

& GETAL | A & RUIMTE | C



Noordhoff

Getal & Ruimte

vwo A/C deel 2

Twaalfde editie, 2020

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek vwo A/C deel 2

De examenprogramma's wiskunde A en C van het vwo overlappen elkaar gedeeltelijk. Vandaar dat gekozen is voor gemeenschappelijke delen 1 en 2 voor vwo A/C.

Na de delen 1 en 2 volgen voor wiskunde A de boeken vwo A deel 3 en deel 4. Voor wiskunde C volgen de boeken vwo C deel 3 en deel 4.

De genoemde boeken bevatten de leerstof van de programma's vwo wiskunde A en vwo wiskunde C, zoals die met ingang van het jaar 2015 zijn vastgesteld.

De totale studielast voor het vak vwo wiskunde A is 520 uur. Voor vwo wiskunde C is dat 480 uur.

De domeinen Statistiek en kansrekening en Keuzeonderwerpen worden alleen in het Schoolexamen getoetst. Voor dit boek betreft dat de hoofdstukken 6, 7 en K. Hieronder is bij elk van de vier hoofdstukken van dit boek het bijbehorende domein genoemd. Elk hoofdstuk heeft een studielast van ongeveer 25 uur.

Hoofdstuk 5 Machtsverbanden (domein Verbanden). De transformaties die in paragraaf 5.2 worden behandeld, zijn geen onderdeel van de leerstof van wiskunde C. Leerlingen die wiskunde C volgen, kunnen dus eventueel deze paragraaf overslaan.

Hoofdstuk 6 Kansrekening (domein Statistiek en kansrekening, met name subdomein E4).

Hoofdstuk 7 Statistiek met de computer (domein Statistiek en kansrekening). In dit hoofdstuk komt het subdomein Statistiek met ICT geheel aan de orde. Indien mogelijk gebruikt men hierbij het computerprogramma Microsoft Excel. Als dit niet beschikbaar is, kan bijvoorbeeld Google Sheets worden gebruikt. In dat geval dient men erop bedacht te zijn dat wellicht niet alle opdrachten gemaakt kunnen worden. Zie hiervoor de informatie in Getal & Ruimte online.

Hoofdstuk K Lineair programmeren (domein Keuzeonderwerpen). In dit hoofdstuk wordt een keuzeonderwerp aangeboden. Het is uiteraard toegestaan zelf een ander keuzeonderwerp te kiezen. Het is zelfs mogelijk in een klas meerdere keuzeonderwerpen aan te bieden, eventueel rekening houdend met de belangstelling van de individuele leerling. In de laatste paragraaf van het hier aangeboden keuzeonderwerp maakt de leerling gebruik van een computerprogramma. Daarbij wordt uitgegaan van Excel. In Getal & Ruimte online staat informatie over het gebruik van Sheets.

De delen 1, 2 en 3 zijn bedoeld voor de leerjaren 4 en 5. Afhankelijk van de verdeling van de studielast over deze twee leerjaren kunnen een of meer hoofdstukken van deel 2 samen met deel 3 in het vijfde leerjaar worden doorgenomen.

Opbouw

De opbouw in deel 2 is dezelfde als in deel 1. Elk hoofdstuk heeft een begin- en eindopdracht en een paragraaf Voorkennis. De oriëntatie-opgaven staan voor nieuwe theorie en activeren het denken over een nieuw wiskundig begrip. Ook de reflectie-opgaven spelen een belangrijke rol bij het activeren van een wiskundige denkhouding. Naast de gewone opgaven en de afsluitende opgaven zijn er nog de extra opgaven. De afsluitende opgaven geven het beoogde eindniveau aan. De extra opgaven doorbreken de standaardaanpak en activeren zo het wiskundig denken.

Aan het eind van de hoofdstukken 5 en 6 staat een Diagnostische toets en achterin het boek staan de Gemengde opgaven bij deze hoofdstukken.

Drie leerroutes

In deze editie wordt gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen.

De basisroute geeft de leerling voldoende oefening om zich alle vaardigheden die bij de eindtermen horen eigen te maken. In de middenroute worden enkele oefenopgaven overgeslagen en in plaats hiervan maakt de leerling opgaven die dieper op de stof ingaan. De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder oefenopgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.

Getal & Ruimte online

Alle opgaven kunnen ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant en klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij de hoofdstukken 5, 6 en K een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

Voorjaar 2020

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

02 Oriëntatie-opgave

   Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 Gewone opgave

   Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 Reflectie-opgave

   In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 Afsluitende opgave

   De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 Extra opgave

   Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute



2 Middenroute



3 Uitdagende route



NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder route-aanduiding

In de Diagnostische toets en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▶GR] Verwijzing naar een module van de GR-handleiding.

[▶WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

[▶JCT] Verwijzing naar een module van de handleiding Excel/Sheets.

Inhoud

5 Machtsverbanden 6

Beginopdracht Whistler Mountain	8
Voorkennis Herleiden van machten	9
5.1 Rekenen met machten	11
5.2 Grafieken veranderen	19
5.3 Formules herleiden en variabelen vrijmaken	27
5.4 Formules met machten en wortels	36
Eindopdracht Van Whistler Mountain naar Whistler	45
Diagnostische toets	46

6 Kansrekening 48

Beginopdracht Kansen in de rechtspraak	50
Voorkennis Combinatoriek	51
6.1 Kansen	53
6.2 Empirische kansen	59
6.3 Het vaasmodel en de productregel	69
6.4 De somregel	78
6.5 De complementregel	85
6.6 Pakken met en zonder terugleggen	91
Eindopdracht Diensten in het ziekenhuis	99
Diagnostische toets	100

7 Statistiek met de computer 102

Beginopdracht Olympische Spelen 2016	104
Voorkennis Centrummaten en boxplots	105
7.1 Werken met een spreadsheet	107
7.2 Werken met datasets	113
7.3 Draaitabellen en draaigrafieken	118
Eindopdracht Succesvolle sportlanden	127

K Lineair programmeren 128

Beginopdracht Verkeer in het centrum	130
Voorkennis Lineaire vergelijkingen met twee variabelen	131
K.1 Stelsels van lineaire vergelijkingen	133
K.2 Ongelijkheden met twee variabelen	139
K.3 Lineaire programmeringsproblemen	144
K.4 De hoekpuntmethode	154
K.5 Lineair programmeren met Excel	163
Eindopdracht Verkeersstromen	171

Gemengde opgaven	172
Overzicht GR-modules	181
Overzicht Excel/Sheets-modules	182
Overzicht routes	183
Trefwoordenregister	187
Verantwoording	189

5

Machtsverbanden

Wat leer je?

- Wat de betekenis is van machten met negatieve en gebroken exponenten.
- Verschuiven en verticaal herschalen van grafieken van machtsverbanden.
- Variabelen vrijmaken bij wortelformules, machtsformules en gebroken formules.
- Machtsverbanden gebruiken in praktische situaties.

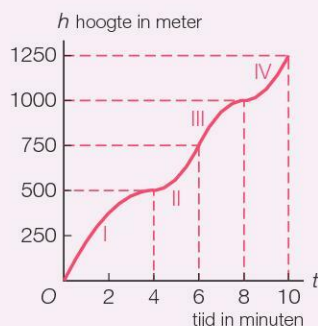


Beginopdracht Whistler Mountain

Whistler is een stadje in het westen van Canada. Bij Whistler ligt een van de grootste skigebieden in Noord-Amerika: Whistler-Blackcomb.

De Whistler Village Gondola brengt je in 10 minuten vanuit Whistler naar een punt dat 1250 meter hoger ligt.

In de figuur hiernaast is de grafiek van de hoogte van een cabine ten opzichte van Whistler uitgezet tegen de tijd. Je ziet in de grafiek vier delen die zijn aangegeven met I, II, III en IV. We nemen eerst aan dat deze delen te beschrijven zijn met tweedegraadsformules.



Voor deel I gaan we uit van een formule van de vorm $h = a(t - 4)^2 + 500$.

Dit is de formule van een parabool waarvan de top het punt (4, 500) is.

Door verder te gebruiken dat deel I door het punt (0, 0) gaat, is a te berekenen.

- Bereken a en geef de formule van deel I.

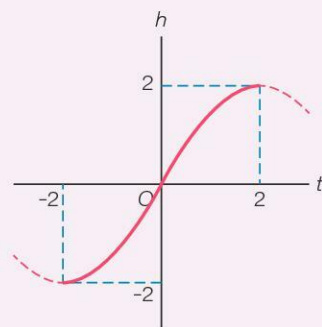
Ook voor deel II gaan we uit van de formule $h = a(t - 4)^2 + 500$. Het betreft immers ook een parabool met top (4, 500).

- Stel de formule op die bij deel II hoort, door te gebruiken dat de parabool ook door het punt (6, 750) gaat.
- Stel de formules op die horen bij de delen III en IV.

In plaats van formules van parabolen op te stellen, kun je voor het gehele stuk dat bestaat uit de delen II en III ook één derdegraadsformule opstellen.

We gaan eerst uit van de formule $h = -\frac{1}{8}t^3 + \frac{1}{2}t$. De grafiek hiervan op het interval $[-2, 2]$ zie je hiernaast.

Het punt van symmetrie van deze grafiek is (0, 0) en de toppen zijn (-2, -2) en (2, 2). We gaan deze grafiek zodanig bewerken dat het punt van symmetrie (6, 750) wordt en de toppen (4, 500) en (8, 1000). Dan heb je het gedeelte van de grafiek dat is aangegeven met II en III.



We gaan de grafiek eerst uittrekken in verticale richting door elke h -waarde te vermenigvuldigen met een getal. We kiezen hiervoor de factor 125 en krijgen zo de formule $h = 125(-\frac{1}{8}t^3 + \frac{1}{2}t)$.

- Licht toe waarom is gekozen voor de factor 125 en toon aan dat de formule te herleiden is tot $h = -15,625t^3 + 187,5t$.

Vervolgens verschuiven we de grafiek van $h = -15,625t^3 + 187,5t$ over een afstand 6 naar rechts en 750 omhoog. Zo ontstaat de formule $h = -15,625(t - 6)^3 + 187,5(t - 6) + 750$.

- Licht de verschuiving 6 naar rechts en 750 omhoog toe en controleer met de GR of de grafiek bij deze formule past bij de delen II en III.

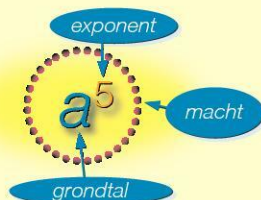
Voorkennis Herleiden van machten

Theorie A Rekenregels voor machten

Je weet dat a^5 een macht van a is.

In de macht a^5 is a het grondtal en 5 de exponent.

a^5 is een korte schrijfwijze voor $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, dus voor het product van vijf factoren a .



Rekenen met machten gaat als volgt.

$a^2 \cdot a^5 = \underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ factoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5 \text{ factoren}} = a^7$	Bij het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten bij elkaar op.
$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^3$	Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af.
$(a^2)^5 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{5 \text{ factoren } a^2} = a^{10}$	Bij de macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten met elkaar.
$(ab)^4 = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab}_{4 \text{ factoren } ab} = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a^4 b^4$	Bij de macht van een product krijg je een product van machten.

Zo krijg je de volgende rekenregels voor machten.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

Hieronder zie je hoe je de rekenregels gebruikt bij het herleiden.

$$(-3a^3)^4 = (-3)^4 \cdot (a^3)^4 = 81a^{12}$$

$$(-3a^2)^3 = (-3)^3 \cdot (a^2)^3 = -27a^6$$

$$(2a^3)^2 - (a^2)^3 = 4a^6 - a^6 = 3a^6$$

$$a^3 \cdot a^2 + a^3 + a^2 = a^5 + a^3 + a^2$$

$$\frac{3a^3b}{12ab} = \frac{1}{4}a^2$$

$$(-2)^4 = 16 \text{ en } -2^4 = -16$$

$$(-3)^3 = -27 \text{ en } -3^3 = -27$$

Let op: $a^3 \cdot a^2 = a^5$ maar $a^3 + a^2$ kan niet korter.

1 Herleid.

a $x^2 \cdot x^3$

b $2p^3 \cdot 3p^2$

c $4a^2b \cdot 5a^3b^2$

d $-2p^4q^3 \cdot -3pq$

e $5x^2y \cdot 2x - 3x^3y$

f $12a^4b \cdot \frac{1}{4}ab - 8ab$

2 Herleid.

a $(p^2q)^3$

b $(3x^2)^3$

c $(-5x^2y^3)^2$

d $(-4ab^4)^2$

e $(3a)^2 \cdot (2a^2)^3$

f $(3a^3)^2 + (2a^2)^3$

3 Herleid.

a $\frac{12x^6}{4x^2}$

b $\frac{5x^{10}}{15x^5}$

c $\frac{24a^4b^2}{6ab}$

d $\frac{-15p^6q}{5p^2q}$

e $\frac{10x^3y^2}{5x^2y}$

f $\frac{(2ab)^3}{(3ab)^2}$

4 Herleid.

a $\frac{-28a^6}{7a}$

b $-(3a^4)^2$

c $(-2a^2)^5$

d $(-a^3)^3$

e $(5a)^3 \cdot -3a$

f $\left(\frac{9a^4}{a}\right)^2$

5 Herleid.

a $(ab)^4 \cdot a$

b $(-2ab)^3 \cdot b$

c $(3a)^2 + (2b)^2$

d $(3a)^3 - 8a^3$

e $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (-a)^2$

f $(5a^4)^2 + (-a^2)^4$

5.1 Rekenen met machten



01 De formule $A = (3xy)^2 - \frac{6x^3y^4}{2xy^2}$ is te herleiden tot $A = 6x^2y^2$.

Laat zien hoe dat gaat.

Theorie A Formules met machten herleiden

Je kent de volgende rekenregels voor machten.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

Deze rekenregels kun je gebruiken om formules met machten te herleiden.

Voorbeeld

a Herleid de formule $P = (2a^3)^2 - (a^2)^3 + a^3 \cdot a^2$.

b Herleid de formule $Q = \frac{12x^3y}{3xy} + \frac{(4xy)^2}{2y^2}$.

Uitwerking

a $P = (2a^3)^2 - (a^2)^3 + a^3 \cdot a^2 = 4a^6 - a^6 + a^5 = 3a^6 + a^5$



Let op: $3a^6 + a^5$ kan niet korter.

b $Q = \frac{12x^3y}{3xy} + \frac{(4xy)^2}{2y^2} = 4x^2 + \frac{16x^2y^2}{2y^2} = 4x^2 + 8x^2 = 12x^2$



R2 Geef aan welke rekenregels voor machten worden gebruikt bij het herleiden van de twee formules van het voorbeeld.



3 Herleid de volgende formules.

a $A = (4x^3)^2 - 3x^5 \cdot 2x$

b $B = \frac{15a^3b}{5ab} - \left(1\frac{1}{2}a\right)^2$

c $C = 3p^2q \cdot 4pq - \frac{(6p^2q^2)^2}{9pq^2}$

A4


Herleid de volgende formules.

a $P = 6a^2 \cdot 4a^3 - 5a^4 \cdot 3a - (2a^2)^3$

b $Q = \frac{28x^6}{7x} - \frac{(3x^2y)^3}{2xy^3}$

c $R = (3p^2q)^2 - \frac{2p^5q^3}{pq} + (2p^2)^2 - (3q)^2$

E5


Het getal $2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53}$ eindigt op een aantal nullen.

***** Wat is het laatste cijfer vóór al deze nullen?

O6


In de tabel hiernaast kun je zowel in de exponenten als in de getallen rechts van het =-teken een regelmaat herkennen.

a Hoe volgt uit deze regelmaat dat $2^0 = 1$ en $2^{-2} = \frac{1}{4}$?

b Vul in: $2^{-3} = \frac{1}{2^{\dots}}$ en $2^{-4} = \frac{1}{2^{\dots}}$.

Op dezelfde manier als hierboven kun je inzien dat $3^0 = 1$ en $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

c Vul in: $x^{-1} = \frac{1}{\dots}$ en $x^{-3} = \frac{1}{\dots}$.

$2^5 = 32$
$2^4 = 16$
$2^3 = 8$
$2^2 = 4$
$2^1 = \dots$
$2^0 = \dots$
$2^{-1} = \dots$
$2^{-2} = \dots$
$2^{-3} = \dots$

Theorie B Machten met negatieve exponenten

In opgave 6 komen de machten 2^0 , x^{-1} en x^{-3} voor.

Om de betekenis van x^0 te begrijpen, kijken we naar $\frac{x^2}{x^2}$.

Je weet $\frac{x^2}{x^2} = 1$.

Gebruik je de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, dan krijg je $\frac{x^2}{x^2} = x^{2-2} = x^0$.

De afspraak is dat $x^0 = 1$.

Om de betekenis van x^{-3} te begrijpen, kijken we naar $\frac{x^2}{x^5}$.

Je weet $\frac{x^2}{x^5} = \frac{\overset{x}{\cancel{x}} \cdot \overset{x}{\cancel{x}}}{\overset{x}{\cancel{x}} \cdot \overset{x}{\cancel{x}} \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^3}$.

Gebruik je de regel $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, dan krijg je $\frac{x^2}{x^5} = x^{2-5} = x^{-3}$.

De afspraak is dat $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$. En zo is $x^{-6} = \frac{1}{x^6}$ en $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

$$x^0 = 1$$

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{1}{5} = 5^{-1}$$

Voor $a \neq 0$ is $a^0 = 1$ en $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

Met de regels voor machten kun je $\frac{a^4}{a^7}$ schrijven als macht van a .

Je berekent dan de exponent die bij het grondtal a hoort.

Je krijgt $\frac{a^4}{a^7} = a^{4-7} = a^{-3}$.

Voorbeeld

Schrijf als macht van a .

a $a^2 \cdot \frac{1}{a^8}$

b $\frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)}{a}$

c $\frac{1}{a^p} \cdot (a^3)^2$

d $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a^{-n}}$

Uitwerking

a $a^2 \cdot \frac{1}{a^8} = a^2 \cdot a^{-8} = a^{-6}$

b $\frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)}{a} = \frac{a^{-2}}{a^1} = a^{-3}$

c $\frac{1}{a^p} \cdot (a^3)^2 = a^{-p} \cdot a^6 = a^{-p+6}$

d $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a^{-n}} = \frac{a^{-5}}{a^{-n}} = a^{-5-(-n)} = a^{-5+n}$

Je schrijft $5a^{-3}b^2$ als volgt zonder negatieve exponenten.

$$5a^{-3}b^2 = 5 \cdot \frac{1}{a^3} \cdot b^2 = \frac{5b^2}{a^3}$$

Je ziet dat dit antwoord als één breuk geschreven is. Doe dit ook bij vergelijkbare opgaven.

Voorbeeld

Schrijf zonder negatieve exponenten.

a $8a^{-5}b^3$

b $\frac{2}{5}a^{-2}b$

c $\left(\frac{3}{4}a^3b^{-2}\right)^{-2}$

Uitwerking

a $8a^{-5}b^3 = 8 \cdot \frac{1}{a^5} \cdot b^3 = \frac{8b^3}{a^5}$

Deze tussenstap mag je weglaten.

b $\frac{2}{5}a^{-2}b = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot b = \frac{2b}{5a^2}$

c $\left(\frac{3}{4}a^3b^{-2}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot (a^3)^{-2} \cdot (b^{-2})^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} \cdot a^{-6} \cdot b^4 = \frac{1}{\frac{9}{16}} \cdot \frac{1}{a^6} \cdot b^4 = \frac{16b^4}{9a^6}$

7
□ ⊗ *

Schrijf als macht van a .

a $\frac{1}{a^2}$

d $\frac{a^8}{a^0}$

g $\frac{a}{a^{12}}$

b $a^4 \cdot \frac{1}{a^6}$

e $(a^3)^{-2}$

h $\frac{1}{a^8} \cdot (a^3)^n$

c $\frac{a^n}{\left(\frac{1}{a^4}\right)}$

f $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a}$

i $\frac{\left(\frac{1}{a^n}\right)}{a^{-3}}$

8
□ ⊗ *

Schrijf zonder negatieve exponenten.

a $6a^{-5}b^3$

d $\frac{3}{5}a^{-4}$

g $-4 \cdot (3a)^{-2}$

b $\frac{1}{3}a^{-3}$

e $\left(\frac{1}{2}a\right)^{-3}$

h $(3a)^{-2}b^{-3}$

c $(5a^{-4}b^2)^{-1}$

f $\frac{1}{6}a^{-2}b^4$

i $\left(\frac{3}{8}a^{-1}b\right)^{-2}$

A9
□ ⊗ *

a Schrijf $\frac{a^4 \cdot a^6}{\left(\frac{1}{a}\right)}$ als macht van a .

b Schrijf $\left(\frac{2}{3}a^{-4}b^3\right)^{-3}$ zonder negatieve exponenten.

c Toon aan dat $4a^{-2}b + \frac{3}{a^2b^{-1}}$ gelijk is aan $\frac{7b}{a^2}$.

A10
□ ⊗ *

Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^n$.

a $y = 5(2x^3)^2 \cdot \frac{3}{x^4}$

c $y = \frac{162}{(3x^2)^4}$

b $y = \frac{1}{3}(3x^2)^3 \cdot \frac{2}{x^{10}}$

d $y = \left(\frac{4}{5}x\right)^{-2} \cdot \frac{4}{x}$

E11
*

a Als je 1, 2, 3, ... tot en met n met elkaar vermenigvuldigt, is de uitkomst $2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$.

Welk getal is n ?

b Harry schrijft een rij getallen op. Hij begint met 1 en het tweede getal is 2. Elk getal daarna maakt hij als volgt: hij deelt het voorlaatst opgeschreven getal door het laatst opgeschreven getal. Schrijf het tiende getal als macht van 2.

O12
□ ⊗ *

Je weet dat $(\sqrt{x})^2 = x$.

a Er geldt $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$. Uit welke rekenregel volgt dit?

b Licht toe dat $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

c Licht toe dat $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Theorie C Hogeremachtswortels

Worteltrekken heeft te maken met kwadrateren. Zo heeft de vergelijking $x^2 = 5$ de oplossingen $x = \sqrt{5}$ en $x = -\sqrt{5}$. Dus $(\sqrt{5})^2 = 5$ en $(-\sqrt{5})^2 = 5$.

Omdat kwadrateren hetzelfde is als tot de tweede macht verheffen, heet $\sqrt{5}$ ook wel de *tweedemachtswortel* van 5.

Er zijn ook **hogeremachtswortels**, zoals *derdemachtswortels*, *vierdemachtswortels*, enzovoort.

Een derdemachtswortel heeft te maken met een derde macht.

Zo heeft de vergelijking $x^3 = 50$ als oplossing $x = \sqrt[3]{50}$. Dus $(\sqrt[3]{50})^3 = 50$.

En de oplossing van $x^3 = -50$ is $x = \sqrt[3]{-50}$. Dus $(\sqrt[3]{-50})^3 = -50$.

In opgave 12 heb je gezien dat $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

Met behulp van de regel $(a^p)^q = a^{pq}$ lichten we de betekenis van $x^{\frac{1}{5}}$ toe.

Je kiest daartoe $p = \frac{1}{5}$ en $q = 5$.

Je krijgt $(x^{\frac{1}{5}})^5 = x^1 = x$. } De afspraak is dat $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$.

Je weet $(\sqrt[5]{x})^5 = x$.

Algemeen is $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$. En verder is $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ en $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Machten met een gebroken exponent kun je dus herleiden tot een hogeremachtswortel.

Zo is $a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$, $a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ en $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$.

De rekenregels voor machten van bladzijde 11 gelden ook voor machten met gebroken exponenten.

$\sqrt{a}$ is een korte
schrijfwijze voor $\sqrt[2]{a}$.

Bijzondere machten

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^0 = 1$$

Voorbeeld

Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

a $4a^{-\frac{1}{3}}$

b $4a^{2\frac{1}{2}}$

c $\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}$

Uitwerking

a $4a^{-\frac{1}{3}} = \frac{4}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{4}{\sqrt[3]{a}}$

b $4a^{2\frac{1}{2}} = 4a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 4a^2 \cdot \sqrt{a}$

c $\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{4b^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{a}}{4 \cdot \sqrt[3]{b^2}}$

Omgekeerd kun je een vorm met hogere machtswortels herleiden tot een vorm met een gebroken exponent. Zie het volgende voorbeeld.

Voorbeeld

Schrijf als macht van x .

a $x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

b $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

c $\frac{x^{1,25}}{x^{2,20}}$

Uitwerking

a $x \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^1 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{1\frac{2}{3}}$

b $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{1\frac{2}{3}}$

c $\frac{x^{1,25}}{x^{2,20}} = x^{-0,95}$

13 Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.



a $5a^{\frac{3}{3}}$

d $\frac{2}{3}a^{-3}b^{\frac{1}{2}}$

b $\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{4}}b$

e $\frac{1}{5}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$

c $3a^{-\frac{2}{3}}$

f $(5a)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\sqrt[3]{5}a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{7}}}{5a^{\frac{1}{3}}} = \frac{3b^{\frac{2}{7}}}{5a^{\frac{1}{3}}} = \frac{3 \cdot \sqrt[7]{b^2}}{5 \cdot \sqrt[3]{a}}$$

14 Schrijf als macht van a .



a $a \cdot \sqrt[3]{a}$

d $\frac{1}{a^3}$

g $\sqrt[3]{a^{12}}$

b $\frac{1}{\sqrt{a}}$

e $a^2 \cdot \sqrt{a}$

h $\frac{1}{a^4} \cdot \sqrt[3]{a}$

c $\frac{1}{a}$

f $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$

i $\frac{a^3}{\sqrt[3]{a}}$

15 Je kunt $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ als macht van 2 schrijven: $\frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-1\frac{1}{2}}$.



Schrijf als macht van 2, 3 of 10.

a $8\sqrt{2}$

c $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

e $\frac{1}{100}\sqrt{10}$

b $\frac{8}{\sqrt{2}}$

d $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$

f $\frac{10}{\sqrt[3]{0,1}}$

16 **a** Toon aan dat de formule $y = 2^{x+4}$ te herleiden is tot $y = 16 \cdot 2^x$.



b Herleid de formule $y = 2^{x-2}$ tot de vorm $y = a \cdot 2^x$.

c Herleid de formule $y = 3^{x-1}$ tot de vorm $y = a \cdot 3^x$.

A17
☐⊙*

Schrijf de volgende formules zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

a $N = 5p^{\frac{2}{3}} \cdot q^{-\frac{1}{3}}$

b $R = 100a^{-4} \cdot b^{2\frac{1}{2}}$

c $P = 9^{1\frac{1}{2}} \cdot x^{-1\frac{1}{2}} \cdot y^{1\frac{1}{3}}$

A18
☐⊙*

Schrijf als macht van x .

a $\frac{x^6}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

d $x^4 \cdot \sqrt{x}$

b $x \cdot \sqrt[7]{x^3}$

e $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

c $\frac{x}{\sqrt[5]{x}}$

f $x^2 \cdot \frac{1}{x^3}$

A19
☐⊙*

Schrijf de volgende formules in de vorm $y = ax^p$.

a $y = \frac{5}{x\sqrt{x}}$

d $y = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3}$

b $y = 5x\sqrt{x^3}$

e $y = 5x^{-0,2} \cdot x^{1,3}$

c $y = \frac{5}{x^3} \cdot 2\sqrt{x}$

f $y = \frac{50x^{1,9}}{10x^{1,1}}$

Terugblik

Machten met negatieve exponenten

De rekenregels voor machten die hiernaast staan, gelden ook voor negatieve exponenten.

Dus $a^3 \cdot a^{-5} = a^{-2}$, $\frac{a^3}{a^5} = a^{-2}$, $(a^{-2})^3 = a^{-6}$ en $(ab)^{-2} = a^{-2}b^{-2}$.

Verder geldt voor $a \neq 0$ dat $a^0 = 1$ en $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

De regel $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ gebruik je bij het schrijven van $\frac{5}{6}a^{-3}b^2$ zonder negatieve exponenten. Je krijgt $\frac{5}{6}a^{-3}b^2 = \frac{5b^2}{6a^3}$.

Bij het herleiden van de formule $y = \frac{144x^3}{(2x)^5}$ tot de vorm $y = ax^n$

krijg je $y = \frac{144x^3}{(2x)^5} = \frac{144x^3}{32x^5} = \frac{144}{32} \cdot x^{3-5} = 4\frac{1}{2}x^{-2}$, dus $y = 4\frac{1}{2}x^{-2}$.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

Machten met gebroken exponenten

De rekenregels voor machten met gebroken exponenten zijn

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} \text{ en } a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Dus $(2x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2x}$ en $(4x)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(4x)^2} = \sqrt[3]{16x^2}$.

Je hebt hier te maken met de derdemachtswortels $\sqrt[3]{2x}$ en $\sqrt[3]{16x^2}$.

Met de regels $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ en $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ kun je $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{4}{5}}$ zonder negatieve en gebroken exponenten schrijven.

$$\text{Je krijgt } \frac{2}{3}a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{4}{5}} = \frac{2a^{\frac{1}{4}}}{3b^{\frac{4}{5}}} = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{a}}{3 \cdot \sqrt[5]{a^4}}.$$

In teller en noemer staan hogeremachtswortels, namelijk in de teller een vierdemachtswortel en in de noemer een vijfdemachtswortel.

Met de regels is $\frac{x^2}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}$ te schrijven als macht van x .

$$\text{Je krijgt } \frac{x^2}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{x^2}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^2}{x^{3\frac{1}{4}}} = x^{2-3\frac{1}{4}} = x^{-1\frac{1}{4}}.$$

Bij het schrijven van de formule $K = 10x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{4}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten krijg je

$$K = 10x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{4}} = 10 \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \cdot y^{\frac{1}{4}} = \frac{10y \cdot \sqrt[4]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}, \text{ dus } K = \frac{10y \cdot \sqrt[4]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

5.2 Grafieken veranderen

020 Gegeven zijn de formules $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$, $y_3 = x^6$ en $y_4 = x^9$.



- Plot de grafieken van y_1 , y_2 , y_3 en y_4 .
Neem x tussen $-1,5$ en $1,5$ en y tussen -2 en 2 .
- Er zijn twee punten die op elk van deze grafieken liggen.
Schrijf de coördinaten van die punten op.
- Van welke grafieken ligt geen enkel punt onder de x -as?

021 Gegeven zijn de formules $y_1 = 2x^3$ en $y_2 = 2x^3 + 5$.



- Bereken y_1 en y_2 voor $x = 1$, $x = 2$ en $x = 3$.
Hoe volgen de uitkomsten van y_2 uit die van y_1 ?
- Plot de grafieken van y_1 en y_2 . Neem x tussen -2 en 2 en y tussen -10 en 10 .
Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van y_1 ?

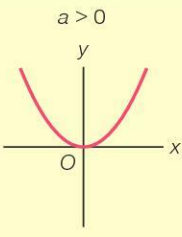
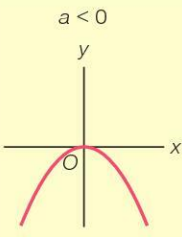
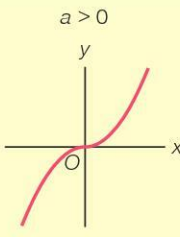
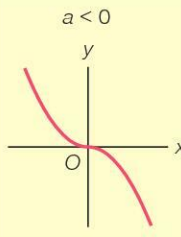
022 Gegeven zijn de formules $y_1 = 2x^3$ en $y_2 = 2(x - 2)^3$.



- Bereken y_1 voor $x = 3$ en y_2 voor $x = 5$.
Licht toe waarom de uitkomsten hetzelfde zijn.
- Welke x moet je invullen in de formule $y_3 = 2(x - 5)^3$ om dezelfde uitkomst als bij vraag a te krijgen?

Theorie A Verschuivingen

Een formule van de vorm $y = ax^n$ hoort bij een **machtsverband**. In het schema hieronder zie je hoe de grafiek eruitziet voor $n > 1$ en n geheel.

n even		n oneven	
$a > 0$ 	$a < 0$ 	$a > 0$ 	$a < 0$ 
$(0, 0)$ is de top		$(0, 0)$ is het punt van symmetrie	

De formules van de vorm $y = ax^n$ zijn **standaardformules** en de bijbehorende grafieken zijn **standaardgrafieken**.

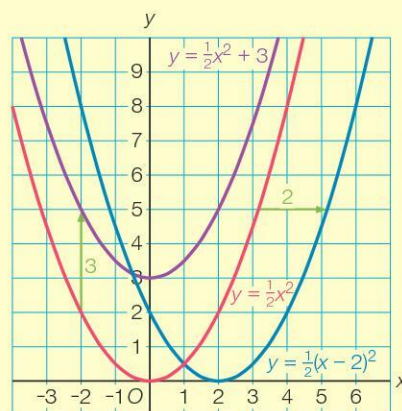
Je mag standaardgrafieken zonder toelichting schetsen.

Een standaardgrafiek kun je verschuiven. Zo ontstaat een **beeldgrafiek**.

Bij de verschuiving 3 omhoog is de beeldgrafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ de parabool met formule $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$. Bij de verschuiving 2 naar rechts heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ als beeldfiguur de parabool $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$.

En bij de verschuiving 3 naar links heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ als beeldfiguur de parabool $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$.

De verschuiving 3 naar rechts en 5 omhoog noteren we als verschuiving (3, 5).



figuur 5.1

Afspraak

De verschuiving p naar rechts en q omhoog noteren we als verschuiving (p, q) .

De parabool $y = -3x^2$ heeft bij de verschuiving

- (5, 0) als beeldgrafiek de parabool $y = -3(x - 5)^2$
- (-6, 0) als beeldgrafiek de parabool $y = -3(x + 6)^2$
- (-6, -5) als beeldgrafiek de parabool $y = -3(x + 6)^2 - 5$.

Verder is

$$y = 5x^3 \xrightarrow{\text{verschuiving (4, 7)}} y = 5(x - 4)^3 + 7$$

$$y = -6x^4 \xrightarrow{\text{verschuiving (-3, 8)}} y = -6(x + 3)^4 + 8$$

$$y = -x^2 \xrightarrow{\text{verschuiving (-5, 0)}} y = -(x + 5)^2$$

2 naar rechts:
vervang x door $x - 2$
3 naar links:
vervang x door $x + 3$

Bij de verschuiving (-6, -5)

- verschuif je 6 naar links en 5 omlaag
- vervang je x door $x - 6$, dus door $x + 6$, en tel je er -5 bij op.

grafiek

beeldgrafiek

$$y = ax^n \xrightarrow{\text{verschuiving (p, q)}} y = a(x - p)^n + q$$

Pas je op de grafiek van $y = 3(x - 1)^2 + 5$ de verschuiving (8, 6) toe, dan krijg je

$$y = 3(x - 1)^2 + 5 \xrightarrow{\text{verschuiving (8, 6)}} y = 3(x - 8 - 1)^2 + 5 + 6, \text{ dus} \\ y = 3(x - 9)^2 + 11.$$

23



- Schrijf de formule op van de beeldgrafiek van de parabool $y = -5x^2$ bij de verschuiving (2, 5), bij de verschuiving (-3, 6) en bij de verschuiving (7, 0).
- Schrijf de formule op van de beeldgrafiek van de grafiek van $y = 4x^5$ bij de verschuiving (-5, 7) en bij de verschuiving (0, -10).

24 Stel de formule op van de beeldgrafiek bij de verschuiving (4, 6).

- a** $y = 5x^2 + 1$
b $y = (x - 6)^3$
c $y = -x^4 + 2$
d $y = 3(x - 5)^6 + 8$
e $y = -2(x + 4)^5 + 6$
f $y = -2(x - 4)^2 - 6$

A25 Hieronder is telkens een formule en een verschuiving gegeven.

*** * *** Stel de formule op van de beeldgrafiek.

- a** $y = 5x^6$ en verschuiving (8, -3)
b $y = -3x^4 + 6$ en verschuiving (-4, 0)
c $y = 2(x - 3)^2$ en verschuiving (5, 0)
d $y = -5(x - 1)^3 + 8$ en verschuiving (2, -7)
e $y = x^5 + 6$ en verschuiving (-8, -3)
f $y = -x^4$ en verschuiving (7, -8)

A26 De grafiek van $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 - 5$ wordt 2 naar rechts en q omhoog
***** verschoven. Zo ontstaat de grafiek van $y = -\frac{1}{2}x^2 - x$.
 Bereken q .

O27 De grafiek van $y = 2x^2$ wordt 4 naar links en 1 omhoog verschoven.

- * * *** **a** Licht toe dat de top van de beeldgrafiek het punt (-4, 1) is.
b Geef de formule van de beeldgrafiek. Hoe kun je de coördinaten van de top van de beeldgrafiek uit de formule aflezen?

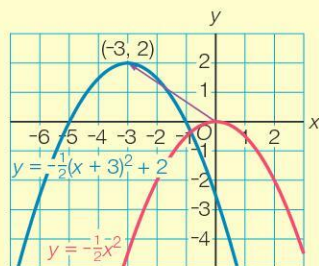
Theorie B Toppen en punten van symmetrie

De top van de grafiek van $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$ vind je als volgt.

$$y = -\frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{verschuiving } (-3, 2)} y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$$

bergparabool
met top $O(0, 0)$

bergparabool
met top $(-3, 2)$



figuur 5.2

De grafiek van $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$ is een bergparabool met top (-3, 2).

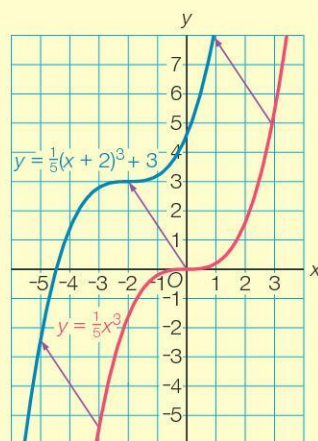
Omdat 2 de grootste y -waarde is, zeggen we dat het **maximum** van y gelijk is aan 2.

En zo is de grafiek van $y = \frac{1}{4}(x + 5)^2 - 3$ een dalparabool met top (-5, -3).

Omdat -3 de kleinste y -waarde is, zeggen we dat het **minimum** van y gelijk is aan -3.

De grafiek van $y = \frac{1}{5}(x+2)^3 + 3$ ontstaat uit die van $y = \frac{1}{5}x^3$ bij de verschuiving $(-2, 3)$.

De grafiek van $y = \frac{1}{5}(x+2)^3 + 3$ heeft geen top.
Het punt $(-2, 3)$ is het **punt van symmetrie**.



figuur 5.3

Voorbeeld

Schets de grafieken van de volgende formules en vermeld in je schets de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

a $y = \frac{1}{5}(x-5)^2 - 4$

b $y = -3(x+2)^5 - 6$

Aanpak

a $y = \frac{1}{5}x^2$

↓ verschuiving $(5, -4)$

$y = \frac{1}{5}(x-5)^2 - 4$

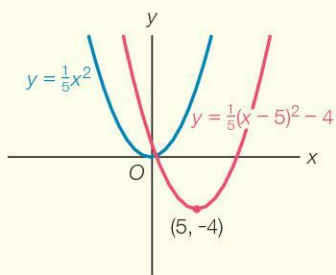
b $y = -3x^5$

↓ verschuiving $(-2, -6)$

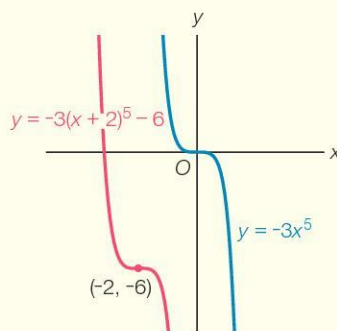
$y = -3(x+2)^5 - 6$

Uitwerking

a



b



28 Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld in je schets de coördinaten van de top.

a $y = -2(x+2)^2 - 3$

c $y = \frac{1}{2}(x+2)^4 + 18$

b $y = 0,18(x-3)^2 - 4$

d $y = -(x-3)^8 - 10$

29 Zie de formules bij opgave 28.

Geef bij elke formule aan of je met een minimum of maximum te maken hebt en geef dit minimum of maximum.

30


Geef van de grafieken van de volgende formules de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

a $y = -3(x - 5)^2 + 8$

d $y = 6(x - 8)^3 + 12$

b $y = 5x^2 + 7$

e $y = -\frac{1}{2}(x - 100)^4$

c $y = \frac{2}{5}(x + 8)^2$

f $y = -0,4(x + 0,15)^6 - 0,3$

A31


Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld in je schets de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

a $y = \frac{1}{2}(x - 3)^3 - 2$

c $y = -0,2(x + 2)^5 + 1$

b $y = -\frac{1}{3}(x + 1)^2 - 4$

d $y = 2(x - 5)^4 - 3$

A32


Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld in je schets de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

a $N = 3(t^4 - 2) + 5$

c $K = 8(q + 6)^5 - 12$

b $M = -5(p + 3)^6 + 2$

d $S = -8(t - 1)^3$

A33


Bij de formule van $A = a(t - 2)^4 + b$ is het maximum gelijk aan 10.

De grafiek van A gaat door het punt $(4, 2)$.

Bereken a en b .

A34


De grafiek van $y = x^2 - 10x + 26$ is ontstaan uit de grafiek van

$y = x^2 - 2x + 4$ bij een verschuiving.

Onderzoek welke verschuiving.

O35


a Bereken $y = (x - 2)^4$ voor $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.

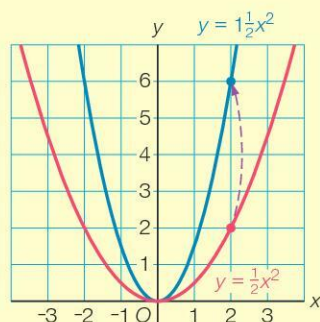
b Bereken $y = 3(x - 2)^4$ voor $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.

c Wat is het verband tussen de uitkomsten bij a en b?

Theorie C Verticaal herschalen

In figuur 5.4 is de grafiek van $y = 1\frac{1}{2}x^2$ ontstaan uit de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ door elke y -waarde met 3 te vermenigvuldigen. Zo ligt het punt $(2, 2)$ op de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$ en het beeldpunt $(2, 6)$ op de grafiek van $y = 1\frac{1}{2}x^2$. Je ziet dat de y -coördinaat 3 keer zo groot is geworden.

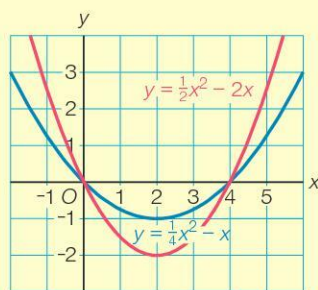
Er is hier sprake van **herschaling in verticale richting** met factor 3. De grafiek is als het ware uitgerekt in verticale richting.



figuur 5.4

Bij herschaling in verticale richting met factor $\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ als beeldfiguur de grafiek van $y = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 - 2x)$, dus van $y = \frac{1}{4}x^2 - x$. Zie figuur 5.5.

Je ziet dat de beeldgrafiek hier ontstaat door de oorspronkelijke grafiek in te drukken in plaats van uit te rekken. Dit gebeurt als de factor waarmee herschaald wordt tussen 0 en 1 ligt.



figuur 5.5

Voorbeeld

Op de grafiek van $y = \frac{1}{4}x^2$ wordt eerst de verschuiving $(2, -3)$ toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor 2. Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van de top.

Uitwerking

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

↓ verschuiving $(2, -3)$

$$y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 3$$

↓ vert. herschaling factor 2

$$y = 2\left(\frac{1}{4}(x - 2)^2 - 3\right) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 6$$

De formule van de beeldgrafiek is $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 6$.

De top is $(2, -6)$.

R36
□ ⊗ *

- Welke herschaling in verticale richting komt op hetzelfde neer als spiegeling in de x -as?
- Stel de formule op van de beeldgrafiek van $y = 3(x - 1)^2 - 6$ bij spiegeling in de x -as.



37
□

- Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}(x + 1)^3$. De grafiek van y wordt herschaald in verticale richting met factor 5. Stel de formule op van de beeldgrafiek.
- Gegeven is de formule $y = 0,6(x - 2)^6 - 4$. De grafiek van y wordt herschaald in verticale richting met factor $\frac{1}{4}$. Stel de formule op van de beeldgrafiek.

38

- a** De grafiek van y_2 ontstaat uit de grafiek van $y_1 = 0,3x^2$ bij de verschuiving $(-5, 6)$. Verder geldt $y_3 = 3 \cdot y_2$.
Stel de formule op van y_3 en geef de top van de bijbehorende grafiek.
- b** Gegeven zijn de formules $y_1 = 0,5x^4$ en $y_2 = -4 \cdot y_1$.
De grafiek van y_3 ontstaat uit de grafiek van y_2 bij de verschuiving $(-3, 5)$.
Stel de formule op van y_3 en geef de top van de bijbehorende grafiek.
- c** De grafiek van y_2 ontstaat uit de grafiek van $y_1 = -3x^5 + 4$ bij de verschuiving $(2, -7)$. Verder geldt $y_3 = 6 \cdot y_2$.
Stel de formule op van y_3 en geef de coördinaten van het punt van symmetrie van de bijbehorende grafiek.

A39

- a** Op de grafiek van $y = -0,12x^2$ wordt eerst de verschuiving $(4, 5)$ toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor 4.
Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van de top.
- b** Op de grafiek van $y = 3(x - 4)^2 - 8$ wordt eerst de verschuiving $(-5, 2)$ toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor -4 .
Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van de top.
- c** De grafiek van $y = -1\frac{1}{2}(x + 3)^3 + 8$ wordt eerst herschaald in verticale richting met factor 2. Vervolgens wordt de verschuiving $(8, 20)$ toegepast.
Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van het punt van symmetrie.

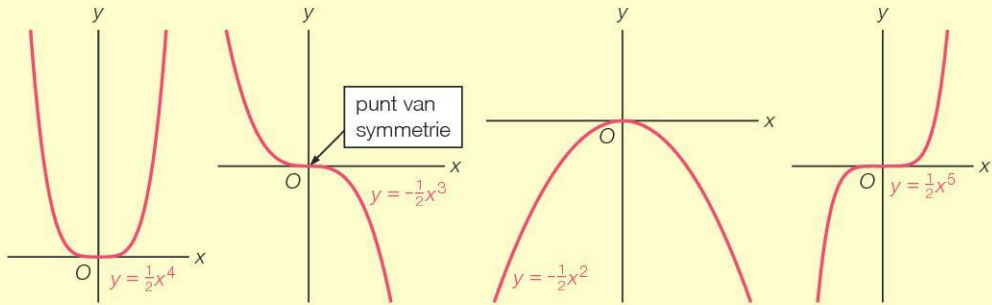
A40

- Gegeven zijn de formules $y_1 = 0,1x^3$, $y_2 = 4 \cdot y_1$ en $y_3 = \frac{1}{5} \cdot y_2$.
De grafiek van y_4 ontstaat uit de grafiek van y_3 door de verschuiving $(6, p)$.
De grafiek van y_4 gaat door de oorsprong.
Bereken p .

Terugblik

Machtsverbanden

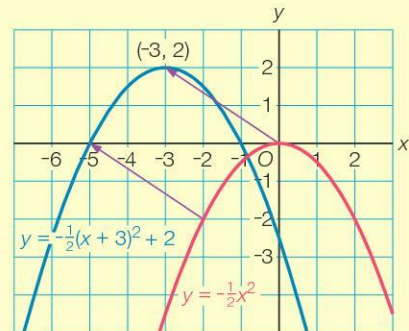
Een formule van de vorm $y = ax^n$ hoort bij een machtsverband. De bijbehorende grafieken zijn standaardgrafieken. Je mag standaardgrafieken zonder toelichting schetsen.



De verschuiving (p, q)

De verschuiving (p, q) is de verschuiving p naar rechts en q omhoog. Bij de verschuiving (p, q) heeft de grafiek van $y = ax^n$ als beeldgrafiek $y = a(x - p)^n + q$.

Zo ontstaat de grafiek van $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$ uit de parabool $y = -\frac{1}{2}x^2$ bij de verschuiving $(-3, 2)$. De top van de grafiek van $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$ is het punt $(-3, 2)$, dus het maximum is 2.



Herschaling in verticale richting

Bij herschaling in verticale richting met factor $\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van $y = 2x^2 - 3$ als beeldfiguur de grafiek van $y = \frac{1}{2}(2x^2 - 3)$, dus van $y = x^2 - 1\frac{1}{2}$.

Op de grafiek van $y = 0,12x^4$ wordt eerst de verschuiving $(5, -6)$ toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor 4.

Je krijgt $y = 0,12x^4$

↓ verschuiving $(5, -6)$

$$y = 0,12(x - 5)^4 - 6$$

↓ vert. herschaling factor 4

$$y = 4(0,12(x - 5)^4 - 6) = 0,48(x - 5)^4 - 24$$

De formule van de beeldgrafiek is $y = 0,48(x - 5)^4 - 24$.

Van de beeldgrafiek is de top $(5, -24)$.

