 0^3 = 0$

$$t = 1 \text{ geeft } A = 6 \cdot 1^2 - 1^3 = 5$$

$$t = 2 \text{ geeft } A = 6 \cdot 2^2 - 2^3 = 16$$

$$t = 3 \text{ geeft } A = 6 \cdot 3^2 - 3^3 = 27$$

$$t = 4 \text{ geeft } A = 6 \cdot 4^2 - 4^3 = 32$$

$$t = 5 \text{ geeft } A = 6 \cdot 5^2 - 5^3 = 25$$

Dit komt overeen met de punten van de tabel.

Bladzijde 42

59

a Voer in $y_1 = -1,6x + 100$ en $y_2 = 100 - 8\sqrt{x}$.

De optie snijpunt geeft $x = 25$ en $y = 60$.

Dus na 25 dagen is de werkzaamheid even groot.

De werkzaamheid is dan 60.

b Voer in $y_3 = 25$.

De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x = 46,875$.

De optie snijpunt met y_2 en y_3 geeft $x \approx 87,9$.

Dus na 47 dagen is de houdbaarheid van Parmal verstreken.

Voor Parmal2 is dat 88 dagen.

c $W = 100 - c\sqrt{t}$

$$t = 9 \text{ en } W = 82 \text{ geeft } 100 - c\sqrt{9} = 82$$

$$100 - 3c = 82$$

$$-3c = -18$$

$$c = 6$$

d $W = 100 - 6\sqrt{t}$

$$t = 32 \text{ geeft } W = 100 - 6 \cdot \sqrt{32} \approx 66,1.$$

Dus het model is hiermee niet in overeenstemming.

e $W = 100 - dt^{0,4}$

$$t = 32 \text{ en } W = 70 \text{ geeft } 100 - d \cdot 32^{0,4} = 70$$

$$100 - 4d = 70$$

$$-4d = -30$$

$$d = 7,5$$

De formule is $W = 100 - 7,5t^{0,4}$.

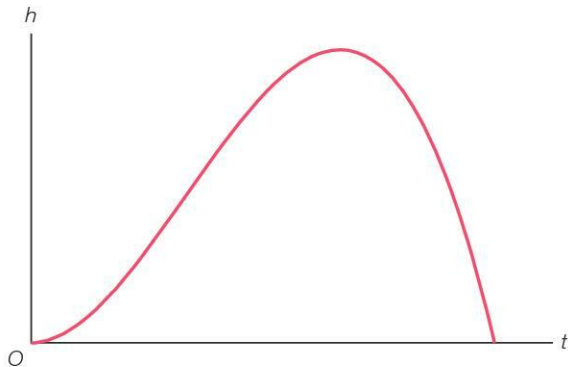
$$t = 9 \text{ geeft } W = 100 - 7,5 \cdot 9^{0,4} \approx 81,9.$$

Dus de gevonden formule klopt met het gegeven.

Bladzijde 43

- 60 a** $h = -0,005x^2 + 0,4x$
 $x = 10$ geeft $h = -0,005 \cdot 10^2 + 0,4 \cdot 10 = 3,5$
 $x = 60$ geeft $h = -0,005 \cdot 60^2 + 0,4 \cdot 60 = 6,0$
 Dus de formule klopt met de genoemde gegevens.
- b** Voer in $y_1 = -0,005x^2 + 0,4x$.
 De optie maximum geeft $x = 40$ en $y = 8$.
 Dus de bal komt maximaal 8 meter hoog.
- c** De optie nulpunt geeft $x = 0$ en $x = 80$.
 Dus de bal komt na 80 meter weer op de grond.
- d** $x = 25$ geeft $h = 6,875$.
 Bij $x = 25$ wijkt de hoogte die de formule geeft 12,5 cm af van de gemeten waarde.

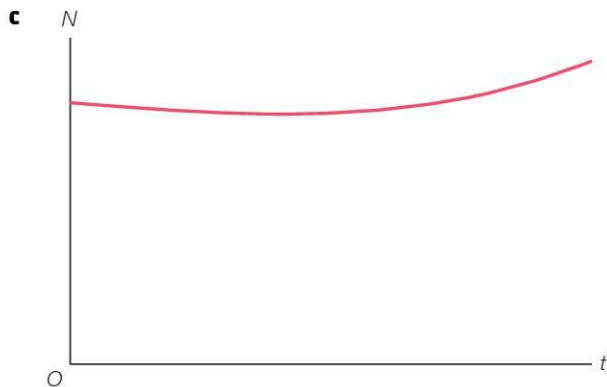
- 61 a** $h = -t^3 + 8t^2$
 $t = 0$ geeft $h = -0^3 + 8 \cdot 0^2 = 0$
 $t = 5$ geeft $h = -5^3 + 8 \cdot 5^2 = 75$
 $t = 8$ geeft $h = -8^3 + 8 \cdot 8^2 = 0$
 Dus de formule klopt met de genoemde gegevens.
- b** Voer in $y_1 = -x^3 + 8x^2$.



- c** De optie maximum geeft $x \approx 5,333$ en $y \approx 75,851$.
 Dus na 5,3 seconden is de pijl op het hoogste punt. De hoogte is dan 75,9 meter.
- d** Voer in $y_2 = 50$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 3,241$ en $x \approx 6,971$.
 Dus de hoogte is 50 meter voor $t \approx 3,2$ en $t \approx 7,0$.

Bladzijde 44

- 62 a** $N = t^3 - 8t + 200$
 $t = 0$ geeft $N = 0^3 - 8 \cdot 0 + 200 = 200$
 $t = 1$ geeft $N = 1^3 - 8 \cdot 1 + 200 = 193$
 $t = 5$ geeft $N = 5^3 - 8 \cdot 5 + 200 = 285$
 $t = 6$ geeft $N = 6^3 - 8 \cdot 6 + 200 = 368$
 Dus de formule klopt met alle gegeven meetwaarden.
- b** Voer in $y_1 = x^3 - 8x + 200$. In de tabel kijken bij y_1 .
 $x = 7$ geeft $y_1 = 487$
 $x = 8$ geeft $y_1 = 648$
 $x = 9$ geeft $y_1 = 857$
 Dus op 9 september neemt het aantal bacteriën voor het eerst met meer dan 200 miljoen toe.



De optie minimum geeft $x \approx 1,632$ en $y \approx 191,290$.
Dus het minimale aantal bacteriën is ongeveer 191 miljoen.

63 a In de tabel zijn weliswaar gelijke afnames in T te zien, maar dat is bij ongelijke toenames in t .

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad & \left. \begin{aligned} T &= a \cdot b^t + 20 \\ t = 0 \text{ en } T &= 100 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a \cdot b^0 + 20 &= 100 \\ a + 20 &= 100 \\ a &= 80 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \quad & \left. \begin{aligned} T &= 80 \cdot b^t + 20 \\ t = 65 \text{ en } T &= 50 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 80 \cdot b^{65} + 20 &= 50 \\ 80 \cdot b^{65} &= 30 \\ b^{65} &= 0,375 \end{aligned} \end{aligned}$$

Voer in $y_1 = x^{65}$ en $y_2 = 0,375$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,985$, dus $b \approx 0,985$.

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \quad & T = 80 \cdot 0,985^t + 20 \\ & t = 9 \text{ geeft } T \approx 89,8 \\ & t = 19 \text{ geeft } T \approx 80,0 \\ & t = 31 \text{ geeft } T \approx 70,0 \\ & t = 46 \text{ geeft } T \approx 59,9 \end{aligned}$$

Dus de gevonden formule past goed bij de andere gegevens van de tabel.

$$\mathbf{e} \quad \text{Voer in } y_1 = 80 \cdot 0,985^x + 20 \text{ en } y_2 = 40.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 91,724$.

Dus na ongeveer 92 minuten is de temperatuur van het water in de thermosfles gedaald tot 40°C .

Bladzijde 45

64 a $N = -3,35t^3 + 132t^2 - 1240t + 5000$

$t = 6$ geeft $N \approx 1588$, een afwijking van 138 van het gegeven 1450.

$t = 19$ geeft $N \approx 6114$, een afwijking van 114 van het gegeven 6000.

$t = 12$ geeft $N \approx 3339$, een afwijking van 161 van het gegeven 3500.

$t = 0$ geeft $N = 5000$ en dat klopt precies met het gegeven.

$t = 24$ geeft $N \approx 4962$, een afwijking van 38 van het gegeven 5000.

Dus de formule past redelijk goed bij de gegevens.

De grootste afwijking vind je bij $t = 12$ en de formule wijkt dan 161 af van het gegeven.

$$\mathbf{b} \quad N = 0,0577t^4 - 6,17t^3 + 174t^2 - 1430t + 5000$$

$t = 6$ geeft $N \approx 1426$, een afwijking van 24, dus een betere benadering.

$t = 19$ geeft $N \approx 5843$, een afwijking van 157, dus een slechtere benadering.

$t = 12$ geeft $N \approx 3431$, een afwijking van 69, dus een betere benadering.

$t = 0$ geeft $N = 5000$ en dat klopt weer precies met het gegeven.

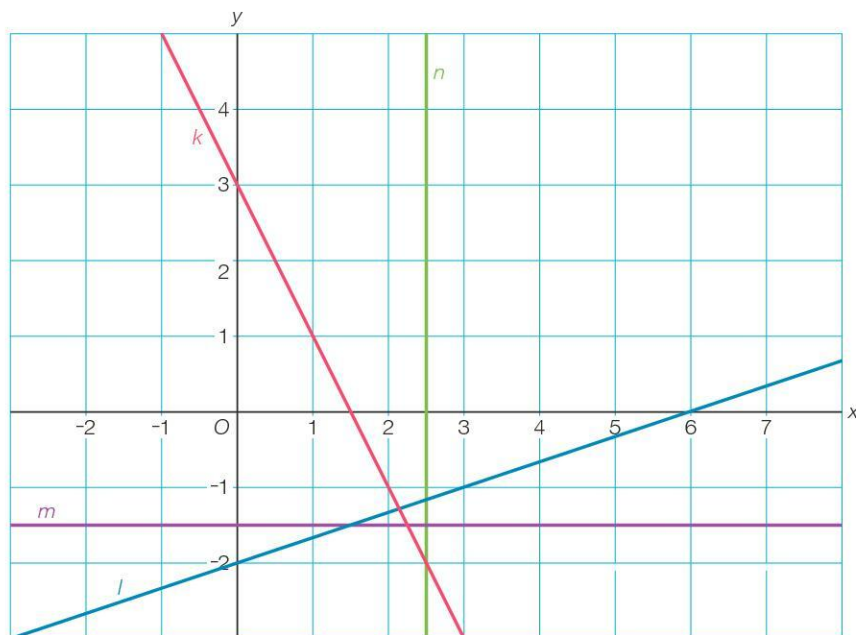
$t = 24$ geeft $N \approx 4753$, een afwijking van 247, dus een slechtere benadering.

Diagnostische toets

Bladzijde 48

1	x	0	2
	$y = -2x + 3$	3	-1

	x	0	3
	$y = \frac{1}{3}x - 2$	-2	-1



2 a $k: y = ax + b$ met $a = rc_l = -\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(9, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 9 + b = 3 \\ -4\frac{1}{2} + b = 3 \\ b = 7\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{2}x + 7\frac{1}{2}$.

b Horizontale lijn door $B(-1, 6)$, dus $m: y = 6$.

c $8x + 5 = 0$
 $8x = -5$
 $x = -\frac{5}{8}$
 Dus $C(-\frac{5}{8}, 0)$.

3 Los op $\frac{1}{6}x + 3 = 2\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$
 $x + 18 = 14x - 8$
 $-13x = -26$
 $x = 2$
 $x = 2$ geeft $y = \frac{1}{6} \cdot 2 + 3 = 3\frac{1}{3}$
 Dus het snijpunt van p en q is $(2, 3\frac{1}{3})$.

4 $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 - 2}{3 - -5} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(-5, 2) \end{array} \right\} -\frac{1}{2} \cdot -5 + b = 2$$

$$2\frac{1}{2} + b = 2$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

$l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{135 - 60}{65 - 40} = \frac{75}{25} = 3$

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + b \\ \text{door } P(40, 60) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 40 + b = 60 \\ 120 + b = 60 \\ b = -60 \end{array}$$

Dus $l: y = 3x - 60$.

$$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 3x - 60$$

$$-3\frac{1}{2}x = -59\frac{1}{2}$$

$$x = 17$$

$x_S = 17$ geeft $y_S = 3 \cdot 17 - 60 = -9$, dus $S(17, -9)$.

5 a $A = ap + b$ met $a = \frac{\Delta A}{\Delta p}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bij } p = 7,50 \text{ hoort } A = 800. \\ \text{Bij } p = 9,75 \text{ hoort } A = 665. \end{array} \right\} a = \frac{\Delta A}{\Delta p} = \frac{665 - 800}{9,75 - 7,50} = \frac{-135}{2,25} = -60$$

$$\left. \begin{array}{l} A = -60p + b \\ p = 7,50 \text{ en } A = 800 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -60 \cdot 7,50 + b = 800 \\ -450 + b = 800 \\ b = 1250 \end{array}$$

Dus $A = -60p + 1250$.

b $p = 11,25$ geeft $A = -60 \cdot 11,25 + 1250 = 575$

c $A = 1000$ geeft $-60p + 1250 = 1000$

$$-60p = -250$$

$$p \approx 4,167$$

Dus bij een prijs onder €4,17 komen er meer dan 1000 toeschouwers.

6 a In 4 jaar 7189 meer, dus in 1 jaar $\frac{7189}{4}$ meer.

2011 is 3 jaar na 2008, dus in 2011 is de hoeveelheid $24966 + 3 \cdot \frac{7189}{4} \approx 30358$.

De invoer van elektriciteit in 2011 is 30358 miljoen kWh.

b In 3 jaar 3718 meer, dus in 1 jaar $\frac{3718}{3}$ meer.

2006 is 1 jaar na 2005, dus in 2006 is de hoeveelheid $5398 + \frac{3718}{3} \approx 6637$.

De uitvoer van elektriciteit in 2006 is 6637 miljoen kWh.

c De invoer wordt in 5 jaar 9711 minder, dus in 1 jaar $\frac{9711}{5}$ minder.

2020 is 3 jaar na 2017, dus in 2020 is de hoeveelheid $22444 - 3 \cdot \frac{9711}{5} = 16617,4$.

De uitvoer wordt in 5 jaar 3898 meer, dus in 1 jaar $\frac{3898}{5}$ meer.

2020 is 3 jaar na 2017, dus in 2020 is de hoeveelheid $18944 + 3 \cdot \frac{3898}{5} = 21282,8$.

Er wordt in 2020 meer uitgevoerd dan ingevoerd.

Het verschil is $21282,8 - 16617,4 \approx 4665$ miljoen kWh.

7 a B is evenredig met d , dus $B = ad$ $\left. \begin{array}{l} a \cdot 45 = 3,6 \\ 45a = 3,6 \\ a = 0,08 \end{array} \right\}$

Dus $B = 0,08d$.

b $B = 6$ geeft $0,08d = 6$
 $d = 75$

Dus de auto kan 75 km afleggen.

8 a A is omgekeerd evenredig met p , dus $A = \frac{a}{p}$.

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{a}{p} \\ p = 50 \text{ en } A = 12\,000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{50} = 12\,000 \\ a = 12\,000 \cdot 50 \\ a = 600\,000 \end{array}$$

Dus $A = \frac{600\,000}{p}$.

b $A = \frac{600\,000}{p}$ en $p = 24$ geeft $A = \frac{600\,000}{24} = 25\,000$.

Er worden dan per jaar 25 000 zonnebrillen verkocht.

c $A = \frac{600\,000}{p}$ en $A = 8000$ geeft $\frac{600\,000}{p} = 8000$
 $8000p = 600\,000$
 $p = 75$

Dus prijs die maximaal gevraagd kan worden is 75 euro.

9 a Voer in $y_1 = 0,03x^2 - 0,0003x^3$.

De optie nulpunt geeft $x = 100$.

Dus na 100 meter komt de drone weer op de grond.

b De optie maximum geeft $x \approx 66,667$ en $y \approx 44,444$

Dus de maximale hoogte is 44,4 meter.

c Voer in $y_2 = 40$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 53,613$ en $x \approx 78,192$.

Dus tussen $x \approx 53,6$ en $x \approx 78,2$ is de hoogte meer dan 40 meter.

10 a Op $t = 0$ is $H = 0$.

Voer in $y_1 = -4,43x^2 + 2,78x + 10$.

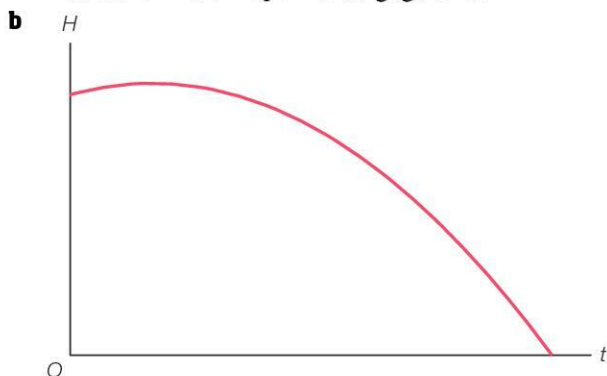
De optie nulpunt geeft $x \approx 1,85$.

Dus de formule klopt met de gegevens.

Alternatieve uitwerking

$t = 0$ geeft $H = 0$ en $t = 1,85$ geeft $H \approx 0,019$.

Dus de formule klopt met de gegevens.



c De optie maximum geeft $x = 0,313\dots$ en $y = 10,436\dots$

Dus na 0,31 seconden is hij op het hoogste punt en de maximale hoogte is 10,44 meter.

2 Statistiek

Voorkennis Procenten en frequenties

Bladzijde 54

- 1 a $121 - 57 = 64$, dus $\frac{64}{121} \times 100\% \approx 52,9\%$.
b $0,003 \times 8700 = 26,1$
c $0,913 \times 3,2 \approx 2,9$ miljoen
d totaal = $\frac{8,3}{0,126} \approx 65,9$ miljoen
- 2 a De procentuele toename is $\frac{7550 - 2521}{2521} \times 100\% \approx 199,5\%$.
b Het aantal inwoners in Afrika in 2017 was $5,68 \times 221 \approx 1255$ miljoen.
c De procentuele toename is $\frac{4504 - 1402}{1402} \times 100\% \approx 221,3\%$.
In de periode 1950-2017 is de procentuele toename in Azië inderdaad minder dan die in Afrika.
d $\frac{547}{2521} \times 100\% \approx 21,7\%$, dus in 1950 woonde 21,7% van de wereldbevolking in Europa.
 $\frac{742}{7550} \times 100\% \approx 9,8\%$, dus in 2017 woonde 9,8% van de wereldbevolking in Europa.

Bladzijde 55

- 3 a De totale frequentie $11 + 3 + 3 + 2 + 5 = 24$.
De relatieve frequentie bij Schalkhaar is $\frac{3}{24} \times 100\% = 12,5\%$.
b De relatieve frequentie van leerlingen uit Diepenveen is 20%.
totaal = $\frac{6}{0,2} = 30$
Er zitten 30 leerlingen in klas 4VB.
- 4 a totaal = $\frac{1310}{0,195} \approx 6718$. Er waren 6718 deelnemers in het voortgezet onderwijs.
b Het verschil is $21,5\% - 18,3\% = 3,2\%$.
Dus 3,2% van het totaal is 51.
totaal = $\frac{51}{0,032} \approx 1594$
Er waren 1594 deelnemers in het basisonderwijs.

2.1 De statistische cyclus

Bladzijde 56

- 1 De logische volgorde is 2, 4, 5, 1, 3.

Bladzijde 57

- 2 De juiste volgorde:
activiteit C: fase 1
activiteit D: fase 1
activiteit A: fase 2
activiteit G: fase 3
activiteit E: fase 3
activiteit B: fase 4
activiteit F: fase 4

Bladzijde 58

- 3 fragment A: fase 3
fragment B: fase 4
fragment C: fase 1
fragment D: fase 2
- 4 a 'Hoeveel jongeren' is niet specifiek genoeg en 'gezond eten' is vaag geformuleerd.
b Dit zijn twee vragen ineen.
c Er wordt verondersteld dat jongeren die veel gamen minder sociaal zijn, maar dat is nog de vraag.

Bladzijde 60

- 5 a Causaal verband. Het effect wordt onderzocht en niet alleen of er een relatie is.
b Geen causaal verband. Als er een verband wordt gevonden is niet duidelijk welke van de twee het gevolg is van de andere.
c Causaal verband. Men wil nagaan of het verbieden van roken op het schoolplein tot gevolg heeft dat het roken wordt teruggedrongen.
d Geen causaal verband. Er wordt niet onderzocht of het ene het andere tot gevolg heeft.
- 6 a Nee, waarschijnlijk weet ze al genoeg van het onderwerp.
b *
c *
d *

Bladzijde 61

- 7 a Deelvraag 1: Welk percentage van de scholieren eet voldoende fruit volgens de richtlijnen van het voedingscentrum?
Deelvraag 2: Welk percentage van de scholieren krijgt dagelijks te veel calorieën binnen volgens de richtlijnen van het voedingscentrum?
b Deelvraag 1: Treedt er gewichtsverlies op bij jongeren die minstens vijf keer per week sporten?
Deelvraag 2: Welk percentage van de jongeren doet vijf keer in de week aan sport?
c Deelvraag 1: Hoeveel procent van de kinderen van ouders met een minimuminkomen doet aan paardrijden?
Deelvraag 2: Hoeveel kost paardrijden op jaarbasis?
- 8 Vraag 5a:
Deelvraag 1: Welk percentage van de jongeren gamet overmatig?
Deelvraag 2: Is er een verschil in het percentage jongeren dat overmatig gamet op de verschillende schoolniveaus?
Vraag 5b:
Deelvraag 1: Hoeveel uur per dag besteden jongeren gemiddeld aan sociale media?
Deelvraag 2: Hoeveel uur per dag besteden jongeren gemiddeld aan gamen?
Vraag 5c:
Deelvraag 1: Welk percentage van de jongeren rookt?
Deelvraag 2: Welk percentage van de rokende jongeren doet dat ook op het schoolplein?
Vraag 5d:
Deelvraag 1: Welk percentage van de scholieren in de vierde klas rookt?
Deelvraag 2: Welk percentage van de leerlingen in 4 vwo rookt?
- 9 a Onderzoeksvraag 1: B
Onderzoeksvraag 2: D
Onderzoeksvraag 3: A
Onderzoeksvraag 4: C

- b** Onderzoeksvraag 1:
Deelvraag 1: Wat is de ontwikkeling van de huizenverkoop in de afgelopen vijf jaar?
Deelvraag 2: Is er een verschil in de prijsontwikkeling tussen verschillende woningtypen?
- Onderzoeksvraag 2:
Deelvraag 1: Heeft het beperken van de hypotheekrenteaftrek invloed op de woningprijzen?
Deelvraag 2: Zijn er op de lange duur voldoende woningen om in de totale woonwens te voorzien?
- Onderzoeksvraag 3:
Deelvraag 1: Hoe was de woningmarkt in 2000?
Deelvraag 2: Hoeveel huizen zijn er bijgekomen sinds 2000?
- Onderzoeksvraag 4:
Deelvraag 1: Hoe heeft de woningmarkt zich ontwikkeld in die regeerperiode?
Deelvraag 2: Welke onvoorziene omstandigheden zijn er geweest?

Bladzijde 62

- 10** **a** Dat is veel te veel werk.
b Dan pas geeft het onderzoek informatie over de hele bevolking.

Bladzijde 63

- 11** **a** De examenleerlingen van je school.
b Alle weekbladen.
c Alle inwoners van Appelscha.
d Hooikoortspatiënten.
- 12** **a** De leeftijdsopbouw in de figuur is niet gelijkmatig. Je kunt dus niet van elke leeftijd evenveel mensen ondervragen om een representatieve steekproef te krijgen.
b Ja, dat kan als de populatie ook alleen maar uit mannen van pensioengerechtigde leeftijd bestaat.
c Ja, dat kan als het aantal onderzochte aspecten niet groot is en de populatie niet zo divers.
- 13** **a** Er zijn grote groepen mensen die zelden of nooit op zaterdagmiddag in de stad (kunnen) rondlopen, dus de steekproef is niet aselekt.
b Wie geen auto heeft of zelden in de ochtendspits in de file zit, heeft weinig kans om in de steekproef voor te komen, dus de steekproef is niet aselekt.
c De steekproef van 12 personen is te klein en niet aselekt: iemand in Drenthe heeft meer kans dan iemand in Zuid-Holland om in de steekproef voor te komen.
d De bezoekers van een natuurgebied vormen – zeker als het gaat over het milieuprobleem – geen goede afspiegeling van de hele bevolking, dus de steekproef is niet aselekt.
e Mensen zonder smartphone kunnen niet in de steekproef voorkomen, dus de steekproef is niet aselekt.

2.2 Data verzamelen

Bladzijde 65

- 14** **a** leeftijd, nationaliteit, geslacht, lengte, tak van sport
b leeftijd, lengte
c *

Bladzijde 66

- 15** **a** 1 Suggestieve vraagstelling.
2 Vraagstelling met dubbele ontkenning. Bovendien suggestief.
3 Onduidelijke vraag. Wat is 'veel'?
4 Doet een beroep op de herinnering en niet alle antwoordmogelijkheden zijn opgenomen.

- b** 1 Ervaart u overlast van buren?
I nooit II soms III regelmatig IV vaak
- 2 Vindt u het verstandiger om een huis te kopen of te huren?
I huren II kopen
- 3 Hoeveel uren heeft u gisteren tv gekeken?
I 0 tot 1 uur II 1 tot 2 uur III 2 tot 3 uur IV 3 tot 5 uur V 5 uur of meer
- 4 Op hoeveel dagen heeft u vorige week de website NU.nl bezocht?
I op 0 dagen II op 1 of 2 dagen III op 3 of 4 dagen V op 5 of meer dagen

- 16** **a** kwalitatief
b kwantitatief
c kwalitatief
d kwalitatief

Bladzijde 67

- 17** **a** discreet
b continu
c continu
d discreet
e continu
f discreet

- 18** Als de variabele is weergegeven in gehele jaren dan is het een discrete variabele. Zijn alle leeftijden mogelijk, dus bijvoorbeeld ook 17,3434 jaar, dan is de variabele continu te noemen.

- 19** **a** $\frac{754}{1300} \times 100\% = 58\%$
b $\frac{12}{663} \times 100\% \approx 1,8\%$
 $\frac{14}{637} \times 100\% \approx 2,2\%$
c De variabele geslacht is kwalitatief, want het is een eigenschap. De variabele eenzaamheid is kwalitatief, want het verschil tussen twee opeenvolgende getallen heeft geen betekenis
d Daar is deze wel van belang, want het gaat van niet eenzaam tot zeer ernstig eenzaam.

