

& GETAL & RUIMTE

A



Noordhoff

Getal & Ruimte

vwo A deel 4

Twaalfde editie, 2022

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
E. Terlaak

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek vwo A deel 4

Samen met de delen 1, 2 en 3 van vwo wiskunde A bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde A, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld. Bij het schrijven van dit boek is goed gekeken naar de examens die de laatste jaren zijn afgenomen. Dat betekent dat ervoor gezorgd is dat de theorie en de opgaven aansluiten bij de vraagstelling en het niveau die op het centraal examen gangbaar zijn.

Dit boek is bestemd voor het zesde leerjaar. De hoofdstukken 12, 13 en 14 hebben samen een studielast van ongeveer 80 uur. Daarmee komt de totale studielast van de hoofdstukken 1 tot en met 14 plus het hoofdstuk met het keuzeonderwerp op ongeveer 400 uur. Er blijft dan tijd over om te werken aan hoofdstuk 15. Examentraining, omdat de totale studielast voor het vak vwo wiskunde A 520 uur is.

In hoofdstuk 12 Rijen wordt het subdomein D1 behandeld. Er wordt gewerkt met recursieve en directe formules, in het bijzonder bij rekenkundige en meetkundige rijen. Er is aandacht voor de verschillende notaties die bij rijen kunnen voorkomen. In een GR-module bij de verschillende typen van de grafische rekenmachine wordt het rijen-invoerscherm uitgelegd. Ook komt aan de orde hoe bij een tekst een recursieve formule kan worden opgesteld. In de paragraaf over somrijen speelt de GR weer een belangrijke rol.

In de eerste twee paragrafen van hoofdstuk 13 Allerlei formules wordt de sinusfunctie behandeld (domein C). De theorie is bewust kort gehouden, het gaat vooral om de toepassingen. Dat wil zeggen dat de leerling goed moet weten waar de getallen a , b , c en d in de formule $y = a + b \sin(c(x - d))$ voor staan. In de paragrafen 3 en 4 komen veel algebraïsche vaardigheden aan de orde bij het vrijmaken, omvormen en combineren van formules.

Hoofdstuk 14 Toepassingen van de differentiaalrekening begint met een paragraaf waarin allerlei optimaliseringsproblemen worden aangeboden. In paragraaf 2 komen de afgeleiden van $y = \ln(x)$ en $y = {}^g\log(x)$ en de productregel en de quotiëntregel aan bod. Omdat er in de examens altijd veel aandacht is voor het redeneren met de afgeleide, is er in deze editie veel ruimte voor het redeneren met formules. In paragraaf 3 wordt geleerd hoe een redenering gaat voor het vaststellen van de grenswaarde en of de grafiek stijgend of dalend is. In de laatste twee paragrafen volgt dan het redeneren met de afgeleide. Daarbij wordt onderscheid gemaakt tussen het redeneren met de formule van de afgeleide en de grafiek van de afgeleide.

In hoofdstuk 15 Examentraining is de leerstof onderverdeeld in vijf paragrafen. Deze paragrafen beginnen met een of twee opgaven waarin korte vragen staan die betrekking hebben op de leerstof in de paragraaf en die geënt zijn op examenvragen. In de theorie die daarop volgt, wordt elk onderwerp bondig herhaald. Daarna volgen passende examenopgaven die gekozen zijn uit de examens van 2017 (pilot), 2018 en 2019. In paragraaf 6 staan de onderzoeksopgaven van deze examens. Dat is van elk examen de laatste opgave, waarbij meestal nog een strategie voor een oplossing moet worden gekozen, vaak uit een veelheid van gegevens.

De gemengde opgaven bij hoofdstuk 15 bestaan ook in deze editie uit een flink aantal korte opgaven, die niet gesorteerd staan op onderwerp. Hierin komen alle basisvaardigheden aan de orde die een leerling voor het examen nodig heeft.

Drie leerroutes

De opbouw van de hoofdstukken 12, 13 en 14 is dezelfde als in de delen 1, 2 en 3. In deze editie wordt naast de verschillende soorten opgaven gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen. Zie voor verdere toelichting zo nodig het voorwoord van deel 1, 2 of 3.

In hoofdstuk 15 Examentraining is geen routering aanwezig.

Het schoolexamen en het centraal examen

Alle in dit boek aangeboden onderwerpen behoren tot de leerstof van het centraal examen.

Domein E (Statistiek en kansrekening) en domein F (Keuzeonderwerpen) worden niet centraal geëxamineerd. Deze domeinen dienen samen met domein A (Vaardigheden) aan de orde te komen in het schoolexamen.

Getal & Ruimte online

Alle opgaven worden ook digitaal aangeboden. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij de hoofdstukken 12, 13 en 14 toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant-en-klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

Voorjaar 2021

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

02 Oriëntatie-opgave

   Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 Gewone opgave

   Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 Reflectie-opgave

   In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 Afsluitende opgave

   De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 Extra opgave

   Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute



2 Middenroute



3 Uitdagende route



NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder route-aanduiding

In de Diagnostische toets, de Gemengde opgaven en de Examentraining hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▶GR] Verwijzing naar een module van de GR-handleiding.

[▶WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

12 Rijen 6

Beginopdracht Lening aflossen 8

Voorkennis Lineaire en
exponentiële groei 9

12.1 Rekenkundige en
meetkundige rijen 11

12.2 Notaties en rijen op de GR 19

12.3 Toepassingen van rijen 27

12.4 Somrijen 33

Eindopdracht Annuïteit 42

Diagnostische toets 44

13 Allerlei formules 46

Beginopdracht Singapore Flyer 48

Voorkennis Periodieke
verschijnselen 49

13.1 Sinusoïden 51

13.2 Toepassingen van sinusoïden 58

13.3 Formules herschrijven 67

13.4 Omvormen van formules met
exponenten en logaritmen 77

Eindopdracht Sinusoïden in
attracties 87

Diagnostische toets 88

14 Toepassingen van de differentiaalrekening 90

Beginopdracht Drukken van een
boek 92

Voorkennis De afgeleide functie 93

14.1 Optimaliseren 96

14.2 Regels voor de afgeleide 104

14.3 Redeneren met formules 110

14.4 Redeneren met de afgeleide 119

14.5 De afgeleide en soorten van
stijgen en dalen 124

Eindopdracht Long tail 133

Diagnostische toets 134

15 Examentraining 136

15.1 Algemene vaardigheden 138

15.2 Combinatoriek en rijen 152

15.3 Werken met formules 167

15.4 Formules met exponenten
en logaritmen 184

15.5 Differentiaalrekening 204

15.6 Onderzoeksopgaven 219

Gemengde opgaven 224

Formuleblad 249

Examenwerkwoorden 250

Overzicht GR-modules 251

Overzicht routes 252

Trefwoordenregister 255

Verantwoording 256

12

Rijen

Wat leer je?

- Werken met recursieve en directe formules van rijen.
- Herkennen van rekenkundige en meetkundige rijen.
- De GR gebruiken om rijen door te rekenen.
- Het opstellen van recursieve en directe formules.
- Rijen gebruiken bij patronen en meetkundige figuren.
- Met de GR de som van een aantal termen van een rij berekenen.



Beginopdracht Lening aflossen

Tom wil graag een camper kopen. Daarvoor wil hij een lening afsluiten. Een persoonlijke lening bij een geldverstrekker heeft een hoge rente en Tom wil niet dat zijn lening geregistreerd staat bij het BKR (Bureau Krediet Registratie). Daarom vraagt hij zijn ouders hem het geld te lenen. Zijn ouders gaan akkoord met een lening met een rente van 6% per jaar. Ze willen dat Tom in tien jaar het bedrag van 60 000 euro terugbetaalt. Tom bekijkt twee opties om de rente en aflossing te betalen aan zijn ouders.

De eerste optie is dat hij elk jaar de rente over het volledige bedrag aan zijn ouders betaalt. Hij lost het bedrag van 60 000 euro pas na tien jaar in één keer af. Hij opent daartoe een spaarrekening met een vaste rente van 0,3% per jaar en rekt uit dat hij dan elke maand een bedrag van 493 euro moet storten om na tien jaar 60 000 euro te hebben gespaard.

- Laat zien dat Tom met deze optie in tien jaar tijd 36 000 euro rente aan zijn ouders betaalt.
- Hoeveel geld heeft Tom in deze tien jaar gestort op zijn spaarrekening?

De tweede optie is dat Tom elke maand een vast bedrag aan rente en aflossing aan zijn ouders betaalt, namelijk 666 euro. De maandelijkse rente bedraagt $\frac{1}{12} \times 6\% = 0,5\%$ over het restant van de lening, de rest van de 666 euro is aflossing. In de tabel hieronder is voor de eerste paar maanden te zien hoe groot het restant van de lening is na betaling van rente en aflossing. De bedragen zijn in euro's. Je ziet dat Tom elke maand meer aflost.

	maand			
	0	1	2	3
aflossing		366	367,83	369,67
rente		300	298,17	296,33
totaal te betalen		666	666	666
restant lening	60 000	59 634	59 266,17	58 896,50

- Waarom betaalt Tom in de eerste maand 300 euro rente? En waarom bedraagt deze maand de aflossing 366 euro? Laat ook zien hoe je de andere bedragen in deze tabel kunt berekenen.
- Bereken bij beide opties het bedrag dat Tom in de tien jaar in totaal betaalt. Bij welke optie is dit bedrag het kleinst?
- Bij welke optie ontvangen de ouders in de tien jaar de meeste rente? Licht toe met een berekening.

Voorkennis Lineaire en exponentiële groei

Theorie A Tabellen bij groei

In de tabel hiernaast is t de tijd in uren. De hoeveelheid N neemt per 3 uur steeds met 12 toe, immers $52 - 40 = 12$ en $64 - 52 = 12$, enzovoort.

t	5	8	11	14	17
N	40	52	64	76	88

Per uur is de toename $\frac{12}{3} = 4$.

De formule die bij de tabel hoort, is van de vorm

$$N = 4t + b.$$

Invullen van $t = 5$ en $N = 40$ geeft $4 \cdot 5 + b = 40$, dus $b = 20$.

Bij de tabel hoort lineaire groei met formule $N = 4t + 20$.

Er is een lineair verband tussen t en N .

In de tabel hiernaast is t de tijd in uren. De hoeveelheid N wordt per 3 uur steeds met 1,5 vermenigvuldigd,

t	5	8	11	14	17
N	40	60	90	135	202,5

immers $\frac{60}{40} = 1,5$ en $\frac{90}{60} = 1,5$, enzovoort.

We zeggen dat de groeifactor per 3 uur gelijk is aan 1,5, dus $g_{3 \text{ uur}} = 1,5$.

Dit geeft $g_{\text{uur}} = 1,5^{\frac{1}{3}} \approx 1,1447\dots$

De formule die bij de tabel hoort, is van de vorm $N = b \cdot 1,1447\dots^t$.

Invullen van $t = 5$ en $N = 40$ geeft $b \cdot 1,1447\dots^5 = 40$, dus

$$b = \frac{40}{1,1447\dots^5} \approx 20,35.$$

Bij de tabel hoort exponentiële groei met formule

$$N = 20,35 \cdot 1,145^t.$$

Er is een exponentieel verband tussen t en N .

Lineaire groei

- Per tijdseenheid neemt de hoeveelheid met hetzelfde getal toe.
- De formule is van de vorm $N = at + b$.

Exponentiële groei

- Per tijdseenheid wordt de hoeveelheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
- De formule is van de vorm $N = b \cdot g^t$.

Bij de tabel hiernaast hoort een exponentieel verband,

dus $y = b \cdot g^n$ met $g^7 = \frac{600}{716}$ en dit geeft $g = \left(\frac{600}{716}\right)^{\frac{1}{7}} = 0,9750\dots$

n	2	5	9
y	716	663	600

Invullen van $n = 2$ en $y = 716$ in $y = b \cdot 0,9750\dots^n$ geeft $b \cdot 0,9750\dots^2 = 716$, dus $b = 753$.

De formule is $y = 753 \cdot 0,975^n$.

- 1** Gegeven is de tabel hiernaast.
Toon aan dat bij de tabel een lineair verband hoort
en stel de formule van y op.

n	0	1	2	3	4
y	250	285	320	355	390

- 2** Gegeven is de tabel hiernaast.
Toon aan dat bij de tabel een exponentieel
verband hoort en stel de formule van y op.

n	0	1	2	3	4
y	250	400	640	1024	1638,4

- 3** Bij de tabel hiernaast hoort een formule van de vorm
 $y = b \cdot g^n$.
Bereken b en g .

n	2	5
y	1250	2160

- 4** Bij de tabel hiernaast hoort een formule van de vorm
 $y = an + b$.
Bereken a en b .

n	10	25
y	293	212

- 5** De tabel hiernaast hoort bij een lineair verband.

- a** Welke waarde van y hoort bij $n = 13$?
b Voor welke waarde van n geldt $y = 0$?

n	0	1	2
y	256	248	240

- 6** De tabel hiernaast hoort bij een exponentieel verband.

- a** Welke waarde van y hoort bij $n = 6$?
b Vanaf welke waarde van n is y groter dan 5000?

n	3	5	7
y	400	576	829,44

- 7** Zie de tabel hiernaast.

- a** Stel de formule op als er sprake is van een lineair
verband tussen n en y .
b Stel de formule op als er sprake is van een exponentieel
verband tussen n en y .

n	3	7
y	320	20

12.1 Rekenkundige en meetkundige rijen



01 Hieronder staan vijf getallenrijen met een regelmaat.

Onderzoek bij elke rij de regelmaat en geef het volgende getal in de rij.

A 11, 18, 25, 32, 39, ...

B 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

C 238, 206, 174, 142, 110, ...

D $121\frac{1}{2}$, 81, 54, 36, 24, ...

E 4, 9, 16, 25, 36, ...

Theorie A Recursieve en directe formules

Renske heeft een nieuwe baan. Haar maandsalaris bedraagt 2000 euro. Met haar werkgever is zij overeengekomen dat zij jaarlijks een loonsverhoging van 160 euro per maand krijgt. Dus in het tweede jaar is haar maandsalaris 2160 euro. In het derde jaar is het 2320 euro, enzovoort.

Zo ontstaat de **rij** 2000, 2160, 2320, 2480, 2640, 2800, ...

De getallen in de rij heten de **termen**.

Hieronder is de eerste term van de rij genoteerd met u_0 , de tweede term met u_1 , de derde term met u_2 , enzovoort.

2000	2160	2320	2480	2640	...
u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	...

Bij de rij 2000, 2160, 2320, 2480, 2640, 2800, ... is

$$u_0 = 2000$$

$$u_1 = 2000 + 160 = u_0 + 160$$

$$u_2 = 2160 + 160 = u_1 + 160$$

$$u_3 = 2320 + 160 = u_2 + 160$$

$$\text{Algemeen is } u_n = u_{n-1} + 160.$$

nieuwe term

u_{n-1} is de voorafgaande term van u_n

u_0 is de eerste term.
 u_9 is de tiende term.
 De zesde term is u_5 .
 De negende term is u_8 .

De voorafgaande term

- van u_6 is u_5
- van u_{10} is u_9
- van u_n is u_{n-1} .

In de formule $u_n = u_{n-1} + 160$ is n een positief geheel getal.

Neem je $n = 10$, dan krijg je $u_{10} = u_9 + 160$.

De formule $u_n = u_{n-1} + 160$ is een voorbeeld van een **recursieve formule**. Met alleen de recursieve formule kun je de termen van de rij niet berekenen. Je moet daarvoor ook de **beginterm** weten.

De beginterm wordt ook wel de startwaarde genoemd.

Bij de rij 2000, 2160, 2320, 2480, 2640, 2800, ... is de beginterm 2000.

Zo krijg je $u_n = u_{n-1} + 160$ met $u_0 = 2000$.

We spreken af dat je bij een recursieve formule altijd de beginterm vermeldt.

Recursief komt van het Latijnse woord *recurrere*, dat wederkeren betekent. De voorafgaande term keert terug in de nieuwe term.

Een recursieve formule van een rij geeft aan hoe je elke term uit de voorafgaande term berekent.
Als ook de beginterm bekend is, dan ligt de rij vast.

De rij $u_n = u_{n-1} + 160$ met $u_0 = 2000$ kun je doorrekenen op het basisscherm van de GR met [ans].

- Tik in 2000 [enter].
- Tik in + 160 [enter], [enter], [enter], ...

Zie het GR-scherm hiernaast.

Op de Casio en op de NW gebruik je [EXE] in plaats van [enter].

NORM DRIJF AUTO REEEL RAD WN	
2000	2000
Antw+160	2160
Antw+160	2320
Antw+160	2480

Om u_{40} te berekenen, heb je u_{39} nodig en dus ook u_{38} en u_{37} en ...

Een formule waarmee je direct een term kunt berekenen, zonder dat je de voorafgaande termen nodig hebt, heet een **directe formule**.

Bij de rij $u_n = u_{n-1} + 160$ met $u_0 = 2000$ hoort de directe formule $u_n = 2000 + 160 \cdot n$.

Je krijgt $u_{40} = 2000 + 160 \cdot 40 = 8400$.

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 2000 \\
 u_1 &= 2000 + 160 \\
 u_2 &= 2000 + 160 \cdot 2 \\
 u_2 &= 2000 + 160 \cdot 3 \\
 &\vdots \\
 u_n &= 2000 + 160 \cdot n
 \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} + 160 \\ + 160 \\ + 160 \end{array} \right\}$

Bij de rij met directe formule $u_n = 3n^2 - 6n$ en beginterm u_0 is de eerste term gelijk aan $u_0 = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 = 0$ en de vijfde term gelijk aan $u_4 = 3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 = 24$.

Een directe formule kun je doorrekenen door deze in te voeren op het formule-invoerscherm.

Bij de rij $u_n = 3n^2 - 6n$ voer je in $y_1 = 3x^2 - 6x$ en maak je een tabel met $x = 0, 1, 2, 3, \dots$

Voorbeeld

Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,25 \cdot u_{n-1} - 10$ met $u_0 = 100$.

- a Bereken de vijfde en de zesde term van de rij. Rond af op twee decimalen.
- b Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 500$?

Uitwerking

- a De GR geeft $u_4 \approx 186,48$ en $u_5 \approx 223,11$.

De vijfde term is u_4

- b $u_9 \approx 487,03$ en $u_{10} \approx 598,79$.
Dus vanaf de 11^e term is $u_n > 500$.

NORM DRIJF AUTO REEL RAD MN	
100	100
1.25*Antw-10	115
1.25*Antw-10	133.75
1.25*Antw-10	157.1875

R2 Zie vraag b van het voorbeeld.

Waarom wordt in de uitwerking niet alleen u_{10} genoemd, maar ook u_9 ?

3 Gegeven is de recursieve formule $u_n = 0,9 \cdot u_{n-1} + 50$ met $u_0 = 200$.

- a Bereken de zevende en de achtste term van de rij. Rond af op twee decimalen.
- b Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 400$?

4 Gegeven is de recursieve formule $u_n = 10 + 20 \cdot \sqrt{u_{n-1}}$ met $u_0 = 50$.

- a Bereken de vierde en de vijfde term van de rij. Rond af op twee decimalen.
- b Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 419,5$?
- c Is er een term waarvoor $u_n > 420$? Licht toe.

5 Gegeven is de directe formule $u_n = 2n^2 + 7n - 3$ met beginterm u_0 .

- a Bereken de zesde en de zevende term.
- b Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 500$?

6 Gegeven is de directe formule $u_n = 3n + \frac{24}{n+2}$ met beginterm u_0 .

- a Bereken de vijfde en de zevende term.
- b Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 50$?
- c Welke termen van de rij zijn een geheel getal?

A7 a Gegeven is de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + \frac{u_{n-1}}{1 + u_{n-1}}$ met $u_0 = 25$.

- Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 35$?
- b Gegeven is de directe formule $u_n = -0,3n^2 + 5n - 10$.
Hoeveel termen van de rij zijn positief?



08 Bij de volgende zes rijen zijn er vijf met eenzelfde soort regelmaat.

Welke van deze rijen heeft deze regelmaat niet? Licht toe.

A 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...

B 100, 120, 140, 160, 180, 200, ...

C 2, 5, 10, 17, 26, 37, ...

D 80, 75, 70, 65, 60, 55, ...

E 19, 18, 17, 16, 15, 14, ...

F 3, 10, 17, 24, 31, 38, ...

Theorie B Rekenkundige rijen

De rij 75, 80, 85, 90, 95, 100, ... is een voorbeeld van een rekenkundige rij. Bij een **rekenkundige rij** is het verschil van twee opeenvolgende termen constant. Het **constante verschil** noteren we met v . Dus hier is $v = 5$.

De recursieve formule van de rij 75, 80, 85, 90, 95, 100, ... met beginterm u_0 is $u_n = u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 75$.

De directe formule van een rekenkundige rij met beginterm u_0 krijg je als volgt. De opeenvolgende termen zijn

- u_0
- $u_1 = u_0 + v$
- $u_2 = u_1 + v = u_0 + v + v = u_0 + v \cdot 2$
- $u_3 = u_2 + v = u_0 + 2v + v = u_0 + v \cdot 3$

Enzovoort.

Algemeen is $u_n = u_0 + v \cdot n$.

De directe formule van de rij 75, 80, 85, 90, 95, 100, ... met beginterm u_0 is $u_n = 75 + 5 \cdot n$.

En van de rij 100, 80, 60, 40, 20, ... met beginterm u_0 is de directe formule $u_n = 100 - 20 \cdot n$.

Een rekenkundige rij is een rij waarbij het verschil van twee opeenvolgende termen steeds hetzelfde getal is.

Van een rekenkundige rij u_n met verschil v en beginterm u_0 is

- de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_0
- de directe formule $u_n = u_0 + v \cdot n$.

Merk op dat bij een rekenkundige rij een lineair verband hoort. Bij het lineaire verband $y = ax + b$ geldt immers: als x toeneemt met 1, dan neemt y steeds met hetzelfde getal a toe.

In de directe formule van een rekenkundige rij komt u_0 dus overeen met b en komt v overeen met a .

Bij een rekenkundige rij is n altijd een geheel getal, terwijl bij een lineair verband x ook andere waarden kan aannemen.

Voorbeeld

- a** Gegeven is de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + 6$ met $u_0 = 10$.
Stel de directe formule van u_n op.
- b** Gegeven is de rij 11, 15, 19, 23, 27, ...
De hoeveelste term van de rij is 647?

Uitwerking

- a** rr met $u_0 = 10$ en $v = 6$, dus $u_n = 10 + 6 \cdot n$.
b rr met $u_0 = 11$ en $v = 4$, dus $u_n = 11 + 4 \cdot n$.

Los op $11 + 4n = 647$

$$4n = 636$$

$$n = 159$$

Dus de 160^e term is 647.

Je mag rekenkundige rij
afkorten tot rr.

- R9** Zie het voorbeeld. Bij de uitwerking van vraag b wordt de directe formule van de rij gebruikt.
Waarom is het gebruik van de recursieve formule niet handig?

- 10** Gegeven is de rij $u_n = u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 218$.
a Stel de directe formule van u_n op.
b Bereken de 25^e term van de rij.
c De hoeveelste term van de rij is 498?

- 11** Gegeven is de rij $u_n : 13, 18, 23, 28, 33, \dots$ met beginterm u_0 .
a Waarom is dit een rekenkundige rij?
b Stel de recursieve en de directe formule op van de rij.
c Bereken de 38^e term van de rij.
d Hoeveel termen zijn kleiner dan 650?

- A12** Gegeven is de rij $u_n : 1023, 1016, 1009, 1002, 995, \dots$
a De hoeveelste term van de rij is 246?
b Hoeveel positieve termen heeft de rij?

- E13** Van een rekenkundige rij is de som van de eerste en de vierde term gelijk aan 10, en is de som van de eerste vier termen gelijk aan de vijfde term.
Geef de eerste vijf termen van deze rij.

- O14** Bij de volgende vier rijen zijn er drie met eenzelfde soort regelmaat.
Welke van deze rijen heeft deze regelmaat niet? Licht toe.
A 3, 6, 12, 24, 48, 96, ...
B 160, 80, 40, 20, 10, 5, ...
C 5, 7, 10, 14, 19, 25, 32, ...
D 64, 96, 144, 216, 324, ...

Theorie C Meetkundige rijen

Van de rij 64, 96, 144, 216, 324, ... is het quotiënt van twee opeenvolgende termen steeds 1,5.

$$\frac{96}{64} = 1,5; \frac{144}{96} = 1,5; \frac{216}{144} = 1,5; \text{ enzovoort.}$$

Elke term van de rij 64, 96, 144, 216, 324, ... ontstaat door de voorafgaande term met 1,5 te vermenigvuldigen.

Je hebt te maken met een **meetkundige rij**.

Het getal 1,5 heet de **constante factor**, ook wel de factor van de rij. De factor van de rij geven we aan met r .

De recursieve formule van de rij 64, 96, 144, 216, 324, ... met beginterm u_0 is $u_n = 1,5 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 64$.

De directe formule van een meetkundige rij met beginterm u_0 krijg je als volgt. De opeenvolgende termen zijn

- $u_0 = u_0$
- $u_1 = u_0 \cdot r = u_0 \cdot r^1$
- $u_2 = u_1 \cdot r = u_0 \cdot r \cdot r = u_0 \cdot r^2$
- $u_3 = u_2 \cdot r = u_0 \cdot r^2 \cdot r = u_0 \cdot r^3$

Enzovoort.

Algemeen is dus $u_n = u_0 \cdot r^n$.

De letter r voor factor komt van het woord reden (verhouding). Je komt het woord nog tegen in evenredig (gelijke verhouding hebbend).

Een meetkundige rij is een rij waarbij het quotiënt van twee opeenvolgende termen steeds hetzelfde getal is.

Van een meetkundige rij u_n met factor r en beginterm u_0 is

- de recursieve formule $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met beginterm u_0
- de directe formule $u_n = u_0 \cdot r^n$.

Merk op dat bij een meetkundige rij een exponentieel verband hoort. Bij het exponentiële verband $y = b \cdot g^x$ geldt immers: als x toeneemt met 1, dan wordt y steeds met hetzelfde getal g vermenigvuldigd.

In de directe formule van een meetkundige rij komt u_0 dus overeen met b en komt r overeen met g .

Bij een meetkundige rij is n altijd een geheel getal, terwijl bij een exponentieel verband x ook andere waarden kan aannemen.

Voorbeeld

Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,75 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 10$.

- a Stel de directe formule op.
- b Bereken de elfde term van de rij. Rond af op gehelen.
- c Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 75\,000$?

Uitwerking

a mr met $u_0 = 10$ en $r = 1,75$, dus $u_n = 10 \cdot 1,75^n$.

b De elfde term is $u_{10} = 10 \cdot 1,75^{10} \approx 2694$.

c Voer in $y_1 = 10 \cdot 1,75^x$.

Uit de tabel volgt $x = 15$ geeft $y \approx 44\,215$ en

$x = 16$ geeft $y \approx 77\,376$.

Dus vanaf de 17^e term is $u_n > 75\,000$.

Je mag meetkundige rij
afkorten tot mr.

15 Gegeven is de rij u_n : 1250, 1500, 1800, 2160, 2592, ... met
beginterm u_0 .

- a Waarom is dit een meetkundige rij?
- b Stel de directe formule op van de rij.
- c Bereken de 13^e term. Rond af op gehelen.
- d Vanaf welke n is u_n groter dan 15 000?

A16 Stel de directe formule op van de volgende rijen.

- a $u_n = 0,5 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 200$
- b $u_n = 3,5 + u_{n-1}$ met $u_0 = 50$
- c $u_n = \frac{u_{n-1}}{0,4}$ met $u_0 = 14$

R17 Hieronder zie je nog eens de eerste vier rijen van opgave 1.

Stel van elk van de rijen de directe formule op en gebruik deze om de tiende term te berekenen. Rond zo nodig af op twee decimalen.

A 11, 18, 25, 32, 39, ...

B 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

C 238, 206, 174, 142, 110, ...

D $121\frac{1}{2}$, 81, 54, 36, 24, ...

Terugblik

Rekenkundige rij

Een rekenkundige rij (rr) is een rij waarbij het verschil tussen twee opeenvolgende termen constant is.

Van een rekenkundige rij u_n met verschil v en beginterm u_0 is

- de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_0
- de directe formule $u_n = u_0 + v \cdot n$.

De rij 102, 99, 96, 93, 90, ... is een rekenkundige rij met $u_0 = 102$ en $v = -3$.

De recursieve formule is $u_n = u_{n-1} - 3$ met $u_0 = 102$.

De directe formule is $u_n = 102 - 3 \cdot n$.

Een van de termen van deze rij is 15.

De bijbehorende n volgt uit $102 - 3n = 15$, dus $-3n = -87$.

Dit geeft $n = 29$, dus de 30^e term is 15.

Bij een rekenkundige rij hoort een lineair verband.

Meetkundige rij

Een meetkundige rij (mr) is een rij waarbij het quotiënt van twee opeenvolgende termen constant is. Dit quotiënt heet de factor van de rij.

Van een meetkundige rij u_n met factor r en beginterm u_0 is

- de recursieve formule $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met beginterm u_0
- de directe formule $u_n = u_0 \cdot r^n$.

Van de meetkundige rij 100; 105; 110,25; 115,76; 121,55; ... is $u_0 = 100$ en $r = 1,05$.

De recursieve formule is $u_n = 1,05 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 100$.

De directe formule is $u_n = 100 \cdot 1,05^n$.

De twaalfde term is $u_{11} = 100 \cdot 1,05^{11} \approx 171,03$.

Om te berekenen vanaf welke n de termen u_n groter zijn dan 500, voer je in $y_1 = 100 \cdot 1,05^x$. Uit de tabel hiernaast volgt $u_{32} \approx 476,49$ en $u_{33} \approx 500,32$.

Dus vanaf $n = 33$ is $u_n > 500$.

Bij een meetkundige rij hoort een exponentieel verband.

NORM DRIJF AUTO REEEL RAD WN				
DRUK OP + VOOR Δ Tbl				
X	Y1			
25	338.64			
26	355.57			
27	373.35			
28	392.01			
29	411.61			
30	432.19			
31	453.8			
32	476.49			
33	500.32			
34	525.33			
35	551.6			

X=33

12.2 Notaties en rijen op de GR



Gegeven is de rekenkundige rij 12, 15, 18, 21, 24, ...

De recursieve formule is $u_n = u_{n-1} + 3$ met beginterm $u_0 = 12$.

Kim neemt beginterm $u_1 = 12$ en noteert de rij als $u_n = u_{n-1} + 3$ met beginterm $u_1 = 12$.

Licht toe dat dit een juiste notatie is. Welk voordeel heeft deze notatie?

Theorie A Beginterm u_0 of u_1

Gegeven is de rekenkundige rij 25, 29, 33, 37, ...

Neem je als beginterm u_0 , dan is de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + 4$ met $u_0 = 25$ en de directe formule $u_n = 25 + 4 \cdot n$.

In sommige praktische situaties ligt het meer voor de hand om als beginterm u_1 te nemen.

De recursieve formule is dan $u_n = u_{n-1} + 4$ met $u_1 = 25$.

De directe formule is nu echter $u_n = 25 + 4 \cdot (n - 1)$.

Ga maar na. Je krijgt

$$u_1 = 25 + 4 \cdot (1 - 1) = 25 + 4 \cdot 0 = 25$$

$$u_2 = 25 + 4 \cdot (2 - 1) = 25 + 4 \cdot 1 = 29$$

$$u_3 = 25 + 4 \cdot (3 - 1) = 25 + 4 \cdot 2 = 33$$

Enzovoort.

Van een rekenkundige rij u_n met verschil v en beginterm u_1 is

- de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_1
- de directe formule $u_n = u_1 + v \cdot (n - 1)$.

Bij een meetkundige rij krijg je iets soortgelijks.

Bij de meetkundige rij 120, 180, 270, 405, ... hoort de recursieve formule

$$u_n = 1,5 \cdot u_{n-1} \text{ met } u_0 = 120, \text{ maar ook } u_n = 1,5 \cdot u_{n-1} \text{ met } u_1 = 120.$$

Bij deze laatste formule is $u_1 = 120$, $u_2 = 1,5 \cdot 120 = 180$, enzovoort.

Je hebt geleerd dat de directe formule is $u_n = 120 \cdot 1,5^n$ met beginterm u_0 .

Maar neem je beginterm u_1 , dan is de directe formule $u_n = 120 \cdot 1,5^{n-1}$.

Je krijgt dan: de eerste term is $u_1 = 120 \cdot 1,5^{1-1} = 120 \cdot 1,5^0 = 120$,

de tweede term is $u_2 = 120 \cdot 1,5^{2-1} = 120 \cdot 1,5^1 = 180$, enzovoort.

Van een meetkundige rij u_n met factor r en beginterm u_1 is

- de recursieve formule $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met beginterm u_1
- de directe formule $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$.

Voorbeeld

Geef bij de volgende rijen de directe formule. Neem als eerste term u_1 .

- a 80, 75, 70, 65, 60, ...
- b 80, 40, 20, 10, 5, ...

Uitwerking

- a rr met $u_1 = 80$ en $v = -5$, dus $u_n = 80 - 5 \cdot (n - 1)$.
- b mr met $u_1 = 80$ en $r = 0,5$, dus $u_n = 80 \cdot 0,5^{n-1}$.

R19 Zie het voorbeeld.



De formule $u_n = 80 - 5 \cdot (n - 1)$ is te herleiden tot $u_n = 85 - 5 \cdot n$.

- a Laat deze herleiding zien.
- b Licht toe dat de formule $u_n = 85 - 5 \cdot n$ ook meteen bij de gegeven termen van de rij op te schrijven is.

De formule $u_n = 80 \cdot 0,5^{n-1}$ is te herleiden tot $u_n = 160 \cdot 0,5^n$.

- c Laat deze herleiding zien.
- d Licht toe dat de formule $u_n = 160 \cdot 0,5^n$ ook meteen bij de gegeven termen van de rij op te schrijven is.

20 Geef bij de volgende rijen de directe formule. Neem als eerste term u_1 .



a 24, 30, $37\frac{1}{2}$, $46\frac{7}{8}$, ...

b 63, 70, 77, 84, ...

c 13,5; 12,8; 12,1; 11,4; ...

d 1024, 256, 64, 16, ...

A21 Geef bij de volgende rijen de directe formule.



a $u_n = u_{n-1} - 0,8$ met beginterm $u_1 = 12,6$

b $u_n = \frac{2}{3} \cdot u_{n-1}$ met beginterm $u_1 = 36$

O22 Van de rij u_n is gegeven $u_2 = 12$ en $u_5 = 324$.



- a Als u_n een rekenkundige rij is, dan hoort bij deze rij het verschil 104. Toon dit aan met een berekening.
- b Als u_n een meetkundige rij is, dan hoort bij deze rij de factor 3. Toon dit aan met een berekening.

Theorie B Formules opstellen bij gegeven termen

In opgave 22 heb je gezien dat bij een rekenkundige rij met de termen $u_2 = 12$ en $u_5 = 324$ het verschil 104 hoort. Met beginterm u_0 is de directe formule van de vorm $u_n = u_0 + 104 \cdot n$. Vervolgens is u_0 te berekenen door te gebruiken dat $u_2 = 12$. Je krijgt $u_0 + 104 \cdot 2 = 12$ en dat geeft $u_0 = -196$.

Dus de directe formule is $u_n = -196 + 104 \cdot n$.

Bij de termen $u_2 = 12$ en $u_5 = 324$ kan ook een meetkundige rij horen met factor 3. Met beginterm u_0 is de directe formule van de vorm $u_n = u_0 \cdot 3^n$. Invullen van $u_2 = 12$ geeft $u_0 \cdot 3^2 = 12$, dus $u_0 = 1\frac{1}{3}$. Dus de directe formule is $u_n = 1\frac{1}{3} \cdot 3^n$.

Voorbeeld

Van een rij u_n is gegeven $u_2 = 1800$ en $u_5 = 14\,400$.

- Stel de directe formule op van u_n voor het geval u_n een meetkundige rij is.
- Verder is gegeven dat $u_7 = 46\,656$.
Laat zien dat u_n geen meetkundige rij is.

Uitwerking

- Stel $u_n = u_0 \cdot r^n$.

$$r^3 = \frac{u_5}{u_2} = \frac{14\,400}{1\,800} = 8, \text{ dus } r = 8^{\frac{1}{3}} = 2.$$

$$u_n = u_0 \cdot 2^n \text{ en } u_2 = 1800 \text{ geeft } u_0 \cdot 2^2 = 1800, \text{ dus } u_0 = 450.$$

De directe formule is $u_n = 450 \cdot 2^n$.

- Invullen van $n = 7$ in de formule geeft $u_7 = 450 \cdot 2^7 = 57\,600$.
 $57\,600 \neq 46\,656$, dus u_n is geen meetkundige rij.

R23
□ ⊗ *

In de theorie is bij de gegevens $u_2 = 12$ en $u_5 = 324$ de directe formule opgesteld van zowel een rekenkundige rij als van een meetkundige rij. Daarbij is als beginterm u_0 genomen.

Neem je als beginterm u_1 , dan krijg je dezelfde directe formules.

- Toon dit aan.
- Neem je bij dit soort situaties liever u_0 of u_1 als beginterm? Licht toe.

24
□ ⊗

- Van een rekenkundige rij u_n is gegeven $u_5 = 130$ en $u_{15} = 90$.

Stel van u_n de directe formule op.

- Van een meetkundige rij u_n is gegeven $u_3 = 54$ en $u_{10} = 118\,098$.
Stel van u_n de directe formule op.

25
□ ⊗ *

Van een rij u_n is gegeven $u_3 = 576$, $u_5 = 1024$ en $u_8 = 1696$.

- Onderzoek of deze termen bij een meetkundige rij kunnen horen.
- Onderzoek of deze termen bij een rekenkundige rij kunnen horen.

A26
□ ⊗ *

Van een rij is $u_3 = 16$ en $u_8 = 16\,384$.

- Neem aan dat u_n een rekenkundige rij is.
Stel de directe formule van u_n op.
- Neem aan dat u_n een meetkundige rij is.
Stel de directe formule van u_n op.

E27 Bij de rij 4, 7, 14, 25, 40, ... hoort de formule $u_n = 2n^2 - 3n + 5$.

- *** a Bereken de tiende term.
- b De hoeveelste term van de rij is 410?

O28 Gegeven is de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + 15$ met $u_1 = 100$.

☐ ⊗ * De bijbehorende rij is ook te noteren als $u_{n+1} = u_n + 15$ met $u_1 = 100$.

- a** Ga na dat beide formules dezelfde rij opleveren.

De directe formule van de rij is $u_n = 100 + 15 \cdot (n - 1)$.

Deze directe formule is ook te noteren met $u_{n+1} = \dots$

- b** Geef de formule van u_{n+1} .

Theorie C Verschillende notaties

Er worden bij rijen verschillende notaties gebruikt.

Zo kun je een andere letter gebruiken dan u , bijvoorbeeld de letter A .

De rij $u_n = u_{n-1} + 15$ met $u_1 = 100$ wordt dan $A_n = A_{n-1} + 15$ met $A_1 = 100$.

Soms wordt u_n genoteerd als $u(n)$. Met deze haakjesnotatie wordt $u_n = u_{n-1} + 15$ met $u_1 = 100$ dan $u(n) = u(n-1) + 15$ met $u(1) = 100$.

Met de letter A krijg je $A(n) = A(n-1) + 15$ met $A(1) = 100$.

In opgave 28 heb je gezien dat ook de notatie $u_{n+1} = \dots$ voorkomt.

Met de haakjesnotatie wordt dit $u(n+1) = \dots$

Zo is de recursieve formule $B_n = B_{n-1} + 18$ met $B_0 = 50$ ook te noteren als $B_{n+1} = B_n + 18$ met $B_0 = 50$

of als $B(n+1) = B(n) + 18$ met $B(0) = 50$.

In opgaven kun je al deze notaties tegenkomen.



R29 Gegeven is de rij met recursieve formule $u_n = u_{n-1} + 15$ met $u_1 = 100$ van opgave 28.

☐ ⊗ *

Geef van deze rij een directe formule

- a** in de notatie $A_n = \dots$
- b** in de notatie $A(n) = \dots$
- c** in de notatie $A_{n+1} = \dots$

30 a Gegeven is de rij $u_n = u_{n-1} + 2 \cdot n$ met $u_0 = 32$.

☐ ⊗ *

Schrijf de rij in de notatie $u(n+1) = \dots$

- b** Gegeven is de rij $u(n) = 3 \cdot 4^{n-1}$ met $u(0) = 8$.
Schrijf de rij in de notatie $u_{n+1} = \dots$



- A31** a Gegeven is de rij $u_n = u_{n-1} + 5 \cdot n$ met $u_0 = 100$.
Schrijf de rij in de notatie $u(n+1) = \dots$
- b Gegeven is de rij $a(n+1) = 4 \cdot a(n) - 3$ met $a(0) = 12$.
Schrijf de rij in de notatie $a_n = \dots$



- O32** Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,5 \cdot u_{n-1} - 4$ met $u_0 = 10$.
- a Bereken de achtste term. Rond af op één decimaal.
- b Wat is de eerste term die groter is dan 500?

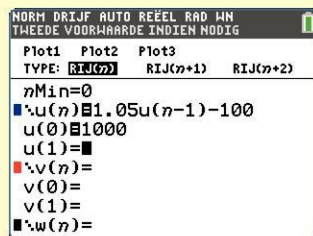
Theorie D Het rijen-invoerscherm van de GR

De recursieve formule van opgave 32 kun je doorrekenen op het basisscherm. Maar om de vragen van opgave 32 te beantwoorden, is het handig om een tabel bij de rij te hebben. Dat lukt door de rij in te voeren op het rijen-invoerscherm van de GR. Nadat de rij is ingevoerd, kun je een tabel laten maken.

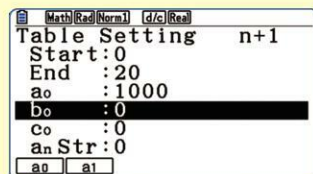
[► GR] Hoe je een rij invoert op de GR en hierbij een tabel maakt, leer je in de module **Het rijen-invoerscherm**. Neem eerst deze module door.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde is de recursieve formule $K_n = 1,05 \cdot K_{n-1} - 100$ met $K_0 = 1000$ gegeven. Het hangt van het merk GR af hoe je deze rij invoert.

- Op de TI voer je in $u(n) = 1,05u(n-1) - 100$ met $n\text{Min} = 0$ en $u(0) = 1000$.
- Op de HP voer je in $U1(N) = 1,05U1(N-1) - 100$ met Start N: 0 en $U1(0) = 1000$.
- Op de NW voer je in $u_{n+1} = 1,05u_n - 100$ met $u_0 = 1000$.



- Op de Casio voer je in $a_{n+1} = 1,05a_n - 100$ met Start: 0 en $a_0 = 1000$.



In de uitwerking van het voorbeeld wordt de invoer van de vier rekenmachines niet apart genoemd. Er staat:

Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.

Het is echter verstandig om in jouw uitwerking op te schrijven wat jij invoert. Dus als je een TI hebt, dan schrijf je op:

Voer in $u(n) = 1,05u(n-1) - 100$ met $n\text{Min} = 0$ en $u(0) = 1000$.

Voorbeeld

Gegeven is de recursieve formule $K_n = 1,05 \cdot K_{n-1} - 100$ met $K_0 = 1000$.

- Voor welke waarden van n ligt K_n tussen 500 en 600?
- Vanaf welke waarde van n is $K_n < 0$?

Uitwerking

- Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $K_6 \approx 659,9$; $K_7 \approx 592,9$; $K_8 \approx 522,5$ en $K_9 \approx 448,7$.

Dus voor $n = 7$ en $n = 8$ ligt K_n tussen 500 en 600.

- $K_{14} \approx 20,1$ en $K_{15} \approx -78,9$
Dus vanaf $n = 15$ is $K_n < 0$.

NORM DRIJF AUTO REEEL RAD WN				
DRUK OP + VOOR ΔTb1				
n	u(n)			
0	1000			
1	950			
2	897,5			
3	842,38			
4	784,49			
5	723,72			
6	659,9			
7	592,9			
8	522,54			
9	448,67			
10	371,11			
n=0				

- 33** Gegeven is de recursieve formule $L(n) = 0,96 \cdot L(n-1) + 200$ met

$L(0) = 1000$.

- Voor welke waarden van n ligt $L(n)$ tussen 2000 en 2500?
- Vanaf welke waarde van n is $L(n) > 3000$?

- 34** Gegeven is de recursieve formule $P_{n+1} = 1,25 \cdot P_n - 100$ met $P_1 = 500$.

- Voor welke waarden van n ligt P_n tussen 1000 en 1500?
- Vanaf welke waarde van n is $P_n > 5000$?

- 35** Gegeven is de recursieve formule $G(n+1) = 500 - 1,06 \cdot G(n)$ met

$G(1) = 100$.

- De hoeveelste term is de eerste die negatief is?
- Hoeveel termen liggen tussen 500 en 700?

- 36** Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,5 \cdot u_{n-1} + 2n$ met $u_0 = 10$.

- Bereken in twee decimalen de tiende term van de rij.
- Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 10000$?

- A37** Gegeven is de recursieve formule $H_k = 1,15 \cdot H_{k-1} + \frac{100}{H_{k-1}}$ met $H_1 = 100$.

- Welke term ligt het dichtst bij 275?
- Hoeveel termen zijn kleiner dan 1000?
- Voor welke waarde van k is $H_k - H_{k-1}$ voor het eerst groter dan 200?

A38

In figuur 12.1 zie je een toren van kubussen die bestaat uit vier lagen. Je ziet dat laag 1 bestaat uit 10 kubussen, laag 2 uit 8 kubussen, laag 3 uit 5 kubussen en laag 4 uit 1 kubus.

Voor het aantal kubussen A_n in laag n van deze toren geldt de formule $A_n = A_{n-1} - n$ met $A_1 = 10$.

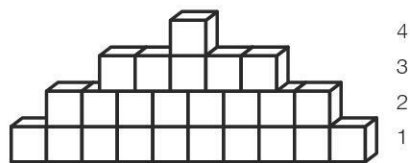
- a** Laat zien dat de formule $A_n = A_{n-1} - n$ met $A_1 = 10$ hoort bij de toren in figuur 12.1.

Voor een toren geldt de formule $A_n = A_{n-1} - n$ met $A_1 = 100$.

- b** Uit hoeveel lagen bestaat deze toren? Hoeveel kubussen heeft de bovenste laag van deze toren?

Joop wil een toren van 20 lagen maken waarbij de formule $A_n = A_{n-1} - n$ hoort.

- c** Welke waarden kan Joop voor A_1 kiezen?



figuur 12.1

A39

Gegeven is de rij 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Bij deze rij hoort de recursieve formule $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ met $f_1 = 1$ en $f_2 = 1$.

- a** Licht dit toe.
b Bereken f_{15} en f_{20} .
c Vanaf de hoeveelste term is $f_n > 10^6$?

GESCHIEDENIS

Leonardo van Pisa

De Italiaanse wiskundige en koopman Leonardo van Pisa, bijgenaamd Fibonacci, leefde van 1175 tot 1250. Tijdens zijn vele reizen door de landen rond de Middellandse Zee werd Leonardo steeds meer gegrepen door de wetenschap.

In 1202 publiceerde hij het boek 'Liber Abaci', dat bijna alle wiskundige kennis van die tijd bevatte. In plaats van Romeinse cijfers gebruikte hij in dit boek als eerste westerse wiskundige het Hindoe-Arabische getallenstelsel met het cijfer 0.

Eén van de problemen die hij in 'Liber Abaci' beschrijft, is het zogenaamde konijnen-probleem. Een paar konijnen van één maand oud is nog te jong om zich te kunnen voortplanten. Maar vanaf de tweede maand krijgt het paar elke maand twee jongen, die zich op hun beurt na twee maanden eveneens voortplanten met twee jongen per maand per paar. Enzovoort. Bij dit probleem hoort de rij 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... van opgave 39.



Leonardo van Pisa

E40

De rij in opgave 39 is de zogenaamde rij van Fibonacci.

Hieronder staan twee eigenschappen van deze rij.

Geef van beide eigenschappen drie getallenvoorbeelden.

I $f_{n-1} \cdot f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n$

II Elk getal $f_{p \cdot n}$ met p geheel is een veelvoud van f_n .

Terugblik

Beginterm u_0 of u_1

Bij de recursieve formule van een rij hoort een beginterm. Deze beginterm kan u_0 of u_1 zijn.

Van een rekenkundige rij u_n met verschil v en beginterm u_1 is

- de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_1
- de directe formule $u_n = u_1 + v \cdot (n - 1)$.

Van een meetkundige rij u_n met factor r en beginterm u_1 is

- de recursieve formule $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met beginterm u_1
- de directe formule $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$.

Formules opstellen bij gegeven termen

De rij u_n met $u_3 = 12\,800$ en $u_5 = 8192$ kan een rekenkundige of een meetkundige rij zijn.

Als u_n een rekenkundige rij is met beginterm u_0 , dan is de directe formule van de vorm $u_n = u_0 + v \cdot n$.

Je krijgt $v = \frac{8192 - 12\,800}{5 - 3} = -2304$.

Uit $u_3 = 12\,800$ volgt $u_0 + (-2304) \cdot 3 = 12\,800$ en dit geeft $u_0 = 19\,712$.

Dus $u_n = 19\,712 - 2304 \cdot n$.

Als u_n een meetkundige rij is met beginterm u_0 , dan is de directe formule van de vorm $u_n = u_0 \cdot r^n$.

Je krijgt $r^2 = \frac{u_5}{u_3} = \frac{8192}{12\,800} = 0,64$, dus $r = 0,8$.

Uit $u_3 = 12\,800$ volgt $u_0 \cdot 0,8^3 = 12\,800$ en dit geeft $u_0 = 25\,000$.

Dus $u_n = 25\,000 \cdot 0,8^n$.

Verschillende notaties bij rijen

Behalve de notatie met u_n kom je ook andere notaties tegen, bijvoorbeeld met de letter A in plaats van u , of de notatie met $u(n)$ of u_{n+1} .

De rij $u_n = 1,03 \cdot u_{n-1} - 500 \cdot n$ met $u_0 = 15\,000$ wordt met deze notaties

- $A_n = 1,03 \cdot A_{n-1} - 500 \cdot n$ met $A_0 = 15\,000$
- $u(n) = 1,03 \cdot u(n-1) - 500 \cdot n$ met $u(0) = 15\,000$
- $u_{n+1} = 1,03 \cdot u_n - 500 \cdot (n+1)$ met $u_0 = 15\,000$.

Het rijen-invoerscherm van de GR

De rij $u_n = 1,03 \cdot u_{n-1} - 500 \cdot n$ met $u_0 = 15\,000$ is niet door te rekenen op het basisscherm. Je rekent deze rij door op het rijen-invoerscherm.

Ook een recursieve formule als $u_n = 2 \cdot u_{n-1} - 3 \cdot u_{n-2}$ met $u_0 = 5$ en $u_1 = 10$ en een directe formule als $u_n = 2n^2 - 3n + 4$ kun je doorrekenen op het rijen-invoerscherm.

12.3 Toepassingen van rijen



041 Julius zet op 1 januari 2020 een bedrag van 2000 euro op de bank tegen een vaste rente van 0,1% per jaar. Met ingang van 1 januari 2021 neemt hij jaarlijks op 1 januari 150 euro op.

Bij deze situatie hoort een van de volgende recursieve formules.

$$u_n = u_{n-1} - 150 \text{ met } u_0 = 2000$$

$$u_n = 1,001 \cdot u_{n-1} \text{ met } u_0 = 2000$$

$$u_n = 1,001 \cdot u_{n-1} - 150 \text{ met } u_0 = 2000$$

- Welke formule is de juiste? Licht toe.
- Onderzoek met de GR in welk jaar het saldo op 1 januari voor het eerst ontoereikend is om 150 euro op te nemen.

Theorie A Recursieve en directe formules opstellen

Bij een rente van 0,35% per jaar groeit een bedrag B volgens de recursieve formule $B_n = 1,0035 \cdot B_{n-1}$.

Neem je bovendien jaarlijks een bedrag van 150 euro op, dan krijg je de formule $B_n = 1,0035 \cdot B_{n-1} - 150$.

Is de beginterm bekend, dan is deze rij door te rekenen met behulp van het rijen-invoerscherm. Je kunt dan immers in de tabel aflezen welk bedrag bij een bepaalde n hoort en omgekeerd.

Voorbeeld

Op 1 maart zit in een tank 20 000 liter vervuild water. Elke dag wordt 30% van de in de tank aanwezige hoeveelheid voor zuivering overgeheveld. Direct daarna wordt de tank bijgevuld met 5000 liter vervuild water. De eerste keer gebeurt dat op 2 maart.

$W(n)$ is de hoeveelheid water in liters in de tank, n dagen na 1 maart.

- Stel bij deze situatie de recursieve formule op van $W(n)$.
- Hoeveel liter water zit er op 6 maart na het bijvullen in de tank?
- De hoeveelheid water in de tank komt niet beneden een bepaalde waarde.

Onderzoek welke waarde dat is. Geef het antwoord in liters nauwkeurig.

Uitwerking

- Er wordt 30% overgeheveld, dus er blijft 70% over.

$$W(n) = 0,7 \cdot W(n-1) + 5000 \text{ met } W(0) = 20\,000$$

- Bij 6 maart hoort $n = 5$.

Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.

De tabel geeft $W(5) \approx 17\,227$.

Op 6 maart zit er 17 227 liter water in de tank.

- Vanaf $n = 24$ is $W(n) \approx 16\,667$, dus deze waarde is 16 667 liter.

R42
☐ ⊗ *

Zie het voorbeeld.

- a** Neem aan dat er elke dag 35% van de in de tank aanwezige hoeveelheid voor zuivering wordt overgeheveld. Ook in deze situatie komt de hoeveelheid water in de tank niet beneden een bepaalde waarde. Onderzoek welke waarde dat is.
- b** Neem aan dat er elke dag 25% van de in de tank aanwezige hoeveelheid voor zuivering wordt overgeheveld. Wat gebeurt er nu met de hoeveelheid water in de tank? Kun je dit verklaren?

43
☐ ⊗ *

- a** Een container van 250 liter vol chemisch afval wordt gedumpt in een natuurgebied. Elke week lekt 5% van de overgebleven inhoud weg in de bodem.

V_n is het volume chemisch afval na n weken.
Stel de recursieve en directe formule op van V_n .

- b** Jolien heeft een tuibrug ontworpen. Een tuibrug is een brug waarbij het brugdek door middel van kabels vastgemaakt is aan één of meerdere pijlers. De eerste kabel is 80 meter lang en elke volgende kabel is 40% korter dan de vorige.

L_n is de lengte in meters van de n^e kabel.
Stel de recursieve en directe formule op van L_n .



44
☐ ⊗ *

Zevenblad is een plant die groeit op schaduwrijke plaatsen in heggen, tuinen en wegbermen. De plant staat ook bekend als tuinmansverdriet, omdat het een plant is die zich snel vermeerdert en door veel mensen wordt gezien als onkruid.

Shawn onderhoudt een grote tuin waarvan op 1 augustus 2020 maar liefst 250 m^2 is bedekt door zevenblad.

Ondanks regelmatig onderhoud groeit de oppervlakte die bedekt is door zevenblad jaarlijks met 12%.

Shawn besluit daarom om jaarlijks eind juli 50 m^2 zevenblad te verwijderen en de grond af te dekken, zodat de wortels van het zevenblad afsterven en het dat jaar niet terugkeert op die plek.

A_n is de oppervlakte in m^2 die door zevenblad is bedekt, n jaar na 1 augustus 2020.

- a** Stel de recursieve formule op van de oppervlakte A_n in m^2 die door zevenblad is bedekt.
- b** In welk jaar is er op 1 augustus voor het eerst minder dan 150 m^2 door zevenblad bedekt?
- c** Hoeveel m^2 moet Shawn vanaf 1 augustus 2021 jaarlijks behandelen om ervoor te zorgen dat de oppervlakte die bedekt is met zevenblad op 1 augustus elk jaar hetzelfde is?



A45
☐◎*

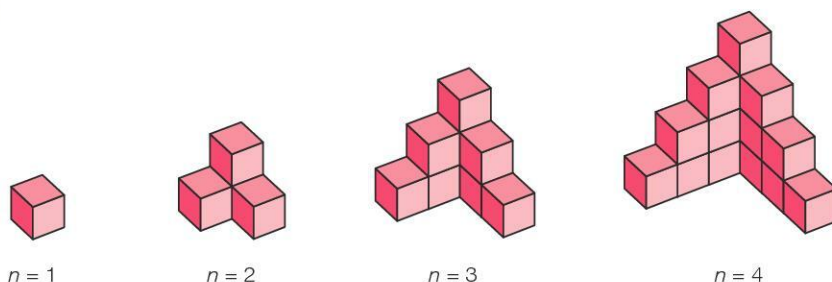
Widhi heeft een grote geldprijs gewonnen en zet hiervan op 1 januari 2020 een bedrag van 125 000 euro op een spaarrekening. Ze krijgt 0,2% rente per jaar. Ze neemt elk jaar op 1 januari 6000 euro op van deze rekening. Ze begint hiermee op 1 januari 2021.

B_n is het bedrag in euro's op de spaarrekening, direct na het opnemen van de 6000 euro, n jaar na 1 januari 2020.

- Stel de recursieve formule op van B_n .
- Welk bedrag staat op 1 januari 2025 op haar rekening, direct na het opnemen van de 6000 euro?
- In welk jaar heeft Widhi op 1 januari voor het eerst minder dan 50 000 euro op haar spaarrekening staan, direct na het opnemen van de 6000 euro?
- Welk bedrag kan Widhi vanaf 1 januari 2021 jaarlijks opnemen opdat het saldo direct na het opnemen elk jaar hetzelfde is?

