

& GETAL RUIMTE

A



Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen **vwo A** deel 4

Twaalfde editie, 2022

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
E. Terlaak

Inhoud

12	Rijen	4
13	Allerlei formules	18
14	Toepassingen van de differentiaalrekening	42
15	Examentraining	75
	Gemengde opgaven	97

12 Rijen

Voorkennis Lineaire en exponentiële groei

Bladzijde 10

- 1 Als n met 1 toeneemt, dan neemt y steeds met 35 toe.
Bij $n = 0$ hoort $y = 250$, dus de formule is $y = 35n + 250$.
- 2 Als n met 1 toeneemt, dan wordt y steeds met 1,6 vermenigvuldigd.
Bij $n = 0$ hoort $y = 250$, dus de formule is $y = 250 \cdot 1,6^n$.

3 $g^3 = \frac{2160}{1250}$, dus $g = \left(\frac{2160}{1250}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = b \cdot 1,2^n \\ n = 2 \text{ en } y = 1250 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,2^2 = 1250 \\ b = \frac{1250}{1,2^2} \approx 868 \end{array}$$

Dus $y = 868 \cdot 1,2^n$.

4 $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{212 - 293}{25 - 10} = -5,4$

$$\left. \begin{array}{l} y = -5,4n + b \\ n = 10 \text{ en } y = 293 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -5,4 \cdot 10 + b = 293 \\ -54 + b = 293 \\ b = 347 \end{array}$$

Dus $y = -5,4n + 347$.

- 5 a Als n met 1 toeneemt, dan neemt y steeds met 8 af.
Bij $n = 0$ hoort $y = 256$, dus de formule is $y = -8n + 256$.
 $n = 13$ geeft $y = -8 \cdot 13 + 256 = 152$.
- b Los op $-8n + 256 = 0$
 $-8n = -256$
 $n = 32$
Dus bij $n = 32$ is $y = 0$.

6 a $g^4 = \frac{829,44}{576}$, dus $g = \left(\frac{829,44}{576}\right)^{\frac{1}{4}} = 1,2$.

Bij $n = 6$ hoort $y = 576 \cdot 1,2 = 691,2$.

b $\left. \begin{array}{l} y = b \cdot 1,2^n \\ n = 3 \text{ en } y = 400 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,2^3 = 400 \\ b = \frac{400}{1,2^3} \end{array}$

$$\text{Dus } y = \frac{400}{1,2^3} \cdot 1,2^n = 400 \cdot 1,2^{n-3}.$$

Voer in $y_1 = 400 \cdot 1,2^{x-3}$ en maak een tabel.

Uit de tabel volgt $n = 16$ geeft $y \approx 4280$ en $n = 17$ geeft $y \approx 5136$.

Dus vanaf $n = 17$ is $y > 5000$.

7 a $y = an + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20 - 320}{7 - 3} = -75$

$$\left. \begin{array}{l} y = -75n + b \\ n = 3 \text{ en } y = 320 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -75 \cdot 3 + b = 320 \\ -225 + b = 320 \\ b = 545 \end{array}$$

Dus $y = -75n + 545$.

b $y = b \cdot g^n$ met $g^4 = \frac{20}{320}$, dus $g = \left(\frac{20}{320}\right)^{\frac{1}{4}} = 0,5$.

$$\left. \begin{array}{l} y = b \cdot 0,5^n \\ n = 3 \text{ en } y = 320 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,5^3 = 320 \\ b = \frac{320}{0,5^3} = 2560 \end{array}$$

Dus $y = 2560 \cdot 0,5^n$.

12.1 Rekenkundige en meetkundige rijen

Bladzijde 11

- 1** A Er komt steeds 7 bij. Het volgende getal is 46.
 B Steeds keer 2. Het volgende getal is 128.
 C Er gaat steeds 32 af. Het volgende getal is 78.
 D Steeds keer $\frac{2}{3}$. Het volgende getal is 16.
 E Het zijn kwadraten. Het volgende getal is 49.

Bladzijde 13

- 2** Je laat zien dat u_9 nog kleiner is dan 500 en dat u_{10} de eerste term is die groter is dan 500.
- 3** **a** De GR geeft de zevende term is $u_6 \approx 340,57$ en de achtste term is $u_7 \approx 356,51$.
b $u_{10} \approx 395,40$ en $u_{11} \approx 405,86$
 Dus vanaf de 12^e term is $u_n > 400$.
- 4** **a** De GR geeft de vierde term is $u_3 = 330,07$ en de vijfde term is $u_4 = 373,35$.
b $u_{11} \approx 419,44$ en $u_{12} \approx 419,60$
 Dus vanaf de 13^e term is $u_n > 419,5$.
c Nee, vanaf $n = 17$ is $u_n \approx 419,76$ en dus is er geen term waarvoor $u_n > 420$.
- 5** **a** Voer in $y_1 = 2x^2 + 7x - 3$.
 De tabel geeft de zesde term is $u_5 = 82$ en de zevende term is $u_6 = 111$.
b Uit de tabel volgt $u_{14} = 487$ en $u_{15} = 552$.
 Dus vanaf de 16^e term is $u_n > 500$.
- 6** **a** Voer in $y_1 = 3x + \frac{24}{x+2}$.
 De tabel geeft de vijfde term is $u_4 = 16$ en de zevende term is $u_6 = 21$.
b Uit de tabel volgt $u_{16} \approx 49,3$ en $u_{17} \approx 52,3$.
 Dus vanaf de 18^e term is $u_n > 50$.
c Geheel getal als 24 wordt gedeeld door 2, 3, 4, 6, 8, 12 of 24.
 Dat zijn de termen $u_0, u_1, u_2, u_4, u_6, u_{10}$ en u_{22} .
- 7** **a** De GR geeft $u_{10} \approx 34,67$ en $u_{11} \approx 35,64$.
 Dus vanaf de 12^e term is $u_n > 35$.
b Voer in $y_1 = -0,3x^2 + 5x - 10$.
 De tabel geeft $u_2 = -1,2$, $u_3 = 2,3$, $u_{14} = 1,2$ en $u_{15} = -2,5$.
 De termen u_3 tot en met u_{14} zijn positief. Dat zijn 12 termen.

Bladzijde 14

- 8** A Er komt steeds 3 bij.
 B Er komt steeds 20 bij.
 C Eerst +3, dan +5, dan +7, dan ...
 D Er gaat steeds 5 af.
 E Er gaat steeds 1 af.
 F Er komt steeds 7 bij.
 Dus rij C heeft een afwijkende regelmaat.

Bladzijde 15

- 9** Bij het doorrekenen op het basisscherm van de GR met [ans] moet je dan heel ver doorgaan en kun je eenvoudig de tel kwijtraken.
- 10** **a** rr met $u_0 = 218$ en $v = 5$, dus $u_n = 218 + 5 \cdot n$.
b De 25^e term is $u_{24} = 218 + 5 \cdot 24 = 338$.
c Los op $218 + 5n = 498$
 $5n = 280$
 $n = 56$
Dus de 57^e term is 498.
- 11** **a** Het verschil van twee opeenvolgende termen is steeds hetzelfde getal, namelijk 5.
b $u_0 = 13$ en $v = 5$, dus de recursieve formule is $u_n = u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 13$.
De directe formule is $u_n = 13 + 5 \cdot n$.
c De 38^e term is $u_{37} = 13 + 5 \cdot 37 = 198$.
d Los op $13 + 5n = 650$
 $5n = 637$
 $n = 127,4$
Dus $u_{127} < 650$ en $u_{128} > 650$.
Er zijn 128 termen kleiner dan 650.
- 12** **a** rr met $u_0 = 1023$ en $v = -7$, dus de directe formule is $u_n = 1023 - 7 \cdot n$.
Los op $1023 - 7n = 246$
 $-7n = -777$
 $n = 111$
Dus de 112^e term is 246.
b Los op $1023 - 7n = 0$
 $-7n = -1023$
 $n \approx 146,1$
Dus $u_{146} > 0$ en $u_{147} < 0$.
De rij heeft 147 positieve termen.
- 13** Stel de rij is $u_n = u_0 + v \cdot n$.
De eerste term is u_0 , de tweede term is $u_0 + v$, de derde term is $u_0 + 2v$, de vierde term is $u_0 + 3v$ en de vijfde term is $u_0 + 4v$.
Er geldt $u_0 + u_0 + 3v = 10$, oftewel $2u_0 + 3v = 10$.
Ook geldt $u_0 + u_0 + v + u_0 + 2v + u_0 + 3v = u_0 + 4v$, oftewel $4u_0 + 6v = u_0 + 4v$, dus $3u_0 + 2v = 0$.
Uit $3u_0 + 2v = 0$ volgt $2v = -3u_0$, dus $v = -1\frac{1}{2}u_0$.
 $v = -1\frac{1}{2}u_0$ invullen bij $2u_0 + 3v = 10$ geeft
 $2u_0 + 3 \cdot -1\frac{1}{2}u_0 = 10$
 $2u_0 - 4\frac{1}{2}u_0 = 10$
 $-2\frac{1}{2}u_0 = 10$
 $u_0 = -4$
 $u_0 = -4$ en $v = -1\frac{1}{2}u_0$ geeft $v = -1\frac{1}{2} \cdot -4 = 6$.
De eerste vijf termen zijn -4, 2, 8, 14 en 20.
- 14** A Steeds keer 2.
B Steeds gedeeld door 2, oftewel keer $\frac{1}{2}$.
C Eerst +2, dan +3, dan +4, dan ...
D Steeds keer $1\frac{1}{2}$.
Dus rij C heeft een afwijkende regelmaat.

Bladzijde 17

- 15** **a** Het quotiënt van twee opeenvolgende termen is steeds hetzelfde getal, namelijk 1,2.
b mr met $u_0 = 1250$ en $r = 1,2$, dus $u_n = 1250 \cdot 1,2^n$.
c De 13^e term is $u_{12} = 1250 \cdot 1,2^{12} \approx 11\,145$.

- d** Voer in $y_1 = 1250 \cdot 1,2^x$.
 Uit de tabel volgt $x = 13$ geeft $y \approx 13\,374$ en $x = 14$ geeft $y \approx 16\,049$.
 Dus vanaf de 15^e term is $u_n > 15\,000$.

- 16** **a** mr met $u_0 = 200$ en $r = 0,5$, dus $u_n = 200 \cdot 0,5^n$.
b rr met $u_0 = 50$ en $v = 3,5$, dus $u_n = 50 + 3,5 \cdot n$.
c mr met $u_0 = 14$ en $r = \frac{1}{0,4} = 2,5$, dus $u_n = 14 \cdot 2,5^n$.

- 17** **A** rr met $u_0 = 11$ en $v = 7$, dus $u_n = 11 + 7 \cdot n$.
 De tiende term is $u_9 = 11 + 7 \cdot 9 = 74$.
B mr met $u_0 = 2$ en $r = 2$, dus $u_n = 2 \cdot 2^n$.
 De tiende term is $u_9 = 2 \cdot 2^9 = 1024$.
C rr met $u_0 = 238$ en $v = -32$, dus $u_n = 238 - 32 \cdot n$.
 De tiende term is $u_9 = 238 - 32 \cdot 9 = -50$.
D mr met $u_0 = 121\frac{1}{2}$ en $r = \frac{2}{3}$, dus $u_n = 121\frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3})^n$.
 De tiende term is $u_9 = 121\frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3})^9 \approx 3,16$.

12.2 Notaties en rijen op de GR

Bladzijde 19

- 18** Ook bij de rij $u_n = u_{n-1} + 3$ met beginterm $u_1 = 12$ horen de termen 12, 15, 18, 21, 24, ...
 Het voordeel van deze notatie is dat de eerste term u_1 is en bijvoorbeeld de tiende term u_{10} .
 Ook is u_2 de tweede term en bijvoorbeeld u_{15} de vijftiende term.

Bladzijde 20

- 19** **a** $u_n = 80 - 5 \cdot (n - 1) = 80 - 5n + 5 = 85 - 5 \cdot n$
b De fictieve term die voorafgaat aan 80 is $80 + 5 = 85$.
c $u_n = 80 \cdot 0,5^{n-1} = 80 \cdot 0,5^n \cdot 0,5^{-1} = 80 \cdot 0,5^n \cdot 2 = 160 \cdot 0,5^n$
d De fictieve term die voorafgaat aan 80 is $\frac{80}{0,5} = 160$.

- 20** **a** mr met $u_1 = 24$ en $r = 1,25$, dus $u_n = 24 \cdot 1,25^{n-1}$.
b rr met $u_1 = 63$ en $v = 7$, dus $u_n = 63 + 7 \cdot (n - 1)$.
c rr met $u_1 = 13,5$ en $v = -0,7$, dus $u_n = 13,5 - 0,7 \cdot (n - 1)$.
d mr met $u_1 = 1024$ en $r = \frac{1}{4}$, dus $u_n = 1024 \cdot (\frac{1}{4})^{n-1}$.

- 21** **a** rr met $u_1 = 12,6$ en $v = -0,8$, dus $u_n = 12,6 - 0,8 \cdot (n - 1)$.
b mr met $u_1 = 36$ en $r = \frac{2}{3}$, dus $u_n = 36 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$.

- 22** **a** $3v = 324 - 12 = 312$, dus $v = \frac{312}{3} = 104$.
b $r^3 = \frac{324}{12} = 27$, dus $r = 27^{\frac{1}{3}} = 3$.

Bladzijde 21

- 23** **a** Bij de rr is dan $u_n = u_1 + 104 \cdot (n - 1)$.
 Met $u_2 = 12$ krijg je $u_1 + 104 \cdot (2 - 1) = 12$

$$u_1 + 104 = 12$$

$$u_1 = -92$$

 Dus $u_n = -92 + 104 \cdot (n - 1)$ en dit is te herleiden.
 Je krijgt $u_n = -92 + 104 \cdot n - 104 = -196 + 104 \cdot n$ en dat is dezelfde directe formule als in de theorie.
 Bij de mr is dan $u_n = u_1 \cdot 3^{n-1}$.
 Met $u_2 = 12$ krijg je $u_1 \cdot 3^{2-1} = 12$

$$u_1 \cdot 3 = 12$$

$$u_1 = 4$$

 Dus $u_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ en dit is te herleiden.
 Je krijgt $u_n = 4 \cdot 3^n \cdot 3^{-1} = 4 \cdot 3^n \cdot \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3} \cdot 3^n$ en dat is dezelfde directe formule als in de theorie.
b *

- 24 a** Stel $u_n = u_0 + v \cdot n$.
 $10v = 90 - 130 = -40$, dus $v = -4$.
 $u_n = u_0 - 4 \cdot n$ en $u_5 = 130$ geeft $u_0 - 4 \cdot 5 = 130$, dus $u_0 = 150$.
 De directe formule is $u_n = 150 - 4 \cdot n$.
- b** Stel $u_n = u_0 \cdot r^n$.
 $r^7 = \frac{118098}{54} = 2187$, dus $r = 2187^{\frac{1}{7}} = 3$.
 $u_n = u_0 \cdot 3^n$ en $u_3 = 54$ geeft $u_0 \cdot 3^3 = 54$, dus $u_0 = 2$.
 De directe formule is $u_n = 2 \cdot 3^n$.

- 25 a** $\frac{u_5}{u_3} = \frac{1024}{576}$ zou geven $r = \left(\frac{1024}{576}\right)^{\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{3}$.
 $\frac{u_8}{u_5} = \frac{1696}{1024}$ zou geven $r = \left(\frac{1696}{1024}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1,183$.

Omdat $1\frac{1}{3} \neq 1,183$ kunnen deze termen niet bij een meetkundige rij horen.

- b** $u_5 - u_3 = 1024 - 576 = 448$ zou geven $v = \frac{448}{2} = 224$.
 $u_8 - u_5 = 1696 - 1024 = 672$ zou geven $v = \frac{672}{3} = 224$.
 Dus deze termen kunnen bij een rekenkundige rij horen.

- 26 a** Stel $u_n = u_0 + v \cdot n$.
 $5v = 16384 - 16 = 16368$, dus $v = 3273,6$.
 $u_n = u_0 + 3273,6 \cdot n$ en $u_3 = 16$ geeft $u_0 + 3273,6 \cdot 3 = 16$, dus $u_0 = -9804,8$.
 De directe formule is $u_n = -9804,8 + 3273,6 \cdot n$.
- b** Stel $u_n = u_0 \cdot r^n$.
 $r^5 = \frac{16384}{16} = 1024$, dus $r = 1024^{\frac{1}{5}} = 4$.
 $u_n = u_0 \cdot 4^n$ en $u_3 = 16$ geeft $u_0 \cdot 4^3 = 16$, dus $u_0 = \frac{1}{4}$.
 De directe formule is $u_n = \frac{1}{4} \cdot 4^n$.
 Dit is te herleiden tot $u_n = 4^{n-1}$.

Bladzijde 22

- 27 a** De formule geeft $u_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = 4$, dus de eerste term is u_1 .
 De tiende term is $u_{10} = 2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 + 5 = 175$.
- b** Voer in $y_1 = 2x^2 - 3x + 5$.
 In de tabel zie je dat bij $x = 15$ hoort 410.
 Dus de 15^e term is 410.
- 28 a** In beide gevallen krijg je de rij 100, 115, 130, 145, ...
b Vervang in de formule n door $n + 1$.
 Je krijgt $u_{n+1} = 100 + 15 \cdot (n + 1 - 1)$, dus $u_{n+1} = 100 + 15 \cdot n$.

- 29 a** $A_n = A_{n-1} + 15$ met $A_1 = 100$
b $A(n) = A(n-1) + 15$ met $A(1) = 100$
c $A_{n+1} = A_n + 15$ met $A_1 = 100$

- 30 a** $u(n+1) = u(n) + 2 \cdot (n+1)$ met $u(0) = 32$
b $u_{n+1} = 3 \cdot 4^n$ met $u_0 = 8$

Bladzijde 23

- 31 a** $u(n+1) = u(n) + 5 \cdot (n+1)$ met $u(0) = 100$
b $a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3$ met $a_0 = 12$

- 32 a** De GR geeft de achtste term is $u_7 \approx 42,2$.
b $u_{13} \approx 397$ en $u_{14} \approx 592$
 Dus de 15^e term is de eerste term die groter is dan 500.

Bladzijde 24

- 33 a** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $L(7) \approx 1994$, $L(8) \approx 2114$, $L(11) \approx 2448$ en $L(12) \approx 2549$.
 Dus voor $n = 8$, $n = 9$, $n = 10$ en $n = 11$ ligt $L(n)$ tussen 2000 en 2500.
b $L(16) \approx 2918$ en $L(17) \approx 3002$
 Dus vanaf $n = 17$ is $L(n) > 3000$.
- 34 a** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $P_9 \approx 996$, $P_{10} \approx 1145$, $P_{11} \approx 1331$ en $P_{12} \approx 1564$.
 Dus voor $n = 10$ en $n = 11$ ligt P_n tussen 1000 en 1500.
b $P_{18} \approx 4841$ en $P_{19} \approx 5951$
 Dus vanaf $n = 19$ is $P_n > 5000$.
- 35 a** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $G(11) \approx -13$ als eerste negatieve term.
 Dus de elfde term is de eerste die negatief is.
b De tabel geeft de volgende termen tussen 500 en 700:
 $G(12) \approx 514$, $G(14) \approx 547$, $G(16) \approx 585$, $G(18) \approx 627$ en $G(20) \approx 675$.
 Dus er liggen vijf termen tussen 500 en 700.
- 36 a** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tiende term is $u_9 \approx 797,75$.
b $u_{15} \approx 9562$ en $u_{16} \approx 14374$
 Dus vanaf de 17^e term is $u_n > 10000$.
- 37 a** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 In de tabel is te zien dat $H_8 \approx 274$ het dichtst bij 275 ligt. Dus de achtste term ligt het dichtst bij 275.
b $H_{17} \approx 968$ en $H_{17} \approx 1114$
 Er zijn 17 termen kleiner dan 1000.
c $H_{20} - H_{19} \approx 1473 - 1281 = 192$
 $H_{21} - H_{20} \approx 1694 - 1473 = 221$
 Dus voor $k = 21$ is $H_k - H_{k-1}$ voor het eerst groter dan 200.

Bladzijde 25

- 38 a** $A_1 = 10$ geeft $A_2 = 10 - 2 = 8$
 $A_2 = 8$ geeft $A_3 = 8 - 3 = 5$
 $A_3 = 5$ geeft $A_4 = 5 - 4 = 1$
 Dit klopt met de toren in de figuur.
b Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $A_{13} = 10$ en $A_{14} = -4$.
 Deze toren bestaat uit 13 lagen en de bovenste laag van deze toren heeft 10 kubussen.
c Probeer $A_1 = 200$. Dit geeft $A_{19} = 11$ en $A_{20} = -9$.
 Probeer $A_1 = 210$. Dit geeft $A_{20} = 1$ en $A_{21} = -20$.
 Probeer $A_1 = 209$. Dit geeft $A_{20} = 0$ en $A_{21} = -21$.
 Dus A_1 is minstens 210.
 Probeer $A_1 = 230$. Dit geeft $A_{20} = 21$ en $A_{21} = 0$.
 Probeer $A_1 = 231$. Dit geeft $A_{20} = 22$ en $A_{21} = 1$.
 Dus A_1 is hoogstens 230.
 Joop moet A_1 zo kiezen dat geldt $210 \leq A_1 \leq 230$.
- 39 a** De eerste twee termen zijn 1. Daarna is elke term de som van de twee voorafgaande termen.
 Bijvoorbeeld 1^e term + 2^e term = 3^e term, 2^e term + 3^e term = 4^e term en
 3^e term + 4^e term = 5^e term.

- b** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $f_{15} = 610$ en $f_{20} = 6765$.
- c** $f_{30} = 832\,040$ en $f_{31} = 1\,346\,269 \approx 1,35 \cdot 10^6$
Dus vanaf de 31^e term is $f_n > 10^6$.

- 40** **I** Neem $n = 2$. Dan is $f_{n-1} = f_1 = 1$, $f_n = f_2 = 1$ en $f_{n+1} = f_3 = 2$.
Er geldt $1 \cdot 2 = 1^2 + (-1)^2$, oftewel $2 = 1 + 1$ en dit klopt.
Neem $n = 5$. Dan is $f_{n-1} = f_4 = 3$, $f_n = f_5 = 5$ en $f_{n+1} = f_6 = 8$.
Er geldt $3 \cdot 8 = 5^2 + (-1)^5$, oftewel $24 = 25 - 1$ en dit klopt.
Neem $n = 10$. Dan is $f_{n-1} = f_9 = 34$, $f_n = f_{10} = 55$ en $f_{n+1} = f_{11} = 89$.
Er geldt $34 \cdot 89 = 55^2 + (-1)^{10}$, oftewel $3026 = 3025 + 1$ en dit klopt.
- II** Neem $p = 2$ en $n = 4$. Dan is $f_{p \cdot n} = f_8 = 21$ en $f_n = f_4 = 3$.
Er geldt $f_8 = 7 \cdot f_4$, dus f_8 is een veelvoud van f_4 .
Neem $p = 3$ en $n = 5$. Dan is $f_{p \cdot n} = f_{15} = 610$ en $f_n = f_5 = 5$.
Er geldt $f_{15} = 122 \cdot f_5$, dus f_{15} is een veelvoud van f_5 .
Neem $p = 4$ en $n = 4$. Dan is $f_{p \cdot n} = f_{20} = 6765$ en $f_n = f_5 = 5$.
Er geldt $f_{20} = 1353 \cdot f_5$, dus f_{20} is een veelvoud van f_5 .

12.3 Toepassingen van rijen

Bladzijde 27

- 41** **a** Een rente van 0,1% per jaar betekent dat het bedrag met 1,001 wordt vermenigvuldigd.
Hij neemt jaarlijks 150 euro op, dus er wordt 150 afgetrokken.
De juiste formule is dus $u_n = 1,001 \cdot u_{n-1} - 150$ met $u_0 = 2000$.
- b** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $u_{13} \approx 64,41$ en $u_{14} \approx -85,52$.
 $2020 + 14 = 2034$, dus in 2034 is het saldo op 1 januari voor het eerst ontoereikend om 150 euro op te nemen.

Bladzijde 28

- 42** **a** $W(n) = 0,65 \cdot W(n-1) + 5000$ met $W(0) = 20\,000$
Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
Vanaf $n = 21$ is $W(n) \approx 14\,286$, dus deze waarde is 14 286 liter.
- b** $W(n) = 0,75 \cdot W(n-1) + 5000$ met $W(0) = 20\,000$
Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
Voor alle waarden van n is $W(n) = 20\,000$, dus de hoeveelheid water in de tank verandert niet.
Verklaring: 25% van 20 000 is 5000, dus dagelijks wordt er evenveel water bijgevoerd als er wordt overgeheveld.
- 43** **a** Er lekt 5% weg, dus er blijft 95% over.
 $V_n = 0,95 \cdot V_{n-1}$ met $V_0 = 250$
 $V_n = 250 \cdot 0,95^n$
- b** De lengte van elke volgende kabel is 60% van de lengte van de voorafgaande kabel.
 $L_n = 0,60 \cdot L_{n-1}$ met $L_1 = 80$
 $L_n = 80 \cdot 0,60^{n-1}$
- 44** **a** $A_n = 1,12 \cdot A_{n-1} - 50$ met $A_0 = 250$
- b** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $A_4 \approx 154$ en $A_5 \approx 123$.
 $2020 + 5 = 2025$, dus in 2025 is er op 1 augustus voor het eerst minder dan 150 m^2 bedekt.
- c** 12% van 250 is 30.
Dus Shawn moet jaarlijks 30 m^2 behandelen om ervoor te zorgen dat de oppervlakte die bedekt is met zevenblad op 1 augustus elk jaar hetzelfde is.

Bladzijde 29

- 45** **a** $B_n = 1,002 \cdot B_{n-1} - 6000$ met $B_0 = 125\,000$
b Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 Bij 1 januari 2025 hoort $n = 5$.
 De tabel geeft $B_5 \approx 96\,134,77$.
 Dus op 1 januari 2025 staat er €96 134,77 op haar rekening.
c $B_{12} \approx 55\,236$ en $B_{13} \approx 49\,346$
 $2020 + 13 = 2033$, dus in 2033 heeft Widhi op 1 januari voor het eerst minder dan 50 000 euro op haar spaarrekening staan.
d $0,2\%$ van 125 000 is 250, dus Widhi kan dan jaarlijks 250 euro opnemen.
- 46** **a** Achtereenvolgens 1, 4, 9 en 16.
b $K_n = n^2$
c De verschillen zijn 3, 5 en 7.
 Er komt steeds 2 bij.
 Dit is een rekenkundige rij.

Bladzijde 30

- 47** **a** Het twaalfde driehoeksgetal is $D_{12} = \frac{1}{2} \cdot 12^2 + \frac{1}{2} \cdot 12 = 78$.
b Voer in $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ en maak een tabel.
 Uit de tabel volgt dat $D_{25} = 325$, dus het 25^e driehoeksgetal is 325.
c $D_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{2}(n-1)$
 $= \frac{1}{2}(n^2 - 2n + 1) + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2}n^2 - n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
 $D_n - D_{n-1} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - (\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = n$
 Dus $D_n = D_{n-1} + n$ met $D_1 = 1$.
- 48** In figuur 12.4 is te zien dat $2 \cdot D_3 = 4 \cdot 3$.
 En zo is $2 \cdot D_4 = 5 \cdot 4$.
 Algemeen is $2 \cdot D_n = (n+1) \cdot n$.
 Dus $D_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.
- 49** **a** Uit de figuur volgt $R_1 = 2 \cdot 1$, $R_2 = 3 \cdot 2$ en $R_3 = 4 \cdot 3$.
 Algemeen is $R_n = (n+1) \cdot n$, oftewel $R_n = n^2 + n$.
b Voer in $y = x^2 + x$ en maak een tabel.
 Uit de tabel volgt dat $R_{12} = 156$, dus het 12^e rechthoeksgetal is 156.
c $R_{n-1} = (n-1)^2 + n - 1 = n^2 - 2n + 1 + n - 1 = n^2 - n$
 $R_n - R_{n-1} = n^2 + n - (n^2 - n) = n^2 + n - n^2 + n = 2n$
 Dus $R_n = R_{n-1} + 2n$ met $R_1 = 2$.

Bladzijde 31

- 50** **a** In figuur 12.3 zie je dat de n^e driehoek wordt gevormd door de voorafgaande driehoek, aan de rechterzijde uitgebreid met n stippen.
 Dus $D_n = D_{n-1} + n$.
b In figuur 12.5 zie je dat de n^e rechthoek wordt gevormd door de voorafgaande rechthoek, uitgebreid met verticaal n stippen en horizontaal n stippen, oftewel $2n$ stippen.
 Dus $R_n = R_{n-1} + 2n$.
- 51** $V_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)^2 - \frac{1}{2}(n-1)$
 $= \frac{1}{2}(n^2 - 2n + 1) - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2}n^2 - 3n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2}n^2 - 3\frac{1}{2}n + 2$
 $V_n - V_{n-1} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - (\frac{1}{2}n^2 - 3\frac{1}{2}n + 2) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n^2 + 3\frac{1}{2}n - 2 = 3n - 2$
 Dus $V_n = V_{n-1} + 3n - 2$ met $V_1 = 1$.

- 52 a** Het aantal glazen in de 20^e laag is $D_{20} = \frac{1}{2} \cdot 20^2 + \frac{1}{2} \cdot 20 = 210$.
b Een toren van 40 lagen bestaat uit $P_{40} = \frac{1}{6} \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 = 11\,480$ glazen.
c Voer in $y_1 = \frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$ en maak een tabel.
 Uit de tabel volgt $P_{68} = 54\,740$, dus de toren bestond uit 68 lagen.
 De onderste laag bestond uit $D_{68} = \frac{1}{2} \cdot 68^2 + \frac{1}{2} \cdot 68 = 2346$ glazen.
d $P_{69} = \frac{1}{6} \cdot 69 \cdot 70 \cdot 71 = 57\,155$, dus er zijn $57\,155 - 54\,740 = 2415$ extra glazen nodig.

Alternatieve uitwerking

$D_{69} = \frac{1}{2} \cdot 69^2 + \frac{1}{2} \cdot 69 = 2415$, dus er zijn 2415 extra glazen nodig.

12.4 Somrijen

Bladzijde 33

- 53** $u_0 = 2, u_1 = 5, u_2 = 8, u_3 = 11$ en $u_4 = 14$.
 $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$

Bladzijde 34

- 54 a** $\sum_{k=2}^5 u_k = 14 + 27 + 44 + 65 = 150$
b $\sum_{k=0}^5 (3k+2) = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 = 57$
- 55 a** $\sum_{k=0}^5 u_k = 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 72$
b $\sum_{i=1}^5 v_i = 4 + 7 + 12 + 19 + 28 = 70$
c $\sum_{k=0}^4 w(k) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$
- 56 a** $\sum_{k=1}^5 (3k+7) = 10 + 13 + 16 + 19 + 22 = 80$
b $\sum_{i=0}^4 (3i^2 + i + 1) = 1 + 5 + 15 + 31 + 53 = 105$
c $\sum_{j=0}^4 (j^3 - j^2) = 0 + 0 + 4 + 18 + 48 = 70$
- 57 a** $\sum_{k=0}^3 u(k) = 3 + 11 + 27 + 59 = 100$
b $\sum_{j=1}^3 v_j = 130 + 169 + 219,7 = 518,7$
c $\sum_{i=0}^5 w_i = 2 + 1 - 2 + 1 - 2 + 1 = 1$
- 58** $\sum_{k=1}^6 k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$ en $91 + 49 = 140$, dus $n = 7$.
- 59** $\sum_{k=1}^{16} (\frac{1}{2}k^2 + 1\frac{1}{2}k) = \sum_{k=1}^{15} (\frac{1}{2}k^2 + 1\frac{1}{2}k) + \frac{1}{2} \cdot 16^2 + 1\frac{1}{2} \cdot 16 = 800 + 152 = 952$

60 a $\sum_{k=0}^{15} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15}$

$$\sum_{k=0}^9 u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_9$$

$$\sum_{k=10}^{15} u_k = u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15}$$

Hieruit volgt dat $\sum_{k=10}^{15} u_k = \sum_{k=0}^{15} u_k - \sum_{k=0}^9 u_k$.

b $S(10) = \sum_{k=0}^{10} u_k$

61 a $S_n = S_{n-1} + 2 \cdot u_{n-1} - 5$ met $S_0 = 10$

b Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $S_8 = 2600$.

c Lees af in de tabel $S_{11} = 20\,535$ en $S_{12} = 41\,020$.
Dus vanaf $n = 12$.

62 a $u_n = n^2 + 1$ en $S_n = S_{n-1} + n^2 + 1$ met $S_0 = 1$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $\sum_{k=0}^{20} (k^2 + 1) = 2891$.

b $u_n = (n+1)^2$ en $S_n = S_{n-1} + (n+1)^2$ met $S_0 = 1$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $\sum_{k=0}^{20} (k+1)^2 = 3311$.

c $u_n = n^2 - 2n$ en $S_n = S_{n-1} + n^2 - 2n$ met $S_2 = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $\sum_{k=2}^{15} (k^2 - 2k) = 1001$.

d $u_n = \frac{1}{2}n^2 - 4$ en $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{2}n^2 - 4$ met $S_6 = \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 4 = 14$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $\sum_{k=6}^{30} (\frac{1}{2}k^2 - 4) = 4600$.

63 a $S_n = S_{n-1} + n^2 - 2n + 1$ met $S_0 = 1$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $\sum_{k=0}^{15} u_k = 1016$.

b Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{20} u_k = 2471$ en $\sum_{k=0}^{21} u_k = 2871$.

Dus vanaf $n = 21$.

64 a 1, 5, 9, 13, ... is een rr met directe formule $u_n = 1 + 4 \cdot n$ met beginterm u_0 .

Los op $1 + 4n = 101$

$$4n = 100$$

$$n = 25$$

Dus $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + \dots + 101 = \sum_{k=0}^{25} (1 + 4k)$.

$$S_n = S_{n-1} + 1 + 4n \text{ met } S_0 = 1$$

Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $\sum_{k=0}^{25} (1 + 4k) = 1326$.

- b** 768, 384, 192, 96, ... is een mr met directe formule $u_n = 768 \cdot (\frac{1}{2})^n$ met beginterm u_0 .
 Los op $768 \cdot (\frac{1}{2})^n = 3$.
 Voer de rij in op het rijen-invoerscherm en lees af in de tabel dat $u_8 = 3$.
 Dus $768 + 384 + 192 + 96 + \dots + 3 = \sum_{k=0}^8 768 \cdot (\frac{1}{2})^k$.
 $S_n = S_{n-1} + 768 \cdot (\frac{1}{2})^n$ met $S_0 = 768$.
 Voer de somrij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $\sum_{k=0}^8 768 \cdot (\frac{1}{2})^k = 1533$.

- 65 a** 5, 7, 9, ... is een rr met directe formule $T(n) = 5 + 2 \cdot (n - 1)$, oftewel $T(n) = 2n + 3$ met beginterm $T(1) = 5$.

- b** Het totaal aantal tulpen in de eerste 15 rijen is $\sum_{k=1}^{15} (2k + 3)$.
 $S(n) = S(n - 1) + 2n + 3$ met $S(0) = 5$
 Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $\sum_{k=1}^{15} (2k + 3) = 285$.
 Dus er staan 285 tulpen in de eerste 15 rijen.

- 66** De aantallen zitplaatsen per rij vormen een rr met directe formule $u_n = 12 + 4 \cdot (n - 1)$, oftewel $u_n = 4n + 8$ met beginterm $u_1 = 12$.

Het totaal aantal zitplaatsen in vak K is $\sum_{k=1}^{22} (4k + 8)$.

- $S_n = S_{n-1} + 4n + 8$ met $S_1 = 12$
 Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $\sum_{k=1}^{22} (4k + 8) = 1188$.
 Dus er is plaats voor 1188 supporters.

Bladzijde 38

- 67** De afgelegde afstand naar de eerste kegel en terug is 10 meter.
 De afstanden heen en weer naar de kegels vormen een mr met directe formule $u_n = 10 \cdot 1,2^{n-1}$ met beginterm $u_1 = 10$.

De totaal afgelegde afstand is $\sum_{k=1}^{10} 10 \cdot 1,2^{k-1}$.

- $S_n = S_{n-1} + 10 \cdot 1,2^{n-1}$ met $S_1 = 10$
 Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $\sum_{k=1}^{10} 10 \cdot 1,2^{k-1} \approx 260$.
 Dus de totale afstand die Hans rent is 260 meter.

- 68 a** De rondetijden van Patrick vormen een rr met directe formule $P_n = 30,62 + 0,15 \cdot (n - 1)$, oftewel $P(n) = 0,15n + 30,47$ met beginterm $P(1) = 30,62$.

Zijn eindtijd is $\sum_{k=1}^{25} (0,15k + 30,47)$.

$$S(n) = S(n - 1) + 0,15 \cdot 1,2^{n-1} \text{ met } S(1) = 30,62$$

Voer zowel de rij $P(n)$ als de somrij in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $\sum_{k=1}^{25} (0,15k + 30,47) = 810,5$.

Dus de eindtijd van Patrick is 810,5 seconden = 13 minuten en 30,5 seconden.

- b** De rondetijden van Koen vormen een rr met directe formule $K(n) = 35,76 - 0,22 \cdot (n - 1)$, oftewel $K(n) = -0,22n + 35,98$ met beginterm $K(1) = 35,76$.

Zijn eindtijd is $\sum_{k=1}^{25} (-0,22k + 35,98)$.

$$S(n) = S(n - 1) + -0,22n + 35,98 \text{ met } S(1) = 35,76$$

Voer zowel de rij $K(n)$ als de somrij in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $\sum_{k=1}^{25} (-0,22k + 35,98) = 828$.

Dus de eindtijd van Koen is 828 seconden = 13 minuten en 48 seconden.

- 69 a** De groei per week wordt gegeven door de formule $g_n = 5,2 \cdot 0,8^{n-1}$.
De groei in de achtste week is $g_8 = 5,2 \cdot 0,8^7 \approx 1,1 \text{ cm} = 11 \text{ mm}$.
- b** De totale groei in de eerste acht weken is $\sum_{k=1}^8 5,2 \cdot 0,8^{k-1}$.
 $S_n = S_{n-1} + 5,2 \cdot 0,8^{n-1}$ met $S_1 = 5,2$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $\sum_{k=1}^8 5,2 \cdot 0,8^{k-1} \approx 21,6$.
Dus de plant is in de eerste acht weken in totaal $21,6 \text{ cm} = 216 \text{ mm}$ gegroeid.
- c** De tabel geeft $\sum_{k=1}^{10} 5,2 \cdot 0,8^{k-1} \approx 23,2$.
Dus de hoogte van de plant na tien weken is $18 + 23,2 = 41,2 \text{ cm}$.
- 70 a** De aantallen zitplaatsen per rij in een sector in de binnenring vormen een rr met directe formule $Z_n = 5 + 2 \cdot (n - 1)$, oftewel $Z_n = 2n + 3$ met beginterm $Z_1 = 5$.
Het totale aantal zitplaatsen in een sector in de binnenring is $\sum_{k=1}^{34} (2k + 3)$.
 $S_n = S_{n-1} + 2n + 3$ met $S_1 = 5$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $\sum_{k=1}^{34} (2k + 3) = 1292$.
Dus er zijn 1292 zitplaatsen in een sector in de binnenring.
- b** 12 sectoren in de binnenring geeft $12 \cdot 1292 = 15\,504$ zitplaatsen.
De buitenring heeft $22 \cdot 21 \cdot 13 = 6006$ zitplaatsen.
In totaal zijn er dus $15\,504 + 6006 = 21\,510$ zitplaatsen.
Dus het aantal van ruim 21 000 is juist.
- c** De totale inkomsten zijn $8 \cdot 1292 \cdot 45 + 0,75 \cdot 6006 \cdot 15 = 532\,687,50 \text{ euro}$.

Bladzijde 39

- 71 a** De aantallen kratten in een laag vormen de rij 1, 9, 25, 49 ... Dat is $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \dots$ oftewel de oneven getallen in het kwadraat.
Omdat bij de rij 1, 3, 5, 7, ... de directe formule $u_n = 1 + 2 \cdot (n - 1)$ hoort, oftewel $u_n = 2n - 1$ met beginterm $u_1 = 1$, hoort bij de rij kwadraten de directe formule $v_n = (2n - 1)^2$ met beginterm $v_1 = 1$.
Het totale aantal gestapelde kratten in n lagen is dan $\sum_{k=1}^n (2k - 1)^2$ en dit moet gelijk zijn aan 105 995.
 $S_n = S_{n-1} + 2n - 1$ met $S_1 = 1$
Voer zowel de rij v_n als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
Uit de tabel volgt $\sum_{k=1}^{43} (2k - 1)^2 = 105\,995$, dus $n = 43$.
Dit betekent dat de piramide uit 43 lagen bestond.
- b** De stapel in Satow was $43 \cdot 0,25 = 10,75 \text{ m}$ hoog.
 $n = 43$ geeft $2n - 1 = 2 \cdot 43 - 1 = 85$, dus het grondvlak wordt gevormd door $85 \cdot 85 = 7225$ kratten.
Van één krat is het grondvlak $0,4 \cdot 0,3 = 0,12 \text{ m}^2$.
Dus het grondvlak van het bouwwerk was $7225 \cdot 0,12 = 867 \text{ m}^2$.
- c** De aantallen kratten in een laag van de piramide in Limmen vormen de rij $u_n = n^2$.
Los op $\sum_{k=1}^n k^2 = 63\,365$.
De GR geeft $\sum_{k=1}^{57} k^2 = 63\,365$, dus de piramide in Limmen bestond uit 57 lagen.
De hoogte was dus $57 \cdot 0,25 = 14,25 \text{ m}$.
Dat is $14,25 - 10,75 = 3,5 \text{ m}$ hoger dan de piramide in Satow.

- 72 a** $O(n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$ en $S(n) = S(n-1) + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$ met $S(1) = 1$
 Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $\sum_{k=1}^{15} (\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}) = 373,75$.
 Dus de totale oppervlakte van de eerste 15 vierkanten is $373,75 \text{ cm}^2$.
- b** De tabel geeft $S(21) = 948,5$ en $S(22) = 1080,8$.
 Dus vanaf $n = 22$ is de totale oppervlakte meer dan 1000 cm^2 .
- c** De oppervlakte van het 10^e tot en met het 20^e vierkant is $\sum_{k=10}^{20} (\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}) = 731,5$.
 Dus deze oppervlakte is $731,5 \text{ cm}^2$.

Bladzijde 40

- 73 a** Er geldt $r^4 = \frac{1,5}{6} = \frac{1}{4}$, dus $r = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}} \approx 0,7071$.
- b** De totale hoogte van de stapel is de som van de ribben van de acht kubussen.
 Voor de ribben van de kubussen geldt de directe formule $u_n = 6 \cdot 0,7071^{n-1}$ met
 beginterm $u_1 = 6$.
 De hoogte is $\sum_{k=1}^8 6 \cdot 0,7071^{k-1}$.
 $S_n = S_{n-1} + 6 \cdot 0,7071^{n-1}$ met $S_1 = 6$
 Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $\sum_{k=1}^8 6 \cdot 0,7071^{k-1} \approx 19,2$.
 Dus de hoogte van de stapel van acht kubussen is $19,2 \text{ cm}$.

Diagnostische toets

Bladzijde 44

- 1 a** Voer in $y_1 = x^2 + 0,5x + 5$.
 De tabel geeft de vijfde term is $u_4 = 23$ en de tiende term is $u_9 = 90,5$.
- b** $u_6 \approx 19,87$ en $u_7 \approx 24,65$
 Dus vanaf de achtste term is $u_n > 20$.
- 2 a** rr met $u_0 = 3125$ en $v = -625$, dus de recursieve formule is $u_n = u_{n-1} - 625$ met
 $u_0 = 3125$.
 De directe formule is $u_n = 3125 - 625 \cdot n$.
- b** $u_n = 0$ geeft $3125 - 625n = 0$
 $-625n = -3125$
 $n = 5$
 Dus de rij heeft vijf positieve termen.
- 3 a** mr met $u_0 = 2$ en $r = 1,3$, dus de recursieve formule is $u_n = 1,3 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 2$.
 De directe formule is $u_n = 2 \cdot 1,3^n$.
- b** De achtste term van de rij is $u_7 = 2 \cdot 1,3^7 \approx 12,55$.
- 4 a** Stel $w_n = w_1 + v \cdot (n-1)$.
 $3v = 324 - 12 = 312$, dus $v = \frac{312}{3} = 104$.
 $w_n = w_1 + 104 \cdot (n-1)$ en $w_4 = 12$ geeft $w_1 + 104 \cdot 3 = 12$, dus $w_1 = -300$.
 De directe formule is $w_n = -300 + 104 \cdot (n-1)$, oftewel $w_n = -404 + 104 \cdot n$.
- b** Stel $w_n = w_0 \cdot r^n$.
 $r^3 = \frac{324}{12} = 27$, dus $r = 27^{\frac{1}{3}} = 3$.
 $w_n = w_0 \cdot 3^n$ en $w_4 = 12$ geeft $w_0 \cdot 3^4 = 12$, dus $w_0 = \frac{4}{27}$.
 De directe formule is $w_n = \frac{4}{27} \cdot 3^n$.
- 5 a** $u_{n+1} = u_n - 7 \cdot (n+1)$ met $u_0 = 12$
- b** $w(n) = 3 \cdot w(n-1) + 6$ met $w(1) = 10$

- 6 a** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft de vierde term is $A_3 = 10,125$.
- b** De tabel geeft $A_{10} \approx 29,35$, $A_{11} \approx 33,01$, $A_{15} \approx 48,32$ en $A_{16} \approx 52,24$.
Dus A_n ligt tussen 30 en 50 voor $n = 11$ tot en met 15.
- 7** $V(n-1) = 2(n-1)^2 - 2(n-1) + 1 = 2(n^2 - 2n + 1) - 2n + 2 + 1 = 2n^2 - 4n + 2 - 2n + 3 = 2n^2 - 6n + 5$
 $V(n) - V(n-1) = 2n^2 - 2n + 1 - (2n^2 - 6n + 5) = 2n^2 - 2n + 1 - 2n^2 + 6n - 5 = 4n - 4$
Dus $V(n) = V(n-1) + 4n - 4$ met $V(1) = 1$.

Bladzijde 45

- 8 a** Afname 7%, dus er blijft 93% over.
 $Z(n) = 0,93 \cdot Z(n-1) + 17$ met $Z(0) = 300$
- b** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
Bij 1 september 2021 hoort $n = 3$.
De tabel geeft $Z(3) \approx 288,8$.
Dus op 1 september 2021 zit er 288,8 liter zand in de zandbak.
- c** $Z(n)$ geeft de hoeveelheid na het aanvullen met 17 liter, dus er past een tweede zak bij als $Z(n) \leq 283$.
De tabel geeft $Z(4) \approx 285,6$ en $Z(5) \approx 282,6$.
 $2018 + 5 = 2023$, dus in 2023 kan een extra zak zand in de bak worden geleegd.
- 9 a** $u_n = n^2 - n + 1$ en $S_n = S_{n-1} + n^2 - n + 1$ met $S_0 = 1$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $\sum_{k=0}^{10} u_k = 341$.
- b** $u_n = 2n^2 + 1$ en $S_n = S_{n-1} + 2n^2 + 1$ met $S_0 = 1$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{10} u_k = 781$ en $\sum_{k=0}^{11} u_k = 1024$.
Dus vanaf $n = 11$.
- c** $a_{t+1} = 2a_t - 3$, oftewel $a_t = 2a_{t-1} - 3$, met $a_1 = 6$ en $S_t = S_{t-1} + 2a_t - 3$ met $S_1 = 6$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $\sum_{i=1}^{11} a_i = 6174$.
- 10** De rondetijden van Eva vormen een rr met directe formule $E(n) = 48 + 0,8 \cdot (n-1)$, oftewel $E(n) = 0,8n + 47,2$ met beginterm $E(1) = 48$.
Eva loopt $\frac{2000}{200} = 10$ rondjes.
Haar eindtijd is $\sum_{k=1}^{10} (0,8k + 47,2)$.
 $S(n) = S(n-1) + 0,8n + 47,2$ met $S(1) = 48$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $\sum_{k=1}^{10} (0,8k + 47,2) = 516$.
Dus de eindtijd van Eva is 516 seconden = 8 minuten en 36 seconden.
- 11 a** Voor de lange zijde geldt de rr $L(n) = 2 + \frac{1}{2} \cdot (n-1) = 2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + 1\frac{1}{2}$.
Voor de korte zijde geldt de rr $K(n) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (n-1) = 1 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$.
 $O(n) = L(n) \cdot K(n) = (\frac{1}{2}n + 1\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n + \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}n^2 + n + \frac{3}{4}$
- b** De recursieve formule is $S(n) = S(n-1) + \frac{1}{4}n^2 + n + \frac{3}{4}$ met $S(1) = 2$.
- c** Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $\sum_{k=1}^{16} (\frac{1}{4}k^2 + k + \frac{3}{4}) = 522$.
Dus de totale oppervlakte van de eerste 16 rechthoeken is 522 cm².
- d** $0,1 \text{ m}^2 = 1000 \text{ cm}^2$
Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{20} (\frac{1}{4}k^2 + k + \frac{3}{4}) = 942,5$ en $\sum_{k=0}^{21} (\frac{1}{4}k^2 + k + \frac{3}{4}) = 1074,5$.
Dus vanaf $n = 21$ is de totale oppervlakte van de rechthoeken meer dan 0,1 m².

13 Allerlei formules

Voorkennis Periodieke verschijnselen

Bladzijde 49

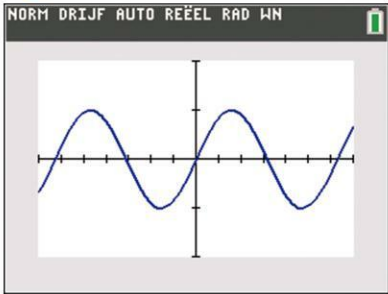
- 1 a periode = 6, evenwichtsstand = $\frac{20 + -10}{2} = 5$ en amplitude = $20 - 5 = 15$
b periode = 2, evenwichtsstand = $\frac{500 + 100}{2} = 300$ en amplitude = $500 - 300 = 200$

Bladzijde 50

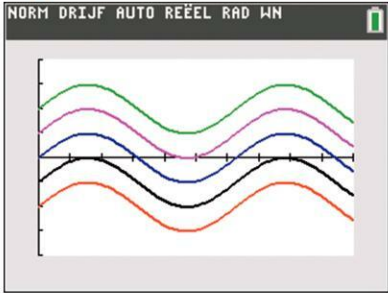
- 2 $22 - 5 \cdot 4 = 2$, dus h op $t = 22$ is gelijk aan h op $t = 2$ en dat is 1.
 $33 - 8 \cdot 4 = 1$, dus h op $t = 33$ is gelijk aan h op $t = 1$ en dat is 3.
 $35 - 8 \cdot 4 = 3$, dus h op $t = 35$ is gelijk aan h op $t = 3$ en dat is -1.
 $1002 - 250 \cdot 4 = 2$, dus h op $t = 1002$ is gelijk aan h op $t = 2$ en dat is 1.
- 3 a De periode is 20 uur.
b Na 140 uur is de helderheid 70% en na 6 dagen = 144 uur is de helderheid 94%.
c De overgang van maximale naar minimale helderheid duurt 16 uur en de overgang van minimale naar maximale helderheid duurt 4 uur.
d De helderheid is gedurende 7 uren achterelkaar meer dan 80%.
e Op 2 maart kan zij om 1:00 uur en om 21:00 uur maximale helderheid waarnemen.
Op 6 maart kan zij om 5:00 uur maximale helderheid waarnemen.

