

& GETAL & RUIMTE

A



Noordhoff

Getal & Ruimte

vwo A deel 3

Twaalfde editie, 2021

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
E. Terlaak

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het boek vwo A deel 3

Dit boek bevat een gedeelte van de leerstof van het vak wiskunde A van het vwo. Het boek sluit aan op de delen 1 en 2 van vwo A/C. In vwo A deel 4 komt de resterende leerstof van wiskunde A aan bod. De totale studielast voor het vak vwo wiskunde A is 520 uur.

Met het doorwerken van een hoofdstuk is ongeveer 30 studielasturen gemoeid. Een voor de hand liggende situatie is om in het vijfde leerjaar te beginnen met het afhandelen van vwo A/C deel 2 en de rest van het schooljaar te besteden aan het doorwerken van vwo A deel 3.

De leerstof die in de boeken vwo A deel 3 en vwo C deel 3 wordt aangeboden loopt zoveel mogelijk gelijkop, maar omdat de programma's nogal verschillen is het onmogelijk de leerlingen in het vijfde leerjaar hetzelfde traject te laten volgen. In situaties waarin de leerlingen die wiskunde A en wiskunde C volgen toch in dezelfde groep zitten, dient men goed bedacht te zijn op de verschillen. In het zesde leerjaar verschillen de aangeboden onderwerpen nog meer.

Bespreking van de hoofdstukken

In de vier hoofdstukken van dit boek komen de volgende subdomeinen aan de orde. C1 Standaardfuncties en C2 Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden (hoofdstuk 10), D2 Helling en D3 Afgeleide (hoofdstuk 8), E5 Kansverdelingen (hoofdstuk 9) en E6 Verklarende statistiek (hoofdstuk 11). De stof die in de hoofdstukken 8 en 10 wordt aangeboden, komt aan de orde in het CE. Dat is niet het geval bij de stof van de hoofdstukken 9 en 11. Deze onderwerpen moeten in het SE worden getoetst.

In vwo A deel 4 komen alleen nog onderwerpen aan de orde die in het CE worden getoetst.

Hoofdstuk 8 omvat de vertrouwde opbouw van differentiaalrekening. Eerst worden toenamediagrammen en differentiequotiënten behandeld, dan hellingen en hellinggrafieken, vervolgens de basisregels voor differentiëren en de kettingregel en ten slotte extreme waarden.

De hoofdonderwerpen in hoofdstuk 9 zijn toevalsvariabelen en kansverdelingen. Met name de binomiale verdeling en de normale verdeling krijgen de nodige aandacht. Daarbij is ernaar gestreefd de notaties bij berekeningen met de GR zoveel mogelijk machine-onafhankelijk te maken. Het is uiteraard mogelijk om in een klassensituatie waarbij (grotendeels) één machine wordt gebruikt, de leerlingen wel een machine-specifieke uitwerking te laten noteren.

In het begin van hoofdstuk 10 staat exponentiële groei centraal met de begrippen groeipercentage, groeifactor, verdubbelingstijd en halveringstijd. Ook het opstellen van exponentiële groeiformules komt aan de orde. Vervolgens wordt het begrip logaritme geïntroduceerd en worden variabelen vrijgemaakt bij formules met exponenten en

logaritmen. Daarna komen de logaritmische schaalverdeling en de rekenregels voor logaritmen aan de orde. In de laatste paragraaf wordt groeisnelheid behandeld, met daarbij de introductie van het getal e en de natuurlijke logaritme.

In hoofdstuk 11 wordt het domein E Statistiek en kansrekening afgerond met het onderwerp toetsen van hypothesen. Ook in dit hoofdstuk worden de uitwerkingen van de opgaven zoveel mogelijk machine-onafhankelijk genoteerd.

Opbouw

De opbouw in deel 3 is dezelfde als in de delen 1 en 2. Elk hoofdstuk heeft een begin- en eindopdracht en een paragraaf Voorkennis. De oriëntatie-opgaven gaan vooraf aan nieuwe theorie en activeren het denken over een nieuw wiskundig begrip. Ook de reflectie-opgaven spelen een belangrijke rol bij het activeren van een wiskundige denkhouding. Naast de gewone opgaven en de afsluitende opgaven zijn er nog de extra opgaven. De afsluitende opgaven geven het beoogde eindniveau aan. De extra opgaven doorbreken de standaardaanpak en activeren zo het wiskundig denken.

Elke paragraaf wordt afgesloten met een Terugblik, aan het eind van elk hoofdstuk staat een Diagnostische toets en achter in het boek staan de Gemengde opgaven.

Drie leerroutes

In deze editie wordt gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen.

De basisroute geeft de leerling voldoende oefening om zich alle vaardigheden die bij de eindtermen horen eigen te maken. In de middenroute worden enkele oefenopgaven overgeslagen en in plaats hiervan maakt de leerling opgaven die dieper op de stof ingaan. De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder oefenopgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.

Getal & Ruimte online

Alle opgaven kunnen ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant-en-klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

Zomer 2020

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

02 Oriëntatie-opgave

   Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 Gewone opgave

   Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 Reflectie-opgave

   In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 Afsluitende opgave

   De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 Extra opgave

   Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute



2 Middenroute



3 Uitdagende route



NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder route-aanduiding

In de Diagnostische toets en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▶GR] Verwijzing naar een module van de GR-handleiding.

[▶WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

8 Differentiaalrekening 6

Beginopdracht Toltarieven 8

Voorkennis Intervallen, stijgen en dalen 9

8.1 Toenamediaagrammen en differentiequotiënten 11

8.2 Hellinggrafieken 23

8.3 Differentiëren 36

8.4 Notaties en regels voor de afgeleide 42

8.5 Extreme waarden en de afgeleide 49

Eindopdracht Maximale opbrengst bij toltarief 57

Diagnostische toets 58

9 Kansverdelingen 60

Beginopdracht Winfall loterij 62

Voorkennis Kansberekeningen 63

9.1 Toevalsvariabelen en verwachtingswaarde 65

9.2 De binomiale verdeling 74

9.3 Berekeningen bij normaalkrommen 84

9.4 Toepassingen van de normale verdeling 92

Eindopdracht Loterij-strategieën 98

Diagnostische toets 100

10 Exponenten en logaritmen 102

Beginopdracht Medische isotopen 104

Voorkennis Lineaire en exponentiële groei 105

10.1 Exponentiële groei 108

10.2 Groeipercents en formules 116

10.3 Logaritmen 124

10.4 Werken met logaritmen 132

10.5 Groeisnelheid 142

Eindopdracht Nucleaire geneeskunde 149

Diagnostische toets 150

11 Het toetsen van hypothesen 152

Beginopdracht Examentraining 154

Voorkennis De binomiale en de normale verdeling 155

11.1 De som van normale verdelingen 157

11.2 De wortel- n -wet 163

11.3 Beslissen op grond van een steekproef 169

11.4 Eenzijdig en tweezijdig toetsen 178

11.5 Binomiale toetsen 187

Eindopdracht Examentraining evalueren 197

Diagnostische toets 198

Gemengde opgaven 200

Overzicht GR-modules 216

Overzicht routes 217

Trefwoordenregister 221

Verantwoording 223

8

Differentiaalrekening

Wat leer je?

- Veranderingen in beeld brengen met toenamediagrammen.
- Berekenen van gemiddelde veranderingen.
- Teken en hellinggrafieken.
- Wat differentiëren is en enkele regels die je hierbij gebruikt.
- De afgeleide gebruiken om extreme waarden te berekenen.



Beginopdracht Toltarieven

Bij een tolbrug hangt het aantal personenauto's dat hier gebruik van maakt af van het toltarief.

Men heeft hierbij het model $N = 0,3T^3 - 13,5T^2 + 5000$ opgesteld.

Hierin is N het aantal personenauto's dat per dag gebruikmaakt van de brug en T het bedrag in euro's dat per auto moet worden betaald om over de brug te mogen rijden (het toltarief). In dit model is T maximaal 30.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van N .

Je ziet dat N kleiner wordt als T toeneemt.

Je ziet ook dat N in het begin toenemend dalend is. Zo neemt N meer af als T toeneemt van 10 tot 11 dan als T toeneemt van 5 tot 6.

- Bereken het verschil in deze afnames.

De daling van N is het grootst als $T = 15$.

- Bereken de afname van het aantal auto's als het toltarief wordt verhoogd van €14,90 naar €15,10.

De opbrengst kan worden berekend met de formule $R = N \cdot T$.

Hierin is R de dagelijkse opbrengst in euro's.

De formule van R uitgedrukt in T is $R = 0,3T^4 - 13,5T^3 + 5000T$.

- Laat zien hoe je aan deze formule kunt komen.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van R .

Je ziet dat R een maximum heeft.

- Bereken welk toltarief bij dit maximum hoort.
Rond af op centen.

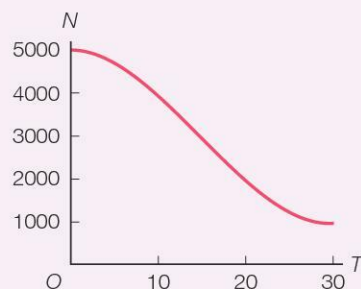
Totdat de maximale opbrengst is bereikt, neemt de opbrengst toe als het toltarief toeneemt. De snelheid waarmee dit gebeurt, neemt echter af.

- Hoe kun je dit in de grafiek zien?
- Laat met een berekening zien dat de toename van de opbrengst groter is als het toltarief toeneemt van 5 tot 6 euro, dan als het toltarief toeneemt van 10 tot 11 euro.

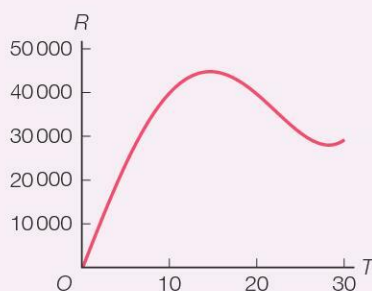
Als het toltarief meer wordt dan het toltarief dat bij het maximum hoort, dan neemt de opbrengst af. Deze afname is niet gelijk bij elke toename van het toltarief met 1 euro. Zo is bij een toename van het toltarief van 16 tot 17 euro de afname van de opbrengst ongeveer 634 euro en bij een toename van het toltarief van 17 tot 18 euro de afname van de opbrengst ongeveer 970 euro.

- Het toltarief neemt toe van x tot $x + 1$ euro met x geheel.

Onderzoek bij welke x de afname van de opbrengst het grootst is.



figuur 8.1

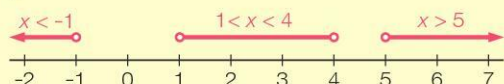


figuur 8.2

Voorkennis Intervallen, stijgen en dalen

Theorie A Soorten van stijgen en dalen

Een interval is een aaneengesloten stuk van de getallenlijn.
In de figuur hieronder zijn boven de getallenlijn drie intervallen getekend.



figuur 8.3

Het interval $x < -1$ noteren we als $\langle \leftarrow, -1 \rangle$.

Het interval $1 < x < 4$ noteren we als $\langle 1, 4 \rangle$.

Het interval $x > 5$ noteren we als $\langle 5, \rightarrow \rangle$.

Deze drie intervallen zijn open intervallen.

Bij een open interval horen de grenzen niet bij het interval.

Behalve open intervallen zijn er ook gesloten intervallen.

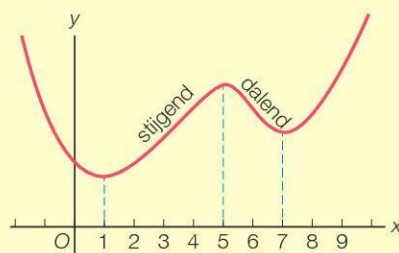
Bij een gesloten interval horen de grenzen wel bij het interval.

Het gesloten interval $1 \leq x \leq 4$ noteren we als $[1, 4]$.

Zie figuur 8.4. Als x toeneemt van 1 tot 5, dan ga je langs de grafiek omhoog. We zeggen: de grafiek is stijgend op het interval $\langle 1, 5 \rangle$.

De grafiek is dalend op het interval $\langle 5, 7 \rangle$.

Verder zie je: de grafiek is dalend op het interval $\langle \leftarrow, 1 \rangle$ en de grafiek is stijgend op het interval $\langle 7, \rightarrow \rangle$.



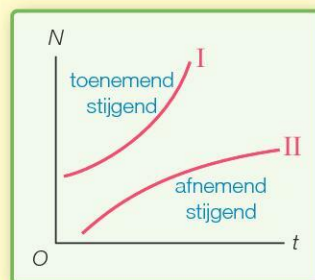
figuur 8.4

Hiernaast zie je twee grafieken die beide stijgend zijn.

Ga je van links naar rechts over de grafieken, dan ga je omhoog. Maar toch is er een belangrijk verschil tussen de twee grafieken.

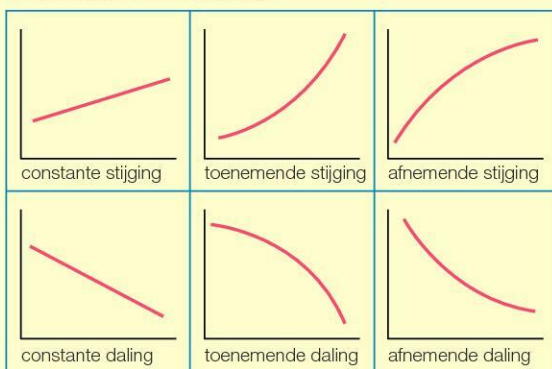
Bij grafiek I is de toename steeds groter; de grafiek gaat steeds steiler omhoog. Er is sprake van toenemende stijging.

Bij grafiek II komt er telkens minder bij; de grafiek gaat steeds minder steil omhoog. Er is sprake van afnemende stijging.



Hiernaast staan de verschillende soorten van stijgen en dalen vermeld.

SOORTEN VAN STIJGEN EN DALEN



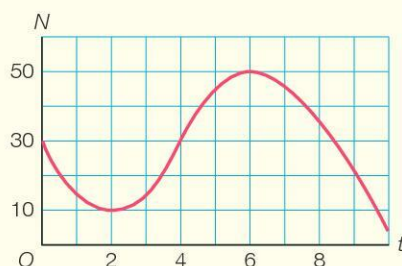
Op de vraag welke soorten van stijgen en dalen je in een grafiek herkent, noteer je de grootst mogelijke open intervallen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Welke soorten van stijgen en dalen kun je op het interval $[0, 10]$ in figuur 8.5 herkennen? Noem ook de bijbehorende intervallen.

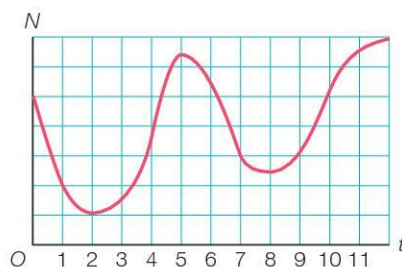
Uitwerking

afnemend dalend op $\langle 0, 2 \rangle$
 toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$
 afnemend stijgend op $\langle 4, 6 \rangle$
 toenemend dalend op $\langle 6, 10 \rangle$



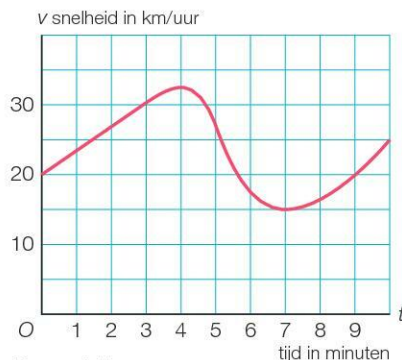
figuur 8.5

- 1** Zie figuur 8.6 met t tussen 0 en 12.
- Welke soorten van stijgen herken je? Noem ook de bijbehorende intervallen.
 - Welke soorten van dalen herken je? Noem ook de bijbehorende intervallen.



figuur 8.6

- 2** De grafiek in figuur 8.7 gaat over de snelheid van een fietser tijdens een tocht door een glooiend landschap.
- Welke soorten van stijgen en dalen herken je op het interval $[0, 10]$? Noem ook de bijbehorende intervallen.
 - Op welk tijdsinterval is de fietser aan het klimmen?



figuur 8.7

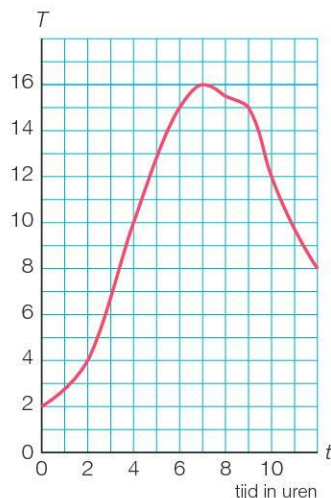
8.1 Toenamediagrammen en differentiequotiënten

01
☑⊗*

Jasmijn heeft op een dag in maart van acht uur 's morgens tot acht uur 's avonds het temperatuurverloop bijgehouden. Zie de figuur hiernaast. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 8:00 uur en T de temperatuur in graden Celsius. Je ziet dat om acht uur 's ochtends de temperatuur 2°C was.

- Wat is de toename van de temperatuur tussen tien uur en twaalf uur?
- Wat is de toename van T op het interval $[4, 6]$?
- Op het interval $[8, 10]$ is er een afname. De verandering van T is dus negatief. Hoe groot is deze afname?
- Neem over en vul in.

interval	$[0, 2]$	$[2, 4]$	$[4, 6]$	$[6, 8]$	$[8, 10]$	$[10, 12]$
ΔT						



figuur 8.8

Theorie A Van grafiek naar toenamediagram

Het aantal radioluisteraars op een doordeweekse dag neemt in de loop van de ochtend toe. Zie figuur 8.9a.

Hierin is N het aantal luisteraars in duizendtallen en t de tijd in uren met $t = 0$ om 6:00 uur.

Van $t = 0$ tot $t = 1$ is de toename $\Delta N = 15 - 5 = 10$.

Dus op het interval $[0, 1]$ is $\Delta N = 10$.

Op het interval $[4, 5]$ is er een afname van 7.

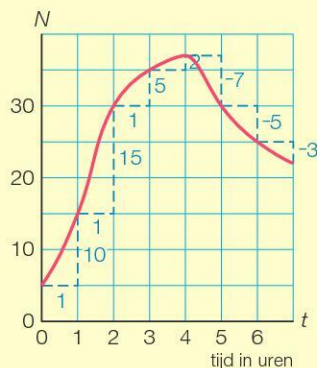
Dus op $[4, 5]$ is $\Delta N = -7$.

In de tabel staat bij intervallen met $\Delta t = 1$ de bijbehorende ΔN .

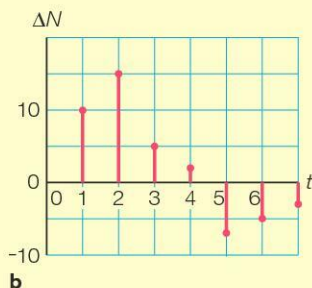
interval	$[0, 1]$	$[1, 2]$	$[2, 3]$	$[3, 4]$	$[4, 5]$	$[5, 6]$	$[6, 7]$
ΔN	10	15	5	2	-7	-5	-3

In figuur 8.9b is bij de tabel een nieuw soort diagram getekend. Eerst is boven de *rechtergrens* van elk interval de bijbehorende ΔN uitgezet. Vervolgens zijn de punten door verticale lijnstukken met de t -as verbonden.

Figuur 8.9b heet een **toenamediagram**. Bij dit toenamediagram is de **stapgrootte** $\Delta t = 1$.



a



b

figuur 8.9

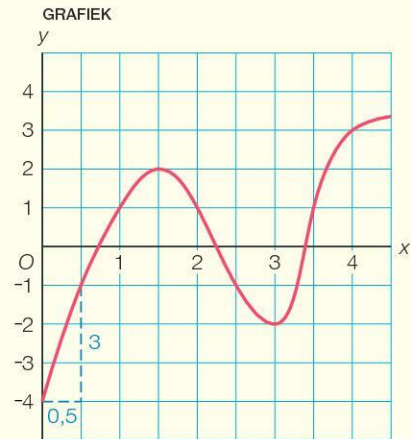
Voorbeeld

Zie figuur 8.10.

Teken het toenamediagram op het interval $[0; 3,5]$ met stapgrootte $\Delta x = 0,5$.

Aanpak

Maak eerst een tabel met toenames. Op $[0; 3,5]$ is het eerste interval met $\Delta x = 0,5$ het interval $[0; 0,5]$. Let erop dat je Δy telkens boven de rechtergrens van het bijbehorende interval uitzet. Bij de verticale as zet je Δy .



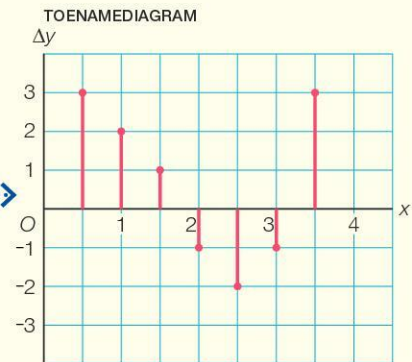
figuur 8.10

Uitwerking

interval	Δy
$[0; 0,5]$	3
$[0,5; 1]$	2
$[1; 1,5]$	1
$[1,5; 2]$	-1
$[2; 2,5]$	-2
$[2,5; 3]$	-1
$[3; 3,5]$	3

Op $[0; 0,5]$ is de toename 3.

Dus het staafje boven 0,5 heeft lengte 3.



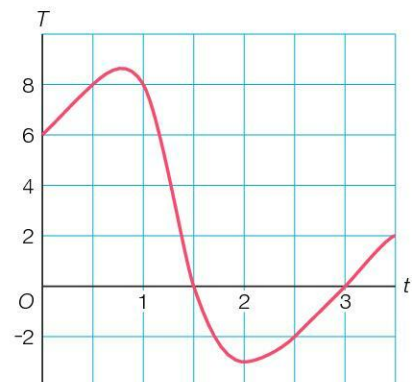
2 Zie figuur 8.10 van het voorbeeld.

 Teken het toenamediagram op het interval $[0, 4]$ met $\Delta x = 1$.

3 Zie figuur 8.11.

 a Teken het toenamediagram op het interval $[0, 3]$ met $\Delta t = 1$.

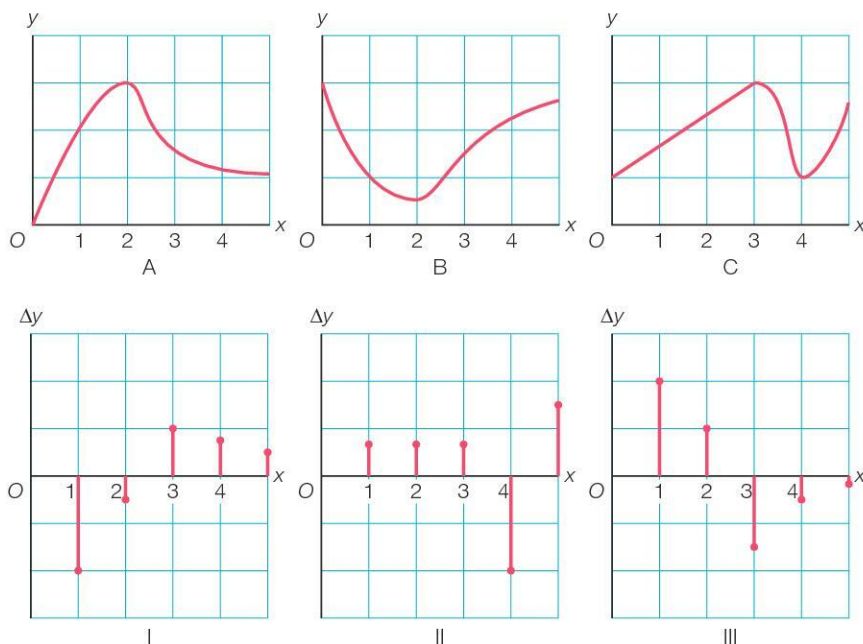
b Teken het toenamediagram op het interval $[0; 3,5]$ met $\Delta t = 0,5$.



figuur 8.11

- R4** Teken een toenamediagram bij een grafiek die
- a** één maximum heeft
 - b** één minimum heeft
 - c** bij een lineair verband hoort
 - d** afnemend dalend is.

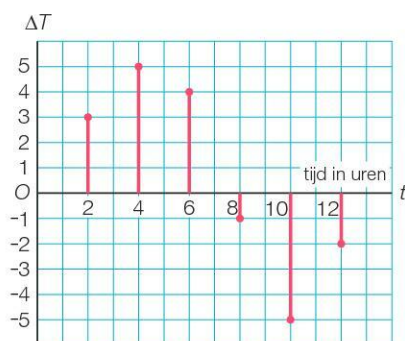
- A5** Hieronder zie je drie grafieken en drie toenamediagrammen. Bij elk van de grafieken hoort één van de toenamediagrammen. Zoek bij elke grafiek het juiste toenamediagram. Licht je keuze toe.



figuur 8.12

- 06** Jasmijn heeft op een dag in juni van acht uur 's morgens tot acht uur 's avonds het temperatuurverloop bijgehouden. Ze heeft hiervan een toenamediagram gemaakt met stapgrootte 2 uur. Zie de figuur hiernaast. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 8:00 uur en T de temperatuur in graden Celsius. Om twaalf uur 's middags was het 20°C .

- a** Licht toe dat het 's middags om twee uur 24°C was.
- b** Wat was de temperatuur om vier uur 's middags? En om acht uur 's avonds?
- c** Reken na dat de temperatuur om acht uur 's morgens 12°C was.



figuur 8.13

Theorie B Van toenamediagram naar grafiek

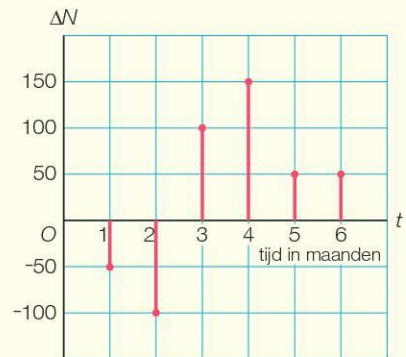
Zijn bij een toenamediagram de coördinaten bekend van een punt van de bijbehorende grafiek, dan kun je coördinaten van andere punten van de grafiek berekenen. Door deze punten is vervolgens een grafiek te tekenen. In het voorbeeld krijg je op deze manier de coördinaten van zeven punten. Tenzij je nog meer informatie hebt over de grafiek, is in theorie elke grafiek door deze zeven punten mogelijk.

Voorbeeld

Het toenamediagram in figuur 8.14 geeft informatie over het aantal konijnen N in een duingebied. Hierin is t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2020.

Op 1 april 2020 zijn er 850 konijnen.

- Teken een grafiek bij deze gegevens.
- Tussen 1 januari en 1 juli 2020 was het aantal konijnen één keer minimaal. De natuurbeheerder beweert dat dit minimum optrad in de maand februari. Kan dit kloppen?



figuur 8.14

Aanpak

- Maak een tabel met t en N . Gebruik dat op 1 april (dus op $t = 3$) geldt dat $N = 850$. Van $t = 3$ tot $t = 4$ neemt N met 150 toe, dit kun je zien aan het staafje bij $t = 4$. Bereken de overige waarden van N .

Uitwerking

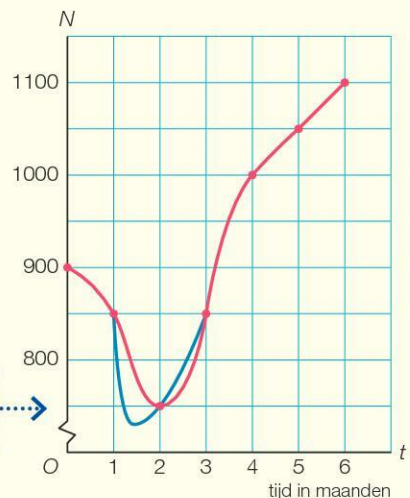
a

t	N	
0	900	
1	850	-50
2	750	-100
1 april → 3	850	+100
4	1000	+150
5	1050	+50
6	1100	+50

Zie de rode grafiek.

Merk op dat elke grafiek door de zeven gevonden punten bij het toenamediagram past.

- Ja, dat kan kloppen, zie de blauwe grafiek hiernaast.

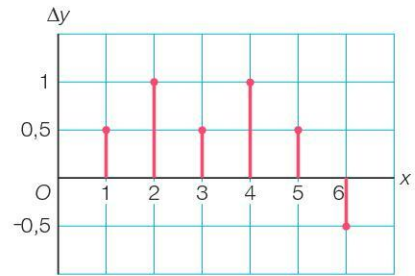


R7
  *

Zie vraag b van het voorbeeld.
 Zou het aantal konijnen minimaal geweest kunnen zijn in maart?

8
  *

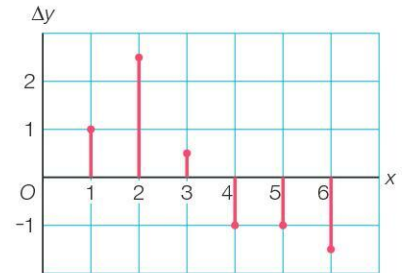
- Gegeven is het toenamediagram in figuur 8.15.
 De bijbehorende grafiek gaat door het punt $(2, 3)$.
- Teken een grafiek bij deze gegevens.
 - Waarom zijn er meerdere grafieken mogelijk?
 Teken met een andere kleur nog een mogelijke grafiek in de figuur van vraag a.
 - Teken het toenamediagram met $\Delta x = 2$ op het interval $[0, 6]$.



figuur 8.15

9
 

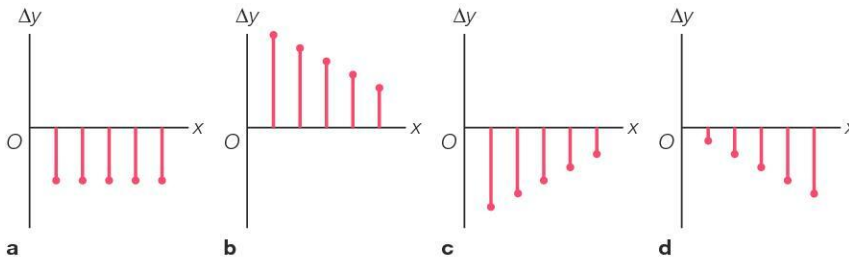
- Gegeven is het toenamediagram in figuur 8.16.
 a Teken een grafiek die bij het toenamediagram hoort en die door het punt $(3, -2)$ gaat.
 b Er is gegeven dat de grafiek die bij het toenamediagram hoort maar één maximum heeft.
 Kan dit maximum optreden bij $x = 2,5$? En bij $x = 1,5$? Licht toe.



figuur 8.16

10
 

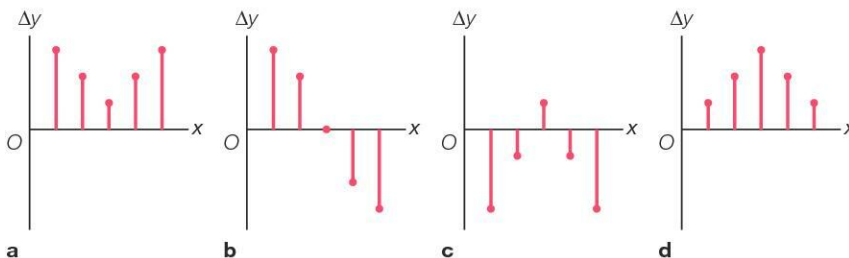
In een toenamediagram van een grafiek kun je de verschillende soorten van stijgen en dalen herkennen.
 Zoek bij de toenamediagrammen in figuur 8.17 de juiste soort van stijgen of dalen. Kies uit: toenemend stijgend, afnemend stijgend, constant stijgend, toenemend dalend, afnemend dalend en constant dalend.



figuur 8.17

11
  *

Schets mogelijke grafieken bij de volgende toenamediagrammen.

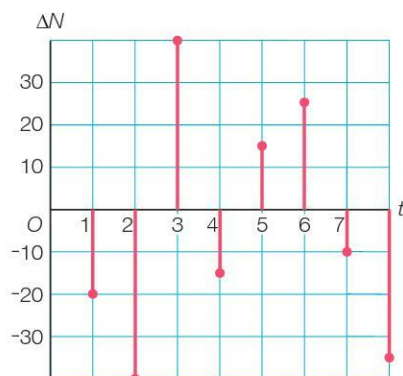


figuur 8.18

A12

In Nationaal Park De Hoge Veluwe kun je gebruikmaken van witte leenfietsen. Op een aantal plekken in het park zijn stallingen waar je een fiets kunt meenemen of wegzetten. Een beheerder van het park houdt op een dag vanaf 9:00 uur bij hoeveel fietsen er in één van de stallingen staan. Zie het toenamediagram in figuur 8.19 waarin t de tijd in uren is met $t = 0$ om 9:00 uur en N het aantal fietsen in de stalling. Om 15:00 uur stonden er 110 fietsen in de stalling.

- Hoeveel fietsen stonden er om 17:00 uur in de stalling? En om 9:00 uur?
- Tussen 10:00 en 11:00 uur hebben in totaal 30 personen een fiets in de stalling gezet. Hoeveel fietsen zijn er tussen 10:00 en 11:00 uur meegenomen?

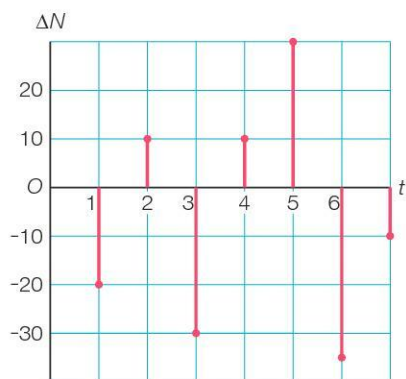


figuur 8.19



A13

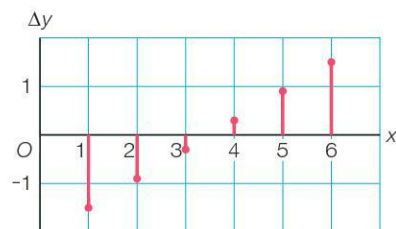
Op een zonnige dag houdt Daan bij hoeveel mensen er op een groot terras zitten. Zie het toenamediagram in figuur 8.20 met t de tijd in uren en $t = 0$ om 15:00 uur en N het aantal mensen op het terras. Onderzoek hoeveel mensen er om 15:00 uur minstens op het terras hebben gezeten.



figuur 8.20

E14

Bij het toenamediagram in figuur 8.21 hoort een grafiek met één minimum. Voor welke waarden van x kan dit minimum optreden? Geef een zo groot mogelijk interval.



figuur 8.21

In 2017 passeerde Nederland de grens van 17 miljoen inwoners. In de tabel kun je ΔN voor verschillende perioden de toename van het aantal inwoners N in miljoenen aflezen.

BEVOLKING VAN NEDERLAND

periode	ΔN
1840-1940	5,8
1940-1970	4,2
1970-1990	1,9
1990-2010	1,6
2010-2020	0,8

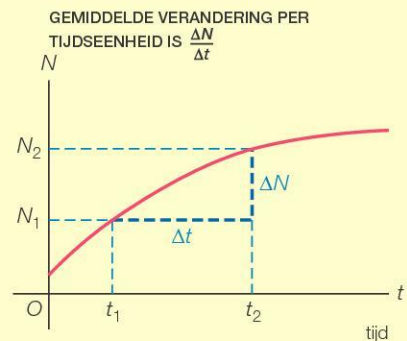


Stijn bekijkt de tabel en zegt: ‘Er is sinds 1840 sprake van een afnemende stijging.’ Welke fout maakt Stijn?

Theorie C Gemiddelde veranderingen

Om veranderingen van inwoneraantallen N te vergelijken, gebruik je ΔN . Het ligt voor de hand om te zeggen: ‘Hoe groter ΔN , des te sterker verandert N .’ Maar je moet hiermee voorzichtig zijn, want ook de lengte Δt van het tijdsinterval speelt een rol.

Om de veranderingen goed met elkaar te vergelijken, bekijk je de **gemiddelde veranderingen** per tijdseenheid.



figuur 8.22

Zo geldt voor de tabel in opgave 15:

- voor de periode 1840-1940 neemt N met 5,8 toe, dus de gemiddelde verandering is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{5,8}{100} = 0,058$ miljoen per jaar
- voor de periode 1940-1970 neemt N met 4,2 toe, dus de gemiddelde verandering is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{4,2}{30} = 0,14$ miljoen per jaar.

$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ is de gemiddelde verandering van N per tijdseenheid.



In de tabel staat informatie over het aantal woningen N in miljoenen in Nederland.

WONINGVOORRAAD NEDERLAND

jaar	1920	1947	1964	1970	1980	1987	1995	2000	2019
N	1,37	2,12	3,15	3,75	4,85	5,59	6,30	6,59	7,82

- a** Met hoeveel neemt N toe in de periode 1980-1987? Wat is de gemiddelde toename per jaar in deze periode?

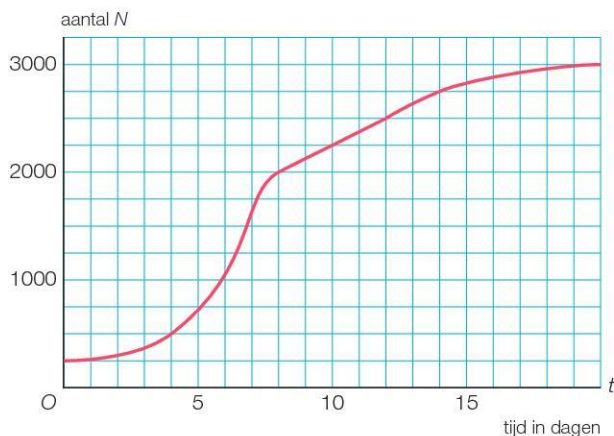
Hieronder is een begin gemaakt van de tabel met periode, Δt , ΔN en $\frac{\Delta N}{\Delta t}$.

periode	Δt	ΔN	$\frac{\Delta N}{\Delta t}$
1920-1947	27	0,75	0,028
...	...	...	...

- b** Neem de tabel over en vul verder in.
c In welke periode is de gemiddelde toename het grootst?
d Trek een conclusie over het verloop van de woningvoorraad in Nederland.



In figuur 8.23 is de groei weergegeven van een populatie fruitvliegjes in een afgesloten ruimte.



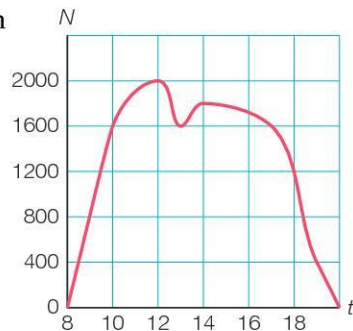
figuur 8.23

- a** Bereken de gemiddelde toename per dag van het aantal fruitvliegjes gedurende de eerste tien dagen.
b Hoe kun je in de figuur zien dat de gemiddelde toename per dag op $[2, 8]$ groter is dan op $[10, 14]$?
c Zeg zonder berekening op welk interval de gemiddelde toename per dag het grootst is en ook op welk interval het kleinst. Kies uit $[0, 4]$, $[4, 8]$, $[8, 12]$ en $[12, 20]$.

A18
  *

In figuur 8.24 is het aantal auto's N op een parkeerterrein bij een dierentuin uitgezet tegen de tijd t in uren. Het betreft een zaterdag in mei.

- Bereken $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ op het interval $[9, 13]$.
- Bereken de gemiddelde verandering van N op het interval $[12, 17]$.
- Geef een interval waarop de gemiddelde toename 100 auto's per uur is.
- Geef een interval waarop de gemiddelde afname 200 auto's per uur is.

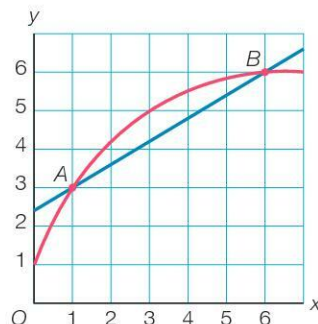


figuur 8.24

O19
  *

Op de grafiek hiernaast liggen de punten $A(1, 3)$ en $B(6, 6)$.

- Bereken de gemiddelde toename van y op het interval $[1, 6]$.
- Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B .
- Vergelijk de antwoorden van a en b. Wat valt je op?



figuur 8.25

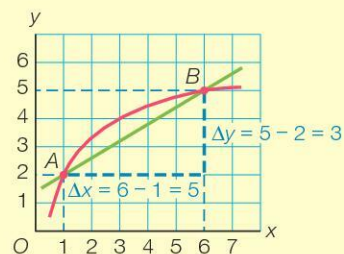
Theorie D Differentiequotiënten

Op het interval $[1, 6]$ in figuur 8.26 is $\Delta x = 6 - 1 = 5$ en $\Delta y = 5 - 2 = 3$.

De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5} = 0,6$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ heet het **differentiequotiënt** van y op het interval $[1, 6]$.

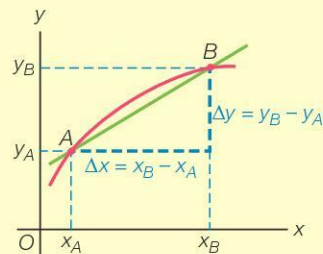
Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is de richtingscoëfficiënt van de lijn AB in figuur 8.26. In plaats van 'de richtingscoëfficiënt van de lijn AB ' zeggen we ook 'de **helling** van de lijn AB '.



figuur 8.26

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van y op $[x_A, x_B]$ is

- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (oftewel de helling) van de lijn AB
- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



Voorbeeld

Zie figuur 8.27.

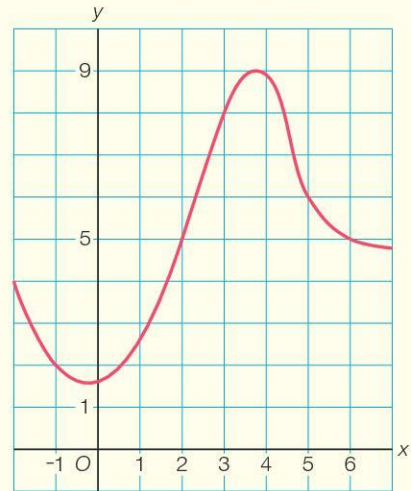
- a Bereken de gemiddelde verandering van y op het interval $[-1, 3]$.
- b Bereken het differentiequotient op $[3, 5]$.

Uitwerking

- a De gemiddelde verandering op $[-1, 3]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 2}{3 - (-1)} = \frac{6}{4} = 1,5.$$

- b Op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 8}{5 - 3} = \frac{-2}{2} = -1.$



figuur 8.27

20 Zie figuur 8.27.

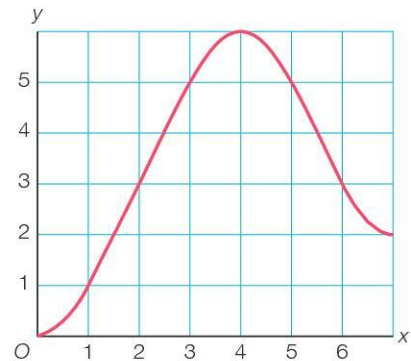


- a Bereken de gemiddelde verandering van y op het interval $[2, 5]$.
- b Bereken het differentiequotient op $[-1, 5]$.
- c Noem een interval waarop de gemiddelde verandering van y nul is.

21 Zie figuur 8.28.



- a Bereken het differentiequotient op $[1, 3]$.
- b Bereken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op $[4, 6]$. Wat betekent het dat je antwoord negatief is?
- c Bereken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op $[2, 7]$.
- d Noem een interval waarop de gemiddelde verandering gelijk is aan 0.
- e Noem een interval waarop $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gelijk is aan 1,5.

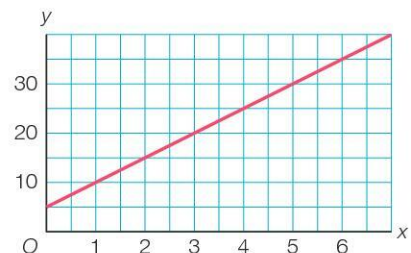


figuur 8.28

R22 Zie figuur 8.29. De grafiek is een lijn.



- a Bereken het differentiequotient op de intervallen $[0, 2]$, $[2, 5]$, $[5, 6]$ en $[6, 10]$.
- b Wat kun je zeggen van de differentiequotienten als de grafiek een lijn is?

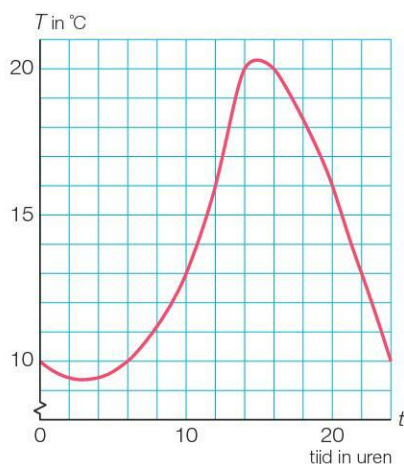


figuur 8.29

A23
☐ ⊗ *

[▶ WERKBLAD] De grafiek in figuur 8.30 gaat over het verloop van de temperatuur op een dag in mei.

- Bereken $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op $[6, 10]$ en op $[9, 14]$.
- Geef een interval waarop de gemiddelde verandering $-0,3^\circ\text{C}/\text{uur}$ is.
- Voor welke t is de gemiddelde toename van de temperatuur op $[0, t]$ gelijk aan die op het interval $[0, 10]$? Licht je antwoord toe met behulp van het werkblad.
- Voor welke t is de gemiddelde toename van de temperatuur op $[0, t]$ maximaal? Licht je antwoord toe met behulp van het werkblad.

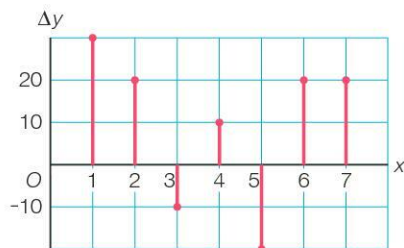


figuur 8.30

A24
☐ ⊗ *

Zie het toenamediagram in figuur 8.31.

Bereken de differentiequotiënten op de intervallen $[0, 7]$ en $[2, 6]$.



figuur 8.31

E25
*

Van een grafiek is het volgende bekend: de grafiek gaat door het punt $(0, 2)$ en

- op $[0, 2]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{4}$
 - op $[0, 5]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{5}$
 - op $[1, 3]$ is het differentiequotiënt $1\frac{1}{2}$
 - op $[1, 5]$ is het differentiequotiënt $\frac{1}{2}$.
- Bereken het differentiequotiënt op $[3, 5]$.
 - Is het mogelijk dat het differentiequotiënt op $[1, 4]$ gelijk is aan $1\frac{1}{2}$? Licht toe.

A26
☐ ⊗ *

Gegeven is de kostenformule $K = q^3 - 6q^2 + 13q + 15$.

Hierin is K in duizenden euro's en q de productie in duizendtallen. De productie is maximaal 8000 stuks.

- Bereken het differentiequotiënt van K op het interval $[4, 6]$. Vergeet niet de eenheid te vermelden.
- Bereken de gemiddelde toename van de kosten in euro's per stuk als de productie toeneemt van 2000 tot 5000 stuks.
- Bereken de gemiddelde toename van K in euro's per stuk als de productie toeneemt van 3600 tot 6100 stuks.

K in duizenden euro's
en q in duizendtallen,
dus de gemiddelde
verandering van K is in
euro's per stuk.

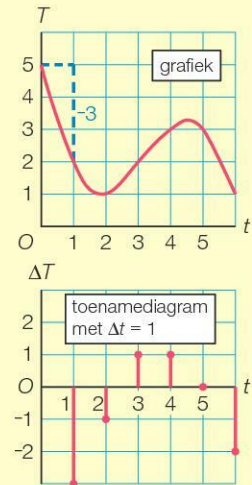
Terugblik

Toenamediagram

Om bij de grafiek hiernaast het toenamediagram te tekenen met $\Delta t = 1$, lees je bij stapgrootte $\Delta t = 1$ de veranderingen ΔT uit de grafiek af.

interval	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, 4]	[4, 5]	[5, 6]
ΔT	-3	-1	1	1	0	-2

Vervolgens zet je de veranderingen ΔT uit tegen t en verbind je de punten door een verticaal lijnstuk met de t -as. Teken elk verticaal lijnstuk boven de rechtergrens van het interval, dus het eerste lijnstuk bij $t = 1$, het tweede bij $t = 2$, enzovoort.



Differentiequotiënt

Om veranderingen op intervallen van verschillende lengte te vergelijken, gebruik je

differentiequotiënten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

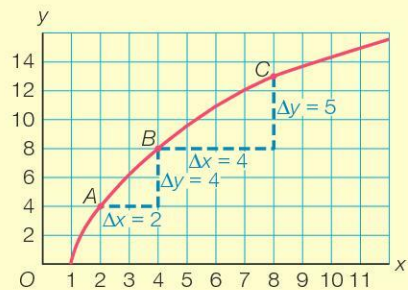
Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is de gemiddelde

verandering van y op een interval.

In de figuur hiernaast kun je aflezen:

- Op het interval $[2, 4]$ is $\Delta y = 4$ en $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$.
- Op het interval $[4, 8]$ is $\Delta y = 5$ en $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{4} = 1,25$.

Dat de grafiek afnemend stijgend is, wordt bevestigd door de differentiequotiënten 2 en 1,25. Uit alleen $\Delta y = 4$ en $\Delta y = 5$ valt hier geen conclusie te trekken over de soort van stijgen.



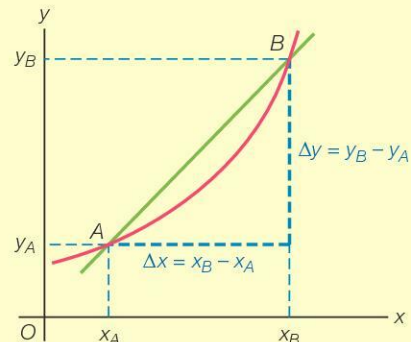
Differentiequotiënt en richtingscoëfficiënt (helling)

Het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

De volgende begrippen komen op hetzelfde neer:

- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (helling) van de lijn AB .



8.2 Hellinggrafieken

027




De weg tussen Lochem en Zutphen heeft een lengte van 10 km en de maximumsnelheid is 80 km/uur.

Walter rijdt dit traject op 5 november in 8 minuten.

a Bereken zijn gemiddelde snelheid in km/uur.

Enkele dagen later krijgt Walter een bekeuring wegens te hard rijden op het traject Lochem-Zutphen op 5 november. Volgens Walter klopt het niet, want zijn gemiddelde snelheid was minder dan 80 km/uur.

b Wat ziet Walter over het hoofd?

Theorie A Snelheid en raaklijn

De tijd-afstandgrafiek in figuur 8.32 hoort bij de formule $s = \frac{1}{2}t^3$ met t de tijd in seconden en s de afgelegde afstand in meters.

We vragen ons af hoe we met deze formule de snelheid op één moment, bijvoorbeeld op $t = 4$ kunnen krijgen.

Daartoe bekijken we de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[4, 5]$, $[4; 4,5]$, $[4; 4,1]$, $[4; 4,01]$, ... Zo krijgen we een steeds betere benadering van de snelheid op $t = 4$.

De gemiddelde snelheid $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ op het interval

$$\bullet [4, 5] \text{ is } \frac{\frac{1}{2} \cdot 5^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{5 - 4} = 30,5 \text{ m/s}$$

$$\bullet [4; 4,5] \text{ is } \frac{\frac{1}{2} \cdot 4,5^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0,5} = 27,125 \text{ m/s}$$

$$\bullet [4; 4,1] \text{ is } \frac{\frac{1}{2} \cdot 4,1^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0,1} = 24,605 \text{ m/s}$$

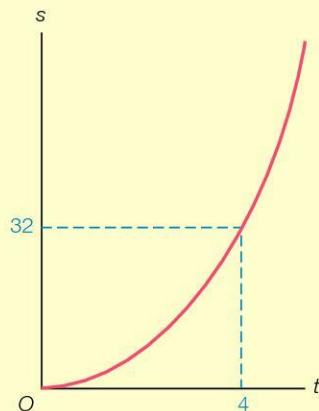
$$\bullet [4; 4,01] \text{ is } \frac{\frac{1}{2} \cdot 4,01^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0,01} \approx 24,060 \text{ m/s.}$$

De gemiddelde snelheid op het kleine interval $[4; 4,01]$ geeft een goede benadering van de snelheid op $t = 4$.

Je krijgt het vermoeden dat de snelheid op $t = 4$ gelijk is aan 24 m/s.

Als controle kun je $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ berekenen op een nog kleiner interval,

bijvoorbeeld op $[4; 4,001]$. Je krijgt $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4,001^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0,001} \approx 24,006 \text{ m/s.}$



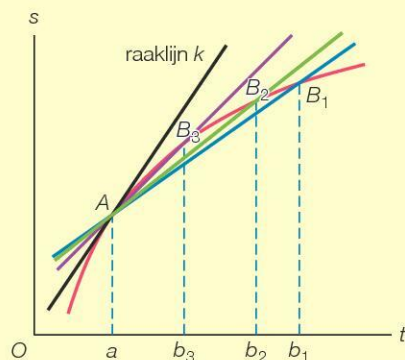
figuur 8.32

In figuur 8.33 zie je een tijd-afstandgrafiek. Door de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$.

De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de richtingscoëfficiënten van de lijnen AB_1 , AB_2 , AB_3 , ...

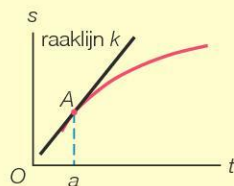
Hoe dichterbij A komt te liggen, des te meer zal de lijn AB lijken op de lijn k die de grafiek in A raakt.

De lijn k is de **raaklijn** van de grafiek in A . De snelheid op $t = a$ is dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A .



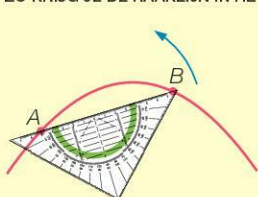
figuur 8.33

In een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.

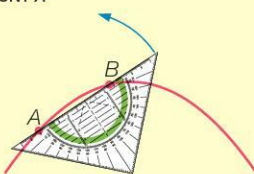


Hieronder zie je hoe je de raaklijn tekent in het punt A van een grafiek.

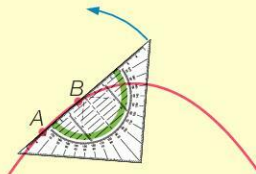
ZO KRIJG JE DE RAAKLIJN IN HET PUNT A



Draai de geodriehoek om het punt A .



Het punt B komt steeds dichterbij het punt A te liggen.

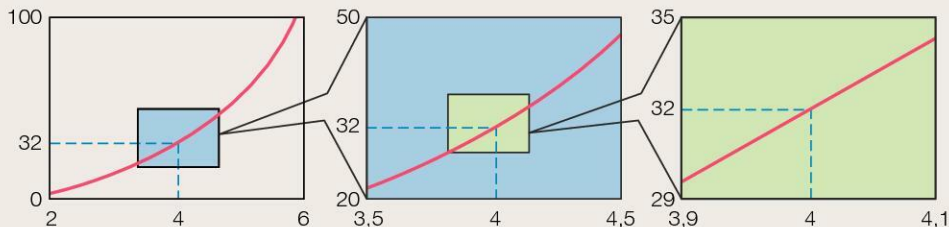


Zodra B samenvalt met A is de lijn AB overgegaan in de raaklijn in A .

INFORMATIEF

Inzoomen op de grafiek

In de figuren hieronder is ingezoomd op de grafiek van $s = \frac{1}{2}t^3$.



Hoe meer je inzoomt, hoe meer de grafiek op een rechte lijn gaat lijken.

De helling van deze lijn geeft de snelheid op $t = 4$.

Zoom je in op de grafiek bij $t = 3$, dan geeft de helling de snelheid op $t = 3$.

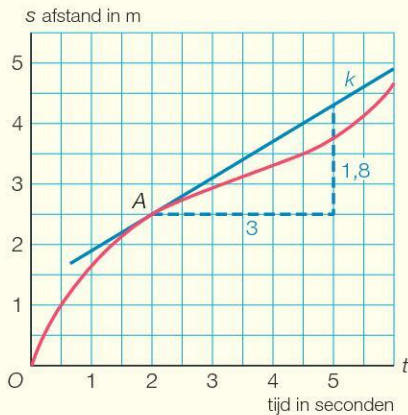
Voorbeeld

Zie de grafiek in figuur 8.34.
Schat de snelheid op $t = 2$.

Aanpak

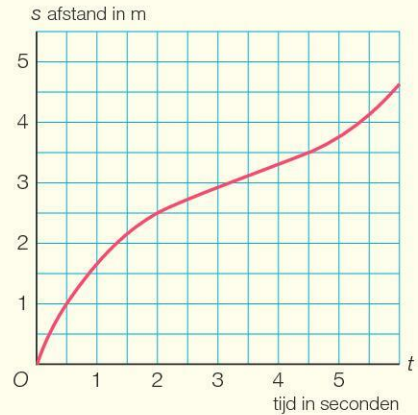
Teken de raaklijn k in het punt op de grafiek met $t = 2$. Bereken rc_k door twee geschikte punten op k te kiezen en de bijbehorende Δt en Δs af te lezen. Neem Δt voldoende groot.

Uitwerking



$$rc_k = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{1,8}{3} = 0,6$$

De snelheid op $t = 2$ is ongeveer 0,6 m/s.



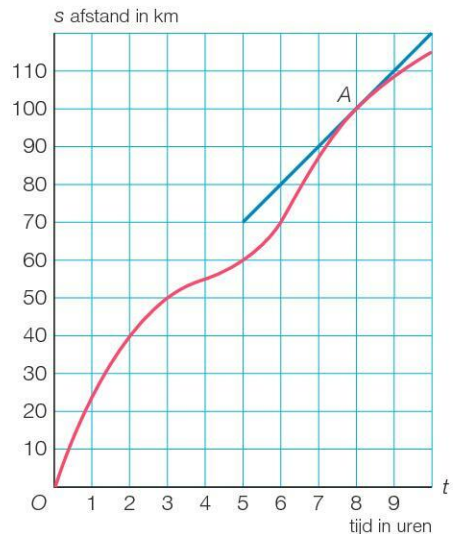
figuur 8.34

Voor Δs neem je het verschil van de s -coördinaten van twee punten op de raaklijn en dus niet op de grafiek. Je moet immers de rc van de raaklijn hebben.

28
W

[▶ WERKBLAD] In figuur 8.35 zie je een tijd-afstandgrafiek.

- In het punt A is de raaklijn van de grafiek getekend. Schat de snelheid op $t = 8$.
- Schat de snelheid op $t = 3$.
- Neemt de snelheid gedurende de eerste vier uur toe of af? Hoe zie je dat aan de grafiek?
- Voor welke t schat je dat de snelheid minimaal is?



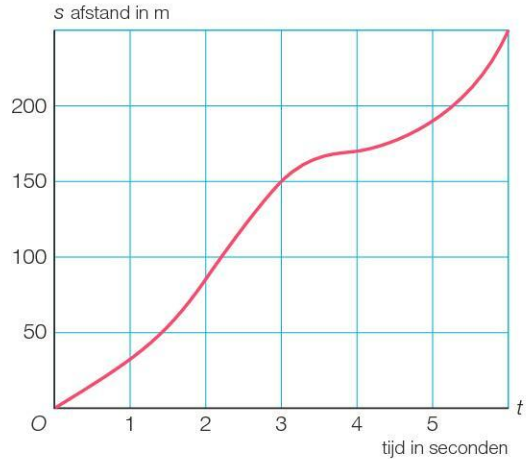
figuur 8.35

29



[▶ WERKBLAD] Gegeven is de tijd-afstandgrafiek in figuur 8.36.

- Schat de snelheid in gehele m/s op $t = 3$ en op $t = 5$.
- Voor welke t is de snelheid minimaal?
- Voor welke t is de gemiddelde snelheid op $[2, t]$ minimaal? Licht toe.
- Hoeveel tijdstippen zijn er tussen $t = 0$ en $t = 6$ waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[0, 6]$? Licht toe.



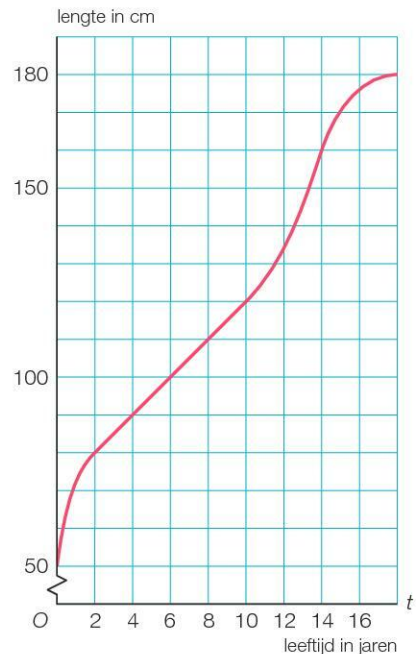
figuur 8.36

A30



[▶ WERKBLAD] Meneer Kruize heeft vanaf de geboorte van zijn dochter Lotte elke maand haar lengte gemeten. De resultaten staan in figuur 8.37.

- Geef een schatting van de groeisnelheid in cm/jaar op $t = 6$.
- Schat de groeisnelheid in cm/jaar van Lotte rond haar veertiende verjaardag.
- Bereken de gemiddelde groeisnelheid in cm/jaar van 0 tot 18 jaar.
- Op welke leeftijden is de groeisnelheid van Lotte gelijk aan de bij c gevraagde snelheid?



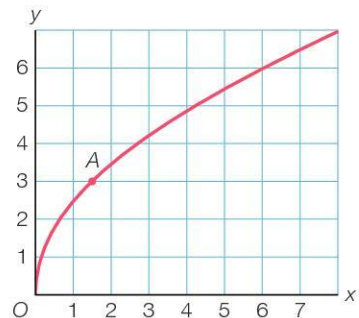
figuur 8.37

031



[▶ WERKBLAD] Op het werkblad staat de grafiek van $y = \sqrt{6x}$ en het punt $A(1,5; 3)$ op de grafiek.

- Bereken het differentiequotient op $[1,5; 1,51]$. Rond af op twee decimalen.
- Teken de raaklijn k in het punt A en geef rc_k .
- Vergelijk het antwoord van vraag a met rc_k . Wat valt je op?



figuur 8.38

Theorie B Raaklijn en richtingscoëfficiënt

Voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A bestaat de notatie $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$. Spreek uit: dy voor x is x_A .

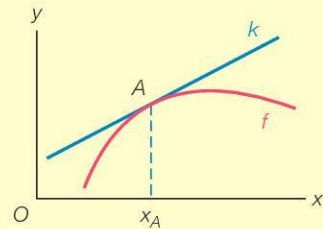
In plaats van

de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A
zeggen we ook

de helling van de grafiek in het punt A .

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ is

- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A
- de helling van de grafiek in A
- de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.



[► GR] De GR heeft een optie om bij een gegeven formule $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ te berekenen. Hoe dat gaat leer je in de module **Helling**.

Voorbeeld

Gegeven is de kostenformule $K = 0,04q^2 + 0,3q + 20$ met K in duizenden euro's en de productie q in duizenden kg.

Bereken de snelheid waarmee de kosten veranderen bij een productie van 6600 kg.

Uitwerking

Bij een productie van 6600 kg hoort $q = 6,6$.

Voer in $y_1 = 0,04x^2 + 0,3x + 20$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=6,6} = 0,828$.

De snelheid is 0,83 euro per kg.

De snelheid waarmee K verandert voor $q = 6,6$ is in duizenden euro's per 1000 kg, dat is in euro's per kg.

32



Gegeven is de formule $K = 0,04q^2 + 0,3q + 20$ van het voorbeeld met de kosten K in duizenden euro's en de productie q in duizenden kg.

Bereken de snelheid waarmee de kosten veranderen

- a voor $q = 20$
- b bij een productie van 3200 kg
- c bij een productie van 8160 kg.