Bladzijde 69

- 20** woonplaats: nominaal
reisafstand naar school in km: ratio
geboortjaar: interval
aantal broers/zussen: ratio
lid van een sportclub: nominaal
aantal uur per week bijbaan: ordinaal

- 21** **a** kwalitatief: nominaal en ordinaal
kwantitatief: interval en ratio
b nominaal: bestemming
ordinaal: aantal sterren van het hotel
interval: gemiddelde jaartemperatuur op plaats van bestemming
ratio: kosten van de reis

- 22** Op grond van de peiling zou je $\frac{205}{1200} \times 100\% \approx 17,1\%$ van de stemmen op de VVD verwachten, dus 21,3% is meer dan je op basis van de peiling zou mogen verwachten.

Bladzijde 70

- 23** De populatieproportie $p = \frac{120}{10000} = 0,012$ en de steekproefproportie $\hat{p} = \frac{4}{250} = 0,016$.

- 24 Er geldt $p = 0,418$ en er zijn 627 mensen met bloedgroep A.

$0,418 = \frac{627}{\text{aantal patiënten in het ziekenhuis}}$, dus het aantal patiënten in het ziekenhuis

is $\frac{627}{0,418} = 1500$.

Er geldt $\hat{p} = 0,45$ en er zijn 27 patiënten met bloedgroep A in de steekproef.

$0,45 = \frac{27}{\text{aantal patiënten in de steekproef}}$, dus het aantal patiënten in de steekproef is $\frac{27}{0,45} = 60$.

- 25 Voor het kenmerk 'personeelslid is man en heeft kinderen' geldt $p = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$.
Voor het kenmerk 'personeelslid is vrouw en heeft kinderen' geldt $p = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35$.
Voor het kenmerk 'personeelslid heeft kinderen' geldt $p = 0,18 + 0,35 = 0,53$.
Dus voor kenmerk 'personeelslid met kinderen is man' geldt $p = \frac{0,18}{0,53} \approx 0,34$.

2.3 Centrum- en spreidingsmaten

Bladzijde 72

- 26 a nominaal
b Nee, want je hebt geen kwantitatieve variabele.
c De modus, want daarvoor hoeft je alleen maar te weten wat het vaakst voorkomt.

Bladzijde 73

- 27 a De totale frequentie is $3 + 3 + 7 + 0 + 3 + 2 + 2 = 20$, dus het onderzoek duurde 20 dagen.
b gemiddelde = $\frac{3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{20} = 2,55$
mediaan = $\frac{10^{\text{e}} \text{ getal} + 11^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2$
modus = 2, want 2 heeft de grootste frequentie.

Bladzijde 74

- 28 a gemiddelde = $\frac{5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 32}{20} = 3,9$
b mediaan = $\frac{10^{\text{e}} \text{ getal} + 11^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2$
Dus de klas kan op de mediaan wijzen, want die is in beide klassen gelijk.
- 29 a Op volgorde zetten geeft 5,9; 6,3; 6,6; 6,8; 7,0; 7,0; 7,2; 8,0; 8,4.
9 cijfers, dus mediaan = 5^e cijfer = 7,0.
b Op volgorde zetten geeft 5,7; 5,9; 6,3; 6,6; 7,0; 7,1; 7,3; 7,4.
8 cijfers, dus mediaan = $\frac{4^{\text{e}} \text{ cijfer} + 5^{\text{e}} \text{ cijfer}}{2} = \frac{6,6 + 7,0}{2} = 6,8$.
c Nils zou bijvoorbeeld kunnen proberen om van het cijfer NE een 7,1 te maken.
Dan zou gelden mediaan = $\frac{4^{\text{e}} \text{ cijfer} + 5^{\text{e}} \text{ cijfer}}{2} = \frac{7,0 + 7,1}{2} = 7,05$.
Hij zou ook van SK, BIO of AK een 7,1 kunnen proberen te maken.
- 30 a Mediaan, vanwege de uitschieter.
b Modus, kwalitatieve gegevens.
c Gemiddelde of mediaan.
d Modus of mediaan, vanwege de uitschieter (een meetfout).

Bladzijde 75

- 31 $7 \cdot 5,5 - 7 \cdot 5,06 = 3,08$, dus Daan moet 3,1 hoger halen.
 $8 \cdot 5,5 - 8 \cdot 5,08 = 3,36$, dus Tim moet 3,4 hoger halen.
Dus Tim moet zich het meeste verbeteren.

- 32** Als p het percentage meisjes is, dan is $100 - p$ het percentage jongens.

Er geldt $(100 - p) \cdot 3 = 100 \cdot 1,2$

$$300 - 3p = 120$$

$$-3p = -180$$

$$p = 60.$$

Dus 60% van de klas is meisje.

Alternatieve uitwerking

$\frac{1,2}{3} \times 100\% = 40\%$, dus de jongens bepalen voor 40% het cijfer.

Als 40% jongen is, dan is 60% meisje.

- 33 a** Ratio, want er is een natuurlijk nulpunt.

- b** 25% van 60 is 15.

Bij 14, 12 en 10 nachten horen de frequenties 2, 4 en 9.

$2 + 4 + 9 = 15$, dus de 25% langst verblijvende gasten bleven 10, 12 of 14 nachten.

- c** De middelste 50%, dus de laagste en de hoogste 25% niet.

Bij de laagste 25% horen 15 gasten.

Bij 1, 2, 3 en 4 nachten horen de frequenties 3, 1, 6 en 5.

$3 + 1 + 6 + 5 = 15$, dus de 25% kortst blijvende gasten bleven 1, 2, 3 of 4 nachten.

De gasten die de middelste 50% vormen bleven 5, 6 of 7 nachten.

Bladzijde 76

- 34 a** De spreidingsbreedte is $3216 - 1648 = 1568$ euro.

De interkwartielafstand is $2304 - 1952 = 352$ euro.

- b** 50% van de werknemers, dus $0,50 \cdot 250 = 125$ werknemers.

- c** Die hebben een salaris van tussen 2304 en 3216 euro per maand.

Bladzijde 77

- 35 a** Onjuist, het zijn er evenveel, beide 25% van de leerlingen.

- b** Onjuist, 25% van de leerlingen is lichter dan 46,9 kg. Dat zijn $0,25 \cdot 2185 \approx 546$ leerlingen. Dat zijn er minder dan 550.

- c** Onjuist, zowel binnen als buiten de box zit 50% van de leerlingen.

- d** Juist. Het gemiddelde van het kleinste en grootste gewicht is $\frac{34,7 + 92,8}{2} = 63,75$ kg.

Dat valt in de categorie met de zwaarste 25% leerlingen. Dus meer dan driekwart van de leerlingen is lichter.

- 36 a** 50% van de bedrijven, dus $0,50 \cdot 18\,056 = 9028$ bedrijven.

- b** Het gemiddelde is hoger dan de mediaan omdat de boxplot rechts van de mediaan veel verder doorloopt dan links van de mediaan.

- c** Er zijn evenveel bedrijven met meer dan 117 koeien als bedrijven met minder dan 55 koeien.

- d** In ieder kwartiel zitten $0,25 \cdot 18\,056 = 4514$ bedrijven.

De bedrijven met minder dan 117 koeien hebben dus samen maximaal

$$4514 \cdot 55 + 4514 \cdot 83 + 4514 \cdot 117 = 1\,115\,070 \text{ koeien.}$$

De bedrijven met meer dan 117 koeien moeten dan per bedrijf gemiddeld meer dan

$$\frac{1\,115\,070}{4514} = 255 \text{ koeien hebben om meer koeien te hebben. Dat is gezien de boxplot}$$

zeker mogelijk.

De bewerking kan dus kloppen.

- e** 100 is precies het midden van de rechterhelft van de box. Naar schatting zal dus 62,5% van de bedrijven minder dan 117 koeien hebben.

Dat zijn $0,625 \cdot 18\,056 = 11\,285$ bedrijven.

Bladzijde 78

- 37** In klas 4VC liggen veel cijfers dicht bij het gemiddelde, dus hier is de spreiding het kleinst. Bij 4VA is de spreiding groter en bij 4VB het grootst, omdat veel cijfers vrij ver van het gemiddelde liggen.

Bladzijde 79

- 38 a** 1 Het gemiddelde is $\frac{0+2+3+4+6}{5} = 3$.
2 Waarneming – gemiddelde geeft $-3, -1, 0, 1, 3$.
3 Kwadrateren en optellen geeft $(-3)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2 = 20$.
4 Delen door aantal waarnemingsgetallen geeft $\frac{20}{5} = 4$.
5 De wortel nemen geeft $\sqrt{4} = 2$. Dus $\sigma = 2$.
- b** Alle getallen zijn 10 hoger, dus de afwijkingen van het gemiddelde zijn hetzelfde als bij A. De standaardafwijking is dus gelijk.
- c** Alle waarnemingsgetallen zijn hetzelfde, dus $\sigma = 0$.
- 39 a** Omdat zelfs het laagste en het hoogste cijfer niet zover afwijken.
- b** De standaardafwijking is kleiner geworden, want een van de waarnemingen is dichterbij het gemiddelde gekomen.
- 40 a** Bij groep B, want daar is de spreiding van de lengtes het grootst.
- b** Figuur b, want daar is de spreiding, dus de standaardafwijking, kleiner dan bij figuur a.

2.4 Klassenindeling en polygonen

Bladzijde 81

- 41** Het geeft geen beter overzicht, want elk waarnemingsgetal heeft frequentie 1.

Bladzijde 82

- 42 a** Discrete variabele, omdat prijzen in supermarkten op centen worden afgerond.
- b** In de klasse $\langle 200, 300 \rangle$.
- c** De totale frequentie is $26 + 17 + 21 + 8 + 13 + 2 = 87$.
gemiddelde = $\frac{26 \cdot 50 + 17 \cdot 150 + 21 \cdot 250 + 8 \cdot 350 + 13 \cdot 450 + 2 \cdot 550}{87} \approx 217$ cent.
- d** De mediaan is het 44^e waarnemingsgetal.
 $26 + 17 = 43$, dus de mediaan ligt in de klasse $\langle 200, 300 \rangle$.
- e** De modale klasse is de klasse $\langle 0, 100 \rangle$, want die heeft de grootste frequentie.

43 a

oppervlakte in m ²	frequentie
[50, 150)	8
[150, 250)	5
[250, 350)	3
[350, 450)	2
[450, 550)	2

- b** De modale klasse is de klasse $[50, 150)$, want die heeft de grootste frequentie.
- c** Het aantal werknemers is $6 + 8 + \dots + 19 = 266$.

$$\text{gemiddelde} = \frac{8 \cdot 100 + 5 \cdot 200 + 3 \cdot 300 + 2 \cdot 400 + 2 \cdot 500}{266} \approx 16,9 \text{ m}^2$$

De berekening met de klassenmiddens is een benadering, want hierbij ga je ervan uit dat de gegevens gelijkmatig verdeeld zijn over de klasse en dat is niet zo. Hierdoor ontstaat het verschil in uitkomsten.

Bladzijde 83

- 44** **a** In de klasse $[35, 45)$.
b De totale frequentie is $18 + 3 + 40 + 9 + 2 = 72$.
 Het kleinst mogelijke gemiddelde krijg je door te rekenen met de laagst mogelijke leeftijd per klasse, dat geeft

$$\text{gemiddelde} = \frac{18 \cdot 25 + 3 \cdot 35 + 40 \cdot 45 + 9 \cdot 55 + 2 \cdot 65}{72} \approx 41,4 \text{ jaar.}$$
 Het kan dus niet kloppen.
c De mediaan is het gemiddelde van het 36^e en het 37^e getal.
 $18 + 3 = 21$ en $18 + 3 + 40 = 61$, dus de mediaan ligt in de klasse $[45, 55)$.
 De mediaan kan dus 47 jaar zijn.
d In de klasse $[45, 55)$ vallen 10 leeftijden. Doordat deze klasse frequentie 40 heeft komt in elk geval één leeftijd uit deze klasse minstens 4 keer voor.
 De leeftijd 36 jaar valt in de klasse $[35, 45)$ met frequentie 3 en komt dus hoogstens 3 keer voor.
- 45** **a** Discreet, want een leerling kan alleen een geheel aantal broers of zussen hebben.
 Het meetniveau is ratio, want er is een natuurlijk nulpunt.
b Er zijn 6 leerlingen met 2 broers of zussen.
c $5 + 12 + 6 + 2 + 2 + 1 = 28$ leerlingen.

Bladzijde 84

- 46** **a** De variabele gewicht ei in gram. Deze variabele is kwantitatief.
b De modale klasse is $[66, 69)$, want die heeft de grootste frequentie.
c Het kleinst mogelijke totale gewicht krijg je door te rekenen met het laagste gewicht per klasse, dat geeft totale gewicht $= 8 \cdot 60 + 11 \cdot 63 + 13 \cdot 66 + 12 \cdot 69 + 6 \cdot 72 = 3291$ gram.
 Het hoogst mogelijke totale gewicht krijg je door te rekenen met het grootste gewicht per klasse, dat geeft totale gewicht $= 8 \cdot 63 + 11 \cdot 66 + 13 \cdot 69 + 12 \cdot 72 + 6 \cdot 75 = 3441$ gram.
 Dus Matthijs heeft inderdaad gelijk.
d Bij het kleinst mogelijke totale gewicht is het gemiddelde gewicht $\frac{3291}{50} = 65,82$ gram.
 Dus het is mogelijk.
- 47** **a** De variabele klasse is kwalitatief. Je kunt bijvoorbeeld niet een gemiddelde klasse bepalen.
b Nee, dat kan niet. Omdat de klassen S en XL aan één kant onbegrensd zijn, kan er sprake zijn van grote uitschieters en dus is een goede schatting niet mogelijk.
c Een histogram gebruik je bij een kwantitatieve variabele, maar klasse is kwalitatief.
- 48** **a** De variabele is gemiddeld bonbedrag in euro's. Deze variabele is continu, want alle tussenliggende bedragen zijn mogelijk.
b 10 euro, want daar begint de eerste klasse.
c $6 + 7 + 4 + 3 + 5 + 3 = 28$ winkels.
d De mediaan is het gemiddelde van het 14^e en 15^e waarnemingsgetal.
 $6 + 7 = 13$, dus de mediaan ligt in de klasse $[30, 40)$.
e De relatieve frequentie is $\frac{5}{28} \times 100\% = 17,9\%$.

Bladzijde 85

- 49** **a** Ja, want het betreft kwantitatieve gegevens.
b $\text{gemiddelde} = 0,10 \cdot 1 + 0,12 \cdot 2 + 0,14 \cdot 3 + 0,20 \cdot 4 + 0,16 \cdot 5 + 0,14 \cdot 6 + 0,08 \cdot 7 = 3,76$
c Op 33 dagen meer dan 5 leerlingen en dat is op $14\% + 8\% = 22\%$ van de dagen.
 Dus in totaal duurde het onderzoek $\frac{33}{0,22} = 150$ dagen.
d Gedurende 150 dagen kwamen er gemiddeld 3,76 leerlingen te laat, dus zij heeft $150 \cdot 3,76 = 564$ keer genoteerd dat een leerling te laat kwam.

- 50** **a** $0,3\% + 0,7\% + 2,4\% + 5,9\% + 12,2\% = 21,5\%$ van de sporters is kleiner dan Diego.
b $3,0\% + 1,1\% + 0,4\% + 0,2\% = 4,7\%$ van de sporters is langer dan 2 meter, dus het klopt.
c $0,3\% + 0,7\% + 2,4\% + 5,9\% + 12,2\% + 16,3\% + 20,4\% = 58,2\%$.
 Dus zijn lengte is minstens 185 cm en minder dan 190 cm.
d Een percentielscore van 50.

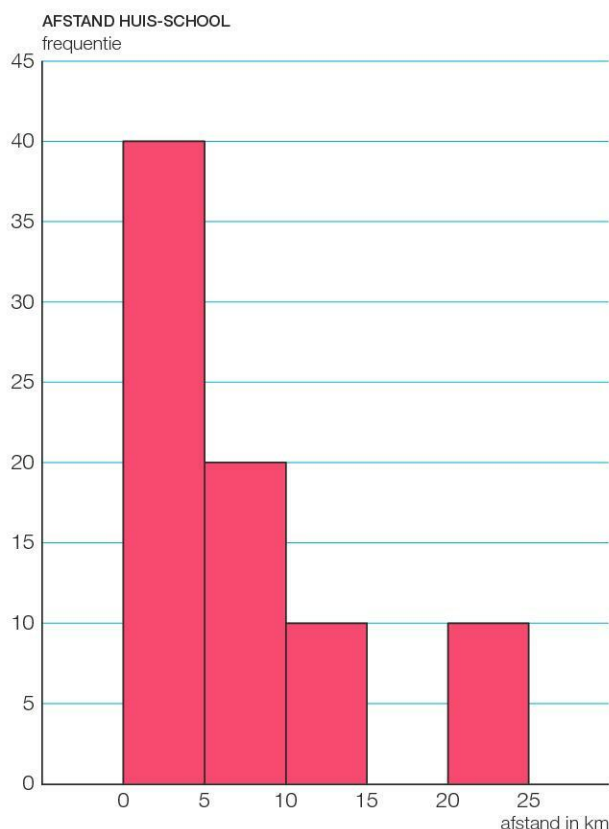
Bladzijde 86

- 51** De frequentie die je bij de rechtergrens afleest heeft dan de betekenis 'aantal met deze waarde of lager'. Zie bijvoorbeeld de polygoon in theorie C. In de klasse $[10, 20)$ zitten 6 bonbedragen. De waarnemingen in deze klasse liggen verspreid tussen 10 en 20 euro. Als het punt bij het klassenmidden 15 uitgezet zou zijn, dan zou het net lijken of alle 6 bonbedragen minder dan 15 euro zouden zijn.

- 52** **a** Aflezen geeft 80 studenten.
b Aflezen geeft 60 studenten.
c $80 - 40 = 40$ studenten.
d $70 - 60 = 10$ studenten.

e

afstand in km	frequentie
$[0, 5)$	40
$[5, 10)$	20
$[10, 15)$	10
$[15, 20)$	0
$[20, 25)$	10



Bladzijde 87

- 53** **a** Aflezen geeft 60%.
Dat zijn $0,60 \cdot 300 = 180$ klanten.
- b** Aflezen geeft 85%.
Dat zijn $0,85 \cdot 300 = 255$ klanten.
- c** 2,5 minuten = 150 seconden
Aflezen geeft $100\% - 70\% = 30\%$.
Dat zijn $0,30 \cdot 300 = 90$ klanten.
- d** Aftrekken van de antwoorden van a en b geeft $255 - 180 = 75$ klanten.
- 54** **a** Van 10:00 tot 20:00 is $10 \cdot 4 = 40$ kwartieren in totaal.
Aflezen bij 20 klanten geeft 80%.
Dat zijn $0,80 \cdot 40 = 32$ kwartieren.
- b** Aflezen bij 15 klanten geeft 40%.
Dus $100\% - 40\% = 60\%$ van de kwartieren minstens 15 klanten.
Dat zijn $0,60 \cdot 40 = 24$ kwartieren.
- c** Aflezen bij 10 klanten geeft 20%.
Aflezen bij 25 klanten geeft 90%.
Dus $90\% - 20\% = 70\%$ van de kwartieren minstens 10, maar minder dan 25 klanten.
Dat zijn $0,70 \cdot 40 = 28$ kwartieren.

d

aantal per kwartier	relatieve frequentie	frequentie
$[0, 5)$	10%	4
$[5, 10)$	10%	4
$[10, 15)$	20%	8
$[15, 20)$	40%	16
$[20, 25)$	10%	4
$[25, 30)$	10%	4

2.5 Soorten verdelingen**Bladzijde 89**

- 55** **a** Er waren 7 wedstrijden waarin 2 keer werd gescoord.
- b** $8 + 4 + 7 + 2 + 3 + 6 + 2 + 1 + 1 = 34$ wedstrijden gespeeld.
- c** $8 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 = 93$ doelpunten gescoord.
- d** Het kunnen alleen wedstrijden met 4 doelpunten zijn. Dus maximaal 3 wedstrijden zijn in 2-2 geëindigd.
- e** De mediaan is het gemiddelde van het 17^e en 18^e waarnemingsgetal.
 $8 + 4 = 12$ en $8 + 4 + 7 = 19$, dus de mediaan is 2.
Het gemiddeld aantal doelpunten per wedstrijd is $\frac{93}{34} \approx 2,7$.
Dus het gemiddeld aantal doelpunten is groter dan de mediaan.

Bladzijde 90

- 56** **a** Het gemiddelde is lager bij figuur 2.30 dan bij figuur 2.28, door de uitschieter.
- b** De mediaan is hetzelfde, want daar heeft de uitschieter geen invloed op.
- c** De uitschieter zorgt ervoor dat de standaardafwijking groter is bij figuur 2.30 dan bij figuur 2.28.

Bladzijde 91

- 57** **a** Mogelijk betrof het een eerste en een zesde klas, zodat de linkertop bij de eerste klas en de rechtersop bij de zesde klas hoorde.
- b** De modale klasse is de klasse $[182, 184)$, want die heeft de grootste frequentie.
- c** Het gemiddelde is ongeveer 176 cm. De lengten wijken hier gemiddeld ongeveer 8 cm van af. Een schatting van de standaardafwijking is dus 8 cm.
- d** Als boxplot I bij het histogram zou passen dan zou 25% van de waarnemingen tussen 160 en 164 liggen, dat is in figuur 2.31 duidelijk niet het geval.
Er zitten rechts van 176 cm een stuk meer waarnemingsgetallen dan links van 176 cm. De mediaan zal dus groter zijn dan 176 cm. Boxplot III past dus niet bij het histogram. Boxplot II past het beste bij figuur 2.31, want ongeveer een kwart van de waarnemingen zit tussen 179 cm en 183 cm.

Bladzijde 92

- 58** **a** De modale klasse is $[12\,000, 18\,000)$, de mediaan ligt rechts hiervan, want de cumulatieve frequentie bij deze klasse is ongeveer $10,2\% + 13,6\% + 15,8\% = 39,6\%$, en dat is minder dan 50%.
- b** Nee, als iedereen een gelijk inkomen heeft, dan is dat het enige inkomen dat voorkomt en bestaat de verdeling dus uit één staaf.
- c** Boxplot I past het beste, want 50% van de inkomens zit ongeveer tussen 12 000 euro en 40 000 euro.

Bladzijde 93

- 59** **a** symmetrisch
b rechts-scheef
c rechts-scheef
d symmetrisch
e rechts-scheef

- 60** Bij I hoort D.
Bij II hoort A.
Bij III hoort B.
Bij IV hoort C.

Bladzijde 94

- 61** **a** Veel geboorten vinden plaats in het ziekenhuis, dus nuljarigen maken veel kosten.
- b** De staaf bij de klasse 55-59 is de eerste die boven 1593 euro uitkomt. Dus vanaf de leeftijdsgroep van 55-59 jaar zijn de kosten meer dan gemiddeld.
- c** De kosten zijn per persoon en niet elke leeftijdsgroep bevat evenveel personen.
- d** De klassenbreedtes zijn niet gelijk. De klasse van de nuljarigen is 1 jaar breed. De meeste andere klassen zijn 5 jaar breed.
- e** $45-49 \quad 1200 \cdot 1\,300\,000 \approx 1,6$ miljard euro
 $75-79 \quad 4100 \cdot 550\,000 \approx 2,3$ miljard euro
De leeftijdsgroep van 75-79 jaar heeft dus de hoogste totale kosten.

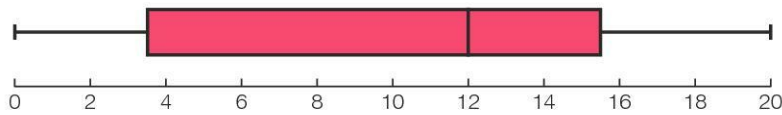
Bladzijde 95

- 62** De modus zal kleiner zijn dan de mediaan, want de modus zit vrijwel helemaal links en dan heb je nog niet de helft van de waarnemingsgetallen.

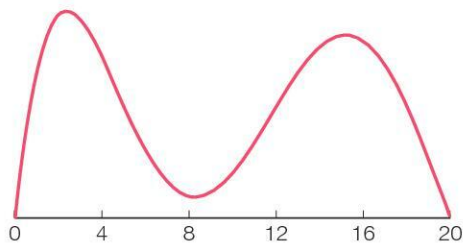
Bladzijde 96

- 63** **a** Bij de top van de verdelingskromme hoort de grootste frequentie, dus de cumulatieve verdelingskromme neemt daar het meest toe, oftewel daar is het steilste stuk van de verdelingskromme.
- b** De cumulatieve verdelingskromme is overal even steil, de verdelingskromme is dus overal even hoog, dus er is sprake van een uniforme verdeling.

- 64 a** Aflezen geeft $\min = 0$, $Q_1 = 3,5$, mediaan = 12, $Q_3 = 15,4$ en $\max = 20$.

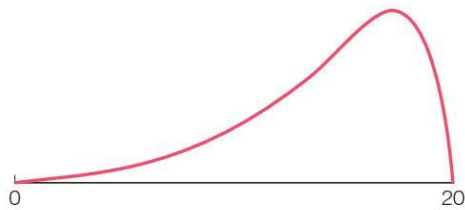


b



c Een tweetoppige verdeling.

- 65 a** Weinig waarnemingsgetallen in het begin en veel op het eind.

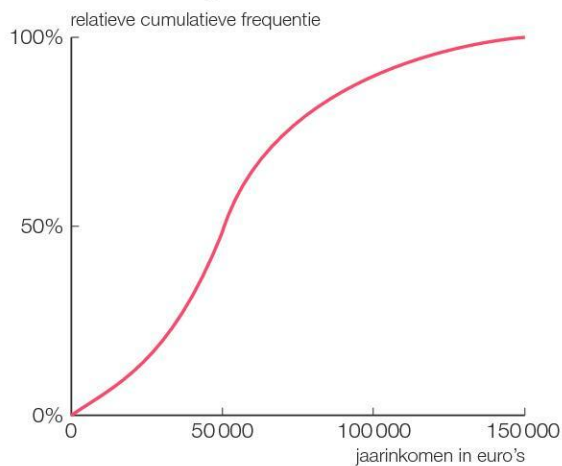


b Het is een links-scheve verdeling.

c Het gemiddelde ligt links van de mediaan.

- 66 a** De mediaan ligt rechts van de modus.

b Het steilste stuk zit bij ongeveer 25 000 euro.
De mediaan is ongeveer 50 000 euro.

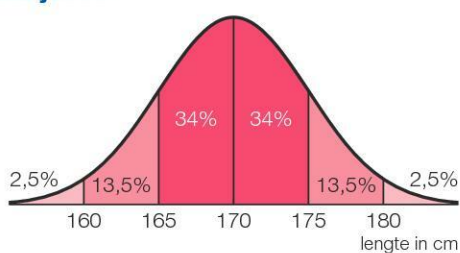


Bladzijde 97

- 67** $100\% - 68\% = 32\%$ van de waarnemingsgetallen is kleiner dan 165 of groter dan 185.
De helft daarvan, dus 16% is groter dan 185.