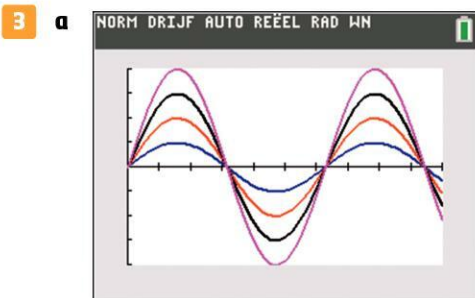
13.1 Sinusoïden

Bladzijde 51

- 1 a 
- b De toppen zijn $(-4,71; 1)$, $(-1,57; -1)$, $(1,57; 1)$ en $(4,71; -1)$.
c De snijpunten met de x -as zijn $(-6,28; 0)$, $(-3,14; 0)$, $(0; 0)$, $(3,14; 0)$ en $(6,28; 0)$.
d periode $\approx 6,28$ (dat is 2π), evenwichtsstand = $\frac{1 + -1}{2} = 0$ en amplitude = $1 - 0 = 1$

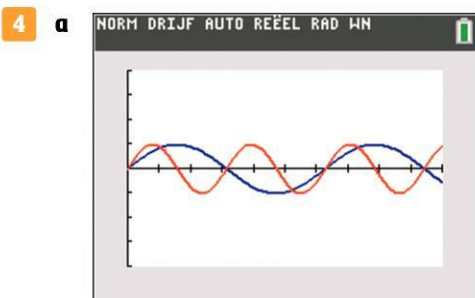
Bladzijde 52

- 2 a 
- b De grafiek van $y = a + \sin(x)$ ontstaat door de grafiek van $y = \sin(x)$ over een afstand a omhoog te verschuiven.
c periode = 2π , evenwichtsstand = a en amplitude = 1

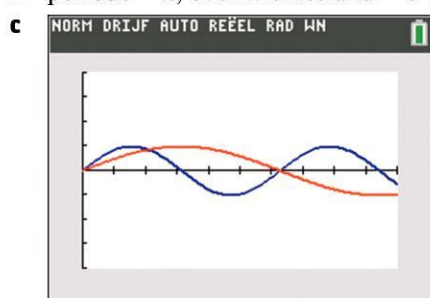


b De grafiek van $y = b \sin(x)$ ontstaat door de grafiek van $y = \sin(x)$ te herschalen in verticale richting met factor b .

c periode = 2π , evenwichtsstand = 0 en amplitude = b



b periode = π , evenwichtsstand = 0 en amplitude = 1



d periode = 4π , evenwichtsstand = 0 en amplitude = 1

e Van $y = \sin(4x)$ is de periode $\frac{1}{2}\pi$.

Van $y = \sin(5x)$ is de periode $\frac{2}{5}\pi$.

Van $y = \sin(cx)$ is de periode $\frac{2\pi}{c}$.

Bladzijde 54

5 De periode, de evenwichtsstand en de amplitude zijn achtereenvolgens

a $2\pi, 5, 1$

d $\frac{2}{3}\pi, 0, 8$

g $8\pi, 3, 6$

b $2\pi, 0, 5$

e $\frac{2}{3}\pi, 8, 1$

h $\frac{1}{2}, 5, 2$

c $\frac{2}{5}\pi, 0, 1$

f $2\pi, 3, 8$

i $6\pi, 7, 2$

6 a $a = 100, b = 8$ en $c = \frac{2\pi}{0,2\pi} = 10$

b $a = 850, b = 48$ en $c = \frac{2\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi$

7 $y = 100 + 80 \sin\left(\frac{2\pi}{10}x\right)$ oftewel $y = 100 + 80 \sin\left(\frac{1}{5}\pi x\right)$

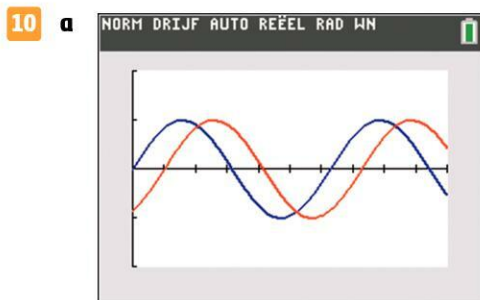
8 a amplitude = 10, evenwichtsstand = 15 en periode = 8

b $y = 15 + 10 \sin\left(\frac{2\pi}{8}x\right)$ oftewel $y = 15 + 10 \sin\left(\frac{1}{4}\pi x\right)$

9 $h = 10H$ en $t = 60T$ invullen geeft

$$10H = 20 + 15 \sin(0,1 \cdot 60T)$$

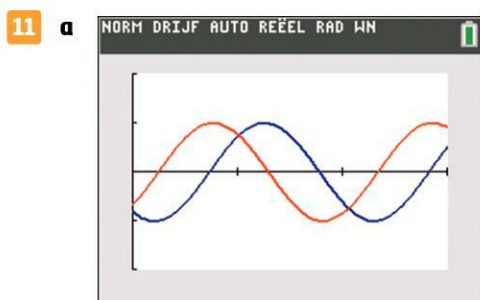
$$H = 2 + 1,5 \sin(6T)$$



De grafiek van $y = \sin(x - 1)$ ontstaat door de grafiek van $y = \sin(x)$ over een afstand 1 naar rechts te verschuiven.

b De grafiek van $y = \sin(x - d)$ ontstaat door de grafiek van $y = \sin(x)$ over een afstand d naar rechts te verschuiven.

c periode = 2π , evenwichtsstand = 0 en amplitude = 1



b De optie nulpunt geeft $x = 0,73$, dus $(0,73; 0)$.

c De optie nulpunt geeft $x \approx 0,24$, dus $(0,24; 0)$.

d In de formule van y_1 .

Bladzijde 56

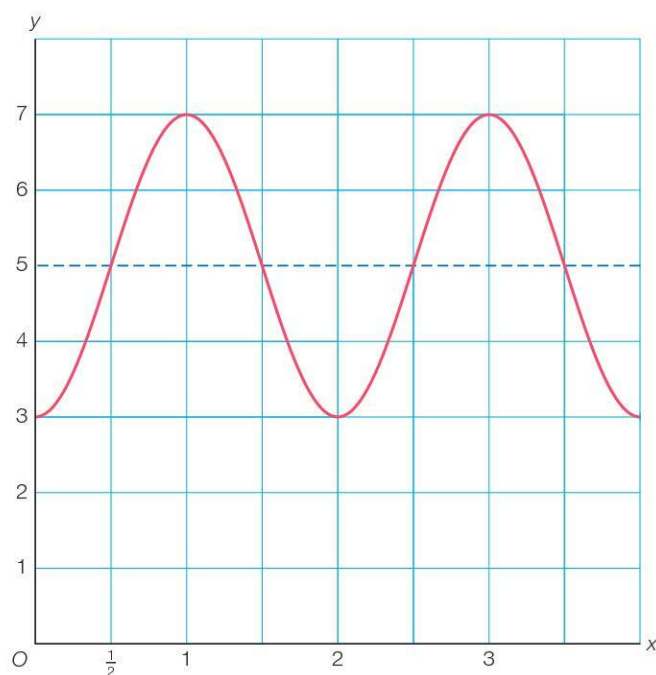
12 Dat zie je aan π , want dit geeft de periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, dus in de periode komt geen π meer voor.

13 evenwichtsstand = 5

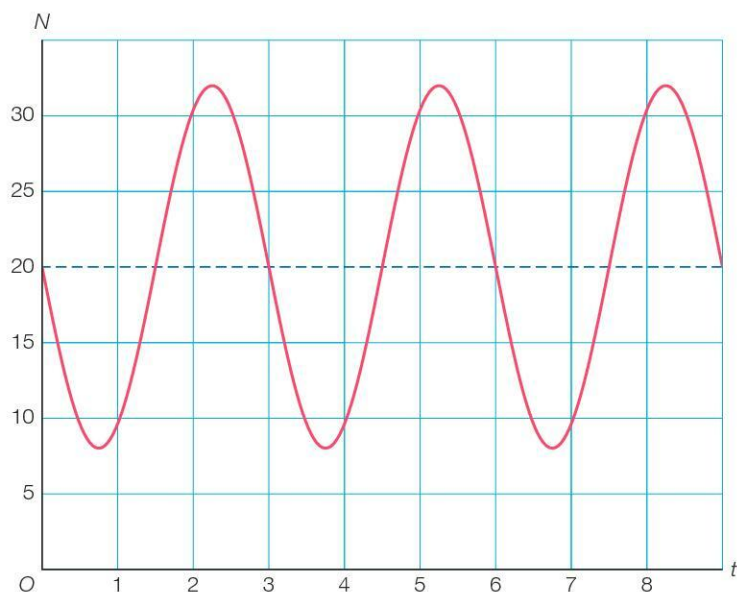
amplitude = 2

periode = $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

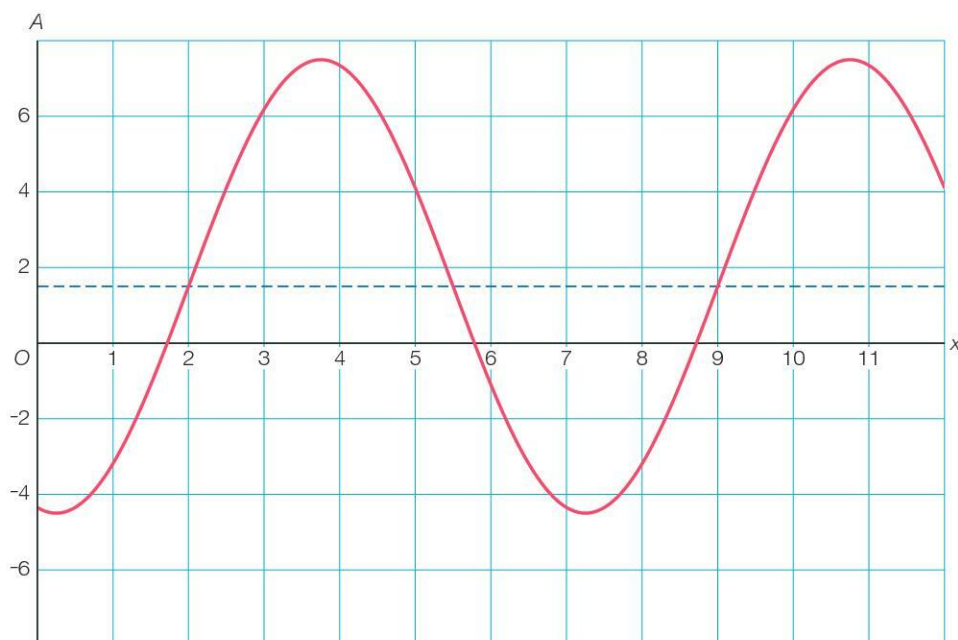
stijgend door $(\frac{1}{2}, 5)$



- 14 a** evenwichtsstand = 20
 amplitude = 12
 periode = $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$
 stijgend door $(1\frac{1}{2}, 20)$



- b** evenwichtsstand = 1,5
 amplitude = 6
 periode = $\frac{2\pi}{(\frac{2\pi}{7})} = 7$
 grafiek gaat stijgend door (2; 1,5)



13.2 Toepassingen van sinusoiden

Bladzijde 58

- 15 a** evenwichtsstand = $\frac{5+1}{2} = 3$
 amplitude = $5 - 3 = 2$
 periode = 3

b $a = 3$
 $b = 2$
 $c = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$
 $d = 1$

- 16** De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 5$, dus $d = 5$ kan ook.

Bladzijde 59

17 a $a = \frac{3,5 + 0,5}{2} = 2$

$b = 3,5 - 2 = 1,5$

De periode is $4,5 - 1,5 = 3$, dus $c = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 1,5$, dus $d = 1,5$.

Dus $y = 2 + 1,5 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - 1,5))$.

b $a = \frac{4 + -2}{2} = 1$

$b = 4 - 1 = 3$

De periode is $5 - 2 = 3$, dus $c = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 2$, dus $d = 2$.

Dus $y = 1 + 3 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - 2))$.

18 $a = \frac{175 + 25}{2} = 100$

$b = 175 - 100 = 75$

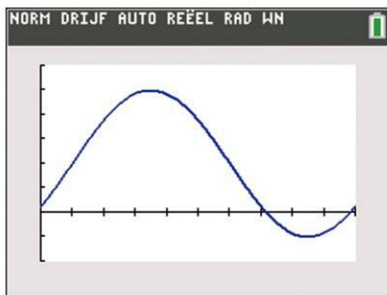
Door de evenwichtsstand bij opvolgend $t = 4$ en $t = 9$.

De halve periode is $9 - 4 = 5$, dus periode = 10 en dit geeft $c = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 4$, dus $d = 4$.

Dus $N = 100 + 75 \sin(\frac{1}{5}\pi(t - 4))$.

19 a Voer in $y_1 = 2 + 3 \sin(\frac{1}{5}\pi(x - 1))$.



De optie maximum geeft $x = 3,5$ en $y = 5$, dus het hoogste punt is $(3,5; 5)$.

b $x = 1,8$ geeft $y \approx 3,45$

c Voer in $y_2 = 3,6$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,90$ en $x \approx 5,10$.

Bladzijde 60

- 20** De sinusoïde daalt het snelst als de grafiek dalend door de evenwichtsstand gaat. Dat is bij $x = 1,5 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 5,5$.

21 a evenwichtsstand = -2

periode = $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand in het punt $(3, -2)$.

- b** $N_{\max}$ voor $t = 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 4$
 $N_{\max} = -2 + 7 = 5$
c $N_{\min}$ voor $t = 3 + \frac{3}{4} \cdot 4 = 6$
 $N_{\min} = -2 - 7 = -9$

22 a $y_{\max} = 5 + 2 = 7$

periode $= \frac{2\pi}{\frac{2}{5}\pi} = 5$

$y_{\max}$ voor $x = 0,8 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 2,05$

b $y_{\min} = 5 - 2 = 3$

$y_{\min}$ voor $x = 0,8 + \frac{3}{4} \cdot 5 = 4,55$

c Voer in $y_1 = 5 + 2 \sin(\frac{2}{5}\pi(x - 0,8))$.
 $x = 4,62$ geeft $y \approx 3,01$.

d Voer in $y_2 = 6$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1,22$ en $x \approx 2,88$.

e $x = 0$ geeft $y \approx 3,31$

f De helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} \approx -1,60$.

g De maximale helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0,8} \approx 2,51$.

Bladzijde 61

23 a $P = 25 + 6 \sin(\frac{1}{2}q - 1) = 25 + 6 \sin(\frac{1}{2}(q - 2))$

$P_{\max} = 25 + 6 = 31$

periode $= \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

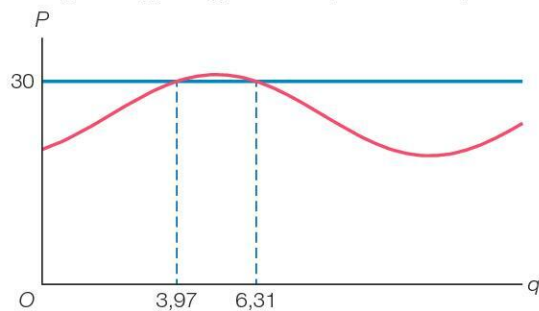
$P_{\max}$ voor $q = 2 + \frac{1}{4} \cdot 4\pi \approx 5,14$

b $P_{\min} = 25 - 6 = 19$

$P_{\min}$ voor $q = 2 + \frac{3}{4} \cdot 4\pi \approx 11,42$

c Voer in $y_1 = 25 + 6 \sin(\frac{1}{2}x - 1)$ en $y_2 = 30$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 3,97$ en $x \approx 6,31$.



Dus $P > 30$ voor $3,97 < q < 6,31$.

d De maximale helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 3$.

24 a $N_{\max} = 30,8 + 6,3 = 37,1$

periode $= \frac{2\pi}{\frac{2}{15}\pi} = 15$

$N_{\max}$ voor $t = 5,1 + \frac{1}{4} \cdot 15 = 8,85$

b $N_{\min} = 30,8 - 6,3 = 24,5$

$N_{\min}$ voor $t = 5,1 + \frac{3}{4} \cdot 15 = 16,35$

c $t = 7,2$ geeft $N = 35,65$

d Voer in $y_1 = 30,8 + 6,3 \sin(\frac{2}{15}\pi(x - 5,1))$ en $y_2 = 35$.

De optie snijpunt geeft $x = 6,842\dots$ en $x = 10,857\dots$

$10,857\dots - 6,842\dots = 4,015\dots$

Dus N is 4 uur en 1 minuut, oftewel 241 minuten, groter dan 35.

e De helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=10} \approx -1,22$.

f De maximale helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5,1} \approx 2,64$.

25 a $a = \text{evenwichtsstand} = \frac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2} = \frac{10 + 4}{2} = 7$

$b = \text{amplitude} = \text{maximum} - \text{evenwichtsstand} = 10 - 7 = 3$

b $\frac{1}{2}$ periode = $5 - 1 = 4$, dus de periode is 8 en $c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi$.

c De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand een kwart periode nadat een laagste punt is bereikt, dus bij $t = 5 + \frac{1}{4} \cdot 8 = 7$. Dus een mogelijke waarde voor d is 7. Plotten van de grafiek van $y = 7 + 3 \sin(\frac{1}{4}\pi(x - 7))$ geeft inderdaad een sinusoidale waarvan (1, 10) en (5, 4) twee opeenvolgende toppen zijn.

Bladzijde 62

26 Bij $n = 110$ hoort $t = \frac{110}{30} = 3\frac{2}{3}$, dus $d = 3\frac{2}{3}$.

De periode is 12 maanden, dus $c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.

De formule is $T = 17 + 8 \sin(\frac{1}{6}\pi(t - 3\frac{2}{3}))$.

27 a 1 maart heeft dagnummer 60 en 18 mei heeft dagnummer 138.

Voer in $y_1 = 17 + 8 \sin(\frac{2\pi}{365}(x - 110))$.

$x = 60$ geeft $y \approx 10,93$, dus op 1 maart is de gemiddelde dagtemperatuur $10,9^\circ\text{C}$.

$x = 138$ geeft $y \approx 20,71$, dus op 18 mei is de gemiddelde dagtemperatuur $20,7^\circ\text{C}$.

b Voer in $y_2 = 12$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 70,78$ en $x \approx 331,72$.

Bij $n = 71$ hoort 12 maart en bij $n = 332$ hoort 28 november.

Dus tussen 12 maart en 28 november is de gemiddelde dagtemperatuur meer dan 12°C .

c De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Dat is bij $n = 110$.

De grootste snelheid is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=110} \approx 0,14^\circ\text{C}/\text{dag}$.

28 a De langste dag duurt $11,9 + 6,1 = 18$ uur.

De periode is 365 dagen.

L is maximaal voor $n = 80 + \frac{1}{4} \cdot 365 = 171,25$.

Bij $n = 171$ hoort 20 juni, dus de langste dag valt op 20 juni.

b Het verschil is $2 \cdot 6,1 = 12,2$ uur = 12 uur en $0,2 \cdot 60 = 12$ minuten.

c 1 maart heeft dagnummer 60.

$n = 60$ geeft $L = 11,9 + 6,1 \sin(\frac{2\pi}{365}(60 - 80)) = 9,841\dots$, dus 9 uur en

$0,841\dots \cdot 60 \approx 50$ minuten.

d De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Dat is bij $n = 80$.

De grootste snelheid is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=80} = 0,105\dots \text{uur}/\text{dag} = 3600 \cdot 0,105\dots \approx 378$ seconden/dag.

29 a $a = \frac{16 + 8}{2} = 12$

$b = 16 - 12 = 4$

$c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$

$d = -1 + \frac{1}{4} \cdot 12 = 2$

b Voer in $y_1 = 12 + 4 \sin(\frac{1}{6}\pi(x - 2))$ en $y_2 = 15$.

De optie snijpunt geeft $x = 3,619\dots$ en $x = 6,380\dots$

$6,380\dots - 3,619\dots = 2,760\dots$ maanden = $2,760\dots \cdot 30 = 82,819\dots$ dagen

Dus gedurende 83 dagen is de daglengte meer dan 15 uur.

- c Bij 21 maart hoort $t = 2$ en bij 21 februari hoort $t = 1$.

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 2,09... \text{ en } \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 1,81...$$

Dus op 21 maart neemt de daglengte sneller toe dan op 1 februari.

- d Bij 1 april hoort $t = 2\frac{11}{30}$.

$$\text{De snelheid is } \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2\frac{11}{30}} = 2,055... \text{ uur/maand} = 2,055... \cdot 3600 : 30 \approx 247 \text{ seconden/dag.}$$

Bladzijde 63

- 30 a evenwichtsstand = $12 - 4 = 8$

$$\text{amplitude} = 4$$

$$\text{periode} = 15$$

Stijgend door de evenwichtsstand een kwart periode voor een hoogste punt, dus bij

$$x = 18 - \frac{1}{4} \cdot 15 = 14\frac{1}{4}.$$

$$\text{Dus } y = 8 + 4 \sin\left(\frac{2}{15}\pi(x - 14\frac{1}{4})\right).$$

- b amplitude = $812 - 650 = 162$

Stijgend door de evenwichtsstand een kwart periode voor een hoogste punt, dus bij

$$x = 16 - \frac{1}{4} \cdot 48 = 4.$$

$$\text{Dus } y = 650 + 162 \sin\left(\frac{2\pi}{48}(x - 4)\right) = 650 + 162 \sin\left(\frac{1}{24}\pi(x - 4)\right).$$

- c evenwichtsstand = $\frac{250 + 110}{2} = 180$

$$\text{amplitude} = 250 - 180 = 70$$

De halve periode is $26 - 2 = 24$, dus de periode is 48.

Stijgend door de evenwichtsstand een kwart periode na een laagste punt, dus voor

$$x = 26 + \frac{1}{4} \cdot 48 = 38.$$

$$\text{Dus } y = 180 + 70 \sin\left(\frac{1}{24}\pi(x - 38)\right).$$

- 31 a De evenwichtsstand is $\frac{0,70}{2} = 0,35$.

$$\text{De amplitude is } 0,70 - 0,35 = 0,35.$$

$$\text{De periode is } 10, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi.$$

De grafiek gaat een kwart periode na het laagste punt stijgend door de evenwichtsstand, dus voor $x = 2,5$.

$$\text{Dit geeft } y = 0,35 + 0,35 \sin\left(\frac{1}{5}\pi(x - 2,5)\right).$$

- b Voer in $y_1 = 0,35 + 0,35 \sin\left(\frac{1}{5}\pi(x - 2,5)\right)$.

De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Dat is bij $x = 2,5$.

$$\text{De maximale helling is } \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2,5} \approx 0,22.$$

- c Volgens Alex is de periode 14 m, dus $c = \frac{2\pi}{14} = \frac{1}{7}\pi$.

De grafiek gaat een kwart periode na het laagste punt stijgend door de evenwichtsstand, dus voor $x = 3,5$.

$$\text{Dus } y = 0,35 + 0,35 \sin\left(\frac{1}{7}\pi(x - 3,5)\right).$$

$$\text{Voer in } y_1 = 0,35 + 0,35 \sin\left(\frac{1}{7}\pi(x - 3,5)\right).$$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3,5} = 0,157...$$

De maximale helling is groter dan 0,15, dus Alex heeft niet gelijk.

Bladzijde 64

- 32 a** Er geldt $a = 2,7$, $b = 6,8 - 2,7 = 4,1$, de halve periode is 7,5, dus de periode is 15 en $c = \frac{2\pi}{15}$.

Zo krijg je de formule $h = 2,7 + 4,1 \sin(\frac{2}{15}\pi(x - d))$.

Voor $x = 0$ is $h = 0$. Dit invullen geeft $2,7 + 4,1 \sin(\frac{2}{15}\pi(0 - d)) = 0$.

Voer in $y_1 = 2,7 + 4,1 \sin(\frac{2}{15}\pi \cdot -x)$.

De optie nulpunt geeft $x = 1,716$, dus de formule is $h = 2,7 + 4,1 \sin(\frac{2}{15}\pi(x - 1,716))$.

Voer in $y_1 = 2,7 + 4,1 \sin(\frac{2}{15}\pi(x - 1,716))$.

De optie nulpunt geeft $x = 10,93\dots$, dus het huis is 11 meter breed.

- b** De x -waarde waar dit plafond 'begint' is $\frac{11 - 4,5}{2} = 3,25$.

$x = 3,25$ heeft $h = 5,156\dots$, dus het plafond bevindt zich op een hoogte van ongeveer 5,2 m.

Dat is $5,2 - 2,7 = 2,5$ m boven de eerste verdieping.

Bladzijde 65

- 33 a** De evenwichtsstand is 7 meter.
De amplitude is 3 meter.
De minimale hoogte is $7 - 3 = 4$ meter en de maximale hoogte is $7 + 3 = 10$ meter.

- b** Voer in $y_1 = 3 \sin(\frac{1}{30}\pi x) + 7$ en $y_2 = 8$.
De optie snijpunt geeft (onder andere) $x = 3,245\dots$ en $x = 85,754\dots$
De lengte van het gebouw is $86,754\dots - 3,245\dots \approx 84$ meter.

- c** Stel $h = a + b \sin(c(x - d))$.

De evenwichtsstand is $\frac{8 + 4}{2} = 6$ meter, dus $a = 6$.

De amplitude is 2 meter, dus $b = 2$.

Uit de gegevens volgt dat $\frac{3}{4} \cdot \text{periode} = 48$ meter, dus de periode is $\frac{4}{3} \cdot 48 = 64$ meter.

Dit geeft $c = \frac{2\pi}{64} = \frac{1}{32}\pi$.

Kies de oorsprong zo dat $d = 0$.

Dit geeft $h = 6 + 2 \sin(\frac{1}{32}\pi x)$.

- 34** Stel $h = a + b \sin(c(x - d))$.

De evenwichtsstand is $\frac{12 + 4}{2} = 8$ meter, dus $a = 8$.

De amplitude is 4 meter, dus $b = 4$.

Uit de gegevens volgt dat $\frac{3}{4} \cdot \text{periode} = 50$ meter, dus de periode is $\frac{4}{3} \cdot 50 = 66\frac{2}{3}$ meter.

Dit geeft $c = \frac{2\pi}{66\frac{2}{3}} = 0,03\pi$.

De periode van het dak van de sporthal is 64 meter, dus het dak van de sporthal gaat $\frac{1}{4}$ periode rechts van het laagste punt door de evenwichtsstand, dat is dus

$\frac{1}{4} \cdot 64 = 16$ meter rechts van het laagste punt.

Dat is $50 + 16 = 66$ meter rechts van het punt waar het dak van de sporthal stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Zo krijg je de formule $h = 8 + 4 \sin(0,03\pi(x + 66))$.

Omdat de periode $66\frac{2}{3}$ is, is ook $h = 8 + 4 \sin(0,03\pi(x - \frac{2}{3}))$ juist.

13.3 Formules herschrijven**Bladzijde 67**

- 35 a** $\frac{5}{x} \cdot \frac{6}{y} = \frac{5 \cdot 6}{xy} = \frac{30}{xy}$, dus uitkomst I is juist.

- b** $\frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{5y}{xy} + \frac{6x}{xy} = \frac{6x + 5y}{xy}$, dus uitkomst IV is juist.

Bladzijde 68

- 36 a $y = \frac{x}{\left(\frac{200}{x^2}\right)} = x \cdot \frac{x^2}{200} = \frac{x^3}{200}$
- b $y = \frac{x}{\left(\frac{200}{x^2}\right)} = \frac{x \cdot x^2}{\frac{200}{x^2} \cdot x^2} = \frac{x^3}{200}$
- c Omdat $\frac{x^2}{x^2} = 1$ is $\frac{\text{teller}}{\text{noemer}} \cdot \frac{x^2}{x^2}$ hetzelfde als $\frac{\text{teller}}{\text{noemer}} \cdot 1$.

Bladzijde 69

- 37 a $A = \frac{3}{x} \cdot \frac{5}{y} = \frac{15}{xy}$
- b $y = 5 + \frac{3}{x-2} = \frac{5}{1} + \frac{3}{x-2} = \frac{5(x-2)}{x-2} + \frac{3}{x-2} = \frac{5(x-2)+3}{x-2} = \frac{5x-10+3}{x-2} = \frac{5x-7}{x-2}$
- c $N = \frac{500}{a} - 70 = \frac{500}{a} - \frac{70}{1} = \frac{500}{a} - \frac{70a}{a} = \frac{500-70a}{a}$
- d $D = \frac{350}{x} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = \frac{350}{x} - \frac{350}{x} \cdot \frac{2}{x} = \frac{350}{x} - \frac{700}{x^2} = \frac{350x}{x^2} - \frac{700}{x^2} = \frac{350x-700}{x^2}$
- e $P = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} = \frac{t-1}{(t+1)(t-1)} - \frac{t+1}{(t+1)(t-1)} = \frac{t-1-(t+1)}{(t+1)(t-1)} = \frac{t-1-t-1}{(t+1)(t-1)} = \frac{-2}{(t+1)(t-1)}$
- f $C = \frac{6000}{\left(\frac{2x}{x-4}\right)} = \frac{6000(x-4)}{\frac{2x}{x-4} \cdot (x-4)} = \frac{6000(x-4)}{2x} = \frac{3000(x-4)}{x} = \frac{3000x-12000}{x}$
- 38 a $N = \frac{100}{a} + \frac{200}{b} = \frac{100b}{ab} + \frac{200a}{ab} = \frac{200a+100b}{ab}$
- b $B = \frac{3}{2x} \cdot \frac{x^3}{5y} = \frac{3x^3}{10xy} = \frac{3x^2}{10y}$
- c $y = \frac{0,5}{x+3} - 0,2x = \frac{0,5}{x+3} - \frac{0,2x}{1} = \frac{0,5}{x+3} - \frac{0,2x(x+3)}{x+3} = \frac{0,5-0,2x(x+3)}{x+3} = \frac{0,5-0,2x^2-0,6x}{x+3}$
- d $P = \frac{380}{t^2} - \frac{40}{t} = \frac{380}{t^2} - \frac{40t}{t^2} = \frac{380-40t}{t^2}$
- e $E = \frac{150}{x} \cdot \frac{x-4}{x} = \frac{150}{x} \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{150x}{x(x-4)} = \frac{150x}{x-4}$
- f $F = 8x \left(3 + \frac{5}{x^2}\right) = 24x + \frac{40x}{x^2} = \frac{24x}{1} + \frac{40}{x} = \frac{24x^2}{x} + \frac{40}{x} = \frac{24x^2+40}{x}$

- 39 a $\frac{15 + \frac{3}{x}}{x} = \frac{\left(15 + \frac{3}{x}\right) \cdot x}{x^2} = \frac{15x + \frac{3}{x} \cdot x}{x^2} = \frac{15x+3}{x^2}$
- b $\frac{20a}{b + \frac{a^2}{2b}} = \frac{20a \cdot 2b}{\left(b + \frac{a^2}{2b}\right) \cdot 2b} = \frac{40ab}{2b^2 + \frac{a^2}{2b} \cdot 2b} = \frac{40ab}{2b^2 + a^2}$
- c $\frac{\left(\frac{50}{x}\right)}{10} = \frac{\left(\frac{50}{x}\right) \cdot x}{10 \cdot x} = \frac{50}{10x} = \frac{5}{x}$
- d $\frac{50}{\left(\frac{10}{t}\right)} = 50 \cdot \frac{t}{10} = \frac{50t}{10} = 5t$
- e $p + 25 \cdot \frac{\left(\frac{100}{p}\right)}{5} = p + 25 \cdot \frac{\left(\frac{100}{p}\right) \cdot p}{5 \cdot p} = p + 25 \cdot \frac{100}{5p} = p + \frac{2500}{5p} = p + \frac{500}{p}$
- f $\frac{3 + \frac{2}{x}}{7 - \frac{1}{x}} = \frac{\left(3 + \frac{2}{x}\right) \cdot x}{\left(7 - \frac{1}{x}\right) \cdot x} = \frac{3x + \frac{2}{x} \cdot x}{7x - \frac{1}{x} \cdot x} = \frac{3x+2}{7x-1}$

40 a $A = \frac{5x^2 + 4x + 3}{x} = \frac{5x^2}{x} + \frac{4x}{x} + \frac{3}{x} = 5x + 4 + \frac{3}{x}$
b $T = \frac{3x^2 + 6x + 180}{4x} = \frac{3x^2}{4x} + \frac{6x}{4x} + \frac{180}{4x} = \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2} + \frac{45}{x}$
c $y = \frac{5a^2 + 10a}{2a^2} = \frac{5a^2}{2a^2} + \frac{10a}{2a^2} = 2\frac{1}{2} + \frac{5}{a}$

41 a $A = 18 \cdot \frac{\left(\frac{500}{x}\right)}{10} + 25x = 18 \cdot \frac{\left(\frac{500}{x}\right) \cdot x}{10 \cdot x} + 25x = 18 \cdot \frac{500}{10x} + 25x = \frac{9000}{10x} + 25x = \frac{900}{x} + 25x$,
dus $A = \frac{900}{x} + 25x$.
b $T = \frac{50a}{\frac{a^2}{5b} + 2b} = \frac{50a \cdot 5b}{\left(\frac{a^2}{5b} + 2b\right) \cdot 5b} = \frac{250ab}{\frac{a^2}{5b} \cdot 5b + 10b^2} = \frac{250ab}{a^2 + 10b^2}$, dus $T = \frac{250ab}{a^2 + 10b^2}$.
c $L = \left(21 + \frac{180}{\frac{a}{b} \cdot 20}\right) \cdot a = 21a + \frac{180a}{\frac{a}{b} \cdot 20} = 21a + \frac{180a \cdot b}{a \cdot 20 \cdot b} = 21a + \frac{180ab}{20a} = 21a + 9b$
Dus $p = 21$ en $q = 9$.
d $N = \frac{2t^2 - 5t + 50}{2t} = \frac{2t^2}{2t} - \frac{5t}{2t} + \frac{50}{2t} = t - 2\frac{1}{2} + \frac{25}{t}$

Bladzijde 70

42 a $A = 5 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{5p^2}{p^2} - \frac{2p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{5p^2 - 2p - 1}{p^2}$
b $B = \frac{6}{x} \cdot \frac{5}{x+y} : \frac{4}{x+y} = \frac{30}{x(x+y)} \cdot \frac{x+y}{4} = \frac{30(x+y)}{4x(x+y)} = \frac{15}{2x}$
c $C = \frac{12x^7 + 6x^5 + 18x^3}{36x^5} = \frac{12x^7}{36x^5} + \frac{6x^5}{36x^5} + \frac{18x^3}{36x^5} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{2x^2}$

43 a $y = 4x - 15$
 $4x = y + 15$
 $x = \frac{1}{4}y + 3\frac{3}{4}$
b $Q = 5\sqrt{2p-3}$
 $\sqrt{2p-3} = \frac{1}{5}Q$
 $2p-3 = \left(\frac{1}{5}Q\right)^2$
 $2p-3 = \frac{1}{25}Q^2$
 $2p = \frac{1}{25}Q^2 + 3$
 $p = \frac{1}{50}Q^2 + 1\frac{1}{2}$
c $y = 50x^{1,25}$
 $x^{1,25} = \frac{1}{50}y$
 $x = \left(\frac{1}{50}y\right)^{\frac{1}{1,25}}$
 $x = \left(\frac{1}{50}\right)^{\frac{1}{1,25}} \cdot y^{\frac{1}{1,25}}$
 $x \approx 0,044y^{0,8}$
Dus $x = 0,044y^{0,8}$.
d $A = 5 - \frac{12}{B+1}$
 $\frac{12}{B+1} = 5 - A$
 $B+1 = \frac{12}{5-A}$
 $B = \frac{12}{5-A} - 1$
e $N = \frac{t+2}{t+4}$
 $N(t+4) = t+2$
 $Nt + 4N = t+2$
 $tN - t = -4N + 2$
 $t(N-1) = -4N + 2$
 $t = \frac{-4N+2}{N-1}$

Bladzijde 72

44 a $y = 4(x - 1) + 6$
 $y = 4x - 4 + 6$
 $y = 4x + 2$
 $4x = y - 2$
 $x = \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}$

b $5x - 3y = 20$
 $5x = 3y + 20$
 $x = \frac{3}{5}y + 4$

c $y = \frac{1}{2}\sqrt{6x + 15}$
 $\sqrt{6x + 15} = 2y$
 $6x + 15 = 4y^2$
 $6x = 4y^2 - 15$
 $x = \frac{2}{3}y^2 - 2\frac{1}{2}$

d $y = 125(4x - 1)^3$
 $(4x - 1)^3 = \frac{1}{125}y$
 $4x - 1 = \left(\frac{1}{125}y\right)^{\frac{1}{3}}$
 $4x - 1 = \left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$
 $4x = \frac{1}{5}y^{\frac{1}{3}} + 1$
 $x = \frac{1}{20}y^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}$

e $y = 0,2x^{1,6}$
 $x^{1,6} = 5y$
 $x = (5y)^{\frac{1}{1,6}}$
 $x = 5^{\frac{1}{1,6}} \cdot y^{\frac{1}{1,6}}$
 $x \approx 2,73y^{0,625}$
Dus $x = 2,73y^{0,625}$.

f $y = 5x^{-1,25}$
 $x^{-1,25} = \frac{1}{5}y$
 $x = \left(\frac{1}{5}y\right)^{-\frac{1}{1,25}}$
 $x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{1,25}} \cdot y^{-\frac{1}{1,25}}$
 $x \approx 3,62y^{-0,8}$
Dus $x = 3,62y^{-0,8}$.

Bladzijde 73

45 a $2t = \frac{6}{N - 10} - 3$
 $t = \frac{3}{N - 10} - 1\frac{1}{2}$

b $t = \frac{5}{2N - 20} - 1\frac{1}{2}$
 $t = \frac{5}{2N - 20} - \frac{1\frac{1}{2}(2N - 20)}{2N - 20}$
 $t = \frac{5 - 3N + 30}{2N - 20}$
 $t = \frac{-3N + 35}{2N - 20}$

c Bij gebruik van de wisseleigenschap krijg je $3a + 4 = \frac{2a - 3}{F}$ en hieruit kun je a niet vrijmaken.

d $F = \frac{2a - 3}{3a + 4}$
 $2a - 3 = F(3a + 4)$
 $2a - 3 = 3aF + 4F$
 $2a - 3aF = 4F + 3$
 $a(2 - 3F) = 4F + 3$
 $a = \frac{4F + 3}{2 - 3F}$

$$\begin{aligned}
 46 \quad \mathbf{a} \quad Q &= \frac{1-2p}{3p-5} \\
 Q(3p-5) &= 1-2p \\
 3pQ-5Q &= 1-2p \\
 3pQ+2p &= 5Q+1 \\
 p(3Q+2) &= 5Q+1
 \end{aligned}$$

$$p = \frac{5Q+1}{3Q+2}$$

$$\mathbf{b} \quad N = 6 - \frac{2}{t+1}$$

$$\frac{2}{t+1} = 6 - N$$

$$t+1 = \frac{2}{6-N}$$

$$t = \frac{2}{6-N} - 1$$

$$t = \frac{2}{6-N} - \frac{6-N}{6-N}$$

$$t = \frac{2-6+N}{6-N}$$

$$t = \frac{N-4}{6-N}$$

Dus $a = -4$, $b = -1$ en $c = 6$.

$$\mathbf{c} \quad \frac{4A}{A+B} = 3-A$$

$$A+B = \frac{4A}{3-A}$$

$$B = \frac{4A}{3-A} - A$$

$$B = \frac{4A}{3-A} - \frac{A(3-A)}{3-A}$$

$$B = \frac{4A}{3-A} - \frac{3A-A^2}{3-A}$$

$$B = \frac{A^2+A}{3-A}$$

$$\mathbf{d} \quad \frac{3}{v-2} = \frac{5}{b-6}$$

$$5 \cdot (v-2) = 3 \cdot (b-6)$$

$$5v-10 = 3b-18$$

$$5v = 3b-8$$

$$v = \frac{3}{5}b - 1\frac{3}{5}$$

$$47 \quad \mathbf{a} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{c}{bc} - \frac{b}{bc}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{c-b}{bc}$$

$$a = \frac{bc}{c-b}$$

$$\mathbf{b} \quad y = \frac{15}{\sqrt{2x+5}}$$

$$\sqrt{2x+5} = \frac{15}{y}$$

$$2x+5 = \left(\frac{15}{y}\right)^2$$

$$2x = \frac{225}{y^2} - 5$$

$$x = \frac{225}{2y^2} - 2\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{c} \quad y = \frac{x^2}{5x^{3,7}}$$

$$\frac{x^2}{5x^{3,7}} = y$$

$$\frac{1}{5}x^{-1,7} = y$$

$$x^{-1,7} = 5y$$

$$x = (5y)^{\frac{1}{-1,7}}$$

$$x = 5^{\frac{1}{-1,7}} \cdot y^{\frac{1}{-1,7}}$$

$$x \approx 0,388y^{-0,588}$$

$$\text{Dus } x = 0,388y^{-0,588}.$$

$$48 \quad \mathbf{a} \quad q = 2p-3$$

$$2p = q+3$$

$$p = \frac{1}{2}q + 1\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} \quad N &= 3p + 4q - 5 \\
 p &= \frac{1}{2}q + 1\frac{1}{2} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} N &= 3p + 4q - 5 \\ p &= \frac{1}{2}q + 1\frac{1}{2} \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} N &= 3\left(\frac{1}{2}q + 1\frac{1}{2}\right) + 4q - 5 \\ N &= 1\frac{1}{2}q + 4\frac{1}{2} + 4q - 5 \\ N &= 5\frac{1}{2}q - \frac{1}{2} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Bladzijde 74

49 a $r + 8s = 100$
 $r = -8s + 100$
 $T = 3r + 6s + 80$ $\left\{ \begin{array}{l} T = 3(-8s + 100) + 6s + 80 \\ T = -24s + 300 + 6s + 80 \\ T = -18s + 380 \end{array} \right.$

b $5a - 8b = 160$
 $-8b = -5a + 160$
 $b = \frac{5}{8}a - 20$
 $C = 2a - 3b + 64$ $\left\{ \begin{array}{l} C = 2a - 3(\frac{5}{8}a - 20) + 64 \\ C = 2a - 1\frac{7}{8}a + 60 + 64 \\ C = \frac{1}{8}a + 124 \end{array} \right.$

50 a $3m + 5n = 12$
 $5n = -3m + 12$
 $n = -\frac{3}{5}m + 2\frac{2}{5}$
 $Q = 5m - n + 125$ $\left\{ \begin{array}{l} Q = 5m - (-\frac{3}{5}m + 2\frac{2}{5}) + 125 \\ Q = 5\frac{3}{5}m + 122\frac{3}{5} \end{array} \right.$

b $5\frac{3}{5}m + 122\frac{3}{5} = 201$
 $5\frac{3}{5}m = 78\frac{2}{5}$
 $m = 14$
 $m = 14$ geeft $n = 2\frac{2}{5} - \frac{3}{5} \cdot 14 = -6$
Dus $m = 14$ en $n = -6$.

Bladzijde 75

51 a $t = -\frac{1}{3}p + 3\frac{2}{3}$
 $\frac{1}{3}p = -t + 3\frac{2}{3}$
 $p = -3t + 11$
 $A = 2t + 5p + 9$ $\left\{ \begin{array}{l} A = 2t + 5(-3t + 11) + 9 \\ A = 2t - 15t + 55 + 9 \\ A = -13t + 64 \end{array} \right.$

Dus $a = -13$ en $b = 64$.

b $3x - 2y = 6$
 $-2y = -3x + 6$
 $y = 1,5x - 3$
 $B = 5xy + 20$ $\left\{ \begin{array}{l} B = 5x(1,5x - 3) + 20 \\ B = 7,5x^2 - 15x + 20 \end{array} \right.$
Dus $a = 7,5$, $b = -15$ en $c = 20$.

52 a $N = \frac{5x}{8}(16(2x - 1) - 4\frac{4}{5}(6x - 1))$
 $N = \frac{5x}{8}(32x - 16 - 28\frac{4}{5}x + 4\frac{4}{5})$
 $N = \frac{5x}{8}(3\frac{1}{5}x - 11\frac{1}{5})$
 $N = \frac{5x(3\frac{1}{5}x - 11\frac{1}{5})}{8}$
 $N = \frac{16x^2 - 56x}{8}$
 $N = 2x^2 - 7x$
Dus $a = 2$ en $b = -7$.

b $xy = 2$ geeft $y = \frac{2}{x}$
 $P = \frac{18x^2 - 6}{3x} + \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 2}{2 \cdot \frac{2}{x}}$
 $P = \frac{18x^2 - 6}{3x} + \frac{\frac{4}{x^2} + 2}{\frac{4}{x}}$
 $P = \frac{6x^2 - 2}{x} + \frac{4 + 2x^2}{4x}$
 $P = 6x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x$
 $P = 6,5x - \frac{1}{x}$
Dus $a = 6,5$ en $b = -1$.

53 a $x = 20$ geeft $K = \frac{1200}{20} + 2,5\sqrt{20} + 30 = 101,180\dots$

$x = 40$ geeft $K = \frac{1200}{40} + 2,5\sqrt{40} + 30 = 75,811\dots$

De relatieve verandering is $\frac{75,811\dots - 101,180\dots}{101,180\dots} \times 100\% \approx -25,1\%$.

Dus afname met 25,1%.

b Voer in $y_1 = \frac{1200}{x} + 2,5\sqrt{x} + 30$.

De optie minimum geeft $x \approx 97$ en $y \approx 67$.

Dus bij 97 km² per deelgebied zijn de kosten minimaal.

c $n = \frac{6000}{x}$
 $x = \frac{6000}{n}$
 $K = \frac{1200}{x} + 2,5\sqrt{x} + 30$ } $K = \frac{1200}{\left(\frac{6000}{n}\right)} + 2,5\sqrt{\frac{6000}{n}} + 30$

$$K = 1200 \cdot \frac{n}{6000} + 2,5 \cdot \frac{\sqrt{6000}}{\sqrt{n}} + 30$$

$$K = 0,2n + \frac{193,649\dots}{\sqrt{n}} + 30$$

$$K \approx 0,2n + \frac{194}{\sqrt{n}} + 30$$

Dus $a = 0,2$ en $b = 194$.

13.4 Omvormen van formules met exponenten en logaritmen

Bladzijde 77

54 $\log(N) = 2t - 3$
 $2t = \log(N) + 3$
 $t = \frac{1}{2} \cdot \log(N) + 1\frac{1}{2}$

55 a $\log(P) = 4q + 5$
 $4q = \log(P) - 5$
 $q = \frac{1}{4} \cdot \log(P) - 1\frac{1}{4}$

b $N = 5 \cdot \log(t) - 4$
 $5 \cdot \log(t) = N + 4$
 $\log(t) = \frac{1}{5}N + \frac{4}{5}$

$$t = 10^{\frac{1}{5}N + \frac{4}{5}}$$

$$t = 10^{\frac{1}{5}N} \cdot 10^{\frac{4}{5}}$$

$$t = 10^{\frac{4}{5}} \cdot (10^{\frac{1}{5}})^N$$

$$t \approx 6,3 \cdot 1,585^N$$

$$\text{Dus } t = 6,3 \cdot 1,585^N.$$

c $N = 20 \cdot 1,75^t$
 $1,75^t = 0,05N$
 $\log(1,75^t) = \log(0,05N)$
 $t \cdot \log(1,75) = \log(0,05N)$
 $t = \frac{1}{\log(1,75)} \cdot \log(0,05N)$
 $t \approx 4,1 \cdot \log(0,05N)$
 Dus $t = 4,1 \cdot \log(0,05N)$.

- 56 a** $t = 6,25 \cdot \log(Q) - 15$
 $6,25 \cdot \log(Q) = t + 15$
 $\log(Q) = 0,16t + 2,4$
 $Q = 10^{0,16t + 2,4}$
 $Q = 10^{0,16t} \cdot 10^{2,4}$
 $Q = 10^{2,4} \cdot (10^{0,16})^t$
 $Q \approx 251 \cdot 1,445^t$
 Dus $Q = 251 \cdot 1,445^t$.
- b** $F = 1,5 \cdot \ln(2t) - 2$
 $1,5 \cdot \ln(2t) = F + 2$
 $\ln(2t) = \frac{2}{3}F + 1\frac{1}{3}$
 $2t = e^{\frac{2}{3}F + 1\frac{1}{3}}$
 $t = \frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}F} \cdot e^{1\frac{1}{3}}$
 $t = \frac{1}{2}e^{1\frac{1}{3}} \cdot (e^{\frac{2}{3}})^F$
 $t \approx 1,90 \cdot 1,948^F$
 Dus $t = 1,90 \cdot 1,948^F$.
- c** $N = 160 e^{0,12t-3}$
 $e^{0,12t-3} = 0,00625N$
 $0,12t - 3 = \ln(0,00625N)$
 $0,12t = 3 + \ln(0,00625N)$
 $t \approx 25 + 8,3 \cdot \ln(0,00625N)$
 Dus $t = 25 + 8,3 \cdot \ln(0,00625N)$.

- 57 a** Op het moment dat Stijn het pak melk uit de koelkast haalt, geldt $t = 0$ en $T = 5$.
 $25 - k \cdot \log(20 - 5) = 0$
 $k \cdot \log(15) = 25$
 $k = \frac{25}{\log(15)} \approx 21,26$
- b** 45 seconden, dus $t = 0,75$.
 $25 - 21 \cdot \log(20 - T) = 0,75$
 $21 \cdot \log(20 - T) = 24,25$
 $\log(20 - T) = \frac{24,25}{21} = 1,15...$
 $20 - T = 10^{1,15...}$
 $T = 20 - 10^{1,15...} \approx 5,7$
 De temperatuur is ongeveer $5,7^\circ\text{C}$.
 Opmerking: de vergelijking $25 - 21 \cdot \log(20 - T) = 0,75$ mag ook grafisch-numeriek worden opgelost.
- c** $t = 25 - 21 \cdot \log(20 - T)$
 $21 \cdot \log(20 - T) = -t + 25$
 $\log(20 - T) = -\frac{1}{21}t + \frac{25}{21}$
 $20 - T = 10^{-\frac{1}{21}t + \frac{25}{21}}$
 $-T = -20 + 10^{-\frac{1}{21}t + \frac{25}{21}}$
 $T = 20 - 10^{-\frac{1}{21}t + \frac{25}{21}}$
 $T = 20 - 10^{\frac{25}{21}} \cdot 10^{-\frac{1}{21}t}$
 $T = 20 - 10^{\frac{25}{21}} \cdot (10^{-\frac{1}{21}})^t$
 $T \approx 20 - 15,5 \cdot 0,896^t$
 $T = 20 - 15,5 \cdot 0,896^t$, dus $a = 20$, $b = -15,5$ en $g = 0,896$.

58 a Voor de personenauto is $L = 74,8 + 33,0 \cdot \log\left(\frac{90}{80}\right) \approx 76,49$.

Voor de vrachtauto is $L = 83,5 + 22,8 \cdot \log\left(\frac{90}{70}\right) \approx 85,99$.

Het geluidsniveau van een vrachtauto is $\frac{85,99 - 76,49}{76,49} \times 100\% \approx 12,4\%$ hoger.

b $L = 82$ geeft $74,8 + 33,0 \cdot \log\left(\frac{v}{80}\right) = 82$

$$33,0 \cdot \log\left(\frac{v}{80}\right) = 7,2$$

$$\log\left(\frac{v}{80}\right) = 0,218\dots$$

$$\frac{v}{80} = 10^{0,218\dots}$$

$$v = 80 \cdot 10^{0,218\dots} \approx 132$$

De snelheid is 132 km/uur.

Opmerking: de vergelijking $74,8 + 33,0 \cdot \log\left(\frac{v}{80}\right) = 82$ mag ook grafisch-numeriek worden opgelost.

c $L = 83,5 + 22,8 \cdot \log\left(\frac{v}{70}\right)$

$$22,8 \cdot \log\left(\frac{v}{70}\right) = L - 83,5$$

$$\log\left(\frac{v}{70}\right) = \frac{1}{22,8}L - \frac{83,5}{22,8}$$

$$\frac{v}{70} = 10^{\frac{1}{22,8}L - \frac{83,5}{22,8}}$$

$$v = 70 \cdot 10^{\frac{83,5}{22,8} - \frac{1}{22,8}L}$$

$$v \approx 0,015 \cdot 1,106^L$$

$$\text{Dus } v = 0,015 \cdot 1,106^L.$$

Bladzijde 79

59 a $G = 150$ en $S = 140$ geeft $125 \cdot \ln(150 + b) + c = 140$, dus $c = 140 - 125 \cdot \ln(150 + b)$.