O46
☐◎*

Hieronder zie je een rij met bouwwerken van gestapelde kubussen.



figuur 12.2

- Tel voor elk van de vier bouwwerken uit hoeveel kubussen het bestaat.
- Stel een directe formule op voor het aantal kubussen K_n in het n^e bouwwerk.
- Bereken voor elk bouwwerk het verschil in het aantal kubussen in het betreffende bouwwerk en het volgende bouwwerk. Welke regelmaat ontdek je? Bij wat voor soort rij hoort deze regelmaat?

Theorie B Patronen en meetkundige figuren

Bij opgaven met rijen kun je te maken krijgen met patronen en meetkundige figuren, zoals in opgave 46. Vaak kun je daarbij niet gebruikmaken van de formules die horen bij rekenkundige of meetkundige rijen.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde is de directe formule gegeven en wordt hiermee de recursieve formule afgeleid.

Voorbeeld

Zie de bouwwerken in opgave 46. De directe formule voor het aantal kubussen K_n in het n^e bouwwerk is $K_n = n^2$.

Leid de recursieve formule van K_n af met behulp van de directe formule.

Aanpak

Voor de recursieve formule geldt $K_n = K_{n-1} + \dots$ oftewel $K_n - K_{n-1} = \dots$

Bereken wat op de puntjes moet staan door $K_n - K_{n-1}$ uit te drukken in n .

Gebruik dat $K_{n-1} = (n-1)^2$.

Uitwerking

$$K_{n-1} = (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$$

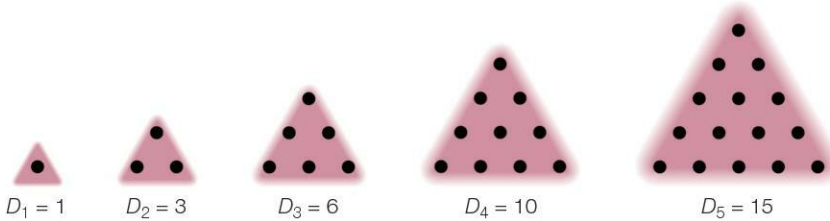
$$K_n - K_{n-1} = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1 \quad \leftarrow \dots$$

Dus $K_n = K_{n-1} + 2n - 1$ met $K_1 = 1$.

De verschillen vormen een rekenkundige rij.

47
☐ ⊗ *

In figuur 12.3 staan de eerste vijf driehoeksgetallen.



figuur 12.3

Het n^e driehoeksgetal D_n is te berekenen met de directe formule

$$D_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

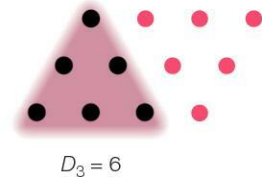
- a Bereken het twaalfde driehoeksgetal.
- b Het hoeveelste driehoeksgetal is 325?
- c Leid de recursieve formule van D_n af met behulp van de directe formule.

E48
* ☐ ⊗ *

In opgave 47 is de directe formule van D_n gegeven.

* Je kunt aantonen dat deze formule juist is.

Doe dit door gebruik te maken van het idee van figuur 12.4.



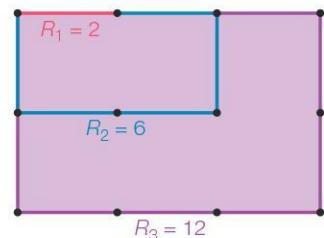
figuur 12.4

49
☐ ⊗ *

In figuur 12.5 staan de eerste drie rechthoeksgetallen uitgebeeld.

Het n^e rechthoeksgetal R_n is te berekenen met de directe formule $R_n = n^2 + n$.

- a Toon aan dat deze formule juist is.
- b Het hoeveelste rechthoeksgetal is 156?
- c Leid de recursieve formule van R_n af met behulp van de directe formule.



figuur 12.5

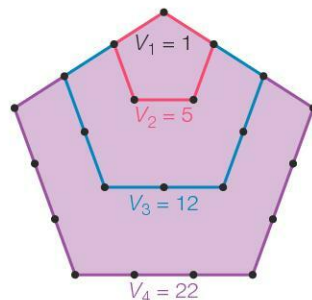
R50
□ ⊗ *

a Zie opgave 47 met figuur 12.3. Je kunt de recursieve formule van de driehoeksggetallen ook opstellen door te kijken naar de regelmaat van het aantal stippen dat wordt toegevoegd bij het n^e driehoeksggetal ten opzichte van het driehoeksggetal ervoor.

Licht toe hoe je op deze manier de recursieve formule kunt krijgen.

b Zie opgave 49 met figuur 12.5.

Licht toe hoe je op dezelfde manier als bij de driehoeksggetallen in vraag a de recursieve formule van de rechthoeksggetallen kunt krijgen.



figuur 12.6

A51
□ ⊗ *

In figuur 12.6 staan de eerste vier *vijfhoeksggetallen* uitgebeeld.

Het n^e vijfhoeksggetal V_n is te berekenen met de directe formule $V_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$. Bij de vijfhoeksggetallen hoort ook een recursieve formule.

Stel deze recursieve formule op.

GESCHIEDENIS

Getallen in de oudheid

De Oude Grieken kenden aan getallen bijzondere eigenschappen toe. Zo waren oneven getallen mannelijk en even getallen vrouwelijk. Heel bijzondere getallen waren de *volmaakte getallen*. Een getal is volmaakt als de som van de echte delers (dat zijn de delers behalve het getal zelf) gelijk is aan het getal. Een voorbeeld van een volmaakt getal is 28. De echte delers zijn 1, 2, 4, 7 en 14, en $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

En dan waren er nog de *bevriende getallen*. De getallen a en b zijn bevriend als de som van de echte delers van a gelijk is aan b , terwijl de som van de echte delers van b juist gelijk is aan a . Bijvoorbeeld 220 en 284 zijn bevriende getallen. In de ogen van de Grieken vullen vrienden elkaar aan tot een vorm van volmaaktheid.

Verder deelden de Grieken de getallen in allerlei klassen in. Zo waren er driehoeksggetallen, vierkantsgetallen, rechthoeksggetallen en vijfhoeksggetallen.

A52
□ ⊗ *

Bij het wereldrecord champagneglazen stapelen wordt een piramidevormige toren gebouwd. Elke laag van de toren heeft de vorm van een driehoek. Het aantal glazen in de n^e laag is $D_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

a Bereken het aantal glazen in de 20^e laag.

Het totale aantal glazen in een toren met n lagen is te berekenen met de formule $P_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. Hierin is P_n het n^e *piramidegetal*.

b Uit hoeveel glazen bestaat een toren van 40 lagen?

Bij het wereldrecord in 2021 van een Nederlands team werd een toren bestaande uit 54 740 glazen gebouwd.

c Uit hoeveel lagen bestond de toren en uit hoeveel glazen bestond de onderste laag?

d Bij een volgende recordpoging wordt de toren één laag hoger. Hoeveel extra glazen zijn er nodig?

Terugblik

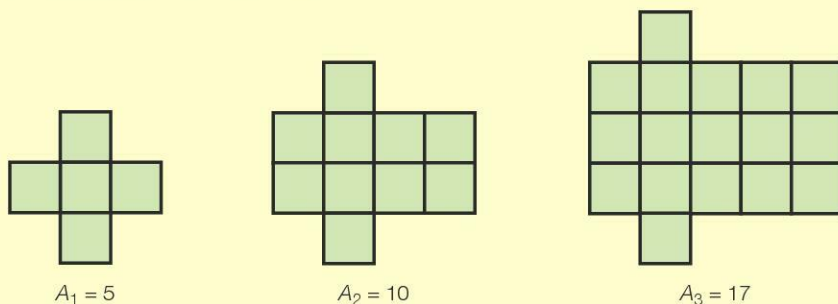
Recursieve en directe formules opstellen

Een zwembad met een inhoud van 50 000 liter heeft lekkage. Per week lekt 2% van het overgebleven water weg. V_n is het volume van het water in liters na n weken. De recursieve formule is $V_n = 0,98 \cdot V_{n-1}$ met $V_0 = 50\,000$ en de directe formule is $V_n = 50\,000 \cdot 0,98^n$.

De populatie bavianen in een dierentuin telt 50 exemplaren op 1 januari 2020. Jaarlijks groeit de populatie met 12%. Om overbevolking tegen te gaan, wil men met ingang van 1 januari 2021 jaarlijks 8 bavianen aan andere dierentuinen verkopen. Noem je het aantal bavianen B_n , dan hoort bij deze situatie de recursieve formule $B_n = 1,12 \cdot B_{n-1} - 8$ met $B_0 = 50$. Het aantal bavianen dat jaarlijks moet worden verkocht om de populatie constant te houden, is $0,12 \cdot 50 = 6$.

Patronen en meetkundige figuren

Rebecca maakt met vierkanten een patroon. Zie de figuur hieronder. De directe formule voor het aantal vierkanten A_n dat nodig is voor het n^e patroon is $A_n = n^2 + 2n + 2$.



Je kunt de recursieve formule van A_n als volgt afleiden uit de directe formule.

$$A_{n-1} = (n-1)^2 + 2(n-1) + 2 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 2 + 2 = n^2 + 1$$

$$A_n - A_{n-1} = n^2 + 2n + 2 - (n^2 + 1) = 2n + 1$$

Dus $A_n = A_{n-1} + 2n + 1$ met $A_1 = 5$.

12.4 Somrijen



Bereken bij de rij $u_n = 2 + 3n$ de som $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$.

Theorie A De sigmanotatie

De som van een aantal opeenvolgende termen van een rij wordt genoteerd met de Griekse letter Σ .

Spreek Σ uit als sigma.

Σ is de Griekse hoofdletter S.

Zo wordt $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$ genoteerd als $\sum_{k=0}^5 u_k$.

Dit is de **sigmanotatie**.

$\sum_{k=0}^5 u_k$ spreek je uit als 'de som van u_k van $k=0$ tot en met 5'.

Je kunt $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$ ook noteren als $\sum_{i=0}^5 u_i$

of als $\sum_{j=0}^5 u_j$, enzovoort.

De notatie $\sum_{k=0}^3 (2k+1)$ betekent $\sum_{k=0}^3 u_k$ bij de rij $u_n = 2n+1$.

Dus $\sum_{k=0}^3 (2k+1) = \underbrace{1}_{u_0=2 \cdot 0 + 1 = 1} + \underbrace{3}_{u_1=2 \cdot 1 + 1 = 3} + \underbrace{5}_{u_2=2 \cdot 2 + 1 = 5} + \underbrace{7}_{u_3=2 \cdot 3 + 1 = 7} = 16$.

En zo is $\sum_{k=1}^5 (2k+1) = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 35$.

Sigma, de 18e letter van het Griekse alfabet, wordt geschreven als Σ (hoofdletter), als σ (kleine letter) en als ς (slotletter van een woord). De hoofdletter sigma is in de wiskunde het symbool voor sommatie.

Voorbeeld

a Bereken $\sum_{k=0}^4 u_k$ bij de rij $u_n = 2n^2 + 3n$.

b Bereken $\sum_{k=1}^5 (3k+2)$.

Uitwerking

a $\sum_{k=0}^4 u_k = 0 + 5 + 14 + 27 + 44 = 90$

b $\sum_{k=1}^5 (3k+2) = 5 + 8 + 11 + 14 + 17 = 55$

NORM DRIJF AUTO REËEL RAD WM DRUK OP ENTER VOOR BEHIERKEN				
n	u(n)			
0	0			
1	5			
2	14			
3	27			
4	44			
5	65			
6	90			
7	119			
8	152			
9	189			
10	230			
u(n) $\boxed{2n^2+3n}$				

R54 Zie het voorbeeld.



a Bereken $\sum_{k=2}^5 u_k$ bij de rij $u_n = 2n^2 + 3n$.

b Bereken $\sum_{k=0}^5 (3k + 2)$.

55 Gegeven zijn de rijen $u_n = 2n + 7$, $v_n = n^2 + 3$ en $w(n) = 2^n$.
Bereken.



a $\sum_{k=0}^5 u_k$

b $\sum_{i=1}^5 v_i$

c $\sum_{k=0}^4 w(k)$

56 Bereken.



a $\sum_{k=1}^5 (3k + 7)$

b $\sum_{i=0}^4 (3i^2 + i + 1)$

c $\sum_{j=0}^4 (j^3 - j^2)$

A57 Gegeven zijn de rijen $u(n) = 2 \cdot u(n-1) + 5$ met $u(0) = 3$,
 $v_n = 100 \cdot 1,3^n$ en $w_n = w_{n-1}^2 - 3$ met $w_0 = 2$.
Bereken.



a $\sum_{k=0}^3 u(k)$

b $\sum_{j=1}^3 v_j$

c $\sum_{i=0}^5 w_i$

E58 Gegeven is $\sum_{k=1}^n k^2 = 140$.
Bereken n .



O59 Gegeven is $\sum_{k=1}^{15} (\frac{1}{2}k^2 + 1\frac{1}{2}k) = 800$.



Bereken $\sum_{k=1}^{16} (\frac{1}{2}k^2 + 1\frac{1}{2}k)$.

Theorie B De recursieve formule van een somrij

Bij elke rij kun je een **somrij** maken. Bij de rij $u_n = 5 + 3n$ met
beginterm u_0 zijn de termen 5, 8, 11, 14, 17, ...

De termen van de somrij S_n zijn

$$S_0 = u_0 = 5$$

$$S_1 = u_0 + u_1 = 5 + 8 = 13$$

$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = 5 + 8 + 11 = 24$$

$$S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 5 + 8 + 11 + 14 = 38$$

Enzovoort.

Dus bij een rij u_n met beginterm u_0 is $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Je ziet: $S_0 = u_0$

$$S_1 = u_0 + u_1 = S_0 + u_1$$

$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = S_1 + u_2$$

$$S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3$$

Algemeen is $S_n = S_{n-1} + u_n$.

Bij de rij $u_n = 5 + 3n$ met beginterm u_0 is de somrij $S_n = S_{n-1} + 5 + 3n$ met $S_0 = 5$.

De recursieve formule van de somrij S_n van de rij u_n met beginterm u_0 is $S_n = S_{n-1} + u_n$ met $S_0 = u_0$.

Bij een rij u_n met beginterm u_1 is $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. De recursieve formule van de somrij is dan $S_n = S_{n-1} + u_n$ met $S_1 = u_1$.

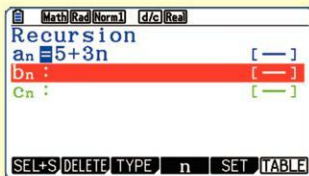
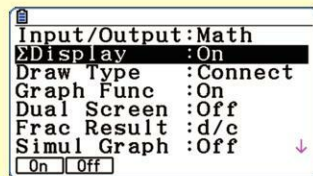
Je kunt de recursieve formule van de somrij doorrekenen op het rijen-invoerscherm van de GR.

Hieronder zie je hoe je bij de rij $u_n = 5 + 3n$ met beginterm u_0 de somrij op de GR krijgt.

- Op de TI voer je de rij u_n in bij $u(n)$ en de recursieve formule van S_n bij $v(n)$.
- Op de HP voer je de rij u_n in bij $U1(N)$ en de recursieve formule van S_n bij $U2(N)$.
- Op de NW voer je de rij u_n in bij u_n en de recursieve formule van S_n bij v_{n+1} .



- Op de Casio voer je alleen de rij u_n in. De somrij krijg je door bij de instellingen (SHIFT-MENU) Σ Display op On te zetten.



Hiernaast zie je dat de somrij is 5, 13, 24, 38, 55, 75, 98, ...

Je ziet dat $S_6 = 98$, dus dat $\sum_{k=0}^6 (5 + 3k) = 98$.

n	u(n)	v(n)		
0	5	5		
1	8	13		
2	11	24		
3	14	38		
4	17	55		
5	20	75		
6	23	98		
7	26	124		
8	29	153		
9	32	185		
10	35	220		

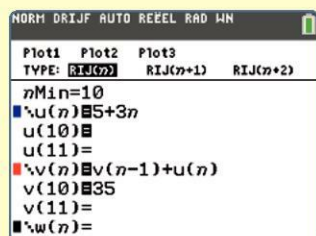
Om $\sum_{k=10}^{15} (5 + 3k)$ te berekenen, kun je op twee manieren te werk gaan.

- 1 Bereken $\sum_{k=0}^{15} (5 + 3k) - \sum_{k=0}^9 (5 + 3k)$, dus $S_{15} - S_9$.

Lees af uit de tabel dat $S_{15} = 440$ en $S_9 = 185$.

Dus $\sum_{k=10}^{15} (5 + 3k) = 440 - 185 = 255$.

- 2 Neem in het rijen-invoerscherm van de GR als startwaarde $n = 10$. Hieronder zie je wat je bij de TI, de HP en de NW moet invoeren. Bij de Casio is het voldoende om Start: 10 te nemen en Σ Display op On te zetten.



Bij de TI moet je $v(10)$ invullen.
Bedenk dat $v(10) = u(10)$.



Bij de HP moet je twee keer de startwaarde invoeren en $U2(10)$ invullen. Bedenk dat $U2(10) = U1(10)$.



Bij de NW kies je Rij-Type v_{n+1} en Eerste terminde 10. Bedenk dat $v_{10} = u_{10}$.

Voorbeeld

Gegeven is de rij $u(n) = 2 \cdot u(n-1) - 3n$ met beginterm $u(0) = 10$ en de bijbehorende somrij $S(n)$.

- a Geef de recursieve formule van $S(n)$.
- b Bereken $S(10)$.
- c Bereken vanaf welke n geldt dat $\sum_{k=0}^n u(k) > 50\,000$.

Uitwerking

- a $S(n) = S(n-1) + 2 \cdot u(n-1) - 3n$ met $S(0) = 10$
- b Voer zowel de rij als de somrij in op het rijen-invoerscherm. De tabel geeft $S(10) = 8419$.
- c Lees af in de tabel $S(12) = 33\,076$ en $S(13) = 65\,889$. Dus vanaf $n = 13$.

Op de Casio is het voldoende om de rij $u(n)$ in te voeren en Σ Display op On te zetten.

R60
☐ ⊗ *

a Zie de theorie op de vorige bladzijde.

Licht toe dat $\sum_{k=10}^{15} (5 + 3k) = \sum_{k=0}^{15} (5 + 3k) - \sum_{k=0}^9 (5 + 3k)$.

b Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.

Noteer $S(10)$ met de sigmanotatie.

61
☐ ⊗ *

Gegeven is de rij $u_n = 2 \cdot u_{n-1} - 5$ met $u_0 = 10$ en de bijbehorende somrij S_n .

a Geef de recursieve formule van S_n .

b Bereken S_8 .

c Vanaf welke n is $\sum_{k=0}^n u_k > 25\,000$?

62
☐ ⊗ *

Bereken.

a $\sum_{k=0}^{20} (k^2 + 1)$

c $\sum_{k=2}^{15} (k^2 - 2k)$

b $\sum_{k=0}^{20} (k+1)^2$

d $\sum_{k=6}^{30} (\frac{1}{2}k^2 - 4)$

63
☐ ⊗ *

Gegeven is de rij $u_n = n^2 - 2n + 1$.

a Bereken $\sum_{k=0}^{15} u_k$.

b Vanaf welke n is $\sum_{k=0}^n u_k > 2500$?

64
☐ ⊗ *

Schrijf met de sigmanotatie en bereken.

a $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + \dots + 101$

b $768 + 384 + 192 + 96 + \dots + 3$

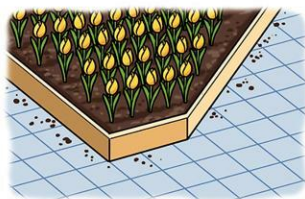
65
☐ ⊗ *

Tijdens een bloemententoonstelling staan de tulpen gerangschikt zoals in figuur 12.7. Eerst vijf tulpen, dan zeven, dan negen, enzovoort.

Het aantal tulpen in rij n is $T(n)$.

a Stel de directe formule van $T(n)$ op.

b Hoeveel tulpen staan er in totaal in de eerste 15 rijen?



figuur 12.7

66
☐ ⊗ *

In een van de hoeken van een voetbalstadion bevindt zich het bezoekersvak K. Op de onderste van de in totaal 22 rijen zijn 12 zitplaatsen. Elke volgende rij heeft 4 zitplaatsen meer dan de rij eronder. Voor hoeveel supporters is er plaats in bezoekersvak K?

A67
☐ ◎ *

Hans doet tijdens basketbaltraining een conditie-oefening. Vanaf de achterlijn rent hij naar een kegel die op 5 meter afstand staat, en vervolgens terug naar de achterlijn. Daarna rent hij heen en weer naar de tweede kegel, die op 6 meter afstand staat. Zo staan er in totaal 10 kegels opgesteld. Elke volgende kegel staat 20% verder dan de vorige. Welke afstand rent Hans in totaal? Rond af op gehele meters.

A68
☐ ◎ *

Bij de 10 km langebaan rijden schaatsers 25 rondjes van 400 meter.

- a Patrick begint met een rondje van 30,62 seconden. Vervolgens rijdt hij elke ronde 0,15 seconde langzamer dan de voorafgaande ronde. Bereken zijn eindtijd.
- b Koen begint met een rondje van 35,76 seconden. Vervolgens rijdt hij elke ronde 0,22 seconde sneller dan de voorafgaande ronde. Bereken de eindtijd van Koen.

A69
☐ ◎ *

Jan heeft een kamerplant gekocht. De plant is bij aanschaf 18 cm hoog. De eerste week groeit de plant 5,2 cm. Elke volgende week is de toename van de hoogte 80% van de toename van de voorafgaande week.

- a Hoeveel mm groeit de plant in de achtste week?
- b Hoeveel mm is de plant in de eerste acht weken in totaal gegroeid?
- c Bereken in mm nauwkeurig de hoogte van de plant na tien weken.

A70
☐ ◎ *

Ten zuidwesten van Athene ligt het Theater van Epidaurus. Bezoekers kunnen plaatsnemen in de binnenring of in de buitenring. De binnenring bestaat uit 12 sectoren, elk met 34 rijen zitplaatsen. De buitenring bestaat uit 22 sectoren, elk met 21 rijen zitplaatsen, waarbij elke rij 13 zitplaatsen heeft. Van elke sector in de binnenring bestaat de onderste rij uit vijf zitplaatsen en elke volgende rij heeft twee zitplaatsen meer dan de rij eronder. Een zitplaats in de binnenring kost 45 euro. Een zitplaats in de buitenring kost 15 euro.

- a Hoeveel zitplaatsen zijn er in een sector in de binnenring?
- b Volgens een folder biedt het theater plaats aan ruim 21 000 toeschouwers. Controleer met een berekening of dit aantal juist is.
- c Tijdens een voorstelling zijn acht sectoren in de binnenring volledig bezet, de andere sectoren zijn leeg. Van de buitenring is 75% van de plaatsen bezet. Bereken de totale inkomsten.



A71

Op 5 juni 2011 is in de Noord-Duitse plaats Satow het wereldrecord bierkragen stapelen verbeterd. Bij dit record werden in totaal 105 995 kragen gestapeld in de vorm van een piramide. De bovenste laag bestond uit één krat, de laag daaronder uit negen kragen, laag drie uit 25 kragen, laag vier uit 49 kragen, enzovoort.

Bij deze situatie hoort de vergelijking $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = 105\,995$.

- a** Licht deze vergelijking toe en bereken n . Wat betekent het antwoord?

De gebruikte kragen hebben een lengte van 40 cm, een breedte van 30 cm en een hoogte van 25 cm.

- b** Hoe hoog was de stapel in Satow?

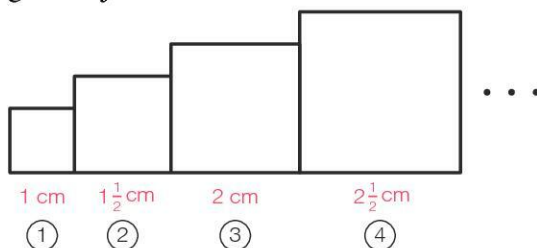
En hoeveel m^2 was het grondvlak van het bouwwerk?

Voordat het wereldrecord bierkragen stapelen in Satow werd behaald, was het in handen van het Noord-Hollandse dorp Limmen met 63 365 kragen. In Limmen werd op een andere manier gestapeld. De bovenste laag bestond uit één krat, de laag daaronder uit vier kragen, laag drie uit negen kragen, enzovoort. Zo ontstond een minder brede, maar hogere piramide.

- c** Hoeveel meter hoger was de piramide in Limmen dan die in Satow? Neem aan dat de gebruikte kragen dezelfde afmetingen hadden.

**A72**

In figuur 12.8 zie je een rij vierkanten. Het eerste vierkant heeft zijden van 1 cm en elk volgend vierkant heeft zijden die een halve centimeter groter zijn.



figuur 12.8

Voor de oppervlakte $O(n)$ in cm^2 van het n^{e} vierkant geldt

$$O(n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}.$$

We vragen ons af wat de totale oppervlakte $S(n)$ is van alle vierkanten tot en met het n^{e} vierkant.

- a** Bereken de totale oppervlakte van de eerste 15 vierkanten.
b Vanaf welke n is de totale oppervlakte van de vierkanten meer dan 1000 cm^2 ?
c Bereken de totale oppervlakte van het 10^{e} tot en met het 20^{e} vierkant.

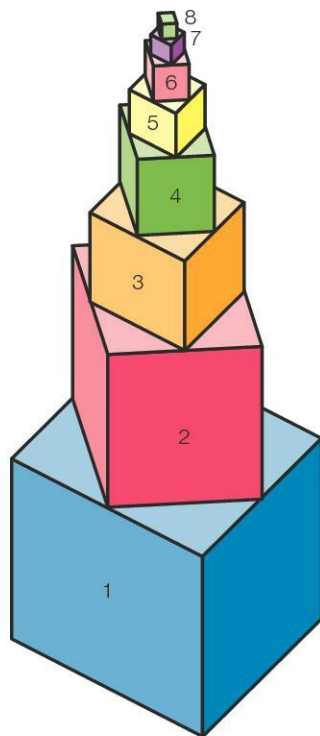
A73
□ ⊙ *

In figuur 12.9 zie je een stapel van acht kubussen.

De ribbe van kubus 1 is 6 cm en de ribbe van kubus 5 is 1,5 cm.

De ribben van de opeenvolgende kubussen worden steeds met een vaste factor r vermenigvuldigd.

- a Bereken deze factor r . Rond af op vier decimalen.
- b Bereken in mm nauwkeurig de hoogte van de stapel van acht kubussen.



figuur 12.9

Terugblik

De sigmanotatie

De som van een aantal opeenvolgende termen van een rij kun je noteren

met de sigmanotatie. Zo is $\sum_{k=0}^5 u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$.

Voor $u_n = 3n + 1$ is $\sum_{k=0}^3 u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 4 + 7 + 10 = 22$.

Hierbij is $u_0 = 3 \cdot 0 + 1 = 1$, $u_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$, enzovoort.

Verder is $\sum_{k=0}^4 (5k + 3) = 3 + 8 + 13 + \underbrace{18}_{u_3 = 5 \cdot 3 + 3 = 18} + 23 = 65$.

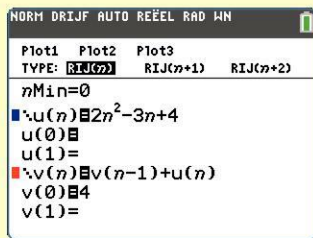
De som van de termen van een rij

Met de recursieve formule $S_n = S_{n-1} + u_n$ is bij de rij u_n de som van een aantal termen te berekenen. Gebruik daarbij het rijen-invoerscherm.

Op de TI, de HP en de NW voer je de recursieve formule van de somrij in.

Bij de Casio zet je Σ Display op On.

Op de GR-schermen hieronder zie je de invoer en de tabellen als je te maken hebt met de directe formule $u_n = 2n^2 - 3n + 4$ met beginterm u_0 .



n	an	Σan
3	13	26
4	24	50
5	39	89
6	58	147

In de tabel lees je af dat de zevende term van de somrij gelijk is aan 147,

dus $\sum_{k=0}^6 (2k^2 - 3k + 4) = 147$.

Het berekenen van $\sum_{k=5}^{15} (2k^2 - 3k + 4)$ kan op twee manieren.

- Bereken $\sum_{k=0}^{15} (2k^2 - 3k + 4) - \sum_{k=0}^4 (2k^2 - 3k + 4)$.

- Vul de juiste startwaarde(n) in op het rijen-invoerscherm en lees in de tabel het antwoord af.

Op beide manieren krijg je $\sum_{k=5}^{15} (2k^2 - 3k + 4) = 2134$.



Eindopdracht Annuïteit

In de beginopdracht heb je kunnen lezen dat Tom 60 000 euro wil lenen van zijn ouders om een camper te kopen. Deze lening moet hij in tien jaar terugbetalen. Hij heeft verschillende opties om de rente en aflossing te betalen aan zijn ouders.

De eerste optie is dat hij elk jaar 6% van het volledige bedrag als rente aan zijn ouders betaalt. Hij lost het bedrag van 60 000 euro pas na tien jaar in één keer af. Hij opent daartoe een spaarrekening met een vaste rente van 0,3% per jaar en stort aan het begin van elke maand een vast bedrag, de zogeheten annuïteit. In deze opdracht gaan we ervan uit dat de rente per maand wordt berekend en dat het rentepercentage per maand gelijk is aan $\frac{1}{12} \times 0,3\% = 0,025\%$. Tom heeft berekend dat hij aan het begin van elke maand 493 euro moet storten.

De recursieve formule voor het saldo S_n op de spaarrekening in euro's aan het einde van de n^e maand is van de vorm $S_n = a \cdot (S_{n-1} + b)$ met $S_0 = c$.

- Geef de waarden van a , b en c in deze formule en controleer met de GR dat Tom na 10 jaar een bedrag van € 60 063,73 heeft gespaard.

Het bedrag dat Tom per maand moet storten, is eigenlijk iets kleiner dan 493 euro.

- Zoek eens uit hoe groot dat bedrag is. Rond af op tientallen centen.

De annuïteit M in euro's is te berekenen met behulp van de formule

$$M = \frac{T \cdot \frac{p}{100}}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{p}{100}\right)}. \text{ Hierin is } T \text{ het gewenste totaalbedrag, } p \text{ het}$$

rentepercentage per maand en n het aantal maanden.

- Bereken met deze formule het bedrag dat Tom per maand moet storten. Rond af op centen. Is het antwoord in overeenstemming met het antwoord op de vorige vraag?

De tweede optie is dat Tom elke maand een vast bedrag aan rente en aflossing aan zijn ouders betaalt. Ook dit bedrag wordt annuïteit genoemd. De rente per maand bedraagt $\frac{1}{12} \times 6\% = 0,5\%$ van het restant van de lening, de rest van de annuïteit is aflossing. Zie ook de tabel in de beginopdracht, waarin wordt uitgegaan van een annuïteit van 666 euro. De recursieve formule om deze optie door te rekenen is

$L_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)L_{n-1} - M$ met $L_0 = 60\,000$. Hierin is L_n het restant van de lening na aflossing in de n^e maand, M de annuïteit in euro's en p het rentepercentage per maand.

- Controleer met de GR dat na 10 jaar het restant van de lening € 20,16 is.

Het bedrag dat Tom per maand moet betalen aan rente en aflossing is dus eigenlijk iets groter dan 666 euro.

- Zoek eens uit hoe groot dat bedrag is. Rond af op tientallen centen.

Om de annuïteit M in euro's te berekenen, kun je gebruikmaken van de

formule $M = \frac{T \cdot \frac{p}{100}}{1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n}}$. Hierin is T het gewenste totaalbedrag, p het

rentepercentage per maand en n het aantal maanden.

- Bereken met deze formule het bedrag dat Tom per maand moet betalen aan rente en aflossing. Rond af op centen. Is het antwoord in overeenstemming met het antwoord op de vorige vraag?

Er is ook nog een derde optie. Daarbij lost Tom elke maand 500 euro aan zijn ouders af en betaalt daarnaast elke maand $\frac{1}{12} \times 6\% = 0,5\%$ rente over het restant van de lening. In de tabel hieronder is voor de eerste paar maanden te zien hoe groot het restant van de lening is na betaling van aflossing en rente. De bedragen zijn in euro's.

	maand			
	0	1	2	3
aflossing		500	500	500
rente		300	297,50	295
totaal te betalen		800	797,50	795
restant lening	60 000	59 500	59 000	58 500

- Laat zien hoe de bedragen aan rente kunnen worden berekend.

De directe formule voor de rente R_n in euro's die Tom in maand n moet betalen, is van de vorm $R_n = a \cdot (b - c \cdot (n - 1))$.

- Geef de waarden van a , b en c in deze formule.
- Bereken het totale bedrag dat Tom in de tien jaar in totaal aan rente gaat betalen.

Ten slotte kun je de drie opties vergelijken.

- Welke optie is financieel het meest gunstig voor Tom? Licht toe.
- Welke optie is financieel het meest gunstig voor zijn ouders? Licht toe.

Diagnostische toets

12.1 Rekenkundige en meetkundige rijen

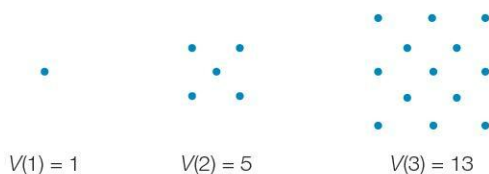
- 1** a Gegeven is de rij $u_n = n^2 + 0,5n + 5$ met beginterm u_0 .
Bereken van deze rij de vijfde en tiende term.
b Gegeven is de rij $u_n = u_{n-1} + \sqrt{3 + u_{n-1}}$ met beginterm $u_0 = 1$.
Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 20$?
- 2** Gegeven is de rij u_n : 3125, 2500, 1875, 1250, ... met beginterm u_0 .
a Stel de recursieve en de directe formule op van de rij.
b Hoeveel positieve termen heeft de rij?
- 3** Gegeven is de rij u_n : 2; 2,6; 3,38; 4,394; ... met beginterm u_0 .
a Stel de recursieve en de directe formule op van de rij.
b Bereken de achtste term van de rij. Rond af op twee decimalen.

12.2 Notaties en rijen op de GR

- 4** Van een rij is $w_4 = 12$ en $w_7 = 324$.
a Neem aan dat w_n een rekenkundige rij is met beginterm w_1 .
Stel de directe formule van w_n op.
b Neem aan dat w_n een meetkundige rij is met beginterm w_0 .
Stel de directe formule van w_n op.
- 5** a Gegeven is de rij $T(n) = T(n-1) - 7 \cdot n$ met $T(0) = 12$.
Schrijf de rij in de notatie $u_{n+1} = \dots$
b Gegeven is de rij $w_{n+1} = 3 \cdot w_n + 6$ met $w_1 = 10$.
Schrijf de rij in de notatie $w(n) = \dots$
- 6** Gegeven is de recursieve formule $A_n = 0,75 \cdot A_{n-1} + n$ met $A_0 = 12$.
a Bereken de vierde term van de rij.
b Voor welke waarden van n ligt A_n tussen 30 en 50?

12.3 Toepassingen van rijen

- 7** Hafid maakt met stippen een patroon.
Zie de figuur hiernaast. Het aantal stippen $V(n)$ dat nodig is voor het n^e patroon is te berekenen met de directe formule $V(n) = 2n^2 - 2n + 1$.
Leid de recursieve formule van $V(n)$ af met behulp van de directe formule.



figuur 12.10

8 Op kinderdagverblijf Pinokkio staat een grote zandbak met deksel, waar de kinderen graag in spelen. Omdat ze zand uit de bak scheppen, dat over de tuin wordt verspreid en in hun kleding mee naar huis wordt genomen, neemt de hoeveelheid zand jaarlijks met 7% af. De medewerkers leggen daarom jaarlijks eind augustus een zak van 17 liter in de zandbak. Op 1 september 2018 zit er 300 liter zand in de zandbak, die daarmee precies vol is.

- Stel de recursieve formule op van de hoeveelheid zand $Z(n)$ in liters die n jaar na 1 september 2018 in de zandbak zit.
- Hoeveel zand zit er in de zandbak op 1 september 2021?
- Omdat er jaarlijks meer zand verdwijnt dan dat er wordt aangevuld, kunnen medewerkers op een gegeven moment op 1 september twee zakken zand van elk 17 liter in de bak legen. In welk jaar is dat het geval?

12.4 Somrijen

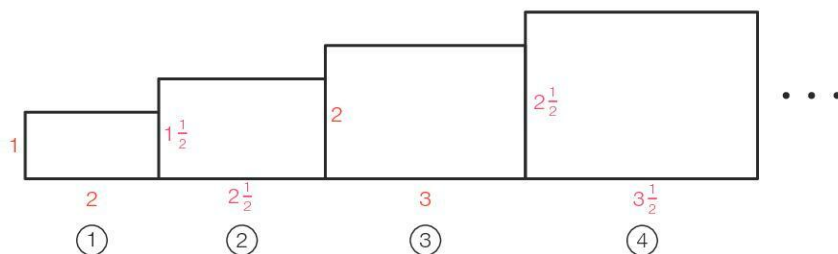
9 a Bereken $\sum_{k=0}^{10} u_k$ bij de rij $u_n = n^2 - n + 1$.

b Vanaf welke n is $\sum_{j=0}^n (2j^2 + 1) > 1000$?

c Bereken $\sum_{i=1}^{11} a_i$ bij de rij $a_{t+1} = 2a_t - 3$ met $a_1 = 6$.

10 Op een atletiekbaan van 200 meter loopt Eva een afstand van 2 km. Ze begint met een rondje van 48 seconden. Vervolgens loopt ze elke ronde 0,8 seconden langzamer dan de voorgaande ronde. Bereken haar eindtijd.

11 Shariqah tekent een rij rechthoeken. De afmetingen zijn in cm.



figuur 12.11

De oppervlakte $O(n)$ in cm^2 van de n^{e} rechthoek is gelijk aan $O(n) = \frac{1}{4}n^2 + n + \frac{3}{4}$.

- Toon dit aan.
- Stel de recursieve formule op van de totale oppervlakte $S(n)$ in cm^2 van de eerste n rechthoeken.
- Bereken de totale oppervlakte van de eerste 16 rechthoeken.
- Vanaf welke n is de totale oppervlakte van de rechthoeken meer dan $0,1 \text{ m}^2$?

13

Allerlei formules

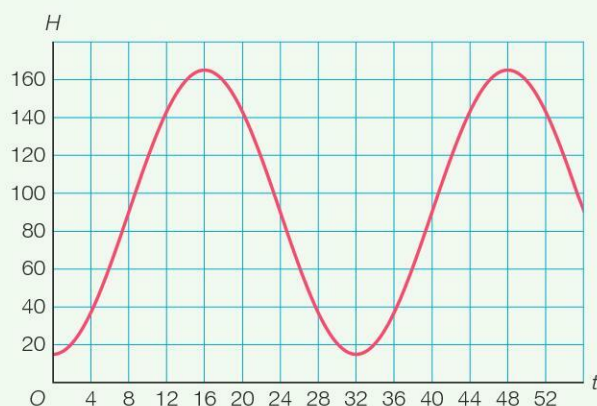
Wat leer je?

- Dat bij periodieke verschijnselen de sinus een rol speelt.
- Hoe je formules opstelt bij periodieke verschijnselen.
- Variabelen vrijmaken en combineren van formules.
- Omvormen van formules met exponenten en logaritmen.



Beginopdracht Singapore Flyer

[► WERKBLAD] De Singapore Flyer is een gigantisch reuzenrad in Marina Bay in Singapore. Nadat het in 2008 gebouwd werd, was het enkele jaren het grootste reuzenrad ter wereld. Zo'n hoog reuzenrad heeft geen open zitjes, maar afgesloten capsules. De Singapore Flyer heeft 28 van deze capsules. Je stapt in op het laagste punt. In de grafiek hieronder zie je de hoogte H boven de grond in meters van een van de capsules uitgezet tegen de tijd t in minuten. De grafiek staat ook op het werkblad.



figuur 13.1

Jan gaat één keer rond in het reuzenrad.

- Hoeveel minuten doet hij erover en hoeveel meter stijgt hij in totaal?
- Staat het reuzenrad stil om mensen te laten in- en uitstappen? Licht toe.

Gedurende een rondgang van een capsule draait het reuzenrad over een hoek van 360 graden.

- Hoeveel graden heeft het reuzenrad gedraaid als Jan voor het eerst op een hoogte van 90 meter komt?

Een andere capsule ligt 7 plekken voor de capsule die bij de gegeven grafiek hoort.

- Teken op het werkblad de grafiek die hoort bij de hoogte van deze capsule.

Enkele maanden na de start werd op advies van experts op het gebied van Feng Shui de draairichting van het reuzenrad omgedraaid.

- Teken op het werkblad de grafiek die ontstaat als de capsule uit de vorige vraag de andere kant op draait.

Voorkennis Periodieke verschijnselen

Theorie A Periode, evenwichtsstand en amplitude

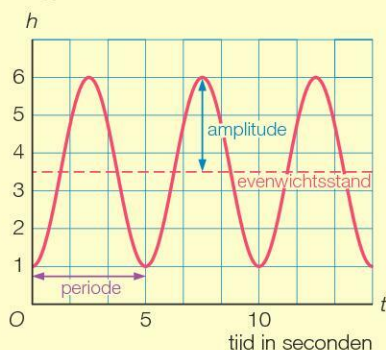
De hoogte van een capsule in een reuzenrad en de getijdenbeweging van het zeewater zijn verschijnselen die zich met een zekere regelmaat herhalen. Je hebt dan te maken met een *periodiek verschijnsel*.

De kortste tijd die het duurt tot herhaling optreedt heet de *periode*.

In figuur 13.2 zie je de grafiek bij een periodiek verschijnsel met een periode van 5 seconden. De horizontale stippellijn hoort bij de *evenwichtsstand*. De hoogste en laagste punten van de grafiek liggen even ver van deze stippellijn. De grafiek schommelt als het ware om de evenwichtsstand.

In figuur 13.2 is de evenwichtsstand $\frac{6+1}{2} = 3,5$.

Het verschil tussen de hoogste stand en de evenwichtsstand heet de *amplitude*. In figuur 13.2 is de amplitude dus $6 - 3,5 = 2,5$.



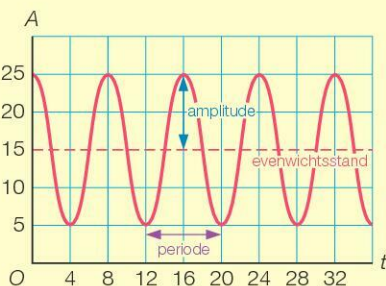
figuur 13.2

$$\text{evenwichtsstand} = \frac{\text{hoogste stand} + \text{laagste stand}}{2}$$

$$\text{amplitude} = \text{hoogste stand} - \text{evenwichtsstand}$$

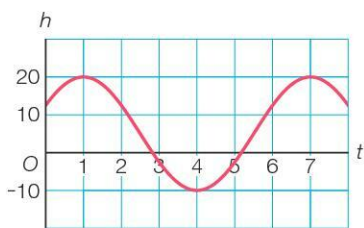
In figuur 13.3 geldt

- periode = 8
- evenwichtsstand = $\frac{25+5}{2} = 15$
- amplitude = $25 - 15 = 10$.



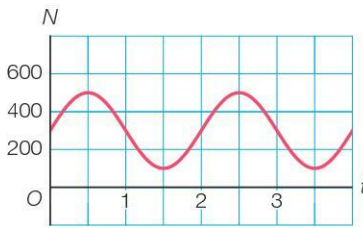
figuur 13.3

- 1 a** Zie figuur 13.4a.
Lees de periode, de evenwichtsstand en de amplitude af.
- b** Zie figuur 13.4b.
Lees de periode, de evenwichtsstand en de amplitude af.



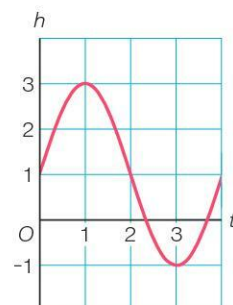
a

figuur 13.4



b

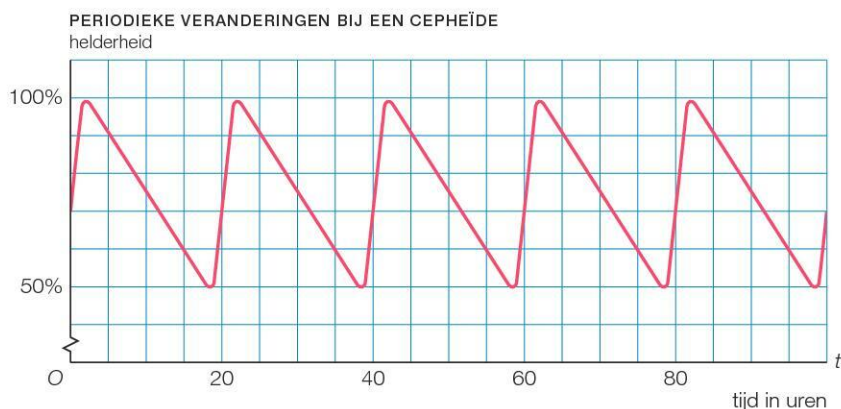
- 2** Van een periodiek verschijnsel is de periode 4, de evenwichtsstand 1 en de amplitude 2. In de grafiek hiernaast is de eerste periode getekend. Bereken h voor $t = 22$, $t = 33$, $t = 35$ en $t = 1002$.



figuur 13.5

- 3** Astronomen hebben ontdekt dat bij een aantal sterren de helderheid niet constant is. Bij sommige sterren treden deze helderheidswisselingen periodiek op. Een groep van deze sterren heet Cepheïden, genoemd naar een ster uit het sterrenbeeld Cepheus, waarbij men voor het eerst deze schommelingen in helderheid waarnam.

De grafiek in figuur 13.6 laat het verloop van de helderheid bij zo'n ster zien.



figuur 13.6

- Geef de periode van de helderheid.
- Hoeveel procent is de helderheid na 140 uur? En hoeveel na 6 dagen?
- Hoelang duurt de overgang van maximale naar minimale helderheid? En hoelang duurt de overgang van minimale naar maximale helderheid?
- Hoeveel uren achterelkaar is de helderheid meer dan 80%?
- Op vrijdag 1 maart om 5:00 uur neemt amateur-astronoom Peters maximale helderheid waar.
Op welke tijdstippen kan zij op zaterdag 2 maart maximale helderheid waarnemen? En op welk tijdstip kan Peters op woensdag 6 maart maximale helderheid waarnemen?

13.1 Sinusoïden



In deze opgave ga je de grafiek van $y = \sin(x)$ plotten. Stel daartoe de hoekenheid in op radialen. Dit kan op de TI bij mode, op de Casio bij SET UP, op de HP bij Settings en op de NW bij Instellingen.

- Plot de grafiek van $y = \sin(x)$. Neem x tussen -7 en 7 en y tussen -2 en 2 . Je krijgt een periodieke grafiek.
- Bereken de coördinaten van de vier toppen van de grafiek. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x -as. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- Geef de periode, de evenwichtsstand en de amplitude van de grafiek. Rond zo nodig af op twee decimalen.

Theorie A De grafiek van $y = \sin(x)$

In de onderbouw heb je met de sinus gerekend in rechthoekige driehoeken. Daarbij had je te maken met hoeken in graden.

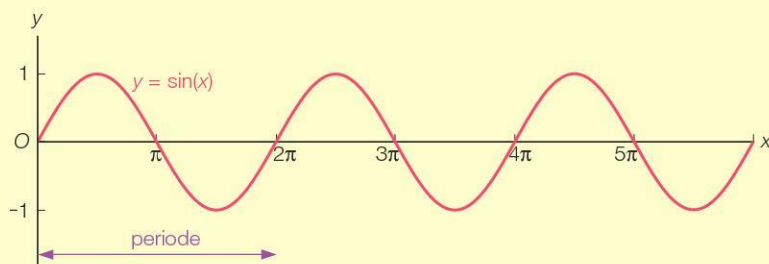
Je kunt ook de formule $y = \sin(x)$ en de bijbehorende grafiek bekijken.

Daarbij is het handiger om een andere eenheid te gebruiken voor hoeken: de *radiaal*. Zie het informatief op de volgende bladzijde.

Afspraak

Zorg er in dit hoofdstuk voor dat de GR is ingesteld op radialen.

Hieronder is de grafiek van $y = \sin(x)$ getekend. De grafiek is periodiek met **periode** 2π . De **evenwichtsstand** is 0 en de **amplitude** is 1 .



figuur 13.7

Je ziet dat de grafiek van $y = \sin(x)$

- de x -as snijdt in de punten $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(3\pi, 0)$, ...
- als hoogste punten heeft $(\frac{1}{2}\pi, 1)$, $(2\frac{1}{2}\pi, 1)$, $(4\frac{1}{2}\pi, 1)$, ...
- als laagste punten heeft $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$, $(3\frac{1}{2}\pi, -1)$, $(5\frac{1}{2}\pi, -1)$, ...

Je kunt deze punten controleren met de GR.

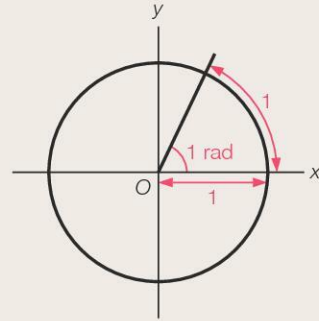
De grafiek van $y = \sin(x)$ is een standaardgrafiek.

Je mag de grafiek zonder verdere toelichting tekenen.

De radiaal

Bij de graad als hoekenheid is uitgegaan van een verdeling van een cirkel in 360 gelijke stukken. Men vermoedt dat deze verdeling afkomstig is uit de astronomie. In de Soemerische periode (ongeveer 2100 voor Chr.) verdeelden astronomen een jaar in 12 maanden van elk 30 dagen ($12 \times 30 = 360$).

Voor wetenschappelijke doeleinden is de graad geen geschikte hoekenheid. Daarom is de hoekenheid radiaal ingevoerd. De radiaal is zo gekozen, dat bij een booglengte 1 op de eenheidscirkel een draaiingshoek van 1 radiaal hoort. Zie de figuur hiernaast. En is de booglengte 2, dan is de draaiingshoek 2 radialen, afgekort 2 rad.



De eenheidscirkel is de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal 1.

Handig om te weten: π radialen = 180° , dus 1 radiaal = $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$.

02
□ ⊗ *

- a Plot in één figuur de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = a + \sin(x)$ met $a = -2$, $a = -1$, $a = 1$ en $a = 2$.
- b Hoe moet je de grafiek van $y = \sin(x)$ verschuiven om die van $y = a + \sin(x)$ te krijgen?
- c Schrijf de periode, de evenwichtsstand en de amplitude op van $y = a + \sin(x)$.

Neem in de opgaven
2, 3 en 4
 x tussen 0 en 10 en
 y tussen -4 en 4.

03
□ ⊗ *

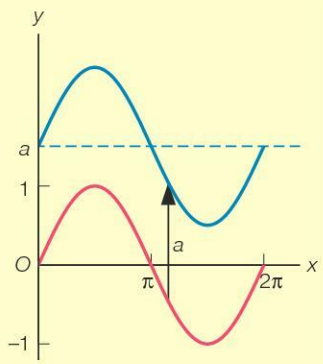
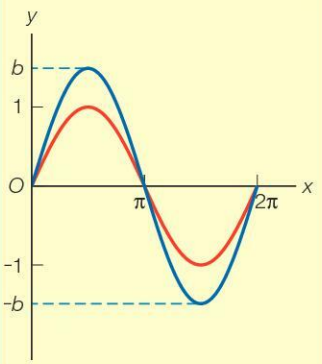
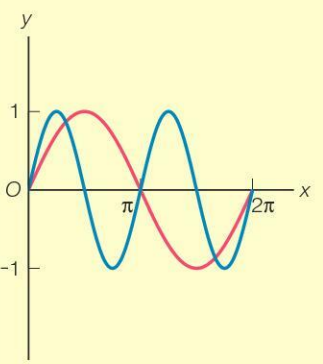
- a Plot in één figuur de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = b \sin(x)$ met $b = 2$, $b = 3$ en $b = 4$.
- b Omschrijf hoe de grafiek van $y = b \sin(x)$ ontstaat uit die van $y = \sin(x)$.
- c Geef de periode, de evenwichtsstand en de amplitude van de grafiek van $y = b \sin(x)$.

04
□ ⊗ *

- a Plot in één figuur de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \sin(2x)$.
- b Geef de periode, de evenwichtsstand en de amplitude van de grafiek van $y = \sin(2x)$.
- c Plot in een nieuwe figuur de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \sin(\frac{1}{2}x)$.
- d Geef de periode, de evenwichtsstand en de amplitude van de grafiek van $y = \sin(\frac{1}{2}x)$.
- e Geef de periode van $y = \sin(4x)$. Doe dat ook van $y = \sin(5x)$ en van $y = \sin(cx)$.

Theorie B De formule $y = a + b\sin(cx)$

Uitgaande van de grafiek van $y = \sin(x)$ kun je andere periodieke grafieken krijgen. In de vorige opgaven heb je daarvan voorbeelden gezien. In het volgende schema staan deze situaties. Hierbij is $b > 0$ en $c > 0$. Ook in de rest van het hoofdstuk nemen we $b > 0$ en $c > 0$.

$y = a + \sin(x)$	$y = b\sin(x)$	$y = \sin(cx)$
		
periode is 2π evenwichtsstand is a amplitude is 1	periode is 2π evenwichtsstand is 0 amplitude is b	periode is $\frac{2\pi}{c}$ evenwichtsstand is 0 amplitude is 1

De situaties in het schema komen vaak gecombineerd voor. Grafieken die zo ontstaan, heten **sinusoïden**.

De periode van $y = \sin(cx)$ is $\frac{2\pi}{c}$.

Je kunt in één keer de periode, de evenwichtsstand en de amplitude van bijvoorbeeld $y = 3 + 5\sin(4x)$ geven.

- Van $y = 3 + 5\sin(4x)$ is de evenwichtsstand 3,
de amplitude 5 en de periode $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
- Van $y = -2 + 3\sin(0,2\pi x)$ is de evenwichtsstand -2, de amplitude 3 en de periode $\frac{2\pi}{0,2\pi} = 10$.
- Van $y = 3\sin(\frac{1}{5}x)$ is de evenwichtsstand 0,
de amplitude 3 en de periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{5}} = 10\pi$.

$$y = a + b\sin(cx)$$

Diagram illustrating the components of the sine wave formula $y = a + b\sin(cx)$:

- a is labeled as **evenwichtsstand** (equilibrium position).
- b is labeled as **amplitude**.
- c is labeled as **periode** (period), specifically $\frac{2\pi}{c}$.

5 Geef de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.

- a** $y = 5 + \sin(x)$ **d** $y = 8 \sin(3x)$ **g** $y = 3 + 6 \sin(\frac{1}{4}x)$
b $y = 5 \sin(x)$ **e** $y = 8 + \sin(3x)$ **h** $y = 5 + 2 \sin(4\pi x)$
c $y = \sin(5x)$ **f** $y = 3 + 8 \sin(x)$ **i** $y = 7 + 2 \sin(\frac{1}{3}x)$

6 Gegeven is $y = a + b \sin(cx)$.

Voor welke a , b en c is

- a** de evenwichtsstand 100, de amplitude 8 en de periode $0,2\pi$
b de evenwichtsstand 850, de amplitude 48 en de periode 8?

$$\text{periode} = \frac{2\pi}{c}$$

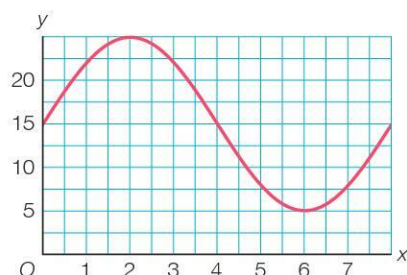
$$c = \frac{2\pi}{\text{periode}}$$

A7 Stel een formule op van een sinusöide met

amplitude = 80, evenwichtsstand = 100 en periode = 10.

A8 In figuur 13.8 zie je een sinusöide.

- a** Lees de amplitude, de evenwichtsstand en de periode af.
b Stel een formule van de grafiek op.



figuur 13.8

E9 Gegeven is de formule $h = 20 + 15 \sin(0,1t)$.

* Hierin is h in dm en t in seconden.

Zet de formule om naar de vorm $H = a + b \sin(cT)$ waarin H in meters is en T in minuten.

O10 **a** Plot in één figuur de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \sin(x - 1)$.

Neem x tussen 0 en 10 en y tussen -2 en 2 .

Hoe moet je de grafiek van $y = \sin(x)$ verschuiven om die van $y = \sin(x - 1)$ te krijgen?

- b** Hoe ontstaat de grafiek van $y = \sin(x - d)$ uit die van $y = \sin(x)$?
c Geef de periode, de evenwichtsstand en de amplitude van de grafiek van $y = \sin(x - d)$.

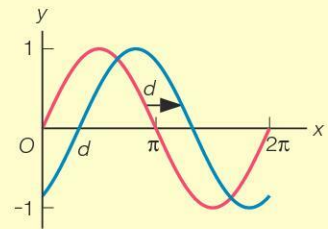
O11 Voor $0 \leq x \leq 3$ zijn gegeven de formules $y_1 = \sin(3(x - 0,73))$ en

$y_2 = \sin(3x - 0,73)$.

- a** Plot in één figuur de grafieken van y_1 en y_2 . Neem y tussen -2 en 2 .
b Bereken de coördinaten van het linkersnijpunt van de grafiek van y_1 met de x -as.
c Bereken de coördinaten van het linkersnijpunt van de grafiek van y_2 met de x -as.
d In welke formule kun je de x -coördinaat van het linkersnijpunt met de x -as direct aflezen?

Theorie C De grafiek van $y = a + b\sin(c(x - d))$

In opgave 10 is de grafiek van $y = \sin(x)$ in horizontale richting verschoven. Hierbij veranderen de periode, de evenwichtsstand en de amplitude niet. De grafiek van $y = \sin(x - d)$ gaat stijgend door de evenwichtsstand in het punt $(d, 0)$.