Bladzijde 98

- 68 a**



b $34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%$

c $2,5\%$

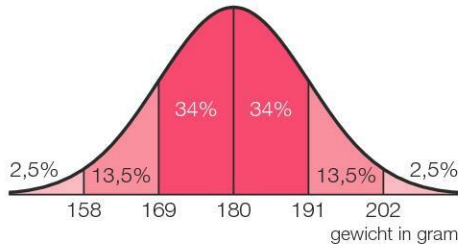
d $13,5\% + 2,5\% = 16\%$

e $13,5\% + 34\% = 47,5\%$

- 69 a nee
b ja
c nee
d ja
e nee
f ja

Bladzijde 99

70 a



$$13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$$

Dus $0,815 \cdot 5000 = 4075$ appels.

b 84%, dus $0,84 \cdot 5000 = 4200$ appels.

c 125 is $\frac{125}{5000} \times 100\% = 2,5\%$.

Dus zwaarder dan 202 gram.

- 71 a Met stijgende leeftijd neemt iemands reactietijd toe. Bij de 18-jarigen hoort kromme A (kleinste gemiddelde), bij de 60-jarigen hoort kromme C (grootste gemiddelde).
b Bij kromme C hoort de grootste standaardafwijking, dus bij 60-jarigen is de kans het grootst.

- 72 Kromme A: $\mu = 65$ en van toenemend stijgend naar afnemend stijgend bij 63,5 geeft $\sigma = 65 - 63,5 = 1,5$.
Kromme B: $\mu = 66,5$ en van toenemend stijgend naar afnemend stijgend bij 65,3 geeft $\sigma = 66,5 - 65,3 = 1,2$.
Kromme C: $\mu = 67,5$ en van toenemend stijgend naar afnemend stijgend bij 65,5 geeft $\sigma = 67,5 - 65,5 = 2,0$.
Kromme D: $\mu = 70$ en van toenemend stijgend naar afnemend stijgend bij 69,5 geeft $\sigma = 70 - 69,5 = 0,5$.

2.6 Betrouwbaarheidsintervallen

Bladzijde 101

- 73 a *
Vind je bijvoorbeeld 14, dan is de steekproefproportie 0,14.
b *
c *
d Bij een grotere steekproeflengte liggen de grenzen waartussen de steekproefproportie ligt dichtter bij elkaar.
e Tussen 0,09 en 0,15.
f Dat zijn de grenzen 0,10 en 0,14.

Bladzijde 105

- 74 a $\hat{p} = \frac{378}{600} = 0,63$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,63 \cdot 0,37}{600}} = 0,01971... \approx 0,0197$
b $\hat{p} - 2\sigma = 0,63 - 2 \cdot 0,0197... \approx 0,591$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,63 + 2 \cdot 0,0197... \approx 0,669$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,591; 0,669]$.
c Bij de steekproeflengte 1200 hoort een kleiner 95%-betrouwbaarheidsinterval dan bij steekproeflengte 600.
Dus bij steekproeflengte 1200 hoort een grotere nauwkeurigheid dan bij steekproeflengte 600.

- 75** 68% van de waarnemingen ligt tussen $\hat{p} - \sigma$ en $\hat{p} + \sigma$.
 $\hat{p} - \sigma = 0,63 - 0,014 = 0,616$
 $\hat{p} + \sigma = 0,63 + 0,014 = 0,644$
 Het 68%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,616; 0,644]$.

- 76 a** $\hat{p} = \frac{117}{150} = 0,78$
b $\hat{p} = 0,78$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,78 \cdot 0,22}{150}} = 0,0338...$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,78 - 2 \cdot 0,0338... \approx 0,712$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,78 + 2 \cdot 0,0338... \approx 0,848$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,712; 0,848]$.

- 77 a** $\hat{p} = \frac{47}{575} = 0,0817...$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,0817... \cdot 0,9182...}{575}} = 0,0114...$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,0817... - 2 \cdot 0,0114... \approx 0,059$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,0817... + 2 \cdot 0,0114... \approx 0,105$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,059; 0,105]$.
b $4\sigma = 0,296 - 0,224 = 0,072$
 Dus de standaardafwijking is $\sigma = \frac{0,072}{4} = 0,018$.

- 78** De steekproefproportie van de mensen die zeggen op A te gaan stemmen is $\hat{p} = \frac{487}{935} = 0,5208...$
 De bijbehorende standaardafwijking is $\sigma = \sqrt{\frac{0,5208... \cdot 0,4791...}{935}} = 0,0163...$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,5208... - 2 \cdot 0,0163... \approx 0,488$
 Omdat $0,488 < 0,5$ kun je niet met een betrouwbaarheid van 95% zeggen dat kandidaat A de verkiezingen zal gaan winnen.

Bladzijde 106

- 79 a** $\hat{p} = \frac{225}{1250} = 0,18$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,18 \cdot 0,82}{1250}} = 0,0108...$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,18 - 2 \cdot 0,0108... \approx 0,158$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,18 + 2 \cdot 0,0108... \approx 0,202$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,158; 0,202]$.
b $\hat{p} = \frac{143}{715} = 0,2$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{715}} = 0,0149...$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,2 - 2 \cdot 0,0149... \approx 0,170$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,2 + 2 \cdot 0,0149... \approx 0,230$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,170; 0,230]$.
c Van de 225 personen uit Zuid-Holland waren er 143 man en dus $225 - 143 = 82$ vrouw.
 $\hat{p} = \frac{82}{535} = 0,153...$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,153... \cdot 0,846...}{535}} = 0,0155...$
 $\hat{p} - 2\sigma = 0,153... - 2 \cdot 0,0155... \approx 0,122$
 $\hat{p} + 2\sigma = 0,153... + 2 \cdot 0,0155... \approx 0,184$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,122; 0,184]$.
d De breedte van $[0,158; 0,202]$ is $0,202 - 0,158 = 0,044$.
 De breedte van $[0,170; 0,230]$ is $0,230 - 0,170 = 0,060$.
 De breedte van $[0,122; 0,184]$ is $0,184 - 0,122 = 0,062$.
 Van smal naar breed: $[0,158; 0,202]$, $[0,170; 0,230]$, $[0,122; 0,184]$.
 Dat wordt veroorzaakt door het verschil in grootte van de steekproef.
e $4\sigma = 0,264 - 0,216 = 0,048$, dus $\sigma = \frac{0,048}{4} = 0,012$.
f $\hat{p} = \frac{0,216 + 0,264}{2} = 0,24$
 Dus er waren $0,24 \cdot 1250 = 300$ bezoekers in de leeftijd 18-24 jaar.
g Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,216 \cdot 1250; 0,264 \cdot 1250] = [270, 330]$.

80 a $4\sigma = 0,194 - 0,146 = 0,048$, dus $\sigma = \frac{0,048}{4} = 0,012$

$$\hat{p} = \frac{0,146 + 0,194}{2} = 0,17$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,17 \cdot 0,83}{n}} = \sqrt{\frac{0,1411}{n}}$$

Je krijgt de vergelijking $\sqrt{\frac{0,1411}{n}} = 0,012$.

Voer in $y_1 = \sqrt{\frac{0,1411}{x}}$ en $y_2 = 0,012$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 980$.

Het aantal stemgerechtigden in de steekproef was dus 980.

Alternatieve uitwerking

$$\sqrt{\frac{0,1411}{n}} = 0,012$$

$$\frac{0,1411}{n} = 0,012^2$$

$$n = \frac{0,1411}{0,012^2}$$

$$n \approx 980$$

Het aantal stemgerechtigden in de steekproef was dus 980.

- b** Mogelijk zijn mensen nog van mening veranderd of was de steekproef niet voldoende representatief. Ook kan het zijn dat er mensen niet zijn gaan stemmen.

Bladzijde 107

- 81 a** $3750 + 2 \cdot 480 = 4710$. Dus 2,5% van de jongens was naar verwachting zwaarder dan 4710 gram. Dat zijn $0,025 \cdot 87\,159 \approx 2180$ jongens.

- b** $\frac{12\,332}{18\,138} \times 100\% \approx 68\%$

De gewichten wijken dus hoogstens σ af van het gemiddelde.

Die gewichten liggen dus tussen de $3750 - 480 = 3270$ gram en $3750 + 480 = 4230$ gram.

Bladzijde 108

- 82** 6 jaar en 9 maanden is $6 \cdot 12 + 9 = 81$ maanden.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $\left[81 - 2 \cdot \frac{10}{\sqrt{65}}, 81 + 2 \cdot \frac{10}{\sqrt{65}} \right] \approx [78,5; 83,5]$.

78,5 maanden is 6 jaar en 6,5 maanden

83,5 maanden is 6 jaar en 11,5 maanden

Met 95% zekerheid ligt de gemiddelde leeftijd waarop basisschoolleerlingen het zwemdiploma A halen tussen 6 jaar en 6,5 maanden en 6 jaar en 11,5 maanden.

Bladzijde 109

83 $\bar{X} = \frac{170,2 + 179,8}{2} = 175$

$$4 \cdot \frac{S}{\sqrt{35}} = 179,8 - 170,2 \text{ oftewel } 4 \cdot \frac{S}{\sqrt{35}} = 9,6$$

Voer in $y_1 = 4 \cdot \frac{x}{\sqrt{35}}$ en $y_2 = 9,6$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 14,2$.

Dus $S \approx 14,2$.

Alternatieve uitwerking

$$4 \cdot \frac{S}{\sqrt{35}} = 9,6$$

$$4S = 9,6 \cdot \sqrt{35}$$

$$S = 2,4 \cdot \sqrt{35} \approx 14,2$$

84 De breedte van een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde is $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor meisjes van 6 maanden oud is $4 \cdot \frac{2,8}{\sqrt{38}} \approx 1,817$.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor meisjes van 12 maanden oud is $4 \cdot \frac{3,2}{\sqrt{38}} \approx 2,076$.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor jongens van 6 maanden oud is $4 \cdot \frac{3,1}{\sqrt{43}} \approx 1,891$.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor jongens van 12 maanden oud is $4 \cdot \frac{3,4}{\sqrt{43}} \approx 2,074$.

Het interval voor meisjes van 6 maanden oud is het smalst.

85 $4 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 182 - 178 = 4$

Voer in $y_1 = 4 \cdot \frac{10}{\sqrt{x}}$ en $y_2 = 4$.

De optie snijpunt geeft $x = 100$.

Dus de steekproefomvang was 100.

Alternatieve uitwerking

$$4 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 4$$

$$\frac{10}{\sqrt{n}} = 1$$

$$\sqrt{n} = 10$$

$$n = 100$$

De steekproefomvang was 100.

Diagnostische toets

Bladzijde 112

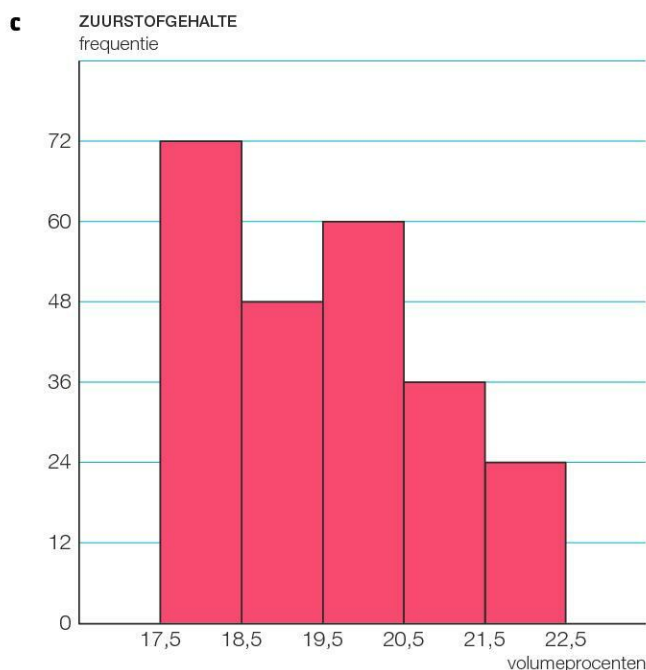
- 1**
- a** Fase 1: De onderzoeksvraag.
Fase 2: Data verzamelen.
Fase 3: Data analyseren.
Fase 4: Conclusies trekken.
 - b** Een verband waarbij het één direct gevolg is van het ander.
Bijvoorbeeld je verslapen en te laat komen.
 - c** Een representatieve steekproef moet voldoende groot en aselekt zijn.
- 2**
- a** Een kwantitatieve variabele hoort bij meetbare gegevens en wordt uitgedrukt in een getal, bijvoorbeeld snelheid.
Bij een kwalitatieve variabele gaat het om een eigenschap of kwaliteit, bijvoorbeeld beroep.
 - b** Een discrete variabele neemt alleen 'losse' waarden aan, bijvoorbeeld schoenmaat.
Een continue variabele kan alle tussenliggende waarden aannemen, bijvoorbeeld gewicht.
 - c** Nominaal, bijvoorbeeld beroep.
Ordinaal, bijvoorbeeld rugnummer bij voetbal.
Interval, bijvoorbeeld temperatuur in °C.
Ratio, bijvoorbeeld lichaamsgewicht.
 - d** De populatieproportie is het deel van een populatie dat een bepaalde eigenschap heeft.
De steekproefproportie is het deel van een steekproef dat een bepaalde eigenschap heeft.
In een representatieve steekproef zullen deze weinig verschillen.

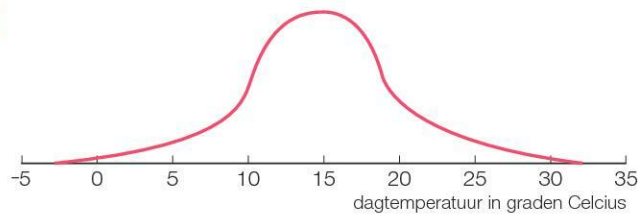
- 3 a** 25%, dus $0,25 \cdot 365 \approx 91$ dagen.
- b** De rechtergrenzen van de kwartielen zijn $10,8^\circ\text{C}$; $15,4^\circ\text{C}$; $21,8^\circ\text{C}$ en $31,9^\circ\text{C}$.
Het gemiddelde daarvan is $\frac{10,8 + 15,4 + 21,8 + 31,9}{4} = 19,975^\circ\text{C}$.
Dus de gemiddelde temperatuur kan onmogelijk meer dan 20°C zijn geweest.
- c** Het tweede kwartiel loopt van $10,8^\circ\text{C}$ tot $15,4^\circ\text{C}$.
In dit kwartiel zitten 47 mogelijke temperaturen.
Er liggen 91 dagen in dit kwartiel. Er zijn dus meerdere temperaturen die twee keer voorkomen, maar het is niet noodzakelijk dat er temperaturen drie keer voorkomen.
Als $15,2^\circ\text{C}$ de modus is moet deze temperatuur dus minstens drie keer zijn voorgekomen.
- d** De spreidingsbreedte is $31,9 - -1,9 = 33,8^\circ\text{C}$.
De interkwartielafstand is $21,8 - 10,8 = 11^\circ\text{C}$.
 $\frac{33,8}{11} > 3$. Lars heeft dus gelijk.
- e** De beste schatting voor de standaardafwijking is 9°C .

Bladzijde 113

- 4 a** Het kleinste mogelijke totaal aantal klachten krijg je door te rekenen met het kleinste mogelijke aantal klachten per klasse. Dat geeft
 $2 \cdot 0 + 6 \cdot 5 + 55 \cdot 10 + 126 \cdot 15 + 135 \cdot 20 + 35 \cdot 25 + 6 \cdot 30 = 6225$ klachten.
 $6225 > 6215$, dus je kunt concluderen dat er dit jaar meer klachten waren.
- b** De mediaan is het 183^e waarnemingsgetal;
 $2 + 6 + 55 = 63$ en $2 + 6 + 55 + 126 = 189$, dus de mediaan ligt in de klasse $[15, 20)$.
- c** De modale klasse is de klasse $[20, 25)$, want die heeft de grootste frequentie.
- 5 a** 30%, dus $0,3 \cdot 240 = 72$ mannen met minder dan 18,5%.
25%, dus $0,25 \cdot 240 = 60$ mannen met minstens 20,5%.

zuurstofgehalte	relatieve frequentie	absolute frequentie
$[17,5; 18,5)$	30%	72
$[18,5; 19,5)$	20%	48
$[19,5; 20,5)$	25%	60
$[20,5; 21,5)$	15%	36
$[21,5; 22,5)$	10%	24



6

- 7 a** 97,5%, dus $0,975 \cdot 750 \approx 731$ potten.
b 13,5%, dus $0,135 \cdot 750 \approx 101$ potten.

8 a $\hat{p} = \frac{80}{500} = 0,16$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,16 \cdot 0,84}{500}} = 0,0163\dots$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,16 - 2 \cdot 0,0163\dots \approx 0,127$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,16 + 2 \cdot 0,0163\dots \approx 0,193$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,127; 0,193]$.

b Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $\left[350 - 2 \cdot \frac{108}{\sqrt{80}}, 350 + 2 \cdot \frac{108}{\sqrt{80}} \right] \approx [326, 374]$.

3 Rekenen en herleiden

Voorkennis Rekenen met breuken

Bladzijde 118

- 1** a $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{11} = \frac{15}{77}$ d $12 \cdot \frac{5}{12} = 5$ g $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{9} \cdot 3 = \frac{30}{63} = \frac{10}{21}$
 b $7 \cdot \frac{2}{19} = \frac{14}{19}$ e $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ h $\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{6} = 1$
 c $8 \cdot \frac{3}{8} = 3$ f $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$ i $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{168} = \frac{5}{42}$
- 2** a $6 \cdot 1\frac{1}{6} = 6 \cdot \frac{7}{6} = 7$ d $\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot \frac{7}{3} = 3 \cdot \frac{7}{3} = 7$
 b $\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ e $\frac{1}{10} \cdot 25 \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$
 c $8 \cdot 2\frac{1}{2} = 8 \cdot \frac{5}{2} = \frac{40}{2} = 20$ f $1\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{4} = \frac{140}{24} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$
- 3** a $\frac{(\frac{2}{9})}{5} = \frac{\frac{2}{9} \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{2}{45}$
 b $\frac{6}{(\frac{3}{4})} = 6 \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8$
 c $\frac{(\frac{5}{6})}{4} \cdot \frac{3}{(\frac{2}{5})} = \frac{\frac{5}{6} \cdot 6}{4 \cdot 6} \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{24} \cdot \frac{15}{2} = \frac{75}{48} = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$

Bladzijde 119

- 4** a $\frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$
 b $\frac{4}{7} - \frac{1}{14} = \frac{8}{14} - \frac{1}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$
 c $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} - \frac{10}{20} = \frac{13}{20}$
 d $1\frac{1}{3} + 2\frac{3}{4} = \frac{4}{3} + \frac{11}{4} = \frac{16}{12} + \frac{33}{12} = \frac{49}{12} = 4\frac{1}{12}$
 e $\frac{1}{14} \cdot \left(\frac{5}{13} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{14} \cdot \left(\frac{15}{39} + \frac{13}{39}\right) = \frac{1}{14} \cdot \frac{28}{39} = \frac{2}{39}$
 f $\frac{2}{3} \cdot (5\frac{1}{4} - 4\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{21}{4} - \frac{13}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{63}{12} - \frac{52}{12}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{12} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$

3.1 Breuken en verhoudingen

Bladzijde 120

- 1** Het deel dat niet is vernietigd is $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$ deel.
- 2** $\frac{3}{b} \cdot a = \frac{3a}{b}$
 $p \cdot q \cdot \frac{1}{r} = \frac{pq}{r}$

Bladzijde 121

3 a $p \cdot \frac{2p+1}{p} = 2p+1$

b $\frac{5}{q} \cdot \frac{3-q}{3q} = \frac{5(3-q)}{3q^2} = \frac{15-5q}{3q^2}$

c $7 \cdot \frac{2a}{b} \cdot \frac{a-1}{3b} = \frac{14a(a-1)}{3b^2} = \frac{14a^2-14a}{3b^2}$

4 a $\frac{3}{a} \cdot \frac{4}{a-1} = \frac{12}{a(a-1)} = \frac{12}{a^2-a}$

b $\frac{6}{p} \cdot \frac{p+1}{5-p} = \frac{6}{p} \cdot \frac{5-p}{p+1} = \frac{6(5-p)}{p(p+1)} = \frac{30-6p}{p^2+p}$

c $3 \cdot \frac{5a}{b} \cdot \frac{2a-4}{b} = \frac{15a(2a-4)}{b^2} = \frac{30a^2-60a}{b^2}$

5 $A : \frac{B}{C} = \frac{A}{\left(\frac{B}{C}\right)} = \frac{A \cdot C}{\frac{B}{C} \cdot C} = \frac{AC}{B}$

Omdat $\frac{AC}{B} = A \cdot \frac{C}{B}$ volgt hieruit dat $A : \frac{B}{C} = A \cdot \frac{C}{B}$.

6 $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{1001}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots \cdot \frac{1002}{1001}$

De tellers allemaal één breuk naar rechts opschuiven geeft

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{5}{5} \cdot \dots \cdot \frac{1001}{1001} \cdot \frac{1002}{1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 1002 = \frac{1}{2} \cdot 1002 = 501.$$

Bladzijde 122

7 a $\frac{4x+1}{2x} \cdot 2x = 4x+1$

b $\frac{5}{p+1} : \frac{q}{8-q} = \frac{5}{p+1} \cdot \frac{8-q}{q} = \frac{5(8-q)}{q(p+1)} = \frac{40-5q}{pq+q}$

c $\frac{4}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{3a-1}{a} = \frac{8(3a-1)}{a^2b} = \frac{24a-8}{a^2b}$

d $\frac{a}{3} \cdot \frac{a-1}{4} \cdot \frac{5}{a+1} = \frac{5a(a-1)}{12(a+1)} = \frac{5a^2-5a}{12a+12}$

e $3a : \frac{3a+1}{2a-1} = 3a \cdot \frac{2a-1}{3a+1} = \frac{3a(2a-1)}{3a+1} = \frac{6a^2-3a}{3a+1}$

f $6a \cdot \frac{4a-1}{6a} = 4a-1$

8 $\frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{8}{24} + \frac{9}{24} = \frac{17}{24}$

Eva neemt nog $1 - \frac{17}{24} = \frac{7}{24}$ deel voor haar rekening.

- 9 a II
b III
c III
d I

Bladzijde 123

10 a $\frac{6}{a} + \frac{3}{a} = \frac{9}{a}$

b $\frac{5}{2b} - \frac{3}{2b} = \frac{2}{2b} = \frac{1}{b}$

c $\frac{1}{2x} + \frac{2}{x} = \frac{1}{2x} + \frac{4}{2x} = \frac{5}{2x}$

d $\frac{3}{2a} - \frac{2}{3a} = \frac{9}{6a} - \frac{4}{6a} = \frac{5}{6a}$

e $\frac{1}{ab} - \frac{1}{b} = \frac{1}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{1-a}{ab}$

f $\frac{a}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a^2}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{a^2-b}{ab}$

g $2 + \frac{1}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2x+1}{x}$

h $3a - \frac{2}{a} = \frac{3a^2}{a} - \frac{2}{a} = \frac{3a^2-2}{a}$

i $5a - \frac{6}{a^2} = \frac{5a^3}{a^2} - \frac{6}{a^2} = \frac{5a^3-6}{a^2}$

$$\begin{array}{ll}
 \text{11 a } \frac{3a}{6b} = \frac{a}{2b} & \text{d } \frac{20p^2q^2}{3p^2} = \frac{20q^2}{3} = 6\frac{2}{3}q^2 \\
 \text{b } \frac{10pq}{5q} = 2p & \text{e } \frac{6x^2y}{2x} + \frac{10x^3y^2}{5x^2y} = 3xy + 2xy = 5xy \\
 \text{c } \frac{4ab^2}{5ab} = \frac{4}{5}b & \text{f } \frac{24a^2b^2}{4a} - \frac{(3ab)^3}{a^2b} = 6ab^2 - \frac{27a^3b^3}{a^2b} \\
 & = 6ab^2 - 27ab^2 = -21ab^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{12 a } \frac{1}{p} + 2p \cdot \frac{3q}{5p^2} = \frac{1}{p} + \frac{6pq}{5p^2} = \frac{5}{5p} + \frac{6q}{5p} = \frac{5+6q}{5p} \\
 \text{b } \frac{a}{3} : \frac{2c}{b} - \frac{a}{c} = \frac{a}{3} \cdot \frac{b}{2c} - \frac{a}{c} = \frac{ab}{6c} - \frac{6a}{6c} = \frac{ab-6a}{6c} \\
 \text{c } \frac{xy}{2x^2} \cdot (y+1) - \frac{3}{x} = \frac{y(y+1)}{2x} - \frac{6}{2x} = \frac{y^2+y-6}{2x} \\
 \text{d } \frac{p}{2q} + \frac{p}{q} : \frac{2p^2}{3q} = \frac{p}{2q} + \frac{p}{q} \cdot \frac{3q}{2p^2} = \frac{p}{2q} + \frac{3pq}{2p^2q} = \frac{p^2}{2pq} + \frac{3q}{2pq} = \frac{p^2+3q}{2pq} \\
 \text{e } (2a+1) \cdot \frac{5a}{2a+1} + \frac{1}{a} = 5a + \frac{1}{a} = \frac{5a^2}{a} + \frac{1}{a} = \frac{5a^2+1}{a} \\
 \text{f } \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{q} \cdot \frac{pq}{q+1} - \frac{p}{q+1} = \frac{2pq}{pq(q+1)} - \frac{p}{q+1} = \frac{2}{q+1} - \frac{p}{q+1} = \frac{2-p}{q+1}
 \end{array}$$

Bladzijde 124

$$\begin{array}{ll}
 \text{13 a } A = \frac{2}{x-3} - \frac{4}{3x} = \frac{6x}{3x(x-3)} - \frac{4(x-3)}{3x(x-3)} = \frac{6x-4x+12}{3x(x-3)} = \frac{2x+12}{3x^2-9x} \\
 \text{b } B = 5 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{5p^2}{p^2} - \frac{2p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{5p^2-2p-1}{p^2} \\
 \text{c } C = \frac{6}{a} \cdot \frac{5}{a+b} : \frac{4}{a+b} = \frac{6}{a} \cdot \frac{5}{a+b} \cdot \frac{a+b}{4} = \frac{6}{a} \cdot \frac{5}{4} = \frac{30}{4a} = \frac{15}{2a}
 \end{array}$$

$$\text{14 } \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \text{ deel van de karpers is een geel vrouwtje.}$$

De helft van de karpers is een vrouwtje, dus $\frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ deel van de karpers is een rood vrouwtje.

