

& GETAL | A RUIMTE | C



Noordhoff Uitgevers

Getal & Ruimte

vwo A/C deel 1

Twaalfde editie, 2020

Noordhoff Uitgevers
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek vwo A/C deel 1

De examenprogramma's wiskunde A en C van het vwo overlappen elkaar gedeeltelijk. Vandaar dat gekozen is voor gemeenschappelijke delen 1 en 2 voor vwo A/C. Het voordeel is dat de leerlingen in de vierde klas wiskunde A en wiskunde C samen kunnen volgen.

Na de delen 1 en 2 volgen voor wiskunde A de boeken vwo A deel 3 en deel 4 en voor wiskunde C de boeken vwo C deel 3 en deel 4.

De genoemde boeken bevatten de leerstof van de programma's vwo wiskunde A en vwo wiskunde C, zoals die met ingang van 2015 zijn vastgesteld. De totale studielast is voor wiskunde A 520 uur en voor wiskunde C 480 uur.

De vier hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 25 uur. In hoofdstuk 1 Formules en grafieken komen enkele aspecten van het domein C aan de orde. In hoofdstuk 2 Statistiek worden de subdomeinen E1, E2 en E3 behandeld. Het subdomein B1 komt in hoofdstuk 3 Rekenen en herleiden aan bod. In hoofdstuk 4 Combinatoriek wordt het subdomein B2 geheel behandeld.

Beginopdrachten en eindopdrachten

Elk hoofdstuk heeft een beginopdracht en een eindopdracht. In de beginopdracht komen aspecten van het betreffende hoofdstuk aan de orde, zonder dat er een beroep wordt gedaan op technieken die in het hoofdstuk worden geleerd. In de eindopdracht zijn deze technieken meestal wel nodig. De begin- en eindopdrachten zijn geschikt voor groepswork. In een klassengesprek kan worden gereflecteerd op de opdracht. De beginopdracht geeft de docent bovendien de mogelijkheid alvast enkele zaken van het hoofdstuk toe te lichten en de grote lijn hiervan te bespreken. De studielast van elk hoofdstuk is zodanig dat voor beide opdrachten een lesuur kan worden uitgetrokken. De uitwerkingen van deze opdrachten staan in het docentenmateriaal.

Drie leerroutes

In deze editie wordt gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen.

De basisroute geeft de leerling voldoende oefening om zich alle vaardigheden die bij de eindtermen horen eigen te maken. In de middenroute worden enkele oefenopgaven overgeslagen en in plaats hiervan maakt de leerling opgaven die dieper op de stof ingaan. De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder oefenopgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.

Om het niveau van de leerlingen in te schatten, is het mogelijk om elke leerling in de middenroute te laten beginnen. Na enkele lessen kan dan duidelijk worden welke route voor een leerling de beste is. De docent kan ook de leerlingen zelf hun route laten kiezen. Het is van belang regelmatig te monitoren of de gekozen route de juiste is.

Verdere opbouw

De paragraaf Voorkennis is kort gehouden en sluit inhoudelijk meestal direct aan op de eerste paragraaf.

Gebleven zijn de oriëntatie-opgaven, de reflectie-opgaven en de afsluitende opgaven. Nieuw zijn de extra opgaven, aangegeven met E, die vooral in de uitdagende route voorkomen. Deze extra opgaven doorbreken de standaardaanpak en activeren zo het wiskundig denken. Hierbij is soms dankbaar gebruik gemaakt van Kangoeroe-opgaven.

Elke paragraaf wordt afgesloten met een Terugblik, aan het eind van elk hoofdstuk staat een Diagnostische toets en achterin het boek staan de Gemengde opgaven.

Wiskundige denkactiviteiten

In de begin- en eindopdrachten wordt een denkactieve houding van de leerling verwacht. Verder spelen in de samenhang tussen de theorie en de daarop-volgende opgaven wiskundige denkactiviteiten een rol. Zo zijn ten opzichte van de vorige editie enkele voorbeelden vervangen door opgaven waarin de leerling zelf tot een bepaalde aanpak komt. De verschillende aspecten van wiskundige denkactiviteiten komen eveneens voor bij oriëntatie-opgaven, die immers het denken over een nieuw wiskundig begrip activeren. Ook de reflectie-opgaven doen een beroep op het denkvermogen, bijvoorbeeld omdat ze ingaan op de aanpak van een wiskundig probleem of de samenhang tussen wiskundige begrippen. Tot slot zijn de extra opgaven bij uitstek te typeren als denkopgaven.

Getal & Ruimte online

Alle opgaven kunnen ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant en klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

Voorjaar 2019

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

02 Oriëntatie-opgave

   Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 Gewone opgave

   Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 Reflectie-opgave

   In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 Afsluitende opgave

   De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 Extra opgave

   Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute



2 Middenroute



3 Uitdagende route



NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder route-aanduiding

In de Diagnostische toets en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▶GR] Verwijzing naar een module van de GR-handleiding.

[▶WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

1 Formules en grafieken 6

Beginopdracht	Wegwerkzaamheden	8
Voorkennis	Lineaire vergelijkingen	9
1.1	Lineaire formules	11
1.2	Een lijn door twee gegeven punten	19
1.3	Interpoleren, extrapoleren en evenredigheid	26
1.4	Wiskundige modellen	37
Eindopdracht	Shuttlebussen	47
Diagnostische toets		48

2 Statistiek 50

Beginopdracht	Gezondheid en welzijn van jongeren	52
Voorkennis	Procenten en frequenties	53
2.1	De statistische cyclus	56
2.2	Data verzamelen	65
2.3	Centrum- en spreidingsmaten	72
2.4	Klassenindeling en polygonen	81
2.5	Soorten verdelingen	89
2.6	Betrouwbaarheidsintervallen	101
Eindopdracht	Welbevinden op school	111
Diagnostische toets		112

3 Rekenen en herleiden 114

Beginopdracht	De Haringvlietssluisen	116
Voorkennis	Rekenen met breuken	117
3.1	Breuken en verhoudingen	120
3.2	Herleiden van formules	130
3.3	Procentberekeningen en de wetenschappelijke notatie	137
3.4	Rekenen met eenheden	146
Eindopdracht	Hoogwater in de rivieren	157
Diagnostische toets		158

4 Combinatoriek 160

Beginopdracht	Kentekens	162
Voorkennis	De vermenigvuldigingsregel en de somregel	163
4.1	Regels voor telproblemen	165
4.2	Permutaties en combinaties	172
4.3	Rijttjes en roosters	182
4.4	Allerlei telproblemen	191
Eindopdracht	Houdbaarheid van de kentekens	195
Diagnostische toets		196

Gemengde opgaven	198
Overzicht GR-modules	217
Overzicht routes	218
Trefwoordenregister	222
Verantwoording	225

1

Formules en grafieken

Wat leer je?

- Opstellen van lineaire formules.
- Lineair interpoleren en extrapoleren.
- Wat recht evenredig en omgekeerd evenredig is en hoe je hierbij formules opstelt.
- De grafische rekenmachine gebruiken bij grafieken.
- Werken met wiskundige modellen.



Beginopdracht Wegwerkzaamheden

Bij wegwerkzaamheden op een tweebaansweg waarbij de ene wegheeft niet bereiden kan worden, gebruikt men vaak verkeerslichten om het verkeer in goede banen te leiden. Eerst wachten de auto's aan de ene kant van het weggedeelte voor het verkeerslicht. Nadat alle auto's van de andere kant zijn gepasseerd, gaat het verkeerslicht op groen. Je kunt je afvragen hoelang het verkeerslicht op rood moet staan en waar dat van afhangt.

Op een tweebaansweg tussen de plaatsen A en B is één rijbaan over een lengte van één kilometer gestremd omdat er wegwerkzaamheden plaatsvinden. Men regelt het verkeer door aan beide kanten een verkeerslicht te plaatsen. Als het verkeerslicht vanuit A op rood staat, kan het verkeer dat vanuit B komt van de beschikbare wegheeft gebruikmaken om te passeren. Op een gegeven moment gaat het verkeerslicht vanuit B op rood. Als alle auto's uit die richting de kilometer met de wegwerkzaamheden zijn gepasseerd, kan het verkeerslicht vanuit A op groen springen om de auto's vanuit A te laten passeren.

We vragen ons af hoelang een verkeerslicht op rood moet staan om een vlotte doorstroming te garanderen.

- Waarvan is deze tijdsduur afhankelijk, denk je?

In beide richtingen rijden per uur 240 auto's. Men wil de verkeerslichten zo afstellen, dat telkens als het verkeerslicht op groen staat alle auto's die hebben staan wachten kunnen doorrijden. Vanwege de veiligheid voor de wegwerkers mag er langs het afgezette gedeelte van de weg niet harder worden gereden dan 50 kilometer per uur.

Om grip op deze situatie te krijgen bekijk je een aantal scenario's.

Daarbij kijk je of er geen problemen ontstaan en of de auto's niet onnodig lang hoeven te wachten.

Als je gegevens tekortkomt, doe dan zelf enkele aannames.

- Reken de volgende scenario's door:
 - 1 de verkeerslichten staan telkens 2 minuten op rood
 - 2 de verkeerslichten staan telkens 3 minuten op rood
 - 3 de verkeerslichten staan telkens 4 minuten op rood
 - 4 de verkeerslichten staan telkens 5 minuten op rood.
- Welk van bovenstaande scenario's zou jij kiezen?
Licht toe.

Op een andere tweebaansweg, waarvan één rijbaan wegens wegwerkzaamheden over een lengte van 500 meter is gestremd, rijden in beide richtingen 300 auto's per uur. De toegestane snelheid op het gedeelte van 500 meter is 30 km/uur.

- Onderzoek wat in deze situatie een acceptabel scenario is om de verkeersstromen te regelen.



Voorkennis Lineaire vergelijkingen

Theorie A Lineaire vergelijkingen oplossen

Een voorbeeld van een lineaire vergelijking is $5x + 2 = 37 - 2x$.

Hierin heet $5x + 2$ het linkerlid en $37 - 2x$ het rechterlid.

Je lost de vergelijking op door hem stap voor stap eenvoudiger te maken.

Je mag daarbij

- termen van het ene lid naar het andere lid brengen, maar dan moet je – vervangen door + en + vervangen door –
- beide leden door hetzelfde getal delen of met hetzelfde getal vermenigvuldigen.

Het oplossen van de vergelijking $5x + 2 = 37 - 2x$ gaat als volgt.

$$5x + 2 = 37 - 2x \quad \text{Termen met } x \text{ naar links en de rest naar rechts.}$$

$$5x + 2x = 37 - 2 \quad \text{Herleid beide leden.}$$

$$7x = 35 \quad \text{Deel beide leden door het getal dat voor } x \text{ staat.}$$

$$x = 5$$

Dus $x = 5$ is de oplossing van de vergelijking $5x + 2 = 37 - 2x$.

Door $x = 5$ in de vergelijking in te vullen, kun je controleren dat het

klopt: $5 \cdot 5 + 2 = 37 - 2 \cdot 5$. Inderdaad, het klopt, want je krijgt $27 = 27$.

Let op het verschil tussen $x + 4 = 20$, $4x = 20$ en $\frac{1}{4}x = 20$.

$x + 4 = 20$ $x = 20 - 4$ $x = 16$	$4x = 20$ $x = \frac{20}{4}$ $x = 5$	$\frac{1}{4}x = 20$ $x = 4 \cdot 20$ $x = 80$
--	--	---

Staan er in een lineaire vergelijking haakjes, werk die dan eerst weg.

Zo krijg je bij $3(x - 3) = x + 8$ eerst $3x - 9 = x + 8$. Enzovoort.

Bij de vergelijking $\frac{1}{2}x - 2 = \frac{2}{5}x$ is het verstandig eerst alle termen met 10 te vermenigvuldigen. Daardoor verdwijnen de breuken.

Je krijgt

$$10 \cdot \frac{1}{2}x - 10 \cdot 2 = 10 \cdot \frac{2}{5}x$$

$$5x - 20 = 4x$$

$$5x - 4x = 20$$

$$x = 20$$

$$10 \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$10 \cdot \frac{2}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\text{Algemeen: } A \cdot \frac{B}{C} = \frac{AB}{C}$$

Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

- 1 Werk zo nodig de haakjes en de breuken weg.
- 2 Breng de termen met de variabele naar het linkerlid en de rest naar het rechterlid, en herleid beide leden.
- 3 Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.

Voorbeeld

Los op.

a $3(x - 3) = x + 8$ **b** $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{6}(x + 12)$

Werk eerst de haakjes weg en vervolgens de breuken.

Uitwerking

a $3(x - 3) = x + 8$

$$3x - 9 = x + 8$$

$$2x = 17$$

$$x = 8\frac{1}{2}$$

b $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{6}(x + 12)$

$$\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{6}x + 2 \quad \times 6$$

$$4x - 24 = x + 12$$

$$3x = 36$$

$$x = 12$$

$$6 \cdot \frac{2}{3}x - 6 \cdot 4 = 6 \cdot \frac{1}{6}x + 6 \cdot 2$$

1 Los op.

a $x + 5 = 20$

b $5x = 20$

c $\frac{1}{5}x = 20$

d $6x - 2 = 2x + 18$

e $3 - 2x = 5x + 3$

f $5 - x = 2x - 1$

2 Los op.

a $2(x - 1) = 3(x + 2)$

b $3(x - 80) = 100 - x$

c $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{1}{4}x$

d $5 - 3(x + 1) = 15 - 2x$

e $2(x - 3) - 7 = 3(x - 6) + 18$

f $5x + 5 = \frac{5}{6}(x - 1)$

3 Los op.

a $8 - 3(2x - 1) = 3 + 2(1 - x)$

b $2x - 1 = \frac{1}{2}x + 3$

c $\frac{1}{3}(2x - 3) = \frac{1}{4}x + 4$

d $2\frac{1}{3}x + 6 = \frac{1}{3}x - 8$

e $1,8x + 0,6 = -1,2x + 3$

f $\frac{1}{8}x - 7 = 3$

1.1 Lineaire formules



01 Gegeven zijn vier lineaire formules en de bijbehorende grafieken.

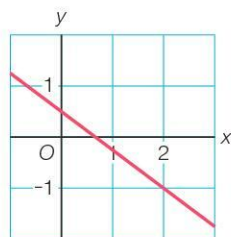
Zoek bij elke formule de juiste grafiek.

I $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

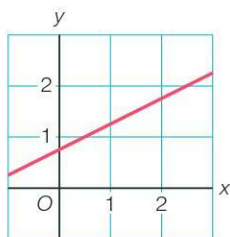
II $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

III $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

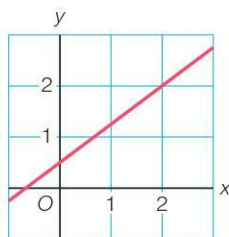
IV $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$



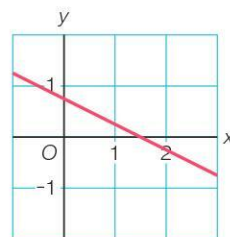
A



B



C



D

figuur 1.1

Theorie A Richtingscoëfficiënt

De grafiek van de **lineaire formule** $y = \frac{1}{2}x + 2$ is de lijn waarvoor geldt

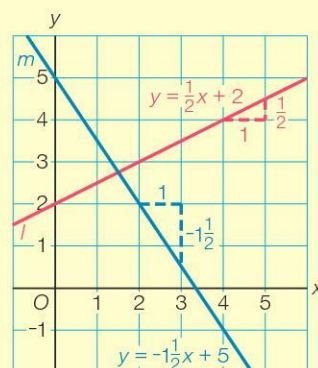
- het snijpunt met de y -as is $(0, 2)$
- ga je 1 naar rechts, dan ga je $\frac{1}{2}$ omhoog.

Het getal $\frac{1}{2}$ in de formule $y = \frac{1}{2}x + 2$ heet de **richtingscoëfficiënt** van de lijn. We noteren de richtingscoëfficiënt van lijn l is $\frac{1}{2}$ als $rc_l = \frac{1}{2}$.

Van de lijn m : $y = -1\frac{1}{2}x + 5$ is de richtingscoëfficiënt gelijk aan $-1\frac{1}{2}$. Dus $rc_m = -1\frac{1}{2}$. Dit betekent:

ga je 1 naar rechts, dan ga je $-1\frac{1}{2}$ omlaag.

Dat is hetzelfde als 1 naar rechts en $1\frac{1}{2}$ omlaag en ook hetzelfde als 2 naar rechts en 3 omlaag.



figuur 1.2

Van de lijn $y = ax + b$ is de richtingscoëfficiënt a .

$rc = a$ betekent: 1 naar rechts en a omhoog.

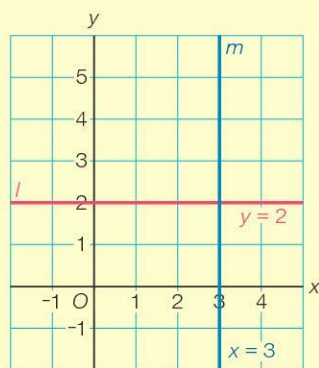
De lijn $y = ax + b$ snijdt de y -as in het punt $(0, b)$.

De lijnen p : $y = 3x - 5$ en q : $y = 3x + 7$ hebben dezelfde richtingscoëfficiënt. Daarom zijn de lijnen p en q evenwijdig.

Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.

Van de lijn l in figuur 1.3 is $rc_l = 0$. Immers, ga je 1 naar rechts, dan ga je 0 omhoog. Dus de formule van l is $y = 0x + 2$. Hiervoor schrijven we kortweg $y = 2$. Op de lijn $y = 2$ liggen alle punten met y -coördinaat 2.

Op de verticale lijn m in figuur 1.3 liggen alle punten met de x -coördinaat 3. Daarom zeggen we dat de lijn m de formule $x = 3$ heeft. Een verticale lijn heeft geen richtingscoëfficiënt.



figuur 1.3

**De lijn $y = 5$ is de horizontale lijn door het punt $(0, 5)$.
Alle punten op deze lijn hebben y -coördinaat 5.
De lijn $x = 6$ is de verticale lijn door het punt $(6, 0)$.
Alle punten op deze lijn hebben x -coördinaat 6.**

Voorbeeld

Teken in één figuur de lijnen l : $y = -0,8x + 3$, m : $y = 3$ en n : $x = 4$.

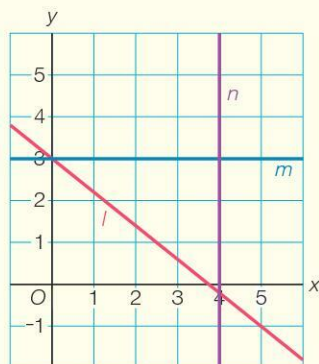
Aanpak

Maak bij l een tabel met twee ‘mooie’ punten.
Verder is m de horizontale lijn door $(0, 3)$ en n de verticale lijn door $(4, 0)$.

Uitwerking

x	0	5
$y = -0,8x + 3$	3	-1

Zie figuur 1.4.



figuur 1.4

2

Gegeven zijn de lijnen k : $y = -3x + 2$, m : $y = \frac{1}{2}x - 1$, p : $y = 2$ en q : $y = 2x$.

- Teken deze lijnen in één figuur.
- Schrijf van elke lijn de richtingscoëfficiënt op. Noteer $rc_k = \dots$, enzovoort.

3 Gegeven zijn de lijnen $p: y = 6 - 2,5x$ en $q: y = 1,2x - 3$.



- a** Teken p en q in één figuur.
- b** De lijn p snijdt de y -as in het punt A . De lijn k gaat door A en is evenwijdig met de lijn q .
Teken k en stel de formule van k op.
- c** De lijn l gaat door de oorsprong $O(0, 0)$ en is evenwijdig met de lijn p .
Stel de formule van l op.
- d** De lijn q snijdt de y -as in het punt B .
Stel de formule op van de horizontale lijn m die door het punt B gaat.

A4 Gegeven zijn de lijnen $k: y = 0,6x - 3$, $l: y = -1,5x + 4$ en m met $rc_m = 2,5$ die door het punt $(0, -6)$ gaat.

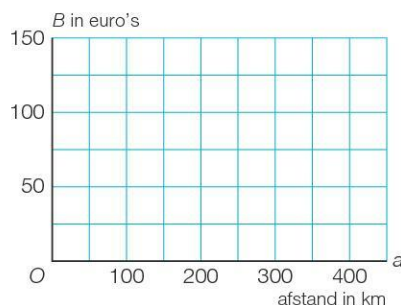


- a** Teken k , l en m in één figuur.
- b** Teken de lijn n die door de oorsprong gaat en evenwijdig is met k .
Wat is de formule van n ?
- c** De lijn k snijdt de x -as in het punt A . De lijn p gaat door A en is evenwijdig met de y -as.
Stel van p de formule op.
- d** De lijn l snijdt de y -as in het punt B .
De lijn q gaat door B en is evenwijdig met de x -as.
Stel van q de formule op.

5 Bij autoverhuurbedrijf Rent-a-car kun je voor één dag een bestelauto huren. Met de formule $B = 0,15a + 80$ kun je berekenen hoeveel euro je moet betalen als je a km rijdt.



- a** Hoeveel euro moet je betalen bij een afstand van 50 km?
- b** Bij de grafiek hoort een assenstelsel zoals in figuur 1.5.
Hoe zie je aan de formule dat de a -as de horizontale as is?
- c** Teken de grafiek. Waarom mag je niet links van de B -as tekenen?
- d** In de formule staan twee getallen. Welke informatie geeft 0,15 over het verhuurtarief? En welke informatie geeft 80?



figuur 1.5

Autoverhuurbedrijf Cheap rekent een vast bedrag van 90 euro en een bedrag van 11 cent per km.

- e** Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat je bij Cheap betaalt als je a km rijdt en teken de grafiek van B in de figuur van vraag c.
- f** Welk bedrijf is het voordeligst bij een rit van 150 km? Hoeveel scheelt het?
- g** Vanaf welk aantal km is Cheap voordeliger dan Rent-a-car?

6
☐ ⊙ *

- a** In een cilindervormig vat staat het water 80 cm hoog. Na opening van een kraan stroomt het vat met constante snelheid leeg. Per minuut daalt het water met 5 cm.
Stel de formule op van de waterhoogte h in cm t minuten na het openen van de kraan.
- b** Aan het wateroppervlak heerst een druk van 1015 hPa. Onder water neemt per 10 meter de druk met 1000 hPa toe.
Stel de formule op van de druk P in hPa op een waterdiepte van d meter.
- c** Op 1 januari 2018 was er 550 miljoen ha tropisch regenwoud in het Amazonegebied. Door met name houtkap neemt de oppervlakte hiervan dagelijks met 2200 ha af.
Stel de formule op van de oppervlakte A aan tropisch regenwoud in het Amazonegebied t jaar na 1 januari 2018. Neem A in miljoenen ha en rond in het antwoord af op één decimaal.



E7
* ☐ ⊙ *

- Jannie moet 40 opgaven als huiswerk maken. Om haar te stimuleren belooft haar moeder 50 cent voor elke opgave die ze goed doet. Maar voor elke fout gemaakte opgave gaat er 1 euro af. Ze maakt alle opgaven.
- a** Bereken hoeveel euro Jannie krijgt als ze 32 opgaven goed maakt.
- b** Stel de formule op van het bedrag B in euro's dat Jannie krijgt als ze x opgaven goed maakt.
- c** Jannie krijgt uiteindelijk 2 euro van haar moeder.
Hoeveel opgaven had Jannie goed?

O8
☐ ⊙ *

- Gegeven is de lijn m : $y = 1\frac{1}{2}x + 9$.
- a** Hoe kun je narekenen dat het punt $A(12, 27)$ op m ligt?
- b** Welke van de punten $B(-20, -21)$, $C(-8, 3)$ en $D(82, 132)$ liggen op m ?

Verder is gegeven de lijn n : $y = -\frac{1}{2}x + 4$. Het snijpunt van de lijnen m en n is het punt S . Om de coördinaten van S te berekenen los je de vergelijking $1\frac{1}{2}x + 9 = -\frac{1}{2}x + 4$ op.

- c** Licht dit toe en bereken de coördinaten van S .

Theorie B Snijpunten van lijnen

Weet je dat het punt $P(3, 5)$ op de lijn l : $y = 2x + b$ ligt, dan kun je b berekenen. Je vult daartoe $x = 3$ en $y = 5$ in de formule van de lijn in. Je krijgt $5 = 2 \cdot 3 + b$. Dit geeft $b = -1$.
Zo krijg je de formule l : $y = 2x - 1$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $k: y = -\frac{2}{3}x + 6$ en $l: y = \frac{1}{2}x - 1$. Verder is gegeven de lijn m door het punt $A(18, 6)$ die evenwijdig is met l .

- a Stel de formule van m op en bereken de coördinaten van het snijpunt B van m met de x -as.
- b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l .

Uitwerking

a $m: y = ax + b$ met $a = rc_l = \frac{1}{2}$
$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(18, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 18 + b = 6 \\ 9 + b = 6 \\ b = -3 \end{array}$$

Dus $m: y = \frac{1}{2}x - 3$.

$y = 0$ geeft $\frac{1}{2}x - 3 = 0$
$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}x = 3 \\ x = 6 \end{array}$$

Dus $B(6, 0)$.

- b k snijden met l geeft

$$\begin{array}{l} -\frac{2}{3}x + 6 = \frac{1}{2}x - 1 \\ -4x + 36 = 3x - 6 \quad \times 6 \\ -7x = -42 \end{array}$$

$$x = 6$$

$x_S = 6$ geeft $y_S = -\frac{2}{3} \cdot 6 + 6 = 2$, dus $S(6, 2)$.

Snijpunt met x -as, dus $y = 0$.

R9 Zie voorbeeld b.

 Om de y -coördinaat van S te berekenen, is $x = 6$ ingevuld in de formule van k .

Had je hiervoor ook de formule van l mogen gebruiken? Licht toe.

10 a De lijn l gaat door het punt $A(-2, 3)$ en $rc_l = -1\frac{1}{2}$.

 Stel de formule van l op.

b De lijn k gaat door het punt $B(-5, 21)$ en is evenwijdig met de lijn

$m: y = 4x - 6$.

Stel de formule van k op.

11 De lijn p gaat door het punt $C(-18, 30)$ en is evenwijdig met de lijn

 $q: y = -\frac{1}{3}x$.

a Stel de formule van p op.

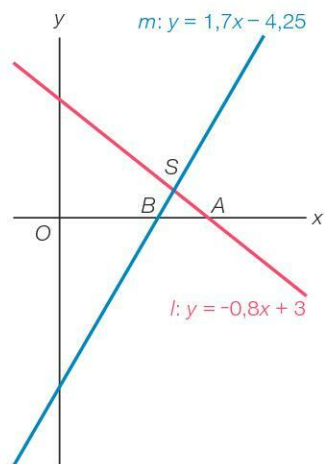
b Bereken de coördinaten van de punten waarin p de x -as en de y -as snijdt.

12



Gegeven zijn de lijnen $l: y = -0,8x + 3$ en $m: y = 1,7x - 4,25$. Zie figuur 1.6.

- Bereken de coördinaten van het snijpunt S .
- De lijn l snijdt de x -as in het punt A .
Bereken de coördinaten van A .
- De lijn m snijdt de x -as in het punt B .
Bereken de coördinaten van B .



figuur 1.6

13



Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen

- $l: y = 2(x - 3)$ en $m: y = 5 - 3x$
- $p: y = \frac{2}{3}x + 11$ en $q: y = -1\frac{1}{2}x - 15$
- $r: y = -2\frac{1}{2}x + 5$ en $s: y = 25$.

A14



De lijn p gaat door het punt $A(18, -27)$ en is evenwijdig met de lijn $n: y = -2,5x + 35$.

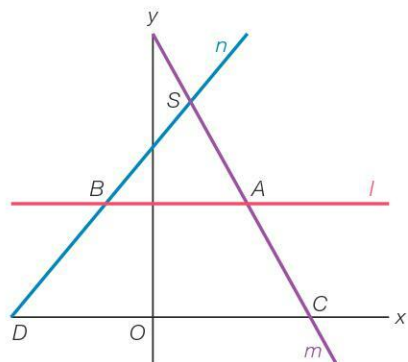
- Stel de formule van p op.
- De lijn n snijdt de x -as in het punt P en de y -as in het punt Q .
Bereken de coördinaten van P en Q .
- Op n ligt het punt R met x -coördinaat $x_R = -20$.
Bereken de y -coördinaat y_R .
- Op n ligt het punt S met y -coördinaat $y_S = 45$.
Bereken de x -coördinaat x_S .
- Op n ligt het punt T waarvan de x -coördinaat gelijk is aan de y -coördinaat.
Bereken de coördinaten van T .

A15



Hiernaast zie je de lijnen $l: y = 2,4$, $m: y = -1,8x + 6$ en $n: y = 1,2x + 3,6$.

- Bereken de coördinaten van het snijpunt S van m en n .
- De lijn l snijdt m en n in de punten A en B .
Bereken de lengte van het lijnstuk AB .
- De lijn m snijdt de x -as in het punt C en n snijdt de x -as in het punt D .
Bereken de lengte van het lijnstuk CD .



figuur 1.7

A16
□ ⊙ *

Baarzen kunnen leven in water waarvan de temperatuur maximaal 25°C is. Bovendien hebben ze minstens 2 mg zuurstof per liter water nodig. We bekijken in deze opgave baarzen die leven in een meer waarvan de diepte 4 meter is.

Aan het begin van een lange hete zomer is op 1 juli de temperatuur van het water alleen aan de oppervlakte 25°C .

Gedurende de zomer komt de diepte waarop de temperatuur 25°C is elke drie dagen 10 cm lager te liggen. Op 1 juli is overal in het meer voldoende zuurstof aanwezig. Vanaf dat moment ontwikkelt zich door rotting van organismen op de bodem een steeds dikkere laag met te weinig zuurstof. Deze laag neemt vanaf 1 juli elke dag met 5 cm toe.

In deze opgave is d_T de diepte waarop de temperatuur 25°C is en d_Z de diepte waarboven er voldoende zuurstof voor de baarzen is. Neem t in dagen met $t = 0$ op 1 juli en de diepte d in meter. Aan het wateroppervlak is dus $d = 0$ en op de bodem van het meer is $d = 4$.

- a Stel de formule op van d_T na t dagen.
- b Stel de formule op van d_Z na t dagen.
- c Teken de grafieken bij de formules van de vragen a en b voor de periode van 1 juli tot en met 31 augustus en onderzoek met behulp van deze grafieken vanaf welke datum de baarzen niet meer in het meer kunnen leven.



$t = 0$ is op 1 juli
 $t = 30$ is op 31 juli
 $t = 31$ is op 1 augustus
 $t = 61$ is op 31 augustus

E17
*

Gegeven zijn de punten $A(0, 1)$ en $B(0, 10)$.

Lijn k gaat door A en $rc_k = \frac{1}{3}$.

Lijn l gaat door A en $rc_l = 1\frac{1}{2}$.

Lijn m gaat door B en $rc_m = -1\frac{1}{3}$.

Lijn m snijdt k in het punt C en l in het punt D .

Onderzoek hoeveel roosterpunten er binnen driehoek ACD liggen.

Terugblik

Lineaire formules

Bij een lineair verband tussen x en y hoort als grafiek een rechte lijn.

De bijbehorende formule heeft de vorm $y = ax + b$. Hierin is a de richtingscoëfficiënt.

$rc = a$ betekent: 1 naar rechts en a omhoog.

Het snijpunt van de lijn met de y -as is het punt $(0, b)$.

Horizontale en verticale lijnen

De lijn k : $y = 4$ is de horizontale lijn door het punt $(0, 4)$.

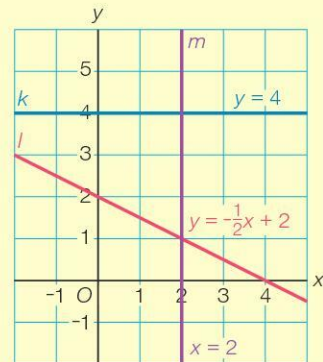
De lijn m : $x = 2$ is de verticale lijn door het punt $(2, 0)$.

Grafiek tekenen bij een lineaire formule

Om de lijn l : $y = -\frac{1}{2}x + 2$ te tekenen, maak je een tabel

met twee 'mooie' punten, bijvoorbeeld

x	0	2
y	2	1



Evenwijdige lijnen

De formule van de lijn k door het punt $(2, 3)$ die evenwijdig is met de lijn p : $y = 4x - 6$ stel je als volgt op.

Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, dus

$$rc_k = rc_p = 4.$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = ax + b \text{ met } a = 4, \text{ dus } y = 4x + b \\ \text{door } (2, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 2 + b = 3 \\ 8 + b = 3 \\ b = -5 \end{array}$$

Dus k : $y = 4x - 5$.

Snijpunten van lijnen

De lijnen l : $y = 3,5x + 7$ en m : $y = -1,5x + 22$ snijden elkaar in het punt S .

De x -coördinaat van S is de oplossing van de vergelijking

$$3,5x + 7 = -1,5x + 22.$$

Dit geeft $3,5x + 7 = -1,5x + 22$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

$$x_S = 3 \text{ geeft } y_S = 3,5 \cdot 3 + 7 = 17,5$$

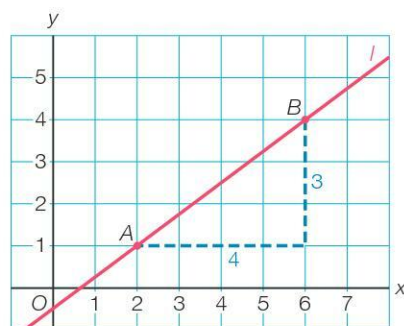
Dus $S(3; 17,5)$.

De coördinaten van het snijpunt T van de lijn l : $y = 3,5x + 7$ met de x -as vind je door het oplossen van de vergelijking $y = 0$, dus van $3,5x + 7 = 0$. Je krijgt $3,5x = -7$ en dit geeft $x = -2$, dus $T(-2, 0)$.

1.2 Een lijn door twee gegeven punten

O18 De lijn l gaat door de punten $A(2, 1)$ en $B(6, 4)$.
☐⊗* Zie figuur 1.8.

- a Voor de lijn l geldt:
ga je 4 naar rechts, dan ga je 3 omhoog, dus
ga je 1 naar rechts, dan ga je ...
Dus $rc_l = \dots$
- b In figuur 1.8 is $x_B - x_A = 6 - 2 = 4$.
Hoeveel is $y_B - y_A$?
- c Hoe kun je met $x_B - x_A$ en $y_B - y_A$ de
richtingscoëfficiënt van l berekenen?



figuur 1.8

Theorie A Richtingscoëfficiënt berekenen

Bij de opgaven die hierna komen heb je regelmatig je rekenmachine nodig. We gaan ervan uit dat je over een grafische rekenmachine (GR) beschikt. Om hiermee te leren werken, neem je af en toe een module uit de handleiding GR door. Deze handleiding vind je in Getal & Ruimte online.

[► GR] Neem de module **Berekeningen op het basisscherm** door.

De lijn l in figuur 1.9 gaat door de punten A en B .

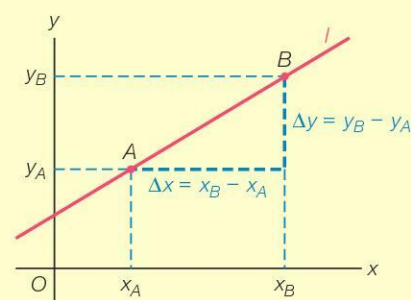
Ga je $x_B - x_A$ naar rechts, dan ga je $y_B - y_A$ omhoog. Dus ga je 1 naar rechts, dan ga je

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ omhoog.

Je ziet dat

$$rc_l = \frac{\text{verschil van de } y\text{-coördinaten}}{\text{bijbehorende verschil van de } x\text{-coördinaten}}$$

Voor het verschil van de twee y -coördinaten schrijven we Δy en voor het bijbehorende verschil van de x -coördinaten Δx .



figuur 1.9

Van de lijn $y = ax + b$ door de punten A en B is de

richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

In het voorbeeld wordt gevraagd om een **vergelijking van de lijn l** door de punten A en B op te stellen. We gebruiken de begrippen formule van een lijn en vergelijking van een lijn door elkaar.

Δ is de Griekse hoofdletter D, de eerste letter van differentie (= verschil). Spreek Δ uit als delta.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de lijn l door de punten $A(2, -1)$ en $B(6, 5)$.

Uitwerking

$$y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-1)}{6 - 2} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1 \\ 3 + b = -1 \\ b = -4 \end{array}$$

Dus $l: y = 1\frac{1}{2}x - 4$.

R19 Zie het voorbeeld.



a Lotte neemt $\Delta y = -1 - 5$.

Welke Δx hoort daarbij? Krijgt ze ook $rc_l = 1\frac{1}{2}$?

b Lars gebruikt de coördinaten van het punt B om b te berekenen in $y = 1\frac{1}{2}x + b$.

Welke berekening hoort daarbij?

20 Stel de formule op van de lijn



a l door $A(-1, 1)$ en $B(1, 4)$

b m door $C(-3, 5)$ en $D(2, 0)$

c n door $E(5, 3)$ en $F(-7, 3)$

d p door $G(1, -3)$ en $H(5, 5)$.

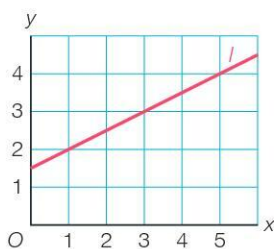
21 Stel de formule op van de lijn



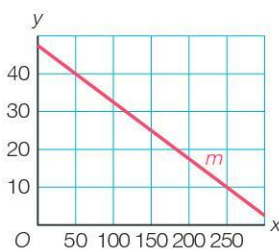
a l door $P(180, 360)$ en $Q(160, 250)$

b m door $R(15, 73)$ en $S(45, 58)$.

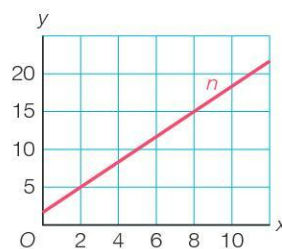
22 Stel van elke lijn in figuur 1.10 de formule op. Lees eerst de coördinaten van twee 'mooie' punten af.



a



b



c

figuur 1.10

A23 Stel een vergelijking op van de lijn



a m door de punten $A(-23, -125)$ en $B(17, 155)$

b p door de oorsprong die evenwijdig is met de lijn door de punten $C(18, -27)$ en $D(12, -30)$

c q door het punt $E(-8, 14)$ die evenwijdig is met de lijn door de punten $O(0, 0)$ en $F(-12, 4)$.

A24
  *

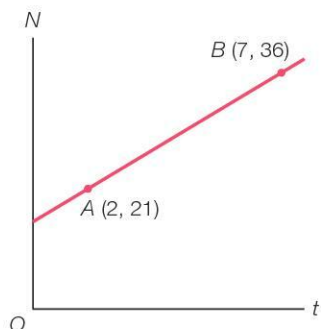
De lijn k gaat door de punten $A(2, 22)$ en $B(12, 7)$ en de lijn l gaat door de punten $C(4, 3)$ en $D(20, 43)$. Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l .

A25
 *

De lijn k gaat door de punten $A(p, 2p)$ en $B(3p, 3p)$. Bereken de coördinaten van de snijpunten van k met de assen.

O26
  *

Stel een vergelijking op van de lijn in de figuur hiernaast.



figuur 1.11

Theorie B Lineaire formules in de praktijk

In de praktijk zijn er heel wat verbanden tussen grootheden te benaderen door een lineaire formule.

Bij toepassingen gebruik je vaak andere letters dan x en y . Zo geeft de formule $B = 0,11d + 80$ aan dat er een **lineair verband** is tussen de huurprijs B van een auto en het aantal kilometers d dat je met de auto rijdt. In deze formule is B een **lineaire functie** van d .

We zeggen ook dat B is **uitgedrukt in** d .

Is R een lineaire functie van q , dan is $R = aq + b$ met $a = \frac{\Delta R}{\Delta q}$.

Is T een lineaire functie van t , dan is $T = at + b$ met $a = \frac{\Delta T}{\Delta t}$.

Voorbeeld

Een marktkoopman verkoopt T-shirts. De ervaring leert dat bij een prijs van 5 euro er per week 90 T-shirts verkocht worden. Bij een prijs van 8 euro is de weekverkoop nog maar 30 stuks. Er bestaat een lineair verband tussen de prijs p in euro's van een T-shirt en de weekverkoop q . Druk q uit in p .

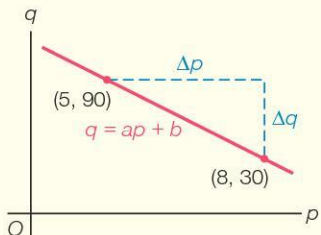
Uitwerking

$$q = ap + b \text{ met } a = \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bij } p = 5 \text{ hoort } q = 90. \\ \text{Bij } p = 8 \text{ hoort } q = 30. \end{array} \right\} a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{30 - 90}{8 - 5} = -20$$

$$\left. \begin{array}{l} q = -20p + b \\ p = 5 \text{ en } q = 90 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -20 \cdot 5 + b = 90 \\ -100 + b = 90 \\ b = 190 \end{array}$$

Dus $q = -20p + 190$.



27 Tussen F en n bestaat een lineair verband. Bij $n = 150$ hoort $F = 7,75$ en bij $n = 425$ hoort $F = 2,25$.

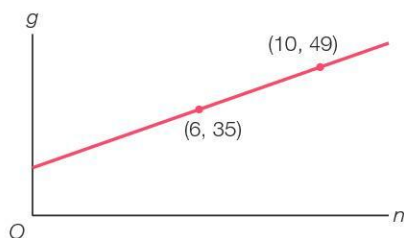


- a Druk F uit in n .
- b Om n uit te drukken in F kun je op twee manieren te werk gaan:
 - 1 Gebruik het antwoord van vraag a.
 - 2 Begin als volgt: $n = aF + b$ met $a = \frac{\Delta n}{\Delta F}$.
 Werk beide manieren uit.
- c Bereken F voor $n = 250$ en bereken n voor $F = 4,25$.

28 a Tussen K en m bestaat een lineair verband. Voor $m = 5$ is $K = 10$ en voor $m = 12$ is $K = 115$.



- Schrijf K als functie van m .
- b F is een lineaire functie van R . Voor $R = 15$ is $F = 300$ en voor $R = 42$ is $F = 138$. Stel de formule op van F .
- c Zie de lijn in de figuur hiernaast. Stel een vergelijking op van deze lijn.



figuur 1.12

29 Tijdens een vlucht van de Airbus A310 is er na 250 km vliegen 56 ton kerosine in de brandstoftanks aanwezig, 400 km verder is dat nog 49,6 ton.



Er bestaat een lineair verband tussen de aanwezige hoeveelheid kerosine k in ton en de vluchtafstand V in km.

- a Druk k uit in V .

Als veiligheidsmaatregel gaat er in de cockpit een alarm af als er in de tanks nog maar 5 ton kerosine zit.

- b Hoeveel km na de start gaat het alarm af? Hoeveel km kan er dan nog gevlogen worden?



Iedereen die in Nederland woont moet belasting betalen over het inkomen. Er bestaan drie categorieën in de inkomstenbelasting: box 1 (werk en woning), box 2 (aanmerkelijk belang) en box 3 (sparen en beleggen). In deze opgave gaat het over de tarieven die gelden voor box 1, dus over het belastbaar inkomen uit werk en woning. We bekijken de tarieven van 2019 voor mensen die de AOW-leeftijd nog niet hebben bereikt. De te betalen belasting wordt per schijf naar beneden afgerond op gehele euro's, maar daar houden we in deze opgave geen rekening mee.

In box 1 zijn 4 belastingschijven. Zie de tabel.

belastingsschijf	belastbaar inkomen box 1	belastingpercentage
1 ^e schijf	tot 20 384 euro	36,65%
2 ^e en 3 ^e schijf	van 20 384 tot 68 507 euro	38,10%
4 ^e schijf	vanaf 68 507 euro	...

Als je 20 384 euro per jaar verdient, betaal je alleen belasting in schijf 1. Dit bedrag is € 7470,74.

a Licht dit bedrag toe met een berekening.

Als je 25 000 euro per jaar verdient, dan betaal je over de eerste 20 384 euro 36,65% belasting en over $25\,000 - 20\,384 = 4616$ euro 38,10% belasting.

Je betaalt dan in box 1 in totaal

$0,3665 \cdot 20\,384 + 0,3810 \cdot 4616 = € 9229,43$ belasting.

b Meneer Asten had over 2019 een belastbaar inkomen in box 1 van 50 000 euro.

Bereken hoeveel belasting in box 1 meneer Asten moest betalen.

c Mevrouw Bastet moest over 2019 in box 1 precies 18 000 euro betalen.

Bereken het belastbaar inkomen uit werk en woning van mevrouw Bastet.

De familie Colijn had in 2019 een belastbaar inkomen in box 1 van 100 000 euro. Ze moesten daarover in totaal € 42 103,23 euro belasting betalen.

De formule van de belasting B in euro's die je in 2019 betaalt in box 1 in schijf 4 is te schrijven in de vorm $B = ai + b$. Hierin is i het inkomen in box 1 met $i \geq 68\,507$.

d Stel de formule op van B .

e De familie Donkers moest over 2019 in box 1 aan belasting 60 000 euro betalen. Bereken het belastbaar inkomen uit werk en woning van de familie Donkers.



A31
☐ ⊙ *

De volwassen Nederlander wordt gemiddeld steeds langer en zwaarder.

In 1986 had de Nederlandse man een gemiddelde lengte van 177,5 cm en een gemiddeld gewicht van 77,6 kg. In 2016 was dat 181,1 cm en 84,5 kg.

De Nederlandse vrouw woog in 2020 gemiddeld 72,0 kg. Dat was 4,5 kg meer dan in 1995. In 2020 was de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw 167,5 cm. Dat was 1,3 cm meer dan in 1994.

Neem in deze opgave aan dat er lineaire verbanden bestaan tussen de tijd t in jaren en het gewicht in kg, en tussen t en de lengte in cm. Neem bovendien aan dat deze lineaire verbanden ook de komende jaren gelden. Neem $t = 0$ in het jaar 1980.

- a** Stel de formule op
- van het gemiddelde gewicht G_m van de Nederlandse man,
 - van het gemiddelde gewicht G_v van de Nederlandse vrouw,
 - van de gemiddelde lengte L_m van de Nederlandse man en
 - van de gemiddelde lengte L_v van de Nederlandse vrouw als functie van t .

Mannen zijn gemiddeld zwaarder dan vrouwen. In 2012 was het verschil 13 kg.

- b** Bereken in welk jaar dit verschil 14 kg zal zijn. Wat is dan het gemiddelde gewicht van de Nederlandse man?
- c** Bereken de gemiddelde lengte van de Nederlandse man in het jaar dat de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw 168 cm is.

Een bekende maat om na te gaan of er sprake is van gezond gewicht of overgewicht is de Body Mass Index (BMI). De BMI bereken je met de

formule $BMI = \frac{\text{gewicht}}{\text{lengte}^2}$. Hierin is het gewicht in kg en de lengte in meter.

Bij een BMI van 18,5 tot 25 is sprake van normaal gewicht, bij 25 tot 27 is er licht overgewicht en bij 27 tot 30 is er matig overgewicht.

Bram beweert dat tussen 1990 en 2020 de BMI van de Nederlandse man meer gestegen is dan de BMI van de Nederlandse vrouw.

- d** Onderzoek of Bram gelijk heeft.

E32
*

Een koudwaterkraan, geheel geopend, vult een vat in 10 minuten. Een warmwaterkraan, ook geheel geopend, vult hetzelfde vat in 12 minuten. Een stop in de bodem van het vat zorgt ervoor dat het vat niet leegloopt. Als de stop eruit is, loopt een vol vat in 20 minuten helemaal leeg.

Als nu bij een leeg vat beide kranen geheel opengezet worden en ook de stop uit de bodem getrokken wordt, hoeveel minuten duurt het dan tot het vat vol is?



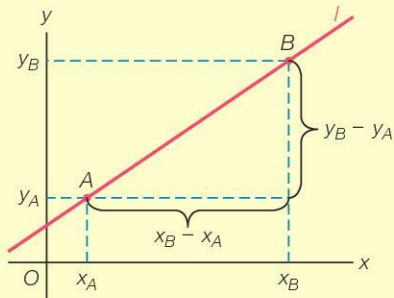
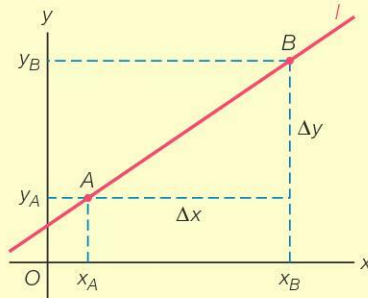
Terugblik

De formule van een lijn door twee gegeven punten

Van de lijn $y = ax + b$ is de richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Als de coördinaten van twee punten A en B bekend zijn, dan is

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$



Bij de lijn l door de punten $A(2, -2)$ en $B(6, 0)$ krijg je

$$rc_l = \frac{0 - (-2)}{6 - 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \text{ Dus } l: y = \frac{1}{2}x + b.$$

Door de coördinaten van A in de formule van l in te vullen, bereken je b .

Zo krijg je $\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -2$ en dit geeft $b = -3$.

Dus een vergelijking van de lijn l is $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Om b te berekenen had je ook de coördinaten van B kunnen gebruiken.

In plaats van een vergelijking van de lijn is $y = \frac{1}{2}x - 3$ zeggen we ook wel de formule van de lijn is $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Bij toepassingen kom je vaak andere letters tegen, bijvoorbeeld

$$r = as + b \text{ met } a = \frac{\Delta r}{\Delta s}.$$

Is v een lineaire functie van t , hoort $v = 20$ bij $t = 3$ en hoort $v = 12$

bij $t = 13$, dan is $v = at + b$ met $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12 - 20}{13 - 3} = \frac{-8}{10} = -0,8$.

$$\left. \begin{array}{l} v = -0,8t + b \\ t = 3 \text{ en } v = 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,8 \cdot 3 + b = 20 \\ -2,4 + b = 20 \\ b = 22,4 \end{array}$$

Dus $v = -0,8t + 22,4$.

Hiermee is v uitgedrukt in t .

1.3 Interpoleren, extrapoleren en evenredigheid

033
□ ⊙ *

Van een persoon is gedurende een groot aantal jaren zowel de lichaamslengte als het gewicht bijgehouden. Zie de tabel.

LENGTE EN GEWICHT

länge L in cm	60	80	100	120	140	160	180
gewicht G in kg	6	11	16	22	32	50	65

- Teken de punten die uit de tabel volgen en teken door de punten een vloeiende kromme.
- Gebruik de grafiek om een schatting te geven van het gewicht bij een lengte van 155 cm.
- Schat de lengte bij een gewicht van 25 kg.
- Kun je met deze gegevens de lengte schatten bij een gewicht van 100 kg? Licht toe.

**figuur 1.13**

Theorie A Interpoleren en extrapoleren

Bij een tabel met waarnemingsresultaten kun je tussenliggende waarden schatten. Dat heet **interpoleren**. Bij **extrapoleren** geef je een schatting van een waarde die buiten de waarnemingen ligt.

In opgave 33 ben je bij het interpoleren en extrapoleren uitgegaan van een grafiek. We spreken dan van **grafisch interpoleren** en **grafisch extrapoleren**.

Interpoleren: schatten van een tussenliggende waarde.

Extrapoleren: schatten van een waarde die buiten de gegevens ligt.

Behalve grafisch interpoleren en extrapoleren, kun je ook interpoleren en extrapoleren met behulp van een berekening. Ga je hierbij uit van een lineair verband, dan heet dat **lineair interpoleren** of **lineair extrapoleren**.

Zie de tabel hiernaast. Om met lineair interpoleren y te schatten bij $x = 9$ ga je als volgt te werk.

Als x toeneemt van 7 naar 12, dan neemt y toe van 1 naar 4.

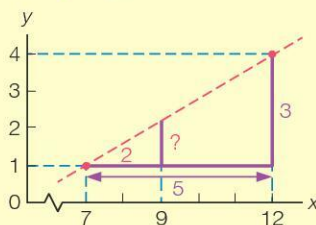
Dus bij $\Delta x = 5$ hoort $\Delta y = 3$.

Hieruit volgt dat bij $\Delta x = 1$ hoort $\Delta y = \frac{3}{5} = 0,6$,

dus bij $\Delta x = 2$ hoort $\Delta y = 2 \cdot 0,6$.

De schatting van y bij $x = 9$ is $y = 1 + 2 \cdot 0,6 = 2,2$.

x	7	12
y	1	4



Voorbeeld

Gegeven is de volgende tabel.

jaar	1995	2002	2006	2011	2020
aantal	670	508	281	220	193

- a Bereken het aantal in 2009 met lineair interpoleren. Rond af op gehele.
- b Bereken het aantal in 2027 met lineair extrapoleren. Rond af op gehele.

Aanpak

- a 2009 ligt tussen 2006 en 2011, dus gebruik het gedeelte van de tabel dat hiernaast staat.

jaar	2006	2011
aantal	281	220

+5
-61

- b Gebruik de laatste ontwikkeling om het aantal te berekenen in 2027, dus gebruik het gedeelte van de tabel dat hiernaast staat.

jaar	2011	2020
aantal	220	193

+9
-27

Uitwerking

- a In 5 jaar 61 minder, dus in 1 jaar $\frac{61}{5}$ minder.
2009 is 3 jaar na 2006, dus in 2009 is het aantal $281 - 3 \cdot \frac{61}{5} \approx 244$.
- b In 9 jaar 27 minder, dus in 1 jaar $\frac{27}{9} = 3$ minder.
2027 is 7 jaar na 2020, dus in 2027 is het aantal $193 - 7 \cdot 3 = 172$.



Zie het voorbeeld.

Jos berekent het aantal in 2009 door de formule op te stellen van een lijn. Hij krijgt de lijn $N = -12,2t + 281$.

- a Licht deze formule toe en gebruik deze formule om het aantal in 2009 te berekenen.
- b Stel de formule op van de lijn waarmee je het aantal in 2027 kunt berekenen.



Rond in deze opgave af op twee decimalen.
Gegeven is de tabel hiernaast.
Bereken y met lineair interpoleren of lineair extrapoleren bij

- a $x = 48$
- b $x = 97$
- c $x = 123$.

x	31	46	78	90	103
y	0,7	2,5	6,0	8,4	9,8

36


Gegeven is de tabel hiernaast.

- a Bereken g met lineair interpoleren bij $L = 3,91$.
Rond af op één decimaal.
- b Bereken g met lineair extrapoleren bij $L = 15,60$.
Rond af op één decimaal.
- c Bereken L met lineair interpoleren bij $g = 21,9$.
Rond af op één decimaal.

L	3,62	4,83	6,12	9,81
g	6,7	11,3	18,7	27,1

37


Op een winterse dag was de temperatuur om 7:00 uur $-4,5^{\circ}\text{C}$. Vier uur later, dus om 11:00 uur, was de temperatuur gestegen tot $2,3^{\circ}\text{C}$.

- a Bereken met lineair interpoleren de temperatuur om 9:30 uur.
- b Bereken met lineair extrapoleren de temperatuur om 14:00 uur.
- c Waarom is lineair extrapoleren niet toegestaan als je de temperatuur om 20:00 uur wilt schatten?

A38


In de tabel staat informatie over het aantal meldingen van hepatitis A en tuberculose (tbc) in Nederland.

AANTAL MELDINGEN HEPATITIS A EN TUBERCULOSE IN NEDERLAND

jaar	1970	1990	2000	2016
hepatitis A	3789	771	658	81
tuberculose	2570	1369	1443	889

- a Bereken met lineair interpoleren het aantal meldingen van hepatitis A in 2010.
- b Bereken met lineair interpoleren het aantal meldingen van tbc in 2015.
- c Het aantal meldingen van tbc vertoont wel een dalende trend, maar soms neemt het aantal meldingen toch nog toe ten opzichte van het jaar ervoor. Neem eens aan dat je alleen over de gegevens van 1970 en 2016 zou beschikken.
In welk jaar zouden er dan volgens lineair extrapoleren geen meldingen meer zijn van tbc in Nederland?

INFORMATIEF

Hepatitis A en tuberculose

Hepatitis A is een leverontsteking die wordt veroorzaakt door het hepatitis A-virus. Mensen raken besmet door contact met zieken of door voedsel of water dat verontreinigd is met ontlasting die het virus bevat. De kans op besmetting neemt toe naarmate de hygiënische omstandigheden slechter zijn. Er is geen behandeling met medicijnen voor hepatitis A. Wel is het

mogelijk om te vaccineren om de ziekte te voorkomen.

De infectieziekte tuberculose (tbc) wordt veroorzaakt door een bacterie. Bij niet of niet goed behandelen kan de ziekte dodelijk zijn. Wereldwijd is tuberculose een groot probleem. In landen waar tuberculose vaak voorkomt, wordt tegen de ziekte gevaccineerd.

A39



Het aantal Nederlanders van 100 jaar en ouder (honderdjarigen) neemt voortdurend toe. Daarnaast neemt het aantal honderdjarige mannen ten opzichte van het aantal honderdjarige vrouwen ook toe. Zie de tabel. De gegevens van 2024 zijn prognoses. Je ziet dat in 2017 één van de zeven honderdjarigen man is.

AANDEEL MANNEN VAN HONDERDJARIGEN OP 1 JANUARI

jaar	aandeel mannen
2017	1 van de 7
2024	3 van de 17

Bereken met lineair extrapoleren in welk jaar één van de vijf honderdjarigen man is.

O40



Gegeven is de verhoudingstabel hiernaast.

- Noem een bijzonderheid van een verhoudingstabel.
- Teken de grafiek bij deze verhoudingstabel. Welke bijzonderheid heeft de grafiek?
- Welke formule hoort bij de grafiek? Kies uit $y = 0,4x^2$, $y = 0,4x$ en $y = x + 0,4$.

x	1	3	5	8	10
y	0,4	1,2	2	3,2	4

Theorie B Recht evenredig

Een machine levert 560 flessen af in vier minuten. De volgende **verhoudingstabel** past bij deze situatie.

tijd t in minuten	4	8	1	3	...
aantal flessen N	560	1120	140	420	...

Diagram showing relationships between values in the table:

- From 4 to 8 (x2) and 560 to 1120 (x2): $\times 2$
- From 1 to 3 (x3) and 140 to 420 (x3): $\times 3$
- From 4 to 1 (:4) and 560 to 140 (:4): $: 4$
- From 8 to 1 (:8) and 1120 to 140 (:8): $: 8$

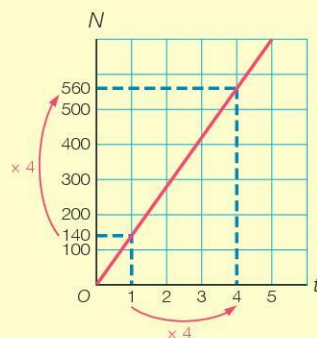
De grafiek die bij deze verhoudingstabel hoort, zie je in figuur 1.14.

De grafiek is een rechte lijn door het punt $O(0, 0)$ met richtingscoëfficiënt 140. De formule is $N = 140t$. Vermenigvuldig je in de verhoudingstabel de tijd t met een getal k , dan moet je N ook met k vermenigvuldigen.

We zeggen dat N **evenredig** is met t . In plaats van N is evenredig met t zeggen we ook

N is **recht evenredig** met t .

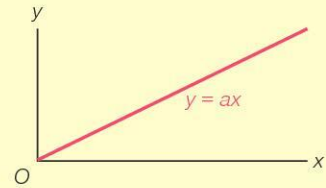
Bij evenredige grootheden hoort een verhoudingstabel.



figuur 1.14

y is (recht) evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
- De bijbehorende tabel is een verhoudingstabel.
- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.



Voorbeeld

- a** Gegeven is dat y evenredig is met x . Voor $x = 8$ is $y = 12$.
Bereken y voor $x = 30$.
- b** Gegeven is dat N evenredig is met t . Bij $t = 12$ hoort $N = 99$.
Stel de formule van N op.

Uitwerking

- a** $\frac{8}{12} \mid \frac{30}{y}$ dus $y = \frac{12 \cdot 30}{8} = 45$
- b** N is evenredig met t , dus $N = at$.
Bij $t = 12$ hoort $N = 99$.
- $$\left. \begin{array}{l} a \cdot 12 = 99 \\ 12a = 99 \\ a = 8,25 \end{array} \right\}$$

Dus $N = 8,25t$.

Verhoudingstabel, dus
gelijke kruisproducten.
 $8 \cdot y = 12 \cdot 30$

41 Gegeven is dat y evenredig is met x .



- a** Voor $x = 15$ is $y = 23$.
Bereken y voor $x = 60$.
- b** Voor $x = 6$ is $y = 3,6$.
Bereken x voor $y = 30,6$.
- c** Voor $x = 128$ is $y = 56$.
Bereken y voor $x = 520$.

42 De bewoners van appartementencomplex 'Zuiderwal' hebben te maken



- met gemeenschappelijke servicekosten. De afspraak is deze kosten evenredig te verdelen op basis van de vloeroppervlakte.
- De familie De Jager heeft een appartement met een vloeroppervlakte van 84 m^2 . Ze betalen jaarlijks 1890 euro aan servicekosten.
- a** Stel de formule op van de jaarlijkse servicekosten K in euro's bij een vloeroppervlakte van $A \text{ m}^2$.
- b** De familie Prieshof betaalt per jaar 2700 euro aan servicekosten. Hoeveel is de vloeroppervlakte van hun appartement?
- c** De familie Verbeek heeft een vloeroppervlakte van 75 m^2 , dat is 1,2% van de totale vloeroppervlakte van het complex.
Bereken de jaarlijkse servicekosten van het gehele appartementencomplex.

