

& GETAL & RUIMTE

A
C



Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen **vwo A/C** deel 2

Twaalfde editie, 2020

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

Inhoud

5	Machtsverbanden	4
6	Kansrekening	29
7	Statistiek met de computer	49
K	Lineair programmeren	69
	Gemengde opgaven	98

5 Machtsverbanden

Voorkennis Herleiden van machten

Bladzijde 10

- 1** a $x^2 \cdot x^3 = x^5$
 b $2p^3 \cdot 3p^2 = 6p^5$
 c $4a^2b \cdot 5a^3b^2 = 20a^5b^3$
- 2** a $(p^2q)^3 = p^6q^3$
 b $(3x^2)^3 = 27x^6$
 c $(-5x^2y^3)^2 = 25x^4y^6$
- 3** a $\frac{12x^6}{4x^2} = 3x^4$
 b $\frac{5x^{10}}{15x^5} = \frac{1}{3}x^5$
 c $\frac{24a^4b^2}{6ab} = 4a^3b$
- 4** a $\frac{-28a^6}{7a} = -4a^5$
 b $-(3a^4)^2 = -9a^8$
 c $(-2a^2)^5 = -32a^{10}$
- 5** a $(ab)^4 \cdot a = a^4b^4 \cdot a = a^5b^4$
 b $(-2ab)^3 \cdot b = -8a^3b^3 \cdot b = -8a^3b^4$
 c $(3a)^2 + (2b)^2 = 9a^2 + 4b^2$
- d $-2p^4q^3 \cdot -3pq = 6p^5q^4$
 e $5x^2y \cdot 2x - 3x^3y = 10x^3y - 3x^3y = 7x^3y$
 f $12a^4b \cdot \frac{1}{4}ab - 8ab = 3a^5b^2 - 8ab$
- d $(-4ab^4)^2 = 16a^2b^8$
 e $(3a)^2 \cdot (2a^2)^3 = 9a^2 \cdot 8a^6 = 72a^8$
 f $(3a^3)^2 + (2a^2)^3 = 9a^6 + 8a^6 = 17a^6$
- d $\frac{-15p^6q}{5p^2q} = -3p^4$
 e $\frac{10x^3y^2}{5x^2y} = 2xy$
 f $\frac{(2ab)^3}{(3ab)^2} = \frac{8a^3b^3}{9a^2b^2} = \frac{8}{9}ab$
- d $(-a^3)^3 = -a^9$
 e $(5a)^3 \cdot -3a = 125a^3 \cdot -3a = -375a^4$
 f $\left(\frac{9a^4}{a}\right)^2 = \frac{81a^8}{a^2} = 81a^6$
- d $(3a)^3 - 8a^3 = 27a^3 - 8a^3 = 19a^3$
 e $(\frac{1}{2}a)^2 + (-a)^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2 = 1\frac{1}{4}a^2$
 f $(5a^4)^2 + (-a^2)^4 = 25a^8 + a^8 = 26a^8$

5.1 Rekenen met machten

Bladzijde 11

- 1** $A = (3xy)^2 - \frac{6x^3y^4}{2xy^2} = 9x^2y^2 - 3x^2y^2 = 6x^2y^2$
- 2** Bij $(2a^3)^2 = 4a^6$ gebruik je de regel $(ab)^p = a^pb^p$ en vervolgens de regel $(a^p)^q = a^{pq}$.
 Bij $(a^2)^3 = a^6$ gebruik je de regel $(a^p)^q = a^{pq}$.
 Bij $a^3 \cdot a^2 = a^5$ gebruik je de regel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.
 Bij $\frac{12x^3y}{3xy} = 4x^2$ gebruik je de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.
 Bij $(4xy)^2 = 16x^2y^2$ gebruik je de regel $(ab)^p = a^pb^p$.
 Bij $\frac{16x^2y^2}{2xy^2} = 8x^2$ gebruik je de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.
- 3** a $A = (4x^3)^2 - 3x^5 \cdot 2x = 16x^6 - 6x^6 = 10x^6$
 b $B = \frac{15a^3b}{5ab} - (1\frac{1}{2}a)^2 = 3a^2 - 2\frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$
 c $C = 3p^2q \cdot 4pq - \frac{(6p^2q^2)^2}{9pq^2} = 12p^3q^2 - \frac{36p^4q^4}{9pq^2} = 12p^3q^2 - 4p^3q^2 = 8p^3q^2$

Bladzijde 12

- 4 a** $P = 6a^2 \cdot 4a^3 - 5a^4 \cdot 3a - (2a^2)^3 = 24a^5 - 15a^5 - 8a^6 = 9a^5 - 8a^6$
- b** $Q = \frac{28x^6}{7x} - \frac{(3x^2y)^3}{2xy^3} = 4x^5 - \frac{27x^6y^3}{2xy^3} = 4x^5 - 13\frac{1}{2}x^5 = -9\frac{1}{2}x^5$
- c** $R = (3p^2q)^2 - \frac{2p^5q^3}{pq} + (2p^2)^2 - (3q)^2 = 9p^4q^2 - 2p^4q^2 + 4p^4 - 9q^2 = 7p^4q^2 + 4p^4 - 9q^2$
- 5** $2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53} = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 2^{53} \cdot 5^{53} = 64 \cdot 81 \cdot (2 \cdot 5)^{53} = 5184 \cdot 10^{53}$
Dat getal is 5184 met 53 nullen erachter. Het laatste cijfer voor de nullen is dus een 4.
- 6 a** Als de exponent 1 lager wordt, dan deel je de vorige uitkomst door 2.

Dus $2^1 = \frac{4}{2} = 2$, $2^0 = \frac{2}{1} = 1$, $2^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$ en $2^{-2} = \frac{(\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$.

- b** $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ en $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$
- c** $x^{-1} = \frac{1}{x}$ en $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

Bladzijde 14

- 7 a** $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$
- b** $a^4 \cdot \frac{1}{a^6} = a^4 \cdot a^{-6} = a^{-2}$
- c** $\frac{a^n}{(\frac{1}{a^4})} = \frac{a^n}{a^{-4}} = a^{n-(-4)} = a^{n+4}$
- d** $\frac{a^8}{a^0} = \frac{a^8}{1} = a^8$
- e** $(a^3)^{-2} = a^{-6}$
- f** $\frac{(\frac{1}{a^5})}{a} = \frac{a^{-5}}{a^1} = a^{-5-1} = a^{-6}$
- g** $\frac{a}{a^{12}} = \frac{a^1}{a^{12}} = a^{1-12} = a^{-11}$
- h** $\frac{1}{a^8} \cdot (a^3)^n = a^{-8} \cdot a^{3n} = a^{-8+3n}$
- i** $\frac{(\frac{1}{a^n})}{a^{-3}} = \frac{a^{-n}}{a^{-3}} = a^{-n-(-3)} = a^{-n+3}$
- 8 a** $6a^{-5}b^3 = 6 \cdot \frac{1}{a^5} \cdot b^3 = \frac{6b^3}{a^5}$
- b** $\frac{1}{3}a^{-3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{3a^3}$
- c** $(5a^{-4}b^2)^{-1} = 5^{-1} \cdot (a^{-4})^{-1} \cdot (b^2)^{-1} = \frac{1}{5} \cdot a^4 \cdot b^{-2} = \frac{1}{5} \cdot a^4 \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{a^4}{5b^2}$
- d** $\frac{3}{5}a^{-4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{a^4} = \frac{3}{5a^4}$
- e** $(\frac{1}{2}a)^{-3} = (\frac{1}{2})^{-3} \cdot a^{-3} = (2^{-1})^{-3} \cdot \frac{1}{a^3} = 2^3 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{8}{a^3}$
- f** $\frac{1}{6}a^{-2}b^4 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot b^4 = \frac{b^4}{6a^2}$
- g** $-4 \cdot (3a)^{-2} = \frac{-4}{(3a)^2} = \frac{-4}{9a^2}$
- h** $(3a)^{-2} \cdot b^{-3} = \frac{1}{(3a)^2 \cdot b^3} = \frac{1}{9a^2b^3}$
- i** $(\frac{3}{8}a^{-1}b)^{-2} = (\frac{3}{8})^{-2} \cdot (a^{-1})^{-2} \cdot b^{-2} = (\frac{8}{3})^2 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{64}{9} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{64a^2}{9b^2}$
- 9 a** $\frac{a^4 \cdot a^6}{(\frac{1}{a})} = \frac{a^{10}}{a^{-1}} = a^{10-(-1)} = a^{11}$
- b** $(\frac{2}{3}a^{-4}b^3)^{-3} = (\frac{2}{3})^{-3} \cdot (a^{-4})^{-3} \cdot (b^3)^{-3} = \frac{1}{(\frac{2}{3})^3} \cdot a^{12} \cdot b^{-9} = \frac{1}{\frac{8}{27}} \cdot a^{12} \cdot \frac{1}{b^9} = \frac{27a^{12}}{8b^9}$
- c** $4a^{-2}b + \frac{3}{a^2b^{-1}} = 4 \cdot \frac{1}{a^2} \cdot b + \frac{3}{a^2} \cdot b = \frac{4b}{a^2} + \frac{3b}{a^2} = \frac{7b}{a^2}$

- 10 a** $y = 5(2x^3)^2 \cdot \frac{3}{x^4} = 5 \cdot 2^2 \cdot (x^3)^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{x^4} = 5 \cdot 4 \cdot x^6 \cdot 3 \cdot x^{-4} = 60x^2$
Dus $y = 60x^2$.
- b** $y = \frac{1}{3}(3x^2)^3 \cdot \frac{2}{x^{10}} = \frac{1}{3} \cdot 3^3 \cdot (x^2)^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^{10}} = \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot x^6 \cdot 2 \cdot x^{-10} = 18x^{-4}$
Dus $y = 18x^{-4}$.
- c** $y = \frac{162}{(3x^2)^4} = \frac{162}{3^4 \cdot (x^2)^4} = \frac{162}{81x^8} = 2x^{-8}$
Dus $y = 2x^{-8}$.
- d** $y = \left(\frac{4}{5}x\right)^{-2} \cdot \frac{4}{x} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} \cdot x^{-2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{x} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot x^{-2} \cdot 4 \cdot x^{-1} = \left(\frac{16}{25}\right) \cdot x^{-3} = 6,25 \cdot x^{-3}$
Dus $y = 6,25x^{-3}$.

- 11 a** Het getal is 13, 14, 15 of 16, want het priemgetal 13 komt voor, maar 17 niet.
Er staat 7^2 , dus 14 zit erbij, want 7 en 14 zijn 7-vouden.
Er staat 5^3 , dus 15 zit erbij, want 5, 10 en 15 zijn 5-vouden.
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 15 \cdot 16 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^4 = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$
Dus $n = 16$.
- b** De rij is $1, 2^1, \frac{1}{2^1} = 2^{-1}, \frac{2^1}{2^{-1}} = 2^2, \frac{2^{-1}}{2^2} = 2^{-3}, \frac{2^2}{2^{-3}} = 2^5, \frac{2^{-3}}{2^5} = 2^{-8}, \frac{2^5}{2^{-8}} = 2^{13}, \frac{2^{-8}}{2^{13}} = 2^{-21}, \frac{2^{13}}{2^{-21}} = 2^{34}$.
Dus het tiende getal is 2^{34} .

- 12 a** Dat volgt uit de rekenregel $(a^p)^q = a^{pq}$.
- b** $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$ en $(\sqrt{x})^2 = x$, dus $(x^{\frac{1}{2}})^2 = (\sqrt{x})^2$ en ook $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.
- c** $(x^{\frac{1}{3}})^3 = x$ en $(\sqrt[3]{x})^3 = x$, dus $(x^{\frac{1}{3}})^3 = (\sqrt[3]{x})^3$ en ook $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Bladzijde 16

- 13 a** $5a^{3\frac{1}{2}} = 5a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 5a^3 \cdot \sqrt{a}$
- b** $\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{4}}b = \frac{b}{2a^{\frac{1}{4}}} = \frac{b}{2 \cdot \sqrt[4]{a}}$
- c** $3a^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{a^2}}$

- d** $\frac{2}{3}a^{-3}b^{\frac{1}{2}} = \frac{2b \cdot b^{\frac{1}{2}}}{3a^3} = \frac{2b\sqrt{b}}{3a^3}$
- e** $\frac{1}{5}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{5a^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{5\sqrt{a}}$
- f** $(5a)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(5a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5a}}$

- 14 a** $a \cdot \sqrt[3]{a} = a \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{1\frac{1}{3}}$
- b** $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}}$
- c** $\frac{1}{a} = a^{-1}$
- d** $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$
- e** $a^2 \cdot \sqrt{a} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{2\frac{1}{2}}$

- f** $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} = \sqrt[3]{a^{-2}} = a^{-\frac{2}{3}}$
- g** $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$
- h** $\frac{1}{a^4} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{-4} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{-3\frac{2}{3}}$
- i** $\frac{a^3}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a^3}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{3-\frac{1}{3}} = a^{2\frac{2}{3}}$

- 15 a** $8\sqrt{2} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3\frac{1}{2}}$
- b** $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{2^3}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{2\frac{1}{2}}$
- c** $\frac{1}{3}\sqrt{3} = 3^{-1} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

- d** $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{2\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{2\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{2\frac{1}{6}}$
- e** $\frac{1}{100}\sqrt{10} = \frac{1}{10^2} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{-2} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{-1\frac{1}{2}}$
- f** $\frac{10}{\sqrt[3]{0,1}} = \frac{10}{\sqrt[3]{10^{-1}}} = \frac{10^1}{10^{-\frac{1}{3}}} = 10^{1-(-\frac{1}{3})} = 10^{1\frac{1}{3}}$

- 16 a** $y = 2^{x+4} = 2^x \cdot 2^4 = 2^x \cdot 16 = 16 \cdot 2^x$
Dus de formule is inderdaad te herleiden tot $y = 16 \cdot 2^x$.
- b** $y = 2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2} = 2^x \cdot \frac{1}{2^2} = 2^x \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 2^x$
Dus $y = \frac{1}{4} \cdot 2^x$.
- c** $y = 3^{x-1} = 3^x \cdot 3^{-1} = 3^x \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 3^x$
Dus $y = \frac{1}{3} \cdot 3^x$.

Bladzijde 17

17 a $N = 5p^{\frac{2}{3}} \cdot q^{-\frac{1}{3}} = 5 \cdot \sqrt[3]{p^2} \cdot \frac{1}{q^{\frac{1}{3}}} = 5 \cdot \sqrt[3]{p^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{q}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{p^2}}{\sqrt[3]{q}}$
Dus $N = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{p^2}}{\sqrt[3]{q}}$.

b $R = 100a^{-4} \cdot b^{2\frac{1}{2}} = 100 \cdot \frac{1}{a^4} \cdot b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}} = \frac{100b^2 \cdot \sqrt{b}}{a^4}$
Dus $R = \frac{100b^2 \cdot \sqrt{b}}{a^4}$.

c $P = 9^{1\frac{1}{2}} \cdot x^{-1\frac{1}{2}} \cdot y^{1\frac{1}{3}} = 9^{1\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} \cdot y^{1\frac{1}{3}} = 9^{1\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} \cdot y \cdot y^{\frac{1}{3}} = \frac{27y \cdot \sqrt[3]{y}}{x\sqrt{x}}$
Dus $P = \frac{27y \cdot \sqrt[3]{y}}{x\sqrt{x}}$.

18 a $\frac{x^6}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^6}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^6}{x^{2\frac{1}{2}}} = x^{6-2\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$

b $x \cdot \sqrt[7]{x^3} = x^1 \cdot x^{\frac{3}{7}} = x^{1\frac{3}{7}}$

c $\frac{x}{\sqrt[5]{x}} = \frac{x^1}{x^{\frac{1}{5}}} = x^{1-\frac{1}{5}} = x^{\frac{4}{5}}$

d $x^4 \cdot \sqrt{x} = x^4 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{4\frac{1}{2}}$

e $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{6}}$

f $x^2 \cdot \frac{1}{x^3} = x^2 \cdot x^{-3} = x^{-1}$

19 a $y = \frac{5}{x\sqrt{x}} = \frac{5}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{x^{1\frac{1}{2}}} = 5x^{-1\frac{1}{2}}$

Dus $y = 5x^{-1\frac{1}{2}}$.

b $y = 5x\sqrt{x^3} = 5x^1 \cdot x^{1\frac{1}{2}} = 5x^{2\frac{1}{2}}$

Dus $y = 5x^{2\frac{1}{2}}$.

c $y = \frac{5}{x^3} \cdot 2\sqrt{x} = 5x^{-3} \cdot 2x^{\frac{1}{2}} = 10x^{-2\frac{1}{2}}$

Dus $y = 10x^{-2\frac{1}{2}}$.

d $y = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3} = 3 \cdot x^{\frac{3}{4}}$

Dus $y = 3x^{\frac{3}{4}}$.

e $y = 5x^{-0,2} \cdot x^{1,3} = 5x^{1,1}$

Dus $y = 5x^{1,1}$.

f $y = \frac{50x^{1,9}}{10x^{1,1}} = 5x^{1,9-1,1} = 5x^{0,8}$

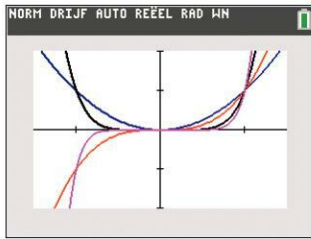
Dus $y = 5x^{0,8}$.

5.2 Grafieken veranderen

Bladzijde 19

20

a



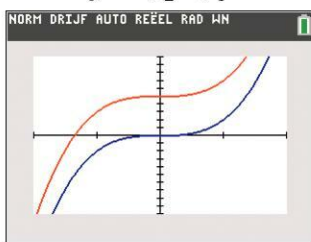
b De punten $(0, 0)$ en $(1, 1)$ liggen op elk van deze grafieken.

c Van de grafieken $y_1 = x^2$ en $y_3 = x^6$ ligt geen enkel punt onder de x -as.

21

a Voor $x = 1$ is $y_1 = 2$ en $y_2 = 2 + 5 = 7$.
Voor $x = 2$ is $y_1 = 16$ en $y_2 = 16 + 5 = 21$.
Voor $x = 3$ is $y_1 = 54$ en $y_2 = 54 + 5 = 59$.
Steeds geldt $y_2 = y_1 + 5$.

b



De grafiek van y_2 ontstaat door de grafiek van y_1 5 omhoog te verschuiven.

22

a $x = 3$ geeft $y_1 = 54$ en $x = 5$ geeft $y_2 = 54$.
Voor $x = 3$ krijg je $y_1 = 2 \cdot 3^3$ en voor $x = 5$ krijg je $y_2 = 2 \cdot (5 - 2)^3 = 2 \cdot 3^3$.
b Dan moet je $x = 8$ nemen, immers $x = 8$ geeft $y_3 = 2(8 - 5)^3 = 2 \cdot 3^3$.

Bladzijde 20

23

a $y = -5(x - 2)^2 + 5$
 $y = -5(x + 3)^2 + 6$
 $y = -5(x - 7)^2$
b $y = 4(x + 5)^5 + 7$
 $y = 4x^5 - 10$

Bladzijde 21

24

a $y = 5(x - 4)^2 + 1 + 6 = 5(x - 4)^2 + 7$
b $y = (x - 4 - 6)^3 + 6 = (x - 10)^3 + 6$
c $y = -(x - 4)^4 + 2 + 6 = -(x - 4)^4 + 8$

d $y = 3(x - 4 - 5)^6 + 8 + 6 = 3(x - 9)^6 + 14$

e $y = -2(x - 4 + 4)^5 + 6 + 6 = -2x^5 + 12$

f $y = -2(x - 4 - 4)^2 - 6 + 6 = -2(x - 8)^2$

25

a $y = 5(x - 8)^6 - 3$
b $y = -3(x + 4)^4 + 6$
c $y = 2(x - 5 - 3)^2 = 2(x - 8)^2$

d $y = -5(x - 2 - 1)^3 + 8 - 7 = -5(x - 3)^3 + 1$

e $y = (x + 8)^5 + 6 - 3 = (x + 8)^5 + 3$

f $y = -(x - 7)^4 - 8$

26

$$y = -\frac{1}{2}(x - 2 + 3)^2 - 5 + q = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 - 5 + q = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) - 5 + q$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} - 5 + q = -\frac{1}{2}x^2 - x - 5\frac{1}{2} + q$$

Er moet gelden $-\frac{1}{2}x^2 - x - 5\frac{1}{2} + q = -\frac{1}{2}x^2 - x$.

Hieruit volgt dat $-5\frac{1}{2} + q = 0$, dus $q = 5\frac{1}{2}$.

27

a De grafiek van $y = 2x^2$ heeft als top $O(0, 0)$.
Als deze 4 naar links en 1 naar boven wordt geschoven, wordt de top dus $(-4, 1)$.

b $y = 2x^2$

↓ verschuiving $(-4, 1)$

$y = 2(x + 4)^2 + 1$

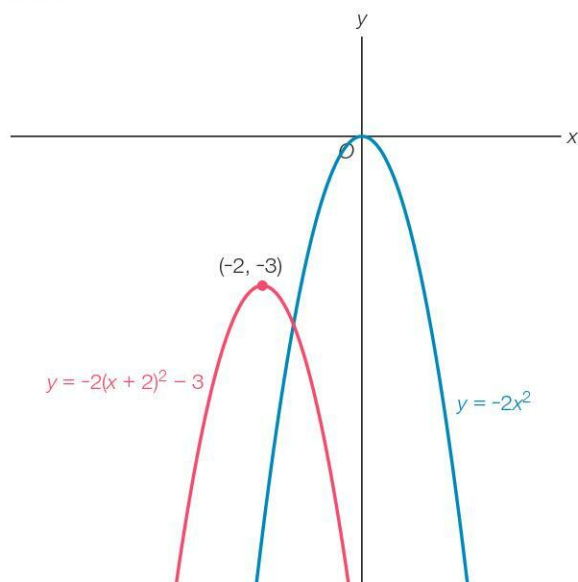
De formule van de beeldgrafiek is $y = 2(x + 4)^2 + 1$.

Hieraan kun je zien dat de grafiek van $y = 2x^2$ met top $O(0, 0)$ 4 naar links en 1 naar boven is verschoven, dus dat de top van de beeldgrafiek $(-4, 1)$ is.

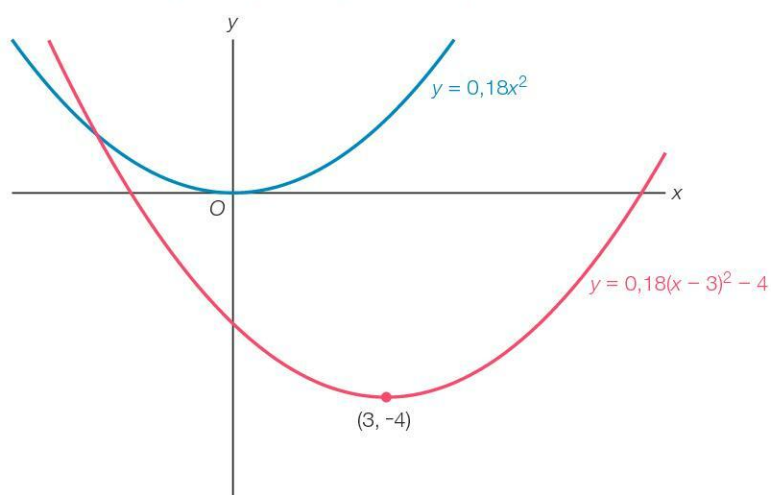
Bladzijde 22

28

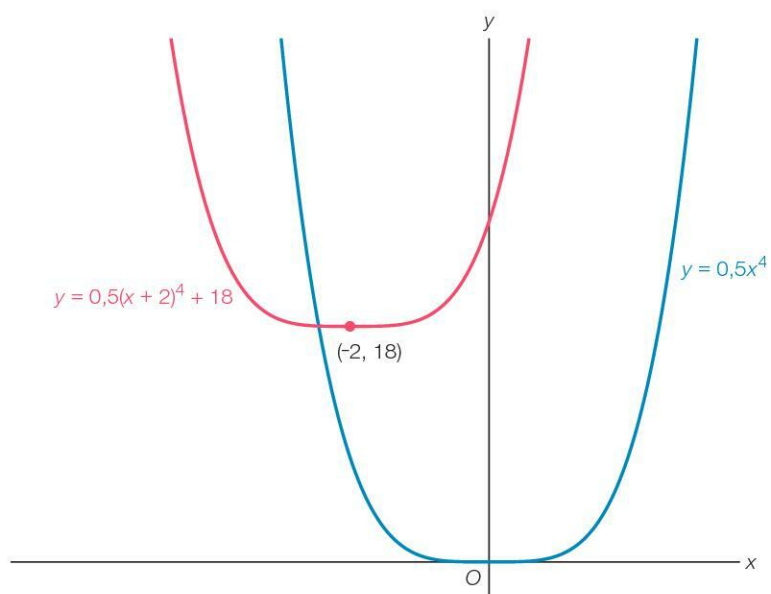
a



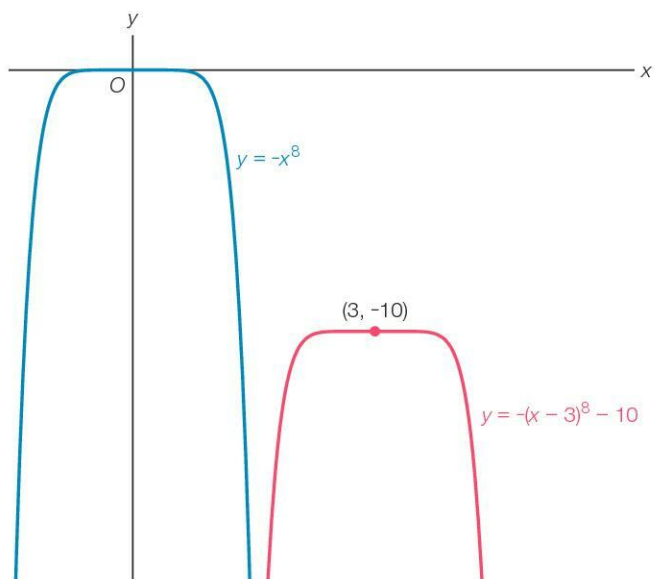
b



c



d

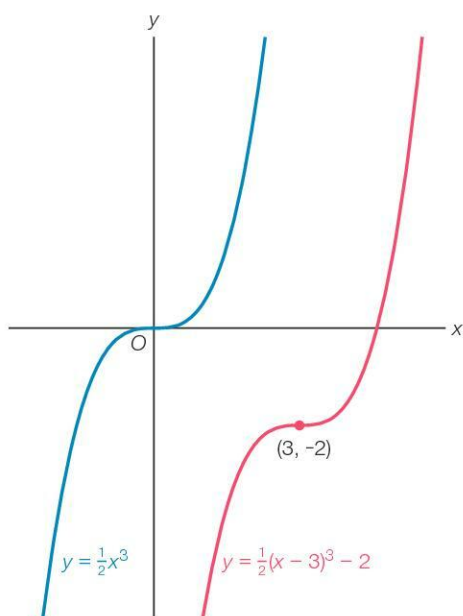


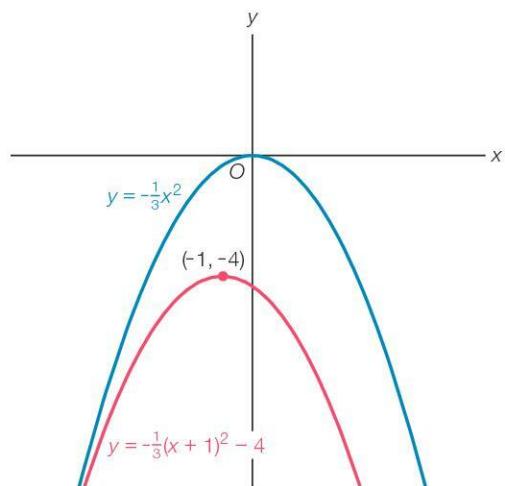
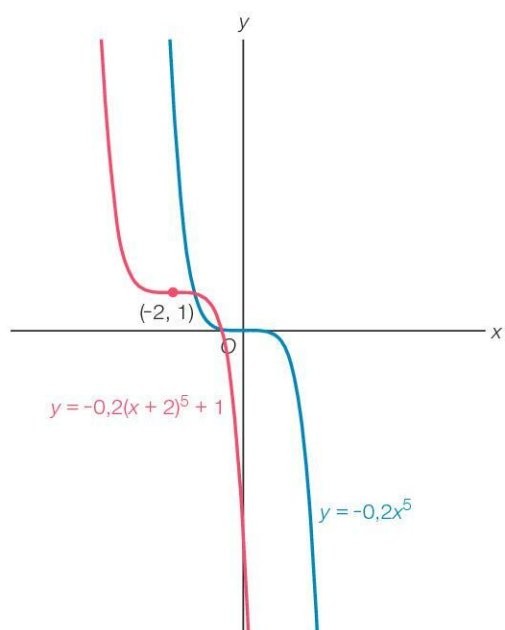
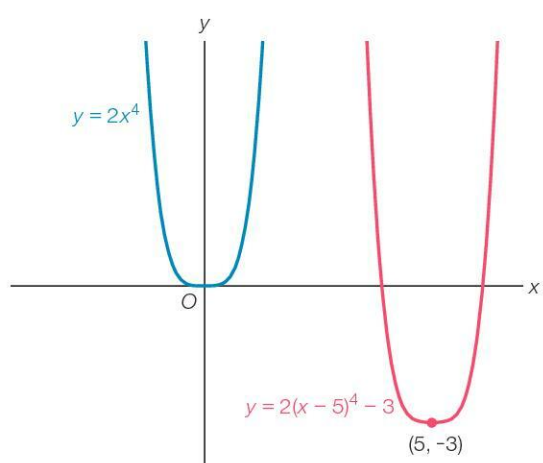
- 29 a Het maximum is -3 voor $x = -2$.
 b Het minimum is -4 voor $x = 3$.
 c Het minimum is 18 voor $x = -2$.
 d Het maximum is -10 voor $x = 3$.

Bladzijde 23

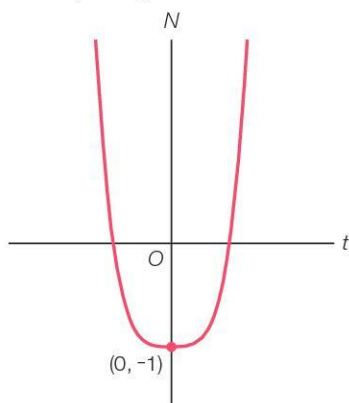
- 30 a De top is $(5, 8)$.
 b De top is $(0, 7)$.
 c De top is $(-8, 0)$.
 d Het punt van de symmetrie is $(8, 12)$.
 e De top is $(100, 0)$.
 f De top is $(-0,15; -0,3)$.

31 a

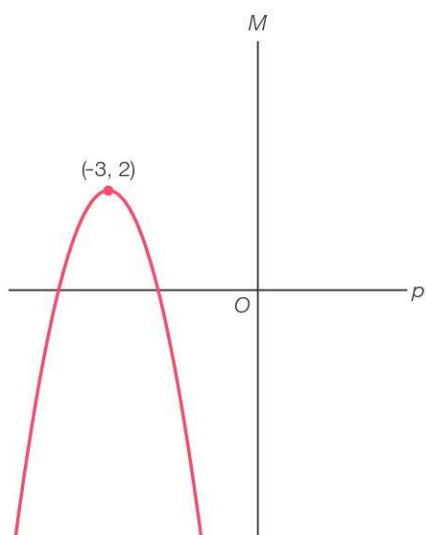


b**c****d**

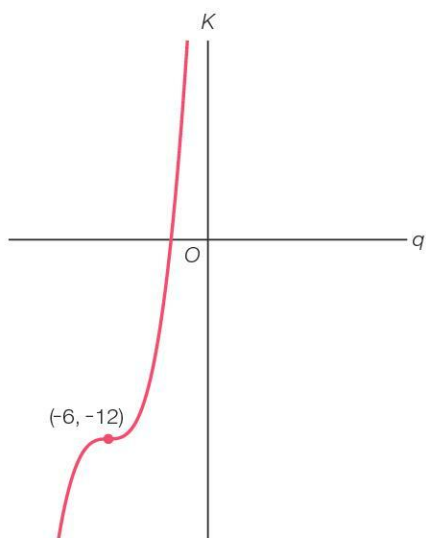
32 a $N = 3(t^4 - 2) + 5 = 3t^4 - 6 + 5 = 3t^4 - 1$

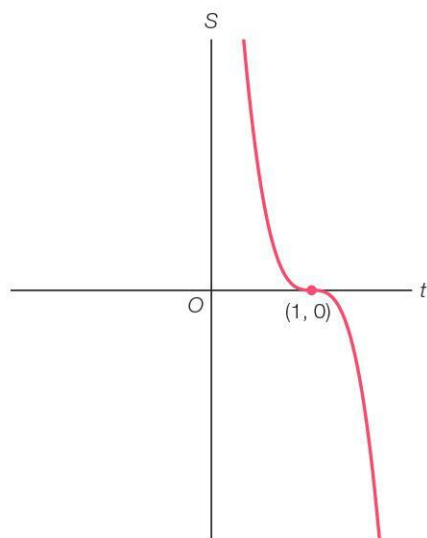


b



c



d

- 33** $A = a(t-2)^4 + b$ en het maximum is 10, dus $b = 10$.

$$\left. \begin{array}{l} A = a(t-2)^4 + 10 \\ \text{door } (4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a(4-2)^4 + 10 = 2 \\ a \cdot 2^4 + 10 = 2 \\ 16a = -8 \\ a = -\frac{1}{2} \end{array}$$

- 34** Voer in $y_1 = x^2 - 10x + 26$ en $y_2 = x^2 - 2x + 4$.
De optie minimum bij y_1 geeft $x = 5$ en $y = 1$.
De optie minimum bij y_2 geeft $x = 1$ en $y = 3$.
Dus de top is van $(1, 3)$ naar $(5, 1)$ verschoven.
De verschuiving is dus $(4, -2)$.

- 35** **a** $x = 2$ geeft $y = 0$, $x = 3$ geeft $y = 1$ en $x = 4$ geeft $y = 16$.
b $x = 2$ geeft $y = 0$, $x = 3$ geeft $y = 3$ en $x = 4$ geeft $y = 48$.
c De uitkomsten bij b zijn 3 keer de uitkomsten bij a.

Bladzijde 24

- 36** **a** Bij spiegelen in de x -as neem je van de y -coördinaten het tegenovergestelde. Dat is hetzelfde als herschalen in de verticale richting met factor -1 .
Dus herschalen in verticale richting met factor -1 komt op hetzelfde neer als spiegelen in de x -as.
- b** $y = 3(x-1)^2 - 6$
↓ spiegelen in de x -as
 $y = -(3(x-1)^2 - 6) = -3(x-1)^2 + 6$
De formule van de beeldgrafiek is $y = -3(x-1)^2 + 6$.
- 37** **a** $y = \frac{1}{2}(x+1)^3$
↓ vert. herschaling factor 5
 $y = 5\left(\frac{1}{2}(x+1)^3\right) = 2\frac{1}{2}(x+1)^3$
De formule van de beeldgrafiek is $y = 2\frac{1}{2}(x+1)^3$.
- b** $y = 0,6(x-2)^6 - 4$
↓ vert. herschaling factor $\frac{1}{4}$
 $y = \frac{1}{4}(0,6(x-2)^6 - 4) = 0,15(x-2)^6 - 1$
De formule van de beeldgrafiek is $y = 0,15(x-2)^6 - 1$.

38

a $y_1 = 0,3x^2$

↓ verschuiving $(-5, 6)$

$$y_2 = 0,3(x+5)^2 + 6$$

$$y_3 = 3 \cdot y_2 = 3(0,3(x+5)^2 + 6) = 0,9(x+5)^2 + 18$$

De formule is $y_3 = 0,9(x+5)^2 + 18$.

De top is $(-5, 18)$.

b $y_1 = 0,5x^4$

$$y_2 = -4 \cdot y_1 = -4 \cdot 0,5x^4 = -2x^4$$

↓ verschuiving $(-3, 5)$

$$y_3 = -2(x+3)^4 + 5$$

De top is $(-3, 5)$.

c $y_1 = -3x^5 + 4$

↓ verschuiving $(2, -7)$

$$y_2 = -3(x-2)^5 - 3$$

$$y_3 = 6 \cdot y_2 = 6(-3(x-2)^5 - 3) = -18(x-2)^5 - 18$$

De formule is $y_3 = -18(x-2)^5 - 18$.

Het punt van symmetrie is $(2, -18)$.

39

a $y = -0,12x^2$

↓ verschuiving $(4, 5)$

$$y = -0,12(x-4)^2 + 5$$

↓ vert. herschaling factor 4

$$y = 4(-0,12(x-4)^2 + 5) = -0,48(x-4)^2 + 20$$

De formule van de beeldgrafiek is $y = -0,48(x-4)^2 + 20$.

De top is $(4, 20)$.

b $y = 3(x-4)^2 - 8$

↓ verschuiving $(-5, 2)$

$$y = 3(x+5-4)^2 - 8 + 2 = 3(x+1)^2 - 6$$

↓ vert. herschaling factor -4

$$y = -4(3(x+1)^2 - 6) = -12(x+1)^2 + 24$$

De formule van de beeldgrafiek is $y = -12(x+1)^2 + 24$.

De top is $(-1, 24)$.

c $y = -1\frac{1}{2}(x+3)^3 + 8$

↓ vert. herschaling factor 2

$$y = 2(-1\frac{1}{2}(x+3)^3 + 8) = -3(x+3)^3 + 16$$

↓ verschuiving $(8, 20)$

$$y = -3(x-8+3)^3 + 16 + 20 = -3(x-5)^3 + 36$$

De formule van de beeldgrafiek is $y = -3(x-5)^3 + 36$.

Het punt van symmetrie is $(5, 36)$.

40

$y_1 = 0,1x^3$

$$y_2 = 4 \cdot y_1 = 4 \cdot 0,1x^3 = 0,4x^3$$

$$y_3 = \frac{1}{5} \cdot y_2 = \frac{1}{5} \cdot 0,4x^3 = 0,08x^3$$

↓ verschuiving $(6, p)$

$$y_4 = 0,08(x-6)^3 + p$$

$$y_4 = 0,08(x-6)^3 + p \left\{ \begin{array}{l} 0,08(0-6)^3 + p = 0 \\ -17,28 + p = 0 \\ p = 17,28 \end{array} \right.$$

door $(0, 0)$

5.3 Formules herleiden en variabelen vrijmaken

Bladzijde 27

41 a $y = \sqrt{16x} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} = 4\sqrt{x}$
Dus $a = 4$.

b $y = \sqrt[3]{27x} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{x} = 3 \cdot \sqrt[3]{x}$
Dus $b = 3$.

42 a *

b $2 \cdot \sqrt[4]{50} + \sqrt[4]{60} \approx 8,101$

43 a $A = \sqrt[3]{125xy} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{xy} = 5 \cdot \sqrt[3]{xy}$
Dus $A = 5 \cdot \sqrt[3]{xy}$.

b $A = \sqrt[4]{256xy} = \sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{xy} = 4 \cdot \sqrt[4]{xy}$
Dus $A = 4 \cdot \sqrt[4]{xy}$.

c $A = \sqrt[5]{-32xy} = \sqrt[5]{-32} \cdot \sqrt[5]{xy} = -2 \cdot \sqrt[5]{xy}$
Dus $A = -2 \cdot \sqrt[5]{xy}$.

d $A = 8\sqrt{25xy} - 3\sqrt{49xy} = 8 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{xy} - 3 \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{xy} = 8 \cdot 5 \cdot \sqrt{xy} - 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{xy} =$
 $40 \cdot \sqrt{xy} - 21 \cdot \sqrt{xy} = 19 \cdot \sqrt{xy}$
Dus $A = 19 \cdot \sqrt{xy}$.

Bladzijde 28

44 a $B = 6 \cdot \sqrt[5]{10a} = 6 \cdot \sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{a} \approx 9,51 \cdot \sqrt[5]{a}$
Dus $B = 9,51 \cdot \sqrt[5]{a}$.

b $B = \frac{\sqrt[5]{a}}{7} = \frac{1}{7} \cdot \sqrt[5]{a} \approx 0,14 \cdot \sqrt[5]{a}$
Dus $B = 0,14 \cdot \sqrt[5]{a}$.

c $B = 2 \cdot \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{-20a} = 2 \cdot \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{-20} \cdot \sqrt[5]{a} \approx 0,18 \cdot \sqrt[5]{a}$
Dus $B = 0,18 \cdot \sqrt[5]{a}$.

d $B = \frac{\sqrt[5]{50a}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{\sqrt[5]{50} \cdot \sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{\sqrt[5]{50}}{\sqrt[5]{2}} \cdot \sqrt[5]{a} \approx 1,90 \cdot \sqrt[5]{a}$
Dus $B = 1,90 \cdot \sqrt[5]{a}$.

45 a $K = 2 \cdot \sqrt[3]{8pq} - \sqrt[3]{pq} = 2 \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{pq} - \sqrt[3]{pq} = 4 \cdot \sqrt[3]{pq} - \sqrt[3]{pq} = 3 \cdot \sqrt[3]{pq}$
Dus $K = 3 \cdot \sqrt[3]{pq}$.

b $F = 2 \cdot \sqrt[4]{9xy} - \sqrt[4]{3x} \cdot \sqrt[4]{6y} = 2 \cdot \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{xy} - \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[4]{y} = 2 \cdot \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{xy} - \sqrt[4]{18} \cdot \sqrt[4]{xy} \approx 1,40 \cdot \sqrt[4]{xy}$
Dus $F = 1,40 \cdot \sqrt[4]{xy}$.

c $N = 4 \cdot \sqrt[5]{243t} + 2 \cdot \sqrt[5]{1024t} = 4 \cdot \sqrt[5]{243} \cdot \sqrt[5]{t} + 2 \cdot \sqrt[5]{1024} \cdot \sqrt[5]{t} = 12 \cdot \sqrt[5]{t} + 8 \cdot \sqrt[5]{t} = 20 \cdot \sqrt[5]{t}$
Dus $N = 20 \cdot \sqrt[5]{t}$.