$\frac{3}{5}$ deel van de karpers is rood, dus $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ deel van de karpers is een rood mannetje.

15 De afstand wordt verdeeld in $1 + 2 + 3 = 6$ gelijke delen.

Elk deel is $\frac{24}{6} = 4$ km.

Anna legt 4 km af, Bram 8 km en Eva 12 km.

Bladzijde 125

16 Eva loopt drie delen meer dan Anna, dus drie delen is 4,5 km. Dan is één deel $\frac{4,5}{3} = 1,5$ km.

Bram loopt $5 \cdot 1,5 = 7,5$ km.

17 a Er zijn $47 + 100 = 147$ gelijke delen.

Eén deel is $\frac{2,32}{147}$ miljoen.

Er wonen dus $47 \cdot \frac{2,32}{147} \approx 0,74$ miljoen vrouwen in Qatar.

b Er zijn $5 + 6 = 11$ gelijke delen.

Elf delen zijn 1,38 miljard mensen, dus één deel is $\frac{1,38 \text{ miljard}}{11} \approx 0,125$ miljard.

De mannen hebben één deel meer, dus er zijn ongeveer 0,125 miljard (125 miljoen) meer mannen dan vrouwen in China.

- 18** De verhouding 2 : 1 is te schrijven als 10 : 5 en de verhouding 4 : 1 is te schrijven als 12 : 3. Beide flessen bevatten nu 15 gelijke delen. Na samenvoegen zijn er $10 + 12 = 22$ delen water en $5 + 3 = 8$ delen sap. De verhouding is dus 22 : 8, oftewel 11 : 4.

- 19 a** De verhouding 2 : 3 is te schrijven als 4 : 6.
De verhouding mannen : vrouwen : kinderen is dus 4 : 6 : 1.
De verhouding van het aantal volwassenen tot het aantal kinderen is dus 10 : 1.
- b** De verhouding 3 : 4 is te schrijven als 9 : 12 en de verhouding 7 : 6 is te schrijven als 14 : 12.
De verhouding noten voor Olivia, Ina en Nathalie is dus 9 : 12 : 14.
Er zijn $9 + 12 + 14 = 35$ gelijke delen en één deel is $\frac{770}{35} = 22$.
Dus de jongste kreeg $9 \cdot 22 = 198$ noten.

Bladzijde 126

- 20 a** Er zijn $3 + 4 + 5 = 12$ gelijke delen.
Eén deel is $\frac{2340}{12} = 195 \text{ m}^3/\text{s}$.
Afvoer in I: $3 \cdot 195 = 585 \text{ m}^3/\text{s}$.
Afvoer in II: $4 \cdot 195 = 780 \text{ m}^3/\text{s}$.
Afvoer in III: $5 \cdot 195 = 975 \text{ m}^3/\text{s}$.
- b** Afvoer in II zou zijn: $4 \cdot \frac{3000}{12} = 1000 \text{ m}^3/\text{s}$.
Dat is teveel, dus de afvoer in II wordt door de stuw beperkt tot $800 \text{ m}^3/\text{s}$.
Er blijft dan nog $2200 \text{ m}^3/\text{s}$ over voor I en III in de verhouding 3 : 5.
Er zijn $3 + 5 = 8$ gelijke delen. Eén deel is $\frac{2200}{8} = 275 \text{ m}^3/\text{s}$.
Afvoer in I: $3 \cdot 275 = 825 \text{ m}^3/\text{s}$.
Afvoer in III: $5 \cdot 275 = 1375 \text{ m}^3/\text{s}$.
- c** De afvoer in III is groter dan bij vraag b, dus de stuw is wederom in werking.
De afvoer in II is dus $800 \text{ m}^3/\text{s}$.
I en III zijn samen acht gelijke delen.
Vijf delen zijn $1500 \text{ m}^3/\text{s}$, dus één deel is $\frac{1500}{5} = 300 \text{ m}^3/\text{s}$.
De afvoer in I is $3 \cdot 300 = 900 \text{ m}^3/\text{s}$.
De aanvoer is $900 + 800 + 1500 = 3200 \text{ m}^3/\text{s}$.

21 $12 \cdot x = 18 \cdot 32$, dus $x = \frac{18 \cdot 32}{12} = 48$ $32 \cdot y = 12 \cdot 80$, dus $y = \frac{12 \cdot 80}{32} = 30$

22 $10 \cdot p = 15 \cdot 18$, dus $p = \frac{15 \cdot 18}{10} = 27$ $10 \cdot q = 18 \cdot 25$, dus $q = \frac{18 \cdot 25}{10} = 45$
 $15 \cdot r = 10(r + 10)$
 $15r = 10r + 100$
 $5r = 100$
 $r = 20$
 $10s = 25 \cdot r$ en $r = 20$, dus $s = \frac{25 \cdot 20}{10} = 50$.

Bladzijde 127

- 23 a** Er zijn voor het lakmengsel $10 + 5 + 2 = 17$ gelijke delen.
De hoeveelheid lak in het mengsel is dus $\frac{10}{17} \cdot 8,5 = 5$ liter.
De verhouding blauw : geel in de lak is 3 : 2, dus hij gebruikt 2 liter gele lak.
- b** Voor 6,8 liter lakmengsel heeft hij $\frac{10}{17} \cdot 6,8 = 4$ liter lak nodig.
Hiervan is $\frac{5}{8} \cdot 4 = 2,5$ liter rode lak. Hij heeft dus genoeg.

- c Hij zou normaal $\frac{2}{17} \cdot 5,1 = 0,6$ liter thinner gebruiken, maar hij gebruikt nu maar $0,75 \cdot 0,6 = 0,45$ liter.
Het lakmengsel bestaat dus uit $5,1 - 0,45 = 4,65$ liter lak en verharder in de verhouding $10 : 5$.
15 delen is 4,65 liter, dus 1 deel lakmengsel is $\frac{4,65}{15} = 0,31$ liter.
Hij heeft dus $5 \cdot 0,31 = 1,55$ liter verharder nodig.
- d Voor de paarse lak geldt $3 + 5 = 8$ gelijke delen, dus $\frac{3}{8} \cdot 2 = 0,75$ liter rood en $\frac{5}{8} \cdot 2 = 1,25$ liter blauw. Voor de groene lak geldt $3 + 1 = 4$ gelijke delen, dus $\frac{3}{4} \cdot 3 = 2,25$ liter blauw en $\frac{1}{4} \cdot 3 = 0,75$ liter geel.
In totaal levert dat een lak op met 0,75 liter rood, $1,25 + 2,25 = 3,5$ liter blauw en 0,75 liter geel.
 $\frac{7}{12}$ deel is 3,5 liter, dus $\frac{3}{12}$ deel is $\frac{3}{7} \cdot 3,5 = 1,5$ liter rood en $\frac{2}{12}$ deel is $\frac{2}{7} \cdot 3,5 = 1$ liter geel.
Er moet dus 0,75 liter rode lak en 0,25 liter gele lak bij.

Bladzijde 128

- 24 a Er zijn $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ gelijke delen.
Er zijn dus 8 delen nodig voor een meerderheid.
A en B hebben samen 9 delen, dus een meerderheid.
A en C hebben samen 8 delen, dus ook een meerderheid.
15 delen zijn 150 zetels, dus één deel is 10 zetels.
Een coalitie van A en B heeft $9 \cdot 10 = 90$ zetels.
Een coalitie van A en C heeft $8 \cdot 10 = 80$ zetels.
- b Er zijn $10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 40$ gelijke delen.
A en B hebben samen 19 delen, terwijl voor een meerderheid 21 delen nodig zijn.
A en B zijn de grootste partijen. Als zij samen geen meerderheid kunnen vormen, dan kunnen twee andere partijen dat ook niet. Er zijn dus minstens drie partijen nodig.
- c Stel partij A heeft a zetels. Dan heeft B er $a - 5$, C er $a - 10$, D er $a - 15$ en E er $a - 20$.
Er zijn dan $a + a - 5 + a - 10 + a - 15 + a - 20 = 5a - 50$ zetels in totaal.
 $5a - 50 = 150$
 $5a = 200$
 $a = 40$
De verhouding is dus $40 : 35 : 30 : 25 : 20$ en dat is hetzelfde als $8 : 7 : 6 : 5 : 4$.
- d A en E hebben samen $16 + 1 = 17$ delen en B, C en D hebben samen $29 + 19 + 17 = 65$ gelijke delen.
B, C en D hebben dus 65 zetels of een veelvoud hiervan. Omdat ze minder dan 75 zetels hebben, hebben ze dus 65 zetels.
A en E hebben dus samen $150 - 65 = 85$ zetels en partij A heeft $16 \cdot \frac{85}{17} = 80$ zetels.

3.2 Herleiden van formules

Bladzijde 130

- 25 a De oppervlakte van $ABCD$ is $a \cdot b = ab$.
b De oppervlakte van $AEFD$ is $b \cdot b = b^2$ en de oppervlakte van $ABCD$ is ab .
De oppervlakte van $EBCF$ is dus $ab - b^2$.
c $EB = AB - AE = a - b$, dus de oppervlakte van $EBCF$ is $(a - b) \cdot b = ab - b^2$.
- 26 a De oppervlakte van I is $a \cdot a = a^2$.
De oppervlakte van II is $a \cdot b = ab$.
De oppervlakte van III is $a \cdot c = ac$.
De oppervlakte van IV is $b \cdot c = bc$.
De oppervlakte van $AEFG$ is dus $a^2 + ab + ac + bc$.
b $AE = a + b$ en $AG = a + c$.
De oppervlakte van $AEFG$ is dus $(a + b) \cdot (a + c) = a^2 + ac + ab + bc = a^2 + ab + ac + bc$.

Bladzijde 131

- 27** a $3(x-5)^2 - 10(x+1) = 3(x^2 - 10x + 25) - 10x - 10 =$
 $3x^2 - 30x + 75 - 10x - 10 = 3x^2 - 40x + 65$
 b $(4a-1)^2 + 4(2a+1) = 16a^2 - 8a + 1 + 8a + 4 = 16a^2 + 5$
 c $20x - (x-10)^2 = 20x - (x^2 - 20x + 100) = 20x - x^2 + 20x - 100 = -x^2 + 40x - 100$
 d $(6-2a)(3a+1) - 3a(a-4) = 18a + 6 - 6a^2 - 2a - 3a^2 + 12a = -9a^2 + 28a + 6$
- 28** a $(3-2x)^2 - 4(x-2)^2 = 9 - 12x + 4x^2 - 4(x^2 - 4x + 4) =$
 $9 - 12x + 4x^2 - 4x^2 + 16x - 16 = 4x - 7$
 b $(6-a)(2a-1) + 3a(a-2) = 12a - 6 - 2a^2 + a + 3a^2 - 6a = a^2 + 7a - 6$
 c $A = 0,15 \cdot \frac{x}{0,375} \cdot (x-2) = \frac{0,15}{0,375} \cdot x \cdot (x-2) = 0,4x(x-2) = 0,4x^2 - 0,8x$
 Dus $a = 0,4$ en $b = -0,8$.

Bladzijde 132

- 29** a $9 \cdot 9 - 10 \cdot 8 = 81 - 80 = 1$
 $10 \cdot 10 - 11 \cdot 9 = 100 - 99 = 1$
 $11 \cdot 11 - 12 \cdot 10 = 121 - 120 = 1$
 b $26 \cdot 24$
 c Het is *getal* $\times$ *getal* min één groter dan het *getal* $\times$ één kleiner dan het *getal*.
 d $a^2 - (a+1)(a-1) = a^2 - (a^2 - 1) = a^2 - a^2 + 1 = 1$
 Hiermee is aangetoond dat het rijtje kan worden voortgezet met steeds dezelfde uitkomst.
 e Alle berekeningen zijn van de vorm $a^2 - (a+2)(a-2)$.
 Haakjes wegwerken geeft $a^2 - (a+2)(a-2) = a^2 - (a^2 - 4) = a^2 - a^2 + 4 = 4$.
 Dus het rijtje kan worden voortgezet met steeds dezelfde uitkomst, namelijk 4.
 f *
- 30** a $(2x-3)^2 - (4x-1)(3x+1) = 4x^2 - 12x + 9 - (12x^2 + x - 1) =$
 $4x^2 - 12x + 9 - 12x^2 - x + 1 = -8x^2 - 13x + 10$
 b $B = 0,018 \cdot \frac{p}{0,072} \cdot (2q-5) = \frac{0,018}{0,072} \cdot p(2q-5) = \frac{1}{4}p(2q-5) = \frac{1}{2}pq - 1\frac{1}{4}p$
 Dus $a = \frac{1}{2}$ en $b = -1\frac{1}{4}$.
 c $C = 1,8 \cdot \frac{x+4}{2} : \frac{3}{x-1} = 1,8 \cdot \frac{x+4}{2} \cdot \frac{x-1}{3} = \frac{1,8}{2 \cdot 3} \cdot (x+4)(x-1) = 0,3(x^2 + 3x - 4) = 0,3x^2 + 0,9x - 1,2$
 Dus $a = 0,3$, $b = 0,9$ en $c = -1,2$.
- 31** a $R = (-0,05 \cdot 150 + 20) \cdot 150 = 1875$ euro
 $K = 2 \cdot 150 + 500 = 800$ euro
 $p = -0,05 \cdot 150 + 20 = 12,50$ euro
 b $W = (-0,05q + 20)q - (2q + 500) = -0,05q^2 + 20q - 2q - 500 = -0,05q^2 + 18q - 500$
 c $q = 160$ geeft $W = -0,05 \cdot 160^2 + 18 \cdot 160 - 500 = 1100$ euro.
 $q = 175$ geeft $W = -0,05 \cdot 175^2 + 18 \cdot 175 - 500 = 1118,75$ euro.
 De winst neemt dan met $\frac{1118,75 - 1100}{1100} \times 100\% \approx 1,7\%$ toe.
 d Voer in $y_1 = -0,05x^2 + 18x - 500$.
 Optie maximum geeft $x = 180$ en $y = 1120$.
 Bij een dagproductie van 180 bureaulampen is de winst maximaal. Hierbij hoort een dagopbrengst van $(-0,05 \cdot 180 + 20) \cdot 180 = 1980$ euro.
 De maximale winst is 1120 euro.
 De prijs van een bureaulamp is dan $p = -0,05 \cdot 180 + 20 = 11$ euro.

Bladzijde 133

- 32** a Bijvoorbeeld 12 euro voor een volwassene en 7 euro voor een kind of 15 euro voor een volwassene en 5 euro voor een kind.
 b $3x + 2y = 45$
 c De kaartjes kosten 15 euro voor een volwassene en 5 euro voor een kind.

Bladzijde 134

- 33 a** Een horizontale lijn.
b Een verticale lijn.

34 a $15x + 12y = 2520$
 $12y = -15x + 2520$
 $y = -1\frac{1}{4}x + 210$

b $3p - 2q = 16\frac{1}{2}$
 $3p = 2q + 16\frac{1}{2}$
 $p = \frac{2}{3}q + 5\frac{1}{2}$

c $5a - 2b = 16$
 $-2b = -5a + 16$
 $b = 2\frac{1}{2}a - 8$

d $2(x - 3) + 5y = 14$
 $2x - 6 + 5y = 14$
 $5y = -2x + 20$
 $y = -\frac{2}{5}x + 4$

e $2(x - 3) + 5y = 14$
 $2x - 6 + 5y = 14$
 $2x = -5y + 20$
 $x = -2\frac{1}{2}y + 10$

35 a $3(x - 6) + \frac{1}{4}(2y + 5) = 20$
 $3x - 18 + \frac{1}{2}y + 1\frac{1}{4} = 20$
 $\frac{1}{2}y = -3x + 36\frac{3}{4}$
 $y = -6x + 73\frac{1}{2}$

b $2(T + 8) + 3(2A + 8) = 120$
 $2T + 16 + 6A + 24 = 120$
 $2T = -6A + 80$
 $T = -3A + 40$

c $3(\frac{2}{3}L - 9) + 4K = 6(2 - L)$
 $2L - 27 + 4K = 12 - 6L$
 $8L = -4K + 39$
 $L = -\frac{1}{2}K + 4\frac{7}{8}$

d $\frac{1}{3}(p - 6) + 4(q - 7) = 59$
 $\frac{1}{3}p - 2 + 4q - 28 = 59$
 $\frac{1}{3}p = -4q + 89$
 $p = -12q + 267$

Bladzijde 135

36 a $l: 3x - y = 6$

x	2	3
y	0	3

$m: x + y = 1$

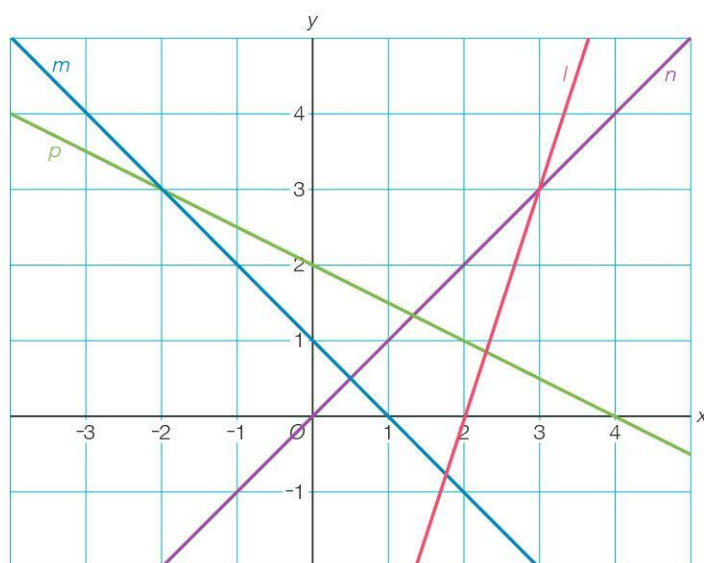
x	0	1
y	1	0

$n: x - y = 0$

x	0	1
y	0	1

$p: x + 2y = 4$

x	0	4
y	2	0



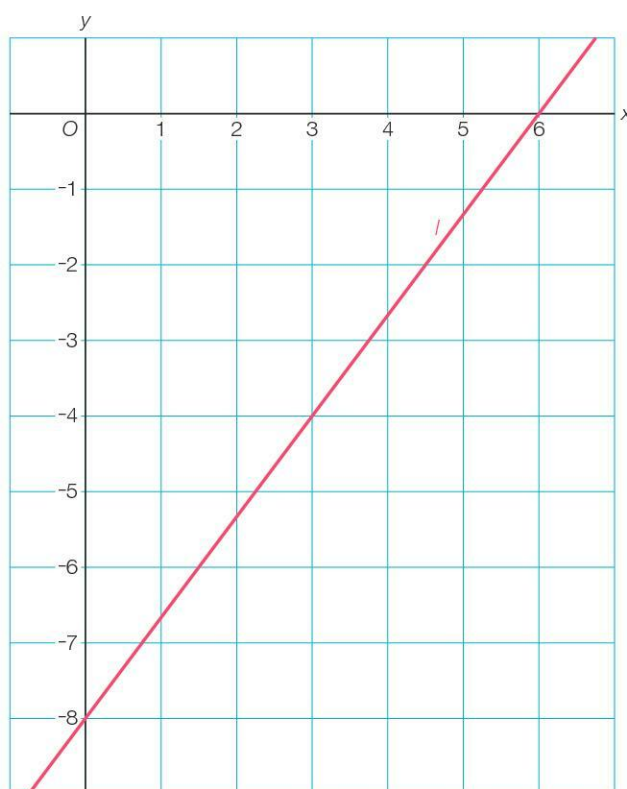
b $3x - y = 6$
 $-y = -3x + 6$
 $y = 3x - 6$
Dus $rc_l = 3$.

$x + y = 1$
 $y = -x + 1$
Dus $rc_m = -1$.

$x - y = 0$
 $-y = -x$
 $y = x$
Dus $rc_n = 1$.

$x + 2y = 4$
 $2y = -x + 4$
 $y = -\frac{1}{2}x + 2$
Dus $rc_p = -\frac{1}{2}$.

- 37 a** $y = 0$ geeft $4x = 24$, dus $x = 6$.
Het snijpunt met de x -as is dus $(6, 0)$.
 $x = 0$ geeft $-3y = 24$, dus $y = -8$.
Het snijpunt met de y -as is dus $(0, -8)$.
- b** $4 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = 32 - 9 = 23 \neq 24$, dus $A(8, 3)$ ligt niet op l .
 $4 \cdot 18 - 3 \cdot 16 = 72 - 48 = 24$, dus $B(18, 16)$ ligt op l .
 $4 \cdot -30 - 3 \cdot -48 = -120 + 144 = 24$, dus $C(-30, -48)$ ligt op l .
- c** $D(16, p)$ op l : $4x - 3y = 24$ geeft
 $4 \cdot 16 - 3p = 24$
 $64 - 3p = 24$
 $-3p = -40$
 $p = 13\frac{1}{3}$
- d** $E(q, 48)$ op l : $4x - 3y = 24$ geeft
 $4q - 3 \cdot 48 = 24$
 $4q - 144 = 24$
 $4q = 168$
 $q = 42$



- 38 a** $3x - 4y = 7$
 $-4y = -3x + 7$
 $y = \frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4}$
Dus $rc_l = \frac{3}{4}$.
 $3x - 4y = -8$
 $-4y = -3x - 8$
 $y = \frac{3}{4}x + 2$
Dus $rc_m = \frac{3}{4}$.
- b** $3x - 4y = c$
 $-4y = -3x + c$
 $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}c$
Dus alle lijnen van de vorm $3x - 4y = c$ hebben $rc = \frac{3}{4}$ en zijn dus evenwijdig.
- c** $A(5, 1)$ op $3x - 4y = c$ geeft $c = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 11$.
- d** k evenwijdig met l dus $k: 3x - 4y = c$
door $B(3, -1)$ } $c = 3 \cdot 3 - 4 \cdot -1 = 13$
Dus $k: 3x - 4y = 13$.

- 39 a** $3x - 8y = 36$
 $-8y = -3x + 36$
 $y = \frac{3}{8}x - 4\frac{1}{2}$
Dus $rc_m = \frac{3}{8}$.
- b** $x = 0$ geeft $y = -4\frac{1}{2}$, dus $A(0, -4\frac{1}{2})$.
- c** $B(-10, p)$ op m geeft $3 \cdot -10 - 8 \cdot p = 36$
 $-30 - 8p = 36$
 $-8p = 66$
 $p = -8\frac{1}{4}$
- d** $C(q, 9)$ op m geeft $3 \cdot q - 8 \cdot 9 = 36$
 $3q - 72 = 36$
 $3q = 108$
 $q = 36$
- e** n evenwijdig met m dus $n: 3x - 8y = c$
door $D(5, 1)$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} 3x - 8y = c \\ 3x - 8y = c \end{matrix}} \right\} c = 3 \cdot 5 - 8 \cdot 1 = 7$
Dus $n: 3x - 8y = 7$.

- 40** Stel René koopt x appels, dan koopt hij $3x$ peren.
De appels en peren samen kosten dan $0,4x + 0,5 \cdot 3x = 1,9x$ euro.
René kan maximaal vijf appels en vijftien peren kopen voor 10 euro, want dan kosten de appels en peren samen $1,9 \cdot 5 = 9,50$ euro. Maar dan kan hij geen bananen meer kopen.
Als René vier appels en twaalf peren koopt, dan kosten de appels en peren samen $1,9 \cdot 4 = 7,60$ euro.
Hij heeft dan nog $10 - 7,60 = 2,40$ euro over om drie bananen te kopen.
René koopt dus $4 + 12 + 3 = 19$ stuks fruit.

3.3 Procentberekeningen en de wetenschappelijke notatie

Bladzijde 137

- 41** In Amsterdam is de absolute toename $854 - 731 = 123$ duizend en in Utrecht is dat $348 - 234 = 114$ duizend.
De absolute toename is in Amsterdam groter. Hiermee is de bewering van Maud te verdedigen.
- In Amsterdam is de procentuele toename $\frac{123}{731} \times 100\% \approx 16,8\%$ en in Utrecht is dat $\frac{114}{234} \times 100\% \approx 48,7\%$.
De procentuele toename is in Utrecht groter. Hiermee is de bewering van Pepijn te verdedigen.

Bladzijde 139

- 42 a** $0,3\%$ van 8700 is $0,003 \cdot 8700 = 26,1$.
b Je krijgt $0,913 \times 3,2$ miljoen $\approx 2,9$ miljoen.
c De procentuele toename is $\frac{180 - 160}{160} \times 100\% = 12,5\%$.
d De hoeveelheid was $\frac{1280}{1,079} \approx 1190$.
e 57 van 121 is $\frac{57}{121} \times 100\% \approx 47,1\%$.
f Het totaal is $\frac{8,3 \text{ miljoen}}{0,126} \approx 65,9$ miljoen.
g $NIEUW = 1,023 \cdot 12\,580 \approx 12\,870$.
- 43 a** De oorspronkelijke prijs was $\frac{81}{0,75} = 108$ euro.
b Zonder BTW kost de fiets $\frac{552}{1,21} \approx €456,20$.
c De uitstoot in 2007 was $\frac{109}{0,66} \approx 165$ gram CO_2 per km.

- 44 a** De relatieve toename voor volledig elektrisch is $\frac{21\,800 - 7\,400}{7\,400} \times 100\% \approx 194,6\%$,
 voor hybride $\frac{152\,000 - 111\,800}{111\,800} \times 100\% \approx 36,0\%$ en voor plug-in hybride
 $\frac{97\,300 - 36\,800}{36\,800} \times 100\% \approx 164,4\%$.
 Bij de volledig elektrische personenauto's was de relatieve toename het grootst.
- b** In 2015 was $\frac{7\,400}{156\,000} \times 100\% \approx 4,7\%$ van de elektrische personenauto's volledig elektrisch.
- c** In 2018 was $\frac{271\,100}{8\,400\,000} \times 100\% \approx 3,2\%$ van de personenauto's elektrisch.
- d** Het totale aantal personenauto's in 2015 was $\frac{156\,000}{0,021} \approx 7\,429\,000$.
- e** In 2017 was het aantal plug-in hybride personenauto's $\frac{97\,300}{1,016} \approx 95\,800$.