5.3 Formules herleiden en variabelen vrijmaken

O41


- a** De formule $y = \sqrt{16x}$ is te schrijven in de vorm $y = a\sqrt{x}$.
 Welk getal is a ?
- b** De formule $y = \sqrt[3]{27x}$ is te schrijven in de vorm $y = b \cdot \sqrt[3]{x}$.
 Welk getal is b ?

Theorie A Wortelformules herleiden

Met de regel $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$ is de formule $y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{xy}$ te schrijven als $y = \sqrt{2xy}$.

Omgekeerd is de formule $y = \sqrt{9x}$ te schrijven als $y = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x}$ oftewel als $y = 3\sqrt{x}$. Je gebruikt dan dat $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.

Op dezelfde manier geldt de regel $\sqrt[n]{A \cdot B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$.

Voorbeeld

- a** Schrijf de formule $A = \sqrt[3]{-343xy}$ in de vorm $A = c \cdot \sqrt[3]{xy}$.
- b** Schrijf de formule $B = 2 \cdot \sqrt[4]{50p} + \sqrt[4]{60p}$ in de vorm $B = c \cdot \sqrt[4]{p}$.
 Rond c af op twee decimalen.

Uitwerking

a $A = \sqrt[3]{-343xy} = \sqrt[3]{-343} \cdot \sqrt[3]{xy} = -7 \cdot \sqrt[3]{xy}$

Dus $A = -7 \cdot \sqrt[3]{xy}$.

b $B = 2 \cdot \sqrt[4]{50p} + \sqrt[4]{60p}$

$B = 2 \cdot \sqrt[4]{50} \cdot \sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{60} \cdot \sqrt[4]{p}$

$B \approx 8,10 \cdot \sqrt[4]{p} \quad \leftarrow \dots\dots\dots 2 \cdot \sqrt[4]{50} + \sqrt[4]{60} \approx 8,10$

Dus $B = 8,10 \cdot \sqrt[4]{p}$.

R42


Zie het voorbeeld.

- a** In voorbeeld a is gebruikt dat $\sqrt[3]{-343} = -7$.
 Controleer dit door $\sqrt[3]{-343}$ met de rekenmachine te berekenen.
 Controleer dit ook door $(-7)^3$ te berekenen.
- b** In voorbeeld b is gebruikt dat $2 \cdot \sqrt[4]{50} + \sqrt[4]{60} \approx 8,10$.
 Bereken dit getal in drie decimalen.

43


Schrijf de formule in de vorm $A = c \cdot \sqrt[n]{xy}$.

a $A = \sqrt[3]{125xy}$

c $A = \sqrt[5]{-32xy}$

b $A = \sqrt[4]{256xy}$

d $A = 8\sqrt{25xy} - 3\sqrt{49xy}$

44 Herleid de formule tot de vorm $B = c \cdot \sqrt[5]{a}$. Rond c af op twee decimalen.



a $B = 6 \cdot \sqrt[5]{10a}$

b $B = \frac{\sqrt[5]{a}}{7}$

c $B = 2 \cdot \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{-20a}$

d $B = \frac{\sqrt[5]{50a}}{\sqrt[5]{2}}$

A45 **a** Herleid de formule $K = 2 \cdot \sqrt[3]{8pq} - \sqrt[3]{pq}$ tot de vorm $K = c \cdot \sqrt[3]{pq}$.



b Herleid de formule $F = 2 \cdot \sqrt[4]{9xy} - \sqrt[4]{3x} \cdot \sqrt[4]{6y}$ tot de vorm $F = c \cdot \sqrt[4]{xy}$.

Rond c af op twee decimalen.

c Herleid de formule $N = 4 \cdot \sqrt[5]{243t} + 2 \cdot \sqrt[5]{1024t}$ tot de vorm $N = c \cdot \sqrt[5]{t}$.

R46 Dit hoofdstuk heet Machtsverbanden.



Licht toe waarom het onderwerp ‘Wortelformules herleiden’ in dit hoofdstuk thuishoort.

A47 **a** Herleid de formule $y = (200x)^{\frac{1}{3}}$ tot de vorm $y = c \cdot \sqrt[3]{x}$. Rond c af op twee decimalen.



b Herleid de formule $A = 5 \cdot (81p)^{\frac{1}{4}} - (625p)^{\frac{1}{4}}$ tot de vorm $A = c \cdot \sqrt[4]{p}$.

A48 **a** Herleid de formule $N = 200 \cdot (0,6x)^{\frac{2}{5}}$ tot de vorm $N = c \cdot \sqrt[q]{x^p}$. Rond c af op gehele.



b Herleid de formule $K = 1250 \cdot \sqrt[4]{(1,5x^4y)^3}$ tot de vorm $K = cx^p y^q$. Rond c af op gehele.

O49 De formule $y = \sqrt{x-4}$ is te herleiden tot $x = y^2 + 4$.



Zoek uit hoe dat gaat.

Theorie B Variabelen vrijmaken bij wortelformules

Om bij de formule $y = \sqrt{x+2}$ de variabele x vrij te maken, verwissel je eerst het linkerlid en het rechterlid. Daarna kwadrateer je beide leden.

Je gebruikt dan de regel $\sqrt{A} = B$ geeft $A = B^2$.

Je krijgt

$$y = \sqrt{x+2}$$

$$\sqrt{x+2} = y$$

$$x+2 = y^2$$

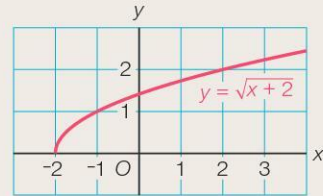
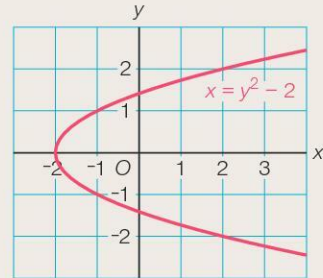
$$x = y^2 - 2$$

Wortelformules kwadrateren

Bij de formule $y = \sqrt{x+2}$ hoort de grafiek hiernaast. Na het vrijmaken van x is de formule $x = y^2 - 2$ ontstaan. Om de bijbehorende grafiek te tekenen, kun je de volgende tabel maken.

y	-2	-1	0	1	2
x	2	-1	-2	-1	2

Je krijgt de grafiek hiernaast. Je ziet dat dit niet dezelfde grafiek is als die van $y = \sqrt{x+2}$. Door het kwadrateren is de onderste helft van de grafiek van $x = y^2 - 2$ erbij gekomen. Eigenlijk zou je bij de formule $x = y^2 - 2$ moeten vermelden dat $y \geq 0$. Je hoeft bij het vrijmaken van variabelen bij wortelformules hier geen rekening mee te houden.



In voorbeeld b wordt de regel $\sqrt[n]{A} = B$ geeft $A = B^n$ gebruikt om bij een formule met een hogere machtswortel de variabele vrij te maken.

Voorbeeld

- a** Maak p vrij bij $Q = 5\sqrt{p-3}$.
b Maak x vrij bij de formule $y = 0,5 \cdot \sqrt[5]{x} + 6$.

Uitwerking

- a** $Q = 5\sqrt{p-3}$ p vrijmaken, dus linker- en rechterlid wisselen.
 $5\sqrt{p-3} = Q$ Deel beide leden door 5.
 $\sqrt{p-3} = \frac{1}{5}Q$ Gebruik de regel $\sqrt[n]{A} = B$ geeft $A = B^n$.
 $p-3 = \left(\frac{1}{5}Q\right)^2$ $\left(\frac{1}{5}Q\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot Q^2 = \frac{1}{25}Q^2$
 $p = \frac{1}{25}Q^2 + 3$
- b** $y = 0,5 \cdot \sqrt[5]{x} + 6$ x vrijmaken, dus linker- en rechterlid wisselen.
 $0,5 \cdot \sqrt[5]{x} + 6 = y$ Zet de term met x apart, dus 6 naar het rechterlid.
 $0,5 \cdot \sqrt[5]{x} = y - 6$ Vermenigvuldig beide leden met 2.
 $\sqrt[5]{x} = 2y - 12$ Gebruik de regel $\sqrt[n]{A} = B$ geeft $A = B^n$.
 $x = (2y - 12)^5$

Bij voorbeeld a zijn in de laatste stap de haakjes weggewerkt. Waarom is dit bij voorbeeld b niet gedaan?

51 Maak t vrij.



a $N = 4\sqrt{t-2}$

c $B = 0,2 \cdot \sqrt[3]{t-3}$

b $A = 0,4 \cdot \sqrt[3]{t+2}$

d $L = 2 \cdot \sqrt[4]{t-5}$

52 **a** Je kunt de formule $z = 6\sqrt{8 + \frac{1}{4}y}$ schrijven in de vorm $y = az^2 + b$.



Bereken a en b .

b Maak A vrij bij de formule $L = \frac{1}{6} \cdot \sqrt[3]{A} - 7$.

c Schrijf de formule $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt[5]{3x}$ in de vorm $x = ay^n$.

053 **a** De formule $y = 2,5x^{\frac{1}{3}}$ is te herleiden tot $x = 0,064y^3$.



Zoek uit hoe dat gaat.

b De formule $y = 125x^3$ is te herleiden tot $x = 0,2 \cdot \sqrt[3]{y}$.

Zoek uit hoe dat gaat.

Theorie C Variabelen vrijmaken bij machtsformules

Om bij de formule $y = 5(x-4)^3$ de variabele x vrij te maken, verwissel je eerst beide leden en deel je beide leden door 5. Je krijgt

$$y = 5(x-4)^3$$

$$5(x-4)^3 = y$$

$$(x-4)^3 = \frac{1}{5}y$$

Gebruik de regel $A^n = B$ geeft $A = \sqrt[n]{B}$.

$$x-4 = \sqrt[3]{\frac{1}{5}y}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{5}y} + 4$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{y} + 4$$

$$x \approx 0,58 \cdot \sqrt[3]{y} + 4$$

Dus de formule wordt $x = 0,58 \cdot \sqrt[3]{y} + 4$.

Om bij de formule $y = 10x^{0,8}$ de variabele x vrij te maken, verwissel je eerst beide leden en deel je beide leden door 10. Je krijgt

$$y = 10x^{0,8}$$

$$10x^{0,8} = y$$

$$x^{0,8} = 0,1y$$

Gebruik de regel $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$.

$$x = (0,1y)^{\frac{1}{0,8}}$$

$$x = 0,1^{\frac{1}{0,8}} \cdot y^{\frac{1}{0,8}}$$

$$x \approx 0,056y^{1,25}$$

Dus de formule wordt $x = 0,056y^{1,25}$.

Hierboven is de regel $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$ gebruikt.

Je kunt als volgt inzien dat deze regel juist is.

Omdat $A^p = B$ geeft $(A^p)^{\frac{1}{p}} = B^{\frac{1}{p}}$ is $A = B^{\frac{1}{p}}$.

Voorbeeld

- a** Maak t vrij bij $H = 9(t-2)^2$ met $t \geq 2$.
b Schrijf de formule $L = 16(3A)^{-1,3}$ in de vorm $A = bL^c$. Rond b en c af op twee decimalen.

Uitwerking

- a** $H = 9(t-2)^2$ t vrijmaken, dus linker- en rechterlid wisselen.
 $9(t-2)^2 = H$ Deel beide leden door 9.
 $(t-2)^2 = \frac{1}{9}H$ $t-2 = -\sqrt{\frac{1}{9}H}$ kan niet, want $t \geq 2$.
 $t-2 = \sqrt{\frac{1}{9}H}$ $\sqrt{\frac{1}{9}H} = \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{H} = \frac{1}{3}\sqrt{H}$
 $t-2 = \frac{1}{3}\sqrt{H}$ Breng 2 naar het rechterlid.
 $t = 2 + \frac{1}{3}\sqrt{H}$
- b** $L = 16(3A)^{-1,3}$ A vrijmaken, dus linker- en rechterlid wisselen.
 $16(3A)^{-1,3} = L$ Deel beide leden door 16.
 $(3A)^{-1,3} = \frac{1}{16}L$ Gebruik de regel $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$.
 $3A = \left(\frac{1}{16}L\right)^{-\frac{1}{1,3}}$ $\left(\frac{1}{16}L\right)^{-\frac{1}{1,3}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{1,3}} \cdot L^{-\frac{1}{1,3}}$
 $A = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{1,3}} \cdot L^{\frac{1}{1,3}}$
 $A \approx 2,81L^{-0,77}$
Dus $A = 2,81L^{-0,77}$.

54
☐ ⊗ *

- a** Maak t vrij bij $A = 8(t-2)^3$.
b Maak t vrij bij $P = 0,125(t+5)^3$.
c Herleid de formule $L = 5(t-3)^2$ met $t \geq 3$ tot de vorm $t = a + b\sqrt{L}$. Rond a en b zo nodig af op twee decimalen.

55
☐ ⊗ *

- Maak telkens x vrij. Schrijf je antwoord in de vorm $x = ay^b$. Rond a en b zo nodig af op twee decimalen.

a $y = 3x^{2,6}$ **b** $y = 0,2 \cdot 2x^{-1,4}$ **c** $y = 15(0,2x)^{1,6}$

56
☐ ⊗ *

- Gegeven zijn de formules $P = 5q^{0,12}$ en $R = 1,2q^{-0,18}$.
Uit de formule $R = 1,2q^{-0,18}$ volgt $q = 2,75R^{-5,56}$.
Toon dit aan en schrijf de formule van P in de vorm $P = aR^b$.
Rond af op twee decimalen.

A57
☐ ⊗ *

- a** Schrijf de formule $P = 2,5q^{3,6}$ in de vorm $q = aP^b$. Rond a en b af op twee decimalen.
b Gegeven zijn de formules $K = 4a^3$ en $O = 8a^2$.
Druk K uit in O en druk ook O uit in K . Rond zo nodig af op twee decimalen.

- a Bij de formule $y = \frac{10}{x-3}$ kun je x vrijmaken. Je krijgt $x = 3 + \frac{10}{y}$.
Zoek uit hoe dat gaat.
- b Bij de formule $y = \frac{x+1}{x-3}$ kun je x vrijmaken. Je krijgt $x = \frac{3y+1}{y-1}$.
Zoek uit hoe dat gaat.

Theorie D Variabelen vrijmaken bij gebroken formules

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = BC$ en uit $\frac{A}{C} = B$ volgt $A = BC$.

Dus de vergelijkingen $\frac{A}{B} = C$ en $\frac{A}{C} = B$ komen op hetzelfde neer,

oftewel de vergelijkingen $C = \frac{A}{B}$ en $B = \frac{A}{C}$ komen op hetzelfde neer.

Uit $C = \frac{A}{B}$ volgt $B = \frac{A}{C}$. Deze regel
heet de wisseleigenschap.



De regel dat je in de formule $C = \frac{A}{B}$ de variabelen C en B mag
verwisselen, gebruik je om variabelen vrij te maken bij gebroken
formules.

- Uit $K = \frac{18}{q-3}$ volgt $q-3 = \frac{18}{K}$, oftewel $q = 3 + \frac{18}{K}$.
- $K = 5 + \frac{18}{q}$ geeft $K-5 = \frac{18}{q}$, dus $q = \frac{18}{K-5}$.

Om q vrij te maken bij $K = \frac{2q-1}{q+3}$ heb je niets aan de wisseleigenschap.

Je gebruikt dat $\frac{A}{B} = C$ geeft $A = BC$. Verwissel daartoe eerst het linker-
en rechterlid.

$$K = \frac{2q-1}{q+3} \text{ geeft}$$

$$\frac{2q-1}{q+3} = K$$

$$2q-1 = K(q+3)$$

$$2q-1 = Kq+3K$$

$$2q-Kq = 3K+1$$

$$q(2-K) = 3K+1$$

$$q = \frac{3K+1}{2-K}$$

q vrijmaken, dus alle termen met q naar links.
Breng q buiten haakjes.

Voorbeeld

Maak L vrij.

$$\text{a } A = 8 + \frac{160}{L-1}$$

$$\text{b } K = \frac{L-1}{L+1}$$

Uitwerking

$$\text{a } A = 8 + \frac{160}{L-1}$$

$$A - 8 = \frac{160}{L-1}$$

$$L-1 = \frac{160}{A-8}$$

$$L = 1 + \frac{160}{A-8}$$

$$\text{b } K = \frac{L-1}{L+1}$$

$$\frac{L-1}{L+1} = K$$

$$L-1 = K(L+1)$$

$$L-1 = KL + K$$

$$L - KL = K + 1$$

$$L(1-K) = K+1$$

$$L = \frac{K+1}{1-K}$$

59 Maak q vrij.



$$\text{a } K = 5 + \frac{8}{q}$$

$$\text{d } P = 18 - \frac{5}{q-2}$$

$$\text{b } K = \frac{8}{q-1}$$

$$\text{e } P = \frac{7}{3q-2}$$

$$\text{c } K = \frac{q+3}{2q-1}$$

$$\text{f } A = \frac{q}{q+4}$$

A60



$$\text{a Druk } a \text{ uit in } T \text{ als gegeven is dat } T = \frac{a}{a-6}.$$

$$\text{b Maak } q \text{ vrij bij } L = 320 - \frac{18}{q-1}.$$

$$\text{c Druk } y \text{ uit in } x \text{ bij de formule } \frac{3x}{x+y} = 5 - x.$$

De formule $y = \frac{1}{x}$ hoort bij een machtsverband.

- a** Licht dit toe.
- b** De grafiek van $y = \frac{4}{x-3}$ ontstaat uit de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ door een verschuiving en een herschaling in verticale richting. Geef deze verschuiving en herschaling.
- c** De formule $y = \frac{x+1}{x-3}$ kan geschreven worden als $y = 1 + \frac{4}{x-3}$.
 Controleer dit door $1 + \frac{4}{x-3}$ als één breuk te schrijven.
- d** Hoe ontstaat de grafiek van $y = \frac{x+1}{x-3}$ uit de grafiek van $y = \frac{1}{x}$?
- e** Licht toe dat de formule $y = \frac{x+1}{x-3}$ te maken heeft met een machtsverband.

Terugblik

Wortelformules herleiden

Met de regels $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ en $\sqrt[n]{A \cdot B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$ zijn wortelformules te herleiden.

Bij het herleiden van $A = \sqrt{900x} - \sqrt{625x}$ krijg je
 $A = \sqrt{900} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{625} \cdot \sqrt{x} = 30\sqrt{x} - 25\sqrt{x} = 5\sqrt{x}$.

Bij het herleiden van $B = 10 \cdot \sqrt[3]{20p} - 5 \cdot \sqrt[3]{10p}$ krijg je

$$B = 10 \cdot \sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{p} - 5 \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{p} \approx 16,37 \cdot \sqrt[3]{p},$$

dus $B = 16,37 \cdot \sqrt[3]{p}$.

Variabelen vrijmaken bij wortelformules en machtsformules

Bij het vrijmaken van p uit de formule $D = \frac{1}{12}\sqrt{p+10}$ gebruik je de regel

$$\begin{aligned}\sqrt{A} = B \text{ geeft } A &= B^2. \text{ Je krijgt } \frac{1}{12}\sqrt{p+10} = D \\ \sqrt{p+10} &= 12D \\ p+10 &= (12D)^2 \\ p &= 144D^2 - 10.\end{aligned}$$

Hieronder zie je hoe je q vrijmaakt bij de formule $E = 2\frac{1}{4}(q-6)^2$ met $q \geq 6$.

$$\begin{aligned}2\frac{1}{4}(q-6)^2 &= E \\ (q-6)^2 &= \frac{4}{9}E \\ q-6 &= \sqrt{\frac{4}{9}E} \\ q &= \frac{2}{3}\sqrt{E} + 6\end{aligned}$$

Hiernaast zie je hoe je de formule $F = 25(2t)^{1,6}$ in de vorm $t = aF^b$ schrijft. Gebruik de regel $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$.

$$\begin{aligned}25(2t)^{1,6} &= F \\ (2t)^{1,6} &= 0,04F \\ 2t &= (0,04F)^{\frac{1}{1,6}} \\ t &= \frac{1}{2} \cdot 0,04^{\frac{1}{1,6}} \cdot F^{\frac{1}{1,6}} \\ t &\approx 0,067F^{0,625} \\ \text{Dus } t &= 0,067F^{0,625}.\end{aligned}$$

Variabelen vrijmaken bij gebroken formules

Hieronder zie je hoe je de variabele x vrijmaakt bij de formules

$G = \frac{2}{x-3} + 4$ en $H = \frac{2x}{x+3}$. Bij de formule van G gebruik je de

wisseleigenschap en bij de formule van H gebruik je dat

$\frac{A}{B} = C$ geeft $A = BC$. Verwissel bij de formule van H eerst beide leden.

$$\begin{aligned}G &= \frac{2}{x-3} + 4 & \frac{2x}{x+3} &= H \\ G-4 &= \frac{2}{x-3} & 2x &= H(x+3) \\ x-3 &= \frac{2}{G-4} & 2x &= Hx + 3H \\ x &= \frac{2}{G-4} + 3 & 2x - Hx &= 3H \\ & & x(2-H) &= 3H \\ & & x &= \frac{3H}{2-H}\end{aligned}$$

5.4 Formules met machten en wortels

062
☐ ⊗ *

- a Tussen x en y bestaat het verband $y = ax^3$. Voor $x = 2$ is $y = 48$. Bereken a .
- b Tussen x en y bestaat het verband $y = 10x^p$. Voor $x = 4$ is $y = 80$. Bereken p . Gebruik je GR.

Theorie A Formules opstellen bij machtsverbanden

Bij een formule van de vorm $y = ax^n$ heb je te maken met een machtsverband tussen x en y .

In opgave 62a heb je bij gegeven x en y de **coëfficiënt** a berekend in de formule $y = ax^3$.

Bij de formule $y = 5x^n$ is de exponent n te berekenen bij gegeven x en bijbehorende y . Voor $x = 2$ en $y = 80$ krijg je $5 \cdot 2^n = 80$. Oftewel $2^n = 16$ en dit geeft $n = 4$. Dus de formule is $y = 5x^4$.

Voorbeeld

- a Gegeven is de formule $y = ax^{1,73}$. Voor $x = 5$ is $y = 820$. Stel de formule op van y . Rond a af op één decimaal.
- b Gegeven is de formule $N = 20t^p$. Voor $t = 3$ is $N = 50$. Bereken p . Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} y = ax^{1,73} \\ x = 5 \text{ en } y = 820 \end{array} \right\} a \cdot 5^{1,73} = 820, \text{ dus } a = \frac{820}{5^{1,73}} \approx 50,7$$

Dus $y = 50,7x^{1,73}$.

$$\left. \begin{array}{l} N = 20t^p \\ t = 3 \text{ en } N = 50 \end{array} \right\} 20 \cdot 3^p = 50$$

Voer in $y_1 = 20 \cdot 3^x$ en $y_2 = 50$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,83$, dus $p \approx 0,83$.

63
☐

- a Gegeven is de formule $y = ax^{-1,81}$. Voor $x = 12$ is $y = 16$. Stel de formule op van y . Rond a af op gehele.
- b Gegeven is de formule $y = 180x^p$. Voor $x = 4$ is $y = 900$. Stel de formule op van y . Rond p af op twee decimalen.

A64
☐ ⊗

Voor $x = 8$ en $y = 600$ is gegeven de formule $y = ax^b$.

- a Neem $b = 2,15$ en bereken a . Rond af op twee decimalen.
- b Neem $a = 50$ en bereken b . Rond af op twee decimalen.

A65
☐⊗*

Gegeven is de formule $A = ap^{1,83}$. Voor $p = 18$ is $A = 350$.

- a Bereken A voor $p = 25$. Rond af op gehelen.
- b Schrijf de formule in de vorm $p = b \cdot A^c$. Rond b en c af op drie decimalen.

O66
☐⊗*

Planken is een fitnessoefening waarbij je voornamelijk je buikspieren traint. Manon doet de oefening regelmatig. Ze heeft bijgehouden hoelang ze de oefening kan volhouden. Zie de tabel.

poging n	5	10	15	20
tijd t in seconden	65	100	130	150



Je ziet dat ze het bij haar 20^e poging al twee en een halve minuut kan volhouden.

Manon heeft bij de tabel de formule $t = 25n^{0,6}$ gemaakt.

- a Onderzoek of deze formule past bij de tabel.
- b Manon beweert dat de tijd die ze de oefening kan volhouden met 50% toeneemt als het aantal pogingen verdubbelt. Onderzoek of dat klopt.

Theorie B Machtsformules gebruiken

In de praktijk komen allerlei machtsformules voor. Zo heeft Manon bij haar fitnessoefening te maken met de formule $t = 25n^{0,6}$. Hierin is t de tijd in seconden dat ze de n^{e} oefening kan volhouden.

Met deze formule is te berekenen met welk percentage de tijd toeneemt als n verdubbelt. Neem in de formule $2n$ voor n . Je krijgt $t = 25 \cdot (2n)^{0,6} = 25 \cdot 2^{0,6} \cdot n^{0,6} = 2^{0,6} \cdot 25n^{0,6} \approx 1,516 \cdot 25n^{0,6}$.

Dus de tijd dat ze de oefening kan volhouden neemt met ongeveer 52% toe als het aantal pogingen verdubbelt.

Om te berekenen hoeveel keer zo groot n wordt als t verdubbelt, druk je eerst n uit in t . Dus $25n^{0,6} = t$ geeft $n^{0,6} = 0,04t$ en hieruit volgt

$$n = (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}.$$

Neem in deze formule $2t$ voor t .

$$\text{Je krijgt } n = (0,04 \cdot 2t)^{\frac{1}{0,6}} = 2^{\frac{1}{0,6}} \cdot (0,04t)^{\frac{1}{0,6}} \approx 3,2 \cdot (0,04t)^{\frac{1}{0,6}}.$$

Dus voor een verdubbeling van de tijd dat ze de oefening kan volhouden, moet het aantal pogingen ongeveer 3,2 keer zo groot worden.

67



Zie de theorie.

- a Met hoeveel procent neemt de tijd t toe als Manon het aantal pogingen verdrievoudigt? Rond af op gehelen.
- b Met welke factor moet Manon het aantal pogingen groter maken om de tijd dat ze de oefening kan volhouden met 40% te laten toenemen? Rond af op twee decimalen.

68



- a Voor de remweg van een auto geldt de formule $r = 0,016v^{1,75}$. Hierin is r de remweg in meter bij een snelheid van v km/uur. Bereken hoeveel keer zo lang de remweg is als de snelheid verdubbelt. Rond af op één decimaal.
- b Bij het maken van een bepaald type vliegtuig geldt voor het aantal mensuren dat nodig is voor het produceren van één toestel de formule $M = 150\,000n^{-0,3}$. Hierin is M het aantal mensuren dat nodig is voor het produceren van het n^e toestel. Bereken met hoeveel procent M afneemt als het aantal geproduceerde toestellen verdubbelt.
- c Op de eilanden in het Caribisch gebied vonden biologen een verband tussen de oppervlakte van het eiland en het aantal soorten amfibieën en reptielen dat er voorkomt. Hierbij hoort de formule $N = 4,4A^{0,3}$ met N het aantal soorten op het eiland en A de oppervlakte van het eiland in km^2 .
Op eiland P komen 25% meer soorten voor dan op eiland Q.
Bereken hoeveel keer zo groot eiland P is als eiland Q.

69



Het benzineverbruik van een auto is gegeven door de formule $B = 0,001v^2 - 0,12v + 7,8$. Hierin is B het benzineverbruik in liter per 100 km bij een snelheid van v km/uur met $20 \leq v \leq 140$.

- a Mevrouw Koning wil zo zuinig mogelijk rijden. Welke snelheid moet zij aanhouden?
- b Meneer Keizer rijdt met een constante snelheid. Hij moet nog 60 km rijden. In de tank zit nog 3 liter benzine.
Met welke snelheid kan meneer Koning maximaal rijden als hij zonder te tanken op de plaats van bestemming wil aankomen?

70



Zie opgave 69 met de formule $B = 0,001v^2 - 0,12v + 7,8$. Hierin is B het benzineverbruik in liter per 100 km bij een snelheid van v km/uur. Meneer Admiraal rijdt om 21:00 uur met een snelheid van 120 km/uur over de snelweg. Met deze snelheid heeft hij genoeg benzine voor een afstand van 60 km, maar de eerstvolgende benzinepomp is 90 km verder. Hij wil de benzinepomp zo snel mogelijk bereiken. Hoe laat kan hij op zijn vroegst bij de benzinepomp zijn? Rond af op gehele minuten.

71



In deze opgave gaan we uit van een eiken plank met een dikte van 2,5 cm. Met de formule $d = 0,0005gl^4$ is te berekenen hoeveel zo'n plank doorbuigt als deze gelijkmatig belast wordt. In de formule is d de doorbuiging in mm, g het gewicht in kg per mm plank gerekend in de lengterichting en l de lengte van de plank in dm.

- a Op een plank met een lengte van 2 meter liggen 20 stenen van elk 4 kg. Hoeveel mm is de doorbuiging?
- b Op een plank met een lengte van 2,5 meter liggen zoveel stenen dat de doorbuiging 2,5 mm is. Hoeveel is het totale gewicht van de stenen?

Bij de vragen c, d en e is $g = 0,05$.

- c Met hoeveel procent neemt de doorbuiging van een plank toe als de plank 20% langer zou zijn?
- d Bereken de lengte van de plank die 2,2 mm doorbuigt. Rond af op gehele cm.
- e Schrijf de formule van $d = 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot l^4$ in de vorm $l = a \cdot \sqrt[n]{d}$. Rond a af op gehelen.

72



Om ongelukken te voorkomen, moet een automobilist voldoende afstand bewaren tot de auto die voor hem rijdt.

Men gebruikt hierbij een formule voor de *veilige afstand* A .

Deze formule is $A = 0,005v^2 + 0,28v$. Hierin is v de snelheid in km/uur en A de afstand in meter. In de praktijk zal echter geen enkele automobilist deze formule toepassen. Daarom heeft men de volgende vuistregel bedacht, de zogenaamde *tweesecondenregel*:

Om te bepalen of de afstand tot je voorligger voldoende groot is, kies je tijdens het rijden een herkenbaar punt langs de weg. Op het moment dat je voorligger dit punt passeert, tel je 2 seconden. Als je vervolgens binnen deze 2 seconden zelf voorbij dit punt rijdt, zit je te dicht op je voorligger en zul je meer afstand moeten nemen.



- a Hoeveel meter leg je af in twee seconden bij een snelheid van v km/uur?
- b Bereken bij welke snelheid de vuistregel dezelfde afstand geeft als de formule. Geef het antwoord in gehele km/uur.

Bij een snelheid van 120 km/uur zul je meer dan 2 seconden moeten tellen om de veilige afstand A te bereiken.

- c Onderzoek bij welk aantal seconden de veilige afstand wél wordt bereikt bij een snelheid van 120 km/uur. Rond af op één decimaal.

Het go-spel

Go is de oudste bekende denksport ter wereld. Al meer dan 3000 jaar geleden ontstond het spel in China. Het is een spel voor twee personen, dat gespeeld wordt op een bord met 19×19 lijnen. Om beurten leggen de spelers een steen op het snijpunt van twee lijnen. Het is de bedoeling dat je de stenen zo neerlegt, dat je een zo groot mogelijk deel van het

speelveld gaat beheersen. Stenen van je tegenstander die zijn ingesloten, haal je van het bord.

Het go-spel is pas in de loop van de 20^e eeuw in Europa bekend geworden. In 1959 werd de Nederlandse Go Bond opgericht.

Momenteel telt de Go Bond zo'n 600 leden.

- 73** Jaarlijks vinden in Nederland go-toernooien plaats. De rangschikking wordt berekend met de

formule $S = \frac{1000(w - \sqrt{w})}{g}$. Hierin is w het aantal

gewonnen partijen, g het aantal gespeelde partijen en S de score. De score S wordt afgerond op gehelen.

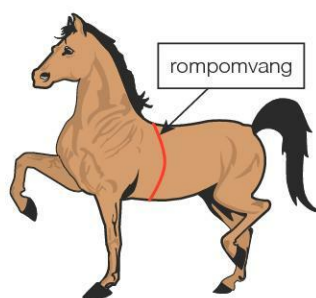
Tijdens een toernooi speelt elke deelnemer 16 partijen.

- Wat is de maximale score die een deelnemer kan halen?
- Eline heeft een score van 375.
Onderzoek hoeveel partijen zij gewonnen heeft.
- Nova heeft twee partijen meer gewonnen dan Finn. Daardoor is de score van Nova 101 meer dan die van Finn.
Onderzoek hoeveel partijen Nova heeft gewonnen.



- A74** Er zijn heel wat formules in omloop om uit de afmetingen van een paard een schatting van het gewicht te krijgen. Eén daarvan is de *formule van Marcenac en Aublet*. Deze formule is van de vorm $G = aR^3$, waarin G het gewicht in kg is en R de rompomvang in meter. Van een paard met een rompomvang van 2 meter en 3 cm is het gewicht 670 kg. Hieruit volgt dat a in gehelen nauwkeurig gelijk is aan 80.

- Bereken a . Rond af op één decimaal.
- Bereken in cm nauwkeurig de rompomvang van een paard dat 580 kg weegt.
- Van een paard is de rompomvang 1,2 keer zo groot als een ander paard. Hoeveel keer zo groot is het gewicht?
- Van een paard is het gewicht twee keer zo groot als van een ander paard. Hoeveel keer zo groot is de rompomvang? Rond af op twee decimalen.
- Schrijf de formule van $G = 80R^3$, in de vorm $R = bG^c$. Rond b af op drie decimalen.



figuur 5.6

Elanden leven in noordelijke streken, met name in Scandinavische landen, Siberië en Canada. Mannetjes kunnen ruim twee meter groot worden en tot 800 kg wegen. Vrouwtjeselanden zijn een stuk kleiner en hebben een gewicht tot 375 kg.

De hoeveelheid energie die een eland per dag nodig heeft voor de basislichaamsfuncties, is afhankelijk van het gewicht. De formule die hierbij hoort is $E_{\text{basis}} = 140W^{0,75}$ met W het gewicht in kg. Elanden zijn een groot gedeelte van de dag bezig met het zoeken naar voedsel. Ze eten voornamelijk scheuten en twijgen van bomen. Het bijeencharrelen van dit voedsel kost veel tijd en energie. Als er voldoende voedsel wordt gevonden, krijgt een eland meer energie binnen dan dat het zoeken ernaar kost. De formule die hoort bij de energie die zo per dag overblijft is $E_{\text{beschikbaar}} = 2200\sqrt{W} - 40W - 11\,500$. Deze energie moet dus minstens gelijk zijn aan E_{basis} om te overleven. In beide formules is E de energie in kcal.

- a** De grafieken van de gegeven formules hebben twee snijpunten. Bereken de coördinaten van de snijpunten en geef hiervan de praktische betekenis.

Bij het optimale gewicht van een eland is $E_{\text{beschikbaar}} - E_{\text{basis}}$ maximaal.

- b** Bereken het optimale gewicht van een eland. Geef het antwoord in gehele kg. Hoeveel energie per dag houdt de eland dan over voor andere activiteiten dan het zoeken naar voedsel?

Een elandjong is na de geboorte afhankelijk van moedermelk. Deze afhankelijkheid duurt totdat een gewicht is bereikt waarop het kalf zelfstandig voor zijn voedsel kan zorgen.

Een kalf dat op 1 juni werd geboren, weegt bij de geboorte 12 kg. De eerste maand verdubbelt het kalf in gewicht en daarna neemt het gewicht met 1 kg per dag toe.

- c** Onderzoek vanaf welke datum het kalf kan ophouden met drinken bij de moeder en zelfstandig voor zijn voedsel kan zorgen.



Winkels hebben van de artikelen die ze verkopen een bepaalde voorraad. Deze voorraad moet niet te groot zijn, want dan krijg je te maken met hoge voorraadkosten. Een winkel moet dus niet te grote bestellingen in één keer doen. Ook heeft de winkel te maken met de kosten die gemoeid zijn met het doen van een bestelling: de bestelkosten.

Met de *formule van Camp* is de optimale bestelhoeveelheid te berekenen voor winkels die te maken hebben met een constante vraag naar een bepaald artikel.

Deze formule is $Q = \sqrt{\frac{2Bn}{V}}$. Hierin is

- Q de optimale bestelhoeveelheid
- B de bestelkosten in euro's, ongeacht de grootte van de bestelling
- n het aantal verkochte artikelen per jaar
- V de voorraadkosten in euro's per stuk per jaar.

a Een winkel verkoopt per jaar 2400 vazen van een bepaald model.

De bestelkosten zijn 15 euro en de voorraadkosten per vaas per jaar zijn 5 cent.

Toon aan dat de winkel twee keer per jaar een bestelling zal plaatsen.

b Een andere winkel verkoopt per jaar 800 droogmolens.

Schrijf voor deze winkel de formule van Camp in de vorm $Q = c\sqrt{\frac{B}{V}}$.

c Voor een winkel zijn de bestelkosten voor het bestellen van strijkplanken 25 euro en zijn de voorraadkosten 80 cent per strijkplank per jaar.

De optimale bestelhoeveelheid is te schrijven in de vorm $Q = d\sqrt{n}$.

Bereken d . Rond af op één decimaal.

d De voorraadkosten V worden soms berekend met de formule

$V = 0,01p \cdot I$. Hierin is I de inkoopprijs per stuk van een artikel en is p een percentage. Dit percentage geeft aan hoeveel procent van de inkoopprijs aan voorraadkosten wordt uitgegeven. Bij een inkoopprijs van 60 euro per stuk en een percentage van 0,5% zijn de voorraadkosten dan $0,01 \cdot 0,5 \cdot 60 = 0,3$, dus 30 cent per stuk per jaar. Een winkel verkoopt per jaar 200 hogedrukreinigers van type A. De inkoopprijs van deze hogedrukreinigers is 160 euro per stuk en de bestelkosten per bestelling zijn 25 euro. Bij een optimale bestelhoeveelheid blijken vier bestellingen per jaar te horen. Bereken p .



A77
☐ ⊙ *

Met de bekende formule $B = \frac{m}{l^2}$ wordt de body-mass index (BMI) berekend. In deze formule is B de BMI, m het lichaamsgewicht in kg en l de lengte in meter.

Een andere maat die iets zegt over gezond gewicht is de body-shape index (BSI). De formule van BSI is $S = t \cdot B^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{-\frac{1}{2}}$. Hierin is S de BSI, t de taille-omvang in meter, B de BMI en l de lengte in meter.

- a** Bereken de BSI van een persoon met een taille-omvang van 90 cm, een BMI van 23 en een lengte van 180 cm. Rond af op drie decimalen.

Je kunt S uitdrukken in t , m en l . Deze formule is $S = t \cdot m^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{\frac{5}{6}}$.

- b** Leid deze formule af uit de formules van S en B .
- c** Schrijf de formule $S = t \cdot m^{-\frac{2}{3}} \cdot l^{\frac{5}{6}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.
- d** Voor personen met een taille-omvang van 95 cm en een lengte van 175 cm is de formule van S te schrijven in de vorm $m = aS^b$. Leid deze formule af. Rond a af op twee decimalen.

E78
*

Bij breedbeeldschermen is de verhouding tussen de lange en de korte zijde 16 : 9.

Er geldt $A = \frac{9}{16}x^2$ en $d^2 = \frac{337}{256}x^2$. Hierin is x de lange zijde van zo'n scherm in cm, A de oppervlakte van het scherm in cm^2 en d de lengte van de diagonaal van het scherm in cm.

- a** Toon de juistheid van de formules van A en d^2 aan en toon aan dat uit deze formules volgt dat $A = \frac{144}{337}d^2$.



Superbreedbeeldschermen hebben een verhouding 7 : 3. Ook voor deze schermen is een formule op te stellen van de vorm $A = a \cdot d^2$.

- b** Bereken a .

Terugblik

Formules opstellen bij machtsverbanden

Bij de machtsformule $B = at^{2,52}$ is de coëfficiënt a te berekenen als gegeven is dat bij $t = 3,1$ hoort $B = 5,3$.

Je krijgt $a \cdot 3,1^{2,52} = 5,3$ en dit geeft $a \approx 0,31$.

Dus de formule is $B = 0,31t^{2,52}$.

Bij de formule $N = 4,7q^p$ is de exponent p te berekenen als gegeven is dat bij $q = 3$ hoort $N = 870$.

Je krijgt $4,7 \cdot 3^p = 870$.

Voer in $y_1 = 4,7 \cdot 3^x$ en $y_2 = 870$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 4,75$, dus $p \approx 4,75$.

Dus de formule is $N = 4,7q^{4,75}$.

Je kunt je afvragen met hoeveel procent N toeneemt als q met 10% toeneemt.

Invullen van $1,1q$ in de formule geeft

$$N = 4,7(1,1q)^{4,75} = 4,7 \cdot 1,1^{4,75} \cdot q^{4,75} = 1,1^{4,75} \cdot 4,7q^{4,75} \approx 1,573 \cdot 4,7q^{4,75}.$$

Dus de toename van N is ongeveer 57%.

Machtsformules gebruiken

De body-mass index (BMI) wordt berekend met de formule $B = \frac{m}{l^2}$.

Hierin is B de BMI, m het lichaamsgewicht in kg en l de lengte in meter. Ook wordt wel eens de formule $B_T = 1,3m \cdot l^{-2,5}$ gebruikt. Hierin is B_T de BMI volgens professor Trefethen.

Je kunt in beide formules de variabele m vrijmaken.

$$B = \frac{m}{l^2} \text{ geeft } m = B \cdot l^2$$

$$B_T = 1,3m \cdot l^{-2,5} \text{ geeft } 1,3m \cdot l^{-2,5} = B_T$$

$$m \cdot l^{-2,5} = \frac{1}{1,3} B_T$$

$$m = \frac{\frac{1}{1,3} B_T}{l^{-2,5}}$$

$$m = \frac{1}{1,3} B_T \cdot l^{2,5}$$

Je kunt ook B_T uitdrukken in B en l . Vul daartoe $m = Bl^2$ in bij de formule van B_T .

$$\text{Je krijgt } B_T = 1,3 \cdot Bl^2 \cdot l^{-2,5} = 1,3Bl^{-0,5}, \text{ oftewel } B_T = \frac{1,3B}{\sqrt{l}}.$$

Eindopdracht Van Whistler Mountain naar Whistler

In de beginopdracht van dit hoofdstuk heb je formules opgesteld die horen bij de kabelbaan van Whistler naar Whistler Mountain.

In de figuur hiernaast zie je nog eens de grafiek waarin de hoogte van een cabine ten opzichte van Whistler is uitgezet tegen de tijd die de cabine erover doet om naar boven te gaan.

Je ging er in eerste instantie van uit dat elk van de vier delen te beschrijven is door een tweedegraadsformule.

Je kreeg

I $h = -31,25(t - 4)^2 + 500$

II $h = 62,5(t - 4)^2 + 500$

III $h = -62,5(t - 8)^2 + 1000$

IV $h = 62,5(t - 8)^2 + 1000$

Eén van de volgende cabines vertrekt precies één minuut na de cabine waarvan de grafiek in de figuur is getekend.

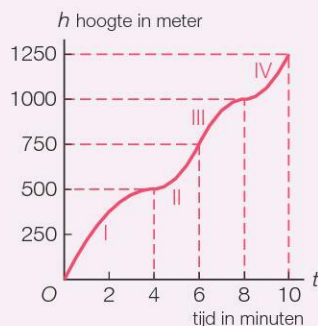
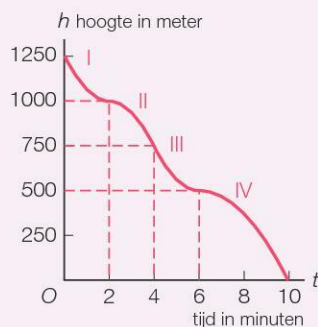
- Geef de vier formules die bij deze cabine horen.

Je hebt in de beginopdracht ook gezien dat je de delen II en III kunt beschrijven door de derdegraadsformule $h = -15,625(t - 6)^3 + 187,5(t - 6) + 750$.

- Geef de derdegraadsformule van de delen II en III die bij de cabine hoort die precies één minuut vertrekt na de cabine die bij de gegeven grafiek hoort.

In de grafiek hiernaast is de hoogte van een cabine die van Whistler Mountain naar Whistler gaat, uitgezet tegen de tijd. Er zijn weer vier delen getekend, die zijn aangegeven met I, II, III en IV.

- Stel bij deze vier delen een formule op waarbij je ervan uitgaat dat je te maken hebt met vier gedeelten van parabolen.
- Stel bij de delen II en III één derdegraadsformule op. Ga te werk zoals dat in de beginopdracht is gedaan.



Diagnostische toets

5.1 Rekenen met machten

1 Herleid de volgende formules.

a $A = \frac{18a^5}{6a^2} - \frac{(5a^2b)^2}{5ab^2}$

b $B = (3x^2)^3 - 2x \cdot 4x^5 + 3x^2 \cdot 5x^3$

c $C = (2p^2q)^3 - 5pq \cdot 2p^2q^4 + 3p^3 \cdot (pq)^3 - \frac{8p^5q^6}{2p^2q}$

2 Schrijf als macht van a .

a $\frac{1}{a^3}$

b $a^4 \cdot \frac{1}{a^7}$

c $\frac{\left(\frac{1}{a^{12}}\right)}{a^{-5}}$

3 Schrijf zonder negatieve exponent.

a $3a^2b^{-3}$

b $\left(\frac{1}{2}a\right)^{-5}$

c $\frac{2}{7}a^{-1}b^4$

4 Schrijf zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

a $4a^{-1\frac{1}{2}}$

b $a^{-2}b^{\frac{1}{5}}$

c $7a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{5}}$

5 Schrijf als macht van x .

a $x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

b $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

c $\frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{x^3}$

6 Schrijf in de vorm $y = ax^p$.

a $y = 7 \cdot \sqrt[5]{x^2}$

b $y = 6x^{-0,4} \cdot x^{1,2}$

c $y = \frac{10}{2x^3 \cdot \sqrt{x}}$

5.2 Grafieken veranderen

7 Op de grafiek van $y = 4(x-2)^3 + 1$ wordt de verschuiving $(-1, -5)$ toegepast.

Stel de formule op van de beeldgrafiek.

8 Schets van de volgende formules de grafiek en vermeld in je schets de coördinaten van de top of het punt van symmetrie.

a $N = 2(t-4)^3 + 5$

b $K = -3(q+1)^2 + 2$

c $S = 4(t-2)^4 + 1$

9 De grafiek van $y = 1\frac{1}{2}(x-2)^4 - 5$ wordt eerst herschaald in verticale richting met factor 4. Vervolgens wordt de verschuiving $(-3, -16)$ toegepast.

Stel de formule op van de beeldgrafiek en vermeld de coördinaten van de top.

5.3 Formules herleiden en variabelen vrijmaken

- 10** a Herleid de formule $A = \sqrt[3]{100b} - 4 \cdot \sqrt[3]{b}$ tot de vorm $A = c \cdot \sqrt[3]{b}$. Rond c af op twee decimalen.
b Herleid de formule $B = 3 \cdot \sqrt[4]{16pq} - \sqrt[4]{3p} \cdot \sqrt[4]{27q}$ tot de vorm $B = c \cdot \sqrt[4]{pq}$.
- 11** a Je kunt de formule $F = 0,125\sqrt{p-5}$ schrijven in de vorm $p = aF^2 + b$. Bereken a en b .
b Herleid de formule $S = 0,4(R-7)^2$ met $R \geq 7$ tot de vorm $R = a + b\sqrt{S}$. Rond b af op twee decimalen.
c Schrijf de formule $y = 2(0,3x)^{1,25}$ in de vorm $x = ay^b$. Rond a af op twee decimalen.
- 12** a Maak p vrij bij de formule $F = 4 + \frac{3}{p-5}$.
b Gegeven is de formule $G = \frac{3q-1}{4q+5}$.
Druk q uit in G .

5.4 Formules met machten en wortels

- 13** De tijd t in minuten die een persoon nodig heeft om n nieuwe symbolen te leren, voldoet volgens een regel uit de psychologie aan de formule $t = an^{0,75}$.
Monique is in staat tien symbolen te leren in twee minuten. Hieruit volgt dat $a \approx 0,36$.
a Bereken a in drie decimalen.
b Met hoeveel procent neemt de tijd toe als het aantal te leren symbolen verdubbelt?
c Hoeveel keer zo groot wordt het aantal geleerde symbolen als de beschikbare tijd om ze te leren met 50% toeneemt? Rond af op twee decimalen.
- 14** Van Rutger is jarenlang zijn gewicht G in kg en zijn lengte l in meters bijgehouden. Dit leverde het verband $G = 13,4l^3$ op.
a Hoeveel woog Rutger toen hij 173 cm lang was?
b Hoe lang was Rutger op 12-jarige leeftijd toen hij 32 kg woog?
c Schrijf de formule van G in de vorm $l = a \cdot \sqrt[n]{G}$. Rond a af op twee decimalen.