46 Een wortel is ook een macht, want $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ en $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$.

47 a $y = (200x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{200x} = \sqrt[3]{200} \cdot \sqrt[3]{x} \approx 5,85 \cdot \sqrt[3]{x}$
Dus $y = 5,85 \cdot \sqrt[3]{x}$.

b $A = 5 \cdot (81p)^{\frac{1}{4}} - (625p)^{\frac{1}{4}} = 5 \cdot \sqrt[4]{81p} - \sqrt[4]{625p} = 5 \cdot \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{625} \cdot \sqrt[4]{p} = 15 \cdot \sqrt[4]{p} - 5 \cdot \sqrt[4]{p} = 10 \cdot \sqrt[4]{p}$
Dus $A = 10 \cdot \sqrt[4]{p}$.

48 a $N = 200 \cdot (0,6x)^{\frac{2}{3}} = 200 \cdot 0,6^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \approx 163 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

Dus $N = 163 \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

b $K = 1250 \cdot \sqrt[4]{(1,5x^4y)^3} = 1250 \cdot (1,5x^4y)^{\frac{3}{4}} = 1250 \cdot 1,5^{\frac{3}{4}} \cdot (x^4)^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}} \approx 1694 \cdot x^3 \cdot y^{\frac{3}{4}}$

Dus $K = 1694x^3y^{\frac{3}{4}}$.

49 $y = \sqrt{x-4}$

$\sqrt{x-4} = y$

$x-4 = y^2$

$x = y^2 + 4$

Bladzijde 29

50 Bij het wegwerken van de haakjes zou je moeten gebruiken dat

$(2y-12)^5 = (2y-12) \cdot (2y-12) \cdot (2y-12) \cdot (2y-12) \cdot (2y-12)$.

Naast dat dit veel werk is, wordt het resultaat ook niet overzichtelijker.

Bladzijde 30

51 a $N = 4\sqrt{t-2}$

$4\sqrt{t-2} = N$

$\sqrt{t-2} = \frac{1}{4}N$

$t-2 = \left(\frac{1}{4}N\right)^2$

$t = \frac{1}{16}N^2 + 2$

b $A = 0,4 \cdot \sqrt[3]{t} + 2$

$0,4 \cdot \sqrt[3]{t} + 2 = A$

$0,4 \cdot \sqrt[3]{t} = A - 2$

$\sqrt[3]{t} = 2,5A - 5$

$t = (2,5A - 5)^3$

c $B = 0,2 \cdot \sqrt[3]{t-3}$

$0,2 \cdot \sqrt[3]{t-3} = B$

$\sqrt[3]{t-3} = 5B$

$t-3 = (5B)^3$

$t = 125B^3 + 3$

d $L = 2 \cdot \sqrt[4]{t-5}$

$2 \cdot \sqrt[4]{t-5} = L$

$\sqrt[4]{t-5} = \frac{1}{2}L$

$t-5 = \left(\frac{1}{2}L\right)^4$

$t = \frac{1}{16}L^4 + 5$

52 a $z = 6\sqrt{8 + \frac{1}{4}y}$

$6\sqrt{8 + \frac{1}{4}y} = z$

$\sqrt{8 + \frac{1}{4}y} = \frac{1}{6}z$

$8 + \frac{1}{4}y = \left(\frac{1}{6}z\right)^2$

$\frac{1}{4}y = \frac{1}{36}z^2 - 8$

$y = \frac{1}{9}z^2 - 32$

Dus $a = \frac{1}{9}$ en $b = -32$.

b $L = \frac{1}{6} \cdot \sqrt[3]{A} - 7$

$\frac{1}{6} \cdot \sqrt[3]{A} - 7 = L$

$\frac{1}{6} \cdot \sqrt[3]{A} = L + 7$

$\sqrt[3]{A} = 6(L + 7)$

$\sqrt[3]{A} = 6L + 42$

$A = (6L + 42)^3$

c $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt[5]{3x}$

$\frac{1}{6} \cdot \sqrt[5]{3x} = y$

$\sqrt[5]{3x} = 6y$

$3x = (6y)^5$

$3x = 7776y^5$

$x = 2592y^5$

53 a $y = 2,5x^{\frac{1}{3}}$

$2,5x^{\frac{1}{3}} = y$

$x^{\frac{1}{3}} = 0,4y$

$x = (0,4y)^3$

$x = 0,4^3 \cdot y^3$

$x = 0,064y^3$

b $y = 125x^3$

$125x^3 = y$

$x^3 = 0,008y$

$x = \sqrt[3]{0,008y}$

$x = \sqrt[3]{0,008} \cdot \sqrt[3]{y}$

$x = 0,2 \cdot \sqrt[3]{y}$

$$\begin{aligned}
 54 \quad \mathbf{a} \quad & A = 8(t-2)^3 \\
 & 8(t-2)^3 = A \\
 & (t-2)^3 = \frac{1}{8}A \\
 & t-2 = \sqrt[3]{\frac{1}{8}A} \\
 & t = 2 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{A}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} \quad & P = 0,125(t+5)^3 \\
 & 0,125(t+5)^3 = P \\
 & (t+5)^3 = 8P \\
 & t+5 = \sqrt[3]{8P} \\
 & t = 2 \cdot \sqrt[3]{P} - 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} \quad & L = 5(t-3)^2 \\
 & 5(t-3)^2 = L \\
 & (t-3)^2 = \frac{1}{5}L \\
 & t-3 = \sqrt{\frac{1}{5}L} \\
 & t = 3 + \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{L} \\
 & t \approx 3 + 0,45\sqrt{L} \\
 & \text{Dus } t = 3 + 0,45\sqrt{L}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 55 \quad \mathbf{a} \quad & y = 3x^{2,6} \\
 & 3x^{2,6} = y \\
 & x^{2,6} = \frac{1}{3}y \\
 & x = \left(\frac{1}{3}y\right)^{\frac{1}{2,6}} \\
 & x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2,6}} \cdot y^{\frac{1}{2,6}} \\
 & x \approx 0,66y^{0,38} \\
 & \text{Dus } x = 0,66y^{0,38}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} \quad & y = 0,2 \cdot 2x^{-1,4} \\
 & 0,2 \cdot 2x^{-1,4} = y \\
 & 0,4x^{-1,4} = y \\
 & x^{-1,4} = 2,5y \\
 & x = (2,5y)^{-\frac{1}{1,4}} \\
 & x = 2,5^{-\frac{1}{1,4}} \cdot y^{-\frac{1}{1,4}} \\
 & x \approx 0,52y^{-0,71} \\
 & \text{Dus } x = 0,52y^{-0,71}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} \quad & y = 15(0,2x)^{1,6} \\
 & 15(0,2x)^{1,6} = y \\
 & (0,2x)^{1,6} = \frac{1}{15}y \\
 & 0,2x = \left(\frac{1}{15}y\right)^{\frac{1}{1,6}} \\
 & x = 5 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{1}{1,6}} \cdot y^{\frac{1}{1,6}} \\
 & x \approx 0,92y^{0,625} \\
 & \text{Dus } x = 0,92y^{0,625}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 56 \quad & R = 1,2q^{-0,18} \\
 & 1,2q^{-0,18} = R \\
 & q^{-0,18} = \frac{1}{1,2}R \\
 & q = \left(\frac{1}{1,2}R\right)^{-\frac{1}{0,18}} \\
 & q = \left(\frac{1}{1,2}\right)^{-\frac{1}{0,18}} \cdot R^{-\frac{1}{0,18}} \\
 & q \approx 2,75R^{-5,56} \\
 & \text{Dus } q = 2,75R^{-5,56}. \\
 & \left. \begin{aligned} P &= 5q^{0,12} \\ q &= 2,75R^{-5,56} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} P &= 5 \cdot (2,75R^{-5,56})^{0,12} \\ P &= 5 \cdot 2,75^{0,12} \cdot (R^{-5,56})^{0,12} \\ P &\approx 5,65 \cdot R^{-0,67} \end{aligned} \\
 & \text{Dus } P = 5,65R^{-0,67}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 57 \quad \mathbf{a} \quad & P = 2,5q^{3,6} \\
 & 2,5q^{3,6} = P \\
 & q^{3,6} = 0,4P \\
 & q = (0,4P)^{\frac{1}{3,6}} \\
 & q = 0,4^{\frac{1}{3,6}} \cdot P^{\frac{1}{3,6}} \\
 & q \approx 0,78P^{0,28} \\
 & \text{Dus } q = 0,78P^{0,28}.
 \end{aligned}$$

b $O = 8a^2$ geeft $8a^2 = O$

$$a^2 = \frac{1}{8}O$$

$$a = \left(\frac{1}{8}O\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$K = 4a^3 \left\{ \begin{array}{l} K = 4\left(\left(\frac{1}{8}O\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3 \\ a = \left(\frac{1}{8}O\right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

$$K = 4\left(\frac{1}{8}O\right)^{1,5}$$

$$K = 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{1,5} \cdot O^{1,5}$$

$$K = 0,176... \cdot O^{1,5}$$

Dus $K = 0,18O^{1,5}$.

$K = 0,176... \cdot O^{1,5}$ geeft $0,176... \cdot O^{1,5} = K$

$$O^{1,5} = \frac{1}{0,176...}K$$

$$O = \left(\frac{1}{0,176...}K\right)^{\frac{1}{1,5}}$$

$$O = \left(\frac{1}{0,176...}\right)^{\frac{1}{1,5}} K^{\frac{1}{1,5}}$$

$$O \approx 3,17K^{0,67}$$

Dus $O = 3,17K^{0,67}$

Bladzijde 32

58 a $y = \frac{10}{x-3}$
 $y(x-3) = 10$
 $x-3 = \frac{10}{y}$
 $x = 3 + \frac{10}{y}$

b $y = \frac{x+1}{x-3}$
 $y(x-3) = x+1$
 $xy-3y = x+1$
 $xy-x = 3y+1$
 $x(y-1) = 3y+1$
 $x = \frac{3y+1}{y-1}$

Bladzijde 33

59 a $K = 5 + \frac{8}{q}$
 $K-5 = \frac{8}{q}$
 $q = \frac{8}{K-5}$
b $K = \frac{8}{q-1}$
 $q-1 = \frac{8}{K}$
 $q = 1 + \frac{8}{K}$
c $K = \frac{q+3}{2q-1}$
 $\frac{q+3}{2q-1} = K$
 $q+3 = K(2q-1)$
 $q+3 = 2Kq-K$
 $q-2Kq = -3-K$
 $q(1-2K) = -3-K$
 $q = \frac{-3-K}{1-2K}$
 $q = \frac{K+3}{2K-1}$

d $P = 18 - \frac{5}{q-2}$
 $P-18 = -\frac{5}{q-2}$
 $18-P = \frac{5}{q-2}$
 $q-2 = \frac{5}{18-P}$
 $q = 2 + \frac{5}{18-P}$
e $P = \frac{7}{3q-2}$
 $3q-2 = \frac{7}{P}$
 $3q = \frac{7}{P} + 2$
 $q = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{P} + 2\right)$
 $q = \frac{7}{3P} + \frac{2}{3}$
f $A = \frac{q}{q+4}$
 $\frac{q}{q+4} = A$
 $q = A(q+4)$
 $q = Aq + 4A$
 $q - Aq = 4A$
 $q(1-A) = 4A$
 $q = \frac{4A}{1-A}$

$$\begin{aligned}
 60 \quad \mathbf{a} \quad T &= \frac{a}{a-6} \\
 \frac{a}{a-6} &= T \\
 a &= T(a-6) \\
 a &= Ta - 6T \\
 a - Ta &= -6T \\
 a(1-T) &= -6T \\
 a &= \frac{-6T}{1-T} \\
 a &= \frac{6T}{T-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} \quad L &= 320 - \frac{18}{q-1} \\
 L - 320 &= -\frac{18}{q-1} \\
 320 - L &= \frac{18}{q-1} \\
 q-1 &= \frac{18}{L-320} \\
 q &= 1 + \frac{18}{L-320}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} \quad \frac{3x}{x+y} &= 5-x \\
 \frac{3x}{5-x} &= x+y \\
 x+y &= \frac{3x}{5-x} \\
 y &= \frac{3x}{5-x} - x
 \end{aligned}$$

Bladzijde 34

61 **a** $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ en $y = x^{-1}$ is van de vorm $y = ax^n$, dus de formule $y = \frac{1}{x}$ hoort bij een machtsverband.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} \quad y &= \frac{1}{x} \\
 \downarrow \text{verschuiving } (3, 0) \\
 y &= \frac{1}{x-3} \\
 \downarrow \text{vert. herschaling factor 4} \\
 y &= 4 \cdot \frac{1}{x-3} = \frac{4}{x-3}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{c} \quad y = 1 + \frac{4}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{4}{x-3} = \frac{x-3+4}{x-3} = \frac{x+1}{x-3}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d} \quad y &= \frac{1}{x} \\
 \downarrow \text{verschuiving } (3, 0) \\
 y &= \frac{1}{x-3} \\
 \downarrow \text{vert. herschaling factor 4} \\
 y &= \frac{4}{x-3} \\
 \downarrow \text{verschuiving } (1, 0) \\
 y &= 1 + \frac{4}{x-3} = \frac{x+1}{x-3}
 \end{aligned}$$

e De grafiek van $y = \frac{x+1}{x-3}$ ontstaat uit de grafiek van $y = x^{-1}$ door twee verschuivingen en een herschaling in verticale richting. Omdat $y = x^{-1}$ een machtsverband is, heeft de formule $y = \frac{x+1}{x-3}$ dus ook te maken met een machtsverband.

5.4 Formules met machten en wortels

Bladzijde 36

62 a $y = ax^3$
 $x = 2$ en $y = 48$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} y = ax^3 \\ x = 2 \text{ en } y = 48 \end{matrix}} \right\} a \cdot 2^3 = 48, \text{ dus } a = \frac{48}{2^3} = 6$

b $y = 10x^p$
 $x = 4$ en $y = 80$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} y = 10x^p \\ x = 4 \text{ en } y = 80 \end{matrix}} \right\} 10 \cdot 4^p = 80$

Voer in $y_1 = 10 \cdot 4^x$ en $y_2 = 80$.

De optie snijpunt geeft $x = 1,5$, dus $p = 1,5$.

63 a $y = ax^{-1,81}$
 $x = 12$ en $y = 16$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} y = ax^{-1,81} \\ x = 12 \text{ en } y = 16 \end{matrix}} \right\} a \cdot 12^{-1,81} = 16, \text{ dus } a = \frac{16}{12^{-1,81}} \approx 1437$

Dus $y = 1437x^{-1,81}$.

b $y = 180x^p$
 $x = 4$ en $y = 900$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} y = 180x^p \\ x = 4 \text{ en } y = 900 \end{matrix}} \right\} 180 \cdot 4^p = 900$

Voer in $y_1 = 180 \cdot 4^x$ en $y_2 = 900$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,16$, dus $p \approx 1,16$.

Dus $y = 180x^{1,16}$.

64 a $y = ax^{2,15}$
 $x = 8$ en $y = 600$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} y = ax^{2,15} \\ x = 8 \text{ en } y = 600 \end{matrix}} \right\} a \cdot 8^{2,15} = 600, \text{ dus } a = \frac{600}{8^{2,15}} \approx 6,86$

b $y = 50x^b$
 $x = 8$ en $y = 600$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} y = 50x^b \\ x = 8 \text{ en } y = 600 \end{matrix}} \right\} 50 \cdot 8^b = 600$

Voer in $y_1 = 50 \cdot 8^x$ en $y_2 = 600$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,19$, dus $b = 1,19$.

Bladzijde 37

65 a $A = ap^{1,83}$
 $p = 18$ en $A = 350$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} A = ap^{1,83} \\ p = 18 \text{ en } A = 350 \end{matrix}} \right\} a \cdot 18^{1,83} = 350, \text{ dus } a = \frac{350}{18^{1,83}} = 1,7657...$

$p = 25$ geeft $A = 1,7657... \cdot 25^{1,83} \approx 638$

b $A = 1,7657...p^{1,83}$

$1,7657...p^{1,83} = A$

$p^{1,83} = \frac{1}{1,7657...}A$

$p = \left(\frac{1}{1,7657...}A \right)^{\frac{1}{1,83}}$

$p = \left(\frac{1}{1,7657...} \right)^{\frac{1}{1,83}} \cdot A^{\frac{1}{1,83}}$

$p \approx 0,733 \cdot A^{0,546}$

Dus $p = 0,733A^{0,546}$.

66 a De formule geeft (t afgerond op gehele):

n	5	10	15	20
t	66	100	127	151

Dus de formule past goed bij de tabel.

b Als n verdubbelt van 5 tot 10, dan wordt t volgens de tabel $\frac{100}{66} \approx 1,5$ keer zo groot.

Dat is een toename van ongeveer 50%.

Als n verdubbelt van 10 tot 20, dan wordt t volgens de tabel $\frac{150}{100} = 1,5$ keer zo groot.

Dat is een toename van 50%.

De bewering van Manon klopt.

Bladzijde 38

- 67 a** Neem $3n$ voor n in de formule $t = 25n^{0,6}$.
Je krijgt $t = 25 \cdot (3n)^{0,6} = 25 \cdot 3^{0,6} \cdot n^{0,6} = 3^{0,6} \cdot 25n^{0,6} \approx 1,93 \cdot 25n^{0,6}$.
Dus de tijd dat ze de oefening kan volhouden neemt met ongeveer 93% toe.
- b** Neem $1,4t$ voor t in de formule $n = (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}$.
Je krijgt $n = (0,04 \cdot 1,4t)^{\frac{1}{0,6}} = 1,4^{\frac{1}{0,6}} \cdot (0,04t)^{\frac{1}{0,6}} \approx 1,75 \cdot (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}$.
Dus ze moet het aantal pogingen met een factor 1,75 groter maken.
- 68 a** Neem $2v$ voor v in de formule $r = 0,016v^{1,75}$.
Je krijgt $r = 0,016 \cdot (2v)^{1,75} = 0,016 \cdot 2^{1,75} \cdot v^{1,75} = 2^{1,75} \cdot 0,016v^{1,75} \approx 3,4 \cdot 0,016v^{1,75}$.
Dus de remweg is ongeveer 3,4 keer zo lang.
- b** Neem $2n$ voor n in de formule $M = 150\,000n^{-0,3}$.
Je krijgt $M = 150\,000 \cdot (2n)^{-0,3} = 150\,000 \cdot 2^{-0,3} \cdot n^{-0,3} = 2^{-0,3} \cdot 150\,000n^{-0,3} \approx 0,812 \cdot 150\,000n^{-0,3}$.
Dus M neemt met ongeveer 18,8% af.
- c** $N = 4,4A^{0,3}$
 $4,4A^{0,3} = N$
 $A^{0,3} = \frac{1}{4,4}N$
 $A = \left(\frac{1}{4,4}N\right)^{\frac{1}{0,3}}$
Neem $1,25N$ voor N in deze formule.
Je krijgt $A = \left(\frac{1}{4,4} \cdot 1,25N\right)^{\frac{1}{0,3}} = 1,25^{\frac{1}{0,3}} \cdot \left(\frac{1}{4,4}N\right)^{\frac{1}{0,3}} \approx 2,1 \cdot \left(\frac{1}{4,4}N\right)^{\frac{1}{0,3}}$.
Dus eiland P is ongeveer 2,1 keer zo groot als eiland Q.
- 69 a** Voer in $y_1 = 0,001x^2 - 0,12x + 7,8$.
De optie minimum geeft $x = 60$ en $y = 4,2$.
Ze moet dus een snelheid van 60 km/uur aanhouden.
- b** 3 liter voor 60 km, dus $B = \frac{100}{60} \cdot 3 = 5$.
Los op $0,001v^2 - 0,12v + 7,8 = 5$.
Voer in $y_2 = 5$.
De optie snijpunt geeft $x = 31,71\dots$ en $x = 88,28\dots$.
Hij mag dus met een snelheid van maximaal 88 km/uur rijden.

- 70** $v = 120$ geeft $B = 7,8$
7,8 liter per 100 km, dus voor 60 km is dat $a = \frac{60}{100} \cdot 7,8 = 4,68$ liter.
Om met 4,68 liter 90 km af te leggen moet gelden dat $B = \frac{100}{90} \cdot 4,68 = 5,2$.
Los op $0,001v^2 - 0,12v + 7,8 = 5,2$.
Voer in $y_1 = 0,001x^2 - 0,12x + 7,8$ en $y_2 = 5,2$.
De optie snijpunt geeft $x = 28,37\dots$ en $x = 91,62\dots$.
Hij kan dus met een snelheid van maximaal 91,62... km/uur rijden.
90 km rijden met 91,62... km/uur duurt $\frac{90}{91,62\dots} = 0,98\dots$ uur.
Dat zijn $0,98\dots \cdot 60 \approx 59$ minuten.
Hij kan dus op zijn vroegst om 21:59 uur bij de benzinepomp zijn.

Bladzijde 39

- 71 a** 2 meter = 20 dm, dus $l = 20$.
 $20 \cdot 4 = 80$ kg, dus $g = \frac{80}{2000} = 0,04$
 $d = 0,0005 \cdot 0,04 \cdot 20^4 = 3,2$
De doorbuiging is 3,2 mm.
- b** $0,0005g \cdot 25^4 = 2,5$
 $195,3125g = 2,5$
 $g = 0,0128$
Het totale gewicht van de stenen is $0,0128 \cdot 2500 = 32$ kg.

- c** $g = 0,05$ geeft $d = 0,0005 \cdot 0,05 \cdot l^4 = 0,000025l^4$
 Neem $1,2l$ voor l in de formule $d = 0,000025l^4$.
 Je krijgt $d = 0,000025 \cdot (1,2l)^4 = 0,000025 \cdot 1,2^4 \cdot l^4 = 1,2^4 \cdot 0,000025 \cdot l^4 \approx 2,07 \cdot 0,000025 \cdot l^4$.
 Dus de doorbuiging neemt toe met ongeveer 107%.
- d** $0,000025l^4 = 2,2$
 $l^4 = 88\,000$
 $l = \sqrt[4]{88\,000}$
 $l \approx 17,2$
 De lengte is ongeveer $17,2 \text{ dm} = 172 \text{ cm}$.
- e** $d = 0,000025l^4$
 $0,000025l^4 = d$
 $l^4 = 40\,000d$
 $l = \sqrt[4]{40\,000d}$
 $l = \sqrt[4]{40\,000} \cdot \sqrt[4]{d}$
 $l \approx 14 \cdot \sqrt[4]{d}$
 Dus $l = 14 \cdot \sqrt[4]{d}$.

- 72 a** $v \text{ km/uur} = \frac{1000v}{3600} = \frac{v}{3,6} \text{ m/s}$.
 Dus in 2 seconden leg je $2 \cdot \frac{v}{3,6} = \frac{2v}{3,6} = \frac{v}{1,8}$ meter af.
- b** Los op $0,005v^2 + 0,28v = \frac{v}{1,8}$.
 Voer in $y_1 = 0,005x^2 + 0,28x$ en $y_2 = \frac{x}{1,8}$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 55$.
 Dus bij een snelheid van 55 km/uur geeft de vuistregel dezelfde afstand als de formule.
- c** $v = 120$ geeft $A = 105,6$
 $120 \text{ km/uur} = \frac{120}{3600} \cdot 1000 = 33\frac{1}{3} \text{ m/s}$
 Dus bij $\frac{105,6}{33\frac{1}{3}} \approx 3,2$ seconden.

Bladzijde 40

- 73 a** De maximale score is $S = \frac{1000(16 - \sqrt{16})}{16} \approx 750$.
- b** Los op $\frac{1000(w - \sqrt{w})}{16} = 375$.
 Voer in $y_1 = \frac{1000(x - \sqrt{x})}{16}$ en maak een tabel.
 $x = 9$ geeft $y_1 = 375$
 Dus Eline heeft 9 partijen gewonnen.
- c** In de tabel kijken bij y_1 :
 $x = 6$ geeft $y_1 = 222$ en $x = 8$ geeft $y_1 = 323$.
 Omdat $323 - 222 = 101$ heeft Nova 8 partijen gewonnen.
- 74 a** $G = aR^3$
 $R = 2,03$ en $G = 670$ } $a \cdot 2,03^3 = 670$, dus $a = \frac{670}{2,03^3} \approx 80,1$
- b** $80R^3 = 580$
 $R^3 = 7,25$
 $R = \sqrt[3]{7,25} \approx 1,94$
 Dus de rompomvang is 1,94 m.

Alternatieve uitwerking

$80R^3 = 580$
 Voer in $y_1 = 80x^3$ en $y_2 = 580$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 1,94$.
 Dus de rompomvang is 1,94 m.

- c** Neem $1,2R$ voor R in de formule $G = 80R^3$.
Dit geeft $G = 80 \cdot (1,2R)^3 = 80 \cdot 1,2^3 \cdot R^3 = 1,2^3 \cdot 80R^3 = 1,728 \cdot 80R^3$.
Dus het gewicht is 1,728 keer zo groot.
- d** $G = 80R^3$
 $80R^3 = G$
 $R^3 = \frac{1}{80}G$
 $R = \left(\frac{1}{80}G\right)^{\frac{1}{3}}$
Neem $2G$ voor G in deze formule.
Je krijgt $R = \left(\frac{1}{80} \cdot 2G\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{80}G\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1,26 \cdot \left(\frac{1}{80}G\right)^{\frac{1}{3}}$.
Dus de rompomvang is 1,26 keer zo groot.
- e** Zie vraag d.
 $R = \left(\frac{1}{80}G\right)^{\frac{1}{3}}R = \left(\frac{1}{80}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot G^{\frac{1}{3}} \approx 0,232G^{\frac{1}{3}}$
Dus $R = 0,232G^{\frac{1}{3}}$.

Bladzijde 41

- 75 a** Los op $140W^{0,75} = 2200\sqrt{W} - 40W - 11\,500$.
Voer in $y_1 = 140x^{0,75}$ en $y_2 = 2200\sqrt{x} - 40x - 11\,500$.
De optie snijpunt geeft $x = 58,11\dots$ en $y = 2946,78\dots$, en
 $x = 681,42\dots$ en $y = 18\,672,06\dots$
Bij een gewicht van 58 en 681 kg kunnen elanden juist genoeg voedsel vinden om te voorzien in hun basislichaamsfuncties.
- b** Voer in $y_3 = 2200\sqrt{x} - 40x - 11\,500 - 140x^{0,75}$.
De optie maximum geeft $x \approx 281$ en $y \approx 4530$.
Het optimale gewicht is dus 281 kg.
Een eland heeft dan 4530 kcal per dag over voor andere activiteiten dan het zoeken naar voedsel.
- c** Het kalf moet 58 kg wegen.
Op 1 juli is het gewicht 24 kg.
Daarna zijn er nog $58 - 24 = 34$ dagen nodig.
Dus op 4 augustus kan het jong stoppen met drinken en kan het zelfstandig voor voedsel zorgen.

Bladzijde 42

- 76 a** $n = 2400$, $B = 15$ en $V = 0,05$ geeft $Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 2400}{0,05}} = 1200$.
 $\frac{2400}{1200} = 2$, dus er zal inderdaad twee keer per jaar een bestelling geplaatst worden.
- b** $n = 800$ geeft $Q = \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot 800}{V}} = \sqrt{\frac{1600 \cdot B}{V}} = \sqrt{1600 \cdot \frac{B}{V}} = \sqrt{1600} \cdot \sqrt{\frac{B}{V}} = 40 \cdot \sqrt{\frac{B}{V}}$
Dus $Q = 40\sqrt{\frac{B}{V}}$.
- c** $B = 25$ en $V = 0,80$ geeft $Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot n}{0,80}} = \sqrt{\frac{50 \cdot n}{0,80}} = \sqrt{\frac{50}{0,80} \cdot n} = \sqrt{\frac{50}{0,80}} \cdot \sqrt{n} \approx 7,9 \cdot \sqrt{n}$.
Dus $Q = 7,9\sqrt{n}$.
- d** 200 artikelen per jaar verdeeld over 4 keer bestellen, dus $Q = \frac{200}{4} = 50$.
 $Q = \sqrt{\frac{2Bn}{V}}$ met $B = 25$ en $n = 200$ geeft $\sqrt{\frac{10\,000}{V}} = 50$.
Voer in $y_1 = \sqrt{\frac{10\,000}{x}}$ en $y_2 = 50$.
De optie snijpunt geeft $x = 4$.
Dus $V = 4$.
$$\left. \begin{array}{l} V = 0,01p \cdot I \\ I = 160 \text{ en } V = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,01p \cdot 160 = 4 \\ 1,6p = 4 \\ p = \frac{4}{1,6} = 2,5 \end{array}$$

Bladzijde 43

77 a $t = 0,90$, $B = 23$ en $l = 1,80$ geeft $S = 0,90 \cdot 23^{-\frac{2}{3}} \cdot 1,80^{-\frac{1}{2}} \approx 0,083$.

b $B = \frac{m}{h^2}$ invullen in $S = t \cdot B^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$S = t \cdot \left(\frac{m}{h^2}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{-\frac{1}{2}} = t \cdot (m \cdot l^{-2})^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{-\frac{1}{2}} = t \cdot m^{-\frac{2}{3}} \cdot (l^{-2})^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{-\frac{1}{2}} = t \cdot m^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{\frac{4}{3}} \cdot l^{-\frac{1}{2}} = t \cdot m^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}} = t \cdot m^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{\frac{5}{6}}$$

c $S = t \cdot m^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{\frac{5}{6}} = t \cdot \frac{1}{m^{\frac{2}{3}}} \cdot l^{\frac{5}{6}} = \frac{t \cdot l^{\frac{5}{6}}}{m^{\frac{2}{3}}} = \frac{t \cdot \sqrt[6]{l^5}}{\sqrt[3]{m^2}}$

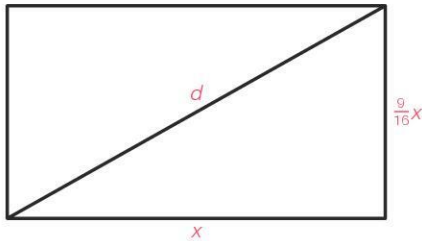
d $S = t \cdot m^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{\frac{5}{6}}$
 $t = 0,95$ en $l = 1,75$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} S = t \cdot m^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{\frac{5}{6}} \\ t = 0,95 \text{ en } l = 1,75 \end{matrix}} \right\} S = 0,95 \cdot m^{-\frac{2}{3}} \cdot 1,75^{\frac{5}{6}}$
 $0,95 \cdot m^{-\frac{2}{3}} \cdot 1,75^{\frac{5}{6}} = S$
 $m^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{0,95 \cdot 1,75^{\frac{5}{6}}} S$

$$m = \left(\frac{1}{0,95 \cdot 1,75^{\frac{5}{6}}} S\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{0,95 \cdot 1,75^{\frac{5}{6}}}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot S^{-\frac{1}{2}} \approx 1,86 S^{-1,5}$$

Dus $m = 1,86 S^{-1,5}$.

78 a De lange zijde is x cm, dus de korte zijde is $\frac{9}{16}x$ cm.

Dus de oppervlakte A is $A = x \cdot \frac{9}{16}x = \frac{9}{16}x^2$ cm².



De stelling van Pythagoras geeft $d^2 = x^2 + \left(\frac{9}{16}x\right)^2$

$$d^2 = x^2 + \frac{81}{256}x^2$$

$$d^2 = \frac{337}{256}x^2$$

$A = \frac{9}{16}x^2$
 $d^2 = \frac{337}{256}x^2$, dus $x^2 = \frac{256}{337}d^2$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} A = \frac{9}{16}x^2 \\ d^2 = \frac{337}{256}x^2 \end{matrix}} \right\} A = \frac{9}{16} \cdot \frac{256}{337}d^2$
 $A = \frac{144}{337}d^2$

b De lange zijde is x cm, dus de korte zijde is $\frac{3}{7}x$ cm.

Dus de oppervlakte A is $A = x \cdot \frac{3}{7}x = \frac{3}{7}x^2$ cm².

De stelling van Pythagoras geeft $d^2 = x^2 + \left(\frac{3}{7}x\right)^2$

$$d^2 = x^2 + \frac{9}{49}x^2$$

$$d^2 = \frac{58}{49}x^2$$

$A = \frac{3}{7}x^2$
 $d^2 = \frac{58}{49}x^2$, dus $x^2 = \frac{49}{58}d^2$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} A = \frac{3}{7}x^2 \\ d^2 = \frac{58}{49}x^2 \end{matrix}} \right\} A = \frac{3}{7} \cdot \frac{49}{58}d^2$
 $A = \frac{21}{58}d^2$

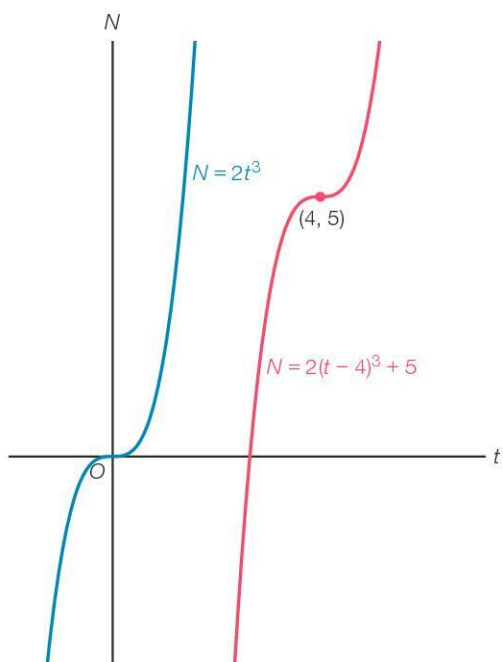
Dus $a = \frac{21}{58}$.

Diagnostische toets

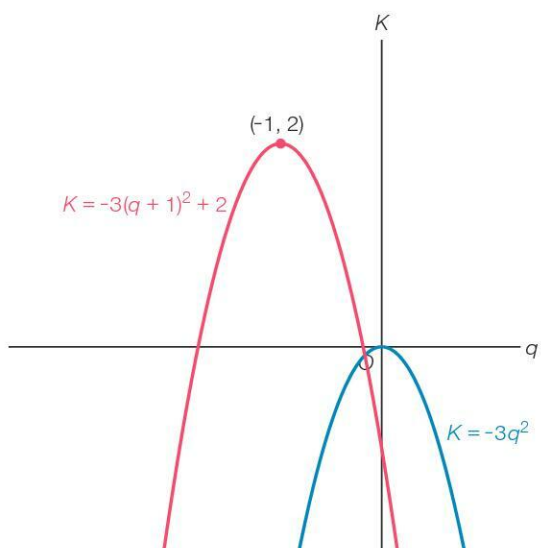
Bladzijde 46

- 1** a $A = \frac{18a^5}{6a^2} - \frac{(5a^2b)^2}{5ab^2} = 3a^3 - \frac{25a^4b^2}{5ab^2} = 3a^3 - 5a^3 = -2a^3$
 b $B = (3x^2)^3 - 2x \cdot 4x^5 + 3x^2 \cdot 5x^3 = 27x^6 - 8x^6 + 15x^5 = 19x^6 + 15x^5$
 c $C = (2p^2q)^3 - 5pq \cdot 2p^2q^4 + 3p^3 \cdot (pq)^3 - \frac{8p^5q^6}{2p^2q} = 8p^6q^3 - 10p^3q^5 + 3p^3 \cdot p^3q^3 - 4p^3q^5$
 $= 8p^6q^3 - 10p^3q^5 + 3p^6q^3 - 4p^3q^5 = 11p^6q^3 - 14p^3q^5$
- 2** a $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$
 b $a^4 \cdot \frac{1}{a^7} = a^4 \cdot a^{-7} = a^{-3}$
 c $\frac{\left(\frac{1}{a^{12}}\right)}{a^{-5}} = \frac{a^{-12}}{a^{-5}} = a^{-12-(-5)} = a^{-7}$
- 3** a $3a^2b^{-3} = 3a^2 \cdot \frac{1}{b^3} = \frac{3a^2}{b^3}$
 b $\left(\frac{1}{2}a\right)^{-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \cdot a^{-5} = (2^{-1})^{-5} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{2^5}{a^5} = \frac{32}{a^5}$
 c $\frac{2}{7}a^{-1}b^4 = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{a} \cdot b^4 = \frac{2b^4}{7a}$
- 4** a $4a^{-1\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{1}{a^{1\frac{1}{2}}} = \frac{4}{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{a\sqrt{a}}$
 b $a^{-2} \cdot b^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{a^2} \cdot b^{\frac{1}{5}} = \frac{b^{\frac{1}{5}}}{a^2} = \frac{\sqrt[5]{b}}{a^2}$
 c $7a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{3}{5}} = 7 \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \cdot b^{\frac{3}{5}} = \frac{7b^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{7 \cdot \sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[3]{a}}$
- 5** a $x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{2\frac{1}{3}}$
 b $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}$
 c $\frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{x^3} = \frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^3} = \frac{x^{2\frac{1}{2}}}{x^3} = x^{-\frac{1}{2}}$
- 6** a $y = 7 \cdot \sqrt[5]{x^2} = 7 \cdot x^{\frac{2}{5}}$
 Dus $y = 7x^{\frac{2}{5}}$.
 b $y = 6x^{-0,4} \cdot x^{1,2} = 6x^{0,8}$
 Dus $y = 6x^{0,8}$.
 c $y = \frac{10}{2x^3 \cdot \sqrt{x}} = \frac{10}{2x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{10}{2} \cdot \frac{1}{x^{3\frac{1}{2}}} = 5x^{-3\frac{1}{2}}$
 Dus $y = 5x^{-3\frac{1}{2}}$.
- 7** $y = 4(x-2)^3 + 1$
 $\downarrow$ verschuiving $(-1, -5)$
 $y = 4(x+1-2)^3 + 1 - 5$
 De formule van de beeldgrafiek is $y = 4(x-1)^3 - 4$.

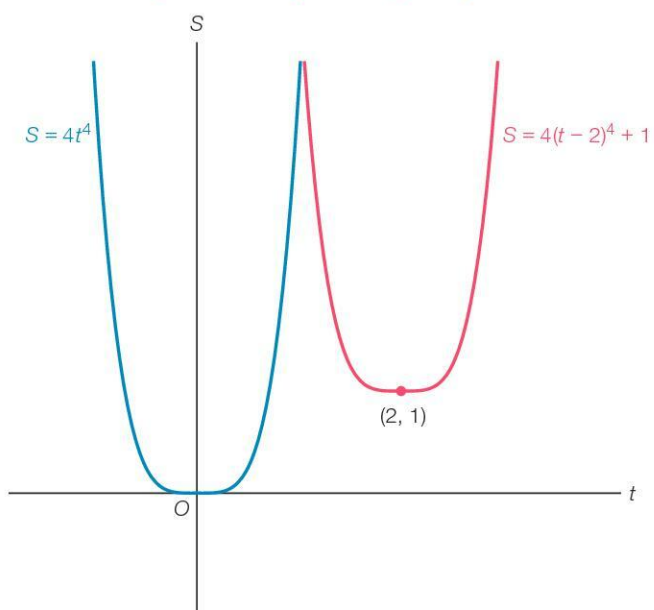
8 a



b



c



- 9 $y = 1\frac{1}{2}(x-2)^4 - 5$
 $\downarrow$ vert. herschaling factor 4
 $y = 4(1\frac{1}{2}(x-2)^4 - 5) = 6(x-2)^4 - 20$
 $\downarrow$ verschuiving $(-3, -16)$
 $y = 6(x+3-2)^4 - 20 - 16$
 De formule van de beeldgrafiek is $y = 6(x+1)^4 - 36$.
 De top is $(-1, -36)$.

Bladzijde 47

- 10 a $A = \sqrt[3]{100b} - 4 \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[3]{b} - 4 \cdot \sqrt[3]{b} = 4,64... \cdot \sqrt[3]{b} - 4 \cdot \sqrt[3]{b} \approx 0,64 \cdot \sqrt[3]{b}$
 Dus $A = 0,64 \cdot \sqrt[3]{b}$.
- b $B = 3 \cdot \sqrt[4]{16pq} - \sqrt[4]{3p} \cdot \sqrt[4]{27q} = 3 \cdot \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{pq} - \sqrt[4]{81pq} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{pq} - \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{pq}$
 $= 6 \cdot \sqrt[4]{pq} - 3 \cdot \sqrt[4]{pq} = 3 \cdot \sqrt[4]{pq}$
 Dus $B = 3 \cdot \sqrt[4]{pq}$.
- 11 a $F = 0,125\sqrt{p-5}$
 $0,125\sqrt{p-5} = F$
 $\sqrt{p-5} = 8F$
 $p-5 = (8F)^2$
 $p = 64F^2 + 5$
 Dus $a = 64$ en $b = 5$.
- b $S = 0,4(R-7)^2$
 $0,4(R-7)^2 = S$
 $(R-7)^2 = 2,5S$
 $R-7 = \sqrt{2,5S}$
 $R = 7 + \sqrt{2,5} \cdot \sqrt{S}$
 $R \approx 7 + 1,58\sqrt{S}$
 Dus $R = 7 + 1,58\sqrt{S}$.
- c $y = 2(0,3x)^{1,25}$
 $2(0,3x)^{1,25} = y$
 $(0,3x)^{1,25} = \frac{1}{2}y$
 $0,3x = \left(\frac{1}{2}y\right)^{\frac{1}{1,25}}$
 $x = \frac{1}{0,3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1,25}} \cdot y^{\frac{1}{1,25}}$
 $x \approx 1,91 \cdot y^{0,8}$
 Dus $x = 1,91y^{0,8}$.
- 12 a $F = 4 + \frac{3}{p-5}$
 $F - 4 = \frac{3}{p-5}$
 $p-5 = \frac{3}{F-4}$
 $p = 5 + \frac{3}{F-4}$
- b $G = \frac{3q-1}{4q+5}$
 $\frac{3q-1}{4q+5} = G$
 $3q-1 = G(4q+5)$
 $3q-1 = 4Gq+5G$
 $3q-4Gq = 5G+1$
 $q(3-4G) = 5G+1$
 $q = \frac{5G+1}{3-4G}$
- 13 a $t = an^{0,75}$
 $n = 10$ en $t = 2$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} t = an^{0,75} \\ n = 10 \text{ en } t = 2 \end{matrix}} \right\} a \cdot 10^{0,75} = 2$, dus $a = \frac{2}{10^{0,75}} \approx 0,356$
- b $t = 0,36n^{0,75}$
 Neem $2n$ voor n in de formule $t = 0,36n^{0,75}$.
 Dit geeft $t = 0,36 \cdot (2n)^{0,75} = 0,36 \cdot 2^{0,75} \cdot n^{0,75} = 2^{0,75} \cdot 0,36n^{0,75} \approx 1,68 \cdot 0,36n^{0,75}$.
 Dus de tijd neemt met 68% toe.
- c $t = 0,36n^{0,75}$
 $0,36n^{0,75} = t$
 $n^{0,75} = \frac{1}{0,36}t$
 $n = \left(\frac{1}{0,36}t\right)^{\frac{1}{0,75}}$
 Neem $1,5t$ voor t in deze formule.
 Dit geeft $n = \left(\frac{1}{0,36} \cdot 1,5t\right)^{\frac{1}{0,75}} = 1,5^{\frac{1}{0,75}} \cdot \left(\frac{1}{0,36}t\right)^{\frac{1}{0,75}} \approx 1,72 \cdot \left(\frac{1}{0,36}t\right)^{\frac{1}{0,75}}$.
 Dus het aantal geleerde symbolen wordt 1,72 keer zo groot.