A43
☐◎*

Pascal van Norden (Gouda, 5 september 1972) is een Nederlandse ultrarenner. Hij is gespecialiseerd in lange afstanden. In 2017 prolongeerde hij in Winschoten zijn titel Nederlands kampioen 100 km. Hij legde deze afstand af in 6 uur, 55 minuten en 10 seconden. Daarmee was zijn gemiddelde snelheid (afgerond op drie decimalen) gelijk aan 14,452 km/uur.

We vragen ons in deze opgave af hoe gelijkmatig Pascal tijdens deze race heeft gelopen. Als hij steeds even hard liep, moet er immers sprake zijn van een evenredig verband tussen de afgelegde afstand en de tijd. In de tabel zie je de tussentijden na telkens 10 km.

$$\begin{aligned} &6 \text{ uur, } 55 \text{ minuten en } 10 \text{ seconden is} \\ &6 + \frac{55}{60} + \frac{10}{3600} = 6,919... \text{ uur.} \\ &100 \text{ km in } 6,919... \text{ uur,} \\ &\text{dus gemiddelde snelheid is} \\ &\frac{100}{6,919...} \approx 14,452 \text{ km/uur.} \end{aligned}$$

TUSSENTIJDEN BIJ DE KAMPIOENSRACE VAN PASCAL VAN NORDEN, 2017

afstand in km	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
tijd	40:25	1:21:08	2:01:36	2:41:42	3:22:03	4:02:50	4:44:26	5:27:44	6:11:35	6:55:10

Je kunt berekenen dat zijn gemiddelde snelheid tijdens de eerste 10 km gelijk was aan 14,845 km/uur.

- a** Licht dit toe met een berekening en bereken de gemiddelde snelheid in km/uur over de eerste 20 km en de eerste 30 km. Rond af op drie decimalen.

Je ziet dat de berekende gemiddelde snelheden niet precies aan elkaar gelijk zijn. Het gemiddelde van de drie in vraag a berekende snelheden is 14,813 km/uur. We nemen aan dat er een evenredig verband bestaat tussen de afgelegde afstand en de tijd als de gemiddelde snelheid niet meer dan 1% afwijkt van deze 14,813 km/uur. Dat betekent dat er een evenredig verband bestaat als de gemiddelde snelheid tussen 14,665 en 14,961 km/uur ligt.

- b** Bereken tot welke afstand het evenredige verband opgaat.

E44
*

Tess wil 100 bonbons kopen. De bonbons kosten 40 cent per stuk. Bij het afrekenen krijgt zij te horen: 7 halen, maar 6 betalen. Tess heeft 40 euro bij zich. Hoeveel geld houdt Tess over?

O45
☐◎*

Bekijk de volgende situaties.

- I Na afloop van een festival maken x personen het feestterrein in y minuten schoon.
- II Na afloop van een festival verdienen x schoonmakers per uur samen y euro.
- a** Neem aan dat het aantal personen x vier keer zo groot is als aanvankelijk werd aangenomen. Welk effect heeft dat in beide situaties op y ?
- b** In welke situatie is sprake van evenredige grootheden?

Theorie C Omgekeerd evenredig

Een zoutzuuroplossing met een concentratie van 8% betekent dat er 8 mL zoutzuur in 100 mL oplossing aanwezig is. De rest is water. Voeg je aan deze 100 mL nog eens 100 mL water toe, dan heb je 200 mL oplossing die 8 mL zoutzuur bevat. De concentratie is dan 4%. En zo krijg je na toevoeging van nog eens 200 mL water een oplossing met een concentratie van 2% zoutzuur. Dus maak je het volume k keer zo groot, dan wordt de concentratie k keer zo klein.

We zeggen dat de concentratie c **omgekeerd evenredig** is met het volume V .

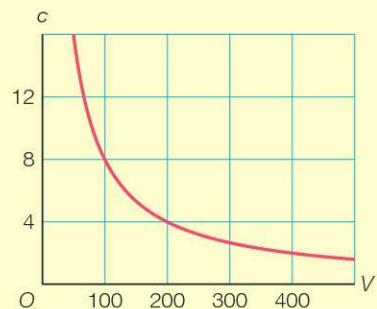
In de volgende tabel zie je dat het product $c \cdot V$ telkens gelijk is aan 800.

V in mL	100	200	400	500	50
c in %	8	4	2	1,6	16
$c \cdot V$	800	800	800	800	800

In figuur 1.15 is de grafiek getekend bij de tabel. De grafiek is een (deel van een) **hyperbool**. Tussen c en V bestaat het **hyperbolische verband** $c \cdot V = 800$.

Je kunt dit verband ook schrijven met de

formule $c = \frac{800}{V}$ of met de formule $V = \frac{800}{c}$.



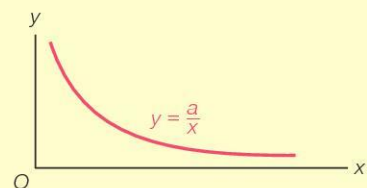
figuur 1.15

y is omgekeerd evenredig met x

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y door hetzelfde getal delen.
- Het product xy is constant, dus $xy = a$, oftewel

$$y = \frac{a}{x}.$$

- De grafiek is een hyperbool.



In het voorbeeld wordt gebruikt dat bij een oplossing van een stof in water de concentratie en het volume omgekeerd evenredig zijn.

Voorbeeld

In een apotheek heeft men alcohol in een oplossing van 95% (dus 95% alcohol en 5% water). Voor een klant is 750 mL oplossing nodig met 18% alcohol.

Hoe kan de apotheker deze oplossing krijgen?

Aanpak

Gebruik dat het product van het volume en de concentratie constant is.

Uitwerking

Voor de benodigde oplossing geldt $c \cdot V = 18 \cdot 750 = 13\,500$.

Gebruik van de aanwezige oplossing V mL, dan is $95 \cdot V = 13\,500$,

$$\text{dus } V = \frac{13\,500}{95} = 142,10\dots$$

Dus vul 142 mL van de aanwezige oplossing aan met water tot 750 mL.

46
☐ ⊗ *

Zie het voorbeeld. Voor een andere klant heeft men 450 mL van 65% alcohol nodig.

- a** Hoeveel van de aanwezige voorraad moet worden aangevuld met water?

De apotheker heeft een waterstofperoxide-oplossing in voorraad van 3%. Een klant vraagt 500 mL waterstofperoxide met een concentratie van 0,2%.

- b** Hoeveel mL van de voorradige oplossing moet worden aangevuld met water?

47
☐ ⊗ *

Snelheid is omgekeerd evenredig met de tijd.

- a** Licht dit toe met een voorbeeld.

Bij grote etappekoersen in het wielrennen maakt de wedstrijdleiding vaak enkele tijdschema's voor een etappe. Je hebt dan drie schema's: een langzaam schema, een snel schema en een schema daartussenin. Tijdens de koers houdt men in de gaten op welk schema gereden wordt. Bij een etappe in de Tour de France wordt gestart om 12:15 uur. Het langzame schema geeft aan dat bij een gemiddelde snelheid van 42 km/uur de finish om 17:30 uur is. De finish blijkt om 16:55 uur te zijn.

- b** Met welke gemiddelde snelheid is in deze etappe gereden?



48



Onderzoek in de Stille Oceaan heeft uitgewezen dat de watertemperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ omgekeerd evenredig is met de diepte d in km. Dit verband blijkt alleen te gelden voor diepten groter dan 500 meter. Op een diepte van 2500 meter is de watertemperatuur $1,6^{\circ}\text{C}$.

- Stel de formule op van de temperatuur T op een diepte van d km.
- Hoeveel is de watertemperatuur op 4835 meter diepte?
- Op welke diepte is de watertemperatuur $1,4^{\circ}\text{C}$?

T is omgekeerd evenredig met d , dus

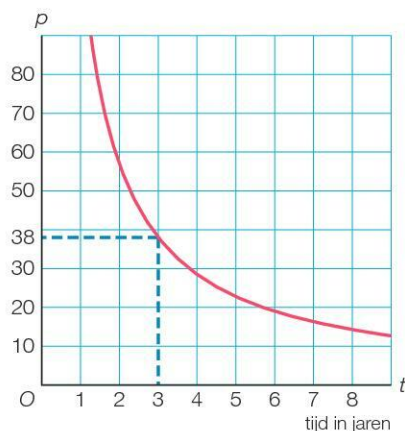
$$T = \frac{a}{d}$$

49



Enkele jaren geleden vond in Chedabucto Bay bij Canada een olieramp plaats, waarbij veel olie op de stranden terecht kwam. Natuurlijke processen zorgen voor een afbraak van de olie. Onderzoek heeft uitgewezen dat het percentage p van de nog aanwezige olie omgekeerd evenredig is met de verstreken tijd t in jaren. Hierbij is $t > 1$. In de grafiek van figuur 1.16 vind je verdere informatie.

- Stel de formule op van het percentage p van de olie dat na t jaar nog aanwezig is.
- Hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid olie is na 5,5 jaar nog aanwezig?
- Hoelang duurt het tot 95% van de olie is verdwenen?



figuur 1.16

A50



Bij de aanleg van spoorwegen moet in een bocht *verkanting* worden toegepast: de buitenste rail ligt iets hoger dan de binnenste rail. Hiermee wordt voorkomen dat de trein uit de bocht vliegt.

Het hoogteverschil h is omgekeerd evenredig met de straal r van de bocht. Bij een straal van 750 meter is het hoogteverschil 120 mm.

- Stel de formule op van het hoogteverschil h . Neem h in mm en r in meter.
- Hoeveel mm is het hoogteverschil bij een straal van 500 meter?
- In Nederland mag het hoogteverschil niet meer dan 15 cm zijn. Welke straal hoort bij een hoogteverschil van 15 cm?



Bij elke snelheid hoort een andere formule van h . Op het traject Keulen - Frankfurt geldt een hoogteverschil van maximaal 170 mm. Met dit hoogteverschil kan de ICE met een snelheid van 300 km/uur een bocht met een straal van 3320 meter nemen.

- Stel voor deze snelheid de formule van h op.



Kweker Jansma is gespecialiseerd in het kweken van rozen met het predicaat Toproos.

Jansma verkoopt deze rozen elke vrijdag op de veiling. Daar worden dan ook door andere kwekers rozen met het predicaat Toproos aangeboden. Het bedrag dat Jansma op een vrijdag met zijn Toprozen ontvangt, is bij een vaste prijs evenredig met het aantal rozen dat hij verkoopt. Maar de prijs is ook afhankelijk van het aantal rozen dat de andere kwekers aanbieden. Het blijkt dat de prijs omgekeerd evenredig is met het totaal aantal rozen dat de andere kwekers op de veiling aanbieden plus het aantal rozen dat Jansma aanbiedt.

In deze opgave is B het bedrag in euro's dat Jansma op een vrijdag voor zijn Toprozen ontvangt, a het aantal rozen dat hij op een vrijdag verkoopt en T het aantal rozen van de andere kwekers.

Op een vrijdag biedt Jansma 750 Toprozen aan en de andere kwekers 5000. Die vrijdag brengen zijn rozen per stuk 60 cent op.

Hieruit volgt dat geldt $B = \frac{3450a}{T+a}$.

- a Laat zien hoe je aan deze formule kunt komen.
- b Neem aan dat Jansma op de genoemde vrijdag niet 750 rozen op de veiling had aangeboden, maar 1000. De andere kwekers bieden nog steeds 5000 rozen aan. Hoeveel ontvangt Jansma dan per roos?
- c Op een vrijdag bieden de andere kwekers 8000 rozen aan. Het blijkt dat Jansma die vrijdag 35 cent per stuk voor zijn rozen ontvangt. Hoeveel rozen heeft Jansma die vrijdag op de veiling verkocht?
- d Toon aan dat het volgens de formule niet mogelijk is dat Jansma 50 cent per roos ontvangt als de andere kwekers op een vrijdag 8000 rozen aanbieden.



Terugblik

Interpoleren en extrapoleren

Met de tabel hiernaast kun je het aantal woningen in 1990 schatten.

Met lineair interpoleren gaat dat als volgt.

In 27 jaar 2552 meer, dus in 1 jaar $\frac{2552}{27}$ meer.

1990 is 19 jaar na 1971, dus in 1990 is het aantal

$$3873 + 19 \cdot \frac{2552}{27} \approx 5669 \text{ duizend woningen.}$$

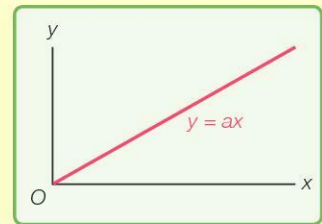
jaar	1930	1971	1998	2018
aantal woningen $\times 1000$	1824	3873	6425	7741

jaar	1971	1998
aantal	3873	6425

$+27$
 $+2552$

y is evenredig met x

- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De tabel is een verhoudingstabel.
- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
- De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.



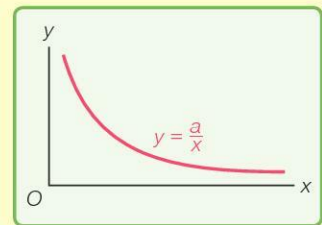
Het bedrag B in euro's dat Sabine verdient bij de supermarkt is evenredig met het aantal uur t dat ze werkt. Voor 4 uur werken krijgt ze 17 euro. De formule van B krijg je als volgt.

$$\left. \begin{array}{l} B = at \\ t = 4 \text{ en } B = 17 \end{array} \right\} a \cdot 4 = 17 \text{ oftewel } a = \frac{17}{4} = 4,25$$

$$\text{Dus } B = 4,25t.$$

y is omgekeerd evenredig met x

- De formule heeft de vorm $xy = a$ oftewel $y = \frac{a}{x}$.
- Vermenigvuldig je x met een getal, dan moet je y door dat getal delen.
- De grafiek is een hyperbool.



De bereidingstijd van vlees in een magnetron is omgekeerd evenredig met het ingestelde vermogen.

Bij een vermogen V van 800 watt is de bereidingstijd T precies 4 minuten.

De formule van T krijg je als volgt.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Omgekeerd evenredig, dus } T = \frac{a}{V} \\ T = 4 \text{ en } V = 800 \end{array} \right\} \frac{a}{800} = 4 \text{ oftewel } a = 4 \cdot 800 = 3200$$

$$\text{Dus } T = \frac{3200}{V}.$$

1.4 Wiskundige modellen

O52
  *

Gegeven zijn vier formules en de bijbehorende grafieken.

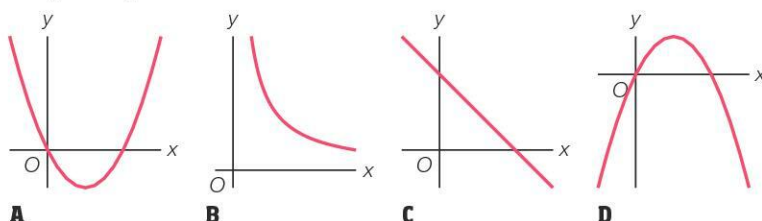
Zoek bij elke formule de juiste grafiek.

I $y = 2 - x$

II $y = \frac{2}{x}$

III $y = x^2 - 2x$

IV $y = 2x - x^2$



figuur 1.17

Theorie A Grafieken op de grafische rekenmachine

Formules als $y = -2x^2 + 8x + 3$ en $s = 6t^2 - t^3$ zijn voorbeelden van niet-lineaire formules. Je kunt de grafieken van zulke formules op het scherm van de GR laten tekenen. We zeggen dan dat we de grafieken **plotten**.

[►GR] Voordat je verder gaat, neem je de module **Formules en grafieken** van de handleiding GR door.

In deze module leer je hoe je een formule op de GR invoert, de grafiek plot, een tabel maakt en allerlei bijzonderheden van grafieken te weten komt. Bij het plotten van grafieken is het van belang na te denken welke waarden van x en y op de assen kunnen voorkomen. Het scherm met deze waarden van x en y noemen we het **venster** van de GR. Bij het kiezen van een geschikt venster kunnen de volgende vuistregels van pas komen.

Vuistregels voor het vinden van een geschikt venster

- De kleinste en de grootste waarde van x volgen uit de gegevens of de context.
- Gebruik bij de TI ZoomFit en bij de Casio Auto om op het spoor te komen van geschikte waarden voor y . Bij de HP gebruik je het aanraakscherm om de y -waarden aan te passen.

Kies de y -waarden zo, dat de grafieken goed op het scherm komen.

We maken onderscheid tussen het plotten, het schetsen en het tekenen van een grafiek.

Plot de grafiek

Laat de GR de grafiek op het scherm tekenen. Kies het venster zo, dat alle bijzonderheden van de grafiek op het scherm te zien zijn.

Schets de grafiek

Maak in je schrift een schets van de grafiek. Het gaat alleen om de vorm van de grafiek en de ligging ten opzichte van de assen. Gebruik eventueel de GR.

Teken de grafiek

Teken in je schrift nauwkeurig de grafiek en zet getallen bij de assen. Maak eerst een tabel. Gebruik daarbij de GR.

Bij berekeningen die je met de GR maakt, hoort een toelichting. Zo vermeld je de formules die je invoert en de gebruikte opties.

Afspraak

Bij gebruik van de GR

- noteer je welke formules je invoert
- noteer je welke opties je gebruikt.

Maak je berekeningen bij een formule die bij een praktische situatie hoort, let er dan op dat je de gestelde vraag beantwoordt. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

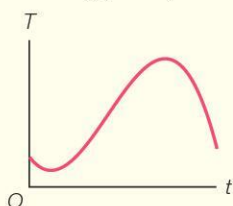
De temperatuur van het zeewater voor de Nederlandse kust wordt beschreven door de formule $T = -0,093t^3 + 1,39t^2 - 3,28t + 4,7$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari en $0 \leq t \leq 12$.

- Schets de grafiek van T .
- Bereken de temperatuur op 1 juli. Rond af op één decimaal.
- In welke maand is de temperatuur van het zeewater minimaal? Wat is de minimale temperatuur?
- In welke maanden is de temperatuur van het zeewater 14°C ?

Uitwerking

- Voer in $y_1 = -0,093x^3 + 1,39x^2 - 3,28x + 4,7$.

$0 \leq t \leq 12$, dus neem in het venster x tussen 0 en 12.



- Bij 1 juli hoort $t = 6$.
 $t = 6$ geeft $T \approx 15,0^\circ\text{C}$
- De optie minimum geeft $x \approx 1,4$ en $y \approx 2,6$.
Dus in februari. De minimale temperatuur is $2,6^\circ\text{C}$.
- Voer in $y_2 = 14$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 5,7$ en $x \approx 10,8$.
Dus in de maanden juni en november.

$t = 0$ op 1 januari
 $t = 1$ op 1 februari
 $t = 2$ op 1 maart

53

Zie het voorbeeld.



- In welke maand is de temperatuur van het zeewater maximaal?
Wat is de maximale temperatuur?
- Hoeveel dagen ongeveer is de temperatuur boven 19°C ?



De bedrijfseconoom van een supermarktketen heeft een formule opgesteld die beschrijft hoeveel klanten er op elk tijdstip op een vrijdag in één van de vestigingen aanwezig zijn.

Deze formule is $N = -0,15t^4 + 3,35t^3 - 24t^2 + 65t$. Hierin is N het aantal klanten t uur na het openingstijdstip van 8:00 uur.



- Om de grafiek te plotten, kies je eerst een geschikt venster. Welke waarden voor x kies je hierbij? Licht toe en schets de grafiek van N .
- Hoe laat is het volgens de formule het drukst in de supermarkt? Hoeveel klanten zijn er dan?
- Hoe laat verlaten de laatste klanten de supermarkt?
- Hoe laat zijn er evenveel klanten in de supermarkt als om kwart over drie?



Een jongerenblad start een reclamecampagne om de losse verkoop te verhogen. De campagne zal enkele maanden duren.

De uitgever van het blad hanteert voor het jaar na de start van de reclamecampagne de formule $A = 9 + \frac{5}{(0,05t - 2)^2 + 1}$. Hierin is A het aantal wekelijks verkochte exemplaren in duizendtallen en t de tijd in weken met $t = 0$ op het moment dat de campagne begint.

- Schets de grafiek van A .
- Hoeveel weken na de start van de campagne is de losse verkoop het grootst? Hoeveel is de verkoop dan?
- Gedurende hoeveel weken is de wekelijkse verkoop meer dan 13 500 exemplaren?

A56
☐ ⊗ *

Het aantal bezoekers van een internetsite waarop allerlei goederen te koop worden aangeboden, is voor een doordeweekse dag te benaderen door de formule $N = 0,02t^5 - 1,225t^4 + 22,5t^3 - 84t^2 - 646t + 5000$. Hierin is N het aantal bezoekers en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0:00 uur.

- Schets de grafiek van N .
- Hoeveel bezoekers zijn er 's middags om half een?
- Hoe laat is het aantal bezoekers het grootst? Hoeveel bezoekers zijn er dan?
- Er zijn 6000 bezoekers. Hoe laat kan het zijn?

A57
* *

In een gebied groeien twee verwante plantensoorten A en B. Door een veranderd natuurbeheer van het gebied komen er vanaf 2015 steeds meer exemplaren van soort A en juist steeds minder van soort B. Per hectare worden de aantallen van soort A gegeven door de formule $N_A = 20 \cdot 1,18^t$ en de aantallen van soort B door $N_B = 600 \cdot 0,92^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2015.

- Schets de grafieken van N_A en N_B voor de jaren 2015-2035 in één figuur.
- In welk jaar komen er voor het eerst meer dan 20 planten van soort A per ha bij?
- In welke maand van welk jaar zijn er per ha evenveel planten van soort A als van soort B?
Hoeveel planten van soort A en soort B zijn er dan samen per ha?
- Het totaal aantal planten van soort A en soort B samen bereikt een minimum.
Bereken dit minimum.
- In welk jaar zijn er voor het eerst meer dan 200 planten per ha meer van soort A dan van soort B?

O58
☐ ⊗ *

Een bungeejumper springt van een plateau. Bij deze sprong is op enkele tijdstippen de afstand van de bungeejumper tot het plateau gemeten. Zie de tabel hiernaast. Hierin is t de tijd in seconden en A de afstand tot het plateau in meter.

- Teken de punten van de tabel in een assenstelsel en teken door deze punten een vloeiende kromme.

Peter heeft bij de sprong de formule $A = -3,5t^2 + 21t$ opgesteld.

- Teken de grafiek van deze formule in de figuur van vraag a. Vind je dat deze formule goed past bij de sprong?

Tisca heeft bij de sprong de formule $A = 6t^2 - t^3$ opgesteld.

- Laat zien dat de punten van de tabel passen bij deze formule.

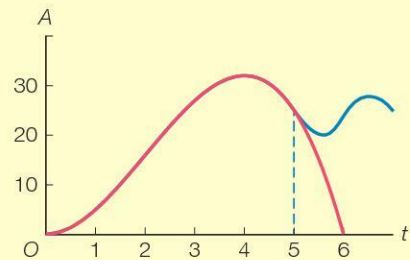
t	0	1	2	3	4	5
A	0	5	16	27	32	25



Theorie B Modelvorming

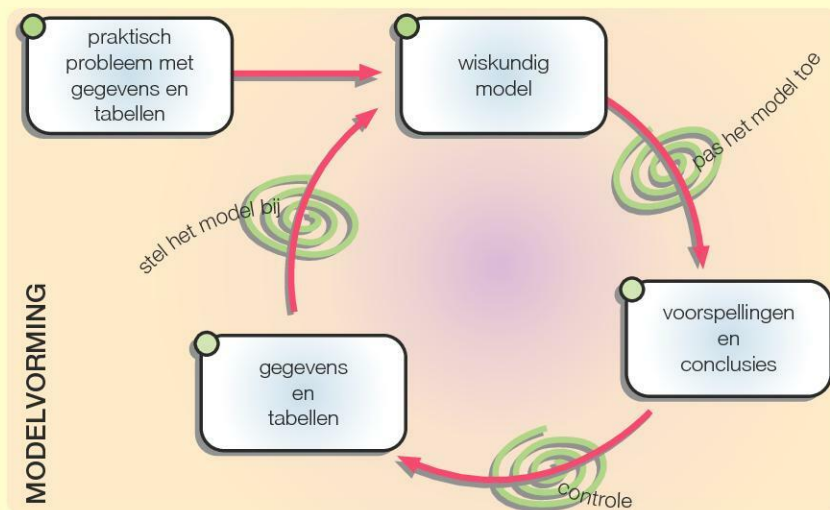
In opgave 58 past de formule $A = 6t^2 - t^3$ goed bij de tabel. Realiseer je echter dat de formule slechts een benadering is van de werkelijkheid. Zo geldt de formule niet voor $t > 5$, want voor bijvoorbeeld $t = 6$ zou dan de afstand van de bungeejumper tot het plateau 0 meter zijn en dat kan natuurlijk niet.

Je werkt met een **wiskundig model**.



figuur 1.18 De rode grafiek hoort bij de formule $A = 6t^2 - t^3$.

Je zou het model kunnen aanpassen zodat ook voor waarden van t groter dan 5 de sprong wordt beschreven. In het schema van figuur 1.19 is dit proces van **modelvorming** weergegeven. Bij het oplossen van allerlei problemen zul je de elementen uit dit schema tegenkomen.



figuur 1.19 Enkele elementen uit het schema ‘modelvorming’ zul je bij het oplossen van allerlei problemen tegenkomen.

Voorbeeld

De meeste medicijnen zijn beperkt houdbaar. Meestal loopt de werkzaamheid terug. Bij het medicijn Parmal wordt de werkzaamheid W uitgedrukt in een getal tussen 0 en 100. Bij de aankoop is de werkzaamheid 100 en bij een bewaartemperatuur van 20°C is na 5 dagen de werkzaamheid nog 92.

Neem aan dat er een lineair verband is tussen W en de tijd t in dagen.

- a** Stel de formule op van W .

Sinds kort is Parmal verbeterd waardoor het langer werkzaam is. Bij het nieuwe Parmal2 gaat men uit van een model van de vorm $W = 100 - b\sqrt{t}$. Ook in dit model is W de werkzaamheid na t dagen bij een bewaartemperatuur van 20°C . Het blijkt dat na 9 dagen de werkzaamheid van Parmal2 is afgenomen tot 76.

- b** Bereken b .

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} \quad W = at + 100 \\ \quad t = 5 \text{ en } W = 92 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5a + 100 = 92 \\ 5a = -8 \\ a = -1,6 \end{array}$$

De formule is $W = -1,6t + 100$.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{b} \quad t = 9 \text{ en } W = 76 \text{ invullen in } W = 100 - b\sqrt{t} \text{ geeft} & 100 - b\sqrt{9} = 76 \\ & -3b = -24 \\ & b = 8 \end{array}$$

59



Zie het voorbeeld met de formules $W = -1,6t + 100$ en $W = 100 - 8\sqrt{t}$.

- a** Na hoeveel dagen is de werkzaamheid van beide medicijnen even groot? Hoeveel is de werkzaamheid dan?

Er wordt afgeraden het medicijn nog te gebruiken als de werkzaamheid minder is dan 25. We zeggen dat de houdbaarheid dan is verstreken.

- b** Na hoeveel dagen is de houdbaarheid van Parmal verstreken? En na hoeveel dagen van Parmal2?

Door Parmal2 in de koelkast te bewaren is het medicijn langer houdbaar. Bij bewaren in de koelkast is 9 dagen na de aanschaf de werkzaamheid nog 82.

- c** Neem aan dat bij bewaren in de koelkast van Parmal2 een model van de vorm $W = 100 - c\sqrt{t}$ hoort. Bereken c .

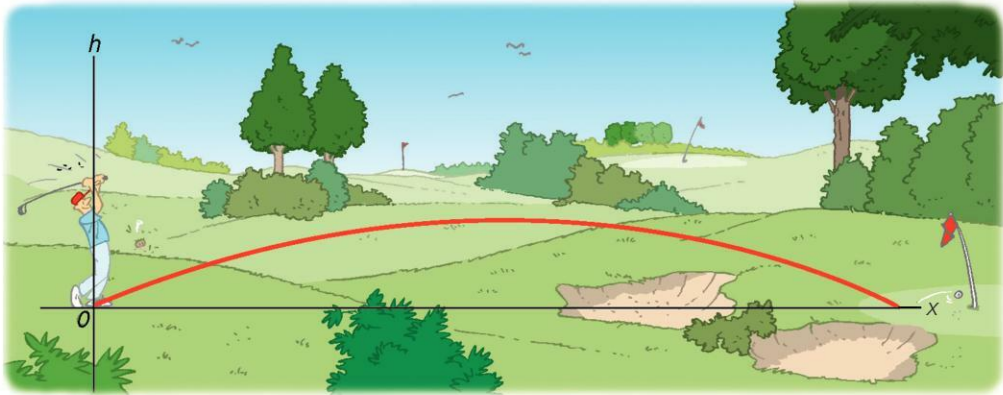
Het blijkt dat bij bewaren in de koelkast van Parmal2 de werkzaamheid na 32 dagen nog 70 is.

- d** Laat met een berekening zien dat het model van vraag c hiermee niet in overeenstemming is.
- e** Ga uit van een model van de vorm $W = 100 - dt^{0,4}$ en gebruik $t = 32$ en $W = 70$ om d te berekenen. Klopt de gevonden formule ook met het gegeven dat $W = 82$ hoort bij $t = 9$?

60
☐ ⊙ *

Bij het bestuderen van de baan van een golfbal heeft men de tabel hiernaast opgesteld. Hierin zijn x en h in meter. Zie ook de figuur hieronder.

x	0	10	25	50	60
h	0	3,5	7,0	7,5	6,0



figuur 1.20

Omdat men aanneemt dat de baan de vorm van een parabool heeft, gaat men uit van het model $h = ax^2 + bx$. Door de gegevens te gebruiken bij $x = 10$ en $x = 60$ kan men berekenen dat $a = -0,005$ en $b = 0,4$.

- Toon aan dat de formule $h = -0,005x^2 + 0,4x$ klopt met de gegevens bij $x = 10$ en $x = 60$.
- Hoe hoog komt de bal maximaal volgens dit model?
- Hoeveel meter vanaf de afslag komt de bal volgens dit model weer op de grond?
- De formule komt met één van de meetwaarden in de tabel niet overeen.

Bij welke waarde van x is dat? Hoeveel cm wijkt de hoogte die de formule geeft af van de gemeten waarde?

61
☐ ⊙

Bij het opstellen van een formule van de hoogte waarop een vuurpijl zich bevindt, gaat men uit van het model $h = at^3 + bt^2$. Hierin is h de hoogte in meter en t de tijd in seconden. De pijl wordt afgeschoten op $t = 0$ en komt op $t = 8$ weer op de grond. Op $t = 5$ is de pijl op een hoogte van 75 meter. Hiermee kan men berekenen dat $a = -1$ en $b = 8$.

- Toon aan dat de formule $h = -t^3 + 8t^2$ klopt met de genoemde gegevens.
- Schets de grafiek bij de formule.
- Na hoeveel seconden is de pijl volgens dit model op het hoogste punt? Op welke hoogte is de pijl dan?
- Bereken voor welke waarden van t de pijl op een hoogte van 50 meter is. Rond af op één decimaal.



Een experiment met bacteriën in een laboratorium begint op 1 september om 0:00 uur met 200 miljoen bacteriën. Uit metingen blijkt dat het aantal bacteriën op 1 september met 7 miljoen afneemt en op 6 september toeneemt van 285 miljoen tot 368 miljoen.

De laborant neemt op grond van deze metingen aan dat het aantal bacteriën wordt gegeven door een model van de vorm $N = at^3 + bt + 200$. Hierin is N het aantal in miljoenen en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 september om 0:00 uur.

- Toon aan dat $a = 1$ en $b = -8$ een formule oplevert die overeenkomt met alle gegeven meetwaarden.
- Op welke datum neemt volgens deze formule het aantal bacteriën voor het eerst met meer dan 200 miljoen toe?
- Maak een schets van de grafiek bij de formule waaruit blijkt dat er een tijdstip is waarop het aantal bacteriën minimaal is en bereken het minimale aantal bacteriën.



Een thermosfles wordt getest door deze te vullen met kokendheet water. Daarna wordt op verschillende tijdstippen de temperatuur van het water in de fles gemeten. Zie de tabel, waarin T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ is na t minuten.

t	0	9	19	31	46	65
T	100	90	80	70	60	50

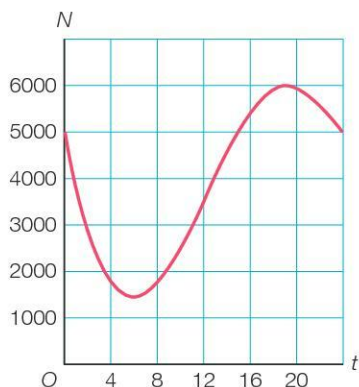
- Licht toe dat bij de tabel geen lineair verband hoort.

De onderzoeker gaat uit van een model van de vorm $T = a \cdot b^t + c$. Omdat de omgevingstemperatuur 20°C is, neemt hij $c = 20$.

- Licht toe dat uit $t = 0$ en $T = 100$ volgt dat $a = 80$. Gebruik dat $b^0 = 1$.
- Gebruik de formule $T = 80 \cdot b^t + 20$ en het gegeven dat na 65 minuten de temperatuur 50°C is om b te berekenen. Rond af op drie decimalen.
- Onderzoek of de bij c gevonden formule past bij de andere gegevens van de tabel.
- Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van het water in de thermosfles gedaald is tot 40°C .



In de figuur hieronder is het aantal bezoekers van een internetsite op een doordeweekse dag uitgezet tegen de tijd in uren met $t = 0$ om 0:00 uur. Om zes uur 's morgens is het aantal bezoekers met 1450 minimaal en om zeven uur 's avonds is het aantal bezoekers met 6000 maximaal. Verder is om 12 uur het aantal bezoekers 3500. Door daarnaast gebruik te maken van het gegeven dat om 0 uur en om 24 uur het aantal bezoekers 5000 is, is het model $N = -3,35t^3 + 132t^2 - 1240t + 5000$ opgesteld.



figuur 1.21

- a** Onderzoek of deze formule goed past bij de gegevens. Bij welk van de genoemde tijdstippen vind je de grootste afwijking? Hoeveel wijkt in dat geval de formule af van het gegeven?

Een andere wiskundige komt met het model

$N = 0,0577t^4 - 6,17t^3 + 174t^2 - 1430t + 5000$ voor het aantal bezoekers van de site.

- b** Onderzoek op welk van de genoemde tijdstippen dit model een betere benadering geeft van de werkelijkheid dan het eerste model. En op welke tijdstippen geeft dit model een slechtere benadering?

Terugblik

Formules en de GR

Op de GR kun je formules invoeren en vervolgens de grafieken plotten en tabellen laten maken. De GR bezit opties om

- bij een gegeven x de y -waarde te berekenen
- de coördinaten van snijpunten van grafieken te berekenen
- de coördinaten van toppen en snijpunten van een grafiek met de x -as te berekenen
- bij een formule een tabel te maken.

Gebruik je in de uitwerking van een opgave de GR, dan noteer je de formules die je invoert en de opties die je gebruikt. Geef het resultaat en beantwoord de gestelde vraag.

Bij een experiment in een laboratorium wordt het aantal bacteriën in de eerste twee weken van september gegeven door de formule $N = t^3 - 9t^2 + 200$. Hierin is N het aantal bacteriën in miljoenen en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 september om 0:00 uur.

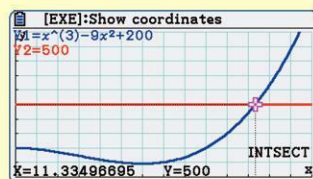
Je berekent als volgt op welke datum het aantal bacteriën is toegenomen tot een half miljard.

Voer in $y_1 = x^3 - 9x^2 + 200$ en $y_2 = 500$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 11,3$.

Op 12 september is het aantal bacteriën tot een half miljard toegenomen.

Een half miljard is 500 miljoen, dus $y_2 = 500$. Twee weken is 14 dagen, dus neem x tussen 0 en 14.



Modelvorming

Een wiskundig model is een formule, een grafiek of een ander wiskundig instrument waarmee je de werkelijkheid benadert. Omdat je met een benadering werkt, moet je voorzichtig zijn met het trekken van conclusies. Om een betere benadering te krijgen kan het noodzakelijk zijn het model te verfijnen of bij te stellen.

Een bedrijf hanteert een model van de vorm $W = -20q^2 + bq - 500$ om de winst W in euro's te berekenen bij een dagverkoop q . Het blijkt dat bij een dagverkoop van 10 stuks de winst 2300 euro is.

Dit geeft $-20 \cdot 10^2 + 10b - 500 = 2300$.

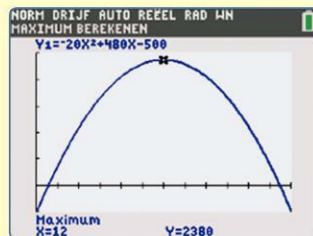
Oplossen van deze vergelijking geeft $b = 480$.

Je kunt met de verkregen formule de maximale winst berekenen. Hierbij hoort de volgende uitwerking.

Voer in $y_1 = -20x^2 + 480x - 500$.

De optie maximum geeft $x = 12$ en $y = 2380$.

De maximale winst is 2380 euro.



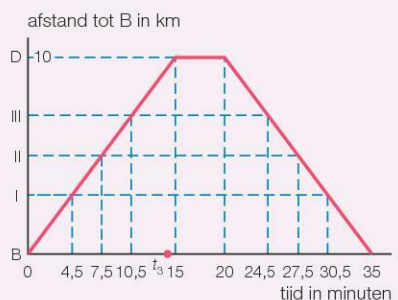
Eindopdracht Shuttlebussen

Tussen het bezoekerscentrum in natuurpark Cradle Mountain en het eindpunt bij Dove Lake rijden shuttlebussen. De weg tussen het bezoekerscentrum en Dove Lake is erg smal en er zijn maar drie punten op de 10 km lange route waar shuttlebussen elkaar kunnen passeren. Zie onderstaande figuur. Hierin is B het bezoekerscentrum, D is Dove Lake en I, II en III zijn de punten waar de bussen elkaar kunnen passeren. Bij de punten I, II en III kan een bus ook een tijdje stilstaan om een andere bus te laten passeren.



De bussen rijden 40 km/uur en bij het bezoekerscentrum en het eindpunt blijven de bussen minimaal 3 minuten staan om de passagiers in en uit te laten stappen. Er zijn in totaal 6 shuttlebussen. Op drukke dagen worden alle bussen ingezet. We bekijken in deze opdracht welk schema deze bussen moeten aanhouden, zodat per uur zoveel mogelijk passagiers worden vervoerd.

In de figuur hiernaast is op de horizontale as de tijd t in minuten uitgezet. Op de verticale as staat de afstand in km met de punten B, I, II, III en D. Getekend is de rit van de eerste bus van de dag. De start is op $t = 0$ en op $t = 15$ is de bus bij Dove Lake. De bus rijdt op $t = 20$ terug en komt op $t = 35$ aan bij het bezoekerscentrum.



- Licht de getallen op de horizontale as toe.

Bus 2 vertrekt 4 minuten na bus 1 vanaf B. Dat is dus op $t = 4$.

- Licht toe dat dit geen problemen oplevert met het passeren van bus 1. Kan bus 3 op $t = 8$ vertrekken en daarna in één keer doorrijden naar Dove Lake? Licht toe.

In de figuur is met t_3 het tijdstip aangegeven waarop bus 3 moet vertrekken, zodat deze in één keer kan doorrijden en bus 1 kan passeren bij punt III.

- Bereken t_3 .
- Wat zijn de tijdstippen t_4 , t_5 en t_6 waarop bussen 4, 5 en 6 moeten vertrekken, zodat deze in één keer kunnen doorrijden zonder problemen op te leveren met bus 1?
- Maak een schema waarbij de 6 bussen worden ingezet. Gebruik dat de bussen ook bij de punten I, II en III kunnen wachten.
- Onderzoek of bij een inzet van minder dan 6 bussen meer passagiers per uur kunnen worden vervoerd dan bij de inzet van 6 bussen.

Diagnostische toets

1.1 Lineaire formules

- 1 Teken in één figuur de lijnen $k: y = -2x + 3$, $l: y = \frac{1}{3}x - 2$, $m: y = -1\frac{1}{2}$ en $n: x = 2\frac{1}{2}$.
- 2 a De lijn k gaat door het punt $A(9, 3)$ en is evenwijdig met de lijn $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$.
Stel de formule op van k .
b Stel de formule op van de lijn m door het punt $B(-1, 6)$ met $rc_m = 0$.
c Bereken de coördinaten van het snijpunt C van de lijn $n: y = 8x + 5$ met de x -as.
- 3 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen $p: y = \frac{1}{6}x + 3$ en $q: y = 2\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$.

1.2 Een lijn door twee gegeven punten

- 4 De lijn k gaat door de punten $A(-5, 2)$ en $B(3, -2)$ en de lijn l gaat door de punten $P(40, 60)$ en $Q(65, 135)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen k en l .
- 5 Het aantal toeschouwers A bij voetbalclub ATC hangt af van de entreprijs p in euro's. Bij een prijs van €7,50 komen er 800 toeschouwers, maar dat aantal zakt tot 665 bij een prijs van €9,75.
a Schrijf A als functie van p . Ga uit van een lineair verband.
b Bereken het aantal toeschouwers bij een prijs van €11,25.
c Bij welke entreprijs komen er meer dan 1000 toeschouwers?

1.3 Interpoleren, extrapoleren en evenredigheid

- 6 Zie de tabel.

INVOER EN UITVOER VAN ELEKTRICITEIT IN NL IN MILJOENEN KWH

jaar	2005	2008	2012	2017
invoer	23 693	24 966	32 155	22 444
uitvoer	5 398	9 116	15 046	18 944

- a Bereken met lineair interpoleren de invoer van elektriciteit in 2011.
b Bereken met lineair interpoleren de uitvoer van elektriciteit in 2006.
c Bereken met lineair extrapoleren het verschil tussen de invoer en uitvoer van elektriciteit in 2020.

- 7** Voor een auto die met een constante snelheid rijdt is het benzineverbruik evenredig met de afgelegde afstand.

In deze opgave gaat het over een auto die met een constante snelheid van 100 km/uur rijdt. Na 45 km blijkt de auto 3,6 liter benzine verbruikt te hebben.

- a** Stel de formule op van het benzineverbruik B in liter bij een afgelegde afstand van d km.
- b** Bereken hoeveel kilometer de auto kan afleggen met 6 liter benzine.

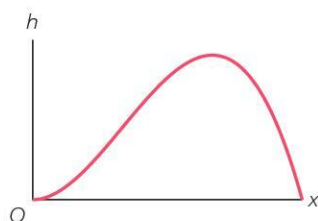
- 8** Het aantal verkochte zonnebrillen van het merk Jaap is omgekeerd evenredig met de prijs. Bij een prijs van 50 euro worden er per jaar 12 000 brillen verkocht.

- a** Stel de formule op van het jaarlijks verkochte aantal zonnebrillen A bij een prijs van p euro.
- b** Hoeveel zonnebrillen worden er per jaar verkocht bij een prijs van 24 euro?
- c** Er zijn 8000 zonnebrillen geproduceerd. Welke prijs kan er maximaal gevraagd worden als men ze allemaal in één jaar wil verkopen?

1.4 Wiskundige modellen

- 9** Jan heeft een drone. Bij een van de vluchten van de drone hoort de formule $h = 0,03x^2 - 0,0003x^3$. Zie de figuur hiernaast. In de formule zijn x en h in meter.

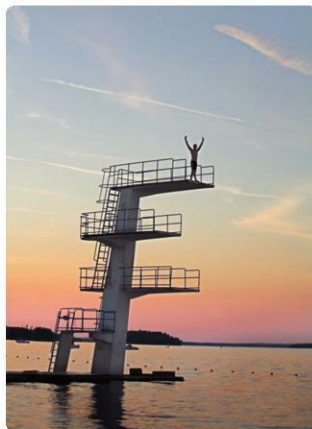
- a** Hoeveel meter verderop komt de drone weer op de grond?
- b** Wat is de maximale hoogte van de drone? Rond af op dm.
- c** Voor welke waarden van x is de hoogte meer dan 40 meter? Rond af op één decimaal.



figuur 1.22

- 10** Collin springt van 10 meter hoogte van een duiktoren in het water. Hij springt rechtop en landt met zijn voeten na 1,85 seconden in het water. Bij het opstellen van een formule voor de hoogte van zijn voeten tijdens de sprong gaat men uit van het model $H = at^2 + bt + c$. Hierin is H de hoogte in meter ten opzichte van het wateroppervlak en t de tijd in seconden na het begin van de sprong.

- a** Toon aan dat de formule $H = -4,43t^2 + 2,78t + 10$ klopt met de genoemde gegevens.
- b** Schets de grafiek bij de formule.
- c** Na hoeveel seconden is hij op het hoogste punt? Hoe hoog is hij dan boven het wateroppervlak? Rond af op gehele cm.





2

Statistiek

Wat leer je?

- Hoe de statistische cyclus wordt gebruikt bij het uitvoeren van een onderzoek.
- Wat een representatieve steekproef is.
- Welke soorten statistische variabelen er zijn en hoe je ze onderscheidt.
- Gebruiken van verschillende centrum- en spreidingsmaten.
- Werken met verschillende diagrammen waarin statistische data gepresenteerd staan.
- Verschillende soorten verdelingen, waaronder de normale verdeling, herkennen en gebruiken.
- Wat een betrouwbaarheidsinterval is.



Beginopdracht Gezondheid en welzijn van jongeren

In 2018 publiceerden de Universiteit Utrecht, het Trimbos-instituut en het Sociaal en Cultureel Planbureau gezamenlijk het rapport Gezondheid en welzijn van jongeren in Nederland (HBSC 2017). Het internationale HBSC-onderzoek bestaat sinds 1983 en is een van de langstlopende onderzoeken naar de jeugd in Europa. Het onderzoek wordt elke vier jaar opnieuw uitgevoerd en de resultaten in onderstaande tabel gaan over de stand van zaken bij 6718 Nederlandse middelbare scholieren in 2017.

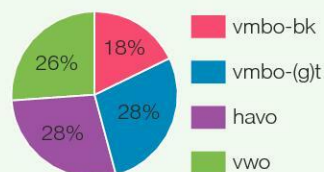
	geslacht		schoolniveau			
	jongen	meisje	vmbo-bk	vmbo-(g)t	havo	vwo
gedurende de hele dag contact via sociale media	890	1214	481	610	525	487
problematisch gebruik sociale media	217	282	141	166	114	80
minstens 24 uur per week gamen	464	59	125	198	99	67
problematisch gamegedrag	244	26	58	91	56	59
minstens 2× per week sport	2870	2405	878	1458	1376	1563
BMI overgewicht	385	279	213	233	121	105
voelt zich te dik	804	1431	431	680	586	575
totaal	3437	3281	1205	1906	1703	1904

Gebruik de gegevens uit de tabel om de volgende opdrachten te maken.

- Trek een conclusie over *gedurende de hele dag contact via sociale media* waarbij je onderscheid maakt in geslacht. Doe dat ook voor *minstens 24 uur per week gamen*. Wat valt je op?
- Trek een conclusie over *BMI overgewicht* waarbij je onderscheid maakt in schoolniveau. Doe dat ook voor *voelt zich te dik*. Wat valt je op?
- In het cirkeldiagram hiernaast zie je de verdeling van leerlingen naar schoolniveau in het schooljaar 2017/2018.

Is de verdeling van leerlingen naar schoolniveau in het HBSC-onderzoek in overeenstemming met de gegevens in het cirkeldiagram? Licht toe.

VERDELING VAN LEERLINGEN NAAR SCHOOLNIVEAU 2017/2018



Voorkennis Procenten en frequenties

Theorie A Procentberekeningen

Bereken $p\%$ van A .

18% betekent 18 van de 100, dus $18\% = \frac{18}{100} = 0,18$.

18% van 620 is $0,18 \times 620 = 111,6$.

Hoeveel is $p\%$ van A ? Antwoord: $\frac{p}{100} \times A$.

Bereken hoeveel procent A van B is.

In een klas zitten 28 leerlingen van wie er zes zijn blijven zitten.

Dat is $\frac{6}{28} \times 100\% \approx 21,4\%$.

Rond percentages af op één decimaal.

Hoeveel procent is A van B ? Antwoord: $\frac{A}{B} \times 100\%$.

Procentuele verandering

Op een school zitten 1315 leerlingen. Vorig schooljaar waren dat er 1248.

De absolute verandering is $1315 - 1248 = 67$.

De relatieve verandering in procenten is $\frac{67}{1248} \times 100\% \approx 5,4\%$.

De relatieve verandering in procenten heet de procentuele verandering.

Je ziet procentuele verandering = $\frac{\text{absolute verandering}}{\text{OUD}} \times 100\%$.

Absolute verandering = NIEUW – OUD

Procentuele verandering = $\frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\%$

Bij een procentuele verandering van -12% is sprake van een procentuele afname van 12% .

Bereken hoeveel je krijgt bij een toename of afname van $p\%$.

Een hoeveelheid van 250 neemt met 8% toe.

De nieuwe hoeveelheid is $1,08 \times 250 = 270$. $\leftarrow 100\% + 8\% = 108\%$, dus $\times 1,08$

Een hoeveelheid van 1800 neemt met 11% af.

De nieuwe hoeveelheid is $0,89 \times 1800 = 1602$. $\leftarrow 100\% - 11\% = 89\%$, dus $\times 0,89$

Hoeveel krijg je bij een verandering van $p\%$?

Je krijgt $\text{NIEUW} = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \times \text{OUD}$.

Bij een afname van $p\%$ neem je p negatief in bovenstaande formule.

Bereken het totaal.

Een hoeveelheid van 298 is 58% van het totaal.

Dus $0,58 \times \text{totaal} = 298$. Dan is $\text{totaal} = \frac{298}{0,58} \approx 514$.

$p\%$ van het totaal is A . Hoeveel is het totaal?

Antwoord: $\text{totaal} = \frac{A}{0,01p}$.

Geef het antwoord in dezelfde nauwkeurigheid als het gegeven.

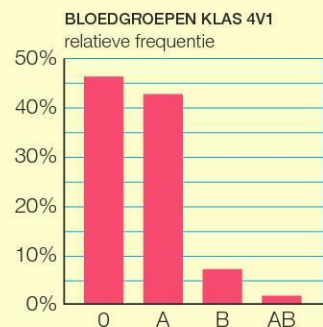
- 1** a Hoeveel procent is 57 minder dan 121?
b Hoeveel is 0,3% van 8700?
c Een hoeveelheid van 3,2 miljoen neemt 8,7% af. Hoeveel krijg je?
d Een hoeveelheid van 8,3 miljoen is 12,6% van het totaal. Hoeveel is het totaal?
- 2** In 1950 waren er 2521 miljoen mensen op de wereld. Hiervan woonden er 1402 miljoen in Azië, 547 miljoen in Europa en 221 miljoen in Afrika. In 2017 was de wereldbevolking toegenomen tot 7550 miljoen. De procentuele toename was het grootst in Afrika met een toename van maar liefst 468%. In 2017 waren er in Azië 4504 miljoen inwoners en in Europa 742 miljoen.
- a Bereken de procentuele toename van de wereldbevolking in de periode 1950-2017.
b Bereken in miljoenen nauwkeurig het aantal inwoners van Afrika in 2017.
c Onderzoek met een berekening of de procentuele toename van de bevolking in Azië in de periode 1950-2017 inderdaad minder is dan de procentuele toename in Afrika in deze periode.
d Bereken zowel voor het jaar 1950 als voor het jaar 2017 hoeveel procent van de wereldbevolking in Europa woonde.

Theorie B Frequentietabellen en staafdiagrammen

In de frequentietabel hieronder staan de (absolute) frequenties bij de bloedgroepen van de leerlingen in klas 4V1. De totale frequentie is $13 + 12 + 2 + 1 = 28$.

BLOEDGROEPEN KLAS 4V1

bloedgroep	frequentie
0	13
A	12
B	2
AB	1



figuur 2.1

In figuur 2.1 is bij de tabel een staafdiagram met relatieve frequenties getekend. Zo is de relatieve frequentie van bloedgroep 0 gelijk aan

$$\frac{13}{28} \times 100\% \approx 46,4\%.$$

3 In de frequentieverdeling hiernaast zie je waar de leerlingen van klas 4VA wonen.

a Bereken de relatieve frequentie bij Schalkhaar.

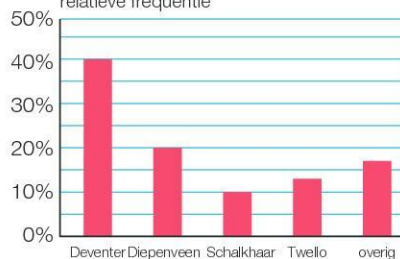
WOONPLAATSEN KLAS 4VA

woonplaats	frequentie
Deventer	11
Diepenveen	3
Schalkhaar	3
Twello	2
overig	5

In figuur 2.2 zie je een staafdiagram met de verdeling van de woonplaatsen bij de leerlingen van klas 4VB. Er zijn 6 leerlingen in klas 4VB die in Diepenveen wonen.

b Hoeveel leerlingen zitten er in klas 4VB?

WOONPLAATSEN KLAS 4VB
relatieve frequentie



figuur 2.2

4 In figuur 2.3 zie je een samengesteld staafdiagram, ook wel stapeldiagram genoemd.

Het diagram komt uit het rapport Gezondheid en welzijn van jongeren in Nederland in 2017.

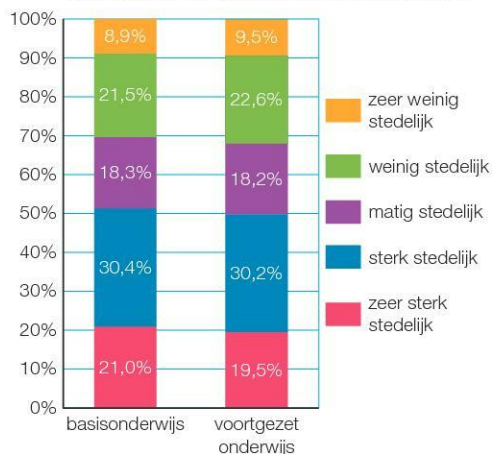
Je ziet dat in het basisonderwijs het aandeel deelnemers uit sterk stedelijk gebied gelijk is aan 30,4%.

a Er waren in het voortgezet onderwijs 1310 deelnemers uit zeer sterk stedelijk gebied.

Hoeveel deelnemers waren er in totaal in het voortgezet onderwijs?

b Er waren in het basisonderwijs 51 deelnemers meer uit weinig stedelijk gebied dan uit matig stedelijk gebied. Hoeveel deelnemers waren er in totaal in het basisonderwijs?

VERDELING DEELNEMERS NAAR STEDELIJK GEBIED



figuur 2.3

2.1 De statistische cyclus



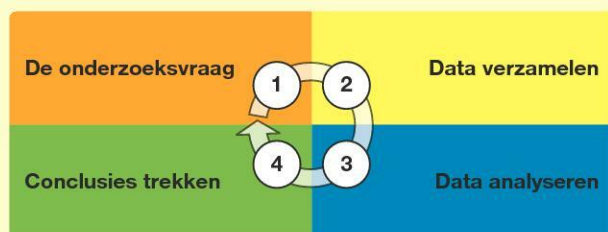
01 Daan en Emma hebben een onderzoek gedaan. Hieronder staan vijf activiteiten die ze hebben uitgevoerd bij dit onderzoek.

Welke volgorde is logisch?

1. Het interpreteren van alle verzamelde informatie om te kijken of de onderzoeksvraag hiermee beantwoord kan worden.
2. Een overzicht maken van alle aspecten die bij het onderwerp komen kijken, om zo tot de onderzoeksvraag te komen.
3. Het beantwoorden van de onderzoeksvraag op basis van de uitkomsten van de verzamelde enquêtes en gevonden informatie.
4. Vaststellen welke kenmerken onderzocht moeten worden om de onderzoeksvraag te kunnen beantwoorden.
5. Het afnemen van enquêtes en opzoeken van informatie over het onderwerp.

Theorie A Fasen in de statistische cyclus

Bij een statistisch onderzoek probeert men antwoord op een vraag te vinden door het verzamelen, verwerken en interpreteren van gegevens. De **statistiek** houdt zich bezig met methoden en technieken voor het verzamelen, verwerken, analyseren en presenteren van gegevens. De verzamelde gegevens worden **data** genoemd. Deze data staan centraal in de **statistische cyclus**: het proces van opstellen van een onderzoeksvraag, verzamelen en analyseren van data en hieruit conclusies trekken. Het woord cyclus wijst erop dat het doorlopen van deze stappen vaak nieuwe (vervolg)vragen oplevert die verder onderzocht kunnen worden.



figuur 2.4 De statistische cyclus

In dit hoofdstuk staan de vier fasen van de statistische cyclus centraal. Wanneer je zelf een onderzoek doet (bijvoorbeeld voor je profielwerkstuk) helpt de statistische cyclus bij het in goede banen leiden van het proces.



2

Het onderzoek Gezondheid en welzijn van jongeren in Nederland (HBSC 2017) richt zich onder andere op schoolbeleving. Een van de onderzochte aspecten is het ervaren van druk door schoolwerk. De onderzoekers hebben veel stappen gezet voordat ze conclusies over dit onderwerp konden trekken. Hieronder staat een aantal van deze stappen. Zet ze in de juiste volgorde en geef aan bij welke fase van de statistische cyclus ze horen.

- A In de enquête is een vraag opgenomen over in hoeverre druk wordt ervaren door schoolwerk. Leerlingen kunnen kiezen uit ‘helemaal niet’, ‘een beetje’, ‘nogal veel’ en ‘veel’.
- B De onderzoekers concluderen dat het ervaren van druk door schoolwerk tussen 12 en 14 jaar aanzienlijk toeneemt.
- C Er is overleg geweest over welke aspecten een rol spelen bij de schoolbeleving. Een van deze aspecten bleek het ervaren van druk door schoolwerk. De onderzoekers wilden weten in hoeverre leerlingen druk ervaren door schoolwerk.
- D De onderzoekers hebben besloten om schoolwerk niet nader te specificeren, zodat alle taken die met school te maken hebben worden meegewogen.
- E Uit de ingevulde enquêtes blijkt dat van de 12-, 13- en 14-jarige middelbare scholieren respectievelijk 24,5%, 33,7% en 41,0% (nogal) veel druk ervaart door schoolwerk.
- F Men adviseert middelbare scholen om vanaf de eerste klas aandacht te besteden aan het omgaan met werkdruk. Ook wordt scholen gevraagd om werkdruk van leerlingen in de onderbouw in de gaten te houden middels gesprekken met de mentor.
- G Er is besloten om de resultaten uit te splitsen naar geslacht, leeftijd en schoolniveau.

INFORMATIEF

Gedeelte van het voorwoord HBSC 2017

‘De jeugd van tegenwoordig’ staat volop in de belangstelling. Worden jongeren in Nederland gezonder of minder gezond? Moeten we ons nog zorgen maken over hun alcoholgebruik? Zitten jongeren niet te veel op hun mobiel? Hoe heeft hun relatie met klasgenoten, vrienden en ouders zich ontwikkeld in de laatste jaren? Voelen jongeren in Nederland zich steeds meer onder druk staan door hun schoolwerk? Hoeveel psychische problemen ervaren zij? Maar ook: met welke jongeren gaat het goed en met welke juist niet? Om een antwoord te geven op deze, en vele andere vragen, vond in het najaar van 2017 voor de vijfde keer het Nederlandse Health

Behaviour in School-aged Children (HBSC) onderzoek plaats. Medewerkers van de Universiteit Utrecht, het Trimbos-instituut en het Sociaal en Cultureel Planbureau (SCP) voerden het onderzoek in Nederland uit, gefinancierd door het ministerie van Volksgezondheid, Welzijn en Sport (VWS). Dit onderzoek vindt elke vier jaar plaats onder een landelijk representatieve groep leerlingen in een groot aantal landen in Europa, Noord-Amerika en Israël. De onderzoeksgegevens maken het mogelijk om een goed beeld te krijgen van de gezondheid en het welzijn van Nederlandse scholieren in de leeftijd van 11 tot en met 16 jaar.

INFORMATIEF

Kijkonderzoek

Voor veel Nederlanders is televisiekijken een belangrijke tijdsbesteding. Per dag kijken we in Nederland per persoon ongeveer 3 uur televisie. De kijkcijfers zijn voor televisiemakers en zenders een graadmeter voor succes.

Onderzoeksbureau GfK voert kijkcijferonderzoek uit voor de Stichting KijkOnderzoek (SKO). Het kijkonderzoek laat zien hoeveel mensen

er kijken naar zenders en programma's. Met behulp van deze gegevens kunnen inhoud en tijdstip van programma's afgestemd worden op wat de kijker belangrijk vindt. Het succes van een programma telt bovendien mee bij het bepalen van het tarief voor een reclamespot in de omliggende reclameblokken.

Hieronder staan vier fragmenten uit het kijkonderzoek.

Geef voor elk van de fragmenten aan bij welke fase in de statistische cyclus dit het beste past.

A

Nadat de metergegevens van alle panelhuishoudens naar GfK zijn gestuurd, wordt vastgesteld naar welke zenders is gekeken. Dit gebeurt door middel van Enhanced Audio Matching; bij deze techniek wordt gebruikgemaakt van het matchen van audio samples.