6

Kansrekening

Wat leer je?

- Wat de kansdefinitie van Laplace inhoudt.
- Het verschil tussen empirische kansen en theoretische kansen.
- Wat voorwaardelijke kansen en onafhankelijke gebeurtenissen zijn.
- Het vaasmodel gebruiken bij het berekenen van kansen.
- Hoe je kansen berekent met behulp van de productregel, de somregel en de complementregel.
- Het verschil tussen pakken met en zonder terugleggen.



Beginopdracht Kansen in de rechtspraak

Een geruchtmakende rechtszaak waarin statistiek en kansrekening een grote rol speelden, was die tegen de verpleegkundige Lucia de Berk. Zij werd in 2003 veroordeeld, omdat zij meerdere moorden zou hebben gepleegd tijdens haar diensten in het ziekenhuis. Na lang in de gevangenis te hebben gezeten, werd zij in 2010 alsnog vrijgesproken. Het unieke aan deze zaak is het feit dat Lucia de Berk niet werd vrijgesproken omdat zij de dader niet was, maar omdat er überhaupt geen moorden bleken te zijn gepleegd. Bij haar veroordeling werden fouten gemaakt in het verzamelen van gegevens, het interpreteren van die gegevens en de berekeningen die op grond hiervan werden gemaakt. Hieronder ga je een situatie doorrekenen die lijkt op die van Lucia de Berk.

Omdat men zich zorgen maakt over het aantal sterfgevallen onder de patiënten van verpleegkundige Florence, worden gegevens verzameld van overlijdensgevallen onder 793 patiënten van het ziekenhuis. Het blijkt dat 8 van de 121 patiënten die door Florence verpleegd werden, zijn overleden. Van de overige 672 patiënten zijn er 25 overleden.

- De kans op overlijden van patiënten die verpleegd zijn door Florence is groter dan de kans op overlijden van de overige patiënten.
Laat dit met een berekening zien.

Er kan onderscheid gemaakt worden tussen patiënten met een hoog risico en patiënten met een laag risico op overlijden.

Van de 121 patiënten van Florence waren er 72 met een hoog risico. Van de 8 sterfgevallen bij Florence vielen er 7 in de groep met een hoog risico. Onder de overige 672 patiënten waren er 63 met een hoog risico. Van de 25 sterfgevallen in deze groep kwamen er 8 uit de groep met een hoog risico.

- Voor de patiënten met een hoog risico geldt het volgende. De kans op overlijden van patiënten die verpleegd zijn door Florence is kleiner dan de kans op overlijden van de overige patiënten.
Laat dit met een berekening zien.

Op grond van de voorgaande berekeningen zou je kunnen denken dat de verhoogde kans op overlijden van een patiënt verpleegd door Florence veroorzaakt wordt door de patiënten met een laag risico. Dit blijkt echter niet het geval.

- Voor de patiënten met een laag risico geldt het volgende. De kans op overlijden van patiënten die verpleegd zijn door Florence is kleiner dan de kans op overlijden van de overige patiënten.
Laat dit met een berekening zien.

Je hebt hier te maken met een paradox.

- Beschrijf de paradox en licht toe hoe deze kan ontstaan.

Een paradox is een schijnbare tegenstelling. De paradox in deze opdracht is een voorbeeld van Simpsons paradox.

Voorkennis Combinatoriek

Theorie A Permutaties, combinaties en herhalingen

Een permutatie is een rangschikking. Dat betekent dat de volgorde van belang is en dat herhalingen niet zijn toegestaan.

Kies je uit de zes letters A, B, C, D, E en F twee letters waarbij de volgorde van belang is en herhalingen niet zijn toegestaan, dan heb je te maken met een permutatie van 2 uit 6.

Het aantal permutaties van 2 uit 6 is gelijk aan $6 \cdot 5$.

Het aantal permutaties van 6 dingen is gelijk aan $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Dit wordt genoteerd als $6!$

De GR heeft opties waarmee je faculteiten en aantallen permutaties kunt berekenen.

- Op de TI krijg je ! en nPr in het math-KANS-menu of via de functietoets f2.
- Op de Casio krijg je ! en nPr in het OPTN-PROB-menu.
- Op de HP krijg je Factorieel en Permutatie in het werksetmenu (Mem ). Wisk. Kies vervolgens Kans.

Ook bij aantallen combinaties zijn herhalingen niet toegestaan, maar, in tegenstelling tot permutaties, is bij combinaties de volgorde niet van belang.

Dus bij de keuze van twee letters uit de zes letters A, B, C, D, E en F is de combinatie AB hetzelfde als BA.

Het aantal combinaties van 2 uit 6 wordt genoteerd als $\binom{6}{2}$.

Op de GR vind je de optie voor combinaties in hetzelfde menu als de optie voor permutaties.

Op de TI en Casio worden combinaties weergegeven met nCr.

Je krijgt $\binom{6}{2} = 15$.

Kies je twee letters uit de zes letters A, B, C, D, E en F waarbij herhalingen wel zijn toegestaan, dan zijn er $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$ mogelijkheden.

Maakt een bedrijf met de letters A, B, C, D, E en F codes van 2 of 3 letters, dan gebruik je de somregel voor de berekening van het aantal codes.

Merk op dat bij een code de volgorde van belang is, immers de code AB is een andere code dan de code BA.

We onderscheiden de volgende situaties.

- Herhalingen zijn toegestaan.
Het aantal codes is $6^2 + 6^3 = 252$.
- Herhalingen zijn niet toegestaan.
Het aantal codes is $6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 = 150$.

- 1** Een bedrijf maakt bij het coderen van zijn artikelen gebruik van de letters A, B, C, D en E.

Hoeveel codes zijn er

- a** van 3 letters als herhalingen zijn toegestaan
- b** van 4 letters als herhalingen niet zijn toegestaan
- c** van 2, 3 of 4 letters als herhalingen zijn toegestaan
- d** van hoogstens 3 letters als herhalingen niet zijn toegestaan?

- 2** Amber gooit met zeven dobbelstenen.

Hoeveel mogelijkheden zijn er om

- a** twee zessen en vijf enen te gooien
- b** geen enkele zes te gooien
- c** in totaal 41 ogen te gooien
- d** in totaal 40 ogen te gooien
- e** in totaal hoogstens 9 ogen te gooien?

- 3** Daan gooit met twee dobbelstenen.

Hoeveel mogelijkheden zijn er

- a** om in totaal minstens 9 ogen te gooien
- b** om met elke dobbelsteen evenveel ogen te gooien
- c** waarbij het product van de ogen hoogstens 6 is
- d** waarbij de som van de ogen even is?

6.1 Kansen



01 De familie Aalbers speelt een spel met twee dobbelstenen. Sonja is aan de beurt. Ze wil graag minstens 10 ogen gooien, want dan heeft ze gewonnen. Gooit ze echter 8 ogen, dan moet ze 15 plaatsen terug. Welke gebeurtenis heeft de grootste kans? Waarom?



Theorie A Kansdefinitie van Laplace

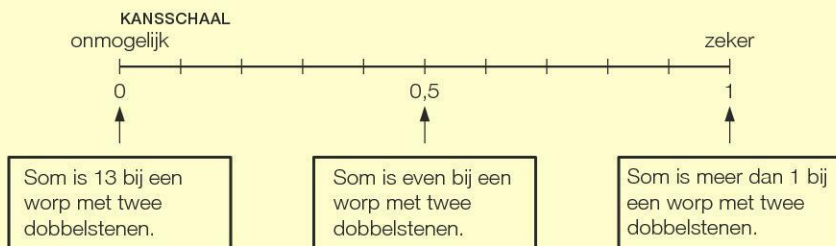
Martijn gooit met een rode en een groene dobbelsteen. In het rooster hiernaast zijn alle mogelijke uitkomsten terug te vinden. Eén van de uitkomsten is  .

Je ziet dat er in totaal $6 \cdot 6 = 36$ uitkomsten mogelijk zijn. Bij de gebeurtenis ‘som is 5’ horen vier uitkomsten. Bij de gebeurtenis ‘som is 10’ horen drie uitkomsten. De kans op ‘som is 10’ is dus kleiner dan de kans op ‘som is 5’.

In het dagelijks leven worden kansen vaak weergegeven met een percentage, bijvoorbeeld 60%. In de kansrekening noteert men meestal deze kans als 0,6 of $\frac{3}{5}$. Kansen zijn altijd minstens 0 en hoogstens 1.

	SOM					
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

figuur 6.1



figuur 6.2

De kans om bij het gooien met twee dobbelstenen ‘som is 5’ te gooien, bereken je als volgt.

In totaal zijn er 36 uitkomsten mogelijk. Van deze 36 uitkomsten zijn er

4 gunstig. De kans op ‘som is 5’ is gelijk aan $\frac{4}{36}$.

Notatie: $P(\text{som is } 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Om de kans op een gebeurtenis te berekenen, deel je het aantal **gunstige uitkomsten** door het aantal mogelijke uitkomsten.

Je gebruikt dan de **kansdefinitie van Laplace**.

De letter P komt van ‘probabilitas’, het Latijnse woord voor kans.

De kansdefinitie van Laplace

Bij een kansexperiment met uitkomsten die alle even waarschijnlijk zijn, is de kans op een gebeurtenis G gelijk aan

$$P(G) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}.$$

Bij opgaven met een dobbelsteen gaan we ervan uit dat alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn, dus dat de dobbelsteen eerlijk is.

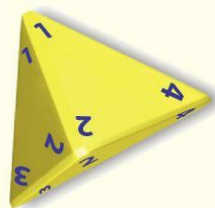
Om de kansdefinitie van Laplace toe te passen, is het belangrijk een goed overzicht te hebben van alle mogelijke uitkomsten. Het maken van een rooster kan daarbij van pas komen.

Voorbeeld

Fien gooit met een gewone dobbelsteen en met een viervlaksdobbelsteen. Met een viervlaksdobbelsteen kun je 1, 2, 3 of 4 gooien.

Bereken de kans dat

- a ze met beide stenen evenveel gooit
- b de som minstens 8 is
- c het product hoogstens 4 is.



Aanpak

Maak een 4×6 -rooster met alle mogelijke uitkomsten. Geef de gunstige uitkomsten aan.

Uitwerking

- a $P(\text{beide evenveel}) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
- b $P(\text{som minstens } 8) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
- c $P(\text{product hoogstens } 4) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

4	c			a b	b	b
3	c		a		b	b
2	c	a	c			b
1	a	c	c	c		
	c	c	c	c		
	1	2	3	4	5	6

- a beide evenveel
- b som minstens 8
- c product hoogstens 4



R2

Harm laat de schijf van figuur 6.3 ronddraaien. Nadat de schijf is uitgedraaid, wijst de pijl één sector aan.

Harm zegt: 'Er zijn vijf uitkomsten mogelijk, dus de kans dat de pijl 3 aanwijst, is $\frac{1}{5}$.'

- a Wat is er mis met de redenering van Harm?
- b Geef de kans dat de pijl 3 aanwijst.



figuur 6.3

- 3** Dorien gooit met twee dobbelstenen, een rode en een groene.
 Bereken de kans dat
- a de som van de ogen meer dan 10 is
 - b de som van de ogen even is
 - c Dorien met beide dobbelstenen hetzelfde aantal ogen gooit
 - d het aantal ogen met de rode dobbelsteen hoger is dan met de groene
 - e het verschil van de ogen 2 is.

- 4** Bas gooit met twee dobbelstenen.
 Bereken de kans op de gebeurtenis
- a het verschil van de aantallen ogen is minder dan 2
 - b het product van de ogen is 12
 - c het product van de ogen is minder dan 30.

- 5** Floor gooit met een achthoeksdobbelsteen en met een viervlaksdobbelsteen. Op de zijvlakken van de achthoeksdobbelsteen staan de cijfers 1 tot en met 8. Bereken de kans op de gebeurtenis
- a de aantallen zijn gelijk
 - b de som is 8
 - c het product is minstens 16
 - d het verschil is 1.



- E6** Arjan, Bo en Caro hebben schaatstraining. Tijdens deze training rijden ze rondjes van 400 meter, in totaal elk 10 kilometer. Ze doen steeds 45 seconden over een rondje. Ze schaatsen samen, maar Bo begint een ronde later dan Arjan, en Caro begint 3 ronden later dan Bo. Bereken de kans dat ze tijdens deze training op een willekeurig moment alle drie aan het schaatsen zijn.

GESCHIEDENIS

Pierre-Simon de Laplace

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) werd geboren in een klein dorpje in Normandië, waar zijn vader herenboer was. Tijdens zijn studie theologie raakte hij geïnteresseerd in de wiskunde. Vanaf 1789 hield hij zich voornamelijk bezig met de mechanica en de kansrekening. Zijn in 1812 verschenen monumentale werk 'Théorie analytique des probabilités' is een inleiding in de waarschijnlijkheidstheorie.

Hierin wees hij erop dat voor het toepassen van zijn definitie

kans = $\frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$ uitgegaan moet worden van

even waarschijnlijke uitkomsten, zoals bij de zes uitkomsten van een dobbelsteen.



Anouk gooit met drie dobbelstenen, een gele, een rode en een blauwe.

- Hoeveel mogelijkheden zijn er om met de drie dobbelstenen hetzelfde aantal ogen te gooien?
- Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er in totaal mogelijk?
- Bereken de kans om met de drie dobbelstenen hetzelfde aantal ogen te gooien.

Theorie B Samengestelde kansexperimenten

Het gooien met een dobbelsteen is een voorbeeld van een **kansexperiment**. Kenmerkend voor een kansexperiment is dat de uitkomst niet van tevoren vastligt.

Voorbeelden van **samengestelde kansexperimenten** zijn

- het gooien met een dobbelsteen en een geldstuk
- het gooien met twee dobbelstenen
- het gooien met drie geldstukken
- het meedoen met drie loten in een loterij.

Bij het gooien met drie dobbelstenen bereken je $P(\text{som} = 17)$ als volgt:

- het aantal mogelijke uitkomsten is $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- het aantal gunstige uitkomsten is drie, namelijk 665, 656 en 566
- $P(\text{som} = 17) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

Met $P(\text{som} = 17) = \frac{1}{72}$ is de kans **exact** berekend. Bij een exact antwoord rond je niet af.

Het aantal gunstige uitkomsten bij een samengesteld kansexperiment met dobbelstenen of geldstukken vind je bij

- twee kansexperimenten met een rooster
- drie of meer experimenten met systematisch noteren en/of handig tellen.

Voorbeeld

Bereken exact de kans dat je bij het gooien met vijf geldstukken drie of vier keer kop gooit.

Uitwerking

Het aantal mogelijke uitkomsten is $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$.

Gunstige uitkomsten zijn kkkmm $\binom{5}{3} = 10$ keer
 kkkkm $\binom{5}{4} = 5$ keer

Er zijn $10 + 5 = 15$ gunstige uitkomsten.

$$P(\text{drie of vier keer kop}) = \frac{15}{32}$$

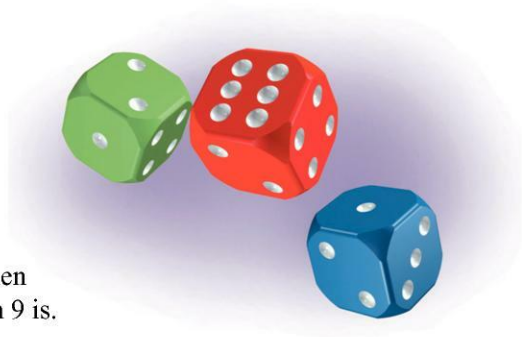
- R8** In opgave 7 hadden de dobbelstenen drie verschillende kleuren, maar in de theorie daarna werd er niets vermeld over de kleuren van de dobbelstenen.
Zou de uitkomst van 7c anders zijn geweest als de drie dobbelstenen dezelfde kleur hadden gehad?

- 9** Justin gooit met vier geldstukken.
Bereken exact de kans dat hij
- a vier keer hetzelfde gooit
 - b één keer kop gooit
 - c meer dan één keer munt gooit.

- 10** Mark gooit met drie dobbelstenen.
Bereken exact de kans dat
- a de som van de ogen 5 is
 - b de som van de ogen minder dan 7 is
 - c hij met minstens één van de dobbelstenen 3 ogen gooit en dat de som van de ogen 9 is.

- A11** Bereken exact de kans dat je met zes geldstukken
- a vijf keer kop gooit
 - b drie keer munt gooit
 - c minder dan drie keer kop gooit.

- A12** In een doos zitten 15 briefjes die genummerd zijn van 1 tot en met 15.
Isa pakt drie briefjes uit de doos.
Bereken exact de kans dat de som van de getallen op deze drie briefjes gelijk is aan 15.



Terugblik

Kansen berekenen

Volgens de kansdefinitie van Laplace is

$$P(\text{gebeurtenis}) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}.$$

Je mag deze regel alleen gebruiken als alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.

Bij een verkeerslicht zijn de uitkomsten rood, oranje en groen niet even waarschijnlijk, want het verkeerslicht staat korter op oranje dan op rood en groen. Dus $P(\text{oranje})$ is niet gelijk aan $\frac{1}{3}$.

Bij het gooien met een dobbelsteen is elk van de zes uitkomsten even waarschijnlijk. Bij de gebeurtenis 'meer dan 4 ogen' zijn de uitkomsten

$$5 \text{ en } 6 \text{ ogen gunstig. Dus } P(\text{meer dan 4 ogen}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Hiermee is de kans exact berekend. Bij een exact antwoord mag je niet benaderen.

Een rooster maken bij twee experimenten

Bij het gooien met twee dobbelstenen, het gooien met twee geldstukken en het draaien van twee kanstolletjes krijg je een overzicht van alle mogelijke uitkomsten door een rooster te maken.

In het rooster hiernaast is af te lezen dat bij het gooien met

$$\text{twee viervlaksdobbelstenen } P(\text{som minstens } 5) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

4	*	*	*	*
3		*	*	*
2			*	*
1				*
	1	2	3	4

* som minstens 5

Samengestelde kansexperimenten bestaande uit meer dan twee experimenten

Heb je met meer dan twee experimenten te maken, dan bereken je kansen als volgt.

- Bereken het aantal mogelijke uitkomsten.
- Tel het aantal gunstige uitkomsten door deze systematisch te noteren en/of handig te tellen.
- Deel het aantal gunstige door het aantal mogelijke uitkomsten.

Zo krijg je bij een worp met drie dobbelstenen en de gebeurtenis 'som van de ogen is 15':

- het aantal mogelijke uitkomsten is $6^3 = 216$
- het aantal gunstige uitkomsten is 10, namelijk

663 3 keer
654 $3! = 6$ keer
555 1 keer

$$P(\text{som} = 15) = \frac{3 + 6 + 1}{216} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

663, 636, 366
654, 645, 564, 546, 456, 465
555

6.2 Empirische kansen

013




Marieke gooit met een dobbelsteen. Ze vraagt zich af of de dobbelsteen eerlijk is. Daarom gooit zij 300 keer met de dobbelsteen en telt het aantal keren zes ogen. Ze gooit 30 keer een zes.

- Wat is op basis van dit experiment de kans om zes ogen te gooien?
- Wat denk je, is deze dobbelsteen eerlijk? Licht toe.

014




Margo gooit eerst 50 keer met een punaise, dan 100 keer, dan 150 keer, enzovoort. Bij elke serie telt ze hoe vaak de punt van de punaise omhoog ligt. Zie de tabel.



PUNT VAN DE PUNAISE OMHOOG

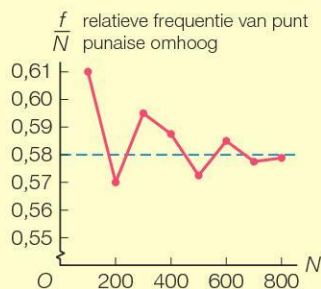
aantal keer gooien N	50	100	150	200	250	300	500	1000
frequentie f	31	61	89	114	141	174	282	579
relatieve frequentie $\frac{f}{N}$	0,62							

- Vul de tabel in. Rond af op twee decimalen.
- Geef een schatting van $P(\text{punt van punaise ligt omhoog})$.
- Volgens Bart zijn er twee mogelijkheden bij het gooien met een punaise: de punt ligt omhoog of de punt ligt niet omhoog. Daarom is volgens Bart $P(\text{punt ligt omhoog}) = \frac{1}{2}$. Geef commentaar.

Theorie A Empirische en theoretische kansen

Bij het gooien van een punaise zijn twee uitkomsten mogelijk, maar deze zijn niet even waarschijnlijk. Je kunt de kans op de gebeurtenis 'punt omhoog' schatten door het experiment een groot aantal keren uit te voeren en de relatieve frequentie van de gebeurtenis 'punt omhoog' te berekenen. De relatieve frequentie bereken je door de frequentie van de gebeurtenis te delen door de totale frequentie.

De ervaring leert dat deze relatieve frequentie een goede schatting geeft van de kans als je het experiment heel vaak uitvoert. Dit is een gevolg van de **wet van de grote aantallen**.



figuur 6.4

Door een kansexperiment heel vaak uit te voeren, komt de relatieve frequentie van een gebeurtenis dicht bij de kans op die gebeurtenis te liggen.

Bij de punaise volgt uit de wet van de grote aantallen dat $P(\text{punt ligt omhoog}) \approx 0,58$.

Wil je de kans weten dat bij een geboorte in Nederland een meisje ter wereld komt, dan gebruik je bijvoorbeeld gegevens van het CBS. In 2017 werden in Nederland 169 836 kinderen geboren, waarvan 82 677 meisjes. De kans op een meisje is dus $\frac{82\,677}{169\,836} \approx 0,487$.

Je schat hier de kans op grond van gegevens uit het verleden. Je gaat er hierbij van uit dat de gegevens van 2017 ook voor de jaren daarna een goed beeld van de werkelijkheid geven.

$P(\text{meisje bij geboorte})$ en $P(\text{punaise met punt omhoog})$ zijn voorbeelden van **empirische kansen**. Empirisch betekent ‘op ervaring gegrond’.

Empirische kansen krijg je door een groot aantal waarnemingen te gebruiken.

Empirische kansen bereken je met relatieve frequenties.

Bij veel kansexperimenten kun je van tevoren zeggen wat de kans op een gebeurtenis is.

Zo is $P(\text{meer dan 4 ogen})$ bij een worp met een dobbelsteen gelijk aan $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Je gebruikt hierbij de kansdefinitie van Laplace. Zulke kansen heten **theoretische kansen**, ook wel **a priori** (= vooraf) **kansen** genoemd.

Een derde soort kans is de **subjectieve kans**. Wat is bijvoorbeeld de kans dat het wereldrecord verspringen vóór het jaar 2030 boven de 9,20 meter ligt? Iedereen kan daar zijn eigen mening over hebben, maar het is onmogelijk deze kans te berekenen.

Bij theoretische kansen ga je ervan uit dat kansexperimenten eerlijk verlopen. Dat houdt bijvoorbeeld in dat de gebruikte dobbelsteen eerlijk is. Maar een volmaakte dobbelsteen bestaat niet. Je werkt dus met een wiskundig model.

Voorbeeld

Zie de tabel.

BEVOLKINGSOPBOUW VAN AMSTERDAM IN 2018

leeftijd	0-14	15-24	25-44	45-64	65+	totaal
aantal	126 007	109 354	304 288	208 818	105 580	854 047

Bereken de kans dat in 2018 een willekeurig gekozen inwoner van Amsterdam

- a 25 jaar of ouder was
- b jonger dan 15 of 65-plusser was.

Uitwerking

a $P(\text{25 jaar of ouder}) = \frac{304\,288 + 208\,818 + 105\,580}{854\,047} \approx 0,724$

b $P(\text{jonger dan 15 of 65+}) = \frac{126\,007 + 105\,580}{854\,047} \approx 0,271$

R15


In welke van de volgende situaties gaat het om theoretische en in welke om empirische kansen?

De kans dat

- a een Nederlander linkshandig is
- b Annemiek bij een loterij een prijs wint
- c een trein te laat vertrekt uit Zutphen
- d je bij een worp met drie dobbelstenen in totaal negen ogen gooit
- e een Nederlander bloedgroep A heeft.

16


Hemelvaartsdag valt altijd op een donderdag. De vroegste datum waarop Hemelvaartsdag kan vallen is 30 april en de laatst mogelijke datum is 3 juni. Het weer op Hemelvaartsdag kan erg uiteenlopen. De hoogste maximumtemperatuur is gemeten op 27 mei 1954. Het werd toen maar liefst 29,2°C. De laagste maximumtemperatuur was op 13 mei 2010. De temperatuur kwam toen niet hoger dan 9,2°C. Ook de neerslaghoeveelheden lopen erg uiteen, evenals het aantal uren zonneshijn.



In de tabel zie je gegevens over het weer op Hemelvaartsdag in de periode van 1910 tot en met 2018. De gegevens zijn afkomstig van het KNMI in De Bilt. Je leest af dat er 32 Hemelvaartsdagen waren met een maximumtemperatuur van minstens 20°C.

HET WEER OP HEMELVAARTSDAG

max. temperatuur	freq.	neerslag	freq.	uren zon	freq.
lager dan 10°C	2	0 tot 0,1 mm	50	0 tot 1	18
10 tot 15°C	32	0,1 tot 1,0 mm	16	1 tot 5	30
15 tot 20°C	43	1,0 tot 5,0 mm	25	5 tot 10	36
20°C of hoger	32	5,0 mm of meer	18	10 of meer	25
	109		109		109

Neem aan dat deze gegevens ook gelden voor een willekeurige Hemelvaartsdag in de toekomst. Rond in deze opgave af op twee decimalen.

Bereken de kans dat op een Hemelvaartsdag

- a de maximumtemperatuur minstens 15°C is
- b minder dan 5,0 mm regen valt
- c de zon minstens één uur schijnt.

Het CBS heeft onderzoek gedaan naar korte vakanties van Nederlanders naar het buitenland. In de kruistabel staan de aantallen in duizendtallen.

KORTE VAKANTIES VAN NEDERLANDERS NAAR HET BUITENLAND (×1000)

	België	Frankrijk	Duitsland	overige landen	totaal
georganiseerd	699	365	813	756	2633
niet-georganiseerd	411	135	437	84	1067
	1110	500	1250	840	3700

- De kans dat een georganiseerde reis naar België ging, is ongeveer 0,265. Toon dit aan.
- Bereken de kans dat een niet-georganiseerde reis naar België ging.
- Volgens een onderzoeker was België bij de niet-georganiseerde reizen een populairdere bestemming dan bij de georganiseerde reizen. Hoe komt de onderzoeker tot deze conclusie?

Theorie B Voorwaardelijke kansen

Aan 96 volwassen Nederlanders is gevraagd of zij vinden dat Nederland de EU moet verlaten. In de kruistabel zijn de antwoorden verwerkt, waarbij onderscheid is gemaakt naar leeftijd.

VERLATEN EU

	voor	tegen	geen mening	
jongeren	7	14	3	24
dertigers	11	18	5	34
veertigplussers	5	25	8	38
	23	57	16	96

Uitgaande van deze tabel zijn heel wat kansberekeningen te maken. Zo is

- $P(\text{ondervraagde is dertiger}) = \frac{34}{96} \approx 0,354$
- $P(\text{ondervraagde is voor verlaten}) = \frac{23}{96} \approx 0,240$.

Maar niet altijd moet je delen door de totale frequentie 96 van de gehele groep. Soms is de vraagstelling zo, dat je moet kiezen uit een *beperkte groep*. Beperk je je tot de dertigers, dan deel je door 34.

Dus $P(\text{ondervraagde die dertiger is, is voor verlaten}) = \frac{11}{34} \approx 0,324$.

Het gaat hier om de kans dat een ondervraagde voor verlaten is *onder de voorwaarde* dat hij een dertiger is. Zo'n kans, waarbij je je tot een deelgroep beperkt, heet een **voorwaardelijke kans**.

Je kunt deze voorwaardelijke kans ook noteren als $P(\text{voor verlaten onder de voorwaarde dertiger})$.

Hoeveel procent van de dertigers is voor verlaten? Antwoord:

$$\frac{11}{34} \times 100\% \approx 32,4\%$$

R18


Dat je met een voorwaardelijke kans te maken hebt, kun je vaak zien aan het gebruik van het woord *die*. Maar ook zonder het woord *die* kan er sprake zijn van een voorwaardelijke kans.
 Formuleer vraag c van het voorbeeld met gebruik van het woordje *die*.

19


Zie het voorbeeld.

Bereken de kans dat een willekeurige ondervraagde

- a een jongere is
- b jongere geen mening heeft
- c jongere is en geen mening heeft
- d die geen mening heeft, jongere is.

leeftijd	levenden
30	983 378
35	976 843
40	967 252
45	952 699
50	930 601
55	896 701
60	845 134
65	768 465
70	659 273
75	514 596
80	344 752
85	180 300
90	63 017
95	11 472
100	726

20


Hiernaast zie je een sterftetabel van de Nederlandse bevolking.

Er is uitgegaan van 1 000 000 baby's. Je ziet dat van de 1 000 000 baby's er 983 378 de leeftijd van 30 jaar halen.

Bereken de kans dat

- a een dertigjarige zijn zestigste verjaardag haalt
- b een dertigjarige voor zijn veertigste sterft
- c een tachtigjarige minstens 95 jaar wordt
- d een pasgeboren baby voor zijn dertigste sterft
- e een zestigjarige wel zijn zeventigste, maar niet zijn tachtigste verjaardag haalt.

A21


De gemeenteraad van Vierhouten wil weten hoeveel auto's dagelijks het kruispunt in het centrum passeren. Op een dinsdag in mei is niet alleen geteld hoeveel auto's het kruispunt passeerden, maar ook uit welke richting ze kwamen en in welke richting ze hun weg vervolgden. De resultaten staan in de kruistabel.

		van				
		N	O	Z	W	
naar	N	0	877	51	408	1336
	O	1053	1	234	1682	2970
	Z	53	154	0	491	698
	W	982	1711	830	0	3523
		2088	2743	1115	2581	8527

Bereken de kans dat een willekeurig gekozen auto

- a uit het westen kwam
- b verder ging naar het oosten
- c die uit het noorden kwam, verder ging naar het westen
- d rechtdoor ging
- e linksaf sloeg
- f uit het westen verder ging naar het noorden.

Op een andere dinsdag in mei passeerden 7520 auto's het kruispunt.

- g Hoeveel auto's daarvan, verwacht je, kwamen uit het westen?

R22
□ ⊙ *

Bij een onderzoek zijn van 83 treinpassagiers enkele reisgegevens genoteerd.

	afgelegde afstand in km				
	0 tot 20	20 tot 40	40 tot 60	60 of meer	
met abonnement	6	9	12	10	37
zonder abonnement	8	11	12	15	46
	14	20	24	25	83

Bij de tabel is een aantal kansen berekend. De antwoorden staan hieronder. Bedenk bij elk van deze kansen een passende gebeurtenis. Noteer je antwoord in de vorm $P(\dots)$.

a $\frac{14}{83}$

b $\frac{9}{20}$

c $\frac{11}{46}$

E23
*

Aan een onderzoek naar de betrouwbaarheid van stemherkenning doen 1200 personen mee. Aan de hand van de stem wordt door een computer bepaald of een persoon al dan niet toestemming krijgt een ruimte te betreden. Van deze groep zijn de gegevens van 800 personen zo geprogrammeerd, dat ze gerechtigd zijn de ruimte te betreden. De andere 400 personen zijn daartoe niet gerechtigd.

Van de personen die de ruimte mogen betreden, wordt 3,5% de toestemming ten onrechte geweigerd. Van de personen die de ruimte niet mogen betreden, wordt 8,5% toch toegelaten.

Uit de groep van 1200 personen wordt willekeurig één persoon gekozen. Deze persoon blijkt niet toegelaten te zijn.

Bereken de kans dat deze persoon ten onrechte geweigerd is.

O24
□ ⊙ *

Op een havo/vwo-school zitten 1120 leerlingen, waarvan 504 jongens. De havo-afdeling telt 600 leerlingen en de vwo-afdeling 520.

a Hoeveel jongens verwacht je op basis van deze gegevens op het vwo? En hoeveel op de havo?

Er blijken 210 jongens op het vwo te zitten.

b Toon met een berekening aan dat voor deze school geldt dat de kans dat een jongen op het vwo zit, niet gelijk is aan de kans dat een willekeurige leerling op het vwo zit.

Theorie C Onafhankelijke gebeurtenissen

In opgave 24 was de kans dat een jongen op het vwo zit niet gelijk aan de kans dat een willekeurige leerling op het vwo zit. Dus de kans dat een leerling op het vwo zit, is afhankelijk van de vraag of deze leerling een jongen is.

De tabel hiernaast geeft informatie over een groep van 60 leerlingen.
De kans dat een willekeurig gekozen leerling uit deze groep blauwe ogen heeft, is gelijk aan $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$.

	blauwe ogen	geen blauwe ogen	
jongen	15	5	20
meisje	30	10	40
	45	15	60

Er is bij deze tabel iets bijzonders aan de hand. Immers ook

$$P(\text{jongen heeft blauwe ogen}) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \text{ en}$$

$$P(\text{meisje heeft blauwe ogen}) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}.$$

Je kunt zeggen dat het geslacht geen enkele invloed heeft op het al dan niet blauwe ogen hebben. We noemen daarom de gebeurtenissen 'leerling is jongen' en 'leerling heeft blauwe ogen' **onafhankelijk**. Ook de gebeurtenissen 'leerling is meisje' en 'leerling heeft blauwe ogen' zijn onafhankelijk.

Merk op dat

$$P(\text{'leerling heeft blauwe ogen' onder voorwaarde 'leerling is jongen'}) = P(\text{'leerling heeft blauwe ogen'}).$$

Gebeurtenissen die niet onafhankelijk zijn, heten **afhankelijk**.

A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen betekent dat $P(A \text{ onder voorwaarde } B) = P(A)$.

Voorbeeld

Van een groep van 200 personen blijkt iedereen óf bloedgroep AB óf bloedgroep 0 te hebben.

Van elk van deze personen is de resusfactor bekend.

Toon aan dat de gebeurtenissen 'bloedgroep AB' en 'resusfactor positief' afhankelijk zijn.

	AB	0	
Rh+	15	155	170
Rh-	5	25	30
	20	180	200

Aanpak

Laat zien dat $P(\text{bloedgroep AB onder voorwaarde Rh+})$ niet gelijk is aan $P(\text{bloedgroep AB})$.

Uitwerking

$$\left. \begin{aligned} P(\text{bloedgroep AB}) &= \frac{20}{200} = 0,1 \\ P(\text{bloedgroep AB onder voorwaarde Rh+}) &= \frac{15}{170} \approx 0,088 \end{aligned} \right\} 0,1 \neq \frac{15}{170}$$

De gebeurtenissen 'bloedgroep AB' en 'Rh+' zijn dus afhankelijk.

R25
☐⊙*

In de theorie staat

A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen betekent dat
 $P(A \text{ onder voorwaarde } B) = P(A)$.

Ook geldt

A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen betekent dat
 $P(B \text{ onder voorwaarde } A) = P(B)$.

Laat zien dat dit in de tabel van de theorie ook geldt voor de gebeurtenissen 'leerling is jongen' en 'leerling heeft blauwe ogen'.

26
☐⊙

Toon met een berekening aan dat in het voorbeeld ook de gebeurtenissen 'bloedgroep 0' en 'resusfactor negatief' afhankelijk zijn.

A27
☐⊙*

Van een groep van 2000 studenten is nagegaan of ze een bijbaan hebben. Daarbij is onderscheid gemaakt tussen thuis- en uitwonende studenten. Zie de tabel.

	thuiswonend	uitwonend	
bijbaan	1120	480	1600
geen bijbaan	230	170	400
	1350	650	2000

Toon aan dat het hebben van een bijbaan en uitwonend zijn afhankelijke gebeurtenissen zijn.

E28
*

Op een dag staan er 300 fietsen in een bewaakte fietsenstalling. Daarvan zijn er 120 van abonneementhouders. Van de fietsen zijn er 160 elektrisch. De gebeurtenissen 'fiets is elektrisch' en 'fiets is van abonneementhouder' zijn onafhankelijk.

Bereken de kans dat een willekeurige fiets niet elektrisch is en niet van een abonneementhouder.

Terugblik

Empirische kansen

Een empirische kans is gebaseerd op een aantal waarnemingen.

Je schat een empirische kans met de relatieve frequentie, dat is

$$\frac{\text{frequentie gebeurtenis}}{\text{totale frequentie}}.$$

Je kunt een empirische kans schatten door

- een kansexperiment een groot aantal keer uit te voeren, bijvoorbeeld als je de kans wilt weten dat bij een worp met een luciferdoosje deze op een strijklak terecht komt
- gebruik te maken van statistische gegevens, bijvoorbeeld als je de kans wilt weten dat een trein meer dan vijf minuten te laat aankomt.

Uit de wet van de grote aantallen volgt dat de relatieve frequentie een goede schatting van de kans geeft als je het experiment heel vaak uitvoert.

Voorwaardelijke kansen

In de kruistabel hiernaast zijn van de leerlingen van een klas twee kenmerken verwerkt, namelijk geslacht en leeftijd.

Let bij kansberekeningen die bij een tabel horen goed op of je met de totale groep te maken hebt of met een deelgroep. Bij een deelgroep heb je te maken met een voorwaardelijke kans.

$$\text{Zo is } P(\text{leerling van 15 jaar is een jongen}) = \frac{9}{14}.$$

Je beperkt je tot de deelgroep van de 15-jarigen.

	leeftijd				
	14	15	16	17	
jongen	2	9	0	1	12
meisje	6	5	6	1	18
	8	14	6	2	30

Onafhankelijke gebeurtenissen

De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk als

$$P(A \text{ onder de voorwaarde } B) = P(A).$$

$$\text{Zo is in de tabel hiernaast } P(\text{jongen}) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{ en}$$

$$P(\text{jongen onder de voorwaarde 14 jaar}) = \frac{19}{76} = \frac{1}{4}.$$

Dus bij de gegeven tabel zijn de gebeurtenissen 'leerling is jongen' en 'leerling is 14 jaar' onafhankelijk.

	leeftijd		
	14	15	
jongen	19	6	25
meisje	57	18	75
	76	24	100

6.3 Het vaasmodel en de productregel

O29


Uit een groep van 15 leerlingen worden er willekeurig drie gekozen om samen een cadeau te kopen voor een pasgeboren baby van een docent.

- a Volgens Levi zijn er $15 \cdot 15 \cdot 15$ drietallen mogelijk.
Welke fout maakt hij?
- b Volgens Sasha zijn er $15 \cdot 14 \cdot 13$ drietallen mogelijk.
Welke fout maakt zij?
- c Hoeveel drietallen zijn er mogelijk?



Theorie A Kansen en combinaties

In opgave 29 waren bij het kiezen van de drie leerlingen herhalingen niet toegestaan en was de volgorde niet van belang. Daarbij horen combinaties.

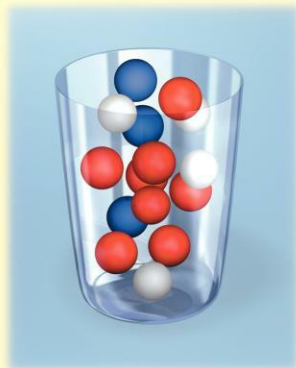
In een vaas zitten acht rode, vier witte en drie blauwe knikkers. We vragen ons af wat de kans is dat je bij het pakken van acht knikkers vijf rode en drie witte knikkers pakt. Hierbij gebruiken we de kansdefinitie van Laplace en hebben we met combinaties te maken.

- Het aantal mogelijke uitkomsten is het aantal manieren om 8 knikkers uit de totaal $8 + 4 + 3 = 15$ knikkers te pakken.

Dat kan op $\binom{15}{8}$ manieren.

- Het aantal gunstige uitkomsten is het aantal manieren om 5 rode uit de 8 rode EN 3 witte uit de 4 witte knikkers te pakken. Dat kan op $\binom{8}{5} \cdot \binom{4}{3}$ manieren.

- De gevraagde kans is dus $P(5 \text{ rode en } 3 \text{ witte}) = \frac{\binom{8}{5} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{15}{8}} \approx 0,035$.



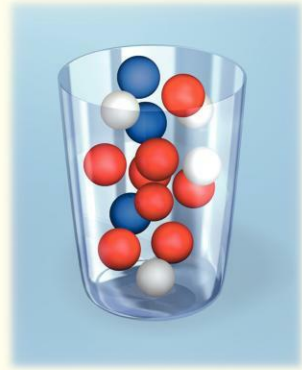
Voorbeeld

In een vaas zitten acht rode, vier witte en drie blauwe knikkers.

Joep pakt vijf knikkers uit de vaas.

Bereken de kans dat Joep

- a één rode, twee witte en twee blauwe knikkers pakt
- b geen rode knikkers pakt
- c drie rode knikkers pakt.



Aanpak

Het aantal mogelijke uitkomsten is $\binom{15}{5}$.

Het aantal gunstige uitkomsten is het aantal manieren om

- a 1 rode uit 8 rode EN 2 witte uit 4 witte EN 2 blauwe uit 3 blauwe knikkers te pakken, dat is $\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2}$
- b de 5 knikkers uit de $4 + 3 = 7$ niet-rode te pakken, dat is $\binom{7}{5}$
- c 3 rode uit de 8 rode EN dus 2 niet-rode uit de $4 + 3 = 7$ niet-rode te pakken, dat is $\binom{8}{3} \cdot \binom{7}{2}$.

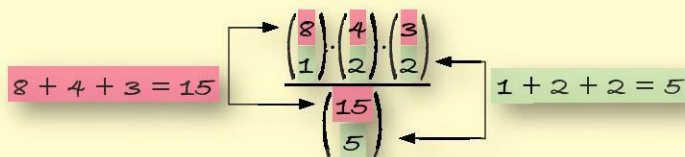
Uitwerking

$$\text{a } P(1 \text{ rode, 2 witte en 2 blauwe}) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{15}{5}} \approx 0,048$$

$$\text{b } P(\text{geen rode knikkers}) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{15}{5}} \approx 0,007$$

$$\text{c } P(3 \text{ rode}) = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{15}{5}} \approx 0,392$$

Merk bij vraag a van het voorbeeld de volgende samenhang op.



R30
☐ ⊙ *

De zojuist genoemde samenhang lijkt bij vraag b van het voorbeeld te ontbreken.

Noteer de kans van vraag b zo, dat ook hier deze samenhang zichtbaar wordt.

31
☐ ⊙ *

In een vaas zitten zeven rode, acht witte en zes groene knikkers.

Carmen pakt zeven knikkers uit de vaas.

Bereken de kans dat zij

- a drie rode, twee witte en twee groene knikkers pakt
- b geen groene knikkers pakt
- c twee rode en vijf witte knikkers pakt
- d twee witte knikkers pakt.

32
☐ ⊙ *

In een vaas zitten 18 rode, 12 blauwe en 32 witte knikkers.

Vincent pakt zes knikkers uit de vaas.

Bereken de kans op

- a drie witte en drie blauwe
- b geen witte knikkers
- c vier witte knikkers
- d één rode knikker.

033
☐ ⊙ *

Op een fruitschaal liggen vijf appels, vier peren en zes sinaasappels.

Doris pakt willekeurig drie stuks fruit van de schaal.

Bereken de kans dat ze één appel, één peer en één sinaasappel pakt.

Theorie B Het vaasmodel

Bij veel kansberekeningen kan het handig zijn het kansexperiment om te zetten in het pakken van knikkers uit een vaas. Je maakt dan een **vaasmodel** bij het probleem. Zie het volgende schema.

Loterij

50 loten met vijf prijzen, namelijk één hoofdprijs en vier tweede prijzen.

experiment

Yvette koopt vier loten.

$P(\text{hoofdprijs en 1 tweede prijs})$

Vaasmodel

50 knikkers waarvan één rood (de hoofdprijs), vier wit (de tweede prijzen) en 45 zwart (de niet-prijzen).

experiment

Yvette pakt vier knikkers.

$P(1 \text{ rode en 1 witte en 2 zwarte})$

$$P(\text{hoofdprijs en 1 tweede prijs}) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{45}{2}}{\binom{50}{4}} \approx 0,017$$

Voorbeeld

In een loterij zijn 80 loten verkocht. Er zijn vijf boekenbonnen te winnen en een fiets. Eva heeft vier loten gekocht.

Bereken de kans dat Eva een boekenbonn winst en verder niets.

Uitwerking

$$P(1 \text{ boekenbonn en verder niets}) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{74}{3}}{\binom{80}{4}} \approx 0,205$$

R34
☐ ⊗ *

Zie het voorbeeld.

Wat is de samenstelling van de vaas met knikkers?

Bij lastige opgaven schrijf je de samenstelling van de vaas op.

35
☐ ⊗

Bij een loterij zijn 40 loten verkocht. Er zijn drie eerste prijzen en zeven tweede prijzen. Monique koopt drie loten en Barbara koopt er vier.

Bereken de kans dat

- a Monique één prijs winst
- b Barbara twee tweede prijzen winst
- c geen van beiden een prijs winst
- d elk lot van Barbara een prijs oplevert.

36
☐ ⊗ *

Texas Hold'em is een variant van het kaartspel poker. Iedere speler krijgt in de eerste ronde twee kaarten. Er wordt gespeeld met een spel van 52 kaarten, waarvan de vier azen de beste zijn. Jimmie en zes van zijn vrienden spelen samen.

- a Bereken de kans dat Jimmie in de eerste ronde twee azen krijgt.
- b Bereken de kans dat alle azen in de eerste ronde worden uitgedeeld.



E37
* ☐ ⊗

We kijken nog eens naar de situatie van opgave 36.

Jimmie krijgt in de eerste ronde twee azen in zijn hand.

- a Bereken de kans dat geen van de andere spelers ook een aas heeft.
- b Anne is een van de vrienden die meespeelt.
Bereken de kans dat Anne de twee andere azen heeft.

A38
☐ ⊗ *

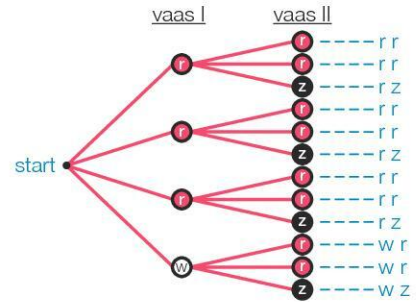
Op een vliegveld zijn zes balies beschikbaar voor het afhandelen van vluchten naar Porto. Bij elke balie staat een rij van vijf personen. Bij de wachtenden zijn er vijf met een inchecktijd van meer dan vier minuten. Bereken de kans dat drie van deze wachtenden in de rij bij balie 2 staan.

A39
☐ ⊗ *

Een partij van 500 appels wordt verpakt in 20 dozen van elk 25 stuks. Bij deze 500 appels zijn er tien met een rotte plek. Isa koopt een doos. Bereken de kans dat alle appels in de doos gaaf zijn.

Gegeven zijn twee vazen met knikkers. In vaas I zitten drie rode en één witte. In vaas II zitten twee rode en één zwarte.

- Maxe pakt uit vaas I een knikker.
Waarom is $P(\text{rode uit I}) = \frac{3}{4}$?
- Charlotte pakt uit vaas II een knikker.
Hoe groot is $P(\text{rode uit II})$?
- Asmin pakt uit elke vaas één knikker.
Hoeveel mogelijke uitkomsten volgen uit het boomdiagram? Hoeveel keer komt de uitkomst rr voor?
Bereken de kans dat Asmin twee rode knikkers pakt.
- Controleer dat je de kans van vraag c ook krijgt door de kansen uit de vragen a en b te vermenigvuldigen.



figuur 6.5

Theorie C Kansbomen

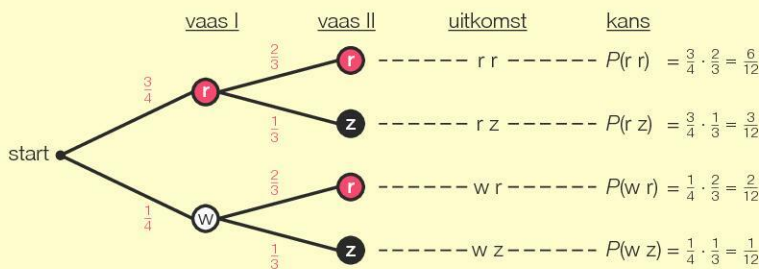
In opgave 40 heb je te maken met een samengesteld kansexperiment: uit elk van twee vazen wordt een knikker gepakt.

Omdat deze twee experimenten elkaars uitkomsten op geen enkele wijze beïnvloeden, zijn de experimenten **onafhankelijk** van elkaar.

In opgave 40 is $P(rr)$ berekend met behulp van een boomdiagram.

Omdat door de vele vertakkingen een boomdiagram al snel onoverzichtelijk wordt, passen we een vereenvoudiging toe.

