

& GETAL RUIMTE

A



Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen
vwo A deel 3

Twaalfde editie, 2021

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
E. Terlaak

Inhoud

8	Differentiaalrekening	4
9	Kansverdelingen	36
10	Exponenten en logaritmen	55
11	Het toetsen van hypothesen	78
	Gemengde opgaven	95

8 Differentiaalrekening

Voorkennis Intervallen, stijgen en dalen

Bladzijde 10

- 1** a toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$ en op $\langle 8, 10 \rangle$
afnemend stijgend op $\langle 4, 5 \rangle$ en op $\langle 10, 12 \rangle$
b afnemend dalend op $\langle 0, 2 \rangle$ en op $\langle 7, 8 \rangle$
toenemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$
- 2** a constant stijgend op $\langle 0, 3 \rangle$
afnemend stijgend op $\langle 3, 4 \rangle$
toenemend dalend op $\langle 4, 5 \rangle$
afnemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$
toenemend stijgend op $\langle 7, 10 \rangle$
b Bij het klimmen neemt de snelheid van de fietser af. Dus op het interval $\langle 4, 7 \rangle$.

8.1 Toenamedigrammen en differentiequotiënten

Bladzijde 11

- 1** a Tussen tien uur en twaalf uur, dus tussen $t = 2$ en $t = 4$.
De toename is $10 - 4 = 6^\circ\text{C}$.
b De toename van T op $[4, 6]$ is $15 - 10 = 5^\circ\text{C}$.
c Deze afname is $15,5 - 12 = 3,5^\circ\text{C}$.

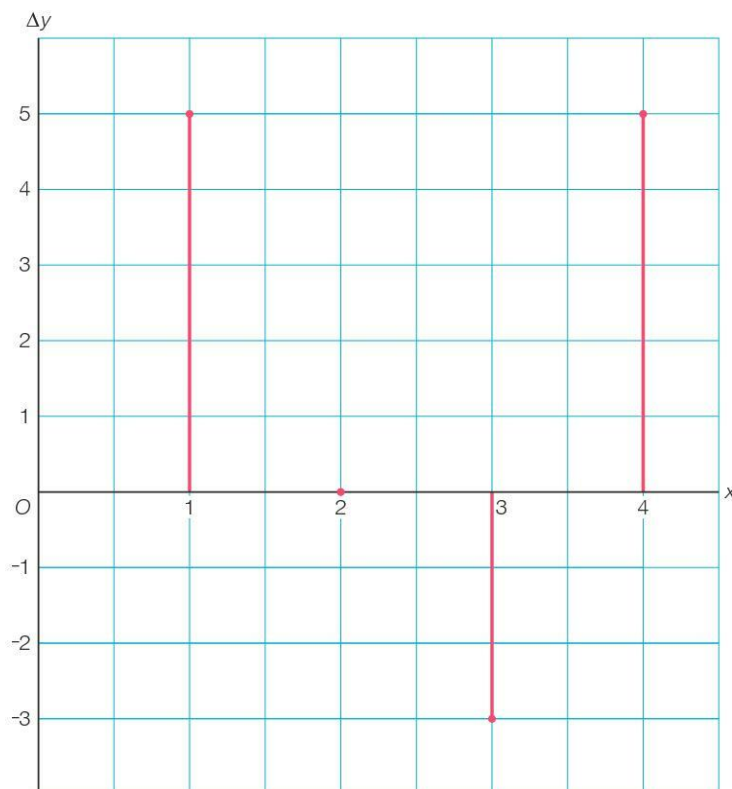
d

interval	$[0, 2]$	$[2, 4]$	$[4, 6]$	$[6, 8]$	$[8, 10]$	$[10, 12]$
ΔT	2	6	5	0,5	-3,5	-4

Bladzijde 12

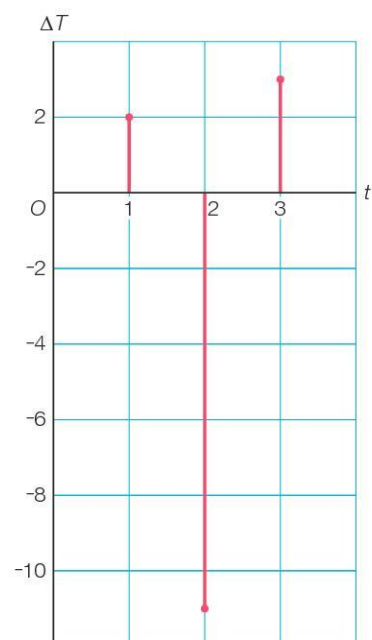
2

interval	Δy
$[0, 1]$	5
$[1, 2]$	0
$[2, 3]$	-3
$[3, 4]$	5

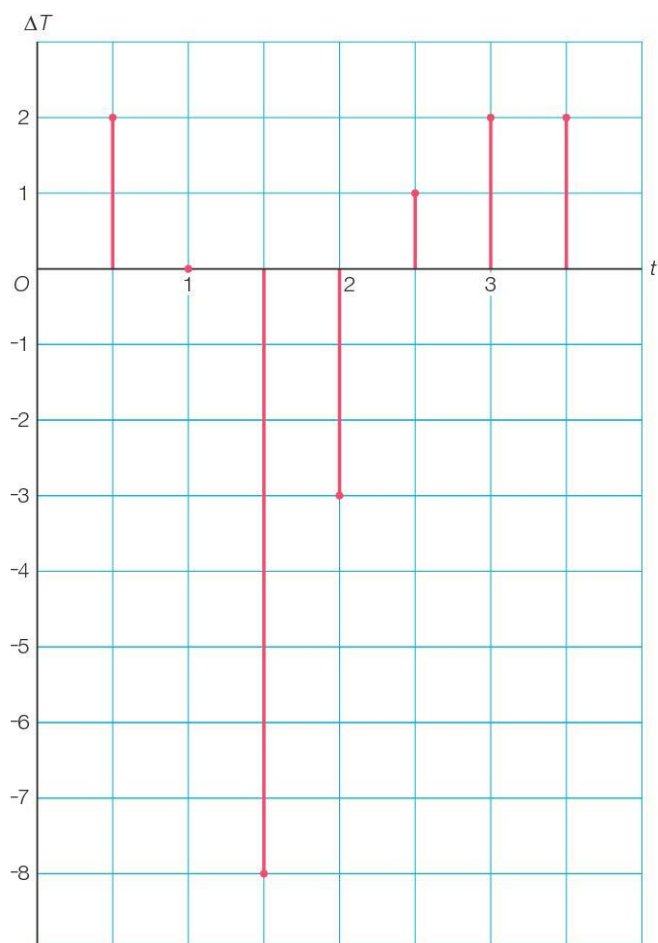


3 a

interval	ΔT
$[0, 1]$	2
$[1, 2]$	-11
$[2, 3]$	3

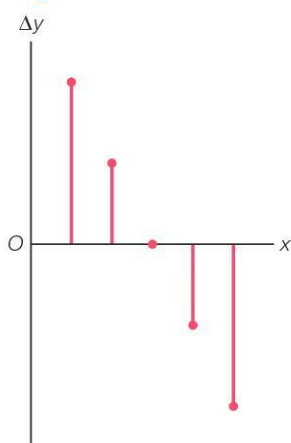
**b**

interval	ΔT
$[0; 0,5]$	2
$[0,5; 1]$	0
$[1; 1,5]$	-8
$[1,5; 2]$	-3
$[2; 2,5]$	1
$[2,5; 3]$	2
$[3; 3,5]$	2

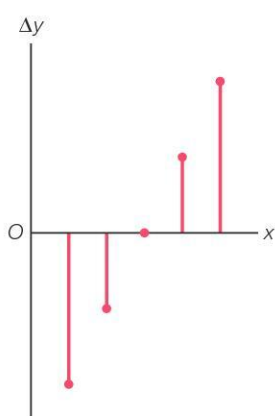


4

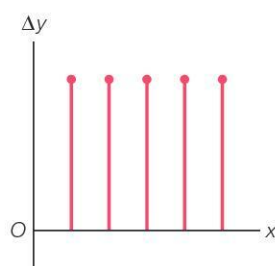
a



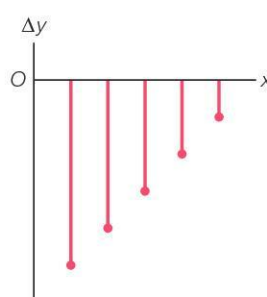
b



c



d



5

Bij A hoort III, want tussen 0 en 2 afnemend stijgend en daarna eerst toenemend dalend en daarna afnemend dalend.

Bij B hoort I, want tussen 0 en 2 afnemend dalend en daarna eerst toenemend stijgend en daarna afnemend stijgend.

Bij C hoort II, want tussen 0 en 3 constant stijgend, dan dalend en daarna weer stijgend.

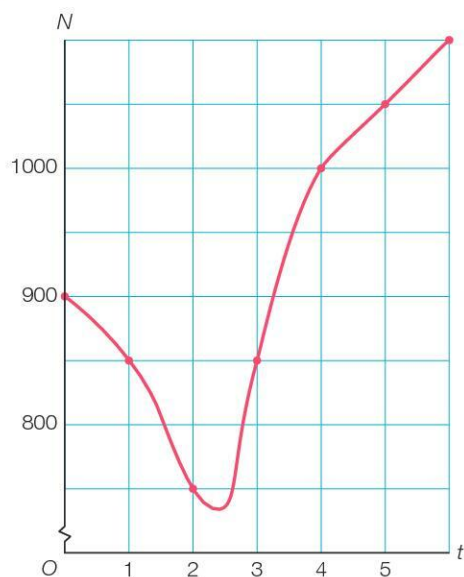
6

a Tussen 12 uur en 14 uur is $\Delta T = 4$, dus 's middags om twee uur is de temperatuur $20 + 4 = 24^\circ\text{C}$.

b Om vier uur 's middags is de temperatuur $24 - 1 = 23^\circ\text{C}$.
Om acht uur 's avonds is de temperatuur $23 - 5 - 2 = 16^\circ\text{C}$.

c Tussen 8 uur en 10 uur is $\Delta T = 3$ en tussen 10 uur en 12 uur is $\Delta T = 5$, dus om acht uur 's morgens is de temperatuur $20 - 5 - 3 = 12^\circ\text{C}$.

- 7 Ja, dat kan. Je hebt dan bijvoorbeeld de volgende grafiek.



- 8 a, b

x	y
0	1,5
1	2
2	3
3	3,5
4	4,5
5	5
6	4,5

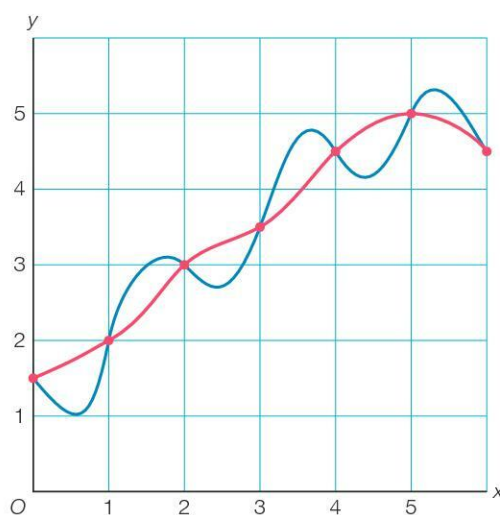
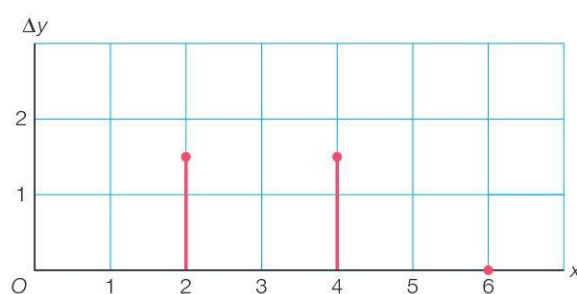
$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} +0,5$
 $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} +1$
 $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} +0,5$
 $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} +1$
 $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} +0,5$
 $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} -0,5$

- b Alleen de punten $(0; 1,5)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, ... liggen vast.

Elke grafiek door deze punten is mogelijk.

- c

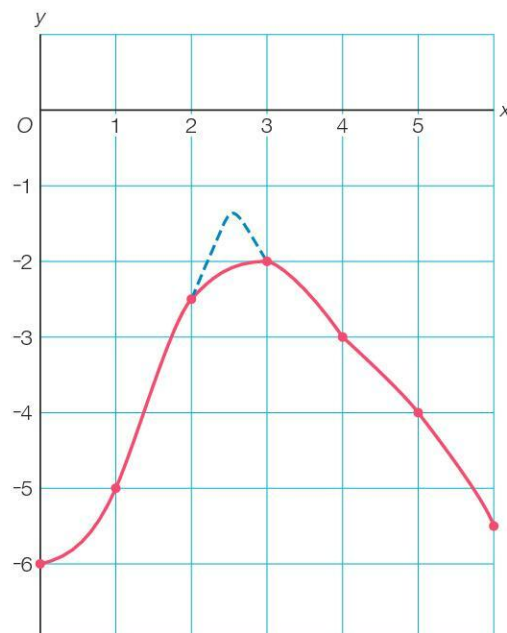
interval	Δy
$[0, 2]$	1,5
$[2, 4]$	1,5
$[4, 6]$	0



9 a

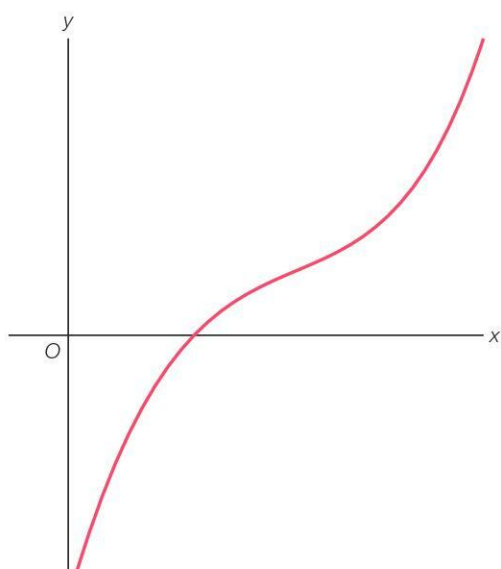
x	y	
0	-6	
1	-5	+ 1
2	-2,5	+ 2,5
3	-2	+ 0,5
4	-3	- 1
5	-4	- 1
6	-5,5	- 1,5

- b Dit maximum kan optreden bij $x = 2,5$. Zie het gestippelde stuk in de grafiek van vraag a. Het maximum kan niet optreden bij $x = 1,5$, want er is al een maximum tussen $x = 2$ en $x = 4$ en er is gegeven dat er maar één maximum is.

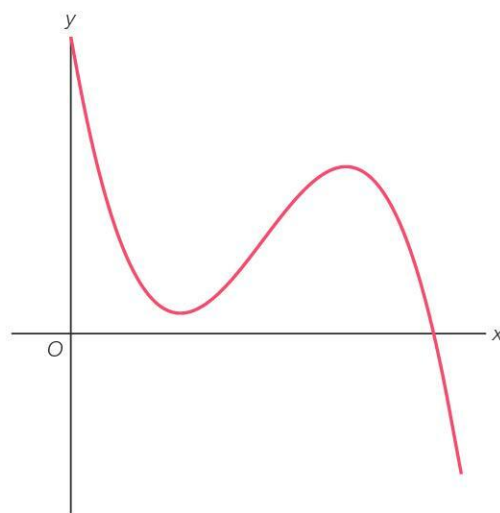


- 10 I constant dalend
II afnemend stijgend
III afnemend dalend
IV toenemend dalend

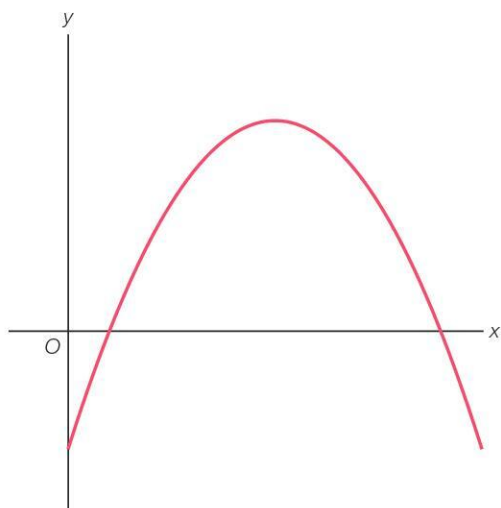
11 a



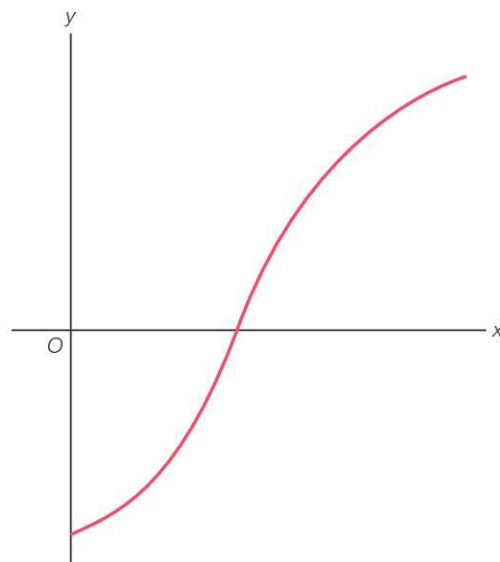
c



b



d



Bladzijde 16

- 12 a** Om 17:00 uur stonden er $110 - 10 - 35 = 65$ fietsen.
Om 9:00 uur stonden er $110 - 25 - 15 + 15 - 40 + 40 + 20 = 105$ fietsen.
- b** Tussen 10 en 11 uur is er netto een afname van 40.
Als 30 personen een fiets hebben neergezet, zijn er dus 70 fietsen meegenomen.

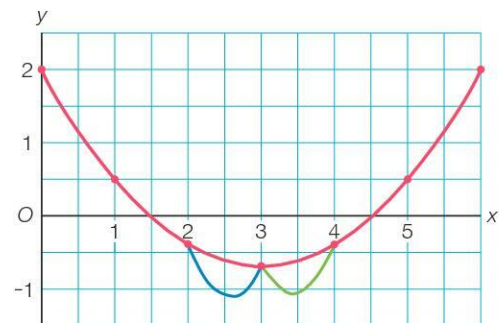
- 13** Stel er zitten om 15:00 uur x mensen op het terras. Je krijg dan de volgende tabel.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
N	x	$x - 20$	$x - 10$	$x - 40$	$x - 30$	x	$x - 35$	$x - 45$
		-20	+10	-30	+10	+30	-35	-10

Omdat op alle tijdstippen moet gelden dat N minstens 0 is, moet x tenminste 45 zijn.
Er zaten dus om 15:00 uur minstens 45 mensen op het terras.

14

x	y
0	2
1	0,5
2	-0,4
3	-0,7
4	-0,4
5	0,5
6	2



In de getekende grafiek treedt het minimum op bij $x = 3$.
Verder zijn twee mogelijke grafieken getekend: één met het minimum op $\langle 2, 3 \rangle$ en één met het minimum op $\langle 3, 4 \rangle$.
Het minimum kan optreden op $\langle 2, 4 \rangle$.

Bladzijde 17

- 15** Stijn vergeet rekening te houden met de lengten van de perioden.

Bladzijde 18

- 16 a** In de periode 1980-1987 neemt N met $5,59 - 4,85 = 0,74$ toe.
Hier is $\Delta t = 1987 - 1980 = 7$ en $\Delta N = 0,74$.
De gemiddelde toename is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{0,74}{7} \approx 0,106$ miljoen per jaar.

b

periode	Δt	ΔN	$\frac{\Delta N}{\Delta t}$
1920-1947	27	0,75	0,028
1947-1964	17	1,03	0,061
1964-1970	6	0,60	0,100
1970-1980	10	1,10	0,110
1980-1987	7	0,74	0,106
1987-1995	8	0,71	0,089
1995-2000	5	0,29	0,058
2000-2019	19	1,23	0,065

- c** De gemiddelde toename is het grootst in de periode 1970-1980.
d De woningvoorraad nam steeds toe, maar de sterkste toename was in de periode tussen 1964 en 1987.

17 a Op $[0, 10]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{2250 - 250}{10 - 0} = \frac{2000}{10} = 200$.

De gemiddelde toename gedurende de eerste 10 dagen is 200 vliegjes per dag.

b Op $[2, 8]$ is de grafiek steiler dan op $[10, 14]$.

c Het grootst op $[4, 8]$, het kleinst op $[0, 4]$.

Bladzijde 19

18 a Op $[9, 13]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 800}{13 - 9} = 200$.

b Op $[12, 17]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 2000}{17 - 12} = -80$.

c Op $[9, 17]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 800}{17 - 9} = \frac{800}{8} = 100$, dus $[9, 17]$.

d Op $[15, 18]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1200 - 1800}{18 - 15} = \frac{-600}{3} = -200$, dus $[15, 18]$.

19 a Op $[1, 6]$ is de gemiddelde toename $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 3}{6 - 1} = \frac{3}{5} = 0,6$.

b De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 3}{6 - 1} = \frac{3}{5} = 0,6$.

c De antwoorden en ook de berekeningen zijn hetzelfde.

Bladzijde 20

20 a De gemiddelde verandering op $[2, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 5}{5 - 2} = \frac{1}{3}$.

b Op $[-1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 2}{5 - (-1)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

c Bijvoorbeeld $[2, 6]$.

21 a Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$.

b Op $[4, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 6}{6 - 4} = \frac{-3}{2} = -1,5$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, dus er is een afname.

c Op $[2, 7]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 3}{7 - 2} = \frac{-1}{5} = -0,2$.

d Bijvoorbeeld $[2, 6]$ of $[3, 5]$.

e Bijvoorbeeld $[0, 2]$ of $[2, 4]$.

22 a Op elk interval is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5$.

b Bij een lijn zijn alle differentiequotienten gelijk.

Bladzijde 21

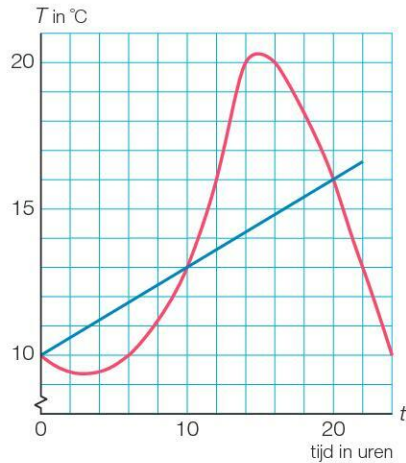
23 a Op $[6, 10]$ is $\Delta T = 13 - 10 = 3$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{3}{4} = 0,75^\circ\text{C}$ per uur.

Op $[9, 14]$ is $\Delta T = 20 - 12 = 8$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{8}{5} = 1,6^\circ\text{C}$ per uur.

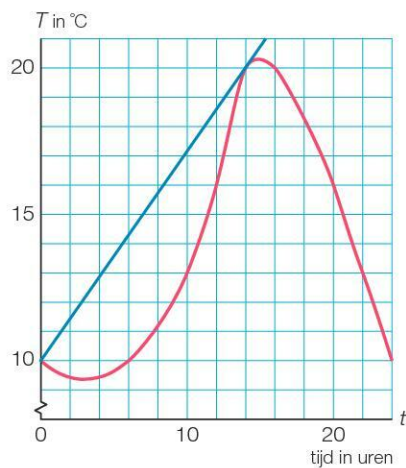
b Bijvoorbeeld op $[12, 22]$ is $\Delta T = 13 - 16 = -3$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{-3}{10} = -0,3$.

Dus op het interval $[12, 22]$ is de gemiddelde verandering $-0,3^\circ\text{C}$ per uur.

- c** Teken de lijn door $(0, 10)$ en $(10, 13)$. Deze lijn snijdt de grafiek ook in het punt $(20, 16)$.
Dus voor $t = 20$.



- d** De gemiddelde toename is maximaal als de lijn het steilst is. Teken dus een lijn die zo steil mogelijk is door $(0, 10)$ en een ander punt van de grafiek. Dat is de lijn door $(14, 20)$.
Dus voor $t = 14$.



24 Op $[0, 7]$ is $\Delta y = 30 + 20 - 10 + 10 - 20 + 20 + 20 = 70$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{70}{7} = 10$.

Op $[2, 6]$ is $\Delta y = -10 + 10 - 20 + 20 = 0$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

- 25 a** Teken de volgende punten. Begin met $(0, 2)$.

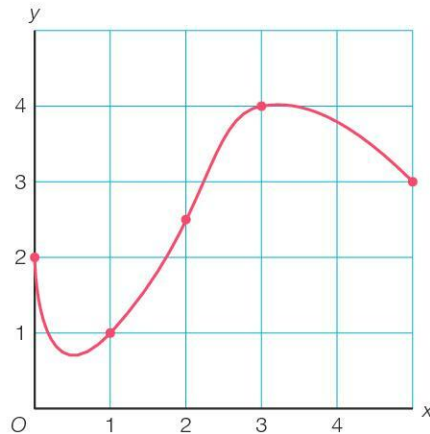
Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$, dus door $(2, 2 + 2 \cdot \frac{1}{4}) = (2, 2\frac{1}{2})$.

Op $[0, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{5}$, dus door $(5, 2 + 5 \cdot \frac{1}{5}) = (5, 3)$.

Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$, dus door $(1, 3 - 4 \cdot \frac{1}{2}) = (1, 1)$.

Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\frac{1}{2}$, dus door $(3, 1 + 2 \cdot 1\frac{1}{2}) = (3, 4)$.

Teken door deze punten een mogelijke grafiek.



Het differentiequotiënt op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 4}{5 - 3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

- b** Dat is mogelijk, want bij $x = 4$ is elke y -coördinaat mogelijk, dus ook $y = 5\frac{1}{2}$.

En op $[1, 4]$ geeft dit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\frac{1}{2} - 1}{4 - 1} = \frac{4\frac{1}{2}}{3} = 1\frac{1}{2}$.

- 26 a** $q = 4$ geeft $K = 35$ en $q = 6$ geeft $K = 93$.

Op $[4, 6]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{93 - 35}{2} = 29$ euro per stuk.

- b** $q = 2$ geeft $K = 25$ en $q = 5$ geeft $K = 55$.

Op $[2, 5]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{55 - 25}{3} = 10$ euro per stuk.

- c** $q = 3,6$ geeft $K = 30,696$ en $q = 6,1$ geeft $K = 98,021$.

Op $[3,6; 6,1]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{98,021 - 30,696}{2,5} = 26,93$.

De gemiddelde toename van de kosten is 26,93 euro per stuk.

8.2 Hellinggrafieken

Bladzijde 23

- 27 a** 10 km in 8 minuten, dus $\frac{10}{\frac{8}{60}} = 75$ km/uur.

- b** Bij een gemiddelde snelheid van minder dan 80 km/uur kun je op één moment veel harder hebben gereden.

Bladzijde 25

- 28 a** De raaklijn gaat door de punten $(5, 70)$ en $(10, 120)$.

De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{120 - 70}{10 - 5} = 10$.

De snelheid op $t = 8$ is 10 km/uur.

- b** Teken de raaklijn in het punt met $t = 3$. Deze gaat door de punten $(0, 30)$ en $(7, 80)$.

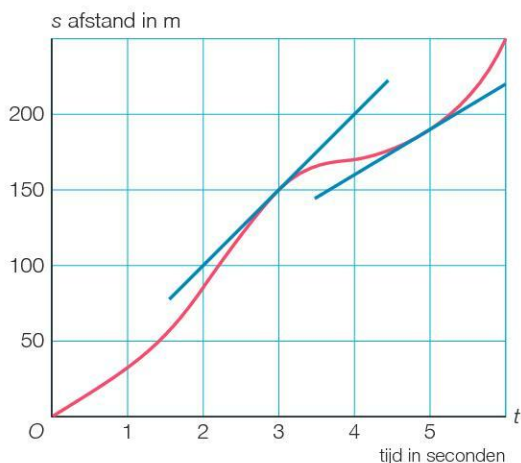
De richtingscoëfficiënt is $\frac{79 - 29}{7 - 0} \approx 7,1$. De snelheid op $t = 3$ is 7,1 km/uur.



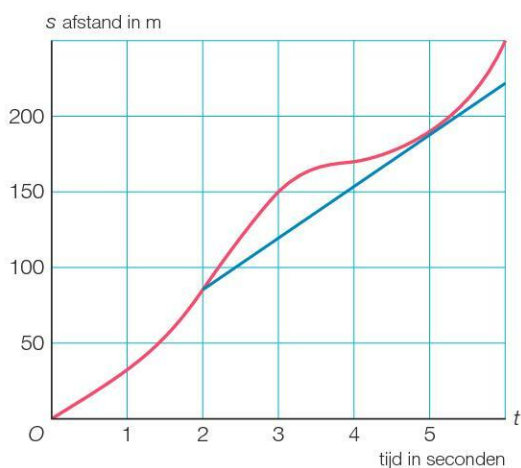
- c** Omdat de grafiek afnemend stijgend is op $[0, 4]$, neemt de snelheid af.
d De helling is het kleinst voor $t = 4$. Dus daar is de snelheid minimaal.

Bladzijde 26

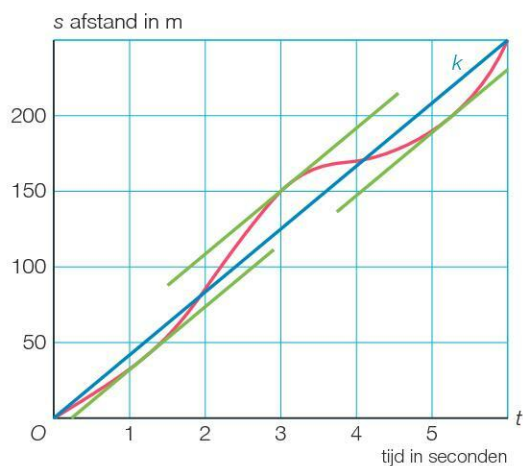
- 29 a** Teken de raaklijn in het punt $(3, 150)$. De helling van deze raaklijn is ongeveer 50. Dus de snelheid op $t = 3$ is ongeveer 50 m/s.
 Teken de raaklijn in het punt $(5, 190)$. De helling van deze raaklijn is ongeveer 30. Dus de snelheid op $t = 5$ is ongeveer 30 m/s.



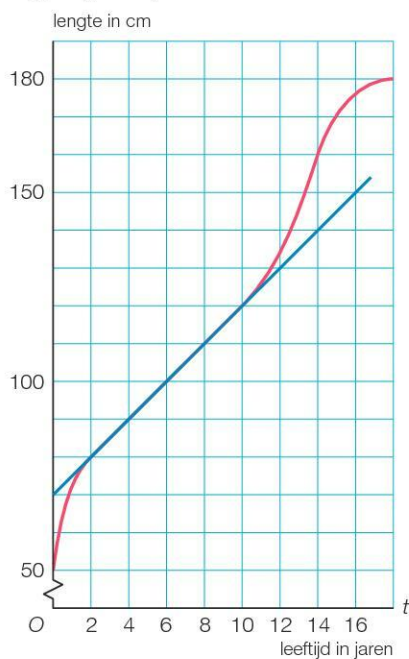
- b** De helling is het kleinst voor $t = 4$. Dus daar is de snelheid minimaal.
c De gemiddelde snelheid is minimaal als de lijn het minst steil is. Teken dus de minst steile lijn door $(2, 85)$ en een ander punt van de grafiek. Dat is de lijn door $(5, 180)$. Dus voor $t = 5$.



- d** Teken de lijn k door $(0, 0)$ en $(6, 250)$. De grafiek heeft drie raaklijnen die evenwijdig zijn met k .
Dus er zijn drie tijdstippen waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 6]$.

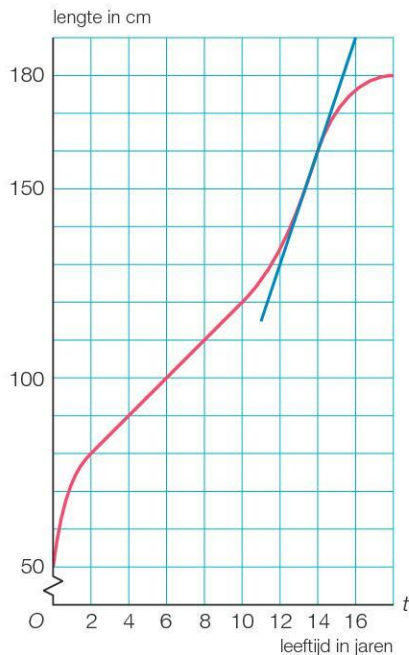


- 30 a** De raaklijn die hoort bij $t = 6$ valt op het interval $[2, 10]$ samen met de grafiek. De raaklijn gaat door de punten $(2, 80)$ en $(10, 120)$. Dus de groeisnelheid is $\frac{120 - 80}{10 - 2} = \frac{40}{8} = 5$ cm/jaar.

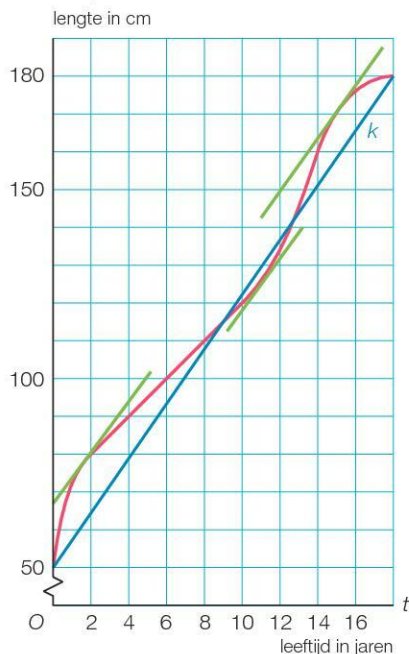


- b** De raaklijn die hoort bij $t=14$ gaat door de punten $(12, 130)$ en $(16, 190)$.

Rond haar veertiende verjaardag is Lottes groeisnelheid $\frac{190 - 130}{16 - 12} = 15$ cm/jaar.



- c** De gemiddelde groeisnelheid van 0 tot 18 jaar is $\frac{180 - 50}{18} \approx 7,2$ cm/jaar.
- d** Teken de lijn k door de punten $(0, 50)$ en $(18, 180)$. Deze lijn hoort bij de gemiddelde groeisnelheid van 0 tot 18 jaar. Verschuif deze lijn evenwijdig. Je vindt drie raaklijnen die evenwijdig met k zijn. Deze raken de grafiek bij $t \approx 1,5$, $t \approx 11$ en $t \approx 15$. Dus bij de leeftijden van 1,5, 11 en 15 jaar is de groeisnelheid van Lotte gelijk aan 7,2 cm/jaar.



31 a $x = 1,5$ geeft $y = \sqrt{6 \cdot 1,5} = \sqrt{9} = 3$ en $x = 1,51$ geeft $y = \sqrt{6 \cdot 1,51} = \sqrt{9,06}$.

Op $[1,5; 1,51]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{9,06} - 3}{0,01} \approx 1,00$.



De raaklijn gaat door de punten $(0; 1,5)$ en $(5,5; 7)$, dus $rc_k = \frac{7 - 1,5}{5,5 - 0} = 1$.

- c** Er geldt $rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ voor $x = 1,5$.

Bladzijde 27

- 32 a** Voer in $y_1 = 0,04x^2 + 0,3x + 20$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=20} = 1,9$.

De gevraagde snelheid is € 1,90 per kg.

- b** Bij een productie van 3200 kg hoort $q = 3,2$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3,2} = 0,556$.

De gevraagde snelheid is € 0,56 per kg.

- c** Bij een productie van 8160 kg hoort $q = 8,16$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=8,16} = 0,9528$.

De gevraagde snelheid is € 0,95 per kg.

Bladzijde 28

- 33 a** Voer in $y_1 = \frac{2000}{1 + 12 \cdot 0,95^x}$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=10} \approx 11,0$.

De gevraagde snelheid is 11 vissen per week.

- b** De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=33} \approx 22,0$.

Op $t = 33$ is de snelheid 22 vissen per week.

Dus Arjen heeft gelijk.

- c** De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=100} \approx 6,35$.

Dus de snelheid op $t = 100$ is kleiner dan de snelheid op $t = 33$ en daarom heeft Tess niet gelijk.

- 34 a** Bij 1 mei om 17:30 uur hoort $t = 5,5$.

Voer in $y_1 = 37 + \frac{45x}{x^2 + 70}$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5,5} \approx 0,18$.

De gevraagde snelheid is 0,18 °C per uur.

- b** Bij 2 mei om 08:00 uur hoort $t = 20$.
 De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=20} \approx -0,07$.
 De gevraagde snelheid is $0,07^\circ\text{C}$ per uur.
- c** De optie maximum geeft $x = 8,36\dots$ en $y \approx 39,7$.
 De maximale temperatuur is ongeveer $39,7^\circ\text{C}$.
 Bij $t = 8,36\dots$ hoort het tijdstip 1 mei om 20:22 uur.
 Dus de griep is op zijn hoogtepunt op 1 mei om 20:22 uur.
- d** Voer in $y_2 = 39$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 3,73$ en $x \approx 18,77$.
 $18,77 - 3,73 = 15,04$
 Dus de lichaamstemperatuur is iets meer dan 15 uur boven 39°C .

- 35 a** De snelheid waarmee het aantal personen toeneemt dat zich op een zaterdag in het warenhuis bevindt om 13:00 uur is 24 personen per uur.
- b** *
- c** toe af

Bladzijde 29

- 36 a** Op 1 juli 2020 was de snelheid waarmee het aantal werknemers afnam 2,4 per jaar.
- b** Bij 1 juli 2015 hoort $t = 5,5$.
 Voer in $y_1 = \frac{1000x - 10x^2}{x + 1}$.
 De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5} \approx 13,9 > 0$, dus op 1 juli 2015 nam het aantal werknemers toe.
- c** Bij 1 januari 2015 hoort $t = 5$ en bij 1 januari 2016 hoort $t = 6$.
 $t = 5$ geeft $N \approx 792$ en $t = 6$ geeft $N \approx 806$.
 De toename is $806 - 792 = 14$.
- d** De optie maximum geeft $x = 9,04\dots$ en $y = 819,00\dots$
 Het maximale aantal werknemers is 819.
 Dat was in het jaar 2019.

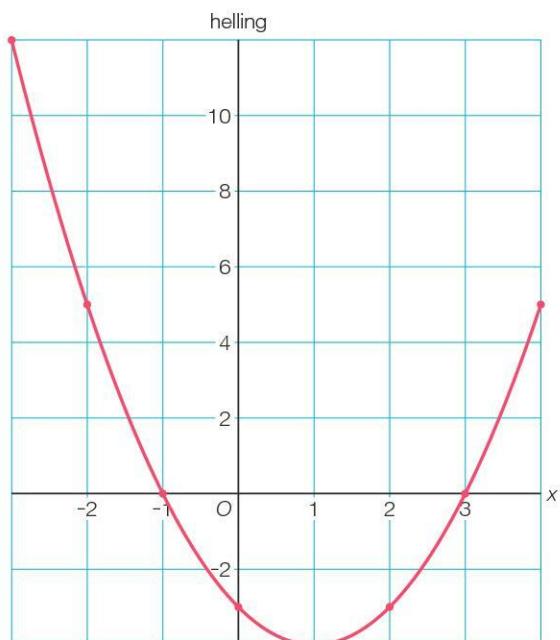
Bladzijde 30

- 37 a** Voer in $y_1 = -0,2x^3 + 4,5x^2 + 80x + 500$.
 Bij 1 januari 2005 hoort $t = 10$.
 $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=10} = 110 > 0$, dus op 1 januari 2005 nam het aantal rendieren toe.
- b** Bij 1 juli 2020 hoort $t = 25,5$.
 $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=25,5} = -80,65 < 0$, dus op 1 juli 2020 nam N af: het aantal rendieren was over het hoogtepunt heen.
- c** Bij 1 oktober 2023 hoort $t = 28\frac{9}{12} = 28,75$.
 De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=28,75} = -157,1875$.
 De snelheid waarmee het aantal rendieren afneemt is 157 rendieren per jaar.
- d** De snelheid is gelijk aan 0 in de top van de grafiek.
 De optie maximum geeft $x = 21,26\dots$ en $y = 2312,89\dots$
 Dus de snelheid is gelijk aan 0 voor $t = 21,3$.

- 38 a** positief negatief
- b** In de toppen is de helling nul.
- c** Voer in $y_1 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
helling	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

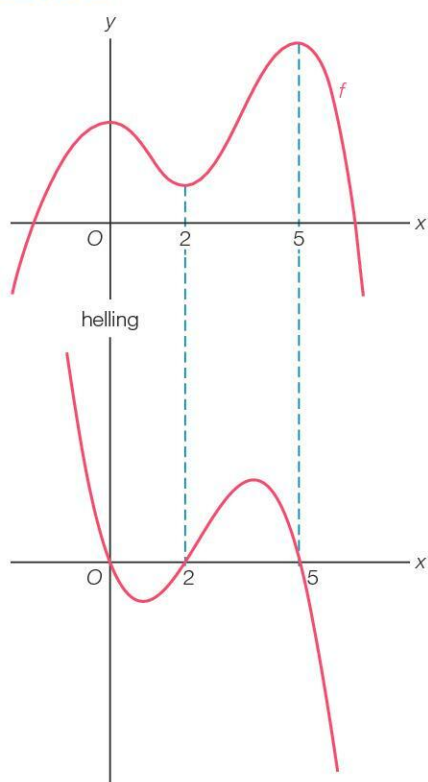
d



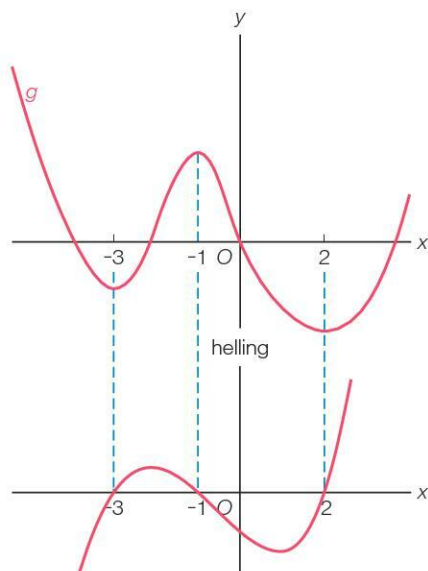
Bladzijde 32

39

a



b



Bladzijde 33

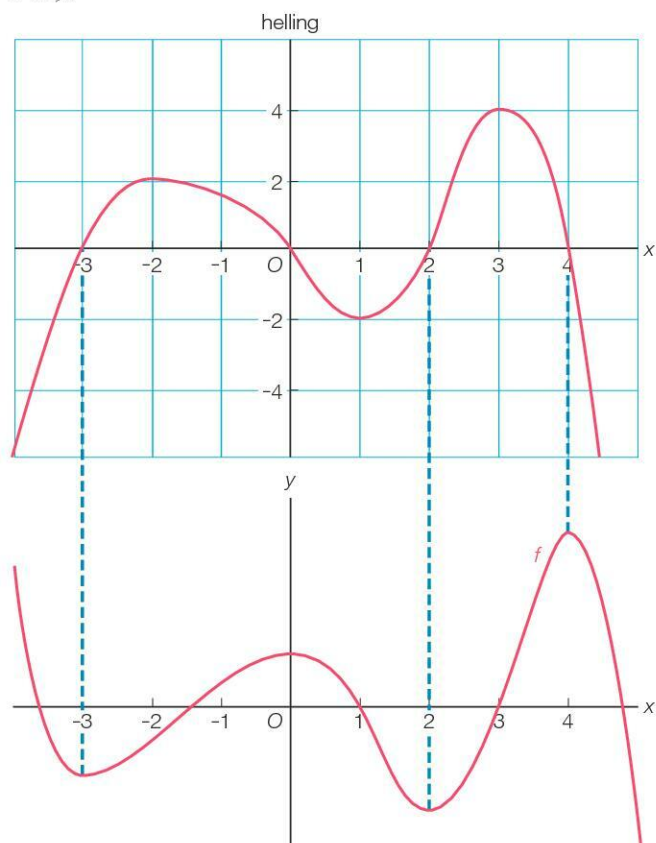
40

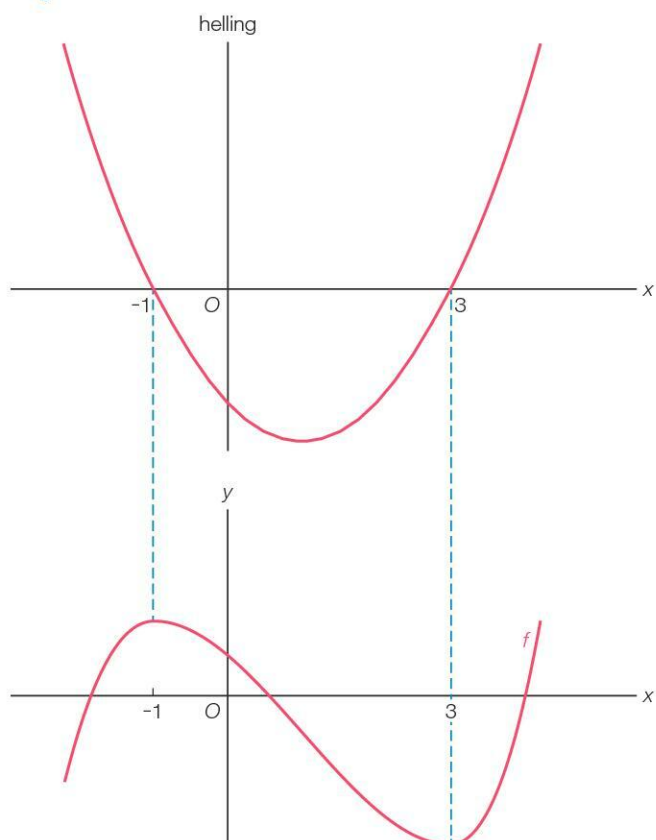
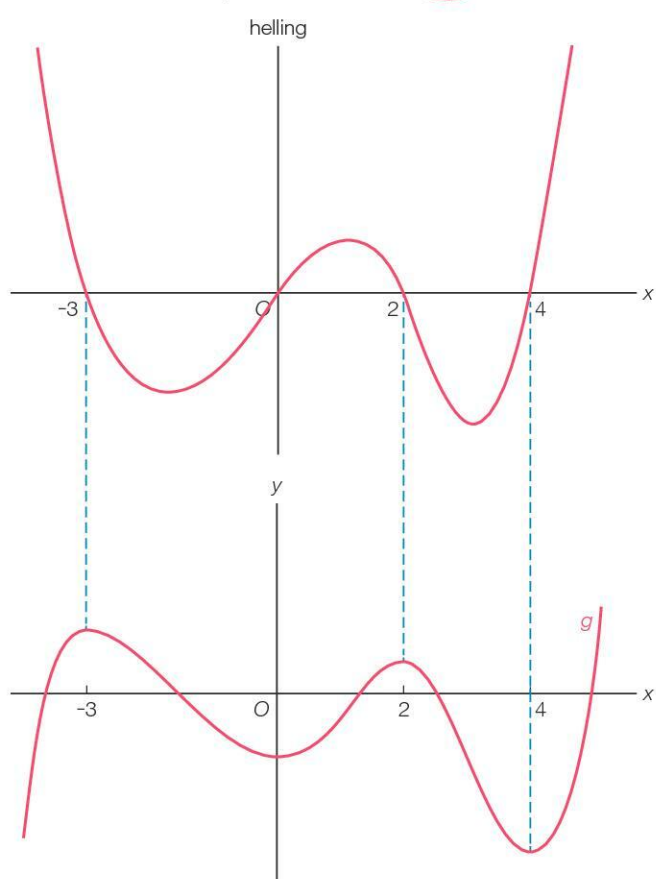
- Bij f hoort hellinggrafiek B.
- Bij g hoort hellinggrafiek D.
- Bij h hoort hellinggrafiek A.
- Bij k hoort hellinggrafiek C.