Bladzijde 140

- 45 a** De relatieve toename is $\frac{27\,000 - 21\,400}{21\,400} \times 100\% \approx 26,2\%$.
- b** In 2017 hadden $1,154 \cdot 26\,600 \approx 30\,700$ leerlingen een NG-profiel.
- c** In 2012 hadden $\frac{32\,500}{1,025} \approx 31\,700$ leerlingen een EM-profiel.
- d** In 2012 waren er $\frac{2600}{0,213} \approx 12\,200$ CM-leerlingen, dus in 2017 waren er
 $12\,200 - 2600 = 9600$ CM-leerlingen.
- 46 a** De PvdA haalde $0,062 \cdot 157\,822 \approx 9800$ stemmen.
- b** In 2018 stemden $1,540 \cdot 23\,531 \approx 36\,200$ mensen op GroenLinks.
- c** In 2014 stemden $\frac{20\,522}{1,357} \approx 15\,100$ mensen op de VVD.
- d** Het CDA kreeg $\frac{8428}{157\,822} \times 100\% \approx 5,3\%$ van de stemmen.
- e** De procentuele afname is $\frac{4094}{36\,829} \times 100\% \approx 11,1\%$.
- f** Utrecht telde $\frac{157\,822}{0,590} \approx 267\,500$ stemgerechtigden in 2018.
- g** In 2018 stemden $0,485 \cdot 13\,223 \approx 6400$ mensen op de SP.
- h** In 2014 stemden $\frac{1053}{0,195} = 5400$ mensen op de CU, dus in 2018 stemden er
 $5400 + 1053 \approx 6500$ mensen op de CU.

Bladzijde 141

- 47** In 2020 was de winst $8 \cdot 1,12 \cdot 1,23 \cdot 1,18 = 13,00\ldots$ miljoen euro.
 Dat is een procentuele toename van $\frac{13,00\ldots - 8}{8} \times 100\% \approx 62,6\%$.

Alternatieve uitwerking

$1,12 \cdot 1,23 \cdot 1,18 \approx 1,626$, dus de toename is 62,6%.

- 48 a** De procentuele toename per jaar is $\frac{324 - 240}{240} \times 100\% = 35\%$.
 In 2019 waren er $1,35 \cdot 324 \approx 437$ geboorten.
- b** In 2016 waren er $\frac{240}{1,35} \approx 178$ geboorten.

- 49 a** $1,15 \cdot 1,25 = 1,4375$
Dus de winst is 43,75% meer.
- b** $1,15 \cdot 0,85 = 0,9775$
Je hebt nu 97,75% van het oorspronkelijke bedrag.
- c** Dit gaat alleen op als er evenveel jongens als meisjes zijn.
Zitten er 10 jongens en 20 meisjes in de klas, dan hebben $0,4 \cdot 10 + 0,2 \cdot 20 = 8$ leerlingen een onvoldoende en dat is $\frac{8}{30} \times 100\% \approx 26,7\%$.

- 50 a** De gemiddelde jaarbezetting is $\frac{3 \cdot 88\% + 9 \cdot 40\%}{12} = 52\%$.
- b** Als het vat 30% leeg is dan is het 70% vol. Het verschil tussen 30% vol en 30% leeg is dus $70\% - 30\% = 40\%$. Bij deze 40% hoort 30 liter. Dus als het vat vol is zit er $\frac{30}{0,4} = 75$ liter in.
- c** Nadat zijn dorst gelest is, bestaat de kameel voor 15% niet uit water. Dat deel weegt $0,15 \cdot 800 = 120$ kg.
Voordat zijn dorst gelest is, bestaat de kameel voor 16% niet uit water. Dat deel weegt ook 120 kg.
Voordat zijn dorst gelest is, weegt de kameel dus $\frac{120}{0,16} = 750$ kg.

- 51 a** Per jaar wordt er vermenigvuldigd met 1,025, dus per 10 jaar met $1,025^{10} \approx 1,28$.
Hieruit volgt $H_{\text{nieuw}} = 1,28 \cdot H$, dus $a = 1,28$.
- b** Als de groei 11 jaar duurt, dan is de factor $1,06^{11} \approx 1,898$.
Als de groei 12 jaar duurt, dan is de factor $1,06^{12} \approx 2,012$.
Het duurt dus 12 jaar.

Bladzijde 142

- 52** Er staat 6,708E11 en dat betekent
 $6,708 \cdot 10^{11} = 6,708 \cdot 100\,000\,000\,000 = 670\,800\,000\,000 \approx 671$ miljard.

Bladzijde 143

- 53 a** $432 \text{ miljard} = 432 \cdot 10^9 = 4,32 \cdot 10^{11}$
b $0,0061 = 6,1 \cdot 10^{-3}$
c $126 \cdot 10^4 = 1,26 \cdot 10^6$
d $0,0048 \cdot 10^{-8} = 4,8 \cdot 10^{-11}$
- 54 a** $0,03^7 \approx 2,19 \cdot 10^{-11}$
b $\left(\frac{1}{12}\right)^4 \approx 4,82 \cdot 10^{-5}$
c $225^6 \approx 1,30 \cdot 10^{14}$
d $\left(\frac{2}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 \approx 4,28 \cdot 10^{-3}$
e $\frac{2}{13}$ deel van een miljard $= \frac{2}{13} \cdot 10^9 \approx 1,54 \cdot 10^8$
f $\frac{14}{3 \cdot 10^5} \approx 4,67 \cdot 10^{-5}$
- 55 a** $3,5 \cdot 10^6 \times 0,4 \cdot 10^4 = 1,4 \cdot 10^{10}$
b $1200 \cdot 55\,000 = 6,6 \cdot 10^7$
c $12,5 \text{ miljoen} \times 460\,000 = 12,5 \cdot 10^6 \times 460\,000 = 5,75 \cdot 10^{12}$
d $0,018 \times 5 \cdot 10^{-6} = 9 \cdot 10^{-8}$
e $\frac{1,5 \text{ duizend}}{3 \text{ miljard}} = \frac{1,5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^9} = 5 \cdot 10^{-7}$
f $0,8^{12} \cdot 2,5^{20} = 6,25 \cdot 10^6$
- 56 a** $84,5 \text{ miljard} = 84,5 \cdot 10^9 = 8,45 \cdot 10^{10}$ en $0,00075 = 7,5 \cdot 10^{-4}$.
b $0,04^8 \approx 6,55 \cdot 10^{-12}$ en $215^6 \approx 9,88 \cdot 10^{13}$.
c $\left(\frac{2}{9}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^3 \approx 4,95 \cdot 10^{-5}$
d $1500 \times 6,2 \cdot 10^4 = 9,3 \cdot 10^7$ en $\frac{18 \text{ miljoen}}{2,4 \text{ miljard}} = \frac{18 \cdot 10^6}{2,4 \cdot 10^9} = 7,5 \cdot 10^{-3}$.

Bladzijde 144

- 57 a** spaartegoed $= 7,8 \cdot 10^6 \times 44\,500 = 3,471 \cdot 10^{11}$ euro
b kans $= \frac{4}{25 \cdot 10^9} = 1,6 \cdot 10^{-10}$

- 58** a $7,7 \cdot 10^9 \times 180 \cdot 10^6 = 1,386 \cdot 10^{18} \text{ m}^3 \text{ water}$
 b hoeveelheid $= 5 \cdot 0,6^{24} \approx 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ mg}$

- 59** a $1111^2 = 1\,234\,321$ en $11111^2 = 123\,454\,321$.
 Het antwoord bestaat steeds uit achtereenvolgens de cijfers 1 tot en met het aantal enen dat je kwadrateert en dan terug naar 1.
 b $111\,111^2 = 12\,345\,654\,321$
 $1\,111\,111\,111^2 = 1\,234\,567\,900\,987\,654\,321$
 Toelichting: het antwoord bestaat uit $2 \cdot 10 - 1 = 19$ cijfers. Volgens de ontdekte regelmaat zouden de eerste negen cijfers 1 t/m 9 moeten zijn, het middelste cijfer een 10, en de laatste negen cijfers 1 t/m 9 in omgekeerde volgorde. Omdat 10 uit twee cijfers bestaat, wordt het middelste cijfer een 0 en moet je 1 optellen bij het cijfer links van het midden. Dat was een 9 en wordt dus een 10: wederom een 0, en 1 optellen bij het cijfer links daarvan. Dat was een 8 en wordt dus een 9. Het antwoord is dus 1 234 567 900 987 654 321.

3.4 Rekenen met eenheden

Bladzijde 146

- 60** De oppervlakte van het weiland is $300 \cdot 420 = 126\,000 \text{ m}^2$ en dat is $\frac{126\,000}{10\,000} = 12,6 \text{ ha}$.

Alternatieve uitwerking

$300 \text{ m} = 3 \text{ hm}$ en $420 \text{ m} = 4,2 \text{ hm}$.

De oppervlakte van het weiland is $3 \cdot 4,2 = 12,6 \text{ ha}$.

Bladzijde 147

- 61** a $1 \text{ km}^2 = 100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 \text{ dm}^2 = 100^4 \text{ dm}^2$, dus $150 \text{ km}^2 = 150 \cdot 100^4 \text{ dm}^2$.
 $1 \text{ mm} = \frac{1}{10 \cdot 10} \text{ dm} = \frac{1}{10^2} \text{ dm}$, dus $0,02 \text{ mm} = 0,02 \cdot \frac{1}{10^2} = \frac{0,02}{10^2} \text{ dm}$.
 b $100^3 = 1\,000\,000$ en $1000^2 = 1\,000\,000$
 c 1 km^2 is 1 km bij 1 km, oftewel 1000 m bij 1000 m en dat is 1000^2 m^2 .
 d $5 \text{ km}^2 = 5 \cdot 1000^2 \text{ m}^2 = 5\,000\,000 \text{ m}^2$
- 62** a $52 \text{ hm} = 5200 \text{ m}$ e $1,45 \cdot 10^{-8} \text{ km}^3 = 1,45 \cdot 10^1 \text{ m}^3 = 14,5 \text{ m}^3$
 b $3,4 \cdot 10^7 \text{ mm} = 3,4 \cdot 10^1 \text{ km} = 34 \text{ km}$ f $5045 \text{ L} = 5,045 \text{ m}^3$
 c $4,3 \text{ km}^2 = 4\,300\,000 \text{ m}^2$ g $0,06 \text{ dL} = 6 \text{ mL}$
 d $6,1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 = 6,1 \cdot 10^2 \text{ ha} = 610 \text{ ha}$ h $7,5 \cdot 10^5 \text{ mm}^3 = 7,5 \cdot 10^{-1} \text{ dm}^3 = 0,75 \text{ L}$
- 63** a $4 \text{ L} = 4 \text{ dm}^3 = 4 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$
 $50 \text{ m}^2 = 50 \cdot 10^6 \text{ mm}^2$
 De dikte is $\frac{4 \cdot 10^6}{50 \cdot 10^6} = 0,08 \text{ mm}$.
 b Per jaar lekt er $0,05 \cdot 30 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 788\,400 \text{ mL} = 788,4 \text{ L}$.
 Kees heeft dus niet gelijk.

Bladzijde 148

- 64** a $880 \text{ mm} = 0,88 \text{ m}$
 Er valt dan per m^2 $0,88 \cdot 1 = 0,88 \text{ m}^3 = 880 \text{ dm}^3 = 880 \text{ L}$.
 b De intensiteit tijdens de wolkbreuk is $3 \cdot 24 = 72 \text{ mm}$ per uur.
 De gemiddelde intensiteit is $\frac{880}{624} = 1,41\dots \text{ mm}$ per uur.
 Dat is dus $\frac{72}{1,41\dots} \approx 51$ keer zo groot.
 c 24 mm betekent 24 liter per m^2 .
 Er viel $24 \cdot 102 \cdot 65 = 159\,120 \text{ L} = 159,12 \text{ m}^3$ neerslag.

- d** $81 \text{ mm} = 81 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
 $41\,500 \text{ km}^2 = 41\,500 \cdot 10^6 \text{ m}^2$
 Er valt in juli in Nederland $81 \cdot 10^{-3} \cdot 41\,500 \cdot 10^6 = 3,3615 \cdot 10^9 \text{ m}^3$ neerslag.
 Per inwoner is dat $\frac{3,3615 \cdot 10^9}{17,4 \cdot 10^6} \approx 193 \text{ m}^3$.

- 65 a** De ijskappen bevatten $0,021 \times 1385 \cdot 10^6 = 29\,085\,000 \text{ km}^3$ water.
 De totale hoeveelheid zoet water is
 $\frac{29\,085\,000}{0,687} \approx 42\,336\,245 \text{ km}^3 = 42\,336\,245 \cdot 10^9 \text{ m}^3$ zoet water.
 Per aardbewoner is dat $\frac{42\,336\,245 \cdot 10^9}{7,7 \cdot 10^9} \approx 5,5$ miljoen m^3 zoet water.
b De hoeveelheid neerslag op land is $502\,800 + 74\,200 - 458\,000 = 119\,000 \text{ km}^3$.
 $\frac{119\,000}{42\,336\,245} \times 100\% \approx 0,28\%$ van het zoet water valt als neerslag op land.

Bladzijde 149

- 66 a** Er gaan 60 seconden in een minuut. Dus is 45 seconden $\frac{45}{60}$ deel van een minuut en $\frac{45}{60} = 0,75$.
b $27,75 \text{ minuten} = \frac{27,75}{60} \text{ uur} = 0,4625 \text{ uur}$
c De gemiddelde snelheid is $\frac{7}{0,4625} \approx 15,1 \text{ km per uur}$.
67 a Haar gemiddelde snelheid was $\frac{100}{10,49} \text{ m/s} = \frac{100}{10,49} \cdot 3,6 \text{ km/uur} \approx 34,318 \text{ km/uur}$.
b $12,37,35$ is hetzelfde als $12 \cdot 60 + 37,35 = 757,35$ seconden.
 Zijn gemiddelde snelheid was $\frac{5000}{757,35} \text{ m/s} = \frac{5000}{757,35} \cdot 3,6 \text{ km/uur} \approx 23,767 \text{ km/uur}$.
c $2:01.39$ is hetzelfde als $2 \cdot 60 \cdot 60 + 1 \cdot 60 + 39 = 7299$ seconden.
 Zijn gemiddelde snelheid was $\frac{42\,195}{7299} \text{ m/s} = \frac{42\,195}{7299} \cdot 3,6 \text{ km/uur} \approx 20,811 \text{ km/uur}$.

Bladzijde 150

- 68 a** De gemiddelde snelheid is $\frac{6}{\left(\frac{25}{60}\right)} = 14,4 \text{ km/uur}$.
b Zijn recordtijd is $\frac{9,8}{14} = 0,7 \text{ uur} = 0,7 \cdot 60 \text{ minuten} = 42 \text{ minuten}$.
c Dat is $\frac{26}{6,0} = 4\frac{1}{3} \text{ minuten} = 4 \text{ minuten en } 20 \text{ seconden}$.
d De afstand is $12,6 \cdot 1\frac{50}{60} = 23,1 \text{ km}$.
69 Het geluid moet 200 cm heen en 200 cm terug. In totaal legt het geluid dus $400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$ af.
 $1235 \text{ km/uur} = \frac{1235}{3,6} \text{ m/s}$
 Er zit dus $\frac{4}{\left(\frac{1235}{3,6}\right)} \approx 0,012$ seconde tussen.
70 a heenweg: tijd $= \frac{100}{80} = 1,25 \text{ uur} = 1 \text{ uur en } 15 \text{ minuten} = 75 \text{ minuten}$
 terugweg: tijd $= \frac{100}{120} = \frac{5}{6} \text{ uur} = 50 \text{ minuten}$
b $75 + 50 = 125 \text{ minuten} = \frac{125}{60} = 2\frac{1}{12} \text{ uur}$
 gemiddelde snelheid $= \frac{200}{2\frac{1}{12}} = 96 \text{ km/uur}$

$$\text{c } t = \frac{d}{80} + \frac{d}{120} = \frac{3d}{240} + \frac{2d}{240} = \frac{5d}{240} = \frac{d}{48} = \frac{1}{48}d$$

$$\text{gemiddelde snelheid} = \frac{2d}{\frac{1}{48}d} = \frac{2}{\frac{1}{48}} = 2 \cdot 48 = 96 \text{ km/uur}$$

Dus de gemiddelde snelheid hangt niet af van d .

- d** Snelheid op de heenreis is a km/uur, dan is de snelheid op de terugreis $2a$ km/uur.

Dus voor de heenweg geldt $t = \frac{d}{a}$ en voor de terugweg geldt $t = \frac{d}{2a}$.

Voor de totale reis geldt dus $t = \frac{d}{a} + \frac{d}{2a} = \frac{2d}{2a} + \frac{d}{2a} = \frac{3d}{2a}$.

$$\text{e } \text{gemiddelde snelheid} = \frac{2d}{\left(\frac{3d}{2a}\right)} = 2d \cdot \frac{2a}{3d} = \frac{4ad}{3d} = 1\frac{1}{3}a$$

Bladzijde 151

- 71 a** $\frac{1}{300000} \approx 3,3 \cdot 10^{-6}$ seconden
- b** Het licht legt in een jaar ongeveer $300000 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \approx 9,46 \cdot 10^{12}$ km af.
- c** Dat is $1,3 \cdot 300000 = 390000$ km.
- d** In augustus 2021 heeft de Voyager 2 ongeveer $44 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 56500 = 2,17 \dots \cdot 10^{10}$ km afgelegd.
- Dat is $\frac{2,17 \dots \cdot 10^{10}}{9,46 \cdot 10^{12}} \approx 0,002$ lichtjaar.

- 72** Stel de afstand tussen A en B is d km.

Sandra doet dan over de heenweg $\frac{d}{14}$ uur en over de terugweg $\frac{d}{12}$ uur.

$$\text{Oplossen van de vergelijking } \frac{1}{14}d + \frac{1}{12}d = 1\frac{5}{60} \text{ geeft } \frac{6}{84}d + \frac{7}{84}d = 1\frac{5}{60}$$

$$\frac{13}{84}d = \frac{65}{60}$$

$$d = \frac{65}{60} \cdot \frac{84}{13} = 7$$

De afstand tussen A en B is 7 km.

- 73 a** $x = 200$ geeft $K = 0,025 \cdot 200 + 45 = 50$
De kosten zijn 50 dollar.
- b** 200 ft^3 is $200 \cdot 0,3048^3 \approx 5,66 \text{ m}^3$
- c** $1 \text{ m}^3 = \frac{1}{0,3048^3} \approx 35,3 \text{ ft}^3$, dus $x \approx 35,3y$.
- d** Invullen van $35,3y$ op de plek van x geeft $K = 0,025 \cdot 35,3y + 45 = 0,8825y + 45$, dus $K = 0,8825y + 45$.
 $y = 5,66$ geeft $K = 0,8825 \cdot 5,66 + 45 \approx 50$ en dit klopt met het antwoord op vraag a.

Bladzijde 152

- 74 a** Omdat we van liter per km (inhoud per afstand) naar mijl per gallon (afstand per inhoud) moeten rekenen.

$$\text{b } 1 \text{ mijl} = 1,6 \text{ km, dus } 1 \text{ km} = \frac{1}{1,6} \text{ mijl en } 100 \text{ km} = 100 \cdot \frac{1}{1,6} = \frac{100}{1,6} \text{ mijl.}$$

$$1 \text{ gallon} = 3,8 \text{ liter, dus } 1 \text{ liter} = \frac{1}{3,8} \text{ gallon en } 6,0 \text{ liter} = 6,0 \cdot \frac{1}{3,8} = \frac{6,0}{3,8} \text{ gallon.}$$

- 75 a** $5,8 \text{ liter per } 100 \text{ km} = 100 \text{ km per } 5,8 \text{ liter} = \frac{100}{5,8} \text{ km per liter} = \frac{100}{5,8} \cdot 50 \text{ km per } 50 \text{ liter.}$

$$6,4 \text{ liter per } 100 \text{ km} = 100 \text{ km per } 6,4 \text{ liter} = \frac{100}{6,4} \text{ km per liter} = \frac{100}{6,4} \cdot 50 \text{ km per } 50 \text{ liter.}$$

$$\text{Auto 1 komt dus } \frac{100}{5,8} \cdot 50 - \frac{100}{6,4} \cdot 50 \approx 81 \text{ km verder met een volle tank.}$$

- b** Auto 1 kan $\frac{100}{5,8} \cdot 40 \approx 689,65 \dots$ km rijden met 40 liter benzine.
 Auto 2 verbruikt bij die afstand $\frac{689,65 \dots}{100} \cdot 6,4 \approx 44,1$ liter benzine.
 Auto 2 moet dus 44,1 liter benzine in de tank hebben.

Bladzijde 153

- 76 a** 110 zeemijlen per 8 uur = $110 \cdot 1,852$ km per 8 uur = $\frac{110 \cdot 1,852}{8}$ km/uur $\approx 25,5$ km/uur
- b** $76\,679 \text{ acres} = 76\,679 \cdot 4049 \text{ m}^2 = \frac{76\,679 \cdot 4049}{100^3} \text{ km}^2 \approx 310 \text{ km}^2$
- c** In de formule t vervangen door $24d$ geeft $N = 0,1 \cdot (24d)^2 + 0,5 \cdot 24d + 10$
 $N = 0,1 \cdot 576d^2 + 12d + 10$
 $N = 57,6d^2 + 12d + 10$
- d** In de formule L vervangen door $\frac{1}{2,54}l$ en t door $7w$ geeft $\frac{1}{2,54}l = 0,04 \cdot (7w)^2 - 7w + 31$
 $\frac{1}{2,54}l = 0,04 \cdot 49w^2 - 7w + 31$
 $l = 2,54(1,96w^2 - 7w + 31)$
 $l \approx 4,98w^2 - 17,78w + 78,74$

Dus $l = 4,98w^2 - 17,78w + 78,74$.

- 77 a** Voer in $y_1 = 0,000625x^2 - 0,1x + 10$.
 De optie minimum geeft $x = 80$ en $y = 6$.
 Het brandstofverbruik is minimaal bij een snelheid van 80 km/uur en bedraagt 6 liter per 100 km.
 $6 \text{ liter per } 100 \text{ km} = 100 \text{ km per } 6 \text{ liter} = \frac{100}{6} \text{ km per liter} = \frac{100}{6} \cdot 45 \text{ km per } 45 \text{ liter}$
 $= 750 \text{ km per } 45 \text{ liter}$
 Je kunt dan met een volle tank 750 km rijden.
- b** B liter per 100 km = $B \cdot 1,6$ liter per 100 mijl, dus $V = 1,6B$, oftewel $B = \frac{1}{1,6} V = 0,625V$.
 In de formule B vervangen door $0,625V$ en v vervangen door $1,6x$ geeft
 $0,625V = 0,000625 \cdot (1,6x)^2 - 0,1 \cdot 1,6x + 10$
 $0,625V = 0,000625 \cdot 2,56x^2 - 0,16x + 10$
 $V = 0,00256x^2 - 0,256x + 16$
- c** In de formule V vervangen door $3,8P$ geeft $3,8P = 0,00256x^2 - 0,256x + 16$
 $P \approx 0,00067x^2 - 0,067x + 4,2$.
 Dus $P = 0,00067x^2 - 0,067x + 4,2$.

Bladzijde 154

- 78 a** Bij $C = \frac{F-32}{1,8}$ het linker- en rechterlid vermenigvuldigen met 1,8 geeft
 $1,8C = F - 32$, dus $F = 1,8C + 32$.
- b** Bij 1 februari hoort $m = 1$ en bij 1 april hoort $m = 3$.
 $m = 1$ geeft $F = 0,252 \cdot 1^2 - 3,06 \cdot 1 + 84,2 = 81,392$ en $C = \frac{81,392 - 32}{1,8} = 27,44^\circ\text{C}$.
 $m = 3$ geeft $F = 0,252 \cdot 3^2 - 3,06 \cdot 3 + 84,2 = 77,288$ en $C = \frac{77,288 - 32}{1,8} = 25,16^\circ\text{C}$.
 De temperatuur neemt met $27,44 - 25,16 \approx 2,3^\circ\text{C}$ af.
- c** Voer in $y_1 = 0,252x^2 - 3,06x + 84,2$.
 De optie minimum geeft $y = 74,91 \dots$
 Dus de minimale temperatuur is $74,9^\circ\text{F}$, oftewel $\frac{74,91 \dots - 32}{1,8} \approx 23,8^\circ\text{C}$.
- d** In de formule F vervangen door $1,8C + 32$ geeft $1,8C + 32 = 0,252m^2 - 3,06m + 84,2$
 $1,8C = 0,252m^2 - 3,06m + 52,2$
 $C = 0,14m^2 - 1,7m + 29$

e In de formule m vervangen door $\frac{12}{52}w = \frac{3}{13}w$ geeft $C = 0,14 \cdot \left(\frac{3}{13}w\right)^2 - 1,7 \cdot \frac{3}{13}w + 29$
 $C = 0,14 \cdot 0,053...w^2 - 0,392...w + 29$
 $C \approx 0,0075w^2 - 0,39w + 29$

Dus $C = 0,0075w^2 - 0,39w + 29$.

f In de formule w vervangen door $\frac{1}{7}d$ geeft $C = 0,0075 \cdot \left(\frac{1}{7}d\right)^2 - 0,39 \cdot \frac{1}{7}d + 29$

$$C = 0,0075 \cdot \frac{1}{49}d^2 - 0,39 \cdot \frac{1}{7}d + 29$$

$$C \approx 1,53 \cdot 10^{-4}d^2 - 5,57 \cdot 10^{-2}d + 29$$

Dus $a = 1,53 \cdot 10^{-4}$ en $b = 5,57 \cdot 10^{-2}$.

g Voer in $y_1 = 1,53 \cdot 10^{-4}x^2 - 5,57 \cdot 10^{-2}x + 29$.

De optie minimum geeft $x = 182,02...$

Dus voor $d \approx 182$ is de temperatuur van het zeewater minimaal.

Bladzijde 155

79 a Het water kan in de oceaan naar de zijanten wegstromen en bij de bak niet.
 Naar de kust toe wordt de diepte van de oceaan minder en bij de bak niet.

b $v = 90$, $l = 80$ en $h = 25$ geeft $H = 0,00035 \cdot \frac{90^2 \cdot 80}{25} = 9,072$

De toename van de hoogte is $9,072$ voet $= 9,072 \cdot 30,5 \text{ cm} = 276,696 \text{ cm} \approx 28 \text{ dm}$.

c $160 \text{ km per uur} = \frac{160}{1,6} = 100 \text{ mijl per uur}$, dus $v = 100$.

$$120 \text{ km} = \frac{120}{1,6} = 75 \text{ mijl}$$
, dus $l = 75$.

$$10 \text{ m} = 1000 \text{ cm} = \frac{1000}{30,5} = 32,786... \text{ voet}$$
, dus $h = 32,786...$

$$\text{Dat geeft } H = 0,00035 \cdot \frac{100^2 \cdot 75}{32,786...} = 8,00625.$$

De toename van de hoogte is $8,00625$ voet $= 8,00625 \cdot 30,5 \text{ cm} = 244,19... \text{ cm} \approx 2,4 \text{ m}$.

d In de formule H vervangen door $\frac{1}{0,305}H$, v door $\frac{1}{1,6}v$, l door $\frac{1}{1,6}l$ en h door $\frac{1}{0,305}h$

$$\text{geeft } \frac{1}{0,305}H = 0,00035 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1,6}v\right)^2 \cdot \frac{1}{1,6}l}{\frac{1}{0,305}h}$$

$$H = 0,305 \cdot 0,00035 \cdot \left(\frac{1}{1,6}\right)^2 \cdot \frac{1}{1,6} \cdot 0,305 \cdot \frac{v^2 l}{h}$$

$$H \approx 7,95 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{v^2 l}{h}$$

Dus $c \approx 7,95 \cdot 10^{-6}$.