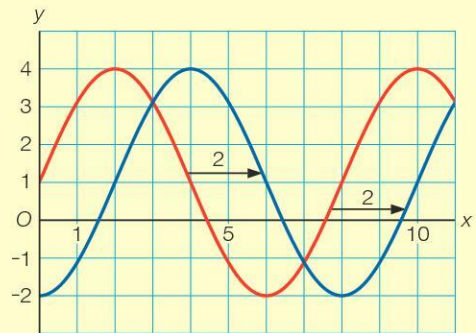
figuur 13.9 $y = \sin(x)$ (rood)
en $y = \sin(x - d)$ (blauw)

In figuur 13.10 zie je de grafieken van $y = 1 + 3\sin(\frac{1}{4}\pi x)$ en $y = 1 + 3\sin(\frac{1}{4}\pi(x - 2))$.

Beide grafieken hebben periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$,

amplitude 3 en evenwichtsstand 1. Maar het getal 2 in de tweede formule zorgt ervoor, dat de bijbehorende grafiek 2 eenheden rechts van de andere grafiek ligt. Daardoor gaat de grafiek van $y = 1 + 3\sin(\frac{1}{4}\pi(x - 2))$ stijgend door de evenwichtsstand in het punt $(2, 1)$.

De algemene formule van een sinusöide is $y = a + b\sin(c(x - d))$.



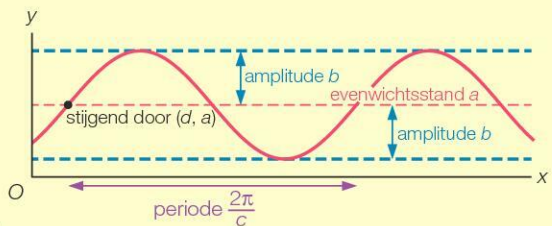
figuur 13.10 De grafieken van

$y = 1 + 3\sin(\frac{1}{4}\pi x)$ (rood) en
 $y = 1 + 3\sin(\frac{1}{4}\pi(x - 2))$ (blauw)

Kenmerken van de sinusöide

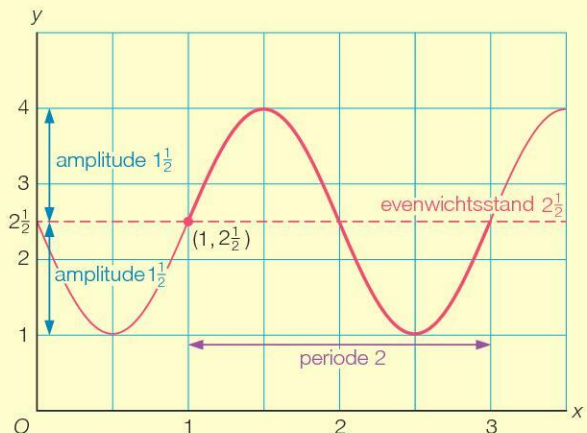
$y = a + b\sin(c(x - d))$

- de evenwichtsstand is a
- de amplitude is b
- de periode is $\frac{2\pi}{c}$
(en dus $c = \frac{2\pi}{\text{periode}}$)
- de grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand in het punt (d, a) .



Bij het tekenen van de grafiek van $y = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\sin(\pi(x - 1))$ gebruik je de kenmerken

- evenwichtsstand $= 2\frac{1}{2}$
- amplitude $= 1\frac{1}{2}$
- periode $= \frac{2\pi}{\pi} = 2$
- stijgend door evenwichtsstand in $(1, 2\frac{1}{2})$.



figuur 13.11

Voorbeeld

Teken op $[0, 5]$ de grafiek van $A = 20 + 15 \sin(\pi(t - 1\frac{1}{2}))$.

Aanpak

- 1 Vermeld de vier kenmerken:

evenwichtsstand = 20

amplitude = 15

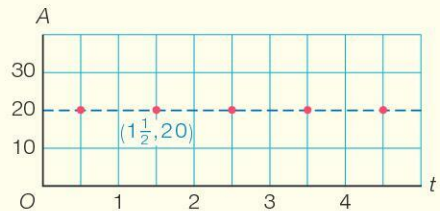
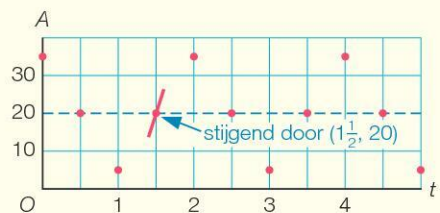
periode = $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

stijgend door $(1\frac{1}{2}, 20)$

- 2 Teken de evenwichtsstand en daarop het punt $(1\frac{1}{2}, 20)$ en de andere snijpunten met de evenwichtsstand. Omdat de periode 2 is, liggen deze punten op afstand 1 van elkaar.

- 3 Teken de hoogste en laagste punten van de grafiek. Omdat de amplitude 15 is, liggen deze punten 15 boven of 15 onder de evenwichtsstand. De punten liggen telkens midden tussen twee snijpunten met de evenwichtsstand.

- 4 Teken de grafiek.



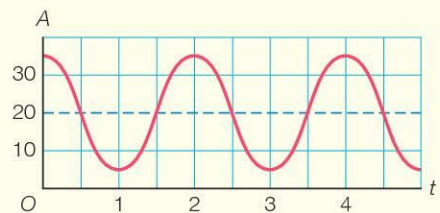
Uitwerking

evenwichtsstand = 20

amplitude = 15

periode = $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

stijgend door $(1\frac{1}{2}, 20)$



R12 In theorie B was er bij de grafiek van $y = \sin(x)$ op de horizontale as een schaalverdeling met veelvouden van π . In het voorbeeld hierboven is een normale schaalverdeling gebruikt.

Hoe kun je aan de formule van A in het voorbeeld zien dat je een normale schaalverdeling kunt gebruiken?



13 Teken op $[0, 4]$ de grafiek van $y = 5 + 2 \sin(\pi(x - \frac{1}{2}))$.



A14 a Teken op $[0, 9]$ de grafiek van $N = 20 + 12 \sin(\frac{2}{3}\pi(t - 1\frac{1}{2}))$.

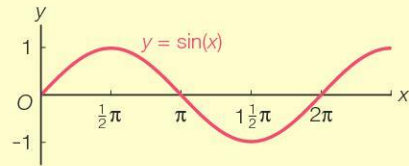
b Teken op $[0, 12]$ de grafiek van $A = 1,5 + 6 \sin(\frac{2\pi}{7}(x - 2))$.

Teken op $[0, 4]$ betekent dat je je beperkt tot x -waarden tussen 0 en 4.

Terugblik

Sinusoiden

De grafiek van $y = \sin(x)$ is een standaardgrafiek. Je mag de grafiek zonder toelichting tekenen.



$y = a + \sin(x)$	$y = b \sin(x)$	$y = \sin(cx)$	$y = \sin(x - d)$
periode is 2π evenwichtsstand is a amplitude is 1	periode is 2π evenwichtsstand is 0 amplitude is b	periode is $\frac{2\pi}{c}$ evenwichtsstand is 0 amplitude is 1	periode is 2π evenwichtsstand is 0 amplitude is 1 stijgend door evenwichtsstand in ($d, 0$)

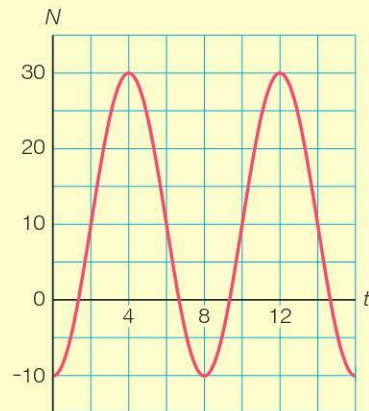
De grafiek van $y = a + b \sin(c(x - d))$ is een sinusoid. Er geldt

- de evenwichtsstand is a
- de amplitude is b
- de periode is $\frac{2\pi}{c}$
- de grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand in het punt (d, a).

Het tekenen van een sinusoid

Van $N = 10 + 20 \sin(\frac{1}{4}\pi(t - 2))$

- is de evenwichtsstand 10
 - is de amplitude 20
 - is de periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$
 - gaat de grafiek stijgend door het punt $(2, 10)$.
- In de figuur hiernaast is de grafiek van N getekend op $[0, 16]$.



13.2 Toepassingen van sinusoiden

015 Gegeven is de sinusoiden in figuur 13.12.

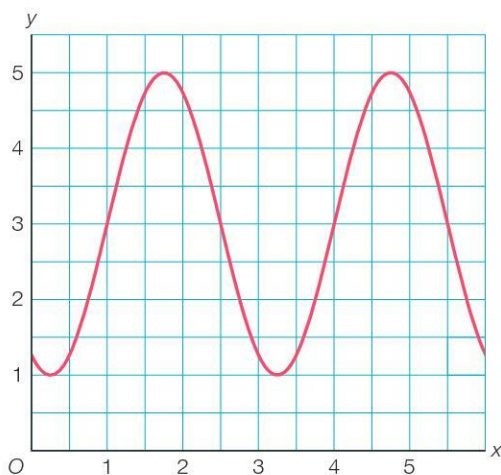


a Lees de evenwichtsstand, de amplitude en de periode af.

b De formule is van de vorm

$$y = a + b \sin(c(x - d)).$$

Geef mogelijke waarden van a , b , c en d .



figuur 13.12

Theorie A Een formule van een sinusoiden opstellen

In het voorbeeld zie je hoe je bij een sinusoiden een formule opstelt.

Let daarbij goed op de variabelen die bij de assen staan.

Voorbeeld

In figuur 13.13 zie je een sinusoiden.

Stel bij de sinusoiden een formule op van de vorm $N = a + b \sin(c(t - d))$.

Uitwerking

$$a = \frac{3\frac{1}{2} + -1\frac{1}{2}}{2} = 1$$

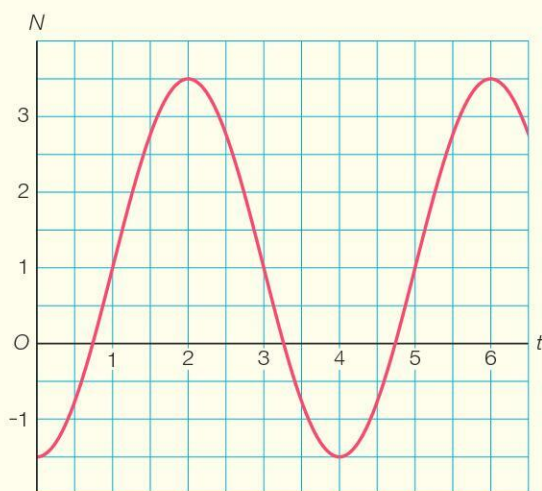
$$b = 3\frac{1}{2} - 1 = 2\frac{1}{2}$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij opvolgend $t = 1$ en $t = 5$.

Periode = $5 - 1 = 4$, dus $c = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 1$, dus $d = 1$.

Dus $N = 1 + 2\frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2}\pi(t - 1))$.



figuur 13.13

R16 Zie het voorbeeld.



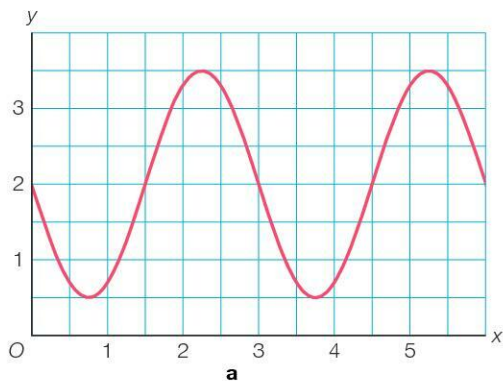
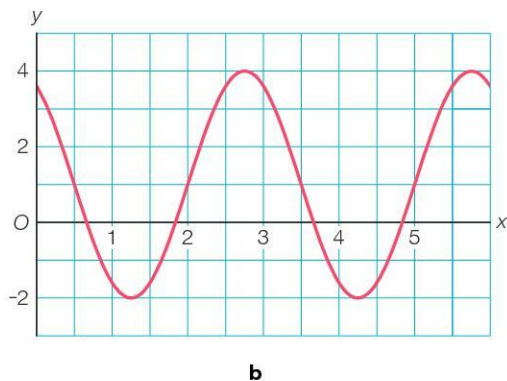
Jeroen neemt een andere waarde voor d in de formule.

Noem een andere waarde van d zodat Jeroen een formule krijgt die bij de sinusoiden in figuur 13.13 hoort.

17


Stel bij de sinusoiden in figuur 13.14 een formule op van de vorm

$$y = a + b \sin(c(x - d)).$$

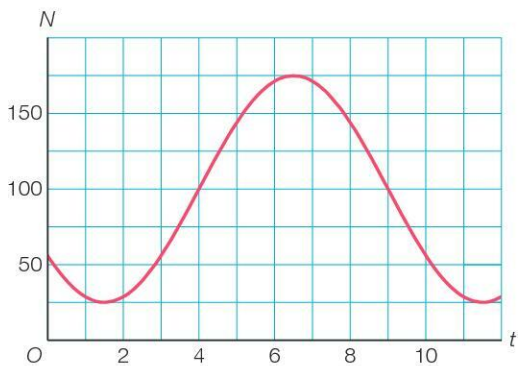


figuur 13.14

A18


In figuur 13.15 is een sinusoiden getekend.

Stel bij de sinusoiden een formule op van de vorm $N = a + b \sin(c(t - d))$.



figuur 13.15

O19


Gegeven is de formule $y = 2 + 3 \sin(\frac{1}{5}\pi(x - 1))$ met $0 \leq x \leq 10$.

- Plot de grafiek en bereken de coördinaten van het hoogste punt van de grafiek.
- Bereken y in twee decimalen voor $x = 1,8$.
- Voor welke x is $y = 3,6$? Rond af op twee decimalen.

Theorie B Berekeningen met de sinus

Bij een formule als $y = 3 + 2 \sin(\frac{1}{4}\pi(x - 1,5))$ met $0 \leq x \leq 10$ moet je de volgende vragen kunnen beantwoorden.

1 Bereken zonder GR de maximale waarde van y en de bijbehorende x .

$$y_{\max} = 3 + 2 = 5$$

$$y_{\max} = \text{evenwichtsstand} + \text{amplitude}$$

$$\text{periode} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$$

$$y_{\max} \text{ voor } x = 1,5 + \frac{1}{4} \cdot 8 = 3,5$$

y heeft een maximum een kwart periode nadat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand is gegaan.

2 Bereken zonder GR de minimale waarde van y en de bijbehorende x .

$$y_{\min} = 3 - 2 = 1$$

$$y_{\min} \text{ voor } x = 1,5 + \frac{3}{4} \cdot 8 = 7,5$$

$y_{\min}$ = evenwichtsstand – amplitude

y heeft een minimum driekwart periode nadat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand is gegaan.

3 Bereken y voor $x = 4,7$.

$$x = 4,7 \text{ geeft } y \approx 4,18$$

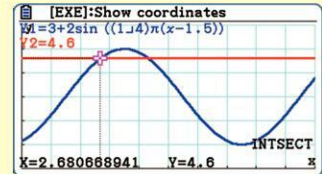
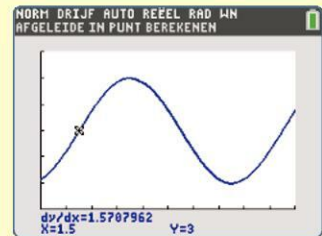
4 Voor welke x is $y = 4,6$?

$$\text{Voer in } y_1 = 3 + 2 \sin\left(\frac{1}{4}\pi(x - 1,5)\right) \text{ en } y_2 = 4,6.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 2,68$ en $x \approx 4,32$.

5 Bereken de helling van de grafiek voor $x = 5$.

$$\text{De helling is } \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5} \approx -1,45.$$



6 Bereken de maximale helling van de grafiek.

De maximale helling is

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1,5} \approx 1,57.$$

De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Dat is bij $x = 1,5$.

R20
☐ ⊗ *

Zie de theorie met de formule $y = 3 + 2 \sin\left(\frac{1}{4}\pi(x - 1,5)\right)$ met $0 \leq x \leq 10$. Voor welke waarde van x daalt de sinusoïde het snelst?

21
☐

Gegeven is de formule $N = -2 + 7 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(t - 3)\right)$ met $0 \leq t \leq 4$.

- Geef de evenwichtsstand, de periode en de coördinaten van het punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
- Bereken zonder GR de maximale waarde van N en de bijbehorende t .
- Bereken zonder GR de minimale waarde van N en de bijbehorende t .

22
☐ ⊗ *

Gegeven is de formule $y = 5 + 2 \sin\left(\frac{2}{3}\pi(x - 0,8)\right)$ met $0 \leq x \leq 5$.

- Bereken zonder GR de maximale waarde van y en de bijbehorende x .
- Bereken zonder GR de minimale waarde van y en de bijbehorende x .
- Bereken y in twee decimalen voor $x = 4,62$.
- Voor welke x is $y = 6$? Rond af op twee decimalen.
- Bereken in twee decimalen de y -coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de y -as.
- Bereken in twee decimalen de helling van de grafiek voor $x = 4$.
- Bereken in twee decimalen de maximale helling van de grafiek.

Bij 'Bereken zonder GR' mag je wel berekeningen op het basisscherm maken.

23

Gegeven is de formule $P = 25 + 6 \sin(\frac{1}{2}q - 1)$ met $0 \leq q \leq 15$.

- Bereken zonder GR de maximale waarde van P en de bijbehorende q . Rond zo nodig af op twee decimalen.
- Bereken zonder GR de minimale waarde van P en de bijbehorende q . Rond zo nodig af op twee decimalen.
- Bereken in twee decimalen voor welke q geldt $P > 30$.
- Bereken de maximale helling van de grafiek.

A24

Gegeven is de formule $N = 30,8 + 6,3 \sin(\frac{2}{15}\pi(t - 5,1))$ met t in uren en $0 \leq t \leq 15$.

- Bereken zonder GR de maximale waarde van N en de bijbehorende t .
- Bereken zonder GR de minimale waarde van N en de bijbehorende t .
- Bereken N in twee decimalen voor $t = 7,2$.
- Bereken hoeveel minuten N groter is dan 35. Rond af op gehelen.
- Bereken in twee decimalen de helling van de grafiek voor $t = 10$.
- Bereken in twee decimalen de maximale helling van de grafiek.

O25

Van de sinusöide $y = a + b \sin(c(x - d))$ zijn de punten $(1, 10)$ en $(5, 4)$ twee opeenvolgende toppen.

- Licht toe dat hieruit volgt dat $a = 7$ en $b = 3$.
- Licht toe dat $c = \frac{1}{4}\pi$.

Je hebt nu $y = 7 + 3 \sin(\frac{1}{4}\pi(x - d))$.

- Geef een mogelijke waarde van d en controleer door de sinusöide te plotten of de punten $(1, 10)$ en $(5, 4)$ inderdaad twee opeenvolgende toppen zijn.

Theorie C Sinusoïden gebruiken

De gemiddelde dagtemperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ in Napels kan worden benaderd door het model $T = a + b \sin(c(n - d))$. Hierin is n het dagnummer met $n = 1$ op 1 januari.

Gegeven is dat T maximaal is op 20 juli en dat $T_{\max} = 25^{\circ}\text{C}$.

Verder is T minimaal op 19 januari en $T_{\min} = 9^{\circ}\text{C}$.

Uit deze gegevens volgt dat $a = \frac{25 + 9}{2} = 17$ en $b = 25 - 17 = 8$.

Omdat de periode 365 dagen is, is $c = \frac{2\pi}{365}$.

De grafiek van T gaat $\frac{1}{4}$ periode voor 20 juli ($n = 201$) stijgend door de evenwichtsstand. Dat is dus $\frac{1}{4} \cdot 365 \approx 91$ dagen voor $n = 201$, dus $d = 201 - 91 = 110$.

Zo krijg je de formule $T = 17 + 8 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(n - 110)\right)$.

R26




Zie de theorie met de formule $T = 17 + 8 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(n - 110)\right)$. Hierin is n de tijd in dagen, waarbij n het dagnummer is met $n = 1$ op 1 januari. Schrijf de formule van T in de vorm $T = a + b \sin(c(t - d))$ waarin t de tijd in maanden is met $t = 0$ op 1 januari.

27



Zie de theorie met de formule $T = 17 + 8 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(n - 110)\right)$.

In de tabel hiernaast is voor een niet-schrikkeljaar bij elke datum het bijbehorende dagnummer te vinden.

- Bereken in één decimaal de gemiddelde dagtemperatuur op 1 maart en op 18 mei.
- Tussen welke data is de gemiddelde dagtemperatuur meer dan 12°C ?
- Bereken in twee decimalen de grootste snelheid waarmee de gemiddelde dagtemperatuur stijgt.

maand	dagnummer
januari	1-31
februari	32-59
maart	60-90
april	91-120
mei	121-151
juni	152-181
juli	182-212
augustus	213-243
september	244-273
oktober	274-304
november	305-334
december	335-365

28



De daglengte L in Kristiansand in Noorwegen is gegeven door de

formule $L = 11,9 + 6,1 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(n - 80)\right)$. Hierbij is de daglengte L de

tijd in uren tussen zonsopkomst en zonsondergang en n het dagnummer met $n = 1$ op 1 januari.

Geef bij de volgende vragen over de daglengte het antwoord in minuten nauwkeurig.

- Hoelang duurt de langste dag in Kristiansand? Op welke datum valt deze dag?
- Hoeveel is de langste dag in Kristiansand langer dan de kortste dag?
- Bereken de daglengte op 1 maart.
- Bereken de grootste snelheid waarmee de dagen in Kristiansand langer worden. Geef het antwoord in gehele seconden per dag.

A29



De daglengte, dat is de tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang, varieert in Nederland tussen 8 uur op 21 december en 16 uur op 21 juni.

Deze daglengte kan worden beschreven met het model

$l = a + b \sin(c(t - d))$ met l in uren en t in maanden met $t = 0$ op 21 januari.

- Bereken a , b , c en d .
- Bereken gedurende hoeveel dagen in het jaar de daglengte meer is dan 15 uur.
- Toon aan dat de daglengte op 21 maart sneller toeneemt dan op 21 februari.
- Bereken in gehele seconden per dag de snelheid waarmee de daglengte toeneemt op 1 april.

A30

- a** Van een sinusöide zijn de punten (3, 12) en (18, 12) twee opeenvolgende hoogste punten, die op afstand 4 van de evenwichtsstand liggen.
 Stel een formule op van deze sinusöide.
- b** Van een sinusöide is de evenwichtsstand 650 en de periode 48.
 Het punt (16, 812) is een top.
 Stel een formule op van deze sinusöide.
- c** Van een sinusöide zijn de punten (2, 250) en (26, 110) twee opeenvolgende toppen.
 Stel een formule op van deze sinusöide.

A31

Men wil een voetgangersbrug ontwerpen over een gracht met een breedte van 10 meter. Zie figuur 13.16.

Er is een assenstelsel aangebracht waarbij de oorsprong aan het begin van de brug is genomen en de x -as samenvalt met de kade.

Het wegdek van de brug kan worden beschreven door een formule van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$.

Het hoogste punt van het wegdek zit 1 meter boven het wateroppervlak en het water staat 30 cm onder de kade.

Voor een brug waarbij de gracht nog juist wordt overspannen, geldt

$y = 0,35 + 0,35 \sin(\frac{1}{5}\pi(x - 2,5))$ met x en y in meters.

- a** Licht de formule $y = 0,35 + 0,35 \sin(\frac{1}{5}\pi(x - 2,5))$ toe.
b Toon aan dat de maximale helling van het wegdek 0,22 is.

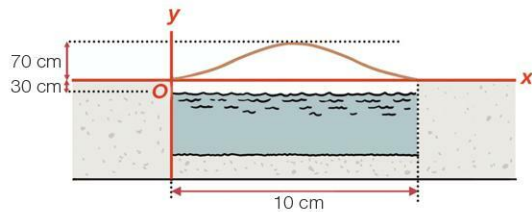
De helling van het wegdek mag maximaal 0,15 zijn.

Om dit te bereiken, maakt men de brug zo, dat de overspanning van de gehele brug meer is dan 10 meter.

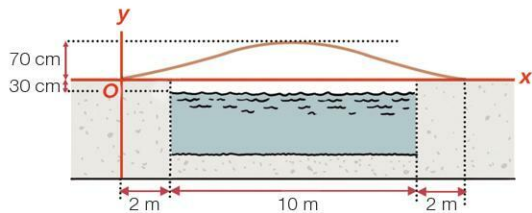
Het hoogste punt van het wegdek blijft hierbij 1 meter boven het wateroppervlak in het midden van de gracht.

Alex beweert dat de brug dan 2 meter vanaf de kant kan beginnen.

- c** Onderzoek of Alex gelijk heeft.



figuur 13.16



figuur 13.17



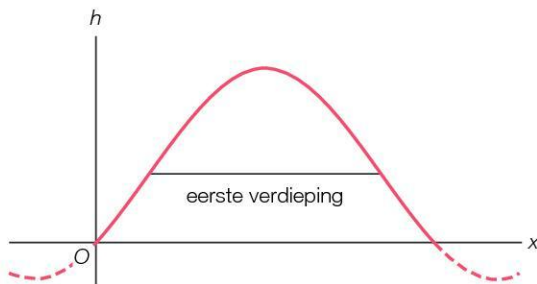
A32

La Maison Vague (Het Golfhuis) van de Franse architect Patrick Nadeau is een huis in de vorm van een golf. Het heeft een groen dak, dat is begroeid met planten en gras. Het huis staat bij Reims en maakt deel uit van een project met 63 experimentele huizen.

In figuur 13.19 zie je een model van het huis. De x -as ligt op de begane grond. Hierbij kan een formule worden opgesteld van de vorm $h = a + b \sin(c(x - d))$ met x en h in meters.



figuur 13.18



figuur 13.19

De eerste verdieping van het huis is 7,5 meter breed en ligt 2,7 meter boven de grond, precies op de hoogte waar de helling van de sinusoidale het grootst is. Het hoogste punt van het huis bevindt zich 6,8 meter boven de grond.

- Bereken de breedte van het huis op de grond. Rond af op gehele meters.
- Boven de eerste verdieping komt nog een plafond. Dit plafond is 4,5 meter breed.
Bereken hoe hoog boven de eerste verdieping het plafond zich bevindt. Rond af op dm.

A33

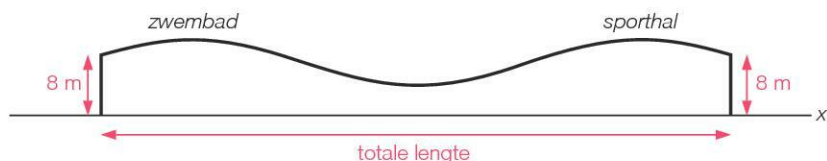
Op de foto zie je een zwembad met sporthal, samen onder één golvend dak. Het golvende dak bereikt boven het zwembad dezelfde hoogte als boven de sporthal. In figuur 13.21 op de volgende bladzijde is een schematisch vooraanzicht getekend. In dit vooraanzicht heeft de rand van het dak de vorm van een sinusoidale met als formule $h = 3 \sin\left(\frac{\pi}{30}x\right) + 7$.



figuur 13.20

De hoogte h en de lengte x zijn allebei in meters. De lengte x wordt van links naar rechts over de grond gemeten langs de voorkant van het gebouw, vanaf de oorsprong die links van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw ligt.

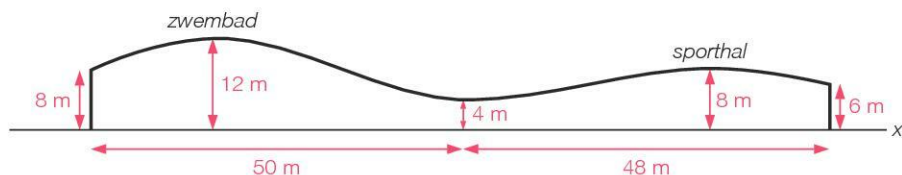
Aan beide uiteinden van het gebouw is het dak 8 meter hoog.



figuur 13.21

- a Bereken de minimale en de maximale hoogte van het dak.
- b Bereken de totale lengte van het gebouw in meters nauwkeurig.

Voordat het zwembad met sporthal werd gebouwd, heeft een architect een ontwerp gemaakt van het gebouw. In het eerste ontwerp dat de architect had gemaakt, was het dak boven het zwembad hoger dan het dak boven de sporthal. Ook de lengte van de voorkant van het gebouw in dit ontwerp was anders dan die van het uiteindelijke gebouw. In figuur 13.22 staan de afmetingen van het gebouw volgens dit ontwerp.



figuur 13.22

Het gedeelte van het dak dat boven het zwembad ligt, heeft in het vooraanzicht de vorm van een sinusoïde. Dit geldt ook voor het gedeelte van het dak boven de sporthal.

De twee sinusoïden gaan vloeiend in elkaar over op de grens tussen zwembad en sporthal op een hoogte van 4 meter. Op die grens is de hoogte van het dak minimaal. Boven de sporthal heeft het dak een maximale hoogte van 8 meter.

Met behulp van deze gegevens kun je een formule opstellen die hoort bij het vooraanzicht van het gedeelte van het dak boven de sporthal volgens het eerste ontwerp.

- c Stel deze formule op. Je mag zelf de oorsprong kiezen. Licht je werkwijze toe.

E34 Zie opgave 33c.

Stel de formule op die hoort bij het gedeelte van het dak boven het zwembad volgens het eerste ontwerp. Neem hetzelfde assenstelsel (dus ook dezelfde oorsprong) als je bij opgave 33c hebt genomen. Licht je werkwijze toe.

Terugblik

Een formule van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$ opstellen

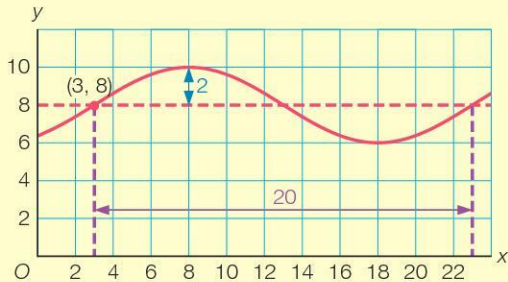
De sinusoiden in de figuur hiernaast heeft evenwichtsstand 8, amplitude 2, periode 20 en gaat stijgend door de evenwichtsstand in het punt (3, 8).

Dus $a = 8$, $b = 2$, $c = \frac{2\pi}{20} = 0,1\pi$ en

$d = 3$.

De formule is dus

$$y = 8 + 2 \sin((0,1\pi(x - 3))).$$



Berekeningen met de sinus

Bij de formule $N = 18 + 5 \sin(\frac{4}{15}\pi(t - 4))$ met $0 \leq t \leq 8$ geldt:

de evenwichtsstand is 18, de amplitude is 5, de periode is $\frac{2\pi}{\frac{4}{15}\pi} = 7\frac{1}{2}$ en

de grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 4$. Hieruit volgt

- N is maximaal $18 + 5 = 23$ voor $t = 4 + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 4 + \frac{1}{4} \cdot 7\frac{1}{2} = 5\frac{7}{8}$
- N is minimaal $18 - 5 = 13$ voor $t = 4 - \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 4 - \frac{1}{4} \cdot 7\frac{1}{2} = 2\frac{1}{8}$
- de helling van de grafiek is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, dus voor $t = 4$, en de maximale helling is

$$\left[\frac{dN}{dt} \right]_{t=4} \approx 4,19.$$

Sinusoiden gebruiken

De temperatuur van het zeewater langs de Nederlandse kust is te beschrijven met een model van de vorm $T = a + b \sin(c(t - d))$ met T in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari.

De laagste temperatuur van het zeewater is $4,5^{\circ}\text{C}$ halverwege februari.

De hoogste temperatuur van het zeewater is $20,0^{\circ}\text{C}$ halverwege augustus.

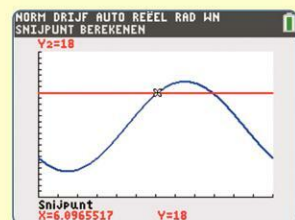
Zo krijg je $a = \frac{20,0 + 4,5}{2} = 12,25$, $b = 20,0 - 12,25 = 7,75$,

$c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$ en $d = 1,5 + \frac{1}{4} \cdot 12 = 1,5 + 3 = 4,5$.

Dus $T = 12,25 + 7,75 \sin(\frac{1}{6}\pi(t - 4,5))$.

Om te berekenen hoeveel dagen volgens dit model de temperatuur van het zeewater meer is dan 18°C , voer je in $y_1 = 12,25 + 7,75 \sin(\frac{1}{6}\pi(x - 4,5))$ en $y_2 = 18$ en gebruik je de optie snijpunt. Je krijgt $x = 6,09\dots$ en $x = 8,90\dots$

Dus de temperatuur is meer dan 18°C gedurende $8,90\dots - 6,09\dots = 2,80\dots$ maanden ≈ 84 dagen.



13.3 Formules herschrijven



- 035 a** Je kunt $\frac{5}{x} \cdot \frac{6}{y}$ als één breuk schrijven.

Welke van de volgende uitkomsten is juist?

I $\frac{30}{xy}$

II $\frac{30}{x+y}$

III $\frac{30xy}{x+y}$

IV $\frac{6x+5y}{xy}$

- b** Je kunt $\frac{5}{x} + \frac{6}{y}$ als één breuk schrijven.

Welke van de volgende uitkomsten is juist?

I $\frac{11}{x+y}$

II $\frac{11}{xy}$

III $\frac{6x+5y}{x+y}$

IV $\frac{6x+5y}{xy}$

Theorie A Breuken herleiden

Voor het rekenen met breuken heb je een aantal regels geleerd.

Bij *optellen en aftrekken van breuken* maak je de breuken eerst **gelijknamig**.

Zo is $\frac{10}{x} - \frac{7}{2x} = \frac{20}{2x} - \frac{7}{2x} = \frac{20-7}{2x} = \frac{13}{2x}$ en

$$\frac{3}{x-1} - x = \frac{3}{x-1} - \frac{x}{1} = \frac{3}{x-1} - \frac{x(x-1)}{x-1} = \frac{3-x(x-1)}{x-1} = \frac{3-x^2+x}{x-1} = \frac{-x^2+x+3}{x-1}.$$

Bij *vermenigvuldigen van breuken* gebruik je

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}.$$

Bij het als één breuk schrijven van $\frac{3}{a} \left(2 - \frac{5}{b} \right)$ krijg je

$$\frac{3}{a} \left(2 - \frac{5}{b} \right) = \frac{3}{a} \cdot 2 - \frac{3}{a} \cdot \frac{5}{b} = \frac{6}{a} - \frac{15}{ab} = \frac{6b}{ab} - \frac{15}{ab} = \frac{6b-15}{ab}.$$

Je ziet dat bij het vermenigvuldigen van een breuk met een getal, je alleen de teller hoeft te vermenigvuldigen.

Bij *delen door een breuk* gebruik je de regel ‘delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde’.

Bij $\frac{y-2}{x-1} : \frac{y}{5}$ krijg je

$$\frac{y-2}{x-1} : \frac{y}{5} = \frac{y-2}{x-1} \cdot \frac{5}{y} = \frac{(y-2) \cdot 5}{(x-1) \cdot y} = \frac{5y-10}{y(x-1)}.$$

Kies de gemeenschappelijke noemer zo eenvoudig mogelijk.

In de teller van een breuk werk je haakjes weg.
In de noemer mag je de haakjes laten staan.

Als je gebroken vormen moet herleiden, dan vereenvoudig je de breuk zo ver mogelijk.

De breuk $\frac{6x(x-4)}{x(x-3)}$ vereenvoudig je tot $\frac{6(x-4)}{x-3} = \frac{6x-24}{x-3}$.

In de formule $y = 18 + \frac{\left(\frac{120}{x}\right)}{5}$ staat een breuk in de teller.

Om deze breuk weg te werken, vermenigvuldig je de teller en noemer van $\frac{\left(\frac{120}{x}\right)}{5}$ met x . Je krijgt $y = 18 + \frac{\left(\frac{120}{x}\right)}{5} = 18 + \frac{\left(\frac{120}{x}\right) \cdot x}{5 \cdot x} = 18 + \frac{120}{5x} = 18 + \frac{24}{x}$.

Dus de formule $y = 18 + \frac{\left(\frac{120}{x}\right)}{5}$ is te herleiden tot $y = 18 + \frac{24}{x}$.

Bij de formule $A = \frac{x^2 + 3x + 8}{2x}$ kun je **uitdelen**. Het uitdelen van $2x$ gaat als volgt.

$$A = \frac{x^2 + 3x + 8}{2x} = \frac{x^2}{2x} + \frac{3x}{2x} + \frac{8}{2x} = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} + \frac{4}{x}$$

Voorbeeld

Toon aan dat de formule $T = \frac{600a}{5b + \frac{a^2}{3b}}$ te schrijven is als $T = \frac{1800ab}{a^2 + 15b^2}$.

Uitwerking

$$T = \frac{600a}{5b + \frac{a^2}{3b}} = \frac{600a \cdot 3b}{\left(5b + \frac{a^2}{3b}\right) \cdot 3b} = \frac{1800ab}{15b^2 + \frac{a^2}{3b} \cdot 3b} = \frac{1800ab}{15b^2 + a^2}, \text{ dus } T = \frac{1800ab}{a^2 + 15b^2}$$

Vermenigvuldig teller en noemer van de grote breuk met $3b$.

$\frac{\text{teller}}{\text{noemer}} \times \text{noemer} = \text{teller}$



Gegeven is de formule $y = \frac{x}{\left(\frac{200}{x^2}\right)}$.

- In de theorie staat dat je bij delen door een breuk kunt vermenigvuldigen met het omgekeerde.
Gebruik dit om de breuk in de noemer weg te werken.
- Laat zien dat je het antwoord van vraag a ook kunt vinden door zowel de teller x als de noemer $\frac{200}{x^2}$ met x^2 te vermenigvuldigen.
- Darija zegt: 'Als je de teller en noemer vermenigvuldigt met x^2 , dan vermenigvuldigt je de breuk eigenlijk met 1.'
Leg uit wat zij hiermee bedoelt.

37 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk en herleid.



a $A = \frac{3}{x} \cdot \frac{5}{y}$

c $N = \frac{500}{a} - 70$

e $P = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}$

b $y = 5 + \frac{3}{x-2}$

d $D = \frac{350}{x} \left(1 - \frac{2}{x}\right)$

f $C = \frac{6000}{\left(\frac{2x}{x-4}\right)}$

38 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk en herleid.



a $N = \frac{100}{a} + \frac{200}{b}$

c $y = \frac{0,5}{x+3} - 0,2x$

e $E = \frac{150}{x} : \frac{x-4}{x}$

b $B = \frac{3}{2x} \cdot \frac{x^3}{5y}$

d $P = \frac{380}{t^2} - \frac{40}{t}$

f $F = 8x \left(3 + \frac{5}{x^2}\right)$

39 Werk de breuken in de teller en/of noemer weg.



a $\frac{15 + \frac{3}{x}}{x}$

c $\frac{\left(\frac{50}{x}\right)}{10}$

e $p + 25 \cdot \frac{\left(\frac{100}{p}\right)}{5}$

b $\frac{20a}{b + \frac{a^2}{2b}}$

d $\frac{50}{\left(\frac{10}{t}\right)}$

f $\frac{3 + \frac{2}{x}}{7 - \frac{1}{x}}$

40 Deel uit.



a $A = \frac{5x^2 + 4x + 3}{x}$

b $T = \frac{3x^2 + 6x + 180}{4x}$

c $y = \frac{5a^2 + 10a}{2a^2}$

A41 **a** Schrijf de formule $A = 18 \cdot \frac{\left(\frac{500}{x}\right)}{10} + 25x$ in de vorm $A = \frac{p}{x} + qx$.



b Toon aan dat de formule $T = \frac{50a}{\frac{a^2}{5b} + 2b}$ te schrijven is als $T = \frac{250ab}{a^2 + 10b^2}$.

c De formule $L = \left(21 + \frac{180}{\frac{a}{b} \cdot 20}\right) \cdot a$ kan worden geschreven in de vorm

$$L = pa + qb.$$

Geef de waarden van p en q .

d Deel $2t$ uit bij de formule $N = \frac{2t^2 - 5t + 50}{2t}$.

42

*

- a Schrijf het rechterlid van de formule $A = 5 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}$ als één breuk.
- b Schrijf het rechterlid van de formule $B = \frac{6}{x} \cdot \frac{5}{x+y} : \frac{4}{x+y}$ als één breuk en zo eenvoudig mogelijk.
- c Deel $36x^5$ uit bij de formule $C = \frac{12x^7 + 6x^5 + 18x^3}{36x^5}$.

043

□ ⊗ *

- a Maak x vrij bij de formule $y = 4x - 15$.
- b Druk p uit in Q bij de formule $Q = 5\sqrt{2p - 3}$.
- c Schrijf de formule $y = 50x^{1,25}$ in de vorm $x = ay^b$. Rond a af op drie decimalen.
- d Gegeven is de formule $A = 5 - \frac{12}{B+1}$.
Schrijf B als functie van A .
- e Maak t vrij bij de formule $N = \frac{t+2}{t+4}$.

Theorie B Variabelen vrijmaken

Je hebt geleerd hoe je variabelen vrijmaakt bij lineaire formules, wortelformules, machtsformules en gebroken formules.

In opgave 43 heb je kunnen nagaan of je dit beheerst. In de voorbeelden zie je nog eens hoe het vrijmaken van variabelen bij wortelformules, machtsformules en gebroken formules gaat. Zoals je weet komen de begrippen 'vrijmaken', 'uitdrukken in' en 'schrijven als functie van' op hetzelfde neer.

Bij het vrijmaken van variabelen is het belangrijk om stap voor stap te werken en goed te kijken of er haakjes nodig zijn.

Voorbeeld

Maak x vrij bij de formule $y = 3\sqrt{4x-1}$.

Uitwerking

$$y = 3\sqrt{4x-1}$$

$$3\sqrt{4x-1} = y$$

$$\sqrt{4x-1} = \frac{1}{3}y$$

$$4x-1 = \left(\frac{1}{3}y\right)^2$$

$$4x = \frac{1}{9}y^2 + 1$$

$$x = \frac{1}{36}y^2 + \frac{1}{4}$$

x vrijmaken, dus linker- en rechterlid wisselen.

Deel beide leden door 3.

Gebruik $\sqrt{A} = B$ geeft $A = B^2$.

$$\left(\frac{1}{3}y\right)^2 = \frac{1}{3}y \cdot \frac{1}{3}y = \frac{1}{9}y^2$$

Deel beide leden door 4.

Voorbeeld

- a** Druk t uit in K bij $K = 64(2t - 1)^3$.
b Schrijf de formule $y = 24x^{-1,2}$ in de vorm $x = ay^b$. Rond a af op één decimaal en b op twee decimalen.

Uitwerking

- a** $K = 64(2t - 1)^3$ t vrijmaken, dus linker- en rechterlid wisselen.
 $64(2t - 1)^3 = K$ Deel beide leden door 64.
 $(2t - 1)^3 = \frac{1}{64}K$ Gebruik $A^3 = B$ geeft $A = \sqrt[3]{B}$.
 $2t - 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{64}K}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{64}K} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} \cdot \sqrt[3]{K} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{K}$
 $2t = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{K} + 1$ Deel beide leden door 2.
 $t = \frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{K} + \frac{1}{2}$
- b** $y = 24x^{-1,2}$ x vrijmaken, dus linker- en rechterlid wisselen.
 $24x^{-1,2} = y$ Deel beide leden door 24.
 $x^{-1,2} = \frac{1}{24}y$ Gebruik $A^p = B$ geeft $A = B^{\frac{1}{p}}$.
 $x = (\frac{1}{24}y)^{-\frac{1}{1,2}}$ Gebruik $(ab)^p = a^p \cdot b^p$.
 $x = (\frac{1}{24})^{-\frac{1}{1,2}} \cdot y^{\frac{1}{1,2}}$ Bereken $(\frac{1}{24})^{-\frac{1}{1,2}}$ en $\frac{1}{1,2}$.
 $x \approx 14,1 \cdot y^{-0,83}$
Dus $x = 14,1y^{-0,83}$.

Je hebt in de onderbouw geleerd dat je een vergelijking als $\frac{5}{x+3} = \frac{2}{3}$

kunt oplossen met **kruislings vermenigvuldigen**. Je krijgt

$$2 \cdot (x + 3) = 5 \cdot 3, \text{ enzovoort.}$$

Je gebruikt ook het kruislings vermenigvuldigen bij het vrijmaken van p

in de formule $\frac{5q}{p+3} = \frac{2}{3}$.

Je krijgt $2 \cdot (p + 3) = 3 \cdot 5q$

$$2p + 6 = 15q$$

$$2p = 15q - 6$$

$$p = 7\frac{1}{2}q - 3$$

Kruislings vermenigvuldigen

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ geeft } AD = BC$$

Voorbeeld

a Maak t vrij bij de formule $N = 10 + \frac{5}{2t+3}$.

b Gegeven is de formule $F = \frac{2a-3}{3a+4}$.

Schrijf a als functie van F .

c Gegeven is $\frac{2}{y+4} = \frac{3}{x-1}$.

Maak y vrij.

Uitwerking

a $N = 10 + \frac{5}{2t+3}$

$$N - 10 = \frac{5}{2t+3}$$

$$2t+3 = \frac{5}{N-10}$$

$$2t = \frac{5}{N-10} - 3$$

$$t = \frac{5}{2N-20} - 1\frac{1}{2}$$

b $F = \frac{2a-3}{3a+4}$

$$F(3a+4) = 2a-3$$

$$3aF + 4F = 2a-3$$

$$3aF - 2a = -4F - 3$$

$$a(3F-2) = -4F-3$$

$$a = \frac{-4F-3}{3F-2}$$

c $\frac{2}{y+4} = \frac{3}{x-1}$

$$3(y+4) = 2(x-1)$$

$$3y+12 = 2x-2$$

$$3y = 2x-14$$

$$y = \frac{2}{3}x - 4\frac{2}{3}$$

t vrijmaken, dus zet de term $\frac{5}{2t+3}$ apart.

Gebruik de wisseleigenschap: uit $C = \frac{A}{B}$ volgt $B = \frac{A}{C}$.

Breng 3 naar het rechterlid.

Deel beide leden door 2.

Vermenigvuldig beide leden met $3a+4$.

Werk de haakjes weg.

a vrijmaken, dus alle termen met a naar links.

Breng a buiten haakjes.

Deel beide leden door $3F-2$.

Kruislings vermenigvuldigen.

Werk de haakjes weg.

Breng 12 naar het rechterlid.

Deel beide leden door 3.

44



Druk x uit in y . Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $y = 4(x-1) + 6$

b $5x - 3y = 20$

c $y = \frac{1}{2}\sqrt{6x+15}$

d $y = 125(4x-1)^3$

e $y = 0,2x^{1,6}$

f $y = 5x^{-1,25}$

R45
□ ⊗ *

Zie a van het voorbeeld op de vorige bladzijde.

Uit $2t = \frac{5}{N-10} - 3$ volgt $t = \frac{5}{2N-20} - 1\frac{1}{2}$.

- a** Wat volgt uit $2t = \frac{6}{N-10} - 3$? Vereenvoudig zo ver mogelijk.
- b** Schrijf het rechterlid van $t = \frac{5}{2N-20} - 1\frac{1}{2}$ als één breuk.

Zie b van het voorbeeld op de vorige bladzijde.

c Waarom heb je hier niets aan de wisseleigenschap?

d Dirk heeft als eerste stap

$$F = \frac{2a-3}{3a+4} \text{ geeft } 2a-3 = F(3a+4).$$

Geef de verdere uitwerking van Dirk.

A46
□ ⊗ *

a Druk p uit in Q als gegeven is dat $Q = \frac{1-2p}{3p-5}$.

b Gegeven is de formule $N = 6 - \frac{2}{t+1}$.

De formule is te schrijven in de vorm $t = \frac{N+a}{bN+c}$.

Bereken a , b en c .

c Toon aan dat de formule $\frac{4A}{A+B} = 3 - A$ te herleiden is tot $B = \frac{A^2+A}{3-A}$.

d Maak v vrij als gegeven is dat $\frac{3}{v-2} = \frac{5}{b-6}$.

47
*

a De formule $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ is te herleiden tot $a = \frac{bc}{c-b}$.

Toon dit aan.

b Druk x uit in y bij de formule $y = \frac{15}{\sqrt{2x+5}}$.

c Schrijf de formule $y = \frac{x^2}{5x^{3,7}}$ in de vorm $x = ay^b$. Rond a en b af op drie decimalen.

O48
□ ⊗ *

Gegeven zijn de formules $N = 3p + 4q - 5$ en $q = 2p - 3$.

Om N uit te drukken in q maak je eerst p vrij bij de formule $q = 2p - 3$.

Je krijgt $p = \frac{1}{2}q + 1\frac{1}{2}$.

a Licht toe hoe uit $q = 2p - 3$ volgt $p = \frac{1}{2}q + 1\frac{1}{2}$.

De formules $N = 3p + 4q - 5$ en $p = \frac{1}{2}q + 1\frac{1}{2}$ zijn te combineren tot de formule $N = 5\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}$.

b Toon dit aan.

Theorie C Variabelen vrijmaken en formules combineren

De formules $K = 18 + 2p + 3q$ en $q = 5p + 30$ zijn te combineren tot de vorm $K = aq + b$.

Daartoe maak je eerst p vrij bij de formule $q = 5p + 30$.

$q = 5p + 30$ geeft $5p = q - 30$, dus $p = \frac{1}{5}q - 6$.

$$\left. \begin{array}{l} K = 18 + 2p + 3q \\ p = \frac{1}{5}q - 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} K = 18 + 2(\frac{1}{5}q - 6) + 3q \\ K = 18 + \frac{2}{5}q - 12 + 3q \\ K = 3\frac{2}{5}q + 6 \end{array}$$

Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $A = 8s + 3t + 850$ en $2s - 5t = 40$.

a Schrijf de formule van A in de vorm $A = at + b$.

b Neem $A = 2321$ en bereken t en s .

Uitwerking

a Maak eerst s vrij bij $2s - 5t = 40$.

$$2s - 5t = 40$$

$$2s = 5t + 40$$

$$s = 2\frac{1}{2}t + 20$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 8s + 3t + 850 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 8(2\frac{1}{2}t + 20) + 3t + 850 \\ A = 20t + 160 + 3t + 850 \\ A = 23t + 1010 \end{array}$$

b $23t + 1010 = 2321$

$$23t = 1311$$

$$t = 57$$

$$t = 57 \text{ geeft } s = 2\frac{1}{2} \cdot 57 + 20 = 162\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } t = 57 \text{ en } s = 162\frac{1}{2}.$$

Om A uit te drukken in t , moet in de formule $A = 8s + 3t + 850$ de variabele s worden vervangen door een formule waarbij s is uitgedrukt in t .

49



a Combineer de formules $T = 3r + 6s + 80$ en $r + 8s = 100$ tot de vorm

$$T = as + b.$$

b Combineer de formules $C = 2a - 3b + 64$ en $5a - 8b = 160$ tot de vorm $C = ma + n$.

50



Gegeven zijn de formules $Q = 5m - n + 125$ en $3m + 5n = 12$.

a Schrijf de formule van Q in de vorm $Q = am + b$.

b Neem $Q = 201$ en bereken m en n .

A51
□ ⊗ *

- a** Gegeven zijn de formules $A = 2t + 5p + 9$ en $t = -\frac{1}{3}p + 3\frac{2}{3}$.
De formule van A is te schrijven in de vorm $A = at + b$.
Bereken a en b .
- b** De formules $B = 5xy + 20$ en $3x - 2y = 6$ zijn te combineren tot de vorm $B = ax^2 + bx + c$.
Bereken a , b en c .

A52
□ ⊗ *

- a** Gegeven zijn de formules $N = \frac{5x}{8}(16y - 4\frac{4}{5}z)$, $y = 2x - 1$ en $z = 6x - 1$.
De formule van N is te schrijven in de vorm $N = ax^2 + bx$.
Bereken a en b .
- b** De formules $P = \frac{18x^2 - 6}{3x} + \frac{y^2 + 2}{2y}$ en $xy = 2$ zijn te combineren tot de vorm $P = ax + \frac{b}{x}$.
Bereken a en b .

A53
□ ⊗ *

Een groothandel wil de klanten in een gebied vanuit een aantal magazijnen bevoorraden. Daartoe wordt het gebied onderverdeeld in een aantal even grote deelgebieden met elk een eigen magazijn. Hebben de deelgebieden een grote oppervlakte, dan krijgt de groothandel te maken met hoge afleveringskosten, maar met lage opslagkosten. De totale maandelijkse kosten per deelgebied zijn te berekenen met de formule

$K = \frac{1200}{x} + 2,5\sqrt{x} + 30$. Hierin is x de oppervlakte in km^2 van het deelgebied en zijn K de kosten in duizenden euro's.

- a** Bij een toename van de oppervlakte per deelgebied van 20 km^2 naar 40 km^2 nemen de kosten af.
Met hoeveel procent?
- b** Bereken bij welke oppervlakte per deelgebied de kosten minimaal zijn. Rond af op gehele km^2 .

De oppervlakte van de totaal te bevoorraden deelgebieden samen is 6000 km^2 . Het aantal magazijnen n is te berekenen met de formule

$$n = \frac{6000}{x}.$$

De formules $K = \frac{1200}{x} + 2,5\sqrt{x} + 30$ en $n = \frac{6000}{x}$ zijn te combineren tot de vorm $K = an + \frac{b}{\sqrt{n}} + 30$.

- c** Bereken a en b . Rond b af op gehelen.

Terugblik

Breuken herleiden

In de formule $T = 5a + \frac{18a}{8 + \frac{3}{a}}$ werk je de breuk $\frac{3}{a}$ weg door de teller en de noemer van $\frac{18a}{8 + \frac{3}{a}}$ met a te vermenigvuldigen.

$$\text{Je krijgt } T = 5a + \frac{18a}{8 + \frac{3}{a}} = 5a + \frac{18a \cdot a}{(8 + \frac{3}{a}) \cdot a} = 5a + \frac{18a^2}{8a + 3}.$$

Zo nodig herleid je de vorm in het rechterlid tot één breuk.

$$T = 5a + \frac{18a^2}{8a + 3} = \frac{5a(8a + 3)}{8a + 3} + \frac{18a^2}{8a + 3} = \frac{40a^2 + 15a + 18a^2}{8a + 3} = \frac{58a^2 + 15a}{8a + 3}$$

Bij de formule $K = \frac{5q^2 + 8q + 16}{2q}$ kun je $2q$ uitdelen.

$$\text{Je krijgt } K = \frac{5q^2 + 8q + 16}{2q} = \frac{5q^2}{2q} + \frac{8q}{2q} + \frac{16}{2q} = 2\frac{1}{2}q + 4 + \frac{8}{q}.$$

Variabelen vrijmaken

Bij het vrijmaken van B in de formule $A = \frac{1}{6}\sqrt{3B + 12}$ krijg je

$$\begin{aligned}\sqrt{3B + 12} &= 6A \\ 3B + 12 &= 36A^2 \\ 3B &= 36A^2 - 12 \\ B &= 12A^2 - 4\end{aligned}$$

Bij het vrijmaken van D in de formule $C = 25D^{1,5}$ krijg je $D^{1,5} = 0,04C$ geeft $D = (0,04C)^{\frac{1}{1,5}} = 0,04^{\frac{1}{1,5}} \cdot C^{\frac{1}{1,5}} \approx 0,117C^{\frac{2}{3}}$. Dus $D = 0,117C^{\frac{2}{3}}$.

Bij het vrijmaken van p in de formule $\frac{q+3}{2p} = \frac{3}{q+4}$ gebruik je kruislings

vermenigvuldigen. Je krijgt $2p \cdot 3 = (q+3)(q+4)$

$$6p = q^2 + 7q + 12$$

$$p = \frac{1}{6}q^2 + 1\frac{1}{6}q + 2$$

Variabelen vrijmaken en formules combineren

De formules $D = 5x + 3y + 30$ en $3x - 2y = 28$ zijn te combineren tot de vorm $D = ax + b$.

Eerst maak je y vrij bij de formule $3x - 2y = 28$.

Je krijgt $-2y = -3x + 28$, dus $y = 1\frac{1}{2}x - 14$.

$$\left. \begin{array}{l} D = 5x + 3y + 30 \\ y = 1\frac{1}{2}x - 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} D = 5x + 3(1\frac{1}{2}x - 14) + 30 \\ D = 5x + 4\frac{1}{2}x - 42 + 30 \\ D = 9\frac{1}{2}x - 12 \end{array}$$

13.4 Omvormen van formules met exponenten en logaritmen

054 Gegeven is de formule $\log(N) = 2t - 3$.
Maak t vrij.

Theorie A Variabelen vrijmaken bij formules met exponenten en logaritmen

Om bij de formule $N = 2 \cdot \log(t) - 3$ de variabele t vrij te maken, ga je als volgt te werk.

$$N = 2 \cdot \log(t) - 3$$

$$2 \cdot \log(t) = N + 3$$

$$\log(t) = \frac{1}{2}N + 1\frac{1}{2}$$

$$t = 10^{\frac{1}{2}N + 1\frac{1}{2}}$$

$$t = 10^{\frac{1}{2}N} \cdot 10^{1\frac{1}{2}}$$

$$t = 10^{1\frac{1}{2}} \cdot (10^{\frac{1}{2}})^N$$

$$t \approx 31,6 \cdot 3,16^N$$

$$\text{Dus } t = 31,6 \cdot 3,16^N.$$

Schrijf de term met $\log(t)$ apart.

Deel beide leden door 2.

Gebruik ${}^s\log(x) = y$ geeft $x = g^y$.

Gebruik $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$.

Gebruik $a^{pq} = (a^p)^q$.

Bereken $10^{1\frac{1}{2}}$ en $10^{\frac{1}{2}}$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $N = 5 \cdot 1,18^t$.

Schrijf de formule in de vorm $t = a \cdot \ln(bN)$. Rond a af op twee decimalen.