41

- a** De grafiek van f is dalend op $\langle \leftarrow, -3 \rangle$ omdat de helling van de grafiek op $\langle \leftarrow, -3 \rangle$ kleiner is dan 0.
- b** De grafiek van f heeft een top bij $x = -3$ omdat de hellinggrafiek daar de x -as snijdt. Dat is een laagste punt.
- c** De grafiek van f is stijgend op $\langle -3, 0 \rangle$.
- d** De grafiek van f heeft een hoogste punt bij $x = 0$. De grafiek gaat bij $x = 0$ over van stijgend (hellinggrafiek ligt boven de x -as) naar dalend (hellinggrafiek ligt onder de x -as).

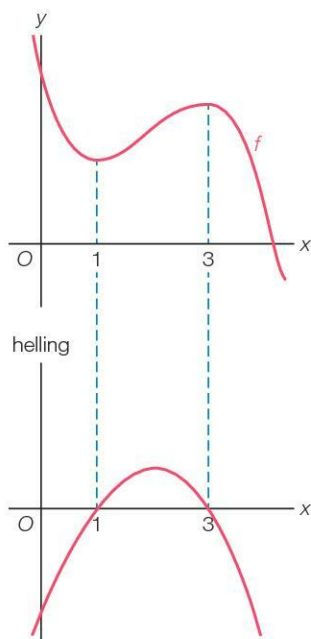
e



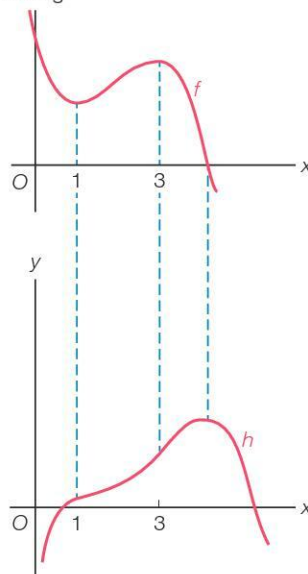


43

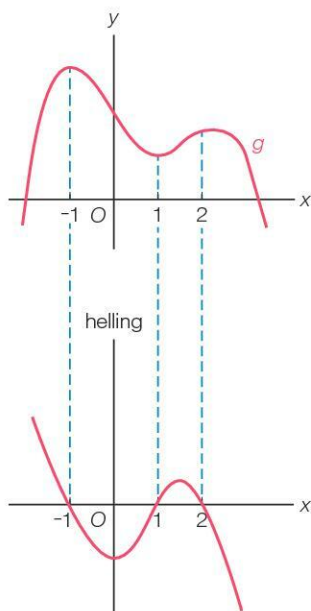
a



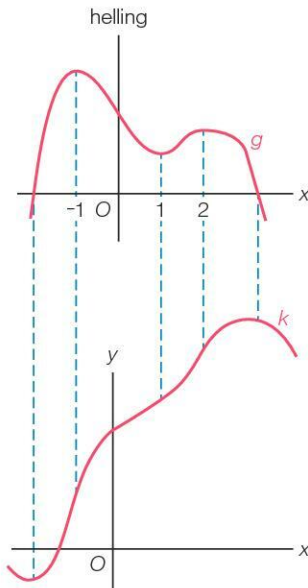
c helling



b



d



8.3 Differentiëren

Bladzijde 36

44

- a Door de oorsprong, dus stel $y = ax$.
Door $(2, 3)$, dus $a \cdot 2 = 3$ en dit geeft $a = 1,5$.
De formule is $y = 1,5x$.
- b De grafiek van g is een rechte lijn, dus voor elke x is de helling gelijk.
- c De formule is $y = 3$, want de helling is 3.
- d De formule is $y = 0$, want de helling van de lijn $y = -4$ is 0.

Bladzijde 37

45

- a $f(x) = 5x^2 - 7x + 5$ geeft $f'(x) = 10x - 7$
- b $g(x) = -2\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$ geeft $g'(x) = -5x + 4$
- c $h(x) = 0,02x^2 + 1,7x$ geeft $h'(x) = 0,04x + 1,7$
- d $k(x) = 7x + 10$ geeft $k'(x) = 7$

- 46** a $f(x) = (2x - 7)(8 + x) = 16x + 2x^2 - 56 - 7x = 2x^2 + 9x - 56$ geeft $f'(x) = 4x + 9$
 b $g(p) = -12p^2 + 30p$ geeft $g'(p) = -24p + 30$
 c $V(t) = 100 - (t^2 - 6t) = 100 - t^2 + 6t$ geeft $V'(t) = -2t + 6$
 d $K(q) = -0,01q^2 + 20q$ geeft $K'(q) = -0,02q + 20$
- 47** a $f(x) = 3x - 2(x^2 + 1) = 3x - 2x^2 - 2$ geeft $f'(x) = 3 - 4x$
 b $P(q) = 0,05q^2 - 200q$ geeft $P'(q) = 0,1q - 200$
 c $g(x) = 3(2x - 3)^2 = 3(4x^2 - 12x + 9) = 12x^2 - 36x + 27$ geeft $g'(x) = 24x - 36$
 d $h(a) = 50 - (\frac{1}{2}a - 4)^2 = 50 - (\frac{1}{4}a^2 - 4a + 16) = -\frac{1}{4}a^2 + 4a + 34$ geeft $h'(a) = -\frac{1}{2}a + 4$
- 48** a $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x) = 20x - 15x^2 + 28 - 21x = -15x^2 - x + 28$ geeft $f'(x) = -30x - 1$
 b $g(x) = (3x + 6)^2 = 9x^2 + 36x + 36$ geeft $g'(x) = 18x + 36$
 c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(x - 1) + 8 = 5(x^2 - 6x + 9) + 5x - 5 + 8 = 5x^2 - 30x + 45 + 5x - 5 + 8 = 5x^2 - 25x + 48$ geeft $h'(x) = 10x - 25$
 d $k(x) = -3(x - 1)(5 - 2x) - 8(x - 7) = -3(5x - 2x^2 - 5 + 2x) - 8x + 56 = -15x + 6x^2 + 15 - 6x - 8x + 56 = 6x^2 - 29x + 71$ geeft $k'(x) = 12x - 29$

Bladzijde 38

- 49** a $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x - 2$
 Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = \frac{1}{2}x - 2$.
 b $x = 6$ geeft helling $= \frac{1}{2} \cdot 6 - 2 = 1$
 c helling $= -1$ geeft $\frac{1}{2}x - 2 = -1$
 $\frac{1}{2}x = 1$
 $x = 2$
- 50** $y = ax^2$ door $(2, 2)$ geeft $a \cdot 2^2 = 2$, dus $4a = 2$ en dit geeft $a = \frac{1}{2}$.

Bladzijde 39

- 51** a $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$ geeft $f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2$
 b $g(x) = -2x^7 - 3x^5 + 3,4$ geeft $g'(x) = -14x^6 - 15x^4$
 c $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$ geeft $h'(t) = -t^2 + 13t$
 d $k(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3$ geeft $k'(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2$
- 52** a $f(x) = 3(2x + 1)^2 = 3(4x^2 + 4x + 1) = 12x^2 + 12x + 3$ geeft $f'(x) = 24x + 12$
 b $g(x) = 7(3x - 2)(x^2 + 2x) = 7(3x^3 + 6x^2 - 2x^2 - 4x) = 7(3x^3 + 4x^2 - 4x) = 21x^3 + 28x^2 - 28x$ geeft $g'(x) = 63x^2 + 56x - 28$
 c $h(x) = 3px^8 - px^4$ geeft $h'(x) = 24px^7 - 4px^3$
 d $k(x) = x^3 + a$ geeft $k'(x) = 3x^2$
- 53** a $W(q) = -0,02q^2 + 8q - 5$ geeft $W'(q) = -0,04q + 8$
 b $N(t) = 5t^3 + 8t^2 - t$ geeft $N'(t) = 15t^2 + 16t - 1$
 c $R(q) = 5q(q - 70)^2 = 5q(q^2 - 140q + 4900) = 5q^3 - 700q^2 + 24\,500q$ geeft $R'(q) = 15q^2 - 1400q + 24\,500$
 d $L(a) = -0,006a^4 + 0,2a^3(a - 5) - 8 = -0,006a^4 + 0,2a^4 - a^3 - 8 = 0,194a^4 - a^3 - 8$ geeft $L'(a) = 0,776a^3 - 3a^2$
- 54** a $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x) = 3x^3 + 15x^2 - x^2 - 5x = 3x^3 + 14x^2 - 5x$ geeft $f'(x) = 9x^2 + 28x - 5$
 b $g(x) = x^5(x^3 - 4x) - 2x = x^8 - 4x^6 - 2x$ geeft $g'(x) = 8x^7 - 24x^5 - 2$
 c $N(t) = (3t^3 - 1)^2 = 9t^6 - 6t^3 + 1$ geeft $N'(t) = 54t^5 - 18t^2$
 d $F(a) = 0,16a^2(Q - 3a) = 0,16Qa^2 - 0,48a^3$ geeft $F'(a) = 0,32Qa - 1,44a^2$

55 a $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 5$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$
 Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

b $x = 4$ geeft helling $= -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = -24 + 8 + 1 = -15$

c helling $= -1$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -1$

Voer in $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ en $y_2 = -1$.

De optie snijpunt geeft $x = -\frac{2}{3}$ en $x = 2$, dus voor $x = -\frac{2}{3}$ en $x = 2$ is de helling gelijk aan -1 .

Bladzijde 40

56 $k(x) = \frac{4x-2}{3x+3} = \frac{2(2x-1)}{3(x+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2}{3} \left(\frac{2x-1}{x+1} \right) = \frac{2}{3} \cdot h(x)$ geeft
 $k'(x) = \frac{2}{3} \cdot h'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

8.4 Notaties en regels voor de afgeleide

Bladzijde 42

57 a $f(x) = 5x^2 + 3a^4$ geeft $f'(x) = 10x + 0 = 10x$
b $f(a) = 5x^2 + 3a^4$ geeft $f'(a) = 0 + 12a^3 = 12a^3$
c Het is niet duidelijk wat de variabele is.

58 a $y = 7x^4 - a^3$ geeft $\frac{dy}{dx} = 28x^3$
b $y = 7x^4 - a^3$ geeft $\frac{dy}{da} = -3a^2$
c $R = q^3 - 5pq$ geeft $\frac{dR}{dq} = 3q^2 - 5p$
d $R = q^3 - 5pq$ geeft $\frac{dR}{dp} = -5q$
e $B = a^3 - 3t^2$ geeft $\frac{dB}{dt} = -6t$
f $B = a^3 - 3t^2$ geeft $\frac{dB}{da} = 3a^2$

Bladzijde 43

59 $R = 5a^2 - 3ab^3 - 5abc + 5a - 3$ geeft
 $\frac{dR}{da} = 10a - 3b^3 - 5bc + 5$
 $\frac{dR}{db} = 0 - 9ab^2 - 5ac + 0 = -9ab^2 - 5ac$
 $\frac{dR}{dc} = 0 - 0 - 5ab + 0 = -5ab$

60 a $y = \frac{10}{x^3} = 10x^{-3}$ **d** $y = \frac{7}{\sqrt{x}} = \frac{7}{x^{\frac{1}{2}}} = 7x^{-\frac{1}{2}}$
b $y = 8 \cdot \sqrt[3]{x} = 8x^{\frac{1}{3}}$ **e** $y = 4x\sqrt{x} = 4x^{\frac{3}{2}}$
c $y = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$ **f** $y = \frac{3}{4x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$

Bladzijde 44

- 61 a** $f(x) = \frac{6}{x^3} + 6x^3 = 6x^{-3} + 6x^3$ geeft $f'(x) = -18x^{-4} + 18x^2 = -\frac{18}{x^4} + 18x^2$
- b** $g(x) = 3x^6 - \frac{4}{x} = 3x^6 - 4x^{-1}$ geeft $g'(x) = 18x^5 + 4x^{-2} = 18x^5 + \frac{4}{x^2}$
- c** $m(t) = 12t \cdot \sqrt[4]{t} = 12t^{1\frac{1}{4}}$ geeft $m'(t) = 15t^{\frac{1}{4}} = 15 \cdot \sqrt[4]{t}$
- d** $l(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2p^2} = 2p^{-1} + \frac{1}{2}p^{-2}$ geeft $l'(p) = -2p^{-2} - p^{-3} = -\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p^3}$
- e** $h(x) = 3x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 3x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = 4\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$
- f** $k(q) = \frac{1}{q} = q^{-1}$ geeft $k'(q) = -q^{-2} = -\frac{1}{q^2}$

- 62 a** $y = x + \frac{4}{\sqrt{x}} = x + 4x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 1 - 2x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{x\sqrt{x}}$
- b** $y = 3x^2 \cdot \sqrt{x} = 3x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 7\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 7\frac{1}{2}x\sqrt{x}$
- c** $y = 3x - x^{-1,65}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3 + 1,65x^{-2,65}$
- d** $y = 10x^{1,72} + \frac{6}{x^{1,35}} = 10x^{1,72} + 6x^{-1,35}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 17,2x^{0,72} - 8,1x^{-2,35} = 17,2x^{0,72} - \frac{8,1}{x^{2,35}}$
- e** $y = \frac{2}{5x} + \frac{5x}{2} = \frac{2}{5}x^{-1} + 2\frac{1}{2}x$ geeft $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{5}x^{-2} + 2\frac{1}{2} = -\frac{2}{5x^2} + 2\frac{1}{2}$
- f** $y = (1+x)\sqrt{x} = \sqrt{x} + x\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$

- 63 a** $y_A = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 $y = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$
 helling $= -\frac{2}{4^2} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$
- b** helling $= -\frac{2}{1^2} = -2$
- c** snelheid $= -\frac{2}{5^2} = -\frac{2}{25}$
- d** Voor elke $x > 0$ is $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2}$ kleiner dan nul, dus de grafiek van y is dalend.

Bladzijde 45

- 64 a** $y = \frac{2}{x} + 2x = 2x^{-1} + 2x$ geeft $\frac{dy}{dx} = -2x^{-2} + 2 = -\frac{2}{x^2} + 2$
 snelheid $= -\frac{2}{4^2} + 2 = -\frac{2}{16} + 2 = -\frac{1}{8} + 2 = 1\frac{7}{8}$
- b** helling $= -\frac{2}{(\frac{1}{2})^2} + 2 = -\frac{2}{(\frac{1}{4})} + 2 = -8 + 2 = -6 < 0$
- c** helling $= -\frac{2}{1^2} + 2 = -\frac{2}{1} + 2 = -2 + 2 = 0$, dus de raaklijn is horizontaal.
- 65 a** $x = 4$ geeft $y = 10\sqrt{4} - 5 \cdot 4 = 10 \cdot 2 - 20 = 20 - 20 = 0$
 Dus $x_A = 4$.
 $y = 10\sqrt{x} - 5x = 10x^{\frac{1}{2}} - 5x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 5x^{-\frac{1}{2}} - 5 = \frac{5}{\sqrt{x}} - 5$
 helling $= \frac{5}{\sqrt{4}} - 5 = \frac{5}{2} - 5 = -2\frac{1}{2}$

b snelheid $= \frac{5}{\sqrt{\frac{1}{4}}} - 5 = \frac{5}{(\frac{1}{2})} - 5 = 10 - 5 = 5$

c helling $= \frac{5}{\sqrt{1}} - 5 = 5 - 5 = 0$, dus de raaklijn is horizontaal.

66 a $y = x^2 + \frac{16}{x} - 9 = x^2 + 16x^{-1} - 9$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2x - 16x^{-2} = 2x - \frac{16}{x^2}$

$x = 1,5$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 1,5 - \frac{16}{1,5^2} = -4\frac{1}{9} < 0$

Voor $x = 1,5$ neemt y dus af.

b helling $= 7$ geeft $2x - \frac{16}{x^2} = 7$

Voer in $y_1 = 2x - \frac{16}{x^2}$ en $y_2 = 7$.

De optie snijpunt geeft $x = 4$.

Voor $x = 4$ is de helling van de grafiek gelijk aan 7.

c $x = 5$ geeft helling $= 2 \cdot 5 - \frac{16}{5^2} = 9\frac{9}{25}$ en $x = 6$ geeft helling $= 2 \cdot 6 - \frac{16}{6^2} = 11\frac{5}{9}$.

De toename is $\frac{11\frac{5}{9} - 9\frac{9}{25}}{9\frac{9}{25}} \times 100\% \approx 23,5\%$.

67 a $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = g^6$ en $g(x) = 3 - x^5$

b $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = \sqrt{g}$ en $g(x) = x^2 + 1$

c $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = \frac{2}{g^3}$ en $g(x) = x + 8$

Bladzijde 46

68 a $y = -3(2x - 5)^6$ geeft $\frac{dy}{dx} = -18(2x - 5)^5 \cdot 2 = -36(2x - 5)^5$

b $y = (4x^2 - x)^{1,4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 1,4(4x^2 - x)^{0,4} \cdot (8x - 1)$

c $y = 2\sqrt{3 - 7x} = 2(3 - 7x)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = (3 - 7x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -7 = \frac{-7}{\sqrt{3 - 7x}}$

d $y = \frac{8}{\sqrt{3x + 2}} = 8(3x + 2)^{-\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -4(3x + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{-12}{(3x + 2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-12}{(3x + 2)\sqrt{3x + 2}}$

e $y = \frac{4}{(2 - x^2)^3} = 4(2 - x^2)^{-3}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -12(2 - x^2)^{-4} \cdot -2x = \frac{24x}{(2 - x^2)^4}$

f $y = x^2 + \sqrt{x^2 + x} = x^2 + (x^2 + x)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = 2x + \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

Bladzijde 47

69 a $S = \frac{2}{(3 - a^2)^5} = 2(3 - a^2)^{-5}$ geeft $\frac{dS}{da} = -10(3 - a^2)^{-6} \cdot -2a = \frac{20a}{(3 - a^2)^6}$

b $K = \sqrt{2q + 1} = (2q + 1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dK}{dq} = \frac{1}{2}(2q + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2q + 1}}$

c $W = 6(p^2 - 2p + 5)^{0,7}$ geeft $\frac{dW}{dp} = 4,2(p^2 - 2p + 5)^{-0,3} \cdot (2p - 2)$

70 a $K = (5q + 2)^4 - 3q$ geeft $\frac{dK}{dq} = 4(5q + 2)^3 \cdot 5 - 3 = 20(5q + 2)^3 - 3$

b $y = \frac{5}{(2x + 1)^8} + 4x^2 = 5(2x + 1)^{-8} + 4x^2$ geeft $\frac{dy}{dx} = -40(2x + 1)^{-9} \cdot 2 + 8x = \frac{-80}{(2x + 1)^9} + 8x$

c $B = \frac{8}{a^3} + 6\sqrt{a^3 + 2} = 8a^{-3} + 6(a^3 + 2)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dB}{da} = -24a^{-4} + 3(a^3 + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3a^2 = -\frac{24}{a^4} + \frac{9a^2}{\sqrt{a^3 + 2}}$

d $P = \sqrt[3]{3q - 5} = (3q - 5)^{\frac{1}{3}}$ geeft $\frac{dP}{dq} = \frac{1}{3}(3q - 5)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 = \frac{1}{(3q - 5)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3q - 5)^2}}$

71 a $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b $y = 2\sqrt{3 - 7x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3 - 7x}} \cdot -7 = \frac{-7}{\sqrt{3 - 7x}}$

$K = \sqrt{2q + 1}$ geeft $\frac{dK}{dq} = \frac{1}{2\sqrt{2q + 1}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2q + 1}}$

$B = \frac{8}{a^3} + 6\sqrt{a^3 + 2} = 8a^{-3} + 6\sqrt{a^3 + 2}$ geeft $\frac{dB}{da} = -24a^{-4} + 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^3 + 2}} \cdot 3a^2 = -\frac{24}{a^4} + \frac{9a^2}{\sqrt{a^3 + 2}}$

8.5 Extreme waarden en de afgeleide

Bladzijde 49

72 a $W = -0,1q^3 + 12q^2 - 210q + 500$ geeft $\frac{dW}{dq} = -0,3q^2 + 24q - 210$

b $\left[\frac{dW}{dq}\right]_{q=70} = -0,3 \cdot 70^2 + 24 \cdot 70 - 210 = -1470 + 1680 - 210 = 0$

Het punt op de grafiek dat bij $q = 70$ hoort is een top van de grafiek.

Bladzijde 51

73 a De snelheid is $\left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=50} = -0,54 \cdot 50^{0,8} + 22,5 \cdot 50^{-0,1} = 2,868... \approx 2,87$ euro per stuk.

b $W(16) = 4 \cdot 16^2 - \frac{1}{6} \cdot 16^3 = 341,333... \text{ euro}$
Dus de maximale winst is 34 133 euro per maand.

c Bij een productie van 2000 stuks per maand hoort $q = 20$.
 $W'(20) = 8 \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 20^2 = -40$
De winst neemt af met 40 euro per maand.

74 a $R = 4q^{0,41} - q^{0,83}$ geeft $\frac{dR}{dq} = 1,64q^{-0,59} - 0,83q^{-0,17}$

De snelheid is $\left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=0,5} = 1,64 \cdot 0,5^{-0,59} - 0,83 \cdot 0,5^{-0,17} \approx 1,53$ euro per stuk.

b Bij een productie van 8500 stuks hoort $q = 8,5$.
De snelheid is $\left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=8,5} = 1,64 \cdot 8,5^{-0,59} - 0,83 \cdot 8,5^{-0,17} \approx -0,11$.
De opbrengst neemt af met 0,11 euro per stuk.

c $\frac{dR}{dq} = 0$ geeft $1,64q^{-0,59} - 0,83q^{-0,17} = 0$
Voer in $y_1 = 1,64x^{-0,59} - 0,83x^{-0,17}$.
De optie nulpunt geeft $x = 5,060...$
 $q = 5,060...$ geeft $R = 3,9350...$
De maximale opbrengst is 3935 euro.

Bladzijde 52

- 75 a** $a = 0$ geeft $H = 150$ en $a = 12$ geeft $H = 150$.
De wandeling eindigt op dezelfde hoogte als hij begint, dus het zou een rondwandeling kunnen zijn.

b $H = -0,4a^3 + 4,8a^2 + 150$ geeft $\frac{dH}{da} = -1,2a^2 + 9,6a$

$$\begin{aligned}\frac{dH}{da} = 0 & \text{ geeft } -1,2a^2 + 9,6a = 0 \\ -1,2a(a - 8) & = 0 \\ a = 0 & \text{ of } a = 8\end{aligned}$$

Uit de schets volgt dat H maximaal is voor $a = 8$.

De maximale hoogte is $-0,4 \cdot 8^3 + 4,8 \cdot 8^2 + 150 = 252,4$ meter.

- 76 a** $W(q) = -0,01q^3 + 1,5q^2 - 48q - 200$ geeft $W'(q) = -0,03q^2 + 3q - 48$
 $W'(80) = -0,03 \cdot 80^2 + 3 \cdot 80 - 48 = -192 + 240 - 48 = 0$

Uit de schets volgt dat W maximaal is voor $q = 80$, dus de winst is maximaal bij een maandelijkse productie van 80 000 stuks.

- b** $W(80) = -0,01 \cdot 80^3 + 1,5 \cdot 80^2 - 48 \cdot 80 - 200 = 440$
De maximale winst is 440 000 euro per maand.

- 77 a** De derde week is van $t = 2$ tot $t = 3$.
 $t = 2$ geeft $N = 152$ en $t = 3$ geeft $N = 219$.
De toename is $\frac{219 - 152}{152} \times 100\% \approx 44,1\%$.

- b** $N(t) = -2t^3 + 9t^2 + 60t + 12$ geeft $N'(t) = -6t^2 + 18t + 60$
 $N'(3) = -6 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 + 60 = 60 > 0$, dus op $t = 3$ neemt het aantal bacteriën toe.

- c** $N'(7) = -6 \cdot 7^2 + 18 \cdot 7 + 60 = -108 < 0$, dus op $t = 7$ neemt het aantal bacteriën af.

- d** $N'(t) = 0$ geeft $-6t^2 + 18t + 60 = 0$
 $t^2 - 3t - 10 = 0$
 $(t + 2)(t - 5) = 0$
 $t = -2$ of $t = 5$

Uit de schets volgt dat N maximaal is voor $t = 5$.

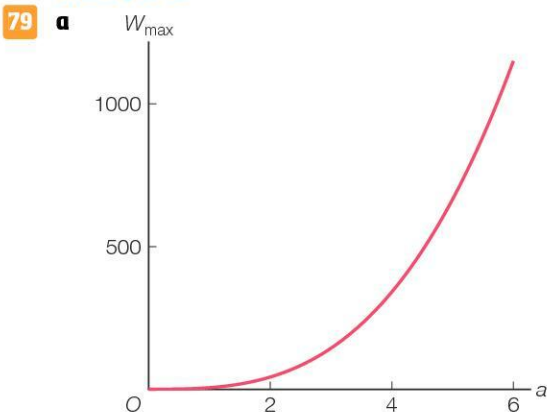
$$N(5) = -2 \cdot 5^3 + 9 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 + 12 = 287$$

Er zijn maximaal 287 miljoen bacteriën.

- 78 a** $R(q) = aq^2 + 40q$ geeft $R'(q) = 2aq + 40$
 $R'(q) = 0$ geeft $2aq + 40 = 0$
 $2aq = -40$
 $q = \frac{-40}{2a} = -\frac{20}{a}$

- b** Invullen van $a = -0,25$ in $q = -\frac{20}{a}$ geeft $q = -\frac{20}{-0,25} = 80$.

Dus de opbrengst is maximaal bij een productie van 80 stuks.

Bladzijde 53

- b** 100 000 euro, dus $W_{\max} = 1000$.
 Voer in $y_1 = 5\frac{1}{3}x^3$ en $y_2 = 1000$.
 De optie snijpunt geeft $x = 5,723\dots$
 Dus vanaf $a = 5,73$.

Bladzijde 54

80 a $t = \frac{1}{2}p$ geeft $N = 25p \cdot (\frac{1}{2}p)^2 - 50 \cdot (\frac{1}{2}p)^3 = 25p \cdot \frac{1}{4}p^2 - 50 \cdot \frac{1}{8}p^3 = 6\frac{1}{4}p^3 - 6\frac{1}{4}p^3 = 0$

Dus op $t = \frac{1}{2}p$ is $N = 0$, dat wil zeggen dat de laatste bezoekers de dierentuin op $t = \frac{1}{2}p$ verlaten.

b $p = 20$ geeft $N = 500t^2 - 50t^3$

$N = 500t^2 - 50t^3$ geeft $\frac{dN}{dt} = 1000t - 150t^2$

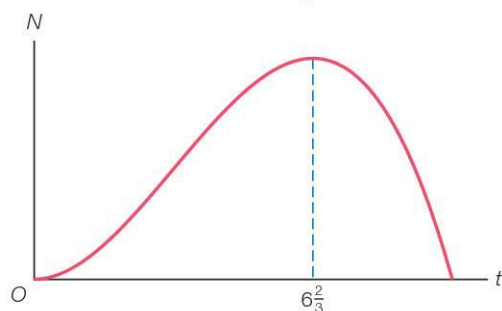
$\frac{dN}{dt} = 0$ geeft $1000t - 150t^2 = 0$

$t(1000 - 150t) = 0$

$t = 0$ of $1000 - 150t = 0$

$t = 0$ of $-150t = -1000$

$t = 0$ of $t = 6\frac{2}{3}$



N is maximaal voor $t = 6\frac{2}{3}$.

$N_{\max} = 500 \cdot (6\frac{2}{3})^2 - 50 \cdot (6\frac{2}{3})^3 \approx 7407$

Er zijn maximaal 7407 bezoekers.

c $N = 25pt^2 - 50t^3$ geeft $\frac{dN}{dt} = 50pt - 150t^2$

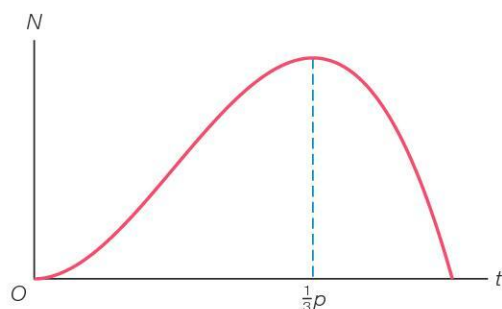
$\frac{dN}{dt} = 0$ geeft $50pt - 150t^2 = 0$

$t(50p - 150t) = 0$

$t = 0$ of $50p - 150t = 0$

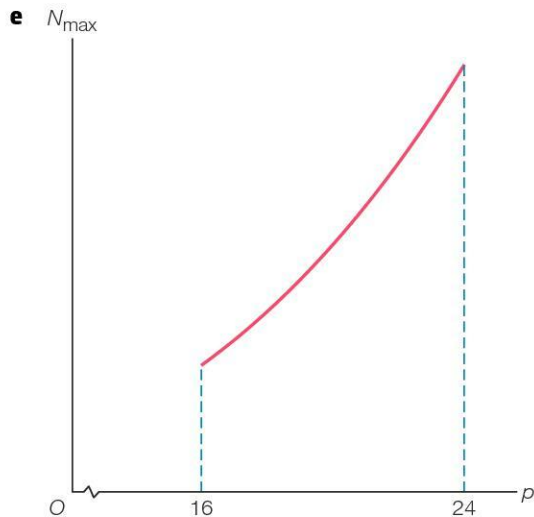
$t = 0$ of $-150t = -50p$

$t = 0$ of $t = \frac{1}{3}p$



Bij $t = \frac{1}{3}p$ heb je met een maximum te maken.

d $N_{\max} = 25p \cdot (\frac{1}{3}p)^2 - 50 \cdot (\frac{1}{3}p)^3 = 25p \cdot \frac{1}{9}p^2 - 50 \cdot \frac{1}{27}p^3 = \frac{25}{9}p^3 - \frac{50}{27}p^3 = \frac{25}{27}p^3$

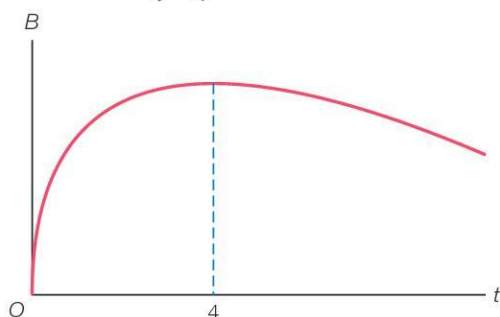


- f** Voer in $y_1 = \frac{25}{27}x^3$, $y_2 = 6000$ en $y_3 = 10000$.
 De optie snijpunt met y_1 en y_2 geeft $x = 18,64...$
 De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x = 22,10...$
 Dus voor $18,7 < p < 22,1$.

81 a $B = 4\sqrt{t} - t = 4t^{\frac{1}{2}} - t$ geeft $\frac{dB}{dt} = 2t^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{t}} - 1$

De snelheid is $\left[\frac{dB}{dt}\right]_{t=3} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \approx 0,15 \text{ dm}^2/\text{maand} = 15 \text{ cm}^2/\text{maand}$.

b $\frac{dB}{dt} = 0$ geeft $\frac{2}{\sqrt{t}} - 1 = 0$
 $\frac{2}{\sqrt{t}} = 1$
 $\sqrt{t} = 2$
 $t = 4$



Uit de schets volgt dat B maximaal is voor $t = 4$.

$$B_{\max} = 4\sqrt{4} - 4 = 4 \text{ dm}^2$$

c $B = a\sqrt{t} - t = at^{\frac{1}{2}} - t$ geeft $\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2}at^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{a}{2\sqrt{t}} - 1$

$$\frac{dB}{dt} = 0 \text{ geeft } \frac{a}{2\sqrt{t}} - 1 = 0$$

$$\frac{a}{2\sqrt{t}} = 1$$

$$2\sqrt{t} = a$$

$$\sqrt{t} = \frac{1}{2}a, \text{ dus } t = \frac{1}{4}a^2$$

De bladoppervlakte is maximaal als $t = \frac{1}{4}a^2$.

$$B_{\max} = a \cdot \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$$

82 a $M = 90$ geeft $V = 0,0015d^2(\frac{1}{3} \cdot 90 - \frac{1}{2}d) = 0,0015d^2(30 - \frac{1}{2}d) = 0,045d^2 - 0,00075d^3$
 $V = 0,045d^2 - 0,00075d^3$ geeft $\frac{dV}{dd} = 0,09d - 0,00225d^2$

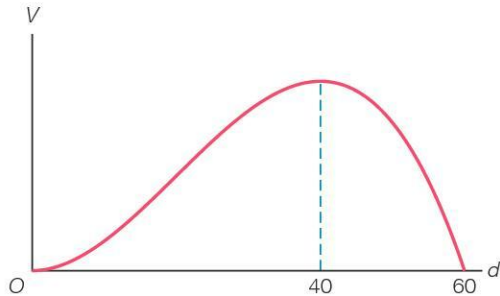
$$\frac{dV}{dd} = 0 \text{ geeft } 0,09d - 0,00225d^2 = 0$$

$$d(0,09 - 0,00225d) = 0$$

$$d = 0 \text{ of } 0,09 - 0,00225d = 0$$

$$d = 0 \text{ of } -0,00225d = -0,09$$

$$d = 0 \text{ of } d = 40$$



De verlaging V is maximaal voor $d = 40$.

De maximale verlaging is $V_{\max} = 0,045 \cdot 40^2 - 0,00075 \cdot 40^3 = 24 \text{ mmHg}$.

b $V = 0,0015d^2(\frac{1}{3}M - \frac{1}{2}d) = 0,0005Md^2 - 0,00075d^3$ geeft $\frac{dV}{dd} = 0,001Md - 0,00225d^2$

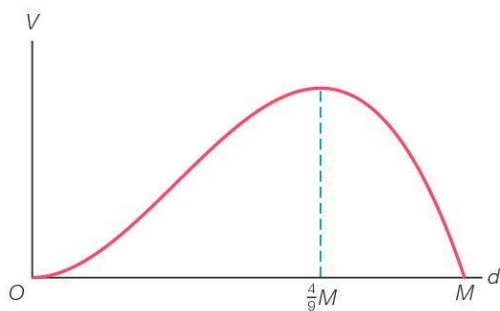
$$\frac{dV}{dd} = 0 \text{ geeft } 0,001Md - 0,00225d^2 = 0$$

$$d(0,001M - 0,00225d) = 0$$

$$d = 0 \text{ of } 0,001M - 0,00225d = 0$$

$$d = 0 \text{ of } -0,00225d = -0,001M$$

$$d = 0 \text{ of } d = \frac{4}{9}M$$



Bij $d = \frac{4}{9}M$ heb je met een maximum te maken.

c $d = \frac{4}{9}M$ geeft

$$V_{\max} = 0,0005M \cdot (\frac{4}{9}M)^2 - 0,00075 \cdot (\frac{4}{9}M)^3 = 0,0005M \cdot \frac{16}{81}M^2 - 0,00075 \cdot \frac{64}{729}M^3 \approx 0,000033M^3$$

Dus $a = 0,000033$.

83 $N = -4t^3 + at^2 - 10at + 6000$ geeft $\frac{dN}{dt} = -12t^2 + 2at - 10a$

Bij 9 uur 's avonds hoort $t = 21$.

$$t = 21 \text{ geeft } -12 \cdot 21^2 + 2a \cdot 21 - 10a = -5292 + 32a$$

Het aantal bezoekers op $t = 21$ is maximaal, dus $-5292 + 32a = 0$

$$32a = 5292$$

$$a = 165,375$$

Dus $N = -4t^3 + 165,375t^2 - 1653,75t + 6000$.

Invullen van $t = 21$ geeft $N = 7157,625$, dus het maximale aantal bezoekers is 7158.

Diagnostische toets

Bladzijde 58

1

a

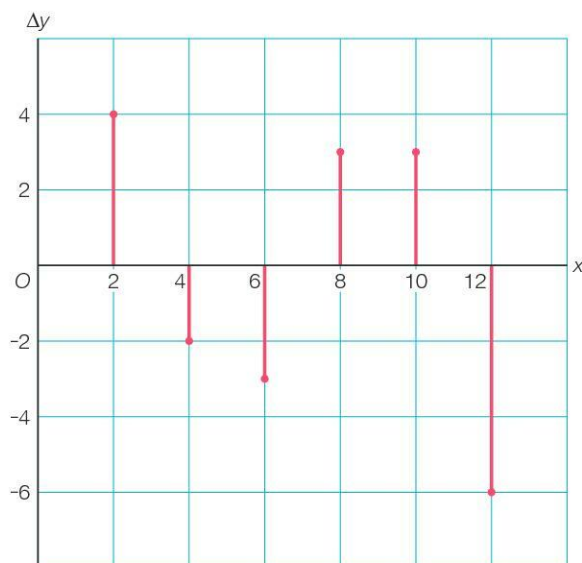
interval	Δy
$[0, 2]$	4
$[2, 4]$	-2
$[4, 6]$	-3
$[6, 8]$	3
$[8, 10]$	3
$[10, 12]$	-6

b De gemiddelde verandering op $[0, 4]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 2}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

c Het differentiequotiënt op $[2, 12]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 6}{12 - 2} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}.$$



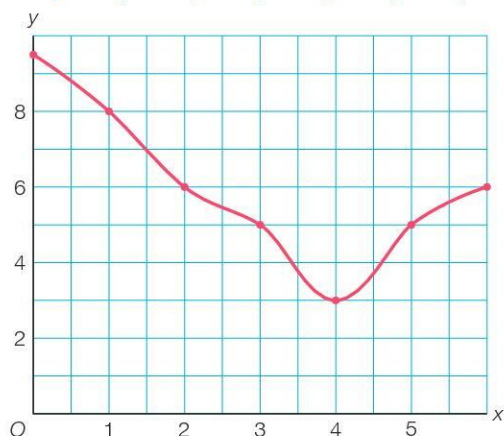
2

Door $(3, 5)$ en op $[3, 4]$ is $\Delta y = -2$, dus ook door $(4, 3)$.

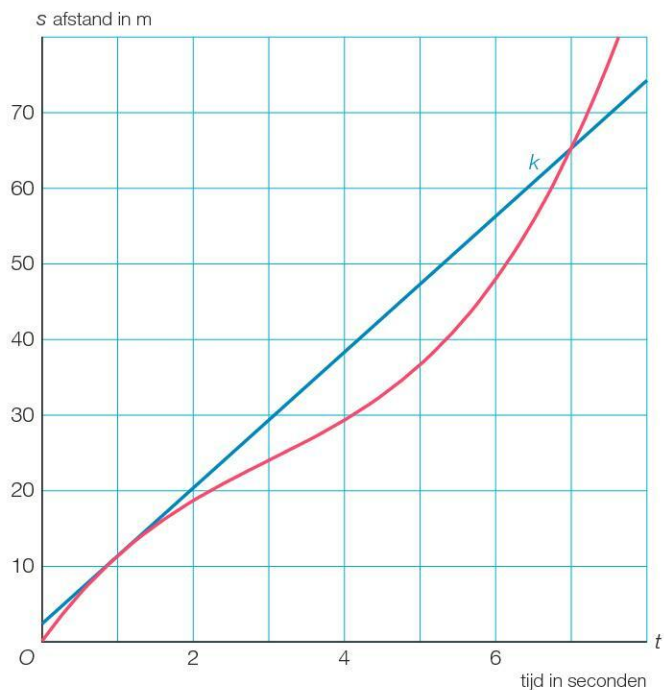
Door $(3, 5)$ en op $[2, 3]$ is $\Delta y = -1$, dus ook door $(2, 6)$.

Enzovoort, zie de tabel.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	9,5	8	6	5	3	5	6

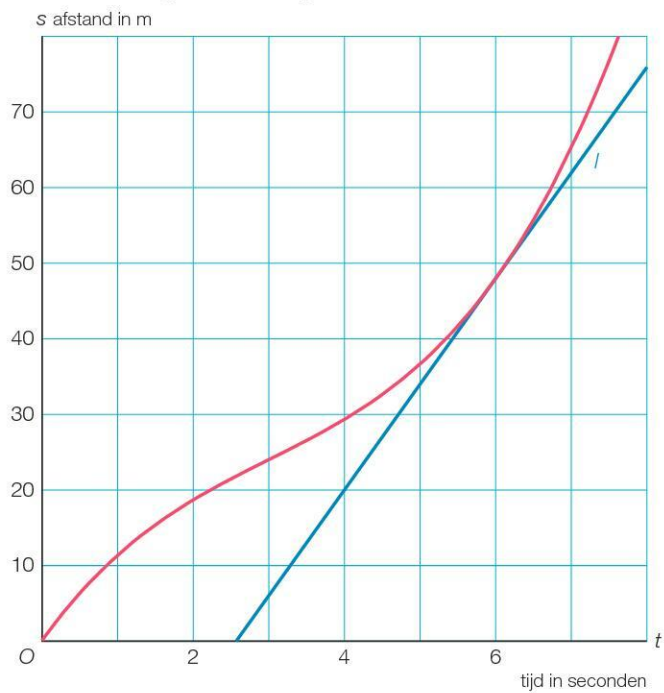


3 a



Raaklijn k door $(0, 2)$ en $(8, 74)$, dus $rc_k = \frac{74 - 2}{8 - 0} = 9$.

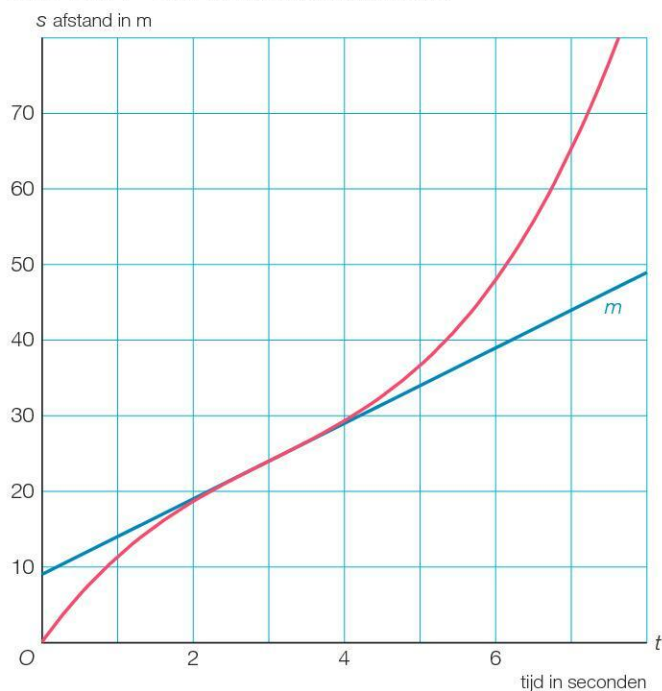
De snelheid op $t = 1$ is ongeveer 9 m/s.



Raaklijn l door $(4, 20)$ en $(8, 76)$, dus $rc_l = \frac{76 - 20}{8 - 4} = 14$.

De snelheid op $t = 6$ is ongeveer 14 m/s.

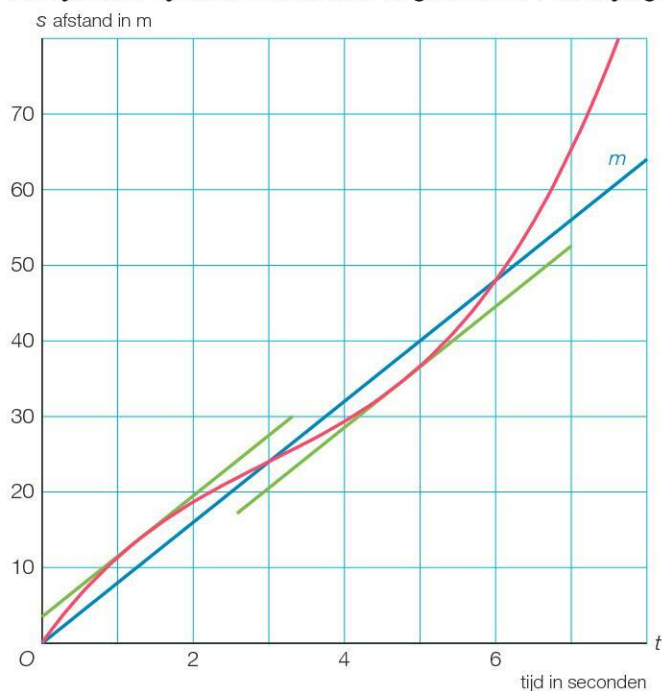
- b** Voor $t = 3$ krijg je de raaklijn met de kleinste richtingscoëfficiënt.
Dus voor $t = 3$ is de snelheid minimaal.



Raaklijn m door $(0, 9)$ en $(8, 49)$, dus $rc_m = \frac{49 - 9}{8 - 0} = 5$.