Diagnostische toets

Bladzijde 158

1 a $5 \cdot \frac{3a}{b} \cdot \frac{a-2}{2b} = \frac{15a(a-2)}{2b^2} = \frac{15a^2 - 30a}{2b^2}$

b $\frac{3x}{4} \cdot \frac{2-y}{x} = \frac{3x(2-y)}{4x} = \frac{3(2-y)}{4} = \frac{6-3y}{4} = 1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}y$

c $4p : \frac{4p+1}{2p+1} = 4p \cdot \frac{2p+1}{4p+1} = \frac{4p(2p+1)}{4p+1} = \frac{8p^2+4p}{4p+1}$

2 a $\frac{4}{3p} - \frac{2}{5p} = \frac{20}{15p} - \frac{6}{15p} = \frac{14}{15p}$

b $\frac{1}{x} + x \cdot \frac{5y}{4x^2} = \frac{1}{x} + \frac{5xy}{4x^2} = \frac{4}{4x} + \frac{5y}{4x} = \frac{4+5y}{4x}$

c $\frac{ab}{2a^2} \cdot (b+1) - (a+1) \cdot \frac{3}{a(a+1)} = \frac{ab(b+1)}{2a^2} - \frac{3}{a} = \frac{b^2+b}{2a} - \frac{6}{2a} = \frac{b^2+b-6}{2a}$

- 3 a** Er zijn $8 + 7 + 4 = 19$ gelijke delen.
 19 delen zijn 285 gram, dus één deel is 15 gram.
 Er zijn $8 \cdot 15 = 120$ gram nootjes.
 Er zijn $7 \cdot 15 = 105$ gram ringetjes.
 Er zijn $4 \cdot 15 = 60$ gram driehoekjes.
- b** Nootjes en ringetjes zijn $8 + 7 = 15$ gelijke delen.
 15 delen zijn 180 gram, dus één deel is 12 gram.
 Er zijn $4 \cdot 12 = 48$ gram driehoekjes.
- 4 a** $(3x - 2)^2 - (2x + 1)(3x - 1) = 9x^2 - 12x + 4 - (6x^2 + x - 1) = 3x^2 - 13x + 5$
- b** $L = 0,032 \cdot \frac{p}{0,0128} \cdot (2 + 6q) = \frac{0,032}{0,0128} \cdot p(2 + 6q) = 2,5p(2 + 6q) = 15pq + 5p$
 Dus $a = 15$ en $b = 5$.
- 5 a** $4x - 3y = 15$
 $-3y = -4x + 15$
 $y = 1\frac{1}{3}x - 5$
- c** $5(\frac{2}{5}P - 6) + 3Q = 4(3 - P)$
 $2P - 30 + 3Q = 12 - 4P$
 $6P = -3Q + 42$
 $P = -\frac{1}{2}Q + 7$
- b** $6(2x - 1) + 9y = 24$
 $12x - 6 + 9y = 24$
 $12x = -9y + 30$
 $x = -\frac{3}{4}y + 2\frac{1}{2}$
- 6 a** De omzet in februari was $0,62 \cdot 3950 = 2449$ euro.
- b** De omzet in maart was $\frac{3250}{1,12} \approx 2902$ euro.
- c** $1,14 \cdot 1,06 \cdot 1,12 \approx 1,353$
 Dus de omzet was ongeveer 35,3% hoger.
- d** totaal $= \frac{216}{0,45} = 480$
 Dus in november kwamen 480 bezoekers in de winkel.

Bladzijde 159

- 7 a** 384 000 km is 384 000 000 m
 De afstand tussen de zon en de aarde is $400 \cdot 384 000 000 \approx 1,54 \cdot 10^{11}$ m.
- b** Een volwassen mens is gemiddeld 1,75 m, dat is 1750 mm.
 De lengte van een bacterie is ongeveer $\frac{1750}{10^6} = 1,75 \cdot 10^{-3}$ mm.
- 8** 160 liter is 160 dm^3
 1,35 m is 13,5 dm
 52 cm is 5,2 dm
 De oppervlakte van de bodem is $13,5 \cdot 5,2 = 70,2 \text{ dm}^2$.
 $\frac{160}{70,2} \approx 2,3$ dm, dus het water komt 23 cm hoog.
- 9 a** 43 minuten is $\frac{43}{60}$ uur
 Haar snelheid is $\frac{5,1}{(\frac{43}{60})} \approx 7,1$ km/uur.
- b** tijd $= \frac{5,1}{11} = 0,46...$ uur
 Ze doet er $0,46... \cdot 60 \approx 28$ minuten over.
- 10 a** In de formule vervangen l door $100L$ en d door $7w$ geeft
 $100L = -0,00002 \cdot (7w)^2 + 0,138 \cdot 7w + 50,9$
 $100L = -0,00098w^2 + 0,966w + 50,9$
 $L = -0,0000098w^2 + 0,00966w + 0,509$
- b** 1 schep per fl.oz., dus $\frac{250}{28,41} \approx 9$ schepjes per 250 mL.

4 Combinatoriek

Voorkennis De vermenigvuldigingsregel en de somregel

Bladzijde 164

- 1 a aantal = $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$
 b AAA of BBB
 aantal = $2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 52$
 c ACA of CAA
 aantal = $2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 5 = 40$
 d $\bar{B}\bar{B}\bar{B}$ ($\bar{B}$ betekent geen B)
 aantal = $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$
 e rood rood rood of geel geel geel of groen groen groen of blauw blauw blauw
 aantal = $2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 20$
 f groen groen rood of groen rood groen of rood groen groen
 aantal = $1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

- 2 a aantal = $11 \cdot 8 \cdot 5 = 440$
 b aantal = $11 \cdot (8 + 5) = 11 \cdot 13 = 143$

4.1 Regels voor telproblemen

Bladzijde 165

1 a

		SOM VAN DE OGEN					
	6	7	8	9	10	11	12
	5	6	7	8	9	10	11
	4	5	6	7	8	9	10
	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7
blauwe dobbelsteen		1	2	3	4	5	6
		rode dobbelsteen					

- b Zie de groene vakjes. Er zijn 10 mogelijkheden.
 c 66 65 64 63
 56 55 54
 46 45
 36

Bladzijde 166

- 2 a Er worden $n \cdot (n - 1) = n^2 - n$ wedstrijden gespeeld. Dus $N = n^2 - n$.
 b Bij een halve competitie speelt elk team één keer tegen elk ander team.

- 3 a** Liefst een rooster.

b

	4v1	4v2	4h1	4h2	4h3
4v1	–	–	–	–	–
4v2		–	–	–	–
4h1			–	–	–
4h2				–	–
4h3					–

Zie de lege vakjes. Er zijn 10 wedstrijden.

Alternatieve uitwerking

In een hele competitie met 5 teams speelt elk van de 5 teams 4 thuiswedstrijden.

Dit geeft $5 \cdot 4 = 20$ wedstrijden.

In een halve competitie zijn er dus $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ wedstrijden.

- c** In een hele competitie met n teams worden $n^2 - n$ wedstrijden gespeeld.

In een halve competitie wordt de helft van het aantal wedstrijden gespeeld.

Dus $N = \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

Alternatieve uitwerking

Tel eerst alle hokjes in het rooster ($n \cdot n = n^2$).

Trek daar de n hokjes van de diagonaal linksboven naar rechtsonder van af.

Deel het resultaat door 2.

Dus $N = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

- 4 a** Zie de uitwerking van opgave 3c hierboven.

b $\frac{1}{2}(n^2 - n) = 45$

$$n^2 - n = 90$$

$$n^2 - n - 90 = 0$$

$$(n + 9)(n - 10) = 0$$

$$n = -9 \text{ of } n = 10$$

Dus er zijn 10 deelnemende teams.

- 5 a** In elke groep van 5 teams worden $5 \cdot 4 = 20$ wedstrijden gespeeld.

In de voorronde worden dus $8 \cdot 20 = 160$ wedstrijden gespeeld.

In de eerste ronde van het afvalsysteem worden $4 \cdot 2 = 8$ wedstrijden gespeeld.

De overgebleven 4 teams spelen in de volgende ronde $2 \cdot 2 = 4$ wedstrijden.

De laatste 2 teams spelen nog 2 wedstrijden.

In totaal zijn er dus $8 + 4 + 2 = 14$ wedstrijden in het afvalsysteem.

In totaal zijn er dus $160 + 14 = 174$ wedstrijden.

Alternatieve uitwerking

In elke groep van 5 teams worden $5 \cdot 4 = 20$ wedstrijden gespeeld.

In de voorronde worden dus $8 \cdot 20 = 160$ wedstrijden gespeeld.

Bij een afvalsysteem met een uit- en een thuiswedstrijd valt er per twee wedstrijden één team af (de verliezer). Er moeten 7 teams afvallen voor de winnaar bekend is.

In het afvalsysteem worden dus $7 \cdot 2 = 14$ wedstrijden gespeeld.

In totaal zijn er dus $160 + 14 = 174$ wedstrijden.

- b** De kampioen heeft in de voorronde $4 \cdot 2 = 8$ wedstrijden gespeeld en in de finaleronde $3 \cdot 2 = 6$ wedstrijden. In totaal dus $8 + 6 = 14$ wedstrijden.

- 6** Als je de dagen van de week nummert van 1 t/m 7 kun je de mogelijkheden als volgt systematisch noteren:
135, 136, 146, 246, 247, 257, 357
Er zijn dus 7 mogelijke schema's.

Bladzijde 167

7 a

SOM

4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	2	3	4	5	6	7	8

Er zijn 4 mogelijkheden om 8 te gooien.

- b** Er zijn 18 mogelijkheden om minder dan 8 te gooien.

c

PRODUCT

4	4	8	12	16	20	24	28	32
3	3	6	9	12	15	18	21	24
2	2	4	6	8	10	12	14	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7	8

Er zijn 3 mogelijkheden om product 8 te krijgen.

- 8** Met rood eerst zijn er 4 mogelijkheden, namelijk

r g b
r b g
r g r
r b r

En zo zijn er met geel en met blauw eerst ook elk 4 mogelijkheden.

Dus in totaal zijn er $3 \cdot 4 = 12$ mogelijke achtergronden.

- 9 a** mogelijkheden 665 656 566
aantal = 3

- b** mogelijkheden 664 646 466
 655 565 556
aantal = $3 + 3 = 6$

- c** bij som = 16 zijn er 6 mogelijkheden (zie vraag b)
bij som = 17 zijn er 3 mogelijkheden (zie vraag a)
bij som = 18 is er alleen de mogelijkheid 666
aantal = $6 + 3 + 1 = 10$

- d** mogelijkheden 114 141 411
 123 132 213 231 312 321
 222
aantal = $3 + 6 + 1 = 10$

- 10** mogelijkheden 111 123 135 147 159
 210 222 234 246 258
 321 333 345 357 369
 420 432 444 456 468
 531 543 555 567 579
 630 642 654 666 678
 741 753 764 777 789
 840 852 864 876 888
 951 963 975 987 999

aantal = $9 \cdot 5 = 45$

- 11** Als de letters verschillend moeten zijn, dan aantal = $4 \cdot 3 = 12$.
Als de letters gelijk mogen zijn, dan aantal = $4 \cdot 4 = 16$.

Bladzijde 169

- 12** **a** aantal = $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
b Het eerste cijfer is 3 of 4 of 5.
aantal = $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$
c Het eerste cijfer is 6 en het tweede cijfer is 5, 6, 7 of 8 OF het eerste cijfer is 7 of 8.
aantal = $1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 576$
- 13** **a** aantal = $10 \cdot 17 \cdot 16 = 2720$
b aantal = $10 \cdot 8 \cdot 7 = 560$
c Bekijk eerst foto's, dan verslag, ten slotte route.
N, F, N of F OF F, N, N of F
aantal = $8 \cdot 10 \cdot 16 + 10 \cdot 8 \cdot 16 = 2560$
- 14** **a** aantal = $26 \cdot 26 \cdot 26 = 17576$
b aantal = $26 \cdot 25 \cdot 25 = 16250$
c aantal = $1 \cdot 26 \cdot 26 = 676$
- 15** **a** • aantal = $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
• aantal = $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
b • aantal = $6 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1956$
• aantal = $6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 + 6^6 = 55986$

Bladzijde 170

- 16** **a** Hoeveel vierlettercodes zijn er als herhalingen zijn toegestaan?
b Hoeveel drielettercodes zijn er met drie verschillende letters?
c Hoeveel vijflettercodes zijn er waarbij de tweede letter niet dezelfde is als de eerste letter?
d Hoeveel drielettercodes zijn er als geen gelijke letters naast elkaar mogen staan?
- 17** **a** aantal = $14 \cdot 5 = 70$
b 16, 16 of 16, 16
aantal = $5 \cdot 26 + 26 \cdot 5 = 260$
c j m of m j
aantal = $14 \cdot 17 + 17 \cdot 14 = 476$
d 15, 15 of 16, 16 of 17, 17
aantal = $19 \cdot 18 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 404$
e 16, 15 of 17, 16 of 17, 15
aantal = $5 \cdot 19 + 7 \cdot 5 + 7 \cdot 19 = 263$
- 18** Als het eerste cijfer een 1 of een 3 is, dan is het tweede cijfer een 2. Op alle oneven posities kan ze daarna kiezen uit een 1 of een 3, en op alle even posities moet ze een 2 zetten. Dat zijn 2^5 mogelijkheden.
Als het eerste cijfer een 2 is, dan staat op alle even posities een 1 of een 3, en op alle oneven posities een 2. Dat zijn ook 2^5 mogelijkheden.
aantal = $2^5 + 2^5 = 64$

4.2 Permutaties en combinaties

Bladzijde 172

- 19** **a** aantal = $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
b aantal = $10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1 = 3\,628\,800$

Bladzijde 173

- 20** **a** aantal = $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$
b aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$
c aantal = $14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 5 = 3\,632\,428\,800$
- 21** **a** aantal = $4! = 24$
b aantal = $1 \cdot 3! = 6$

- 22** **a** aantal = $8! = 40\,320$
b aantal = $4! \cdot 5! = 2\,880$
c De twee ‘pakketjes’ kunnen op 2 manieren gezet worden, namelijk eerst de scheikundeboeken en dan de wiskundeboeken, of omgekeerd.
 Binnen het pakketje scheikundeboeken zijn $3!$ mogelijke volgorden en binnen het pakketje wiskundeboeken zijn dat er $5!$.
 aantal = $2 \cdot 3! \cdot 5! = 1\,440$

Bladzijde 174

- 23** **a** Kies eerst een klassiek stuk en dan een jazznummer.
 aantal = $4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \cdot 7! = 60\,480$
b Vat de 3 jazznummers als 1 nummer op, dan zijn er 7 nummers in totaal.
 De 3 jazznummers kunnen onderling nog op $3!$ manieren worden gerangschikt.
 aantal = $7! \cdot 3! = 30\,240$
c KkKkKkKkK
 aantal = $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5! \cdot 4! = 2\,880$
d Voor de drie ‘blokjes’ met genres zijn er $3!$ mogelijke volgorden.
 Binnen de genres zijn er $4!$, $3!$ en $2!$ mogelijke volgordes.
 aantal = $3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 1\,728$

- 24** **a** aantal = $12 \cdot 11 = 132$
b aantal = $12! = 479\,001\,600$
c aantal = $7! \cdot 6! = 3\,628\,800$

- 25** Als er geen voorwaarde zou zijn, waren er $5! = 120$ manieren. Bij de helft van deze manieren staat B dicht bij de locomotief dan A.
 Dus aantal = $\frac{1}{2} \cdot 120 = 60$.

- 26** **a** Hoeveel zeslettercodes zijn er met zes verschillende letters?
b Hoeveel drielettercodes zijn er met drie verschillende letters?
c Hoeveel vierlettercodes zijn er als herhalingen zijn toegestaan?
d Hoeveel vierlettercodes zijn er, waarbij de eerste letter een a of een b is, en de andere letters moeten worden gekozen uit c, d, e en f, waarbij herhalingen zijn toegestaan?
e Hoeveel zeslettercodes zijn er met zes verschillende letters, waarbij de klinkers naast elkaar staan?
f Hoeveel zeslettercodes zijn er met zes verschillende letters, waarbij de klinkers en de medeklinkers naast elkaar staan?

- 27** **a** aantal = $4 \cdot 3 = 12$
b De helft van 12, dus 6.

Bladzijde 176

- 28** **a** combinaties **d** permutaties
b permutaties **e** permutaties
c combinaties **f** combinaties

- 29** **a** aantal = $\binom{25}{5} = 53\,130$
b aantal = $\binom{25}{20} = 53\,130$, dus het klopt.
c Ook met andere getallenvoorbeelden blijkt het te kloppen, bijvoorbeeld:
 • $\binom{10}{2} = \binom{10}{8} = 45$
 • $\binom{12}{5} = \binom{12}{7} = 792$

- 30** a aantal = $\binom{18}{4} = 3060$
 b aantal = $\binom{45}{6} = 8\,145\,060$
 c aantal = $\binom{20}{15} = 15\,504$

Bladzijde 177

- 31** a aantal = $\binom{15}{4} = 1365$
 b Het aantal wordt $\binom{12}{3} = 220$, dus het aantal vermindert met $1365 - 220 = 1145$.
32 a aantal = $\binom{12}{3} = 220$
 b aantal = $12! = 479\,001\,600$
 c aantal = $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 665\,280$
 d Het ordenen van de drie vakken kan op $3!$ manieren.
 Binnen de vakken zijn er $4!$, $3!$ en $5!$ mogelijke volgordes.
 aantal = $3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 5! = 103\,680$

Bladzijde 178

- 33** a Higgins wint het laatste frame en van de eerste 13 wint hij er 8.
 aantal = $\binom{13}{8} = 1287$
 b Van de eerste 16 frames winnen beide spelers er 8. Voor het laatste frame zijn er 2 mogelijkheden.
 aantal = $2 \cdot \binom{16}{8} = 25\,740$
 c Hawkins wint het laatste frame en 8 frames van de eerste 8, 9, 10, 11 of 12.
 aantal = $\binom{8}{8} + \binom{9}{8} + \binom{10}{8} + \binom{11}{8} + \binom{12}{8} = 715$
34 a aantal = $\binom{28}{8} = 3\,108\,105$
 b aantal = $8! = 40\,320$
 c aantal = $\binom{8}{5} = 56$
 d aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$
35 a $\binom{17}{0} = 1$ $\binom{17}{1} = 17$ $\binom{17}{16} = 17$ $\binom{17}{17} = 1$
 b Je kunt op één manier 0 personen kiezen uit een groep van 17.
 Je kunt op 17 manieren 1 persoon kiezen uit een groep van 17.
 Je kunt op 17 manieren 16 personen kiezen uit een groep van 17. Je kiest er immers altijd 1 niet.
 Je kunt op één manier 17 personen kiezen uit een groep van 17.
 c $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{n-1} = n$ $\binom{n}{n} = 1$
36 a aantal = $\binom{60}{5} = 5\,461\,512$
 b aantal = $\binom{40}{4} = 91\,390$
 c aantal = $\binom{60}{5} \cdot \binom{40}{4} \approx 5,0 \cdot 10^{11}$

Bladzijde 179

- 37** **a** aantal = $\binom{6}{3} \cdot \binom{9}{3} = 1680$
b aantal = $\binom{6}{6} = 1$
c aantal = $\binom{6}{6} + \binom{6}{5} \cdot \binom{9}{1} = 55$
d aantal = $\binom{6}{5} \cdot \binom{9}{1} + \binom{6}{6} = 55$

Alternatieve uitwerking

aantal = aantal met 5 of 6 jongens
= aantal met 1 of 0 meisjes
= 55 (zie c)

- 38** **a** aantal = $\binom{12}{5} = 792$
b aantal = aantal met beide broers + aantal zonder de broers = $\binom{2}{2} \cdot \binom{10}{3} + \binom{10}{5} = 372$
c aantal = aantal met Thiago + aantal met Don + aantal zonder Thiago en Don
= $\binom{1}{1} \cdot \binom{10}{4} + \binom{1}{1} \cdot \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 672$

- 39** Voor het drietal zijn er 13 mogelijkheden en voor het tweetal 12 mogelijkheden.
In het drietal komen drie van de vier soorten voor, in het tweetal twee van de vier.
aantal = $13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} = 3744$

Bladzijde 180

- 40** Als Ivo en Sandra meegaan, dan kan de rest kiezen tussen wel of niet meegaan. Dat geeft $2^5 = 32$ mogelijkheden.
Als Ivo en Sandra niet meegaan, dan moeten er van de andere vijf minstens twee meegaan. Dat geeft $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 26$ mogelijkheden.
aantal = $32 + 26 = 58$

- 41** **a** aantal = $\binom{21}{8} = 203\,490$
b aantal = $\binom{19}{5} = 11\,628$
c aantal = $\binom{9}{6} \cdot \binom{6}{2} + \binom{9}{7} \cdot \binom{6}{1} + \binom{9}{8} = 1485$
d aantal = $\binom{6}{2} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{6}{2} = 28\,350$
e Je kunt kiezen uit 4 verschillende desserts of geen dessert, dus 5 keuzes.
aantal = $\binom{21}{4} \cdot 5 = 29\,925$

4.3 Rijtjes en roosters

Bladzijde 182

- 42** **a** Combinaties, de volgorde waarin de groene vierkantjes gekozen worden is niet van belang.
b aantal = $\binom{6}{2} = 15$

Bladzijde 183

- 43** a aantal = $\binom{10}{8} = 45$
 b aantal = $\binom{10}{5} = 252$
 c aantal = $2^{10} = 1024$
 d aantal = $1 \cdot 1 \cdot 2^8 = 256$
- 44** a aantal = $2^{20} = 1\,048\,576$
 b aantal = $\binom{20}{15} = 15\,504$
 c minstens 80% van 20 is minstens 16
 aantal = $\binom{20}{16} + \binom{20}{17} + \binom{20}{18} + \binom{20}{19} + \binom{20}{20} = 6196$
 Dat is $\frac{6196}{1\,048\,576} \times 100\% \approx 0,6\%$.
- 45** a $\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$ (zie ook theorie A op blz 182) en $\frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$
 Dus $\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \binom{8}{3} = \binom{8}{5}$ klopt.
 b 43a aantal = $\frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45$
 43b aantal = $\frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$

Bladzijde 184

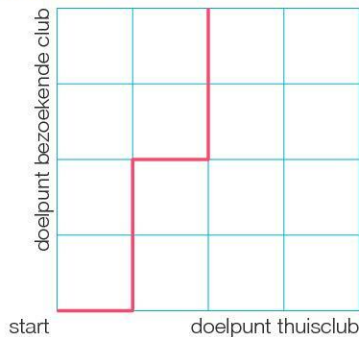
- 46** a aantal = $\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 29$
 b Meer A's dan B's, dus 4, 5 of 6 A's.
 aantal = $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 22$
 c aantal = $2^9 = 512$
- 47** a aantal = $\binom{5}{3} = 10$
 b aantal = $\binom{5}{4} = 5$
 c aantal = $10 + 5 = 15$
- 48** a 'drie enen en één drie' of 'twee enen en twee tweeën'
 aantal = $\binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 10$
 b 'vijf zessen en één vier' of 'vier zessen en twee vijven'
 aantal = $\binom{6}{5} + \binom{6}{4} = 21$
- 49** a NNOONNOO en OONNOONN
 b Acht letters met vier keer de letter N.
 c aantal routes = $\binom{8}{4} = 70$
- 50** a Van A naar P heb je te maken met een rijtje bestaande uit twee N's en drie O's.
 Dat zijn $\binom{5}{2}$ mogelijkheden.
 Van P naar B heb je te maken met een rijtje bestaande uit één N en 3 O's.
 Dat zijn $\binom{4}{1}$ mogelijkheden.

- b** Van A naar P EN van P naar B , dus totaal aantal routes is $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} = 40$.
- c** Aantal routes van A naar $B = \binom{9}{3} = 84$. Daarvan gaan er 40 via P .
- Dat is $\frac{40}{84} \times 100\% \approx 47,6\%$.

Bladzijde 185

51

a



- b** aantal = $\binom{6}{4} = 15$
- c** aantal = $\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{3} = 40$

52

a

aantal = $\binom{9}{3} = 84$

b

aantal = $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16$

Alternatieve uitwerking

aantal = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$

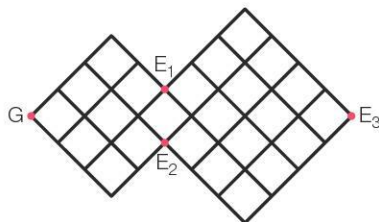
53

a

aantal = $\binom{8}{4} = 70$

b

Je loopt het volgende rooster.



Om van G naar E_3 te komen, moet je via E_1 of via E_2 .

Dus $G \rightarrow E_1 \rightarrow E_3$ of $G \rightarrow E_2 \rightarrow E_3$.

aantal = $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} + \binom{5}{3} \cdot \binom{7}{4} = 10 \cdot 35 + 10 \cdot 35 = 700$

54

a

Om van T in A te komen, moet je 6 wegen doorlopen, waarvan er 2 naar rechts gaan.

Dus $\binom{6}{2} = 15$ routes.

b

Om in het punt linksonder te komen, moet je 0 keer naar rechts, dus $\binom{6}{0}$ routes

naar dit punt. Zo zijn er $\binom{6}{1}$ routes naar het punt daarnaast, $\binom{6}{2}$ routes naar A , enzovoort.

In de zesde rij staan dus de getallen $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \binom{6}{3}, \binom{6}{4}, \binom{6}{5}$ en $\binom{6}{6}$.

- c** De getallen in de zevende rij zijn
 $1, 1 + 6 = 7, 6 + 15 = 21, 15 + 20 = 35, 20 + 15 = 35, 15 + 6 = 21, 6 + 1 = 7$ en 1.
 De getallen in de achtste rij zijn
 $1, 1 + 7 = 8, 7 + 21 = 28, 21 + 35 = 56, 35 + 35 = 70, 35 + 21 = 56,$
 $21 + 7 = 28, 7 + 1 = 8$ en 1.
- d** Om op de 10^{e} rij te komen heb je 10 keer keus tussen 'naar links' en 'naar rechts'.
 Dus er zijn in totaal $2^{10} = 1024$ routes.

Alternatieve uitwerking

De som van de getallen in de 10e rij is $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{10} = 1024$.

Bladzijde 187

- 55 a** Elk getal in de driehoek van Pascal krijg je door de twee getallen die er schuin boven staan op te tellen.

$\binom{9}{4}$ is het 5^e getal in rij 9. $\binom{8}{3}$ is het 4^e getal in rij 8 en $\binom{8}{4}$ is het 5^e getal in rij 8.