$G = 200$ en $S = 163$ geeft $125 \cdot \ln(200 + b) + c = 163$, dus $c = 163 - 125 \cdot \ln(200 + b)$.

Hieruit volgt $140 - 125 \cdot \ln(150 + b) = 163 - 125 \cdot \ln(200 + b)$

$$125 \cdot \ln(200 + b) - 125 \cdot \ln(150 + b) = 23$$

$$125 \cdot (\ln(200 + b) - \ln(150 + b)) = 23$$

$$125 \cdot \ln\left(\frac{200 + b}{150 + b}\right) = 23$$

b Voer in $y_1 = 125 \cdot \ln\left(\frac{200 + x}{150 + x}\right)$ en $y_2 = 23$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 97,5$.

Dus $b = 97,5$.

c Bij $G = 150$ hoort $S = 140$.

Los op $125 \cdot \ln(150 + 98) + c = 140$.

$$c = 140 - 125 \cdot \ln(248) \approx -549$$

Dus $c = -549$.

d $G = 185$ geeft $S = 125 \cdot \ln(185 + 98) - 550 \approx 156$.

Dus de schouderhoogte is 156 cm.

e $S = 125 \cdot \ln(G + 98) - 550$

$$125 \cdot \ln(G + 98) = S + 550$$

$$\ln(G + 98) = 0,008S + 4,4$$

$$G + 98 = e^{0,008S + 4,4}$$

$$G = e^{0,008S + 4,4} - 98$$

$$G = e^{0,008S} \cdot e^{4,4} - 98$$

$$G \approx 81,45 \cdot e^{0,008S} - 98$$

$$G = 81,45 \cdot e^{0,008S} - 98, \text{ dus } a = 81,45, p = 0,008 \text{ en } q = -98.$$

f $S = 225$ geeft $G = 81,45 \cdot e^{0,008 \cdot 225} - 98 \approx 395$.

Dus de spanwijdte is 395 cm.

60 Gebruik van $g^y = x$ geeft ${}^g\log(x) = y$ bij $e^c = 1,85$ geeft $c = \ln(1,85) \approx 0,615$.

Bladzijde 80

- 61 a** $2^c = 1,18$ geeft $c = {}^2\log(1,18) \approx 0,239$, dus de formule is $N = 250 \cdot 2^{0,239t}$.
- b** $g = e^{0,62} \approx 1,859$, dus de formule is $N = \frac{575}{1 + 12 \cdot 1,859^t}$.
- c** $N = 60 + 14 \cdot {}^2\log(t) = 60 + 14 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(2)} = 60 + \frac{14}{\ln(2)} \cdot \ln(t) \approx 60 + 20,2 \cdot \ln(t)$
 Dus de formule is $N = 60 + 20,2 \cdot \ln(t)$.
- d** $N = 16,65 + 2,5 \cdot \ln(3t) = 16,65 + 2,5 \cdot \frac{\log(3t)}{\log(e)} = 16,65 + \frac{2,5}{\log(e)} \cdot \log(3t)$
 $= 16,65 + \frac{2,5}{\log(e)} \cdot (\log(3) + \log(t)) = 16,65 + \frac{2,5 \cdot \log(3)}{\log(e)} + \frac{2,5}{\log(e)} \cdot \log(t)$
 $\approx 19,40 + 5,76 \cdot \log(t)$
 Dus de formule is $N = 19,40 + 5,76 \cdot \log(t)$.

Bladzijde 81

- 62 a** $10^c = e^{0,15}$ geeft $c = \log(e^{0,15}) \approx 0,065$, dus de formule is $N = 18,6 \cdot 10^{0,065t}$.
- b** $N = 1,68 + 1,25 \cdot {}^2\log(5t) = 1,68 + 1,25 \cdot \frac{\ln(5t)}{\ln(2)} = 1,68 + 1,25 \cdot \frac{\ln(5) + \ln(t)}{\ln(2)}$
 $= 1,68 + 1,25 \cdot \left(\frac{\ln(5)}{\ln(2)} + \frac{\ln(t)}{\ln(2)} \right)$
 $= 1,68 + 1,25 \cdot \frac{\ln(5)}{\ln(2)} + \frac{1,25}{\ln(2)} \cdot \ln(t) \approx 4,58 + 1,80 \cdot \ln(t)$
 Dus de formule is $N = 4,58 + 1,80 \cdot \ln(t)$.
- c** $N = 550 \cdot 2^{1,5-t} = 550 \cdot 2^{1,5} \cdot 2^{-t} \approx 1556 \cdot 2^{-t}$
 $e^c = 2^{-1}$ geeft $c = \ln(2^{-1}) \approx -0,69$
 Dus de formule is $N = 1556 \cdot e^{-0,69t}$.
- 63 a** $h = 130$ geeft $W = 2,4 \cdot 1,0186^{130} \approx 26$.
 Dus Robert weegt 26 kg.
- b** Los op $2,4 \cdot 1,0186^h = 23,5$.
 Voer in $y_1 = 2,4 \cdot 1,0186^x$ en $y_2 = 23,5$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 123,8$.
 Dus de lengte van Chantal is 124 cm.
- c** $e^c = 1,0186$ geeft $c = \ln(1,0186) \approx 0,0184$, dus de formule is $W = 2,4 \cdot e^{0,0184h}$.
- 64 a** $\log(N) = t + 2$
 $N = 10^{t+2}$
 $N = 10^t \cdot 10^2$
 $N = 100 \cdot 10^t$
- b** $N = 500 \cdot 1,26^t$
 $\log(N) = \log(500 \cdot 1,26^t)$
 $\log(N) = \log(500) + \log(1,26^t)$
 $\log(N) = t \cdot \log(1,26) + \log(500)$
 $\log(N) \approx 0,1t + 2,7$
 Dus $a = 0,1$ en $b = 2,7$.

Bladzijde 82

65

a $\log(N) = 0,14t + 2,17$
 $N = 10^{0,14t + 2,17}$
 $N = 10^{0,14t} \cdot 10^{2,17}$
 $N = 10^{2,17} \cdot (10^{0,14})^t$
 $N \approx 148 \cdot 1,380^t$
Dus $N = 148 \cdot 1,380^t$.

b $\ln(0,4N) = 0,45t + 5,16$
 $0,4N = e^{0,45t + 5,16}$
 $N = 2,5 \cdot e^{0,45t} \cdot e^{5,16}$
 $N = 2,5 \cdot e^{5,16} \cdot (e^{0,45})^t$
 $N \approx 435 \cdot 1,568^t$
Dus $N = 435 \cdot 1,568^t$.

c ${}^2\log(N) = 1,3t + 2,4$
 $N = 2^{1,3t + 2,4}$
 $N = 2^{1,3t} \cdot 2^{2,4}$
 $N = 2^{2,4} \cdot (2^{1,3})^t$
 $N \approx 5 \cdot 2,462^t$
Dus $N = 5 \cdot 2,462^t$.

d $t = 5 \cdot \log(N) - 8,82$
 $5 \cdot \log(N) = t + 8,82$
 $\log(N) = 0,2t + 1,764$
 $N = 10^{0,2t + 1,764}$
 $N = 10^{0,2t} \cdot 10^{1,764}$
 $N = 10^{1,764} \cdot (10^{0,2})^t$
 $N \approx 58 \cdot 1,585^t$
Dus $N = 58 \cdot 1,585^t$.

66

a $N = 150 \cdot 1,88^t$
 $\log(N) = \log(150 \cdot 1,88^t)$
 $\log(N) = \log(150) + \log(1,88^t)$
 $\log(N) = t \cdot \log(1,88) + \log(150)$
 $\log(N) \approx 0,274t + 2,18$
Dus $\log(N) = 0,274t + 2,18$.

b $N = 280 \cdot e^{0,15t}$
 $\log(N) = \log(280 \cdot e^{0,15t})$
 $\log(N) = \log(280) + \log(e^{0,15t})$
 $\log(N) = 0,15t \cdot \log(e) + \log(280)$
 $\log(N) \approx 0,065t + 2,45$
Dus $\log(N) = 0,065t + 2,45$.

c $N = 85 \cdot e^{0,235t - 2}$
 $\ln(N) = \ln(85 \cdot e^{0,235t - 2})$
 $\ln(N) = \ln(85) + \ln(e^{0,235t - 2})$
 $\ln(N) = \ln(85) + 0,235t - 2$
 $\ln(N) \approx 0,235t + 2,44$
Dus $\ln(N) = 0,235t + 2,44$.

d $N = 400 \cdot 10^{0,3t - 1}$
 $\ln(N) = \ln(400 \cdot 10^{0,3t - 1})$
 $\ln(N) = \ln(400) + \ln(10^{0,3t - 1})$
 $\ln(N) = \ln(400) + (0,3t - 1) \cdot \ln(10)$
 $\ln(N) = \ln(400) + 0,3t \cdot \ln(10) - \ln(10)$
 $\ln(N) \approx 0,691t + 3,69$
Dus $\ln(N) = 0,691t + 3,69$.

Bladzijde 83

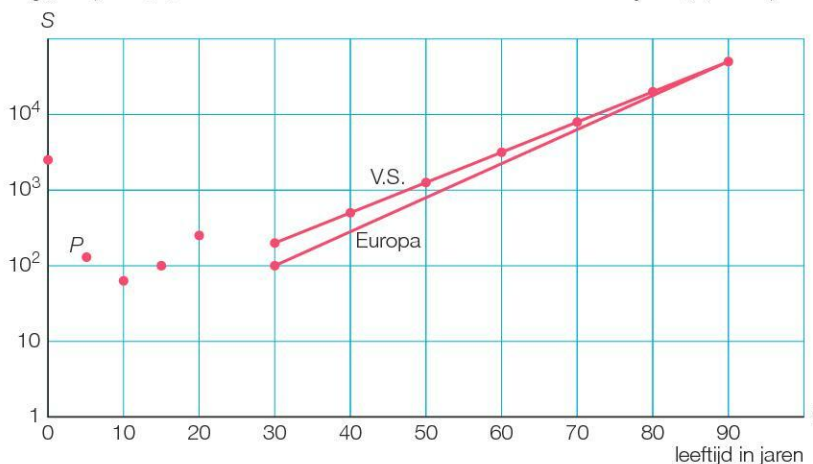
67

a Bij $l = 20$ hoort $s = 10^{2 + 0,4} = 10^{2,4} \approx 251$, dus 251 sterfgevallen per 100 000 inwoners.

b Bij $l = 0$ hoort $s = 10^{3 + 0,4} = 10^{3,4} \approx 2512$.

$\frac{2512}{100000} \times 100\% \approx 2,5\%$ van de pasgeboren baby's sterft binnen een jaar.

c $\log(126) \approx 2,1$, dus $10^{2,1} \approx 126$. De coördinaten van P zijn $P(5, 10^{2,1})$. Zie de figuur.



d $s = 12\,600$ geeft $0,040l + 1,10 = \log(12\,600)$
 $0,040l = 3,00\dots$
 $l \approx 75$

Dus bij een leeftijd van ongeveer 75 jaar zijn er 12 600 sterfgevallen per 100 000 inwoners.

- e** $\log(s) = 0,040l + 1,10$
 $s = 10^{0,040l + 1,10}$
 $s = 10^{1,10} \cdot 10^{0,040l}$
 $s = 10^{1,10} \cdot (10^{0,040})^l$
 $s \approx 12,6 \cdot 1,096^l$
Dus $s = 12,6 \cdot 1,096^l$.
- f** Bij $l = 30$ hoort $s = 107 \approx 10^{2,03}$ en bij $l = 90$ hoort $s = 53\,098 \approx 10^{4,73}$.
Gebruik deze waarden van l en s om de lijn te tekenen. Zie de figuur bij vraag c.
- g** $s = 4,8 \cdot 1,109^l$
 $\log(s) = \log(4,8 \cdot 1,109^l)$
 $\log(s) = \log(4,8) + \log(1,109^l)$
 $\log(s) = l \cdot \log(1,109) + \log(4,8)$
 $\log(s) \approx 0,045l + 0,68$
Dus $\log(s) = 0,045l + 0,68$.
- h** Er geldt dan $12,6 \cdot 1,096^l = 4,8 \cdot 1,109^l$.
Voer in $y_1 = 12,6 \cdot 1,096^x$ en $y_2 = 4,8 \cdot 1,109^x$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 81,8$.
Dus bij een leeftijd van ongeveer 82 jaar.

Bladzijde 84

- 68 a** $\log(P) = 2 \cdot \log(Q) + 3$
 $\log(P) = \log(Q^2) + \log(10^3)$
 $\log(P) = \log(Q^2 \cdot 10^3)$
 $P = 10^3 \cdot Q^2$
 $P = 1000Q^2$
- b** $A = 100B^{1,4}$
 $\log(A) = \log(100B^{1,4})$
 $\log(A) = \log(100) + \log(B^{1,4})$
 $\log(A) = \log(100) + 1,4 \cdot \log(B)$
 $\log(A) = 1,4 \cdot \log(B) + 2$

- 69** $\log(N) = 2,35 + 3,6 \cdot \log(t)$
 $N = 10^{2,35 + 3,6 \cdot \log(t)}$
 $N = 10^{2,35} \cdot 10^{3,6 \cdot \log(t)}$
 $N = 10^{2,35} \cdot (10^{\log(t)})^{3,6}$
 $N = 10^{2,35} \cdot t^{3,6}$
 $N \approx 224 \cdot t^{3,6}$
Je krijgt dan ook $N = 224t^{3,6}$.
*

Bladzijde 85

- 70 a** $N = 67M^{1,2}$
 $\ln(N) = \ln(67M^{1,2})$
 $\ln(N) = \ln(67) + \ln(M^{1,2})$
 $\ln(N) = \ln(67) + 1,2 \cdot \ln(M)$
 $\ln(N) \approx 4,2 + 1,2 \cdot \ln(M)$
Dus $\ln(N) = 4,2 + 1,2 \cdot \ln(M)$.
- b** $K = \frac{120}{L^{0,16}}$
 $\log(K) = \log\left(\frac{120}{L^{0,16}}\right)$
 $\log(K) = \log(120) - \log(L^{0,16})$
 $\log(K) = \log(120) - 0,16 \cdot \log(L)$
 $\log(K) \approx 2,08 - 0,16 \cdot \log(L)$
Dus $\log(K) = 2,08 - 0,16 \cdot \log(L)$.
- c** $\ln(A) = 5,5 + 4,5 \cdot \ln(B)$
 $\ln(A) = \ln(e^{5,5}) + \ln(B^{4,5})$
 $\ln(A) = \ln(e^{5,5} \cdot B^{4,5})$
 $A = e^{5,5} \cdot B^{4,5}$
 $A \approx 245B^{4,5}$
Dus $A = 245B^{4,5}$.
- d** ${}^2\log(P) - 6,4 \cdot {}^2\log(Q) = 5,12$
 ${}^2\log(P) - {}^2\log(Q^{6,4}) = {}^2\log(2^{5,12})$
 ${}^2\log(P) = {}^2\log(2^{5,12}) + {}^2\log(Q^{6,4})$
 ${}^2\log(P) = {}^2\log(2^{5,12} \cdot Q^{6,4})$
 $P = 2^{5,12} \cdot Q^{6,4}$
 $P \approx 34,8Q^{6,4}$
Dus $P = 34,8Q^{6,4}$.

- 71 a** $G = 20$ en $S = 30$ geeft $\ln(30) = a + b \cdot \ln(20)$, dus $a = \ln(30) - b \cdot \ln(20)$.
 $G = 100$ en $S = 80$ geeft $\ln(80) = a + b \cdot \ln(100)$, dus $a = \ln(80) - b \cdot \ln(100)$.
 Hieruit volgt $\ln(30) - b \cdot \ln(20) = \ln(80) - b \cdot \ln(100)$
 $b \cdot \ln(100) - b \cdot \ln(20) = \ln(80) - \ln(30)$
 $b \cdot \ln\left(\frac{100}{20}\right) = \ln\left(\frac{80}{30}\right)$
 $b \cdot \ln(5) = \ln\left(2\frac{2}{3}\right)$
 $b = \frac{\ln(2\frac{2}{3})}{\ln(5)} \approx 0,6094$
- b** $G = 20$ en $S = 30$ geeft $\ln(30) = a + 0,609 \cdot \ln(20)$.
 Dus $a = \ln(30) - 0,609 \cdot \ln(20) \approx 1,58$.
- c** 320 cm is $\frac{320}{2,54} \approx 126,0 \text{ inch}$.
 $\ln(S) = 1,6 + 0,61 \cdot \ln(126)$
 $S = e^{1,6 + 0,61 \cdot \ln(126)} \approx 94,6$
 $94,6 \text{ inch}$ is $94,6 \cdot 2,54 \approx 240 \text{ cm}$.
 Dus een schouderhoogte van 240 cm .
 Opmerking: de vergelijking $\ln(S) = 1,6 + 0,61 \cdot \ln(126)$ mag ook grafisch-numeriek worden opgelost.
- d** 200 cm is $\frac{200}{2,54} \approx 78,7 \text{ inch}$.
 $S = 78,7$ geeft $\ln(78,7) = 1,6 + 0,61 \cdot \ln(G)$.
 $0,61 \cdot \ln(G) = \ln(78,7) - 1,6$
 $\ln(G) = \frac{\ln(78,7) - 1,6}{0,61} = 4,53\dots$
 $G = e^{4,53\dots} \approx 93,1$
 $93,1 \text{ inch}$ is $93,1 \cdot 2,54 \approx 236 \text{ cm}$.
 Dus een spanwijdte van 236 cm .
 Opmerking: de vergelijking $\ln(78,7) = 1,6 + 0,61 \cdot \ln(G)$ mag ook grafisch-numeriek worden opgelost.
- e** $\ln(S) = 1,6 + 0,61 \cdot \ln(G)$
 $\ln(S) = \ln(e^{1,6}) + \ln(G^{0,61})$
 $\ln(S) = \ln(e^{1,6} \cdot G^{0,61})$
 $S = e^{1,6} \cdot G^{0,61}$
 $S \approx 4,95 G^{0,61}$
 Dus $S = 4,95 G^{0,61}$.
- f** $S = \frac{s}{2,54}$ en $G = \frac{g}{2,54}$ invullen bij $S = 4,95 G^{0,61}$ geeft $\frac{s}{2,54} = 4,95 \left(\frac{g}{2,54}\right)^{0,61}$
 $\frac{s}{2,54} = 4,95 \cdot \frac{g^{0,61}}{2,54^{0,61}}$
 $\frac{s}{2,54} = 4,95 \cdot \frac{1}{2,54^{0,61}} \cdot g^{0,61}$
 $s = 2,54 \cdot 4,95 \cdot \frac{1}{2,54^{0,61}} \cdot g^{0,61}$
 $s \approx 7,12 \cdot g^{0,61}$
 Dus $a = 7,12$.

Diagnostische toets

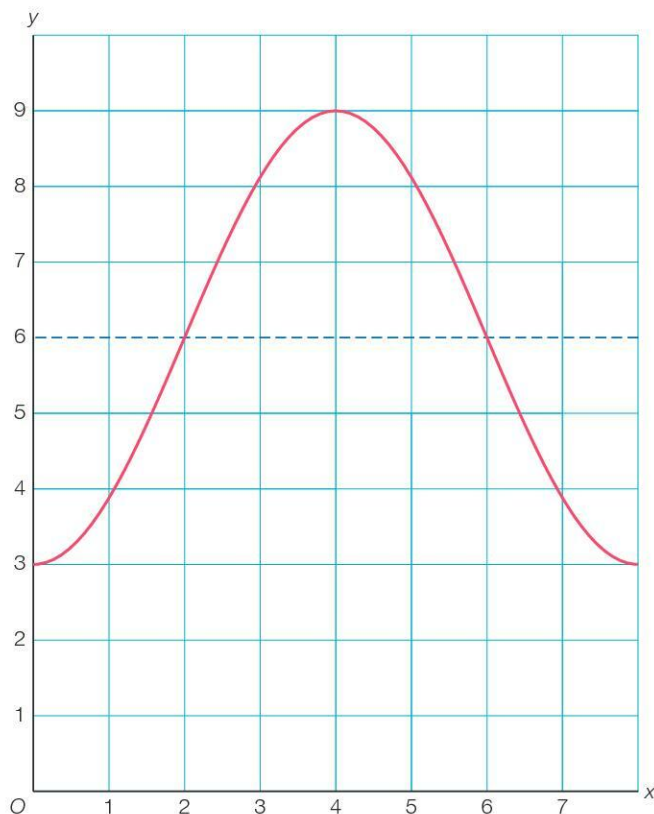
Bladzijde 88

- 1 a** periode = $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, evenwichtsstand = 4 en amplitude = 5
- b** periode = $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, evenwichtsstand = 8 en amplitude = 12
- c** periode = $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6$, evenwichtsstand = 75 en amplitude = 25

2 periode = 30, evenwichtsstand = $\frac{10 + -30}{2} = -10$ en amplitude = $10 - -10 = 20$

3 evenwichtsstand = 6
 amplitude = 3
 periode = $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$

grafiek gaat stijgend door (2, 6)



4 $N = a + b \sin(c(t - d))$

$$a = \frac{30 + -10}{2} = 10$$

$$b = 30 - 10 = 20$$

De periode is $30 - 5 = 25$, dus $c = \frac{2\pi}{25}$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 5$, dus $d = 5$.

Dus $N = 10 + 20 \sin(\frac{2}{25}\pi(t - 5))$.

5 a $y_{\max} = 12,5 + 6,5 = 19$

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{2}{9}\pi} = 9$.

y is maximaal voor $x = 2 + \frac{1}{4} \cdot 9 = 4,25$.

b $y_{\min} = 12,5 - 6,5 = 6$

y is minimaal voor $x = 2 + \frac{3}{4} \cdot 9 = 8,75$.

c $x = 0$ geeft $y \approx 6,10$

d De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Dat is bij $x = 2$.

Voer in $y_1 = 12,5 + 6,5 \sin(\frac{2}{9}\pi(x - 2))$.

De maximale helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} \approx 4,54$.

- 6 a** $T = a + b \sin(c(t - d))$
 $a = \frac{10 + 28}{2} = 19$
 $b = 28 - 19 = 9$
periode = 12, dus $c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$
Stijgend door de evenwichtsstand 3 maanden na 15 januari, dus $d = 3\frac{1}{2}$.
- b** Voer in $y_1 = 19 + 9 \sin(\frac{1}{6}\pi(x - 3\frac{1}{2}))$ en $y_2 = 25$.
De optie snijpunt geeft $x = 4,89...$ en $x = 8,10...$
Dus gedurende $8,10... - 4,89... = 3,21...$ maanden = $96,37...$ dagen ≈ 96 dagen.
- c** $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3,5} = 4,71...$, dus de maximale snelheid is $\frac{4,71...}{30} = 0,1570... \approx 0,157^\circ\text{C/dag}$.

Bladzijde 89

- 7 a** $y = \frac{25}{2x} \left(3 + \frac{5}{x}\right) = \frac{75}{2x} + \frac{125}{2x^2} = \frac{75x}{2x^2} + \frac{125}{2x^2} = \frac{75x + 125}{2x^2}$
- b** $H = \frac{120x}{\frac{x}{4y} + 3xy} = \frac{120x \cdot 4y}{\left(\frac{x}{4y} + 3xy\right) \cdot 4y} = \frac{480xy}{x + 12xy^2} = \frac{480y}{1 + 12y^2}$
Dus $H = \frac{480y}{1 + 12y^2}$.
- c** $P = \frac{3f^2 + 120f + 6}{6f} = \frac{3f^2}{6f} + \frac{120f}{6f} + \frac{6}{6f} = \frac{1}{2}f + 20 + \frac{1}{f}$
- 8 a** $q = \frac{3-p}{2p+1}$
 $q(2p+1) = 3-p$
 $2pq + q = 3-p$
 $2pq + p = 3-q$
 $p(2q+1) = 3-q$
 $p = \frac{3-q}{2q+1}$
- c** $\frac{2}{s+3} = \frac{6}{t+2}$
 $6 \cdot (s+3) = 2 \cdot (t+2)$
 $6s + 18 = 2t + 4$
 $6s = 2t - 14$
 $s = \frac{1}{3}t - 2\frac{1}{3}$
- b** $y = 2\sqrt{2x-5}$
 $2\sqrt{2x-5} = y$
 $\sqrt{2x-5} = \frac{1}{2}y$
 $2x-5 = \left(\frac{1}{2}y\right)^2$
 $2x-5 = \frac{1}{4}y^2$
 $2x = \frac{1}{4}y^2 + 5$
 $x = \frac{1}{8}y^2 + 2\frac{1}{2}$
- 9 a** $A = 3s - 4t + 8$
 $s - 2t = 5$ geeft $s = 2t + 5$ } $A = 3(2t + 5) - 4t + 8 = 6t + 15 - 4t + 8 = 2t + 23$
Dus $A = 2t + 23$.
- b** $y = x - 3$ en $z = 2x + 5$ invullen bij $A = \frac{3x}{2}(12y - 3z)$ geeft
 $A = \frac{3x}{2}(12(x-3) - 3(2x+5))$
 $A = \frac{3x}{2}(12x - 36 - 6x - 15)$
 $A = \frac{3x}{2}(6x - 51)$
 $A = \frac{3x}{2} \cdot 6x - \frac{3x}{2} \cdot 51$
 $A = 9x^2 - 76\frac{1}{2}x$
Dus $p = 9$ en $q = -76\frac{1}{2}$.

10 a $N = 2,5 \cdot \log(8t) - 4,2$
 $2,5 \cdot \log(8t) = N + 4,2$
 $\log(8t) = 0,4N + 1,68$
 $8t = 10^{0,4N + 1,68}$
 $t = \frac{1}{8} \cdot 10^{0,4N} \cdot 10^{1,68}$
 $t = \frac{1}{8} \cdot 10^{1,68} \cdot (10^{0,4})^N$
 $t \approx 6,0 \cdot 2,512^N$
Dus $t = 6,0 \cdot 2,512^N$.

b $N = 50e^{0,4t-2}$
 $e^{0,4t-2} = 0,02N$
 $0,4t - 2 = \ln(0,02N)$
 $0,4t = 2 + \ln(0,02N)$
 $t = 5 + 2,5 \cdot \ln(0,02N)$

11 a $e^c = 1,42$ geeft $c = \ln(1,42) \approx 0,35$, dus de formule is $N = 16 \cdot e^{0,35t}$.

b $N = 55 + 14 \cdot \log(3,5t - 2)$
 $N = 55 + 14 \cdot \frac{\ln(3,5t - 2)}{\ln(10)}$
 $N = 55 + 14 \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(3,5t - 2)$
 $N \approx 55 + 6,1 \cdot \ln(3,5t - 2)$
Dus $N = 55 + 6,1 \cdot \ln(3,5t - 2)$.

12 a $1,3 \cdot \log(N) = 0,65t + 3,38$
 $\log(N) = 0,5t + 2,6$
 $N = 10^{0,5t + 2,6}$
 $N = 10^{0,5t} \cdot 10^{2,6}$
 $N = 10^{2,6} \cdot (10^{0,5})^t$
 $N \approx 398 \cdot 3,162^t$
Dus $N = 398 \cdot 3,162^t$.

b $N = 70e^{0,25t-1}$
 $\ln(N) = \ln(70e^{0,25t-1})$
 $\ln(N) = \ln(70) + \ln(e^{0,25t-1})$
 $\ln(N) = \ln(70) + 0,25t - 1$
 $\ln(N) \approx 0,25t + 3,25$
Dus $\ln(N) = 0,25t + 3,25$.

13 a $N = 350t^{2,84}$
 $\log(N) = \log(350t^{2,84})$
 $\log(N) = \log(350) + \log(t^{2,84})$
 $\log(N) = \log(350) + 2,84 \cdot \log(t)$
 $\log(N) \approx 2,54 + 2,84 \cdot \log(t)$
Dus $\log(N) = 2,54 + 2,84 \cdot \log(t)$.

b $\ln(N) = 7,6 + 4,58 \cdot \ln(t)$
 $\ln(N) = \ln(e^{7,6}) + \ln(t^{4,58})$
 $\ln(N) = \ln(e^{7,6} \cdot t^{4,58})$
 $N = e^{7,6} \cdot t^{4,58}$
 $N \approx 1998t^{4,58}$
Dus $N = 1998t^{4,58}$.

14 Toepassingen van de differentiaalrekening

Voorkennis De afgeleide functie

Bladzijde 94

- 1 a** $y = x^3 - \frac{4}{x^3} = x^3 - 4x^{-3}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 12x^{-4} = 3x^2 + \frac{12}{x^4}$.
- b** $N = 0,3 \cdot e^{2t}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 0,3 \cdot e^{2t} \cdot 2 = 0,6 \cdot e^{2t}$.
- c** $B = 3(2a - 7)^5$ geeft $\frac{dB}{da} = 15(2a - 7)^4 \cdot 2 = 30(2a - 7)^4$.
- d** $y = \sqrt{2x - 7} = (2x - 7)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 0,5(2x - 7)^{-0,5} \cdot 2 = \frac{1}{(2x - 7)^{0,5}} = \frac{1}{\sqrt{2x - 7}}$.
- e** $F = \frac{5}{(5p - 3)^4} = 5(5p - 3)^{-4}$ geeft $\frac{dF}{dp} = -20(5p - 3)^{-5} \cdot 5 = \frac{-100}{(5p - 3)^5}$.
- f** $G = n^{3,3} - 4n^{0,3} + 2^{1,3n}$ geeft $\frac{dG}{dn} = 3,3n^{2,3} - 1,2n^{-0,7} + 2^{1,3n} \cdot \ln(2) \cdot 1,3 = 3,3n^{2,3} - 1,2n^{-0,7} + 1,3 \cdot \ln(2) \cdot 2^{1,3n}$.

Bladzijde 95

- 2 a** $R = 5q^{0,52} - q^{1,12}$ geeft $\frac{dR}{dq} = 2,6q^{-0,48} - 1,12q^{0,12}$.
- $q = 2$ geeft $\frac{dR}{dq} = 2,6 \cdot 2^{-0,48} - 1,12 \cdot 2^{0,12} = 0,646\dots$
- De gevraagde snelheid is 0,65 euro per stuk.
- b** $\frac{dR}{dq} = 0$ geeft $2,6q^{-0,48} - 1,12q^{0,12} = 0$.
- Voer in $y_1 = 2,6x^{-0,48} - 1,12x^{0,12}$.
- De optie nulpunt geeft $x = 4,06\dots$
- $q = 4,06\dots$ geeft $R \approx 5,558$, dus de maximale opbrengst is ongeveer 5560 euro.
- 3 a** $W = 14 - 0,04t - \sqrt{225 - 0,86t} = 14 - 0,04t - (225 - 0,86t)^{0,5}$ geeft
- $$\frac{dW}{dt} = -0,04 - 0,5(225 - 0,86t)^{-0,5} \cdot -0,86 = -0,04 + \frac{0,43}{(225 - 0,86t)^{0,5}} = -0,04 + \frac{0,43}{\sqrt{225 - 0,86t}}$$
- Voer in $y_1 = -0,04 + \frac{0,43}{\sqrt{225 - 0,86x}}$.
- De optie nulpunt geeft $x \approx 127$.
- De grondwaterstand is minimaal voor $t = 127$.
- $t = 127$ geeft $W \approx -1,84$, dus de minimale grondwaterstand is -1,84 m.
- b** Bij 15 juni hoort $t = 14$.
- $$t = 14 \text{ geeft } \frac{dW}{dt} = -0,04 + \frac{0,43}{\sqrt{225 - 0,86 \cdot 14}} \approx -0,011.$$
- De gevraagde snelheid is 0,011 meter per dag.
- c** $t = 0$ geeft $W = -1$.
- Voer in $y_1 = 14 - 0,04x - \sqrt{225 - 0,86x}$ en $y_2 = -1$.
- De optie snijpunt geeft $x = 212,5$.
- Het duurde 213 dagen.

14.1 Optimaliseren

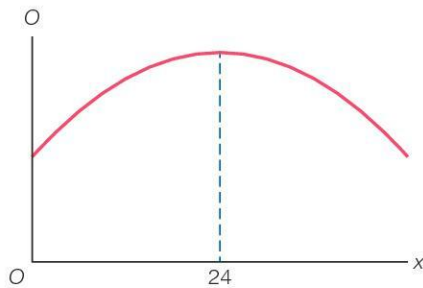
Bladzijde 96

1 a $\left. \begin{array}{l} \text{lengte omheining} = x + x + 10 + y + y + 6 = 2x + 2y + 16 \\ \text{lengte omheining} = 120 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x + 2y + 16 = 120 \\ 2y = 104 - 2x \\ y = 52 - x \end{array}$

b $\left. \begin{array}{l} O = \text{lengte} \times \text{breedte} = (x + 10)(y + 6) \\ y = 52 - x \end{array} \right\} \begin{array}{l} O = (x + 10)(58 - x) \\ O = 58x - x^2 + 580 - 10x \\ O = -x^2 + 48x + 580 \end{array}$

c $O = -x^2 + 48x + 580$ geeft $\frac{dO}{dx} = -2x + 48$.

$$\begin{aligned} \frac{dO}{dx} = 0 & \text{ geeft } -2x + 48 = 0 \\ -2x & = -48 \\ x & = 24 \end{aligned}$$



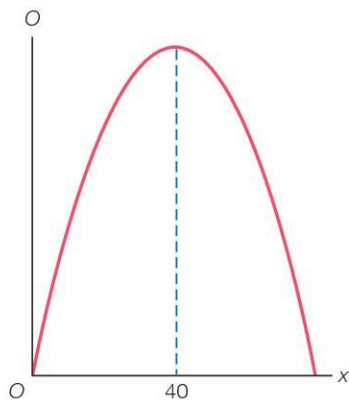
Uit de schets blijkt dat de oppervlakte maximaal is voor $x = 24$.

d De maximale oppervlakte is $O_{\max} = -24^2 + 48 \cdot 24 + 580 = 1156 \text{ m}^2$.

Bladzijde 97

2 $O = -4,8x^2 + 384x$ geeft $\frac{dO}{dx} = -9,6x + 384$.

$$\begin{aligned} \frac{dO}{dx} = 0 & \text{ geeft } -9,6x + 384 = 0 \\ -9,6x & = -384 \\ x & = 40 \end{aligned}$$



Uit de schets blijkt dat de oppervlakte maximaal is voor $x = 40$.

Dus $AD = 2x = 80 \text{ m}$ en $AB = 2y = 2(-1,2 \cdot 40 + 96) = 96 \text{ m}$.

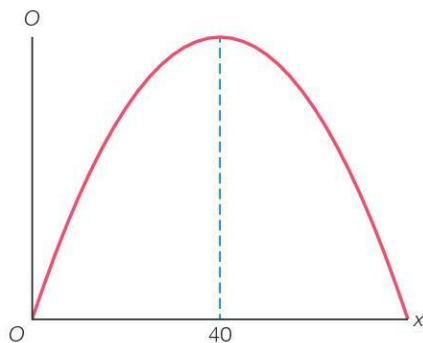
3 a $\text{lengte omheining} = 2x - 10 + 2y = 2x + 2y - 10$
 lengte omheining = 150 meter (gegeven)
 Dus $2x + 2y - 10 = 150$.

b $2x + 2y - 10 = 150$
 $2y = -2x + 160$
 $y = -x + 80$

c $y = -x + 80$ invullen in $O = x \cdot y$ geeft $O = x \cdot (-x + 80) = -x^2 + 80x$.

d $O = -x^2 + 80x$ geeft $\frac{dO}{dx} = -2x + 80$.

$$\begin{aligned}\frac{dO}{dx} = 0 &\text{ geeft } -2x + 80 = 0 \\ -2x &= -80 \\ x &= 40\end{aligned}$$



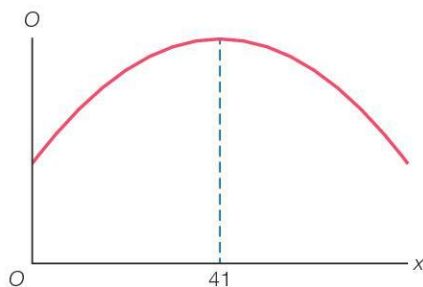
Uit de schets volgt dat de oppervlakte maximaal is voor $x = 40$.

$x = 40$ geeft $y = -40 + 80 = 40$, dus de oppervlakte is maximaal als het weiland 40 bij 40 meter is.

4 a $\left. \begin{array}{l} \text{lengte omheining} = x + x + 14 + y + y + 6 = 2x + 2y + 20 \\ \text{lengte omheining} = 200 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x + 2y + 20 = 200 \\ 2x + 2y = 180 \\ x + y = 90 \\ y = -x + 90 \end{array}$

b $\left. \begin{array}{l} O = \text{lengte} \times \text{breedte} = (x + 14)(y + 6) \\ y = -x + 90 \end{array} \right\} \begin{array}{l} O = (x + 14)(-x + 96) \\ O = -x^2 + 96x - 14x + 1344 \\ O = -x^2 + 82x + 1344 \end{array}$

c $O = -x^2 + 82x + 1344$ geeft $\frac{dO}{dx} = -2x + 82$
 $\frac{dO}{dx} = 0$ geeft $-2x + 82 = 0$
 $-2x = -82$
 $x = 41$



Uit de schets blijkt dat de oppervlakte maximaal is voor $x = 41$.

Dus $AB = 41 + 14 = 55$ m.

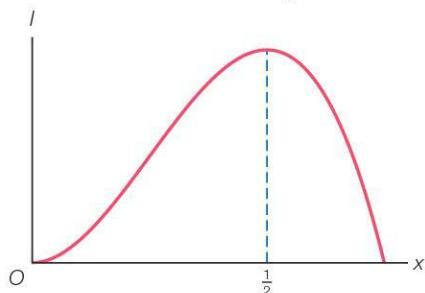
$x = 41$ geeft $y = -41 + 90 = 49$, dus $AD = 49 + 6 = 55$ m.

5 a $\left. \begin{array}{l} \text{lengte ribben} = 4 \cdot 2x + 4 \cdot x + 4 \cdot h = 12x + 4h \\ \text{lengte ribben} = 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 12x + 4h = 9 \\ 4h = 9 - 12x \\ h = 2\frac{1}{4} - 3x \end{array}$

b $\left. \begin{array}{l} I = 2x \cdot x \cdot h \\ h = 2\frac{1}{4} - 3x \end{array} \right\} \begin{array}{l} I = 2x^2(2\frac{1}{4} - 3x) \\ I = 4\frac{1}{2}x^2 - 6x^3 \end{array}$

c $I = 4\frac{1}{2}x^2 - 6x^3$ geeft $\frac{dI}{dx} = 9x - 18x^2$

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dx} = 0 &\text{ geeft } 9x - 18x^2 = 0 \\ &x(9 - 18x) = 0 \\ &x = 0 \text{ of } 9 - 18x = 0 \\ &x = 0 \text{ of } -18x = -9 \\ &x = 0 \text{ of } x = \frac{1}{2}\end{aligned}$$



Uit de schets blijkt dat de inhoud maximaal is voor $x = \frac{1}{2}$.

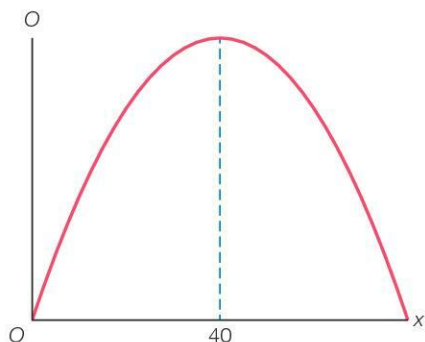
Bladzijde 98

- 6 a De variabelen x en y spelen een rol.
 b $O = y \cdot (x + 6)$
 c $\left. \begin{aligned} \text{lengte omheining} &= x + x + 6 + y = 2x + y + 5 \\ \text{lengte omheining} &= 200 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2x + y + 6 &= 200 \\ y &= -2x + 194 \end{aligned}$
 d $y = -2x + 194$ invullen in $O = y \cdot (x + 6)$ geeft $O = (-2x + 194)(x + 6)$
 $O = -2x^2 - 12x + 194x + 1164$
 $O = -2x^2 + 182x + 1164$

Dus $a = -2$, $b = 182$ en $c = 1164$.

Bladzijde 100

- 7 a $\left. \begin{aligned} \text{lengte hekwerk} &= 4 \cdot 3x + 2 \cdot 3y + 2y = 12x + 6y + 2y = 12x + 8y \\ \text{lengte hekwerk} &= 960 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 12x + 8y &= 960 \\ 8y &= -12x + 960 \\ y &= -1\frac{1}{2}x + 120 \end{aligned}$
 $O = 3y \cdot 3x = 9xy \left\{ \begin{aligned} O &= 9x(-1\frac{1}{2}x + 120) \\ y &= -1\frac{1}{2}x + 120 \end{aligned} \right. \int O = -13\frac{1}{2}x^2 + 1080x$
 b $O = -13\frac{1}{2}x^2 + 1080x$ geeft $\frac{dO}{dx} = -27x + 1080$.
 $\frac{dO}{dx} = 0$ geeft $-27x + 1080 = 0$
 $-27x = -1080$
 $x = 40$



Uit de schets blijkt dat de oppervlakte maximaal is voor $x = 40$.

De maximale oppervlakte is $O_{\max} = -13\frac{1}{2} \cdot 40^2 + 1080 \cdot 40 = 21\,600 \text{ m}^2$.

$x = 40$ geeft $y = -1\frac{1}{2} \cdot 40 + 120 = 60$.

De lengte is $3 \cdot 60 = 180 \text{ m}$ en de breedte is $3 \cdot 40 = 120 \text{ m}$.

- 8 a** De afmetingen van de bodem zijn dan $20 - 2 \cdot 3 = 14$ cm bij $30 - 2 \cdot 3 = 24$ cm en de hoogte is 3 cm.
De inhoud is $14 \cdot 24 \cdot 3 = 1008 \text{ cm}^3$.

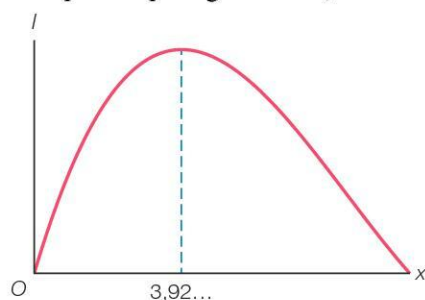
b $I = (20 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x$
 $I = (600 - 40x - 60x + 4x^2) \cdot x$
 $I = (600 - 100x + 4x^2) \cdot x$
 $I = 4x^3 - 100x^2 + 600x$

$$\frac{dI}{dx} = 12x^2 - 200x + 600$$

$$\frac{dI}{dx} = 0 \text{ geeft } 12x^2 - 200x + 600 = 0.$$

Voer in $y_1 = 12x^2 - 200x + 600$ met x tussen 0 en 10.

De optie nulpunt geeft $x = 3,92\dots$



De inhoud is maximaal voor $x = 3,9$.

- 9 a** Stel de breedte is y meter.
 $K = (2y + x) \cdot 70 + x \cdot 140 = 210x + 140y$
 $O = x \cdot y$

$O = 600$ geeft $x \cdot y = 600$.

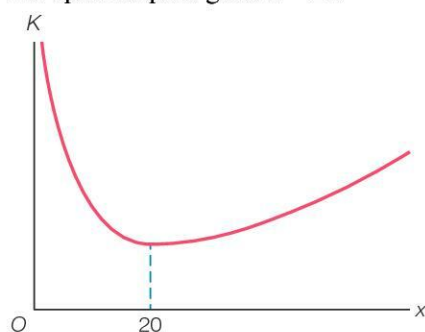
$$\left. \begin{array}{l} K = 210x + 140y \\ xy = 600, \text{ dus } y = \frac{600}{x} \end{array} \right\} K = 210x + 140 \cdot \frac{600}{x} = 210x + \frac{84\,000}{x}.$$

- c** $K = 210x + 84\,000x^{-1}$ geeft $\frac{dK}{dx} = 210 - 84\,000x^{-2}$.

Los op $\frac{dK}{dx} = 0$.

Voer in $y_1 = 210 - 84\,000x^{-2}$.

De optie nulpunt geeft $x = 20$.



Uit de schets blijkt dat de kosten minimaal zijn voor $x = 20$.

$$x = 20 \text{ geeft } y = \frac{600}{20} = 30.$$

De kosten zijn minimaal als de afmetingen van het parkeerterrein 20 bij 30 meter zijn.

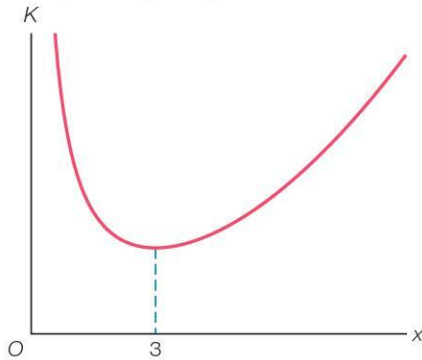
10 a K = kosten bodem + kosten zijantenStel de hoogte is h dm.

$$\begin{aligned}
 K &= x \cdot 2x \cdot 0,4 + (2 \cdot xh + 2 \cdot 2xh) \cdot 0,2 = 0,8x^2 + 1,2xh \\
 I &= x \cdot 2x \cdot h = 2x^2h \\
 I &= 72
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} K &= x \cdot 2x \cdot 0,4 + (2 \cdot xh + 2 \cdot 2xh) \cdot 0,2 = 0,8x^2 + 1,2xh \\ I &= x \cdot 2x \cdot h = 2x^2h \\ I &= 72 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} 2x^2h &= 72, \text{ dus } h = \frac{72}{2x^2} = \frac{36}{x^2} \\ K &= 0,8x^2 + 1,2x \cdot \frac{36}{x^2} \\ K &= 0,8x^2 + \frac{43,2}{x} \\ K &= 0,8x^2 + \frac{216}{5x} \end{aligned}$$

$$\mathbf{b} \quad K = 0,8x^2 + \frac{216}{5x} = 0,8x^2 + \frac{43,2}{x} = 0,8x^2 + 43,2x^{-1} \text{ geeft } \frac{dK}{dx} = 1,6x - 43,2x^{-2}$$

$$\text{Los op } \frac{dK}{dx} = 0.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 1,6x - 43,2x^{-2}.$$

De optie nulpunt geeft $x = 3$.Uit de schets blijkt dat de kosten minimaal zijn voor $x = 3$.

$$x = 3 \text{ geeft } h = \frac{36}{3^2} = 4.$$

Dus K is minimaal bij de afmetingen 3 bij 6 bij 4 dm.

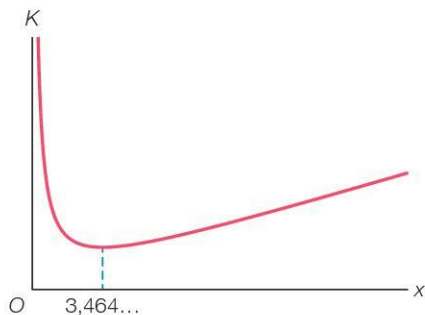
$$\begin{aligned}
 \mathbf{11} \quad \text{oppervlakte} &= 2x^2 + 2xy \\
 \text{oppervlakte} &= 72
 \end{aligned}
 \left\{ \begin{aligned} 2x^2 + 2xy &= 72 \\ x^2 + xy &= 36 \\ xy &= 36 - x^2 \\ y &= \frac{36}{x} - x \end{aligned} \right.$$

$$K = y \cdot 50 + 2x \cdot 100 = 200x + 50y = 200x + 50 \cdot \left(\frac{36}{x} - x \right) = 200x + \frac{1800}{x} - 50x = 150x + \frac{1800}{x}$$

$$K = 150x + \frac{1800}{x} = 150x + 1800x^{-1} \text{ geeft } \frac{dK}{dx} = 150 - 1800x^{-2}.$$

$$\text{Los op } \frac{dK}{dx} = 0.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 150 - 1800x^{-2}.$$

De optie nulpunt geeft $x = 3,464\dots$ Uit de schets blijkt dat de kosten minimaal zijn voor $x = 3,464\dots$

$$x = 3,464\dots \text{ geeft } y = \frac{36}{3,464\dots} - 3,464\dots \approx 6,93.$$

De afmetingen zijn 3,46 bij 3,46 bij 6,93 meter.

12

a $K_{\text{bodem}} = 24x^2$

$$K_{\text{zijkanten}} = 4 \cdot xy \cdot 18 = 72xy$$

$$K_{\text{bodem}} + K_{\text{zijkanten}} = 288$$

$$24x^2 + 72xy = 288$$

$$72xy = 288 - 24x^2$$

$$y = \frac{288 - 24x^2}{72x} = \frac{12 - x^2}{3x}$$

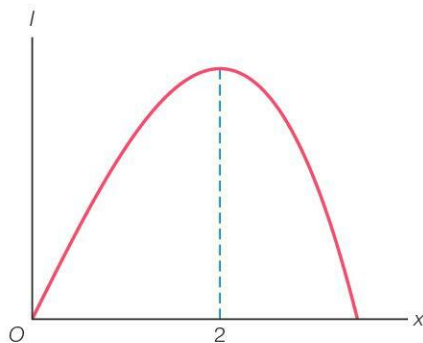
$$I = x \cdot x \cdot y = x^2 \cdot \frac{12 - x^2}{3x} = \frac{x^2(12 - x^2)}{3x} = \frac{12x^2 - x^4}{3x} = 4x - \frac{1}{3}x^3$$

b $I = 4x - \frac{1}{3}x^3$ geeft $\frac{dI}{dx} = 4 - x^2$.

$$\frac{dI}{dx} = 0 \text{ geeft } 4 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2$$



Uit de schets blijkt dat I maximaal is voor $x = 2$.

$$x = 2 \text{ geeft } y = \frac{12 - 2^2}{3 \cdot 2} = 1\frac{1}{3} \text{ en } I_{\text{max}} = 4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 = 5\frac{1}{3}.$$

De afmetingen zijn 2 bij 2 bij $1\frac{1}{3}$ m en de maximale inhoud is $5\frac{1}{3} \text{ m}^3$.

c Er geldt dan $24x^2 + 72xy = a$

$$72xy = a - 24x^2$$

$$y = \frac{a - 24x^2}{72x}$$

$$I = x^2y = x^2 \cdot \frac{a - 24x^2}{72x} = \frac{x^2(a - 24x^2)}{72x} = \frac{ax^2 - 24x^4}{72x} = \frac{1}{72}ax - \frac{1}{3}x^3$$

d $I = \frac{1}{72}ax - \frac{1}{3}x^3$ geeft $\frac{dI}{dx} = \frac{1}{72}a - x^2$.

$$\frac{dI}{dx} = 0 \text{ geeft } \frac{1}{72}a - x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{72}a$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{72}a}$$

Dus de inhoud is maximaal voor $x = \sqrt{\frac{1}{72}a}$.

Bladzijde 102

13 $FP = 2000 - x$ en $EP = \sqrt{x^2 + 40\,000}$

Voor de aanlegkosten K in euro's geldt

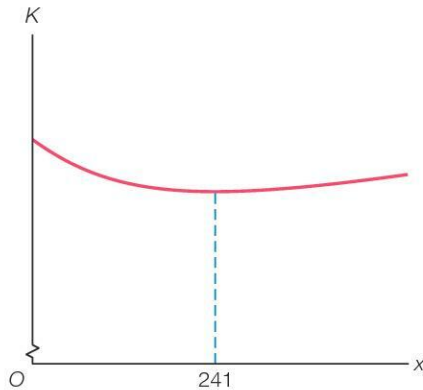
$$K = 65\sqrt{x^2 + 40\,000} + 50(2000 - x) = 65\sqrt{x^2 + 40\,000} - 50x + 100\,000.$$

$$K = 65(x^2 + 40\,000)^{0,5} - 50x + 100\,000 \text{ geeft } \frac{dK}{dx} = 32,5(x^2 + 40\,000)^{-0,5} \cdot 2x - 50 = \frac{65x}{\sqrt{x^2 + 40\,000}} - 50.$$

Los op $\frac{dK}{dx} = 0$.

Voer in $y_1 = \frac{65x}{\sqrt{x^2 + 40\,000}} - 50$.