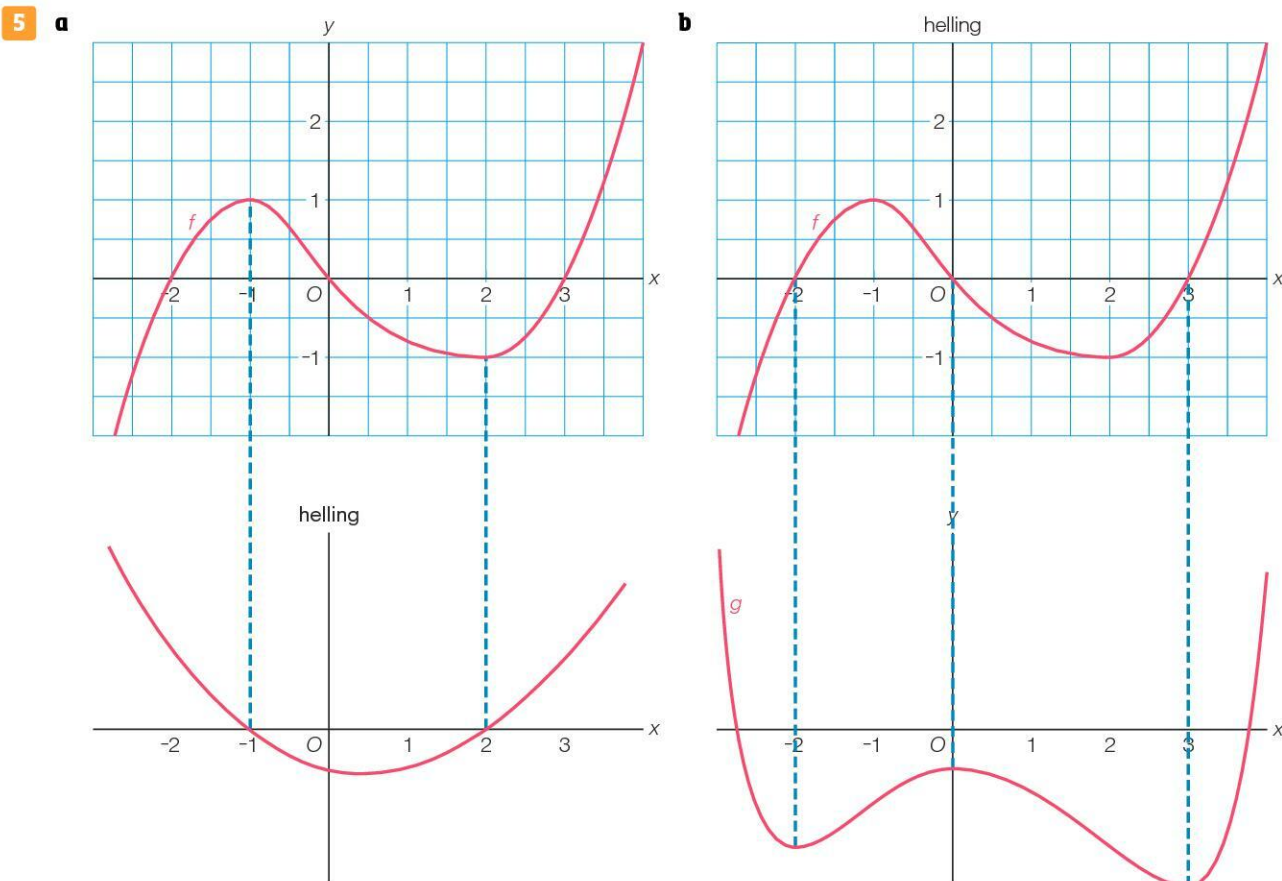
Dus de minimale snelheid is ongeveer 5 m/s.

- c** Teken de lijn m door $(0, 0)$ en $(6, 48)$.
Er zijn twee lijnen die raken aan de grafiek en evenwijdig zijn met m . Zie de figuur.



Er zijn dus twee tijdstippen tussen $t = 0$ en $t = 6$ waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 6]$.

- 4 a** Bij 9:30 uur hoort $t = 9,5$.
 Voer in $y_1 = -0,014x^3 + 0,44x^2 - 2,6 + 11$.
 $\text{snelheid} = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=9,5} \approx 2,0^\circ\text{C per uur}$
- b** Bij 's middags half vier hoort $t = 15,5$.
 $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=15,5} \approx 0,95 > 0$, dus om half vier 's middags neemt de temperatuur toe.
- c** Bij 's avonds kwart voor zeven hoort $t = 18,75$.
 $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=18,75} \approx -0,87 < 0$, dus 's avonds om kwart voor zeven neemt de temperatuur af.



Bladzijde 59

- 6 a** $f(x) = 0,6x^3 - 1,3x^2 + 9$ geeft $f'(x) = 1,8x^2 - 2,6x$
- b** $N(t) = (3 - t)(5 + 2t) = 15 + 6t - 5t - 2t^2 = -2t^2 + t + 15$ geeft $N'(t) = -4t + 1$
- c** $K(p) = p^3 - p(p - 3)^2 = p^3 - p(p^2 - 6p + 9) = p^3 - p^3 + 6p^2 - 9p = 6p^2 - 9p$ geeft $K'(p) = 12p - 9$

- 7** $K = 20q^2 - 5pq + 8p^3$ geeft $\frac{dK}{dp} = 0 - 5q + 24p^2 = 24p^2 - 5q$
 $K = 20q^2 - 5pq + 8p^3$ geeft $\frac{dK}{dq} = 40q - 5p + 0 = 40q - 5p$

- 8 a** $y = \frac{1}{5x^6} + 5x^6 \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{5}x^{-6} + 5x^{6\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -\frac{6}{5}x^{-7} + 32\frac{1}{2}x^{5\frac{1}{2}} = -\frac{6}{5x^7} + 32\frac{1}{2}x^5 \cdot \sqrt{x}$
- b** $y = (5 + x)\sqrt{x} = 5\sqrt{x} + x\sqrt{x} = 5x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2\sqrt{x}} + 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$
- c** $y = \sqrt[6]{x^5} + \frac{5}{x} + \frac{x}{6} = x^{\frac{5}{6}} + 5x^{-1} + \frac{1}{6}x$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} - 5x^{-2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6 \cdot \sqrt[6]{x}} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{6}$

9 a $y = 6(3x - 1)^4 + 7x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 24(3x - 1)^3 \cdot 3 + 7 = 72(3x - 1)^3 + 7$

b $R = 20\sqrt{5q^3 + 4q} = 20(5q^3 + 4q)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$\frac{dR}{dq} = 10(5q^3 + 4q)^{-\frac{1}{2}} \cdot (15q^2 + 4) = \frac{10(15q^2 + 4)}{\sqrt{5q^3 + 4q}} = \frac{150q^2 + 40}{\sqrt{5q^3 + 4q}}$$

c $A = \frac{4}{(2 - 3q)^4} = 4(2 - 3q)^{-4}$ geeft $\frac{dA}{dq} = -16(2 - 3q)^{-5} \cdot -3 = \frac{48}{(2 - 3q)^5}$

10 a $R = 5q^{0,6} - 2q^{0,92}$ geeft $\frac{dR}{dq} = 3q^{-0,4} - 1,84q^{-0,08}$

De snelheid is $\left[\frac{dR}{dq}\right]_{q=6} = 3 \cdot 6^{-0,4} - 1,84 \cdot 6^{-0,08} \approx -0,13$ euro per stuk.

b De snelheid is $\left[\frac{dR}{dq}\right]_{x=3} = 3 \cdot 3^{-0,4} - 1,84 \cdot 3^{-0,08} \approx 0,25$ euro per stuk.

c $\frac{dR}{dq} = 0$ geeft $3q^{-0,4} - 1,84q^{-0,08} = 0$

Voer in $y_1 = 3x^{-0,4} - 1,84x^{-0,08}$.

De optie nulpunt geeft $x = 4,60\dots$

$q = 4,60\dots$ geeft $R = 5 \cdot 4,60\dots^{0,6} - 2 \cdot 4,60\dots^{0,92} \approx 4,349$

De maximale opbrengst is ongeveer 4349 euro.

11 $E(n) = 0,48n - an^2$ geeft $E'(n) = 0,48 - 2an$

$E'(n) = 0$ geeft $0,48 - 2an = 0$

$-2an = -0,48$

$n = \frac{0,48}{2a} = \frac{0,24}{a} = \frac{24}{100a} = \frac{6}{25a}$

$E_{\max} = E\left(\frac{6}{25a}\right) = 0,48 \cdot \frac{6}{25a} - a \cdot \left(\frac{6}{25a}\right)^2 = \frac{2,88}{25a} - a \cdot \frac{36}{625a^2} = \frac{2,88}{25a} - \frac{1,44}{25a} = \frac{1,44}{25a}$

9 Kansverdelingen

Voorkennis Kansberekeningen

Bladzijde 63

- 1 a $P(\text{één keer } 2) = \binom{8}{1} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7 \approx 0,090$
b $P(\text{minstens één keer } 1) = 1 - P(\text{geen enkele } 1) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^8 \approx 0,983$
c $P(\text{vijf keer } 1 \text{ en drie keer } 3) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \approx 0,005$
d $P(\text{vier keer } 1 \text{ en één keer } 3 \text{ en drie keer } 2) = \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \approx 0,092$
- 2 a $P(\text{minstens } 2) = 1 - P(\text{geen of } 1) = 1 - P(\text{geen}) - P(1) = 1 - 0,78^8 - \binom{8}{1} \cdot 0,22 \cdot 0,78^7 \approx 0,554$
b $P(\text{zes of zeven}) = P(\text{zes}) + P(\text{zeven}) = \binom{12}{6} \cdot 0,53^6 \cdot 0,47^6 + \binom{12}{7} \cdot 0,53^7 \cdot 0,47^5 \approx 0,434$

Bladzijde 64

- 3 a $P(\text{minstens één prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) = 1 - \frac{\binom{70}{5}}{\binom{80}{5}} \approx 0,497$
b $P(\text{tweede en derde prijs}) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{70}{3}}{\binom{80}{5}} \approx 0,041$
- 4 a $P(\text{drie keer } 2 \text{ ogen, één keer } 3 \text{ ogen en acht keer } 1, 4, 5 \text{ of } 6 \text{ ogen})$
 $= \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^8 \approx 0,060$
b $P(\text{elk aantal ogen } 2 \text{ keer}) = \binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{12} \approx 0,003$
c $P(\text{bij de twaalfde worp evenveel als bij de eerste worp}) = \frac{1}{6} \approx 0,167$

9.1 Toevalsvariabelen en verwachtingswaarde

Bladzijde 65

- 1 a $P(X = 17) = \frac{5}{25} = 0,2$
b $P(Y = 1) = \frac{8}{25} = 0,32$
c $P(X = 16 \text{ en } Y = 1) = \frac{7}{25} = 0,28$

Bladzijde 66

- 2 a $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$
b $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$
c $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$
d $P(\text{minstens één witte}) = P(X \geq 1)$
e $P(\text{hoogstens drie witte}) = P(X \leq 3)$
f $P(\text{alleen maar witte}) = P(X = 4)$

$$3 \quad a \quad P(X=2) = P(2 \text{ witte en } 3 \text{ niet-witte}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{15}{5}} \approx 0,400$$

$$b \quad P(Y=0) = P(\text{rrrr}) = \left(\frac{7}{15}\right)^4 \approx 0,047$$

$$c \quad P(Y \leq 3) = 1 - P(Y=4) = 1 - P(\text{rrrr}) = 1 - \left(\frac{8}{15}\right)^4 \approx 0,919$$

$$4 \quad a \quad P(X=2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} \approx 0,476$$

$$b \quad P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{5}{4}}{\binom{10}{4}} \approx 0,976$$

$$5 \quad a \quad P(X=8) = \binom{10}{8} \cdot 0,86^8 \cdot 0,14^2 \approx 0,264$$

$$b \quad P(X < 9) = 1 - P(X=9) - P(X=10) = 1 - \binom{10}{9} \cdot 0,86^9 \cdot 0,14 - 0,86^{10} \approx 0,418$$

Bladzijde 67

$$6 \quad a \quad P(X=6) = \binom{10}{6} \cdot 0,70^6 \cdot 0,30^4 \approx 0,200$$

$$b \quad P(Y=3) = \binom{10}{3} \cdot 0,23^3 \cdot 0,77^7 \approx 0,234$$

$$c \quad P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - 0,77^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,23 \cdot 0,77^9 \approx 0,708$$

$$d \quad P(X=8 \text{ en } Y=2) = \binom{10}{8} \cdot 0,70^8 \cdot 0,23^2 \approx 0,137$$

$$7 \quad P(X=20) = P(2 \text{ enveloppen met } 10 \text{ euro}) = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \approx 0,147$$

$$P(X > 0) = 1 - P(X=0) = 1 - P(2 \text{ lege enveloppen}) = 1 - \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \approx 0,653$$

$$8 \quad a \quad P(X=16) = \frac{25}{83} \approx 0,301$$

$$b \quad P(X=16) + P(X=17) + P(X=18) = 1$$

Bladzijde 68

9 a Omdat er drie niet-witte knikkers zijn en er zonder terugleggen wordt gepakt, is het mogelijk om als vierde knikker een witte te pakken, maar niet als vijfde.

$$b \quad P(X=4) = 1 - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3), \text{ want} \\ P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1.$$

Bladzijde 69

$$10 \quad P(X=1) = P(r) = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$P(X=2) = P(wr) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \approx 0,267$$

$$P(X=3) = P(wwr) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = 0,1$$

$$P(X=4) = P(wwwr) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} \approx 0,029$$

$$P(X=5) = P(wwwwwr) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 1 \approx 0,005$$

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0,6	0,267	0,1	0,029	0,005

11 $P(X=0) = 0,25^3 \approx 0,016$
 $P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot 0,75 \cdot 0,25^2 \approx 0,141$
 $P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25 \approx 0,422$
 $P(X=3) = 0,75^3 \approx 0,422$

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,016	0,141	0,422	0,422

12 a $P(\text{Lotte wint in 2 sets}) = P(LL) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$
b $P(\text{Gijs wint de eerste set en Lotte de volgende twee sets}) = P(GLL) = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,144$
c $P(\text{de partij duurt 3 sets}) = P(LGL) + P(LGG) + P(GLL) + P(GLG)$
 $= 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,48$

Alternatieve uitwerking

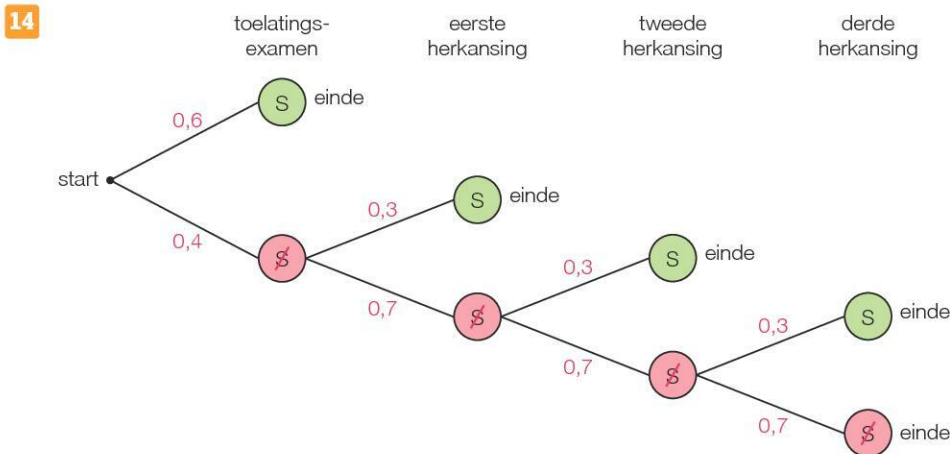
$P(\text{de partij duurt 3 sets}) = P(LG^*) + P(GL^*) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 1 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 1 = 0,48$

d $P(Y=2) = P(LL) + P(GG) = 0,6 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,52$
 $P(Y=3)$ zie vraag c

y	2	3
$P(Y=y)$	0,52	0,48

13 $P(Z=2) = P(BB) + P(FF) = 0,65 \cdot 0,65 + 0,35 \cdot 0,35 = 0,545$
 $P(Z=3) = 1 - P(Z=2) = 1 - 0,545 = 0,455$

z	2	3
$P(Z=z)$	0,545	0,455



$P(A=1) = P(S) = 0,6$
 $P(A=2) = P(SS) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$
 $P(A=3) = P(SSS) = 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,084$
 $P(A=4) = P(SSS^*) = 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 1 = 0,196$

a	1	2	3	4
$P(A=a)$	0,6	0,12	0,084	0,196

15 $P(X=4) = P(\text{zw zw zw zw}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$
 $P(X=5) = P(1 \text{ witte}) = \binom{4}{1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{15}$
 $P(X=6) = P(2 \text{ witte}) = \binom{5}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

x	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{3}$

Bladzijde 70

- 16 De opbrengst per week is $1000 \cdot 5 = 5000$ euro.
 De uitbetaling per week is $2000 + 100 \cdot 20 = 4000$ euro.
 De winst per week is $5000 - 4000 = 1000$ euro.
 Dat is gemiddeld per lot 1 euro.

Bladzijde 71

- 17 a

u	15	11	7	3
$P(U=u)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

 $E(U) = 15 \cdot \frac{1}{27} + 11 \cdot \frac{6}{27} + 7 \cdot \frac{12}{27} + 3 \cdot \frac{8}{27} = 7$ euro
 b $E(W) = E(U) - \text{inleg} = 7 - 8 = -1$ euro

- 18 a $W = \text{winst per spel, dus } W = \text{uitbetaling} - 2$
 $P(W=48) = \frac{1}{100} = 0,01$
 $P(W=8) = \frac{3}{100} = 0,03$
 $P(W=-2) = \frac{96}{100} = 0,96$

w	48	8	-2
$P(W=w)$	0,01	0,03	0,96

 $E(W) = -2 \cdot 0,96 + 8 \cdot 0,03 + 48 \cdot 0,01 = -1,20$
 De winstverwachting is $-\text{€ } 1,20$ per lot.
 b Een lot moet dan $2 - 1,20 = \text{€ } 0,80$ kosten.

Bladzijde 72

19

	SOM					
8	11	11	11	11	11	16
3	6	6	6	6	6	11
3	6	6	6	6	6	11
3	6	6	6	6	6	11
3	6	6	6	6	6	11
3	6	6	6	6	6	11
	3	3	3	3	3	8

$W = \text{winst per spel, dus } W = \text{uitbetaling} - 8$

w	8	3	-2
$P(W=w)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

$E(W) = 8 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{10}{36} - 2 \cdot \frac{25}{36} = -\frac{12}{36} \approx -0,33$

De verwachtingswaarde van de winst is $-\text{€ } 0,33$ per spel.

20 a $P(\text{één keer 5 ogen}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$

b $P(2 \text{ dollar uitbetaald}) = P(\text{twee keer 5 ogen}) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$

c $P(\text{geen uitbetaling}) = P(\text{geen 5 ogen}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$

d $W = \text{winst per spel voor de organisator} = 1 - \text{uitbetaling}$

$P(W = -2) = P(\text{drie keer 5 ogen}) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

w	1	0	-1	-2
$P(W = w)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$E(W) = 1 \cdot \frac{125}{216} + 0 \cdot \frac{75}{216} - 1 \cdot \frac{15}{216} - 2 \cdot \frac{1}{216} = \frac{108}{216} = 0,5$

Het spel brengt naar verwachting $500 \cdot 0,5 = 250$ dollar op.

21 $X = \text{aantal knikkers dat Monique pakt}$

$P(X = 1) = P(w) = \frac{6}{10}$

$P(X = 2) = P(r w) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90}$

$P(X = 3) = P(r r w) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{72}{720}$

$P(X = 4) = P(r r r w) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{144}{5040}$

$P(X = 5) = P(r r r r w) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{24}{5040}$

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{24}{90}$	$\frac{72}{720}$	$\frac{144}{5040}$	$\frac{24}{5040}$

$E(X) = 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{24}{90} + 3 \cdot \frac{72}{720} + 4 \cdot \frac{144}{5040} + 5 \cdot \frac{24}{5040} = \frac{7920}{5040} = 1\frac{4}{7}$

9.2 Binomiale verdeling

Bladzijde 74

22 a $P(\text{drie keer 6 ogen}) = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,104$

b $P(\text{meer dan 2 ogen}) = P(3, 4, 5 \text{ of } 6 \text{ ogen}) = \frac{4}{6}$

$P(\text{vijf keer meer dan 2 ogen}) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \approx 0,273$

Bladzijde 75

23 a $n = 10$, $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ en $k = 6$

b $P(Y = 6) = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \approx 0,228$ en dat is hetzelfde antwoord.

Bladzijde 76

24 a $n = 6$ en $p = \frac{8}{20} = 0,4$

$P(X = 4) = \binom{6}{4} \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^2 \approx 0,138$

b $n = 12$ en $p = \frac{8+10}{20} = 0,9$

$P(Y = 10) = \binom{12}{10} \cdot 0,9^{10} \cdot 0,1^2 \approx 0,230$

c Nee, ze pakt zonder terugleggen en dus voert ze niet telkens hetzelfde experiment uit.

$P(Z = 3) = P(3 \text{ groene en } 1 \text{ niet-groene}) = \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{20}{4}} \approx 0,248$

- 25 a** $X = \text{aantal keer slag}$
 $P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0,3^5 \cdot 0,7^5 \approx 0,103$
b $P(\text{alleen de laatste beurt slag}) = P(\text{sssss}) = 0,7^4 \cdot 0,3 \approx 0,072$

- 26 a** $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,512 + 0,384 + 0,096 = 0,992$
b $P(X \leq 3)$ is de kans op alle mogelijke uitkomsten bij dit kansexperiment en deze kans is 1.
c Er zijn geen waarden kleiner dan 0 mogelijk.

d

x	0	1	2	3
$P(X \leq x)$	0,512	0,896	0,992	1

Bladzijde 77

- 27 a** $P(X = 3) = \binom{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0,273$
b Er is geen sprake van succes en mislukking.
- 28 a** $X = \text{aantal keer wit}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$.
De GR geeft $P(X = 3) \approx 0,155$.
b $X = \text{aantal keer rood}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 12$ en $p = \frac{2}{6}$.
De GR geeft $P(X \leq 5) \approx 0,822$.
c $X = \text{aantal keer blauw}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 9$ en $p = \frac{3}{6}$.
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$
De GR geeft $P(X \geq 1) \approx 0,998$.
d $P(\text{vijf keer blauw en drie keer rood}) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \approx 0,065$
e $P(\text{acht keer blauw, vijf keer rood en drie keer wit}) = \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 0,054$

Bladzijde 78

- 29 a** $X = \text{aantal keer eerste opslag in}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = 0,55$.
De GR geeft $P(X = 5) \approx 0,234$.
b $P(\text{alleen de laatste vier in}) = 0,45^2 \cdot 0,55^4 \approx 0,019$
- 30 a** $X = \text{aantal dat te hard rijdt}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 60$ en $p = 0,16$.
De GR geeft $P(X = 10) \approx 0,136$.
b $X = \text{aantal dat 140 km/uur of meer rijdt}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 60$ en $p = \frac{1}{4} \cdot 0,16 = 0,04$.
De GR geeft $P(X \leq 2) \approx 0,568$.
c $X = \text{aantal met een snelheid tussen 120 en 140 km/uur}$
Een kwart van 60 is $\frac{1}{4} \cdot 60 = 15$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 60$ en $p = 0,16 - \frac{1}{4} \cdot 0,16 = 0,12$.
De GR geeft $P(X = 15) \approx 0,003$.
- 31** $X = \text{aantal ondeugdelijke accu's}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 54$ en $p = 0,2$.
De GR geeft $P(X \leq 3) \approx 0,003$.

- 32**
- a $P(X \geq 4)$
 - b $P(X < 8)$
 - c $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$
 - d $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$
 - e $P(X < 7) = P(X \leq 6)$
 - f $P(12 \leq X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 11)$
 - g $P(4 < X < 12) = P(X \leq 11) - P(X \leq 4)$
 - h $P(2 \leq X < 5) = P(X \leq 4) - P(X \leq 1)$
 - i $P(4 < X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 4)$
 - j $P(X \text{ tussen } 8 \text{ en } 20) = P(8 < X < 20) = P(X \leq 19) - P(X \leq 8)$

Bladzijde 80

- 33**
- a $P(X < 10) = P(X \leq 9)$
De GR geeft $P(X < 10) \approx 0,347$.
 - b $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$
De GR geeft $P(X \geq 8) \approx 0,889$.
 - c $P(\text{meer dan } 12 \text{ keer succes}) = P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12)$
De GR geeft $P(\text{meer dan } 12 \text{ keer succes}) \approx 0,208$.
 - d $P(\text{tussen } 9 \text{ en } 16 \text{ keer succes}) = P(9 < X < 16) = P(X \leq 15) - P(X \leq 9)$
De GR geeft $P(\text{tussen } 9 \text{ en } 16 \text{ keer succes}) \approx 0,631$.
 - e $P(\text{minstens } 6 \text{ keer succes}) = P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$
De GR geeft $P(\text{minstens } 6 \text{ keer succes}) \approx 0,982$.
 - f $P(9 \text{ of } 10 \text{ keer succes}) = P(X = 9 \text{ of } X = 10) = P(X = 9) + P(X = 10)$
De GR geeft $P(9 \text{ of } 10 \text{ keer succes}) \approx 0,294$.

- 34**
- a $X = \text{aantal keer appel}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
 $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$
De GR geeft $P(X \geq 5) \approx 0,623$.
 - b $X = \text{aantal keer appel}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 25$ en $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
 $P(10 < X < 20) = P(X \leq 19) - P(X \leq 10)$
De GR geeft $P(10 < X < 20) \approx 0,786$.
 - c $X = \text{aantal keer appel}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
 $P(X > 60) = 1 - P(X \leq 60)$
De GR geeft $P(X > 60) \approx 0,018$.
 - d $X = \text{aantal keer kersen}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 35$ en $p = \frac{1}{6}$.
De GR geeft $P(X = 7) \approx 0,146$.

- 35** a $X = \text{aantal keer twee rode knikkers}$

X is binomiaal verdeeld met $n = 15$ en $p = P(\text{twee rode}) = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{11}{50}$.

De GR geeft $P(X = 3) \approx 0,246$.

- b $X = \text{aantal keer één zwarte knikker}$

X is binomiaal verdeeld met $n = 15$ en $p = P(\text{één zwarte}) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{17}{1}}{\binom{25}{2}} = \frac{34}{75}$.

$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$

De GR geeft $P(X \geq 10) \approx 0,081$.

- c** X = aantal keer twee knikkers van dezelfde kleur
 X is binomiaal verdeeld met $n = 15$ en $p = P(\text{twee van dezelfde kleur}) =$

$$P(\text{twee rode}) + P(\text{twee zwarte}) + P(\text{twee witte}) = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{25}{2}} + \frac{\binom{8}{2}}{\binom{25}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{26}{75}.$$

$$P(X < 6) = P(X \leq 5)$$

De GR geeft $P(X < 6) \approx 0,575$.

- d** X = aantal keer minstens één rode knikker
 X is binomiaal verdeeld met $n = 15$ en

$$p = P(\text{minstens één rode}) = 1 - P(\text{geen rode}) = 1 - \frac{\binom{13}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{37}{50}.$$

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$$

De GR geeft $P(X \geq 8) \approx 0,978$.

Bladzijde 81

- 36 a** X = aantal kinderen uit een eenoudergezin
 X is binomiaal verdeeld met $n = 11$ en $p = 0,11$.
 De GR geeft $P(X = 0) \approx 0,278$.
- b** X = aantal kinderen uit een eenoudergezin
 X is binomiaal verdeeld met $n = 22$ en $p = 0,11$.
 De GR geeft $P(X \leq 2) \approx 0,558$.
- c** $P(\text{twee uit een eenoudergezin}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{30}{4}}{\binom{35}{6}} \approx 0,169$

- 37** X = aantal passagiers dat komt opdagen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,88$.
 De GR geeft $P(X \leq 92) \approx 0,924$.
 De kans dat iedereen die komt opdagen een plaats heeft is 0,924.

- 38** X = aantal gasten dat komt opdagen
 X is binomiaal verdeeld met onbekende n en $p = 0,92$.
 Voor welke n is $P(X \leq 190) \geq 0,95$?
 Voer bij y_1 een formule in en maak een tabel.
 Op de TI: $y_1 = \text{binomcdf}(x, 0,92, 190)$.
 Op de Casio: $y_1 = \text{BinomialCD}(190, x, 0,92)$.
 Op de NW: $y_1 = \text{binomcdf}(190, x, 0,92)$.
 Op de HP: $y_1 = \text{BINOMIAL-CDF}(x, 0,92, 190)$.
 Je leest af voor $n = 200$ is $P(X \leq 190) \approx 0,963$
 voor $n = 201$ is $P(X \leq 190) \approx 0,933$.
 Er kunnen dagelijks hoogstens 200 stoelen worden verhuurd.

- 39 a** $P(6 \text{ ogen}) = \frac{1}{6}$ en $30 \cdot \frac{1}{6} = 5$.
- b** X is binomiaal verdeeld met $n = 30$ en $p = \frac{1}{6}$.
 De GR geeft de kansen in de tabel.

x	3	4	5	6	7
$P(X = x)$	0,137	0,185	0,192	0,160	0,110

Bladzijde 82

- 40 a** De verwachtingswaarde is $E(X) = np = 140 \cdot 0,4 = 56$ en de standaardafwijking is
 $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{140 \cdot 0,4 \cdot 0,6} \approx 5,8$.
 $E(X) - \sigma_X \approx 56 - 5,8 = 50,2$
 $E(X) + \sigma_X \approx 56 + 5,8 = 61,8$
 $P(50,2 < X < 61,8) = P(51 \leq X \leq 61)$
 De GR geeft $P(51 \leq X \leq 61) \approx 0,657$.
- b** X = aantal keer zes ogen
 $E(X) = np = 1000 \cdot \frac{1}{6} = 166,66\dots$
 $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 11,78\dots$
 $E(X) - 2\sigma_X = 166,66\dots - 2 \cdot 11,78\dots = 143,09\dots$
 $E(X) + 2\sigma_X = 166,66\dots + 2 \cdot 11,78\dots = 190,23\dots$
 $P(X < 143,09\dots) + P(X > 190,23\dots) = P(X \leq 143) + P(X \geq 191) = P(X \leq 143) + 1 - P(X \leq 190)$
 De GR geeft $P(X \leq 143) + P(X \geq 191) \approx 0,046$.

41 *

Deze bewering is waar.

- 42 a** X = aantal offertes voor occasions dat tot verkoop leidt
 X is binomiaal verdeeld met onbekende n en $p = 0,28$.
 $E(X) = np = 21$
 $0,28n = 21$
 $n = 75$
 Dus Nico heeft 75 offertes voor occasions opgesteld.
- b** X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,28$.
 $E(X) = np = 100 \cdot 0,28 = 28$
 $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0,28 \cdot 0,72} = 4,489\dots$
 $E(X) - 2\sigma_X = 28 - 2 \cdot 4,489\dots = 19,02\dots$
 Dus 19 of minder offertes leiden tot verkoop.
- c** Y = aantal offertes voor nieuwe auto's dat tot verkoop leidt
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 217$ en onbekende p .
 $E(Y) + 2\sigma_Y = 90$, oftewel $np + 2 \cdot \sqrt{np(1-p)} = 90$.
 Los op $217p + 2 \cdot \sqrt{217p(1-p)} = 90$.
 Voer in $y_1 = 217x + 2 \cdot \sqrt{217x(1-x)}$ en $y_2 = 90$.
 De optie snijpunt geeft $x = 0,3499\dots$.
 Dus $p = 0,350$.

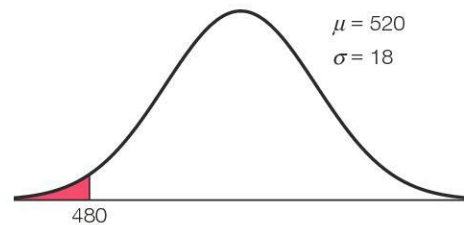
9.3 Berekeningen bij normaalkrommen**Bladzijde 84**

- 43 a** Dit volgt uit de vuistregels bij de normale verdeling.
 $13,5\% + 2,5\% = 16\%$ komt overeen met een oppervlakte van 0,16.
- b** a oppervlakte = 0,135
 b oppervlakte = 0,975
 c oppervlakte = 0,05
 d oppervlakte = 0,84

Bladzijde 85

- 44 a** Normale verdeling met $\mu = 3,5$ en $\sigma = 1,1$.
 Bij $l = -10^{99}$ en $r = 5$ geeft de GR opp $\approx 0,914$.
- b** Normale verdeling met $\mu = 850$ en $\sigma = 120$.
 Bij $l = 700$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,894$.
- c** Normale verdeling met $\mu = 1080$ en $\sigma = 60$.
 Bij $l = 1000$ en $r = 1100$ geeft de GR opp $\approx 0,539$.

- 45 a** Normale verdeling met $\mu = 520$ en $\sigma = 18$.
 Bij $l = -10^{99}$ en $r = 480$ geeft de GR opp $\approx 0,013$.
b Bij $l = 510$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,711$.



Bladzijde 86

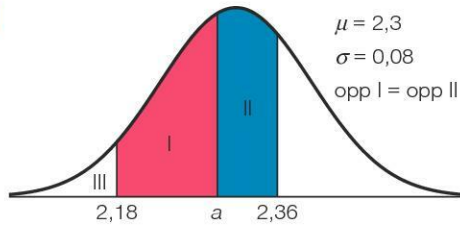
- 46 a** Normale verdeling met $\mu = 5,8$ en $\sigma = 0,4$.
 Bij $l = -10^{99}$ en $r = 5,1$ geeft de GR opp $\approx 0,040$.
 Dus 4,0%.
b Bij $l = 5,25$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,915$.
 Dus 91,5%.
c Bij $l = 6,1$ en $r = 6,4$ geeft de GR opp $\approx 0,160$.
 Dus 16,0%.
- 47 a** Neem bijvoorbeeld een normale verdeling met $\mu = 0$ en $\sigma = 1$.
 Bij $l = -1$ en $r = 1$ geeft de GR opp $\approx 0,6827$.
 Dus dat percentage is 68,27%.
b Ga weer uit van $\mu = 0$ en $\sigma = 1$.
 Bij $l = -2$ en $r = 2$ geeft de GR opp $\approx 0,9545$.
 Dat percentage is 95,45%.

- 48** Deze oppervlakte is $1 - 0,65 = 0,35$.

Bladzijde 88

- 49 a** Normale verdeling met $\mu = 16$ en $\sigma = 2$.
 opp links van a is 0,3
 De GR geeft $a \approx 15,0$.
b Normale verdeling met $\mu = 50$ en $\sigma = 8$.
 opp links van a is $1 - 0,7 = 0,3$
 De GR geeft $a \approx 45,8$.
c Normale verdeling met $\mu = 600$ en $\sigma = 70$.
 opp links van a is 0,86
 De GR geeft $a \approx 676$.
d Normale verdeling met $\mu = 0,8$ en $\sigma = 0,2$.
 opp links van a is $1 - 0,08 = 0,92$
 De GR geeft $a \approx 1,08$.
- 50** Normale verdeling met $\mu = 40$ en $\sigma = 5$.
 opp links van a is $\frac{1}{3}$ en links van b is $\frac{2}{3}$
 De GR geeft $a \approx 37,8$ en $b \approx 42,2$.
- 51 a** Normale verdeling met $\mu = 1000$ en $\sigma = 50$.
 opp links van a is $\frac{1}{5}$, links van b is $\frac{2}{5}$, links van c is $\frac{3}{5}$ en links van d is $\frac{4}{5}$
 De GR geeft $a \approx 958$ en $b \approx 987$ en $c \approx 1013$ en $d \approx 1042$.
b Normale verdeling met $\mu = 150$ en $\sigma = 12$.
 opp links van p is $\frac{1}{2}(1 - 0,82) = 0,09$ en links van q is $1 - 0,09 = 0,91$
 De GR geeft $p \approx 133,9$ en $q \approx 166,1$.
 Normale verdeling met $\mu = 58$ en $\sigma = 6$.
 opp links van r is $\frac{1}{2} \cdot 0,12 = 0,06$ en links van s is $1 - 0,06 = 0,94$
 De GR geeft $r \approx 48,7$ en $s \approx 67,3$.

52



Normale verdeling met $\mu = 2,3$ en $\sigma = 0,08$.

Bij $l = 2,18$ en $r = 2,36$ geeft de GR opp $(I + II) \approx 0,70657$,

dus opp $(I) \approx \frac{1}{2} \cdot 0,70657 \approx 0,3533$.

Bij $l = -10^{99}$ en $r = 2,18$ geeft de GR opp $(III) \approx 0,0668$,

dus opp $(I + III) \approx 0,3533 + 0,0668 = 0,4201$.

De GR geeft $a \approx 2,284$.

53

a Een schatting van σ is 3, want 7 ligt ongeveer σ van $\mu = 10$ af.

b Een schatting van σ is 50, want 600 ligt ongeveer 2σ van $\mu = 500$ af.

c Een schatting van μ is 90, want 105 ligt ongeveer $\sigma = 15$ van μ af.

Bladzijde 90

54

a Een schatting van σ is 60, want 450 ligt iets minder dan σ van $\mu = 400$ af.

Neem x bijvoorbeeld tussen 50 en 70.

Neem y bijvoorbeeld tussen 0 en 1,5.

b Normale verdeling met $\mu = 400$, $\sigma = x$, $l = -10^{99}$ en $r = 450$.

Los op opp = 0,78.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,78$.

De optie snijpunt geeft $x = 64,751\dots$, dus $\sigma \approx 64,8$.

55

a Een schatting van μ is 190, want 170 ligt iets meer dan $\sigma = 12$ van μ af.

Neem x bijvoorbeeld tussen 180 en 200.

Neem y bijvoorbeeld tussen 0 en 0,15.

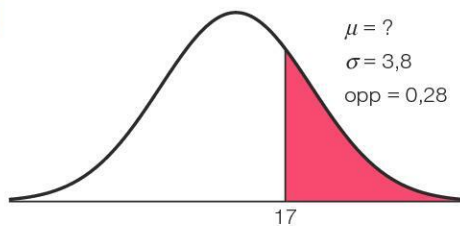
b Normale verdeling met $\mu = x$, $\sigma = 12$, $l = -10^{99}$ en $r = 170$.

Los op opp = 0,08.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,08$.

De optie snijpunt geeft $x = 186,8\dots$, dus $\mu \approx 187$.

56



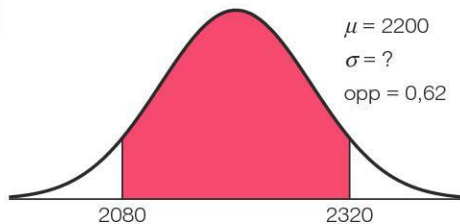
Normale verdeling met $\mu = x$, $\sigma = 3,8$, $l = 17$ en $r = 10^{99}$.

Los op opp = 0,28.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,28$.

De optie snijpunt geeft $x = 14,78\dots$, dus $\mu \approx 14,8$.

57

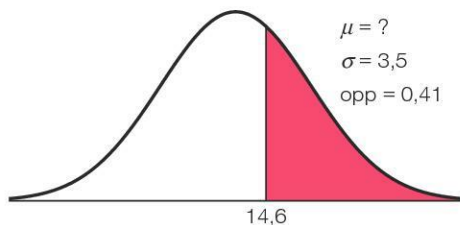


Normale verdeling met $\mu = 2200$, $\sigma = x$, $l = 2080$ en $r = 2320$.

Los op opp = 0,62.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,62$.

De optie snijpunt geeft $x = 136,6\dots$, dus $\sigma \approx 140$.

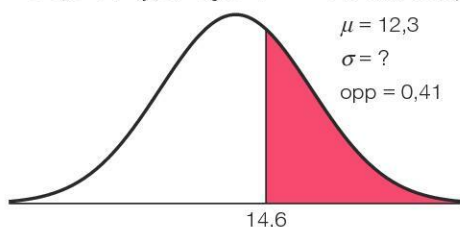
58 a

Normale verdeling met $\mu = x$, $\sigma = 3,5$, $l = 14,6$ en $r = 10^{99}$.

Los op $\text{opp} = 0,41$.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,41$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 13,80\dots$, dus $\mu \approx 13,8$.

b

Normale verdeling met $\mu = 12,3$, $\sigma = x$, $l = 14,6$ en $r = 10^{99}$.

Los op $\text{opp} = 0,41$.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,41$.

De optie snijpunt geeft $x = 10,10\dots$, dus $\sigma \approx 10,1$.

59

Normale verdeling met $\mu = 28$ en $\sigma = x$.

opp links van 23 is $1 - 0,83 = 0,17$

Op de TI: voer in $y_1 = \text{invNorm}(0,17, 28, x, \text{LINKS})$.

Op de Casio: voer in $y_1 = \text{InvNormCD}(0,17, x, 28)$.

Op de NW: voer in $y_1 = \text{invnorm}(0,17, 28, x)$.

Op de HP: voer in $y_1 = \text{NORMALD-ICDF}(28, x, 0,17)$.

De optie snijpunt geeft hetzelfde antwoord.

9.4 Toepassingen van de normale verdeling

Bladzijde 92

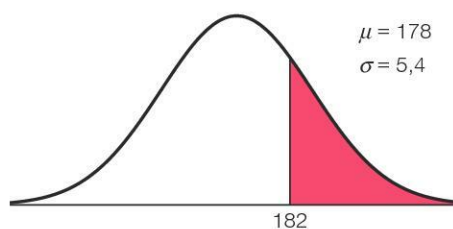
60

a Normale verdeling met $\mu = 178$ en $\sigma = 5,4$.

Bij $l = 182$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR $\text{opp} \approx 0,229$.

b Van de jongens is 22,9% langer dan 182 cm.

c De gevraagde kans is 0,229.



Bladzijde 93

61

a Nee, het maakt voor de oppervlakte niet uit of de grens er wel of niet bijhoort.

Dus $P(X > 575) = P(X \geq 575)$.

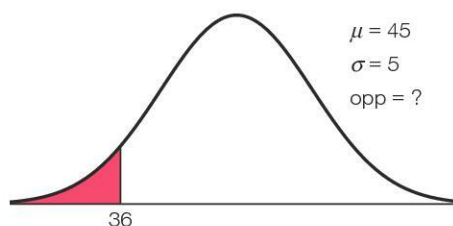
b Bij een score van 74 zit je nog niet bij de beste 20% van de deelnemers. Dat is pas het geval bij een score van 75 of meer.

62

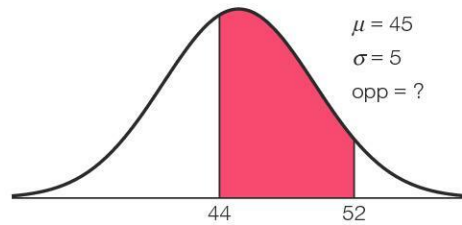
a Normale verdeling met $\mu = 45$ en $\sigma = 5$.

Bij $l = -10^{99}$ en $r = 36$ geeft de GR $\text{opp} \approx 0,036$.

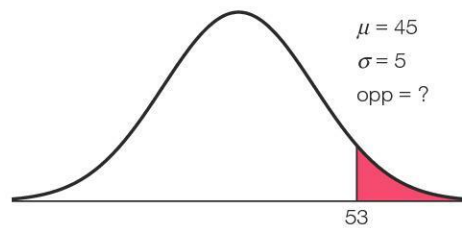
Dus 3,6%.



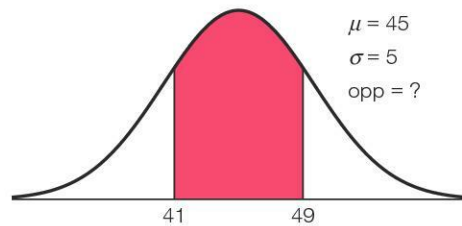
- b** X = lengte volwassen forel
 X is normaal verdeeld met $\mu = 45$ en $\sigma = 5$.
 De GR geeft $P(44 < X < 52) \approx 0,499$.



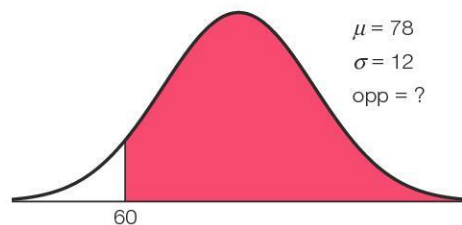
- c** Bij $l = 53$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,054...$
 Je verwacht $0,054... \cdot 240 \approx 13$ forellen.



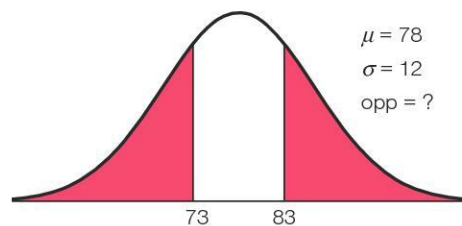
- d** Bij $l = 41$ en $r = 49$ geeft de GR opp $\approx 0,576$.
 Dus 57,6%.



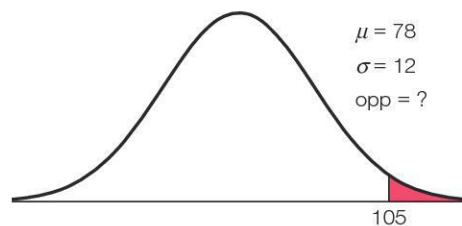
- 63 a** Normale verdeling met $\mu = 78$ en $\sigma = 12$.
 Bij $l = 60$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,933...$
 Dus $0,933... \cdot 1600 \approx 1493$ mannen zijn zwaarder dan 60 kg.
 Bij $l = -10^{99}$ en $r = 65$ geeft de GR opp $\approx 0,139...$
 Dus $0,139... \cdot 1600 \approx 223$ mannen zijn lichter dan 65 kg.



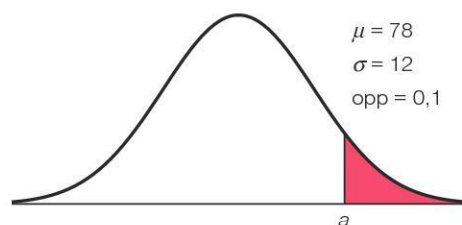
- b** X = gewicht mannelijke werknemer in kg
 X is normaal verdeeld met $\mu = 78$ en $\sigma = 12$.
 De GR geeft $1 - P(73 \leq X \leq 83) \approx 0,677$.