Uitwerking

$$N = 5 \cdot 1,18^t$$

$$1,18^t = 0,2N$$

$$\ln(1,18^t) = \ln(0,2N)$$

$$t \cdot \ln(1,18) = \ln(0,2N)$$

$$t = \frac{1}{\ln(1,18)} \cdot \ln(0,2N)$$

$$t \approx 6,04 \cdot \ln(0,2N)$$

$$\text{Dus } t = 6,04 \cdot \ln(0,2N).$$

Verwissel beide leden en deel beide leden door 5.

Neem van beide leden de $\ln$.

Gebruik ${}^s\log(a^p) = p \cdot {}^s\log(a)$.

Deel beide leden door $\ln(1,18)$.

Bereken $\frac{1}{\ln(1,18)}$.

- 55** a Maak q vrij bij de formule $\log(P) = 4q + 5$.
b Schrijf de formule $N = 5 \cdot \log(t) - 4$ in de vorm $t = a \cdot b^N$.
Rond a af op één decimaal en b op drie decimalen.
c Schrijf de formule $N = 20 \cdot 1,75^t$ in de vorm $t = a \cdot \log(bN)$.
Rond a af op één decimaal.

56
□ ⊗ *

- a Schrijf de formule $t = 6,25 \cdot \log(Q) - 15$ in de vorm $Q = a \cdot b^t$. Rond a af op gehele en b op drie decimalen.
- b Schrijf de formule $F = 1,5 \cdot \ln(2t) - 2$ in de vorm $t = a \cdot b^F$. Rond a af op twee decimalen en b op drie decimalen.
- c Schrijf de formule $N = 160e^{0,12t-3}$ in de vorm $t = a + b \cdot \ln(cN)$. Rond b af op één decimaal.

57
□ ⊗ *

Stijn haalt een pak melk uit de koelkast. Voor de temperatuur van de melk heeft Stijn de formule $t = 25 - k \cdot \log(20 - T)$ opgesteld. Hierin is t de tijd in minuten vanaf het moment dat hij de melk uit de koelkast heeft gehaald en is T de temperatuur van de melk in $^{\circ}\text{C}$. De temperatuur in de koelkast is 5°C .

- a Bereken k in twee decimalen.

Neem in het vervolg van deze opgave $k = 21$.

- b Bereken de temperatuur van de melk na 45 seconden. Rond af op één decimaal.
- c De formule is te schrijven in de vorm $T = a + b \cdot g^t$. Bereken a , b en g . Rond b af op één decimaal en g op drie decimalen.

A58
□ ⊗ *

Het geluidsniveau dat door motorvoertuigen op dicht asfaltbeton (DAB) wordt veroorzaakt, is te berekenen met de formule $L = a + b \cdot \log\left(\frac{v}{v_0}\right)$.

Hierin is L het geluidsniveau in decibel (dB), v de snelheid van het motorvoertuig in km/uur en v_0 een referentiesnelheid.

Een onderzoek levert de volgende gegevens op.

	a	b	v_0
personenauto	74,8	33,0	80 km/uur
vrachtauto	83,5	22,8	70 km/uur

- a Bij een snelheid van 90 km/uur is het geluidsniveau van een vrachtauto hoger dan het geluidsniveau van een personenauto. Hoeveel procent hoger?
- b Een personenauto produceert een geluidsniveau van 82 dB. Bereken de snelheid van de auto. Rond af op gehele.
- c Schrijf voor vrachtauto's de formule in de vorm $v = c \cdot g^L$. Rond c en g af op drie decimalen.



A59
✎ ⊗ *

Bij een onderzoek naar het verband tussen de schouderhoogte en de spanwijdte van het gewei van een eland gebruikt men een formule van de vorm $S = 125 \cdot \ln(G + b) + c$. Hierin is S de schouderhoogte in cm en G de spanwijdte van het gewei in cm.

Bij $G = 150$ hoort $S = 140$ en bij $G = 200$ hoort $S = 163$. Hieruit volgt dat

$$125 \cdot \ln\left(\frac{200 + b}{150 + b}\right) = 23.$$

a Toon dit aan.

Oplossen van de vergelijking $125 \cdot \ln\left(\frac{200 + b}{150 + b}\right) = 23$ geeft dat, in gehelen nauwkeurig, b gelijk is aan 98.

b Bereken b in één decimaal.

c Gebruik bovenstaande gegevens en de formule $S = 125 \cdot \ln(G + 98) + c$ om c in gehelen te berekenen.

Gebruik verder in deze opgave de formule $S = 125 \cdot \ln(G + 98) - 550$.

d Een eland heeft een gewei met een spanwijdte van 1,85 meter.

Bereken de schouderhoogte in cm nauwkeurig.

De formule is te schrijven in de vorm $G = ae^{pS} + q$.

e Bereken a , p en q . Rond a af op twee decimalen.

f De schouderhoogte van een eland is 2,25 meter.

Bereken de spanwijdte van het gewei in cm nauwkeurig.



O60
✎ ⊗ *

Gegeven is de formule $N = 20 \cdot 1,85^t$.

Deze formule is te schrijven in de vorm $N = 20 \cdot e^{ct}$.

Er geldt dan dat $e^c = 1,85$.

Licht toe dat hieruit volgt dat $c = \ln(1,85)$ en bereken c in drie decimalen.

$$\begin{aligned} N &= 20 \cdot 1,85^t \\ N &= 20 \cdot e^{ct} = 20 \cdot (e^c)^t \\ \text{Dus } e^c &= 1,85. \end{aligned}$$

Theorie B Grondtallen veranderen

In opgave 60 heb je gezien dat de formule $N = 20 \cdot 1,85^t$ te schrijven is als $N = 20 \cdot e^{0,615t}$. Het grondtal 1,85 is veranderd in het grondtal e.

En zo kun je de formule $N = 50 \cdot e^t$ schrijven met het grondtal 2, dus in de vorm $N = b \cdot 2^{ct}$.

Uit $2^c = e$ volgt $c = {}^2\log(e) \approx 1,443$ en daarmee wordt de formule $N = 50 \cdot 2^{1,443t}$.

Bij formules met logaritmen kun je een ander grondtal kiezen voor de logaritme. Zo is de formule $N = 25 \cdot \log(t)$ te schrijven in de vorm $N = a \cdot \ln(t)$. Je gaat dan van grondtal 10 naar grondtal e.

Omdat $\log(t) = \frac{\ln(t)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(t) = 0,434... \cdot \ln(t)$ is

$N = 25 \cdot \log(t) = 25 \cdot 0,434... \cdot \ln(t) \approx 10,9 \cdot \ln(t)$.

De formule is dus $N = 10,9 \cdot \ln(t)$.

$${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$$

$$\text{Dus } \log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(10)}.$$

Voorbeeld

- a Schrijf de formule $N = 75 \cdot 1,94^t$ in de vorm $N = b \cdot 10^{ct}$. Rond c af op drie decimalen.
- b Schrijf de formule $N = 25 \cdot \ln(3t + 1)$ met een logaritme met grondtal 10. Rond zo nodig af op één decimaal.

Uitwerking

- a $10^c = 1,94$ geeft $c = \log(1,94) \approx 0,288$, dus de formule is $N = 75 \cdot 10^{0,288t}$.

- b $N = 25 \cdot \ln(3t + 1) = 25 \cdot \frac{\log(3t + 1)}{\log(e)} =$
 $\frac{25}{\log(e)} \cdot \log(3t + 1) \approx 57,6 \cdot \log(3t + 1),$
dus de formule is $N = 57,6 \cdot \log(3t + 1)$.

$${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$$

$$\text{Dus } \ln(a) = \frac{\log(a)}{\log(e)}.$$

61



- a Schrijf de formule $N = 250 \cdot 1,18^t$ in de vorm $N = b \cdot 2^{ct}$. Rond zo nodig af op drie decimalen.
- b Schrijf de formule $N = \frac{575}{1 + 12 \cdot e^{0,62t}}$ in de vorm $N = \frac{a}{1 + b \cdot g^t}$. Rond zo nodig af op drie decimalen.
- c Schrijf de formule $N = 60 + 14 \cdot {}^2\log(t)$ in de vorm $N = a + b \cdot \ln(t)$. Rond b af op één decimaal.
- d Schrijf de formule $N = 16,65 + 2,5 \cdot \ln(3t)$ in de vorm $N = a + b \cdot \log(t)$. Rond a en b af op twee decimalen.

A62
☐ ⊗ *

- a Schrijf de formule $N = 18,6e^{0,15t}$ in de vorm $N = b \cdot 10^{ct}$. Rond zo nodig af op drie decimalen.
- b Schrijf de formule $N = 1,68 + 1,25 \cdot {}^2\log(5t)$ in de vorm $N = a + b \cdot \ln(t)$. Rond af op twee decimalen.
- c Schrijf de formule $N = 550 \cdot 2^{1,5-t}$ in de vorm $N = b \cdot e^{ct}$. Geef b in gehelen en c in twee decimalen.

A63
☐ ⊗ *

De formule $W = 2,4 \cdot 1,0186^h$ geeft voor kinderen tussen 5 en 13 jaar het verband tussen het gewicht W in kg en de lengte h in cm. Deze zogenaamde *Ehrenberg-relatie* blijkt in veel landen in de westerse wereld op te gaan.

- a Robert heeft een lengte van 1,30 meter.
Bereken zijn gewicht in gehele kg.
- b Chantal weegt 23,5 kg.
Bereken haar lengte in cm nauwkeurig.
- c Schrijf de formule in de vorm $W = b \cdot e^{ch}$. Rond c af op vier decimalen.

O64
☐ ⊗ *

- a De formule $\log(N) = t + 2$ is te herleiden tot $N = 100 \cdot 10^t$.
Toon dit aan.
- b De formule $N = 500 \cdot 1,26^t$ is te schrijven in de vorm $\log(N) = at + b$.
Onderzoek hoe dat gaat en geef a en b in één decimaal.

Theorie C Omvormen van de formules $\log(N) = at + b$ en $N = b \cdot g^t$

De formule $\log(N) = 0,2t + 2,5$ is te schrijven in de vorm $N = b \cdot g^t$.
Dat gaat als volgt.

$$\begin{aligned}\log(N) = 0,2t + 2,5 \text{ geeft } N &= 10^{0,2t+2,5} \\ N &= 10^{0,2t} \cdot 10^{2,5} \\ N &= 10^{2,5} \cdot (10^{0,2})^t \\ N &\approx 316 \cdot 1,585^t\end{aligned}$$

Dus $N = 316 \cdot 1,585^t$.

Omgekeerd is de formule $N = 316 \cdot 1,585^t$ te schrijven in de vorm $\log(N) = at + b$.

Dat gaat als volgt.

$$\begin{aligned}N = 316 \cdot 1,585^t \text{ geeft } \log(N) &= \log(316 \cdot 1,585^t) \\ \log(N) &= \log(316) + \log(1,585^t) \\ \log(N) &= t \cdot \log(1,585) + \log(316) \\ \log(N) &\approx 0,2t + 2,5\end{aligned}$$

Dus $\log(N) = 0,2t + 2,5$.

Voorbeeld

- a** Schrijf de formule $2 \cdot \ln(N) = 5 - 0,37t$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op één decimaal en g op twee decimalen.
- b** Schrijf de formule $N = 280e^{0,14t}$ in de vorm $\ln(N) = at + b$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

Uitwerking

a $2 \cdot \ln(N) = 5 - 0,37t$

$$\ln(N) = 2,5 - 0,185t$$

$$N = e^{2,5 - 0,185t}$$

$$N = e^{2,5} \cdot e^{-0,185t}$$

$$N = e^{2,5} \cdot (e^{-0,185})^t$$

$$N \approx 12,2 \cdot 0,83^t$$

$$\text{Dus } N = 12,2 \cdot 0,83^t.$$

b $N = 280e^{0,14t}$

$$\ln(N) = \ln(280e^{0,14t})$$

$$\ln(N) = \ln(280) + \ln(e^{0,14t})$$

$$\ln(N) = 0,14t + \ln(280)$$

$$\ln(N) \approx 0,14t + 5,63$$

$$\text{Dus } \ln(N) = 0,14t + 5,63.$$

Deel beide leden door 2.

Gebruik $\ln(x) = y$ geeft $x = e^y$.

Gebruik $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$.

Gebruik $a^{pq} = (a^p)^q$.

Bereken $e^{2,5}$ en $e^{-0,185}$.

Neem van beide leden de $\ln$.

Gebruik $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Gebruik $\ln(e^a) = a$.

Bereken $\ln(280)$.

65



Schrijf de volgende formules in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op gehelen en g op drie decimalen.

a $\log(N) = 0,14t + 2,17$

b $\ln(0,4N) = 0,45t + 5,16$

c ${}^2\log(N) = 1,3t + 2,4$

d $t = 5 \cdot \log(N) - 8,82$

66



Rond in deze opgave a af op drie decimalen en b op twee decimalen.

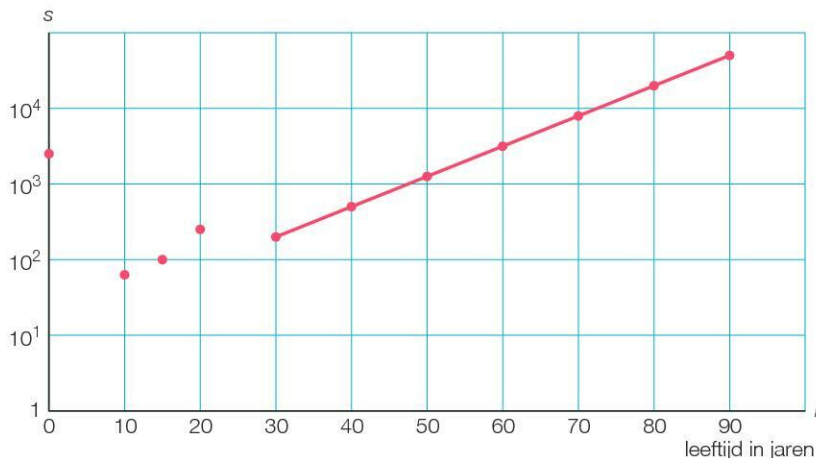
a Schrijf de formule $N = 150 \cdot 1,88^t$ in de vorm $\log(N) = at + b$.

b Schrijf de formule $N = 280e^{0,15t}$ in de vorm $\log(N) = at + b$.

c Schrijf de formule $N = 85e^{0,235t-2}$ in de vorm $\ln(N) = at + b$.

d Schrijf de formule $N = 400 \cdot 10^{0,3t-1}$ in de vorm $\ln(N) = at + b$.

[▶ WERKBLAD] In de Verenigde Staten is voor een aantal leeftijden onderzoek gedaan naar het aantal sterfgevallen per 100 000 inwoners. Om de resultaten in één figuur duidelijk te kunnen weergeven, is op de verticale as een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Zie figuur 13.23. Hierin is l de leeftijd in jaren en s het aantal sterfgevallen per 100 000 inwoners.



figuur 13.23

- Bereken het aantal sterfgevallen per 100 000 inwoners bij de twintigjarigen.
- Welk percentage van de pasgeboren baby's sterft binnen een jaar?
- Onder de vijfjarigen is het aantal sterfgevallen per 100 000 inwoners gelijk aan 126.
Teken het punt P dat hierbij hoort. Geef een toelichting.

Voor leeftijden tussen 30 en 90 jaar geldt de formule $\log(s) = 0,040l + 1,10$.

- Bereken met behulp van de formule bij welke leeftijd er 12 600 sterfgevallen per 100 000 inwoners zijn.
- Schrijf de formule in de vorm $s = b \cdot g^l$. Geef b in één decimaal en g in drie decimalen.

Voor de inwoners van Europa geldt voor leeftijden tussen 30 en 90 jaar de formule $s = 4,8 \cdot 1,109^l$. De bijbehorende grafiek is in het assenstelsel van figuur 13.23 een rechte lijn.

- Teken de bijbehorende lijn in de figuur.
- Schrijf de formule $s = 4,8 \cdot 1,109^l$ in de vorm $\log(s) = al + b$.
Geef a in drie decimalen en b in twee decimalen.
- Bereken bij welke leeftijd tussen 30 en 90 jaar de aantallen sterfgevallen per 100 000 inwoners in de VS en Europa gelijk zijn.

O68
□ ⊗ *

- a De formule $\log(P) = 2 \cdot \log(Q) + 3$ is te herleiden tot $P = 1000Q^2$.
Onderzoek hoe dat gaat.
- b De formule $A = 100B^{1,4}$ is te schrijven als $\log(A) = 1,4 \cdot \log(B) + 2$.
Toon dit aan.

Theorie D Omvormen van de formules $N = at^b$ en $\log(N) = a + b \cdot \log(t)$

De formule $N = 224t^{3,6}$ is te schrijven in de vorm $\log(N) = a + b \cdot \log(t)$.

Dat gaat als volgt.

$$N = 224t^{3,6}$$

$$\log(N) = \log(224t^{3,6})$$

$$\log(N) = \log(224) + \log(t^{3,6})$$

$$\log(N) = \log(224) + 3,6 \cdot \log(t)$$

$$\log(N) \approx 2,35 + 3,6 \cdot \log(t)$$

$$\text{Dus } \log(N) = 2,35 + 3,6 \cdot \log(t).$$

Neem van beide leden de log.

Gebruik $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.

Gebruik $\log(a^p) = p \cdot \log(a)$.

Bereken $\log(224)$.

Je ziet dat je in de eerste stap gaat van $N = 224t^{3,6}$ naar $\log(N) = \log(224t^{3,6})$.

De omgekeerde stap gebruik je om de formule $\log(N) = 2,35 + 3,6 \cdot \log(t)$ te schrijven in de vorm $N = at^b$.

Je gebruikt de regel $\log(A) = \log(B)$ geeft $A = B$.

Om deze regel te kunnen gebruiken, schrijf je

$2,35 + 3,6 \cdot \log(t)$ als één logaritme.

Dit doe je door 2,35 te schrijven als $\log(10^{2,35})$ en

$3,6 \cdot \log(t)$ als $\log(t^{3,6})$ en daarna de regel $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$

toe te passen.

Dus het schrijven van $\log(N) = 2,35 + 3,6 \cdot \log(t)$ in de vorm $N = at^b$ gaat als volgt.

$$\log(N) = 2,35 + 3,6 \cdot \log(t)$$

$$\log(N) = \log(10^{2,35}) + \log(t^{3,6})$$

$$\log(N) = \log(10^{2,35} \cdot t^{3,6})$$

$$N = 10^{2,35} \cdot t^{3,6}$$

$$N \approx 224 \cdot t^{3,6}$$

$$\text{Dus } N = 224t^{3,6}.$$

Gebruik $a = \log(10^a)$ en $p \cdot \log(a) = \log(a^p)$.

Gebruik $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$.

Gebruik $\log(A) = \log(B)$ geeft $A = B$.

Bereken $10^{2,35}$.

$$\log(A) = \log(B) \text{ geeft } A = B$$

R69
□ ⊗ *

In theorie C is $\log(N) = 0,2t + 2,5$ geschreven in de vorm $N = b \cdot g^t$.

Daarbij was de eerste stap $\log(N) = 0,2t + 2,5$ geeft $N = 10^{0,2t + 2,5}$.

Je kunt ook $\log(N) = 2,35 + 3,6 \cdot \log(t)$ schrijven in de vorm $N = at^b$ met als eerste stap $N = 10^{2,35 + 3,6 \cdot \log(t)}$.

Werk deze manier verder uit. Krijg je nu ook $N = 224t^{3,6}$? Welke aanpak heeft je voorkeur?

70



- a** Schrijf de formule $N = 67M^{1,2}$ in de vorm $\ln(N) = a + b \cdot \ln(M)$. Rond af op één decimaal.
- b** Schrijf de formule $K = \frac{120}{L^{0,16}}$ in de vorm $\log(K) = a + b \cdot \log(L)$. Rond af op twee decimalen.
- c** Schrijf de formule $\ln(A) = 5,5 + 4,5 \cdot \ln(B)$ in de vorm $A = aB^b$. Rond a af op gehelen.
- d** Schrijf de formule ${}^2\log(P) - 6,4 \cdot {}^2\log(Q) = 5,12$ in de vorm $P = aQ^b$. Rond a af op één decimaal.

A71



De Megaloceros, het reuzenhert, is ongeveer 8000 jaar geleden uitgestorven. In veenmoerassen in Ierland zijn honderden exemplaren teruggevonden die heel goed bewaard zijn gebleven. Het dier was door zijn enorme grootte een imposante verschijning. De mannetjes hadden bovendien een gigantisch gewei, dat wel 3,5 meter breed en 40 kg zwaar kon worden. Bij het onderzoek naar oorzaken van het uitsterven van het reuzenhert zijn de afmetingen van het gewei gebruikt om de grootte van het hert te schatten. Daarbij gebruikte men een formule van de vorm $\ln(S) = a + b \cdot \ln(G)$. Hierin is S de schouderhoogte in inch en G de spanwijdte van het gewei in inch.

Men vond dat bij $G = 20$ hoort $S = 30$ en dat bij $G = 100$ hoort $S = 80$.

Uit deze gegevens volgt dat $b \cdot \ln(5) = \ln(2\frac{2}{3})$.

- a** Licht dit toe en bereken b in vier decimalen.
- b** Gebruik de gegevens en $b = 0,609$ om a in twee decimalen te berekenen.

Gebruik verder in deze opgave de formule $\ln(S) = 1,6 + 0,61 \cdot \ln(G)$ en dat 1 inch = 2,54 cm.

- c** Bereken in cm nauwkeurig de schouderhoogte van een reuzenhert met een spanwijdte van het gewei van 320 cm.
- d** Bereken in cm nauwkeurig de spanwijdte van het gewei van een reuzenhert dat een schouderhoogte heeft van 200 cm.

De formule is te schrijven als $S = 4,95G^{0,61}$.

- e** Toon dit aan.
- f** De formule $S = 4,95G^{0,61}$ is te schrijven als $s = ag^{0,61}$ waarbij s en g in cm zijn. Bereken a in twee decimalen.



Terugblik

Variabelen vrijmaken bij formules met exponenten en logaritmen

Hieronder zie je hoe je bij de formules $N = 20 \cdot 10^{0,1t+2}$ en $N = \log(4t) - 3$ de variabele t vrijmaakt.

$$\begin{array}{ll} N = 20 \cdot 10^{0,1t+2} & N = \log(4t) - 3 \\ 20 \cdot 10^{0,1t+2} = N & \log(4t) - 3 = N \\ 10^{0,1t+2} = 0,05N & \log(4t) = N + 3 \\ 0,1t + 2 = \log(0,05N) & 4t = 10^{N+3} \\ 0,1t = \log(0,05N) - 2 & t = \frac{1}{4} \cdot 10^N \cdot 10^3 \\ t = 10 \cdot \log(0,05N) - 20 & t = 250 \cdot 10^N \end{array}$$

Grondtallen veranderen

Bij het schrijven van de formule $N = 50 \cdot 1,75^t$ in de vorm $N = b \cdot 2^{ct}$ gebruik je dat $2^c = 1,75$, dus $c = {}^2\log(1,75) \approx 0,807$. Zo krijg je de formule $N = 50 \cdot 2^{0,807t}$.

Bij het schrijven van de formule $N = 1,85 + \log(3t)$ in de vorm

$$N = a + b \cdot \ln(t) \text{ gebruik je dat } \log(3t) = \frac{\ln(3t)}{\ln(10)} = \frac{\ln(3) + \ln(t)}{\ln(10)}.$$

Zo krijg je

$$\begin{aligned} N &= 1,85 + \log(3t) = 1,85 + \frac{\ln(3) + \ln(t)}{\ln(10)} = 1,85 + \frac{\ln(3)}{\ln(10)} + \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(t) \approx \\ &2,33 + 0,43 \cdot \ln(t). \\ \text{Dus } N &= 2,33 + 0,43 \cdot \ln(t). \end{aligned}$$

Omvormen van de formules ${}^a\log(N) = at + b$ en $N = b \cdot g^t$

De formule $\ln(N) = 0,45t + 4,3$ schrijf je als volgt in de vorm $N = b \cdot g^t$.

$$\ln(N) = 0,45t + 4,3 \text{ geeft } N = e^{0,45t + 4,3} = e^{0,45t} \cdot e^{4,3} = e^{4,3} \cdot (e^{0,45})^t \approx 73,7 \cdot 1,568^t.$$

Dus $N = 73,7 \cdot 1,568^t$.

Omgekeerd is de formule $N = 73,7 \cdot 1,568^t$ te schrijven in de vorm

$$\ln(N) = at + b.$$

$$\ln(N) = \ln(73,7 \cdot 1,568^t) = \ln(73,7) + \ln(1,568^t) = \ln(73,7) + t \cdot \ln(1,568) \approx 4,3 + 0,45t$$

Dus $\ln(N) = 0,45t + 4,3$.

Omvormen van de formules $N = at^b$ en ${}^a\log(N) = a + b \cdot {}^a\log(t)$

Je kunt $y = 50x^{2,1}$ als volgt in de vorm $\ln(y) = a + b \cdot \ln(x)$ schrijven.

$$\ln(y) = \ln(50x^{2,1}) = \ln(50) + \ln(x^{2,1}) = \ln(50) + 2,1 \cdot \ln(x) \approx 3,91 + 2,1 \cdot \ln(x)$$

Dus $\ln(y) = 3,91 + 2,1 \cdot \ln(x)$.

De formule ${}^2\log(y) = 3 \cdot {}^2\log(x) + 5$ is te schrijven in de vorm $y = ax^b$.

Daarbij gebruik je dat $3 \cdot {}^2\log(x) = {}^2\log(x^3)$ en $5 = {}^2\log(2^5) = {}^2\log(32)$.

$$\text{Dus } {}^2\log(y) = 3 \cdot {}^2\log(x) + 5 = {}^2\log(x^3) + {}^2\log(32) = {}^2\log(32x^3).$$

Hieruit volgt dat $y = 32x^3$.

Eindopdracht Sinusoïden in attracties

In de beginopdracht heb je kunnen zien hoe een grafiek met een periodiek verband getekend kan worden bij een rondgang van de Singapore Flyer. De grafiek is een sinusoïde.

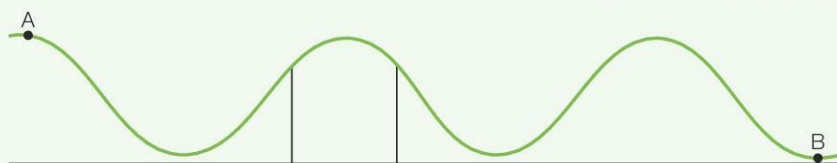
In 2014 werd in Las Vegas de High Roller gebouwd. Dit reuzenrad loste de Singapore Flyer enkele jaren af als hoogste reuzenrad ter wereld. De High Roller heeft een hoogte van 167,6 meter en een diameter van 158,5 meter. Een hele rondgang duurt 30 minuten.



Bij een rondgang van een capsule van de High Roller kun je een formule opstellen van de vorm $h = a + b \sin(c(t - d))$. Hierin is h de hoogte boven de grond in meters van de capsule, t minuten nadat de capsule op het laagste punt is.

- Gedurende hoeveel procent van de totale rondgang is de capsule op een hoogte van meer dan 100 meter?

In sommige achtbanen komen gedeelten voor met zogeheten airtime hills. In de figuur hieronder zie je een gedeelte van een achtbaan met airtime hills. Dit gedeelte kan beschreven worden met een sinusoïde.



figuur 13.24

De horizontale afstand van het hoogste punt bij A (de hoogte van de airtime hills) naar het laagste punt bij B is 240 meter. In de figuur zie je twee steunpalen. Deze staan 32 meter uit elkaar en zijn allebei 29 meter hoog. Punt B bevindt zich op een hoogte van 2 meter.

- Bereken de hoogte van deze airtime hills.

Diagnostische toets

13.1 Sinusoïden

- 1** Geef de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.

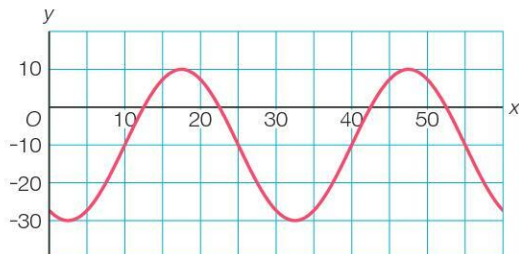
a $y = 4 + 5 \sin(\frac{1}{2}x)$

b $y = 8 + 12 \sin(\pi x)$

c $y = 75 + 25 \sin(\frac{1}{3}\pi x)$

- 2** In figuur 13.25 zie je een sinusoid. Lees de periode, de evenwichtsstand en de amplitude af.

- 3** Teken op $[0, 8]$ de grafiek van $y = 6 + 3 \sin(\frac{1}{4}\pi(x - 2))$.



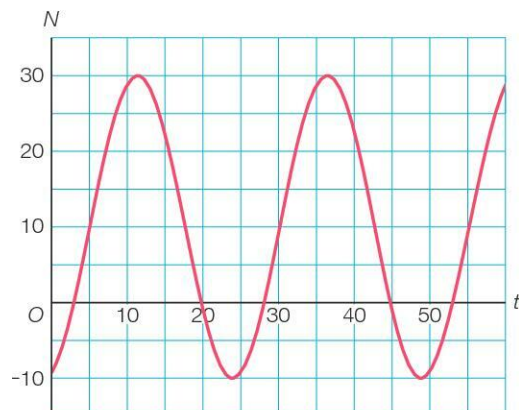
figuur 13.25

13.2 Toepassingen van sinusoiden

- 4** Stel bij de sinusoid in figuur 13.26 een formule op van de vorm $N = a + b \sin(c(t - d))$.

- 5** Gegeven is de formule $y = 12,5 + 6,5 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - 2))$ met $0 \leq x \leq 10$.

- a** Bereken zonder GR de maximale waarde van y en de bijbehorende x .
b Bereken zonder GR de minimale waarde van y en de bijbehorende x .
c Bereken in twee decimalen de y -coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de y -as.
d Bereken in twee decimalen de maximale helling van de grafiek.



figuur 13.26

- 6** De temperatuur van het zeewater langs de Griekse kust is te beschrijven met het model $T = a + b \sin(c(t - d))$ met T in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari. De laagste temperatuur is 10°C op 15 januari en de hoogste temperatuur is 28°C .

- a** Bereken a , b , c en d .
b Gedurende hoeveel dagen per jaar is de temperatuur volgens het model hoger dan 25°C ?
c Bereken de maximale snelheid waarmee de watertemperatuur stijgt. Geef het antwoord in $^{\circ}\text{C}$ per dag in drie decimalen.

13.3 Formules herschrijven

7 a Schrijf het rechterlid van de formule $y = \frac{25}{2x} \left(3 + \frac{5}{x} \right)$ als één breuk.

b Schrijf de formule $H = \frac{120x}{\frac{x}{4y} + 3xy}$ in de vorm $H = \frac{ay}{b + cy^2}$.

c Deel $6f$ uit bij de formule $P = \frac{3f^2 + 120f + 6}{6f}$.

8 a Druk p uit in q als gegeven is dat $q = \frac{3-p}{2p+1}$.

b Toon aan dat $y = 2\sqrt{2x-5}$ te herleiden is tot $x = \frac{1}{8}y^2 + 2\frac{1}{2}$.

c Maak s vrij als gegeven is dat $\frac{2}{s+3} = \frac{6}{t+2}$.

9 a Combineer de formules $A = 3s - 4t + 8$ en $s - 2t = 5$ tot de vorm $A = at + b$.

b Gegeven zijn de formules $A = \frac{3x}{2}(12y - 3z)$, $y = x - 3$ en $z = 2x + 5$.

De formule van A is te schrijven in de vorm $A = px^2 + qx$.

Bereken p en q .

13.4 Omvormen van formules met exponenten en logaritmen

10 a Schrijf de formule $N = 2,5 \cdot \log(8t) - 4,2$ in de vorm $t = a \cdot b^N$. Rond a af op één decimaal en b op drie decimalen.

b Schrijf de formule $N = 50 \cdot e^{0,4t-2}$ in de vorm $t = a + b \cdot \ln(cN)$.

11 a Schrijf de formule $N = 16 \cdot 1,42^t$ in de vorm $N = b \cdot e^{ct}$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

b Schrijf de formule $N = 55 + 14 \cdot \log(3,5t - 2)$ met een natuurlijk logaritme. Rond zo nodig af op één decimaal.

12 a Schrijf de formule $1,3 \cdot \log(N) = 0,65t + 3,38$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op gehele en g op drie decimalen.

b Schrijf de formule $N = 70e^{0,25t-1}$ in de vorm $\ln(N) = at + b$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

13 a Schrijf de formule $N = 350t^{2,84}$ in de vorm $\log(N) = a + b \cdot \log(t)$. Rond a af op twee decimalen.

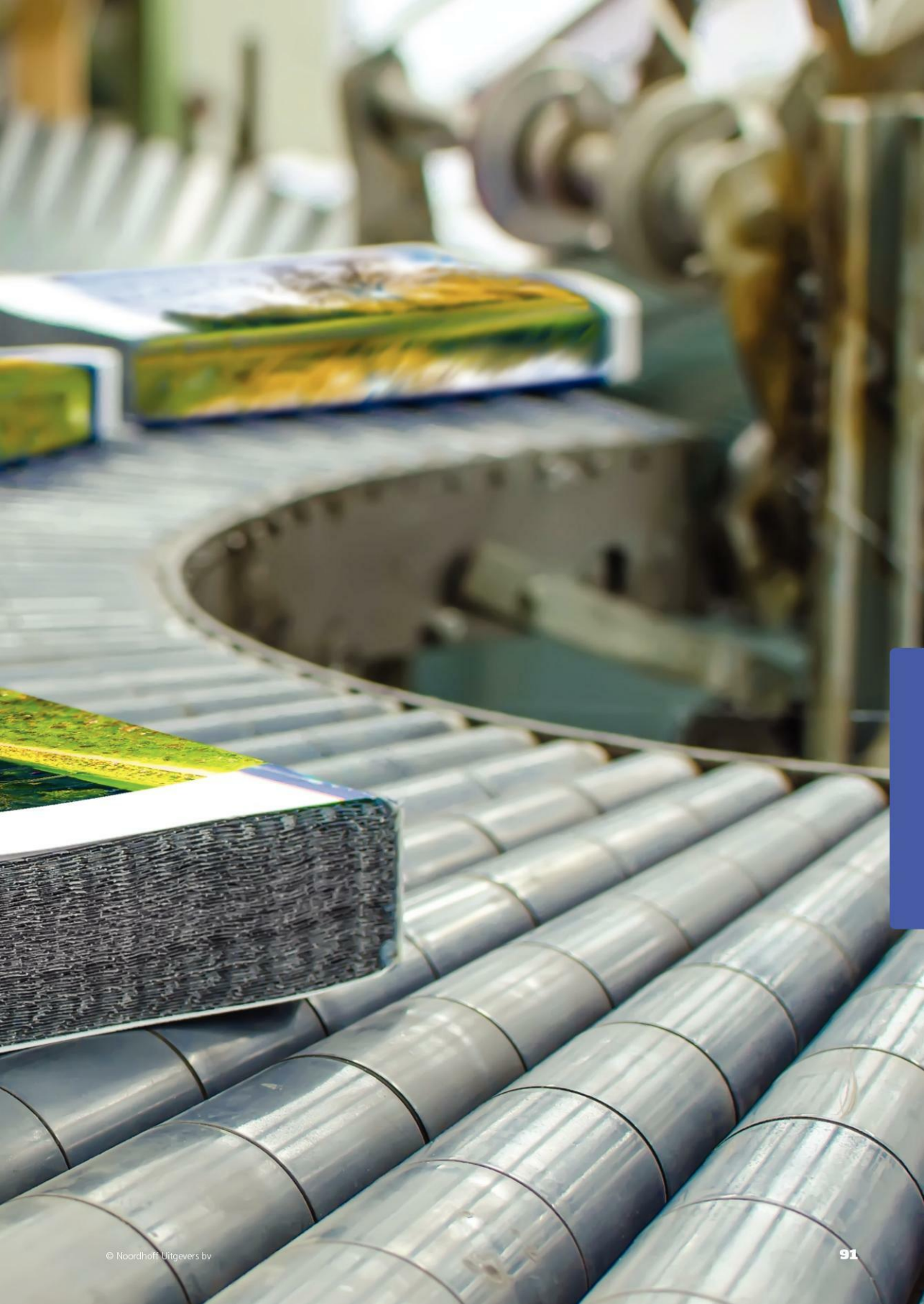
b Schrijf de formule $\ln(N) = 7,6 + 4,58 \cdot \ln(t)$ in de vorm $N = at^b$. Rond a af op gehele.

14

Toepassingen van de differentiaalrekening

Wat leer je?

- De afgeleide gebruiken bij het oplossen van optimaliseringsproblemen.
- Differentiëren van logaritmische formules.
- Redeneren met formules.
- Hoe je met de afgeleide aantoont dat een grafiek stijgt of daalt.
- Aantonen met wat voor soort stijgen of dalen je te maken hebt met behulp van de grafiek van de afgeleide of met behulp van de formule van de afgeleide.



Beginopdracht Drukken van een boek

Een drukkerij heeft de opdracht gekregen om een boek te drukken. Van het boek worden naar verwachting jaarlijks 80 000 exemplaren door boekhandels afgenomen. De drukkerij kan ervoor kiezen om alle boeken aan het begin van het jaar in één keer te drukken. Ook kan men het drukken verdelen over meerdere zogenaamde batches die over het jaar verdeeld zijn.

Omdat het instellen van het drukproces tijd en geld kost, wil men graag veel boeken in één keer drukken. Aan de andere kant zijn er kosten verbonden aan het op voorraad houden van de gedrukte boeken. Denk bijvoorbeeld aan de magazijnkosten en het risico dat gelopen wordt dat de afname wellicht tegenvalt. Men moet kiezen hoeveel boeken er per batch worden gedrukt. In deze opgave gaan we kijken naar een vereenvoudigd model van de strategie die deze drukkerij hanteert voor het drukken van dit boek.

De productiemanager van de drukkerij kiest ervoor om n keer per jaar een batch boeken te drukken. Het instellen van het drukproces kost elke keer 1040 euro. Het op voorraad houden van een boek kost 0,65 euro voor één jaar.

Voor het bepalen van de juiste strategie doet de productiemanager de volgende aannames.

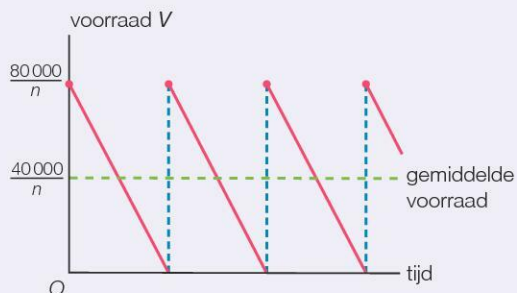
- Er worden 80 000 boeken per jaar gedrukt en die worden allemaal door de boekhandels afgenomen.
- De afname door de boekhandels is gelijkmatig over het jaar verdeeld.
- Per batch worden evenveel exemplaren van het boek gedrukt.
- Er wordt een nieuwe batch gedrukt als de voorraad op is.

In de figuur hiernaast zie je het verloop van de voorraad als men n batches per jaar drukt.

In de figuur zie je dat het gemiddeld aantal boeken dat op voorraad ligt

gelijk is aan $\frac{40\,000}{n}$.

- Licht dit toe.



Als de productiemanager 8 batches per jaar drukt, dan zijn de totale instel- en voorraadkosten per jaar gelijk aan 11 570 euro.

- Toon dit aan.
- Stel een formule op voor de totale jaarlijkse instel- en voorraadkosten en bereken met behulp van de afgeleide hoeveel boeken de productiemanager per batch moet drukken zodat deze kosten minimaal zijn.

Voorkennis De afgeleide functie

Theorie A Regels voor de afgeleide

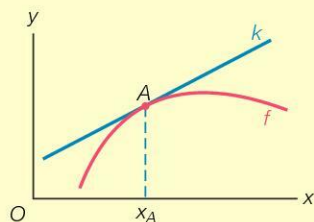
Bij een functie hoort een hellingfunctie. In plaats van hellingfunctie wordt meestal de naam afgeleide functie, kortweg afgeleide, gebruikt. De afgeleide van f wordt genoteerd als f' .

De afgeleide van een functie f geeft voor elke x

- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k van de grafiek van f in het bijbehorende punt A , dus

$$rc_k = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=x_A}$$

- de helling van de grafiek van f in het bijbehorende punt
- de snelheid waarmee $f(x)$ verandert.



figuur 14.1 $rc_k = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=x_A}$

Het berekenen van de formule van de afgeleide heet differentiëren.

Hiervoor heb je de volgende regels geleerd.

$$f(x) = a \text{ geeft } f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax \text{ geeft } f'(x) = a$$

$$f(x) = ax^n \text{ geeft } f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$$

$$f(x) = e^x \text{ geeft } f'(x) = e^x$$

$$f(x) = g^x \text{ geeft } f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$$

$$s(x) = f(x) + g(x) \text{ geeft } s'(x) = f'(x) + g'(x) \quad (\text{somregel})$$

$$v(x) = f(x) - g(x) \text{ geeft } v'(x) = f'(x) - g'(x) \quad (\text{verschilregel})$$

$$k(x) = f(g(x)) \text{ geeft } k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (\text{kettingregel})$$

Voor de afgeleide van $y = f(x)$ wordt naast de notatie $f'(x)$ ook de notatie

$\frac{dy}{dx}$ gebruikt.

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $R = 2q^2 - 3q + 6\sqrt{q} + 4$

b $N = \frac{200}{(3-t)^3}$

Uitwerking

a $R = 2q^2 - 3q + 6\sqrt{q} + 4 = 2q^2 - 3q + 6q^{0,5} + 4$ geeft

$$\frac{dR}{dq} = 4q - 3 + 3q^{-0,5} = 4q - 3 + \frac{3}{\sqrt{q}}$$

kettingregel

b $N = \frac{200}{(3-t)^3} = 200(3-t)^{-3}$ geeft $\frac{dN}{dt} = -600(3-t)^{-4} \cdot -1 = \frac{600}{(3-t)^4}$

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $G = 5 \cdot 3^{2n+1}$

b $B = 3e^{4t-1}$

Uitwerking

a $G = 5 \cdot 3^{2n+1}$ geeft $\frac{dG}{dn} = 5 \cdot 3^{2n+1} \cdot \ln(3) \cdot 2 = 10 \ln(3) \cdot 3^{2n+1}$

b $B = 3e^{4t-1}$ geeft $\frac{dB}{dt} = 3e^{4t-1} \cdot 4 = 12e^{4t-1}$

kettingregel

1 Differentieer.

a $y = x^3 - \frac{4}{x^3}$

d $y = \sqrt{2x-7}$

b $N = 0,3 \cdot e^{2t}$

e $F = \frac{5}{(5p-3)^4}$

c $B = 3(2a-7)^5$

f $G = n^{3,3} - 4n^{0,3} + 2^{1,3n}$

Theorie B Extreme waarden berekenen met de afgeleide

Bij de opdracht *Bereken met de afgeleide het maximum (of minimum) van y* gebruik je het volgende werkschema.

Werkschema: een extreme waarde van y berekenen met de afgeleide

- 1 Bereken de afgeleide $\frac{dy}{dx}$.
- 2 Los de vergelijking $\frac{dy}{dx} = 0$ op.
- 3 Kijk in de grafiek van y of je met een maximum of een minimum te maken hebt.
- 4 Bereken de extreme waarde door de gevonden x-waarde in de formule van y in te vullen.

Vaak is in de opgave de grafiek gegeven. Als dit niet het geval is, maak dan zelf een schets in je uitwerking. Gebruik daarbij de GR.

Bij de opdracht *Toon met de afgeleide aan dat y maximaal (of minimaal) is voor x = a* bereken je eerst de afgeleide $\frac{dy}{dx}$ en laat je zien dat $\frac{dy}{dx} = 0$ voor $x = a$. Maak vervolgens een schets van de grafiek van y en laat zien dat er voor $x = a$ een maximum (of minimum) is. Als de grafiek al gegeven is, dan kun je volstaan met een verwijzing naar deze grafiek.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $N = 0,02t^3 - 0,72t^2 + 4,8t + 40$ met $0 \leq t \leq 24$. Zie de grafiek hiernaast.

- a Toon met de afgeleide aan dat N maximaal is voor $t = 4$.
- b Bereken met de afgeleide het minimum van N .

Uitwerking

- a $N = 0,02t^3 - 0,72t^2 + 4,8t + 40$ geeft

$$\frac{dN}{dt} = 0,06t^2 - 1,44t + 4,8$$

$$t = 4 \text{ geeft } \frac{dN}{dt} = 0,06 \cdot 4^2 - 1,44 \cdot 4 + 4,8 = 0$$

Uit de schets volgt dat N maximaal is voor $t = 4$.

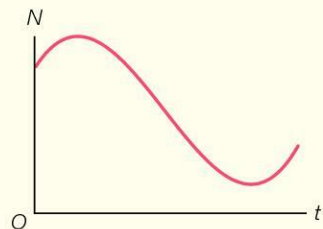
- b $\frac{dN}{dt} = 0$ geeft $0,06t^2 - 1,44t + 4,8 = 0$

$$\text{Voer in } y_1 = 0,06x^2 - 1,44x + 4,8.$$

De optie nulpunt geeft $x = 4$ en $x = 20$.

Uit de schets volgt dat N minimaal is voor $t = 20$.

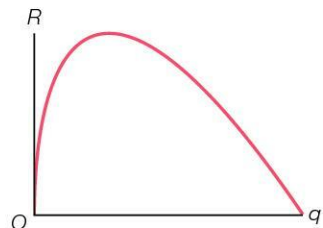
$t = 20$ geeft $N = 8$, dus het minimum van N is 8.



figuur 14.2

- 2 De opbrengst R van een bedrijf in duizenden euro's wordt gegeven door de formule $R = 5q^{0,52} - q^{1,12}$. Hierbij is q de productie in duizendtallen.

- a Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee R toeneemt bij een productie van 2000 stuks. Vermeld ook de eenheid.
- b Bereken met de afgeleide de maximale opbrengst. Rond af op tientallen euro's.



figuur 14.3

- 3 Door een periode van grote droogte is de grondwaterstand in een natuurgebied vanaf juni 2020 sterk gedaald. In de loop van het jaar is de grondwaterstand weer gestegen tot een normaal niveau. Hierbij hoort het model $W = 14 - 0,04t - \sqrt{225 - 0,86t}$. Hierin is W de waterhoogte in meters en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 juni 2020. Er geldt $0 \leq t \leq 220$.

- a Bereken met de afgeleide voor welke t de grondwaterstand minimaal was. Wat was deze minimale grondwaterstand? Rond af cm.
- b Bereken met de afgeleide met welke snelheid de grondwaterstand afnam op 15 juni 2020. Rond af op drie decimalen.
- c Hoeveel dagen duurde het totdat de grondwaterstand weer op hetzelfde niveau was als op 1 juni 2020?



figuur 14.4

14.1 Optimaliseren

01 In figuur 14.5 staat een huis op een rechthoekig perceel. De totale lengte van de omheining is 120 meter. Er geldt $2x + 2y + 16 = 120$.

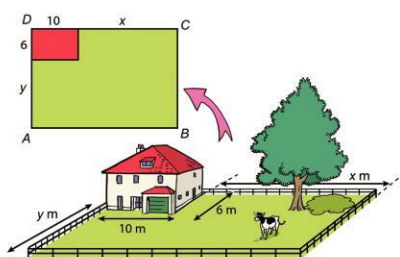
a Toon dit aan en maak v vrij.

De oppervlakte O van het perceel in m^2 is te schrijven als $O = -x^2 + 48x + 580$.

b Toon dit aan.

c Toon met de afgeleide aan dat de oppervlakte maximaal is als $x = 24$.

d Bereken de maximale oppervlakte van het perceel.

**figuur 14.5**

Theorie A Maximale oppervlakte en maximale inhoud

In opgave 1 is de lengte van de omheining gegeven. Door dit gegeven te gebruiken, is

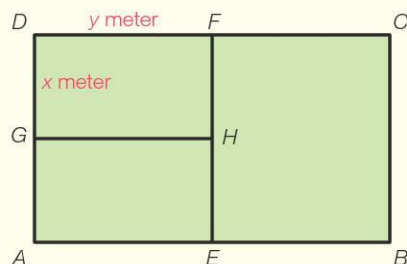
- de variabele y uit te drukken in x
- vervolgens de oppervlakte O in x uit te drukken
- daarna met differentiëren de maximale oppervlakte te berekenen.

Vaak doen zich problemen voor waarbij een maximale oppervlakte of inhoud moet worden gevonden. Je hebt daarbij formules nodig. Met behulp van de afgeleide kun je vervolgens berekenen wat het gezochte maximum is.

Voorbeeld

Een rechthoekig stuk land wordt afgezet zoals in figuur 14.6. Van rechthoek $ABCD$ is E het midden van AB , F het midden van CD , G het midden van AD en H het midden van EF . De totale lengte van het hekwerk is 480 meter.

Druk de oppervlakte O van het stuk land uit in x .

**figuur 14.6**

Uitwerking

Druk v uit in x .

$$AD + EF + BC + AB + CD + GH = 480$$

$$2x + 2x + 2x + 2y + 2y + y = 480$$

$$6x + 5y = 480$$

$$5v = -6x + 480$$

$$v = -1,2x + 96$$

Druk de oppervlakte O uit in x .

$$O = AB \cdot BC = 2y \cdot 2x = 4xy$$

$y = -1,2x + 96$ invullen in $O = 4xy$ geeft $O = 4x(-1,2x + 96) = -4,8x^2 + 384x$.



2 Zie het voorbeeld.



3 Op een rechthoekig weiland staat een schuur. Zie de figuur hiernaast. Het weiland is omheind, op de plek van de schuur na. De totale omheining is 150 meter lang.

Uit deze gegevens volgt de vergelijking

$$2x + 2y - 10 = 150.$$

a Toon dit aan.

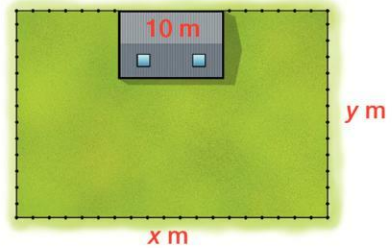
De vergelijking is te herleiden tot $y = -x + 80$.

b Toon dit aan.

De oppervlakte O in m^2 van het rechthoekige stuk land wordt gegeven door de formule $O = x \cdot y$. Door $y = -x + 80$ in te vullen in $O = x \cdot y$ krijg je $O = -x^2 + 80x$.

c Toon dit aan.

d Bereken met de afgeleide bij welke afmetingen de oppervlakte maximaal is.



figuur 14.7



4 Op een rechthoekig stuk land staat een huis van 14 bij 6 meter. De totale omheining is 200 meter lang. Zie figuur 14.8.

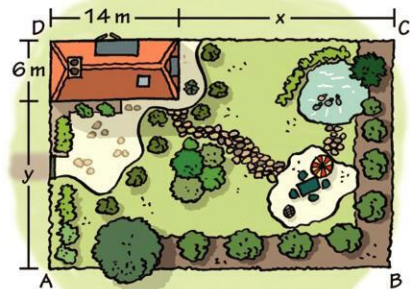
Er geldt $y = -x + 90$.

a Toon dit aan.

De oppervlakte O in m^2 van het rechthoekige stuk land wordt gegeven door de formule $O = -x^2 + 82x + 1344$.

b Toon dit aan.

c Bereken met de afgeleide bij welke afmetingen de oppervlakte maximaal is.



figuur 14.8



A5 In figuur 14.9 zie je een doosje met een rechthoekig grondvlak. De lengte van het grondvlak is twee keer de breedte. De lengte van alle ribben samen is 9 dm.

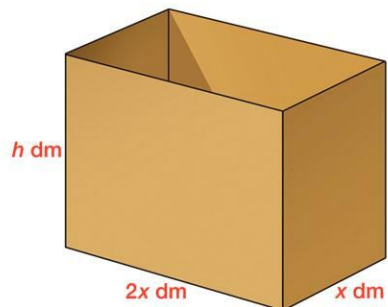
Er geldt $h = 2\frac{1}{4} - 3x$.

a Toon dit aan.

Voor de inhoud I van het doosje geldt $I = 4\frac{1}{2}x^2 - 6x^3$.

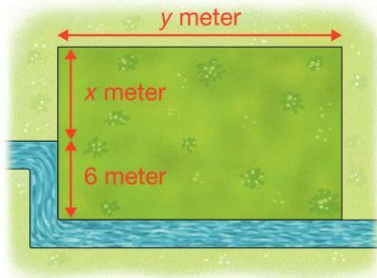
b Toon aan dat deze formule juist is.

c Onderzoek met de afgeleide voor welke x de inhoud maximaal is.



figuur 14.9

Een rechthoekig stuk land is gedeeltelijk begrensd door een sloot. Het stuk land wordt afgezet met een omheining die 200 meter lang is. De slootkant hoeft niet te worden afgezet. Zie figuur 14.10.



figuur 14.10

De oppervlakte van het stuk land in m^2 is O .

- Welke variabelen spelen hier een rol?
- Druk O uit in x en y .
- Druk y uit in x . Gebruik dat de lengte van de omheining 200 meter is.
- De formule van O is van de vorm $O = ax^2 + bx + c$.
Bereken a , b en c .

Theorie B Optimaliseringsproblemen

In de voorgaande opgaven heb je steeds een maximale oppervlakte of inhoud berekend. Er zijn ook situaties waarbij je juist op zoek gaat naar een minimale waarde. Denk bijvoorbeeld aan de minimale kosten van de verpakking van een product. Het opsporen van een maximale of minimale waarde heet **optimaliseren**.

Om een optimaliseringsprobleem op te lossen, heb je de formule nodig van de grootte die je wilt optimaliseren. Je krijgt bij het opstellen van die formule in de opgaven die volgen minder hulp dan in de voorgaande opgaven. Om een optimaliseringsprobleem op te lossen, volg je de stappen van het volgende werkschema.

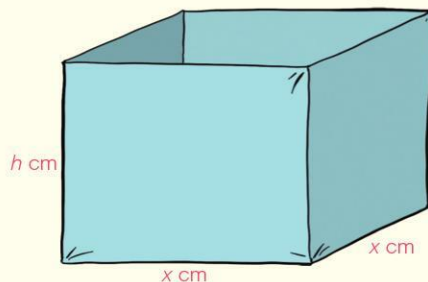
Werkschema: het met de afgeleide oplossen van een optimaliseringsprobleem van de grootte G

- Verdiep je in de situatie en kijk welke variabelen een rol spelen.
- Druk G uit in de variabelen.
- Zoek een verband tussen de variabelen met behulp van de gegeven informatie en druk daarmee de ene variabele uit in de andere variabele.
- Druk G uit in één variabele.
- Gebruik de afgeleide van G om de gestelde vraag te beantwoorden.

Voorbeeld

In figuur 14.11 zie je een doos waarvan de bodem een vierkant is. In verband met de eisen van de pakketbezorgdienst is de som van de hoogte en de omtrek van de bodem gelijk aan 300 cm.

Bereken met de afgeleide bij welke afmetingen van de doos de inhoud I maximaal is.



figuur 14.11

Uitwerking

1 De variabelen x en h spelen een rol.

2 Druk de inhoud I uit in x en h .

$$I = x^2 \cdot h$$

3 Zoek een verband tussen x en h en druk h uit in x .

hoogte + omtrek bodem = 300 cm

$$h + 4x = 300, \text{ dus } h = 300 - 4x$$

4 Druk I uit in x .

$$I = x^2 h$$

$$h = 300 - 4x \text{ invullen in } I = x^2 h \text{ geeft } I = x^2(300 - 4x) = 300x^2 - 4x^3.$$

5 Bereken $\frac{dI}{dx}$ en de afmetingen waarbij I maximaal is.

$$\frac{dI}{dx} = 600x - 12x^2$$

$$\frac{dI}{dx} = 0 \text{ geeft } 600x - 12x^2 = 0$$

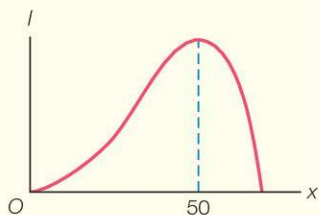
$$x(600 - 12x) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 600 - 12x = 0$$

$$x = 0 \text{ of } -12x = -600$$

$$x = 0 \text{ of } x = 50$$

Bij berekenen met de afgeleide mag je de vergelijking $\frac{dI}{dx} = 0$ ook met de GR oplossen.



Uit de schets volgt dat I maximaal is voor $x = 50$.

$x = 50$ geeft $h = 300 - 4 \cdot 50 = 100$.

De afmetingen zijn 50 bij 50 bij 100 cm.

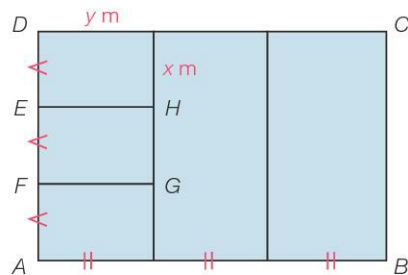
7

Een rechthoekig stuk land $ABCD$ wordt afgezet op de manier van figuur 14.12.

In totaal wordt 960 meter hekwerk gebruikt.

De oppervlakte O in m^2 van het stuk land wordt gegeven door de formule $O = -13\frac{1}{2}x^2 + 1080x$.

- Toon dit aan.
- Bereken met de afgeleide de maximale oppervlakte. Wat zijn in dat geval de lengte en de breedte van het stuk land?

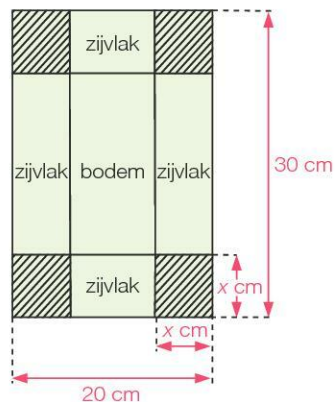


figuur 14.12

8

Jonas gaat een bakje vouwen van een stuk karton van 20 bij 30 cm. Hij knipt daarvoor van elke hoek een vierkant af met een zijde van x cm. Zie de figuur hiernaast. Zo ontstaan vier zijvlakken die Jonas omhoogvouwt en aan elkaar plakt met een stuk tape.