De optie nulpunt geeft $x \approx 241$.



Uit de schets blijkt dat de kosten minimaal zijn voor $x = 241$.

Dus $AP = 241$ meter.

14.2 Regels voor de afgeleide**Bladzijde 104**

14 a

x	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	5	8
y_2	5	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$

b De afgeleide van $y = \ln(x)$ is $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

Bladzijde 105

15 $\frac{16,6}{(4t+5) \cdot \ln(10)} = \frac{\left(\frac{16,6}{\ln(10)}\right)}{4t+5} \approx \frac{7,21}{4t+5}$
Dus $a = 7,21$.

16 a $y = \ln(3x - 2)$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x-2} \cdot 3 = \frac{3}{3x-2}$.

b $y = x^2 - 3 \cdot \ln(1,5x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2x - 3 \cdot \frac{1}{1,5x} \cdot 1,5 = 2x - \frac{3}{x}$.

c $y = 5 \cdot {}^2\log(0,2x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 5 \cdot \frac{1}{0,2x \cdot \ln(2)} \cdot 0,2 = \frac{5}{x \cdot \ln(2)}$.

d $y = 3x - \log(6x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3 - \frac{1}{6x \cdot \ln(10)} \cdot 6 = 3 - \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$.

17 a $y = \log(x^2 + x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^2 + x) \cdot \ln(10)} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x) \cdot \ln(10)}$.

b $y = 2 - \ln(4x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{4x} \cdot 4 = -\frac{1}{x}$.

c $y = 6 \cdot {}^5\log(x^2)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 6 \cdot \frac{1}{x^2 \cdot \ln(5)} \cdot 2x = \frac{12x}{x^2 \cdot \ln(5)} = \frac{12}{x \cdot \ln(5)}$.

d $y = 3x - 5 \cdot \ln(x^2 + 6)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3 - 5 \cdot \frac{1}{x^2 + 6} \cdot 2x = 3 - \frac{10x}{x^2 + 6}$.

18 a $N = 10t + 3 \cdot \log(5t)$ geeft $\frac{dN}{dt} = 10 + 3 \cdot \frac{1}{5t \cdot \ln(10)} \cdot 5 = 10 + \frac{3}{t \cdot \ln(10)}$.

b $K = \ln(q^2 + q)$ geeft $\frac{dK}{dq} = \frac{1}{q^2 + q} \cdot (2q + 1) = \frac{2q + 1}{q^2 + q}$.

c $P = 3a^2 - {}^{0,5}\log(1,4a)$ geeft $\frac{dP}{da} = 6a - \frac{1}{1,4a \cdot \ln(0,5)} \cdot 1,4 = 6a - \frac{1}{a \cdot \ln(0,5)}$.

d $B = 5 \cdot \ln(3 - n) + 3^n$ geeft $\frac{dB}{dn} = 5 \cdot \frac{1}{3 - n} \cdot -1 + 3^n \cdot \ln(3) = \frac{-5}{3 - n} + 3^n \cdot \ln(3)$.

19 a $N = 1500 \cdot \log(2t + 4) - 50t$ geeft

$$\frac{dN}{dt} = 1500 \cdot \frac{1}{(2t + 4) \cdot \ln(10)} \cdot 2 - 50 = \frac{3000}{2(t + 2) \cdot \ln(10)} - 50 = \frac{1500}{(t + 2) \cdot \ln(10)} - 50.$$

Dus $a = \frac{1500}{\ln(10)} \approx 651$.

b $\frac{dN}{dt} = 0$ geeft $\frac{651}{t + 2} - 50 = 0$.

Voer in $y_1 = \frac{651}{x + 2} - 50$.

De optie nulpunt geeft $x = 11,02$.

Na ongeveer 11 dagen is N maximaal.

c Los op $\frac{dN}{dt} = 100$, dus $\frac{651}{t + 2} - 50 = 100$.

Voer in $y_2 = 100$.

De optie snijpunt geeft $x = 2,34$.

Dus voor $t = 2,3$.

d Voer in $y_1 = 1500 \cdot \log(2x + 4) - 50x$.

De optie maximum geeft $x = 11,02...$ en $y = 1572,4...$

$$0,9 \cdot 1572,4... = 1415,2...$$

Voer in $y_2 = 1415,2...$

De optie snijpunt geeft $x = 3,93...$ en $x = 22,28...$

Dus $22,28... - 3,93... \approx 18$ dagen.

20 a $p'(x) = 9x^2 - 14x$

b $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$.

$g(x) = 3x - 7$ geeft $g'(x) = 3$.

$f'(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot 3 = 6x$

Dus $p'(x) \neq f'(x) \cdot g'(x)$.

c $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot (3x - 7) + x^2 \cdot 3$
 $= 6x^2 - 14x + 3x^2$
 $= 9x^2 - 14x = p'(x)$

Bladzijde 106

21 a $y = 2x \cdot \ln(x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot \ln(x) + 2$.

b $y = x^3 \cdot \log(x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \cdot \log(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln(10)} = 3x^2 \cdot \log(x) + \frac{x^2}{\ln(10)}$.

c $y = x\sqrt{x+1} = x(x+1)^{0,5}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot (x+1)^{0,5} + x \cdot 0,5(x+1)^{-0,5} = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$.

d $y = 3^x \cdot {}^2\log(x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3^x \cdot \ln(3) \cdot {}^2\log(x) + 3^x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln(2)} = \ln(3) \cdot 3^x \cdot {}^2\log(x) + \frac{3^x}{x \cdot \ln(2)}$.

22 a $y = 2x\sqrt{3x-1} = 2x(3x-1)^{0,5}$ geeft

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot (3x-1)^{0,5} + 2x \cdot 0,5(3x-1)^{-0,5} \cdot 3 = 2\sqrt{3x-1} + \frac{3x}{\sqrt{3x-1}}.$$

b $y = 3x^2 \cdot e^{3x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 6x \cdot e^{3x} + 3x^2 \cdot e^{3x} \cdot 3 = 6x \cdot e^{3x} + 9x^2 \cdot e^{3x}$.

c $y = (1+2x) \cdot 2^{3x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 2^{3x} + (1+2x) \cdot 2^{3x} \cdot \ln(2) \cdot 3 = 2 \cdot 2^{3x} + 3 \cdot \ln(2) \cdot (1+2x) \cdot 2^{3x}$.

d $y = 5x \cdot {}^3\log(x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 5 \cdot {}^3\log(x) + 5x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln(3)} = 5 \cdot {}^3\log(x) + \frac{5}{\ln(3)}$.

23 a $N = t \cdot \ln(3t)$ geeft $\frac{dN}{dt} = 1 \cdot \ln(3t) + t \cdot \frac{1}{3t} \cdot 3 = \ln(3t) + 1$.

b $B = 2q(1+2^q)$ geeft $\frac{dB}{dq} = 2(1+2^q) + 2q \cdot 2^q \cdot \ln(2) = 2(1+2^q) + 2 \cdot \ln(2) \cdot q \cdot 2^q$.

c $R = q\sqrt{3q^2+5} - 6q = q(3q^2+5)^{0,5} - 6q$ geeft $\frac{dR}{dq} = 1 \cdot (3q^2+5)^{0,5} + q \cdot 0,5(3q^2+5)^{-0,5} \cdot 6q - 6 = \sqrt{3q^2+5} + \frac{3q^2}{\sqrt{3q^2+5}} - 6$.

d $L = 5 \cdot \log(x) + 5x \cdot \ln(x)$ geeft $\frac{dL}{dx} = 5 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln(10)} + 5 \cdot \ln(x) + 5x \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x \cdot \ln(10)} + 5 \cdot \ln(x) + 5$.

Bladzijde 107

24 a $t(x) = 3x + 2$ geeft $t'(x) = 3$, $n(x) = x + 2$ geeft $n'(x) = 1$, dus $\frac{t'(x)}{n'(x)} = \frac{3}{1} = 3$.

b De grafiek van $q(x) = \frac{3x+2}{x+2}$ is een hyperbool en bij een hyperbool is niet overal de helling gelijk aan 3.

Bladzijde 108

25 a $y = \frac{x-2}{x+5}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+5) \cdot 1 - (x-2) \cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{x+5-x+2}{(x+5)^2} = \frac{7}{(x+5)^2}$.

b $y = \frac{x^3}{2x^2+1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^2+1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{6x^4+3x^2-4x^4}{(2x^2+1)^2} = \frac{2x^4+3x^2}{(2x^2+1)^2}$.

c $y = \frac{x-2}{3-x^2} + x^2$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(3-x^2) \cdot 1 - (x-2) \cdot (-2x)}{(3-x^2)^2} + 2x = \frac{3-x^2+2x^2-4x}{(3-x^2)^2} + 2x = \frac{x^2-4x+3}{(3-x^2)^2} + 2x$.

26 a $y = \frac{\ln(x)}{x^2+x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+x) \cdot \frac{1}{x} - \ln(x) \cdot (2x+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{x+1-(2x+1) \cdot \ln(x)}{(x^2+x)^2}$.

b $y = \frac{100}{2^{2x+5}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{2^{2x+5} \cdot 0 - 100 \cdot 2^{2x+5} \cdot \ln(2) \cdot 2}{(2^{2x+5})^2} = \frac{-200 \cdot \ln(2) \cdot 2^{2x+5}}{(2^{2x+5})^2} = \frac{-200 \cdot \ln(2)}{2^{2x+5}}$.

Alternatieve uitwerking

$$y = \frac{100}{2^{2x+5}} = 100 \cdot 2^{-2x-5} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 100 \cdot 2^{-2x-5} \cdot \ln(2) \cdot -2 = \frac{-200 \cdot \ln(2)}{2^{2x+5}}.$$

c $y = \frac{e^{3x}}{5x-1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(5x-1) \cdot e^{3x} \cdot 3 - e^{3x} \cdot 5}{(5x-1)^2} = \frac{3(5x-1) \cdot e^{3x} - 5 \cdot e^{3x}}{(5x-1)^2}$.

$$27 \quad a \quad R = \frac{q^2}{q^2 + 2} \text{ geeft } \frac{dR}{dq} = \frac{(q^2 + 2) \cdot 2q - q^2 \cdot 2q}{(q^2 + 2)^2} = \frac{2q^3 + 4q - 2q^3}{(q^2 + 2)^2} = \frac{4q}{(q^2 + 2)^2}.$$

$$b \quad W = \frac{p}{1 + \ln(p)} \text{ geeft } \frac{dW}{dp} = \frac{(1 + \ln(p)) \cdot 1 - p \cdot \frac{1}{p}}{(1 + \ln(p))^2} = \frac{1 + \ln(p) - 1}{(1 + \ln(p))^2} = \frac{\ln(p)}{(1 + \ln(p))^2}.$$

$$c \quad F = t^2 \cdot \ln(4t - 1) \text{ geeft } \frac{dF}{dt} = 2t \cdot \ln(4t - 1) + t^2 \cdot \frac{1}{4t - 1} \cdot 4 = 2t \cdot \ln(4t - 1) + \frac{4t^2}{4t - 1}.$$

$$d \quad N(t) = \frac{200}{1 + 40e^{-0,2t}} \text{ geeft } N'(t) = \frac{(1 + 40e^{-0,2t}) \cdot 0 - 200 \cdot 40e^{-0,2t} \cdot -0,2}{(1 + 40e^{-0,2t})^2} = \frac{1600e^{-0,2t}}{(1 + 40e^{-0,2t})^2}.$$

$$e \quad B(n) = \frac{5}{4 - 2^{3n}} \text{ geeft } B'(n) = \frac{(4 - 2^{3n}) \cdot 0 - 5 \cdot -2^{3n} \cdot \ln(2) \cdot 3}{(4 - 2^{3n})^2} = \frac{15 \cdot \ln(2) \cdot 2^{3n}}{(4 - 2^{3n})^2}$$

$$f \quad G(p) = (4p + 1)\sqrt{p^2 + 1} = (4p + 1)(p^2 + 1)^{0,5} \text{ geeft}$$

$$G'(p) = 4 \cdot (p^2 + 1)^{0,5} + (4p + 1) \cdot 0,5(p^2 + 1)^{-0,5} \cdot 2p = 4\sqrt{p^2 + 1} + \frac{p(4p + 1)}{\sqrt{p^2 + 1}} = 4\sqrt{p^2 + 1} + \frac{4p^2 + p}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

$$28 \quad a \quad P(t) = \frac{100(t^2 - t + 1)}{t^2 + 1} \text{ geeft}$$

$$P'(t) = \frac{(t^2 + 1) \cdot 100(2t - 1) - 100(t^2 - t + 1) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{200t^3 - 100t^2 + 200t - 100 - 200t^3 + 200t^2 - 200t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{100t^2 - 100}{(t^2 + 1)^2}$$

$$P'(1,5) = \frac{100 \cdot 1,5^2 - 100}{(1,5^2 + 1)^2} \approx 11,8$$

Het zuurstofgehalte in de vijver neemt na anderhalve week toe met 11,8% per week.

$$b \quad P'(t) = 0 \text{ geeft } 100t^2 - 100 = 0$$

$$100t^2 = 100$$

$$t^2 = 1$$

$$t = 1$$

Dus na 1 week, oftewel 7 dagen, is het zuurstofgehalte minimaal.

$$c \quad \text{Los op } \frac{100(t^2 - t + 1)}{t^2 + 1} = 85.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{100(x^2 - x + 1)}{x^2 + 1} \text{ en } y_2 = 85.$$

De optie snijpunt geeft $x = 15$.

Dus na $15 \cdot 7 = 105$ dagen is het zuurstofniveau voor 85% hersteld.

$$d \quad \text{Los op } \frac{100t^2 - 100}{(t^2 + 1)^2} > 10.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{100x^2 - 100}{(x^2 + 1)^2} \text{ en } y_2 = 10.$$

De optie snijpunt geeft $x = 1,328...$ en $x = 2,497...$

$2,497... - 1,328... = 1,169...$ weken ≈ 8 dagen

Dus de snelheid is ongeveer 8 dagen meer dan 10% per week.

$$e \quad P'(7) = \frac{100 \cdot 7^2 - 100}{(7^2 + 1)^2} = 1,92$$

$$P(7) = \frac{100(7^2 - 7 + 1)}{7^2 + 1} = 86$$

Er moet nog 14% bij met een snelheid van 1,92% per week. Het duurt dus nog

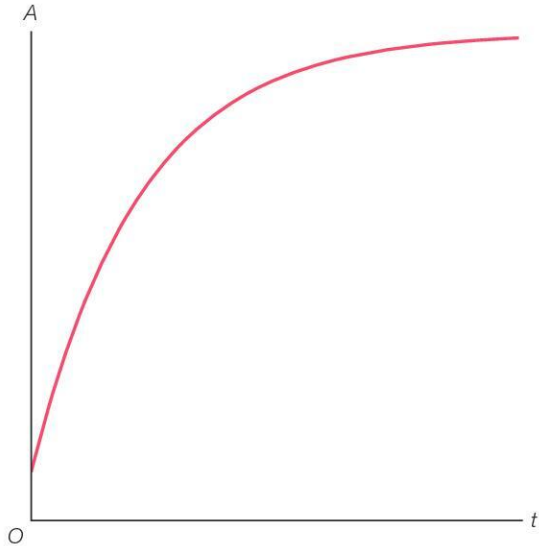
$\frac{14}{1,92} = 7,291$ weken ≈ 51 dagen tot het oorspronkelijke zuurstofniveau weer bereikt wordt.

In totaal duurt het dus $49 + 51 = 100$ dagen vanaf het dumpen van het afval.

14.3 Redeneren met formules

Bladzijde 110

- 29** **a** Als t heel groot wordt, dan nadert $90 \cdot 0,8^t$ tot 0, dus dan wordt $A = 100 - 90 \cdot 0,8^t \approx 100 - 0 = 100$.
- b** Als t toeneemt, dan neemt $0,8^t$ af, dus dan neemt $90 \cdot 0,8^t$ af, dus dan neemt $100 - 90 \cdot 0,8^t$ toe.
- c** Als t toeneemt, dan neemt $A = 100 - 90 \cdot 0,8^t$ toe, dus de grafiek van A is stijgend.
- d**



De grafiek is inderdaad stijgend.

Bladzijde 112

- 30** **a** Als t toeneemt, dan neemt $0,5^t$ af, dus ook $32 \cdot 0,5^t$ neemt af, dus ook $1 + 32 \cdot 0,5^t$ neemt af, dus $\frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t}$ neemt toe.
Dus de zonnebloem wordt voortdurend hoger.
- b** $t = 3$ geeft $h = \frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^3} = 52$.
Dus 52 cm hoog.
- c** Als t heel groot wordt, nadert $0,5^t$ tot 0. Dan wordt $32 \cdot 0,5^t \approx 0$ en $1 + 32 \cdot 0,5^t \approx 1$.
Dus dan wordt $\frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t} \approx \frac{260}{1} = 260$, dus de grenswaarde is 260 cm.
- d** Los op $\frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t} = 250$.
Voer in $y_1 = \frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^x}$ en $y_2 = 250$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 9,64$.
Dus vanaf $t = 9,7$.
- 31** **a** Als t toeneemt, dan neemt $0,7^t$ af, dus $1 - 0,7^t$ neemt toe, dus ook $1200(1 - 0,7^t)$ neemt toe.
De grafiek van N is dus stijgend.
- b** Als t heel groot wordt, dan nadert $0,7^t$ tot 0. Dan wordt $1 - 0,7^t \approx 1$. Dus dan wordt $1200(1 - 0,7^t) \approx 1200 \cdot 1 = 1200$, dus het verzadigingsniveau is 1200 leerlingen.
De lijn is $N = 1200$.
De praktische betekenis van het verzadigingsniveau is dat er 1200 leerlingen op de school zitten.
- c** Los op $1200(1 - 0,7^t) = 950$.
Voer in $y_1 = 1200(1 - 0,7^x)$ en $y_2 = 950$.
De optie snijpunt geeft $x = 4,398\dots$
Dus na 4 uur en $0,398\dots \times 60 \approx 24$ minuten, dat is om 13:24 uur.

- 32 a** Omdat $2^{-0,23t} = (2^{-0,23})^t \approx 0,85^t$ geldt: als t heel groot wordt, dan nadert $2^{-0,23t}$ tot 0. Dan wordt $13 \cdot 2^{-0,23t} \approx 0$ en $20 + 13 \cdot 2^{-0,23t} \approx 20$. Dus dan wordt $\frac{500}{20 + 13 \cdot 2^{-0,23t}} \approx \frac{500}{20} = 25$, dus het verzadigingsniveau is 25.
- b** Als t toeneemt, dan neemt ook e^t toe, dus ook $2,1 \cdot e^t$ neemt toe, dus ook $8 + 2,1 \cdot e^t$ neemt toe, dus $\frac{720}{8 + 2,1 \cdot e^t}$ neemt af. Dus de grafiek van N is dalend.
- c** Als t toeneemt, dan neemt $1,5^t$ toe, dus ook $1 + 1,5^t$ neemt toe, dus ook $8000(1 + 1,5^t)$ neemt toe. Dus de grafiek van N is stijgend.
- d** Als t heel groot wordt, dan nadert $0,8^t$ tot 0. Dan wordt $50 \cdot 0,8^t \approx 0$. Dus dan wordt $160 - 50 \cdot 0,8^t \approx 160 - 0 = 160$, dus de grenswaarde is 160.

- 33 a** De toename is $\frac{961 - 705}{705} \times 100\% \approx 36,3\%$.
- b** $g_{10 \text{ dagen}} = \frac{280}{63}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{280}{63}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 1,1609$. Het groeipercentage per dag is 16,1%.
- c** Op 23 april om 0:00 is $t = 22$, dat is 7 dagen na $t = 15$. Dit geeft $N = 63 \cdot 1,16^7 \approx 178$, dus 178 fruitvliegjes.
- d** Voor $t = 45$ is de telling 961 en geeft de formule $N = \frac{1035}{1 + 210 \cdot e^{-0,17 \cdot 45}} \approx 958$. De afwijking is $\frac{961 - 958}{961} \times 100\% \approx 0,3\%$.
- e** Omdat $e^{-0,175t} = (e^{-0,175})^t \approx 0,84^t$ geldt: als t heel groot wordt, dan nadert $e^{-0,175t}$ tot 0. Dan wordt $210 \cdot e^{-0,175t} \approx 0$ en $1 + 210 \cdot e^{-0,175t} \approx 1$. Dus dan wordt $\frac{1035}{1 + 210 \cdot e^{-0,175t}} \approx \frac{1035}{1} = 1035$, dus het verzadigingsniveau is 1035. Dat is in overeenstemming met de verwachting van de bioloog.

Bladzijde 114

- 34 a** Voor $t = 0,5$ geeft de formule $P = \frac{92}{2,39^{0,5}} + \frac{32}{1,04^{0,5}} + 10 \approx 100,9$. En het is niet mogelijk je meer dan 100% van de woorden te herinneren.
- b** De helft is 50 procent, dus los op $\frac{92}{2,39^t} + \frac{32}{1,04^t} + 10 = 50$.
Voer in $y_1 = \frac{92}{2,39^x} + \frac{32}{1,04^x} + 10$ en $y_2 = 50$.
De optie snijpunt geeft $x = 2,445...$
Het duurt 2 minuten en $0,445... \times 60 \approx 27$ seconden.
- c** Als t heel groot wordt, nadert $\frac{92}{2,39^x}$ tot 0 en ook nadert $\frac{32}{1,04^x}$ tot 0. Dus dan wordt $\frac{92}{2,39^x} + \frac{32}{1,04^x} + 10 \approx 0 + 0 + 10 = 10$, dus de grenswaarde is 10. Dat betekent dat op den duur nog 10% van de woorden correct wordt herinnerd.
- d** $P = \frac{92}{2,39^t} + \frac{32}{1,04^t} + 10 = 92 \cdot 2,39^{-t} + 32 \cdot 1,04^{-t} + 10$
 $= 92 \cdot (2,39^{-1})^t + 32 \cdot (1,04^{-1})^t + 10 \approx 92 \cdot 0,418^t + 32 \cdot 0,962^t + 10$
Dus $a = 0,418$ en $b = 0,962$.

- 35 a** y neemt toe
b y neemt af
c y neemt af
d y neemt toe

36 a $y = 5x^{-3} = \frac{5}{x^3}$

Als x toeneemt, dan neemt x^3 toe, dus $\frac{5}{x^3}$ neemt af.

De grafiek van y is dalend.

- b** Als x heel groot wordt, dan wordt $3x$ heel groot en dan wordt $3x + 1$ heel groot, dus dan nadert $\frac{20}{3x+1}$ tot 0 en dan wordt $100 - \frac{20}{3x+1} \approx 100 - 0 = 100$.

Dus de grenswaarde is 100.

Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 heel groot en dan wordt $x^2 + 1$ heel groot, dus dan nadert $\frac{10}{x^2+1}$ tot 0 en dan wordt $\frac{10}{x^2+1} - 5 \approx 0 - 5 = -5$.

Dus de grenswaarde is -5 .

Als x heel groot wordt, dan nadert $0,8^x$ tot 0, dus dan is $50 \cdot 0,8^x \approx 0$.

Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot.

Als x heel groot wordt dan wordt van $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ de teller ongeveer nul en de noemer

heel groot, dus dan wordt $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}} \approx 0$.

De grenswaarde is 0.

37 a stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $\frac{100}{x}$ af, dus dan neemt $250 - \frac{100}{x}$ toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan nadert $\frac{100}{x}$ tot 0, dus dan wordt $250 - \frac{100}{x} \approx 250 - 0 = 250$.

Dus de grenswaarde is 250.

b stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $0,98^x$ af en $100 \cdot 0,98^x$ neemt af.

Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe en $x^2 + 1$ neemt toe.

Van $\frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2 + 1}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2 + 1}$ neemt af.

Dus de grafiek van y is dalend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan nadert $0,98^x$ tot 0, dus dan wordt $100 \cdot 0,98^x \approx 0$.

Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 heel groot, dus dan wordt $x^2 + 1$ heel groot.

Als x heel groot wordt, dan wordt van $\frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2 + 1}$ de teller ongeveer nul en de

noemer heel groot, dus dan nadert $\frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2 + 1}$ tot 0.

De grenswaarde is 0.

c stijgen of dalen

Als t toeneemt, dan neemt $0,75^t$ af, dus dan neemt $3 \cdot 0,75^t$ af en daarom neemt $2 - 3 \cdot 0,75^t$ toe.

Dus ook $1250(2 - 3 \cdot 0,75^t)$ neemt toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

grenswaarde

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,75^t$ tot 0, dus dan wordt $3 \cdot 0,75^t \approx 0$ en dan wordt $2 - 3 \cdot 0,75^t \approx 2 - 0 = 2$. Dus dan wordt $1250(2 - 3 \cdot 0,75^t) \approx 1250 \cdot 2 = 2500$.

De grenswaarde is 2500.

38 a stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe, dus dan neemt $\frac{12}{x^2}$ af en dan neemt $25 + \frac{12}{x^2}$ ook af.

Dus de grafiek van y is dalend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 heel groot, dus dan nadert $\frac{12}{x^2}$ tot 0 en dan wordt $25 + \frac{12}{x^2} \approx 25 + 0 = 25$.

De grenswaarde is 25.

b stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe, dus dan neemt $2 + \sqrt{x}$ toe en dan neemt $\frac{80}{2 + \sqrt{x}}$ dus af. Daarom neemt $40 - \frac{80}{2 + \sqrt{x}}$ toe.

De grafiek van y is stijgend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot, dus dan wordt $2 + \sqrt{x}$ heel groot en dan nadert $\frac{80}{2 + \sqrt{x}}$ tot 0. Dus dan wordt $40 - \frac{80}{2 + \sqrt{x}} \approx 40 - 0 = 40$.

De grenswaarde is 40.

c stijgen of dalen

Als t toeneemt, dan neemt $0,65^t$ af, dus dan neemt $333 \cdot 0,65^t$ af, dus ook

$250 + 333 \cdot 0,65^t$ neemt af. Daarom neemt $\frac{18000}{250 + 333 \cdot 0,65^t}$ toe.

De grafiek van N is stijgend.

grenswaarde

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,65^t$ tot 0, dus dan wordt $333 \cdot 0,65^t \approx 0$ en dan wordt $250 + 333 \cdot 0,65^t \approx 250 + 0 = 250$. Dan wordt $\frac{18000}{250 + 333 \cdot 0,65^t} \approx \frac{18000}{250} = 72$.

De grenswaarde is 72.

39 a Als x toeneemt, dan neemt $\frac{x}{22}$ toe, dus dan neemt $3 + \frac{x}{22}$ toe.

Daarom neemt $x\left(3 + \frac{x}{22}\right)$ ook toe.

De grafiek van A is stijgend.

b Als x toeneemt, dan neemt $x^{2,3}$ toe, dus dan neemt $x^{2,3} + 1$ toe.

Als x toeneemt, dan neemt $0,3^x$ af, dus dan neemt $20 \cdot 0,3^x$ af.

Van $\frac{x^{2,3} + 1}{20 \cdot 0,3^x}$ neemt de teller toe en de noemer af, dus $\frac{x^{2,3} + 1}{20 \cdot 0,3^x}$ neemt toe.

De grafiek van B is stijgend.

c Omdat $e^{2x} = (e^2)^x \approx 7,4^x$ geldt: als x toeneemt, dan neemt e^{2x} toe, dus dan neemt $e^{2x} + 1$ toe.

Omdat $e^{-x} = (e^{-1})^x \approx 0,4^x$ geldt: als x toeneemt, dan neemt e^{-x} af, dus dan neemt $1 + e^{-x}$ af.

Van $\frac{e^{2x} + 1}{1 + e^{-x}}$ neemt de teller toe en de noemer af, dus $\frac{e^{2x} + 1}{1 + e^{-x}}$ neemt toe.

De grafiek van C is stijgend.

40 a Als v toeneemt, dan neemt v^2 toe, dus dan neemt (bij gelijkblijvende f) ook $\frac{v^2}{25f}$ toe.

Dus als v toeneemt neemt L toe, oftewel bij een hogere snelheid hoort een langere remweg.

b Als f afneemt, dan neemt $25f$ af, dus dan neemt (bij gelijkblijvende v) $\frac{v^2}{25f}$ toe.

Dus als f afneemt, neemt L toe, oftewel bij minder grip hoort een langere remweg.

c $L = 38$ geeft $\frac{v^2}{25f} = 38$, dus $25f \cdot 38 = v^2$

$$f = \frac{v^2}{25 \cdot 38} = \frac{v^2}{950}$$

Dus $f = \frac{1}{950} v^2$.

d Bij een snelheid van a km/uur is $L = \frac{a^2}{25f}$.

Bij een 20% hogere snelheid, dus bij $v = 1,2a$ is $L = \frac{(1,2a)^2}{25f} = \frac{1,44a^2}{25f} = 1,44 \cdot \frac{a^2}{25f}$.

Dus de lengte van de remweg neemt met 44% toe bij een 20% hogere snelheid.

e $L = 40$ geeft $\frac{v^2}{25f} = 40$, dus $v^2 = 1000f$ en $v = \sqrt{1000f}$.

8,4% toename van f , dus vul in de formule $1,084f$ in voor f .

Je krijgt $v = \sqrt{1000 \cdot 1,084f} = \sqrt{1,084} \cdot \sqrt{1000f}$.

Dus $\sqrt{1,084} \approx 1,041$ keer zo hoge snelheid, dat is 4,1% hoger.

41 Voor de grote schildpad geldt $\frac{g}{\beta} = 0,17$.

Voor de kleine schildpad is l kleiner dan bij de grote, terwijl g gelijk is.

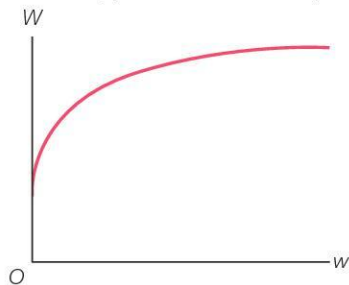
Dus de teller is gelijk en de noemer is kleiner, dus de breuk $\frac{g}{\beta}$ is groter. Dus voor de kleine schildpad is $\frac{g}{\beta} > 0,17$, dus deze verkeert in voldoende conditie.

Bladzijde 117

42 a $T = 33$ en $G = 33 + (T - 33) \cdot W$ geeft $G = 33 + (33 - 33)W = 33 + 0W = 33$.

Dus bij een luchttemperatuur van 33°C is de gevoelstemperatuur 33°C ongeacht de windsnelheid.

b Voer in $y_1 = 0,474 + 0,454\sqrt{x} \cdot (1 - 0,1\sqrt{x})$.



De grafiek van W is afnemend stijgend.

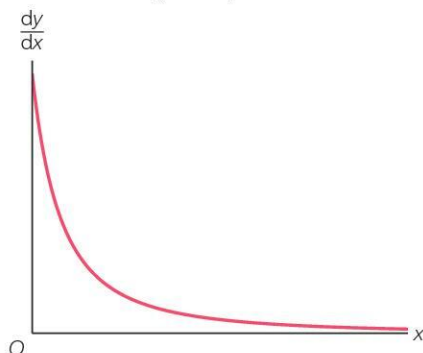
c Voor temperaturen rond het vriespunt geldt $T \approx 0$, dus dan is $T - 33$ negatief. De grafiek van G daalt dus als W toeneemt. Uit de schets blijkt dat W toeneemt als w toeneemt. Dus de gevoelstemperatuur neemt af als de windsnelheid toeneemt.

14.4 Redeneren met de afgeleide

Bladzijde 119

43 a $y = 50 - \frac{10}{2x+3}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -\frac{(2x+3) \cdot 0 - 10 \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{20}{(2x+3)^2}$.

b Voer in $y_1 = \frac{20}{(2x+3)^2}$.



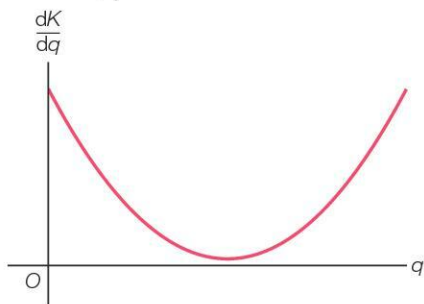
- c Omdat de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ geheel boven de x -as ligt voor elke $x \geq 0$, is de grafiek van y stijgend voor elke $x \geq 0$.

Bladzijde 120

- 44 Omdat $\frac{dE}{dx} < 0$ heb je met een dalende grafiek van E te maken. Hoe groter $\frac{dE}{dx}$ hoe minder de daling is, dus bij het maximum van $\frac{dE}{dx}$ hoort de kleinste daling.

- 45 a $K = \frac{1}{3}q^3 - 5q^2 + 26q + 100$ geeft $\frac{dK}{dq} = q^2 - 10q + 26$.

Voer in $y_1 = x^2 - 10x + 26$.

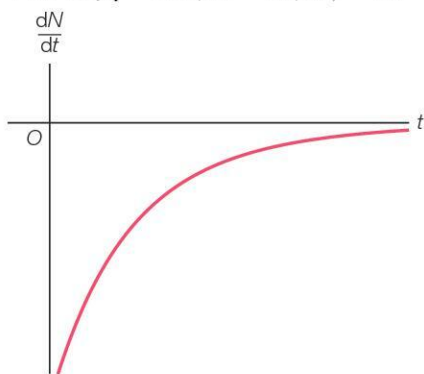


De grafiek van $\frac{dK}{dq}$ ligt geheel boven de q -as, dus de grafiek van K is stijgend.

- b De optie minimum geeft $x = 5$.
De grafiek stijgt het minst voor $q = 5$.

- 46 a $N = 100(0,9^t + 0,8^t)$ geeft $\frac{dN}{dt} = 100(0,9^t \cdot \ln(0,9) + 0,8^t \cdot \ln(0,8))$.

Voer in $y_1 = 100(0,9^x \cdot \ln(0,9) + 0,8^x \cdot \ln(0,8))$.



De grafiek van $\frac{dN}{dt}$ ligt geheel onder de t -as, dus de grafiek van N is dalend.

- b $t = 1$ geeft $\frac{dN}{dt} = 100(0,9^1 \cdot \ln(0,9) + 0,8^1 \cdot \ln(0,8)) = -27,33\dots$

$\frac{1}{2} \cdot -27,33\dots = -13,66\dots$, dus los op $\frac{dN}{dt} = -13,66\dots$

Voer in $y_2 = -13,66\dots$

De optie snijpunt geeft $x \approx 4,94$, dus voor $t = 4,94$ is de snelheid de helft van de snelheid op $t = 1$.

- 47 a De teller 20 is positief en de noemer $(2x + 3)^2$ is ook positief. Dus $\frac{20}{(2x + 3)^2}$ is positief.

Dus $\frac{dy}{dx} > 0$ voor $x \geq 0$.

- b $\frac{dy}{dx}$ is de helling van de grafiek van y . Als geldt dat $\frac{dy}{dx} > 0$ voor $x \geq 0$ dan is de helling van de grafiek van y dus positief voor $x \geq 0$. Een positieve helling betekent dat de grafiek van y stijgend is voor $x \geq 0$.

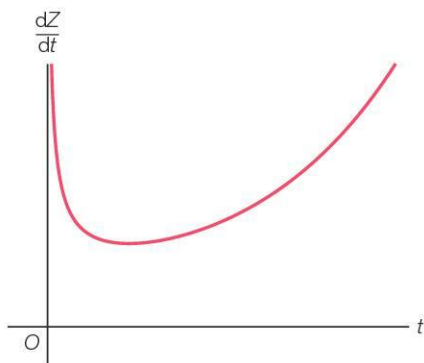
Bladzijde 121

- 48** $y = 0,5t - 15$ is een lineaire formule.
 $t = 0$ geeft $y = -15$ en $t = 30$ geeft $y = 0$, dus voor $0 < t < 30$ is $0,5t - 15$ kleiner dan 0.

- 49 a** $N = \frac{200t}{50-t}$ geeft $\frac{dN}{dt} = \frac{(50-t) \cdot 200 - 200t \cdot -1}{(50-t)^2} = \frac{10000 - 200t + 200t}{(50-t)^2} = \frac{10000}{(50-t)^2}$
 De teller 10000 is positief en de noemer $(50-t)^2$ is positief voor $0 < t < 50$, dus $\frac{dN}{dt}$ is positief.
 De grafiek van N is dus stijgend.
- b** $M = 50 \cdot 0,85^t$ geeft $\frac{dM}{dt} = 50 \cdot 0,85^t \cdot \ln(0,85) \approx -8,1 \cdot 0,85^t$.
 $0,85^t$ is positief, dus $-8,1 \cdot 0,85^t$ is negatief.
 Dus de grafiek van M is dalend.

- 50 a** $F(q) = 0,1q + \ln(50q + 100)$ geeft $F'(q) = 0,1 + \frac{1}{50q + 100} \cdot 50 = 0,1 + \frac{1}{q + 2}$.
 De teller 1 is positief en de noemer $q + 2$ is positief voor $q \geq 0$, dus $F'(q)$ is positief voor $q \geq 0$.
 De grafiek van F is dus stijgend.
- b** $F'(5) = 0,1 + \frac{1}{5 + 2} = 0,242...$
 $F'(10) = 0,1 + \frac{1}{10 + 2} = 0,183...$
 $\frac{0,183... - 0,242...}{0,242...} \times 100\% \approx -24,5\%$
 De snelheid neemt dan dus met 24,5% af.

- 51 a** $Z = 100(e^{0,1t} + t^{0,4})$ geeft $\frac{dZ}{dt} = 100(e^{0,1t} \cdot 0,1 + 0,4t^{-0,6}) = 10e^{0,1t} + 40t^{-0,6} = 10e^{0,1t} + \frac{40}{t^{0,6}}$.
 $10e^{0,1t}$ is positief voor $t \geq 0$ en $\frac{40}{t^{0,6}}$ is positief voor $t \geq 0$, dus $\frac{dZ}{dt}$ is positief voor $t \geq 0$.
 De grafiek van Z is dus stijgend.
- b** Voer in $y_1 = 10e^{0,1x} + \frac{40}{x^{0,6}}$.



De optie minimum geeft $x \approx 5,2$ en $y \approx 31,7$.
 De minimale snelheid is 31,7.

Bladzijde 122

- 52 a** Als $p = 100$, dan wordt de noemer 0 en delen door 0 kan niet. Het is dus niet mogelijk om 100% van de verontreiniging te verwijderen.
- b** $p = 90$ geeft $B = \frac{60000 \cdot 90}{100 - 90} = 540000$.
 $p = 95$ geeft $B = \frac{60000 \cdot 95}{100 - 95} = 1140000$.
 Het is dus $\frac{1140000 - 540000}{540000} \times 100\% \approx 111,1\%$ duurder.

c $B = \frac{60000p}{100-p}$ geeft

$$\frac{dB}{dp} = \frac{(100-p) \cdot 60000 - 60000p \cdot -1}{(100-p)^2} = \frac{6000000 - 60000p + 60000p}{(100-p)^2} = \frac{6000000}{(100-p)^2}$$

De teller 6 000 000 is positief en de noemer $(100-p)^2$ is ook positief voor

$0 < p < 100$, dus $\frac{dB}{dp}$ is positief voor $0 < p < 100$. De grafiek van B is dus stijgend.

Hoe meer je van de chemische stof verwijdert, des te hoger zijn dus de kosten.

d $B = 1\,000\,000$ geeft $\frac{60000p}{100-p} = 1\,000\,000$
 $60000p = 100\,000\,000 - 1\,000\,000p$
 $1\,060\,000p = 100\,000\,000$
 $p \approx 94,3$

Er blijft dus nog ongeveer 5,7% van de chemische stof aanwezig.

e Er geldt $q = 100 - p$ en dus $p = 100 - q$.

Dat geeft $B = \frac{60000(100-q)}{100-(100-q)} = \frac{-60000q + 6\,000\,000}{q} = -60000 + \frac{6\,000\,000}{q}$.

Dus $a = -60000$ en $b = 6\,000\,000$.

53 a $t = 0$ en $N = 1,9$ geeft $\frac{7}{1+b \cdot e^0} = 1,9$

$$\frac{7}{1+b} = 1,9$$

$$1+b = \frac{7}{1,9}$$

$$b = \frac{7}{1,9} - 1 = 2,684... \approx 2,68$$

$t = 4$ en $N = 5,2$ geeft $\frac{7}{1+2,684... \cdot e^{4c}} = 5,2$

$$1+2,684... \cdot e^{4c} = \frac{7}{5,2}$$

Voer in $y_1 = 1 + 2,684... \cdot e^{4x}$ en $y_2 = \frac{7}{5,2}$.

De optie snijpunt geeft $x = -0,512...$, dus $c \approx -0,51$.

b Voer in $y_1 = \frac{7}{1+2,68 \cdot e^{-0,51x}}$ en $y_2 = 6,5$.

De optie snijpunt geeft $x = 6,96...$

Dat is in het jaar $2015 + 7 = 2022$.

c $N = \frac{7}{1+2,68 \cdot e^{-0,51t}}$ geeft

$$\frac{dN}{dt} = \frac{(1+2,68 \cdot e^{-0,51t}) \cdot 0 - 7 \cdot 2,68 \cdot e^{-0,51t} \cdot -0,51}{(1+2,68 \cdot e^{-0,51t})^2} = \frac{9,5676 \cdot e^{-0,51t}}{(1+2,68 \cdot e^{-0,51t})^2}$$

De teller is positief en de noemer is ook positief.

De grafiek van N is dus stijgend.

d Voer in $y_1 = \frac{9,5676 \cdot e^{-0,51x}}{(1+2,68 \cdot e^{-0,51x})^2}$.

De optie maximum geeft $x = 1,93...$ en $y = 0,89...$

Dus voor $t = 1,9$.

14.5 De afgeleide en soorten van stijgen en dalen

Bladzijde 124

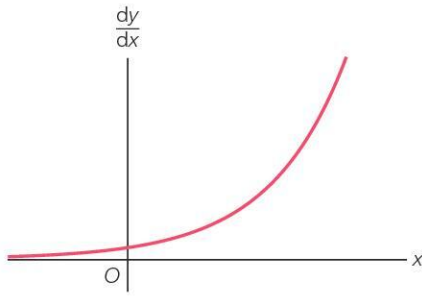
54 a toenemende stijging

b De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.

c Omdat $\frac{dy}{dx}$ stijgend is, neemt de helling van y dus voortdurend toe. De grafiek van y is dus toenemend stijgend.

55 a $y = 0,05(1 + 4e^{0,5x})$ geeft $\frac{dy}{dx} = 0,05 \cdot 4e^{0,5x} \cdot 0,5 = 0,1e^{0,5x}$.

Voer in $y_1 = 0,1e^{0,5x}$.

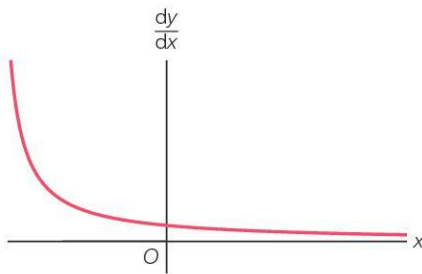


De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is toenemend stijgend.

b $y = \ln(2x + 15)$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x + 15} \cdot 2 = \frac{2}{2x + 15}$

Voer in $y_1 = \frac{2}{2x + 15}$.



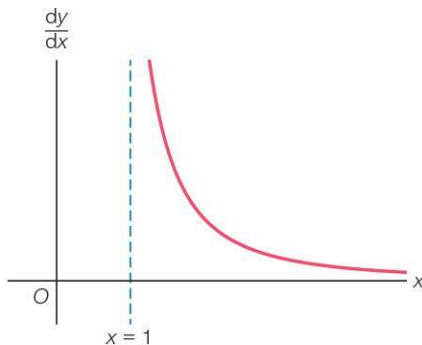
De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is afnemend stijgend.

c $y = \frac{30 - 10x}{1 - x}$ geeft

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x) \cdot -10 - (30-10x) \cdot -1}{(1-x)^2} = \frac{10x - 10 + 30 - 10x}{(1-x)^2} = \frac{20}{(1-x)^2}.$$

Voer in $y_1 = \frac{20}{(1-x)^2}$.

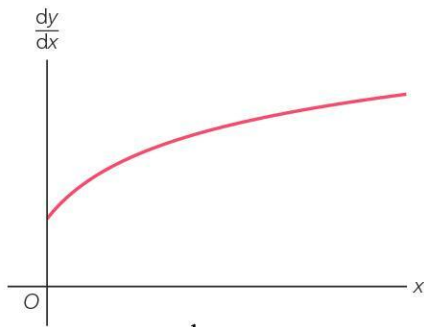


De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is afnemend stijgend.

d $y = x \cdot \ln(x+4)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \ln(x+4) + x \cdot \frac{1}{x+4} = \ln(x+4) + \frac{x}{x+4}$.

Voer in $y_1 = \ln(x+4) + \frac{x}{x+4}$.



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is toenemend stijgend.

Bladzijde 126

56

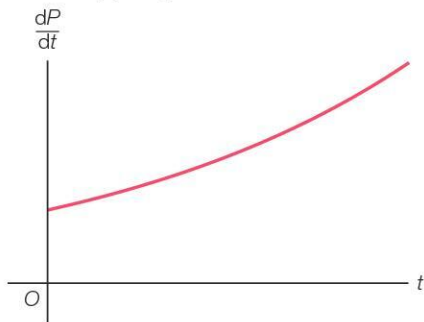
a $t = 0$ geeft $P = 2,35(1 + e^{0,0275 \cdot 0}) = 4,7$.

$t = 35$ geeft $P = 2,35(1 + e^{0,0275 \cdot 35}) = 8,50\dots$

De procentuele toename is $\frac{8,50\dots - 4,7}{4,7} \times 100\% \approx 81\%$.

b $P = 2,35(1 + e^{0,0275t})$ geeft $\frac{dP}{dt} = 2,35 \cdot e^{0,0275t} \cdot 0,0275 = 0,0064625 e^{0,0275t}$.

Voer in $y_1 = 0,0064625 e^{0,0275x}$.



De grafiek van $\frac{dP}{dt}$ ligt geheel boven de t -as, dus de grafiek van P is stijgend.

De grafiek van $\frac{dP}{dt}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van P is toenemend stijgend.

- c Voor de wereldbevolking in miljarden geldt $N = b \cdot g^t$ met $b = 6,5$ en t de tijd in jaren met $t = 0$ halverwege 2005.

$g_{15 \text{ jaar}} = \frac{7,8}{6,4}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{7,8}{6,4}\right)^{\frac{1}{15}} \approx 1,012$.

Voor januari 2010 geldt $N = 6,5 \cdot 1,012^{4,5} = 6,85\dots$ en $P = 2,35(1 + e^{0,0275 \cdot 30}) = 7,71\dots$, dus waren er $0,0771\dots \cdot 6,85\dots \approx 0,529$ miljard mensen met diabetes.

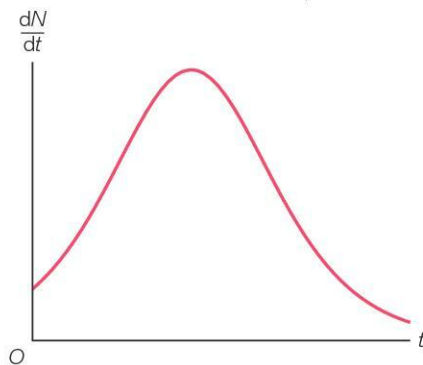
Voor januari 2018 geldt $N = 6,5 \cdot 1,012^{12,5} = 7,54\dots$ en $P = 2,35(1 + e^{0,0275 \cdot 38}) = 9,03\dots$, dus waren er $0,0903\dots \cdot 7,54\dots \approx 0,681$ miljard mensen met diabetes.

De procentuele toename is dus $\frac{0,681 - 0,529}{0,529} \times 100\% \approx 29\%$.

57 $N = \frac{5000}{1 + 19e^{-0.175t}}$ geeft

$$\frac{dN}{dt} = \frac{(1 + 19e^{-0.175t}) \cdot 0 - 5000 \cdot 19e^{-0.175t} \cdot -0,175}{(1 + 19e^{-0.175t})^2} = \frac{16625e^{-0.175t}}{(1 + 19e^{-0.175t})^2}.$$

Voer in $y_1 = \frac{16625e^{-0.175x}}{(1 + 19e^{-0.175x})^2}$.



De grafiek van $\frac{dN}{dt}$ ligt geheel boven de t -as, dus de grafiek van N is stijgend.

De grafiek van $\frac{dN}{dt}$ is eerst stijgend, dus dan is de grafiek van N toenemend stijgend.

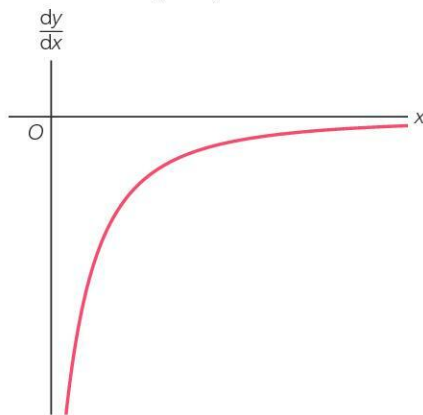
De grafiek van $\frac{dN}{dt}$ is daarna dalend, dus dan is de grafiek van N afnemend stijgend.

De optie maximum bij y_1 geeft $x = 16,82\dots$ en $y = 218,75$.

Bij $t = 16,8$ gaat de grafiek van N over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

58 a $y = \frac{x+11}{x+1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1) \cdot 1 - (x+11) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x-11}{(x+1)^2} = \frac{-10}{(x+1)^2}.$

Voer in $y_1 = \frac{-10}{(x+1)^2}$.



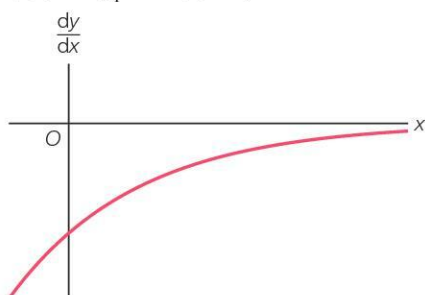
b Omdat de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ geheel onder de x -as ligt is de grafiek van y dalend.

c Omdat de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ bovendien stijgend is, worden de hellingen steeds groter.

De grafiek van y is dus afnemend dalend.

59 a $y = 100e^{-0,1x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 100e^{-0,1x} \cdot -0,1 = -10e^{-0,1x}$.

Voer in $y_1 = -10e^{-0,1x}$.

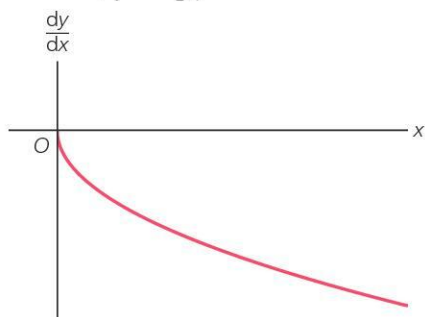


De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel onder de x -as, dus de grafiek van y is dalend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is afnemend dalend.

b $y = 5 - x\sqrt{x} = 5 - x^{1\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = -1\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Voer in $y_1 = -1\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

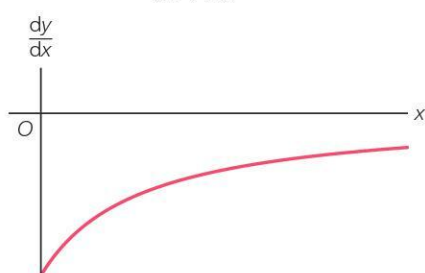


De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt onder de x -as, dus de grafiek van y is dalend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is toenemend dalend.

c $y = 10 - \ln(3x + 20)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{3x + 20} \cdot 3 = \frac{-3}{3x + 20}$.

Voer in $y_1 = \frac{-3}{3x + 20}$.