B

SKO stelt dagelijks de standaardresultaten kijkdichtheid, marktaandeel en de absolute aantallen kijkers (KijkTotaal en Uitzenddag) ter beschikking. Deze informatie komt op de website en is bedoeld voor het algemene publiek. De resultaten die SKO op de website publiceert, zijn onder voorwaarden te gebruiken en de bronvermelding is verplicht.

C

Op basis van de achtergrondkenmerken van de panelleden zijn verschillende vragen te onderzoeken: hoeveel 13 t/m 19-jarigen kijken naar een bepaald programma, hoeveel autobezitters hebben de commercial voor een nieuwe personenwagen gezien, kijken alleen sportliefhebbers naar sportprogramma's? Het is belangrijk de vragen scherp te formuleren en af te bakenen voor er tot verder onderzoek wordt overgegaan.

D

Elk huishouden dat meedoet aan het kijkonderzoek krijgt op alle televisietoestellen in huis een 'kijkmeter'. De kijkmeter kan automatisch registreren dat een toestel aanstaat en slaat deze informatie op. De kijkmeter legt vast wat er in het televisietoestel gebeurt, maar kan niet 'zien' wat zich in de kamer afspeelt en wie er naar de televisie kijken. Daarom moeten alle personen van 3 jaar en ouder die kijken zich aanmelden.

bron: SKO

Hieronder staan enkele onderzoeksvragen waar iets mis mee is.

Geef bij elke vraag aan waarom het geen goede onderzoeksvraag is.

- a Hoeveel jongeren eten gezond?
- b Vertonen jongeren die veel gamen vaak probleemgedrag en hoe kunnen we dat verbeteren?
- c Hoe komt het dat jongeren die veel gamen minder sociaal zijn?

Theorie B De onderzoeksvraag

Voor elk onderzoek is de onderzoeksvraag, ook wel hoofdvraag genoemd, van cruciaal belang. Een goede onderzoeksvraag helpt je om je onderzoek gedegen uit te voeren en om een overzichtelijk verslag te maken.

Een onderzoeksvraag stelt een verband tussen twee of meer zaken aan de orde. Dit verband kan een *samenhang* aangeven, zoals bij de onderzoeksvraag ‘In welke leeftijdscategorie wordt er door jongeren het meest gesport?’.

Het verband kan bovendien *causaal* zijn. Je hebt met een **causaal verband** oftewel **oorzakelijk verband** te maken als een gebeurtenis het directe gevolg is van een andere gebeurtenis.

Een voorbeeld van een onderzoeksvraag met een causaal verband is ‘Hoe beïnvloedt slaapgedrag het concentratievermogen tijdens de les?’.

INFORMATIEF

Causaliteit in de rechtspraak: het etalageruit-arrest

Een verdachte reed met een te hoge snelheid in een auto door een winkelstraat in Den Haag. Door de regen en de natte tramrails raakte hij in een slip en botste tegen een verkeerszuil. Daarbij kantelde de auto en schoof, op het dak liggend, door naar het trottoir. Daar raakte de auto een voetganger die daardoor tegen een etalageruit kwam. Door het vallende glas van de gebroken etalageruit raakte deze man ernstig gewond, terwijl een vrouw dodelijk gewond raakte.

De vraag was: is er een causaal verband tussen het verkeersongeval en het feit dat de vrouw overleed? De verdediging stelde dat de dood van de vrouw was veroorzaakt door het vallende glas van de etalageruit en dus niet door de botsing of aanrijding van de verdachte. De Hoge Raad oordeelde echter dat er een oorzakelijk verband was tussen de botsing van de auto en de dood van de vrouw door het vallende glas.

Het opstellen van een onderzoeksvraag gaat in vier stappen.

1 Het onderzoeksterrein *verkennen*.

Om een goede vraag te stellen, dien je voldoende te weten van het onderwerp. Het kan zijn dat je al langere tijd geïnteresseerd bent in het onderwerp en daar al wat van weet. Anders is het verstandig je globaal in te lezen.

2 Het onderzoeksterrein *afbakenen*.

Beperk je bij het onderzoek tot iets dat je overziet. Maak je het onderzoeks-terrein te breed, dan bestaat de kans dat je de grote hoeveelheid informatie die op je afkomt niet kunt overzien, of dat je te veel tijd kwijt bent met het onderzoek.

3 De *eerste versie* van de onderzoeksvraag *formuleren*.

Nadat je het onderzoeksterrein voldoende hebt afgebakend, blijven er nog verschillende soorten vragen over die je kunt stellen. Wil je een vraag stellen waarmee je het verschijnsel dat je gaat onderzoeken *beschrijft*, of wil je meer de kant op van een *verklaring* of van een *oordeel* of een *advies*?

4 De onderzoeksvraag *toetsen*.

Een onderzoeksvraag moet aan de volgende eisen voldoen.

- De onderzoeksvraag moet *scherp geformuleerd* zijn.
Er mogen dus geen vage woorden in zitten.
De vraag in opgave 4a kan dus beter worden geformuleerd als ‘Welk percentage van de middelbare scholieren eet dagelijks volgens de richtlijnen van het voedingscentrum?’.
- De onderzoeksvraag moet *enkelvoudig* zijn.
Aan het woordje ‘en’ in de vraag van opgave 4b kun je zien dat het in feite om twee onderzoeken gaat. Een betere vraag zou zijn ‘Welke invloed heeft overmatig gamen op het ontwikkelen van probleemgedrag van jongeren?’.
- De onderzoeksvraag moet *nieuw* zijn.
Het heeft geen zin een onderzoek te doen naar iets dat algemeen bekend is. Een vraag als ‘Heeft op jonge leeftijd beginnen met roken een negatief effect op de gezondheid?’ heeft geen zin, omdat het antwoord al bekend is.
- De onderzoeksvraag mag *niet uitgaan van foute veronderstellingen*.
De vraag in opgave 4c gaat uit van de veronderstelling dat jongeren die veel gamen minder sociaal zijn. Een betere vraag zou zijn ‘Welke invloed heeft gamen op het sociale gedrag van jongeren?’.

5 Hieronder staan enkele onderzoeksvragen.



Welke van deze vragen stellen een causaal verband aan de orde?

Licht toe.

- a** Welk effect heeft overmatig gamen op schoolprestaties?
- b** Welk verband is er bij scholieren tussen gebruik van sociale media en gamen?
- c** In hoeverre helpt het verbieden van roken op het schoolplein bij het terugdringen van roken onder scholieren?
- d** Hoe hangt het rookgedrag van scholieren samen met het opleidingsniveau?

6 Karlijn is geïnteresseerd in paardrijden. Ze rijdt al jaren paard en wil



onderzoeken of kinderen van rijke ouders vaker paardrijden dan kinderen van ouders die niet rijk zijn.

- a** Zou Karlijn het onderzoeksterrein nog moeten verkennen? Licht toe.
- b** Bedenk een onderzoeksvraag voor Karlijn.
- c** Is de onderzoeksvraag die je hebt bedacht voldoende afgebakend?
Licht toe. Verander zo nodig de onderzoeksvraag.
- d** Ga na of de onderzoeksvraag die je hebt bedacht voldoet aan de vier eisen die in de theorie staan vermeld. Licht je antwoorden toe en verander zo nodig de onderzoeksvraag.

**7**

Nadat de onderzoeksvraag is opgesteld en voordat je data gaat verzamelen, is het soms nodig om een aantal *deelvragen* te bedenken. Om de onderzoeksvraag te beantwoorden, moet je eerst een aantal zaken weten. Het beantwoorden van de deelvragen zou moeten leiden tot het beantwoorden van de hoofdvraag.

Zo zouden bij de onderzoeksvraag ‘Welke invloed heeft overmatig gamen op het ontwikkelen van probleemgedrag van jongeren?’ de volgende deelvragen geformuleerd kunnen worden.

1. Welk effect heeft overmatig gamen op schoolprestaties?
2. Welk effect heeft overmatig gamen op sociaal gedrag?

Bedenk bij elk van de onderzoeksvragen hieronder twee deelvragen.

- a Welk percentage van de middelbare scholieren eet dagelijks volgens de richtlijnen van het voedingscentrum?
- b Met welk percentage wordt overgewicht bij jongeren verminderd als alle jongeren minstens vijf uur per week intensief zouden sporten?

Zie opgave 6.

- c Bedenk bij de onderzoeksvraag die je voor Karlijn had bedacht twee deelvragen.

**8**

Bedenk bij twee van de onderzoeksvragen van opgave 5 twee deelvragen.

**9**

In de theorie worden vier soorten onderzoeksvragen genoemd:

- A een beschrijvende vraag
- B een verklarende vraag
- C een vraag die uitmondt in een oordeel
- D een vraag die uitmondt in een advies.

Hieronder staan vier onderzoeksvragen die horen bij een onderzoek naar de ontwikkeling van de woningmarkt in Nederland.

- 1 Hoe is de prijsontwikkeling op de Nederlandse woningmarkt van de afgelopen vijf jaar te verklaren?
 - 2 Welk beleid moet er worden gevoerd om een stabiele woningmarkt in Nederland te bereiken?
 - 3 Hoe is de Nederlandse woningmarkt veranderd sinds het jaar 2000?
 - 4 In welke mate voldoet de ontwikkeling op de Nederlandse woningmarkt aan de beloftes van de regering?
- a Zeg bij elk van de genoemde onderzoeksvragen van welke soort (A, B, C of D) de vraag is.
 - b Bedenk bij twee van de onderzoeksvragen hierboven twee deelvragen.

Voor een kijkonderzoek wordt niet van elke Nederlander onderzocht welke tv-programma's zijn bekeken.

- a Noem een mogelijke reden waarom niet van elke Nederlander het kijkgedrag wordt onderzocht.

Over de groep Nederlanders in het onderzoek schrijft Stichting KijkOnderzoek (SKO) het volgende.

‘Het is voldoende om een representatieve groep te onderzoeken. Representatief wil zeggen dat de groep net zo is opgebouwd als de bevolking, met een overeenkomstig percentage jongeren, vrouwen, hoger opgeleiden, enzovoort.’

- b Waarom denk je dat SKO wil dat de te onderzoeken groep representatief is?

Theorie C Een steekproef nemen

Een statistisch onderzoek hoeft zich niet alleen te richten op individuele mensen, maar kan ook betrekking hebben op bijvoorbeeld huishoudens, scholen en materiële zaken zoals lampen of pakken melk. De totale groep waarop het onderzoek zich richt heet de **populatie**.

Wil men onderzoeken hoeveel procent van de stemgerechtigde Nederlanders geïnteresseerd is in de politiek, dan wordt de populatie gevormd door de stemgerechtigde Nederlanders. Voor het onderzoek wordt echter niet elke stemgerechtigde Nederlander ondervraagd. Er wordt een **steekproef** genomen.

Het is van belang dat een steekproef een goede weergave is van de totale populatie. We zeggen dat de steekproef **representatief** moet zijn.

Een steekproef is representatief als zij een goede afspiegeling is van de gehele populatie.

Een representatieve steekproef moet in elk geval voldoen aan de volgende eisen.

- **De steekproef is voldoende groot.**
 Hoe meer kenmerken je wilt onderzoeken (zoals leeftijd, werk en inkomen), hoe groter de steekproef moet zijn.
- **De steekproef is aselekt.**
 Een steekproef is **aselekt** als elk element van de populatie een even grote kans heeft om in de steekproef voor te komen.

Om een representatieve steekproef te krijgen bij de maandelijkse peiling naar de politieke voorkeur, worden ongeveer 3000 stemgerechtigde Nederlanders ondervraagd. De personen in de steekproef worden zo gekozen dat alle Nederlandse stemgerechtigden een even grote kans hebben om in de steekproef voor te komen.

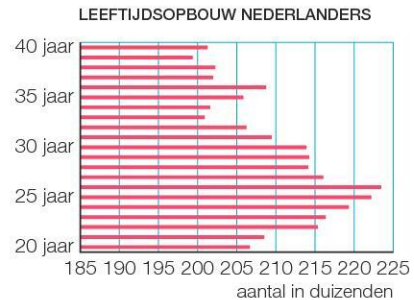
11
☐◎*

Omschrijf bij de volgende onderzoeksvragen een populatie.

- a Welke vervolgoopleidingen kiezen de leerlingen van je school?
- b In welk weekblad staan de meeste illustraties?
- c Welk percentage van de inwoners van Appelscha is daar ook geboren?
- d Hoe effectief is een nieuw geneesmiddel tegen hooikoorts?

12
☐◎*

- a Er wordt een onderzoek gedaan naar de fruitconsumptie van Nederlanders van 20 tot en met 40 jaar door van elke leeftijd evenveel personen te ondervragen.
Geef commentaar. Gebruik de figuur hiernaast.
- b Bij een onderzoek worden alleen mannen in de pensioengerechtigde leeftijd ondervraagd.
Kun je hier te maken hebben met een aselechte steekproef? Licht toe.
- c Bij een onderzoek worden 100 mensen ondervraagd.
Kun je hier te maken hebben met een steekproef die voldoende groot is? Licht toe.



figuur 2.5

A13
☐◎*

Een onderzoeksbureau wil de mening weten van de Nederlander over klimaatverandering.

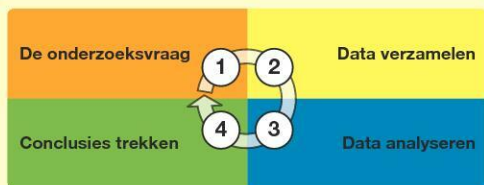
Waarom zijn de volgende steekproeven niet representatief?

- a Op een zaterdagmiddag wordt op een druk kruispunt in de stad een groot aantal voorbijgangers ondervraagd.
- b In de ochtendspits wordt in een file een groot aantal automobilisten ondervraagd.
- c Door loting via postcodenummers wordt uit elke provincie één persoon ondervraagd.
- d Een groot aantal toeristen in het bezoekerscentrum van het natuurgebied de Posbank wordt ondervraagd.
- e Er wordt een vragenlijst afgenomen via de smartphone.

Terugblik

De statistische cyclus

De statistiek houdt zich bezig met methoden en technieken voor het verzamelen, verwerken, analyseren en presenteren van gegevens. De verzamelde gegevens worden data genoemd. Deze data staan centraal in de statistische cyclus: het proces van opstellen van een onderzoeksvraag, verzamelen en analyseren van data en hieruit conclusies trekken. Het woord cyclus wijst erop dat het doorlopen van deze stappen vaak nieuwe (vervolg)vragen oplevert die verder onderzocht kunnen worden.



De onderzoeksvraag

Een statistisch onderzoek begint met een goede onderzoeksvraag. Deze vraag stelt een verband tussen twee of meer zaken aan de orde. Bij de vraag ‘Op welke leeftijd gamen leerlingen het meest?’ is er sprake van een samenhang tussen leeftijd en gamegedrag. Bij de vraag ‘Welke invloed heeft gamegedrag op de relatie van een kind met de ouders?’ is er sprake van een causaal (oorzakelijk) verband: het directe gevolg van gamegedrag van het kind wordt onderzocht.

De vier stappen van het opstellen van een onderzoeksvraag zijn:

- 1 Het onderzoeksterrein verkennen.
- 2 Het onderzoeksterrein afbakenen.
- 3 De eerste versie van de onderzoeksvraag formuleren.
- 4 Controleren of de onderzoeksvraag scherp geformuleerd, enkelvoudig en nieuw is en of de vraag niet uitgaat van foute veronderstellingen.

Een steekproef nemen

De totale groep waarop een onderzoek zich richt heet de populatie.

De populatie kan een groep mensen zijn, maar bijvoorbeeld ook geneesmiddelen of elektrische auto's.

Het is vaak niet nodig en ook ondoenlijk om de gehele populatie te onderzoeken. Het nemen van een representatieve steekproef is voldoende.

Een steekproef is representatief als zij een juiste afspiegeling is van de gehele populatie.

Een representatieve steekproef moet in ieder geval voldoende groot en aselekt zijn.

2.2 Data verzamelen



Bij een onderzoek wordt van alle sporters die deelnemen aan de Olympische Spelen een aantal kenmerken genoteerd.

- Bedenk vijf van deze mogelijke kenmerken.
- Welke kenmerken bij a kun je uitdrukken in een getal?
- Vul je antwoord bij a aan zodat je ten minste drie kenmerken hebt die je niet in een getal uitdrukt.

Theorie A Enquêtevragen en statistische variabelen

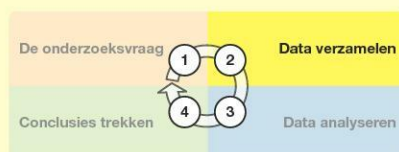
In deze paragraaf richten we ons op fase 2 van de statische cyclus: Data verzamelen.

Om antwoord te vinden op de onderzoeksvraag moeten er bij een statistisch onderzoek gegevens worden verzameld.

Er zijn verschillende manieren om aan gegevens te komen. Voor veel onderzoeken kan gebruik worden gemaakt van bestaand cijfermateriaal. Op internet zijn veel gegevens te vinden, bijvoorbeeld op de site van het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS).

Voor sommige onderzoeken zullen de juiste gegevens echter niet beschikbaar zijn. De onderzoeker zal dan bijvoorbeeld door middel van een enquête, een simulatie of een experiment de gegevens moeten verzamelen.

Een enquête is een veelgebruikte methode om gegevens te verzamelen. Het opstellen van een goede vragenlijst is echter niet zo makkelijk. Hieronder zie je een aantal tips van het CBS voor het maken en afnemen van een enquête. De deelnemers aan een enquête worden **respondenten** genoemd.



INFORMATIEF

Tips van het CBS voor enquêtevragen

- Stel begrijpelijke vragen in korte zinnen, met duidelijke begrippen.
- Stel geen suggestieve vragen zoals *'U vindt het hier in de straat toch ook rommelig?'*.
- Stel geen dubbele vragen waarbij in één vraag meerdere onderwerpen aan bod komen.
- Vermijd (dubbele) ontkenningen, zoals *'Vind je het geen probleem dat je hier niet mag kletsen?'*.
- Pas op met vragen over gevoelige onderwerpen.
- Pas op met vragen die een beroep doen op de herinnering zoals *'Hoe vaak bent u de afgelopen drie jaar bij een arts of andere hulpverlener geweest?'*.
- Vermijd hypothetische vragen zoals *'Wat zou u doen als u directeur van Albert Heijn was?'*.
- Geef eenduidige en complete antwoordmogelijkheden bij meerkeuzevragen.

In opgave 14 heb je een aantal kenmerken van een sporter benoemd. Deze kenmerken heten **variabelen**. Na het opstellen van de onderzoeksvraag maak je een overzicht van alle relevante statistische variabelen bij het onderzoek. Bij het onderzoek noteer je de waarde van deze variabelen voor elk element van de steekproef. Het geheel van al deze waarden zijn de data.

Binnen de statistiek onderscheiden we twee typen variabelen: kwalitatieve variabelen en kwantitatieve variabelen.

Kwalitatieve variabelen geven een kwaliteit of eigenschap weer, zoals beroep en godsdienst. Een kwalitatieve variabele is vaak niet uitgedrukt in een getal. Is dit toch het geval, dan heeft het verschil van twee opeenvolgende getallen geen eenduidige betekenis. Denk bijvoorbeeld aan de rugnummers van voetballers.

Bij **kwantitatieve variabelen** gaat het om meetbare gegevens, zoals temperatuur, snelheid en gewicht.



Bij kwantitatieve variabelen maken we onderscheid tussen discrete variabelen en continue variabelen. Een **discrete variabele** is een variabele waarbij tussenliggende waarden ontbreken, zoals bijvoorbeeld bij de variabele schoenmaat. Een **continue variabele** is een variabele die alle tussenliggende waarden kan aannemen, zoals bijvoorbeeld de variabele gewicht of snelheid.

15
☐ ◎ *

- a Lever commentaar op de volgende enquêtevragen.
- 1 U heeft zeker ook veel geluidsoverlast van burens?
 - 2 Vindt u niet, dat het verstandig is om geen huis te kopen als u er ook een kunt huren?
 - 3 Kijkt u veel televisie?
 - 4 Hoe vaak heeft u vorige week de website NU.nl bezocht?
- Kies uit
I elke dag II nooit III 1 of 2 keer IV 3 t/m 7 keer.
- b Stel bij elk van de vier enquêtevragen van a een nieuwe vraag op waarbij je rekening houdt met alle tips van het CBS.

16
☐ ◎

- Geef bij de volgende variabelen aan of ze kwalitatief of kwantitatief zijn.
- a geslacht
 - b leeftijd in jaren
 - c profiel in de Tweede Fase
 - d lidmaatschapsnummer

- 17** Geef aan of de variabele continu of discreet is.
- a** het aantal appels aan een appelboom **d** rapportcijfer
b het gewicht van de appels aan een appelboom **e** voetlengte
c de tijd die wordt besteed aan het leren voor een toets **f** schoenmaat

- 18** Marc en Petra hebben een discussie over de variabele leeftijd. Marc vindt leeftijd een discrete variabele, omdat leeftijd op documenten altijd in gehelen staat aangegeven. Petra brengt hier tegenin dat je leeftijd sinds je geboorte steeds toeneemt: als het moment van je geboorte bekend is, dan kun je zo nauwkeurig als je wilt bepalen hoe oud je bent. Wat vind jij? Licht je standpunt toe.

- 019** Het RIVM, Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu, heeft onderzoek gedaan naar eenzaamheid in Nederland. Daarbij zijn de variabelen geslacht en eenzaamheid gebruikt. Zie de tabel.

EENZAAMHEID VOLWASSENEN IN NEDERLAND

	eenzaamheid				
	1	2	3	4	totaal
man	385	206	60	12	663
vrouw	369	197	57	14	637
	754	403	117	26	1300

1 = niet eenzaam
 2 = matig eenzaam
 3 = ernstig eenzaam
 4 = zeer ernstig eenzaam

Je ziet dat bij het onderzoek 1300 volwassen Nederlanders waren betrokken. Hiervan waren 26 zeer ernstig eenzaam.

- a** Hoeveel procent van de ondervraagden was niet eenzaam?
b Hoeveel procent van de ondervraagde mannen was zeer ernstig eenzaam? En hoeveel procent van de ondervraagde vrouwen?
c Is de variabele geslacht kwalitatief of kwantitatief? En de variabele eenzaamheid?
d Bij de variabele geslacht is de volgorde man/vrouw niet van belang. Hoe zit dat bij de variabele eenzaamheid?

Theorie B Meetniveaus

In opgave 19 is het verband tussen de variabelen geslacht en eenzaamheid verwerkt in een **kruistabel**. Alhoewel de variabele eenzaamheid is aangegeven met de gradaties 1, 2, 3 en 4 is hier toch sprake van een kwalitatieve variabele. Er is echter wel een verschil met de kwalitatieve variabele geslacht. Bij het geslacht is de volgorde man/vrouw niet van belang, maar bij de eenzaamheid is er wel degelijk een volgorde. De variabele geslacht is op **nominaal niveau** gemeten en de variabele eenzaamheid op **ordinaal niveau**.

Een variabele die op een nominaal meetniveau is gemeten, is een **nominale variabele**.

Een variabele die op een ordinaal meetniveau is gemeten, is een **ordinale variabele**.

Behalve het nominale en het ordinaal meetniveau zijn er nog twee meetniveaus: **interval** en **ratio**.

1 Nominaal meetniveau

Gaat het bij de meting van een variabele slechts om een onderscheid tussen verschillende categorieën, dan is er sprake van een *nominaal meetniveau*. In dat geval kunnen de waarden van de variabele aangegeven worden met *namen*, zodat ze van elkaar te onderscheiden zijn. Voorbeelden zijn de variabelen woonplaats, beroep en geslacht. Soms kent men aan de waarde van zo'n variabele een getal (code) toe, bijvoorbeeld: man 0, vrouw 1. Aan deze getallen mag je echter geen enkele betekenis toekennen wat betreft de volgorde of belangrijkheid.

2 Ordinaal meetniveau

Wordt er naast een onderscheid ook een *ordering* (volgorde) aangegeven, dan is er sprake van een *ordinaal meetniveau*.

Een voorbeeld is het toekennen van een aantal sterren aan een camping: een vijf-sterren camping heeft veel faciliteiten, een vier-sterren camping heeft er iets minder, enzovoort.

Ook het rangensysteem bij de krijgsmacht is hier een voorbeeld van. Ordinale variabelen kunnen in getallen worden uitgedrukt, maar noodzakelijk is dat niet. Denk aan de gradaties van eenzaamheid in opgave 19. Hiermee is wel een volgorde aangegeven, maar je kunt niet zeggen dat er een even groot verschil is tussen de gradaties 1 en 2 als tussen de gradaties 2 en 3.

3 Interval meetniveau

Is er naast een volgorde ook sprake van *gelijke verschillen*, dan is de meting op *intervalniveau*.

Hierbij zijn de waarden getallen waarbij het verschil tussen twee getallen een eenduidige betekenis heeft, bijvoorbeeld bij onze jaartelling. Op intervalniveau is er geen natuurlijk nulpunt.

Het jaar nul is op een gegeven moment gekozen. Je kunt dus niet zeggen dat de aarde in het jaar 2000 twee keer zo oud was als in het jaar 1000.

4 Ratio meetniveau

Bij een meting op *rationiveau* heeft een variabele alle eigenschappen van de vorige meetniveaus en is er bovendien een *natuurlijk nulpunt*. Voorbeelden zijn de variabelen gewicht in kg en leeftijd in jaren. Bij leeftijd is de geboorte het natuurlijke nulpunt. Je kunt daarom zeggen dat een persoon van 80 jaar twee keer zo oud is als een persoon van 40 jaar.

OVERZICHT MEETNIVEAUS

nominaal	ordinaal	interval	ratio
naamgeving	naamgeving	naamgeving	naamgeving
	ordening	ordening	ordening
		gelijke verschillen	gelijke verschillen
			natuurlijk nulpunt

- 20** Hieronder zie je een gedeelte van het kennismakingsformulier dat een leerling moet invullen voor de mentor.
Van welk meetniveau is er bij elk van de variabelen sprake?

Vragenlijst mentor

woonplaats

reisafstand naar school in km

geboortjaar

aantal broers/zussen

lid van een sportclub ja / nee

Hoeveel uur per week besteed je aan een bijbaan?

Kies uit

☐ 0 uur

☐ 1-5 uur

☐ 6-10 uur

☐ meer dan 10 uur

- 21** a Bij welke meetniveaus heb je met een kwalitatieve variabele te maken? En bij welke meetniveaus met een kwantitatieve variabele?
b Er wordt onderzoek gedaan naar de vakantiebestemming van Nederlanders in de herfstvakantie.
Bedenk in de context van dit onderzoek een variabele bij elk meetniveau.

- 022** Voorafgaand aan de Tweede Kamerverkiezingen in 2017 is een peiling gedaan, waarbij onderzoekers probeerden het aandeel stemmen per partij te voorspellen. Van de 1200 ondervraagden gaven 205 aan op de VVD te gaan stemmen. Bij de verkiezingen haalde de VVD uiteindelijk 21,3% van de stemmen.
Is dat meer of minder dan je op grond van de peiling zou verwachten?
Licht toe.

Theorie C Populatieproportie en steekproefproportie

Bij een onderzoek onder de stemgerechtigde Nederlanders wil men de mensen uit de steekproef die lid zijn van een politieke partij enkele vragen stellen over het lidmaatschap.

Bekend is dat 2,2% van alle stemgerechtigde Nederlanders lid is van een politieke partij. We zeggen dat de **populatieproportie** gelijk is aan 0,022. De populatieproportie wordt vaak aangegeven met de letter p . De populatieproportie is dus het gedeelte van de populatie dat een bepaald kenmerk heeft.

Bij een steekproef van 1400 volwassenen blijken er 35 lid te zijn van een politieke partij. We zeggen dat de

steekproefproportie $\hat{p}$ gelijk is aan $\hat{p} = \frac{35}{1400} = 0,025$.

Bij een representatieve steekproef zal $\hat{p}$ ongeveer gelijk zijn aan p .

Soms wordt het dakje op de p bij de steekproefproportie weggelaten. Het is dan belangrijk dat je zelf goed kunt inschatten of je met p of $\hat{p}$ te maken hebt.

De populatieproportie p van een kenmerk in de populatie is

$$p = \frac{\text{aantal elementen met het kenmerk in de populatie}}{\text{totaal aantal elementen in de populatie}}.$$

De steekproefproportie $\hat{p}$ van een kenmerk in de steekproef is

$$\hat{p} = \frac{\text{aantal elementen met het kenmerk in de steekproef}}{\text{totaal aantal elementen in de steekproef}}.$$

23



De dagproductie literpakken melk in een melkfabriek is 10 000. Hiervan hebben 120 pakken te weinig inhoud. In een steekproef worden 250 pakken van de dagproductie onderzocht op de inhoud. Hiervan blijken er 4 te weinig inhoud te hebben.

Bereken de populatieproportie en de steekproefproportie bij literpakken melk met te weinig inhoud.

A24



Van de patiënten in een ziekenhuis is de populatieproportie van het kenmerk 'de patiënt heeft bloedgroep A' gelijk aan 0,418. Het blijkt namelijk dat 627 patiënten bloedgroep A hebben.

Bij een steekproef in dit ziekenhuis zijn er 27 patiënten met bloedgroep A, waarmee de steekproefproportie op 0,45 komt.

Bereken het aantal patiënten in het ziekenhuis en het aantal patiënten in de steekproef.

E25



Voor het personeel van een ziekenhuis geldt dat de populatieproportie voor het kenmerk 'personeelslid is man' gelijk is aan 0,3. Voor het kenmerk 'man heeft kinderen' geldt $p = 0,6$. Voor het kenmerk 'vrouw heeft kinderen' geldt $p = 0,5$.

Wat is de populatieproportie van het kenmerk 'personeelslid met kinderen is man'? Rond af op twee decimalen.

Terugblik

Data verzamelen

Na het formuleren van de onderzoeksvraag maak je een overzicht van alle relevante statistische variabelen bij het onderzoek. Voorbeelden zijn geslacht, leeftijd en bloedgroep. Bij het onderzoek houd je de waarde van deze variabelen bij voor elk element van de steekproef. Het geheel van al deze waarden zijn de data.

Type en meetniveau van een variabele

Bij een kwalitatieve variabele gaat het om een eigenschap of kwaliteit. Voorbeelden zijn geslacht, bloedgroep en kleur ogen.

Een kwantitatieve variabele hoort bij meetbare gegevens en wordt uitgedrukt in een getal. Voorbeelden zijn lengte, snelheid en tijd.

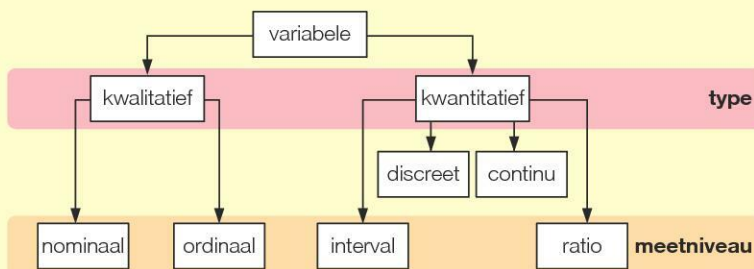
Bij variabelen onderscheiden we vier meetniveaus.

OVERZICHT MEETNIVEAUS

nominaal	ordinaal	interval	ratio
naamgeving	naamgeving	naamgeving	naamgeving
	ordening	ordening	ordening
		gelijke verschillen	gelijke verschillen
			natuurlijk nulpunt

Variabelen op nominaal en ordinaal meetniveau zijn kwalitatieve variabelen en variabelen op interval en ratio meetniveau zijn kwantitatieve variabelen.

Een kwantitatieve variabele kan discreet of continu zijn. Een discrete variabele neemt alleen 'losse' waarden aan. Bij een continue variabele kunnen alle tussenliggende waarden ook aangenomen worden.



Populatieproportie en steekproefproportie

De populatieproportie p is het deel van de populatie met het te onderzoeken kenmerk.

De steekproefproportie $\hat{p}$ is het deel van de steekproef met het te onderzoeken kenmerk.

Bij een representatieve steekproef zal $\hat{p}$ ongeveer gelijk zijn aan p .

2.3 Centrum- en spreidingsmaten

026
☑️⚙️*

In de tabel zijn gegevens verwerkt over de wijze waarop de werknemers van de firma Verschut naar hun werk gaan.

- Wat is het meetniveau van de variabele 'soort vervoer'?
- Kun je bij de tabel het gemiddelde berekenen?
- Welke centrummaat kun je gebruiken om de waarnemingen te karakteriseren?

VERVOER HUIS-WERK VAN WERKNEMERS VERSCHUT

soort vervoer	bus	fiets	auto	lopen
frequentie	9	5	6	4

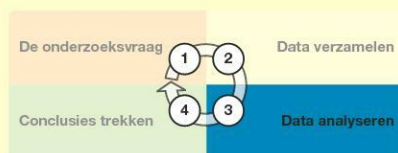
Theorie A Centrummaten

In deze paragraaf richten we ons op fase 3 van de statistische cyclus: Data analyseren.

Bij het analyseren van data kan het nuttig zijn een serie waarnemingsgetallen te typeren door één getal. Voor dat getal nemen we vaak het **gemiddelde**.

Maar het gemiddelde geeft niet altijd een juiste indruk van de waarnemingsgetallen. **Uitschieters** kunnen het gemiddelde sterk beïnvloeden. Je kunt dan beter gebruikmaken van de **mediaan** of van de **modus**.

Gemiddelde, mediaan en modus heten **centrummaten**.



Zit er een uitschieter bij de waarnemingsgetallen, dan heeft de mediaan de voorkeur boven het gemiddelde.

CENTRUMMATEN

gemiddelde	Het gemiddelde is $\frac{\text{som van de waarnemingsgetallen}}{\text{totale frequentie}}$.
mediaan	Schrijf de getallen in volgorde van grootte. De mediaan is het middelste getal bij een oneven aantal getallen. Bij een even aantal getallen is de mediaan het gemiddelde van de middelste twee getallen.
modus	De modus is het waarnemingsgetal met de grootste frequentie. Zijn er twee of meer waarnemingsgetallen met de grootste frequentie, dan is er geen modus.

<p>oneven aantal getallen</p> <p>6 8 8 10 12 12 14 15 15</p> <p>↑</p> <p>mediaan = 12</p>	<p>even aantal getallen</p> <p>3 3 4 5 6 6 7 8</p> <p>↑</p> <p>mediaan = $\frac{5+6}{2} = 5,5$</p>
---	---

Het hangt van de situatie af welke centrummaat het meest geschikt is. Hieronder staan enkele voor- en nadelen van de drie centrummaten.

VOORDELEN EN NADELEN VAN DE CENTRUMMATEN

	voordeel	nadeel
modus	<ul style="list-style-type: none"> de enige centrummaat die bij kwalitatieve gegevens te gebruiken is 	<ul style="list-style-type: none"> is niet altijd aanwezig een kleine verandering kan een geheel andere modus opleveren
mediaan	<ul style="list-style-type: none"> niet gevoelig voor uitschieters 	<ul style="list-style-type: none"> alleen de grootte van de middelste waarneming(en) is van belang
gemiddelde	<ul style="list-style-type: none"> alle gegevens worden gebruikt 	<ul style="list-style-type: none"> gevoelig voor uitschieters

Voorbeeld

Bij Italiaans restaurant Saponi kun je in het weekend alleen dineren na reservering. In de tabel zie je voor een weekend het aantal personen per reservering.

RESERVERINGEN SAPORI

aantal personen	1	2	3	4	5	6	10
frequentie	6	22	8	8	4	3	5

Bereken het gemiddelde, de modus en de mediaan. Rond zo nodig af op één decimaal.

Uitwerking

totale frequentie = $6 + 22 + 8 + 8 + 4 + 3 + 5 = 56$

gemiddelde =

$$\frac{6 \cdot 1 + 22 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + \dots + 5 \cdot 10}{56} \approx 3,5$$

$$\text{mediaan} = \frac{28^{\text{e}} \text{ getal} + 29^{\text{e}} \text{ getal}}{2} = \frac{2 + 3}{2} = 2,5$$

modus = 2 **Het aantal 2 heeft de grootste frequentie.**

1	2	3	4	5	6	10
6+22		8+8+4+3+5				
28		28				
getallen		getallen				

$28^{\text{e}} \text{ getal} = 2$
 $29^{\text{e}} \text{ getal} = 3$

mediaan = 2,5



27 In klas 4VA is gedurende enige tijd dagelijks bijgehouden hoeveel leerlingen die dag te laat in de les kwamen.

TELAATKOMERS IN KLAS 4VA

aantal	0	1	2	3	4	5	6
frequentie	3	3	7	0	3	2	2

- Hoeveel dagen duurde het onderzoek?
- Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus.





Ook in klas 4VB is nauwgezet het aantal telaatkomers geregistreerd.

TELAATKOMERS IN 4VB

aantal	0	1	2	3	4	5	32
frequentie	1	5	5	3	3	2	1

- Bereken het gemiddelde.
- Wanneer de afdelingscoördinator het gemiddelde van klas 4VB vergelijkt met dat van klas 4VA uit opgave 27 is zij erg ontstemd. Ze vindt het verschil onaanvaardbaar hoog. Door het vergelijken van een andere centrummaat weet klas 4VB de afdelingscoördinator milder te stemmen.

Hoe doet de klas dat?

In de tabel zie je de resultaten van Jim en Nils op hun rapport. Jim heeft Duits als extra vak, waardoor hij één rapportcijfer meer heeft dan Nils. Voor de vakken CKV en LO kregen ze geen rapportcijfer, maar een woordbeoordeling.

- Bereken de mediaan van de rapportcijfers van Jim.
- Bereken de mediaan van de rapportcijfers van Nils.
- Nils wil zorgen dat de mediaan van zijn rapportcijfers hoger wordt dan een 7,0.
Op welk vak kan hij zich dan het beste richten? Licht toe met een berekening.

vak	beoordeling	
	Jim	Nils
NE	5,9	6,6
EN	8,4	7,4
DU	8,0	-
WIA	7,2	7,3
SK	6,3	5,9
BIO	6,8	6,3
NLT	7,0	7,1
AK	6,6	5,7
MAA	7,0	7,0
CKV	V	V
LO	V	V



Welke centrummaat is het meest geschikt om de volgende waarnemingen te karakteriseren?

- Op een verjaardagsfeestje hebben de aanwezigen de volgende leeftijden: 17, 20, 22, 17, 19, 21 en 68 jaar.
- Van tien leerlingen is de haarkleur: blond, rood, bruin, bruin, zwart, bruin, bruin, blond, bruin en blond.
- Een verkoper verkoopt op de zes werkdagen van een week de volgende aantallen fietsen: 8, 7, 4, 5, 8 en 6.
- Bij een natuurkundeproef meten tien leerlingen het volume van dezelfde glazen bol. De metingen leveren op: 48, 48, 48, 48, 53, 48, 48, 48, 48 en 48 cm³.



A31
☐ ⊙ *

Om een vwo-diploma te behalen moet je aan allerlei eisen voldoen. Eén van die eisen is dat je gemiddeld een 5,50 of hoger haalt voor de vakken waarin je centraal examen doet.

Daan en Tim hebben examen gedaan. Daan heeft voor de zeven vakken waarin hij centraal examen deed, gemiddeld een 5,06 gehaald. Tim, die in acht vakken centraal examen deed, haalde gemiddeld een 5,08. Verder voldoen ze aan alle eisen die gesteld worden om een vwo-diploma te behalen. Daan en Tim krijgen de kans om een willekeurig vak te herkansen, om zodoende op een gemiddelde van 5,50 of hoger uit te komen.

Bereken wie van de twee de grootste cijfermatige verbetering moet behalen om alsnog voor het vwo-examen te slagen.

E32
*

Bij een toets in klas V4a zijn er 50 punten te behalen. Na afloop van de toets bleek dat de gemiddelde score 1,2 punten hoger zou zijn geweest als iedere jongen van de klas 3 punten meer had gehaald. Hoeveel procent van de klas is meisje?

O33
☐ ⊙ *

In de tabel hiernaast zie je hoeveel nachten 60 gasten op camping De Flierweide verbleven.

- a Wat is het meetniveau van de variabele 'aantal nachten'?
- b Hoeveel nachten verbleef de 25% langst verblijvende gasten?
- c Hoeveel nachten verbleven de gasten die wat betreft het aantal overnachtingen de middelste 50% vormen?

OVERNACHTINGEN CAMPING

aantal nachten	frequentie
1	3
2	1
3	6
4	5
5	9
6	13
7	8
10	9
12	4
14	2

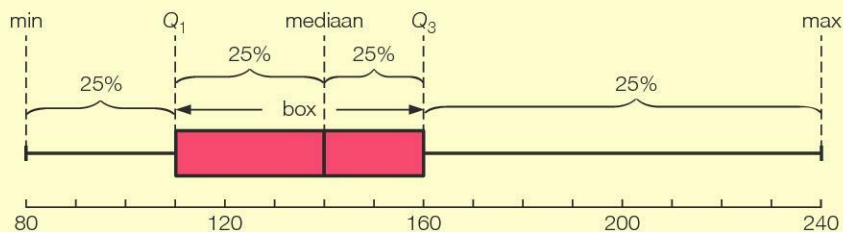
Theorie B De boxplot

Een **boxplot** is een diagram dat de verdeling van data in beeld brengt. Alleen bij een kwantitatieve variabele kun je een boxplot maken.

De mediaan verdeelt een serie waarnemingsgetallen in twee groepen, die beide bestaan uit 50% van de waarnemingsgetallen. Van beide groepen kun je weer de mediaan bepalen. Er ontstaat dan een verdeling in vier groepen, die elk 25% van de waarnemingsgetallen bevatten.

De mediaan van de eerste helft heet het **eerste kwartiel**. Notatie Q_1 .

De mediaan van de tweede helft heet het **derde kwartiel**. Notatie Q_3 .



figuur 2.6

In de boxplot hierboven lees je af dat

- de 25% kleinste waarnemingsgetallen ligt tussen 80 en 110
- de volgende 25% van de waarnemingsgetallen ligt tussen 110 en 140
- de volgende 25% van de waarnemingsgetallen ligt tussen 140 en 160
- de 25% grootste waarnemingsgetallen ligt tussen 160 en 240.

Elk deel van de boxplot bevat 25% van de waarnemingsgetallen.

Het verschil tussen het grootste en kleinste waarnemingsgetal heet de **spreidingsbreedte**.

In de figuur is de spreidingsbreedte $240 - 80 = 160$.

De breedte van de **box** in de boxplot heet de **interkwartielafstand** (ook wel kwartielafstand).

In de figuur is de interkwartielafstand $160 - 110 = 50$.

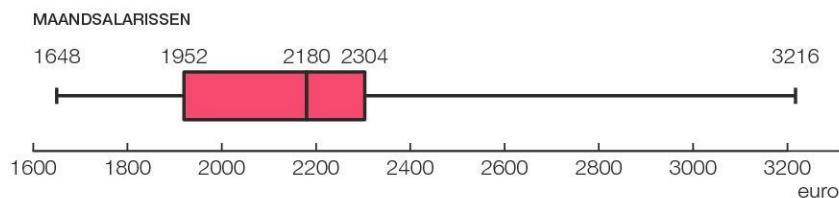
spreidingsbreedte = maximum – minimum

interkwartielafstand = $Q_3 - Q_1$

34



Van de 250 werknemers van een ICT-bedrijf is het maandsalaris in een boxplot verwerkt. Zie de figuur hieronder.

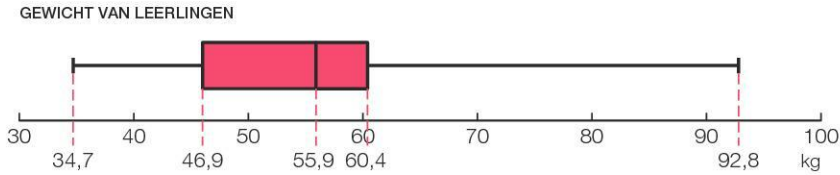


figuur 2.7

- Bereken de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.
- Hoeveel werknemers hebben een maandsalaris tussen 1952 en 2304 euro?
- Wat weet je van de maandsalarissen van de 25% werknemers met de hoogste maandsalarissen?

35
☐ ⊙ *

Van een grote scholengemeenschap zijn de gewichten van alle 2184 leerlingen genoteerd. Er is bij deze data een boxplot gemaakt. Zie figuur 2.8.



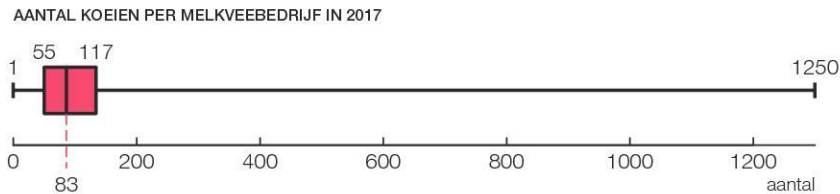
figuur 2.8

Een leerling trekt uit bovenstaande gegevens de volgende conclusies. Geef bij elke conclusie aan of deze juist is of onjuist. Licht toe.

- Er zijn meer leerlingen die een gewicht hebben tussen 60,4 en 92,8 kg dan tussen 55,9 en 60,4 kg.
- Er zijn meer dan 550 leerlingen die lichter zijn dan 46,9 kg.
- Er vallen minder leerlingen binnen dan buiten de box.
- Meer dan driekwart van de leerlingen is lichter dan het gemiddelde van het kleinste en grootste gewicht.

A36
☐ ⊙ *

Er wordt al jaren onderzoek gedaan naar het aantal melkkoeien per melkveebedrijf in Nederland.



figuur 2.9

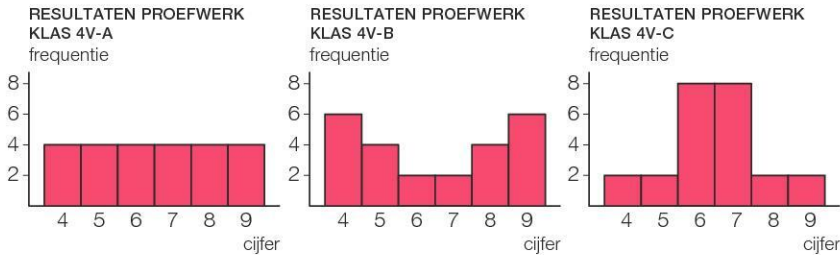
Zie de boxplot. In 2017 waren er 18056 melkveebedrijven.

- Hoeveel bedrijven hebben meer dan 83 koeien?
- Is het gemiddelde hoger of lager dan de mediaan? Licht toe.
- Verbeter de volgende bewering zodat deze correct wordt.
Er zijn meer bedrijven met meer dan 117 koeien dan bedrijven met minder dan 55 koeien.
- Onderzoek of de volgende bewering kan kloppen.
De bedrijven met meer dan 117 koeien hebben samen meer koeien dan de bedrijven met minder dan 117 koeien.
- Geef een schatting van het aantal bedrijven met minder dan 100 koeien.



Drie klassen maken hetzelfde proefwerk. Van elke klas is het gemiddelde cijfer 6,5 en de spreidingsbreedte 5. Toch is er verschil in spreiding, zie figuur 2.10.

Omschrijf dit verschil.



figuur 2.10

Theorie C De standaardafwijking

Twee groepen met gelijke mediaan of gelijk gemiddelde kunnen nog steeds sterk verschillen. Om nog meer informatie te geven over een groep kun je gebruikmaken van een **spreidingsmaat**. Een spreidingsmaat drukt de mate van spreiding van de gegevens uit in een getal.

De eenvoudigste spreidingsmaat is de spreidingsbreedte, maar deze is zeer gevoelig voor uitschieters.

De interkwartielafstand heeft dit nadeel niet en is een voorbeeld van een spreidingsmaat die vaak in combinatie met de mediaan wordt gebruikt.

De meest gebruikte spreidingsmaat is de **standaardafwijking**, ook wel de **standaarddeviatie** genoemd.

De standaardafwijking wordt vaak in combinatie met het gemiddelde gebruikt. De gebruikelijke notatie voor de standaardafwijking is σ , dat is de Griekse letter sigma. Net als het gemiddelde maakt de standaardafwijking gebruik van alle waarnemingsgetallen.

De standaardafwijking geeft een indruk van de gemiddelde afwijking van de waarnemingsgetallen tot het gemiddelde.

De standaardafwijking met de hand berekenen is een hele klus en daarom wordt dat bijna altijd elektronisch gedaan. Om de standaardafwijking met de hand te berekenen, ga je als volgt te werk:

- 1 Bereken het gemiddelde van de waarnemingsgetallen.
- 2 Bereken voor elk waarnemingsgetal het verschil met het gemiddelde, dus waarnemingsgetal – gemiddelde.
- 3 Tel de kwadraten van al deze verschillen bij elkaar op.
- 4 Deel de uitkomst door het aantal waarnemingsgetallen.
- 5 Neem de wortel van deze uitkomst. Dit getal is de standaardafwijking van de waarnemingsgetallen.

38
□ ⊙ *

Coen heeft de volgende getallen in zijn schrift staan.

rij A:	0, 2, 3, 4, 6
rij B:	10, 12, 13, 14, 16
rij C:	3, 3, 3, 3, 3, 3

figuur 2.11

- Bereken de standaardafwijking van rij A.
- Hoe komt het dat de standaardafwijkingen van de rijen A en B gelijk zijn?
- Geef de standaardafwijking van rij C.

39
□ ⊙ *

Meneer Boers heeft in zijn klas een toets afgenomen. De cijfers variëren van 2,8 tot en met 9,4. Het gemiddelde is 6,2.

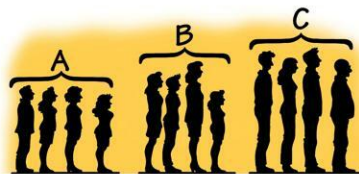
- Hij berekent $\sigma = 5,3$.
Licht toe waarom dit niet kan kloppen.

Na het bespreken van de toets blijkt dat meneer Boers een fout heeft gemaakt bij het tellen van de punten. Het cijfer 2,8 moet een 3,9 zijn.

- Is de standaardafwijking hierdoor groter of kleiner geworden? Licht toe.

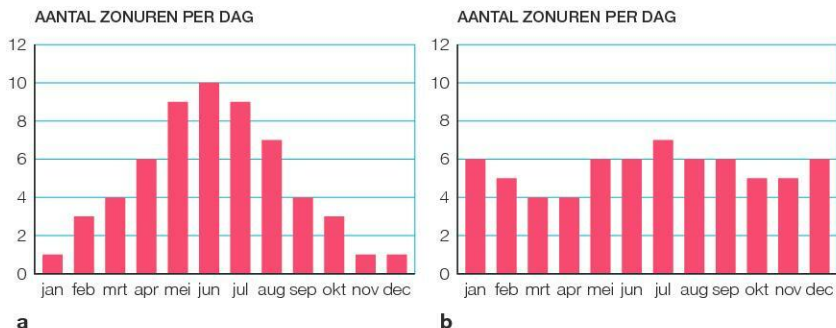
A40
□ ⊙ *

- Bij welke van de groepen hiernaast is de standaardafwijking van de lengte het grootst? Licht toe.



figuur 2.12

- In onderstaande figuren kun je voor iedere maand het gemiddeld aantal zonuren per dag in de steden Helsinki en Quito aflezen. De standaardafwijking bij Helsinki is groter dan bij Quito. Welke van de twee figuren hoort bij Quito? Licht toe.



figuur 2.13

Terugblik

Centrummaten

Om de verzamelde data te karakteriseren met één getal kun je een centrummaat gebruiken.

CENTRUMMATEN

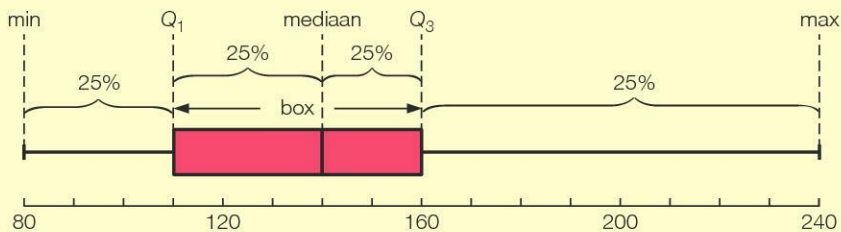
gemiddelde	mediaan	modus
$\frac{\text{som van de getallen}}{\text{totale frequentie}}$	middelste getal (of gemiddelde van de middelste twee) in een rangschikking naar grootte	waarnemingsgetal met de grootste frequentie
alle gegevens worden gebruikt	alleen de grootte van de middelste waarneming(en) is van belang	ook bruikbaar bij kwalitatieve gegevens
gevoelig voor uitschieters	niet gevoelig voor uitschieters	gevoelig voor kleine veranderingen

Kwartielen

De mediaan verdeelt een serie waarnemingsgetallen in twee groepen, die beide bestaan uit 50% van de waarnemingsgetallen. Van elk van deze even grote groepen kun je weer de mediaan bepalen. Er ontstaat dan een verdeling in vier groepen, die elk 25% van de waarnemingsgetallen bevatten. De mediaan van de eerste helft heet het eerste kwartiel. Notatie Q_1 . De mediaan van de tweede helft heet het derde kwartiel. Notatie Q_3 .

Boxplot

Een boxplot is een diagram dat de spreiding van data in beeld brengt. Alleen bij een kwantitatieve variabele kun je een boxplot maken.



Spreidingsmaten

Je kunt de volgende spreidingsmaten gebruiken:

- spreidingsbreedte = grootste waarnemingsgetal – kleinste waarnemingsgetal
- interkwartielafstand = derde kwartiel – eerste kwartiel
- standaardafwijking σ

De standaardafwijking gebruikt men vaak in combinatie met het gemiddelde, bij de mediaan is de logische keuze de interkwartielafstand.

2.4 Klassenindeling en polygoenen

041
📷🔍*

Anneke heeft een tijdje bijgehouden hoeveel euro zij uitgeeft in de supermarkt. De bedragen, afgerond op gehele euro's, staan hieronder.

55	28	36	68	21	17	65
32	20	26	15	58	11	43
57	69	33	27	47	38	56
29	25	14	18	16	51	44

Waarom is het niet zinvol hierbij een frequentietabel te maken?



Theorie A Klassenindeling

Ook in deze paragraaf richten we ons op fase 3 van de statistische cyclus: Data analyseren.

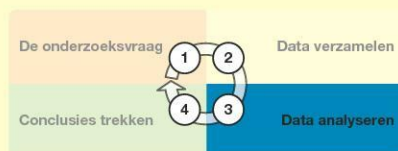
In opgave 41 komt elk waarnemingsgetal maar één keer voor. Het heeft dan geen zin een frequentietabel te maken, want alleen de frequentie 1 komt voor. Om een beter inzicht te krijgen in de bedragen kun je de bedragen indelen in groepen. Deze groepen heten **klassen**. Omdat het kleinste bedrag 11 euro is en het grootste 69 euro, is een verstandige klassenindeling $[10, 20)$, $[20, 30)$, $[30, 40)$, $[40, 50)$, $[50, 60)$ en $[60, 70)$.

Bij de klasse $[10, 20)$ geef je met $[$ aan dat 10 wel tot de klasse behoort en met $)$ dat 20 niet tot de klasse behoort.

Bij deze klasse heten 10 en 20 de **klassengrenzen**.

De **klassenbreedte** is $20 - 10 = 10$.

Het **klassenmidden** is $\frac{10 + 20}{2} = 15$.



De klasse $[10, 20)$ loopt van 10 tot 20.
Bij $\langle 10, 20]$ hoort 10 niet bij de klasse en 20 wel.

Aan een frequentietabel met een klassenindeling is niet meer te zien van welke waarnemingsgetallen is uitgegaan.

Om een benadering te krijgen van het gemiddelde kun je gebruikmaken van de klassenmiddens.

In plaats van de modus spreken we bij een klassenindeling van de **modale klasse**, dat is de klasse met de grootste frequentie.

Ook de mediaan is bij een klassenindeling niet meer te berekenen.

Je kunt wel berekenen in welke klasse de mediaan ligt.

Voorbeeld

Van een aantal leerlingen is het gewicht bepaald.
Zie de frequentietabel hiernaast.

- Bereken het gemiddelde gewicht met behulp van klassenmiddens.
- In welke klasse ligt de mediaan?
- Geef de modale klasse.

Uitwerking

a totale frequentie = $4 + 7 + 12 + 14 + 5 + 8 = 50$
 gemiddelde = $\frac{4 \cdot 52,5 + 7 \cdot 57,5 + \dots + 8 \cdot 77,5}{50} = 65,8 \text{ kg}$

- De mediaan is het gemiddelde van het 25^e en 26^e getal, dit ligt in de klasse $[65, 70)$.
- De modale klasse is $[65, 70)$.

GEWICHT LEERLINGEN IN KG

gewicht	frequentie
$[50, 55)$	4
$[55, 60)$	7
$[60, 65)$	12
$[65, 70)$	14
$[70, 75)$	5
$[75, 80)$	8

In de eerste drie klassen zitten $4 + 7 + 12 = 23$ getallen.

42


Van een aantal levensmiddelen in een supermarkt is de prijs genoteerd. Zie de frequentietabel hiernaast.

- Heb je hier te maken met een continue of een discrete variabele? Licht toe.
- Een zak snoep kost € 3,00. In welke klasse valt dit?
- Bereken de gemiddelde prijs met behulp van klassenmiddens.
- In welke klasse ligt de mediaan?
- Geef de modale klasse.

PRIJS LEVENSMIDDELEN

prijs in centen	frequentie
$\langle 0, 100]$	26
$\langle 100, 200]$	17
$\langle 200, 300]$	21
$\langle 300, 400]$	8
$\langle 400, 500]$	13
$\langle 500, 600]$	2

A43


Bij een onderzoek in een winkelcentrum is van elke winkel het aantal werknemers en het aantal m² vloeroppervlakte vastgesteld.

winkel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aantal werknemers	6	8	18	25	7	4	22	16	12	8
vloeroppervlakte in m ²	125	85	240	325	412	72	450	315	65	82
winkel	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
aantal werknemers	18	23	14	9	4	8	8	28	9	19
vloeroppervlakte in m ²	180	521	228	172	88	56	185	270	120	438

- Maak een frequentietabel bij de vloeroppervlakte in m². Neem de klassen $[50, 150)$, $[150, 200)$, ...
- Wat is de modale klasse bij de vloeroppervlakte?
- Met behulp van de gegeven tabel kun je berekenen dat de gemiddelde vloeroppervlakte per werknemer ongeveer 16,7 m² is. Bereken de gemiddelde vloeroppervlakte per werknemer door de klassenmiddens van de frequentietabel bij vraag a te gebruiken. Verklaar het verschil tussen de twee gemiddelden.

A44

Aan de docenten van het Noorderveld College is gevraagd hoe oud ze zijn. Zie de frequentietabel hiernaast.

- Mevrouw Van Santen is 35 jaar.
In welke leeftijdsklasse valt ze?
- Een docent Frans zegt dat de gemiddelde leeftijd van de docenten 40 jaar is.
Onderzoek of dit kan kloppen.
- Kan de mediaan 47 jaar zijn? Licht toe.
- Conciërge Erwin beweert dat de modus van de leeftijden 36 is.
Waarom kan dit niet kloppen?

DOCENTEN N.C.

leeftijd	frequentie
[25, 35>	18
[35, 45>	3
[45, 55>	40
[55, 65>	9
[65, 75>	2

AANTAL BROERS EN ZUSSEN

aantal	frequentie
0	5
1	12
2	6
3	2
4	2
5	1

O45

- In klas 4VC is aan elke leerling gevraagd hoeveel broers en zussen hij of zij heeft. Zie de frequentietabel.
- Is de variabele discreet of continu? Wat is het meetniveau?
 - Geef de praktische betekenis van het getal 6 in de tabel.
 - Hoeveel leerlingen zitten er in klas 4VC?

Theorie B Histogram en frequentiepolygoon

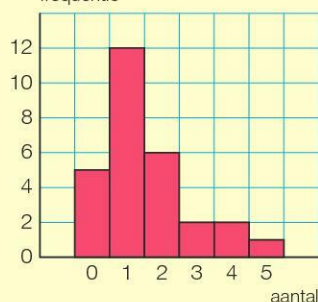
In figuur 2.14 is bij de **frequentieverdeling** van opgave 45 het **histogram** getekend. Bij een histogram staat op de horizontale as een kwantitatieve variabele. Soms, zoals bij dit histogram, staan de waarnemingsgetallen midden onder de staven. Heb je te maken met een klassenindeling, dan staan de klassengrenzen bij de grenzen van de staven. De staven in een histogram staan tegen elkaar aan.

Een histogram is een diagram bij een frequentieverdeling met een kwantitatieve variabele op de horizontale as. De staven staan tegen elkaar aan.

Bij een kwalitatieve variabele kun je geen histogram maken. Je kunt wel een staafdiagram maken, de staven staan dan los van elkaar.

In figuur 2.15 is bij de frequentieverdeling van opgave 45 een lijndiagram getekend. Omdat hier geen klassenindeling is gebruikt, is boven elk waarnemingsgetal een stip gezet. De hoogte van de stip komt overeen met de frequentie van het waarnemingsgetal. Bij een klassenindeling zou die stip boven het klassenmidden geplaatst zijn. Door de opeenvolgende stippen te verbinden met lijnstukken krijg je de **frequentiepolygoon**. Je ziet dat de polygoon op de horizontale as begint en eindigt.