33



Het aantal vissen in een vijver is gegeven door $N = \frac{2000}{1 + 12 \cdot 0,95^t}$.

Hierin is N het aantal vissen en t de tijd in weken met $0 \leq t \leq 120$.

- a Bereken de snelheid waarmee het aantal vissen toeneemt op $t = 10$.
- b Arjen beweert dat de snelheid waarmee het aantal vissen toeneemt op $t = 33$ ongeveer twee keer zo groot is als op $t = 10$.
Onderzoek of Arjen gelijk heeft.
- c Tess beweert dat de snelheid waarmee het aantal vissen toeneemt steeds groter wordt.
Toon aan dat Tess niet gelijk heeft.

A34



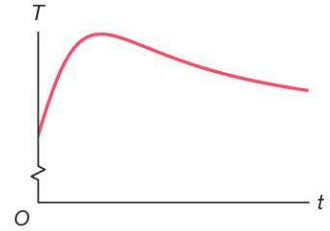
Frank is getroffen door de griep.

Zijn lichaamstemperatuur wordt gegeven door de formule

$T = 37 + \frac{45t}{t^2 + 70}$. Hierin is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en t de

tijd in uren met $t = 0$ op 1 mei om 12:00 uur en $0 \leq t \leq 50$.

- a Met welke snelheid neemt de temperatuur van Frank toe op 1 mei om 17:30 uur?
- b Met welke snelheid neemt de temperatuur van Frank af op 2 mei om 8:00 uur?
- c Wat is de maximale lichaamstemperatuur van Frank?
Op welke dag en hoe laat is de griep op zijn hoogtepunt?
- d Hoelang is de lichaamstemperatuur boven 39°C ?



figuur 8.39

035



Het aantal personen N dat zich op een zaterdag in een warenhuis bevindt, is te benaderen door de formule $N = -1,5t^3 + 12t^2$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 9:00 uur.

- a Voer in $y_1 = -1,5x^3 + 12x^2$ en controleer dat $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} = 24$. Welke informatie geeft dit getal?
- b Reken na dat $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=6} = -18$.
- c Vul in *toe* of *af*.
 $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} > 0$, dus het aantal aanwezigen neemt ... om 13:00 uur.
 $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=6} < 0$, dus het aantal aanwezigen neemt ... om 15:00 uur.



Theorie C Aantonen dat y toeneemt voor $x = a$

Met behulp van $\frac{dy}{dx}$ kun je onderzoeken of y

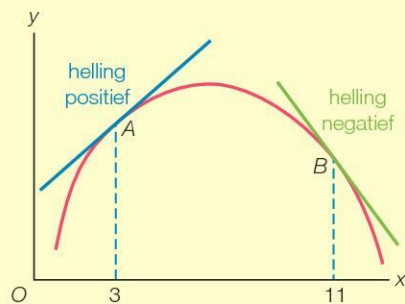
toeneemt of dat y afneemt voor $x = a$.

Zie figuur 8.40.

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} > 0$, dus de helling in het punt A is positief.

We zeggen dat y toeneemt voor $x = 3$.

En zo volgt uit $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=11} < 0$ dat y afneemt voor $x = 11$.



figuur 8.40

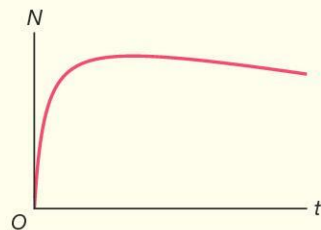
Is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} > 0$, dan neemt y toe voor $x = a$.

Is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} < 0$, dan neemt y af voor $x = a$.

Voorbeeld

Het aantal werknemers van een bedrijf is te benaderen door het model $N = \frac{1000t - 10t^2}{t + 1}$. Hierin is N het aantal werknemers en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2010.

Toon aan dat het aantal werknemers op 1 juli 2020 afnam.



figuur 8.41

Uitwerking

Bij 1 juli 2020 hoort $t = 10,5$.

Voer in $y_1 = \frac{1000x - 10x^2}{x + 1}$.

De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=10,5} \approx -2,4 < 0$, dus op 1 juli 2020 nam het aantal werknemers af.



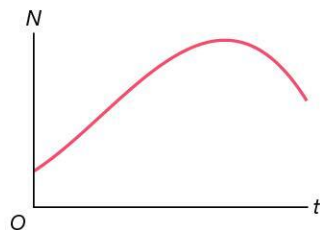
Zie het voorbeeld.

- Omschrijf de betekenis van het getal $-2,4$ in de uitwerking.
- Toon aan dat het aantal werknemers op 1 juli 2015 toenam.
- Met hoeveel nam het aantal werknemers toe in het jaar 2015?
- Bereken het maximale aantal werknemers. In welk jaar was het aantal werknemers maximaal?

A37
  

Het aantal rendieren N in een natuurpark in Canada is gegeven door de formule $N = -0,2t^3 + 4,5t^2 + 80t + 500$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1995.

- Toon aan dat het aantal rendieren op 1 januari 2005 toenam.
- Toon aan dat het aantal rendieren op 1 juli 2020 over het hoogtepunt heen was.
- Bereken de snelheid waarmee het aantal rendieren afneemt op 1 oktober 2023.
- Voor welke t is de snelheid waarmee het aantal rendieren verandert gelijk aan 0? Rond af op één decimaal.



figuur 8.42



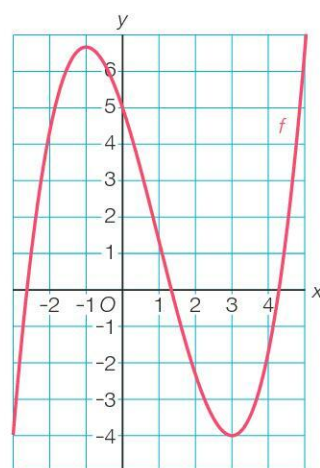
O38
  

[▶ WERKBLAD] In figuur 8.43 zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$.

- Vul in *positief* of *negatief*.
 De grafiek is stijgend op $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en op $\langle 3, \rightarrow \rangle$, dus de helling in de bijbehorende punten is ...
 De grafiek is dalend op $\langle -1, 3 \rangle$, dus de helling in de bijbehorende punten is ...
- Wat weet je van de helling van de grafiek in de toppen?
- In de tabel zie je dat bij het punt op de grafiek met x -coördinaat -3 de helling van de grafiek gelijk is aan 12. Vul de tabel verder in. Gebruik de GR.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
helling	12	5						

- Teken de punten die uit de tabel volgen en teken door deze punten een vloeiende kromme.



figuur 8.43

Theorie D Hellinggrafiek schetsen

Bij de functie f van opgave 38 hoort bij elke waarde van x één waarde van y . Zo is $f(0) = 5$ en $f(3) = -4$.

Bij elke waarde van x hoort één helling van de grafiek. Zo ontstaat een nieuwe functie: de **hellingfunctie**. De grafiek van de hellingfunctie heet de **hellinggrafiek**.

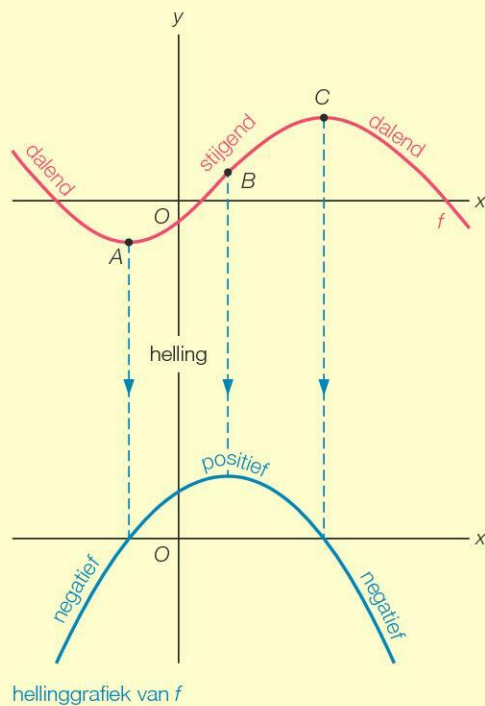
Uit een gegeven grafiek van f kun je bijzonderheden van de hellinggrafiek afleiden.

- Bij een *dalend* deel van de grafiek van f horen *negatieve* hellingen, dus de hellinggrafiek ligt daar onder de x -as.
- In een *top* van de grafiek van f is de helling nul. De hellinggrafiek snijdt de x -as.
- Bij een *stijgend* deel van de grafiek van f horen *positieve* hellingen, dus de hellinggrafiek ligt daar boven de x -as.

Bekijk in figuur 8.44 hoe de hellinggrafiek samenhangt met de grafiek van f .

Je ziet dat de toppen A en C de snijpunten opleveren van de hellinggrafiek met de x -as.

Tussen A en C stijgt de grafiek van f , dus daar ligt de hellinggrafiek boven de x -as. In het punt B is de helling maximaal. Dit geeft het hoogste punt van de hellinggrafiek.



figuur 8.44 De hellinggrafiek van f hangt samen met de grafiek van f .

Het verband tussen de grafiek van f en de hellinggrafiek van f .

- grafiek van f is stijgend hoort bij hellinggrafiek boven de x -as
- grafiek van f is dalend hoort bij hellinggrafiek onder de x -as
- grafiek van f heeft top hoort bij hellinggrafiek snijdt de x -as

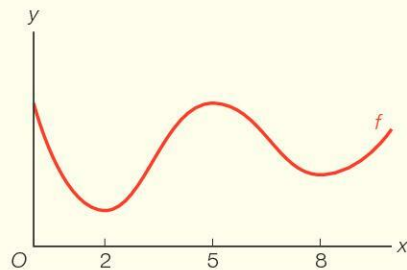
Voorbeeld

Zie de figuur hiernaast met de grafiek van de functie f .

Schets de hellinggrafiek van f .

Aanpak

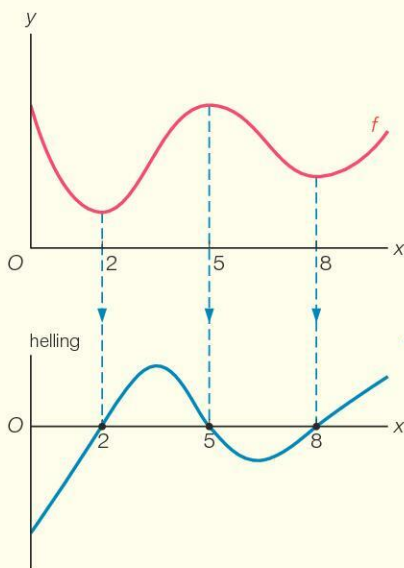
	grafiek van f	hellinggrafiek van f
$\langle \leftarrow, 2 \rangle$	dalend	onder de x -as
$x = 2$	top	snijdt de x -as
$\langle 2, 5 \rangle$	stijgend	boven de x -as
$x = 5$	top	snijdt de x -as
$\langle 5, 8 \rangle$	dalend	onder de x -as
$x = 8$	top	snijdt de x -as
$\langle 8, \rightarrow \rangle$	stijgend	boven de x -as



figuur 8.45

Teken eerst de punten waar de hellinggrafiek de x -as snijdt.

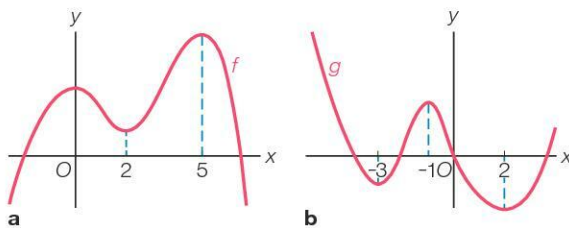
Uitwerking



Met stippellijnen geef je de samenhang tussen de grafieken aan.

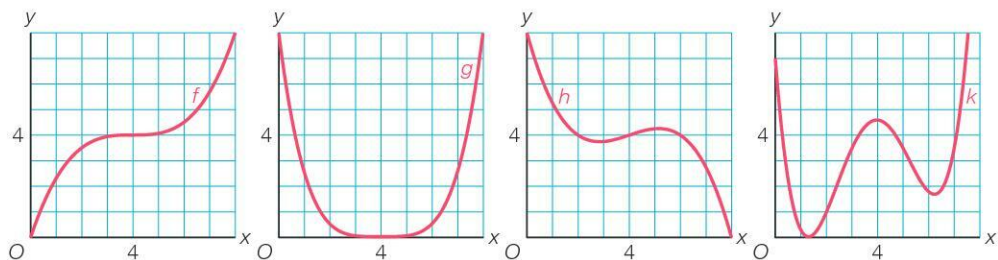
39 [WERKBLAD]

- In figuur 8.46a zie je de grafiek van een functie f .
Schets de hellinggrafiek van f .
- In figuur 8.46b zie je de grafiek van een functie g .
Schets de hellinggrafiek van g .

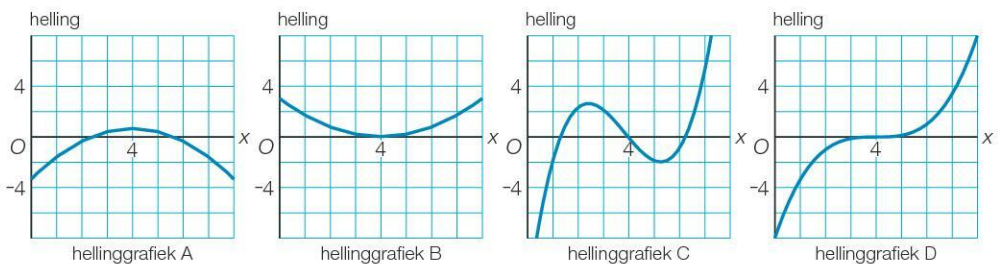


figuur 8.46

Van de functies f , g , h en k zijn in figuur 8.47 de grafieken getekend. De bijbehorende hellinggrafieken staan in een andere volgorde in figuur 8.48. Zoek bij elk van de functies f , g , h en k de juiste hellinggrafiek.

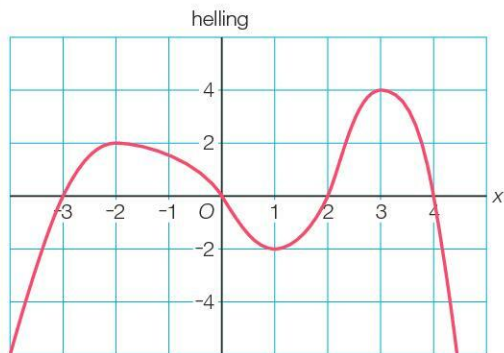


figuur 8.47



figuur 8.48

[▶ WERKBLAD] Hieronder is de hellinggrafiek van een functie f gegeven.

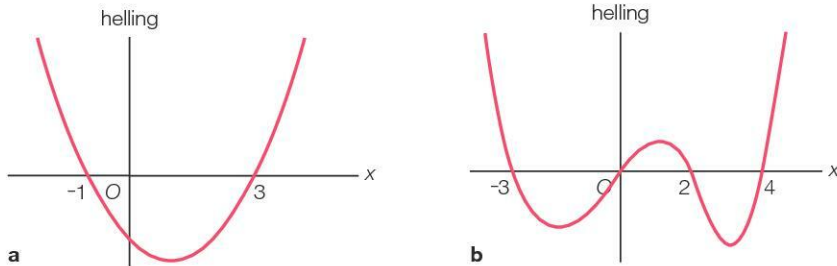


figuur 8.49

- Voor $x < -3$ ligt de hellinggrafiek onder de x -as. Licht toe dat hieruit volgt dat de grafiek van f dalend is op $\langle -, -3 \rangle$.
- Waarom heeft de grafiek van f een top bij $x = -3$? Is dat een hoogste of een laagste punt?
- Is de grafiek van f stijgend of dalend op $\langle -3, 0 \rangle$?
- Heeft de grafiek van f een hoogste of een laagste punt bij $x = 0$?
- Schets een mogelijke grafiek van f .

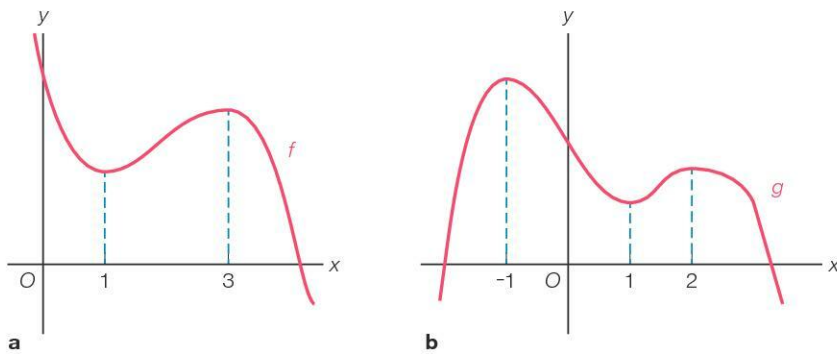


- a** In figuur 8.50a zie je de hellinggrafiek van een functie f .
Schets een mogelijke grafiek van f .
- b** In figuur 8.50b zie je de hellinggrafiek van een functie g .
Schets een mogelijke grafiek van g .



figuur 8.50

[► WERKBLAD] Gegeven zijn de grafieken van de functies f en g in figuur 8.51.



figuur 8.51

- a** Schets de hellinggrafiek van f .
- b** Schets de hellinggrafiek van g .
- c** Neem aan dat de grafiek van f de hellinggrafiek is van een functie h .
Schets een mogelijke grafiek van h .
- d** Neem aan dat de grafiek van g de hellinggrafiek is van een functie k .
Schets een mogelijke grafiek van k .

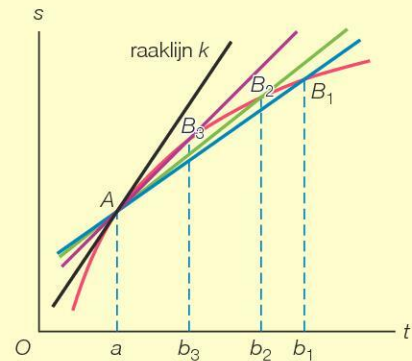
Terugblik

Snelheid en raaklijn

Door bij een tijd-afstandgrafiek de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$.

De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de hellingen van de lijnen AB_1 , AB_2 , AB_3 , ...

Hoe dichterbij B bij A komt te liggen, des te meer de lijn AB gaat lijken op de lijn k die in A de grafiek raakt. Bij een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.



De richtingscoëfficiënt van een raaklijn

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ is de

- helling van de grafiek in A
- richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A
- snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.

De GR heeft een optie om $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ te berekenen.

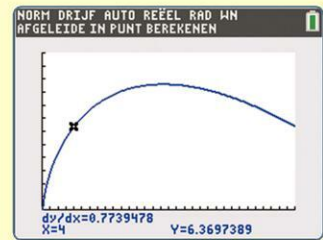
Hiernaast zie je de grafiek van $R = 5,4q^{0,8} - 2,5q$.

De snelheid waarmee R verandert voor $q = 4$ krijg je als volgt.

Voer in $y_1 = 5,4x^{0,8} - 2,5x$. De GR geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} \approx 0,77$.

Omdat $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} > 0$ weet je dat de grafiek van R stijgend is voor $q = 4$. Dus R neemt toe voor $q = 4$.

Omdat $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=25} \approx -0,23 < 0$ weet je dat R afneemt voor $q = 25$.

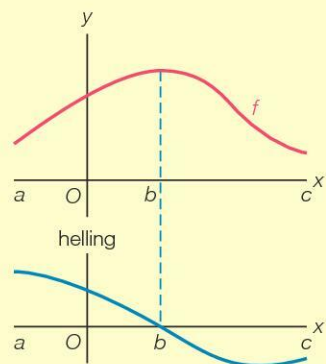


Hellinggrafieken schetsen

Bij een functie f hoort een hellingfunctie, die voor elke x de waarde geeft van de helling van de grafiek van f in het bijbehorende punt. De grafiek van de hellingfunctie heet de hellinggrafiek van f . Bij een gegeven grafiek van een functie f kun je de hellinggrafiek schetsen.

Je gebruikt:

	grafiek van f	hellinggrafiek
$\langle a, b \rangle$	stijgend	boven de x -as
$x = b$	top	snijdt de x -as
$\langle b, c \rangle$	dalend	onder de x -as



8.3 Differentiëren

O44
☐ ⊗ *

In figuur 8.52 zie je de grafiek van de functie $f(x) = 0,75x^2$ en de hellinggrafiek van f .

De hellinggrafiek van f is een rechte lijn.

a Geef de formule van deze lijn.

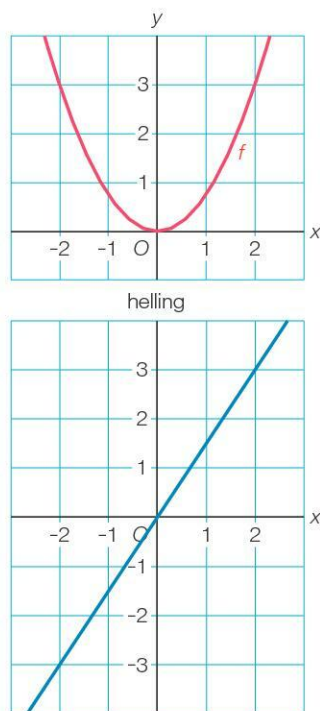
Gegeven is de functie $g(x) = 3x$. De hellinggrafiek van g is een horizontale lijn.

b Geef hiervoor een verklaring.

c Welke formule hoort bij die lijn?

Gegeven is de functie $h(x) = -4$. De hellinggrafiek van h is een horizontale lijn.

d Welke formule hoort bij die lijn?



figuur 8.52

Theorie A Afgeleide functie

Bij een functie hoort een hellingfunctie. In plaats van hellingfunctie wordt meestal de naam **afgeleide functie**, kortweg **afgeleide** gebruikt. De afgeleide van f wordt genoteerd als f' . Spreek uit f accent.

Het is prettig als je van een functie f direct de formule van de afgeleide f' kunt opschrijven.

In opgave 44 heb je gezien:

van $f(x) = 0,75x^2$ is de afgeleide $f'(x) = 1,5x$.

Dit is een voorbeeld van de regel:

van $f(x) = ax^2$ is de afgeleide $f'(x) = a \cdot 2x$.

Ook heb je gezien:

van $g(x) = 3x$ is de afgeleide $g'(x) = 3$.

Dit is een voorbeeld van de regel:

van $f(x) = ax$ is de afgeleide $f'(x) = a$.

Verder heb je gezien:

van $h(x) = -4$ is de afgeleide $h'(x) = 0$.

Dit is een voorbeeld van de regel:

van $f(x) = a$ is de afgeleide $f'(x) = 0$.

Regels voor de afgeleide

$f(x) = a$	geeft	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	geeft	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2$	geeft	$f'(x) = a \cdot 2x$

Het berekenen van de formule van de afgeleide heet **differentiëren**.

Om $f(x) = 5x^2 + 8x + 3$ te differentiëren, neem je term voor term de afgeleide.

Dus $f(x) = 5x^2 + 8x + 3$ geeft

$$f'(x) = 5 \cdot 2x + 8 + 0 = 10x + 8.$$

Je hebt hier een voorbeeld van de **somregel voor het differentiëren**.

Om $f(x) = (3x - 2)(5x + 3)$ te differentiëren, werk je eerst de haakjes weg en gebruik je ook de **verschilregel voor het differentiëren**.

$$\text{Dus } f(x) = (3x - 2)(5x + 3) = 15x^2 + 9x - 10x - 6 = 15x^2 - x - 6.$$

$$\text{Dit geeft } f'(x) = 30x - 1.$$

De somregel voor het differentiëren

$$s(x) = f(x) + g(x) \text{ geeft}$$

$$s'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = -4x^2 - 3x + 17$

b $g(t) = (5t - 7)^2$

Uitwerking

a $f(x) = -4x^2 - 3x + 17$ geeft $f'(x) = -8x - 3$

b $g(t) = (5t - 7)^2 = 25t^2 - 70t + 49$ geeft $g'(t) = 50t - 70$

45 Differentieer.



a $f(x) = 5x^2 - 7x + 5$

c $h(x) = 0,02x^2 + 1,7x$

b $g(x) = -2\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$

d $k(x) = 7x + 10$

46 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = (2x - 7)(8 + x)$

c $V(t) = 100 - (t^2 - 6t)$

b $g(p) = -12p^2 + 30p$

d $K(q) = -0,01q^2 + 20q$

A47 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = 3x - 2(x^2 + 1)$

c $g(x) = 3(2x - 3)^2$

b $P(q) = 0,05q^2 - 200q$

d $h(a) = 50 - (\frac{1}{2}a - 4)^2$

A48 Differentieer.



a $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x)$

c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(x - 1) + 8$

b $g(x) = (3x + 6)^2$

d $k(x) = -3(x - 1)(5 - 2x) - 8(x - 7)$

A49


Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$.

De formule van de hellinggrafiek is $y = \frac{1}{2}x - 2$.

a Licht dit toe.

b Bereken met de formule van de hellinggrafiek de helling voor $x = 6$.

c Bereken voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -1 .

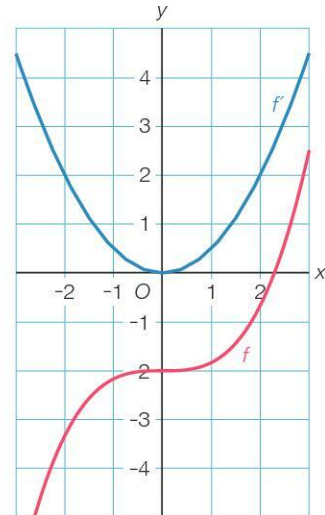
O50


In figuur 8.53 zie je de grafiek van $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2$ en de hellinggrafiek van f .

De hellinggrafiek is een parabool. Er geldt $f'(x) = ax^2$.

Je ziet dat de grafiek van f' door het punt $(2, 2)$ gaat.

Bereken a .



figuur 8.53

Theorie B De afgeleide van $f(x) = ax^n$

In opgave 50 heb je gezien dat gezien dat

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2 \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Algemeen:

$$f(x) = ax^3 \text{ geeft } f'(x) = a \cdot 3x^2.$$

En zo kun je nagaan dat

$$f(x) = ax^4 \text{ geeft } f'(x) = a \cdot 4x^3 \text{ en}$$

$$f(x) = ax^5 \text{ geeft } f'(x) = a \cdot 5x^4.$$

| $f(x) = ax^n \text{ geeft } f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$

In het voorbeeld op de volgende bladzijde moet bij onderdeel c de afgeleide van $h(x) = 3px^5 - 5x + p$ worden berekend. Hierbij is p een constante.

Daarom is de afgeleide van $3px^5$ gelijk aan $3p \cdot 5x^4 = 15px^4$ en is de afgeleide van p gelijk aan 0.

nieuwe exponent 1 minder

$$f(x) = 4x^3 \text{ geeft } f'(x) = 4 \cdot 3x^2$$

oude exponent ervoor

$$h(x) = 3px^5 - 5x + p$$

oude exponent 5
 nieuwe exponent 4
 1 minder

p is een constante, dus afgeleide is 0

$$h'(x) = 3p \cdot 5x^4 - 5 + 0$$

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 10x^7 - 6x^4 - 3$

b $g(t) = -3t^5 + 3t^2 + 4$

c $h(x) = 3px^5 - 5x + p$

Uitwerking

a $f(x) = 10x^7 - 6x^4 - 3$ geeft $f'(x) = 70x^6 - 24x^3$

b $g(t) = -3t^5 + 3t^2 + 4$ geeft $g'(t) = -15t^4 + 6t$

c $h(x) = 3px^5 - 5x + p$ geeft $h'(x) = 15px^4 - 5$

51 Bereken de afgeleide.



a $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$

b $g(x) = -2x^7 - 3x^5 + 3,4$

c $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$

d $k(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3$

52 Differentieer.



a $f(x) = 3(2x + 1)^2$

b $g(x) = 7(3x - 2)(x^2 + 2x)$

c $h(x) = 3px^8 - px^4$

d $k(x) = x^3 + a$

53 Bereken de afgeleide.



a $W(q) = -0,02q^2 + 8q - 5$

b $N(t) = 5t^3 + 8t^2 - t$

c $R(q) = 5q(q - 70)^2$

d $L(a) = -0,006a^4 + 0,2a^3(a - 5) - 8$

A54 Differentieer.



a $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x)$

b $g(x) = x^5(x^3 - 4x) - 2x$

c $N(t) = (3t^3 - 1)^2$

d $F(a) = 0,16a^2(Q - 3a)$

A55 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 5$.



a Bereken de formule van de hellinggrafiek.

b Bereken met de formule van de hellinggrafiek de helling voor $x = 4$.

c Bereken voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -1 .

De regel $f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ is een voorbeeld van de algemene regel $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$, waarbij c een constante is.

Gegeven is dat van de functie $h(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ de afgeleide is $h'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.

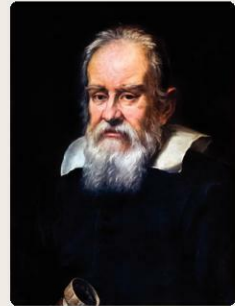
Bereken de afgeleide van de functie $k(x) = \frac{4x-2}{3x+3}$.

GESCHIEDENIS

Differentiaalrekening

Zo omstreeks 1600 was de wetenschap volop in ontwikkeling. De Italiaanse geleerde Galileo Galilei probeerde de beweging van een vallend voorwerp te beschrijven met een formule. Men zegt dat hij hierbij kogeltjes liet vallen van de scheve toren van Pisa. Een ander probleem waar de wetenschap naarstig een oplossing voor zocht, was de wiskundige beschrijving van de baan van een kanonskogel. Dit was een probleem dat zich gezien de talloze vijandelijkheden in Europa in een grote belangstelling mocht verheugen.

Ook waren geleerden druk bezig met het bestuderen van de planeetbanen. En dan waren er nog twee eeuwenoude problemen uit de tijd van de Grieken waarmee men nog steeds worstelde. Hoe vind je de oppervlakte van een gebied ingesloten door willekeurige krommen? En hoe krijg je de formule van de raaklijn in een punt aan een willekeurige kromme? Veel wetenschappers hielden zich in de 17^e eeuw met dit soort problemen bezig en stukje bij beetje ontwikkelde zich de theorie van de differentiaalrekening. Maar voor het zover was, moest er heel wat gebeuren. Onafhankelijk van elkaar slaagden Newton (omstreeks 1670) en Leibniz (1675) er ten slotte in een allesomvattende theorie te ontwikkelen.



Galileo Galilei

Terugblik

Afgeleide functie

De hellingfunctie van een functie f wordt meestal de afgeleide functie van f genoemd, kortweg de afgeleide van f .

Voor de afgeleide bestaat de notatie f' .

Het berekenen van de formule van de afgeleide heet differentiëren.

Regels voor differentiëren

Met de volgende regels kun je van enkele functies direct de formule van de afgeleide geven.

$$f(x) = a \text{ geeft } f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax \text{ geeft } f'(x) = a$$

$$f(x) = ax^n \text{ geeft } f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$$

Met differentiëren krijg je de formule van de hellinggrafiek.

De afgeleide van $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8x - 6$ krijg je door term voor term te differentiëren.

$$\text{Dus } f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8x - 6 \text{ geeft } f'(x) = 15x^2 - 14x + 8.$$

Om de afgeleide van $g(x) = 5(3x - 1)(x^3 - 4x)$ te berekenen, werk je eerst de haakjes weg.

$$g(x) = 5(3x - 1)(x^3 - 4x) = 5(3x^4 - 12x^2 - x^3 + 4x) = 15x^4 - 5x^3 - 60x^2 + 20x$$

$$\text{Dus } g'(x) = 60x^3 - 15x^2 - 120x + 20.$$

In $f(x) = 5x^3 + 4px^2 + p^2$ is p een constante. Daarom is van $4px^2$ de afgeleide $4p \cdot 2x = 8px$ en is van p^2 de afgeleide 0.

$$\text{Dus } f(x) = 5x^3 + 4px^2 + p^2 \text{ geeft } f'(x) = 15x^2 + 8px.$$

Helling en afgeleide

Met de formule van de afgeleide van een functie f kun je voor elke x de helling van de grafiek van f berekenen.

Om met de formule van de afgeleide de helling van de grafiek van $f(x) = 0,25x^4 - x^3 - 0,5x$ in het punt $A(4, -2)$ te berekenen, gebruik je dat deze helling gelijk is aan $f'(4)$.

Je krijgt $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 0,5$, dus de helling is

$$f'(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 0,5 = 15,5.$$

Om te berekenen voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan 3,5, los je de vergelijking $f'(x) = 3,5$ op.

Invoeren van $y_1 = x^3 - 3x^2 - 0,5$ en $y_2 = 3,5$ en het gebruik van de optie snijpunt geeft $x = 2$. Dus voor $x = 2$ is de helling van de grafiek van f gelijk aan 3,5.

8.4 Notaties en regels voor de afgeleide

057



a Gegeven is de functie $f(x) = 5x^2 + 3a^4$.

Bereken $f'(x)$.

b Gegeven is de functie $f(a) = 5x^2 + 3a^4$.

Bereken $f'(a)$.

c De afgeleide van $y = 8x^3$ wordt soms genoteerd als $y' = 24x^2$.

Noem een nadeel van de notatie met y' als je $y = 5x^2 + 3a^4$ moet differentiëren.

Theorie A Notaties voor de afgeleide

Er zijn verschillende notaties voor de afgeleide van $y = f(x)$.

Behalve $f'(x)$ komt ook de notatie $\frac{dy}{dx}$ voor.

Dus de afgeleide van $y = 3x^2 + 8x$ is $\frac{dy}{dx} = 6x + 8$.

Bij $N = t^3 + 5t^2$ is niet x maar t de variabele.

Je krijgt $N = t^3 + 5t^2$ geeft $\frac{dN}{dt} = 3t^2 + 10t$.

Er is **naar t gedifferentieerd**.

$R = -0,01q^2 + 10q$ geeft $\frac{dR}{dq} = -0,02q + 10$

Er is naar q gedifferentieerd.

De **d-notatie** is vooral handig als in een formule twee of meer variabelen voorkomen. Je kunt dan zien naar welke variabele gedifferentieerd is.

Bij $y = 5x^3 + a^2$ is

• $\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 0 = 15x^2$ y is naar x gedifferentieerd.

• $\frac{dy}{da} = 0 + 2a = 2a$. y is naar a gedifferentieerd.

Afspraak

Notaties voor de afgeleide van $y = f(x)$ zijn $\frac{dy}{dx}$ en $f'(x)$.

58



Gegeven zijn de formules $y = 7x^4 - a^3$, $R = q^3 - 5pq$ en $B = a^3 - 3t^2$.

Bereken.

a $\frac{dy}{dx}$

c $\frac{dR}{dq}$

e $\frac{dB}{dt}$

b $\frac{dy}{da}$

d $\frac{dR}{dp}$

f $\frac{dB}{da}$

A59
□ ⊗ *

Gegeven is de formule $R = 5a^2 - 3ab^3 - 5abc + 5a - 3$.

Bereken $\frac{dR}{da}$, $\frac{dR}{db}$ en $\frac{dR}{dc}$.

O60
□ ⊗ *

Je weet dat $\frac{5}{x^2}$ te schrijven is als $5x^{-2}$ en dat $3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$.

Schrijf in de vorm $y = ax^n$.

a $y = \frac{10}{x^3}$

c $y = \frac{2}{x}$

e $y = 4x\sqrt{x}$

b $y = 8 \cdot \sqrt[3]{x}$

d $y = \frac{7}{\sqrt{x}}$

f $y = \frac{3}{4x^2 \cdot \sqrt{x}}$

Theorie B De afgeleide van $y = ax^n$ met negatieve en gebroken n

Om de afgeleide van $y = x^{-1}$ te krijgen, gebruik je de regel

$$y = ax^n \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = a \cdot nx^{n-1}.$$

Je krijgt $y = x^{-1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2}$.

De regel $y = ax^n$ geeft $\frac{dy}{dx} = a \cdot nx^{n-1}$ geldt voor elke n .

Voor $a = 4$ en $n = -2$ krijg je $y = 4x^{-2}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 4 \cdot -2x^{-2-1} = -8x^{-3}$.

Voor $a = 7$ en $n = 0,6$ krijg je $y = 7x^{0,6}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 7 \cdot 0,6x^{0,6-1} = 4,2x^{-0,4}$.

Je kunt nu ook de afgeleide van $y = \frac{5}{x^2} + 3x^4 + 2$ berekenen.

Immers $y = \frac{5}{x^2} + 3x^4 + 2 = 5x^{-2} + 3x^4 + 2$, dus

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot -2x^{-3} + 3 \cdot 4x^3 = -10x^{-3} + 12x^3 = -\frac{10}{x^3} + 12x^3.$$

En bij $y = x\sqrt{x}$ krijg je $y = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$, dus $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

Afspraak

Schrijf de afgeleide zonder negatieve en gebroken exponent(en), tenzij de gegeven formule al een gebroken of negatieve exponent bevat.

Dus bij $f(x) = x^{1,3}$ laat je $f'(x) = 1,3x^{0,3}$ staan.

Bij $g(x) = 6x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ krijg je: $g(x) = 6x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 6x^{\frac{7}{3}}$ geeft

$$g'(x) = 6 \cdot \frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} = 14 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 14x \cdot \sqrt[3]{x}.$$

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = \frac{3}{x} + 5x^2$

b $g(q) = 5\sqrt{q} + 2q$

c $h(a) = \frac{1}{5a^2}$

d $k(x) = 6x^2 \cdot \sqrt{x}$

Uitwerking

a $f(x) = \frac{3}{x} + 5x^2 = 3x^{-1} + 5x^2$ geeft $f'(x) = -3x^{-2} + 10x = -\frac{3}{x^2} + 10x$

b $g(q) = 5\sqrt{q} + 2q = 5q^{\frac{1}{2}} + 2q$ geeft

$$g'(q) = 2\frac{1}{2}q^{-\frac{1}{2}} + 2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} + 2 = \frac{5}{2\sqrt{q}} + 2$$

c $h(a) = \frac{1}{5a^2} = \frac{1}{5}a^{-2}$ geeft $h'(a) = -\frac{2}{5}a^{-3} = -\frac{2}{5a^3}$

d $k(x) = 6x^2 \cdot \sqrt{x} = 6x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 6x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $k'(x) = 15x^{1\frac{1}{2}} = 15x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 15x\sqrt{x}$

61 Differentieer.



a $f(x) = \frac{6}{x^3} + 6x^3$

d $l(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2p^2}$

b $g(x) = 3x^6 - \frac{4}{x}$

e $h(x) = 3x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$

c $m(t) = 12t \cdot \sqrt[4]{t}$

f $k(q) = \frac{1}{q}$

A62 Bereken de afgeleide.



a $y = x + \frac{4}{\sqrt{x}}$

d $y = 10x^{1,72} + \frac{6}{x^{1,35}}$

b $y = 3x^2 \cdot \sqrt{x}$

e $y = \frac{2}{5x} + \frac{5x}{2}$

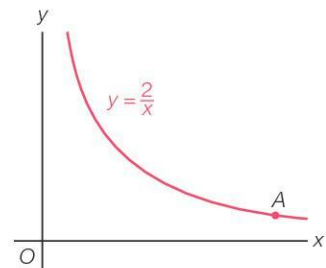
c $y = 3x - x^{-1,65}$

f $y = (1+x)\sqrt{x}$

63 Hiernaast zie je de grafiek van $y = \frac{2}{x}$ met $x > 0$.



- a Op de grafiek ligt het punt A met $x_A = 4$. Bereken y_A en de helling van de grafiek in A.
- b Bereken met de afgeleide de helling van de grafiek in het punt B met $x_B = 1$.
- c Bereken met behulp van differentiëren de snelheid waarmee y verandert voor $x = 5$.
- d Beredeneer hoe uit de formule van de afgeleide van y volgt dat de grafiek van y dalend is.



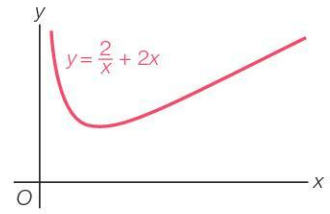
figuur 8.54

64




Hiernaast zie je de grafiek van $y = \frac{2}{x} + 2x$ met $x > 0$.

- Bereken met de afgeleide met welke snelheid y toeneemt voor $x = 4$.
- Toon met de afgeleide aan dat de helling van de grafiek in het punt $P(\frac{1}{2}, 5)$ negatief is.
- Toon met de afgeleide aan dat de raaklijn in het punt $Q(1, 4)$ horizontaal is.



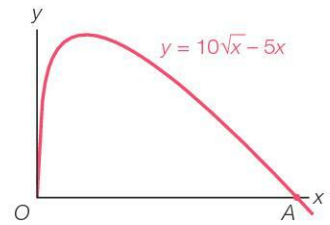
figuur 8.55

A65




In figuur 8.56 zie je de grafiek van $y = 10\sqrt{x} - 5x$.

- De grafiek snijdt de positieve x -as in het punt A .
 Toon aan dat $x_A = 4$ en bereken met de afgeleide de helling van de grafiek in A .
- Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee y verandert voor $x = \frac{1}{4}$.
- Toon met de afgeleide aan dat de raaklijn in het punt $B(1, 5)$ horizontaal is.



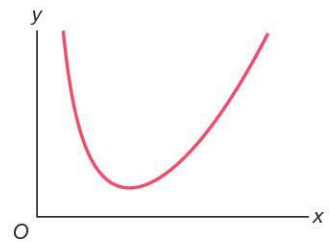
figuur 8.56

A66



In figuur 8.57 zie je de grafiek van $y = x^2 + \frac{16}{x} - 9$ met $x > 0$.

- Toon met de afgeleide aan dat y afneemt voor $x = 1,5$.
- Bereken voor welke waarde van x de helling van de grafiek gelijk is aan 7.
- Bereken met de afgeleide met hoeveel procent de helling van de grafiek toeneemt tussen $x = 5$ en $x = 6$.



figuur 8.57

O67




Gegeven is de functie $k(x) = (3x^3 + 7)^2$. De formule van k is te noteren als $k(x) = f(g(x))$ met $f(g) = g^2$ en $g(x) = 3x^3 + 7$. Noteer op dezelfde manier met functies f en g .

- $k(x) = (3 - x^5)^6$
- $k(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- $k(x) = \frac{2}{(x + 8)^3}$

Theorie C De kettingregel

De functie $k(x) = (x^2 - 5x)^4$ is een voorbeeld van een **samengestelde functie**. De functie is samengesteld uit de **schakels** $f(g) = g^4$ en $g(x) = x^2 - 5x$.

Een functie die geschreven is als een ketting van schakels heet ook wel een **kettingfunctie**.

Voor het differentiëren van de functie k gebruik je de **kettingregel**.

Kettingregel

$$k(x) = f(g(x)) \text{ geeft } k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\text{Bij } k(x) = (x^2 - 5x)^4 \text{ krijg je } k'(x) = \underbrace{4(x^2 - 5x)^3}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{(2x - 5)}_{g'(x)}.$$

Bij het differentiëren van $k(x) = \sqrt{3x + 1}$ krijg je

$$k(x) = \sqrt{3x + 1} = (3x + 1)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft } k'(x) = \frac{1}{2}(3x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}.$$

Voorbeeld

Differentieer.

a $A = 4(t^2 - 3t)^{0,4}$

b $y = \frac{5}{(2x - 7)^4}$

c $N = 2p + \sqrt{3p^2 + 4}$

Uitwerking

a $A = 4(t^2 - 3t)^{0,4}$ geeft $\frac{dA}{dt} = 1,6(t^2 - 3t)^{-0,6} \cdot (2t - 3)$

b $y = \frac{5}{(2x - 7)^4} = 5(2x - 7)^{-4}$ geeft $\frac{dy}{dx} = -20(2x - 7)^{-5} \cdot 2 = -\frac{40}{(2x - 7)^5}$

c $N = 2p + \sqrt{3p^2 + 4} = 2p + (3p^2 + 4)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dN}{dp} = 2 + \frac{1}{2}(3p^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6p = 2 + \frac{6p}{2\sqrt{3p^2 + 4}} = 2 + \frac{3p}{\sqrt{3p^2 + 4}}$

68



Differentieer.

a $y = -3(2x - 5)^6$

d $y = \frac{8}{\sqrt{3x + 2}}$

b $y = (4x^2 - x)^{1,4}$

e $y = \frac{4}{(2 - x^2)^3}$

c $y = 2\sqrt{3 - 7x}$

f $y = x^2 + \sqrt{x^2 + x}$

69
□ ⊗ *

Gegeven zijn $S = \frac{2}{(3 - a^2)^5}$, $K = \sqrt{2q + 1}$ en $W = 6(p^2 - 2p + 5)^{0,7}$.

Bereken.

- a $\frac{dS}{da}$
- b $\frac{dK}{dq}$
- c $\frac{dW}{dp}$

A70
□ ⊗ *

Bereken de afgeleide.

- a $K = (5q + 2)^4 - 3q$
- b $y = \frac{5}{(2x + 1)^8} + 4x^2$
- c $B = \frac{8}{a^3} + 6\sqrt{a^3 + 2}$
- d $P = \sqrt[3]{3q - 5}$

E71
*

Er geldt $y = \sqrt{x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

- a Toon dit aan.

De regel $y = \sqrt{x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ kun je gebruiken om in

één keer de afgeleide van $y = \sqrt{3x + 1}$ op te schrijven.

Je krijgt $y = \sqrt{3x + 1}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{3x + 1}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}$.

- b Gebruik deze regel om in één keer de afgeleide op te schrijven van de formules in de opgaven 68c, 69b en 70c.

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \text{ geeft}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x).$$

Terugblik

Notaties voor de afgeleide van $y = f(x)$

Voor de afgeleide van $y = f(x)$ worden de notaties $\frac{dy}{dx}$ en $f'(x)$ gebruikt.

Bij $y = 3x^3 + 5a^2x - 2x$ is $\frac{dy}{dx} = 9x^2 + 5a^2 - 2$ en $\frac{dy}{da} = 10ax$.

De afgeleide van $y = ax^n$

De afgeleide van $y = ax^n$ is $\frac{dy}{dx} = a \cdot nx^{n-1}$.

Deze formule geldt voor elke a en voor elke n .

- $y = \frac{10}{x^3} = 10x^{-3}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 10 \cdot -3x^{-4} = -30x^{-4} = -\frac{30}{x^4}$

- $y = 5x^{1,6}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 8x^{0,6}$

- $y = 8 \cdot \sqrt[4]{x} = 8x^{\frac{1}{4}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 2x^{-\frac{3}{4}} = \frac{2}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$

- $M = \frac{8}{t^{2,5}} + 15t^{0,3} = 8t^{-2,5} + 15t^{0,3}$ geeft $\frac{dM}{dt} = -20t^{-3,5} + 4,5t^{-0,7}$

Als in een formule van y gebroken en/of negatieve exponenten voorkomen, mag je zulke exponenten in de afgeleide laten staan.

De kettingregel

Een functie die geschreven is als een ketting van functies heet een kettingfunctie of samengestelde functie.

Zo is de functie $k(x) = \sqrt{x^2 + x}$ te schrijven als $k(x) = f(g(x))$ met de schakels $f(g) = \sqrt{g}$ en $g(x) = x^2 + x$.

Bij het differentiëren van kettingfuncties gebruik je de kettingregel:

$$k(x) = f(g(x)) \text{ geeft } k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Deze regel zegt dat de afgeleide van een kettingfunctie het product is van de afgeleiden van de afzonderlijke schakels.

Bij $k(x) = \sqrt{x^2 + x} = (x^2 + x)^{\frac{1}{2}}$ krijg je $k'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$.

Om $N = \frac{6}{(2a - 1)^3} - 5a^2$ te differentiëren, schrijf je eerst $N = 6(2a - 1)^{-3} - 5a^2$.

Je krijgt $\frac{dN}{da} = 6 \cdot -3(2a - 1)^{-4} \cdot 2 - 10a = \frac{-36}{(2a - 1)^4} - 10a$.

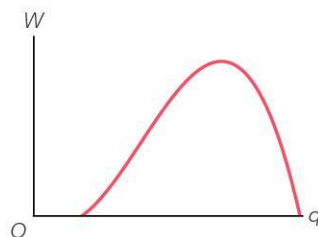
8.5 Extreme waarden en de afgeleide

072
 *

Hiernaast zie je de grafiek van $W = -0,1q^3 + 12q^2 - 210q + 500$ met $10 \leq q \leq 100$.

- Bereken $\frac{dW}{dq}$.
- Toon met de afgeleide aan dat $\left[\frac{dW}{dq}\right]_{q=70} = 0$.

Wat volgt hieruit voor het punt op de grafiek dat bij $q = 70$ hoort?



figuur 8.58

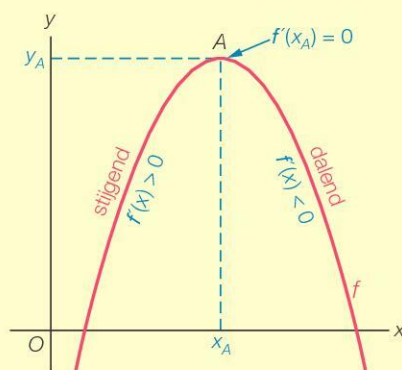
Theorie A Extreme waarden berekenen met de afgeleide

De afgeleide f' van een functie verschaft veel informatie over de grafiek van de functie.

- Is $f'(x) > 0$ op een interval, dan is f stijgend op dat interval.
- Is $f'(x) < 0$ op een interval, dan is f dalend op dat interval.

In de grafiek hiernaast is A een top, dus $f'(x_A) = 0$. Het maximum van f is y_A .

Maxima en minima heten **extreme waarden**.



figuur 8.59

Werkschema: een extreme waarde van y berekenen met de afgeleide

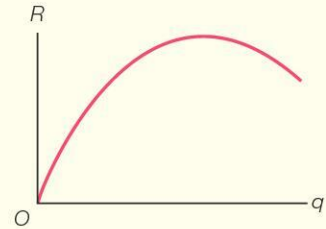
- Bereken de afgeleide $\frac{dy}{dx}$.
- Los de vergelijking $\frac{dy}{dx} = 0$ op.
- Kijk in de grafiek van y of je met een maximum of een minimum te maken hebt.
- Bereken de extreme waarde door de gevonden x -waarde in de formule van y in te vullen.

Bij de meeste opgaven is de grafiek gegeven. Je kunt hierin zien of je met een maximum of een minimum te maken hebt. Is de grafiek niet gegeven, maak dan zelf een schets in je uitwerking. Gebruik bij het maken van de schets de GR.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $R = -0,3q^{1,8} + 25q^{0,9}$. Hierin is R de opbrengst in euro's bij een productie van q stuks met $0 < q < 100$. Zie de grafiek hiernaast.

Bereken met de afgeleide bij welke productie de opbrengst maximaal is. Hoeveel is deze opbrengst? Geef het antwoord in gehele euro's.



figuur 8.60

Uitwerking

$$R = -0,3q^{1,8} + 25q^{0,9} \text{ geeft } \frac{dR}{dq} = -0,54q^{0,8} + 22,5q^{-0,1}$$

$$\frac{dR}{dq} = 0 \text{ geeft } -0,54q^{0,8} + 22,5q^{-0,1} = 0$$

$$\text{Voer in } y_1 = -0,54x^{0,8} + 22,5x^{-0,1}.$$

De optie nulpunt geeft $x = 63,06\dots$

De opbrengst is maximaal bij een productie van 63 stuks.

$q = 63$ geeft $R = 520,83\dots$, dus de maximale opbrengst is 521 euro.

Je ziet dat bij de opdracht 'Bereken met de afgeleide ...' het vereist is dat je de formule van de afgeleide opschrijft. Vervolgens mag je de GR gebruiken voor de verdere berekening. In het voorbeeld hierboven is de vergelijking 'afgeleide = 0' met de optie nulpunt van de GR opgelost.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde moet met de afgeleide worden aangetoond dat W maximaal is voor $q = 16$. Gebruik hierbij het volgende werkschema.

Werkschema: met de afgeleide aantonen dat y een maximum (of minimum) heeft voor $x = a$.

- 1 Bereken $\frac{dy}{dx}$ en laat zien dat $\frac{dy}{dx} = 0$ voor $x = a$.
- 2 Maak een schets van de grafiek van y en laat zien dat er voor $x = a$ een maximum (of minimum) is.

Als de grafiek is gegeven, dan kun je volstaan met een verwijzing naar deze grafiek.

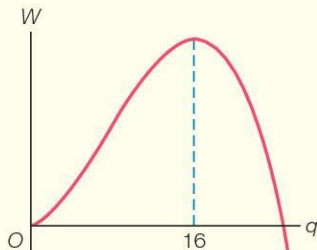
Voorbeeld

De maandelijkse winst van een bedrijf is gegeven door $W(q) = 4q^2 - \frac{1}{6}q^3$. Hierin is W in honderden euro's en q de maandproductie in honderdtallen. Toon met de afgeleide aan dat W maximaal is voor $q = 16$.

Uitwerking

$$W(q) = 4q^2 - \frac{1}{6}q^3 \text{ geeft } W'(q) = 8q - \frac{1}{2}q^2$$

$$W'(16) = 8 \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 16^2 = 128 - 128 = 0$$



Uit de schets volgt dat W maximaal is voor $q = 16$.

73



a Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee de opbrengst toeneemt bij een productie van 50 stuks. Vermeld hierbij de eenheid en rond af op centen.

Zie het voorbeeld hierboven.

b Bereken de maximale winst per maand. Rond af op gehele euro's.

c Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee de winst afneemt bij een productie van 2000 stuks per maand.

74



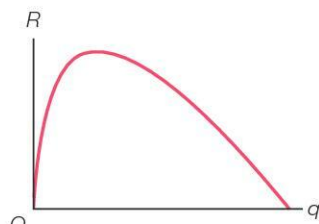
De opbrengst R van een bedrijf in duizenden euro's wordt gegeven door de formule $R = 4q^{0,41} - q^{0,83}$.

Hierbij is q de productie in duizendtallen.

a Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee R toeneemt voor $q = 0,5$. Vergeet niet de eenheid te vermelden.

b Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee R afneemt bij een productie van 8500 stuks.

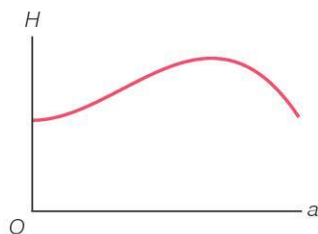
c Bereken met de afgeleide de maximale opbrengst.



figuur 8.61

75 Lennert houdt tijdens wandelingen met GPS bij waar en op welke hoogte hij zich bevindt. Tijdens een wandeling wordt de hoogte gegeven door $H = -0,4a^3 + 4,8a^2 + 150$ met $0 \leq a \leq 12$. Hierin is H de hoogte in meters boven zeeniveau en a de gelopen afstand in kilometers.

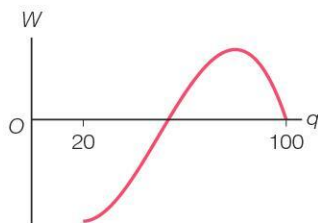
- Zou deze wandeling een rondwandeling kunnen zijn? Licht toe.
- Bereken met de afgeleide de maximale hoogte die Lennert tijdens de wandeling bereikt.



figuur 8.62

76 De maandelijkse winst van een bedrijf is gegeven door $W(q) = -0,01q^3 + 1,5q^2 - 48q - 200$. Hierin is W in duizenden euro's en q de productie in duizendtallen per maand met $20 \leq q \leq 100$.

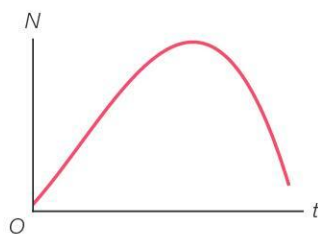
- Toon met de afgeleide aan dat de winst maximaal is bij een maandelijkse productie van 80 000 stuks.
- Bereken de maximale winst per maand.



figuur 8.63

A77 Het aantal bacteriën in een afgesloten ruimte is gegeven door $N(t) = -2t^3 + 9t^2 + 60t + 12$. Hierin is N in miljoenen en t de tijd in weken met $0 \leq t \leq 8$.

- Met hoeveel procent neemt het aantal bacteriën in de derde week toe?
- Toon met de afgeleide aan dat het aantal bacteriën op $t = 3$ toeneemt.
- Toon met de afgeleide aan dat het aantal bacteriën op $t = 7$ afneemt.
- Bereken met de afgeleide het maximale aantal bacteriën.

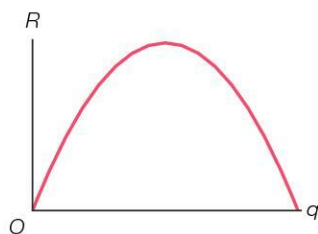


figuur 8.64

078 Gegeven is de formule $R(q) = aq^2 + 40q$. Hierin is R de opbrengst in euro's bij een productie van q stuks. Zie de grafiek hiernaast.

Uit $R'(q) = 0$ volgt $q = -\frac{20}{a}$.

- Toon dit aan.
- Neem $a = -0,25$ en bereken bij welke productie de opbrengst maximaal is.



figuur 8.65

Theorie B Formules met een parameter

In de formule $R(q) = aq^2 + 40q$ is de constante a een parameter oftewel een hulpvariabele. In opgave 78 heb je aangetoond dat R maximaal is

voor $q = -\frac{20}{a}$.

$q = -\frac{20}{a}$ invullen in de formule van R geeft

$$R\left(-\frac{20}{a}\right) = a \cdot \left(-\frac{20}{a}\right)^2 + 40 \cdot -\frac{20}{a} = a \cdot \frac{400}{a^2} - \frac{800}{a} = \frac{400}{a} - \frac{800}{a} = -\frac{400}{a}.$$

De maximale opbrengst uitgedrukt in a is $R_{\max} = -\frac{400}{a}$.

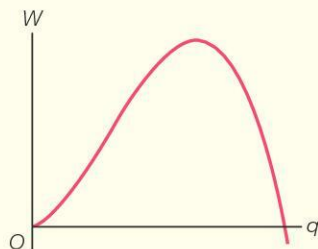
Hoewel de grafiek van R voor elke waarde van a anders is, mag je ervan uitgaan dat de gegeven schets te gebruiken is voor elke waarde van a .

Voorbeeld

De maandelijkse winst van een bedrijf is gegeven door de formule $W = aq^2 - \frac{1}{6}q^3$ met $a > 0$.

Hierin is W in honderden euro's en q de maandproductie in honderdtallen. De constante a is afhankelijk van het economisch perspectief en kan per maand verschillen.

- a Toon met de afgeleide aan dat W maximaal is voor $q = 4a$.
- b Toon aan dat $W_{\max} = 5\frac{1}{3}a^3$.



figuur 8.66

Uitwerking

a $W = aq^2 - \frac{1}{6}q^3$ geeft $\frac{dW}{dq} = 2aq - \frac{1}{2}q^2$

Voor $q = 4a$ is $\frac{dW}{dq} = 2a \cdot 4a - \frac{1}{2}(4a)^2 = 8a^2 - \frac{1}{2} \cdot 16a^2 = 8a^2 - 8a^2 = 0$.

Uit de schets volgt dat je bij $q = 4a$ met een maximum te maken hebt.

b $W_{\max} = a \cdot (4a)^2 - \frac{1}{6} \cdot (4a)^3 = a \cdot 16a^2 - \frac{1}{6} \cdot 64a^3$ Vul $q = 4a$ in de formule van W in.
 $= 16a^3 - \frac{64}{6}a^3 = 16a^3 - 10\frac{2}{3}a^3 = 5\frac{1}{3}a^3$

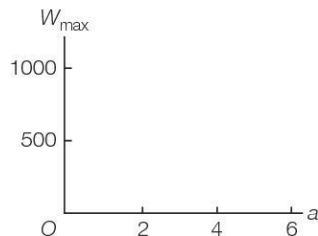
79



Zie voorbeeld b.

De maximale winst hangt af van a .

- a Neem de figuur hiernaast over en schets de grafiek van $W_{\max}$.
- b Vanaf welke waarde van a is $W_{\max}$ meer dan 100 000 euro? Rond af op twee decimalen.



figuur 8.67

80

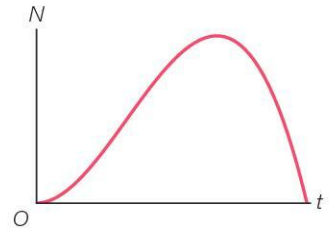


Het aantal bezoekers N dat zich in een dierentuin bevindt, is te benaderen door het model $N = 25pt^2 - 50t^3$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 9:00 uur en p een constante tussen 16 en 24 die, afhankelijk van het seizoen en het weer, per dag kan verschillen.

- Toon aan dat binnen het model de laatste bezoeker de dierentuin op $t = \frac{1}{2}p$ verlaat.
- Bereken met de afgeleide het maximale aantal bezoekers in de dierentuin in het geval $p = 20$.
- Toon met de afgeleide aan dat het aantal bezoekers maximaal is op $t = \frac{1}{3}p$.

Het maximale aantal bezoekers hangt af van p . Er geldt $N_{\max} = \frac{25}{27}p^3$.

- Toon aan dat de formule voor $N_{\max}$ juist is.
- Schets de grafiek van $N_{\max}$.
- Bereken voor welke waarden van p het maximale aantal bezoekers tussen 6000 en 10000 ligt. Rond af op één decimaal.



figuur 8.68



81



De totale bladoppervlakte B van een plant hangt af van de ouderdom van de plant. Een plantenkweker heeft ontdekt dat voor bepaalde plantensoorten de formule $B = a\sqrt{t} - t$ geldt. Hierin is B de oppervlakte in dm^2 , t de tijd in maanden en a een constante die afhangt van de plantensoort.

Bekijk een plantensoort waarvoor geldt $a = 4$.

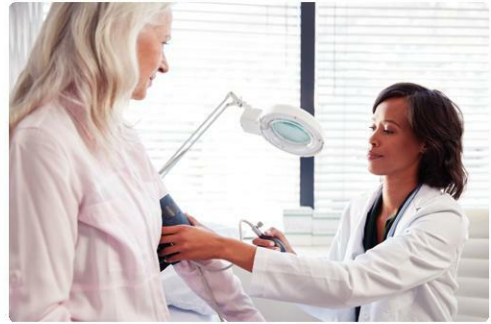
- Bereken met de afgeleide met welke snelheid in cm^2 per maand de totale bladoppervlakte toeneemt op $t = 3$.
- Toon met de afgeleide aan dat de bladoppervlakte maximaal is op $t = 4$. Hoe groot is die maximale bladoppervlakte?

Volgens de plantenkweker is voor elk van de onderzochte plantensoorten de bladoppervlakte maximaal als $t = \frac{1}{4}a^2$.

- Toon de juistheid van deze bewering aan en druk $B_{\max}$ uit in a .

A82
☐⊙*

Het effect van een medicijn om de bloeddruk te verlagen wordt gegeven door de formule $V = 0,0015d^2(\frac{1}{3}M - \frac{1}{2}d)$. Hierin is V de verlaging van de bloeddruk in mmHg bij een gebruik van d mg medicijn per dag en M de maximaal toegestane hoeveelheid medicijn in mg per dag. Bij een hogere dosering dan de maximaal toegestane hoeveelheid van M mg per dag treden bijwerkingen op.



- a** Een patiënt met een te hoge bloeddruk krijgt het medicijn toegediend. Volgens de arts is de maximaal toegestane dosering 90 mg per dag. Bereken bij welke dosering de bloeddruk het meest zal dalen. Hoeveel is de maximale verlaging?

De maximaal toegestane hoeveelheid medicijn verschilt per patiënt. De bloeddruk zal het meest dalen als de dosering gelijk is aan $\frac{4}{9}$ deel van de maximaal toegestane hoeveelheid.

- b** Toon dit aan.

- c** Toon aan dat de maximale bloeddrukverlaging te schrijven is als $V_{\max} = aM^3$ en bereken a . Rond af op zes decimalen.