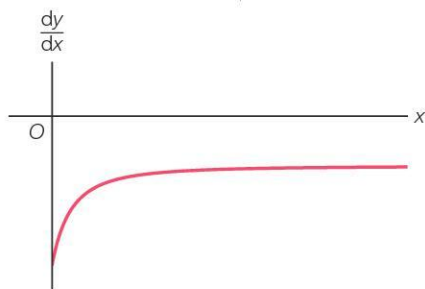


De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel onder de x -as, dus de grafiek van y is dalend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is afnemend dalend.

$$\text{d} \quad y = \frac{3-x^2}{x+1} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = \frac{(x+1) \cdot -2x - (3-x^2) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 3 + x^2}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2}.$$

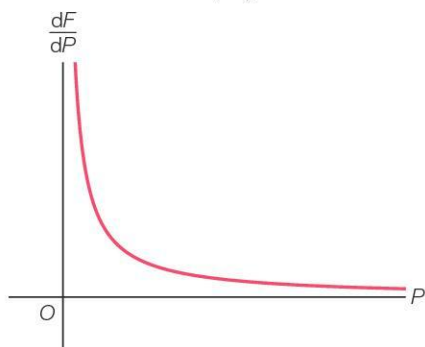


De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel onder de x -as, dus de grafiek van y is dalend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is afnemend dalend.

$$\text{60 a} \quad F = 5 \cdot \log(P) + 6 \text{ geeft } \frac{dF}{dP} = 5 \cdot \frac{1}{P \cdot \ln(10)} = \frac{5}{P \cdot \ln(10)}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{5}{x \cdot \ln(10)}.$$

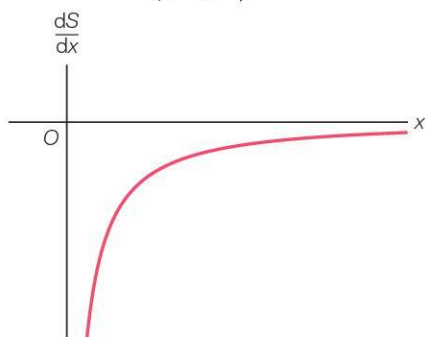


De grafiek van $\frac{dF}{dP}$ ligt geheel boven de P -as, dus de grafiek van F is stijgend.

De grafiek van $\frac{dF}{dP}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van F is afnemend stijgend.

$$\text{b} \quad S = \frac{20}{1+x^{0,5}} \text{ geeft } \frac{dS}{dx} = \frac{(1+x^{0,5}) \cdot 0 - 20 \cdot 0,5x^{-0,5}}{(1+x^{0,5})^2} = \frac{-10x^{-0,5}}{(1+x^{0,5})^2}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{-10x^{-0,5}}{(1+x^{0,5})^2}.$$

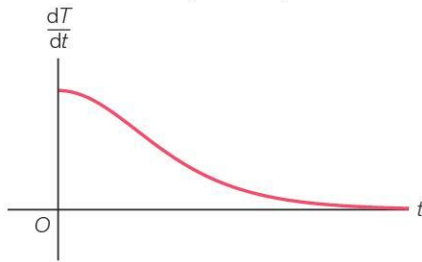


De grafiek van $\frac{dS}{dx}$ ligt geheel onder de x -as, dus de grafiek van S is dalend.

De grafiek van $\frac{dS}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van S is afnemend dalend.

$$\text{c } T = \frac{20}{1 + 0,5^t} \text{ geeft } \frac{dT}{dt} = \frac{(1 + 0,5^t) \cdot 0 - 20 \cdot 0,5^t \cdot \ln(0,5)}{(1 + 0,5^t)^2} = \frac{-20 \ln(0,5) \cdot 0,5^t}{(1 + 0,5^t)^2}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{-20 \ln(0,5) \cdot 0,5^x}{(1 + 0,5^x)^2}.$$

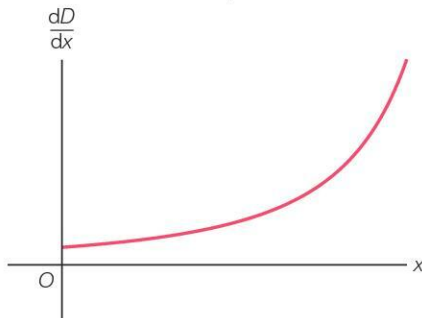


De grafiek van $\frac{dT}{dt}$ ligt geheel boven de t -as, dus de grafiek van T is stijgend.

De grafiek van $\frac{dT}{dt}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van T is afnemend stijgend.

$$\text{d } D = \frac{x + 200}{20 - x} \text{ geeft } \frac{dD}{dx} = \frac{(20 - x) \cdot 1 - (x + 200) \cdot -1}{(20 - x)^2} = \frac{20 - x + x + 200}{(20 - x)^2} = \frac{220}{(20 - x)^2}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{220}{(20 - x)^2}.$$



De grafiek van $\frac{dD}{dx}$ ligt geheel boven de x -as, dus de grafiek van D is stijgend.

De grafiek van $\frac{dD}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van D is toenemend stijgend.

Bladzijde 128

61 a gemiddelde snelheid $= \frac{42,195}{4\frac{59}{60}} = 8,46... \text{ km/uur} \approx 2,35 \text{ m/s}$

b $18 \text{ km/uur} = 5 \text{ m/s}$

$$L = 30 \text{ en } v = 5 \text{ geeft } a(2 \cdot 30^{0,7} - 1,25 \cdot 30^{0,8}) = 5$$

$$a = \frac{5}{2 \cdot 30^{0,7} - 1,25 \cdot 30^{0,8}} \approx 1,898$$

Dus $a = 1,898$.

c $v = 1,90(2 \cdot 80^{0,7} - 1,25 \cdot 80^{0,8}) = 2,555... \text{ m/s}$

$$\text{Zijn eindtijd is } \frac{42\,195}{2,555...} \approx 16\,510 \text{ seconden} \approx 4 \text{ uur en } 35 \text{ minuten.}$$

d $v = 2,35 \text{ en } L = 81 \text{ geeft } a(2 \cdot 81^{0,7} - 1,25 \cdot 81^{0,8}) = 2,35$

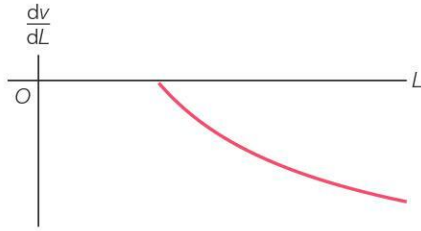
$$a = \frac{2,35}{2 \cdot 81^{0,7} - 1,25 \cdot 81^{0,8}} \approx 1,80$$

$$L = 40 \text{ en } a = 1,80 \text{ geeft } v = 1,80(2 \cdot 40^{0,7} - 1,25 \cdot 40^{0,8}) = 4,579... \text{ m/s.}$$

$$\text{Zijn eindtijd zou zijn } \frac{42\,195}{4,579...} \approx 9\,214 \text{ seconden} \approx 2 \text{ uur en } 34 \text{ minuten.}$$

e $v = a(2L^{0,7} - 1,25L^{0,8})$ geeft $\frac{dv}{dL} = a(1,4L^{-0,3} - L^{-0,2})$.

Kies bijvoorbeeld $a = 1,90$ en voer in $y_1 = 1,90(1,4x^{-0,3} - x^{-0,2})$.



De grafiek van $\frac{dv}{dL}$ ligt voor $30 \leq L \leq 90$ geheel onder de L -as, dus de grafiek van v is dalend.

De grafiek van $\frac{dv}{dL}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van v is toenemend dalend.

De snelheid waarmee de snelheid afneemt wordt dus steeds groter.

62 a $A = 100 - 90 \cdot 0,8^t$ geeft $\frac{dA}{dt} = 0 - 90 \cdot 0,8^t \cdot \ln(0,8) \approx 20,1 \cdot 0,8^t$.

b Voor $t \geq 0$ is $0,8^t$ positief, dus ook $20,1 \cdot 0,8^t$ is positief.
De grafiek van A stijgt dus.

c Als t toeneemt, dan neemt $0,8^t$ af, dus dan neemt $20,1 \cdot 0,8^t$ af.
Dus als t toeneemt, dan neemt $\frac{dA}{dt}$ af.

d De grafiek van A stijgt en $\frac{dA}{dt}$ neemt af, dus de grafiek van A is afnemend stijgend.

Bladzijde 130

63 Als $(t+1)^2$ toeneemt, dan wordt de noemer van $\frac{-1498}{(t+1)^2}$ groter.

Omdat de teller negatief is, zal de breuk steeds minder negatief, dus groter worden.

Dat betekent dat $\frac{-1498}{(t+1)^2}$ toeneemt.

64 a $N = \frac{1500 + 50t}{330 + 0,25t}$ geeft

$$\frac{dN}{dt} = \frac{(330 + 0,25t) \cdot 50 - (1500 + 50t) \cdot 0,25}{(330 + 0,25t)^2} = \frac{16500 + 12,5t - 375 - 12,5t}{(330 + 0,25t)^2} = \frac{16125}{(330 + 0,25t)^2}$$

Omdat de teller positief is en de noemer voor $t \geq 0$ positief, is $\frac{16125}{(330 + 0,25t)^2}$ positief.

De grafiek van N is dus stijgend.

Als t toeneemt, dan neemt $330 + 0,25t$ toe en dan neemt $(330 + 0,25t)^2$ toe voor $t \geq 0$.

Dus dan neemt $\frac{16125}{(330 + 0,25t)^2}$ af.

De grafiek van N is afnemend stijgend.

b $T = 315e^{0,28t}$ geeft $\frac{dT}{dt} = 315e^{0,28t} \cdot 0,28 = 88,2e^{0,28t}$.

$e^{0,28t}$ is positief, dus $88,2e^{0,28t}$ is positief.

De grafiek van T is dus stijgend.

$e^{0,28t} = (e^{0,28})^t \approx 1,32^t$, dus $\frac{dT}{dt} \approx 88,2 \cdot 1,32^t$.

Als t toeneemt, dan neemt $1,32^t$ toe en dan neemt $88,2 \cdot 1,32^t$ toe.

De grafiek van T is toenemend stijgend.

c $S = 50 - \frac{30}{x} = 50 - 30x^{-1}$ geeft $\frac{dS}{dx} = 30x^{-2} = \frac{30}{x^2}$.

Voor $x > 0$ is x^2 positief, dus $\frac{30}{x^2}$ is positief.

De grafiek van S is dus stijgend.

Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe en dan neemt $\frac{30}{x^2}$ af.

De grafiek van S is afnemend stijgend.

d $B = 3 - \ln(2n)$ geeft $\frac{dB}{dn} = 0 - \frac{1}{2n} \cdot 2 = -\frac{1}{n}$.

Voor $n > 0$ is $-\frac{1}{n}$ negatief.

De grafiek van B is dus dalend.

Als n toeneemt, dan neemt $-\frac{1}{n}$ toe.

De grafiek van B is afnemend dalend.

65 a $N = 5 + {}^2\log(3x)$ geeft $\frac{dN}{dx} = \frac{1}{3x \cdot \ln(2)} \cdot 3 = \frac{1}{x \cdot \ln(2)}$.

Voor $x > 0$ is $\frac{1}{x \cdot \ln(2)}$ positief.

De grafiek van N is dus stijgend.

Als x toeneemt, dan neemt $x \cdot \ln(2)$ toe en dan neemt $\frac{1}{x \cdot \ln(2)}$ af.

De grafiek van N is afnemend stijgend.

b $R = 50 - 1,2^n$ geeft $\frac{dR}{dn} = 0 - 1,2^n \cdot \ln(1,2) \approx -0,18 \cdot 1,2^n$.

$1,2^n$ is positief, dus $-0,18 \cdot 1,2^n$ is negatief.

De grafiek van R is dus dalend.

Als n toeneemt, dan neemt $1,2^n$ toe en dan neemt $-0,18 \cdot 1,2^n$ af.

De grafiek van R is toenemend dalend.

c $F = 1,5 + 2,5t^{0,5}$ geeft $\frac{dF}{dt} = 0 - 1,25t^{-1,5} = -1,25t^{-1,5}$.

Voor $t > 0$ is $t^{1,5}$ positief, dus $-1,25t^{-1,5}$ is negatief.

De grafiek van F is dus dalend.

Als t toeneemt, dan neemt $t^{1,5}$ af en dan neemt $-1,25t^{-1,5}$ toe.

De grafiek van F is afnemend dalend.

d $L = 3,6 \cdot 1,19^{0,73t+1,15}$ geeft

$$\frac{dL}{dt} = 3,6 \cdot 1,19^{0,73t+1,15} \cdot \ln(1,19) \cdot 0,73 \approx 0,46 \cdot 1,19^{0,73t+1,15}.$$

$1,19^{0,73t+1,15}$ is positief, dus $0,46 \cdot 1,19^{0,73t+1,15}$ is positief.

De grafiek van L is dus stijgend.

Als t toeneemt, dan neemt $0,73t + 1,15$ toe, dan neemt $1,19^{0,73t+1,15}$ toe en dan neemt $0,46 \cdot 1,19^{0,73t+1,15}$ toe.

De grafiek van L is toenemend stijgend.

66 a $x = 4,5$ geeft $R = 150 - \frac{50}{1+4,5} = 140,90...$

$$x = 6,5 \text{ geeft } R = 150 - \frac{50}{1+6,5} = 143,33...$$

De procentuele toename is $\frac{143,33... - 140,90...}{140,90...} \times 100\% \approx 1,7\%$.

b Als x toeneemt, dan neemt $1+x$ toe en dan neemt $\frac{50}{1+x}$ af, dus dan neemt $150 - \frac{50}{1+x}$ toe.

De grafiek van R is dus stijgend.

$$\text{c } R = 150 - \frac{50}{1+x} \text{ geeft } \frac{dR}{dx} = 0 - \frac{(1+x) \cdot 0 - 50 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{50}{(1+x)^2}.$$

Voor $0 \leq x \leq 10$ is $(1+x)^2$ positief, dus $\frac{50}{(1+x)^2}$ is positief.

De grafiek van R is dus stijgend.

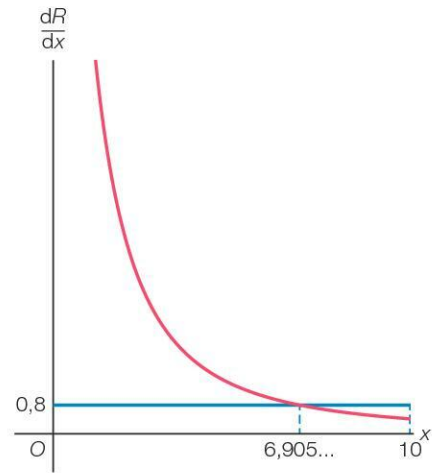
Als x toeneemt, dan neemt $(1+x)^2$ toe en dan neemt $\frac{50}{(1+x)^2}$ af.

De grafiek van R is afnemend stijgend.

$$\text{d } \text{Los op } \frac{50}{(1+x)^2} < 0,8.$$

Voer in $y_1 = \frac{50}{(1+x)^2}$ en $y_2 = 0,8$.

De optie snijpunt geeft $x = 6,905\dots$, dus de snelheid is minder dan 0,8 voor $6,91 \leq x \leq 10$.



Bladzijde 131

$$\text{67 a } \text{Als } n \text{ heel groot is, dan is } 5 + 0,1n \text{ heel groot, dus dan is } \frac{150\,000}{5 + 0,1n} \approx 0 \text{ en}$$

$$O(n) \approx 30\,000 - 0 = 30\,000.$$

De grenswaarde is 30 000 euro.

De dagomzet zal altijd minder dan 30 000 euro zijn.

b Als n toeneemt, dan neemt $0,1n$ toe en dan neemt $5 + 0,1n$ toe.

Dus neemt $\frac{150\,000}{5 + 0,1n}$ af en neemt $30\,000 - \frac{150\,000}{5 + 0,1n}$ toe.

De grafiek van O is dus stijgend.

$$\text{c } O(n) = 30\,000 - \frac{150\,000}{5 + 0,1n} \text{ geeft } O'(n) = 0 - \frac{(5 + 0,1n) \cdot 0 - 150\,000 \cdot 0,1}{(5 + 0,1n)^2} = \frac{15\,000}{(5 + 0,1n)^2}.$$

Voor $0 \leq n \leq 2000$ is $(5 + 0,1n)^2$ positief, dus $\frac{15\,000}{(5 + 0,1n)^2}$ is positief.

De grafiek van O is dus stijgend.

Als n toeneemt, dan neemt $(5 + 0,1n)^2$ toe en dan neemt $\frac{15\,000}{(5 + 0,1n)^2}$ af.

De grafiek van O is afnemend stijgend.

d De totale dagomzet is $O(2000) \approx 29\,268$ euro.

20% van 2000 is 400, dus bij de 20% bestverkopende artikelen hoort $n = 400$.

$$O(400) \approx 26\,667$$

Dus $\frac{26\,667}{29\,268} \times 100\% \approx 91,1\%$ van de dagomzet wordt opgebracht door de 20%

bestverkopende artikelen.

40% van 2000 is 800 en $O(800) \approx 28\,235$.

De 60% slechtstverkopende artikelen brengen dus $29\,268 - 28\,235 = 1033$ euro op.

Dus $\frac{1033}{29\,268} \times 100\% \approx 3,5\%$ van de dagomzet wordt opgebracht door de 60%

slechtstverkopende artikelen.

$$\text{e } K(n) = 8n^{1,05} \text{ geeft } K'(n) = 8,4n^{0,05}.$$

Voor $0 \leq n \leq 2000$ is $n^{0,05}$ positief, dus $8,4n^{0,05}$ is positief.

De grafiek van K is dus stijgend.

Als n toeneemt, dan neemt $n^{0,05}$ toe en dan neemt $8,4n^{0,05}$ toe.

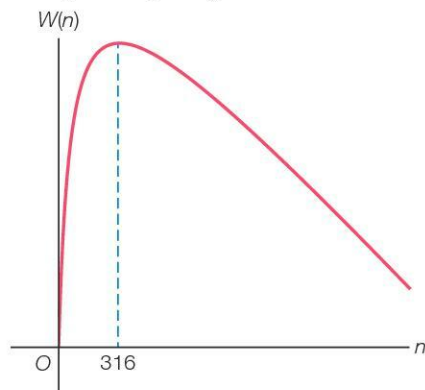
De grafiek van K is toenemend stijgend.

f $W(n) = O(n) - K(n) = 30\,000 - \frac{150\,000}{5 + 0,1n} - 8n^{1,05}$ geeft $W'(n) = \frac{15\,000}{(5 + 0,1n)^2} - 8,4n^{0,05}$.

Los op $W'(n) = 0$.

Voer in $y_1 = \frac{15\,000}{(5 + 0,1x)^2} - 8,4x^{0,05}$.

De optie nulpunt geeft $x \approx 316$.



Uit de schets blijkt dat de winst maximaal is voor $n = 316$.

De winst is dus maximaal bij verkoop van de 316 bestverkochte artikelen.

g
$$W(n) = 30\,000 - \frac{150\,000}{5 + 0,1n} - 8n^{1,05} = \frac{30\,000(5 + 0,1n)}{5 + 0,1n} - \frac{150\,000}{5 + 0,1n} - \frac{8n^{1,05} \cdot (5 + 0,1n)}{5 + 0,1n}$$

$$= \frac{150\,000 + 3000n - 150\,000 - 40n^{1,05} - 0,8n^{2,05}}{5 + 0,1n} = \frac{3000n - 40n^{1,05} - 0,8n^{2,05}}{5 + 0,1n}$$

Dus $a = 3000$, $b = -40$ en $c = -0,8$.

Diagnostische toets

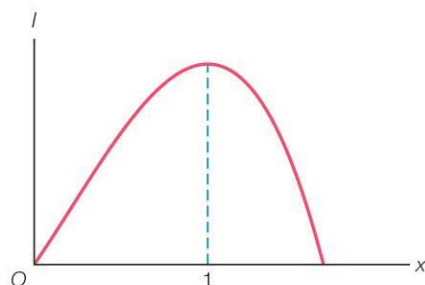
Bladzijde 134

1 a $\left. \begin{array}{l} \text{lengte} = 4 \cdot 2x + 4 \cdot (x + 1) + 4h = 8x + 4x + 4 + 4h = 12x + 4 + 4h \\ \text{lengte} = 12x + 4 + 4h \\ \text{lengte} = 24 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 12x + 4 + 4h = 24 \\ 4h = -12x + 20 \\ h = -3x + 5 \end{array}$

$\left. \begin{array}{l} I = 2x \cdot (x + 1) \cdot h \\ h = -3x + 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} I = 2x \cdot (x + 1) \cdot (-3x + 5) \\ I = 2x \cdot (-3x^2 + 2x + 5) \\ I = -6x^3 + 4x^2 + 10x \end{array}$

b $I = -6x^3 + 4x^2 + 10x$ geeft $\frac{dI}{dx} = -18x^2 + 8x + 10$.

$x = 1$ geeft $\frac{dI}{dx} = -18 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 10 = 0$



Uit de schets blijkt dat I maximaal is voor $x = 1$.

- 2 a** Voor de materiaalkosten K geldt $K = \text{kosten zijanten} + \text{kosten bodem}$.

$$K = 2xh \cdot 6,25 + 2 \cdot \frac{1}{2}xh \cdot 6,25 + x \cdot \frac{1}{2}x \cdot B$$

$$K = 12,5xh + 18,75xh + \frac{1}{2}Bx^2$$

$$K = 31,25xh + \frac{1}{2}Bx^2$$

$$\left. \begin{aligned} I &= x \cdot \frac{1}{2}x \cdot h = \frac{1}{2}x^2h \\ I &= 18 \end{aligned} \right\} \frac{1}{2}x^2h = 18$$

$$h = \frac{18}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{36}{x^2}$$

$$\text{Dus } K = 31,25x \cdot \frac{36}{x^2} + \frac{1}{2}Bx^2 = \frac{1125}{x} + \frac{1}{2}Bx^2$$

b $K = 375x^{-1} + \frac{1}{2}Bx^2$ geeft $\frac{dK}{dx} = -375x^{-2} + 3Bx = \frac{-375}{x^2} + 3Bx$

$$\frac{dK}{dx} = 0 \text{ geeft } \frac{-375}{x^2} + 3Bx = 0$$

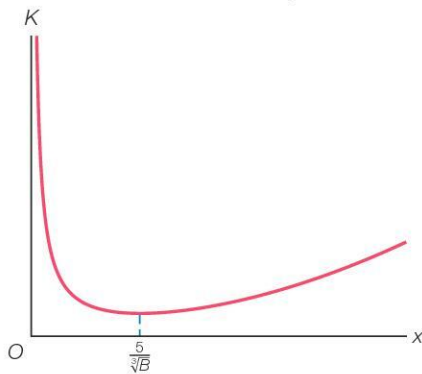
$$3Bx = \frac{375}{x^2}$$

$$3Bx^3 = 375$$

$$x^3 = \frac{125}{B}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{125}{B}} = \frac{5}{\sqrt[3]{B}}$$

Voor elke $B > 0$ heeft de grafiek van K de volgende vorm.



De grafiek van K heeft dus een minimum voor $x = \frac{5}{\sqrt[3]{B}}$.

3 a $y = 8 \cdot \ln(3 - 2x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 8 \cdot \frac{1}{3 - 2x} \cdot -2 = \frac{-16}{3 - 2x}$.

b $y = 8,2 \cdot {}^3\log(x + 5,6)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 8,2 \cdot \frac{1}{(x + 5,6) \cdot \ln(3)} = \frac{8,2}{(x + 5,6) \cdot \ln(3)}$.

c $y = 4x^2 + \log(x^2 + x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 8x + \frac{1}{(x^2 + x) \cdot \ln(10)} \cdot (2x + 1) = 8x + \frac{2x + 1}{(x^2 + x) \cdot \ln(10)}$.

d $y = -0,6 \cdot \ln(7x^2)$ geeft $\frac{dy}{dx} = -0,6 \cdot \frac{1}{7x^2} \cdot 14x = \frac{-8,4x}{7x^2} = \frac{-8,4}{7x} \left(= \frac{-1,2}{x} \right)$.

4 a $y = x^3 \cdot {}^3\log(x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \cdot {}^3\log(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln(3)} = 3x^2 \cdot {}^3\log(x) + \frac{x^2}{\ln(3)}$.

b $K = q^{1,3} \cdot e^{3-2q}$ geeft

$$\frac{dK}{dq} = 1,3q^{0,3} \cdot e^{3-2q} + q^{1,3} \cdot e^{3-2q} \cdot -2 = 1,3q^{0,3} \cdot e^{3-2q} - 2q^{1,3} \cdot e^{3-2q}$$

c $B = e^3 \cdot {}^3\log(n)$ geeft $\frac{dB}{dn} = e^3 \cdot \frac{1}{n \cdot \ln(3)} = \frac{e^3}{n \cdot \ln(3)}$.

d $N = t\sqrt{3 - t^2} + 5t = t(3 - t^2)^{0,5} + 5t$ geeft

$$\frac{dN}{dt} = 1 \cdot (3 - t^2)^{0,5} + t \cdot 0,5(3 - t^2)^{-0,5} \cdot -2t + 5 = \sqrt{3 - t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{3 - t^2}} + 5$$

- 5 a** $y = \frac{4x}{2-3x^4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(2-3x^4) \cdot 4 - 4x \cdot -12x^3}{(2-3x^4)^2} = \frac{8-12x^4+48x^4}{(2-3x^4)^2} = \frac{36x^4+8}{(2-3x^4)^2}$.
- b** $F = \frac{18}{3,5 + e^{0,12t}}$ geeft $\frac{dF}{dt} = \frac{(3,5 + e^{0,12t}) \cdot 0 - 18 \cdot e^{0,12t} \cdot 0,12}{(3,5 + e^{0,12t})^2} = \frac{-2,16 \cdot e^{0,12t}}{(3,5 + e^{0,12t})^2}$.
- c** $N = \frac{t}{\ln(0,5t) + 2}$ geeft
- $$\frac{dN}{dt} = \frac{(\ln(0,5t) + 2) \cdot 1 - t \cdot \frac{1}{0,5t} \cdot 0,5}{(\ln(0,5t) + 2)^2} = \frac{\ln(0,5t) + 2 - 1}{(\ln(0,5t) + 2)^2} = \frac{\ln(0,5t) + 1}{(\ln(0,5t) + 2)^2}.$$
- d** $p = q^2 \cdot \ln(2q + 5)$ geeft
- $$\frac{dp}{dq} = 2q \cdot \ln(2q + 5) + q^2 \cdot \frac{1}{2q + 5} \cdot 2 = 2q \cdot \ln(2q + 5) + \frac{2q^2}{2q + 5}.$$

Bladzijde 135

- 6 a** Als t toeneemt, dan neemt $0,78^t$ af, dus dan neemt $12 \cdot 0,78^t$ af, dus ook $200 + 12 \cdot 0,78^t$ neemt af. Daarom neemt $\frac{5000}{200 + 12 \cdot 0,78^t}$ toe.
De grafiek van N is stijgend.
- b** Als t heel groot wordt, dan nadert $0,78^t$ tot 0, dus dan wordt $12 \cdot 0,78^t \approx 0$ en dan wordt $200 + 12 \cdot 0,78^t \approx 200 + 0 = 200$. Dan wordt $\frac{5000}{200 + 12 \cdot 0,78^t} \approx \frac{5000}{200} = 25$.
Het verzadigingsniveau is 25.
- 7 a** stijgen of dalen
Als t toeneemt, dan neemt $2t$ toe, dus dan neemt $2t + 1$ toe en dan neemt $\frac{7}{2t+1}$ af.
Daarom neemt $4 - \frac{7}{2t+1}$ toe.
De grafiek van K is stijgend.
- grenswaarde
Als t heel groot wordt, dan wordt $2t$ heel groot, dus dan wordt $2t + 1$ heel groot en dan nadert $\frac{7}{2t+1}$ tot 0. Dus dan wordt $4 - \frac{7}{2t+1} \approx 4 - 0 = 4$.
De grenswaarde is 4.
- b** stijgen of dalen
Als x toeneemt, dan neemt $0,3^x$ af, dus dan neemt $50 \cdot 0,3^x$ af.
Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe, dus dan neemt $\sqrt{x} + 2$ toe.
Van $\frac{50 \cdot x^{0,3}}{\sqrt{x} + 2}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{50 \cdot x^{0,3}}{\sqrt{x} + 2}$ neemt af en dus neemt ook $\frac{50 \cdot x^{0,3}}{\sqrt{x} + 2} + 1200$ af.
De grafiek van y is dalend.
- grenswaarde
Als x heel groot wordt, dan nadert $0,3^x$ tot 0, dus dan wordt $50 \cdot 0,3^x \approx 0$.
Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot, dus dan wordt $\sqrt{x} + 2$ heel groot.
Dan nadert $\frac{50 \cdot x^{0,3}}{\sqrt{x} + 2}$ tot nul en wordt $\frac{50 \cdot x^{0,3}}{\sqrt{x} + 2} + 1200 \approx 0 + 1200 = 1200$.
De grenswaarde is 1200.
- 8 a** $y = \frac{50}{(3x+4)^2}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(3x+4)^2 \cdot 0 - 50 \cdot 2(3x+4) \cdot 3}{(3x+4)^4} = \frac{-300(3x+4)}{(3x+4)^4} = \frac{-300}{(3x+4)^3}$
De teller -300 is negatief en de noemer $(3x+4)^3$ is positief voor $x \geq 0$. Dus $\frac{-300}{(3x+4)^3}$ is negatief voor $x \geq 0$.
De grafiek van y is dus dalend voor $x \geq 0$.

b Los op $\frac{dy}{dx} = -0,3$.

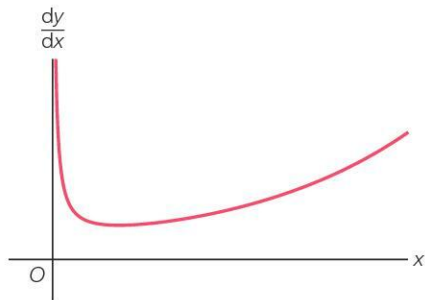
Voer in $y_1 = \frac{-300}{(3x+4)^3}$ en $y_2 = -0,3$.

De optie snijpunt geeft $x = 5$.

Dus voor $x = 5$ is de snelheid waarmee y verandert gelijk aan $-0,3$.

9 a $y = 0,2 \cdot \ln(x) + e^{0,2x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 0,2 \cdot \frac{1}{x} + e^{0,2x} \cdot 0,2 = \frac{0,2}{x} + 0,2 e^{0,2x}$.

Voer in $y_1 = \frac{0,2}{x} + 0,2 e^{0,2x}$.



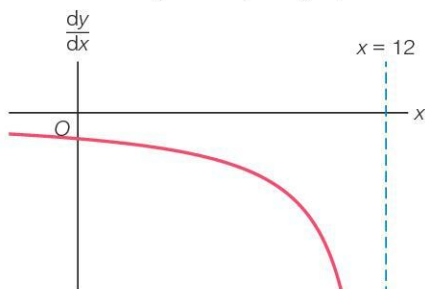
De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.

b De optie minimum geeft $x \approx 1,86$.

Dus voor $x = 1,86$ is de snelheid waarmee y toeneemt minimaal.

10 a $y = \log(60 - 5x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(60 - 5x) \cdot \ln(10)} \cdot -5 = \frac{-5}{(60 - 5x) \cdot \ln(10)}$.

Voer in $y_1 = \frac{-5}{(60 - 5x) \cdot \ln(10)}$.

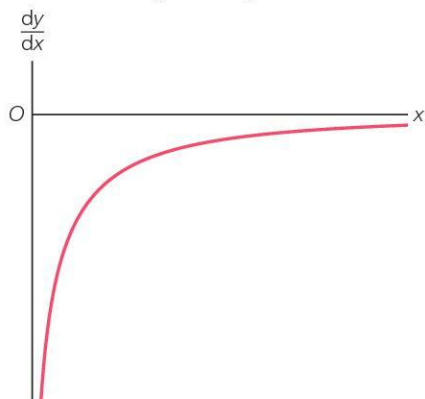


De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt voor $x < 12$ geheel onder de x -as, dus de grafiek van y is dalend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is toenemend dalend.

b $y = \frac{5}{2 + x^{0,75}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(2 + x^{0,75}) \cdot 0 - 5 \cdot 0,75x^{-0,25}}{(2 + x^{0,75})^2} = \frac{-3,75x^{-0,25}}{(2 + x^{0,75})^2}$.

Voer in $y_1 = \frac{-3,75x^{-0,25}}{(2 + x^{0,75})^2}$.

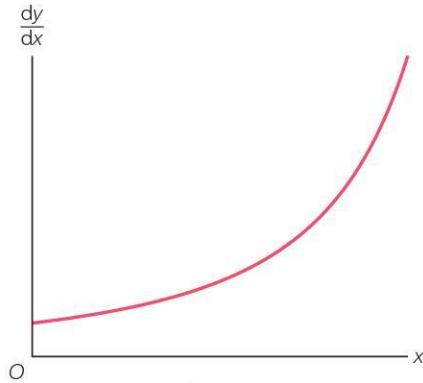


De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel onder de x -as, dus de grafiek van y is dalend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is afnemend dalend.

c $y = \frac{x+5}{15-x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(15-x) \cdot 1 - (x+5) \cdot -1}{(15-x)^2} = \frac{15-x+x+5}{(15-x)^2} = \frac{20}{(15-x)^2}$.

Voer in $y_1 = \frac{20}{(15-x)^2}$.

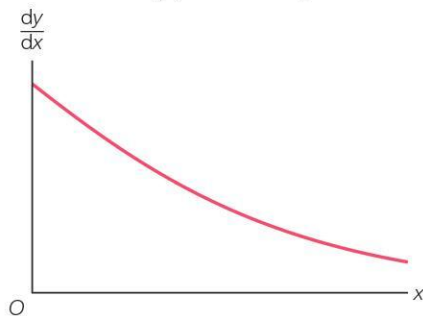


De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt voor $0 < x < 15$ geheel boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is toenemend stijgend.

d $y = \frac{20,75}{4,15 + e^{-0,23x}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(4,15 + e^{-0,23x}) \cdot 0 - 20,75 \cdot e^{-0,23x} \cdot -0,23}{(4,15 + e^{-0,23x})^2} = \frac{4,7725 e^{-0,23x}}{(4,15 + e^{-0,23x})^2}$.

Voer in $y_1 = \frac{4,7725 e^{-0,23x}}{(4,15 + e^{-0,23x})^2}$.



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt voor $x > 0$ geheel boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is afnemend stijgend.

11 a Voer in $y_1 = 12000 \cdot e^{-0,1x}$ en $y_2 = 5000$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 8,8$, dus 8,8 jaar na ingebruikname.

b Aantonen dat de grafiek van W afnemend dalend is.

$W = 12000 \cdot e^{-0,1t}$ geeft $\frac{dW}{dt} = 12000 \cdot e^{-0,1t} \cdot -0,1 = -1200 \cdot e^{-0,1t}$.

$e^{-0,1t}$ is positief, dus $-1200 \cdot e^{-0,1t}$ is negatief.

De grafiek van W is dus dalend.

$e^{-0,1t} = (e^{-0,1})^t \approx 0,90^t$, dus $\frac{dW}{dt} \approx -1200 \cdot 0,90^t$.

Als t toeneemt, dan neemt $0,90^t$ af en dan neemt $-1200 \cdot 0,90^t$ toe.

De grafiek van W is afnemend dalend.

c Los op $-1200 \cdot e^{-0,1t} = -400$.

Voer in $y_1 = -1200 \cdot e^{-0,1x}$ en $y_2 = -400$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 11$, dus 11 jaar na ingebruikname.

15 Examentraining

15.1 Algemene vaardigheden

Bladzijde 138

- 1 a** Per uur $\frac{60}{8}$ keer, dus per jaar $\frac{60}{8} \cdot 24 \cdot 365 = 65\,700$ keer.
- b** Investering $280\,000 + 35\,000 = 315\,000$ euro.
Netto inkomsten per jaar $12 \cdot 2350 - 4000 = 24\,200$ euro.
 $\frac{315\,000}{24\,200} = 13,0\dots$ en $2021 + 13 = 2034$, dus in jaar 2034 is zijn investering terugverdiend.
- c** In 16 jaar 14 dagen eerder, dus in 1 jaar $\frac{14}{16} = \frac{7}{8}$ dagen eerder.
In 2025 dus $15 \cdot \frac{7}{8} \approx 13$ dagen eerder dan 4 september.
Dat is op 22 augustus.
- d** $a = \frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{4 - 18}{16} = -\frac{7}{8}$
$$\left. \begin{array}{l} D = -\frac{7}{8}t + b \\ t = 4 \text{ en } D = 18 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{7}{8} \cdot 4 + b = 18 \\ -3\frac{1}{2} + b = 18 \\ b = 21\frac{1}{2} \end{array}$$
- e** $P_A = at + 25$ met $a = \frac{17 - 25}{5 - 0} = -1,6$, dus $P_A = -1,6t + 25$.
 $P_B = at + b$ met $a = \frac{11 - 17}{7 - 2} = -1,2$
$$\left. \begin{array}{l} P_B = -1,2t + b \\ t = 2 \text{ en } P_B = 17 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,2 \cdot 2 + b = 17 \\ -2,4 + b = 17 \\ b = 19,4 \end{array}$$

Dus $P_B = -1,2t + 19,4$.
Los op $-1,6t + 25 = -1,2t + 19,4$
 $-0,4t = -5,6$
 $t = 14$
- f** Los op $2P_B = P_C$, dus $2(-1,2t + 19,4) = 0,85t + 12$
 $-2,4t + 38,8 = 0,85t + 12$
 $-3,25t = -26,8$
 $t \approx 8,2$
- g** $A = 40,5 - \frac{11,6}{15,1}t$ en $B = 4,3t + 23,4$
$$P = A \cdot B = (40,5 - \frac{11,6}{15,1}t)(4,3t + 23,4)$$

 $P = 174,15t + 947,7 - 3,30\dots t^2 - 17,97\dots t$
 $P \approx -3,3t^2 + 156,2t + 947,7$
Dus $a = -3,3$, $b = 156,2$ en $c = 947,7$.
- h** $p = 4,2 \cdot 10^8$, en $q = 525\,000$ invullen in $A = \frac{p}{qB}$ geeft $A = \frac{4,2 \cdot 10^8}{525\,000B} = \frac{800}{B}$.
 $A = \frac{800}{B}$ geeft $B = \frac{800}{A}$

Bladzijde 139

- i** $V = F - G = -15,6t^2 + 306t + 28\,400 - (-9,8t^2 + 185t + 15\,600)$
 $= -15,6t^2 + 306t + 28\,400 + 9,8t^2 - 185t - 15\,600$
 $= -5,8t^2 + 121t + 12\,800$
Voer in $y_1 = -5,8x^2 + 121x + 12\,800$.
De optie maximum geeft $x \approx 10,43$ en $y \approx 13\,431,08$.
Het maximum van V is 13 431.

- j $P = K \cdot L = (0,15t + 4,33)(-0,047t + 12,54)$
 Voer in $y_1 = (0,15x + 4,33)(-0,047x + 12,54)$ en $y_2 = 100$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 31,4$ dus voor $t = 31,4$ is $P = 100$.

Bladzijde 143

- 2 15% van € 6299 is € 944,85.
 De subsidie is dan € 650, dus de aanschafprijs is $6299 - 650 = 5649$ euro.
 De jaarlijkse opbrengst in euro's is $2500 \cdot 0,225 = 562,50$.
 De terugverdientijd is $\frac{5649}{562,50} \approx 10,04$ jaar, dus in 2023 is het volledige aankoopbedrag terugverdiend.

- 3 a 125 slagen per minuut is $125 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 65\,700\,000$ slagen per jaar.
 De gemiddelde levensduur is $\frac{10^9}{6,57 \cdot 10^7} \approx 15$ jaar.
 b Er geldt $L = \frac{10^9}{H \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365} \approx \frac{1900}{H}$.
 Uit $L = \frac{1900}{H}$ volgt $H = \frac{1900}{L}$.

Bladzijde 144

- 4 a $k_z = at + 18$ met $a = \frac{\Delta k_z}{\Delta t} = \frac{8 - 18}{21 - 9} = -\frac{5}{6}$
 Dus $k_z = -\frac{5}{6}t + 18$.
 Los op $-0,31t + 10 = -\frac{5}{6}t + 18$
 $0,52... t = 8$
 $t \approx 15,3$
 Dus in het jaar $2009 + 15 = 2024$.

Bladzijde 145

- b Los op $k_m = 2 \cdot k_l$
 $0,28t + 4,3 = 2(-0,31t + 10)$
 $0,28t + 4,3 = -0,62t + 20$
 $0,9t = 15,7$
 $t \approx 17,4$
 Dus in het jaar $2009 + 17 = 2026$.
 c $TK = TE \cdot g_m = (23,4 - \frac{23,4}{41} \cdot j) \cdot (2,8j + 44,4)$
 $= 65,52j + 1038,96 - 1,598...j^2 - 25,340...j$
 $\approx 1,6j^2 + 40,2j + 1039,0$
 Dus $a = 1,6$, $b = 40,2$ en $c = 1039,0$.

Bladzijde 146

- 5 a Aflezen (2005, 30 000) en (2012, 27 000).
 In 7 jaar 3000 minder, dus in 1 jaar $\frac{3000}{7}$ minder.
 2020 is 8 jaar na 2012, dus in 2020 is het aantal $27\,000 - 8 \cdot \frac{3000}{7} \approx 24\,000$.

Bladzijde 147

- b In het voorjaar neemt het gewicht in 20 dagen ongeveer 46 gram toe, dat is gemiddeld 2,3 gram per dag.
 In het najaar neemt het gewicht gemiddeld 0,6 gram per dag toe (zie de tekst bij de lijn).
 Dus de gemiddelde toename in het voorjaar is $\frac{2,3}{0,6} \approx 3,8$ keer zo groot als in het najaar. Dus stelling I is niet waar.
 Uit de onderste figuur blijkt dat er in het voorjaar geen toename is van de hoeveelheid vet. Dus stelling II is waar.

- c Het lichaamsgewicht G in gram in het voorjaar is $G = at + 198$ met

$$a = \frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{244 - 198}{20} = 2,3.$$

Dus $G = 2,3t + 198$

De hoeveelheid vet in het voorjaar is steeds 16 gram, dus het vetpercentage is

$$P_{\text{voorjaar}} = \frac{16}{2,3t + 198} \times 100\% = \frac{1600}{2,3t + 198}.$$

Bladzijde 148

- 6 a Er gaan $\frac{35,5}{2,78} = 12,769...$ miljoen personen op vakantie.

De CVO-populatie is $\frac{12,769...}{0,807} = 15,8237...$ miljoen.

Afgerond op duizendtallen is dit 15 824 000.

Bladzijde 149

- b In 11 jaar $14400 - 11100 = 3300$ meer.

Dus in 1 jaar $\frac{3300}{11} = 300$ meer.

In 1985 is het $11100 - 5 \cdot 300 = 9600$.

Dus in 1985 waren er 9 600 000 buitenlandse vakanties.

- c Het totaal aantal vakanties is in 2002 en 2016 gelijk.

Het aantal buitenlandse vakanties is in 2016 groter dan in 2002.

Het percentage buitenlandse vakanties is dus toegenomen.

- d Het aantal binnenlandse vakanties is $BV = T - B$.

$$BV = T - B = -20,3t^2 + 951t + 24800 - (-10,1t^2 + 587t + 10200) = -10,2t^2 + 364t + 14600$$

Voer in $y_1 = -10,2x^2 + 364x + 14600$.

De optie maximum geeft $x = 17,84...$ en $y \approx 17847$.

Dus in het jaar $1990 + 18 = 2008$.

Bladzijde 150

- e Het aantal dagen per jaar dat een Nederlander gemiddeld op vakantie gaat is $D = A \cdot L$.

$$D = A \cdot L = (0,0136t + 2,43)(-0,024t + 9,3)$$

Los op $D = 25$.

Voer in $y_1 = (0,0136x + 2,43)(-0,024x + 9,3)$ en $y_2 = 25$.

De optie snijpunt geeft $x = 44,8...$

Dus vanaf het jaar $1990 + 40 = 2035$.

- 7 1 De toename van de gasproductie is $\frac{47 - 22}{22} \times 100\% \approx 114\%$.

De toename van het aantal aardbevingen is $\frac{31 - 3}{3} \times 100\% \approx 933\%$.

Dus bewering 1 is niet waar.

- 2 In 2003 daalde gasproductie, maar in 2004 steeg het aantal aardbevingen.

Dus bewering 2 is niet waar.

- 3 In de periode 2005-2011 is de gemiddelde toename $\frac{31 - 17}{6} \approx 2,3$ per jaar.

In de periode 1998-2004 is de gemiddelde toename $\frac{11 - 6}{6} \approx 0,8$ per jaar.

Dus bewering 3 is waar.

Bladzijde 151

- 8** De afwijkingen bij de leeftijden 1 jaar, 3 jaar en 13 jaar komen in aanmerking.

De afwijkingen zijn:

$$\text{bij 1 jaar } \frac{0,26}{76} \times 100\% \approx 0,342\%$$

$$\text{bij 3 jaar } \frac{0,22}{97} \times 100\% \approx 0,227\%$$

$$\text{bij 13 jaar } \frac{0,42}{162} \times 100\% \approx 0,259\%.$$

De relatieve afwijking is het grootst bij een leeftijd van 1 jaar.

15.2 Combinatoriek en rijen**Bladzijde 152**

- 9 a** De rechthoekjes kunnen verticaal OF horizontaal worden geplaatst.
Met twee vierkantjes kun je kiezen uit 6 kolommen en 3 rijen OF 4 rijen en 5 kolommen.
aantal = $6 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 38$.
Met drie vierkantjes kun je kiezen uit 6 kolommen en 2 rijen OF 4 rijen en 4 kolommen.
aantal = $6 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 28$.
Totaal aantal manieren is $38 + 28 = 66$.
- b** aantal = $\binom{12}{4} \cdot \binom{10}{3} = 7920$
- c** aantal = $4! \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920$
- d** aantal = $\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} \approx 1,17 \cdot 10^{10}$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{20!}{(5!)^4} \approx 1,17 \cdot 10^{10}$$

- e** aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 7741440$

- f** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $u_{18} \approx 10,015$ en $u_{18} \approx 9,389$.
Vanaf $n = 19$ geldt $k_n < 10$.

- g** $u_1 = \frac{a \cdot (-1)^0}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}$, dus $a = 5$ en $b = 2$.

$$S_n = S_{n-1} + \frac{5 \cdot (-1)^{n-1}}{2n} \text{ met } S_1 = \frac{5}{2}$$

Voer de rij en de somrij in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $S_{50} \approx 1,7081$.

- h** $P(n) = (3n+4)^2 = 9n^2 + 24n + 16$
 $P(n+1) = (3(n+1)+4)^2 = (3n+7)^2 = 9n^2 + 42n + 49$
 $P(n+1) - P(n) = 9n^2 + 42n + 49 - (9n^2 + 24n + 16)$
 $= 9n^2 + 42n + 49 - 9n^2 - 24n - 16$
 $= 18n + 33$

Dus $P(n+1) = P(n) + 18n + 33$ met $P(0) = 16$ en dus $a = 18$ en $b = 33$.

Bladzijde 153

- i** $a^9 = \frac{1}{20}$, dus $a = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 0,71687$

$$b = \frac{20-1}{10-1} = \frac{19}{9}$$

$$\text{Dus } l_n = 20 \cdot 0,71687^{n-1} \text{ en } L_n = 20 - \frac{19}{9}(n-1).$$

Voer in $y_1 = 20 - \frac{19}{9}(x-1) - 20 \cdot 0,71687^{x-1}$.

Tabel geeft bij $x = 3$ geldt $y = 5,4997\dots$, bij $x = 4$ geldt $y = 6,2986\dots$ en bij $x = 5$ geldt $y = 6,2736\dots$

Dus bij het 4^e vierkant is het verschil maximaal en dat verschil is ongeveer 6,30.

Bladzijde 158

10 a aantal = $\binom{14}{2} \cdot \binom{12}{5} = 72072$

b aantal = $5! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 7200$

11 a aantal = $10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 = 17\,576\,000 \approx 17\,600\,000$

b aantal = $99 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 10 - 99 \cdot 82 \cdot 10 = 3\,849\,120 - 81\,180 = 3\,767\,940$

Dat is $\frac{3\,767\,940}{17\,576\,000} \times 100\% \approx 21,4\%$, dus de verslaggever heeft geen gelijk.

Bladzijde 159

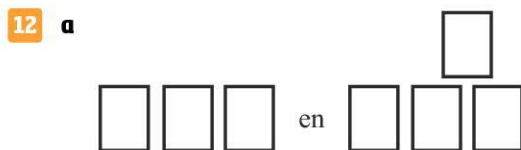
c In mei 2013 zijn er 30 000 nieuwe auto's verkocht.

Volgens het model is $A_2 = -375 \cdot 2 + 37\,250 = 36\,500$.

Het verschil is 6500, dat is $\frac{6500}{30\,000} \times 100\% \approx 22\%$.

d De recursieve formule is $A_n = A_{n-1} - 375$ met $A_0 = 37\,250$.

Bladzijde 160



Bladzijde 161

b Steeds 4 blikken op onderste laag.

2 ^e laag	3 ^e laag	4 ^e laag	aantal mogelijkheden
0	0	0	1
1	0	0	3
2	0	0	3
2	1	0	2
3	0	0	1
3	1	0	2
3	2	0	1
3	2	1	1
		totaal	<u>14</u> +

c $C_5 = C_0 \cdot C_4 + C_1 \cdot C_3 + C_2 \cdot C_2 + C_3 \cdot C_1 + C_4 \cdot C_0$

$C_5 = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1$

$C_5 = 14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42$

13 Het aantal mogelijkheden om de kaarten onder de vier spelers te verdelen is

$\binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} = 63\,063\,000$.

Dus $\frac{2,1 \cdot 10^{13}}{63\,063\,000} \approx 330\,000$ keer zo groot.

Bladzijde 162

14 a 1 vierkant van 1 bij 1, 1 vierkant van 3 bij 3 en 4 vierkanten van 2 bij 2, dus totaal

$1 + 1 + 4 = 6$ vierkanten.

4 rechthoeken van 2 bij 1

2 rechthoeken van 3 bij 1

4 rechthoeken van 3 bij 2

Totaal $6 + 4 + 2 + 4 = 16$ verschillende vormen.

- b** Er zijn $\frac{625-49}{4} = 144$ vormen per driehoekig deel.

De oppervlakte is $144 \cdot (9 + 3 + 3 + 1) = 2304 \text{ cm}^2$.

De 4 delen met elk 12 vormen hebben een oppervlakte van

$$12 \cdot (6 + 6 + 2 + 2) = 192 \text{ cm}^2.$$

De totale oppervlakte is $2304 + 192 + 4 = 2500 \text{ cm}^2$.

Bladzijde 163

c aantal = $\frac{24!}{(4!)^4 \cdot (2!)^4} \approx 1,1688 \cdot 10^{17}$

d $O(n) = 1 \cdot 4 + n \cdot (2 + 2 + 6 + 6) + \frac{1}{2}n \cdot (1 + 2n - 1) \cdot (1 + 3 + 3 + 9)$
 $= 4 + n \cdot 16 + \frac{1}{2}n \cdot 2n \cdot 16$
 $= 4 + 16n + 16n^2$
 $= 16n^2 + 16n + 4$

$$O(n) = (4n + 2)^2 = (4n + 2)(4n + 2) = 16n^2 + 8n + 8n + 4 = 16n^2 + 16n + 4$$

e $O(n) = (4n + 2)^2$ geeft $O(n + 1) = (4(n + 1) + 2)^2 = (4n + 4 + 2)^2 = (4n + 6)^2 = 16n^2 + 48n + 36$

$$\begin{aligned} \text{Dus } O(n + 1) - O(n) &= 16n^2 + 48n + 36 - (16n^2 + 16n + 4) \\ &= 16n^2 + 48n + 36 - 16n^2 - 16n - 4 \\ &= 32n + 32 \end{aligned}$$

Dus $O(n + 1) = O(n) + 32n + 32$ met $O(0) = 4$ en dus $a = 32$ en $b = 32$.