14 a $l = 1,73$ geeft $G = 13,4 \cdot 1,73^3 \approx 69,38$

Dus Rutger woog ongeveer 69 kg.

b $13,4l^3 = 32$

$$l^3 = \frac{32}{13,4}$$

$$l \approx \sqrt[3]{\frac{32}{13,4}} \approx 1,34$$

Dus Rutger was ongeveer 134 cm lang.

Alternatieve uitwerking

$$13,4l^3 = 32$$

Voer in $y_1 = 13,4x^3$ en $y_2 = 32$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,34$ m.

Dus Rutger was ongeveer 134 cm lang.

c $G = 13,4l^3$

$$13,4l^3 = G$$

$$l^3 = \frac{1}{13,4} G$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{1}{13,4} G}$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{1}{13,4}} \cdot \sqrt[3]{G}$$

$$l \approx 0,42 \cdot \sqrt[3]{G}$$

$$\text{Dus } l = 0,42 \cdot \sqrt[3]{G}.$$

Bladzijde 54

- 2 a** De sectoren van de schijf zijn niet even groot, dus de kansen ook niet.
b De sector van 3 is een zesde deel van de hele schijf.

$$P(\text{pijl wijst 3 aan}) = \frac{1}{6}$$

Bladzijde 55

3 a

6		e		e	x	xe
5	e		e		e	x
4		e		e		e
3	e		e		e	
2		e		e		e
1	e		e		e	
	1	2	3	4	5	6

rood
groen

x som meer dan 10
e som is even

$$P(\text{som is meer dan 10}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

b $P(\text{som is even}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

c

6	x	x	x	x	x	g
5	x	x	x	x	g	
4	x	x	x	g		
3	x	x	g			
2	x	g				
1	g					
	1	2	3	4	5	6

rood
groen

g gelijk aantal ogen
x rood hoger dan groen

$$P(\text{gelijk aantal ogen}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

d $P(\text{rood hoger dan groen}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

e

6			2			
5			2			
4		2				2
3	2				2	
2				2		
1			2			
	1	2	3	4	5	6

rood
groen

VERSCHIL

$$P(\text{verschil is 2}) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

4 a

6				1	0	
5				1	0	1
4			1	0	1	
3		1	0	1		
2	1	0	1			
1	0	1				
	1	2	3	4	5	6

VERSCHIL

$$P(\text{verschil is minder dan 2}) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

b

PRODUCT

6	6	12	18	24	30	36
5	5	10	15	20	25	30
4	4	8	12	16	20	24
3	3	6	9	12	15	18
2	2	4	6	8	10	12
1	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6

$$P(\text{product is } 12) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\text{c } P(\text{product is minder dan } 30) = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

$$5 \text{ a } P(\text{aantallen gelijk}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$$\text{b } P(\text{som is } 8) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$$\text{c } P(\text{product is minstens } 16) = \frac{9}{32}$$

$$\text{d } P(\text{verschil is } 1) = \frac{7}{32}$$

4			1	g	8	1	24	28	32
3		1	g	1	8	18	21	24	
2	1	g	1		8			16	
1	g	1				8			
	1	2	3	4	5	6	7	8	

g gelijk
 8 som = 8
 16, 18, ... zijn producten
 1 verschil = 1

$$6 \text{ Ze schaatsen elk } \frac{10\,000}{400} = 25 \text{ rondjes. De training duurt } 25 + 3 + 1 = 29 \text{ rondjes.}$$

Daarvan zijn ze $25 - 3 - 1 = 21$ alle drie aan het schaatsen.

$$\text{Dus } P(\text{alle drie aan het schaatsen}) = \frac{21}{29}.$$

Bladzijde 56

7 a Er zijn 6 mogelijkheden om met de drie dobbelstenen hetzelfde aantal ogen te gooien, namelijk 111, 222, 333, 444, 555 en 666.

b In totaal zijn er $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ verschillende uitkomsten mogelijk.

$$\text{c Dus } P(\text{hetzelfde aantal ogen}) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

Bladzijde 57

8 Nee, als de drie dobbelstenen dezelfde kleur hadden gehad, zou de uitkomst van 7c hetzelfde zijn geweest.

Zowel het aantal mogelijke uitkomsten als het aantal gunstige uitkomsten blijft hetzelfde.

9 a Het aantal mogelijke uitkomsten is $2^4 = 16$.
 Gunstige uitkomsten zijn kkkk en mmmm.

$$P(\text{vier keer hetzelfde}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

b Gunstige uitkomsten zijn kmmm, mkmm, mmkm en mmmk.

$$P(\text{één keer kop}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

c Er zijn $\binom{4}{2} = 6$ uitkomsten met twee keer munt, $\binom{4}{3} = 4$ uitkomsten met drie keer munt en er is $\binom{4}{4} = 1$ uitkomst met vier keer munt.

$$P(\text{meer dan één keer munt}) = \frac{11}{16}$$

- 10 a** Het aantal mogelijke uitkomsten is $6^3 = 216$.
 Gunstige uitkomsten zijn 113, 131, 311, 122, 212 en 221.

$$P(\text{som is 5}) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$
- b** Som is 3: uitkomst 111
 Som is 4: uitkomsten 112, 121 en 211
 Som is 5: 6 uitkomsten, zie vraag a
 Som is 6: 114 3 keer
 123 3! = 6 keer
 222 1 keer
 Er zijn $1 + 3 + 6 + 10 = 20$ gunstige uitkomsten.

$$P(\text{som is minder dan 7}) = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$$
- c** Gunstige uitkomsten zijn 333, 324 (6 keer) en 315 (6 keer).
 Er zijn $1 + 6 + 6 = 13$ gunstige uitkomsten.

$$P(\text{met minstens één dobbelsteen 3 en som is 9}) = \frac{13}{216}$$

- 11 a** Het aantal mogelijke uitkomsten is $2^6 = 64$.
 Gunstige uitkomsten zijn kkkkkkm 6 keer

$$P(\text{vijf keer kop}) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$
- b** Gunstige uitkomsten zijn mmmkkk $\binom{6}{3} = 20$ keer

$$P(\text{drie keer munt}) = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$
- c** Gunstige uitkomsten zijn mmmmmm
 kmmmmm 6 keer
 kkmmmm $\binom{6}{2} = 15$ keer
 Er zijn $1 + 6 + 15 = 22$ gunstige uitkomsten.

$$P(\text{minder dan drie keer kop}) = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

- 12** Het aantal mogelijke combinaties is $\binom{15}{3} = 455$.

Gunstige combinaties zijn:

1 2 12	2 3 10	3 4 8	4 5 6
1 3 11	2 4 9	3 5 7	
1 4 10	2 5 8		
1 5 9	2 6 7		
1 6 8			

Er zijn 12 gunstige combinaties.

$$P(\text{som is 15}) = \frac{12}{455}$$

6.2 Empirische kansen

Bladzijde 59

- 13 a** $P(6 \text{ ogen gooien}) = \frac{30}{300} = \frac{1}{10} = 0,1$
- b** Nee, waarschijnlijk is deze dobbelsteen niet eerlijk.
 Bij een eerlijke dobbelsteen geldt $P(6 \text{ ogen gooien}) = \frac{1}{6} \approx 0,167$ en die kans is veel groter dan 0,1.

14 a	<i>N</i>	50	100	150	200	250	300	500	1000
	<i>f</i>	31	61	89	114	141	174	282	579
	$\frac{f}{N}$	0,62	0,61	0,59	0,57	0,56	0,58	0,56	0,58

b De beste schatting krijg je door alle worpen te nemen.

$$P(\text{punt omhoog}) = \frac{31 + 61 + 89 + 114 + 141 + 174 + 282 + 579}{50 + 100 + 150 + 200 + 250 + 300 + 500 + 1000} = \frac{1471}{2550} \approx 0,58$$

c De twee mogelijkheden bij een worp met een punaise zijn niet even waarschijnlijk, net zomin als de twee mogelijkheden bij de eerstvolgende gymnastiekles: wel een been breken of niet een been breken.

Je kunt dus niet zeggen dat $P(\text{punt omhoog}) = \frac{1}{2}$.

Bladzijde 61

- 15 a** empirische kans
b theoretische kans
c empirische kans
d theoretische kans
e empirische kans

16 a $P(\text{max. temperatuur minstens } 15^\circ\text{C}) = \frac{43 + 32}{109} \approx 0,69$

b $P(\text{minder dan 5,0 mm regen}) = \frac{50 + 16 + 25}{109} \approx 0,83$

c $P(\text{minstens 1 uur zon}) = \frac{30 + 36 + 25}{109} \approx 0,83$

Bladzijde 62

17 a $P(\text{georganiseerde reis ging naar België}) = \frac{699}{2633} \approx 0,265$

b $P(\text{niet-georganiseerde reis ging naar België}) = \frac{411}{1067} \approx 0,385$

c $0,385 > 0,265$ en dus gingen er verhoudingsgewijs meer mensen naar België die een niet-georganiseerde reis deden dan die een georganiseerde reis deden.

Bladzijde 64

18 Bereken de kans dat een willekeurig gekozen ondervraagde die veertigplusser is, voor verlaten is.

19 a $P(\text{jongere}) = \frac{24}{96} = 0,25$

b $P(\text{jongere heeft geen mening}) = \frac{3}{24} = 0,125$

c $P(\text{jongere en geen mening}) = \frac{3}{96} \approx 0,031$

d $P(\text{ondervraagde die geen mening heeft, is jongere}) = \frac{3}{16} \approx 0,188$

20 a $P(\text{dertigjarige wordt 60}) = \frac{845\,134}{983\,378} \approx 0,859$

b $P(\text{dertigjarige sterft voor zijn 40e}) = \frac{983\,378 - 967\,252}{983\,378} \approx 0,016$

c $P(\text{tachtigjarige wordt minstens 95}) = \frac{11\,472}{344\,752} \approx 0,033$

d $P(\text{pasgeboren baby sterft voor zijn 30e}) = \frac{1\,000\,000 - 983\,378}{1\,000\,000} \approx 0,017$

e $P(\text{zestigjarige haalt wel zijn 70e, maar niet zijn 80e}) = \frac{659\,273 - 344\,752}{845\,134} \approx 0,372$

- 21** a $P(\text{uit west}) = \frac{2581}{8527} \approx 0,303$
 b $P(\text{naar oost}) = \frac{2970}{8527} \approx 0,348$
 c $P(\text{uit noord naar west}) = \frac{982}{2088} \approx 0,470$
 d $P(\text{rechtdoor}) = P(N \rightarrow Z \text{ of } O \rightarrow W \text{ of } Z \rightarrow N \text{ of } W \rightarrow O)$

$$= \frac{53 + 1711 + 51 + 1682}{8527} = \frac{3497}{8527} \approx 0,410$$

 e $P(\text{linksaf}) = P(N \rightarrow O \text{ of } O \rightarrow Z \text{ of } Z \rightarrow W \text{ of } W \rightarrow N)$

$$= \frac{1053 + 154 + 830 + 408}{8527} = \frac{2445}{8527} \approx 0,287$$

 f $P(\text{uit west naar noord}) = \frac{408}{2581} \approx 0,158$
 g $P(\text{uit west}) = \frac{2581}{8527}$, dus verwachte aantal is $\frac{2581}{8527} \cdot 7520 \approx 2276$.

Bladzijde 65

- 22** a $P(\text{passagier heeft minder dan 20 km afgelegd})$
 b $P(\text{passagier die tussen de 20 en 40 km heeft afgelegd, heeft een abonnement})$
 c $P(\text{passagier die geen abonnement heeft, heeft tussen de 20 en 40 km afgelegd})$

- 23** 3,5% van 800 is 28
 8,5% van 400 is 34

	gerechtigd ruimte te betreden		
	ja	nee	
toegelaten	772	34	806
geweigerd	28	366	394
	800	400	1200

$$P(\text{niet toegelaten persoon is ten onrechte geweigerd}) = \frac{28}{394} \approx 0,071$$

- 24** a Het gedeelte jongens op de hele school is $\frac{504}{1120} = 0,45$.
 Op het vwo mag je daarom $0,45 \cdot 520 = 234$ jongens verwachten.
 Op de havo zijn dat er $0,45 \cdot 600 = 270$.
 b $P(\text{vwo voor jongen}) = \frac{210}{504} \approx 0,417$
 $P(\text{vwo voor willekeurige leerling}) = \frac{520}{1120} \approx 0,464$
 Deze kansen zijn niet hetzelfde.

Bladzijde 67

- 25** $P(\text{leerling is jongen onder voorwaarde leerling heeft blauwe ogen}) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$
 $P(\text{leerling is jongen}) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ } kansen zijn hetzelfde

- 26** $P(\text{bloedgroep 0 onder voorwaarde Rh-}) = \frac{25}{30} \approx 0,833$
 $P(\text{bloedgroep 0}) = \frac{180}{200} = 0,9$ } $\frac{25}{30} \neq 0,9$
 De gebeurtenissen 'bloedgroep 0' en 'Rh-' zijn dus afhankelijk.

$$27 \quad \left. \begin{aligned} P(\text{bijbaan onder voorwaarde uitwonend}) &= \frac{480}{650} \approx 0,738 \\ P(\text{bijbaan}) &= \frac{1600}{2000} = 0,8 \end{aligned} \right\} \frac{480}{650} \neq 0,8$$

Het hebben van een bijbaan en uitwonend zijn, zijn dus afhankelijke gebeurtenissen.

28 Stel x het aantal elektrische fietsen van abonneementhouders.

	elektrisch	niet elektrisch	
abbonement	x	$120 - x$	120
geen abbonement	$160 - x$	$20 + x$	180
	160	140	300

$$P(\text{elektrisch onder voorwaarde abbonement}) = P(\text{elektrisch})$$

$$\frac{x}{120} = \frac{160}{300}$$

$$x = 64$$

$$P(\text{niet elektrisch en geen abbonement}) = \frac{20 + x}{300} = \frac{20 + 64}{300} = 0,28$$

6.3 Het vaasmodel en de productregel

Bladzijde 69

- 29 a Elke leerling kan maar één keer gekozen worden, dus herhaling is niet toegestaan.
 b Het maakt niet uit in welke volgorde de leerlingen gekozen worden.
 c Er zijn $\binom{15}{3} = 455$ drietallen mogelijk.

Bladzijde 71

$$30 \quad P(\text{geen rode knikkers}) = \frac{\binom{8}{0} \cdot \binom{7}{5}}{\binom{15}{5}}$$

$$31 \quad \text{a} \quad P(3 \text{ rode, 2 witte en 2 groene}) = \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{21}{7}} \approx 0,126$$

$$\text{b} \quad P(\text{geen groene}) = \frac{\binom{15}{7}}{\binom{21}{7}} \approx 0,055$$

$$\text{c} \quad P(2 \text{ rode en 5 witte}) = \frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{8}{5}}{\binom{21}{7}} \approx 0,010$$

$$\text{d} \quad P(2 \text{ witte}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{13}{5}}{\binom{21}{7}} \approx 0,310$$

$$32 \quad \text{a} \quad P(3 \text{ witte en 3 blauwe}) = \frac{\binom{32}{3} \cdot \binom{12}{3}}{\binom{62}{6}} \approx 0,018$$

$$\text{b} \quad P(\text{geen witte}) = \frac{\binom{30}{6}}{\binom{62}{6}} \approx 0,010$$

$$\text{c } P(4 \text{ witte}) = \frac{\binom{32}{4} \cdot \binom{30}{2}}{\binom{62}{6}} \approx 0,254$$

$$\text{d } P(1 \text{ rode}) = \frac{\binom{18}{1} \cdot \binom{44}{5}}{\binom{62}{6}} \approx 0,318$$

$$\text{33 } P(1 \text{ appel, 1 peer en 1 sinaasappel}) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{15}{3}} \approx 0,264$$

Bladzijde 72

34 80 knikkers waarvan één rood (de fiets), vijf wit (de boekenbonnen) en 74 zwart (de niet-prijzen).

$$\text{35 a } P(\text{Monique 1 prijs}) = \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{30}{2}}{\binom{40}{3}} \approx 0,440$$

$$\text{b } P(\text{Barbara 2 tweede prijzen}) = \frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{30}{2}}{\binom{40}{4}} \approx 0,100$$

$$\text{c } P(\text{geen van beiden een prijs}) = \frac{\binom{30}{7}}{\binom{40}{7}} \approx 0,109$$

$$\text{d } P(\text{Barbara 4 prijzen}) = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{40}{4}} \approx 0,002$$

$$\text{36 a } P(\text{Jimmy 2 azen}) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} \approx 0,005$$

$$\text{b } P(\text{alle azen uitgedeeld}) = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{10}}{\binom{52}{14}} \approx 0,004$$

$$\text{37 a } P(\text{geen andere spelers azen}) = \frac{\binom{48}{12}}{\binom{50}{12}} \approx 0,574$$

$$\text{b } P(\text{ook Anne 2 azen}) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{50}{2}} \approx 0,001$$

$$\text{38 } P(\text{drie in de rij bij balie 2}) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{25}{2}}{\binom{30}{5}} \approx 0,021$$

$$39 \quad P(\text{alle appels gaaf}) = P(\text{geen rode}) = \frac{\binom{490}{25}}{\binom{500}{25}} \approx 0,596$$

Bladzijde 73

- 40 a Vaas I bevat 4 knikkers, daarvan zijn er 3 rood.
 b $P(\text{rode uit II}) = \frac{2}{3}$
 c Er zijn 12 mogelijkheden.
 De uitkomst rr komt 6 keer voor.
 $P(2 \text{ rode}) = \frac{6}{12} = 0,5$
 d $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = 0,5$ en dat klopt.

Bladzijde 75

- 41 a Afhankelijk, want de kinderen komen uit hetzelfde gezin en bijvoorbeeld in Noord-Europa is de kans op blauwe ogen veel groter dan in Azië.
 b Onafhankelijk, de plaatsen liggen heel erg ver van elkaar af.
 $P(\text{regen in Breda en Sydney}) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14$
 c Afhankelijk, de plaatsen liggen vrij dicht bij elkaar.
- 42 a $P(2 \text{ witte}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$
 b $P(1 \text{ blauwe en } 1 \text{ rode}) = P(r \text{ b}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$
 c $P(\text{geen blauwe}) = P(\text{b b}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{50}$
 d $P(\text{geen rode}) = P(r r) = \frac{8}{10} \cdot 1 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$
- 43 a $P(3 \text{ bananen}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$
 b $P(\text{geen kersen}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
 c $P(2 \text{ citroenen en } 1 \text{ banaan}) = P(c \text{ c b}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$
 d $P(3 \text{ citroenen}) = 0$

Bladzijde 76

- 44 a $P(18 \text{ ogen}) = P(4 \text{ 6 } 8) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \approx 0,005$
 b $P(\text{geen enkele } 3) = P(\text{3 3 3}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \approx 0,547$
 c $P(\text{elke steen hoogstens } 4) = 1 \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \approx 0,333$
 d $P(\text{elke steen drievoud}) = P(3 \text{ 3 of } 6 \text{ 3 of } 6) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{8} \approx 0,021$
- 45 a $P(\text{Jeanine wint } 3 \text{ keer}) = 0,65 \cdot 0,45 \cdot 0,5 \approx 0,146$
 b $P(\text{Jeanine wint alleen schaken}) = 0,65 \cdot 0,55 \cdot 0,5 \approx 0,179$

46 a $P(\text{Onno wint } 5000 \text{ euro}) = \frac{4}{100} \cdot 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \approx 0,008$

b $P(2 \text{ mannen en } 2 \text{ vrouwen lopen prijs mis bij laatste opdracht}) = \frac{\binom{40}{2} \cdot \binom{60}{2}}{\binom{100}{4}} \cdot 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \approx 0,101$

6.4 De somregel

Bladzijde 78

- 47 a** Maak een rooster zoals in figuur 6.9.
- $$P(\text{som is } 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, P(\text{som is } 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \text{ en } P(\text{som is } 3 \text{ of som is } 4) = \frac{5}{36}$$
- b** ja
- c** $P(\text{product is } 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
- $$P(\text{som is } 4 \text{ of product is } 4) = P(13 \text{ of } 22 \text{ of } 31 \text{ of } 14 \text{ of } 41) = \frac{5}{36}$$
- $$P(\text{som is } 4) + P(\text{product is } 4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$
- Dus $P(\text{som is } 4 \text{ of product is } 4) \neq P(\text{som is } 4) + P(\text{product is } 4)$.

Bladzijde 79

- 48 a** $P(\text{één } 3) = P(3 \text{ } \cancel{3} \text{ } \cancel{3}) + P(\cancel{3} \text{ } 3 \text{ } \cancel{3}) + P(\cancel{3} \text{ } \cancel{3} \text{ } 3)$
- $$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = 0,45$$
- b** $P(\cancel{3} \text{ } \cancel{3} \text{ } \cancel{3}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \approx 0,267$
- c** De twee breuken die worden opgeteld hebben dezelfde noemer, dus mag je de tellers optellen. Het voordeel hiervan is dat je minder in je GR hoeft in te toetsen.
- d** E-4 betekent $\cdot 10^{-4}$, dus de komma moet vier plaatsen naar links worden verplaatst. Dus $9,452572744\text{E-}4 = 9,452572744 \cdot 10^{-4} = 0,0009452572744 \approx 0,001$. Afgerond op vier decimalen geldt dat $0,0009452572744 \approx 0,0009$.

Bladzijde 80

- 49 a** $P(\text{één } 5) = P(5 \text{ } \cancel{5} \text{ } \cancel{5}) + P(\cancel{5} \text{ } 5 \text{ } \cancel{5}) + P(\cancel{5} \text{ } \cancel{5} \text{ } 5)$
- $$= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{75}{216} \approx 0,347$$
- b** $P(\text{twee keer } 6 \text{ en een } 3) = P(6 \text{ } 6 \text{ } 3) + P(6 \text{ } 3 \text{ } 6) + P(3 \text{ } 6 \text{ } 6)$
- $$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{216} \approx 0,014$$
- c** $P(\text{steeds minstens } 3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{64}{216} \approx 0,296$
- 50 a** $P(\text{minder dan 2 prijzen}) = P(0 \text{ prijzen}) + P(1 \text{ prijs}) = \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{76}{5}}{\binom{80}{5}} + \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{76}{4}}{\binom{80}{5}} \approx 0,982$
- b** $P(50 \text{ euro}) = P(\text{hoofdprijs en verder niets}) + P(2 \text{ keer } 25 \text{ euro en verder niets})$
- $$= \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{76}{4}}{\binom{80}{5}} + \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{76}{3}}{\binom{80}{5}} \approx 0,062$$
- 51 a** $P(3 \text{ keer doorlopen}) = P(r \text{ } r \text{ } r) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,144$
- b** $P(1 \text{ keer wachten, niet voor het derde}) = P(r \text{ } r \text{ } r) + P(r \text{ } r \text{ } r) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,432$
- 52 a** $P(\text{één } 2) = P(2 \text{ } \cancel{2} \text{ } \cancel{2}) + P(\cancel{2} \text{ } 2 \text{ } \cancel{2}) + P(\cancel{2} \text{ } \cancel{2} \text{ } 2)$
- $$= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{8} \approx 0,370$$
- b** $P(\text{twee keer } 4) = P(4 \text{ } 4 \text{ } \cancel{4}) + P(4 \text{ } \cancel{4} \text{ } 4) + P(\cancel{4} \text{ } 4 \text{ } 4)$
- $$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \approx 0,078$$
- c** Gunstige uitkomsten zijn 4 6 6 4 5 7 4 4 8 3 6 7 3 5 8 2 6 8
De kans op elk van deze uitkomsten is gelijk, namelijk $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}$.
 $P(16 \text{ ogen}) = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \approx 0,031$

- 53 a** $P(\text{meer dan 8 ondervraagden wonen dichtbij})$
 $= P(9 \text{ wonen dichtbij}) + P(10 \text{ wonen dichtbij}) = \frac{\binom{29}{9} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{53}{10}} + \frac{\binom{29}{10} \cdot \binom{24}{0}}{\binom{53}{10}} \approx 0,013$
- b** $P(\text{minder dan 3 vrouwen}) = P(0 \text{ vrouwen}) + P(1 \text{ vrouw}) + P(2 \text{ vrouwen})$
 $= \frac{\binom{16}{0} \cdot \binom{37}{10}}{\binom{53}{10}} + \frac{\binom{16}{1} \cdot \binom{37}{9}}{\binom{53}{10}} + \frac{\binom{16}{2} \cdot \binom{37}{8}}{\binom{53}{10}} \approx 0,358$
- c** $P(2 \text{ vrouwen die 5 km of meer van het werk af wonen}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{48}{8}}{\binom{53}{10}} \approx 0,194$

Punten- totaal	Score in fase					Kans op deze situatie
	I	II	III	IV	V	
15	1	2	3	4	5	$0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,0192$
14	0	2	3	4	5	$0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,0048$
13	1	0	3	4	5	$0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,0128$
12	0	0	3	4	5	$0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,0032$
12	1	2	0	4	5	$0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,0192$

$$P(\text{minstens 12 punten}) = 0,0192 + 0,0048 + 0,0128 + 0,0032 + 0,0192 \approx 0,059$$

Bladzijde 81

- 55 a** $P(\text{geen enkele keer 6}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 0,482$
b $P(\text{geen enkele 6}) = P(\text{geen enkele keer 6}) \approx 0,482$

Bladzijde 82

- 56** $P(\text{alleen eerste en laatste keer 2}) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} \approx 0,009$
 Bij het berekenen van deze kans gebruik je geen combinaties, omdat de posities van de tweeën (eerste en laatste) al vastliggen en er niets meer te kiezen valt.

- 57 a** $P(3 \text{ keer appel en 3 keer peer}) = \binom{6}{3} \cdot P(a a a p p p) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \approx 0,082$
b $P(\text{minstens 5 keer appel}) = P(5 \text{ keer appel}) + P(6 \text{ keer appel}) = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^6 \approx 0,041$
c $P(3 \text{ keer banaan}) = \binom{6}{3} \cdot P(b b b \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \text{ }) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \approx 0,082$
d $P(\text{geen enkele keer banaan}) = P(\text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \text{ }) = \left(\frac{4}{5}\right)^6 \approx 0,262$
- 58 a** $P(\text{geen enkele goed}) = P(\text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \text{ }) = \left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 0,178$
b $P(2 \text{ keer goed}) = \binom{6}{2} \cdot P(G G \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \text{ }) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0,297$
c $P(\text{minder dan 3 keer goed}) = P(0 \text{ keer goed}) + P(1 \text{ keer goed}) + P(2 \text{ keer goed})$
 $= \left(\frac{3}{4}\right)^6 + \binom{6}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 + \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0,831$

Bladzijde 83

59 a $P(3 \text{ juist}) = \binom{10}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^7 \approx 0,215$

b $P(\text{minder dan 3 juist}) = P(0 \text{ juist}) + P(1 \text{ juist}) + P(2 \text{ juist})$
 $= 0,6^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^8 \approx 0,167$

60 a $P(\text{som is minder dan 5}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
 $P(\text{drie keer minder dan 5}) = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,104$

b $P(\text{som is meer dan 7}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$
 $P(\text{meer dan 5 keer meer dan 7}) = P(6 \text{ keer meer dan 7}) + P(7 \text{ keer meer dan 7}) + P(8 \text{ keer meer dan 7})$
 $= \binom{8}{6} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^6 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^2 + \binom{8}{7} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^7 \cdot \frac{7}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^8 \approx 0,061$

6.5 De complementregel**Bladzijde 85**

61 a $P(4 \text{ witte}) = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{22}{4}} \approx 0,029$

b $P(\text{minder dan 4 witte}) = P(0 \text{ witte}) + P(1 \text{ witte}) + P(2 \text{ witte}) + P(3 \text{ witte})$
 $= \frac{\binom{12}{4}}{\binom{22}{4}} + \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{12}{3}}{\binom{22}{4}} + \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{22}{4}} + \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{12}{1}}{\binom{22}{4}} \approx 0,971$

Bladzijde 86

62 a $P(\text{geen groene})$ is niet gelijk aan $1 - P(\text{allemaal groene})$, want
 $P(\text{geen groene}) = 1 - P(\text{minstens één groene})$

b $P(\text{gelijke kleuren})$ is niet gelijk aan $1 - P(3 \text{ verschillende kleuren})$, want
 $P(\text{gelijke kleuren}) = 1 - P(\text{niet gelijke kleuren})$
 $= 1 - P(2 \text{ gelijke en 1 verschillend of 3 verschillend})$
 $= 1 - P(2 \text{ gelijke en 1 verschillend}) - P(3 \text{ verschillend})$

c $P(\text{meer dan 2 rode})$ is niet gelijk aan $1 - P(\text{minder dan 2 rode})$, want
 $P(\text{meer dan 2 rode}) = 1 - P(2 \text{ rode of minder dan 2 rode})$

d $P(\text{hoogstens 3 witte})$ is niet gelijk aan $1 - P(\text{minstens 3 witte})$, want
 $P(\text{hoogstens 3 witte}) = 1 - P(\text{meer dan 3 witte})$

e $P(\text{minstens één rode}) = 1 - P(\text{geen enkele rode})$

f $P(\text{hoogstens 4 witte}) = 1 - P(5 \text{ witte})$

g $P(\text{niet 4 rode}) = 1 - P(\text{wel 4 rode})$

Bladzijde 87

63 a $P(\text{minstens één groen}) = 1 - P(\text{geen groen}) = 1 - \frac{\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}} \approx 0,618$

b $P(\text{hoogstens 2 blauw}) = 1 - P(3 \text{ blauw}) = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} \approx 0,955$

c $P(\text{drie verschillende kleuren}) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} \approx 0,273$

d $P(\text{alle drie dezelfde kleur}) = P(3 \text{ geel}) + P(3 \text{ groen}) + P(3 \text{ blauw})$

$$= \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} \approx 0,068$$

64 Uit de gegevens volgt de tabel hiernaast.

a $P(\text{alleen 15-jarigen}) = \frac{\binom{15}{4}}{\binom{28}{4}} \approx 0,067$

b $P(\text{niet Floris}) = \frac{\binom{27}{4}}{\binom{28}{4}} \approx 0,857$

c $P(\text{minstens één uit A}) = 1 - P(\text{geen uit A}) = 1 - \frac{\binom{11}{4}}{\binom{28}{4}} \approx 0,984$

d $P(\text{hoogstens 2 uit A die 15 jaar zijn}) = P(\text{geen}) + P(1) + P(2)$
 $= \frac{\binom{18}{4}}{\binom{28}{4}} + \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{18}{3}}{\binom{28}{4}} + \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{18}{2}}{\binom{28}{4}} \approx 0,884$

	14	15	16	
in A	6	10	1	17
niet in A	2	5	4	11
	18	15	5	28

65 a $P(\text{meer dan 4 schoppen}) = P(5 \text{ schoppen}) + P(6 \text{ schoppen}) + P(7 \text{ schoppen}) + P(8 \text{ schoppen})$

$$= \frac{\binom{8}{5} \cdot \binom{24}{3}}{\binom{32}{8}} + \frac{\binom{8}{6} \cdot \binom{24}{2}}{\binom{32}{8}} + \frac{\binom{8}{7} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{32}{8}} + \frac{\binom{8}{8}}{\binom{32}{8}} = 0,011...$$

Dus $P(\text{meer dan 4 kaarten van één soort}) = 4 \cdot P(\text{meer dan 4 schoppen}) = 4 \cdot 0,011... \approx 0,046$

b $P(4 \text{ klaverkaarten en minstens één schoppenkaart})$

$$= P(4 \text{ k en 1 s}) + P(4 \text{ k en 2 s}) + P(4 \text{ k en 3 s}) + P(4 \text{ k en 4 s})$$

$$= \frac{\binom{8}{4} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{16}{3}}{\binom{32}{8}} + \frac{\binom{8}{4} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{16}{2}}{\binom{32}{8}} + \frac{\binom{8}{4} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{16}{1}}{\binom{32}{8}} + \frac{\binom{8}{4} \cdot \binom{8}{4}}{\binom{32}{8}} \approx 0,059$$

c $P(\text{minstens één schoppenkaart en geen enkele hartenkaart})$

$$= P(\text{geen hartenkaart}) - P(\text{geen hartenkaart en geen schoppenkaart})$$

$$= \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}} - \frac{\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}} \approx 0,069$$

66 a $P(2 \text{ keer rood}) = \binom{4}{2} \cdot P(r r t t) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^2 \approx 0,375$

b $P(\text{geen enkele keer rood}) = P(t t t t) = \left(\frac{4}{8}\right)^4 = 0,0625$

c $P(\text{minstens één keer rood}) = 1 - P(\text{geen enkele keer rood}) = 1 - 0,0625 = 0,9375$

Bladzijde 88

67 a $P(\text{minstens één keer appel}) = 1 - P(\text{geen enkele keer appel}) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5 \approx 0,672$

b $P(3 \text{ appels en 2 peren}) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \approx 0,013$

c $P(2 \text{ bananen}) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \approx 0,346$

d $P(\text{hoogstens 3 bananen}) = 1 - P(4 \text{ bananen}) - P(5 \text{ bananen})$
 $= 1 - \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \frac{3}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^5 \approx 0,913$

Bladzijde 89

68 a $P(1 \text{ appel en } 1 \text{ banaan}) = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

b $P(\text{geen enkele banaan}) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0,36$

c $P(\text{minstens één appel}) = 1 - P(\text{geen appel}) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0,36$

69 $P(\text{minstens één rookmelder gaat af}) = 1 - P(\text{geen enkele rookmelder gaat af})$
 $= 1 - 0,05 \cdot 0,15 \cdot 0,12 \cdot 0,23 \approx 0,9998$

70 a $P(\text{alle vijf niet kleurenblind}) = \left(\frac{11}{12}\right)^5 \approx 0,647$

b $P(\text{minstens één van tien kleurenblind}) = 1 - P(\text{alle tien niet kleurenblind}) = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^{10} \approx 0,581$

c $P(\text{één van zes kleurenblind}) = \binom{6}{1} \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^5 \approx 0,324$

71 a $P(\text{in hoogstens } 13 \text{ een koolmees}) = 1 - P(14) - P(15) = 1 - \binom{15}{14} \cdot 0,76^{14} \cdot 0,24 - 0,76^{15} \approx 0,906$

b $P(\text{in minstens } 2 \text{ een ekster}) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - 0,83^{15} - \binom{15}{1} \cdot 0,17 \cdot 0,83^{14} \approx 0,751$

c $P(\text{in geen enkele een vink}) = 0,72^{15} \approx 0,007$

d $P(\text{in geen enkele zowel een koolmees als een vink}) = (1 - 0,76 \cdot 0,28)^{15} \approx 0,028$

72 $P(\text{geen prijs}) = \frac{\binom{37}{2}}{\binom{40}{2}} \approx 0,853...$

$P(\text{minstens één prijs}) = 1 - (P(\text{geen prijs}))^5 = 1 - 0,853...^5 \approx 0,546$

6.6 Pakken met en zonder terugleggen**Bladzijde 91**

73 a $P(3 \text{ rode}) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} \approx 0,255$

b $P(\text{eerste rood}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

c Er zijn nog 11 knikkers, waarvan er 7 rood zijn, dus $P(\text{tweede ook rood}) = \frac{7}{11}$.
 $P(\text{derde ook rood}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

d $P(3 \text{ rode}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{3}{5} \approx 0,255$ en dat is hetzelfde antwoord als bij a.

e Jasmine vergeet dat je de twee rode knikkers en één blauwe ook in een andere volgorde kunt pakken.

f $P(2 \text{ rode en } 1 \text{ blauwe}) = P(r r b) + P(r b r) + P(b r r) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \approx 0,509$

g $P(2 \text{ rode en } 1 \text{ blauwe}) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{8}{12}\right)^2 \cdot \frac{4}{12} \approx 0,444$

Bladzijde 93

74 a
$$\left. \begin{aligned} P(p \not p \not p) &= \frac{4}{15} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{10}{13} = \frac{44}{273} \\ P(\not p p \not p) &= \frac{11}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13} = \frac{44}{273} \\ P(\not p \not p p) &= \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{44}{273} \end{aligned} \right\} \text{alle drie hetzelfde}$$

b $P(\text{één prijs}) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{11}{2}}{\binom{15}{3}} \approx 0,484$

c Je moet dan acht getallen met elkaar vermenigvuldigen: een combinatie én zeven breuken. Dat is niet praktisch, omdat het veel werk is en je snel fouten maakt bij het opstellen van de breuken.

- 75 a** $P(2 \text{ groene}) = P(2 \text{ groene en 1 blauwe}) = \frac{\binom{16}{2} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{40}{3}} \approx 0,291$
- b** $P(\text{minstens één blauwe}) = 1 - P(\text{geen blauwe}) = 1 - \frac{\binom{16}{3}}{\binom{40}{3}} \approx 0,943$
- c** $P(2 \text{ groene}) = \binom{3}{1} \cdot P(g \ g \ b) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{16}{40}\right)^2 \cdot \frac{24}{40} = 0,288$
- d** $P(\text{minstens één blauwe}) = 1 - P(\text{geen blauwe}) = 1 - P(g \ g \ g) = 1 - \left(\frac{16}{40}\right)^3 = 0,936$

- 76 a** Een leerling kan meerdere boeken winnen, dus met terugleggen.
 $P(4 \text{ meisjes}) = \left(\frac{12}{22}\right)^4 \approx 0,089$
- b** Een leerling kan hoogstens één taart winnen, dus zonder terugleggen.
 $P(4 \text{ meisjes}) = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{22}{4}} \approx 0,068$
- c** Een leerling kan maar één keer worden gekozen, dus zonder terugleggen.
 $P(3 \text{ meisjes}) = \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{22}{4}} \approx 0,301$
- d** Een leerling kan meerdere reproducties winnen, dus met terugleggen.
 $P(3 \text{ meisjes}) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{12}{22}\right)^3 \cdot \frac{10}{22} \approx 0,295$

- 77 a** $P(\text{minstens 2 keer 4 ogen}) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 - \binom{8}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,395$
- b** $P(\text{minstens 2 prijzen}) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - \frac{\binom{40}{8}}{\binom{48}{8}} - \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{40}{7}}{\binom{48}{8}} \approx 0,401$

Bladzijde 94

- 78 a** $P(\text{geen enkele Jumbo}) = \frac{\binom{168}{5}}{\binom{175}{5}} \approx 0,813$
- b** $P(\text{geen enkele Jumbo}) = \left(\frac{168}{175}\right)^5 \approx 0,815$
- c** $P(\text{geen Jumbo}) = \frac{\binom{168}{3}}{\binom{175}{3}} \approx 0,884...$
 $P(\text{minstens één Jumbo}) = 1 - (P(\text{geen Jumbo}))^2 = 1 - 0,884...^2 \approx 0,218$
- 79** $P(\text{niet op bord}) = \frac{\binom{20}{3}}{\binom{24}{3}} \approx 0,563...$
 $P(\text{minstens één les minstens één van de vier op bord}) = 1 - (P(\text{niet op bord}))^{10}$
 $= 1 - 0,563...^{10} \approx 0,997$

- 80** a Elke bezoeker kan maar één keer gekozen worden, dus de samenstelling van de vaas verandert.
- b $P(\text{alle drie vrouw}) = \frac{13\,600}{17\,000} \cdot \frac{13\,599}{16\,999} \cdot \frac{13\,598}{16\,998} \approx 0,51198$
- c Hij vermenigvuldigt drie keer met dezelfde kans, alsof de samenstelling van de vaas niet is veranderd.
- d Het antwoord is bijna hetzelfde, omdat $\frac{13\,599}{16\,999} \approx 0,8000$ en $\frac{13\,598}{16\,998} \approx 0,8000$.