- c** Bij $l = 105$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,012...$
 Dus $0,012... \cdot 1600 \approx 20$ werknemers wegen meer dan 105 kg.

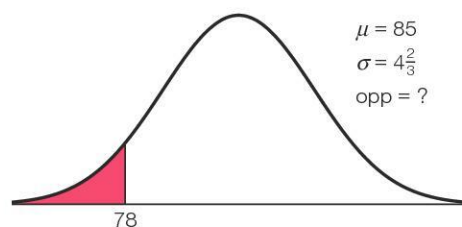


- d** opp links van a is $1 - 0,1 = 0,9$
 De GR geeft $a \approx 93,4$.
 Dus vanaf 94 kg.

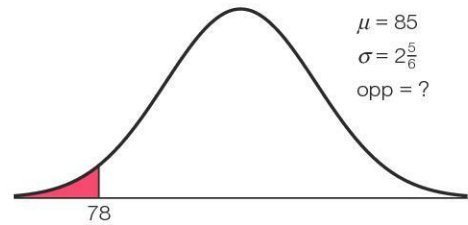


Bladzijde 94

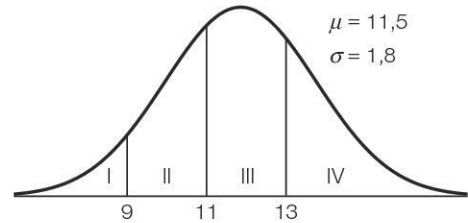
- 64 a** 280 minuten = $4\frac{2}{3}$ uur
 Normale verdeling met $\mu = 85$ en $\sigma = 4\frac{2}{3}$.
 Bij $l = -10^{99}$ en $r = 78$ geeft de GR opp $\approx 0,067$.
 Dus 6,7%.



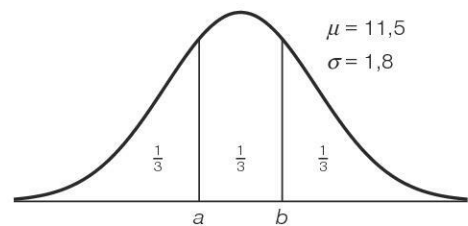
- b** 170 minuten = $2\frac{5}{6}$ uur
 Normale verdeling met $\mu = 85$ en $\sigma = 2\frac{5}{6}$.
 Bij $l = -10^{99}$ en $r = 78$ geeft de GR opp $\approx 0,007$.
 Dus 0,7%.



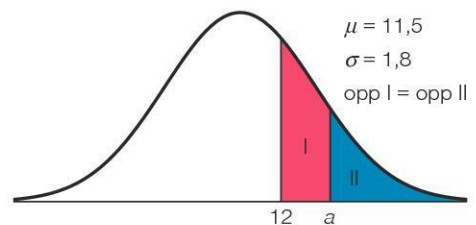
- 65 a** 18 mm = 1,8 cm
 Normale verdeling met $\mu = 11,5$ en $\sigma = 1,8$.
 Bij $l = -10^{99}$ en $r = 9$ geeft de GR opp (I) $\approx 0,082$.
 Bij $l = 9$ en $r = 11$ geeft de GR opp (II) $\approx 0,308$.
 Bij $l = 11$ en $r = 13$ geeft de GR opp (III) $\approx 0,407$.
 Bij $l = 13$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp (IV) $\approx 0,202$.
 De percentages zijn 8,2%, 30,8%, 40,7% en 20,2%.



- b** opp links van a is $\frac{1}{3}$.
 De GR geeft $a \approx 10,7$.
 opp links van b is $\frac{2}{3}$.
 De GR geeft $b \approx 12,3$.
 De grenzen zijn 10,7 en 12,3 cm.

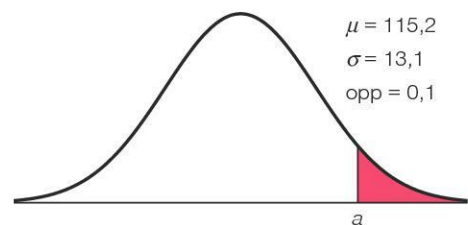


- 66** Normale verdeling met $\mu = 11,5$ en $\sigma = 1,8$.
 Bij $l = 12$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp (I + II) $\approx 0,3906$.
 Dus opp (II) $\approx 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,3906 = 0,8047$.
 De GR geeft $a \approx 13,0$.
 De grens is 13,0 cm.

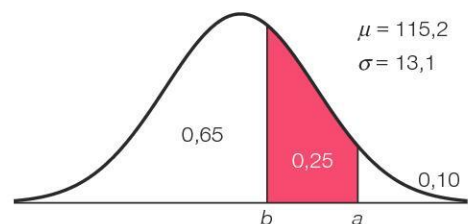


Bladzijde 95

- 67 a** Normale verdeling met $\mu = 115,2$ en $\sigma = 13,1$.
 opp links van a is $1 - 0,1 = 0,9$
 De GR geeft $a \approx 131,99$.
 Dus vanaf een IQ van 132.

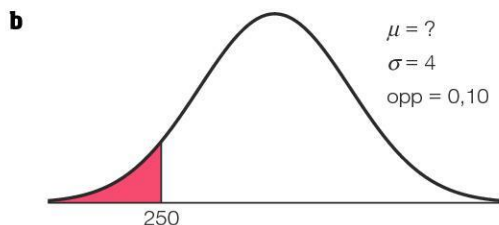


- b** opp links van b is $0,9 - 0,25 = 0,65$
 De GR geeft $b \approx 120,25$.
 Je krijgt een herkansing bij een IQ van 121 tot en met 131.



- 68 a**
-
- $\mu = 250$
 $\sigma = ?$
 opp = 0,90

Normale verdeling met $\mu = 250$, $\sigma = x$, $l = 245$ en $r = 255$.
 Los op opp = 0,90.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,90$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3,039...$, dus maximaal $\sigma = 3,03$ gram.



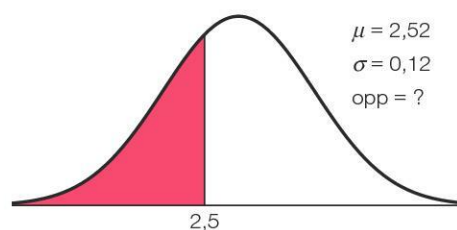
Normale verdeling met $\mu = x$, $\sigma = 4$, $l = -10^{99}$ en $r = 250$.

Los op $\text{opp} = 0,10$.

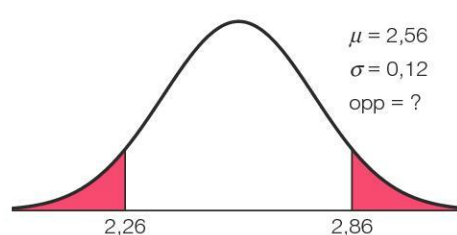
Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,10$.

De optie snijpunt geeft $x = 255,1\dots$, dus op een gemiddelde van 255 gram.

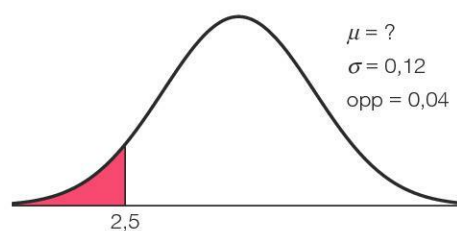
- 69 a** X = inhoud pak in kg
 X is normaal verdeeld met $\mu = 2,52$ en $\sigma = 0,12$.
 De GR geeft $P(X < 2,5) \approx 0,434$.



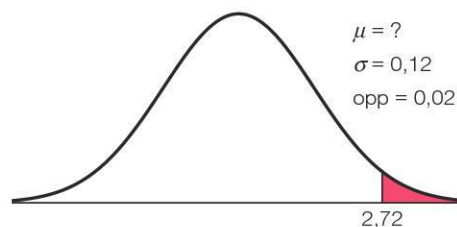
- b** Bij $l = 2,26$ en $r = 2,86$ geeft de GR $\text{opp} \approx 0,988$.
 De gevraagde oppervlakte is $1 - 0,988 = 0,012$.
 Dus 1,2%.



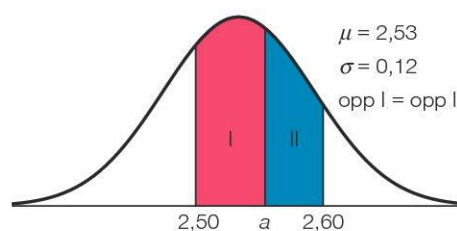
- c** Normale verdeling met
 $\mu = x$, $\sigma = 0,12$, $l = -10^{99}$ en $r = 2,5$.
 Los op $\text{opp} = 0,04$.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,04$.
 De optie snijpunt geeft $x = 2,710\dots$
 De vulmachine moet worden ingesteld op een gemiddelde van 2,71 kg of meer.



- d** Normale verdeling met
 $\mu = x$, $\sigma = 0,12$, $l = 2,72$ en $r = 10^{99}$.
 Los op $\text{opp} = 0,02$.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,02$.
 De optie snijpunt geeft $x = 2,473\dots$
 De vulmachine is ingesteld op een gemiddelde van 2,47 kg.

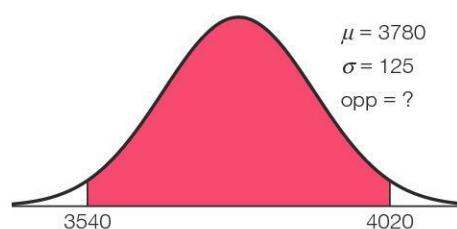


- e** Normale verdeling met $\mu = 2,53$ en $\sigma = 0,12$.
 Los op $\text{opp (I)} = \text{opp (II)}$.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in met $l = 2,50$ en $r = x$
 en bij y_2 de normale verdeling met $l = x$ en $r = 2,60$.
 De optie snijpunt geeft $x = 2,548\dots$
 Hij moet de grens leggen bij een gewicht van 2,548 kg.

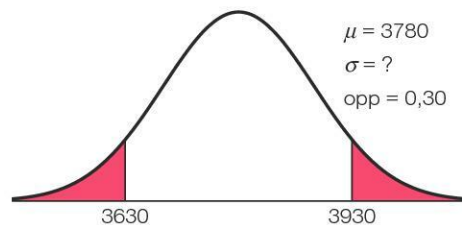
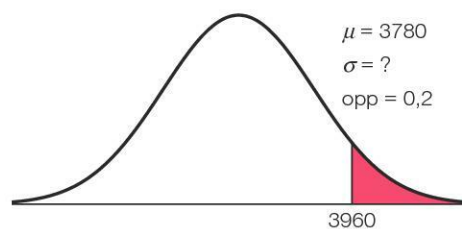


Bladzijde 96

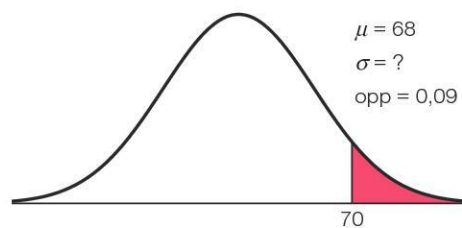
- 70 a** 1 uur en 3 minuten = $63 \cdot 60 = 3780$ seconden
 4 minuten = 240 seconden
 X = productietijd in minuten
 X is normaal verdeeld met $\mu = 3780$ en $\sigma = 125$.
 De GR geeft $P(3540 < X < 4020) \approx 0,945$.



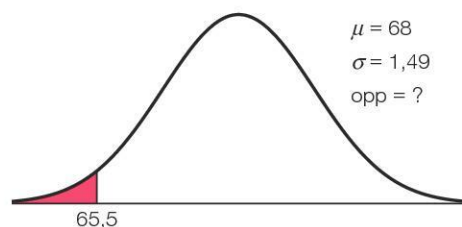
- b** 2,5 minuten = 150 seconden
 Normale verdeling met $\mu = 3780$, $\sigma = x$,
 $l = 3780 - 150 = 3630$ en $r = 3780 + 150 = 3930$.
 Los op $\text{opp} = 1 - 0,30 = 0,70$.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,70$.
 De optie snijpunt geeft $x = 144,7...$
 Dus $\sigma = 145$ seconden.
- c** 66 minuten = $66 \cdot 60 = 3960$ seconden
 Normale verdeling met
 $\mu = 3780$, $\sigma = x$, $l = 3960$ en $r = 10^{99}$.
 Los op $\text{opp} = 0,2$.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 213,8...$
 Dus $\sigma = 214$ seconden.



- 71** Normale verdeling met
 $\mu = 68$, $\sigma = x$, $l = 70$ en $r = 10^{99}$.
 Los op $\text{opp} = 0,09$.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,09$.
 De optie snijpunt geeft $x = 1,491...$
 Dus $\sigma = 1,49\%$.



Normale verdeling met $\mu = 68$ en $\sigma = 1,49$.
 Bij $l = -10^{99}$ en $r = 65,5$ geeft GR $\text{opp} = 0,046...$
 Dat zijn er $0,046... \cdot 500 \approx 23$.



Diagnostische toets

Bladzijde 100

1 a

		SOM VAN DE GETALLEN					
2 ^e keer draaien	8	11	12	13	14	15	16
	7	10	11	12	13	14	15
	6	9	10	11	12	13	14
	5	8	9	10	11	12	13
	4	7	8	9	10	11	12
	3	6	7	8	9	10	11
		3	4	5	6	7	8
		1 ^e keer draaien					

$$P(X \leq 8) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b $P(Y > 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

c

$Z = 5$

8						
7						
6						
5	X	X	X			
4			X			
3			X			
	3	4	5	6	7	8

1^e keer draaien

$$P(Z = 5) = \frac{5}{36}$$

2 $P(A = 3) = P(RRR) + P(UUU) = 0,65^3 + 0,35^3 = 0,3175 \approx 0,318$
 $P(A = 4) = \binom{3}{2} \cdot P(RRUR) + \binom{3}{2} \cdot P(UURU) = \binom{3}{2} \cdot 0,65^3 \cdot 0,35 + \binom{3}{2} \cdot 0,35^3 \cdot 0,65 = 0,3719... \approx 0,372$
 $P(A = 5) = 1 - P(A = 3) - P(A = 4) = 1 - 0,3175 - 0,3719... \approx 0,311$

a	3	4	5
$P(A = a)$	0,318	0,372	0,311

3 $W = \text{uitbetaling} - 1$
 som = 18 666 1 keer $P(W = 99) = P(\text{som} = 18) = \frac{1}{216}$
 som = 17 665 3 keer $P(W = 14) = P(\text{som} = 17) = \frac{3}{216}$
 som = 16 664 3 keer $P(W = 4) = \frac{6}{216}$
 655 3 keer
 $P(W = -1) = 1 - P(W = 99) - P(W = 14) - P(W = 4) = 1 - \frac{1}{216} - \frac{3}{216} - \frac{6}{216} = \frac{206}{216}$

w	99	14	4	-1
$P(W = w)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{206}{216}$

$$E(W) = 99 \cdot \frac{1}{216} + 14 \cdot \frac{3}{216} + 4 \cdot \frac{6}{216} + (-1) \cdot \frac{206}{216} \approx -0,19$$

De verwachtingswaarde van de winst per spel is -19 cent.

4 a $X = \text{aantal leerlingen met wiskunde A of wiskunde C}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 15$ en $p = 0,45 + 0,09 = 0,54$.
 De GR geeft $P(X \leq 10) \approx 0,894$.

b $Y = \text{aantal leerlingen dat geen wiskunde C heeft}$
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 15$ en $p = 1 - 0,09 = 0,91$.
 $P(Y = 0) = 0,91^{15} \approx 0,243$

5 a $X = \text{aantal dat met het vliegtuig gaat}$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = 0,42$.
 $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10)$
 De GR geeft $P(X > 10) \approx 0,170$.

b $P(10 \text{ met de auto en } 10 \text{ met het vliegtuig}) = \binom{20}{10} \cdot 0,51^{10} \cdot 0,42^{10} \approx 0,038$

- 6 a** $n = 40$ en $E(X) = np = 22,4$ geeft $40p = 22,4$, dus $p = 0,56$.

$$\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{40 \cdot 0,56 \cdot 0,44} \approx 3,14$$

$$\left. \begin{array}{l} E(Y) = 45, \text{ dus } np = 45 \\ \sigma_Y = \sqrt{np(1-p)} = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sqrt{45(1-p)} = 6 \\ 45(1-p) = 36 \\ 1-p = 0,8 \\ p = 0,2 \end{array}$$

$p = 0,2$ en $np = 45$ geeft $0,2n = 45$, dus $n = 225$.

Dus $n = 225$ en $p = 0,2$.

Bladzijde 101

- 7 a** Normale verdeling met $\mu = 201$ en $\sigma = 44$.
Bij $l = -10^{99}$ en $r = 256$ geeft de GR opp $\approx 0,894$.

Dus 89,4%.

- b** Bij $l = 188$ en $r = 241$ geeft de GR opp $\approx 0,435$.

Dus 43,5%.

- 8 a** Normale verdeling met $\mu = 168$ en $\sigma = 12$.
opp links van a is $\frac{1}{2}(1 - 0,75) = 0,125$

De GR geeft $a \approx 154,2$.

- b** Normale verdeling met $\mu = x$, $\sigma = 18$, $l = 112$ en $r = 10^{99}$.

Los op opp = 0,71.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,71$.

De optie snijpunt geeft $x = 121,96\dots$, dus $\mu \approx 122$.

- c** Normale verdeling met $\mu = 18$, $\sigma = x$, $l = 14$ en $r = 22$.

Los op opp = 0,74.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,74$.

De optie snijpunt geeft $x = 3,551\dots$, dus $\sigma \approx 3,55$.

- 9 a** 47 minuten en 30 seconden = 47,5 minuten

50 seconden = $\frac{5}{6}$ minuut

Normale verdeling met $\mu = 47,5$ en $\sigma = \frac{5}{6}$.

opp links van a is $1 - 0,02 = 0,98$

De GR geeft $a \approx 49,21$.

0,21 minuut ≈ 13 seconden

Dus 49 minuten en 13 seconden.

- b** Bij een snelheid van 20 km per uur hoort een tijd van

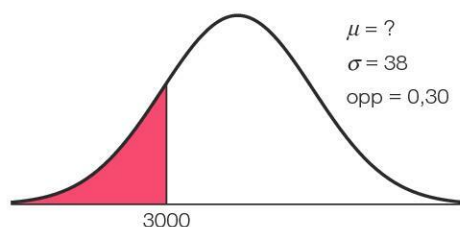
$$\frac{15}{20} = 0,75 \text{ uur} = 45 \text{ minuten.}$$

Snelheid meer dan 20 km per uur, dus tijd minder dan 45 minuten.

Bij $l = -10^{99}$ en $r = 45$ geeft de GR opp $\approx 0,001$.

Dus in 0,1% van de gevallen.

- c** 50 minuten = 3000 seconden



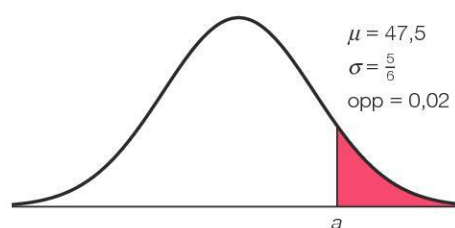
Normale verdeling met $\mu = x$, $\sigma = 38$, $l = -10^{99}$ en $r = 3000$.

Los op opp = 0,30.

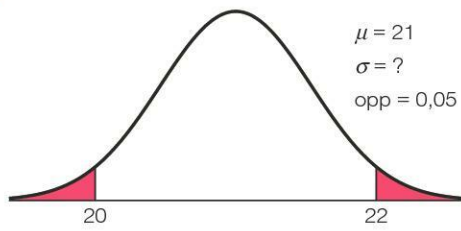
Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,30$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 3020$.

Dus Nadine loopt de 15 km in een gemiddelde tijd van 50 minuten en 20 seconden.



10 3 minuten per uur, dus $\frac{3}{60} = \frac{1}{20} = 0,05$



Normale verdeling met $\mu = 21$, $\sigma = x$, $l = 20$ en $r = 22$.

Los op opp = $1 - 0,05 = 0,95$.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,95$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,510...$

Dus de standaardafwijking is $0,51^\circ\text{C}$.

10 Exponenten en logaritmen

Voorkennis Lineaire en exponentiële groei

Bladzijde 106

- 1** **a** $N = b \cdot g^t$ met $b = 11,14$ en $g = 1,015$ geeft $N = 11,14 \cdot 1,015^t$.
b Bij 1 januari 2024 hoort $t = 6$.
 $t = 6$ geeft $N = 11,14 \cdot 1,015^6 = 12,180\dots$
Dus 12,18 miljoen.
c Voer in $y_1 = 11,14 \cdot 1,015^x$ en $y_2 = 13$.
De optie snijpunt geeft $x = 10,37\dots$
Dus in het jaar $2018 + 10 = 2028$.
d Bij 1 januari 2010 hoort $t = -8$.
 $t = -8$ geeft $N = 9,889\dots$
Dus 9,89 miljoen.
e In 2025, dus van $t = 7$ tot $t = 8$.
 $t = 7$ geeft $N = 12,363\dots$ en $t = 8$ geeft $N = 12,549\dots$
De toename is ongeveer $0,19$ miljoen = 190 000.

- 2** **a** $N = b \cdot g^t$ met $b = 100$ en $g = 0,8$ geeft $N = 100 \cdot 0,8^t$.
b Voer in $y_1 = 100 \cdot 0,8^x$ en $y_2 = 25$.
De optie snijpunt geeft $x = 6,21\dots$
Dus na 6,2 uur.

- 3** **a** $V_z = b \cdot g^t$ met $b = 290$ en $g = 1,4$ geeft $V_z = 290 \cdot 1,4^t$.
 $V_w = at + b$ met $a = 310$ en $b = 2430$ geeft $V_w = 310t + 2430$.
b Los op $290 \cdot 1,4^t = 2(310t + 2430)$.
Voer in $y_1 = 290 \cdot 1,4^x$ en $y_2 = 2(310x + 2430)$.
De optie snijpunt geeft $x = 10,98\dots$
Dus in het jaar $2012 + 10 = 2022$.

Bladzijde 107

- 4** **a** $\frac{16,07}{13,84} \approx 1,16$; $\frac{18,72}{16,07} \approx 1,16$; $\frac{21,65}{18,72} \approx 1,16$; $\frac{25,02}{21,65} \approx 1,16$
De quotiënten zijn bij benadering gelijk, dus je mag uitgaan van exponentiële groei.
b De formule is $O = 13,84 \cdot 1,16^t$.
c Bij 2023 hoort $t = 9$.
 $t = 9$ geeft $O = 13,84 \cdot 1,16^9 \approx 52,63$, dus de omzet in 2023 is 52,63 miljard euro.
De omzet per Nederlander in 2023 is naar verwachting $\frac{52,63 \text{ miljard}}{17,6 \text{ miljoen}} \approx 2990$ euro.

10.1 Exponentiële groei

Bladzijde 108

- 1** De groeifactor is 1,05 per jaar.

Bladzijde 109

- 2** **a** x tussen 0 en 40, y tussen 0 en 250.
b Voer in $y_1 = 250 \cdot 0,955^x$ en $y_2 = 125$.
De optie snijpunt geeft $x = 15,05\dots$
Dus in het jaar 2015.

3 groeipercentage	13%	3,3%	120%	0,7%	12%	6%	150%	23,7%
groeifactor	1,13	1,033	2,20	1,007	1,12	1,06	2,5	1,237

4	afname in procenten	13%	41,8%	6,2%	0,3%	2%	0,1%	75,4%
	groefactor	0,87	0,582	0,938	0,997	0,98	0,999	0,246

- 5 a $R = b \cdot g^t$ met $b = 215\,000$ en $g = 1,02$ geeft $R = 215\,000 \cdot 1,02^t$.
b Los op $215\,000 \cdot 1,02^t = 400\,000$.
Voer in $y_1 = 215\,000 \cdot 1,02^x$ en $y_2 = 400\,000$.
De optie snijpunt geeft $x = 31,35\dots$
Dus in februari 2019.
c Bij december 2023 hoort $t = 90$ en bij januari 2023 hoort $t = 79$.
 $t = 79$ geeft $R \approx 1\,027\,666$ en $t = 90$ geeft $R \approx 1\,277\,774$.
De toename is 250 108 ritten.
- 6 a $N = b \cdot g^t$ met $b = 400$ en $g = 1,12$ geeft $N = 400 \cdot 1,12^t$.
b Los op $400 \cdot 1,12^t = 15\,000$.
Voer in $y_1 = 400 \cdot 1,12^x$ en $y_2 = 15\,000$.
De optie snijpunt geeft $x = 31,98\dots$
Dus in $1990 + 32 = 2022$.
c Voor de schade S in miljoenen euro's per jaar geldt $S = 2 \cdot 1,10^t$ met $t = 0$ in 2015.
In 2025 is $S = 2 \cdot 1,10^{10} = 5,187\dots$ en $N = 400 \cdot 1,12^{35} \approx 21\,120$.
In 2025 is de gemiddelde schade die een halsbandparkiet aanbrengt $\frac{5,187\dots \text{ miljoen}}{21\,120} \approx 246$ euro.

Bladzijde 110

- 7 a Dat was $\frac{15,65}{190} \times 100\% \approx 8,2\%$.
b $K_W = b \cdot g^t$ met $b = 190$ en $g = 1,018$ geeft $K_W = 190 \cdot 1,018^t$.
c $20\,000 = 0,02$ miljoen
 $K_E = at + b$ met $a = -0,02$ en $b = 15,65$ geeft $K_E = -0,02t + 15,65$.
d Bij 2025 hoort $t = 10$.
 $t = 10$ geeft $K_W = 190 \cdot 1,018^{10} = 227,1\dots$ en $K_E = -0,02 \cdot 10 + 15,65 = 15,45$.
Dat is $\frac{15,45}{227,1\dots} \times 100\% \approx 6,8\%$.
- 8 $N_{VS} = 1,8t + 333,5$ met t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2020.
 $N_{Rusland} = 142,9 \cdot 0,996^t$ met t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2020.
Los op $1,8t + 333,5 = 3 \cdot 142,9 \cdot 0,996^t$.
Voer in $y_1 = 1,8x + 333,5$ en $y_2 = 3 \cdot 142,9 \cdot 0,996^x$.
De optie snijpunt geeft $x = 27,78\dots$
Dus in het jaar 2047.
- 9 Het percentage biomassa is $P_b = 0,21t + 3,89$ en het percentage zonne-energie is $P_z = 0,25 \cdot 1,35^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2015.
Bij 2023 hoort $t = 8$.
 $t = 8$ geeft $P_b = 0,21 \cdot 8 + 3,89 = 5,57$ en $P_z = 0,25 \cdot 1,35^8 \approx 2,76$.
Dus in 2023 is $5,57 + 2,76 = 8,33\%$ van het totale energieverbruik afkomstig van biomassa en zonne-energie.
- 10 Noem het percentage windenergie en overig P_{wo} .
In 2015 is $P_{wo} = 5,74 - 3,89 - 0,25 = 1,60$.
Dus $P_{wo} = 1,60 \cdot 1,13^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2015.
Bij 2030 hoort $t = 15$.
 $t = 15$ geeft $P_b = 0,21 \cdot 15 + 3,89 = 7,04$, $P_z = 0,25 \cdot 1,35^{15} \approx 22,54$ en $P_{wo} = 1,60 \cdot 1,13^{15} \approx 10,01$.
In totaal is in 2030 het aandeel hernieuwbare bronnen ongeveer $7,04 + 22,54 + 10,01 \approx 39,6\%$.
Dus het doel wordt gehaald.

Bladzijde 111

- 11 a** Los op $500 \cdot 1,0175^x = 1000$.
 Voer in $y_1 = 500 \cdot 1,0175^x$ en $y_2 = 1000$.
 De optie snijpunt geeft $x = 39,95\dots$
 Dus na ongeveer 40 maanden is de hoeveelheid verdubbeld.
- b** Los op $1740 \cdot 1,0175^x = 3480$.
 Voer in $y_1 = 1740 \cdot 1,0175^x$ en $y_2 = 3480$.
 De optie snijpunt geeft $x = 39,95\dots$
 Dus na ongeveer 40 maanden is de hoeveelheid verdubbeld.
- c** Een verdubbeling van de hoeveelheid duurt in beide gevallen ongeveer 40 maanden.

Bladzijde 112

- 12 a** $g_{\text{jaar}} = 1,131$, dus los op $1,131^x = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,131^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 5,63\dots$
 De verdubbelingstijd is 5 jaar en $0,63\dots \cdot 12 \approx 8$ maanden.
- b** Er geldt $g^7 = 2$ met g de groeifactor per dag.
 $g^7 = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{7}} \approx 1,104$
 Het groeipcentage per dag is 10,4%.
- 13 a** $g_{\text{dag}} = 0,917$, dus los op $0,917^x = \frac{1}{2}$.
 Voer in $y_1 = 0,917^x$ en $y_2 = \frac{1}{2}$.
 De optie snijpunt geeft $x = 7,99\dots$
 De halveringstijd is 8 dagen.
- b** Los op $0,917^x = 0,1$.
 Voer in $y_1 = 0,917^x$ en $y_2 = 0,1$.
 De optie snijpunt geeft $x = 26,57\dots$
 Na ongeveer 26,6 dagen.
- 14 a** $g_{\text{jaar}} = 1,025$, dus los op $1,025^x = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,025^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 28,07\dots$
 De verdubbelingstijd is ongeveer 28 jaar.
- b** De bevolking van Gabon groeit langzamer, dus deze verdubbelt minder snel. De verdubbelingstijd van de bevolking van Gabon is dus langer.
- c** Er geldt $g^{11,5} = 2$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{11,5} = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{11,5}} \approx 1,062$
 Het groeipcentage per jaar was 6,2%.

Bladzijde 113

- 15** Voor de loopkevers in Drenthe geldt $g^{12} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{12} = \frac{1}{2}$ geeft $g^{27} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{27}{12}} \approx 0,210$ en dat betekent een afname van 79% in 27 jaar.
 Dit is in lijn met het onderzoek in Duitsland.
- 16 a** In periode I is de groeifactor per jaar 1,097.
 Daarbij hoort een verdubbelingstijd van $7,48\dots \approx 7$ jaar.
 In periode II is de groeifactor per jaar 1,038.
 Daarbij hoort een verdubbelingstijd van $18,58\dots \approx 19$ jaar.
 In periode III is de groeifactor per jaar 1,050.
 Daarbij hoort een verdubbelingstijd van $14,20\dots \approx 14$ jaar.
 In periode IV is de groeifactor per jaar 1,039.
 Daarbij hoort een verdubbelingstijd van $18,11\dots \approx 18$ jaar.
- b** Bij de periode 2000 t/m 2012 hoort een groeifactor van $1,097^4 \cdot 1,038^2 \cdot 1,050^2 \cdot 1,039^5 \approx 2,083$.
 De zorgkosten zijn in de periode 2000 t/m 2012 dus verdubbeld.

- c Er geldt $g^{26} = 2$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{26} = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{26}} \approx 1,027$
 Het groeipercentage per jaar was 2,7%.
- d In 2015 waren de uitgaven $\frac{100 \text{ miljard}}{1,027^3} \approx 92$ miljard euro.

- 17 Bij groeipercentage 20% hoort $g = 1,20$.
 Bij groeipercentage 40% hoort $g = 1,40$.
 Voer in $y_1 = 1,20^x$, $y_2 = 1,40^x$ en $y_3 = 2$.
 De optie snijpunt bij y_1 en y_3 geeft $x \approx 3,802$.
 De optie snijpunt bij y_2 en y_3 geeft $x \approx 2,060$.
 $\frac{2,060}{3,802} \approx 0,54$
 Een verdubbeling van het groeipercentage heeft dus in het algemeen geen halvering van de verdubbelingstijd als gevolg.

- 18 Stel in de laatste 2 jaar is g de vermenigvuldigingsfactor per jaar.
 Er geldt dan $1,12^3 \cdot g^2 = 2$.
 Dit geeft $g^2 = \frac{2}{1,12^3}$, dus $g = \sqrt{\frac{2}{1,12^3}} \approx 1,193$.
 Het jaarlijkse toenamepercentage voor de laatste twee jaar is 19,3%.

Bladzijde 114

- 19 a Op $t = 0$ zijn er N exemplaren.
 Na T jaar zijn er $2N$ exemplaren.
 Na $2T$ jaar zijn er $4N$ exemplaren.
 Na $3T$ jaar zijn er $8N$ exemplaren.
 Na $4T$ jaar zijn er $16N$ exemplaren.
 Dus na drie keer T jaar zijn er 8 keer zoveel exemplaren en na vier keer T jaar zijn er 16 keer zoveel exemplaren.
- b $10\,000 + 30\,000 = 40\,000$ exemplaren, dus dat is vier keer zoveel.
 Dat duurt twee verdubbelingstijden, oftewel $2 \cdot 1,5 = 3$ jaar.
- c Dan duurt het dus $2 \cdot 5 = 10$ jaar.

10.2 Groepercentages en formules

Bladzijde 116

- 20 a
- | tijd in jaren | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------|---|----|-----|------|--------|---------|
| hoeveelheid N | 2 | 18 | 162 | 1458 | 13 122 | 118 098 |
- b $\frac{162}{2} = \frac{1458}{18} = \frac{13\,122}{162} = \frac{118\,098}{1458} = 81$, dus met 81.
- c Vermenigvuldigen met 4,5 per halfjaar geeft een vermenigvuldiging met $4,5 \cdot 4,5 = 20,25$ per jaar.
 Dat is meer dan 9, dus per halfjaar wordt N dus met minder dan 4,5 vermenigvuldigd.

Bladzijde 117

- 21 a $g_{\frac{1}{4} \text{ uur}} = 1,12$
 $g_{\text{uur}} = 1,12^4 \approx 1,574$
 De toename per uur is 57,4%.
- b $g_{15 \text{ minuten}} = 1,12$
 $g_{5 \text{ minuten}} = 1,12^{\frac{1}{3}} \approx 1,038$
 De toename per vijf minuten is 3,8%.
- c $g_{\text{uur}} = 1,12^4$
 $g_{5 \text{ uur}} = (1,12^4)^5 = 1,12^{20} \approx 9,65$
 De toename per 5 uur is 865%.

- 22 a** $g_{\text{dag}} = 0,84$
 $g_{\text{week}} = 0,84^7 \approx 0,295$
b $g_{\text{dag}} = 0,84$
 $g_{\text{uur}} = 0,84^{\frac{1}{24}} \approx 0,993$
 De afname per uur is 0,7%.
c $g_{\text{dag}} = 0,84$
 $g_{\text{kwartier}} = 0,84^{\frac{1}{96}} \approx 0,9982$
 De afname per kwartier is 0,18%.

Bladzijde 118

- 23 a** $g_{\text{jaar}} = 1,066$
 $g_{10 \text{ jaar}} = 1,066^{10} \approx 1,895$
 De toename per 10 jaar is 89,5%.
b $g_{\text{uur}} = 0,805$
 $g_{\text{kwartier}} = 0,805^{\frac{1}{4}} \approx 0,947$
 De afname per kwartier is 5,3%.
c $g_{\text{jaar}} = 1,0008$
 $g_{\text{eeuw}} = 1,0008^{100} \approx 1,083$
 De toename per eeuw is 8,3%.
d $g_{\text{week}} = 2,80$
 $g_{\text{dag}} = 2,80^{\frac{1}{7}} \approx 1,158$
 De toename per dag is 15,8%.
- 24 a** $g_{48 \text{ maanden}} = 2$
 $g_{\text{maand}} = 2^{\frac{1}{48}} \approx 1,015$
 Het groeipercentage per maand is 1,5%.
b $1,5 \text{ jaar} = 1,5 \cdot 52 = 78 \text{ weken}$
 $g_{78 \text{ weken}} = 2$
 $g_{\text{week}} = 2^{\frac{1}{78}} \approx 1,009$
 Het groeipercentage per week is 0,9%.
c $15 \text{ seconden} = \frac{1}{4} \text{ minuut}$
 $g_{\frac{1}{4} \text{ minuut}} = \frac{1}{2}$
 $g_{\text{minuut}} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0,063$
 De afname per minuut is 93,7%.
- 25 a** Bij een toename van 5% per dag hoort $g_{\text{dag}} = 1,05$, dus $g_{\text{week}} = 1,05^7 \approx 1,407$.
 De toename per week is dus ongeveer 40,7%.
b Bij een afname van 20% per uur hoort $g_{\text{uur}} = 0,8$, dus $g_{\text{kwartier}} = 0,8^{\frac{1}{4}} \approx 0,946$.
 De afname per kwartier is dus ongeveer 5,4%.
- 26 a** $g_{3 \text{ jaar}} = 2,5$
 $g_{\text{jaar}} = 2,5^{\frac{1}{3}} \approx 1,357$
 Het groeipercentage per jaar is 35,7%.
b $g_{5 \text{ jaar}} = 2$
 $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{5}} \approx 1,149$
 Het groeipercentage per jaar is 14,9%.
c $g_{12 \text{ jaar}} = 0,78$
 $g_{\text{jaar}} = 0,78^{\frac{1}{12}} \approx 0,9795 \dots \approx 0,980$
 De afname per jaar is 2,0%.

Bladzijde 119

- 27** Voor de hoeveelheid wereldwijd geproduceerd plastic geldt:

$$g_{39 \text{ jaar}} = \frac{250}{44}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{250}{44}\right)^{\frac{1}{39}} \approx 1,046.$$

Het groeipercentage per jaar is 4,6%.

Voor de hoeveelheid microplastic in de lagen van de bodem geldt:

$$g_{22 \text{ jaar}} = \frac{17}{6}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{17}{6}\right)^{\frac{1}{22}} \approx 1,048.$$

Het groeipercentage per jaar is 4,8%.

Dus de hoeveelheden nemen met ongeveer hetzelfde percentage toe.

- 28** $g_{6 \text{ jaar}} = 12$
 $g_{\text{jaar}} = 12^{\frac{1}{6}} \approx 1,513$

Het totaal piekvermogen eind 2017 was $\frac{4400}{1,513} \approx 2908$ megawattpiek.

Dus op daken van particulieren was $0,58 \cdot 2908 \approx 1687$ megawattpiek geïnstalleerd.

- 29** **a** $g_{4 \text{ uur}} = \frac{300\,000}{50\,000} = 6$ geeft $g_{\text{uur}} = 6^{\frac{1}{4}} \approx 1,565$
b De formule is $N = b \cdot 1,565^t$.
 Invullen van $t = 5$ en $N = 50\,000$ geeft $b \cdot 1,565^5 = 50\,000$.

Bladzijde 120

- 30** **a** $N = b \cdot g^t$ met $g_{7 \text{ uur}} = \frac{4100}{1600}$, dus $g_{\text{uur}} = \left(\frac{4100}{1600}\right)^{\frac{1}{7}} = 1,1438\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,1438\dots^t \\ t = 3 \text{ en } N = 1600 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,1438\dots^3 = 1600 \\ b = \frac{1600}{1,1438\dots^3} \approx 1100 \end{array}$$

Dus $N = 1100 \cdot 1,144^t$.

- b** $B = b \cdot g^t$ met $g_{5 \text{ uur}} = \frac{1\,250\,000}{150\,000}$, dus $g_{\text{uur}} = \left(\frac{1\,250\,000}{150\,000}\right)^{\frac{1}{5}} = 1,5281\dots$

$$\left. \begin{array}{l} B = b \cdot 1,5281\dots^t \\ t = 3 \text{ en } B = 150\,000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,5281\dots^3 = 150\,000 \\ b = \frac{150\,000}{1,5281\dots^3} \approx 42\,034 \end{array}$$

Dus $B = 42\,000 \cdot 1,528^t$.

- c** $H = b \cdot g^t$ met $g_{3 \text{ dagen}} = \frac{0,47}{0,60}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{0,47}{0,60}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,9218\dots$

$$\left. \begin{array}{l} H = b \cdot 0,9218\dots^t \\ t = 5 \text{ en } H = 0,60 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,9218\dots^5 = 0,60 \\ b = \frac{0,60}{0,9218\dots^5} \approx 0,90 \end{array}$$

Dus $H = 0,90 \cdot 0,922^t$.

Bladzijde 121

- 31** **a** $N = b \cdot g^t$ met $g_{6 \text{ dagen}} = \frac{2510}{1040}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{2510}{1040}\right)^{\frac{1}{6}} = 1,1581\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,1581\dots^t \\ t = 4 \text{ en } N = 1040 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,1581\dots^4 = 1040 \\ b = \frac{1040}{1,1581\dots^4} \approx 578 \end{array}$$

Dus $N = 580 \cdot 1,158^t$.

- b** $N = b \cdot g^t$ met $g_{5 \text{ dagen}} = \frac{200}{800}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{200}{800}\right)^{\frac{1}{5}} = 0,7578\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,7578\dots^t \\ t = 2 \text{ en } N = 800 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,7578\dots^2 = 800 \\ b = \frac{800}{0,7578\dots^2} \approx 1393 \end{array}$$

Dus $N = 1400 \cdot 0,758^t$.

- 32 a** $\frac{6,05}{4,89} \approx 1,24$; $\frac{7,49}{6,05} \approx 1,24$; $\frac{9,27}{7,49} \approx 1,24$; $\frac{11,47}{9,27} \approx 1,24$
 De quotiënten zijn bij benadering gelijk, dus je mag uitgaan van exponentiële groei.
- b** $g_{32 \text{ verdiepingen}} = \frac{11,47}{4,89}$, dus $g_{\text{verdieping}} = \left(\frac{11,47}{4,89}\right)^{\frac{1}{32}} = 1,0270\dots$
 De totale bouwkosten bij 20 verdiepingen bedragen $4,89 \cdot 1,0270\dots^{20} \approx 8,33$ miljoen euro.
- c** $K = b \cdot g^n$ met $b = 4,89$ en $g = 1,027$ geeft $K = 4,89 \cdot 1,027^n$.
 Los op $4,89 \cdot 1,027^n = 10,3$.
 Voer in $y_1 = 4,89 \cdot 1,027^x$ en $y_2 = 10,3$.
 De optie snijpunt geeft $x = 27,96\dots$
 Zij kan dus 27 verdiepingen bouwen van dit bedrag.

Bladzijde 122

- 33 a** $g_{8 \text{ jaar}} = \frac{1000}{700}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{1000}{700}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1,046$.
 2008 is 13 jaar na 1995, dus in 1995 waren er $\frac{700}{1,046^{13}} \approx 390$ broedparen.
- b** $N = b \cdot g^t$ met $b = 700$, $g = 1,046$ en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2008 geeft
 $N = 700 \cdot 1,046^t$.
 Los op $700 \cdot 1,046^t = 1500$.
 Voer in $y_1 = 700 \cdot 1,046^x$ en $y_2 = 1500$.
 De optie snijpunt geeft $x = 16,94\dots$
 Dus in het jaar $2008 + 17 = 2025$.
- 34 a** $V = b \cdot g^t$ met V het verlies van het zicht van de patiënt in procenten en t de tijd in dagen.
 $g_{39 \text{ dagen}} = \frac{9}{56}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{9}{56}\right)^{\frac{1}{39}} = 0,9542\dots$

$$\left. \begin{array}{l} V = b \cdot 0,9542\dots^t \\ t = 10 \text{ en } V = 56 \end{array} \right\} b \cdot 0,9542\dots^{10} = 56$$

$$b = \frac{56}{0,9542\dots^{10}} = 89,48\dots$$

 Dus op het moment dat de patiënt last kreeg, was het verlies van het zicht 89,5%.
- b** Los op $89,5 \cdot 0,954^t = 1$.
 Voer in $y_1 = 89,5 \cdot 0,954^x$ en $y_2 = 1$.
 De optie snijpunt geeft $x = 95,43\dots$
 Dus na 95,4 dagen, dat is ongeveer 14 weken.

- 35** In 2025 zijn er naar verwachting $313 \cdot 1,095^{10} \approx 776$ mannelijke 100-plussers.
 Voor de vrouwen geldt $g_{15 \text{ jaar}} = \frac{2112}{928}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{2112}{928}\right)^{\frac{1}{15}} = 1,0563\dots$
 In 2025 zijn er dus naar verwachting $2112 \cdot 1,0563\dots^{10} \approx 3654$ vrouwelijke 100-plussers.
 Dus naar verwachting is in 2025 van de 100-plussers $\frac{776}{3654 + 776} \times 100\% \approx 17,5\%$ man.

- 36** $H = b \cdot g^n$ met $b = 5$ en $g_{3 \text{ stuiters}} = \frac{2,56}{5}$, dus $g_{\text{stuiters}} = \left(\frac{2,56}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,8$.
 $H = 5 \cdot 0,8^n$ met H de maximale hoogte in meters na n keer stuiten.
 De afgelegde afstand is $5 + 2 \cdot 5 \cdot 0,8 + 2 \cdot 5 \cdot 0,8^2 + 2 \cdot 2,56 = 24,52$ meter = 2452 cm.

10.3 Logaritmen

Bladzijde 124

- 37 a** $x = 3$ **d** $x = 4$
b $x = 2$ **e** $x = \frac{1}{2}$
c $x = 6$ **f** $x = -1$

38 a De afspraak ${}^g\log(g^a) = a$. Je krijgt ${}^3\log(\frac{1}{27}) = {}^3\log(\frac{1}{3^3}) = {}^3\log(3^{-3}) = -3$.

b De afspraak $g^{{}^g\log(x)} = x$. Je krijgt $3^{{}^3\log(50)} = 50$.

c De afspraak ${}^g\log(x) = a$ betekent $x = g^a$. Je krijgt ${}^3\log(x) = 5$ geeft $x = 3^5 = 243$.