Bladzijde 164

15 a aantal = $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} = 1680$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{9!}{6^3} = 1680$$

b $r^9 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ geeft $r = (\frac{1}{5})^{\frac{1}{9}} \approx 0,836$

c $u_n = u_0 + v \cdot n = 20 + v \cdot n$, want $u_0 = 20$

$$u_9 = 4 \text{ geeft } 20 + 9v = 4$$

$$9v = -16$$

$$v \approx -1,78$$

d De directe formule van de meetkundige rij is $u_n = 20 \cdot 0,84^n$.

Voor het verschil geldt $V = 20 - 1,78n - 20 \cdot 0,84^n$.

Voer in $y_1 = 20 - 1,78x - 20 \cdot 0,84^x$.

De tabel geeft dat het maximale verschil is bij $x = 4$.

Dus bij achthoek 4 is het verschil maximaal.

Het maximale verschil is ongeveer 2,9 cm.

Bladzijde 165

16 a De formule geeft $f_1 + f_2 = 65 - A_2 = 65 - 65 \cdot 0,9439^2 = 7,088... \text{ cm}$.

De Regel van 18 geeft $f_1 + f_2 = \frac{1}{18} \cdot 65 + \frac{17}{18} \cdot \frac{1}{18} \cdot 65 = 7,021... \text{ cm}$.

Het verschil is $7,088... - 7,021... \approx 0,07 \text{ cm}$.

b Voer de formule $f_n = \frac{17}{18} \cdot f_{n-1}$ met $f_1 = \frac{1}{18} \cdot 65$ in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $f_{15} \approx 1,62$ en $f_{16} \approx 1,53$.

Dus vanaf fret 15.

Bladzijde 166

17 a Bij 9 termen geeft de rij $4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} = 3,252...$

$$3,252... - \pi = 0,110... > 0,1$$

$$\text{Bij 10 termen geeft de rij } 3,252... - \frac{4}{19} = 3,0418...$$

$$\pi - 3,0418... = 0,09975... < 0,1$$

Dus je hebt minimaal 10 termen nodig.

b $u_1 = 4$ geeft $\frac{a \cdot (-1)^0}{b \cdot 0 + 1} = 4$ oftewel $\frac{a}{1} = 4$, dus $a = 4$.

$$a = 4 \text{ en } u_2 = -\frac{4}{3} \text{ geeft } \frac{4 \cdot (-1)^1}{b \cdot 1 + 1} = -\frac{4}{3} \text{ oftewel } \frac{-4}{b+1} = -\frac{4}{3} \text{ en dit geeft } b+1 = 3,$$

dus $b = 2$.

c Voor $n = 2, 3, 4, \dots$ is $u_n = \sqrt{12} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1) \cdot 3^{n-1}}$.

Dus $S_n = S_{n-1} + \sqrt{12} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1) \cdot 3^{n-1}}$ met $S_1 = \sqrt{12}$.

15.3 Werken met formules

Bladzijde 167

18 a $K = \frac{A^3}{2000}$, oftewel $A^3 = 2000K$.

$K = 0,6$ geeft $A^3 = 2000 \cdot 0,6 = 1200$, dus $A = 10,626\dots$

$K = 0,8$ geeft $A^3 = 2000 \cdot 0,8 = 1600$, dus $A = 11,969\dots$

Dus K ligt tussen 0,6 en 0,8 voor A tussen 10,63 en 11,97.

b $\frac{1}{p} = \frac{2}{q} - \frac{3}{r} = \frac{2r-3q}{qr}$, dus $p = \frac{qr}{2r-3q}$.

c $E = 50 \cdot \left(\frac{x}{3,1}\right)^{1,15} = 50 \cdot \frac{x^{1,15}}{3,1^{1,15}} = \frac{50}{3,1^{1,15}} \cdot x^{1,15}$, invullen bij $F = \frac{E}{x}$ geeft

$F = \frac{50}{3,1^{1,15}} \cdot \frac{x^{1,15}}{x} = \frac{50}{3,1^{1,15}} \cdot x^{0,15}$.

Dus $a = \frac{50}{3,1^{1,15}} \approx 13,61$ en $b = 0,15$.

d $S = 16f^2$ geeft $f^2 = \frac{1}{16}S$, dus $f^3 = \left(\frac{1}{16}S\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot S^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{64} \cdot S^{1,5}$.

$f^3 = \frac{1}{64} \cdot S^{1,5}$ invullen bij $R = 512f^3$ geeft $R = 512 \cdot \frac{1}{64} \cdot S^{1,5} = 8S^{1,5}$.

$R = 8S^{1,5}$ invullen bij $P = \frac{Q}{R}$ geeft $P = \frac{Q}{8 \cdot S^{1,5}}$.

e $Z = \frac{t^3}{d}$ met $t = 60T$ en $d = 1000D$ geeft $Z = \frac{(60T)^3}{1000D} = \frac{60^3}{1000} \cdot \frac{T^3}{D} = 216 \cdot \frac{T^3}{D}$,

dus $c = 216$.

f In de formule $2p$ invullen voor p geeft

$A = B \cdot \left(\frac{2p}{q}\right)^{0,52} = B \cdot 2^{0,52} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{0,52} = 2^{0,52} \cdot B \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{0,52} \approx 1,434 \cdot B \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{0,52}$,

dus de toename is 43,4%.

g Als x afneemt, dan neemt $\frac{2}{x}$ toe, dus dan neemt $\frac{2}{x} + \frac{1}{2}$ toe, dus dan neemt $\frac{1}{y}$

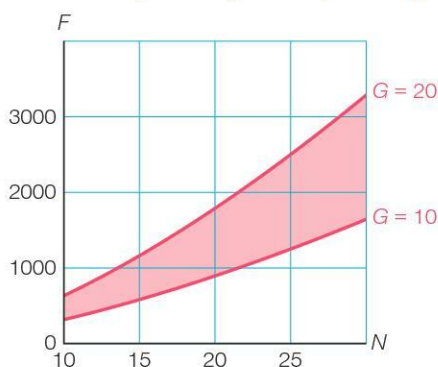
toe, dus dan neemt y af.

h $G = 10$ geeft $F = 10N\sqrt{N}$.

N	10	15	20	25	30
$10N\sqrt{N}$	316	581	894	1250	1643

$G = 20$ geeft $F = 20N\sqrt{N}$.

N	10	15	20	25	30
$20N\sqrt{N}$	632	1162	1789	2500	3286



Bladzijde 168

- 19 a** Voer in $y_1 = 5 + 4 \sin(\frac{1}{15}\pi(x-3))$ en $y_2 = 6$.
De optie snijpunt geeft $x = 4,206\dots$ en $x = 16,793\dots$
Dus over een afstand van $16,793\dots - 4,206\dots \approx 12,59$ meter.
- b** Voer in $y_1 = 1,5x + 3 + 0,4 \sin(\pi(x-1))$.
De optie $\frac{dy}{dx}$ geeft
voor $t = 2$ de groeisnelheid $0,2433\dots$
voor $t = 3$ de groeisnelheid $2,7566\dots$
Dus $\frac{2,7566\dots}{0,2433\dots} \approx 11,3$ keer zo groot.
- c** $a = \frac{-1+12}{2} = 5,5$
 $b = 12 - 5,5 = 6,5$
De periode is 12, dus $c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$
Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = \frac{0,5+6,5}{2} = 3,5$, dus $d = 3,5$.
- d** Omdat $44 - 30 = 14$ is $x_A = \frac{14}{2} = 7$.
Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{4} \cdot 44 = 11$.
De amplitude is gelijk aan de evenwichtsstand, dus stel de formule is
 $y = a + a \sin\left(\frac{2\pi}{44}(x-11)\right)$ oftewel $y = a + a \sin\left(\frac{1}{22}\pi(x-11)\right)$.
 $A(7, 5)$, dus los op $a + a \sin\left(\frac{1}{22}\pi(7-11)\right) = 5$.
Voer in $y_1 = x + x \sin(\frac{1}{22}\pi \cdot -4)$ en $y_2 = 5$.
De optie snijpunt geeft $x = 10,884\dots$
De formule is $y = 10,88 + 10,88 \sin(\frac{1}{22}\pi(x-11))$.

Bladzijde 175

- 20 a** Los op $22,5 + 10 \sin(0,0172(t-120)) > 30$.
Voer in $y_1 = 22,5 + 10 \sin(0,0172(x-120))$ en $y_2 = 30$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 169,3$ en $x \approx 253,3$, dus vanaf $t = 170$ tot en met $t = 253$.
Dat zijn 84 dagen.
- b** De formule is van de vorm $T_{\min} = a + b \sin(0,0172(t-120))$.
 $a = \frac{6+22}{2} = 14$ en $b = 22 - 18 = 8$
Dus $T_{\min} = 14 + 8 \sin(0,0172(x-120))$.

Bladzijde 176

- 21 a** 4 minuten en 52 seconden is 292 seconden, dus $T_1 = 292$.
 $T_2 = 292 \cdot \left(\frac{10000}{1500}\right)^{1,07} \approx 2223$
Dus de te verwachten tijd is 37 minuten en 3 seconden.
- b** D_1 en D_2 zijn de afstanden in km.
 $\frac{D_2}{D_1} = \frac{0,001d_2}{0,001d_1} = \frac{d_2}{d_1}$, dus de breuk blijft even groot.
- c** De gemiddelde snelheid bij afstand d_1 is $\frac{d_1}{T_1}$ m/s.
Neem $d_2 = 2d_1$. Dit geeft $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{2d_1}{d_1}\right)^{1,07} = T_1 \cdot 2^{1,07}$.
De gemiddelde snelheid is nu $\frac{d_2}{T_2} = \frac{2d_1}{T_1 \cdot 2^{1,07}} = \frac{2}{2^{1,07}} \cdot \frac{d_1}{T_1}$ m/s.
Omdat $\frac{2}{2^{1,07}} \approx 0,953$ is het gevraagde percentage 4,7%.

$$\begin{aligned} \text{d } T &= 206 \cdot \left(\frac{d}{1,5}\right)^{1,07} = 206 \cdot \frac{d^{1,07}}{1,5^{1,07}} = \frac{206}{1,5^{1,07}} \cdot d^{1,07} \text{ invullen in } K = \frac{T}{d} \text{ geeft} \\ K &= \frac{206}{1,5^{1,07}} \cdot \frac{d^{1,07}}{d} = \frac{206}{1,5^{1,07}} \cdot d^{0,07}. \\ \text{Dus } p &= \frac{206}{1,5^{1,07}} \approx 133,49 \text{ en } q = 0,07. \end{aligned}$$

Bladzijde 177

- e 6 minuten en 3,32 seconden is 363,32 seconden, dus $T_1 = 363,32$.
 12 minuten en 36,30 seconden is 756,30 seconden, dus $T_2 = 756,30$.
 $\frac{d_2}{d_1} = \frac{10000}{5000} = 2$
 Dus los op $363,32 \cdot 2^a = 756,30$.
 Voer in $y_1 = 363,32 \cdot 2^x$ en $y_2 = 756,30$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 1,058$, dus $a = 1,058$.

22 Voor een bol geldt $A = 12,57r^2$, dus $r^2 = \frac{A}{12,57} \approx 0,08A$ en $r = \sqrt{0,08A}$.

Dus de inhoud van een bol is $4,19r^3 = 4,19 \cdot (\sqrt{0,08A})^3$.

Dit geeft $E = \frac{V}{4,19 \cdot (\sqrt{0,08A})^3}$.

Bladzijde 178

- 23 a Los op $7 + 7 \sin\left(\frac{2\pi}{60}(x - 15)\right) = 4,5$.
 Voer in $y_1 = 7 + 7 \sin\left(\frac{1}{30}\pi(x - 15)\right)$ en $y_2 = 4,5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 11,5125\dots$ en $x = 48,4874\dots$
 De gevraagde lengte is $48,4874\dots - 11,5125\dots \approx 36,97$ m.
- b $a = \frac{12,5}{2} = 6,25$
 $c = \frac{2\pi}{51}$
 $d = 60 + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 60 + \frac{1}{4} \cdot 51 = 72,75$

Bladzijde 179

- c De formule is van de vorm $h = a + a \sin\left(\frac{2\pi}{39}\left(x - \frac{1}{4} \cdot 39\right)\right)$.
 $39 - 24 = 15$ en $\frac{15}{2} = 7,5$, dus voor $x = 7,5$ is $h = 4,5$.
 Los op $a + a \sin\left(\frac{2\pi}{39}(7,5 - 9,75)\right) = 4,5$.
 Voer in $y_1 = x + x \sin\left(\frac{2\pi}{39} \cdot -2,25\right)$ en $y_2 = 4,5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 6,97\dots$
 $2 \cdot 6,97\dots = 13,94\dots$, dus de hoogte moet minimaal 14,0 m zijn.

- 24 a $a = 4$ en $b = 2,5$ invullen geeft $\frac{1}{c} = \frac{1}{2,5} - \frac{1}{4} = \frac{8}{20} - \frac{5}{20} = \frac{3}{20}$.
 Uit $\frac{1}{c} = \frac{3}{20}$ volgt $c = \frac{20}{3}$.
 Dus de gevraagde straal is $\frac{20}{3}$ cm $\approx 6,7$ cm.
- b $a = 3$, dus de formule is $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{3}$.
 Als b afneemt, dan neemt $\frac{1}{b}$ toe dus dan neemt $\frac{1}{b} - \frac{1}{3}$ toe.
 Dus $\frac{1}{c}$ neemt toe en daarom neemt c af.

c $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{a-b}{ab}$ en dit geeft $c = \frac{a-b}{ab}$.

Bladzijde 180

25 a $a = \text{evenwichtsstand} = \frac{0,3 + 2,1}{2} = 1,2$

$b = \text{amplitude} = 2,1 - 1,2 = 0,9$

De periode is 1 jaar, dus $c = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

Het maximum treedt op voor $t = 0,25$, dus de grafiek van G gaat stijgend door de evenwichtsstand voor $t = 0,25 - \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 0,25 - \frac{1}{4} \cdot 1 = 0$, dus $d = 0$.

b Los op $1,2t + 0,14 + 0,14 \sin(2\pi(t - 0,25)) = 5$.

Voer in $y_1 = 1,2x + 0,14 + 0,14 \sin(2\pi(x - 0,25))$ en $y_2 = 5$.

De optie snijpunt geeft $t = 4,12\dots$

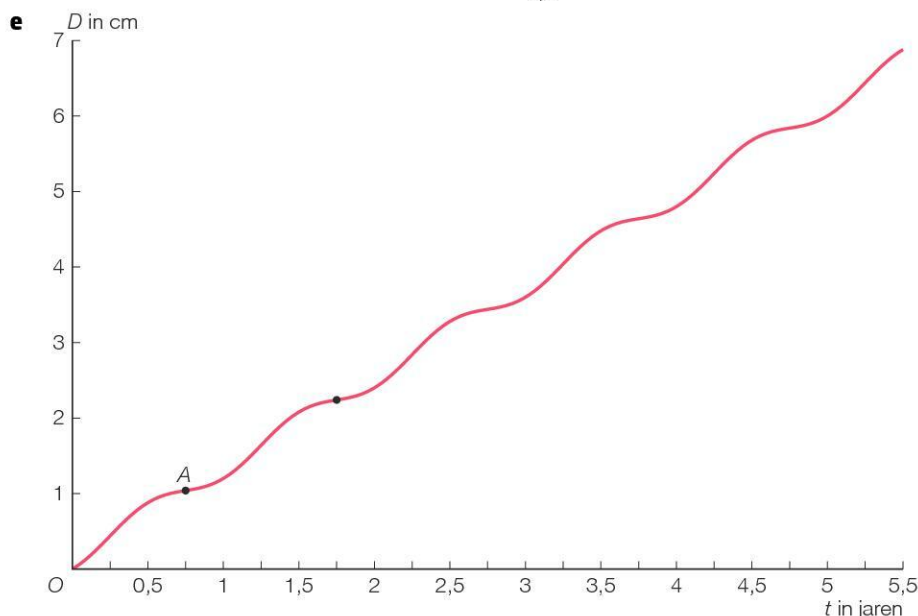
Dus na 4 jaar en $0,12\dots \cdot 12 \approx 2$ maanden.

Bladzijde 181

c De afwijking is $0,14 \sin(2\pi(t - 0,25))$ en dit is maximaal 0,14 cm (de amplitude).

d $t = 0,5$ geeft $D = 0,88$ en $t = 1$ geeft $D = 1,2$.

De groei in het eerste helft van het jaar is $\frac{0,88}{1,2} \times 100\% \approx 73\%$ van de jaarlijkse groei.



De optie $\frac{dy}{dx}$ voor $t = 0,75$ bij de formule voor D geeft een minimale groeisnelheid van 0,32 cm/jaar.

Bladzijde 182

26 a $L = 15$ en $R = 0,18$ geeft $\frac{G}{15^3} = 0,18$, dus $G = 607,5$.

$L = 15$ en $R = 0,22$ geeft $\frac{G}{15^3} = 0,22$, dus $G = 742,5$.

Dus tussen 607 en 743 gram.

b Bij meten over het schild heen is L groter.

Als L groter is, dan is L^3 groter, dus dan is $\frac{G}{L^3}$ kleiner.

Dus de Jackson Ratio is dan kleiner dan in werkelijkheid.

c Bij $W = 1$ hoort $G = 454$, dus $G = 454W$.

Bij $l = 1$ hoort $L = 2,54$, dus $L = 2,54l$.

In de formule invullen geeft $R = \frac{454W}{(2,54l)^3} = \frac{454}{2,54^3} \cdot \frac{W}{l^3}$.

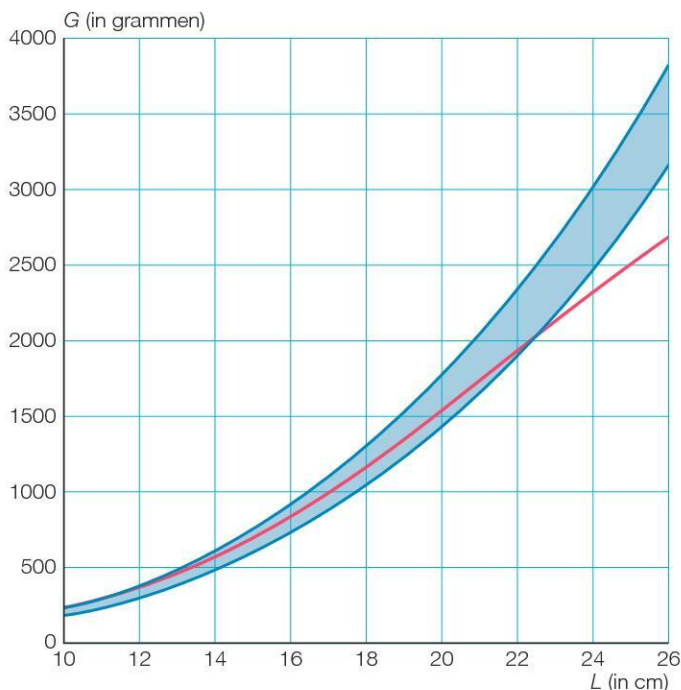
Dus $c = \frac{454}{2,54^3} \approx 27,7$.

Bladzijde 183

d Uit $R = \frac{G}{L^3}$ volgt $G = R \cdot L^3$.

$R = 0,18$ geeft $G = 0,18L^3$ en $R = 0,22$ en $G = 0,22L^3$.

L	10	14	18	22	24	26
$G = 0,18L^3$	180	494	1050	1917	2488	3164
$G = 0,22L^3$	220	604	1283	2343	3041	3867



15.4 Formules met exponenten en logaritmen

Bladzijde 184

27 a $g^7 = \frac{41}{128}$ dus $g = \left(\frac{41}{128}\right)^{\frac{1}{7}} = 0,849\dots$

$$\left. \begin{array}{l} F = b \cdot 0,849\dots^K \\ K = 10 \text{ en } F = 128 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,849\dots^{10} = 128 \\ b = \frac{128}{0,849\dots^{10}} \approx 651 \end{array}$$

Dus $b = 651$ en $g = 0,85$.

b $H = 1$ en $D = 12,3$ invullen in $D = a \cdot H^b$ geeft $a \cdot 1^b = 12,3$, oftewel $a \cdot 1 = 12,3$, dus $a = 12,3$.

$H = 150$ en $D = 600$ invullen in $D = 12,3 \cdot H^b$ geeft $12,3 \cdot 150^b = 600$.

Voer in $y_1 = 12,3 \cdot 150^x$ en $y_2 = 600$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,7758\dots$, dus $b \approx 0,776$.

c Neem $10A$ voor A in de formule $B = 5 \cdot A^{0,8}$.

Je krijgt $B = 5 \cdot (10A)^{0,8} = 5 \cdot 10^{0,8} \cdot A^{0,8} = 10^{0,8} \cdot 5 \cdot A^{0,8}$.

Omdat $10^{0,8} \approx 6,3$ is de bewering niet waar.

d $e^{0,15x} = (e^{0,15})^x \approx 1,16^x$

Als x toeneemt, dan neemt $e^{0,15x}$ toe, dus dan neemt $2 + e^{0,15x}$ toe,

dus dan neemt $\frac{85}{2 + e^{0,15x}}$ af en dan neemt $85 - \frac{85}{2 + e^{0,15x}}$ toe.

Dus R neemt toe als x toeneemt.

e $e^{0,44x} = (e^{0,44})^x \approx 1,55^x$

Als x heel erg negatief is, dan is $e^{0,44x} \approx 0$, dus dan is $2 + e^{0,44x} \approx 2 + 0 = 2$ en dan is

$$Z \approx 1200 - \frac{1200}{2} = 600.$$

Als x heel groot is, dan is $e^{0,44x}$ heel groot, dus dan is $\frac{1200}{2 + e^{0,44x}} \approx 0$ en dan is $Z \approx 1200 - 0 = 1200$.

Dus Z kan tussen 600 en 1200 liggen.

f $0,6^{0,4t} = (0,6^{0,4})^t \approx 0,815^t$

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,6^{0,4t}$ tot 0, dus dan nadert $43 - 43 \cdot 0,6^{0,4t}$ tot $43 - 0 = 43$.

De grenswaarde van E is 43.

g Als t heel groot wordt, dan nadert $0,83^t$ tot 0, dus dan nadert $75 - 20 \cdot 0,83^t$ tot $75 - 0 = 75$, dus de grenswaarde is 75.

Los op $75 - 20 \cdot 0,83^t = 70$.

Voer in $y_1 = 75 - 20 \cdot 0,83^x$ en $y_2 = 70$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 7,4$, dus voor $t = 7,4$ is de hoogte van de plant 5 cm van de grenswaarde verwijderd.

h $S_p = \frac{A}{3^{\frac{p}{16}}} = A \cdot 3^{-\frac{p}{16}} = A \cdot (3^{-\frac{1}{16}})^p \approx A \cdot 0,934^p$

Dus $g = 0,934$.

i $Z = 750 \cdot 0,92^P$

$$\log(Z) = \log(750 \cdot 0,92^P) = \log(750) + \log(0,92^P) = \log(750) + P \cdot \log(0,92)$$

$$P \cdot \log(0,92) = \log(Z) - \log(750)$$

$$P = \frac{1}{\log(0,92)} \cdot \log(Z) - \frac{\log(750)}{\log(0,92)}$$

$$P \approx -27,6 \cdot \log(Z) + 79,4$$

$$\text{Dus } P = -27,6 \cdot \log(Z) + 79,4.$$

j $V = 12,8 \cdot W^{0,78}$

$$\log(V) = \log(12,8 \cdot W^{0,78})$$

$$\log(V) = \log(12,8) + \log(W^{0,78})$$

$$\log(V) = \log(12,8) + 0,78 \cdot \log(W)$$

$$\log(V) \approx 1,11 + 0,78 \cdot \log(W)$$

$$\text{Dus } \log(V) = 1,11 + 0,78 \cdot \log(W).$$

k $Z = 10^{3,14-5Q}$

$$3,14 - 5Q = \log(Z)$$

$$-5Q = -3,14 + \log(Z)$$

$$Q = 0,628 - 0,2 \cdot \log(Z)$$

$$\text{Dus } a = 0,628 \text{ en } b = -0,2.$$

l $G = 1,15 \cdot e^{0,95 \cdot t}$

$$e^{0,95 \cdot t} = \frac{1}{1,15} \cdot G$$

$$0,95 \cdot t = \ln\left(\frac{1}{1,15} \cdot G\right)$$

$$t = \frac{1}{0,95} \ln\left(\frac{1}{1,15} \cdot G\right)$$

m Neem $10n$ voor n in de formule $M = 1,8 \cdot {}^2\log(n)$.

$$\text{Je krijgt } M = 1,8 \cdot {}^2\log(10n) = 1,8 \cdot ({}^2\log(10) + {}^2\log(n)) = 1,8 \cdot {}^2\log(10) + 1,8 \cdot {}^2\log(n) \approx 6 + 1,8 \cdot {}^2\log(n).$$

Dus M neemt dan met 6 toe.

Bladzijde 185

n Bij 1 januari 2017 hoort $t = 7$.

Bij $t = 7$ hoort $N_1 = 29$ en $N_2 = 14$.

Dus $\frac{29}{14} \approx 2,1$ keer zo groot.

o De grafiek van N_2 is 3 naar rechts verschoven ten opzichte van de grafiek van N_1 , dus vervang t door $t - 3$.

Dus de formule $N_2 = 5 \cdot e^{0,25(t-3)}$ is juist.

Bladzijde 192

28 De opbrengst in het eerste jaar is $1750 \cdot 0,225 = 393,75$ euro, dus $a = 393,75$.

Bij een toename van 5% per jaar hoort groeifactor 1,05 per jaar, dus $b = 1,05$.

Bladzijde 193

- 29 a** Bij $L = 60$ hoort $H = 25$ en bij $L = 3$ hoort $H = 450$, dus $g_{57 \text{ jaar}} = \frac{25}{450}$ en dit geeft

$$g_{\text{jaar}} = \left(\frac{25}{450}\right)^{\frac{1}{57}} = 0,9505\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} H = b \cdot 0,9505\dots^L \\ L = 60 \text{ en } H = 25 \end{array} \right\} b \cdot 0,9505\dots^{60} = 25$$

$$b = \frac{25}{0,9505\dots^{60}} \approx 524$$

Dus $g = 0,951$ en $b = 524$.

- b** $H = 520 \cdot 0,95^L$
 $520 \cdot 0,95^L = H$
 $\log(520 \cdot 0,95^L) = \log(H)$
 $\log(520) + \log(0,95^L) = \log(H)$
 $L \cdot \log(0,95) = \log(H) - \log(520)$
 $L = \frac{1}{\log(0,95)} \cdot \log(H) - \frac{\log(520)}{\log(0,95)}$
 $L \approx -44,89 \cdot \log(H) + 121,92$
 Dus $L = -44,89 \cdot \log(H) + 121,92$.

Bladzijde 194

- 30 a** $A_6 = L - 20$ invullen in $A_n = L \cdot 0,9439^n$ geeft

$$L - 20 = L \cdot 0,9439^6$$

$$L - L \cdot 0,9439^6 = 20$$

$$L(1 - 0,9439^6) = 20$$

$$L = \frac{20}{1 - 0,9439^6} \approx 68$$

Dus de lengte van een snaar is 68 cm.

- b** Bij $n = 12$ hoort groeifactor $\frac{1}{2}$, dus $g^{12} = \frac{1}{2}$.

Dit geeft $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}} \approx 0,94387$.

Bladzijde 195

- c** $A_n = \frac{L}{2^{\frac{n}{12}}} = L \cdot 2^{-\frac{n}{12}} = L \cdot (2^{-\frac{1}{12}})^n = L \cdot 0,9439^n$

- 31 a** $t = 3,5$ en $w = 0$ geeft $D = 40,079\dots$

$$w = 20 \text{ en } D = 40,079\dots \text{ geeft } \frac{110}{1 + e^{0,159(\sqrt{20}-t)}} = 40,079\dots$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{110}{1 + e^{0,159(\sqrt{20}-x)}} \text{ en } y_2 = 40,079\dots$$

De optie snijpunt geeft $x = 7,97\dots$, dus $8,0 - 3,5 = 4,5^\circ\text{C}$ warmer.

- b** Als w toeneemt, dan neemt $\sqrt{w} - t$ toe, dus dan neemt $1 + e^{0,159(\sqrt{w}-t)}$ toe en dan

$$\text{neemt } \frac{110}{1 + e^{0,159(\sqrt{w}-t)}} \text{ af, dus dan neemt } D = 110 - \frac{110}{1 + e^{0,159(\sqrt{w}-t)}} \text{ toe.}$$

- c** De waarde van D hangt af van $x = \sqrt{w} - t$ en $e^{0,159x} = (e^{0,159})^x \approx 1,17^x$.

Als x heel groot wordt, dan is $e^{0,159x}$ heel groot, dus dan is $\frac{110}{1 + e^{0,159x}} \approx 0$ en dan is

$$D \approx 110 - 0 = 110.$$

Als x heel erg negatief wordt, dan nadert $e^{0,159x}$ tot 0, dus dan wordt

$$\frac{110}{1 + e^{0,159x}} \approx \frac{110}{1 + 0} = 110, \text{ dus dan is } D \approx 110 - 110 = 0.$$

Dus D kan liggen tussen 0 en 110.

d $w = 0$ en $D = 8$ geeft $110 - \frac{110}{1 + e^{0,159 \cdot -t}} = 8$.

Voer in $y_1 = 110 - \frac{110}{1 + e^{-0,159x}}$ en $y_2 = 8$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 16$, dus de temperatuur is 16°C .

$t = 16$ en $D = 17$ geeft $110 - \frac{110}{1 + e^{0,159(\sqrt{w}-16)}} = 17$.

Voer in $y_1 = 110 - \frac{110}{1 + e^{0,159(\sqrt{x}-16)}}$ en $y_2 = 17$.

De optie snijpunt geeft $x = 28$, dus de windsnelheid is 28 km/uur .

Bladzijde 196

- 32 a** Per jaar komen er $365 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 25 = 1\,314\,000$ bitcoins bij.

Na 1 januari 2014 duurt het nog $\frac{18 - 12,2}{1,314} \approx 4,4$ jaar.

Dus in het jaar $2014 + 4 = 2018$.

- b** $B = 25 \cdot (\frac{1}{4})^t$ met t in viertallen jaren en $t = 0$ in 2013.

$t = 4$ geeft $B = 1,5625$ en $t = 5$ geeft $B = 0,9765625$.

Dus vanaf $2013 + 5 \cdot 4 = 2033$.

- c** Er geldt $0,5^{0,25t} = (0,5^{0,25})^t \approx 0,84^t$.

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,5^{0,25t}$ tot 0.

De grenswaarde van C is $21 - 21 \cdot 0 = 21$ miljoen.

Bladzijde 197

d $D = 3,65 \cdot e^{0,533t}$

$e^{0,533t} = \frac{1}{3,65} \cdot D$

$0,533t = \ln(\frac{1}{3,65} \cdot D)$

$t = \frac{1}{0,533} \cdot \ln(\frac{1}{3,65} \cdot D)$

- 33 a** $G = 1$ en $E = 3,27$ invullen in $E = a \cdot G^b$ geeft $a \cdot 1^b = 3,27$, dus $a \cdot 1 = 3,27$ oftewel $a = 3,27$.

$G = 1000$ en $E = 520$ invullen in $E = 3,27 \cdot G^b$ geeft $3,27 \cdot 1000^b = 520$.

Voer in $y_1 = 3,27 \cdot 1000^x$ en $y_2 = 520$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,734$, dus $b = 0,734$.

- b** I Neem $10G$ voor G in de formule $E = 3,3 \cdot G^{0,73}$.

Je krijgt $E = 3,3 \cdot (10G)^{0,73} = 3,3 \cdot 10^{0,73} \cdot G^{0,73} = 10^{0,73} \cdot 3,3 \cdot G^{0,73}$.

Omdat $10^{0,73} \approx 5,4$ is stelling I niet waar.

II Voor de kat geldt $G = 3$ en $E = 7$ en voor het schaap geldt $G = 50$ en $E = 60$.

De kat verbruikt $\frac{7}{3} \approx 2,3$ watt per kg en het schaap verbruikt $\frac{60}{50} = 1,2$ watt per kg,

dus stelling II is niet waar.

- c** $E = 3,3 \cdot G^{0,73}$ geeft $\log(E) = \log(3,3 \cdot G^{0,73})$

$\log(E) = \log(3,3) + \log(G^{0,73})$

$\log(E) = \log(3,3) + 0,73 \cdot \log(G)$

$\log(E) \approx 0,52 + 0,73 \cdot \log(G)$

Dus $p = 0,52$ en $q = 0,73$.

Bladzijde 198

- 34 a** Het werkelijke aantal klanten is $34\,000$.

De formule geeft $N = 4500 \cdot e^{0,0463 \cdot 42} \approx 31\,500$.

Het verschil is 2500 .

Bladzijde 199

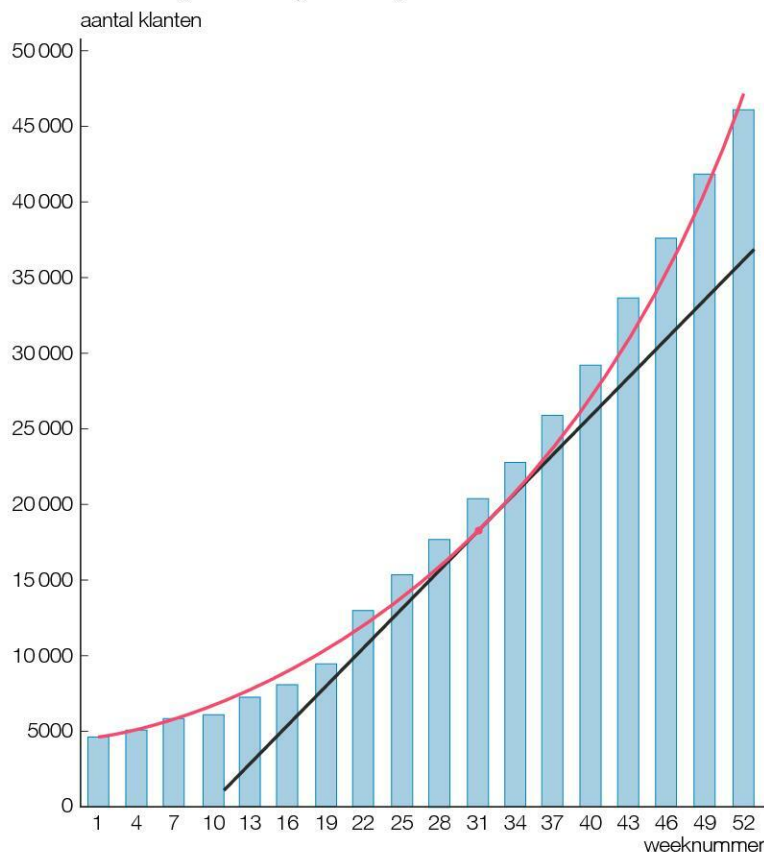
- b** Los op $e^{0,0463t} = 10$

$0,0463t = \ln(10)$

$t \approx 49,7$

Dus 50 weken.

- c** Teken de raaklijn aan de grafiek bij weeknummer 31.



De helling van de raaklijn is $\frac{3500 - 0}{52 - 10} \approx 800$.

Dus de snelheid is 800 klanten per week.

d $N = 4500 \cdot e^{0,0463 \cdot t}$

$$e^{0,0463 \cdot t} = \frac{1}{4500} \cdot N$$

$$0,0463 \cdot t = \ln\left(\frac{1}{4500} \cdot N\right)$$

$$t = \frac{1}{0,0463} \cdot \ln\left(\frac{1}{4500} \cdot N\right)$$

Dus $a = \frac{1}{0,0463} \approx 21,60$ en $b = \frac{1}{4500} \approx 0,00022$.

35 a Voor bos A geldt $H = -(0,7 \ln(0,7) + 0,3 \ln(0,3)) \approx 0,611$.

Voor bos B geldt $H = -(0,9 \ln(0,9) + 0,1 \ln(0,1)) \approx 0,325$.

Dus de Shannon-index van bos A is het grootst.

- b** Als het aandeel eiken kleiner wordt, dan nadert p tot 0.

$p = 0,1$ geeft $H \approx 0,325$.

$p = 0,01$ geeft $H \approx 0,056$.

$p = 0,001$ geeft $H \approx 0,008$.

Dus dan nadert de Shannon-index tot 0.

Bladzijde 200

- 36 a** Lees af: in augustus 2021 ($t = 220$) is het aantal aardbevingen met magnitude $\geq 2,0$ ongeveer 65 en het aantal aardbevingen met magnitude $\geq 2,5$ ongeveer 22.

Dat is dus $\frac{22}{65} \times 100\% \approx 34\%$.

Bladzijde 201

- b** De grafiek van $A_{1,5} = 12 \cdot e^{0,013t}$ wordt 85 naar rechts verschoven, dus vervang t door $t - 85$ in deze formule.

Dit geeft $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013(t-85)}$, dus formule B is juist.

- c** $M = 1,0$ en $N = 10$ geeft $10^{a-1} = 10$ oftewel $10^{a-1} = 10^1$ en dit geeft $a - 1 = 1$, dus $a = 2$.

- d** $N = 10^{2-M}$
 $2 - M = \log(N)$
 $-M = -2 + \log(N)$
 $M = 2 - \log(N)$
Dus $p = 2$ en $q = -1$.

Bladzijde 202

- 37 a** De bankenformule geeft $T = \frac{70}{1,00} \approx 70$ jaar.
Los op $\frac{72}{p} = 70$.
Dit geeft $p = \frac{72}{70} \approx 1,03$, dus 1,03%.
- b** Verschil 1 maand = $\frac{1}{12}$ jaar geeft $\frac{72}{p} - \frac{70}{p} = \frac{1}{12}$, dus $\frac{2}{p} = \frac{1}{12}$ en dit geeft $p = 24$.
Dus vanaf een rentepercentage van 24%.
- c** $p = 1,10$ geeft bij de bankenformule $\frac{70}{1,10} = 63,636\ldots$ jaar.
 $p = 1,10$ in de formule $(1 + 0,01p)^T = 2$ geeft $(1 + 0,01 \cdot 1,10)^T = 2$ oftewel $1,011^T = 2$.
Voer in $y_1 = 1,011^x$ en $y_2 = 2$.
De optie snijpunt geeft $x = 63,359\ldots$, dus een verdubbelingstijd van 63,359... jaar.
Het verschil is $63,636\ldots - 63,359\ldots = 0,277$ jaar ≈ 3 maanden.

Bladzijde 203

- d** $\ln((1 + 0,01p)^T) = \ln(2)$ geeft $T \cdot \ln(1 + 0,01p) = \ln(2)$.
 $\ln(1 + 0,01p)$ vervangen door $0,01p$ geeft $T \cdot 0,01p = \ln(2)$, dus $T = \frac{\ln(2)}{0,01p} \approx \frac{69,3}{p}$.
Dus $c \approx 69,3$ en dit is lager dan $c = 70$.
- 38 a** $n = 108$ geeft $A = 1,5 \cdot {}^2\log(108) = 10,13\ldots$
Dus minstens 11 keer schudden.
- b** Neem $4n$ voor n in de formule van A .
Je krijgt $A = 1,5 \cdot {}^2\log(4n) = 1,5 \cdot ({}^2\log(4) + {}^2\log(n))$
 $= 1,5 \cdot {}^2\log(4) + 1,5 \cdot {}^2\log(n) = 1,5 \cdot 2 + 1,5 \cdot {}^2\log(n) = 3 + A$.
Dus als n vier keer zo groot wordt, dan wordt er bij A drie opgeteld.

15.5 Differentiaalrekening

Bladzijde 204

- 39 a** $I = (40 - 2h)(30 - h)h = h(1200 - 100h + 2h^2) = 2h^3 - 100h^2 + 1200h$
 $\frac{dI}{dh} = 6h^2 - 200h + 1200$
 $\frac{dI}{dh} = 0$ geeft $6h^2 - 200h + 1200 = 0$.
Voer in $y_1 = 6x^2 - 200x + 1200$.
De optie nulpunt geeft $x = 7,847\ldots$ en $x = 25,485\ldots$
 $x = 25,485\ldots$ voldoet niet, dus bij een hoogte van 7,85 cm is de inhoud maximaal.
- b** $P_n = 0,85 \cdot e^{1,4n} \cdot n^{-1,6}$ geeft
 $P_n' = 0,85 \cdot e^{1,4 \cdot n} \cdot 1,4 \cdot n^{-1,6} + 0,85 \cdot e^{1,4 \cdot n} \cdot -1,6 \cdot n^{-2,6}$
 $= 1,19 \cdot e^{1,4 \cdot n} \cdot n^{-1,6} - 1,36 \cdot e^{1,4 \cdot n} \cdot n^{-2,6}$
- c** $V = \frac{25x + 240}{18x}$ geeft $\frac{dV}{dx} = \frac{18x \cdot 25 - (25x + 240) \cdot 18}{(18x)^2} = \frac{450x - 450x - 4320}{(18x)^2} = \frac{-4320}{(18x)^2}$.
Van $\frac{dV}{dx}$ is de teller negatief en de noemer positief, dus $\frac{dV}{dx} < 0$.
Uit $\frac{dV}{dx} < 0$ volgt dat V daalt als x toeneemt.

d $W = \frac{650}{K} = 650K^{-1}$ geeft $\frac{dW}{dK} = -650K^{-2} = -\frac{650}{K^2}$

Van $\frac{dW}{dK}$ is de teller negatief en de noemer positief, dus $\frac{dW}{dK}$ is negatief en dus is W dalend.

Als K toeneemt, dan neemt K^2 toe, dus dan neemt $\frac{650}{K^2}$ af en dan neemt $-\frac{650}{K^2}$

toe, dus $\frac{dW}{dK}$ neemt toe.

Dus W is afnemend dalend.

e $Q = \frac{4500 + 50t}{306 + 0,4t}$ geeft

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{(306 + 0,4t) \cdot 50 - (4500 + 50t) \cdot 0,4}{(306 + 0,4t)^2} = \frac{15300 + 20t - 1800 - 20t}{(306 + 0,4t)^2} = \frac{13500}{(306 + 0,4t)^2}$$

Van $\frac{dQ}{dt}$ is de teller positief en de noemer positief, dus $\frac{dQ}{dt}$ is positief en dus is

Q stijgend.

Als t toeneemt, dan blijft de teller 13 500 gelijk en neemt de noemer $(306 + 0,4t)^2$ toe,

dus $\frac{dQ}{dt}$ neemt af.

Dus Q is afnemend stijgend.

f $k = \frac{5a}{5-a}$ geeft $\frac{dk}{da} = \frac{(5-a) \cdot 5 - 5a \cdot -1}{(5-a)^2} = \frac{25 - 5a + 5a}{(5-a)^2} = \frac{25}{(5-a)^2}$

Van $\frac{dk}{da}$ is de teller positief en de noemer positief, dus $\frac{dk}{da}$ is positief dus is k stijgend.

k is stijgend, dus als a groter wordt, dan wordt k groter.

Dat betekent dat k afneemt als a kleiner wordt.

g $B(x) = 2,5x + 8000 \cdot \frac{600 - 4x}{500 + x}$ geeft $B'(x) = 2,5 + 8000 \cdot \frac{(500 + x) \cdot -4 - (600 - 4x) \cdot 1}{(500 + x)^2}$

$$= 2,5 + 8000 \cdot \frac{-2000 - 4x - 600 + 4x}{(500 + x)^2}$$

$$= 2,5 + 8000 \cdot \frac{-2600}{(500 + x)^2} = 2,5 - \frac{2,08 \cdot 10^7}{(500 + x)^2}$$



De grafiek van B' blijft onder de x -as dus B is dalend.

h $P = 7,5 \cdot Q^{0,96}$ geeft $\frac{dP}{dQ} = 7,5 \cdot 0,96 \cdot Q^{-0,04} = 7,2 \cdot Q^{-0,04}$

Als Q toeneemt, dan neemt $Q^{-0,04}$ af, dus $\frac{dP}{dQ}$ neemt af.

Dus P is afnemend stijgend.

i $F = 4,88 \cdot e^{0,615 \cdot t}$ geeft $\frac{dF}{dt} = 4,88 \cdot e^{0,615 \cdot t} \cdot 0,615 = 3,0012 \cdot e^{0,615 \cdot t}$

Omdat $e^{0,615 \cdot t}$ positief is, is $\frac{dF}{dt}$ positief, dus de grafiek van F is stijgend.

Er geldt $e^{0,615 \cdot t} = (e^{0,615})^t \approx 1,85^t$.

Als t toeneemt, dan neemt $e^{0,615 \cdot t}$ toe, dus dan neemt ook $\frac{dF}{dt}$ toe.

De grafiek van F is dus toenemend stijgend.

j $Q = 2,6 \cdot {}^2\log(p)$ geeft $\frac{dQ}{dp} = 2,6 \cdot \frac{1}{p \cdot \ln(2)} = \frac{2,6}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{p} \approx \frac{3,75}{p}$.

Omdat $p > 0$ is, is $\frac{3,75}{p}$ positief, dus Q is stijgend.

Als p toeneemt, dan neemt $\frac{3,75}{p}$ af, dus $\frac{dQ}{dp}$ neemt af.

Dus Q is afnemend stijgend.

Bladzijde 205

k $H = 75 - 20 \cdot 0,83^t$ geeft $\frac{dH}{dt} = 0 - 20 \cdot 0,83^t \cdot \ln(0,83) = 3,72... \cdot 0,83^t$.

Bij halverwege 2022 hoort $t = 2,5$.

$t = 2,5$ geeft $\frac{dH}{dt} = 3,72... \cdot 0,83^{2,5} \approx 2,34$

De groeisnelheid is 2,34 cm/jaar.

l $L = \frac{125}{1 + e^{5-1,1t}}$ geeft $\frac{dL}{dt} = \frac{(1 + e^{5-1,1t}) \cdot 0 - 125 \cdot e^{5-1,1t} \cdot -1,1}{(1 + e^{5-1,1t})^2} = \frac{137,5 \cdot e^{5-1,1t}}{(1 + e^{5-1,1t})^2}$.

Voer in $y_1 = \frac{137,5 \cdot e^{5-1,1x}}{(1 + e^{5-1,1x})^2}$.

De optie maximum geeft $x = 4,545...$ en $y = 34,375$.

De maximale groeisnelheid is 34,4 cm/jaar.

Bladzijde 210

40 $H = \frac{1900}{L} = 1900L^{-1}$ geeft $\frac{dH}{dL} = -1900L^{-2} = \frac{-1900}{L^2}$.

Voor $L > 0$ is L^2 positief. De teller is negatief en de noemer is positief, dus $\frac{dH}{dL}$ is negatief en dus is H dalend.

Als L toeneemt, dan neemt L^2 toe en dan neemt $\frac{1900}{L^2}$ af, dus dan neemt $\frac{-1900}{L^2}$ toe.

Dus H is afnemend dalend.

Bladzijde 211

41 a $T = \frac{650 + 325x}{46,9x}$ geeft

$\frac{dT}{dx} = \frac{46,9x \cdot 325 - (650 + 325x) \cdot 46,9}{(46,9x)^2} = \frac{15242,5x - 30485 - 15242,5x}{(46,9x)^2} = \frac{-30485}{(46,9x)^2}$.

De teller van $\frac{dT}{dx}$ is negatief en de noemer is positief, dus $\frac{dT}{dx}$ is negatief en dus daalt

T als x toeneemt (en je dus meer panelen aanschaft).

b De aanschafprijs is $0,85(1300 + 325x) = 1105 + 275,25x$.

De opbrengst per paneel is $\frac{2500}{12} = 208,33...$ kwh per jaar.

De opbrengst in euro's bij x panelen is $208,33... \cdot 0,225 \cdot x = 46,875x$.

Dus de formule is $T = \frac{1105 + 275,25x}{46,875x}$.

42 $E = 3,3 \cdot G^{0,73}$ geeft $\frac{dE}{dG} = 3,3 \cdot 0,73 \cdot G^{-0,27} = 2,409 \cdot G^{-0,27}$.

Als G toeneemt, dan neemt $G^{-0,27}$ af, dus $\frac{dE}{dG}$ neemt af als G toeneemt.

Dus E is afnemend stijgend.

43 H is maximaal als $\frac{dH}{dp} = 0$, dus los op $-\ln(p) + \ln(1-p) = 0$
 $\ln(1-p) = \ln(p)$
 $1-p = p$
 $-2p = -1$
 $p = \frac{1}{2}$

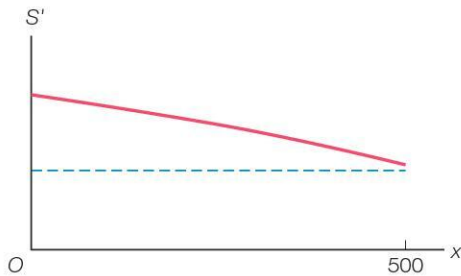
Dus bij 50% eiken en 50% beuken.

Bladzijde 212

- 44 a** Na 100 km is de actieradius 539 km in plaats van $625 - 100 = 525$ km. Hij heeft dus $539 - 525 = 14$ km gewonnen.
- b** $A(0) = 5000 \cdot \frac{5000}{40000} = 625$
 $A(x) = 0$ geeft $5000 \cdot \frac{5000 - 7,2x}{40000 - 3x} = 0$
 $5000 - 7,2x = 0$
 $-7,2x = -5000$
 $x \approx 694$
 Dus hij kan $694 - 625 = 69$ km meer rijden.

Bladzijde 213

- c** $S(x) = x + 5000 \cdot \frac{5000 - 7,2x}{40000 - 3x}$ geeft
 $S'(x) = 1 + 5000 \cdot \frac{(40000 - 3x) \cdot -7,2 - (5000 - 7,2x) \cdot -3}{(40000 - 3x)^2}$
 $= 1 + 5000 \cdot \frac{-288000 + 21,6x + 15000 - 21,6x}{(40000 - 3x)^2}$
 $= 1 + 5000 \cdot \frac{-273000}{(40000 - 3x)^2} = 1 - \frac{1,365 \cdot 10^9}{(40000 - 3x)^2}$



De grafiek van S' ligt boven de x -as, dus S is stijgend.

Dat betekent dat de automobilist voortdurend kilometers wint als x toeneemt van 0 tot 500.

- 45** $A = 1,5 \cdot {}^2\log(n)$ geeft $\frac{dA}{dn} = 1,5 \cdot \frac{1}{n \cdot \ln(2)} = \frac{1,5}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{n} \approx \frac{2,16}{n}$.
 Voor $n > 0$ is $\frac{dA}{dn}$ positief, dus A is stijgend.
 Als n toeneemt, dan neemt $\frac{2,16}{n}$ af, dus dan neemt $\frac{dA}{dn}$ af.
 Dus A is afnemend stijgend.

Bladzijde 214

- 46** $D = 3,65 \cdot e^{0,533 \cdot t}$ geeft $\frac{dD}{dt} = 3,65 \cdot e^{0,533 \cdot t} \cdot 0,533 \approx 1,94545 \cdot e^{0,533 \cdot t}$.
 Voor elke t is $\frac{dD}{dt}$ positief, dus D is stijgend.
 Er geldt $e^{0,533 \cdot t} = (e^{0,533})^t \approx 1,70^t$
 Als t toeneemt, dan neemt $e^{0,533 \cdot t}$ toe, dus dan neemt $\frac{dD}{dt}$ toe.
 Dus D is toenemend stijgend.
- 47 a** $B_n = 0,564 \cdot e^{1,386 \cdot n} \cdot n^{-1,5}$ geeft
 $B_n' = 0,564 \cdot e^{1,386 \cdot n} \cdot 1,386 \cdot n^{-1,5} + 0,564 \cdot e^{1,386 \cdot n} \cdot -1,5 \cdot n^{-2,5} \approx 0,782 \cdot e^{1,386 \cdot n} \cdot n^{-1,5} - 0,846 \cdot e^{1,386 \cdot n} \cdot n^{-2,5}$
b Voer in $y_1 = 0,782 \cdot e^{1,386 \cdot x} \cdot x^{-1,5} - 0,846 \cdot e^{1,386 \cdot x} \cdot x^{-2,5}$ en maak een tabel.
 $n = 12$ geeft $B_n' \approx 286147$.
 $n = 13$ geeft $B_n' \approx 1022529$.
 Dus vanaf 13 blikken.