Bladzijde 96

- 81** a Omdat je te maken hebt met een kleine steekproef uit een grote populatie.
- b Van de boeken behoort 25% tot het genre kinderboeken, dus 75% behoort daar niet toe.
- c Bij a zijn er geen verschillende volgordes mogelijk, bij b wel.
- d Na het kiezen van de vier boeken uit het genre fictie worden er nog zes boeken gekozen, waarvan er drie kinderboeken moeten zijn.
Omdat 65% tot het genre fictie of het genre kinderboeken behoort, geldt dat voor 35% niet.
- 82** a $P(10 \text{ kinderboeken of fictie}) = (0,4 + 0,25)^{10} \approx 0,013$
- b $P(2 \text{ kinderboeken}) = \binom{10}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^8 \approx 0,282$
- c $P(2 \text{ kinderboeken, 3 overige en 5 fictie}) = \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} \cdot 0,25^2 \cdot 0,35^3 \cdot 0,40^5 \approx 0,069$
- 83** a $P(6 \text{ bijbaan}) = \binom{12}{6} \cdot 0,61^6 \cdot 0,39^6 \approx 0,168$
- b $P(5 \text{ supermarkt}) = \binom{12}{5} \cdot 0,30^5 \cdot 0,70^7 \approx 0,158$
- c $P(\text{minstens 2 bijbaan, niet in supermarkt of andere winkel}) = 1 - P(0) - P(1)$
 $= 1 - 0,83^{12} - \binom{12}{1} \cdot 0,17 \cdot 0,83^{11} \approx 0,630$
- d $P(\text{niet in supermarkt of winkel}) = 1 - (0,30 + 0,14 + 0,39) = 1 - 0,83 = 0,17$
 $P(4 \text{ supermarkt, 2 winkel, 5 geen en 1 overig}) = \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{5} \cdot 0,30^4 \cdot 0,14^2 \cdot 0,39^5 \cdot 0,17 \approx 0,020$
- e $P(1 \text{ supermarkt}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{9}{30} \cdot \frac{21}{29} \cdot \frac{20}{28} \approx 0,466$

Alternatieve uitwerking

$$P(1 \text{ supermarkt}) = \frac{\binom{9}{1} \cdot \binom{21}{2}}{\binom{30}{3}} \approx 0,466$$

- f $P(\text{minstens één supermarkt}) = 1 - P(\text{geen supermarkt}) = 1 - \frac{21}{30} \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{19}{28} \approx 0,672$

Alternatieve uitwerking

$$P(\text{minstens één supermarkt}) = 1 - \frac{\binom{21}{3}}{\binom{30}{3}} \approx 0,672$$

- g $P(1 \text{ bijbaan, niet bij supermarkt}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{9}{30} \cdot \frac{12}{29} \cdot \frac{11}{28} \approx 0,146$

Alternatieve uitwerking

$$P(1 \text{ bijbaan, niet bij supermarkt}) = \frac{\binom{9}{1} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{30}{3}} \approx 0,146$$

- 84 a** $P(\text{minstens één via sportvereniging}) = 1 - P(\text{geen via sportvereniging}) = 1 - 0,88^{15} \approx 0,853$
b $P(\text{anders}) = 1 - (0,44 + 0,29 + 0,12) = 1 - 0,85 = 0,15$
 $P(\text{minstens 2 anders}) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - 0,85^{15} - \binom{15}{1} \cdot 0,15 \cdot 0,85^{14} \approx 0,681$
c $P(7 \text{ via studie/werk en } 3 \text{ via de buurt}) = \binom{15}{7} \cdot \binom{8}{3} \cdot 0,44^7 \cdot 0,29^3 \cdot 0,27^5 \approx 0,040$

Bladzijde 97

- 85 a** $P(6 \text{ of } 7 \text{ groene stroom}) = P(6 \text{ groene stroom}) + P(7 \text{ groene stroom})$
 $= \binom{12}{6} \cdot 0,54^6 \cdot 0,46^6 + \binom{12}{7} \cdot 0,54^7 \cdot 0,46^5 \approx 0,435$
b 25% van 12 is 3.
 $P(3 \text{ overwegen}) = \binom{12}{3} \cdot 0,20^3 \cdot 0,80^9 \approx 0,236$
c $P(\text{overweegt niet over te stappen}) = 1 - (0,54 + 0,20) = 1 - 0,74 = 0,26$
 $P(\text{hoogstens 2 geen groene stroom en ook niet overwegen})$
 $= P(0) + P(1) + P(2)$
 $= 0,74^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0,26 \cdot 0,74^{11} + \binom{12}{2} \cdot 0,26^2 \cdot 0,74^{10} \approx 0,360$
d $P(2 \text{ groene stroom en één overweegt}) = \frac{\binom{40}{2} \cdot \binom{25}{1}}{\binom{83}{3}} \approx 0,212$
e $P(\text{minstens één zonder groene stroom}) = 1 - P(\text{geen zonder groene stroom})$
 $= 1 - P(\text{alle drie groene stroom}) = 1 - \frac{\binom{40}{3}}{\binom{83}{3}} \approx 0,892$

- 86 a** $P(\text{allebei geen muziekinstrument}) = 0,91^2 \approx 0,828$
b $P(\text{één muziekinstrument}) = \binom{3}{1} \cdot 0,09 \cdot 0,91^2 \approx 0,224$
c $P(\text{hoogstens één muziekinstrument}) = P(0) + P(1) = 0,91^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,09 \cdot 0,91^4 \approx 0,933$
d Stel het gezelschap telt x personen.
 $P(\text{minstens één muziekinstrument}) = 1 - P(\text{geen muziekinstrument}) = 1 - 0,91^x$
Er moet gelden $1 - 0,91^x > 0,95$.
Voer in $y_1 = 1 - 0,91^x$ en maak een tabel.
 $x = 31$ geeft $y \approx 0,946$ en $x = 32$ geeft $y \approx 0,951$.
Dus het gezelschap moet minimaal uit 32 personen bestaan.
e $P(\text{allebei een muziekinstrument}) = \frac{9}{100} \cdot \frac{8}{99} \approx 0,007$

Diagnostische toets

Bladzijde 100

- 1 a**
- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| 6 | | 8 | | | | | |
| 5 | | | 8 | | | | |
| 4 | | | | 8 | | | |
| 3 | | | | | 8 | | |
| 2 | 3 | | | | | 8 | |
| 1 | 2 | 3 | | | | | 8 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

$$P(\text{som is } 8) = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$$

- b** $P(\text{som is minder dan } 4) = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$

c

VERSCHIL

6				2		0		2
5			2		0		2	
4		2		0		2		
3	2		0		2			
2		0		2				
1	0		2					
	1	2	3	4	5	6	7	8

$$P(\text{verschil is } 2) = \frac{10}{48} = \frac{5}{24}$$

$$\text{d } P(\text{gelijk}) = P(\text{verschil is } 0) = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$$

2 a Het aantal mogelijke uitkomsten is $4^4 = 256$.

Gunstige uitkomsten zijn 1144 $\binom{4}{2} = 6$ keer

$$1224 \quad \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} = 12 \text{ keer of } \frac{4!}{2!} = 12 \text{ keer}$$

$$2222$$

Er zijn $6 + 12 + 1 = 19$ gunstige uitkomsten.

$$P(\text{product is } 16) = \frac{19}{256}$$

b Som is 14: 4442 4 keer

$$4433 \quad \binom{4}{2} = 6 \text{ keer}$$

Som is 15: 4443 4 keer

Som is 16: 4444

Er zijn $10 + 4 + 1 = 15$ gunstige uitkomsten.

$$P(\text{som is meer dan } 13) = \frac{15}{256}$$

3 a $P(\text{leerling zit in middelste lengteklasse}) = \frac{159}{215} \approx 0,740$

b $P(\text{lange leerling zit in vierde klas}) = \frac{6}{33} \approx 0,182$

c $P(\text{vierde-of vijfdeklasser is } 160 \text{ cm of langer}) = \frac{59 + 49 + 6 + 12}{80 + 66} \approx 0,863$

d $P(160 \text{ cm of langer en in de vijfde of zesde klas}) = \frac{49 + 51 + 12 + 15}{215} \approx 0,591$

e $P(\text{vijfdeklasser onder voorwaarde hoogste lengteklasse}) = \frac{12}{33} \approx 0,364$ $\left. \vphantom{\frac{12}{33}} \right\} 0,364 \neq 0,307$

$$P(\text{vijfdeklasser}) = \frac{66}{215} = 0,307$$

De gebeurtenissen 'leerling zit in klas 5' en 'leerling behoort tot de lengteklasse [180, 200]' zijn afhankelijk.

4 a $P(2 \text{ rood, } 2 \text{ wit en } 2 \text{ blauw}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{9}{2}}{\binom{21}{6}} \approx 0,139$

b $P(\text{geen blauwe}) = \frac{\binom{12}{6}}{\binom{21}{6}} \approx 0,017$

c $P(2 \text{ rode en } 4 \text{ andere}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{16}{4}}{\binom{21}{6}} \approx 0,335$

$$\text{d } P(6 \text{ blauwe}) = \frac{\binom{9}{6}}{\binom{21}{6}} \approx 0,002$$

$$5 \text{ a } P(\text{geen prijs}) = \frac{\binom{23}{4}}{\binom{40}{4}} \approx 0,097$$

$$\text{b } P(\text{de hoofdprijs en 1 derde prijs}) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{23}{2}}{\binom{40}{4}} \approx 0,028$$

$$\text{c } P(2 \text{ tweede prijzen}) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{23}{2}}{\binom{40}{4}} \approx 0,042$$

Bladzijde 101

$$6 \text{ a } P(\text{in totaal 24 ogen}) = P(\text{met elke 6 ogen}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,001$$

$$\text{b } P(\text{geen enkele zes}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 0,482$$

$$7 \text{ } P(\text{hoogstens 2 niet in orde}) = P(0) + P(1) + P(2) = \frac{\binom{144}{20}}{\binom{160}{20}} + \frac{\binom{16}{1} \cdot \binom{144}{19}}{\binom{160}{20}} + \frac{\binom{16}{2} \cdot \binom{144}{18}}{\binom{160}{20}} \approx 0,679$$

$$8 \text{ a } P(5 \text{ keer rood en 2 keer wit}) = \binom{7}{5} \cdot P(\text{r r r r r w w}) = \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \approx 0,073$$

$$\text{b } P(\text{minstens 6 keer geen blauw}) = P(6 \text{ keer geen blauw}) + P(7 \text{ keer geen blauw}) \\ = \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,670$$

$$\text{c } P(\text{hoogstens 2 keer wit}) = P(0 \text{ keer wit}) + P(1 \text{ keer wit}) + P(2 \text{ keer wit}) \\ = \left(\frac{4}{6}\right)^7 + \binom{7}{1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^6 + \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^5 \approx 0,571$$

$$9 \text{ a } P(\text{minstens één prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) = 1 - \frac{\binom{115}{6}}{\binom{120}{6}} \approx 0,230$$

$$\text{b } P(100 \text{ euro}) = P(1 \text{ keer 100 euro}) + P(4 \text{ keer 25 euro}) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{115}{5}}{\binom{120}{6}} + \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{115}{2}}{\binom{120}{6}} \approx 0,042$$

$$\text{c } P(\text{geen verlies}) = 1 - P(\text{verlies})$$

$$= 1 - P(\text{geen prijs}) - P(1 \text{ tweede prijs}) = 1 - \frac{\binom{115}{6}}{\binom{120}{6}} - \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{115}{5}}{\binom{120}{6}} \approx 0,062$$

$$\text{d } P(\text{minder dan 100 euro winnen}) = P(0 \text{ euro}) + P(25 \text{ euro}) + P(50 \text{ euro}) + P(75 \text{ euro}) \\ = \frac{\binom{115}{6}}{\binom{120}{6}} + \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{115}{5}}{\binom{120}{6}} + \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{115}{4}}{\binom{120}{6}} + \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{115}{3}}{\binom{120}{6}} \approx 0,950$$

$$10 \text{ } P(\text{niets mis}) = (1 - 0,05) \cdot (1 - 0,09) \cdot (1 - 0,03) = 0,838... \\ P(\text{iets mis}) = 1 - P(\text{niets mis}) = 1 - 0,838... \approx 0,161$$

- 11 a** Iedere docent kan maar één keer gekozen worden, dus zonder terugleggen.

$$P(3v \text{ en } 2m) = \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{9}{2}}{\binom{16}{5}} \approx 0,288$$

- b** Iedere docent kan meerdere keren gekozen worden, dus met terugleggen.

$$P(3v \text{ en } 2m) = \binom{5}{3} \cdot P(v \ v \ v \ m \ m) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^2 \approx 0,265$$

- 12** $P(4 \text{ hoog en } 3 \text{ middelbaar}) = \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot 0,45^4 \cdot 0,29^3 \cdot (1 - 0,45 - 0,29)^2 \approx 0,085$

7 Statistiek met de computer

Voorkennis Centrummaten en boxplots

Bladzijde 105

- 1 a totale frequentie = $12 + 10 + 13 + 24 + 21 + 2 = 82$
gemiddelde leeftijd = $\frac{12 \cdot 7,5 + 10 \cdot 22,5 + 13 \cdot 37,5 + 24 \cdot 52,5 + 21 \cdot 67,5 + 2 \cdot 82,5}{82} \approx 44,5$ jaar
- b De mediaan is het gemiddelde van het 41^e en 42^e waarnemingsgetal.
Omdat $12 + 10 + 13 = 35$ en $35 + 24 = 59$ ligt de mediaan in de klasse $[45, 60)$.
- c De modale klasse is $[45, 60)$, want deze klasse heeft de grootste frequentie.

Bladzijde 106

- 2 a De helft van de vrouwen is kleiner dan 1,83 meter. Dat zijn $\frac{192}{2} = 96$ vrouwen.
- b De langste vrouw is 202 cm en driekwart van de mannen is kleiner dan 202 cm.
- c Bij de mannen is de spreidingsbreedte $211 - 172 = 39$ cm.
Bij de vrouwen is de spreidingsbreedte $202 - 159 = 43$ cm.
De spreidingsbreedte is het grootst bij de vrouwen.

7.1 Werken met een spreadsheet

Bladzijde 107

1 *

Bladzijde 108

- 2 a Gebruik de functie SOM.
 $Y2 = \text{SOM}(B2:X2)$ geeft 82 punten.
- b $Y3 = \text{SOM}(B3:X3)$ geeft 61 punten voor Joris.
Lisa had de meeste punten, Kim de minste.
- c $Z3 = Y3 / \$Y\$2 * 9 + 1$ geeft 7,695...
- d *
- e $B27 = \text{GEMIDDELDE}(B3:B25)$
 $B28 = \text{STDEV.P}(B3:B25)$
 $B29 = \text{MIN}(B3:B25)$
 $B30 = \text{KWARTIEL}(B3:B25; 1)$
 $B31 = \text{MEDIAAN}(B3:B25)$
 $B32 = \text{KWARTIEL}(B3:B25; 3)$
 $B33 = \text{MAX}(B3:B25)$
Met de vulgreep bereken je in één keer de overige waarden.
- f $B34 = B32 - B30$ en gebruik de vulgreep.
Bij de vragen 14 en 15 is de interkwartielafstand 2,5.
 $B35 = B27 - B31$ en gebruik de vulgreep.
Bij de vragen 2, 3 en 20 is het gemiddelde gelijk aan de mediaan.
- 3 a $J3 = \text{AFRONDEN}((B3 * \$B\$1 + C3 * \$C\$1 + D3 * \$D\$1 + \dots + I3 * \$I\$1) / \text{SOM}(\$B\$1:\$I\$1); 1)$
Gebruik de vulgreep om de overige cijfers te berekenen.
De eindcijfers zijn achtereenvolgens 6,7 5,7 7,2 3,8 6,9 5,7 6,8 5,2 4,9 4,9 5,4 6,4 4,8 7,9 6,3 6,0 6,3 5,3 7,0 8,1 en 6,6.
- b $J25 = \text{GEMIDDELDE}(J3:J23)$ en weergave instellen op twee decimalen geeft gemiddelde is 6,09.
- c $I1 = 6$ geeft gemiddelde is 6,10.
Het scheelt 0,01 punt met het gemiddelde in vraag b.

Bladzijde 109

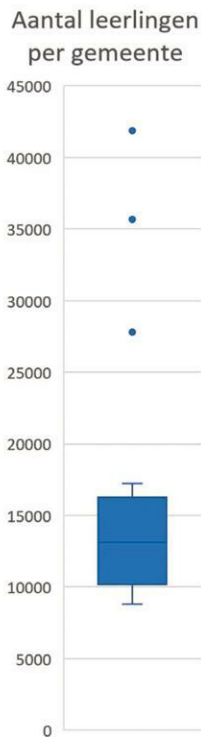
4 *

Bladzijde 110

- 5 a** Selecteer de cellen A1:H1 en tegelijk (houd Ctrl ingedrukt) A6:H10 en maak het juiste staafdiagram.
Kies bij As opmaken voor Weergave-eenheden 10 000. Maak het diagram verder op.
- b** Voeg een kolom toe door in cel I1 Totaal te typen.
 $I2 = \text{SOM}(B2:H2)$ en gebruik de vulgreep.
Selecteer de cellen A1:A10 en tegelijk I1:I10 en maak een lijndiagram.
Kies bij As opmaken voor Weergave-eenheden 1000. Maak het diagram verder op.
- c** Selecteer de cellen B2:H2 en tegelijk B10:H10 en maak het juiste cirkeldiagram.
Voeg Gegevenslabels toe en kies bij de Gegevenslabels opmaken voor Percentage. Maak het diagram verder op.

Bladzijde 111

- 6 a** De interkwartielafstand is $24 - 10 = 14$ en $24 + 1,5 \cdot 14 = 55$. De waarde 56 is dus een uitbijter.
- b** $10 - 1,5 \cdot 14 = -11$. De waarde 1 is dus geen uitbijter.
- 7 a** Het bestand is gesorteerd op de variabele Gemeente.
- b** Sorteer de kolom AantalLeerlingen met 'Sorteren van laag naar hoog'.
- c** Selecteer de cellen B277 (Enschede) tot en met B296 (Amsterdam) en maak een boxplot. Ga na dat je nu 20 gemeenten hebt geselecteerd.



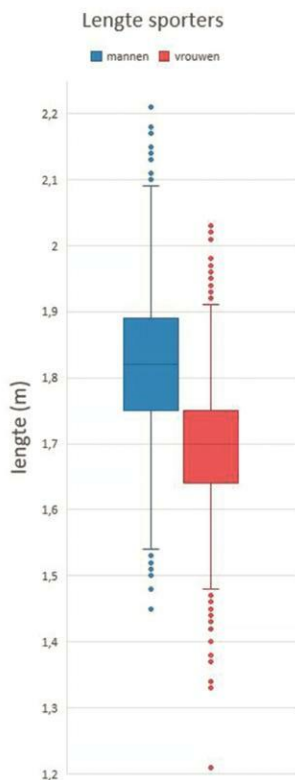
Bij de uitbijterpunten horen de gemeenten Den Haag, Rotterdam en Amsterdam.

- d** Typ in D1 GemiddeldAantalLeerlingen.
 $D2 = B2/C2$ en gebruik de vulgreep.

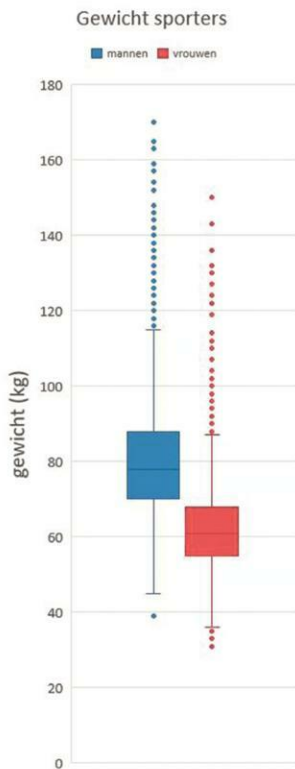
- e Sorteer de kolom AantalScholen met 'Sorteren van laag naar hoog'. Selecteer de cellen B2:B90 en maak hierbij een boxplot. Kies Gegevens selecteren (door met de rechtermuisknop op de boxplot te klikken). Bewerk reeks 1 en geef deze de naam 'gemeenten met 1 school'. Voeg een nieuwe reeks toe en noem deze 'gemeenten met meer dan 1 school' en selecteer bij Reekswaarden de cellen B91:B296. Maak het diagram verder op.
- f Bij gemeenten met meer dan één middelbare school is de spreiding van het gemiddeld aantal leerlingen veel kleiner dan bij gemeenten met één middelbare school.

Bladzijde 112

- 8 a** Sorteer de kolom Lengte met 'Sorteren van laag naar hoog'. De cellen E11210 tot en met E11539 zijn leeg. Van 330 sporters staat de lengte niet in de dataset.
- b** Sorteer de kolom Lengte met 'Sorteren van laag naar hoog' en daarna de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z'. Selecteer de cellen E2:E6143 (de lengten van de mannen) en maak hierbij een boxplot. Kies Gegevens selecteren (door met de rechtermuisknop op de boxplot te klikken). Bewerk reeks 1 en geef deze de naam 'mannen'. Voeg een nieuwe reeks toe en noem deze 'vrouwen' en selecteer bij Reekswaarden de cellen E6335:E11400 (de lengten van de vrouwen). Maak het diagram verder op.

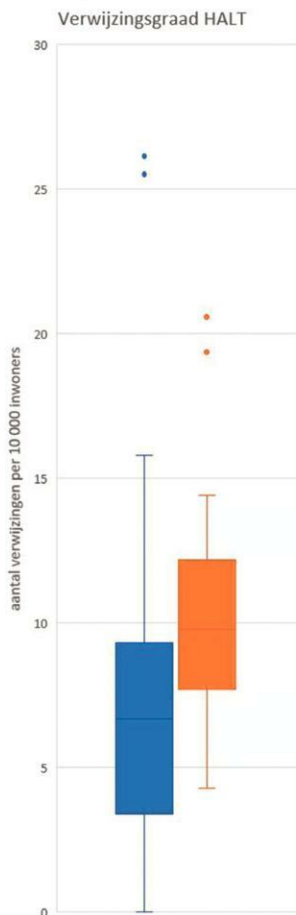


- c Die lengte is 2,10 meter. Je ziet in de tabel dat het gaat om 32 mannen.
- d De opvallende lengte is 1,21 meter. Dit lijkt een fout in de dataset te zijn.
- e De boxen overlappen elkaar (net). Beide medianen liggen buiten de box van de andere boxplot. Het verschil is middelmatig.
- f Sorteer de kolom Gewicht met 'Sorteren van laag naar hoog' en daarna de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z'. Selecteer de cellen F2:F5874 (de gewichten van de mannen) en maak hierbij een boxplot. Kies Gegevens selecteren (door met de rechtermuisknop op de boxplot te klikken). Bewerk reeks 1 en geef deze de naam 'mannen'. Voeg een nieuwe reeks toe en noem deze 'vrouwen' en selecteer bij Reekswaarden de cellen F6335:F11340 (de gewichten van de vrouwen). Maak het diagram verder op.



De boxen overlappen elkaar niet, dus het verschil is groot.

- 9 Voeg een kolom toe door in cel D1 Verwijzingsgraad te typen.
 $D2=C2/B2*10000$ en gebruik de vulgreep.
 Sorteer de kolom Bevolkingsaantal met 'Sorteren laag naar hoog' en maak de boxplot.
 Gebruik een reeks voor de 50 kleinste gemeenten (Schiermonnikoog tot en met Heeze-Leende) en een tweede reeks voor de 50 grootste gemeenten (Almelo tot en met Amsterdam).



De boxen overlappen elkaar en beide medianen vallen buiten de box van de andere boxplot. Het verschil is dus middelmatig.

7.2 Werken met datasets

Bladzijde 113

- 10** Sorteert eerst de kolom Geslacht met 'Sorteren van A naar Z' en dan de kolom Sport met 'Sorteren van A naar Z'. Selecteer de gewichten van de Japanse voetbalmannen en lees rechts onder in beeld af dat hun gemiddelde gewicht 74,1 kg is.

Alternatieve uitwerking

De Japanse voetbalmannen staan in rij 8037 tot en met 8058. Typ in een lege cel =GEMIDDELDE(F8037:F8058) en lees af dat het gemiddelde gewicht van de Japanse voetbalmannen ongeveer 74,1 kg is.

- 11**
- a** De dataset bevat 11 variabelen.
 - b** Kiezen van 'Aantal' in kolom A van de totaalrij geeft 24 837.
De dataset bevat van 24 837 dagen gegevens.
 - c** Sorteert de kolom GemiddeldeTemperatuur(°C) met 'Sorteren van hoog naar laag'.
De warmste dag was 27 juli 2018.
 - d** Filter de kolom GemiddeldeTemperatuur(°C) op 'Is kleiner dan of gelijk aan' 0.
Kiezen van 'Aantal' in kolom C van de totaalrij geeft 1617.
Op 1617 dagen was het gemiddeld 0 °C of kouder.
 - e** Filter uit vraag d verwijderen.
Filter de kolom Datum op 2016, 2017 en 2018.
Kiezen van 'Som' in kolom H van de totaalrij geeft ongeveer 5522,7.
De zon heeft in de jaren 2016, 2017 en 2018 in totaal 5522,7 uur geschenen.
 - f** Filter uit vraag e verwijderen.
Filter de kolom MaximaleTemperatuur(°C) op 'Is groter dan of gelijk aan' 30.
Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom F van de totaalrij geeft 24,00...
De gemiddelde temperatuur tijdens de tropische dagen was 24,0 °C.
 - g** Filter uit vraag f verwijderen.
Filter de kolom Datum op 1965.
Kiezen van 'Som' in kolom J van de totaalrij geeft 1151,9 mm neerslag.
In 1965 viel in totaal 1151,9 mm neerslag.
Sorteert de kolom Neerslagduur(uren) met 'Sorteren van hoog naar laag'.
Op 18 december regende het in dat jaar het langst.

Bladzijde 114

- 12**
- a** Sorteert de kolom Leeftijd met 'Sorteren van hoog naar laag' en daarna met 'Sorteren van laag naar hoog'.
De oudste sporter doet aan paardensport en de jongste aan zwemsport.
 - b** Kiezen van 'Aantal' in kolom D van de totaalrij geeft 11 538.
Filter de kolom Leeftijd op 'Is kleiner dan of gelijk aan' 16.
Nu geeft 'Aantal' in kolom D van de totaalrij 82.
$$\text{Dus } \frac{82}{11\,538} \times 100\% \approx 0,7\% \text{ van de sporters was 16 jaar of jonger.}$$
 - c** Filter uit vraag b verwijderen.
Filter de kolom Land op Nederland.
Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom D van de totaalrij geeft 26,78...
De gemiddelde leeftijd van de Nederlandse sporters was 27 jaar.
 - d** Filters uit vraag c verwijderen.
Filter de kolom Sport op triatlon.
Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom F van de totaalrij geeft 60,63... kg.
Filter de kolom Sport op roeien.
Aflezen in kolom F van de totaalrij geeft 79,93... kg.
Het scheelt $79,93\ldots - 60,63\ldots \approx 19$ kg.

- e** Filter uit vraag d verwijderen.
 Filter de kolom Land op Nederland en filter de kolom Geslacht op V.
 Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom E van de totaalrij geeft 1,747... cm.
 Filter de kolom Land op alles behalve Nederland.
 Aflezen in kolom E van de totaalrij geeft 1,698... cm.
 Het verschil is dus $1,747... - 1,698... \approx 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$.
 De journalist heeft dus niet gelijk.
 Filter de kolom Geslacht op M en voer dezelfde handelingen uit als hierboven bij de vrouwen.
 Het verschil bij de mannen is $1,850... - 1,820... \approx 0,03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$.
- f** Filters uit vraag e verwijderen.
 Filter de kolom Goud op alles behalve 0.
 Kiezen van 'Som' in kolom H van de totaalrij geeft 666 gouden medailles.
 Filter de kolom Land op Verenigde Staten.
 Aflezen in kolom H van de totaalrij geeft 139 gouden medailles.
 Dus $\frac{139}{666} \times 100\% \approx 20,9\%$ van de gouden medailles werd gewonnen door sporters uit de Verenigde Staten.

- 13 a** Kiezen van 'Gemiddelde' in kolom C van de totaalrij.
 Filteren van de kolom Groep op D geeft 177,47... cm.
 Filteren van de kolom Groep op A geeft 173,5 cm.
 Het verschil is $177,47... - 173,5 \approx 4 \text{ cm}$.
- b** Filter kolom LR-handig-moeder op L.
 Kiezen van 'Aantal' in kolom I van de totaalrij geeft 15 linkshandige moeders.
 Filter kolom LR-handig-vader op L.
 Aflezen in kolom J van de totaalrij geeft 1 ouderpaar die beiden linkshandig zijn.
 Filter uit kolom LR-handig-moeder verwijderen.
 Aflezen in kolom J van de totaalrij geeft 28 linkshandige vaders.
 In totaal hebben $15 + 28 - 1 = 42$ studenten een linkshandige ouder.
 Dus $\frac{42}{271} \times 100\% \approx 15,5\%$ van de studenten heeft een linkshandige ouder.
- c** Kies 'Aantal' in kolom G van de totaalrij. Dit geeft een totaal van 271 personen.
 Filter de kolom Geslacht op M. Aflezen in kolom G van de totaalrij geeft 139 mannen en dus $271 - 139 = 132$ vrouwen.
 Filter de kolom UrenSlaap op 'Kleiner dan' 8.
 Filter de kolom Geslacht op M. Aflezen in kolom G van de totaalrij geeft 101 kortslapers bij de mannen en dus $139 - 101 = 38$ langslapers bij de mannen.
 Kolom Geslacht filteren op V. Aflezen in kolom G van de totaalrij geeft 93 kortslapers bij de vrouwen en dus $132 - 93 = 39$ langslapers bij de vrouwen.

	slaapduur		totaal
	kort	lang	
man	101	38	139
vrouw	93	39	132
totaal	194	77	271

- d** Bij de vrouwen heeft $\frac{93}{132} \times 100\% \approx 70,5\%$ een korte slaapduur. Bij de mannen is dat $\frac{101}{139} \times 100\% \approx 72,7\%$.
 Bij de vrouwen is dit percentage dus kleiner dan bij de mannen.

- e Filter de kolom Geslacht op M en kies 'Gemiddelde' in kolom G van de totaalrij. Lees af dat de gemiddelde slaapduur voor mannen 7,052 uur is. Kies in kolom G van de totaalrij vervolgens voor 'Stdev' en lees af dat de standaardafwijking 1,290 uur is. Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$\left[7,052 - 2 \cdot \frac{1,290}{\sqrt{139}}; 7,052 + 2 \cdot \frac{1,290}{\sqrt{139}} \right] \approx [6,83; 7,27].$$

Filter de kolom Geslacht op V en kies 'Gemiddelde' in kolom G van de totaalrij. Lees af dat de gemiddelde slaapduur voor vrouwen 7,172 uur is. Kies in kolom G van de totaalrij vervolgens voor 'Stdev' en lees af dat de standaardafwijking 1,321 uur is. Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$\left[7,172 - 2 \cdot \frac{1,321}{\sqrt{132}}; 7,172 + 2 \cdot \frac{1,321}{\sqrt{132}} \right] \approx [6,94; 7,40].$$

De 95%-betrouwbaarheidsintervallen overlappen elkaar. Er is dus geen significant verschil.

- f Kies 'Aantal' in kolom K van de totaalrij.

Filter de kolom Herkomst op plattelandsdorp. Aflezen in kolom K van de totaalrij geeft 49 studenten uit een plattelandsdorp. Filter de kolom Woonsituatie op Uitwonend. Aflezen in kolom K van de totaalrij geeft 34 uitwonende studenten uit een plattelandsdorp en dus $49 - 34 = 15$ thuiswonende studenten uit een plattelandsdorp.

Filter de kolom Herkomst op grote stad. Aflezen in kolom K van de totaalrij geeft 22 uitwonende studenten uit een grote stad. Filter verwijderen uit woonsituatie en aflezen in Kolom K van de totaalrij geeft in totaal 37 studenten uit een grote stad. Er zijn dus $37 - 22 = 15$ thuiswonende studenten uit een grote stad.

	Herkomst	
	plattelandsdorp	grote stad
thuiswonend	15	15
uitwonend	34	22
totaal	49	37

Voor de uitwonende studenten uit een plattelandsdorp geldt $\hat{p} = \frac{34}{49} = 0,6938...$ en

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,6938... \cdot (1 - 0,6938...)}{49}} = 0,0658...$$

Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$[0,6938... - 2 \cdot 0,0658...; 0,6938... + 2 \cdot 0,0658...] \approx [0,562; 0,826].$$

Voor de uitwonende studenten uit een grote stad geldt $\hat{p} = \frac{22}{37} = 0,5945...$ en

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,5945... \cdot (1 - 0,5945...)}{37}} = 0,0807...$$

Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$[0,5945... - 2 \cdot 0,0807...; 0,5945... + 2 \cdot 0,0807...] \approx [0,433; 0,756].$$

De 95%-betrouwbaarheidsintervallen overlappen elkaar. Er is dus geen significant verschil.

Bladzijde 115

- 14 Deze aanpak werkt.

Bladzijde 116

- 15 Maak een nieuwe kolom door in cel L1 AtletiekVrouwBenelux te typen. Filter de kolom Land op België, Luxemburg en Nederland. Filter de kolom Geslacht op V en filter de kolom Sport op Atletiek. Zet in de eerste cel van de nieuwe kolom Ja en gebruik de vulgreep. Verwijder alle filters en filter dan de kolom AtletiekVrouwBenelux op Lege cellen. Zet in de eerste cel van de kolom Nee en gebruik de vulgreep. Verwijder alle filters.

- 16** a Maak een nieuwe kolom door in cel L1 Medailles te typen.
 $L2=SOM(H2:I2;J2)$
 b Kiezen van 'Aantal' in kolom L van de totaalrij en de kolom Medailles op groter dan 1 filteren geeft 129 atleten met meer dan één medaille.
 Filteren van de kolom Goud op groter dan 0 geeft 89 atleten met meer dan één medaille, waarvan ten minste één gouden.
 c Verwijderen van alle filters en de kolom Medailles sorteren met 'Sorteren van hoog naar laag' geeft Michael Phelps met 6 medailles.

- 17** Maak een nieuwe kolom door in cel L1 Gevoelstemperatuur te typen.
 $L2=1,41-1,162*B2+0,98*C2+0,0124*B2^2+0,0185*B2*C2$
 Sorteert de kolom Gevoelstemperatuur met 'Sorteren van laag naar hoog'.
 De dag die het koudst aanvoelde was 1 februari 1956.

Bladzijde 117

- 18** a Filter in de kolommen Lengte en Gewicht de Lege cellen eruit.
 Kiezen van 'Aantal' in kolom E van de totaalrij geeft 10858 sporters.
 b Voeg een kolom toe door in cel N1 BMI te typen.
 $N2=F2/E2^2$
 De kolom BMI sorteren met 'Sorteren van hoog naar laag' geeft Florian Skilang Temengil.
 c Voeg een kolom toe door in cel O1 OvergewichtBMI te typen.
 Filter de kolom BMI op 'Is groter dan of gelijk aan' 25.
 Typ in de eerste cel van de nieuwe kolom Ja en gebruik de vulgreep.
 Filter wissen in de kolom BMI. Filter de kolom OvergewichtBMI op Lege cellen en zet in de eerste cel van deze kolom Nee en gebruik de vulgreep.
 d Kiezen van 'Aantal' in kolom O van de totaalrij en de kolom OvergewichtBMI filteren op Ja geeft 2071 sporters met overgewicht.

- 19** Maak een nieuwe kolom door in cel L1 Gevoelstemperatuur te typen.
 Filter de kolom GemiddeldeWindsnelheid(m/s) op 'Is kleiner dan of gelijk aan' 1,3.
 $L709=C709$ (en gebruik indien nodig de vulgreep).
 Filter de kolom GemiddeldeWindsnelheid(m/s) op 'Groter Dan' 1,3.
 $L2=13,12+0,6215*C2-11,37*(3,6*B2)^{0,16}+0,3965*C2*(3,6*B2)^{0,16}$ (en gebruik indien nodig de vulgreep)
 Verwijder alle filters en maak een nieuwe kolom door in cel M1 Verschil te typen.
 $M2=ABS(L2-C2)$
 Kolom Verschil sorteren met 'Sorteren van hoog naar laag' geeft het grootste verschil op 31 januari 1956.

7.3 Draaitabellen en draaigrafieken

Bladzijde 118

- 20** a Kies 'Aantal' in kolom E van de totaalrij.
 Filteren van kolom Geslacht op M geeft 402 mannen en filteren op V geeft 396 vrouwen.
 b Kies 'Aantal' in kolom C van de totaalrij.
 Filteren van kolom Regio op Midwest geeft 170, filteren op Northeast geeft 111, filteren op South geeft 294 en filteren op West geeft 223 personen.
 c Filter per Regio op M en op V.

		geslacht		
		M	V	
regio	Midwest	95	75	170
	Northeast	52	59	111
	South	148	146	294
	West	107	116	223
		402	396	798

- 21 a** De modale leeftijd bij de vrouwelijke sporters is 25.
- b**
- Maak een draaitabel met als rij-variabele Sport en als kolomvariabele Geslacht en kies bij Waarden voor Aantal van Geslacht.
Bij de sporten badminton, basketbal, boogschieten, hockey, moderne vijfkamp, taekwondo, tafeltennis, triatlon en volleybal staan evenveel mannen als vrouwen in de dataset.
 - Maak een draaitabel met als rij-variabele Leeftijd en als kolomvariabele Goud en kies bij Waarden voor Aantal van Goud.
De oudste winnaar van een gouden medaille is 58. Dubbelklikken op de waarde 1 in de tabel geeft een nieuw tabblad met de gegevens van deze sporter.
De oudste gouden medaillewinnaar deed aan paardensport.
Opmerking: als je ook Sport toevoegt als kolomvariabele, dan levert dit een minder overzichtelijke tabel op, maar kun je de sport wel direct aflezen.

- 22** Maak een draaitabel met als rij-variabelen Geslacht en Groep en zorg bij Waarden voor Min van Afstand, Gemiddelde van Afstand en Max van Afstand.
Stel de getalnotatie van Gemiddelde van Afstand in op twee decimalen.

Rijlabels	Min van Afstand (m)	Gemiddelde van Afstand (m)2	Max van Afstand (m)3
☒ M	71,93	79,95	88,68
A	71,93	79,70	84,46
B	72,61	80,21	88,68
☒ V	53,42	59,92	67,11
A	54,94	60,20	64,30
B	53,42	59,63	67,11
Eindtotaal	53,42	70,69	88,68

- 23 a** Maak een draaitabel met Leeftijd als rij-variabele, Geslacht als kolom-variabele en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van FB-vrienden.
Stel de getalnotatie in op gehelen.

Gemiddelde van FB_Vrienden	Kolomlabels	
Rijlabels	☒ M	☒ V
20	182	185
21	271	393
22	370	470
23	367	492
24	409	445
25	491	594
Eindtotaal	374	467

Naarmate de personen ouder zijn hebben ze, met uitzondering van de 23-jarigen, meer Facebookvrienden. Voor alle leeftijden geldt dat de vrouwen meer Facebookvrienden hebben dan de mannen.

Susanne heeft dus gelijk.

- b** Filter de kolom FB-Vrienden op #Null!.
Typ in de eerste cel van de kolom 0 en gebruik de vulgreep.
Maak een draaitabel met als rij-variabele Woonomgeving en zorg bij Waarden voor Gemiddelde van FB-Vrienden.
Stel de getalnotatie in op gehelen.

Rijlabels	Gemiddelde van FB_Vrienden
Rural	315
Suburban	313
Urban	301
(leeg)	265
Eindtotaal	308

Michiel concludeert dat het niet veel verschil maakt, maar dat in stedelijke gebieden personen iets minder Facebookvrienden hebben dan op het platteland.

Bladzijde 120

- 24** Er zijn 12 personen waarbij zowel de variabele `DeeltFotosVanZichzelf` als de variabele `DeeltVideosVanZichzelf` de waarde `#Null!` hebben.
Van deze personen is niet bekend of ze al dan niet foto's en/of video's van zichzelf delen.

- 25** **a** Maak een draaitabel met als rij-variabele `Lengte` en kies bij `Waarden` voor `Aantal van LeerlingID`.
Er komen zeer veel verschillende lengtes voor en de meeste lengtes hebben een lage frequentie. Dat levert een weinig overzichtelijke frequentietabel op.
- b** Maak een nieuwe kolom door `LengteKlasse` te typen in cel H1 van het werkblad `DATASET`.
Filter `Lengte` met getalfilter `Tussen` op 'Is groter dan of gelijk aan' 150 en 'Is kleiner dan of gelijk aan' 159.
Typ in de eerste cel van de nieuwe kolom 150 – 159 en gebruik de vulgreep.
Herhaal deze handeling voor de overige lengteklassen.
- c** Maak een draaitabel met als rij-variabele `LengteKlasse` en kies bij `Waarden` voor `Aantal van LeerlingID`.

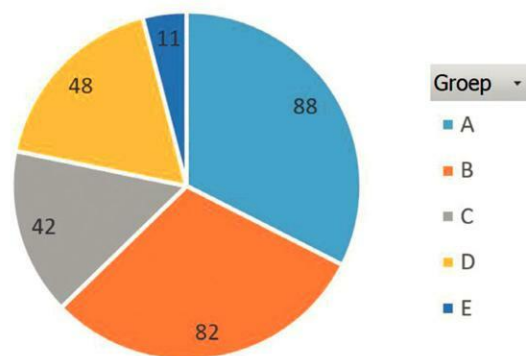
Rijlabels	Aantal van LeerlingID
150-159	9
160-169	44
170-179	54
180-189	31
190-199	8
Eindtotaal	146

Bladzijde 121

- 26** **a** Maak een draaitabel met als rij-variabele `Groep` en kies bij `Waarden` voor `Aantal van Groep`.