BROERS EN ZUSSEN 4VC
frequentie



figuur 2.14

BROERS EN ZUSSEN 4VC
frequentie



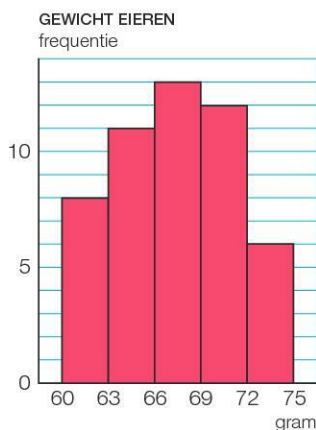
figuur 2.15

Een frequentiepolygoon is een lijndiagram waarin de frequenties zijn uitgezet tegen de waarnemingsgetallen. Het begin- en eindpunt liggen op de horizontale as.

In figuur 2.15 is de frequentiepolygoon getekend bij absolute frequenties. Je kunt ook een frequentiepolygoon tekenen bij relatieve frequenties. Je krijgt dan de **relatieve frequentiepolygoon**.

46 Van 50 eieren is het gewicht vastgesteld. De resultaten zijn verwerkt in de figuur hiernaast met als eerste klasse $[60, 63)$.

- Met welke variabele heb je hier te maken? Is deze variabele kwalitatief of kwantitatief?
- Geef de modale klasse.
- Matthijs beweert dat het totale gewicht van de eieren tussen 3291 en 3441 gram ligt. Toon aan dat hij gelijk heeft.
- Onderzoek of het mogelijk is dat het gemiddelde gewicht van de eieren buiten de klasse $[66, 69)$ ligt.



figuur 2.16

47 Boer Jopma heeft bij een partij eieren de tabel hiernaast gemaakt.

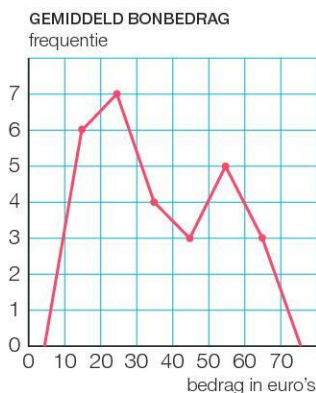
- Is de variabele klasse kwalitatief of kwantitatief? Licht toe.
- Jopma wil weten wat het gemiddelde gewicht van deze partij eieren ongeveer is. Kan hij dit berekenen met de gegevens in de tabel? Licht toe.
- Jopma wil de gegevens uit de tabel verwerken in een staafdiagram. Waarom kan hij geen histogram gebruiken?

EIEREN BOER JOPMA

klasse	gewicht in gram	aantal
S	$\langle \leftarrow, 53 \rangle$	441
M	$[53, 63)$	541
L	$[63, 73)$	533
XL	$[73, \rightarrow)$	216

48 Voor een aantal winkels is de gemiddelde besteding per klant (gemiddeld bonbedrag) verwerkt in een klassenindeling met als eerste klasse $[10, 20)$. In de figuur hiernaast zie je de bijbehorende frequentiepolygoon.

- Met welke variabele heb je hier te maken? Is deze variabele discreet of continu? Licht toe.
- Wat is het laagst mogelijke bonbedrag?
- Van hoeveel winkels is het gemiddeld bonbedrag in de figuur verwerkt?
- In welke klasse ligt de mediaan?
- Bereken de relatieve frequentie van de klasse $[50, 60)$.



figuur 2.17

A49
  

De verzuimbeheerder op het Dominicus College heeft een aantal dagen bijgehouden hoeveel leerlingen te laat in hun eerste les kwamen. Tot haar schrik kwam het tijdens de onderzoeksperiode 33 dagen voor dat er meer dan vijf leerlingen te laat in hun eerste les waren. Alle data van haar onderzoek staat verwerkt in de relatieve frequentiepolygoon hiernaast.



figuur 2.18

- Is het mogelijk om bij deze gegevens een histogram te maken?
Licht toe.
- Bereken het gemiddeld aantal leerlingen dat te laat kwam in de eerste les.
- Hoeveel dagen duurde het onderzoek?
- Bereken hoe vaak de verzuimbeheerder genoteerd heeft dat een leerling te laat in de eerste les kwam.

O50
  

In de tabel hiernaast vind je een klassenindeling bij de lengte van mannelijke sporters op de Olympische Spelen van 2012.

LENGTE MANNELIJKE OLYMPISCHE
SPORTERS

- Diego Castillo is een zwemmer met een lengte van 175 cm.
Bereken hoeveel procent van de sporters in de tabel kleiner is dan Diego.
- Camille Lacourt is een zwemmer met een lengte van 2 meter die deelnam aan deze Olympische Spelen.
Uit de tabel volgt dat Camille bij de 5% langste sporters hoort.
Laat zien dat dit klopt.

lengte	rel. freq.
$\langle \leftarrow, 155 \rangle$	0,3%
$[155, 160 \rangle$	0,7%
$[160, 165 \rangle$	2,4%
$[165, 170 \rangle$	5,9%
$[170, 175 \rangle$	12,2%
$[175, 180 \rangle$	16,3%
$[180, 185 \rangle$	20,4%
$[185, 190 \rangle$	17,2%
$[190, 195 \rangle$	13,0%
$[195, 200 \rangle$	6,9%
$[200, 205 \rangle$	3,0%
$[205, 210 \rangle$	1,1%
$[210, 215 \rangle$	0,4%
$[215, \rightarrow \rangle$	0,2%

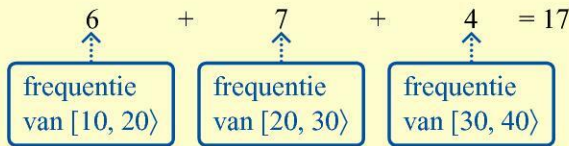
Voor het onderling vergelijken van resultaten maakt men soms gebruik van het begrip *percentielscore*. Deze score geeft in een getal weer hoeveel procent van de resultaten dezelfde waarde of lager heeft.

- Bij de lengte van een mannelijke sporter uit de tabel hoort een percentielscore van 65.
Wat weet je over zijn lengte?
- Welke percentielscore hoort bij de mediaan?

Theorie C Cumulatieve frequentiepolygoon

Tel je bij de frequentie van een waarnemingsgetal ook alle voorgaande frequenties mee, dan spreken we van de **cumulatieve frequentie**. Wanneer je met cumulatieve frequenties in procenten te maken hebt, noem je het resultaat de **relatieve cumulatieve frequentie**.

In de tabel hiernaast bereken je de cumulatieve frequentie van de klasse $[30, 40)$ door de frequentie van deze klasse én alle voorgaande klassen op te tellen. De cumulatieve frequentie van de klasse $[30, 40)$ is



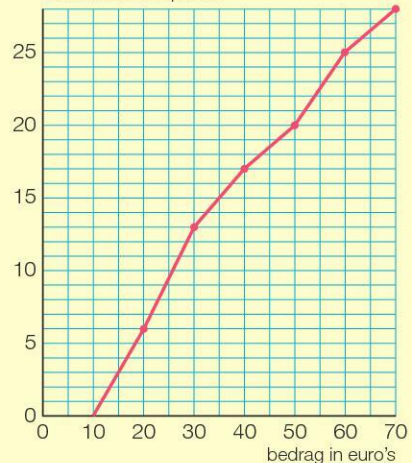
Er zijn dus 17 winkels waarbij het gemiddeld bonbedrag minder dan 40 euro is.

In figuur 2.19 is de **cumulatieve frequentiepolygoon** getekend. De punten zijn uitgezet boven de *rechtergrens* van elke klasse.

GEMIDDELD BONBEDRAG

bedrag in euro's	frequentie
$[10, 20)$	6
$[20, 30)$	7
$[30, 40)$	4
$[40, 50)$	3
$[50, 60)$	5
$[60, 70)$	3

GEMIDDELD BONBEDRAG
cumulatieve frequentie



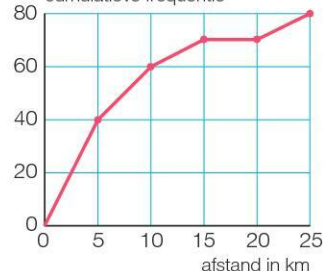
figuur 2.19

R51 Waarom worden (relatieve) cumulatieve frequenties in een polygoon uitgezet boven de rechterklassengrenzen?

52 Van een groep studenten is de afstand huis-school in km genoteerd. Zie de cumulatieve frequentiepolygoon in figuur 2.20, waarbij de eerste klasse $[0, 5)$ is.

- Hoeveel studenten zijn bij het onderzoek betrokken?
- Hoeveel studenten wonen minder dan 10 km van school?
- Hoeveel studenten wonen minstens 5 km van school?
- Hoeveel studenten wonen minstens 10 km, maar minder dan 20 km van school?
- Teken een histogram bij figuur 2.20.

AFSTAND HUIS-SCHOOL
cumulatieve frequentie



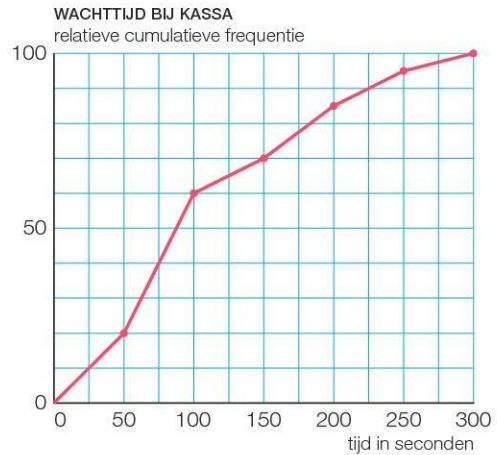
figuur 2.20

53



In een supermarkt is bijgehouden hoeveel seconden een klant in de rij bij de kassa staat tot hij aan de beurt is. De wachttijden van 300 klanten zijn verwerkt in de relatieve cumulatieve frequentiepolygoon in figuur 2.21, waarbij de eerste klasse $[0, 50)$ is.

- Hoeveel procent van de klanten stond minder dan 100 seconden in de rij? Hoeveel klanten zijn dat?
- Hoeveel klanten stonden minder dan 200 seconden in de rij?
- Hoeveel klanten moesten minstens 2,5 minuut wachten?
- Hoeveel klanten moesten minstens 100, maar minder dan 200 seconden wachten?



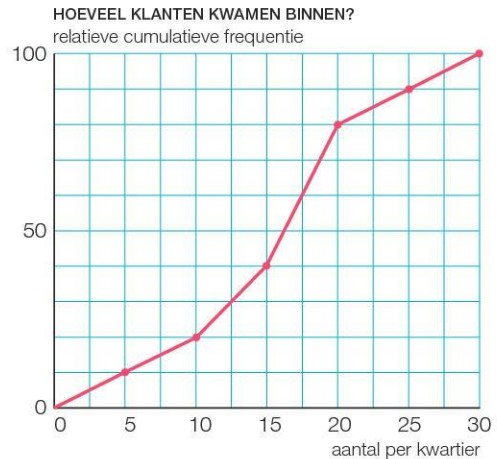
figuur 2.21

A54



In een winkel is op een dag van 10:00 tot 20:00 uur genoteerd hoeveel klanten er per kwartier de winkel binnenkwamen. Zie figuur 2.22, waarbij de eerste klasse $[0, 5)$ is.

- Hoeveel kwartieren kwamen minder dan 20 klanten binnen?
- Hoeveel kwartieren kwamen minstens 15 klanten binnen?
- Hoeveel kwartieren kwamen minstens 10, maar minder dan 25 klanten de winkel binnen?
- Maak bij figuur 2.22 een frequentietabel met absolute frequenties.



figuur 2.22

Terugblik

Klassenindeling

Zijn er bij een statistisch onderzoek veel verschillende waarnemingsgetallen, dan maak je een indeling in klassen. Geef elke klasse dezelfde breedte.

Bij de klasse $[20, 25)$ doet de linkergrens 20 mee, maar de rechtergrens 25 niet. De klassenbreedte van deze klasse is

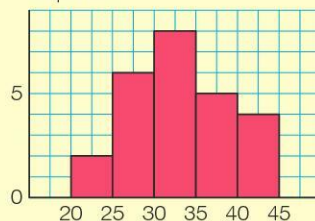
$$25 - 20 = 5. \text{ Het klassenmidden is } \frac{20 + 25}{2} = 22,5.$$

Om bij een klassenindeling een schatting van het gemiddelde te verkrijgen, kun je gebruikmaken van de klassenmiddens.

Bij een klassenindeling kun je een histogram tekenen. Zo krijg je bij de verdeling hieronder het histogram ernaast.

klasse	frequentie
$[20, 25)$	2
$[25, 30)$	6
$[30, 35)$	8
$[35, 40)$	5
$[40, 45)$	4

HISTOGRAM
frequentie



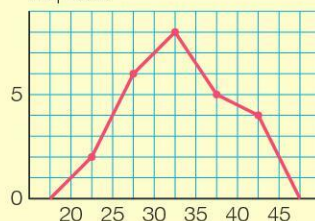
Frequentiepolygoon

Bij een frequentieverdeling van een kwantitatieve variabele is een frequentiepolygoon te maken.

Een frequentiepolygoon is een lijndiagram waarin boven elk waarnemingsgetal de frequentie is uitgezet. Begin- en eindpunt liggen op de horizontale as.

Bij een relatieve frequentiepolygoon zet je de relatieve frequenties uit tegen de waarnemingsgetallen.

FREQUENTIEPOLYGOON
frequentie

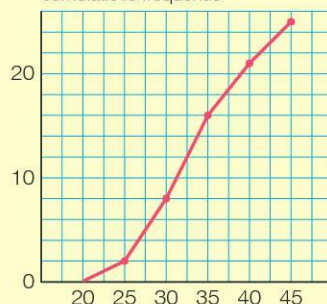


Cumulatieve frequenties

De cumulatieve frequentie van de klasse $[30, 35)$ krijg je door de frequentie van deze klasse en alle voorgaande klassen op te tellen. De cumulatieve frequentie van de klasse $[30, 35)$ is dus $2 + 6 + 8 = 16$. Er zijn dus 16 waarnemingsgetallen kleiner dan 35. De cumulatieve frequenties bij de tabel hierboven zijn achtereenvolgens 2, 8, 16, 21 en 25.

In de figuur hiernaast zie je de cumulatieve frequentiepolygoon.

CUMULATIEVE
FREQUENTIEPOLYGOON
cumulatieve frequentie



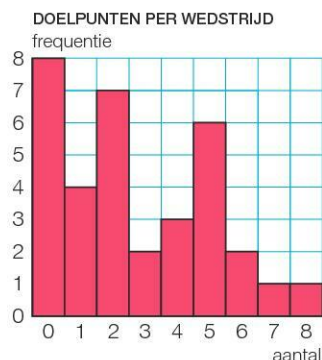
2.5 Soorten verdelingen

O55
📊🔍

Bij een schoolvoetbaltoernooi is per wedstrijd het aantal doelpunten genoteerd.

Zie het histogram hiernaast.

- Wat is de betekenis van de staaf bij het aantal 2?
- Hoeveel wedstrijden zijn er gespeeld?
- Hoeveel doelpunten zijn er in totaal gescoord?
- Wat is het maximaal aantal wedstrijden dat geëindigd is in 2-2?
- Onderzoek of het gemiddeld aantal doelpunten per wedstrijd groter of kleiner is dan de mediaan.

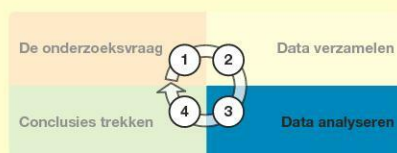
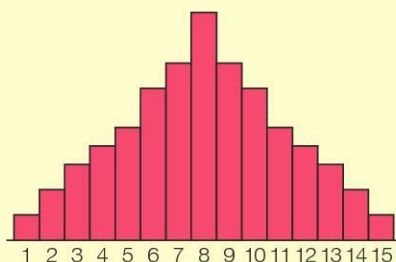


figuur 2.23

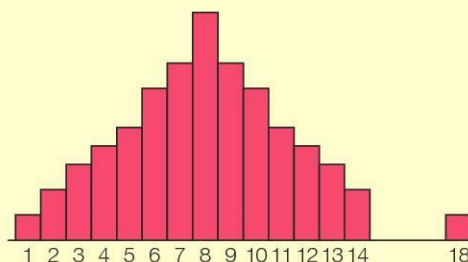
Theorie A Verdelingen en histogrammen

Ook in deze paragraaf richten we ons op fase 3 van de statistische cyclus: Data analyseren.

Het histogram in figuur 2.24 hoort bij een **symmetrische verdeling**. Het gemiddelde, de mediaan en de modus vallen samen.



figuur 2.24



figuur 2.25

In het histogram van figuur 2.25 zie je aan de rechterkant een uitschieter. Merk op dat het staafje dat in figuur 2.24 bij 15 staat, in figuur 2.25 bij 18 staat. Het gemiddelde zal bij figuur 2.25 groter zijn dan bij figuur 2.24, maar de modus is in beide figuren gelijk.

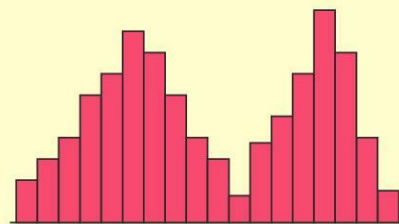
Omdat in beide figuren evenveel waarnemingsgetallen staan en de volgorde van de waarnemingsgetallen van klein naar groot hetzelfde is, hebben de verdelingen dezelfde mediaan.

In figuur 2.25 is dus het gemiddelde groter dan de mediaan.

In figuur 2.25 is door de uitschieter de spreiding groter dan in figuur 2.24. Daarom zal in figuur 2.25 de standaardafwijking groter zijn dan in figuur 2.24.

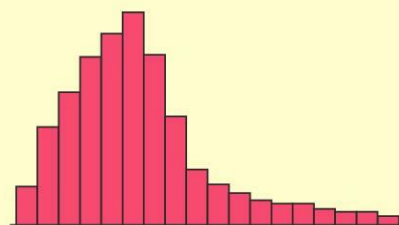
In de figuren hiernaast zijn histogrammen getekend bij enkele andere verdelingen.

In figuur 2.26 zie je een **tweetoppige verdeling**. Een verdeling waarbij een histogram hoort met meer dan één top heet een **meertoppige verdeling**.



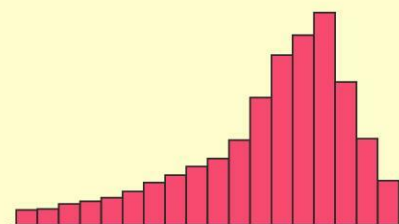
figuur 2.26

In figuur 2.27 zie je een **scheve verdeling**. Deze verdeling is **rechts-scheef** omdat het histogram aan de rechterkant erg ver doorloopt. Er is aan de rechterkant een staart bij het histogram.



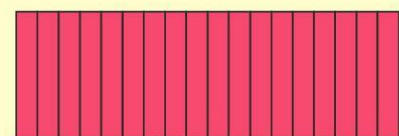
figuur 2.27

In figuur 2.28 is een **links-scheve verdeling** getekend.



figuur 2.28

In figuur 2.29 ten slotte is een **uniforme verdeling** getekend. Dit is een verdeling waarbij elk waarnemingsgetal of elke klasse dezelfde frequentie heeft.



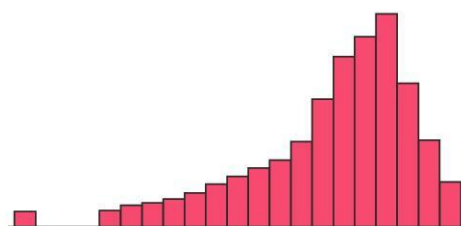
figuur 2.29

56
📌

Zie de figuren 2.28 en 2.30. Het meest linkse staafje in figuur 2.28 is de uitschieter in figuur 2.30 geworden.

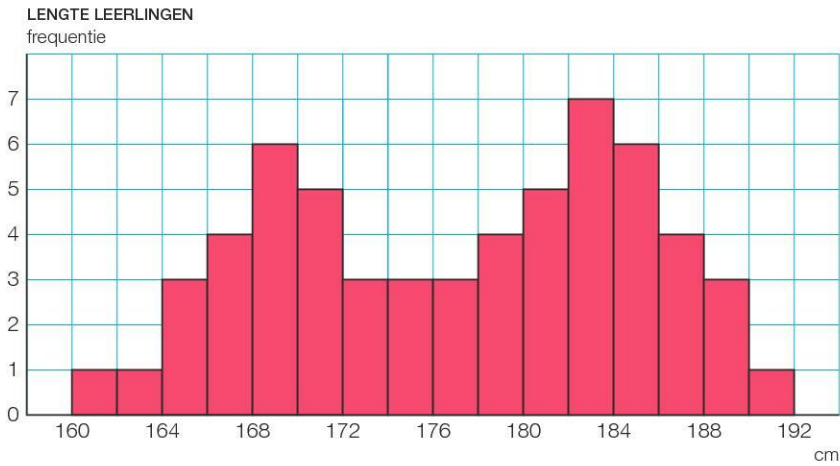
Vergelijk bij de figuren 2.28 en 2.30

- a het gemiddelde
- b de mediaan
- c de standaardafwijking.



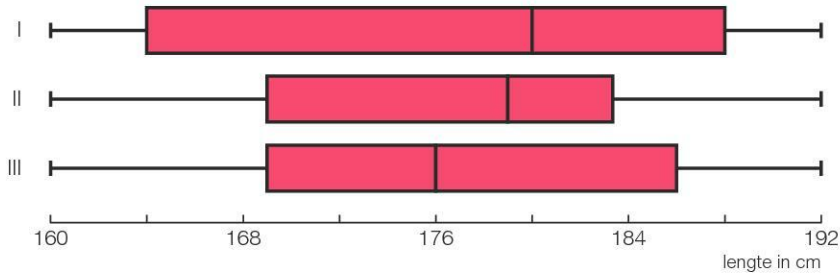
figuur 2.30

Zie figuur 2.31 met de verdeling van de lengten van 59 leerlingen. De eerste klasse is $[160, 162)$.



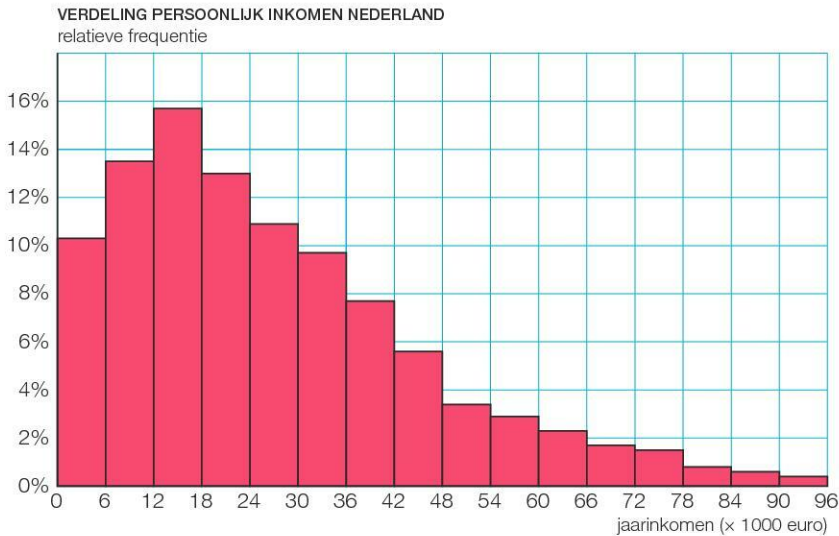
figuur 2.31

- Er zijn twee toppen in het histogram. Geef hiervoor een mogelijke verklaring.
- Geef de modale klasse.
- Geef een schatting van de standaardafwijking. Kies uit 1 cm, 8 cm, 15 cm en 30 cm.
- In de figuur hieronder zie je drie boxplots. Welke van de drie past het beste bij figuur 2.31? Licht toe.



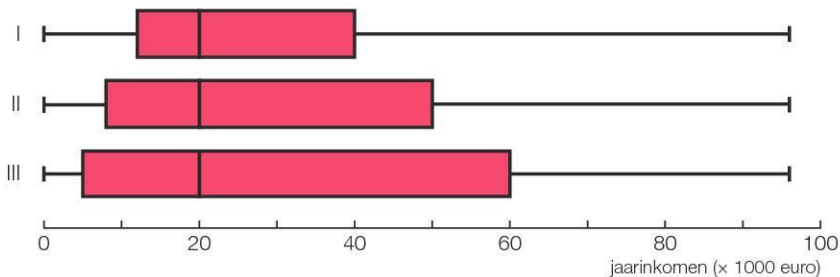
figuur 2.32

In figuur 2.33 zie je een gedeelte van de verdeling van het persoonlijk inkomen in Nederland.



figuur 2.33

- a Zou de mediaan hier in de modale klasse kunnen liggen?
- b Joost beweert dat als iedereen hetzelfde inkomen zou hebben, alle staven in figuur 2.33 even hoog zouden zijn. Dus dat je in dat geval met een uniforme verdeling te maken hebt. Heeft Joost gelijk? Licht toe.
- c In de figuur hieronder zie je drie boxplots. Welke van de drie past het beste bij figuur 2.33? Licht toe.



figuur 2.34

59



Hieronder staan enkele situaties.

Kies bij elk van deze situaties welke verdeling erbij hoort.

Kies uit meertoppig, uniform, links-scheef, rechts-scheef en symmetrisch.

- a Het IQ van Nederlandse vrouwen van 20 jaar.
- b Het jaarinkomen van Nederlandse werknemers.
- c Het aantal uren gamen per week van leerlingen op een middelbare school.
- d Het gewicht van sinaasappels bij een kraam op de markt.
- e De cijfers van een moeilijke wiskundetoets.



A60

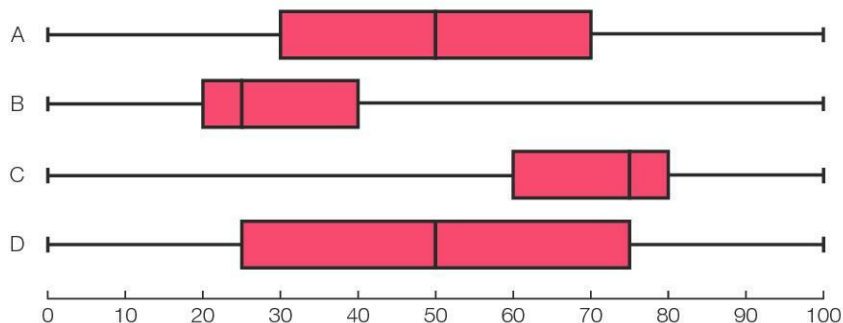


Van een grote serie waarnemingsgetallen is het kleinste waarnemingsgetal 0 en het grootste 100.

In figuur 2.35 zijn vier boxplots getekend. Deze horen bij de verdelingen I, II, III en IV.

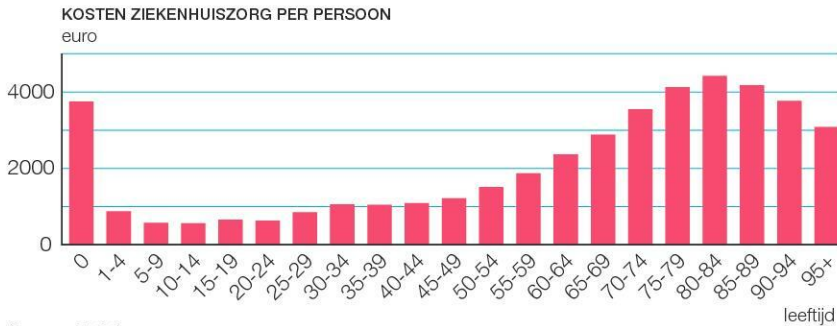
Welk boxplot hoort bij elk van deze verdelingen?

- I De verdeling is uniform.
- II De verdeling is tweetoppig, de eerste top zit bij 30 en de tweede top bij 70.
- III De verdeling is rechts-scheef.
- IV De verdeling is links-scheef.



figuur 2.35

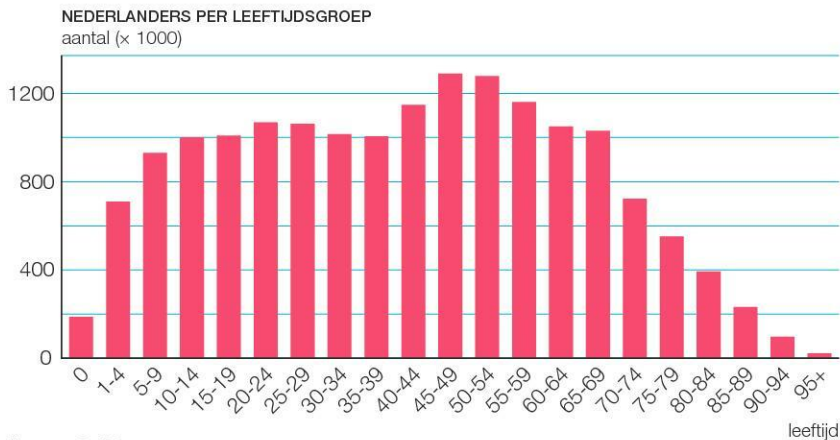
In figuur 2.36 zie je hoe de kosten van ziekenhuiszorg per persoon in Nederland zijn verdeeld naar leeftijdsgroep. De gegevens zijn uit 2015.



figuur 2.36

- De staaf bij de nuljarigen is veel hoger dan de staven ernaast. Geef hiervoor een verklaring.
- Gemiddeld werd per persoon 1593 euro uitgegeven. Vanaf welke leeftijdsgroep (uitgezonderd de nuljarigen) zijn de uitgaven per persoon meer dan gemiddeld?
- Irma beweert dat uit figuur 2.36 blijkt dat meer dan de helft van alle uitgaven voor ziekenhuiszorg voor rekening komt van de 70-plussers. Waarom kan Irma deze bewering alleen op grond van figuur 2.36 niet waarmaken?

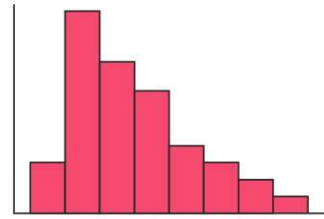
In figuur 2.37 zie je de verdeling van de Nederlandse bevolking naar leeftijdsgroep in 2015.



figuur 2.37

- De staaf bij de nuljarigen is veel lager dan de staven ernaast. Verklaar dit verschil.
- Met behulp van de figuren 2.36 en 2.37 kun je de totale ziekenhuiskosten per leeftijdsgroep berekenen. Onderzoek met een berekening welke leeftijdsgroep de hoogste totale kosten heeft, de groep van 45-49 jaar of de groep van 75-79 jaar.

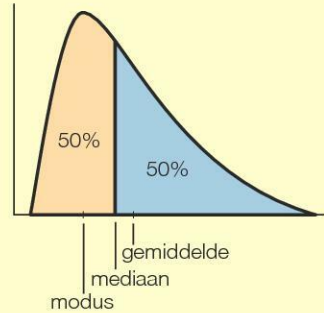
Zie het histogram in figuur 2.38.
Is de modus groter of kleiner dan de mediaan? Licht toe.



figuur 2.38

Theorie B Verdelingskrommen

Een histogram geeft een goed beeld van een frequentieverdeling. Maar in plaats van een histogram te tekenen kun je ook een globale grafiek van de verdeling schetsen. Zo'n grafiek heet een **verdelingskromme**. Zo hoort bij het histogram in figuur 2.38 de verdelingskromme hiernaast. Ook hier ligt de modus bij de top. De verticale lijn bij de mediaan verdeelt de oppervlakte onder de kromme in twee gebieden met gelijke oppervlakte. De mediaan is hier dus groter dan de modus. Omdat de verdeling rechts-scheef is, is het gemiddelde groter dan de mediaan.



figuur 2.39

Ook de **cumulatieve verdelingskromme** geeft een beeld van de verdeling. Is een verdelingskromme gegeven dan kun je daarbij een schets maken van de cumulatieve verdelingskromme en andersom.

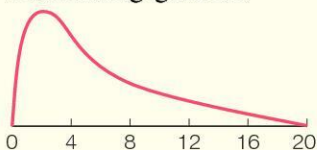
Voorbeeld

Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme in figuur 2.40.

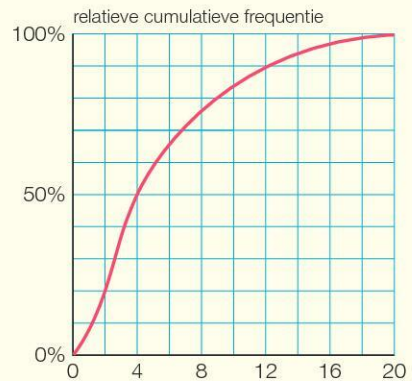
- Geef een schatting van de mediaan.
- Schets de bijbehorende verdelingskromme.
- Met wat voor soort verdeling heb je te maken?

Uitwerking

- Aflesen bij 50% geeft waarnemingsgetal 4. Dus de mediaan is 4.
- Je ziet in de gegeven figuur: in het begin is de kromme erg steil, dus zijn daar veel waarnemingsgetallen. Op het eind is de kromme minder steil, dus daar zijn weinig waarnemingsgetallen.



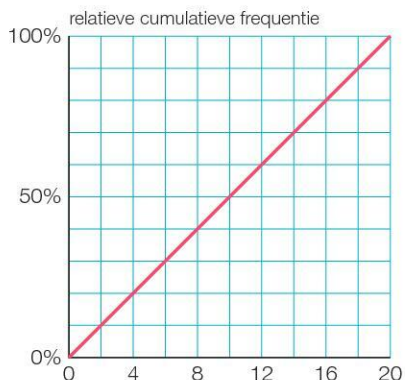
- Het is een rechts-scheve verdeling.



figuur 2.40

R63

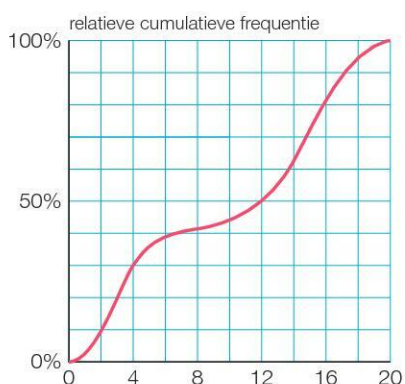

- a** Zie voorbeeld b.
 Licht toe dat bij het steilste stuk van de relatieve cumulatieve verdelingskromme een top van de verdelingskromme hoort.
- b** Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme in figuur 2.41.
 Met wat voor soort verdeling heb je te maken?



figuur 2.41

64

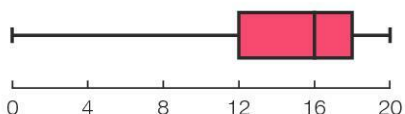

- Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme in figuur 2.42.
- a** Teken de bijbehorende boxplot.
- b** Schets de verdelingskromme die hoort bij figuur 2.42.
- c** Met wat voor soort verdeling heb je te maken?



figuur 2.42

65

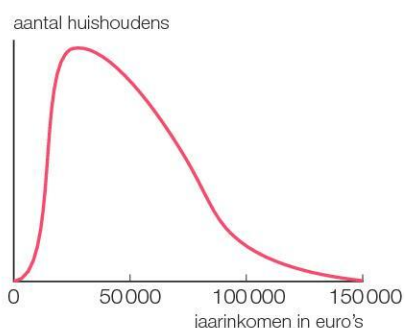

- Gegeven is de boxplot in figuur 2.43.
- a** Schets de bijbehorende verdelingskromme.
- b** Met wat voor soort verdeling heb je te maken?
- c** Hoe ligt het gemiddelde ten opzichte van de mediaan?



figuur 2.43

A66

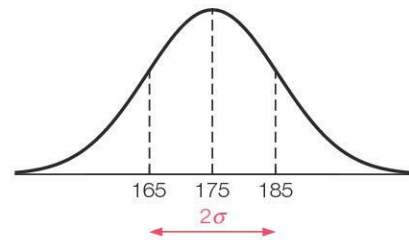

- De verdelingskromme in figuur 2.44 geeft informatie over de verdeling van de jaarinkomens van huishoudens in een land.
- a** Hoe ligt de mediaan ten opzichte van de modus bij deze verdeling?
- b** Schets de relatieve cumulatieve verdelingskromme.



figuur 2.44

In figuur 2.45 zie je een verdelingskromme bij een symmetrische verdeling. Het gemiddelde is 175 en de standaardafwijking $\sigma = 10$. Bij deze verdeling zit 68% van de waarnemingsgetallen tussen 165 en 185.

Hoeveel procent van de waarnemingsgetallen is groter dan 185?



figuur 2.45

Theorie C De normale verdeling

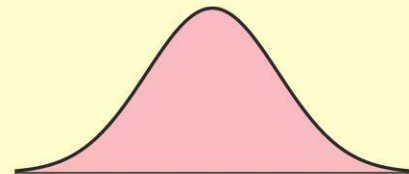
In figuur 2.46 is de verdelingskromme bij een bijzondere symmetrische verdeling getekend. Deze klokvormige kromme heet de **normaalkromme** en hoort bij de **normale verdeling**.

Bij de normale verdeling wordt het gemiddelde aangegeven met de Griekse letter μ . Spreek μ uit als mu.

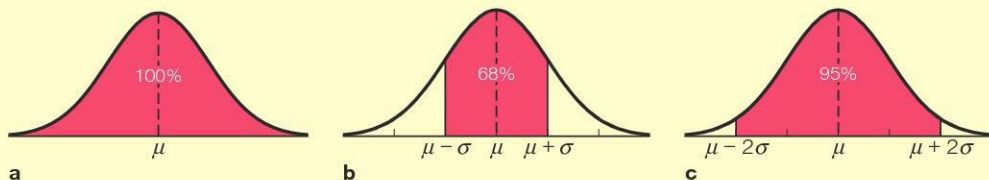
De totale oppervlakte onder de kromme is 100%.

De normale verdeling is zodanig gekozen dat ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen minder dan σ van het gemiddelde μ af ligt.

En ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt minder dan 2σ af van μ .



figuur 2.46 De normaalkromme



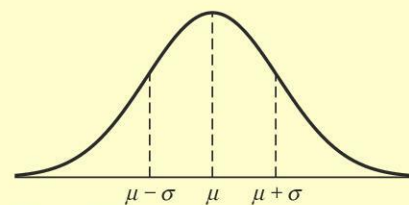
figuur 2.47

In figuur 2.48 is nogmaals een normaalkromme getekend.

Links van μ is de kromme stijgend. Je ziet dat de stijging links van $\mu - \sigma$ anders is dan de stijging tussen $\mu - \sigma$ en μ .

Links van $\mu - \sigma$ is de kromme **toenemend stijgend** en tussen $\mu - \sigma$ en μ is de kromme **afnemend stijgend**.

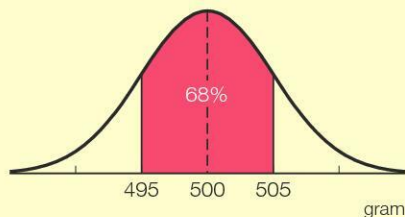
En zo is de kromme tussen μ en $\mu + \sigma$ **toenemend dalend** en rechts van $\mu + \sigma$ **afnemend dalend**.



figuur 2.48

Normale verdelingen komen veel voor in het dagelijks leven. Voorbeelden zijn de lengte van de Nederlandse man, het aantal branduren van een grote partij lampen van 12 watt en de gewichten van een groot aantal pakken koffie.

Figuur 2.49 hoort bij de gewichten van pakken koffie waarvan de inhoud gemiddeld 500 gram is. De standaardafwijking is 5 gram. De inhoud is normaal verdeeld en daarom heeft ongeveer 68% van de pakken een inhoud tussen 495 en 505 gram.



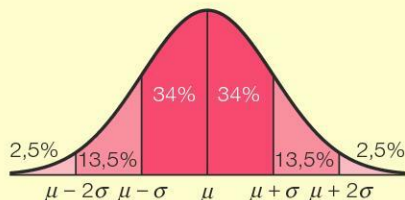
figuur 2.49

Omdat $\mu - 2\sigma = 500 - 2 \cdot 5 = 490$ en $\mu + 2\sigma = 500 + 2 \cdot 5 = 510$, heeft ongeveer 95% van de pakken een inhoud tussen 490 en 510 gram.

Uit de symmetrie van de normaalkromme volgen de percentages in de verschillende gebieden in figuur 2.50. Onthoud deze percentages.

Vuistregels bij de normale verdeling

- 68% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- 95% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$



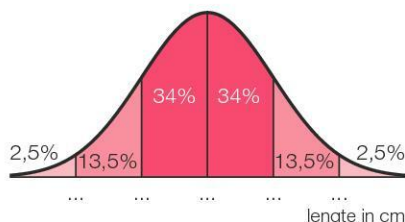
figuur 2.50

68 Van een groep volwassen vrouwen is de lengte normaal verdeeld met $\mu = 170$ cm en $\sigma = 5$ cm.

- a** Neem figuur 2.51 over en zet onder de horizontale as de juiste getallen.

Hoeveel procent van de vrouwen heeft volgens de vuistregels bij de normale verdeling een lengte

- b** tussen 165 en 180 cm
c minder dan 160 cm
d meer dan 175 cm
e tussen 160 en 170 cm?



figuur 2.51

69 In welk van de volgende gevallen is bij benadering sprake van een normale verdeling?

- a** Het jaarinkomen van de Nederlandse werknemers.
b De bloeddruk van de bejaarden in ons land.
c De leeftijd van de Nederlanders.
d De hoogte van de volgroeide eikenbomen op de Hoge Veluwe.
e De lengte van de telefoongesprekken op maandag.
f Het gewicht van kippeneieren uit een grote partij.

A70
☐◎*

Van 5000 appels is het gewicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 180 gram en een standaardafwijking van 11 gram. Gebruik bij de volgende vragen de vuistregels bij de normale verdeling.

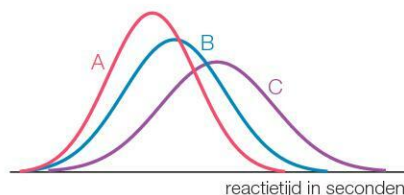
- a Hoeveel van deze appels wegen tussen 158 en 191 gram?
- b Hoeveel van deze appels zijn lichter dan 191 gram?
- c Wat weet je van de gewichten van de zwaarste 125 appels van deze partij?

71
☐◎*

Bij drie grote groepen mannen wordt van elke man de reactietijd gemeten.

De eerste groep bestaat uit 18-jarigen, de tweede uit 30-jarigen en de derde uit 60-jarigen.

- a Welke kromme hoort bij de 18-jarigen? En welke bij de 60-jarigen? Licht je antwoord toe.
- b In welke groep is de kans het grootst dat de reactietijd van een persoon meer dan een halve seconde van het gemiddelde afwijkt?

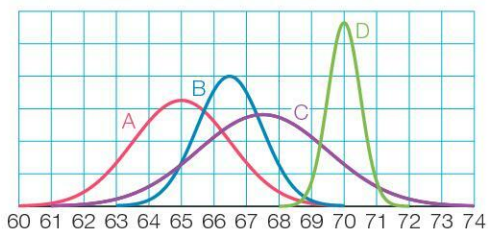


figuur 2.52

A72
☐◎*

Zie de normaalkrommen in figuur 2.53.

Geef bij elke kromme een schatting van het gemiddelde en van de standaardafwijking.



figuur 2.53

INFORMATIEF

De normale verdeling

Tallose beroemde geleerden hebben zich beziggehouden met de normale verdeling. Omstreeks 1730 gebruikte de Fransman Abraham de Moivre (1667-1754) als eerste de normale verdeling. Hij ontdekte dat vele kleine toevalligheden in de natuur merkwaardig genoeg tot mooie regelmatige verdelingen kunnen leiden. Ook de veelzijdige geleerde Gauss (1777-1855) werd gefascineerd door de normaalkromme en hij slaagde erin een formule op te stellen bij de kromme. Vandaar dat ook de naam Gauss-kromme gebruikt wordt. De Belg Adolphe Quetelet (1796-1874) ontdekte dat normaalkrommen goed gebruikt kunnen worden om menselijke kenmerken zoals lichaamslengte en voetslengte te beschrijven.



Carl Friedrich Gauss

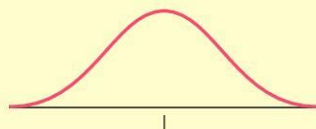
Terugblik

Verdelingen, centrummaten en spreiding

In de figuren hiernaast zie je voorbeelden van verdelingskrommen bij de volgende soorten verdelingen.

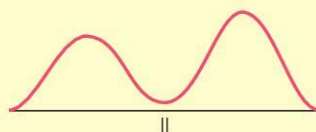
I symmetrische verdeling

Het gemiddelde, de modus en de mediaan vallen samen.



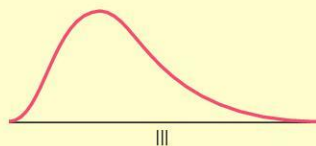
II tweetoppige verdeling

In de figuur hiernaast liggen het gemiddelde en de mediaan tussen de twee toppen.



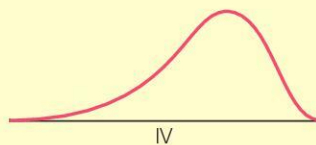
III rechts-scheve verdeling

Het gemiddelde en de mediaan liggen rechts van de top.



IV links-scheve verdeling

Het gemiddelde en de mediaan liggen links van de top.

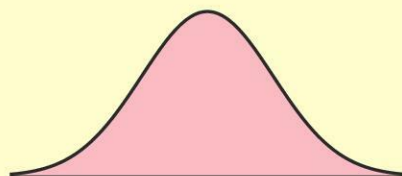
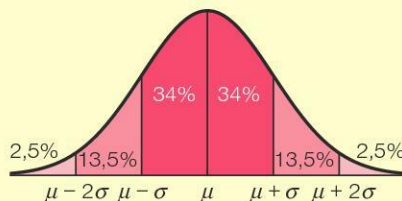


De normale verdeling

Heeft een symmetrische verdeling een klokvorm zoals hiernaast, dan is er sprake van een normale verdeling. De kromme heet normaalkromme. De top ligt boven het gemiddelde μ . De breedte van de kromme hangt af van de standaardafwijking σ .

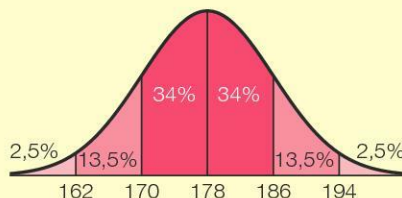
Bij een normale verdeling ligt

- 68% van alle waarnemingsgetallen tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- 95% van alle waarnemingsgetallen tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.



Bij een groep mannen, waarvan de lengte normaal verdeeld is met $\mu = 178$ cm en $\sigma = 8$ cm, hoort de verdeling hiernaast.

De percentages volgen uit de vuistregels bij de normale verdeling. Je ziet dat 47,5% van de mannen een lengte heeft tussen 162 en 178 cm.



2.6 Betrouwbaarheidsintervallen



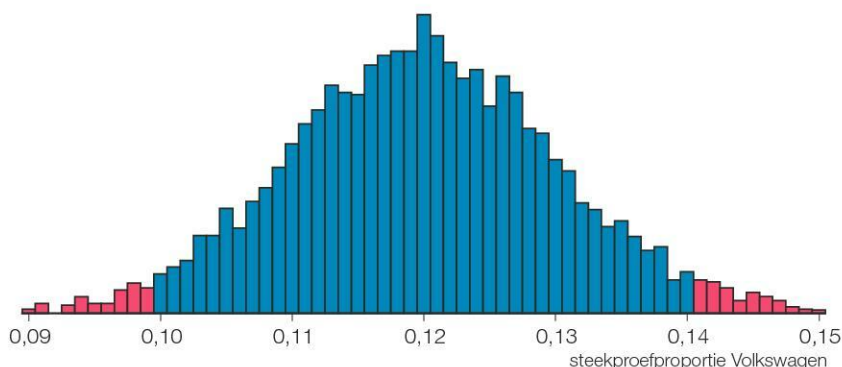
In deze opgave werk je met de module Steekproeven in Getal & Ruimte online.

In Nederland is 12% van het aantal personenauto's van het merk Volkswagen. Dus de populatieproportie van de Volkswagens is gelijk aan 0,12.

Noteer je van de eerste 100 personenauto's die je op een snelweg ziet het merk, dan is het echter niet gezegd dat hierbij precies 12 Volkswagens zijn. Het kunnen er ook meer of minder zijn.

- a Gebruik een simulatie om een steekproef van lengte 100 bij een populatieproportie van 0,12 te nemen.
Hoeveel Volkswagens vind je in de steekproef? Wat betekent dit voor de steekproefproportie?
- b Simuleer nog enkele keren een steekproef van lengte 100 bij een populatieproportie van 0,12 en noteer telkens de steekproefproportie.
Wat is de kleinste steekproefproportie in je simulatie? En de grootste?
- c Simuleer enkele keren een steekproef van lengte 1000 bij een populatieproportie van 0,12 en noteer telkens de steekproefproportie.
Wat is de kleinste steekproefproportie in je simulatie? En de grootste?
- d Kun je op grond van de uitkomsten bij b en c iets zeggen over de invloed van de steekproeflengte op de grenzen waartussen de steekproefproporties liggen?

In figuur 2.54 zie je het histogram dat een resultaat geeft van 5000 steekproeven van lengte 1000 bij een populatieproportie van 0,12.



figuur 2.54

- e Tussen welke grenzen ligt de steekproefproportie?
- f In de figuur is ook aangegeven tussen welke grenzen 95% van de steekproefproporties ligt.
Welke grenzen zijn dat?

Theorie A Betrouwbaarheidsintervallen voor populatieproportie

In deze paragraaf richten we ons op fase 4 van de statistische cyclus: Conclusies trekken. In figuur 2.53 van opgave 73 zie je dat het histogram lijkt op de normaalkromme. Door een groot aantal steekproeven met voldoende grote steekproeflengte te nemen zal elke steekproevenverdeling steeds meer gaan lijken op een normale verdeling.

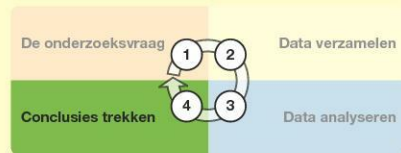
Omdat in het model van de normale verdeling volgens een van de vuistregels 95% van alle waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ weet je nu ook dat de standaardafwijking van de steekproefresultaten gelijk is

$$\text{aan } \frac{0,14 - 0,10}{2} = 0,02.$$

Voor de standaardafwijking van een steekproevenverdeling bestaat de

formule $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$. In deze formule is σ de standaardafwijking,

$\hat{p}$ de steekproefproportie en n de steekproefomvang.



De lengte van de steekproef wordt steekproeflengte en ook wel steekproefomvang genoemd.

Bij een steekproevenverdeling is de steekproefproportie $\hat{p}$ bij een voldoende grote steekproefomvang n bij benadering normaal verdeeld. Hierbij is het gemiddelde μ gelijk aan de populatieproportie.

Voor de standaardafwijking σ geldt $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

In opgave 73 gingen we ervan uit dat de populatieproportie bekend was en dat een flink aantal steekproeven werd genomen met een vaste steekproeflengte.

Deze situatie komt in de praktijk zelden voor. In de praktijk is juist vaak de populatieproportie niet bekend en wil men door middel van één steekproef hiervan een betrouwbare schatting krijgen.

Maar hoe groot moet deze steekproef zijn en hoe betrouwbaar is de schatting dan?

Als bij een onderzoek blijkt dat 60 van de 80 onderzochte tweelingen dezelfde favoriete sport te hebben, dan kunnen we niet zomaar zeggen dat 75% van alle tweelingen dezelfde favoriete sport heeft.

Omdat de standaardafwijking van de steekproevenverdeling gelijk is aan

$$\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{80}} = 0,0484...$$

is $2\sigma = 2 \cdot 0,0484... \approx 0,097$.

Hieruit volgt dat $\hat{p} - 2\sigma \approx 0,75 - 0,097 = 0,653$

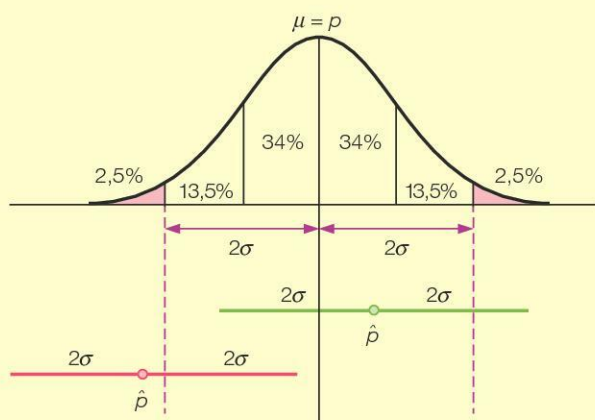
en $\hat{p} + 2\sigma \approx 0,75 + 0,097 = 0,847$.

We zeggen dat het **95%-betrouwbaarheidsinterval** $[0,653; 0,847]$ is. Dit wordt ook genoteerd als het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[65,3\%; 84,7\%]$.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is 4σ .

Hieronder lichten we toe wat de precieze betekenis is van een 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Neem je meerdere steekproeven uit een populatie, dan zullen de steekproefproporties niet steeds hetzelfde zijn. De meeste steekproefproporties zullen in de buurt van de populatieproportie liggen, maar er zullen er ook zijn die er ver vanaf liggen. De verdeling van deze steekproefproporties is bij benadering normaal verdeeld met $\mu = p$.



figuur 2.55

In figuur 2.55 zie je de normaalkromme bij deze verdeling, met daarin de percentages die je kent van de vuistregels bij de normale verdeling. Er zijn twee steekproefproporties $\hat{p}$ weergegeven. De lijnstukken waarvan de steekproefproporties het midden zijn, hebben een lengte van 4σ . Hierbij horen de intervallen $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$. Het groene interval bevat de populatieproportie p en het rode bevat p niet.

Krijg je bij een steekproef een $\hat{p}$ die tussen de stippellijnen ligt, dan ligt deze steekproefproportie minder dan 2σ van p af. In dat geval zal het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ de populatieproportie p bevatten. Uit een van de vuistregels voor de normale verdeling volgt dat dit in 95% van de steekproeven het geval is.

Neem je één steekproef, dan weet je niet zeker of het bij deze steekproef opgestelde interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ de populatieproportie p bevat. Je weet immers niet zeker of het verkregen interval hoort bij de 95% die p wel bevat of bij de 5% die p niet bevat. Daarom wordt het interval het 95%-betrouwbaarheidsinterval genoemd.

Voor een populatieproportie is het 95%-betrouwbaarheidsinterval gelijk aan $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$.

Hierin is $\hat{p}$ de steekproefproportie en σ de standaardafwijking.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval geeft aan dat bij herhaling van de procedure met steeds een nieuwe aselechte steekproef uit dezelfde populatie, 95% van de daarbij opgestelde intervallen de populatieproportie bevat.

Omdat de breedte van een betrouwbaarheidsinterval afhangt van de

standaardafwijking $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, zal de breedte van een

betrouwbaarheidsinterval afnemen bij een grotere steekproefomvang n . Immers, hoe groter n , hoe kleiner σ en dus hoe smaller het betrouwbaarheidsinterval.

Heb je bijvoorbeeld te maken met een steekproefproportie $\hat{p} = 0,25$, dan is bij een steekproefomvang $n = 100$ de standaardafwijking

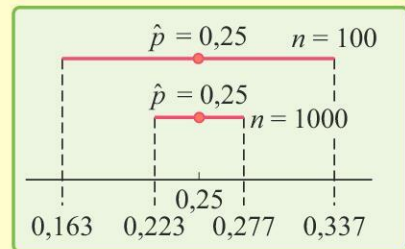
$$\sigma = \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{100}} = 0,0433... \text{ Dus het}$$

95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,25 - 2 \cdot 0,0433...; 0,25 + 2 \cdot 0,0433...]$ oftewel ongeveer $[0,163; 0,337]$.

Neem je echter steekproefomvang $n = 1000$,

$$\text{dan is } \sigma = \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{1000}} = 0,0136... \text{ en is het}$$

95%-betrouwbaarheidsinterval ongeveer $[0,223; 0,277]$.



Voorbeeld

Twee dagen voor de verkiezingen voor de Tweede Kamer wordt aan 1200 stemgerechtigde Nederlanders gevraagd of ze van plan zijn te gaan stemmen.

Van deze 1200 zeggen 756 inderdaad te gaan stemmen.

Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie stemgerechtigde Nederlanders die van plan zijn te gaan stemmen.

Uitwerking

$$\hat{p} = \frac{756}{1200} = 0,63 \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{0,63 \cdot 0,37}{1200}} = 0,0139...$$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,63 - 2 \cdot 0,0139... \approx 0,602 \text{ en}$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,63 + 2 \cdot 0,0139... \approx 0,658$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,602; 0,658]$.

Rond in een betrouwbaarheidsinterval af op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

74 Zie het voorbeeld.



Bij een andere peiling worden 600 stemgerechtigde Nederlanders ondervraagd. Hiervan zijn er 378 van plan te gaan stemmen.

- Toon aan dat de steekproefproportie ook nu gelijk is aan 0,63 en bereken de standaardafwijking. Rond af op vier decimalen.
- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie stemgerechtigde Nederlanders die van plan zijn te gaan stemmen.
- Vergelijk het 95%-betrouwbaarheidsinterval van vraag b met dat van het voorbeeld.
Welke conclusie trek je?

75 Je kunt ook een betrouwbaarheidsinterval opstellen met een andere betrouwbaarheid dan 95%. Met de kennis van dit hoofdstuk kun je bijvoorbeeld een 68%-betrouwbaarheidsinterval opstellen. Bedenk hoe dat moet en stel het 68%-betrouwbaarheidsinterval op bij het voorbeeld.

*

76 Een bioloog onderzoekt de verhouding tussen mannetjes en vrouwtjes van de bruine kikker in de bergmeren van de Pyreneeën. Van de 150 onderzochte kikkers blijken er maar liefst 117 een mannetje te zijn.



- Bereken de steekproefproportie van de mannetjeskikkers.
- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie mannetjeskikkers.



77 Jochem doet een onderzoek naar de kleur van de personenauto's die in Nederland rondrijden. Hij noteert van 575 auto's de kleur. Hiervan zijn er 47 rood.



- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rode auto's.
- Voor de proportie zwarte auto's is het 95%-betrouwbaarheidsinterval $[0,224; 0,296]$.
Bereken de standaardafwijking van het aantal zwarte auto's in de steekproef.

A78



Bij de presidentsverkiezingen in een land moet gekozen worden tussen de kandidaten A en B. In een peiling die voorafgaat aan de verkiezingen zeggen 935 mensen te gaan stemmen. Hiervan zeggen 487 op kandidaat A te gaan stemmen, de anderen kiezen voor kandidaat B. Onderzoek of je met een betrouwbaarheid van 95% kunt zeggen dat kandidaat A de verkiezingen zal gaan winnen.

A79
☐ ⊙ *

Lowlands is een driedaags muziekfestival dat jaarlijks wordt gehouden in Biddinghuizen (Flevoland). In 2014 waren er 55 000 bezoekers.

Bij een onderzoek worden 1250 festivalgangers ondervraagd. Het blijkt dat hiervan 225 in de provincie Zuid-Holland wonen.

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie bezoekers die in Zuid-Holland woont.



Bij het onderzoek waren 715 mannen en 535 vrouwen betrokken. Van de mannen woonden er 143 in de provincie Zuid-Holland.

- b** Bereken voor de mannen het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie die in Zuid-Holland woont.
- c** Bereken voor de vrouwen het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie die in Zuid-Holland woont.
- d** Zet de drie betrouwbaarheidsintervallen van a, b en c op volgorde van breedte van het interval.
Hoe kun je de verschillende breedtes verklaren?

Bij het onderzoek is ook gevraagd naar de leeftijd van de bezoekers. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie bezoekers met een leeftijd van 18-24 jaar was $[0,216; 0,264]$.

- e** Bereken de standaardafwijking van de proportie bezoekers met een leeftijd van 18-24 jaar.
- f** Bereken het aantal bezoekers in de steekproef met een leeftijd van 18-24 jaar.
- g** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aantal bezoekers met een leeftijd van 18-24 jaar.

A80
*

Naar aanleiding van de gemeenteraadsverkiezingen in de gemeente Lochem in 2018 heeft een lokaal dagblad een opiniepeiling gehouden onder de stemgerechtigden in Lochem. Het bijbehorend 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage kiezers dat voor D66 zegt te gaan stemmen is $[14,6\%; 19,4\%]$.

- a** Bereken het aantal stemgerechtigden in de steekproef van de opiniepeiling.

Na afloop van de verkiezingen blijkt D66 slechts 8,7% van de stemmen te hebben gekregen.

- b** Noem een mogelijke oorzaak voor de grote afwijking ten opzichte van het betrouwbaarheidsinterval.

Het gemiddelde geboortegewicht van Nederlandse jongens is normaal verdeeld met een gemiddelde van 3750 gram. De bijbehorende standaardafwijking is 480 gram.

- a In 2017 zijn in Nederland 87 159 jongens geboren.
Hoeveel van deze jongens waren naar verwachting zwaarder dan 4710 gram? Rond af op tientallen.
- b In 2017 werden in Oost-Nederland 18 138 jongens geboren.
Wat weet je van de gewichten van ongeveer 12 332 van deze jongens waarvan het gewicht het minst afwijkt van het gemiddelde gewicht?

Theorie B Betrouwbaarheidsintervallen voor populatiegemiddelde

Voor een onderzoek zijn allerlei gegevens verzameld van 36 pasgeboren jongens die na een normale zwangerschapsduur zijn geboren. Het gemiddelde geboortegewicht van deze jongens is 3722 gram en de standaardafwijking is 516 gram. Met deze gegevens is met 95% betrouwbaarheid een schatting te geven van het gemiddelde geboortegewicht van alle jongens die na een normale zwangerschapsduur zijn geboren.