A83
*

De beheerder van een internetsite gebruikt het model

$N = -4t^3 + at^2 - 10at + 6000$ om het aantal bezoekers op woensdagen mee te beschrijven. In dit model is N het aantal bezoekers en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0:00 uur.

Op een woensdag is het aantal bezoekers maximaal om 9 uur 's avonds. Bereken het maximale aantal bezoekers op deze dag. Rond af op tientallen.

Terugblik

Met de afgeleide berekenen van extreme waarden

Bij de opdracht *Bereken met de afgeleide het maximum van y* bereken je de afgeleide $\frac{dy}{dx}$ en los je de vergelijking $\frac{dy}{dx} = 0$ op. Deze vergelijking mag je oplossen met de GR. Soms is het echter gemakkelijker om deze vergelijking stap voor stap op te lossen.

Nadat je de vergelijking hebt opgelost, kijk je in de grafiek of je bij een gevonden oplossing met een maximum te maken hebt. Vaak is de grafiek gegeven. Als dit niet het geval is, dan maak je zelf een schets in je uitwerking.

Ten slotte bereken je het maximum door de gevonden x -waarde in de formule van y in te vullen.

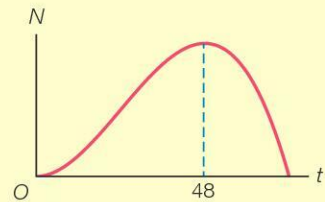
Bij de formule $N = 6t^2 - \frac{1}{12}t^3$ krijg je $\frac{dN}{dt} = 12t - \frac{1}{4}t^2$.

$\frac{dN}{dt} = 0$ geeft $12t - \frac{1}{4}t^2 = 0$, dus $t(12 - \frac{1}{4}t) = 0$ en dit geeft $t = 0$ of $t = 48$.

Je mag de vergelijking $12t - \frac{1}{4}t^2 = 0$ ook met de GR oplossen.

Uit de schets volgt dat N maximaal is voor $t = 48$.

$$N_{\max} = 6 \cdot 48^2 - \frac{1}{12} \cdot 48^3 = 4608$$



Controleren van maxima en minima

Bij de opdracht *Toon met de afgeleide aan dat y maximaal is voor $x = a$* bereken je eerst de afgeleide en laat je zien dat deze 0 is voor $x = a$ door $x = a$ in de afgeleide in te vullen. Daarna kijk je in de grafiek van y en merk je op dat er inderdaad een hoogste punt is bij $x = a$.

Bij het aantonen dat N maximaal is voor $t = 8a$ bij de formule

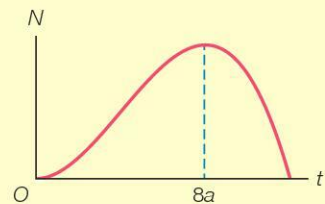
$N = at^2 - \frac{1}{12}t^3$ krijg je $\frac{dN}{dt} = 2at - \frac{1}{4}t^2$.

Invullen van $t = 8a$ in de afgeleide geeft

$$\frac{dN}{dt} = 2a \cdot 8a - \frac{1}{4}(8a)^2 = 16a^2 - \frac{1}{4} \cdot 64a^2 = 16a^2 - 16a^2 = 0.$$

Uit de schets volgt dat N maximaal is voor $t = 8a$.

$$N_{\max} = a \cdot (8a)^2 - \frac{1}{12} \cdot (8a)^3 = 64a^3 - 42\frac{2}{3}a^3 = 21\frac{1}{2}a^3$$



Eindopdracht Maximale opbrengst bij toltarief

Het aantal personenauto's dat gebruikmaakt van een tolbrug hangt af van het toltarief.

Het aantal auto's kan worden berekend met de formule

$N = \frac{1}{3}aT^3 - 15aT^2 + 5000$. Hierin is N het aantal personenauto's dat per dag gebruikmaakt van de brug en T het toltarief in euro's. In deze formule is T maximaal 30. De positieve constante a hangt af van de economische omstandigheden.

De dagelijkse opbrengst in euro's kan worden berekend met de formule $R = \frac{1}{3}aT^4 - 15aT^3 + 5000T$.

Rond in deze opdracht de waarde van a af op twee decimalen, het toltarief op gehele centen en de opbrengst op gehele euro's.

- Er is een waarde van a waarbij de opbrengst maximaal is bij een toltarief van 15 euro.

Bereken deze waarde van a en de bijbehorende maximale opbrengst per dag. Hoeveel auto's rijden er dan dagelijks over de brug?

- Er is een waarde van a waarbij de opbrengst maximaal is bij een toltarief van 12 euro. Bij deze waarde van a wordt de opbrengst echter negatief vanaf een bepaalde hogere waarde van het toltarief. Bereken dit toltarief.

- Er is een waarde van a waarbij de maximale opbrengst gelijk is aan 50 000 euro.

Zoek uit wat deze waarde van a is. Welk toltarief hoort hierbij en hoeveel auto's rijden er dan dagelijks over de brug?

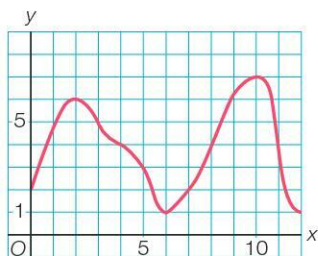


Diagnostische toets

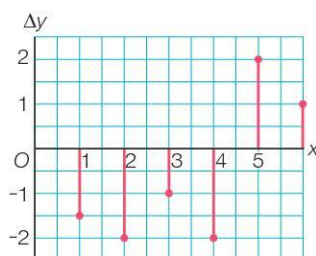
8.1 Toenamediagrammen en differentiequotiënten

1 Zie figuur 8.69.

- Teken bij de grafiek in figuur 8.69 het toenamediagram met stapgrootte $\Delta x = 2$.
- Bereken de gemiddelde verandering van y op het interval $[0, 4]$.
- Bereken het differentiequotient van y op het interval $[2, 12]$.



figuur 8.69



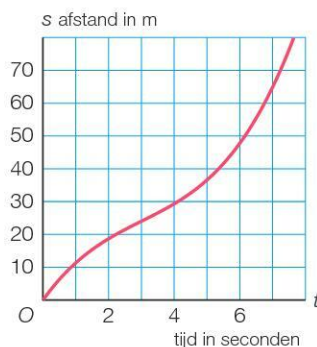
figuur 8.70

2 Teken een mogelijke grafiek die door het punt $(3, 5)$ gaat en die hoort bij het toenamediagram in figuur 8.70.

8.2 Hellinggrafieken

3 [▶ WERKBLAD] In figuur 8.71 zie je een tijd-afstandgrafiek.

- Schat de snelheid op $t = 1$ en op $t = 6$.
- Voor welke t schat je dat de snelheid minimaal is? Hoe groot is deze minimale snelheid?
- Hoeveel tijdstippen zijn er tussen $t = 0$ en $t = 6$ waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[0, 6]$? Licht toe.



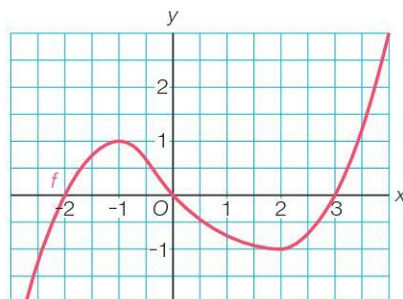
figuur 8.71

4 De temperatuur op een dag in juni kan benaderd worden door de formule $T = -0,014t^3 + 0,44t^2 - 2,6t + 11$. Hierin is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en t het tijdstip in uren met $t = 0$ om 0:00 uur.

- Bereken de snelheid waarmee de temperatuur verandert om 9:30 uur.
- Toon aan dat de temperatuur 's middags om half vier toeneemt.
- Toon aan dat de temperatuur 's avonds om kwart voor zeven afneemt.

5 [▶ WERKBLAD] Zie de grafiek in figuur 8.72.

- Schets de hellinggrafiek van f .
- Neem aan dat de grafiek van f de hellinggrafiek is van de functie g . Schets een mogelijke grafiek van g .



figuur 8.72

8.3 Differentiëren

6 Differentieer.

a $f(x) = 0,6x^3 - 1,3x^2 + 9$

b $N(t) = (3 - t)(5 + 2t)$

c $K(p) = p^3 - p(p - 3)^2$

8.4 Notaties en regels voor de afgeleide

7 Gegeven is de formule $K = 20q^2 - 5pq + 8p^3$.

Bereken $\frac{dK}{dp}$ en $\frac{dK}{dq}$.

8 Bereken de afgeleide.

a $y = \frac{1}{5x^6} + 5x^6 \cdot \sqrt{x}$

b $y = (5 + x)\sqrt{x}$

c $y = \sqrt[6]{x^5} + \frac{5}{x} + \frac{x}{6}$

9 Differentieer.

a $y = 6(3x - 1)^4 + 7x$

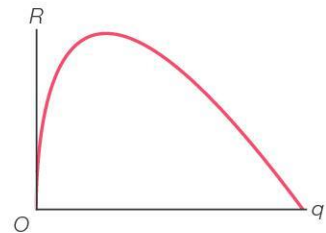
b $R = 20\sqrt{5q^3 + 4q}$

c $A = \frac{4}{2 - 3q^4}$

8.5 Extreme waarden en de afgeleide

10 De opbrengst R van een bedrijf in duizenden euro's wordt gegeven door de formule $R = 5q^{0,6} - 2q^{0,92}$. Hierbij is q de productie in duizendtallen.

- a** Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee R afneemt voor $q = 6$.
- b** Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee R toeneemt voor $q = 3$.
- c** Bereken met de afgeleide de maximale opbrengst.



figuur 8.73

11 Onderzoek heeft uitgewezen dat het effect van een tv-commercial op den duur afneemt. Hierbij wordt het begrip effectiviteit E gebruikt. Een marketingbureau gaat uit van de formule $E(n) = 0,48n - an^2$, waarin n het aantal keer is dat de commercial wordt uitgezonden en a een constante is met $0 < a < 0,2$.

Toon met de afgeleide aan dat de effectiviteit maximaal is voor $n = \frac{6}{25a}$ en dat $E_{\max} = \frac{1,44}{25a}$.

9

Kansverdelingen

Wat leer je?

- Wat de kansverdeling van een toevalsvariabele is.
- Het berekenen van de verwachtingswaarde van een toevalsvariabele.
- Berekeningen maken met de binomiale verdeling en de normale verdeling.



Beginopdracht Winfall loterij

Enkele jaren geleden verscheen er een opmerkelijk verhaal in de media. Een gepensioneerd stel in de Verenigde Staten won over een periode van acht jaar omgerekend bijna 7 miljoen euro in een loterij. Niet door vals spelen of veel geluk, maar door slim toepassen van wiskunde. In deze opdracht ga je uitzoeken hoe ze dat deden.

Bij de Winfall loterij in de Amerikaanse staat Michigan kost een lot 1 dollar. Op zo'n lot kun je zes verschillende getallen uit de serie 1 tot en met 49 aangeven. Bij een trekking worden willekeurig zes getallen gekozen. Heb je precies die zes getallen aangegeven, dan win je de jackpot: een groot geldbedrag. Heb je wel een aantal getallen goed, maar niet allemaal, dan win je een lager bedrag. Als na een aantal trekkingen de jackpot niet is gevallen, dan komt er een speciale trekking waarbij alle prijzen behalve de jackpot tien keer zo groot zijn.

Op een dag realiseerde de gepensioneerde wiskundige Jerry Selbee zich dat die speciale trekkingen bijzonder winstgevend kunnen zijn.

- Op hoeveel manieren kun je 6 verschillende getallen uit 49 getallen kiezen? Wat is dus de kans om de jackpot te winnen? Schrijf je antwoord als een breuk.

De kans op 4 of 5 van de 6 getallen goed kiezen is groter, maar nog steeds behoorlijk klein. Om je kansen te vergroten kun je veel loten kopen, en dat is precies wat Jerry en zijn vrouw Marge deden.

- Laat zien dat de kans om 4 van de 6 getallen goed te kiezen ongeveer gelijk is aan 0,00097.
- Laat zien dat als je meedoet met 1100 verschillende loten, je mag verwachten dat je ongeveer één keer 4 van de 6 getallen goed hebt.
- Hoeveel keer mag je verwachten 3 van de 6 getallen goed te hebben, als je 1100 verschillende loten koopt?

In de tabel hiernaast zie je hoeveel geld je kunt winnen bij een normale trekking en een speciale trekking. Om de berekeningen te vereenvoudigen, nemen we aan dat je nooit 5 of 6 getallen goed hebt.

- Laat zien dat als je 1100 verschillende loten koopt bij een normale trekking, je mag verwachten dat je ongeveer 195 dollar uitbetaald krijgt. Hoeveel verlies heb je dan, als je het kopen van de loten meerekent?
- En hoe zit dat bij een speciale trekking? Wat is je conclusie?

aantal goed	normale trekking	speciale trekking
6	jackpot	-
5	\$ 2500	\$ 25 000
4	\$ 100	\$ 1000
3	\$ 5	\$ 50

Voorkennis Kansberekeningen

Theorie A Kansen

Veelgebruikte regels bij kansberekeningen zijn de productregel, de somregel en de complementregel.

Productregel	Bij twee onafhankelijke kansexperimenten geldt $P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2)$.
Somregel	Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen G_1 en G_2 geldt $P(G_1 \text{ of } G_2) = P(G_1) + P(G_2)$.
Complementregel	$P(\text{gebeurtenis}) = 1 - P(\text{complement-gebeurtenis})$

Komt in de omschrijving van een gebeurtenis ‘minstens’, ‘hoogstens’, ‘niet’, ‘meer dan’ of ‘minder dan’ voor, dan kan de complementregel je rekenwerk besparen.

Bij het vier keer gooien met een dobbelsteen is

- $P(\text{geen enkele keer } 6) = P(6666) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 0,482$
- $P(\text{twee keer } 6) = \binom{4}{2} \cdot P(6666) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,116$
- $P(\text{minstens één keer } 6) = 1 - P(\text{geen enkele keer } 6)$
 $\approx 1 - 0,482 = 0,518$.

Je rondt kansen af op drie decimalen, tenzij anders gemeld.

- 1** Judith laat de schijf in figuur 9.1 acht keer draaien. Bereken de kans dat de pijl
- a één keer 2 aanwijst
 - b minstens één keer 1 aanwijst
 - c vijf keer een 1 en drie keer een 3 aanwijst
 - d vier keer een 1 en één keer een 3 aanwijst.



figuur 9.1

- 2** Rijschool R&S biedt allerlei rijopleidingen aan. Zo is er de mogelijkheid drie dagen achterelkaar les te krijgen. Bij deze opleidingsvorm is de kans om in één keer te slagen 0,22. Bij klanten die losse lessen over een langere periode boeken, is deze kans 0,53.
- Bereken de kans dat
- a van acht cursisten die de opleiding van drie dagen volgen er minstens twee in één keer slagen
 - b van twaalf cursisten die losse lessen volgen er zes of zeven in één keer slagen.

Theorie B Pakken met en zonder terugleggen

Pak je drie knikkers uit een vaas met 3 rode en 4 witte knikkers, dan kan dat met terugleggen, maar ook zonder terugleggen.

Voor $P(\text{één rode knikker})$ krijg je bij het pakken

met terugleggen	zonder terugleggen
$P(\text{één rode}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 \approx 0,420$	<ul style="list-style-type: none">• met de productregel (noemer telkens één kleiner)
Gebruik de productregel.	$P(\text{één rode}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \approx 0,514$
	<ul style="list-style-type: none">• met de kansdefinitie van Laplace
	$P(\text{één rode}) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} \approx 0,514$

Wanneer er staat ‘pak drie knikkers’, dan wordt bedoeld zonder terugleggen, tenzij er staat dat het met terugleggen is.

Bij een kleine steekproef uit een grote populatie mag je pakken zonder terugleggen opvatten als pakken met terugleggen. Een toepassing van deze vuistregel zie je hieronder.

Van de Nederlanders heeft 12% contactlenzen. De kans dat van een willekeurige groep van 14 Nederlanders niemand contactlenzen heeft, is $0,88^{14} \approx 0,167$.

De kans dat er twee contactlenzen hebben, is

$$\binom{14}{2} \cdot P(\text{c c } \cancel{\text{c}} \dots \cancel{\text{c}}) = \binom{14}{2} \cdot 0,12^2 \cdot 0,88^{12} \approx 0,283.$$

- 3** Bij een loterij zijn 80 loten verkocht. Naast de hoofdprijs, een smartphone, zijn er drie tweede prijzen en zes derde prijzen. Sasha heeft vijf loten gekocht. Bereken de kans dat zij
- a** minstens één prijs wint
 - b** niet de smartphone, maar wel een tweede en derde prijs wint.
- 4** Felix gooit twaalf keer met een dobbelsteen. Bereken de kans dat hij
- a** drie keer 2 ogen gooit en één keer 3 ogen
 - b** elk aantal ogen twee keer gooit
 - c** bij de twaalfde worp evenveel gooit als bij de eerste worp.

9.1 Toevalsvariabelen en verwachtingswaarde



In een klas is gevraagd hoe vaak elke leerling per week aan sport doet. In de tabel zie je de resultaten onderverdeeld naar leeftijd. Er wordt willekeurig een leerling uit deze klas gekozen.

X = leeftijd van leerling

Y = aantal keer sporten per week

a Toon aan dat $P(X = 17) = 0,2$.

b Bereken $P(Y = 1)$.

c Bereken $P(X = 16 \text{ en } Y = 1)$.

Aantal keer sporten per week					
	0	1	2	3	
16 jaar	3	7	7	3	20
17 jaar	2	1	2	0	5
	5	8	9	3	25

Theorie A Toevalsvariabelen

Bij het kansexperiment uit opgave 1 wordt aselekt (willekeurig) een leerling uit de klas gekozen.

De leeftijd geven we aan met X . Dus X = leeftijd van leerling.

Omdat bij het aselekt kiezen van een leerling de waarde van X afhangt van het toeval heet X een **toevalsvariabele**.

In opgave 1 is nog een toevalsvariabele gedefinieerd, namelijk

Y = aantal keer sporten per week.

Toevalsvariabelen noteren we met hoofdletters, vaak X en Y .

Je kunt toevalsvariabelen gebruiken om kansen kort te noteren.

Notatie zonder toevalsvariabele	Notatie met toevalsvariabele
$P(\text{leerling is 16 jaar})$	$P(X = 16)$
$P(\text{leerling sport één keer per week})$	$P(Y = 1)$
$P(\text{leerling sport minstens één keer per week})$	$P(Y \geq 1)$

Volgens de somregel is $P(Y < 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1)$.

Volgens de complementregel is $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$.

Uit een vaas met acht rode, vijf witte en twee blauwe knikkers pak je vijf knikkers.

X = aantal rode knikkers dat je pakt

Voor de berekening van $P(X = 2)$ bedenk je dat $X = 2$ inhoudt dat je 2 rode uit de 8 rode en 3 niet-rode uit de $5 + 2 = 7$ niet-rode pakt.

$$\text{Je krijgt } P(X = 2) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{15}{5}} \approx 0,326.$$

Voorbeeld

In een vaas zitten zeven rode, negen witte en vier blauwe knikkers.

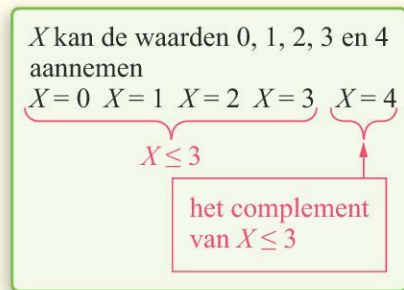
Sasha pakt vier knikkers uit de vaas.

X = aantal witte knikkers dat Sasha pakt

Bereken $P(X \leq 3)$.

Uitwerking

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - \frac{\binom{9}{4}}{\binom{20}{4}} \approx 0,974$$



2



Vul in voor de toevalsvariabele X uit het voorbeeld hierboven.

- a $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq \dots)$
- b $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(\dots) + P(\dots)$
- c $P(X < 2) = P(X = 0) + \dots$
- d $P(\text{minstens één witte}) = P(X \dots 1)$
- e $P(\text{hoogstens drie witte}) = P(X \dots 3)$
- f $P(\text{alleen maar witte}) = P(X = \dots)$



3



In een vaas zitten acht rode, vijf witte en twee blauwe knikkers.

Debby pakt vijf knikkers uit de vaas.

X = aantal witte knikkers dat Debby pakt

a Bereken $P(X = 2)$.

Lisette pakt met terugleggen vier knikkers uit de vaas.

Y = aantal rode knikkers dat Lisette pakt

b Bereken $P(Y = 0)$.

c Bereken $P(Y \leq 3)$.

4



In een vaas zitten vijf rode, drie witte en twee groene knikkers.

*

Elly pakt vier knikkers uit de vaas.

X = aantal rode knikkers dat Elly pakt

a Bereken $P(X = 2)$. b Bereken $P(X \geq 1)$.

5



Uit onderzoek van het Sociaal en Cultureel Planbureau blijkt dat 86% van de vaders kraamverlof opneemt, direct na de geboorte van hun kind. Voor een onderzoek worden tien kersverse vaders ondervraagd.

X = aantal vaders dat kraamverlof opneemt

a Bereken $P(X = 8)$. b Bereken $P(X < 9)$.

A6




Uit onderzoek van het Sociaal en Cultureel Planbureau blijkt dat bij werkende ouders van wie het jongste kind jonger dan 4 jaar is, 70% gebruikmaakt van formele opvang. Dat is kinderopvang op een kinderdagverblijf of bij een gastouder. Daarnaast wordt bij 23% uitsluitend opgepast door familie, vrienden of burens, de zogeheten informele opvang.

Bij een onderzoek zijn tien werkende ouders betrokken van wie het jongste kind jonger is dan 4 jaar.

X = aantal ouders dat gebruikmaakt van formele opvang

Y = aantal ouders dat uitsluitend gebruikmaakt van informele opvang

Bereken.

a $P(X = 6)$

c $P(Y \geq 2)$

b $P(Y = 3)$

d $P(X = 8 \text{ en } Y = 2)$

A7




In een doos zitten 20 enveloppen. In acht van deze enveloppen zit een briefje van 10 euro, de overige twaalf enveloppen zijn leeg.

Arjan pakt twee enveloppen uit de doos.

X = totale bedrag in de twee enveloppen die Arjan pakt

Bereken $P(X = 20)$ en $P(X > 0)$.

O8




In de 4 vwo afdeling van het Zuidpoort College zitten 83 leerlingen:

25 leerlingen zijn 16 jaar, 40 zijn 17 jaar en 18 zijn 18 jaar.

Er wordt aselekt een leerling gekozen.

X = leeftijd van leerling

a Bereken $P(X = 16)$.

b Wat weet je van $P(X = 16) + P(X = 17) + P(X = 18)$?

Theorie B Kansverdelingen

In opgave 8 neemt de toevalsvariabele X de waarden 16, 17 en 18 aan.

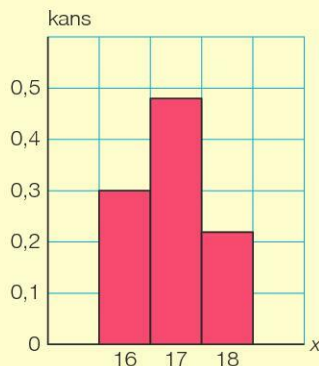
Deze waarden met de bijbehorende kansen vormen de **kansverdeling** van X . Hieronder is deze kansverdeling weergegeven in een tabel.

De letter x geeft een waarde van X aan.

x	16	17	18
$P(X = x)$	$\frac{25}{83}$	$\frac{40}{83}$	$\frac{18}{83}$

Omdat in een kansverdeling alle mogelijke waarden staan die X kan aannemen, is de som van de kansen gelijk aan 1.

In figuur 9.2 is het **kanshistogram** bij de kansverdeling getekend.



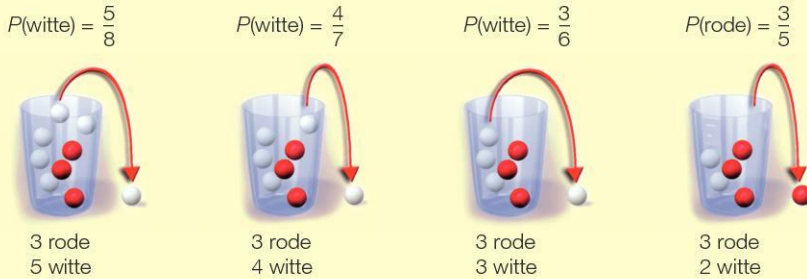
figuur 9.2

De kansverdeling van een toevalsvariabele bestaat uit alle mogelijke waarden van de toevalsvariabele en de bijbehorende kansen.

Hieronder zie je een probleem waarbij een experiment wordt herhaald, totdat een bepaalde gebeurtenis optreedt.

Tom pakt één voor één knikkers uit een vaas met drie rode en vijf witte knikkers. Hij gaat net zo lang door tot hij een rode knikker pakt. Elke keer pakt hij als het ware uit een nieuwe vaas. De kansen veranderen daardoor per keer.

In figuur 9.3 zie je de situatie dat Tom de vierde keer voor het eerst een rode knikker pakt.



figuur 9.3

Bij de situatie dat Tom de eerste drie keer een witte knikker pakt en de vierde keer een rode, hoort de kans $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5}$.

Dus $P(4 \text{ keer pakken}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \approx 0,107$.

Voorbeeld

In een vaas zitten twee rode knikkers, twee witte knikkers en een blauwe knikker. Collin pakt zonder terugleggen één voor één knikkers uit de vaas. Hij stopt hiermee zodra hij een witte knikker pakt.

X = aantal keer dat Collin een knikker pakt

Stel de kansverdeling van X op.

Uitwerking

$$P(X=1) = P(w) = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$P(X=2) = P(\cancel{w}w) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,3$$

$$P(X=3) = P(\cancel{w}\cancel{w}w) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0,2$$

$$P(X=4) = P(\cancel{w}\cancel{w}\cancel{w}w) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = 0,1$$

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	0,4	0,3	0,2	0,1

R9 Zie het voorbeeld.

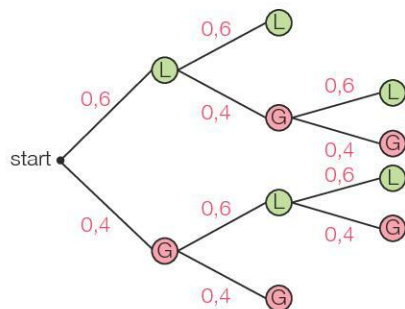


- Waarom is $P(X=5)$ niet opgenomen in de tabel?
- Hoe kun je $P(X=4)$ berekenen met behulp van de andere drie kansen?

- 10** In een vaas zitten vier witte en zes rode knikkers.
 Thijs pakt zonder terugleggen één voor één knikkers uit de vaas, totdat hij een rode pakt. Hierbij is X het aantal keer dat Thijs een knikker pakt. Stel de kansverdeling van X op.

- 11** De kans dat Koen bij het basketballen een vrije worp raakschiet is 0,75. Hij mag tijdens een wedstrijd drie vrije worpen nemen. Hierbij is X het aantal vrije worpen dat hij raakschiet. Stel de kansverdeling van X op.

- 12** Lotte en Gijs spelen een tennispartij over maximaal drie sets. Degene die als eerste twee sets wint, is winnaar. De kans dat Lotte een set wint is 0,6, dus voor Gijs is die kans 0,4. Bij deze situatie hoort de kansboom van figuur 9.4.



figuur 9.4

- Bereken de kans dat
- Lotte de partij in twee sets wint
 - Gijs de eerste set wint en Lotte de volgende twee
 - de partij drie sets duurt.

- Y = aantal sets dat de partij duurt
 d Stel de kansverdeling van Y op.

- A13** Fred en Barney spelen een dartswedstrijd over maximaal drie sets. Degene die als eerste twee sets wint, is winnaar. De kans dat Barney een set wint is 0,65, dus voor Fred is die kans 0,35.
 Z = aantal sets dat de partij duurt
 Stel de kansverdeling van Z op.

- A14** Bij een opleidingsinstituut moet een toelatingsexamen worden afgelegd. De kans dat iemand voor dit examen slaagt is 0,6. Iemand die niet slaagt, mag herkansen. De kans om voor de herkansing te slagen is 0,3. In totaal mag je drie keer herkansen. Ben je ook voor de derde herkansing gezakt, dan ben je definitief afgewezen.
 A = aantal keer examen gedaan
 Stel de kansverdeling van A op.



- E15** In een doos zitten twee rode, twee witte en twee blauwe ballen. Jesse pakt één voor één ballen uit de doos totdat hij twee rode en twee blauwe ballen heeft gepakt. X = aantal keer dat Jesse een bal pakt. Stel de kansverdeling van X op.

Sportvereniging Nikè organiseert wekelijks een loterij.

Elk lot kost 5 euro. Er is een eerste prijs van 2000 euro en er zijn 100 prijzen van 20 euro. Elke week worden 1000 loten verkocht. Hoeveel winst maakt Nikè wekelijks met deze loterij? Hoeveel is dat gemiddeld per lot?



Theorie C De verwachtingswaarde

De sportvereniging uit opgave 16 maakt gemiddeld per lot een winst van 1 euro. Omgekeerd kan dus een deelnemer aan de loterij gemiddeld per lot een verlies van 1 euro verwachten. We zeggen dat de **verwachtingswaarde** van de winst W per lot voor een deelnemer gelijk is aan -1 euro. Notatie $E(W) = -1$.

Je kunt de winstverwachting per lot ook berekenen met de kansverdeling van W . Per lot kan een deelnemer bij deze loterij een winst maken van -5 , 15 of 1995 euro, dus W neemt de waarden -5 , 15 en 1995 aan. Omdat 899 van de 1000 loten geen prijs geven, is $P(W = -5) = \frac{899}{1000} = 0,899$.

Zo ontstaat de volgende kansverdeling.

w	1995	15	-5
$P(W = w)$	0,001	0,1	0,899

Door elke mogelijke waarde van W te vermenigvuldigen met de bijbehorende kans en vervolgens de uitkomsten op te tellen, krijg je $E(W)$. Ga maar na: $E(W) = 1995 \cdot 0,001 + 15 \cdot 0,1 + -5 \cdot 0,899 = -1$.

Werkschema: berekenen van de verwachtingswaarde van de toevalsvariabele X

- 1 Stel de kansverdeling van X op.
- 2 Vermenigvuldig elke waarde van X met de bijbehorende kans.
- 3 Tel de uitkomsten op. De som is de verwachtingswaarde $E(X)$.

$$\text{Dus } E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n).$$

De verwachtingswaarde -1 suggereert dat een deelnemer per lot 1 euro verliest. Maar dat kan niet, want per lot kun je uitsluitend 5 euro verliezen of een winst maken van 15 euro, dan wel 1995 euro. De verwachtingswaarde geeft aan wat je gemiddeld per lot kunt verwachten. Zou je 50 loten kopen, dan verwacht je een verlies van $50 \cdot 1 = 50$ euro.

Voorbeeld

Bij een spel met een dobbelsteen gelden de volgende regels.

- Je gebruikt een dobbelsteen met op de zijvlakken de cijfers 1, 1, 1, 1, 5 en 5.
- Je gooit drie keer met de dobbelsteen.
- De uitbetaling is de som van de gegooide cijfers in euro's.
- De inleg is 8 euro.

Gooi je bijvoorbeeld 5 1 1, dan krijg je 7 euro uitbetaald. Je 'wint' dan -1 euro.

Bereken de verwachtingswaarde van de winst per spel.

Uitwerking

W = winst per spel, dus W = uitbetaling - 8.

W neemt de waarden 7, 3, -1 en -5 aan.

$$P(W=7) = P(5\ 5\ 5) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$P(W=3) = \binom{3}{2} \cdot P(5\ 5\ 1) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{27}$$

$$P(W=-1) = \binom{3}{1} \cdot P(5\ 1\ 1) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$

$$P(W=-5) = P(1\ 1\ 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

w	7	3	-1	-5
$P(W=w)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

..... Controle: $\frac{1}{27} + \frac{6}{27} + \frac{12}{27} + \frac{8}{27} = 1$

$$E(W) = 7 \cdot \frac{1}{27} + 3 \cdot \frac{6}{27} + (-1) \cdot \frac{12}{27} + (-5) \cdot \frac{8}{27} = -1$$

De verwachtingswaarde van de winst is -1 euro per spel.

R17
□ ⊗ *

Zie het voorbeeld. Om de winstverwachting per lot te berekenen, zou je ook eerst de verwachtingswaarde van de uitbetaling U per lot kunnen berekenen.

- Stel de kansverdeling van U op en bereken $E(U)$.
- Hoe volgt $E(W)$ hieruit?

18
□ ⊗ *

Bij een loterij zijn 100 loten van 2 euro verkocht. Er is één prijs van 50 euro en er zijn drie tweede prijzen van 10 euro.

- Bereken de verwachtingswaarde van de winst per lot voor een deelnemer aan de loterij.
- We noemen een loterij eerlijk als de winstverwachting per lot gelijk is aan 0.
Wat moet bij deze loterij een lot kosten om van een eerlijke loterij te kunnen spreken?

Een spel is eerlijk als $E(W) = 0$.

- 19** Bij een spel met een dobbelsteen waarop vijf keer het cijfer 3 staat en één keer het cijfer 8 gelden de volgende regels.
- De inleg is 8 euro.
 - Je gooit twee keer met de dobbelsteen.
 - De uitbetaling is de som van de gegooide cijfers in euro's.
- Bereken in centen nauwkeurig de verwachtingswaarde van de winst per spel.

- A20** Chuck-a-Luck is een spel met dobbelstenen dat in de VS veel gespeeld wordt. Je zet voor één dollar in op een zeker aantal ogen, bijvoorbeeld op 5 ogen. Daarna gooi je met drie dobbelstenen. Het aantal keren dat je 5 ogen gooit, krijg je in dollars uitbetaald.
- a** Bereken exact de kans dat je bij een worp met drie dobbelstenen één keer 5 ogen gooit.
 - b** Bereken exact de kans dat je 2 dollar krijgt uitbetaald.
 - c** Bereken exact de kans dat je je inzet kwijt bent.
 - d** Hoeveel brengt het spel naar verwachting de organisatie op als 500 personen meedoen?

- A21** In een vaas zitten vier rode en zes witte knikkers. Monique pakt één voor één knikkers uit de vaas, totdat ze een witte pakt.
- Bereken de verwachtingswaarde van het aantal knikkers dat Monique pakt.

Terugblik

Toevalsvariabele

Bij het kansexperiment ‘gooien met twee dobbelstenen’ zijn vele toevalsvariabelen te definiëren, bijvoorbeeld X = verschil van de aantallen ogen.

Uit de figuur hiernaast volgt

$$P(X=0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ en } P(X=1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Bij een toevalsvariabele hangt de uitkomst van het toeval af.

Toevalsvariabelen kun je gebruiken om gebeurtenissen kort te noteren. In plaats van ‘het verschil van de aantallen ogen is minstens 1’ krijg je $X \geq 1$.

	VERSCHIL					
6	5	4	3	2	1	0
5	4	3	2	1	0	1
4	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5
	1	2	3	4	5	6

Het herhalen van kansexperimenten totdat succes optreedt

Frits pakt net zo lang knikkers uit een vaas met drie rode en vijf witte knikkers totdat hij een witte pakt.

Y = aantal knikkers dat Frits pakt

$$P(Y=3) = P(\text{ww}\bar{w}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$$

De kansverdeling en verwachtingswaarde van een toevalsvariabele

De kansverdeling van een toevalsvariabele Y bestaat uit alle waarden van Y en de bijbehorende kansen.

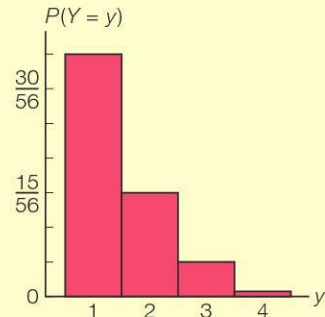
Bij de toevalsvariabele Y hierboven krijg je

y	1	2	3	4
$P(Y=y)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

Ter controle gebruik je dat de som van kansen in een kansverdeling 1 is.

In de figuur hiernaast is het bijbehorende kanshistogram getekend.

De verwachtingswaarde van het aantal knikkers dat Frits pakt is $E(Y) = 1 \cdot \frac{5}{8} + 2 \cdot \frac{15}{56} + 3 \cdot \frac{5}{56} + 4 \cdot \frac{1}{56} = 1,5$.



9.2 De binomiale verdeling



Jessica gooit acht keer met een dobbelsteen.

Bereken de kans op

a drie keer 6 ogen

b vijf keer meer dan 2 ogen.

Theorie A Het binomiaal kansexperiment

In opgave 22a zijn we bij elke worp met de dobbelsteen slechts geïnteresseerd in de gebeurtenis ‘6 ogen’. En in opgave 22b gaat het om de gebeurtenis ‘meer dan 2 ogen’. Het is gebruikelijk om de gebeurtenis waarin we geïnteresseerd zijn **succes** te noemen en de bijbehorende complement-gebeurtenis **mislukking**.

Een kansexperiment waarbij het uitsluitend om de gebeurtenissen succes en mislukking gaat, heet een **Bernoulli-experiment**.

Een kansexperiment waarbij je alleen op de gebeurtenissen succes en mislukking let, heet een Bernoulli-experiment.

De kans op succes wordt aangegeven met p .

Het op de gok beantwoorden van een vierkeuzevraag is een Bernoulli-experiment met $p = \frac{1}{4}$. Het op de gok beantwoorden van zeven vierkeuzevragen is een samengesteld kansexperiment dat bestaat uit zeven gelijke Bernoulli-experimenten die onafhankelijk van elkaar zijn. Bij elk van deze Bernoulli-experimenten is $p = \frac{1}{4}$.

Dit samengestelde kansexperiment is een voorbeeld van een **binomiaal kansexperiment**. Essentieel bij een binomiaal kansexperiment is dat je hetzelfde Bernoulli-experiment een aantal keren uitvoert. Dit aantal geven we aan met n . X is het aantal keer succes dat hierbij optreedt. We noemen X een **binomiale toevalsvariabele**. We zeggen ook dat X **binomiaal verdeeld** is.

Binomiaal kansexperiment

n = aantal keer dat het experiment wordt uitgevoerd
 X = aantal keer succes
 p = kans op succes per keer

Een binomiaal kansexperiment is een kansexperiment dat bestaat uit n gelijke Bernoulli-experimenten, waarbij p de kans is op succes per experiment.

Hierbij hoort de toevalsvariabele X = aantal keer succes.

Bij het op de gok beantwoorden van 20 vierkeuzevragen is X het aantal juiste antwoorden. Bij dit binomiale kansexperiment is $n = 20$ en $p = \frac{1}{4}$. De kans $P(X = 7)$ op 7 juiste antwoorden (en dus $20 - 7 = 13$ foute antwoorden) krijg je als volgt.

$$P(X = 7) = \binom{20}{7} \cdot \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{4}}_{7 \text{ keer}} \cdot \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4}}_{13 \text{ keer}} = \binom{20}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13}$$

Er zijn immers $\binom{20}{7}$ rijtjes met 7 juiste en 13 foute antwoorden.

Elk rijtje heeft dezelfde kans van $\left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13}$.

$$\text{Dus } P(X = 7) = \binom{20}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13}.$$

Bij een binomiaal kansexperiment is de kans op k keer succes gelijk aan $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$.

Hierin is n het aantal keer dat het Bernoulli-experiment wordt uitgevoerd en p de kans op succes per experiment.

Voorbeeld

Bereken de kans dat je bij tien worpen met een dobbelsteen vier keer minstens vijf ogen gooit.

Uitwerking

X = aantal keer minstens vijf ogen

X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0,228$$

NORM DRIJF AUTO REEL RAD WIN
 $10C4 * \left(\frac{1}{3}\right)^4 * \left(\frac{2}{3}\right)^6$
 0.2276075801



R23 Stel dat je dezelfde kans wilt berekenen als in het voorbeeld, maar dan met behulp van de variabele Y = aantal keer hoogstens vier ogen.

- Wat zijn de waarden van n , p en k dan?
- Voer de berekening uit en vergelijk de antwoorden.

GESCHIEDENIS

De Bernoulli's

De familie Bernoulli heeft veel beroemde wetenschappers voortgebracht. Oorspronkelijk woonden de Bernoulli's in Antwerpen, maar in 1622 vestigden ze zich in Bazel.

Tot de familieleden die zich met de kansrekening hebben beziggehouden behoort Jacob Bernoulli (1654-1705). Hij was niet alleen geïnteresseerd in empirische kansen (sterftetabellen en juridische statistieken), maar hield zich ook bezig met theoretische kansen gebaseerd op permutaties en combinaties.

In 1690 formuleerde hij de wet van de grote aantallen.

24


In een vaas zitten acht rode, twee witte en tien groene knikkers.

- Carmen pakt met terugleggen zes keer een knikker uit de vaas.
 X = aantal rode knikkers dat Carmen pakt
 Geef n en p en bereken $P(X = 4)$.
- Coen pakt met terugleggen twaalf keer een knikker uit de vaas.
 Y = aantal niet-witte knikkers dat Coen pakt
 Geef n en p en bereken $P(Y = 10)$.
- Mariël pakt zonder terugleggen vier knikkers uit de vaas.
 Z = aantal groene knikkers dat Mariël pakt
 Is Z binomiaal verdeeld? Bereken $P(Z = 3)$.

25


Een honkbalspeelster heeft een slaggemiddelde van 0,3.

- Bereken de kans dat zij in tien achtereenvolgende slagbeurten vijf keer slag heeft.
- Bereken de kans dat zij in vijf achtereenvolgende slagbeurten alleen bij de laatste beurt slag heeft.



026


De toevalsvariabele X is binomiaal verdeeld met $n = 3$ en $p = 0,2$.

Bij X hoort de kansverdeling hiernaast.

- Bereken $P(X \leq 2)$.
- Waarom kun je direct zeggen $P(X \leq 3) = 1$?
- Waarom is $P(X \leq 0) = P(X = 0)$?
- Vul de tabel hiernaast in.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,512	0,384	0,096	0,008

x	0	1	2	3
$P(X \leq x)$				

Theorie B De cumulatieve kansverdeling

In opgave 26 staat een tabel met kansen van het type $P(X \leq x)$. De tabel heet de **cumulatieve kansverdeling** van X .

Een kans als $P(X \leq 2)$ heet een **cumulatieve kans**. De GR heeft opties waarmee voor elke mogelijke n , p en k binomiale en cumulatieve binomiale kansen kunnen worden berekend.

cumuleren = opeenhopen, opstapelen, samenvoegen

[► GR] Neem de module **De binomiale verdeling** door.

Voorbeeld

De schijf in figuur 9.5 is verdeeld in vier even grote sectoren. Sandra laat de schijf zeven keer draaien.

Bereken de kans dat zij

- a drie keer een 1 krijgt
- b hoogstens vier keer een 2 krijgt
- c vier keer een 1 en drie keer een 3 krijgt.

Aanpak

- a • Op de TI kies je binompdf en vul je het volgende in.
pogingen: 7, $p: \frac{1}{2}$, x-waarde: 3
- Op de Casio kies je Bpd en zorg je dat je krijgt BinomialPD(3, 7, $\frac{1}{2}$).
- Op de HP kies je Kans-Dichtheid-Binomiaal en zorg je dat je krijgt BINOMIAL(7, $\frac{1}{2}$, 3).
- b • Op de TI kies je binomcdf.
- Op de Casio kies je Bcd.
- Op de HP kies je Kans-Cumulatief-Binomiaal.

Uitwerking

- a X = aantal keer 1
 X is binomiaal verdeeld met $n = 7$ en $p = \frac{1}{2}$.
De GR geeft $P(X = 3) \approx 0,273$.
- b X = aantal keer 2
 X is binomiaal verdeeld met $n = 7$ en $p = \frac{1}{4}$.
De GR geeft $P(X \leq 4) \approx 0,987$.
- c $P(\text{vier keer een 1 en drie keer een 3}) = \binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \approx 0,034$



figuur 9.5

R27 Zie het voorbeeld.



- a Bereken de kans van vraag a zoals in het voorbeeld op bladzijde 75.
- b Leg uit waarom de kans bij c geen binomiale kans is.

28 De schijf in figuur 9.6 is verdeeld in zes even grote sectoren.
Bereken de kans dat de pijl bij



- a 10 keer draaien drie keer wit aanwijst
- b 12 keer draaien hoogstens vijf keer rood aanwijst
- c 9 keer draaien minstens één keer blauw aanwijst
- d 8 keer draaien vijf keer blauw en drie keer rood aanwijst
- e 16 keer draaien acht keer blauw, vijf keer rood en drie keer wit aanwijst.



figuur 9.6

29


Van een tennisspeelster is bekend dat van haar eerste opslagen 55% in is.
 Bereken de kans dat

- a bij tien servicebeurten vijf keer de eerste opslag in is
- b bij zes servicebeurten alleen de laatste vier keer de eerste opslag in is.



A30


Op een autosnelweg houdt 84% van de automobilisten zich aan de toegestane maximumsnelheid van 100 km/uur. Van de snelheidsovertreders rijdt een kwart zelfs 120 km/uur of meer.
 Bij een radarcontrole wordt van 60 auto's de snelheid gecontroleerd.
 Bereken de kans dat

- a tien automobilisten te hard rijden
- b hoogstens twee automobilisten 120 km/uur of meer rijden
- c een kwart van de automobilisten een snelheid heeft tussen 100 en 120 km/uur.

A31


Van een zeer grote partij accu's is 20% ondeugdelijk. Een opkoper, die dit percentage niet kent, besluit de partij op te kopen als hij in een steekproef van 54 accu's niet meer dan 3 ondeugdelijke accu's aantreft.
 Bereken de kans dat de opkoper de partij koopt.

O32


X is een binomiale toevalsvariabele. De kans op meer dan acht keer succes noteer je als $P(X > 8)$.
 Noteer met behulp van X de kans op

- a minstens vier keer succes
- b minder dan acht keer succes.

Voor $P(X < 6)$ kun je schrijven $P(X \leq 5)$.

Voor $P(X > 4)$ kun je schrijven $1 - P(X \leq 4)$.

Voor $P(3 \leq X \leq 7)$ kun je schrijven

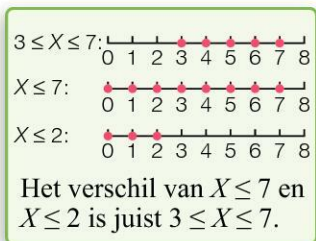
$P(X \leq 7) - P(X \leq 2)$.

Voor $P(3 < X < 7)$ kun je schrijven

$P(X \leq 6) - P(X \leq 3)$.

Herleid tot een vorm met één of meer kansen van het type $P(X \leq k)$.

- | | |
|--------------------------|---|
| c $P(X > 5)$ | g $P(4 < X < 12)$ |
| d $P(X \geq 10)$ | h $P(2 \leq X < 5)$ |
| e $P(X < 7)$ | i $P(4 < X \leq 8)$ |
| f $P(12 \leq X \leq 20)$ | j $P(X \text{ tussen } 8 \text{ en } 20)$ |



Bij 'tussen' doen de grenzen niet mee.

Theorie C Binomiale kansen berekenen

Bij een binomiale toevalsvariabele X moet je kansen kunnen herleiden tot een vorm waarin $P(X = k)$ of $P(X \leq k)$ voorkomt.

Zo is $P(\text{meer dan vier keer succes}) = P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$ en $P(\text{tussen drie en tien keer succes}) = P(3 < X < 10) = P(X \leq 9) - P(X \leq 3)$.

Vervolgens kun je de kansen met de GR berekenen.

Gebruik bij opgaven over binomiale kansexperimenten het volgende werkschema.

Werkschema: binomiale kansen berekenen

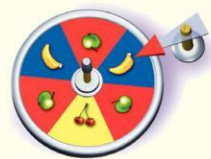
- 1 Omschrijf de betekenis van de toevalsvariabele X .
- 2 Noteer dat X binomiaal verdeeld is en vermeld n en p .
- 3 Noteer de gevraagde kans met X en herleid deze kans zo nodig tot een vorm waarin $P(X = k)$ of $P(X \leq k)$ voorkomt. Bereken deze kans met de GR.

Voorbeeld

De schijf in figuur 9.7 is verdeeld in zes even grote sectoren. Per beurt wijst de pijl één sector aan.

Bereken de kans dat in

- a 20 beurten meer dan acht keer een appel wordt aangewezen
- b 50 beurten minder dan zes keer kersen wordt aangewezen
- c 30 beurten negen of tien keer een banaan wordt aangewezen
- d 25 beurten tussen drie en negen keer kersen wordt aangewezen.



figuur 9.7

Uitwerking

- a X = aantal keer appel
 X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
 $P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8)$
De GR geeft $P(X > 8) \approx 0,748$.
- b X = aantal keer kersen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = \frac{1}{6}$.
 $P(X < 6) = P(X \leq 5)$
De GR geeft $P(X < 6) \approx 0,139$.
- c X = aantal keer banaan
 X is binomiaal verdeeld met $n = 30$ en $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
 $P(X = 9 \text{ of } X = 10) = P(X = 9) + P(X = 10)$
De GR geeft $P(X = 9 \text{ of } X = 10) \approx 0,299$.
- d X = aantal keer kersen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 25$ en $p = \frac{1}{6}$.
 $P(3 < X < 9) = P(X \leq 8) - P(X \leq 3)$
De GR geeft $P(3 < X < 9) \approx 0,603$.

NORM DRIJF AUTO REEEL RAD WIN	
1-binomcdf(20,0.5,8)	0.7482776641
binomcdf(50,1/6,5)	0.1388156459
binompdf(30,1/3,9)+binompdf(30,1/3,10)	0.2987440462
binomcdf(25,1/6,8)-binomcdf(25,1/6,3)	0.6027261258

Functie	
1-BINOMIAL_CDF(20,0.5,8)	0.748277664185
BINOMIAL_CDF(50,1/6,5)	0.138815645925
BINOMIAL(30,1/3,9)+BINOMIAL(30,1/3,10)	0.298744046234
BINOMIAL_CDF(25,1/6,8)-BINOMIAL_CDF(25,1/6,3)	0.602726125027
Opsl	

Op zowel de Casio fx-CG20 en fx-CG50 als de NW en de HP hoeft je binomiale kansen niet altijd te herleiden tot een vorm waarin $P(X \leq k)$ voorkomt.

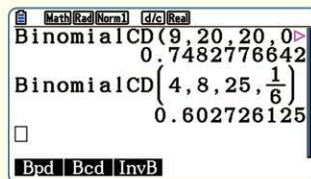
De kans $P(l \leq X \leq r)$ bereken je

- op de Casio fx-CG20 en fx-CG50 met $\text{BinomialCD}(l, r, n, p)$
- op de HP met $\text{BINOMIAL_CDF}(n, p, l, r)$.

Bij vraag a van het voorbeeld gebruik je dat

$P(X > 8) = P(9 \leq X \leq 20)$ en die kans bereken je

- op de Casio fx-CG20 en fx-CG50 met $\text{BinomialCD}(9, 20, 20, 0.5)$
- op de HP met $\text{BINOMIAL_CDF}(20, 0.5, 9, 20)$.



33



Bij een binomiaal kansexperiment met $n = 25$ en $p = 0,42$ is X het aantal keer succes.

Bereken.

- a $P(X < 10)$
- b $P(X \geq 8)$
- c $P(\text{meer dan 12 keer succes})$
- d $P(\text{tussen 9 en 16 keer succes})$
- e $P(\text{minstens 6 keer succes})$
- f $P(9 \text{ of } 10 \text{ keer succes})$

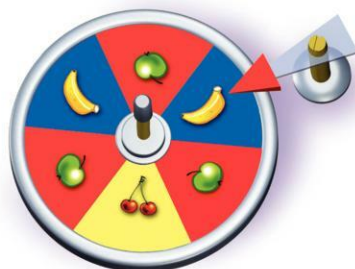
34



Hiernaast zie je nog eens de schijf van het voorbeeld.

Bereken de kans dat de pijl in

- a 10 beurten minstens vijf keer een appel aanwijst
- b 25 beurten tussen de 10 en 20 keer een appel aanwijst
- c 100 beurten meer dan 60 keer een appel aanwijst
- d 35 beurten zeven keer kersen aanwijst.



figuur 9.8

35



In een vaas zitten 12 rode, 8 zwarte en 5 witte knikkers.

Mariëlle pakt twee knikkers uit de vaas en kijkt welke kleur deze knikkers hebben. Mariëlle voert dit experiment 15 keer uit. Elke keer legt ze de getrokken knikkers weer in de vaas terug.

Bereken de kans dat ze

- a drie keer twee rode knikkers pakt
- b minstens tien keer één zwarte knikker pakt
- c minder dan zes keer twee knikkers van dezelfde kleur pakt
- d minstens acht keer minstens één rode knikker pakt.

A36
☐ ⊙ *

Van de bijna drie miljoen kinderen tot 15 jaar die ons land telt, leeft 11% in een eenoudergezin.

Bereken de kans dat

- a in een voetbalelftal van de O13 geen enkele speler uit een eenoudergezin komt
- b in groep 8 van basisschool 'De Cirkel' van de 22 leerlingen er hoogstens twee uit een eenoudergezin komen.

Op muziekschool 'De Blokfluit' zitten 35 kinderen onder de 15 jaar van wie er vijf uit een eenoudergezin komen. Voor een concert worden willekeurig zes kinderen onder de 15 jaar aangewezen.

- c Bereken de kans dat hierbij twee kinderen uit een eenoudergezin zitten.

A37
☐ ⊙ *

Bij een vliegmaatschappij weet men uit ervaring dat de kans dat een passagier bij een vlucht naar Madrid niet komt opdagen 12% is. Voor de vlucht van 10:00 uur op 15 februari naar Madrid zijn 92 stoelen beschikbaar. Er zijn 100 boekingen.

Bereken de kans dat iedereen die komt opdagen een plaats heeft.

E38
*

Bij een verhuurbedrijf van strandstoelen weet men uit ervaring dat 8% van de badgasten die voor een dag een stoel hebben besproken niet komt opdagen. Het bedrijf heeft elke dag in totaal 190 strandstoelen beschikbaar. Hoeveel stoelen zullen dagelijks verhuurd worden als de kans dat iedereen die komt opdagen een stoel heeft minstens 95% moet zijn?



O39
☐ ⊙ *

Jan gooit 30 keer met een dobbelsteen. Hij verwacht vijf keer 6 ogen te gooien.

- a Licht toe waarom hij dit verwacht.

X = aantal keer dat Jan 6 ogen gooit

- b Vul de tabel hiernaast in. Rond af op drie decimalen.

x	3	4	5	6	7
$P(X=x)$					

Theorie D Verwachtingswaarde en standaardafwijking van een binomiale toevalsvariabele

Bij het 1200 keer gooien met een dobbelsteen verwacht je $1200 \cdot \frac{1}{6} = 200$ keer 5 ogen te gooien. Bij deze binomiale verdeling is de kans op het aantal dat je verwacht groter dan de kans op elk ander aantal. Hiervan heb je in opgave 39 een voorbeeld gezien.

Algemeen geldt voor de verwachtingswaarde $E(X)$ van de binomiale toevalsvariabele X dat $E(X) = np$.

In hoofdstuk 2 heb je geleerd wat de standaardafwijking is bij een frequentieverdeling. Ook bij een binomiale toevalsvariabele hoort een standaardafwijking.

Voor de standaardafwijking van de binomiale toevalsvariabele X geldt de formule $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$.

De standaardafwijking van een toevalsvariabele geeft een indruk van de gemiddelde afwijking van de mogelijke uitkomsten tot de verwachtingswaarde.

Van de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X is $E(X) = np$ en $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$.

40



- a Van een binomiale toevalsvariabele X is $n = 140$ en $p = 0,4$. Bereken de kans dat het aantal successen minder dan één standaardafwijking van de verwachtingswaarde afligt.
- b Joep gooit 1000 keer met een dobbelsteen. Bereken de kans dat het aantal keer dat hij 6 ogen gooit meer dan twee keer de standaardafwijking van de verwachtingswaarde afligt.

E41



Bewering: Bij een binomiale verdeling ligt bij grote waarden van n ongeveer 68,3% van de successen minder dan één standaardafwijking van de verwachtingswaarde af. Onderzoek of deze bewering waar is voor enkele waarden van n en p .

A42



- Autoverkoper Nico houdt al jaren bij hoeveel van de door hem opgestelde offertes daadwerkelijk tot verkoop leiden. Hij maakt daarbij onderscheid tussen offertes voor nieuwe auto's en offertes voor occasions. Voor beide soorten geldt dat het aantal offertes dat tot verkoop leidt binomiaal verdeeld is. De kans dat een offerte voor een occasion tot verkoop leidt is 0,28.
- a In het eerste kwartaal van 2020 leidden 21 offertes voor een occasion tot verkoop. Dat is precies zoveel als het verwachte aantal. Hoeveel offertes voor occasions heeft Nico in het eerste kwartaal van 2020 opgesteld?
 - b Nico spreekt van een slecht resultaat als het aantal offertes dat tot verkoop leidt meer dan twee standaardafwijkingen kleiner is dan verwacht. In het tweede kwartaal van 2020 stelde Nico 100 offertes voor occasions op en behaalde hij een slecht resultaat. Hoeveel offertes voor occasions leidden in het tweede kwartaal van 2020 tot verkoop?
 - c In 2020 heeft Nico in totaal 217 offertes voor nieuwe auto's opgesteld. Van deze offertes leidden er 90 tot verkoop. Dat is twee standaardafwijkingen meer dan het aantal dat Nico had verwacht. Bereken de kans dat een offerte voor een nieuwe auto tot verkoop leidt.

Terugblik

Bernoulli-experiment

Een Bernoulli-experiment is een kansexperiment waarbij je alleen op de gebeurtenis 'succes' en de complement-gebeurtenis 'mislukking' let. Het hangt af van de situatie welke gebeurtenis je succes noemt en welke mislukking.

$$P(\text{succes}) = p \text{ en } P(\text{mislukking}) = 1 - p$$

Binomiaal kansexperiment

Het herhaald uitvoeren van een kansexperiment waarbij je alleen op de gebeurtenissen 'succes' en 'mislukking' let, heet een binomiaal kansexperiment.

- n is het aantal keer dat het experiment wordt uitgevoerd
- p is de kans op succes per keer
- X is het aantal keer succes

De kans op k keer succes is $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$.

Berekenen van binomiale kansen

Bij het berekenen van binomiale kansen ga je als volgt te werk.

- 1 Omschrijf de betekenis van de toevalsvariabele X .
- 2 Noteer dat X binomiaal verdeeld is en vermeld n en p .
- 3 Noteer de gevraagde kans met X en herleid deze kans zo nodig tot een vorm waarin $P(X = k)$ of $P(X \leq k)$ voorkomt. Bereken deze kans met de GR.

$$\begin{aligned} P(X \text{ tussen } 3 \text{ en } 6) &= \\ P(X \leq 5) - P(X \leq 3), \\ \text{maar ook} \\ P(X \text{ tussen } 3 \text{ en } 6) &= \\ P(X = 4) + P(X = 5). \end{aligned}$$

Zo krijg je de kans op minstens vijf juiste antwoorden bij het op de gok beantwoorden van 20 vierkeuzevragen als volgt.

X = aantal juiste antwoorden

X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = \frac{1}{4}$.

Je berekent $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$ als volgt.

TI: $P(X \geq 5) = 1 - \text{binomcdf}(20, \frac{1}{4}, 4) \approx 0,585$

Casio: $P(X \geq 5) = 1 - \text{BinomialCD}(4, 20, \frac{1}{4}) \approx 0,585$
of $\text{BinomialCD}(5, 20, 20, \frac{1}{4})$

HP: $P(X \geq 5) = 1 - \text{BINOMIAL_CDF}(20, \frac{1}{4}, 4) \approx 0,585$
of $\text{BINOMIAL_CDF}(20, \frac{1}{4}, 5, 20)$

Verwachtingswaarde en standaardafwijking van een binomiale toevalsvariabele

Van de binomiale toevalsvariabele X is de verwachtingswaarde

$$E(X) = np \text{ en de standaardafwijking } \sigma_X = \sqrt{np(1-p)}.$$

De standaardafwijking van een toevalsvariabele geeft een indruk van de gemiddelde afwijking van de mogelijke uitkomsten tot de verwachtingswaarde.

Bij het op de gok beantwoorden van 20 vierkeuzevragen is

$$E(X) = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5 \text{ en } \sigma_X = \sqrt{20 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \approx 1,94.$$

9.3 Berekeningen bij normaalkrommen

043

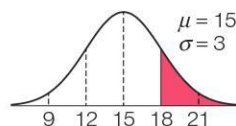

In hoofdstuk 2 heb je kennism gemaakt met de normale verdeling. Voor de oppervlakte onder de bijbehorende verdelingskromme, de zogeheten normaalkromme, heb je de vuistregels hiernaast geleerd. De totale oppervlakte onder de kromme komt overeen met 100%.

Vuistregels bij normale verdeling met gemiddelde μ en standaardafwijking σ :

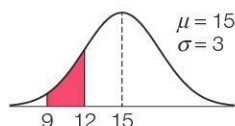
- 68% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- 95% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.

In figuur 9.9 zie je de normaalkromme met gemiddelde $\mu = 15$ en standaardafwijking $\sigma = 3$.

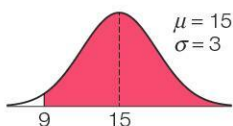
- a** Licht toe dat de oppervlakte van het rode gebied ongeveer 16% oftewel 0,16 is.
- b** De normaalkrommen in figuur 9.10 horen bij $\mu = 15$ en $\sigma = 3$. Geef van elk gebied de oppervlakte. Gebruik de vuistregels. Noteer de antwoorden met een getal tussen 0 en 1.



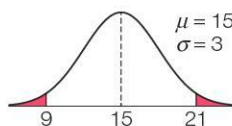
figuur 9.9



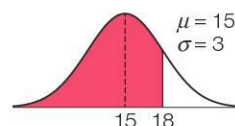
a
figuur 9.10



b



c



d

Theorie A Oppervlakten berekenen met de GR

Hierboven heb je van enkele gebieden onder een normaalkromme met de vuistregels de oppervlakte bepaald. Met de GR kun je elke oppervlakte onder een normaalkromme berekenen. Bij het berekenen van deze oppervlakten heb je te maken met de variabelen

l = linkergrens

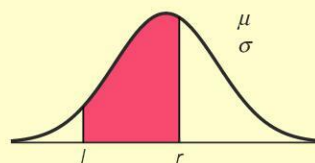
r = rechtergrens

μ = gemiddelde

σ = standaardafwijking.

Het rode gebied in figuur 9.10b heeft geen rechtergrens, terwijl je bij sommige typen GR's wel een grens moet invoeren. Om te voorkomen dat je in zo'n geval telkens moet bedenken wat een geschikte rechtergrens is, gebruik je altijd het grote getal 10^{99} .

Het rode gebied in figuur 9.10d heeft geen linkergrens. In zo'n geval gebruik je als linkergrens -10^{99} .



figuur 9.11

Afspraak

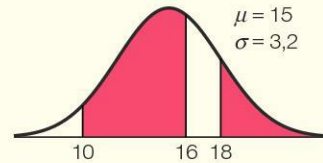
Rond oppervlakten onder normaalkrommen af op drie decimalen.

Voorbeeld

Gegeven is de normaalkromme in figuur 9.12.

Bereken de oppervlakte van het gebied

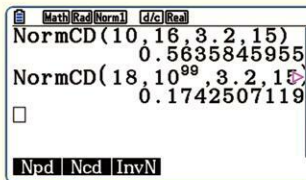
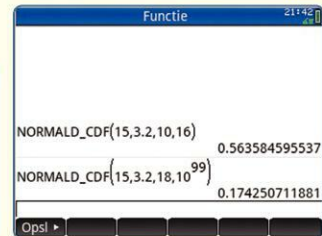
- tussen 10 en 16
- rechts van 18.



figuur 9.12

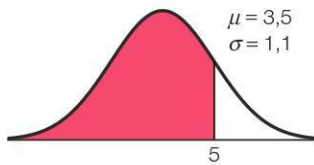
Uitwerking

- Normale verdeling met $\mu = 15$ en $\sigma = 3,2$.
Bij $l = 10$ en $r = 16$ geeft de GR opp $\approx 0,564$.