Aantal van Groep

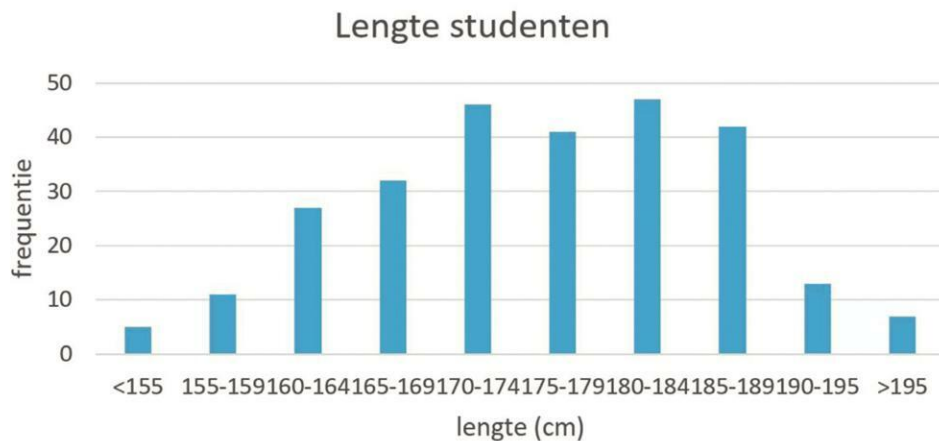
Aantallen studenten per groep



- b** Maak een draaitabel met als rij-variabele Lengte en kies bij Waarden voor Aantal van Groep.

Kies bij Lengte voor groeperen: Beginnen bij 155, Eindigen bij 195 en Op 5.

Aantal van Groep

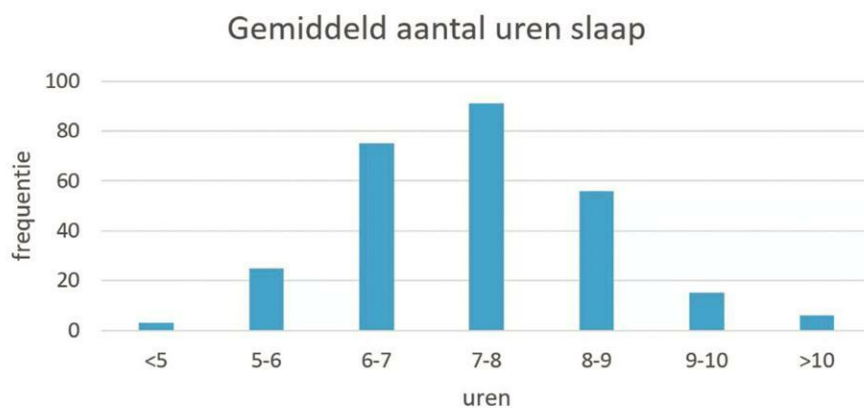


Lengte (cm) ▾

- c** Maak een draaitabel met als rij-variabele UrenSlaap en kies bij Waarden voor Aantal van Groep.

Kies bij UrenSlaap voor groeperen: Beginnen bij 5, Eindigen bij 10 en Op 1.

Aantal van UrenSlaap



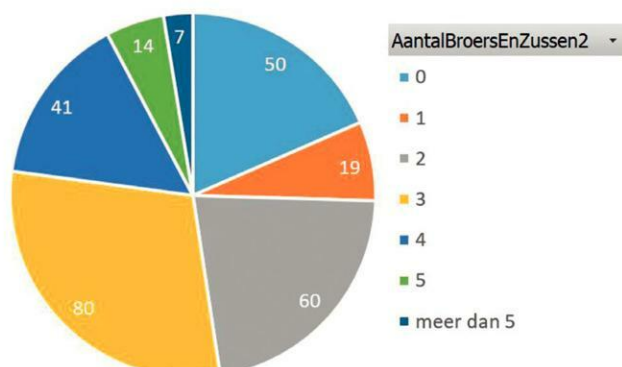
UrenSlaap ▾

- d** Maak een draaitabel met als rij-variabele AantalBroersEnZussen en kies bij Waarden voor Aantal van AantalBroersEnZussen.

Kies bij AantalBroersEnZussen voor groeperen van 6 en 7 broers en zussen.

Aantal van AantalBroersEnZussen

Aantal broers en zussen

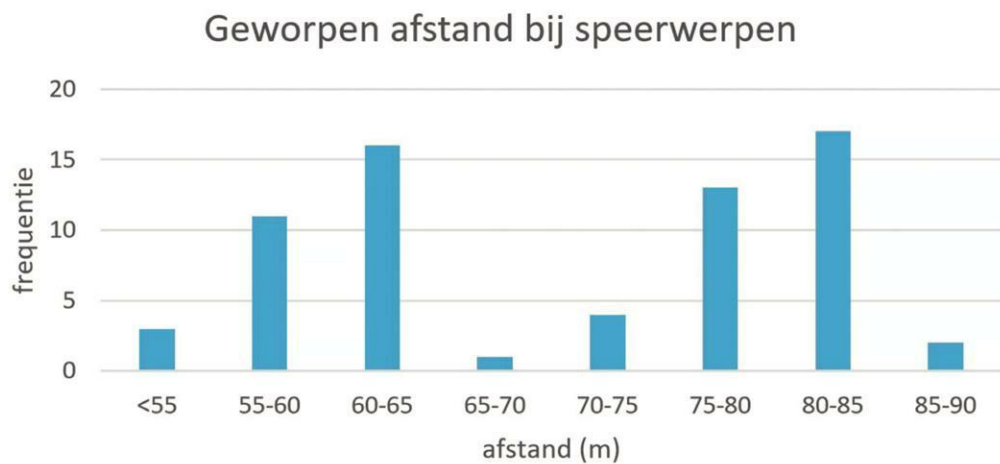


- 27 a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Afstand en kies bij Waarden voor Aantal van Afstand.

Kies bij Afstand voor groeperen: Beginnen bij 55, Eindigen bij 90 en Op 5.

Rijlabels	Aantal van Afstand (m)
<55	3
55-60	11
60-65	16
65-70	1
70-75	4
75-80	13
80-85	17
85-90	2
Eindtotaal	67

b Aantal van Afstand (m)

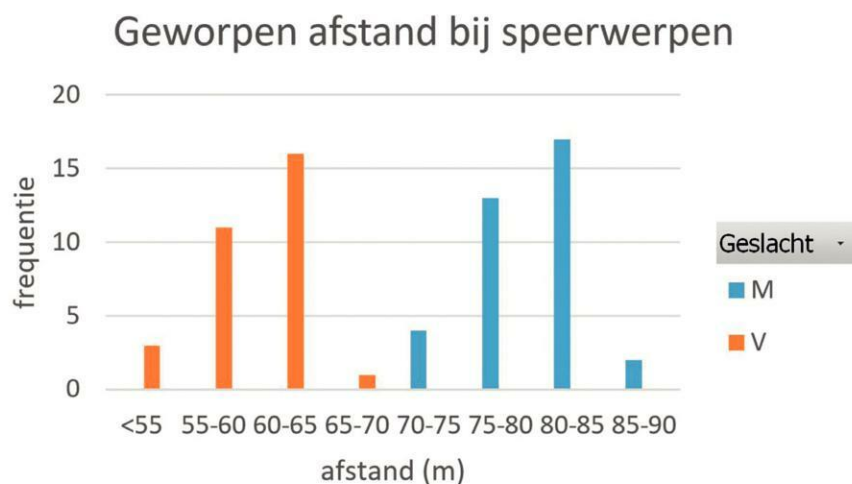


Afstand (m) ▾

- c** Je hebt te maken met een meertoppige verdeling.

- d** Voeg Geslacht toe als kolomvariabele.

Aantal van Afstand (m)

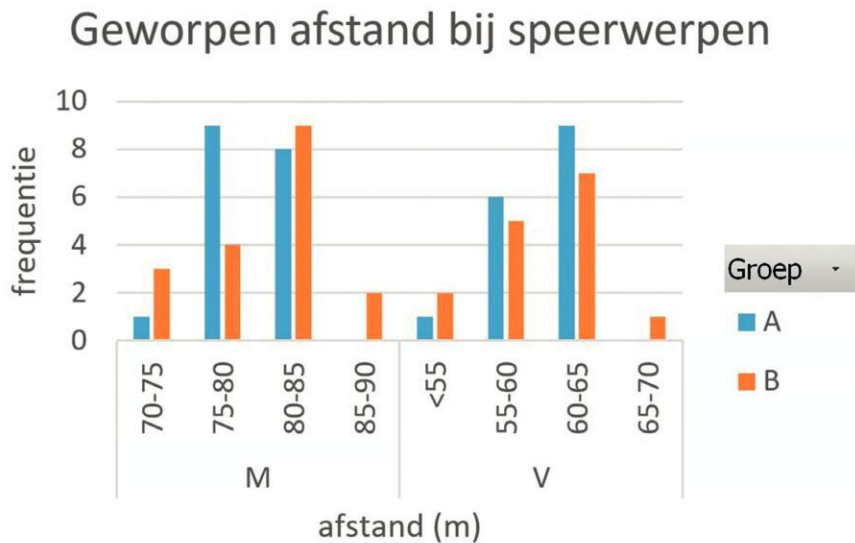


Afstand (m) ▾

De mannen gooien verder dan de vrouwen. Dit veroorzaakt de twee toppen.

- e Versleep Geslacht van Kolommen naar Rijen en zet Geslacht boven Afstand. Voeg Groep toe als kolomvariabele.

Aantal van Afstand (m)



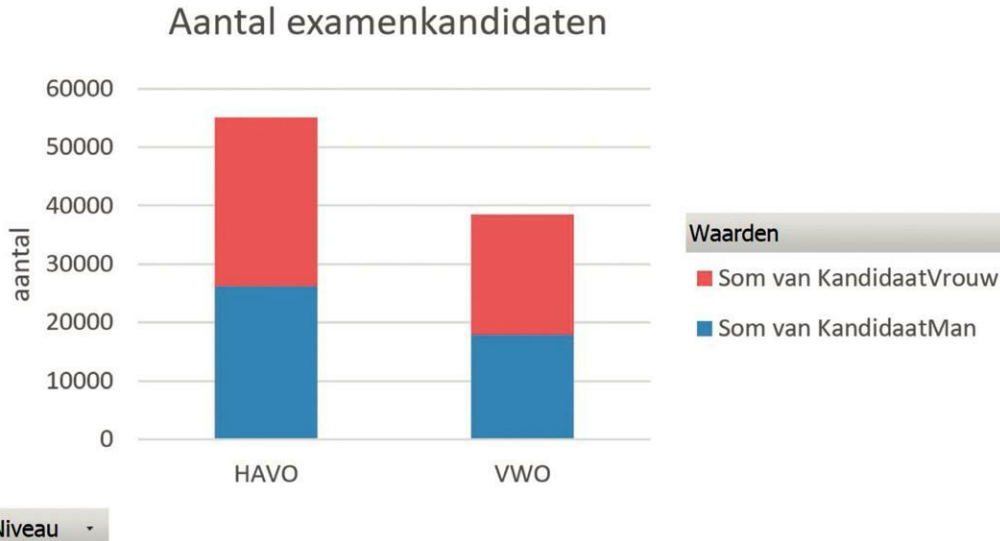
Geslacht Afstand (m)

+ -

Bladzijde 122

- 28 a Maak een draaitabel met als rij-variabele Niveau en kies bij Waarden voor Som van KandidaatMan en Som van KandidaatVrouw.

Som van KandidaatMan Som van KandidaatVrouw



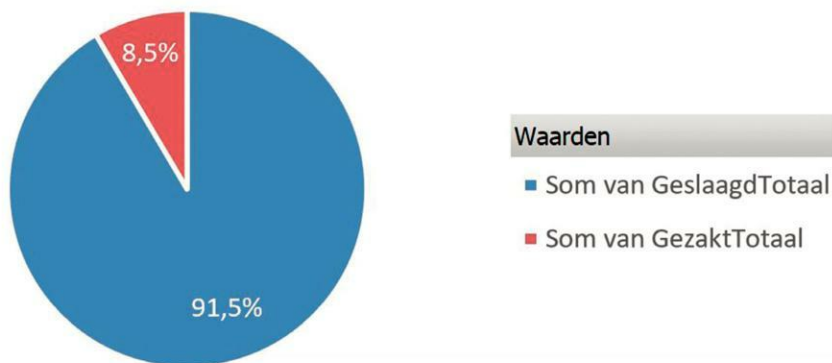
Niveau

- b Maak een draaitabel met als rij-variabele Provincie en kies bij Waarden voor Som van GeslaagdMan en Som van GeslaagdVrouw. Filter vervolgens in de draaitabel op de juiste provincies.
Je kunt ook voor het filteren het staafdiagram maken en dan in het figuur de provincies Gelderland en Zuid-Holland selecteren.

- c** Maak een draaitabel en kies bij Waarden voor Som van GeslaagdTotaal en Som van GezaktTotaal.
Kies als filter-variabele voor Niveau en filter op VWO.
Maak het cirkeldiagram en zorg ervoor dat de gegevenslabels weergegeven worden.
Bij Gegevenslabels opmaken kun je kiezen voor weergave in procenten. Bij notatie kun je kiezen voor een percentage in één decimaal.

Som van GeslaagdTotaal Som van GezaktTotaal

Slagingspercentage op het vwo



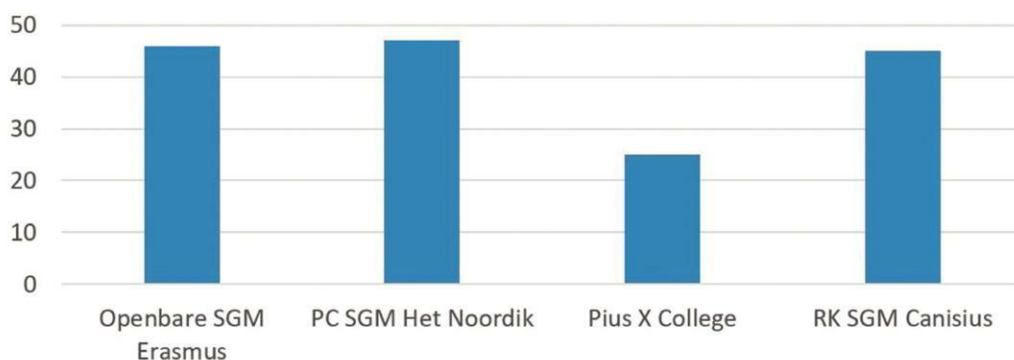
Niveau ▾

- d** Maak een draaitabel met als filter-variabelen Gemeente en Profiel, als rij-variabele School en kies bij Waarden voor Som van GeslaagdTotaal.
Filter bij Gemeente op Almelo en bij Profiel op N&T/N&G.

Gemeente ▾ Profiel ▾

Som van GeslaagdTotaal

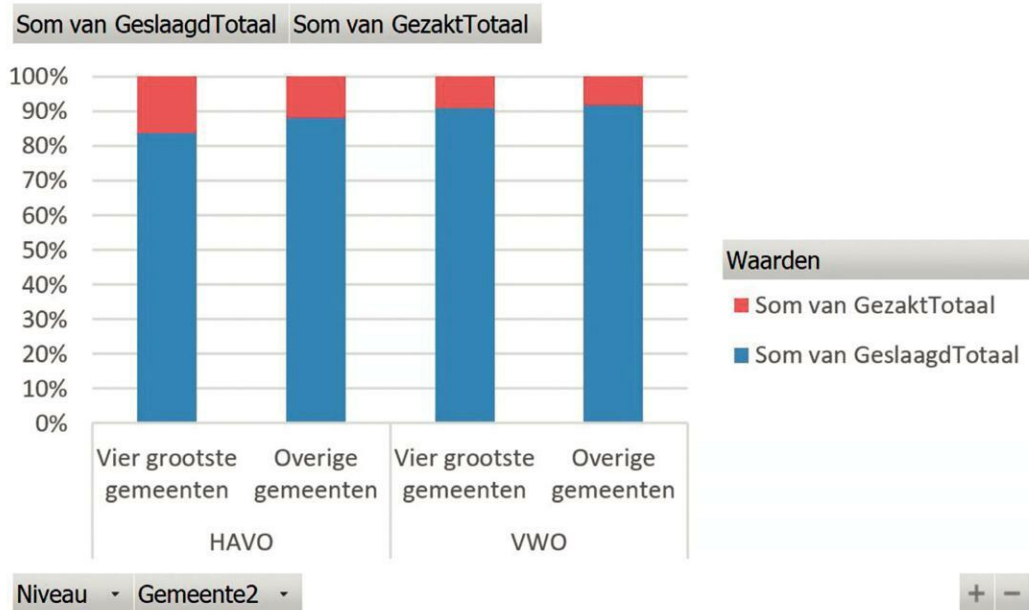
Geslaagden profiel N&T/N&G in Almelo



School ▾

- 29 a** Maak een draaitabel met als rij-variabelen Niveau en Profiel en kies bij Waarden voor Som van GeslaagdTotaal en Som van GezaktTotaal. Groepeer de profielen zoals aangegeven en maak de draaigrafiek.
- b** Maak een draaitabel en kies als rij-variabele Gemeente. Selecteer de vier grootste gemeenten door de Ctrl-toets vast te houden en kies voor groeperen. Bij de rij-variabelen zie je nu een nieuwe variabele Gemeente2 staan. Verwijder de oorspronkelijke variabele Gemeente om de tabel overzichtelijker te maken. Selecteer vervolgens alle gemeenten behalve Groep1 (gebruik Shift en Ctrl) en kies voor groeperen. Pas de namen voor Groep1 en Groep2 aan en zet ze eventueel in de juiste volgorde door de groepen naar de juiste plek te slepen.

Voeg nu Niveau toe als rij-variabele en zorg dat deze boven Gemeente2 komt te staan. Kies bij Waarden voor Som van GeslaagdTotaal en Som van GezaktTotaal. Maak nu de draaigrafiek.



- c Door de verticale as in de figuur van vraag b te laten lopen van 75% tot 100% zijn de percentages beter af te lezen.
Op de havo is het slagingspercentage in de grote gemeenten ongeveer 5% lager dan in de overige gemeenten. Op het vwo maakt het niet veel verschil, maar het slagingspercentage in de grote steden is ook hier lager dan in de overige gemeenten.

Bladzijde 123

- 30 a Maak een draaitabel met als rij-variabelen Leeftijd en Geslacht, als kolom-variabele DeeltFotosVanZichzelf en kies bij Waarden voor Aantal van DeeltFotosVanZichzelf.

Aantal van DeeltFotosVanZichzelf

Percentage dat foto's deelt op Sociale netwerken



- b Bram kijkt naar het aantal in de kolom Nee. Hij berekent $\frac{17}{76} \times 100\% \approx 22\%$.

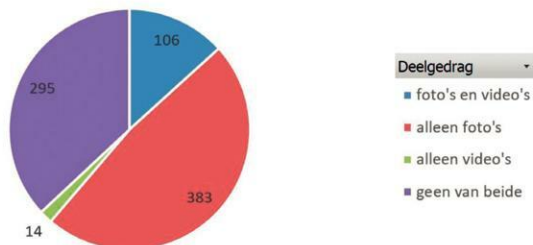
Roland rekt ook de vrouwen bij #Null! mee. Hij berekent $\frac{20}{76} \times 100\% \approx 26\%$.

Roland heeft gelijk. Vrouwen die geen sociale netwerken gebruiken, delen er dus ook geen foto's van zichzelf op.

- 31 a** Filter de kolom DeeltFotosVanZichzelf op #Null!. Typ in de eerste cel van deze kolom nee en gebruik de vulgreep.
- b** Filter de kolom DeeltVideosVanZichzelf op #Null!. Typ in de eerste cel van deze kolom nee en gebruik de vulgreep.
- Voeg een kolom in naast de kolom DeeltFotosVanZichzelf en noem deze kolom Deelgedrag.
- Filter zowel DeeltFotosVanZichzelf als DeeltVideosVanZichzelf op ja. Zet in de eerste cel van de kolom Deelgedrag 'foto's en video's' en gebruik de vulgreep.
- Filter zowel DeeltFotosVanZichzelf als DeeltVideosVanZichzelf op nee. Zet in de eerste cel van de kolom Deelgedrag 'geen van beide' en gebruik de vulgreep.
- Filter DeeltFotosVanZichzelf op ja en DeeltVideosVanZichzelf op nee. Zet in de eerste cel van de kolom Deelgedrag 'alleen foto's' en gebruik de vulgreep.
- Filter DeeltFotosVanZichzelf op nee en DeeltVideosVanZichzelf op ja. Zet in de eerste cel van de kolom Deelgedrag 'alleen video's' en gebruik de vulgreep.
- Maak een draaitabel met als rij-variabele Deelgedrag en kies bij Waarden voor Aantal van ID.

Aantal van ID

Delen van foto's en video's

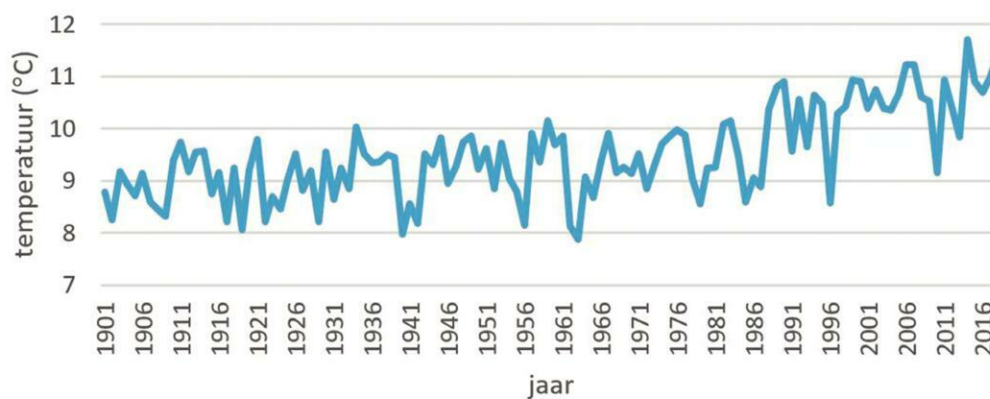


Bladzijde 124

- 32 a** Nee, er zijn zoveel datapunten dat de grafiek onoverzichtelijk is.
- b** Kies Aantal in kolom A van de totaalrij. Aflezen geeft 43 099 dagen. Deze dagen zijn niet allemaal in het lijndiagram te onderscheiden.
- c** Maak een draaitabel met als rij-variabele Datum en kies bij waarde voor Gemiddelde van GemiddeldeTemperatuur.
- Het kan dat Excel zelf al voor een groepering per jaar zorgt. Als dat zo is, dan kun je direct de figuur maken. Als Excel geen groepering maakt, dan kies je zelf voor Groeperen en selecteer je Jaren.
- De stijgende trend is in de figuur goed zichtbaar.

Gemiddelde van GemiddeldeTemperatuur (°C)

Gemiddelde jaartemperatuur



Jaren Datum

- a** Maak een draaitabel met als rij-variabele Periode en kies bij Waarden voor Som van AantalVerkochteWoningen.
 Het kan dat Excel zelf al voor een groepering op jaren en kwartalen zorgt.
 Als dat niet zo is, dan kies je voor Groeperen en selecteer je jaren en kwartalen.
 Filter de variabele Periode met een Datumfilter op Tussen 1-1-1995 en 31-12-2007.
 Je kunt ook in de draaitabel bij Rijlabels de juiste jaren selecteren.

Som van AantalVerkochteWoningen

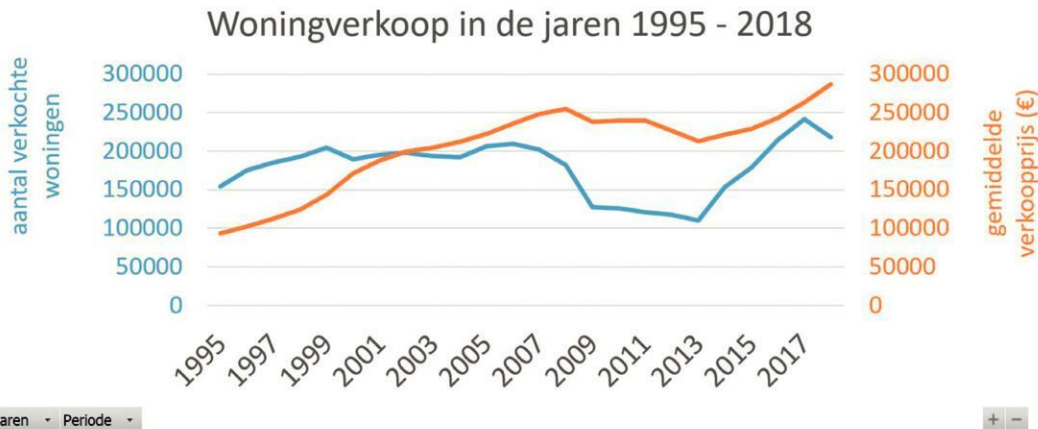


Steeds neemt de kwartaalverkoop binnen een jaar toe en steeds is het aantal verkochte woningen in het eerste kwartaal van een jaar minder dan in het laatste kwartaal van het voorafgaande jaar.

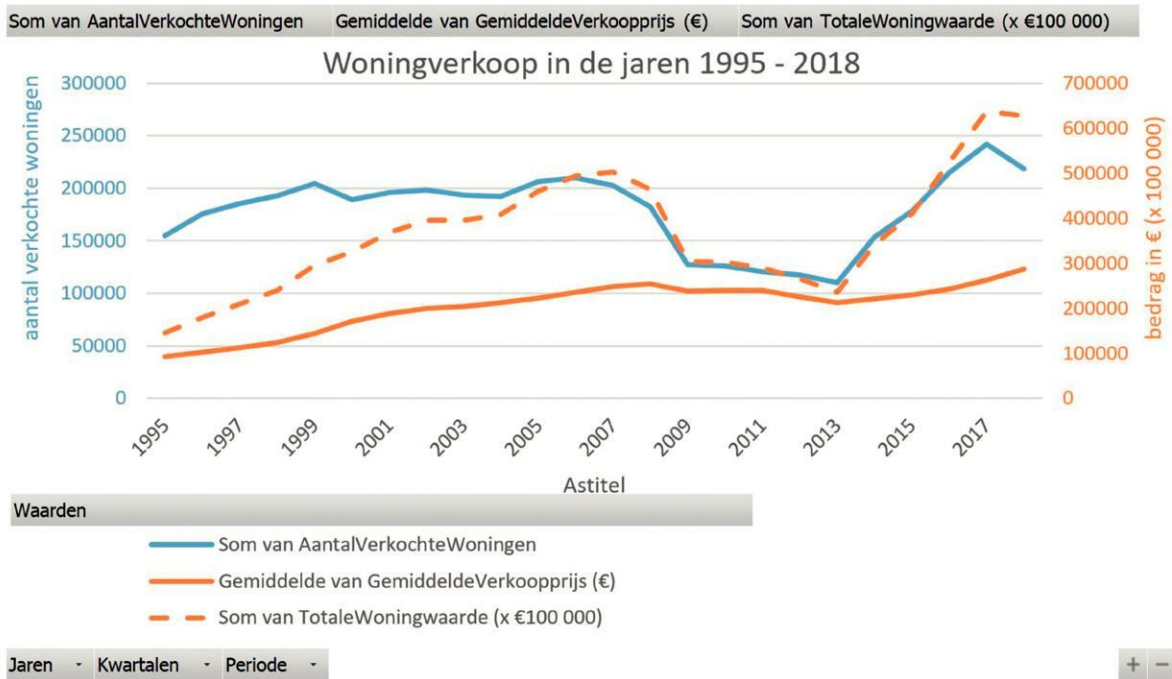
- b** Voeg aan de draaitabel bij Waarden het Gemiddelde van GemiddeldeVerkoop prijs toe. Pas de filter van de variabele Periode aan, zodat de jaren 1995-2018 getoond worden. Kies bij Periode voor groeperen: selecteer alleen Jaren.
 Maak het lijndiagram. Kies bij de grafiek voor de gemiddelde verkoopprijs voor Gegevensreeks Opmaken en selecteer Reeks tekenen op Secundaire as. Deze grafiek wordt nu afgebeeld op de rechter-as.

Som van AantalVerkochteWoningen

Gemiddelde van GemiddeldeVerkoop prijs (€)



- c** Voeg een kolom toe door in cel D1 TotaleWoningwaarde ($\times \text{€ } 100\,000$) te typen.
 $D2=B2*C2/100\,000$
 Vernieuw de draaitabel. Voeg bij Waarden de Som van TotaleWoningwaarde ($\times \text{€ } 100\,000$) toe.
 Kies bij de grafiek voor TotaleWoningwaarde ($\times \text{€ } 100\,000$) voor Gegevensreeks Opmaken en selecteer Reeks tekenen op Secundaire as. Deze grafiek wordt nu ook afgebeeld op de rechter-as.



Bladzijde 126

- 34 a** Maak op het tabblad Juni 2018 de totaalrij aan. Kies Gemiddelde in kolom C van de totaalrij. Het gemiddelde is $17,5^{\circ}\text{C}$. Dus het getal dat op de eerste puntjes moet staan is 17,5.

Maak bij de gegevens in het tabblad Tijdvak 1981-2010 een draaitabel met als rij-variabele Datum en kies bij Waarden voor Gemiddelde van GemTemperatuur($^{\circ}\text{C}$). Groepeer Datum op Maanden.

Lees bij juni af dat de normale gemiddelde temperatuur $15,6^{\circ}\text{C}$ is. Dus het getal dat op de tweede puntjes moet staan is $17,5 - 15,6 = 1,9$.

Maak bij de gegevens van het tabblad Historie een draaitabel met als rij-variabele Datum en kies bij Waarden voor Gemiddelde van GemTemperatuur($^{\circ}\text{C}$).

Kies bij Groeperen voor zowel Maanden als Jaren. Zet de rij-variabele Datum bovenaan bij de rij-variabelen. Filter de variabele Datum op Alle datums in de periode juni.

Sorteer de waarden van Gemiddelde van GemTemperatuur($^{\circ}\text{C}$) met 'Sorteren van hoog naar laag'. Merk op dat 2018 op plek 5 in de rij staat.

Dus op de derde puntjes moet 5 staan.

Kies op het tabblad Juni 2018 in kolom J van de totaalrij voor Som en lees af dat er in juni 2018 in totaal 11,8 mm neerslag viel. Dit is het getal dat op de eerste puntjes van de tweede alinea moet staan.

Voeg aan de draaitabel bij het tabblad Tijdvak 1981-2010 bij Waarden Som van HoeveelheidNeerslag toe. In totaal viel er in deze 30 jaar in de maanden juni 1968,5 mm neerslag, dus dat is gemiddeld 65,6 mm per maand. In juni 2018 viel dus $\frac{65,6 - 11,8}{65,6} \times 100\% \approx 82,0\%$ minder neerslag dan normaal. Het tweede getal in de tweede alinea is dus 82.

Kies op het tabblad Juni 2018 in de totaalrij van de kolom Zonneschijnduur voor Som en lees af dat in juni 2018 de zon in totaal 204,9 uur scheen. Het eerste getal in de derde alinea is dus 205.

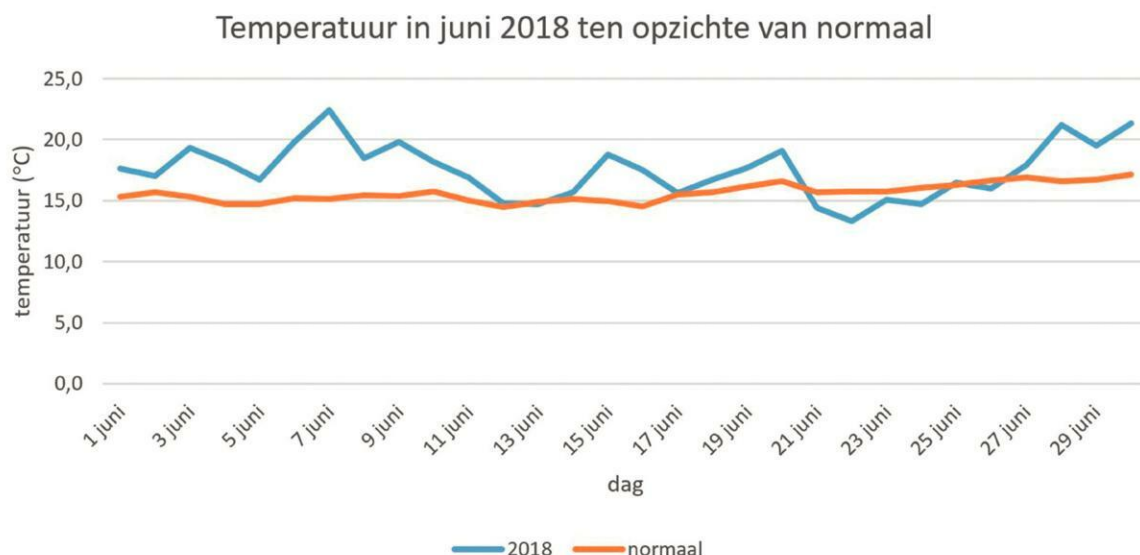
Voeg aan de draaitabel bij het tabblad Tijdvak 1981-2010 bij Waarden Som van Zonneschijnduur toe. In totaal scheen de zon in deze 30 jaar in de maanden juni 5817,5 uur, dus dat is gemiddeld ongeveer 194 uur per maand. Dit is het laatste getal van het artikel.

- b** Zet in de cellen B3 t/m B32 van het tabblad Temperaturen juni de gemiddelde dagtemperaturen van juni 2018. Kopieer deze van het tabblad Juni 2018.

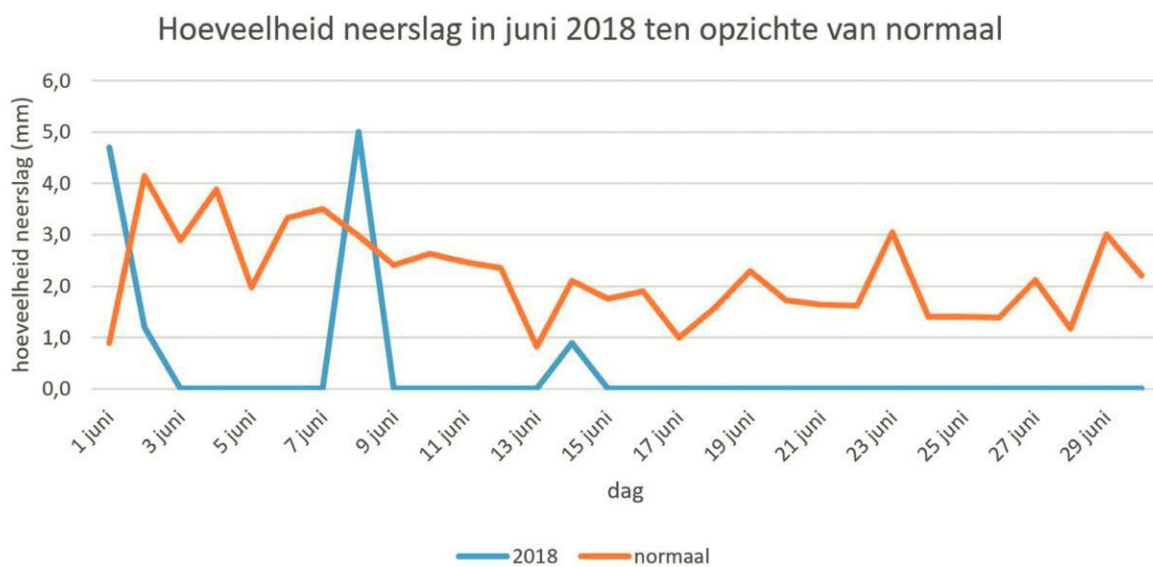
Gebruik de draaitabel bij het tabblad Tijdvak 1981-2010 uit vraag a. Groepeer Datum op Maanden én Dagen. Kopieer de gemiddelde dagtemperaturen van juni in de periode 1981-2010 naar de cellen C3 t/m C32 van het tabblad Temperaturen juni. Zorg ervoor dat de getallen in één decimaal worden weergegeven. Je krijgt de volgende tabel.

	A	B	C
1	GemiddeldeTemperatuur (°C)		
2	Dag	2018	normaal
3	1 juni	17,6	15,3
4	2 juni	17,0	15,7
5	3 juni	19,3	15,3
6	4 juni	18,2	14,7
7	5 juni	16,7	14,7
8	6 juni	19,8	15,2
9	7 juni	22,4	15,1
10	8 juni	18,5	15,4
11	9 juni	19,8	15,4
12	10 juni	18,2	15,7
13	11 juni	16,9	15,0
14	12 juni	14,8	14,5
15	13 juni	14,7	14,9
16	14 juni	15,7	15,1
17	15 juni	18,8	14,9
18	16 juni	17,5	14,6
19	17 juni	15,6	15,5
20	18 juni	16,7	15,7
21	19 juni	17,7	16,2
22	20 juni	19,1	16,6
23	21 juni	14,4	15,7
24	22 juni	13,3	15,7
25	23 juni	15,1	15,7
26	24 juni	14,7	16,0
27	25 juni	16,5	16,3
28	26 juni	16,0	16,6
29	27 juni	17,9	16,9
30	28 juni	21,2	16,6
31	29 juni	19,5	16,7
32	30 juni	21,3	17,2

Maak het lijndiagram.



c Ga te werk zoals bij vraag b.



35

*

K Lineair programmeren

Voorkennis Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

Bladzijde 131

1 $p: 3x - y = 6$

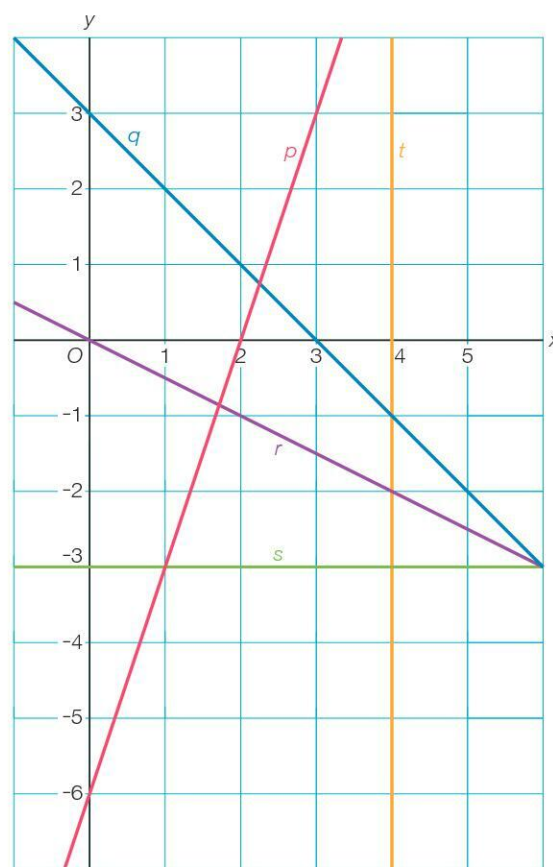
x	0	2
y	-6	0

$q: x + y = 3$

x	0	3
y	3	0

$r: x + 2y = 0$

x	0	2
y	0	-1



2 $l: 5x - 3y = 75$

$y = 0$ geeft $5x = 75$, dus $x = 15$ en snijpunt x -as is $(15, 0)$.

$x = 0$ geeft $-3y = 75$, dus $y = -25$ en snijpunt y -as is $(0, -25)$.

$m: 18x + y = 450$

$y = 0$ geeft $18x = 450$, dus $x = 25$ en snijpunt x -as is $(25, 0)$.

$x = 0$ geeft $y = 450$ en snijpunt y -as is $(0, 450)$.

$n: y = 320$ horizontale lijn, dus geen snijpunt x -as en snijpunt y -as is $(0, 320)$

$p: x = 185$ verticale lijn, dus geen snijpunt y -as en snijpunt x -as is $(185, 0)$

$q: 3x - 10y = 7500$

$y = 0$ geeft $3x = 7500$, dus $x = 2500$ en snijpunt x -as is $(2500, 0)$.

$x = 0$ geeft $-10y = 7500$, dus $y = -750$ en snijpunt y -as is $(0, -750)$.

$r: 0,2x + 0,3y = 600$

$y = 0$ geeft $0,2x = 600$, dus $x = 3000$ en snijpunt x -as is $(3000, 0)$.

$x = 0$ geeft $0,3y = 600$, dus $y = 2000$ en snijpunt y -as is $(0, 2000)$.

3 a $p: 5x - 12y = c$
 door $(51, 70)$ $c = 5 \cdot 51 - 12 \cdot 70 = -585$
 Dus $p: 5x - 12y = -585$.

b $q: 0,05x + 0,32y = c$
 door $(820, 7000)$ $c = 0,05 \cdot 820 + 0,32 \cdot 7000 = 2281$
 Dus $q: 0,05x + 0,32y = 2281$.

Bladzijde 132

- 4** **a** x = aantal muntstukken van 1 euro
 y = aantal muntstukken van 50 eurocent
 Je krijgt $x + 0,5y = 260$.
- b** x = aantal stoelen
 y = aantal tafels
 Je krijgt $350x + 850y = 22\,000$.
- c** x = aantal keer 100 gram cashewnoten
 y = aantal keer 100 gram studentenhaver
 Je krijgt $4x + 7y = 12,80$.
- d** x = aantal ha groenten
 y = aantal ha granen
 Je krijgt $20\,000x + 15\,000y = 540\,000$.
- 5** **a** x = aantal fietsen dat op de binnenplaats kan
 y = aantal bromfietsen dat op de binnenplaats kan
 Je krijgt $x + 2y = 180$.
- b** Er geldt $x = 4y$.
 Invullen van $x = 4y$ in $x + 2y = 180$ geeft $4y + 2y = 180$
 $6y = 180$
 $y = 30$
 $y = 30$ geeft $x = 4 \cdot 30 = 120$
 Er staan 120 fietsen op de binnenplaats.

K.1 Stelsels van lineaire vergelijkingen**Bladzijde 133**

- 1** **a** $l: x + 3y = 9$
- | | | |
|-----|---|---|
| x | 0 | 9 |
| y | 3 | 0 |
- $m: x + y = 5$
- | | | |
|-----|---|---|
| x | 0 | 5 |
| y | 5 | 0 |



- b** Het snijpunt is $(3, 2)$.