- Bereken de inhoud van het bakje als Jonas $x = 3$ neemt.
- Bereken met de afgeleide voor welke waarde van x de inhoud van het bakje maximaal is. Rond af op één decimaal.



figuur 14.13

9

Een winkelier wil voor zijn zaak een rechthoekig parkeerterrein laten aanleggen met een oppervlakte van 600 m^2 . Drie zijden zal hij af laten zetten met houten paaltjes. Voor de vierde zijde, aan de straatkant, wil hij een wat stevigere afzetting hebben van betonnen paaltjes. Bovendien moet aan die kant een inrit komen. Zie figuur 14.14. Bij de houten paaltjes kan hij aan materiaal en arbeidsloon rekenen op 70 euro per meter. Bij de betonnen paaltjes zijn de kosten, inclusief de inrit, 140 euro per meter.

Voor de kosten K in euro's geldt

$$K = 210x + \frac{84000}{x} \text{ waarbij } x \text{ de lengte in meters}$$

van het parkeerterrein aan de straatkant is.

- Toon aan dat deze formule juist is.
- Bereken met de afgeleide bij welke afmetingen van het terrein de kosten minimaal zijn.



figuur 14.14

10
☐ ⊙ *

De firma De Haan maakt dozen zonder deksel. De inhoud van een doos is 72 dm^3 . De onderkant is rechthoekig, waarbij de lengte tweemaal zo groot is als de breedte. Het materiaal van de zijanten kost €0,20 per dm^2 en dat van de extra stevige onderkant €0,40 per dm^2 . Stel de breedte van de onderkant is $x \text{ dm}$. De totale materiaalkosten K van een doos in euro's worden gegeven door de formule $K = 0,8x^2 + \frac{216}{5x}$.

- Toon dit aan.
- Bereken met de afgeleide bij welke afmetingen K minimaal is.

11
* *

Een golfvereniging wil op een driving range een overkapping plaatsen. De voorkant is open. Voor de twee zijanten, de achterkant en het dak is 72 m^2 materiaal beschikbaar. De zijanten zijn vierkanten met zijde x meter. Zie figuur 14.15. De drie randen aan de voorkant worden voorzien van sierlijsten met daarop het logo van de golfvereniging. De lijst aan de bovenkant kost 50 euro per meter en de lijsten aan de zijanten kosten 100 euro per meter.



figuur 14.15

Druk de kosten van de lijsten K in euro's uit in x en bereken met de afgeleide bij welke afmetingen van de overkapping de kosten minimaal zijn. Rond af op gehele cm.

A12
☐ ⊙ *

Een timmerman krijgt de opdracht een kist zonder deksel te maken. De vierkante bodem bestaat uit materiaal dat 24 euro per m^2 kost. Voor de zijanten rekent hij op 18 euro per m^2 . De opdrachtgever wil 288 euro aan materiaal uitgeven. Bij de inhoud van de kist hoort de formule $I = 4x - \frac{1}{3}x^3$. Hierin is x de lengte in meters van de zijde van de vierkante bodem.



figuur 14.16

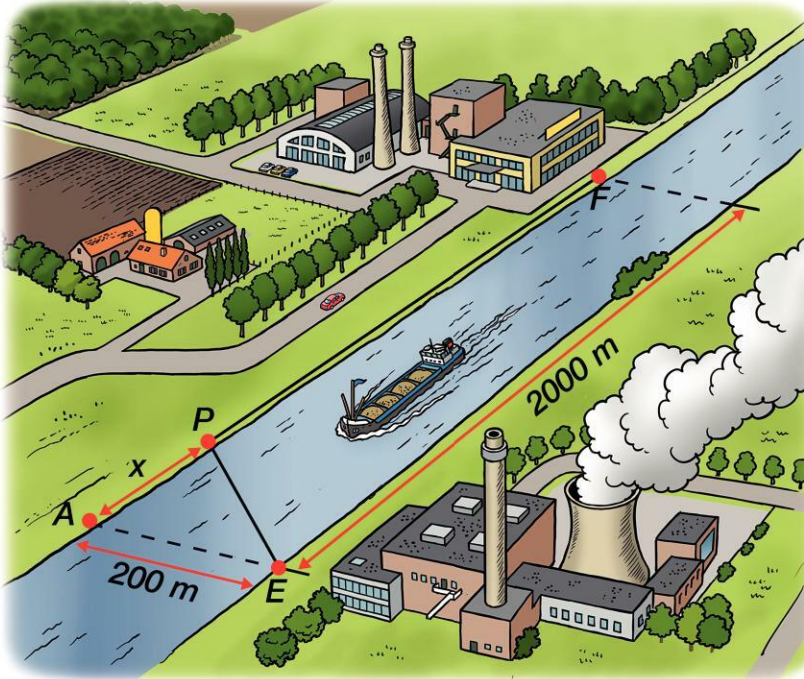
- Toon aan dat deze formule juist is.
- Bereken met de afgeleide bij welke afmetingen de inhoud I van de kist maximaal is. Bereken de maximale inhoud.

Stel dat de opdrachtgever a euro aan materiaal wil uitgeven.

De inhoud van een kist is dan te schrijven als $I = \frac{1}{72}ax - \frac{1}{3}x^3$.

- Toon aan dat deze formule juist is.
- Toon aan dat de inhoud maximaal is voor $x = \sqrt{\frac{1}{72}a}$.

Aan de oever van een rivier met een breedte van 200 meter staat een elektriciteitscentrale. Aan de overkant is 2000 meter stroomafwaarts een fabriek gevestigd. Zie de situatieschets in figuur 14.17. Voor de energievoorziening wil men een kabel van E naar F aanleggen.



figuur 14.17

De aanlegkosten over land zijn 50 euro per meter, in de rivier zijn de kosten 65 euro per meter. Neem aan dat de kabel van E via P naar F loopt. Hierbij is $AP = x$ meter. Met de stelling van Pythagoras kun je dan berekenen dat $EP = \sqrt{x^2 + 40000}$ m.

Bereken met de afgeleide bij welke afstand tussen A en P de aanlegkosten minimaal zijn. Rond af op gehele meters.

Terugblik

Formules opstellen

Van een doos zonder deksel is de bodem een rechthoek van $3x$ bij x dm. De hoogte van de doos is h dm.

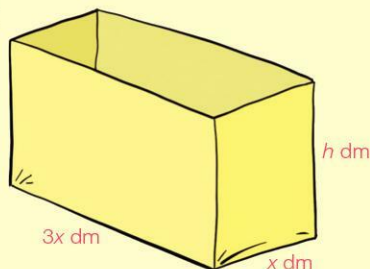
Als gegeven is dat de totale lengte L van de ribben gelijk is aan 24 dm, dan druk je als volgt de inhoud I uit in x .

$$L = 4 \cdot 3x + 4 \cdot x + 4 \cdot h = 16x + 4h \text{ en } L = 24, \text{ dus}$$

$$16x + 4h = 24 \text{ en dit geeft } h = -4x + 6.$$

$$h = -4x + 6 \text{ invullen in } I = 3x^2h \text{ geeft}$$

$$I = 3x^2(-4x + 6) = -12x^3 + 18x^2.$$



Als gegeven is dat de inhoud van de doos 24 dm^3 is, de bodem 80 cent per dm^2 kost en de opstaande zijwanden 50 cent per dm^2 , dan druk je als volgt de kosten K uit in x .

$$K = 3x^2 \cdot 80 + 8xh \cdot 50 = 240x^2 + 400xh$$

$$I = 3x^2h \text{ en } I = 24, \text{ dus } 3x^2h = 24 \text{ en dit geeft } h = \frac{8}{x^2}.$$

$$h = \frac{8}{x^2} \text{ invullen in } K = 240x^2 + 400xh \text{ geeft}$$

$$K = 240x^2 + 400x \cdot \frac{8}{x^2} = 240x^2 + \frac{3200}{x}.$$

Optimaliseren

Om met de afgeleide te berekenen bij welke afmetingen de inhoud van de kist maximaal is als de totale lengte van de ribben 24 dm is, bereken je de afgeleide van $I = -12x^3 + 18x^2$.

$$\text{Je krijgt } \frac{dI}{dx} = -36x^2 + 36x, \text{ dus } \frac{dI}{dx} = 0 \text{ geeft}$$

$$-36x^2 + 36x = 0 \text{ en dit geeft } x = 0 \text{ of } x = 1.$$

Uit de schets hiernaast volgt dat de inhoud maximaal is als $x = 1$ dm. Bij $x = 1$ hoort $h = -4 + 6 = 2$, dus de afmetingen zijn 3 bij 1 bij 2 dm.

Om met de afgeleide de kosten K van hierboven te minimaliseren, schrijf je K eerst in de vorm

$$K = 240x^2 + 3200x^{-1}.$$

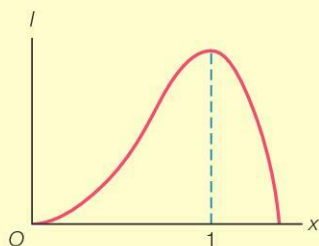
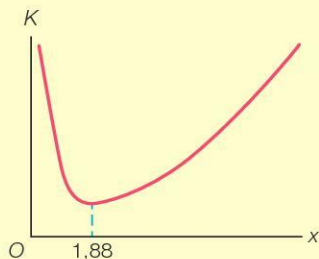
$$\text{Dit geeft } \frac{dK}{dx} = 480x - 3200x^{-2} \text{ oftewel } \frac{dK}{dx} = 480x - \frac{3200}{x^2}.$$

$$\text{Oplossen van de vergelijking } \frac{dK}{dx} = 0 \text{ geeft } x = 1,882...$$

Uit de schets hiernaast volgt dat K minimaal is voor $x = 1,882...$

$$\text{Bij } x = 1,882... \text{ hoort } 3x \approx 5,65 \text{ en } h = \frac{8}{1,882...^2} \approx 2,56.$$

Dus afmetingen van 5,65 bij 1,88 bij 2,56 dm geven minimale kosten.



14.2 Regels voor de afgeleide

014

In deze opgave onderzoek je wat de afgeleide is van $y = \ln(x)$. Je kunt op de GR de afgeleide invoeren, ook als je hiervan de formule niet kent. Je gebruikt dan

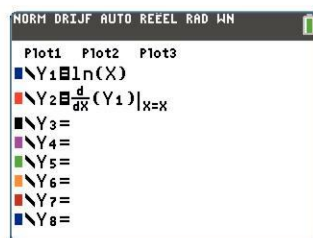
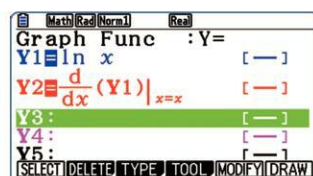
- op de TI de optie nDeriv via f2
- op de Casio de optie d/dx uit het OPTN-CALC-menu
- op de HP $\frac{\partial}{\partial}$ met de knop voor wiskundige sjablonen
- op de NW de optie diff(f(x), x, a) bij Differentiëren en Integreren uit de Toolbox.

Hiermee voer je de zogenaamde *numerieke afgeleide* in.

- a** Voer in $y_1 = \ln(x)$, bij y_2 de numerieke afgeleide van y_1 en vul de tabel in.

x	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	5	8
y_2									

- b** Welk vermoeden krijg je op grond van de tabel over de afgeleide van $y = \ln(x)$?



Theorie A De afgeleide van $y = \ln(x)$ en van $y = {}^p\log(x)$

Er geldt $y = \ln(x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

Voor het berekenen van de afgeleide van $y = {}^2\log(x)$

gebruiken we $y = {}^2\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x)$.

Dit geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(2)}$.

En zo geldt ook $y = {}^g\log(x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$.

$$f(x) = \ln(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = {}^g\log(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$$

$${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$$

$$\text{Dus } {}^2\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

Voorbeeld

Differentieer.

a $y = \ln(2x + 1)$

b $N = 4,15 \cdot \log(4t + 5)$

Uitwerking

a $y = \ln(2x + 1)$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x + 1} \cdot \overset{\text{kettingregel}}{2} = \frac{2}{2x + 1}$

b $N = 4,15 \cdot \log(4t + 5)$ geeft $\frac{dN}{dt} = 4,15 \cdot \frac{1}{(4t + 5) \cdot \ln(10)} \cdot \overset{\text{kettingregel}}{4} = \frac{16,6}{(4t + 5) \cdot \ln(10)}$

15 Zie het voorbeeld.



De afgeleide van $N = 4,15 \cdot \log(4t + 5)$ is te schrijven als $\frac{dN}{dt} = \frac{a}{(4t + 5)}$.

Bereken a in twee decimalen.

16 Differentieer.



a $y = \ln(3x - 2)$

b $y = x^2 - 3 \cdot \ln(1,5x)$

c $y = 5 \cdot {}^2\log(0,2x)$

d $y = 3x - \log(6x)$

17 Bereken de afgeleide.



a $y = \log(x^2 + x)$

b $y = 2 - \ln(4x)$

c $y = 6 \cdot {}^5\log(x^2)$

d $y = 3x - 5 \cdot \ln(x^2 + 6)$

18 Differentieer.



a $N = 10t + 3 \cdot \log(5t)$

b $K = \ln(q^2 + q)$

c $P = 3a^2 - {}^{0,5}\log(1,4a)$

d $B = 5 \cdot \ln(3 - n) + 3^n$

A19 Gegeven is de formule $N = 1500 \cdot \log(2t + 4) - 50t$ met t de tijd in dagen.



De afgeleide van N is te schrijven in de vorm $\frac{dN}{dt} = \frac{a}{t + 2} - 50$.

a Bereken a . Rond af op gehele.

b Bereken met de afgeleide na hoeveel dagen N maximaal is.

c Bereken voor welke waarde van t de snelheid waarmee N toeneemt gelijk is aan 100 per dag. Rond af op één decimaal.

d Bereken hoeveel dagen N groter is dan 90% van het maximum van N . Rond af op gehele.

O20 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x - 7$ en $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.



a Vul in: $p(x) = x^2 \cdot (3x - 7) = 3x^3 - 7x^2$ geeft $p'(x) = \dots$

b Bereken $f'(x)$ en $g'(x)$ en onderzoek of $p'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$.

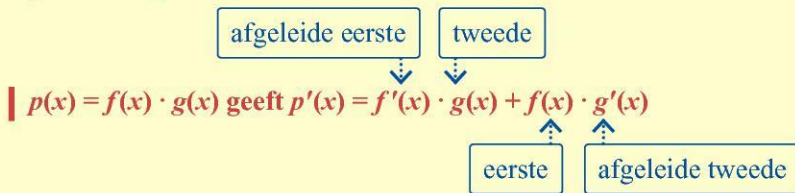
c Laat zien dat $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Theorie B De productregel

Het product van de functies f en g is de functie $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Om de functie p te differentiëren, gebruik je de

productregel voor het differentiëren.



In voorbeeld a zie je hoe de afgeleide van $y = x^2 \cdot \ln(x)$ met de productregel wordt berekend.

Om de afgeleide van $y = 6x \cdot e^{3x}$ te berekenen, gebruik je zowel de productregel als de kettingregel. Zie voorbeeld b.

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $y = x^2 \cdot \ln(x)$

b $y = 6x \cdot e^{3x}$

Uitwerking

a $y = x^2 \cdot \ln(x)$ geeft

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x$$

$$x^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x} = x$$

b $y = 6x \cdot e^{3x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = 6 \cdot e^{3x} + 6x \cdot e^{3x} \cdot 3 = 6e^{3x} + 18xe^{3x}$

kettingregel

21 Bereken de afgeleide.



a $y = 2x \cdot \ln(x)$

b $y = x^3 \cdot \log(x)$

c $y = x\sqrt{x+1}$

d $y = 3^x \cdot {}^2\log(x)$

22 Bereken de afgeleide.



a $y = 2x\sqrt{3x-1}$

b $y = 3x^2 \cdot e^{3x}$

c $y = (1+2x) \cdot 2^{3x}$

d $y = 5x \cdot {}^3\log(x)$

23 Differentieer.



a $N = t \cdot \ln(3t)$

b $B = 2q(1+2^q)$

c $R = q\sqrt{3q^2+5} - 6q$

d $L = 5 \cdot \log(x) + 5x \cdot \ln(x)$

Gegeven zijn de functies $t(x) = 3x + 2$, $n(x) = x + 2$ en $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$.

- a Bereken $t'(x)$, $n'(x)$ en $\frac{t'(x)}{n'(x)}$.
- b Licht toe dat $q'(x) = \frac{t'(x)}{n'(x)}$ niet juist kan zijn.

Theorie C De quotiëntregel

Het quotiënt van de functies $t(x) = 2x^2 + 1$ en $n(x) = 3x + 5$ is de functie

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} = \frac{2x^2 + 1}{3x + 5}.$$

Om de afgeleide van q te berekenen, gebruik je de **quotiëntregel voor het differentiëren**.

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \text{ geeft } q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

De quotiëntregel in het kort is:

$$\text{Afgeleide van } \frac{t}{n} \text{ is } \frac{nt' - tn'}{n^2}.$$

Om de quotiëntregel makkelijk te kunnen onthouden, kun je hem als volgt schrijven.

$$\text{Afgeleide van } \frac{t}{n} \text{ is } \frac{n \cdot at - t \cdot an}{n^2} = \frac{\text{nat min tan}}{n^2}.$$

$n \cdot at$ betekent **n**oemer **a**maal **a**fgeleide **t**eller.
 $t \cdot an$ betekent **t**eller **a**maal **a**fgeleide **n**oemer.

Dus $q(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x + 5}$ geeft

$$q'(x) = \frac{\overbrace{(3x+5)}^n \cdot \overbrace{4x}^{t'} - \overbrace{(2x^2+1)}^t \cdot \overbrace{3}^{n'}}{\underbrace{(3x+5)^2}_{n^2}} = \frac{12x^2 + 20x - 6x^2 - 3}{(3x+5)^2} = \frac{6x^2 + 20x - 3}{(3x+5)^2}.$$

Laat de haakjes in de noemer staan.



Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $y = \frac{2x+1}{1-3x}$

b $y = \frac{20}{e^{3x}+2}$

Uitwerking

a $y = \frac{2x+1}{1-3x}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(1-3x) \cdot 2 - (2x+1) \cdot (-3)}{(1-3x)^2} = \frac{2-6x+6x+3}{(1-3x)^2} = \frac{5}{(1-3x)^2}$

b $y = \frac{20}{e^{3x}+2}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{3x}+2) \cdot 0 - 20 \cdot e^{3x} \cdot 3}{(e^{3x}+2)^2} = \frac{-60e^{3x}}{(e^{3x}+2)^2}$

Bij de afgeleide van de noemer heb je de kettingregel nodig.

25 Differentieer.

a $y = \frac{x-2}{x+5}$ **b** $y = \frac{x^3}{2x^2+1}$ **c** $y = \frac{x-2}{3-x^2} + x^2$

26 Differentieer.

a $y = \frac{\ln(x)}{x^2+x}$ **b** $y = \frac{100}{2^{2x+5}}$ **c** $y = \frac{e^{3x}}{5x-1}$

A27 Differentieer.

a $R = \frac{q^2}{q^2+2}$ **c** $F = t^2 \cdot \ln(4t-1)$ **e** $B(n) = \frac{5}{4-2^{3n}}$
b $W = \frac{p}{1+\ln(p)}$ **d** $N(t) = \frac{200}{1+40e^{-0.2t}}$ **f** $G(p) = (4p+1)\sqrt{p^2+1}$

A28 In een vijver wordt een hoeveelheid organisch afval gedumpt.

Het zuurstofniveau in het water zal daardoor eerst dalen, maar na verloop van tijd treedt herstel op. Het zuurstofgehalte P in procenten van de oorspronkelijke hoeveelheid zuurstof is te berekenen met de formule

$P(t) = \frac{100(t^2 - t + 1)}{t^2 + 1}$. Hierin is t de tijd in weken.

- a** Bereken in één decimaal $P'(1,5)$ en geef hiervan de praktische betekenis.
- b** Bereken met de afgeleide na hoeveel dagen het zuurstofgehalte minimaal is.
- c** Onderzoek na hoeveel dagen het zuurstofniveau voor 85% hersteld is.
- d** Bereken hoeveel dagen de snelheid waarmee het zuurstofgehalte toeneemt meer is dan 10% per week.
- e** Neem aan dat de snelheid waarmee P verandert na 7 weken niet meer wijzigt.
Bereken na hoeveel dagen in dat geval het oorspronkelijk zuurstofniveau weer bereikt wordt.

Terugblik

De afgeleide van $y = \ln(x)$ en $y = {}^g\log(x)$

Voor de afgeleide van $N = 25 \cdot \ln(0,8t)$ gebruik je

de regel $y = \ln(x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

$$N = 25 \cdot \ln(0,8t) \text{ geeft } \frac{dN}{dt} = 25 \cdot \frac{1}{0,8t} \cdot 0,8 = \frac{25}{t}$$

$$y = \ln(x) \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$y = {}^g\log(x) \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$$

Voor de afgeleide van $R = 60 \cdot \log(2x + 3)$ gebruik

je de regel $y = {}^g\log(x)$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$.

$R = 60 \cdot \log(2x + 3)$ geeft

$$\frac{dR}{dx} = 60 \cdot \frac{1}{(2x + 3) \cdot \ln(10)} \cdot 2 = \frac{120}{(2x + 3) \cdot \ln(10)} \approx \frac{52}{(2x + 3)}$$

NORM DRIJF AUTO REEEL RAD WN	
120/ln(10)	52,11533783

De productregel

Voor het differentiëren van het product van twee functies gebruik je de productregel:

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ geeft } p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Bij $y = x^3 \cdot \ln(x + 1)$ krijg je

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \cdot \ln(x + 1) + x^3 \cdot \frac{1}{x + 1} = 3x^2 \cdot \ln(x + 1) + \frac{x^3}{x + 1}.$$

Soms gebruik je zowel de productregel als de kettingregel.

$$\text{Bij } y = 2x e^{3x+1} \text{ krijg je } \frac{dy}{dx} = 2 \cdot e^{3x+1} + 2x \cdot e^{3x+1} \cdot 3 = 2e^{3x+1} + 6xe^{3x+1}.$$

De quotiëntregel

Voor het differentiëren van het quotiënt van twee functies gebruik je de quotiëntregel:

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \text{ geeft } q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}.$$

Bij $y = \frac{x^2 + x}{2x^2 - 1}$ krijg je

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\overbrace{(2x^2 - 1)}^n \cdot \overbrace{(2x + 1)}^{t'} - \overbrace{(x^2 + x)}^t \cdot \overbrace{4x}^{n'}}{\underbrace{(2x^2 - 1)^2}_{n^2}} = \frac{4x^3 + 2x^2 - 2x - 1 - 4x^3 - 4x^2}{(2x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 2x - 1}{(2x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Soms gebruik je zowel de quotiëntregel als de kettingregel, bijvoorbeeld

$$\text{bij het differentiëren van } y = \frac{2000}{1 + 0,6e^{4t}}.$$

14.3 Redeneren met formules

029
☐ ⊗ *

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $N = b \cdot g^t$ met $0 < g < 1$. De grafiek van N is dalend en N nadert tot 0 als t heel groot wordt.

In deze opgave bekijken we de formule $A = 100 - 90 \cdot 0,8^t$.

Als t heel groot wordt, dan nadert $90 \cdot 0,8^t$ tot 0.

a Hoe volgt hieruit dat $A \approx 100$ als t heel groot wordt?

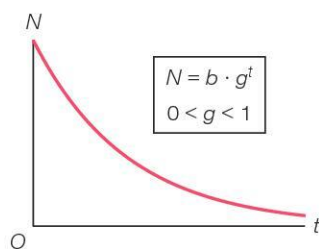
b Vul in: toe of af.

Als t toeneemt, dan neemt $0,8^t$..., dus dan neemt

$90 \cdot 0,8^t$..., dus dan neemt $100 - 90 \cdot 0,8^t$...

c Hoe kun je op grond van vraag b concluderen dat de grafiek van A stijgend is?

d Schets de grafiek van A . Gebruik de GR. Neem daarbij x tussen 0 en 20 en y tussen 0 en 100. Is de grafiek inderdaad stijgend?



figuur 14.18

Theorie A Redeneren met groeiformules

In opgave 29 heb je bij de formule van $A = 100 - 90 \cdot 0,8^t$ beredeneerd dat A nadert tot 100 als t heel groot wordt. Je hebt ook beredeneerd dat de grafiek van A stijgend is.

Bij een redenering werk je stap voor stap toe naar een conclusie over de formule of de grafiek, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken of de grafiek te plotten.

Je gebruikt bij redeneren met formules met g^t waarbij $0 < g < 1$

- als t heel groot wordt, dan nadert g^t tot 0
- als t toeneemt, dan neemt g^t af.

Bij het beredeneren kom je twee typen opdrachten tegen. We lichten dit toe aan de hand van de formule $N = 80(1 - 0,9^t)$.

1 Beredeneer wat N ongeveer zal zijn als t heel groot wordt.

Uitwerking

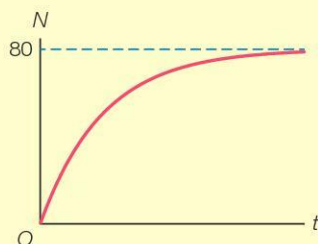
Als t heel groot wordt, dan nadert $0,9^t$ tot 0, dus dan wordt $1 - 0,9^t \approx 1$, dus dan wordt $80(1 - 0,9^t) \approx 80$. Hieruit volgt dat $N \approx 80$ als t heel groot wordt.

2 Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.

Uitwerking

Als t toeneemt, dan neemt $0,9^t$ af, dus neemt $1 - 0,9^t$ toe, dus dan neemt $80(1 - 0,9^t)$ toe. Dus de grafiek van N is stijgend.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $N = 80(1 - 0,9^t)$. Met een stippellijn is aangegeven dat de **grenswaarde** gelijk is aan 80. We zeggen ook wel dat 80 het **verzadigingsniveau** is.



figuur 14.19

Ook bij de formule $B = \frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t}$ kun je beredeneren wat de grenswaarde is. Verder kun je beredeneren dat de grafiek van B dalend is.

Je gebruikt bij redeneren met formules met g^t waarbij $g > 1$

- als t heel groot wordt, dan wordt g^t heel groot
- als t toeneemt, dan neemt g^t toe.

Bij de opgaven in deze paragraaf gaan we er steeds van uit dat $t \geq 0$ is.

Zo krijg je bij de formule $B = \frac{120}{(1 + 0,5 \cdot 1,6^t)}$:

- 1 Beredeneer wat de grenswaarde van B is.

Uitwerking

Als t heel groot wordt, dan wordt $1,6^t$ heel groot, dus dan wordt $0,5 \cdot 1,6^t$ heel groot, dus dan wordt $1 + 0,5 \cdot 1,6^t$ ook heel groot. Dus dan wordt

$\frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t} \approx 0$. Dus de grenswaarde van B is 0.

Deel je 120 door een heel groot getal, dan krijg je ongeveer 0.

- 2 Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van B dalend is.

Uitwerking

Als t toeneemt, dan neemt $1,6^t$ toe, dus dan neemt $0,5 \cdot 1,6^t$ toe, dus

dan neemt $1 + 0,5 \cdot 1,6^t$ toe en dan neemt $\frac{120}{1 + 0,5 \cdot 1,6^t}$ af.

Dus de grafiek van B is dalend.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde heb je te maken met een formule waarin $e^{-0,3t}$ voorkomt. Bij het beredeneren wordt gebruikt dat $e^{-0,3t} = (e^{-0,3})^t \approx 0,74^t$. Aan $0,74^t$ kun je zien wat er gebeurt als t toeneemt of heel groot wordt.

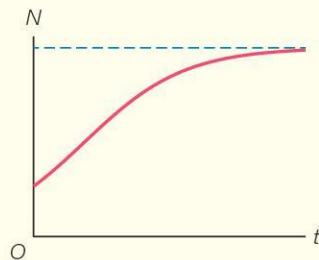
Voorbeeld

Het aantal vissen in een meer is gegeven door de formule

$$N = \frac{5000}{2 + 5,5 \cdot e^{-0,3t}}.$$
 Hierin is N het aantal vissen en t de

tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2010.

- a Beredeneer wat het verzadigingsniveau is.
- b Beredeneer hoe uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.



figuur 14.20

Uitwerking

- a Omdat $e^{-0,3t} \approx 0,74^t$ geldt: als t heel groot wordt, dan nadert $e^{-0,3t}$ tot 0. Dan wordt $5,5 \cdot e^{-0,3t} \approx 0$ en $2 + 5,5 \cdot e^{-0,3t} \approx 2$.

Dus dan wordt $\frac{5000}{2 + 5,5 \cdot e^{-0,3t}} \approx \frac{5000}{2} = 2500$, dus het verzadigingsniveau is 2500 vissen.

- b Als t toeneemt, dan neemt $e^{-0,3t}$ af, dus ook $5,5 \cdot e^{-0,3t}$ neemt af, dus ook $2 + 5,5 \cdot e^{-0,3t}$ neemt af, dus

$$\frac{5000}{2 + 5,5 \cdot e^{-0,3t}} \text{ neemt toe.}$$

De grafiek van N is dus stijgend.

Deel je 5000 door een steeds kleiner positief getal, dan krijg je een steeds grotere uitkomst.

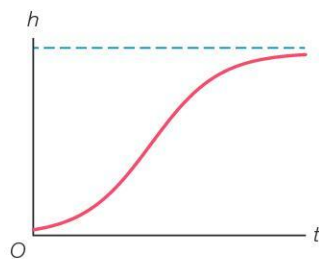
30



Bij de groei van een zonnebloem is de hoogte h gegeven

door de formule $h = \frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t}$. Hierin is h de hoogte in cm en t de tijd in weken.

- a Beredeneer dat uit de formule volgt dat de zonnebloem voortdurend hoger wordt.
- b Hoe hoog is de zonnebloem op $t = 3$?
- c Beredeneer wat de grenswaarde is.
- d Bereken in één decimaal vanaf welke t de zonnebloem hoger dan 2,5 meter is.



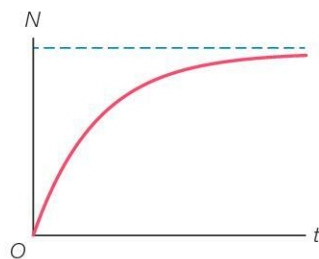
figuur 14.21

31



Belangrijk nieuws verspreidt zich razendsnel in een school. Het aantal leerlingen N dat op een zeker tijdstip t van een belangrijk feit op de hoogte is, wordt gegeven door de formule $N = 1200(1 - 0,7^t)$ met t in uren en $t = 0$ om 9:00 uur.

- a Beredeneer dat uit de formule volgt dat de grafiek van N stijgend is.
- b Bij de grafiek van N hoort een lijn die het verzadigingsniveau aangeeft. Welke lijn is dat? Wat is de praktische betekenis van het verzadigingsniveau?
- c Hoe laat hebben 950 leerlingen het nieuws gehoord? Rond af op minuten.



figuur 14.22

32
□ ⊗ *

- a** Beredeneer bij de formule $N = \frac{500}{20 + 13 \cdot 2^{-0,23t}}$ wat het verzadigingsniveau is.
- b** Gegeven is de formule $N = \frac{720}{8 + 2,1 \cdot e^t}$.
Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.
- c** Gegeven is de formule $N = 8000(1 + 1,5^t)$.
Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.
- d** Gegeven is de formule $N = 160 - 50 \cdot 0,8^t$.
Beredeneer wat de grenswaarde is.

A33
□ ⊗ *

Een bioloog doet een onderzoek naar het aantal fruitvliegjes in een afgesloten ruimte. De tijd t is in dagen met $t = 0$ op 1 april om 0:00 uur en N is het aantal fruitvliegjes. De tellingen zijn als punten in figuur 14.23 uitgezet.

- a** Met hoeveel procent is het aantal fruitvliegjes tussen $t = 35$ en $t = 45$ toegenomen?

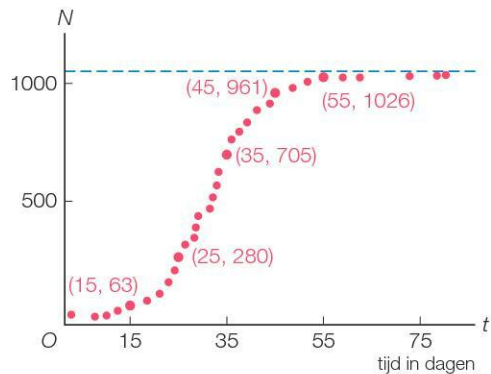
Tot $t = 30$ gaat de bioloog uit van exponentiële groei met een groeipercentage van 16% per dag.

- b** Bereken, uitgaande van de metingen op $t = 15$ en $t = 25$, het groeipercentage per dag. Rond af op één decimaal.
- c** Gebruik het groeipercentage 16% om het aantal fruitvliegjes op 23 april om 0:00 uur te berekenen.

De bioloog benadert het groeiproces met

de groeiformule $N = \frac{1035}{1 + 210 \cdot e^{-0,175t}}$.

- d** Hoeveel procent wijkt op $t = 45$ het aantal fruitvliegjes volgens de formule af van de telling van de bioloog?
- e** De bioloog verwacht dat het aantal fruitvliegjes op den duur vrijwel 1035 zal worden.
Beredeneer dat de groeiformule hiermee in overeenstemming is.



figuur 14.23



A34

Hoelang kun je woorden onthouden? Om deze vraag te beantwoorden, voerden onderzoekers een experiment uit. Deelnemers kregen een groot aantal woorden in paren te zien. Even later kregen ze als test één van de twee woorden te zien en moesten ze het bijbehorende woord geven. Hoe langer de onderzoekers wachtten met de test, hoe minder woorden de deelnemers zich nog konden herinneren.

De onderzoekers vonden de formule $P = \frac{92}{2,39^t} + \frac{32}{1,04^t} + 10$. Hierin is P het percentage woorden dat correct wordt herinnerd en t de tijd in minuten vanaf het zien van de paren woorden.

- Waarom kan deze formule niet gelden voor $t = 0,5$?
- Hoelang duurt het tot de helft van de woorden nog correct wordt herinnerd? Rond af op gehele seconden.
- Beredeneer wat de grenswaarde is van deze formule. Wat is hiervan de praktische betekenis?
- De formule is te schrijven in de vorm $P = 92 \cdot a^t + 32 \cdot b^t + 10$. Bereken a en b . Rond af op drie decimalen.

O35

In de volgende formules is $x > 0$.

Wat weet je van y als x toeneemt? Kies uit de antwoorden 'y neemt toe' en 'y neemt af'.

- $y = 1 - 0,9^x$
- $y = \frac{20}{2x + 1}$
- $y = 10 + \frac{1}{x^2}$
- $y = \frac{3\sqrt{x+1}}{10}$

Theorie B Redeneren met allerlei formules

In het voorbeeld zie je hoe je bij de formules $y = 100 - \frac{20}{3x + 1}$,

$y = \frac{10}{x^2 + 1} - 5$ en $y = \frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ beredeneert of de grafiek van y stijgend of dalend is. Daarbij nemen we steeds $x > 0$, tenzij anders vermeld.

Bij dit soort redeneringen gebruiken we

- als x toeneemt, dan neemt ax toe als $a > 0$
- als x toeneemt, dan neemt ax af als $a < 0$
- als x toeneemt, dan neemt x^n toe als $n > 0$
- als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe.

Voorbeeld

Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort.

a $y = 100 - \frac{20}{3x + 1}$

b $y = \frac{10}{x^2 + 1} - 5$

c $y = \frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$

Uitwerking

a Als x toeneemt, dan neemt $3x$ toe, dus $3x + 1$ neemt toe, dus $\frac{20}{3x + 1}$ neemt af en $100 - \frac{20}{3x + 1}$ neemt toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

b Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe, dus dan neemt $x^2 + 1$ toe en $\frac{10}{x^2 + 1}$ neemt af, dus dan neemt $\frac{10}{x^2 + 1} - 5$ ook af.

Dus de grafiek van y is dalend.

c Als x toeneemt, dan neemt $0,8^x$ af en $50 \cdot 0,8^x$ neemt af.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe.

Van $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ neemt af.

Dus de grafiek van y is dalend.



36 **a** In de theorie staat 'als x toeneemt, dan neemt x^n toe als $n > 0$ '.

Gebruik dit en de rekenregel $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ om te beredeneren dat de grafiek van $y = 5x^{-3}$ dalend is.

b Zie het voorbeeld.

Bij elk van de gegeven formules hoort een grafiek met een grenswaarde.

Beredeneer bij elk van de formules wat de grenswaarde is.



37 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.

a $y = 250 - \frac{100}{x}$

b $y = \frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2 + 1}$

c $N = 1250(2 - 3 \cdot 0,75^t)$

38

Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.

a $y = 25 + \frac{12}{x^2}$

b $y = 40 - \frac{80}{2 + \sqrt{x}}$

c $N = \frac{18\,000}{250 + 333 \cdot 0,65^t}$

A39

Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort.

a $A = x \left(3 + \frac{x}{22} \right)$

b $B = \frac{x^{2,3} + 1}{20 \cdot 0,3^x}$

c $C = \frac{e^{2x} + 1}{1 + e^{-x}}$

A40

Uit de lengte L van de remweg van een auto kan met de vuistregel

$L = \frac{v^2}{25f}$ de snelheid worden bepaald waarmee gereden is. Hierin is L in

meters en is v de snelheid in km/uur. Verder is f een positief getal dat afhangt van het wegdek, de weersomstandigheden en de autobanden.

a Hoe volgt uit de formule dat bij een hogere snelheid en een vaste waarde van f een langere remweg hoort?

b Door een sneeuwbus neemt de grip en daarmee de waarde van f af. Beredeneer met de formule dat de remweg langer wordt.

c Druk voor remwegen van 38 meter f uit in v .

d Met hoeveel procent neemt de lengte van de remweg toe bij een 20% hogere snelheid?

e Bij het gebruik van zomerbanden is bij een bepaalde snelheid de remweg 40 meter. Door winterbanden te gebruiken, neemt f met 8,4% toe. Daardoor heb je bij verder gelijke omstandigheden bij een hogere snelheid een remweg van 40 meter.

Bereken hoeveel procent hoger. Rond af op één decimaal.

A41

Het is van belang dat de schildpad voor ze aan haar winterslaap begint, in een goede conditie verkeert, want anders is de kans groot dat ze door haar reserves heen raakt en sterft.

De conditie van een schildpad is te

berekenen met de Jackson ratio $J = \frac{g}{l^3}$.

Hierin is het gewicht g van de schildpad in gram en l de lengte in cm.

Schildpadden van de soort *T. hermanni*

met een J van rond de 0,21 verkeren in een goede conditie. Maar is $J < 0,17$, dan is de conditie onvoldoende.

Van twee *T. hermanni* schildpadden die hetzelfde gewicht hebben, is bekend dat de grootste een Jackson ratio van 0,17 heeft.

Beredeneer met de formule of de kleine schildpad in voldoende conditie verkeert.



Een van de oudste methoden om de gevoelstemperatuur te berekenen, is de methode van Siple en Passel.

De formule die hierbij hoort is $G = 33 + (T - 33) \cdot W$ met $W = 0,474 + 0,454\sqrt{w} \cdot (1 - 0,1\sqrt{w})$. Hierin is G de gevoelstemperatuur in $^{\circ}\text{C}$, T de luchttemperatuur in $^{\circ}\text{C}$ op 1,50 meter hoogte en w de windsnelheid in m/s op 10 meter hoogte. De formule geldt voor windsnelheden tussen 0 en 25 m/s.

- a Uit de formule van G volgt dat er een luchttemperatuur is die bij elke windsnelheid dezelfde gevoelstemperatuur oplevert.
Toon dit aan.
- b Schets de grafiek van W voor w tussen 0 en 25. Welke soort van stijgen of dalen heeft de grafiek van W ?
- c Beredeneer met de schets van vraag b en de formule van G dat bij luchttemperaturen rondom het vriespunt de gevoelstemperatuur afneemt als de windsnelheid toeneemt.



Terugblik

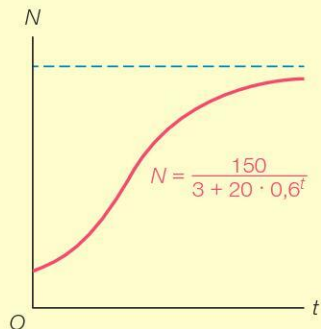
Redeneren met groeiformules

Gegeven is de formule $N = \frac{150}{3 + 20 \cdot 0,6^t}$. In de figuur hiernaast geeft de stippellijn het verzadigingsniveau aan. Bij de formule van N kun je als volgt beredeneren dat het verzadigingsniveau 50 is.

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,6^t$ tot 0. Dan wordt $20 \cdot 0,6^t \approx 0$ en $3 + 20 \cdot 0,6^t \approx 3$. Dus dan wordt

$$\frac{150}{3 + 20 \cdot 0,6^t} \approx \frac{150}{3} = 50.$$

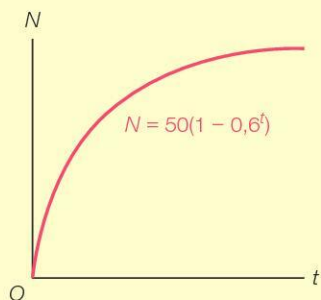
Dus het verzadigingsniveau is 50.



Gegeven is de formule $N = 50 \cdot (1 - 0,6^t)$. Zie de figuur hiernaast. Bij de formule van N kun je als volgt beredeneren dat de grafiek stijgend is.

Als t toeneemt, dan neemt $0,6^t$ af, dus neemt $1 - 0,6^t$ toe, dus dan neemt $50(1 - 0,6^t)$ toe.

De grafiek van N is dus stijgend.



Redeneren met formules

Je kunt beredeneren dat bij de formule $y = 200 - \frac{50}{x\sqrt{x}}$ een stijgende grafiek hoort. Dat gaat als volgt.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe, dus dan neemt $x\sqrt{x}$ ook toe, dus dan neemt $\frac{50}{x\sqrt{x}}$ af, dus dan neemt $200 - \frac{50}{x\sqrt{x}}$ toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

Bij de formule $y = 1200(1 + e^{-0,9x})$ bereken je als volgt wat de grenswaarde is.

Omdat $e^{-0,9x} \approx 0,4^x$ geldt: als x heel groot wordt, dan nadert $e^{-0,9x}$ tot 0.

Dan wordt $1 + e^{-0,9x} \approx 1$ en $1200(1 + e^{-0,9x}) \approx 1200$.

Dus de grenswaarde is 1200.

14.4 Redeneren met de afgeleide



Gegeven is de formule $y = 50 - \frac{10}{2x+3}$ met $x \geq 0$.

De afgeleide is $\frac{dy}{dx} = \frac{20}{(2x+3)^2}$.

- Toon aan dat deze afgeleide juist is.
- Schets de grafiek van $\frac{dy}{dx}$.
- Hoe kun je aan de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ zien dat de grafiek van y stijgend is voor elke $x \geq 0$?

Theorie A Conclusies trekken uit de grafiek van de afgeleide

Je kunt de grafiek van de afgeleide gebruiken om een conclusie te trekken over het stijgen of dalen van de grafiek van de oorspronkelijke formule.

Je gebruikt:

- Als de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ geheel boven de x -as ligt, dan is de grafiek van y stijgend.
- Als de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ geheel onder de x -as ligt, dan is de grafiek van y dalend.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $E = 0,7^x - 0,01x^3 + 10$ met $x \geq 0$.

- Stel de formule op van de afgeleide van E en toon met de grafiek van de afgeleide aan dat de grafiek van E dalend is.
- Er is een waarde van x waarvoor de grafiek van E het minst daalt. Bereken deze waarde van x .

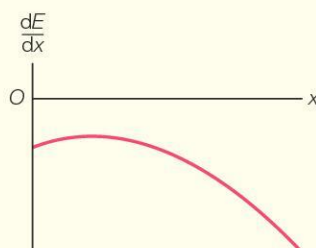
Uitwerking

- $E = 0,7^x - 0,01x^3 + 10$ geeft $\frac{dE}{dx} = 0,7^x \cdot \ln(0,7) - 0,03x^2$

Voer in $y_1 = 0,7^x \cdot \ln(0,7) - 0,03x^2$.

De grafiek van $\frac{dE}{dx}$ ligt geheel onder de x -as, dus de grafiek van E is dalend voor $x \geq 0$.

- De optie maximum bij y_1 geeft $x \approx 1,3$, dus voor $x = 1,3$ daalt de grafiek van E het minst.



R44
  *

Zie het voorbeeld.

Om te bepalen voor welke x de grafiek van E het minst daalt, is berekend voor welke x de grafiek van de afgeleide een maximum heeft.

Licht toe waarom bij dit maximum niet de grootste daling van de grafiek van E hoort, maar juist de kleinste daling.

45
  *

Gegeven is de formule $K = \frac{1}{3}q^3 - 5q^2 + 26q + 100$ met $q \geq 0$.

a Toon met de grafiek van de afgeleide aan dat de grafiek van K stijgend is.

b Er is een waarde van q waarvoor de grafiek van K het minst stijgt. Bereken deze waarde van q .

46
  *

Gegeven is de formule $N = 100(0,9^t + 0,8^t)$ met $t \geq 0$.

a Toon met de grafiek van de afgeleide aan dat de grafiek van N dalend is.

b Er is een waarde van t waarvoor de snelheid waarmee de grafiek van N daalt de helft is van de snelheid waarmee de grafiek van N daalt voor $t = 1$.

Bereken deze waarde van t in twee decimalen.

O47
  *

Gegeven is de formule $y = 50 - \frac{10}{2x+3}$ met $x \geq 0$ van opgave 43.

De afgeleide is $\frac{dy}{dx} = \frac{20}{(2x+3)^2}$.

a Hoe kun je aan de formule van $\frac{dy}{dx}$ zien dat $\frac{dy}{dx} > 0$ voor elke $x \geq 0$?

b Uit $\frac{dy}{dx} > 0$ voor elke $x \geq 0$ volgt dat de grafiek van y stijgend is voor $x \geq 0$.

Licht dit toe.

Theorie B Conclusies trekken uit de formule van de afgeleide

Je kunt ook de *formule* van de afgeleide gebruiken om een conclusie te trekken over het stijgen of dalen van de grafiek van de oorspronkelijke formule.

Gegeven is de formule $y = \frac{150x}{2x+1}$ voor $x \geq 0$.

De afgeleide van y bereken je met de quotiëntregel. Je krijgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x+1) \cdot 150 - 150x \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{300x + 150 - 300x}{(2x+1)^2} = \frac{150}{(2x+1)^2}.$$

Omdat van $\frac{150}{(2x+1)^2}$ de teller positief is en de noemer positief is voor

$x \geq 0$ is $\frac{dy}{dx} > 0$ voor $x \geq 0$. Hiermee is met de formule van de afgeleide aangetoond dat de grafiek van y stijgend is voor $x \geq 0$.

Voorbeeld

Voor $0 < t < 30$ is gegeven de formule $P(t) = \ln(-0,5t + 15)$.

Toon met de formule van de afgeleide aan dat de grafiek van P dalend is.

Uitwerking

$P(t) = \ln(-0,5t + 15)$ geeft

$$P'(t) = \frac{1}{-0,5t + 15} \cdot -0,5 = \frac{-0,5}{-0,5t + 15} = \frac{0,5}{0,5t - 15}$$

De teller 0,5 is positief en de noemer $0,5t - 15$ is negatief voor $0 < t < 30$, dus $P'(t)$ is negatief voor $0 < t < 30$.

Dus de grafiek van P is dalend voor $0 < t < 30$.

In het voorbeeld wordt gevraagd om gebruik te maken van de formule van de afgeleide. Als de opdracht is 'Toon met de afgeleide aan ...', dan mag je kiezen of je een redenering geeft met de formule van de afgeleide of dat je de grafiek van de afgeleide gebruikt. Je bekijkt dan van geval tot geval wat het handigste is.

R48 Zie het voorbeeld.

 Er staat in de uitwerking dat de noemer $0,5t - 15$ negatief is voor $0 < t < 30$.

Licht dit toe.

49  a Gegeven is de formule $N = \frac{200t}{50 - t}$ met $0 < t < 50$.

Toon met behulp van de formule van de afgeleide aan dat de grafiek van N stijgend is.

b Gegeven is de formule $M = 50 \cdot 0,85^t$.

Toon met behulp van de formule van de afgeleide aan dat de grafiek van M dalend is.

50  Gegeven is de formule $F(q) = 0,1q + \ln(50q + 100)$ met $q \geq 0$.

a Toon met de formule van de afgeleide aan dat de grafiek van F stijgend is.

b Als q toeneemt van 5 tot 10, dan neemt de snelheid waarmee F verandert af.

Bereken hoeveel procent deze afname is.

A51  Gegeven is de formule $Z = 100(e^{0,1t} + t^{0,4})$ met $t \geq 0$.

a Toon met de afgeleide aan dat de grafiek van Z stijgend is.

b De snelheid waarmee Z verandert heeft een minimum.

Bereken dit minimum in één decimaal.

A52
☐ ⊙ *

Een natuurgebied is verontreinigd met een chemische stof. Het bedrag B in euro's dat nodig is om $p\%$ van de verontreiniging te verwijderen, is

gegeven door de formule $B = \frac{60000p}{100-p}$ met $0 < p < 100$.

- a Een milieuorganisatie eist dat alle verontreiniging verwijderd wordt. Lever commentaar met behulp van de gegeven formule.
- b Het verwijderen van 95% van de chemische stof is duurder dan het verwijderen van 90% van die stof. Hoeveel procent duurder?
- c Toon met de formule van de afgeleide aan dat hoe meer je van de chemische stof verwijdert, des te hoger de kosten zijn.
- d De gemeente heeft een miljoen euro beschikbaar om de chemische stof te verwijderen. Bereken hoeveel procent van de chemische stof na de schoonmaakoperatie aanwezig blijft.
- e Je kunt de formule van B schrijven in de vorm $B = a + \frac{b}{q}$. Hierin is q het percentage chemische stof dat na de schoonmaakoperatie in het natuurgebied aanwezig blijft. Bereken a en b .

A53
☐ ⊙ *

De OV-fiets van de NS wordt ieder jaar populairder. In 2015 waren er 1,9 miljoen betaalde ritten en in 2019 waren dat er al 5,2 miljoen.

Martijn maakt bij het aantal betaalde ritten

N een model van de vorm $N = \frac{a}{1 + b \cdot e^{ct}}$

met N in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2015. Hij neemt aan dat de grenswaarde van het aantal betaalde ritten 7 miljoen per jaar is, en neemt daarom $a = 7$.

Zo krijgt hij de formule $N = \frac{7}{1 + b \cdot e^{ct}}$.

Uit de gegevens volgt dat $b \approx 2,68$ en $c \approx -0,51$.

- a Toon dit aan.

Martijn werkt dus met de formule $N = \frac{7}{1 + 2,68 \cdot e^{-0,51t}}$.

- b In welk jaar zullen er volgens de formule voor het eerst meer dan 6,5 miljoen betaalde ritten zijn?
- c Toon met de afgeleide aan dat de grafiek van N stijgend is.
- d Onderzoek voor welke waarde van t de grafiek van N het snelst stijgt. Rond af op één decimaal.



Terugblik

Conclusies trekken uit de grafiek van de afgeleide

Door de grafiek van de afgeleide te schetsen, kun je soms concluderen dat de oorspronkelijke grafiek geheel stijgend of geheel dalend is. Je gebruikt:

- Als de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ boven de x -as ligt, dan is de grafiek van y stijgend.
- Als de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ onder de x -as ligt, dan is de grafiek van y dalend.

Bij de formule $F = -0,04p^3 + 0,3p^2 - 0,87p + 10$ krijg je

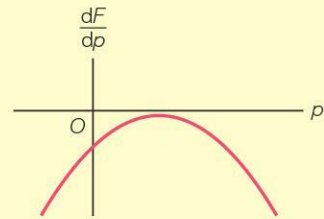
$$\frac{dF}{dp} = -0,12p^2 + 0,6p - 0,87.$$

Na invoeren van $y_1 = -0,12x^2 + 0,6x - 0,87$ plot je de grafiek. Zie de schets hiernaast.

De grafiek van $\frac{dF}{dp}$ ligt geheel onder de p -as, dus de grafiek van F is dalend.

In de grafiek van $\frac{dF}{dp}$ zie je ook dat er een waarde van p is

waarvoor de daling van F minimaal is, want $\frac{dF}{dp}$ heeft een negatief maximum.



Conclusies trekken uit de formule van de afgeleide

Door te redeneren met de formule van de afgeleide kun je soms concluderen dat de oorspronkelijke grafiek geheel stijgend of geheel dalend is.

Je gebruikt:

- Als $\frac{dy}{dx}$ groter is dan nul, dan is de grafiek van y stijgend.
- Als $\frac{dy}{dx}$ kleiner is dan nul, dan is de grafiek van y dalend.

Bij de formule $y = \frac{10}{x^2 + 4}$ met $x > 0$ krijg je $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 4) \cdot 0 - 10 \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-20x}{(x^2 + 4)^2}$.

Voor $x > 0$ is de teller negatief en de noemer positief, dus de grafiek van y is dalend voor $x > 0$.

Bij de formule $N(t) = \frac{200}{1 + 50e^{-0,4t}}$ krijg je

$$N'(t) = \frac{(1 + 50e^{-0,4t}) \cdot 0 - 200 \cdot 50e^{-0,4t} \cdot -0,4}{(1 + 50e^{-0,4t})^2} = \frac{4000e^{-0,4t}}{(1 + 50e^{-0,4t})^2}.$$

Voor elke t is de teller positief en de noemer positief, dus $N'(t)$ is positief. Dus de grafiek van N is stijgend.

14.5 De afgeleide en soorten van stijgen en dalen

054
  *

Gegeven is de formule $y = 2e^{0,4x}$. De grafiek zie je in figuur 14.24.

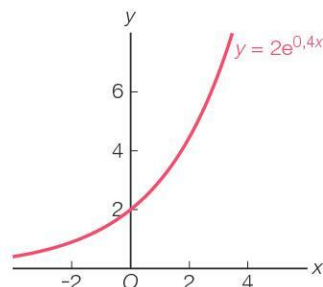
- a** Met welke soort van stijgen heb je bij de grafiek van y te maken?

De afgeleide van y is $\frac{dy}{dx} = 0,8e^{0,4x}$. In figuur 14.25 is de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ getekend.

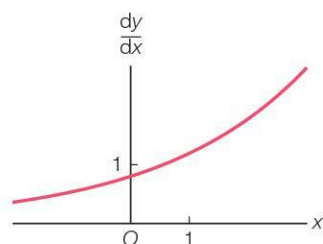
- b** Hoe kun je aan de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ zien dat de grafiek van y stijgend is?

- c** De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt boven de x -as en is bovendien stijgend.

Licht toe dat hieruit volgt dat de grafiek van y toenemend stijgend is.



figuur 14.24



figuur 14.25

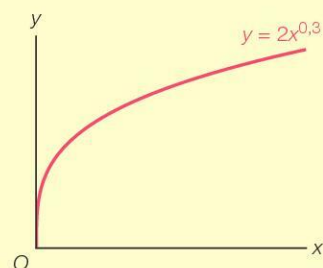
Theorie A De grafiek van de afgeleide en soorten van stijgen

In de figuur hiernaast is de grafiek van $y = 2x^{0,3}$ getekend. Je ziet dat de grafiek afnemend stijgend is. Dit kun je als volgt aantonen met behulp van de grafiek van de afgeleide.

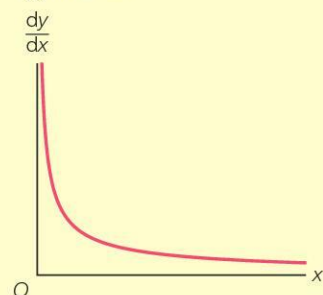
De afgeleide van y is $\frac{dy}{dx} = 0,6x^{-0,7}$. In figuur 14.27 is de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ getekend.

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel boven de x -as. Daaruit volgt dat de grafiek van y stijgend is.

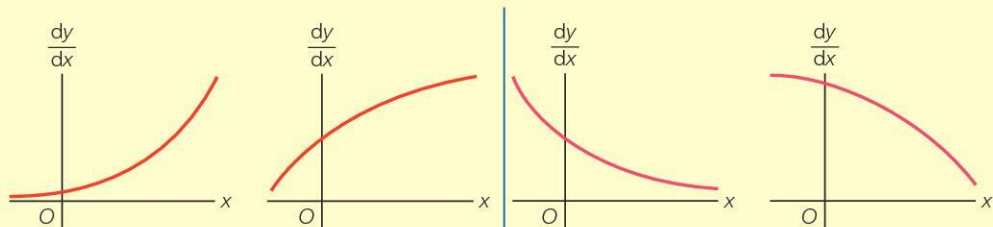
Bovendien is de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ dalend. De hellingen zijn dus positief, maar worden steeds kleiner. Dus de grafiek van y is afnemend stijgend.



figuur 14.26



figuur 14.27



- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is toenemend stijgend.

- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt boven de x -as, dus de grafiek van y is stijgend.
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is afnemend stijgend.

Voorbeeld

Het aantal edelherten in het Deelerwoud wordt beschreven door de formule $N = 50(1 + t^{0,54})$. Hierin is N het aantal edelherten en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2020.

Bereken de afgeleide van N en toon met de grafiek van de afgeleide aan dat het aantal edelherten in het Deelerwoud steeds minder snel toeneemt.

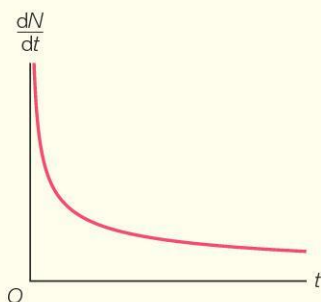
Uitwerking

$$N = 50(1 + t^{0,54}) \text{ geeft } \frac{dN}{dt} = 50 \cdot 0,54 t^{-0,46} = 27 t^{-0,46}$$

Voer in $y_1 = 27x^{-0,46}$.