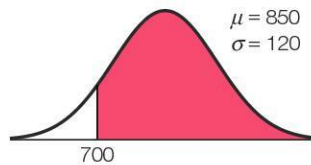


- Normale verdeling met $\mu = 15$ en $\sigma = 3,2$.
Bij $l = 18$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,174$.

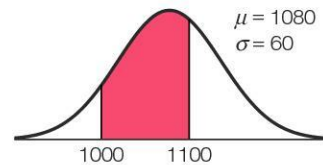
- 44** Bij de normaalkrommen in figuur 9.13 zijn steeds μ en σ vermeld. Bereken telkens de oppervlakte van het rode gebied.



a



b



c

figuur 9.13

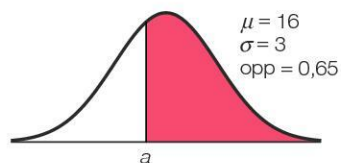
- 45** Bij een normale verdeling is $\mu = 520$ en $\sigma = 18$.

- Bereken de oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme links van 480. Maak eerst een schets en kleur het gebied.
- Bereken de oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme rechts van 510.

- 46** Bij een normale verdeling is $\mu = 5,8$ cm en $\sigma = 0,4$ cm.
 ☐⊗* Hoeveel procent van de waarnemingsgetallen
 a is kleiner dan 5,1 cm
 b is groter dan 5,25 cm
 c ligt tussen 6,1 en 6,4 cm?

- E47** Volgens een van de vuistregels bij de normale verdeling ligt 68% van
 * de waarnemingsgetallen binnen één standaardafwijking van het gemiddelde. Hierbij is het percentage afgerond op gehelen.
 a Zoek met de GR uit hoeveel dat percentage in twee decimalen is.
 b Bereken bij de andere vuistregel het percentage in twee decimalen.

- O48** Zie figuur 9.14.
 ☐⊗* Gegeven is dat de oppervlakte van het gebied rechts van a gelijk is aan 0,65.
 Wat weet je van de oppervlakte van het gebied links van a ?

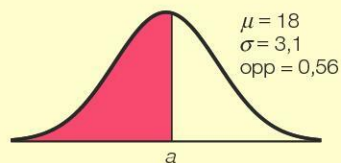


figuur 9.14

Theorie B Grenzen berekenen met de GR

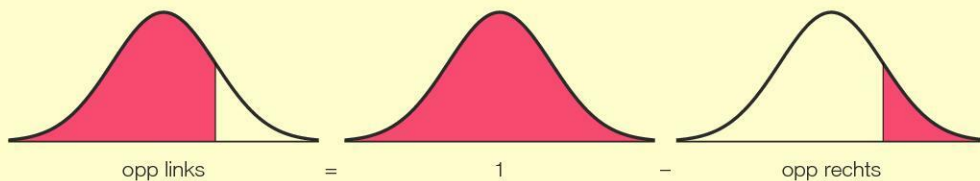
In figuur 9.15 is de oppervlakte van het rode gebied, dus de oppervlakte links van a , gelijk aan 0,56. Je kunt met de GR berekenen dat $a \approx 18,47$.

[▶ GR] Neem uit de module **De normale verdeling** het gedeelte *Grenzen berekenen door*.

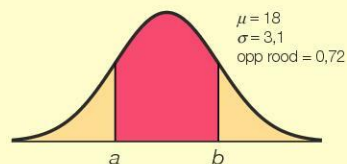


figuur 9.15

Is de oppervlakte rechts van a gegeven, dan is de oppervlakte links van a te berekenen met
 opp links = $1 - \text{opp rechts}$.
 Zie de figuur hieronder.



Is de oppervlakte van een gebied tussen twee verticale lijnen onder een normaalkromme gegeven, dan is het meestal niet mogelijk de bijbehorende grenzen te berekenen. Maar is het gebied symmetrisch, dan lukt het wel. Zo kun je bij het symmetrische gebied in figuur 9.16 de grenzen a en b als volgt berekenen.



figuur 9.16

De oppervlakte van de twee gele gebieden samen is $1 - 0,72 = 0,28$.

Dus de oppervlakte links van a is $\frac{1}{2} \cdot 0,28 = 0,14$.

De GR geeft $a \approx 14,65$.

De oppervlakte links van b is $\frac{1}{2} \cdot 0,28 + 0,72 = 0,86$.

De GR geeft $b \approx 21,35$.

Afspraak

Gebruik bij het berekenen van de grens a de volgende vuistregel.

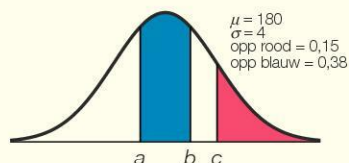
Rond a af op één decimaal meer dan de gegeven σ .

Voorbeeld

Bij een normale verdeling is $\mu = 180$ en $\sigma = 4$.

Zie figuur 9.17.

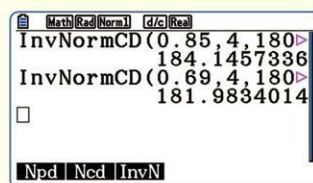
- De oppervlakte van het rode gebied is 0,15. Bereken c .
- De oppervlakte van het symmetrische blauwe gebied is 0,38. Bereken b .



figuur 9.17

Uitwerking

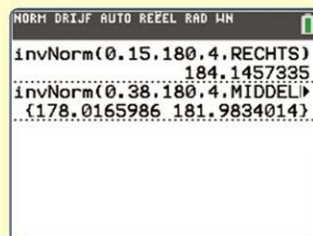
- Normale verdeling met $\mu = 180$ en $\sigma = 4$.
opp links van c is $1 - 0,15 = 0,85$
De GR geeft $c \approx 184,1$.
- Normale verdeling met $\mu = 180$ en $\sigma = 4$.
opp links van b is $\frac{1}{2}(1 - 0,38) + 0,38 = 0,69$
De GR geeft $b \approx 182,0$.



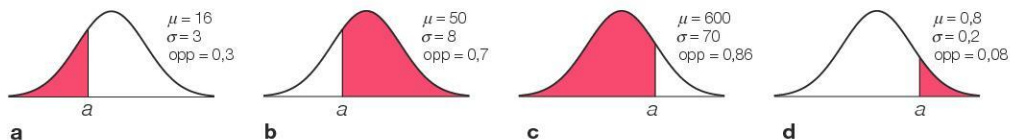
Op de TI kun je bij Staart kiezen uit links, midden en rechts.

In voorbeeld a gebruik je opp rechts van c is 0,15 en kies je bij Staart: RECHT.

In voorbeeld b gebruik je opp tussen a en b is 0,38 en kies je Staart: MIDD. Zie het GR-scherm hiernaast.

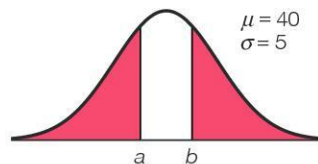


- 49** Bij de normaalkrommen in figuur 9.18 is bij gegeven μ en σ de oppervlakte van het rode gebied vermeld. Bereken telkens a .



figuur 9.18

- 50** Het gebied onder de normaalkromme in figuur 9.19 is in drie stukken met gelijke oppervlakte verdeeld. Bereken a en b .

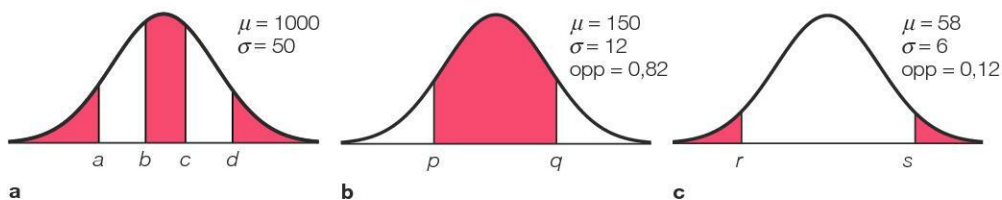


figuur 9.19

- A51** Het gebied onder de normaalkromme in figuur 9.20a is in vijf stukken met gelijke oppervlakte verdeeld.
- a** Bereken a , b , c en d .

De gebieden in de figuren 9.20b en 9.20c zijn symmetrisch.

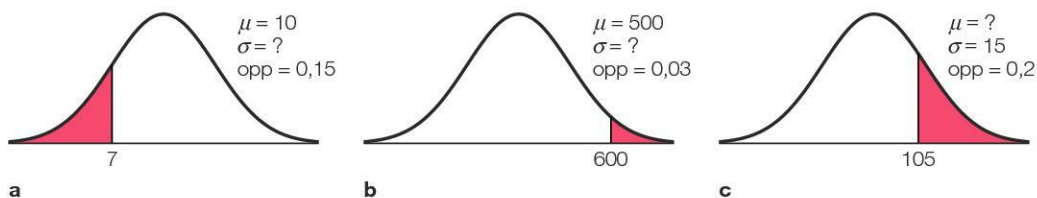
- b** Bereken p , q , r en s .



figuur 9.20

- A52** Van een normale verdeling is $\mu = 2,3$ en $\sigma = 0,08$. De verticale lijn bij a deelt het gebied onder de normaalkromme tussen 2,18 en 2,36 in twee stukken met gelijke oppervlakte. Bereken a .

- 053** Bij de normaalkrommen in figuur 9.21 is telkens σ of μ onbekend. Gebruik de vuistregels bij de normale verdeling om een schatting van σ of μ te geven.



figuur 9.21

Theorie C Het berekenen van μ of σ

In het voorbeeld is van een gebied onder een normaalkromme de oppervlakte gegeven. Verder is het gemiddelde μ gegeven, maar de standaardafwijking σ is onbekend.

Om σ te berekenen, ga je een vergelijking oplossen door twee formules in te voeren op de GR en de optie snijpunt te gebruiken.

Bij het kiezen van een geschikt venster gebruik je een schatting van σ om te bepalen tussen welke waarden je x neemt.

Je gebruikt de gegeven oppervlakte om te bepalen tussen welke waarden je y neemt. Je neemt y tussen 0 en ongeveer twee keer de gegeven oppervlakte. Hiermee komt de horizontale lijn die hoort bij de oppervlakte ongeveer halverwege het GR-scherf.

[► GR] Neem uit de module **De normale verdeling** het gedeelte *Het berekenen van μ en σ door*.

Voorbeeld

Bij een normale verdeling is $\mu = 28$. De oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme rechts van 23 is 0,83.

Bereken σ . Rond af op één decimaal.

Aanpak

Maak een schets van de situatie.

Op grond van de schets schat je $\sigma = 5$, dus neem x tussen 0 en 10.

Omdat opp = 0,83 neem je y tussen 0 en bijvoorbeeld 1,6.

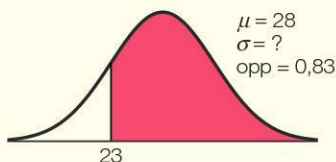
Om de vergelijking opp = 0,83 op te lossen, voer je in

- op de TI: $y_1 = \text{normalecdf}(23, 10^{99}, 28, x)$ en $y_2 = 0,83$
- op de Casio: $y_1 = \text{NormCD}(23, 10^{99}, x, 28)$ en $y_2 = 0,83$
- op de HP: $y_1 = \text{NORMALD_CDF}(28, x, 23, 10^{99})$ en $y_2 = 0,83$.

Bij de NW los je de vergelijking opp = 0,17 op. Je voert in

$y_1 = \text{normcdf}(23, 28, x)$ en $y_2 = 0,17$.

Uitwerking



Normale verdeling met $\mu = 28$, $\sigma = x$, $l = 23$ en $r = 10^{99}$.

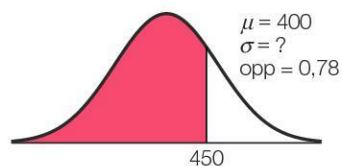
Los op opp = 0,83.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,83$.

De optie snijpunt geeft $x = 5,24\dots$, dus $\sigma \approx 5,2$.

54 Van de normaalkromme in figuur 9.22 is $\mu = 400$ en is σ onbekend. Verder is gegeven dat de oppervlakte van het gebied links van 450 gelijk is aan 0,78.

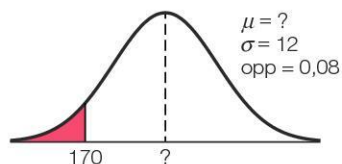
- Geef een schatting van σ op grond van figuur 9.22. Welk venster is dus een geschikte keuze?
- Bereken de standaardafwijking. Rond af op één decimaal.



figuur 9.22

55 Van de normaalkromme in figuur 9.23 is $\sigma = 12$ en is μ onbekend. De oppervlakte van het gebied links van 170 is 0,08.

- Geef een schatting van μ op grond van figuur 9.23. Welk venster is dus een geschikte keuze?
- Bereken μ . Rond af op gehele.



figuur 9.23

56 Bij een normale verdeling is $\sigma = 3,8$. De oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme rechts van 17 is 0,28. Maak een schets van de situatie en bereken μ . Rond af op één decimaal.

57 Bij een normale verdeling is $\mu = 2200$. Het gebied onder de normaalkromme tussen 2080 en 2320 heeft een oppervlakte van 0,62. Bereken σ . Rond af op tientallen.

A58 De oppervlakte van het gebied onder een normaalkromme rechts van 14,6 is gelijk aan 0,41.

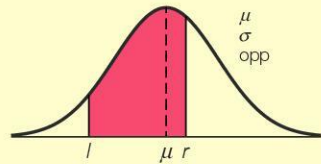
- Bereken μ als gegeven is dat $\sigma = 3,5$. Rond af op één decimaal.
- Bereken σ als gegeven is dat $\mu = 12,3$. Rond af op één decimaal.

R59 Zie het voorbeeld op bladzijde 89. Daar wordt met de GR een vergelijking opgelost waarbij $y_2 = 0,83$ is gebruikt. Je kunt ook een vergelijking oplossen waarbij je $y_2 = 23$ gebruikt. Wat voer je dan bij y_1 in? Controleer of je hetzelfde antwoord krijgt.

Terugblik

Oppervlakten en normaalkrommen

Bij opgaven over oppervlakten onder een normaalkromme spelen vijf getallen een rol: het gemiddelde μ , de standaardafwijking σ , de linkergrens l , de rechtergrens r en de oppervlakte van het gebied. Zijn er vier bekend, dan kun je het vijfde getal berekenen.



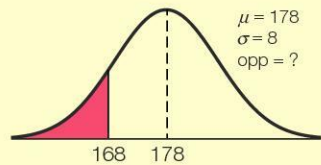
Oppervlakten berekenen

Bij de normale verdeling met $\mu = 178$ en $\sigma = 8$ bereken je de oppervlakte van het gebied links van 168 als volgt met de GR.

TI: $\text{normalecdf}(-10^{99}, 168, 178, 8) \approx 0,106$

Casio: $\text{NormCD}(-10^{99}, 168, 8, 178) \approx 0,106$

HP: $\text{NORMALD_CDF}(178, 8, -10^{99}, 168) \approx 0,106$



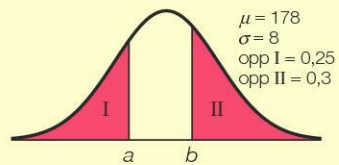
Grenzen berekenen

De oppervlakte van het gebied links van a is gelijk aan 0,25. Je berekent a als volgt.

TI: $a = \text{invNorm}(0,25, 178, 8, \text{LINKS}) \approx 172,6$

Casio: $a = \text{InvNormCD}(0,25, 8, 178) \approx 172,6$

HP: $a = \text{NORMALD_ICDF}(178, 8, 0,25) \approx 172,6$



De oppervlakte van het gebied rechts van b is gelijk aan 0,3.

De oppervlakte links van b is dus gelijk aan $1 - 0,3 = 0,7$.

Je berekent b als volgt.

TI: $b = \text{invNorm}(0,3, 178, 8, \text{RECHTS}) \approx 182,2$

Casio: $b = \text{InvNormCD}(0,7, 8, 178) \approx 182,2$

HP: $b = \text{NORMALD_ICDF}(178, 8, 0,7) \approx 182,2$

Het berekenen van μ of σ

De oppervlakte van het gebied rechts van 80 is gelijk aan 0,72 en $\sigma = 25$. Je berekent het gemiddelde als volgt.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,72$.

TI: $y_1 = \text{normalcdf}(80, 10^{99}, x, 25)$

Casio: $y_1 = \text{NormCD}(80, 10^{99}, 25, x)$

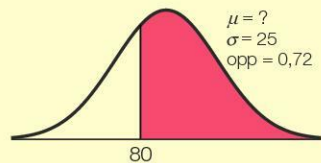
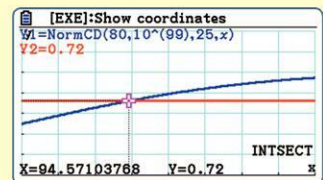
HP: $y_1 = \text{NORMALD_ICDF}(x, 25, 80, 10^{99})$

Op grond van de figuur schat je $\mu = 100$, dus neem je x bijvoorbeeld tussen 80 en 120.

Omdat $\text{opp} = 0,72$ neem je y tussen 0 en bijvoorbeeld 1,4.

De optie snijpunt geeft $x \approx 94,571$. Dus $\mu \approx 94,6$.

Op een soortgelijke manier kun je bij een gegeven μ een onbekende σ berekenen.



9.4 Toepassingen van de normale verdeling

O60
  *

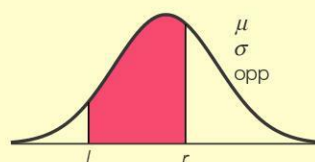
Van een groep jongens is de lengte normaal verdeeld met gemiddelde 178 cm en standaardafwijking 5,4 cm.

- Schets een normaalkromme en geef hierin het gebied aan dat hoort bij de jongens die langer zijn dan 182 cm. Bereken de oppervlakte van dit gebied.
- Hoeveel procent van de jongens is langer dan 182 cm?
- Wat is de kans dat een willekeurig gekozen jongen uit deze groep langer is dan 182 cm?

Theorie A Percentages en kansen bij de normale verdeling

Bij opgaven over de normale verdeling heb je te maken met l , r , μ , σ en opp die in figuur 9.24 zijn aangegeven. Van deze getallen zijn er vier bekend en moet je het vijfde berekenen.

Je gebruikt daarbij het volgende werkschema.



figuur 9.24

Werkschema: maken van opgaven over de normale verdeling

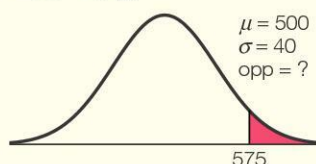
- Schets een normaalkromme en verwerk hierin l , r , μ , σ en opp. Kleur het gebied dat bij de vraag hoort.
- Bereken met de GR het ontbrekende getal.
- Beantwoord de gestelde vraag.

Voorbeeld

Bij een supermarkt is de op vrijdag verkochte hoeveelheid appels normaal verdeeld met $\mu = 500$ kg en $\sigma = 40$ kg.

Bereken de kans dat op een vrijdag meer dan 575 kg appels wordt verkocht.

Uitwerking



X = aantal kg verkochte appels

X is normaal verdeeld met $\mu = 500$ en $\sigma = 40$.

De GR geeft $P(X > 575) \approx 0,030$.

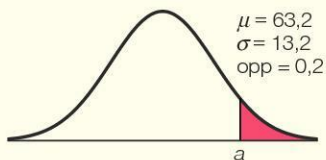
Voorbeeld

Bij een toelatingstest met gehele scores zijn de scores normaal verdeeld met een gemiddelde van 63,2 en een standaardafwijking van 13,2.

Op grond van deze test wil men hoogstens 20% van de deelnemers uitnodigen voor een vervolgtest.

Vanaf welke score mag je aan de vervolgtest meedoen?

Uitwerking



Normale verdeling met $\mu = 63,2$ en $\sigma = 13,2$.

opp links = $1 - 0,20 = 0,80$

De GR geeft $a \approx 74,31$.

Let op: naar boven afronden.

Vanaf een score van 75 mag je aan de vervolgtest meedoen.

R61
☐ ⊗ *

a Zou het antwoord bij het eerste voorbeeld anders zijn geweest als in de vraag “minstens 575 kg” had gestaan? Licht toe.

b Waarom is in het tweede voorbeeld het eindantwoord naar boven afgerond?

62
☐

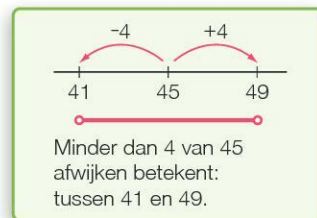
Uit onderzoek blijkt dat de lengte van volwassen forellen in een rivier normaal verdeeld is met $\mu = 45$ cm en $\sigma = 5$ cm.

a Hoeveel procent van de volwassen forellen heeft een lengte van minder dan 36 cm?

b Bereken de kans dat een volwassen forel een lengte heeft tussen 44 en 52 cm.

c In een week worden 240 volwassen forellen gevangen. Hoeveel daarvan, verwacht je, zijn langer dan 53 cm?

d Hoeveel procent van de volwassen forellen heeft een lengte die minder dan 4 cm van het gemiddelde afwijkt?



63
☐ ⊗

Van de 1600 mannelijke werknemers van een bedrijf is het gewicht normaal verdeeld met $\mu = 78$ kg en $\sigma = 12$ kg.

a Hoeveel van deze mannen zijn naar verwachting zwaarder dan 60 kg? En hoeveel lichter dan 65 kg?

b Bereken de kans dat het gewicht van een man uit deze groep meer dan 5 kg van het gemiddelde afwijkt.

c Hoeveel van deze werknemers, verwacht je, wegen meer dan 105 kg?

d De 10% zwaarste mannen worden door de bedrijfsarts opgeroepen voor controle.

Vanaf welk gewicht in gehele kg kun je een oproep verwachten?

64
☐ ⊙ *

Van een bepaald type batterij is de levensduur normaal verdeeld met $\mu = 85$ uur en $\sigma = 280$ minuten.

- a De fabrikant garandeert een levensduur van 78 uur.
Hoeveel procent van de batterijen voldoet niet aan deze garantie?
- b Door een verandering in het fabricageproces weet de fabrikant de standaardafwijking terug te brengen tot 170 minuten.
Hoeveel procent voldoet nu niet aan de garantie?

65
☐ ⊙

Op een visafslag wordt een partij sardientjes aangeboden met een gemiddelde lengte van 11,5 cm en een standaardafwijking van 18 mm. Ga ervan uit dat de lengte normaal verdeeld is.

De vissen worden verdeeld in vier klassen.

klasse I: minder dan 9 cm

klasse II: van 9 cm tot 11 cm

klasse III: van 11 cm tot 13 cm

klasse IV: meer dan 13 cm

- a Bereken van elke klasse hoeveel procent van de sardientjes ertoe behoort.

Er wordt besloten over te gaan op een verdeling in drie klassen zo, dat elke klasse evenveel sardientjes bevat.

- b Bereken de grenzen van de middelste klasse. Rond af op mm.



66
*

Op een visafslag wordt een partij sardientjes aangeboden met een gemiddelde lengte van 11,5 cm en een standaardafwijking van 18 mm. Ga ervan uit dat de lengte normaal verdeeld is.

Neem aan dat de sardientjes met een lengte van minstens 12 cm worden verdeeld in twee klassen die evenveel sardientjes bevatten.

Bereken in mm nauwkeurig de grens tussen deze klassen.

67
☐◎*

In een groep sollicitanten is het IQ normaal verdeeld met $\mu = 115,2$ en $\sigma = 13,1$.

De sollicitanten van wie het IQ tot de hoogste 10% behoort, komen in aanmerking voor een vervolgttest. De sollicitanten met de volgende 25% van de IQ-waarden krijgen een herkansing.

- a Vanaf welk IQ mag je deelnemen aan de vervolgttest? Rond af op gehelen.
- b Bij welk IQ krijg je een herkansing? Rond af op gehelen.

68
☐◎*

Een machine vult pakken groente met een gemiddeld gewicht van 250 gram. De fabrikant wil dat 90% van de pakken een gewicht heeft dat maximaal 5 gram afwijkt van deze 250 gram.

- a Welke standaardafwijking accepteert hij? Neem aan dat het vulgewicht normaal verdeeld is en rond af op twee decimalen.

Een andere vulmachine van pakken groente heeft een standaardafwijking van 4 gram. De fabrikant wil het gemiddelde zo instellen dat niet meer dan 10% van de pakken minder dan 250 gram bevat.

- b Op welk gemiddelde moet hij de machine instellen? Ga weer uit van een normale verdeling en rond af op gehelen.

A69
☐◎*

Op een pak wasmiddel van het merk Bright staat dat de inhoud 2,5 kg is. De inhoud van de pakken is normaal verdeeld met $\sigma = 0,12$ kg.

- a Neem aan dat de vulmachine is ingesteld op een gemiddeld gewicht van 2,52 kg.
Bereken de kans dat een willekeurig pak Bright minder dan 2,5 kg weegt.
- b Neem aan dat de vulmachine is ingesteld op een gemiddeld gewicht van 2,56 kg.
Hoeveel procent van de pakken wijkt meer dan 0,3 kg af van het gemiddelde gewicht?
- c De fabrikant wil dat maximaal 4% van de pakken Bright minder dan 2,5 kg bevat.
Op welk gemiddelde moet hij de vulmachine instellen?
- d Bij een controle blijkt 1 op de 50 pakken wasmiddel meer dan 2,72 kg te bevatten.
Op welk gemiddelde is de vulmachine ingesteld? Rond af op twee decimalen.
- e Neem aan dat de vulmachine is ingesteld op een gemiddelde van 2,53 kg. De fabrikant besluit de pakken met een inhoud tussen 2,50 kg en 2,60 kg in twee partijen te verdelen die beide evenveel pakken bevatten.
Bereken bij welk gewicht hij de grens moet leggen.

A70
☐ ⊙ *

De productietijd van een zeker artikel bij de firma Driessen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1 uur en 3 minuten.

- a** Bereken de kans dat de productietijd van zo'n artikel minder dan 4 minuten afwijkt van het gemiddelde in het geval de standaardafwijking 125 seconden is.
- b** Bereken de standaardafwijking in seconden nauwkeurig als de productietijd van 30% van deze artikelen meer dan 2,5 minuut afwijkt van het gemiddelde.
- c** Op een dag produceert Driessen 7000 van deze artikelen. Van 1 op de 5 exemplaren is de productietijd meer dan 66 minuten. Bereken de standaardafwijking in seconden nauwkeurig.

A71
*

Uit onderzoek is bekend dat het kopergehalte van de messing sierkannetjes van fabrikant Zomerhuis normaal verdeeld is met een gemiddelde van 68%.
Per 100 kannetjes zijn er 9 met een kopergehalte van meer dan 70%.
De kannetjes met een kopergehalte van minder dan 65,5% worden uit de handel genomen.
Hoeveel zijn dat er naar verwachting bij een productie van 500 stuks?

Terugblik

Oppervlakten en kansen

Van een groep mannen is de lengte normaal verdeeld met $\mu = 178$ cm en $\sigma = 8$ cm.

De volgende vragen komen op hetzelfde neer.

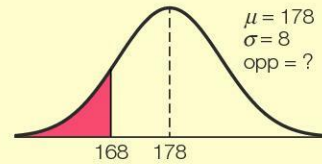
- 1 Wat is de oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme links van 168?
- 2 Hoeveel procent van de mannen is kleiner dan 168 cm?
- 3 Wat is de kans dat een willekeurig gekozen man van deze groep kleiner is dan 168 cm?

Bij $l = -10^{99}$ en $r = 168$ geeft de GR opp $\approx 0,106$.

De oppervlakte is 0,106.

Dat is dus 10,6%.

De kans is 0,106.



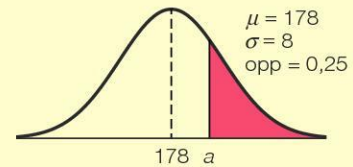
$X = \text{lengte man in cm}$
 $P(X < 168) \approx 0,106$

Grenzen en percentages

Bij de vraag 'Welke lengten horen bij de 25% langste mannen?' gebruik je de figuur hiernaast.

De oppervlakte links van a is $1 - 0,25 = 0,75$.

De GR geeft $a \approx 183,4$, dus 183,4 cm en langer.



Aantallen en de normale verdeling

De hierboven genoemde groep omvat 18 760 mannen.

- Het aantal mannen dat naar verwachting kleiner is dan 173 cm bereken je als volgt.

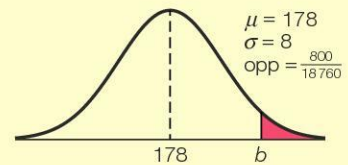
Bij $l = -10^{99}$ en $r = 173$ geeft de GR opp $= 0,265\dots$

Dus aantal $= 0,265\dots \cdot 18\,760 \approx 4990$.

- De 800 mannen met de grootste lengte worden geselecteerd. Om te bepalen vanaf welke lengte een man tot de selectie behoort, ga je als volgt te werk.

De oppervlakte links van b is $1 - \frac{800}{18\,760} = 0,957\dots$

De GR geeft $b \approx 191,8$, dus vanaf 191,8 cm.



Berekenen van onbekende standaardafwijking

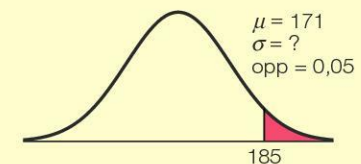
Van een groep vrouwen is de lengte normaal verdeeld met $\mu = 171$ cm. Gegeven is dat 5% een lengte heeft van meer dan 185 cm.

Normale verdeling met $\mu = 171$, $\sigma = x$, $l = 185$ en $r = 10^{99}$.

Om σ te berekenen, los je op opp $= 0,05$.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,05$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 8,5$, dus $\sigma = 8,5$ cm.



Eindopdracht Loterij-strategieën

Bij een loterij is de verwachtingswaarde van de winst per lot normaal gesproken negatief.

Stel je een loterij voor met 1000 loten die elk 1 euro kosten. Er is één eerste prijs van 500 euro en er zijn tien tweede prijzen van elk 40 euro. De kans op de eerste prijs is 0,001 en de kans op een tweede prijs is 0,01. De verwachtingswaarde van de winst per lot is dan 10 cent verlies. Zou je alle 1000 loten kopen, dan heb je dus 100 euro verlies.

- Laat met een berekening zien dat de genoemde verwachtingswaarde juist is.

Koop je bij deze loterij één lot, dan verlies je 1 euro, of je wint 39 euro, of je wint 499 euro. De kans dat je iets wint met één lot is niet zo groot en de verwachtingswaarde van de winst per lot is negatief.

Stel je voor dat deze loterij de regels zou veranderen. Er zijn nog steeds 1000 loten die per stuk 1 euro kosten. De eerste prijs is nog steeds 500 euro en de kans hierop is 0,001. Er zijn nog steeds tien tweede prijzen en de kans op een tweede prijs is nog steeds 0,01. Maar een tweede prijs is nu 80 euro in plaats van 40 euro. Alhoewel de kansen op de eerste prijs en op een tweede prijs niet zijn veranderd, is de verwachtingswaarde van de winst per lot nu positief. Het wordt dan lucratief om veel loten te kopen. Zou je in dit laatste geval alle 1000 loten kopen, dan maak je gegarandeerd winst.

- Bereken de verwachtingswaarde die bij deze situatie hoort.

Een voorbeeld van een situatie waarbij de verwachtingswaarde van de winst per lot positief is, heb je gezien in de beginopdracht. Dat was bij de speciale trekking van de Winfall loterij. Jerry en Marge maakten daar gebruik van en wonnen zo in enkele jaren omgerekend bijna 7 miljoen euro. In eerste instantie deden ze dat in hun thuisstaat Michigan, maar toen de loterij daar na een aantal jaren stopte, moesten ze op zoek naar een alternatief. Dat alternatief vonden ze honderden kilometers verderop, in de staat Massachusetts, waar een soortgelijke loterij was.

Na verloop van tijd bleken ze daar echter niet de enige slimmeriken te zijn. Een groep studenten en professoren van de gerenommeerde universiteit MIT speelde op nóg grotere schaal mee, met een net iets andere strategie. Zij lieten hun getallen niet automatisch door de verkoopmachine kiezen en printen, zoals Jerry en Marge, maar hadden een bijzondere lijst van combinaties van getallen die ze met de hand invulden. Een hoop meer werk, maar er zat ook een voordeel aan. In deze opdracht bekijk je de strategie van de MIT-groep met behulp van een eenvoudige versie van de loterij en ontdek je wat het voordeel was.

In de eenvoudige versie staan op een lot de getallen 1 tot en met 7, waarvan je er drie aankruist. Vervolgens worden bij de trekking drie van de getallen 1 tot en met 7 aangewezen.

Je wint een hoofdprijs als je alle drie de getallen goed hebt, en je wint een tweede prijs als je twee van de drie getallen goed hebt. Verder zijn er geen prijzen. Er zijn 1000 loten en de prijs per lot is 1 euro. De hoofdprijs is 18 euro en de tweede prijs is 2 euro.

Je kunt berekenen dat bij deze loterij de kans op een hoofdprijs $\frac{1}{35}$ is en de kans op een tweede prijs $\frac{12}{35}$. Hiermee komt de verwachtingswaarde van de winst per lot op 20 cent.

- Laat met berekeningen zien dat deze kansen kloppen en dat ook de verwachtingswaarde klopt.

Hierboven heb je gezien dat een positieve verwachtingswaarde van de winst per lot niet betekent dat je met één lot een prijs wint. Zelfs als je met meerdere loten meespeelt, dan hoeft je nog geen prijs te hebben. Stel dat Jerry en Marge aan deze loterij meedoen en dat ze 14 loten kopen. Ze laten hun getallen willekeurig door de verkoopmachine kiezen en printen. Hun verwachtingswaarde van de winst per lot is dus gelijk aan 20 cent. Het blijkt dat ze de volgende 14 loten hebben.

123 124 125 126 127 134 135 234 235 245 256 257 345 456

Bij de trekking komt de combinatie 367 tevoorschijn.

- Licht toe dat Jerry en Marge bij deze trekking geen prijs hebben gewonnen.

De MIT-groep had een bijzondere lijst met combinaties van getallen. Bij de eenvoudige versie van de loterij zouden ze een lijst gebruiken zoals hiernaast. Deze lijst bestaat uit zeven combinaties van getallen. Ook de MIT-groep koopt 14 loten. Ze vullen op deze loten twee keer de lijst hiernaast met de hand in.

- Onderzoek hoeveel prijzen de MIT-groep bij de trekking wint in het geval de combinatie 367 tevoorschijn komt.

124
135
167
257
236
347
456

Vervolgens gaan we een simulatie uitvoeren.

- Laat elke leerling in de klas uit de getallen 1 tot en met 7 er drie kiezen. Elke leerling heeft nu een trekking van de loterij gesimuleerd. Doe dit nog een keer. Zorg dat er in totaal minstens 40 trekkingen zijn gesimuleerd. Ga voor elke trekking na met hoeveel van de 14 loten de MIT-groep de hoofdprijs wint, en met hoeveel loten een tweede prijs.
- Bereken voor elke trekking de winst per lot. Laat zien dat in de klas de gemiddelde winst over alle trekkingen ongeveer gelijk is aan 20 cent.

De verwachtingswaarde van de winst per lot is voor de MIT-groep blijkbaar hetzelfde als die voor Jerry en Marge. Toch heeft de strategie van de MIT-groep een voordeel.

- Wat is het voordeel van de strategie van de MIT-groep?

Diagnostische toets

9.1 Toevalsvariabelen en verwachtingswaarde

- 1** Robert laat de schijf in figuur 9.25 twee keer draaien.

X = som van de aangegeven getallen

Y = verschil van de aangewezen getallen

Z = grootste van de twee aangewezen getallen

Bereken.

a $P(X \leq 8)$

b $P(Y > 0)$

c $P(Z = 5)$



figuur 9.25

- 2** Racing Rotterdam en Utrecht United spelen een volleybalwedstrijd over maximaal vijf sets. Het team dat als eerste drie sets wint, is winnaar. De kans dat Racing een set wint is 0,65.

A = aantal sets dat de partij duurt

Stel de kansverdeling van A op.

- 3** Bij een spel met drie dobbelstenen is de inzet 1 euro. Je mag één keer met de drie dobbelstenen gooien. Is de som van de ogen 18, dan krijg je 100 euro. Is de som van de ogen 17, dan krijg je 15 euro en is de som 16, dan krijg je 5 euro. In alle andere gevallen krijg je niets. Bereken voor een speler de winstverwachting per spel.

9.2 De binomiale verdeling

- 4** Van de bovenbouwleerlingen op het vwo kiest 9% wiskunde C, 45% wiskunde A en 46% wiskunde B.

Bereken de kans dat van 15 willekeurige bovenbouwleerlingen op het vwo

- a** er hoogstens tien wiskunde A of wiskunde C hebben
b niemand wiskunde C heeft.

- 5** Van de Nederlandse vakantiegangers gaat 51% met de auto en 42% met het vliegtuig naar de vakantiebestemming.

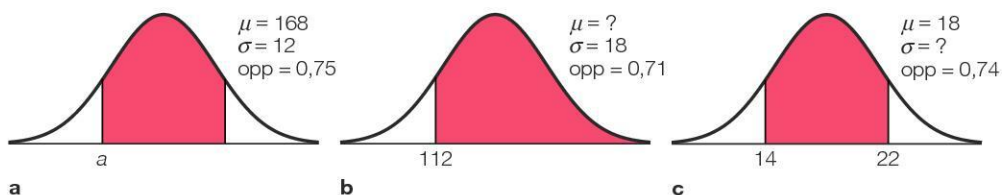
Bereken de kans dat van 20 Nederlandse vakantiegangers

- a** meer dan de helft met het vliegtuig op vakantie gaat
b de ene helft met de auto en de andere helft met het vliegtuig gaat.

- 6** **a** Van een binomiale toevalsvariabele X is $n = 40$ en $E(X) = 22,4$. Bereken σ_X . Rond af op twee decimalen.
b Van een binomiale toevalsvariabele Y is $E(Y) = 45$ en $\sigma_Y = 6$. Bereken n en p .

9.3 Berekeningen bij normaalkrommen

- 7** Bij een normale verdeling is $\mu = 201$ en $\sigma = 44$.
Hoeveel procent van de waarnemingsgetallen
a is kleiner dan 256
b ligt tussen 188 en 241?
- 8** **a** Het rode gebied onder de normaalkromme in figuur 9.26a is symmetrisch.
Bereken a .
b Bereken μ bij de gegeven oppervlakte in figuur 9.26b. Rond af op gehelen.
c Bereken σ bij de gegeven oppervlakte in figuur 9.26c. Rond af op twee decimalen.



figuur 9.26

9.4 Toepassingen van de normale verdeling

- 9** De tijd die atleet Ruben over de 15 km loopt is normaal verdeeld met een gemiddelde van 47 minuten en 30 seconden en een standaardafwijking van 50 seconden.
- a** Bereken in seconden nauwkeurig de tijd die Ruben in slechts 2% van de gevallen overschrijdt.
 - b** In hoeveel procent van de gevallen is de gemiddelde snelheid van Ruben meer dan 20 km per uur?
- De tijd die Nadine over de 15 km loopt is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 38 seconden. In 30% van de gevallen loopt ze de 15 km binnen 50 minuten.
- c** Bereken in seconden nauwkeurig de gemiddelde tijd die Nadine over de 15 km loopt.
- 10** In een vliegtuig zorgt een airconditioner die is ingesteld op 21°C voor de juiste temperatuur tijdens de vlucht. De werkelijke temperatuur in het vliegtuig is normaal verdeeld met de ingestelde temperatuur als gemiddelde. In de specificaties van de airconditioner staat vermeld dat de temperatuur gedurende slechts drie minuten per uur meer dan 1°C afwijkt van de ingestelde temperatuur. Bereken de standaardafwijking van de temperatuur in het vliegtuig. Rond af op twee decimalen.

10

Exponenten en logaritmen

Wat leer je?

- Rekenen met groeifactoren en groeipercenages bij exponentiële groei.
- Wat verdubbelingstijd en halveringstijd is.
- Formules opstellen bij exponentiële groei.
- Rekenen met logaritmen en werken met logaritmisch papier.
- Differentiëren van exponentiële formules.



Beginopdracht Medische isotopen

Nucleaire geneeskunde is een medisch specialisme waarbij gebruik wordt gemaakt van medische isotopen. Dat zijn radioactieve stoffen die straling afgeven. De straling kan worden toegepast bij de diagnose en behandeling van ernstige ziekten.

Een groot deel van de medische isotopen die in Nederlandse ziekenhuizen worden gebruikt, wordt geproduceerd in de kernreactor in Petten. Ook staan er in de buurt van ziekenhuizen zogenaamde deeltjesversnellers, die bepaalde medische isotopen kunnen produceren.

Een probleem bij medische isotopen is dat de stoffen vervallen.

Daardoor wordt na verloop van tijd steeds minder straling uitgezonden.

Voor de snelheid waarmee de hoeveelheid uitgezonden straling afneemt, is het begrip halfwaardetijd van belang. Dat is de tijd waarin de hoeveelheid uitgezonden straling halveert. Het duurt dus bijvoorbeeld even lang om van 100% uitgezonden straling naar 50% te gaan, als van 8% naar 4%. Elke medische isotoop heeft zijn eigen halfwaardetijd.

Een stof die vaak gebruikt wordt bij diagnose is jodium-123. Hiervan is de halfwaardetijd 13,3 uur.

Een medisch laborant ontvangt een hoeveelheid jodium-123 en meet hiervan de hoeveelheid straling. Vervolgens laat hij de stof ongebruikt in de opslag staan.

- Na hoeveel uur is nog 12,5% van de gemeten hoeveelheid straling over?

Sommige medische isotopen, zoals fluor-18, hebben een hele korte halfwaardetijd. Voor fluor-18 geldt de formule $P = 100 \cdot 0,685^t$. Hierin is P het percentage van de oorspronkelijke hoeveelheid straling dat na t uur nog over is.

- Hoeveel procent is na 24 uur nog over?
- Bereken de halfwaardetijd van fluor-18. Rond af op gehele minuten.

Een probleem van een korte halfwaardetijd is dat tijdens transport de hoeveelheid straling al flink kan afnemen. Daarom wordt fluor-18 niet alleen in de kernreactor in Petten geproduceerd, maar ook in deeltjesversnellers elders in Nederland.

Het Ommelander Ziekenhuis Groningen in Scheemda kan ervoor kiezen om fluor-18 te bestellen in Petten of bij de deeltjesversneller op de Zernike Campus in Groningen.

Om bij ontvangst dezelfde hoeveelheid straling te hebben, moet er in Petten meer fluor-18 besteld worden dan in Groningen.

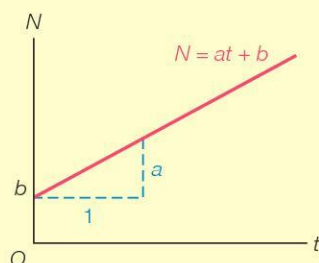
- Hoeveel keer zoveel? Maak gebruik van een online routeplanner en ga uit van vervoer per auto.

Voorkennis Lineaire en exponentiële groei

Theorie A Formules bij lineaire en exponentiële groei

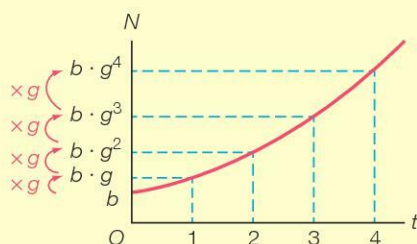
Bij *lineaire groei*

- neemt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal toe
- hoort een formule van de vorm $N = at + b$, waarin a de toename per tijdseenheid is en b de beginwaarde (of beginhoeveelheid)
- is de grafiek een rechte lijn.



Bij *exponentiële groei*

- wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal (de groeifactor) vermenigvuldigd
- hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, waarin b de beginwaarde (of beginhoeveelheid) is en g de groeifactor per tijdseenheid
- neemt de hoeveelheid toe als $g > 1$ en neemt de hoeveelheid af als $0 < g < 1$.



Voorbeeld

Een hoeveelheid N neemt exponentieel toe. Op 1 april is deze hoeveelheid 850 en de groeifactor per maand is 1,15.

Een hoeveelheid M is op 1 april gelijk aan 1600 en deze hoeveelheid neemt maandelijks met 75 toe.

- Stel de formules op van N en M . Neem de tijd t in maanden en $t = 0$ op 1 april.
- Met hoeveel neemt N toe in juni? Rond af op gehelen.
- In welke maand zijn N en M even groot?

Uitwerking

- $N = b \cdot g^t$ met $b = 850$ en $g = 1,15$ geeft $N = 850 \cdot 1,15^t$.
 $M = at + b$ met $a = 75$ en $b = 1600$ geeft $M = 75t + 1600$.
- Op 1 juni is $N = 850 \cdot 1,15^2 = 1124,12\dots$ en op 1 juli is $N = 850 \cdot 1,15^3 = 1292,74\dots$
 De toename in juni is $1292,74\dots - 1124,12\dots \approx 169$.
- Los op $850 \cdot 1,15^t = 75t + 1600$.
 Voer in $y_1 = 850 \cdot 1,15^x$ en $y_2 = 75x + 1600$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 6,4$.
 Bij $t = 6$ hoort 1 oktober, dus N en M zijn even groot in oktober.

- 1** Bolivia is een land in Zuid-Amerika. Op 1 januari 2018 had Bolivia 11,14 miljoen inwoners en dit aantal wordt jaarlijks met 1,015 vermenigvuldigd.
- Stel de formule op van het aantal inwoners N van Bolivia in miljoenen. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2018.
 - Bereken het aantal inwoners op 1 januari 2024.
 - In welk jaar zal het aantal inwoners voor het eerst meer zijn dan 13 miljoen?
 - Hoeveel inwoners had Bolivia op 1 januari 2010?
 - Met hoeveel neemt het aantal inwoners volgens de formule in 2025 toe?



- 2** Een patiënt krijgt aan het begin van een dag 100 mg van een medicijn in de bloedbaan toegediend. Per uur wordt de hoeveelheid medicijn in het bloed met 0,8 vermenigvuldigd. Het aantal mg van het medicijn dat t uur na toediening nog in het bloed zit, is N .
- Stel de formule op van N .
 - Na hoeveel uur is er nog 25 mg van het medicijn in het bloed aanwezig? Rond af op één decimaal.
- 3** De productie van zonne-energie in Nederland neemt toe. Op 1 januari 2012 was het totale vermogen zonne-energie in Nederland 290 megawatt (MW). Per jaar neemt dat exponentieel toe met groefactor 1,4. Het totale vermogen windenergie in Nederland op 1 januari 2012 was 2430 MW. Dat vermogen neemt jaarlijks met 310 MW toe.
- Stel de formules op van het vermogen zonne-energie V_z en het vermogen windenergie V_w . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2012 en V_z en V_w in MW.
 - Bereken in welk jaar het totale vermogen aan zonne-energie voor het eerst meer dan twee keer zo groot is als het totale vermogen aan windenergie.

Theorie B Tabellen bij exponentiële groei

Nederland is een echt fietsland. Lag er in Nederland in 2000 nog ongeveer 20 000 km fietspad, in 2020 was dat toegenomen tot ongeveer 42 000 km. Zie de tabel.

LENGTE FIETSPADEN IN NEDERLAND

jaar	2000	2005	2010	2015	2020
lengte in km	20 000	24 000	29 000	35 000	42 000



Om te weten te komen of hier bij benadering sprake is van exponentiële groei, bereken je bij de tabel vier quotiënten.

$$\frac{24\,000}{20\,000} = 1,2; \quad \frac{29\,000}{24\,000} \approx 1,21; \quad \frac{35\,000}{29\,000} \approx 1,21 \text{ en } \frac{42\,000}{35\,000} = 1,2$$

Elke vijf jaar is de lengte met ongeveer 1,2 vermenigvuldigd. Er is dus sprake van exponentiële groei. De bijbehorende formule is $L = 20\,000 \cdot 1,2^t$ met L de lengte van de fietspaden in km en t de tijd in vijftallen jaren met $t = 0$ in 2000.

Werkschema: aantonen van exponentiële groei bij een tabel

- 1 Bereken voor even brede intervallen de quotiënten $\frac{\text{hoeveelheid aan het eind van het interval}}{\text{hoeveelheid aan het begin van het interval}}$.
- 2 Zijn de quotiënten bij benadering gelijk, dan mag je uitgaan van exponentiële groei.

- 4 De omzet van de webwinkels in Nederland maakt een stormachtige groei door. Zie de tabel.

OMZET NEDERLANDSE WEBWINKELS IN MILJARDEN EURO'S

jaar	2014	2015	2016	2017	2018
omzet O	13,84	16,07	18,72	21,65	25,02

- a Toon aan dat bij de tabel exponentiële groei hoort.
- b Stel de formule op van O . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2014 en rond de groeifactor af op twee decimalen.
- c In 2023 heeft Nederland naar verwachting 17,6 miljoen inwoners. Hoeveel zal in dat jaar de omzet van de webwinkels per Nederlander zijn, aangenomen dat de groei van de omzet zich op dezelfde wijze voortzet?

10.1 Exponentiële groei



Op 1 januari 2015 had de dartsvereniging Tops 540 leden. Dit aantal neemt jaarlijks met 5% toe. Uitgaande van een jaarlijkse toename van 5% groeit het aantal leden van Tops exponentieel. Welke groeifactor hoort bij deze toename?

Theorie A Groeifactor en groeipercentage

Neemt een hoeveelheid per jaar met 18% toe, dan wordt de hoeveelheid met 1,18 per jaar vermenigvuldigd. Je hebt dus te maken met exponentiële groei met groeifactor 1,18 per jaar.

Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 1,26 is, dan heb je te maken met een toename van 26% per jaar.

We zeggen dat het **groeipercentage** 26% is.

Bij een jaarlijkse afname van 12% hoort een exponentiële afname met groeifactor 0,88.

Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 0,982 is, dan heb je te maken met een afname van 1,8% per jaar.

18% erbij geeft
 $100\% + 18\% = 118\%$
dus $\times 1,18$

12% eraf geeft
 $100\% - 12\% = 88\%$
dus $\times 0,88$

Voorbeeld

Door verdwenen broedgebieden en intensivering van de landbouw zijn er steeds minder kieviten in Nederland. Nesten lopen gevaar door maaien, bemesten, ploegen en zaaien.

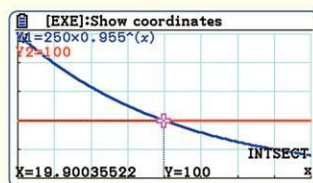
In maart 2000 waren er nog 250 000 broedparen kieviten in Nederland. Sindsdien neemt dat aantal jaarlijks met 4,5% af.

- Stel de formule op van het aantal broedparen kieviten in Nederland. Neem het aantal broedparen N in duizendtallen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in maart 2000.
- In maart van welk jaar waren er voor het eerst minder dan 100 000 broedparen kieviten in Nederland?



Uitwerking

- $N = b \cdot g^t$ met $b = 250$ en $g = 0,955$ geeft
 $N = 250 \cdot 0,955^t$.
- Los op $250 \cdot 0,955^t = 100$.
Voer in $y_1 = 250 \cdot 0,955^x$ en $y_2 = 100$.
De optie snijpunt geeft $x = 19,90...$
Dus in maart 2020.



R2 Zie het voorbeeld.



- Bij de uitwerking van het voorbeeld zie je een scherm van de GR. Tussen welke waarden van x en y is het venster genomen?
- In welk jaar was het aantal broedparen gehalveerd ten opzichte van het aantal in 2000?

3



Vul in.

groeipercantage	13%	3,3%	120%	0,7%				
groeifactor					1,12	1,06	2,5	1,237

4



Vul in.

afname in procenten	13%	41,8%	6,2%	0,3%			
groeifactor					0,98	0,999	0,246

5



De populariteit van de OV-fiets groeit al jaren. In juni 2016 werden er 215 000 ritten met de OV-fiets gemaakt. Dit aantal neemt sindsdien elke maand met 2% toe. Neem aan dat deze groei nog een tijdje aanhoudt.

- Stel de formule op van het aantal ritten met de OV-fiets per maand. Neem het aantal ritten R in duizendtallen en de tijd t in maanden waarbij $t = 0$ hoort bij juni 2016.
- In welke maand van welk jaar was het aantal ritten voor het eerst meer dan 400 000?
- Volgens de formule zal het aantal ritten in december 2023 meer zijn dan in januari 2023. Hoeveel meer?

6



De halsbandparkiet komt van oorsprong niet in Nederland voor. De populatie in Nederland ontstond doordat vrijgelaten of ontsnapte dieren zich gingen voortplanten. In 1990 waren er naar schatting 400 halsbandparkieten in het wild in Nederland. Sindsdien is dit aantal elk jaar met 12% toegenomen. Halsbandparkieten veroorzaken veel schade bij fruitteilers, doordat ze appels en peren in boomgaarden stukpikken. Volgens fruitteiler Jan Boer uit Barendrecht kost hem dat jaarlijks tienduizend euro aan omzet.



- Stel de formule op van het aantal in het wild voorkomende halsbandparkieten N in Nederland. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1990.
- In welk jaar zijn er naar verwachting voor het eerst meer dan 15 000 halsbandparkieten in Nederland?
- Neem aan dat in 2015 de totale omzetschade bij fruitteilers veroorzaakt door de halsbandparkiet 2 miljoen euro was en dat deze omzetschade elk jaar met 10% toeneemt. Bereken de gemiddelde omzetschade die één halsbandparkiet aanbrengt in 2025.

7

Het gebruik van kunstmest neemt wereldwijd toe met 1,8% per jaar.

In 2015 was het gebruik 190 miljoen ton. In Europa wordt juist steeds minder kunstmest gebruikt. In 2015 werd in Europa nog 15,65 miljoen ton gebruikt en sindsdien neemt deze hoeveelheid elk jaar met 20000 ton af.

- a Hoeveel procent van de wereldwijd gebruikte hoeveelheid kunstmest in 2015 werd in Europa gebruikt?
- b Stel de formule op van de hoeveelheid kunstmest die jaarlijks wereldwijd wordt gebruikt. Neem de hoeveelheid K_W in miljoenen ton en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2015.
- c Stel de formule op van de hoeveelheid kunstmest die jaarlijks in Europa wordt gebruikt. Neem de hoeveelheid K_E in miljoenen ton en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2015.
- d Bereken hoeveel procent van de wereldwijd gebruikte hoeveelheid kunstmest in 2025 in Europa wordt gebruikt.

A8

Op 1 januari 2020 hadden de Verenigde Staten 333,5 miljoen inwoners.

Dit aantal neemt naar verwachting jaarlijks met 1,8 miljoen toe.

De bevolking van Rusland neemt juist af. Op 1 januari 2020 had Rusland 142,9 miljoen inwoners en dit aantal neemt naar verwachting jaarlijks met 0,4% af.

Bereken op basis van deze gegevens in welk jaar naar verwachting de Verenigde Staten drie keer zoveel inwoners hebben als Rusland.

A9

In Nederland neemt het aandeel hernieuwbare energie gestaag toe.

In 2015 nam het gebruik van biomassa 3,89% van het totale energieverbruik voor zijn rekening. Dit aandeel neemt jaarlijks met 0,21 procentpunten toe, dus in 2016 was het aandeel 4,10%.

In 2015 was het aandeel van zonne-energie 0,25% van het totale energieverbruik. Dit percentage neemt exponentieel toe met 35% per jaar.

Bereken het percentage van het totale energieverbruik dat in 2023 afkomstig is van biomassa en zonne-energie.

A10

Zie opgave 9. In Nederland was in 2015 het aandeel van hernieuwbare energie 5,74% van het totale energieverbruik. Behalve uit biomassa en zonne-energie komt hernieuwbare energie voornamelijk uit windenergie. Er is ook nog een klein gedeelte overig. Neem aan dat het aandeel dat afkomstig is uit windenergie en overig vanaf 2015 exponentieel groeit met 13% per jaar. De overheid heeft als doel dat 37% van het energieverbruik in 2030 uit hernieuwbare bronnen komt. Onderzoek met deze gegevens en de gegevens van opgave 9 of dit doel gehaald wordt.

De wereldwijd opgeslagen hoeveelheid digitale data wordt gegeven door de formule $D = 500 \cdot 1,0175^t$. Hierin is D in exabytes (1 exabyte = 10^{18} bytes) en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2009.

- Na hoeveel maanden is de wereldwijd opgeslagen hoeveelheid digitale data verdubbeld ten opzichte van 1 januari 2009?
- Op 1 januari 2015 was er wereldwijd 1740 exabyte aan digitale data opgeslagen. Hoeveel maanden na 1 januari 2015 is deze hoeveelheid verdubbeld?
- Vergelijk de antwoorden op de vragen a en b. Wat valt je op?



Theorie B Verdubbelingstijd en halveringstijd

In opgave 11 is de toename van de wereldwijd opgeslagen hoeveelheid digitale data 1,75% per maand.

De sterkte van de groei is hiermee niet voor iedereen goed in te schatten.

Met de **verdubbelingstijd** krijg je een betere indruk van de groei.

De verdubbelingstijd bij exponentiële groei is de tijd waarin de hoeveelheid verdubbelt.

Bij een groei van 3,5% per jaar bereken je de verdubbelingstijd t door de vergelijking $1,035^t = 2$ op te lossen.

Voer in $y_1 = 1,035^x$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 20,15$.

Dus de verdubbelingstijd bij een groei van 3,5% per jaar is ruim 20 jaar.

$$b \cdot g^t = 2b$$

$$g^t = 2$$



Dus de verdubbelingstijd is onafhankelijk van b .

Bij groeifactor g bereken je de verdubbelingstijd t door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen.

Bij exponentiële afname is het begrip **halveringstijd** van belang.

De halveringstijd bij exponentiële afname is de tijd waarin de hoeveelheid gehalveerd wordt.

Bij groeifactor g bereken je de halveringstijd t door de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$ op te lossen.

Voorbeeld

- a Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 12% af.
Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.
- b Van een hoeveelheid is de halveringstijd 15 jaar.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per jaar afneemt.

Uitwerking

- a $g_{\text{jaar}} = 0,88$, dus los op $0,88^t = \frac{1}{2}$.
Voer in $y_1 = 0,88^x$ en $y_2 = \frac{1}{2}$.
De optie snijpunt geeft $x = 5,42\dots$
De halveringstijd is 5 jaar en
 $0,42\dots \times 12 \approx 5$ maanden.
- b Er geldt $g^{15} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{15} = \frac{1}{2}$ geeft $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{15}} \approx 0,955$
De afname is 4,5% per jaar.

5,42... jaar
 $= 5,42\dots \times 12$ maanden
 ≈ 65 maanden
is ook goed.

$$g^p = c \text{ geeft } g = c^{\frac{1}{p}}$$

- 12** a Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 13,1% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- b Een hoeveelheid verdubbelt elke week.
Bereken het groeipcentage per dag.

- 13** De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie.
De hoeveelheid radioactieve stof neemt met 8,3% per dag af.
- a Bereken de halveringstijd.
- b Na hoeveel dagen is nog 10% van de beginhoeveelheid over?

- 14** a Voor het aantal inwoners van Ghana geldt de formule $N = 18,7 \cdot 1,025^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2000 en N het aantal inwoners in miljoenen.
Bereken de verdubbelingstijd van het aantal inwoners van Ghana.
- b De bevolking van Gambia neemt elk jaar met 3,2% toe. De bevolking van Gabon neemt elk jaar met 2,2% toe.
Beredeneer zonder verdubbelingstijden te berekenen, bij welk land de bevolking een langere verdubbelingstijd heeft.
- c Karachi is de grootste stad van Pakistan. Tussen 1998 en 2011 is de bevolking van Karachi meer dan verdubbeld. Neem aan dat het aantal inwoners in deze periode exponentieel is gegroeid en dat de verdubbelingstijd 11,5 jaar was.
Bereken met hoeveel procent per jaar de bevolking van Karachi in de genoemde periode is toegenomen.



- A15**    Uit een onderzoek in opdracht van Natuurmonumenten uit 2018 blijkt dat het aantal loopkevers in een natuurgebied in Drenthe dramatisch is afgenomen. De onderzoekers vonden een halveringstijd van 12 jaar. Uit een onderzoek in Duitsland uit 2017 blijkt dat in 27 jaar 76% van de insecten is verdwenen. Onderzoek of deze twee resultaten met elkaar in lijn zijn. Ga uit van een exponentiële afname.



- A16**    In Nederland werd in 1999 bijna 44 miljard euro aan zorg en welzijn uitgegeven. Sindsdien zijn deze kosten enorm toegenomen, maar niet in elke periode was de groei even groot. Zie de tabel.

periode	jaren	jaarlijkse groei
I	2000 t/m 2003	9,7%
II	2004 en 2005	3,8%
III	2006 en 2007	5,0%
IV	2008 t/m 2012	3,9%

Een nadeel van het geven van groeipercentages is dat je de groei mogelijk onderschat. Verdubbelingstijden geven dan een beter beeld van de sterkte van de groei.

- Bereken voor elke periode de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.
- Onderzoek of in de periode 2000 t/m 2012 de uitgaven aan zorg en welzijn in Nederland zijn verdubbeld.

In de jaren 2013 en 2014 namen de uitgaven minder sterk toe, maar in de periode 2015 t/m 2019 trad er weer een sterkere stijging op. De verdubbelingstijd voor de periode 2015 t/m 2019 was 26 jaar.

- Bereken voor de periode 2015 t/m 2019 het groeipercentage per jaar.
- In 2018 waren de uitgaven aan zorg en welzijn 100 miljard euro. Bereken de uitgaven aan zorg en welzijn in 2015. Rond af op miljarden euro's.

- R17**  Onderzoek of bij exponentiële groei een verdubbeling van het groeipercentage een halvering van de verdubbelingstijd tot gevolg heeft.

- E18**  Een hoeveelheid neemt eerst drie jaar lang met 12% per jaar toe en neemt daarna nog twee jaar met een vast percentage per jaar toe. Na deze vijf jaar is de hoeveelheid verdubbeld. Bereken voor de laatste twee jaar het jaarlijkse toenamepercentage.

Invasieve exoten

Halsbandparkieten, roodwangschildpadden, Amerikaanse vogelkers: grote kans dat u deze soorten regelmatig ziet. Het zijn exoten: soorten die niet op eigen kracht maar door de mens in Nederland terecht zijn gekomen.

Deze soorten kunnen zich permanent vestigen in onze natuur en zich snel vermeerderen. Dan spreken we van invasieve exoten.

‘Niks mis met wat extra soorten in de natuur’, zullen veel mensen denken. Maar sommige exoten veroorzaken veel schade. Wie last heeft van hooikoorts ondervindt dat aan den lijve: de oprukkende hooikoortsplant Ambrosia verlengt het hooikoortsseizoen.

Behalve gezondheidsproblemen kan er schade ontstaan voor de economie.

Bijvoorbeeld door aantasting van oogsten door exotische insecten. Ook onze eigen flora en fauna ondervindt veel last van de indringers. Ze worden verdreven uit hun leefgebied en hun nest, lopen nieuwe ziektes op of worden domweg opgevreten.

Als een invasieve exoot in de natuur gevestigd is, zijn vaak aanzienlijke uitgaven nodig om de schade te herstellen en de invasieve exoot te verwijderen of om verdere verspreiding te voorkomen. Geschat wordt dat de kosten alleen al in de lidstaten van de Europese Unie ten minste € 12 miljard per jaar bedragen!

Bron: invasieve-exoten.nl



Amerikaanse vogelkers

A19
□ ⊗ *

In deze opgave bekijken we een invasieve exoot waarvan het aantal exemplaren gedurende een periode exponentieel toeneemt met een verdubbelingstijd van T jaar.