Bladzijde 134

- 2** **a** $\begin{cases} 5x - 4y = -8 \\ -x + 4y = -12 \end{cases}$ +
- $$4x = -20, \text{ dus } x = -5$$
- Invullen van $x = -5$ in $-x + 4y = -12$ geeft $5 + 4y = -12$
 $4y = -17$
 $y = -4\frac{1}{4}$
- Dus $x = -5$ en $y = -4\frac{1}{4}$.

$$\mathbf{b} \quad \begin{cases} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \\ \hline -2y = 8, \text{ dus } y = -4 \end{array}$$

Invullen van $y = -4$ in $-2x + y = 7$ geeft $-2x - 4 = 7$

$$\begin{array}{r} -2x = 11 \\ x = -5\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $x = -5\frac{1}{2}$ en $y = -4$.

$$\mathbf{c} \quad \begin{cases} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \\ \hline -3x = -9, \text{ dus } x = 3 \end{array}$$

Invullen van $x = 3$ in $-x - 3y = -8$ geeft $-3 - 3y = -8$

$$\begin{array}{r} -3y = -5 \\ y = 1\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $x = 3$ en $y = 1\frac{2}{3}$.

- 3 a** Optellen geeft $5x - y = 23$.
Er is geen variabele geëlimineerd.
- b** Aftrekken geeft $x - 7y = -9$.
Er is geen variabele geëlimineerd.

Bladzijde 135

$$\mathbf{4 a} \quad \begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{r} 3x + 5y = -7 \\ 2x + y = 0 \\ \hline -7x = -7, \text{ dus } x = 1 \end{array} \quad \begin{cases} 2 + y = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

De oplossing is $x = 1$ en $y = -2$.

$$\mathbf{b} \quad \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - y = 19 \end{cases} \quad \begin{array}{r} x - 2y = 3 \\ 3x - y = 19 \\ \hline -5y = -10, \text{ dus } y = 2 \end{array} \quad \begin{cases} x - 4 = 3 \\ x = 7 \end{cases}$$

De oplossing is $x = 7$ en $y = 2$.

$$\mathbf{5 a} \quad \begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ x + 3y = -7 \end{cases} \quad \begin{array}{r} 5x + 2y = 69 \\ 5x + 15y = -35 \\ \hline -13y = 104, \text{ dus } y = -8 \end{array} \quad \begin{cases} x - 24 = -7 \\ x = 17 \end{cases}$$

De oplossing is $x = 17$ en $y = -8$.

$$\mathbf{b} \quad \begin{cases} 0,8x + 0,2y = 1 \\ 0,3x - 0,3y = 1,5 \end{cases} \quad \begin{array}{r} 0,8x + 0,2y = 1 \\ 0,6x - 0,6y = 3 \\ \hline 3x = 6, \text{ dus } x = 2 \end{array} \quad \begin{cases} 1,6 + 0,2y = 1 \\ 0,2y = -0,6 \\ y = -3 \end{cases}$$

De oplossing is $x = 2$ en $y = -3$.

6 a $p: 12x + 5y = 5$

x	0	2
y	1	-3,8

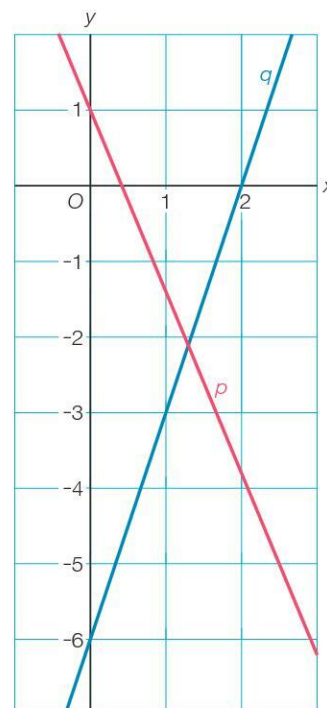
$$q: 3x - y = 6$$

x	0	2
y	-6	0

b Je moet het stelsel $\begin{cases} 12x + 5y = 5 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$ oplossen.

$$\left\{ \begin{array}{l} 12x + 5y = 5 \\ 3x - y = 6 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 5 \end{array} \Bigg| \text{geeft} \left\{ \begin{array}{l} 12x + 5y = 5 \\ 15x - 5y = 30 \end{array} \right. + \frac{27x}{27x} = 35, \text{ dus } x = 1\frac{8}{27} \left. \begin{array}{l} 3x - y = 6 \\ 3x - y = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\frac{8}{9} - y = 6 \\ -y = 2\frac{1}{9} \\ y = -2\frac{1}{9} \end{array}$$

Het snijpunt is $(1\frac{8}{27}, -2\frac{1}{9})$.



Bladzijde 136

7 $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ x + 4y = 38 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x - 4y = -24 \\ x + 4y = 38 \end{cases} +$
 $\begin{matrix} 7x & = 14, \text{ dus } x = 2 \\ & x + 4y = 38 \end{matrix} \begin{cases} 2 + 4y = 38 \\ 4y = 36 \\ y = 9 \end{cases}$

Het snijpunt is $(2, 9)$.

8 a Er geldt $x + y = 5000$.

b x kg van 12 euro per kg kost $12x$ euro.

y kg van 16 euro per kg kost $16y$ euro.

5000 kg van 12,80 euro per kg kost $5000 \cdot 12,80 = 64\,000$ euro.

Dus $12x + 16y = 64\,000$.

$$\mathbf{c} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 5000 \\ 12x + 16y = 64000 \end{array} \right| \begin{array}{l} 12 \\ 1 \end{array} \Bigg| \text{geeft} \left\{ \begin{array}{l} 12x + 12y = 60000 \\ 12x + 16y = 64000 \\ -4y = -4000, \text{ dus } y = 1000 \\ x + y = 5000 \\ x = 4000 \end{array} \right.$$

De oplossing is $x = 4000$ en $y = 1000$.

d Het mengsel bevat 4000 kg koffie uit Colombia en 1000 kg koffie uit Jamaica.

9 a x liter A van 18% alcohol geeft $0,18x$ liter alcohol.

v liter B van 10% alcohol geeft $0,10v$ liter alcohol.

20 liter van 15% geeft $20 \cdot 0,15 = 3$ liter alcohol.

Dus $0,18x + 0,10y = 3$.

b Er geldt ook dat $x + y = 20$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,18x + 0,10y = 3 \\ x + y = 20 \end{array} \right| \begin{array}{l} 10 \\ 1 \end{array} \Bigg| \text{geeft} \left\{ \begin{array}{l} 1,8x + y = 30 \\ x + y = 20 \end{array} \right. \Bigg| \begin{array}{l} 0,8x = 10, \text{ dus } x = 12,5 \\ x + y = 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 12,5 + y = 20 \\ y = 7,5 \end{array}$$

Er is 12,5 liter A nodig en 7,5 liter B.

- 10 a** Samen 1 liter, dus $x + y = 1$.
 Uit de prijzen volgt $0,70x + y = 0,75$.

$$\begin{array}{r} \text{b} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 0,70x + y = 0,75 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ \hline 0,30x = 0,25, \text{ dus } x = \frac{5}{6} \end{array} \\ \quad \quad \quad \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y = \frac{1}{6} \end{array} \end{array}$$

De samenstelling is $\frac{5}{6}$ liter appelsap en $\frac{1}{6}$ liter perziksap.

11 a $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ -6x + 2y = 5 \end{cases} \begin{array}{l} |2| \\ |1| \end{array}$ geeft $\begin{cases} 6x - 2y = 20 \\ -6x + 2y = 5 \end{cases} +$
 $0 = 25$

Er zijn geen waarden voor x en y .

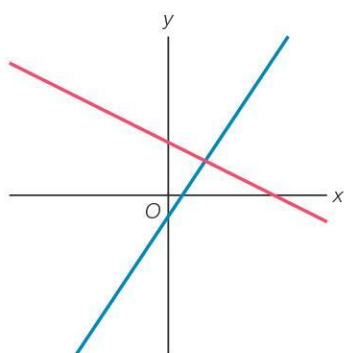
$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ -6x + 2y = -20 \end{cases} \begin{array}{l} |2| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 2y = 20 \\ -6x + 2y = -20 \end{cases} +$$

 $0 = 0$

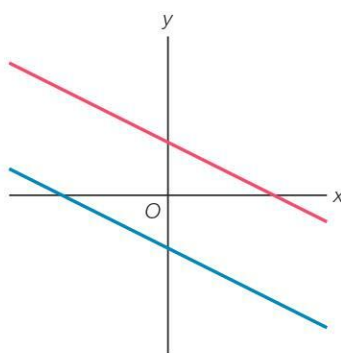
Je hebt hier eigenlijk maar één vergelijking, want $-6x + 2y = -20$ delen door -2 geeft $3x - y = 10$.

- b** Er zijn drie situaties te onderscheiden:

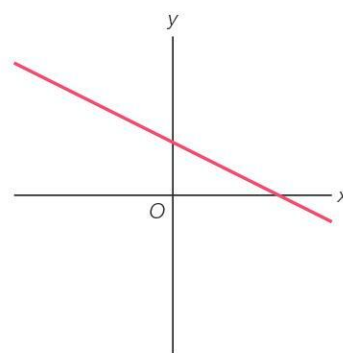
- 1 het stelsel heeft één oplossing, want de grafieken van de vergelijkingen snijden elkaar
- 2 het stelsel heeft geen oplossing, want de grafieken van de vergelijkingen zijn evenwijdig
- 3 het stelsel heeft oneindig veel oplossingen, want de grafieken van de vergelijkingen vallen samen.



situatie 1



situatie 2



situatie 3

Bladzijde 137

12 a $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases} \begin{array}{l} |3| \\ |1| \end{array}$ geeft $\begin{cases} 3x - 3y + 9z = 12 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases} -$
 $-2y + 4z = -2$

b $\begin{cases} -3y + 5z = -6 \\ -2y + 4z = -2 \end{cases} \begin{array}{l} |4| \\ |5| \end{array}$ geeft $\begin{cases} -12y + 20z = -24 \\ -10y + 20z = -10 \end{cases} -$
 $-2y = -14, \text{ dus } y = 7$
 $-2y + 4z = -2$
 $4z = 12$
 $z = 3$

De oplossing is $y = 7$ en $z = 3$.

- c** Invullen van $y = 7$ en $z = 3$ in $x - y + 3z = 4$ geeft $x + 2 = 4$
 $x = 2$

Dus $x = 2$ en $y = 7$ en $z = 3$.

d Stelsel I:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \end{cases} \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{geeft} \\ \end{array} \right. \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 4 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \\ - \end{array}$$

$$5y = 0, \text{ dus } y = 0$$

Dan $y = 0$ invullen in de eerste en derde vergelijking.

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ 4x - 3z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{geeft} \\ \end{array} \right. \begin{cases} 3x + 3z = 6 \\ 4x - 3z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$$

$$7x = 7, \text{ dus } x = 1$$

$$\begin{cases} 1 + z = 2 \\ x + z = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 1 + z = 2 \\ z = 1 \end{array}$$

De oplossing is $x = 1$ en $y = 0$ en $z = 1$.

Stelsel II:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 4 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \\ - \end{array}$$

$$2y + 2z = 2, \text{ dus } y + z = 1$$

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 4 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \\ - \end{array}$$

$$y + 4z = -2$$

$$\begin{cases} y + 4z = -2 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \\ - \end{array}$$

$$3z = -3, \text{ dus } z = -1$$

$$\begin{cases} y + -1 = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = 2 \\ y = 2 \end{array}$$

Uit $x + y + 3z = 2$ volgt $x = 2 - y - 3z = 2 - 2 - 3 \cdot -1 = 3$.

De oplossing is $x = 3$ en $y = 2$ en $z = -1$.

13 a $\begin{cases} 50x + 75y + 10z = 500 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \\ 90x + 100y + 50z = 1150 \end{cases}$ oftewel $\begin{cases} 10x + 15y + 2z = 100 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \\ 9x + 10y + 5z = 115 \end{cases}$

b $\begin{cases} 10x + 15y + 2z = 100 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \end{cases} \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{geeft} \\ \end{array} \right. \begin{cases} 20x + 30y + 4z = 200 \\ 15x + 30y + 9z = 225 \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \\ - \end{array}$

$$5x - 5z = -25, \text{ dus } x - z = -5$$

$$\begin{cases} 5x + 10y + 3z = 75 \\ 9x + 10y + 5z = 115 \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \\ - \end{array}$$

$$-4x - 2z = -40, \text{ dus } 2x + z = 20$$

$$\begin{cases} x - z = -5 \\ 2x + z = 20 \end{cases} \quad \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$$

$$3x = 15, \text{ dus } x = 5$$

$$\begin{cases} 5 - z = -5 \\ x - z = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 5 - z = -5 \\ z = 10 \end{array}$$

Invullen van $x = 5$ en $z = 10$ in $5x + 10y + 3z = 75$ geeft $55 + 10y = 75$

$$10y = 20$$

$$y = 2$$

De oplossing is $x = 5$ en $y = 2$ en $z = 10$.

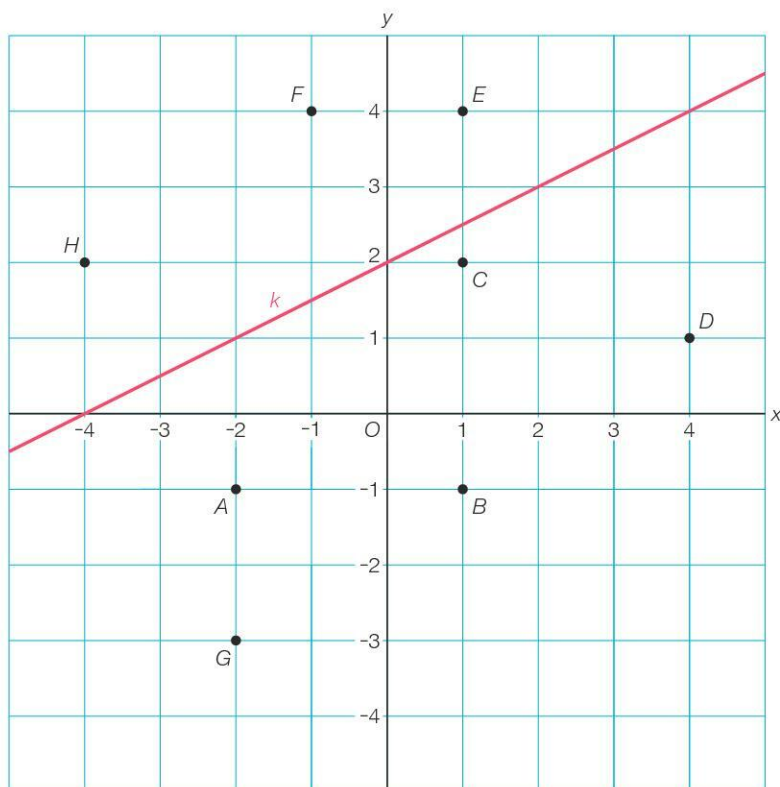
Het dieet bestaat dus uit 500 gram I, 200 gram II en 1000 gram III.

K.2 Ongelijkheden met twee variabelen

Bladzijde 139

14 a $k: x - 2y = -4$

x	0	-4
y	2	0



b Invullen geeft $-2 + 2 > -4$ en dat klopt.

	A	B	C	D	E	F	G	H
Punt boven k ?	nee	nee	nee	nee	ja	ja	nee	ja
Voldoet aan $x - 2y > -4$?	ja	ja	ja	ja	nee	nee	ja	nee

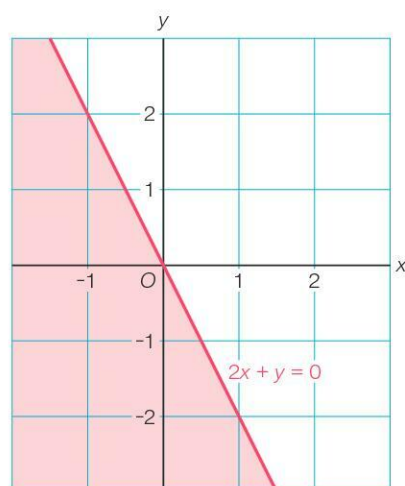
d De punten die voldoen aan $x - 2y > -4$ liggen onder de lijn k .

Bladzijde 140

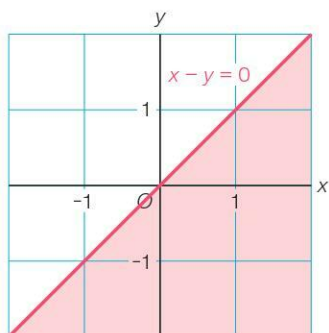
15 a Omdat dit punt op de lijn $2x + y = 0$ ligt.

b Bijvoorbeeld $(1, -2)$, want dit punt ligt ook op de lijn $2x + y = 0$.

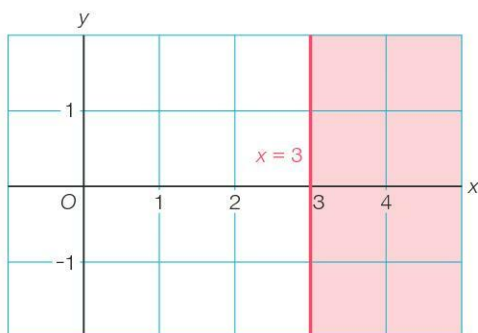
c $(0, 1)$ invullen geeft $1 \leq 0$; dit klopt niet.



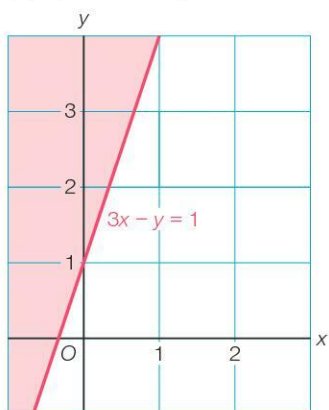
- 16 a** De lijn $x - y = 0$ gaat door $(0, 0)$ en $(1, 1)$.
 $(1, 0)$ invullen geeft $1 - 0 \geq 0$; dit klopt.



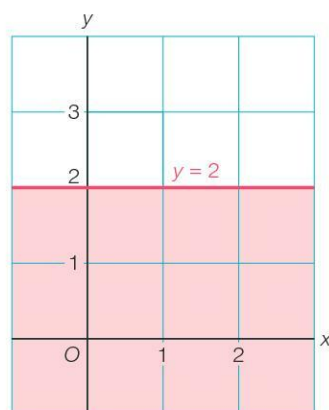
- b** De lijn $x = 3$ is een verticale lijn.



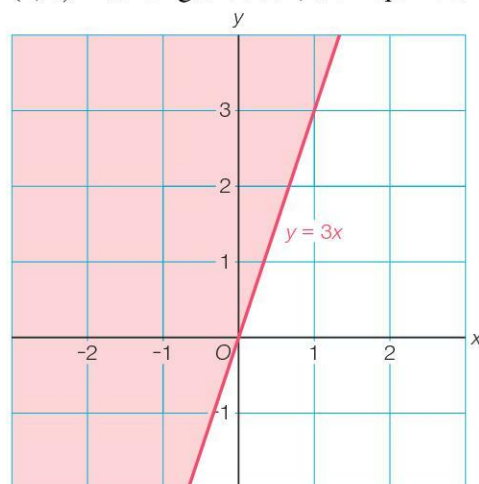
- c** De lijn $3x - y = -1$ gaat door $(0, 1)$ en $(1, 4)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 - 0 \leq -1$; dit klopt niet.



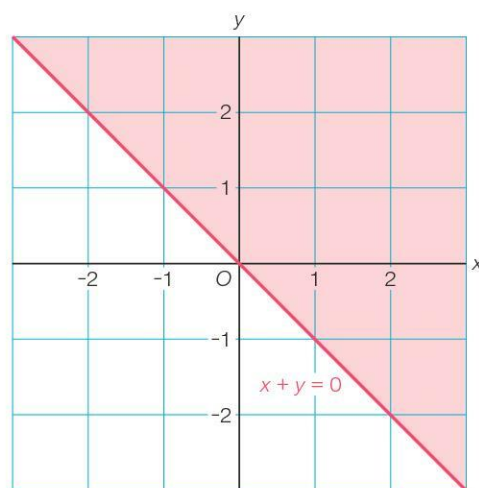
- d** De lijn $y = 2$ is een horizontale lijn.



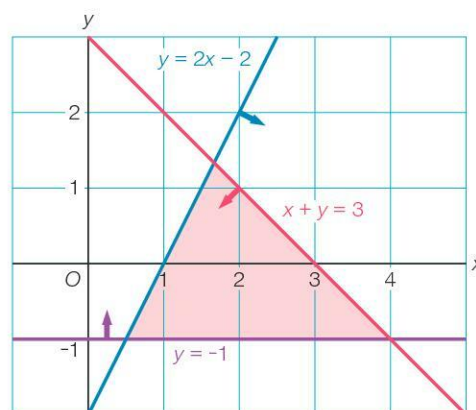
- e** De lijn $y = 3x$ gaat door $(0, 0)$ en $(1, 3)$.
 $(1, 0)$ invullen geeft $0 \geq 1$; dit klopt niet.



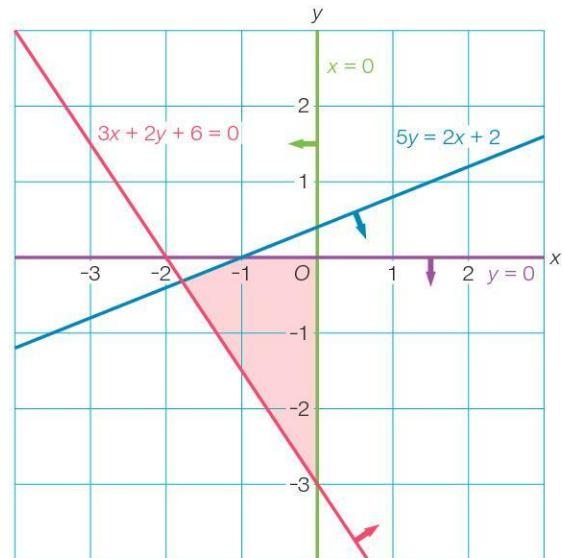
- f** De lijn $x + y = 0$ gaat door $(0, 0)$ en $(1, -1)$.
 $(1, 0)$ invullen geeft $0 + 1 \geq 0$; dit klopt.



- 17 a** De lijn $x + y = 3$ gaat door $(0, 3)$ en $(3, 0)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 \leq 3$; dit klopt.
De lijn $y = 2x - 2$ gaat door $(1, 0)$ en $(0, -2)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 \leq 0 - 2$; dit klopt niet.
De lijn $y = -1$ is een horizontale lijn.

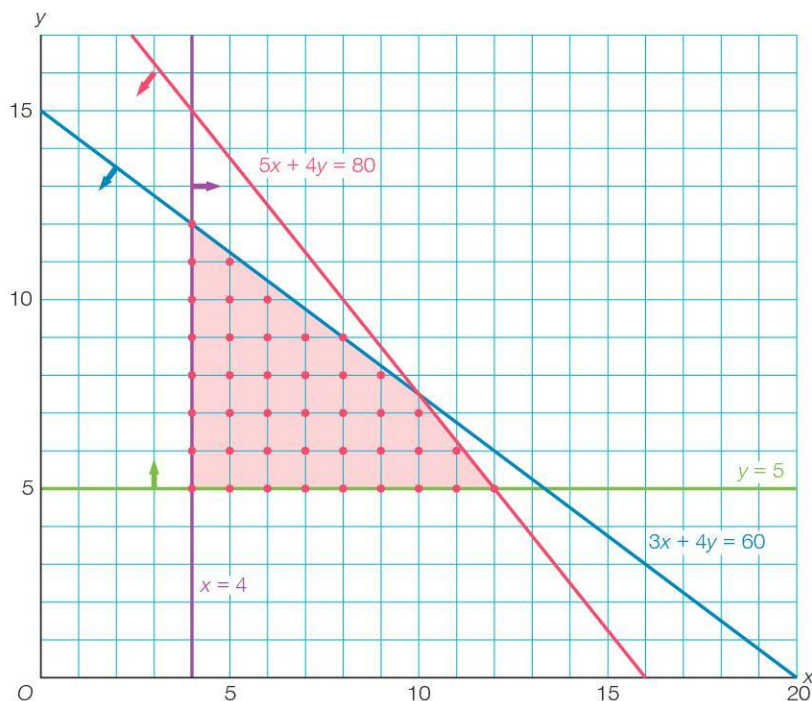


- b** De lijn $3x + 2y + 6 = 0$ gaat door $(-2, 0)$ en $(0, -3)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 + 6 \geq 0$; dit klopt.
 De lijn $5y = 2x + 2$ gaat door $(-1, 0)$ en $(4, 2)$.
 $(0, 0)$ invullen geeft $0 \leq 0 + 2$; dit klopt.
 De lijn $x = 0$ is de y -as.
 De lijn $y = 0$ is de x -as.



Bladzijde 141

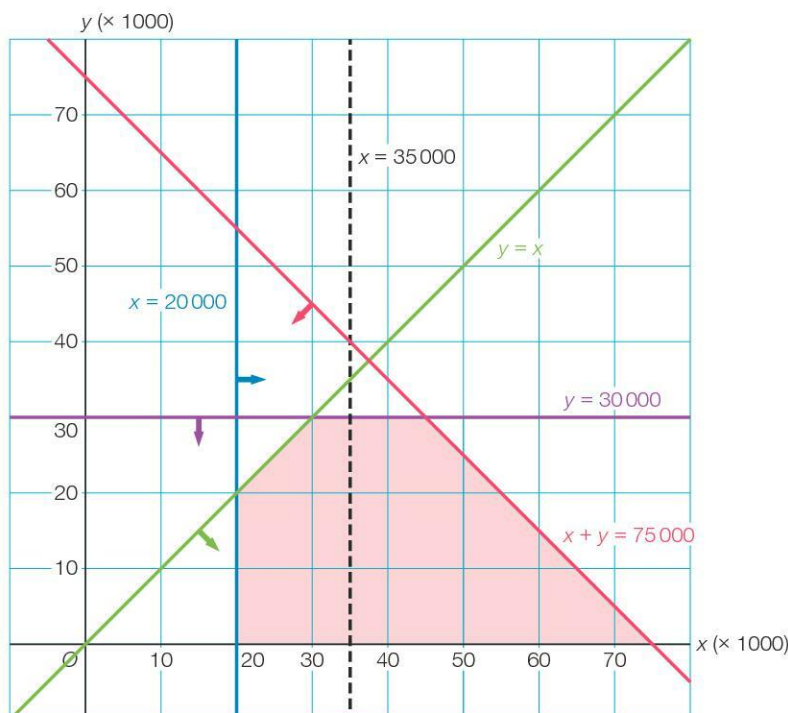
- 18 a** Het gebied heeft vier grenslijnen:
 1 De y -as: $x = 0$.
 2 De lijn door $(0, 5)$ en $(2, 0)$: $y = -2\frac{1}{2}x + 5$.
 3 De lijn door $(0, 3)$ en $(4, 0)$: $y = -\frac{3}{4}x + 3$.
 4 De x -as: $y = 0$.
 Voor het gebied geldt: $x \geq 0$ en $y \geq -2\frac{1}{2}x + 5$ en $y \geq -\frac{3}{4}x + 3$ en $y \geq 0$.
- b** Los op $-2\frac{1}{2}x + 5 = -\frac{3}{4}x + 3$
 $-1\frac{3}{4}x = -2$
 $x = 1\frac{1}{7}$
 Samen met $y = -\frac{3}{4}x + 3$ geeft dit $y = -\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{7} + 3 = 2\frac{1}{7}$.
 De coördinaten van A zijn $(1\frac{1}{7}, 2\frac{1}{7})$.
- 19 a** De grenslijn door $(0, 6)$ en $(3, 0)$: $y = -2x + 6$.
 De grenslijn door $(0, 6)$ en $(6, 0)$: $y = -x + 6$.
 De grenslijn door $(0, 0)$ en $(2, 1)$: $y = \frac{1}{2}x$.
 Voor het gebied geldt: $y \geq -2x + 6$ en $y \leq -x + 6$ en $y \geq \frac{1}{2}x$.
- b** Los op $-2x + 6 = \frac{1}{2}x$
 $-2\frac{1}{2}x = -6$
 $x = 2\frac{2}{5}$
 Samen met $y = \frac{1}{2}x$ geeft dit $y = 1\frac{1}{5}$.
 Het punt met de kleinste y -coördinaat is hoekpunt $(2\frac{2}{5}, 1\frac{1}{5})$.
- c** Het punt met de grootste x -coördinaat is hoekpunt $(4, 2)$.
- d** De coördinaten van de roosterpunten in V zijn $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(1, 5)$ en $(0, 6)$.
- 20 a** Voor x huizen van het type A is $250x \text{ m}^2$ nodig en voor y huizen van het type B is $200y \text{ m}^2$ nodig.
 Het totaal moet kleiner dan of gelijk aan de beschikbare 4000 m^2 zijn.
 Dus $250x + 200y \leq 4000$. Delen door 50 geeft $5x + 4y \leq 80$.
- b** Het totaal aantal mensdagen is $240x + 320y$.
 Hiervoor geldt $240x + 320y \leq 4800$. Delen door 80 geeft $3x + 4y \leq 60$.
- c** Hierbij horen de ongelijkheden $x \geq 4$ en $y \geq 5$.
- d** De lijn $5x + 4y = 80$ gaat door $(0, 20)$ en $(16, 0)$.
 De lijn $3x + 4y = 60$ gaat door $(0, 15)$ en $(20, 0)$.
 De lijn $x = 4$ is een verticale lijn en de lijn $y = 5$ is een horizontale lijn.
 Door het uitproberen van bijvoorbeeld $(0, 0)$ in beide formules komen we voor de gecombineerde ongelijkheden tot het volgende gebied.



- e** Alleen gehele waarden van x en y zijn mogelijk. Bij de roosterpunten horen gehele waarden van x en y , dus alleen de roosterpunten zijn van belang. Zie de punten in de figuur.
- f** Kies van de roosterpunten van vraag e het punt waarvoor $x + y$ maximaal is en y zo groot mogelijk is. Dit levert het punt $(8, 9)$.
Er worden acht huizen van type A en negen van type B gebouwd.
Er wordt $8 \cdot 250 + 9 \cdot 200 = 3800 \text{ m}^2$ gebruikt.

Bladzijde 142

- 21 a** Stel dat hij x euro in aandelen belegt en y euro in obligaties.
Je krijgt $x \geq 20\,000$ en $y \leq 30\,000$ en $x \geq y$ en $x + y \leq 75\,000$.
- b** De lijn $x = y$ gaat door $(0, 0)$ en $(70\,000, 70\,000)$.
De lijn $x + y = 75\,000$ gaat door $(0, 75\,000)$ en $(75\,000, 0)$.
Door het uitproberen van bijvoorbeeld $(0, 0)$ in beide formules komen we voor de gecombineerde ongelijkheden tot het volgende gebied.



- c** De lijn $x = 35\,000$ snijdt de rand van het gebied bij de lijn $y = 30\,000$, dus hij kan nog $30\,000$ euro in obligaties beleggen.

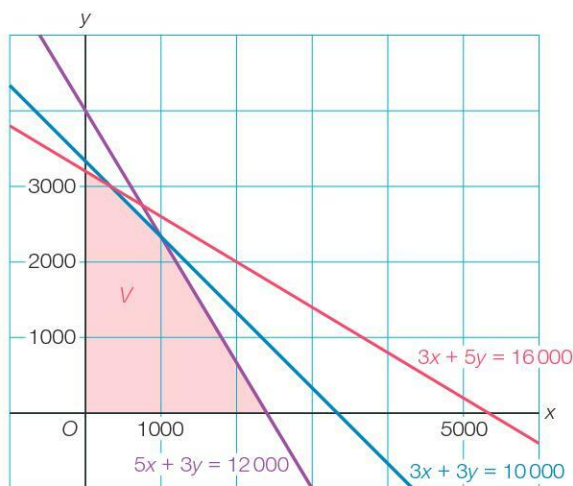
K.3 Lineaire programmeringsproblemen

Bladzijde 144

- 22 a** Voor 1700 liter M is $0,2 \cdot 1700 = 340$ liter melk nodig en $0,15 \cdot 1700 = 255$ liter room.
 Voor 1400 liter R is $0,2 \cdot 1400 = 280$ liter melk nodig en $0,3 \cdot 1400 = 420$ liter room.
 Totaal is dus $340 + 280 = 620$ liter melk nodig en $255 + 420 = 675$ liter room.
 Er is te weinig room beschikbaar.
- b** Er wordt meer R dan M gemaakt.
- c** Meer M dan R, dat klopt.
 Nodig aan melk: $0,2 \cdot 2000 + 0,2 \cdot 1000 = 600$ liter, dat kan.
 Nodig aan room: $0,15 \cdot 2000 + 0,3 \cdot 1000 = 600$ liter, dat kan.
 Dus het is mogelijk.

Bladzijde 145

- 23 a** Voor punt A geldt $\begin{cases} y = x \\ x + y = 2000 \end{cases}$ en dit geeft (1000, 1000).
 Punt B is het punt (2000, 0).
 Punt C is het punt (3100, 0).
 Voor punt D geldt
- $$\begin{cases} 0,2x + 0,2y = 620 \\ 0,15x + 0,3y = 600 \end{cases} \begin{array}{l} 15 \\ 10 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 3x + 3y = 9300 \\ 1,5x + 3y = 6000 \end{cases}$$
- $$\begin{array}{r} 3x + 3y = 9300 \\ -1,5x + 0y = 3300 \\ \hline 1,5x = 3300, \text{ dus } x = 2200 \end{array}$$
- $x + y = 3100 \Rightarrow y = 900$
- Dus D(2200, 900).
- Voor punt E geldt $\begin{cases} y = x \\ 0,15x + 0,3y = 600 \end{cases}$ en dit geeft $(1333\frac{1}{3}, 1333\frac{1}{3})$.
- b** Je zit dan in het punt A, dus 1000 liter M en 1000 liter R.
- c** Je zit dan in het punt E, dus $1333\frac{1}{3}$ liter M en $1333\frac{1}{3}$ liter R.
- d** In het snijpunt van de lijn $x = 1500$ met de lijn $x + y = 2000$ geldt $1500 + y = 2000$, dus $y = 500$.
 In het snijpunt van de lijn $x = 1500$ met de lijn $0,15x + 0,3y = 600$ geldt $0,15 \cdot 1500 + 0,3y = 600$ en dit geeft $y = 1250$.
 Dus nog 500 liter tot en met 1250 liter R mogelijk.
- 24 a** Bij de factor arbeid hoort $9x + 15y \leq 48000$, oftewel $3x + 5y \leq 16000$.
b Bij de factor machinetijd hoort $3x + 3y \leq 10000$.
 Bij de factor materiaal hoort $50x + 30y \leq 120000$, oftewel $5x + 3y \leq 12000$.
c De lijn $3x + 5y = 16000$ gaat door (0, 3200) en $(5333\frac{1}{3}, 0)$.
 De lijn $3x + 3y = 10000$ gaat door (0, 3333 $\frac{1}{3}$) en $(3333\frac{1}{3}, 0)$.
 De lijn $5x + 3y = 12000$ gaat door (0, 4000) en (2400, 0).



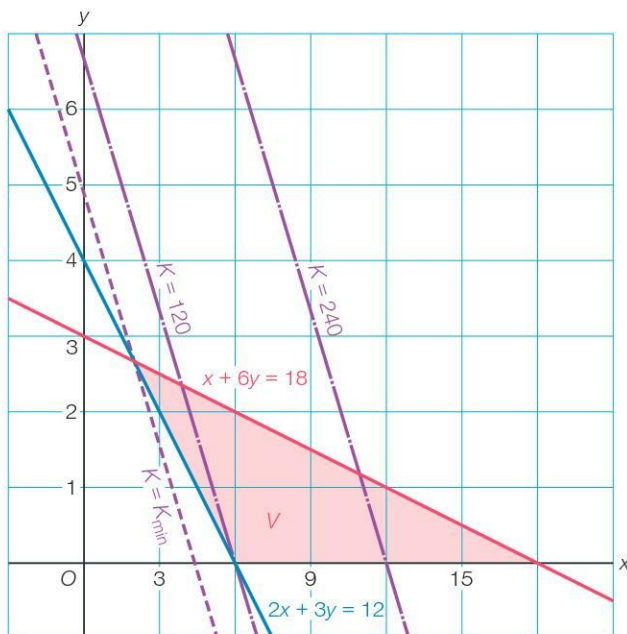
- d** De lijn $x = 3000$ snijdt V niet, dus 3000 paar Air Extra lukt niet.
e De lijn $y = 2000$ snijdt de rand van V bij de lijn $5x + 3y = 12\,000$, dus $5x + 3 \cdot 2000 = 12\,000$ en dit geeft $x = 1200$.
 Dus maximaal 1200 paar Air Extra mogelijk.

Bladzijde 146

- 25 a** De winst is $0,45 \cdot 1500 + 0,75 \cdot 1000 = 1425$ euro.
b Zo veel mogelijk M, dus in $C(3100, 0)$.
 De winst is $0,45 \cdot 3100 = 1395$ euro.
 Zo veel mogelijk R, dus in $E(1333\frac{1}{3}, 1333\frac{1}{3})$.
 Dus de winst is $0,45 \cdot 1333\frac{1}{3} + 0,75 \cdot 1333\frac{1}{3} = 1600$ euro.
c In het punt $D(2200, 900)$ is de winst $0,45 \cdot 2200 + 0,75 \cdot 900 = 1665$ euro.

Bladzijde 148

- 26** De grenslijnen zijn $y = 0$,
 $x + 6y = 18$ door $(0, 3)$ en $(18, 0)$,
 $2x + 3y = 12$ door $(6, 0)$ en $(0, 4)$.



Isolijs door $(6, 0)$ geeft $20x + 18y = 120$ en gaat ook door $(0, 6\frac{2}{3})$.

Isolijs door $(12, 0)$ geeft $K = 240$.

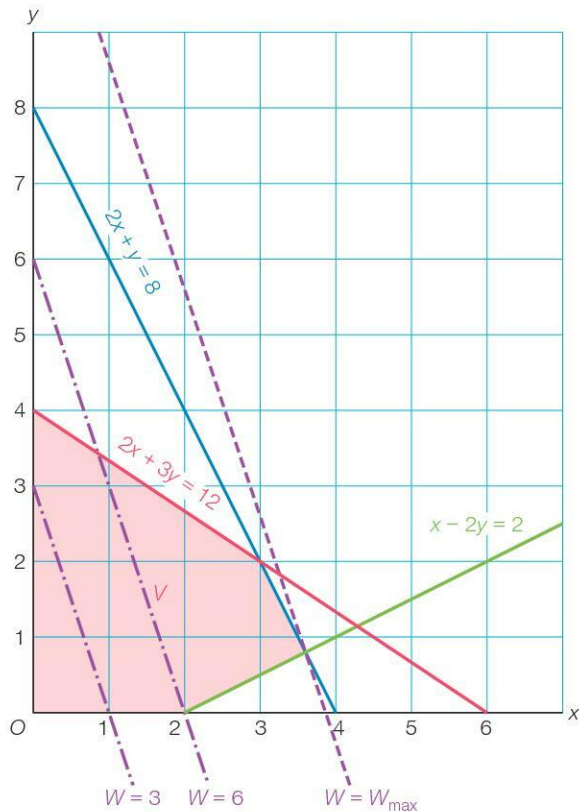
K is minimaal in het snijpunt van de lijnen $x + 6y = 18$ en $2x + 3y = 12$.

$$\begin{cases} x + 6y = 18 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \begin{array}{l} | 1 \\ | 2 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} x + 6y = 18 \\ 4x + 6y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} -3x & = & -6, \text{ dus } x = 2 \\ & & x + 6y = 18 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2 + 6y = 18 \\ 6y = 16 \\ y = 2\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

$K_{\min}$ in $(2, 2\frac{2}{3})$, dus $K_{\min} = 20 \cdot 2 + 18 \cdot 2\frac{2}{3} = 88$.

- 27** De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,
 $2x + 3y = 12$ door $(6, 0)$ en $(0, 4)$,
 $2x + y = 8$ door $(4, 0)$ en $(0, 8)$,
 $x - 2y = 2$ door $(2, 0)$ en $(0, -1)$.



Isolijn door $(1, 0)$ geeft $3x + y = 3$ en gaat ook door $(0, 3)$.

Isolijn door $(2, 0)$ geeft $W = 6$.

W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $2x + y = 8$ en $x - 2y = 2$.

$$\begin{cases} 2x + y = 8 & |2| \\ x - 2y = 2 & |1| \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x - 2y = 2 \end{cases} + \begin{matrix} 5x \\ = 18, \text{ dus } x = 3,6 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \begin{matrix} 7,2 + y = 8 \\ y = 0,8 \end{matrix}$$

$W_{\max}$ in $(3,6; 0,8)$, dus $W_{\max} = 3 \cdot 3,6 + 0,8 = 11,6$.