Bij het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het **populatiegemiddelde** gebruiken we het **steekproefgemiddelde** $\bar{X}$, de **steekproefstandaardafwijking** S en de steekproefomvang n .

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right].$$

Omdat bij de geboortegewichten $\bar{X} = 3722$, $S = 516$ en $n = 36$ is het 95%-betrouwbaarheidsinterval

$$\left[3722 - 2 \cdot \frac{516}{\sqrt{36}}, 3722 + 2 \cdot \frac{516}{\sqrt{36}} \right] = [3550, 3894].$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval geeft aan dat met 95% zekerheid het gemiddelde geboortegewicht van de jongens tussen 3550 gram en 3894 gram ligt.

Er is verschil tussen de populatiestandaardafwijking σ en de steekproefstandaardafwijking S . Zie het informatief op de volgende bladzijde.

Voor een populatiegemiddelde is het 95%-betrouwbaarheidsinterval

gelijk aan $\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$.

Hierin is $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, S de steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval geeft aan dat het interval met 95% zekerheid het populatiegemiddelde bevat.

Voorbeeld

Van 40 meisjes van 11 maanden is het gemiddelde gewicht 9180 gram en de standaardafwijking 1060 gram.

Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gewicht van 11 maanden oude meisjes en geef aan welke informatie dat in deze context geeft.

Uitwerking

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$\left[9180 - 2 \cdot \frac{1060}{\sqrt{40}}, 9180 + 2 \cdot \frac{1060}{\sqrt{40}} \right] \approx [8845, 9515].$$

Met 95% zekerheid zal het gemiddelde gewicht van 11 maanden oude meisjes liggen tussen 8845 gram en 9515 gram.

INFORMATIEF

σ versus S

In de statistiek worden twee soorten standaardafwijkingen gebruikt: de populatiestandaardafwijking σ en de steekproefstandaardafwijking S . Welke je gebruikt hangt af van de situatie.

Wanneer je iets wil zeggen over de gehele populatie en de populatiestandaardafwijking σ is beschikbaar, dan gebruik je deze.

Soms is de populatiestandaardafwijking niet bekend. Als er in dat geval een steekproef wordt genomen, dan kun je de steekproefstandaardafwijking berekenen. Deze gebruik je dan om iets over de hele populatie te zeggen.

Hoe groter de steekproef, hoe kleiner het verschil is tussen σ en S .

In de opgaven gebruik je de gegeven standaardafwijking.

82
📅🔍*

Bij een steekproef van 65 basisschoolleerlingen met zwemdiploma A is de gemiddelde leeftijd waarop zij het diploma hebben gehaald gelijk aan 6 jaar en 9 maanden. De standaardafwijking is 10 maanden. Bereken in tienden van maanden nauwkeurig het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde leeftijd waarop basisschoolleerlingen het zwemdiploma A halen. Welke informatie geeft dat in deze context?



- 83** Bij een steekproef van lengte 35 is het 95% betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde $[170,2; 179,8]$.
Bereken het steekproefgemiddelde en de steekproefstandaardafwijking.

- A84** Van 39 meisjes en 43 jongens is bij een leeftijd van 6 maanden en 12 maanden de lengte genoteerd. Zie de tabel.

	aantal	lengte in cm			
		6 maanden		12 maanden	
		gem.	stand. afw.	gem.	stand. afw.
meisjes	38	66,2	2,8	73,6	3,2
jongens	43	68,0	3,1	76,8	3,4

Bij deze tabel kunnen vier 95%-betrouwbaarheidsintervallen worden opgesteld.
Onderzoek welk van de vier intervallen het smalst is.



- E85** Bij een steekproef waarbij de steekproefstandaardafwijking 10 is, is het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde $[178, 182]$.
Bereken de steekproefomvang.

Terugblik

Gemiddelde en standaardafwijking van proporties

Bij een steekproevenverdeling is de steekproefproportie $\hat{p}$ bij een voldoende grote steekproefomvang n bij benadering normaal verdeeld. Hierbij is het gemiddelde μ gelijk aan de populatieproportie. Voor de

standaardafwijking geldt $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

Betrouwbaarheidsintervallen voor populatieproportie

Voor een populatieproportie is het 95%-betrouwbaarheidsinterval gelijk aan $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$.

Bij een onderzoek naar de verkeersveiligheid van scooters zijn 760 volwassenen ondervraagd. Hiervan zijn 213 voor een helmplicht voor scooterrijders.

Bij dit onderzoek bereken je het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie volwassenen die voor een helmplicht voor scooterrijders zijn als volgt.

$$\hat{p} = \frac{213}{760} = 0,280... \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{0,280... \cdot 0,719...}{760}} = 0,016...$$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,280... - 2 \cdot 0,016... \approx 0,248 \text{ en}$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,280... + 2 \cdot 0,016... \approx 0,313$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,248; 0,313]$.

Dus met 95% zekerheid zal tussen 24,8% en 31,3% van de volwassenen voor een helmplicht voor scooterrijders zijn.

Betrouwbaarheidsintervallen voor populatiegemiddelde

Voor een populatiegemiddelde is het 95%-betrouwbaarheidsinterval

gelijk aan $\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$. Hierin is $\bar{X}$ het

steekproefgemiddelde, S de steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.

Van 40 jongens van 7 maanden is het gewicht bepaald. Het gemiddelde is 8,1 kg en de standaardafwijking 0,9 kg.

$$\text{Dus } \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{0,9}{\sqrt{40}} = 0,142... \text{ en dus } \bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 8,1 - 2 \cdot 0,142... \approx 7,82 \text{ en}$$

$$\bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 8,1 + 2 \cdot 0,142... \approx 8,38.$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde gewicht in kg van 7 maanden oude jongens is $[7,82; 8,38]$.

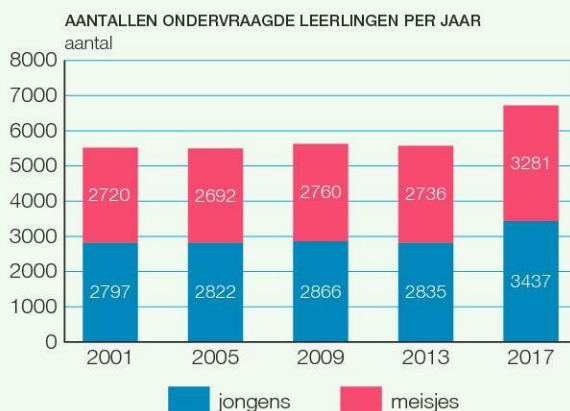
Eindopdracht Welbevinden op school

Het HSBC-onderzoek over gezondheid en welzijn van Nederlandse jongeren wordt elke vier jaar uitgevoerd. In het rapport worden niet alleen de gegevens van de laatste jaargang gepubliceerd, maar wordt ook gekeken naar hoe de gegevens zich in de tijd ontwikkelen. In onderstaande tabel zie je gegevens over jongens en meisjes in het voorgezet onderwijs van 2001 tot en met 2017. De gegevens in de tabel zijn percentages.

	jongens					meisjes				
jaartal	'01	'05	'09	'13	'17	'01	'05	'09	'13	'17
vindt school leuk	80,4	80,3	79,6	79,9	73,9	82,3	84,8	86,2	84,6	79,0
voelt veel druk door schoolwerk	12,8	16,3	17,4	22,9	29,3	19,0	22,1	24,1	32,6	42,0
spijbelt wel eens	-	15,0	14,4	10,4	13,1	-	13,6	9,4	8,2	11,8
vindt sfeer onder klasgenoten goed	75,6	84,5	84,8	88,8	84,3	77,5	83,9	87,6	86,8	83,4
vindt relatie met leraren goed	-	-	-	68,2	65,3	-	-	-	66,2	63,2
heeft vaak gepest	16,2	12,3	9,4	5,9	2,9	6,2	5,8	4,2	3,1	1,1
wordt vaak gepest	10,6	8,1	8,0	7,0	4,7	8,3	6,0	4,6	6,9	4,2

In de figuur hiernaast zie je hoeveel jongens en meisjes elk jaar zijn ondervraagd. We noemen verschillen tussen bijvoorbeeld twee jaartallen of tussen jongens en meisjes significant als de 95%-betrouwbaarheidsintervallen elkaar niet overlappen. Onderzoek met behulp van de tabel of er een significant verschil bestaat tussen

- jongens en meisjes in 2017 als het gaat om *voelt veel druk door schoolwerk*
- jongens die vaak worden gepest in de jaren 2009 en 2017
- jongens en meisjes samen in 2013 en jongens en meisjes samen in 2017 als het gaat om spijbelen.



Diagnostische toets

2.1 De statistische cyclus

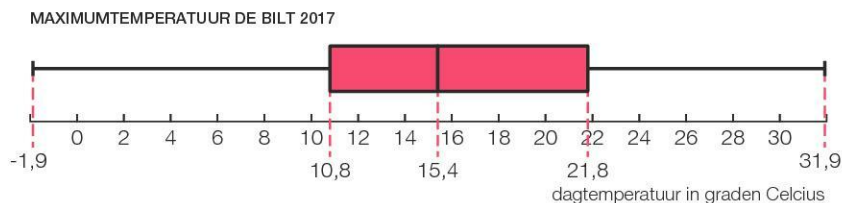
- 1 a Welke vier fasen onderscheiden we in de statistische cyclus?
- b Wat wordt bedoeld met een causaal verband? Geef een voorbeeld.
- c Aan welke twee eisen moet een representatieve steekproef voldoen?

2.2 Data verzamelen

- 2 a Omschrijf het verschil tussen een kwantitatieve en een kwalitatieve variabele. Geef van elk een voorbeeld.
- b Omschrijf het verschil tussen een discrete en een continue variabele. Geef van elk een voorbeeld.
- c Welke vier meetniveaus zijn er? Geef bij elk van de meetniveaus een variabele die op dat niveau is gemeten.
- d Wat is het verschil tussen de populatieproportie en de steekproefproportie? Wanneer zullen deze proporties weinig verschillen?

2.3 Centrum- en spreidingsmaten

- 3 In het jaar 2017 is elke dag de maximumtemperatuur in De Bilt genoteerd. Zie de boxplot in figuur 2.56.



figuur 2.56

- a Hoeveel dagen is in 2017 de maximumtemperatuur meer dan $21,8^{\circ}\text{C}$ geweest?
- b Onderzoek of de gemiddelde maximumtemperatuur meer dan 20°C kan zijn geweest.
- c In de Bilt noteert men elke dag de maximumtemperatuur waarbij men afrondt op één decimaal. De modus is $15,2^{\circ}\text{C}$. Hoe vaak is minimaal $15,2^{\circ}\text{C}$ genoteerd? Licht toe.
- d Volgens Lars is de spreidingsbreedte meer dan drie keer zo groot als de interkwartielafstand. Onderzoek of Lars gelijk heeft.
- e Geef een schatting van de standaardafwijking. Kies uit 1°C , 4°C , 9°C en 14°C .

2.4 Klassenindeling en polygonen

4 In een stad is gedurende een jaar bijgehouden hoeveel klachten over geluidsoverlast er per dag binnenkwamen. Zie de frequentietabel.

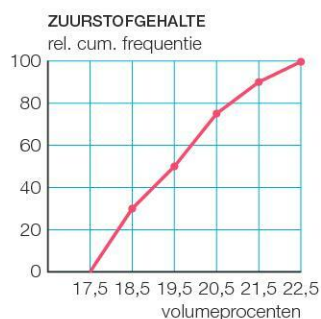
- a** Een jaar eerder waren er 6215 klachten over geluidsoverlast.
Kun je op basis van de tabel concluderen of er dit jaar meer klachten waren? Licht toe.
- b** In welke klasse ligt de mediaan?
- c** Geef de modale klasse.

KLACHTEN GELUIDSOVERLAST

aantal	frequentie
$[0, 5)$	2
$[5, 10)$	6
$[10, 15)$	55
$[15, 20)$	126
$[20, 25)$	135
$[25, 30)$	35
$[30, 35)$	6

5 Bij een medisch onderzoek meet men bij 240 mannen het zuurstofgehalte (in volumeprocenten) van het bloed. Zie de figuur hiernaast, waarbij de eerste klasse $[17,5; 18,5)$ is.

- a** Hoeveel mannen hebben minder dan 18,5% zuurstof in het bloed? En hoeveel mannen minstens 20,5%?
- b** Maak bij de figuur een frequentieverdeling met absolute frequenties.
- c** Teken een histogram met absolute frequenties.



figuur 2.57

2.5 Soorten verdelingen

6 Zie de boxplot in figuur 2.56. Schets bij deze figuur de verdelingskromme.

7 De inhoud van 750 potten pindakaas is normaal verdeeld met een gemiddeld gewicht van 360 gram en een standaardafwijking van 5 gram. Hoeveel van deze potten hebben volgens de vuistregels bij de normale verdeling een inhoud

- a** van meer dan 350 gram
- b** tussen 365 gram en 370 gram?

2.6 Betrouwbaarheidsintervallen

8 Bij een onderzoek naar de financiële situatie van studenten zijn 500 studenten ondervraagd. Van deze studenten hadden er 80 een betalingsachterstand.

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie studenten met een betalingsachterstand.

De gemiddelde betalingsachterstand van deze 80 studenten is 350 euro. De standaardafwijking is 108 euro.

- b** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde betalingsachterstand van studenten met een betalingsachterstand. Rond af op gehele euro's.

3

Rekenen en herleiden

Wat leer je?

- Werken met breuken en verhoudingen.
- Haakjes wegwerken en variabelen vrijmaken.
- Werken met procenten en de wetenschappelijke notatie.
- Rekenen met lengte, oppervlakte, inhoud, afstand, tijd en snelheid.
- Omzetten van verschillende eenheden.



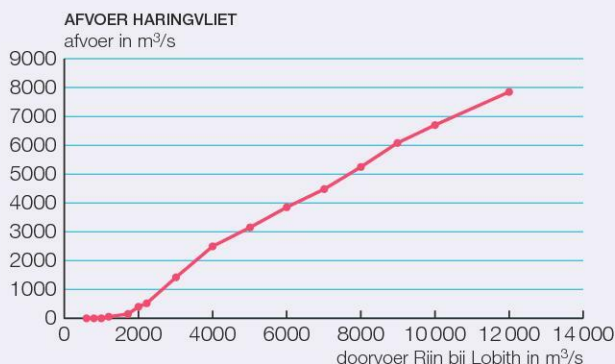
Beginopdracht De Haringvlietsluizen

De Haringvlietsluizen liggen tussen de Noordzee en de monding van het Haringvliet. Ze regelen het waterpeil op een manier die vergelijkbaar is met het open- en dichtdraaien van een kraan. De sluizen staan dan ook bekend als de kraan van Europa.

De Haringvlietdam, met daarin de Haringvlietsluizen, is gebouwd tussen 1956 en 1970. De dam beschermt tegen hoogwater van de zee en verbindt Goeree-Overflakkee met Voorne-Putten. De sluizen voeren een groot deel van het toegestroomde Rijn- en Maaswater af naar de Noordzee.

De afvoer in m^3/s door het Haringvliet is afhankelijk van de Maas- en Rijndoorvoer en de mate waarin de sluizen open staan.

De figuur hieronder geeft het verloop van de afvoer door het Haringvliet.



Bij doorvoeren van de Rijn tot ongeveer $1100 \text{ m}^3/\text{s}$ zijn de Haringvlietsluizen dicht en wordt er via die weg dus geen water afgevoerd. Naarmate de doorvoer van de Rijn groter wordt, worden de sluizen meer opengezet. Behalve door het Haringvliet wordt het water van de Rijn ook nog afgevoerd door de IJssel, het Noordzeekanaal en de Nieuwe Waterweg.

We bekijken de situatie dat de waterdoorvoer van de Rijn (bij Lobith) $7000 \text{ m}^3/\text{s}$ is en de waterdoorvoer van de Maas (bij Maastricht) $800 \text{ m}^3/\text{s}$.

- Hoeveel procent van de doorvoer van de Rijn en de Maas wordt in deze situatie door de Haringvlietsluizen afgevoerd?

De gemiddelde jaarlijkse waterdoorvoer van de Rijn is $2300 \text{ m}^3/\text{s}$ en de gemiddelde jaarlijkse waterdoorvoer van de Maas is $230 \text{ m}^3/\text{s}$. Per jaar wordt 30 miljard m^3 water door de Haringvlietsluizen afgevoerd.

- Hoeveel procent van de jaarlijkse doorvoer van het water van de Rijn en de Maas wordt door de Haringvlietsluizen afgevoerd?

Voorkennis Rekenen met breuken

Theorie A Breuken vermenigvuldigen en delen

Je weet $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$ en $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$.

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

Een speciale situatie heb je bij $3 \cdot \frac{2}{11}$.

$$\text{Bedenk dat } 3 \cdot \frac{2}{11} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{11}.$$

$$\text{Verder is } \frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{6}{7} \text{ en } 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{14} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}.$$

Bij het vermenigvuldigen van een breuk met zijn noemer

krijg je als uitkomst de teller. Zo is $3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

In één keer $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$. En dus $5 \cdot \frac{3}{5} = 3$ en $8 \cdot \frac{7}{8} = 7$.

$$1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \text{ dus } 6 \cdot 1\frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

$$\text{Verder is } 1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

$$\text{En } 7 \cdot 3\frac{1}{7} = 7 \cdot \frac{22}{7} = 22.$$

Haal de helen eruit.

breuk = $\frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$
Vereenvoudig breuken
zo ver mogelijk.
Zo is $\frac{6}{28} = \frac{3}{14}$.

noemer $\times$ breuk = teller
Zo is $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$.

Afspraak

- Vereenvoudig breuken zo ver mogelijk.
- Haal zo mogelijk de helen uit een breuk.

Voorbeeld

Bereken zonder rekenmachine.

a $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9}$

b $9 \cdot 4\frac{1}{9}$

c $1\frac{1}{5} \cdot 1\frac{3}{4}$

Uitwerking

a $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$

Deel teller en noemer door 3.

b $9 \cdot 4\frac{1}{9} = 9 \cdot \frac{37}{9} = 37$

Een breuk vermenigvuldigen met zijn noemer geeft de teller.

c $1\frac{1}{5} \cdot 1\frac{3}{4} = \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{42}{20} = \frac{21}{10} = 2\frac{1}{10}$

Haal de helen uit $\frac{21}{10}$.

Bij $\frac{(\frac{3}{7})}{8}$ is de teller $\frac{3}{7}$ en de noemer 8. Vermenigvuldig je de teller en de noemer met 7, dan krijg je $\frac{(\frac{3}{7})}{8} = \frac{\frac{3}{7} \cdot 7}{8 \cdot 7} = \frac{3}{8 \cdot 7} = \frac{3}{56}$.

Bij $\frac{5}{(\frac{2}{3})}$ is de teller 5 en de noemer $\frac{2}{3}$. Vermenigvuldig je de teller en noemer met 3, dan krijg je $\frac{5}{(\frac{2}{3})} = \frac{5 \cdot 3}{\frac{2}{3} \cdot 3} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$.

Je kunt bij $\frac{5}{(\frac{2}{3})}$ ook de regel ‘delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk’ gebruiken.

Je krijgt $\frac{5}{(\frac{2}{3})} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$.

1 Bereken zonder rekenmachine.

a $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{11}$

d $12 \cdot \frac{5}{12}$

g $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{9} \cdot 3$

b $7 \cdot \frac{2}{19}$

e $3 \cdot \frac{1}{3}$

h $\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$

c $8 \cdot \frac{3}{8}$

f $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{9}$

i $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3}$

2 Bereken zonder rekenmachine.

a $6 \cdot 1\frac{1}{6}$

c $8 \cdot 2\frac{1}{2}$

e $\frac{1}{10} \cdot 25 \cdot \frac{1}{2}$

b $\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{3}$

d $\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot 4$

f $1\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4}$

3 Bereken zonder rekenmachine.

a $\frac{(\frac{2}{9})}{5}$

b $\frac{6}{(\frac{3}{4})}$

c $\frac{(\frac{5}{6})}{4} \cdot \frac{3}{(\frac{2}{5})}$

Theorie B Breuken optellen en aftrekken

Breuken met gelijke noemers heten gelijknamig.

Gelijknamige breuken kun je direct optellen en aftrekken.

$$\text{Dus } \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ en } \frac{7}{15} - \frac{2}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

Bij het optellen en aftrekken van $\frac{4}{9}$ en $\frac{2}{11}$ maak je de breuken eerst gelijknamig.

$$\text{Je krijgt } \frac{4}{9} + \frac{2}{11} = \frac{44}{99} + \frac{18}{99} = \frac{62}{99} \text{ en } \frac{4}{9} - \frac{2}{11} = \frac{44}{99} - \frac{18}{99} = \frac{26}{99}.$$

De nieuwe noemer wordt $9 \cdot 11$.

Bij het optellen van $\frac{4}{9}$ en $\frac{2}{15}$ is het niet nodig als

nieuwe noemer $9 \cdot 15$ te nemen, want 9 en 15 hebben de

gemeenschappelijke factor 3. Neem als nieuwe noemer $\frac{9 \cdot 15}{3} = 45$.

$$\text{Dus } \frac{4}{9} + \frac{2}{15} = \frac{20}{45} + \frac{6}{45} = \frac{26}{45}.$$

$$5 \cdot 9 = 45$$

$$3 \cdot 15 = 45$$

4 Bereken zonder rekenmachine.

a $\frac{2}{15} + \frac{1}{5}$

c $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$

e $\frac{1}{14} \cdot \left(\frac{5}{13} + \frac{1}{3} \right)$

b $\frac{4}{7} - \frac{1}{14}$

d $1\frac{1}{3} + 2\frac{3}{4}$

f $\frac{2}{3} \cdot \left(5\frac{1}{4} - 4\frac{1}{3} \right)$

3.1 Breuken en verhoudingen

01
☐ ⊗ *

Een computervirus vernietigt de gegevens op een harde schijf. De eerste dag vernietigt het de helft van de schijf. Van het overgebleven deel vernietigt het de tweede dag $\frac{1}{3}$ deel, daarna vernietigt het $\frac{1}{4}$ deel van het dan nog overgebleven deel en ten slotte $\frac{1}{5}$ deel van het laatst overgebleven deel. Het hoeveelste deel van de harde schijf is nu nog *niet* vernietigd?



02
☐ ⊗ *

Net als $3 \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{11}$ is $3 \cdot \frac{a}{b} = \frac{3a}{b}$.

Schrijf $\frac{3}{b} \cdot a$ en $p \cdot q \cdot \frac{1}{r}$ als één breuk.

Theorie A Vermenigvuldigen en delen van breuken

Bij het vermenigvuldigen van breuken gebruik je de volgende regels.

$$\left| \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD} \text{ en } A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C} = \frac{A}{C} \cdot B = A \cdot B \cdot \frac{1}{C} \text{ en } B \cdot \frac{A}{B} = A \right|$$

De rekenregels voor breuken gelden ook bij het vermenigvuldigen van breuken waarin letters voorkomen.

$$\text{Dus } \frac{3}{a} \cdot \frac{5}{b} = \frac{15}{ab}, \frac{2a}{5} \cdot \frac{3b}{7} = \frac{6ab}{35} = \frac{6}{35}ab, 5 \cdot \frac{2a}{b} = \frac{10a}{b} \text{ en } a \cdot \frac{3b}{a} = 3b.$$

Bij het delen door een breuk gebruik je de volgende regel.

$$\left| A : \frac{B}{C} = A \cdot \frac{C}{B} \right|$$

Zo is de formule $G = \frac{2a}{3b} : \frac{5}{b}$ als volgt te herleiden.

$$G = \frac{2a}{3b} : \frac{5}{b} = \frac{2a}{3b} \cdot \frac{b}{5} = \frac{2ab}{15b} = \frac{2}{15}a$$

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Voorbeeld

Herleid.

a $(a-1) \cdot \frac{2b+1}{a-1}$

b $\frac{2}{a} : \frac{a}{a-1}$

c $2 \cdot \frac{5}{a} \cdot \frac{8-a}{3}$

Uitwerking

a $(a-1) \cdot \frac{2b+1}{a-1} = 2b+1$

b $\frac{2}{a} : \frac{a}{a-1} = \frac{2}{a} \cdot \frac{a-1}{a} = \frac{2(a-1)}{a^2} = \frac{2a-2}{a^2}$

c $2 \cdot \frac{5}{a} \cdot \frac{8-a}{3} = \frac{2 \cdot 5 \cdot (8-a)}{3a} = \frac{10(8-a)}{3a} = \frac{80-10a}{3a}$

haakjes wegwerken

$$a(b+c) = ab+ac$$

$$(a+b)c = ac+bc$$

3 Herleid.

a $p \cdot \frac{2p+1}{p}$

c $7 \cdot \frac{2a}{b} \cdot \frac{a-1}{3b}$

e $3 \cdot \frac{2}{p} \cdot \frac{1-p}{p}$

b $\frac{5}{q} \cdot \frac{3-q}{3q}$

d $\frac{4}{a} : \frac{a}{3-a}$

f $\frac{2+a}{b} \cdot \frac{3a}{b-1}$

4 Herleid.

a $\frac{3}{a} \cdot \frac{4}{a-1}$

c $3 \cdot \frac{5a}{b} \cdot \frac{2a-4}{b}$

e $8 \cdot \frac{3}{a} \cdot \frac{10-a}{1-a}$

b $\frac{6}{p} : \frac{p+1}{5-p}$

d $6a : \frac{a}{7-b}$

f $\frac{x+5}{y} \cdot \frac{3x}{y-2}$

5 Je weet dat bij ‘delen door een breuk’ hoort ‘vermenigvuldigen met het

***** omgekeerde van die breuk’, dus $A : \frac{B}{C} = A \cdot \frac{C}{B}$.

Om dit aan te tonen schrijf je $A : \frac{B}{C}$ als $\frac{A}{(\frac{B}{C})}$ en laat je zien dat dit gelijk is aan $A \cdot \frac{C}{B}$.

Toon op deze manier aan dat geldt $A : \frac{B}{C} = A \cdot \frac{C}{B}$.

E6 Bereken $(1+\frac{1}{2}) \cdot (1+\frac{1}{3}) \cdot (1+\frac{1}{4}) \cdot (1+\frac{1}{5}) \cdot \dots \cdot (1+\frac{1}{1001})$.

A7


Herleid.

a $\frac{4x+1}{2x} \cdot 2x$

c $\frac{4}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{3a-1}{a}$

e $3a : \frac{3a+1}{2a-1}$

b $\frac{5}{p+1} : \frac{q}{8-q}$

d $\frac{a}{3} \cdot \frac{a-1}{4} \cdot \frac{5}{a+1}$

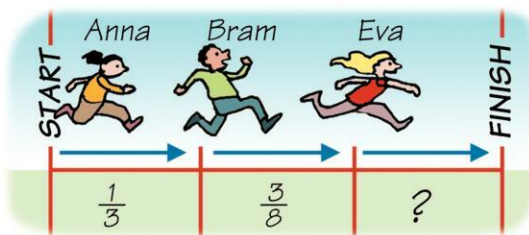
f $6a \cdot \frac{4a-1}{6a}$

O8


Anna, Bram en Eva doen mee aan een estafeteloop voor het goede doel.

Ze spreken af dat Anna $\frac{1}{3}$ deel van het traject aflegt en Bram $\frac{3}{8}$ deel.

Welk deel neemt Eva voor haar rekening?



O9


Hieronder worden telkens twee breuken herleid tot één breuk. Er staan drie mogelijke antwoorden achter. Kies het juiste antwoord.

a $\frac{5}{a} + \frac{4}{a}$ kies uit

I $\frac{9}{2a}$

II $\frac{9}{a}$

III $\frac{9}{a^2}$

b $\frac{5}{ab} + \frac{6}{a^2b}$ kies uit

I $\frac{11}{a^2b}$

II $\frac{11}{a^3b^2}$

III $\frac{5a+6}{a^2b}$

c $3p - \frac{2}{p}$ kies uit

I p

II $\frac{1}{p}$

III $\frac{3p^2-2}{p}$

d $\frac{4}{3x} - \frac{5}{4x}$ kies uit

I $\frac{1}{12x}$

II $\frac{1}{x}$

III $\frac{1}{12x^2}$

Theorie B Optellen en aftrekken van breuken

Gelijknamige breuken kun je direct optellen en aftrekken. Je gebruikt de volgende regels.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B} \text{ en } \frac{A}{B} - \frac{C}{B} = \frac{A-C}{B}$$

Bij het optellen van breuken die niet gelijknamig zijn gebruik je de volgende regels.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD} \text{ en } \frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD-BC}{BD}$$

Zo is $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = \frac{2b}{ab} + \frac{3a}{ab} = \frac{3a+2b}{ab}$ en $\frac{2}{3a} + \frac{3}{a} = \frac{2}{3a} + \frac{9}{3a} = \frac{11}{3a}$.

De nieuwe noemer wordt ab .

Neem als nieuwe noemer $3a$.

Voorbeeld

Herleid tot één breuk.

a $\frac{5}{2x} + \frac{7}{3x}$

b $\frac{1}{a^2b} - \frac{1}{ab^2}$

c $3x - \frac{5}{x^2}$

Uitwerking

a $\frac{5}{2x} + \frac{7}{3x} = \frac{15}{6x} + \frac{14}{6x} = \frac{29}{6x}$

b $\frac{1}{a^2b} - \frac{1}{ab^2} = \frac{b}{a^2b^2} - \frac{a}{a^2b^2} = \frac{b-a}{a^2b^2}$

c $3x - \frac{5}{x^2} = \frac{3x^3}{x^2} - \frac{5}{x^2} = \frac{3x^3 - 5}{x^2}$

$$3x = \frac{3x}{1} = \frac{3x^3}{x^2}$$

We herinneren je aan de volgende afspraak.

Afspraak

Vereenvoudig breuken zo ver mogelijk.

Haal zo mogelijk de helen uit een breuk.

Dus $\frac{2ab}{3ac} = \frac{2b}{3c}$, $\frac{2ab}{3a} = \frac{2b}{3} = \frac{2}{3}b$ en $\frac{15pq}{4q} = \frac{15p}{4} = 3\frac{3}{4}p$.



Deel teller en noemer door de gemeenschappelijke factor a .

10 Herleid tot één breuk.



a $\frac{6}{a} + \frac{3}{a}$

d $\frac{3}{2a} - \frac{2}{3a}$

g $2 + \frac{1}{x}$

b $\frac{5}{2b} - \frac{3}{2b}$

e $\frac{1}{ab} - \frac{1}{b}$

h $3a - \frac{2}{a}$

c $\frac{1}{2x} + \frac{2}{x}$

f $\frac{a}{b} - \frac{1}{a}$

i $5a - \frac{6}{a^2}$

11 Herleid.



a $\frac{3a}{6b}$

c $\frac{4ab^2}{5ab}$

e $\frac{6x^2y}{2x} + \frac{10x^3y^2}{5x^2y}$

b $\frac{10pq}{5q}$

d $\frac{20p^2q^2}{3p^2}$

f $\frac{24a^2b^2}{4a} - \frac{(3ab)^3}{a^2b}$

A12 Herleid tot één breuk.



a $\frac{1}{p} + 2p \cdot \frac{3q}{5p^2}$

c $\frac{xy}{2x^2} \cdot (y+1) - \frac{3}{x}$

e $(2a+1) \cdot \frac{5a}{2a+1} + \frac{1}{a}$

b $\frac{a}{3} : \frac{2c}{b} - \frac{a}{c}$

d $\frac{p}{2q} + \frac{p}{q} : \frac{2p^2}{3q}$

f $\frac{1}{p} \cdot \frac{2}{q} \cdot \frac{pq}{q+1} - \frac{p}{q+1}$

A13 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.



a $A = \frac{2}{x-3} - \frac{4}{3x}$ **b** $B = 5 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}$ **c** $C = \frac{6}{a} \cdot \frac{5}{a+b} : \frac{4}{a+b}$

E14 In een vijver zwemmen rode en gele karpers. Twee vijfde van de karpers is geel, de rest is rood. Driekwart van de gele karpers is een vrouwtje. In totaal zijn er evenveel vrouwtjeskarpers als mannetjeskarpers. Welk deel van de totale karperpopulatie bestaat uit rode mannetjes?

O15 Anna, Bram en Eva doen mee aan een estafetteloop van in totaal 24 km. Ze spreken af dat ze de afstand zullen verdelen in de verhouding 1 : 2 : 3 waarbij Anna de kortste afstand loopt en Eva de langste. Ze vragen zich af hoeveel km ieder moet afleggen. Anna zegt: "Deel eerst de 24 km door 6, want $1 + 2 + 3 = 6$." Licht toe dat dit een goede aanpak is en bereken hiermee hoeveel km ieder moet afleggen.

Theorie C Verhoudingen

Jesse verdient met zijn bijbaantje €6,50 per uur. Hierbij hoort de volgende verhoudingstabel.

aantal gewerkte uren	1	2	3	8	12
bedrag in euro's	6,50	13	19,50	52	78

Diagram illustrating the relationship between hours worked and amount earned:

- From 1 to 2 hours: $\times 2$
- From 2 to 3 hours: $\times 2$
- From 3 to 8 hours: $\times 4$
- From 8 to 12 hours: $\times 4$

We zeggen dat de **verhouding** tussen het aantal gewerkte uren en het bedrag in euro's steeds hetzelfde is. De verhouding 2 : 13 spreek je uit als twee staat tot dertien. Door 8 : 52 en 12 : 78 te vereenvoudigen zie je dat deze verhoudingen gelijk zijn aan 2 : 13.

Vereenvoudig een verhouding zo ver mogelijk.

In een verhoudingstabel hebben de getallen die onder elkaar staan allemaal dezelfde verhouding.

Om een bedrag van 225 euro te verdelen in de verhouding 2 : 3, maak je eerst $2 + 3 = 5$ gelijke delen. Eén deel is $\frac{1}{5} \cdot 225 = 45$ euro, dus de bedragen zijn $2 \cdot 45 = 90$ euro en $3 \cdot 45 = 135$ euro.

Ook 2 : 5 : 8 is een verhouding.

Om een bedrag van 360 euro in deze verhouding te verdelen, maak je eerst $2 + 5 + 8 = 15$ gelijke delen. Eén deel is $\frac{1}{15} \cdot 360 = 24$ euro, dus de bedragen zijn $2 \cdot 24 = 48$ euro, $5 \cdot 24 = 120$ euro en $8 \cdot 24 = 192$ euro.

De bedragen zijn ook in één keer als volgt te berekenen, namelijk $\frac{2}{15} \cdot 360 = 48$ euro, $\frac{5}{15} \cdot 360 = 120$ euro en $\frac{8}{15} \cdot 360 = 192$ euro.

Voorbeeld

Op een school komen de leerlingen uit de plaatsen A, B en C in de verhouding $8 : 7 : 5$. Er zijn 68 leerlingen meer uit B dan uit C. Hoeveel leerlingen komen uit plaats A?

Aanpak

Bedenk dat B zeven delen en C vijf delen heeft, dus B heeft twee delen meer dan C.

Uitwerking

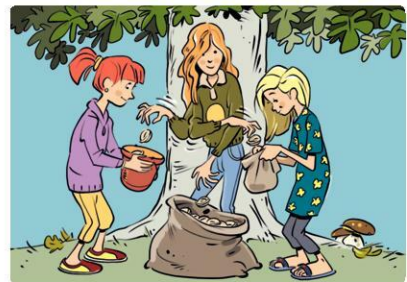
Twee delen zijn 68 leerlingen, dus één deel is 34 leerlingen.
Het aantal leerlingen uit A is $8 \cdot 34 = 272$.

- 16** Bij een estafeteloop hebben Anna, Bram en Eva de afstand verdeeld in de verhouding $4 : 5 : 7$ waarbij Anna de kortste afstand loopt en Eva de langste. Eva loopt 4,5 km meer dan Anna. Hoeveel km loopt Bram in deze estafeteloop?

- 17** a In Qatar wonen 47 vrouwen per 100 mannen. Qatar heeft een populatie van 2,32 miljoen inwoners. Hoeveel vrouwen wonen er in Qatar?
b In China zijn er 6 mannen per 5 vrouwen. Het totale aantal inwoners is 1,38 miljard. Hoeveel mannen telt China meer dan vrouwen?

- 18** * Twee even grote flessen zijn geheel gevuld met een mengsel van water en sap. De verhouding van water en sap in de eerste fles is $2 : 1$ en in de tweede fles $4 : 1$. Beide flessen worden leeggegoten in dezelfde karaf. Wat wordt de verhouding van water en sap in de karaf?

- A19** a In een dorp is de verhouding van het aantal volwassen mannen tot het aantal volwassen vrouwen gelijk aan $2 : 3$. De verhouding van het aantal volwassen vrouwen tot het aantal kinderen is gelijk aan $6 : 1$. Wat is de verhouding van het aantal volwassenen (mannen en vrouwen) tot het aantal kinderen?
b Olivia, Ina en Nathalie hebben 770 noten geraapt. Ze verdelen ze in de verhouding van hun leeftijden. Voor iedere 3 noten die Olivia kreeg, kreeg Ina er 4. Voor iedere 7 noten die Nathalie kreeg, kreeg Ina er 6. Hoeveel noten kreeg de jongste?



Stuw in rivier

Stuwen worden in rivieren aangelegd om waterstromen te sturen. Er zijn vaste stuwen en er zijn regelbare stuwen. Ze worden gebruikt om het water in hoger gelegen gebieden vast te houden of juist om te voorkomen dat lager gelegen gebieden overstromen. Verder wordt met stuwen gegarandeerd dat de scheepvaart een minimale waterstand heeft. In Nederland worden stuwen ook gebruikt om water uit de Rijn via de IJssel naar het IJsselmeer te voeren.

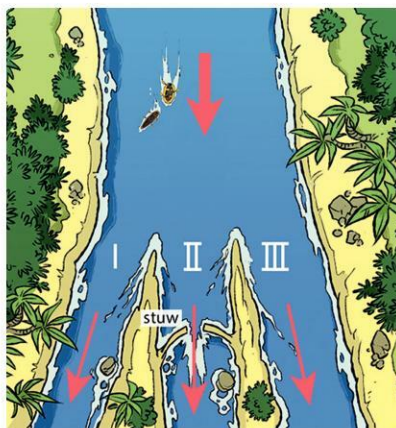


- A20** Een rivier splitst zich in drie takken, zie figuur 3.1. Bij een aanvoer van minder dan $2400 \text{ m}^3/\text{s}$ verhouden de afvoeren in de takken I, II en III zich als 3 : 4 : 5.

- a** Bereken de afvoeren in I, II en III als er $2340 \text{ m}^3/\text{s}$ wordt aangevoerd.

De afvoer in tak II mag niet meer zijn dan $800 \text{ m}^3/\text{s}$. Als deze afvoer meer dreigt te worden, dan zorgt de stuw in II ervoor dat de afvoer daar $800 \text{ m}^3/\text{s}$ is. De afvoeren in I en III verhouden zich dan als 3 : 5.

- b** Bereken de afvoeren in I, II en III als er $3000 \text{ m}^3/\text{s}$ wordt aangevoerd.
c Bereken de aanvoer als via tak III de afvoer $1500 \text{ m}^3/\text{s}$ is.



figuur 3.1

- 21** Tabel I hieronder is een verhoudingstabel. Bereken x en y .

TABEL I

12	18	y
32	x	80

In een verhoudingstabel zijn de kruisproducten gelijk.

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

TABEL II

a	10	18	r
b	15	p	$r + 10$
c	25	q	s

- 22** Tabel II hierboven is een verhoudingstabel bij de verhouding $a : b : c$.
***** Bereken p , q , r en s .

Autospuiterij Vermalen is gespecialiseerd in het opknappen van oldtimers.

Onderdeel daarvan is het aanbrengen van een laklaag met verharder en thinner.

De verhouding van lak, verharder en thinner is $10 : 5 : 2$. Zo ontstaat een lakmengsel dat goed te spuiten is en bovendien snel verhardt.

Om een bepaalde kleur lakmengsel te krijgen kan Vermalen eerst meerdere kleuren lak met elkaar mengen. Tot slot worden de verharder en thinner toegevoegd.



- a** Een klant wil een speciale kleur groen voor zijn Cadillac Eldorado.

Deze kleur groen krijg je door blauwe en gele lak te mengen in de verhouding $3 : 2$.

Bereken hoeveel liter gele lak Vermalen moet gebruiken om 8,5 liter lakmengsel te krijgen.

- b** Voor het overspuiten van een Porsche 914 is 6,8 liter lakmengsel nodig. De kleur lak krijgt Vermalen door rood, groen en geel te mengen in de verhouding $5 : 1 : 2$. Vermalen heeft nog slechts één blik met 2,5 liter rode lak in de zaak.

Onderzoek of Vermalen meer rode lak moet kopen.

- c** Vermalen heeft 5,1 liter lakmengsel nodig voor een Volkswagen Beetle Convertible uit 1978. Voor een bijzonder eindresultaat wil hij voor deze klus een lakmengsel met 25% minder thinner gebruiken dan normaal. Vermalen berekent dat hij dus 0,45 liter thinner nodig heeft. Laat met een berekening zien dat dit klopt en bereken hoeveel liter verharder hij nodig heeft.

- d** Vermalen heeft een emmer met 2 liter paarse lak gemaakt door rode en blauwe lak te mengen in de verhouding $3 : 5$. Hij heeft ook een emmer met 3 liter groene lak gemaakt door blauwe en gele lak te mengen in de verhouding $3 : 1$. De klant besluit op het laatste moment dat hij zijn Citroën ID20 Break Familiale toch in één kleur wil, namelijk met rood, blauw en geel in de verhouding $3 : 7 : 2$. Vermalen besluit de boel te redden door de twee emmers bij elkaar te gooien en rode en gele lak toe te voegen.

Bereken hoeveel rode en hoeveel gele lak Vermalen moet toevoegen om de verhouding juist te krijgen.

In een land heeft het parlement 150 zetels. Er zijn 5 politieke partijen, die we van groot naar klein A, B, C, D en E noemen. Bij een parlamentsverkiezing stemmen de mensen in de verhouding $a : b : c : d : e$ op deze partijen.

- a** Neem aan dat de verhouding $5 : 4 : 3 : 2 : 1$ is.
 Licht toe dat er dan twee mogelijkheden zijn om een meerderheid te vormen met twee partijen. Welke mogelijkheden zijn dat en hoeveel zetels horen hierbij?
- b** Hoeveel partijen zijn er minstens nodig om een meerderheid te vormen als de verhouding $10 : 9 : 8 : 7 : 6$ is? Licht je antwoord toe.
- c** Onderzoek wat de verhouding $a : b : c : d : e$ is als er steeds 5 zetels zitten tussen twee opeenvolgende partijen.
- d** De partijen A en E hebben samen een meerderheid. De verhouding $a : e$ is $16 : 1$ en de verhouding $b : c : d$ is $29 : 19 : 17$.
 Hoeveel zetels heeft partij A?



Terugblik

Breuken vermenigvuldigen en delen

Voor het vermenigvuldigen en delen van breuken gebruik je de regels

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}, \quad A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C} = \frac{A}{C} \cdot B = A \cdot B \cdot \frac{1}{C}, \quad B \cdot \frac{A}{B} = A \text{ en}$$

$$A : \frac{B}{C} = A \cdot \frac{C}{B}.$$

Zo is

$$\frac{4}{a-1} \cdot \frac{a+2}{3} = \frac{4(a+2)}{(a-1) \cdot 3} = \frac{4a+8}{3a-3}$$

$$3x : \frac{x}{x-1} = 3x \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{3x(x-1)}{x} = 3x-3$$

$$(2a-3) \cdot \frac{4a}{2a-3} = 4a$$

Breuken optellen en aftrekken

Gelijknamige breuken, dat zijn breuken met gelijke noemers, kun je direct optellen en aftrekken.

$$\text{Dus } \frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B} \text{ en } \frac{A}{B} - \frac{C}{B} = \frac{A-C}{B}.$$

Bij het optellen en aftrekken van breuken die niet gelijknamig zijn, maak je de breuken eerst gelijknamig.

$$\text{Je gebruikt de regels } \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD} \text{ en } \frac{A}{B} - C = \frac{A+BC}{B}.$$

Zo is

$$\frac{5}{3x} + \frac{3}{2y} = \frac{5 \cdot 2y}{6xy} + \frac{3 \cdot 3x}{6xy} = \frac{10y+9x}{6xy}$$

$$\frac{5}{3x} - \frac{3}{2x} = \frac{5 \cdot 2}{6x} - \frac{3 \cdot 3}{6x} = \frac{10-9}{6x} = \frac{1}{6x}$$

$$5 + \frac{3}{2x} = \frac{5 \cdot 2x}{2x} + \frac{3}{2x} = \frac{10x+3}{2x}$$

$$\frac{7xy}{4x} + \frac{xy}{2x} = 1\frac{3}{4}y + \frac{1}{2}y = 2\frac{1}{4}y$$

Verhoudingen

De verhouding 225 : 300 : 600 is te vereenvoudigen tot 3 : 4 : 8.

Om €27,50 te verdelen in de verhouding 3 : 4 : 8 bereken je eerst

$$3 + 4 + 8 = 15. \text{ De verdeling is } \frac{3}{15} \cdot €27,50 = €5,50, \frac{4}{15} \cdot €27,50 \approx €7,33$$

$$\text{en } \frac{8}{15} \cdot €27,50 \approx €14,67.$$

Verdelen A, B en C een bedrag in de verhouding 4 : 7 : 9 en krijgt B

€45,- meer dan A, dan zijn 3 delen €45,- en is 1 deel €15,-.

A krijgt $4 \cdot 15 = €60,-$, B krijgt $7 \cdot 15 = €105,-$ en C krijgt

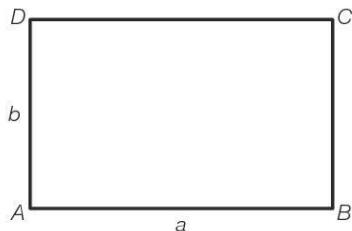
$9 \cdot 15 = €135,-$.

3.2 Herleiden van formules

025 In figuur 3.2 zie je de rechthoek $ABCD$ waarbij $AB > AD$.

De lengte van AB is a en de lengte van AD is b .

a Druk de oppervlakte van $ABCD$ uit in a en b .



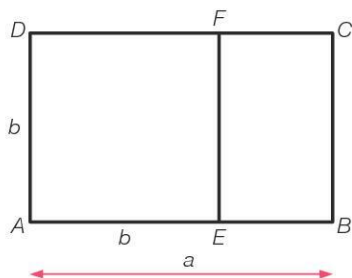
figuur 3.2

In figuur 3.3 is de rechthoek $ABCD$ opgedeeld in het vierkant $AEFD$ en de rechthoek $EBCF$. De oppervlakte van $EBCF$ is $ab - b^2$.

b Licht dit toe.

De oppervlakte van $EBCF$ is ook gelijk aan $(a - b) \cdot b$.

c Licht dit toe en laat zien dat dit gelijk is aan $ab - b^2$ door de haakjes weg te werken.



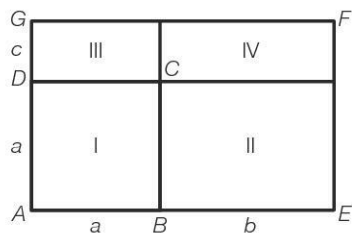
figuur 3.3

026 Gegeven is het vierkant $ABCD$ met zijde a . Dit vierkant wordt uitgebreid met drie rechthoeken zo, dat rechthoek $AEFG$ ontstaat. Zie de figuur hiernaast. De lengte van BE is b en de lengte van DG is c . De oppervlakte van $AEFG$ is gelijk aan $a^2 + ab + ac + bc$.

a Licht dit toe.

De oppervlakte van $AEFG$ is ook gelijk aan $(a + b)(a + c)$.

b Licht dit toe en laat zien dat dit gelijk is aan $a^2 + ab + ac + bc$ door de haakjes weg te werken.



figuur 3.4

Theorie A Haakjes wegwerken

Voor het wegwerken van haakjes ken je de volgende regels.

Haakjes wegwerken

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

De laatste drie regels staan bekend onder de naam **merkwaardige producten**. Met behulp van de merkwaardige producten kun je in één keer opschrijven

$$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9 \quad -6x \text{ is het dubbelproduct van } x \text{ en } -3, \text{ dus } 2 \cdot x \cdot -3$$

en

$$(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9.$$

Voorbeeld

Werk de haakjes weg en herleid.

a $6(x - 4)^2 - 50(2x - 1)$

b $(2a - 1)^2 + 4(a - 1)$

c $15 - 2x(3x - 1)^2$

Uitwerking

a $6(x - 4)^2 - 50(2x - 1) = 6(x^2 - 8x + 16) - 100x + 50 =$
 $6x^2 - 48x + 96 - 100x + 50 = 6x^2 - 148x + 146$

b $(2a - 1)^2 + 4(a - 1) = 4a^2 - 4a + 1 + 4a - 4 = 4a^2 - 3$

c $15 - 2x(3x - 1)^2 = 15 - 2x(9x^2 - 6x + 1) = 15 - 18x^3 + 12x^2 - 2x =$
 $-18x^3 + 12x^2 - 2x + 15$

27



Werk de haakjes weg en herleid.

a $3(x - 5)^2 - 10(x + 1)$

b $(4a - 1)^2 + 4(2a + 1)$

c $20x - (x - 10)^2$

d $(6 - 2a)(3a + 1) - 3a(a - 4)$

28



a Toon aan dat $(3 - 2x)^2 - 4(x - 2)^2$ te herleiden is tot $4x - 7$.

b Toon aan dat $(6 - a)(2a - 1) + 3a(a - 2)$ te herleiden is tot $a^2 + 7a - 6$.

c De formule $A = 0,15 \cdot \frac{x}{0,375} \cdot (x - 2)$ is te herleiden

tot de vorm $A = ax^2 + bx$.

Bereken a en b .

Aantonen dat

Het geven van een redenering of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

E29*****

- a** Bereken $9 \cdot 9 - 10 \cdot 8$, $10 \cdot 10 - 11 \cdot 9$ en $11 \cdot 11 - 12 \cdot 10$.

Je kunt je afvragen of dit rijtje kan worden voortgezet met steeds dezelfde uitkomst.

- b** Wat hoort op de puntjes te staan bij $25 \cdot 25 - \dots$?

Alle berekeningen in het rijtje zijn van de vorm $a^2 - (a+1)(a-1)$.

- c** Licht dit toe.

- d** Werk bij $a^2 - (a+1)(a-1)$ de haakjes weg en herleid. Heb je hiermee aangetoond dat het rijtje kan worden voortgezet met steeds dezelfde uitkomst?

Bekijk nu het rijtje $9 \cdot 9 - 11 \cdot 7$, $10 \cdot 10 - 12 \cdot 8$, $11 \cdot 11 - 13 \cdot 9$, ...

- e** Toon aan dat dit rijtje kan worden voortgezet met steeds dezelfde uitkomst.
- f** Bedenk zelf een soortgelijk rijtje en toon aan dat dat rijtje kan worden voortgezet met steeds dezelfde uitkomst.

A30**□ ⊗ ***

- a** Werk bij $(2x-3)^2 - (4x-1)(3x+1)$ de haakjes weg en herleid.

- b** De formule $B = 0,018 \cdot \frac{p}{0,072} \cdot (2q-5)$ is te herleiden tot de vorm

$$B = apq + bp.$$

Bereken a en b .

- c** De formule $C = 1,8 \cdot \frac{x+4}{2} : \frac{3}{x-1}$ is te herleiden tot de vorm

$$C = ax^2 + bx + c.$$

Bereken a en b en c .

A31**□ ⊗ ***

Bij de productie van bureaulampen gebruikt de fabrikant voor de opbrengst per dag de formule $R = (-0,05q + 20)q$. Hierin is q de dagproductie en R de dagopbrengst in euro's. De prijs van een bureaulamp wordt gegeven door de formule $p = -0,05q + 20$. De fabrikant heeft ook met kosten te maken. De kosten per dag in euro's worden gegeven door de formule $K = 2q + 500$.

In deze formules ligt q tussen 0 en 400.

- a** Bereken de opbrengst per dag bij een productie van 150 bureaulampen. Wat zijn dan de kosten voor de fabrikant en hoeveel kost dan een bureaulamp?

De opbrengst min de kosten geeft de winst, dus de formule van de dagelijkse winst W in euro's is $W = R - K$.

- b** Schrijf de formule van W in de vorm $W = aq^2 + bq + c$.
- c** Bereken hoeveel procent de winst toeneemt als de dagproductie toeneemt van 160 naar 175 stuks.
- d** Bij welke dagopbrengst is de winst maximaal? Hoeveel is dan de winst? Wat kost dan een bureaulamp?

De familie De Jong, bestaande uit twee volwassenen en drie kinderen, bezoekt de vakantiebeurs. Voor kinderen geldt een speciaal tarief. De vijf toegangskaarten kosten samen 45 euro.

- Noem enkele mogelijkheden voor de prijs van een toegangskaart van een kind en van een volwassene.
- Stel dat een kaartje voor een kind x euro kost en voor een volwassene y euro.
 Vul in: tussen x en y bestaat het verband $3x + 2y = \dots$
- Er is bovendien gegeven dat een volwassene drie keer zoveel betaalt als een kind.
 Zoek eens uit hoeveel de kaartjes per stuk kosten.

Theorie B Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

In opgave 32 heb je de formule $3x + 2y = 45$ opgesteld. Deze formule is te schrijven in de vorm $y = ax + b$.

Dat gaat als volgt.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 45 && \text{Breng } 3x \text{ naar rechts.} \\ 2y &= -3x + 45 && \text{Deel alle termen door 2.} \\ y &= -1\frac{1}{2}x + 22\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Hiermee is y uitgedrukt in x . We zeggen ook dat y is **vrijgemaakt** of dat **y als functie van x is geschreven**.

Je ziet dat er een lineair verband bestaat tussen x en y . De grafiek van $3x + 2y = 45$ is dus een rechte lijn.

De formule $3x + 2y = 45$ is een voorbeeld van een **lineaire vergelijking met twee variabelen**. Andere lineaire vergelijkingen met twee variabelen zijn $3x - 2y = 12$ en $5p - 2q = 20$.

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$. De grafiek is een rechte lijn.

Ook $y = x + 8$ is een lineaire vergelijking met de variabelen x en y . Immers $y = x + 8$ is te schrijven als $-x + y = 8$.

Om de grafiek van $2x - 3y = 6$ te tekenen, is het niet nodig om y vrij te maken. Het is voldoende om de coördinaten van twee punten te berekenen.

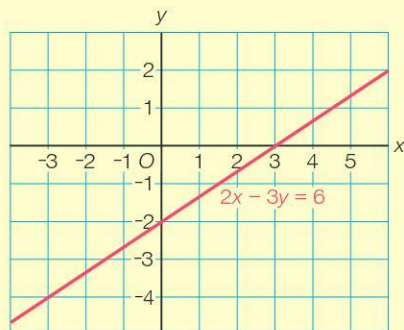
$x = 0$ geeft $-3y = 6$, dus $y = -2$.

$y = 0$ geeft $2x = 6$, dus $x = 3$.

Zo krijg je de tabel

x	0	3
y	-2	0

De lijn zie je in figuur 3.5.



figuur 3.5

Voorbeeld

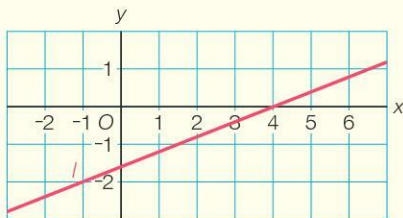
Gegeven is de lijn $l: 2x - 5y = 8$.

- a Teken l .
- b Bereken rc_l .
- c Het punt $A(28, a)$ ligt op l .
Bereken a .

Uitwerking

a

x	-1	4
y	-2	0



- b $2x - 5y = 8$ **Maak y vrij.**
 $-5y = -2x + 8$
 $y = \frac{2}{5}x - 1\frac{3}{5}$
Dus $rc_l = \frac{2}{5}$.
- c $A(28, a)$ op $l: 2x - 5y = 8$ geeft $2 \cdot 28 - 5a = 8$
 $56 - 5a = 8$
 $-5a = -48$
 $a = 9\frac{3}{5}$

R33 Zoals je weet is de grafiek van $ax + by = c$ een lijn.

- Wat voor bijzondere lijn krijg je als $a = 0$ en $b \neq 0$?**
Wat voor bijzondere lijn krijg je als $a \neq 0$ en $b = 0$?

34 a Maak y vrij bij $15x + 12y = 2520$.

b Druk p uit in q bij $3p - 2q = 16\frac{1}{2}$.

c Maak b vrij bij $5a - 2b = 16$.

d Maak y vrij bij $2(x - 3) + 5y = 14$.

e Druk x uit in y bij $2(x - 3) + 5y = 14$.

A35 a Gegeven is $3(x - 6) + \frac{1}{4}(2y + 5) = 20$.

Schrijf de formule in de vorm $y = ax + b$.

b Gegeven is $2(T + 8) + 3(2A + 8) = 120$.

Maak T vrij.

c Gegeven is $3(\frac{2}{3}L - 9) + 4K = 6(2 - L)$.

Druk L uit in K .

d Gegeven is $\frac{1}{3}(p - 6) + 4(q - 7) = 59$.

Schrijf p als functie van q .

36 Gegeven zijn de lijnen $l: 3x - y = 6$, $m: x + y = 1$, $n: x - y = 0$ en $p: x + 2y = 4$.

- a Teken in één figuur de lijnen l , m , n en p .
- b Bereken van elk van deze lijnen de richtingscoëfficiënt.

37 Gegeven is de lijn $l: 4x - 3y = 24$.

- a Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de assen en teken l .
- b Onderzoek welke van de punten $A(8, 3)$, $B(18, 16)$ en $C(-30, -48)$ op l liggen.
- c Het punt $D(16, p)$ ligt op l .
Bereken p .
- d Het punt $E(q, 48)$ ligt op l .
Bereken q .

38 Gegeven zijn de lijnen $l: 3x - 4y = 7$ en $m: 3x - 4y = -8$.

- a Bereken rc_l en rc_m .
- b Waarom zijn alle lijnen van de vorm $3x - 4y = c$ evenwijdig?
- c Voor welke waarde van c ligt het punt $A(5, 1)$ op de lijn $3x - 4y = c$?
- d De lijn k gaat door het punt $B(3, -1)$ en is evenwijdig met l .
Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

A39 Gegeven is de lijn $m: 3x - 8y = 36$.

- a Bereken rc_m .
- b Lijn m snijdt de y -as in het punt A .
Bereken de coördinaten van A .
- c Het punt $B(-10, p)$ ligt op m .
Bereken p .
- d Het punt $C(q, 9)$ ligt op m .
Bereken q .
- e De lijn n gaat door het punt $D(5, 1)$ en is evenwijdig met de lijn m .
Stel van n een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

E40 René koopt voor precies 10 euro aan fruit. Hij koopt een aantal appels van 40 cent per stuk, driemaal zoveel peren van 50 cent per stuk en met het geld dat hij nog over heeft bananen van 80 cent per stuk.
Hoeveel stuks fruit kocht René?

Terugblik

Haakjes wegwerken

Bij het wegwerken van haakjes gebruik je de volgende regels.

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Zo is $(2x - 3)(4x - 1) = 8x^2 - 2x - 12x + 3 = 8x^2 - 14x + 3$ en

$$5x^2 - (2x + 1)^2 = 5x^2 - (4x^2 + 4x + 1) = 5x^2 - 4x^2 - 4x - 1 = x^2 - 4x - 1.$$

Variabelen vrijmaken

Bij $2x - 3y = 6$ kun je y vrijmaken.

Je krijgt $2x - 3y = 6$

$$-3y = -2x + 6$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

Hiermee is de formule geschreven in de vorm $y = ax + b$.

We zeggen ook wel dat y is uitgedrukt in x of dat y als functie van x is geschreven.

Om bij $2(3x - 1) - 4(2y - 5) = 16$ de variabele y vrij te maken ga je als volgt te werk.

$$2(3x - 1) - 4(2y - 5) = 16$$

$$6x - 2 - 8y + 20 = 16$$

$$-8y = -6x - 2$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

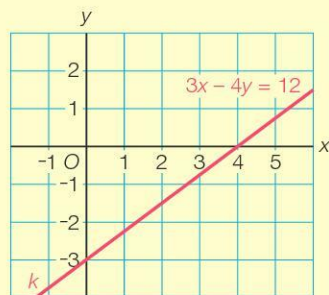
De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$.

De grafiek van $ax + by = c$ is een rechte lijn.

Om de lijn k : $3x - 4y = 12$ te tekenen, maak je eerst een tabel met twee (rooster)punten.

Je krijgt bijvoorbeeld

x	0	4
y	-3	0



Dus de lijn gaat door de punten $(0, -3)$ en $(4, 0)$.

Het punt $A(12, 6)$ ligt op k : $3x - 4y = 12$, want $3 \cdot 12 - 4 \cdot 6 = 12$ en dat klopt.

Is de lijn l evenwijdig met de lijn k , dan is de vergelijking van l van de vorm $3x - 4y = c$. Ligt het punt $B(5, -2)$ op l , dan is $c = 3 \cdot 5 - 4 \cdot -2 = 23$, dus l : $3x - 4y = 23$.

3.3 Procentberekeningen en de wetenschappelijke notatie



Tussen 2000 en 2018 is het aantal inwoners van de gemeente Amsterdam toegenomen van 731 duizend naar 854 duizend. In dezelfde periode is het aantal inwoners van de gemeente Utrecht gegroeid van 234 duizend naar 348 duizend.