$\binom{8}{3}$ en $\binom{8}{4}$ staan precies schuin boven $\binom{9}{4}$.

- b**
- $\binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{10}{5}$
 - $\binom{12}{8} + \binom{12}{9} = \binom{13}{9}$
 - $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

- 56 a** Bijvoorbeeld $1 + 4 + 10 + 20 = 35$ en $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$.

b $\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \binom{8}{3} + \binom{9}{4} = \binom{10}{4}$

c $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2}$

Bladzijde 188

- 57 a** aantal = $\binom{6}{3} = 20$
- b** Er zijn nog drie hokjes, waarin 2 B's geplaatst moeten worden.
- c** aantal = $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = 60$
- d** aantal = $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 60$

Bladzijde 189

- 58** aantal = $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5}$, zie theorie C op bladzijde 188.

aantal = $\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}$, zie opgave 45.

- 59 a** aantal = $\binom{14}{8} \cdot \binom{6}{4} = 45\,045$

Alternatieve uitwerking

aantal = $\frac{14!}{8! \cdot 4! \cdot 2!} = 45\,045$

- b** aantal = $\binom{13}{3} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{1} = 360\,360$

Alternatieve uitwerking

aantal = $\frac{13!}{3! \cdot 5! \cdot 4!} = 360\,360$

$$\text{c} \quad \text{aantal} = \binom{16}{3} \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 3\,632\,428\,800$$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{16!}{3! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 3\,632\,428\,800$$

$$\text{d} \quad \text{aantal} = \binom{11}{1} \cdot \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} = 34\,650$$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34\,650$$

$$\text{e} \quad \text{aantal} = \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30$$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$$

$$\text{f} \quad \text{aantal} = \binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 7\,484\,400$$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{12!}{(2!)^6} = 7\,484\,400$$

60 a $\text{aantal} = \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} = 4200$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!} = 4200$$

b $\text{aantal} = \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{4} = 280$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{8!}{3! \cdot 4!} = 280$$

c Er zijn 12 letters, maar de 3 A's tellen voor 1. Verder 3 × een S, 2 × een P en 1 × een I, N en L.

$$\text{aantal} = \binom{10}{1} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 302\,400$$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{10!}{3! \cdot 2!} = 302\,400$$

4.4 Allerlei telproblemen

Bladzijde 191

61 a $\text{aantal} = \binom{6}{3} = 20$

b $\text{aantal} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

c $\text{aantal} = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

62 a volgorde niet van belang, herhalingen wel toegestaan

		volgorde van belang	
		wel	niet
herhalingen toegestaan	wel	$7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$	-
	niet	$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$	$\binom{7}{3} = 35$

c Op hoeveel manieren kun je ...

		volgorde van belang	
		wel	niet
herhalingen toegestaan	wel	... drie personen hun favoriete liedje laten kiezen uit een playlist van zeven?	-
	niet	... een top-3 maken uit een playlist van zeven liedjes?	... drie liedjes kiezen uit een playlist van zeven?

63 a aantal = $\binom{9}{3} = 84$

b aantal = $\binom{n+k-1}{k}$

Bladzijde 192

64 a aantal = $2^{10} = 1024$

b aantal = $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 176$

65 aantal = $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

66 a aantal = $6! = 720$

b aantal = $6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 510$

c aantal = $6^{10} = 60466176$

d aantal = $6^2 + 6^3 + 6^4 = 1548$

67 a aantal = $4! \cdot 3! = 144$

b m j m j m j m

aantal = $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 144$

c aantal = $1 \cdot 6! = 720$

d aantal = $5! \cdot 2! = 240$

e eerste en laatste psychologie OF eerste en laatste economie

Kies eerst de eerste en de laatste.

aantal = $3 \cdot 2 \cdot 5! + 2 \cdot 1 \cdot 5! = 960$

f j m m x x x x OF m j j x x x x

aantal = $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4! + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4! = 1440$

Bladzijde 193

68 a aantal = $\binom{10}{3} = 120$

b aantal = $\binom{10}{9} = 10$

c aantal = $2^{10} = 1024$

d aantal = aantal van start naar Y $\times$ aantal van Y naar strand = $\binom{5}{3} \cdot 2^5 = 320$

69 a aantal = $\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 7484400$

Alternatieve uitwerking

aantal = $\frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 7484400$

b aantal = $6^{12} = 2176782336$

- 70** **a** aantal = $10! = 3\,628\,800$
b Neem de oefeningen met losse gewichten als 1 blok, dan zijn er $8!$ mogelijke volgordes.
 Voor de oefeningen met losse gewichten zijn er $3!$ mogelijke volgordes.
 aantal = $8! \cdot 3! = 241\,920$.
c Voor de drie soorten oefeningen zijn er $3!$ volgordes.
 Binnen de vloeroefeningen zijn er $2!$ volgordes.
 Binnen de oefeningen met losse gewichten zijn er $3!$ volgordes.
 Binnen de oefeningen op apparaten zijn er $4!$ volgordes.
 aantal = $1 \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! = 1\,728$

- 71** **a** aantal = $3^{19} = 1\,162\,261\,467$
b aantal = $\binom{19}{5} = 11\,628$
c aantal = $\binom{19}{6} \cdot \binom{13}{6} = 46\,558\,512$

Alternatieve uitwerking

- aantal = $\frac{19!}{6! \cdot 6! \cdot 7!} = 46\,558\,512$
d aantal = $\binom{19}{0} + \binom{19}{1} + \binom{19}{2} = 191$
e Het eerste, middelste en laatste branden rood of groen. De overige 16 lampjes branden rood of groen of zijn uit.
 aantal = $2^3 \cdot 3^{16} = 344\,373\,768$
f aantal = $\binom{19}{5} \cdot 2^{14} = 190\,513\,152$

Bladzijde 194

- 72** aantal = $\binom{21}{6} \cdot \binom{15}{8} \cdot \binom{7}{4} \approx 1,2 \cdot 10^{10}$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{21!}{6! \cdot 8! \cdot 4! \cdot 3!} \approx 1,2 \cdot 10^{10}$$

- 73** **a** aantal = $10^4 = 10\,000$
b aantal = $4! = 24$
c Stel, de pincode bestaat uit de cijfers a , b en c .
 Als a dubbel wordt gebruikt zijn er $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 12$ (of $\frac{4!}{2!} = 12$) mogelijkheden.
 Er zijn met b en c dubbel gebruikt ook elk 12 mogelijkheden.
 Dus totale aantal = $3 \cdot 12 = 36$.
 $36 > 24$, dus hij heeft gelijk.
d Stel, de pincode bestaat uit de cijfers d en e .
 Als zowel d als e dubbel gebruikt worden zijn er $\binom{4}{2} = 6$ (of $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$) mogelijkheden.
 Als d drie keer wordt gebruikt zijn er $\binom{4}{3} = 4$ (of $\frac{4!}{3!} = 4$) mogelijkheden en als e drie keer wordt gebruikt ook.
 Dus totale aantal = $6 + 4 + 4 = 14$.
 $14 < 36$, dus met twee verschillende cijfers zijn er minder pincodes mogelijk dan met drie.

- 74** **a** aantal = $16 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 5 \approx 8,7 \cdot 10^{11}$
b aantal = $12! = 479\,001\,600$
c Voor de eerste rij zijn er $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 4$ mogelijkheden.
 Voor de tweede rij zijn dan nog er $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4$ mogelijkheden.
 Voor de derde en vierde rij zijn er dan respectievelijk nog $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4$ en $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4$ mogelijkheden.
 aantal = $12! \cdot 4^4 \approx 1,2 \cdot 10^{11}$

- d** De 4 socialmedia-apps kunnen op $4! = 24$ manieren worden gerangschikt.
 Er zijn 4 rijen en 4 kolommen waar deze kunnen komen, dus 8 mogelijkheden in totaal.
 Voor de overige apps zijn er nog $12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 5$ mogelijkheden.
 aantal = $4! \cdot 8 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 5 = 3\,832\,012\,800$

Diagnostische toets

Bladzijde 196

1

a

SOM

6		8	9	10	11	12
5			8	9	10	11
4				8	9	10
3					8	9
2						8
1						
	1	2	3	4	5	6

Arrows: 'a' points to the cell (2,6) containing 8; 'b' points to the cell (4,6) containing 10.

aantal = 5

b aantal = 10

c

PRODUCT

6	6					
5	5					
4	4	8				
3	3	6	9			
2	2	4	6	8		
1	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6

aantal = 17

2

a Mogelijkheden zijn:

1 1 1
 1 1 2 1 2 1 2 1 1
 1 1 3 1 3 1 3 1 1
 1 2 2 2 1 2 2 2 1
 aantal = 10

b Mogelijkheden zijn:

1 1 4 1 4 1 4 1 1
 1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 1 2 3 2 1
 2 2 2
 aantal = 10

3

a aantal = $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

b Getal kleiner dan 50 000, dus eerste cijfer 2, 3 of 4.

aantal = $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1080$

c aantal = $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 16\,807$

d Getal groter dan 54 000, dus eerste cijfer 5 en tweede cijfer 4, 5, 6, 7 of 8
 OF eerste cijfer 6, 7 of 8.

aantal = $1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 + 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 8918$

4

a aantal = $8! = 40\,320$

b aantal = $6! \cdot 3! = 4320$

c Je kunt op $5 \cdot 4 = 20$ manieren de twee meisjesfietsen voor de buitenkant kiezen.

Daarna moeten de overige 6 fietsen geplaatst worden, dat kan op $6!$ manieren.

Dus aantal = $20 \cdot 6! = 14\,400$.

d aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

- 5 a** aantal = $\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1} = 225$
b aantal = $\binom{5}{3} \cdot \binom{9}{1} + \binom{5}{4} = 95$
c aantal = $\binom{11}{4} = 330$

Bladzijde 197

- 6 a** aantal = $\binom{11}{6} = 462$
b aantal = $\binom{11}{8} + \binom{11}{9} + \binom{11}{10} + \binom{11}{11} = 232$
c aantal = $2^{11} = 2048$
- 7 a** aantal = $2^{10} = 1024$
b aantal = $\binom{10}{5} = 252$
c Van de 7 resterende doelpunten maakt Stijn er 6 of 7.
aantal = $\binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 8$
- 8** Van de 30 vierkantjes zijn er $0,4 \cdot 30 = 12$ blauw, 12 rood, $0,1 \cdot 30 = 3$ groen en 3 oranje.
aantal = $\binom{30}{12} \cdot \binom{18}{12} \cdot \binom{6}{3} \approx 3,2 \cdot 10^{13}$
- 9** aantal = $3^{14} = 4\,782\,969$
- 10 a** aantal = $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 302\,400$
Alternatieve uitwerking
aantal = $\frac{10!}{3! \cdot 2!} = 302\,400$
b aantal = $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$
c aantal = $7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5 = 252$
d aantal = $7^2 + 7^3 + 7^4 = 2793$

Gemengde Opgaven

1 Formules en grafieken

Bladzijde 198

1 a $m: y = ax + b$ met $a = rc_k = -0,5$
 $y = -0,5x + b$
door $A(-4, 3)$ $\left\{ \begin{array}{l} -0,5 \cdot -4 + b = 3 \\ 2 + b = 3 \\ b = 1 \end{array} \right.$

Dus $m: y = -0,5x + 1$.

b Het snijpunt van k met de x -as, dus $y = 0$.
 $-0,5x + 16 = 0$
 $-0,5x = -16$
 $x = 32$
Dus $B(32, 0)$.

$n: y = ax + b$ met $a = rc_l = 2$
 $y = 2x + b$
door $B(32, 0)$ $\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 32 + b = 0 \\ 64 + b = 0 \\ b = -64 \end{array} \right.$

Dus $n: y = 2x - 64$.

Het snijpunt van n met de y -as is $(0, -64)$.

c Los op $-0,5x + 16 = 2x - 9$
 $-2,5x = -25$
 $x = 10$
 $x = 10$ geeft $y = 2 \cdot 10 - 9 = 11$
Dus $C(10, 11)$.

d Los op $2x - 9 = -24$
 $2x = -15$
 $x = -7\frac{1}{2}$
Dus $x_D = -7\frac{1}{2}$.

2 a $x = 31$ geeft bij mannen $L = 2,89 \cdot 31 + 70,6 = 160,19$.
De man was 160 cm.
 $x = 31$ geeft bij vrouwen $L = 2,75 \cdot 31 + 71,5 = 156,75$.
De vrouw zou 157 cm geweest zijn.

b Man en $L = 180$ geeft $2,89x + 70,6 = 180$
 $2,89x = 109,4$
 $x \approx 37,9$

De humerus van een man is 37,9 cm.

Vrouw en $L = 80$ geeft $2,75x + 71,5 = 180$
 $2,75x = 108,5$
 $x \approx 39,5$

De humerus van een vrouw is 39,5 cm.

c $x = 10$ geeft $L = 2,75 \cdot 10 + 71,5 = 99$
 $x = 40$ geeft $L = 2,75 \cdot 40 + 71,5 = 181,5$
De kleinste lengte is 99 cm en de grootste lengte is 181,5 cm.

d Los op $2,89x + 70,6 = 2,75x + 71,5$
 $0,14x = 0,9$
 $x \approx 6,4$

6,4 ligt niet tussen 10 en 40, dus de grafieken hebben geen snijpunt.

e Los op $2,89x + 70,6 - (2,75x + 71,5) = 4$
 $2,89x + 70,6 - 2,75x - 71,5 = 4$
 $0,14x = 4,9$
 $x = 35$

Dus bij een lengte van de humerus van 35 cm is het verschil in lichaamslengte 4 cm.

Bladzijde 199

3 a $T = at + b$ met $a = \frac{\Delta T}{\Delta t}$
 Bij $t = 0$ hoort $T = 9,3$.
 Bij $t = 50$ hoort $T = 11,0$. $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Bij } t = 0 \text{ hoort } T = 9,3. \\ \text{Bij } t = 50 \text{ hoort } T = 11,0. \end{array}} \right\} a = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{11,0 - 9,3}{50 - 0} = \frac{1,7}{50} = 0,034$
 Dus $T = 0,034t + 9,3$.

b Los op $0,034t + 9,3 = 12$
 $0,034t = 2,7$
 $x \approx 79,4$

Dus in 2050 zal de gemiddelde jaartemperatuur naar verwachting voor het eerst hoger zijn dan 12°C .

c 50 jaar voor 1970 was 0,3 minder, dus 1 jaar daarvoor $\frac{0,3}{50} = 0,006$ minder.

1,3 minder was $\frac{1,3}{0,006} \approx 216,7$ jaar voor 1970.

Dus de gemiddelde jaartemperatuur was minder dan 8°C tot en met 1753.

4 a Afstand a die je aflegt per omwenteling is evenredig met aantal tanden van het voorwiel.

$$\begin{array}{c|c} 52 & 39 \\ \hline 5,46 & a \end{array} \text{ dus } a = \frac{5,46 \cdot 39}{52} = 4,095$$

Je legt per omwenteling 4,095 meter af.

b Afstand b die je aflegt per omwenteling is omgekeerd evenredig met aantal tanden van het achterwiel.

$$5,46 \cdot 20 = b \cdot 14 \text{ dus } b = \frac{5,46 \cdot 20}{14} = 7,8$$

Je legt per omwenteling 7,8 meter af.

c Afstand c die je aflegt per omwenteling is evenredig met aantal tanden van het voorwiel.

$$\begin{array}{c|c} 52 & 50 \\ \hline 5,46 & c \end{array} \text{ dus } c = \frac{5,46 \cdot 50}{52} = 5,25$$

$$100 \text{ omwentelingen/minuut} = 525 \text{ m/min} = 31\,500 \text{ m/uur} = 31,5 \text{ km/uur}$$

d $v = aw$
 $w = 100$ en $v = 31,5$ $\left. \vphantom{\begin{array}{l} v = aw \\ w = 100 \text{ en } v = 31,5 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 100 = 31,5 \\ a = 0,315 \end{array}$

Dus $v = 0,315w$.

e $v = \frac{a}{n}$
 $n = 20$ en $v = 31,5$ $\left. \vphantom{\begin{array}{l} v = \frac{a}{n} \\ n = 20 \text{ en } v = 31,5 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{20} = 31,5 \\ a = 630 \end{array}$

Dus $v = \frac{630}{n}$.

Bladzijde 200

5 a W is omgekeerd evenredig met x , dus $W = \frac{a}{x}$.

$$\left. \begin{array}{l} W = \frac{a}{x} \\ x = 1200 \text{ en } W = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{1200} = 3 \\ a = 3 \cdot 1200 = 3600 \end{array}$$

Dus $W = \frac{3600}{x}$.

b $x = 250$ geeft $W = \frac{3600}{250} = 14,4$

De waardevermindering is 14,4%.

c $W = \frac{3600}{x}$ en $W = 8$ geeft $8 = \frac{3600}{x}$
 $8x = 3600$
 $x = 450$

De afstand is 450 meter.

d De waardevermindering is $\frac{20\,000}{300\,000} \times 100\% \approx 6,66\ldots\%$.

$$W = \frac{3600}{x} \text{ en } W = 6,66\ldots \text{ geeft } 6,66\ldots = \frac{3600}{x}$$
$$6,66\ldots x = 3600$$
$$x = 540$$

De afstand is 540 meter.

e $W = \frac{3600}{x}$ en $x = 300$ geeft $W = \frac{3600}{300} = 12$

De waarde na aanleg is $0,88 \cdot 160\,000 = 140\,800$ euro.

6 a In 7 jaar 87 kg meer, dus in 1 jaar $\frac{87}{7}$ kg meer.

1992 is 4 jaar na 1988, dus $395 + 4 \cdot \frac{87}{7} \approx 445$ kg per persoon in 1992.

b In 5 jaar 22 kg minder, dus in 1 jaar $\frac{22}{5} = 4,4$ kg minder.

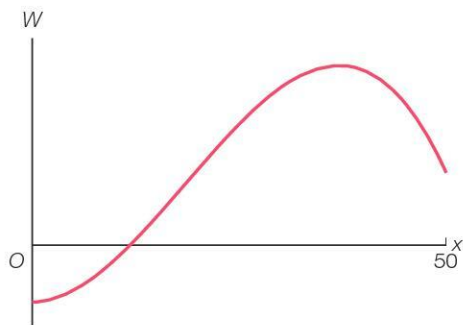
2024 is 7 jaar na 2017, dus $496 - 7 \cdot 4,4 \approx 465$ kg per persoon in 2024.

c In 13 jaar 65 kg minder, dus in 1 jaar $\frac{65}{13} = 5$ kg minder.

Afname tot 300 kg is $\frac{196}{5} = 39,2$ jaar na 2017, dus in 2057.

Bladzijde 201

7 a Voer in $y_1 = -45x^3 + 2500x^2 - 275\,000$.



b Voer in $y_2 = 600\,000$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 25,4$ en $x \approx 46,6$.

De reclamekosten liggen tussen 254 000 euro en 466 000 euro.

c De optie maximum geeft $x \approx 37,0$ en $y \approx 868\,118$.

Dus de maximale winst is ongeveer 868 000 euro.

d $x = 23$ geeft $W = 499\,985$ en $x = 46$ geeft $W = 634\,880$.

$$\frac{634\,880 - 499\,985}{499\,985} \times 100\% \approx 27,0\%.$$

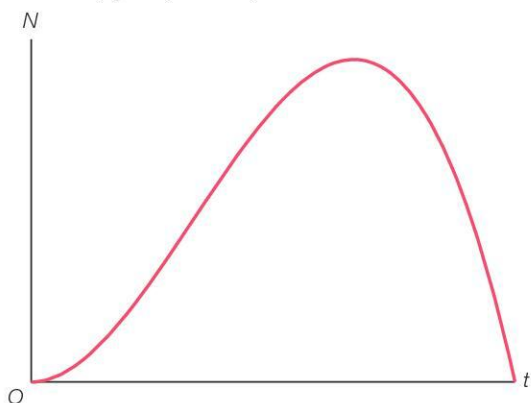
Dus een toename van 27,0%.

e Voer in $y_3 = 10\,000x$.

De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x \approx 15,4$ en $y \approx 154\,129$, en $x \approx 46,3$ en $y \approx 483\,441$.

Dus de winst was ongeveer 154 000 euro of 483 000 euro.

- 8 a** Voer in $y_1 = 0,6x^2 - 0,02x^3$.



- b** De optie maximum geeft $x = 20$ en $y = 80$.
Dus na 20 dagen is het aantal leerlingen met griep maximaal. Er zijn dan 80 leerlingen ziek.
- c** $t = 13$ geeft $N = 57,46$
 $t = 14$ geeft $N = 62,72$
 $t = 25$ geeft $N = 62,5$
 $t = 26$ geeft $N = 54,08$
Dus van $t = 14$ tot en met $t = 25$, dat zijn 12 dagen.

- 9 a** $\frac{320}{6,4} \mid \frac{128}{y}$ dus $y = \frac{6,4 \cdot 128}{320} = 2,56$.

Dus de bestandsgrootte is 2,56 MB.

- b** M is evenredig met B , dus $M = aB$.
Bij $B = 320$ hoort $M = 6,4$.

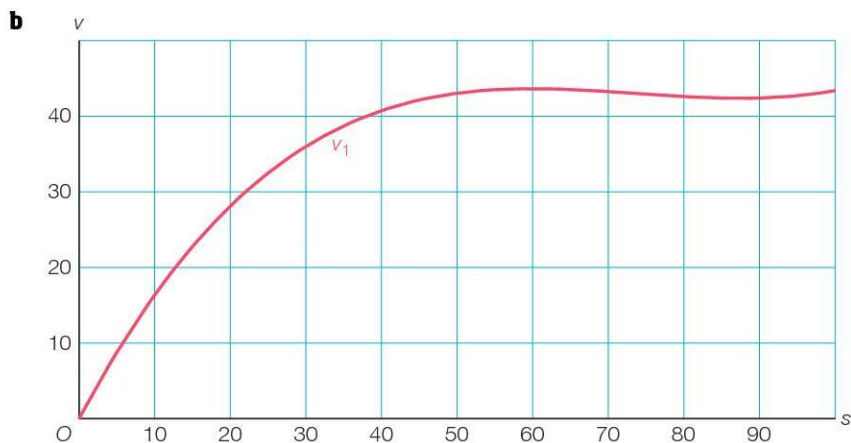
$$\left. \begin{array}{l} a \cdot 320 = 6,4 \\ 320a = 6,4 \\ a = 0,02 \end{array} \right\}$$

Dus $M = 0,02B$.

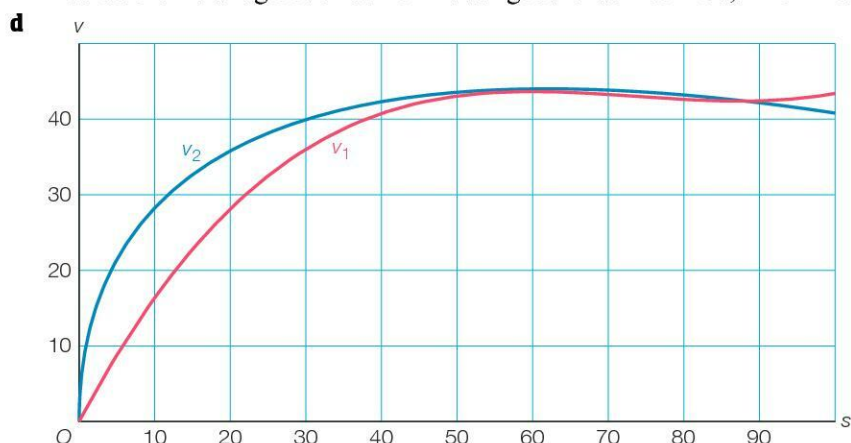
- c** In 3 jaar 43,5 miljoen euro meer, dus in 1 jaar $\frac{43,5}{3} = 14,5$ miljoen euro meer.
2014 is 2 jaar na 2012, dus in 2014 zijn de inkomsten $17,8 + 2 \cdot 14,5 = 46,8$ miljoen euro.
- d** In 2 jaar 47,3 miljoen euro meer, dus in 1 jaar $\frac{47,3}{2} = 23,65$ miljoen euro meer.
2020 is 3 jaar na 2017, dus in 2020 zijn de inkomsten $108,6 + 3 \cdot 23,65 \approx 180$ miljoen euro.

Bladzijde 202

- 10 a** Na 5 meter is de snelheid volgens het model
 $v_1 = 0,00012 \cdot 5^3 - 0,02655 \cdot 5^2 + 1,8829 \cdot 5 \approx 8,8$ km/uur.
Dat is een afwijking van $25 - 8,8 = 16,2$ km/uur van het gegeven.
Voer in $y_1 = 0,00012x^3 - 0,02655x^2 + 1,8829x$.
De optie maximum geeft $x \approx 59,9$ en $y \approx 43,7$.
De maximale snelheid volgens het model is 43,7 km/uur.
Dat is een afwijking van $44 - 43,7 = 0,3$ km/uur van het gegeven.
Dus bij de snelheid na 5 meter is de afwijking het grootst.



- c** Voer in $y_2 = 40$. De optie snijpunt geeft $x \approx 37,9$.
Dus de snelheid lag boven de 40 km/uur gedurende $100 - 37,9 \approx 62$ meter.



- e** Na 5 meter is de snelheid volgens het verbeterde model
 $v_2 = 5\sqrt{5 \cdot 5} - 0,71 \cdot 5 = 21,45$ km/u.
 Dat is een afwijking van $25 - 21,45 = 3,55$ km/uur van het gegeven.
 Voer in $y_3 = 5\sqrt{5x} - 0,71x$.
 De optie maximum geeft $x \approx 62,0$ en $y \approx 44,0$.
 De maximale snelheid volgens het verbeterde model is 44 km/uur. Dat komt precies overeen met het gegeven.
 De afwijking van de snelheid in het verbeterde model ten opzichte van de werkelijkheid is voor beide gegevens kleiner geworden, dus het verbeterde model is realistischer.

2 Statistiek

- 11 a** Vraag II gaat uit van een foute veronderstelling, namelijk dat zeedieren sowieso hinder ondervinden.
 Vraag III mondt uit in een advies, namelijk welke maatregelen genomen kunnen worden.
 Bij vraag I is er sprake van een causaal verband, want je wil weten wat de invloed is.
- b** Op welke manier hebben windmolens invloed op dieren die leven in of op zee?
- c** Zijn er zeedieren die hinder ondervinden van windmolens?
- d** Alle vogels in het gebied waar het windmolenpark wordt gebouwd.