39 a ${}^2\log(32) = 5$, want $2^5 = 32$

b ${}^2\log(4) = 2$, want $2^2 = 4$

c ${}^2\log(1) = 0$, want $2^0 = 1$

d ${}^3\log(27) = 3$, want $3^3 = 27$

e ${}^3\log(\frac{1}{3}) = -1$, want $3^{-1} = \frac{1}{3}$

f ${}^5\log(25) = 2$, want $5^2 = 25$

40 a ${}^4\log(16) = 2$

d ${}^5\log(\frac{1}{5}) = -1$

g ${}^2\log(2) = 1$

b ${}^{10}\log(1000) = 3$

e ${}^6\log(1) = 0$

h ${}^2\log(\frac{1}{4}) = -2$

c ${}^3\log(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$

f ${}^{10}\log(\frac{1}{10}) = -1$

i ${}^4\log(0,25) = -1$

41 a ${}^2\log(256\sqrt{2}) = {}^2\log(2^8 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = {}^2\log(2^{8\frac{1}{2}}) = 8\frac{1}{2}$

b ${}^3\log(\frac{1}{9}\sqrt{3}) = {}^3\log(\frac{1}{3^2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^3\log(3^{-1\frac{1}{2}}) = -1\frac{1}{2}$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log(4 \cdot \sqrt[3]{2}) = {}^{\frac{1}{2}}\log((\frac{1}{2})^{-2} \cdot (\frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}}) = {}^{\frac{1}{2}}\log((\frac{1}{2})^{-2\frac{1}{3}}) = -2\frac{1}{3}$

42 a Omdat $2^{-2} = \frac{1}{4}$ en dus niet $2^{-2} = -4$.

b Omdat $1^8 = 1$ en dus niet $1^8 = 8$.

c Er geldt $1^8 = 1$, maar bijvoorbeeld ook $1^7 = 1$, dus dan zou ${}^1\log(1)$ ook gelijk aan 7 moeten zijn.

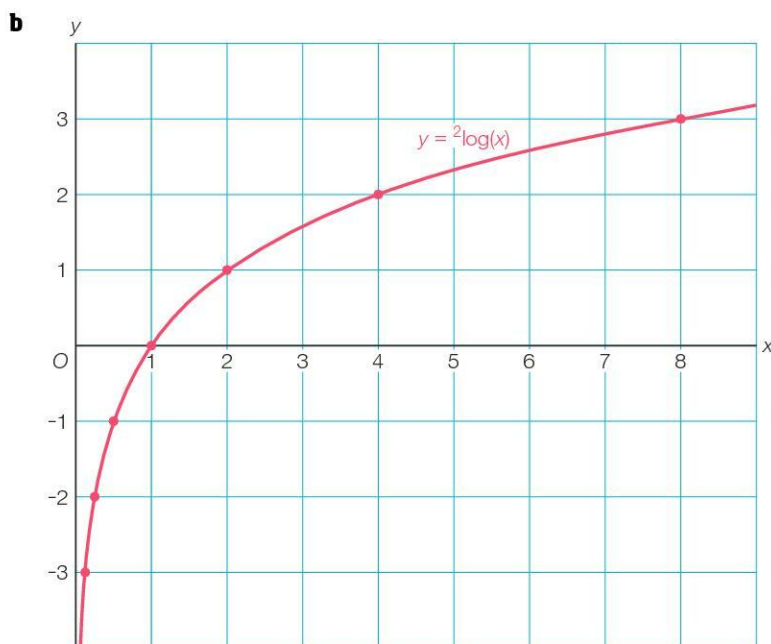
Dit kan natuurlijk niet.

d $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$ en dus niet $(-2)^{-3} = 8$.

Het klopt dus niet.

43 a

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = {}^2\log(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3



Bladzijde 127

- 44** a ${}^3\log(5) \approx 1,46$ d $\frac{1}{3}\log(10) + \log(\frac{1}{3}) \approx -2,57$
 b $\frac{1}{7}\log(18) \approx -1,49$ e $3 \cdot {}^2\log(7) \approx 8,42$
 c ${}^2\log(20) - {}^2\log(6) \approx 1,74$ f $\frac{5}{{}^4\log(12)} \approx 2,79$

- 45** a $N = 50 \cdot {}^5\log(t) = 50 \cdot \frac{\log(t)}{\log(5)} = \frac{50}{\log(5)} \cdot \log(t) \approx 71,5 \cdot \log(t)$
 Dus $N = 71,5 \cdot \log(t)$.
 b $P = 100 - \frac{1}{3}\log(q) = 100 - \frac{\log(q)}{\log(\frac{1}{2})} = 100 - \frac{1}{\log(\frac{1}{2})} \cdot \log(q) \approx 100 + 3,3 \cdot \log(q)$
 Dus $P = 100 + 3,3 \cdot \log(q)$.
 c $K = 7 \cdot {}^2\log(x) + 6 \cdot {}^4\log(x) = 7 \cdot \frac{\log(x)}{\log(2)} + 6 \cdot \frac{\log(x)}{\log(4)} = \frac{7}{\log(2)} \cdot \log(x) + \frac{6}{\log(4)} \cdot \log(x)$
 $= \left(\frac{7}{\log(2)} + \frac{6}{\log(4)} \right) \cdot \log(x) \approx 33,2 \cdot \log(x)$
 Dus $K = 33,2 \cdot \log(x)$.
46 a $h = 29$ geeft $m = 37 \cdot \log(29) + 31 \approx 85$
 Dus 85 jaar.
 b $m = 75$ geeft $37 \cdot \log(h) + 31 = 75$
 Voer in $y_1 = 37 \cdot \log(x) + 31$ en $y_2 = 75$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 15$.
 Dus 15 jaar.
 c Bij de vuistregel hoort de formule $m = 7h$.
 Voer in $y_2 = 7x$.
 De optie snijpunt geeft $x = 9,62...$
 Dus vanaf $h = 10$.

Bladzijde 128

- 47** a $B = 11\,275$ geeft $V = 1139 \cdot \log(11\,275) - 4539 \approx 887$
 Dus $907 - 887 = 20$ kcal per persoon per dag meer.
 b $B = 22\,591$ geeft $V = 1139 \cdot \log(22\,591) - 4539 \approx 1291$
 $1017 < 1291$, dus Nederland gaat zuiniger om met voedsel dan op basis van de formule verwacht mag worden.
 c Dat betekent dat mensen in Zimbabwe minder voedsel kopen dan ze nodig hebben.
 d $V = 0$ geeft $1139 \cdot \log(B) - 4539 = 0$
 Voer in $y_1 = 1139 \cdot \log(x) - 4539$.
 De optie nulpunt geeft $x \approx 2454$.
 Dus bij bestedingen van 2454 dollar per persoon per jaar is de voedselverspilling gelijk aan 0.
 e Het gaat om voedselverspilling per persoon per dag. Dat is een gemiddelde. Er zullen in India zowel mensen zijn die minder voedsel kopen dan ze nodig hebben als mensen die meer voedsel kopen dan ze nodig hebben.

Bladzijde 129

- 48** a De afspraak ${}^s\log(x) = a$ betekent $x = g^a$.
 b $y = 4 + 3^x$
 $3^x = y - 4$
 $x = {}^3\log(y - 4)$

Bladzijde 130

- 49** a $N = \log(x - 4) - 3$
 $\log(x - 4) = N + 3$
 $x - 4 = 10^{N+3}$
 $x = 4 + 10^N \cdot 10^3$
 $x = 4 + 1000 \cdot 10^N$
 Dus $a = 4$ en $b = 1000$.

- b** $y = 2 + 4^{x-3}$
 $4^{x-3} = y - 2$
 $x - 3 = {}^4\log(y - 2)$
 $x = 3 + {}^4\log(y - 2)$
- c** $P = 2 \cdot {}^3\log(x) - 4$
 $2 \cdot {}^3\log(x) = P + 4$
 ${}^3\log(x) = \frac{1}{2}P + 2$
 $x = 3^{\frac{1}{2}P + 2} = 3^{\frac{1}{2}P} \cdot 3^2 = 3^2 \cdot (3^{\frac{1}{2}})^P \approx 9 \cdot 1,732^P$
Dus $x = 9 \cdot 1,732^P$
- d** $K = 10 - 2 \cdot 4^x$
 $2 \cdot 4^x = 10 - K$
 $4^x = 5 - \frac{1}{2}K$
 $x = {}^4\log(5 - \frac{1}{2}K)$

- 50 a** $M = {}^2\log(2t - 6)$
 $2t - 6 = 2^M$
 $2t = 6 + 2^M$
 $t = 3 + \frac{1}{2} \cdot 2^M = 3 + 2^{-1} \cdot 2^M = 3 + 2^{M-1}$
- b** $F = 16 - 2^{2N-1}$
 $2^{2N-1} = 16 - F$
 $2N - 1 = {}^2\log(16 - F)$
 $2N = 1 + {}^2\log(16 - F)$
 $N = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(16 - F)$
- c** $x = 3^{0,25y - 0,6}$
 $0,25y - 0,6 = {}^3\log(x)$
 $0,25y = 0,6 + {}^3\log(x)$
 $y = 2,4 + 4 \cdot {}^3\log(x)$
Dus $a = 2,4$ en $b = 4$.
- d** $y = \log(2x + 3) - 0,8$
 $\log(2x + 3) = y + 0,8$
 $2x + 3 = 10^{y+0,8}$
 $2x = -3 + 10^y \cdot 10^{0,8}$
 $x = -1,5 + \frac{1}{2} \cdot 10^{0,8} \cdot 10^y \approx -1,5 + 3,15 \cdot 10^y$
Dus $a = -1,5$ en $b = 3,15$.

- 51 a** $Z = {}^3\log(4n + 1) - 6$
 ${}^3\log(4n + 1) = Z + 6$
 $4n + 1 = 3^{Z+6}$
 $4n = -1 + 3^Z \cdot 3^6$
 $n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 3^6 \cdot 3^Z = -\frac{1}{4} + 182\frac{1}{4} \cdot 3^Z$
Dus $n = -\frac{1}{4} + 182\frac{1}{4} \cdot 3^Z$.
- b** $y = 3 + 2^{2x-3}$
 $2^{2x-3} = y - 3$
 $2x - 3 = {}^2\log(y - 3)$
 $2x = 3 + \frac{\log(y - 3)}{\log(2)}$
 $x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot \log(2)} \cdot \log(y - 3) \approx 1,5 + 1,66 \cdot \log(y - 3)$
Dus $a = 1,5$ en $b = 1,66$.
- c** $D = \log(\sqrt{E}) - 1\frac{1}{2}$
 $\log(\sqrt{E}) = D + 1\frac{1}{2}$
 $\sqrt{E} = 10^{D+1\frac{1}{2}}$
 $E = (10^{D+1\frac{1}{2}})^2 = 10^{2D+3}$
Dus $E = 10^{2D+3}$.

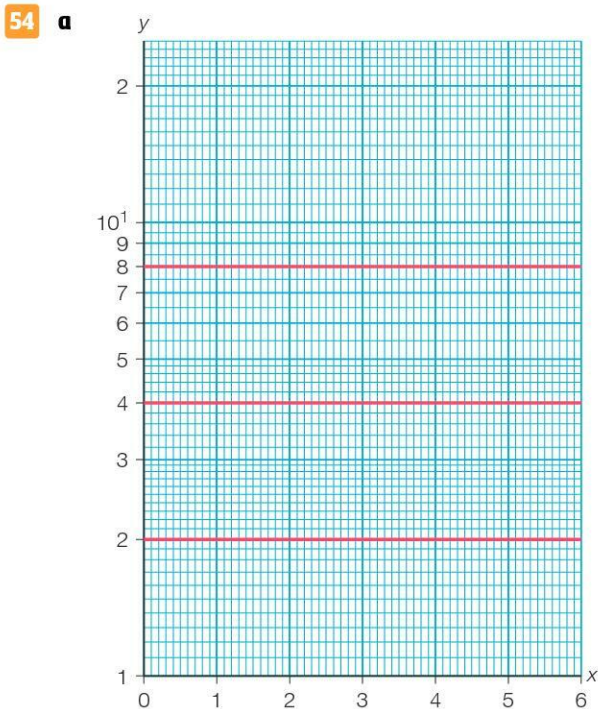
10.4 Werken met logaritmen

Bladzijde 132

- 52 a** De walvis is $\frac{100\,000}{10} = 10\,000$ keer zo zwaar als de wasbeer en $\frac{100\,000}{0,002} = 50\,000\,000$ keer zo zwaar als de kolibrie.
- b** Het verschil in gewicht tussen het zwaarste en het lichtste dier is 99 999 998 gram. De getallenlijn moet dus 99 999 998 mm $\approx$ 100 km lang worden.
- c** De getallenlijn moet dan ongeveer 100 mm = 10 cm lang worden. Het verschil in gewicht tussen de lichtere dieren zal niet meer afleesbaar zijn.

Bladzijde 133

- 53 a** Bij *A* hoort 1,3, bij *B* hoort 7,5, bij *C* hoort 23 en bij *D* hoort 55.
- b** Bij 9,5 en 2,4 is een lijn getekend.
- c** De getallen worden dan allemaal $10^3 = 1000$ keer zo groot, dus bij *B* hoort 7500, bij *C* hoort 23 000 en bij *D* hoort 55 000.

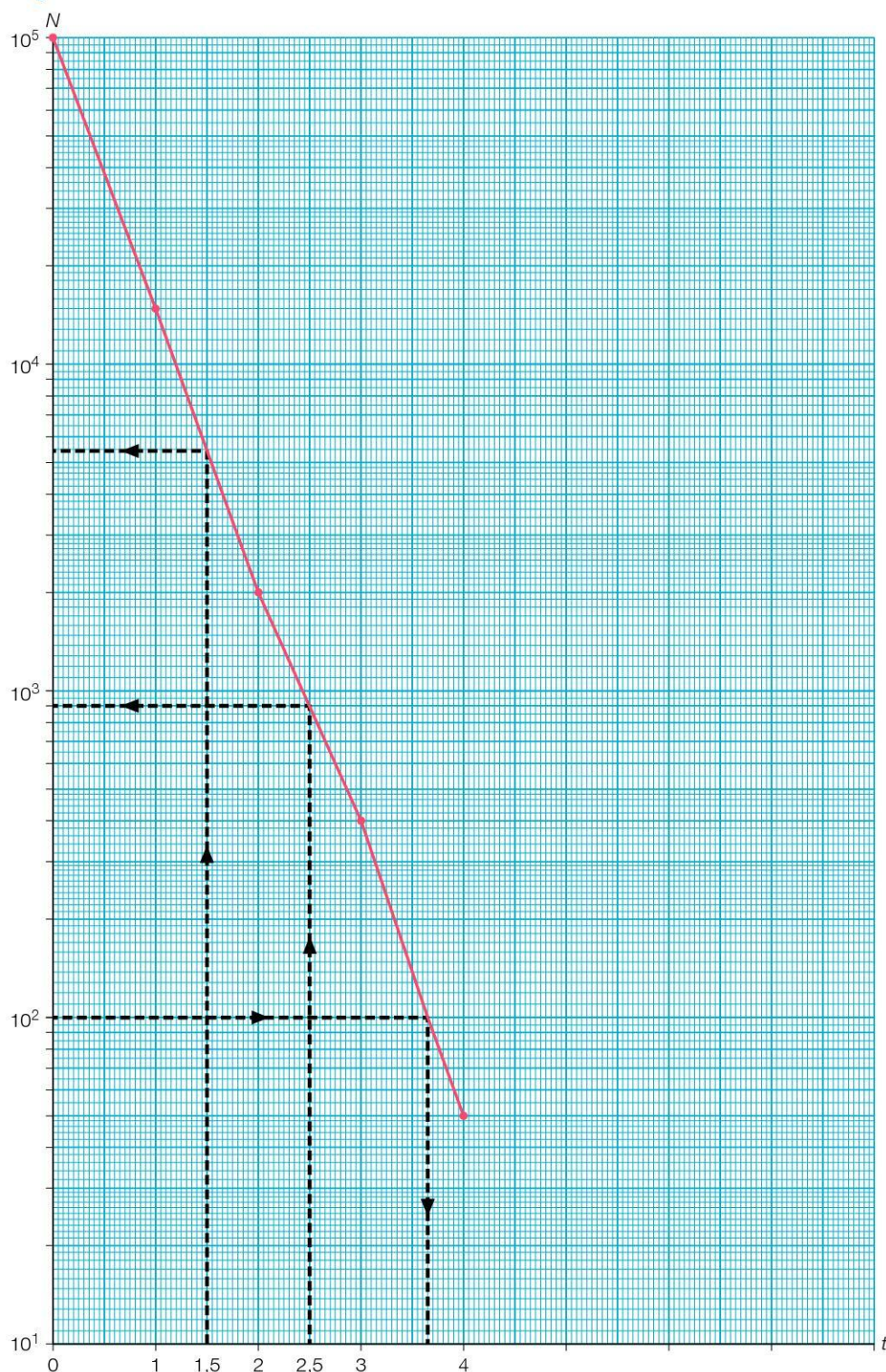


De afstanden zijn gelijk.

- b** Jan tekent de lijn $y = 18$, want $3 \cdot 6 = 18$.
- c** Hierbij horen de formules $y = 54$, $y = 162$ en $y = 486$.

55

a



b Zie de figuur.

Bij $t = 1,5$ lees je af $N = 5500$ en bij $t = 2,5$ lees je af $N = 900$.

c Zie de figuur.

Na ongeveer 3,7 minuten.

56

a Bij soort A hoort gewicht 0,05 kg en populatiedichtheid 1000 per km^2 .

Bij soort B hoort gewicht 500 kg en populatiedichtheid 1 per km^2 .

Bij soort C hoort gewicht 4 kg en populatiedichtheid 70 per km^2 .

b Lees met behulp van de rode lijn af dat bij 1 kg een populatiedichtheid van 100 per km^2 hoort.

c 150 bavianen op 25 km^2 geeft populatiedichtheid $\frac{150}{25} = 6$ per km^2 .

Lees met behulp van de rode lijn af dat hierbij een gewicht van ongeveer 50 kg hoort.

Bladzijde 135

- 57 a** Dit volgt uit de afspraak ${}^g\log(x) = a$ betekent $x = g^a$.
b $N = 10^{0,1t+2,5} = 10^{0,1t} \cdot 10^{2,5} = 10^{2,5} \cdot (10^{0,1})^t \approx 316 \cdot 1,259^t$
 Dus $N = 316 \cdot 1,259^t$.

Bladzijde 136

- 58 a** Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

$$\left. \begin{array}{l} t = 1 \text{ en } N = 30 \\ t = 7 \text{ en } N = 400 \end{array} \right\} g_{6 \text{ dagen}} = \frac{400}{30}$$

$$g_{\text{dag}} = \left(\frac{400}{30} \right)^{\frac{1}{6}} = 1,5398...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,5398...^t \\ t = 1 \text{ en } N = 30 \end{array} \right\} b \cdot 1,5398...^1 = 30$$

$$b = \frac{30}{1,5398...} \approx 19$$

Dus $N = 19 \cdot 1,540^t$.

- b** Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

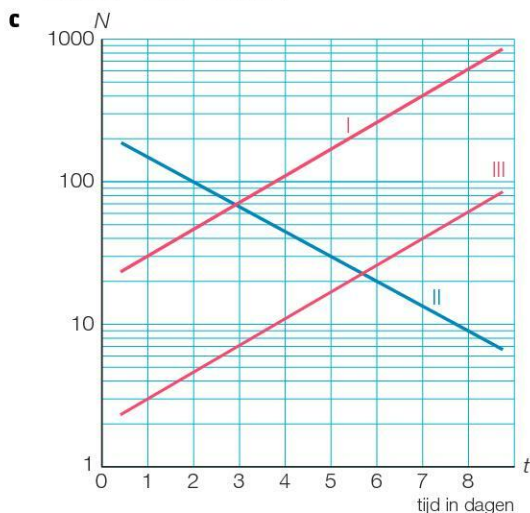
$$\left. \begin{array}{l} t = 2 \text{ en } N = 100 \\ t = 8 \text{ en } N = 9 \end{array} \right\} g_{6 \text{ dagen}} = \frac{9}{100}$$

$$g_{\text{dag}} = \left(\frac{9}{100} \right)^{\frac{1}{6}} = 0,6694...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,6694...^t \\ t = 2 \text{ en } N = 100 \end{array} \right\} b \cdot 0,6694...^2 = 100$$

$$b = \frac{100}{0,6694...^2} \approx 223$$

Dus $N = 223 \cdot 0,669^t$.



Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

$$\left. \begin{array}{l} t = 1 \text{ en } N = 3 \\ t = 7 \text{ en } N = 40 \end{array} \right\} g_{6 \text{ dagen}} = \frac{40}{3}$$

$$g_{\text{dag}} = \left(\frac{40}{3} \right)^{\frac{1}{6}} = 1,5398...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,5398...^t \\ t = 1 \text{ en } N = 3 \end{array} \right\} b \cdot 1,5398... = 3$$

$$b = \frac{3}{1,5398...} \approx 2$$

Dus $N = 2 \cdot 1,540^t$.

N.B. Omdat grafiek III evenwijdig is met grafiek I is $g = 1,540$. Verder zie je dat grafiek III door $(0, 2)$ gaat.

- 59 a** De grafieken van B en C zijn rechte lijnen, dus bij de planten B en C is sprake van exponentiële groei.

$$L_B = b \cdot g^t$$

$$\left. \begin{array}{l} t = 5 \text{ en } L_B = 80 \\ t = 30 \text{ en } L_B = 300 \end{array} \right\} g_{25 \text{ dagen}} = \frac{300}{80} = 3,75$$

$$g_{\text{dag}} = 3,75^{\frac{1}{25}} = 1,054...$$

$$\left. \begin{array}{l} L_B = b \cdot 1,054...^t \\ t = 5 \text{ en } L_B = 80 \end{array} \right\} b \cdot 1,054...^5 = 80$$

$$b = \frac{80}{1,054...^5} \approx 61$$

$$\text{Dus } L_B = 61 \cdot 1,05^t.$$

$$L_C = b \cdot g^t$$

$$\left. \begin{array}{l} t = 5 \text{ en } L_C = 40 \\ t = 25 \text{ en } L_C = 300 \end{array} \right\} g_{20 \text{ dagen}} = \frac{300}{40} = 7,5$$

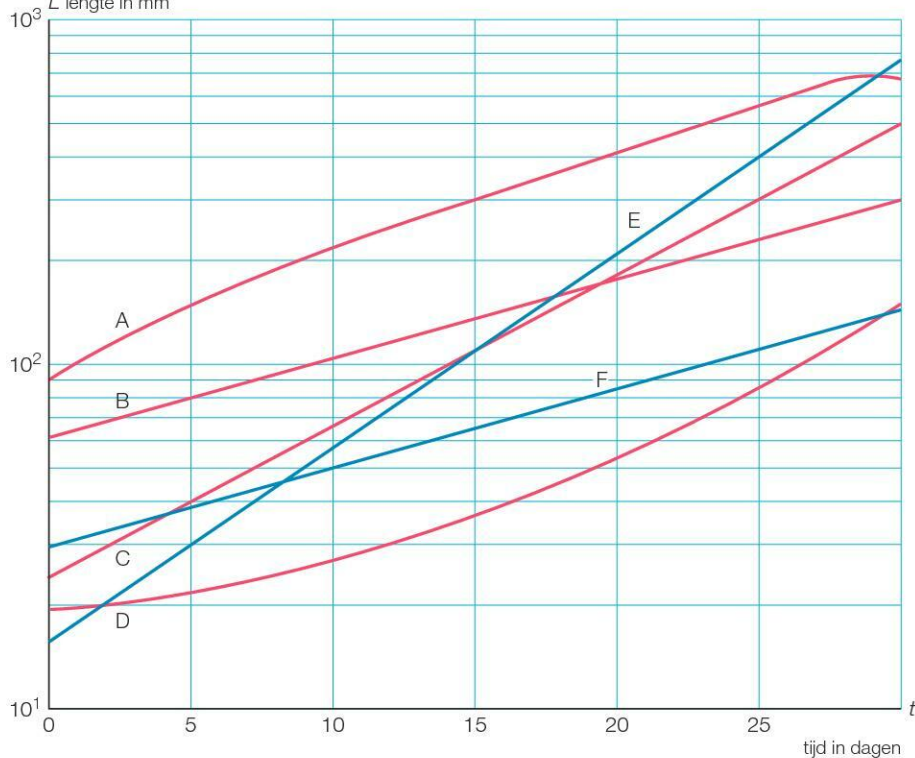
$$g_{\text{dag}} = 7,5^{\frac{1}{20}} = 1,105...$$

$$\left. \begin{array}{l} L_C = b \cdot 1,105...^t \\ t = 5 \text{ en } L_C = 40 \end{array} \right\} b \cdot 1,105...^5 = 40$$

$$b = \frac{40}{1,105...^5} \approx 24$$

$$\text{Dus } L_C = 24 \cdot 1,11^t.$$

b, c L lengte in mm



- c** De lijn van F gaat door $(10, 5)$ en is evenwijdig met de lijn van B.



De punten liggen vrijwel op een rechte lijn, dus het aantal patrijzen neemt exponentieel af.

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad N &= b \cdot g^t \\ \left. \begin{array}{l} t = 1 \text{ en } N = 610 \\ t = 15 \text{ en } N = 75 \end{array} \right\} g_{14 \text{ jaar}} &= \frac{75}{610} \\ g_{\text{jaar}} &= \left(\frac{75}{610} \right)^{\frac{1}{14}} = 0,8609... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,8609...^t \\ t = 1 \text{ en } N = 610 \end{array} \right\} b \cdot 0,8609...^1 &= 610 \\ b &= \frac{610}{0,8609...} \approx 709 \end{aligned}$$

Dus $N = 710 \cdot 0,861^t$.

Bladzijde 137

a Lees in de figuur de punten $(1990, 10^6)$ en $(2010, 10^9)$ af.

$$g_{20 \text{ jaar}} = \frac{10^9}{10^6} = 10^3, \text{ dus } g_{2 \text{ jaar}} = (10^3)^{\frac{1}{10}} = 1,995...$$

Dus de wet van Moore heeft standgehouden.

b $N = 10^9 \cdot 2^t$ met t in tweetallen jaren en $t = 0$ in 2010.

Bij 2025 hoort $t = 7,5$.

$$t = 7,5 \text{ geeft } N = 10^9 \cdot 2^{7,5} \approx 1,8 \cdot 10^{11}$$

- 62 a Voer in $y_1 = \log(x+5)$, $y_2 = \log(x) + \log(5)$ en $y_3 = \log(5x)$.

X	Y1	Y2	Y3
0	0.6989	ERROR	ERROR
1	0.7781	0.6989	0.6989
2	0.845	1	1
3	0.903	1.176	1.176

De formules $y_2 = \log(x) + \log(5)$ en $y_3 = \log(5x)$ komen op hetzelfde neer.

- b Voer in $y_1 = \log(x-5)$, $y_2 = \log(x) - \log(5)$ en $y_3 = \log\left(\frac{x}{5}\right)$.

X	Y1	Y2	Y3
0	ERROR	ERROR	ERROR
1	ERROR	-0.698	-0.698
2	ERROR	-0.397	-0.397
3	ERROR	-0.221	-0.221

De formules $y_2 = \log(x) - \log(5)$ en $y_3 = \log\left(\frac{x}{5}\right)$ komen op hetzelfde neer.

- c Voer in $y_1 = \log(x^3)$, $y_2 = (\log(x))^3$ en $y_3 = 3 \cdot \log(x)$.

X	Y1	Y2	Y3
0	ERROR	ERROR	ERROR
1	0	0	0
2	0.903	0.0272	0.903
3	1.4313	0.1086	1.4313

De formules $y_1 = \log(x^3)$ en $y_3 = 3 \cdot \log(x)$ komen op hetzelfde neer.

Bladzijde 138

- 63 a $N = {}^2\log(64x) = {}^2\log(64) + {}^2\log(x) = 6 + \frac{{}^5\log(x)}{{}^5\log(2)} = 6 + \frac{1}{{}^5\log(2)} \cdot {}^5\log(x) \approx 6 + 2,32 \cdot {}^5\log(x)$

Dus $N = 6 + 2,32 \cdot {}^5\log(x)$.

- b $N\left(\frac{1}{2}x\right) = 31,3 + 24,9 \cdot \log\left(\frac{1}{2}x\right)$
 $= 31,3 + 24,9(\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log(x))$
 $= 31,3 + 24,9 \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) + 24,9 \cdot \log(x)$
 $= 31,3 + 24,9 \cdot \log(x) - 7,49\dots$

Dus $N\left(\frac{1}{2}x\right) \approx N(x) - 7,5$ en hiermee is aangetoond dat N met ongeveer 7,5 afneemt als x halveert.

- c $N(3x) = 31,3 + 24,9 \cdot \log(3x)$
 $= 31,3 + 24,9(\log(3) + \log(x))$
 $= 31,3 + 24,9 \cdot \log(3) + 24,9 \cdot \log(x)$
 $= 31,3 + 24,9 \cdot \log(x) + 11,880\dots$

Dus $N(3x) \approx N(x) + 11,88$ en hiermee is aangetoond dat N met ongeveer 11,88 toeneemt als x verdrievoudigt.

Bladzijde 139

- 64 a $N = {}^3\log(81x) = {}^3\log(81) + {}^3\log(x) = 4 + \frac{\log(x)}{\log(3)} = 4 + \frac{1}{\log(3)} \cdot \log(x) \approx 4 + 2,10 \cdot \log(x)$

Dus $N = 4 + 2,10 \cdot \log(x)$.

- b $N = \log(150x) = \log(150) + \log(x) = \log(150) + \frac{{}^2\log(x)}{{}^2\log(10)} = \log(150) + \frac{1}{{}^2\log(10)} \cdot {}^2\log(x)$
 $\approx 2,18 + 0,30 \cdot {}^2\log(x)$
Dus $N = 2,18 + 0,30 \cdot {}^2\log(x)$.

65 a $N(2x) = 40 + 9,97 \cdot \log(2x)$
 $= 40 + 9,97(\log(2) + \log(x))$
 $= 40 + 9,97 \cdot \log(2) + 9,97 \cdot \log(x)$
 $= 40 + 9,97 \cdot \log(x) + 3,00\dots$

Dus $N(2x) \approx N(x) + 3$.

Als x verdubbelt, dan neemt N met 3 toe.

b $N(2x) = 653 - 33,2 \cdot \log(2x)$
 $= 653 - 33,2(\log(2) + \log(x))$
 $= 653 - 33,2 \cdot \log(2) - 33,2 \cdot \log(x)$
 $= 653 - 33,2 \cdot \log(x) - 9,99\dots$

Dus $N(2x) \approx N(x) - 10$.

Als x verdubbelt, dan neemt N met 10 af.

66 a $N(2x) = 50 + b \cdot \log(2x)$
 $= 50 + b(\log(2) + \log(x))$
 $= 50 + b \cdot \log(2) + b \cdot \log(x)$
Dus $N(2x) = N(x) + b \cdot \log(2)$
 $b \cdot \log(2) = 15$ geeft $b = \frac{15}{\log(2)} \approx 49,83$

Dus $b = 49,83$.

b $N(\frac{1}{2}x) = 50 + b \cdot \log(\frac{1}{2}x)$
 $= 50 + b(\log(\frac{1}{2}) + \log(x))$
 $= 50 + b \cdot \log(\frac{1}{2}) + b \cdot \log(x)$
Dus $N(\frac{1}{2}x) = N(x) + b \cdot \log(\frac{1}{2})$
 $b \cdot \log(\frac{1}{2}) = -6$ geeft $b = \frac{-6}{\log(\frac{1}{2})} \approx 19,93$

Dus $b = 19,93$.

c $N(3x) = 50 + b \cdot \log(3x)$
 $= 50 + b(\log(3) + \log(x))$
 $= 50 + b \cdot \log(3) + b \cdot \log(x)$
Dus $N(3x) = N(x) + b \cdot \log(3)$
 $b \cdot \log(3) = 1$ geeft $b = \frac{1}{\log(3)} \approx 2,10$

Dus $b = 2,10$.

67 a Los op $59,27 \cdot \log(n) - 191,40 = 0$.
Voer in $y_1 = 59,27 \cdot \log(x) - 191,40$.
De optie nulpunt geeft $x \approx 1695$.
De formule geldt vanaf $n = 1700$.
b $n = 158\,000$ geeft $V = 116,72\dots$
 $n = 158\,000 + 56\,000 = 214\,000$ geeft $V = 124,53\dots$
Het bedrijf betaalt $124,53\dots - 116,72\dots \approx \text{€ } 7,81$ meer.
c Het vaste bedrag per jaar is $50 \cdot 12 = 600$ euro.
Het variabele bedrag is dat jaar $2200 - 600 = 1600$ euro en dat is per maand
 $\frac{1600}{12} = 133\frac{1}{3}$ euro.

Los op $59,27 \cdot \log(n) - 191,40 = 133\frac{1}{3}$.

Voer in $y_2 = 133\frac{1}{3}$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 301\,219$, dus ongeveer 301 200 bezoekers.

d $V(2n) = 59,27 \cdot \log(2n) - 191,40$
 $= 59,27(\log(2) + \log(n)) - 191,40$
 $= 59,27 \cdot \log(2) + 59,27 \cdot \log(n) - 191,40$
 $= 59,27 \cdot \log(n) - 191,40 + 17,84\dots$

Bij een verdubbeling van het aantal bezoekers neemt het variabele bedrag met € 17,84 toe.

68 a $N = 15 \cdot {}^2\log(20x) = 15({}^2\log(20) + {}^2\log(x)) = 15 \cdot {}^2\log(20) + 15 \cdot \frac{\log(x)}{\log(2)}$

$$= 15 \cdot {}^2\log(20) + \frac{15}{\log(2)} \cdot \log(x) \approx 64,8 + 49,8 \cdot \log(x)$$

Dus $N = 64,8 + 49,8 \cdot \log(x)$.

b $N(2q) = 17,5 + 12,46 \cdot \log(2q)$
 $= 17,5 + 12,46(\log(2) + \log(q))$
 $= 17,5 + 12,46 \cdot \log(2) + 12,46 \cdot \log(q)$
 $= 17,5 + 12,46 \cdot \log(q) + 3,750...$

Dus $N(2q) \approx N(q) + 3,75$.

Als q verdubbelt, dan neemt N met 3,75 toe.

c $N(2p) = 38,4 + 9,4 \cdot \log((2p)^{1,24})$
 $= 38,4 + 9,4 \cdot 1,24 \cdot \log(2p)$
 $= 38,4 + 11,656(\log(2) + \log(p))$
 $= 38,4 + 11,656 \cdot \log(2) + 11,656 \cdot \log(p)$
 $= 38,4 + 11,656 \cdot \log(p) + 3,50...$

Dus $N(2p) \approx N(p) + 3,5$.

Als p verdubbelt, dan neemt N met 3,5 toe.

d $N(\frac{1}{2}d) = 50 + b \cdot \log(\frac{1}{2}d)$
 $= 50 + b(\log(\frac{1}{2}) + \log(d))$
 $= 50 + b \cdot \log(\frac{1}{2}) + b \cdot \log(d)$

Dus $N(\frac{1}{2}d) = N(d) + b \cdot \log(\frac{1}{2})$

$$b \cdot \log(\frac{1}{2}) = -4,5 \text{ geeft } b = \frac{-4,5}{\log(\frac{1}{2})} \approx 14,95$$

Dus $b = 14,95$.

69 a Bij een storing van 3 uur krijg je geen vergoeding.

Bij een storing van 7,5 uur krijg je € 35,-.

Bij een storing van 10 uur en 15 minuten krijg je $35 + 20 = € 55,-$.

b Los op $-20 + 100 \cdot \log(t) = 0$.

Voer in $y_1 = -20 + 100 \cdot \log(x)$.

De optie nulpunt geeft $x = 1,584...$

$1,584... \cdot 60 \approx 95$, dus tot een onderbreking van 95 minuten krijg je geen compensatie.

c Bij $t = 7,5$ is de vergoeding van Liander € 35,- en is $B = -20 + 100 \cdot \log(7,5) = 67,50...$

Het verschil is dan $67,50... - 35 \approx € 32,51$.

Bij $t = 11,5$ is de vergoeding van Liander € 55,- en is $B = -20 + 100 \cdot \log(11,5) = 86,06...$

Het verschil is dan $86,06... - 55 \approx € 31,07$.

Bij $t = 7,5$ is het verschil $32,51 - 31,07 = € 1,44$ groter dan bij $t = 11,5$.

d In de grafiek kun je zien dat het ging om een vergoeding van $35 + 4 \cdot 20 = € 115,-$.

Los op $-20 + 100 \cdot \log(t) = 115$.

Voer in $y_2 = 115$.

De optie snijpunt geeft $x = 22,38...$

De onderbreking duurde 22 uur en 0,38... $\cdot 60 \approx 23$ minuten.

e $B(2t) = -20 + 100 \cdot \log(2t)$
 $= -20 + 100(\log(2) + \log(t))$
 $= -20 + 100 \cdot \log(2) + 100 \cdot \log(t)$
 $= -20 + 100 \cdot \log(t) + 30,102...$

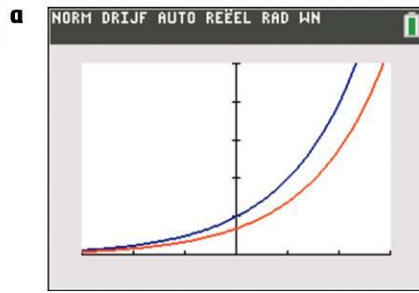
Dus $B(2t) \approx B(t) + 30,10$.

Als t verdubbelt, dan neemt B met € 30,10 toe.

10.5 Groeisnelheid

Bladzijde 142

70



b Steeds is $y_3 \approx 0,6931$.

$$\left. \begin{array}{l} y_3 = \frac{y_2}{y_1} \text{ geeft } y_2 = y_3 \cdot y_1 \\ y_1 = 2^x, y_2 = \frac{dy}{dx} \text{ en } y_3 \approx 0,6931 \end{array} \right\} \frac{dy}{dx} = 0,6931 \cdot 2^x$$

c $c \approx 1,0986$

Bladzijde 143

71

a Met $3e^{0,1t}$ kun je de groeisnelheid berekenen voor iedere waarde van t . De groeisnelheid die twee keer zo groot is als de groeisnelheid op $t = 8$ is $2 \cdot 3e^{0,8}$. Door de vergelijking $3e^{0,1t} = 2 \cdot 3e^{0,8}$ op te lossen, bereken je voor welke waarde van t de groeisnelheid twee keer zo groot is als de groeisnelheid op $t = 8$.

b De optie snijpunt geeft $x \approx 14,9$.

c De groeisnelheid op $t = 5$ is $3e^{0,1 \cdot 5} = 3e^{0,5}$.

Los op $3e^{0,1t} = 3 \cdot 3e^{0,5}$.

Voer in $y_1 = 3e^{0,1x}$ en $y_2 = 3 \cdot 3e^{0,5}$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 16,0$.

Dus voor $t = 16,0$ is de groeisnelheid drie keer zo groot als op $t = 5$.

72

a $y = 500e^{3x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 500e^{3x} \cdot 3 = 1500e^{3x}$

b $y = 600e^{0,4x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 600e^{0,4x} \cdot 0,4 = 240e^{0,4x}$

c $N = 250e^{0,2t+1}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 250e^{0,2t+1} \cdot 0,2 = 50e^{0,2t+1}$

d $N = 1000e^{-0,6t}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 1000e^{-0,6t} \cdot -0,6 = -600e^{-0,6t}$

e $N = 10(1 + e^{0,12p})$ geeft $\frac{dN}{dp} = 10 \cdot e^{0,12p} \cdot 0,12 = 1,2e^{0,12p}$

f $F = 20e^{0,01q^2}$ geeft $\frac{dF}{dq} = 20e^{0,01q^2} \cdot 0,02q = 0,4q \cdot e^{0,01q^2}$

Bladzijde 144

73

a $N = 50(1 + e^{0,18t})$ geeft $\frac{dN}{dt} = 50 \cdot e^{0,18t} \cdot 0,18 = 9e^{0,18t}$

De groeisnelheid op $t = 10$ is $\frac{dN}{dt} = 9e^{0,18 \cdot 10} = 9e^{1,8} \approx 54,4$.

b De groeisnelheid op $t = 5$ is $9e^{0,18 \cdot 5} = 9e^{0,9}$.

Los op $9e^{0,18t} = 2 \cdot 9e^{0,9}$.

Voer in $y_1 = 9e^{0,18x}$ en $y_2 = 2 \cdot 9e^{0,9}$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 8,9$.

Dus op $t = 8,9$ is de groeisnelheid twee keer zo groot als op $t = 5$.

- c De groeisnelheid op $t = 15$ is $9e^{0,18 \cdot 15} = 9e^{2,7}$.
 Los op $9e^{0,18t} = \frac{1}{2} \cdot 9e^{2,7}$.
 Voer in $y_1 = 9e^{0,18x}$ en $y_2 = \frac{1}{2} \cdot 9e^{2,7}$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 11,1$.
 Dus op $t = 11,1$ is de groeisnelheid de helft van die op $t = 15$.

- 74 a Op $[5,8]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(8) - N(5)}{8 - 5} = 142862,28...$ per uur, oftewel $\frac{142862,28...}{60} \approx 2381$ per minuut.
 De gemiddelde groeisnelheid is ongeveer 2400 bacteriën per minuut.
- b $N = 25\,000e^{0,4t}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 25\,000e^{0,4t} \cdot 0,4 = 10\,000e^{0,4t}$
 De groeisnelheid op $t = 5$ is $\frac{dN}{dt} = 10\,000e^{0,4 \cdot 5} = 73\,890,56...$ bacteriën per uur ≈ 1230 bacteriën per minuut.
- c De groeisnelheid op $t = 6$ is $\frac{dN}{dt} = 10\,000e^{0,4 \cdot 6} = 10\,000e^{2,4}$.
 Los op $10\,000e^{0,4t} = 2 \cdot 10\,000e^{2,4}$.
 Voer in $y_1 = 10\,000e^{0,4x}$ en $y_2 = 20\,000e^{2,4}$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 7,73$.
 Dus op $t = 7,73$ is de groeisnelheid twee keer zo groot als op $t = 6$.

- 75 Voer in $y_1 = 4^x$, $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)$ en $y_3 = \frac{y_2}{y_1}$.
 Aflezen in de tabel geeft $y_3 \approx 1,3863$.
 Dus $c = 1,3863$.

Bladzijde 146

- 76 a $y = 2 \cdot 3^x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 3^x \cdot \ln(3) = 2 \cdot \ln(3) \cdot 3^x$
- b $y = 50 \cdot 4^{3x-1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 50 \cdot 4^{3x-1} \cdot \ln(4) \cdot 3 = 150 \cdot \ln(4) \cdot 4^{3x-1}$
- c $N = 200 \cdot 1,5^{0,4t}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 200 \cdot 1,5^{0,4t} \cdot \ln(1,5) \cdot 0,4 = 80 \cdot \ln(1,5) \cdot 1,5^{0,4t}$
- d $N = 600 \cdot 0,8^{2t+3}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 600 \cdot 0,8^{2t+3} \cdot \ln(0,8) \cdot 2 = 1200 \cdot \ln(0,8) \cdot 0,8^{2t+3}$
- e $P = 80(1 + 1,3^{0,1q})$ geeft $\frac{dP}{dq} = 80 \cdot 1,3^{0,1q} \cdot \ln(1,3) \cdot 0,1 = 8 \cdot \ln(1,3) \cdot 1,3^{0,1q}$
- f $Q = 75 \cdot 2^{0,01p^2}$ geeft $\frac{dQ}{dp} = 75 \cdot 2^{0,01p^2} \cdot \ln(2) \cdot 0,02p = 1,5p \cdot \ln(2) \cdot 2^{0,01p^2}$

Bladzijde 147

- 77 a $y = 80 \cdot 0,6^{2-x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 80 \cdot 0,6^{2-x} \cdot \ln(0,6) \cdot -1$
 $= -80 \ln(0,6) \cdot 0,6^{2-x}$
 $= 40,866... \cdot 0,6^{2-x}$
 Dus $a = 41$.
- b $N = 0,05 \cdot 1,28^{3t-1}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 0,05 \cdot 1,28^{3t-1} \cdot \ln(1,28) \cdot 3$
 $= 0,15 \ln(1,28) \cdot 1,28^{3t-1}$
 $= 0,037... \cdot 1,28^{3t-1}$
 Dus $a = 0,037$.

- 78 a $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$
- b $\ln(e \cdot \sqrt{e}) = \ln(e^1 \cdot e^{\frac{1}{2}}) = \ln(e^{\frac{3}{2}}) = 1\frac{1}{2}$
- c $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$
- d $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$

e $3 \ln(e \cdot \sqrt[3]{e}) = 3 \ln(e^1 \cdot e^{\frac{1}{3}}) = 3 \ln(e^{\frac{4}{3}}) = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$

f $e^{\ln(7)} + e^{\ln(8)} = 7 + 8 = 15$

g $e^{2 \ln(5)} = e^{\ln(5^2)} = e^{\ln(25)} = 25$

h $e^{\frac{1}{2} \ln(9)} = e^{\ln(\sqrt{9})} = e^{\ln(3)} = 3$

79 a $N = 20 + 3 \cdot {}^4\log(t) = 20 + 3 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(4)} = 20 + \frac{3}{\ln(4)} \cdot \ln(t) \approx 20 + 2,16 \cdot \ln(t)$

Dus $N = 20 + 2,16 \cdot \ln(t)$.

b $N = 100 - 50 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(t) = 100 - 50 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(\frac{1}{2})} = 100 - \frac{50}{\ln(\frac{1}{2})} \cdot \ln(t) \approx 100 + 72,13 \cdot \ln(t)$

Dus $N = 100 + 72,13 \cdot \ln(t)$.

c $N = 6 + 200 \cdot \log(t) = 6 + 200 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(10)} = 6 + \frac{200}{\ln(10)} \cdot \ln(t) \approx 6 + 86,86 \cdot \ln(t)$

Dus $N = 6 + 86,86 \cdot \ln(t)$.

d $N = 5 + 8 \cdot \log(2t) = 5 + 8(\log(2) + \log(t)) = 5 + 8 \cdot \log(2) + 8 \cdot \log(t) = 5 + 8 \cdot \log(2) + 8 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(10)}$
 $= 5 + 8 \cdot \log(2) + \frac{8}{\ln(10)} \cdot \ln(t) \approx 7,41 + 3,47 \cdot \ln(t)$

Dus $N = 7,41 + 3,47 \cdot \ln(t)$.

80 a $N(2q) = 11,13 + 6,49 \cdot \ln(2q)$
 $= 11,13 + 6,49(\ln(2) + \ln(q))$
 $= 11,13 + 6,49 \cdot \ln(2) + 6,49 \cdot \ln(q)$
 $= 11,13 + 6,49 \cdot \ln(q) + 4,49...$

Dus $N(2q) \approx N(q) + 4,5$.