Volgens Maud is in deze periode het aantal inwoners van Amsterdam meer toegenomen dan dat van Utrecht.

Volgens Pepijn is in deze periode het aantal inwoners van Utrecht juist het meest toegenomen.

Licht toe dat beide beweringen te verdedigen zijn.

Theorie A Procentberekeningen

Bij het vergelijken van gegevens krijg je vaak te maken met vragen als

- In welke periode is de toename het grootst?
- Wat is het sterkst toegenomen?

Je onderscheidt hierbij **absolute** en **relatieve** veranderingen.

Bij veranderingen in aantallen gaat het om absolute veranderingen.

Bij veranderingen in procenten gaat het om relatieve veranderingen.

Hieronder staan zeven soorten vragen die je kunt tegenkomen bij procentberekeningen.

1 Hoeveel is 11,8% van 580?

11,8% van 580 is $0,118 \cdot 580 = 68,44$.

2 Hoeveel procent is 23 van 78?

23 van 78 is $\frac{23}{78} \times 100\% \approx 29,5\%$.

3 Een hoeveelheid neemt toe van 35 tot 47.

Hoeveel procent is de toename?

De procentuele toename is $\frac{47 - 35}{35} \times 100\% \approx 34,3\%$.

De procentuele
verandering is
$$\frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\%.$$

4 Een hoeveelheid van 250 neemt met 8% toe.

Hoeveel is de nieuwe hoeveelheid?

$\text{NIEUW} = 1,08 \times \text{OUD}$, dus $\text{NIEUW} = 1,08 \cdot 250 = 270$.

5 Een hoeveelheid van 1800 neemt met 11% af.

Hoeveel is de nieuwe hoeveelheid?

$\text{NIEUW} = 0,89 \times \text{OUD}$, dus $\text{NIEUW} = 0,89 \cdot 1800 = 1602$.

6 Een hoeveelheid neemt met 12% toe tot 1456.

Hoeveel was de oorspronkelijke hoeveelheid?

$$\text{NIEUW} = 1,12 \times \text{OUD} \text{ en } \text{NIEUW} = 1456$$

$$\text{Dus } 1,12 \times \text{OUD} = 1456. \text{ Je krijgt } \text{OUD} = \frac{1456}{1,12} = 1300.$$

7 Een hoeveelheid van 290 is 58% van het totaal.

Hoeveel is het totaal?

$$58\% \text{ van het totaal is } 290, \text{ dus } 0,58 \times \text{totaal} = 290.$$

$$\text{Dus totaal} = \frac{290}{0,58} = 500.$$

Voorbeeld

Het aantal werkenden in de jeugdzorg nam in de periode 2012-2018 met 12,6% af tot 28 400.

Bereken het aantal werkenden in de jeugdzorg in 2012.

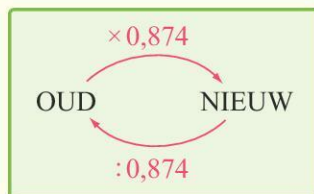
Aanpak

$$100\% - 12,6\% = 87,4\% \text{ dus } \text{NIEUW} = 0,874 \times \text{OUD}$$

$$\text{en dit geeft } \text{OUD} = \frac{\text{NIEUW}}{0,874}.$$

Uitwerking

$$\text{Het aantal is } \frac{28\,400}{0,874} \approx 32\,500.$$



Je ziet dat het aantal werkenden in de jeugdzorg is gegeven in honderdtallen. Daarom is ook het antwoord in honderdtallen gegeven. Bij veel opdrachten is vermeld hoe nauwkeurig je het antwoord moet geven. Staat er geen informatie over de vereiste nauwkeurigheid, dan houd je je bij procentberekeningen aan de volgende vuistregels.

Vuistregels voor afronden

- Geef NIEUW en OUD in dezelfde nauwkeurigheid.
- Geef percentages in één decimaal nauwkeurig.

Let wel, dit zijn slechts vuistregels die je niet klakkeloos moet toepassen. Ga altijd na of de nauwkeurigheid van je antwoord past bij het gegeven probleem.

42

- a** Hoeveel is 0,3% van 8700?
- b** Een hoeveelheid van 3,2 miljoen neemt met 8,7% af. Hoeveel krijg je?
- c** Een hoeveelheid neemt toe van 160 tot 180. Hoeveel procent is de toename?
- d** Een hoeveelheid neemt met 7,9% toe tot 1280. Hoeveel was de oorspronkelijke hoeveelheid?
- e** Hoeveel procent is 57 van 121?
- f** Een hoeveelheid van 8,3 miljoen is 12,6% van het totaal. Hoeveel is het totaal?
- g** Een hoeveelheid van 12 580 neemt met 2,3% toe. Hoeveel is de nieuwe hoeveelheid?

43

- a** Een koffiezetapparaat wordt met 25% korting verkocht voor 81 euro. Wat was de oorspronkelijke prijs?
- b** Inclusief 21% btw kost een fiets 552 euro. Hoeveel kost de fiets zonder btw?
- c** In 2017 was de gemiddelde CO₂-uitstoot van personenauto's 109 gram CO₂ per km. Dat was 34% minder dan in 2007. Wat was de gemiddelde CO₂-uitstoot van personenauto's in 2007?

44

- Zie de tabel over het aantal elektrische personenauto's op 1 januari in Nederland.**
- a** Bij welk type is de relatieve toename het grootst?
- b** Hoeveel procent van het totale aantal elektrische personenauto's was in 2015 volledig elektrisch?
- c** Het totale aantal personenauto's in Nederland was 8,4 miljoen in 2018. Hoeveel procent van de personenauto's was elektrisch?
- d** In 2015 was slechts 2,1% van de personenauto's elektrisch. Bereken het totale aantal personenauto's in 2015.
- e** In 2018 was het aantal plug-in hybride personenauto's 1,6% meer dan in 2017. Hoeveel plug-in hybride personenauto's waren er in 2017?

ELEKTRISCHE PERSONENAUTO'S IN NEDERLAND

type	2015	2018
volledig elektrisch	7400	21 800
hybride	111 800	152 000
plug-in hybride	36 800	97 300
totaal	156 000	271 100



45



Zie de tabel over het aantal vwo-leerlingen per profiel.

- a Met hoeveel procent is het aantal leerlingen met een NT-profiel in deze periode toegenomen?
- b Het aantal leerlingen met een NG-profiel is in deze periode met 15,4% toegenomen. Hoeveel leerlingen hadden in 2017 een NG-profiel?
- c Het aantal leerlingen met een EM-profiel nam in deze periode met 2,5% toe. Hoeveel leerlingen hadden dit profiel in 2012?
- d Het aantal leerlingen met een CM-profiel nam met 2600 af. Dat is een afname van 21,3%. Hoeveel CM-leerlingen waren er in 2017?

LEERLINGEN VWO 4, 5 EN 6 PER PROFIEL

	2012	2017
NT	21 400	27 000
NG	26 600	
EM		32 500
CM		



A46



De volgende vragen gaan over de gemeenteraadsverkiezingen in de stad Utrecht in 2018. In totaal brachten 157 822 mensen hun stem uit. Rond in deze opgave aantallen af op honderdtallen.

- a De PvdA behaalde 6,2% van de stemmen. Hoeveel stemmen zijn dat?
- b GroenLinks werd de grootste partij. Vergeleken met de gemeenteraadsverkiezingen in 2014 haalden ze 54,0% meer stemmen. In 2014 stemden er 23 531 mensen op GroenLinks. Hoeveel mensen stemden in 2018 op GroenLinks?
- c Ook de VVD boekte winst. Er stemden 20 522 mensen op deze partij. Dat is maar liefst 35,7% meer dan in 2014. Hoeveel mensen stemden in 2014 op de VVD?
- d Er stemden 8428 mensen op het CDA. Hoeveel procent van de stemmen kreeg het CDA?
- e In 2014 was D66 nog de grootste partij in Utrecht. Toen stemden 36 829 mensen op deze partij. In 2018 waren dat er 4094 minder. Met hoeveel procent is het aantal D66-stemmen afgenomen in 2018 vergeleken met 2014?
- f Het opkomstpercentage in Utrecht was 59,0%. Hoeveel stemgerechtigden telde Utrecht in 2018?
- g Vergeleken met 2014 leverde de SP stemmen in. In 2014 stemden 13 223 mensen op de SP. In 2018 waren dat er 51,5% minder. Hoeveel mensen stemden in 2018 op de SP?
- h Vergeleken met 2014 stemden er 1053 meer mensen op de ChristenUnie (CU). Dat komt neer op een toename van 19,5%. Hoeveel mensen stemden in 2018 op de CU?

A47
☐ ⊗ *

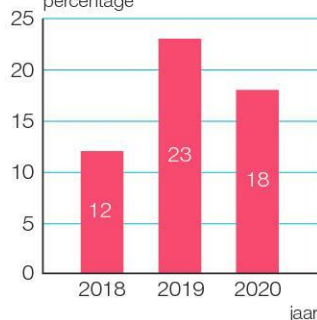
Een firma maakte in 2017 een winst van 8 miljoen euro. In het staafdiagram in figuur 3.6 zie je de winstontwikkeling in de daaropvolgende jaren. Met hoeveel procent is de winst toegenomen in de periode 2017-2020?

A48
☐ ⊗ *

In 2017 waren er in een stad 240 geboorten. In 2018 waren dat er 324. Neem aan dat de procentuele toename elk jaar hetzelfde is.

- a Hoeveel geboorten waren er in 2019?
- b Hoeveel geboorten waren er in 2016?

TOENAME VAN DE WINST IN
PROCENTEN T.O.V. HET JAAR
ERVOOR
percentage



figuur 3.6

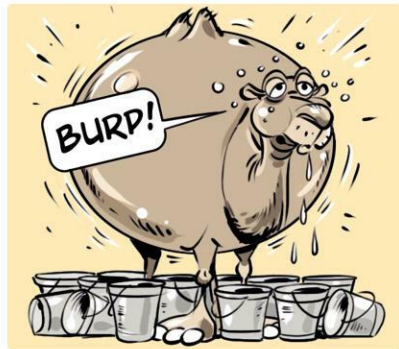
R49
☐ ⊗ *

Bij procentberekeningen is een fout snel gemaakt. Voor de hand liggende conclusies blijken vaak niet te kloppen. Wat is er mis bij de volgende uitspraken?

- a In 2018 was de winst van een bedrijf 15% meer dan in 2017 en in 2019 was de winst zelfs 25% meer dan in 2018. Dus de winst in 2019 was 40% meer dan in 2017.
- b Een bedrag eerst met 15% verhogen en daarna het verkregen bedrag met 15% verlagen levert het oorspronkelijke bedrag op.
- c Van de jongens heeft 40% een onvoldoende en van de meisjes 20%. Dus 30% van de klas heeft een onvoldoende.

E50
*

- a Tijdens de drie zomermaanden is een hotel voor 88% bezet, de andere maanden voor slechts 40%. Voor hoeveel procent is het hotel het hele jaar gemiddeld bezet?
- b In een vat zit 30 liter meer als het voor 30% leeg is dan wanneer het voor 30% vol is. Hoeveel liter zit er in het vat als het vol is?
- c Een dorstige kameel bestaat voor 84% van zijn gewicht uit water. Nadat hij zijn dorst heeft gelest, weegt hij 800 kg en bestaat voor 85% uit water. Hoeveel woog hij voordat hij begon te drinken?



E51
*

- a Een hoeveelheid H neemt 10 jaar achter elkaar met 2,5% toe. Voor de hoeveelheid H_{nieuw} na 10 jaar geldt $H_{\text{nieuw}} = a \cdot H$. Bereken a . Rond af op twee decimalen.
- b Bij een groei van 6% per jaar duurt het t jaar totdat een hoeveelheid H is verdubbeld. Bereken t in jaren nauwkeurig.

Eind 2017 was de gemiddelde hypotheekschuld van de 17,2 miljoen Nederlanders 39000 euro per persoon. Dat betekent dat de totale hypotheekschuld ongeveer 671 miljard euro was. Zie de berekening op het GR-scherm hiernaast.
 Licht toe dat de uitkomst $6.708E11$ inderdaad overeenkomt met ongeveer 671 miljard.



Theorie B De wetenschappelijke notatie

Bij berekeningen met een hele grote of kleine uitkomst geeft de GR het antwoord in de **wetenschappelijke notatie**. Hiervan heb je in opgave 52 een voorbeeld gezien.

Geef de GR bij de berekening van 80^6 als antwoord $2.62144E11$, dan betekent dit $2,62144 \cdot 10^{11}$. Om dit antwoord in de gewone notatie te schrijven, verschuif je de komma 11 plaatsen naar rechts.

Dus $80^6 = 262\,144\,000\,000$, oftewel 262,144 miljard.

Je kunt ook schrijven

$$2,62144 \cdot 10^{11} = 262,144 \cdot 10^9$$

↑
komma 2 plaatsen naar rechts

exponent 2 lager ↓

dus ruim 262 miljard.

$10^3 = 1000$	duizend
$10^6 = 1\,000\,000$	miljoen
$10^9 = 1\,000\,000\,000$	miljard

Geef de GR bij de berekening van $0,08^6$ als antwoord $2.62144E-7$, dan betekent dit $2,62144 \cdot 10^{-7}$.

Schrijf je dit getal in de gewone notatie, dan krijg je

0,000000262144.

↑
komma 7 plaatsen naar links

Merk op dat 0,000000262144 met 7 nullen begint.

En zo is $0,0000032 = 3,2 \cdot 10^{-5}$.

5 nullen, dus 10^{-5}



In de wetenschappelijke notatie staat een getal in de vorm $a \cdot 10^b$. Hierin is a een getal tussen 1 en 10.

Voorbeeld

Schrijf de volgende getallen in de wetenschappelijke notatie.

- a $25,2 \cdot 10^8$
- b 685 miljoen
- c 0,00023
- d $0,052 \cdot 10^{-6}$

Uitwerking

- a $25,2 \cdot 10^8 = 2,52 \cdot 10^9$ De komma 1 plaats naar links, dus de exponent plus 1.
- b 685 miljoen = $685 \cdot 10^6 = 6,85 \cdot 10^8$
- c $0,00023 = 2,3 \cdot 10^{-4}$ Vier nullen, dus 10^{-4} .
- d $0,052 \cdot 10^{-6} = 5,2 \cdot 10^{-8}$ De komma 2 plaatsen naar rechts, dus de exponent min 2.

53

Schrijf de volgende getallen in de wetenschappelijke notatie.

- a 432 miljard
- b 0,0061
- c $126 \cdot 10^4$
- d $0,0048 \cdot 10^{-8}$

54

Bereken en schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie.

Rond zo nodig af op twee decimalen.

- a $0,03^7$
- b $\left(\frac{1}{12}\right)^4$
- c 225^6
- d $\left(\frac{2}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2$
- e $\frac{2}{13}$ deel van een miljard
- f $\frac{14}{3 \cdot 10^5}$

55

Bereken. Schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie.

- a $3,5 \cdot 10^6 \times 0,4 \cdot 10^4$
- b $1200 \cdot 55\,000$
- c $12,5 \text{ miljoen} \times 460\,000$
- d $0,018 \times 5 \cdot 10^{-6}$
- e $\frac{1,5 \text{ duizend}}{3 \text{ miljard}}$
- f $0,8^{12} \cdot 2,5^{20}$

Op de TI voer je een getal in de wetenschappelijke notatie in met EE, op de Casio met EXP of $\times 10^x$ en op de HP met EEX.

56

*

- a Schrijf de getallen 84,5 miljard en 0,00075 in de wetenschappelijke notatie.
- b Bereken $0,04^8$ en 215^6 en schrijf de antwoorden in de wetenschappelijke notatie. Rond af op twee decimalen.
- c Bereken $\left(\frac{2}{9}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^3$ en schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie. Rond af op twee decimalen.
- d Bereken $1500 \times 6,2 \cdot 10^4$ en $\frac{18 \text{ miljoen}}{2,4 \text{ miljard}}$ en schrijf de antwoorden in de wetenschappelijke notatie.

A57
☐⊙*

Schrijf de antwoorden in de wetenschappelijke notatie.

- a** De 7,8 miljoen Nederlandse huishoudens hebben een gemiddeld spaartegoed van 44 500 euro.
Hoeveel euro is het totale spaartegoed van alle Nederlandse huishoudens?
- b** De kans om in de Staatsloterij de jackpot te winnen is vier op de 25 miljard.
Bereken deze kans.

A58
⊙*

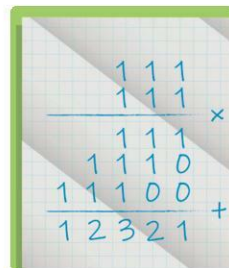
Schrijf de antwoorden in de wetenschappelijke notatie. Rond zo nodig af op twee decimalen.

- a** Op aarde is er voor elk van de 7,7 miljard mensen ongeveer 180 miljoen m^3 water aanwezig.
Hoeveel m^3 water is er ongeveer op aarde aanwezig?
- b** Van een medicijn is direct na toediening 5 mg in het bloed aanwezig. De hoeveelheid medicijn neemt per uur met 40% af. Dat betekent dat er na twee uur nog $5 \cdot 0,6^2 = 1,8$ mg van het medicijn in het bloed aanwezig is.
Hoeveel mg is er na 24 uur nog in het bloed aanwezig?

E59
*

Schrijf in deze opgave de antwoorden niet in de wetenschappelijke notatie.

- a** Bereken 1111^2 en 11111^2 . Welke regelmaat zie je?
- b** Gebruik de regelmaat die je bij a hebt gevonden om 111111^2 (6 enen) en 111111111^2 (10 enen) te berekenen.



Terugblik

Absolute en relatieve veranderingen

Een verandering in aantallen is een absolute verandering.

Een verandering in procenten is een relatieve verandering.

$$\text{procentuele verandering} = \frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\%$$

Procentberekeningen

gegeven	vraag	berekening
5,8% van 50	Hoeveel is dat?	Dat is $0,058 \cdot 50 = 2,9$.
18 van 50	Hoeveel procent is dat?	Dat is $\frac{18}{50} \times 100\% = 36\%$.
een toename van 60 naar 80	Hoeveel is de toename in procenten?	De toename is $\frac{80 - 60}{60} \times 100\% \approx 33,3\%$.
een afname van 80 naar 60	Hoeveel is de afname in procenten?	$\frac{60 - 80}{80} \times 100\% = -25\%$ De afname is 25%.
60 neemt toe met 18%	Hoeveel krijg je?	$\text{NIEUW} = 1,18 \times \text{OUD}$ $\text{NIEUW} = 1,18 \cdot 60 = 70,8$
80 neemt af met 18%	Hoeveel krijg je?	$\text{NIEUW} = 0,82 \times \text{OUD}$ $\text{NIEUW} = 0,82 \cdot 80 = 65,6$
een toename met 18% geeft 80	Hoeveel had je?	$\text{NIEUW} = 1,18 \times \text{OUD}$ $\text{OUD} = \frac{80}{1,18} \approx 67,8$
een afname met 18% geeft 60	Hoeveel had je?	$\text{NIEUW} = 0,82 \times \text{OUD}$ $\text{OUD} = \frac{60}{0,82} \approx 73,2$

De wetenschappelijke notatie

In de wetenschappelijke notatie staat een getal in de vorm $a \cdot 10^b$, waarbij a een getal tussen 1 en 10 is.

Een antwoord als $1,72\text{E}11$ op de GR betekent $1,72 \cdot 10^{11}$. In de gewone notatie is dit 172 000 000 000, dus 172 miljard. De komma is 11 plaatsen naar rechts verschoven.

En $8,1\text{E}-11$ betekent $8,1 \cdot 10^{-11}$. In de gewone notatie is dit 0,000 000 000 081. De komma is 11 plaatsen naar links verschoven en dat betekent dat in de gewone notatie het getal met 11 nullen begint.

3.4 Rekenen met eenheden



Je weet dat 1 hectometer = 100 meter. Notatie 1 hm = 100 m.

Een vierkante hectometer is dus $100 \cdot 100 = 10\,000$ vierkante meter.

Een vierkante hectometer wordt ook wel hectare genoemd.

Notatie 1 ha = $1\text{ hm}^2 = 10\,000\text{ m}^2$.

Het weiland van boer Aart is 300 bij 420 meter.

Hoeveel hectare is dat?

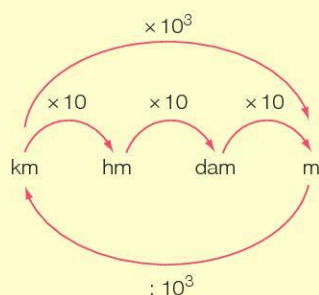
Theorie A Lengte, oppervlakte en inhoud

Je weet dat 1 km = 10 hm en 1 hm = 100 meter.

Dit kun je zien in het schema hiernaast.

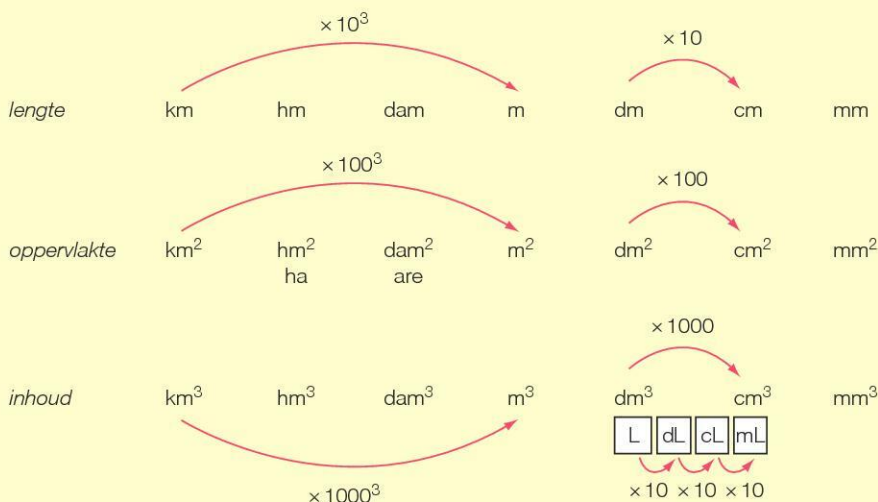
Merk op dat 1 km = 1000 meter = 10^3 meter en

dus ook 1 meter = $\frac{1}{1000}\text{ km} = \frac{1}{10^3}\text{ km}$.



Hoe je oppervlaktemat en inhoudsmaten omrekent zie je in het schema hieronder. Bij het omrekenen van km^2 naar m^2 gebruik je

$1\text{ km}^2 = 100 \cdot 100 \cdot 100\text{ m}^2 = 100^3\text{ m}^2$ en dus ook $1\text{ m}^2 = \frac{1}{100^3}\text{ km}^2$.



Voorbeeld

Bij een aanvaring met een olietanker komt een flinke hoeveelheid olie in zee terecht. Er vormt zich over een oppervlakte van 150 km^2 een laag olie met een dikte van $0,02 \text{ mm}$.

Bereken hoeveel liter olie in zee is gestroomd.

Aanpak

Omdat $1 \text{ liter} = 1 \text{ dm}^3$ reken je km^2 om naar dm^2 en mm naar dm .

Uitwerking

$$150 \text{ km}^2 = 150 \cdot 100^4 \text{ dm}^2 = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ dm}^2 \text{ en}$$

$$0,02 \text{ mm} = \frac{0,02}{10^2} \text{ dm} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ dm}$$

$$\text{Dus } 1,5 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 3\,000\,000 \text{ dm}^3 = 3 \text{ miljoen liter.}$$



R61 Zie het voorbeeld.

a Licht toe dat $150 \text{ km}^2 = 150 \cdot 100^4 \text{ dm}^2$ en dat $0,02 \text{ mm} = \frac{0,02}{10^2} \text{ dm}$.

In de theorie staat dat $1 \text{ km}^2 = 100 \cdot 100 \cdot 100 \text{ m}^2 = 100^3 \text{ m}^2$.

Jos zegt: omdat $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ is $1 \text{ km}^2 = 1000^2 \text{ m}^2$.

b Reken na dat 100^3 hetzelfde is als 1000^2 .

c Licht de aanpak van Jos toe.

d Bereken op de manier van Jos hoeveel m^2 overeenkomt met 5 km^2 .

62 Vul in.

- | | |
|--|--|
| a $52 \text{ hm} = \dots \text{ m}$ | e $1,45 \cdot 10^{-8} \text{ km}^3 = \dots \text{ m}^3$ |
| b $3,4 \cdot 10^7 \text{ mm} = \dots \text{ km}$ | f $5045 \text{ L} = \dots \text{ m}^3$ |
| c $4,3 \text{ km}^2 = \dots \text{ m}^2$ | g $0,06 \text{ dL} = \dots \text{ mL}$ |
| d $6,1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 = \dots \text{ ha}$ | h $7,5 \cdot 10^5 \text{ mm}^3 = \dots \text{ L}$ |

63 **a** Ronald heeft 50 m^2 hout geleverd en had precies genoeg aan 4 liter verf.

Bereken in welke dikte Ronald de verf heeft aangebracht. Geef het antwoord in mm .

b De kraan in de keuken van Kees en Sandra lekt. Er lekt elke twee seconden één druppel water uit de kraan. Volgens Kees is dat geen probleem, want in een jaar tijd lekt er dan nog geen 8 liter water weg. Onderzoek met een berekening of Kees gelijk heeft. Gebruik dat een druppel een inhoud heeft van $0,05 \text{ mL}$.

A64
☐ ⊙ *

De hoeveelheid neerslag wordt meestal gegeven in mm. De gemiddelde jaarlijkse neerslag in De Bilt is ongeveer 880 mm. Dat betekent dat er in een jaar op één vierkante meter in totaal $0,88 \text{ m}^3$ neerslag valt.

- a** Licht dit toe. Hoeveel liter valt er in een jaar op één m^2 bij een jaarlijkse neerslag van 880 mm?

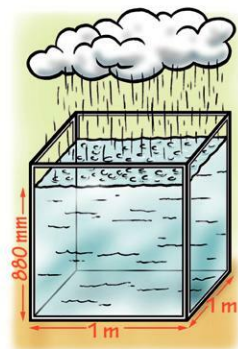
De gemiddelde jaarlijkse neerslagduur in De Bilt is ongeveer 624 uur.

Tijdens een wolkbreuk in De Bilt valt er in 20 minuten 24 mm neerslag. De neerslagintensiteit (het aantal mm neerslag per uur) tijdens de wolkbreuk was veel groter dan de gemiddelde neerslagintensiteit gedurende een jaar.

- b** Bereken hoeveel keer groter.
c Bereken hoeveel m^3 neerslag er tijdens de wolkbreuk viel op een voetbalveld van 102 bij 65 meter in De Bilt.

In de maand juli valt er gemiddeld 81 mm neerslag in De Bilt. Neem aan dat dit gemiddelde voor heel Nederland geldt.

- d** Bereken in gehele m^3 nauwkeurig hoeveel neerslag er gemiddeld per Nederlander in de maand juli valt in heel Nederland. Gebruik dat de oppervlakte van Nederland (inclusief binnenwater) $41\,500 \text{ km}^2$ is en dat Nederland 17,4 miljoen inwoners heeft.

**A65**
*

De hoeveelheid water op aarde wordt geschat op 1385 miljoen kubieke kilometer (km^3). Bijna al dit water is zout en bevindt zich in de zeeën en oceanen.

Slechts een klein deel van het water is zoet. Daarvan is het grootste deel aanwezig in de vorm van ijs, voornamelijk in de ijskappen op de polen en in gletsjers. De rest van het zoet water zit in meren en rivieren, is grondwater of is als waterdamp in de lucht aanwezig.

De waterkringloop is een gesloten systeem waarbij geen water verloren gaat. Dit betekent dat de totale hoeveelheid water, in welke verschijningsvorm dan ook, constant is.

De ijskappen en gletsjers bevatten 2,1% van al het water op aarde. Dat is 68,7% van de totale hoeveelheid zoet water.

- a** Hoeveel km^3 zoet water is er op aarde? Hoeveel m^3 is dat per aardbewoner? Gebruik dat er 7,7 miljard mensen op aarde zijn.

Jaarlijks verdampt vanuit de oceanen en zeeën $502\,800 \text{ km}^3$ water en vanaf land (inclusief meren, rivieren, ijskappen en gletsjers) $74\,200 \text{ km}^3$. De jaarlijkse hoeveelheid neerslag op de oceanen en zeeën is $458\,000 \text{ km}^3$.

- b** Bereken hoeveel procent van het zoet water jaarlijks als neerslag op land valt. Ga ervan uit dat de totale jaarlijkse verdamping gelijk is aan de totale jaarlijkse neerslag. Rond af op twee decimalen.



066
☐ ⊙ *

Stijn heeft de Bruggenloop Nijmegen gelopen. Hij legde het parcours van 7 km af in 27 minuten en 45 seconden. Om zijn gemiddelde snelheid in km per uur te berekenen, deel je de afstand in km door de tijd in uren.

- a Licht toe dat 45 seconden = 0,75 minuten.
- b Geef de tijd van Stijn in uren.
- c Bereken de gemiddelde snelheid van Stijn in km per uur. Rond af op één decimaal.

Theorie B Tijd, afstand en snelheid

Snelheden worden in het dagelijks leven meestal gegeven in km per uur (km/uur). Bij wandelen heb je een snelheid van ongeveer 5 km/uur.

Een topatleet loopt de marathon met een snelheid van ongeveer 20 km/uur en op sommige snelwegen mag je met de auto 130 km/uur.

Soms is het nodig om een snelheid om te rekenen van meter per seconde (m/s) naar km/uur of omgekeerd.

Omdat 1 uur = 60 · 60 = 3600 seconden krijg je

$$1 \text{ m/s} = 3600 \text{ m/uur} = 3,6 \text{ km/uur.}$$

$$\text{Dus } 1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/uur.}$$

$$\text{Omgekeerd is } 1 \text{ km/uur} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s.}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ km/uur} &= \\ 1000 \text{ m/uur} &= \\ 1000 \text{ m}/3600 \text{ s} &= \\ 1 \text{ m}/3,6 \text{ s} &= \frac{1}{3,6} \text{ m/s} \end{aligned}$$

Voorbeeld

Op 20 augustus 2009 liep Usain Bolt de 200 meter in 19,19 seconden.

Hoeveel km/uur was zijn gemiddelde snelheid? Rond af op drie decimalen.

Uitwerking

De gemiddelde snelheid is

$$\frac{200}{19,19} \text{ m/s} = \frac{200}{19,19} \cdot 3,6 \text{ km/uur} \approx 37,520 \text{ km/uur.}$$

$$\begin{aligned} \text{snelheid} &= \frac{\text{afstand}}{\text{tijd}} \\ \text{afstand} &= \text{snelheid} \times \text{tijd} \\ \text{tijd} &= \frac{\text{afstand}}{\text{snelheid}} \end{aligned}$$

67
☐ ⊙

- a Het wereldrecord 100 meter sprint voor vrouwen staat op naam van Florence Griffith-Joyner met een tijd van 10,49 seconden. Bereken haar gemiddelde snelheid in km/uur en rond af op drie decimalen.
- b Op 31 mei 2004 liep Kenenisa Bekele uit Ethiopië de 5000 meter in 12.37,35. Dat betekent 12 minuten en 37,35 seconden. Hoeveel km/uur was zijn gemiddelde snelheid? Rond af op drie decimalen.
- c De marathon is een hardloophwedstrijd over 42,195 km. Eliud Kipchoge uit Kenia liep op 16 september 2018 de marathon van Berlijn in 2:01.39, dus in 2 uur, 1 minuut en 39 seconden. Wat was zijn gemiddelde snelheid? Geef het antwoord in km/uur en rond af op drie decimalen.

68


Jori loopt een paar keer per week hard. Hij heeft een korte route van 6,0 km en een lange route van 9,8 km.

- Zijn record op de korte route is precies 25 minuten.
Met welk gemiddelde snelheid in km/uur heeft hij die keer gelopen?
- Bij zijn record op de lange route was zijn gemiddelde snelheid 14 km/uur.
Bereken zijn recordtijd in minuten.
- Het hardloophorloge van Jori geeft telkens na een km de km-tijd en de gemiddelde snelheid over deze km.
Welke km-tijd moet Jori gemiddeld aanhouden als hij zijn korte route in 26 minuten wil lopen?
- Ter voorbereiding op een marathon doet Jori een duurloop. Hij loopt 1 uur en 50 minuten met een gemiddelde snelheid van 12,6 km/uur.
Welke afstand heeft Jori gelopen?

69


Vleermuizen gebruiken ultrageluid als radar. Met hun snuit produceren ze hoogfrequente pieptonen. Uit het teruggekaatste geluid maken ze op wat er zich in hun omgeving bevindt.

Hoeveel seconden zit er tussen het produceren van een pieptoon en het opvangen daarvan, als een voorwerp op een afstand van 200 cm van de vleermuis het geluid weerkaatst? Rond af op drie decimalen.

Gebruik dat het geluid een snelheid heeft van 1235 km/uur.

A70


Tussen de plaatsen A en B ligt een snelweg met een lengte van 100 km.

Kees rijdt van A naar B en terug. Op de heenreis is zijn gemiddelde snelheid 80 km/uur en op de terugreis 120 km/uur.

- Licht met berekeningen toe dat Kees over de heenreis 75 minuten doet en over de terugreis 50 minuten.
- Uit a volgt dat de gemiddelde snelheid over de heen- en terugreis samen 96 km/uur is. Licht dit toe met een berekening.

$$\text{snelheid} = \frac{\text{afstand}}{\text{tijd}}$$

We bekijken nu de situatie dat de lengte van de snelweg d km is.

De tijd t in uren die Kees over de heen- en terugreis samen doet is dan

$$t = \frac{1}{48}d.$$

- Licht dit toe en toon aan dat de gemiddelde snelheid over de heen- en terugreis samen niet afhangt van d .

Ten slotte bekijken we de situatie dat, bij een lengte van de snelweg van d km, de snelheid op de heenreis de helft is van de snelheid op de terugreis. Stel de snelheid op de heenreis is a km per uur.

De tijd t in uren over de heen- en terugreis samen is dan $t = \frac{3d}{2a}$.

- Toon dit aan.
- Druk de gemiddelde snelheid over de heen- en terugreis samen uit in a .

A71
☐ ⊙ *

De snelheid van het licht is 300 000 km/s. De afstand die het licht in een jaar aflegt heet een lichtjaar.

- a Hoeveel seconden doet het licht erover om 1 km af te leggen? Schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.
- b Bereken hoeveel km een lichtjaar is. Schrijf het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op twee decimalen.
- c De afstand tussen de aarde en de maan is ongeveer 1,3 lichtseconden. Hoeveel km is dat?
- d De onbemande ruimtesonde Voyager 2 werd op 20 augustus 1977 gelanceerd. De sonde raast door de ruimte met een snelheid van 56 500 km/uur. Hoeveel lichtjaar heeft Voyager 2 nu afgelegd? Rond het antwoord af op drie decimalen.



E72
☐ *

Sandra rent van A naar B en meteen daarna terug naar A. Op de heenweg loopt ze met een snelheid van 14 km/uur en op de terugweg met een snelheid van 12 km/uur.

Ze doet 1 uur en 5 minuten over de totale afstand.

Hoeveel km is de afstand tussen A en B?

073
☐ ⊙ *

In de Verenigde Staten van Amerika gebruikt men de eenheid kubieke feet (ft^3) om de hoeveelheid gebruikt drinkwater aan te geven.

Met de formule $K = 0,025x + 45$ bereken je de kosten in dollars bij het gebruik van $x \text{ ft}^3$ drinkwater.

- a Bereken de kosten bij het gebruik van 200 ft^3 drinkwater.

De kosten K zijn uit te drukken in y , waarbij y het aantal gebruikte m^3 drinkwater is. Hierbij gebruik je dat $1 \text{ foot} = 30,48 \text{ cm} = 0,3048 \text{ m}$.

Afgerond op twee decimalen is 200 ft^3 gelijk aan $5,66 \text{ m}^3$.

- b Licht dit toe met een berekening.

Er geldt $x \approx 35,3y$.

- c Licht dit toe.

Met $x = 35,3y$ wordt de formule $K = 0,8825y + 45$.

- d Licht dit toe en gebruik deze formule om te berekenen hoeveel de kosten zijn bij het gebruik van $5,66 \text{ m}^3$ drinkwater. Klopt dit met je antwoord op vraag a?

Theorie C Eenheden omzetten

In de formule $N = 0,01w^2 + 2w + 10$ is w de tijd in weken.
Deze formule zet je als volgt om naar een formule waarbij N is uitgedrukt in de tijd d in dagen.

In één week zitten 7 dagen, dus het aantal weken is $\frac{1}{7} \times$ het aantal dagen. Dat betekent dat je in de formule w vervangt door $\frac{1}{7}d$.

Zo krijg je

$$N = 0,01 \cdot \left(\frac{1}{7}d\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{7}d + 10 = 0,0002040\dots d^2 + 0,28571\dots d + 10.$$

Afronden geeft de formule $N = 0,000204d^2 + 0,2857d + 10$.

In het voorbeeld wordt het benzineverbruik dat is uitgedrukt in liter per 100 km omgezet naar mijl per gallon. Hierbij wordt km omgezet naar mijl en liter naar gallon.

$w = \frac{1}{7}d$
controle: $d = 7$ geeft
 $w = 1$ en dat klopt.

Voorbeeld

In veel landen, waaronder Nederland, wordt het benzineverbruik van personenauto's vaak uitgedrukt in liter per 100 km. In landen die het Brits-Amerikaanse maatsysteem gebruiken, wordt het benzineverbruik uitgedrukt in mijl per gallon.

Een auto met benzinemotor heeft volgens de fabrikant een verbruik van 6,0 liter per 100 km.

Druk dit verbruik uit in mijl per gallon. Rond af op één decimaal.

Gebruik 1 mijl = 1,6 km en 1 gallon = 3,8 liter.

Uitwerking

6,0 liter per 100 km = 100 km per 6,0 liter =

$$\frac{100}{1,6} \text{ mijl per } \frac{6,0}{3,8} \text{ gallon} = \frac{100}{1,6} : \frac{6,0}{3,8} \text{ mijl per gallon} \approx$$

39,6 mijl per gallon



R74 Zie het voorbeeld.



a In de eerste stap van de uitwerking staat een omkering.
Waarom is deze omkering nodig?

b Licht toe dat $100 \text{ km} = \frac{100}{1,6} \text{ mijl}$ en $6,0 \text{ liter} = \frac{6,0}{3,8} \text{ gallon}$.

75



Auto 1 heeft een benzineverbruik van 5,8 liter per 100 km. Auto 2 heeft een benzineverbruik van 6,4 liter per 100 km.

a Hoeveel km komt auto 1 verder dan auto 2 met een volle tank van 50 liter?

b Auto 1 heeft 40 liter benzine in de tank.

Hoeveel liter moet auto 2 in de tank hebben, zodat deze even ver kan rijden als auto 1? Rond af op één decimaal.



- a** Een schip legt in 8 uur 110 zeemijlen af.
Bereken de gemiddelde snelheid in km/uur. Rond af op één decimaal.
Gebruik dat 1 zeemijl = 1852 meter.
- b** Het Arches National Park in Utah (VS) heeft een oppervlakte van 76679 acres.
Hoeveel km² is dat? Rond af op gehele. Gebruik dat 1 acre = 4049 m².



- c** In de formule $N = 0,1t^2 + 0,5t + 10$ is t de tijd in uren.
Zet de formule om naar de vorm $N = ad^2 + bd + c$ met d de tijd in dagen.
- d** In de formule $L = 0,04t^2 - t + 31$ is t de tijd in dagen en L de lengte in inch.
Zet de formule om naar de vorm $l = aw^2 + bw + c$ met w de tijd in weken en l de lengte in cm. Rond in het antwoord af op twee decimalen en gebruik dat 1 inch = 2,54 cm.



Volgens een autofabrikant wordt het benzineverbruik van een van zijn modellen gegeven door de formule $B = 0,000625v^2 - 0,1v + 10$. Hierin is v de snelheid van de auto in km/uur met $40 \leq v \leq 150$ en B het benzineverbruik in liter per 100 km.

- a** Bij welke snelheid is het benzineverbruik minimaal? Hoeveel km kun je bij deze snelheid rijden met een tank van 45 liter?

Je kunt de formule $B = 0,000625v^2 - 0,1v + 10$ omzetten naar een formule waarbij het benzineverbruik V in liter per 100 mijl is en de snelheid x in mijl per uur. Je gebruikt 1 mijl = 1,6 km. Zo krijg je de formule $V = 0,00256x^2 - 0,256x + 16$.

- b** Toon aan dat de formule van V juist is.

De formule $V = 0,00256x^2 - 0,256x + 16$ is om te zetten naar een formule waarbij het benzineverbruik P in gallon per 100 mijl is en de snelheid x in mijl per uur.

- c** Leid deze formule af. Gebruik dat 1 gallon = 3,8 liter.

Bij een onderzoek naar de toestand van het Great Barrier Reef voor de noordoostkust van Australië is een model opgesteld van de temperatuur van het zeewater voor de kust. Het model is $F = 0,252m^2 - 3,06m + 84,2$. Hierin is F de temperatuur van het zeewater in graden Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) en m de tijd in maanden met $m = 0$ op 1 januari en $0 \leq m \leq 12$.



Voor het omrekenen van graden Fahrenheit

naar graden Celsius ($^{\circ}\text{C}$) gebruik je de formule

$C = \frac{F - 32}{1,8}$. Hierin is C de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en F de temperatuur in $^{\circ}\text{F}$.

Uit de formule $C = \frac{F - 32}{1,8}$ volgt $F = 1,8C + 32$.

- a** Toon dit aan.
- b** Bereken in graden Celsius hoeveel de temperatuur van het zeewater afneemt tussen 1 februari en 1 april. Rond af op één decimaal.
- c** Bereken hoeveel $^{\circ}\text{F}$ de minimale temperatuur van het zeewater is. Geef ook de minimale temperatuur in $^{\circ}\text{C}$. Rond af op één decimaal.

De formule $F = 0,252m^2 - 3,06m + 84,2$ is om te zetten naar de formule $C = 0,14m^2 - 1,7m + 29$. Hierin is C de temperatuur van het zeewater in $^{\circ}\text{C}$.

- d** Toon dit aan.

De formule $C = 0,14m^2 - 1,7m + 29$ is om te zetten naar de formule $C = 0,0075w^2 - 0,39w + 29$. Hierin is w de tijd in weken met $w = 0$ op 1 januari.

- e** Toon dit aan. Gebruik 1 maand = $\frac{52}{12}$ weken.

De formule $C = 0,0075w^2 - 0,39w + 29$ is om te zetten naar een formule van de vorm $C = ad^2 + bd + 29$. Hierin is d de tijd in dagen met $d = 0$ op 1 januari.

- f** Bereken a en b . Geef a en b in de wetenschappelijke notatie en rond af op twee decimalen.
- g** Bereken voor welke d de temperatuur van het zeewater minimaal is.

Bij een orkaan kan er door stormvloed enorme schade aan de kust ontstaan. Om een idee te krijgen hoe hoog het water kan worden opgestuwd, heeft men het model hiernaast gemaakt. Je ziet een langwerpige bak, die gedeeltelijk met water is gevuld. Er wordt lucht geblazen over het wateroppervlak en daarna wordt er gewacht tot het water stopt met klotsen. Er gebeuren dan twee dingen: het water circuleert en het stuwt met de wind mee op.



Op grond van experimenten met zo'n bak heeft men een formule opgesteld van de toename van de hoogte van het water. Deze formule is

$$H = 0,00035 \cdot \frac{v^2 l}{h}$$

Hierin is H de toename van de hoogte in voet, v de windsnelheid in mijl per uur, l de lengte in mijl waarover de wind over het wateroppervlak blaast en h de gemiddelde waterdiepte in voet.

Gebruik in deze opgave dat 1 mijl = 1,6 km en 1 voet = 30,5 cm.

- a** Welke bezwaren zijn er tegen het model van de bak in te brengen, als je de resultaten wilt gebruiken om voorspellingen te doen over de stormvloed bij een orkaan?

- b** Bij een orkaan met een windsnelheid van 90 mijl per uur, blaast de wind over een lengte van 80 mijl over kustwater dat een gemiddelde diepte heeft van 25 voet.

Bereken met de formule de toename van de hoogte van het water aan de kust. Rond af op gehele dm.

- c** Bij een orkaan met een windsnelheid van 160 km per uur, blaast de wind over een lengte van 120 km over kustwater dat een gemiddelde diepte heeft van 10 meter.

Reken deze gegevens om naar achtereenvolgens mijl per uur, mijl en voet. Bereken hiermee met de formule hoeveel de toename van de hoogte van het water aan de kust is. Geef het antwoord in meter en rond af op één decimaal.

- d** De gegeven formule is om te zetten naar een formule van de vorm

$$H = c \cdot \frac{v^2 l}{h}$$

met H in meter, v in km per uur, l in km en h in meter. Bereken voor deze formule de constante c . Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op twee decimalen.

Terugblik

Lengte, oppervlakte en inhoud

Hieronder staan de belangrijkste maten voor lengte, oppervlakte en inhoud.

lengte	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
oppervlakte	km ²	hm ² (ha)	dam ² (are)	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
inhoud	km ³	hm ³	dam ³	m ³	dm ³ (L)	cm ³ (mL)	mm ³

Bij de lengtematen zit er tussen elke stap een factor 10.

Zo is $1 \text{ km} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ m} = 1000 \text{ m}$. Omgekeerd is $1 \text{ m} = \frac{1}{1000} \text{ km}$.

Bij de oppervlaktematen zit er tussen elke stap een factor 100.

Zo is $1 \text{ cm}^2 = \frac{1}{100^2} \text{ m}^2$.

Bij de inhoudsmaten zit er tussen elke stap een factor 1000.

Zo is $1 \text{ m}^3 = 1000^3 \text{ mm}^3$.

Verder is $1 \text{ L} = 10 \text{ dL} = 100 \text{ cL} = 1000 \text{ mL}$.

Tijd, afstand en snelheid

Bij het omrekenen van meter per seconde (m/s) naar kilometer per uur (km/uur) gebruik je dat $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/uur}$.

Omgekeerd is $1 \text{ km/uur} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s}$.

Loopt een atleet de 400 meter in 44,25 seconden, dan is zijn gemiddelde

snelheid $\frac{400}{44,25} \text{ m/s} = \frac{400}{44,25} \cdot 3,6 \text{ km/uur} \approx 32,542 \text{ km/uur}$.

Eenheden omzetten

Waar de Rijn Nederland binnenkomt is de waterdoorvoer gemiddeld $2200 \text{ m}^3/\text{s}$. Om te berekenen hoeveel km^3 dat per jaar is, gebruik je dat $1 \text{ km}^3 = 10^9 \text{ m}^3$ en $1 \text{ jaar} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ seconden}$.

Dus $2200 \text{ m}^3/\text{s} = 2200 \cdot \frac{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{10^9} \approx 69 \text{ km}^3/\text{jaar}$.

Om te berekenen hoeveel hectare gelijk is aan 250 vierkante mijl, gebruik je dat $1 \text{ mijl} = 1,6 \text{ km}$.

Dus $250 \text{ vierkante mijl} = 250 \cdot 1,6^2 = 640 \text{ km}^2 = 64000 \text{ ha}$.

In de formule $A = 0,05t^2 + 4t + 3$ is t de tijd in uren. Om deze formule om te zetten in een formule waarbij A wordt uitgedrukt in de tijd d in dagen gebruik je dat $1 \text{ dag} = 24 \text{ uur}$, dus $t = 24d$.

Je krijgt $A = 0,05 \cdot (24d)^2 + 4 \cdot 24d + 3 = 28,8d^2 + 96d + 3$, dus $A = 28,8d^2 + 96d + 3$.

Eindopdracht Hoogwater in de rivieren

In de eerste helft van januari 2018 was de waterstand in de rivieren extreem hoog door veel regenval in Duitsland en België en smeltwater uit Zwitserland.

Op donderdag 11 januari 2018 stond hierover een column van Bert Wagendorp in de Volkskrant. Hiernaast zie je het eerste gedeelte van deze column.

In de berekening van Bert klopt niet alles.

- Onderzoek wat er niet klopt in deze berekening.

De gemiddelde afvoer in de gehele Rijndelta, dat is inclusief de afvoer van de Maas, is $2900 \text{ m}^3/\text{s}$.

- Bereken hoeveel km^3 water er gedurende een jaar wordt afgevoerd in de gehele Rijndelta. Denk je dat je hiermee de gehele Noordzee kunt vullen?

De gemiddelde afvoer van de Rijn zoals deze bij Lobith ons land binnenkomt is $2300 \text{ m}^3/\text{s}$. Het stroomgebied van de Rijn in Zwitserland en Duitsland is totaal $160\,000 \text{ km}^2$.

Als je aanneemt dat de helft van alle neerslag in dit stroomgebied door de Rijn wordt afgevoerd, dan kun je de gemiddelde jaarlijkse neerslag in het stroomgebied van de Rijn berekenen.

- Bereken onder deze aanname de gemiddelde jaarlijkse neerslag in het stroomgebied van de Rijn in cm nauwkeurig. Vergelijk dit met het gegeven in opgave 64. Kan je berekening kloppen?

ARTIKEL

Schitterend plan

Het water in de Rijn bereikte gisteren de hoogste stand. Bij Tolkamer stroomde per seconde zeven miljoen liter Duits en Zwitsers water ons land binnen. In gewone landen zou dat tot dolle paniek leiden en menige delta zou blank staan; zo niet hier. Hier keken de ingenieurs van Rijkswaterstaat tevreden toe: het plan deed het. ‘Alles wat we hebben bedacht werkt’, zei Harold van Waveren van Rijkswaterstaat, tevens voorzitter van de Landelijke Coördinatiecommissie Overstromingsdreiging, tegen onze Mac van Dinther.

‘Het plan’ heet Ruimte voor de Rivier. In 1995 stroomde de Betuwe bijna onder water, waarna het plan werd opgesteld. Dat bestond uit 34 projecten die een nieuwe panieksituatie moesten voorkomen. De totale kosten zouden naar schatting 2,3 miljard euro bedragen. In 2007 werd met de uitvoering van het plan begonnen.

In een persoonlijk staaltje factchecking probeerde ik gisteren te checken of dat wel kan, 7 miljoen liter per seconde. Dat is namelijk 420 miljoen liter per minuut, 25,2 miljard liter per uur, 604,8 miljard liter per etmaal. Dat leek me waanzinnig veel, minstens een Noordzeetje of dertig. Hielden ze in Duitsland überhaupt nog water over, op deze manier? Ik probeerde uit te rekenen hoe groot een aquarium moest zijn waarin je een etmaal Rijnwater kon bergen: tien bij tien bij zes kilometer. Groot, maar niet onoverzichtelijk groot. Sommetjes zijn mooi.

Ik heb altijd een ingenieursbrein willen hebben; de relaxte overzichtelijkheid van opmeten, uitrekenen, plannen en uitvoeren. De werkelijkheid vangen in cijfers en formules en daarna naar je hand zetten. Geen slap fatalisme, maar actie. Helaas heb ik een chaosbrein.

Diagnostische toets

3.1 Breuken en verhoudingen

1 Herleid.

a $5 \cdot \frac{3a}{b} \cdot \frac{a-2}{2b}$

b $\frac{3x}{4} \cdot \frac{2-y}{x}$

c $4p : \frac{4p+1}{2p+1}$

2 Herleid tot één breuk.

a $\frac{4}{3p} - \frac{2}{5p}$

b $\frac{1}{x} + x \cdot \frac{5y}{4x^2}$

c $\frac{ab}{2a^2} \cdot (b+1) - (a+1) \cdot \frac{3}{a(a+1)}$

3 In een zakje Mexicaanse mix zitten drie soorten zoutjes, namelijk nootjes, ringetjes en driehoekjes in een gewichtsverhouding van 8 : 7 : 4.

- a Bereken hoeveel gram van elke soort in de zak zit als het totale gewicht 285 gram is.
- b Bereken hoeveel gram driehoekjes in de zak zit als deze in totaal 180 gram nootjes en ringetjes bevat.

3.2 Herleiden van formules

4 a Werk bij $(3x-2)^2 - (2x+1)(3x-1)$ de haakjes weg en herleid.

- b De formule $L = 0,032 \cdot \frac{p}{0,0128} \cdot (2+6q)$ is te herleiden tot de vorm $L = apq + bp$.
Bereken a en b .

5 a Maak y vrij bij de vergelijking $4x - 3y = 15$.

b Druk x uit in y bij de vergelijking $6(2x-1) + 9y = 24$.

c Schrijf P als functie van Q bij de formule $5\left(\frac{2}{3}P - 6\right) + 3Q = 4(3-P)$.

3.3 Procentberekeningen en de wetenschappelijke notatie

6 De volgende vragen gaan over een Wereldwinkel.

- a In januari was de omzet 3950 euro. In februari daalde de omzet met 38% ten opzichte van januari.
Bereken de omzet in februari.
- b Ten opzichte van maart is in april de omzet met 12% toegenomen tot 3250 euro.
Hoeveel was de omzet in maart?
- c De omzet steeg in augustus met 14% ten opzichte van juli. Ook in september en oktober steeg de omzet ten opzichte van de maand ervoor. De percentages waren achtereenvolgens 6% en 12%.
Hoeveel procent was de omzet in oktober hoger dan in juli?
- d Gemiddeld gaat 45% van de bezoekers van de winkel over tot een aankoop. In november werd 216 keer een aankoop gedaan.
Hoeveel bezoekers kwamen die maand in de winkel?

- 7** Schrijf de antwoorden in de wetenschappelijke notatie. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- a** Op een bepaald moment bevindt de maan zich op 384 duizend kilometer van de aarde. De zon staat op dat moment 400 keer zo ver van de aarde.
Hoeveel meter is de afstand tussen de zon en de aarde?
 - b** Van een bacteriesoort is de lengte een miljoenste deel van de lengte van een volwassen mens.
Geef een schatting van de lengte van deze bacterie in mm.

3.4 Rekenen met eenheden

- 8** Hans vult zijn bad met 160 liter water. Het bad is balkvormig met een lengte van 1,35 m en een breedte van 52 cm.
Bereken hoeveel cm hoog het water komt.
- 9** Kim begint met hardlopen. Ze loopt telkens 5,1 km.
- a** De eerste keer doet ze er 43 minuten over.
Bereken haar gemiddelde snelheid in km/uur.
 - b** De beste vriendin van Kim heeft al veel langer getraind. Zij loopt met een snelheid van 11 km/uur hetzelfde rondje.
Hoelang doet ze er over? Geef het antwoord in minuten nauwkeurig.
- 10** Annelieke meet regelmatig de lengte van haar baby Suze, om te controleren of ze goed groeit. Het eerste half jaar kan haar lengte beschreven worden door de formule $l = -0,00002d^2 + 0,138d + 50,9$. Hierin is l de lengte in centimeter en d de tijd in dagen.
- a** Zet deze formule om naar een formule waarbij de lengte L in meter is en de tijd w in weken.
- Op vakantie in Engeland wil Annelieke flesvoeding geven. Op de verpakking leest ze dat aan elke fluid ounce water (fl.oz.) een schepje melkpoeder moet worden toegevoegd.
- b** Hoeveel schepjes moet Annelieke aan 250 mL water toevoegen? Rond af op gehelen. Gebruik dat 1 fl.oz. = 28,41 mL.



4

Combinatoriek

Wat leer je?

- Telproblemen overzichtelijk weergeven.
- Dat je bij telproblemen moet afvragen of herhalingen zijn toegestaan en of de volgorde van belang is.
- De driehoek van Pascal gebruiken.
- Wat permutaties, faculteiten en combinaties zijn.
- Herkennen welke aanpak nodig is voor het oplossen van een telprobleem.



Beginopdracht Kentekens

In sommige landen hebben personenauto's een kenteken dat persoonsgebonden is, of afhangt van de plaats waar iemand vandaan komt. In Nederland hebben personenauto's een kenteken dat bij het voertuig hoort en afhangt van het moment van uitgifte van het kenteken. Daarbij worden cijfers en letters gebruikt in een volgorde die afhangt van de zogenaamde sidecode, de serie waar het kenteken deel van uitmaakt.

Voor personenauto's wordt er gewoonlijk gebruikgemaakt van de 16 letters B, D, F, G, H, J, K, L, N, P, R, S, T, V, X en Z. Verder worden alle cijfers gebruikt, dus ook de 0.

In de praktijk zijn er bepaalde lettercombinaties die men niet wil gebruiken, bijvoorbeeld als deze een afkorting uit de Tweede Wereldoorlog vormen of een politieke partij weergeven. In deze opdracht houden we daar geen rekening mee.

Sidecode 5 werd ongeveer acht jaar gebruikt, van halverwege 1991 tot halverwege 1999. In deze sidecode werd een kenteken gevormd door vier letters gevolgd door twee cijfers, bijvoorbeeld:



In deze sidecode werd van de eerdergenoemde 16 letters de K niet gebruikt. De B en de V werden wel gebruikt, maar niet als eerste letter.

Sidecode 8 werd van maart 2013 tot maart 2015 gebruikt. Hierbij werd een kenteken gevormd door een cijfer, dan drie letters en dan weer twee cijfers, bijvoorbeeld:



In deze sidecode werd de K weer gebruikt, maar als beginletter werden slechts de K, S, T, X en Z gebruikt.

- Bereken op basis van deze gegevens in welke van de twee genoemde periodes er meer kentekens per jaar werden uitgegeven.

Voorkennis De vermenigvuldigingsregel en de somregel

Theorie A Telproblemen

In een bedrijfskantine kun je dagelijks kiezen uit drie hoofdgerechten en twee nagerechten.

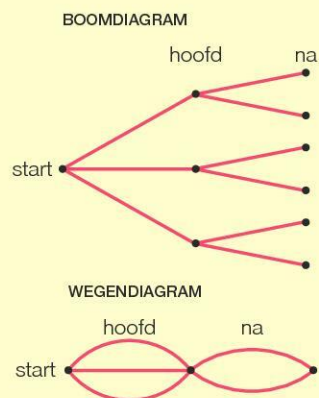
Het boomdiagram geeft 6 mogelijkheden aan. De

berekening die hierbij hoort is $3 \times 2 = 6$. Ook in het wegendia-

gram kun je deze berekening herkennen. Een voordeel van een boomdiagram ten opzichte van een wegendiagram is dat alle mogelijkheden apart zijn aangegeven.

Een nadeel van een boomdiagram is dat bij een groot aantal keuzemogelijkheden het tekenen veel werk is.

Een wegendiagram kan dan vaak uitkomst bieden.



figuur 4.1

Als je twee of meer handelingen uitvoert, dan heb je te maken met de vermenigvuldigingsregel.

Zijn er voor handeling I vier mogelijkheden, voor handeling II vijf mogelijkheden en voor handeling III twee mogelijkheden, dan zijn er voor de gecombineerde handeling $4 \times 5 \times 2$ mogelijkheden.

De vermenigvuldigingsregel

Een gecombineerde handeling die bestaat uit

handeling I die op p manieren kan worden uitgevoerd

en handeling II die op q manieren kan worden uitgevoerd

en handeling III die op r manieren kan worden uitgevoerd

kan op $p \times q \times r$ manieren worden uitgevoerd.

Bij sommige telproblemen heb je niet alleen de

vermenigvuldigingsregel nodig, maar ook de somregel.

Ga je in figuur 4.2 van A naar B , dan moet je via P of via Q .

Het aantal manieren van A naar B via P is 3×4 .

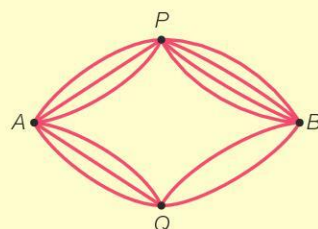
Het aantal manieren van A naar B via Q is 3×2 .

Het totale aantal manieren van A naar B is

$3 \times 4 + 3 \times 2 = 18$.

Dat je moet optellen kun je vaak herkennen aan het

woordje 'of'. Je kunt hier namelijk van A naar B via P of via Q .



figuur 4.2

Optellen of vermenigvuldigen?

Kan handeling I op p manieren en handeling II op q manieren, dan kan

- handeling I EN handeling II op $p \times q$ manieren
- handeling I OF handeling II op $p + q$ manieren.

Bij 'of' hoort optellen.
Soms kun je het woordje 'of' er eerst bij denken, zoals bij vraag b in het voorbeeld hieronder.

Voorbeeld

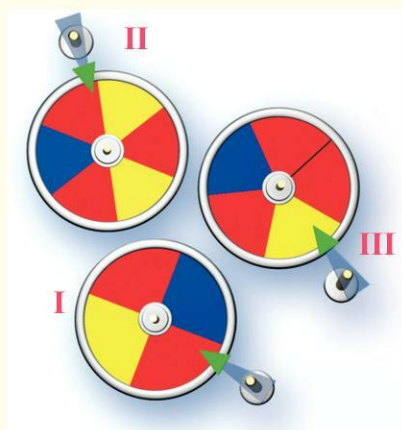
Robert laat de schijven hiernaast elk één keer draaien.

Hoeveel uitkomsten zijn er met

- a drie keer rood
- b drie gelijke kleuren
- c twee keer geel en één keer blauw?

Uitwerking

- a rrr
aantal = $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$
- b rrr of bbb of ggg
aantal = $2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 21$
- c ggb of gbg of bgg
aantal = $1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 5$

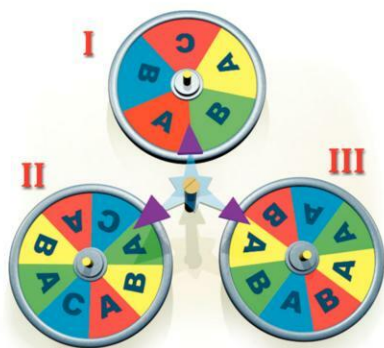


figuur 4.3

- 1 Muriël laat de schijven hiernaast elk één keer draaien.