Bladzijde 151

28 a	fauteuil	sofa	beschikbaar per dag
constructieafdeling	6 uur	3 uur	96 uur
bekledingsafdeling	2 uur	6 uur	72 uur
afwerkingsafdeling	1 uur	1 uur	18 uur
winst per stuk in euro's	640	560	

b $W = 640x + 560y$

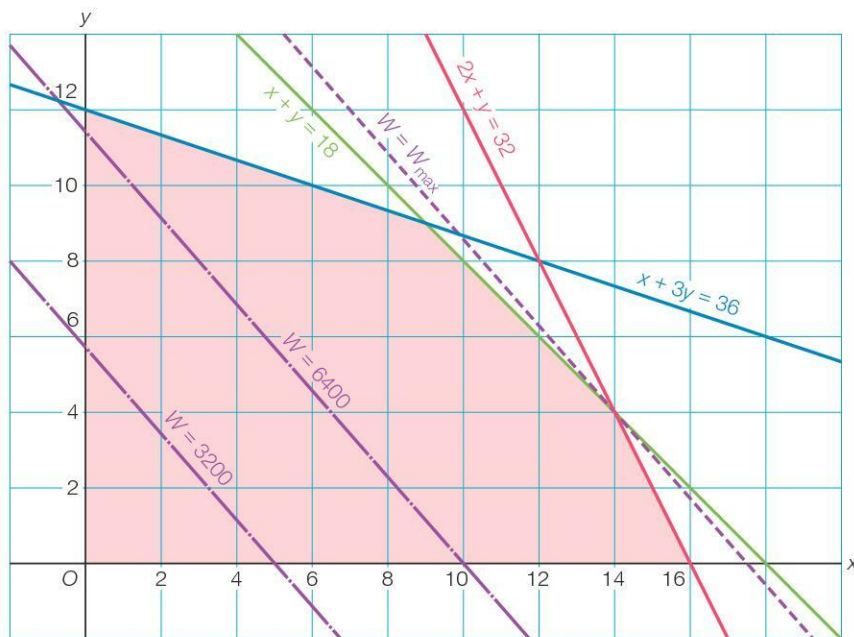
c $x \geq 0$ en $y \geq 0$

$6x + 3y \leq 96$, oftewel $2x + y \leq 32$ (constructieafdeling)

$2x + 6y \leq 72$, oftewel $x + 3y \leq 36$ (bekledingsafdeling)

$x + y \leq 18$ (afwerkingsafdeling)

- d** Grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,
 $2x + y = 32$ door $(0, 32)$ en $(16, 0)$,
 $x + 3y = 36$ door $(0, 12)$ en $(36, 0)$,
 $x + y = 18$ door $(0, 18)$ en $(18, 0)$.



- e** Isolijn door $(5, 0)$ geeft $640x + 560y = 3200$ en gaat ook door $(0; 5,7)$.
 Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 6400$.
 W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $2x + y = 32$ en $x + y = 18$.

$$\begin{cases} 2x + y = 32 \\ x + y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x & = & 14 \\ x + y = 18 & \left\{ \right. & 14 + y = 18 \\ & & y = 4 \end{matrix}$$

 $W_{\max}$ in $(14, 4)$, dus $W_{\max} = 640 \cdot 14 + 560 \cdot 4 = 11\,200$ euro.
- f** $W_{\max}$ in het snijpunt van de lijnen die bij de constructieafdeling en de afwerkingsafdeling horen.
 Dus op de bekledingsafdeling worden niet alle beschikbare uren gebruikt.
 Er worden daar $2 \cdot 14 + 6 \cdot 4 = 52$ uren gebruikt, dus er blijven $72 - 52 = 20$ uren over.

- 29 a** Isolijn door $(5, 0)$ geeft $640x + 800y = 3200$ en gaat ook door $(0, 4)$.
 Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 6400$.

W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $x + 3y = 36$ en $x + y = 18$.

$$\begin{cases} x + 3y = 36 \\ x + y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 2y = 18, \text{ dus } y = 9 \\ x + y = 18 & \left\{ \right. & x + 9 = 18 \\ & & x = 9 \end{matrix}$$

$W_{\max}$ in $(9, 9)$, dus $W_{\max} = 640 \cdot 9 + 800 \cdot 9 = 12\,960$ euro.

$W_{\max}$ in het snijpunt van de lijnen die bij de bekledingsafdeling en de afwerkingsafdeling horen.

Op de constructieafdeling worden $6 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = 81$ uren gebruikt, dus er blijven $96 - 81 = 15$ uren over.

- b** Isolijn door $(5, 0)$ geeft $200x + 800y = 1000$ en gaat ook door $(0, 1\frac{1}{4})$.
 Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 2000$.
 W is maximaal in het punt $(0, 12)$.
 Dus maximale winst bij programma $(0, 12)$.

30

a

	seniorenwoning	villa	
kapitaal	60 000 euro	160 000 euro	14 400 000 euro
mensdagen	150 dagen	200 dagen	24 000 dagen
winst per woning	10 000 euro	14 000 euro	

$$W = 10\,000x + 14\,000y$$

b

$$x \geq 0 \text{ en } y \geq 0$$

$$60\,000x + 160\,000y \leq 14\,400\,000, \text{ oftewel } 3x + 8y \leq 720 \text{ (kapitaal)}$$

$$150x + 200y \leq 24\,000, \text{ oftewel } 3x + 4y \leq 480 \text{ (mensdagen)}$$

$$x + y \leq 150 \text{ (aantal huizen)}$$

De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,

$$3x + 8y = 720 \text{ door } (0, 90) \text{ en } (240, 0),$$

$$3x + 4y = 480 \text{ door } (0, 120) \text{ en } (160, 0),$$

$$x + y = 150 \text{ door } (0, 150) \text{ en } (150, 0).$$



c

Isolijn door $(60, 0)$ geeft $10\,000x + 14\,000y = 600\,000$ en gaat ook door $(0; 42,9)$.

Isolijn door $(120, 0)$ geeft $W = 1\,200\,000$.

W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $3x + 8y = 720$ en $3x + 4y = 480$.

$$\begin{cases} 3x + 8y = 720 \\ 3x + 4y = 480 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4y &= 240, \text{ dus } y = 60 \\ 3x + 8y &= 720 \end{aligned} \quad \begin{cases} 3x + 480 = 720 \\ 3x = 240 \\ x = 80 \end{cases}$$

$$W_{\max} \text{ in } (80, 60), \text{ dus } W_{\max} = 10\,000 \cdot 80 + 14\,000 \cdot 60 = 1\,640\,000 \text{ euro.}$$

31

a

x = aantal kg groenten in een blik

y = aantal kg vlees in een blik

De doelfunctie is $K = 1,5x + 4,5y$.

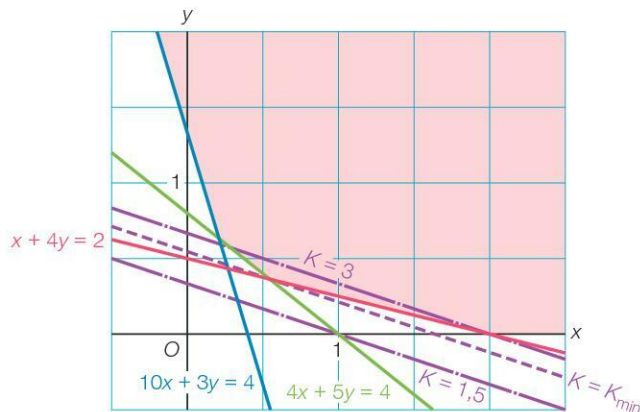
De beperkende voorwaarden zijn $x \geq 0$ en $y \geq 0$,

$$50x + 200y \geq 100, \text{ oftewel } x + 4y \geq 2 \text{ (vet)},$$

$$250x + 75y \geq 100, \text{ oftewel } 10x + 3y \geq 4 \text{ (eiwit)},$$

$$200x + 250y \geq 200, \text{ oftewel } 4x + 5y \geq 4 \text{ (koolhydraten)}.$$

- b** De grenslijnen zijn $x = 0$ en $y = 0$,
 $x + 4y = 2$ door $(0, \frac{1}{2})$ en $(2, 0)$,
 $10x + 3y = 4$ door $(0, 1\frac{1}{3})$ en $(\frac{2}{5}, 0)$,
 $4x + 5y = 4$ door $(0, \frac{4}{5})$ en $(1, 0)$.



Isolijn door $(1, 0)$ geeft $1,50x + 4,50y = 1,50$ en gaat ook door $(0, \frac{1}{3})$.

Isolijn door $(2, 0)$ geeft $K = 3$.

K is minimaal in het snijpunt van de lijnen $x + 4y = 2$ en $4x + 5y = 4$.

$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 4x + 5y = 4 \end{cases} \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 16y = 8 \\ 4x + 5y = 4 \end{cases}$$

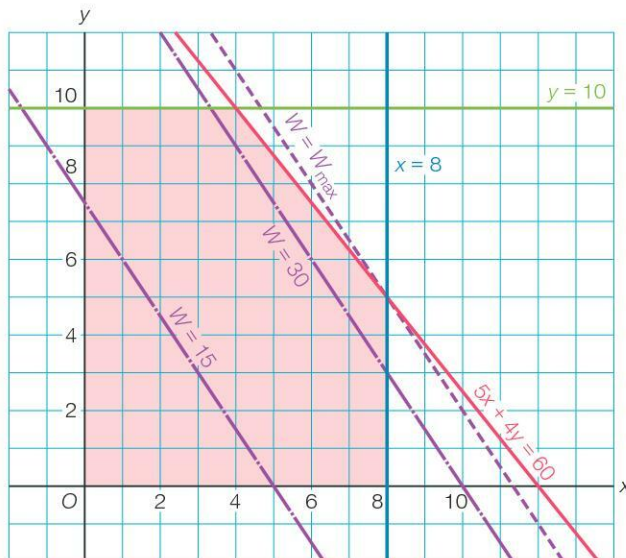
$$\begin{matrix} 11y = 4, \text{ dus } y = \frac{4}{11} \\ x + 4y = 2 \end{matrix} \begin{matrix} x + \frac{16}{11} = 2 \\ x = \frac{6}{11} \end{matrix}$$

Dus de samenstelling van een blik is $\frac{6}{11}$ kg ≈ 545 gram groenten en $\frac{4}{11}$ kg ≈ 364 gram vlees.

K.4 De hoekpuntmethode

Bladzijde 154

- 32 a** Grenslijnen $x = 0$, $y = 0$,
 $5x + 4y = 60$ door $(0, 15)$ en $(12, 0)$, $x = 8$ en $y = 10$.



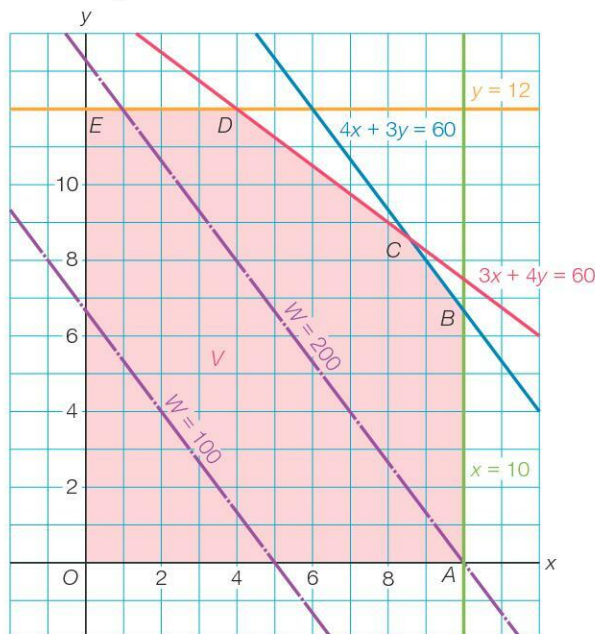
- b** Isolijn door $(5, 0)$ geeft $3x + 2y = 15$ en gaat ook door $(0, 7\frac{1}{2})$.
 Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 30$.
 W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $5x + 4y = 60$ en $x = 8$, dus in het punt $(8, 5)$.
- c** De isolijnen van $R = 10x + 8y$ zijn evenwijdig met de lijn $5x + 4y = 60$, dus met een rand van het toegestane gebied. Elk punt op de rand maximaliseert de doelfunctie.

33 De volgende doelfuncties leveren meer dan één oplossing op:

- $W = 3x + 12y$, want de isolijnen van W zijn evenwijdig met de lijn $x + 4y = 30$, omdat $3 : 12 = 1 : 4$
- $W = 1,5x + y$, want de isolijnen van W zijn evenwijdig met de lijn $3x + 2y = 20$, omdat $1,5 : 1 = 3 : 2$
- $W = 0,5x + 2y$, want de isolijnen van W zijn evenwijdig met de lijn $x + 4y = 30$, omdat $0,5 : 2 = 1 : 4$

Bladzijde 155

34 De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,
 $3x + 4y = 60$ door $(0, 15)$ en $(20, 0)$,
 $4x + 3y = 60$ door $(0, 20)$ en $(15, 0)$,
 $x = 10$ en $y = 12$.



Isolijn door $(5, 0)$ geeft $20x + 15y = 100$ en gaat ook door $(0, 6\frac{2}{3})$.

Isolijn door $(10, 0)$ geeft $W = 200$.

De isolijnen zijn evenwijdig met de rand BC op de lijn $4x + 3y = 60$, want $20 : 15 = 4 : 3$.

Het punt B is het snijpunt van de lijnen $4x + 3y = 60$ en $x = 10$, dus $4 \cdot 10 + 3y = 60$, oftewel $3y = 20$ en $y = 6\frac{2}{3}$. Dus $B(10, 6\frac{2}{3})$.

Het punt C is het snijpunt van de lijnen $3x + 4y = 60$ en $4x + 3y = 60$.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 60 & | \cdot 3 \\ 4x + 3y = 60 & | \cdot 4 \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} 9x + 12y = 180 \\ 16x + 12y = 240 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} -7x & = & -60, \text{ dus } x = 8\frac{4}{7} \\ & & 3x + 4y = 60 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 25\frac{5}{7} + 4y = 60 \\ 4y = 34\frac{2}{7} \\ y = 8\frac{4}{7} \end{array} \right.$$

Dus $C(8\frac{4}{7}, 8\frac{4}{7})$.

Elk punt op het lijnstuk BC met $B(10, 6\frac{2}{3})$ en $C(8\frac{4}{7}, 8\frac{4}{7})$ maximaliseert de doelfunctie $W = 20x + 15y$.

$$W_{\max} = 20 \cdot 10 + 15 \cdot 6\frac{2}{3} = 300 \text{ of } W_{\max} = 20 \cdot 8\frac{4}{7} + 15 \cdot 8\frac{4}{7} = 300.$$

35 a Isolijnen van de doelfunctie $K = 8x + ay$ evenwijdig met de lijn $6x + 5y = 30$ geeft

$$8 : a = 6 : 5, \text{ oftewel } \frac{8}{a} = \frac{6}{5}, \text{ dus } a = \frac{8 \cdot 5}{6} = 6\frac{2}{3}.$$

Dit geeft $K = 8x + 6\frac{2}{3}y$.

$$K = 8x + 6\frac{2}{3}y \text{ door } (0, 6) \text{ geeft } K_{\min} = 8 \cdot 0 + 6\frac{2}{3} \cdot 6 = 40.$$

Isolijnen van de doelfunctie $K = 8x + ay$ evenwijdig met de lijn $2x + 3y = 12$ geeft

$$8 : a = 2 : 3, \text{ oftewel } \frac{8}{a} = \frac{2}{3}, \text{ dus } a = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12.$$

Dit geeft $K = 8x + 12y$.

$$K = 8x + 12y \text{ door } (6, 0) \text{ geeft } K_{\min} = 8 \cdot 6 + 12 \cdot 0 = 48.$$

- b** Er geldt $p : 3 = 6 : 5$, oftewel $\frac{p}{3} = \frac{6}{5}$ en dit geeft $p = \frac{6 \cdot 3}{5} = 3,6$.
- c** Hoe groter de waarde van p , hoe steiler de isolijnen naar beneden lopen. Het punt $(0, 6)$ minimaliseert de doelfunctie als de isolijnen steiler naar beneden lopen dan AB , dus $p > 3,6$.
- d** De isolijnen van de doelfunctie lopen evenwijdig aan het lijnstuk BC als $p : 3 = 2 : 3$, dus $p = 2$. Het punt $(3\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2})$ minimaliseert de doelfunctie als de isolijnen minder steil lopen dan AB en steiler dan BC , dus $2 < p < 3,6$.

Bladzijde 156

- 36** Ze krijgt bij twee hoekpunten dezelfde maximale waarde van de doelfunctie. Dat betekent dat de isolijn samenvalt met het lijnstuk tussen die twee hoekpunten en dat alle programma's op dat lijnstuk de doelfunctie maximaliseren.

Bladzijde 157

- 37** x = aantal keren 70 gram rijst
 y = aantal keren 70 gram sojabonen
 Doelfunctie: $P = 0,18x + 0,12y$.

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0, y \geq 0$,

$$15x + 22,5y \geq 90, \text{ oftewel } 2x + 3y \geq 12,$$

$$3390x + 1130y \geq 6780, \text{ oftewel } 3x + y \geq 6,$$

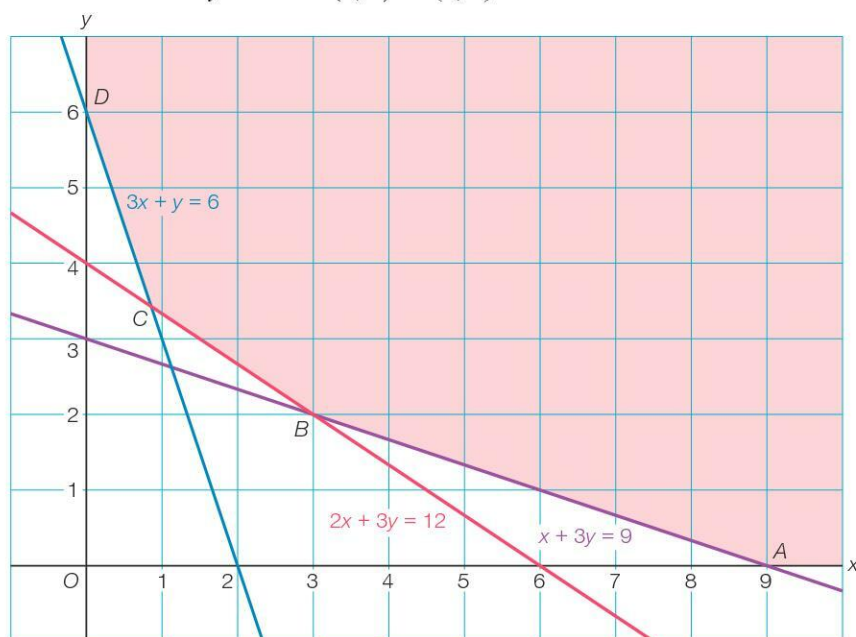
$$0,1x + 0,3y \geq 0,9, \text{ oftewel } x + 3y \geq 9.$$

Grenslijnen: $x = 0, y = 0$,

$$2x + 3y = 12 \text{ door } (0, 4) \text{ en } (6, 0),$$

$$3x + y = 6 \text{ door } (0, 6) \text{ en } (2, 0),$$

$$x + 3y = 9 \text{ door } (0, 3) \text{ en } (9, 0).$$



$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ x = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 + 3y = 9, \text{ dus } y = 2 \end{array}$$

Dus $B(3, 2)$.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} | \cdot 1 \\ | \cdot 3 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 9x + 3y = 18 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ -7x = -6 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = \frac{6}{7} \\ 3x + y = 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{18}{7} + y = 6, \text{ dus } y = \frac{24}{7} \end{array}$$

Dus $C(\frac{6}{7}, \frac{24}{7})$.

hoekpunt	$P = 0,18x + 0,12y$	
$A(9, 0)$	1,62	
$B(3, 2)$	0,78	
$C(\frac{6}{7}, \frac{24}{7})$	$\approx 0,57$	← minimaal
$D(0, 6)$	0,72	

Dus het voedselpakket moet bestaan uit $\frac{6}{7} \cdot 70 = 60$ gram rijst en $\frac{24}{7} \cdot 70 = 240$ gram sojabonen.

38 a Doelfunctie: $W = 350x + 300y$.

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0, y \geq 0$,

$10x + 7,5y \leq 2000$, oftewel $4x + 3y \leq 800$ (arbeid),

$0,2x + 0,5y \leq 90$, oftewel $2x + 5y \leq 900$ (polyetheen),

$1,1x + 1,2y \leq 264$, oftewel $11x + 12y \leq 2640$ (polyester),

$5x + 5y \leq 1500$, oftewel $x + y \leq 300$ (kleurstoffen).

Grenslijnen: $x = 0, y = 0$,

$4x + 3y = 800$ door $(0, 266\frac{2}{3})$ en $(200, 0)$,

$2x + 5y = 900$ door $(0, 180)$ en $(450, 0)$,

$11x + 12y = 2640$ door $(0, 220)$ en $(240, 0)$,

$x + y = 300$ door $(0, 300)$ en $(300, 0)$.



$$\begin{cases} 4x + 3y = 800 \\ 11x + 12y = 2640 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 16x + 12y = 3200 \\ 11x + 12y = 2640 \end{cases} \begin{array}{l} 5x \\ 4x + 3y = 800 \end{array} \begin{array}{l} = 560, \text{ dus } x = 112 \\ 448 + 3y = 800, \text{ dus } y = 117\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $B(112, 117\frac{1}{3})$.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 900 \\ 11x + 12y = 2640 \end{cases} \begin{vmatrix} 12 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 24x + 60y = 10800 \\ 55x + 60y = 13200 \end{cases} \begin{array}{l} -31x \\ 2x + 5y = 900 \end{array} \begin{array}{l} = -2400, \text{ dus } x \approx 77,4 \\ 154,8 + 5y = 900, \text{ dus } y \approx 149,0 \end{array}$$

Dus $C(77,4; 149,0)$.

hoekpunt	$W = 350x + 300y$	
$A(200, 0)$	70 000	
$B(112, 117\frac{1}{3})$	74 400	← maximaal
$C(77,4; 149,0)$	71 790	
$D(0, 180)$	54 000	

Dus $W_{\max} = 74400$ euro.

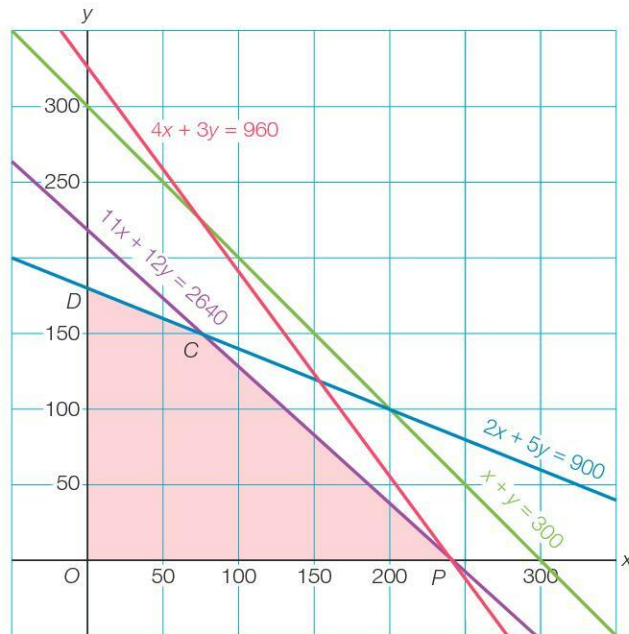
Omdat B het snijpunt is van de lijnen die bij arbeid en polyester horen, blijft er polyetheen en kleurstoffen over.

Gebruik polyetheen: $0,2 \cdot 112 + 0,5 \cdot 117\frac{1}{3} \approx 81,07 \text{ m}^2$, dus er blijft $90 - 81,07 = 8,93 \text{ m}^2$ over.

Gebruik kleurstoffen: $5 \cdot 112 + 5 \cdot 117\frac{1}{3} \approx 1146\frac{2}{3}$ liter, dus er blijft $1500 - 1146\frac{2}{3} = 353\frac{1}{3}$ liter over.

- b** De beperkende voorwaarde van de arbeid wordt $10x + 7,5y \leq 2400$, oftewel $4x + 3y \leq 960$.

De bijbehoren grenslijn is $4x + 3y = 960$ door $(0, 320)$ en $(240, 0)$.



hoekpunt	$W = 350x + 300y$	
$P(240, 0)$	84 000	← maximaal
$C(77,4; 149,0)$	71 790	
$D(0, 180)$	54 000	

Nu is $W_{\max} = 84\,000$ euro.

Dat is $\frac{84\,000 - 74\,400}{74\,400} \times 100\% \approx 12,9\%$ meer.

Bladzijde 158

39

- a** x = aantal Amerikaanse vliegtuigen

y = aantal Engelse vliegtuigen

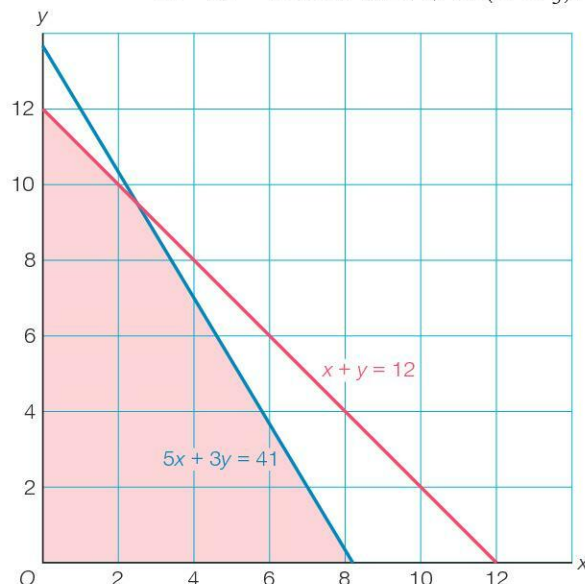
Doelfunctie: $V = 5400x + 3600y$.

Beperkende voorwaarden: $x + y \leq 12$ en $5x + 3y \leq 41$ en $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

Grenslijnen: $x = 0, y = 0$,

$x + y = 12$ door $(0, 12)$ en $(12, 0)$,

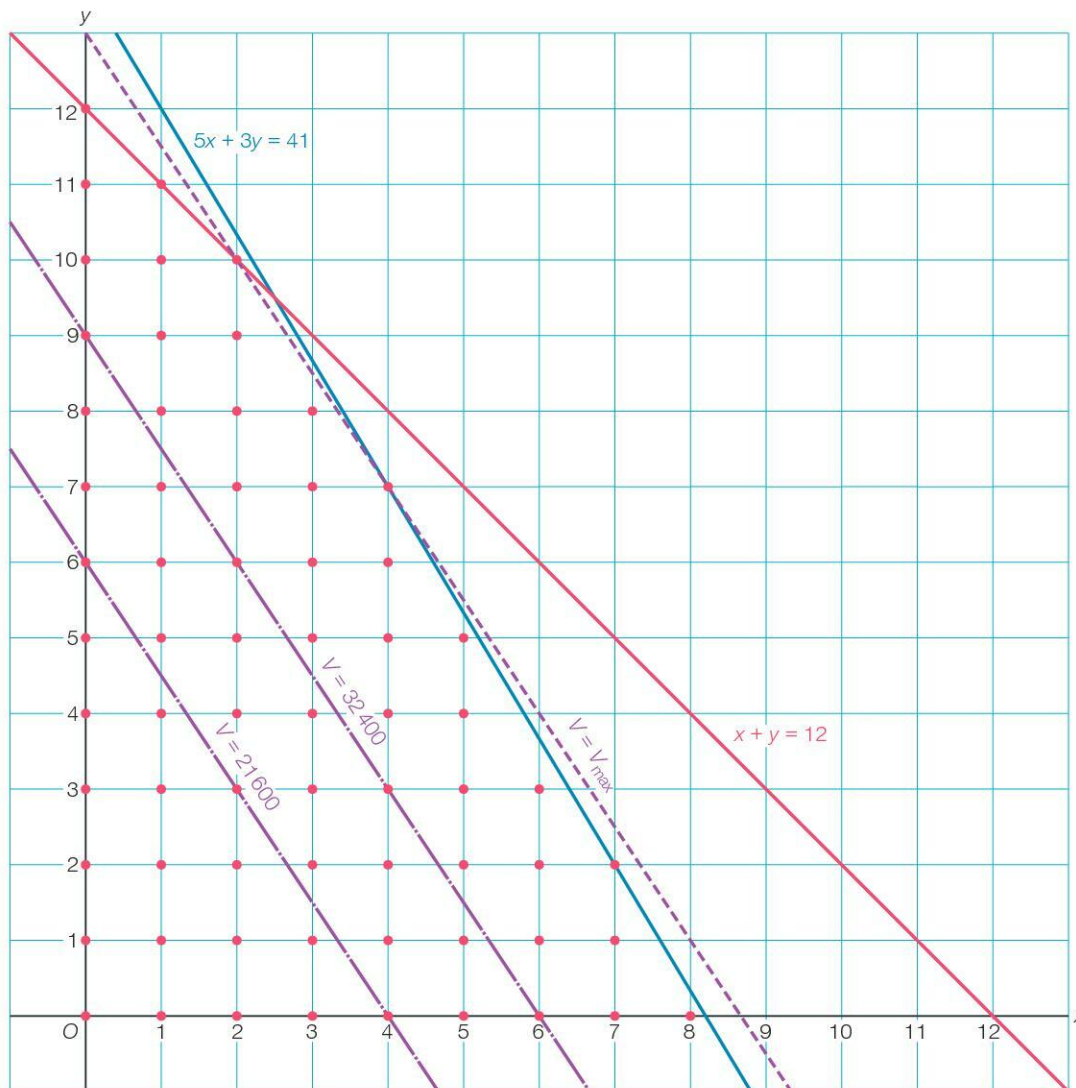
$5x + 3y = 41$ door $(8,2; 0)$ en $(0, 13\frac{2}{3})$.



$$\begin{cases} x+y=12 \\ 5x+3y=41 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 3x+3y=36 \\ 5x+3y=41 \end{cases} \quad \begin{array}{r} -2x \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} =-5, \text{ dus } x=2\frac{1}{2} \\ x+y=12 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2\frac{1}{2}+y=12 \\ y=9\frac{1}{2} \end{array}$$

hoekpunt	$V = 5400x + 3600y$
$(0, 12)$	43 200
$(8\frac{1}{5}, 0)$	44 280
$(2\frac{1}{2}, 9\frac{1}{2})$	47 700

b



Isolijn door $(4, 0)$ geeft $5400x + 3600y = 21\,600$ en gaat ook door $(0, 6)$.

Isolijn door $(6, 0)$ geeft $V = 32\,400$.

V is maximaal in de punten $(2, 10)$ en $(4, 7)$.

Dus bij 2 Amerikaanse en 10 Engelse vliegtuigen, of bij 4 Amerikaanse en 7 Engelse vliegtuigen.

40 x = aantal vierpersoonsvergader ruimten
 y = aantal twaalfpersoonsvergader ruimten

Doelfunctie: $W = 100x + 150y$.

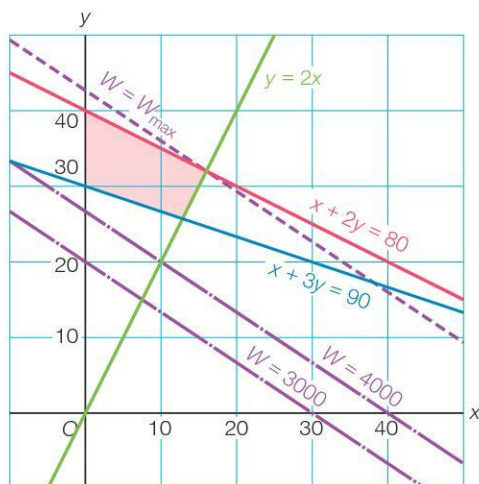
Beperkende voorwaarden: $x + 2y \leq 80$,

$4x + 12y \geq 360$, oftewel $x + 3y \geq 90$,

$y \geq 2x$ met x en y geheel.

Grenslijnen: $x + 2y = 80$ door $(0, 40)$ en $(80, 0)$,
 $x + 3y = 90$ door $(0, 30)$ en $(90, 0)$,
 $y = 2x$ door $(0, 0)$ en $(20, 40)$.

Alleen roosterpunten.



Isolijn door $(30, 0)$ geeft $100x + 150y = 3000$ en gaat ook door $(0, 20)$.

Isolijn door $(40, 0)$ geeft $W = 4000$.

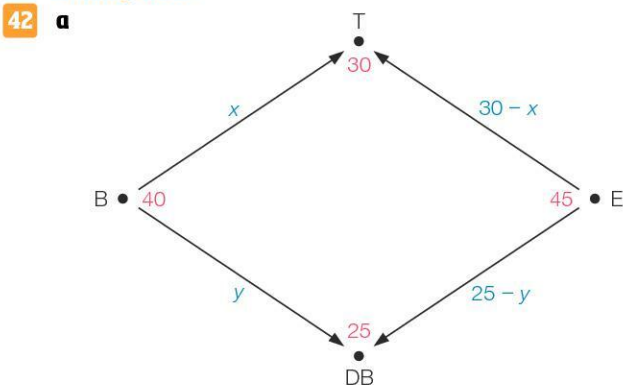
W is maximaal in het snijpunt van de lijnen $x + 2y = 80$ en $y = 2x$. Dit snijpunt is $(16, 32)$.

Dus W is maximaal bij 16 vier- en 32 twaalfpersoonsvergaderuimten.

Bladzijde 159

- 41 a** Van Zutphen naar Apeldoorn $50 - 20 = 30$.
 Van Zutphen naar Doetinchem $60 - 30 = 30$.
 Transportkosten $= 20 \cdot 15 + 30 \cdot 21 + 30 \cdot 9 + 30 \cdot 18 = 1740$ euro.
- b** Beperkende voorwaarde: $x + y \leq 90$.

Bladzijde 160

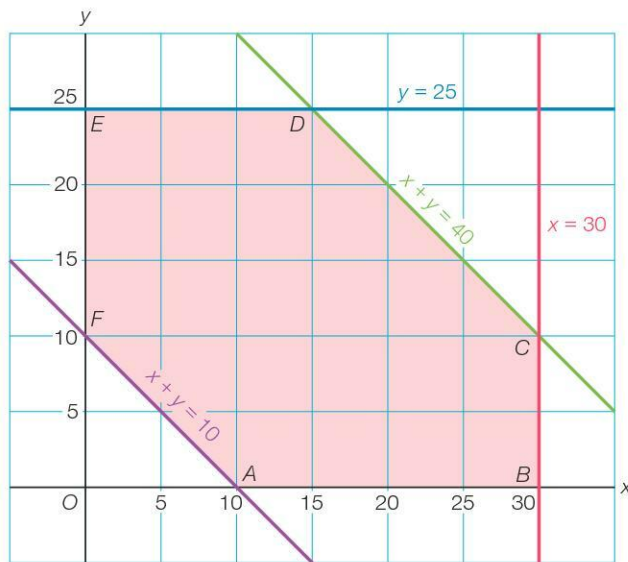


- b** Beperkende voorwaarden: $x \geq 0$, $y \geq 0$,
 $30 - x \geq 0$, oftewel $x \leq 30$,
 $25 - y \geq 0$, oftewel $y \leq 25$
 $x + y \leq 40$,
 $30 - x + 25 - y \leq 45$, oftewel $x + y \geq 10$.

- c** Doelfunctie: $T = 25x + 35y + 15(30 - x) + 30(25 - y)$
 $= 25x + 35y + 450 - 15x + 750 - 30y$
 $= 10x + 5y + 1200$

Grenslijnen: $x = 0$ en $y = 0$, $x = 30$, $y = 25$,
 $x + y = 40$ door $(0, 40)$ en $(40, 0)$,
 $x + y = 10$ door $(0, 10)$ en $(10, 0)$.

Toegestane gebied: roosterpunten binnen en op de zeshoek $ABCDEF$.

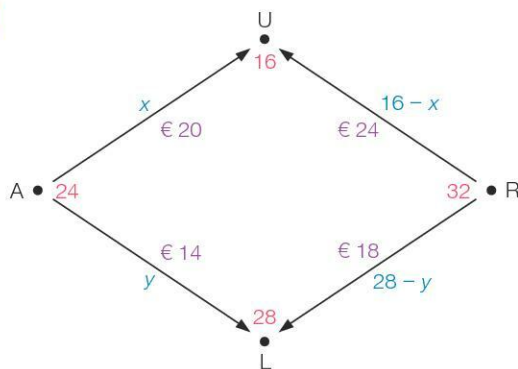


hoekpunt	doelfunctie T
$A(10, 0)$	1300
$B(30, 0)$	1500
$C(30, 10)$	1550
$D(15, 25)$	1475
$E(0, 25)$	1325
$F(0, 10)$	1250 ← minimaal

Bij minimale transportkosten gaan 0 bankstellen van Breda naar Tilburg en 10 bankstellen van Breda naar Den Bosch.

De minimale transportkosten zijn 1250 euro.

43

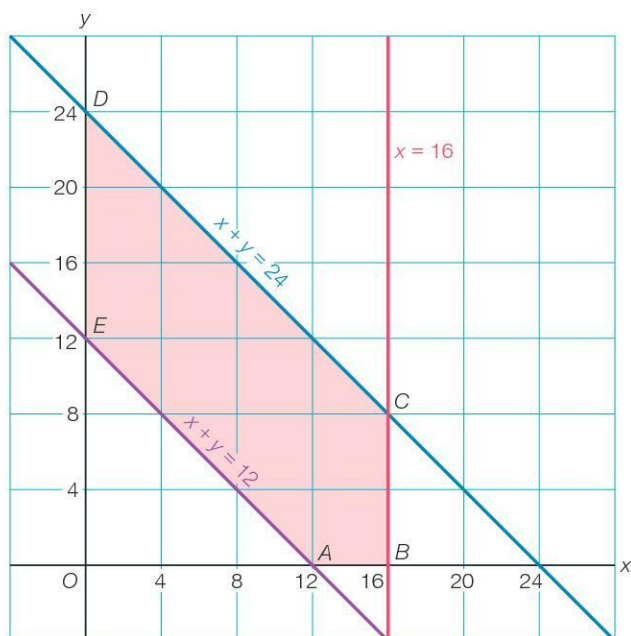


$$\begin{aligned}
 \text{Doelfunctie: } T &= 20x + 14y + 24(16 - x) + 18(28 - y) \\
 &= 20x + 14y + 384 - 24x + 504 - 18y \\
 &= -4x - 4y + 888
 \end{aligned}$$

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0$, $y \geq 0$,
 $16 - x \geq 0$, oftewel $x \leq 16$,
 $28 - y \geq 0$, oftewel $y \leq 28$,
 $x + y \leq 24$,
 $16 - x + 28 - y \leq 32$, oftewel $x + y \geq 12$.

Grenslijnen: $x = 0$, $y = 0$, $x = 16$, $y = 28$,
 $x + y = 24$ door $(0, 24)$ en $(24, 0)$,
 $x + y = 12$ door $(0, 12)$ en $(12, 0)$.

Toegestane gebied: roosterpunten binnen en op de vijfhoek $ABCDE$.



Isolijn door (8, 0) geeft $-4x - 4y + 888 = 856$, oftewel $x + y = 8$.

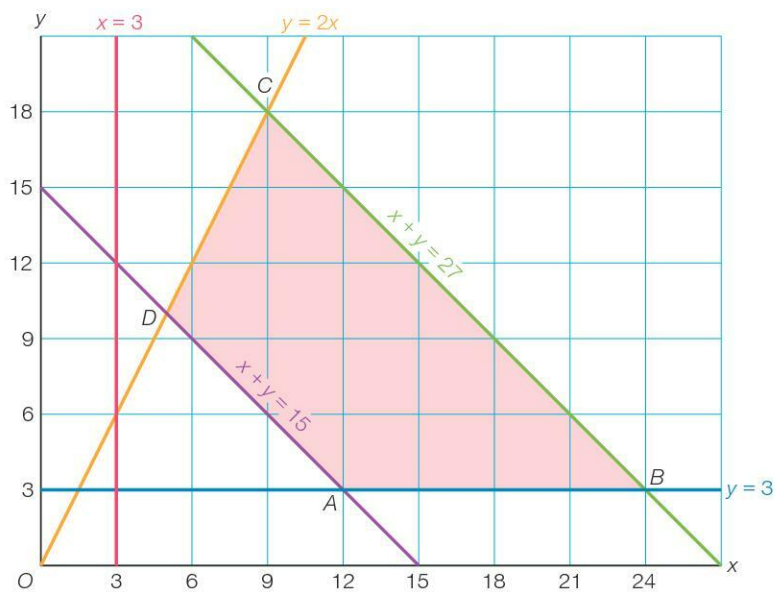
Isolijn door (16, 0) geeft $-4x - 4y + 888 = 824$, oftewel $x + y = 16$.

De isolijnen zijn dus evenwijdig met de randen AE en CD .

De transportkosten zijn dus minimaal voor de programma's (x, y) met x en y geheel die op het lijnstuk CD liggen, met $C(16, 8)$ en $D(0, 24)$.

Bladzijde 161

- 44 a** Er wordt $30 - x - y$ miljoen euro ondergebracht bij C.
Beperkende voorwaarde: $30 - x - y \geq 3$, oftewel $x + y \leq 27$.
- b** $x + y \geq 15$ en $y \leq 2x$
- c** De opbrengst in miljoenen euro's is
 $R = 0,07x + 0,08y + 0,09(30 - x - y) = 0,07x + 0,08y + 2,7 - 0,09x - 0,09y = 2,7 - 0,02x - 0,01y$.
- d** De grenslijnen zijn $x = 3$, $y = 3$,
 $x + y = 27$ door (0, 27) en (27, 0),
 $x + y = 15$ door (0, 15) en (15, 0),
 $y = 2x$.



D is het snijpunt van $x + y = 15$ en $y = 2x$. Dit snijpunt is $D(5, 10)$.

hoekpunt	$R = 2,7 - 0,02x - 0,01y$
$A(12, 3)$	2,43
$B(24, 3)$	2,19
$C(9, 18)$	2,34
$D(5, 10)$	2,5 ← maximaal

R is maximaal voor $x = 5$ en $y = 10$.

Breng 5 miljoen euro onder bij fonds A, 10 miljoen euro bij fonds B en 15 miljoen euro bij fonds C.

45 $x = \text{aantal m}^2 \text{ A}$

$y = \text{aantal m}^2 \text{ B}$

Dan $6000 - x - y \text{ m}^2 \text{ C}$.

Doelfunctie: $K = 3x + 1,5y + 1 \cdot (6000 - x - y)$, dus $K = 2x + 0,5y + 6000$.