Als q verdubbelt, dan neemt N met 4,5 toe.

b $N(2p) = 100 + 13,85 \cdot \ln((2p)^{1,25})$
 $= 100 + 13,85 \cdot 1,25 \cdot \ln(2p)$
 $= 100 + 17,3125(\ln(2) + \ln(p))$
 $= 100 + 17,3125 \cdot \ln(2) + 17,3125 \cdot \ln(p)$
 $= 100 + 17,3125 \cdot \ln(p) + 12,00...$

Dus $N(2p) \approx N(p) + 12$.

Als p verdubbelt, dan neemt N met 12 toe.

c $N(3t) = 16 + b \cdot \ln(3t)$
 $= 16 + b(\ln(3) + \ln(t))$
 $= 16 + b \cdot \ln(3) + b \cdot \ln(t)$

Dus $N(3t) = N(t) + b \cdot \ln(3)$

$b \cdot \ln(3) = 5$ geeft $b = \frac{5}{\ln(3)} \approx 4,55$

Dus $b = 4,55$.

81 a Voor $t = 0$ geldt $T = 80$.

Los op $20 + p \cdot 2^{-0,25 \cdot 0} = 80$.

$20 + p \cdot 2^0 = 80$

$20 + p \cdot 1 = 80$

$p = 60$

b Los op $20 + 60 \cdot 2^{-0,25t} = 60$.

Voer in $y_1 = 20 + 60 \cdot 2^{-0,25x}$ en $y_2 = 60$.

De optie snijpunt geeft $x = 2,33...$

Na 2 minuten en $0,33... \times 60 \approx 20$ seconden.

c $t = 0$ geeft $T = 80$.

$t = 4$ geeft $T = 20 + 60 \cdot 2^{-0,25 \cdot 4} = 20 + 60 \cdot 2^{-1} = 50$

$\frac{50 - 80}{4} = -7,5$, dus in de eerste vier minuten koelt de koffie gemiddeld $7,5^\circ\text{C}$ per minuut af.

$$\text{d} \quad T = 20 + 60 \cdot 2^{-0,25t} \text{ geeft } \frac{dT}{dt} = 60 \cdot 2^{-0,25t} \cdot \ln(2) \cdot -0,25 = -15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-0,25t}$$

$$t = 4 \text{ geeft } \frac{dT}{dt} = -15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-0,25 \cdot 4} = -15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-1} \approx -5,2$$

De snelheid waarmee de koffie vier minuten na het inschenken afkoelt is $5,2^\circ\text{C}$ per minuut.

$$\text{e} \quad \text{De snelheid waarmee de koffie afkoelt na 90 seconden is } -15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-0,25 \cdot 1,5}.$$

$$\text{Los op } -15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-0,25t} = \frac{1}{2} \cdot -15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-0,375}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = -15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-0,25x} \text{ en } y_2 = -7,5 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-0,375}.$$

De optie snijpunt geeft $x = 5,5$.

Dus na $5,5 \times 60 = 330$ seconden.

Diagnostische toets

Bladzijde 150

- 1** K is de kostprijs in euro's per MWh geleverde energie.
Er geldt $K = 375 \cdot 0,78^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2009.
De gevraagde kosten zijn $500 \cdot 375 \cdot 0,78^{12} \approx 9509$ euro.

- 2** Er geldt $g^{25} = \frac{1}{2}$, met g de groeifactor per minuut.
 $g^{25} = \frac{1}{2}$ geeft $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{25}} \approx 0,973$
De afname is $2,7\%$ per minuut.

- 3** **a** $g_{\text{dag}} = 1,36$
 $g_{\text{week}} = 1,36^7 \approx 8,61$
Het groeipcentage per week is 761% .
b $g_{\text{dag}} = 1,36$
 $g_{\text{uur}} = 1,36^{\frac{1}{24}} \approx 1,013$
Het groeipcentage per uur is $1,3\%$.
c $g_{10 \text{ jaar}} = 3$
 $g_{\text{maand}} = 3^{\frac{1}{120}} \approx 1,009$
De toename per maand is $0,9\%$.

- 4** $N = b \cdot g^t$ met $g_{3 \text{ dagen}} = \frac{1200}{1500}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{1200}{1500}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,9283\dots$
$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,9283\dots^t \\ t = 4 \text{ en } N = 1500 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,9283\dots^4 = 1500 \\ b = \frac{1500}{0,9283\dots^4} \approx 2020 \end{array}$$

Dus $N = 2020 \cdot 0,928^t$.

- 5** **a** De groeifactor per mm materiaal is $0,7$.
 $0,7^5 \approx 0,168$, dus $16,8\%$ van het licht komt door een laag van 5 mm .
b $0,7^{10} \approx 0,028$, dus $97,2\%$ van het licht wordt geabsorbeerd.
c Los op $0,7^n < 0,01$.
Voer in $y_1 = 0,7^x$ en $y_2 = 0,01$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 12,9$.
De plaat moet dus minstens 13 mm dik zijn.

- 6** **a** ${}^5\log(625) = {}^5\log(5^4) = 4$
b ${}^2\log\left(\frac{1}{8}\right) = {}^2\log(2^{-3}) = -3$
c ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4}\right) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 2$

7 a $N = 5 \cdot {}^3\log(t) = 5 \cdot \frac{\log(t)}{\log(3)} = \frac{5}{\log(3)} \cdot \log(t) \approx 10,5 \cdot \log(t)$

Dus $N = 10,5 \cdot \log(t)$.

b $y = {}^3\log(5x - 1) - 2$

${}^3\log(5x - 1) = y + 2$

$5x - 1 = 3^{y+2}$

$5x = 1 + 3^y \cdot 3^2$

$5x = 1 + 9 \cdot 3^y$

$x = 0,2 + 1,8 \cdot 3^y$

c $q = 3 - 2^{p-2}$

$2^{p-2} = 3 - q$

$p - 2 = {}^2\log(3 - q)$

$p = 2 + {}^2\log(3 - q)$

8 a Lees af: in 2008 is er 4000 miljoen kWh geproduceerd en in 2016 was dat 8000 miljoen kWh.

Dus twee keer zoveel.

b Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $W = b \cdot g^t$, met W de hoeveelheid windenergie in miljoenen kWh en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2010.

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \text{ en } W = 4000 \\ t = 7 \text{ en } W = 10000 \end{array} \right\} g_{7 \text{ jaar}} = \frac{10000}{4000}$$

$$g_{\text{jaar}} = \left(\frac{10000}{4000} \right)^{\frac{1}{7}} \approx 1,140$$

$t = 0$ in 2010, dus $b = 4000$.

Dus $W = 4000 \cdot 1,140^t$.

Bij 2030 hoort $t = 20$ en dat geeft $W = 4000 \cdot 1,140^{20} \approx 54974$.

In 2030 wordt in Nederland ongeveer 55 miljard kWh windenergie geproduceerd.

9 a $N = {}^3\log(6x) = {}^3\log(6) + {}^3\log(x) = {}^3\log(6) + \frac{\log(x)}{\log(3)} = {}^3\log(6) + \frac{1}{\log(3)} \cdot \log(x) \approx 1,6 + 2,1 \cdot \log(x)$

Dus $N = 1,6 + 2,1 \cdot \log(x)$.

b $N(5t) = 86 + 18,6 \cdot \log(5t)$

$= 86 + 18,6(\log(5) + \log(t))$

$= 86 + 18,6 \cdot \log(5) + 18,6 \cdot \log(t)$

$= 86 + 18,6\log(t) + 13,0\dots$

Dus $N(5t) \approx N(t) + 13$ en hieruit volgt dat N met 13 toeneemt als t vervijfvoudigt.

c $N(\frac{1}{2}t) = 1010 + 16,61 \cdot \log(\frac{1}{2}t)$

$= 1010 + 16,61(\log(\frac{1}{2}) + \log(t))$

$= 1010 + 16,61 \cdot \log(\frac{1}{2}) + 16,61 \cdot \log(t)$

$= 1010 + 16,61 \cdot \log(t) - 5,0\dots$

Dus $N(\frac{1}{2}t) \approx N(t) - 5$ en hieruit volgt dat N met 5 afneemt als t halveert.

10 a $y = 14e^{1,25x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 14e^{1,25x} \cdot 1,25 = 17,5e^{1,25x}$

b $y = 421e^{3x^2-2}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 421e^{3x^2-2} \cdot 6x = 2526x \cdot e^{3x^2-2}$

c $y = 2500(1 + e^{0,56x})$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2500e^{0,56x} \cdot 0,56 = 1400e^{0,56x}$

d $y = 350 \cdot 10^{7x+3}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 350 \cdot 10^{7x+3} \cdot \ln(10) \cdot 7 = 2450 \cdot \ln(10) \cdot 10^{7x+3}$

e $y = 5,5(1 + 8^{1,44x})$ geeft $\frac{dy}{dx} = 5,5 \cdot 8^{1,44x} \cdot \ln(8) \cdot 1,44 = 7,92 \cdot \ln(8) \cdot 8^{1,44x}$

f $y = 6000 \cdot 2,3^{0,12x^2}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 6000 \cdot 2,3^{0,12x^2} \cdot \ln(2,3) \cdot 0,24x = 1440x \cdot \ln(2,3) \cdot 2,3^{0,12x^2}$

11 $N = 3 - 5 \cdot \log(2t) = 3 - 5(\log(2) + \log(t)) = 3 - 5 \cdot \log(2) - 5 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(10)} = 3 - 5 \cdot \log(2) - 5 \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(t)$

$\approx 1,49 - 2,17 \cdot \ln(t)$

Dus $N = 1,49 - 2,17 \cdot \ln(t)$.

11 Het toetsen van hypothesen

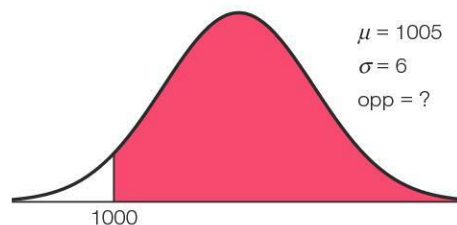
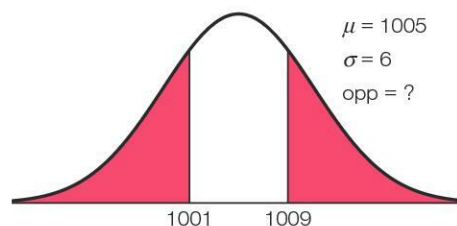
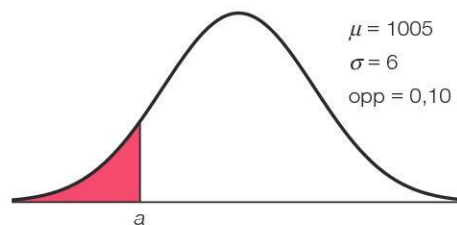
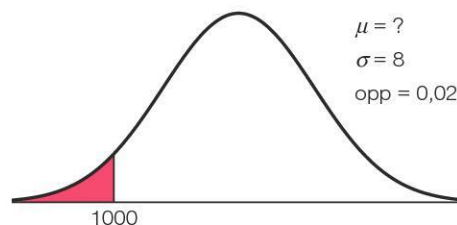
Voorkennis De binomiale en de normale verdeling

Bladzijde 155

- 1 a** X = aantal keer 6 ogen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 16$ en $p = \frac{1}{8}$.
 $P(X < 3) = P(X \leq 2)$
 De GR geeft $P(X < 3) \approx 0,677$.
- b** X = aantal keer meer dan 3 ogen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 16$ en $p = \frac{5}{8}$.
 $P(3 < X < 10) = P(X \leq 9) - P(X \leq 3)$
 De GR geeft $P(3 < X < 10) \approx 0,390$.
- c** X = aantal keer 2 of 3 ogen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 16$ en $p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
 De GR geeft $P(X = 5) \approx 0,180$.

Bladzijde 156

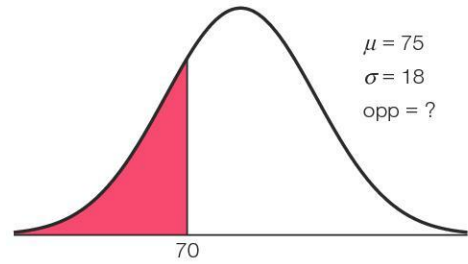
- 2** X = aantal keer dat de deuren goed sluiten
 X is binomiaal verdeeld met $n = 40$ en $p = 0,99$.
 $P(X \geq 39) = 1 - P(X \leq 38)$
 De GR geeft $P(X \geq 39) \approx 0,939$.
- 3** X = aantal gave appels
 X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,90$.
- a** $P(X \geq 40) = 1 - P(X \leq 39)$
 De GR geeft $P(X \geq 40) \approx 0,991$.
- b** Je verwacht $0,90 \cdot 50 = 45$ gave appels.
 De GR geeft $P(X = 45) \approx 0,185$.
- 4 a** Normale verdeling met $\mu = 1005$ en $\sigma = 6$.
 Bij $l = 1000$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,798$.
 Dus 79,8%.
- b** Bij $l = -10^{99}$ en $r = 1001$ geeft de GR opp = 0,2524...
 $2 \cdot 0,2524... \approx 0,505$
 Dus van 50,5%.
- c** De GR geeft $a \approx 997,31$.
 De lichtste 10% van de pakken wegen 997,3 gram of minder.
- d** Normale verdeling met $\mu = x$, $\sigma = 8$, $l = -10^{99}$ en $r = 8$.
 Los op opp = 0,02.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,02$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 1016,4$.
 Dus instellen op een gemiddelde van minstens 1016,4 gram.



11.1 De som van normale verdelingen

Bladzijde 157

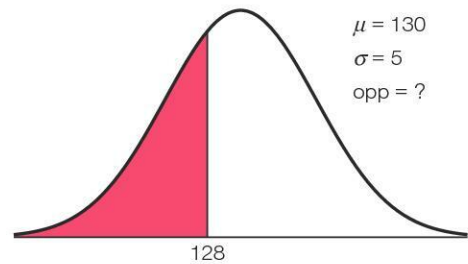
- 1 a** Normale verdeling met $\mu = 75$ en $\sigma = 18$.
De GR geeft $P(\text{conifeer kleiner dan } 70 \text{ cm}) \approx 0,391$.



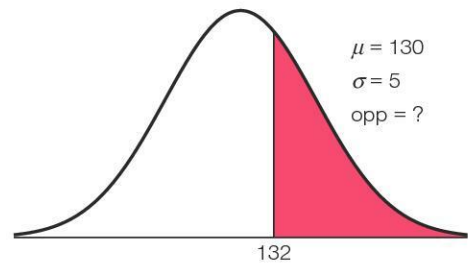
- b** $P(\text{alle drie kleiner dan } 70 \text{ cm}) = 0,391...^3 \approx 0,060$

Bladzijde 158

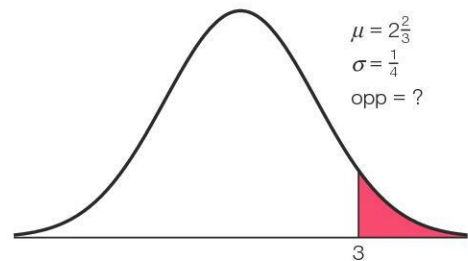
- 2 a** Normale verdeling met $\mu = 130$ en $\sigma = 5$.
De GR geeft $P(\text{zak weegt minder dan } 128 \text{ gram}) = 0,344...$
 X = aantal zakken dat minder dan 128 gram weegt
 X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,344...$
 $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$
De GR geeft $P(X \geq 8) \approx 0,999$.



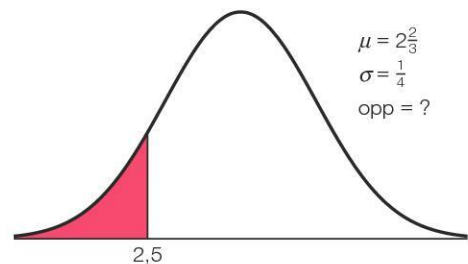
- b** Normale verdeling met $\mu = 130$ en $\sigma = 5$.
De GR geeft $P(\text{zak weegt meer dan } 132 \text{ gram}) = 0,344...$
 X = aantal zakken dat meer dan 132 gram weegt
 X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,344...$
De GR geeft $P(X = 8) \approx 0,002$.



- 3 a** 2 minuten en 40 seconden = $2\frac{2}{3}$ minuut
15 seconden = $\frac{1}{4}$ minuut
Normale verdeling met $\mu = 2\frac{2}{3}$ en $\sigma = \frac{1}{4}$.
 $P(\text{handeling duurt langer dan } 3 \text{ minuten}) = 0,091...$
 X = aantal handelingen dat langer dan 3 minuten duurt
 X is binomiaal verdeeld met $n = 80$ en $p = 0,091...$
 $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$
De GR geeft $P(X \geq 10) \approx 0,192$.
- b** Normale verdeling met $\mu = 2\frac{2}{3}$ en $\sigma = \frac{1}{4}$.
 $P(\text{handeling duurt minder dan } 2,5 \text{ minuten}) = 0,252...$
Van 180 handelingen kosten naar verwachting
 $180 \cdot 0,252... \approx 45$ handelingen minder dan 2,5 minuten.



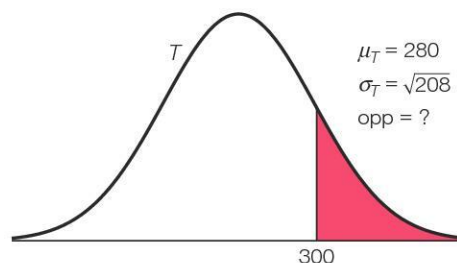
- 4 a** Paul denkt dat de man hoogstens 82 kg mag wegen en de vrouw hoogstens 68 kg. Dat is samen hoogstens 150 kg.
 $P(X \leq 82) \cdot P(Y \leq 68) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$
- b** Bijvoorbeeld: als een man 85 kg weegt en een vrouw 65 kg weegt is het ook goed.
- c** Ja. Deze kans is 0,5, want 150 kg is het gemiddelde gewicht van de man en de vrouw samen.



Bladzijde 159

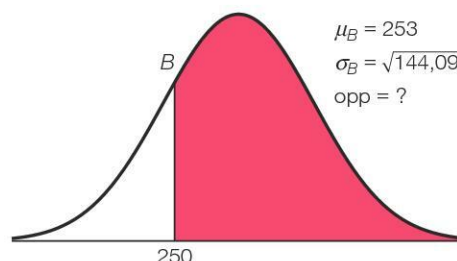
- 5** De GR geeft opp = 0,07280..., dus de gevraagde kans is 0,0728.

- 6 De totale afhandelings tijd is $T = X + Y$.
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 170 + 110 = 280$ seconden en
 $\sigma_T = \sqrt{12^2 + 8^2} = \sqrt{208}$ seconden.
 Bij $l = 300$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,083$.
 Dus in 8,3% van de gevallen voldoet de werknemer niet aan
 de eis van vijf minuten afhandelings tijd.



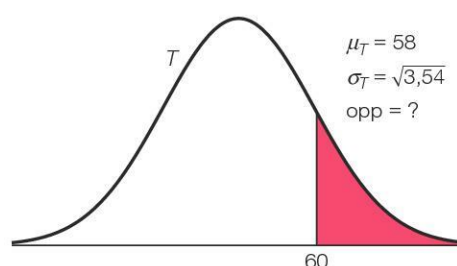
Bladzijde 160

- 7 Het brutogewicht is $B = X + Y$.
 B is normaal verdeeld met $\mu_B = 5 + 248 = 253$ gram en
 $\sigma_B = \sqrt{0,3^2 + 12^2} = \sqrt{144,09}$ gram.
 Bij $l = 250$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,599$.
 Dus in 59,9% van de gevallen is het brutogewicht meer dan
 250 gram.



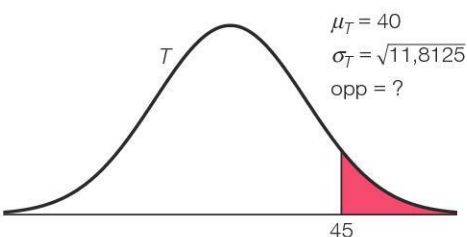
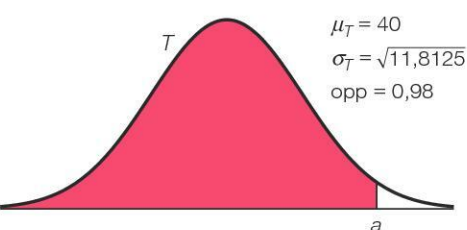
- 8 $\mu_S = 203 + 12 = 215$ seconden en
 $\sigma_S = \sqrt{4,25^2 + 2^2} = \sqrt{8,25}$ seconden.

- 9 De totale productietijd T is normaal verdeeld met
 $\mu_T = 12 + 8 + 20 + 18 = 58$ seconden en
 $\sigma_T = \sqrt{0,5^2 + 0,3^2 + 0,8^2 + 1,6^2} = \sqrt{3,54}$ seconden.
 Bij $l = 60$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,144$.
 Dus in 14,4% van de gevallen duurt het produceren van een
 artikel langer dan een minuut.

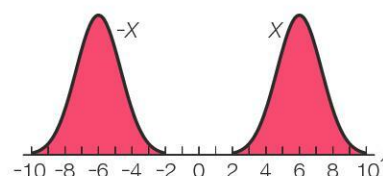


Bladzijde 161

- 10 a De totale fietstijd T is normaal verdeeld met
 $\mu_T = 18 + 7 + 15 = 40$ minuten en
 $\sigma_T = \sqrt{2,5^2 + 1,25^2 + 2^2} = \sqrt{11,8125}$ minuten.
 De GR geeft $P(T > 45) \approx 0,073$.
 b Van 7:25 uur tot 8:15 uur is 50 minuten.
 De GR geeft $P(T > 50) = 0,0018...$
 X = aantal keer dat ze te laat op school komt
 X is binomiaal verdeeld met $n = 35$ en $p = 0,0018...$
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$
 De GR geeft $P(X \geq 1) \approx 0,063$.
 c opp links = 0,98
 De GR geeft $a \approx 47,06...$
 Dus minstens 47 minuten voor 8:15 uur.
 Dat is dus voor 7:28 uur.
 d Stel de gemiddelde fietstijd op traject I is μ_I .
 Nu is $\mu_T = \mu_I + 22$.
 Normale verdeling met $\mu = x + 22$, $\sigma = \sqrt{11,8125}$,
 $l = -10^{99}$ en $r = 40$.
 Los op opp = 0,90.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,90$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 13,60$.
 Dus de gemiddelde fietstijd op traject I is ongeveer 13 minuten en 36 seconden.



- 11 a Zie de schets hiernaast.
 b Je ziet in de schets dat niet geldt $\sigma_{-X} = -\sigma_X$.
 Wel geldt $\sigma_{-X} = \sigma_X$.
 c $\mu_V = \mu_X - \mu_Y$ en $\sigma_V = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$



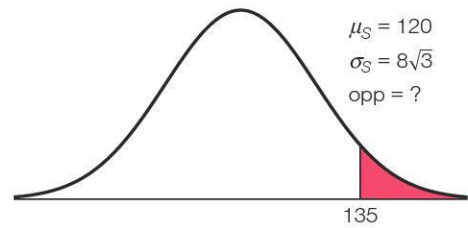
11.2 De wortel-n-wet

Bladzijde 163

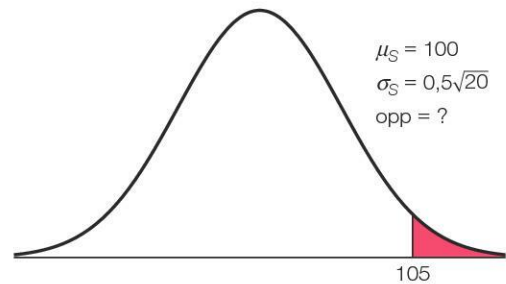
- 12** Er geldt wel dat $\mu_S = 8 \cdot \mu_X$, maar niet dat $\sigma_S = 8 \cdot \sigma_X$.
Immers bij $S = X + X$ krijg je $\mu_S = \mu_X + \mu_X = 2 \cdot \mu_X$ en $\sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_X^2} \neq 2 \cdot \sigma_X$.

Bladzijde 164

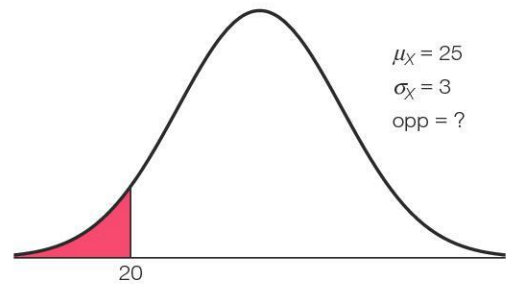
- 13** S is de gebruikstijd van 3 volgeladen accu's van een filmcamera.
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 3 \cdot 40 = 120$ minuten
en $\sigma_S = \sqrt{3} \cdot 8 = 8\sqrt{3}$ minuten.
De GR geeft $P(S \geq 135) \approx 0,140$.



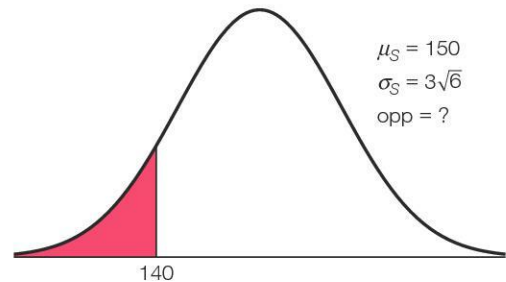
- 14 a** S is de dikte van een stapel van 20 tegels.
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 20 \cdot 5 = 100$ cm en
 $\sigma_S = \sqrt{20} \cdot 0,5 = 0,5\sqrt{20}$ cm.
De GR geeft $P(S > 105) = 0,0126... \approx 0,013$
b X = aantal stapels dat niet in een krat past
 X is binomiaal verdeeld met $n = 12$ en $p = 0,0126...$
 $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$
De GR geeft $P(X \geq 2) \approx 0,010$.



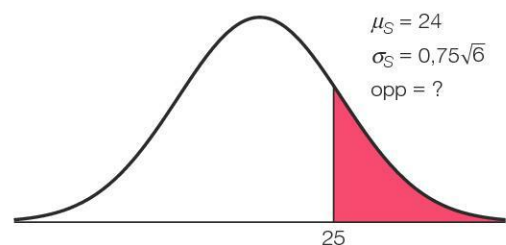
- 15 a** De GR geeft $P(X < 20) \approx 0,048$.



- b** S is het gewicht van de koeken in een pak.
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 6 \cdot 25 = 150$ gram en
 $\sigma_S = \sqrt{6} \cdot 3 = 3\sqrt{6}$ gram.
De GR geeft $P(S < 140) = 0,0867... \approx 0,087$.
c X = aantal pakken dat minder dan 140 gram bevat
 X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = 0,0867...$
 $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$
De GR geeft $P(X > 2) \approx 0,249$.

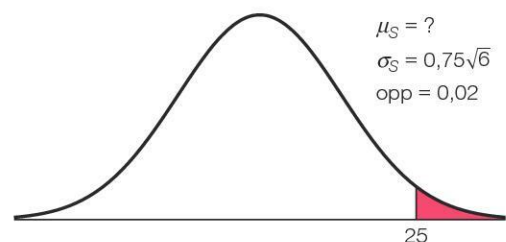


- 16 a** S is de tijdsduur van 6 speelronden.
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 6 \cdot 4 = 24$ minuten en
 $\sigma_S = \sqrt{6} \cdot 0,75 = 0,75\sqrt{6}$ minuten.
De GR geeft $P(S \geq 25) = 0,2931...$
Dus naar verwachting $0,2931... \cdot 50 \approx 15$ keer.

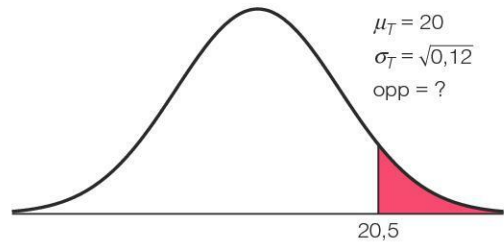


- b** Niet meer dan één keer per jaar, dus $P(S > 25) \leq \frac{1}{50}$.

$\mu_S = 6 \cdot \mu_X$
Normale verdeling met $\mu = 6x$, $\sigma = 0,75\sqrt{6}$,
 $l = 25$ en $r = 10^{99}$.
Los op opp = 0,02.
Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,02$.
De optie snijpunt geeft $x = 3,53...$, dus
 $3,53...$ minuten ≈ 3 minuten en 32 seconden.



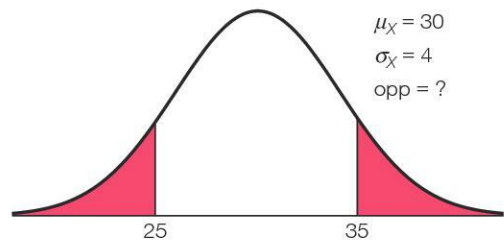
- 17** T is het totale gewicht van een krat met 12 flessen.
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 12 \cdot 1,5 + 2 = 20$ kg en
 $\sigma_T = \sqrt{12 \cdot 0,05^2 + 0,3^2} = \sqrt{0,12}$ kg.
 De GR geeft $P(T > 20,5) \approx 0,074$.



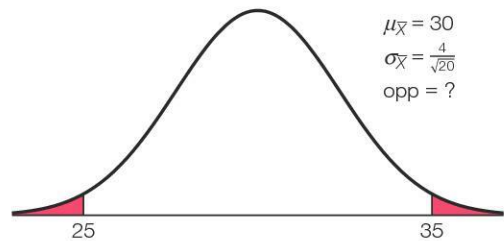
Bladzijde 166

- 18** S is normaal verdeeld met $\mu_S = 30 \cdot 50 = 1500$ en
 $\sigma_S = \sqrt{30} \cdot 5 = 5\sqrt{30}$.
 $\bar{X}$ meer dan 3 van μ_X afwijken, dan S meer dan $30 \cdot 3 = 90$ van μ_S afwijken.
 $P(S < 1410 \text{ of } S > 1590) = 2 \cdot P(S < 1410)$
 De GR geeft $P(S < 1410 \text{ of } S > 1590) \approx 0,001$.

- 19 a** $P(X < 25 \text{ of } X > 35) = 2 \cdot P(X < 25)$
 De GR geeft $P(X < 25 \text{ of } X > 35) \approx 0,211$.

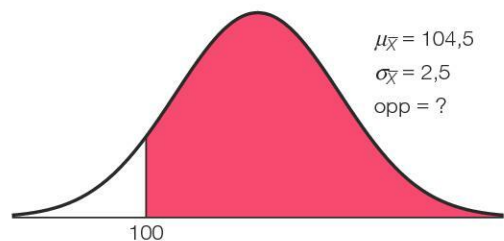


- b** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 30$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{20}}$.
 $P(\bar{X} < 25 \text{ of } \bar{X} > 35) = 2 \cdot P(\bar{X} < 25)$
 De GR geeft $P(\bar{X} < 25 \text{ of } \bar{X} > 35) \approx 0,00000002$.

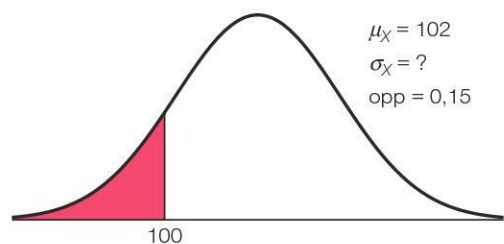


Bladzijde 167

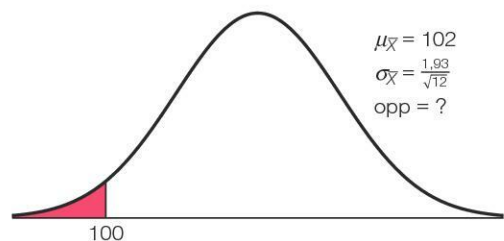
- 20** X is het gewicht van een kaasbroodje.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 104,5$ gram en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{16}} = 2,5$ gram.
 De GR geeft $P(\bar{X} \geq 100) \approx 0,964$.
 Dus 96,4%.



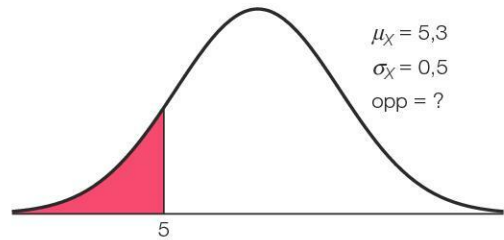
- 21 a** Normale verdeling met $\mu = 102$, $\sigma = x$, $l = -10^{99}$ en
 $r = 100$.
 Los op opp = 0,15.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,15$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 1,930$.
 Dus $\sigma \approx 1,930$ cL.



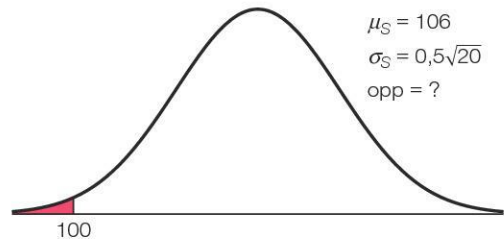
- b** X is de vulinhoud van een fles.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 102$ cL en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{1,93}{\sqrt{12}}$ cL.
 De GR geeft $P(\bar{X} < 100) = 0,0001655... \approx 0,0002$.
c X = aantal kratten waarbij de gemiddelde vulinhoud per fles minder is dan 100 cL
 X is binomiaal verdeeld met $n = 25$ en $p = 0,0001655...$
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$
 De GR geeft $P(X \geq 1) \approx 0,004$.



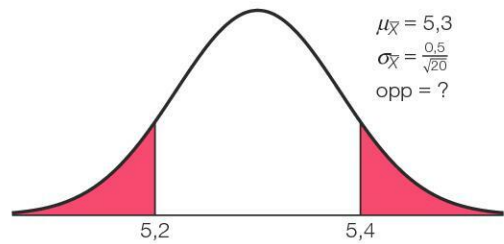
- 22 a** X is het gewicht van een zakje.
 X is normaal verdeeld met $\mu_X = 5,3$ gram en $\sigma_X = 0,5$ gram.
 De GR geeft $P(X < 5) \approx 0,274$.



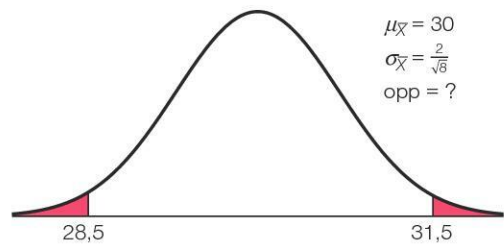
- b** S is de totale hoeveelheid thee in een pakje van 20 stuks.
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 20 \cdot 5,3 = 106$ gram en
 $\sigma_S = \sqrt{20} \cdot 0,5 = 0,5\sqrt{20}$ gram.
 De GR geeft $P(S < 100) \approx 0,004$.



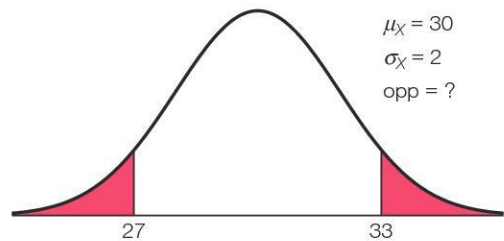
- c** $\bar{X}$ is het gewicht van een zakje.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 5,3$ gram en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,5}{\sqrt{20}}$ gram.
 $P(\bar{X} < 5,2 \text{ of } \bar{X} > 5,4) = 2 \cdot P(\bar{X} < 5,2)$
 De GR geeft $P(\bar{X} < 5,2 \text{ of } \bar{X} > 5,4) \approx 0,371$.
 Dus van 37,1%.



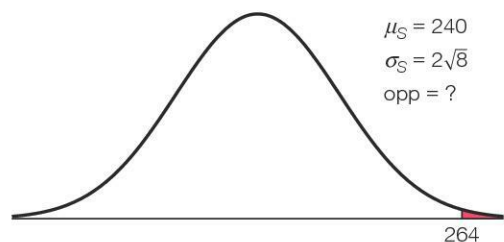
- 23 a** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 30$ mL en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{8}}$ mL.
 5% van 30 mL is 1,5 mL.
 $P(\bar{X} < 28,5 \text{ of } \bar{X} > 31,5) = 2 \cdot P(\bar{X} < 28,5)$
 De GR geeft $P(\bar{X} < 28,5 \text{ of } \bar{X} > 31,5) \approx 0,034$.



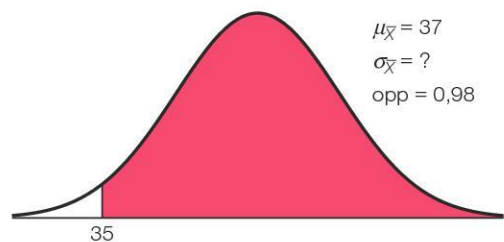
- b** 10% van 30 mL is 3 mL.
 $P(X < 27 \text{ of } X > 33) = 2 \cdot P(X < 27)$
 De GR geeft $P(X < 27 \text{ of } X > 33) = 0,1336...$
 Y is het aantal potten waarvan de inhoud meer dan 10% afwijkt van μ_X .
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 8$ en $p = 0,1336...$
 $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1)$
 De GR geeft $P(Y \geq 2) \approx 0,291$.



- c** Je verwacht $8 \cdot 30 = 240$ mL.
 $1,10 \cdot 240 = 264$ mL
 S is de totale inhoud van de acht potten.
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 8 \cdot 30 = 240$ mL en
 $\sigma_S = \sqrt{8} \cdot 2 = 2\sqrt{8}$ mL.
 De GR geeft $P(S > 264) \approx 0,00001$.



- 24** Stel minstens n bonbons.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 37$ gram en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{n}}$ gram.
 Er moet gelden $P(\bar{X} \geq 35) \geq 0,98$.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,98$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 26,4$.
 Dus minstens 27 bonbons.



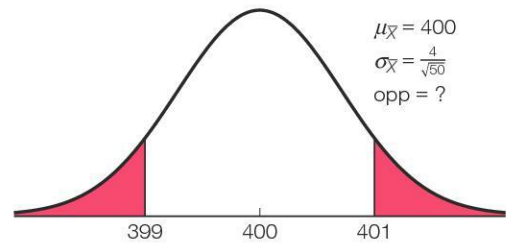
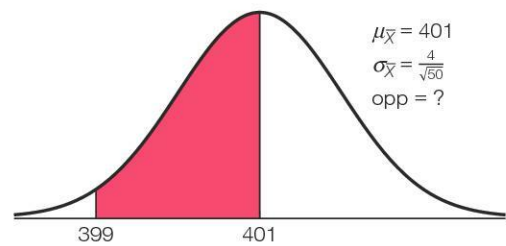
11.3 Beslissen op grond van een steekproef

Bladzijde 169

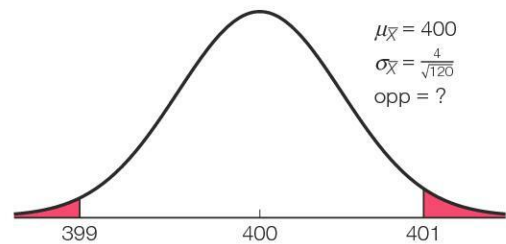
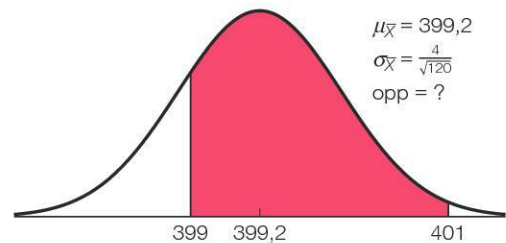
- 25 a** Er wordt dan te veel ijsthee geleverd en dit kost geld.
b Dan zit er te weinig ijsthee in de flessen en dat kost Wick klanten.

Bladzijde 170

- 26 a** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 400$ mL en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{50}}$ mL.
 $P(\text{ten onrechte bijstellen}) = P(\bar{X} \leq 399 \text{ of } \bar{X} \geq 401) = 2 \cdot P(\bar{X} \leq 399)$
 De GR geeft $P(\bar{X} \leq 399 \text{ of } \bar{X} \geq 401) \approx 0,077$.
b Je weet in dat geval niet wat het werkelijke gemiddelde is.
c $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 401$ mL en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{50}}$ mL.
 $P(\text{niet bijstellen}) = P(399 \leq \bar{X} \leq 401)$
 De GR geeft $P(399 \leq \bar{X} \leq 401) \approx 0,500$.

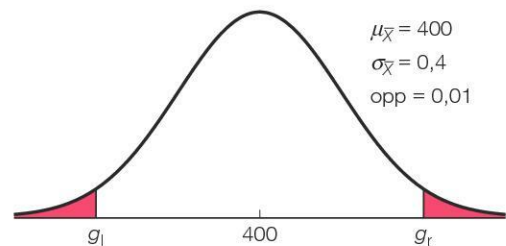


- 27 a** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 400$ mL en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{120}}$ mL.
 $P(\text{ten onrechte bijstellen}) = P(\bar{X} \leq 399 \text{ of } \bar{X} \geq 401) = 2 \cdot P(\bar{X} \leq 399)$
 De GR geeft $P(\bar{X} \leq 399 \text{ of } \bar{X} \geq 401) \approx 0,006$.
b $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 399,2$ mL en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{120}}$ mL.
 $P(\text{niet bijstellen}) = P(399 \leq \bar{X} \leq 401)$
 De GR geeft $P(399 \leq \bar{X} \leq 401) \approx 0,708$.

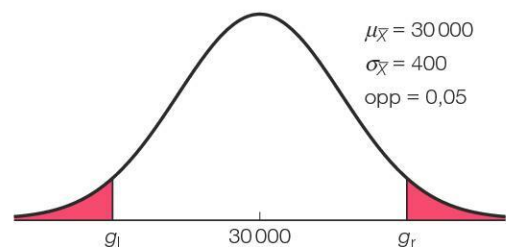


Bladzijde 173

- 28 a** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 400$ mL en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{100}} = 0,4$ mL.
 $P(\bar{X} \leq g_r) = 1 - 0,005 = 0,995$
 De GR geeft $g_r \approx 401,03$.
b Bij $\bar{X} = 400,8$ is er geen aanleiding H_0 te verwerpen.
 Het steekproefgemiddelde wijkt niet significant af.



- 29 a** $H_0 : \mu_X = 30000$ en $H_1 : \mu_X \neq 30000$
b $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 30000$ en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4000}{\sqrt{100}} = 400$.
 opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,05 = 0,025$
 $P(\bar{X} \leq g_l) = 0,025$
 De GR geeft $g_l \approx 29216$.
 $P(\bar{X} \leq g_r) = 1 - 0,025 = 0,975$
 De GR geeft $g_r \approx 30784$.



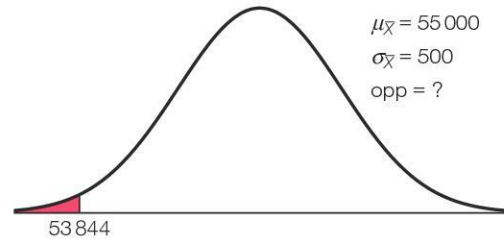
- c Bij $\bar{X} = 29\,502$ is er geen aanleiding H_0 te verwerpen.
Het steekproefresultaat wijkt niet significant af.

- 30 a $H_0 : \mu_X = 55\,000$ en $H_1 : \mu_X \neq 55\,000$
b $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 55\,000$ en

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4000}{\sqrt{64}} = \frac{4000}{8} = 500.$$

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 53\,844) \approx 0,010$.

- c Het steekproefgemiddelde wijkt significant af, want $P(\bar{X} \leq 53\,844)$ is kleiner dan $\frac{1}{2}\alpha$.



Bladzijde 176

- 31 a $P(\bar{X} \leq g_l) = 0,005$ met $\mu_{\bar{X}} = 9,3$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{2,1}{\sqrt{40}}$ geeft met de GR dat $g_l \approx 8,44$.

$$P(\bar{X} \geq g_r) = 0,005 \text{ met } \mu_{\bar{X}} = 9,3 \text{ en } \sigma_{\bar{X}} = \frac{2,1}{\sqrt{40}} \text{ geeft met de GR dat } g_r \approx 10,16.$$

Het beslissingsvoorschrift is

Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 8,44$ of $\bar{X} \geq 10,46$.

Omdat $8,6 > 8,44$ wordt H_0 niet verworpen.

Er is geen aanleiding aan te nemen dat het nieuwe systeem invloed heeft op de overwerktijd.

- b De methode met de overschrijdingskans heeft de voorkeur, omdat het minder werk is.

- 32 Stel minstens n dagen.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 9,3$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{2,1}{\sqrt{n}}$.

Er moet gelden $P(\bar{X} \leq 8,6) \leq 0,005$.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,005$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 59,7$.

Dus minstens 60 dagen.

- 33 a $H_0 : \mu_X = 25$, $H_1 : \mu_X \neq 25$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 25$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{50}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 24)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 24) \approx 0,009$.

$P(\bar{X} \leq 24) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Conclusie: er is aanleiding om het gemiddelde $\mu_X = 25$ in twijfel te trekken.

- b $H_0 : \mu_X = 25$, $H_1 : \mu_X \neq 25$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 25$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{100}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 26)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 26) \approx 0,0004$.

$P(\bar{X} \geq 26) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Conclusie: er is aanleiding om het gemiddelde $\mu_X = 25$ in twijfel te trekken.

- 34 a $H_0 : \mu_X = 1,02$, $H_1 : \mu_X \neq 1,02$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 1,02$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,04}{\sqrt{50}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 1,04)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 1,04) \approx 0,0002$.

$P(\bar{X} \geq 1,04) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

De fabrikant zal besluiten de vulmachine opnieuw in te stellen.

- b $H_0 : \mu_X = 1,02$, $H_1 : \mu_X \neq 1,02$ en $\alpha = 0,05$

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 1,03)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 1,03) \approx 0,039$.

$P(\bar{X} \geq 1,03) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

De fabrikant zal de conclusie trekken dat de vulmachine niet hoeft worden bijgesteld.