Hoeveel uitkomsten zijn er

- a met drie keer een A
- b met drie keer dezelfde letter
- c met twee keer een A en één keer een C
- d zonder B
- e met drie dezelfde kleuren
- f met twee keer groen en één keer rood?



figuur 4.4

- 2 Op een boekenplank staan 11 Engelse, 8 Duitse en 5 Franse boeken.

- a Loubna leest van deze boeken eerst een Engels, dan een Duits en ten slotte een Frans boek.
Hoeveel mogelijke drietallen zijn er?
- b Hoeveel mogelijke tweetallen zijn er voor Loubna als ze twee boeken leest: eerst een Engels boek en daarna een Frans of een Duits boek?

4.1 Regels voor telproblemen



01 Bente gooit met een rode en een blauwe dobbelsteen.

In het rooster hiernaast staat een begin van een overzicht van de mogelijke resultaten.

- Vul het overzicht verder in.
- Hoeveel mogelijkheden zijn er om minstens 9 ogen te gooien?

Je kunt het aantal mogelijkheden om minstens 9 ogen te gooien ook vinden door de mogelijkheden systematisch te noteren.

- Doe dat.

SOM VAN DE OGEN

6	7					
5	6					
4	5					
3	4	5				
2	3	4				
1	2	3				
	1	2	3	4	5	6

rode dobbelsteen

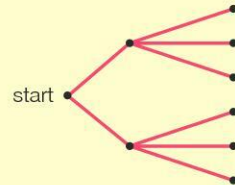
figuur 4.5 In het rooster zijn 36 mogelijke uitkomsten te onderscheiden.

Theorie A Telproblemen overzichtelijk weergeven

In opgave 1 heb je gezien dat je een telprobleem ook kunt oplossen door een **rooster** te gebruiken en door **systematisch noteren**.

Telproblemen visualiseren

1 Boomdiagram



2 Wegendiagram



3 Rooster

Het aantal mogelijkheden bij het gooien met twee geldstukken is uit het rooster af te lezen. Dit aantal is 4.

	k	m
k		
m		

4 Systematisch noteren

Er zijn 6 manieren om bij een worp met drie dobbelstenen in totaal 5 ogen te gooien.

113	131	311
221	212	122

Voorbeeld

Zes voetbalteams spelen een hele competitie.
In een hele competitie speelt elk team één keer thuis
en één keer uit tegen elk ander team.
Hoeveel wedstrijden zijn er in totaal?

Aanpak

Maak een rooster waarin je de wedstrijden aangeeft.
Je krijgt zes rijen met elk vijf wedstrijden.

Uitwerking

Er zijn $6 \cdot 5 = 30$ wedstrijden.

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

2
□ ⊙ *

- a N is het aantal wedstrijden in een hele competitie met n teams.
Stel de formule op van N .
b Wat wordt bedoeld met een halve competitie?

3
□ ⊙

- De basketbalteams van de klassen 4v1, 4v2, 4h1, 4h2 en 4h3 spelen een halve competitie.
a Welke vorm van visualisatie gebruik je het liefst om een overzicht van alle wedstrijden te krijgen?
b Hoeveel wedstrijden zijn er in totaal in een halve competitie met vijf teams?
c Verander de formule van opgave 2a zo, dat N het aantal wedstrijden geeft van een halve competitie met n teams.

4
*

- a Hoeveel wedstrijden worden gespeeld in een halve competitie met n teams?
b In een halve competitie worden in totaal 45 wedstrijden gespeeld.
Onderzoek hoeveel teams aan deze halve competitie deelnemen.

5
□ ⊙ *

- Aan een voetbalkampioenschap doen 40 teams mee. De teams worden ingedeeld in acht groepen van vijf teams die een hele competitie spelen. De groepswinnaars spelen daarna volgens het afvalsysteem met uit- en thuiswedstrijden om het kampioenschap.
a Hoeveel wedstrijden worden in totaal gespeeld?
b Hoeveel wedstrijden heeft de kampioen gespeeld?

6
□ ⊙

- Jona gaat een hardloopschema maken. Hij wil iedere week drie dagen hardlopen, telkens op dezelfde dagen. Hij wil nooit twee dagen achter elkaar hardlopen.
Hoeveel verschillende schema's kan Jona maken?



- 7** Een gewone dobbelsteen wordt ook wel een zesvlaksdobbelsteen genoemd. Jai gooit met een viervlaksdobbelsteen en een achthoeksdobbelsteen. Zie de groene en de blauwe dobbelsteen in figuur 4.6. Hoeveel mogelijkheden zijn er
- om in totaal 8 ogen te gooien
 - om minder dan 8 ogen te gooien
 - waarbij het product van de ogen 8 is?



figuur 4.6

- 8** Een bedrijf laat een nieuwe website maken. De achtergrond van de website moet bestaan uit drie gekleurde, horizontale banen. Voor de kleur van de banen moet gekozen worden uit rood, geel en blauw. Twee aan elkaar grenzende banen mogen niet dezelfde kleur hebben. Hoeveel achtergronden zijn er voor de website mogelijk?

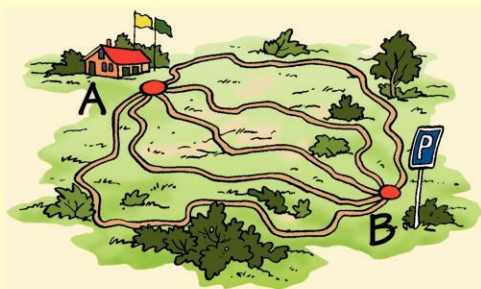
- A9** Hoeveel mogelijkheden zijn er om met drie gewone dobbelstenen in totaal
- 17 ogen te gooien
 - 16 ogen te gooien
 - minstens 16 ogen te gooien
 - 6 ogen te gooien?

- A10** In deze opgave kijken we naar positieve gehele getallen van drie cijfers waarvan het middelste cijfer het gemiddelde is van de andere twee. Een voorbeeld van zo'n getal is 741. Hoeveel van die getallen zijn er?

- O11** De firma Nelovo voorziet zijn artikelen van een code bestaande uit twee letters. Gekozen wordt uit de letters A, B, C en D. Hoeveel codes zijn mogelijk? Onderscheid de volgende situaties.
- De tweede letter is een andere dan de eerste letter.
 - De letters mogen gelijk zijn.

Theorie B Met en zonder herhaling

Het aantal rondwandelingen van A via B terug naar A in figuur 4.7 is $5 \times 5 = 25$. Je gaat er dan vanuit dat je terug dezelfde weg mag kiezen als heen. Wil je terug niet dezelfde weg nemen als heen, dan is het aantal $5 \times 4 = 20$. Het is bij telproblemen belangrijk je af te vragen of **herhalingen** zijn toegestaan.



figuur 4.7

Zonder herhaling

Een bestuur van acht personen kiest uit zijn midden eerst de voorzitter, dan de secretaris en ten slotte de penningmeester.

Het aantal manieren om deze functies te verdelen bereken je als volgt.

$$\text{aantal} = \overset{8}{\uparrow} \times \overset{7}{\uparrow} \times \overset{6}{\uparrow} = 336$$

eerst de voorzitter:
keuze uit 8 personen

dan de secretaris:
keuze uit 7 personen

ten slotte de penningmeester:
keuze uit 6 personen

Met herhaling

In een volleybalteam met acht spelers wordt in de maanden maart, april en mei een speler van de maand gekozen. Dit mag steeds dezelfde speler zijn.

Het aantal manieren om de spelers van de maand te kiezen bereken je als volgt.

$$\text{aantal} = \overset{8}{\uparrow} \times \overset{8}{\uparrow} \times \overset{8}{\uparrow} = 512$$

8 spelers voor de
eerste maand

8 spelers voor de
tweede maand

8 spelers voor de
derde maand

Voorbeeld

Een bedrijf codeert zijn artikelen met getallen van vijf cijfers.

Alleen de cijfers 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8 worden gebruikt.

Hoeveel van die getallen zijn er in het geval

- a elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
- b elk cijfer vaker gebruikt mag worden en het getal groter dan 50 000 moet zijn
- c elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 65 000 moet zijn?

Aanpak

- c Is het eerste cijfer 5 of lager, dan maken de volgende cijfers niets uit.
Is het eerste cijfer 6, dan moet het tweede cijfer lager dan 5 zijn.

Uitwerking

- a $\text{aantal} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ Voor de eerste plaats 7 mogelijkheden, dan nog 6 voor de tweede plaats, ...
- b Het eerste cijfer is 5, 6, 7 of 8.
 $\text{aantal} = 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 9604$ Herhalingen zijn toegestaan.
- c Het eerste cijfer is 2, 3, 4 of 5 **OF** het eerste cijfer is 6 en het tweede is 2, 3 of 4.
 $\text{aantal} = 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1620$

- 12** In deze opgave gaat het om getallen van vier cijfers, waarin alleen maar de cijfers 3, 4, 5, 6, 7 en 8 voorkomen.

Hoeveel van die getallen zijn er in het geval

- a** elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
- b** elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 6000 moet zijn
- c** elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal groter moet zijn dan 6500?

- 13** Bij een uitwisseling maakt een groep van acht Nederlandse en tien Franse leerlingen een wandeling door Lille. Eén leerling maakt foto's, één leerling maakt een verslag en één leerling bepaalt de route. Op hoeveel manieren zijn drie leerlingen aan te wijzen als

- a** een Franse leerling de route bepaalt en het verder niet uitmaakt
- b** een Franse leerling de route bepaalt en Nederlandse leerlingen de foto's en het verslag maken
- c** de foto's en het verslag niet allebei door Franse leerlingen en niet allebei door Nederlandse leerlingen worden gemaakt?



- 14** De IATA (International Air Transport Association) gebruikt een drieletter-code om een vliegveld aan te geven. Zo hoort AMS bij Schiphol en PAP bij Port-au-Prince (Haïti).

- a** Hoeveel van die codes zijn in totaal mogelijk?
- b** Hoeveel codes zijn mogelijk waarbij geen twee gelijke letters naast elkaar staan?
- c** Hoeveel codes zijn mogelijk die met een L beginnen?

- A15** In een bedrijf krijgt elk artikel een code. Bij het coderen gebruikt men de letters *o*, *p*, *q*, *r*, *s* en *t*.

- a** Hoeveel codes van drie letters zijn mogelijk als
 - elke letter maar één keer gebruikt mag worden
 - elke letter vaker gebruikt mag worden?
- b** Het bedrijf gebruikt codes van één, twee, drie, vier, vijf of zes letters. Hoeveel codes zijn er in totaal als
 - in een code geen gelijke letters mogen voorkomen
 - in een code letters vaker mogen voorkomen?

- R16** Een bedrijf voorziet zijn artikelen van een lettercode. Bij het coderen gebruikt men de letters a, b, c, d en e . Bedenk een vraag waarop het antwoord luidt
- a** er zijn 5^4 codes mogelijk
 - b** er zijn $5 \cdot 4 \cdot 3$ codes mogelijk
 - c** er zijn $5 \cdot 4 \cdot 5^3$ codes mogelijk
 - d** er zijn $5 \cdot 4 \cdot 4$ codes mogelijk.

- A17** In de tabel staat informatie over de leerlingen van een vierde klas. Uit deze groep worden twee leerlingen gekozen voor de leerlingenraad. De als eerste gekozen leerling vertegenwoordigt de klas en de als tweede gekozen leerling is reserve. Hoeveel tweetallen zijn mogelijk als
- a** de eerste leerling een jongen is en de tweede leerling een meisje van 17 jaar
 - b** één van de twee 16 jaar moet zijn
 - c** er een jongen en een meisje bij zijn
 - d** de leerlingen even oud zijn
 - e** de eerste leerling ouder moet zijn dan de tweede?

	jongen	meisje	
15 jaar	8	11	19
16 jaar	4	1	5
17 jaar	2	5	7
	14	17	31

- A18** Rosalin schrijft getallen van tien cijfers op die alleen bestaan uit de cijfers 1, 2 en 3. Ook wil zij dat cijfers die naast elkaar staan precies 1 verschillen. Hoeveel getallen kan Rosalin maximaal opschrijven?

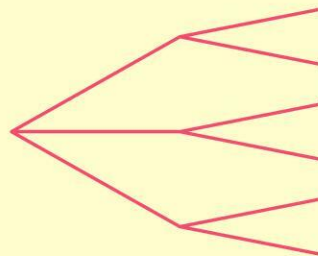
Terugblik

Telproblemen visualiseren

Er zijn meerdere manieren om telproblemen te visualiseren.
Zie hieronder.

Boomdiagram

Je ziet dat er 6 mogelijkheden zijn.



Wegendiagram

Je ziet dat er $3 \times 5 \times 3 = 45$ mogelijkheden zijn.



Rooster

Bijvoorbeeld handig bij het gooien met twee dobbelstenen.

Je ziet hiernaast dat bij het gooien met een gewone dobbelsteen en een viervlaksdobbelssteen er 4 mogelijkheden zijn met som 5.

4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

Systematisch noteren

Bijvoorbeeld handig bij het gooien met drie of meer dobbelstenen.

Je ziet dat je op 10 manieren hoogstens 5 ogen kunt gooien bij een worp met drie dobbelstenen.

hoogstens 5 ogen met
drie dobbelstenen

111	112	113	122
	121	131	212
	211	311	221

Wel of geen herhalingen?

Let bij telproblemen op of herhalingen zijn toegestaan.

Maak je getallen van vier cijfers waarbij je de cijfers 4, 5, 6, 7, 8 en 9 mag gebruiken, dan krijg je

- met herhaling $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ mogelijkheden
- zonder herhaling $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ mogelijkheden.

4.2 Permutaties en combinaties



Een groep van tien vrienden heeft een vriendenweekend. Eén van hen reserveert de verblijfplaats, één regelt het vervoer en een derde doet de inkopen.

- a Op hoeveel manieren kunnen deze drie taken verdeeld worden?
- b Op hoeveel manieren kunnen tien verschillende taken over deze tien vrienden verdeeld worden?

Theorie A Permutaties en faculteiten

Aan een volleybaltoernooi doen acht teams mee. We noemen ze A, B, C, D, E, F, G en H. We vragen ons af op hoeveel manieren de gouden, de zilveren en de bronzen medaille bij deze teams terecht kunnen komen. Het antwoord volgt uit de vermenigvuldigingsregel. Dat aantal is $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. Eén van de rangschikkingen is BEA. Een ander woord voor rangschikking is **permutatie**. Dus het aantal permutaties van 3 uit 8 is $8 \cdot 7 \cdot 6$. Bij een permutatie kunnen geen herhalingen optreden.

Bij veel telproblemen in de vorige paragraaf ging het om het berekenen van aantallen permutaties.



Permutatie komt van het Latijnse woord *permutare*, dat verwisselen of omwisselen betekent.

Het aantal permutaties van 4 uit 10, oftewel het aantal rangschikkingen van vier dingen die je uit tien dingen kiest, is $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

Het aantal permutaties van 6 uit 8 is $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ en het aantal permutaties van 8 uit 8 is $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

De notatie voor dit laatste product is $8!$.

Spreek uit: 8 **faculteit**. Dus het aantal permutaties van acht dingen is $8!$.

Het aantal permutaties van n dingen, dus het aantal rangschikkingen van n dingen, is $n!$.
 $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

De GR heeft opties waarmee je faculteiten en het aantal permutaties kunt berekenen.

- Op de TI krijg je $!$ en nPr in het math-KANS-menu of via de functietoets f2.
- Op de Casio krijg je $!$ en nPr in het OPTN-PROB-menu.
- Op de HP krijg je Factorieel en Permutatie in het werksetmenu



Wisk. Kies vervolgens Kans.

De Franse wiskundige Christian Kramp gebruikte omstreeks 1800 voor het eerst de notatie $n!$ voor $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Voorbeeld

Een reclameblok bestaat uit 9 items: 2 over zakelijke producten, 3 over huishoudelijke artikelen en 4 over voedingsmiddelen.

- a Op hoeveel manieren kunnen deze items worden gerangschikt?
- b Op hoeveel manieren kunnen deze items worden gerangschikt als de drie items over huishoudelijke artikelen direct na elkaar komen?

Aanpak

- a Je hebt met een permutatie van 9 uit 9 te maken, dus gebruik een faculteit.
- b Vat de 3 items over huishoudelijke artikelen *eerst* als één item op. Er zijn dan 7 items. Bedenk dat je vervolgens de 3 items over huishoudelijke artikelen ook nog onderling kunt rangschikken.

Uitwerking

- a aantal = $9! = 362\,880$
- b aantal = $7! \cdot 3! = 30\,240$



20

- a Van de favoriete artiest van Otje staan twaalf nummers op een streamingdienst. Ze stelt een top vijf samen. Op hoeveel manieren kan dat?
- b In een kamer staan acht stoelen op een rij. Vijf personen komen de kamer binnen. Elke persoon neemt plaats op een stoel. Op hoeveel manieren kan dat?
- c Een fotograaf heeft 14 foto's gemaakt van het zeehondencentrum in Pieterburen. In een brochure van tien pagina's wordt op elke pagina één foto afgedrukt. Op hoeveel manieren kunnen de foto's geplaatst worden?



21

- Jesse is de pincode van zijn bankpas vergeten, maar hij weet nog wel dat daarin de cijfers 2, 5, 8 en 9 voorkomen.
- a Hoeveel pincodes zijn er met deze cijfers?
 - b Hoeveel van deze pincodes beginnen met 5?



22

- Sasha heeft vijf verschillende wiskundeboeken en drie verschillende scheikundeboeken. Ze zet ze naast elkaar op een lege boekenplank.
- a Op hoeveel manieren kan ze de acht boeken rangschikken?
 - b Op hoeveel manieren kan ze de boeken rangschikken als de wiskundeboeken naast elkaar moeten staan?
 - c Op hoeveel manieren kan ze de boeken rangschikken als zowel de wiskunde- als de scheikundeboeken naast elkaar moeten staan?

23
□ ⊙ *

Een saxofoonkwartet bereidt een concert voor dat zal bestaan uit vier klassieke stukken, drie jazznummers en twee popnummers.

Op hoeveel manieren kunnen zij deze werken ten gehore brengen als zij

- a met een klassiek stuk beginnen en met een jazznummer eindigen
- b de jazznummers direct achterelkaar willen spelen
- c steeds een klassiek stuk willen afwisselen met een ander nummer
- d de stukken van elk genre direct achterelkaar willen spelen?



A24
□ ⊙ *

De selectie van het eerste team van korfbalvereniging Avanti bestaat uit zes heren en zes dames.

De trainer wijst een aanvoerder en een reserve-aanvoerder aan.

- a Op hoeveel manieren kan dit?

Aan het begin van de competitie wordt een foto van de selectie gemaakt.

De fotograaf zet de twaalf spelers op een rij.

- b Hoeveel rijen zijn mogelijk?
- c Hoeveel rijen zijn mogelijk waarbij de heren naast elkaar staan?

E25
*

Er moet een trein gemaakt worden door achter een locomotief vijf wagons (A, B, C, D en E) te plaatsen. Wagon A moet dichterbij de locomotief komen dan wagon B.

Op hoeveel manieren kan deze trein gemaakt worden?

R26
□ ⊙ *

Een bedrijf gebruikt codes met de letters a, b, c, d, e en f.

Bedenk een vraag waarbij er

- a 6! codes zijn
- b $6 \cdot 5 \cdot 4$ codes zijn
- c 6^4 codes zijn
- d $2 \cdot 4^3$ codes zijn
- e $5! \cdot 2!$ codes zijn
- f $2 \cdot 4! \cdot 2!$ codes zijn.

O27
□ ⊙ *

- a Hoeveel permutaties van 2 uit 4 zijn er?

Een klas kiest een afvaardiging van twee leerlingen voor het schoolparlement. Vier leerlingen van de klas tonen belangstelling, namelijk Anne, Bas, Chris en Daphne.

De permutaties Anne - Daphne en Daphne - Anne leggen dezelfde afvaardiging vast.

- b Hoeveel afvaardigingen kan de klas leveren?

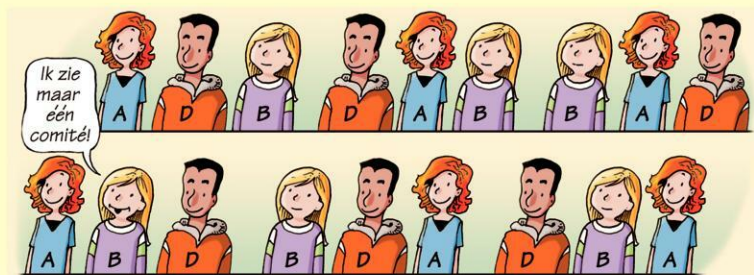
Theorie B Combinaties

Voor het organiseren van een feest bieden zich vijf leerlingen A, B, C, D en E aan. De leraar wijst uit deze vijf leerlingen er drie aan die het organisatiecomité gaan vormen. Hoeveel comités zijn er samen te stellen?

Een eerste gedachte zou de volgende kunnen zijn. Voor het eerste lid heb je vijf mogelijkheden, voor het tweede lid vier en voor het derde lid zijn er nog drie mogelijkheden. Toch is het antwoord $5 \cdot 4 \cdot 3$ niet juist.

Je moet er namelijk rekening mee houden, dat het comité ABD hetzelfde is als de comités ADB, BDA, BAD, DAB en DBA. De volgorde waarin de leerlingen gekozen zijn, doet er bij een comité immers niet toe. Deze $3! = 6$ gelijke comités tellen maar voor één. Steeds zijn er $3!$ gelijke comités, dus je moet $5 \cdot 4 \cdot 3$ door $3!$ delen.

Het aantal comités is $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$.



figuur 4.8

Is bij het kiezen van 3 dingen uit 5 dingen de volgorde niet van belang, dan spreken we van het aantal **combinaties** van 3 uit 5.

Bij het aantal comités van 3 uit 5 gaat het om combinaties en niet om permutaties.

Het aantal combinaties van 3 uit 5 wordt genoteerd als $\binom{5}{3}$.

Spreek uit: vijf boven drie.

Het aantal combinaties van k uit n , oftewel het aantal manieren om k dingen te kiezen uit n dingen zonder op de volgorde te letten, is $\binom{n}{k}$.

Op de GR vind je de optie voor combinaties in hetzelfde menu als de optie voor permutaties.

Op de TI en Casio worden combinaties weergegeven met nCr.

Ga na dat $\binom{5}{3} = 10$.

Voorbeeld

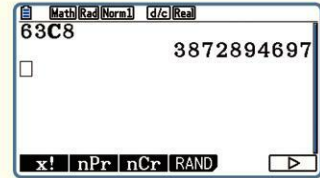
Van de 63 leerlingen van 4 vwo worden er acht uitgekozen om een enquête over de toetsweek in te vullen.
Hoeveel achttallen zijn mogelijk?

Aanpak

De volgorde is niet van belang, dus het gaat om combinaties.

Uitwerking

$$\text{aantal} = \binom{63}{8} = 3\,872\,894\,697$$



R28

Gaat het bij de volgende situaties om combinaties of om permutaties?

- a Uit een klas worden zes leerlingen gekozen om boodschappen te doen voor het schoolfeest.
- b Bij een verloting zijn drie prijzen te winnen: een fiets, een grafische rekenmachine en een taart.
- c In een klas worden vijf bioscoopbonnen verloot.
- d Een vereniging kiest uit haar leden een voorzitter, een secretaris en een penningmeester.
- e Uit de top tien van vorige week stel je een eigen top drie samen.
- f Van alle docenten van een school komen vijf docenten op een schoolfeest.

R29

In een klas met 25 leerlingen worden vijf kaartjes verloot voor een concert.

- a Op hoeveel manieren kan dat?

Liv berekent het antwoord van vraag a met $\binom{25}{20}$ want zij denkt dat je net zo goed kunt berekenen welke 20 leerlingen geen kaartje krijgen.

- b Onderzoek of dit klopt.
- c Onderzoek met enkele getallenvoorbeelden of geldt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

30

- a Uit een selectie van 18 personen wordt een spelersraad van vier spelers samengesteld.
Hoeveel spelersraden zijn mogelijk?
- b Bij de lotto kruist een deelnemer zes getallen aan uit de nummers 1 tot en met 45.
Hoeveel zestallen zijn mogelijk?
- c Een toets bestaat uit 20 ja/nee-vragen.
Hoeveel mogelijkheden zijn er om 15 juiste antwoorden aan te kruisen?

31

Jan gaat op vakantie. Hij heeft 15 paar schoenen, waarvan hij er vier mee wil nemen op vakantie.

- a Hoeveel keuzemogelijkheden heeft Jan?
- b Jan heeft twee paar winterschoenen, die hij niet geschikt vindt om mee te nemen. Bovendien wil hij zijn hardloopschoenen zeker meenemen. Met hoeveel neemt het aantal keuzemogelijkheden daardoor af ten opzichte van het aantal bij vraag a?



32

Op het Simon Stevin Lyceum heeft de sciencevleugel 12 lokalen die allemaal naast elkaar liggen.

- a Drie lokalen krijgen een nieuw type bord. Op hoeveel manieren kunnen deze lokalen gekozen worden?
- b Op hoeveel manieren kunnen 12 klassen over deze lokalen worden verdeeld?
- c Op hoeveel manieren kunnen zes docenten over deze lokalen worden verdeeld?
- d Tijdens een vijfde uur zijn er 4 natuurkundelessen, 3 scheikundelessen en 5 biologielessen. Hoeveel verdelingen van deze lessen over de lokalen zijn mogelijk als de docenten met hetzelfde vak naast elkaar willen zitten?

GESCHIEDENIS

Simon Stevin

Simon Stevin werd in 1548 geboren in Brugge. Hij was wiskundige, natuurkundige en ingenieur. Op latere leeftijd verhuisde hij naar Den Haag en schreef hij zich in bij de universiteit van Leiden.

In zijn werk *De Thiende* introduceerde Simon Stevin decimale breuken, die het rekenen met breuken behoorlijk vereenvoudigden. Daarnaast had hij ook verdiensten in de natuurkunde, sterrenkunde en techniek. Hij probeerde daarbij theorie en experiment aan elkaar te koppelen.

Ook had hij een grote voorliefde voor de Nederlandse taal. Hij vond deze zo mooi, dat hij allerlei Nederlandse woorden verzoon in plaats van de gebruikelijke Latijnse termen. Eén daarvan is het woord wiskunde (wisconst) als alternatief voor mathematica. Andere woorden die afkomstig zijn van Simon Stevin zijn bijvoorbeeld loodrecht in plaats van perpendicular en raaklijn in plaats van tangens.



Simon Stevin

33



Bij de finale van de Welsh Open, een snookerwedstrijd, gaat het om 'best of 17'. Dat wil zeggen dat wie het eerst 9 frames heeft gewonnen de finale wint. Hawkins en Higgins spelen de finale van de Welsh Open. Hoeveel mogelijkheden zijn er

- a voor Higgins om in 14 frames te winnen
- b waarbij de finale 17 frames duurt
- c voor Hawkins om in hoogstens 13 frames te winnen?

A34



Uit een klas van 28 leerlingen wordt een basketbalteam van acht spelers samengesteld.

- a Hoeveel teams zijn mogelijk?
- b Op hoeveel manieren kunnen de acht spelers op een rij gaan staan?
- c Bij basketbal staan per team vijf spelers in het veld.

Op hoeveel manieren kunnen de vijf startende spelers gekozen worden uit de acht?

- d Bij basketbal zijn er vijf posities in het veld, zoals center en point-guard.

Op hoeveel manieren kunnen deze gevuld worden met de acht spelers?



R35



- a Hoeveel is $\binom{17}{0}$, $\binom{17}{1}$, $\binom{17}{16}$ en $\binom{17}{17}$?

- b Beredeneer hoe je zonder de GR aan de antwoorden van vraag a kunt komen.

- c Geef $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ en $\binom{n}{n}$.

O36



Isa moet voor haar examendossier vijf Engelse en vier Duitse boeken lezen. De Engelse boeken kiest ze uit een lijst van 60 boeken en de Duitse uit een lijst van 40 boeken.

Op hoeveel manieren kan Isa

- a de vijf Engelse boeken kiezen
- b de vier Duitse boeken kiezen
- c de vijf Engelse én de vier Duitse boeken kiezen?

Theorie C Aantallen combinaties vermenigvuldigen en optellen

In het voorbeeld op de volgende bladzijde gebruik je de vermenigvuldigingsregel en de somregel, dit keer in een situatie waarin je met combinaties te maken hebt.

Voorbeeld

Op een school bestaat de feestcommissie uit zes jongens en negen meisjes. Na elk feest maken zes leden van de feestcommissie de zaal schoon. Hoeveel schoonmaakkploegen zijn mogelijk met

- a twee jongens
- b minstens vijf meisjes?

Aanpak

- a De volgorde is niet van belang, dus het gaat om combinaties. In een schoonmaakkploeg met twee jongens zitten ook vier meisjes. Kies dus twee van de zes jongens EN vier van de negen meisjes. Gebruik de vermenigvuldigingsregel.
- b Minstens vijf meisjes wil zeggen: vijf meisjes en één jongen OF zes meisjes. Gebruik de somregel.

Uitwerking

a aantal = $\binom{6}{2} \cdot \binom{9}{4} = 1890$

b aantal = $\binom{9}{5} \cdot \binom{6}{1} + \binom{9}{6} = 840$

NORM DRIJF AUTO REEEL RAD WIN	
$6C_2 \cdot 9C_4$	1890
$9C_5 \cdot 6C_1 + 9C_6$	840

37 Zie het voorbeeld.



Hoeveel schoonmaakkploegen zijn er met

- a drie jongens
- b alleen maar jongens
- c hoogstens één meisje
- d meer dan vier jongens?

38 Levi heeft twaalf vrienden. Met vijf van deze vrienden gaat hij naar de bioscoop.



- a Hoeveel vijftallen zijn mogelijk?
- b Van de vrienden van Levi zijn de broers Quincy en Jasper onafscheidelijk. Daarom zal Levi nooit uitsluitend één van de broers uitnodigen. Hoeveel vijftallen zijn nu mogelijk?
- c Van zijn vrienden hebben Thiago en Don ruzie. Op hoeveel manieren kan Levi vijf vrienden kiezen als hij Thiago en Don niet samen wil uitnodigen?

39 Bij poker wordt een spel met 52 kaarten gebruikt.



Er zijn vier soorten kaarten: klaveren, schoppen, harten en ruiten. Van elke soort zijn er 13 kaarten, namelijk 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A.

Bij poker draait het om een set van vijf kaarten.

Een voorbeeld daarvan is full house, dat is een drietal van dezelfde getallen of letters en ook nog een tweetal.

Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er voor full house?



40

*

Een groep van zeven studenten gaat samen koken en eten. Hiervoor moeten boodschappen gedaan worden. Omdat het een heel gesleep is, zijn hier minstens twee mensen voor nodig, maar er kunnen er voor de gezelligheid ook meer meegaan. Het stelletje Ivo en Sandra wil in ieder geval bij elkaar blijven: zij gaan dus beiden wel of beiden niet mee. Op hoeveel manieren kan de groep die boodschappen gaat doen samengesteld worden?

A41





Restaurant Tapas serveert allerlei kleine gerechten om te delen. Hieronder zie je welke gerechten dat zijn.

vlees	vis	vegetarisch
serranoham	ansjovis	geitenkaas met honing
kippenpootjes	knoflookgarnalen	gegrilde groene asperges
ossenhaaspuntjes	calamares	champignons in knoflook
albondigas	wraps met zalm	spinazie-kaaskroketjes
spareribs	zeebaarsfilet	aardappeltortilla
chorizo	garnalenkroketjes	roergebakken groente
		patatas bravas
		brood met aioli
		gemengde salade

Er zijn dus zes vleesgerechten om uit te kiezen, zes visgerechten en negen vegetarische gerechten.

- Op hoeveel manieren kun je acht verschillende gerechten kiezen?
- Kim en Nikkie willen zeven verschillende gerechten bestellen, waarbij in ieder geval patatas bravas en garnalenkroketjes. Op hoeveel manieren kan dat?
- Peter en Sarah eten geen vlees, maar soms wel vis. Ze willen minstens zes vegetarische gerechten. Hoeveel manieren zijn er voor hen om in totaal acht verschillende gerechten te kiezen?
- Kees en Matthijs houden erg van vlees en gaan twee vleesgerechten dubbel kiezen. Daarnaast kiezen ze nog vier verschillende vegetarische gerechten en twee verschillende visgerechten. Op hoeveel manieren kan dat?

Het restaurant heeft vier keuzes voor een dessert.

- Op hoeveel manieren kun je een menu samenstellen van vier verschillende gerechten en daarna al dan niet een dessert?



Terugblik

Permutaties

Een permutatie van vijf dingen is een rangschikking van deze vijf dingen.

Dus *abcde*, *acedb*, *bacde* en *daceb* zijn verschillende permutaties van de letters *a*, *b*, *c*, *d* en *e*.

Het totale aantal permutaties van vijf dingen is $5!$. Spreek uit: 5 faculteit.
 $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Het aantal permutaties van vijf dingen uit elf dingen is

$$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55\,440.$$

Je kunt ook de speciale optie op de GR gebruiken.

Het aantal rangschikkingen van 5 stripboeken en 3 romans

Je kunt 5 stripboeken en 3 romans op

- $8!$ manieren naast elkaar op een boekenplank rangschikken
- $4! \cdot 5!$ manieren rangschikken als de stripboeken naast elkaar moeten staan
- $2! \cdot 5! \cdot 3!$ manieren rangschikken als de stripboeken en ook de romans naast elkaar moeten staan.

Combinaties

Kies je drie dingen uit zeven dingen zonder op de volgorde te letten, dan heb je te maken met een combinatie van 3 uit 7.

Het aantal combinaties van 3 uit 7 is $\binom{7}{3} = 35$.

Gebruik voor het berekenen van aantallen combinaties de GR.

Bij het aantal afvaardigingen van vier personen uit een klas van

25 leerlingen gaat het om combinaties. Het aantal is $\binom{25}{4} = 12\,650$.

Combinaties vermenigvuldigen en optellen

In de tabel zie je de samenstelling van klas 4 vwo A.

Uit deze klas wordt een comité van vijf leerlingen gevormd.

Het aantal mogelijke comités met

- drie jongens is $\binom{12}{3} \cdot \binom{17}{2} = 29\,920$

3 jongens EN 2 meisjes, dus vermenigvuldigen

- minstens vier jongens is $\binom{12}{4} \cdot \binom{17}{1} + \binom{12}{5} = 9\,207$.

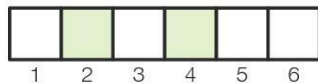
4 jongens en 1 meisje OF 5 jongens, dus optellen

	15 jaar	16 jaar	
jongen	8	4	12
meisje	10	7	17
	18	11	29

4.3 Rijtjes en roosters



Een bedrijf voorziet zijn artikelen van een code door in een rijtje van zes vierkantjes er twee groen te maken. Het maken van een code komt dus neer op het kiezen van twee van de zes vierkantjes.

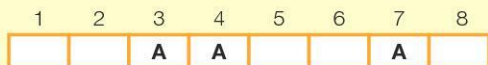


- Gaat het hierbij om combinaties of om permutaties? Licht toe.
- Hoeveel codes kan het bedrijf maken?

Theorie A Rijtjes bestaande uit A's en B's

Een voorbeeld van een rijtje met drie A's en vijf B's is ABBBAABB. Het totale aantal rijtjes bestaande uit drie A's en vijf B's vind je als volgt.

Zet in drie van de acht hokjes een A. Dat kan op $\binom{8}{3}$ manieren.



Zet vervolgens vijf B's in de resterende vijf hokjes. Dat kan op $\binom{5}{5}$ manieren. Dus er zijn $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{5} = \binom{8}{3} = 56$ rijtjes met drie A's en vijf B's.

Je had ook eerst in vijf van de acht hokjes een B kunnen zetten en daarna drie A's in de resterende drie hokjes.

Dat kan op $\binom{8}{5} \cdot \binom{3}{3} = \binom{8}{5} = 56$ manieren.

Het aantal rijtjes bestaande uit drie A's en vijf B's is dus $\binom{8}{3}$ en ook $\binom{8}{5}$. En zo is het aantal rijtjes bestaande uit twee A's en zes B's gelijk aan $\binom{8}{2}$ en ook aan $\binom{8}{6}$.

$$\begin{aligned} \binom{8}{2} &= \binom{8}{6} \\ \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \end{aligned}$$

Het totale aantal rijtjes van acht hokjes met in elk hokje een A of een B is dus gelijk aan $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 256$.

Maar het totale aantal van 256 manieren om acht hokjes met A's en B's te vullen, is ook als volgt te vinden.

Er zijn twee manieren om het eerste hokje te vullen én er zijn twee manieren om het volgende hokje te vullen, enzovoort.

Totaal zijn er $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^8 = 256$ manieren.

Het aantal rijtjes bestaande uit vier A's en zeven B's is

$\binom{11}{4}$ en ook $\binom{11}{7}$.

Het totale aantal rijtjes van elf hokjes met in elk hokje een A of een B is 2^{11} .

- 43** David gooit tien keer met een geldstuk. Telkens noteert hij K (kop) of M (munt).
 Een mogelijke serie is KKMMKMMMKK.
 Hoeveel series zijn er
- met acht keer kop
 - met vijf keer kop
 - in totaal mogelijk
 - die met KK beginnen?

- 44** Voor een theorie-examen moeten 20 tweekeuzevragen worden beantwoord.
- Hoeveel mogelijkheden zijn er om het formulier in te vullen?
 - Hoeveel mogelijkheden zijn er met 15 juiste antwoorden?
 - Een kandidaat slaagt als hij minstens 80% van de vragen juist beantwoordt.
 Op hoeveel manieren kun je het formulier invullen om te slagen?
 Hoeveel procent is dat van het totale aantal manieren om het formulier in te vullen?

- 45** Kees en Frits maken rijtjes bestaande uit drie A's en vijf B's.

⊙* Kees zegt: Er zijn $\binom{8}{3}$ rijtjes.

Frits redeneert als volgt.

- Ik moet een rangschikking maken van 8 letters, dus ik heb 8! mogelijkheden.
- Maar er zijn 3 gelijke A's bij, dus ik moet delen door 3! en er zijn 5 gelijke B's bij, dus ik moet delen door 5!.

Het totale aantal rijtjes is dus $\frac{8!}{3! \cdot 5!}$.

- a** Controleer dat $\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \binom{8}{3} = \binom{8}{5}$.

Op bladzijde 175 heb je gezien dat $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \binom{5}{3}$. En zo is $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \binom{8}{3}$.

Vermenigvuldig je teller en noemer van $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$ met 5!, dan krijg je

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3! \cdot 5!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!}. \text{ Hiermee is aangetoond dat } \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \binom{8}{3}.$$

- b** Gebruik net als Frits faculteiten om de opgaven 43a en 43b te maken.

A46 Een bedrijf codeert zijn artikelen met de letters A en B.

□ ⊗ * Een code van vijf letters is bijvoorbeeld BAABA.

- Hoeveel codes van zeven letters zijn er met minstens vijf A's?
- Hoeveel codes van zes letters zijn er die meer A's dan B's bevatten?
- Hoeveel codes van negen letters zijn er in totaal?

47 **□ ⊗ *** Elsbeth gooit met vijf dobbelstenen. Ze vraagt zich af hoeveel mogelijkheden er zijn om in totaal 28 ogen te gooien. Ze bedenkt dat 66655 één van de mogelijkheden is. Door systematisch de mogelijkheden te noteren, ziet ze dat 'drie zessen en twee vijven' 10 keer voorkomt. Zie hiernaast.

- Hoe kun je dit aantal berekenen met combinaties?

Elsbeth bedenkt dat je met 'vier zessen en een vier' ook aan 28 ogen komt.

- Hoeveel mogelijkheden zijn er om 'vier zessen en een vier' te gooien?
- Hoeveel mogelijkheden zijn er om met vijf dobbelstenen in totaal 28 ogen te gooien?

66655
66565
66556
65665
65656
65566
56665
56656
56566
55666

48 Hoeveel mogelijkheden zijn er om

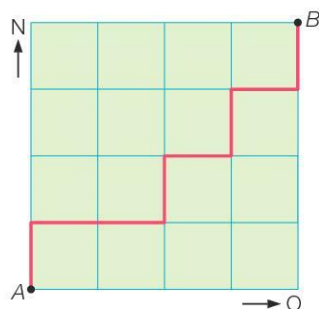
- met vier dobbelstenen in totaal 6 ogen te gooien
- met zes dobbelstenen in totaal 34 ogen te gooien?

49 **□ ⊗ *** Van sommige moderne steden bestaat de plattegrond uit een rechthoekig stratenplan. Vooral in de VS komt dat veel voor.

In figuur 4.8 zie je een schematische voorstelling van een stukje van zo'n plattegrond. We bekijken hierin routes zonder omwegen van A naar B.

De rode route geven we aan met NOONONON.

- Schrijf nog twee mogelijke routes van A naar B op.
- Hoeveel letters staan in een route van A naar B? Hoe vaak staat de letter N daarbij?
- Hoeveel routes zijn er van A naar B?



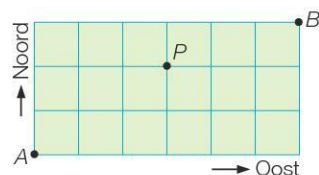
figuur 4.8

50 **□ ⊗ *** Zie het rooster in figuur 4.9. We vragen ons af hoeveel routes zonder omwegen er zijn van A via P naar B.

Van A naar P zijn er $\binom{5}{2}$ routes en

van P naar B zijn er $\binom{4}{1}$ routes.

- Licht dit toe.
- Licht toe dat er 40 routes zonder omwegen van A via P naar B zijn.
- Hoeveel procent van de routes zonder omwegen van A naar B gaat via P?



figuur 4.9

51


- a** Bij een voetbalwedstrijd is de eindstand 2-4. Een mogelijk scoreverloop is 1-0, 1-1, 1-2, 2-2, 2-3, 2-4. Geef dit scoreverloop in een rooster aan als route van (0, 0) naar (2, 4).
- b** Hoeveel scoreverlopen zijn mogelijk met eindstand 2-4?
- c** Hoeveel scoreverlopen zijn mogelijk met ruststand 3-1 en eindstand 5-4?



A52


- a** Hoeveel scoreverlopen zijn mogelijk bij een voetbalwedstrijd met eindstand 6-3?
- b** Hoeveel scoreverlopen zijn mogelijk bij een voetbalwedstrijd waarin vier keer gescoord wordt?

A53


- a** Op hoeveel manieren kun je in figuur 4.10a WISKUNDE A lezen?
- b** Op hoeveel manieren kun je in figuur 4.10b GETAL EN RUIMTE lezen?



a

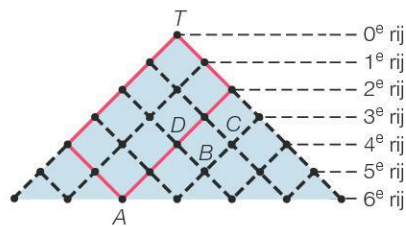


b

figuur 4.10

O54

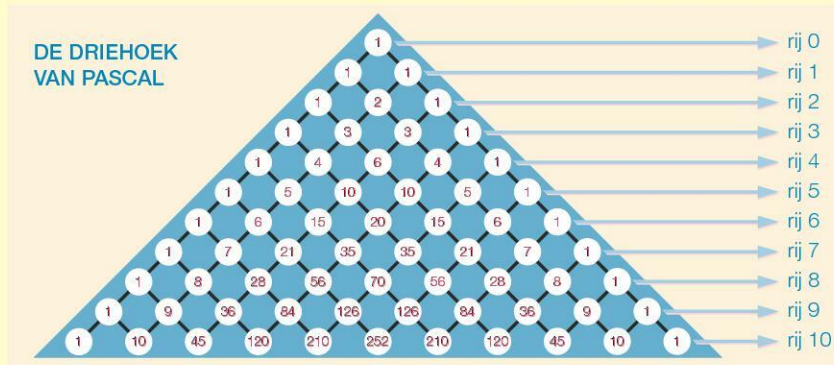

- a** Bereken hoeveel kortste routes er zijn van T naar A in het rooster hiernaast.
- b** Bij elk roosterpunt kun je het aantal kortste routes van T naar dat roosterpunt berekenen. Licht toe dat je in de zesde rij de getallen $\binom{6}{0}$, $\binom{6}{1}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{3}$, $\binom{6}{4}$, $\binom{6}{5}$ en $\binom{6}{6}$ krijgt.
- c** Het getal bij B kun je krijgen door de getallen bij C en D op te tellen. Je kunt immers alleen maar in B komen via C of via D . Gebruik deze eigenschap om de getallen in de zevende en achtste rij te berekenen.
- d** Geef de som van de getallen in de tiende rij.



figuur 4.11

Theorie B De driehoek van Pascal

Het driehoekige getallenschema hieronder heet de **driehoek van Pascal**. De driehoek is genoemd naar de Franse filosoof en wiskundige Blaise Pascal (1623-1662).



figuur 4.12

Elk getal in de driehoek van Pascal geeft het aantal kortste routes om vanuit de top op die plaats te komen. De getallen in de n -de rij zijn $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$.

De som van de getallen in de n -de rij is 2^n .

Elk getal krijg je door de twee getallen die er schuin boven staan bij elkaar op te tellen.

GESCHIEDENIS

Blaise Pascal

Blaise Pascal werd in 1623 te Clermont (Frankrijk) geboren. Al op zijn veertiende jaar werd hij toegelaten tot de wekelijkse bijeenkomsten van de Franse Academie der Wetenschappen. Vijf jaar later, in 1642, maakte Pascal een rekenmachine waarmee het mogelijk was getallen op te tellen en af te trekken. Deze machine, een doos vol cilinders en tandwielen, gebruikte hij om zijn vader te helpen bij het vele rekenwerk dat deze als belastingambtenaar moest verrichten. Een van de vraagstukken waar Pascal zich mee bezighield, is het probleem van de verhouding waarin de pot verdeeld

moet worden over de spelers als een dobbelspel voortijdig afgebroken wordt. Hierbij staat de vraag centraal welke kans op winst elke speler heeft op het moment dat het spel wordt afgebroken. Pascal en zijn landgenoot Fermat kwamen uiteindelijk tot een oplossing van het vraagstuk. Als waardering voor zijn grote bijdragen aan de ontwikkeling van de kansrekening en combinatoriek is de driehoek van Pascal naar hem vernoemd. Hij was echter niet de ontdekker van de driehoek. Deze was namelijk al omstreeks 1300 bekend in het oude China.

55
□ ⊙ *

Uit de driehoek van Pascal volgt dat $\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{4}$.

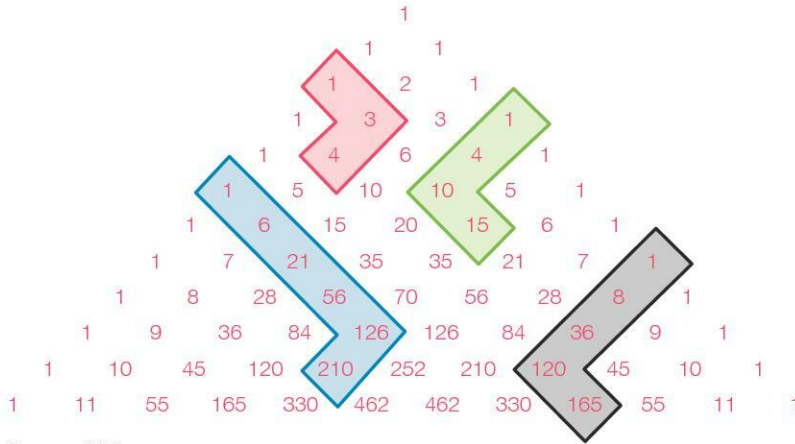
a Licht dit toe.

b Vul in. Uit de driehoek van Pascal volgt

- $\binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{\dots}{\dots}$
- $\binom{12}{8} + \binom{12}{9} = \binom{\dots}{\dots}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{\dots}{\dots}$

56
□ ⊙ *

Hieronder zie je een gedeelte van de driehoek van Pascal waarin enkele patronen zijn aangegeven.



figuur 4.13

Er geldt $1 + 3 = 4$, $1 + 4 + 10 = 15$,

$1 + 6 + 21 + 56 + 126 = 210$ en $1 + 8 + 36 + 120 = 165$.

We noemen zulke patronen hockeystickpatronen.

a Schrijf nog twee hockeystickpatronen op.

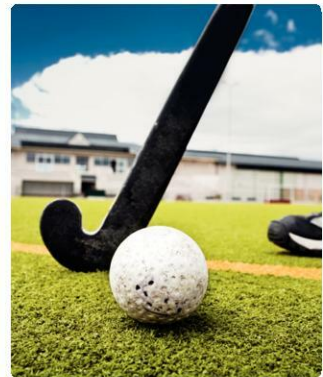
Het patroon $1 + 6 + 21 + 56 + 126 = 210$ kun je ook

noteren als $\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \dots + \dots + \dots = \binom{10}{4}$.

b Vul dit verder in.

c Vul in. Uit de driehoek van Pascal volgt

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{\dots}{\dots}.$$



In de figuur hiernaast zie je een manier om in zes hokjes drie A's te plaatsen.

a Op hoeveel manieren kan dat in totaal?

Nu worden er van de resterende hokjes twee gekozen waarin een B wordt geplaatst. Hiernaast zie je daarvan een voorbeeld.

b Licht toe dat er $\binom{3}{2}$ manieren zijn om dit te doen.

Er kan nu nog op één manier een C geplaatst worden.

c Gebruik dit om het aantal rijtjes bestaande uit drie A's, twee B's en een C te berekenen.

Om het aantal rijtjes te berekenen kun je ook eerst kijken naar het aantal manieren om C in een hokje te zetten, daarna de twee B's en ten slotte de drie A's.

d Laat zien dat de berekening die daarbij hoort dezelfde uitkomst geeft.

1	2	3	4	5	6
	A	A			A

1	2	3	4	5	6
B	A	A		B	A

1	2	3	4	5	6
B	A	A	C	B	A

Theorie C Rijtjes met meer dan twee letters

Het totale aantal rijtjes bestaande uit drie A's, vier B's en twee C's vind je als volgt.

- Zet in drie van de negen hokjes een A.

Dat kan op $\binom{9}{3}$ manieren.

- Zet vervolgens in vier van de resterende zes hokjes een B.

Dat kan op $\binom{6}{4}$ manieren.

- Zet ten slotte twee C's in de resterende twee hokjes.

Dat kan op $\binom{2}{2} = 1$ manier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	A			A		A		

1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	A	B		A	B	A	B	

1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	A	B	C	A	B	A	B	C

Er zijn dus $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{4} \cdot 1 = \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{4} = 1260$ rijtjes met drie A's, vier B's en twee C's.

Het maakt niet uit met welke letter je begint bij het vullen van de hokjes. Zet je eerst de vier B's, vervolgens de twee C's en ten slotte de drie A's,

dan krijg je $\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2}$ mogelijke rijtjes. Ook dit aantal is 1260.

Het totale aantal rijtjes van negen letters, waarbij alleen maar A's, B's en C's worden gebruikt, is $3^9 = 19683$.

Voorbeeld

Bereken het aantal getallen

- a van zes cijfers die bestaan uit drie tweeën, twee vieren en een vijf
- b van acht cijfers die bestaan uit twee enen, vier tweeën, een drie en een vier.

Uitwerking

a aantal = $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 60$

b aantal = $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{1} = 840$

R58 Het aantal rijtjes bestaande uit drie A's, vier B's en vijf C's is

 $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5}$, maar ook $\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}$.

Licht dit toe.

59 a Hoeveel rijtjes zijn mogelijk met acht A's, vier B's en twee C's?

 b Hoeveel rijtjes zijn mogelijk met drie P's, vijf Q's, één R en vier T's?

c Bereken het aantal rangschikkingen van de letters van het woord TELEVISIETOESTEL.

d Bereken het aantal rangschikkingen van de letters van het woord MISSISSIPPI.

e Hoeveel mogelijkheden zijn er om met vijf dobbelstenen twee zessen, twee vijven en een vier te gooien?

f Hoeveel mogelijkheden zijn er om met twaalf dobbelstenen elk ogenaantal even vaak te gooien?

A60 a Vroeger gaven schepen signalen door met behulp van vlaggen. Neem aan dat een signaal uit 10 vlaggen bestaat en dat er 4 rode, 3 blauwe en 3 witte vlaggen zijn.

Hoeveel signalen zijn er te geven?

b Een telefoonnummer begint met 06 en bestaat verder uit 3 vieren, 4 vijven en 1 negen.

Hoeveel van die telefoonnummers zijn mogelijk?

c Hoeveel rangschikkingen kun je maken met alle letters van het woord SINAASAPPELS als de drie A's naast elkaar moeten staan?

Terugblik

Rijttjes met A's en B's

- Het aantal rijttjes bestaande uit drie A's en zeven B's is $\binom{10}{3}$ en ook $\binom{10}{7}$.
- Het aantal rijttjes met tien hokjes waarbij elk hokje gevuld is met een A of een B is 2^{10} .
- Bij het tien keer gooien met een geldstuk is het aantal series met drie keer munt (en dus zeven keer kop) gelijk aan $\binom{10}{3}$.

Rijttjes met meer dan twee letters

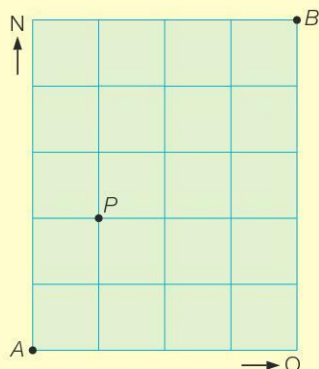
- Het aantal rijttjes met vier A's, drie B's en zes C's is $\binom{13}{4} \cdot \binom{9}{3}$.
Je kunt bijvoorbeeld ook $\binom{13}{6} \cdot \binom{7}{4}$ berekenen, maar ook $\frac{13!}{4! \cdot 3! \cdot 6!}$.
- Het aantal getallen van acht cijfers met drie vieren, twee vijven en drie achten is $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2}$, maar ook $\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 3!}$.

Routes in een rooster

- Het aantal kortste routes van A naar B in het rooster in de figuur hiernaast is gelijk aan $\binom{9}{5}$ en ook $\binom{9}{4}$.

Je hebt immers te maken met een rijtje bestaande uit vijf N's en vier O's.

- Het aantal kortste routes van A via P naar B is $\binom{3}{2} \cdot \binom{6}{3}$.



De driehoek van Pascal

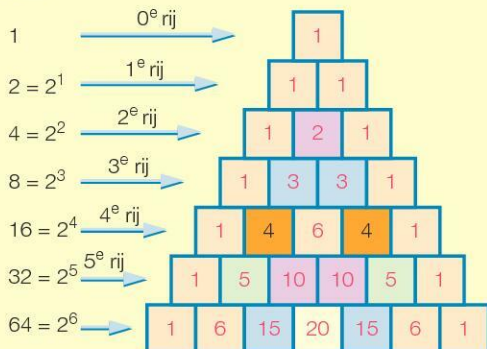
In de driehoek van Pascal is elk getal gelijk aan de som van de twee getallen die er schuin boven staan.

In de vierde rij van de driehoek van Pascal staan de getallen

$$\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3} \text{ en } \binom{4}{4}.$$

De som van de getallen in de vierde rij is 2^4 .

SOM



4.4 Allerlei telproblemen

061




- a** André heeft zes boeken gekocht. Hij wil er hiervan drie aan zijn vriendin cadeau doen.
Hoeveel drietallen zijn mogelijk?
- b** Dagmar heeft zes boeken gekocht. Zij heeft drie vrienden en aan elk van hen wil ze er één cadeau doen.
Op hoeveel manieren kan dat?
- c** Drie vrienden hebben zes dezelfde boeken gelezen. De leraar Nederlands vraagt aan elk van hen welk boek ze het leukst vonden.
Hoeveel antwoorden zijn mogelijk?

Theorie A Herhalingen, permutaties en combinaties

Bij het oplossen van telproblemen vraag je je het volgende af.

- Is de volgorde van belang?
- Zijn herhalingen toegestaan?
- Heb je te maken met een permutatie of met een combinatie, of moet je systematisch noteren?
- Moet je optellen of vermenigvuldigen?

In de volgende opgaven komen telproblemen door elkaar voor.

Houd bij het oplossen steeds bovenstaande vragen in het achterhoofd.

R62




Van zeven dingen worden er drie gekozen.

Zie het schema hiernaast.

Eén van de vier situaties is niet in dit hoofdstuk aan de orde geweest.

- a** Welke situatie is dat?
- b** Bereken voor de andere drie situaties het aantal mogelijkheden.
- c** Bedenk bij elk van de situaties van vraag b een goede vraag.

		volgorde van belang	
		wel	niet
herhalingen toegestaan	wel		
	niet		

E63

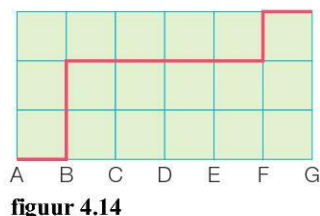

In deze opgave behandelen we de situatie van opgave 62 die nog niet in dit hoofdstuk aan de orde is geweest. Nico heeft drie briefjes van vijf euro die hij gaat verdelen over zeven personen. Een persoon kan ook meerdere briefjes krijgen.

De mogelijkheden van het verdelen van de briefjes kun je visualiseren met een rooster. In de figuur hiernaast zie je een voorbeeld waarbij persoon B twee briefjes heeft gekregen en persoon F één briefje.

- a** Hoeveel mogelijkheden zijn er om de drie briefjes te verdelen?

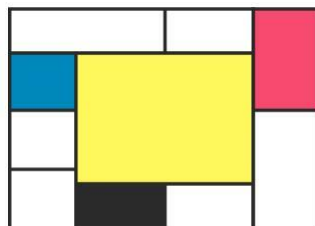
Het verdelen van de briefjes in deze opgave is een voorbeeld van een *herhalingscombinatie*. In dit geval een herhalingscombinatie van 3 uit 7.

- b** Hoeveel mogelijkheden zijn er voor een herhalingscombinatie van k uit n ?



- 64** Jarno koopt een nieuwe auto. Hij heeft het type en de kleur al gekozen, maar hij moet van tien opties nog zeggen of hij ze wel of niet neemt.
- a** Op hoeveel manieren kan hij kiezen?
 - b** Op hoeveel manieren kan hij kiezen als hij maximaal drie opties wil?

- 65** Tijdens een ckv-les kleuren de leerlingen de vlakverdeling hiernaast. Van de tien rechthoeken moeten er vier gekleurd worden met rood, geel, blauw en zwart. Elke kleur moet één keer gebruikt worden. De andere rechthoeken blijven wit. Zo ontstaat een Mondriaan-compositie. Hoeveel composities zijn mogelijk?



figuur 4.15

- 66** In deze opgave gaat het om 'woorden' die je kunt maken met de letters van het woord OPGAVE. Ook niet-bestaande woorden als PGAVOE doen mee.
- Bij de vragen a en b mag je elke letter maar één keer gebruiken. Bereken het aantal mogelijke woorden
- a** met zes letters
 - b** met minimaal twee en maximaal vier letters.
- Bij de vragen c en d mag je de letters meer dan één keer gebruiken. Bereken het aantal mogelijke woorden
- c** met tien letters
 - d** met minimaal twee en maximaal vier letters.

- 67** Voor een vrijgekomen kamer in een studentenflat hebben zich drie jongens en vier meisjes gemeld. Drie studeren psychologie, twee economie, één wiskunde en één Frans. De studenten worden uitgenodigd voor een gesprek. Voor elk van hen is een kwartier gereserveerd. De eerste student komt om 20:00 uur, de tweede om 20:15 uur, enzovoort. Hoeveel volgordes zijn er voor de gesprekken als



- a** eerst de vier meisjes aan de beurt zijn
- b** de jongens en meisjes om en om een gesprek hebben
- c** eerst de student Frans aan de beurt is
- d** de twee studenten economie het laatst aan de beurt zijn
- e** de eerste student dezelfde studie volgt als de laatste
- f** de eerste student niet van hetzelfde geslacht is als de volgende twee?

68


In figuur 4.16 zie je een gedeelte van de plattegrond van een badplaats.
 Op hoeveel manieren kun je zonder omwegen

- van *S* naar *T* lopen
- van *S* naar *U* lopen
- van *S* naar het strand lopen
- van *S* via *Y* naar het strand lopen?



figuur 4.16

69


Een bedrijf met zes kantoren neemt twaalf nieuwe medewerkers aan.

- Ieder kantoor krijgt twee nieuwe medewerkers.
 Op hoeveel manieren kan dat?
- Op hoeveel manieren kunnen deze medewerkers verdeeld worden over de zes kantoren? Het kan dus voorkomen dat de twaalf nieuwe werknemers op één kantoor komen.

70


Else heeft van haar personal trainer een trainingsschema gekregen voor in de sportschool. Ze moet twee vloeroefeningen doen, drie oefeningen met losse gewichten, vier oefeningen op apparaten en een half uur cardio.

- In hoeveel verschillende volgordes kan ze de oefeningen doen als ze vrij kan kiezen?
- Hoeveel volgordes zijn er mogelijk als ze de oefeningen met losse gewichten meteen na elkaar wil doen?
- Hoeveel volgordes zijn er mogelijk als ze begint met cardio en daarna de oefeningen per soort na elkaar doet?