- Pak eerst een knikker uit vaas I. Omdat je alleen de mogelijkheden r en w hebt, zijn er vanaf de start slechts twee takken getekend. Bij elke tak staat de bijbehorende kans.
- Pak vervolgens een knikker uit vaas II. Je hebt alleen de mogelijkheden r met kans $\frac{2}{3}$ en z met kans $\frac{1}{3}$.



figuur 6.6 Merk op dat de som van de kansen 1 is.

Zo ontstaat het boomdiagram hierboven. Een boomdiagram met kansen bij de takken heet een **kansboom**.

Bij het doorlopen van een kansboom vermenigvuldig je de kansen die je tegenkomt. Zo is $P(wz) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ en $P(rz) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Werkschema: berekenen van kansen bij samengestelde kansexperimenten

- 1 Maak in gedachten (een gedeelte van) een kansboom.
- 2 Vermenigvuldig de kansen die je tegenkomt bij het doorlopen van de kansboom.

Dat je bij het doorlopen van een kansboom de kansen moet vermenigvuldigen is een gevolg van de **productregel voor onafhankelijke kansexperimenten**.

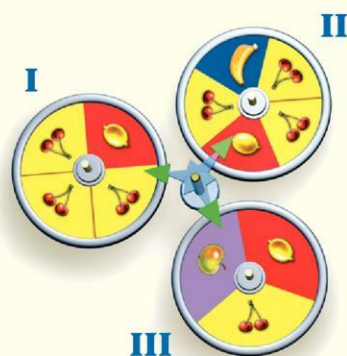
Voor de gebeurtenis G_1 bij het ene kansexperiment en de gebeurtenis G_2 bij het andere kansexperiment geldt $P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2)$.

Voorbeeld

De schijven in figuur 6.7 draaien onafhankelijk van elkaar. Nadat de schijven tot stilstand zijn gekomen, wijst elke pijl een sector aan.

Bereken exact de kans op

- a drie keer kersen
- b een appel, een banaan en een citroen
- c geen enkele citroen.



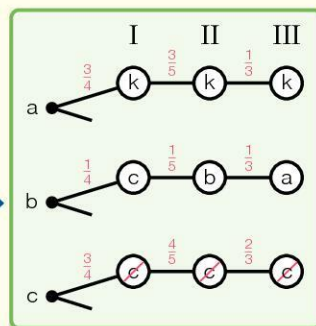
figuur 6.7

Uitwerking

- a $P(\text{drie keer kersen}) = P(k \ k \ k) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$
- b $P(\text{een appel, een banaan en een citroen}) =$
 $P(c \ b \ a) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60}$
- c $P(\text{geen enkele citroen}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

↖
 c betekent geen citroen.
 Bij schijf I is $P(\text{c}) = \frac{3}{4}$.

↖
 Bij elk probleem hoort
 een andere kansboom.



R41
☐ ⊙ *

Je mag kansen alleen vermenigvuldigen als de experimenten onafhankelijk zijn. Ga bij de volgende situaties na of hier sprake van is. Bereken de kans als er sprake is van onafhankelijke kansexperimenten.

a Wereldwijd is de kans 0,02 dat een willekeurige persoon blauwe ogen heeft.

Bereken de kans dat in een gezin beide kinderen blauwe ogen hebben.

b De kans dat het morgen regent in Breda is 0,7. De kans dat het morgen regent in Sydney (Australië) is 0,2.

Bereken de kans dat het morgen zowel in Breda als in Sydney regent.

c De kans dat het morgen regent in Breda is 0,7. De kans dat het morgen regent in Antwerpen is 0,7.

Bereken de kans dat het morgen zowel in Breda als in Antwerpen regent.



42
☐

In vaas I zitten twee rode, vijf witte en drie blauwe knikkers.

In vaas II zitten twee witte knikkers, twee blauwe en één groene.

Lucas pakt uit beide vazen één knikker.

Bereken exact de kans op

- a** twee witte knikkers
- b** een blauwe en een rode knikker
- c** geen enkele blauwe knikker
- d** geen enkele rode knikker.

43
☐ ⊙

Nadat de schijven in figuur 6.8 tot stilstand zijn gekomen, wijzen de pijlen elk één sector aan.

Bereken exact.

- a** $P(\text{drie bananen})$
- b** $P(\text{geen kersen})$
- c** $P(\text{twee citroenen en één banaan})$
- d** $P(\text{drie citroenen})$



figuur 6.8

A44 Levi gooit met een viervlaksdobbelsteen, een gewone dobbelsteen en een achtlaksdobbelsteen.

Bereken de kans dat hij

- a** in totaal 18 gooit
- b** met geen enkele steen 3 gooit
- c** met elke steen hoogstens 4 gooit
- d** met elke steen een drievoud gooit.

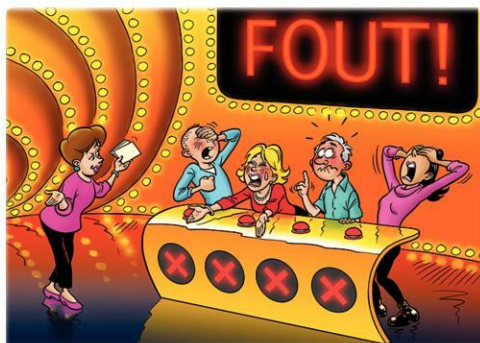
A45 Jeanine en Karsten spelen eerst een spelletje schaak, dan gaan ze een potje dammen en vervolgens spelen ze een keer Stratego. Jeanine wint bij schaken 65% van de spelletjes, bij dammen 45% en bij Stratego is deze kans 50%. Bereken de kans dat Jeanine

- a** alle drie de spelletjes wint
- b** alleen bij het schaken wint.

Jeanine wint 65% van de spelletjes, dus de kans dat ze een spelletje wint is 0,65 en de kans dat ze een spelletje niet wint is 0,35.

E46 Bij een spelshow zijn 100 kandidaten, waarvan er vier door loting worden gekozen om een spel te spelen. Zij moeten als team drie opdrachten doen. Als deze alle drie lukken, dan winnen de spelers ieder 5000 euro. Bij de eerste opdracht is de kans dat deze lukt 0,8, bij de tweede is dat 0,6 en bij de laatste opdracht is deze kans 0,4.

- a** Onno is een van de honderd kandidaten. Bereken de kans dat hij 5000 euro wint.
- b** Van de 100 kandidaten zijn er 60 vrouw. Bereken de kans dat er twee mannen en twee vrouwen worden gekozen om mee te doen en dat zij bij de laatste opdracht de prijs mislopen.



Terugblik

Knikkers pakken uit een vaas

Bij kansberekeningen die gaan over het pakken van knikkers uit een vaas gebruik je combinaties.

Pak je vijf knikkers uit een vaas met 52 blauwe, zes rode en twee witte knikkers, dan is

$$P(3 \text{ blauwe, 1 rode en 1 witte}) = \frac{\binom{52}{3} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{60}{5}} \approx 0,049.$$

$$\text{Verder is } P(3 \text{ blauwe}) = \frac{\binom{52}{3} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{60}{5}} \approx 0,113. \quad \leftarrow \dots \quad \boxed{3 \text{ blauwe, dus ook 2 niet-blauwe}}$$

Het vaasmodel

probleem Een loterij met 100 loten heeft één eerste prijs, twee tweede prijzen en vijf derde prijzen.

Twan koopt vier loten.

Wat is de kans dat Twan één prijs wint?

vaasmodel In een vaas zitten 100 knikkers, waarvan er acht rood zijn (de 1 + 2 + 5 prijzen) en 92 wit (de niet-prijzen).

Pak vier knikkers uit de vaas.

$$\text{antwoord} \quad P(\text{één prijs}) = P(1 \text{ rode en 3 witte knikkers}) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{92}{3}}{\binom{100}{4}} \approx 0,256$$

De productregel

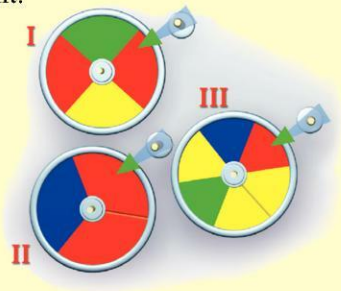
Voor onafhankelijke kansexperimenten geldt de productregel.

Is G_1 een gebeurtenis bij het ene experiment en G_2 bij het andere experiment, dan is $P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2)$.

Bij het berekenen van kansen bij samengestelde kansexperimenten maak je in gedachten (een gedeelte van) een kansboom. Bij het doorlopen van de kansboom vermenigvuldig je de kansen die je tegenkomt.

Zo is bij de schijven hiernaast

$$P(\text{geen enkele keer rood}) = P(\text{r} \text{ r} \text{ r}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{72} = \frac{5}{36}.$$



6.4 De somregel



Eddy gooit met twee dobbelstenen.

- Bereken exact $P(\text{som is } 3)$, $P(\text{som is } 4)$ en $P(\text{som is } 3 \text{ of som is } 4)$.
- Is $P(\text{som is } 3 \text{ of som is } 4) = P(\text{som is } 3) + P(\text{som is } 4)$?
- Onderzoek of $P(\text{som is } 4 \text{ of product is } 4)$ gelijk is aan $P(\text{som is } 4) + P(\text{product is } 4)$.

In de wiskunde bedoelen we met het woordje of: of het een, of het ander of allebei.

Theorie A De somregel voor kansen

Bij het gooien met twee dobbelstenen is $P(\text{som is } 2 \text{ of som is } 4) = P(\text{som is } 2) + P(\text{som is } 4)$.

Dit is een voorbeeld van de **somregel**.

Je mag de somregel hier toepassen, omdat de gebeurtenissen 'som is 2' en 'som is 4' geen gemeenschappelijke uitkomsten hebben.

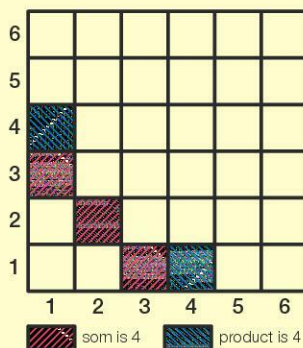
We zeggen dat de gebeurtenissen **elkaar uitsluiten**.

Hebben twee gebeurtenissen wel gemeenschappelijke uitkomsten, dan geldt de somregel niet.

Zo is $P(\text{som is } 4 \text{ of product is } 4)$ niet gelijk aan $P(\text{som is } 4) + P(\text{product is } 4)$, want de gebeurtenissen 'som is 4' en 'product is 4' hebben de uitkomst 2 2 gemeenschappelijk.

Voor $P(\text{som is } 4 \text{ of product is } 4)$ moet je de gunstige uitkomsten tellen.

Je krijgt $P(\text{som is } 4 \text{ of product is } 4) = \frac{5}{36}$.



figuur 6.9

Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen G_1 en G_2 geldt de somregel: $P(G_1 \text{ of } G_2) = P(G_1) + P(G_2)$.

De drie schijven in figuur 6.10 draaien onafhankelijk van elkaar.

Om de kans op drie gelijke letters te berekenen, gebruik je de somregel in combinatie met de productregel. Immers $P(\text{drie gelijke letters}) = P(AAA) + P(BBB) + P(CCC) =$

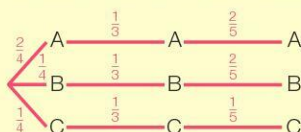
$$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{60} + \frac{2}{60} + \frac{1}{60} = \frac{7}{60}.$$

Bij deze berekening maak je in gedachten een deel van een kansboom.



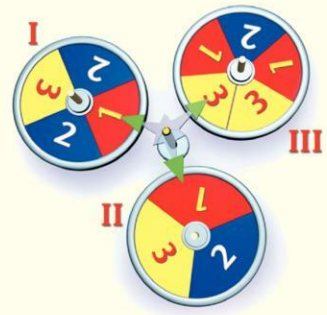
figuur 6.10

kansboom bij $P(\text{drie gelijke letters})$



Voorbeeld

Niels laat de schijven in figuur 6.11 één keer draaien. De schijven draaien onafhankelijk van elkaar. Nadat de schijven zijn uitgedraaid, wijst elke pijl één sector aan. Bereken de kans dat de som van de cijfers 4 is.



figuur 6.11

Aanpak

Bedenk 'som is 4' houdt in 112 of 121 of 211.

Uitwerking

$$P(\text{som is 4}) = P(112) + P(121) + P(211) =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \approx 0,117$$

Ook bij opgaven met het vaasmodel gebruik je vaak de somregel.

Voorbeeld

Bij een loterij zijn alle 80 loten verkocht. Er zijn zes prijzen. Martine heeft vier loten gekocht. Bereken de kans dat Martine meer dan twee prijzen wint.

Aanpak

Meer dan twee prijzen betekent hier drie of vier prijzen. Pas de somregel toe.

Uitwerking

$$P(\text{meer dan 2 prijzen}) = P(3 \text{ prijzen}) + P(4 \text{ prijzen}) =$$

$$\frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{74}{1}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{6}{4}}{\binom{80}{4}} \approx 0,001$$

48



Zie het voorbeeld met de schijven.

- a Bereken de kans dat één 3 wordt aangewezen.
- b Bereken de kans geen enkele blauwe sector wordt aangewezen.

Zie het voorbeeld over de loterij.

Loes berekent de kans als volgt:
$$\frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{74}{1} + \binom{6}{4}}{\binom{80}{4}}.$$

- c Waarom mag dat? Wat is het voordeel hiervan?

De GR van Loes geeft als antwoord 9.452572744E-4.

- d Licht toe dat dit afgerond op drie decimalen gelijk is aan 0,001. Hoeveel is het antwoord afgerond op vier decimalen?

- 49** Rob gooit met drie dobbelstenen.
 Bereken de kans dat hij
 a één vijf gooit
 b twee zessen en een drie gooit
 c met elke dobbelsteen minstens drie ogen gooit.

- 50** Bij een loterij zijn 80 loten verkocht. Er is een hoofdprijs van 50 euro en er zijn drie tweede prijzen van 25 euro.
 Nina koopt vijf loten.
 Bereken de kans dat Nina
 a minder dan twee prijzen wint
 b 50 euro wint.

- 51** Op weg naar huis passeert Marieke drie voetgangerslichten.
 De kansen dat deze op rood staan, zijn achtereenvolgens 0,4, 0,7 en 0,2.
 De voetgangerslichten werken onafhankelijk van elkaar.
 Bereken de kans dat Marieke
 a drie keer kan doorlopen
 b één keer moet wachten, maar niet voor het derde voetgangerslicht.

- A52** Stijn gooit met een viervlaksdobbelsteen, een gewone dobbelsteen en een achtlaksdobbelsteen.
 Bereken de kans dat Stijn
 a één twee gooit
 b twee vieren gooit
 c in totaal 16 gooit.

- A53** In de tabel zie je hoe ver de werknemers van de firma Adphex van hun werk af wonen. Bij een onderzoek naar de vergoeding van reiskosten worden tien personen van dit bedrijf ondervraagd.
 Bereken de kans dat
 a meer dan acht ondervraagden minder dan 5 km van het bedrijf wonen
 b minder dan drie vrouwen bij het onderzoek zijn betrokken
 c er twee vrouwen bij zitten die 5 km of meer van het werk af wonen.

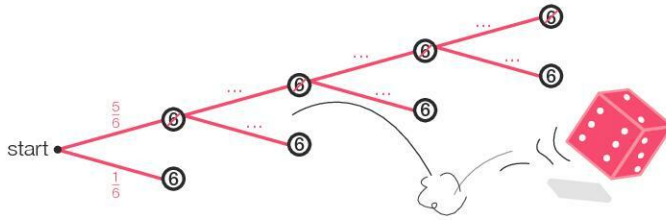
AFSTAND HUIS - BEDRIJF

	man	vrouw	
0 tot 5 km	18	11	29
5 tot 10 km	13	3	16
10 km of meer	6	2	8
	37	16	53

- E54** Bij een spel doorloop je achtereenvolgens vijf fasen. In elke fase kun je punten verdienen. Zie de tabel hiernaast.
 Je ziet bijvoorbeeld dat je 4 punten kunt verdienen in fase IV.
 De kans hierop is 0,4. In elke fase verdien je de punten die in de tabel staan, of je verdient deze punten niet.
 Bereken de kans dat je bij één keer spelen bij dit spel minstens 12 punten verdient.

fase	kans	punten
I	0,8	1
II	0,6	2
III	0,5	3
IV	0,4	4
V	0,2	5

Diana gooit vier keer met een dobbelsteen. Om de kans te berekenen dat ze geen enkele keer 6 ogen gooit, gebruikt ze de kansboom in figuur 6.12.



figuur 6.12

a Bereken de kans op geen enkele keer 6 ogen.

Huan gooit met vier dobbelstenen.

b Wat kun je zeggen van de kans dat hij geen enkele 6 gooit?

Theorie B Kansexperimenten herhalen

Het vier keer gooien met een dobbelsteen is een voorbeeld van het herhaald uitvoeren van hetzelfde kansexperiment. Ook in zo'n situatie gebruik je de productregel om kansen te berekenen.

De productregel gebruik je ook als je hetzelfde experiment twee of meer keren uitvoert.

De schijf in figuur 6.13 wordt vier keer gedraaid.

De kans op geen enkele keer kiwi is gelijk aan

$$P(\overline{k} \overline{k} \overline{k} \overline{k}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^4 \approx 0,410.$$

De kans op precies één keer kiwi is

$$P(k \overline{k} \overline{k} \overline{k}) + P(\overline{k} k \overline{k} \overline{k}) + P(\overline{k} \overline{k} k \overline{k}) + P(\overline{k} \overline{k} \overline{k} k) =$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \approx 0,410.$$

$$\text{Dus } P(\text{één keer kiwi}) = \binom{4}{1} \cdot P(k \overline{k} \overline{k} \overline{k}) = \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3.$$

De kans op twee keer kiwi is

$$P(k \overline{k} k \overline{k}) + P(k \overline{k} \overline{k} k) + P(\overline{k} k k \overline{k}) + \dots =$$

$$\binom{4}{2} \cdot P(k \overline{k} k \overline{k}) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \approx 0,154.$$



figuur 6.13

2 van de 4 keer kiwi:

$\left. \begin{array}{l} k \overline{k} k \overline{k} \\ k \overline{k} \overline{k} k \\ \overline{k} k k \overline{k} \\ \vdots \\ \text{enz.} \end{array} \right\}$ Het aantal rijtjes met 2 keer k en 2 keer $\overline{k}$ is $\binom{4}{2}$.

Voorbeeld

Lucas laat de schijf in figuur 6.14 acht keer draaien.

Bereken de kans dat hij

- a vijf keer 3 en drie keer 1 krijgt
- b vijf keer 2 krijgt
- c minstens zeven keer 1 krijgt.



figuur 6.14

Uitwerking

- a $P(\text{vijf keer 3 en drie keer 1}) = \binom{8}{5} \cdot P(3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 1\ 1\ 1) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \approx 0,065$
- b $P(\text{vijf keer 2}) = \binom{8}{5} \cdot P(2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,004$
- c $P(\text{minstens zeven keer 1}) = P(\text{zeven keer 1}) + P(\text{acht keer 1}) = \binom{8}{7} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^7 \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^8 \approx 0,003$

R56 Zie het voorbeeld.



Bereken de kans dat Lucas alleen de eerste en de laatste keer 2 krijgt.
Waarom gebruik je bij het berekenen van deze kans geen combinaties?

57 Puck laat de schijf in figuur 6.15 zes keer draaien.



Bereken de kans op

- a drie keer appel en drie keer peer
- b minstens vijf keer appel
- c drie keer banaan
- d geen enkele banaan.



figuur 6.15

58 Joep maakt een proefwerk dat uit 25 vierkeuzevragen bestaat.



Bij zes vragen moet hij het antwoord gokken.

Bereken de kans dat hij bij deze zes vragen

- a geen enkele keer goed gokt
- b twee keer goed gokt
- c minder dan drie keer goed gokt.

A59
☐ ⊙ *

Britse wetenschappers hebben een methode ontwikkeld om uit DNA-materiaal dat afkomstig is van een man een voorspelling te doen over zijn achternaam. De kans op een juiste voorspelling is 0,4. Bij tien moordzaken is op grond van het beschikbare DNA-materiaal bekend dat de dader een man moet zijn.

Bereken de kans dat in

- a** drie zaken de achternaam juist voorspeld is
- b** minder dan drie zaken de achternaam juist voorspeld is.



A60
*

Daan gooit acht keer met twee dobbelstenen.

Bereken de kans dat

- a** de som van de ogen drie keer minder dan 5 is
- b** de som van de ogen meer dan vijf keer meer dan 7 is.

Terugblik

De somregel

Bij het berekenen van kansen geldt bij elkaar uitsluitende gebeurtenissen de somregel.

Zo geldt bij het gooien met een dobbelsteen dat

$$P(3 \text{ ogen of } 5 \text{ ogen}) = P(3 \text{ ogen}) + P(5 \text{ ogen}).$$

Als iemand drie loten koopt bij een loterij met vijftig loten waarvan vijf een prijs opleveren, dan bereken je de kans op hoogstens één prijs als volgt.

$$P(\text{hoogstens 1 prijs}) = P(0 \text{ prijzen}) + P(1 \text{ prijs})$$

$$= \frac{\binom{45}{3}}{\binom{50}{3}} + \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{45}{2}}{\binom{50}{3}} \approx 0,977$$

Kansexperimenten herhalen

Het zes keer gooien met een dobbelsteen en het vier keer draaien van de schijf in de figuur hiernaast zijn voorbeelden van het herhalen van een kansexperiment.

Om hierbij kansen te berekenen gebruik je de productregel.

Bij het vier keer draaien van de schijf is

- $P(\text{geen enkele keer blauw}) = P(\text{b b b b}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,482$
- $P(\text{twee keer blauw en twee keer rood}) =$
 $P(\text{b b r r}) + P(\text{b r b r}) + P(\text{r b b r}) + \dots =$

$\binom{4}{2}$ mogelijkheden

$$\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \approx 0,019$$

- $P(\text{minder dan twee keer rood}) =$
 $P(\text{geen enkele keer rood}) + P(\text{één keer rood}) =$
 $P(\text{r r r r}) + \binom{4}{1} \cdot P(\text{r r r r}) = \left(\frac{4}{6}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^3 \approx 0,593$



6.5 De complementregel

- 061** In een vaas zitten twaalf rode en tien witte knikkers.
☐ ⊗ * Daan pakt willekeurig vier knikkers uit de vaas.
 Bereken de kans dat hij
- a** vier witte knikkers pakt
 - b** minder dan vier witte knikkers pakt.

Theorie A Het vaasmodel en de complementregel

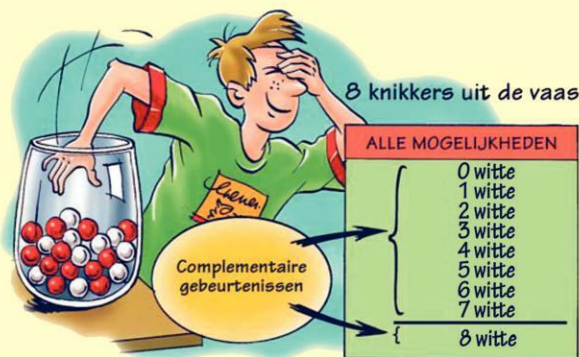
Bij het pakken van acht knikkers uit de vaas van opgave 61 is de kans op minder dan acht witte knikkers gelijk aan

$$P(0 \text{ witte}) + P(1 \text{ witte}) + P(2 \text{ witte}) + \dots + P(7 \text{ witte}).$$

In plaats van deze acht kansen apart te berekenen en daarna op te tellen, kun je je heel wat rekenwerk besparen door te bedenken dat de som van de kansen van alle mogelijke uitkomsten gelijk is aan 1. Hieruit volgt dat $P(\text{minder dan 8 witte}) = 1 - P(8 \text{ witte})$.

Dit is een voorbeeld van de **complementregel**.

Het complement van een gebeurtenis bestaat uit alle uitkomsten die niet tot de gebeurtenis behoren.

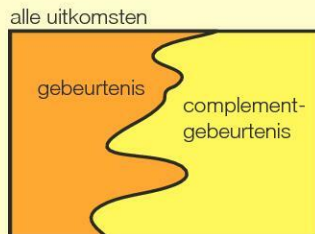


Omdat $P(\text{gebeurtenis}) + P(\text{complement-gebeurtenis}) = 1$, geldt de complementregel. Volgens deze regel is

$P(\text{gebeurtenis}) = 1 - P(\text{complement-gebeurtenis})$

Het woord complement komt van complementeren: het toevoegen van het gedeelte dat ontbreekt om iets volledig te maken.

In de figuur hiernaast zie je een gebeurtenis en haar complement-gebeurtenis. Samen geven ze alle mogelijke uitkomsten.



Het is belangrijk om bij kansberekeningen op een verstandige wijze de complementregel te gebruiken. Dat kan rekenwerk besparen. Zie het volgende schema.

Pak 6 knikkers uit een vaas met 10 rode en 20 witte knikkers.			
gebeurtenis	met somregel	complement-gebeurtenis	complement-regel handig?
minder dan 6 witte	0, 1, 2, 3, 4 of 5 witte	6 witte	ja
minder dan 2 witte	0 of 1 witte	2, 3, 4, 5 of 6 witte	nee
meer dan 1 witte	2, 3, 4, 5 of 6 witte	0 of 1 witte	ja
minstens 1 witte	1, 2, 3, 4, 5 of 6 witte	0 witte	ja
hoogstens 1 witte	0 of 1 witte	2, 3, 4, 5 of 6 witte	nee

Voorbeeld

Bij een televisieshow wordt de finalist voor tien deuren geplaatst. Achter drie van die deuren bevindt zich een waardevolle prijs. Achter de andere zeven deuren ligt een lege envelop. De finalist mag vier deuren openen. Bereken de kans dat er minstens één prijs de deur uitgaat.

Aanpak

Maak een vaasmodel met tien knikkers (de deuren), waarvan drie rode (de prijzen) en zeven witte knikkers (de lege enveloppen). Pak vier knikkers uit de vaas (de te openen deuren) en bereken de kans op minstens één rode knikker.

Uitwerking

$$P(\text{minstens één prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) = 1 - \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} \approx 0,833$$



R62 Een kansexperiment bestaat uit het pakken van vijf knikkers uit een vaas met acht rode, zes witte en twaalf groene knikkers.

Bij het gebruik van de complementregel kan er gemakkelijk iets fout gaan. Wat is er fout aan de volgende beweringen?

- a** $P(\text{geen groene}) = 1 - P(\text{allemaal groene})$
- b** $P(\text{gelijke kleuren}) = 1 - P(\text{verschillende kleuren})$
- c** $P(\text{meer dan twee rode}) = 1 - P(\text{minder dan twee rode})$
- d** $P(\text{hoogstens drie witte}) = 1 - P(\text{minstens drie witte})$

Vul in.

- e** $P(\text{minstens één rode}) = 1 - P(\dots)$
- f** $P(\text{hoogstens vier witte}) = 1 - P(\dots)$
- g** $P(\text{niet vier rode}) = 1 - P(\dots)$

63 In een vaas zitten vier gele, drie groene en vijf blauwe knikkers. Olivier pakt er drie uit. Bereken de kans dat

- a er minstens één groene bij is
- b er hoogstens twee blauwe bij zijn
- c ze alle drie van kleur verschillen
- d ze alle drie dezelfde kleur hebben.

Komt in de omschrijving van een gebeurtenis ‘minstens’, ‘hoogstens’, ‘niet’, ‘meer dan’ of ‘minder dan’ voor, kijk dan of de complementregel je rekenwerk kan besparen.

A64 Van de 28 leerlingen van 4 vwo A van het Zuidland College in Akkerdam zijn er acht 14 jaar, vijftien 15 jaar en vijf 16 jaar. Van de leerlingen van 4 vwo A wonen er zeventien in Akkerdam: van de 14-jarigen zijn dat er zes en van de 15-jarigen zijn dat er tien. De docent wiskunde verdeelt de klas in groepjes van vier leerlingen voor het maken van een praktische opdracht. Hij kiest daartoe willekeurig telkens vier leerlingen.

Bereken de kans dat in het eerst gekozen groepje

- a uitsluitend 15-jarigen zitten
- b niet de 15-jarige Floris uit Akkerdam zit
- c minstens één leerling uit Akkerdam zit
- d hoogstens twee leerlingen van 15 jaar zitten, die bovendien in Akkerdam wonen.

E65 Bij een kaartspel wordt gespeeld met 32 kaarten. Er zijn vier soorten kaarten: klaveren (zwart), schoppen (zwart), harten (rood) en ruiten (rood). Van elke soort wordt gespeeld met de 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer en aas. We trekken acht kaarten uit het spel.

Bereken de kans op

- a meer dan vier kaarten van één soort
- b vier klaverkaarten en minstens één schoppenkaart
- c minstens één schoppenkaart en geen enkele hartenkaart.



O66 Maud laat de schijf in figuur 6.16 vier keer draaien.

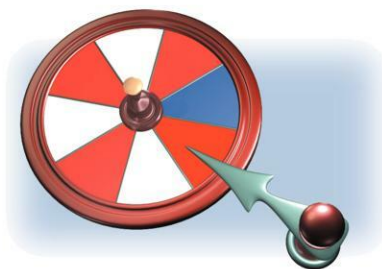
De kans dat ze twee keer rood krijgt is 0,375.

a Toon dit aan.

De kans dat ze geen enkele keer rood krijgt is 0,0625.

b Toon dit aan.

c Bereken de kans dat ze minstens één keer rood krijgt.



figuur 6.16

Theorie B De productregel en de complementregel

De complementregel gebruik je soms samen met de productregel. In de volgende situatie heb je te maken met een samengesteld kansexperiment.

Daan komt op weg van school naar huis drie verkeerslichten tegen die onafhankelijk van elkaar werken. De kansen dat deze verkeerslichten op rood staan zijn achtereenvolgens 0,2, 0,3 en 0,25.

Bij het berekenen van de kans dat Daan minstens één keer moet wachten gebruik je de complementregel in combinatie met de productregel.

$P(\text{Daan hoeft geen enkele keer te wachten}) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,75 = 0,42$, dus

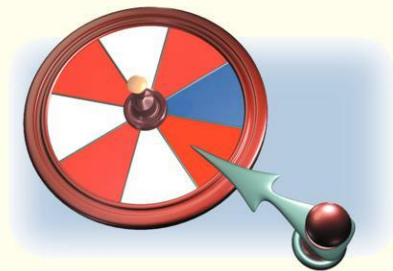
$P(\text{Daan moet minstens één keer wachten}) = 1 - P(\text{Daan hoeft geen enkele keer te wachten}) = 1 - 0,42 = 0,58$.

Voorbeeld

Annelie laat de schijf in figuur 6.17 zes keer draaien.

Bereken de kans dat ze

- a twee keer wit krijgt
- b minstens één keer blauw krijgt
- c hoogstens vier keer rood krijgt.



figuur 6.17

Uitwerking

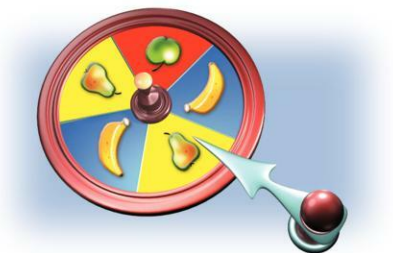
- a $P(\text{twee keer wit}) = \binom{6}{2} \cdot P(\text{w w } \cancel{\text{w}} \cancel{\text{w}} \cancel{\text{w}} \cancel{\text{w}}) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^4 \approx 0,322$
- b $P(\text{minstens één keer blauw}) = 1 - P(\text{geen enkele keer blauw}) = 1 - P(\cancel{\text{b}} \cancel{\text{b}} \cancel{\text{b}} \cancel{\text{b}} \cancel{\text{b}} \cancel{\text{b}}) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^6 \approx 0,551$
- c $P(\text{hoogstens vier keer rood}) = 1 - P(\text{vijf keer rood}) - P(\text{zes keer rood}) = 1 - \binom{6}{5} \cdot P(\text{r r r r r } \cancel{\text{r}}) - P(\text{r r r r r r}) = 1 - \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^5 \cdot \frac{4}{8} - \left(\frac{4}{8}\right)^6 \approx 0,891$

67 Raul laat de schijf in figuur 6.18 vijf keer draaien.



Bereken de kans dat hij

- a minstens één keer een appel krijgt
- b drie appels en twee peren krijgt
- c twee bananen krijgt
- d hoogstens drie bananen krijgt.



figuur 6.18

68


Dianne laat de schijf in figuur 6.18 twee keer draaien.

a Toon aan dat de kans op een appel en een banaan gelijk is aan $\frac{4}{25}$.

Bereken de kans op

- b geen enkele banaan
- c minstens één appel.

69


In de gemeenschappelijke ruimte van een studentenhuys zijn vier rookmelders aangebracht. De kans dat rookmelder I bij brand werkt, is 0,95. Voor melder II is dat 0,85, voor melder III is dat 0,88 en voor melder IV is dat 0,77. De rookmelders werken onafhankelijk van elkaar. In de gemeenschappelijke ruimte breekt brand uit.

Bereken de kans dat minstens één rookmelder afgaat.



A70


In Nederland is 1 op de 12 mannen kleurenblind. In een winkelcentrum wordt een enquête gehouden onder mannen.

Bereken de kans dat

- a van de eerste vijf ondervraagde mannen geen enkele kleurenblind is
- b minstens één van de eerste tien ondervraagde mannen kleurenblind is
- c één van de eerste zes ondervraagde mannen kleurenblind is.

A71


In ons land vinden regelmatig vogeltellingen plaats. Op grond van deze tellingen wordt voor elke vogelsoort de *trefkans* vastgesteld.

De trefkans is de kans dat je tijdens een telling in een willekeurige tuin in Nederland de soort aantreft.

Ga er in deze opgave van uit dat de trefkansen onafhankelijk zijn.

Tijdens een vogeltelling verzamelt Nienke de resultaten van de tellingen in 15 tuinen.

Bereken de kans dat in

- a hoogstens 13 tuinen een koolmees is aangetroffen
- b minstens twee tuinen een ekster is waargenomen
- c geen enkele tuin een vink is voorgekomen
- d geen enkele tuin zowel een koolmees als een vink is aangetroffen.

vogelsoort	koolmees	vink	ekster
trefkans	0,76	0,28	0,17

E72


Een fabrikant verpakt zijn zakken chips in dozen van veertig stuks. Om het merk te promoten, zitten in iedere doos drie zakken met een bioscoopbon. Een supermarktmedewerker pakt vijf van deze dozen en haalt uit elk van deze dozen twee zakken chips.

Bereken de kans dat hij minstens één zak met een bioscoopbon erin heeft.

Terugblik

De complementregel

Komt in de omschrijving van een gebeurtenis ‘minstens’, ‘hoogstens’, ‘meer dan’, ‘minder dan’ of ‘niet’ voor, dan kan de complementregel je rekenwerk besparen.

$$P(\text{gebeurtenis}) = 1 - P(\text{complement-gebeurtenis})$$

Het vaasmodel en de complementregel

In een loterij met 100 loten zijn vier prijzen te winnen.

Justin koopt vijf loten en Anjali koopt er zeven.

- De kans dat Justin minstens één prijs wint, bereken je met de complementregel.

$$P(\text{minstens één prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) = 1 - \frac{\binom{96}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 0,188$$

- De kans dat Justin hoogstens één prijs wint, bereken je met de somregel. Immers $P(\text{hoogstens één prijs}) = P(\text{geen prijs of één prijs})$.

$$P(\text{hoogstens één prijs}) = P(\text{geen prijs}) + P(\text{één prijs}) =$$

$$\frac{\binom{96}{5}}{\binom{100}{5}} + \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{96}{4}}{\binom{100}{5}} \approx 0,988.$$

- De kans dat Anjali meer dan één prijs wint, is

$$P(\text{meer dan één prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) - P(\text{één prijs}) =$$

$$1 - \frac{\binom{96}{7}}{\binom{100}{7}} - \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{96}{6}}{\binom{100}{7}} \approx 0,024.$$

De productregel en de complementregel

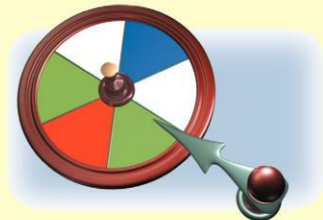
Het acht keer draaien van de schijf in de figuur hiernaast is een voorbeeld van het herhalen van een kansexperiment. Hierbij gebruik je de productregel om kansen te berekenen. Bij het acht keer draaien van de schijf is

$$P(\text{minstens twee keer blauw}) =$$

$$1 - P(\text{geen enkele keer blauw of één keer blauw}) =$$

$$1 - P(\text{geen enkele keer blauw}) - P(\text{één keer blauw}) =$$

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 - 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,395.$$



6.6 Pakken met en zonder terugleggen

073
☞ ⊗ *

In een vaas zitten acht rode en vier blauwe knikkers. Jasmine pakt drie knikkers uit de vaas.

a Bereken de kans dat Jasmine drie rode knikkers pakt.

Jasmine bedenkt dat deze kans ook op een andere manier berekend kan worden. Als ze de drie knikkers één voor één uit de vaas zou pakken, dan zou de kans op drie rode knikkers hetzelfde moeten blijven.

b Bereken de kans dat de eerste knikker die zij pakt rood is.

c Leg uit waarom de kans dat de tweede knikker weer een rode is, gelijk is aan $\frac{7}{11}$.

Wat is de kans dat de derde knikker ook een rode is?

d Bereken met behulp van de antwoorden van b en c de kans op drie rode knikkers. Is je antwoord anders dan bij vraag a?

e Jasmine berekent de kans op twee rode knikkers en één blauwe met $\frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10}$.
Wat vergeet zij?

f Bereken de kans op twee rode knikkers en één blauwe.

Teun pakt een knikker uit dezelfde vaas, noteert de kleur en legt de knikker terug. Dit doet hij drie keer achter elkaar.

g Bereken de kans dat Teun twee rode knikkers en één blauwe pakt.

Theorie A Het vaasmodel met en zonder terugleggen

Jade laat de schijf van figuur 6.19 vier keer draaien.

Ook dit experiment kun je omzetten naar een vaasmodel. In de vaas stop je

drie rode knikkers (de bananen),

twee witte knikkers (de appels) en

één blauwe knikker (de kersen).



figuur 6.19

Eén keer draaien met de schijf komt overeen met één

knikker uit de vaas pakken. Vier keer draaien komt overeen met vier keer een knikker uit de vaas pakken, maar je moet dan wel de knikker telkens terugleggen. De samenstelling van de vaas moet elk keer immers hetzelfde zijn. We zeggen dat we vier knikkers **met terugleggen** uit de vaas pakken.

Tot nu toe hadden we steeds te maken met het **vaasmodel zonder terugleggen**. Vier personen kiezen uit een groep van zes kun je vergelijken met vier keer een knikker uit een vaas pakken **zonder terugleggen**. Je kiest iemand namelijk niet twee keer.

Wanneer er staat ‘pak drie knikkers’, dan wordt bedoeld *zonder terugleggen*, tenzij er staat dat het *met terugleggen* is.

Bij pakken *met terugleggen* gebruik je de productregel.

Bij pakken *zonder terugleggen* heb je geleerd de kans te berekenen met de kansdefinitie van Laplace. Je kunt dit echter ook met de productregel doen.

Pak drie knikkers uit een vaas met tien rode en vijf witte knikkers. De kans op twee rode knikkers is:	
met terugleggen	zonder terugleggen
$P(2 \text{ rode}) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{10}{15}\right)^2 \cdot \frac{5}{15} \approx 0,444$	<p>met de productregel:</p> $P(2 \text{ rode}) = \binom{3}{2} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \approx 0,495$ <p>met de kansdefinitie van Laplace:</p> $P(2 \text{ rode}) = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} \approx 0,495$

Voorbeeld

- a** Bij een tv-programma wordt in drie opeenvolgende weken door loting een persoon uit het publiek aangewezen. Het publiek zit op vijftien even lange rijen.
Bereken de kans dat één keer iemand wordt aangewezen die op een van de eerste vier rijen zit.
- b** In een doos zitten vijftien enveloppen, waarvan er vier een prijs bevatten. Paul pakt drie enveloppen.
Bereken de kans dat Paul één enveloppe pakt met een prijs.

Uitwerking

- a** $P(\text{één keer iemand uit rij 1 of 2 of 3 of 4}) = \binom{3}{1} \cdot P(1 \text{ of } 2 \text{ of } 3 \text{ of } 4, \text{ overig, overig}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{4}{15} \cdot \left(\frac{11}{15}\right)^2 \approx 0,430$
- b** $P(\text{één prijs}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{10}{13} \approx 0,484$



R74 Zie voorbeeld b.

- a** De kans op één enveloppe met een prijs is berekend door gebruik te maken van $P(\text{één prijs}) = \binom{3}{1} \cdot P(\text{p } \cancel{\text{p}} \cancel{\text{p}})$.

Laat zien dat $P(\text{p } \cancel{\text{p}} \cancel{\text{p}}) = P(\cancel{\text{p}} \text{ p } \cancel{\text{p}}) = P(\cancel{\text{p}} \cancel{\text{p}} \text{ p})$.

- b** Bereken de gevraagde kans met behulp van de kansdefinitie van Laplace.
- c** Peter pakt zeven enveloppen. Hij wil de kans dat hij twee enveloppen met een prijs pakt berekenen met de productregel.
Leg uit waarom dat niet praktisch is.



75 In een vaas zitten 24 blauwe en 16 groene knikkers.

Kai pakt drie knikkers uit de vaas.

Bereken de kans op

- a** twee groene knikkers
b minstens één blauwe knikker.

Parisa pakt met terugleggen drie knikkers uit de vaas.

Bereken de kans op

- c** twee groene knikkers
d minstens één blauwe knikker.



76 In een klas zitten tien jongens en twaalf meisjes.

- a** Elk van de secties Frans, Duits, Engels en Nederlands verloot een boek in de klas.

Bereken de kans dat de vier boeken door meisjes gewonnen worden.

- b** De sectie verzorging verloot in de klas vier appeltaarten. Elke leerling kan hoogstens één taart winnen.

Bereken de kans dat de vier taarten door meisjes gewonnen worden.

- c** De leraar wiskunde kiest willekeurig een groepje van vier leerlingen uit de klas om samen een opdracht te maken.

Bereken de kans dat het groepje drie meisjes telt.

- d** De leraar kunstgeschiedenis verloot in de klas vier reproducties. Bij de verloting van elke reproductie mogen alle leerlingen meedoen.

Bereken de kans dat drie reproducties door meisjes worden gewonnen.



- 77** **a** Toon gooit acht keer met een dobbelsteen.

Bereken de kans dat hij minstens twee keer 4 ogen gooit.

- b** In een doos zitten 48 enveloppen, waarvan er acht een prijs bevatten. Ilsa pakt acht enveloppen uit de doos.

Bereken de kans dat Ilsa minstens twee prijzen wint.

A78
📅🔍*

In de wielersport wordt veel gecontroleerd op doping. In deze opgave bekijken we wielervedstrijden met 175 renners, waarvan 7 van de Jumbo wielerploeg.

- a Bij de Ronde van Vlaanderen worden door middel van loting vijf renners aangewezen voor een dopingcontrole. Bereken de kans dat geen enkele renner van Jumbo wordt aangewezen.
- b Bij een vijfdaagse wielervedstrijd wordt iedere dag door loting één renner aangewezen voor een dopingcontrole. Bereken de kans dat dit geen enkele keer een renner van Jumbo betreft.
- c Bij een tweedaagse wielervedstrijd worden op beide dagen door loting drie renners aangewezen voor de dopingcontrole. Bereken de kans dat op minstens één van beide dagen een wielervedstrijder van Jumbo naar de dopingcontrole moet.



E79
📅*

Een wiskundeleraar kiest in een klas van 24 leerlingen iedere les door loting drie leerlingen die een opgave van het huiswerk op het bord voor moeten doen. De leerlingen Bart, Sterre, Isa en Daphne maken zelden hun huiswerk en hopen dat ze niet worden aangewezen. Tijdens een hoofdstuk kansrekening zijn er tien lessen. Bereken de kans dat bij minstens één van de tien lessen minstens één van de genoemde leerlingen een opgave op het bord voor moet doen.

O80
📅🔍*

Bij een uitverkocht concert in de Ziggo Dome zijn 17 000 bezoekers, waarvan 13 600 vrouwen. Er worden door loting drie bezoekers gekozen voor een meet-and-greet met de artiest.

- a Licht toe dat je hier te maken hebt met pakken zonder terugleggen.
- b Bereken de kans dat alle drie de gekozen toeschouwers vrouwen zijn. Rond af op vijf decimalen.



Tim zegt: 13 600 van de 17 000 toeschouwers zijn vrouw en dat is precies 80%. De kans op drie vrouwen is dus $P(v \ v \ v) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,512$.

- c Licht toe dat Tim rekent alsof er sprake is van pakken met terugleggen.
- d Vergelijk je antwoord van b met dat van Tim. Waarom is het antwoord bijna hetzelfde?

Theorie B Kleine steekproef uit grote populatie

Bij veel kansexperimenten gaat het om pakken zonder terugleggen. Denk bijvoorbeeld maar aan de situatie in opgave 80.

Bij het pakken van drie knikkers uit de vaas hiernaast is

$$P(r r r) = \frac{12\,000}{30\,000} \cdot \frac{11\,999}{29\,999} \cdot \frac{11\,998}{29\,998}$$

$$\text{Omdat } \frac{12\,000}{30\,000} = 0,4 \text{ en } \frac{11\,999}{29\,999} \approx 0,400 \text{ en } \frac{11\,998}{29\,998} \approx 0,400$$

maakt het vrijwel niet uit of je de knikkers met of zonder terugleggen pakt.

Bij het berekenen van $P(r r r)$ mag je pakken zonder terugleggen opvatten als pakken met terugleggen.

Het voordeel hiervan is dat je dan krijgt $P(r r r) = 0,4^3 = 0,064$ en dat is veel eenvoudiger dan de berekening

$$P(r r r) = \frac{12\,000}{30\,000} \cdot \frac{11\,999}{29\,999} \cdot \frac{11\,998}{29\,998} = 0,06399\dots$$

Bij het pakken van drie knikkers uit een vaas met een zeer groot aantal knikkers maakt het voor de kansen weinig uit of het met of zonder terugleggen is.



Bij een kleine steekproef uit een grote populatie mag je pakken zonder terugleggen opvatten als pakken met terugleggen.

Voorbeeld

Van alle boeken die bij de grote webshop Convex worden verkocht, behoort 40% tot het genre fictie en 25% tot het genre kinderboeken.

Een boek kan niet tot beide genres behoren.

Bij Convex worden in een minuut tien boeken verkocht.

Bereken de kans dat

- a geen van deze boeken een kinderboek is
- b zeven van deze boeken tot het genre fictie en drie tot het genre kinderboeken behoren
- c vier van deze boeken tot het genre fictie en drie tot het genre kinderboeken behoren.

Uitwerking

$$\text{a } P(\text{geen kinderboeken}) = 0,75^{10} \approx 0,056$$

$$\text{b } P(7 \text{ fictie en } 3 \text{ kinderboeken}) = \binom{10}{7} \cdot 0,40^7 \cdot 0,25^3 \approx 0,003$$

$$\text{c } P(4 \text{ fictie, } 3 \text{ kinderboeken, } 3 \text{ overige}) = \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot 0,40^4 \cdot 0,25^3 \cdot 0,35^3 \approx 0,072$$

R81
☐ ⊗ *

Zie het voorbeeld.

- a** Waarom mag je deze situatie opvatten als pakken met terugleggen?
- b** Licht toe waar 0,75 bij vraag a van het voorbeeld vandaan komt.
- c** Licht toe waarom er in het voorbeeld bij vraag b met een combinatie wordt vermenigvuldigd en bij vraag a niet.
- d** Licht toe waar de factor $\binom{6}{3}$ bij vraag c van het voorbeeld vandaan komt. Licht ook de factor 0,35 toe.

82
☐

Zie het voorbeeld.

Bereken de kans dat

- a** al deze boeken tot het genre fictie of kinderboeken behoren
- b** twee van deze boeken kinderboeken zijn
- c** twee van deze boeken kinderboeken zijn en drie zowel geen fictie als geen kinderboek zijn.

83
☐ ⊗ *

Uit een onderzoek blijkt dat 30% van de jongeren een bijbaantje heeft in een supermarkt, 14% in een andere winkel en dat 39% van de jongeren helemaal geen bijbaan heeft. Bij een onderzoek naar de werkdruk die jongeren ervaren, worden twaalf jongeren ondervraagd.

Bereken de kans dat van deze jongeren

- a** de helft een bijbaan heeft
- b** er vijf in een supermarkt werken
- c** er minstens twee een bijbaan hebben die niet in een supermarkt of een andere winkel is
- d** er vier in een supermarkt werken, twee in een andere winkel en vijf geen bijbaan hebben.

In een klas van 30 leerlingen werken er negen bij een supermarkt en twaalf hebben geen bijbaan. Er wordt aan drie leerlingen gevraagd wat voor bijbaan ze hebben.