- De grafiek van $\frac{dN}{dt}$ ligt boven de t -as, dus de grafiek van N is stijgend.
- De grafiek van $\frac{dN}{dt}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van N is afnemend stijgend.

Dus het aantal edelherten neemt steeds minder snel toe.



55



Bereken de afgeleide en onderzoek met de grafiek van de afgeleide welke soort van stijgen bij de grafiek van y hoort.

a $y = 0,05(1 + 4e^{0,5x})$

b $y = \ln(2x + 15)$ met $x > -7,5$

c $y = \frac{30 - 10x}{1 - x}$ met $x > 1$

d $y = x \cdot \ln(x + 4)$ met $x \geq 0$

A56
☐ ⊗ *

Wereldwijd lijden steeds meer mensen aan diabetes. Het percentage P van de mensen dat lijdt aan deze ziekte wordt gegeven door de formule $P = 2,35(1 + e^{0,0275t})$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ in januari 1980.

- Bereken met hoeveel procent het percentage van de mensen dat lijdt aan diabetes is toegenomen in de periode van januari 1980 tot januari 2015. Rond af op gehele.
- Stel de formule op van de afgeleide van P en toon met de grafiek van de afgeleide aan dat de toename van P steeds groter wordt.

De wereldbevolking groeit exponentieel. Halverwege 2005 waren er 6,5 miljard bewoners en halverwege 2020 was dat toegenomen tot 7,8 miljard.

- Bereken met hoeveel procent het aantal mensen dat lijdt aan diabetes is toegenomen tussen januari 2010 en januari 2018. Rond af op gehele.

A57
☐ ⊗ *

Het aantal leden N van een nieuwe politieke beweging wordt gegeven

door de formule $N = \frac{5000}{1 + 19e^{-0,175t}}$. Hierin is t de tijd in maanden met $t = 0$ op het moment van oprichten.

Bereken de afgeleide en toon met de grafiek van de afgeleide aan dat de grafiek van N overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend. Voor welke t gebeurt dit? Rond af op één decimaal.

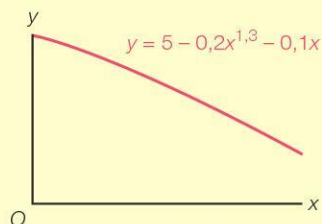
O58
☐ ⊗ *

Gegeven is de formule $y = \frac{x+11}{x+1}$ met $x \geq 0$.

- Toon aan dat $\frac{dy}{dx} = \frac{-10}{(x+1)^2}$ en schets de grafiek van $\frac{dy}{dx}$.
- Hoe kun je aan de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ zien dat de grafiek van y daalt?
- Hoe kun je aan de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ zien dat de grafiek van y afnemend dalend is?

Theorie B De grafiek van de afgeleide en soorten van dalen

In de figuur hiernaast is de grafiek van $y = 5 - 0,2x^{1,3} - 0,1x$ getekend. Om met de afgeleide aan te tonen dat de grafiek van y toenemend dalend is, schets je de grafiek van $\frac{dy}{dx}$.

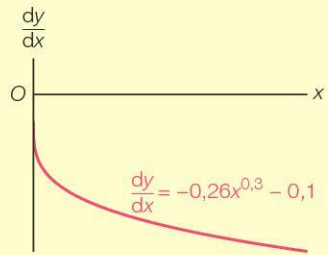


figuur 14.28

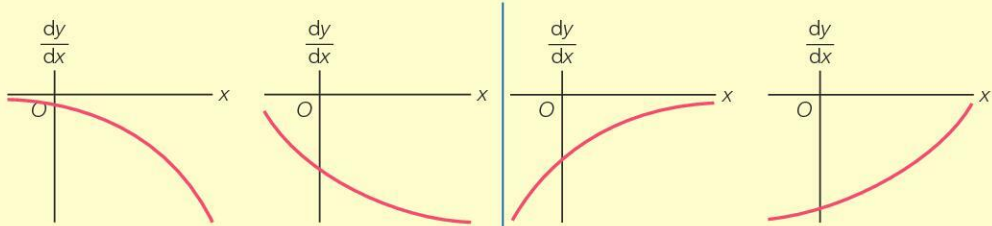
$$y = 5 - 0,2x^{1,3} - 0,1x \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = -0,26x^{0,3} - 0,1$$

De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt geheel onder de x -as. Daaruit volgt dat de grafiek van y dalend is.

Bovendien is de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ dalend. De hellingen zijn negatief en worden steeds kleiner. Dus de grafiek van y is toenemend dalend.



figuur 14.29



- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt onder de x -as, dus de grafiek van y is dalend.
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is toenemend dalend.
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt onder de x -as, dus de grafiek van y is dalend.
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is afnemend dalend.

59



Bereken de afgeleide en onderzoek met de grafiek van de afgeleide welke soort van dalen bij de grafiek van y hoort.

a $y = 100e^{-0,1x}$

b $y = 5 - x\sqrt{x}$

c $y = 10 - \ln(3x + 20)$ met $x \geq 0$

d $y = \frac{3 - x^2}{x + 1}$ met $x \geq 0$

60



Differentieer en onderzoek met de grafiek van de afgeleide welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek hoort.

a $F = 5 \cdot \log(P) + 6$ met $P > 0$

b $S = \frac{20}{1 + x^{0,5}}$

c $T = \frac{20}{1 + 0,5^t}$ met $t \geq 0$

d $D = \frac{x + 200}{20 - x}$ met $0 < x < 20$

A61
  *

Op 10 april 2016 vond de 36^e editie van de marathon van Rotterdam plaats. Niek Slappendel was met zijn 81 jaar de oudste deelnemer. Hij liep de 42,195 km in een persoonlijk record van 4 uur en 59 minuten.

- a** Wat was de gemiddelde snelheid van Niek? Geef het antwoord in m/s en rond af op twee decimalen.



Marathons kun je tot op hoge leeftijd lopen. Toch zal naarmate je ouder wordt je gemiddelde snelheid afnemen. Er is een model gemaakt dat dit proces beschrijft. Het model is $v = a(2L^{0,7} - 1,25L^{0,8})$. Hierin is v de gemiddelde snelheid op de marathon in m/s, L de leeftijd in jaren met $30 \leq L \leq 90$ en a een constante die van de marathonloper afhangt. Voor iemand die op 30-jarige leeftijd de marathon loopt met een gemiddelde snelheid van 18 km/uur is, in twee decimalen, a gelijk aan 1,90.

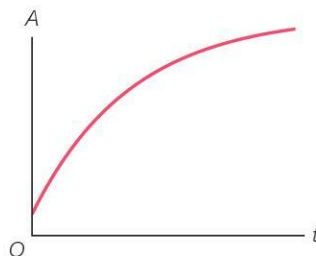
- b** Bereken voor deze loper a in drie decimalen.
c Bereken voor deze loper de eindtijd op de marathon als hij op 80-jarige leeftijd mee zou doen.
d Stel dat Niek Slappendel ook op 40-jarige leeftijd had deelgenomen aan de marathon. Welke tijd zou hij dan volgens het model hebben gelopen?
e Naarmate je ouder wordt, neemt de snelheid waarmee je een marathon kunt lopen af. Toon met de grafiek van de afgeleide aan dat de snelheid waarmee de snelheid afneemt steeds groter wordt.

O62
  *

In de figuur hiernaast is de grafiek van $A = 100 - 90 \cdot 0,8^t$ met $t \geq 0$ getekend. In deze opgave ga je met behulp van de formule van de afgeleide aantonen dat de grafiek van A afnemend dalend is.

Er geldt $\frac{dA}{dt} \approx 20,1 \cdot 0,8^t$.

- a** Toon dit aan.
b Hoe kun je aan de formule van $\frac{dA}{dt}$ zien dat de grafiek van A stijgt?
c Vul in: toe of af.
 Als t toeneemt, dan neemt $0,8^t$..., dus dan neemt $20,1 \cdot 0,8^t$...
 Dus als t toeneemt, dan neemt $\frac{dA}{dt}$...
d Hoe kun je op grond van de vragen b en c concluderen dat de grafiek van A afnemend stijgend is?



figuur 14.30

Theorie C De formule van de afgeleide en soorten van stijgen en dalen

In opgave 62 heb je met de formule van $\frac{dA}{dt}$ berekend dat de grafiek van A stijgend is. Ook heb je met de formule van $\frac{dA}{dt}$ berekend dat $\frac{dA}{dt}$ afneemt als t toeneemt. De grafiek van A is dus afnemend stijgend.

Ook bij de formule $B = \frac{350}{L}$ met $L > 0$ kun je met de formule van de afgeleide berekenen welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek hoort.

$$B = \frac{350}{L} = 350L^{-1} \text{ geeft } \frac{dB}{dL} = -350L^{-2} = \frac{-350}{L^2}$$

- De teller -350 is negatief en voor $L > 0$ is de noemer L^2 positief, dus $\frac{-350}{L^2}$ is negatief. Er geldt dus dat $\frac{dB}{dL} < 0$ voor $L > 0$. Hieruit volgt dat de grafiek van B dalend is.
- Als L toeneemt, dan neemt L^2 toe voor $L > 0$, dus dan neemt $\frac{350}{L^2}$ af en dan neemt $\frac{-350}{L^2}$ toe. Dus $\frac{dB}{dL}$ neemt toe als L toeneemt. De grafiek van B is dus afnemend dalend.

Voorbeeld

Een journalist houdt dagelijks bij hoe vaak een door hem geschreven artikel die dag is gelezen. Hierbij hoort het model $N = \frac{2t + 1500}{t + 1}$. Hierin is N het aantal lezers per dag en t de tijd in dagen met $t = 0$ op de dag van plaatsing.

Toon met behulp van de formule van de afgeleide aan dat de grafiek van N afnemend dalend is.

Uitwerking

$$N = \frac{2t + 1500}{t + 1} \text{ geeft } \frac{dN}{dt} = \frac{(t + 1) \cdot 2 - (2t + 1500) \cdot 1}{(t + 1)^2} = \frac{2t + 2 - 2t - 1500}{(t + 1)^2} = \frac{-1498}{(t + 1)^2}$$

- Omdat de teller negatief is en de noemer voor $t \geq 0$ positief, is $\frac{-1498}{(t + 1)^2}$ negatief. Dus de grafiek van N is dalend.
- Als t toeneemt, dan neemt $t + 1$ toe en dan neemt $(t + 1)^2$ toe voor $t \geq 0$. Dus dan neemt $\frac{-1498}{(t + 1)^2}$ toe. De grafiek van N is dus afnemend dalend.

In het voorbeeld wordt gevraagd om gebruik te maken van de formule van de afgeleide. Als de opdracht is 'Toon met de afgeleide aan ...', dan mag je kiezen of je een redenering geeft met de formule van de afgeleide of dat je de grafiek van de afgeleide gebruikt. Vaak is het dan het handigst om gebruik te maken van de grafiek van de afgeleide.

R63


Zie het voorbeeld.

In de uitwerking wordt geconcludeerd dat als $(t + 1)^2$ toeneemt, dat $\frac{-1498}{(t + 1)^2}$ dan toeneemt.

Licht dit toe.

64


Onderzoek met de formule van de afgeleide welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek hoort.

a $N = \frac{1500 + 50t}{330 + 0,25t}$ met $t \geq 0$

b $T = 315 e^{0,28t}$

c $S = 50 - \frac{30}{x}$ met $x > 0$

d $B = 3 - \ln(2n)$ met $n > 0$

A65


Onderzoek met de formule van de afgeleide welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek hoort.

a $N = 5 + {}^2\log(3x)$ met $x > 0$

b $R = 50 - 1,2^n$

c $F = 1,5 + 2,5t^{-0,5}$ met $t > 0$

d $L = 3,6 \cdot 1,19^{0,73t + 1,15}$

66


Fruittelers bespuiten regelmatig hun fruitbomen met insecticiden om aantasting van het fruit tegen te gaan. De opbrengst R in kg van een perenboom hangt af van de hoeveelheid gebruikte insecticide x per oogst. Hierbij is x in een geschikte eenheid. Het verband tussen R en x

wordt gegeven door $R = 150 - \frac{50}{1 + x}$ met $0 \leq x \leq 10$.

a Hoeveel procent is de toename van R als de fruitteler de hoeveelheid insecticide vergeleken met de vorige oogst laat toenemen van 4,5 tot 6,5?

b Beredeneer aan de hand van de formule van R dat de grafiek van R stijgend is.

c Toon met de formule van de afgeleide aan dat de grafiek van R afnemend stijgend is.

d Voor welke x is de snelheid waarmee R verandert minder dan 0,8? Rond in het antwoord af op één decimaal.

Elke supermarkt heeft ermee te maken: sommige artikelen verkopen goed en hebben een groot aandeel in de dagomzet, maar een groot aantal artikelen draagt slechts weinig bij aan de dagomzet.

Om dit verschijnsel te bestuderen, kennen we aan elk artikel een rangnummer toe: het bestverkochte artikel krijgt nummer 1, het op één na bestverkochte artikel krijgt nummer 2, enzovoort. Bij de (cumulatieve) omzet $O(n)$ van de artikelen met de rangnummers 1 tot en met n hoort de grafiek in figuur 14.31.

Een supermarkt gebruikt voor de dagomzet in euro's het

model $O(n) = 30\,000 - \frac{150\,000}{5 + 0,1n}$ met $0 \leq n \leq 2000$.

- De grafiek nadert een grenswaarde. Beredeneer wat de grenswaarde is en geef hiervan de praktische betekenis.
- Beredeneer dat uit de formule volgt dat de grafiek van O stijgend is.
- Toon met behulp van de formule van de afgeleide aan dat de grafiek van O afnemend stijgend is.
- Hoeveel procent van de totale dagomzet wordt opgebracht door de 20% bestverkopende artikelen? En hoeveel procent door de 60% slechtst verkopende artikelen?

De supermarkt heeft ook kosten. De kosten in euro's per dag worden gegeven door de formule $K(n) = 8n^{1,05}$.

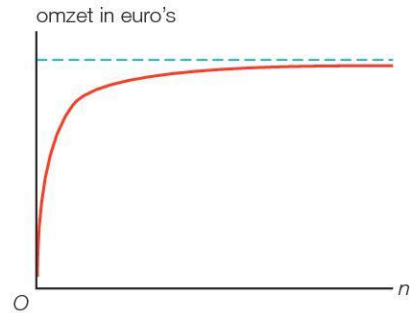
- Toon met de formule van de afgeleide aan dat de grafiek van K toenemend stijgend is.

De dagelijkse winst W in euro's wordt gegeven door $W(n) = O(n) - K(n)$.

- Bereken met behulp van de afgeleide bij welk aantal artikelen n de winst maximaal is.
- De formule van $W(n)$ is te schrijven als

$$W(n) = \frac{an + bn^{1,05} + cn^{2,05}}{5 + 0,1n}.$$

Bereken a , b en c .



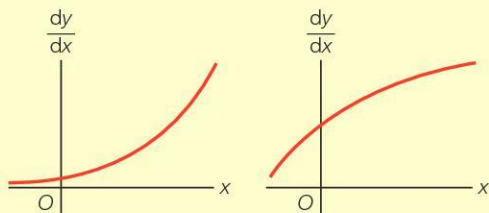
figuur 14.31



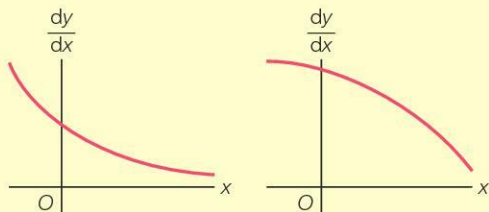
Terugblik

De grafiek van de afgeleide en soorten van stijgen en dalen

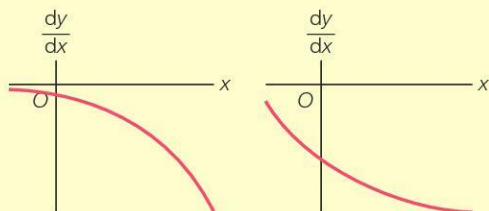
In de figuren hiernaast ligt de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ geheel boven de x -as en is deze grafiek bovendien stijgend. Dus de grafiek van y is toenemend stijgend.



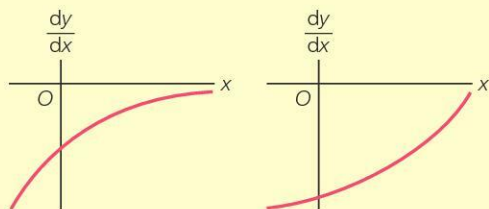
In de figuren hiernaast ligt de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ geheel boven de x -as en is deze grafiek bovendien dalend. Dus de grafiek van y is afnemend stijgend.



In de figuren hiernaast ligt de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ geheel onder de x -as en is deze grafiek bovendien dalend. Dus de grafiek van y is toenemend dalend.



In de figuren hiernaast ligt de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ geheel onder de x -as en is deze grafiek bovendien stijgend. Dus de grafiek van y is afnemend dalend.



De formule van de afgeleide en soorten van stijgen en dalen

Bij de formule $P = 15 + 2 \ln(3n)$ met $n > 0$ kun je met de formule van de afgeleide beredeneren welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek hoort.

$$P = 15 + 2 \ln(3n) \text{ geeft } \frac{dP}{dn} = 2 \cdot \frac{1}{3n} \cdot 3 = \frac{2}{n}$$

Voor $n > 0$ is $\frac{2}{n}$ positief.

Hieruit volgt dat de grafiek van P stijgend is.

Als n toeneemt, dan neemt $\frac{2}{n}$ af voor $n > 0$.

De grafiek van P is dus afnemend stijgend.

Eindopdracht Long tail

Omdat er in de boekwinkel beperkte ruimte is, worden daar vaak alleen de bestverkopende boeken verkocht. Er verschijnen echter ook heel veel boeken die aanmerkelijk minder worden verkocht. Deze boeken kunnen gezamenlijk toch een erg groot marktpotentieel hebben. We noemen deze grote groep boeken ook wel *long tail* boeken: deze boeken vormen gezamenlijk een *lange staart* van de boekverkoop. Internetverkopers zoals bol.com en Amazon hebben weinig tot geen last van beperkte ruimte. Voor hen vormen de *long tail* boeken een belangrijk deel van de verkoop.

De Amerikaan Chris Anderson gebruikte in zijn boek *The long tail* uit 2004 een formule die hoort bij het begrip *long tail*.

In deze opdracht bekijken we de boekverkoop in Nederland in 2019.

Hierbij hoort de formule $F(n) = \frac{1}{\left(\frac{n_{50}}{n}\right)^{0,485} + 1}$. Hierin is n het

rangnummer van een titel, waarbij de bestverkopende titel rangnummer 1 heeft, en is n_{50} het aantal bestverkopende titels dat samen verantwoordelijk is voor de helft van het totaal aantal verkochte boeken. In de formule is $F(n)$ het aandeel in de verkoop van de titels met een rangnummer kleiner dan of gelijk aan n .

In 2019 waren de 2500 bestverkopende titels verantwoordelijk voor de helft van de omzet. Met dit gegeven kun je de formule voor $F(n)$

herschrijven tot $F(n) = \frac{n^{0,485}}{44,5 + n^{0,485}}$, waarbij het getal 44,5 is afgerond.

- Toon aan dat de formule op deze manier kan worden herschreven.
- In 2019 waren de 100 bestverkopende titels verantwoordelijk voor 17% van de omzet. De titels met rangnummers 101 tot en met 250 waren verantwoordelijk voor 7% van de omzet.
Laat zien dat deze percentages in overeenstemming zijn met de formule.
- De totale omzet van boekverkoop in 2019 was 563 miljoen euro. Hoeveel bestverkopende titels waren verantwoordelijk voor 200 miljoen euro omzet?
- Een fysieke boekwinkel heeft de mogelijkheid om 2000 titels vanuit de winkel te verkopen. Door samenwerking met een webshop kan het aanbod worden vergroot naar 65 000 titels. Men wil met behulp van de formule een inschatting maken met hoeveel procent hun omzet dan kan toenemen.
Hoeveel procent is dat?
- Omdat elke titel een positieve bijdrage levert aan de omzet, moet de grafiek van $F(n)$ stijgend zijn.
Toon met de afgeleide aan dat de grafiek van $F(n)$ afnemend stijgend is.

Diagnostische toets

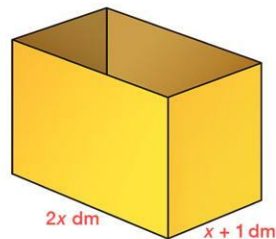
14.1 Optimaliseren

- 1** Van een doos is de bodem een rechthoek van $2x$ bij $x + 1$ dm. De totale lengte van de ribben is 24 dm.

Voor de inhoud I van de doos in dm^3 geldt

$$I = -6x^3 + 4x^2 + 10x.$$

- a** Toon dit aan.
- b** Toon met behulp van de afgeleide aan dat de inhoud van de doos maximaal is voor $x = 1$.



figuur 14.32

- 2** Jan maakt een balkvormige bak zonder deksel, met een inhoud van 18 m^3 . De breedte van de bak is x meter, de lengte is $1\frac{1}{2}x$ meter en de hoogte is h meter. Het materiaal waarvan de zijanten worden gemaakt kost € 6,25 per vierkante meter. Jan maakt de bodem van materiaal dat B euro per vierkante meter kost. Voor de materiaalkosten K van de bak in euro's

$$\text{geldt } K = \frac{375}{x} + 1\frac{1}{2}Bx^2.$$

- a** Toon dit aan.
- b** Toon aan dat de materiaalkosten van de bak minimaal zijn voor

$$x = \frac{5}{\sqrt[3]{B}}.$$

14.2 Regels voor de afgeleide

- 3** Differentieer.

a $y = 8 \cdot \ln(3 - 2x)$

b $y = 8,2 \cdot {}^3\log(x + 5,6)$

c $y = 4x^2 + \log(x^2 + x)$

d $y = -0,6 \cdot \ln(7x^2)$

- 4** Bereken de afgeleide.

a $y = x^3 \cdot {}^3\log(x)$

b $K = q^{1,3} \cdot e^{3-2q}$

c $B = e^3 \cdot \ln(3n)$

d $N = t\sqrt{3 - t^2} + 5t$

- 5** Bereken de afgeleide.

a $y = \frac{4x}{2 - 3x^4}$

b $F = \frac{18}{3,5 + e^{0,12t}}$

c $N = \frac{t}{\ln(0,5t) + 2}$

d $p = q^2 \cdot \ln(2q + 5)$

14.3 Redeneren met formules

- 6** Gegeven is de formule $N = \frac{5000}{200 + 12 \cdot 0,78^t}$.
- a** Beredeneer aan de hand van de formule of de grafiek van N stijgend of dalend is.
 - b** Beredeneer wat het verzadigingsniveau is.
- 7** Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.
- a** $K = 4 - \frac{7}{2t+1}$ met $t > 0$
 - b** $y = \frac{50 \cdot 0,3^x}{\sqrt{x} + 2} + 1200$

14.4 Redeneren met de afgeleide

- 8** Gegeven is de formule $y = \frac{50}{(3x+4)^2}$ met $x \geq 0$.
- a** Toon met de formule van de afgeleide aan dat de grafiek van y dalend is.
 - b** Bereken voor welke x de snelheid waarmee y verandert gelijk is aan $-0,3$.
- 9** Gegeven is de formule $y = 0,2 \cdot \ln(x) + e^{0,2x}$ met $x > 0$.
- a** Toon met de grafiek van de afgeleide aan dat de grafiek van y stijgend is.
 - b** Er is een waarde van x waarvoor de grafiek van y het minst stijgt. Bereken deze waarde van x . Rond af op twee decimalen.

14.5 De afgeleide en soorten van stijgen en dalen

- 10** Bereken de afgeleide en onderzoek met de grafiek van de afgeleide welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek van y hoort.
- a** $y = \log(60 - 5x)$ met $x < 12$
 - c** $y = \frac{x+5}{15-x}$ met $0 < x < 15$
 - b** $y = \frac{5}{2 + x^{0,75}}$
 - d** $y = \frac{20,75}{4,15 + e^{-0,23x}}$ met $x > 0$
- 11** De beheerder van een machinepark hanteert voor de economische waarde W in euro's van een machine de formule $W = 12000 \cdot e^{-0,1t}$. Hierin is t het aantal jaar na ingebruikname van de machine.
- a** Hoeveel jaar na ingebruikname is de economische waarde 5000 euro? Rond af op één decimaal.
 - b** In de loop van de jaren daalt de snelheid waarmee de economische waarde van de machine afneemt. Toon dit met de formule van de afgeleide aan.
 - c** Hoeveel jaar na ingebruikname is de snelheid waarmee de economische waarde afneemt 400 euro per jaar?

15

Examentraining

Waar moet je bij het examen op letten?

- Het is belangrijk dat je je goed inleeft in het probleem van de opgave. Daarvoor is vaak de eerste vraag bedoeld.
- Ga gegeven reken- en afleesvoorbeelden zorgvuldig na, dit helpt je bij het maken van de vragen.
- Lees uit grafieken en figuren nauwkeurig af. Gebruik dus je geodriehoek. Onnauwkeurig aflezen kost punten.
- Schrijf bij vragen waar je niet helemaal uitkomt in elk geval op wat je wél weet. Dat kan punten opleveren.
- Schrijf tussenstappen op.
- Ga steeds na of je antwoord hebt gegeven op de gestelde vraag. Let ook op de afronding.



15.1 Algemene vaardigheden

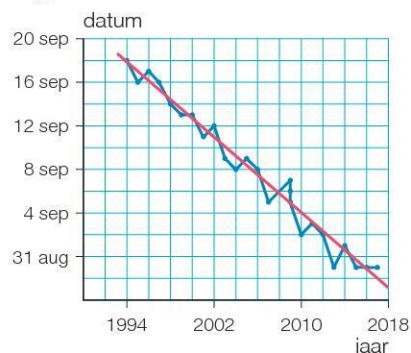
- 1 a** In Nederland rukt de brandweer gemiddeld één keer per 8 minuten uit voor een vals alarm.

Bereken hoeveel keer per jaar de brandweer uitrukt voor een vals alarm.

- b** Meneer Welten heeft in juni 2020 een huis gekocht voor 280 000 euro. Hij gaat dit huis aan studenten verhuren en verbouwt het huis daarom voor 35 000 euro. Vanaf 1 januari 2021 heeft hij 2350 euro per maand aan huuropbrengst en 4000 euro per jaar aan kosten voor het huis. Bereken in welk jaar zijn investering volledig is terugverdiend.

- c** Met name door klimaatverandering zijn de eikels van de zomereik steeds vroeger rijp en vallen ze dus eerder uit de boom. Zie figuur 15.1. Hierin is ook de trendlijn getekend. Volgens deze trendlijn vielen in 1994 op 18 september de eerste eikels uit de boom en in 2010 op 4 september.

Gebruik deze trendlijn om met extrapoleren te berekenen op welke datum in 2025 de eerste eikels uit de boom vallen.



figuur 15.1

- d** Zie vraag c met figuur 15.1. De formule van de trendlijn is van de vorm $D = at + b$. Hierin is t in jaren met $t = 0$ in 1990 en D de dag met $D = 1$ op 1 september (en dus $D = 18$ op 18 september). Bereken de waarden van a en b .

- e** In figuur 15.2 zijn twee lijnen getekend. De grafiek van P_A gaat door de punten $(0, 25)$ en $(5, 17)$ en de grafiek van P_B gaat door de punten $(2, 17)$ en $(7, 11)$. Stel van beide lijnen de formules op en bereken hiermee voor welke t geldt dat $P_A = P_B$.

- f** Zie figuur 15.2. Verder is gegeven de formule $P_C = 0,85t + 12$.

Bereken voor welke t geldt dat P_C twee keer zo groot is als P_B . Rond af op één decimaal.

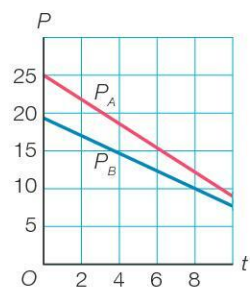
- g** Gegeven zijn de formules $A = 40,5 - \frac{11,6}{15,1}t$ en

$$B = 4,3t + 23,4.$$

De formule $P = A \cdot B$ is te schrijven in de vorm $P = at^2 + bt + c$. Bereken a , b en c . Rond af op één decimaal.

- h** Gegeven is de formule $A = \frac{p}{qB}$.

Neem $p = 4,2 \cdot 10^8$ en $q = 525\,000$ en schrijf de formule in de vorm $B = \frac{c}{A}$.



figuur 15.2

- i Gegeven zijn de formules $F = -15,6t^2 + 306t + 28\,400$,
 $G = -9,8t^2 + 185t + 15\,600$ en $V = F - G$.
 Bereken het maximum van V . Rond af op gehelen.
- j Gegeven zijn de formules $K = 0,15t + 4,33$, $L = -0,047t + 12,54$ en
 $P = K \cdot L$ met $0 \leq t \leq 100$.
 Bereken voor welke t geldt dat $P = 100$. Rond af op één decimaal.

Bij veel examenvragen is de informatie die je nodig hebt om een vraag te beantwoorden gegeven in een uitgebreide tekst, een tabel of een diagram. Soms moet je de informatie van de tekst combineren met de informatie die in een tabel of een diagram staat.

Door je te verdiepen in de situatie kom je erachter welke berekening nodig is om de vraag te beantwoorden.

Procenten

27% betekent 27 van de 100, dus $27\% = \frac{27}{100} = 0,27$.

27% van 320 is $0,27 \cdot 320 = 86,4$.

Procentberekeningen

- 1 Hoeveel procent is 12 van 65?

12 van 65 is $\frac{12}{65} \times 100\% \approx 18,5\%$.

- 2 Een hoeveelheid neemt toe van 825 tot 917.

De relatieve toename is

$\frac{917 - 825}{825} \times 100\% \approx 11,2\%$.

- 3 Bereken 18,7% van 728.

18,7% van 728 is $0,187 \cdot 728 \approx 136$.

- 4 • Een hoeveelheid van 836 neemt met 42,7% toe.

Je krijgt $1,427 \cdot 836 \approx 1193$.

- Een hoeveelheid van 8,12 miljoen neemt met 17,6% af.

Je krijgt $0,824 \cdot 8,12 \approx 6,69$ miljoen.

- 5 • Een hoeveelheid neemt met 38% toe tot 376.

Je had $\frac{376}{1,38} \approx 272$.

- Een hoeveelheid neemt met 57% af tot 6,3 miljoen.

Je had $\frac{6,3}{0,43} \approx 14,7$ miljoen.

- 6 Een hoeveelheid van 320 is 35% van het totaal.

Het totaal is $\frac{320}{0,35} \approx 914$.

- Procentuele verandering is $\frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\%$.
- Een verandering in procenten is een relatieve verandering.
- Een verandering in aantallen (hoeveelheid) is een absolute verandering.

- 7 Een hoeveelheid neemt met 10% toe. De dan ontstane hoeveelheid neemt met 20% toe.
Omdat $1,10 \cdot 1,20 = 1,32$ is de totale procentuele toename 32%.

Interpoleren en extrapoleren

Bij een tabel met waarnemingsgetallen kun je interpoleren en extrapoleren. Bij interpoleren schat je een tussenliggende waarde. Bij extrapoleren schat je een waarde die buiten de gegevens ligt.

Bij grafisch interpoleren en grafisch extrapoleren schat je een waarde aan de hand van een grafiek.

Bij lineair interpoleren en lineair extrapoleren maak je een berekening waarbij je uitgaat van een lineair verband.

Bij de tabel

a	12	18	25	36	50
P	720	950	1428	2831	4180

bereken je P voor $a = 33$ met behulp van lineair interpoleren als volgt.

a	25	36
P	1428	2831

$\xrightarrow{+11}$
 $\xrightarrow{+1403}$

Bij $\Delta a = 1$ hoort $\Delta P = \frac{1403}{11}$.

Bij $\Delta a = 8$ hoort $\Delta P = 8 \cdot \frac{1403}{11}$.

Dus voor $a = 33$ is $P = 1428 + 8 \cdot \frac{1403}{11} \approx 2448$.

Voor het berekenen van P met behulp van lineair extrapoleren bij $a = 57$ gebruik je het gedeelte

36	50
2831	4180

van de tabel.

Lineaire formules

De formule $y = ax + b$ is de algemene vorm van een lineaire formule.

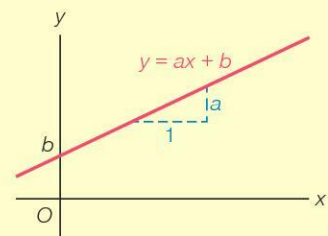
De bijbehorende grafiek is de lijn met richtingscoëfficiënt (rc) a , die de y -as snijdt in het punt $(0, b)$.

$rc = a$ betekent: 1 naar rechts en a omhoog.

Van de lijn $y = ax + b$ door de punten A en B is

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Bij de lineaire formule $p = aq + b$ is $a = \frac{\Delta p}{\Delta q}$.



figuur 15.3

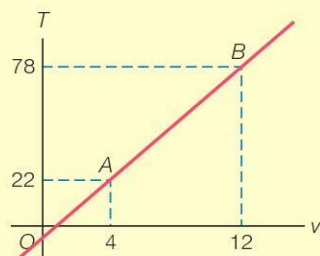
De lijn in figuur 15.4 gaat door de punten $A(4, 22)$ en $B(12, 78)$.

De formule van de lijn krijg je als volgt.

$$T = av + b \text{ met } a = \frac{\Delta T}{\Delta v} = \frac{78 - 22}{12 - 4} = 7$$

$$\left. \begin{array}{l} T = 7v + b \\ v = 4 \text{ en } T = 22 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7 \cdot 4 + b = 22 \\ 28 + b = 22 \\ b = -6 \end{array}$$

Dus $T = 7v - 6$.



figuur 15.4

Evenredige en omgekeerd evenredige verbanden

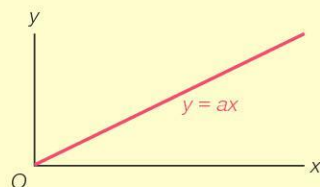
y is (recht) evenredig met x :

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan wordt y ook met dat getal vermenigvuldigd.
- De formule heeft de vorm $y = ax$.
- De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong $(0, 0)$.
- De tabel is een verhoudingstabel.

Weet je dat s evenredig is met t en dat $s = 0,2$ voor $t = 2,5$, dan krijg je als volgt de formule van s .

$$\left. \begin{array}{l} s = at \\ t = 2,5 \text{ en } s = 0,2 \end{array} \right\} a \cdot 2,5 = 0,2 \text{ oftewel } a = \frac{0,2}{2,5} = 0,08$$

Dus $s = 0,08t$.

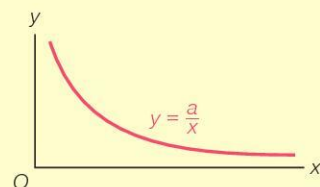


figuur 15.5

y is omgekeerd evenredig met x :

- Vermenigvuldig je x met een getal, dan wordt y door hetzelfde getal gedeeld.
- Het product xy is constant dus $xy = a$ oftewel $y = \frac{a}{x}$.

- De grafiek is een hyperbool.



figuur 15.6

De bereidingstijd van vlees in een magnetron is omgekeerd evenredig met het ingestelde vermogen. Bij een vermogen V van 800 watt is de bereidingstijd T vier minuten. De formule van T krijg je als volgt.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Omgekeerd evenredig, dus } T = \frac{a}{V} \\ T = 4 \text{ en } V = 800 \end{array} \right\} \frac{a}{800} = 4 \text{ oftewel } a = 4 \cdot 800 = 3200$$

$$\text{Dus } T = \frac{3200}{V}.$$

Grafieken en de GR

Op de GR kun je formules invoeren, hierbij tabellen maken en grafieken plotten. Bij de grafieken kun je

- bij een gegeven x -waarde de y -waarde berekenen
- de coördinaten van snijpunten berekenen (met de optie snijpunt)
- de coördinaten van toppen berekenen (met de opties maximum en minimum)
- de coördinaten van snijpunten met de horizontale as berekenen (met de optie nulpunt).

Geef de volgende toelichting bij gebruik van de GR.

- 1 Noteer de formules die je invoert.
Schrijf dus op $y_1 = \dots$, $y_2 = \dots$, enzovoort.
- 2 Noteer de optie die je gebruikt en geef het resultaat.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

Ontbreekt deze toelichting in je examenuitwerking, dan leidt dat tot puntenaftrek.

Bij het kiezen van een geschikt venster kunnen de volgende vuistregels van pas komen.

Vuistregels voor het vinden van een geschikt venster

- De kleinste en de grootste waarde van x volgen uit de gegevens of de context.
- Gebruik bij de TI ZoomFit, en bij de Casio en de NW Auto om op het spoor te komen van geschikte waarden voor y . Bij de HP kun je het aanraakscherm gebruiken om de y -waarden aan te passen.

Hiernaast zie je de grafiek van $N = 20t^{1,4} - 6t^{1,8}$ met $0 < t < 20$.

Ook is de lijn $N = 100$ getekend.

Om te berekenen voor welke waarden van t geldt dat

$N > 100$, voer je in $y_1 = 20x^{1,4} - 6x^{1,8}$ en $y_2 = 100$.

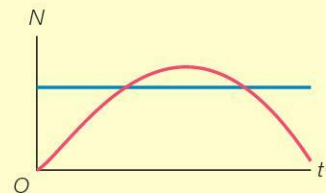
De optie snijpunt geeft $x = 6,452\dots$ en $x = 15,069\dots$

Wordt het antwoord gevraagd in twee decimalen, dan krijg je t tussen 6,46 en 15,06. Let hierbij op de juiste afronding. Zo is voor $t = 6,45$ nog niet $N > 100$.

Om het maximum van N te berekenen, gebruik je de optie maximum.

De optie maximum geeft $x = 10,822\dots$ en $y = 124,706\dots$

Dus het maximum is ongeveer 124,7 voor $t \approx 10,8$.



2 2017-I

Veel mensen denken erover om zonnepanelen aan te schaffen. Bedrijven spelen daarop in en geven daar allerlei informatie over op hun websites. In onderstaande tabel zie je een overzicht van de prijs en opbrengst van verschillende zonnepaneelsystemen van een bedrijf.

aantal panelen	8	12	18
aanschafprijs van het systeem	€ 4699	€ 6299	€ 8599
verwachte elektriciteitsopbrengst (kWh per jaar)	1667	2500	3750

De overheidssubsidie van 15% van de aanschafprijs is nog niet verwerkt in de prijzen van de tabel. De overheidssubsidie bedraagt maximaal € 650.

De *terugverdientijd* is de periode die het duurt tot het aankoopbedrag van het systeem is terugverdiend via besparing op de elektriciteitskosten. In het begin van 2013 schafte iemand het systeem van 12 zonnepanelen aan met overheidssubsidie.

Bereken, uitgaande van de verwachte elektriciteitsopbrengst, in welk jaar het aankoopbedrag volledig is terugverdiend. Gebruik dat een kWh elektriciteit € 0,225 kost.

3 2017-I

Een veelgehoorde bewering is dat het hart van zoogdieren gedurende hun leven ongeveer een miljard keer slaat. We gaan dat in deze opgave onderzoeken.

Een zeker hondenras heeft een gemiddelde hartslag van 125 slagen per minuut. Met behulp van de bewering kun je dan de gemiddelde levensduur van dit ras berekenen.

a Bereken zo de gemiddelde levensduur in jaren van dit hondenras.

Naar aanleiding van deze bewering kan de formule $H = \frac{1900}{L}$ worden

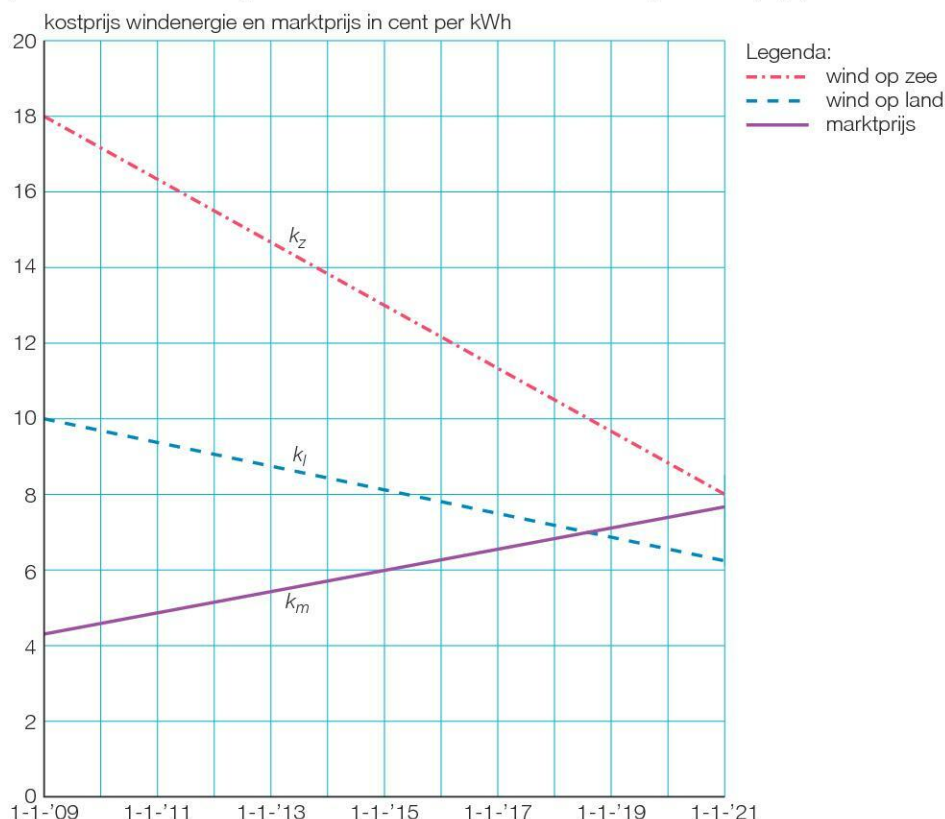
opgesteld voor het verband tussen de hartslag en de levensverwachting. Hier is L de levensverwachting (in jaren) en H de hartslag (in slagen per minuut).

b Toon aan dat deze formule uit de veelgehoorde bewering volgt.

Aantonen dat is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 250.

4 2018-I

In een krant stond eind 2013 bij een artikel over de toekomst van windenergie de onderstaande figuur. In de figuur wordt de kostprijs voor het produceren van windenergie vergeleken met de kosten voor het produceren van energie in een traditionele kolencentrale (de marktprijs).



figuur 15.7

De grafieken zijn gebaseerd op een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model is het mogelijk om op ieder willekeurig tijdstip de kostprijs van energie uit te rekenen.

De formule voor de marktprijs k_m is $k_m = 0,28 \cdot t + 4,3$.

De formule voor de kostprijs van windenergie k_l van windmolens op land is $k_l = -0,31 \cdot t + 10,0$.

Voor beide formules geldt: k is de prijs in cent per kWh (kilowattuur) en t is de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2009.

We nemen in deze opgave aan dat de prijzen zich ook na 2020 volgens deze lineaire verbanden blijven ontwikkelen.

Door de duurdere windmolens op zee is de kostprijs van windenergie van die windmolens op dit moment nog steeds hoger dan die van windmolens op land. Maar door de voortdurende innovaties gaat dat veranderen.

- Stel met behulp van de figuur een formule op voor de kostprijs k_z van windenergie van windmolens op zee en bereken daarmee in welk jaar de windenergie van land en die van zee evenveel kosten.

Rond 2011 was de kostprijs van windenergie van windmolens op land nog tweemaal zo hoog als de marktprijs.

- b** Bereken in welk jaar de marktprijs tweemaal zo hoog zal zijn als de kostprijs van windenergie van windmolens op land.



In 2009 werd er in totaal 23,4 miljoen MWh energie door kolencentrales geproduceerd (1 MWh is 1 megawattuur, dat is 1000 kWh). De overheid heeft als doelstelling dat op den duur alle energie duurzaam moet worden geproduceerd. Energie die in kolencentrales wordt geproduceerd valt niet onder duurzaam geproduceerde energie.

We willen nu een model maken voor de totale kosten TK van de door kolencentrales geproduceerde energie in de jaren 2009-2050. Daarvoor doen we twee aannames:

- 1 De totale hoeveelheid energie TE die per jaar door kolencentrales geproduceerd wordt, neemt lineair af van 23,4 miljoen MWh in 2009 tot 0 MWh in 2050. Er geldt dan $TE = 23,4 - \frac{23,4}{41} \cdot j$.

In deze formule is TE in miljoenen MWh en j in jaren met $j = 0$ het jaar 2009. Bovendien is j een geheel getal.

- 2 Om de totale kosten TK van energie te berekenen in een bepaald jaar, gebruiken we de gemiddelde marktprijs g_m in euro per MWh in dat jaar. Er geldt $g_m = 2,8 \cdot j + 44,4$.

In deze formule is g_m in euro per MWh en j in jaren met $j = 0$ het jaar 2009. Ook nu is j een geheel getal.

De totale kosten TK in een bepaald jaar zijn te berekenen door de door kolencentrales geproduceerde energie te vermenigvuldigen met de gemiddelde marktprijs in dat jaar.

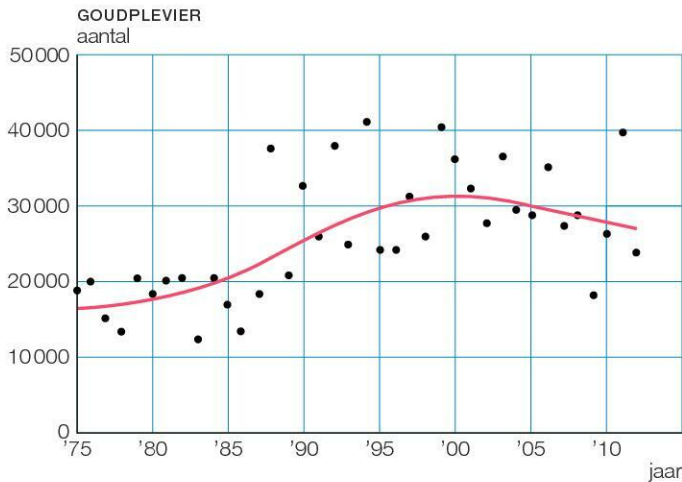
De formule voor TK is te schrijven als $TK = a \cdot j^2 + b \cdot j + c$.

In deze formule is TK in miljoenen euro's en j in jaren met $j = 0$ het jaar 2009 en is j een geheel getal.

- c** Bereken de waarden van a , b en c in deze formule. Rond je antwoorden af op één decimaal.

5 2019-I

Een goudplevier (zie foto) is een vogel die niet in Nederland broedt, maar tijdens zijn trektochten wel in Nederland te vinden is. Er zijn grote verschillen in aantallen goudplevieren tussen de verschillende jaren. In figuur 15.8 zijn de aantallen goudplevieren in Nederland in de jaren 1975 tot en met 2012 weergegeven als zwarte stippen.



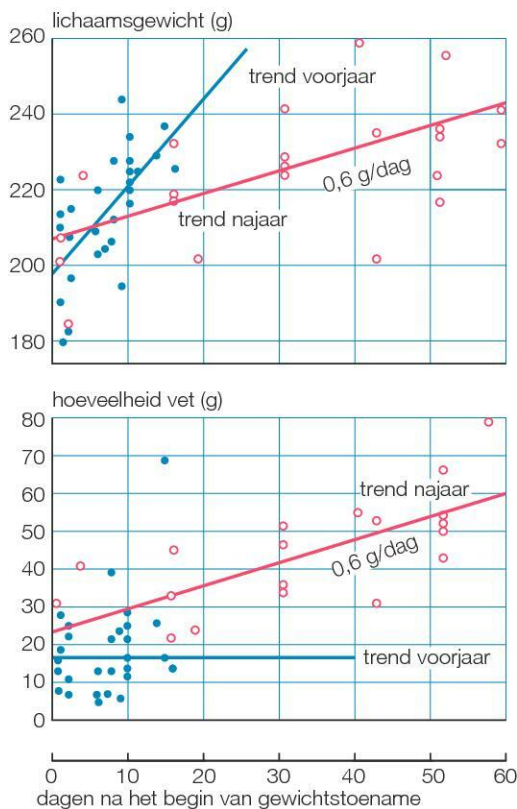
figuur 15.8

In figuur 15.8 is ook een kromme getekend die de trend aangeeft. We nemen aan dat vanaf 2003 deze trend een rechte lijn is en dat dit ook na 2012 zo blijft.

- Bereken hoeveel goudplevieren er volgens de trendlijn zijn in 2020.
Geef je antwoord in gehele duizendtallen.

Tijdens hun verblijf in Nederland bouwen de goudplevieren een reserve op voor de komende trektochten. Hierdoor nemen ze toe in gewicht.

In figuur 15.9 zie je het resultaat van een onderzoek naar deze gewichtstoename: van een aantal op verschillende tijdstippen gevangen goudplevieren is het gewicht en/of de hoeveelheid vet bepaald. De open rode stippen horen bij waarnemingen in het najaar en de dichte blauwe stippen bij waarnemingen in het voorjaar. Ook zijn de trendlijnen getekend.



figuur 15.9

Op grond van specifieke biologische kenmerken kunnen de onderzoekers bepalen wanneer de gewichtstoename van een goudplevier begint.

Aan de hand van de trendlijnen in figuur 15.9 kun je onderzoeken of de volgende stellingen waar zijn.

- I In het voorjaar is de gemiddelde gewichtstoename per dag van een goudplevier ongeveer 2 keer zo groot als in het najaar.
- II De gewichtstoename in het voorjaar bestaat niet uit vet.

b Onderzoek voor elk van beide stellingen of deze waar is.

Het *vetpercentage* van een vogel is de hoeveelheid lichaamsvet als percentage van het totale gewicht van de vogel. Met behulp van de trendlijnen in het voorjaar van zowel lichaamsgewicht als vethoeveelheid leiden de

onderzoekers het verband $P_{\text{voorjaar}} = \frac{1600}{2,3 \cdot t + 198}$ af.

Hierbij is P_{voorjaar} het vetpercentage van de vogel in het voorjaar en t de tijd in dagen na het begin van de gewichtstoename.

- c** Laat zien, gebruikmakend van de punten (0, 198) en (20, 244), hoe deze formule is af te leiden uit de gegevens in de figuur.

Onderzoeken of is een examenwoord. Zie bladzijde 250.

Laten zien dat is een examenwoord. Zie bladzijde 250.

6 2019-II

[> WERKBLAD] Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) doet sinds 1990 jaarlijks onderzoek naar het vakantiegedrag van Nederlanders. Dit onderzoek wordt het Continu Vakantie Onderzoek (CVO) genoemd. Bij dit onderzoek gaat het CBS niet uit van alle Nederlanders. Mensen die niet op vakantie kunnen doordat ze bijvoorbeeld in een instelling zitten, doen niet mee in het onderzoek. De onderzochte populatie wordt de CVO-populatie genoemd. Deze is dus kleiner dan de hele Nederlandse populatie.

Uit het CVO blijkt dat 80,7% van de CVO-populatie in 2016 ten minste één keer op vakantie is geweest. Deze 80,7% ging maar liefst 35,5 miljoen keer op vakantie: een gemiddelde van 2,78 vakanties per persoon.

Met behulp van deze gegevens is de omvang van de CVO-populatie in 2016 te berekenen.

- a** Bereken de omvang van de CVO-populatie in 2016. Geef je antwoord in gehele duizendtallen.

In het vervolg van deze opgave zullen we de CVO-populatie gewoon 'Nederlanders' noemen. Uit het CVO blijkt dat het aantal vakanties naar het buitenland in de loop van de jaren behoorlijk veranderd is. In figuur 15.10 is het verloop van het aantal buitenlandse vakanties weergegeven.



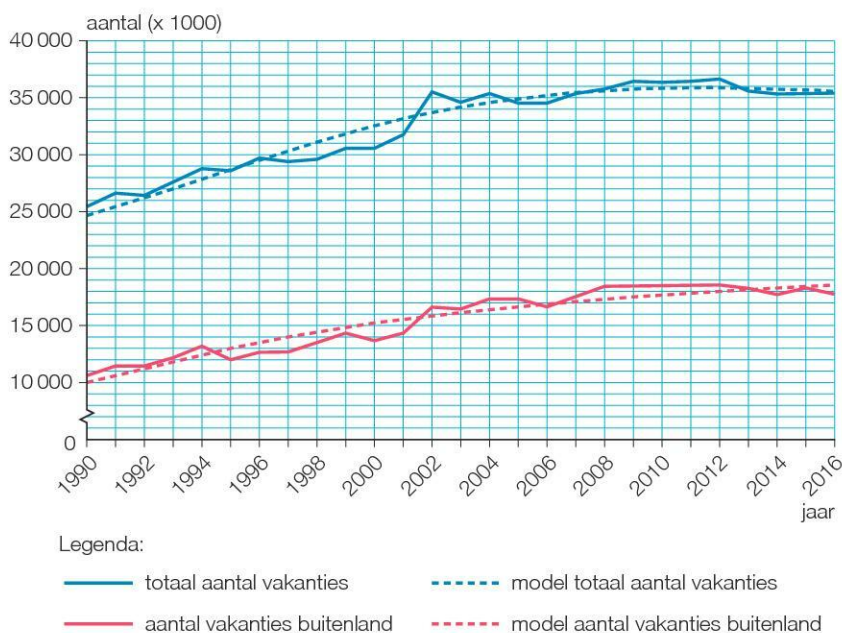
figuur 15.10

In figuur 15.10 is bovendien de trendlijn voor het verloop van het aantal buitenlandse vakanties met een stippellijn in de periode tot en met 2001 weergegeven.

Hoewel het CVO pas sinds 1990 plaatsvindt, is er, gebruikmakend van de trendlijn tot en met 2001, toch een uitspraak te doen over het aantal buitenlandse vakanties in de periode voorafgaand aan 1990.

- b** Bereken met behulp van lineair extrapoleren het aantal buitenlandse vakanties in 1985.

In figuur 15.10 is te zien dat de lineaire trend die er tot en met 2001 was, eindigt. In 2002 is er een forse toename. Die is te verklaren doordat het CBS sinds 2002 één of meer overnachtingen bij familie in het buitenland ook als een vakantie telt, terwijl dat in de jaren ervoor niet het geval was. In figuur 15.11 is nogmaals het aantal buitenlandse vakanties weergegeven. Verder is ook het verloop van het totaal aantal vakanties (in binnen- en buitenland samen) weergegeven. Bovendien is voor beide een model opgesteld en weergegeven. Die modellen komen pas na de volgende vraag aan de orde.



figuur 15.11

- c** Onderzoek met behulp van de werkelijke aantallen in figuur 15.11 of het percentage buitenlandse vakanties als percentage van het totaal aantal vakanties in de periode 2002-2016 is toe- of afgenomen.

Bij de modellen in figuur 15.11 horen de formules

$B = -10,1t^2 + 587t + 10200$ en $T = -20,3t^2 + 951t + 24800$. Hierin is B het aantal buitenlandse vakanties per jaar, T het totaal aantal vakanties per jaar en t de tijd in jaren met $t = 0$ in het jaar 1990. B en T zijn beide in duizenden.

Volgens bovenstaand model had het aantal binnenlandse vakanties ook een maximum.

- d** Bereken in welk jaar dat was.

Het CBS onderzoekt ook hoe lang mensen op vakantie gaan. Hoewel Nederlanders steeds vaker op vakantie gaan, worden deze vakanties steeds korter. Een model dat het aantal vakanties per jaar en de lengte van deze vakanties beschrijft, is $A = 0,0136t + 2,43$ en $L = -0,024t + 9,3$.

In dit model is A het gemiddelde aantal vakanties per jaar per Nederlander, L de gemiddelde lengte van een vakantie in dagen, en is t weer de tijd in jaren met $t = 0$ in het jaar 1990.

Volgens dit laatste model blijft het aantal dagen per jaar dat een Nederlander gemiddeld op vakantie gaat, de rest van deze eeuw stijgen.

- e Bereken vanaf welk jaar een Nederlander gemiddeld minstens 25 dagen op vakantie gaat per jaar.

7 2019-I

In de provincie Groningen vinden, als gevolg van gasproductie, regelmatig aardbevingen plaats. In 2013 is daar grootschalig onderzoek naar gedaan. Zo werd er gekeken naar het verband tussen de gasproductie en aardbevingen. Enkele resultaten daarvan staan in figuur 15.12. Hier zie je bijvoorbeeld dat er in 1993 zeven aardbevingen zijn geweest en er in datzelfde jaar 42 miljard kubieke meter gas is geproduceerd.



figuur 15.12

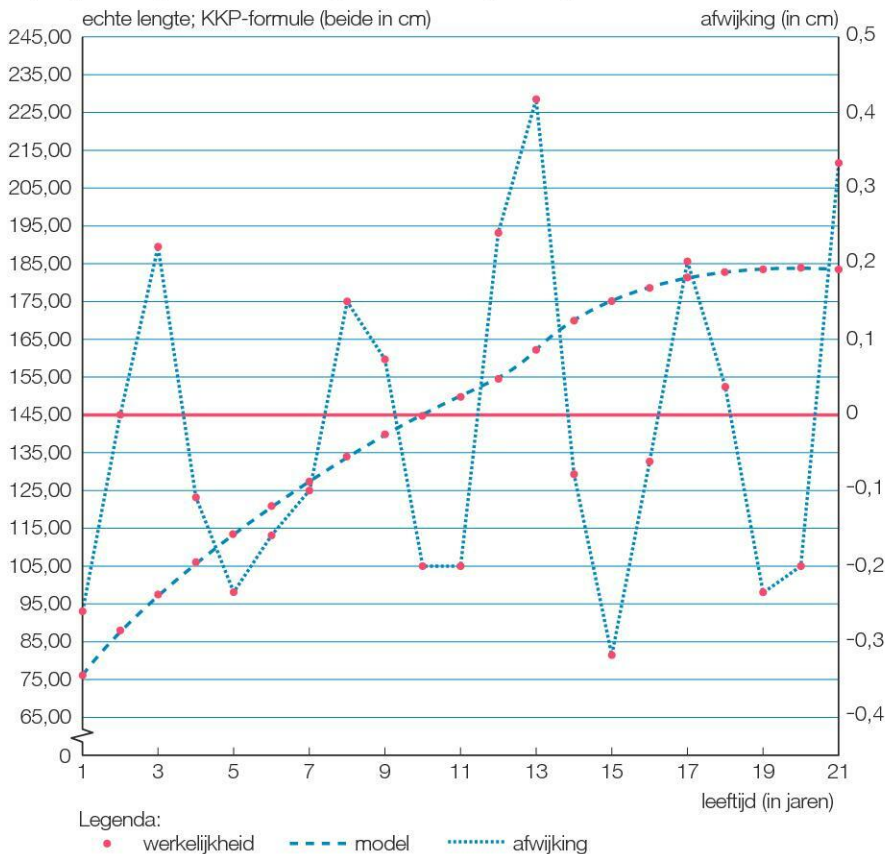
We bekijken de volgende drie beweringen:

- 1 De gasproductie en het aantal aardbevingen zijn over de gehele periode 2000-2011 procentueel evenveel gestegen.
- 2 Als na 2000 de gasproductie daalt, dan heeft dat altijd een jaar later ook een daling van het aantal aardbevingen tot gevolg.
- 3 In de periode 2005-2011 is de gemiddelde stijging per jaar van het aantal aardbevingen groter dan in de periode 1998-2004.