Bladzijde 215

48 $c = \frac{3b}{3-b}$ geeft $\frac{dc}{db} = \frac{(3-b) \cdot 3 - 3b \cdot -1}{(3-b)^2} = \frac{9-3b+3b}{(3-b)^2} = \frac{9}{(3-b)^2}$.

Van $\frac{dc}{db}$ is de teller positief en ook de noemer positief, dus $\frac{dc}{db}$ is positief en dus is c stijgend.

Dat betekent dat c afneemt als b afneemt, dus c neemt af als de straal van de kleinste zeepbel kleiner wordt.

- 49 a** De teller is constant en positief.
Als t toeneemt, dan neemt de noemer toe en dus neemt de breuk af.
Dus P_{voorjaar} wordt kleiner en dus neemt het vetpercentage af.

b $P_{\text{najaar}} = \frac{2300 + 60t}{207 + 0,6t}$ geeft

$$\frac{dP_{\text{najaar}}}{dt} = \frac{(207 + 0,6t) \cdot 60 - (2300 + 60t) \cdot 0,6}{(207 + 0,6t)^2} = \frac{12420 + 36t - 1380 - 36t}{(207 + 0,6t)^2} = \frac{11040}{(207 + 0,6t)^2}$$

De teller is positief en de noemer is positief, dus $\frac{dP_{\text{najaar}}}{dt}$ is positief en dus is P_{najaar} stijgend.

Als t toeneemt, dan blijft 11 040 gelijk en neemt $(207 + 0,6t)^2$ toe, dus neemt $\frac{dP_{\text{najaar}}}{dt}$ af.

Dus P_{najaar} is afnemend stijgend.

Bladzijde 216

50 $A = 12 \cdot e^{0,013t}$ geeft $\frac{dA}{dt} = 12 \cdot e^{0,013t} \cdot 0,013 \approx 0,156 \cdot e^{0,013t}$.

$t = 117$ geeft $\frac{dA}{dt} = 0,156 \cdot e^{0,013 \cdot 117} \approx 0,7$.

Volgens de formule neemt in januari 2004 het aantal aardbevingen met magnitude $\geq 1,5$ per maand met 0,7 toe.

Bladzijde 217

- 51 a** Als w heel groot wordt, dan nadert $0,9704^w$ tot 0.
Dus dan wordt $76,4 - 19,4 \cdot 0,9704^w \approx 76,4 - 19,4 \cdot 0 = 76,4$.
Dus de grenswaarde is 76,4 cm.
Los op $76,4 - 19,4 \cdot 0,9704^w = 66,4$ oftewel $19,4 \cdot 0,9704^w = 10$.
Voer in $y_1 = 19,4 \cdot 0,9704^x$ en $y_2 = 10$.
De optie snijpunt geeft $x = 22,0\dots$, dus na 22 weken.

- b** $L_1 = 76,4 - 19,4 \cdot 0,9704^w$ geeft $L_1' = 0 - 19,4 \cdot 0,9704^w \cdot \ln(0,9704)$
 $L_1'(26) = -19,4 \cdot 0,9704^{26} \cdot \ln(0,9704) = 0,266\dots$
De groeisnelheid is 0,27 cm/week.

c $L_3 = \frac{16,1}{1 + e^{16,4-1,2t}}$ geeft $L_3' = \frac{(1 + e^{16,4-1,2t}) \cdot 0 - 16,1 \cdot e^{16,4-1,2t} \cdot -1,2}{(1 + e^{16,4-1,2t})^2} = \frac{19,32 \cdot e^{16,4-1,2t}}{(1 + e^{16,4-1,2t})^2}$.

- d** Bereken het maximum van L_3' .
Voer in $y_1 = \frac{19,32 \cdot e^{16,4-1,2x}}{(1 + e^{16,4-1,2x})^2}$.

De optie maximum geeft $x = 13,66\dots$ en $y = 4,83$.

De extra groeisnelheid is 4,8 cm/jaar.

- e** $w = 52t$ invullen bij $L_1 = 76,4 - 19,4 \cdot 0,9704^w$ geeft
 $L_1 = 76,4 - 19,4 \cdot 0,9704^{52t} = 76,4 - 19,4 \cdot (0,9704^{52})^t \approx 76,4 - 19,4 \cdot 0,2096^t$

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 76,4 - 19,4 \cdot 0,2096^t - 0,235t^2 + 9,5t - 4,7 + \frac{16,1}{1 + e^{16,4-1,2t}}$$

$$= -19,4 \cdot 0,2096^t - 0,235t^2 + 9,5t - 71,7 + \frac{16,1}{1 + e^{16,4-1,2t}}$$

Bladzijde 218

- 52** **a** $b = 30 - 2h = 30 - 2 \cdot 3 = 24 \text{ cm}$
 $l = 20 - h = 20 - 3 = 17 \text{ cm}$
 inhoud $= b \cdot l \cdot h = 24 \cdot 17 \cdot 3 = 1224 \text{ cm}^3$
- b** $b = 30 - 2h$ en $l = 20 - h$ invullen in $V = b \cdot l \cdot h$ geeft
 $V = (30 - 2h)(20 - h) \cdot h = (600 - 70h + 2h^2) \cdot h = 2h^3 - 70h^2 + 600h.$
- c** $V = 2h^3 - 70h^2 + 600h$ geeft $\frac{dV}{dh} = 6h^2 - 140h + 600$
 $\frac{dV}{dh} = 0$ geeft $6h^2 - 140h + 600 = 0.$
 Voer in $y_1 = 6x^2 - 140x + 600.$
 De optie nulpunt geeft $x = 5,657...$
 De inhoud is maximaal bij een hoogte van ongeveer 5,7 cm.

15.6 Onderzoeksopgaven**Bladzijde 219**

- 53** $S_{\text{bovenste}} = a + b \sin(c(x - d))$
 $a = \text{evenwichtsstand} = 100 + 50 = 150$
 $b = \text{amplitude} = 50$ (zelfde amplitude als onderste)
 $c = \frac{\pi}{3}$ (want de periodes zijn gelijk)
 $x = \frac{1}{2}$ geeft $S_{\text{onderste}} = 100 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = 125$
 $(\frac{1}{2}, 125)$ op S_{bovenste} geeft $150 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3}(\frac{1}{2} - d)\right) = 125$
 Voer in $y_1 = 150 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3}(\frac{1}{2} - x)\right)$ en $y_2 = 125.$
 De optie snijpunt geeft $x = 1$, dus $d = 1.$
 De formule is $S_{\text{bovenste}} = 150 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3}(x - 1)\right).$

Bladzijde 221

- 54** De benzine-uitvoering
 € 1,75 per liter, dus per 100 km $6,4 \cdot 1,75 = € 11,20.$
 Dat is per km € 0,112.
 De kosten bij x km per jaar zijn $K_b = 0,112x + 4 \cdot 242$ oftewel $K_b = 0,112x + 968.$
- De dieseluitvoering
 € 1,45 per liter, dus per 100 km $4,5 \cdot 1,75 = € 6,525.$
 Dat is per km € 0,06525.
 De kosten bij x km per jaar zijn $K_d = 0,06525x + 4 \cdot 478$ oftewel $K_d = 0,06525x + 1912.$
 Los op $0,112x + 968 = 0,06525x + 1912$
 $0,04675x = 944$
 $x \approx 20193$
 Dus vanaf 20200 km per jaar.

- 55** Ga uit van $h = a + b \sin(cx)$ met x in m en h in cm.

$$a = \frac{17 + 70}{2} = 43,5$$

$$b = 70 - 43,5 = 26,5$$

$$\frac{3200}{100} = 32 \text{ latten per meter, dus de periode is } \frac{60}{32} = 1,875 \text{ m.}$$

$$c = \frac{2\pi}{1,875}$$

$$\text{Dus } h = 43,5 + 26,5 \sin\left(\frac{2\pi}{1,875}x\right).$$

$$\text{Los op } 43,5 + 26,5 \sin\left(\frac{2\pi}{1,875}x\right) = 50.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 43,5 + 26,5 \sin\left(\frac{2\pi}{1,875}x\right) \text{ en } y_2 = 50.$$

De optie snijpunt geeft $x = 0,863...$ en $x = 1,948...$

De lengte van de plank van Floortje is $1,948... - 0,863... \approx 1,085$ meter.

Een plank met een lengte van 1 meter ligt lager dan een plank met een lengte van 1,085 meter, dus Annemarie zit lager dan Floortje.

Bladzijde 222

- 56** renner 1 800 m met gemiddelde snelheid 49 km/uur.

$$\text{Dat duurt } \frac{0,8}{49} = 0,016... \text{ uur} \approx 59 \text{ seconden.}$$

$$\text{Dus arbeid } 500 \cdot 59 = 29\,500.$$

- renner 6 200 m met gemiddelde snelheid 66 km/uur.

$$\text{Dat duurt } \frac{0,2}{66} = 0,003... \text{ uur} \approx 11 \text{ seconden.}$$

$$\text{Dus arbeid } 1500 \cdot 11 = 16\,500.$$

Dus de renner aan kop aan het eind levert minder arbeid dan de renner aan kop aan het begin van de sprint.

Bladzijde 223

- 57** Het totale vermogen is $40 \cdot 0,75 = 30$ MW, dus een nieuwe windmolen moet een vermogen van minstens $\frac{30}{10} = 3$ MW hebben.

Invullen van $g = 1,0068$ en $h = 0,9D$ in de formule $P = 2,21 \cdot 10^{-4} \cdot g^h \cdot D^2$ geeft

$$P = 2,21 \cdot 10^{-4} \cdot 1,0068^{0,9D} \cdot D^2.$$

$$\text{Los op } 2,21 \cdot 10^{-4} \cdot 1,0068^{0,9D} \cdot D^2 = 3.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 2,21 \cdot 10^{-4} \cdot 1,0068^{0,9x} \cdot x^2 \text{ en } y_2 = 3.$$

De optie snijpunt geeft $x = 88,854...$

$$\text{Dus } D = 88,854... \text{ m en de ashoogte is } h = 0,9 \cdot 88,854... \approx 79,97 \text{ m.}$$

De investering is $10 \cdot 25\,000 \cdot 79,97 \approx 20$ miljoen euro.

Gemengde opgaven

12 Rijen

Bladzijde 224

- 1 a** rr met $A_0 = 1000$ en $v = -23$, dus $A_n = 1000 - 23 \cdot n$.
Los op $1000 - 23n = 0$
 $-23n = -1000$
 $n = 43,4\dots$
 $A_{43} = 11$ en $A_{44} = -12$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
De som van de positieve termen is $\sum_{k=0}^{43} (1000 - 23k) = 22\,242$.
- b** mr met $v(0) = 1000$ en $r = 0,96$, dus $v(n) = 1000 \cdot 0,96^n$.
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
 $v(16) \approx 520,4$ en $v(17) \approx 499,6$
De som van de termen die groter zijn dan 500 is $\sum_{k=0}^{16} 1000 \cdot 0,96^k \approx 12\,510$.
- c** Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $a(2) = -13$, $a(3) = 0$, $a(4) = 11$, ..., $a(14) = 11$, $a(15) = 0$, $a(16) = -13$.
De som van de termen die groter zijn dan nul is $\sum_{k=4}^{14} (-k^2 + 18k - 45) = 286$.
- 2 a** u_n is een rr met $u_1 = 300$ en $v = 6$, dus $u_n = 300 + 6 \cdot (n - 1)$.
De recursieve formule is $u_n = u_{n-1} + 6$ met $u_1 = 300$.
 v_n is een mr met $v_1 = 0,1$ en $r = 2$, dus $v_n = 0,1 \cdot 2^{n-1}$.
De recursieve formule is $v_n = 2 \cdot v_{n-1}$ met $v_1 = 0,1$.
- b** Voer de rijen in op het rijen-invoerscherm.
 $u_{12} = 366$ en $v_{12} = 204,8$, dus $u_{12} > v_{12}$.
 $u_{13} = 372$ en $v_{13} = 409,6$, dus $u_{13} < v_{13}$.
Vanaf $n = 13$ is $v_n > u_n$.
- c** Voer ook de somrij van u_n in op het rijen-invoerscherm.
Lees af in de tabel $\sum_{k=1}^{14} u_k = 4746$ en $\sum_{k=1}^{15} u_k = 5130$, dus vanaf $n = 15$ is $\sum_{k=1}^n u_k > 5000$.
- 3 a** Afname 10%, dus er blijft 90% over.
 $V(t) = 0,9 \cdot V(t-1) + 500$ met $V(0) = 10\,000$
- b** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $V(8) \approx 7152$ en $V(9) \approx 6937$, dus na 9 dagen zit er voor het eerst minder dan 7000 m^3 water in de vijver.
- c** Vanaf $t = 103$ is $V(t) \approx 5000$, dus de grenswaarde is 5000 m^3 .
- 4 a** $B(n) = 1,0075 \cdot B(n) + 500$ met $B(0) = 500$
- b** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
Bij 1 januari 2030 hoort $n = 10$.
De tabel geeft $B(10) \approx 5710,96$.
Dus op 1 januari 2025 is het saldo € 5710,96.
- c** $B(17) \approx 9597,36$ en $B(18) \approx 10\,169,34$
 $2020 + 18 = 2038$, dus in 2038 is het saldo op 1 januari voor het eerst meer dan 10000 euro.
Nova heeft dan in totaal $19 \cdot 500 = 9500$ euro op het deposito gestort.

- 5 a** 3 minuten en 55 seconden is 235 seconden.
 De tijden per kilometer vormen een rr met directe formule $T(n) = 235 + 3 \cdot (n - 1)$,
 oftewel $T(n) = 3n + 232$ met beginterm $T(1) = 235$.
 Zijn eindtijd is $\sum_{k=1}^{15} (3k + 232)$.
 $S(n) = S(n - 1) + 3n + 232$ met $S(1) = 235$
 Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $\sum_{k=1}^{15} (3k + 232) = 3840$.
 Dus de eindtijd van Stijn is 3840 seconden = 1 uur en 4 minuten.
- b** De tabel bij de formule van vraag a geeft $\sum_{k=1}^{10} (3k + 232) = 2485$.
 4 minuten en 20 seconden is 260 seconden.
 De tijden per kilometer vormen een rr met directe formule $T(n) = 260 - 2 \cdot (n - 1)$,
 oftewel $T(n) = -2n + 262$ met beginterm $T(1) = 260$.
 Zijn tijd na 10 km is $\sum_{k=1}^{10} (-2k + 262)$.
 $S(n) = S(n - 1) - 2n + 262$ met $S(1) = 260$
 Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $\sum_{k=1}^{10} (-2k + 262) = 2512$.
 Omdat $2512 > 2485$ ligt Stijn met dit trainingsschema achter.
 Het scheelt $2512 - 2485 = 27$ seconden.
- 6 a** $u_6 = 1,5 \cdot 6^2 + 0,5 \cdot 6 = 57$, dus een kaartenhuis met zes rijen bestaat uit 57 kaarten.
- b** $5 \cdot 54 = 270$ kaarten
 Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $u_{13} = 260$ en $u_{14} = 301$.
 Dus maximaal 13 rijen.
- c** $u_{10} = 155$ en $u_9 = 126$, dus de tiende rij bestaat uit $155 - 126 = 29$ kaarten.
- d** $u_{12} = 222$ en $u_{13} = 260$, dus de 13^e rij bestaat uit 38 kaarten.
 Het kaartenhuis bestaat dan uit 260 kaarten.
- 7 a** Van B_n is
 de recursieve formule $B_n = B_{n-1} + 2$ met $B_1 = 4$
 en de directe formule $B_n = 4 + 2 \cdot (n - 1)$, oftewel $B_n = 2n + 2$.
 Van H_n is
 de recursieve formule $H_n = H_{n-1} + 2$ met $H_1 = 3$
 en de directe formule $H_n = 3 + 2 \cdot (n - 1)$, oftewel $H_n = 2n + 1$.
- b** $O_n = \frac{1}{2} \cdot B_n \cdot H_n$
 $= \frac{1}{2} \cdot (2n + 2) \cdot (2n + 1)$
 $= \frac{1}{2} \cdot (4n^2 + 2n + 4n + 2)$
 $= 2n^2 + 3n + 1$
- c** Voer in $y_1 = 2x^2 + 3x + 1$.
 Uit de tabel volgt $O_{10} = 231$ en $O_{11} = 276$.
 Vanaf $n = 11$ is $O_n > 250$.
- d** $O_{n-1} = 2(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$
 $= 2(n^2 - 2n + 1) + 3n - 3 + 1$
 $= 2n^2 - 4n + 2 + 3n - 2$
 $= 2n^2 - n$
 $O_n - O_{n-1} = 2n^2 + 3n + 1 - (2n^2 - n)$
 $= 2n^2 + 3n + 1 - 2n^2 + n$
 $= 4n + 1$
 Dus $O_n = O_{n-1} + 4n + 1$ met $O_1 = 6$.

Bladzijde 226

- 8**
- a** $B_n = 1,0025 \cdot B_{n-1} + 1000$ met $B_0 = 10000$
 - b** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
Bij 1 januari 2025 hoort $n = 5$.
De tabel geeft $B_5 \approx 15\,150,69$.
Dus op 1 januari 2025 is het saldo € 15 150,69.
 - c** $B_9 \approx 19\,318$ en $B_{10} \approx 20\,366$
 $2020 + 10 = 2030$, dus in 2030 is het saldo op 1 januari voor het eerst meer dan 20 000 euro.
 - d** $B_n = 1,0025 \cdot B_{n-1} - 2500$ met $B_0 = 25\,711$
 - e** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $B_{10} \approx 1077,92$ en $B_{11} \approx -1419,38$.
Maya kan dus 10 keer 2500 euro opnemen.
 - f** Maya heeft $10\,000 + 15 \cdot 1000 = 25\,000$ euro gestort.
Ze kan $10 \cdot 2500$ euro opnemen. Verder kan ze op 1 januari 2047 nog $1,0025 \cdot 1077,92 \approx 1081$ euro opnemen.
Ze kan dus uiteindelijk 1081 euro meer opnemen dan ze heeft gestort.
- 9**
- a** Het twaalfde gecentreerde vierkantsgetal is $V_{12} = 2 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12 + 1 = 265$.
 - b** Voer in $y_1 = 2x^2 - 2x + 1$ en maak een tabel.
Uit de tabel volgt $V_{32} = 1985$, dus het 32^e vierkantsgetal is 1985.
 - c** $V_{n-1} = 2(n-1)^2 - 2(n-1) + 1$

$$= 2(n^2 - 2n + 1) - 2n + 2 + 1$$

$$= 2n^2 - 4n + 2 - 2n + 3$$

$$= 2n^2 - 6n + 5$$

$$V_n - V_{n-1} = 2n^2 - 2n + 1 - (2n^2 - 6n + 5)$$

$$= 2n^2 - 2n + 1 - 2n^2 + 6n - 5$$

$$= 4n - 4$$
Dus $V_n = V_{n-1} + 4n - 4$ met $V_1 = 1$.
 - d** De vierkante rand aan de buitenkant bestaat uit vier zijden van n stippen. Als je de zijden optelt, tel je de vier hoekpunten dubbel, dus er komen steeds $4n - 4$ stippen bij.
Dus $V_n = V_{n-1} + 4n - 4$ met $V_1 = 1$.

Bladzijde 227

- 10**
- a** Los op $0,08447n^2 - 7,095n + 152 = 152$
 $0,08447n^2 - 7,095n = 0$
 $n(0,08447n - 7,095) = 0$
 $n = 0$ of $0,08447n = 7,095$
 $n = 0$ of $n \approx 84$
Bij de torens hoort dus $n = 0$ en $n = 84$.
Dus de horizontale afstand tussen de hangers is $\frac{1280}{84} \approx 15,24$ m.
 - b** De totale lengte van de 83 verticale lijnen tussen de torens is

$$\sum_{k=1}^{83} (0,08447k^2 - 7,095k + 152).$$
 $S_n = S_{n-1} + 0,08447n^2 - 7,095n + 152$ met $S_1 = L_1 \approx 144,99$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $\sum_{k=1}^{83} (0,08447k^2 - 7,095k + 152) \approx 4274,57$.
Elke verticale lijn staat voor $2 \cdot 2 = 4$ hangers.
Dus de totale lengte van alle hangers tussen de torens is $4 \cdot 4274,57 \approx 17\,098$ m.
 - c** $v = \frac{152}{22} \approx 6,91$ en $L_1 = 152 - 6,91 = 145,09$, dus de recursieve formule is
 $L_m = L_{m-1} - 6,91$ met $L_1 = 145,09$.
De directe formule is $L_m = 152 - 6,91 \cdot m$.

- d De hoeveelheid verf die nodig is, is evenredig met de lengte van de hangers.

De totale lengte van de 21 verticale lijnen bij één oever is $\sum_{k=1}^{21} (152 - 6,91 \cdot k)$.

$$S_m = S_{m-1} + 152 - 6,91 \cdot m \text{ met } S_1 = 145,09$$

Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.

$$\text{De tabel geeft } \sum_{k=1}^{21} (152 - 6,91 \cdot k) = 1595,79.$$

Elke verticale lijn staat voor $2 \cdot 2 = 4$ hangers, en ze zijn hetzelfde bij de 2 oevers.

De totale lengte van alle hangers bij de oevers is $2 \cdot 4 \cdot 1595,79 \approx 12\,768$ m.

Dus $\frac{17098}{12\,768 + 17098} \times 100\% \approx 57,2\%$ van de verf is nodig voor de hangers tussen de twee torens.

13 Allerlei formules

Bladzijde 228

11 a $10 + \frac{6}{a} - \frac{5}{b-1} = \frac{10a(b-1)}{a(b-1)} + \frac{6(b-1)}{a(b-1)} - \frac{5a}{a(b-1)} = \frac{10ab - 10a + 6b - 6 - 5a}{a(b-1)} = \frac{10ab - 15a + 6b - 6}{a(b-1)}$

b $B = 20 + \frac{10x}{x + \frac{x^2}{y}} = 20 + \frac{10xy}{\left(x + \frac{x^2}{y}\right)y} = \frac{20}{1} + \frac{10xy}{xy + x^2} = \frac{20(y+x)}{y+x} + \frac{10y}{y+x} = \frac{20(y+x) + 10y}{y+x}$
 $= \frac{20y + 20x + 10y}{y+x} = \frac{20x + 30y}{x+y}$

Dus $a = 20$ en $b = 30$.

c $C = \frac{2p^2 + 6}{p} - \frac{3}{2p} = \frac{2p^2}{p} + \frac{6}{p} - \frac{3}{2p} = 2p + \frac{12}{2p} - \frac{3}{2p} = 2p + \frac{9}{2p}$

Dus $a = 2$ en $b = 9$.

d $D = \frac{3x^2 + xy + 10y}{5x^2y} = \frac{3x^2}{5x^2y} + \frac{xy}{5x^2y} + \frac{10y}{5x^2y} = \frac{3}{5y} + \frac{1}{5x} + \frac{2}{x^2}$

12 a $5s - 2t = 10$
 $5s = 2t + 10$
 $s = \frac{2}{5}t + 2$
 $P = 3t - 4s + 35 \left\{ \begin{array}{l} P = 3t - 4\left(\frac{2}{5}t + 2\right) + 35 \\ P = 3t - 1\frac{3}{5}t - 8 + 35 \\ P = 1\frac{2}{5}t + 27 \end{array} \right.$

b $2x - y = 1$
 $-y = -2x + 1$
 $y = 2x - 1$
 $B = 3xy - 2x + 4 \left\{ \begin{array}{l} B = 3x(2x - 1) - 2x + 4 \\ B = 6x^2 - 3x - 2x + 4 \\ B = 6x^2 - 5x + 4 \end{array} \right.$

Dus $a = 6$, $b = -5$ en $c = 4$.

13 a $p = \frac{3 - 2T}{3T + 5}$
 $p(3T + 5) = 3 - 2T$
 $3pT + 5p = 3 - 2T$
 $3pT + 2T = 3 - 5p$
 $T(3p + 2) = 3 - 5p$
 $T = \frac{3 - 5p}{3p + 2}$

b $y = 3\sqrt{5 - 2x}$
 $\sqrt{5 - 2x} = \frac{1}{3}y$
 $5 - 2x = \left(\frac{1}{3}y\right)^2$
 $-2x = \frac{1}{9}y^2 - 5$
 $x = -\frac{1}{18}y^2 + 2\frac{1}{2}$

- c** $N = 10 \cdot \ln(t) - 22,5$
 $10 \cdot \ln(t) = N + 22,5$
 $\ln(t) = 0,1N + 2,25$
 $t = e^{0,1N + 2,25}$
 $t = e^{0,1N} \cdot e^{2,25}$
 $t = e^{2,25} \cdot (e^{0,1})^N$
 $t \approx 9,5 \cdot 1,105^N$
Dus $t = 9,5 \cdot 1,105^N$.
- d** $N = 40 \cdot 1,06^t$
 $1,06^t = 0,025N$
 $\log(1,06^t) = \log(0,025N)$
 $t \cdot \log(1,06) = \log(0,025N)$
 $t = \frac{1}{\log(1,06)} \cdot \log(0,025N)$
 $t \approx 39,5 \cdot \log(0,025N)$
Dus $t = 39,5 \cdot \log(0,025N)$.
- e** $g = e^{0,55} \approx 1,73$, dus de formule is $N = 54 \cdot 1,73^t$.
- f** $e^c = 1,28$ geeft $c = \ln(1,28) \approx 0,25$, dus de formule is $N = 720 \cdot e^{0,25t}$.

- 14 a** $t = 2 \cdot \ln(V) - 15,2$
 $2 \cdot \ln(V) = t + 15,2$
 $\ln(V) = 0,5t + 7,6$
 $V = e^{0,5t + 7,6}$
 $V = e^{7,6} \cdot (e^{0,5})^t$
 $V \approx 1998 \cdot 1,649^t$
Dus $V = 1998 \cdot 1,649^t$.
- b** $p^2 = \frac{15}{q^{3,5}}$
 ${}^2\log(p^2) = {}^2\log\left(\frac{15}{q^{3,5}}\right)$
 $2 \cdot {}^2\log(p) = {}^2\log(15) - {}^2\log(q^{3,5})$
 $2 \cdot {}^2\log(p) = {}^2\log(15) - 3,5 \cdot {}^2\log(q)$
 ${}^2\log(p) = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(15) - 1,75 \cdot {}^2\log(q)$
 ${}^2\log(p) \approx 1,95 - 1,75 \cdot {}^2\log(q)$
Dus ${}^2\log(p) = 1,95 - 1,75 \cdot {}^2\log(q)$.
- c** $\ln(R) - 8,3 \cdot \ln(S) = 2,07$
 $\ln(R) = 2,07 + 8,3 \cdot \ln(S)$
 $\ln(R) = \ln(e^{2,07}) + \ln(S^{8,3})$
 $\ln(R) = \ln(e^{2,07} \cdot S^{8,3})$
 $R = e^{2,07} \cdot S^{8,3}$
 $R \approx 7,92 \cdot S^{8,3}$
Dus $R = 7,92 S^{8,3}$.
- d** $N = 1200 \cdot 3^{0,2t+1}$
 $\log(N) = \log(1200 \cdot 3^{0,2t+1})$
 $\log(N) = \log(1200) + \log(3^{0,2t+1})$
 $\log(N) = (0,2t + 1) \cdot \log(3) + \log(1200)$
 $\log(N) = 0,2t \cdot \log(3) + \log(3) + \log(1200)$
 $\log(N) \approx 0,095t + 3,556$
Dus $\log(N) = 0,095t + 3,556$.

Bladzijde 229

- 15 a** maximum – minimum = $6500 - 1500 = 5000$
Dat is dus 5000 cm^3 .
- b** In figuur G.6 is de periode 6 seconden, dus er zijn 10 ademhalingen per minuut.
Het minuutvolume is $10 \cdot 500 = 5000 \text{ cm}^3$.
In figuur G.7 is de periode 15 seconden, dus er zijn 4 ademhalingen per minuut.
Het minuutvolume is $4 \cdot 5000 = 20000 \text{ cm}^3$.
De verhouding is $5000 : 20000 = 1 : 4$.

c $V = a + b \sin(c(t - d))$

$$a = \frac{4000 + 3500}{2} = 3750$$

$$b = 4000 - 3750 = 250$$

De periode is 6, dus $c = \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 0$, dus $d = 0$.

Je krijgt $V = 3750 + 250 \sin(\frac{1}{3}\pi t)$.

d $V = a + b \sin(c(t - d))$

$$a = \frac{6500 + 1500}{2} = 4000$$

$$b = 6500 - 4000 = 2500$$

De periode is 15, dus $c = \frac{2\pi}{15} = \frac{2}{15}\pi$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 0$, dus $d = 0$.

Je krijgt $V = 4000 + 2500 \sin(\frac{2}{15}\pi t)$.

e $V = a + b \sin(c(t - d))$

$$a = 4200 \text{ (gegeven)}$$

$$b = 2500$$

De periode is $\frac{60}{40} = 1\frac{1}{2}$ seconde, dus $c = \frac{2\pi}{1\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\pi$.

Op $t = 0$ helemaal uitgeademd, dus grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand

bij $t = \frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

Je krijgt $V = 4200 + 2500 \sin(\frac{4}{3}\pi(t - \frac{3}{8}))$.

f Voer in $y_1 = 4200 + 2500 \sin(\frac{4}{3}\pi(x - \frac{3}{8}))$ en $y_2 = 6000$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,566...$ en $x = 0,933...$

Per ademhaling $0,933... - 0,566... = 0,366...$ seconde, dus per minuut

$$40 \cdot 0,366... \approx 14,6 \text{ seconden.}$$

Bladzijde 230

16 a $c = 0,506$ geeft periode $= \frac{2\pi}{0,506} = 12,417... \text{ uur} = 12 \text{ uur en } 0,417... \cdot 60 \approx 25 \text{ minuten.}$

Dus de periode is 12 uur en 25 minuten.

b De amplitude is 110 cm, dus het verschil tussen hoog- en laagwater is

$$2 \cdot 110 = 220 \text{ cm.}$$

c De evenwichtsstand is 0, dus de waterhoogte bij hoogwater is $0 + 110 = 110 \text{ cm.}$

2 september loopt van $t = 24$ tot $t = 48$.

Los op $110 \sin(0,506(t - 6,74)) = 110$.

Voer in $y_1 = 110 \sin(0,506(x - 6,74))$ en $y_2 = 110$.

De optie snijpunt geeft $x = 34,679...$ en $x = 47,096...$

$0,679...$ uur is ongeveer 41 minuten en $0,096...$ uur is ongeveer 6 minuten.

Dus het was op 2 september hoogwater om 10:41 uur en om 23:06 uur.

d $a = \text{evenwichtsstand} = 0$

$$b = \frac{12}{2} = 6$$

$$c = 0,506$$

Stijgend door de evenwichtsstand een kwart periode nadat het laagwater was,

$$\text{dus } d = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{0,506} \approx 3,104.$$

Dus de formule is $S = 6 \sin(0,506(t - 3,104))$.

e De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Dat is

bij $t = 3,104$.

De maximale snelheid is $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3,104} \approx 3,036 \text{ m/uur} \approx 5 \text{ cm/minuut.}$

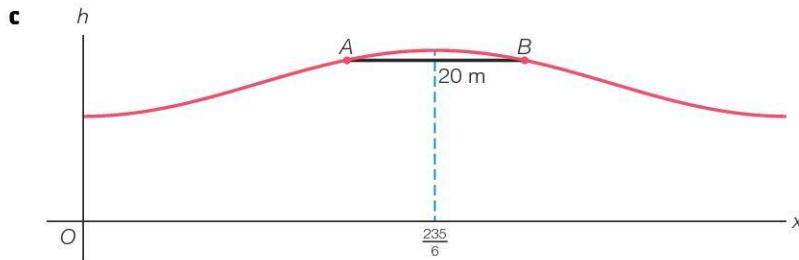
- 17 a** $l = 60$ geeft $\log(g) = -2,37 + 3,38 \cdot \log(60) = 3,64\dots$
 $\log(g) = 3,64\dots$ geeft $g = 10^{3,64\dots} \approx 4370$
 Dus 4370 gram.
 Opmerking: de vergelijking $\log(g) = -2,37 + 3,38 \cdot \log(60)$ mag ook grafisch-numeriek worden opgelost.
- b** $\log(g) = -2,37 + 3,38 \cdot \log(l)$
 $\log(g) = \log(10^{-2,37}) + \log(l^{3,38})$
 $\log(g) = \log(10^{-2,37} \cdot l^{3,38})$
 $g = 10^{-2,37} \cdot l^{3,38}$
 $g \approx 0,0043 \cdot l^{3,38}$
 Dus $a = 0,0043$ en $b = 3,38$.
- c** Neem $3l$ voor l in de formule $g = 0,004l^{3,4}$.
 Je krijgt $g = 0,004 \cdot (3l)^{3,4} = 0,004 \cdot 3^{3,4} \cdot l^{3,4} = 3^{3,4} \cdot 0,004 \cdot l^{3,4} \approx 42 \cdot 0,004 \cdot l^{3,4}$.
 Het vaste getal is 42.
- d** Invullen van $g = 1000G$ en $l = 100L$ geeft $\log(1000G) = -2,37 + 3,38 \cdot \log(100L)$
 $\log(1000) + \log(G) = -2,37 + 3,38 \cdot (\log(100) + \log(L))$
 $3 + \log(G) = -2,37 + 3,38 \cdot 2 + 3,38 \cdot \log(L)$
 $\log(G) = 1,39 + 3,38 \cdot \log(L)$.

Bladzijde 231

- 18 a** Lees af: bij $t = 0$ hoort $B = 10^3$ en bij $t = 9$ hoort $B = 10^6$.
 Dus $\frac{10^6}{10^3} = 1000$ keer zoveel.
- b** Lees af: bij $t = 12$ hoort $B = 10^7 = 10$ miljoen bacteriën.
 Dus na 12 dagen mag de kip nog gegeten worden.
- c** $B = 50 \cdot 10^6$ geeft $\frac{1}{3}t + 3 = \log(50 \cdot 10^6)$
 $\frac{1}{3}t + 3 = 7,69\dots$
 $\frac{1}{3}t = 4,69\dots$
 $t \approx 14,1$
 Dus na 14,1 dagen.
- d** $\log(B) = \frac{1}{3}t + 3$
 $B = 10^{\frac{1}{3}t + 3}$
 $B = 10^{\frac{1}{3}t} \cdot 10^3$
 $B = 10^3 \cdot (10^{\frac{1}{3}})^t$
 $B \approx 1000 \cdot 2,154^t$
 Dus $B = 1000 \cdot 2,154^t$.

Bladzijde 232

- 19 a** $a = \frac{9,53 + 5,85}{2} = 7,69$
 $b = 9,53 - 7,69 = 1,84$
 3 periodes is 235 meter, dus 1 periode is $\frac{235}{3}$ meter en $c = \frac{2\pi}{(\frac{235}{3})} = \frac{6\pi}{235} \approx 0,08$.
- Stijgend door de evenwichtsstand voor $x = 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{235}{3} \approx 19,58$, dus $d = 19,58$.
- b** De formule is $h = 7,69 + 1,84 \sin(0,08(x - 19,58))$ en de hoogte van het dak moet minimaal $8 + 1 = 9$ meter zijn.
 Dus los op $7,69 + 1,84 \sin(0,08(x - 19,58)) = 9$.
 Voer in $y_1 = 7,69 + 1,84 \sin(0,08(x - 19,58))$ en $y_2 = 9$.
 De optie snijpunt geeft $x = 29,483\dots$ en $x = 48,946\dots$
 Omdat $48,946\dots - 29,483\dots = 19,46\dots$, kan het bouwwerk maximaal 19,5 meter lang worden.



Het maximum ligt bij $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{235}{3} = \frac{235}{6}$.

Dit geeft $x_A = \frac{235}{6} - \frac{1}{2} \cdot 20 \approx 29,17$.

$x = 29,17$ geeft $h \approx 8,97$, dus het bouwwerk kan maximaal $8,9 - 1 = 7,9$ meter hoog worden.

14 Toepassingen van de differentiaalrekening

Bladzijde 233

20 a $y = 2x + 21,65 \cdot \ln(x + 10)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2 + 21,65 \cdot \frac{1}{x + 10} = 2 + \frac{21,65}{x + 10}$.

b $y = {}^3\log(5x - 2)$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(5x - 2) \cdot \ln(3)} \cdot 5 = \frac{5}{(5x - 2) \cdot \ln(3)}$.

c $y = \frac{3x}{15 - \ln(5x)}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(15 - \ln(5x)) \cdot 3 - 3x \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5}{(15 - \ln(5x))^2} = \frac{45 - 3 \cdot \ln(5x) + 3}{(15 - \ln(5x))^2} = \frac{48 - 3 \cdot \ln(5x)}{(15 - \ln(5x))^2}$.

d $y = 0,3^x \cdot \log(0,6x)$ geeft

$$\frac{dy}{dx} = 0,3^x \cdot \ln(0,3) \cdot \log(0,6x) + 0,3^x \cdot \frac{1}{0,6x \cdot \ln(10)} \cdot 0,6 = 0,3^x \cdot \ln(0,3) \cdot \log(0,6x) + \frac{0,3^x}{x \cdot \ln(10)}.$$

e $y = \frac{e^{2x}}{x^2 + 2} + 8x$ geeft

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 2) \cdot e^{2x} \cdot 2 - e^{2x} \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} + 8 = \frac{2x^2 \cdot e^{2x} + 4 \cdot e^{2x} - 2x \cdot e^{2x}}{(x^2 + 2)^2} + 8 = \frac{2x^2 \cdot e^{2x} - 2x \cdot e^{2x} + 4 \cdot e^{2x}}{(x^2 + 2)^2} + 8.$$

f $y = x \cdot \ln(x + 3)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \ln(x + 3) + x \cdot \frac{1}{x + 3} = \ln(x + 3) + \frac{x}{x + 3}$.

21 a stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe, dus dan neemt $x^2 + 1$ toe en dan neemt $\frac{3}{x^2 + 1}$ af en

dan neemt $100 - \frac{3}{x^2 + 1}$ toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 heel groot, dus dan wordt $x^2 + 1$ heel groot. Dan

nadert $\frac{3}{x^2 + 1}$ tot 0 en dan wordt $100 - \frac{3}{x^2 + 1} \approx 100 - 0 = 100$.

De grenswaarde is 100.

b stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $0,77^x$ af, dus dan neemt $10 \cdot 0,77^x$ af.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe, dus dan neemt $\sqrt{x} + 5$ toe.

Van $\frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$ neemt af en dan

neemt $55 - \frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$ toe.

De grafiek van y is stijgend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan nadert $0,77^x$ tot 0, dus dan nadert $10 \cdot 0,77^x$ tot 0.

Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot, dus dan wordt $\sqrt{x} + 5$ heel groot.

Als van $\frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$ de teller nadert tot 0 en de noemer heel groot wordt, dan nadert

$$\frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5} \text{ tot } 0 \text{ en dan wordt } 55 - \frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5} \approx 55 - 0 = 55.$$

De grenswaarde is 55.

c stijgen of dalen

Omdat $e^{-t} = (e^{-1})^t \approx 0,37^t$ geldt: als t toeneemt, dan neemt e^{-t} af, dus dan neemt $16 \cdot e^{-t}$

af en dan neemt $24 - 16 \cdot e^{-t}$ toe. Daarom neemt $\frac{78}{24 - 16 \cdot e^{-t}}$ af.

De grafiek van N is dalend.

grenswaarde

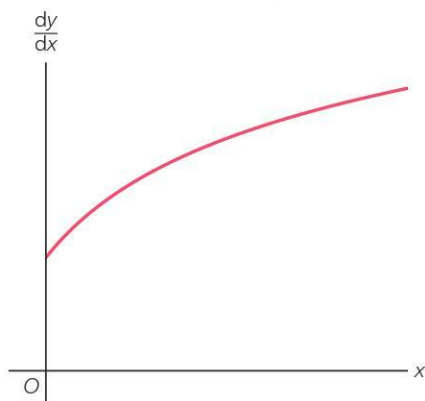
Omdat $e^{-t} \approx 0,37^t$ geldt: als t heel groot wordt, dan nadert e^{-t} tot 0, dus dan nadert $16 \cdot e^{-t}$

tot 0 en dan wordt $24 - 16 \cdot e^{-t} \approx 24 - 0 = 24$. Dan wordt $\frac{78}{24 - 16 \cdot e^{-t}} \approx \frac{78}{24} = 3,25$.

De grenswaarde is 3,25.

22

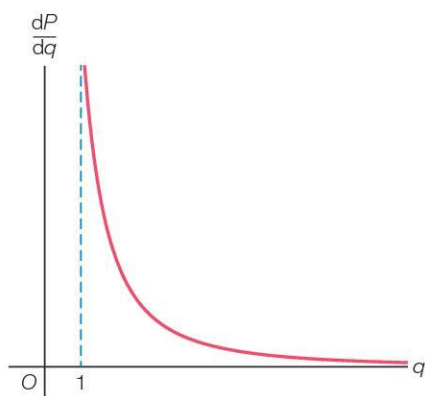
a $y = 3x \cdot \ln(x + 4)$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3 \cdot \ln(x + 4) + 3x \cdot \frac{1}{x + 4} = 3 \ln(x + 4) + \frac{3x}{x + 4}$.



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is toenemend stijgend.

b $P = \frac{q + 20}{q - q^2}$ geeft $\frac{dP}{dq} = \frac{(q - q^2) \cdot 1 - (q + 20) \cdot (1 - 2q)}{(q - q^2)^2} = \frac{q - q^2 - (q - 2q^2 + 20 - 40q)}{(q - q^2)^2}$
 $= \frac{q - q^2 - q + 2q^2 - 20 + 40q}{(q - q^2)^2} = \frac{q^2 + 40q - 20}{(q - q^2)^2}$



De grafiek van $\frac{dP}{dq}$ ligt geheel boven de q -as, dus de grafiek van P is stijgend.

De grafiek van $\frac{dP}{dq}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van P is afnemend stijgend.

c $y = 7e^{-0,3x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 7e^{-0,3x} \cdot -0,3 = -2,1e^{-0,3x}$.

$e^{-0,3x}$ is positief, dus $-2,1e^{-0,3x}$ is negatief.

De grafiek van y is dus dalend.

$e^{-0,3x} = (e^{-0,3})^x \approx 0,74^x$, dus $\frac{dy}{dx} \approx -2,1 \cdot 0,74^x$.

Als t toeneemt, dan neemt $0,74^x$ af en dan neemt $-2,1 \cdot 0,74^x$ toe.

De grafiek van y is afnemend dalend.

d $N = 100(1 - 0,5^t)$ geeft $\frac{dN}{dt} = 100 \cdot -0,5^t \cdot \ln(0,5) = -100 \cdot 0,5^t \cdot \ln(0,5) \approx 69 \cdot 0,5^t$.

$0,5^t$ is positief, dus $69 \cdot 0,5^t$ is positief.

De grafiek van N is dus stijgend.

Als t toeneemt, dan neemt $0,5^t$ af en dan neemt $69 \cdot 0,5^t$ af.

De grafiek van N is afnemend stijgend.

23 a De breedte van de uitslag is $4x + 0,7$ cm.

De hoogte van de uitslag is $h + 0,5x + 0,6x + 2 \cdot 0,7 = 1,4 + 1,1x + h$ cm.

$$\left. \begin{array}{l} I = x^2 h \\ I = 1000 \text{ cm}^3 \end{array} \right\} x^2 h = 1000, \text{ dus } h = \frac{1000}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } O(x) &= (4x + 0,7)(1,4 + 1,1x + h) \\ &= (4x + 0,7)\left(1,4 + 1,1x + \frac{1000}{x^2}\right) \end{aligned}$$

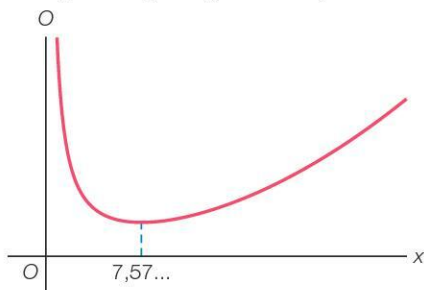
b $O(x) = (4x + 0,7)\left(1,4 + 1,1x + \frac{1000}{x^2}\right) = 5,6x + 4,4x^2 + \frac{4000}{x} + 0,98 + 0,77x + \frac{700}{x^2}$
 $= 4,4x^2 + 6,37x + 0,98 + 4000x^{-1} + 700x^{-2}$ geeft

$$O'(x) = 8,8x + 6,37 - 4000x^{-2} - 1400x^{-3} = 8,8x + 6,37 - \frac{4000}{x^2} - \frac{1400}{x^3}$$

c Los op $O'(x) = 0$.

$$\text{Voer in } y_1 = 8,8x + 6,37 - \frac{4000}{x^2} - \frac{1400}{x^3}.$$

De optie nulpunt geeft $x = 7,57...$



Uit de schets blijkt dat de oppervlakte minimaal is voor $x = 7,57...$

$O(7,57...) \approx 842$, dus er wordt 842 cm^2 karton gebruikt.

Bladzijde 234

24 $K = \text{aanlegkosten } PE + \text{aanlegkosten } BP$

$$K = 140\,000 \cdot \sqrt{x^2 + 25} + 100\,000(10 - x)$$

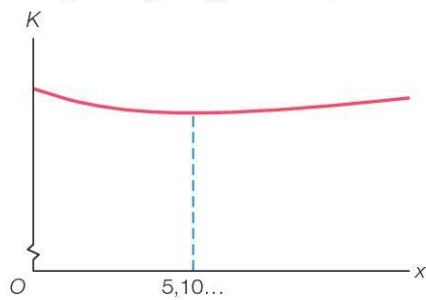
$$K = 140\,000\sqrt{x^2 + 25} - 100\,000x + 1\,000\,000 = 140\,000(x^2 + 25)^{0,5} - 100\,000x + 1\,000\,000$$

$$\frac{dK}{dx} = 70\,000(x^2 + 25)^{-0,5} \cdot 2x - 100\,000 = \frac{140\,000x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 100\,000$$

$$\frac{dK}{dx} = 0 \text{ geeft } \frac{140\,000x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 100\,000 = 0 \text{ oftewel } \frac{140\,000x}{\sqrt{x^2 + 25}} = 100\,000 \text{ oftewel } \frac{1,4x}{\sqrt{x^2 + 25}} = 1.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{1,4x}{\sqrt{x^2 + 25}} \text{ en } y_2 = 1.$$

De optie snijpunt geeft $x = 5,10\dots$



De aanlegkosten zijn minimaal voor $x = 5,10\dots$

De minimale aanlegkosten zijn ongeveer 1 489 900 euro.

25 a $t = 10$ geeft $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot e^{-0,21 \cdot 10}} \approx 0,6$

Dus 0,6% is besmet (geweest).

b Los op $\frac{100}{1 + 1450 \cdot e^{-0,21t}} = 25$.

Voer in $y_1 = \frac{100}{1 + 1450 \cdot e^{-0,21x}}$ en $y_2 = 25$.

De optie snijpunt geeft $x = 29,43\dots$

Dus na 30 dagen.

c Omdat $e^{-0,21t} = (e^{-0,21})^t \approx 0,81^t$ geldt: als t toeneemt, dan neemt $e^{-0,21t}$ af, dus dan neemt $500 \cdot e^{-0,21t}$ af en $1 + 500 \cdot e^{-0,21t}$ neemt af. Dus $\frac{100}{1 + 500 \cdot e^{-0,21t}}$ neemt toe.

De grafiek van P is dus stijgend.

d Omdat $e^{-0,21t} \approx 0,81^t$ geldt: als t heel groot wordt, dan nadert $e^{-0,21t}$ tot 0.

Dan wordt $1450 \cdot e^{-0,21t} \approx 0$ en $1 + 1450 \cdot e^{-0,21t} \approx 1$.

Dus dan wordt $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot e^{-0,21t}} \approx \frac{100}{1} = 100$.

De grenswaarde is 100%, dus uiteindelijk zal de gehele bevolking besmet zijn (geweest).

e $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot e^{-0,21t}}$ geeft

$$\frac{dP}{dt} = \frac{(1 + 1450 \cdot e^{-0,21t}) \cdot 0 - 100 \cdot 1450 \cdot e^{-0,21t} \cdot -0,21}{(1 + 1450 \cdot e^{-0,21t})^2} = \frac{30450 \cdot e^{-0,21t}}{(1 + 1450 \cdot e^{-0,21t})^2}$$

Voer in $y_1 = \frac{30450 \cdot e^{-0,21x}}{(1 + 1450 \cdot e^{-0,21x})^2}$.

De optie maximum geeft $x \approx 35$, dus voor $t = 35$ is de toename maximaal.

Bladzijde 235

26 a $C = 10$ geeft $100 - 21,6t^{0,35} = 10$

$$21,6t^{0,35} = 90$$

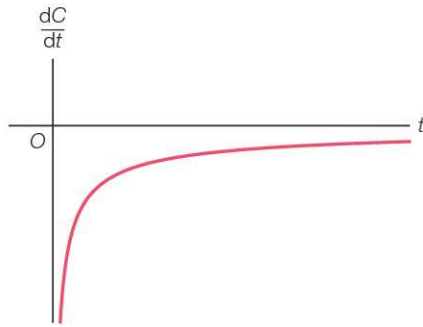
$$t^{0,35} = \frac{90}{21,6}$$

$$t = \left(\frac{90}{21,6}\right)^{\frac{1}{0,35}} \approx 59$$

De levensduur is 59 jaar.

Opmerking: de vergelijking $100 - 21,6t^{0,35} = 10$ mag ook grafisch-numeriek worden opgelost.

b $C = 100 - 21,6t^{0,35}$ geeft $\frac{dC}{dt} = -7,56t^{-0,65}$.



De grafiek van $\frac{dC}{dt}$ ligt geheel onder de t -as, dus de grafiek van C is dalend.

De grafiek van $\frac{dC}{dt}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van C is afnemend dalend.

Hieruit volgt dat de conditie van het viaduct steeds minder snel afneemt.

- 27 a** Omdat $e^{-0,0015f} = (e^{-0,0015})^f \approx 0,9985^f$ geldt: als f heel groot wordt, dan nadert $e^{-0,0015f}$ tot 0 en dan nadert $b \cdot e^{-0,0015f}$ tot 0 en dan wordt $1 + b \cdot e^{-0,0015f} \approx 1 + 0 = 1$.

Dus dan wordt $\frac{a}{1 + b e^{-0,0015f}} \approx \frac{a}{1} = a$.

De grenswaarde is dus a .

Omdat de maximale demping 44 dB is, geldt dat $a = 44$.

$f = 250$ en $D = 12,5$ invullen in $D = \frac{44}{1 + b e^{-0,0015f}}$ geeft $\frac{44}{1 + b e^{-0,0015 \cdot 250}} = 12,5$.

Voer in $y_1 = \frac{44}{1 + x e^{-0,0015 \cdot 250}}$ en $y_2 = 12,5$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 3,67$, dus $b = 3,67$.

- b** $f = 1000$ invullen in de formule geeft $D = 24,10\dots$

Het model wijkt $\frac{25 - 24,10\dots}{25} \times 100\% \approx 3,6\%$ af.

- c** Los op $\frac{44}{1 + 3,7 e^{-0,0015f}} = 30$.

Voer in $y_1 = \frac{44}{1 + 3,7 e^{-0,0015x}}$ en $y_2 = 30$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1380$, dus een toon van 1380 Hz.

- d** Omdat $e^{-0,0015f} = (e^{-0,0015})^f \approx 0,9985^f$ geldt: als f toeneemt, dan neemt $e^{-0,0015f}$ af, dus

dan neemt $1 + 3,7 e^{-0,0015f}$ af en dan neemt $\frac{44}{1 + 3,7 e^{-0,0015f}}$ toe.

De grafiek van D is dus stijgend.

- e** $D = \frac{44}{1 + 3,7 e^{-0,0015f}}$ geeft

$$\frac{dD}{df} = \frac{(1 + 3,7 e^{-0,0015f}) \cdot 0 - 44 \cdot 3,7 e^{-0,0015f} \cdot -0,0015}{(1 + 3,7 e^{-0,0015f})^2} = \frac{0,2442 e^{-0,0015f}}{(1 + 3,7 e^{-0,0015f})^2}$$

$f = 2500$ geeft $\frac{dD}{df} = 0,00486\dots$

De demping per 1000 Hz is ongeveer 4,9 dB.