Bereken de kans dat

- e** één van deze leerlingen bij een supermarkt werkt
- f** minstens één van deze leerlingen bij een supermarkt werkt
- g** slechts één van deze leerlingen een bijbaan heeft, maar niet bij een supermarkt.

A84
☐ ⊗ *

Negen van de tien Nederlanders heeft minstens één vriend(in).

Van de in Nederland voorkomende vriendschappen is 44% opgedaan via studie/werk, 29% via de buurt en 12% via een sportvereniging.

We bekijken 15 willekeurig gekozen vriendschappen.

Bereken de kans dat er

- a** minstens één is opgedaan via een sportvereniging
- b** minstens twee op een andere manier zijn opgedaan dan via de drie genoemde mogelijkheden
- c** zeven zijn opgedaan via studie/werk en drie via de buurt.

A85
☐ ⊙ *

Van de Nederlandse huishoudens heeft 54% groene stroom. Nog eens 20% van de huishoudens overweegt over te gaan op groene stroom.

Bij een onderzoek worden 12 huishoudens benaderd.

Bereken de kans dat hiervan

- a** zes of zeven groene stroom hebben
- b** 25% overweegt over te gaan op groene stroom
- c** hoogstens twee huishoudens geen groene stroom hebben en dat ook niet overwegen.



In een straat met 83 huishoudens hebben 40 huishoudens groene stroom.

Nog eens 25 huishoudens overwegen over te gaan op groene stroom.

Bij een enquête worden drie huishoudens uit deze straat benaderd.

Bereken de kans dat hierbij

- d** twee huishoudens zijn met groene stroom en één huishouden overweegt om over te gaan op groene stroom
- e** minstens één huishouden is zonder groene stroom.

A86
☐ ⊙ *

Uit onderzoek blijkt dat 9% van de Nederlanders een muziekinstrument bespeelt.

- a** Bereken de kans dat twee willekeurig gekozen Nederlanders beiden geen muziekinstrument bespelen.
- b** Bereken de kans dat van drie willekeurig gekozen Nederlanders er één een muziekinstrument bespeelt.
- c** Bereken de kans dat van vijf willekeurig gekozen Nederlanders er hoogstens één een muziekinstrument bespeelt.
- d** Hoe groot moet een gezelschap zijn, zodat de kans dat hiervan minstens één iemand een muziekinstrument bespeelt groter is dan 95%?



In een bedrijf met 100 medewerkers bespelen er negen een muziekinstrument.

- e** Bereken de kans dat twee willekeurig gekozen medewerkers beiden een muziekinstrument bespelen.

Terugblik

Pakken met en zonder terugleggen

Pak je drie knikkers uit een vaas met 3 rode en 4 witte knikkers, dan kan dat met terugleggen, maar ook zonder terugleggen.

Voor $P(\text{één rode knikker})$ krijg je bij het pakken

met terugleggen

$$P(\text{één rode}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 \approx 0,420$$

Gebruik de productregel.

zonder terugleggen

- met de productregel (noemer telkens één kleiner)

$$P(\text{één rode}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \approx 0,514$$

- met de kansdefinitie van Laplace

$$P(\text{één rode}) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} \approx 0,514$$

Bij het testen van een nieuw medicijn moeten de proefpersonen elke dag een capsule innemen. Op een strip zitten twaalf van deze capsules. Vijf van de twaalf capsules bevatten een placebo (nepmedicijn). De andere zeven capsules bevatten het echte medicijn. De capsules met de placebo zijn willekeurig over de strip verdeeld. Bij het berekenen van de kans dat van vier proefpersonen er één de eerste dag begint met een placebo en drie met het echte medicijn heb je te maken met pakken met terugleggen.

$$\text{De kans is } \binom{4}{1} \cdot \frac{5}{12} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^3 \approx 0,331.$$

Bij het berekenen van de kans dat een proefpersoon op de eerste vier dagen één placebo inneemt en drie capsules met het echte medicijn heb je te maken met pakken zonder terugleggen.

$$\text{De kans is } \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{12}{4}} \approx 0,354.$$

Kleine steekproef uit grote populatie

Bij een kleine steekproef uit een grote populatie mag je pakken zonder terugleggen opvatten als pakken met terugleggen. Een toepassing van deze vuistregel zie je hieronder.

Van de Nederlanders heeft 12% contactlenzen. De kans dat van een willekeurige groep van 14 Nederlanders er niemand contactlenzen heeft, is $0,88^{14} \approx 0,167$.

De kans dat er twee contactlenzen hebben, is

$$\binom{14}{2} \cdot P(c \text{ c } \cancel{c} \dots \cancel{c}) = \binom{14}{2} \cdot 0,12^2 \cdot 0,88^{12} \approx 0,283.$$

Eindopdracht Diensten in het ziekenhuis

In de beginopdracht heb je gezien hoe kansrekening in de rechtspraak tot paradoxale situaties kan leiden. In de eindopdracht bekijk je hoe kleine veranderingen in statistische gegevens andere conclusies tot gevolg kunnen hebben.

Bij het onderzoek voor de rechtszaak tegen Lucia de Berk werd gekeken naar diensten met verdachte sterfgevallen. Het aantal verdachte sterfgevallen in de diensten van Lucia de Berk werd vergeleken met alle andere diensten. Onderzocht werd hoe groot de kans was op een bepaald aantal verdachte sterfgevallen in het geval er sprake zou zijn van toeval. Het bepalen van wat verdachte sterfgevallen waren, gebeurde op een subjectieve manier. Bovendien bleken de gegevens die werden aangeleverd niet altijd betrouwbaar. Aan de hand van het volgende voorbeeld is te zien dat dit de kansberekeningen behoorlijk kan beïnvloeden.

Op een afdeling van een ziekenhuis zijn in een bepaalde periode in totaal 450 diensten gedraaid. Tijdens 120 van deze diensten was verpleegkundige Florence aan het werk. Er blijken 7 verdachte gebeurtenissen te zijn geweest tijdens de 450 diensten, allemaal tijdens de diensten van Florence.

- De kans dat alle 7 verdachte gebeurtenissen tijdens een dienst van Florence waren, is kleiner dan 1 op 10 000.
Laat dit met een berekening zien.

Er is een administratieve fout gemaakt. Slechts 5 van de 7 verdachte gebeurtenissen blijken tijdens een dienst van Florence te zijn geweest.

- Bereken de kans dat er bij toeval minstens 5 van de 7 verdachte gebeurtenissen tijdens een dienst van Florence waren.
Laat zien dat deze kans bijna 200 keer zo groot is als de eerder berekende kans.
- Waarom is het in deze situatie beter om de kans op minstens 5 verdachte gebeurtenissen te berekenen, dan de kans op precies 5 verdachte gebeurtenissen?

Nog later ontdekt men dat er niet alleen administratieve fouten zijn gemaakt, maar ook verkeerde inschattingen. Er worden nog eens 6 gebeurtenissen als verdacht aangemerkt. Florence was bij geen van deze gebeurtenissen betrokken.

- Bereken op basis van deze nieuwe gegevens de kans dat minstens 5 verdachte gebeurtenissen tijdens een dienst van Florence waren.
- Hoeveel keer zo groot is de laatst berekende kans als de eerste kans die je in deze eindopdracht hebt berekend?

Diagnostische toets

6.1 Kansen

- 1** Fien gooit met een gewone dobbelsteen en met een achthvaksdobbelsteen.

Bereken exact de kans dat

- a** de som 8 is
- b** de som minder dan 4 is
- c** het verschil 2 is
- d** de aantallen gelijk zijn.

- 2** Anne Geeke gooit met vier viervlaksdobbelstenen.

Bereken exact de kans dat

- a** het product 16 is
- b** de som meer dan 13 is.

6.2 Empirische kansen

- 3** In de bovenbouw van het Noorder College is van elke leerling de lengte gemeten. De resultaten staan in de tabel.

Bereken de kans dat op deze school een willekeurig gekozen bovenbouwleerling

- a** in de middelste lengteklasse zit
- b** die 180 cm of langer is in de vierde klas zit
- c** uit de vierde of vijfde klas 160 cm of langer is
- d** 160 cm of langer is en in de vijfde of zesde klas zit.

De gebeurtenissen 'leerling zit in klas 5' en 'leerling behoort tot lengteklasse [180, 200]' zijn afhankelijke gebeurtenissen.

- e** Toon dit aan.

LEERLINGEN BOVENBOUW NOORDER COLLEGE

lengte in cm	klas 4	klas 5	klas 6	
[140, 160)	15	5	3	23
[160, 180)	59	49	51	159
[180, 200)	6	12	15	33
	80	66	69	215

6.3 Het vaasmodel en de productregel

- 4** In een vaas zitten vijf rode, zeven witte en negen blauwe knikkers.

Marion pakt zes knikkers uit de vaas.

Bereken de kans dat zij

- a** van elke kleur twee knikkers pakt
- b** geen blauwe knikkers pakt
- c** twee rode knikkers pakt
- d** alleen maar blauwe knikkers pakt.

- 5** Bij een loterij zijn 40 loten verkocht. Er is één hoofdprijs, er zijn zes tweede prijzen en tien derde prijzen. Manon heeft vier loten gekocht.

Bereken de kans dat Manon

- a** geen enkele prijs wint
- b** de hoofdprijs en één derde prijs wint
- c** alleen twee tweede prijzen wint.

- 6** Masha gooit met vier dobbelstenen.
Bereken de kans dat ze
a in totaal 24 ogen gooit
b geen enkele zes gooit.

6.4 De somregel

- 7** Op een woensdagmorgen staan in een dorp 160 gft-containers langs de weg, waarvan 10% afval bevat dat er niet in thuishoort.
De gemeentedienst inspecteert de inhoud van 20 van deze containers.
Bereken de kans dat van hoogstens twee van de geïnspecteerde containers de inhoud niet in orde is.

- 8** Jitske laat de schijf in de figuur hiernaast zeven keer draaien.
Bereken de kans dat de pijl
a vijf keer rood en twee keer wit aanwijst
b minstens zes keer niet op blauw komt
c hoogstens twee keer op wit komt.



6.5 De complementregel

- 9** Bij een loterij zijn 120 loten verkocht. De loten kosten 5 euro per stuk. Er is een hoofdprijs van 100 euro en er zijn vier tweede prijzen van 25 euro. Nicolien heeft zes loten gekocht.
Bereken de kans dat zij
a minstens één prijs wint
b 100 euro wint
c geen verlies lijdt bij deze loterij
d minder dan 100 euro wint.
- 10** Tijdens het productieproces ondergaat een stoel drie bewerkingen. De kans dat er iets mis gaat bij de eerste bewerking is 0,05, bij de tweede bewerking is dat 0,09 en bij de derde 0,03.
Bereken de kans dat er bij minstens één bewerking iets misgaat.

6.6 Pakken met en zonder terugleggen

- 11** De sectie wiskunde van een school bestaat uit negen mannen en zeven vrouwen.
a Voor een cursus worden willekeurig vijf sectieleden gekozen.
Bereken de kans dat er drie vrouwen worden gekozen.
b Elk jaar wordt door loting de sectievoorzitter aangewezen.
Bereken de kans dat in vijf opeenvolgende jaren drie keer een vrouwelijke sectievoorzitter uit de bus komt.
- 12** Van de beroepsbevolking van Leiden heeft 45% een hoog en 29% een middelbaar opleidingsniveau.
Uit deze groep worden willekeurig negen inwoners gekozen.
Bereken de kans dat vier een hoog en drie een middelbaar opleidingsniveau hebben.

7

Statistiek met de computer

Wat leer je?

- In een spreadsheet data invoeren en berekeningen maken.
- Diagrammen maken met een spreadsheetprogramma.
- Informatie zoeken met filteren en sorteren in een grote dataset.
- Gegevens met behulp van formules combineren tot nieuwe gegevens.
- Met draaitabellen gegevens van een grote dataset samenvatten.
- Draaigrafieken maken.



Beginopdracht Olympische Spelen 2016

Aan de Olympische Zomerspelen in Rio de Janeiro 2016 deden meer dan 11 000 sporters uit 205 landen mee. Van al deze sporters is informatie verzameld.

Open het bestand *SportersRio2016*. Het bestand is gesorteerd op land, geboortedatum en geslacht. Dat is in een bepaalde volgorde gedaan.

- Onderzoek welke volgorde dat is.
- Welke sport beoefent de oudste sporter uit China?
- Wat is het gewicht van de enige Nederlandse taekwondo-deelnemer?
- Hoe heet de langste vrouw van het damesbasketbalteam uit Senegal?

Je kunt aantallen sporters tellen door te kijken naar de nummers van de rijen, die helemaal links worden weergegeven.

- Van hoeveel sporters is er informatie beschikbaar?
- Reken na dat 249 sporters uit Nederland kwamen. Hoeveel sporters kwamen uit België?

André vraagt zich af hoe de aantallen mannelijke en vrouwelijke sporters uit Nederland zich verhouden tot de aantallen uit België. Hij stelt de volgende kruistabel op.

	Nederland	België	totaal
man			
vrouw			
totaal			

- Neem de tabel over en vul in.
- Had Nederland procentueel gezien meer of minder vrouwelijke sporters dan België?

Voorkennis Centrummaten en boxplots

Theorie A Centrummaten

Om data te karakteriseren met één getal kun je een centrummaat gebruiken.

CENTRUMMATEN

gemiddelde	Het gemiddelde is $\frac{\text{som van de waarnemingsgetallen}}{\text{totale frequentie}}$.
mediaan	Schrijf de getallen in volgorde van grootte. De mediaan is het middelste getal bij een oneven aantal getallen. Bij een even aantal getallen is de mediaan het gemiddelde van de middelste twee getallen.
modus	De modus is het waarnemingsgetal met de grootste frequentie. Zijn er twee of meer waarnemingsgetallen met de grootste frequentie, dan is er geen modus.

Zijn er bij een statistisch onderzoek veel verschillende waarnemingsgetallen, dan maak je meestal een indeling in klassen. Bij de klasse $[20, 25)$ doet de linkergrens 20 mee, maar de rechtergrens 25 niet. Het klassenmidden is 22,5.

Om bij een klassenindeling het gemiddelde te schatten, maak je gebruik van de klassenmiddens. Je kunt bij een klassenindeling de mediaan niet meer berekenen, maar je kunt wel aangeven in welke klasse de mediaan ligt. In plaats van de modus heb je bij een klassenindeling te maken met de modale klasse.

- 1** Van een groep museumbezoekers is de leeftijd genoteerd. De resultaten staan in de tabel hiernaast.

- a** Geef een schatting van de gemiddelde leeftijd. Rond af op één decimaal.
- b** In welke klasse ligt de mediaan?
- c** Geef de modale klasse.

leeftijd	frequentie
$[0, 15)$	12
$[15, 30)$	10
$[30, 45)$	13
$[45, 60)$	24
$[60, 75)$	21
$[75, 90)$	2

Theorie B Boxplots en spreidingsmaten

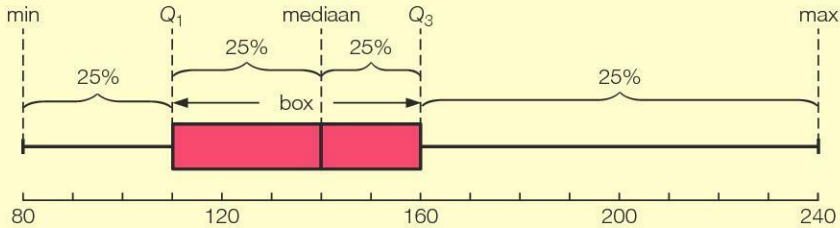
Een boxplot is een diagram dat de spreiding van data in beeld brengt.

Alleen bij een kwantitatieve variabele kun je een boxplot maken.

De mediaan verdeelt een serie waarnemingsgetallen in twee even grote groepen. Van elk van deze groepen kun je weer de mediaan bepalen.

De mediaan van de eerste helft heet het eerste kwartiel. Notatie Q_1 .

De mediaan van de tweede helft heet het derde kwartiel. Notatie Q_3 .



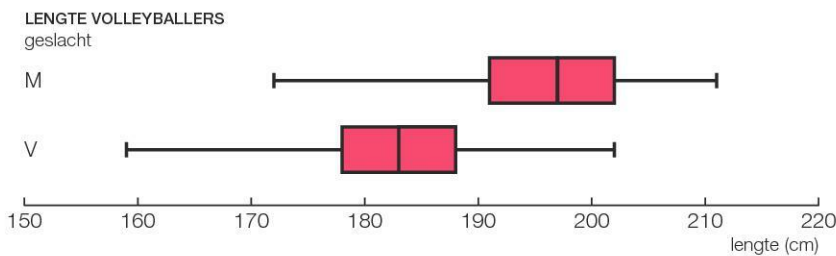
figuur 7.1

Verder ken je de volgende spreidingsmaten:

- spreidingsbreedte = maximum – minimum
- interkwartielafstand = $Q_3 - Q_1$
- standaardafwijking σ .

De standaardafwijking geeft een indruk van de gemiddelde afwijking van de waarnemingsgetallen tot het gemiddelde.

- 2** Op de Olympische Spelen 2016 in Rio de Janeiro namen aan het volleybaltoernooi zowel bij de mannen als de vrouwen 192 sporters deel. Voor beide geslachten is de lengte verwerkt in boxplots. Zie de figuur hieronder.



figuur 7.2

- Hoeveel vrouwen zijn kleiner dan 1,83 meter?
- Frits beweert dat de langste vrouw langer is dan de meeste mannen. Licht zijn uitspraak toe.
- Is de spreidingsbreedte van de lengte groter bij de mannen of de vrouwen? Licht toe.

7.1 Werken met een spreadsheet

Theorie A Data invoeren

Een **spreadsheet** of (**digitaal**) **rekenblad** bestaat uit cellen in rijen en kolommen. Elke cel kan een getal, een tekst of een formule bevatten. Formules maken het mogelijk om bijvoorbeeld bij een kolom het gemiddelde te berekenen en dit weer te geven in een cel. Een spreadsheet is dynamisch. Dat wil zeggen dat de uitkomsten van formules direct opnieuw worden berekend als je de waarde in een cel verandert.

In dit hoofdstuk werk je met een spreadsheetprogramma, zoals bijvoorbeeld Microsoft Excel of Google Sheets.

De modules en de bestanden die in dit hoofdstuk genoemd worden vind je in Getal & Ruimte online.

[► ICT] Neem de module **Data invoeren** door.



De tabel hieronder gaat over aantallen verkochte woningen in de gemeente Utrecht. Open een nieuw rekenblad en voer de tabel in. Gebruik zo mogelijk de vulgreep. Sla het bestand op onder de naam *WoningVerkoopUtrecht*. Je hebt het bestand later nog nodig.

	A	B	C	D	E
1	jaar	1e kwartaal	2e kwartaal	3e kwartaal	4e kwartaal
2	2008	1024	1123	1292	1252
3	2010	772	743	881	964
4	2012	630	767	864	889
5	2014	724	484	710	882
6	2016	1204	1016	1383	1474
7	2018	1147	1239	1472	1404

figuur 7.3

Theorie B Rekenen met een spreadsheet

[► ICT] Neem de module **Formules en verwijzingen** door.

Het berekenen van kwartielen met een spreadsheetprogramma kan iets andere antwoorden opleveren dan met de methode die je in de onderbouw hebt geleerd. Voor grote aantallen gegevens, zoals in dit hoofdstuk, zijn eventuele verschillen erg klein.

2
☐◎*

In het bestand *ProefwerkScores* zie je voor elke leerling van een klas hoeveel punten hij of zij gehaald heeft voor elk van de vragen van een proefwerk. In rij 2 zie je de maximale score per vraag.

- a Bereken in cel Y2 hoeveel punten er maximaal gescoord konden worden bij dit proefwerk. Welke functie heb je gebruikt?
- b Bereken in cel Y3 hoeveel punten Joris gescoord heeft bij dit proefwerk. Gebruik de vulgreep in kolom Y om de scores van de andere leerlingen te berekenen. Welke leerling heeft de meeste punten gehaald en welke leerling de minste?

Belangrijke functies
SOM
AANTAL
GEMIDDELDE
MEDIAAN
MIN
MAX
STDEV.P
KWARTIEL of
KWARTIEL.EXC
AFRONDEN

Het cijfer voor dit proefwerk wordt berekend met de formule

$$\text{cijfer} = \frac{\text{score}}{\text{max score}} \times 9 + 1.$$

- c Bereken in cel Z3 het cijfer dat Joris voor dit proefwerk heeft gehaald. Gebruik in je formule een absolute verwijzing naar cel Y2 en een relatieve verwijzing naar cel Y3.
- d Pas de celeigenschappen van Z3 aan, zodat het cijfer wordt weergegeven met één decimaal. Gebruik de vulgreep om de cijfers van de andere leerlingen te berekenen.

Gebruik F4 voor het wisselen tussen absolute en relatieve verwijzingen.

De docent is geïnteresseerd in de statistieken van de proefwerkresultaten.

- e Bereken voor elke vraag het gemiddelde, de standaardafwijking, de laagste score, Q_1 , de mediaan, Q_3 en de hoogste score. Doe dit ook voor de totaalscores en de cijfers. Sla het bestand op onder de naam *ProefwerkMaten*. Je hebt het bestand later nog nodig.
- f Gebruik formules om de volgende vragen te beantwoorden.
 - Bij welke vragen is de interkwartielafstand van de scores 2,5?
 - Bij welke vragen is het gemiddelde gelijk aan de mediaan?

A3
☐◎*

In het bestand *CijfersKlas* zie je een overzicht van toetscijfers van een klas. Het eindcijfer wordt bepaald door een gewogen gemiddelde te nemen van de cijfers. In rij 1 zie je hoe vaak elke toets meetelt voor het eindcijfer. Het eindcijfer wordt afgerond op één decimaal.

- a Bereken voor elke leerling het eindcijfer. Denk aan het gebruik van relatieve en absolute verwijzingen. Gebruik de functie AFRONDEN om de eindcijfers op één decimaal af te ronden.
- b Bereken in cel J25 het gemiddelde eindcijfer van de klas. Pas de celeigenschappen van deze cel aan, zodat het gemiddelde wordt weergegeven in twee decimalen.
- c Als de laatste toets niet 5, maar 6 keer meetelt, dan is het gemiddelde eindcijfer van de klas hoger.
Hoeveel scheelt het met het gemiddelde van vraag b?

Theorie C Diagrammen

Onderzoeksgegevens worden vaak verzameld in tabellen. Tabellen geven echter niet altijd een goed overzicht van de gegevens. Daarom worden bij de tabellen diagrammen gemaakt. Een diagram vat de gegevens op een grafische manier samen. Bekende diagrammen zijn lijn-, staaf-, stapel- en cirkeldiagrammen. Een diagram moet snel inzicht geven in de gegevens. Zorg bij het maken van diagrammen dus voor

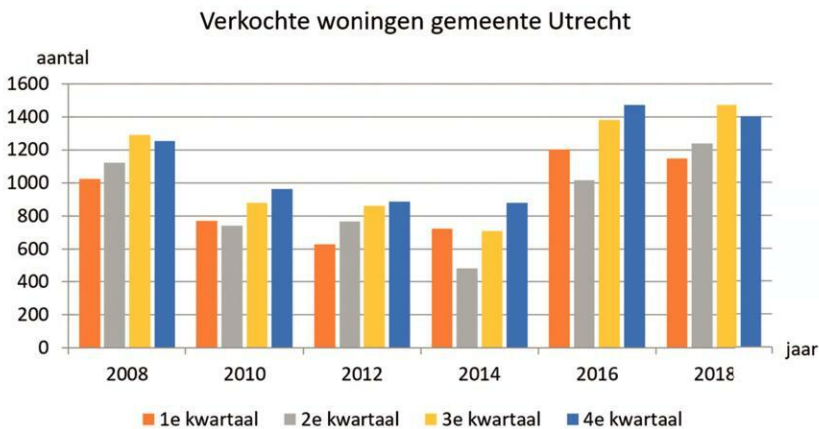
- een passende titel
- duidelijke informatie bij de assen en/of een legenda
- een geschikte schaalverdeling met eventueel roosterlijnen
- logisch kleurgebruik.

[▶ICT] [Neem de module Diagrammen door.](#)

Bij het namaken van diagrammen in de volgende opgaven is het belangrijk dat de opzet gelijk is. Je gebruikt dus hetzelfde soort diagram, dezelfde variabelen, labels en schaalverdelingen. Details als lettertype, kleuren, posities en afstanden mogen verschillen, zolang het diagram maar duidelijk is. Raadpleeg bij twijfel je docent.



4 Open het bestand *WoningVerkoopUtrecht* van opgave 1 en maak bij de gegevens een samengesteld staafdiagram, zoals in de figuur hieronder.

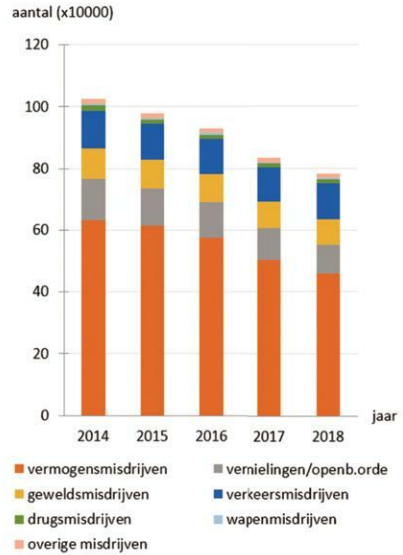


figuur 7.4

In het bestand *Criminaliteit* staan cijfers over geregistreerde criminaliteit in Nederland in de jaren 2010 tot en met 2018.

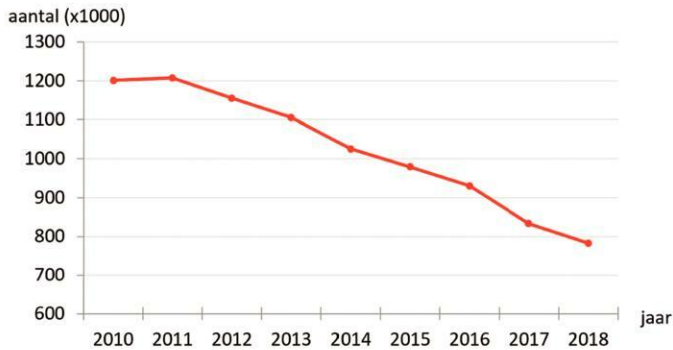
- Maak voor de jaren 2014 tot en met 2018 het stapeldiagram van figuur 7.5.
- Het lijndiagram in figuur 7.6 geeft de ontwikkeling weer van het totaal aantal misdrijven in de periode 2010-2018. Maak dit diagram.
- Het diagram in figuur 7.7 geeft weer hoe de in 2018 gepleegde misdrijven zijn verdeeld over de verschillende categorieën. Maak dit diagram.

Aantallen geregistreerde misdrijven in Nederland



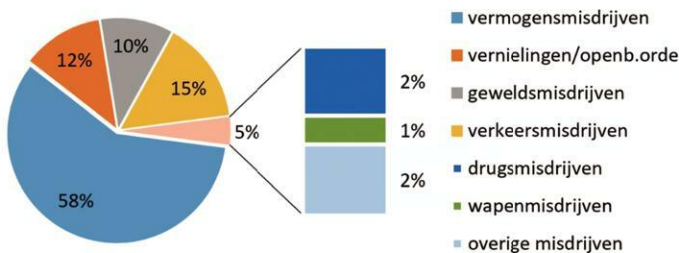
figuur 7.5

Ontwikkeling misdrijven in Nederland



figuur 7.6

Verdeling misdrijven in 2018



figuur 7.7

Theorie D Boxplots en uitbijters

Je hebt geleerd dat een boxplot de spreiding van data in beeld brengt. Boxplots die met de computer gemaakt zijn, worden meestal verticaal weergegeven.

Soms worden niet alle gegevens in de boxplot opgenomen. Waarden die ver van de box van de boxplot liggen, worden **uitschieters** of **uitbijters** genoemd. Deze worden als losse punten buiten de boxplot getekend.

Een veelgebruikte vuistregel is:

Een uitbijter is een waarnemingsgetal dat meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand onder het eerste of boven het derde kwartiel ligt.

[►ICT] Neem de module **Boxplots** door.



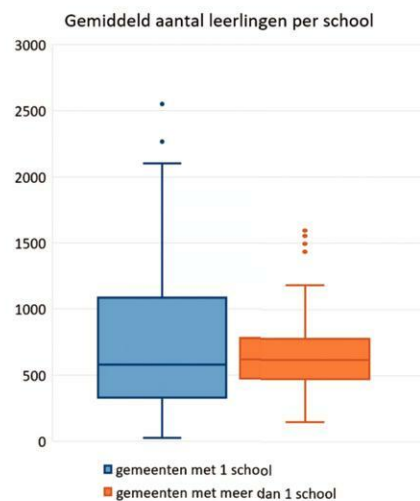
6 Bij een voetbalclub is bijgehouden hoe vaak iedere speler de bal kan hooghouden. De trainer heeft berekend dat $Q_1 = 10$, $Q_3 = 24$ en mediaan = 20.

- a Clara kan de bal 56 keer hooghouden.
Bereken of deze waarde volgens de vuistregel een uitbijter is.
- b Sommige jonge voetballers kunnen de bal maar één keer hooghouden.
Waarom zijn deze waarden volgens de vuistregel geen uitbijters?



7 In het bestand *MiddelbareScholen* staan gegevens over het aantal leerlingen en het aantal middelbare scholen per gemeente in Nederland.

- a Op welke variabele is het bestand gesorteerd?
- b Sorteert het bestand op het aantal leerlingen.
- c Maak de boxplot bij het aantal leerlingen van de 20 gemeenten met het grootste aantal leerlingen. Welke gemeenten horen bij de uitbijterpunten?
- d Bereken in kolom D voor elke gemeente het gemiddeld aantal leerlingen per school.
- e De boxplots hiernaast geven informatie over het gemiddeld aantal leerlingen per school in gemeenten met één school en gemeenten met meer dan één school.
Maak dit diagram.
- f Noem een opvallend verschil tussen de twee boxplots.



figuur 7.8

Twee boxplots vergelijken

Voor het bepalen van de grootte van het verschil bij kwantitatieve variabelen kun je twee boxplots vergelijken.

Het gedeelte tussen het eerste het derde kwartiel heet de box.

Hanteer de volgende vuistregels.

- Als de boxen elkaar niet overlappen, dan zeggen we *het verschil is groot*.
- Als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot ligt buiten de box van de andere boxplot, dan zeggen we *het verschil is middelmatig*.
- In alle andere gevallen zeggen we *het verschil is gering*.



8 Het bestand *SportersRio2016* bevat de gegevens van 11 538 sporters die deelnamen aan de Olympische Spelen 2016 in Rio de Janeiro.

- Van hoeveel sporters staat de lengte niet in de dataset?
- Maak in één figuur voor zowel mannen als vrouwen een boxplot bij de variabele lengte.
- Mannen vanaf een bepaalde lengte worden als uitbijterpunten weergegeven in de boxplot.
Welke lengte is dat? Om hoeveel mannen gaat het hier?
- Er is één opvallende uitbijter bij de lengte van de vrouwen.
Zou deze lengte kunnen kloppen?
- Zie het informatief hierboven.
Is het verschil in lengte tussen mannelijke en vrouwelijke sporters groot, middelmatig of gering?
- Bepaal door het vergelijken van twee boxplots hoe groot het verschil in gewicht tussen mannelijke en vrouwelijke sporters is.

Pas op met uitbijters.
Dit kunnen fouten in de dataset zijn.



A9 Het bestand *VerwijzingenHalt* bevat gegevens over het aantal verwijzingen per gemeente naar de organisatie Het Alternatief (HALT). Het doel van deze organisatie is om jeugddelinquenteit te voorkomen en te bestraffen. Een verwijzing naar HALT wordt meestal door de politie of een leerplichtambtenaar gedaan.

Suzanne wil onderzoeken hoe groot het verschil in het aantal verwijzingen naar HALT is tussen grote en kleine gemeenten. Ze berekent eerst voor elke gemeente de verwijzingsgraad. Dat is het aantal verwijzingen naar HALT per 10000 inwoners. Daarna vergelijkt ze de boxplot met de verwijzingsgraad van de 50 grootste gemeenten met die van de 50 kleinste gemeenten.

Voer het onderzoek van Suzanne uit. Welke conclusie trekt ze? Gebruik het informatief hierboven.

7.2 Werken met datasets



Gebruik het bestand *SportersRio2016*.

Bereken het gemiddelde gewicht van de Japanse voetballers.

Theorie A Zoeken in een dataset

Om zonder problemen gebruik te kunnen maken van een aantal geavanceerde mogelijkheden van spreadsheetprogramma's, is het belangrijk dat je werkt met een zogenaamde **nette dataset**. Bij een nette dataset zijn de kolommen voorzien van kolomkoppen en zijn de cellen die grenzen aan de dataset leeg. Bovendien staan gegevens die bij elkaar horen steeds in één rij. De informatie in zo'n rij heet een **record**. Een nette dataset geeft je onder andere de mogelijkheid gegevens te **sorteren** en te **filteren**. Je kunt dan bijvoorbeeld snel het gemiddelde van een deelgroep berekenen.

[▶ ICT] Neem de module **Zoeken in een dataset** door.

Maak je gebruik van Excel, zet dan bij de volgende opgaven eerst de dataset om in een Tabel en maak de totaalrij aan.

Afspraak

Geef bij de beantwoording van de vragen steeds aan

- in welke kolommen je welke filters gebruikt
- in welke kolommen je op welke manier sorteert
- welke functies je gebruikt.



De volgende vragen gaan over het weer in De Bilt. Gebruik het bestand *WeerHistorie*, dat een nette dataset bevat met weergegevens gemeten door het weerstation in De Bilt.

- Hoeveel variabelen bevat de dataset?
- Van hoeveel dagen bevat de dataset gegevens?
- Op welke datum was de gemiddelde temperatuur het hoogst?
- Op hoeveel dagen was het gemiddeld 0°C of kouder?
- Wat is het totaal aantal uren zonneschijn dat is gemeten in de jaren 2016, 2017 en 2018 samen?
- Een dag wordt tropisch genoemd als de maximumtemperatuur 30°C of hoger is.
Wat was de gemiddelde temperatuur van alle tropische dagen? Rond af op twee decimalen.
- Het jaar 1965 was één van de natste jaren sinds de neerslag wordt gemeten.
Hoeveel mm neerslag viel er in dat jaar in totaal? Op welke dag regende het dat jaar het langst?

12



Open het bestand *SportersRio2016*.

- Welke sport beoefent de oudste sporter? En de jongste?
- Hoeveel procent van de sporters was 16 jaar of jonger?
- Wat was de gemiddelde leeftijd van de Nederlandse sporters? Rond af op gehelen.
- De sporters die meedoen aan de triatlon hebben een lager gemiddeld gewicht dan de roeiers.
Hoeveel kg scheelt het? Rond af op gehelen.
- Volgens een journalist zijn de vrouwelijke Nederlandse sporters gemiddeld 4 cm langer dan de vrouwelijke sporters uit andere landen. Klopt dit? En hoe zit dat bij de mannelijke sporters?
- Hoeveel procent van de gouden medailles werd gewonnen door sporters uit de Verenigde Staten?



A13



In het bestand *StudentenEnquete* zijn gegevens verzameld van 271 studenten.

- De gemiddelde lengte van de studenten in groep D is groter dan die van de studenten in groep A.
Hoeveel cm scheelt het? Rond af op gehelen.
- Hoeveel procent van de studenten heeft een linkshandige ouder?

Het gemiddeld aantal uren slaap per etmaal van de studenten zie je in de kolom UrenSlaap. Studenten die gemiddeld minder dan 8 uur slapen hebben een korte slaapduur.

- Neem de kruistabel over en vul in.
- Welk percentage van de vrouwelijke studenten heeft een korte slaapduur? Is dit groter of kleiner dan het percentage bij de mannelijke studenten?

	slaapduur		totaal
	kort	lang	
man			
vrouw			
totaal			

Zie het informatief op de volgende bladzijde.

- Onderzoek met behulp van 95%-betrouwbaarheidsintervallen of het verschil in gemiddeld aantal uren slaap tussen mannelijke en vrouwelijke studenten significant is.
- Luc ziet dat studenten die uit een plattelandsdorp komen vaker uitwonend zijn dan studenten die uit een grote stad komen. Onderzoek met behulp van 95%-betrouwbaarheidsintervallen of het verschil in woonsituatie significant is.

Betrouwbaarheidsintervallen

Om twee groepen met elkaar te kunnen vergelijken, kun je gebruik maken van betrouwbaarheidsintervallen.

- Voor een populatiegemiddelde is het 95%-betrouwbaarheidsinterval gelijk aan $\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$. Hierin is $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, S de steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.
- Voor een populatieproportie is het 95%-betrouwbaarheidsinterval gelijk aan $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$. Hierin is $\hat{p}$ de steekproefproportie en σ de standaardafwijking.

Voor de standaardafwijking geldt de formule $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$. Hierin is n de steekproefomvang.

We noemen het verschil tussen twee groepen significant als de 95%-betrouwbaarheidsintervallen elkaar niet overlappen.

O14


Bij een enquête onder de gasten van hotel De Negensprong is gevraagd naar de mate van tevredenheid over het ontbijtbuffet. Men kon daarbij kiezen uit de volgende antwoorden:

slecht matig voldoende ruim voldoende goed

In het bestand *Ontbijtbuffet* zijn de antwoorden op deze vraag in een tabel verzameld.

Bij nader inzien wil de hoteleigenaar alleen onderscheid maken tussen positieve, neutrale en negatieve beoordelingen.

Daarom wil hij de antwoorden 'ruim voldoende' en 'goed' vervangen door 'Positief' en de antwoorden 'matig' en 'slecht' door 'Negatief'. De beoordeling 'voldoende' beschouwt hij als een neutraal antwoord en zal hij dus 'Neutraal' willen noemen. De hoteleigenaar bedenkt de volgende aanpak.

- 1 Maak een nieuwe kolom aan door in cel D1 Beoordeling te typen.
- 2 Filter de kolom Ontbijtbuffet op 'ruim voldoende' en 'goed', zet in de eerste cel van de nieuwe kolom 'Positief' en gebruik de vulgreep om de kolom te vullen.
- 3 Filter de kolom Ontbijtbuffet op 'matig' en 'slecht', zet in de eerste cel van de nieuwe kolom 'Negatief' en gebruik de vulgreep om de kolom te vullen.
- 4 Vul op dezelfde wijze de juiste cellen van de nieuwe kolom met 'Neutraal'.

Onderzoek of deze aanpak werkt.

Theorie B Hercoderen en formules

In opgave 14 heb je een nieuwe variabele gemaakt, die gebaseerd is op een bestaande variabele. Dit proces wordt het **hercoderen** van een variabele genoemd.

Je kunt ook een nieuwe variabele toevoegen die waarden van verschillende bestaande variabelen combineert. In opgave 13 heb je gebruikgemaakt van een getalfilter om onderzoek te doen naar de kortslapers. Wil je onderzoek doen onder de uitwonende, vrouwelijke kortslapers dan moet je nóg twee filters juist instellen. Het is dan handig te beschikken over een nieuwe variabele die aangeeft of een student al dan niet een uitwonende, vrouwelijke kortslaper is. Je hebt daarna slechts één filter nodig om deze groep te bekijken. In de volgende module wordt uitgelegd hoe je dit doet.

[> ICT] [Neem de module **Hercoderen** door.](#)

15 Gebruik het bestand *SportersRio2016*.



Voeg een variabele *AtletiekVrouwBenelux* toe, die met de waarden Ja/Nee aangeeft of een sporter een vrouw uit de Benelux is die aan atletiek doet. Denk aan de afspraak op bladzijde 113.

Geef het in je uitwerking aan als je een nieuwe variabele toevoegt.

16 Ga uit van het bestand *SportersRio2016*.



- a** Voeg een variabele *Medailles* toe, die aangeeft hoeveel medailles een sporter in totaal won.
- b** Hoeveel sporters wonnen meer dan één medaille?
Hoeveel van hen wonnen ten minste één gouden medaille?
- c** Welke sporter won de meeste medailles?

17 Bij koud weer voelt het op een dag met veel wind kouder aan dan op een dag met weinig wind. Om de zogenaamde gevoelstemperatuur te berekenen kan de formule $G = 1,41 - 1,162W + 0,98T + 0,0124W^2 + 0,0185WT$ worden gebruikt. Hierin is T de temperatuur in °C en W de windsnelheid in m/s.



Open het bestand *WeerHistorie*.

Onderzoek met behulp van de gemiddelde temperatuur en de gemiddelde windsnelheid welke dag het koudst aanvoelde.

A18
☐◎*

Ga uit van de gegevens in het bestand *SportersRio2016*.

Gebruik in deze opgave alleen de gegevens van sporters waarvan zowel het gewicht als de lengte in de dataset staat.

a Ga na dat dit voor 10 858 sporters het geval is.

De BMI is een maat die vaak gebruikt wordt om te beoordelen of een persoon overgewicht heeft of niet. De BMI wordt berekend met de

formule $BMI = \frac{\text{gewicht}}{\text{lengte}^2}$. Hierin is het gewicht in kg en de lengte in m.

Een BMI van 25 of meer geeft overgewicht aan.

b Voeg de variabele BMI toe. Welke sporter had de hoogste BMI?

c Voeg de variabele OvergewichtBMI toe, die de waarde Ja heeft als de sporter overgewicht heeft en Nee als de sporter geen overgewicht heeft.

d Hoeveel sporters hadden overgewicht?

A19
*

Sinds een aantal jaren gebruikt het KNMI voor het berekenen van de gevoelstemperatuur niet meer de formule van opgave 17. Tegenwoordig gebruikt men de formule

$$G = 13,12 + 0,6215T - 11,37(3,6W)^{0,16} + 0,3965T(3,6W)^{0,16}.$$

Hierin is T de temperatuur in °C en W de windsnelheid in m/s. Deze formule geldt voor $W > 1,3$. Als de windsnelheid 1,3 m/s of lager is, dan gaan we ervan uit dat de gevoelstemperatuur gelijk is aan de luchttemperatuur.

Gebruik het bestand *WeerHistorie*.

Onderzoek op welke dag volgens deze formule het verschil tussen de gemiddelde temperatuur en de gevoelstemperatuur het grootst was.

Gebruik voor T de gemiddelde temperatuur en voor W de gemiddelde windsnelheid.



7.3 Draaitabellen en draaigrafieken



In het bestand *SocialeNetwerken* vind je gegevens van een enquête die is gehouden onder inwoners van de VS van 20 tot 25 jaar.

- Hoeveel mannen deden mee aan het onderzoek? En hoeveel vrouwen?
- Geef van elk van de regio's (Midwest, Northeast, South en West) aan hoeveel personen meededen aan het onderzoek.
- Neem de kruistabel hiernaast over en vul deze verder in.

		geslacht		
		M	V	
regio	Midwest			
	Northeast			
	South			
	West			
				798

Theorie A Draaitabellen maken

In opgave 20 heb je door herhaald gebruik van filters een kruistabel gemaakt. Voor deze kruistabel heb je minstens zeven keer een filter moeten instellen.

Wil je bijvoorbeeld een kruistabel maken zoals hiernaast, waarin per staat is af te lezen hoeveel jongens en meisjes meededen aan het onderzoek, dan is dat met filters instellen veel werk. In een spreadsheet kun je met behulp van **draaitabellen** snel dergelijke kruistabellen maken.

Een draaitabel is een tabel die data uit een nette dataset op een dynamische manier kan samenvatten, rangschikken en groeperen. Een draaitabel kan onder andere automatisch kruistabellen maken met aantallen, gemiddelden, standaardafwijkingen en minima.

DEELNEMERS ONDERZOEK

	M	V	
Alabama	6	10	16
Alaska	0	1	1
Arizona	12	8	20
Arkansas	4	3	7
California	48	48	96
Colorado	11	12	23
⋮	⋮	⋮	⋮
Wisconsin	6	8	14
Wyoming	0	1	1
	402	396	798

[▶ ICT] Neem de module **Draaitabellen** door.



21
☐ ◎ *

Open het bestand *SportersRio2016*.

a Maak een kruistabel met aantallen

- met als rij-variabele Geslacht en als kolomvariabele Leeftijd
- met als rij-variabele Leeftijd en als kolomvariabele Geslacht.

Wat is de modale leeftijd bij de vrouwelijke sporters?

b Maak kruistabellen waarmee de volgende vragen te beantwoorden zijn.

- Bij welke sporten staan evenveel mannen als vrouwen in de dataset?
- Welke sport beoefende de oudste sporter met een gouden medaille?

Door variabelen in rijen of kolommen te verwisselen (draaien) kun je de brongegevens op andere manieren samenvatten.

22
☐ ◎ *

In het bestand *Speerwerpen* is van alle speerwerpers de beste afstand genoteerd die ze hebben geworpen bij de kwalificatieronde voor de Olympische Spelen 2016.

Maak een kruistabel waarin de kleinste, de gemiddelde en de grootste geworpen afstanden zijn af te lezen, uitgesplitst naar geslacht en vervolgens naar groep.



A23
☐ ◎ *

Ga uit van het bestand *SocialeNetwerken*.

De variabele FB-Vrienden geeft aan hoeveel Facebookvrienden iemand heeft. De waarde #NULL! geeft aan dat de vraag niet gesteld is aan deze persoon, omdat deze geen Facebookaccount heeft.

Susanne beweert dat uit de dataset blijkt dat voor personen die een Facebookaccount hebben, geldt dat

- hoe ouder ze zijn, hoe meer Facebookvrienden ze hebben
- vrouwen over het algemeen meer Facebookvrienden hebben dan mannen.

a Onderzoek of Susanne gelijk heeft. Licht je antwoord toe met behulp van één draaitabel met gemiddelde aantallen Facebookvrienden.

Michiel wil onderzoeken of de aantallen Facebookvrienden van personen op het platteland (Rural) afwijken van die van personen in de stad (Urban). Hij bedenkt dat ondervraagden zonder Facebookaccount nul Facebookvrienden hebben. Daarom hercodeert hij de variabele FB-vrienden.

b Maak voor Michiel de kruistabel die de gemiddelde aantallen Facebookvrienden voor de genoemde woonomgevingen weergeeft. Welke conclusie trekt Michiel?

R24
📁📊🌟

Ga uit van het bestand *SocialeNetwerken*. Maak een kruistabel met aantallen met de variabelen *DeeltFotosVanZichzelf* en *DeeltVideosVanZichzelf*. Wat is de betekenis van het getal 12 in de tabel?



O25
📁📊🌟

Het bestand *LeerlingGegevens* bevat informatie over leerlingen van het Playfair College.

- a Maak met behulp van een draaitabel een frequentietabel van alle voorkomende lichaamslengtes. Waarom geeft deze frequentietabel geen goed beeld van de verdeling?
- b Voeg aan de dataset de nieuwe variabele *LengteKlasse* toe, die aangeeft tot welk van de lengteklassen 150-159, 160-169, ... de leerling behoort.
- c Maak met behulp van een draaitabel een frequentietabel bij de variabele *LengteKlasse*.

Theorie B Groeperen en draaigrafieken

In opgave 25 heb je door middel van hercoderen een klassenindeling gemaakt.

In een spreadsheet is het mogelijk om op een dynamische manier een klassenindeling te maken. Het maken van een klassenindeling komt neer op het **groeperen** van de waarden van een variabele.

Het is ook mogelijk een diagram bij een draaitabel te maken dat met de draaitabel meeverandert. Zo'n dynamisch diagram heet een **draaigrafiek**.

[▶ ICT] Neem de module **Groeperen en draaigrafieken** door.

Afspraak

Maak in deze paragraaf de genoemde diagrammen met behulp van draaitabellen/draaigrafieken. Maak elke grafiek netjes op. Zorg dus voor voldoende informatie bij de assen, een passende titel en zo nodig een legenda.

26



Ga uit van het bestand *StudentenEnquete*.

- Maak een cirkeldiagram bij de variabele Groep. Zorg ervoor dat in het diagram de aantallen studenten per groep te zien zijn.
- Maak een staafdiagram bij de variabele Lengte. Neem een klassenindeling tussen 155 en 195, met stapgrootte 5. Je krijgt dan een tabel zoals hiernaast.
- Maak een staafdiagram bij de variabele UrenSlaap. Neem een klassenindeling tussen 5 en 10, met stapgrootte 1.
- Maak een cirkeldiagram bij de variabele AantalBroersEnZussen. Meer dan vijf broers en zussen komt niet vaak voor. Groepeer daarom de aantallen broers en zussen boven vijf in een groep met de naam 'meer dan 5'.



lengte	aantal
< 155	5
155-159	11
160-164	27
165-169	32
170-174	46
175-179	41
180-184	47
185-189	42
190-194	13
>195	7
totaal	271

27



Gebruik het bestand *Speerwerpen*.