- a** Hoeveel keer zoveel exemplaren zijn er na drie keer T jaar? En na vier keer T jaar?

Op $t = 0$ zijn er van deze exoot 10 000 exemplaren in Nederland.

De verdubbelingstijd is 1,5 jaar. Onderzoekers waarschuwen dat een kritische grens wordt bereikt als er nog eens 30 000 exemplaren bijkomen.

- b** Bereken hoeveel jaar het nog duurt voordat de kritische grens wordt bereikt als er geen maatregelen worden getroffen.
- c** Op $t = 0$ is men begonnen met de bestrijding van de soort. Daardoor wordt de verdubbelingstijd 5 jaar.
- Bereken hoeveel jaar het dan duurt voordat de kritische grens wordt bereikt.

Terugblik

Groeipercentage en groeifactor

Bij een groeipercentage van 5,8% hoort de groeifactor 1,058.

Bij een afname van 3,2% hoort de groeifactor 0,968.

Bij de groeifactor 2,42 hoort een groeipercentage van 142%.

Bij de groeifactor 0,42 hoort een afname van 58%.

Neemt een hoeveelheid M vanaf 2010 jaarlijks met 12,5% toe en is M in 2010 gelijk aan 860, dan hoort hierbij de formule $M = 860 \cdot 1,125^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2010.

Neemt een hoeveelheid N vanaf 2015 jaarlijks met 1,8% af en is N in 2015 gelijk aan 1640, dan hoort hierbij de formule $N = 1640 \cdot 0,982^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2015.

Verdubbelingstijd en halveringstijd

De verdubbelingstijd bij exponentiële groei met groeifactor g (met g groter dan 1)

- is de tijd die verloopt totdat de hoeveelheid is verdubbeld
- is onafhankelijk van de beginhoeveelheid
- vind je door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen.

$$\text{verdubbelingstijd} \\ g^t = 2$$

Bij een groeipercentage van 11,7% per jaar bereken je de verdubbelingstijd per jaar door de vergelijking $1,117^t = 2$ op te lossen.

Voer in $y_1 = 1,117^x$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 6,3$.

Dus de verdubbelingstijd is ongeveer 6,3 jaar.

Om bij een verdubbelingstijd van 8 jaar het groeipercentage per jaar te berekenen, los je de vergelijking $g^8 = 2$ op.

$g^8 = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{8}} \approx 1,091$.

Dus het groeipercentage per jaar is 9,1%.

De halveringstijd bij exponentiële groei met groeifactor g (met g tussen 0 en 1)

- is de tijd die verloopt totdat de hoeveelheid is gehalveerd
- is onafhankelijk van de beginhoeveelheid
- vind je door de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$ op te lossen.

$$\text{halveringstijd} \\ g^t = \frac{1}{2}$$

10.2 Groeipercentages en formules



Bij een exponentiële groei is de groeifactor per jaar gelijk aan 9.
De beginwaarde is 2.

a Vul de tabel in.

tijd in jaren	0	1	2	3	4	5
hoeveelheid N	2	18	162			

b Met welk getal wordt N per twee jaar vermenigvuldigd?

c Wordt N per half jaar met meer of minder dan 4,5 vermenigvuldigd?

Theorie A Groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid

Een hoeveelheid groeit exponentieel met beginwaarde 100 en groeifactor 3 per uur.

EXPONENTIËLE GROEI

t	0	1	2	3	4	5	6
N	100	$100 \cdot 3^1$ = 300	$100 \cdot 3^2$ = 900	$100 \cdot 3^3$ = 2700	$100 \cdot 3^4$ = 8100	$100 \cdot 3^5$ = 24 300	$100 \cdot 3^6$ = 72 900

Je ziet

- per 2 uur is de groeifactor 3^2
- per 3 uur is de groeifactor 3^3 .

Algemeen

- per n uur is de groeifactor 3^n .

Deze regel geldt ook voor niet-gehele waarden van n .

Zo geldt

- per half uur is de groeifactor $3^{\frac{1}{2}} \approx 1,732$
- per kwartier is de groeifactor $3^{\frac{1}{4}} \approx 1,316$
- per minuut is de groeifactor $3^{\frac{1}{60}} \approx 1,018$.

NORM DRIJF AUTO REËL RAD MM	
$3^{1/2}$	1.732050808
$3^{1/4}$	1.316074013
$3^{1/60}$	1.018478864

Bij exponentiële groei met groeifactor g per tijdseenheid is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Heb je te maken met een exponentiële groei met een groeifactor van 0,6 per dag, dan is

- de groeifactor per week $0,6^7 \approx 0,028$
- de groeifactor per uur $0,6^{\frac{1}{24}} \approx 0,979$
- de groeifactor per acht uur $0,6^{\frac{1}{3}} \approx 0,843$.

Om te berekenen wat het groeipercentage per dag is bij een toename van 70% per week, gebruik je $g_{\text{week}} = 1,70$ geeft $g_{\text{dag}} = 1,70^{\frac{1}{7}} \approx 1,079$. Het groeipercentage per dag is 7,9%.

Bij exponentiële groei gaat het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid via groeifactoren.

Voorbeeld

Een hoeveelheid neemt per zes uur met 18% toe.

- a** Hoeveel procent is de toename per dag?
- b** Hoeveel procent is de toename per uur?

Uitwerking

- a** $g_{6 \text{ uur}} = 1,18$
 $g_{\text{dag}} = 1,18^4 \approx 1,939$
De toename per dag is 93,9%.
- b** $g_{6 \text{ uur}} = 1,18$
 $g_{\text{uur}} = 1,18^{\frac{1}{6}} \approx 1,028$
De toename per uur is 2,8%.

- 1 Eerst de groeifactor per 6 uur.
- 2 Dan de groeifactor per dag.
- 3 Ten slotte het groeipercentage per dag.

21 Een hoeveelheid neemt per kwartier met 12% toe.

- a** Hoeveel procent is de toename per uur?
- b** Hoeveel is de procentuele toename per vijf minuten?
- c** Hoeveel procent is de toename per vijf uur?
Rond af op gehelen.

Geef percentages in één decimaal en rond groeifactoren af op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

22 Een hoeveelheid neemt per dag met 16% af.

- a** Bereken de groeifactor per week.
- b** Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per uur af?
- c** Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per kwartier af?
Rond af op twee decimalen.

23

- a** Een hoeveelheid neemt per jaar met 6,6% toe.
Hoeveel procent is de toename per 10 jaar?
- b** Een hoeveelheid neemt per uur met 19,5% af.
Hoeveel procent is de afname per kwartier?
- c** Een hoeveelheid neemt per jaar met 0,08% toe.
Hoeveel procent is de toename per eeuw?
- d** Een hoeveelheid neemt per week met 180% toe.
Hoeveel procent is de toename per dag?

24

- a** Een hoeveelheid heeft een verdubbelingstijd van 4 jaar.
Lotte vraagt zich af wat het groeipercentage per maand is. Ze bedenkt dat vier jaar gelijk is aan 48 maanden en schrijft op $g_{48 \text{ maanden}} = 2$.
Bereken g_{maand} en geef het groeipercentage per maand.
- b** Een hoeveelheid heeft een verdubbelingstijd van 1,5 jaar.
Bereken het groeipercentage per week.
- c** Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 15 seconden.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per minuut afneemt.

R25

De volgende uitspraken zijn onjuist. Verbeter ze.

- a** Bij een toename van 5% per dag hoort een toename van $7 \times 5\%$ per week.
- b** Bij een afname van 20% per uur hoort een afname van $\frac{1}{4} \times 20\%$ per kwartier.

A26

Ga bij de volgende vragen uit van exponentiële groei.

- a** Het beleid van de regering is erop gericht om de hoeveelheid opgewekte energie door particulieren met zonnecellen elke drie jaar met een factor 2,5 te vermenigvuldigen.
Bereken het groeipercentage per jaar.
- b** In 2020 werd in Nederland twee keer zoveel elektriciteit door windmolens op land geleverd als in 2015.
Bereken het groeipercentage per jaar.
- c** Het aantal muziekwinkels in Nederland is in 12 jaar tijd met 22% afgenomen.
Hoeveel procent is de afname per jaar?



A27
☐ ⊙ *

In de wereld wordt steeds meer plastic geproduceerd. De hoeveelheid jaarlijks geproduceerd plastic neemt al vanaf de jaren 70 van de vorige eeuw exponentieel toe. In 1970 werd 44 miljard kg geproduceerd en in 2009 was dat toegenomen tot 250 miljard kg.

Een deel van het plastic komt als afval in de oceaan terecht, waar het mede onder invloed van de zon uiteenvalt in zeer kleine deeltjes, het zogenaamde microplastic.

Onderzoekers bestuderen hoeveel van dit microplastic neerdaalt op de bodem van de oceaan. In deze bodem kan men lagen onderscheiden.

Elke laag hoort bij een jaar. In de bodem nabij de kust van Californië vond men in de laag die bij 1972 hoort 6 deeltjes microplastic per 100 cm². In de laag van 1994 vond men 17 deeltjes per 100 cm².

Neem aan dat de toename exponentieel is.

Onderzoek of de hoeveelheid microplastic in de lagen van de bodem met ongeveer hetzelfde percentage per jaar toeneemt als de wereldwijde productie van plastic.

A28
☐ *

Bij zonnepanelen is het begrip piekvermogen van belang. Dit geeft aan hoeveel vermogen een zonnepaneel kan leveren. De eenheid van piekvermogen is wattpiek. Tussen eind 2012 en eind 2018 is het totaal piekvermogen van zonnepanelen in Nederland 12 keer zo groot geworden. Ga hierbij uit van exponentiële groei.

Eind 2018 was het totaal piekvermogen 4400 megawattpiek.

Eind 2017 kwam van het totaal piekvermogen 58% van zonnepanelen op daken van particulieren.

Bereken het piekvermogen eind 2017 van zonnepanelen op daken van particulieren.



O29
☐ ⊙ *

Een bacteriecultuur groeit exponentieel. Op $t = 5$ zijn er 50 000

bacteriën. Op $t = 9$ zijn er 300 000 bacteriën. Hierbij is t in uren.

Uit de gegevens volgt dat de groeifactor per uur gelijk is aan 1,565.

a Toon dit aan.

Bij deze situatie hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$ met N het aantal bacteriën en g de groeifactor per uur. Om b te berekenen kun je de vergelijking $b \cdot 1,565^5 = 50\,000$ gebruiken.

b Licht dit toe.

Theorie B Een formule opstellen bij exponentiële groei

Is bij een exponentiële groei de hoeveelheid op twee tijdstippen bekend, dan kun je de bijbehorende formule opstellen. Je berekent hiertoe eerst de groeifactor per tijdseenheid en vervolgens de beginhoeveelheid. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Met name door de verspreiding van klamboes die zijn geïmpregneerd met insecticide, is het aantal dodelijke slachtoffers van malaria sinds 2009 exponentieel afgenomen. In 2012 waren er nog 640 duizend dodelijke slachtoffers. In 2017 was dat aantal afgenomen tot 435 duizend.

Stel de formule op van het aantal dodelijke slachtoffers van malaria. Neem het aantal N in duizendtallen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2009.



Uitwerking

$$N = b \cdot g^t \text{ met } g_{5 \text{ jaar}} = \frac{435}{640}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{435}{640}\right)^{\frac{1}{5}} = 0,9256\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,9256\dots^t \\ t = 3 \text{ en } N = 640 \end{array} \right\} b \cdot 0,9256\dots^3 = 640$$

$$b = \frac{640}{0,9256\dots^3} \approx 807$$

$$\text{Dus } N = 807 \cdot 0,926^t.$$

NORM DRIJF AUTO REËL RAD W.N.	
$(435/640)^{1/5}$	0.9256820803
$640/\text{Antw}^3$	806.8529742

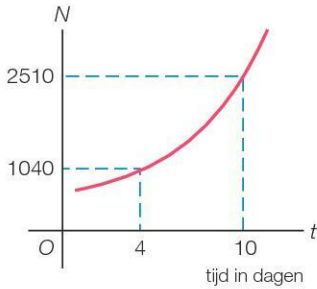
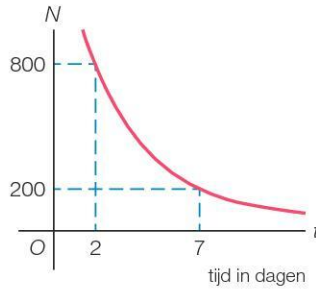


- a** Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. Op $t = 3$ is $N = 1600$ en op $t = 10$ is $N = 4100$. Hierbij is t in uren. Stel de formule op van N .
- b** Een bacteriesoort groeit exponentieel. Op $t = 3$ zijn er 150 000 bacteriën en op $t = 8$ zijn dat er 1 250 000. Hierbij is t in uren. Stel de formule op van het aantal bacteriën B . Rond de beginhoeveelheid af op duizendtallen.
- c** Een hoeveelheid radioactieve stof neemt exponentieel af. Op $t = 5$ is er 0,60 gram en op $t = 8$ is er 0,47 gram. Hierbij is t in dagen. Stel de formule op van de hoeveelheid radioactieve stof H in gram.

Geef de beginwaarde in dezelfde nauwkeurigheid als de gegevens, tenzij anders wordt gevraagd.



- a** Stel de formule op die bij de exponentiële groei in figuur 10.1a hoort.



a

b

figuur 10.1

- b** Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Zie figuur 10.1b. Stel de formule op van N .



Een projectontwikkelaar is gespecialiseerd in het bouwen van woontorens met op de begane grond winkels en vanaf de eerste verdieping appartementen. Zij rekent voor de bouwlaag op de begane grond 4,89 miljoen euro. Hoeveel ze rekent voor de totale kosten K in miljoenen euro's is afhankelijk van het aantal verdiepingen. Zie de tabel. Hierin is n het aantal verdiepingen met appartementen.

n	0	8	16	24	32
K	4,89	6,05	7,49	9,27	11,47

Tussen n en K bestaat een exponentieel verband.

- Toon dit aan.
- Bereken de totale bouwkosten in het geval de woontoren bestaat uit 20 verdiepingen met appartementen.
- De projectontwikkelaar wil dat de totale bouwkosten maximaal 10,3 miljoen euro bedragen. Hoeveel verdiepingen met appartementen kan zij voor dit bedrag bouwen?



A33
☐ ⊙ *

In de jaren 80 van de vorige eeuw was de ooievaar vrijwel uit Nederland verdwenen. Door herintroductie van ooievaars uit dierentuinen en beschermingsprogramma's is het aantal ooievaars sinds 1995 exponentieel toegenomen. In 2008 waren er alweer 700 broedparen in Nederland en in 2016 waren dat er al 1000.



- a Bereken het aantal broedparen ooievaars in Nederland in 1995.
- b In welk jaar zullen er voor het eerst meer dan 1500 broedparen ooievaars in Nederland zijn, als de genoemde groei doorzet?

A34
⊙ *

Door een bloedvatpropje heeft een patiënt tijdelijk verminderd zicht in één oog. Bij het onderzoek van de orthoptist 10 dagen nadat de patiënt last kreeg, is het verlies van het zicht nog 56%. Bij het vervolgonderzoek 39 dagen na het eerste onderzoek is het verlies van het zicht nog slechts 9%. Ga ervan uit dat het verlies van het zicht exponentieel afneemt.

- a Hoe groot was het verlies van het zicht op het moment dat de patiënt last kreeg?
- b Hoeveel weken nadat de patiënt last kreeg, zal hij naar verwachting 99% van zijn oorspronkelijk zicht terug hebben?

A35
*

Op 1 januari 2015 telde ons land 2425 honderdplussers. Dat waren er 1327 meer dan op 1 januari 2000. Het merendeel van de honderdplussers was vrouw: in 2000 waren er 928 vrouwen en 170 mannen honderdplus en in 2015 waren er 2112 vrouwen en 313 mannen honderdplus. Naar verwachting zal het aantal vrouwelijke honderdplussers de komende jaren blijven toenemen met hetzelfde jaarlijkse groeipercentage als in de periode 2000-2015 het geval was. Het aantal mannelijke honderdplussers zal echter naar verwachting sterker groeien, namelijk met 9,5% per jaar. 'Een verklaring hiervoor is dat mannen steeds minder zijn gaan roken en vrouwen juist meer', aldus het CBS. Onderzoek hoeveel procent van de honderdplussers in 2025 naar verwachting man is.

E36
*

Als je een bal van een hoogte laat vallen, dan komt deze na elke keer stuiteren minder hoog. De maximale hoogte na elke keer stuiteren neemt exponentieel af. Een bal die van een hoogte van vijf meter wordt losgelaten, komt na de derde keer stuiteren nog 2,56 m hoog. Hoeveel cm heeft de bal in totaal afgelegd als deze voor de vierde keer de grond raakt?

Terugblik

Groefactoren omzetten naar andere tijdseenheden

Is g de groeifactor per tijdseenheid, dan is de

- groeifactor per 3 tijdseenheden gelijk aan g^3
- groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Deze regel geldt ook voor niet-gehele getallen n .

Is de groeifactor per uur gelijk aan 1,8, dan is de

- groeifactor per half uur gelijk aan $1,8^{\frac{1}{2}} \approx 1,342$
- groeifactor per kwartier gelijk aan $1,8^{\frac{1}{4}} \approx 1,158$.

(Groei)percentages omzetten naar andere eenheden

Is de toename per dag 30%, dan is de

- groeifactor per dag 1,3
- groeifactor per week $1,3^7 \approx 6,27$ en de toename per week dus 527%
- groeifactor per uur $1,3^{\frac{1}{24}} \approx 1,011$ en de toename per uur dus 1,1%.

Is de afname per uur 8,2%, dan is de

- groeifactor per uur 0,918
- groeifactor per dag $0,918^{24} \approx 0,128$, dus de afname per dag is 87,2%
- groeifactor per kwartier $0,918^{\frac{1}{4}} \approx 0,979$, dus de afname per kwartier is 2,1%.

Het omzetten van een groeipercantage naar een andere eenheid gaat via groeifactoren.

De formule opstellen bij exponentiële groei

Weet je bij een exponentiële groei op twee tijdstippen de hoeveelheid, dan kun je de formule opstellen.

Is $N = 82$ voor $t = 5$ uur en is $N = 246$ voor $t = 12$ uur,

dan is $g_{7 \text{ uur}} = \frac{246}{82} = 3$, dus $g_{\text{uur}} = 3^{\frac{1}{7}} \approx 1,1699\dots$

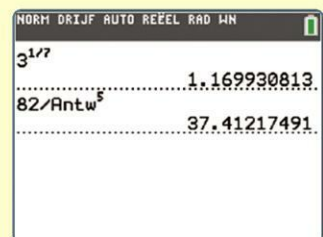
$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,1699\dots^t \\ \text{bij } t = 5 \text{ hoort } N = 82 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,1699\dots^5 = 82 \\ b = \frac{82}{1,1699\dots^5} \approx 37 \end{array}$$

Dus $N = 37 \cdot 1,170^t$.

Met deze formule kun je bijvoorbeeld berekenen voor welke t de hoeveelheid gelijk is aan 500. Los hiertoe de vergelijking $37 \cdot 1,170^t = 500$ op.

Invoeren van $y_1 = 37 \cdot 1,170^x$ en $y_2 = 500$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 16,58\dots$

Dus voor $t \approx 16,6$ is $N = 500$.



10.3 Logaritmen



Geef de waarde van x zonder de optie snijpunt van de GR te gebruiken.

a $2^x = 8$

c $2^x = 64$

e $3^x = \sqrt{3}$

b $3^x = 9$

d $3^x = 81$

f $3^x = \frac{1}{3}$

Theorie A De logaritme

In opgave 37a heb je de exponent x gegeven waarvoor geldt $2^x = 8$.

Je kreeg $x = 3$.

Zoek je de exponent bij $2^x = 13$, dan komt het niet mooi uit.

Deze exponent noteren we als ${}^2\log(13)$. Dus $2^{2\log(13)} = 13$.

Je kunt controleren dat ${}^2\log(13) \approx 3,70044$, want $2^{3,70044} \approx 13$.

$$2^{2\log(13)} = 13$$

Je weet: $2^3 = 8$. Je kunt ook noteren $2^{2\log(8)} = 8$. Conclusie: ${}^2\log(8) = 3$.

- De notatie log komt van **logaritme**.
- In ${}^2\log(8)$ is 2 het **grondtal van de logaritme**.
- ${}^2\log(8)$ spreek je uit als de tweede logaritme van acht of kortweg twee log acht.

Bij 2^x is 2 het grondtal en x de exponent. Wil je weten voor welke x geldt dat $2^x = 8$, dan is het antwoord $x = {}^2\log(8)$.

Dus ${}^2\log(8)$ is de exponent van de macht met grondtal 2 waarbij de macht gelijk is aan 8. Deze exponent is 3, dus ${}^2\log(8) = 3$.

En zo is ${}^3\log(81)$ gelijk aan 4, want $3^4 = 81$.

${}^3\log(81)$ is de exponent van een macht met grondtal 3 waarmee de macht gelijk is aan 81.

Zoek je de uitkomst van ${}^2\log(64)$, dan zoek je dus de exponent bij het grondtal 2 waarmee je 64 krijgt.

Bedenk daartoe dat $64 = 2^6$, dus ${}^2\log(64) = {}^2\log(2^6) = 6$.

En zo is ${}^3\log\left(\frac{1}{9}\right) = {}^3\log\left(\frac{1}{3^2}\right) = {}^3\log(3^{-2}) = -2$.

$${}^g\log(g^a) = a$$

En ook ${}^5\log(\sqrt{5}) = {}^5\log(5^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$.

${}^g\log(x)$ is bij een macht met grondtal g de exponent waarmee de macht gelijk is aan x . Dus $g^{g\log(x)} = x$.

In ${}^g\log(x)$ heet g het grondtal van de logaritme.

Er geldt ${}^g\log(g^a) = a$.

R38


Je hebt gezien dat $2^{\log(13)} = 13$.

Algemeen geldt dat $g^{\log(x)} = x$.

Ook heb je gezien dat $3^{\log(81)} = 4$, want $3^4 = 81$.

Algemeen geldt $g^{\log(x)} = a$ betekent $x = g^a$.

Ook heb je gezien dat $g^{\log(g^a)} = a$.

Deze drie afspraken over logaritmen zijn gelijkwaardig, maar je gebruikt ze in verschillende situaties.

- a Welke afspraak gebruik je om $3^{\log(\frac{1}{27})}$ te berekenen?
- b Welke afspraak gebruik je om $3^{3^{\log(50)}}$ te berekenen?
- c Welke afspraak gebruik je om de vergelijking $3^{\log(x)} = 5$ op te lossen?

Afspraken logaritmen

$$g^{\log(x)} = x$$

$$g^{\log(g^a)} = a$$

$$g^{\log(x)} = a \text{ betekent } x = g^a$$

39


Vul in.

- a $2^{\log(32)} = \dots$, want $2^{\dots} = 32$
- b $2^{\log(4)} = \dots$, want $2^{\dots} = 4$
- c $2^{\log(1)} = \dots$, want $2^{\dots} = 1$
- d $3^{\log(27)} = \dots$, want $3^{\dots} = 27$
- e $3^{\log(\frac{1}{3})} = \dots$, want $3^{\dots} = \frac{1}{3}$
- f $5^{\log(25)} = \dots$, want $5^{\dots} = 25$

40


$$2^{\log(128)} = 2^{\log(2^7)} = 7$$

Bereken op dezelfde manier.

- | | | |
|------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| a $4^{\log(16)}$ | d $5^{\log(\frac{1}{5})}$ | g $2^{\log(2)}$ |
| b $10^{\log(1000)}$ | e $6^{\log(1)}$ | h $2^{\log(\frac{1}{4})}$ |
| c $3^{\log(\sqrt{3})}$ | f $10^{\log(\frac{1}{10})}$ | i $4^{\log(0,25)}$ |

41


$$2^{\log(\frac{1}{8}\sqrt{2})} = 2^{\log(\frac{1}{2^3} \cdot 2^{\frac{1}{2}})} = 2^{\log(2^{-2\frac{1}{2}})} = -2\frac{1}{2}$$

Bereken op dezelfde manier.

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------------|---|
| a $2^{\log(256\sqrt{2})}$ | b $3^{\log(\frac{1}{9}\sqrt{3})}$ | c $\frac{1}{2}^{\log(4 \cdot \sqrt[3]{2})}$ |
|---------------------------|-----------------------------------|---|

O42


- a Kate beweert dat $2^{\log(-4)} = -2$. Waarom is dit fout?
- b Xinly beweert dat $1^{\log(8)} = 8$. Waarom is dit onzin?
- c Volgens Elze-Noor is $1^{\log(1)} = 8$. Wat vind je hiervan?
- d Samir beweert dat $2^{\log(8)} = -3$. Klopt dit?

O43


Gegeven is de formule $y = 2^{\log(x)}$.

- a Neem de tabel over en vul hem in.
- b Teken de punten van de tabel en teken door deze punten een vloeiende kromme. Let op: de kromme snijdt de y -as niet.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = 2^{\log(x)}$							

Theorie B Formules met logaritmen

Bij de formule $y = {}^2\log(x)$ is 2 het grondtal van de logaritme.

Bij de formule $y = {}^g\log(x)$ beperken we ons tot positieve grondtallen ongelijk aan 1, dus tot grondtallen waarvoor geldt $0 < g < 1$ of $g > 1$.

Dus ${}^1\log(5)$ en ${}^{-2}\log(4)$ hebben geen betekenis.

Merk op dat ${}^2\log(-4)$ niet bestaat. Om de uitkomst van deze logaritme te bepalen, zou je -4 als macht van 2 moeten schrijven, dus $-4 = 2^{\dots}$. Maar dat kan niet, want elke macht van 2 is positief.

${}^g\log(x)$ heeft alleen betekenis voor $g > 0$ en $g \neq 1$ en $x > 0$.

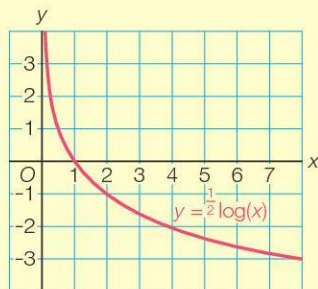
Hiernaast is de grafiek getekend van $y = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

Daarbij is de volgende tabel gebruikt.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3

De grafiek van $y = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ is *dalend*.

Omdat je voor x alleen positieve getallen mag invullen, blijft de grafiek rechts van de y -as. Wel nadert de grafiek onbeperkt dicht tot de y -as.

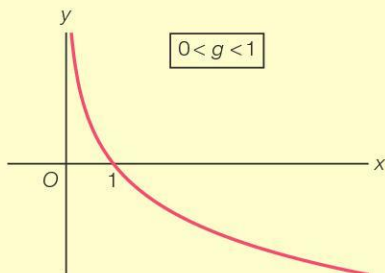


figuur 10.2

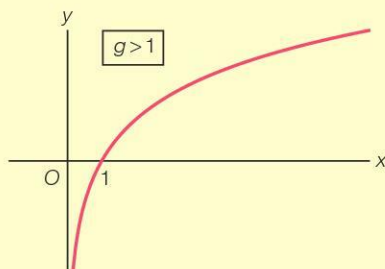
De grafiek van $y = {}^g\log(x)$ is een standaardgrafiek.

Bij de grafiek van $y = {}^g\log(x)$ onderscheiden we twee situaties, namelijk $0 < g < 1$ en $g > 1$.

De standaardgrafiek $y = {}^g\log(x)$



De grafiek is dalend en nadert onbeperkt dicht de positieve y -as.



De grafiek is stijgend en nadert onbeperkt dicht de negatieve y -as.

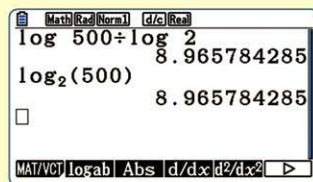
De log-toets op de GR staat voor $^{10}\log$, dus $\log(100) = 2$, $\log(1000) = 3$ en $\log(\frac{1}{10}) = -1$. Met de GR krijg je $\log(500) \approx 2,699$.

Om $^2\log(500)$ te berekenen, kun je de rekenregel $^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ gebruiken.

Je krijgt $^2\log(500) = \frac{\log(500)}{\log(2)} \approx 8,966$.

Op de TI, de NW en de HP kun je ook intikken $\log(500, 2)$. Op de Casio kun je ook de optie logab uit het OPTN-CALC-menu gebruiken.

Je kunt het bovenstaande ook gebruiken bij het invoeren van een formule met logaritmen op de GR.



Je kunt de rekenregel $^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ ook gebruiken om formules in een andere vorm te schrijven. Zo kun je de formule $N = 40 \cdot ^3\log(t)$ schrijven in de vorm $N = a \cdot \log(t)$. Dit gaat als volgt.

$$N = 40 \cdot ^3\log(t) = 40 \cdot \frac{\log(t)}{\log(3)} = \frac{40}{\log(3)} \cdot \log(t) \approx 83,8 \cdot \log(t), \text{ dus}$$

$$N = 83,8 \cdot \log(t).$$

44 Bereken. Rond af op twee decimalen.



a $^3\log(5)$

c $^2\log(20) - ^2\log(6)$

e $3 \cdot ^2\log(7)$

b $^{\frac{1}{2}}\log(18)$

d $^{\frac{1}{3}}\log(10) + \log(\frac{1}{3})$

f $\frac{5}{^4\log(12)}$

45 Rond in deze opgave zo nodig af op één decimaal.



a Schrijf de formule $N = 50 \cdot ^5\log(t)$ in de vorm $N = a \cdot \log(t)$.

b Schrijf de formule $P = 100 - ^{\frac{1}{2}}\log(q)$ in de vorm $P = a + b \cdot \log(q)$.

c Schrijf de formule $K = 7 \cdot ^2\log(x) + 6 \cdot ^4\log(x)$ in de vorm $K = a \cdot \log(x)$.

46 Volgens een veelgebruikte vuistregel geldt dat de hondenleeftijd keer



zeven gelijk is aan de mensenleeftijd. Uit deze vuistregel volgt bijvoorbeeld dat een hondenleeftijd van 2 jaar vergelijkbaar is met een mensenleeftijd van 14 jaar. Uit onderzoek naar het DNA van honden en mensen blijkt dat deze regel niet klopt. Een betere benadering van de mensenleeftijd van een hond krijg je met de formule $m = 37 \cdot \log(h) + 31$ met $h > 0,5$. Hierin is h de hondenleeftijd en m de mensenleeftijd, beide in jaren.

a De oudste hond ooit was 29 jaar oud.

Bereken met de formule de mensenleeftijd die hierbij hoort.

b Welke hondenleeftijd correspondeert volgens de formule met een mensenleeftijd van 75 jaar? Rond af op gehelen.

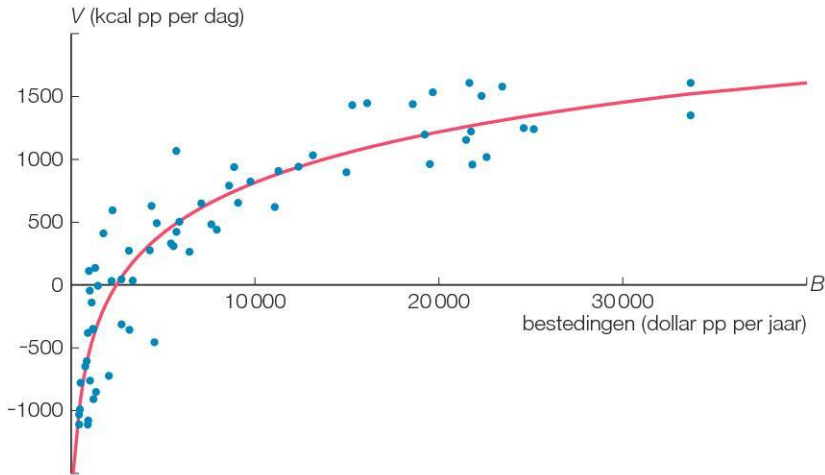
c Bereken vanaf welke waarde van h de formule lagere mensenleeftijden geeft dan de vuistregel. Rond af op gehelen.

Hoe meer mensen te besteden hebben in een land, hoe meer voedsel ze verspillen.

In de figuur hieronder zie je voor een aantal landen wat de bestedingen zijn en wat de voedselverspilling is. Elk punt stelt een land voor.

In de figuur is ook de grafiek getekend die zo goed mogelijk bij de punten past. De formule bij deze grafiek is $V = 1339 \cdot \log(B) - 4539$.

Hierin is V de voedselverspilling in kcal per persoon per dag in een land en B de bestedingen in dollar per persoon per jaar in het land.



figuur 10.3 Bron: PLOS ONE (2020)

- a** In Estland zijn de bestedingen per persoon per jaar 11 275 dollar, terwijl er per persoon per dag 907 kcal voedsel verspild wordt. Hoeveel meer verspilling is dit dan volgens de formule verwacht mag worden?
- b** In Nederland zijn de bestedingen 22 591 dollar per persoon per jaar en is de voedselverspilling 1017 kcal per persoon per dag. Bereken of Nederland zuiniger met voedsel omgaat dan op basis van de formule verwacht mag worden.

Neem aan dat een mens per dag gemiddeld 2600 kcal energie nodig heeft. Als mensen meer voedsel kopen dan ze op basis van deze aanname nodig hebben, dan noemen we dat verspilling.

- c** In Zimbabwe is de voedselverspilling -1000 kcal per persoon per dag. Leg uit wat de betekenis is van deze waarde.
- d** Bereken bij welke bestedingen in een land de voedselverspilling gelijk is aan 0.
- e** Voor India is V gelijk aan 0.
Leg uit waarom dit niet betekent dat niemand in India voedsel verspilt.



Gegeven is de formule $N = {}^2\log(x - 3)$.

Hieruit volgt dat $x - 3 = 2^N$.

a Uit welke afspraak over logaritmen volgt dit?

Gegeven is de formule $y = 4 + 3^x$.

Je kunt x uitdrukken in y . Je krijgt $x = {}^3\log(y - 4)$.

b Laat zien hoe dat gaat.

Theorie C Variabelen vrijmaken bij formules met exponenten en logaritmen

Je kunt bij de formule $P = 5 + {}^2\log(x)$ de variabele x vrijmaken.

Je gebruik daarbij dat ${}^g\log(x) = a$ betekent $x = g^a$. Je krijgt

$$P = 5 + {}^2\log(x)$$

$${}^2\log(x) = P - 5$$

$$x = 2^{P-5}$$

$${}^2\log(x) = y \text{ geeft } x = 2^y$$

Je kunt bij de formule $Q = 6 - 2^y$ de variabele y vrijmaken.

Je gebruikt daarbij dat $g^a = x$ geeft $a = {}^g\log(x)$. Je krijgt

$$Q = 6 - 2^y$$

$$2^y = 6 - Q$$

$$y = {}^2\log(6 - Q)$$

$$2^y = x \text{ geeft } y = {}^2\log(x)$$

Voorbeeld

a De formule $N = \log(x - 5) - 2$ is te schrijven in de vorm

$$x = a + b \cdot 10^N.$$

Bereken a en b .

b Gegeven is de formule $y = 5 + 3^{x-1}$.

Druk x uit in y .

Uitwerking

a $N = \log(x - 5) - 2$

$$\log(x - 5) = N + 2$$

$$x - 5 = 10^{N+2}$$

$$x = 5 + 10^N \cdot 10^2$$

$$x = 5 + 100 \cdot 10^N$$

Dus $a = 5$ en $b = 100$.

b $y = 5 + 3^{x-1}$

$$3^{x-1} = y - 5$$

$$x - 1 = {}^3\log(y - 5)$$

$$x = 1 + {}^3\log(y - 5)$$

Gebruik de rekenregel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ van rechts naar links.

49

- a** De formule $N = \log(x - 4) - 3$ is te schrijven in de vorm

$$x = a + b \cdot 10^N.$$

Bereken a en b .

- b** Gegeven is de formule $y = 2 + 4^{x-3}$.

Druk x uit in y .

- c** Schrijf de formule $P = 2 \cdot {}^3\log(x) - 4$ in de vorm $x = a \cdot g^P$.

Rond g af op drie decimalen.

- d** Maak de variabele x vrij bij de formule $K = 10 - 2 \cdot 4^x$.

A50

- a** De formule $M = {}^2\log(2t - 6)$ is te herleiden tot $t = 3 + 2^{M-1}$.

Laat deze herleiding zien.

- b** Maak de variabele N vrij bij de formule $F = 16 - 2^{2N-1}$.

- c** De formule $x = 3^{0,25y-0,6}$ is te schrijven in de vorm $y = a + b \cdot {}^3\log(x)$.

Bereken a en b .

- d** De formule $y = \log(2x + 3) - 0,8$ is te schrijven in de vorm

$$x = a + b \cdot 10^y$$

Bereken a en b . Rond zo nodig af op twee decimalen.

51

- a** Herleid de formule $Z = {}^3\log(4n + 1) - 6$ tot de vorm $n = a + b \cdot 3^Z$.

- b** De formule $y = 3 + 2^{2x-3}$ is te schrijven in de vorm

$$x = a + b \cdot \log(y - 3).$$

Bereken a en b . Rond zo nodig af op twee decimalen.

- c** Schrijf de formule $D = \log(\sqrt{E}) - 1\frac{1}{2}$ in de vorm $E = 10^{aD+b}$.

Terugblik

De logaritme

Wil je weten voor welke x geldt dat $2^x = 30$, dan is het antwoord $x = {}^2\log(30)$. Dus ${}^2\log(30)$ is de exponent van de macht met grondtal 2, waarmee de macht gelijk is aan 30. In ${}^2\log(30)$ is 2 het grondtal van de logaritme.

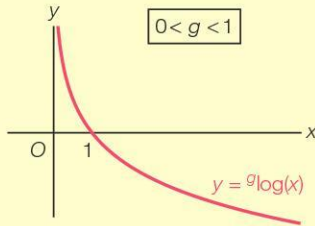
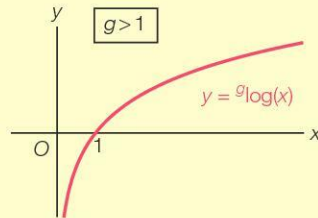
Voor logaritmen gelden de volgende afspraken:

- $g^{{}^g\log(a)} = a$, dus $2^{{}^2\log(30)} = 30$
- ${}^g\log(g^a) = a$, dus ${}^5\log(\frac{1}{125}) = {}^5\log(\frac{1}{5^3}) = {}^5\log(5^{-3}) = -3$
- ${}^g\log(x) = a$ betekent $x = g^a$, dus als ${}^2\log(x) = 7$ dan is $x = 2^7 = 128$.

Logaritmische formules

De grafiek van $y = {}^g\log(x)$ is een standaardgrafiek.

We onderscheiden de situaties $0 < g < 1$ en $g > 1$.



De log-toets op de GR staat voor ${}^{10}\log$, dus $\log(1000) = 3$ en $\log(\frac{1}{100}) = -2$. Om ${}^3\log(20)$ te berekenen, kun je gebruikmaken van de rekenregel

$${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}. \text{ Je krijgt } {}^2\log(30) = \frac{\log(30)}{\log(2)} \approx 4,91.$$

Je kunt de rekenregel ook gebruiken om de formule $N = 7 \cdot {}^3\log(x)$ in de vorm $N = b \cdot \log(x)$ te schrijven.

$$\text{Je krijgt } N = 7 \cdot {}^3\log(x) = 7 \cdot \frac{\log(x)}{\log(3)} = \frac{7}{\log(3)} \cdot \log(x) \approx 14,7 \cdot \log(x).$$

Variabelen vrijmaken

Je kunt de formule $N = -3 + {}^2\log(x - 4)$ schrijven in de vorm $x = a + b \cdot 2^N$.

$$\begin{aligned} \text{Je krijgt } {}^2\log(x - 4) &= N + 3 \\ x - 4 &= 2^{N+3} \\ x &= 4 + 2^N \cdot 2^3 \\ x &= 4 + 8 \cdot 2^N \end{aligned}$$

Je kunt bij de formule $y = 5 + 2^{x-3}$ de variabele x vrijmaken.

$$\begin{aligned} \text{Je krijgt } 2^{x-3} &= y - 5 \\ x - 3 &= {}^2\log(y - 5) \\ x &= 3 + {}^2\log(y - 5) \end{aligned}$$

10.4 Werken met logaritmen

052
☐ ⊗ *

Van een aantal dieren is een indicatie gegeven van het gewicht van een volwassen exemplaar.

kolibrie	0,002 kg
muis	0,02 kg
egel	0,9 kg
wasbeer	10 kg
zeehond	100 kg
paard	600 kg
olifant	5500 kg
walvis	100 000 kg

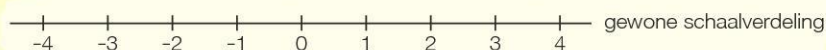


- Hoeveel keer zo zwaar is de walvis als de wasbeer?
En hoeveel keer zo zwaar als de kolibrie?
- We willen de acht gewichten op een getallenlijn zetten.
Stel dat we de eenheid zo kiezen, dat 1 mm overeenkomt met 1 gram.
Hoe lang moet de getallenlijn dan worden?
- Neem aan dat op de getallenlijn 1 mm overeenkomt met 1000 kg.
Hoe lang moet de getallenlijn dan worden? Welk bezwaar is tegen deze eenheid in te brengen?

Theorie A Logaritmische schaalverdeling

In opgave 52 heb je gezien dat je de waarnemingsgetallen niet goed kunt uitzetten op de getallenlijn met een gewone schaalverdeling. Daarom gebruiken we hiervoor een **logaritmische schaalverdeling**.

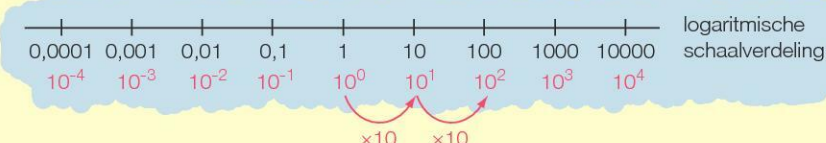
Bij een gewone schaalverdeling zit er tussen de getallen 0 en 1 evenveel afstand als tussen de getallen 1 en 2, enzovoort.



Bij een logaritmische schaalverdeling zit er tussen de getallen $10^0 = 1$ en $10^1 = 10$ evenveel afstand als tussen de getallen $10^1 = 10$ en $10^2 = 100$.

Bij een vaste stapgrootte hoort bij een logaritmische schaalverdeling dus een vaste factor.

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$



In figuur 10.4 zie je een gedeelte van een vel **logaritmisch papier**. Op de y -as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Op deze as staat het getal 1 bij het snijpunt met de x -as. Op de x -as is een gewone schaalverdeling gekozen.

Met de getallen langs de y -as kun je bij elke horizontale lijn te weten komen welke y -waarde erbij hoort.

Van onder naar boven zie je eerst de getallen 1, 2, 3, ..., 9 en $10^1 = 10$.

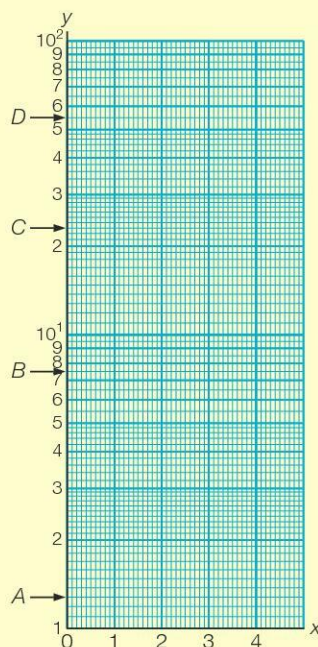
De lijn direct boven de lijn $y = 10$ hoort bij $y = 11$, dan $y = 12$, ... tot en met $y = 20$.

Bij de lijn $y = 20$ staat 2, want $2 \cdot 10^1 = 20$.

Verder naar boven krijg je vervolgens lijnen bij de waarden 21, 22, 23, ..., 29 en 30.

Tussen 30 en 40 staan alleen nog maar lijnen bij 32, 34, 36 en 38.

Tussen 50 en 60 staat alleen nog maar een lijn bij 55.



figuur 10.4

53 Zie figuur 10.4.



- Welke y -waarden horen bij de letters A tot en met D?
- Je ziet in de figuur wel een lijn bij 13, maar niet bij 33. Bij welke van de volgende y -waarden is een lijn getekend?
49 9,5 2,4 1,25 0
- Bij een onderzoek variëren de meetresultaten van 10^3 tot 10^5 . Om deze gegevens op het logaritmisch papier van figuur 10.4 te kunnen uitzetten, zet men op de verticale as 10^3 op de hoogte van de horizontale as en 10^5 bij de bovenste horizontale lijn. Bij de letter A hoort dan het getal 1300. Welke getallen horen in dit geval bij de letters B, C en D?

R54 [▶WERKBLAD] Gebruik het logaritmisch papier op het werkblad.



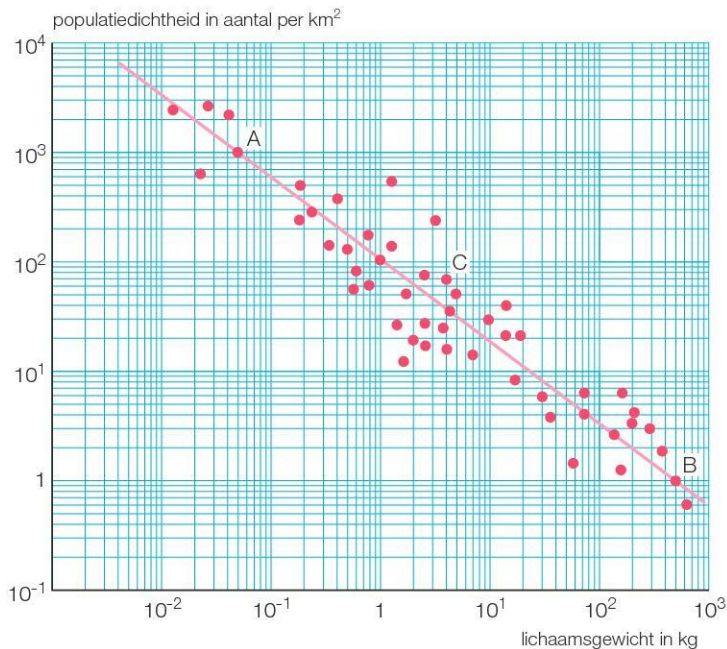
- Teken de horizontale lijnen bij $y = 2$, $y = 4$ en $y = 8$. Wat valt je op als je naar de onderlinge afstanden van deze lijnen kijkt?
- Jan tekent op het logaritmisch papier de lijnen $y = 2$ en $y = 6$. De volgende lijn die hij tekent heeft dezelfde afstand tot de lijn $y = 6$ als de afstand tussen de lijnen $y = 2$ en $y = 6$. Welke lijn tekent Jan?
- Jan zet de regelmaat van vraag b voort. Geef de formules van de volgende drie lijnen die hierbij horen.

[▶ WERKBLAD] Bij desinfectie worden schadelijke micro-organismen op oppervlakken en voorwerpen verminderd. In de tabel zie je hoe het aantal micro-organismen N tijdens het uitkoken van een medisch instrument afneemt. In deze tabel is t de tijd in minuten dat het uitkoken duurt.

t	N
0	100 000
1	15 000
2	2000
3	400
4	50

- Teken de punten die uit de tabel volgen op het logaritmisch papier en verbind de getekende punten door lijnstukken.
- Gebruik de grafiek die je in vraag a hebt getekend om het aantal micro-organismen te schatten op $t = 1,5$ en $t = 2,5$.
- Na hoeveel minuten ongeveer is het aantal micro-organismen teruggebracht tot 100? Geef het antwoord in één decimaal.

In figuur 10.5 zie je **dubbellogaritmisch papier**: zowel op de verticale als op de horizontale as is een logaritmische schaal aangebracht. Van verschillende soorten zoogdieren is de populatiedichtheid uitgezet tegen het gewicht van een volwassen exemplaar.



figuur 10.5

- Geef het gewicht en de populatiedichtheid van soort A. Doe dat ook voor de soorten B en C.
- Een soort heeft een gewicht van 1 kg. Geef de populatiedichtheid van deze soort.
- In een natuurpark met een oppervlakte van 25 km^2 leven 150 bavianen. Hoeveel is het gewicht van deze soort?



Gegeven is de formule $\log(N) = 0,1t + 2,5$.

Hieruit volgt dat $N = 10^{0,1t+2,5}$.

a Licht dit toe.

De formule $N = 10^{0,1t+2,5}$ is te herleiden tot de vorm $N = b \cdot g^t$.

Je krijgt $N = 316 \cdot 1,259^t$. Hierbij is 316 afgerond op gehelen en 1,259 op drie decimalen.

b Laat deze herleiding zien.

Theorie B Exponentiële groei en logaritmisch papier

De formule $\log(N) = 0,1t + 2,5$ geeft een lineair verband tussen t en $\log(N)$. Teken je de grafiek bij deze formule in een assenstelsel met op de N -as een logaritmische schaalverdeling, dan krijg je dus een rechte lijn.

Op logaritmisch papier met een horizontale t -as en een verticale N -as is de grafiek van $\log(N) = mt + n$ een rechte lijn.

Je hebt gezien dat de formule $\log(N) = 0,1t + 2,5$ te herleiden is tot $N = 316 \cdot 1,259^t$.

In het algemeen is een formule van de vorm $\log(N) = mt + n$ te herleiden tot de vorm $N = b \cdot g^t$.

Dat betekent dat de grafiek van de formule $N = b \cdot g^t$ op logaritmisch papier een rechte lijn is.

Voorbeeld

Zie figuur 10.6.

Stel de formule op van N . Rond de beginhoeveelheid af op tientallen.

Uitwerking

Rechte lijn op logaritmisch papier, dus

$$N = b \cdot g^t.$$

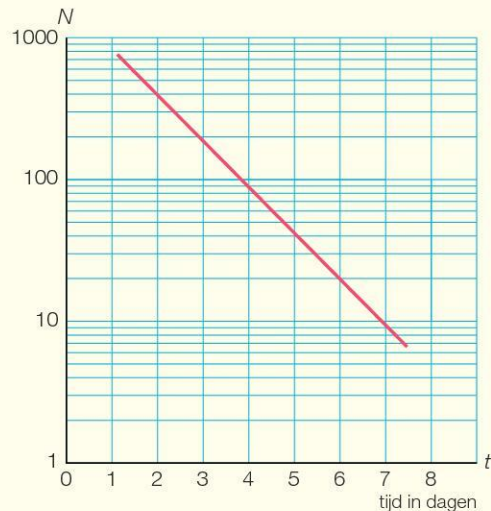
$$\left. \begin{array}{l} t = 2 \text{ en } N = 400 \\ t = 6 \text{ en } N = 20 \end{array} \right\} g_{4 \text{ dagen}} = \frac{20}{400} = 0,05$$

$$g_{\text{dag}} = 0,05^{\frac{1}{4}} = 0,4728\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,4728\dots^t \\ t = 2 \text{ en } N = 400 \end{array} \right\} b \cdot 0,4728\dots^2 = 400$$

$$b = \frac{400}{0,4728\dots^2} \approx 1790$$

Dus $N = 1790 \cdot 0,473^t$.



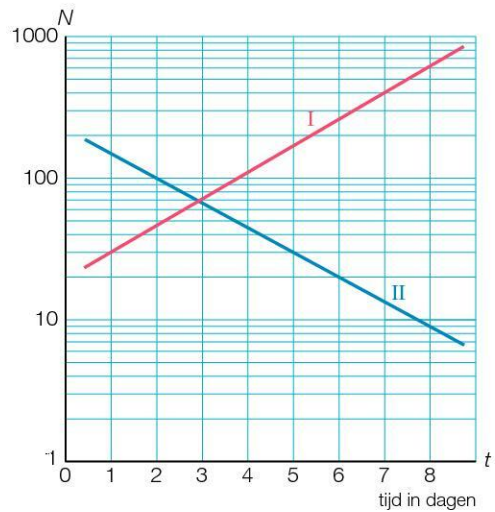
figuur 10.6

58



[▶ WERKBLAD] Zie figuur 10.7.

- Stel de formule op van grafiek I.
- Stel de formule op van grafiek II.
- Grafiek III gaat door het punt $(1, 3)$ en is evenwijdig met grafiek I. Teken grafiek III en stel hiervan de formule op.



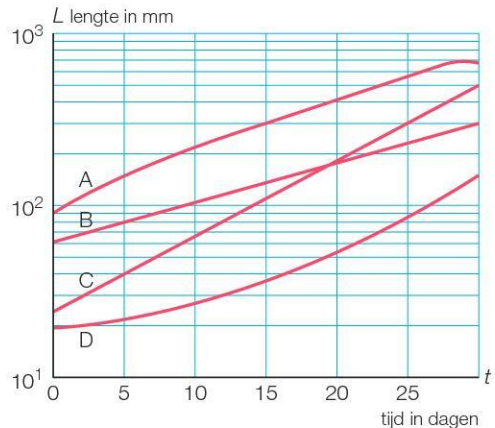
figuur 10.7

59



[▶ WERKBLAD] Van vier planten A, B, C en D is in de maand juni de lengte bijgehouden. De bijbehorende grafieken zijn op logaritmisch papier getekend. Zie figuur 10.8.

- Bij welke planten is sprake van exponentiële groei? Stel van deze planten de formule op van de lengte L in mm na t dagen. Rond de groeifactor af op twee decimalen.
- Plant E groeit exponentieel. Na 5 dagen is de lengte 30 mm en na 25 dagen is de lengte 400 mm. Teken de grafiek van de lengte van plant E.
- Plant F groeit exponentieel met dezelfde groeifactor als plant B, en na 10 dagen is de lengte 5 cm. Teken in de figuur van vraag b de grafiek van de lengte van plant F.



figuur 10.8

60



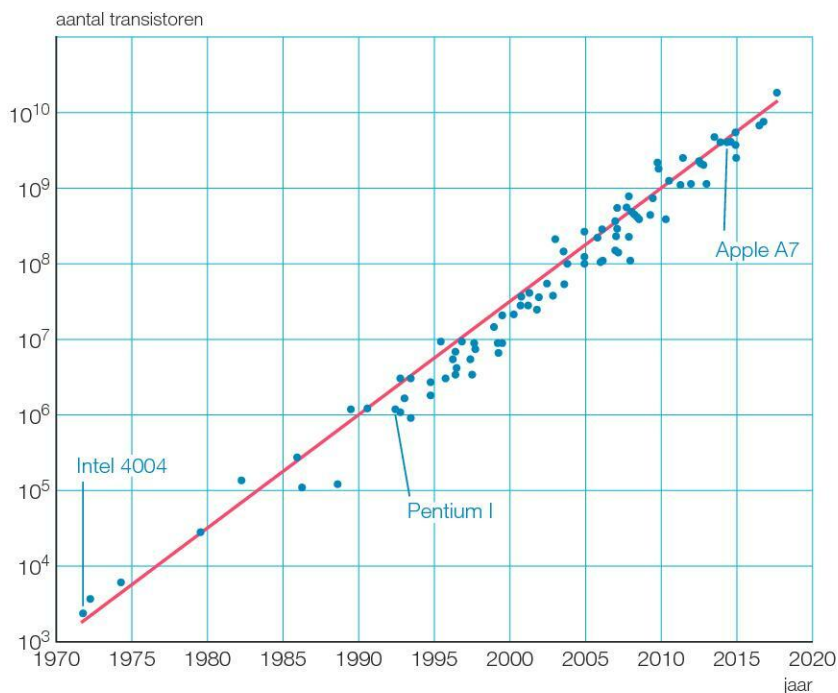
[▶ WERKBLAD] Een vogelwerkgroep heeft in een gebied op de Veluwe in de periode 2001-2015 het aantal patrijzen geteld.

jaar	2001	2003	2004	2006	2007	2010	2012	2015
aantal N	610	455	390	290	250	160	115	75

- Zet de gegevens uit op het logaritmisch papier en toon hiermee aan dat het aantal patrijzen exponentieel afneemt.
- Stel de formule op van het aantal patrijzen N . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2000.

Elke computer gebruikt transistoren om berekeningen te maken. Hoe meer transistoren, hoe sneller de computer. In de begintijd van computers ging het om enkele honderden transistoren per computer. Tegenwoordig zijn dat er vele miljarden, die in zogenaamde microprocessors zijn verwerkt. In 1965 voorspelde de wetenschapper Gordon Moore dat het aantal transistoren per microprocessor exponentieel zou gaan groeien. Hij gaf een verdubbelingstijd van twee jaar. Deze voorspelling staat bekend als de wet van Moore.

In figuur 10.9 is van enkele microprocessors het aantal transistoren per microprocessor uitgezet tegen het jaar van verschijnen. Verder geeft de lijn een goede indruk van de ontwikkeling tussen 1972 en 2018.



figuur 10.9

- Onderzoek met behulp van de lijn in de figuur of de wet van Moore heeft standgehouden tussen 1972 en 2018.
- Gebruik een formule van de lijn in de figuur om een voorspelling te doen van het aantal transistoren per microprocessor in 2025.

- Gegeven zijn de formules $y_1 = \log(x + 5)$, $y_2 = \log(x) + \log(5)$ en $y_3 = \log(5x)$. Twee van deze formules komen op hetzelfde neer. Onderzoek met de GR welke formules dat zijn.
- Welke van de formules $y_1 = \log(x - 5)$, $y_2 = \log(x) - \log(5)$ en $y_3 = \log\left(\frac{x}{5}\right)$ komen op hetzelfde neer?
- Welke van de formules $y_1 = \log(x^3)$, $y_2 = (\log(x))^3$ en $y_3 = 3 \cdot \log(x)$ komen op hetzelfde neer?

Theorie C Rekenregels voor logaritmen

In opgave 62 heb je voorbeelden gezien van rekenregels voor logaritmen.

In de vorige paragraaf heb je al de regel ${}^s\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ gebruikt.

Deze regel geldt niet alleen voor het grondtal 10 in het rechterlid, maar voor elk grondtal $p > 0$ en $p \neq 1$. Er geldt dus ${}^s\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$.

Rekenregels voor logaritmen

$${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(ab)$$

$${}^s\log(a^p) = p \cdot {}^s\log(a)$$

$${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$${}^s\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$$

Deze vier regels staan op het formuleblad van het centraal examen.

Voorbeeld

- a Schrijf de formule $N = {}^2\log(64x)$ in de vorm $N = a + b \cdot \log(x)$.

Rond zo nodig af op twee decimalen.

- b Gegeven is de formule $N(x) = 31,3 + 24,9 \cdot \log(x)$.

Er geldt: als x verdubbelt, dan neemt N met ongeveer 7,5 toe.

Toon dit aan.

Gebruik ${}^s\log(ab) = {}^s\log(a) + {}^s\log(b)$.

Uitwerking

a $N = {}^2\log(64x) \stackrel{\downarrow}{=} {}^2\log(64) + {}^2\log(x) = 6 + \frac{\log(x)}{\log(2)} = 6 + \frac{1}{\log(2)} \cdot \log(x)$

$$\approx 6 + 3,32 \cdot \log(x)$$

Dus $N = 6 + 3,32 \cdot \log(x)$.

Het dubbele van x is $2x$.

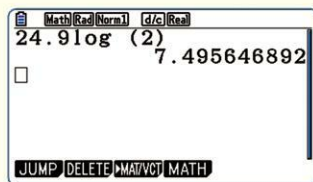
- b $N(2x) = 31,3 + 24,9 \cdot \log(2x)$

$$= 31,3 + 24,9(\log(2) + \log(x))$$

$$= 31,3 + 24,9 \cdot \log(2) + 24,9 \cdot \log(x)$$

$$= 31,3 + 24,9 \cdot \log(x) + 7,495\dots$$

Dus $N(2x) \approx N(x) + 7,5$ en hiermee is aangetoond dat N met ongeveer 7,5 toeneemt als x verdubbelt.



63 Zie voorbeeld a.



- a Schrijf de formule $N = {}^2\log(64x)$ in de vorm $N = a + b \cdot {}^5\log(x)$.

Rond zo nodig af op twee decimalen.

Zie voorbeeld b.

- b Met hoeveel neemt N af als x halveert? Rond af op één decimaal.

- c Met hoeveel neemt N toe als x verdrievoudigt? Rond af op twee decimalen.

64



Rond in deze opgave zo nodig af op twee decimalen.

- a Schrijf de formule $N = {}^3\log(81x)$ in de vorm $N = a + b \cdot \log(x)$.
- b Schrijf de formule $N = \log(150x)$ in de vorm $N = a + b \cdot {}^2\log(x)$.

65



Bij de volgende formules geldt: als x verdubbelt, dan neemt N steeds met hetzelfde getal toe of af.

Toon dit aan en bereken dat getal bij elke formule. Rond af op gehele.

- a $N(x) = 40 + 9,97 \cdot \log(x)$
- b $N(x) = 653 - 33,2 \cdot \log(x)$

66



Gegeven is de formule $N(x) = 50 + b \cdot \log(x)$.

* Geef in deze opgave de antwoorden in twee decimalen.

Voor welke waarde van b geldt

- a als x verdubbelt, dan neemt N met 15 toe
- b als x halveert, dan neemt N met 6 af
- c als x verdrievoudigt, dan neemt N met 1 toe?

A67



Bedrijven met een website hebben behoefte aan objectieve informatie over het aantal bezoekers van de website en de effectiviteit van de site. Een instelling die dit soort gegevens verzamelt, rekent het volgende tarief per maand:

- vast bedrag van 50 euro per site
- variabel bedrag afhankelijk van het aantal bezoekers n per maand.

Voor het variabele bedrag in euro's gebruikt men de formule

$V(n) = 59,27 \cdot \log(n) - 191,40$. De formule geldt alleen voor die waarden van n waarvoor V positief is.

- a Onderzoek vanaf welke n de formule geldt. Rond af op honderdtallen.
- b Een site had in februari 158 000 bezoekers en in maart waren dat er 56 000 meer.
Hoeveel betaalt de eigenaar van deze site in maart meer dan in februari?
- c Een site heeft elke maand (vrijwel) evenveel bezoekers. In een jaar betaalt de eigenaar van deze site 2200 euro.
Bereken het aantal bezoekers per maand. Rond af op honderdtallen.
- d Bij een verdubbeling van het aantal bezoekers per maand neemt het variabele bedrag steeds met hetzelfde aantal euro's toe.
Toon dit aan en bereken dit bedrag in centen nauwkeurig.

- a** Schrijf de formule $N = 15 \cdot {}^2\log(20x)$ in de vorm $N = a + b \cdot \log(x)$. Rond af op één decimaal.
- b** Gegeven is de formule $N(q) = 17,5 + 12,46 \cdot \log(q)$. Met hoeveel neemt N toe als q verdubbelt? Rond af op twee decimalen.
- c** Gegeven is de formule $N(p) = 38,4 + 9,4 \cdot \log(p^{1,24})$. Toon aan: als p verdubbelt, dan neemt N met ongeveer 3,5 toe.
- d** Gegeven is de formule $N(d) = 12 + b \cdot \log(d)$. Er geldt: als d halveert, dan neemt N met 4,5 af. Bereken b . Rond af op twee decimalen.

Bij netwerkbeheerder Liander krijg je een vergoeding voor het ongemak als je langer dan vier uur zonder gas of stroom hebt gezeten. Op de site van Liander staat het volgende.

U ontvangt:

- €35 wanneer u langer dan 4 uur zonder gas of stroom heeft gezeten
- €20 extra voor elke 4 uur erbij (na 8 uur, 12 uur, etc).

- a** Bereken de vergoeding bij een storing van 3 uur, van 7,5 uur en van 10 uur en 15 minuten.

Uit een onderzoek onder huishoudens die een aansluiting hebben bij Liander blijkt dat men vooral voor kortere onderbrekingen een hoger compensatiebedrag verwacht.