71


Winkelier Gerritzen heeft zijn etalage versierd met feestverlichting. Deze verlichting bestaat uit 19 lampjes die onafhankelijk van elkaar groen licht, rood licht of geen licht geven.

Een mogelijke situatie is: de lampjes 2, 5, 7, 9, 10, 12 en 18 branden groen, de lampjes 3, 8, 13, 16 en 19 branden rood en de overige lampjes zijn uit.

- Hoeveel situaties zijn er in totaal mogelijk?

In hoeveel situaties branden

- er vijf lampjes rood en de rest groen
- er zes lampjes rood en zes lampjes groen
- alle lampjes waarbij er minder dan drie rood zijn
- in elk geval het eerste, het middelste en het laatste lampje
- er vijf lampjes niet?

72
☐ ○ *

Valentijn neemt altijd een reep als tussendoortje mee naar school. Hij heeft nu nog 6 repen in de smaak cashew & blauwe bes, 8 repen met pecan, 4 in de smaak cacao & sinaasappel en 3 in de smaak amandel & abrikoos.

De komende maand moet hij 21 dagen naar school.

Op hoeveel manieren kan hij de repen over de dagen verdelen? Ga ervan uit dat repen in dezelfde smaak volledig uitwisselbaar zijn.

73
○ *

Smartphones en tablets kunnen vergrendeld worden tegen oneigenlijk gebruik door derden. Daarvoor zijn verschillende methoden. Eva beveiligt haar smartphone met een viercijferige pincode.

a Hoeveel mogelijke pincodes zijn er?

Eva ontgrendelt vaak haar smartphone en zet hem direct daarna weer op stand-by. Op de foto hiernaast zie je de telefoon van Eva waarop zij net haar pincode heeft ingevoerd. Er zijn duidelijk vier vingerafdrukken zichtbaar.

b Hoeveel pincodes zijn er mogelijk?

Volgens Luuk is het voor Eva beter om slechts drie verschillende cijfers te gebruiken in haar pincode, want bij drie vingerafdrukken zijn er meer pincodes mogelijk.

c Laat met een berekening zien dat Luuk gelijk heeft.

d Onderzoek of er met twee verschillende cijfers meer pincodes mogelijk zijn dan met drie verschillende cijfers.



74
*

Op het startscherm van de smartphone van Zoë is in een 4×4 rooster plaats voor 16 icoontjes van apps. Zoë gebruikt niet alle 16 plaatsen. Zij heeft de 12 icoontjes van haar meest gebruikte apps op het startscherm gerangschikt.

a Op hoeveel manieren kan dit?

b Op hoeveel manieren kan dit als ze de linker kolom leeg laat?

c Op hoeveel manieren kan dit als ze in elke rij één plaats leeg laat?

Zoë wil de 4 icoontjes van haar socialmedia-apps op één rij of in één kolom. Verder maakt het haar niet uit.

d Hoeveel mogelijkheden zijn er?



Eindopdracht Houdbaarheid van de kentekens

In Nederland hebben de auto's kentekens bestaande uit letters en cijfers, in totaal zes stuks. Je kunt je afvragen hoelang dit systeem meegaat.

In de beginopdracht heb je gezien dat er gewoonlijk gebruik wordt gemaakt van 16 verschillende letters, te weten B, D, F, G, H, J, K, L, N, P, R, S, T, V, X en Z. Verder worden alle cijfers gebruikt, dus ook de 0.

Je hebt ook gezien dat sidecode 8 van maart 2013 tot maart 2015 werd gebruikt. Hierbij werd een kenteken gevormd door één cijfer, een rijtje van drie letters en dan een rijtje van twee cijfers. Zie het voorbeeld hieronder.



In deze serie werden als beginletter slechts de K, S, T, X en Z gebruikt.

De periode waarin sidecode 8 werd gebruikt, kun je gebruiken om te schatten hoelang je gebruik kunt maken van kentekens die vergelijkbaar zijn met het huidige systeem.

Doe daarvoor de volgende aannames.

- Alle kentekens bestaan uit zes letters en cijfers.
- Er komen in ieder kenteken 2, 3 of 4 letters voor, en verder cijfers.
- De eerdergenoemde 16 letters worden gebruikt, maar de eerste letter die voorkomt in het kenteken is nooit een B of V.

In werkelijkheid worden bepaalde samenstellingen van letters niet uitgegeven, zoals VVD of TBS. Hiermee hoeft je geen rekening te houden in je berekeningen. Ook hoeft je geen rekening te houden met de indeling in rijtjes en de streepjes tussen de rijtjes. KB-FF-56 lees je dus als KBFF56.

- Gebruik sidecode 8 om de totale periode te schatten waarin gebruik kan worden gemaakt van kentekens die voldoen aan de genoemde aannames.

Diagnostische toets

4.1 Regels voor telproblemen

- 1** Victor gooit met twee dobbelstenen.
Hoeveel mogelijkheden zijn er
- a** om in totaal acht ogen te gooien
 - b** om meer dan acht ogen te gooien
 - c** waarbij het product van de ogen minder dan tien is?
- 2** Hoeveel mogelijkheden zijn er om met drie dobbelstenen in totaal
- a** minder dan zes ogen te gooien
 - b** precies zes ogen te gooien?
- 3** In deze opgave gaat het om getallen van vijf cijfers, waarin alleen maar de cijfers 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8 voorkomen.
Hoeveel van die getallen zijn er in het geval dat
- a** elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
 - b** elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 50 000 moet zijn
 - c** elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden
 - d** elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal groter dan 54 000 moet zijn?

4.2 Permutaties en combinaties

- 4** In een fietsenrek is plaats voor acht fietsen. Drie jongens en vijf meisjes zetten hun fiets in het rek.
- a** Op hoeveel manieren kan dat?
 - b** Op hoeveel manieren kan dat als de jongens hun fietsen naast elkaar zetten?
 - c** Op hoeveel manieren kan dat als aan de buitenkant de fietsen van twee meisjes staan?
 - d** De meisjes mogen van de galante jongens hun fietsen eerst in het rek plaatsen.
Op hoeveel manieren kunnen de meisjes hun fiets neerzetten?
- 5** Op een kinderdagverblijf zitten in een groep zes peuters, vijf dreumesen en drie baby's.
Leidster Monique gaat met vier kinderen wandelen.
Hoeveel viertallen zijn mogelijk
- a** met twee peuters, één dreumes en één baby
 - b** met meer dan twee dreumesen
 - c** zonder baby's?

4.3 Rijtjes en roosters

- 6** Jan gooit elf keer met een geldstuk.
- a** Hoeveel mogelijkheden zijn er om zes keer kop te gooien?
 - b** Hoeveel mogelijkheden zijn er om meer dan zeven keer kop te gooien?
 - c** Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?
- 7** Tim en Stijn spelen tafelfootbal. Het spel is voorbij als er tien doelpunten gemaakt zijn.
- a** Hoeveel scoreverlopen zijn er in totaal mogelijk?
 - b** Hoeveel scoreverlopen eindigen in een gelijke stand?
 - c** Tim scoort de eerst drie doelpunten, maar Stijn weet toch te winnen. Hoeveel scoreverlopen zijn er voor deze wedstrijd mogelijk?

- 8** François Morellet was een Franse kunstenaar die zich onder andere heeft laten inspireren door de werken van Piet Mondriaan. Een van zijn kunstwerken heet *40% bleu, 40% rouge, 10% vert et 10% orange* en hangt in het Stedelijk Museum Amsterdam. Dit schilderij bestaat uit 56 bij 56 even grote vierkantjes. De vierkantjes zijn willekeurig gekleurd, waarbij 40% van de vierkantjes blauw is geschilderd, 40% rood, 10% groen en 10% oranje.



In deze opgave kijken we naar een veel kleinere, rechthoekige variant van dit werk dat bestaat uit 6 bij 5 vierkantjes. Verder worden dezelfde kleuren en verhoudingen gebruikt als in het origineel. Bereken hoeveel verschillende schilderijen je in dit geval kunt maken.

4.4 Allerlei telproblemen

- 9** Op station Holten stappen 14 personen in een trein met drie treinstellen. Op hoeveel verschillende manieren kunnen zij zich verdelen over de treinstellen?
- 10** In deze opgave gaat het om de letters van het woord MAATSTAVEN.
- a** Hoeveel rangschikkingen kun je met deze letters maken?

In de rest van deze opgave gaat het om ‘woorden’ die je kunt maken met de letters M, A, T, S, V, E en N. Ook niet bestaande woorden als VMATSE doen mee.

Bereken het aantal mogelijke woorden

- b** van vijf verschillende letters
- c** van twee of drie verschillende letters
- d** met minimaal twee en maximaal vier letters waarbij elke letter vaker mag worden gekozen.

Gemengde opgaven

1 Formules en grafieken

- 1** Gegeven zijn de lijnen $k: y = -0,5x + 16$ en $l: y = 2x - 9$.
- a** De lijn m gaat door het punt $A(-4, 3)$ en is evenwijdig met k .
Stel de formule van m op.
 - b** De lijn k snijdt de x -as in het punt B . De lijn n gaat door B en is evenwijdig met de lijn l .
Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijn n met de y -as.
 - c** Bereken de coördinaten van het snijpunt C van k en l .
 - d** Op l ligt het punt D met y -coördinaat $y_D = -24$.
Bereken de x -coördinaat x_D .

- 2** Antropologen kunnen de lichaamslengte van een mens schatten aan de hand van de lengte van een bot dat ze bij opgravingen vinden. Daarbij gebruiken ze onder andere de humerus, dat is het bot dat van de elleboog naar de schouder loopt. Tussen de lichaamslengte L in cm en de lengte x in cm van de humerus bestaat een lineair verband. Bij mannen geldt $L = 2,89x + 70,6$ met x tussen 10 en 40. Bij vrouwen geldt $L = 2,75x + 71,5$ met x tussen 10 en 40.

- a** Bij opgravingen vindt men een humerus met een lengte van 31 cm. Men neemt aan dat deze humerus van een man afkomstig is.
Hoe lang was deze man? En als deze humerus van een vrouw was geweest, hoe lang zou deze vrouw dan zijn geweest? Rond af op gehele cm.
- b** Hoeveel cm is de humerus van een man met een lichaamslengte van 180 cm? En van een vrouw van dezelfde lichaamslengte? Rond af op één decimaal.
- c** Wat is de kleinste en wat is de grootste lichaamslengte van een vrouw die je met deze formule kunt berekenen?
- d** Hebben de grafieken die bij deze formules horen een snijpunt? Licht je antwoord toe.
- e** Bij welke lengte van de humerus is er volgens de formules een verschil van 4 cm in lichaamslengte tussen mannen en vrouwen?



3 De gemiddelde jaartemperatuur T is in Nederland in de periode 1970-2020 vrijwel lineair gestegen. Was de gemiddelde jaartemperatuur in 1970 nog $9,3^\circ\text{C}$, in 2020 was dat toegenomen tot $11,0^\circ\text{C}$. Neem in deze opgave aan dat deze temperatuurstijging de komende tijd doorzet.

- a** Stel de formule op van de gemiddelde jaartemperatuur T als functie van de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1970.
- b** In welk jaar zal de gemiddelde jaartemperatuur naar verwachting voor het eerst hoger zijn dan 12°C ?

Tot 1970 was er ook sprake van een lineaire stijging. Neem aan dat deze stijging vele eeuwen heeft geduurd.

De gemiddelde jaartemperatuur in 1920 was $9,0^\circ\text{C}$.

- c** Tot en met welk jaar zou de gemiddelde jaartemperatuur minder dan 8°C zijn geweest?

4 Op een racefiets bepaal je de versnelling waarin je fietst met behulp van voortandwielen (bij de trapas) en achtertandwielen (bij de as van het achterwiel).

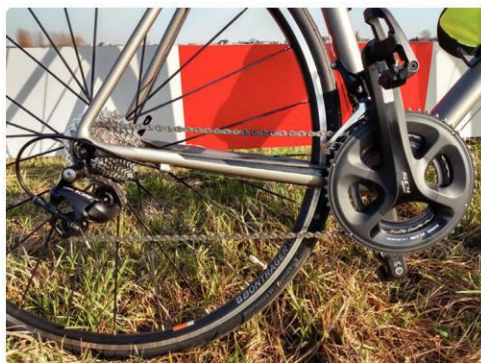
Als je het achtertandwiel hetzelfde laat, dan is de afstand die je aflegt per omwenteling van je pedalen evenredig met het aantal tanden van het voortandwiel. Als je het voortandwiel hetzelfde laat, dan is de afstand die je aflegt per omwenteling van je pedalen

omgekeerd evenredig met het aantal tanden van het achtertandwiel. Bij een voortandwiel met 52 tanden en een achtertandwiel met 20 tanden leg je per omwenteling 5,46 meter af.

- a** Bereken de afstand die je aflegt per omwenteling, wanneer je een voortandwiel met 39 tanden en een achtertandwiel met 20 tanden gebruikt.
- b** Bereken de afstand die je aflegt per omwenteling, wanneer je een voortandwiel met 52 tanden en een achtertandwiel met 14 tanden gebruikt.

Lowie fietst met een voortandwiel met 50 tanden en een achtertandwiel met 20 tanden.

- c** Toon aan dat zijn snelheid bij 100 omwentelingen per minuut gelijk is aan $31,5 \text{ km/uur}$.
- d** Stel een formule op van zijn snelheid v in km/uur bij w omwentelingen per minuut.
- e** Druk zijn snelheid v in km/uur uit in het aantal tanden van het achtertandwiel n . Ga ervan uit dat hij 100 omwentelingen per minuut maakt en zijn voortandwiel 50 tanden heeft.



5 Het wonen onder hoogspanningslijnen is door onderzoekers in verband gebracht met gezondheidsklachten. Naar aanleiding van de verontrusting onder de bewoners van huizen in de buurt van deze lijnen is in 2017 een uitkoopregeling van de overheid gestart voor woningen die recht onder hoogspanningslijnen liggen. Maar ook woningen die iets verderop liggen hebben last van een waardevermindering van de grondprijs. Deze waardevermindering is in procenten omgekeerd evenredig met de afstand tot de hoogspanningslijn. Neem aan dat op een afstand van 1200 meter de grondprijs 3% in waarde daalt.



- a** Stel de formule op van de waardevermindering W in procenten van de grondprijs op een afstand van x meter van de hoogspanningsverbinding.
- b** Hoeveel procent is de waardevermindering op een afstand van 250 meter van de hoogspanningsverbinding?
- c** Van een stuk grond is de waardevermindering 8%. Bereken de afstand tot de hoogspanningslijn.
- d** Na aanleg van een hoogspanningslijn neemt de waarde van een stuk grond af van 300 000 tot 280 000 euro. Op hoeveel meter afstand loopt de hoogspanningslijn?
- e** Een stuk grond kost 160 000 euro. Op 300 meter afstand wordt een hoogspanningsverbinding aangelegd. Bereken de waarde na aanleg.

6 De hoeveelheid huishoudelijk afval per inwoner is in Nederland in de periode 1970-2000 voortdurend toegenomen, maar daarna nam het af. Zie de tabel.

HUISHOUDELIJK AFVAL IN AANTAL KG PER INWONER PER JAAR

jaar	1970	1988	1995	2000	2004	2012	2017
aantal kg	281	395	482	566	561	518	496

- a** Bereken met lineair interpoleren de hoeveelheid huishoudelijk afval per inwoner in 1992.
- b** Bereken met lineair extrapoleren de hoeveelheid huishoudelijk afval per inwoner in 2024.
- c** Gebruik de gegevens van 2004 en 2017 om een schatting te maken in welk jaar de hoeveelheid huishoudelijk afval per persoon voor het eerst weer minder dan 300 kg zal zijn.

- 7** Een fabrikant van fietsen gebruikt het model $W = -45x^3 + 2500x^2 - 275\,000$ om de jaarlijkse winst W in euro's te berekenen, met x de reclamekosten per jaar in tienduizenden euro's. Per jaar geeft de fabrikant niet meer dan 500 000 euro aan reclame uit.

Rond in deze opgave bedragen af op duizenden euro's.

- a** Schets de grafiek van W .
- b** Wat weet je van de reclamekosten als de jaarlijkse winst meer dan 600 000 euro is?
- c** Hoeveel is de maximale jaarlijkse winst volgens dit model?
- d** Met hoeveel procent neemt de jaarlijkse winst toe als de fabrikant de reclamekosten van 230 000 euro verdubbelt?
- e** De fabrikant maakte in een jaar evenveel winst als dat hij uitgaf aan reclame.
Hoeveel was de winst in dat jaar?

- 8** Een school wordt getroffen door een griepepidemie. Daarbij wordt het model $N = 0,6t^2 - 0,02t^3$ opgesteld. Hierin is N het aantal leerlingen dat griep heeft en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 november.

- a** Schets de grafiek van N .
- b** Bereken na hoeveel dagen het aantal leerlingen met griep maximaal is. Hoeveel leerlingen zijn dan ziek?
- c** Gedurende hoeveel dagen zijn er meer dan 60 leerlingen ziek?

- 9** Als je muziek van een online streamingdienst op je telefoon wilt luisteren zonder dat je een internetverbinding hebt, dan kun je de muziek op je telefoon downloaden. Een probleem daarbij is dat de originele muziekbestanden erg groot zijn. Je kunt ervoor kiezen om de bestanden in een kleiner formaat op te slaan, maar dan gaat wel de kwaliteit achteruit. De grootte en kwaliteit zijn afhankelijk van de bitrate. Hoe hoger de bitrate, des te hoger de kwaliteit is. De bitrate wordt gegeven in kb/s. De bestandsgrootte van een nummer is evenredig met de bitrate. Een bepaald nummer heeft een bestandsgrootte van 6,4 MB als het wordt opgeslagen met een bitrate van 320 kb/s.

- a** Bereken de bestandsgrootte in MB als dit nummer wordt opgeslagen met een bitrate van 128 kb/s.
- b** Druk de bestandsgrootte M van dit bestand uit in de bitrate B , met M in MB en B in kb/s.

Sinds de opkomst van streaming van muziek zitten de inkomsten van de muziekindustrie in de lift.

In 2012 waren de inkomsten uit streaming van muziek in Nederland nog 17,8 miljoen euro. In 2015 was dat 61,3 miljoen euro en in 2017 zorgde streaming van muziek in Nederland voor inkomsten van 108,6 miljoen euro.

- c** Bereken met lineair interpoleren de inkomsten uit streaming van muziek in Nederland in 2014.
- d** Bereken met lineair extrapoleren de inkomsten uit streaming van muziek in Nederland in 2020. Rond af op miljoenen euro's.

- 10** Op 16 augustus 2009 liep Usain Bolt in Berlijn tijdens de WK atletiek een wereldrecord op de 100 meter sprint. Hij legde de 100 meter af in een tijd van 9,58 seconden.

Wetenschappers hebben onderzoek gedaan naar zijn snelheid gedurende de race. Daarbij vonden ze dat hij na 5 meter al 25 km/uur liep. Hij bereikte een maximumsnelheid van ongeveer 44 km/uur.



Een wiskundige stelt het model $v_1 = 0,00012s^3 - 0,02655s^2 + 1,88929s$ op bij deze race. Hierin is s de afgelegde afstand in meter en v_1 de snelheid in km/uur.

- Ga na bij welke van de genoemde gegevens de afwijking van de snelheid in het model ten opzichte van de werkelijkheid het grootst is.
- Schets de grafiek van v_1 .
- Gedurende hoeveel meter lag de snelheid volgens dit model boven de 40 km/uur? Rond af op gehele.

In een poging het model te verbeteren, komt een andere wiskundige met het model $v_2 = 5\sqrt{5s} - 0,71s$.

- Schets de grafiek van v_2 in de figuur van vraag b.
- Welk model is realistischer? Licht je antwoord toe.

2 Statistiek

- 11** Bij een onderzoek naar de ecologische impact van een windmolenpark op zee kunnen de volgende vragen worden gesteld.

- Welke invloed hebben de windmolens op zeedieren?
 - Welke zeedieren ondervinden de meeste hinder van windmolens?
 - Welke maatregelen kunnen worden genomen om de schade onder vogels te beperken?
- Welke vraag gaat uit van een foute veronderstelling? Welke vraag mondt uit in een advies? Is er bij de overgebleven vraag sprake van samenhang of een causaal verband? Licht je antwoorden toe.
 - Vraag I kan scherper worden geformuleerd. Doe dat.
 - Formuleer vraag II zo, dat deze voldoet aan de eisen waaraan een onderzoeksvraag moet voldoen.
 - Omschrijf bij vraag III de populatie.

- 12** In de tabel zie je enige informatie over de provincies Drenthe, Gelderland en Noord-Holland.

provincie	netnummer hoofdstad	bevolkingsdichtheid (inwoners per km ²)	aantal ziekenhuizen	waardering leefomgeving
Drenthe	0592	185	4	***
Gelderland	026	409	10	****
Noord-Holland	023	1039	15	***

De variabelen die in deze tabel voorkomen zijn provincie, netnummer hoofdstad, bevolkingsdichtheid, aantal ziekenhuizen en waardering leefomgeving.

- Welke van deze variabelen zijn kwalitatief?
- Welke van deze variabelen zijn discreet?
- Geef het meetniveau van elk van deze variabelen.

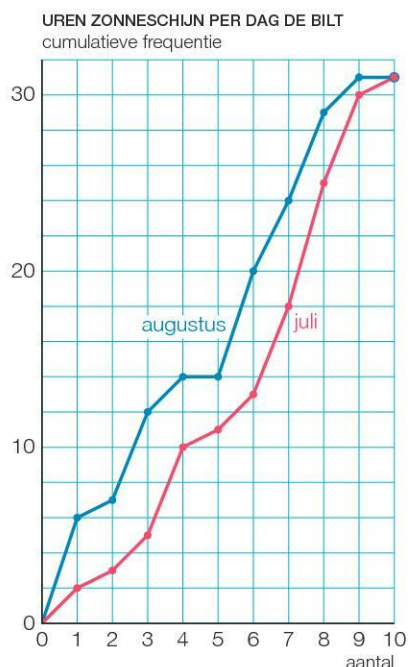
Voor het vaststellen van de waardering van de leefomgeving zijn 1025 inwoners van Drenthe ondervraagd. Zij konden kiezen op een schaal van 1 tot en met 5 sterren. Zie de tabel hiernaast.

- Bereken de steekproefproportie van de inwoners van Drenthe die de leefomgeving waarden met minstens drie sterren.

sterren	aantal
*	71
**	204
***	548
****	168
*****	34

- 13** Gedurende de maanden juli en augustus is het aantal uren zonneshijn per dag in De Bilt bijgehouden. Zie de twee cumulatieve frequentiepolygonen in figuur G.1 waarbij de eerste klasse $[0, 1)$ is.

- Hoeveel dagen waren er in
 - juli met minder dan 6 uur zon
 - augustus met minstens 6 uur zon
 - juli met minstens 4 uur, maar minder dan 8 uur zon?
- Welke maand was het zonnigst? Licht toe.
- In juli scheen de zon gemiddeld 5,7 uur per dag. Welke standaardafwijking hoort hierbij? Kies uit 0,5 uur, 2,5 uur, 4,5 uur en 6,5 uur.
- Geef een schatting van het totaal aantal uren zonneshijn in De Bilt in juli en augustus samen. Kies uit 315 uur, 355 uur en 395 uur. Licht je keuze toe.



figuur G.1

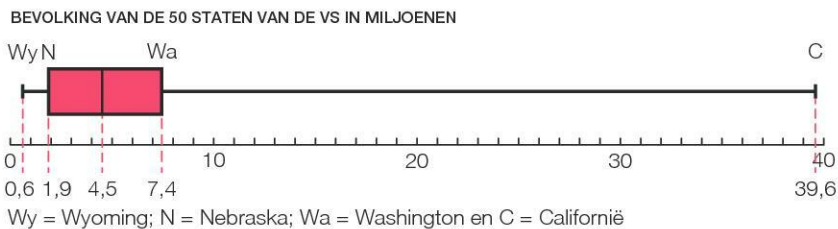
- 14** Bij een onderzoek wordt door middel van een vragenlijst onderzocht in hoeverre men het eens is met bepaalde stellingen. Elk van de stellingen kan op de volgende vijfpuntsschaal beoordeeld worden: 1 (helemaal mee oneens), 2 (mee oneens), 3 (acceptabel), 4 (mee eens) of 5 (helemaal mee eens).

De vragenlijst is door 3000 personen ingevuld.

- a Is de beoordeling een kwalitatieve of kwantitatieve variabele?
- b Licht aan de hand van een voorbeeld toe dat het onjuist is het gemiddelde te nemen van de beoordelingen.
- c Welke centrummaat kan wel gebruikt worden bij het verwerken van deze gegevens?
- d Uit de resultaten van het onderzoek concluderen de onderzoekers dat de populatieproportie van Nederlanders die stelling 1 acceptabel vinden ongeveer 0,4 is.

Hoeveel mensen hebben deze optie gekozen in de vragenlijst?

- 15** In 2019 hadden de 50 staten van de VS samen 326 miljoen inwoners. De verdeling van het aantal inwoners per staat is verwerkt in de boxplot in figuur G.2.



figuur G.2

- a Waarom staat er boven de mediaan geen Amerikaanse staat?
- b Bereken de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.
- c Hoeveel staten hebben meer inwoners dan Nebraska?
- d Bekijk de staten die de laagste 50% van de inwoneraantallen hebben. Geef een schatting van het totale aantal inwoners van deze staten.
- e Wanneer je met behulp van de boxplot een schatting maakt van het aantal inwoners van de 50 staten van de VS, krijg je een veel te hoge schatting. Bereken deze geschatte waarde en geef een verklaring voor het verschil met de werkelijke waarde van 326 miljoen.



16 In Nijmegen wil het RSC (Radboud Sportcentrum) een onderzoek doen met als titel: 'Hoe sportief zijn de Nijmeegse studenten?'.

De volgende drie methoden voor het nemen van een steekproef worden overwogen.

- 1 Op de website van het RSC wordt een poll geplaatst. Een poll is een korte lijst van stellingen met meerkeuzeantwoorden.
- 2 Er wordt aan alle studenten een e-mail gestuurd, met de vraag een korte enquête in te vullen.
- 3 De dames van de hockeyclub nemen interviews af bij jongeren op straat in de stad Nijmegen.

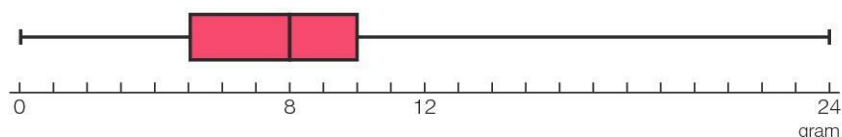
a Leg bij iedere methode uit waarom deze waarschijnlijk geen representatieve steekproef oplevert.

b Voor het onderzoek wordt een enquête afgenomen.

Bedenk voor elk van de vier meetniveaus een enquêtevraag.

17 Van 177 appels is gecontroleerd hoeveel ze van het streefgewicht van 120 gram afwijken. De resultaten zijn verwerkt in de boxplot in figuur G.3.

VERSCHILLEN MET STREEFGEWICHT

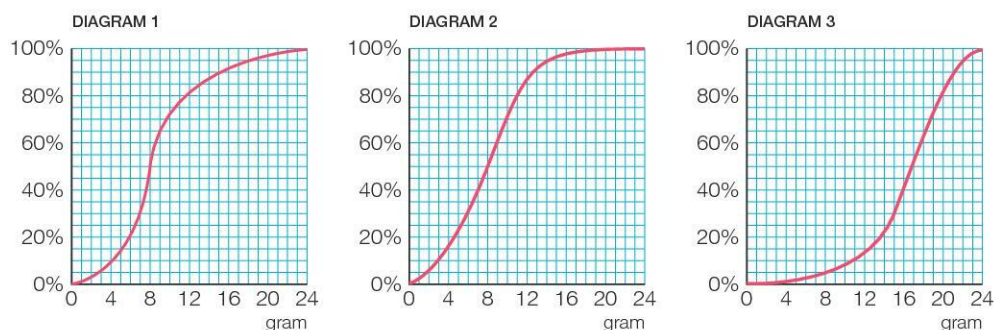


figuur G.3

- a** Hoeveel procent van de spreidingsbreedte is de interkwartielafstand?
- b** Mitchel schat dat de appels gemiddeld 12 gram van het streefgewicht afwijken.

Ga met een berekening na of dit een redelijke schatting is.

- c** Welke van onderstaande relatieve cumulatieve verdelingskrommen komt overeen met de boxplot? Licht toe.



figuur G.4

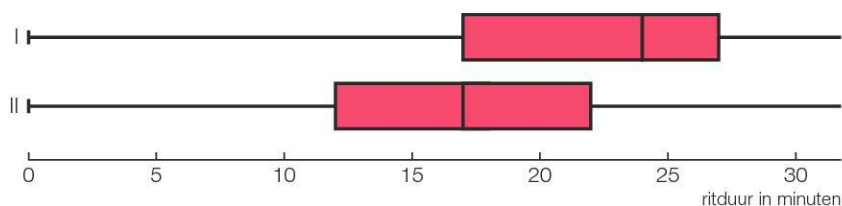
- 18** Twee taxichauffeurs, de ene uit Amsterdam en de andere uit Zutphen, hebben gedurende een aantal maanden het aantal minuten van elke taxirit bijgehouden. In de tabel zie je hoe de duur van de ritten van beide chauffeurs verdeeld is. Je ziet bijvoorbeeld dat van de chauffeur uit Zutphen 22 procent van de ritten tussen 20 en 25 minuten duurde.

ritduur in minuten	Amsterdam	Zutphen
$[0, 5)$	1%	2%
$[5, 10)$	5%	14%
$[10, 15)$	12%	19%
$[15, 20)$	18%	29%
$[20, 25)$	23%	22%
$[25, 30)$	30%	11%
vanaf 30	11%	3%

- Met wat voor soort verdelingen heb je hier te maken? Kies uit: links-scheef, rechts-scheef, symmetrisch of meertoppig.
- Geef een mogelijke praktische verklaring voor het verschil in de verdelingen van de ritduur van beide chauffeurs.
- Volgens Margot kun je in de tabel zien dat de chauffeur uit Amsterdam veel meer minuten in de taxi heeft gereden dan de chauffeur uit Zutphen.
Ben je het met haar eens? Licht toe.

De chauffeur uit Zutphen reed bij de ritten die tussen 15 en 20 minuten duurden gemiddeld 29 km/uur en bij de ritten die tussen 20 en 25 minuten duurden gemiddeld 39 km/uur. Hij beweert dat hij meer kilometers heeft gereden voor de ritten tussen 15 en 20 minuten dan voor de ritten tussen 20 en 25 minuten.

- Toon aan dat de chauffeur geen gelijk kan hebben.
- In figuur G.5 zijn de gegevens van de chauffeurs verwerkt tot twee (gedeelten van) boxplots.
Welke hoort bij de chauffeur uit Amsterdam? Licht toe.



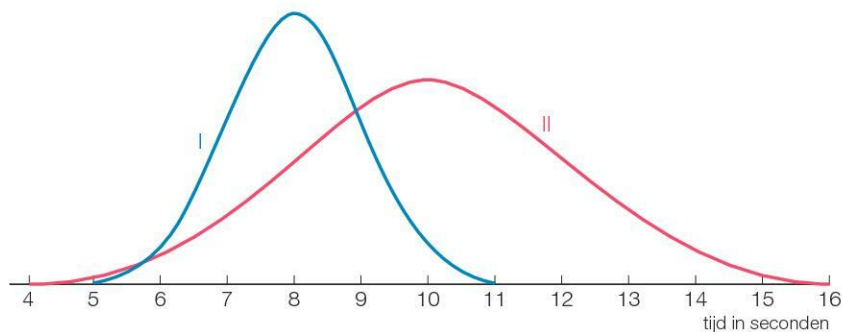
figuur G.5

- Schets in één figuur van beide chauffeurs de relatieve cumulatieve verdelingskromme. Neem de horizontale as van 0 tot 30.

19 Sportstapelen (Engels: *sport stacking*, ook bekend als *cup stacking* of *speed stacking*) is een sport waarbij zo snel mogelijk plastic bekertjes gestapeld moeten worden in bepaalde formaties. Beoefenaars van de sport plaatsen plastic bekertjes op elkaar in bepaalde formaties en in vooraf bepaalde volgordes. Je speelt dit spel tegen een andere speler of tegen de klok. Vaak worden piramiden van drie, zes of tien bekertjes gemaakt. Deskundigen zeggen dat deze sport de tweekhandigheid, concentratie en oog-hand coördinatie bevordert.



Twee even grote groepen sportstapelaars hebben tegen de klok gespeeld. De resultaten zijn weergegeven in de verdelingskrommen in figuur G.6. Neem aan dat de tijden van beide groepen normaal verdeeld zijn. Een van de twee groepen bestond uit sportstapelaars met meer ervaring.



figuur G.6

- Geef twee redenen waarom kromme I bij de meer ervaren sportstapelaars hoort.
- Geef in gehele seconden de standaardafwijking van de minder ervaren groep.
- Welk percentage van de snellere groep behaalde tijden onder de 6 seconden?
- Bereken het percentage van de langzamere groep dat meer tijd nodig heeft dan de beste helft van de snellere groep.
- Door de twee groepen samen te nemen ontstaat een verdelingskromme voor de tijden van de sportstapelaars als geheel. Welke soort verdeling past het beste bij die verdelingskromme? Kies uit links-scheef, rechts-scheef, symmetrisch of tweetoppig. Licht toe met een schets.

20 In een kleine stad stimuleert de gemeente de verkoop van zonnepanelen aan huishoudens. Na een jaar blijkt dat 512 van de in totaal 7051 huishoudens zonnepanelen op het dak van de woning geïnstalleerd hebben.

Om te bekijken of het beleid van de gemeente daadwerkelijk een positieve bijdrage levert aan de plaatsing van zonnepanelen door huishoudens, laten de oppositiepartijen in de gemeenteraad een landelijke steekproef uitvoeren. In deze steekproef is aan 233 huishoudens gevraagd of ze eigen zonnepanelen gebruiken voor de energievoorziening. Uit de steekproef volgde de steekproefproportie $\hat{p} = 0,0472$.

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie huishoudens in het land die eigen zonnepanelen gebruiken. Rond af op vier decimalen.
- b** Kun je op basis van deze steekproef en het daarbij berekende betrouwbaarheidsinterval concluderen dat de stimuleringsmaatregelen van de gemeente geholpen hebben?

De wethouder die verantwoordelijk is voor de stimuleringsmaatregelen is niet tevreden met de opzet van het onderzoek van de oppositie en laat nogmaals een landelijke steekproef uitvoeren. Deze keer wordt dezelfde vraag gesteld aan 5000 huishoudens en dat levert een steekproefproportie op van $\hat{p} = 0,0592$. Op basis van de resultaten van deze steekproef claimt de wethouder dat de genomen maatregelen wel degelijk effect hebben.

- c** Laat zien op basis van welke cijfers de wethouder de oppositiepartijen kan proberen te overtuigen.

21 Een voetbalblad heeft onderzoek gedaan naar de blessuretijd die scheidsrechters toekennen in de eredivisie.

Op basis van gegevens van 31 wedstrijden van scheidsrechter Kuiper is berekend dat hij gemiddeld 4 minuten en 13 seconden bijtelde. De bijbehorende standaardafwijking was 1 minuut en 23 seconden.

- a** Bereken voor scheidsrechter Kuiper het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde blessuretijd. Rond af op gehele seconden.

Over alle wedstrijden die in Europa in een seizoen zijn gespeeld, was de gemiddelde blessuretijd 3 minuten en 45 seconden.

- b** Kun je met 95% zekerheid concluderen dat er wat betreft de blessuretijd een verschil is met de wedstrijden van Kuiper?
- c** Was de conclusie bij vraag b anders geweest als het gegeven gemiddelde en de gegeven standaardafwijking waren gebaseerd op 41 wedstrijden?

- 22** Kees en Frits doen voor het vak statistiek een onderzoek met als onderzoeksvraag ‘Welk deel van de M&M’s is rood?’. Voor hun onderzoek openen ze een doos met daarin een aantal zakjes M&M’s en tellen van elke kleur het aantal M&M’s. In de tabel hieronder staat het resultaat.

kleur	blauw	bruin	groen	oranje	rood	geel	totaal
aantal	487	398	489	530	371	375	2650

- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie rode M&M’s. Rond af op vier decimalen.
- Volgens Kees is de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie oranje M&M’s ongeveer 15% groter dan van het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de proportie rode M&M’s. Onderzoek of Kees gelijk heeft.

3 Rekenen en herleiden

- 23** **a** Werk bij $(2x + 3)(2x - 3) - \frac{(x - 2)^2}{4}$ de haakjes weg en herleid.
- b** Herleid $12 \cdot \frac{a - 4}{6a} : \frac{a + 4}{a}$.
- c** Herleid $(6b + 2)(1 - 6b) - 2(4b^2 + 1)$.
- 24** **a** Toon aan dat de formule $D = 100 + \frac{400b}{a + 20b}$ herleid kan worden tot $D = \frac{100a + 2400b}{a + 20b}$.
- b** Toon aan dat de formule $A = \frac{6x^2 + 15}{3x^2} + \frac{x^3 + 4x}{2x^3}$ herleid kan worden tot $A = 2\frac{1}{2} + \frac{7}{x^2}$.
- 25** Gegeven zijn de lijnen $k: 3x - 5y = 15$ en $l: 4x + 3y = 18$.
- Teken k en l in één figuur.
 - Bereken van beide lijnen de richtingscoëfficiënt.
 - Het punt $A(p, 3)$ ligt op k en het punt $B(p, q)$ ligt op l . Bereken p en q .
 - Het punt $C(2, r)$ ligt op k en het punt $D(s, r)$ ligt op l . Bereken s en r .

- 26** Mede door het succes van het Nederlands dameselftal is het aantal vrouwelijke leden van de Koninklijke Nederlandse Voetbalbond (KNVB) toegenomen. Zie de tabel hieronder.

LEDENAANTALLEN KNVB

seizoen	'12/'13	'17/'18
aantal spelende leden	1 209 569	1 205 382
waarvan vrouwen/meisjes	131 948	158 353

- a** Johan beweert dat het aandeel vrouwelijke voetballers in de periode 2012-2018 slechts met slechts 2,2% is toegenomen. Lieke zegt dat er sprake is van een spectaculaire groei van 20%. Laat met berekeningen zien hoe zij op deze percentages zijn gekomen. Met wie ben je het eens? Licht toe.
- b** In het seizoen 2015/2016 was de verhouding tussen het aantal mannelijke en vrouwelijke leden bij benadering 7 : 1. Het totaal aantal leden was ongeveer 1 228 000. Bereken hiermee het aantal mannelijke en vrouwelijke leden van de KNVB in dat seizoen.
- c** In de eerste drie seizoenen van de genoemde periode bedroeg de groei in vergelijking met het seizoen ervoor achtereenvolgens 4,2%, 6,2% en 4,7%. Hoeveel procent was de groei in deze drie seizoenen samen?



- 27** In de medaillespiegel van de Olympische Spelen is van alle landen bijgehouden hoeveel gouden, zilveren en bronzen medailles ze hebben gewonnen. Tot en met de Winterspelen van 2018 in Pyeongchang zijn er 18 845 medailles uitgereikt waarvan 6138 gouden.

- a** Nederland heeft 2,12% van deze gouden medailles gewonnen. Hoeveel gouden medailles zijn dat?
- b** Denemarken heeft 1,035% van alle tot dan toe uitgereikte medailles gewonnen, waarvan gouden, zilveren en bronzen medailles in de verhouding 3 : 5 : 5. Hoeveel bronzen medailles won Denemarken?
- c** Noorwegen is een echt wintersportland. Het haalde 368 medailles op de Olympische Winterspelen, dat is 70,8% van alle door het land tot dan toe behaalde olympische medailles. Hoeveel medailles haalde Noorwegen in totaal op de Olympische Spelen?



- 28** In 2017 deden in totaal 200 893 leerlingen examen op vwo, havo en vmbo. Zie de tabel hiernaast.
Het valt Rob op dat de verhouding van de leerlingen vwo : havo : vmbo ongeveer 2 : 3 : 6 is.

EXAMENLEERLINGEN 2017

vwo	37 892
havo	53 974
vmbo	109 027
totaal	200 893

- a** Bereken de aantallen voor vwo, havo en vmbo in het geval de verhouding precies 2 : 3 : 6 zou zijn. Ga uit van het totaal.
- b** Bereken het totale aantal leerlingen in het geval de verhouding precies 2 : 3 : 6 zou zijn en het aantal op de havo 53 974 is.

De laatste jaren zijn de volgende trends waar te nemen. Enerzijds loopt het totale aantal leerlingen terug, anderzijds loopt het aantal leerlingen op het vmbo verhoudingsgewijs terug.

Ga uit van een verhouding die precies 2 : 3 : 6 is.

Neem aan dat op een gegeven moment het totale aantal leerlingen met 10% is teruggelopen en dat alleen het aantal vmbo-leerlingen is verminderd.

De nieuwe verhouding wordt daardoor 2 : 3 : p .

- c** Bereken p en schrijf daarna de verhouding met drie gehele getallen waarbij zo ver mogelijk vereenvoudigd is.

- 29** De wereldbevolking is het totaal aantal mensen op aarde. In 2018 was de wereldbevolking 7668 miljoen mensen.

- a** Schrijf dit aantal in de wetenschappelijke notatie.

Men verwacht dat er in 2050 in Europa 716 miljoen mensen zijn en dat dit 7,32% van de wereldbevolking in dat jaar zal zijn.

- b** Hoeveel zal volgens deze verwachting de procentuele toename van de wereldbevolking in de periode 2018-2050 zijn?

Sommige gebieden zijn dichtbevolkt, andere juist dunbevolkt. De

bevolkingsdichtheid van een gebied is $d = \frac{N}{A}$. Hierbij is N het aantal

mensen in het gebied en A de oppervlakte van het gebied in km^2 .

- c** In 2018 woonden in India 1,35 miljard mensen op 3,29 miljoen km^2 . Bereken de bevolkingsdichtheid van India in dat jaar. Rond af op tientallen.

De zuidelijke helft van een land heeft drie keer zoveel inwoners als de noordelijke helft.

- d** Neem aan dat de noordelijke helft een bevolkingsdichtheid van 100 mensen per km^2 heeft.

Bereken de bevolkingsdichtheid van het hele land.

- e** Neem aan dat in de noordelijke helft van dit land x mensen wonen en dat de oppervlakte van dit deel $y \text{ km}^2$ is.

Druk de bevolkingsdichtheid van het hele land uit in x en y .

- 30** **a** Door een coaxkabel gaat een signaal met een snelheid die tweederde van de lichtsnelheid is. De familie Van Leeuwen heeft een coaxkabel van de huisaansluiting naar de televisie op zolder. Deze kabel is 10 meter lang.
Hoeveel seconden doet het signaal erover om van de huisaansluiting naar de televisie te komen? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie. Gebruik dat de lichtsnelheid $300\,000\text{ km/s}$ is.
- b** Door een regenbui is het water in een opblaasbaar zwembadje 12 mm gestegen. De afmetingen van het rechthoekige zwembadje zijn 269 bij 175 cm.
Hoeveel regendruppels zijn er in het zwembadje gevallen? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie. Gebruik dat een regendruppel $0,03\text{ mL}$ is.

- 31** Als het in de winter door de wind bijzonder koud aanvoelt, vermeldt men behalve de werkelijke temperatuur vaak ook de gevoelstemperatuur. Voor de berekening van deze temperatuur kan bijvoorbeeld de formule $F = 0,0044w^2 - 0,93w + 34,5$ worden gebruikt. Hierin is F de gevoelstemperatuur in graden Fahrenheit en w de windsnelheid in mijl per uur. Deze formule is geldig voor temperaturen rond het vriespunt.

Gebruik in deze opgave dat $1\text{ mijl} = 1,6\text{ km}$ en dat geldt $C = \frac{F - 32}{1,8}$,

waarin C de temperatuur in graden Celsius is.

- a** Bereken de gevoelstemperatuur bij een windsnelheid van 10 mijl per uur. Geef het antwoord zowel in graden Fahrenheit als graden Celsius.
- b** Bereken de gevoelstemperatuur bij een windsnelheid van 40 km/uur. Geef het antwoord in graden Celsius.
- c** Bereken in graden Celsius de gevoelstemperatuur bij een windsnelheid van 15 m/s. Rond af op één decimaal.

Het KNMI gebruikte tot 2009 deze formule in de vorm $C = av^2 + bv + c$, met C de gevoelstemperatuur in graden Celsius en v de windsnelheid in meter per seconde.

- d** Bereken a , b en c . Rond af op achtereenvolgens vier decimalen, twee decimalen en één decimaal.



4 Combinatoriek

- 32** In het brailleschrift worden de tekens gevormd door zes stippen die al dan niet voelbaar gemaakt zijn. Hieronder zie je enkele letters in brailleschrift. Een zwarte stip is voelbaar, een open rondje niet.

A	B	C	D	E	F	G

figuur G.7

- Hoeveel tekens zijn mogelijk als er twee stippen voelbaar zijn?
- Hoeveel tekens zijn er in totaal mogelijk? Het teken met geen enkele zwarte stip doet hierbij niet mee.

- 33** Een gemeenteraad bestaat uit negen leden. Er zijn drie CDA-leden, drie PvdA-leden, twee VVD-leden en één lid van de partij Gemeentebelangen.

Er moet een commissie van drie leden worden samengesteld.

- Hoeveel commissies zijn mogelijk met twee CDA-leden?
- Hoeveel commissies zijn in totaal mogelijk?
- Hoeveel commissies zijn mogelijk waarin geen leden van dezelfde partij zitten?

De commissaris van de Koning bezoekt de gemeente. Bij de ontvangst staan de negen raadsleden naast elkaar bij de ingang van het stadhuis om de commissaris de hand te schudden.

Op hoeveel manieren kunnen de raadsleden naast elkaar staan als

- de CDA-leden naast elkaar moeten staan
- van elke partij de leden naast elkaar moeten staan?

- 34** Van de letters van het woord WISKUNDE ga je codes van vijf letters vormen.

Op hoeveel manieren kan dit als

- elke letter maar één keer in een code mag voorkomen
- elke letter meer dan één keer mag voorkomen
- de codes met een W beginnen en op een N eindigen en elke letter maar één keer mag voorkomen?



35 In de figuur hiernaast zie je het kunstwerk Acceptatie nr. 2 van kunstenaar Willy Alferink. De sculptuur bestaat uit vijf gestapelde bollen die van onder naar boven in diameter afnemen. Twee van deze bollen zijn geschilderd in roodtinten, twee in blauwtinten en één in groentinten.

- a** De bovenste bol bestaat uit 20 uniek gevormde vlakken die in vijf verschillende blauwtinten zijn geschilderd, namelijk vier vlakken voor elke blauwtint. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de vijf blauwtinten over de bovenste bol worden verdeeld?

Willy Alferink heeft ervoor gekozen om de onderste bol in roodtinten te schilderen, de bol daarboven in blauwtinten, enzovoort. Hij had ook voor een andere volgorde van de kleuren kunnen kiezen.

- b** Hoeveel verschillende volgorden zijn er in totaal?
c Hoeveel verschillende volgorden zijn er als twee bollen boven elkaar niet dezelfde kleur mogen hebben?



Bron: www.willyalferink.nl

36 In deze opgave gaat het over getallen waarbij de cijfers worden gekozen uit 1, 2, 3, 4, 5 en 6.

Hoeveel getallen van acht cijfers zijn er waarbij

- a** drie keer een 1, drie keer een 2 en twee keer een 3 voorkomt
b vier cijfers elk twee keer voorkomen
c elk van de cijfers 1, 2, 3, 4, 5 en 6 minstens één keer voorkomt?

En hoeveel getallen van vier cijfers zijn er waarbij

- d** elk cijfer maar één keer mag voorkomen en het getal kleiner dan 3500 moet zijn
e elk cijfer meer dan een keer mag voorkomen en het getal groter dan 3500 moet zijn?

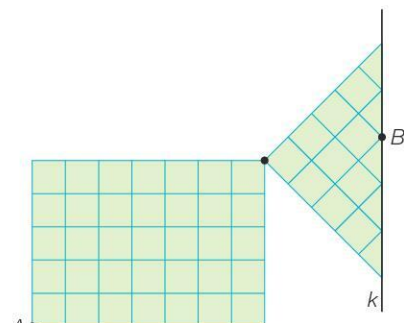
37 Het alarmsysteem van de familie Schiereck kan worden aan- en uitgezet middels een pincode van vijf cijfers. Elk cijfer mag vaker gebruikt worden. Aan de slijtage van de knoppen op het cijferpaneel van het alarmsysteem is duidelijk te zien dat de knoppen voor de cijfers 4, 7 en 8 het meest gebruikt worden. Ga ervan uit dat de vijfcijferige pincode is opgebouwd uit deze drie cijfers.

Hoeveel mogelijke pincodes zijn er dan?

38 Zie het rooster in figuur G.8.

Hoeveel routes zijn er

- a van A naar B
- b van A naar de lijn k
- c van A naar B en terug
- d van A naar de lijn k en terug?



figuur G.8

39 Elk jaar vinden in Noord-Amerika de World Series plaats tussen de twee beste baseballteams. De twee teams spelen net zo lang tegen elkaar totdat één van de teams vier wedstrijden gewonnen heeft. Bij baseball is een gelijkspel niet mogelijk.

- a Hoeveel mogelijkheden zijn er om in precies vijf wedstrijden een winnaar te hebben? En hoeveel om in precies zes wedstrijden een winnaar te hebben?
- b Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?



40 Een distributiecentrum gebruikt een code met blauwe en witte vakjes in een rechthoek van 4 bij 5. Zie figuur G.9.

- a Bereken het aantal codes met zes blauwe vakjes.
- b Hoeveel verschillende codes zijn er in totaal te maken?
- c Hoeveel codes zijn er mogelijk met in de eerste kolom één blauw vakje, in de tweede kolom twee blauwe vakjes, in de derde kolom drie blauwe vakjes en in de vierde kolom vier blauwe vakjes?

Het distributiecentrum wil het aantal codes uitbreiden door in de rechthoek van 4 bij 5 behalve blauwe en witte vakjes ook zwarte vakjes te gebruiken.

- d Hoeveel keer zoveel codes kan het distributiecentrum zo maken?
- e Hoeveel codes zijn er nu mogelijk met in de eerste kolom twee zwarte vakjes?

kolom			
1	2	3	4
■	■	■	■
■	■	■	■
■	■	■	■
■	■	■	■
■	■	■	■

figuur G.9

41 Voor het spel ‘Wie is de mol?’ wordt door zes kandidaten een opdracht uitgevoerd. Hiervoor moeten twee duo’s in de stad Sevilla foto’s maken. Het ene duo maakt foto’s van drie kerken en het tweede duo van drie musea. Verder is er een kandidaat die de fotoduo’s aanwijzingen geeft, zodat deze weten waar de te fotograferen gebouwen staan. De zesde kandidaat moet na afloop van de opdracht de zes foto’s op volgorde van bouwjaar van de gefotografeerde gebouwen leggen.

a Op hoeveel manieren kunnen de kandidaten worden verdeeld over de verschillende taken?

De kandidaat die de foto’s op volgorde moet leggen, heeft geen idee van de bouwjaar van de gebouwen op de foto’s. Wel denkt hij te kunnen zien dat de kerken in ieder geval allemaal ouder zijn dan de musea. Hij besluit op basis hiervan een gok te wagen.

b Hoeveel volgordes zijn dan mogelijk?

De kandidaat krijgt te horen dat het klopt dat de kerken allemaal ouder zijn dan de musea, maar dat geen enkele foto op de goede plek ligt. Hij mag nog een poging wagen.

c Hoeveel volgordes blijven dan nog over?

Gedurende de dag heeft een van de kandidaten, de ‘mol’, geprobeerd om de opdracht te saboteren.

De dag wordt afgesloten met een individuele test. Ter afsluiting van deze test wordt aan alle kandidaten gevraagd wie zij denken dat de mol is.

De mol krijgt na de test een lijstje te zien met daarop, op alfabetische volgorde, de namen van de andere vijf kandidaten en daarachter de door hen genoemde mol. Slechts twee van de kandidaten hebben de juiste mol genoemd.

d Hoeveel verschillende lijstjes kan de mol te zien krijgen?



Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen.
- De toets Ans en fouten verbeteren.
- Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen.
- Decimaal getal omzetten in breuk.

vwo A/C deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 19

Formules en grafieken

- Formules invoeren en grafieken plotten.
- Tabellen maken.
- De opties snijpunt, nulpunt, maximum en minimum.

vwo A/C deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 37

Allerlei

- Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR.
-

Overzicht routes

1 Formules en grafieken

1.1 Lineaire formules

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

1.2 Een lijn door twee gegeven punten

opgave	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

1.3 Interpoleren, extrapoleren en evenredigheid

opgave	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
□ basis																			
⊙ midden																			
* uitdagend																			

1.4 Wiskundige modellen

opgave	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

2 Statistiek

2.1 De statistische cyclus

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
☐ basis													
☒ midden													
☒ uitdagend													

2.2 Data verzamelen

opgave	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
☐ basis												
☒ midden												
☒ uitdagend												

2.3 Centrum- en spreidingsmaten

opgave	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
☐ basis															
☒ midden															
☒ uitdagend															

2.4 Klassenindeling en polygonen

opgave	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
☐ basis														
☒ midden														
☒ uitdagend														

2.5 Soorten verdelingen

opgave	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
☐ basis																		
☒ midden																		
☒ uitdagend																		

2.6 Betrouwbaarheidsintervallen

opgave	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
☐ basis													
☒ midden													
☒ uitdagend													

3 Rekenen en herleiden

3.1 Breuken en verhoudingen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

3.2 Herleiden van formules

opgave	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
□ basis																
⊙ midden																
* uitdagend																

3.3 Procentberekeningen en de wetenschappelijke notatie

opgave	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
□ basis											
⊙ midden											
* uitdagend											

52	53	54	55	56	57	58	59

3.4 Rekenen met eenheden

opgave	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

73	74	75	76	77	78	79

4 Combinatoriek

4.1 Regels voor telproblemen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
□ basis																		
⊙ midden																		
* uitdagend																		

4.2 Permutaties en combinaties

opgave	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

36	37	38	39	40	41

4.3 Rijtjes en roosters

opgave	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
□ basis																			
⊙ midden																			
* uitdagend																			

4.4 Allerlei telproblemen

opgave	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

Trefwoordenregister

A

aantonen dat 131
absolute verandering 53,
137
afnemend dalend 97
afnemend stijgend 97
afstand 149
aftrekken van breuken 122
aselect 62

B

95%-betrouwbaarheids-
interval 103, 107
betrouwbaarheidsinterval
103, 107
betrouwbaarheidsinterval
voor
populatiegemiddelde
107
betrouwbaarheidsinterval
voor populatieproportie
104
boomdiagram 163, 165
box 76
boxplot 75
breuken aftrekken 122
breuken delen 120
breuken optellen 122
breuken
vermenigvuldigen 120

C

causaal verband 59
Centraal Bureau voor de
Statistiek 65
centrummaten 72
combinatie 175
conclusies trekken 102
continue variabele 66
cumulatieve frequentie 86
cumulatieve
frequentiepolygoon 86
cumulatieve
verdelingskromme 90

D

data 56
data analyseren 72, 81, 89
data verzamelen 65
delen van breuken 120
delta 19
derde kwartiel 75
discrete variabele 66
driehoek van Pascal 186

E

eenheden omzetten 152
eerste kwartiel 75
enquête 65
evenredig 29
omgekeerd - 32
recht - 29
evenwijdige lijnen 11
extrapoleren 26
grafisch - 26
lineair - 26

F

faculteit 172
frequentie 54
cumulatieve - 86
relatieve cumulatieve -
86
frequentiepolygoon 83
cumulatieve - 86
relatieve - 84
frequentietabel 54
frequentieverdeling 83
functie 21
schrijven als - van 133

G

Gauss, Carl Friedrich 99
gemiddelde 72, 89, 95
grafiek plotten 37
grafiek schetsen 37
grafiek tekenen 37
grafisch extrapoleren 26
grafisch interpoleren 26

grafische

rekenmachine 19, 37

H

haakjes wegwerken 130
herhalingen 167
herhalingscombinatie 191
histogram 83
horizontale lijn 12
hyperbolisch verband 32
hyperbool 32

I

inhoud 146
inhoudsmaten 146
interkwartielaafstand 76
interpoleren 26
grafisch - 26
lineair - 26
intervalniveau 68

K

klassen 81
klassenbreedte 81
klassengrenzen 81
klassenindeling 81
klassenmidden 81
kruisproduct 30, 126
kruistabel 67
kwalitatieve variabele 66
kwantitatieve variabele 66
kwartiel 75
derde - 75
eerste - 75
kwartielaafstand 76

L

lengte 146
lijnen 11
horizontale - 12
verticale - 12
evenwijdige - 11
snijpunten van - 15
lineair extrapoleren 26

lineair interpoleren 26
lineair verband 21
lineaire formule 11
lineaire functie 21
lineaire vergelijking 9
lineaire vergelijking met
twee variabelen 133
links-scheef 90
links-scheve verdeling 90

M

mediaan 72, 89, 95
meertoppige verdeling 90
meetniveau 67
merkwaardige
producten 131
met herhaling 167
modale klasse 81
modelvorming 41
modus 72, 89, 95
Moivre, Abraham de 99

N

nominaal niveau 67
nominale variabele 68
normaalkromme 97
normale verdeling 97, 99,
102

O

omgekeerd evenredig 32
onderzoeksvraag 56, 59
oorzakelijk verband 59
oppervlakte 146
oppervlaktematen 146
optellen van breuken 122
ordinaal niveau 67
ordinale variabele 68

P

Pascal, Blaise 186
permutatie 172
ploten 37
populatie 62
populatiegemiddelde 107
populatieproportie 69, 102

procentberekeningen 137
procentuele
verandering 53, 137

Q

Quetelet, Adolphe 99

R

rangschikkingen 172
rationiveau 68
recht evenredig 29
rechts-scheef 90
rechts-scheve
verdeling 90
relatief 137
relatieve cumulatieve
frequentie 86
relatieve
frequentiepolygoon 84
relatieve verandering 53,
137
representatief 62
respondenten 65
richtingscoëfficiënt 11, 19
rijtjes bestaande uit A's en
B's 182
rijtjes bestaande uit A's, B's
en C's 188
rooster 165

S

samenhang 59
scheve verdeling 90
snelheid 149
snijpunten van lijnen 15
somregel 163
spreidingsbreedte 76
spreidingsmaat 78
staafdiagram 55
standaardafwijking 78, 102
standaarddeviatie 78
stapeldiagram 55
statistiek 56
statistische cyclus 56
steekproef 62
steekproefgemiddelde 107

steekproeflengte 102
steekproefomvang 102
steekproefproportie 70, 102
steekproefstandaardafwijking
107
steekproevenverdeling 102
Stevin, Simon 177
symmetrische verdeling 89
systematisch noteren 165

T

telproblemen 165
telproblemen met en zonder
herhaling 167
telproblemen
visualiseren 165
toenemend dalend 97
toenemend stijgend 97
tweetoppige verdeling 90

U

uitdrukken in 21
uitschieter 72, 89
uniforme verdeling 90

V

variabele 66
continue - 66
discrete - 66
kwalitatieve - 66
kwantitatieve - 66
nominale - 68
ordinale - 68
venster van de GR 37
verdeling 89
links-scheve - 90
meertoppige - 90
normale - 97, 102
rechts-scheve - 90
scheve - 90
symmetrische - 89
tweetoppige - 90
uniforme - 90
verdelingskromme 95
cumulatieve - 95
vergelijking van lijn 19

verhouding 124
verhoudingstabel 29, 124
vermenigvuldigen van
 breuken 120
vermenigvuldigingsregel
 163
verticale lijn 12
vrijmaken 133
vuistregels bij de normale
 verdeling 98

W

wegendiagram 163, 165
wetenschappelijke
 notatie 142
wiskundig model 41

Z

zonder herhaling 16

Verantwoording

Illustraties: Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: Integra Software Services
Beeldresearch: B en U International Picture
Service, Amsterdam

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Foto's

iStock: p. 6-7, 14, 40, 49, 50-51, 77, 127, 140,
148, 153, 160-161, 173, 178, 187, 195, 200, 204
Shutterstock: p. 17, 22, 33, 34, 44, 105, 139, 154,
166, 169, 180, 193, 202, 216
Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 23, 35, 39, 81,
99, 106, 108, 109, 114-115, 126, 128, 142, 151,
185, 192, 197, 198, 210 b, o, 212, 215
Alamy / Imageselect, Wassenaar: p. 47
Mark Haneveld, Lochem: p. 93
Roland Meijerink, Rotterdam: p. 159
Sarah Wijzenbeek, www.
berlagesaxophonequartet.com: p. 174
Getty Images: p. 177 b, 207
Imageselect, Wassenaar: p. 177 o
Voermans van Bree, Arnhem: p. 194
Jan van Haren, Hilversum: p. 199
Willyalferink.nl: p. 214

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of
andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff
Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs,
Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via
het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend
bedoeld als algemene informatie. Aan deze
informatie kunt u geen rechten of
aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of
uitgever ontlenen.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv,
Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het
auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken
van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf
schriftelijke toestemming te verkrijgen van
Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over
collectieve regelingen voor het onderwijs is te
vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

*This publication is protected by copyright. Prior
written permission of Noordhoff Uitgevers bv is
required to (re)use the information in this
publication.*

ISBN 978-90-01-89177-0



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



Noordhoff Uitgevers



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89177-0



9 789001 891770