- Maak een frequentietabel van de geworpen afstanden met een draaitabel. Neem een klassenindeling tussen 55 en 90, met stapgrootte 5.
- Maak bij de tabel van vraag a een staafdiagram.
- Met wat voor soort verdeling heb je hier te maken?
- Pas de draaitabel en de draaigrafiek aan, zodat mannen en vrouwen apart worden weergegeven. Hoe is het antwoord op vraag c te verklaren?

Bij zowel de mannen als de vrouwen waren de atleten opgedeeld in de groepen A en B.

- Pas het staafdiagram van vraag d aan, zodat zowel bij de mannen als bij de vrouwen de resultaten van de A- en de B-groep snel vergeleken kunnen worden.

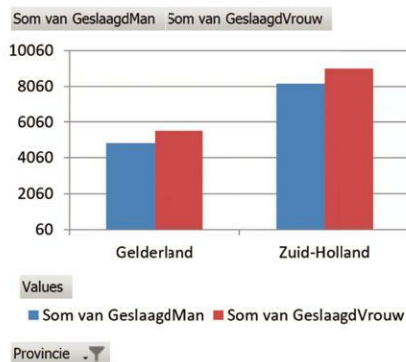
28



Open het bestand *Examenkandidaten*. De dataset in dit bestand bevat gegevens over eindexamenkandidaten op havo en vwo in 2018.

De gegevens over het aantal geslaagde en gezakte kandidaten zijn uitgesplitst naar school, niveau, profiel(combinatie) en geslacht.

- Maak een stapeldiagram waarin per niveau af te lezen is hoeveel jongens en meisjes eindexamen deden.
- Maak het staafdiagram van figuur 7.9, waarin voor twee provincies te zien is hoeveel jongens en meisjes geslaagd zijn.
- Met een cirkeldiagram kan worden weergegeven welk percentage van de vwo-examenkandidaten is geslaagd. Maak dit cirkeldiagram en zorg ervoor dat de percentages zichtbaar zijn in het diagram.
- Maak een staafdiagram waarin voor de gemeente Almelo per school te zien is hoeveel kandidaten geslaagd zijn voor het dubbelprofiel N&T/N&G.



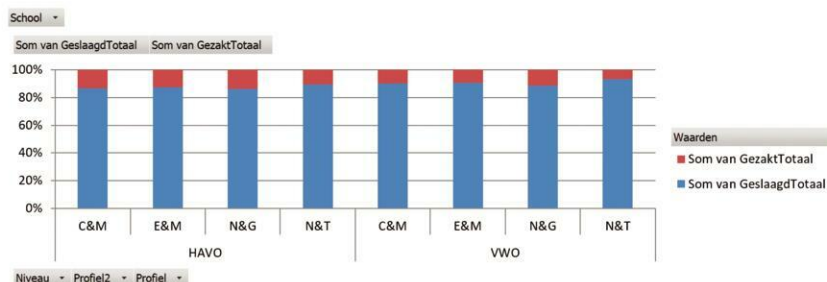
figuur 7.9

29



Ga uit van het bestand *Examenkandidaten*.

- In het 100% stapeldiagram hieronder zijn voor heel Nederland per niveau de slagingspercentages voor elk van de vier profielen weergegeven. Dubbelprofielen zijn gegroepeerd met het profiel dat als eerste wordt genoemd. Maak een soortgelijk diagram voor je eigen school.



figuur 7.10

Menno heeft voor een praktische opdracht deze dataset bestudeerd. Volgens hem slagen in de vier grootste gemeenten van Nederland (Amsterdam, Rotterdam, 's-Gravenhage en Utrecht) relatief minder leerlingen dan in andere gemeenten. Om deze bewering te onderbouwen, wil hij in zijn verslag een 100% stapeldiagram opnemen waarin het gemiddelde slagingspercentage af te lezen is. Daarbij geeft de ene staaf het slagingspercentage voor de vier grootste gemeenten samen, en de andere staaf het percentage voor alle overige gemeenten. Ook wil hij onderzoeken of de resultaten van deze vergelijking voor de havo anders zijn dan voor het vwo.

- Maak voor Menno het benodigde 100% stapeldiagram. Laat de verticale as lopen van 0 tot 100%.
- Welke conclusie trekt Menno?

A30
📷🔍*

Gebruik het bestand *SocialeNetwerken*.

De variabelen *DeeltFotosVanZichzelf* en *DeeltVideosVanZichzelf* hebben de waarde #NULL! gekregen als de deelnemer deze vraag niet heeft beantwoord, omdat hij of zij geen sociale netwerken gebruikt.

- a** Maak een draaigrafiek van het type 100% gestapelde kolom. Zorg ervoor dat in het diagram voor elke leeftijd, uitgesplitst naar geslacht te zien is hoe de waarden van de variabele *DeeltFotosVanZichzelf* zich verhouden.

Bram en Roland bekijken de draaitabel die hoort bij vraag a. Volgens Bram deelt ongeveer 22% van de 24-jarige vrouwen uit het onderzoek geen foto's van zichzelf op sociale netwerksites. Volgens Roland is dat ongeveer 26%.

- b** Hoe komt Bram op ongeveer 22% en hoe komt Roland op ongeveer 26%? Wie heeft gelijk? Licht toe.

A31
📷🔍*

Ga uit van het bestand *SocialeNetwerken*.

- a** Hercodeer de variabele *DeeltFotosVanZichzelf*, zodat alleen nog de waarden ja en nee voorkomen.

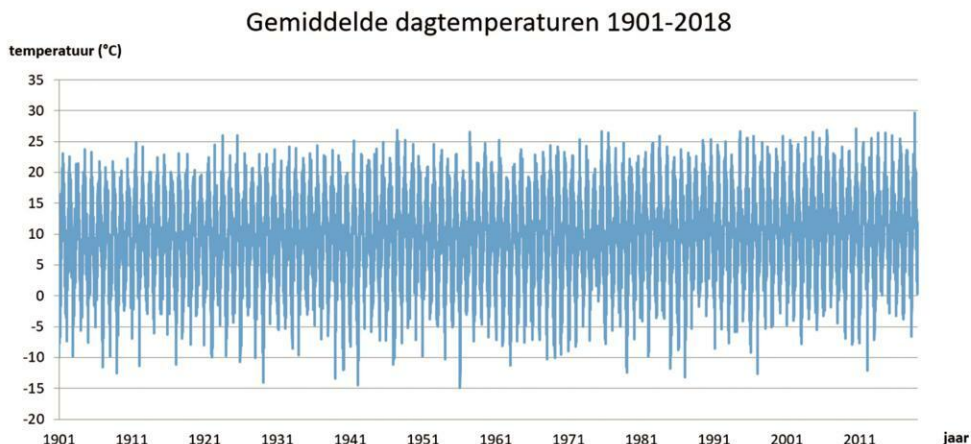
Ezra maakt vier groepen. De groepen bestaan uit personen die van zichzelf

- zowel foto's als video's delen
 - alleen foto's delen
 - alleen video's delen
 - geen van beide delen.
- b** Maak een cirkeldiagram dat laat zien hoe de aantallen van deze groepen zich verhouden.



Het bestand *TemperatuurHistorie* bevat een dataset met alle door het weerstation in De Bilt gemeten temperaturen in de periode van 1901 tot en met 2018.

Nathalie heeft een artikel gelezen over de opwarming van de aarde. Ook in Nederland zou een stijgende trend te zien zijn in de gemiddelde dagtemperaturen. Ze heeft deze stijgende trend in beeld proberen te brengen door alle temperaturen in de dataset te selecteren en er een lijndiagram bij te maken. Ze krijgt de figuur hieronder.



figuur 7.11

- a** Vind je dat de stijgende trend goed in beeld wordt gebracht? Licht toe.
- b** Van hoeveel dagen is de temperatuur in het bestand opgenomen? Zijn al deze dagen in het lijndiagram goed te onderscheiden?

Sven maakt eerst een draaitabel waarin de gemiddelde temperaturen per jaar zijn weergegeven. Hierbij maakt hij een lijndiagram. Hij tekent de verticale as van 7°C tot 12°C .

- c** Maak het lijndiagram van Sven. Is de stijgende trend goed zichtbaar? Licht toe.



Theorie C Groeperen van datums

Het lijndiagram van Nathalie in opgave 32 geeft geen goed beeld van de stijgende trend in temperaturen. Dit komt doordat het lijndiagram uit veel te veel gegevenspunten bestaat. In het diagram is het patroon van de jaargetijden nog enigszins te herkennen, maar dit verbergt grotendeels de trend. Het is beter een lijndiagram te maken met als gegevenspunten bijvoorbeeld de gemiddelde jaartemperaturen, of de gemiddelde maandtemperaturen van de maand mei door de jaren heen. In de volgende module leer je hoe je dit soort diagrammen maakt.

[▶ ICT] Neem de module **Groeperen van datums** door.



- In het bestand *WoningVerkoop* zie je informatie over woningverkoop in Nederland in de periode 1995 tot en met 2018. De variabele *AantalVerkochteWoningen* geeft aan hoeveel bestaande woningen (dus exclusief nieuwbouw) er in totaal in de betreffende maand zijn verkocht.
- a Groepeer de variabele *Periode* op jaren én kwartalen en maak voor de periode 1995-2007 een lijndiagram van de verkochte aantallen woningen. Welk patroon is in het diagram te herkennen?
 - b Maak met behulp van een draaigrafiek een lijndiagram waarin voor de jaren 1995-2018 is te zien hoeveel woningen er dat jaar verkocht zijn en wat de gemiddelde verkoopprijs van een woning was.
 - c Bij de analyse van de woningmarkt wordt vaak gekeken naar de totale woningwaarde van de verkochte woningen. De totale woningwaarde is het aantal verkochte woningen vermenigvuldigd met de gemiddelde verkoopprijs.
Voeg aan het lijndiagram van vraag b een grafiek toe van de totale woningwaarde in honderdduizenden euro's.



Regelmatig verschijnen er in de krant en op internet artikelen over weerrecords. Het artikel hieronder gaat over het weer in De Bilt in juni 2018. Op enkele plaatsen ontbreken getallen. Met het begrip normaal wordt telkens het gemiddelde in de maanden juni van de jaren 1981-2010 bedoeld.

ARTIKEL

Juni 2018: zeer warm, zeer droog en normale hoeveelheid zon

Na een recordwarme mei en zeer zachte april was ook juni met gemiddeld ... °C maar liefst ... °C warmer dan normaal. De maand eindigt op een ... °C plek in de top 10 van warmste junimaanden sinds 1951. In De Bilt viel ... mm regen, dat is ...% minder dan normaal. Omdat ook mei vrij

droog was, behoort het jaar 2018 tot nu toe bij de 5% droogste jaren. De verschillen zijn lokaal echter groot. Vooral halverwege de maand juni liet de zon zich minder zien. De laatste week was echter zeer zonnig. In De Bilt scheen de zon in totaal ... uur, tegen ... uur normaal.

Ga uit van het bestand *WeerDeBilt*. Op het tabblad Historie zijn de gegevens vanaf 1951 tot en met 2018 verzameld. Op het tabblad Tijdvak 1981-2010 zijn de gegevens van de jaren 1981-2010 nog eens apart opgenomen. Op het tabblad Juni 2018 zijn de gegevens van juni 2018 apart opgenomen.

- a Onderzoek welke getallen in het artikel op de puntjes moeten staan. Rond indien nodig af op één decimaal.
- b Vul de juiste gegevens in op het tabblad Temperaturen juni. Maak bij de gegevens een lijndiagram waarin de normale temperatuur in juni en de temperatuur in juni 2018 te zien zijn.
- c Maak een figuur zoals bij vraag b, maar nu voor de hoeveelheid neerslag.



Gebruik het bestand *WeerDeBilt*. Schrijf voor de maand waarin je bent geboren een artikel over het weer. Je mag zelf kiezen welke variabelen je daarvoor gebruikt. Voeg aan je artikel enkele diagrammen toe.

Eindopdracht Succesvolle sportlanden

In hoofdstuk 2 heb je kennism gemaakt met de statistische cyclus: het proces van opstellen van een onderzoeksvraag, verzamelen en analyseren van data en hieruit conclusies trekken. Bij het verzamelen en analyseren van data wordt vaak gebruik gemaakt van een spreadsheetprogramma. Je gaat onderzoeken hoe succesvol Nederland is geweest op de Olympische Spelen. Het direct vergelijken van het aantal gewonnen medailles tussen landen is oneerlijk. In dit onderzoek ga je daarom kijken hoe groot het succes relatief is.

- Stel een hoofdvraag en bijbehorende deelvragen op.

Hieronder zie je een zogeheten medaillespiegel. Deze medaillespiegel betreft alle Olympische Spelen vanaf 1994 tot en met 2018. Deze tabel staat ook in het bestand *Medaillespiegel*.

Land	Goud	Zilver	Brons	Totaal
Verenigde Staten	297	256	238	791
China	201	150	137	488
Rusland	184	155	184	523
Duitsland	157	158	156	471
Groot-Brittannië	100	82	89	271
Frankrijk	87	94	116	297
Zuid-Korea	84	83	61	228
Australië	77	96	100	273
Italië	75	74	92	241
Noorwegen	75	61	61	197
Canada	73	80	91	244
Nederland	72	66	63	201
Japan	63	67	82	212
Hongarije	43	28	28	99
Cuba	42	41	54	137
Zwitserland	41	31	34	106
Oekraïne	37	31	59	127
Zweden	34	46	35	115
Oostenrijk	32	40	49	121
Spanje	27	45	32	104

- Hoe is de volgorde van landen in deze medaillespiegel bepaald?

Om het relatieve succes van landen te kunnen bepalen, hebben we extra kwantitatieve informatie nodig,

- Bedenk een manier om ‘relatief succes’ uit te drukken in één getal.
- Zoek de benodigde extra informatie over de landen op en verzamel die in je bestand.
- Voeg een kolom RelatiefSucces toe en bereken met je zelfbedachte methode de waarde voor elk land.
- Beantwoord de deelvragen en de hoofdvraag.



Keuzeonderwerp Lineair programmeren

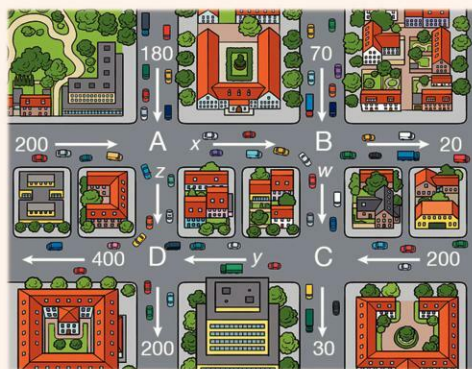
Wat leer je?

- Het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen met behulp van elimineren.
- Omgaan met de begrippen doelfunctie, beperkende voorwaarde en toegestane gebied bij een lineair programmeringsprobleem.
- Het oplossen van lineaire programmeringsproblemen met twee variabelen.
- Hoe je een lineair programmeringsprobleem met de computer oplost.



Beginopdracht Verkeer in het centrum

In deze opdracht onderzoek je verkeersstromen in het centrum van een stad. In de figuur hiernaast is schematisch weergegeven hoeveel auto's in een uur tijd het centrum van een stad binnenrijden en verlaten. Ook de verkeersstromen die zijn aangegeven met x , y , z en w zijn in aantallen auto's per uur. Aan de pijlen zie je dat er op de wegen uitsluitend eenrichtingsverkeer is. Op de wegen in het centrum geldt bovendien een stopverbod.



- Neem $x = 150$.

Hoeveel auto's zijn er dan in de verkeersstromen die zijn aangegeven met y , z en w ?

- Neem aan dat de weg tussen de kruispunten A en B gestremd is. Onderzoek hoe de verkeersstromen dan verlopen.
- Neem aan dat in plaats van de weg tussen A en B, de weg tussen C en D gestremd is. Onderzoek hoe de verkeersstromen dan verlopen.
- Hoeveel auto's per uur telt de verkeersstroom y minimaal?

Bij de kruispunten A, B, C en D zijn vergelijkingen op te stellen. Zo hoort bij kruispunt A de vergelijking $x + z = 380$.

- Licht dit toe en stel bij de kruispunten B, C en D soortgelijke vergelijkingen op.

Neem aan dat verkeersstroom y twee keer zoveel auto's telt als verkeersstroom x .

Je kunt dan met behulp van de vergelijkingen bij de kruispunten A en D berekenen hoeveel auto's er per uur tussen de kruispunten A en B rijden. Maak daartoe in beide vergelijkingen z vrij.

- Bereken hoeveel auto's er in dat geval per uur over elk van de wegen rijden.

Hierboven heb je met de voorwaarde $y = 2x$ de verkeersstromen doorgerekend. Je kunt ook een andere voorwaarde, of zelfs meerdere voorwaarden stellen en daarmee de verkeersstromen opnieuw doorrekenen.

- Bedenk zelf enkele voorwaarden en laat klasgenoten de verkeersstromen bij deze voorwaarden doorrekenen. Controleer of je klasgenoten de juiste berekeningen hebben gemaakt.

Voorkennis Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

Theorie A De vergelijking $ax + by = c$

De vergelijking $2x + 5y = 10$ is een *lineaire vergelijking met twee variabelen*. De bijbehorende grafiek is de lijn die

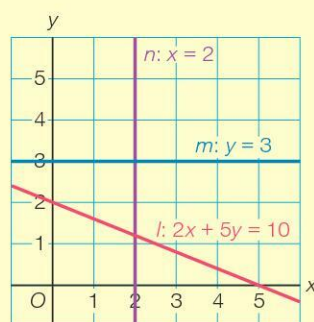
- de x -as snijdt in $(5, 0)$ $y = 0$ geeft $2x = 10$, dus $x = 5$
- de y -as snijdt in $(0, 2)$ $x = 0$ geeft $5y = 10$, dus $y = 2$

De lijn $m: y = 3$ is de *horizontale lijn* door het punt $(0, 3)$.

De lijn $n: x = 2$ is de *verticale lijn* door het punt $(2, 0)$.

In figuur K.1 zijn de lijnen $l: 2x + 5y = 10$, $m: y = 3$ en $n: x = 2$ getekend.

Alle lijnen met een vergelijking van de vorm $2x + 5y = c$ zijn evenwijdig. Om dat te begrijpen maak je y vrij. Je krijgt $5y = -2x + c$, oftewel $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}c$. Dus van elk van deze lijnen is de richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{5}$.



figuur K.1

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de lijn p die door het punt $(8, 15)$ gaat en evenwijdig is met de lijn $q: 3x - 5y = 10$.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} p: 3x - 5y = c \\ \text{door } (8, 15) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 8 - 5 \cdot 15 = -51$$

Dus $p: 3x - 5y = -51$.

- 1 Teken in één figuur de lijnen $p: 3x - y = 6$, $q: x + y = 3$, $r: x + 2y = 0$, $s: y = -3$ en $t: x = 4$.

- 2 Bereken van de volgende lijnen zo mogelijk de coördinaten van de snijpunten met de x -as en de y -as.

$l: 5x - 3y = 75$

$n: y = 320$

$q: 3x - 10y = 7500$

$m: 18x + y = 450$

$p: x = 185$

$r: 0,2x + 0,3y = 600$

- 3 a Stel een vergelijking op van de lijn p die door het punt $(51, 70)$ gaat en evenwijdig is met de lijn $m: 5x - 12y = 600$.
b Stel een vergelijking op van de lijn q die door het punt $(820, 7000)$ gaat en evenwijdig is met de lijn $n: 0,05x + 0,32y = 80$.

Theorie B Vergelijkingen met twee variabelen opstellen

Er zijn heel wat praktische situaties waarin lineaire vergelijkingen met twee variabelen een rol spelen. Het is belangrijk dat je aan de hand van de gegeven informatie een dergelijke vergelijking zelf kunt opstellen.

Voorbeeld

Voor een concert zijn kaartjes te koop van 25 en 40 euro. Op een avond is de totale opbrengst 6750 euro.

Stel bij deze gegevens een lineaire vergelijking op met twee variabelen.

Uitwerking

Voer de variabelen x en y in.

x = aantal verkochte kaartjes van 25 euro

y = aantal verkochte kaartjes van 40 euro

Je krijgt $25x + 40y = 6750$.

- 4** Stel bij de volgende situaties telkens een vergelijking op met twee variabelen. Omschrijf eerst de betekenis van de variabelen.
- a** In een parkeermeter zitten muntstukken van 1 euro en van 50 eurocent.
In totaal zit er voor 260 euro in de parkeermeter.
 - b** In een actieweek verkoopt een meubelzaak elke stoel voor 350 euro en elke tafel voor 850 euro.
De totale verkoop die week bedraagt 22 000 euro.
 - c** Mariët koopt 400 gram cashewnoten en 700 gram studenten haver.
Ze moet hiervoor € 12,80 betalen.
 - d** Een agrariër verbouwt groenten en granen. In een jaar is de opbrengst van de groenten 20 000 euro per ha en van de granen 15 000 euro per ha.
De totale opbrengst in dat jaar is 540 000 euro.



- 5** Op een binnenplaats is ruimte voor 180 fietsen. Er kunnen ook bromfietsen gestald worden. Een bromfiets neemt twee keer zo veel ruimte in als een fiets.
- a** Stel bij deze gegevens een vergelijking op met twee variabelen.
 - b** Op een dag staat de binnenplaats vol met fietsen en bromfietsen.
Er staan vier keer zoveel fietsen als bromfietsen.
Onderzoek hoeveel fietsen er op de binnenplaats staan.

K.1 Stelsels van lineaire vergelijkingen

01 Gegeven zijn de lijnen $l: x + 3y = 9$ en $m: x + y = 5$.

- a** Teken deze lijnen in één figuur.
b Schrijf de coördinaten van het snijpunt van deze lijnen op.

Theorie A Elimineren

In figuur K.2 zie je de lijnen $l: 3x + y = 6$ en $m: x + y = 4$. Het punt $(1, 3)$ is het snijpunt van deze lijnen. We zeggen dat $x = 1$ en $y = 3$ de oplossing is

van het **stelsel**
$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Je leert hoe je met **eliminieren** de oplossing van een **stelsel lineaire vergelijkingen** kunt berekenen.

Elimineren betekent wegwerken.

Bij het stelsel
$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$$
 trek je de vergelijkingen van elkaar af, want dan wordt y geëlimineerd.

$$3x + y = 6$$

$$\underline{x + y = 4} \quad \leftarrow \text{Noteer het minteken.}$$

$$2x = 2, \text{ dus } x = 1.$$

Door vervolgens $x = 1$ in één van de gegeven vergelijkingen in te vullen, bereken je y . Invullen in de eerste vergelijking van het stelsel geeft $3 \cdot 1 + y = 6$ oftewel $y = 6 - 3 = 3$.

De oplossing van het stelsel is dus $x = 1$ en $y = 3$.

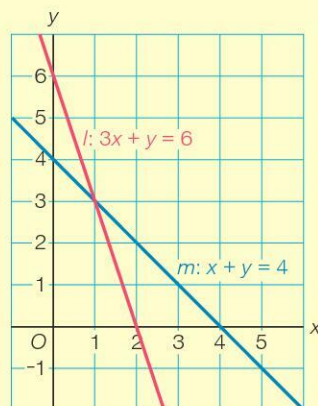
Bij het stelsel
$$\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ -2x - 5y = 11 \end{cases}$$
 elimineer je x door de vergelijkingen op te tellen.

Je krijgt

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = -7 \\ -2x - 5y = 11 \\ \hline -2y = 4, \text{ dus } y = -2. \end{array} \quad \leftarrow \text{Geef aan dat je optelt.}$$

Invullen van $y = -2$ in $2x + 3y = -7$ geeft $2x - 6 = -7$ oftewel $2x = -1$, dus $x = -\frac{1}{2}$. De oplossing is $x = -\frac{1}{2}$ en $y = -2$.

Ook bij de volgende stelsels kun je door het optellen of aftrekken van de vergelijkingen de oplossing vinden. Telkens ontstaat na optellen of aftrekken een vergelijking met alleen nog maar x of alleen nog maar y .



figuur K.2

Vergelijkingen mag je optellen en aftrekken.

Als $\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases}$ dan is ook $A + C = B + D$ en $A - C = B - D$

$$\begin{cases} 5x + 6y = 4 \\ 2x - 6y = 3 \end{cases} +$$

dus $x = 1$, enzovoort

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 3x + 2y = -7 \end{cases} -$$

dus $y = -4$, enzovoort

2 Los op.

a $\begin{cases} 5x - 4y = -8 \\ -x + 4y = -12 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$

03
☐ ⊗ *

Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$

- a** Tel de vergelijkingen van het stelsel bij elkaar op.
Is na het optellen een variabele geëlimineerd?
- b** Trek de vergelijkingen van het stelsel van elkaar af.
Is na het aftrekken een variabele geëlimineerd?

Theorie B Stelsels oplossen

In opgave 3 valt zowel bij het optellen als bij het aftrekken geen van de variabelen weg. Maar als je de eerste vergelijking met 2 vermenigvuldigt en de tweede vergelijking met 3, dan staat in beide vergelijkingen $6x$. En dan valt bij aftrekken de variabele x wel weg:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \begin{array}{l} | 2 \\ | 3 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 8y = 14 \\ 6x + 9y = 48 \end{cases} -$$

$$\begin{array}{r} -17y = -34 \\ y = 2, \text{ enzovoort} \end{array}$$

Tussen de strepen staat waarmee vermenigvuldigd is.

Je kunt bij dit stelsel ook y elimineren. Daartoe vermenigvuldig je de eerste vergelijking met 3 en de tweede met 4. In dat geval krijg je

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \begin{array}{l} | 3 \\ | 4 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 9x - 12y = 21 \\ 8x + 12y = 64 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 17x = 85 \\ x = 5, \text{ enzovoort} \end{array}$$

Ga bij het oplossen van een stelsel eerst na welke variabele je het beste kunt elimineren. Doe het zo, dat je zo weinig mogelijk rekenwerk krijgt.



Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ op.

Uitwerking

$$\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \begin{array}{l} | 1 \\ | 4 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 12x - 8y = 16 \end{cases} +$$
$$14x = 21, \text{ dus } x = 1\frac{1}{2}$$
$$\begin{cases} 3 + 8y = 5 \\ 8y = 2 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Om zo weinig mogelijk rekenwerk te krijgen, is met 1 en 4 vermenigvuldigd en niet met 2 en 8.

De oplossing is $x = 1\frac{1}{2}$ en $y = \frac{1}{4}$.

4 Los op.

a $\begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - y = 19 \end{cases}$

A5 Los op.

a $\begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 0,8x + 0,2y = 1 \\ 0,3x - 0,3y = 1,5 \end{cases}$

6 Gegeven zijn de lijnen p : $12x + 5y = 5$ en q : $3x - y = 6$.

- a** Teken de lijnen p en q in één figuur.
b Welk stelsel moet je oplossen om de coördinaten van het snijpunt van p en q te berekenen? Bereken de coördinaten van het snijpunt.



INFORMATIEF

Stelsels oplossen door substitutie

Het stelsel uit het voorbeeld is ook op te lossen met behulp van substitutie. Dat gaat als volgt.

- Kies één van de vergelijkingen om een variabele vrij te maken.
 y vrijmaken bij $3x - 2y = 4$ geeft $-2y = -3x + 4$, oftewel $y = 1\frac{1}{2}x - 2$.
- Substitueer wat je gekregen hebt in de andere vergelijking.
Je krijgt $2x + 8(1\frac{1}{2}x - 2) = 5$, oftewel $2x + 12x - 16 = 5$. Dit geeft $14x = 21$, dus $x = 1\frac{1}{2}$.
- Bereken de andere variabele door de vergelijking bij 1 te gebruiken.
 $x = 1\frac{1}{2}$ en $y = 1\frac{1}{2}x - 2$ geeft $y = \frac{1}{4}$.

De oplossing van het stelsel is $x = 1\frac{1}{2}$ en $y = \frac{1}{4}$.
Deze methode met substitutie is ook bruikbaar bij een stelsel niet-lineaire vergelijkingen. Bij een stelsel lineaire vergelijkingen werkt de methode met elimineren echter sneller.

A7
☐ ⊙ *

Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen $l: 3x - 2y = -12$ en $m: x + 4y = 38$.

8
☐

Een koffiebranderij heeft koffie uit Colombia en uit Jamaica.

De prijs van de Colombiaanse koffie is 12 euro per kg, die uit Jamaica kost 16 euro per kg.

Er komt een bestelling binnen voor een mengsel van deze twee soorten van in totaal 5000 kg. Stel dat het mengsel bestaat uit x kg koffie uit Colombia en uit y kg uit Jamaica.

a Wat weet je van $x + y$?

De branderij maakt het mengsel zo, dat de prijs van dit mengsel € 12,80 per kg is.

b Waarom is $12x + 16y = 64\,000$?

c Welk stelsel in x en y kun je opschrijven? Los dit stelsel op.

d Hoe is het mengsel samengesteld?



9
☐ ⊙

Een bedrijf heeft 20 liter antivries nodig die voor 15% bestaat uit alcohol. De antivries wordt gemaakt door antivriesmiddel A dat voor 18% uit alcohol bestaat te mengen met antivriesmiddel B dat voor 10% uit alcohol bestaat.

Stel dat er x liter A en y liter B nodig is.

a Licht toe dat $0,18x + 0,10y = 3$.

b Stel nog een vergelijking op in x en y en bereken hoeveel liter A en hoeveel liter B voor het mengsel nodig is.

A10
☐ ⊙ *

Een fabrikant wil een nieuw soort vruchtensap, bestaande uit appelsap en perziksap, op de markt brengen. De prijs van een liter appelsap is € 0,70 en de prijs van een liter perziksap is € 1,00.

De prijs van een liter van het nieuwe vruchtensap moet € 0,75 worden. Stel dat één liter vruchtensap uit x liter appelsap en y liter perziksap bestaat.

a Stel twee vergelijkingen op in x en y .

b Bereken de samenstelling van het nieuwe vruchtensap.

E11
☐ *

a Bij het oplossen van de stelsels $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ -6x + 2y = 5 \end{cases}$ en $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ -6x + 2y = -20 \end{cases}$

is iets bijzonders aan de hand.

Wat voor bijzonders?

b Bij het oplossen van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen in x en y zijn drie situaties te onderscheiden.

Licht dit toe met grafieken.

E12*****

Een voorbeeld van een stelsel met drie vergelijkingen in x , y en z is

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$$

Door de tweede vergelijking van de eerste af te trekken ontstaat de vergelijking $-3y + 5z = -6$.

a Licht toe hoe uit de eerste en de derde vergelijking volgt $-2y + 4z = -2$.

b Je hebt nu het stelsel $\begin{cases} -3y + 5z = -6 \\ -2y + 4z = -2 \end{cases}$

Los dit stelsel op.

c Toon aan dat $x = 2$ en $y = 7$ en $z = 3$ de oplossing van het gegeven stelsel is.

d Los de volgende stelsels vergelijkingen in x , y en z op.

$$\text{I } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \\ 4x + y - 3z = 1 \end{cases} \quad \text{II } \begin{cases} x + 3y + 5z = 4 \\ x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ \hline -3y + 5z = -6 \end{array}$$

E13*****

Een diëtiste stelt uit de voedings-middelen I, II en III een dieet samen.

Het is van belang dat het dieet 500 mg kalium bevat, 75 gram eiwit en 1150 eenheden vitamine D.

In de tabel staat hoeveel kalium, eiwit en vitamine D in 100 gram van elk van de voedingsmiddelen I, II en III aanwezig is.

Stel dat het dieet uit x keer 100 gram I, y keer 100 gram II en z keer 100 gram III bestaat.

	I	II	III
kalium (mg)	50	75	10
eiwit (gr)	5	10	3
vitamine D (eenheden)	90	100	50

a Stel een stelsel op met drie vergelijkingen in x , y en z .

b Bereken uit hoeveel gram I, II en III het dieet bestaat.

INFORMATIEF

Kalium, eiwit en vitamine D

In je dagelijkse voeding spelen kalium, eiwit en vitamine D een belangrijke rol. Kalium is een mineraal dat de vochtbalans en bloeddruk in je lichaam regelt. Ook speelt het een rol bij het geleiden van zenuwprikkels en het goed kunnen samentrekken van spieren. Het zit in groenten, fruit, aardappelen, vlees, vis en noten. Eiwitten leveren calorieën en aminozuren. Aminozuren zijn de bouwstenen voor eiwitten in de lichaamscellen. Dierlijke eiwitten zitten vooral in vlees, vis, zuivelproducten en eieren. Plantaardige eiwitten zitten vooral in brood, graanproducten, peulvruchten en noten.

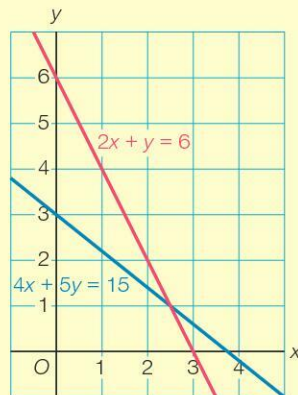
Vitamine D is nodig om calcium uit de voeding te kunnen opnemen in het lichaam. Het is daarom erg belangrijk bij groei en behoud van botten en tanden. De belangrijkste bron voor vitamine D is zonlicht. Ook zit het van nature veel in vette vis en wordt het vaak toegevoegd aan margarines.

Terugblik

De oplossing van een stelsel

Omdat het punt $(2\frac{1}{2}, 1)$ zowel op de lijn $l: 4x + 5y = 15$ ligt als op de lijn $m: 2x + y = 6$, is $x = 2\frac{1}{2}$ en $y = 1$ een

oplossing van het stelsel $\begin{cases} 4x + 5y = 15 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$



Elimineren door optellen of aftrekken

Een stelsel lineaire vergelijkingen los je handig op door de vergelijkingen op te tellen of van elkaar af te trekken. Eerst vermenigvuldig je de vergelijkingen indien nodig met geschikte getallen zo, dat bij het optellen of aftrekken één van de variabelen wegvalt. Valt de variabele y weg, dan is y geëlimineerd.

Stelsels oplossen

Hieronder zie je hoe je het oplossen van een stelsel opschrijft.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ x - 3y = 14 \end{cases} \begin{array}{l} | 1 \\ | 3 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ 3x - 9y = 42 \end{cases}$$
$$\begin{array}{r} 3x - 5y = 18 \\ 3x - 9y = 42 \\ \hline 4y = -24, \text{ dus } y = -6 \end{array}$$
$$\begin{cases} x + 18 = 14, \text{ dus } x = -4 \\ x - 3y = 14 \end{cases}$$

De oplossing is $x = -4$ en $y = -6$.

Variabelen invoeren

Een bakker verkoopt krentenbollen en rozijnenbollen. Een krentenbol kost €0,40 en een rozijnenbol €0,50. Mathilde koopt voor een kerstontbijt op school 180 van deze bollen en moet daarvoor €77,90 betalen. Om te berekenen hoeveel krentenbollen en hoeveel rozijnenbollen Mathilde gekocht heeft, voer je de variabelen x en y in.

x = aantal krentenbollen

y = aantal rozijnenbollen

In totaal kocht Mathilde 180 bollen, dus $x + y = 180$.

Mathilde moest €77,90 betalen, dus $0,40x + 0,50y = 77,90$.

Je hebt nu het stelsel $\begin{cases} x + y = 180 \\ 0,40x + 0,50y = 77,90 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ 0,40x + 0,50y = 77,90 \end{cases} \begin{array}{l} | 1 \\ | 2 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} x + y = 180 \\ 0,8x + y = 155,8 \end{cases}$$
$$\begin{array}{r} 0,8x + y = 155,8 \\ x + y = 180 \\ \hline 0,2x = 24,2, \text{ dus } x = 121 \end{array}$$
$$\begin{cases} 121 + y = 180, \text{ dus } y = 59 \\ x + y = 180 \end{cases}$$

Mathilde heeft 121 krentenbollen en 59 rozijnenbollen gekocht.

K.2 Ongelijkheden met twee variabelen

014


Gegeven zijn de lijn $k: x - 2y = -4$ en de punten $A(-2, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 2)$, $D(4, 1)$, $E(1, 4)$, $F(-1, 4)$, $G(-2, -3)$ en $H(-4, 2)$.

- Teken de lijn k en de punten A , B , C , D , E , F , G en H .
- Reken na dat de coördinaten van $A(-2, -1)$ voldoen aan $x - 2y > -4$.
- Vul de tabel verder in.

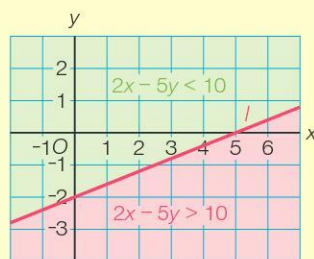
	A	B	C	D	E	F	G	H
Punt boven k ?	nee							
Voldoet aan $x - 2y > -4$?	ja							

- Waar liggen de punten die voldoen aan $x - 2y > -4$?

Theorie A Halfvlakken

De lijn $l: 2x - 5y = 10$ verdeelt het vlak in twee **halfvlakken**. De grafiek van $2x - 5y > 10$ is één van die halfvlakken. Om erachter te komen welk halfvlak bij $2x - 5y > 10$ hoort, vul je in de ongelijkheid de coördinaten van een handig gekozen punt in. Neem bijvoorbeeld $(0, 0)$ of $(1, 0)$. Vul je de coördinaten van $O(0, 0)$ in, dan krijg je $2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 > 10$, oftewel $0 > 10$; dit klopt niet. Dus de grafiek van $2x - 5y > 10$ is het halfvlak waarin $(0, 0)$ niet ligt.

Bij $ax + by \geq c$ hoort een **halfvlak met rand**. De rand is de lijn $ax + by = c$. Bij het tekenen van een halfvlak geef je de rand dezelfde kleur als het halfvlak.



figuur K.4

De grafiek van $ax + by \leq c$ is een halfvlak met rand.

De rand is de lijn met vergelijking $ax + by = c$.

Voorbeeld

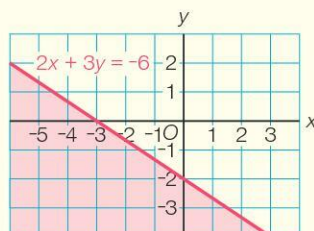
Kleur de grafiek van $2x + 3y \leq -6$ rood.

Uitwerking

De lijn $2x + 3y = -6$ gaat door $(0, -2)$ en $(-3, 0)$.

$(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 \leq -6$; dit klopt niet.

Dus je moet het halfvlak met rand hebben waar $(0, 0)$ niet in ligt.



R15


Bij de ongelijkheid $2x + y \leq 0$ heb je niets aan $(0, 0)$ als controlepunt.

- Waarom is $(0, 0)$ geen geschikt controlepunt?
- Noem nog een punt dat geen geschikt controlepunt is.
- Kleur de grafiek van $2x + y \leq 0$ rood.

A16


Kleur in verschillende figuren de grafiek.

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
| a $x - y \geq 0$ | c $3x - y \leq -1$ | e $y \geq 3x$ |
| b $x \geq 3$ | d $y \leq 2$ | f $x + y \geq 0$ |

Theorie B Gecombineerde ongelijkheden

In het volgende voorbeeld komt een **gecombineerde ongelijkheid** voor. De grafiek is het gedeelte waar de drie bijbehorende halfvlakken elkaar overlappen.

Om de grafiek overzichtelijk te houden, is het verstandig niet eerst de drie halfvlakken afzonderlijk te kleuren en daarna het gemeenschappelijke deel. Je kunt beter door middel van pijltjes bij elke lijn aangeven welk halfvlak je moet hebben.

Voorbeeld

Teken de grafiek van $x - 2y \leq -4$ en $x + y \geq -1$ en $y \leq 3$.

Uitwerking

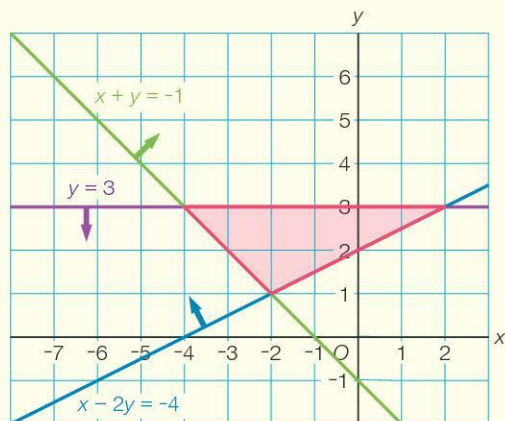
De lijn $x - 2y = -4$ gaat door $(-4, 0)$ en $(0, 2)$.

$(0, 0)$ invullen geeft $0 - 0 \leq -4$; dit klopt niet.

De lijn $x + y = -1$ gaat door $(-1, 0)$ en $(0, -1)$.

$(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 \geq -1$; dit klopt.

De lijn $y = 3$.



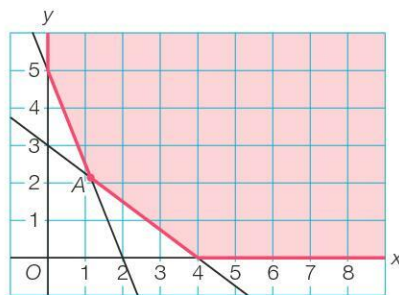
17


- Teken de grafiek van $x + y \leq 3$ en $y \leq 2x - 2$ en $y \geq -1$.
- Teken de grafiek van $3x + 2y + 6 \geq 0$ en $5y \leq 2x + 2$ en $x \leq 0$ en $y \leq 0$.

18

Zie figuur K.5.

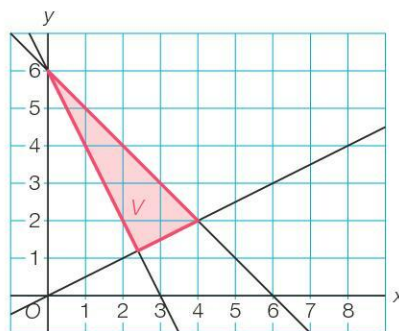
- Geef de gecombineerde ongelijkheid die bij het roodgekleurde gebied hoort.
- Bereken de coördinaten van het punt A .



figuur K.5

19

- Geef de gecombineerde ongelijkheid die hoort bij het gebied V in figuur K.6.
- Bereken de coördinaten van het punt van V , waarvan de y -coördinaat zo klein mogelijk is.
- Welk punt van V heeft de grootste x -coördinaat?
- In V liggen roosterpunten. Geef van elk van deze punten de coördinaten.



figuur K.6

20

Een aannemer wil op een stuk grond van 4000 m^2 twee typen huizen neerzetten. Voor een huis van type A is 250 m^2 grond nodig, voor een huis van type B is dat 200 m^2 .

Voor type A rekent hij per huis op 240 mensdagen werk en bij type B zijn dat er 320.

Stel dat hij x huizen van type A neerzet en y huizen van type B.

- Licht toe dat $250x + 200y \leq 4000$. Vereenvoudig deze ongelijkheid zo ver mogelijk.
- De aannemer heeft hoogstens 4800 mensdagen voor dit bouwproject beschikbaar. Licht toe dat hieruit volgt dat $3x + 4y \leq 60$.
- Bovendien wil de aannemer minstens vier huizen van type A en minstens vijf huizen van type B bouwen. Hierbij horen de ongelijkheden $x \geq \dots$ en $y \geq \dots$. Welke getallen horen op de puntjes te staan?
- In de vragen a, b en c komen vier ongelijkheden voor. Teken de grafiek V van de gecombineerde ongelijkheid.
- Licht toe dat van V alleen de roosterpunten van belang zijn. Geef elk van deze roosterpunten aan met een rode stip.
- De aannemer besluit x en y zo te kiezen, dat het totale aantal te bouwen huizen maximaal is en het aantal huizen van type B zo groot mogelijk. Hoeveel huizen van type A bouwt hij? En hoeveel van type B? Hoeveel m^2 wordt voor de bouw gebruikt?

Floris wil een bedrag van maximaal 75 000 euro beleggen in aandelen en obligaties. Een financieel deskundige adviseert hem minstens 20 000 euro te beleggen in aandelen en hoogstens 30 000 euro in obligaties. Verder luidt het advies minstens evenveel in aandelen als in obligaties te beleggen.

- a** Stel een gecombineerde ongelijkheid op met vier ongelijkheden. Voer daartoe eerst de variabelen x en y in.
- b** Teken de grafiek van de gecombineerde ongelijkheid.
- c** Floris besluit 35 000 euro in aandelen te beleggen. Hoeveel kan hij dan nog in obligaties beleggen?



Terugblik

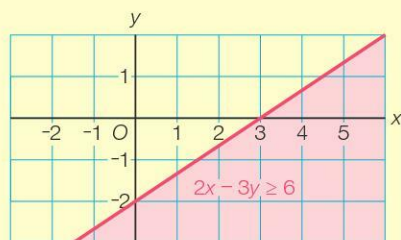
Lineaire ongelijkheid met twee variabelen

Een voorbeeld van een lineaire ongelijkheid met twee variabelen is $2x - 3y > 6$.

De grafiek van $2x - 3y > 6$ is een halfvlak begrensd door de lijn $2x - 3y = 6$.

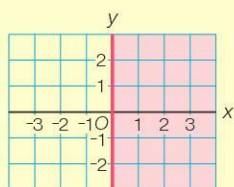
Om te weten welk halfvlak, vul je in de ongelijkheid de coördinaten van een punt in, bijvoorbeeld van $(0, 0)$. Je krijgt $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 > 6$; dit klopt niet. Dus je moet het halfvlak hebben waar $(0, 0)$ niet in ligt.

Bij $2x - 3y \geq 6$ behoort ook de rand tot de grafiek. Geef de rand dezelfde kleur als het halfvlak.

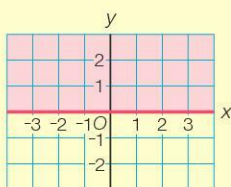


Bijzondere lineaire ongelijkheden

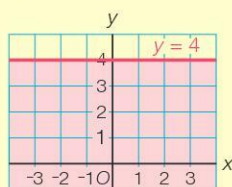
Bij $x \geq 0$ hoort het halfvlak rechts van de y -as met rand.



Bij $y \geq 0$ hoort het halfvlak boven de x -as met rand.



Bij $y \leq 4$ hoort het halfvlak onder de horizontale lijn $y = 4$ met rand.



Gecombineerde ongelijkheid

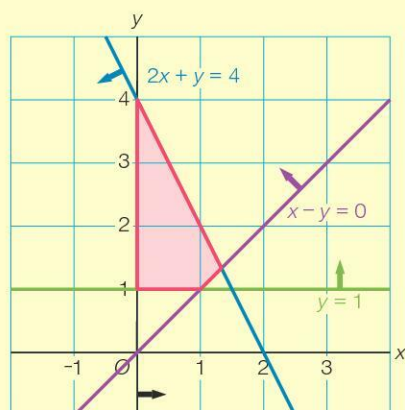
Een voorbeeld van een gecombineerde ongelijkheid is $x - y \leq 0$ en $2x + y \leq 4$ en $x \geq 0$ en $y \geq 1$. In de figuur hiernaast zie je de grafiek.

Je hebt te maken met het gedeelte waar de halfvlakken

- $x - y < 0$ (boven de lijn $x - y = 0$),
- $2x + y < 4$ (onder de lijn $2x + y = 4$),
- $x > 0$ (rechts van de y -as) en
- $y > 1$ (boven de lijn $y = 1$)

elkaar overlappen.

De randen horen bij de grafiek.



K.3 Lineaire programmeringsproblemen



022 Zuivelfabrikant Uniemelk heeft twee nieuwe soorten desserts ontwikkeld.

Een liter van de soort Melko (M) bestaat voor 20% uit melk en voor 15% uit room. Bij de soort Romich (R) zijn deze percentages 20 en 30. Per dag heeft de zuivelfabrikant 620 liter melk en 600 liter room beschikbaar voor de nieuwe desserts. De afdeling verkoop constateert een grote vraag naar de nieuwe desserts, maar geeft wel twee voorwaarden waaraan de hoeveelheden moeten voldoen.

- Maak nooit meer R dan M.
- Maak in totaal minstens 2000 liter per dag van de nieuwe desserts samen.
- a Neem aan dat de fabrikant besluit 1700 liter M en 1400 liter R te maken.
Hoeveel liter melk en hoeveel liter room is er dan nodig? Wat gaat er mis?
- b Neem aan dat de fabrikant besluit 1200 liter M en 1400 liter R te maken.
Welk bezwaar is tegen deze situatie in te brengen?
- c Is het mogelijk 2000 liter M en 1000 liter R te maken?

Theorie A Het toegestane gebied

Zuivelfabrikant Uniemelk vraagt zich af welke mogelijkheden er zijn voor een dagproductie die aan alle eisen van opgave 22 voldoet. Er zijn heel wat voorwaarden waar hij rekening mee moet houden.

Om een goed overzicht te krijgen van alle mogelijkheden voert hij de variabelen x en y in.

x = aantal liter M

y = aantal liter R

Voor x en y gelden de volgende **beperkende voorwaarden**.