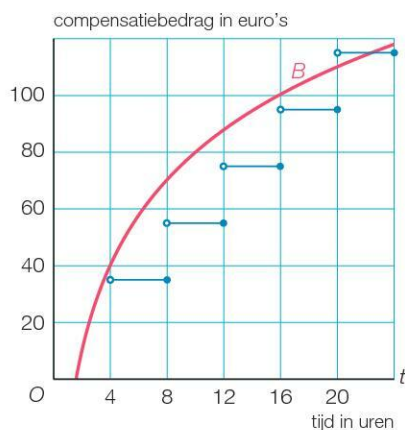
Dit onderzoek leverde het model

$$B(t) = -20 + 100 \cdot \log(t) \text{ op.}$$

Hierin is B het compensatiebedrag in euro's en t de tijdsduur van de onderbreking in uren.

De grafiek van B is, samen met de vergoeding die Liander geeft, getekend in de figuur hiernaast.

- b** Voor een korte onderbreking wordt volgens de formule van B geen compensatie gegeven. Bereken tot hoeveel minuten onderbreking geen compensatie wordt gegeven. Rond af op gehele.
- c** Je kunt in de figuur zien dat bij een onderbreking van minder dan 20 uur er een groot verschil is tussen B en de vergoeding die Liander geeft. Dit verschil is bij $t = 7,5$ groter dan bij $t = 11,5$. Hoeveel groter?
- d** De familie Keil kreeg van Liander bij een onderbreking een vergoeding die precies gelijk was aan de vergoeding die ze zouden krijgen bij toepassing van de formule van B . Hoe lang duurde deze onderbreking? Geef het antwoord in gehele minuten.
- e** Bij de formule van B geldt: als de tijdsduur van de onderbreking verdubbelt, dan neemt de compensatie steeds met hetzelfde bedrag toe. Toon dit aan en bereken dit bedrag in gehele centen.



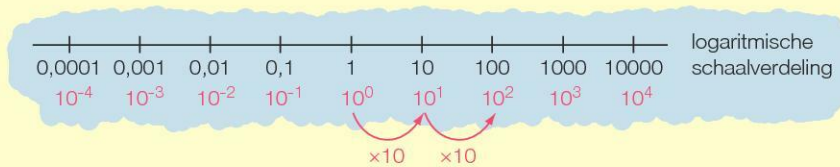
figuur 10.10

Terugblik

Logaritmische schaalverdeling en logaritmisch papier

Bij een logaritmische schaalverdeling zit er tussen de getallen $10^0 = 1$ en $10^1 = 10$ evenveel afstand als tussen de getallen $10^1 = 10$ en $10^2 = 100$.

Bij een vaste stapgrootte hoort bij een logaritmische schaalverdeling dus een vaste factor.

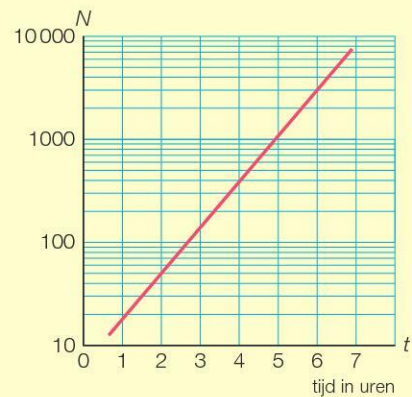


Een voordeel van een logaritmische schaalverdeling is dat je waarnemingen kunt uitzetten die sterk in grootte verschillen.

Bij logaritmisch papier is op de verticale as een logaritmische schaalverdeling aangebracht. Op de horizontale as staat een gewone schaalverdeling. Op logaritmisch papier is de grafiek van $N = b \cdot g^t$ een rechte lijn.

Zet je gegevens uit op logaritmisch papier en liggen deze punten (vrijwel) op een rechte lijn, dan weet je dat de gegeven punten (bij benadering) bij exponentiële groei horen.

De grafiek hiernaast is een rechte lijn door de punten (2, 50) en (6, 3000).



Rekenregels voor logaritmen

De rekenregels voor logaritmen zijn

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$$

$${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$$

Met deze rekenregels is de formule $N(x) = {}^3\log(50x)$ te schrijven in de vorm $N = a + b \cdot \log(x)$. Je krijgt

$$N = {}^3\log(50x) = {}^3\log(50) + {}^3\log(x) = {}^3\log(50) + \frac{\log(x)}{\log(3)} \approx 3,56 + 2,10 \cdot \log(x).$$

$$\text{Dus } N = 3,56 + 2,10 \cdot \log(x).$$

Je kunt met de rekenregels ook aantonen dat bij de formule $N(x) = 28 + 8,3 \cdot \log(x)$ geldt: als x verdubbelt, dan neemt N met ongeveer 2,5 toe. Vul daartoe $2x$ in bij de formule van N .

$$\begin{aligned} \text{Dit geeft } N(2x) &= 28 + 8,3 \cdot \log(2x) = 28 + 8,3(\log(2) + \log(x)) \\ &= 28 + 8,3 \cdot \log(2) + 8,3 \cdot \log(x) \approx 28 + 8,3 \cdot \log(x) + 2,5 \\ &= N(x) + 2,5. \end{aligned}$$

10.5 Groeisnelheid

070


In deze opgave onderzoek je wat de afgeleide is van $y = 2^x$ en $y = 3^x$. De GR heeft een optie om de grafiek van de afgeleide te plotten. Je gebruikt hiervoor:

- op de TI de optie nDeriv via f2
- op de Casio de optie d/dx uit het OPTN-CALC-menu
- op de NW de optie diff(f(x), x, a) bij Differentiëren en integreren uit de Toolbox

- op de HP $\frac{d}{dx}$ met de knop  voor wiskundige sjablonen.

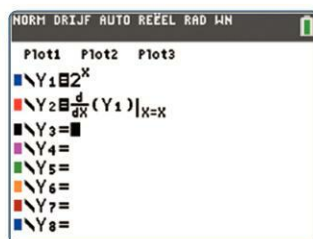
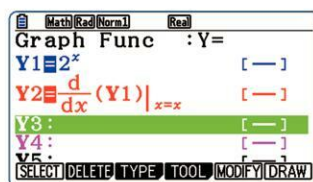
a Plot de grafieken van $y_1 = 2^x$ en y_2 is de afgeleide van y_1 . Neem x tussen -3 en 3 en y tussen 0 en 5.

b Voer in $y_3 = \frac{y_2}{y_1}$ en kijk in de tabel bij y_3 .

Wat valt je op? Hoe volgt hieruit dat de afgeleide van $y = 2^x$ is $\frac{dy}{dx} \approx 0,6931 \cdot 2^x$?

c De afgeleide van $y = 3^x$ is $\frac{dy}{dx} = c \cdot 3^x$.

Onderzoek op de manier van vraag b wat de waarde van c is. Rond af op vier decimalen.



Theorie A De formule $y = e^x$

In opgave 70 heb je gezien dat $y = 2^x$ geeft $\frac{dy}{dx} \approx 0,6931 \cdot 2^x$

en dat $y = 3^x$ geeft $\frac{dy}{dx} \approx 1,0986 \cdot 3^x$.

En zo kun je nagaan dat $y = 2,7^x$ geeft $\frac{dy}{dx} \approx 0,9933 \cdot 2,7^x$

en $y = 2,8^x$ geeft $\frac{dy}{dx} \approx 1,0296 \cdot 2,8^x$.

Er is een grondtal g tussen 2,7 en 2,8 waarbij

$y = g^x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot g^x$ oftewel $\frac{dy}{dx} = g^x$.

Dit grondtal speelt een belangrijke rol in de wiskunde en in allerlei vakgebieden. Daarom wordt het met een eigen letter aangeduid, de letter **e**. De GR heeft een knop om met e te rekenen. Je kunt nagaan dat $e \approx 2,71828$.

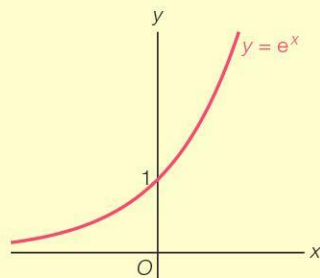
De formule $y = e^x$ is heel bijzonder, want bij deze formule geldt $y = \frac{dy}{dx}$.

$y = e^x$ geeft $\frac{dy}{dx} = e^x$

De grafiek van $y = e^x$ is een standaardgrafiek. Deze grafiek kun je plotten door in te voeren $y_1 = e^x$. Bij het berekenen van de afgeleide van een functie met **e-machten** heb je vaak de kettingregel nodig.

Bij $y = 100e^{2x}$ krijg je $\frac{dy}{dx} = 100e^{2x} \cdot 2 = 200e^{2x}$.

De afgeleide van $2x$.



figuur 10.11

Een hoeveelheid N groeit volgens de formule $N = 30(1 + e^{0,1t})$.

Bij deze **groeiformule** kun je met de afgeleide de **groeisnelheid** berekenen. Zie het voorbeeld.

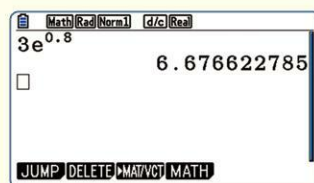
Voorbeeld

Gegeven is de groeiformule $N = 30(1 + e^{0,1t})$. Bereken met de afgeleide de groeisnelheid op $t = 8$. Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

$N = 30(1 + e^{0,1t})$ geeft $\frac{dN}{dt} = 30 \cdot e^{0,1t} \cdot 0,1 = 3e^{0,1t}$

De groeisnelheid op $t = 8$ is $\frac{dN}{dt} = 3e^{0,1 \cdot 8} = 3e^{0,8} \approx 6,68$.



71 Zie het voorbeeld.



Om te berekenen voor welke waarde van t de groeisnelheid twee keer zo groot is als de groeisnelheid op $t = 8$, los je de vergelijking $3e^{0,1t} = 2 \cdot 3e^{0,8}$ op.

- Licht dit toe.
- Voer in $y_1 = 3e^{0,1x}$ en $y_2 = 2 \cdot 3e^{0,8}$ en bereken x . Rond af op één decimaal.
- Voor welke waarde van t is de groeisnelheid drie keer zo groot als de groeisnelheid op $t = 5$? Rond af op één decimaal.

72 Bereken de afgeleide.



- $y = 500e^{3x}$
- $y = 600e^{0,4x}$
- $N = 250e^{0,2t+1}$
- $N = 1000e^{-0,6t}$
- $N = 10(1 + e^{0,12p})$
- $F = 20e^{0,01q^2}$

Euler

Leonhard Euler (1707-1783) is een van de meest vooraanstaande wiskundigen uit de geschiedenis. De eerste lessen in wiskunde kreeg hij van zijn vader, een dominee uit Basel. Na zijn opleiding op het gymnasium van Basel studeerde hij theologie en wiskunde. Op twintigjarige leeftijd werd hij benoemd tot hoogleraar natuurkunde aan de door tsaar Peter de Grote gestichte academie van Sint-Petersburg. In 1731 werd hij daar hoogleraar wiskunde.

Euler was bijzonder productief: hij publiceerde in totaal 886 boeken en geschriften. De functienotatie $f(x)$ werd door hem ingevoerd, evenals de notaties voor de getallen π en e .

Euler bewees dat e een irrationaal getal is. Een irrationaal getal is een getal dat niet als een breuk te schrijven is. De decimale ontwikkeling van zo'n getal gaat oneindig door en vertoont geen enkele regelmaat. In zijn boek *Introductio in Analysin Infinitorum* geeft Euler e in 23 decimalen.

Hij gebruikte hierbij de formule $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$ en vond $e \approx 2,71828182845904523536028$.



Leonhard Euler

73 Gegeven is de groeiformule $N = 50(1 + e^{0,18t})$.



- Bereken met de afgeleide de groeisnelheid op $t = 10$. Rond af op één decimaal.
- Bereken voor welke waarde van t de groeisnelheid twee keer zo groot is als op $t = 5$. Rond af op één decimaal.
- Bereken voor welke waarde van t de groeisnelheid de helft is van de groeisnelheid op $t = 15$. Rond af op één decimaal.

A74 Een bacteriecultuur groeit volgens de formule $N = 25\,000e^{0,4t}$. Hierbij is



N het aantal bacteriën en t de tijd in uren.

- Bereken de gemiddelde groeisnelheid per minuut op het interval $[5, 8]$. Rond af op honderdtallen.
- Bereken met de afgeleide de groeisnelheid per minuut op $t = 5$. Rond af op tientallen.
- Bereken voor welke t de groeisnelheid twee keer zo groot is als op $t = 6$. Rond af op twee decimalen.

075



Gegeven is de formule $y = 4^x$. De afgeleide is $\frac{dy}{dx} = c \cdot 4^x$.

Bereken c . Rond af op vier decimalen. Ga te werk zoals in opgave 70.

Theorie B De natuurlijke logaritme

Voor elke waarde van g met $g > 0$ en $g \neq 1$ geldt dat $y = g^x$ geeft

$$\frac{dy}{dx} = c \cdot g^x, \text{ waarbij } c \text{ afhangt van } g. \text{ Er geldt } c = {}^e\log(g).$$

Je hebt dus te maken met een logaritme met grondtal e .

De logaritme met grondtal e wordt de **natuurlijke logaritme** genoemd en wordt genoteerd met **ln**.

De afkorting **ln** komt van het Latijnse **logarithmus naturalis**.

De natuurlijke logaritme is de logaritme met grondtal e .

$$\ln(a) = {}^e\log(a)$$

De afgeleide van $y = 4^x$ is $\frac{dy}{dx} = \ln(4) \cdot 4^x$ en de afgeleide

van $y = 1,5^x$ is $\frac{dy}{dx} = \ln(1,5) \cdot 1,5^x$, enzovoort.

$$y = g^x \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = g^x \cdot \ln(g)$$

Voorbeeld

- a Differentieer $y = 5 \cdot 2^x$.
- b Bereken de afgeleide van $N = 3^{2t-1}$.
- c De afgeleide van $N = 100(1 + 1,25^{3t})$ is te schrijven in de vorm

$$\frac{dN}{dt} = a \cdot 1,25^{3t}.$$

Bereken a in gehelen.

Uitwerking

a $y = 5 \cdot 2^x$ geeft $\frac{dy}{dx} = 5 \cdot 2^x \cdot \ln(2) = 5 \cdot \ln(2) \cdot 2^x$

b $N = 3^{2t-1}$ geeft $\frac{dN}{dt} = 3^{2t-1} \cdot \ln(3) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gebruik de kettingregel.}}}{2} = 2 \cdot \ln(3) \cdot 3^{2t-1}$

c $N = 100(1 + 1,25^{3t})$ geeft $\frac{dN}{dt} = 100 \cdot 1,25^{3t} \cdot \ln(1,25) \cdot 3$
 $= 300 \cdot \ln(1,25) \cdot 1,25^{3t}$
 $= 66,94... \cdot 1,25^{3t}$

Dus $a = 67$.

De rekenregels voor logaritmen gelden vanzelfsprekend ook voor de natuurlijke logaritme. Zo volgt

- $\ln(5) + \ln(10) = \ln(50)$ uit ${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(ab)$
- $\ln(10) - \ln(5) = \ln(2)$ uit ${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $\ln(9) = 2\ln(3)$ uit ${}^s\log(a^p) = p \cdot {}^s\log(a)$.

Neem je bij de regel ${}^s\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$ in het rechterlid voor het grondtal het getal e , dan krijg je ${}^s\log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(g)}$.

Neem je bij de regel ${}^s\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$ in het linkerlid grondtal e en in het rechterlid grondtal 10 , dan krijg je $\ln(a) = \frac{\log(a)}{\log(e)}$.

$${}^s\log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(g)}$$

$$\ln(a) = \frac{\log(a)}{\log(e)}$$

Voorbeeld

- Bereken $\ln(e^2 \cdot \sqrt{e})$ zonder GR.
- Schrijf de formule $N = 5 + 10 \cdot {}^3\log(t)$ in de vorm $N = a + b \cdot \ln(t)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- Gegeven is de formule $N(x) = 6,15 + 14,43 \cdot \ln(x)$. Toon aan: als x verdubbelt, dan neemt N met ongeveer 10 toe.

Uitwerking

$$\text{a } \ln(e^2 \cdot \sqrt{e}) = \ln(e^2 \cdot e^{\frac{1}{2}}) = \ln(e^{2\frac{1}{2}}) = 2\frac{1}{2}$$

$$\ln(e^a) = a$$

$$\text{b } N = 5 + 10 \cdot {}^3\log(t) = 5 + 10 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(3)} = 5 + \frac{10}{\ln(3)} \cdot \ln(t) \approx 5 + 9,10 \cdot \ln(t)$$

$$\text{Dus } N = 5 + 9,10 \cdot \ln(t).$$

$$\begin{aligned} \text{c } N(2x) &= 6,15 + 14,43 \cdot \ln(2x) \\ &= 6,15 + 14,43(\ln(2) + \ln(x)) \\ &= 6,15 + 14,43 \cdot \ln(x) + 14,43 \cdot \ln(2) \\ &= 6,15 + 14,43 \cdot \ln(x) + 10,00\dots \end{aligned}$$

Dus $N(2x) \approx N(x) + 10$ en hiermee is aangetoond dat N met ongeveer 10 toeneemt als x verdubbelt.

76

Bereken de afgeleide.



$$\text{a } y = 2 \cdot 3^x$$

$$\text{d } N = 600 \cdot 0,8^{2t+3}$$

$$\text{b } y = 50 \cdot 4^{3x-1}$$

$$\text{e } P = 80(1 + 1,3^{0,1q})$$

$$\text{c } N = 200 \cdot 1,5^{0,4t}$$

$$\text{f } Q = 75 \cdot 2^{0,01p^2}$$

77


a De afgeleide van $y = 80 \cdot 0,6^{2-x}$ is te schrijven in de vorm

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot 0,6^{2-x}.$$

Bereken a in gehele.

b De afgeleide van $N = 0,05 \cdot 1,28^{3t-1}$ is te schrijven in de vorm

$$\frac{dN}{dt} = a \cdot 1,28^{3t-1}.$$

Bereken a . Rond af op drie decimalen.

78


Bereken zonder GR.

a $\ln(e)$

e $3 \ln(e \cdot \sqrt[3]{e})$

b $\ln(e \cdot \sqrt{e})$

f $e^{\ln(7)} + e^{\ln(8)}$

c $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

g $e^{2 \ln(5)}$

d $\ln(1)$

h $e^{\frac{1}{2} \ln(9)}$

Net als $g^{g \log(x)} = x$ is ook
 $e^{\ln(x)} = x$.

79


Schrijf de formule in de vorm $N = a + b \cdot \ln(t)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $N = 20 + 3 \cdot {}^4\log(t)$

c $N = 6 + 200 \cdot \log(t)$

b $N = 100 - 50 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(t)$

d $N = 5 + 8 \cdot \log(2t)$

80


a Gegeven is de formule $N(q) = 11,13 + 6,49 \cdot \ln(q)$.

Met hoeveel neemt N toe als q verdubbelt? Rond af op één decimaal.

b Gegeven is de formule $N(p) = 100 + 13,85 \cdot \ln(p^{1,25})$.

Met hoeveel neemt N toe als p verdubbelt? Rond af op gehele.

c Gegeven is de formule $N(t) = 16 + b \cdot \ln(t)$.

Er geldt: als t drie keer zo groot wordt, dan neemt N met 5 toe.

Bereken b . Rond af op twee decimalen.

A81


Een zojuist ingeschonken kop koffie heeft een temperatuur van 80°C .

De koffie koelt af volgens de formule $T = 20 + p \cdot 2^{-0,25t}$. Hierin is t de tijd in minuten en T de temperatuur van de koffie in $^\circ\text{C}$.

Uit de gegevens volgt $p = 60$.

a Toon dit aan.

b Bereken na hoeveel minuten en hoeveel seconden de temperatuur van de koffie 60°C is.

c Bereken de gemiddelde snelheid waarmee de koffie in de eerste vier minuten afkoelt.

d Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee de koffie vier minuten na het inschenken afkoelt. Rond af op één decimaal.

e Bereken na hoeveel seconden de snelheid waarmee de koffie afkoelt de helft is van de snelheid waarmee de koffie na 90 seconden afkoelt.

Terugblik

De formule $y = e^x$

De exponentiële formule $y = e^x$ is bijzonder, omdat geldt

$$y = e^x \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = e^x.$$

Met de GR kun je nagaan dat $e \approx 2,71828$.

Bij het berekenen van de afgeleide van de groeiformule $N = 25(1 + e^{0,4t})$ gebruik je de kettingregel.

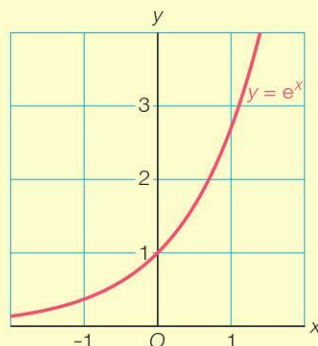
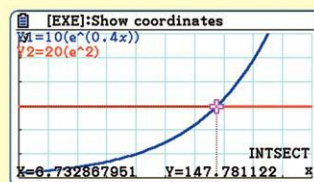
$$\text{Je krijgt } \frac{dN}{dt} = 25 \cdot e^{0,4t} \cdot 0,4 = 10 \cdot e^{0,4t}.$$

Met de formule $\frac{dN}{dt} = 10 \cdot e^{0,4t}$ zijn groeisnelheden te berekenen. Om te berekenen voor welke waarde van t de

groeisnelheid twee keer zo groot is als bij $t = 5$, bereken je eerst de groeisnelheid op $t = 5$. Deze groeisnelheid is

$$\frac{dN}{dt} = 10 \cdot e^{0,4 \cdot 5} = 10e^2. \text{ Je lost dus op } 10 \cdot e^{0,4t} = 20e^2.$$

Invoeren van $y_1 = 10 \cdot e^{0,4x}$ en $y_2 = 20e^2$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x \approx 6,73$, dus voor $t \approx 6,73$ is de groeisnelheid twee keer zo groot als op $t = 5$.



De natuurlijke logaritme

Logaritmen met het grondtal e heten natuurlijke logaritmen.

Voor ${}^e\log(x)$ noteert men $\ln(x)$. Ook voor de natuurlijke logaritme gelden de rekenregels voor logaritmen.

De afgeleide van $y = 3^{4x-2}$ bereken je met de regel

$$y = g^x \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = g^x \cdot \ln(g) \text{ en de kettingregel.}$$

$$y = 3^{4x-2} \text{ geeft } y = 3^{4x-2} \cdot \ln(3) \cdot 4 = 4 \ln(3) \cdot 3^{4x-2}$$

Je kunt de formule $N = 3 - 6 \cdot {}^3\log(t)$ schrijven in de vorm

$N = a + b \cdot \ln(t)$. Je krijgt

$$N = 3 - 6 \cdot {}^3\log(t) = 3 - 6 \cdot \frac{\ln(t)}{\ln(3)} = 3 - \frac{6}{\ln(3)} \cdot \ln(t) \approx 3 - 5,46 \cdot \ln(t),$$

dus $N = 3 - 5,46 \cdot \ln(t)$.

Eindopdracht Nucleaire geneeskunde

Zoals je in de beginopdracht hebt gelezen, wordt in de geneeskunde gebruikgemaakt van medische isotopen. Door het verval van de atoomkernen van zo'n medische isotoop komt straling vrij, die gebruikt wordt voor diagnose of behandeling van ernstige ziekten.

Een veelgebruikte medische isotoop voor diagnose en behandeling van problemen met de schildklier is jodium-131. Een fabrikant produceert capsules jodium-131 die op het moment van productie $6 \cdot 10^{14}$ atoomkernen jodium-131 bevatten. De halfwaardetijd van jodium-131 is 8,02 dagen. Na 8,02 dagen is dus nog de helft van het aantal atoomkernen jodium-131 over.

Voor het aantal atoomkernen jodium-131 dat t uur na productie nog in de capsule aanwezig is, geldt de formule $N = 6 \cdot 10^{14} \cdot 0,9964^t$. Hierin is N het aantal atoomkernen jodium-131.

- Toon aan dat deze formule juist is.

De (radio)activiteit van een hoeveelheid stof is het aantal atoomkernen dat per seconde vervalst. De eenheid die gebruikt wordt voor de activiteit van een stof is becquerel (Bq). Een activiteit van 1 Bq betekent dat er 1 atoomkern per seconde vervalst. Om de activiteit A in Bq van een stof te berekenen, kan de formule $A = \frac{\ln(2) \cdot N}{T}$ gebruikt worden. Hierin is N het aantal atoomkernen dat nog niet vervallen is en T de halfwaardetijd van de stof in seconden.

De nucleair geneeskundige van een ziekenhuis bereidt de behandeling met jodium-131 van een patiënt voor. De patiënt moet een capsule met een activiteit van 500 MBq innemen ($1 \text{ MBq} = 10^6 \text{ Bq}$).

- Hoeveel uur na productie moet de patiënt de capsule innemen, om ervoor te zorgen dat de capsule op dat moment de juiste activiteit heeft?

Je kunt ook een formule voor A opstellen door gebruik te maken van de afgeleide van de formule $N = 6 \cdot 10^{14} \cdot 0,9964^t$. Er geldt namelijk

$$A = -\frac{1}{3600} \cdot \frac{dN}{dt}. \text{ Zo krijg je de formule } A = 6,01 \cdot 10^8 \cdot 0,9964^t.$$

- Laat met behulp van de afgeleide van N zien dat deze formule juist is.
- Laat zien dat de formule $A = 6,01 \cdot 10^8 \cdot 0,9964^t$ op hetzelfde neerkomt als de formule $A = \frac{\ln(2) \cdot N}{T}$.

Door in de formule van A de variabele t vrij te maken, kun je voor elk aantal uren na productie de activiteit van de capsule berekenen.

- Druk t uit in A en maak voor de nucleair geneeskundige een tabel waarin ze kan aflezen hoeveel uren na productie de capsule nog een activiteit van 500, 400, 300, 200, 100, 80 en 60 MBq heeft.

Diagnostische toets

10.1 Exponentiële groei

- 1** De kosten voor het opwekken van energie met behulp van zonnecellen zijn de laatste jaren enorm afgenomen. Vanaf 2009 nam de kostprijs per megawattuur (MWh) geleverde energie door een zonnecel met ongeveer 22% per jaar af. In 2009 waren de kosten 375 euro per MWh geleverde energie.

Een zonnepark levert jaarlijks 500 MWh aan energie.

Bereken de jaarlijkse kosten die gepaard gaan met het opwekken van deze hoeveelheid energie in 2021.

- 2** De halveringstijd van de radioactieve stof jodium-128 is 25,0 minuten. Bereken met welk percentage de hoeveelheid radioactieve stof per minuut afneemt.

10.2 Groeipercentages en formules

- 3** Bij een exponentieel groeiproces neemt de hoeveelheid per dag met 36% toe.

- a** Bereken het groeipercentage per week. Rond af op gehele.
- b** Bereken het groeipercentage per uur.

Bij een exponentiële toename wordt een hoeveelheid in tien jaar verdrievoudigd.

- c** Hoeveel procent is de toename per maand?

- 4** Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 4$ is $N = 1500$ en op $t = 7$ is $N = 1200$. Hierbij is t de tijd in dagen. Stel de formule op van N . Rond de groeifactor af op drie decimalen en de beginhoeveelheid op tientallen.

- 5** Een bepaald soort plastic absorbeert een deel van het licht dat erop valt. Elke laag van 1 mm dikte absorbeert 30% van het licht.

- a** Hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid licht komt door een plastic plaat van 5 mm?
- b** Hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid licht wordt geabsorbeerd door een plaat van 1 cm?
- c** Het plastic is alleen leverbaar in diktes van een geheel aantal mm. Hoe dik moet de plastic plaat zijn opdat niet meer dan 1% van het licht erdoorheen gaat?

10.3 Logaritmen

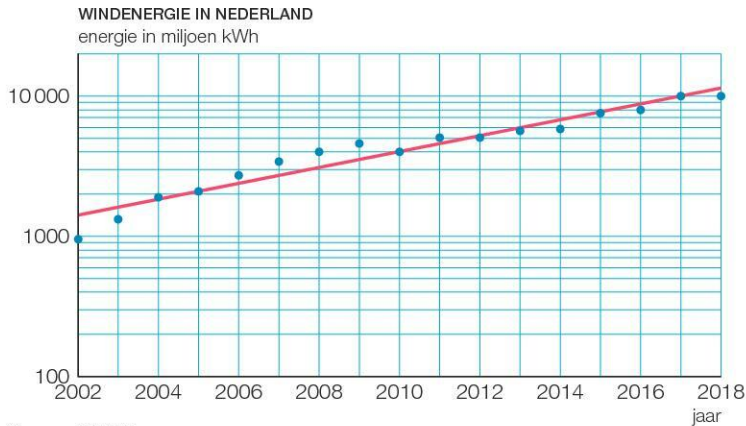
- 6** Bereken zonder gebruik te maken van de GR.

- a** ${}^5\log(625)$
- b** ${}^2\log(\frac{1}{8})$
- c** ${}^{\frac{1}{3}}\log(\frac{1}{4})$

- 7** a Schrijf de formule $N = 5 \cdot {}^3\log(t)$ in de vorm $N = a \cdot \log(t)$. Rond af op één decimaal.
- b Schrijf de formule $y = {}^3\log(5x - 1) - 2$ in de vorm $x = a + b \cdot g^y$.
- c Maak de variabele p vrij bij de formule $q = 3 - 2^{p-2}$.

10.4 Werken met logaritmen

- 8** [▶ WERKBLAD] In de figuur hieronder zie je voor de jaren 2002 tot en met 2018 hoeveel windenergie er in Nederland is geproduceerd. Verder geeft de lijn een indruk van de ontwikkeling in deze periode. Op de verticale as is een logaritmische schaal gebruikt. De figuur staat ook op het werkblad.



figuur 10.12

- a** In 2016 werd er meer windenergie geproduceerd dan in 2008. Hoeveel keer zoveel?
- b** Gebruik een formule van de lijn om te voorspellen hoeveel windenergie er in Nederland in 2030 geproduceerd zal worden.
- 9** a Schrijf de formule $N = {}^3\log(6x)$ in de vorm $N = a + b \cdot \log(x)$. Rond af op één decimaal.
- b Gegeven is de formule $N(t) = 86 + 18,6 \cdot \log(t)$. Met hoeveel neemt N toe als t vervijfvoudigt?
- c Gegeven is de formule $N(t) = 1010 + 16,61 \cdot \log(t)$. Met hoeveel neemt N af als t halveert?

10.5 Groeisnelheid

- 10** Bereken de afgeleide.

a $y = 14e^{1,25x}$	c $y = 2500(1 + e^{0,56x})$	e $y = 5,5(1 + 8^{1,44x})$
b $y = 421e^{3x^2-2}$	d $y = 350 \cdot 10^{7x+3}$	f $y = 6000 \cdot 2,3^{0,12x^2}$

- 11** Schrijf de formule $N = 3 - 5 \cdot \log(2t)$ in de vorm $N = a + b \cdot \ln(t)$. Rond af op twee decimalen.

11

Het toetsen van hypothesen

Wat leer je?

- De wortel- n -wet gebruiken bij steekproeven.
- De begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese, beslissingsvoorschrift, overschrijdingskans en significante afwijking hanteren bij het toetsen van hypothesen.
- Het toetsen van hypothesen bij de normale en de binomiale verdeling.



Beginopdracht Examentraining

Steeds meer leerlingen volgen examentraining voor een of meerdere vakken. Aanbieders van examentraining claimen op hun website vaak verbetering van het cijfer bij hun deelnemers. Het is in de praktijk onmogelijk om de juistheid van deze claims aan te tonen of te weerleggen. Een leerling kan voor een vak immers niet tegelijkertijd examens afleggen zonder en met examentraining.

Er zijn ook scholen die een externe aanbieder voor examentraining inhuren. Hierbij zou het mogelijk moeten zijn om het effect van de examentraining na te gaan.

Het De Groot College besluit om de hulp van een extern bureau in te roepen. Als experiment volgen alle 75 vwo-examenkandidaten met wiskunde A twee dagen examentraining bij huiswerkinstituut Atheneo. Als dit succesvol blijkt, gaat de school in de toekomst mogelijk vaker op deze manier examentraining aanbieden.

Op grond van jarenlang verzamelde resultaten blijkt dat op het De Groot College 60% van de vwo-leerlingen voor wiskunde A op het centraal examen (CE) hoger scoort dan op het schoolexamen (SE).

We gebruiken in deze opdracht de toevalsvariabele

X = aantal vwo-examenkandidaten op het De Groot College met een hoger cijfer voor wiskunde A op het CE dan op het SE.

X is een binomiale toevalsvariabele met $p = 0,6$.

- Licht dit toe.

De leerlingen met een hoger cijfer voor wiskunde A op het CE dan op het SE noemen we verbeteraars. De directie van het De Groot College vraagt zich af bij welk aantal verbeteraars geconcludeerd kan worden dat de examentraining heeft geholpen. Dat is minder eenvoudig dan het lijkt. Zo zou je kunnen denken dat de examentraining heeft geholpen als het aantal verbeteraars hoger ligt dan de verwachtingswaarde $E(X) = 45$.

- Hoe groot is de kans op een hoger aantal verbeteraars dan de verwachtingswaarde als de examentraining geen verschil maakt?

Het extern bureau beweert dat na hun examentraining de kans dat meer dan 45 van de 75 leerlingen zich verbeteren, groter is dan 0,99.

- Van welke kans op verbetering gaat het bureau hierbij minimaal uit? Rond af op twee decimalen.

Neem aan dat de kans op verbetering na de examentraining gelijk is aan 0,8. De school kiest ervoor om pas bij meer dan 55 verbeteraars te concluderen dat de examentraining heeft geholpen.

- Hoe groot is de kans dat dit aantal gehaald wordt?

Voorkennis De binomiale en de normale verdeling

Theorie A De binominale verdeling

Bij een binomiaal kansexperiment voer je hetzelfde kansexperiment een aantal keren uit en let je alleen op de gebeurtenissen ‘succes’ en ‘mislukking’.

De toevalsvariabele X is het aantal keer succes. Verder is n het aantal keer dat je het experiment uitvoert en p de kans op succes per keer.

De GR heeft opties waarmee je $P(X=k)$ en $P(X \leq k)$ kunt berekenen.

- Op de TI gebruik je binompdf en binomcdf uit het distr-VERDELEN-menu.
- Op de Casio gebruik je Bpd en Bcd uit het OPTN-STAT-DIST-BINOMIAL-menu. De volgorde van invoeren is k, n, p .
- Op de NW gebruik je Binomiaal uit de app Kansrekenen.
- Op de HP gebruik je het werksetmenu Wisk. Kies vervolgens Kans-Dichtheid-Binomiaal of Kans-Cumulatief-Binomiaal. De volgorde van invoeren is n, p, k .

Vermeld in een uitwerking de betekenis van X , noteer dat X binomiaal verdeeld is en vermeld n en p .

Herleid zo nodig de te berekenen kansen eerst tot een vorm met $P(X=k)$ of $P(X \leq k)$.

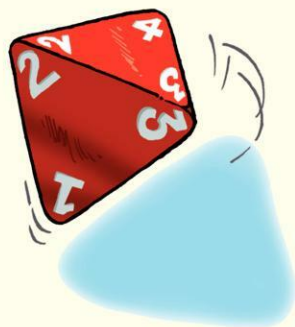
Voorbeeld

Bereken de kans dat je bij twaalf worpen met een viervlaksdobbelsteen

- a meer dan vier keer 3 gooit
- b acht keer geen 1 gooit.

Uitwerking

- a X = aantal keer 3
 X is binomiaal verdeeld met $n = 12$ en $p = \frac{1}{4}$.
 $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$
De GR geeft $P(X > 4) \approx 0,158$.
- b X = aantal keer geen 1
 X is binomiaal verdeeld met $n = 12$ en $p = \frac{3}{4}$.
De GR geeft $P(X = 8) \approx 0,194$.



figuur 11.1 Met een viervlaksdobbelsteen kun je 1, 2, 3 of 4 gooien.

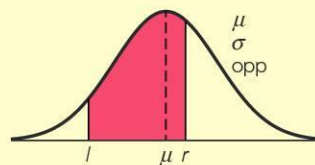
- 1** Bereken de kans dat je bij 16 worpen met een achthvlaksdobbelsteen
- a minder dan drie keer 6 ogen gooit
 - b tussen drie en tien keer meer dan 3 ogen gooit
 - c vijf keer 2 of 3 ogen gooit.

- 2** De Maeslantkering is een stormvloedkering in de Nieuwe Waterweg. De kans dat de deuren van de kering niet goed sluiten is 0,01. Bereken de kans dat bij 40 sluitpogingen de deuren minstens 39 keer goed sluiten.
- 3** Een appelooft bestaat voor 90% uit gave appels. De appels worden verpakt in kistjes van 50 stuks.
- Bereken de kans dat een kistje minstens 40 gave appels bevat.
 - Hoeveel gave appels verwacht je dat er in een kistje zitten? Bereken de kans op dit aantal.

Theorie B De normale verdeling

Bij opgaven over oppervlakten onder een normaalkromme spelen vijf getallen een rol: het gemiddelde μ , de standaardafwijking σ , de linkergrens l , de rechtergrens r en de oppervlakte van het gebied.

Zijn er vier bekend, dan kun je het vijfde getal berekenen. Je gebruikt daarbij het volgende werkschema.



figuur 11.2

Werkschema: aanpak bij opgaven over de normale verdeling

- Schets een normaalkromme en verwerk hierin μ , σ , l , r en opp.
- Kleur het gebied dat bij de vraag hoort.
- Bereken met de GR het ontbrekende getal.
- Beantwoord de gestelde vraag.

- Op de TI gebruik je normalecdf of invNorm uit het distr-VERDELEN-menu.
- Op de Casio gebruik je Ncd of InvN uit het OPTN-STAT-DIST-NORM-menu.
- Op de NW gebruik je Normaal uit de app Kansrekenen.
- Op de HP gebruik je het werksetmenu Wisk. Kies vervolgens Kans-Cumulatief-Normaal of Kans-Inverse-Normaal.

- 4** Een machine vult pakken koffie waarvan het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1005 gram en een standaardafwijking van 6 gram.
- Hoeveel procent van de pakken koffie bevat meer dan 1000 gram?
 - Van hoeveel procent van de pakken koffie wijkt het gewicht meer dan 4 gram af van het gemiddelde?
 - Wat weet je van het gewicht van de lichtste 10% van de pakken?
- Een andere vulmachine heeft een standaardafwijking van 8 gram. De fabrikant wil het gemiddelde zo instellen, dat niet meer dan 2% van de pakken minder dan 1000 gram weegt.
- Op welk gemiddelde moet de fabrikant de machine instellen? Geef het antwoord in tienden van grammen nauwkeurig.

11.1 De som van normale verdelingen

01
☐ ⊗ *

In een tuincentrum is de lengte van de coniferen normaal verdeeld met een gemiddelde van 75 cm en een standaardafwijking van 18 cm.

- Bereken de kans dat een willekeurig gekozen conifeer kleiner is dan 70 cm.
- Ferdi kiest willekeurig drie coniferen.
Bereken de kans dat ze alle drie kleiner dan 70 cm zijn.

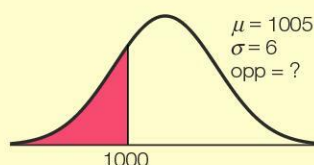
Theorie A Normale en binominale verdeling

Een machine vult pakken koffie waarvan het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1005 gram en een standaardafwijking van 6 gram.

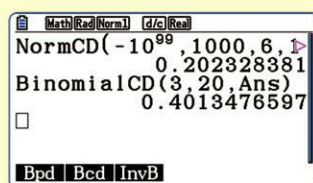
Met de GR kun je berekenen dat de kans dat een willekeurig pak koffie minder dan 1000 gram bevat 0,2023... is.

Tel je bij een steekproef van 20 pakken koffie het aantal pakken dat minder dan 1000 gram bevat, dan heb je te maken met de binomiale toevalsvariabele X met $n = 20$ en $p = 0,2023...$

De kans dat minder dan vier pakken minder dan 1000 gram wegen, is $P(X < 4) = P(X \leq 3) \approx 0,401$.



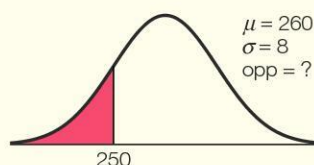
figuur 11.3



Voorbeeld

Een machine vult pakken hagelslag waarvan het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 260 gram en een standaardafwijking van 8 gram.

Bereken de kans dat in een steekproef van 25 pakken er minstens vier minder dan 250 gram wegen.



figuur 11.2

Uitwerking

Normale verdeling met $\mu = 260$ en $\sigma = 8$.

De GR geeft

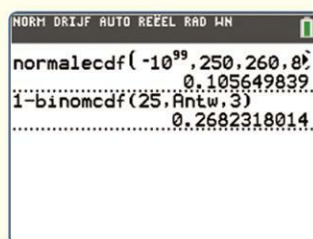
$P(\text{pak weegt minder dan 250 gram}) = 0,105...$

X = aantal pakken dat minder dan 250 gram weegt

X is binomiaal verdeeld met $n = 25$ en $p = 0,105...$

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$

De GR geeft $P(X \geq 4) \approx 0,268$.



- 2** Een machine vult zakken chips waarvan het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 130 gram en een standaardafwijking van 5 gram. Bereken de kans dat in een steekproef van 50 zakken chips
- a** er minstens acht minder dan 128 gram wegen
 - b** er precies acht meer dan 132 gram wegen.

- A3** In een rijwielfabriek is een van de handelingen tijdens het productieproces het instellen van de remmen. De tijd die hiervoor nodig is, is normaal verdeeld met een gemiddelde van 2 minuten en 40 seconden en een standaardafwijking van 15 seconden.
- a** Bereken de kans dat van 80 van deze handelingen er minstens 10 langer dan drie minuten duren.
 - b** Een werknemer wordt geacht op een dag 180 van deze handelingen te verrichten.
Hoeveel van deze 180 handelingen kosten naar verwachting minder dan twee en een halve minuut?

- 04** Van een grote groep mensen geldt voor het gewicht X van de mannen $\mu_X = 82$ kg en $\sigma_X = 10$ kg. Voor het gewicht Y van de vrouwen geldt $\mu_Y = 68$ kg en $\sigma_Y = 10$ kg. Ga ervan uit dat X en Y normaal verdeeld zijn.

Een willekeurige man en vrouw uit deze groep willen samen op een supboard met een maximaal draaggewicht van 150 kg.

Paul berekent de kans dat de man en de vrouw samen op het supboard kunnen met $P(X \leq 82) \cdot P(Y \leq 68)$.

- a** Licht Paul zijn denkwijze toe en bereken deze kans.
- b** Wat ziet Paul over het hoofd?
- c** Sara zegt dat de kans dat de man en vrouw samen op het supboard kunnen gelijk is aan 0,5.
Ben je het met Sara eens? Licht toe.



Theorie B De som van normaal verdeelde toevalsvariabelen

In praktijksituaties komt het voor dat je te maken hebt met de som van twee of meer normaal verdeelde toevalsvariabelen. Zo is bij het vullen van een pak wasmiddel het brutogewicht $S = X + Y$, waarbij X het gewicht van de verpakking is en Y het gewicht van de inhoud. Men heeft bewezen dat de som $S = X + Y$ ook weer normaal verdeeld is.

De som van normaal verdeelde toevalsvariabelen is normaal verdeeld.

Voor het gemiddelde μ_S en de standaardafwijking σ_S van $S = X + Y$ gelden de formules $\mu_S = \mu_X + \mu_Y$ en $\sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$. De enige voorwaarde voor de tweede formule is dat X en Y onafhankelijke toevalsvariabelen zijn, dat wil zeggen dat de uitkomsten van X en Y niet van elkaar afhangen.

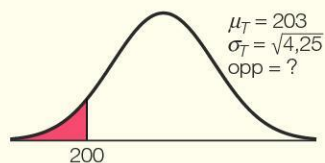
Voor elk tweetal toevalsvariabelen X en Y geldt $\mu_S = \mu_X + \mu_Y$.
Voor elk tweetal onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt $\sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$.

Voorbeeld

Bij het productieproces van een artikel zijn twee fasen te onderscheiden. De productietijd X van fase I is normaal verdeeld met $\mu_X = 180$ seconden en $\sigma_X = 2$ seconden. De productietijd Y van fase II is normaal verdeeld met $\mu_Y = 23$ seconden en $\sigma_Y = 0,5$ seconde. Hoeveel procent van de artikelen wordt in minder dan 200 seconden geproduceerd?

Uitwerking

De totale productietijd T van een artikel is $T = X + Y$.
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 180 + 23 = 203$ seconden en $\sigma_T = \sqrt{2^2 + 0,5^2} = \sqrt{4,25}$ seconden.
 Bij $l = -10^{99}$ en $r = 200$ geeft de GR opp $\approx 0,073$.
 Dus 7,3% wordt in minder dan 200 seconden geproduceerd.



R5 Zie het voorbeeld.

□ ⊗ * Hoe groot is de kans dat een artikel in minder dan 200 seconden wordt geproduceerd? Rond af op vier decimalen.

6 In een fabriek moet een werknemer in een periode van maximaal vijf minuten twee fasen van een productieproces afhandelen.

Voor fase I is de afhandelingstijd X normaal verdeeld met $\mu_X = 170$ seconden en $\sigma_X = 12$ seconden.

Voor fase II is de afhandelingstijd Y normaal verdeeld met $\mu_Y = 110$ seconden en $\sigma_Y = 8$ seconden.

In hoeveel procent van de gevallen zal een werknemer niet aan de eis van vijf minuten afhandelingstijd kunnen voldoen?

7
□ ⊗ *

Bij pakken rijst is het gewicht X van de verpakking normaal verdeeld met gemiddelde 5 gram en standaardafwijking 0,3 gram. De hoeveelheid rijst Y in een pak is normaal verdeeld met gemiddelde 248 gram en standaardafwijking 12 gram.
In hoeveel procent van de gevallen is het brutogewicht meer dan 250 gram?

08
□ ⊗ *

Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.
Aan het productieproces wordt nog een derde fase toegevoegd, waarvan de productietijd Z normaal verdeeld is met $\mu_Z = 12$ seconden en $\sigma_Z = 2$ seconden. De totale tijd wordt nu $S = X + Y + Z$, oftewel $S = T + Z$. Hoe groot zijn μ_S en σ_S ?

Theorie C De som van n normaal verdeelde toevalsvariabelen

Zoals voor twee onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt dat $\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y$ en $\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$, zo geldt voor de som S van n onafhankelijke toevalsvariabelen $X_1, X_2, \dots, X_n$ dat $\mu_S = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \dots + \mu_{X_n}$ en $\sigma_S = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2}$.

Voorbeeld

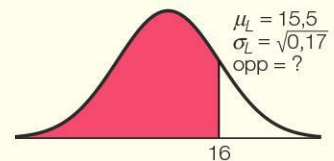
Op een montageafdeling worden drie typen buizen A, B en C aan elkaar gezet. De lengtes van de verschillende typen zijn normaal verdeeld.
Bereken de kans dat de totale lengte van een buis minder dan 16 meter is.

LENGTE VAN BUIZEN

type	μ	σ
A	6,5 m	0,2 m
B	3,2 m	0,2 m
C	5,8 m	0,3 m

Uitwerking

De totale lengte L is normaal verdeeld met $\mu_L = 6,5 + 3,2 + 5,8 = 15,5$ meter en $\sigma_L = \sqrt{0,2^2 + 0,2^2 + 0,3^2} = \sqrt{0,17}$ meter.
De GR geeft $P(L < 16) \approx 0,887$.



9
□ ⊗ *

Bij de fabricage van een artikel zijn vier fasen te onderscheiden. De tijdsduur van elke fase is normaal verdeeld. Zie de tabel.
In hoeveel procent van de gevallen duurt het produceren van één artikel langer dan één minuut?

TIJDSDUUR IN SECONDEN

fase	μ	σ
A	12	0,5
B	8	0,3
C	20	0,8
D	18	1,6

A10

Iris woont in Dieren en gaat op de fiets naar school in Zutphen.

Haar fietstocht bestaat uit drie trajecten.

- I van huis naar haar vriendin in Leuvenheim
 - II van Leuvenheim naar Brummen
 - III van Brummen naar school
- De tijdsduur van elk van deze trajecten is normaal verdeeld. Zie de tabel.

traject	gemiddelde	standaardafwijking
I	18 min	2 min en 30 sec
II	7 min	1 min en 15 sec
III	15 min	2 min

- a Bereken de kans dat haar totale fietstijd meer dan drie kwartier is.

Iris vertrekt elke morgen om 7:25 uur. Haar school begint om 8:15 uur. In de periode van zomervakantie tot herfstvakantie gaat ze 35 keer naar school.

- b Bereken de kans dat ze in deze periode minstens één keer te laat op school komt.
- c Hoe laat moet Iris van huis vertrekken, opdat ze in minstens 98% van de gevallen op tijd op school is?

Door de aanleg van een fietstunnel in Dieren kan Iris traject I sneller afleggen. Daardoor is in 90% van de dagen haar totale fietstijd minder dan 40 minuten. De standaardafwijking verandert niet.

- d Wat weet je van de gemiddelde fietstijd op traject I na aanleg van de fietstunnel?

E11

Gegeven is een toevalsvariabele X met verwachtingswaarde μ_X en standaardafwijking σ_X . Verder is gegeven de toevalsvariabele $-X$ die altijd de tegengestelde waarde van X aanneemt.

- a Licht toe dat geldt dat $\mu_{-X} = -\mu_X$.
- b Licht toe dat niet geldt $\sigma_{-X} = -\sigma_X$. Hoeveel is σ_{-X} dan wel?
- c Stel $V = X - Y$ voor de onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y . Druk μ_V uit in μ_X en μ_Y en druk σ_V uit in σ_X en σ_Y .

INFORMATIEF

De centrale limietstelling

De regel dat de som S normaal verdeeld is, geldt ook als je te maken hebt met de som van een groot aantal niet-normaal verdeelde toevalsvariabelen. Je hebt hier een toepassing van de zogenaamde centrale limietstelling. De centrale limietstelling zegt dat de som van een groot aantal willekeurige toevalsvariabelen die onderling onafhankelijk zijn, te benaderen is door een normaal verdeelde toevalsvariabele.

De centrale limietstelling is voor het eerst voor een eenvoudige situatie bewezen in het begin van de achttiende eeuw door Abraham de Moivre (1667-1754).



Abraham de Moivre

Terugblik

Normale en binomiale verdeling

In een land is het gewicht van mannen normaal verdeeld met $\mu = 75$ kg en $\sigma = 9$ kg.

Om de kans te berekenen dat in een steekproef van 40 van deze mannen er minstens 8 meer dan 85 kg wegen, ga je als volgt te werk.

De GR geeft met de normale verdeling

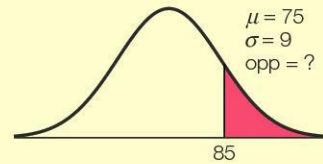
$$P(\text{man weegt meer dan 85 kg}) = 0,133\dots$$

X = aantal mannen dat meer weegt dan 85 kg

X is binomiaal verdeeld met $n = 40$ en $p = 0,133\dots$

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$$

De GR geeft $P(X \geq 8) \approx 0,156$.



Som van normaal verdeelde toevalsvariabelen

De som van de normaal verdeelde toevalsvariabelen X en Y is ook normaal verdeeld. De verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $S = X + Y$ bereken je met $\mu_S = \mu_X + \mu_Y$ en $\sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$.

De formule voor σ_S mag je alleen gebruiken als X en Y onafhankelijk zijn.

Bij pakken cornflakes is het gewicht X van de verpakking normaal verdeeld met $\mu_X = 15$ gram en $\sigma_X = 5$ gram. Het gewicht Y van de cornflakes in een pak is normaal verdeeld met $\mu_Y = 375$ gram en $\sigma_Y = 15$ gram.

Het brutogewicht van het pak $B = X + Y$ is dan normaal verdeeld met $\mu_B = 15 + 375 = 390$ gram en $\sigma_B = \sqrt{5^2 + 15^2} = \sqrt{250}$ gram.

Som van n normaal verdeelde toevalsvariabelen

Voor de som $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ van n onafhankelijke toevalsvariabelen $X_1, X_2, \dots, X_n$ geldt $\mu_S = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \dots + \mu_{X_n}$ en

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2}.$$

In een productieproces zijn drie fasen te onderscheiden.

De tijdsduur van elke fase is normaal verdeeld.

De totale tijdsduur T van het productieproces is normaal verdeeld met $\mu_T = 8 + 45 + 7 = 60$ seconden en

$$\sigma_T = \sqrt{2^2 + 5^2 + 1,5^2} = \sqrt{31,25} \text{ seconden.}$$

TIJDSDUUR IN SECONDEN

fase	μ	σ
A	8	2
B	45	5
C	7	1,5

11.2 De wortel- n -wet

012


Het gewicht X van een sinaasappel uit een grote partij is normaal verdeeld met $\mu_X = 77$ gram en $\sigma_X = 6$ gram.

De sinaasappels worden verpakt in netjes van acht stuks.

Het totale gewicht S van de sinaasappels in een netje is te noteren als $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8$. Hierbij zijn $X_1, X_2, \dots, X_8$ de gewichten van de afzonderlijke sinaasappels.

Is $\mu_S = 8 \cdot \mu_X$? En is $\sigma_S = 8 \cdot \sigma_X$?

Theorie A Steekproef van lengte n

Van een appel uit een partij goudrenetten is het gewicht X normaal verdeeld met $\mu_X = 150$ gram en $\sigma_X = 18$ gram.

Bij een steekproef van 20 goudrenetten uit deze partij is het totale gewicht S te schrijven als

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{20}.$$

Dus $\mu_S = \mu_X + \mu_X + \mu_X + \dots + \mu_X = 20 \cdot \mu_X = 20 \cdot 150 = 3000$ gram en

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_X^2 + \sigma_X^2 + \dots + \sigma_X^2} = \sqrt{20 \cdot 18^2} = \sqrt{20} \cdot 18 \approx 80,50 \text{ gram.} \leftarrow \dots$$

$$\sqrt{20 \cdot 18^2} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{18^2} = \sqrt{20} \cdot 18$$

Je ziet dat bij een steekproef van lengte 20 de som S een normaal verdeelde toevalsvariabele is met $\mu_S = 20 \cdot \mu_X$ en $\sigma_S = \sqrt{20} \cdot \sigma_X$.

Bij een steekproef van lengte n uit een populatie met een normaal verdeelde toevalsvariabele X is $S = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ normaal verdeeld met $\mu_S = n \cdot \mu_X$ en $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$.

Dit is de **wortel- n -wet voor een steekproef van lengte n** .

Voorbeeld

Het gewicht X van een sinaasappel uit een grote partij is normaal verdeeld met $\mu_X = 77$ gram en $\sigma_X = 6$ gram. In een netje zitten acht sinaasappels.

Bereken de kans dat het gewicht van de sinaasappels in een netje meer dan 640 gram is.

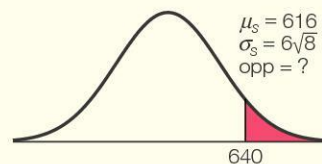
Uitwerking

S is het gewicht van de sinaasappels in een netje.

S is normaal verdeeld met $\mu_S = 8 \cdot 77 = 616$ gram en

$$\sigma_S = \sqrt{8} \cdot 6 = 6\sqrt{8} \text{ gram.}$$

De GR geeft $P(S > 640) \approx 0,079$.



- 13** De gebruikstijd X van een volgeladen accu van een filmcamera is normaal verdeeld met $\mu_X = 40$ minuten en $\sigma_X = 8$ minuten. Linda neemt op een reis naar Barcelona drie volgeladen accu's mee. Bereken de kans dat Linda hiermee minstens twee uur en een kwartier kan filmen.
- 14** In een magazijn ligt een grote partij tegels waarvan de dikte X normaal verdeeld is met een gemiddelde van 5 cm en een standaardafwijking van 0,5 cm. De tegels worden verpakt in kratten met een hoogte van 105 cm. Telkens worden er stapels van 20 tegels gemaakt, die in zo'n krat geplaatst worden.
- Bereken de kans dat een stapel van 20 tegels niet in een krat past.
 - Bereken de kans dat van 12 stapels van 20 tegels er minstens twee niet in een krat passen.
- A15** Bakker Dick ten Broeke verkoopt gevulde koeken in pakken van zes stuks. Het gewicht X van een koek is normaal verdeeld met $\mu_X = 25$ gram en $\sigma_X = 3$ gram. Bereken de kans dat
- een koek minder dan 20 gram weegt
 - in een pak minder dan 140 gram zit
 - bij een steekproef van 20 pakken er meer dan twee minder dan 140 gram bevatten.
- A16** Een televisiequiz bestaat uit zes speelronden. De tijdsduur van elke ronde is normaal verdeeld met een gemiddelde van 4 minuten en een standaardafwijking van 45 seconden. Volgens de programmering is 25 minuten voor de quiz beschikbaar. De quiz wordt 50 keer per jaar gehouden.
- Hoe vaak zal naar verwachting in een jaar de beschikbare tijd overschreden worden?
- De programmaleiding vindt het aantal van vraag a te hoog. Besloten wordt de gemiddelde tijd per ronde te verlagen.
- Hoe lang mag een spelronde gemiddeld duren opdat naar verwachting niet meer dan één keer per jaar de beschikbare tijd wordt overschreden? Geef het antwoord in seconden nauwkeurig.
- A17** Een supermarkt heeft flessen mineraalwater in de aanbieding. Het mineraalwater wordt geleverd in kratten van 12 flessen. Het gewicht van een fles mineraalwater is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,5 kg en een standaardafwijking van 50 gram. Het gewicht van een leeg krat is normaal verdeeld met een gemiddelde van 2 kg en een standaardafwijking van 300 gram. Bereken de kans dat een krat met 12 flessen meer dan 20,5 kg weegt.

Theorie B Het steekproefgemiddelde

We bekijken nog eens de steekproef van bladzijde 163 van 20 goudrenetten uit een grote partij, waarbij het gewicht X van een appel normaal verdeeld is met $\mu_X = 150$ gram en $\sigma_X = 18$ gram.

Je weet dat $\mu_S = 20 \cdot \mu_X$ en $\sigma_S = \sqrt{20} \cdot \sigma_X$.

Je kunt bij zo'n steekproef ook het gemiddelde gewicht per appel berekenen. Je moet dan het totale gewicht door 20 delen. Elke steekproef levert een ander totaal gewicht op en dus ook een ander steekproefgemiddelde.

Het steekproefgemiddelde is dus ook weer een toevalsvariabele.

We noteren deze met $\bar{X}$.

$$\text{Omdat } \bar{X} = \frac{S}{20} \text{ is } \mu_{\bar{X}} = \frac{\mu_S}{20} = \frac{20 \cdot \mu_X}{20} = \mu_X$$

$$\text{en } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_S}{20} = \frac{\sqrt{20} \cdot \sigma_X}{20} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{20}}$$

$$\frac{\sqrt{20}}{20} = \frac{\sqrt{20}}{(\sqrt{20})^2} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

$X =$ gewicht appel	$\bar{X} =$ gemiddelde gewicht in een steekproef van 20 appels
---------------------	--

$\mu_X = 150$ gram

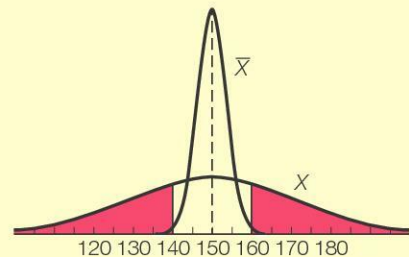
$\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 150$ gram

$\sigma_X = 18$ gram

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{18}{\sqrt{20}} \approx 4,02$ gram

Je ziet dat het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ met een veel kleinere spreiding om het gemiddelde van 150 gram ligt dan het gewicht X van een enkele appel. Zie figuur 11.4.

De spreiding van $\bar{X}$ is kleiner naarmate de steekproef groter is.



figuur 11.4

Je hebt een voorbeeld gezien van de **wortel- n -wet voor het steekproefgemiddelde**.

Bij een normaal verdeelde toevalsvariabele X met gemiddelde μ_X en standaardafwijking σ_X is bij steekproeflengte n het

steekproefgemiddelde $\bar{X}$ normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

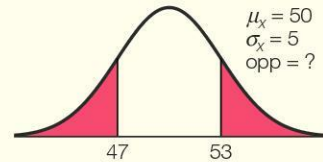
Voorbeeld

Van een normaal verdeelde toevalsvariabele X is $\mu_X = 50$ en $\sigma_X = 5$.

- a** Bereken de kans dat een waarneming meer dan 3 van μ_X afwijkt.
b We doen 30 waarnemingen en berekenen het gemiddelde $\bar{X}$.
Bereken de kans dat $\bar{X}$ meer dan 3 van μ_X afwijkt.

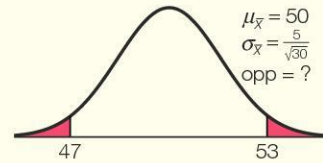
Uitwerking

- a** $P(X < 47 \text{ of } X > 53) = 2 \cdot P(X < 47)$
De GR geeft $P(X < 47 \text{ of } X > 53) \approx 0,549$.



- b** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 50$
en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{30}}$.

$P(\bar{X} < 47 \text{ of } \bar{X} > 53) = 2 \cdot P(\bar{X} < 47)$
De GR geeft $P(\bar{X} < 47 \text{ of } \bar{X} > 53) \approx 0,001$.



Bij een grote steekproef, bijvoorbeeld een steekproef met $n > 1000$, zal de spreiding $\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ om $\bar{X}$ heel klein worden. Het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ zal dan heel dicht bij het theoretische gemiddelde μ_X liggen. Je krijgt dus een goede schatting van μ_X door $\bar{X}$ te berekenen voor grote waarden van n .

Om de gemiddelde lengte van de volwassen Nederlandse vrouwen te weten te komen, hoef je ze niet allemaal op te meten. Een steekproef van 1500 vrouwen zal nagenoeg hetzelfde gemiddelde opleveren.

R18 Zie het voorbeeld.



Je zou b ook kunnen beantwoorden door naar de som S van de 30 waarnemingen te kijken.
Laat eens zien hoe dat gaat.

19



Van een normaal verdeelde toevalsvariabele X is $\mu_X = 30$ en $\sigma_X = 4$.

- a** Bereken de kans dat een waarneming meer dan 5 van μ_X afwijkt.
b Op basis van 20 waarnemingen wordt het gemiddelde $\bar{X}$ berekend.
Bereken de kans dat $\bar{X}$ meer dan 5 van μ_X afwijkt.

20
□ ⊙ *

In een fabriek worden kaasbroodjes verpakt in dozen van 16 stuks.

Op de doos staat: gemiddeld gewicht per kaasbroodje minstens 100 gram.

Neem aan dat het gewicht van de kaasbroodjes normaal verdeeld is met een gemiddelde van 104,5 gram en een standaardafwijking van 10 gram. Hoeveel procent van de dozen zal voldoen aan de mededeling op de doos?

21
□ ⊙ *

Een vulmachine vult flessen limonade. De hoeveelheid is normaal verdeeld met $\mu = 102$ cL. Het blijkt dat 15% van de flessen minder dan 100 cL bevat. Hieruit volgt dat de standaardafwijking van de vulinhoud in twee decimalen gelijk is aan 1,93 cL.

- Bereken de standaardafwijking van de vulinhoud in drie decimalen.
- Bereken de kans dat van twaalf flessen limonade de vulinhoud gemiddeld minder dan 100 cL is. Rond af op vier decimalen.
- De flessen worden in kratten van 12 stuks vervoerd. Bij een supermarkt worden 25 kratten met elk 12 flessen afgeleverd. Bereken de kans dat in minstens één van deze kratten de gemiddelde vulinhoud per fles minder is dan 100 cL.

A22
□ ⊙ *

Een theefabrikant verpakt 20 theezakjes in een pakje. Het gewicht van een theezakje is normaal verdeeld met een gemiddelde van 5,3 gram en een standaardafwijking van 0,5 gram.