Geef van elke bewering aan of deze waar is of niet. Gebruik in je toelichting gegevens uit figuur 15.12.

8 2019-II

Voor de gemiddelde lengte van Nederlandse jongens tot 21 jaar gebruikt men vaak een model uit de kindergeneeskunde, het zogenaamde KKP-model. In figuur 15.13 zijn voor de leeftijden van 1 jaar tot en met 21 jaar zowel de modellengte volgens de KKP-formule (de vloeiende kromme) als de echte groeigegevens, gebaseerd op de gemiddelde (werkelijke) lengte van jongens, (de stippen) weergegeven. Zoals je kunt zien, past het KKP-model behoorlijk goed bij de werkelijkheid; de stippen passen nagenoeg perfect op de kromme. Omdat het verschil tussen de echte groeigegevens en die van het model zo klein is, is die afwijking tussen de echte groeigegevens en de lengte volgens het model nog eens weergegeven als de gestippelde, onregelmatige grafiek. Hierbij moet de rechter verticale as gebruikt worden. Zo is uit figuur 15.13 bijvoorbeeld af te lezen dat de werkelijke lengte op 8-jarige leeftijd 0,15 cm afwijkt van de lengte volgens het model.



figuur 15.13

In figuur 15.13 is af te lezen bij welke leeftijd de absolute afwijking van de berekende gemiddelde lengte met de KKP-formule ten opzichte van de echte groeigegevens het grootst is.

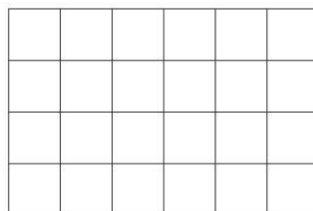
Bepaal bij welke leeftijd die afwijking *relatief* het grootst is. Licht je antwoord toe.

*Bepalen is een
examenwoord.
Zie bladzijde 250.*

15.2 Combinatoriek en rijen

9

- a** De rechthoek hiernaast is verdeeld in 24 gelijke vierkantjes. In de rechthoek plaatsen we rechthoekjes die bestaan uit twee of drie aaneengesloten vierkantjes. We plaatsen telkens één zo'n rechthoekje. Bereken op hoeveel verschillende manieren dat kan.
- b** In een restaurant zijn nog 12 tafeltjes voor twee personen vrij: twee met uitzicht op de straat, drie met uitzicht op de binnenplaats en zeven op de binnenplaats.



figuur 15.14

- Op hoeveel manieren kunnen 12 stellen van twee personen zich verdelen over deze drie verschillende plekken?
- c** Joost gaat zeven dagen naar een sportkamp. Hij kan elke dag kiezen uit vier verschillende teamsporten en tien verschillende individuele sporten. Joost kiest de eerste vier dagen een teamsport en de laatste drie dagen een individuele sport. Hij kiest elke dag een andere sport. Bereken hoeveel verschillende programma's hij voor deze zeven dagen kan maken.
- d** Bij een concert wordt een rij van 20 lampen gebruikt die op het podium zijn gericht. Er branden vijf lampen rood, vijf lampen blauw, vijf lampen groen en vijf lampen geel. Bereken op hoeveel manieren men de kleuren in deze rij kan rangschikken.
- e** Een bedrijf gebruikt codes van acht tekens: eerst vier letters en dan vier cijfers. Voor de letters worden A, B, C, D, E, F, G en H gebruikt en voor de cijfers 1 tot en met 9. In een code mogen niet dezelfde letters voorkomen en er mogen niet twee dezelfde cijfers naast elkaar staan. Bereken hoeveel verschillende codes het bedrijf kan maken.
- f** Gegeven is de recursieve formule $k_n = \frac{15}{16} \cdot k_{n-1}$ met $k_1 = 30$. Bereken vanaf welke n geldt dat $k_n < 10$.

- g** Gegeven is de rij $u_n = \frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{8}, \frac{5}{10}, -\frac{5}{12}, \dots$

De directe formule van deze rij is van de vorm $u_n = \frac{a \cdot (-1)^{n-1}}{b \cdot n}$ met

$n = 1, 2, 3, \dots$

Bereken a en b , stel de recursieve formule op van de somrij $S_n = \frac{5}{2} - \frac{5}{4} + \frac{5}{6} - \frac{5}{8} + \frac{5}{10} - \frac{5}{12} + \dots$ en bereken hiermee de som van de eerste 50 termen van de rij u_n . Rond af op vier decimalen.

- h** Gegeven is de directe formule $P(n) = (3n + 4)^2$. Bij deze formule is een recursieve formule op te stellen van de vorm $P(n + 1) = P(n) + an + b$ met $P(0) = 16$. Bereken a en b .

- i Annet maakt een rij van 10 steeds kleiner wordende vierkanten. De zijde van het eerste vierkant is 20 cm en de zijde van het tiende vierkant is 1 cm.

Als Annet de zijden van de achtereenvolgende vierkanten steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigt, kan de lengte van de zijde van het n -de vierkant worden berekend met een formule van de vorm

$$l_n = a \cdot l_{n-1} \text{ met } l_1 = 20.$$

Als ze de zijden van de achtereenvolgende vierkanten steeds met hetzelfde getal laat afnemen, kan de lengte van de zijde van het n -de vierkant worden berekend met een formule van de vorm $L_n = L_{n-1} - b$ met $L_1 = 20$.

Bereken a en b . Rond daarbij a af op vijf decimalen. Stel vervolgens van l_n en L_n directe formules op en gebruik deze formules om te berekenen bij welk vierkant het verschil in zijde bij beide situaties maximaal is. Geef het maximale verschil in twee decimalen.

Telproblemen

Kan handeling I op p manieren en handeling II op q manieren, dan kan

- handeling I EN handeling II op $p \times q$ manieren
- handeling I OF handeling II op $p + q$ manieren.

Let bij telproblemen op of herhalingen zijn toegestaan.

Maak je getallen van vier cijfers waarbij je de cijfers 4, 5, 6, 7, 8 en 9 mag gebruiken, dan krijg je

- met herhaling $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ mogelijkheden
- zonder herhaling $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ mogelijkheden.

Permutaties

Een *permutatie* is een rangschikking.

Het aantal permutaties van drie dingen die je kiest uit acht dingen, kortweg het aantal permutaties van 3 uit 8, is $8 \cdot 7 \cdot 6$.

Het aantal permutaties van acht dingen is $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$.

Heb je 12 leerlingen, dan

- kun je ze op $12! = 479\,001\,600$ manieren op een rij zetten
- zijn er $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880$ manieren om vier van hen op een rij te zetten.

Combinaties

Een klas van 20 leerlingen kiest uit haar midden een vertegenwoordiging van vijf leerlingen.

Omdat de volgorde er niet toe doet, is het aantal mogelijke vijftallen gelijk aan het aantal *combinaties* van 5 uit 20, notatie $\binom{20}{5}$.

Het aantal combinaties van k uit n , oftewel het aantal manieren om k dingen te kiezen uit n dingen zonder op de volgorde te letten, is $\binom{n}{k}$.

De GR heeft opties waarmee je faculteiten, het aantal permutaties en het aantal combinaties kunt berekenen.

- Op de TI krijg je !, nPr en nCr in het math-KANS-menu of via de functietoets f2.
- Op de Casio krijg je !, nPr en nCr in het OPTN-PROB-menu.
- Op de HP krijg je Factorieel, Permutatie en Combinatie in het werksetmenu Wisk. Kies vervolgens Kans.
- Op de NW krijg je faculteit met ! en permutaties en combinaties krijg je met Kansrekenen en dan Combinatoriek in de Toolbox.

Rijtes van A's en B's

- Het aantal rijtes bestaande uit drie A's en zeven B's is $\binom{10}{3}$ en ook $\binom{10}{7}$.
- Het totale aantal rijtes van tien hokjes met in elk hokje een A of een B is 2^{10} .
- Bij het tien keer gooien met een geldstuk is het aantal series met drie keer munt (en dus zeven keer kop) gelijk aan $\binom{10}{3}$.

Rijtes met meer dan twee letters

Het aantal rijtes met vier A's, drie B's en zes C's is $\binom{13}{4} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{6}$.

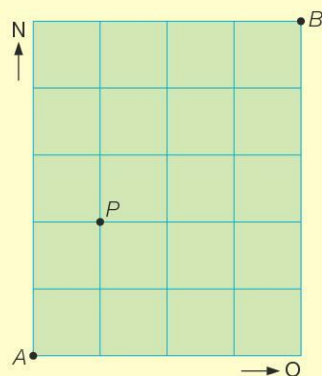
Je kunt bijvoorbeeld ook $\binom{13}{6} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3}$ berekenen, maar ook $\frac{13!}{4! \cdot 3! \cdot 6!}$.

Het aantal getallen van acht cijfers met drie vieren, twee vijven en drie achten is $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3}$, maar ook $\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 3!}$.

Routes in een rooster

Het aantal kortste routes van A naar B in het rooster in de figuur hiernaast is gelijk aan $\binom{9}{5}$ en ook $\binom{9}{4}$. Je hebt immers te maken met een rijtje bestaande uit vijf N's en vier O's.

Het aantal kortste routes van A via P naar B is $\binom{3}{2} \cdot \binom{6}{3}$.



figuur 15.15

Rekenkundige rijen

Een rekenkundige rij is een rij waarbij het verschil van twee opeenvolgende termen steeds hetzelfde getal is.

Van een rekenkundige rij u_n met verschil v en beginterm u_0 is

- de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_0
- de directe formule $u_n = u_0 + v \cdot n$.

Is de beginterm u_1 dan is de directe formule $u_n = u_1 + v \cdot (n - 1)$.

Gegeven is de rij 102, 99, 96, 93, 90, ... met beginterm u_1 .

Omdat $u_1 = 102$ en $v = -3$ is de directe formule $u_n = 102 - 3 \cdot (n - 1)$ oftewel $u_n = 105 - 3 \cdot n$.

De recursieve formule is $u_n = u_{n-1} - 3$ met $u_1 = 102$.

Een van de termen van deze rij is 15.

De bijbehorende n volgt uit $105 - 3n = 15$, dus $-3n = -90$.

Dit geeft $n = 30$, dus de 30^e term is 15.

Meetkundige rijen

Een meetkundige rij is een rij waarbij het quotiënt van twee opeenvolgende termen steeds hetzelfde getal is.

Van een meetkundige rij u_n met factor r en beginterm u_0 is

- de recursieve formule $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met beginterm u_0
- de directe formule $u_n = u_0 \cdot r^n$.

Is de beginterm u_1 dan is de directe formule $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$.

Gegeven is de rij 100, 125, 156,25, 195,3125, ... met beginterm u_1 .

Omdat $u_1 = 100$ en $r = 1,25$ is de directe formule $u_n = 100 \cdot 1,25^{n-1}$.

De recursieve formule is $u_n = 1,25 \cdot u_{n-1}$ met $u_1 = 100$.

Om te berekenen vanaf welke n de termen van de rij u_n groter zijn dan 500, voer je in $y_1 = 100 \cdot 1,25^{x-1}$.

De tabel geeft bij $x = 8$ hoort $y_1 \approx 476,84$

bij $x = 9$ hoort $y_1 \approx 596,05$.

Dus vanaf $n = 9$ is $u_n > 500$.

NORM DRIJF AUTO REEEL RAD LN				
DRUKOP OM FUNCTIE TE BEMERKEN				
X	Y1			
1	100			
2	125			
3	156.25			
4	195.31			
5	244.14			
6	305.18			
7	381.47			
8	476.84			
9	596.05			
10	745.06			
11	931.32			
Y1=596.04644775391				

Getallenrijen en notaties

De rij $u_n = 1,2 \cdot u_{n-1} - 5 \cdot n$ met $u_0 = 100$ is ook te noteren als

- $u(n) = 1,2 \cdot u(n-1) - 5 \cdot n$ met $u(0) = 100$
- $u_{n+1} = 1,2 \cdot u_n - 5 \cdot (n+1)$ met $u_0 = 100$
- $u(n+1) = 1,2 \cdot u(n) - 5 \cdot (n+1)$ met $u(0) = 100$.

Een rij is ook te noteren met een andere letter dan u .

Kies je bij de rij hierboven de letter A in plaats van u , dan krijg je

$A_n = 1,2 \cdot A_{n-1} - 5 \cdot n$ met $A_0 = 100$, enzovoort.

Het rijen-invoerscherm van de GR

Je kunt de rij $u_n = 1,2 \cdot u_{n-1} - 5 \cdot n$ met $u_0 = 100$ doorrekenen op het rijen-invoerscherm.

Ook een recursieve formule als $u_n = 2 \cdot u_{n-1} - 3 \cdot u_{n-2}$ met $u_0 = 5$ en $u_1 = 10$ reken je door op het rijen-invoerscherm.

Een directe formule als $u_n = 2n^2 - 3n + 4$ kun je op twee manieren doorrekenen:

- 1 op het rijen-invoerscherm
- 2 op het formule-invoerscherm door in te voeren $y_1 = 2x^2 - 3x + 4$.

Patronen en getallenrijen

De rij $A_n : 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, \dots$ vertoont een regelmaat. Het zijn kwadraten min 1, want $3 = 2^2 - 1$, $8 = 3^2 - 1$, $15 = 4^2 - 1$, enzovoort. Noem je de eerste term A_1 , dan is $A_n = (n+1)^2 - 1$ een directe formule van de rij.

Uit deze directe formule is een recursieve formule af te leiden. Dat gaat als volgt.

Uit $A_n = (n+1)^2 - 1$ volgt $A_{n-1} = n^2 - 1$.

$$A_n - A_{n-1} = (n+1)^2 - 1 - (n^2 - 1) = n^2 + 2n + 1 - 1 - n^2 + 1 = 2n + 1$$

Dus een recursieve formule is $A_n = A_{n-1} + 2n + 1$ met $A_1 = 3$.

Deze recursieve formule is ook te vinden door naar een andere regelmaat van de rij te kijken.



Dus $A_2 = A_1 + 5$, $A_3 = A_2 + 7$, $A_4 = A_3 + 9$, ...

Dus de recursieve formule is $A_n = A_{n-1} + 2n + 1$ met $A_1 = 3$.

Somrijen

De som van een aantal opeenvolgende termen van een rij is te noteren met de sigma-notatie.

Zo is $\sum_{k=0}^4 (3k+2) = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$.

De recursieve formule van de somrij S_n van de rij u_n met beginterm u_0 is $S_n = S_{n-1} + u_n$ met $S_0 = u_0$.

Voor het berekenen van $\sum_{k=0}^{50} (3k+2)$ gebruik je het rijen-invoerscherm van de GR.

Op de TI voer je de rij $u_n = 3n + 2$ in bij $u(n)$ en de recursieve formule van de somrij bij $v(n)$.



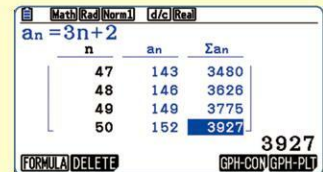
Op de NW voer je de rij $u_n = 3n + 2$ in en de recursieve formule van de somrij bij v_{n+1} .



Op de HP voer je de rij $u_n = 3n + 2$ in bij U1(N) en de recursieve formule van de somrij bij U2(N).



Op de Casio voer je alleen de rij $u_n = 3n + 2$ in. De somrij krijg je door bij de instellingen Σ Display op On te zetten.



Je krijgt $\sum_{k=0}^{50} (3k + 2) = 3927$.

Voor het berekenen van $\sum_{k=10}^{100} (3k + 2)$ neem je op de TI $v(10) = 32$, op de NW $v_{10} = 32$ en op de HP $U2(10) = 32$. Op de Casio neem je Start: 10.

Vervolgens lees je in de tabel het antwoord af.

Je krijgt $\sum_{k=10}^{100} (3k + 2) = 15197$.

Zie het scherm hiernaast.

NORM DRIJF AUTO REEL RAD WN DRUK OP → OM FUNCTIE TE BEHERKEN				
n	u(n)	v(n)		
90	272	12312		
91	275	12587		
92	278	12865		
93	281	13146		
94	284	13430		
95	287	13717		
96	290	14007		
97	293	14300		
98	296	14596		
99	299	14895		
100	302	15197		

$v(100)=15197$

10 2017-II

Een reisorganisatie biedt vakanties aan naar Samos. Voor een bepaalde periode hebben ze nog 28 vliegtuigstoelen over. Door deze als last minute aan te bieden vindt de reisorganisatie daarvoor 14 keer twee gegadigden. De reisorganisatie kan ook nog 14 tweepersoons hotelkamers bijboeken: twee bij Nikos Place, vijf bij Hydrele Beach en zeven bij Kouros Bay.

- a** Bereken op hoeveel verschillende manieren de reisorganisatie de 14 stellen kan verdelen over de drie hotels.

Eén van de stellen is gekomen om te fietsen en te wandelen. Ze hebben een boekje met vijf fietstochten voor een hele dag en vijf wandeltochten voor een hele dag. Ze maken het volgende programma: eerst vijf dagen fietsen en daarna drie dagen wandelen. Ze maken elke dag een andere tocht uit het boekje.

- b** Bereken hoeveel verschillende programma's dit stel voor deze acht dagen kan maken.

11 2019-I

Tussen mei 2008 en februari 2013 werd voor personenauto's de kentekenserie gebruikt die door de Rijksdienst voor het Wegverkeer *sidecode* 7 genoemd wordt. Hiernaast staat een van de eerste kentekens uit deze serie.



figuur 15.16

De kentekens bestaan uit twee cijfers, gevolgd door drie letters en tenslotte nog één cijfer.

Als we ervan uitgaan dat er geen beperkingen zijn aan de te gebruiken cijfers en letters, dan zijn er bijna 18 miljoen verschillende kentekens te maken met sidecode 7.

- a** Bereken het aantal verschillende kentekens met sidecode 7. Geef je antwoord in gehele honderdduizendtallen.

In deze opgave gaan we echter van de volgende beperkingen uit:

- Een kenteken mag niet met 00 beginnen
- De eerste letter is G, H, J, K, L, N, P, R, S, T, X of Z
- Klinkers (A, E, I, O, U, Y) worden niet gebruikt
- De letters C en Q worden niet gebruikt
- Bepaalde drielettercombinaties (zoals NSB) kunnen als aanstootgevend worden gezien en als gevolg daarvan zijn 82 drielettercombinaties uitgesloten.

Een verslaggever van een autotijdschrift schrijft in een artikel dat door al deze beperkingen minder dan 20% van alle mogelijke kentekens uiteindelijk op een personenauto terecht zal komen.

- b** Ga met een berekening na of de verslaggever gelijk heeft.

Vanaf 1 maart 2013 werd voor kentekens de serie sidecode 8 gebruikt. Sidecode 8 bevat eerst een cijfer, dan drie letters en tenslotte twee cijfers. Sidecode 8 lijkt dus erg op sidecode 7 maar omdat er andere beperkingen gelden, zijn in totaal 1,46 miljoen kentekens beschikbaar voor personenauto's.

In oktober 2013 vraagt de verslaggever zich af tot wanneer deze serie (ongeveer) mee zal gaan. Hij maakt zelf een grafiek met daarin de verkoop van nieuwe personenauto's vanaf 2011. Ook maakt hij als bijpassend model een trendlijn met een afname van de verkoop van 375 nieuwe auto's per maand.



figuur 15.17

De formule die bij dit model hoort, is $A_n = -375n + 37250$. Hierbij is A_n het aantal verkochte nieuwe auto's in maand n met $n = 0$ voor maart 2013, de eerste maand waarin sidecode 8 gebruikt wordt.

Het model geeft voor mei 2013 een hoger aantal verkochte nieuwe auto's dan er volgens de grafiek werden verkocht.

- c** Bereken hoeveel procent hoger de uitkomst van het model is. Geef je antwoord in gehele procenten.

Er is ook een recursieve formule op te stellen bij dit model.

- d** Stel deze recursieve formule op.

12 2018-II

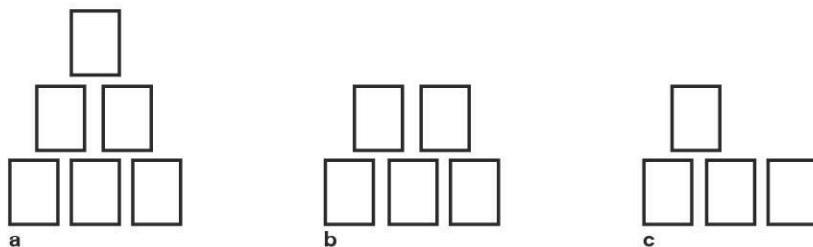
Bij het spel blikgooien krijgt de speler één of meer ballen waarmee hij of zij moet proberen zoveel mogelijk blikken van een toren af te gooien. Zo'n toren is altijd op dezelfde manier opgebouwd: op de onderste laag staat een aantal blikken en op de lagen erboven steeds één minder. Op de foto zie je een toren met zes blikken.

We nemen in deze opgave aan dat, als een bal de toren raakt, de onderste laag in zijn geheel blijft staan. Neem aan dat een geraakt blik ook werkelijk van de toren afvalt en nooit "mooi" op een lager gelegen laag terechtkomt en ook dat blikken niet blijven staan als één of meer blikken eronder wegvallen.

Lars gooit één bal naar een toren met zes blikken, zoals in figuur 15.18. Na zijn worp blijft de onderste laag van drie blikken staan. Er zijn nu vijf mogelijkheden voor de overgebleven toren. Drie van deze mogelijkheden zijn in de figuur hieronder schematisch getekend.



figuur 15.18



figuur 15.19

a Teken de andere twee mogelijkheden.

We gaan in deze opgave deze situatie wat theoretischer bekijken. We tellen het aantal mogelijke stapelingen van blikken op een onderste laag van n blikken. Hierbij staat vanaf de tweede laag ieder blik steeds boven op twee onderliggende blikken. We nemen steeds aan dat er één keer gegooid is en dat de hele onderste laag is blijven staan.

Voor $n = 1$ is er maar één blik, dus is er ook één mogelijke stapeling.

Voor $n = 2$ zijn er twee mogelijke stapelingen. Zie figuur 15.20.



figuur 15.20

Je kunt nu met een redenering nagaan dat het aantal mogelijke stapelingen voor $n = 3$ gelijk is aan 5. Deze redenering gaat als volgt:

- Er is één manier met 3 blikken op de onderste laag en 0 blikken op de tweede laag.
- Er zijn twee manieren met 3 blikken op de onderste laag en 1 blik op de tweede laag.
- Er is één manier met 3 blikken op de onderste laag en 2 blikken op de tweede laag (figuur 15.19b).
- Er is één manier met 3 blikken op de onderste laag, 2 blikken op de tweede laag en 1 blik op de derde laag (figuur 15.19a).

Dat is samen $1 + 2 + 1 + 1 = 5$ mogelijkheden.

Voor $n = 4$ is het aantal mogelijke stapelingen gelijk aan 14.

b Toon dit aan.

De Belgische wiskundige Charles Catalan ontdekte in de 19e eeuw de formule $C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + C_2 \cdot C_{n-3} + \dots + C_{n-2} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0$ met $C_0 = 1$. Hierin is C_n het aantal mogelijke stapelingen met n blikken op de onderste laag.

c Bereken met behulp van bovenstaande formule C_5 .

13 2018-II

Na het schudden begint een kaartspel meestal met het gelijk verdelen van de kaarten onder een aantal spelers. Neem aan dat bij een bepaald spel 16 verschillende kaarten gelijk verdeeld worden onder vier spelers A, B, C en D. Spelers A, B, C en D krijgen ieder dus vier kaarten.

We bekijken een stapel kaarten bestaand uit 16 verschillende kaarten.

Deze kaarten kunnen op circa $2,1 \cdot 10^{13}$ verschillende volgordes liggen.

Het aantal volgordes waarin de kaarten kunnen liggen, is veel groter dan het aantal mogelijkheden om de kaarten onder de vier spelers A, B, C en D te verdelen.

Bereken hoeveel keer zo groot dit aantal is. Rond af op tienduizendtallen.



14 2019-II

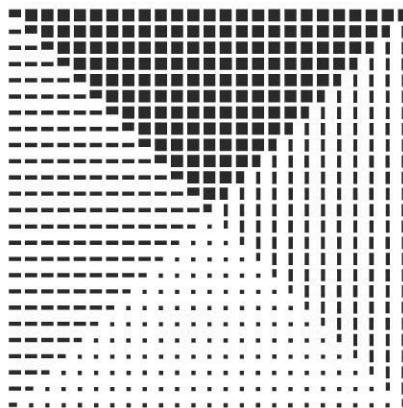
[► WERKBLAD] Ruim 50 jaar geleden maakte de kunstenaar Peter Struycken het werk ‘Wetmatige beweging’. Dit kunstwerk is opgebouwd uit 625 zwarte vormen: vierkanten en andere rechthoeken, die met een bepaalde regelmaat verdeeld zijn over een wit vlak. Zie figuur 15.21.

Elk van de 625 zwarte vormen is gemaakt op basis van een 3×3 -rooster van 9 vierkanten.

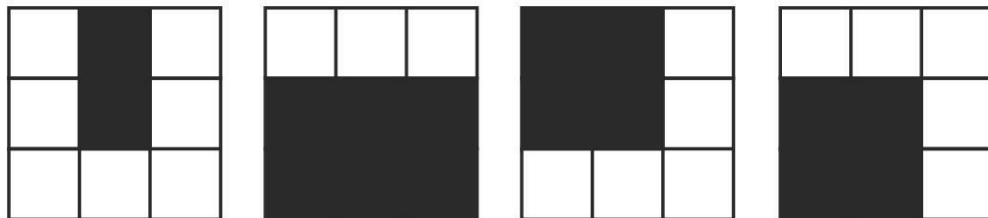
Hierbij gelden de volgende voorwaarden:

- het middelste vierkant in zo’n 3×3 -rooster is altijd zwart;
- een vorm bestaat uit 1, 2, 3, 4, 6 of 9 zwarte vierkanten;
- een vorm is een rechthoek (en kan dus ook een vierkant zijn).

Zie figuur 15.22 voor vier voorbeelden.



figuur 15.21



figuur 15.22

De twee vierkante vormen in figuur 15.22 worden als verschillende vormen opgevat, omdat ze op verschillende plaatsen in het 3×3 -rooster staan.

- a** Bereken hoeveel verschillende vormen de kunstenaar op deze manier kan maken.

In deze opgave gaan we ervan uit dat de hokjes in het 3×3 -rooster allemaal 1 cm bij 1 cm zijn.

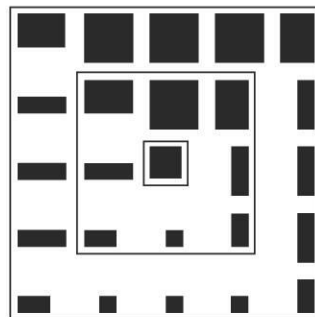
Om de totale oppervlakte te berekenen van de 625 gebruikte zwarte vormen, verdelen we het werk in 9 delen. Zie het werkblad. In elk deel komt slechts één type vorm voor.

- Het middelste deel bestaat uit één vorm met oppervlakte 4 cm^2 .
 - Er zijn 4 delen die elk uit 12 dezelfde vormen bestaan.
 - Er zijn 4 driehoekige delen met elk evenveel vormen.
- b** Bereken de totale oppervlakte in cm^2 van de 625 gebruikte zwarte vormen door uitsluitend gebruik te maken van bovenstaande gegevens en de figuur op het werkblad.

In het midden van het kunstwerk staat dus één vorm met oppervlakte 4 cm^2 . Dat is tevens de enige vorm met oppervlakte 4 cm^2 die in het kunstwerk voorkomt. Je kunt het kunstwerk opgebouwd zien vanuit het midden door vanuit dat midden naar de rand van het kunstwerk te ‘lopen’. Je komt dan steeds een volgende zogeheten *schil* tegen, een rechthoekige rand van vormen. Zie ook figuur 15.23.

Vanuit het midden is het werk opgebouwd uit 12 schillen. In het vervolg van deze opgave bekijken we delen van dit kunstwerk, waarbij het aantal schillen variabel is. Het aantal schillen noemen we n . Voor het originele kunstwerk geldt dus $n = 12$.

Met bijvoorbeeld $n = 2$ krijgen we het deel van het kunstwerk zoals in figuur 15.23. In figuur 15.23 zie je ook de 2 verschillende schillen plus de middenvorm met oppervlakte 4 cm^2 .



figuur 15.23

In figuur 15.23 zijn in totaal 24 vormen rondom de vorm met oppervlakte 4 cm^2 in het midden gerangschikt. Deze 24 vormen zijn als volgt onderverdeeld:

- vier keer , vier keer , vier keer  en vier keer ;
- twee keer , twee keer , twee keer  en twee keer .

Stel je voor dat je deze 24 vormen weghaalt van hun huidige posities en ze daarna willekeurig over de zo vrijgekomen posities gaat herverdelen zonder de vormen te draaien. De middenvorm met oppervlakte 4 cm^2 blijft daarbij dus op zijn plaats.

c Bereken hoeveel verschillende figuren je zo kunt krijgen.

De totale oppervlakte in cm^2 van de gebruikte vormen bij n schillen noemen we $O(n)$.

Voor $O(n)$ is een formule opgesteld:

$$(1) \quad O(n) = 1 \cdot 4 + n \cdot (2 + 2 + 6 + 6) + \frac{1}{2}n \cdot (1 + 2n - 1) \cdot (1 + 3 + 3 + 9)$$

Deze formule is te herschrijven als:

$$(2) \quad O(n) = (4n + 2)^2$$

d Laat zien dat beide formules (1) en (2) te herleiden zijn tot dezelfde formule.

Formule (2) is een directe formule. We kunnen deze formule ook gebruiken om een recursieve formule op te stellen voor $O(n)$.

Zo'n formule heeft de vorm $O(n + 1) = O(n) + an + b$ met $O(0) = 4$.

e Bereken de waarden van a en b .

15 2018-I

In figuur 15.24 zie je een model van een kunstwerk van Elt de Boer: een toren van regelmatig achthoekige vlakken op een voet. Het bovenste deel van de voet is de helft van een regelmatig achthoekig vlak met daaronder een kubus waarvan de ribbe dezelfde lengte heeft als die van het halve achthoekig vlak.

Daarboven zie je negen hele achthoekige vlakken die naar boven toe steeds kleiner worden.

De kunstenaar maakt de voet zwart en van de 9 achthoekige vlakken maakt hij 3 achthoekige vlakken rood, 3 oranje en 3 geel.

a Bereken op hoeveel manieren de kunstenaar dit kan doen.

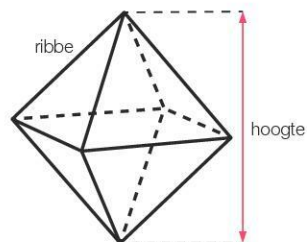


figuur 15.24

Een regelmatig achthoekig vlak, zie figuur 15.25, heeft 12 ribben die allemaal even lang zijn. De ribbe van de voet is 20 cm en die van het bovenste achthoekig vlak is 4 cm.

De achthoekige vlakken worden naar boven toe steeds kleiner. De kunstenaar kan ervoor kiezen de ribbe van de achthoekige vlakken steeds met een vaste factor r te vermenigvuldigen. Afgerond op twee decimalen geldt dan $r = 0,84$.

b Bereken de waarde van r in drie decimalen.



figuur 15.25

De kunstenaar had er ook voor kunnen kiezen om de ribbe met een vaste lengte te laten afnemen. De lengten van de ribben van de opeenvolgende achthoekige vlakken vormen dan een rekenkundige rij. Deze rij kan benaderd worden met de directe formule in de vorm van de lineaire formule $u_n = 20 - 1,78n$. Hierin is n het nummer van het achthoekig vlak. In de formule is u_n de lengte in cm van de ribbe van het n -de achthoekig vlak. Bij $n = 0$ hoort de lengte van de ribbe van de voet.

c Laat zien hoe de lineaire formule $u_n = 20 - 1,78n$ afgeleid kan worden uit de gegevens.

De twee methoden zullen in het algemeen verschillende lengtes geven voor de ribben van de achthoekige vlakken uit de serie.

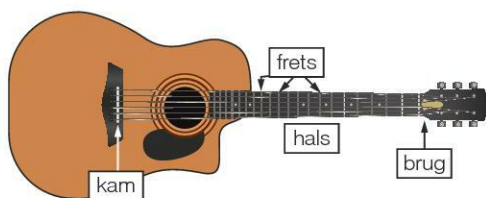
d Onderzoek bij welk achthoekig vlak uit de serie dit verschil maximaal is en geef ook aan hoe groot dat verschil is. Rond je antwoord af op gehele millimeters.

16 2017-II

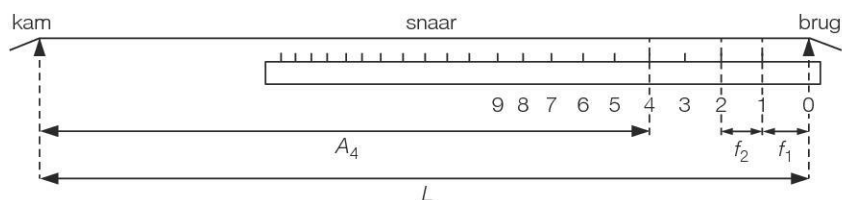
In figuur 15.26 zie je een gitaar. De snaren zijn gespannen tussen de *brug* en de *kam*. Op de hals zijn zogenoemde *frets* (smalle metalen strips) te zien.

Als je een snaar aanslaat zonder op een fret te drukken, gaat de hele snaar tussen de brug en de kam trillen. Door een snaar tegen een fret aan te drukken, wordt de gebruikte snaarlengte korter. Je krijgt dan een andere toon. Om de goede tonen te krijgen, moet bij het bouwen van een gitaar de juiste plaats van de frets berekend worden.

Figuur 15.27 geeft een schematisch zijaanzicht van de hals. De eerste negen frets zijn daarin vanaf de brug genummerd.



figuur 15.26



figuur 15.27

De lengte van een snaar in cm tussen de brug en de kam noemen we L .

A_n is de afstand in cm tussen de fret met nummer n en de kam.

In figuur 15.27 is A_4 aangegeven. Voor A_n geldt de formule

$$A_n = L \cdot 0,9439^n.$$

In de zestiende eeuw werd voor het berekenen van de positie van de frets een recursieve methode gebruikt, de ‘Regel van 18’. Deze rekenwijze gaat als volgt:

- Deel de totale snaarlengte L door 18. De uitkomst is de afstand tussen de brug en fret 1. Deze afstand noemen we f_1 (zie figuur 15.27).
- De afstand tussen fret 2 en fret 1 noemen we f_2 (zie figuur 15.27), de afstand tussen fret 3 en fret 2 noemen we f_3 , enzovoort.
- De afstand tussen fret n en fret $n - 1$ wordt berekend met $f_n = \frac{17}{18} \cdot f_{n-1}$ met $f_1 = \frac{1}{18}L$.

Een gitaarbouwer wil voor het plaatsen van de frets de afstanden tussen de brug en de frets weten. Hij kan deze afstanden met de Regel van 18 of met de formule berekenen. Deze twee methoden leveren verschillende afstanden op. Ga uit van een afstand tussen brug en kam van 65 cm.

- Onderzoek hoeveel de afstand tussen de brug en fret 2, berekend met de formule, verschilt van de afstand berekend met de Regel van 18. Geef je antwoord in tienden van mm nauwkeurig.
- Bereken vanaf welke fret de afstand tot de volgende fret volgens de Regel van 18 kleiner is dan 1,6 cm.

17 2017-I

In de 14e eeuw ontdekte de Indiase wiskundige Madhava een manier om de waarde van π te benaderen met behulp van een rij.

Hij begon met 4. Dat is groter dan π . Hij telde hier $-\frac{4}{3}$ bij op. Het resultaat $2\frac{2}{3}$ is nu kleiner dan π . Vervolgens telde hij bij het antwoord $\frac{4}{5}$ op. Het resultaat $3\frac{7}{15}$ is nu weer groter dan π .

Hij ging zo verder, dus:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots$$

Na elke nieuwe term die hij erbij optelde,

kwam hij steeds dichterbij het getal π . Zie de figuur.

Madhava kon bewijzen dat hij op deze manier inderdaad steeds dichterbij de werkelijke waarde van π kwam. Nadeel van deze manier is echter wel dat je veel termen nodig hebt voor een redelijke benadering van π .

Het resultaat na drie termen: $3\frac{7}{15}$ verschilt nog behoorlijk van π .

- a** Bereken hoeveel termen je minimaal nodig hebt om te zorgen dat het verschil met π kleiner is dan 0,1.

Madhava telde voor zijn benadering van π de termen van een rij bij

elkaar op, namelijk de termen van de volgende rij: $\frac{4}{1}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{7}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{11}, \dots$

De directe formule voor deze rij is van de vorm $u_n = \frac{a \cdot (-1)^{n-1}}{b \cdot (n-1) + 1}$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

- b** Bepaal de waarden van a en b in deze directe formule.

Madhava gaf ook een andere benaderingsaanpak. Hierbij leidde de somrij sneller tot een goede benadering van π dan bij zijn eerste methode. Ook bij die andere aanpak werd er beurtelings iets afgetrokken en iets opgeteld.

Die andere aanpak van Madhava zag er als volgt uit:

$$S_1 = \sqrt{12} \cdot 1$$

$$S_2 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3}\right)$$

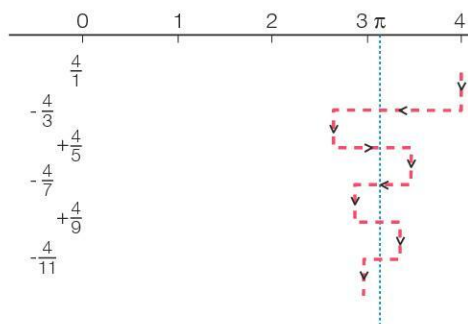
$$S_3 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2}\right)$$

$$S_4 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3}\right)$$

$$S_5 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4}\right)$$

enzovoort.

- c** Stel de recursieve formule op voor de somrij S_n met $n = 2, 3, 4, \dots$ en $S_1 = \sqrt{12}$ van de andere benaderingsaanpak van Madhava.



figuur 15.28

15.3 Werken met formules

18 a Gegeven is de formule $K = \frac{A^3}{2000}$.

Voor welke waarden van A ligt K tussen 0,6 en 0,8? Rond af op twee decimalen.

b De formule $\frac{1}{p} = \frac{2}{q} - \frac{3}{r}$ is te herleiden tot $p = \frac{qr}{2r - 3q}$.

Geef deze herleiding.

c Gegeven zijn de formules $E = 50 \cdot \left(\frac{x}{3,1}\right)^{1,15}$ en $F = \frac{E}{x}$.

De formules zijn te combineren tot de vorm $F = ax^b$.

Bereken a en b . Rond af op twee decimalen.

d Gegeven zijn de formules $P = \frac{Q}{R}$, $R = 512f^3$ en $S = 16f^2$.

Schrijf de formule van P in de vorm $P = \frac{Q}{a \cdot S^b}$.

e Gegeven is de formule $Z = \frac{t^3}{d}$. Hierin is t de tijd in minuten en d de afstand in meters.

De formule is te schrijven in de vorm $Z = c \cdot \frac{T^3}{D}$ met T de tijd in uren en D de afstand in km.

Bereken c .

f Gegeven is de formule $A = B \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{0,52}$.

Bereken met welk percentage A toeneemt als p twee keer zo groot wordt.

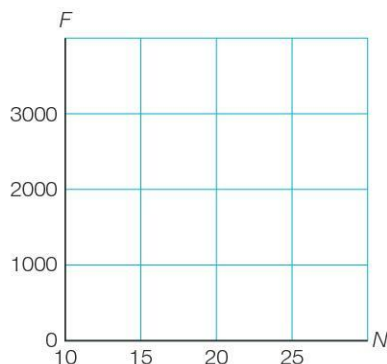
g Gegeven is de formule $\frac{1}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2}$ met $x > 0$.

Beredeneer of y toeneemt of afneemt als x afneemt.

h Gegeven is de formule $G = \frac{F}{N\sqrt{N}}$ met N

tussen 10 en 30.

Teken in het assenstelsel van figuur 15.29 het gebied dat hoort bij G tussen 10 en 20.



figuur 15.29

- 19 a** Gegeven is de formule $h = 5 + 4 \sin(\frac{1}{15}\pi(x - 3))$. Hierin is x de horizontale afstand in meters met x tussen 0 en 30 en is h de hoogte in meters.

Bereken over welke afstand geldt dat de hoogte groter is dan 6 meter. Rond af op cm.

- b** Gegeven is de formule $N = 1,5t + 3 + 0,4 \sin(\pi(t - 1))$. Hierin is t de tijd in jaren. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van N . De snelheid waarmee N toeneemt op $t = 3$ is groter dan op $t = 2$.

Bereken hoeveel keer zo groot. Rond af op één decimaal.

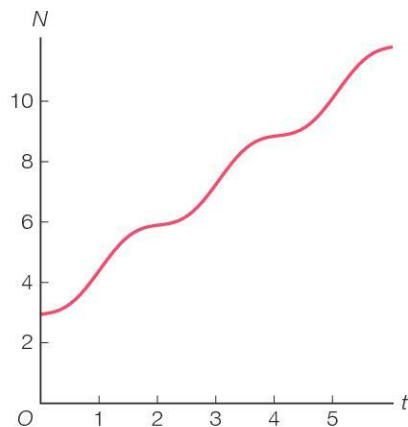
- c** De gemiddelde maximumtemperatuur op IJsland kan worden beschreven met een formule van de vorm $T_{\max} = a + b \sin(c(t - d))$. Hierin is t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari en $T_{\max}$ de gemiddelde maximumtemperatuur in graden Celsius.

De laagste gemiddelde maximumtemperatuur is halverwege januari en is -1°C . De hoogste gemiddelde maximumtemperatuur is halverwege juli en is 12°C .

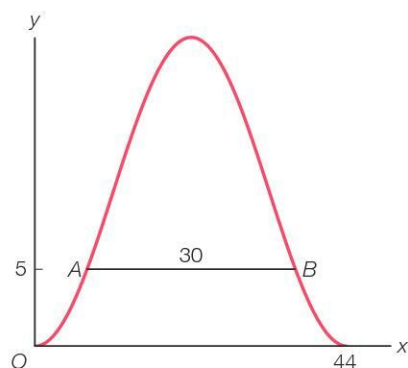
Bereken a , b , c en d .

- d** In de figuur hiernaast zie je één periode van een sinusöide. De grafiek begint in het punt $(0, 0)$ en eindigt in het punt $(44, 0)$. Het lijnstuk AB in de figuur ligt 5 boven de x -as en heeft lengte 30.

Stel een formule op van de sinusöide. Rond zo nodig af op twee decimalen.



figuur 15.30



figuur 15.31

Formules herleiden

De formule $y = 8 \cdot \frac{2x - 3}{4}$ is te herleiden tot de vorm $y = ax + b$.

Denk aan de haakjes.

$$y = 8 \cdot \frac{2x - 3}{4} = \frac{8}{4}(2x - 3) = 2(2x - 3) = 4x - 6$$

Gebruik $A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A}{C} \cdot B$.

Dus $a = 4$ en $b = -6$.

Haakjes wegwerken

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

De formule $y = 24 + \frac{2p+5}{1,5} \cdot 18$ is te herleiden tot de vorm $y = ap + b$.

$$y = 24 + \frac{2p+5}{1,5} \cdot 18 \text{ geeft } y = 24 + \frac{18}{1,5} \cdot (2p+5)$$

$$y = 24 + 12(2p+5)$$

$$y = 24 + 24p + 60$$

$$y = 24p + 84$$

Dus $a = 24$ en $b = 84$.

De formule $A = 5 + \frac{3}{T}$ is te herleiden tot de vorm $A = \frac{aT+b}{T}$.

$$A = 5 + \frac{3}{T} = \frac{5}{1} + \frac{3}{T} = \frac{5T}{T} + \frac{3}{T} = \frac{5T+3}{T}$$

Bij $T = \frac{x^2 - x - 8}{2x}$ kun je $2x$ uitdelen.

$$\text{Je krijgt } T = \frac{x^2 - x + 8}{2x} = \frac{x^2}{2x} - \frac{x}{2x} - \frac{8}{2x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{4}{x}.$$

Bij het herleiden van wortelformules gebruik je de regels

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \text{ en } \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

Zo kun je $y = \sqrt{25x}$ en $y = \sqrt{\frac{3x}{16}}$ herleiden tot de vorm $y = a\sqrt{x}$.

$$y = \sqrt{25x} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{x} = 5\sqrt{x}, \text{ dus } y = 5\sqrt{x}.$$

$$y = \sqrt{\frac{3x}{16}} = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{x} \approx 0,433\sqrt{x}, \text{ dus } y = 0,433\sqrt{x}.$$

Vrijmaken

Bij de formule $2a - 5b = 16$ kun je b als volgt vrijmaken.

$$2a - 5b = 16 \text{ geeft } -5b = -2a + 16$$

$$b = \frac{-2}{-5}a + \frac{16}{-5}$$

$$b = \frac{2}{5}a - 3\frac{1}{5}$$

Hiermee is b uitgedrukt in a .

De formule $A = 200\sqrt{\frac{B}{6}}$ is te herleiden tot de vorm $B = cA^2$.

Dat gaat als volgt.

$$A = 200\sqrt{\frac{B}{6}} \text{ geeft } \sqrt{\frac{B}{6}} = 0,005A$$

Kwadrateren.

$$\frac{B}{6} = 2,5 \cdot 10^{-5}A^2$$

$$B = 1,5 \cdot 10^{-4}A^2$$

Dus $c = 1,5 \cdot 10^{-4}$.

Bij de formule $T = 3\sqrt{p-4}$ maak je p als volgt vrij.

$$3\sqrt{p-4} = T \text{ geeft } \sqrt{p-4} = \frac{1}{3}T$$

$$p-4 = \left(\frac{1}{3}T\right)^2 \quad \left(\frac{1}{3}T\right)^2 = \frac{1}{3}T \cdot \frac{1}{3}T = \frac{1}{9}T^2$$

$$p = \frac{1}{9}T^2 + 4$$

Met kruislings vermenigvuldigen is p vrij te maken bij de

formule $\frac{2p-3}{q} = \frac{q}{2}$. Dat gaat als volgt.

$$\frac{2p-3}{q} = \frac{q}{2} \text{ geeft } 2(2p-3) = q \cdot q$$

$$4p-6 = q^2$$

$$4p = q^2 + 6$$

$$p = \frac{1}{4}q^2 + 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ geeft } AD = BC$$

Bij de formule $P = 50 + \frac{800}{Q}$ maak je als volgt Q vrij.

$$P = 50 + \frac{800}{Q} \text{ geeft } \frac{800}{Q} = P - 50$$

$$Q = \frac{800}{P-50}$$

$$\frac{A}{B} = C \text{ geeft } B = \frac{A}{C}$$

Bij de formule $y = 5x^{1,8}$ maak je x als volgt vrij.

$$5x^{1,8} = y \text{ geeft } x^{1,8} = \frac{1}{5}y, \text{ dus } x = \left(\frac{1}{5}y\right)^{\frac{1}{1,8}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{1,8}} \cdot (y)^{\frac{1}{1,8}} \approx 0,41y^{0,56}.$$

Neem je $x = 5$ en $V = 20$ in de formule $V = x \cdot \frac{3-p}{2y} + 12$, dan kun je y

als volgt uitdrukken in p .

$$\left. \begin{array}{l} V = x \cdot \frac{3-p}{2y} + 12 \\ x = 5 \text{ en } V = 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \cdot \frac{3-p}{2y} + 12 = 20 \\ \frac{5(3-p)}{2y} = 8 \end{array}$$

$$5(3-p) = 16y$$

$$16y = 15 - 5p$$

$$y = \frac{15}{16} - \frac{5}{16}p$$

$$y = -\frac{5}{16}p + \frac{15}{16}$$

$$\frac{A}{B} = C \text{ geeft } A = BC$$

Met het uitdrukken van y in p heb je een formule van de vorm

$$y = ap + b \text{ gekregen. Hierin is } a = -\frac{5}{16} \text{ en } b = \frac{15}{16}.$$

Bij de formule $A = \frac{2b-3}{b+4}$ maak je als volgt b vrij.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2b-3}{b+4} \text{ geeft } \frac{2b-3}{b+4} = A \\ 2b-3 &= A(b+4) \\ 2b-3 &= Ab+4A \\ 2b-Ab &= 4A+3 \\ b(2-A) &= 4A+3 \\ b &= \frac{4A+3}{2-A} \end{aligned}$$

Formules combineren

De formules $A = 2t + 3p + 2$ en $5t + p = 20$ zijn te combineren tot de vorm $A = at + b$. Daartoe maak je eerst p vrij bij $5t + p = 20$.

Je krijgt $p = -5t + 20$.

$$\left. \begin{aligned} A &= 2t + 3p + 2 \\ p &= -5t + 20 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= 2t + 3(-5t + 20) + 2 \\ A &= 2t - 15t + 60 + 2 \\ A &= -13t + 62 \end{aligned}$$

Dus $a = -13$ en $b = 62$.

De formules $A = 2t^2 + 5$ en $3p - t = 1$ zijn te combineren tot de vorm $A = ap^2 + bp + c$. Daartoe maak je eerst t vrij bij $3p - t = 1$.

Je krijgt $-t = -3p + 1$, dus $t = 3p - 1$.

$$\left. \begin{aligned} A &= 2t^2 + 5 \\ t &= 3p - 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= 2(3p - 1)^2 + 5 \\ A &= 2(9p^2 - 6p + 1) + 5 \\ A &= 18p^2 - 12p + 2 + 5 \\ A &= 18p^2 - 12p + 7 \end{aligned}$$

Dus $a = 18$, $b = -12$ en $c = 7$.

Merkwaardige producten

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

De formules $N = 20\sqrt{9 - \frac{p}{12}}$ en $p = 60 - 8t$ zijn te combineren.

Je krijgt $N = 20\sqrt{9 - \frac{60-8t}{12}} = 20\sqrt{9 - (5 - \frac{2}{3}t)} = 20\sqrt{9 - 5 + \frac{2}{3}t}$.

Dus $N = 20\sqrt{\frac{2}{3}t + 4}$.

$$\frac{60-8t}{12} = \frac{60}{12} - \frac{8t}{12} = 5 - \frac{8}{12}t = 5 - \frac{2}{3}t$$

Redeneren met formules

Bij het redeneren of bij een formule een stijgende of dalende grafiek hoort, gebruiken we

- als x toeneemt, dan neemt ax toe als $a > 0$
- als x toeneemt, dan neemt ax af als $a < 0$
- als x toeneemt, dan neemt x^n toe als $n > 0$
- als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe.

Bij de formule $N = 250 - \frac{30}{2t+1}$ bereken je als volgt dat de grafiek van N stijgend is voor $t > 0$.

Als t toeneemt, dan neemt $2t$ toe, dus $2t + 1$ neemt toe, dus $\frac{30}{2t+1}$ neemt af en $250 - \frac{30}{2t+1}$ neemt toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

Bij de formule $N = 250 - \frac{30}{2t+1}$ bereken je als volgt wat de grenswaarde is.

Als t heel groot wordt, dan wordt $2t$ heel groot, dus dan wordt $2t + 1$ heel groot en dan nadert $\frac{30}{2t+1}$ tot 0.

Dus dan wordt $250 - \frac{30}{2t+1} \approx 250 - 0 = 250$.

Dus de grenswaarde is 250.

Bij de formule $G = \frac{10}{P^3+2} + 5$ bereken je als volgt dat de grafiek van G dalend is voor $P > 0$.

Als P toeneemt, dan neemt P^3 toe, dus $P^3 + 2$ neemt toe en $\frac{10}{P^3+2}$ neemt af, dus dan neemt $\frac{10}{P^3+2} + 5$ ook af.

Dus de grafiek van G is dalend.

Bij de formule $G = \frac{10}{P^3+2} + 5$ bereken je als volgt wat de grenswaarde is.

Als P heel groot wordt, dan wordt P^3 heel groot, dus dan wordt $P^3 + 2$ heel groot en dan nadert $\frac{10}{P^3+2}$ tot 0. Dus dan wordt $\frac{10}{P^3+2} + 5 \approx 0 + 5 = 5$.

Dus de grenswaarde is 5.

Eenheden omzetten

In de formule $d = 0,015h^{1,5}$ is d de diameter van een beuk in cm en h de hoogte van de beuk in dm. Deze formule zet je als volgt om naar een formule waarin de diameter D in mm is uitgedrukt in de hoogte H in m.

Er geldt $d = \frac{1}{10} D$, want bij $D = 1$ hoort $d = \frac{1}{10}$.

Ook geldt $h = 10H$, want bij $H = 1$ hoort $h = 10$.

Vervang dus d door $\frac{1}{10} D$ en h door $10H$. Je krijgt

$$\frac{1}{10} D = 0,015 \cdot (10H)^{1,5}$$

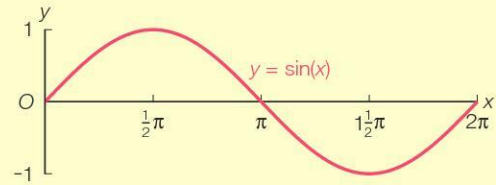
$$D = 10 \cdot 0,015 \cdot 10^{1,5} \cdot H^{1,5}$$

Berekenen en afronden geeft de formule $D = 4,7H^{1,5}$.

Sinusoïden

Van de standaardgrafiek $y = \sin(x)$ is

- de evenwichtsstand 0
- de amplitude 1
- de periode 2π .

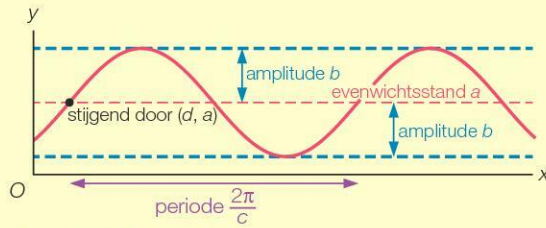


figuur 15.32

Van de sinusöide $y = a + b \sin(c(x - d))$

met $b > 0$ en $c > 0$

- is de evenwichtsstand a
- is de amplitude b
- is de periode $\frac{2\pi}{c}$, dus $c = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand in het punt (d, a) .



figuur 15.33

Je kunt een sinusöide tekenen

I als de formule is gegeven

II op grond van een omschrijving in woorden.

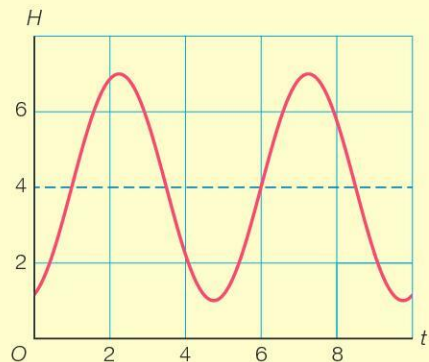
Daarbij gebruik je de vier kenmerken van een sinusöide.

Bij het tekenen van de grafiek van

$H = 4 + 3 \sin(\frac{2\pi}{5}(t - 1))$ noteer je eerst de vier kenmerken.

- de evenwichtsstand is 4
- de amplitude is 3
- de periode is 5
- grafiek gaat stijgend door $(1, 4)$

De grafiek is hiernaast getekend op het interval $[0, 10]$.

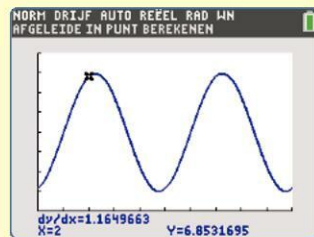


figuur 15.34

Bij de sinusoïde $H = 4 + 3 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t-1)\right)$ met $0 \leq t \leq 10$ is

- $H_{\max} = 4 + 3 = 7$ voor $t = 1 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 2\frac{1}{4}$ en voor $t = 2\frac{1}{4} + 5 = 7\frac{1}{4}$
- $H_{\min} = 4 - 3 = 1$ voor $t = 1 + \frac{3}{4} \cdot 5 = 4\frac{3}{4}$ en voor $t = 4\frac{3}{4} + 5 = 9\frac{3}{4}$
- de helling voor $t = 2$ gelijk aan $\left[\frac{dH}{dt}\right]_{t=2} \approx 1,165$
- de helling maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, dus bij $t = 1$.

De maximale helling is $\left[\frac{dH}{dt}\right]_{t=1} \approx 3,770$.