- 1 Er is maximaal 620 liter melk beschikbaar, dus $0,2x + 0,2y \leq 620$.
- 2 Er is maximaal 600 liter room beschikbaar, dus $0,15x + 0,30y \leq 600$.
- 3 Er mag niet meer R dan M gemaakt worden, dus $y \leq x$.
- 4 Er moet totaal minstens 2000 liter gemaakt worden, dus $x + y \geq 2000$.
- 5 Omdat x en y hoeveelheden zijn, is $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

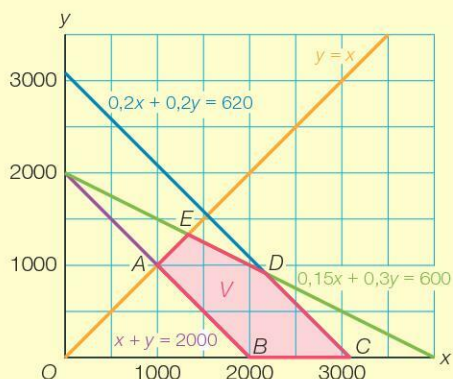
Bij het vaststellen van de dagproductie heeft de fabrikant dus te maken met een combinatie van zes lineaire ongelijkheden. Bij deze gecombineerde ongelijkheid hoort het vlakdeel V in figuur K.7.

Het rode vlakdeel V heet het **toegestane gebied**.

In V ligt bijvoorbeeld het punt (2200, 800). Voor de fabrikant houdt dit in dat een productie van 2200 liter M en 800 liter R aan alle eisen voldoet.

We zeggen dat $(2200, 800)$ een toegestaan productieprogramma is.
 V bestaat dus precies uit alle toegestane productieprogramma's (x, y) .

Er zijn heel wat praktische situaties waarbij beperkende voorwaarden een rol spelen. Vaak hoort bij deze beperkende voorwaarden een combinatie van lineaire ongelijkheden die een vlakdeel V bepalen. Elk punt (x, y) van dit toegestane gebied V levert een toegestaan productieprogramma.



figuur K.7

23 Zie figuur K.7.



- Bereken de coördinaten van de hoekpunten van V .
- Stel dat de fabrikant zo weinig mogelijk van dessert M maakt. Hoeveel liter M en hoeveel liter R maakt hij dan?
- Stel dat de fabrikant zo veel mogelijk van dessert R maakt. Hoeveel liter M en hoeveel liter R maakt hij dan?
- Stel dat de fabrikant 1500 liter M maakt. Welke hoeveelheden van dessert R zijn er dan mogelijk?

24 Een fabrikant brengt twee nieuwe soorten hardloopschoenen op de markt: Air Extra en Pump. Bij de fabricage spelen de factoren arbeid, machinetijd en materiaal een rol. Zie de tabel.



	nodig voor een paar Air Extra	nodig voor een paar Pump	totaal beschikbaar per dag
arbeid	9 minuten	15 minuten	48 000 minuten
machinetijd	3 minuten	3 minuten	10 000 minuten
materiaal	50 cm ²	30 cm ²	120 000 cm ²

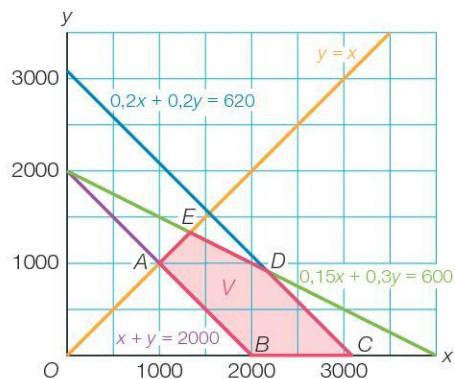
Stel dat de fabrikant per dag x paar Air Extra en y paar Pump maakt.

- Toon aan dat $3x + 5y \leq 16000$ één van de beperkende voorwaarden is.
- Behalve $x \geq 0$ en $y \geq 0$ zijn er nog twee beperkende voorwaarden. Welke?
- Kleur het toegestane gebied V .
- Kan de fabrikant per dag 3000 paar Air Extra vervaardigen?
- Stel dat de fabrikant besluit 2000 paar Pump per dag te maken. Welke aantallen van Air Extra zijn dan nog mogelijk?



In figuur K.8 zie je nog eens het toegestane gebied V bij het zuivelprobleem van Uniemelk. Hierin is x het aantal liter Melko (M) en y het aantal liter Romich (R) dat per dag gefabriceerd wordt. Verder is gegeven dat de winst €0,45 per liter M is, per liter R is dat €0,75.

- Hoeveel is de winst bij het productieprogramma (1500, 1000)?
- Hoeveel is de winst als er zo veel mogelijk M geproduceerd wordt? En hoeveel als er zo veel mogelijk R geproduceerd wordt?
- Zoek een productieprogramma dat een hogere winst oplevert dan die van vraag b.



figuur K.8

Theorie B De doelfunctie

Zuivelfabrikant Uniemelk heeft te maken met de volgende zes beperkende voorwaarden, die het toegestane gebied in figuur K.8 bepalen: $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $0,2x + 0,2y \leq 620$ en $0,15x + 0,30y \leq 600$ en $y \leq x$ en $x + y \geq 2000$.

Hierbij is x het aantal liter M en y het aantal liter R dat per dag gefabriceerd wordt.

Tot het toegestane gebied V behoren oneindig veel productieprogramma's (x, y) . Om het voor de fabrikant meest geschikte programma (x, y) te vinden, moet je weten wat de winst per liter dessert is. Voor één liter M is deze winst €0,45 en per liter R is dat €0,75.

De totale winst W in euro's op deze nieuwe desserts is een functie van x en y . Immers $W = 0,45x + 0,75y$. De fabrikant streeft ernaar het punt (x, y) van V te vinden waarvoor W maximaal is. De functie W heet de **doelfunctie**.

Merk op dat W een functie van twee variabelen is die geldig is op het toegestane gebied.

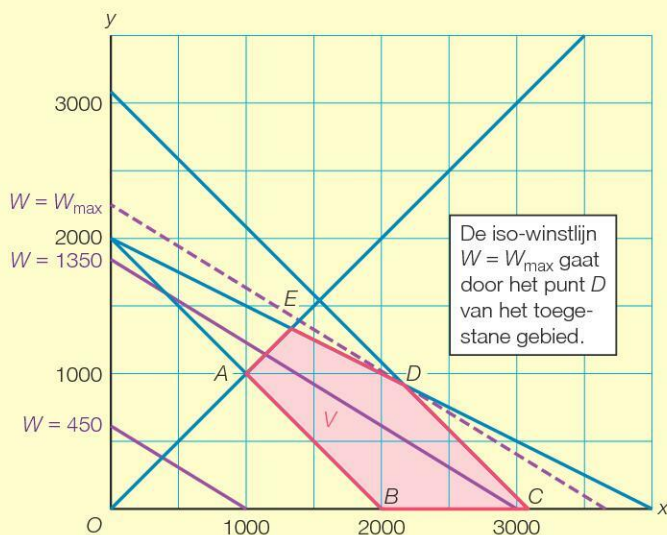
Het maximum van W kun je vinden met behulp van **iso-winstlijnen**. Teken bijvoorbeeld de iso-winstlijn door $(1000, 0)$. Hierbij hoort $W = 0,45 \cdot 1000 + 0,75 \cdot 0 = 450$. Teken dus de lijn $0,45x + 0,75y = 450$. Deze lijn snijdt de y -as in het punt $(0, 600)$. Zie de figuur op de volgende bladzijde. En zo kun je nagaan dat bij de iso-winstlijn door het punt $(3000, 0)$ de vergelijking $0,45x + 0,75y = 1350$ hoort.

Teken deze isolijn door het punt $(3000, 0)$ en evenwijdig met de isolijn $W = 450$.

Isolijnen zijn lijnen die punten met gelijke 'waarde' verbinden. Voorbeelden zijn isobaren en isothermen.

Is $W = 0,45x + 0,75y$, dan hoort bij $W = 1000$ de isolijn $0,45x + 0,75y = 1000$.

In elk punt op de lijn $0,45x + 0,75y = 1000$ neemt W de waarde 1000 aan.



figuur K.9

Je ziet in de figuur: hoe hoger de iso-winstlijn loopt, des te hoger is de winst.

We zoeken de maximale winst, dus het gaat erom de hoogstgelegen iso-winstlijn te vinden, die nog juist door een punt van het toegestane gebied gaat. Dat moet dus de gestippelde iso-winstlijn $W = W_{\max}$ zijn door het punt $D(2200, 900)$.

$$\left. \begin{array}{l} W = 0,45x + 0,75y \\ W_{\max} \text{ in } (2200, 900) \end{array} \right\} W_{\max} = 0,45 \cdot 2200 + 0,75 \cdot 900 = 1665$$

Uniemelk maakt een maximale winst van 1665 euro per dag bij een productie van 2200 liter Melko en 900 liter Romich.

De methode die we hierboven hebben toegepast, heet **lineair programmeren**. Bij lineair programmeren heb je te maken met een aantal beperkende voorwaarden, die een toegestaan gebied bepalen. Dit toegestane gebied is begrensd door rechte lijnen. Op dit toegestane gebied moet een *lineaire* doelfunctie gemaximaliseerd of geminimaliseerd worden.

Het woord programmeren heeft te maken met het zoeken naar een productieprogramma (x, y) waarmee we de doelfunctie optimaliseren. Dit optimaliseren gaat met behulp van isolijnen van de doelfunctie.

Bij het oplossen van een lineair programmeringsprobleem bereken je in de laatste stap het maximum of minimum van een lineaire doelfunctie op een gegeven toegestaan gebied. Zie het voorbeeld.

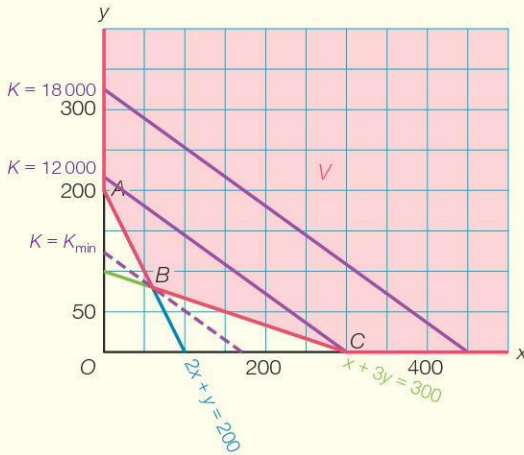


Voorbeeld

Minimaliseer de doelfunctie $K = 40x + 55y$ op het toegestane gebied V :
 $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $2x + y \geq 200$ en $x + 3y \geq 300$.

Uitwerking

De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,
 $2x + y = 200$ door $(0, 200)$ en $(100, 0)$,
 $x + 3y = 300$ door $(0, 100)$ en $(300, 0)$.



Isolijn door $(300, 0)$ geeft $40x + 55y = 12000$ en gaat ook door $(0; 218,2)$.

Neem als eerste isolijn bijvoorbeeld de isolijn door $C(300, 0)$, dat is de lijn $K = 40 \cdot 300 + 55 \cdot 0$, dus de lijn $K = 12000$.

Isolijn door $(450, 0)$ geeft $K = 18000$.

Teken deze isolijn door $(450, 0)$ en evenwijdig met de isolijn $K = 12000$.

K is minimaal in het snijpunt B van de lijnen $2x + y = 200$ en $x + 3y = 300$.

$$\begin{cases} 2x + y = 200 \\ x + 3y = 300 \end{cases} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \text{ geeft } \begin{cases} 6x + 3y = 600 \\ x + 3y = 300 \\ \hline 5x = 300, \text{ dus } x = 60 \\ 2x + y = 200 \end{cases} \begin{matrix} 120 + y = 200, \text{ dus } y = 80 \end{matrix}$$

$K_{\min}$ in $(60, 80)$, dus $K_{\min} = 40 \cdot 60 + 55 \cdot 80 = 6800$.

26 Minimaliseer $K = 20x + 18y$ op het toegestane gebied V :
 $y \geq 0$ en $x + 6y \leq 18$ en $2x + 3y \geq 12$.

27 Maximaliseer $W = 3x + y$ op het toegestane gebied V :
 $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $2x + 3y \leq 12$ en $2x + y \leq 8$ en $x - 2y \leq 2$.

Theorie C Het oplossen van een lineair programmeringsprobleem

Bij het oplossen van een lineair programmeringsprobleem vertaal je eerst de situatie in wiskundige formules. Begin daarom met het invoeren van de variabelen x en y en schrijf vervolgens de doelfunctie en de beperkende voorwaarden op. Daarna kun je met het schuiven van de isolijnen de optimale situatie berekenen.

Werkschema: oplossen van een lineair programmeringsprobleem

- 1 Verdiep je in de situatie en voer de variabelen x en y in.
- 2 Stel de formule op van de doelfunctie.
- 3 Schrijf de beperkende voorwaarden op.
- 4 Teken het toegestane gebied.
- 5 Zoek met behulp van isolijnen het programma (x, y) dat de doelfunctie optimaliseert en beantwoord de gestelde vraag.

GESCHIEDENIS

George Dantzig

In 1939 studeerde George Dantzig wiskunde aan de Universiteit in Berkeley (Californië). Op een dag verscheen hij te laat op het college. Hij schreef de twee problemen die op het bord stonden over, in de veronderstelling dat dat het huiswerk was. Zes weken nadat hij de oplossingen van deze problemen had ingeleverd, belde zijn professor hem op. Het bleek dat het twee beroemde nog niet eerder opgeloste problemen uit de statistiek betrof. De naam George Dantzig was hiermee gevestigd. Spoedig daarna kreeg hij een baan als wiskundige in het Amerikaanse leger, dat zich intussen in de Tweede Wereldoorlog in de strijd had gemengd. Het was zijn taak de distributie van manschappen, wapens en voedsel naar de verschillende fronten zo efficiënt mogelijk te organiseren. Hierbij ontwikkelde hij de theorie van het lineair programmeren.



Deze methode had niet alleen bij militaire operaties haar nut, maar werd al spoedig toegepast in de economie, de industrie en het transportwezen. Er wordt gezegd dat het misschien wel de belangrijkste wiskundige ontdekking van de laatste 100 jaar is. Een van de problemen die met de door George Dantzig ontwikkelde methode van lineair programmeren werd opgelost, betrof de organisatie van de luchtbrug tussen de Westerse geallieerden en Berlijn in juni 1948. In die maand sloot de Sovjet-Unie alle toevoerwegen over land naar Berlijn af met het doel de Westerse mogendheden uit Berlijn te verdrijven. Het gevolg was een gigantische luchtbrug om de meer dan twee miljoen mensen in West-Berlijn van voedsel te voorzien. Hierbij waren honderden Amerikaanse en Engelse vliegtuigen betrokken die grote hoeveelheden voedsel, kleding, grondstoffen en medicijnen vervoerden. In vereenvoudigde vorm komt dit probleem aan de orde in opgave 39.

Voorbeeld

In een fabriek worden de producten A en B gemaakt. Bij de fabricage zijn drie machines nodig. Per week is machine I 60 uur beschikbaar, machine II is 50 uur beschikbaar en machine III is 90 uur beschikbaar. Bij de fabricage van één exemplaar heeft product A 6 minuten machinetijd I nodig, 6 minuten machinetijd II en 3 minuten machinetijd III. Bij product B zijn deze tijden achtereenvolgens 6, 4 en 12 minuten. De fabrikant kan per exemplaar van A rekenen op een winst van 5 euro en per exemplaar van B op een winst van 3 euro. Hoeveel exemplaren van A en B moet de fabrikant per week fabriceren om een maximale winst te bereiken? Hoeveel is de maximale winst?

Aanpak

Volg het werkschema voor het oplossen van een lineair programmeringsprobleem.

Verwerk de gegevens overzichtelijk in een tabel.

	product A	product B	beschikbare tijd
machine I	6 minuten	6 minuten	60 uur
machine II	6 minuten	4 minuten	50 uur
machine III	3 minuten	12 minuten	90 uur
winst per exemplaar	5 euro	3 euro	

Uitwerking

Variabelen

x = aantal A per week; y = aantal B per week

Doelfunctie

De doelfunctie is $W = 5x + 3y$.

Beperkende voorwaarden

$x \geq 0$ en $y \geq 0$

$6x + 6y \leq 3600$, oftewel $x + y \leq 600$ (machine I)

$6x + 4y \leq 3000$, oftewel $3x + 2y \leq 1500$ (machine II)

$3x + 12y \leq 5400$, oftewel $x + 4y \leq 1800$

(machine III)

Toegestane gebied

De grenslijnen zijn $x = 0$, $y = 0$,

$x + y = 600$ door $(0, 600)$ en $(600, 0)$,

$3x + 2y = 1500$ door $(0, 750)$ en $(500, 0)$,

$x + 4y = 1800$ door $(0, 450)$ en $(1800, 0)$.

Isoliijnen

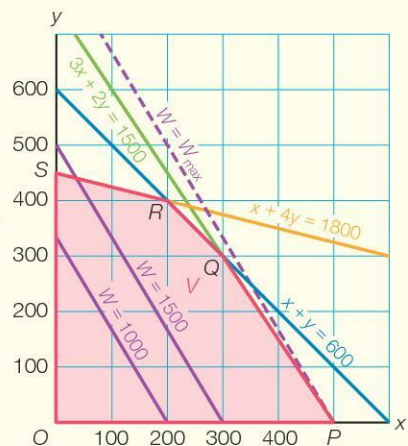
Isoliijn door $(200, 0)$ geeft $5x + 3y = 1000$ en gaat ook door $(0; 333,3)$.

Isoliijn door $(300, 0)$ geeft $W = 1500$.

W is maximaal in het punt $P(500, 0)$. Dus $W_{\max} = 5 \cdot 500 + 3 \cdot 0 = 2500$.

Conclusie

De weekopbrengst is maximaal 2500 euro bij een weekproductie van 500 exemplaren van A en geen enkel exemplaar van B.



28
□ ⊙ *

In meubelfabriek Merkens worden luxe fauteuils en sofa's gemaakt. Bij het productieproces zijn drie fasen te onderscheiden.

- 1 Op de constructieafdeling worden de meubels in elkaar gezet.
- 2 Op de bekledingsafdeling wordt de bekleding voor de meubels op maat gemaakt en aangebracht.
- 3 Op de afwerkingsafdeling vindt de eindcontrole plaats en worden de meubels ingepakt voor verzending.

Voor het maken van een fauteuil rekent men op 6 uur werk op de constructieafdeling, 2 uur op de bekledingsafdeling en 1 uur op de afwerkingsafdeling. Voor het maken van een sofa rekent men achtereenvolgens op 3 uur, 6 uur en 1 uur.

De winst per fauteuil is 640 euro en per sofa 560 euro.

Bij de productie van de meubels heeft Merkens met een aantal beperkende voorwaarden te maken, aangezien de beschikbare hoeveelheid materiaal, gereedschap en arbeid niet onbeperkt is. Er zijn per dag 96 uur op de constructieafdeling beschikbaar, 72 uur op de bekledingsafdeling en 18 uur op de afwerkingsafdeling.

a Vul de volgende tabel in.

	fauteuil	sofa	beschikbaar per dag
constructieafdeling	6 uur	...	96 uur
bekledingsafdeling	...	...	...
afwerkingsafdeling	...	...	...
winst per stuk in euro's	...	...	

- b** Schrijf de winst W per dag als functie van x en y waarbij x = aantal fauteuils per dag en y = aantal sofa's per dag.
- c** Schrijf de vijf beperkende voorwaarden op.
- d** Teken het toegestane gebied.
- e** Bereken de maximale winst per dag.
Bij welk productieprogramma wordt die maximale winst bereikt?
- f** Op welke afdeling worden niet alle beschikbare uren gebruikt?
Hoeveel uren blijven er daar over?

29
□ ⊙ *

Zie opgave 28.

- a** Stel dat de winst per fauteuil 640 euro is en de winst per sofa 800 euro.
Bij welk productieprogramma is de winst W maximaal? Hoeveel is die maximale winst en op welke afdeling blijft een aantal uren ongebruikt?
- b** Stel dat de winst per fauteuil 200 euro is en per sofa 800 euro.
Bij welk productieprogramma is de winst nu maximaal?

Aannemer Dijkstra gaat in een uitbreidingsplan twee typen woningen bouwen: seniorenwoningen en villa's. Voor een seniorenwoning heeft Dijkstra een kapitaal van 60 000 euro nodig voor materiaal, arbeidskosten en dergelijke, terwijl zo'n huis 150 mensdagen werk oplevert. Voor een villa is het benodigde kapitaal 160 000 euro en zijn er voor de bouw 200 mensdagen nodig. Het aantal beschikbare mensdagen tijdens de bouwperiode is 24 000 en het beschikbare kapitaal is 14 400 000 euro. Het uitbreidingsplan staat de bouw van maximaal 150 huizen toe. Een seniorenwoning levert Dijkstra 10 000 euro winst op en een villa 14 000 euro.

- Schrijf de winst W als functie van x en y waarbij x = aantal seniorenwoningen en y = aantal villa's.
- Schrijf vijf beperkende voorwaarden op en kleur het toegestane gebied.
- Bereken de maximale winst. Bij welk programma is de winst maximaal?



In verband met een grote oefening, die voor de volgende week op het programma staat, krijgt de kok van een kazerne de opdracht blikken met voedsel samen te stellen. Elk blik moet voorzien in de dagelijkse behoefte aan vetten, eiwitten en koolhydraten per manschap. Elke soldaat moet per dag minimaal 100 gram vet, 100 gram eiwit en 200 gram koolhydraten binnenkrijgen. Een blik wordt gevuld met groenten (inclusief aardappels) en vlees.

1 kg groente kost € 1,50 en bevat 50 gram vet, 250 gram eiwit en 200 gram koolhydraten.

1 kg vlees kost € 4,50 en bevat 200 gram vet, 75 gram eiwit en 250 gram koolhydraten.

De bedoeling is dat de kok de groenten en het vlees zodanig combineert, dat de kosten per blik minimaal zijn.

- Voer de variabelen x en y in, stel de formule van de doelfunctie op en schrijf de beperkende voorwaarden op.
- Bereken de samenstelling van de inhoud van het blik in grammen nauwkeurig in het geval de kosten minimaal zijn.



K.4 De hoekpuntmethode

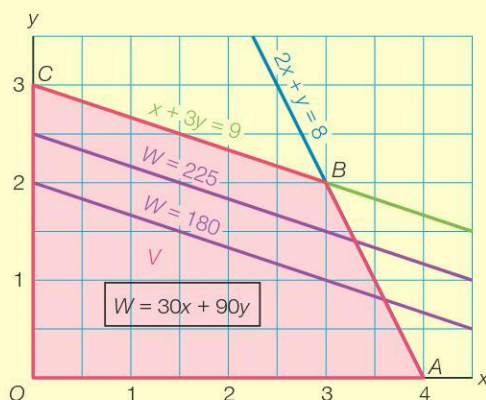
032
 *

Bij een lineair programmeringsprobleem is het toegestane gebied gegeven door $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $5x + 4y \leq 60$ en $x \leq 8$ en $y \leq 10$.

- Kleur het toegestane gebied.
- Welke (x, y) maximaliseert de doelfunctie $W = 3x + 2y$?
- De doelfunctie $R = 10x + 8y$ wordt bij meer dan één programma (x, y) gemaximaliseerd. Licht dit toe.

Theorie A Isolijnen evenwijdig met de rand

Bij het lineair programmeren in opgave 32c ben je een bijzondere situatie tegengekomen: meer dan één programma (x, y) optimaliseert de doelfunctie. Deze situatie komt voor als de isolijnen van de doelfunctie evenwijdig lopen met één van de randen van het toegestane gebied. Zo zijn in figuur K.11 de isolijnen van de doelfunctie $W = 30x + 90y$ evenwijdig met de rand BC . Elk punt (x, y) op het lijnstuk BC maximaliseert W .



figuur K.11

Een lineair programmeringsprobleem heeft meer dan één oplossing als de isolijnen van de doelfunctie evenwijdig zijn met één van de randen van het toegestane gebied.

Aan de getallen die voor x en y staan in de formule van W en in de formule van de rand is snel te zien of van evenwijdigheid sprake is. Zo zijn de isolijnen van $W = 30x + 90y$ evenwijdig met de lijn $x + 3y = 9$, want $30 : 90 = 1 : 3$.

33

Gegeven is een lineair programmeringsprobleem waarbij voor het toegestane gebied V geldt dat $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $3x + 2y \leq 20$ en $x + 4y \leq 30$.

Welke van de volgende doelfuncties leveren meer dan één oplossing op? Licht toe.

- $W = 3x + 12y$
- $W = 6x + 8y$
- $W = 4x + 6y$
- $W = 1,5x + y$
- $W = 0,5x + 2y$

34
□ ⊙ *

Van het toegestane gebied V is gegeven $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $3x + 4y \leq 60$ en $4x + 3y \leq 60$ en $x \leq 10$ en $y \leq 12$.

Wat weet je van de programma's (x, y) die de doelfunctie $W = 20x + 15y$ maximaliseren? Bereken dit maximum.

E35
*

Het toegestane gebied V is gegeven door

$y \geq 0$ en $2x + 3y \geq 12$ en $6x + 5y \geq 30$.

Zie figuur K.12.

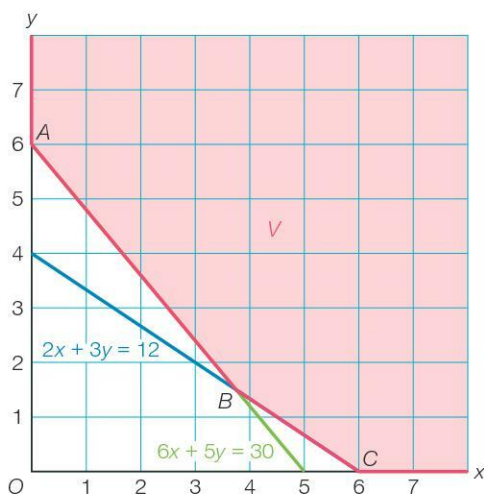
- a Bij het minimaliseren van de doelfunctie $K = 8x + ay$ met $a \neq 0$ blijken oneindig veel programma's (x, y) te voldoen.

Onderzoek welke waarden van a mogelijk zijn en bereken bij elke a het minimum van K .

Gegeven is de doelfunctie $L = px + 3y$.

Onderzoek wat je van p weet in het geval

- b elk punt op het lijnstuk AB de doelfunctie minimaliseert
c alleen het programma $(0, 6)$ de doelfunctie minimaliseert
d alleen het programma $(3\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2})$ de doelfunctie minimaliseert.



figuur K.12

Theorie B Optimaliseren met behulp van hoekpunten

Je hebt gemerkt dat bij lineaire programmeringsproblemen de optimale waarde van de doelfunctie bereikt wordt in een hoekpunt van het toegestane gebied. Dit is als volgt te verklaren. Bij het schuiven van de isolijnen kom je altijd in een hoekpunt het toegestane gebied binnen, óf verlaat je het toegestane gebied in een hoekpunt. Ook in het geval dat de isolijnen evenwijdig zijn met een rand is dit zo. De optimale waarde wordt in dat geval bereikt in twee hoekpunten én alle tussenliggende punten.

Een doelfunctie neemt de maximale of de minimale waarde aan in een hoekpunt van het toegestane gebied.

Je kunt een doelfunctie daarom ook optimaliseren zonder isolijnen te gebruiken. Je gebruikt dan de **hoekpuntmethode**.

Bij de hoekpuntmethode bereken je de coördinaten van de hoekpunten van het toegestane gebied. Daarna maak je een tabel waarin je bij elk hoekpunt de waarde van de doelfunctie berekent en geef je aan welk punt (x, y) de doelfunctie optimaliseert.

Een nadeel van de hoekpuntmethode is dat je van alle hoekpunten van het toegestane gebied de coördinaten moet berekenen, terwijl je bij het schuiven met isolijnen slechts één hoekpunt nodig hebt. Maar een voordeel is dat de hoekpuntmethode bijzonder overzichtelijk is en dat je geen isolijnen hoeft te tekenen.

Voorbeeld

Gegeven is het toegestane gebied V : $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $x + 2y \leq 6$ en $2x + y \leq 5$ en $x - y \leq 2$. Zie figuur K.13.

Maximaliseer met behulp van de hoekpuntmethode de doelfunctie $W = 4x + 3y$ op V .

Uitwerking

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases} + \quad \begin{aligned} 3x &= 7, \text{ dus } x = 2\frac{1}{3} \\ x - y &= 2 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} 2\frac{1}{3} - y &= 2, \text{ dus } y = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\}$$

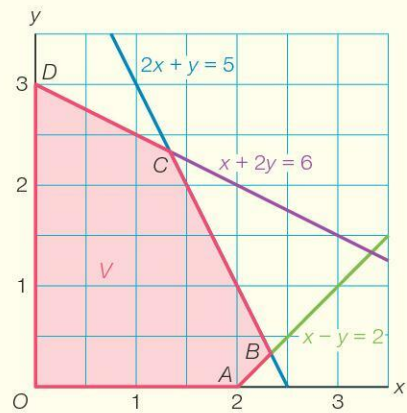
Dus $B(2\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases} - \quad \begin{aligned} -3x &= -4, \text{ dus } x = 1\frac{1}{3} \\ 2x + y &= 5 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} 2 \cdot 1\frac{1}{3} + y &= 5, \text{ dus } y = 2\frac{1}{3} \end{aligned} \right\}$$

Dus $C(1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3})$.

hoekpunt	$W = 4x + 3y$
$O(0, 0)$	0
$A(2, 0)$	8
$B(2\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$10\frac{1}{3}$
$C(1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3})$	$12\frac{1}{3}$ ← maximaal
$D(0, 3)$	9

$W_{\max} = 12\frac{1}{3}$ bij het programma $(x, y) = (1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3})$.



figuur K.13



R36 Ingrid maximaliseert een doelfunctie op een toegestaan gebied V en gebruikt daarbij de hoekpuntmethode.

Hoe kan ze, tijdens het invullen van de waarden van de doelfunctie in de tabel met hoekpunten, constateren dat er oneindig veel programma's (x, y) zijn die de doelfunctie maximaliseren?

Narendra Karmarkar

De laatste jaren zijn nieuwe technieken ontwikkeld om lineaire programmeringsproblemen met een computer snel op te lossen. In 1979 kwam Khachian, een Russische wiskundige, met een nieuwe methode die in 1984 door de Amerikaan Narendra Karmarkar sterk verbeterd werd. Karmarkar was een onderzoeker bij de Amerikaanse telefoonmaatschappij AT&T. Met behulp van deze nieuwe lineaire programmeringstechniek heeft de maatschappij in het Amerikaanse telefoonnet miljoenen dollars kunnen besparen. Met de methode van Karmarkar is een lineair programmeringsprobleem met meer dan 800 000 variabelen binnen de kortste keren op te lossen.



37
📅🔍

De regering van een ontwikkelingsland moedigt de bevolking aan dagelijks een voedselpakket bestaande uit rijst en sojabonen te nuttigen. Hiermee hoopt men de dagelijkse behoefte aan eiwit, calorieën en vitamine B te kunnen dekken. Zie de tabel.

	gram eiwit	calorieën in kJ	mg vitamine B	prijs
70 gram rijst	15	3390	0,1	18 cent
70 gram sojabonen	22,5	1130	0,3	12 cent
dagelijkse behoefte	90	6780	0,9	

Onderzoek met de hoekpuntmethode uit hoeveel rijst en sojabonen een voedselpakket voor één persoon moet bestaan om aan de dagelijkse behoefte aan eiwit, calorieën en vitamine B te voldoen, waarbij de kosten per pakket minimaal moeten zijn.

A38
📅🔍*

Een fabriek vervaardigt kano's en kajaks. In de tabel zie je informatie over het productieproces.

	kano	kajak	beschikbare hoeveelheid per week
arbeid	10 uur	7,5 uur	2000 uur
polyetheen	0,2 m ²	0,5 m ²	90 m ²
polyester	1,1 m ²	1,2 m ²	264 m ²
kleurstoffen	5 liter	5 liter	1500 liter
winst per boot	350 euro	300 euro	

- De afdeling planning heeft op grond van deze tabel de aantallen kano's x en kajaks y vastgesteld waarvoor de winst maximaal is.
 - Bereken de maximale winst per week.
 - Welke materialen worden bij de gekozen aantallen niet volledig in een week verbruikt? Hoeveel blijft er per week van elk materiaal over?
- Stel dat het aantal beschikbare arbeidsuren met 20% toeneemt. Met hoeveel procent neemt de maximale winst per week toe?

In het geschiedeniskader op bladzijde 149 heb je kunnen lezen dat kort na de Tweede Wereldoorlog de Westerse geallieerden een luchtbrug naar Berlijn organiseerden om de bevolking in Berlijn van voedsel, medicijnen, kleding en grondstoffen te voorzien.

Voor het organiseren van een luchtbrug, waarbij zoveel mogelijk vracht moet worden vervoerd, zijn Amerikaanse en Engelse vliegtuigen beschikbaar. In verband met de landingsmogelijkheden kunnen maximaal 12 vliegtuigen aan de luchtbrug meedoen. Er zijn maximaal 41 bemanningsleden beschikbaar. Van een Amerikaans vliegtuig bestaat de bemanning uit vijf personen, van een Engels vliegtuig uit drie personen. Een Amerikaans vliegtuig kan 5400 m^3 vracht vervoeren, een Engels vliegtuig 3600 m^3 .



- a** Stel de formule op van de doelfunctie. Met welke beperkende voorwaarden heb je te maken? Bereken de coördinaten van de hoekpunten van het toegestane gebied en bereken bij elk hoekpunt de waarde van de doelfunctie.

Omdat alleen gehele aantallen vliegtuigen kunnen worden ingezet, wordt de doelfunctie niet gemaximaliseerd in het hoekpunt van vraag a met de grootste waarde van de doelfunctie. Door met isolijnen te schuiven, kun je de punten in het toegestane gebied vinden die voor het optimaliseren van de doelfunctie in aanmerking komen.

Als het toegestane gebied alleen uit roosterpunten bestaat, spreken we van een *geheeltallig* lineair programmeringsprobleem.

- b** Onderzoek bij welke aantallen vliegtuigen er zoveel mogelijk vracht kan worden vervoerd.

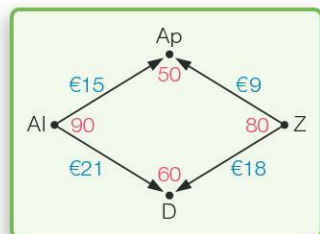
Bij de bouw van een nieuw vergadercentrum is in één van de vleugels van een gebouw plaats voor 80 vergaderruimten voor vier personen. Maar men kan ook ruimten voor twaalf personen maken, die twee keer zo groot zijn als de vierpersoonsvergaderruimten. In totaal wil men minstens 360 personen kunnen onderbrengen. Verder dient het aantal twaalfpersoonsvergaderruimten minstens twee keer het aantal vierpersoonsvergaderruimten te zijn. De winst op een vierpersoonsvergaderruimte is 100 euro per dag en die op een twaalfpersoonsvergaderruimte is 150 euro per dag. Bereken bij welk aantal vier- en twaalfpersoonsvergaderruimten de winst maximaal is.

Een groothandel in televisietoestellen heeft een magazijn in Almelo en een in Zutphen. In het magazijn in Almelo zijn 90 tv's aanwezig en in Zutphen 80. Er komt een bestelling binnen voor 50 tv's van een winkel in Apeldoorn en voor 60 tv's van een winkel in Doetinchem.

De vervoerskosten in euro's per tv staan in de tabel hiernaast. Je ziet dat het vervoer van tv's van Zutphen naar Doetinchem 18 euro per stuk kost.

VERVOERSKOSTEN IN EURO'S PER TV

		van	
		Almelo	Zutphen
naar	Apeldoorn	15	9
	Doetinchem	21	18



- Stel dat er 20 tv's van Almelo naar Apeldoorn en 30 van Almelo naar Doetinchem worden vervoerd. Hoeveel gaan er dan van Zutphen naar Apeldoorn en van Zutphen naar Doetinchem? Bereken de totale transportkosten.
- Stel dat x tv's van Almelo naar Apeldoorn gaan en y van Almelo naar Doetinchem. In Almelo zijn 90 tv's aanwezig. Welke beperkende voorwaarde voor x en y volgt hieruit?

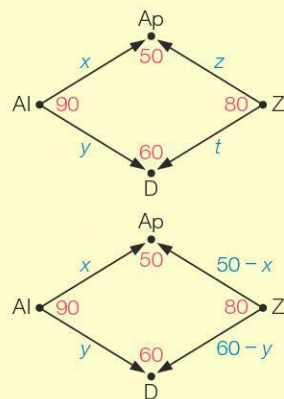
Theorie C Transportproblemen

Het **transportprobleem** in opgave 41 is met behulp van lineair programmeren op te lossen. In eerste instantie lijkt het of er vier variabelen nodig zijn. Zie het transportschema hiernaast. Maar dat valt gelukkig mee.

Een van de voorwaarden is namelijk dat Apeldoorn 50 tv's nodig heeft, dus $x + z = 50$, oftewel $z = 50 - x$.

En zo volgt uit de 60 tv's die naar Doetinchem gaan dat $y + t = 60$, oftewel $t = 60 - y$.

Bij dit transportprobleem kun je dus volstaan met de twee variabelen x en y in het schema hiernaast. Op deze wijze ontstaat een geheeltallig lineair programmeringsprobleem dat op de bekende wijze is op te lossen.



De beperkende voorwaarden zijn:

- Je hebt te maken met aantallen, dus $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $50 - x \geq 0$, oftewel $x \leq 50$ en $60 - y \geq 0$, oftewel $y \leq 60$.
- In Almelo zijn 90 tv's aanwezig, dus $x + y \leq 90$.
- In Zutphen zijn 80 tv's aanwezig, dus $(50 - x) + (60 - y) \leq 80$. Dit geeft $110 - x - y \leq 80$, dus $30 \leq x + y$, oftewel $x + y \geq 30$.

De groothandel streeft ernaar de transportkosten T te minimaliseren.

De doelfunctie is $T = 15x + 21y + 9(50 - x) + 18(60 - y)$, dus

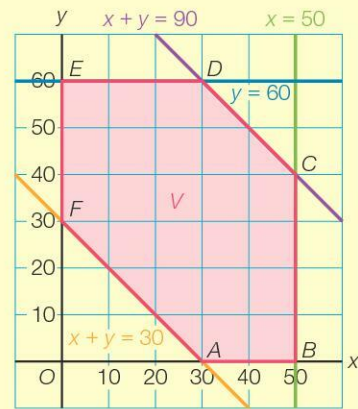
$T = 15x + 21y + 450 - 9x + 1080 - 18y$, oftewel $T = 6x + 3y + 1530$.

Het toegestane gebied met de randen $x = 0$, $y = 0$, $x = 50$, $y = 60$, $x + y = 90$ en $x + y = 30$ zie je in figuur K.14.

Met de hoekpuntmethode krijg je

hoekpunt	$T = 6x + 3y + 1530$
$A(30, 0)$	1710
$B(50, 0)$	1830
$C(50, 40)$	1950
$D(30, 60)$	1890
$E(0, 60)$	1710
$F(0, 30)$	1620 ← minimaal

De minimale transportkosten zijn dus 1620 euro. Er gaan dan 30 tv's van Almelo naar Doetinchem, 50 van Zutphen naar Apeldoorn en 30 van Zutphen naar Doetinchem.



figuur K.14 Het toegestane gebied bestaat uit alle roosterpunten binnen en op de zeshoek $ABCDEF$.

42 Een groothandel in meubels heeft magazijnen in Breda en Eindhoven.

In Breda heeft de groothandel 40 bankstellen in voorraad en in Eindhoven zijn dat er 45.

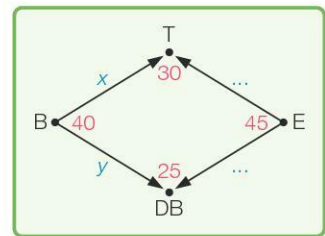
Er komt een bestelling van 30 bankstellen binnen uit Tilburg en een bestelling van 25 bankstellen uit Den Bosch.

De vervoerskosten in euro's per bankstel staan in de tabel.

VERVOERSKOSTEN PER BANKSTEL IN EURO'S

	naar Tilburg	naar Den Bosch
van Breda	25	35
van Eindhoven	15	30

- Neem het schema van hiernaast over en vul de open plaatsen in.
- Schrijf de zes beperkende voorwaarden op.
- Hoeveel bankstellen gaan er van Breda naar Tilburg en van Breda naar Den Bosch in het geval de transportkosten minimaal zijn? Hoeveel zijn de minimale transportkosten?



A43 Een autoverhuurbedrijf heeft vestigingen in Amsterdam en Rotterdam. In Amsterdam zijn 24 auto's voorradig en in Rotterdam 32. Er komt een aanvraag binnen uit Utrecht voor 16 auto's en uit Leiden voor 28 auto's. De transportkosten van Rotterdam naar Utrecht zijn 24 euro per auto en die van Rotterdam naar Leiden 18 euro per auto. Vanuit Amsterdam zijn deze bedragen respectievelijk 20 euro en 14 euro.

Onderzoek wat de voordeligste manier is om de auto's vanuit de vestigingen naar de plaatsen Utrecht en Leiden te transporteren.

44
□ ⊗ *

Een pensioenfonds wil 30 miljoen euro onderbrengen bij drie beleggingsfondsen A, B en C. In verband met administratieve regels dient in elk fonds minimaal 3 miljoen euro te worden ondergebracht. Verder moet minstens de helft bij de fondsen A en B samen worden ondergebracht, waarbij het bedrag bij B niet meer dan twee keer het bedrag van A mag zijn.

De verwachte jaarlijkse opbrengst is 7% voor fonds A, 8% voor fonds B en 9% voor fonds C.

Je onderzoekt in deze opgave hoe je het bedrag over de fondsen moet verdelen om een maximale jaarlijkse opbrengst te krijgen.

Stel dat x het bedrag in miljoenen euro's is dat bij A wordt ondergebracht en dat y het bedrag in miljoenen euro's is dat bij B wordt ondergebracht.

- Druk het bedrag dat bij C wordt ondergebracht uit in x en y en toon aan dat hieruit de beperkende voorwaarde $x + y \leq 27$ volgt.
- Behalve $x \geq 3$ en $y \geq 3$ en de bij vraag a gevonden voorwaarde zijn er nog twee beperkende voorwaarden. Welke?
- Toon aan dat de doelfunctie R te schrijven is als $R = 2,7 - 0,02x - 0,01y$.
- Bereken hoe het bedrag van 30 miljoen euro over de fondsen moet worden verdeeld om een maximale jaarlijkse opbrengst te krijgen.

De voorwaarden $x \leq 30$ en $y \leq 30$ vervallen, want door de voorwaarde $x + y \leq 27$ is hieraan automatisch voldaan. De voorwaarde $30 - x - y \leq 30$, oftewel $x + y \geq 0$ vervalt ook vanwege $x + y \geq 15$.

45
□ ⊗ *

In een kantoor met een totale vloeroppervlakte van 6000 m² moet vloerbedekking worden gelegd. De soorten A, B en C komen in aanmerking.

Voor soort A zijn de afschrijvingskosten € 3,- per m² per jaar. Voor de soorten B en C zijn deze kosten € 1,50 respectievelijk € 1,- per m² per jaar.

Aan schoonmaakkosten rekent men voor soort A op € 5,-, voor soort B op € 8,- en voor soort C op € 10,- per m² per jaar.

In totaal wil men per jaar niet meer dan € 40 000,- aan schoonmaakkosten hebben.

Hoeveel m² zal men met soort A, soort B en soort C moeten leggen om de jaarlijkse afschrijvingskosten te minimaliseren?



A46
□ ⊗ *

Een olieraffinaderij produceert benzine, diesel en lpg.

De winst per liter is achtereenvolgens € 0,15, € 0,12 en € 0,10.

Per dag wordt 100 000 liter geproduceerd. Er is een contract getekend dat inhoudt dat er per dag van elke soort minstens 5000 liter moet worden geproduceerd. Aan benzine en lpg samen moet minstens 50 000 liter geleverd worden en aan diesel en lpg samen minstens 20 000 liter. Bij welke brandstofverdeling wordt de winst gemaximaliseerd?

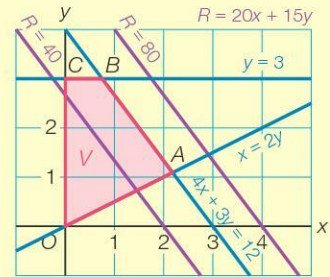
Terugblik

Isolijnen evenwijdig met een rand van het toegestane gebied

In de figuur hiernaast is het toegestane gebied V gegeven door $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $y \leq 3$ en $4x + 3y \leq 12$ en $x \leq 2y$.

De doelfunctie is $R = 20x + 15y$.

De isolijnen van $R = 20x + 15y$ lopen evenwijdig met de rand AB : $4x + 3y = 12$, want $20 : 15 = 4 : 3$. Elk punt van het lijnstuk AB maximaliseert R . Neem je het punt $B(\frac{3}{4}, 3)$, dan krijg je $R_{\max} = 20 \cdot \frac{3}{4} + 15 \cdot 3 = 60$.



Hoekpuntmethode

Een doelfunctie neemt een maximale of minimale waarde aan in een hoekpunt van het toegestane gebied V . Met de hoekpuntmethode maximaliseer je $W = 20x + 30y$ op V in de figuur als volgt.

hoekpunt	$W = 20x + 30y$
$O(0, 0)$	0
$A(\frac{24}{11}, \frac{12}{11})$	76,36
$B(\frac{3}{4}, 3)$	105
$C(0, 3)$	90

Maximaal, dus $W_{\max} = 105$.

Geheeltallig lineair programmeren

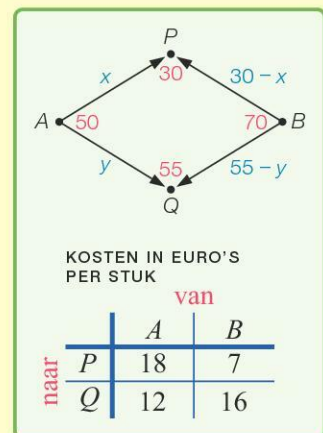
Soms komen alleen programma's (x, y) in aanmerking waarin x en y gehele getallen zijn. Tot het toegestane gebied V behoren dan alleen maar roosterpunten.

Transportproblemen

Een transportprobleem kun je goed visualiseren met een schema waarin je de vervoersstromen tekent. Bij het transportprobleem hiernaast kun je met twee variabelen volstaan. De beperkende voorwaarden zijn

- $x \geq 0$ en $y \geq 0$ en $30 - x \geq 0$ en $55 - y \geq 0$
- $x + y \leq 50$
- $30 - x + 55 - y \leq 70$, oftewel $x + y \geq 15$.

Zijn de transportkosten per apparaat gegeven door de tabel hiernaast, dan zijn de totale transportkosten $T = 18x + 12y + 7(30 - x) + 16(55 - y)$, oftewel $T = 11x - 4y + 880$.



K.5 Lineair programmeren met Excel

O47

In een fabriek worden de producten A en B gemaakt. Bij de fabricage zijn drie machines nodig. Per week is machine I 60 uur beschikbaar, machine II is 50 uur beschikbaar en machine III is 90 uur beschikbaar. Hoeveel machinetijd voor de fabricage van 1 kg van elk van de producten A en B nodig is, staat in de tabel.

	product A	product B	beschikbare tijd
machine I	3 uur	3 uur	60 uur
machine II	3 uur	2 uur	50 uur
machine III	1,5 uur	6 uur	90 uur
winst per kg	2 euro	5 euro	

Stel dat er per week x kg van product A geproduceerd wordt en y kg van product B. In figuur K.15 zie je het toegestane gebied. Hierbij horen behalve $x \geq 0$ en $y \geq 0$ de volgende beperkende voorwaarden.

machine I	$3x + 3y \leq 60$	(1)
machine II	$3x + 2y \leq 50$	(2)
machine III	$1,5x + 6y \leq 90$	(3)

De hoekpunten zijn $A(16\frac{2}{3}, 0)$, $B(10, 10)$, $C(6\frac{2}{3}, 13\frac{1}{3})$ en $D(0, 15)$.

- a** Welk productieprogramma maximaliseert de doelfunctie $W = 2x + 5y$?

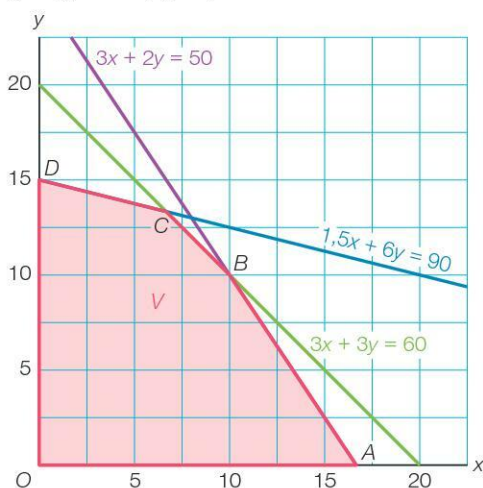
Bereken $W_{\max}$.