- Bereken de kans dat een theezakje minder dan 5 gram weegt.
- Bereken de kans dat een pakje minder dan 100 gram bevat.
- Van hoeveel procent van de pakjes wijkt het gemiddelde gewicht per theezakje meer dan 0,1 gram af van 5,3 gram?

A23
□ ⊙ *

Het bedrijf Flamingo maakt potten inkt voor vulpennen. De inhoud X van zo'n pot is normaal verdeeld met $\mu_X = 30$ mL en $\sigma_X = 2$ mL.

De potten worden geleverd in dozen met acht potten.

- Bereken de kans dat de gemiddelde inhoud van de potten in een doos meer dan 5% afwijkt van μ_X .
- Bereken de kans dat van minstens twee potten in de doos de inhoud meer dan 10% afwijkt van μ_X .
- Bereken de kans dat de inhoud van de acht potten in een doos samen minstens 10% meer is dan je zou mogen verwachten.

E24
*

Het gewicht X van een bonbon uit een grote partij is normaal verdeeld met $\mu_X = 37$ gram en $\sigma_X = 5$ gram.

De bonbons worden verpakt in dozen. Volgens de leverancier is het gemiddelde gewicht van een bonbon in een doos minstens 35 gram. Hij beweert dat minstens 98% van de dozen aan deze voorwaarde voldoet. Hoeveel bonbons stopt de leverancier in een doos?

Terugblik

De wortel- n -wet voor een steekproef van lengte n

Neem je een steekproef van lengte n uit een populatie waarop een normaal verdeelde toevalsvariabele X gedefinieerd is, dan is

$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ normaal verdeeld met $\mu_S = n \cdot \mu_X$ en $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$.

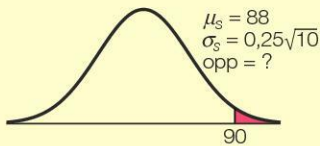
Dit is de wortel- n -wet voor een steekproef van lengte n .

Een farmaceutisch bedrijf verpakt tabletten in buisjes met een lengte van 9 cm. In elk buisje zitten tien tabletten. De dikte X van een tablet is normaal verdeeld met $\mu_X = 8,8$ mm en $\sigma_X = 0,25$ mm.

Om de kans te berekenen dat de tien tabletten niet in een buisje passen, ga je als volgt te werk.

S is normaal verdeeld met $\mu_S = 10 \cdot 8,8 = 88$ mm en

$$\sigma_S = \sqrt{10} \cdot 0,25 = 0,25\sqrt{10} \text{ mm.}$$



De GR geeft $P(S > 90) \approx 0,006$.

De wortel- n -wet voor het steekproefgemiddelde

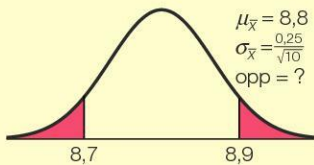
Bij een normaal verdeelde toevalsvariabele X is het

steekproefgemiddelde $\bar{X}$ normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

Dit is de wortel- n -wet voor het steekproefgemiddelde.

De kans dat de gemiddelde dikte van een tablet in een buisje meer dan 0,1 mm afwijkt van het gemiddelde, bereken je als volgt.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 8,8$ mm en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0,25}{\sqrt{10}}$ mm.



$$P(\bar{X} < 8,7 \text{ of } \bar{X} > 8,9) = 2 \cdot P(\bar{X} < 8,7)$$

De GR geeft $P(\bar{X} < 8,7 \text{ of } \bar{X} > 8,9) \approx 0,206$.

11.3 Beslissen op grond van een steekproef

025
📅 ⚙️ *

Fabrikant Wick verkoopt ijsthee in flessen van 400 mL.

De vulmachine is ingesteld op een gemiddelde $\mu = 400$ mL. De praktijk wijst uit dat na verloop van tijd het gemiddelde niet meer precies 400 mL is.

a Het zou kunnen zijn dat het gemiddelde is toegenomen.

Noem hiervan een nadeel voor de fabrikant.

b Noem een nadeel van een te laag gemiddelde.



Theorie A Beslissingsvoorschrift

De vulmachine van fabrikant Wick zorgt per fles ijsthee voor een inhoud van X mL, waarbij X normaal verdeeld is met $\sigma_X = 4$ mL.

De vulmachine is ingesteld op een gemiddelde van $\mu_X = 400$ mL, maar na verloop van tijd is het gemiddelde niet meer precies 400 mL. Vandaar dat men op gezette tijden een aselechte steekproef neemt en op grond van het steekproefgemiddelde besluit de vulmachine al dan niet bij te stellen.

Men besluit tot het nemen van een steekproef van 25 flessen en berekent de gemiddelde inhoud $\bar{X}$ per fles. Uit de wortel- n -wet volgt dat $\bar{X}$

normaal verdeeld is met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 400$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} = 0,8$.

Bij een meetresultaat van $\bar{X} = 399$ of $\bar{X} = 400,5$ zal men op grond van $\sigma_{\bar{X}} = 0,8$ geen aanleiding zien tot bijstelling over te gaan.

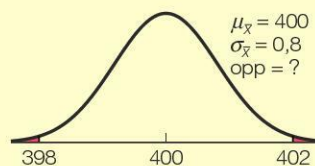
Bij het meetresultaat $\bar{X} = 404$ is er alle aanleiding om te twijfelen aan de juiste werking van de vulmachine, want 404 ligt maar liefst $5\sigma_{\bar{X}}$ boven het gemiddelde. Het is vrijwel onmogelijk dat dit een toevallige afwijking is.

Maar wat zal men beslissen als $\bar{X} = 398$ of $\bar{X} = 401,8$?

Het is bij dit soort problemen gebruikelijk een **beslissingsvoorschrift** af te spreken dat aangeeft bij welke meetresultaten tot bijstelling wordt overgegaan. Men zou bijvoorbeeld kunnen afspreken

→ Vulmachine bijstellen als $\bar{X} \leq 398$ of $\bar{X} \geq 402$.

Fabrikant Wick loopt met zo'n afspraak een zeker risico. Het is immers mogelijk dat de steekproef het resultaat $\bar{X} = 397,8$ oplevert, terwijl de machine goed werkt. Men vraagt zich daarom af hoe groot het risico is dat de machine wordt bijgesteld, terwijl deze goed werkt. Bij $\mu_{\bar{X}} = 400$ en $\sigma_{\bar{X}} = 0,8$ is dit risico $P(\bar{X} \leq 398 \text{ of } \bar{X} \geq 402) = 2 \cdot P(\bar{X} \leq 398) \approx 0,012$.



figuur 11.5

Wick loopt dus een risico van 1,2% dat de productie wordt stilgelegd om de vulmachine bij te stellen, terwijl dat eigenlijk niet nodig is.

We zeggen dat de vulmachine in dat geval **ten onrechte** wordt bijgesteld.

Het risico voor Wick wordt kleiner als gekozen wordt voor het volgende beslissingsvoorschrift.

→ Vulmachine bijstellen als $\bar{X} \leq 397$ of $\bar{X} \geq 403$.

In dit geval is de kans op ten onrechte bijstellen gelijk aan

$P(\bar{X} \leq 397 \text{ of } \bar{X} \geq 403) = 2 \cdot P(\bar{X} \leq 397) \approx 0,00018$, dat is een kans van minder dan 0,02%.

Toch is het niet verstandig het beslissingsvoorschrift zo te kiezen dat dit risico heel erg klein is. Wick heeft immers nog met een ander soort risico te maken, namelijk het risico dat het productieproces voortgaat, terwijl het gemiddelde niet 400 mL is.

26  Neem aan dat men bij Wick een steekproef van 50 flessen neemt. Men kiest als beslissingsvoorschrift

→ Vulmachine bijstellen als $\bar{X} \leq 399$ of $\bar{X} \geq 401$.

- a** Bereken de kans dat de machine ten onrechte wordt bijgesteld.
- b** Waarom is het niet mogelijk de kans te berekenen dat men terecht tot bijstelling overgaat?
- c** Neem aan dat de machine werkt met een gemiddelde van 401 mL.

Bereken de kans dat men op grond van het steekproefresultaat niet tot bijstelling overgaat.

In alle opgaven en theorie over Wick geldt dat de inhoud X normaal verdeeld is met $\sigma_X = 4$ mL en dat de vulmachine is ingesteld op $\mu_X = 400$ mL.

27  Er wordt bij Wick een steekproef van 120 flessen genomen. Als beslissingsvoorschrift kiest men

→ Vulmachine bijstellen als $\bar{X} \leq 399$ of $\bar{X} \geq 401$.

- a** Bereken de kans dat ten onrechte tot bijstelling wordt overgegaan.
- b** Neem aan dat de machine werkt met een gemiddelde van 399,2 mL. Bereken de kans dat de vulmachine op grond van het steekproefresultaat niet wordt bijgesteld.

Theorie B Significantieniveau

Fabrikant Wick wil op grond van een steekproef van 25 flessen een beslissing nemen over het al dan niet bijstellen van de vulmachine.

Veronderstelling 1: De vulmachine is goed ingesteld, dus de inhoud van een fles is normaal verdeeld met $\mu_X = 400$.

Veronderstelling 2: De vulmachine is niet goed ingesteld, dus de inhoud van een fles is normaal verdeeld met $\mu_X \neq 400$.

De eerste veronderstelling heet de **nulhypothese**, aangegeven met H_0 . We schrijven $H_0: \mu_X = 400$. Tegenover de nulhypothese staat de **alternatieve hypothese** H_1 die zegt dat het gemiddelde geen 400 is. Notatie $H_1: \mu_X \neq 400$.

$H_0: \mu_X = \mu_0$ nulhypothese
 $H_1: \mu_X \neq \mu_0$ alternatieve hypothese

Op grond van het steekproefresultaat $\bar{X}$ zal men besluiten de nulhypothese al dan niet te verwerpen. Onder H_0 is $\bar{X}$ normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 400$ en

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = 0,8.$$

Kiest men het beslissingsvoorschrift

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 399$ of $\bar{X} \geq 401$

dan is de kans dat men H_0 ten onrechte verwerpt gelijk aan $P(\bar{X} \leq 399 \text{ of } \bar{X} \geq 401) = 2 \cdot P(\bar{X} \leq 399) \approx 0,211$.

Kiest men het beslissingsvoorschrift

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 397,5$ of $\bar{X} \geq 402,5$

dan is de kans dat men H_0 ten onrechte verwerpt gelijk aan $P(\bar{X} \leq 397,5 \text{ of } \bar{X} \geq 402,5) = 2 \cdot P(\bar{X} \leq 397,5) \approx 0,002$.

De vulmachine wordt ten onrechte bijgesteld.
1. Er vindt bijstelling plaats, dus uit de steekproef volgt $\bar{X} \leq 399$ of $\bar{X} \geq 401$.
2. Het bijstellen is ten onrechte, dus in werkelijkheid werkt de machine goed, d.w.z. μ is nog gewoon 400.



Door een geschikt beslissingsvoorschrift te kiezen, kun je de kans om H_0 ten onrechte te verwerpen zo klein maken als je wilt. Je loopt dan echter het gevaar dat het productieproces doorgaat, terwijl het gemiddelde niet meer 400 mL is.

Je hebt dus met tegenstrijdige belangen te maken. Om aan beide belangen tegemoet te komen, spreekt men van tevoren af wat de maximale kans mag zijn dat H_0 ten onrechte wordt verworpen.

Deze maximale waarde heet het **significantieniveau** en wordt aangegeven met α .

H_0 ten onrechte verwerpen houdt in:

- H_0 is waar
- op grond van het beslissingsvoorschrift en het steekproef-gemiddelde wordt H_0 verworpen.

Het significantieniveau α is de kans dat je H_0 ten onrechte verwerpt.

Bij het **toetsen van hypothesen** kies je eerst een significantieniveau. Deze keuze is afhankelijk van de ernst van de gevolgen van het al dan niet verwerpen van de nulhypothese. Wil je de kans op het ten onrechte verwerpen van H_0 klein maken, dan moet α klein worden gekozen, bijvoorbeeld $\alpha = 0,01$. Om de kans op het ten onrechte niet verwerpen van H_0 klein te maken, kies je een grotere waarde van α , bijvoorbeeld $\alpha = 0,10$.

Een toets kan nooit 100% zekerheid geven.

INFORMATIEF

Het significantieniveau

De keuze van het significantieniveau α heeft te maken met twee tegenstrijdige belangen van fabrikant Wick. Enerzijds wil men dat de inhoud van een fles niet te veel van 400 mL afwijkt, want

- te weinig in een fles levert problemen op met controlerende instanties
- te veel in een fles kost geld.

Anderzijds wil de fabrikant het productieproces niet te vaak stilleggen om de machine bij te stellen. Een grote waarde van α betekent dat men vaak moet bijstellen, terwijl men bij een kleine waarde van α het risico loopt flessen te produceren met een afwijkende inhoud. De praktijk heeft bewezen dat $\alpha = 0,10$ of $\alpha = 0,05$ een evenwichtige keuze is.

Vóór het uitvoeren van de steekproef moet er overeenstemming zijn over de keuze van α . In de opgaven is steeds een waarde voor α gegeven.

Neem aan dat $\alpha = 0,10$ wordt gekozen en dat de steekproefomvang 25 is.

Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of $\bar{X} \geq g_r$.

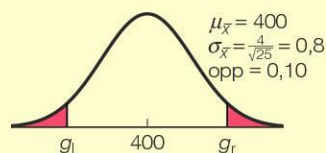
Bij $\alpha = 0,10$ moet je g_l en g_r zo berekenen, dat

$P(\bar{X} \leq g_l \text{ of } \bar{X} \geq g_r) = 0,10$.

Omdat de normaalkromme symmetrisch is,

geldt opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,10 = 0,05$. Dus

- $P(\bar{X} \leq g_l) = 0,05$ met $\mu_{\bar{X}} = 400$ en $\sigma_{\bar{X}} = 0,8$ geeft met de GR dat $g_l \approx 398,68$
- $P(\bar{X} \geq g_r) = 0,05$ met $\mu_{\bar{X}} = 400$ en $\sigma_{\bar{X}} = 0,8$ geeft met de GR dat $g_r \approx 401,32$.



figuur 11.6

De rode gebieden in figuur 11.6 heten het **verwerpingsgebied** (dit wordt ook wel het **kritieke gebied** genoemd). Ligt het steekproefgemiddelde in het verwerpingsgebied, dan wordt H_0 verworpen. Het gebied tussen g_l en g_r heet het **aanvaardingsgebied** (dit wordt ook wel het **acceptatiegebied** genoemd). Ligt het steekproefgemiddelde in het aanvaardingsgebied, dan wordt H_0 niet verworpen.

Na het vaststellen van het beslissingsvoorschrift laat fabrikant Wick de steekproef uitvoeren. Op grond van het gevonden steekproefgemiddelde $\bar{X}$ zal men H_0 al dan niet verwerpen.

Vindt men bijvoorbeeld $\bar{X} = 398,83$ dan is er geen aanleiding H_0 te verwerpen, maar bij $\bar{X} = 398,63$ zal H_0 verworpen worden.

We zeggen dat het steekproefgemiddelde $\bar{X} = 398,63$ **significant afwijkt** van $\mu = 400$ mL.

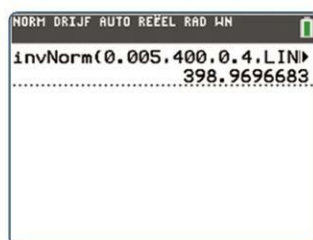
- 28** Fabrikant Wick wil op grond van een steekproef van lengte 100 een beslissing nemen over het al dan niet verwerpen van $H_0: \mu_X = 400$. Men kiest als significantieniveau $\alpha = 0,01$.

Het beslissingsvoorschrift is

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of $\bar{X} \geq g_r$.

Op het GR-scherm hiernaast zie je dat $g_l \approx 398,97$.

- a Bereken g_r . Rond af op twee decimalen.
- b Het steekproefgemiddelde blijkt 400,8 mL te zijn. Welke conclusie trekt fabrikant Wick?



- A29** Een fabrikant maakt ledlampen waarvan de levensduur X in uren normaal verdeeld is met $\mu_X = 30\,000$ en $\sigma_X = 4000$.

De afdeling research heeft voor de fabricage van de lampen een goedkoper procedé ontwikkeld, waarvan men beweert dat het de levensduur van de lampen niet beïnvloedt. De fabrikant twijfelt hieraan en onderzoekt dit door middel van een steekproef van 100 lampen. Als significantieniveau wordt $\alpha = 0,05$ gekozen.

- a Geef H_0 en H_1 .
- b Het beslissingsvoorschrift is
→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of $\bar{X} \geq g_r$.
Bereken g_l en g_r . Rond af op gehelen.
- c Welke conclusie hoort bij een steekproefgemiddelde van 29 502 uur?

Afspraak

Neem aan dat bij het nieuwe productieprocedé de standaardafwijking niet verandert. Ook in de rest van dit hoofdstuk gaan we van deze aanname uit.

- O30** Een bandenfabrikant beweert dat bij normaal rijgedrag het aantal kilometers X dat zijn banden meegaan normaal verdeeld is met $\mu_X = 55\,000$ en $\sigma_X = 4000$.

Een autotijdschrift houdt een bandentest. Een steekproef van 64 van deze banden levert het steekproefgemiddelde 53 844 km op. We vragen ons af of dit steekproefresultaat significant afwijkt van 55 000 bij $\alpha = 0,05$.

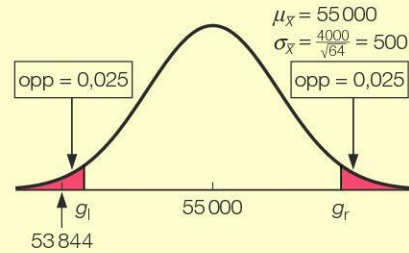
- a Geef H_0 en H_1 .
- b Bereken $P(\bar{X} \leq 53\,844)$.
- c Wijkt het steekproefresultaat significant af van 55 000?

Theorie C Overschrijdingskans

Bij de bandentest in opgave 30 is

$H_0: \mu_X = 55\,000$, $H_1: \mu_X \neq 55\,000$ en $\alpha = 0,05$.

In deze opgave is het steekproefresultaat 53 844 bekend. In zo'n geval is het niet nodig eerst het beslissingsvoorschrift op te stellen.



figuur 11.7 53 844 ligt in het verwerpsgebied.

Door $P(\bar{X} \leq 53\,844)$ te berekenen, kun je direct zien of je H_0 al dan niet moet verwerpen.

Je krijgt $P(\bar{X} \leq 53\,844) \approx 0,010$.

Omdat $P(\bar{X} \leq 53\,844) \leq 0,025$ is $53\,844 < g_l$.

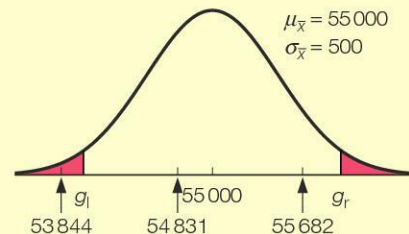
Het steekproefresultaat 53 844 ligt in het verwerpsgebied en wijkt dus significant af van 55 000.

$P(\bar{X} \leq 53\,844)$ heet de **overschrijdingskans** van het steekproefresultaat $\bar{X} = 53\,844$.

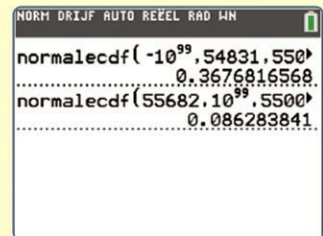
Omdat deze overschrijdingskans kleiner is dan $\frac{1}{2}\alpha$ verwerp je H_0 .

- De overschrijdingskans van $\bar{X} = 54\,831$ is $P(\bar{X} \leq 54\,831)$. Je krijgt $P(\bar{X} \leq 54\,831) \approx 0,368$. Omdat $P(\bar{X} \leq 54\,831) > \frac{1}{2}\alpha$ ligt het steekproefresultaat 54 831 dus niet in het verwerpsgebied en geeft dus geen aanleiding H_0 te verwerpen.
- Bij het steekproefresultaat $\bar{X} = 55\,682$ is de overschrijdingskans $P(\bar{X} \geq 55\,682)$, want $55\,682 > 55\,000$.

Omdat $P(\bar{X} \geq 55\,682) \approx 0,086$ en $0,086 > \frac{1}{2}\alpha$ is er bij het steekproefresultaat 55 682 geen aanleiding H_0 te verwerpen.



figuur 11.8 54 831 ligt niet in het verwerpsgebied.



Bij $H_0: \mu = \mu_0$ en $H_1: \mu \neq \mu_0$ is de overschrijdingskans van k

- gelijk aan $P(\bar{X} \leq k)$ als $k < \mu_0$
- gelijk aan $P(\bar{X} \geq k)$ als $k > \mu_0$.

Is de overschrijdingskans van k kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{2}\alpha$, dan wordt H_0 verworpen.

Is het steekproefresultaat bekend, gebruik dan de overschrijdingskans om te bepalen of H_0 al dan niet verworpen wordt.

Voorbeeld

In een bedrijf is de totale tijd die per dag wordt overgewerkt normaal verdeeld met een gemiddelde van 9,3 uur en een standaardafwijking van 2,1 uur. Sinds kort is een systeem van flexibele werktijden ingevoerd. In een periode van 40 werkdagen bleek de gemiddelde overwerktijd 8,6 uur per dag te zijn.

Onderzoek of bij een significantieniveau van 1% geconcludeerd kan worden dat het nieuwe systeem invloed heeft op de overwerktijd.

Uitwerking

X = overwerktijd per dag in uren

$H_0: \mu_X = 9,3$, $H_1: \mu_X \neq 9,3$ en $\alpha = 0,01$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 9,3$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{2,1}{\sqrt{40}}$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 8,6)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 8,6) \approx 0,018$.

$P(\bar{X} \leq 8,6) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Er is geen aanleiding te veronderstellen dat het nieuwe systeem invloed heeft op de overwerktijd.

Je hebt in deze paragraaf bij een gegeven significantieniveau op grond van een steekproefresultaat de hypothese H_0 al dan niet verworpen.

Men zegt dat de hypothese H_0 **getoetst** is tegen H_1 .

Bij het toetsen van hypothesen wordt op grond van een steekproefresultaat de nulhypothese H_0 al dan niet verworpen. Omdat het hier gaat om het steekproefgemiddelde bij een normale verdeling, spreken we van een **normale toets**.

INFORMATIEF

Data-snooping

In het voorbeeld hierboven is het misschien verleidelijk om $\alpha = 0,05$ te kiezen. Dan is namelijk $P(\bar{X} \leq 8,6) \leq \frac{1}{2}\alpha$ en zou geconcludeerd mogen worden dat het nieuwe systeem inderdaad invloed heeft op de overwerktijd bij het bedrijf. Zo'n verandering van het toetsmodel wordt in de statistiek data-snooping genoemd en is niet toegestaan.

Bij een juiste toetsprocedure moet je vooraf afspraken maken over de hypothesen en over het significantieniveau. Je mag die afspraken niet achteraf bijstellen, na het uitvoeren van de steekproef.



R31
☐ ⊙ *

Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

- a Stel het beslissingsvoorschrift op en onderzoek hiermee of bij een significantieniveau van 1% geconcludeerd kan worden dat het nieuwe systeem invloed heeft op de overwerktijd.
- b Vergelijk je uitwerking van vraag a met die van het voorbeeld. Welke methode heeft je voorkeur?

E32
*

Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

Hoeveel dagen had het onderzoek moeten tellen om bij een gemiddelde overwerktijd van 8,6 uur H_0 wel te mogen verwerpen?

33
☐ ⊙

Gegeven is een normaal verdeelde toevalsvariabele X met $\mu_X = 25$ en $\sigma_X = 3$. Telkens is het steekproefgemiddelde en de steekproefomvang gegeven.

Onderzoek of bij het gegeven significantieniveau α er aanleiding is het gemiddelde $\mu_X = 25$ in twijfel te trekken.

- a Het steekproefgemiddelde is 24, de steekproefomvang is 50 en $\alpha = 5\%$.
- b Het steekproefgemiddelde is 26, de steekproefomvang is 100 en $\alpha = 1\%$.

34
☐ ⊙ *

Een machine vult pakken suiker. Het gewicht van een pak suiker is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,02 kg en een standaardafwijking van 0,04 kg.

De fabrikant vermoedt dat de vulmachine na verloop van tijd pakken met een afwijkend gemiddelde levert. Een steekproef van 50 pakken levert een steekproefgemiddelde van 1,04 kg op.

- a Onderzoek of de fabrikant bij een significantieniveau van 5% zal besluiten de vulmachine opnieuw in te stellen.
- b Welke conclusie zal de fabrikant trekken als het steekproefgemiddelde 1,03 kg is bij een significantieniveau van 5%?



A35
☐ ⊙ *

Bij de productie van tennisballen is de diameter normaal verdeeld met een gemiddelde van 6,51 cm en een standaardafwijking van 0,13 cm.

Een klant twijfelt of de gemiddelde diameter klopt. Bij een steekproef van lengte 40 is het steekproefgemiddelde 6,47 cm.

- a Welke conclusie trekt de klant bij een significantieniveau van $\alpha = 0,10$? En wat is zijn conclusie bij $\alpha = 0,05$?
- b De tennisbond wil op grond van een steekproef van lengte 100 een beslissing nemen over het al dan niet verwerpen van $H_0: \mu = 6,51$. Stel het beslissingsvoorschrift op. Neem $\alpha = 0,10$ en rond af op twee decimalen.

Terugblik

Hypothesen toetsen

Een fabrikant van biljartballen maakt ballen waarvan het gewicht X in gram normaal verdeeld is met $\mu_X = 212$ en $\sigma_X = 2$.

Er is een nieuwe productiemethode ontwikkeld die goedkoper is en die volgens de afdeling research geen invloed heeft op het gewicht van de biljartballen.

Een afnemer van de biljartballen twijfelt aan deze bewering.

Je hebt hier te maken met twee hypothesen:

$H_0: \mu_X = 212$ (de nieuwe productiemethode heeft geen invloed op het gewicht)

$H_1: \mu_X \neq 212$ (de nieuwe productiemethode heeft invloed op het gewicht).

Bij het toetsen van hypothesen doe je op grond van een steekproefresultaat een uitspraak over het al dan niet verwerpen van H_0 .

Belangrijke begrippen

nulhypothese

$H_0: \mu_X = 212$

alternatieve hypothese

$H_1: \mu_X \neq 212$

toetsingsgrootheid

het steekproefgemiddelde $\bar{X}$

beslissingsvoorschrift

Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of $\bar{X} \geq g_r$.

significantieniveau α

De kans dat H_0 ten onrechte verworpen wordt, is hoogstens α oftewel

$P(\bar{X} \leq g_l \text{ of } \bar{X} \geq g_r) \leq \alpha$ bij $\mu_{\bar{X}} = 212$.

verwerpsgebied

Ligt het steekproefgemiddelde in het verwerpsgebied, dan wordt H_0 verworpen.

aanvaardingsgebied

Ligt het steekproefgemiddelde in het aanvaardingsgebied, dan wordt H_0 niet verworpen.

Overschrijdingskans

Op grond van een steekproefresultaat besluit je H_0 al dan niet te verwerpen. Er zijn twee situaties te onderscheiden.

1 Het steekproefresultaat is bekend.

Bereken de overschrijdingskans van het steekproefgemiddelde.

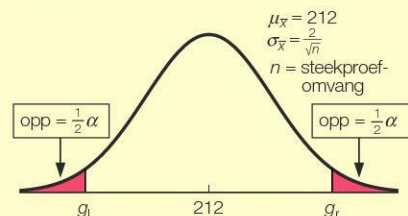
Is deze kans kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{2}\alpha$, dan verwerp je H_0 .

Is gegeven dat $\bar{X} = 210,6$, dan is de overschrijdingskans $P(\bar{X} \leq 210,6)$, want $210,6 < \mu_X$.

Is gegeven dat $\bar{X} = 212,7$, dan is de overschrijdingskans $P(\bar{X} \geq 212,7)$, want $212,7 > \mu_X$.

2 Het steekproefresultaat is niet bekend.

Bereken g_l en g_r . Dat zijn de grenzen van het verwerpsgebied.



11.4 Eenzijdig en tweezijdig toetsen

036
☐ ⊗ *

Bij de fabricage van lampen van het merk Flash is de levensduur X van de lampen normaal verdeeld met $\mu_X = 11\,500$ uur en $\sigma_X = 250$ uur. Een medewerker beweert een nieuw productiemethode ontwikkeld te hebben waardoor de levensduur van de gloeilampen verlengd wordt. Door middel van een steekproef van 100 lampen, geproduceerd met de nieuwe methode, zal beslist worden of de nieuwe methode inderdaad een gunstig effect heeft.

Waarom is het niet juist bij $H_0: \mu_X = 11\,500$ als alternatieve hypothese $H_1: \mu_X \neq 11\,500$ te nemen?

Theorie A Linkszijdige en rechtszijdige toetsen

Tot nu toe was bij het toetsen van hypothesen de alternatieve hypothese steeds van de vorm $H_1: \mu \neq \mu_0$. Je verwerpt dan H_0 als $\bar{X} \leq g_1$ of $\bar{X} \geq g_r$. Zo'n toets heet een **tweezijdige toets**. Maar de alternatieve hypothese kan ook van de vorm $H_1: \mu < \mu_0$ of van de vorm $H_1: \mu > \mu_0$ zijn. We spreken dan van een **eenzijdige toets**.

Als voorbeeld bekijken we de productiemethode van een bepaald type beeldscherm. De levensduur X in uren van de beeldschermen is normaal verdeeld met $\mu_X = 18\,000$ en $\sigma_X = 3\,000$.

De afdeling productie beweert een nieuwe productiemethode ontwikkeld te hebben waardoor de levensduur van de beeldschermen verlengd wordt, terwijl de kosten en de productietijd gelijk blijven. Op grond van een steekproef van 100 beeldschermen beslist de directie of de nieuwe methode zal worden ingevoerd. De nulhypothese is $H_0: \mu_X = 18\,000$. Omdat de productieafdeling beweert dat de levensduur verlengd is, is de alternatieve hypothese $H_1: \mu_X > 18\,000$.

Het beslissingsvoorschrift heeft daarom de vorm

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \geq g$.

Hierbij is $\bar{X}$ normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 18\,000$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{3000}{\sqrt{100}} = 300$.

Bij significantieniveau $\alpha = 0,05$ bereken je g zo, dat $P(\bar{X} \geq g) = 0,05$. De GR geeft $g \approx 18\,493,46$. Je verwerpt H_0 als $\bar{X} \geq 18\,494$. Merk op dat 18 494 in het verwerpsgebied ligt en dat 18 493 in het aanvaardingsgebied ligt.



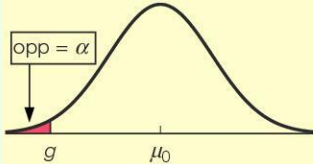
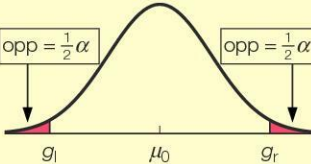
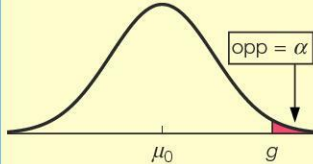
Het toetsen van $H_0 : \mu_X = 18000$ tegen $H_1 : \mu_X > 18000$ is een voorbeeld van een **rechtszijdige toets**. Het toetsen van $H_0 : \mu = \mu_0$ tegen $H_1 : \mu < \mu_0$ is een **linkszijdige toets**.

Eenzijdige toetsen

Bij de linkszijdige toets $H_0 : \mu = \mu_0$ tegen $H_1 : \mu < \mu_0$ hoort het beslissingsvoorschrift $\rightarrow$ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g$.

Bij de rechtszijdige toets $H_0 : \mu = \mu_0$ tegen $H_1 : \mu > \mu_0$ hoort het beslissingsvoorschrift $\rightarrow$ Verwerp H_0 als $\bar{X} \geq g$.

NORMALE TOETSEN

linkszijdige toets	tweezijdige toets	rechtszijdige toets
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$
		
<i>beslissingsvoorschrift</i> $\rightarrow$ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g$	<i>beslissingsvoorschrift</i> $\rightarrow$ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of $\bar{X} \geq g_r$	<i>beslissingsvoorschrift</i> $\rightarrow$ Verwerp H_0 als $\bar{X} \geq g$

37




Gegeven is de normaal verdeelde toevalsvariabele X met $\mu_X = 85$ en $\sigma_X = 15$.

Stel het beslissingsvoorschrift op bij de volgende toetsen. Hierbij is n de steekproefomvang.

- a $H_0 : \mu_X = 85, H_1 : \mu_X > 85, \alpha = 0,10$ en $n = 30$
- b $H_0 : \mu_X = 85, H_1 : \mu_X < 85, \alpha = 0,05$ en $n = 50$
- c $H_0 : \mu_X = 85, H_1 : \mu_X \neq 85, \alpha = 0,01$ en $n = 200$

De afhandelings tijd in minuten van de bestellingen op de verpakingsafdeling van een groothandel is normaal verdeeld met $\mu = 12$ en $\sigma = 3$.

De groothandel beweert dat door een interne reorganisatie de gemiddelde afhandelings tijd is teruggedrongen.

- a Deze bewering wordt getoetst door van 25 bestellingen de afhandelings tijd te meten.

Bij welke steekproefgemiddelden is er bij een significantieniveau van 5% aanleiding te veronderstellen dat de afhandelings tijd inderdaad verminderd is?

- b Een steekproef van 80 bestellingen heeft een steekproefgemiddelde van 11,3 minuten.

Is er bij een significantieniveau van 1% aanleiding om te concluderen dat de afhandelings tijd is afgenomen?



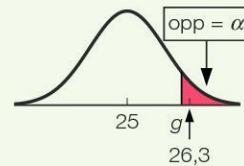
Theorie B Overschrijdingskans bij eenzijdige toetsen

Weet je het steekproefresultaat, dan is het ook bij eenzijdig toetsen aan te bevelen met overschrijdingskansen te werken.

Bij $H_0 : \mu_X = 25$ tegen $H_1 : \mu_X > 25$ met significantieniveau α is de overschrijdingskans van het steekproefgemiddelde 26,3 gelijk aan $P(\bar{X} \geq 26,3)$.

Je verworpt H_0 als $P(\bar{X} \geq 26,3) \leq \alpha$.

rechtszijdige toets

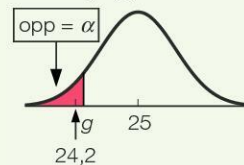


Als $P(\bar{X} \geq 26,3) \leq \alpha$,
dan verwerp je H_0 .

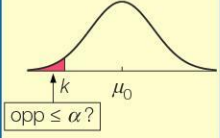
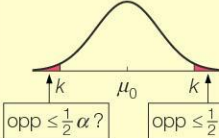
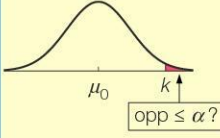
Bij $H_0 : \mu_X = 25$ tegen $H_1 : \mu_X < 25$ met significantieniveau α is de overschrijdingskans van het steekproefgemiddelde 24,2 gelijk aan $P(\bar{X} \leq 24,2)$.

Je verworpt H_0 als $P(\bar{X} \leq 24,2) \leq \alpha$.

linkszijdige toets



Als $P(\bar{X} \leq 24,2) \leq \alpha$,
dan verwerp je H_0 .

	linkszijdige toets	tweezijdige toets	rechtszijdige toets
nulhypothese alternatieve hypothese	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$
overschrijdingskans van k	$P(\bar{X} \leq k)$	$P(\bar{X} \leq k)$ als $k < \mu_0$ $P(\bar{X} \geq k)$ als $k > \mu_0$	$P(\bar{X} \geq k)$
verwerp H_0 als	$P(\bar{X} \leq k) \leq \alpha$	$P(\bar{X} \leq k) \leq \frac{1}{2} \alpha$ als $k < \mu_0$ $P(\bar{X} \geq k) \leq \frac{1}{2} \alpha$ als $k > \mu_0$	$P(\bar{X} \geq k) \leq \alpha$
			

Voorbeeld

Een fabrikant beweert dat de levensduur van een nieuw soort batterij normaal verdeeld is met een gemiddelde van 800 uur en een standaardafwijking van 40 uur.

Een consumentenorganisatie beweert dat de gemiddelde levensduur minder is dan 800 uur. Een aselechte steekproef van 100 batterijen geeft een gemiddelde levensduur van 793,8 uur.

Is er op grond van dit steekproefresultaat bij een significantieniveau van $\alpha = 0,025$ aanleiding om te twijfelen aan de bewering van de fabrikant?

Uitwerking

X = levensduur in uren

$H_0 : \mu_X = 800$, $H_1 : \mu_X < 800$ en $\alpha = 0,025$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 800$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{40}{\sqrt{100}} = 4$.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 793,8)$.

De GR geeft $P(\bar{X} \leq 793,8) \approx 0,061$.

$P(\bar{X} \leq 793,8) > \alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Er is geen aanleiding de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken.

Werkschema: het toetsen van hypothesen

- 1 Formuleer H_0 en H_1 en vermeld het significantieniveau α .
- 2 Is het steekproefresultaat bekend?
 - ja Bereken de overschrijdingskans.
 - nee Bereken de grens of de grenzen van het verwerpingsgebied.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

R39
☐ ⊙ *

Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

Stel dat uit de aselechte steekproef een gemiddelde levensduur van 802 uur was gekomen.

Waarom hoef je dit geval geen berekening uit te voeren om tot een conclusie te komen?

40
☐

Een zuivelfabrikant levert margarine in pakjes van 500 gram. Bij de productieafdeling bestaat het vermoeden dat de pakjes te veel margarine bevatten. Een steekproef van 100 pakjes levert een gemiddeld gewicht van 500,4 gram per pakje op.

Is er op grond van het steekproefresultaat bij een significantieniveau van 5% reden om de productieafdeling gelijk te geven? Ga ervan uit dat het gewicht van een pakje normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 1,5 gram.

41
☐ ⊙

Van elektrische auto's van het type Spirit is de actieradius bij een gewone rijstijl normaal verdeeld met een gemiddelde van 250 km en een standaardafwijking van 25 km.

a Meneer Spee beweert dat bestuurders onder de 30 jaar door hun rijstijl minder zuinig rijden. Uit een representatieve steekproef van 40 bestuurders in deze leeftijdscategorie die met een Spirit op pad gaan, volgt een gemiddelde actieradius van 238 km.

Kun je bij een significantieniveau van 1% concluderen dat meneer Spee gelijk heeft?

b Van bestuurders boven de 50 jaar vermoedt meneer Spee dat deze door hun rijstijl juist zuiniger rijden. Uit een representatieve steekproef onder 35 bestuurders in deze leeftijdscategorie volgt een gemiddelde actieradius van 256 km.

Kun je bij een significantieniveau van 5% concluderen dat meneer Spee gelijk heeft?

c Men vraagt zich af of de actieradius verandert bij gebruik van banden van het merk Peacestone. Uit een representatieve test van 40 ritten volgt een gemiddelde actieradius van 244 km bij gebruik van het merk Peacestone.

Kun je bij een significantieniveau van 10% concluderen dat de actieradius anders is bij het gebruik van deze banden?

42
☐ ⊙ *

Van een middeleeuwse schrijver is bekend dat hij zinnen schreef met een gemiddelde zinslengte van 28,6 woorden en een standaardafwijking van 5,9 woorden. De zinslengte is normaal verdeeld.

Onlangs zijn resten van een manuscript gevonden waarvan vermoed wordt dat het door deze auteur geschreven is.

Onderzoek wees uit dat bij 75 zinnen de gemiddelde zinslengte 30,2 woorden is.

Kun je bij een significantieniveau van 1% stellen dat het pas ontdekte manuscript van deze auteur afkomstig kan zijn?



43

In een koffiebranderij worden pakken gevuld met koffiebonen.

Het gewicht van de bonen in een pak is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 4 gram. De fabrikant beweert dat de vulmachine zo is ingesteld, dat een pak gemiddeld 500 gram bevat.

- a** Een consumentenorganisatie zegt dat de pakken gemiddeld minder dan 500 gram koffiebonen bevatten.

Hoeveel moet het gemiddelde gewicht van de koffiebonen per pak in een steekproef van lengte 50 zijn om de consumentenorganisatie bij een significantieniveau van 5% in het gelijk te stellen? Rond af op één decimaal.

- b** De afdeling Voorraad beweert dat het gewicht van de koffiebonen in een pak meer dan 500 gram is. Een steekproef van 25 pakken koffie levert het steekproefgemiddelde van 501,94 gram op.

Is er bij een significantieniveau van 2,5% aanleiding de afdeling Voorraad gelijk te geven?

- c** De afdeling Controle beweert dat ten gevolge van een defect aan de vulmachine het gewicht van de bonen in een pak niet 500 gram is. Bij een steekproef van 25 pakken is het gemiddelde gewicht per pak gelijk aan 502,48 gram.

Wijkt dit steekproefresultaat significant af van 500 gram? Neem $\alpha = 0,05$.

A44

Zijn basketballers langer dan gemiddeld?

De lengte van de Nederlandse man is normaal verdeeld met een gemiddelde van 184 cm en een standaardafwijking van 7 cm. Bij een steekproef van 35 Nederlandse basketbalspelers is de gemiddelde lengte 1,90 meter. Kun je bij een significantieniveau van 1% zeggen dat basketballers inderdaad langer zijn dan gemiddeld?

**E45**

Net als met basketballers in opgave 44 kun je je afvragen of Nederlandse volleyballers langer zijn dan de gemiddelde Nederlandse man. Bij een steekproef onder Nederlandse volleyballers is de gemiddelde lengte 1,87 meter. Hoe groot moet de steekproef minstens zijn geweest om bij een significantieniveau van 1% te kunnen concluderen dat volleyballers langer zijn dan gemiddeld?



A46
☐ ⊙ *

Een medicijn is verkrijgbaar in tabletvorm. Het werkzame aandeel X in een tablet is normaal verdeeld met een gemiddelde van 4 mg en een standaardafwijking van 0,12 mg. Het medicijn helpt als het werkzame aandeel per tablet tussen 3,8 mg en 4,2 mg ligt.

- a Bereken de kans dat een tablet helpt.
- b Er vinden regelmatig controles plaats om te kijken of de gemiddelde hoeveelheid werkzame stof inderdaad gemiddeld 4 mg is.
Een steekproef van 50 tabletten levert een gemiddelde op van 3,95 mg werkzame stof.
Toets of hieruit volgt dat dit gemiddelde significant afwijkt van 4 mg.
Neem $\alpha = 0,05$.
- c Stel dat er gemiddeld 3,95 mg werkzame stof in een tablet zit.
Hoeveel procent van de tabletten helpt dan niet?

O47
☐ ⊙ *

Een kabelfabrikant beweert dat zijn remkabels voor toerfietsen gemiddeld een trekkracht van minstens 800 newton kunnen weerstaan. De redactie van een fietstijdschrift vindt dit gemiddelde te optimistisch. Een steekproef van 25 kabels levert een gemiddelde trekkracht op van 785 newton. Ga ervan uit dat de trekkracht normaal verdeeld is met $\sigma = 35$ newton.

- a Als het steekproefresultaat 785 newton reden geeft om $H_0 : \mu = 800$ te verwerpen, dan wordt elke H_0 met μ groter dan 800 ook verworpen.
Licht dit toe.
- b Licht toe dat $\mu = 800$ voor de fabrikant gunstiger is dan een waarde van μ groter dan 800.

Theorie C Enkelvoudige nulhypothese

In opgave 47 is een eerste gedachte wellicht om $H_0 : \mu \geq 800$ en $H_1 : \mu < 800$ te kiezen.

Beide hypothesen omvatten dan meerdere waarden van μ , en daar kun je niet mee rekenen. We spreken af dat de nulhypothese van de vorm $\mu = \mu_0$ moet zijn. Je kiest daarbij de voor de fabrikant meest gunstige H_0 , hier $H_0 : \mu = 800$.

Niet altijd is direct duidelijk welke hypothese H_0 en welke H_1 is.

De volgende uitgangspunten kunnen je helpen de juiste keuze te maken.

- 1 H_0 is de hypothese die als uitgangspunt dient en die door middel van de alternatieve hypothese in twijfel wordt getrokken.
- 2 H_0 dient een **enkelvoudige hypothese** te zijn, dus H_0 heeft de vorm $H_0 : \mu = \mu_0$.

R48
☐ ⊙ *

Een grote rijkschool beweert dat zijn leerlingen gemiddeld hoogstens 37 uren les nodig hebben om het rijbewijs te halen. Een leerling trekt deze bewering in twijfel en gaat dit onderzoeken. Formuleer hierbij de nulhypothese en de alternatieve hypothese.

49
☐ ⊙

We bekijken nog eens de situatie van de kabelfabrikant van opgave 47.

Een kabelfabrikant beweert dat zijn remkabels voor toerfietsen gemiddeld een trekkracht van minstens 800 newton kunnen weerstaan. Een steekproef van 25 kabels levert een gemiddelde trekkracht op van 785 newton. Ga ervan uit dat de trekkracht normaal verdeeld is met $\sigma = 35$ newton.

Is er bij een significantieniveau van 5% reden om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken?

A50
☐ ⊙ *

Volgens Hans is de Nederlander in zijn vrije tijd gemiddeld minstens 20,2 uur per week bezig met media (internetten, gamen, tv-kijken, enzovoort). Een medewerker van onderzoeksbureau Suikerberg trekt deze bewering in twijfel. Een steekproef van 30 personen levert een gemiddelde van 19,4 uur op.

Ben je het eens met de bewering van de medewerker van Suikerberg bij een significantieniveau van 2,5%? Ga ervan uit dat de tijd die een Nederlander in zijn vrije tijd per week met media bezig is normaal verdeeld is met $\sigma = 2,4$ uur.

A51
*

Jan-Pieter beweert dat zijn gemiddelde kilometertijd bij het hardlopen hoogstens 4 minuten en 30 seconden is bij afstanden korter dan 10 km. Om dit te onderzoeken loopt hij op vijf verschillende dagen een rondje van 8 km. Zijn tijd over dit rondje is gemiddeld 36 minuten en 30 seconden.

Is er bij een significantieniveau van 5% reden om aan de bewering van Jan-Pieter te twijfelen? Ga ervan uit dat de kilometertijd normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 12 seconden.

Terugblik

Het beslissingsvoorschrift bij eenzijdige normale toetsen

Bij een linkszijdige toets wordt $H_0: \mu = \mu_0$ tegen $H_1: \mu < \mu_0$ getoetst.

Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm

→ Verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g$.

Een fabrikant maakt biljartballen waarvan het gewicht X in gram normaal verdeeld is met $\mu_X = 212$ en $\sigma_X = 2$. Er wordt een goedkopere productiemethode ontwikkeld. Een klant beweert dat het gewicht nu minder is dan 212 gram.

Je hebt te maken met $H_0: \mu_X = 212$ en $H_1: \mu_X < 212$.

Bij een steekproef van lengte 20 en $\alpha = 0,05$ is $g = 211,264\dots$

Dus je verwerpt H_0 als $\bar{X} \leq 211,26$ gram.

Overschrijdingskans van het steekproefgemiddelde

Bij $H_0: \mu_X = 25$ en

- $H_1: \mu_X < 25$ is de overschrijdingskans van 23 gelijk aan $P(\bar{X} \leq 23)$
- $H_1: \mu_X > 25$ is de overschrijdingskans van 28 gelijk aan $P(\bar{X} \geq 28)$
- $H_1: \mu_X \neq 25$ is de overschrijdingskans van 23 gelijk aan $P(\bar{X} \leq 23)$ en is de overschrijdingskans van 28 gelijk aan $P(\bar{X} \geq 28)$.

Je verwerpt H_0 als

- de overschrijdingskans kleiner dan of gelijk is aan α (bij eenzijdig toetsen)
- de overschrijdingskans kleiner dan of gelijk is aan $\frac{1}{2}\alpha$ (bij tweezijdig toetsen).

Toetsen van hypothesen

Voer bij het toetsen van hypothesen de volgende stappen uit.

- 1 Formuleer H_0 en H_1 en vermeld het significantieniveau α .
- 2 Bereken de overschrijdingskans als het steekproefresultaat bekend is.
Bereken anders de grens of de grenzen van het verwerpingsgebied.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

Bedenk dat H_0 de hypothese is die in twijfel wordt getrokken.

Kies H_0 altijd enkelvoudig, dus $H_0: \mu = \mu_0$.

Eenzijdige en tweezijdige toetsen

	linkszijdige toets	tweezijdige toets	rechtszijdige toets
nulhypothese	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$
alternatieve hypothese	$H_1: \mu < \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$
overschrijdingskans van k	$P(\bar{X} \leq k)$	$P(\bar{X} \leq k)$ als $k < \mu_0$ $P(\bar{X} \geq k)$ als $k > \mu_0$	$P(\bar{X} \geq k)$
verwerp H_0 als	$P(\bar{X} \leq k) \leq \alpha$	$P(\bar{X} \leq k) \leq \frac{1}{2}\alpha$ als $k < \mu_0$ $P(\bar{X} \geq k) \leq \frac{1}{2}\alpha$ als $k > \mu_0$	$P(\bar{X} \geq k) \leq \alpha$

11.5 Binomiale toetsen

052
☐ ⊗ *

Frisdrankfabrikant Mol beweert in een advertentie dat 40% van de Nederlanders zijn nieuwe frisdrank de lekkerste frisdrank vindt.

Concurrent Franck vecht dit aan bij de Reclame Code Commissie (RCC). Volgens hem is dit percentage lager.

De RCC besluit een steekproef van 100 personen te nemen en op grond van het steekproefresultaat zal Mol de advertentie al dan niet moeten herzien.

De toetsingsgrootheid X is het aantal personen in de steekproef dat de frisdrank van fabrikant Mol de lekkerste vindt.

a Licht toe dat X een binomiaal verdeelde toevalsvariabele is.

b Neem aan dat $X = 48$.

Zal Mol de advertentie moeten herzien?

c Neem aan $X = 28$.

Welke partij krijgt dan volgens jou gelijk?

Theorie A Eenzijdige binomiale toetsen

In opgave 52 moet op grond van een steekproefresultaat beslist worden of de firma Mol al dan niet gelijk krijgt. In de steekproef wordt het aantal personen X geteld dat de frisdrank van Mol het lekkerst vindt.

De toetsingsgrootheid X is een binomiaal verdeelde toevalsvariabele.

Indien Mol gelijk heeft is $p = 0,4$, dus de nulhypothese is $H_0 : p = 0,4$.

Neem als significantieniveau $\alpha = 0,05$.

H_0 wordt verworpen als het aantal personen in de steekproef dat de frisdrank van Mol het lekkerst vindt, klein is.

Dus het beslissingsvoorschrift heeft de vorm

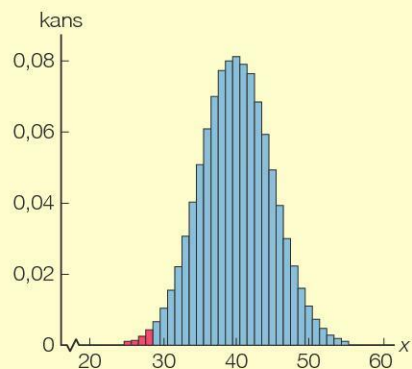
→ Verwerp H_0 als $X \leq g$.

Hierbij is g het grootste gehele getal dat bij $n = 100$ en $p = 0,4$ voldoet aan $P(X \leq g) \leq 0,05$.

Neem aan dat uit de steekproef volgt dat 28 personen het met Mol eens zijn. Door het berekenen van de overschrijdingskansen $P(X \leq 28)$ kom je erachter of H_0 al dan niet verworpen dient te worden.

De GR geeft $P(X \leq 28) \approx 0,008$.

Omdat $P(X \leq 28) \leq \alpha$ weet je dat $28 \leq g$, dus je verworpt H_0 . Mol zal de advertentie moeten herzien.



figuur 11.9

Je hebt hier een voorbeeld van een **binomiale toets**. Bij een binomiale toets is de toetsingsgrootheid X een binomiaal verdeelde toevalsvariabele.

Bij een binomiale toets heeft de nulhypothese de vorm $H_0 : p = p_0$.
 Bij een linkszijdige toets is $H_1 : p < p_0$ en bij een rechtszijdige toets is $H_1 : p > p_0$.

Binomiale toets

De toetsingsgrootte X telt hoeveel elementen in de steekproef een bepaald kenmerk hebben.

X is binomiaal verdeeld, waarbij n de steekproefomvang is.

Linkszijdig: $H_0 : p = p_0$ en $H_1 : p < p_0$

De overschrijdingskans van k is $P(X \leq k)$.

Verwerp H_0 als $P(X \leq k) \leq \alpha$.

Rechtszijdig: $H_0 : p = p_0$ en $H_1 : p > p_0$

De overschrijdingskans van k is $P(X \geq k)$.

Verwerp H_0 als $P(X \geq k) \leq \alpha$.

Voorbeeld

Een bandenfabrikant beweert dat hoogstens 10% van zijn banden minder dan 40 000 km meegaat.

Een consumentenorganisatie vermoedt dat dit percentage hoger is. Er wordt besloten tot een steekproef van 50 autobanden. Hiervan blijken er twaalf minder dan 40 000 km mee te gaan.

Is er aanleiding om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken? Neem $\alpha = 0,05$.



Aanpak

- H_0 is de bewering van de fabrikant, want die wordt aangevochten. Omdat H_0 enkelvoudig moet zijn, neem je $H_0 : p = 0,1$, dus niet $H_0 : p \leq 0,1$.
- Het steekproefresultaat is bekend, dus gebruik een overschrijdingskans.

Uitwerking

X = aantal banden dat minder dan 40 000 km meegaat

$H_0 : p = 0,1$, $H_1 : p > 0,1$ en $\alpha = 0,05$.

X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,1$.

De overschrijdingskans is $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11)$.

De GR geeft $P(X \geq 12) \approx 0,003$.

$P(X \geq 12) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

Er is inderdaad aanleiding om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken.



Zie het voorbeeld.

Er wordt gebruikt dat $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11)$.

Waarom mag dat?

54 In een krant staat dat 45% van de Nederlanders in één keer slaagt voor het rijexamen. De directeur van een rijsschool beweert dat dit percentage bij haar rijsschool hoger ligt. Bij een aselechte groep van 40 klanten van deze rijsschool slagen er 23 in één keer voor het rijexamen.

- a Bereken de overschrijdingskans van 23.
- b Is er aanleiding om de directeur gelijk te geven bij $\alpha = 0,05$?

55 In Nederland heeft 30% van de bevolking last van een vorm van allergie. Onderzoekers beweren dat dit percentage lager ligt bij mensen die op jonge leeftijd regelmatig met honden en katten in aanraking zijn gekomen. Door de ontwikkeling van het immuunsysteem zijn ze op latere leeftijd minder vatbaar voor allergieën. De onderzoekers hebben 474 kinderen gevolgd die dagelijks met minstens twee honden of katten in contact kwamen. Het bleek dat 112 van hen later met een allergie te kampen kregen. Is er bij een significantieniveau van 2,5% voldoende aanleiding om de onderzoekers gelijk te geven?

INFORMATIEF

Kleurenblindheid

De meeste kleurenblinde mensen zien wel kleuren, maar kunnen geen onderscheid maken tussen bijvoorbeeld groen en rood. Slechts 1 op de 30 000 mensen is echt kleurenblind en ziet alleen zwart-wit.

Een bijzondere situatie doet zich voor op het eiland Pingelap in de Stille Oceaan ten noorden van Australië. Omstreeks 1775 werd Pingelap getroffen door een verwoestende tyfoon. Slechts 20 mensen overleefden de catastrofe, waaronder een echt kleurenblinde man. Van de huidige inwoners van Pingelap heeft zo'n 10% de kleurenblindheid geërfd van deze man. Over het eiland Pingelap kun je meer lezen in het boek 'Het eiland der kleurenblindenden' van Oliver Sacks.



56 In de westerse wereld lijdt 8% van de mannen aan een vorm van kleurenblindheid. De bioloog mevrouw Bouman beweert dat dit percentage onder Aziatische mannen hoger ligt. Een onderzoek onder 200 Aziatische mannen wijst uit dat er 22 aan een vorm van kleurenblindheid lijden. Is er aanleiding om mevrouw Bouman gelijk te geven? Neem $\alpha = 0,05$.

57


Simon beweert dat bij het draaien van de schijf in figuur 11.10 de wijzer te vaak op rood komt. Bij het 160 keer draaien van de schijf komt de wijzer maar liefst 52 keer op rood. Is dat voldoende reden om Simon bij een significantieniveau van 1% gelijk te geven?



figuur 11.10

58


Een televisierecensent beweert dat minstens 70% van alle tv-kijkers zich stoort aan reclameblokken tijdens een film. Een aselechte steekproef wijst uit dat 320 van 500 ondervraagden zich inderdaad aan zulke blokken stoort. Is er op grond van dit steekproefresultaat voldoende reden om de mening van de recensent in twijfel te trekken? Neem $\alpha = 0,025$.



A59


In de supermarkt zijn waterflesjes te koop waarbij je poppetjes van tekenfilmfiguren krijgt. Je kunt aan de buitenkant niet zien welk poppetje je erbij krijgt. Er zijn 15 verschillende poppetjes om te verzamelen. De vader van Liv heeft ergens gelezen dat er meer poppetjes zijn gemaakt van de populaire Papa Varken dan van andere figuren. Nadat Liv 25 poppetjes heeft gekregen, blijkt ze al 5 keer Papa Varken te hebben gehad. Haar vriendinnetje Veerle spaart de poppetjes ook en heeft er al 15 gekregen, waarvan 2 keer Papa Varken. Ga na of bij $\alpha = 0,01$ geconcludeerd kan worden dat Papa Varken vaker voorkomt dan gemiddeld.

A60


Mirjam speelt een spel met een dobbelsteen. Volgens haar krijgt ze te weinig keren zes ogen. Bij het 80 keer gooien met de dobbelsteen krijgt ze maar liefst 72 keer geen zes ogen. Je kunt hierbij zowel een linkszijdige als een rechtszijdige binomiale hypothesetoets opstellen, die beide hetzelfde testen.

- Geef beide toetsen.
- Bereken in beide gevallen de overschrijdingskans.
- Is er bij een significantieniveau van 5% voldoende aanleiding om het met Mirjam eens te zijn?

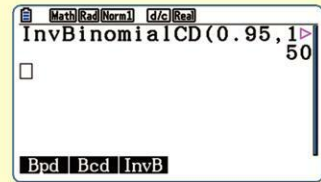
Theorie B Grenzen berekenen bij binomiale toetsen

Bij een binomiale toets is $H_0 : p = 0,42$, $H_1 : p > 0,42$ en $\alpha = 0,05$.

Door middel van een steekproef van lengte 100 wordt beslist of H_0 al dan niet verworpen wordt.

In het geval het steekproefresultaat niet bekend is, kun je wel het aanvaardingsgebied en het verwerpsgebied bepalen.

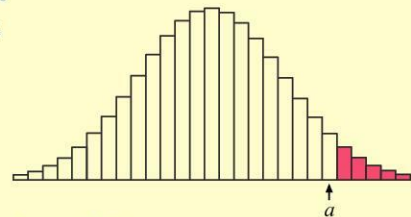
De GR heeft een optie om de grens van het aanvaardingsgebied te berekenen.



[► GR] Neem uit de module **De binomiale verdeling** het gedeelte *Grenzen aanvaardingsgebied berekenen door*.

De GR geeft 50 als antwoord. Hierbij is de grens a berekend die in de figuur hiernaast is aangegeven.

Dus 51, 52, ..., 100 liggen in het verwerpsgebied. Notatie $X \geq 51$. Bij deze steekproefresultaten wordt H_0 verworpen.



figuur 11.11

Voorbeeld

Een woordvoerder van de NS beweert dat minstens 90% van de treinen op het traject Utrecht - Arnhem op tijd rijdt. Reizigersvereniging Rover vermoedt dat dit percentage lager is. Er wordt besloten van 150 treinen na te gaan of ze op tijd rijden.

Hoeveel van deze treinen moeten op tijd rijden om de bewering van de NS bij een significantieniveau van 1% te verwerpen?

Uitwerking

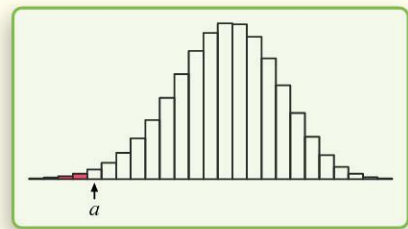
X = aantal keer dat de trein op tijd rijdt

$H_0 : p = 0,9$, $H_1 : p < 0,9$ en $\alpha = 0,01$.

X is binomiaal verdeeld met $n = 150$ en $p = 0,9$.

De GR geeft $a = 126$.

De bewering van de NS wordt verworpen als er 125 of minder treinen op tijd rijden.



Gegeven is de binomiale toevalsvariabele X met $n = 100$ en $p = 0,8$.

a Bij een hypothesetoets is $H_0 : p = 0,8$, $H_1 : p < 0,8$ en $\alpha = 0,05$.

De GR geeft $a = 73$.

Geef het verwerpsgebied.

b Bij een hypothesetoets is $H_0 : p = 0,8$, $H_1 : p > 0,8$ en $\alpha = 0,05$.

De GR geeft $a = 86$.

Geef het verwerpsgebied.

62



De fabrikant van het geneesmiddel Pharmeaplus beweert dat dit middel in minstens 80% van de gevallen doeltreffend werkt. Een arts vindt dit percentage te optimistisch en daarom wordt van 500 patiënten die het middel hebben gebruikt het ziekteverloop nagegaan. Bereken het aantal patiënten waarbij het middel Pharmeaplus een positieve uitwerking had zo, dat de bewering van de fabrikant niet verworpen wordt. Neem $\alpha = 0,05$.



A63

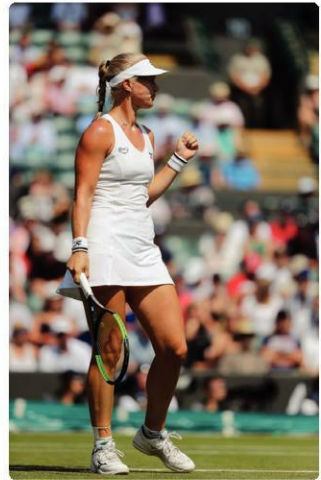


Volgens een tennisliefhebber wint een speler die in een set met serveren begint in minstens 55% van de gevallen de set. Commentator Jacco vindt dit percentage te optimistisch en daarom onderzoekt hij 500 gespeelde sets op Wimbledon.

- a Neem aan dat Jacco op grond van zijn steekproef gelijk krijgt.
Wat weet je van het aantal sets waarbij de speler die begint met serveren de set wint? Neem $\alpha = 0,05$.
- b Het werkelijke aantal blijkt 242 te zijn. Wat is je conclusie?

De kans dat een serveerder de game wint, is voor op Wimbledon gespeelde partijen 81,5%. Volgens Jacco geven nieuwe ballen bij het serveren extra voordeel. Door middel van een steekproef van 300 met nieuwe ballen gespeelde games op Wimbledon wordt onderzocht of Jacco gelijk heeft.

- c Hoeveel van die games moet de serveerder winnen om bij een significantieniveau van 2,5% Jacco gelijk te geven?



Theorie C Tweezijdige binomiale toetsen

In een krantenartikel is te lezen dat 45% van de jongeren van 13 en 14 jaar regelmatig online gamet. Om deze bewering te toetsen, wordt aselekt een steekproef van 120 jongeren van 13 en 14 jaar genomen. We vragen ons af bij welke aantallen jongeren het percentage van 45% in twijfel wordt getrokken. We nemen $\alpha = 0,05$.