- f** Voer in $y_1 = \frac{0,2442 e^{-0,0015x}}{(1 + 3,7 e^{-0,0015x})^2}$.

De optie maximum geeft $x \approx 872$ en $y \approx 0,0165$.

De toename van de demping is maximaal bij een toonhoogte van 872 Hz.

Bladzijde 236

- 28 a** Los op $487 \cdot 2^{0,10t} = 4000$.

Voer in $y_1 = 487 \cdot 2^{0,10x}$ en $y_2 = 4000$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 30,4$.

In het jaar $1963 + 30 = 1993$.

b $N = 487 \cdot 2^{0,10t}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 487 \cdot 2^{0,10t} \cdot \ln(2) \cdot 0,10 = 48,7 \cdot \ln(2) \cdot 2^{0,10t}$.

Bij 2005 hoort $t = 42$.

$t = 42$ geeft $\frac{dN}{dt} = 48,7 \cdot \ln(2) \cdot 2^{4,2} \approx 620$

Het aantal broedparen nam toe met 620 per jaar.

c $\frac{dN}{dt} = 48,7 \cdot \ln(2) \cdot 2^{0,10t} \approx 33,8 \cdot 2^{0,01t}$

$2^{0,01t}$ is positief, dus $33,8 \cdot 2^{0,01t}$ is positief.

De grafiek van N is dus stijgend.

$2^{0,01t} \approx 1,007^t$, dus als t toeneemt, dan neemt $2^{0,01t}$ toe en dan neemt $33,8 \cdot 2^{0,01t}$ toe.

De grafiek van N is toenemend stijgend.

d Bij 2016 hoort $t = 53$.

De formule geeft $N \approx 19\,186$.

De schatting van Joe is $\frac{19\,186 - 13\,000}{19\,186} \times 100\% \approx 32,2\%$ lager.

e Omdat $e^{-0,18t} = (e^{-0,18})^t \approx 0,84^t$ geldt: als t toeneemt, dan neemt $e^{-0,18t}$ af, dus dan neemt ook $0,76 + e^{-0,18t}$ af en dan neemt $\frac{11\,200}{0,76 + e^{-0,18t}}$ toe.

De grafiek van N is stijgend, dus neemt het aantal broedparen voortdurend toe.

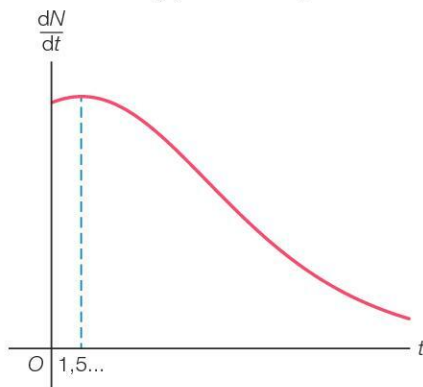
f Omdat $e^{-0,18t} \approx 0,84^t$ geldt: als t heel groot is, dan nadert $e^{-0,18t}$ tot 0 en dan wordt $0,76 + e^{-0,18t} \approx 0,76 + 0 = 0,76$. Dus $N \approx \frac{11\,200}{0,76 + 0} \approx 14\,737$.

De grenswaarde is 14 737.

g $N = \frac{11\,200}{0,76 + e^{-0,18t}}$ geeft

$$\frac{dN}{dt} = \frac{(0,76 + e^{-0,18t}) \cdot 0 - 11\,200 \cdot e^{-0,18t} \cdot -0,18}{(0,76 + e^{-0,18t})^2} = \frac{2016e^{-0,18t}}{(0,76 + e^{-0,18t})^2}$$

Voer in $y_1 = \frac{2016e^{-0,18x}}{(0,76 + e^{-0,18x})^2}$.



De optie maximum geeft $x = 1,5...$

Bij 2002 hoort $t = 2$ en voor $t > 2$ geldt

- de grafiek van $\frac{dN}{dt}$ ligt geheel boven de t -as, dus de grafiek van N is stijgend
- de grafiek van $\frac{dN}{dt}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van N is afnemend stijgend.

Bladzijde 237

29 a $L = 168,0$, dus $S = \frac{168,0}{170,0}$.

Los op $\ln(-0,00216t + 2,7183) = \frac{168}{170}$.

Voer in $y_1 = \ln(-0,00216x + 2,7183)$ en $y_2 = \frac{168}{170}$.

De optie snijpunt geeft $x = 14,72...$

Na 14 uur en 44 minuten (oftewel na 884 minuten).

b $S = \ln(-0,00216t + 2,7183)$ geeft $\frac{dS}{dt} = \frac{-0,00216}{-0,00216t + 2,7183}$.

Voer in $y_1 = \frac{-0,00216}{-0,00216x + 2,7183}$.



De grafiek van $\frac{dS}{dt}$ ligt geheel onder de t -as, dus de grafiek van S is dalend.

De grafiek van $\frac{dS}{dt}$ is bovendien dalend, dus er is sprake van toenemende daling.

c Voor het verschil geldt $V = \ln(-0,00216t + 2,7183) - (-0,0008t + 1,0000)$.

Voer in $y_1 = \ln(-0,00216x + 2,7183) - (-0,0008x + 1,0000)$.

De optie maximum geeft $x = 8,472\dots$ en $y \approx 2,9551 \cdot 10^{-5}$.

Het maximum van V is $2,9551 \cdot 10^{-5}$.

Het maximale verschil tussen de twee formules voor de lengte van meneer Jansen is dus $170,0 \cdot 2,9551 \cdot 10^{-5} \approx 0,005$ cm.

15 Examentraining

Bladzijde 238

30 $(4a - 1) \cdot \frac{2b}{4a - 1} = 2b$

31 $E = 15 \cdot (2N)^{-1,5}$
 $(2N)^{-1,5} = \frac{1}{15}E$
 $2N = (\frac{1}{15}E)^{\frac{1}{-1,5}}$
 $N = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{15})^{\frac{1}{-1,5}} \cdot E^{\frac{1}{-1,5}}$
 $N \approx 3,04E^{-0,67}$
 Dus $N = 3,04E^{-0,67}$.

32 Voer in $y_1 = -0,005x^2 + 23x$.
 De optie maximum geeft $x = 2300$ en $y = 26450$.
 De maximale waarde van P is 26450.

33 totaal = $\frac{649}{0,0564} \approx 11\,507$

34 $N = \frac{500}{1 + 2e^{-0,2t}}$ geeft $\frac{dN}{dt} = \frac{(1 + 2e^{-0,2t}) \cdot 0 - 500 \cdot 2e^{-0,2t} \cdot -0,2}{(1 + 2e^{-0,2t})^2} = \frac{200e^{-0,2t}}{(1 + 2e^{-0,2t})^2}$.

Voer in $y_1 = \frac{200e^{-0,2x}}{(1 + 2e^{-0,2x})^2}$.

De optie maximum geeft $x = 3,46\dots$ en $y = 25$.

Bij $t = 3,46\dots$ hoort halverwege 2013.

Dus in 2013 was de toename van het aantal leden het grootst.

35 $3(P - 5) + 4(3Q + 1) = 61$
 $3P - 15 + 12Q + 4 = 61$
 $3P = -12Q + 72$
 $P = -4Q + 24$

36 $\text{aantal} = 5! = 120$

37 Stel $u_n = u_0 \cdot r^n$.

$$r^5 = \frac{u_7}{u_2} = \frac{45,5625}{6}, \text{ dus } r = \left(\frac{45,5625}{6}\right)^{\frac{1}{5}} = 1,5.$$

$$u_n = u_0 \cdot 1,5^n \text{ en } u_2 = 6 \text{ geeft } u_0 \cdot 1,5^2 = 6, \text{ dus } u_0 = 2\frac{2}{3}.$$

$$\text{De directe formule is } u_n = 2\frac{2}{3} \cdot 1,5^n.$$

38 $\frac{2}{p} + 3p \cdot \frac{5q}{2p^2} = \frac{2}{p} + \frac{15pq}{2p^2} = \frac{2}{p} + \frac{15q}{2p} = \frac{4}{2p} + \frac{15q}{2p} = \frac{15q+4}{2p}$

39 $30\,689 \text{ km}^2 = 30\,689 \cdot 10^6 \text{ m}^2$

$$\text{De oppervlakte per inwoner is } \frac{30\,689 \cdot 10^6}{11,46 \cdot 10^6} \approx 2678 \text{ m}^2.$$

40 $A = 0,18 \cdot (2x - 3) \cdot \frac{x}{0,06} = \frac{0,18}{0,06} \cdot x(2x - 3) = 3x(2x - 3) = 6x^2 - 9x$

$$\text{Dus } a = 6 \text{ en } b = -9.$$

41 y is evenredig met x , dus $y = ax$.

$$x = 12 \text{ en } y = 69 \text{ geeft } 12a = 69, \text{ dus } a = 5,75.$$

$$x = 42 \text{ invullen in } y = 5,75x \text{ geeft } y = 5,75 \cdot 42 = 241,5.$$

42 $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30 - 18}{10 - 2} = 1\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, 18) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 18 \\ 3 + b = 18 \\ b = 15 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 1\frac{1}{2}x + 15.$$

Bladzijde 239

43 $5p \cdot \frac{3}{q} \cdot \frac{1-q}{q} = \frac{5p \cdot 3 \cdot (1-q)}{q^2} = \frac{15p - 15pq}{q^2}$

44 Dat is $45\,486 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \approx 3,9 \cdot 10^9$ dollar per dag.

45 $y = 2ax^2 - 3x^3 + 5$ geeft $\frac{dy}{dx} = 4ax - 9x^2$.

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ geeft } 4ax - 9x^2 = 0$$

$$x(4a - 9x) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 4a - 9x = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 9x = 4a$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{4}{9}a$$

$$y \text{ is maximaal voor } x = \frac{4}{9}a.$$

$$y_{\max} = 2a \cdot \left(\frac{4}{9}a\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{4}{9}a\right)^3 + 5 = 2a \cdot \frac{16}{81}a^2 - 3 \cdot \frac{64}{729}a^3 + 5 = \frac{32}{243}a^3 + 5$$

46 $\frac{750 - 820}{820} \times 100\% \approx -8,5\%$, dus de afname is 8,5%.

47 Dat is $1167 \cdot 1,61^2 \approx 3025 \text{ km}^2$.

48 De winst in 2020 was $31,25 \cdot 1,085 \cdot 0,847 \approx 28,72$ miljoen euro.

49 $(2a - 1)^2 - 4(3a - 1) = 4a^2 - 4a + 1 - 12a + 4 = 4a^2 - 16a + 5$

- 50 a** $y = 5 + 3 \sin(x)$
De periode is 2π , de evenwichtsstand is 5 en de amplitude is 3.
- b** $y = 3 \sin(2x) + 1$
De periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$, de evenwichtsstand is 1 en de amplitude is 3.
- c** $y = 5 \sin(\frac{1}{4}\pi x)$
De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$, de evenwichtsstand is 0 en de amplitude is 5.

51 aantal $= 7^5 = 16\,807$

52 $z = 20 + 4^{x-2}$
 $20 + 4^{x-2} = z$
 $4^{x-2} = z - 20$
 $x - 2 = {}^4\log(z - 20)$
 $x = {}^4\log(z - 20) + 2$

- 53** 4 delen is gelijk aan 25 euro, dus 1 deel is gelijk aan 6,25 euro.
In totaal werden $2 + 3 + 7 = 12$ delen verdeeld.
Er werd dus $12 \cdot 6,25 = 75$ euro verdeeld.

Bladzijde 240

- 54 a** In 11 jaar $1165 - 840 = 325$ erbij, dus per jaar $\frac{325}{11}$ erbij.
In 2010 was het aantal $840 + 7 \cdot \frac{325}{11} \approx 1047$.
- b** In 6 jaar $1390 - 1165 = 225$ erbij, dus per jaar $\frac{225}{6} = 37,5$ erbij.
In 2025 is het aantal $1390 + 5 \cdot 37,5 \approx 1578$.
- c** $840 - 520 = 320$ erbij in 8 jaar, dus 1 erbij in $\frac{8}{320}$ jaar.
 $760 - 520 = 240$, dus bij 760 hoort het jaar $1995 + 240 \cdot \frac{8}{320} = 2001$.

- 55 a** $y = \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x} = 4x^{-3} + 5x^{-1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -12x^{-4} - 5x^{-2} = -\frac{12}{x^4} - \frac{5}{x^2}$.
- b** $y = 6x^2 \cdot \sqrt{x} = 6x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 15x^{1\frac{1}{2}} = 15x\sqrt{x}$.
- c** $y = \frac{2}{3x} + \frac{3x}{2} = \frac{2}{3}x^{-1} + \frac{1}{2}x$ geeft $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}x^{-2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{3x^2} + \frac{1}{2}$.

56 $\frac{6x+10}{x+3} - 2x = \frac{6x+10}{x+3} - \frac{2x(x+3)}{x+3} = \frac{6x+10-2x^2-6x}{x+3} = \frac{-2x^2+10}{x+3}$

57 De procentuele toename is $\frac{145-115}{115} \times 100\% \approx 26,1\%$.

58 $6a - 5b = 18$
 $-5b = -6a + 18$
 $b = 1\frac{1}{5}a - 3\frac{3}{5}$

- 59 a** Als x toeneemt, dan neemt $3x$ toe, dus $3x + 1$ neemt toe, dus $\frac{10}{3x+1}$ neemt af en $75 - \frac{10}{3x+1}$ neemt toe.
Dus de grafiek van y is stijgend.
Als x heel groot wordt, dan wordt $3x$ heel groot, dus dan wordt $3x + 1$ heel groot en dan nadert $\frac{10}{3x+1}$ tot 0. Dus dan wordt $75 - \frac{10}{3x+1} \approx 75 - 0 = 75$.
Dus de grenswaarde is 75.

b Als x toeneemt, dan neemt $2x^2$ toe, dus $2x^2 + 1$ neemt toe, dus $\frac{50}{2x^2 + 1}$ neemt af en

$$\frac{50}{2x^2 + 1} + 30 \text{ neemt af.}$$

Dus de grafiek van y is dalend.

Als x heel groot wordt, dan wordt $2x^2$ heel groot, dus dan wordt $2x^2 + 1$ heel groot en

$$\text{dan nadert } \frac{50}{2x^2 + 1} \text{ tot } 0. \text{ Dus dan wordt } \frac{50}{2x^2 + 1} + 30 \approx 0 + 30 = 30.$$

Dus de grenswaarde is 30.

c Als x toeneemt, dan neemt $0,75^x$ af en $100 \cdot 0,75^x$ neemt af.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe en $3\sqrt{x}$ neemt toe.

Van $\frac{100 \cdot 0,75^x}{3\sqrt{x}}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{100 \cdot 0,75^x}{3\sqrt{x}}$ neemt af.

Dus de grafiek van y is dalend.

Als x heel groot wordt, dan nadert $0,75^x$ tot 0. Dan wordt $100 \cdot 0,75^x \approx 0$.

Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot en $3\sqrt{x}$ wordt heel groot.

Van $\frac{100 \cdot 0,75^x}{3\sqrt{x}}$ nadert de teller tot 0 en de noemer wordt heel groot, dus $\frac{100 \cdot 0,75^x}{3\sqrt{x}}$ nadert tot 0.

Dus de grenswaarde is 0.

60 a $q = 400$ geeft $W = -0,01 \cdot 400^2 + 7,5 \cdot 400 - 650 = 750$

De winst per artikel is $\frac{75000}{400} = 187,50$ euro.

b Voer in $y_1 = -0,01x^2 + 7,5x - 650$.

De optie maximum geeft $x = 375$ en $y = 756,25$.

De maximale winst is 75 625 euro per jaar.

61 $\frac{2}{3}a^{-4}b^2 = \frac{2b^2}{3a^4}$

Bladzijde 241

62 $A = at + b$ met $a = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{22 - 78}{28 - 12} = -3\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} A = -3\frac{1}{2}t + b \\ t = 12 \text{ en } A = 78 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3\frac{1}{2} \cdot 12 + b = 78 \\ -42 + b = 78 \\ b = 120 \end{array}$$

Dus $A = -3\frac{1}{2}t + 120$.

63 a $y = x^2 \cdot e^{3x+1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot e^{3x+1} + x^2 \cdot e^{3x+1} \cdot 3 = 2xe^{3x+1} + 3x^2 \cdot e^{3x+1}$.

b $y = \frac{2x-1}{3x+4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(3x+4) \cdot 2 - (2x-1) \cdot 3}{(3x+4)^2} = \frac{6x+8-6x+3}{(3x+4)^2} = \frac{11}{(3x+4)^2}$.

64 $(a^{-2})^4 \cdot a^5 = a^{-8} \cdot a^5 = a^{-3}$

65 Bij codes met vijf letters 3, 4 of 5 A's.

Het aantal mogelijke codes met vijf letters is $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 10 + 5 + 1 = 16$.

Bij codes met zes letters 4, 5 of 6 A's.

Het aantal mogelijke codes met zes letters is $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 15 + 6 + 1 = 22$.

Bij codes met zeven letters 4, 5, 6 of 7 A's.

Het aantal mogelijke codes met zeven letters is $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 35 + 21 + 7 + 1 = 64$.

Het totale aantal codes met meer A's dan B's is $16 + 22 + 64 = 102$.

66 $67,13 \text{ km}^2 = 67,13 \cdot 10^8 \text{ dm}^2$

$55 \text{ mm} = 55 \cdot 10^{-2} \text{ dm}$

Dus er viel die dag $67,13 \cdot 10^8 \cdot 55 \cdot 10^{-2} \approx 3,69 \cdot 10^9$ liter regen.

$$67 \quad y = 5 - \frac{6}{3-2x} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 0 - \frac{(3-2x) \cdot 0 - 6 \cdot (-2)}{(3-2x)^2} = \frac{-12}{(3-2x)^2}.$$

De teller van $\frac{dy}{dx}$ is negatief en de noemer is positief voor $x > 1\frac{1}{2}$, dus $\frac{dy}{dx} < 0$ voor elke $x > 1\frac{1}{2}$.

Hieruit volgt dat de grafiek van y dalend is $x > 1\frac{1}{2}$.

$$68 \quad \text{a} \quad \text{Meetkundige rij met } u_0 = 800 \text{ en } r = 1,05, \text{ dus}$$

$$\text{recursieve formule } u_n = 1,05 \cdot u_{n-1} \text{ met } u_0 = 800$$

$$\text{en directe formule } u_n = 800 \cdot 1,05^n.$$

b Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $u_{12} \approx 1436,7$ en $u_{13} \approx 1508,5$.
Er zijn 13 termen kleiner dan 1500.

$$69 \quad g_{\text{jaar}} = 0,942$$

Los op $0,942^t = \frac{1}{2}$.
Voer in $y_1 = 0,942^x$ en $y_2 = \frac{1}{2}$.
De optie snijpunt geeft $x = 11,60\dots$
De halveringstijd is ongeveer 11 jaar en 7 maanden (139 maanden).

$$70 \quad y = 0,08(x-5)^2 + 1$$

↓ verschuiving (2, 4)
 $y = 0,08(x-7)^2 + 5$
↓ herschaling in verticale richting met factor 3
 $y = 3 \cdot (0,08(x-7)^2 + 5) = 0,24(x-7)^2 + 15$
De formule van de beeldgrafiek is $y = 0,24(x-7)^2 + 15$.
De top is (7, 15).

$$71 \quad \text{De oorspronkelijke hoeveelheid was } \frac{3015}{1,184} \approx 2546.$$

$$72 \quad \text{aantal} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$$

$$73 \quad y = 0,4 \cdot \sqrt[3]{x} + 2$$

$$0,4 \cdot \sqrt[3]{x} = y - 2$$

$$\sqrt[3]{x} = \frac{y-2}{0,4} = 2,5y - 5$$

$$x = (2,5y - 5)^3$$

$$74 \quad y = -\frac{1}{3}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 6 + b = 9 \\ -2 + b = 9 \end{array} \right.$$

$$b = 11$$

Dus $l: y = -\frac{1}{3}x + 11$.

Bladzijde 242

$$75 \quad y = \frac{108}{(3x^2)^3} = \frac{108}{3^3 \cdot (x^2)^3} = \frac{108}{27x^6} = 4x^{-6}$$

Dus $y = 4x^{-6}$.

$$76 \quad \text{a} \quad f(x) = (x^2 - 2)(2x + 5) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 10 \text{ geeft } f'(x) = 6x^2 + 10x - 4.$$

$$\text{b} \quad K(q) = \frac{1}{3}q^3 + 2q(q-2) + 5 = \frac{1}{3}q^3 + 2q^2 - 4q + 5 \text{ geeft } K'(q) = q^2 + 4q - 4.$$

$$\text{c} \quad L(p) = 2p^5 - 3a^2p^2 + 2a - 3p + 4 \text{ geeft } L'(p) = 10p^4 - 6a^2p - 3.$$

$$77 \quad q \text{ neemt toe van 100 tot 200.}$$

De gemiddelde toename is $\frac{K(200) - K(100)}{100} = \frac{129,6 - 117,2}{100} = 0,124$ euro per stuk.

- 78** Neem $2x$ voor x in de formule $A = 20x^{1,7}$.
Je krijgt $A = 20(2x)^{1,7} = 20 \cdot 2^{1,7} \cdot x^{1,7} = 2^{1,7} \cdot 20x^{1,7} \approx 3,25 \cdot 20x^{1,7}$.
Dus A wordt ongeveer 3,25 keer zo groot.

79 $\frac{5}{6}a^{-4}b^{\frac{2}{3}} = \frac{5b^{\frac{2}{3}}}{6a^4} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{b^2}}{6a^4}$

80 aantal $= \binom{16}{3} \cdot \binom{13}{2} = 43\,680$

81 a $y = 5 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} = 5 - 3x^{-2} + 2x^{-1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 6x^{-3} - 2x^{-2} = \frac{6}{x^3} - \frac{2}{x^2}$.

$\frac{dy}{dx} = 0$ geeft $\frac{6}{x^3} - \frac{2}{x^2} = 0$.

Voer in $y_1 = \frac{6}{x^3} - \frac{2}{x^2}$.

De optie nulpunt geeft $x = 3$.

$x = 3$ geeft $y = 5 - \frac{3}{3^2} + \frac{2}{3} = 5 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$, dus $A(3, 5\frac{1}{3})$.

b De snelheid is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = \frac{6}{1^3} - \frac{2}{1^2} = 6 - 2 = 4$.

82 a $g_{\text{dag}} = 1,086$, dus $g_{\text{week}} = 1,086^7 \approx 1,782$.

De toename is 78,2% per week.

b $g_{\text{dag}} = 1,086$, dus $g_{10 \text{ uur}} = 1,086^{\frac{10}{24}} \approx 1,035$.

Dus de toename is 3,5% per tien uur.

83 $N(x) = 84 + 43,2 \cdot \log(x)$, dus $N(2x) = 84 + 43,2 \cdot \log(2x)$.

$N(2x) = 84 + 43,2 \cdot (\log(2) + \log(x))$

$N(2x) = 84 + 43,2 \cdot \log(2) + 43,2 \cdot \log(x)$

$N(2x) = 84 + 43,2 \cdot \log(x) + 43,2 \cdot \log(2)$

$N(2x) \approx N(x) + 13,00$

Hiermee is aangetoond dat N steeds met 13 toeneemt als x verdubbelt.

84 $y = \frac{6\sqrt{x}}{2x \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{2x \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{3}}} = 3x^{\frac{5}{6}}$

Dus $y = 3x^{\frac{5}{6}}$.

85 2 micrometer $= 2 \cdot 10^{-3} \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ meter}$

De diameter van het virusdeeltje is $\frac{2 \cdot 10^{-6}}{50} \text{ m} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ m}$.

Bladzijde 243

86 a $y_{\text{max}} = 3 + 15 = 18$

periode $= \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

y_{max} voor $x = 0,1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 0,35$.

b $y_{\text{min}} = 3 - 15 = -12$

y_{min} voor $x = 0,1 + \frac{3}{4} \cdot 1 = 0,85$.

c Voer in $y_1 = 3 + 15 \sin(2\pi(x - 0,1))$.

De helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0,5} \approx -76,25$.

87 a $y = 5(x^2 - 4x)^{0,6}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 3(x^2 - 4x)^{-0,4} \cdot (2x - 4)$.

b $y = 10\sqrt{3-x} = 10(3-x)^{0,5}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 5(3-x)^{-0,5} \cdot -1 = -\frac{5}{\sqrt{3-x}}$.

- 88 a** $g_{8 \text{ uur}} = 0,891$, dus $g_{50 \text{ uur}} = (0,891)^{\frac{50}{8}} \approx 0,486$.
De afname is 51,4% per 50 uur.
- b** $g_{8 \text{ uur}} = 0,891$, dus $g_{\text{uur}} = (0,891)^{\frac{1}{8}} \approx 0,986$.
De afname is 1,4% per uur.

89 $\frac{x^5}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{x^5}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^5}{x^{\frac{13}{4}}} = x^{\frac{7}{4}}$

90 Ze doet er $\frac{6,5}{14,6} = 0,445\dots$ uur = 26,71... minuten $\approx$ 26 minuten en 43 seconden over.

91 $N = -t^3 + 10t^2 + 3t$ geeft $\frac{dN}{dt} = -3t^2 + 20t + 3$.

Voer in $y_1 = -3x^2 + 20x + 3$.

De optie maximum geeft $x = 3,333\dots$ en $y = 36,333\dots$

Bij $t = 3,333\dots$ hoort 12:20 uur, dus om 12:20 uur was de toename van het aantal bezoekers het grootst.

92 a $y = 250e^{4x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 250e^{4x} \cdot 4 = 1000e^{4x}$.

b $P = 16e^{0,3q^2}$ geeft $\frac{dP}{dq} = 16e^{0,3q^2} \cdot 0,6q = 9,6qe^{0,3q^2}$.

c $y = 12 \cdot 3^{2x-4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 12 \cdot 3^{2x-4} \cdot \ln(3) \cdot 2 = 24 \cdot \ln(3) \cdot 3^{2x-4}$.

93 In de formule h vervangen door $100H$ en m vervangen door $12j$ geeft $100H = 0,02 \cdot (12j)^3 + 0,4 \cdot (12j)^2$
 $100H = 0,02 \cdot 1728j^3 + 0,4 \cdot 144j^2$
 $100H = 34,56j^3 + 57,6j^2$
 $H = 0,3456j^3 + 0,576j^2$

Dus $H = 0,3456j^3 + 0,576j^2$.

94 $\left. \begin{array}{l} M = 25t^b \\ t = 5 \text{ en } M = 70 \end{array} \right\} 25 \cdot 5^b = 70$

Voer in $y_1 = 25 \cdot 5^x$ en $y_2 = 70$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,64$, dus $b \approx 0,64$.

95 $N = 75 \cdot {}^2\log(t) = 75 \cdot \frac{\log(t)}{\log(2)} = \frac{75}{\log(2)} \cdot \log(t) \approx 249 \cdot \log(t)$

Dus $N = 249 \cdot \log(t)$.

96 $N = b \cdot g^t$, met $g_{8 \text{ jaar}} = \frac{77}{326}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{77}{326}\right)^{\frac{1}{8}} = 0,8349\dots$

$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,8349\dots^t \\ t = 3 \text{ en } N = 326 \end{array} \right\} b \cdot 0,8349\dots^3 = 326$
 $b = \frac{326}{0,8349\dots^3} \approx 560$

Dus $N = 560 \cdot 0,835^t$.

97 $N = 4\sqrt{2a-3}$

$\sqrt{2a-3} = \frac{1}{4}N$

$2a-3 = \left(\frac{1}{4}N\right)^2$

$2a = \frac{1}{16}N^2 + 3$

$a = \frac{1}{32}N^2 + 1\frac{1}{2}$

- 98** Voor prijs p in euro's en verkoop q in stuks geldt $p \cdot q = 0,80 \cdot 135 = 108$.

$$q = \frac{108}{p} \text{ met } p = 1,10 \text{ geeft } q \approx 98.$$

Dus hij verkoopt 98 meloenen.

99
$$N = 12 - \frac{150}{2S - 1}$$

$$N - 12 = -\frac{150}{2S - 1}$$

$$12 - N = \frac{150}{2S - 1}$$

$$2S - 1 = \frac{150}{12 - N}$$

$$2S = \frac{150}{12 - N} + 1$$

$$S = \frac{75}{12 - N} + \frac{1}{2}$$

- 100 a** Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

Bij $t = 2$ hoort $N = 20$ en bij $t = 8$ hoort $N = 500$.

$$g_{6 \text{ jaar}} = \frac{500}{20} = 25, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = 25^{\frac{1}{6}} = 1,7099...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,7099...^t \\ t = 2 \text{ en } N = 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,7099...^2 = 20 \\ b = \frac{20}{1,7099...^2} \approx 7 \end{array}$$

Dus $N = 7 \cdot 1,710^t$.

- b** Rechte lijn op logaritmisch papier, dus $N = b \cdot g^t$.

Bij $t = 3$ hoort $N = 800$ en bij $t = 7$ hoort $N = 60$.

$$g_{4 \text{ jaar}} = \frac{60}{800} = 0,075, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = 0,075^{\frac{1}{4}} = 0,5233...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,5233...^t \\ t = 3 \text{ en } N = 800 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,5233...^3 = 800 \\ b = \frac{800}{0,5233...^3} \approx 5580 \end{array}$$

Dus $N = 5580 \cdot 0,523^t$.

- 101 a** $y = 2x - 4\sqrt{x} = 2x - 4x^{0,5}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2 - 2x^{-0,5} = 2 - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

$$\text{De snelheid is } \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=4} = 2 - \frac{2}{\sqrt{4}} = 2 - 1 = 1.$$

- b** $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1} = 2 - \frac{2}{\sqrt{1}} = 2 - 2 = 0$ en $x = 1$ geeft $y = 2 - 4 = -2$.

Dus de raaklijn in het punt $A(1, -2)$ is horizontaal.

- 102** aantal $= \binom{11}{1} \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 1\,663\,200$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{11!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 1\,663\,200$$

- 103** $A = 20 \cdot \sqrt[3]{30x} = 20 \cdot \sqrt[3]{30} \cdot \sqrt[3]{x} \approx 62,1 \cdot \sqrt[3]{x}$

Dus $A = 62,1 \cdot \sqrt[3]{x}$.

- 104 a** Rekenkundige rij met beginterm $u_0 = 980$ en $v = -17$, dus recursieve formule $u_n = u_{n-1} - 17$ met $u_0 = 980$ en directe formule $u_n = 980 - 17n$.

b $u_n = 0$ geeft $980 - 17n = 0$

$$17n = 980$$

$$n \approx 57,6$$

$u_{57} = 11$ en $u_{58} = -6$, dus de rij heeft 58 positieve termen.

- 105 a** Als t heel groot wordt, dan nadert $0,96^t$ tot 0. Dan wordt $14 \cdot 0,96^t \approx 0$ en

$$3 + 14 \cdot 0,96^t \approx 3. \text{ Dus dan wordt } \frac{600}{3 + 14 \cdot 0,96^t} \approx \frac{600}{3} = 200, \text{ dus het}$$

verzadigingsniveau is 200.

- b** Als t heel groot wordt, dan nadert $0,81^t$ tot 0. Dan wordt $3 - 0,81^t \approx 3$, dus dan wordt $450(3 - 0,81^t) \approx 450 \cdot 3 = 1350$, dus het verzadigingsniveau is 1350.

- c** Als t heel groot wordt, dan nadert $\frac{30}{t+2}$ tot 0, dus dan wordt $50 - \frac{30}{t+2} \approx 50 - 0 = 50$, dus het verzadigingsniveau is 50.

106 $N = 15 \cdot 1,15^{2t-1} = 15 \cdot 1,15^{2t} \cdot 1,15^{-1} = 15 \cdot 1,15^{-1} \cdot (1,15^2)^t = 15 \cdot 1,15^{-1} \cdot (e^{\ln(1,15^2)})^t \approx 13,0 \cdot (e^{0,280})^t$
Dus $N = 13,0 \cdot e^{0,280t}$.

107 $y = 0,3x^4$

↓ verschuiving (0,16; 2,2)

$$y = 0,3(x - 0,16)^4 + 2,2$$

De top is (0,16; 2,2).

108 $N = b \cdot g^t$ met $g_{8 \text{ dagen}} = \frac{161}{101}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{161}{101}\right)^{\frac{1}{8}} = 1,0600\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,0600\dots^t \\ t = 4 \text{ en } N = 101 \end{array} \right\} b \cdot 1,0600\dots^4 = 101$$

$$b = \frac{101}{1,0600\dots^4} \approx 79,996$$

$$\text{Dus } N = 80 \cdot 1,060^t.$$

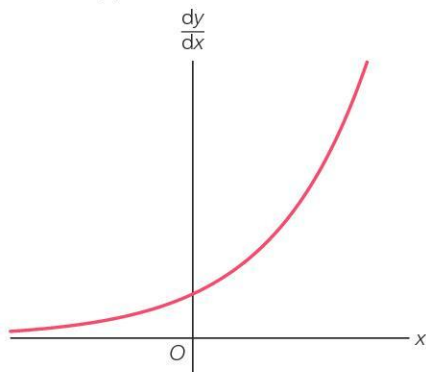
Bladzijde 245

109 $N = 40 + {}^3\log(2t) = 40 + \frac{\ln(2t)}{\ln(3)} = 40 + \frac{1}{\ln(3)} \cdot (\ln(2) + \ln(t)) = 40 + \frac{\ln(2)}{\ln(3)} + \frac{1}{\ln(3)} \cdot \ln(t) \approx 40,6 + 0,91 \ln(t)$

$$\text{Dus } N = 40,6 + 0,91 \cdot \ln(t).$$

110 a $y = 0,5(1 + 2e^{0,6x})$ geeft $\frac{dy}{dx} = 0,5 \cdot 2e^{0,6x} \cdot 0,6 = 0,6e^{0,6x}$.

$$\text{Voer in } y_1 = 0,6e^{0,6x}.$$

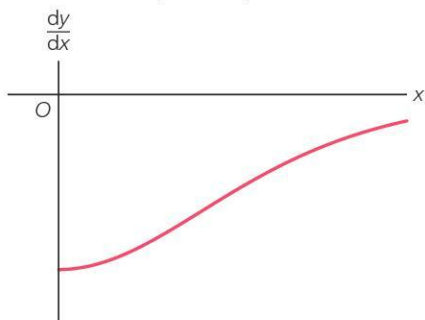


De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is toenemend stijgend.

$$\text{b } y = \frac{15}{1 + e^{0,2x}} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = \frac{(1 + e^{0,2x}) \cdot 0 - 15 \cdot e^{0,2x} \cdot 0,2}{(1 + e^{0,2x})^2} = \frac{-3e^{0,2x}}{(1 + e^{0,2x})^2}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{-3e^{0,2x}}{(1 + e^{0,2x})^2}.$$



De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel onder de x -as, dus de grafiek van y is dalend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is afnemend dalend.

$$\text{111 } K = 16(p - 4)^2$$

$$(p - 4)^2 = \frac{1}{16}K$$

$$p - 4 = \sqrt{\frac{1}{16}K}$$

$$p = \frac{1}{4}\sqrt{K} + 4$$

$$\text{112 } W = -0,2q^3 + 9q^2 - 250 \text{ geeft } \frac{dW}{dq} = -0,6q^2 + 18q.$$

Maximum, dus oplossen $-0,6q^2 + 18q = 0$

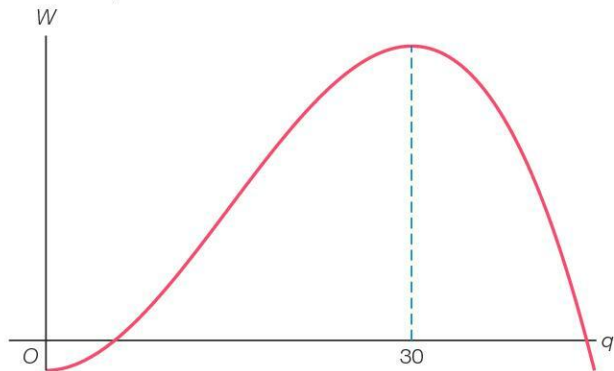
$$q(-0,6q + 18) = 0$$

$$q = 0 \text{ of } -0,6q + 18 = 0$$

$$q = 0 \text{ of } -0,6q = -18$$

$$q = 0 \text{ of } q = 30$$

Voer in $y_1 = -0,2x^3 + 9x^2 - 250$.



Uit de schets volgt dat W maximaal is voor $q = 30$.

$q = 30$ geeft $W = 2450$, dus de maximale winst is 2450 euro per week.

$$\text{113 } N = 35 \cdot e^{0,15t-3}$$

$$\ln(N) = \ln(35 \cdot e^{0,15t-3})$$

$$\ln(N) = \ln(35) + \ln(e^{0,15t-3})$$

$$\ln(N) = \ln(35) + 0,15t - 3$$

$$\ln(N) \approx 0,15t + 0,56$$

$$\text{Dus } \ln(N) = 0,15t + 0,56.$$

- 114** Stel de hoogte van de goot is x cm, dan is de breedte van de goot $100 - 2x$ cm.

Voor de oppervlakte O geldt dan $O = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$.

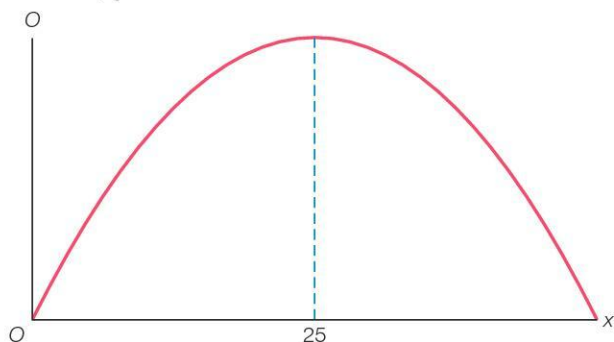
Hieruit volgt $\frac{dO}{dx} = 100 - 4x$.

Maximum, dus oplossen $100 - 4x = 0$

$$-4x = -100$$

$$x = 25$$

Voer in $y_1 = 100x - 2x^2$.



Uit de schets volgt dat O maximaal is voor $x = 25$.

$x = 25$ geeft $O = 1250$, dus de maximale oppervlakte is 1250 cm^2

115 $P = \frac{2a+1}{3a-1}$

$$P(3a-1) = 2a+1$$

$$3aP - P = 2a+1$$

$$3aP - 2a = P+1$$

$$a(3P-2) = P+1$$

$$a = \frac{P+1}{3P-2}$$

116 $y = 16 \cdot 3^{4-x} = 16 \cdot 3^4 \cdot 3^{-x} = 16 \cdot 81 \cdot (3^{-1})^x = 1296 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Dus $y = 1296 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

117 $N(k) = 12,5 + 4,55 \cdot \ln(k)$, dus $N(3k) = 12,5 + 4,55 \cdot \ln(3k)$.

$$N(3k) = 12,5 + 4,55 \cdot (\ln(3) + \ln(k))$$

$$N(3k) = 12,5 + 4,55 \cdot \ln(3) + 4,55 \cdot \ln(k)$$

$$N(3k) = 12,5 + 4,55 \cdot \ln(k) + 4,55 \cdot \ln(3)$$

$$N(3k) \approx N(k) + 5$$

Hiermee is aangetoond dat N steeds met 5 toeneemt als k drie keer zo groot wordt.

118 Er geldt $g^{5\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.

$$g^{5\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{ geeft } g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}} \approx 0,878.$$

De afname is 12,2% per jaar.

119 a Als t toeneemt, dan neemt $0,91^t$ af, dus ook $20 \cdot 0,91^t$ neemt af, dus ook $1 + 20 \cdot 0,91^t$ neemt af, dus neemt $\frac{1500}{1 + 20 \cdot 0,91^t}$ toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

b Als t toeneemt, dan neemt $0,98^t$ af, dus $1 - 0,98^t$ neemt toe, dus $20(1 - 0,98^t)$ neemt toe, dus $10 + 20(1 - 0,98^t)$ neemt toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

c Als t toeneemt, dan neemt $0,75^t$ af, dus dan neemt $3 - 0,75^t$ toe, dus $\frac{10}{3 - 0,75^t}$ neemt af, dus $25 - \frac{10}{3 - 0,75^t}$ neemt toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

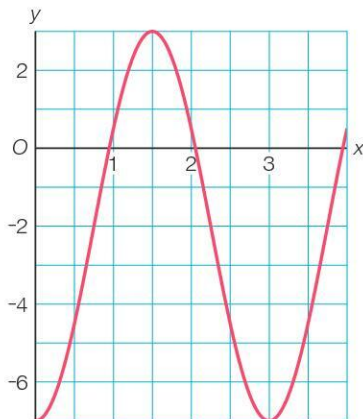
120 $y = -x^2 + 2x - 3$ geeft $\frac{dy}{dx} = -2x + 2$

Dus de helling van de grafiek in het punt A is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=-3} = -2 \cdot -3 + 2 = 8$.

121 $y = -\frac{1}{2}(x+4)^3 + 5$
 $\downarrow$ verschuiving $(6, 2)$
 $y = -\frac{1}{2}(x-2)^3 + 7$

122 $y = -2 + 5 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - \frac{3}{4}))$
 evenwichtsstand -2
 amplitude 5
 periode $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$

stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{3}{4}$



123 $N = 25 \cdot 1,85^{t-2}$
 $1,85^{t-2} = 0,04N$
 $t - 2 = {}^{1,85}\log(0,04N)$
 $t = 2 + {}^{1,85}\log(0,04N)$

124 $A(n)$ is een rij bij een lineair verband met $A(0) = 750$ en $v = 12$, dus de directe formule is $A(n) = 750 + 12n$.

$B(n)$ is een rij bij een exponentieel verband met $B(0) = 100$ en $r = 1,2$, dus de directe formule is $B(n) = 100 \cdot 1,2^n$.

Voer in $y_1 = 750 + 12x$ en $y_2 = 100 \cdot 1,2^x$ en maak een tabel.

Uit de tabel volgt $A(12) = 894$ en $B(12) \approx 891,6$ en $A(13) = 906$ en $B(13) \approx 1069,9$.

Dus vanaf $n = 13$, dat is de 14^e term, is $B(n) > A(n)$.

125 $N = 110e^{2t} - 55t$ geeft $\frac{dN}{dt} = 220e^{2t} \cdot 2 - 55 = 220e^{2t} - 55$.

$t = 0$ geeft $\frac{dN}{dt} = 220 - 55 = 165$ en voor $t > 0$ is $220e^{2t} - 55 > 165$.

Dus voor $t \geq 0$ is $\frac{dN}{dt}$ positief en dus is de grafiek van N stijgend.

126 $5a^2 - \frac{3}{a^2} = \frac{5a^4}{a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{5a^4 - 3}{a^2}$

127 $g_{\text{jaar}} = 1,073$, dus los op $1,073^t = 2$.

Voer in $y_1 = 1,073^x$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x = 9,83\dots$

De verdubbelingstijd is ongeveer 9 jaar en $0,83\dots \cdot 12 \approx 10$ maanden.

128 $\log(N) = 2,36 + 1,5 \cdot \log(t)$
 $\log(N) = \log(10^{2,36}) + \log(t^{1,5})$
 $\log(N) = \log(10^{2,36} \cdot t^{1,5})$
 $N = 10^{2,36} \cdot t^{1,5}$
 $N \approx 229 \cdot t^{1,5}$
Dus $N = 229t^{1,5}$.

129 $2p + 3q = 60$
 $3q = -2p + 60$
 $q = -\frac{2}{3}p + 20$
 $K = 5p + 4q + 120$ $\left. \begin{array}{l} K = 5p + 4(-\frac{2}{3}p + 20) + 120 \\ K = 5p - 2\frac{2}{3}p + 80 + 120 \\ K = 2\frac{1}{3}p + 200 \end{array} \right\}$
Dus $K = 2\frac{1}{3}p + 200$.

130 $u_n = n^2 + 3n$ en $S_n = S_{n-1} + n^2 + 3n$ met $S_1 = 4$
Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $\sum_{k=1}^{15} (k^2 + 3k) = 1600$.

131 a $K = aq^{1,15}$
 $q = 60$ en $K = 499$ $\left. \begin{array}{l} a \cdot 60^{1,15} = 499, \text{ dus } a = \frac{499}{60^{1,15}} = 4,500... \\ q = 100 \text{ geeft } K = 4,5 \cdot 100^{1,15} \approx 898 \end{array} \right\}$
b $K = 4,5q^{1,15}$
 $4,5q^{1,15} = K$
 $q^{1,15} = \frac{1}{4,5} K$
 $q = (\frac{1}{4,5} K)^{\frac{1}{1,15}}$
 $q = (\frac{1}{4,5})^{\frac{1}{1,15}} \cdot K^{\frac{1}{1,15}}$
 $q \approx 0,27K^{0,87}$
Dus $q = 0,27K^{0,87}$.

132 6 6 6 3 4 keer
6 6 5 4 $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ keer
6 5 5 5 4 keer
Dus het aantal mogelijkheden is $4 + 12 + 4 = 20$.

133 $N = 4 \cdot e^{0,4t}$
 $e^{0,4t} = 0,25N$
 $0,4t = \ln(0,25N)$
 $t = 2,5 \cdot \ln(0,25N)$

Bladzijde 247

134 49 minuten en 40 seconden is $\frac{49\frac{2}{3}}{60}$ uur.
De gemiddelde snelheid is $\frac{9,8}{(\frac{49\frac{2}{3}}{60})} \approx 11,84$ km/uur.

135 Er geldt $g^3 = 2$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^3 = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{3}} \approx 1,260$
Het groeipcentage per jaar is 26,0%.

$$136 \quad a = \frac{2,5 + -0,5}{2} = 1$$

$$b = 2,5 - 1 = 1,5$$

$$\text{De periode} = 6,5 - 2,5 = 4, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi.$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 1,5$, dus $d = 1,5$.

$$\text{Dus } y = 1 + 1,5 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1,5)\right).$$

$$137 \quad \mathbf{a} \quad \text{Als } t \text{ heel groot wordt, dan nadert } \frac{40}{t} \text{ tot } 0. \text{ Dan wordt } \frac{40}{t} + 6 \approx 0 + 6 = 6.$$

Dus de grenswaarde is 6.

$$\mathbf{b} \quad \text{Als } t \text{ toeneemt, dan neemt } \frac{40}{t} \text{ af, dus } \frac{40}{t} + 6 \text{ neemt af.}$$

Dus de grafiek van N is dalend.

$$138 \quad 5 \cdot \log(N) = 1,215t + 13,7$$

$$\log(N) = 0,243t + 2,74$$

$$N = 10^{0,243t + 2,74}$$

$$N = 10^{2,74} \cdot (10^{0,243})^t$$

$$N \approx 550 \cdot 1,75^t$$

$$\text{Dus } N = 550 \cdot 1,75^t.$$

$$139 \quad T = \frac{t^2 - 2}{t} + \frac{10}{\left(\frac{3}{t}\right)} + \frac{7}{2t} = t - \frac{2}{t} + \frac{10t}{3} + \frac{7}{2t} = t + 3\frac{1}{3}t - \frac{4}{2t} + \frac{7}{2t} = 4\frac{1}{3}t + \frac{3}{2t}$$

$$\text{Dus } T = 4\frac{1}{3}t + \frac{3}{2t}.$$

$$140 \quad \mathbf{a} \quad \text{Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.}$$

De tabel geeft $u(10) = 516$.

$$\mathbf{b} \quad \text{De tabel geeft } u(17) = 65\,540 \text{ en } u(18) = 131\,076, \text{ dus vanaf } n = 18 \text{ is } u(n) \text{ meer dan } 100\,000.$$

$$141 \quad 2p - 5q = 40$$

$$-5q = -2p + 40$$

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{2}{5}p - 8 \\ F = 3pq + 40 \end{array} \right\} \begin{array}{l} F = 3p\left(\frac{2}{5}p - 8\right) + 40 \\ F = 1\frac{1}{5}p^2 - 24p + 40 \end{array}$$

$$\text{Dus } a = 1\frac{1}{5}, b = -24 \text{ en } c = 40.$$

Bladzijde 248

$$142 \quad \mathbf{a} \quad y = \ln(3x - 7) \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x - 7} \cdot 3 = \frac{3}{3x - 7}.$$

$$\mathbf{b} \quad y = 2x - 4 \cdot \ln(x^2 + 2x) \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{4}{x^2 + 2x} \cdot (2x + 2) = 2 - \frac{8x + 8}{x^2 + 2x}.$$

$$\mathbf{c} \quad y = 2x - 3\log(4x) \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{1}{4x \ln(3)} \cdot 4 = 2 - \frac{1}{x \ln(3)}.$$

$$143 \quad \frac{7}{2x} - \frac{5}{3x} = \frac{21}{6x} - \frac{10}{6x} = \frac{11}{6x}$$

$$144 \quad P = \log(2x - 500) - 3$$

$$\log(2x - 500) = P + 3$$

$$2x - 500 = 10^{P+3}$$

$$2x = 500 + 10^3 \cdot 10^P$$

$$x = 250 + 500 \cdot 10^P$$

$$\text{Dus } a = 250 \text{ en } b = 500.$$

145 $P = n \cdot \ln(2n+1)$ geeft $\frac{dP}{dn} = 1 \cdot \ln(2n+1) + n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot 2 = \ln(2n+1) + \frac{2n}{2n+1}$

Voor $n > 0$ is $\ln(2n+1) > 0$ en $\frac{2n}{2n+1} > 0$, dus voor $n > 0$ is $\frac{dP}{dn} > 0$.

De grafiek van P is dus stijgend voor $n > 0$.

146 aantal $= \binom{9}{2} \cdot \binom{6}{3} = 105$

Alternatieve uitwerking

aantal $= \frac{7!}{2! \cdot 4!} = 105$

147 $N = 25 \cdot 1,85^{t-2} = 25 \cdot 1,85^t \cdot 1,85^{-2} = 25 \cdot 1,85^{-2} \cdot 1,85^t \approx 7,3 \cdot 1,85^t$

Dus $N = 7,3 \cdot 1,85^t$.

148 a $y = \frac{-5}{2x+4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(2x+4) \cdot 0 - (-5) \cdot 2}{(2x+4)^2} = \frac{10}{(2x+4)^2}$.

Omdat de teller positief is en de noemer voor $x \geq 0$ positief, is $\frac{10}{(2x+4)^2}$ positief.

Dus de grafiek van y is stijgend.

Als x toeneemt, dan neemt $2x+4$ toe en dan neemt $(2x+4)^2$ toe voor $x \geq 0$.

Dus dan neemt $\frac{10}{(2x+4)^2}$ af.

De grafiek van y is dus afnemend stijgend.

b $y = 7,5 - 1,15^x$ geeft $\frac{dy}{dx} = -1,15^x \cdot \ln(1,15) \approx -0,14 \cdot 1,15^x$.

Omdat $1,15^x$ positief is voor alle x , is $-0,14 \cdot 1,15^x$ negatief.

Dus de grafiek van y is dalend.

Als x toeneemt, dan neemt $1,15^x$ toe. Dus dan neemt $-0,14 \cdot 1,15^x$ af.

Dus de grafiek van y is toenemend dalend.

149 a $N_{\max} = 500 + 150 = 650$

periode $= \frac{2\pi}{0,01\pi} = 200$

$N_{\max}$ voor $t = 0 + \frac{1}{4} \cdot 200 = 50$

b $N_{\min} = 500 - 150 = 350$

$N_{\min}$ voor $t = 0 + \frac{3}{4} \cdot 200 = 150$

c Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 0$.

Voer in $y_1 = 500 + 150 \sin(0,01\pi x)$.

De maximale helling is $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} \approx 4,71$.

150 rr met beginterm $u(0) = 150$ en $v = 6$, dus $u(n) = 150 + 6n$ en

$S(n) = S(n-1) + 150 + 6n$ met $S(0) = 150$.

Voer zowel de rij $u(n)$ als de somrij in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $\sum_{k=0}^{19} (150 + 6k) = 4140$.

Verantwoording

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer
13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie.
Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontlenen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 22

© 2022 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73717-7



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.