Beperkende voorwaarden: $x \geq 0, y \geq 0$,

$6000 - x - y \geq 0$, oftewel $x + y \leq 6000$,

$5x + 8y + 10(6000 - x - y) \leq 40\,000$, oftewel $-5x - 2y + 60\,000 \leq 40\,000$,

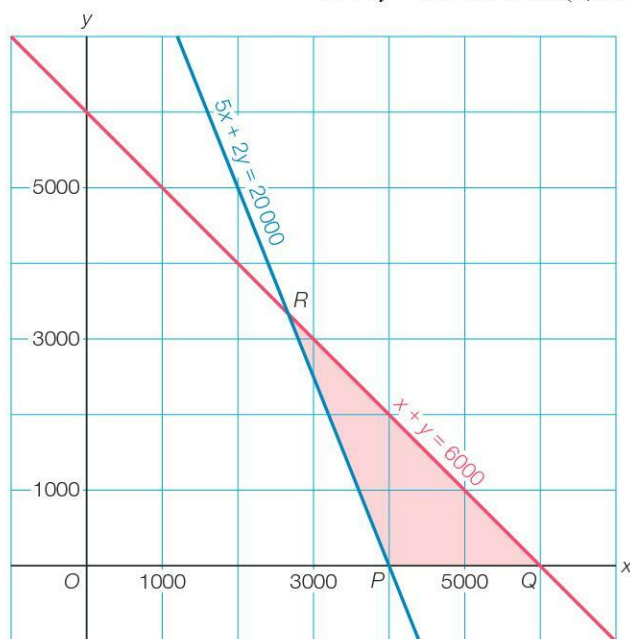
oftewel $5x + 2y \geq 20\,000$.

Grenslijnen:

$x = 0, y = 0$,

$x + y = 6000$ door $(0, 6000)$ en $(6000, 0)$,

$5x + 2y = 20\,000$ door $(0, 10\,000)$ en $(4000, 0)$.



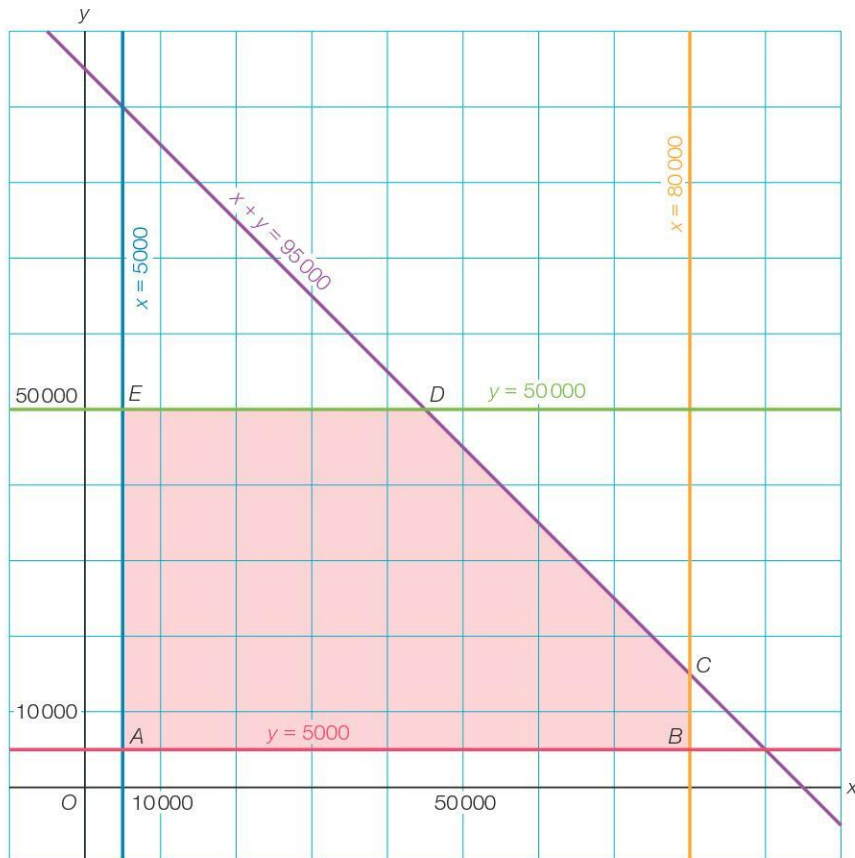
$$\begin{cases} x + y = 6000 \\ 5x + 2y = 20\,000 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 2x + 2y = 12\,000 \\ 5x + 2y = 20\,000 \end{cases} + \begin{matrix} -3x \\ = -8000, \text{ dus } x = 2666\frac{2}{3} \end{matrix} \left. \begin{matrix} 2666\frac{2}{3} + y = 6000, \text{ dus } y = 3333\frac{1}{3} \end{matrix} \right\}$$

Dus $R(2666\frac{2}{3}, 3333\frac{1}{3})$.

hoekpunt	$K = 2x + 0,5y + 6000$
$P(4000, 0)$	14 000
$Q(6000, 0)$	18 000
$R(2666\frac{2}{3}, 3333\frac{1}{3})$	13 000 ← minimaal

Dus minimale afschrijvingskosten bij ongeveer $2667 \text{ m}^2 \text{ A}$, $3333 \text{ m}^2 \text{ B}$ en geen C.

- 46** x = aantal liter benzine
 y = aantal liter diesel
 Dan $100\,000 - x - y$ liter LPG.
 Doelfunctie: $W = 0,15x + 0,12y + 0,10(100\,000 - x - y)$, dus $W = 0,05x + 0,02y + 10\,000$.
 Beperkende voorwaarden: $x \geq 5000$, $y \geq 5000$,
 $100\,000 - x - y \geq 5000$, oftewel $x + y \leq 95\,000$,
 $x + 100\,000 - x - y \geq 50\,000$, oftewel $y \leq 50\,000$,
 $y + 100\,000 - x - y \geq 20\,000$, oftewel $x \leq 80\,000$.
 Grenslijnen:
 $x = 5000$, $y = 5000$,
 $x + y = 95\,000$ door $(0, 95\,000)$ en $(95\,000, 0)$,
 $y = 50\,000$, $x = 80\,000$.



hoekpunt	$W = 0,05x + 0,02y + 10\,000$	
$A(5000, 5000)$	10 350	
$B(80\,000, 5000)$	14 100	
$C(80\,000, 15\,000)$	14 300	← maximaal
$D(45\,000, 50\,000)$	13 250	
$E(5000, 50\,000)$	11 250	

Dus maximale winst bij 80 000 liter benzine, 15 000 liter diesel en 5000 liter LPG.

K.5 Lineair programmeren met Excel

Bladzijde 163

- 47 a**
- | hoekpunt | $W = 2x + 5y$ | |
|----------------------------------|-----------------|------------|
| $A(16\frac{2}{3}, 0)$ | $33\frac{1}{3}$ | |
| $B(10, 10)$ | 70 | |
| $C(6\frac{2}{3}, 13\frac{1}{3})$ | 80 | ← maximaal |
| $D(0, 15)$ | 75 | |

Het productieprogramma $(6\frac{2}{3}, 13\frac{1}{3})$ en $W_{\max} = 80$ euro.

- b** C is het snijpunt van de lijnen $3x + 3y = 60$ (machine I) en $1,5x + 6y = 90$ (machine III).
Dus van machine II wordt de capaciteit niet volledig benut.
Deze machine wordt $3 \cdot 6\frac{2}{3} + 2 \cdot 13\frac{1}{3} = 46\frac{2}{3}$ uur ingezet en is dus $50 - 46\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$ uur onbenut.

hoekpunt	$W = 2x + 5y$	
$A(16\frac{2}{3}, 0)$	$33\frac{1}{3}$	
$B(9\frac{1}{3}, 11)$	$73\frac{2}{3}$	
$C(7\frac{1}{9}, 13\frac{2}{9})$	$80\frac{1}{3}$	← maximaal
$D(0, 15)$	75	

$W_{\max}$ wordt $80\frac{1}{3}$ in plaats van 80.

- d** Eén uur langer machine III geeft beperkende voorwaarde $1,5x + 6y \leq 91$
en punt $C(6\frac{4}{9}, 13\frac{5}{9})$ en hierbij hoort $W_{\max} = 2 \cdot 6\frac{4}{9} + 5 \cdot 13\frac{5}{9} = 80\frac{2}{3}$.
Deze $W_{\max}$ is meer dan die in vraag c, dus hij kiest voor machine III.
- e** Deze machine heeft onbenutte uren. Je zou machine II zelfs $3\frac{1}{3}$ uur minder kunnen inzetten zonder dat $W_{\max}$ verandert.

Bladzijde 167

- 48 a** Bij het snijpunt dat de optimale oplossing oplevert, horen de beperkende voorwaarden $5x + 2y \leq 100$ en $x + 4y \leq 150$.
- b** De grens van voorwaarde III wordt niet bereikt, dus de winst zal niet toenemen als deze voorwaarde wordt verruimd.
- c** De schaduwprijs is ongeveer 0,28, dus de nieuwe $W_{\max}$ is $119,44 + 0,28 = 119,72$.
Controleren met de computer geeft inderdaad $W_{\max} = 119,72$.
- d** $W_{\max} = 112,5$
Het programma is $(0; 37,5)$.

voorwaarde	schaduwprijs	speling
I	0	87,5
II	0,44	0
III	0,31	0

- 49 a** De doelfunctie is af te lezen in kolom F.
Omdat de functie geminimaliseerd wordt, hebben de beperkende voorwaarden een $\geq$ teken.
De beperkende voorwaarden I en II hebben geen speling en zijn af te lezen in kolom C en D: het linkerlid in rij 2 en 3, het rechterlid in rij 4.
Beperkende voorwaarde III is af te lezen in kolom E, maar heeft een speling van 9.
Dat betekent dat het rechterlid niet gelijk is aan het getal in cel E4, maar dat daar 9 vanaf getrokken moet worden.
- b** $K_{\min} = 17,5$
- c** $K_{\min} \approx 16,38$
- d** Dit heeft geen invloed op $K_{\min}$, omdat $x + 6y = 27$ bij de optimale oplossing.
Verandert voorwaarde III in $x + 6y \geq 28$, dan heeft dit wel invloed, immers $28 > 27$.
- e** De schaduwprijs bij voorwaarde I is gelijk aan 0,25. De minimale kosten moeten met $17 - 16,5 = 0,5$ afnemen, dus het rechterlid van voorwaarde I moet $18 - \frac{0,5}{0,25} = 16$ worden en voorwaarde I moet je veranderen in $2x + 3y \geq 16$.
Omdat bij voorwaarde II de schaduwprijs 1,25 is en $10 - \frac{0,5}{1,25} = 9,6$, moet je voorwaarde II veranderen in $2x + y \geq 9,6$.

Bladzijde 168

- 50 a** *
- b** $W_{\max} = 62,50$
Productieprogramma $(p, q, r, s) = (13,75; 0; 12,5; 11,25)$

c	voorwaarde	schaduwprijs	speling
	I	1,3	0
	II	0	11,25
	III	0,4	0
	IV	0,5	0

d Dan is $W_{\max} = 63,80$.

51 Je krijgt $W_{\max} \approx 695,27$ bij $(p, q, r, s) = (33,22; 62,20; 35,43; 28,57)$.

Bladzijde 169

52 Beperkende voorwaarde I is $p \geq 100 - q$, oftewel $p + q \geq 100$.
 Beperkende voorwaarde II is $p \geq 150 - q - r$, oftewel $p + q + r \geq 150$.
 Je krijgt $K_{\min} = 350$ bij $(p, q, r, s) = (50, 100, 0, 150)$.

53 a a = bedrag op de spaarrekening
 b = bedrag aan obligaties
 c = bedrag in aandelen I
 d = bedrag in aandelen II

Beperkende voorwaarden: $a + b + c + d \leq 100\,000$,
 $a + b > c + d$, oftewel $a + b - c - d > 0$,
 $a \geq 12\,000$,
 $c \geq \frac{1}{2}d$, oftewel $c - \frac{1}{2}d \geq 0$,
 $d \leq 50\,000$.

Doelfunctie: $R = 0,05a + 0,08b + 0,095c + 0,105d$.

b $R_{\max} = € 8723,33$

bij € 12 000 op de spaarrekening

€ 38 000 aan obligaties

€ 16 666,67 aan aandelen I

€ 33 333,33 aan aandelen II.

c Er wordt € 33 333,33 in aandelen II belegd, dat is $50\,000 - 33\,333,33 = € 16\,666,67$ minder dan het toegestane maximum.

d De schaduwprijs bij voorwaarde III (over het spaarbedrag) is $-0,03$.

Omdat $15\,000 - 12\,000 = 3000$ zal de maximale jaaropbrengst met $3000 \cdot 0,03 = 90$ euro dalen als de voorwaarde $a \geq 15\,000$ wordt.

e Dat betekent dat als de voorwaarde $a + b - c - d > 0$ wordt gewijzigd in

$a + b - c - d > 1$, de maximale jaaropbrengst € 0,0108 minder wordt.

$a + b - c - d > 1$, oftewel $a + b > c + d + 1$ betekent dat er 1 euro meer aan sparen en obligaties wordt besteed dan aan aandelen.

f De schaduwprijs bij voorwaarde I is 0,090833.

Dus de maximale jaaropbrengst zal met $10\,000 \cdot 0,090833 \approx € 908,33$ stijgen.

Bladzijde 170

54 a $W = 640x + 560y + 480z$

b Constructieafdeling: $6x + 3y + 9z \leq 900$

Bekledingsafdeling: $4x + 3y \leq 600$

Afwerkingsafdeling: $x + y + z \leq 200$

c $W_{\max} = 115\,200$ euro

Er worden 60 fauteuils, 120 sofa's en 20 tafels gemaakt.

d De schaduwprijs bij de afwerkingsafdeling (384) is veel hoger dan die bij de constructieafdeling (10,67). Verder is er op beide afdelingen geen speling.

55 a Ja: bij 870 uur op de constructieafdeling en 230 uur op de afwerkingsafdeling is $W_{\max} = 126\,400$ euro.

b Dit is mogelijk.

Gebruik de beperkende voorwaarden

$$6x + 3y + 9z \leq 900$$

$$4x + 3y \leq 580$$

$$x + y + z \leq 220$$

$$x \geq 25, y \geq 25 \text{ en } z \geq 25$$

Je krijgt $W_{\max} = 120\,000$ euro.

Er worden dan 25 fauteuils, 160 sofa's en 30 tafels gemaakt.

Gemengde Opgaven

5 Machtsverbanden

Bladzijde 172

1 a $y = 3 \cdot \frac{(2x^{0,6})^3}{x^{-4}} = 3 \cdot \frac{2^3 \cdot (x^{0,6})^3}{x^{-4}} = 3 \cdot \frac{8 \cdot x^{1,8}}{x^{-4}} = 24x^{5,8}$

Dus $y = 24x^{5,8}$.

b $A = 2^{x-3} \cdot 3^{y+2} = 2^x \cdot 2^{-3} \cdot 3^y \cdot 3^2 = 2^{-3} \cdot 3^2 \cdot 2^x \cdot 3^y = \frac{1}{8} \cdot 9 \cdot 2^x \cdot 3^y = 1\frac{1}{8} \cdot 2^x \cdot 3^y$

Dus $A = 1\frac{1}{8} \cdot 2^x \cdot 3^y$.

c $N = 5 \cdot \sqrt[3]{64t} + 2 \cdot \sqrt[3]{27t} = 5 \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{t} + 2 \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{t} = 5 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{t} + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{t}$
 $= 20 \cdot \sqrt[3]{t} + 6 \cdot \sqrt[3]{t} = 26 \cdot \sqrt[3]{t}$

Dus $N = 26 \cdot \sqrt[3]{t}$.

2 a $A = 4^{2\frac{1}{2}} \cdot x^{-3\frac{1}{4}} \cdot y^{1\frac{1}{2}} = 4^{2\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x^{3\frac{1}{4}}} \cdot y^{1\frac{1}{2}} = 4^{2\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{4}}} \cdot y \cdot y^{\frac{1}{2}} = \frac{32y\sqrt{y}}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}$

Dus $A = \frac{32y\sqrt{y}}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}$.

b $\frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{x^4 \cdot \sqrt[5]{x}} = \frac{x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^4 \cdot x^{\frac{1}{5}}} = \frac{x^{3\frac{1}{2}}}{x^{4\frac{1}{5}}} = x^{3\frac{1}{2} - 4\frac{1}{5}} = x^{-\frac{7}{10}}$

c $P = 4 \cdot (243xy)^{0,2} - (32xy)^{0,2} = 4 \cdot 243^{0,2} \cdot (xy)^{0,2} - 32^{0,2} \cdot (xy)^{0,2} = 12 \cdot \sqrt[5]{xy} - 2 \cdot \sqrt[5]{xy} = 10 \cdot \sqrt[5]{xy}$

Dus $P = 10 \cdot \sqrt[5]{xy}$.

3 a $y_1 = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$

↓ verschuiving (2, 6)

$y_2 = \frac{1}{2}(x-2-3)^2 + 4 + 6 = \frac{1}{2}(x-5)^2 + 10$

Dus $y_2 = \frac{1}{2}(x-5)^2 + 10$. De top is (5, 10).

b $y_1 = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$

↓ vert. herschaling factor 3

$y_3 = 3(\frac{1}{2}(x-3)^2 + 4) = 1\frac{1}{2}(x-3)^2 + 12$

Dus $y_3 = 1\frac{1}{2}(x-3)^2 + 12$.

c $y_1 = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$

↓ verschuiving (a, b)

$y_4 = \frac{1}{2}(x-a-3)^2 + 4 + b$

De top is (8, -2), dus $a+3=8$ en $4+b=-2$.

Dit geeft $a=5$ en $b=-6$.

d $y_1 = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$

↓ verschuiving (c, c)

$y = \frac{1}{2}(x-c-3)^2 + 4 + c$

↓ vert. herschaling factor d

$y_5 = d(\frac{1}{2}(x-c-3)^2 + 4 + c) = \frac{1}{2}d(x-c-3)^2 + 4d + cd$

De top is (6, 14), dus $c+3=6$ en $4d+cd=14$.

$c+3=6$ geeft $c=3$, dus $4d+3d=14$

$$7d = 14$$

$$d = 2$$

Dus $c=3$ en $d=2$.

Alternatieve uitwerking

De top van y_1 is (3, 4) en de top van y_5 is (6, 14).

3 naar rechts geschoven, dus $c=3$.

De top na verschuiving (c, c) is (6, 7). De top na verticale herschaling met factor d is (6, 14).

Hieruit volgt dat $d \cdot 7 = 14$, dus $d=2$.

4 a $A = 0,4 \cdot \sqrt[3]{p-6}$
 $0,4 \cdot \sqrt[3]{p-6} = A$
 $\sqrt[3]{p-6} = 2,5A$
 $p-6 = (2,5A)^3$
 $p = 15,625A^3 + 6$

b $B = 16(q-5)^2$
 $16(q-5)^2 = B$
 $(q-5)^2 = \frac{1}{16}B$
 $q-5 = \sqrt{\frac{1}{16}B}$
 $q-5 = \sqrt{\frac{1}{16}} \cdot \sqrt{B}$
 $q = \frac{1}{4}\sqrt{B} + 5$

c $C = 12,5(4D)^{-1,5}$
 $12,5(4D)^{-1,5} = C$
 $(4D)^{-1,5} = 0,08C$
 $4D = (0,08C)^{\frac{1}{-1,5}}$
 $D = \frac{1}{4} \cdot 0,08^{\frac{1}{-1,5}} \cdot C^{\frac{1}{-1,5}}$
 $D \approx 1,35C^{-0,67}$
Dus $D = 1,35C^{-0,67}$.

d $y = 0,25\sqrt{6-0,4x}$
 $0,25\sqrt{6-0,4x} = y$
 $\sqrt{6-0,4x} = 4y$
 $6-0,4x = (4y)^2$
 $-0,4x = 16y^2 - 6$
 $x = -40y^2 + 15$
Dus $x = -40y^2 + 15$.

Bladzijde 173

5 a $G = 65$ geeft $0,4d^3 = 65$
 $d^3 = 162,5$
 $d = \sqrt[3]{162,5}$
 $d \approx 5,46$

Dus de diameter is 5,5 cm.

b Neem $2d$ voor d in de formule $G = 0,4d^3$.
Dit geeft $G = 0,4 \cdot (2d)^3 = 0,4 \cdot 2^3 \cdot d^3 = 2^3 \cdot 0,4d^3 = 8 \cdot 0,4d^3$.
Dus G wordt 8 keer zo groot.

c $G = 0,4d^3$
 $0,4d^3 = G$
 $d^3 = 2,5G$
 $d = \sqrt[3]{2,5G}$
Neem $2G$ voor G in deze formule.
Dit geeft $G = \sqrt[3]{2,5 \cdot 2G} = \sqrt[3]{2 \cdot 2,5 \cdot G} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2,5G} \approx 1,26 \cdot \sqrt[3]{2,5G}$.
Dus de diameter is 26% groter.

6 a $W = ad^4$
 $d = 5$ en $W = 13,5$ } $a \cdot 5^4 = 13,5$, dus $a = \frac{13,5}{5^4} = 0,0216$.

b $d = 8$ geeft $W = 0,02 \cdot 8^4 = 81,92$
Dus er stroomt 81,92 liter per seconde door de buis, dat is $81,92 \cdot 60 \approx 4915$ liter per minuut.

c In een uur 16 650 liter, dus per seconde $\frac{16\,650}{3600} = 4,625$ liter.

$W = 4,625$ geeft $0,02d^4 = 4,625$
 $d^4 = 231,25$
 $d = \sqrt[4]{231,25}$ (de negatieve waarde van d voldoet niet)
 $d \approx 3,9$

Dus de diameter is ongeveer 3,9 cm.

d Neem $1,3d$ voor d in de formule $W = 0,02d^4$.
Dit geeft $W = 0,02 \cdot (1,3d)^4 = 0,02 \cdot 1,3^4 \cdot d^4 = 1,3^4 \cdot 0,02d^4 \approx 2,9 \cdot 0,02d^4$.
Dus er stroomt ongeveer 2,9 keer zoveel water per seconde door de buis.

e $W = 0,02d^4$
 $0,02d^4 = W$
 $d^4 = 50W$
 $d = \sqrt[4]{50W}$
Neem $2W$ voor W in deze formule.
Dit geeft $d = \sqrt[4]{50 \cdot 2W} = \sqrt[4]{2 \cdot 50W} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{50W} \approx 1,19 \cdot \sqrt[4]{50W}$.
Dus de diameter van een buis moet 19% groter worden.

- 7 a** $G = 40$ geeft $H = 12 \cdot 40^{0,67} = 142,08...$
Dus $I = \frac{130}{142,08...} \approx 0,91$.
- b** $G = 70$ geeft $H = 12 \cdot 70^{0,67} = 206,72...$
Dus $I = \frac{1650}{206,72...} \approx 8,0$.
- c** Er geldt $\frac{1050}{H} = 1,04$, dus $H = \frac{1050}{1,04} \approx 1010$.
Los op $12 \cdot G^{0,67} = 1010$
Voer in $y_1 = 12x^{0,67}$ en $y_2 = 1010$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 747$.
Dus $G = 747$ kg.
- d** $H = 12 \cdot G^{0,67}$ invullen in $I = \frac{W}{H}$ geeft $I = \frac{W}{12 \cdot G^{0,67}} = \frac{1}{12} \cdot W \cdot \frac{1}{G^{0,67}} \approx 0,083 \cdot W \cdot G^{-0,67}$.
Dus $I = 0,083 \cdot W \cdot G^{-0,67}$.

Bladzijde 174

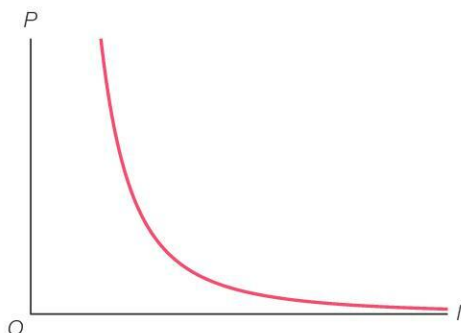
- 8 a** $G = 25 - \frac{16}{z+1}$
 $\frac{16}{z+1} = 25 - G$
 $z+1 = \frac{16}{25-G}$
 $z = -1 + \frac{16}{25-G}$
 $z = \frac{-25+G+16}{25-G}$
 $z = \frac{G-9}{25-G}$
Dus $a = -9$ en $b = 25$.
- b** $\frac{5p}{2p+q} = 10 + 3p$
 $2p+q = \frac{5p}{10+3p}$
 $q = -2p + \frac{5p}{10+3p}$

- 9 a** $P = 800 \cdot l^{-2,25}$
 $P = 800 \cdot \frac{1}{l^{2,25}}$
 $P = \frac{800}{l^{2,25}}$

Als l groter wordt, dan wordt de noemer van de breuk groter en dan wordt P kleiner.
Dat wil zeggen dat er minder organismen per km^2 leven, oftewel dat de organismen gemiddeld verder van elkaar leven. Dus de bewering klopt.

Alternatieve uitwerking

Voer in $y_1 = 800x^{-2,25}$.



Als l groter wordt, dan wordt P kleiner. Dus de bewering klopt.

- b** $P = 1350$ geeft $800 \cdot l^{-2,25} = 1350$
 Voer in $y_1 = 800x^{-2,25}$ en $y_2 = 1350$.
 De optie snijpunt geeft $x = 0,792\dots$
 De gemiddelde lengte is dus ongeveer 79 cm.
- c** $l = 2,15$ geeft $P = 800 \cdot 2,15^{-2,25} \approx 142,92\dots$
 In het gebied van 250 km^2 geeft dit $250 \cdot 142,92\dots = 35\,730,8\dots$
 Er leven dus ongeveer 35 730 kariboes in dit gebied.
- d** 160 000 exemplaren per 5 km^2 geeft $P = \frac{160\,000}{5} = 32\,000$.
 Hieruit volgt $800 \cdot l^{-2,25} = 32\,000$.
 Voer in $y_1 = 800x^{-2,25}$ en $y_2 = 32\,000$.
 De optie snijpunt geeft $x = 0,194\dots$
 De gemiddelde lengte is dus ongeveer 19 cm.
- e** Neem $1,2l$ voor l in de formule $P = 800 \cdot l^{-2,25}$.
 Dit geeft $P = 800 \cdot (1,2l)^{-2,25} = 800 \cdot 1,2^{-2,25} \cdot l^{-2,25} = 1,2^{-2,25} \cdot 800 \cdot l^{-2,25} \approx 0,66 \cdot 800 \cdot l^{-2,25}$.
 Dus P neemt met 34% af.

- 10 a** $l = 8,6$ geeft $v = 4,8\sqrt{8,6} \approx 14,08 \text{ km/uur}$
 $l = 5,8$ geeft $v = 4,8\sqrt{5,8} \approx 11,56 \text{ km/uur}$
 Dat is dus $\frac{14,08 - 11,56}{11,56} \times 100\% \approx 21,8\%$ hoger.
- b** Bij schip II is $v = 4,8\sqrt{l_{II}}$, dus bij schip I is
 $v = 4,8\sqrt{2l_{II}} = 4,8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{l_{II}} = \sqrt{2} \cdot 4,8\sqrt{l_{II}} \approx 1,4 \cdot 4,8\sqrt{l_{II}}$.
 De rompsnelheid bij schip I is 1,4 keer zo groot als bij schip II.
- c** $v = 4,8\sqrt{l}$
 $4,8\sqrt{l} = v$
 $\sqrt{l} = \frac{1}{4,8}v$
 $l = \left(\frac{1}{4,8}v\right)^2$
 $l \approx 0,0434v^2$
 Dus $l = 0,0434v^2$.
- d** $v = 10$ geeft $l = 0,0434 \cdot 10^2 \approx 4,3$
 $v = 20$ geeft $l = 0,0434 \cdot 20^2 \approx 17,4$
 Die schepen hebben een lengte van de waterlijn tussen 4,3 en 17,4 meter.

Bladzijde 175

- 11 a** $T = -27,4$ geeft $v = 331\sqrt{1 + \frac{-27,4}{273}} \approx 331,95 \text{ m/s}$
 $T = 38,6$ geeft $v = 331\sqrt{1 + \frac{38,6}{273}} \approx 353,63 \text{ m/s}$
 Het verschil in snelheid is dus $353,63 - 331,95 \approx 21,68 \text{ m/s}$.
- b** Los op $331\sqrt{1 + \frac{T}{273}} = 340$.
 Voer in $y_1 = 331\sqrt{1 + \frac{x}{273}}$ en $y_2 = 340$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 15$.
 Dus de temperatuur is 15°C .
- c** $T_0 = 25$ geeft $T = 25 - 6,5 \cdot 2,5 = 8,75$
 $T = 8,75$ geeft $v = 331\sqrt{1 + \frac{8,75}{273}} = 336,2\dots \text{ m/s} \approx 1211 \text{ km/uur}$

$$\mathbf{d} \quad \left. \begin{array}{l} T = T_0 - 6,5h \\ h = 2 \text{ en } T = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} T_0 - 6,5 \cdot 2 = -1 \\ T_0 - 13 = -1 \\ T_0 = 12 \end{array}$$

$$T = 12 - 6,5h \text{ invullen in } v = 331 \sqrt{1 + \frac{T}{273}} \text{ geeft}$$

$$v = 331 \sqrt{1 + \frac{12 - 6,5h}{273}} = 331 \sqrt{1 + \frac{12}{273} - \frac{6,5h}{273}} = 331 \sqrt{-\frac{6,5}{273}h + 1 + \frac{12}{273}} \approx 331 \sqrt{-0,0238h + 1,0440}.$$

$$\text{Dus } v = 331 \sqrt{-0,0238h + 1,0440}.$$

6 Kansrekening

12

a

SOM

6						
5						
4	5					
3	4	5				
2	3	4	5			
1	2	3	4	5		
	1	2	3	4	5	6

$$P(\text{som minder dan 6}) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

b

VERSCHIL

6				2		
5			2			
4		2				2
3	2				2	
2				2		
1			2			
	1	2	3	4	5	6

$$P(\text{verschil is 2}) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$\mathbf{c} \quad P(\text{drie keer verschil van 2 ogen}) = \left(\frac{10}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^7 \approx 0,227$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \quad & P(\text{minstens 8 keer som minder dan 6}) \\ &= P(8 \text{ keer som} < 6) + P(9 \text{ keer som} < 6) + P(10 \text{ keer som} < 6) \\ &= \left(\frac{10}{8}\right) \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^8 \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right) \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^9 \cdot \frac{13}{18} + \left(\frac{5}{18}\right)^{10} \approx 0,001 \end{aligned}$$

$$\mathbf{e} \quad \text{Het aantal mogelijke uitkomsten is } 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192.$$

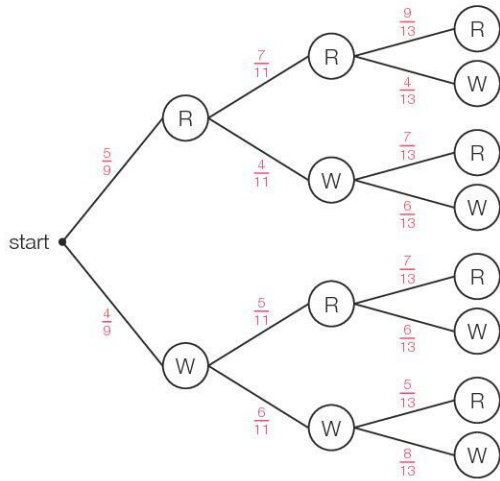
Gunstige uitkomsten zijn 113, 131, 311, 122, 212 en 221.

$$P(\text{som is 5}) = \frac{6}{192} = \frac{1}{32}$$

$$\mathbf{f} \quad \text{Gunstige uitkomsten zijn 111, 222, 333 en 444.}$$

$$P(\text{alle dobbelstenen hetzelfde aantal}) = \frac{4}{192} = \frac{1}{48}$$

13 a



b $P(\text{alleen rode}) = P(r r r) = \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{9}{13} \approx 0,245$

c $P(\text{meer rode dan witte}) = P(r r r) + P(r r w) + P(r w r) + P(w r r)$
 $= \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{9}{13} + \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{13} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{13} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{7}{13} \approx 0,571$

Bladzijde 176

14 a $P(3 \text{ appels en 1 kers}) = P(a a a k) + P(a a k a) + P(a k a a) + P(k a a a)$
 $= 0 + 0 + \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} \approx 0,003$

b $P(4 \text{ gelijke}) = P(a a a a) + P(p p p p) + P(b b b b) + P(k i k i k i k i)$
 $= \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{15} + \frac{1}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{1}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{6}{15} \approx 0,008$

c $P(1 \text{ banaan}) = P(b \text{ } \emptyset \text{ } \emptyset \text{ } \emptyset) + P(\emptyset b \text{ } \emptyset \text{ } \emptyset) + P(\emptyset \emptyset b \text{ } \emptyset) + P(\emptyset \emptyset \emptyset b)$
 $= \frac{1}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{1}{15} \approx 0,442$

d $P(\text{geen kiwi}) = P(k i k i k i k i) = \frac{12}{15} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{9}{15} \approx 0,305$

15 a $P(\text{geen prijs}) = \frac{\binom{55}{5}}{\binom{65}{6}} \approx 0,421$

b $P(\text{minstens € 10}) = 1 - P(\text{hoogstens € 5}) = 1 - P(\text{geen prijs}) - P(1 \text{ derde prijs})$
 $= 1 - \frac{\binom{55}{5}}{\binom{65}{5}} - \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{55}{4}}{\binom{65}{5}} \approx 0,331$

c $P(1 \text{ tweede prijs en 1 derde prijs en verder niets}) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{55}{3}}{\binom{65}{5}} \approx 0,057$

d $P(2 \text{ prijzen}) = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{55}{3}}{\binom{65}{5}} \approx 0,143$

16 a $15 + 21 = 36$ meisjes met minder dan 150 euro en $120 - 36 = 84$ overigen.
 $P(5 \text{ meisjes met minder dan 150 euro}) = \frac{\binom{36}{5} \cdot \binom{84}{7}}{\binom{120}{12}} \approx 0,162$

b $P(8 \text{ meisjes en 4 jongens}) = \frac{\binom{68}{8} \cdot \binom{52}{4}}{\binom{120}{12}} \approx 0,190$

- c $27 + 5 = 32$ meisjes met 150 euro of meer en $47 + 43 + 7 - 32 = 65$ overigen met minder dan 120 euro.

$$P(5 \text{ meisjes met 150 euro of meer en niemand met minder dan 120 euro}) = \frac{\binom{32}{5} \cdot \binom{65}{7}}{\binom{120}{12}} \approx 0,013$$

- d $43 + 7 = 50$ met minstens 150 euro en $120 - 70 = 50$ overigen.

$$\begin{aligned} P(\text{minstens 3 met minstens 150 euro}) &= 1 - P(0) - P(1) - P(2) \\ &= 1 - \frac{\binom{70}{12}}{\binom{120}{12}} - \frac{\binom{50}{1} \cdot \binom{70}{11}}{\binom{120}{12}} - \frac{\binom{50}{2} \cdot \binom{70}{10}}{\binom{120}{12}} \approx 0,943 \end{aligned}$$

- e $21 + 27 = 48$ meisjes met 120 euro of meer, maar minder dan 180 euro en $68 - 48 = 20$ overige meisjes.

$P(6 \text{ jongens én 4, 5 of 6 meisjes met 120 euro of meer en minder dan 180 euro})$

$$= \frac{\binom{52}{6} \cdot \left(\binom{48}{4} \cdot \binom{20}{2} + \binom{48}{5} \cdot \binom{20}{1} + \binom{48}{6} \right)}{\binom{120}{12}} \approx 0,161$$

- f $P(\text{meisje onder voorwaarde heeft minstens 150 euro, maar minder dan 180 euro}) = \frac{27}{43} \approx 0,628$
- $$P(\text{meisje}) = \frac{68}{120} = 0,567$$
- } $0,628 \neq 0,567$

De gebeurtenissen 'leerling is meisje' en 'leerling heeft minstens 150 euro, maar minder dan 180 euro per maand' zijn afhankelijk.

Bladzijde 177

- 17 a $P(\text{alle automobilisten houden zich aan de maximumsnelheid}) = 0,68^{10} \approx 0,021$

- b $P(\text{meer dan 70 km per uur}) = \frac{1}{4} \cdot 0,32 = 0,08$

$$P(\text{tussen 50 en 70 km per uur}) = 1 - 0,68 - 0,08 = 0,24$$

De gevraagde kans is $\binom{10}{7} \cdot \binom{3}{1} \cdot 0,68^7 \cdot 0,08 \cdot 0,24^2 \approx 0,112$.

- c $P(\text{minstens 2 te hard}) = 1 - P(0 \text{ of } 1 \text{ te hard}) = 1 - P(0) - P(1)$
 $= 1 - 0,68^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,32 \cdot 0,68^9 \approx 0,879$

- 18 a $P(2 \text{ of } 3 \text{ goed}) = P(2 \text{ goed}) + P(3 \text{ goed})$
 $= \binom{18}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^{16} + \binom{18}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^{15} \approx 0,266$

- b $P(\text{minder dan 8 goed}) = P(\text{minder dan 3 goed gegokt})$
 $= P(0 \text{ goed gegokt}) + P(1 \text{ goed gegokt}) + P(2 \text{ goed gegokt})$
 $= 0,75^{13} + \binom{13}{1} \cdot 0,25 \cdot 0,75^{12} + \binom{13}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^{11} \approx 0,333$

- c $P(\text{minstens 16 goed}) = P(\text{minstens 3 goed geraden})$
 $= P(3 \text{ goed geraden}) + P(4 \text{ goed geraden}) + P(5 \text{ goed geraden})$
 $= \binom{5}{2} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^2 + \binom{5}{1} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75 + 0,25^5 \approx 0,104$

- 19 a $P(3 \text{ rode en } 3 \text{ blauwe}) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{12}\right)^3 \approx 0,023$

- b $P(\text{geen enkele rode in één greep}) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{7}{44}$

$$P(2 \text{ van de 6 keer geen enkele rode}) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \left(\frac{37}{44}\right)^4 \approx 0,190$$

c $P(\text{evenveel witte als blauwe blijven achter}) = P(\text{één witte meer dan blauwe pakken})$

$$= P(1 \text{ witte en } 3 \text{ rode}) + P(2 \text{ witte, } 1 \text{ blauwe en } 1 \text{ rode}) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{12}{4}} + \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{4}} \approx 0,263$$

Bladzijde 178

- 20 a Ja, als de een bloedgroep A heeft en de ander bloedgroep B.
 b $P(\text{dezelfde bloedgroep}) = P(0 \ 0) + P(A \ A) + P(B \ B) + P(AB \ AB)$
 $= 0,46^2 + 0,43^2 + 0,08^2 + 0,03^2 = 0,4038 \approx 0,404$
 c $P(\text{tenminste één met } 0) = 1 - P(\text{niemand met } 0) = 1 - 0,54^{12} \approx 0,999$
 d $P(\text{dezelfde resusfactor}) = 0,85^2 + 0,15^2 = 0,745$
 $P(\text{dezelfde bloedgroep én dezelfde resusfactor}) = 0,4038 \cdot 0,745 \approx 0,301$

Bladzijde 179

21 a $P(2 \text{ plaatsen leeg in kano } 3) = \frac{\binom{24}{4} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{30}{6}} \approx 0,268$

Alternatieve uitwerking

$$P(2 \text{ plaatsen leeg in kano } 3) = \frac{\binom{24}{20} \cdot \binom{6}{4}}{\binom{30}{24}} \approx 0,286$$

b $P(\text{kano } 1 \text{ en } 2 \text{ geheel vol}) = \frac{\binom{24}{12}}{\binom{30}{12}} \approx 0,031$

Alternatieve uitwerking

$$P(\text{kano } 1 \text{ en } 2 \text{ geheel vol}) = \frac{\binom{18}{12}}{\binom{30}{24}} \approx 0,031$$

- 22 a $P(\text{alle planten links besmet en rechts niet}) = 0,3^5 \cdot 0,7^5 \approx 0,0004$
 b $P(12 \text{ of } 13 \text{ besmet}) = P(12 \text{ besmet}) + P(13 \text{ besmet}) = \binom{40}{12} \cdot 0,3^{12} \cdot 0,7^{28} + \binom{40}{13} \cdot 0,3^{13} \cdot 0,7^{27} \approx 0,263$
 c Stel hij begint met n gezonde planten.
 $P(\text{minstens één onbesmet}) = 1 - P(\text{geen onbesmet}) = 1 - 0,3^n$
 Er moet gelden $1 - 0,3^n > 0,99$.
 Voer in $y_1 = 1 - 0,3^x$ en maak een tabel.
 $x = 3$ geeft $y \approx 0,973$ en $x = 4$ geeft $y \approx 0,9919$.
 Dus hij moet met minimaal 4 planten beginnen.
 d $P(\text{een plant is na twee dagen niet besmet}) = 0,7^2 = 0,49$
 $P(\text{alle planten na twee dagen niet besmet}) = 0,49^{40} \approx 4,1 \cdot 10^{-13}$
 Deze kans is kleiner dan een miljardste $= 10^{-9}$.

Bladzijde 180

- 23 a In een uitdeelzak zitten $14 \cdot 20 = 280$ J&J's.
 20% van 280 is 56
 $P(56 \text{ rood}) = \binom{280}{56} \cdot 0,2^{56} \cdot 0,8^{224} \approx 0,060$
 b Je verwacht $0,3 \cdot 280 = 84$ bruine J&J's.
 $P(84 \text{ bruin}) = \binom{280}{84} \cdot 0,3^{84} \cdot 0,7^{196} \approx 0,052$
 c $P(\text{minstens } 3 \text{ blauw}) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$
 $= 1 - 0,9^{20} - \binom{20}{1} \cdot 0,1 \cdot 0,9^{19} - \binom{20}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{18} = 0,323...$
 Dus naar verwachting $0,323... \cdot 14 \approx 4,52$, oftewel 5 zakjes.

Verantwoording

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie.
Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontlenen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom
hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89588-4



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.