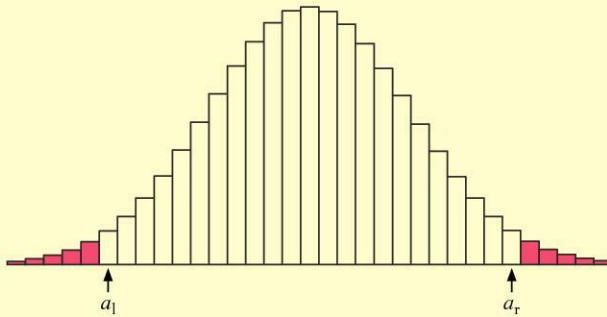
De toetsingsgrootheid X is het aantal jongeren in de steekproef dat regelmatig online gamet.

De nulhypothese is $H_0 : p = 0,45$. Het percentage 45% wordt in twijfel getrokken, dus $H_1 : p \neq 0,45$.

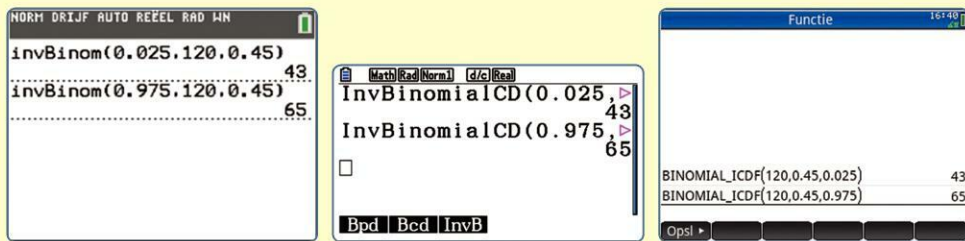
Je hebt te maken met een **tweezijdige binomiale toets**.

X is binomiaal verdeeld met $n = 120$ en $p = 0,45$.

De GR geeft $a_1 = 43$ en $a_r = 65$.



figuur 11.12



Het in het krantenartikel genoemde percentage van 45% wordt bij $\alpha = 0,05$ in twijfel getrokken als het aantal jongeren dat online gamet kleiner dan of gelijk is aan 42 of groter dan of gelijk is aan 66. Is het steekproefresultaat k bekend, dan heeft ook bij tweezijdige binomiale toetsen de overschrijdingskans de voorkeur. Van tevoren moet je bedenken of je $P(X \leq k)$ of $P(X \geq k)$ moet berekenen. Daarbij gebruik je de verwachtingswaarde.

Overschrijdingskans van k bij tweezijdige binomiale toetsen

$H_0 : p = 0,6, H_1 : p \neq 0,6$
steekproefomvang $n = 60$
steekproefresultaat $k = 42$ } De overschrijdingskans is $P(X \geq 42)$, want de verwachtingswaarde is $0,6 \cdot 60 = 36$ en $42 > 36$.

$H_0 : p = 0,6, H_1 : p \neq 0,6$
steekproefomvang $n = 80$
steekproefresultaat $k = 42$ } De overschrijdingskans is $P(X \leq 42)$, want de verwachtingswaarde is $0,6 \cdot 80 = 48$ en $42 < 48$.

Verwerp H_0 als de overschrijdingskans kleiner dan of gelijk is aan $\frac{1}{2}\alpha$.

Voorbeeld

Een nutsbedrijf beweert dat 30% van de particuliere gasafnemers de bespaartest invult. Bij een aselechte steekproef onder 400 afnemers blijken er 262 de bespaartest niet in te vullen. Is er bij een significantieniveau van 5% aanleiding om de bewering van het nutsbedrijf in twijfel te trekken?

Uitwerking

X = aantal afnemers dat de bespaartest invult

$H_0: p = 0,3$, $H_1: p \neq 0,3$ en $\alpha = 0,05$.

X is binomiaal verdeeld met $n = 400$ en $p = 0,3$.

Het steekproefresultaat is $400 - 262 = 138$.

De overschrijdingskans is $P(X \geq 138) = 1 - P(X \leq 137)$.

De GR geeft $P(X \geq 138) \approx 0,029$.

$P(X \geq 138) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is geen aanleiding de bewering van het nutsbedrijf in twijfel te trekken.

De verwachtingswaarde is $0,3 \cdot 400 = 120$.

Omdat $138 > 120$ is de overschrijdingskans gelijk aan $P(X \geq 138)$.

R64 Zie het voorbeeld.



Voer de hypothesetoets nog eens uit met X = aantal afnemers dat de bespaartest niet invult.

65 Judith toetst de zuiverheid van een geldstuk door het geldstuk 100 keer op te gooien.



a Waarom is dit een tweezijdige toets?

b Tot welke conclusie komt ze omtrent de zuiverheid bij $\alpha = 0,05$ als er 59 keer kop boven komt?

66 Martin toetst de zuiverheid van een dobbelsteen. Hij neemt $\alpha = 0,05$.



Tot welke conclusie komt hij als hij bij 150 worpen 12 zessen telt?

67 Een fabrikant beweert dat minstens 80% van zijn spaarlampen een levensduur van meer dan 8000 uur heeft. Een steekproef levert de volgende aantallen branduren op.



7831	8521	8471	9321	6827	5277	8711	9216	5317	9997
5317	9612	8306	8711	8836	7189	7723	9111	9991	9920
8618	8817	8171	8356	7881	9158	8377	7583	9313	8271

Ga na of deze steekproef voldoende aanleiding geeft om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken bij een significantieniveau van 10%.

A68
☐ ⊙ *

Bij roulette wordt bij ieder spel een schijf met 37 vakjes, die genummerd zijn van 0 tot en met 36, aan het draaien gebracht. Van de vakjes zijn er 18 rood en 18 zwart. Het vakje met 0 is groen. Zie de figuur hiernaast.

De croupier werpt een balletje tegen de draairichting van de schijf in. Na enige tijd blijft het balletje in één van de 37 vakjes liggen. Het nummer van dat vakje is dan het winnende nummer. Bij een zuivere roulette hebben alle nummers dezelfde kans om het winnende nummer te worden.



figuur 11.13

- a** Men draait de roulette 500 keer en telt hoeveel keer het balletje op het vakje met nummer 10 blijft liggen.

Dit blijkt 21 keer te zijn.

Is er bij een significantieniveau van 5% aanleiding te vermoeden dat de roulette niet zuiver is?

- b** Men draait de roulette 1000 keer en telt hoeveel keer het balletje op de vakjes met de nummers 26, 0 en 32 blijft liggen.

Bij welke aantallen zal de zuiverheid van de roulette niet in twijfel worden getrokken? Neem $\alpha = 0,025$.

- c** Volgens Richard komt het balletje niet vaak genoeg op een rood vakje. Bij het 1500 keer draaien gebeurt dit slechts 695 keer.

Is er bij $\alpha = 0,01$ voldoende reden om het met Richard eens te zijn?

A69
☐ ⊙ *

De diameter van de tomaten van tomatenexporteur Driessen is normaal verdeeld met $\mu = 7,9$ cm en $\sigma = 0,5$ cm. De tomaten met een diameter minder dan 7,2 cm zijn niet geschikt voor de export. Deze worden doorgedraaid.

- a** Toon aan dat de kans dat een tomaat van Driessen wordt doorgedraaid gelijk is aan 0,081.

De heer Van Eijk, fabrikant van het middel S3Fb, beweert dat door bespuiting van de tomatenplanten met zijn middel de diameter toeneemt. Van 900 met het middel S3Fb bespoten tomaten wordt de diameter gemeten. Van deze tomaten blijken er na meting 65 te moeten worden doorgedraaid.

- b** Is met een significantieniveau van 1% aangetoond dat het middel S3Fb de diameter inderdaad vergroot?

A70
⊙ *

In Nederland wegen baby's bij de geboorte gemiddeld 3250 gram. Het geboortegewicht is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 425 gram.

Op consultatiebureaus rekent men baby's met een geboortegewicht van meer dan 4000 gram tot de categorie 'zwaar'.

Medewerkers van het consultatiebureau in Appelscha beweren dat in hun omgeving het aantal zware baby's boven het landelijk gemiddelde ligt, want van de laatste 58 pasgeborenen behoorden er maar liefst acht tot de categorie 'zwaar'.

Onderzoek of je bij een significantieniveau van 1% de medewerkers van het consultatiebureau gelijk kunt geven.

Terugblik

Binomiale toetsen

Bij een binomiale toets heeft de nulhypothese de vorm $H_0 : p = p_0$.

Is de toets linkszijdig, dan is $H_1 : p < p_0$.

Is de toets rechtszijdig, dan is $H_1 : p > p_0$.

Is de toets tweezijdig, dan is $H_1 : p \neq p_0$.

Het al dan niet verwerpen van H_0 hangt af van het steekproefresultaat.

Bij een binomiale toets telt X bijvoorbeeld

- hoe vaak een bepaalde gebeurtenis optreedt in de steekproef
- hoeveel elementen van de steekproef een zekere eigenschap hebben.

Grenzen berekenen bij binomiale toetsen

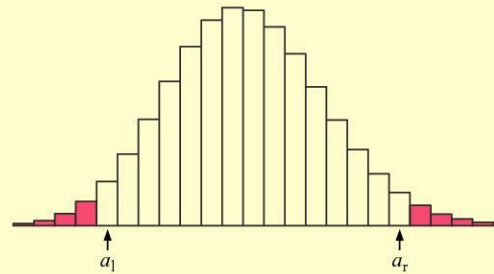
Als het steekproefresultaat niet bekend is, kun je wel het aanvaardingsgebied en het verwerpsgebied bepalen.

De GR heeft een optie om de grens a of grenzen a_l en a_r van het aanvaardingsgebied te berekenen.

Bij de tweezijdige binomiale toets met $H_0 : p = \frac{1}{6}$ en $H_1 : p \neq \frac{1}{6}$ met steekproeflengte 100 en significantieniveau $\alpha = 0,05$ ga je als volgt te werk.

De GR geeft bij oppervlakte 0,025 dat $a_l = 10$ en bij oppervlakte 0,975 dat $a_r = 24$.

Dus verwerp H_0 als $X \leq 9$ of als $X \geq 25$.



Overschrijdingskansen bij binomiale toetsen

Is het steekproefresultaat bekend, dan is het verstandig om bij het toetsen met overschrijdingskansen te werken.

We gaan uit van een steekproef van lengte 50.

Bij $H_0 : p = 0,6$ tegen $H_1 : p \neq 0,6$ en $\alpha = 0,10$ is de overschrijdingskans van het steekproefresultaat 25 gelijk aan $P(X \leq 25)$. Want $n = 50$ en $p = 0,6$, dus de verwachtingswaarde is $np = 50 \cdot 0,6 = 30$ en $25 < 30$. $P(X \leq 25) \approx 0,098 > \frac{1}{2}\alpha$.

Bij het steekproefresultaat 25 is er geen aanleiding H_0 te verwerpen.

De overschrijdingskans van het steekproefresultaat 34 is $P(X \geq 34)$, want 34 is groter dan de verwachtingswaarde 30.

Eindopdracht Examentraining evalueren

Het De Witte College wil de hulp inschakelen van een extern bureau voor examentraining wiskunde A. De 28 leerlingen van cluster V6wisA1 krijgen examentraining van het huiswerkinstituut Leithon.

Leithon beweert op zijn site dat de leerlingen door deelname aan de examentraining gemiddeld minstens 1,2 punt hoger halen voor hun centraal examen (CE).

- Leg uit waarom deze claim moeilijk te controleren is.

Behalve dat de claim van Leithon niet goed gecontroleerd kan worden, is deze met name gebaseerd op leerlingen die op eigen initiatief en kosten deelnemen aan een examentraining.

- Leg uit waarom deze leerlingen geen representatieve steekproef vormen voor de gehele populatie van zesdeklassers met wiskunde A.

Het De Witte College weet op grond van het verleden dat zijn leerlingen bij wiskunde A op het CE even hoog scoren als het landelijk gemiddelde. Leithon geeft aan dat de cijferverbetering met examentraining gemiddeld minstens 0,8 punten is met een standaardafwijking van 0,3.

Het landelijk gemiddelde bij het Centraal Examen blijkt een 6,9 te zijn. De school wil nagaan of Leithon zijn belofte heeft waargemaakt.

- Bij welke gemiddelde cijfers van cluster V6wisA1 kan geconcludeerd worden dat dit niet het geval is? Ga uit van normaal verdeelde toenames, een significantieniveau van 5% en rond af op twee decimalen.

De school realiseert zich dat ook als de belofte niet volledig wordt ingelost, de examentraining nog steeds nuttig kan zijn. Net als in de beginopdracht besluit men te kijken naar het aantal verbeteraars: de leerlingen die op het CE beter scoren dan op het schoolexamen (SE). Ook bij het De Witte College is dat gewoonlijk 60% van de leerlingen.

Na afloop van het CE blijken 22 van de 28 leerlingen uit V6wisA1 voor het CE beter te hebben gescoord dan voor het SE.

- Is er bij een significantieniveau van 5% reden om te concluderen dat het aantal verbeteraars hoger ligt dan gewoonlijk?

Diagnostische toets

11.1 De som van normale verdelingen

- 1** Volgens de wereldvoetbalbond FIFA moet een officiële wedstrijdbal een omtrek hebben van minstens 68 cm en hoogstens 70 cm. Van een grote partij voetballen is de omtrek normaal verdeeld met een gemiddelde van 69,0 cm en een standaardafwijking van 7 mm. Bereken de kans dat vijf willekeurig gekozen ballen uit deze partij allemaal aan de eis van de FIFA voldoen.



- 2** Bij een productieproces moeten drie fasen worden doorlopen. De duur van elke fase is normaal verdeeld. Fase I duurt gemiddeld 19,3 minuten en de standaardafwijking is 2,5 minuten. Voor fase II zijn het gemiddelde en de standaardafwijking 12,5 minuten respectievelijk 1,5 minuten en voor fase III 10,7 minuten respectievelijk 1,2 minuten. In hoeveel procent van de gevallen duurt het productieproces langer dan drie kwartier?

11.2 De wortel-n-wet

- 3** Potten appelmoes, waarvan de inhoud normaal verdeeld is met een gemiddelde van 720 gram en een standaardafwijking van 14 gram, worden verpakt in dozen van 16 stuks.
- a** Bereken de kans dat een aselekt gekozen doos meer dan 11 600 gram appelmoes bevat.
 - b** Hoeveel procent van de dozen heeft een gemiddelde inhoud per pot van minder dan 710 gram?

11.3 Beslissen op grond van een steekproef

- 4** Een graszodenbedrijf levert graszoden waarvan de oppervlakte normaal verdeeld is met een gemiddelde van $1,00 \text{ m}^2$ en een standaardafwijking van $2,5 \text{ dm}^2$. Een tuincentrum veronderstelt dat de gemiddelde oppervlakte afwijkt van $1,00 \text{ m}^2$ en neemt een steekproef van 20 graszoden. Het steekproefgemiddelde is $99,12 \text{ dm}^2$. Welke conclusie trekt het tuincentrum bij $\alpha = 0,10$?

11.4 Eenzijdig en tweezijdig toetsen

- 5** Een fabrikant van pakken volle melk beweert dat het vetgehalte X normaal verdeeld is met een gemiddelde van 3,50% en een standaardafwijking van 0,02%.
- a** De gezondheidsraad beweert dat het vetgehalte van de volle melk meer dan 3,50% is. Een steekproef van 30 pakken levert een steekproefgemiddelde op van 3,508%.
Is er bij een significantieniveau van 2,5% aanleiding de gezondheidsraad gelijk te geven?
 - b** De afdeling controle beweert dat door een fout in het productieproces het vetgehalte niet 3,50% is. Bij een steekproef van 40 pakken is het vetgehalte gelijk aan 3,494%.
Wijkt dit resultaat significant af van 3,50%? Neem $\alpha = 0,05$.

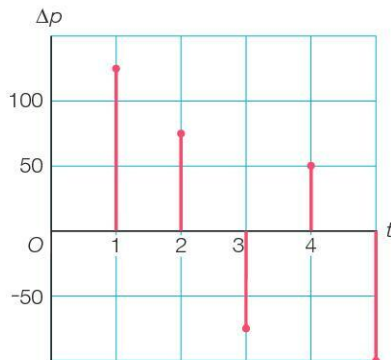
11.5 Binomiale toetsen

- 6** Sportleraar Meijer beweert dat minstens 75% van de jongeren tussen 12 en 18 jaar lid is van een sportvereniging. De schoolleiding betwijfelt dit. Een aselechte steekproef wijst uit dat 81 van de 120 ondervraagde jongeren lid zijn van een sportvereniging.
Is er op grond van dit steekproefresultaat reden om de bewering van sportleraar Meijer in twijfel te trekken? Neem $\alpha = 0,05$.
- 7** Een rad van avontuur heeft 20 gelijke sectoren, genummerd van 1 tot en met 20. Om te controleren of het rad zuiver is, telt men hoe vaak de getallen 6 tot en met 11 worden aangewezen.
- a** Men draait het rad 100 keer.
Bij welke aantallen zal men de zuiverheid van het rad niet in twijfel trekken bij een significantieniveau van 0,05?
 - b** Men draait het rad 200 keer. Hierbij wordt 70 keer één van de getallen 6 tot en met 11 aangewezen.
Is er bij een significantieniveau van 1% aanleiding om aan te nemen dat het rad niet zuiver is?
- 8** Bij het vullen van pakken koffie levert de vulmachine pakken af waarvan het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1006 gram en een standaardafwijking van 5 gram.
- a** Toon aan dat de kans dat een pak minder dan 1000 gram weegt 0,115 is.
- Na klachten van een consumentenorganisatie over een te laag gewicht van de pakken, besluit de fabrikant de machine bij te stellen. Nadat de technische dienst de machine heeft bijgesteld, blijken in een steekproef van 250 pakken er 18 minder dan 1000 gram te wegen.
- b** Is met een significantieniveau van 1% aangetoond dat het gemiddelde inderdaad is toegenomen?

Gemengde opgaven

8 Differentiaalrekening

- 1** Tijdens de vaart van Dubai naar de haven van Rotterdam houdt de stuurman van een grote olietanker elke dag de verandering van de olieprijs bij. Zie het toenamediagram in figuur G.1. Hierin is t de tijd in dagen met $t = 0$ op 11 maart om 0:00 uur en Δp de prijsverandering in dollarcenten per vat. Een vat komt overeen met 127,2 kg olie. De tanker vervoert 210 000 ton olie.
- Op 14 maart om 0:00 uur was de olieprijs 101,50 dollar per vat. Geef in deze opgave de antwoorden in miljoenen dollar en rond af op één decimaal.

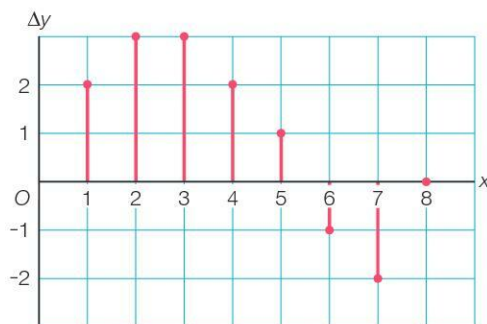


figuur G.1

- Bereken de totale waarde van de olie in de tanker op 16 maart om 0:00 uur. Gebruik dat 1 ton = 1000 kg.
- De stuurman berekent elke dag om 0:00 uur de waarde van de olie in de tanker. Wat is het verschil tussen de hoogste en laagste waarde die hij berekent?



- 2** Van de grafiek bij het toenamediagram in figuur G.2 is gegeven dat deze één maximum heeft.

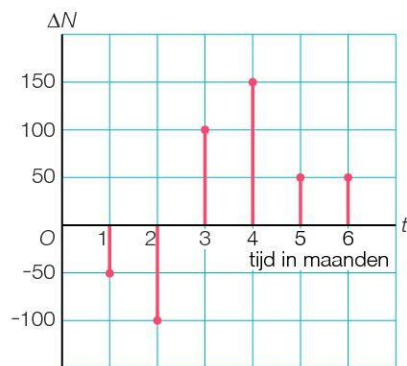


figuur G.2

- Voor welke waarden van x kan het maximum optreden? Geef een zo groot mogelijk interval.
- Bij de grafiek worden gemiddelde toenames berekend op verschillende intervallen die liggen tussen $x = 0$ en $x = 8$. Nandy beweert dat de hoogst mogelijke gemiddelde toename dan gelijk is aan 3. Ben je het met haar eens? Licht toe.
- Voor welke van de volgende intervallen geldt dat $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$? Licht toe.
 $[0, 8]$ $[4, 7]$ $[3, 7]$ $[3, 8]$

3 Het toenamediaagram in figuur G.3 geeft informatie over het aantal konijnen N in een duingebied. Hierbij is t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2020. Op 1 april 2020 waren er 850 konijnen.

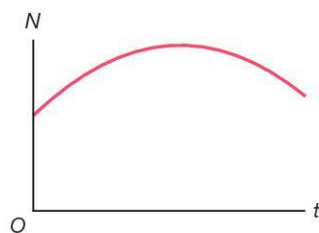
- Bereken de gemiddelde snelheid waarmee het aantal konijnen veranderde van $t = 1$ tot $t = 6$.
- Teken bij dit toenamediaagram een mogelijke grafiek met één maximum en één minimum.



figuur G.3

4 Het aantal hotelovernachtingen in Amsterdam is in de zomer groter dan in de winter. Voor het jaar 2019 is het aantal hotelovernachtingen te benaderen door het model $N = -0,2t^2 + 2,7t + 21$. Hierin is N het aantal hotelovernachtingen in duizenden per dag en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2019.

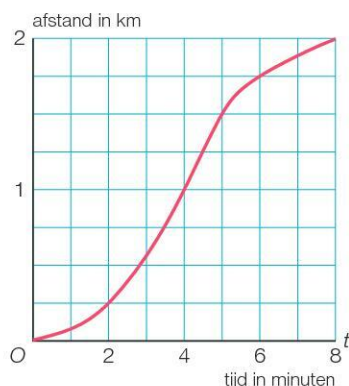
- Bereken het differentiequotiënt op $[3, 6]$ en geef de praktische betekenis van dit getal.
- Bereken de gemiddelde verandering van het aantal hotelovernachtingen per dag in de periode 1 november tot en met 31 december.
- Bereken de gemiddelde toename per week van het aantal hotelovernachtingen per dag in de maand mei (31 dagen).
- Bereken met behulp van de afgeleide in welke maand het aantal overnachtingen maximaal was.
- In een krant stond dat er in augustus 2019 meer dan één miljoen overnachtingen waren in Amsterdam. Komt dit overeen met het model? Licht toe.



figuur G.4

5 [▶ WERKBLAD] In het Belgische Malmedy is bij het NK berglopen een parcours uitgezet met flinke hoogteverschillen. In figuur G.5 zie je de tijd-afstandgrafiek van Bjorn over de eerste twee kilometer.

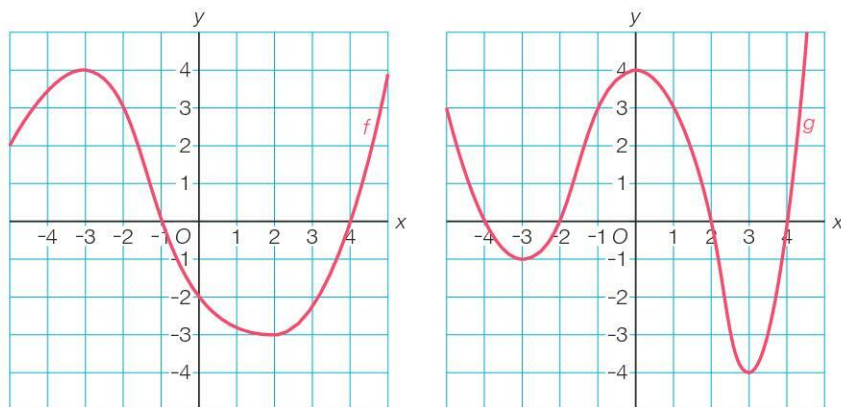
- Bereken in gehele km/uur de gemiddelde snelheid over deze twee kilometer.
- Schat in gehele km/uur de snelheid op $t = 2$.
- Op welk tijdstip is de snelheid maximaal? Schat deze snelheid in gehele km/uur.
- Op welke tijdstippen is de snelheid gelijk aan 12 km/uur?
- Hoeveel tijdstippen zijn er waarop de snelheid hetzelfde is als de gemiddelde snelheid op het interval $[0, 6]$? Licht toe.



figuur G.5

6 [▶ WERKBLAD] In figuur G.6 zie je de grafieken van de functies f en g .

- a** Schets op het werkblad de hellinggrafieken van f en g .
- b** De grafiek van f is de hellinggrafiek van de functie h .
Schets op het werkblad een mogelijke grafiek van h .



figuur G.6

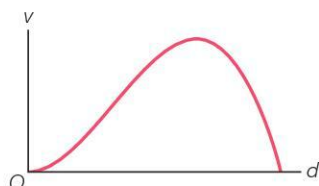
- c** Bereken het differentiequotiënt van f op het interval $[0, 4]$.
- d** Bereken de gemiddelde afname van g op het interval $[-2, 3]$.

7 Een mens niest om de luchtwegen schoon te houden. Bij het niezen trekt de luchtpijp samen, waardoor de snelheid van de luchtstroom in de luchtpijp toeneemt. De snelheid van de luchtstroom wordt gegeven door de formule $v = k(D - d)d^2$. Hierin is v in m/s en d de doorsnede van de luchtpijp in cm. Verder is k een constante en D de gemiddelde doorsnede van de luchtpijp in cm onder normale omstandigheden.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van v .

Tijdens het niezen zorgt het lichaam ervoor dat de luchtpijp zo vernauwt, dat de snelheid van de luchtstroom maximaal is.

- a** Voor een persoon geldt $k = 20$ en $D = 2,1$.
Bereken met behulp van de afgeleide de maximale snelheid van de luchtstroom in gehele km/uur.



figuur G.7

Een arts beweert dat de snelheid maximaal is voor $d = \frac{2}{3}D$.

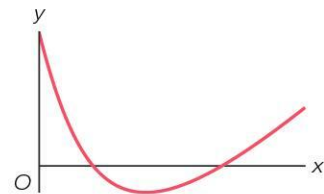
- b** Toon de juistheid van deze bewering aan.
- c** Druk $v_{\max}$ uit in k en D .
- d** In een wetenschappelijk artikel is te lezen dat de snelheid van de lucht bij niezen wel 170 km/uur kan zijn.
Onderzoek of deze bewering juist kan zijn voor een persoon met $k = 20$.

- 8** De winst W in euro's bij een productie van q stuks is gegeven door $W(q) = -0,0001q^3 + 0,0975q^2 + 22,5q - 5000$.
- Bereken met de afgeleide bij welke productie de winst maximaal is. Hoeveel is de maximale winst?
 - Toon met behulp van de afgeleide aan dat de winst bij een productie van 300 stuks sneller stijgt dan bij een productie van 400 stuks.
- 9** Bij de koers van een aandeel op de Amsterdamse effectenbeurs in de maand juni hoort de formule $P(t) = -0,002t^3 + 0,075t^2 - 0,6t + 64$. Hierin is P de prijs van het aandeel in euro's en t de tijd in dagen met $t = 1$ op 1 juni.
- Schets de grafiek van P .
 - Bereken met de afgeleide de coördinaten van de toppen. Geef de coördinaten van de toppen aan in de schets van vraag a. Zet ook de coördinaten van het beginpunt en van het eindpunt in de schets.
 - Marceline koopt in de loop van juni 50 aandelen en verkoopt ze nog voor het einde van de maand. Hoeveel winst kan Marceline maximaal behalen?

- 10** Gegeven is de formule $y = 5\sqrt{x^2 + 36} - 20 - 4x$ met $x \geq 0$. In de figuur hiernaast zie je de bijbehorende grafiek.

Voor de afgeleide geldt $\frac{dy}{dx} = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 4$.

- Toon dit aan.
- Bereken met de afgeleide de helling in het snijpunt A van de grafiek met de y -as.
- Bereken met behulp van differentiëren het minimum van y .



figuur G.8

9 Kansverdelingen

- 11**
- Bereken de kans dat je bij tien worpen met een dobbelsteen meer dan twee keer 6 ogen gooit.
 - Bereken de kans dat je bij twaalf worpen met twee dobbelstenen minstens vier keer meer dan 9 ogen gooit.
 - Bereken de kans dat je bij twintig worpen met drie dobbelstenen hoogstens twee keer hoogstens 5 ogen in totaal gooit.
 - Eva gooit net zo lang met twee dobbelstenen totdat ze minstens één keer 6 ogen heeft gegooit. Bereken de kans dat ze vier keer moet gooien.

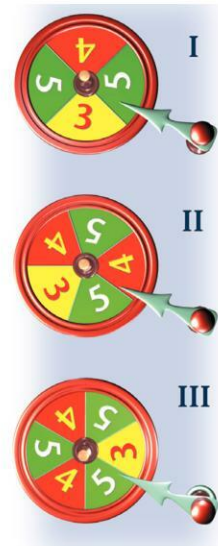
- 12** In figuur G.9 zie je drie schijven die onafhankelijk van elkaar draaien. Nadat de schijven zijn uitgedraaid, wijst elke pijl een sector aan. Je wilt de hoofdprijs van 100 euro als elk van de pijlen het cijfer 3 aanwijst. Bij drie keer het cijfer 4 win je 20 euro en bij drie keer het cijfer 5 win je 5 euro.

Mariska speelt het spel één keer.

X = bedrag dat Mariska wint

Y = som van de drie aangewezen getallen

- Bereken $P(X = 100)$.
- Stel de kansverdeling van X op. Schrijf de kansen als breuken met noemer 120.
- Bereken $P(Y = 10)$.
- Coby speelt het spel vier keer. Bij elk spel heeft ze twee keer het cijfer 3.
Bereken de kans op deze situatie.
- Anne speelt het spel net zo lang, totdat ze de hoofdprijs wint.
Bereken de kans dat ze acht of negen keer moet spelen.



figuur G.9

- 13** Bij een reisorganisatie weet men uit ervaring dat de kans dat een volledig verzorgde reis naar Malta wordt geannuleerd, gelijk is aan 0,08. De reisorganisatie speelt hierop in door meer van deze reizen te verkopen dan de 1250 beschikbare reizen.

- Neem aan dat er 1350 reizen naar Malta verkocht zijn.
Bereken de kans dat het aantal ingekochte reizen toch voldoende is.
- Neem aan dat er 1300 reizen naar Malta verkocht zijn.
Bereken de kans dat het aantal annuleringen minder dan één standaardafwijking van het verwachte aantal annuleringen afligt.
- De eigenaar van de reisorganisatie wil de kans dat iemand teleurgesteld moet worden beperken tot maximaal 5%.
Hoeveel reizen naar Malta zal men maximaal verkopen?

- 14** Pluimveehouder Wegdam heeft 6000 legkippen. Het gewicht van de door deze kippen gelegde eieren is normaal verdeeld met een gemiddelde van 60 gram en een standaardafwijking van 4 gram. Per dag heeft Wegdam 300 euro vaste kosten. De variabele kosten zijn 1,5 cent per ei.

Voor de eieren onderscheidt Wegdam drie klassen.

VERDELING EIEREN OVER DE KLASSEN

klasse K	klasse M	klasse G
gewicht tot 56 gram verkoopprijs 9 cent per ei	gewicht tussen 56 en 64 gram verkoopprijs 10 cent per ei	gewicht vanaf 64 gram verkoopprijs 11 cent per ei

Neem aan dat de kippen op een dag 5000 eieren leggen.

- Hoeveel van deze eieren zullen naar verwachting tot klasse K behoren? En hoeveel tot klasse M?
- Bereken de verwachte winst die Wegdam deze dag maakt.

15 Barbut is een dobbelspel dat oorspronkelijk uit het Midden-Oosten komt en dat je tegen elkaar of met een groep kunt spelen. Er wordt met twee dobbelstenen gegooid op een tafel met een rood vlak en een geel vlak. Voor het gooien kies je een vlak en zet je een bedrag in. In deze opgave gaan we uit van een inzet van 10 euro.

Bij twee keer een 1, twee keer een 2, twee keer een 4 of (in willekeurige volgorde) een 1 en een 2 winnen spelers die hebben gekozen voor het rode vlak. Wordt er twee keer een 3, twee keer een 5, twee keer een 6 of (in willekeurige volgorde) een 5 en een 6 gegooid, dan winnen spelers die hebben ingezet op het gele vlak. Bij alle andere combinaties is er geen winnaar en wordt er opnieuw gegooid, net zolang totdat er een winnende combinatie is.

a De kans dat je bij dit spelletje wint is 0,5.

Licht toe.

Bij de meeste combinaties krijg je als winnaar twee keer zoveel terug als dat je hebt ingezet, dat wil zeggen 20 euro. Alleen bij de combinaties dubbel 1 en dubbel 6 krijg je minder terug. In die gevallen krijg je anderhalf keer je inzet, dus 15 euro. Als je verliest, dan krijg je niets, en als er opnieuw wordt gegooid, dan blijft de inzet staan.

b Toon aan dat de kans dat je 5 euro wint gelijk is aan 0,1.

c Bereken de verwachtingswaarde van de winst per spel.

16 De hartslag is de frequentie waarmee het hart slaat. Voor de meeste mensen ligt deze waarde in rust tussen de 60 en 100 slagen per minuut. Sporters in topconditie bereiken in rust veel lagere waarden, terwijl personen die stress ervaren of een zware inspanning leveren met veel hogere waarden te maken krijgen. Een hele lage of juist hoge hartslag kan echter ook een indicatie zijn van een medisch probleem.

Een verpleegkundige onderzoekt bij een grote groep mensen de hartslag in rust. Deze blijkt normaal verdeeld te zijn met een gemiddelde van 70 en een standaardafwijking van 9,2 slagen per minuut. Hij verdeelt de personen in drie groepen, die hij nader wil onderzoeken.

I hartslag lager dan 60

II hartslag van 60 tot 90

III hartslag van 90 of meer

a Bereken van elke groep hoeveel procent van de personen er toe behoort. Rond af op één decimaal.

De verpleegkundige wil de personen in de middelste groep nader onderzoeken. Daarom verdeelt hij deze personen in oplopende hartslag in de groepen IIA en IIB, die elk 50% van de personen van groep II bevatten.

b Bereken de grens tussen de groepen IIA en IIB. Rond af op gehelen.

- 17** Een bijzondere wijn van Goettelmann is zijn Gewurtztraminer. Deze is gemaakt volgens het principe van de 'Grains Nobles'. Bij wijnen die volgens dit principe zijn gemaakt, laat men de druiven langer hangen dan gebruikelijk. Daarmee worden druiven met een zeer hoog suikergehalte verkregen. Het suikergehalte wordt gemeten in graden Oechsle ($^{\circ}\text{Oe}$).

Niet elke druif bevat precies evenveel suiker. Het suikergehalte is normaal verdeeld. Op 28 november hebben de druiven een gemiddeld suikergehalte van 131°Oe en een standaardafwijking van $2,7^{\circ}\text{Oe}$.

- a** Van hoeveel procent van de druiven wijkt het suikergehalte minder dan $3,5^{\circ}\text{Oe}$ af van het gemiddelde?
- b** Bereken de kans dat van vijf willekeurig gekozen druiven er minstens één een suikergehalte heeft van meer dan 138°Oe .

Eén van de druiven heeft op 28 november een suikergehalte van $136,5^{\circ}\text{Oe}$. Volgens Goettelmann behoort deze druif tot de twee procent druiven met het hoogste suikergehalte.

- c** Onderzoek met een berekening of Goettelmann gelijk heeft.

Wijn met het keurmerk 'Grains Nobles' moet voldoen aan strenge overheidseisen. Minimaal 98,5% van de druiven moet een hoger suikergehalte hebben dan een wettelijk vastgestelde ondergrens. Goettelmann constateert dat hij op 28 november nog niet aan de eis voldoet.

- d** Wat weet je van de wettelijk vastgestelde ondergrens?

Om wel aan de overheidseisen te voldoen, wacht Goettelmann nog even met plukken. Op 4 december blijkt van de geteste druiven 1 op de 11 een suikergehalte van $137,2^{\circ}\text{Oe}$ of meer te hebben. De standaardafwijking is onveranderd $2,7^{\circ}\text{Oe}$.

- e** Hoeveel suiker bevatten de druiven op 4 december gemiddeld? Rond af op één decimaal.

- 18** Bij bakker Bolhuis kun je gewone olieballen en olieballen met krenten kopen. Door een goede balans tussen baktijd en baktemperatuur bakt Bolhuis ballen die niet al te vet zijn. Het vetpercentage van de gewone olieballen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 7,3% en een standaardafwijking van 2,2%.

Victor koopt bij Bolhuis een zak met tien gewone olieballen.

- a** Bereken de kans dat hij meer dan vier ballen met een vetpercentage van meer dan 8% krijgt.

Ook het vetpercentage van de olieballen met krenten is normaal verdeeld. Het gemiddelde vetpercentage is 6,9%. Van elke 50 olieballen met krenten hebben er twaalf een vetpercentage boven 8%.

- b** Bereken de standaardafwijking. Rond af op één decimaal.

- 19** De Britse natuurkundige Lord Rayleigh deed in de tweede helft van de 19^e eeuw onderzoek naar de windsnelheden die op een bepaalde plaats voorkwamen. Hij ontdekte daarbij dat de in een jaar voorkomende windsnelheden bij benadering normaal verdeeld zijn. Voor Amersfoort is de gemiddelde windsnelheid 3,8 m/s en de standaardafwijking 1,3 m/s.
- a** Hoeveel uur per jaar is de windsnelheid in Amersfoort meer dan 5 m/s?
 - b** Men spreekt van matige wind als de windsnelheid tussen 3,4 en 7,5 m/s ligt.
Hoeveel uur per jaar is er in Amersfoort matige wind?
 - c** In Zandvoort is de gemiddelde windsnelheid 7,2 m/s. In deze plaats is de windsnelheid gedurende 30,8% van de tijd meer dan 7,9 m/s. Bereken de standaardafwijking van de windsnelheid in Zandvoort. Rond af op één decimaal.
 - d** De standaardafwijking van de windsnelheid in Delfzijl is 1,5 m/s. Gedurende 14,3% van de tijd is de windsnelheid minder dan 5,5 m/s. Bereken de gemiddelde windsnelheid in Delfzijl. Rond af op één decimaal.

10 Exponenten en logaritmen

- 20** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 9,6% toe.
- a** Hoeveel procent is de toename per 10 jaar?
 - b** Hoeveel procent is de toename per maand?
 - c** Na hoeveel maanden is de hoeveelheid verdubbeld?
 - d** Na hoeveel jaar is de hoeveelheid vertienvoudigd?
- 21** Een hoeveelheid neemt per dag met 17% af.
- a** Hoeveel procent is de afname per week?
 - b** Hoeveel procent is de afname per uur?
 - c** Na hoeveel uren is de hoeveelheid gehalveerd?
 - d** Na hoeveel dagen is er nog een kwart van de beginhoeveelheid over?
- 22** Differentieer.
- a** $y = 40e^{0,6x}$
 - b** $y = 18,5(1 + e^{2x})$
 - c** $N = 34 \cdot 5^{t^2-7}$
 - d** $P = 600(1 + 8^{1,5q})$
- 23**
- a** Schrijf de formule $N = {}^4\log(3x)$ in de vorm $N = a + b \cdot \log(x)$. Rond af op twee decimalen.
 - b** Schrijf de formule $N = 5 + 2 \cdot \log(3t)$ in de vorm $N = a + b \cdot \ln(t)$. Rond af op twee decimalen.
 - c** Maak bij de formule $Q = 3 + {}^4\log(2x + 1)$ de variabele x vrij.
 - d** Maak bij de formule $P = 3 - 2^{3t+1}$ de variabele t vrij.

24 In een meer groeit een waterplant die het wateroppervlak bedekt. Op 1 mei om 0:00 uur wordt 20 m^2 van het wateroppervlak bedekt en deze oppervlakte verdubbelt elke vijf dagen. Precies zes weken na 1 mei bedekt de waterplant het gehele meer.

- a** Bereken in m^2 nauwkeurig de oppervlakte van het meer.
- b** Op welke datum is 30% van het meer met de waterplant bedekt?

25 **a** Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. Op $t = 4$ is $N = 160$ en op $t = 8$ is $N = 272$. Hierbij is t in dagen.

Stel de formule op van N .

- b** Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 12$ is er nog 84% over van de oorspronkelijke hoeveelheid. Hierbij is t in dagen. We noemen P het percentage dat nog over is.

Stel de formule op van P .

- c** Een hoeveelheid is in tien jaar tijd met 85% toegenomen. De eerste zes jaar nam de hoeveelheid met 9,2% per jaar toe.

Bereken voor de laatste vier jaar het jaarlijkse toenamepercentage.

26 De wereldbevolking consumeert steeds meer vis. Tot omstreeks 2010 werd het grootste gedeelte daarvan door de visserijsector gevangen. Tegenwoordig is het grootste gedeelte echter afkomstig uit viskwekerijen.

In 1970 werd er wereldwijd 3,4 miljoen ton vis gekweekt. In 2015 was die hoeveelheid exponentieel toegenomen tot 109,5 miljoen ton. Uit deze gegevens

volgt de formule $N = 3,4 \cdot 1,080^t$ met N de hoeveelheid wereldwijd gekweekte vis in miljoen ton en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1970.

- a** Toon aan dat deze formule volgt uit de gegevens.
- b** Bereken de verdubbelingstijd voor de hoeveelheid wereldwijd gekweekte vis. Rond af op gehele jaren.



Voor de hoeveelheid wereldwijd gevangen vis kun je gebruikmaken van het model $N = 18,6 \cdot \ln(t + 10) + 19,1$. Hierin is N de hoeveelheid wereldwijd gevangen vis in miljoen tonnen en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1970.

- c** In welk jaar werd er wereldwijd evenveel vis gekweekt als gevangen?
- d** In de periode 1970-2015 is de wereldbevolking verdubbeld. De gemiddelde wereldburger is in dezelfde periode meer vis gaan eten. Hoeveel keer zoveel? Rond af op één decimaal.
- e** Schrijf de formule $N = 18,6 \cdot \ln(t + 10) + 19,1$ in de vorm $N = a \cdot \log(t + 10) + b$. Rond zo nodig af op één decimaal.

[► WERKBLAD] In de jaren 2004 tot en met 2016 werd jaarlijks in april geteld hoeveel damherten er leefden in de Amsterdamse Waterleidingduinen (AWD). Deze waarnemingen zijn als stippen uitgezet in figuur G.10. De lijn geeft de ontwikkeling in deze periode aan. Op de verticale as is een logaritmische schaal gebruikt. De figuur staat ook op het werkblad.



figuur G.10

- a In april 2015 waren er meer damherten dan in april 2005.
Hoeveel keer zoveel?
- b Gebruik een formule van de lijn om te voorspellen hoeveel damherten er in april 2025 zullen zijn als de ontwikkeling zich doorzet.

Er ontstaat onherstelbare schade door overbegrazing als het aantal damherten per km^2 te groot is. In een artikel van Duinbehoud dat in deze periode verscheen, werd aangegeven dat de grens van de natuurlijke draagkracht zojuist bereikt was. Er waren toen 40 damherten per km^2 .

- c Bereken in welk jaar het artikel van Duinbehoud verscheen. Gebruik dat de AWD 3319 ha beslaan.



28 De schaal van Richter is een meetschaal waarmee de waargenomen sterkte van een aardbeving wordt uitgedrukt in een getal. Dat getal wordt ook wel de magnitude van een aardbeving genoemd. De magnitude M is afhankelijk van de hoeveelheid energie E in joule die gepaard gaat met een aardbeving. Daarbij hoort de formule $M = 0,67 \cdot \log(0,5E) - 3$. De formule geldt alleen voor waarden van M die groter zijn dan 0.

- a** Bereken voor welke waarden van E de formule geldt. Rond af op duizendtallen.
- b** Aan de allesverwoestende tsunami in Japan op 11 maart 2011 gingen meerdere aardbevingen vooraf. De zwaarste was de zeebeving bij Sendai, die gepaard ging met een hoeveelheid energie van $2 \cdot 10^{18}$ joule.
Bereken de magnitude van deze aardbeving op de schaal van Richter. Rond af op één decimaal.

- c** Op 8 januari 2018 vond in Groningen een aardbeving plaats met een kracht van 3,4 op de schaal van Richter. Bereken de hoeveelheid energie die gepaard ging met deze aardbeving. Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.

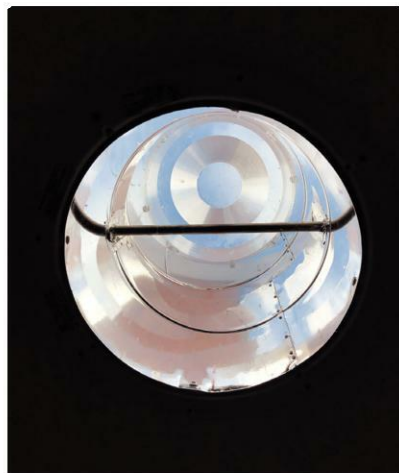


- d** Als de hoeveelheid energie verdubbelt, neemt M steeds met hetzelfde getal toe. Toon dit aan en bereken dit getal in twee decimalen.
- e** De formule van M is te schrijven in de vorm $M = a \cdot \ln(E) - b$. Bereken a en b . Rond af op twee decimalen.
- f** De formule van M is ook te schrijven in de vorm $E = b \cdot g^M$. Bereken b en g . Rond b af op duizendtallen en g op gehele.
- g** Elke keer als M met 1 toeneemt, wordt E met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Bereken dit getal in gehele nauwkeurig.

29 Gegeven zijn de formules $y_1 = 3 + {}^2\log(x - 1)$ en $y_2 = 2 + {}^3\log(2x)$.

- a** Schets de grafieken van y_1 en y_2 in één figuur.
- b** Voor welke waarde van x geldt dat $y_1 = y_2$? Rond af op drie decimalen.
- c** Schrijf de formule $y = 3 + {}^2\log(x - 1)$ in de vorm $x = a + b \cdot g^y$.
- d** Schrijf de formule $y = 2 + {}^3\log(2x)$ in de vorm $y = a + b \cdot \ln(x)$. Rond af op twee decimalen.

- 30** Daglicht bevordert het gevoel van welzijn, het veraangenaamt de sfeer en verhoogt de arbeidsproductiviteit. Daglicht bespaart bovendien energie en geeft de omgeving in de ware kleuren weer.
- Solatube is een bedrijf dat via een reflecterende buis het daglicht vanuit een lichtkoepel in de leefruimte van een huis of een kantoor laat vallen. De buizen zijn voorzien van reflectiemateriaal waarbij per weerkaatsing steeds hetzelfde percentage van het weerkaatste licht verloren gaat. De hoeveelheid daglicht die in de woonruimte valt, neemt dus exponentieel af met het aantal weerkaatsingen.



Na 35 weerkaatsingen valt nog altijd 90% van de oorspronkelijke hoeveelheid daglicht in de woonruimte.

- a** Stel de formule op van het percentage P van het daglicht dat na n weerkaatsingen in de woonruimte valt.
- b** Hoeveel procent van het daglicht valt na 15 weerkaatsingen in de woonruimte?
- c** Hoeveel procent van het daglicht is na 20 weerkaatsingen geabsorbeerd?

11 Het toetsen van hypothesen

- 31** Een pakketbezorger weet dat de tijd die hij nodig heeft om een adres te bezoeken voor het afleveren van één of meer pakjes, normaal verdeeld is met een gemiddelde van 8 minuten en 24 seconden en een standaardafwijking van 2 minuten en 3 seconden.
- a** Bereken de kans dat hij bij het bezoeken van tien adressen gemiddeld minder dan 8 minuten per adres nodig heeft.

Op dinsdagavond moet hij zijn bestelbus om 20:00 uur inleveren bij het sorteercentrum. Hij moet daarom om 19:50 uur stoppen met bezorgen, om voldoende tijd te hebben om naar het sorteercentrum te rijden.

Adressen die hij dan nog niet heeft bezocht, moet hij de volgende dag bezoeken. Om 18:37 uur begint hij met het bezorgen van de pakjes voor de laatste tien adressen die nog in de auto liggen.

- b** Bereken de kans dat hij woensdag nog naar een adres van dinsdag moet.

- 32** Chocoladewinkel De Zoete Inval verkoopt chocolaatjes met een gemiddeld gewicht van 15 gram en een standaardafwijking van 1,3 gram. Er zitten altijd evenveel chocolaatjes in een doosje. De eigenaresse van de winkel beweert dat meer dan 90% van de doosjes een gemiddeld gewicht van meer dan 14,5 gram per chocolaatje heeft. Hoeveel chocolaatjes zitten er in een doosje?

- 33** Een onderzoeksbureau beweert dat het aantal uur dat een student per week aan bijbaantjes kwijt is, normaal verdeeld is met een gemiddelde van 10,5 uur en een standaardafwijking van 3,2 uur.
- a** Decaan Heinneman betwijfelt of dit gemiddelde klopt. Een steekproef van lengte 60 levert een gemiddelde tijd op van 9,8 uur.
Is er op grond van dit steekproefresultaat bij een significantieniveau van 5% aanleiding om te twijfelen aan de bewering van het onderzoeksbureau?
 - b** Op grond van een steekproef van lengte 200 wil men beslissen of het gemiddelde van 10,5 uur klopt.
Bij welke steekproefresultaten zal men het onderzoeksbureau gelijk geven? Neem $\alpha = 0,10$.

- 34** De firma Zamo maakt voor de horeca zakjes gevuld met mosterd. Zamo verpakt de zakjes in dozen van 264 stuks. Op de verpakking staat: 264 zakjes à 4 gram.
- De inhoud van de zakjes is normaal verdeeld met een gemiddelde van 4,2 gram en een standaardafwijking van 0,3 gram.
- a** Hoeveel zakjes met een inhoud van minder dan 4 gram zitten naar verwachting in een doos?
 - b** Bereken de kans dat een doos meer dan 1120 gram mosterd bevat.
 - c** Van hoeveel procent van de dozen wijkt de gemiddelde inhoud per zakje meer dan 0,15 gram af van de op de doos vermelde 4 gram?

Het gewicht van een leeg zakje is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,5 gram en een standaardafwijking van 0,2 gram.

- d** Bij Zamo wordt een steekproef van 30 met mosterd gevulde zakjes genomen.
Bereken de kans dat in deze steekproef minstens vijf zakjes zitten die minimaal 6 gram wegen.

- 35** Fabrikant Meeuwis vult zakjes pinda's.
- Het gewicht van de pinda's in een zakje is normaal verdeeld met een gemiddelde van 150 gram.
- Onderzoek brengt aan het licht dat 8% van de zakjes minder dan 145 gram pinda's bevat. Hieruit volgt dat de standaardafwijking van het gewicht in twee decimalen gelijk is aan 3,56 gram.
- a** Bereken deze standaardafwijking in drie decimalen.
 - b** Bereken de kans dat van tien zakjes het gemiddelde gewicht per zakje minder dan 148 gram is.
 - c** De zakjes pinda's worden verpakt in dozen van 30 stuks.
Bereken de kans dat van drie dozen er minstens één minder dan 4470 gram bevat.

36 In Nederland heeft 47% van de huishoudens een huisdier. Een gemeenteambtenaar in een grote gemeente denkt dat dit percentage bij bewoners van appartementen in zijn gemeente lager ligt. In een steekproef van 60 bewoners van appartementen blijken er 38 geen huisdier te hebben.

Kan bij een significantieniveau van 5% geconcludeerd worden dat de gemeenteambtenaar gelijk heeft?

37 Een fabrikant van frisdranken houdt een actie om zijn marktaandeel te vergroten. Bij deze actie kan de consument doppen verzamelen. De onderkant van een dop heeft één van de kleuren rood, groen, blauw of oranje. Lever je vier verschillend gekleurde doppen in, dan krijg je een fles frisdrank gratis.

De fabrikant beweert dat 50% van de doppen rood is, 30% groen, 15% blauw en 5% oranje.

- a** Bereken de kans dat je een gratis fles frisdrank kunt halen na het kopen van vier flessen.
- b** Mevrouw Wesselink koopt acht flessen.
Bereken de kans dat ze twee flessen gratis krijgt.
- c** Mevrouw Meurs heeft 30 flessen gekocht.
Bereken de kans dat er minstens één fles met een oranje dop bij is.
- d** Volgens barkeeper Ronny is het percentage flessen met een rode dop groter dan 50%. Van 100 flessen die hij heeft opengemaakt, zijn er 57 met een rode dop.
Moet je bij een significantieniveau van 10% Ronny gelijk geven?
- e** Een groothandel in frisdranken krijgt klachten binnen over het percentage oranje doppen; dat zou minder dan 5% zijn. Er wordt besloten een steekproef te nemen van 200 flessen.
Hoeveel oranje doppen moet men in de steekproef minstens aantreffen, opdat de bewering van de fabrikant niet wordt verworpen?
Neem $\alpha = 0,10$.

38 In een groot bedrijf is het gemiddelde gewicht van de mannen 84 kg met een standaardafwijking van 8 kg. Voor de vrouwen is het gemiddelde gewicht 70 kg met een standaardafwijking van 7 kg. Op een ochtend staan er bij dit bedrijf vijf mannelijke en vijf vrouwelijke medewerkers klaar om in dezelfde lift te stappen.

De lift heeft een maximaal draagvermogen van 800 kg.

Bereken de kans dat de tien medewerkers samen te veel wegen voor de lift.



39 Een huisarts heeft op elke werkdag twee uur gereserveerd voor een spreekuur. De ervaring heeft haar geleerd dat zij tijdens het spreekuur gemiddeld tien minuten voor een patiënt nodig heeft. De huisarts deelt haar patiënten in drie groepen in:

- *gemakkelijke* patiënten die hoogstens 5 minuten tijd kosten
- *gewone* patiënten die tussen 5 en 15 minuten tijd kosten
- *tijdrovende* patiënten die minstens 15 minuten tijd kosten.



We maken bij deze situatie het volgende model.

- Elke werkdag komen er 12 patiënten op het spreekuur.
- De tijd die de huisarts tijdens het spreekuur voor een patiënt nodig heeft, is normaal verdeeld met een gemiddelde van 10 minuten en een standaardafwijking van 4 minuten.
- a** Bereken de verwachtingswaarde van het aantal *tijdrovende* patiënten tijdens een spreekuur. Rond af op twee decimalen.
- b** Bereken de kans dat de huisarts tijdens een spreekuur 2 *gemakkelijke* en 10 *gewone* patiënten krijgt.
- c** Bereken de kans dat tijdens een spreekuur minstens zes patiënten meer dan 10 minuten kosten.
- d** Bereken de kans dat tijdens een spreekuur de gemiddelde tijd per patiënt minstens 14 minuten is.

In een week had de huisarts voor de 60 patiënten op haar spreekuur in totaal 654 minuten nodig. Dat is aanzienlijk meer dan de 600 minuten die je zou verwachten.

- e** Onderzoek of deze gegevens voldoende aanleiding geven om bij een significantieniveau van 5% de veronderstelde gemiddelde tijd van 10 minuten te verhogen.

De huisarts beweert dat zij de afgelopen vijf jaar van haar 3000 patiënten 30% wel eens een keer doorverwezen heeft naar een specialist in het ziekenhuis. Haar assistent denkt dat dit percentage kleiner is en neemt een steekproef van 50 patiënten.

- f** Bereken de kans dat de assistent in deze steekproef minder dan 10 doorverwezen patiënten vindt, als de huisarts gelijk heeft.

In een fabriek worden havermoutrepen met een fruitvulling gemaakt. De hoeveelheden havermoutdeeg en fruitvulling worden door twee verschillende machines afgewogen. Daarna worden de vulling en het deeg samengevoegd, waarna de repen worden afgebakken. De hoeveelheid havermoutdeeg per reep is normaal verdeeld met een gemiddelde van 17 gram en een standaardafwijking van 0,7 gram. De hoeveelheid fruitvulling per reep is normaal verdeeld met een gemiddelde van 16 gram en een standaardafwijking van 1,1 gram.



- a** Bereken de kans dat van een willekeurig gekozen reep de fruitvulling en het havermoutdeeg samen meer dan 35 gram wegen.
- b** Bij de kwaliteitscontrole vermoedt men dat na verloop van tijd het gemiddelde gewicht van de fruitvulling minder is dan 16 gram per reep. Door middel van een steekproef van de fruitvulling voor 20 repen zal men besluiten de machine die de hoeveelheid fruitvulling afweegt al dan niet bij te stellen.
Bij welke steekproefgemiddelden zal men bij een significantieniveau van 5% de machine bijstellen? Rond af op twee decimalen.
- c** Stel dat de machine voor elke reep gemiddeld 15,7 gram fruitvulling afweegt.
Bereken de kans dat men bij een steekproef van lengte 20 en het hanteren van de in vraag b gevonden beslissingsregel *niet* tot bijstelling van de machine overgaat.
- d** Ook wordt betwijfeld of de machine die de hoeveelheid havermoutdeeg afweegt nog wel een gemiddelde hoeveelheid van 17 gram aflevert. Men neemt een steekproef van 10 hoeveelheden havermoutdeeg.
Bij welke steekproefgemiddelden zal men bij een significantieniveau van 5% besluiten om deze machine bij te stellen? Rond af op twee decimalen.

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen.
- De toets Ans en fouten verbeteren.
- Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen.
- Decimaal getal omzetten in breuk.

vwo A/C deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 19

Formules en grafieken

- Formules invoeren en grafieken plotten.
- Tabellen maken.
- De opties snijpunt, nulpunt, maximum en minimum.

vwo A/C deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 37

Helling

- De richtingscoëfficiënt van een raaklijn.

vwo A deel 3
hoofdstuk 8
bladzijde 27
vwo A deel 3

De binomiale verdeling

- Binomiale kansen berekenen.
- Cumulatieve binomiale kansen berekenen.
- Grenzen aanvaardingsgebied berekenen.

hoofdstuk 9
bladzijde 76
hoofdstuk 11
bladzijde 191

De normale verdeling

- Oppervlakten berekenen.
- Grenzen berekenen.
- Het berekenen van μ en σ .

vwo A deel 3
hoofdstuk 9
bladzijde 85, 86
en 89

Allerlei

- Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR.

Overzicht routes

8 Differentiaalrekening

8.1 Toenamediagrammen en differentiequotiënten

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

8.2 Hellinggrafieken

opgave	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

8.3 Differentiëren

opgave	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

8.4 Notaties en regels voor de afgeleide

opgave	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

8.5 Extreme waarden en de afgeleide

opgave	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

9 Kansverdelingen

9.1 Toevalsvariabelen en verwachtingswaarde

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

16	17	18	19	20	21

9.2 De binomiale verdeling

opgave	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
□ basis										
⊙ midden										
* uitdagend										

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42

9.3 Berekeningen bij normaalkrommen

opgave	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

9.4 Toepassingen van de normale verdeling

opgave	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

10 Exponenten en logaritmen

10.1 Exponentiële groei

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
□ basis										
⊙ midden										
* uitdagend										

11	12	13	14	15	16	17	18	19

10.2 Groeipercenages en formules

opgave	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

10.3 Logaritmen

opgave	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

10.4 Werken met logaritmen

opgave	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
□ basis																		
⊙ midden																		
* uitdagend																		

10.5 Groeisnelheid

opgave	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

11 Het toetsen van hypothesen

11.1 De som van normale verdelingen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
☐ basis											
☒ midden											
☒ uitdagend											

11.2 De wortel- n -wet

opgave	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
☐ basis													
☒ midden													
☒ uitdagend													

11.3 Beslissen op grond van een steekproef

opgave	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
☐ basis											
☒ midden											
☒ uitdagend											

11.4 Eenzijdig en tweezijdig toetsen

opgave	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
☐ basis																
☒ midden																
☒ uitdagend																

11.5 Binomiale toetsen

opgave	52	53	54	55	56	57	58	59	60
☐ basis									
☒ midden									
☒ uitdagend									

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

Trefwoordenregister

A

aanvaardingsgebied 172
acceptatiegebied 172
afgeleide 36
- functie 36
afnemende daling 10
afnemende stijging 10
alternatieve hypothese 171

B

Bernoulli, Jacob 75
Bernoulli-experiment 74
beslissingsvoorschrift 169
binomiaal
kansexperiment 74
binomiale toets 187
tweezijdige - 192
binomiale
toevalsvariabele 74
binomiale verdeling 74

C

centrale limietstelling 161
constante daling 10
constante stijging 10
cumulatieve kans 76
cumulatieve
kansverdeling 76

D

daling
afnemende - 10
constante - 10
toenemende - 10
data snooping 175
differentiaalrekening 40
differentiequotiënt 19
differentiëren 37
- naar 42
somregel van - 37
d-notatie 42
dubbellogaritmisch
papier 134

E

e 142
eenzijdige toets 178
e-macht 143
enkelvoudige
hypothese 184
Euler, Leonhard 144
extreme waarde 49

G

Galilei, Galileo 40
gemiddelde
verandering 17
gesloten interval 9
groeifactor 108
groeiformule 143
groeipercantage 108
groeisnelheid 143
grondtal van de
logaritme 124

H

halveringstijd 111
helling van lijn 19
helling van grafiek 27
hellingfunctie 31
hellinggrafiek 31

I

interval 9
gesloten - 9
open - 9

K

kanshistogram 67
kansverdeling 67
kettingfunctie 46
kettingregel 46
kritieke gebied 172

L

linkszijdige toets 179
ln 145

logaritme 124
grondtal van - 124
natuurlijke - 145
rekenregels voor - 138
logaritmisch papier 133
logaritmische
schaalverdeling 132

M

mislukking 74

N

natuurlijke logaritme 145
normaalkromme 84
normale toets 175
normale verdeling 84
nulhypothese 171

O

open interval 9
overschrijdingskans 174

R

raaklijn 24
raken 24
rechtszijdige toets 179
regels voor de afgeleide 37
rekenregels voor
logarithmen 138

S

samengestelde functie 46
schakel 46
significant afwijken 173
significantieniveau 171,
172
somregel voor het
differentiëren 37
standaardafwijking van
binomiale
toevalsvariabele 82
stapgrootte 11

stijging
afnemende - 10
constante - 10
toenemende - 10
succes 74

T

ten onrechte 170
toenamediaagram 11
toenemende daling 10
toenemende stijging 10

toetsen van
hypothese 172, 175
toevalsvariabele 65
binomiale - 74
tweezijdige binomiale
toets 192
tweezijdige toets 178

V

verdubbelingstijd 111
verschilregel voor het
differentiëren 37

verwachtingswaarde 70
verwerpingsgebied 172

W

wortel- n -wet voor
steekproef van lengte
 n 163
wortel- n -wet voor steek-
proefgemiddelde 165

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Richard van de Pol, Tilburg; Haasart, Wim de Haas, Rhenen

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Shutterstock: p. 6-7, 28, 78, 94, 112, 122, 180, 198, 200, 208

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Arie Kievit: p. 16

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Co de Kruijf:

p. 17

AllCanadaPhotos.com / Imageselect: p. 30

IanDagnall Computing / Alamy Stock Photo / Imageselect: p. 40

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Rob Voss: p. 54, 102-103

iStockphoto: p. 55, 57, 81, 106, 108, 109, 111, 114, 118, 134, 213, 215

Boston Globe via Getty Images: p. 60-61

Getty Images: p. 76

Nationale Beeldbank: p. 107

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Jan Luit: p. 113

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Harold Versteeg: p. 119

ANP Foto / Hollandse Hoogte / EPA / Legnan Koula: p. 120

Sabine de Waal, Hendrik Ido Ambacht: p. 121

Mark Haneveld, Lochem: p. 132, 211

Alamy Stock Photo / Imageselect: p. 144

ANP Foto / Hollandse Hoogte / David Rozing: p. 152-153

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Berlinda van Dam: p. 158

Album / Fine Art Images / Imageselect: p. 161

Cosun Beet Company: p. 176

Wikimedia Commons: p. 182

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Helge Prang: p. 183 b

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Soenar Chamid: p. 183 o

ANP Foto / REX / Shutterstock: p. 192

Imageselect: p. 209

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Robin Utrecht: p. 210

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 21

© 2021 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/ Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsnauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73701-6



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



Noordhoff



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-73701-6



9 789001 737016