- 35 a** X = diameter in cm van een tennisbal
 $H_0 : \mu_X = 6,51$, $H_1 : \mu_X \neq 6,51$ en $\alpha = 0,10$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 6,51$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,13}{\sqrt{40}}$.
De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 6,47)$.
De GR geeft $P(\bar{X} \leq 6,47) \approx 0,026$.
 $P(\bar{X} \leq 6,47) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.
Conclusie: de afnemer constateert dat de gemiddelde diameter significant afwijkt van 6,51 cm.
Bij $\alpha = 0,05$ is $P(\bar{X} \leq 6,47) > \frac{1}{2}\alpha$, dus dan is de conclusie dat de gemiddelde diameter niet significant afwijkt.
- b** Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of $\bar{X} \geq g_r$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 6,51$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,13}{\sqrt{100}} = 0,013$.
 $P(\bar{X} \leq g_l) = 0,05$
De GR geeft $g_l \approx 6,489$.
 $P(\bar{X} \leq g_r) = 1 - 0,05 = 0,95$
De GR geeft $g_r \approx 6,531$.
Dus verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 6,48$ of $\bar{X} \geq 6,54$.

11.4 Eenzijdig en tweezijdig toetsen

Bladzijde 178

- 36** Omdat de bewering is dat de levensduur verlengd wordt.

Bladzijde 179

- 37 a** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 85$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{30}}$.
 $P(\bar{X} \leq g) = 0,90$
De GR geeft $g \approx 88,51$.
Verwerp H_0 als $\bar{X} \geq 88,6$.
- b** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 85$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{50}}$.
 $P(\bar{X} \leq g) = 0,05$
De GR geeft $g \approx 81,51$.
Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 81,5$.
- c** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 85$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{200}}$.
 $P(\bar{X} \leq g_l) = 0,005$
De GR geeft $g_l \approx 82,27$.
 $P(\bar{X} \leq g_r) = 0,995$
De GR geeft $g_r \approx 87,73$.
Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 82,2$ of $\bar{X} \geq 87,8$.

Bladzijde 180

- 38 a** X = afhandelings tijd in minuten van een bestelling
 $H_0 : \mu_X = 12$, $H_1 : \mu_X < 12$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 12$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = 0,6$.
 $P(\bar{X} \leq g) = 0,05$
De GR geeft $g \approx 11,01$.
Dus bij steekproefgemiddelden van 11,0 minuten of minder is er aanleiding te veronderstellen dat de afhandelings tijd verminderd is.

- b** $H_0: \mu_X = 12$, $H_1: \mu_X < 12$ en $\alpha = 0,01$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 12$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{80}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 11,3)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 11,3) \approx 0,018$.

$P(\bar{X} \leq 11,3) > \alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Er is geen aanleiding om te concluderen dat de afhandelings tijd is afgenomen.

Bladzijde 182

- 39** Omdat $802 > 800$ en de alternatieve hypothese $\mu_X < 800$ is.

- 40** X = gewicht in gram van een pakje margarine

$H_0: \mu_X = 500$, $H_1: \mu_X > 500$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 500$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{1,5}{\sqrt{100}} = 0,15$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 500,4)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 500,4) \approx 0,004$.

$P(\bar{X} \geq 500,4) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Er is reden om de productieafdeling gelijk te geven.

- 41** **a** X = actieradius in km van de Spirit

$H_0: \mu_X = 250$, $H_1: \mu_X < 250$ en $\alpha = 0,01$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 250$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{40}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 238)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 238) \approx 0,001$.

$P(\bar{X} \leq 238) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Je kunt concluderen dat meneer Spee gelijk heeft.

- b** $H_0: \mu_X = 250$, $H_1: \mu_X > 250$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 250$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{35}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 256)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 256) \approx 0,078$.

$P(\bar{X} \geq 256) > \alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Je kunt niet concluderen dat meneer Spee gelijk heeft.

- c** $H_0: \mu_X = 250$, $H_1: \mu_X \neq 250$ en $\alpha = 0,10$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 250$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{40}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 244)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 244) \approx 0,065$.

$P(\bar{X} \leq 244) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Je kunt niet concluderen dat de actieradius anders is.

- 42** X = zinslengte in woorden

$H_0: \mu_X = 28,6$, $H_1: \mu_X \neq 28,6$ en $\alpha = 0,01$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 28,6$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{5,9}{\sqrt{75}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 30,2)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 30,2) \approx 0,009$.

$P(\bar{X} \geq 30,2) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Je kunt stellen dat het pas ontdekte manuscript van de middeleeuwse schrijver afkomstig is.

Bladzijde 183

- 43 a** X = gewicht in gram van de bonen in een pak
 $H_0: \mu_X = 500$, $H_1: \mu_X < 500$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 500$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{50}}$.
 $P(\bar{X} \leq g) = 0,05$
 De GR geeft $g \approx 499,07$.
 Dus het gemiddelde gewicht per pak moet dan maximaal 499,0 gram zijn.
- b** $H_0: \mu_X = 500$, $H_1: \mu_X > 500$ en $\alpha = 0,025$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 500$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = 0,8$.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 501,94)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} \geq 501,94) \approx 0,008$.
 $P(\bar{X} \geq 501,94) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.
 Er is aanleiding het hoofd van de afdeling Voorraad gelijk te geven.
- c** $H_0: \mu_X = 500$, $H_1: \mu_X \neq 500$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 500$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = 0,8$.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 502,48)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} \geq 502,48) \approx 0,001$.
 $P(\bar{X} \geq 502,48) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.
 Het steekproefresultaat wijkt significant af van 500 gram.

- 44** X = lengte Nederlandse basketballer in cm
 $H_0: \mu_X = 184$, $H_1: \mu_X > 184$ en $\alpha = 0,01$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 184$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{35}}$.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 190)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} \geq 190) \approx 0,0000002$.
 $P(\bar{X} \geq 190) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.
 Je kunt inderdaad zeggen dat basketballers langer zijn dan gemiddeld.

- 45** X = lengte Nederlandse volleyballer in cm
 $H_0: \mu_X = 184$, $H_1: \mu_X > 184$ en $\alpha = 0,01$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 184$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{n}}$.
 Er moet gelden $P(\bar{X} \geq 187) \leq 0,01$.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en maak een tabel.
 $x = 29$ geeft $y_1 = 0,105...$ en $x = 30$ geeft $y_1 = 0,0094...$
 De grootte van de steekproef moet minstens 30 zijn geweest.

Bladzijde 184

- 46 a** X is normaal verdeeld met $\mu_X = 4$ mg en $\sigma_X = 0,12$ mg.
 $P(\text{tablet helpt}) = P(3,8 < X < 4,2)$
 De GR geeft $P(3,8 < X < 4,2) \approx 0,904$.
- b** $H_0: \mu_X = 4$, $H_1: \mu_X \neq 4$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 4$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,12}{\sqrt{50}}$.
 De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 3,95)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} \leq 3,95) \approx 0,002$.
 $P(\bar{X} \leq 3,95) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.
 Het steekproefgemiddelde wijkt significant af van 4 mg.
- c** X is normaal verdeeld met $\mu_X = 3,95$ mg en $\sigma_X = 0,12$ mg.
 $P(\text{tablet helpt niet}) = P(\bar{X} \leq 3,8 \text{ of } \bar{X} \geq 4,2) = 1 - P(3,8 < X < 4,2)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} \leq 3,8 \text{ of } \bar{X} \geq 4,2) \approx 0,124$.
 Dus 12,4% van de tabletten helpt dan niet.

- 47 a X = trekkracht in newton van een kabel

$$\bar{X} \text{ is normaal verdeeld met } \mu_{\bar{X}} = 800 \text{ en } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{35}{\sqrt{25}} = 7.$$

De overschrijdingskans $P(\bar{X} \leq 785)$ is groter bij $\mu = 800$ dan bij een waarde van μ groter dan 800.

Dus als het steekproefresultaat 785 newton oplevert dat H_0 wordt verworpen bij $H_0: \mu = 800$, dan zal H_0 zeker worden verworpen bij een nulhypothese met μ groter dan 800.

- b Bij een grotere μ neemt de overschrijdingskans $P(\bar{X} \leq 785)$ af, zodat de fabrikant eerder in het ongelijk wordt gesteld.

Bladzijde 185

- 48 $H_0: \mu_X = 37$ en $H_1: \mu_X > 37$

- 49 X = trekkracht in newton van een kabel
 $H_0: \mu_X = 800$, $H_1: \mu_X < 800$ en $\alpha = 0,05$.

$$\bar{X} \text{ is normaal verdeeld met } \mu_{\bar{X}} = 800 \text{ en } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{35}{\sqrt{25}} = 7.$$

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 785)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 785) \approx 0,016$.

$P(\bar{X} \leq 785) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Er is reden om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken.

- 50 X = aantal uur dat de Nederlander in zijn vrije tijd per week met media bezig is
 $H_0: \mu_X = 20,2$, $H_1: \mu_X < 20,2$ en $\alpha = 0,025$.

$$\bar{X} \text{ is normaal verdeeld met } \mu_{\bar{X}} = 20,2 \text{ en } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{2,4}{\sqrt{30}}.$$

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 19,4)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 19,4) \approx 0,034$.

$P(\bar{X} \leq 19,4) > \alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Je kunt het niet eens zijn met de bewering van de medewerker van Suikerberg.

- 51 4 minuten en 30 seconden = 4,5 minuten

36 minuten en 30 seconden is gemiddeld $\frac{36,5}{8} = 4,5625$ minuten per km.

$$12 \text{ seconden} = \frac{12}{60} = 0,2 \text{ minuten}$$

X = kilometer tijd in minuten

$H_0: \mu_X = 4,5$, $H_1: \mu_X > 4,5$ en $\alpha = 0,05$.

$$\bar{X} \text{ is normaal verdeeld met } \mu_{\bar{X}} = 4,5 \text{ en } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,2}{\sqrt{40}}, \text{ want } n = 5 \cdot 8 = 40.$$

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \geq 4,5625)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \geq 4,5625) \approx 0,024$.

$P(\bar{X} \geq 4,5625) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Er is reden om aan de bewering van Jan-Pieter te twijfelen.

11.5 Binomiale toetsen

Bladzijde 187

- 52 a Je let alleen op de gebeurtenissen succes (de persoon vindt de frisdrank van Mol de lekkerste) en mislukking.
Verder is bij elk kansexperiment de kans op succes dezelfde. Als Mol gelijk heeft, dan is $p = 0,40$.
- b Nee, want $X = 48$ is meer dan het verwachte aantal van 40 dat hoort bij $p = 0,40$.
- c De concurrent krijgt dan gelijk, want $X = 28$ ligt ver onder het verwachte aantal van 40 als $p = 0,40$.

Bladzijde 188

- 53** X is binomiaal verdeeld, dus X neemt alleen gehele waarden aan.

Bladzijde 189

- 54 a** X = aantal personen dat in één keer voor het rijexamen slaagt
 $H_0: p = 0,45$ en $H_1: p > 0,45$
 X is binomiaal verdeeld met $n = 40$ en $p = 0,45$.
 De overschrijdingskans is $P(X \geq 23) = 1 - P(X \leq 22)$.
 De GR geeft $P(X \geq 23) \approx 0,077$.
- b** $P(X \geq 23) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er is geen aanleiding om de directeur gelijk te geven.
- 55** X = aantal kinderen dat later met een allergie te kampen kreeg
 $H_0: p = 0,30$, $H_1: p < 0,30$ en $\alpha = 0,025$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 474$ en $p = 0,30$.
 De overschrijdingskans is $P(X \leq 112)$.
 De GR geeft $P(X \leq 112) \approx 0,001$.
 $P(X \leq 112) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .
 Er is voldoende aanleiding de onderzoekers gelijk te geven.
- 56** X = aantal Aziatische mannen dat aan een vorm van kleurenblindheid lijdt
 $H_0: p = 0,08$, $H_1: p > 0,08$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 200$ en $p = 0,08$.
 De overschrijdingskans is $P(X \geq 22) = 1 - P(X \leq 21)$.
 De GR geeft $P(X \geq 22) \approx 0,080$.
 $P(X \geq 22) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er is geen aanleiding om mevrouw Bouman gelijk te geven.

Bladzijde 190

- 57** X = aantal keer op rood bij het draaien van de schijf
 $H_0: p = \frac{1}{4}$, $H_1: p > \frac{1}{4}$ en $\alpha = 0,01$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 160$ en $p = \frac{1}{4}$.
 De overschrijdingskans is $P(X \geq 52) = 1 - P(X \leq 51)$.
 De GR geeft $P(X \geq 52) \approx 0,020$.
 $P(X \geq 52) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er is niet voldoende reden om Simon gelijk te geven.
- 58** X = aantal personen dat zich stoort aan reclameblokken tijdens een film
 $H_0: p = 0,70$, $H_1: p < 0,70$ en $\alpha = 0,025$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 500$ en $p = 0,70$.
 De overschrijdingskans is $P(X \leq 320)$.
 De GR geeft $P(X \leq 320) \approx 0,002$.
 $P(X \leq 320) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .
 Er is voldoende reden om de mening van de recensent in twijfel te trekken.
- 59** X = aantal keer Papa Varken
 $H_0: p = \frac{1}{15}$, $H_1: p > \frac{1}{15}$ en $\alpha = 0,01$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 25 + 15 = 40$ en $p = \frac{1}{15}$.
 $5 + 2 = 7$, dus de overschrijdingskans is $P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6)$.
 De GR geeft $P(X \geq 7) \approx 0,016$.
 $P(X \geq 7) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er kan niet geconcludeerd worden dat Papa Varken vaker voorkomt.

- 60 a** Eerste toets
 X = aantal keer zes ogen
 $H_0: p = \frac{1}{6}$ en $H_1: p < \frac{1}{6}$
- Tweede toets
 X = aantal keer geen zes ogen
 $H_0: p = \frac{5}{6}$ en $H_1: p > \frac{5}{6}$

b Eerste toets

X is binomiaal verdeeld met $n = 80$ en $p = \frac{1}{6}$.

De overschrijdingskans is $P(X \leq 8)$.

De GR geeft $P(X \leq 8) \approx 0,067$.

Tweede toets

X is binomiaal verdeeld met $n = 80$ en $p = \frac{5}{6}$.

De overschrijdingskans is $P(X \geq 72) = 1 - P(X \leq 71)$.

De GR geeft $P(X \geq 72) \approx 0,067$.

- c** Er geldt $P(X \leq 8) > \alpha$ en ook $P(X \geq 72) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Er is niet voldoende aanleiding om het met Mirjam eens te zijn.

Bladzijde 191

- 61** **a** Het verwerpingsgebied is $X \leq 72$.
b Het verwerpingsgebied is $X \geq 87$.

Bladzijde 192

- 62** X = aantal patiënten waarbij het middel een positieve uitwerking had
 $H_0: p = 0,80$, $H_1: p < 0,80$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 500$ en $p = 0,80$.
De GR geeft $a = 385$.
Het kleinste aantal patiënten waarbij de bewering van de fabrikant niet wordt verworpen is 385.

- 63** **a** X = aantal sets waarbij de speler die begint met serveren de set wint
 $H_0: p = 0,55$, $H_1: p < 0,55$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 500$ en $p = 0,55$.
De GR geeft $a = 257$.
Het aantal sets waarbij de speler die begint met serveren de set wint, is hoogstens 256.
- b** $242 \leq 256$, dus verwerp H_0 .
Jacco krijgt gelijk. Het door de tennisliefhebber genoemde percentage is te optimistisch.
- c** X = aantal games dat wordt gewonnen door een speler die met nieuwe ballen heeft mogen serveren
 $H_0: p = 0,815$, $H_1: p > 0,815$ en $\alpha = 0,025$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 300$ en $p = 0,815$.
 $1 - 0,025 = 0,975$.
De GR geeft $a = 257$.
De serveerder moet minstens 258 games winnen om Jacco gelijk te geven.

Bladzijde 194

- 64** X = aantal afnemers dat de bespaartest niet invult
 $H_0: p = 0,7$, $H_1: p \neq 0,7$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 400$ en $p = 0,7$.
De overschrijdingskans is $P(X \leq 262)$.
De GR geeft $P(X \leq 262) \approx 0,029$.
 $P(X \leq 262) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Er is geen aanleiding de bewering van het nutsbedrijf in twijfel te trekken.
- 65** **a** Een onzuiver geldstuk kan te veel maar ook te weinig keer kop geven.
b X = aantal keer kop bij het gooien met een geldstuk
 $H_0: p = 0,5$, $H_1: p \neq 0,5$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,5$.
De overschrijdingskans is $P(X \geq 59) = 1 - P(X \leq 58)$.
De GR geeft $P(X \geq 59) \approx 0,044$.
 $P(X \geq 59) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Ze kan niet concluderen dat het geldstuk onzuiver is.

66 X = aantal keer zes ogen
 $H_0: p = \frac{1}{6}, H_1: p \neq \frac{1}{6}$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 150$ en $p = \frac{1}{6}$.
De overschrijdingskans is $P(X \leq 12)$.
De GR geeft $P(X \leq 12) \approx 0,002$.
 $P(X \leq 12) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 .
Hij komt tot de conclusie dat de dobbelsteen niet zuiver is.

67 X = aantal lampen met een levensduur van meer dan 8000 uur
 $H_0: p = 0,8, H_1: p < 0,8$ en $\alpha = 0,10$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 30$ en $p = 0,8$.
De overschrijdingskans is $P(X \leq 21)$.
De GR geeft $P(X \leq 21) \approx 0,129$.
 $P(X \leq 21) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
De steekproef geeft onvoldoende aanleiding de fabrikant in twijfel te trekken.

Bladzijde 195

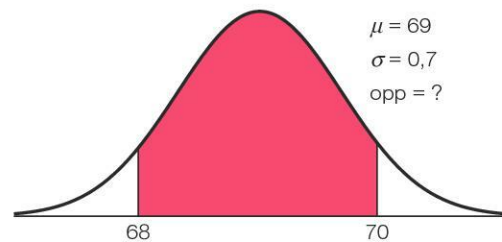
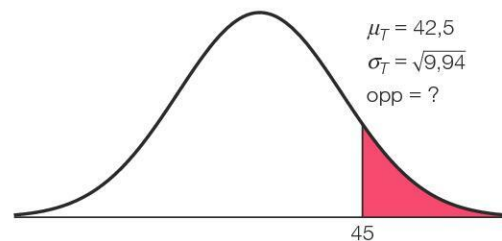
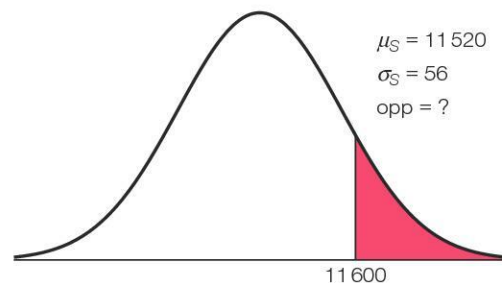
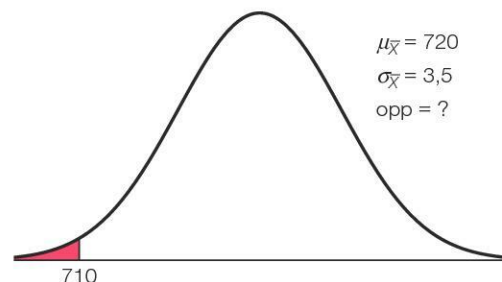
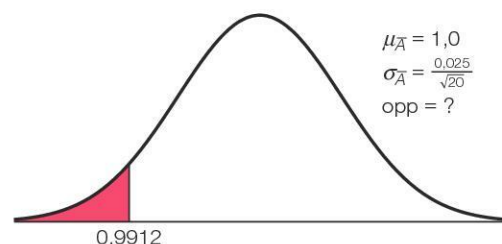
- 68 a** X = aantal keer dat het balletje op het vakje met nummer 10 blijft liggen
 $H_0: p = \frac{1}{37}, H_1: p \neq \frac{1}{37}$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 500$ en $p = \frac{1}{37}$.
De overschrijdingskans is $P(X \geq 21) = 1 - P(X \leq 20)$.
De GR geeft $P(X \geq 21) \approx 0,033$.
 $P(X \geq 21) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Er is geen aanleiding te vermoeden dat de roulette niet zuiver is.
- b** X = aantal keer dat het balletje op de vakjes met nummers 26, 0 en 32 blijft liggen
 $H_0: p = \frac{3}{37}, H_1: p \neq \frac{3}{37}$ en $\alpha = 0,025$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 1000$ en $p = \frac{1}{37}$.
 $\frac{0,025}{2} = 0,0125$ en $1 - 0,0125 = 0,9875$
De GR geeft $a_1 = 62$ en $a_r = 101$.
De zuiverheid van de roulette wordt niet in twijfel getrokken bij aantallen van 62 tot en met 101.
- c** X = aantal keer op rood
 $H_0: p = \frac{18}{37}, H_1: p < \frac{18}{37}$ en $\alpha = 0,01$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 1500$ en $p = \frac{18}{37}$.
De overschrijdingskans is $P(X \leq 695)$.
De GR geeft $P(X \leq 695) \approx 0,038$.
 $P(X \leq 695) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Er is niet voldoende reden om het met Richard eens te zijn.
- 69 a** Normale verdeling met $\mu = 7,9$ en $\sigma = 0,5$.
Bij $l = -10^{99}$ en $r = 7,2$ geeft de GR opp = 0,0807....
Dus $P(\text{tomaat wordt doorgedraaid}) \approx 0,081$.
- b** X = aantal tomaten dat na meting moet worden doorgedraaid
 $H_0: p = 0,081, H_1: p < 0,081$ en $\alpha = 0,001$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 900$ en $p = 0,081$.
De overschrijdingskans is $P(X \leq 65)$.
De GR geeft $P(X \leq 65) \approx 0,0184$.
 $P(X \leq 65) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
Er is niet aangetoond dat het middel S3Fb de diameter vergroot.

- 70** Normale verdeling met $\mu = 3250$ en $\sigma = 425$.
 Bij $l = 4000$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp = 0,03880...
 Dus $P(\text{baby is zwaar}) \approx 0,0388$.
 X = aantal baby's dat behoort tot de categorie 'zwaar'
 $H_0: p = 0,0388$, $H_1: p > 0,0388$ en $\alpha = 0,01$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 58$ en $p = 0,0388$.
 De overschrijdingskans is $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$.
 De GR geeft $P(X \geq 8) \approx 0,002$.
 $P(X \geq 8) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .
 Je kunt de medewerkers van het consultatiebureau gelijk geven.

Diagnostische toets

Bladzijde 198

- 1** Normale verdeling met $\mu = 69$ en $\sigma = 0,7$.
 Met $l = 69$ en $r = 70$ geeft de GR
 $P(\text{bal voldoet aan de eis van de FIFA}) = 0,846...$
 X = aantal ballen dat aan eis van FIFA voldoet
 X is binomiaal verdeeld met $n = 5$ en $p = 0,846...$
 De GR geeft $P(X = 5) \approx 0,436$.
- 2** De totale productietijd T is normaal verdeeld met
 $\mu_T = 19,3 + 12,5 + 10,7 = 42,5$ minuten en
 $\sigma_T = \sqrt{2,5^2 + 1,5^2 + 1,2^2} = \sqrt{9,94}$ minuten.
 Bij $l = 45$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,214$.
 Dus in 21,4% van de gevallen.
- 3 a** S is de inhoud van een doos.
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 16 \cdot 720 = 11\,520$ gram
 en $\sigma_S = \sqrt{16 \cdot 14} = 4 \cdot 14 = 56$ gram.
 De GR geeft $P(S > 11\,600) \approx 0,077$.
- b** X is de inhoud van een pot appelmoes.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 720$ gram en
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{14}{\sqrt{16}} = 3,5$ gram.
 De GR geeft $P(\bar{X} < 710) \approx 0,002$.
 Dus 0,2%.
- 4** A = oppervlakte in m^2 van een graszode
 $H_0: \mu_A = 1,0$, $H_1: \mu_A \neq 1,0$ en $\alpha = 0,10$.
 $2,5 \text{ dm}^2 = 0,025 \text{ m}^2$
 $\bar{A}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{A}} = 1,0$ en $\sigma_{\bar{A}} = \frac{\sigma_A}{\sqrt{n}} = \frac{0,025}{\sqrt{20}}$.
 $99,12 \text{ dm}^2 = 0,9912 \text{ m}^2$
 De overschrijdingskans is $P(\bar{A} \leq 0,9912)$.
 De GR geeft $P(\bar{A} \leq 0,9912) \approx 0,058$.
 $P(\bar{A} \leq 0,9912) > \frac{1}{2}\alpha$ dus H_0 wordt niet verworpen.
 Het tuincentrum trekt de conclusie dat de gemiddelde
 oppervlakte niet afwijkt van $1,00 \text{ m}^2$.

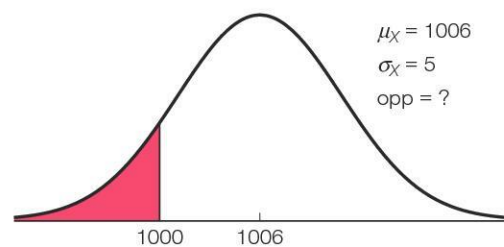


- 5 a** X = vetgehalte in procenten van een pak volle melk
 $H_0: \mu_X = 3,50$, $H_1: \mu_X > 3,50$ en $\alpha = 0,025$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 3,50$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,02}{\sqrt{30}}$.
 De overschrijdingskans is $P(X \geq 3,508)$.
 De GR geeft $P(X \geq 3,508) \approx 0,014$.
 $P(X \geq 3,508) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.
 Er is aanleiding de gezondheidsraad gelijk te geven.
- b** $H_0: \mu_X = 3,50$, $H_1: \mu_X \neq 3,50$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 3,50$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,02}{\sqrt{40}}$.
 De overschrijdingskans is $P(X \leq 3,494)$.
 De GR geeft $P(X \leq 3,494) \approx 0,029$.
 $P(X \leq 3,494) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.
 Het steekproefresultaat wijkt niet significant af van 3,50%.

- 6** X = aantal jongeren dat lid is van een sportvereniging
 $H_0: p = 0,75$, $H_1: p < 0,75$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 120$ en $p = 0,75$.
 De overschrijdingskans is $P(X \leq 81)$.
 De GR geeft $P(X \leq 81) \approx 0,039$.
 $P(X \leq 81) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .
 Er is reden om de bewering van sportleraar Meijer in twijfel te trekken.

- 7 a** X = aantal keer dat een van de getallen 6 tot en met 11 wordt aangewezen
 $H_0: p = \frac{6}{20}$, $H_1: p \neq \frac{6}{20}$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = \frac{6}{20}$.
 $\frac{0,05}{2} = 0,025$ en $1 - 0,025 = 0,975$
 De GR geeft $a_1 = 21$ en $a_r = 39$.
 Bij de aantallen 21 tot en met 39 zal de zuiverheid van het rad niet in twijfel worden getrokken.
- b** $H_0: p = \frac{6}{20}$, $H_1: p \neq \frac{6}{20}$ en $\alpha = 0,01$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 200$ en $p = \frac{6}{20}$.
 De overschrijdingskans is $P(X \geq 70)$.
 De GR geeft $P(X \geq 70) \approx 0,073$.
 $P(X \geq 70) < \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er is geen aanleiding aan te nemen dat het rad niet zuiver is.

- 8 a** X = gewicht in gram van een pak koffie
 X is normaal verdeeld met $\mu_X = 1006$ en $\sigma_X = 5$.
 $P(X < 1000) = 0,1150... \approx 0,115$
- b** X = aantal pakken koffie met een gewicht van minder dan 1000 gram
 $H_0: p = 0,115$, $H_1: p < 0,115$ en $\alpha = 0,01$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 250$ en $p = 0,1150...$
 De overschrijdingskans is $P(X \leq 18)$.
 De GR geeft $P(X \leq 18) \approx 0,017$.
 $P(X \leq 18) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er is niet aangetoond dat het gemiddelde is toegenomen.



Gemengde opgaven

8 Differentiaalrekening

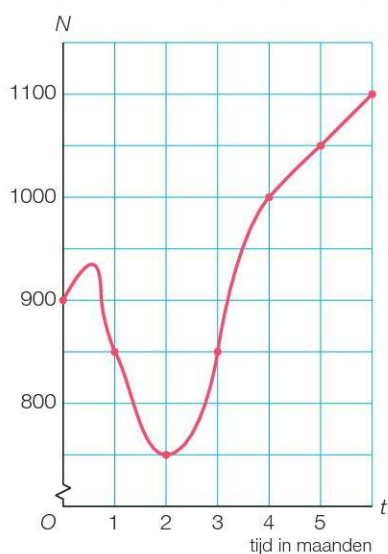
Bladzijde 200

- 1 a** Op 16 maart om 0:00 uur is de olieprijs $101,50 + 0,50 - 1 = 101$ dollar per vat.
De tanker bevat $\frac{210000000}{127,2} \approx 1\,650\,943$ vaten olie.
De totale waarde is $1\,650\,943 \cdot 101 \approx 166,7$ miljoen dollar.
- b** Het grootste prijsverschil is $1,25 + 0,75 = 2$ dollar per vat.
Dus het gevraagde verschil is $1\,650\,943 \cdot 2 \approx 3,3$ miljoen dollar.
- 2 a** Op het interval $\langle 4, 6 \rangle$.
- b** Nee.
Neem $\Delta x = 4$. Je krijgt de toenames $\Delta y = 10$ en $\Delta y = -2$.
De gemiddelde toename is dan 4 en dit is meer dan 3.
- c** Op $[0, 8]$ is $\Delta y = 2 + 3 + 3 + 2 + 1 - 1 - 2 + 0 = 8$, dus op $[0, 8]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{8} = 1 \neq 0$.
- Op $[4, 7]$ is $\Delta y = 1 - 1 - 2 = -2$, dus op $[4, 7]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3} \neq 0$.
- Op $[3, 7]$ is $\Delta y = 2 + 1 - 1 - 2 = 0$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{4} = 0$.
- Op $[3, 8]$ is $\Delta y = 2 + 1 - 1 - 2 + 0 = 0$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{5} = 0$.
- Dus op $[3, 7]$ en op $[3, 8]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Bladzijde 201

- 3 a** Tussen $t = 1$ en $t = 6$ is $\Delta N = -100 + 100 + 150 + 50 + 50 = 250$.
De gemiddelde snelheid is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{250}{5} = 50$ konijnen per maand.
- b** Maak een tabel.

t	0	1	2	3	4	5	6
N	900	850	750	850	1000	1050	1100



4 a Het differentiequotiënt op $[3, 6]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(6) - N(3)}{6 - 3} = \frac{30 - 27,3}{3} = 0,9$.

Tussen 1 april en 1 juli 2019 is het aantal hotelovernachtingen per dag gemiddeld met 900 per maand toegenomen.

b Van 1 november tot en met 31 december, dus op $[10, 12]$.

Op $[10, 12]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(12) - N(10)}{12 - 10} = \frac{24,6 - 28}{2} = -1,7$.

De gemiddelde afname is 1700 per maand.

c Mei, dus op $[4, 5]$.

Op $[4, 5]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(5) - N(4)}{5 - 4} = \frac{29,5 - 28,6}{1} = 0,9$.

De gemiddelde toename van het aantal hotelovernachtingen per dag is 900 per maand

en dat is $\frac{900}{4\frac{3}{7}} \approx 203$ per week.

d $N = -0,2t^2 + 2,7t + 21$ geeft $\frac{dN}{dt} = -0,4t + 2,7$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = 0 & \text{ geeft } -0,4t + 2,7 = 0 \\ -0,4t & = -2,7 \\ t & = 6,75 \end{aligned}$$

Dus in de maand juli.

e Augustus, dus van $t = 7$ tot $t = 8$.

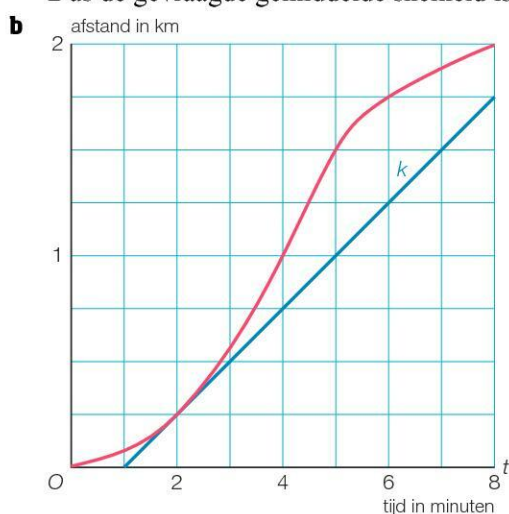
$N(7) = 30,1$ en $N(8) = 29,8$

$31 \cdot 30,1 = 933,1$ en $31 \cdot 29,8 = 923,8$

Beide minder dan 1 miljoen, dus dit komt niet overeen met het model.

5 a $\frac{2}{8} = 0,25$ km/minuut, dat is $60 \cdot 0,25 = 15$ km/uur.

Dus de gevraagde gemiddelde snelheid is 15 km/uur.



Raaklijn k door $(1, 0)$ en $(5, 1)$, dus $rc_k = \frac{1 - 0}{5 - 1} = 0,25$.

De snelheid op $t = 2$ is 0,25 km/minuut oftewel 15 km/uur.

c Tussen $t = 4$ en $t = 5$ is de helling van de grafiek het grootst, waarbij de grafiek tussen $t = 4$ en $t = 5$ constant stijgend is.

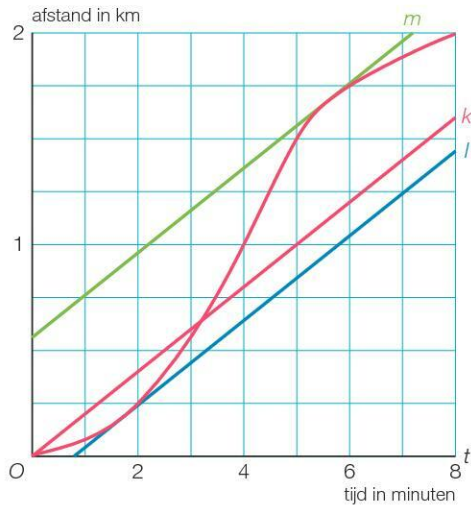
Dus de snelheid is maximaal tussen $t = 4$ en $t = 5$. Deze maximale snelheid is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van het constant stijgende deel van de grafiek.

Op $[4, 5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,5 - 1}{5 - 4} = 0,5$ km/minuut.

Dus de maximale snelheid is $60 \cdot 0,5 = 30$ km/uur.

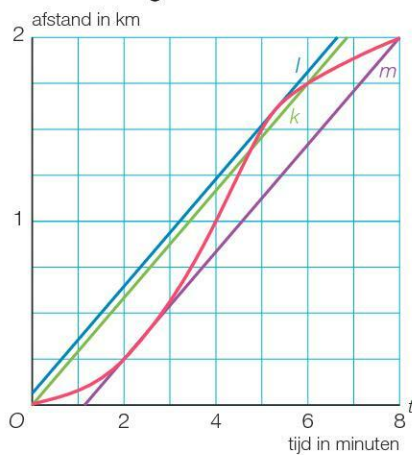
- d** $12 \text{ km/uur} = 0,2 \text{ km/minuut}$

Teken een lijn met $rc = 0,2$, dus bijvoorbeeld de lijn k door $(0, 0)$ en $(5, 1)$ in de figuur hieronder.



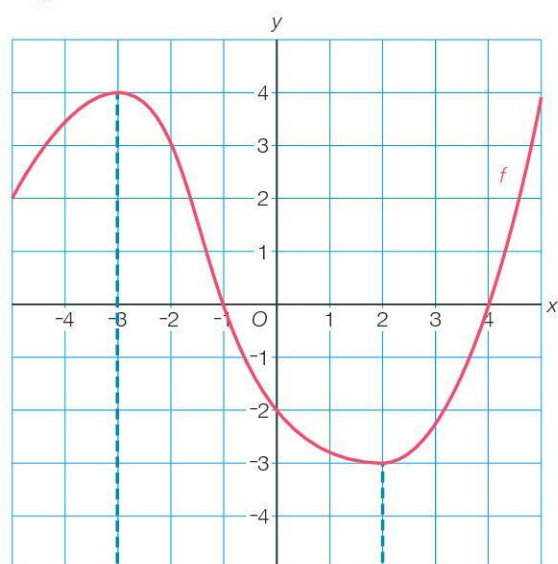
Teken de lijnen l en m evenwijdig met k , waarbij l en m de tijd-afstandgrafiek raken. l raakt de tijd-afstandgrafiek voor $t \approx 1,5$ en m raakt de tijd-afstandgrafiek voor $t \approx 5,5$. Dus op $t \approx 1,5$ en op $t \approx 5,5$ is de snelheid 12 km/uur .

- e** De lijn k door $(0, 0)$ en $(6; 1,75)$ geeft de gemiddelde snelheid op het interval $[0, 6]$. Er zijn twee lijnen evenwijdig met k die de tijd-afstandgrafiek raken. Zie de lijnen l en m in de figuur.

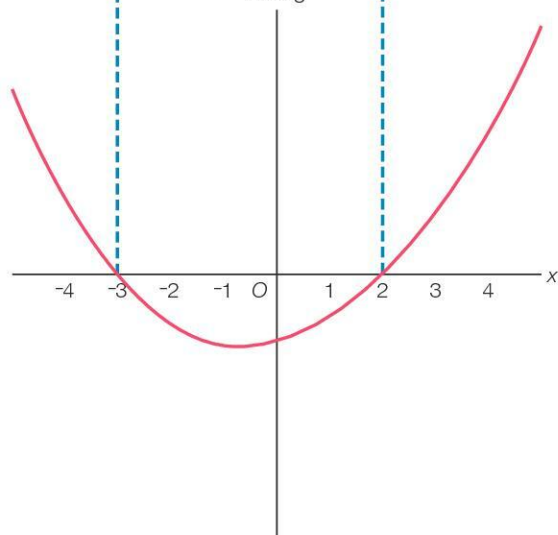
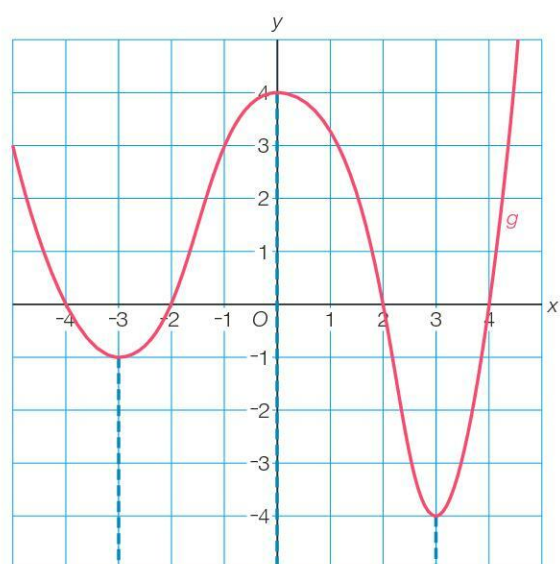


Er zijn dus twee tijdstippen waarop de snelheid hetzelfde is als de gemiddelde snelheid op het interval $[0, 6]$.

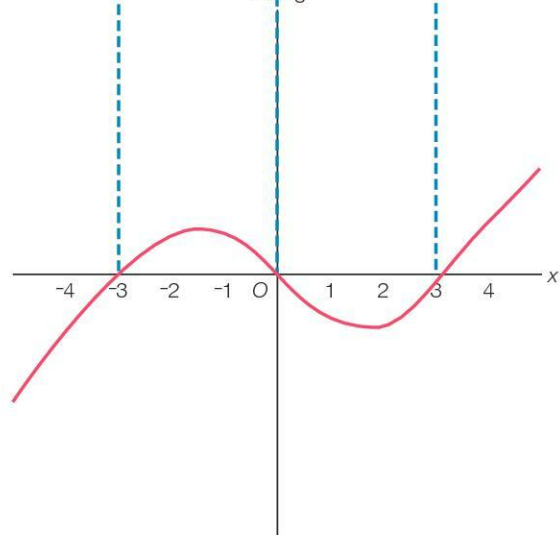
6 a

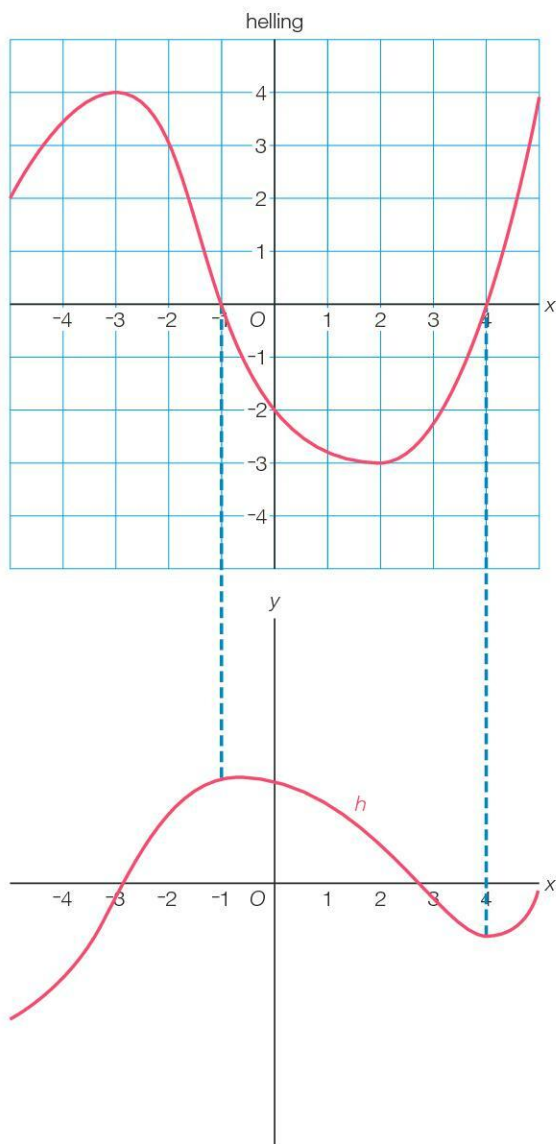


helling



helling



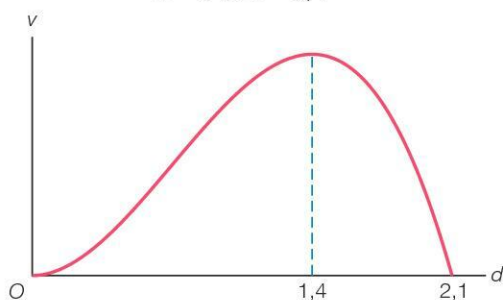
b

c Op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - (-2)}{4 - 0} = \frac{1}{2}$.

d Op $[-2, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4 - 0}{3 - (-2)} = -\frac{4}{5}$.

7 a $v = 20(2,1 - d)d^2 = 20d^2(2,1 - d) = 42d^2 - 20d^3$ geeft $\frac{dv}{dd} = 84d - 60d^2$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dd} = 0 & \text{ geeft } 84d - 60d^2 = 0 \\ d(84 - 60d) &= 0 \\ d = 0 & \text{ of } 84 - 60d = 0 \\ d = 0 & \text{ of } -60d = -84 \\ d = 0 & \text{ of } d = 1,4 \end{aligned}$$



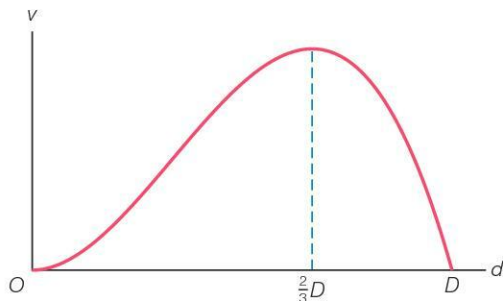
v is maximaal voor $d = 1,4$.

$$v_{\max} = 42 \cdot 1,4^2 - 20 \cdot 1,4^3 = 27,44$$

De maximale snelheid is $27,44 \text{ m/s} = 27,44 \cdot 3,6 \approx 99 \text{ km/uur}$.

b $v = k(D-d)d^2 = kd^2(D-d) = kDd^2 - kd^3$ geeft $\frac{dv}{dd} = 2kDd - 3kd^2$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dd} = 0 & \text{ geeft } 2kDd - 3kd^2 = 0 \\ & kd(2D - 3d) = 0 \\ & kd = 0 \text{ of } 2D - 3d = 0 \\ & d = 0 \text{ of } -3d = -2D \\ & d = 0 \text{ of } d = \frac{2}{3}D\end{aligned}$$



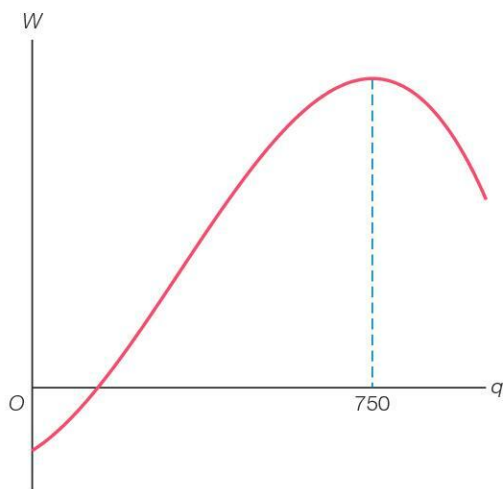
c $v_{\max} = kD \cdot (\frac{2}{3}D)^2 - k \cdot (\frac{2}{3}D)^3 = kD \cdot \frac{4}{9}D^2 - k \cdot \frac{8}{27}D^3 = \frac{4}{9}kD^3 - \frac{8}{27}kD^3 = \frac{4}{27}kD^3$

d Neem bijvoorbeeld $D = 2,5$.

$k = 20$ en $D = 2,5$ geeft $v_{\max} = \frac{4}{27} \cdot 20 \cdot 2,5^3 = 46,3$ m/s en dat is $46,3 \cdot 3,6 \approx 167$ km/uur.
Dus 170 km/uur zou wel kunnen.

Bladzijde 203

8 a $W(q) = -0,0001q^3 + 0,0975q^2 + 22,5q - 5000$ geeft $W'(q) = -0,0003q^2 + 0,195q + 22,5$
 $W'(q) = 0$ geeft $-0,0003q^2 + 0,195q + 22,5 = 0$
 $q^2 - 650q - 75000 = 0$
 $(q + 100)(q - 750) = 0$
 $q = -100$ of $q = 750$



Uit de schets volgt dat W maximaal is voor $q = 750$.

$W_{\max} = W(750) = 24531,25$, dus de maximale winst is 24531,25 euro.

b $W'(300) = -0,0003 \cdot 300^2 + 0,195 \cdot 300 + 22,5 = 54$

$W'(400) = -0,0003 \cdot 400^2 + 0,195 \cdot 400 + 22,5 = 52,5$

Omdat $54 > 52,5$ stijgt de winst bij een productie van 300 stuks sneller dan bij een productie van 400 stuks.