Bladzijde 203

- 12 a** provincie, netnummer hoofdstad, waardering leefomgeving
b aantal ziekenhuizen

- c provincie: nominaal
netnummer hoofdstad: nominaal
bevolkingsdichtheid: ratio
aantal ziekenhuizen: ratio
waardering leefomgeving: ordinaal

d $\hat{p} = \frac{548 + 168 + 34}{1025} \approx 0,732$

- 13** a Aantal dagen in juli met minder dan 6 uur zon is 13.
Aantal dagen in augustus met minstens 6 uur zon is 11.
Aantal dagen in juli met minstens 4 uur, maar minder dan 8 uur zon is $25 - 10 = 15$.
- b De maand juli was het zonnigst, want hier komen de dagen met veel uren zonneschijn vaker voor.
De polygoon van juli ligt geheel rechts van die van augustus.
- c 2,5 uur
- d In juli was het totaal aantal uren zonneschijn $31 \cdot 5,7 = 176,7$.
 $2 \cdot 176,7 = 353,4$ en omdat het in augustus minder zonnig was dan in juli is het totaal aantal uren zon gelijk aan 315.

Bladzijde 204

- 14** a De beoordeling is kwalitatief.
- b Stel dat de helft van de beoordelingen 'helemaal oneens' is en de andere helft 'helemaal eens' dan zou het gemiddelde 'acceptabel' zijn. Dat is dan niet in overeenstemming met de beoordelingen.
- c De modus.
- d In totaal hebben $0,4 \cdot 3000 = 1200$ personen die optie gekozen.
- 15** a Bij de mediaan hoort de middelste staat wanneer deze van klein naar groot zijn gerangschikt. De VS heeft 50 staten. Dat is een even aantal. Er is dus geen middelste staat.
- b De spreidingsbreedte is $39,6 - 0,6 = 39,0$ miljoen.
De kwartielafstand is $7,4 - 1,9 = 5,5$ miljoen.
- c Nebraska ligt precies op het eerste kwartiel. Nebraska is dan de 13^e staat, dus 37 staten hebben meer inwoners dan Nebraska.
- d Bij de laagste 50% van de inwoneraantallen horen de eerste twee delen van de boxplot.
Gemiddeld aantal inwoners van de laagste meting tot Q_1 is $\frac{0,6 + 1,9}{2} \approx 1,25$ miljoen.
Gemiddeld aantal inwoners van Q_1 tot de mediaan is $\frac{1,9 + 4,5}{2} = 3,2$ miljoen.
Dus in totaal $12,5 \cdot 1,25 + 12,5 \cdot 3,2 \approx 55,6$ miljoen inwoners.
- e De schatting is $12,5 \cdot 1,25 + 12,5 \cdot 3,2 + 12,5 \cdot \frac{4,5 + 7,4}{2} + 12,5 \cdot \frac{7,4 + 39,6}{2} \approx 424$ miljoen.
Californië is een staat met heel veel inwoners. Deze uitschieter zorgt voor een heel hoog geschat gemiddelde in de groep van Washington tot Californië.

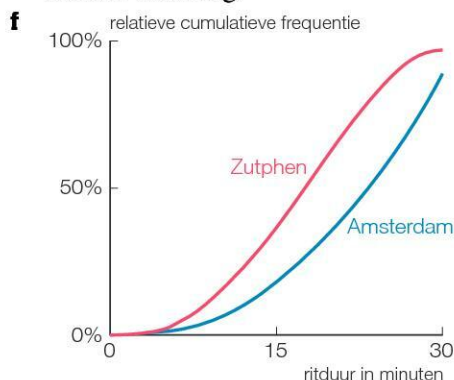
Bladzijde 205

- 16** a 1 Alleen studenten die de website van het RSC bezoeken doen mee. Dat zijn veelal sportende studenten.
2 Alleen studenten die graag hun mening geven doen mee.
3 De ondervraagde jongeren zijn misschien niet allemaal studenten.
- b nominaal: Welke sport beoefen je?
ordinaal: In welk team speel je?
interval: Hoe laat begint je training?
ratio: Hoeveel uur heb je al getraind sinds de start van het seizoen?

- 17 a** De interkwartielafstand is $10 - 5 = 5$. De spreidingsbreedte is $24 - 0 = 24$.
Dat is $\frac{5}{24} \times 100\% \approx 20,8\%$.
- b** Het geschatte verschil met het streefgewicht is
 $0,25 \cdot 2,5 + 0,25 \cdot 6,5 + 0,25 \cdot 9 + 0,25 \cdot 17 = 8,75$ gram.
Dus 12 gram is geen redelijke schatting.
- c** Diagram 2, want bij dit diagram is $Q_1 = 5$, de mediaan is 8 en $Q_3 = 10$.

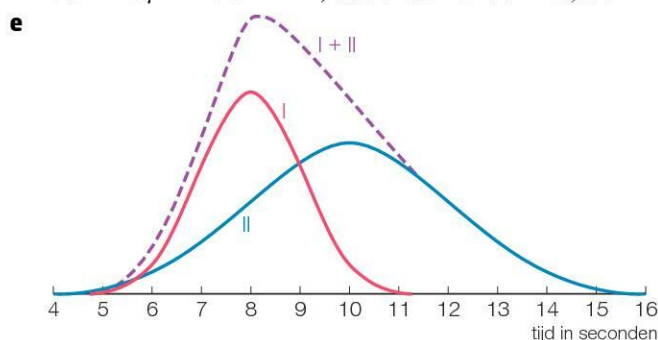
Bladzijde 206

- 18 a** Bij Amsterdam links-scheef en bij Zutphen symmetrisch.
- b** In Amsterdam grotere afstanden en drukker dan in Zutphen. Daardoor in Amsterdam meer langere ritten dan kortere. In Zutphen veel ritten met ongeveer een gemiddelde ritduur, want veel afstanden zijn ongeveer gelijk.
- c** Ik ben het niet met Margot eens, want in de tabel staan relatieve gegevens en geen absolute.
- d** Stel de chauffeur had in totaal 100 ritten.
In de 29 ritten die tussen 15 en 20 minuten duurden heeft hij dan maximaal
 $29 \cdot 29 \cdot \frac{1}{3} \approx 280$ km gereden.
In de 22 ritten die tussen 20 en 25 minuten duurden heeft hij dan minimaal
 $22 \cdot 39 \cdot \frac{1}{3} = 286$ km gereden.
Omdat $280 < 286$ kan de chauffeur geen gelijk hebben.
- e** Boxplot I hoort bij de chauffeur uit Amsterdam, want boxplot I hoort bij een links-scheve verdeling.



Bladzijde 207

- 19 a** Het gemiddelde is bij I lager dan bij II en de spreiding is minder.
- b** $\mu = 10$ en van toenemend stijgend naar afnemend stijgend bij 8 geeft $\sigma = 10 - 8 = 2$ seconden.
- c** Van I is $\mu = 8$ en van toenemend stijgend naar afnemend stijgend bij 7 geeft $\sigma = 8 - 7 = 1$ seconde, dus 2,5% onder de 6 seconden.
- d** Dus boven de 8 seconden.
Van II is $\mu = 10$ en $\sigma = 2$, dus $34\% + 34\% + 13,5\% + 2,5\% = 84\%$.



Rechts-scheef. Zie de figuur waarin de grafiek van I + II is geschetst.

Bladzijde 208

20 a $\hat{p} = 0,0472$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,0472 \cdot 0,9528}{233}} = 0,0138...$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,0472 - 2 \cdot 0,0138... \approx 0,0194$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,0472 + 2 \cdot 0,0138... \approx 0,0750$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,0194; 0,0750]$.

b $p = \frac{512}{7051} \approx 0,0726$ en dit valt binnen het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Dus op grond hiervan kun je niet concluderen dat de stimuleringsmaatregelen van de gemeente hebben geholpen.

c $\hat{p} = 0,0592$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,0592 \cdot 0,9408}{5000}} = 0,0033...$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,0592 - 2 \cdot 0,0033... \approx 0,0525$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,0592 + 2 \cdot 0,0033... \approx 0,0659$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,0525; 0,0659]$.

Nu is de populatieproportie $p = \frac{512}{7051} \approx 0,0726 > 0,0659$ en hieruit valt te concluderen dat de stimuleringsmaatregelen wel hebben geholpen.

21 a 4 minuten en 13 seconden is $4 \cdot 60 + 13 = 253$ seconden.

1 minuut en 23 seconden is $60 + 23 = 83$ seconden.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de tijd in seconden is

$$\left[253 - 2 \cdot \frac{83}{\sqrt{31}}, 253 + 2 \cdot \frac{83}{\sqrt{31}} \right] \approx [223, 283].$$

b 3 minuten en 45 seconden is $3 \cdot 60 + 45 = 225$ seconden.

Dit valt binnen het 95%-betrouwbaarheidsinterval, dus er is op basis van dit onderzoek geen reden om aan te nemen dat er een verschil is met de wedstrijden van Kuiper.

c Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $\left[253 - 2 \cdot \frac{83}{\sqrt{41}}, 253 + 2 \cdot \frac{83}{\sqrt{41}} \right] \approx [227, 279]$.

Nu valt de gemiddelde blessuretijd van 3 minuten en 45 seconden, oftewel 225 seconden, niet in het betrouwbaarheidsinterval en hieruit valt te concluderen dat er wel een verschil is met de wedstrijden van Kuiper.

Bladzijde 209

22 a $\hat{p} = \frac{371}{2650} = 0,14$ geeft $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{2650}} = 0,00674...$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,14 - 2 \cdot 0,00674... \approx 0,1265$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,14 + 2 \cdot 0,00674... \approx 0,1535$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,1265; 0,1535]$.

b $\hat{p} = \frac{530}{2650} = 0,2$ geeft $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{2650}} = 0,00777...$

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie oranje M&M's is $4 \cdot 0,00777... \approx 0,0311$.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie rode M&M's is $4 \cdot 0,00674... \approx 0,0270$.

$$\frac{0,0311}{0,0270} \times 100\% \approx 115\%. \text{ Dus Kees heeft gelijk.}$$

3 Rekenen en herleiden

23 a $(2x+3)(2x-3) - \frac{(x-2)^2}{4} = 4x^2 - 9 - \frac{x^2 - 4x + 4}{4} = 4x^2 - 9 - \frac{1}{4}x^2 + x - 1 = 3\frac{3}{4}x^2 + x - 10$

b $12 \cdot \frac{a-4}{6a} : \frac{a+4}{a} = 12 \cdot \frac{a-4}{6a} \cdot \frac{a}{a+4} = \frac{12 \cdot (a-4) \cdot a}{6a \cdot (a+4)} = \frac{12a^2 - 48a}{6a^2 + 24a} = \frac{2a-8}{a+4}$

c $(6b+2)(1-6b) - 2(4b^2+1) = 6b - 36b^2 + 2 - 12b - 8b^2 - 2 = -44b^2 - 6b$

24 a $D = 100 + \frac{400b}{a+20b} = \frac{100(a+20b)}{a+20b} + \frac{400b}{a+20b} = \frac{100a + 2000b + 400b}{a+20b} = \frac{100a + 2400b}{a+20b}$

b $A = \frac{6x^2 + 15}{3x^2} + \frac{x^3 + 4x}{2x^3} = 2 + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2} = 2\frac{1}{2} + \frac{7}{x^2}$

25 a lijn k:

x	0	5
y	-3	0

lijn l:

x	0	3
y	6	2

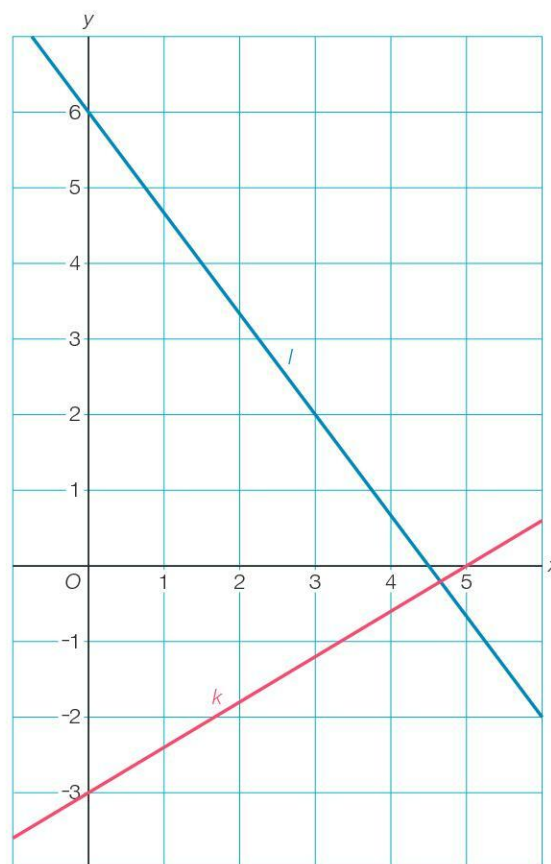
b $3x - 5y = 15$ $4x + 3y = 18$
 $-5y = -3x + 15$ $3y = -4x + 18$
 $y = \frac{3}{5}x - 3$ $y = -1\frac{1}{3}x + 6$
Dus $rc_k = \frac{3}{5}$. Dus $rc_l = -1\frac{1}{3}$.

c k: $3x - 5y = 15$ $\left\{ \begin{array}{l} 3p - 5 \cdot 3 = 15 \\ 3p = 30 \\ p = 10 \end{array} \right.$
door $A(p, 3)$

$B(10, q)$ op l geeft $q = -1\frac{1}{3} \cdot 10 + 6 = -7\frac{1}{3}$.

d $C(2, r)$ op k geeft $r = \frac{3}{5} \cdot 2 - 3 = 1\frac{1}{5} - 3 = -1\frac{4}{5}$.

l: $4x + 3y = 18$ $\left\{ \begin{array}{l} 4s + 3 \cdot -1\frac{4}{5} = 18 \\ 4s - 5\frac{2}{5} = 18 \\ 4s = 23\frac{2}{5} \\ s = 5\frac{17}{20} (= 5,85) \end{array} \right.$



Bladzijde 210

26 a De procentuele toename van het aantal vrouwelijke leden is $\frac{158\,353 - 131\,948}{131\,948} \times 100\% \approx 20\%$.

Het percentage vrouwen in '12/'13 was $\frac{131\,948}{1\,209\,569} \times 100\% \approx 10,9\%$ en in '17/'18 was dat $\frac{158\,353}{1\,205\,382} \times 100\% \approx 13,1\%$. Dat is dus een toename van $13,1 - 10,9 = 2,2\%$.

*

b In totaal 8 delen, dus 1 deel is $\frac{1\,228\,000}{8} = 153\,500$ leden.

Er waren dus $153\,500 \cdot 7 = 1\,074\,500$ mannelijke leden en 153 500 vrouwelijke leden.

c $1,042 \cdot 1,062 \cdot 1,047 = 1,1586\dots$, dus de groei was 15,9%.

27 a Nederland won $0,0212 \cdot 6138 \approx 130$ gouden medailles.

b Denemarken won $0,01035 \cdot 18\,845 \approx 195$ medailles.

In totaal zijn er $3 + 5 + 5 = 13$ delen, dus 1 deel is $\frac{195}{13} = 15$ medailles.

Denemarken won dus $5 \cdot 15 = 75$ bronzen medailles.

c In totaal haalde Noorwegen $\frac{368}{0,708} \approx 520$ medailles.

Bladzijde 211

28 a In totaal $2 + 3 + 6 = 11$ delen, dus 1 deel is $\frac{200\,893}{11} = 18\,263$ leerlingen.

Er zouden dan $2 \cdot 18\,263 = 36\,526$ vwo-leerlingen, $3 \cdot 18\,263 = 54\,789$ havo-leerlingen en $6 \cdot 18\,263 = 109\,578$ vmbo-leerlingen zijn.

- b** Dan $\frac{3}{11}$ is 53 974, dus totaal is $\frac{11}{3} \cdot 53\,974 \approx 197\,905$ leerlingen.
- c** De verhouding is nu 2 : 3 : 6, dus stel dat er nu $200 + 300 + 600 = 1100$ leerlingen zijn.
Een afname van 10%, dus 110 leerlingen minder.
Deze afname komt voor rekening van het vmbo, dus het vmbo heeft dan $600 - 110 = 490$ leerlingen.
Zo krijg je 200, 300 en 490 leerlingen.
Dus $p = 4,9$ en de gevraagde verhouding is 20 : 30 : 49.

29 a $7668 \text{ miljoen} = 7,668 \cdot 10^9$

b De wereldbevolking in 2050 is $\frac{716}{0,0732} = 9781,4\ldots$ miljoen.

Dus de procentuele toename is $\frac{9781,4\ldots - 7668}{7668} \times 100\% \approx 27,6\%$.

c $d = \frac{N}{A} = \frac{1,35 \cdot 10^9}{3,29 \cdot 10^6} \approx 410$

De bevolkingsdichtheid in India was ongeveer 410 mensen per km^2 .

d Stel de oppervlakte van het land is 2 km^2 . Op de km^2 in de noordelijke helft wonen dan 100 mensen. Op de km^2 in de zuidelijke helft wonen dan 300 mensen.

In totaal 400 mensen, dat is $\frac{400}{2} = 200$ mensen per km^2 .

De bevolkingsdichtheid is dus 200 mensen per km^2 .

e In het noordelijke deel wonen x mensen, dus in het zuidelijke deel wonen $3x$ mensen.
In het hele land wonen dus $x + 3x = 4x$ mensen.

De oppervlakte van de helft is $y \text{ km}^2$, dus de oppervlakte van het hele land is $2y \text{ km}^2$.

$N = 4x$ en $A = 2y$ geeft $d = \frac{4x}{2y} = \frac{2x}{y}$.

Bladzijde 212

30 a $\frac{2}{3} \cdot 300\,000 \text{ km/s} = 200\,000 \text{ km/s}$ en $10 \text{ m} = 0,01 \text{ km}$

Het signaal doet er $\frac{0,01}{200\,000} = 5 \cdot 10^{-8}$ seconden over.

b De hoeveelheid regen in het badje is $269 \cdot 175 \cdot 1,2 = 56\,490 \text{ cm}^3 = 56\,490 \text{ mL}$.

Dat zijn $\frac{56\,490}{0,03} = 1,883 \cdot 10^6$ regendruppels.

31 a $w = 10$ geeft $F = 0,0044 \cdot 10^2 - 0,93 \cdot 10 + 34,5 = 25,64$ en $C = \frac{25,64 - 32}{1,8} \approx -3,5$.

Dus de gevoelstemperatuur is $25,6^\circ\text{F}$ of $-3,5^\circ\text{C}$.

b $40 \text{ km/uur} = \frac{40}{1,6} = 25$ mijl per uur, dus $w = 25$.

$w = 25$ geeft $F = 0,0044 \cdot 25^2 - 0,93 \cdot 25 + 34,5 = 14$ en $C = \frac{14 - 32}{1,8} = -10$.

Dus de gevoelstemperatuur is -10°C .

c $15 \text{ m/s} = 15 \cdot 3,6 = 54 \text{ km/uur} = \frac{54}{1,6} = 33,75$ mijl per uur, dus $w = 33,75$.

$w = 33,75$ geeft $F = 0,0044 \cdot 33,75^2 - 0,93 \cdot 33,75 + 34,5 = 8,12\ldots$ en $C = \frac{8,12\ldots - 32}{1,8} \approx -13,3$.

Dus de gevoelstemperatuur is $-13,3^\circ\text{C}$.

d $C = \frac{F - 32}{1,8}$ geeft $F - 32 = 1,8C$, oftewel $F = 1,8C + 32$.

$v \text{ m/s} = 3,6v \text{ km/uur} = \frac{3,6v}{1,6} = 2,25v$ mijl/uur, dus $w = 2,25v$.

In de formule F vervangen door $1,8C + 32$ en w vervangen door $2,25v$ geeft

$1,8C + 32 = 0,0044 \cdot (2,25v)^2 - 0,93 \cdot 2,25v + 34,5$

$1,8C = 0,022275v^2 - 2,0925v + 2,5$

$C = 0,012375v^2 - 1,1625v + 1,38\ldots$

Dus $a \approx 0,0124$, $b \approx -1,16$ en $c \approx 1,4$.

4 Combinatoriek

Bladzijde 213

32 a aantal = $\binom{6}{2} = 15$

b aantal = $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 63$

Alternatieve uitwerking

aantal = $2^6 - 1 = 63$

33 a aantal = $\binom{3}{2} \cdot \binom{6}{1} = 18$

b aantal = $\binom{9}{3} = 84$

c De mogelijke combinaties zijn CDA/PvdA/VVD, CDA/PvdA/GB, CDA/VVD/GB en PvdA/VVD/GB.

aantal = $3 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 39$

d aantal = $7! \cdot 3! = 30\,240$

e aantal = $4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1 = 1\,728$

34 WISKUNDE bevat 8 verschillende letters.

a aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$

b aantal = $8^5 = 32\,768$

c aantal = $1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Bladzijde 214

35 a aantal = $\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \approx 3,1 \cdot 10^{11}$

b aantal = $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30$

Alternatieve uitwerking aantal = $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$

c mogelijkheden

RBGRB	RBGBR	RBRGB	RBRBG
BRGRB	BRGBR	BRBGR	BRBRG
GBRBR			
BGRBR			
GRBRB			
RGBRB			

aantal = 12

36 a aantal = $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{3} = 560$

Alternatieve uitwerking

aantal = $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$

b Vier cijfers uit de zes cijfers kiezen kan op $\binom{6}{4}$ manieren.

aantal = $\binom{6}{4} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 37\,800$

Alternatieve uitwerking

aantal = $\binom{6}{4} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 37\,800$

c Er komt dan één van de cijfers drie keer voor (hiervoor zijn 6 mogelijkheden)

OF twee van de cijfers komen elk twee keer voor (en hiervoor zijn $\binom{6}{2}$ mogelijkheden).

aantal = $6 \cdot \frac{8!}{3!} + \binom{6}{2} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 2!} = 40\,320 + 151\,200 = 191\,520$

d Het eerste cijfer is 1 of 2 OF het eerste cijfer is 3 en het tweede cijfer is 1, 2 of 4.

aantal = $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 156$

e Het eerste cijfer is 4, 5 of 6 OF het eerste cijfer is 3 en het tweede cijfer is 5 of 6.

aantal = $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 = 720$

- 37** Van de drie verschillende cijfers wordt er één drie keer gebruikt OF van de drie verschillende cijfers worden er twee dubbel gebruikt.

Van de drie verschillende cijfers wordt er één drie keer gebruikt:

Stel dat het cijfer 4 driemaal wordt gebruikt, dan zijn er $\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} = 20$ mogelijkheden.

Dit geldt ook als de cijfers 7 of 8 driemaal worden gebruikt, dus $3 \cdot 20 = 60$ mogelijkheden.

Van de drie verschillende cijfers worden er twee dubbel gebruikt:

Er zijn $\binom{3}{2} = 3$ tweetallen mogelijk die dubbel worden gebruikt (4 en 7 dubbel OF 4 en 8

dubbel OF 7 en 8 dubbel). Elk van deze mogelijkheden levert $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30$ mogelijkheden.

Dus als twee cijfers dubbel worden gebruikt zijn er 90 mogelijkheden.

Totaal $60 + 90 = 150$ mogelijkheden.

Alternatieve uitwerking

Van de drie verschillende cijfers wordt er één drie keer gebruikt OF van de drie verschillende cijfers worden er twee dubbel gebruikt.

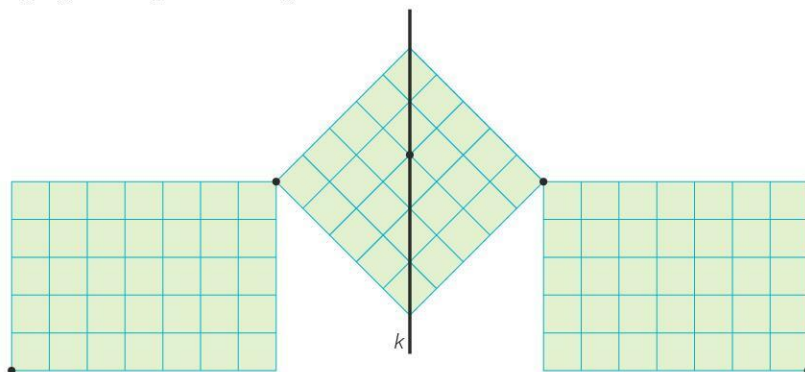
Eén cijfer drie keer gebruikt: $3 \cdot \frac{5!}{3!} = 60$ mogelijkheden.

Twee dubbel gebruikt: $\binom{3}{2} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 90$ mogelijkheden.

Totaal $60 + 90 = 150$ mogelijkheden.

Bladzijde 215

- 38** a aantal = $\binom{12}{5} \cdot \binom{5}{2} = 792 \cdot 10 = 7920$
b aantal = $\binom{12}{5} \cdot 2^5 = 25\,344$
c aantal = $\binom{12}{5} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{12}{5} = \left(\binom{12}{5} \cdot \binom{5}{2} \right)^2 = 7920^2 = 62\,726\,400$
d Spiegel de figuur in de lijn k .



$$\text{aantal} = \binom{12}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{12}{5} = 158\,070\,528$$

- 39** a Noem de teams A en B.
A wint in vijf wedstrijden $\underbrace{\text{BAAA A}}_{\binom{4}{1} = 4}$

Er zijn dus 4 mogelijkheden voor A om in vijf wedstrijden te winnen.

Dat geldt ook voor B.

Dus bij vijf wedstrijden zijn er $4 + 4 = 8$ mogelijkheden.

Bij zes wedstrijden: $\underbrace{\text{BBAAA A}}_{\binom{5}{2} = 10}$

Dus bij zes wedstrijden zijn er $10 + 10 = 20$ mogelijkheden.

- b** Vier, vijf, zes of zeven wedstrijden.

$$\text{aantal} = 2 + 8 + 20 + 2 \cdot \binom{6}{3} = 70$$

- 40 a** Er zijn $4 \cdot 5 = 20$ vakjes.

$$\text{aantal} = \binom{20}{6} = 38\,760$$

- b** $\text{aantal} = 2^{20} = 1\,048\,576$

- c** $\text{aantal} = \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} = 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 2500$

- d** $\text{aantal} = 3^{20} = 3\,486\,784\,401$

$$\text{Dus } \frac{3\,486\,784\,401}{1\,048\,576} \approx 3325 \text{ keer zoveel.}$$

- e** $\text{aantal} = \binom{5}{2} \cdot 2^3 \cdot 3^{15} = 1\,147\,912\,560$

Bladzijde 216

- 41 a** $\text{aantal} = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} = 180$

- b** $\text{aantal} = 3! \cdot 3! = 36$

- c** Voor zowel de kerken als de musea geldt dat er twee manieren zijn waarop de drie gebouwen allemaal op een andere plek liggen dan eerst.

$$\text{aantal} = 2 \cdot 2 = 4$$

- d** Twee van de vijf kandidaten hebben de juiste mol genoemd, de overige drie kandidaten één van de andere vier kandidaten (omdat ze zichzelf niet noemen).

$$\text{aantal} = \binom{5}{2} \cdot 4^3 = 640$$

Verantwoording

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie.
Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontleenen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom
hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73534-0



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.