- b** Van welke machine wordt de capaciteit niet volledig benut? Hoeveel uur is onbenut?

- c** Door een reorganisatie is het mogelijk machine I één uur per week langer in te zetten. De beperkende voorwaarde $3x + 3y \leq 60$ verandert hierdoor in $3x + 3y \leq 61$. Hierdoor veranderen de hoekpunten B en C in $B'(9\frac{1}{3}, 11)$ en $C'(7\frac{1}{9}, 13\frac{2}{9})$.

Onderzoek hoe $W_{\max}$ hierdoor verandert.

- d** De fabrikant kan kiezen tussen het één uur per week langer inzetten van machine I en het één uur langer inzetten van machine III. Wat zal de fabrikant kiezen als hij een zo groot mogelijke winst nastreeft?
- e** Waarom zal het één uur langer inzetten van machine II geen invloed hebben op $W_{\max}$?



figuur K.15

Theorie A De schaduwprijs van een beperkende voorwaarde

In opgave 47 heb je de doelfunctie $W = 2x + 5y$ gemaximaliseerd. Het optimale productieprogramma treedt op in het hoekpunt $C(6\frac{2}{3}, 13\frac{1}{3})$. Dit geeft $W_{\max} = 80$.

In deze situatie wordt de capaciteit van machine II niet volledig benut. Immers machine II wordt $3 \cdot 6\frac{2}{3} + 2 \cdot 13\frac{1}{3} = 46\frac{2}{3}$ uur ingezet en blijft dus $50 - 46\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$ uur onbenut.

We zeggen dat de **speling** van beperkende voorwaarde (2) gelijk is aan $3\frac{1}{3}$ uur.

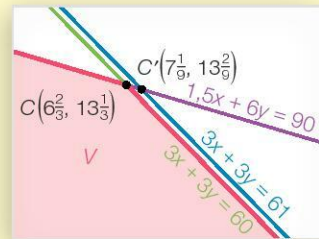
Voor de fabrikant is het interessant welke invloed het één uur langer inzetten van een machine op de maximale winst $W_{\max}$ heeft.

Bij machine II heeft dat geen invloed. Machine I één uur langer inzetten geeft het optimale productieprogramma bij het punt $C'(7\frac{1}{9}, 13\frac{2}{9})$. In dat geval is $W_{\max} = 2 \cdot 7\frac{1}{9} + 5 \cdot 13\frac{2}{9} = 80\frac{1}{3}$.

Door machine I één uur langer in te zetten neemt de maximale winst met $80\frac{1}{3} - 80 \approx 0,33$ euro toe.

We zeggen dat de **schaduwprijs** van beperkende voorwaarde (1) gelijk is aan 0,33 euro.

In deze situatie is de schaduwprijs de toename van de maximale winst, in het geval de bijbehorende machinetijd met één uur toeneemt.



figuur K.16

INFORMATIEF

Gevoeligheidsanalyse (van de doelfunctie)

Het uitzoeken welk effect veranderingen in de machinetijd hebben op de maximale winst is een onderdeel van de zogenaamde gevoeligheidsanalyse. Je gaat er hierbij van uit dat slechts één beperkende voorwaarde verandert en dat het bovendien om een kleine verandering gaat. Zou een machinetijd een grote verandering ondergaan, dan treedt het optimale productieprogramma niet meer in hetzelfde hoekpunt van het toegestane gebied op. We gaan daar in deze paragraaf verder niet op in.

In deze paragraaf leer je hoe je het computerprogramma Excel kunt gebruiken bij het oplossen van lineaire programmeringsproblemen. Je gebruikt daarbij de invoegtoepassing Solver. In Getal & Ruimte online staat de handleiding bij het programma Sheets.

Het is mogelijk met meer dan twee variabelen te werken. Behalve het optimale productieprogramma en de maximale waarde van de doelfunctie geeft Excel vaak meer informatie, zoals bij elke beperkende voorwaarde de speling en de schaduwprijs.

Je kunt Solver pas gebruiken nadat je deze hebt geïnstalleerd in Excel. Ga daarvoor naar het tabblad **Invoegen** en klik bij **Invoegtoepassingen** op **Invoegtoepassingen downloaden** (of **Store**). Zoek vervolgens de toepassing met de naam Solver.

Omdat Solver alleen beschikbaar is in het Engels, zie je hiernaast een woordenlijst met de vertaling van de belangrijkste woorden die in Solver gebruikt worden.

Objective - Doelfunctie
Constraint - Randvoorwaarde
Slack - Speling
Shadow Price - Schaduwprijs

Het lineaire programmeringsprobleem

Maximaliseer de winst $W = 2x + 3y$ onder de beperkende voorwaarden

I $5x + 2y \leq 100$

II $x + 4y \leq 150$

III $3x + y \leq 80$

waarbij de variabelen niet-negatief zijn.

los je als volgt met Excel op.

- Open Excel en voer de volgende tabel in.

	A	B	C	D	E	F
1		waarde	voorw I	voorw II	voorw III	winst
2	x	0	5	1	3	2
3	y	0	2	4	1	3
4						

In kolom C herken je het linkerlid van voorwaarde I.

- Voer in cel C4 de formule $B2 \times C2 + B3 \times C3$ in.
Voer in cel D4 de formule $B2 \times D2 + B3 \times D3$ in.
Voer in cel E4 de formule $B2 \times E2 + B3 \times E3$ in.
Voer in cel F4 de formule $B2 \times F2 + B3 \times F3$ in.

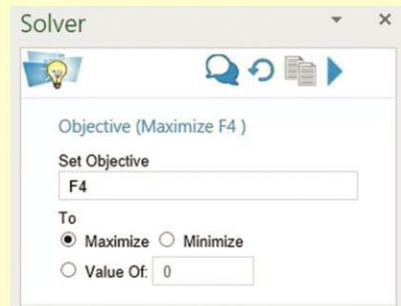
Om een formule in te voeren, begin je met =

Je hebt nu van elke beperkende voorwaarde het linkerlid ingevoerd en in cel F4 de doelfunctie. Door de waarden van x en y te laten variëren, berekent Excel telkens de waarde van de linkerleden van de voorwaarden I, II en III en de waarde van de doelfunctie.

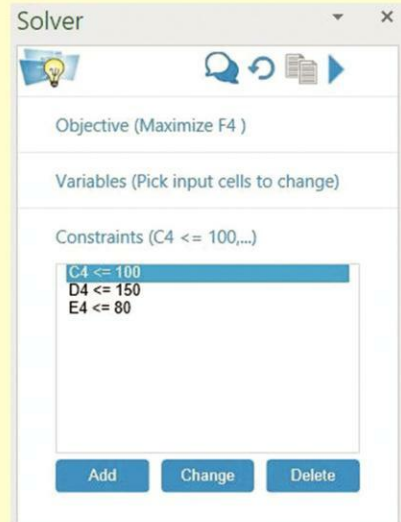
- Ga naar het tabblad **Invoegen** en kies bij **Invoegtoepassingen** voor **Mijn invogtoepassingen**. Kies de invogtoepassing **Solver**. Er verschijnt een invulscherm. Zie figuur K.17. Vul bij **Set Objective** F4 in.
- Bij **To**: kies je voor **Maximize**. Je wilt immers het maximum van de winst bepalen.

Omdat de waarden van x en y variabel zijn, vul je bij **Variables** B2:B3 in door op **Add** te klikken. Sluit af met **OK**. Laat het vinkje bij **Assume Nonnegative** staan.

- Zorg bij **Constraints** voor $C4 \leq 100$, $D4 \leq 150$ en $E4 \leq 80$. Klik daartoe op **Add** en sluit elke voorwaarde af met **OK**. Zie figuur K.18.
- Klik bij **Model** op de knop **Diagnose** en wacht tot het probleem is geanalyseerd.
- Kies bij **Engines** voor **Standard/Simplex LP**.
- Klik op **playknop** ► rechtsboven in beeld. In de tabel verschijnt de oplossing.



figuur K.17



figuur K.18

	A	B	C	D	E	F
1		waarde	voorw I	voorw II	voorw III	winst
2	x	5,555556	5	1	3	2
3	y	36,111111	2	4	1	3
4			100	150	52,77778	119,4444

Je leest af $W_{\max} \approx 119,44$ voor $x \approx 5,56$ en $y \approx 36,11$.

- Door op de knop , links naast de playknop, te drukken verschijnen de tabbladen met het gevoeligheidsrapport (**Sensitivity Report**) en het antwoordrapport (**Answer Report**). In het antwoordrapport lees je af dat alleen voorwaarde III een speling heeft. De speling is 27,22. In het gevoeligheidsrapport lees je de schaduwprijs af.

Afspraak

Rond in deze paragraaf zo nodig af op twee decimalen.

48



Zie de theorie op de bladzijden 165 en 166.

- Welke beperkende voorwaarden horen bij het snijpunt dat de optimale oplossing oplevert?
- Bij voorwaarde III is sprake van speling.
Hoe volgt hieruit dat de schaduwprijs 0 is?
- Stel dat voorwaarde I verandert in $5x + 2y \leq 101$.
Bereken met behulp van de schaduwprijs de nieuwe $W_{\max}$.
Controleer je antwoord met Excel.
- Verander in Excel voorwaarde I in $7x + 3y \leq 200$ en voorwaarde III in $5x + 4y \leq 150$. Voorwaarde II verandert niet. Bereken $W_{\max}$ en geef het bijbehorende programma (x, y) .
Vermeld bij elke voorwaarde de schaduwprijs en de speling.

49



Hieronder staat de oplossing van een lineair programmeringsprobleem.

De uitkomst van de formule die geminimaliseerd is, staat in cel F4.

	A	B	C	D	E	F
1		waarde	voorw I	voorw II	voorw III	kosten
2	x	3	2	2	1	3
3	y	4	3	1	6	2
4			18	10	27	17

Schaduwprijs voorwaarde I is 0,25.

Speling voorwaarde I is 0.

Schaduwprijs voorwaarde II is 1,25.

Speling voorwaarde II is 0.

Schaduwprijs voorwaarde III is 0.

Speling voorwaarde III is 9.

Uit het bovenstaande volgt dat de beperkende voorwaarden $2x + 3y \geq 18$, $2x + y \geq 10$ en $x + 6y \geq 18$ zijn, en de formule van de doelfunctie

$$K = 3x + 2y.$$

a Licht dit toe.

b Geef $K_{\min}$ in het geval de beperkende voorwaarde I verandert in $2x + 3y \geq 20$.

Ga bij de vragen c, d en e telkens weer uit van de oorspronkelijke situatie.

c Geef $K_{\min}$ in het geval voorwaarde II verandert in $2x + y \geq 9,5$.

d Stel dat je voorwaarde III verandert in $x + 6y \geq 26$.

Waarom heeft dit geen invloed op $K_{\min}$? En hoe zit het als je beperkende voorwaarde III verandert in $x + 6y \geq 28$?

e Neem aan dat door verandering van het rechterlid van één van de beperkende voorwaarden de minimale kosten 16,5 worden. Hoe moet je voorwaarde I veranderen om dit te bereiken? En hoe moet je voorwaarde II veranderen om dit effect te krijgen?

Voer in Solver 9,5 in als 9.5.

Theorie B Lineair programmeren met meer dan twee variabelen

Met Excel zijn ook lineaire programmeringsproblemen met meer dan twee variabelen op te lossen.

Bij het volgende maximaliseringsprobleem hoort in Excel de tabel in figuur K.19.

Maximaliseer de doelfunctie $\text{Winst} = 3p + 2q + 0,8r + s$ onder de beperkende voorwaarden

I $2p + 3q + r \leq 40$

III $p + q + 5s \leq 70$

II $p + q + r + 2s \leq 60$

IV $2q + r + 2s \geq 35$

waarbij de variabelen niet-negatief zijn.

	A	B	C	D	E	F	G
1		waarde	voorw I	voorw II	voorw III	voorw IV	winst
2	p	0	2	1	1		3
3	q	0	3	1	1	2	2
4	r	0	1	1		1	0,8
5	s	0		2	5	2	1
6							

figuur K.19

50 Zie het maximaliseringsprobleem hierboven.



- Voer de tabel in Excel in, zet de juiste formules in rij 6 en vul het invulscherm van Solver in.
- Geef de maximale winst en het bijbehorende productieprogramma.
- Vermeld bij elke voorwaarde de speling en de schaduwprijs.
- Stel dat voorwaarde I verandert in $2p + 3q + r \leq 41$. Welk gevolg heeft dat voor de maximale winst?

51 Los het volgende lineaire programmeringsprobleem op.



Maximaliseer de doelfunctie $\text{Winst} = 3p + 5q + 4r + 5s$ onder de beperkende voorwaarden

I $3p + 3q + 2r + 5s \leq 500$

III $4p - 3q - 3r + 7s \geq 40$

II $2p + 2q + 3r - 2s \leq 240$

IV $p + q - r \geq 60$

waarbij de variabelen niet-negatief zijn.

Los het volgende lineaire programmeringsprobleem op.

Minimaliseer de doelfunctie $\text{Kosten} = 2p + q + 3r + s$ onder de beperkende voorwaarden

I $p \geq 100 - q$

III $q + r \geq 100$

II $p \geq 150 - q - r$

IV $p + s \geq 200$

waarbij de variabelen niet-negatief zijn.

Bedenk dat $p \geq 100 - q$ op hetzelfde neerkomt als $p + q \geq 100$.

Meneer Noorda heeft 100 000 euro voor beleggingsdoeleinden beschikbaar. Een deel wil hij op een spaarrekening storten, een deel beleggen in aandelen en een deel besteden aan obligaties. Hij krijgt 5% rente per jaar op de spaarrekening en 8% rente per jaar op de obligaties. Voor het beleggen in aandelen kan hij kiezen uit de aandelen I en de aandelen II. Meneer Noorda gaat ervan uit dat aandelen I een rendement van 9,5% per jaar hebben en aandelen II een rendement van 10,5% per jaar. Om fiscale redenen en vanwege het spreiden van het risico neemt meneer Noorda de volgende voorwaarden in acht.

- Het totale bedrag op de spaarrekening en de obligaties samen moet minstens gelijk zijn aan het bedrag voor de aandelen.
- Het bedrag op de spaarrekening is minstens 12 000 euro.
- Het bedrag aandelen I moet minstens de helft van het bedrag aandelen II zijn.
- Het bedrag aandelen II is maximaal 50 000 euro.

Meneer Noorda streeft naar een maximale opbrengst.

- a Stel de vijf beperkende voorwaarden en de formule van de doelfunctie op.
- b Los het probleem op met Excel.
- c Geef een interpretatie van de speling 16 666,67.
- d Met hoeveel euro daalt de maximale jaaropbrengst als meneer Noorda besluit minstens 15 000 euro op de spaarrekening te zetten? Bereken dit bedrag met behulp van een schaduwprijs.
- e Geef een interpretatie van de schaduwprijs -0,0108 bij voorwaarde II.
- f Met hoeveel euro stijgt de jaaropbrengst als meneer Noorda 10 000 euro meer te besteden zou hebben?



A54
  *

Meubelfabrikant Merkens (zie opgave 28) heeft een interne reorganisatie ondergaan, waardoor de beschikbare hoeveelheid werk per afdeling is toegenomen. Bovendien bestaat het assortiment behalve uit fauteuils en sofa's nu ook uit tafels. Raadpleeg voor verdere informatie de tabel.

afdeling	fauteuil	sofa	tafel	beschikbaar per dag
constructie	6 uur	3 uur	9 uur	900 uur
bekleding	4 uur	3 uur	0 uur	600 uur
afwerking	1 uur	1 uur	1 uur	200 uur
winst per stuk	640 euro	560 euro	480 euro	

- Stel x = aantal fauteuils per dag, y = aantal sofa's per dag en z = aantal tafels per dag.
Schrijf de winst W in euro per dag als functie van x , y en z .
- Schrijf de drie beperkende voorwaarden op.
- Bereken met Excel de maximale winst per dag. Hoeveel fauteuils, sofa's en tafels worden er dan per dag gemaakt?
- Op grond van de computeruitvoer van vraag c besluit de directeur 50 uur op de constructieafdeling weg te halen en naar de afwerkingsafdeling te verplaatsen.
Licht toe dat op grond van de genoemde uitvoer deze beslissing te verdedigen is.

INFORMATIEF

Gereduceerde kosten

In het gevoeligheidsrapport bij opgave 54d is te lezen dat er in de optimale situatie geen fauteuils gemaakt worden. Bij de gereduceerde kosten staat -213,33. Dit getal geeft aan dat de fabrikant in de optimale situatie pas weer fauteuils zal gaan maken als de winst op een fauteuil met minstens 213,33 euro zal toenemen.

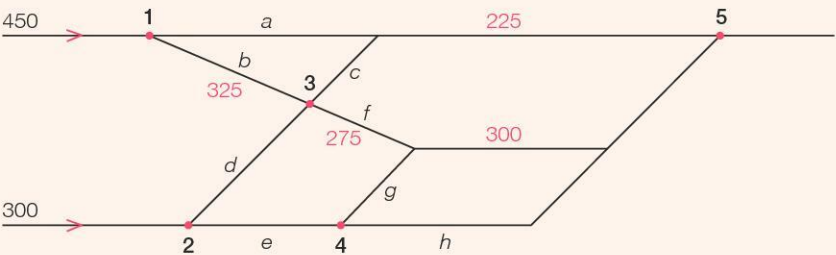
E55
 *

Zie opgave 54.

- Onderzoek of de maximale dagwinst nog verhoogd kan worden ten opzichte van de situatie in vraag d door met uren van de ene naar de andere afdeling te schuiven.
- De directeur wil per dag minstens 25 stuks van elk artikel maken. Verder wil ze dat de winst per dag minstens 120 000 euro is. Onderzoek of dit mogelijk is door de in totaal 1700 beschikbare uren per dag op een geschikte manier over de afdelingen te verdelen.

Eindopdracht Verkeersstromen

De stad Groendrecht heeft een wegennet dat auto's van west naar oost door de stad leidt. De gemeente wil dit wegennet opnieuw inrichten. Uitgangspunt is dat de huidige wegen blijven bestaan en er geen nieuwe wegen worden aangelegd. Het doel is een situatie te creëren met zo weinig mogelijk overlast. Dat doet de gemeente door het nemen van stimulerende of remmende maatregelen. Je kunt daarbij denken aan het verbreden van wegen of het plaatsen van verkeerslichten. In onderstaande figuur zie je een schematische weergave van dit wegennet. De verhoudingen van de lengten van de wegen in de figuur komen niet overeen met de werkelijkheid.



Je ziet dat aan de westkant van Groendrecht per uur in totaal 750 auto's de stad binnenrijden. Alle wegen zijn eenrichtingswegen van west naar oost. Bij sommige wegen staat in rood een maximale capaciteit. Zo kunnen op weg *b* maximaal 325 auto's per uur rijden.

De gemeente wil rekening houden met de overlast die auto's op een bepaalde weg veroorzaken. Die overlast is onder andere afhankelijk van de lengte van de weg, de geluidsoverlast voor bewoners en de aanwezigheid van fietsers en voetgangers. Na onderzoek door de gemeente is voor de wegen *a* tot en met *h* bepaald hoeveel overlast een auto op die weg veroorzaakt. Deze overlastpunten per auto staan in de tabel hiernaast. Zo zie je dat elke auto die over weg *a* rijdt vijf overlastpunten veroorzaakt. Op de wegen waar geen letter bij staat wordt met eventuele overlast geen rekening gehouden.

Om te kunnen bepalen welke stimulerende of remmende maatregelen moeten worden genomen, wil de gemeente eerst bepalen bij welke verkeersstromen de minste overlast optreedt.

weg	overlastpunten per auto
<i>a</i>	5
<i>b</i>	2
<i>c</i>	2
<i>d</i>	3
<i>e</i>	1
<i>f</i>	2
<i>g</i>	2
<i>h</i>	3

Gebruik de computer om uit te zoeken hoe de auto's per uur over de wegen *a* tot en met *h* verdeeld moeten worden om zo min mogelijk overlast te creëren.

Gemengde opgaven

5 Machtsverbanden

- 1** a Schrijf de formule $y = 3 \cdot \frac{(2x^{0,6})^3}{x^{-4}}$ in de vorm $y = ax^p$.
b Schrijf de formule $A = 2^{x-3} \cdot 3^{y+2}$ in de vorm $A = b \cdot 2^x \cdot 3^y$.
c Herleid de formule $N = 5 \cdot \sqrt[3]{64t} + 2 \cdot \sqrt[3]{27t}$ tot de vorm $N = c \cdot \sqrt[3]{t}$.
- 2** a Schrijf de formule $A = 4^{2\frac{1}{2}} \cdot x^{-3\frac{1}{4}} \cdot y^{1\frac{1}{2}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.
b Schrijf $\frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{x^4 \cdot \sqrt[5]{x}}$ als macht van x .
c Herleid de formule $P = 4 \cdot (243xy)^{0,2} - (32xy)^{0,2}$ tot de vorm $P = a \cdot \sqrt[b]{xy}$.
- 3** Gegeven is de formule $y_1 = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$.
a De grafiek van y_2 ontstaat uit de grafiek van y_1 bij de verschuiving $(2, 6)$.
Stel de formule op van y_2 en geef de top van de bijbehorende grafiek.
b Er geldt $y_3 = 3 \cdot y_1$.
Stel de formule op van y_3 .
c Op de grafiek van y_1 wordt de verschuiving (a, b) toegepast. Zo ontstaat de grafiek van y_4 . De top van de grafiek van y_4 is $(8, -2)$.
Bereken a en b .
d Op de grafiek van y_1 wordt eerst de verschuiving (c, c) toegepast en vervolgens de herschaling in verticale richting met factor d . Zo ontstaat de grafiek van y_5 . De top van de grafiek van y_5 is $(6, 14)$.
Bereken c en d .
- 4** a Maak p vrij bij $A = 0,4 \cdot \sqrt[3]{p-6}$.
b Maak q vrij bij $B = 16(q-5)^2$ met $q > 5$.
c Schrijf de formule $C = 12,5(4D)^{-1,5}$ in de vorm $D = aC^b$.
Rond a en b af op twee decimalen.
d Schrijf de formule $y = 0,25\sqrt{6-0,4x}$ in de vorm $x = ay^2 + b$.

5 De formule $G = 0,4d^3$ geeft het verband tussen het gewicht G in gram van een appel en de diameter d in cm.

- a** Van een appel is het gewicht 65 gram.
Welke diameter volgt uit de formule? Geef het antwoord in mm nauwkeurig.
- b** Hoeveel keer zo groot wordt G als d verdubbelt?
- c** Een appel is twee keer zo zwaar als een andere appel.
Bereken hoeveel procent groter de diameter dan is. Rond af op gehele.

6 Bij een vast drukverschil hangt de hoeveelheid water W in liter die per seconde door een buis stroomt af van de diameter d in cm. De bijbehorende formule heeft de vorm $W = ad^4$.

- a** Bij een buis met een diameter van 5 cm is $W = 13,5$.
Bereken a .

Reken in deze opgave verder met $a = 0,02$, dus met de formule $W = 0,02d^4$.

- b** Een buis heeft een diameter van 8 cm.
Hoeveel liter water stroomt er per minuut door de buis?
- c** In een uur tijd stroomt er 16 650 liter water door een buis.
Bereken de diameter van de buis in mm nauwkeurig.
- d** Hoeveel keer zoveel water stroomt er per seconde door een buis als de diameter 30% groter wordt genomen? Rond af op één decimaal.
- e** Welk percentage moet de diameter van een buis groter worden genomen als er per seconde twee keer zoveel water door de buis moet stromen? Rond af op gehele.

7 Wetenschappers hebben een formule opgesteld die het verband geeft tussen het te verwachten hersengewicht H in gram en het lichaamsgewicht G in kg. De formule is $H = 12 \cdot G^{0,67}$.

Bij sommige dieren verschilt H fors van het werkelijke hersengewicht.

Wetenschappers gebruiken de formule $I = \frac{W}{H}$ als maat voor de

intelligentie van een dier. Hierin is W het werkelijke hersengewicht in gram.

- a** Bij een schaap van 40 kg is het werkelijke hersengewicht 130 gram.
Bereken I . Rond af op twee decimalen.
- b** Een mens van 70 kg heeft een hersengewicht van 1650 gram.
Bereken I . Rond af op één decimaal.
- c** Van een giraffe is $I = 1,04$. Het werkelijke hersengewicht is 1050 gram.
Welk gewicht G volgt hieruit voor de giraffe? Rond af op gehele.
- d** Schrijf de formule van I in de vorm $I = a \cdot W \cdot G^b$. Rond a af op drie decimalen.

8 a De formule $G = 25 - \frac{16}{z+1}$ is te schrijven in de vorm $z = \frac{G+a}{b-G}$.

Bereken a en b .

b Gegeven is $\frac{5p}{2p+q} = 10 + 3p$.

Druk q uit in p .

9 Er bestaat een verband tussen de populatiedichtheid P en de gemiddelde lengte l in meter van een volwassen organisme. Dit verband is te benaderen door het model $P = 800 \cdot l^{-2,25}$. Hierbij is P het aantal exemplaren per km^2 .

a Onderzoek of de volgende bewering in overeenstemming is met de formule. ‘Grote organismen leven gemiddeld verder van elkaar dan kleinere.’

b Van een diersoort is de populatiedichtheid 1350.

Bereken de gemiddelde lengte van deze diersoort in gehele cm.

c In een gebied met een oppervlakte van 250 km^2 leeft een kudde kariboes. Kariboes zijn gemiddeld 2,15 meter lang.

Schat het aantal kariboes in dit gebied.

d In een gebied van 5 km^2 leven ongeveer 160 000 exemplaren van de wandelende tak.

Schat de gemiddelde lengte van deze insectensoort in gehele cm.

e Met hoeveel procent neemt P af als l met 20 procent toeneemt? Rond af op gehele.

10 Bij het varen speelt het begrip rompsnelheid een rol. De rompsnelheid is de maximaal bereikbare snelheid waarbij het schip nog onder controle is. Bij een grotere snelheid wordt het achterschip dieper in het water getrokken waardoor de vaareigenschappen afnemen. Dit verschijnsel heet planeren. De rompsnelheid v in km/uur bereken je met de vuistregel $v = 4,8\sqrt{l}$. Hierbij is l de lengte van de waterlijn van een schip in meter.



a Een schip met een waterlijn van 8,6 meter heeft een hogere rompsnelheid dan een schip met een waterlijn van 5,8 meter. Hoeveel procent hoger?

b De waterlijn van schip I is twee keer zo lang als die van schip II. Wat weet je van de rompsnelheid van de schepen I en II?

c Druk l uit in v . Rond af op vier decimalen.

d Wat weet je van de lengte van de waterlijn van schepen waarvan de rompsnelheid tussen de 10 en 20 km/uur ligt? Rond af op dm.

- 11** De snelheid van het geluid hangt af van de temperatuur. Bij windstil

weer wordt dit verband bij benadering gegeven door $v = 331 \sqrt{1 + \frac{T}{273}}$.

Hierin is v de snelheid van het geluid in m/s bij een temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$. Ga in deze opgave uit van windstil weer.

- a** In de twintigste eeuw varieerde de temperatuur in Nederland van $-27,4^{\circ}\text{C}$ tot en met $38,6^{\circ}\text{C}$.
Bereken het verschil van de geluidssnelheden bij deze twee temperaturen. Rond af op gehele.
- b** Bereken de temperatuur in gehele graden Celsius in het geval de geluidssnelheid 340 m/s is.

In de atmosfeer neemt de temperatuur af volgens de formule

$T = T_0 - 6,5h$. Hierin is h de hoogte in km en T_0 de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ op 0 km hoogte.

- c** Bereken de geluidssnelheid in km/uur op een hoogte van 2,5 kilometer in het geval de temperatuur 25°C is op 0 km hoogte. Rond af op gehele.
- d** Schrijf de formule van v in de vorm $v = a\sqrt{bh + c}$ in het geval het op 2 km hoogte -1°C is. Rond zo nodig af op vier decimalen.

6 Kansrekening

- 12** Jan gooit met twee dobbelstenen.

Bereken exact de kans op de gebeurtenis

- a** de som van de ogen is minder dan 6
- b** het verschil van de ogen is 2.

Jan gooit tien keer met twee dobbelstenen.

Bereken de kans dat

- c** hij drie keer een verschil van 2 ogen zal gooien
- d** hij minstens acht keer een som van minder dan 6 ogen zal gooien.

Frank gooit met een viervlaksdobbelsteen, een gewone dobbelsteen en een achtvlaksdobbelsteen.

Bereken exact de kans dat

- e** de som vijf is
- f** hij met elke dobbelsteen hetzelfde gooit.



- 13** Een vaas bevat vijf rode en vier witte knikkers.

Sarah doet drie keer achter elkaar het volgende. Ze pakt één knikker uit de vaas en doet deze knikker samen met nog twee knikkers van dezelfde kleur als de gepakte knikker terug in de vaas.

- a** Maak een kansboom bij deze situatie.
- b** Bereken de kans dat Sarah alleen rode knikkers gepakt heeft.
- c** Bereken de kans dat Sarah meer rode dan witte knikkers gepakt heeft.

- 14** In een gokautomaat draaien vier schijven onafhankelijk van elkaar. Door een hendel kan elke schijf tot stilstand worden gebracht.

In de tabel zie je wat er op elke schijf staat.

Bereken de kans op

- a** drie appels en één kers
- b** vier gelijke plaatjes
- c** één banaan
- d** geen kiwi.

	aantal			
plaatje	schijf 1	schijf 2	schijf 3	schijf 4
appel	5	2	2	5
peer	3	4	4	3
banaan	1	5	5	1
kers	3	2	0	0
kiwi	3	2	4	6
	15	15	15	15

- 15** Bij een loterij zijn 65 loten verkocht. Er zijn tien prijzen beschikbaar: één eerste prijs van 20 euro, drie tweede prijzen van 10 euro en zes derde prijzen van 5 euro.

Daan heeft vijf loten gekocht.

Bereken de kans dat

- a** hij geen prijs wint
- b** hij minstens 10 euro wint
- c** hij een tweede en een derde prijs wint
- d** op twee loten van Daan een prijs valt.

- 16** Op het LaPlace College is in de vierde klassen onderzoek gedaan naar de inkomsten van de leerlingen. Zie de tabel.

Uit deze groep worden willekeurig twaalf vierdeklassers gekozen, die ondervraagd zullen worden over hun bestedingen.

Bereken de kans dat

- a** hierbij vijf meisjes zitten die minder dan 150 euro per maand aan inkomsten hebben
- b** hierbij tweemaal zoveel meisjes als jongens zijn
- c** hierbij vijf meisjes zijn die 150 euro of meer per maand aan inkomsten hebben en niemand minder dan 120 euro per maand aan inkomsten heeft
- d** minstens drie van hen minstens 150 euro per maand aan inkomsten hebben
- e** de helft van de gekozen leerlingen een jongen is en minstens vier van de gekozen meisjes 120 euro of meer, maar minder dan 180 euro per maand aan inkomsten hebben.

INKOMSTEN PER MAAND

euro	jongen	meisje	
[0, 120)	8	15	23
[120, 150)	26	21	47
[150, 180)	16	27	43
[180, 300)	2	5	7
	52	68	120

De gebeurtenissen 'leerling is meisje' en 'leerling heeft minstens 150 maar minder dan 180 euro per maand aan inkomsten' zijn afhankelijke gebeurtenissen.

- f** Toon dit aan.

- 17** Volgens tellingen van Veilig Verkeer Nederland houdt 68% van de automobilisten in de bebouwde kom van het plaatsje Borne zich aan de maximumsnelheid van 50 km per uur. Van de automobilisten die te hard rijden, rijdt een kwart meer dan 70 km per uur. Tussen 10:00 uur en 10:05 uur passeerden tien automobilisten de controlepost in Borne.

Bereken de kans dat

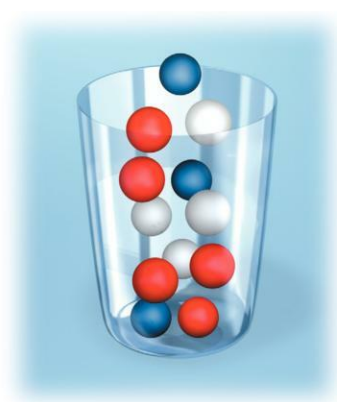
- a** alle automobilisten zich aan de maximumsnelheid hielden
- b** zeven automobilisten zich aan de maximumsnelheid hielden en één automobilist meer dan 70 km per uur reed
- c** minstens twee automobilisten te hard reden.



- 18** Een klas maakt een proefwerk bestaande uit 18 vierkeuzevragen.
- a** Bereken de kans dat Martijn, die elk antwoord moet raden, twee of drie antwoorden goed heeft.
 - b** Alfred weet op vijf vragen met zekerheid het juiste antwoord. De andere vragen moet hij gokken.
Bereken de kans dat hij in totaal minder dan acht vragen goed beantwoordt.
 - c** Patricia weet op 13 vragen het juiste antwoord. Bij de andere vragen moet ze het antwoord raden.
Bereken de kans dat ze in totaal minstens 16 vragen goed heeft.

- 19** In een vaas zitten vijf rode, vier witte en drie blauwe knikkers.

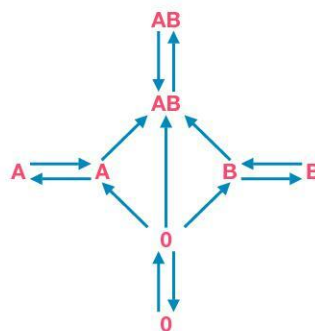
- a** Ferdinand pakt met terugleggen zes keer een knikker uit de vaas.
Bereken de kans dat hij drie keer een rode en drie keer een blauwe knikker pakt.
- b** Martine pakt in één greep drie knikkers uit de vaas en legt ze vervolgens weer terug. Ze doet dit in totaal zes keer.
Bereken de kans dat ze daarbij twee keer geen enkele rode knikker pakt.
- c** Rob pakt zonder terugleggen vier knikkers uit de vaas.
Bereken de kans dat er evenveel witte als blauwe knikkers in de vaas achterblijven.



20 Menselijk bloed behoort altijd tot een van de vier bloedgroepen 0, A, B of AB.

De bloedgroep speelt een belangrijke rol als iemand bloed nodig heeft bij bijvoorbeeld ernstig bloedverlies door een operatie of een ongeluk. Degene die bloed nodig heeft, krijgt tijdens een bloedtransfusie bloed van iemand anders toegediend. Vooraf wordt gelet op de bloedgroep van de donor (gever) en van de ontvanger.

In figuur G.1 zie je tussen welke bloedgroepen een bloedtransfusie mogelijk is. De richting van de pijlen loopt van donor naar ontvanger. Je kunt zien dat iemand met bloedgroep 0 bloed kan geven aan iemand met bloedgroep A maar omgekeerd niet. Het is altijd mogelijk om bloed te krijgen van iemand met dezelfde bloedgroep.



figuur G.1

Welke bloedgroep iemand heeft, is door erfelijkheid bepaald.

In deze opgave gaan we ervan uit dat alle personen geen familie van elkaar zijn en dat hun bloedgroep door het toeval is bepaald.

- a** Is het bij twee mensen mogelijk dat geen van beiden bloed kan geven aan de ander? Licht je antwoord toe.

Niet elke bloedgroep komt even vaak voor. We gaan van de verdeling hiernaast uit.

De kans dat een willekeurige persoon bloedgroep 0 heeft, is dus 0,46.

bloedgroep	0	A	B	AB
percentage	46%	43%	8%	3%

- b** Bereken de kans dat twee willekeurige personen dezelfde bloedgroep hebben.

In sommige delen van de wereld is het ontvangen van bloed bij een bloedtransfusie zeer riskant, onder andere vanwege de grote kans op besmetting met het hiv-virus. Als je met een groepsreis naar zo'n riskant deel van de wereld gaat en er gebeurt iets waardoor je een bloedtransfusie nodig hebt, dan zou je vanwege dit risico kunnen besluiten om bloed te ontvangen van een van je reisgenoten.

Uit figuur G.1 blijkt dat iemand met bloedgroep 0 aan iedereen bloed kan geven. Het is dus prettig als er in de groep tenminste één persoon is die bloedgroep 0 heeft.

- c** Bereken de kans dat er in een groep van twaalf personen minstens één persoon bloedgroep 0 heeft.

Tot nu toe zijn we voorbijgegaan aan het feit dat bij een bloedtransfusie ook rekening gehouden moet worden met de resusfactor.

Er is resuspositief bloed en resusnegatief bloed.

Neem aan dat de resusfactor bij mensen door toeval bepaald wordt en dat voor elk van de vier bloedgroepen geldt dat 85% resuspositief is en 15% resusnegatief. Er bestaan dus acht verschillende *bloedtypen*, namelijk 0+ (bloedgroep 0 en resuspositief), 0- (bloedgroep 0 en resusnegatief), A+ (bloedgroep A en resuspositief), enzovoort.

- d** Bereken de kans dat twee willekeurige personen hetzelfde bloedtype hebben.

- 21** Tijdens een klassenuitje gaan de 24 leerlingen van klas 4Va met elkaar kanoën. In elke kano passen maximaal zes leerlingen. Er zijn vijf kano's gehuurd die genummerd zijn van 1 t/m 5. De leerlingen verdelen zich willekeurig over de kano's.

Bereken de kans dat

- a** in kano 3 twee plaatsen leeg blijven
- b** kano 1 en 2 geheel vol zullen zitten.

- 22** Er wordt veel onderzoek gedaan naar mogelijkheden ter bestrijding en voorkoming van plantenziektes.

De volgende vragen gaan over de risico's dat planten besmet raken. De situaties die we bekijken zijn sterk vereenvoudigd.

In de eerste situatie bekijken we een veldje waarop men 's ochtends tien gezonde planten plant in twee rijen van vijf. Zie figuur G.2.

We nemen aan dat elke gezonde plant per dag een kans van 0,3 heeft om besmet te raken.

- a** Bereken de kans dat op de eerste dag alle planten van de linkerrij besmet raken en alle planten van de rechterrij niet besmet raken. Rond af op vier decimalen.



figuur G.2

De tweede situatie gaat over een experiment waarbij op een zeker moment 40 gezonde planten aan besmetting worden blootgesteld.

We nemen ook hier aan dat elke gezonde plant per dag een kans van 0,3 heeft op besmetting.

- b** Bereken de kans dat op de eerste dag van het experiment 12 of 13 planten besmet raken.

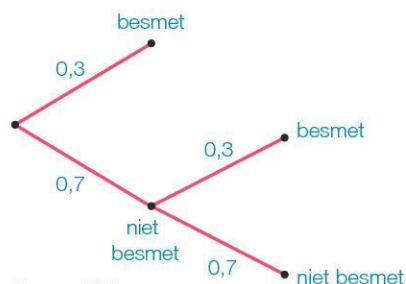
Voor het onderzoek is het van belang dat er na een dag nog planten zijn die niet besmet zijn.

- c** Bereken met hoeveel gezonde planten de onderzoeker minimaal moet beginnen, opdat de kans dat hij na één dag minstens één onbesmette plant overhoudt, groter is dan 0,99.

We bekijken nu de kans dat een van de 40 gezonde planten na twee dagen besmet is. In figuur G.3 is de bijbehorende kansboom afgebeeld.

De kans dat alle 40 planten na twee dagen niet besmet zijn, is minder dan een miljardste.

- d** Toon dit met een berekening aan.



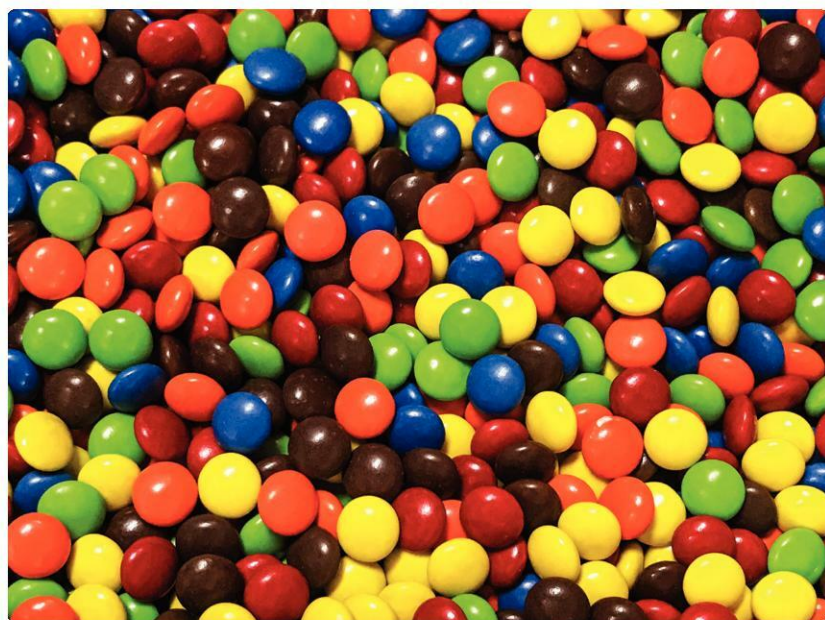
figuur G.3

23 J&J's zijn chocoladesnoepjes met een suikerlaagje. Ze bestaan in zes verschillende kleuren. Volgens de fabrikant is de kleurverhouding in elke productiebatch 30% bruin, 20% geel, 20% rood, 10% oranje, 10% groen en 10% blauw.

Voordat de J&J's in de zakjes gaan, worden de kleuren gemixt in een grote mixtrommel.

Jasper is in het bezit van een uitdeelzak met 14 kleine zakjes J&J's. In elk van de zakjes zitten 20 J&J's.

- a Bereken de kans dat 20% van de J&J's in de uitdeelzak rood is.
- b Hoeveel bruine J&J's verwacht je dat er in de uitdeelzak van Jasper zitten? Bereken de kans op dit aantal.
- c Hoeveel van de kleine zakjes bevatten naar verwachting minstens drie blauwe J&J's?



Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen.
- De toets Ans en fouten verbeteren.
- Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen.
- Decimaal getal omzetten in breuk.

vwo A/C deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 19

Formules en grafieken

- Formules invoeren en grafieken plotten.
- Tabellen maken.
- De opties snijpunt, nulpunt, maximum en minimum.

vwo A/C deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 37

Allerlei

- Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR.
-

Overzicht Excel/Sheets-modules

Module

Data invoeren

- lege werkmap aanmaken
- data handig invoeren in rijen en kolommen
- vulgreep gebruiken
- cellen opmaken

vwo A/C deel 2
hoofdstuk 7
bladzijde 107

Formules en verwijzingen

- absolute verwijzingen naar cellen
- relatieve verwijzingen naar cellen
- verwijzingen gebruiken in formules

vwo A/C deel 2
hoofdstuk 7
bladzijde 107

Diagrammen

- lijn-, staaf-, stapel- en cirkeldiagrammen maken

vwo A/C deel 2
hoofdstuk 7
bladzijde 109

Boxplots

- boxplots maken

vwo A/C deel 2
hoofdstuk 7
bladzijde 111

Zoeken in een dataset

- bij gebruik van Excel: omzetten van nette dataset in tabel
- sorteren en filteren
- werken met totalenrij

vwo A/C deel 2
hoofdstuk 7
bladzijde 113

Hercoderen

- hercoderen van variabelen

vwo A/C deel 2
hoofdstuk 7
bladzijde 116

Draaitabellen

- draaitabellen maken

vwo A/C deel 2
hoofdstuk 7
bladzijde 118

Groeperen en draaigrafieken

- groeperen van waarden in draaitabellen
- maken van draaigrafieken

vwo A/C deel 2
hoofdstuk 7
bladzijde 120

Groeperen van datums

- groeperen van datums

vwo A/C deel 2
hoofdstuk 7
bladzijde 124

Overzicht routes

5 Machtsverbanden

5.1 Rekenen met machten

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
□ basis											
⊙ midden											
* uitdagend											

12	13	14	15	16	17	18	19

5.2 Grafieken veranderen

opgave	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

35	36	37	38	39	40

5.3 Formules herleiden en variabelen vrijmaken

opgave	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

53	54	55	56	57	58	59	60	61

5.4 Formules met machten en wortels

opgave	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

6 Kansrekening

6.1 Kansen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

6.2 Empirische kansen

opgave	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
□ basis																
⊙ midden																
* uitdagend																

6.3 Het vaasmodel en de productregel

opgave	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
□ basis											
⊙ midden											
* uitdagend											

40	41	42	43	44	45	46

6.4 De somregel

opgave	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

6.5 De complementregel

opgave	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
▣ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

6.6 Pakken met en zonder terugleggen

opgave	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
▣ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

K Lineair programmeren

K.1 Stelsels van lineaire vergelijkingen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

K.2 Ongelijkheden met twee variabelen

opgave	14	15	16	17	18	19	20	21
□ basis								
⊙ midden								
* uitdagend								

K.3 Lineaire programmeringsproblemen

opgave	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
□ basis										
⊙ midden										
* uitdagend										

K.4 De hoekpuntmethode

opgave	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

K.5 Lineair programmeren met Excel

opgave	47	48	49	50	51	52	53	54	55
□ basis									
⊙ midden									
* uitdagend									

Trefwoordenregister

A

a priori kans 60
afhankelijke
gebeurtenissen 66

B

beeldgrafiek 20
beperkende
voorwaarde 144
betrouwbaarheids-
interval 115
boxplots vergelijken 106

C

coëfficiënt 36
combinatie 51
complementregel 85

D

Dantzig, George 149
dataset 113
digitaal rekenblad 107
doelfunctie 146
draaigrafiek 120
draaitabel 118

E

eliminieren 133
elkaar uitsluiten de
gebeurtenissen 78
empirische kans 60
exact 53
Excel 107, 164

F

filteren 113

G

gebeurtenis 53
gebroken formule 32
gecombineerde
ongelijkheid 140
gereduceerde kosten 170

groeperen 120
gunstige uitkomsten 53

H

halfvlak 139
halfvlak met rand 139
hercoderen 116
herschaling in verticale
richting 23
hoekpuntmethode 155
hogere machtswortel 15

I

isolijn 146
iso-winstlijn 146

K

kans 53
a priori - 60
empirische - 60
subjectieve - 60
theoretisch - 60
voorwaardelijke - 62
kansboom 73
kansdefinitie van
Laplace 53
kansexperiment 56
kansexperimenten
herhalen 81
Karmarkar, Narendra 157
kleine steekproef uit grote
populatie 95

L

Laplace, Pierre-Simon
de 55
lineair programmeren 147
lineair programmerings-
probleem oplossen 149

M

machten 9, 11
rekenregels voor - 9

machten met negatieve
exponenten 12
machtsformule 30, 37
machtsverband 19, 36
maximum 21
met terugleggen 91
minimum 21

N

nette dataset 113

O

onafhankelijke
gebeurtenissen 66
onafhankelijke
kansexperimenten 73

P

permutatie 51
productieprogramma 145
productregel voor
onafhankelijke
kansexperimenten 74
punt van symmetrie 22

R

record 113
rekenblad 107
rekenregels voor
machten 9, 11

S

samengesteld
kansexperiment 56
schaduw prijs 164
Sheets 107, 164
somregel 78
sorteren 113
speling 164
spreadsheet 107
standaardformule 19
standaardgrafiek 19
stelsel 133

stelsel lineaire
vergelijkingen 133
subjectieve kans 60

T

terugleggen 91
met - 91
zonder - 91
theoretische kans 60
toegestane gebied 144
transportprobleem 159

U

uitbijter 111
uitschieter 111

V

vaasmodel 71
vaasmodel zonder
terugleggen 91
variabelen vrijmaken 28,
30, 32
verschuiving 20
verticaal herschalen 23
voorwaardelijke kans 62

W

wet van de grote
aantallen 59
wisseleigenschap 32
wortelformule 27

Z

zonder terugleggen 91

Verantwoording

Illustraties: Richard van de Pol Illustratie & Vormgeving, Tilburg; Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: Integra Software Services
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Shutterstock: p. 6-7, 37, 40, 41, 45, 72, 75, 97 b, 102-103, 118, 120, 123, 125, 128-129, 132
Bureau Circuit Zwolle: p. 39
iStock: p. 42, 59, 136
Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 48-49, 89, 94 b, 97 o, 114, 117, 121, 126, 142, 152
Imageselect, Wassenaar: p. 55
Jan Dijkhuis, Rozendaal: p. 61
Sabine de Waal, Hendrik Ido Ambacht: p. 69
Getty Images: p. 83, 158, 180
Gerrit de Jong, Middelburg: p. 87
ANP Foto, Den Haag: p. 94 o
Associated Press / Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 119
Ed Souza / Stanford News Service: p. 149
Narendra Karmarkar / Wikipedia: p. 157
Gerrit te Vaarwerk, Lochem: p. 177

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv,
Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73532-6



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



Noordhoff



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-73532-6