- 9 a** Voer in $y_1 = -0,002x^3 + 0,075x^2 - 0,6x + 64$.
Neem x tussen 0 en 30.
Schets (met de coördinaten van de toppen en de randpunten, zie vraag b).

b $P(t) = -0,002t^3 + 0,075t^2 - 0,6t + 64$ geeft
 $P'(t) = -0,006t^2 + 0,15t - 0,6$
 $P'(t) = 0$ geeft $-0,006t^2 + 0,15t - 0,6 = 0$
 $t^2 - 25t + 100 = 0$
 $(t - 5)(t - 20) = 0$
 $t = 5$ of $t = 20$

$t = 5$ geeft $P = 62,625$

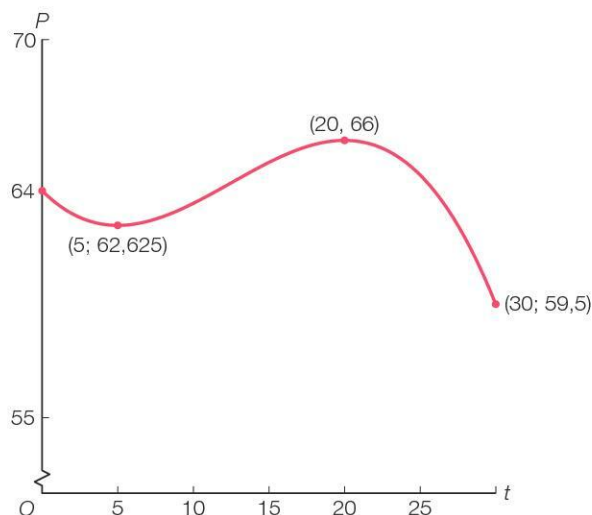
$t = 20$ geeft $P = 66$

Dus de toppen zijn $(5; 62,625)$ en $(20, 66)$.

Randpunten: $t = 0$ geeft $P = 64$ en $t = 30$ geeft $P = 59,5$ dus $(0, 64)$ en $(30; 59,5)$.

- c** Kopen op 5 juni en verkopen op 20 juni geeft de maximale winst van $66 - 62,625 = 3,375$ euro per aandeel.

De maximale winst die Marceline kan behalen, is dus $50 \cdot 3,375 = 168,75$ euro.



- 10 a** $y = 5\sqrt{x^2 + 36} - 20 - 4x = 5(x^2 + 36)^{\frac{1}{2}} - 20 - 4x$ geeft

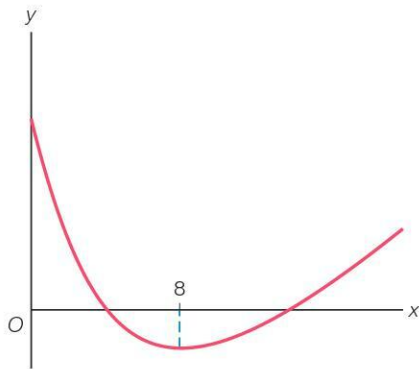
$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{2}(x^2 + 36)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - 4 = \frac{5x}{(x^2 + 36)^{\frac{1}{2}}} - 4 = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 4$$

b helling $= \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = \frac{5 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 36}} - 4 = 0 - 4 = -4$

c Los op $\frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 4 = 0$ oftewel $\frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}} = 4$

Voer in $y_1 = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}}$ en $y_2 = 4$.

De optie snijpunt geeft $x = 8$.



Uit de schets volgt dat y minimaal is voor $x = 8$.
 $x = 8$ geeft $y = -2$, dus het minimum van y is -2 .

9 Kansverdelingen

- 11 a** X = aantal keer 6 ogen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$.
 $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$
 De GR geeft $P(X > 2) \approx 0,225$.

- b** X = aantal keer meer dan 9 ogen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 12$ en
 $p = P(\text{meer dan 9 ogen}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
 $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$
 De GR geeft $P(X \geq 4) \approx 0,125$.

- c** hoogstens 5 ogen, dus 3, 4 of 5
 3 ogen 111
 4 ogen 112, 121, 211
 5 ogen 113, 131, 122, 212, 221
 $P(\text{hoogstens 5 ogen}) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$
 X = aantal keer hoogstens 5 ogen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = \frac{5}{108}$.
 De GR geeft $P(X \leq 2) \approx 0,937$.

- d** $P(\text{minstens één keer 6 ogen}) = 1 - P(\text{niet één keer 6 ogen}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$
 $P(\text{vier keer gooien}) = \left(\frac{25}{36}\right)^3 \cdot \frac{11}{36} \approx 0,102$

	SOM					
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

Bladzijde 204

- 12 a** $P(X = 100) = P(333) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{120} \approx 0,008$

- b** $P(X = 20) = P(444) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{120}$

$$P(X = 5) = P(555) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{120}$$

$$P(X = 0) = 1 - P(X = 100) - P(X = 20) - P(X = 5) = 1 - \frac{1}{120} - \frac{4}{120} - \frac{12}{120} = \frac{103}{120}$$

x	0	5	20	100
$P(X = x)$	$\frac{103}{120}$	$\frac{12}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{1}{120}$

- c** $P(Y = 10) = P(334) + P(343) + P(433) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,042$

- d** $P(\text{twee keer een 3}) = P(333) + P(333) + P(333) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = 0,1$

$$P(\text{elke keer twee keer het cijfer 3}) = 0,1^4 = 0,0001$$

- e** $P(\text{hoofdprijs}) = \frac{1}{120}$ en $P(\text{geen hoofdprijs}) = \frac{119}{120}$

$$P(\text{acht of negen keer spelen}) = P(\text{acht keer spelen}) + P(\text{negentien keer spelen})$$

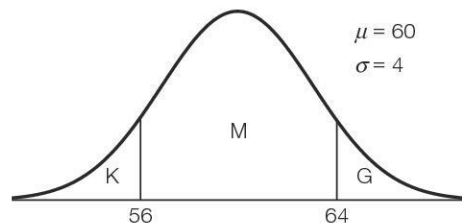
$$= \left(\frac{119}{120}\right)^7 \cdot \frac{1}{120} + \left(\frac{119}{120}\right)^8 \cdot \frac{1}{120} \approx 0,016$$

- 13 a** X = aantal reizen dat niet wordt geannuleerd
 X is binomiaal verdeeld met $n = 1350$ en $p = 0,92$.
 De GR geeft $P(X \leq 1250) \approx 0,802$.
 De gevraagde kans is 0,802.

- b** X = aantal annuleringen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 1300$ en $p = 0,08$.
 De verwachtingswaarde is $E(X) = np = 1300 \cdot 0,08 = 104$ en de standaardafwijking is
 $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1300 \cdot 0,08 \cdot 0,92} \approx 9,8$.
 $E(X) - \sigma_X \approx 104 - 9,8 = 94,2$
 $E(X) + \sigma_X \approx 104 + 9,8 = 113,8$
 $P(94,2 < X < 113,8) = P(95 \leq X \leq 113)$
 De GR geeft $P(94,2 < X < 113,8) \approx 0,669$.

- c** Stel men verkoopt maximaal n reizen.
 Voor welke n is $P(X \leq 1250) \geq 0,95$?
 Voer bij y_1 een formule in en maak een tabel.
 Op de TI: $y_1 = \text{binomcdf}(x, 0,92, 1250)$.
 Op de Casio: $y_1 = \text{BinomialCD}(1250, x, 0,92)$.
 Op de NW: $y_1 = \text{binomcdf}(1250, x, 0,92)$.
 Op de HP: $y_1 = \text{BINOMIAL_CDF}(x, 0,92, 1250)$.
 Je leest af voor $n = 1341$ is $P(X \leq 1250) \approx 0,957$
 voor $n = 1342$ is $P(X \leq 1250) \approx 0,947$.
 Dus maximaal 1341 reizen verkopen.

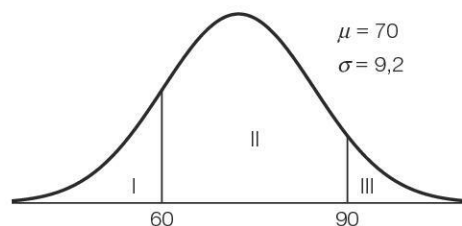
- 14 a** X = gewicht ei in gram
 X is normaal verdeeld met $\mu = 60$ en $\sigma = 4$.
 Bij $l = -10^{99}$ en $r = 56$ geeft de GR opp = 0,1586...
 Tot de klasse K behoren naar verwachting
 $5000 \cdot 0,1586... \approx 793$ eieren.
 Bij $l = 56$ en $r = 64$ geeft de GR opp = 0,6826...
 Tot de klasse M behoren naar verwachting
 $5000 \cdot 0,6828... \approx 3414$ eieren.
- b** In klasse G zitten naar verwachting $5000 - 3414 - 793 = 793$ eieren.
 De verwachte opbrengst is $793 \cdot 0,09 + 3414 \cdot 0,10 + 793 \cdot 0,11 = 500$ euro.
 De kosten zijn dan $300 + 5000 \cdot 0,015 = 375$ euro.
 Dus de verwachte winst is $500 - 375 = 125$ euro.



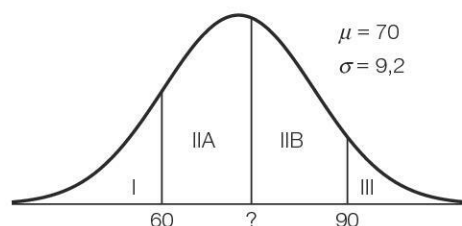
Bladzijde 205

- 15 a** Er wordt net zolang gegooid totdat rood of geel heeft gewonnen. Bij zowel rood als geel leiden 5 van de 36 mogelijkheden tot winst. Dus deze kansen zijn gelijk en dus beide gelijk aan 0,5.
- b** Je wint 5 euro met dubbel 1 (voor rood) of dubbel 6 (voor geel).
 Dubbel 1 is één van de 5 mogelijkheden op winst van rood.
 Deze kans is dus $\frac{1}{5} \cdot 0,5 = 0,1$.
- c** $P(W = 5) = 0,1$
 $P(W = 10) = \frac{4}{5} \cdot 0,5 = 0,4$
 $P(W = -10) = P(\text{andere kleur wint}) = 0,5$
- | w | 5 | 10 | -10 |
|------------|-----|-----|-----|
| $P(W = w)$ | 0,1 | 0,4 | 0,5 |
- $E(W) = 5 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,4 + (-10) \cdot 0,5 = -0,5$
 De verwachtingswaarde van de winst per spel is -50 cent.

- 16 a** Normale verdeling met $\mu = 70$ en $\sigma = 9,2$.
 Bij $l = -10^{99}$ en $r = 60$ geeft de GR opp (I) = 0,1385... $\approx 0,139$.
 Bij $l = 60$ en $r = 90$ geeft de GR opp (II) = 0,8466... $\approx 0,847$.
 Bij $l = 90$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp (III) = 0,0148 $\approx 0,015$.
 Dus tot groep I behoort 13,9%, tot II 84,7% en tot III 1,5%.

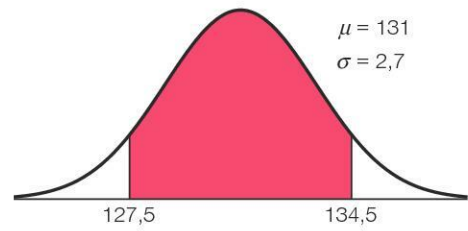


- b** opp links van a is $0,1385... + \frac{1}{2} \cdot 0,8466... = 0,5618...$
 De GR geeft $a \approx 71,43$.
 Dus de grens ligt bij 71.

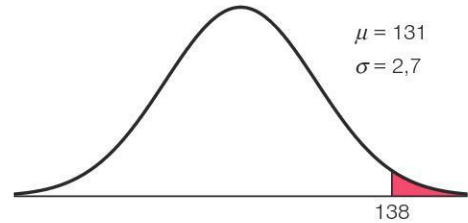


Bladzijde 206

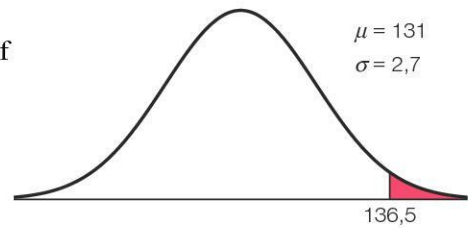
- 17 a** Normale verdeling met $\mu = 131$ en $\sigma = 2,7$.
Bij $l = 127,5$ en $r = 134,5$ geeft de GR opp $\approx 0,805$.
Dus van 80,5%.



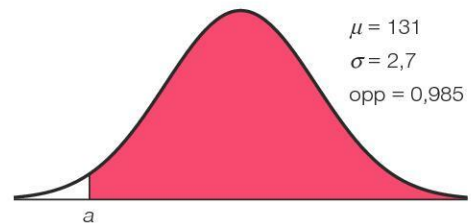
- b** Bij $l = 138$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp = 0,004...
Dus $P(\text{meer dan } 138 \text{ } ^\circ\text{Oe}) = 0,004...$
 $P(\text{minstens } \text{\'e}en) = 1 - P(\text{geen}) = 1 - (1 - 0,004...) ^5 \approx 0,024$



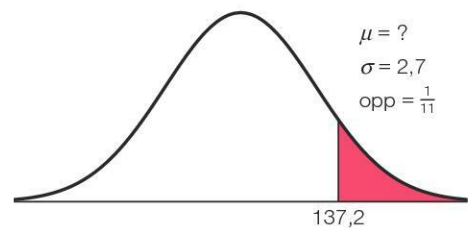
- c** Bij $l = 136,5$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,021$.
2,1% heeft een suikergehalte groter dan 136,5 $^\circ\text{Oe}$, dus de druif met een suikergehalte van 136,5 $^\circ\text{Oe}$ behoort niet tot de twee procent druiven met het hoogste suikergehalte.



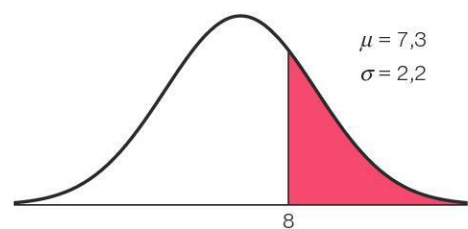
- d** opp links van a is $1 - 0,985 = 0,015$
De GR geeft $a \approx 125,14$.
Dus deze ondergrens is 125,14 $^\circ\text{Oe}$ of meer.



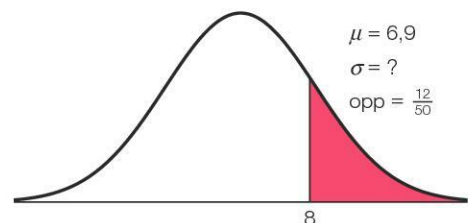
- e** Normale verdeling met $\mu = x$, $\sigma = 2,7$, $l = 137,2$ en $r = 10^{99}$.
Los op opp = $\frac{1}{11}$.
Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = \frac{1}{11}$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 133,595$.
Dus gemiddeld 133,6 $^\circ\text{Oe}$.



- 18 a** Vetpercentage is normaal verdeeld met $\mu = 7,3$ en $\sigma = 2,2$.
Bij $l = 8$ en $r = 10^{99}$ geeft GR opp = 0,375...
 X = aantal bollen met een vetpercentage van meer dan 8%
 X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = 0,375...$
 $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$
De GR geeft $P(X > 4) \approx 0,306$.

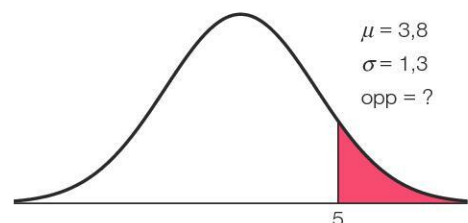


- b** Normale verdeling met $\mu = 6,9$, $\sigma = x$, $l = 8$ en $r = 10^{99}$.
Los op opp = $\frac{12}{50}$.
Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = \frac{12}{50}$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 1,557$.
Dus de standaardafwijking is 1,6%.

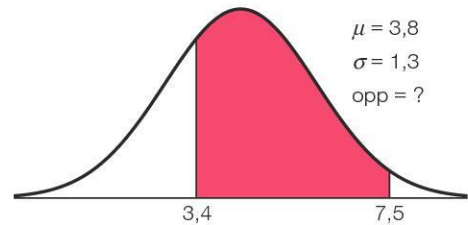


Bladzijde 207

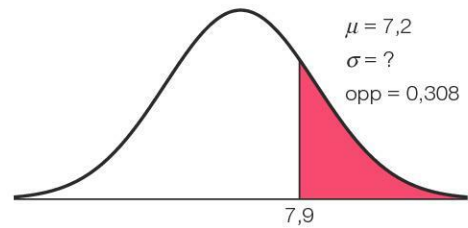
- 19 a** Normale verdeling met $\mu = 3,8$ en $\sigma = 1,3$.
Bij $l = 5$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp = 0,177...
Dus $0,177... \cdot 24 \cdot 365 \approx 1559$ uur.



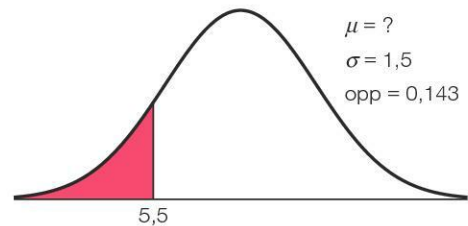
- b** Bij $l = 3,4$ en $r = 7,5$ geeft de GR opp = 0,618...
Dus $0,618... \cdot 24 \cdot 365 \approx 5420$ uur.



- c** Normale verdeling met $\mu = 7,2$, $\sigma = x$, $l = 7,9$ en $r = 10^{99}$.
Los op opp = 0,308.
Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,308$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 1,4$, dus $\sigma = 1,4$ m/s.



- d** Normale verdeling met $\mu = x$, $\sigma = 1,5$, $l = -10^{99}$ en $r = 5,5$.
Los op opp = 0,143.
Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,143$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 7,1$, dus $\mu = 7,1$ m/s.



10 Exponenten en logaritmen

- 20 a** $g_{\text{jaar}} = 1,096$, dus $g_{10 \text{ jaar}} = 1,096^{10} \approx 2,501$.
De toename per 10 jaar is 150,1%.
- b** $g_{\text{jaar}} = 1,096$, dus $g_{\text{maand}} = 1,096^{\frac{1}{12}} \approx 1,008$.
De toename per maand is 0,8%.
- c** Los op $1,096^t = 2$.
Voer in $y_1 = 1,096^x$ en $y_2 = 2$.
De optie snijpunt geeft $x = 7,56...$
De hoeveelheid is na ongeveer 91 maanden verdubbeld.
- d** Los op $1,096^t = 10$.
Voer in $y_1 = 1,096^x$ en $y_2 = 10$.
De optie snijpunt geeft $x = 25,11...$
De hoeveelheid is na ongeveer 25 jaar vertienvoudigd.
- 21 a** $g_{\text{dag}} = 0,83$, dus $g_{\text{week}} = 0,83^7 \approx 0,271$.
De afname per week is 72,9%.
- b** $g_{\text{dag}} = 0,83$, dus $g_{\text{uur}} = 0,83^{\frac{1}{24}} \approx 0,992$.
De afname per uur is 0,8%.
- c** Los op $0,83^t = \frac{1}{2}$.
Voer in $y_1 = 0,83^x$ en $y_2 = 0,5$.
De optie snijpunt geeft $x = 3,72...$
De hoeveelheid is na ongeveer 89 uur gehalveerd.
- d** Los op $0,83^t = \frac{1}{4}$.
Voer in $y_1 = 0,83^x$ en $y_2 = 0,25$.
De optie snijpunt geeft $x = 7,44...$
Na ongeveer 7,4 dagen is nog een kwart van de beginhoeveelheid over.

- 22 a** $y = 40 e^{0,6x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 40 e^{0,6x} \cdot 0,6 = 24 e^{0,6x}$
- b** $y = 18,5(1 + e^{2x})$ geeft $\frac{dy}{dx} = 18,5 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 37 e^{2x}$
- c** $N = 34 \cdot 5^{t^2-7}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 34 \cdot 5^{t^2-7} \cdot \ln(5) \cdot 2t = 68t \cdot \ln(5) \cdot 5^{t^2-7}$
- d** $P = 600(1 + 8^{1,5q})$ geeft $\frac{dP}{dq} = 600 \cdot 8^{1,5q} \cdot \ln(8) \cdot 1,5 = 900 \cdot \ln(8) \cdot 8^{1,5q}$

- 23 a** $N = {}^4\log(3x) = {}^4\log(3) + {}^4\log(x) = {}^4\log(3) + \frac{\log(x)}{\log(4)} = {}^4\log(3) + \frac{1}{\log(4)} \cdot \log(x) \approx 0,79 + 1,66 \cdot \log(x)$
Dus $N = 0,79 + 1,66 \cdot \log(x)$.
- b** $N = 5 + 2 \cdot \log(3t) = 5 + 2(\log(3) + \log(t)) = 5 + 2 \cdot \log(3) + 2 \cdot \log(t) = 5 + 2 \cdot \log(3) + 2 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(10)}$
 $= 5 + 2 \cdot \log(3) + \frac{2}{\ln(10)} \cdot \ln(t) \approx 5,95 + 0,87 \cdot \ln(t)$
Dus $N = 5,95 + 0,87 \cdot \ln(t)$.
- c** $Q = 3 + {}^4\log(2x + 1)$
 ${}^4\log(2x + 1) = Q - 3$
 $2x + 1 = 4^{Q-3}$
 $2x = -1 + 4^{Q-3}$
 $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4^{Q-3}$
Dit is eventueel nog te herleiden tot $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{128} \cdot 4^Q$.
- d** $P = 3 - 2^{3t+1}$
 $2^{3t+1} = 3 - P$
 $3t + 1 = {}^2\log(3 - P)$
 $3t = -1 + {}^2\log(3 - P)$
 $t = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(3 - P)$

Bladzijde 208

- 24 a** $g_{5 \text{ dagen}} = 2$ geeft $g_{\text{dag}} = 2^{\frac{1}{5}} = 1,148...$
Dus de oppervlakte van het meer is $20 \cdot 1,148...^{42} \approx 6756 \text{ m}^2$.
- b** Los op $20 \cdot (2^{\frac{1}{5}})^t = 0,3 \cdot 6756$.
Voer in $y_1 = 20 \cdot (2^{\frac{1}{5}})^x$ en $y_2 = 0,3 \cdot 6756$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 33,3$.
 $t = 0$ op 1 mei om 0:00 uur en $t = 30$ op 31 mei om 0:00 uur, dus $t = 33,3$ is op 3 juni.
- 25 a** $N = b \cdot g^t$ met $g_{4 \text{ dagen}} = \frac{272}{160}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{272}{160}\right)^{\frac{1}{4}} = 1,1418...$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,1418...^t \\ t = 4 \text{ en } N = 160 \end{array} \right\} b \cdot 1,1418...^4 = 160$$

$$b = \frac{160}{1,1418...^4} \approx 94$$

Dus $N = 94 \cdot 1,142^t$.
- b** $P = b \cdot g^t$ met $g_{12 \text{ dagen}} = 0,84$, dus $g_{\text{dag}} = 0,84^{\frac{1}{12}} \approx 0,986$.
 $P = b \cdot g^t$ met $b = 100$ en $g = 0,986$ geeft $P = 100 \cdot 0,986^t$.
- c** Stel in de laatste 4 jaar is g de vermenigvuldigingsfactor per jaar.
Er geldt dan $1,092^6 \cdot g^4 = 1,85$.
Voer in $y_1 = 1,092^6 \cdot x^4$ en $y_2 = 1,85$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 1,022$, dus $g \approx 1,022$.
Het jaarlijkse toenamepercentage voor de laatste vier jaar is 2,2%.
- 26 a** $N = b \cdot g^t$ met $g_{45 \text{ jaar}} = \frac{109,5}{3,4}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{109,5}{3,4}\right)^{\frac{1}{45}} \approx 1,080$.
 $t = 0$ in 1970, dus $b = 3,4$.
Dit geeft de formule $N = 3,4 \cdot 1,080^t$.
- b** Los op $1,080^t = 2$.
Voer in $y_1 = 1,080^x$ en $y_2 = 2$.
De optie snijpunt geeft $x = 9,00...$, dus de verdubbelingstijd is 9 jaar.
- c** Los op $3,4 \cdot 1,080^t = 18,6 \cdot \ln(t + 10) + 19,1$.
Voer in $y_1 = 3,4 \cdot 1,080^x$ en $y_2 = 18,6 \cdot \ln(x + 10) + 19,1$.
De optie snijpunt geeft $x = 42,98...$
Dus in $1970 + 43 = 2013$.

- d** Hoeveelheden gevangen en gekweekte vis:
in 1970 was dat $61,9 + 3,4 = 65,9$ miljoen ton en
in 2015 was dat $93,6 + 109,5 = 203,1$ miljoen ton.
Dat is $\frac{203,1}{65,9} \approx 3,11$ keer zo veel.

Dus de gemiddelde wereldburger is in deze periode $\frac{3,11}{2} \approx 1,6$ keer zoveel vis gaan eten.

- e** $N = 18,6 \cdot \ln(t + 10) + 19,1 = 18,6 \cdot \frac{\log(t + 10)}{\log(e)} + 19,1 = \frac{18,6}{\log(e)} \cdot \log(t + 10) + 19,1$
 $\approx 42,8 \cdot \log(t + 10) + 19,1$
Dus $N = 42,8 \cdot \log(t + 10) + 19,1$.

Bladzijde 209

- 27 a** In april 2005 waren er 500 damherten en in april 2015 waren er 3000 damherten.
Dus $\frac{3000}{500} = 6$ keer zoveel.
- b** Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.
Neem $t = 0$ in 2004, dus $b = 400$.
Lijn ook door (2013, 2000).
 $g_{9 \text{ jaar}} = \frac{2000}{400} = 5$, dus $g_{\text{jaar}} = 5^{\frac{1}{9}} \approx 1,196$.
De formule is $N = 400 \cdot 1,196^t$.
Bij april 2025 hoort $t = 21$.
 $t = 21$ geeft $N = 400 \cdot 1,196^{21} \approx 17\,156$, dus dan zouden er ongeveer 17 160 damherten zijn.
- c** $3319 \text{ ha} = 33,19 \text{ km}^2$
Dus er waren toen $40 \cdot 33,19 \approx 1328$ damherten.
Los op $400 \cdot 1,196^t = 1328$.
Voer in $y_1 = 400 \cdot 1,196^x$ en $y_2 = 1328$.
De optie snijpunt geeft $x = 6,70\dots$
Dit artikel verscheen ongeveer 6,7 jaar na april 2004, dus dat was begin 2011.

Bladzijde 210

- 28 a** $0,67 \cdot \log(0,5E) - 3 = 0$
 $0,67 \cdot \log(0,5E) = 3$
 $\log(0,5E) = \frac{3}{0,67} = 4,47\dots$
 $0,5E = 10^{4,47\dots}$
 $E = 2 \cdot 10^{4,47\dots} \approx 60\,000$
De formule geldt voor waarden van E vanaf 60 000.
- b** $M = 0,67 \cdot \log(0,5 \cdot 2 \cdot 10^{18}) - 3 = 9,06$, dus een beving van 9,1 op de schaal van Richter.
- c** Los op $0,67 \cdot \log(0,5E) - 3 = 3,4$
 $0,67 \cdot \log(0,5E) = 6,4$
 $\log(0,5E) = 9,55\dots$
 $0,5E = 10^{9,55\dots}$
 $E = 2 \cdot 10^{9,55\dots} \approx 7,1 \cdot 10^9$ joule
- d** $M(E) = 0,67 \cdot \log(0,5E) - 3$
 $M(2E) = 0,67 \cdot \log(0,5E \cdot 2) - 3$
 $= 0,67(\log(0,5E) + \log(2)) - 3$
 $= 0,67 \cdot \log(0,5E) + 0,67 \cdot \log(2) - 3$
 $= M(E) + 0,67 \cdot \log(2)$
 $\approx M(E) + 0,20$
Dus het getal is 0,20.

$$\begin{aligned}
 \text{e } M &= 0,67 \cdot \log(0,5E) - 3 = 0,67(\log(0,5) + \log(E)) - 3 \\
 &= 0,67 \cdot \log(0,5) + 0,67 \cdot \log(E) - 3 \\
 &= 0,67 \cdot \frac{\ln(E)}{\ln(10)} + 0,67 \cdot \log(0,5) - 3 \\
 &= \frac{0,67}{\ln(10)} \cdot \ln(E) + 0,67 \cdot \log(0,5) - 3 \\
 &\approx 0,29 \cdot \ln(E) - 3,20
 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } M = 0,29 \cdot \ln(E) - 3,20.$$

$$\begin{aligned}
 \text{f } 0,67 \cdot \log(0,5E) - 3 &= M \\
 0,67 \cdot \log(0,5E) &= M + 3 \\
 \log(0,5E) &= \frac{M+3}{0,67} = 1,49...M + 4,47...
 \end{aligned}$$

$$0,5E = 10^{1,49...M + 4,47...}$$

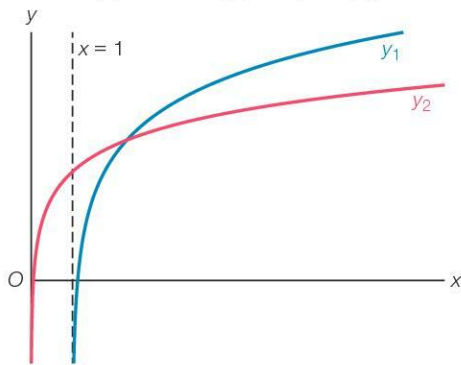
$$E = 2 \cdot (10^{1,49...})^M \cdot 10^{4,47...}$$

$$E \approx 60\,000 \cdot 31^M$$

$$\text{Dus } E = 60\,000 \cdot 31^M.$$

$$\begin{aligned}
 \text{g } E(M) &= 60\,000 \cdot 31^M \\
 E(M+1) &= 60\,000 \cdot 31^{M+1} = 60\,000 \cdot 31^M \cdot 31 = 31 \cdot E(M) \\
 \text{Dus het getal is } &31.
 \end{aligned}$$

29 a Voer in $y_1 = 3 + {}^2\log(x-1)$ en $y_2 = 2 + {}^3\log(2x)$.



b De optie snijpunt geeft $x \approx 2,315$.

$$\begin{aligned}
 \text{c } y &= 3 + {}^2\log(x-1) \\
 {}^2\log(x-1) &= y-3 \\
 x-1 &= 2^{y-3} \\
 x &= 1 + 2^y \cdot 2^{-3} \\
 x &= 1 + \frac{1}{8} \cdot 2^y
 \end{aligned}$$

$$\text{d } y = 2 + {}^3\log(2x) = 2 + {}^3\log(2) + {}^3\log(x) = 2 + {}^3\log(2) + \frac{\ln(x)}{\ln(3)}$$

$$= 2 + {}^3\log(2) + \frac{1}{\ln(3)} \cdot \ln(x) \approx 2,63 + 0,91 \cdot \ln(x)$$

$$\text{Dus } y = 2,63 + 0,91 \cdot \ln(x)$$

Bladzijde 211

30 a g_{35} weerkaatsingen $= 0,90$, dus g_1 weerkaatsing $= 0,90^{\frac{1}{35}} = 0,9969...$
 $P = b \cdot g^n$ met $b = 100$ en $g = 0,997$ geeft $P = 100 \cdot 0,997^n$.

b $n = 15$ geeft $P = 95,6$, dus 95,6%.

c $n = 20$ geeft $P = 94,2$, dus er wordt 5,8% geabsorbeerd.

11 Het toetsen van hypothesen

- 31 a** 8 minuten en 24 seconden = 8,4 minuten
2 minuten en 3 seconden = 2,05 minuten
 X is de tijd per adres

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 8,4$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{2,05}{\sqrt{10}}$.

De GR geeft $P(\bar{X} < 8) \approx 0,269$.

- b** 8 minuten en 24 seconden = 504 seconden

2 minuten en 3 seconden = 123 seconden

De bezorgtijd T van 10 adressen is normaal verdeeld met $\mu_T = 10 \cdot 504 = 5040$ seconden

en $\sigma_T = \sqrt{10} \cdot 123 = 123\sqrt{10}$ seconden.

Tussen 18:37 uur en 19:50 uur zit 1 uur en 13 minuten, dat is 4380 seconden.

De GR geeft $P(T > 4380) \approx 0,955$.

De gevraagde kans is 0,955.

- 32** X = gewicht van een chocolaatje

Stel er zitten n chocolaatjes in een doosje.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 15$ gram en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{1,3}{\sqrt{n}}$ gram.

Los op $P(\bar{X} > 14,5) > 0,90$.

Voer bij y_1 de normale verdeling in.

De tabel geeft

bij $x = 11$ is $y_1 = 0,898...$

bij $x = 12$ is $y_1 = 0,908...$

Dus er zitten minstens 12 chocolaatjes in een doosje.

Bladzijde 212

- 33 a** X = tijd in uren die een student per week aan bijbaantjes kwijt is

$H_0: \mu_X = 10,5$, $H_1: \mu_X \neq 10,5$ en $\alpha = 0,05$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 10,5$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3,2}{\sqrt{60}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 9,8)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 9,8) \approx 0,045$.

$P(\bar{X} \leq 9,8) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Er is geen aanleiding om te twijfelen aan de bewering van het onderzoeksbureau.

- b** $H_0: \mu_X = 10,5$, $H_1: \mu_X \neq 10,5$ en $\alpha = 0,10$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 10,5$ en

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3,2}{\sqrt{200}}.$$

opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,10 = 0,05$

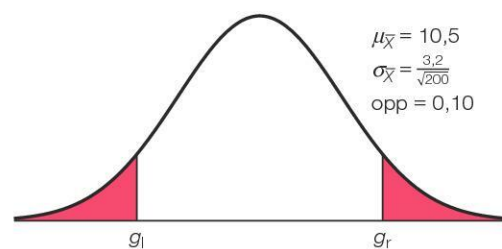
$P(\bar{X} \leq g_l) = 0,05$

De GR geeft $g_l \approx 10,128$.

$P(\bar{X} \leq g_r) = 1 - 0,05 = 0,95$

De GR geeft $g_r \approx 10,872$.

Men zal het onderzoeksbureau gelijk geven bij steekproefresultaten van 10,13 tot en met 10,87 uur.

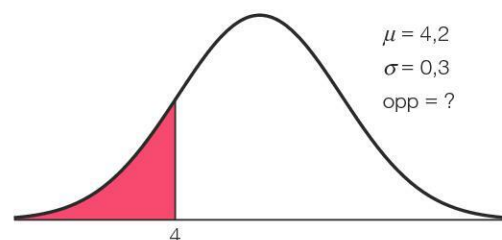


- 34 a** X = inhoud van een zakje in gram

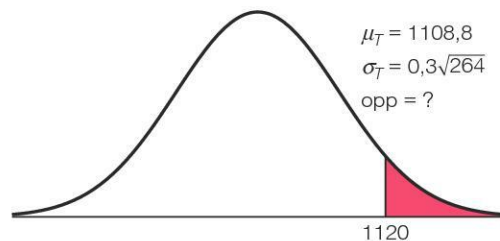
X is normaal verdeeld met $\mu_X = 4,2$ en $\sigma_X = 0,3$.

De GR geeft $P(X < 4) = 0,252...$

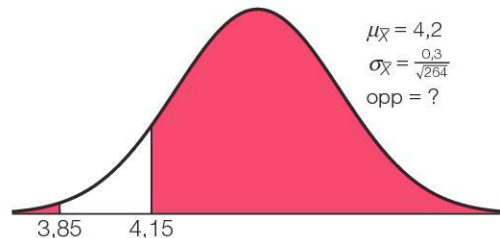
Dus naar verwachting $0,252... \cdot 264 \approx 67$ zakjes.



- b** De inhoud T van 264 zakjes is normaal verdeeld met $\mu_T = 264 \cdot 4,2 = 1108,8$ gram en $\sigma_T = \sqrt{264} \cdot 0,3 = 0,3\sqrt{264}$ gram. De GR geeft $P(T > 1120) \approx 0,011$.

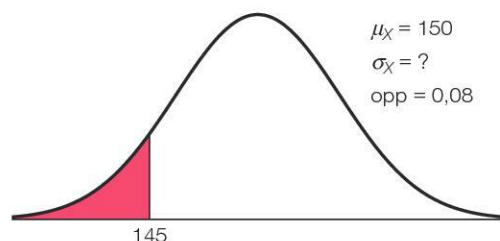


- c** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 4,2$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,3}{\sqrt{264}}$.
 $P(\bar{X} < 3,85 \text{ of } \bar{X} > 4,15) = P(\bar{X} < 3,85) + P(\bar{X} > 4,15)$.
 De GR geeft $P(\bar{X} < 3,85 \text{ of } \bar{X} > 4,15) \approx 0,997$.
 Dus van 99,7%.



- d** Het bruto gewicht B is normaal verdeeld met $\mu_B = 4,2 + 1,5 = 5,7$ gram en $\sigma_B = \sqrt{0,3^2 + 0,2^2} = \sqrt{0,13}$ gram. De GR geeft $P(B > 6) = 0,202\dots$.
 X = aantal zakjes dat minimaal 6 gram weegt
 X is binomiaal verdeeld $n = 30$ en $p = 0,202\dots$
 $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$
 De GR geeft $P(X \geq 5) \approx 0,756$.

- 35 a** X = gewicht zakje pinda's in gram
 X is normaal verdeeld met $\mu_X = 150$ en onbekende σ .
 Los op $P(X < 145) = 0,08$.
 Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,08$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3,5585\dots$.
 Dus $\sigma = 3,559$ gram.



- b** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 150$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3,56}{\sqrt{10}}$.
 De GR geeft $P(\bar{X} < 148) \approx 0,287$.
c S is normaal verdeeld met $\mu_S = 30 \cdot 150 = 4500$ gram en $\sigma_S = \sqrt{30} \cdot 3,56 = 3,56\sqrt{30}$ gram. De GR geeft $P(S < 4470) = 0,061\dots$.
 Y = aantal dozen dat minder dan 4470 gram bevat
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 3$ en $p = 0,061\dots$
 $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$
 De GR geeft $P(Y \geq 1) \approx 0,175$.

Bladzijde 213

- 36** X = aantal bewoners dat een huisdier heeft
 $H_0: p = 0,47$, $H_1: p < 0,47$ en $\alpha = 0,05$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 60$ en $p = 0,47$.
 38 geen huisdier, dus $60 - 38 = 22$ wel een huisdier.
 De overschrijdingskans is $P(X \leq 22)$.
 De GR geeft $P(X \leq 22) \approx 0,069$.
 $P(X \leq 22) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er kan niet geconcludeerd worden dat de gemeenteambtenaar gelijk heeft.

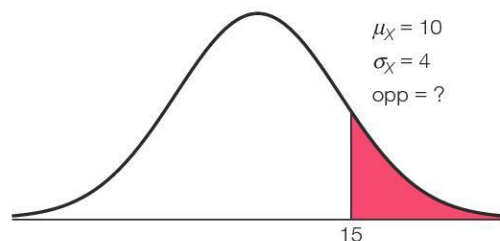
- 37 a** $P(\text{gratis fles}) = 4! \cdot P(\text{r b g o}) = 4! \cdot 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,15 \cdot 0,05 = 0,027$
b $P(\text{twee gratis flessen}) = \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 0,5^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,15^2 \cdot 0,05^2 \approx 0,003$
c X = aantal flessen met een oranje dop
 X is binomiaal verdeeld $n = 30$ en $p = 0,05$.
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$
 De GR geeft $P(X \geq 1) \approx 0,785$.

- d** X = aantal flessen met een rode dop
 $H_0 : p = 0,50$, $H_1 : p > 0,50$ en $\alpha = 0,10$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,50$.
De overschrijdingskans is $P(X \geq 57) = 1 - P(X \leq 56)$.
De GR geeft $P(X \geq 57) \approx 0,097$.
 $P(X \geq 57) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .
Je moet Ronny gelijk geven.
- e** X = aantal flessen met een oranje dop
 $H_0 : p = 0,05$, $H_1 : p < 0,05$ en $\alpha = 0,10$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 200$ en $p = 0,05$.
De GR geeft $a = 6$.
Dus men moet minstens 6 doppen in de steekproef aantreffen, opdat de bewering van de fabrikant niet wordt verworpen.

- 38** T = totale gewicht van de 10 medewerkers
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 5 \cdot 84 + 5 \cdot 70 = 770$ kg en $\sigma_T = \sqrt{5 \cdot 8^2 + 5 \cdot 7^2} = \sqrt{565}$ kg.
De GR geeft $P(T > 800) \approx 0,103$.

Bladzijde 214

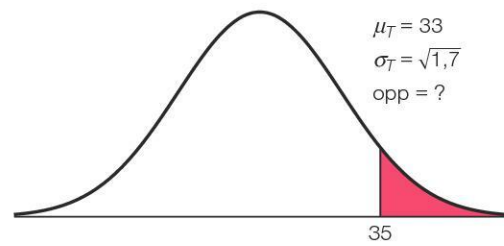
- 39 a** X = tijd in minuten die voor een patiënt nodig is
 X is normaal verdeeld met $\mu_X = 10$ en $\sigma_X = 4$.
 $P(\text{tijdrovende patiënt}) = P(X \geq 15)$
De GR geeft $P(X \geq 15) = 0,1056...$
De huisarts verwacht $0,1056... \cdot 12 \approx 1,27$ tijdrovende patiënten tijdens een spreekuur.
- b** $P(\text{gemakkelijke patiënt}) = P(X \leq 5)$
De GR geeft $P(X \leq 5) = 0,1056...$
 $P(\text{gewone patiënt}) = P(5 < X < 15)$
De GR geeft $P(5 < X < 15) = 0,7887...$



- $P(2 \text{ gemakkelijke en } 10 \text{ gewone patiënten}) = \binom{12}{2} \cdot 0,1056...^2 \cdot 0,7887...^{10} \approx 0,069$
- c** Y = aantal patiënten dat meer dan 10 minuten kost
 Y is binomiaal verdeeld $n = 12$ en $p = 0,5$.
 $P(Y \geq 6) = 1 - P(Y \leq 5)$
De GR geeft $P(Y \geq 6) \approx 0,613$.
- d** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 10$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{12}}$.
De GR geeft $P(\bar{X} \geq 14) \approx 0,0003$.
- e** T = tijd in minuten die huisarts tijdens spreekuur voor 60 patiënten nodig heeft
 $H_0 : \mu_T = 600$, $H_1 : \mu_T > 600$ en $\alpha = 0,05$.
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 60 \cdot \mu_X = 60 \cdot 10 = 600$ en $\sigma_T = \sqrt{60} \cdot 4 = 4\sqrt{60}$.
De overschrijdingskans is $P(T \geq 654)$.
De GR geeft $P(T \geq 654) \approx 0,041$.
 $P(T \geq 654) \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen.
Er is voldoende aanleiding om de gemiddelde tijd van 10 minuten te verhogen.
- f** X = aantal patiënten dat is doorverwezen
 X is binomiaal verdeeld $n = 50$ en $p = 0,3$.
 $P(X < 10) = P(X \leq 9)$
De GR geeft $P(X < 10) \approx 0,040$.

40

- a** D = aantal gram deeg in een reep
 F = aantal gram fruitvulling in een reep
 Het totale gewicht is $T = D + F$.
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 17 + 16 = 33$ en
 $\sigma_T = \sqrt{0,7^2 + 1,1^2} = \sqrt{1,7}$.
 De GR geeft $P(T > 35) \approx 0,063$.

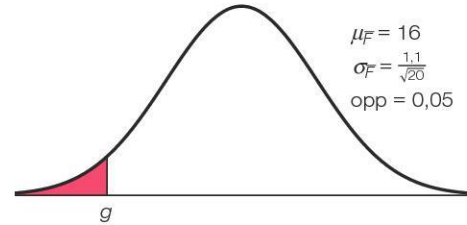


- b** $H_0: \mu_F = 16$, $H_1: \mu_F < 16$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{F}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{F}} = \mu_F = 16$ en
 $\sigma_{\bar{F}} = \frac{\sigma_F}{\sqrt{n}} = \frac{1,1}{\sqrt{20}}$.

$$P(\bar{F} \leq g) = 0,05$$

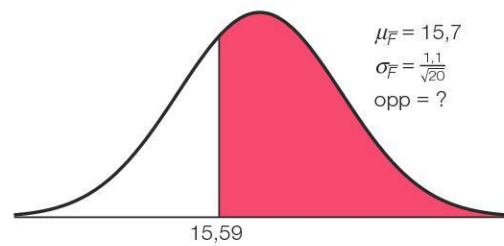
De GR geeft $g \approx 15,59$.

Dus bij steekproefgemiddelden van 15,59 gram of minder zal men de machine bijstellen.



- c** $\bar{F}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{F}} = 15,7$ en $\sigma_{\bar{F}} = \frac{\sigma_F}{\sqrt{n}} = \frac{1,1}{\sqrt{20}}$.

De GR geeft $P(\bar{F} > 15,59) 0,673$.



- d** $H_0: \mu_D = 17$, $H_1: \mu_D \neq 17$ en $\alpha = 0,05$.
 $\bar{D}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{D}} = \mu_D = 17$ en
 $\sigma_{\bar{D}} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} = \frac{0,7}{\sqrt{10}}$.

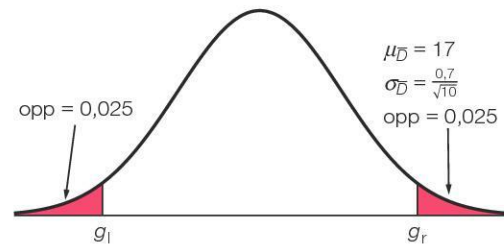
$$P(\bar{D} \leq g_l) = 0,025$$

De GR geeft $g_l \approx 16,566$.

$$P(\bar{D} \leq g_r) = 1 - 0,025 = 0,975$$

De GR geeft $g_r \approx 17,434$.

Dus bijstellen als $\bar{D} \leq 16,56$ of als $\bar{D} \geq 17,44$.



Verantwoording

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

*De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie.
Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontleen.*

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 21

© 2021 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73716-0



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.