Is gegeven dat het temperatuurverloop op een dag wordt beschreven door een sinusoïde, dat om 4 uur 's middags de maximale temperatuur van 20°C wordt bereikt en dat de minimale temperatuur 8°C is, dan bedenk je het volgende om de grafiek te tekenen.

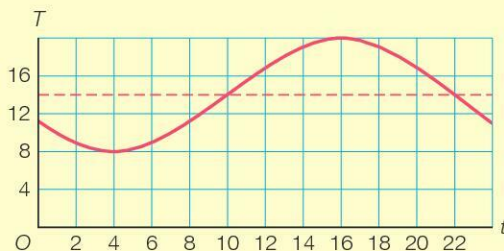
- de periode is 24 uur
- de evenwichtsstand is $\frac{20+8}{2} = 14^\circ\text{C}$
- het minimum wordt bereikt op $t = 16 - \frac{1}{2} \cdot \text{periode} = 16 - \frac{1}{2} \cdot 24 = 4$
- de grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand op $t = 16 - \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 16 - \frac{1}{4} \cdot 24 = 10$
- de grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand op $t = 16 + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 16 + \frac{1}{4} \cdot 24 = 22$

Zo krijg je de grafiek hiernaast.

Bij deze sinusoïde is een formule op te stellen.

Je krijgt $T = 14 + 6 \sin\left(\frac{2\pi}{24}(t-10)\right)$

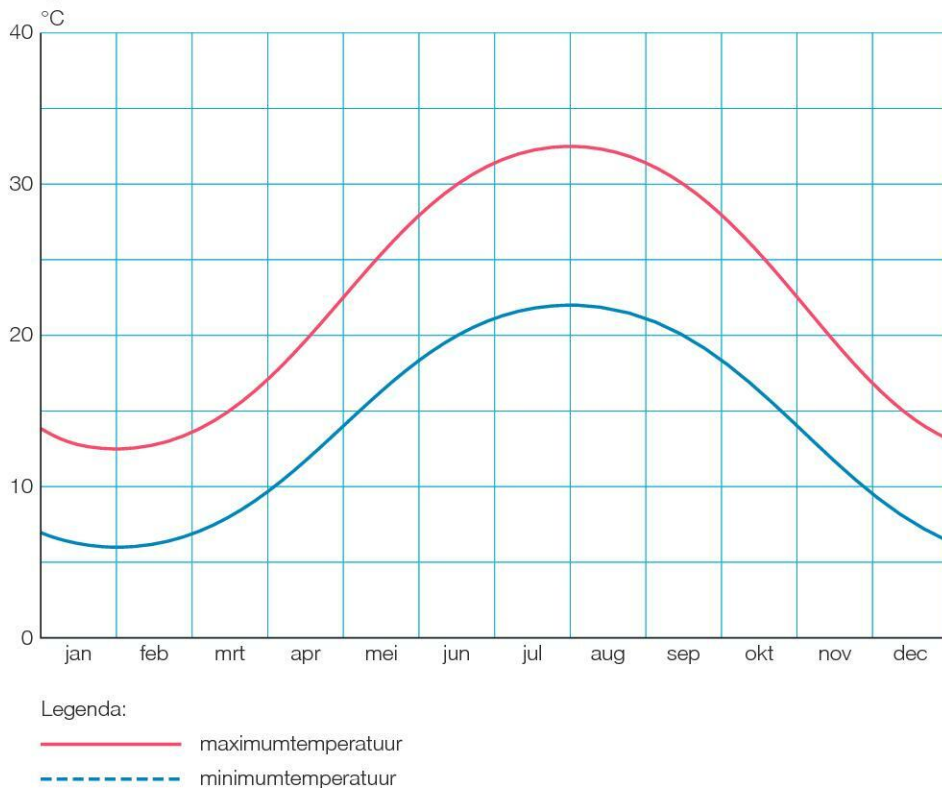
oftewel $T = 14 + 6 \sin\left(\frac{1}{12}\pi(t-10)\right)$.



figuur 15.35

20 2017-II

Al jaren wordt van het stadje Pythagorion op het Griekse eiland Samos dagelijks de minimum- en maximumtemperatuur bijgehouden. Voor alle dagen van het jaar is zowel van de minimum- als van de maximumtemperatuur op die dag het gemiddelde over een periode van 30 jaar berekend. In de figuur staan de grafieken van deze gemiddelde temperaturen.



figuur 15.36

De maximumtemperatuur laat zich redelijk beschrijven door de formule $T_{\max} = 22,5 + 10 \sin(0,0172(t - 120))$. Hierin is $T_{\max}$ in graden Celsius, t in dagen en $t = 1$ op 1 januari.

Wandelaars bezoeken het eiland bij voorkeur niet als de maximumtemperatuur boven de 30°C ligt.

- a** Bereken hoeveel dagen in een jaar de maximumtemperatuur boven de 30°C ligt.

De grafiek van de minimumtemperatuur ligt lager dan de grafiek van de maximumtemperatuur, maar de toppen van de grafieken liggen recht onder elkaar. Ook de grafiek van de minimumtemperatuur is bij benadering een sinusoïde.

- b** Stel met behulp van de figuur een formule op voor de minimumtemperatuur.

21 2017-I

De marathonloper Pete Riegel ontwikkelde een eenvoudige formule om te voorspellen welke tijd een hardloper nodig zou hebben om een bepaalde afstand af te leggen op basis van zijn tijden op eerder gelopen afstanden. De formule is $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{1,07}$. Hierin is T_1 is de tijd,

uitgedrukt in seconden, die gelopen is op de afstand d_1 en T_2 is de voorspelde tijd in seconden op de afstand d_2 . De afstanden d_1 en d_2 zijn allebei in meters. De formule is geldig voor afstanden vanaf 1500 meter tot en met 42 195 meter, de marathon.

Harald loopt de 1500 meter in 4 minuten en 52 seconden.

- a** Bereken in minuten en seconden Haralds te verwachten tijd op de 10 000 meter.

Als je voor d_1 en d_2 de afstanden in een andere eenheid dan meters zou invullen, dan geeft de formule dezelfde uitkomst.

- b** Leg zonder getallenvoorbeeld uit waarom de uitkomst die de formule geeft inderdaad niet verandert als je de beide afstanden in kilometers in plaats van meters invult.

Uitleggen is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 250.

Het ligt voor de hand dat de gemiddelde snelheid lager wordt als de te lopen afstand groter wordt. Dat is ook in overeenstemming met de formule: als de afstand tweemaal zo groot wordt, dan geldt volgens de formule van Riegel dat de gemiddelde snelheid altijd met hetzelfde percentage afneemt.

- c** Bereken dit percentage.

Een andere maat voor de snelheid is de *kilometertijd* K , het aantal seconden dat een hardloper gemiddeld per kilometer nodig heeft. In formulevorm: $K = \frac{T}{d}$. Hierbij is T de totale tijd in seconden en d de afstand in kilometers.

Als we naar de wereldrecords op de langere loopafstanden kijken, dan blijken de kilometertijden heel goed te voorspellen te zijn met de formule van Riegel. Dat is opmerkelijk, want die afstanden werden door verschillende hardlopers gelopen.

Het wereldrecord op de 1500 meter is precies 3 minuten en 26 seconden. Uitgaande van dit wereldrecord kunnen de tijden voor de wereldrecords op de andere afstanden met behulp van de formule van Riegel berekend worden met $T = 206 \cdot \left(\frac{d}{1,5}\right)^{1,07}$. In deze formule is T de gelopen tijd in

seconden voor het wereldrecord op de afstand d km. Met behulp van deze formule en de formule $K = \frac{T}{d}$ is het mogelijk een formule op te stellen

voor de kilometertijden van de wereldrecords in de vorm $K = p \cdot d^q$. Hierbij is K de kilometertijd in seconden en d de afstand in kilometers.

- d** Bereken p en q in twee decimalen.

Een variant van de formule van Riegel met een nog onbekende exponent a kan ook gebruikt worden bij schaatsen. Die formule ziet er dan als volgt uit: $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^a$ (met de tijden in seconden en de afstanden in meters).

Een schaatsliefhebster gebruikte eind 2015 de wereldrecords op de 5000 meter en de 10000 meter om de waarde van de exponent a te berekenen. Op de 5000 meter was eind 2015 het wereldrecord 6 minuten en 3,32 seconden. Het wereldrecord op de 10000 meter was op dat moment 12 minuten en 36,30 seconden.

- e Bereken de waarde van a in drie decimalen op basis van deze twee wereldrecords.

22 2019-I

Bedrijven willen zo efficiënt mogelijk omgaan met verpakkingsmateriaal. Meestal is er een vaststaande inhoud en wil men dat de oppervlakte van de verpakking zo klein mogelijk wordt, maar je kunt het ook andersom bekijken: bij een bepaalde oppervlakte wil je een verpakking met zo groot mogelijke inhoud. De maximale inhoud krijg je als je een bol neemt, maar een bol als verpakkingsmateriaal is vaak niet handig.

Om de efficiëntie E van een verpakking met een inhoud V en een oppervlakte A te weten te komen, vergelijk je de inhoud V van die verpakking met de inhoud van een bol met diezelfde oppervlakte A .

Er geldt:

$$\text{formule 1: } E = \frac{\text{inhoud } V \text{ van verpakking met oppervlakte } A}{\text{inhoud van bol met oppervlakte } A}$$

Voor een bol geldt het volgende:

$$\text{formule 2: Oppervlakte bol} = 12,57r^2$$

$$\text{formule 3: Inhoud bol} = 4,19r^3$$

In deze formules is r de straal van de bol.

Uitgaande van de formules 1, 2 en 3 geldt voor de efficiëntie van een

$$\text{verpakking de formule } E = \frac{V}{4,19(\sqrt{0,08A})^3}.$$

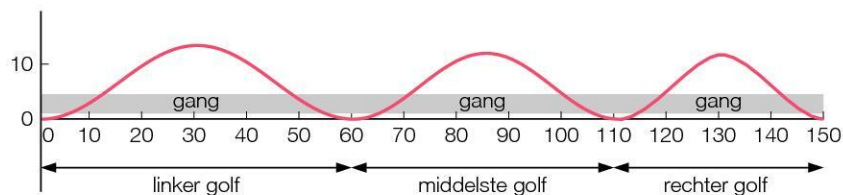
Toon met de formules 1, 2 en 3 aan dat deze laatste formule juist is.

23 2017-I

Op de foto's zie je het Zentrum Paul Klee in Zwitserland. Het gebouw heeft een bijzondere vorm: het bestaat uit drie afdelingen met daaroverheen een golvend dak.



De drie afdelingen zijn verbonden door een lange gang. In figuur 15.37 zie je een schematische doorsnede van het gebouw en de lange gang. In deze figuur is duidelijk te zien dat het dak bestaat uit drie golven met verschillende periodes. Ook de hoogtes zijn verschillend.



figuur 15.37

Elke golf begint en eindigt op een laagste punt. Voor de linker golf in de figuur kan men de formule $h = 7 + 7 \sin\left(\frac{2\pi}{60}(x - 15)\right)$ opstellen.

Hierin is h de hoogte van de golf boven het laagste punt in meters en x de horizontale afstand in meters vanaf het beginpunt van deze golf.

De vloer van de gang bevindt zich 1 meter boven het laagste punt van de golven. De gang zelf is 3,5 meter hoog.

- a** Bereken de lengte van het gedeelte van de gang dat zich geheel onder het linker dak, dus onder de linker golf, bevindt in cm nauwkeurig.

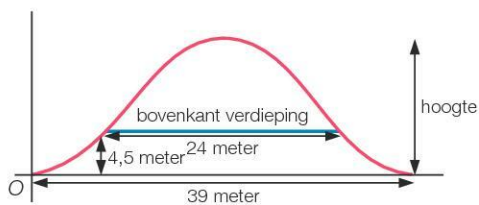
De golf die hoort bij het middelste dak is 51 meter lang en 12,5 meter hoog. Hier hoort een formule bij van de vorm $h = a + a \sin(c(x - d))$ met h de hoogte van de golf in meters boven het laagste punt en x de horizontale afstand in meters vanaf het beginpunt van de linker golf.

- b** Bereken de waarden van a , c en d in deze formule.

We kijken nu naar het rechter dak. Om de afmetingen hiervan te berekenen, kan de architect bijvoorbeeld als volgt te werk gaan. Hij gaat voor het dak uit van een sinusoïde met een periode van 39 meter. Verder wil hij dat onder het dak een benedenverdieping past van 24 meter breed en 4,5 meter hoog.

In figuur 15.38 is de doorsnede getekend die bij deze situatie hoort. De golf begint linksonder in het punt met coördinaten (0, 0).

- c Bereken welke hoogte de architect nu minimaal moet nemen voor de golf die hoort bij het dak in deze situatie. Geef je antwoord in dm nauwkeurig.



figuur 15.38

24 2018-II

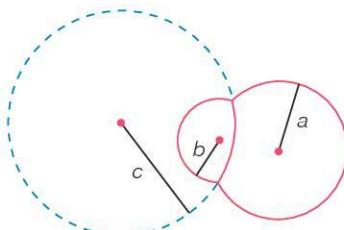
Op de foto zie je een *dubbele zeepbel*: twee bolvormige zeepbellen die aan elkaar vastzitten. Beide zeepbellen zijn een deel van een bol.

Het scheidingsvlies tussen deze zeepbellen is ook een deel van een bol.

Men heeft ontdekt dat voor elke dubbele zeepbel de formule $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ geldt. In deze formule is a de straal van de grootste zeepbel, b de straal van de kleinste zeepbel en c de straal van het bolvormige scheidingsvlies. In figuur 15.40 is dit schematisch weergegeven.



figuur 15.39



figuur 15.40

De dubbele zeepbel op de foto bestaat uit een zeepbel met een straal van 2,5 cm en een zeepbel met een straal van 4 cm.

- a Bereken met behulp van bovenstaande formule de straal van het scheidingsvlies. Rond je antwoord af op hele millimeters.

Neem nu aan dat de grootste zeepbel een vaste straal heeft van 3 cm (dus $a = 3$). We vragen ons af wat er gebeurt als de straal van de kleinste zeepbel steeds kleiner wordt: wordt het scheidingsvlies dan steeds platter of steeds boller? Met andere woorden: neemt c toe of af?

- b Beredeneer aan de hand van bovenstaande formule of c toeneemt of afneemt als de straal van de kleinste zeepbel steeds kleiner wordt.

Beredeneren is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 250.

Als de stralen a en b bekend zijn, kun je c snel en rechtstreeks berekenen door de formule $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ te herleiden tot $c = \frac{ab}{a-b}$.

- c Geef deze herleiding.

25 2018-I

[► WERKBLAD] Op de foto zie je een doorgezaagde boomstam. Hierin zijn zogenaamde jaarringen te zien. Deze ontstaan doordat de boom in de zomer snel groeit: dan wordt er licht gekleurd hout gevormd. In de winter groeit de boom langzaam en wordt er donker gekleurd hout gevormd. Zo komt er elk jaar een ring bij, die uit een licht en een donker gedeelte bestaat: een jaarring.



In deze opgave kijken we eerst naar de groeisnelheid van de diameter (G) van een grove den. Omdat een boom afwisselend snel en langzaam groeit, kun je deze groeisnelheid modelleren met behulp van sinusoiden. Voor de groeisnelheid van de diameter van een grove den gelden de volgende eigenschappen:

- de groeisnelheid is drie maanden na het ontkiemen van het zaadje maximaal;
- de groeisnelheid is negen maanden na het ontkiemen minimaal;
- dit patroon herhaalt zich elk jaar;
- de maximale groeisnelheid is 2,1 cm per jaar;
- de minimale groeisnelheid is 0,3 cm per jaar.

Voor de groeisnelheid van de grove den kun je op basis van deze eigenschappen een formule opstellen van de vorm $G = a + b \sin(c(t - d))$.

Hierin is G de groeisnelheid in cm per jaar en t de tijd in jaren na het ontkiemen.

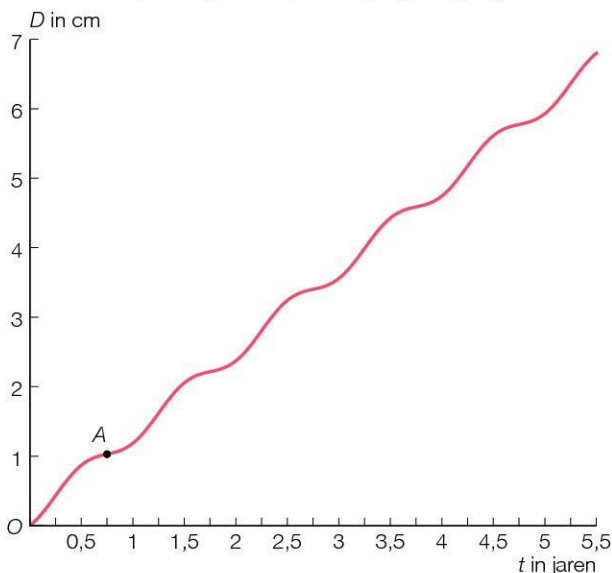
- a** Bereken de waarden van a , b , c en d in deze formule. Licht je antwoord toe.

Nu bekijken we de diameter van de stam van deze grove den. Daarbij kan de volgende formule worden opgesteld: $D = 1,2t + 0,14 + 0,14 \sin(2\pi(t - 0,25))$.

Hierin is D de diameter van de stam in cm en t de tijd in jaren na het ontkiemen met $t = 0$ op het moment van ontkiemen.

De grafiek van D is in de figuur getekend. De grafiek staat ook vergroot op het werkblad.

- b** Bereken met behulp van de formule op welk tijdstip de diameter een dikte van 5 cm bereikt. Rond je antwoord af op hele maanden.



figuur 15.41

In de grafiek is te zien dat de diameter schommelt rondom een lijn. De formule van deze lijn is $T = 1,2t + 0,14$. In plaats van de diameter te berekenen met de formule voor D is deze ook te benaderen met behulp van de formule van de lijn. Deze benadering zal in de meeste gevallen iets afwijken van de diameter volgens de formule van D .

c Onderzoek hoe groot deze afwijking maximaal kan zijn.

De diameter van de grove den groeit in de eerste zes maanden na het ontkiemen meer dan in de tweede zes maanden na het ontkiemen. Dat wisselen van groeisnelheid herhaalt zich zo in de jaren daarna.

d Bereken met behulp van de formule van D hoeveel procent van de jaarlijkse groei in de eerste helft van het jaar plaatsvindt. Rond je antwoord af op gehele procenten.

In het begin van deze opgave staat vermeld dat de groeisnelheid van de diameter G na negen maanden ($t = 0,75$) minimaal is, namelijk 0,3 cm per jaar. De minimale groeisnelheid bij $t = 0,75$ die met de formule van D berekend wordt (zie punt A in de grafiek), is niet precies gelijk aan 0,3 cm per jaar.

e Geef in de grafiek van D op het werkblad nog een ander punt dan punt A aan waar de groeisnelheid volgens de formule van D minimaal is en bereken de minimale groeisnelheid in cm/jaar met de grafische rekenmachine. Rond je antwoord af op twee decimalen.



26 2018-II

[► WERKBLAD] Sommige mensen hebben een schildpad als huisdier.

Bepaalde soorten houden onder natuurlijke omstandigheden een winterslaap. De eigenaar kan ervoor kiezen om zijn schildpad ook in winterslaap te laten gaan, omdat hij anders de hele winter extra licht en warmte moet geven aan zijn huisdier. Een schildpad moet een gezond gewicht hebben bij het begin van zijn winterslaap, anders is er een kans dat hij het niet overleeft. Om vast te stellen of de schildpad een gezond gewicht heeft, wordt vaak de *Jackson Ratio* gebruikt.

De Jackson Ratio R wordt berekend met de formule $R = \frac{G}{L^3}$.

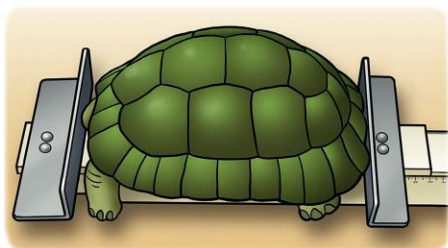
Hierin is G het gewicht van de schildpad in gram en L de lengte van het schild van de schildpad in cm.

Voor de Griekse landschildpad geldt de volgende vuistregel: een schildpad kan veilig aan een winterslaap beginnen als zijn Jackson Ratio tussen 0,18 en 0,22 ligt.

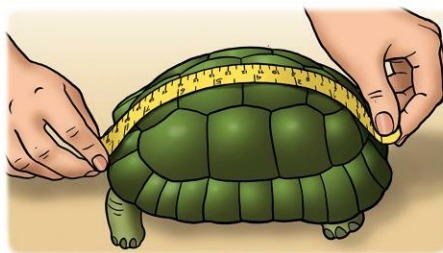
Jesse heeft een Griekse landschildpad met een schildlengte van 15 cm en wil hem een winterslaap laten houden.

- a** Bereken in hele grammen nauwkeurig tussen welke waarden zijn gewicht dan mag liggen volgens de vuistregel.

De lengte van het schild moet recht gemeten worden, bijvoorbeeld door de schildpad met ingetrokken kop tussen een schuifmaat te zetten (zie figuur 15.42). Veronderstel dat iemand toch de lengte over het schild heen meet (zie figuur 15.43).



figuur 15.42



figuur 15.43

- b** Beredeneer of een schildpad door op die manier te meten een grotere of een kleinere Jackson Ratio krijgt dan hij in werkelijkheid heeft.

Op een Engelse website staat het volgende: als je het gewicht meet in Engelse ponden (lbs) en de schildlengte in inches, kun je de Jackson

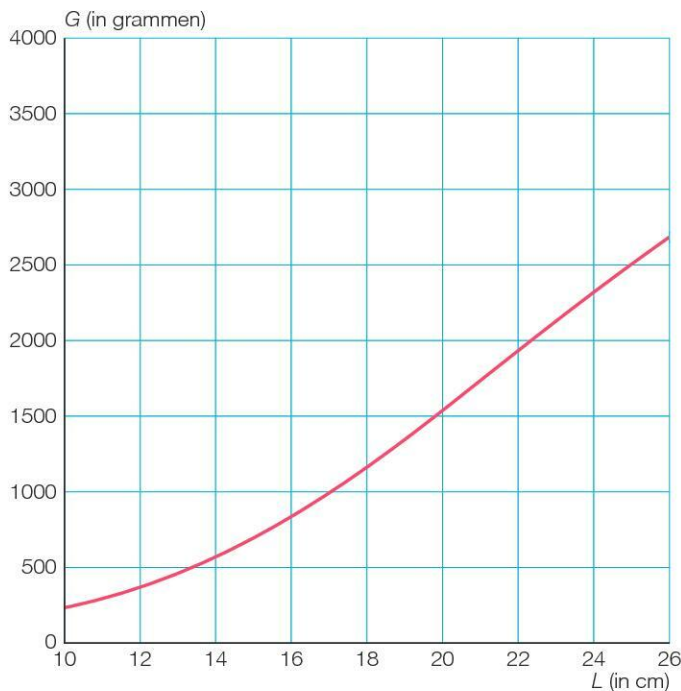
Ratio berekenen met de formule $R = c \cdot \frac{W}{l^3}$.

Hierin is W het gewicht in Engelse ponden en l de schildlengte in inches. 1 Engels pond (lb) $\approx$ 454 gram en 1 inch = 2,54 cm.

De Jackson Ratio moet dan ook weer dezelfde waarde opleveren.

- c** Bereken de waarde van c in deze formule. Rond je antwoord af op één decimaal.

Een andere manier om te bepalen of een Griekse landschildpad veilig aan een winterslaap kan beginnen, is met behulp van de grafiek in onderstaande figuur. De grafiek geeft het gewicht van gezonde schildpadden als functie van de schildlengte. Als een schildpad met zijn lengte en gewicht in de buurt van deze grafiek zit, is het veilig om hem in winterslaap te laten gaan.



figuur 15.44

We vragen ons af of de grafiek van de figuur bij benadering overeenstemt met de eerder genoemde vuistregel. Om dit te onderzoeken kunnen we in de figuur de grafieken tekenen van de onder- en de bovengrens die horen bij de eerder genoemde vuistregel en vervolgens het gebied dat hoort bij die vuistregel in de figuur aangeven. De figuur staat ook op het werkblad.

- d** Geef in de figuur op het werkblad het gebied aan waarin een schildpad zich volgens de vuistregel met zijn schildlengte en gewicht moet bevinden om veilig aan een winterslaap te kunnen beginnen.

Aangeven is een examenwerkwoord. Zie bladzijde 250.

15.4 Formules met exponenten en logaritmen

- 27 a** Tussen F en K bestaat een verband van de vorm $F = b \cdot g^K$.
 Voor $K = 10$ is $F = 128$ en voor $K = 17$ is $F = 41$.
 Bereken b en g . Rond b af op gehelen en g op twee decimalen.
- b** Tussen D en H bestaat een verband van de vorm $D = a \cdot H^b$.
 Voor $H = 1$ is $D = 12,3$ en voor $H = 150$ is $D = 600$.
 Bereken a en b . Rond b af op drie decimalen.
- c** Gegeven is de formule $B = 5 \cdot A^{0,8}$.
 Onderzoek of de volgende bewering waar is.
 Als A tien keer zo groot wordt, dan wordt B acht keer zo groot.
- d** Gegeven is de formule $R = 85 - \frac{85}{2 + e^{0,15x}}$.
 Beredeneer met de formule of R toeneemt of afneemt als x toeneemt.
- e** Gegeven is de formule $Z = 1200 - \frac{1200}{2 + e^{0,44x}}$ waarin x elke waarde kan aannemen.
 Onderzoek tussen welke waarden Z kan liggen.
- f** Gegeven is de formule $E = 43 - 43 \cdot 0,6^{0,4t}$. Hierin is t de tijd in jaren.
 Bepaal met behulp van een redenering aan de hand van de formule wat de grenswaarde van E is.
- g** Gegeven is de formule $H = 75 - 20 \cdot 0,83^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2020 en H de hoogte van een plant in cm. Bij de formule hoort een grenswaarde.
 Bereken voor welke t de hoogte van de plant 5 cm van de grenswaarde verwijderd is. Geef je antwoord in één decimaal.
- h** De formule $S_p = \frac{A}{3^{\frac{p}{16}}}$ is te herleiden tot de vorm $S_p = A \cdot g^p$.
 Laat deze herleiding zien en geef g in drie decimalen.
- i** Herleid de formule $Z = 750 \cdot 0,92^P$ tot de vorm $P = a \cdot \log(Z) + b$.
 Geef a en b in één decimaal.
- j** Herleid de formule $V = 12,8 \cdot W^{0,78}$ tot de vorm $\log(V) = a + b \cdot \log(W)$. Geef a en b in twee decimalen.
- k** De formule $Z = 10^{3,14 - 5Q}$ is te herleiden tot de vorm $Q = a + b \cdot \log(Z)$.
 Bereken a en b .
- l** Gegeven is de formule $G = 1,15 \cdot e^{0,95 \cdot t}$.
 Herschrijf de formule zó dat t wordt uitgedrukt in G .
- m** Gegeven is de formule $M = 1,8 \cdot {}^2\log(n)$.
 Er geldt algemeen: als n tien keer zo groot wordt, dan neemt M met hetzelfde getal toe.
 Toon dit aan zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden en geef het getal waarmee M toeneemt. Rond af op gehelen.

- n In de figuur hiernaast zijn de grafieken van N_1 en N_2 getekend op logaritmisch papier. Op de horizontale as is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2010.

Bereken hoeveel keer zo groot N_1 is als N_2 op 1 januari 2017. Rond af op één decimaal.

- o Zie vraag n en de figuur hiernaast. De twee lijnen zijn evenwijdig.

De grafiek van N_2 is drie jaar later op dezelfde hoogte als de grafiek van N_1 .

De formule die bij de grafiek van N_1 hoort is

$$N_1 = 5 \cdot e^{0,25 \cdot t}.$$

Van de vier formules die hieronder staan is er één juist.

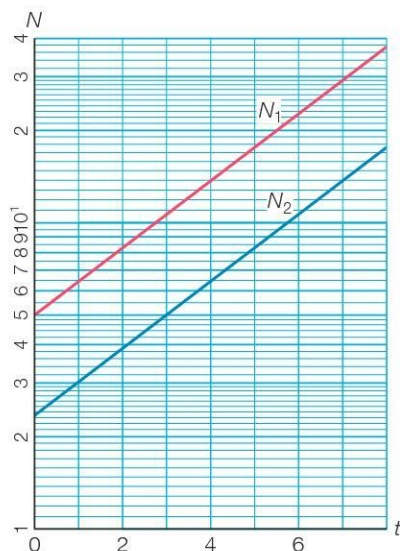
$$N_2 = 5 \cdot e^{0,25 \cdot t + 3}$$

$$N_2 = 5 \cdot e^{0,25 \cdot t - 3}$$

$$N_2 = 5 \cdot e^{0,25(t+3)}$$

$$N_2 = 5 \cdot e^{0,25(t-3)}$$

Beredeneer welke van de vier formules juist is.



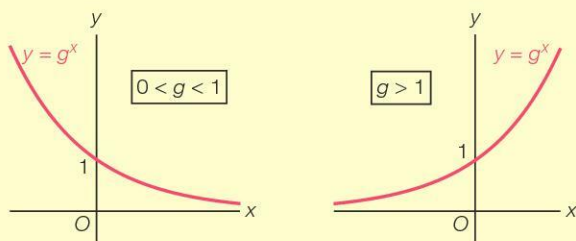
figuur 15.45

Exponentiële formules

De grafiek van $y = g^x$ is een standaardgrafiek.

We onderscheiden de situaties

$0 < g < 1$ en $g > 1$.



figuur 15.46

Rekenregels voor machten

De rekenregels voor machten zijn:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p \quad \frac{1}{a^p} = a^{-p} \quad \sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-1} &= \frac{1}{a} \\ a^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{a} \end{aligned}$$

Met deze rekenregels kun je formules omwerken.

- Bij het schrijven van de formule $N = 60 \cdot 1,2^{3t-1}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$ krijg je $N = 60 \cdot 1,2^{3t-1} = 60 \cdot 1,2^{3t} \cdot 1,2^{-1} = 60 \cdot 1,2^{-1} \cdot (1,2^3)^t = 50 \cdot 1,728^t$, dus $N = 50 \cdot 1,728^t$.
- Bij het schrijven van de formule $K = 6000 \cdot (3p)^{0,4} \cdot (4p^2)^{-0,6}$ in de vorm $K = ap^b$ krijg je $K = 6000 \cdot (3p)^{0,4} \cdot (4p^2)^{-0,6} = 6000 \cdot 3^{0,4} \cdot p^{0,4} \cdot 4^{-0,6} \cdot p^{-1,2} = 6000 \cdot 3^{0,4} \cdot 4^{-0,6} \cdot p^{-0,8} \approx 7265 \cdot p^{-0,8}$, dus $K = 7265p^{-0,8}$.

Grafieken veranderen

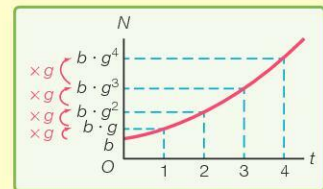
- De grafiek van $y = 60 \cdot 1,3^{2t}$ wordt 4 naar rechts verschoven.
De formule van de beeldgrafiek is te schrijven in de vorm $y = b \cdot g^t$.
 $y = 60 \cdot 1,3^{2t}$
↓ verschuiving (4, 0)
 $y = 60 \cdot 1,3^{2(t-4)} = 60 \cdot 1,3^{2t-8} = 60 \cdot 1,3^{2t} \cdot 1,3^{-8} = 60 \cdot 1,3^{-8} \cdot (1,3^2)^t \approx 7,36 \cdot 1,69^t$
Dus de formule van de beeldgrafiek is $y = 7,36 \cdot 1,69^t$.
- De grafiek van $N = 150 \cdot 1,45^t$ ondergaat een verschuiving (3, 20) en wordt daarna herschaald in verticale richting met factor $\frac{1}{4}$. De formule van de beeldgrafiek is te schrijven in de vorm $N = a + b \cdot g^t$.
 $N = 150 \cdot 1,45^t$
↓ verschuiving (3, 20)
 $N = 150 \cdot 1,45^{t-3} + 20$
↓ vert. herschaling factor $\frac{1}{4}$
 $N = \frac{1}{4}(150 \cdot 1,45^{t-3} + 20) = 37,5 \cdot 1,45^{t-3} + 5 = 5 + 37,5 \cdot 1,45^t \cdot 1,45^{-3}$
 $= 5 + 37,5 \cdot 1,45^{-3} \cdot 1,45^t \approx 5 + 12,3 \cdot 1,45^t$
De formule van de beeldgrafiek is $N = 5 + 12,3 \cdot 1,45^t$.

Exponentiële groei

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd.

Bij exponentiële groei hoort de formule $N = b \cdot g^t$.

Hierbij is b de beginhoeveelheid en g de groeifactor per tijdseenheid.



Groeifactoren en groeipercentages

Bij een toename van 12% per tijdseenheid hoort exponentiële groei met groeifactor 1,12. Dus neemt een hoeveelheid N jaarlijks met 12% toe en is de beginhoeveelheid 1250, dan hoort daarbij de formule

$$N = 1250 \cdot 1,12^t.$$

Is g de groeifactor per tijdseenheid, dan is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Is de groeifactor per dag 1,32, dan is de groeifactor per week gelijk aan $g_{\text{week}} = 1,32^7 \approx 6,983$. En zo volgt uit $g_{\text{dag}} = 1,32$ dat $g_{\text{uur}} = 1,32^{\frac{1}{24}} \approx 1,012$.

Neemt een hoeveelheid per dag met 4% toe, dan bereken je als volgt de procentuele toename per week.

$g_{\text{dag}} = 1,04$, dus $g_{\text{week}} = 1,04^7 \approx 1,316$, dus het groeipercentage per week is 31,6%.

Het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid gaat via groeifactoren.

Neemt een hoeveelheid per uur met 28% af, dan bereken je als volgt de procentuele afname per kwartier.

$g_{\text{uur}} = 0,72$, dus $g_{\text{kwartier}} = 0,72^{\frac{1}{2}} \approx 0,849$, dus de afname per kwartier is 15,1%.

Exponentiële formule opstellen

Bij exponentiële groei kun je de formule opstellen als je op twee tijdstippen de hoeveelheid weet.

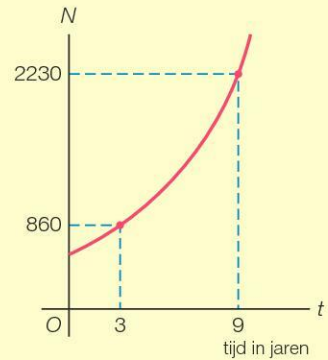
De grafiek in figuur 15.47 hoort bij exponentiële groei.

De bijbehorende formule krijg je als volgt.

Bij $t = 3$ hoort $N = 860$ en bij $t = 9$ hoort $N = 2230$.

$$g_{6\text{ jaar}} = \frac{2230}{860}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{2230}{860}\right)^{\frac{1}{6}} = 1,1721\dots$$

$$\begin{aligned} N &= b \cdot 1,1721\dots^t \\ t = 3 \text{ en } N &= 860 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} b \cdot 1,1721\dots^3 &= 860 \\ b &= \frac{860}{1,1721\dots^3} = 534,0\dots \end{aligned} \right.$$



figuur 15.47

Rond je de beginhoeveelheid af op gehele en de groeifactor op drie decimalen, dan krijg je de formule $N = 534 \cdot 1,172^t$.

Lineaire en exponentiële groei

Voor $t = 3$ is $N = 150$ en voor $t = 8$ is $N = 600$.

- Heb je te maken met *lineaire groei*, dan is $rc = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{600 - 150}{8 - 3} = 90$.

Dus per tijdseenheid neemt N met 90 toe.

- Heb je te maken met *exponentiële groei*, dan is $g = \left(\frac{600}{150}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,320$.

Dus per tijdseenheid wordt N met 1,320 vermenigvuldigd.



Exponentieel verband aantonen

Je kunt aantonen dat bij de tabel hiernaast een exponentieel verband hoort.

Dat gaat als volgt.

$$\frac{10,98}{7,32} = 1,5; \frac{16,47}{10,98} = 1,5 \text{ en } \frac{24,71}{16,47} \approx 1,5.$$

Telkens als a met 4 toeneemt, wordt L met 1,5 vermenigvuldigd.

Je hebt dus te maken met een exponentieel verband.

Wil je weten welke L bij $a = 15$ hoort, dan gebruik je de groeifactor $g = 1,5^{\frac{1}{4}} = 1,106\dots$ en het gegeven dat $L = 10,98$ bij $a = 12$ hoort.

Je krijgt: voor $a = 15$ is

$$L = 10,98 \cdot 1,106\dots^3 \approx 14,88.$$

a	8	12	16	20
L	7,32	10,98	16,47	24,71

a	12	13	14	15	16
L	10,98	...	...	...	16,47

$\times 1,106\dots \times 1,106\dots \times 1,106\dots$

Voor $a = 15$ is
 $L = 10,98 \cdot 1,106\dots^3$

Verdubbelingstijd en halveringstijd

De *verdubbelingstijd* bij exponentiële groei is de tijd waarin de hoeveelheid verdubbelt, dus met 2 wordt vermenigvuldigd.

Bij exponentiële groei met groeifactor g vind je de verdubbelingstijd t door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen. Deze vergelijking los je grafisch-numeriek op.

De *halveringstijd* bij exponentiële groei is de tijd waarin de hoeveelheid halveert, dus met $\frac{1}{2}$ wordt vermenigvuldigd.

Bij exponentiële groei met groeifactor g vind je de halveringstijd t door de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$ op te lossen. Ook deze vergelijking los je grafisch-numeriek op.

Redeneren met groeiformules

Bij de formule $Q = 250(1 - 0,75^t)$ beredeneer je als volgt dat de grafiek van Q stijgend is voor $t > 0$.

Als t toeneemt, dan neemt $0,75^t$ af, dus dan neemt $1 - 0,75^t$ toe, dus dan neemt $250(1 - 0,75^t)$ toe.

Dus de grafiek van Q is stijgend.

Bij de formule $Q = 250(1 - 0,75^t)$ beredeneer je als volgt wat de grenswaarde is.

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,75^t$ tot 0, dus dan wordt $1 - 0,75^t \approx 1$, dus dan wordt $250(1 - 0,75^t) \approx 250$.

Dus de grenswaarde is 250.

Bij de formule $P = \frac{1500}{2 + 5 \cdot e^{-0,2t}}$ bereken je als volgt dat de grafiek van P stijgend is voor $t > 0$. Bedenk eerst dat $e^{-0,2t} = (e^{-0,2})^t \approx 0,82^t$. Als t toeneemt, dan neemt $e^{-0,2t}$ af, dus dan neemt ook $2 + 5 \cdot e^{-0,2t}$ af en dan neemt $\frac{1500}{2 + 5 \cdot e^{-0,2t}}$ toe.

Dus de grafiek van P is stijgend.

Bij de formule $P = \frac{1500}{2 + 5 \cdot e^{-0,2t}}$ bereken je als volgt wat de grenswaarde is.

Als t heel groot wordt, dan nadert $e^{-0,2t}$ tot 0, dus dan wordt

$$2 + 5 \cdot e^{-0,2t} \approx 2, \text{ dus dan wordt } \frac{1500}{2 + 5 \cdot e^{-0,2t}} \approx 750.$$

Dus de grenswaarde is 750.

Logaritmen

$y = {}^g\log(x)$ betekent $g^y = x$. Zo is ${}^3\log(81) = 4$, want $3^4 = 81$.

In $y = {}^g\log(x)$ is g het grondtal van de logaritme.

In $y = {}^g\log(x)$ is $g > 0$ en $g \neq 1$ en $x > 0$.

Uit $y = {}^g\log(x)$ en $g^y = x$ volgt $g^{{}^g\log(x)} = x$ en ${}^g\log(g^y) = y$.

Dus $10^{\log(20)} = 20$ en $\log(10^{3\frac{1}{2}}) = 3\frac{1}{2}$.

Met de GR bereken je $\log(5000) \approx 3,70$. En $\ln(5000) \approx 8,52$.

Om ${}^2\log(5000)$ te berekenen, kun je de rekenregel

$${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)} \text{ gebruiken.}$$

$$\text{Je krijgt } {}^2\log(5000) = \frac{\log(5000)}{\log(2)} \approx 12,29.$$

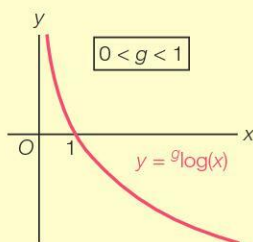
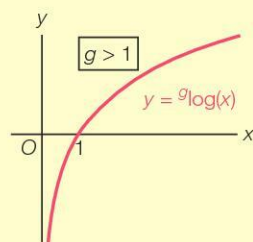
Op de TI, de HP en de NW kun je ook intikken $\log(5000, 2)$.

Op de Casio kun je ook de optie logab uit het OPTN-CALC-menu gebruiken.

De grafiek van $y = {}^g\log(x)$ is een standaardgrafiek.

We onderscheiden de situaties

$0 < g < 1$ en $g > 1$.



figuur 15.48

$\log(x)$ betekent ${}^{10}\log(x)$
 $\ln(x)$ betekent ${}^e\log(x)$
 $e = 2,718\dots$
 $\ln$ is de natuurlijke logaritme.

$${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$$

Logaritmisch papier

Bij een rechte lijn op logaritmisch papier hoort exponentiële groei.

Op het logaritmisch papier hiernaast zijn twee evenwijdige lijnen getekend. Dit betekent dat de groeifactoren gelijk zijn. Dit kun je ook narekenen.

Lees af dat de grafiek van N_1 door de punten $(0, 1500)$ en $(7, 200)$ gaat.

Dit geeft $g_{7 \text{ jaar}} = \frac{200}{1500}$, dus

$$g_{\text{jaar}} = \left(\frac{200}{1500} \right)^{\frac{1}{7}} \approx 0,750.$$

Lees af dat de grafiek van N_2 door de punten $(0, 800)$ en $(8, 80)$ gaat.

Dit geeft $g_{8 \text{ jaar}} = \frac{80}{800} = 0,1$, dus

$$g_{\text{jaar}} = 0,1^{\frac{1}{8}} \approx 0,750.$$

Je ziet dat de groeifactoren per jaar aan elkaar gelijk zijn. De formules zijn

$$N_1 = 1500 \cdot 0,750^t \text{ en } N_2 = 800 \cdot 0,750^t.$$

In de figuur hiernaast staat op de verticale as een logaritmische schaalverdeling.

Voor $t = 2$ is $N = 10^{1\frac{2}{3}} \approx 46$ en voor $t = 4$ is $N \approx 10^{2 + \frac{2,5}{3}} \approx 681$.

Bij $N = 300$ hoort $\log(300) \approx 2,5$, dus 300 staat $3 \cdot 0,5 = 1,5$ cm boven de horizontale lijn $N = 10^2$.

Je leest af: bij $N = 300$ hoort $t \approx 3,0$.

Rekenregels voor logaritmen

De rekenregels voor logaritmen zijn

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$$

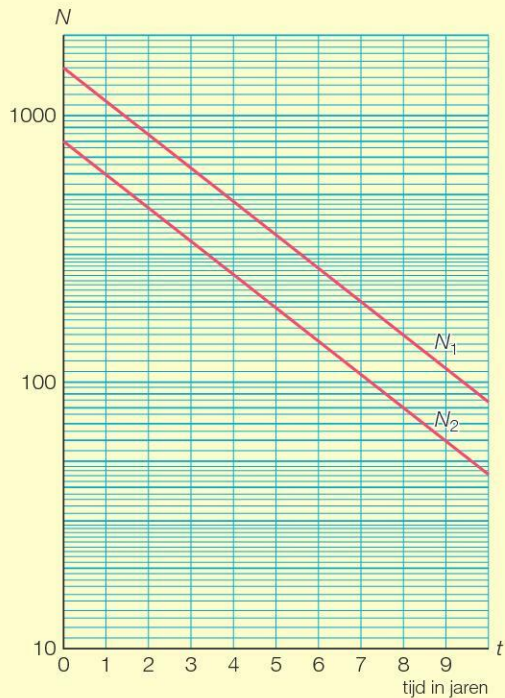
$${}^g\log(a) = \frac{p \log(a)}{p \log(g)}$$

$${}^g\log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(g)}$$

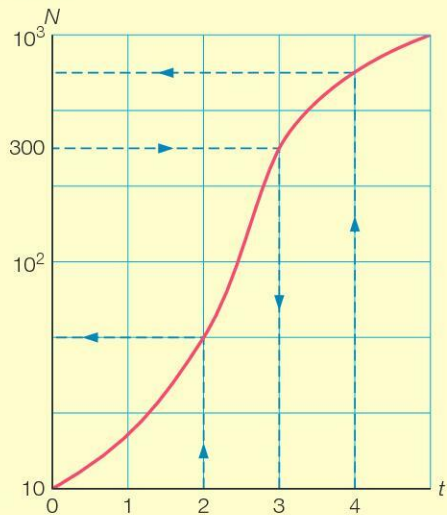
Om aan te tonen dat bij de formule $N(x) = 25 + 23,25 \cdot \log(x)$ de waarde van N steeds met hetzelfde getal toeneemt als x verdubbelt, ga je als volgt te werk.

$$\begin{aligned} N(2x) &= 25 + 23,25 \cdot \log(2x) = 25 + 23,25(\log(2) + \log(x)) \\ &= 25 + 23,25 \cdot \log(2) + 23,25 \cdot \log(x) \approx 25 + 23,25 \log(x) + 7,00 \\ &= N(x) + 7,00 \end{aligned}$$

Dus N neemt steeds met ongeveer 7 toe als x verdubbelt.



figuur 15.49



figuur 15.50

Formules omvormen en variabelen vrijmaken

Het grondtal in de formule $N = 30 \cdot 0,975^t$ is 0,975. Deze formule is te schrijven in de vorm $N = 30e^{ct}$, dus met grondtal e.

Er geldt $e^c = 0,975$, dus $c = \ln(0,975) \approx -0,0253$. Hiermee wordt de formule $N = 30e^{-0,0253t}$.

Kies je grondtal 2, dan geldt $2^c = 0,975$, dus $c = {}^2\log(0,975) \approx -0,0365$.

De formule wordt dan $N = 30 \cdot 2^{-0,0365t}$.

In de formule $N = 20 + 15 \cdot \log(x)$ is het grondtal van de logaritme 10.

Deze formule is te schrijven met een logaritme met grondtal e. Je krijgt

$$N = 20 + 15 \cdot \log(x) = 20 + 15 \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = 20 + \frac{15}{\ln(10)} \cdot \ln(x) \approx 20 + 6,51 \cdot \ln(x).$$

Schrijf je de formule $P = 5 + 18 \cdot \log(3x)$ in de vorm $P = a + b \cdot \ln(x)$, dan krijg je

$$\begin{aligned} P &= 5 + 18 \cdot \log(3x) = 5 + 18 \cdot \frac{\ln(3x)}{\ln(10)} = 5 + 18 \cdot \frac{\ln(3) + \ln(x)}{\ln(10)} \\ &= 5 + 18 \cdot \frac{\ln(3)}{\ln(10)} + \frac{18}{\ln(10)} \cdot \ln(x) \approx 13,588 + 7,817 \cdot \ln(x). \end{aligned}$$

De formule $\log(N) = 0,18t + 3,4$ is te schrijven in de vorm $N = b \cdot g^t$.

$\log(N) = 0,18t + 3,4$ geeft

$$N = 10^{0,18t + 3,4} = 10^{0,18t} \cdot 10^{3,4} = 10^{3,4} \cdot (10^{0,18})^t \approx 2512 \cdot 1,514^t$$

Dus $N = 2512 \cdot 1,514^t$.

De formule $N = 2500 \cdot 1,52^t$ is te schrijven in de vorm $\ln(N) = at + b$.

$$N = 2500 \cdot 1,52^t \text{ geeft } \ln(N) = \ln(2500 \cdot 1,52^t)$$

$$\ln(N) = \ln(2500) + \ln(1,52^t)$$

$$\ln(N) = t \cdot \ln(1,52) + \ln(2500)$$

$$\ln(N) \approx 0,419t + 7,824$$

Dus $\ln(N) = 0,419t + 7,824$.

De formule ${}^2\log(P) = 2,12 + 1,75 \cdot {}^2\log(Q)$ is te schrijven in de vorm

$$P = aQ^b.$$

$${}^2\log(P) = 2,12 + 1,75 \cdot {}^2\log(Q)$$

$${}^2\log(P) = {}^2\log(2^{2,12}) + {}^2\log(Q^{1,75})$$

$${}^2\log(P) = {}^2\log(2^{2,12} \cdot Q^{1,75})$$

$$P = 2^{2,12} \cdot Q^{1,75}$$

$$P \approx 4,35 \cdot Q^{1,75}$$

Dus $P = 4,35Q^{1,75}$.

De formule $F = 7,5K^{1,8}$ is te schrijven in de vorm $\ln(F) = a + b \cdot \ln(K)$.

$$F = 7,5K^{1,8} \text{ geeft } \ln(F) = \ln(7,5K^{1,8})$$

$$\ln(F) = \ln(7,5) + \ln(K^{1,8})$$

$$\ln(F) = \ln(7,5) + 1,8 \cdot \ln(K)$$

$$\ln(F) \approx 2,015 + 1,8 \cdot \ln(K)$$

Dus $\ln(F) = 2,015 + 1,8 \cdot \ln(K)$.

Bij de formule $N = 50e^{0,2t+3}$ kun je de variabele t vrijmaken.

$N = 50e^{0,2t+3}$ geeft $e^{0,2t+3} = 0,02N$

$$0,2t + 3 = \ln(0,02N)$$

$$0,2t = -3 + \ln(0,02N)$$

$$t = -15 + 5 \cdot \ln(0,02N)$$

Bij de formule $N = 5 \cdot \ln(4t) - 3$ kun je de variabele t vrijmaken en de formule schrijven in de vorm $t = a \cdot b^N$.

$N = 5 \cdot \ln(4t) - 3$ geeft $5 \cdot \ln(4t) = N + 3$

$$\ln(4t) = \frac{1}{5}N + \frac{3}{5}$$

$$4t = e^{\frac{1}{5}N + \frac{3}{5}}$$

$$4t = e^{\frac{1}{5}N} \cdot e^{\frac{3}{5}}$$

$$t = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{3}{5}} \cdot (e^{\frac{1}{5}})^N$$

$$t \approx 0,456 \cdot 1,221^N$$

Dus $t = 0,456 \cdot 1,221^N$.

28 2017-I

Veel mensen denken erover om zonnepanelen aan te schaffen. Bedrijven spelen daarop in en geven daar allerlei informatie over op hun websites.

Op een dergelijke website tref je de volgende tekst aan:

Omdat de elektriciteitsprijs voortdurend stijgt, kan investeren in zonnepanelen interessant zijn. Laten we om te beginnen eens uitgaan van een stijging van de elektriciteitsprijs van 5% per jaar. Verder gaan we uit van een zonnepanelen-installatie met een opbrengst van 1750 kWh (kilowattuur) elektriciteit per jaar en een aanschafprijs van €2995.

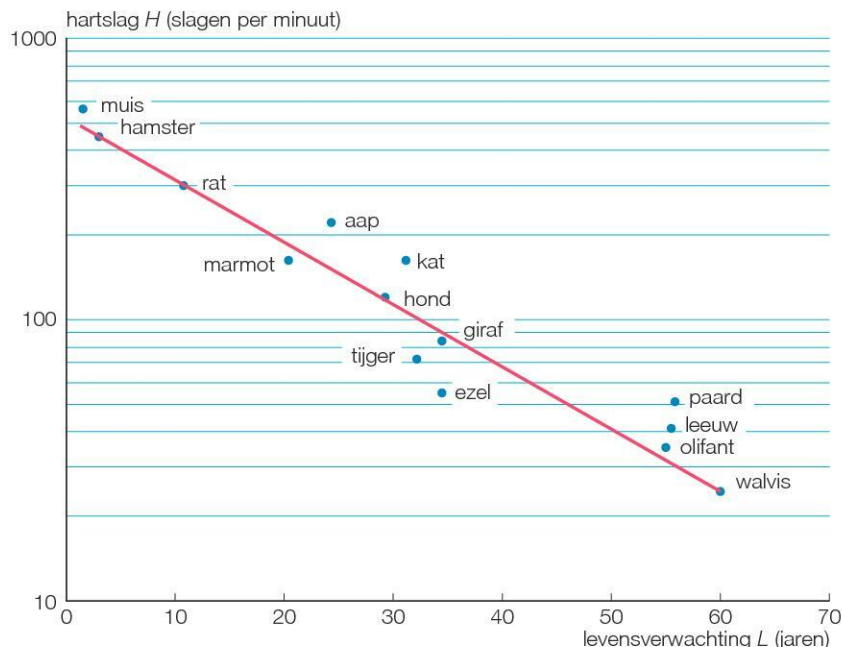
Verder wordt er op de website gerekend met een elektriciteitsprijs van €0,225 per kWh voor het eerste jaar na de aanschaf van de zonnepanelen en vervolgens met een jaarlijkse toename van de elektriciteitsprijs van 5%. Om de opbrengst in euro's te berekenen, wordt op diezelfde website gerekend met de prijs die de eigenaar van de zonnepanelen zou moeten betalen als hij de elektriciteit van een elektriciteitsbedrijf zou moeten kopen.

Met behulp van deze gegevens is het mogelijk een formule op te stellen van de vorm $Z = a \cdot b^{t-1}$ met Z de opbrengst in euro's van de zonnepanelen in jaar t . Hierbij is $t = 0$ het moment van aanschaf van zonnepanelen.

Bereken de waarden van a en b in twee decimalen.

29 2017-I

In de figuur is de hartslag van een aantal soorten zoogdieren uitgezet tegen hun levensverwachting. Langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.



figuur 15.51

De punten die de hamster en de walvis weergeven, liggen nagenoeg op de getekende rechte lijn. De walvis heeft een levensverwachting van 60 jaar en een hartslag van 25 slagen per minuut. De hamster heeft een levensverwachting van 3 jaar en een hartslag van 450 slagen per minuut. Het verband tussen H (de hartslag in slagen per minuut) en L (de levensverwachting in jaren) is (bij benadering) exponentieel en is dus te schrijven als $H = b \cdot g^L$.

Uit de grafiek volgt dat b bij benadering 520 is en g bij benadering 0,95.

- a** Bereken met behulp van de gegevens van de hamster en de walvis g in drie decimalen en b in gehelen.

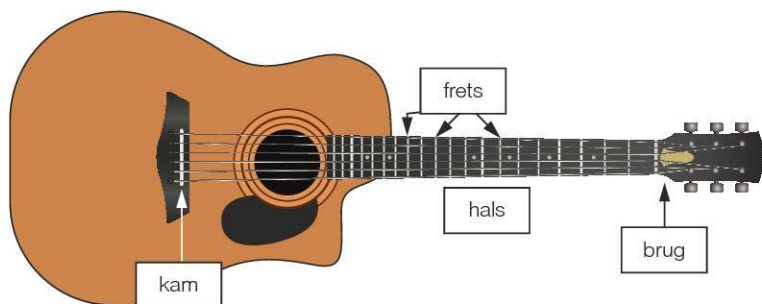
Met de formule $H = 520 \cdot 0,95^L$ kun je de hartslag berekenen als je de levensverwachting weet. Logischer is het om de levensverwachting te berekenen als je van een zoogdier de hartslag gemeten hebt.

Daarom willen we de formule $H = 520 \cdot 0,95^L$ herleiden tot de vorm $L = a \cdot \log(H) + b$.

- b** Voer deze herleiding uit. Geef a en b in twee decimalen.

30 2017-II

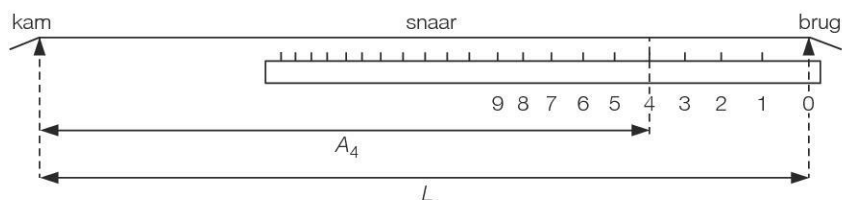
In figuur 15.52 zie je een gitaar. De snaren zijn gespannen tussen de brug en de kam. Op de hals zijn zogenoemde *frets* (smalle metalen strips) te zien.



figuur 15.52

Als je een snaar aanslaat zonder op een fret te drukken, gaat de hele snaar tussen de brug en de kam trillen. Door een snaar tegen een fret aan te drukken, wordt de gebruikte snaarlengte korter. Je krijgt dan een andere toon. Om de goede tonen te krijgen, moet bij het bouwen van een gitaar de juiste plaats van de frets berekend worden.

Figuur 15.53 geeft een schematisch zijaanzicht van de hals. De eerste negen frets zijn daarin vanaf de brug genummerd.



figuur 15.53

De lengte van een snaar in cm tussen de brug en de kam noemen we L . A_n is de afstand in cm tussen de fret met nummer n en de kam.

In figuur 15.53 is A_4 aangegeven. Voor A_n geldt de formule

$$A_n = L \cdot 0,9439^n.$$

Van een bepaalde gitaar is de afstand tussen fret nummer 6 en de brug gelijk aan 20 cm.

- a** Bereken de lengte L van een snaar van deze gitaar. Rond je antwoord af op hele cm.

De groeifactor in de formule is berekend op basis van de volgende uitgangspunten:

- er is een exponentieel verband tussen A_n en n ;
 - de 12^e fret ligt precies midden tussen de brug en de kam.
- b** Bereken met behulp van deze twee uitgangspunten de groeifactor in vijf decimalen.

De theoretische formule die hiervoor geldt, is $A_n = \frac{L}{2^{\left(\frac{n}{12}\right)}}$.

Deze formule kan worden herleid tot $A_n = L \cdot 0,9439^n$.

c Laat deze herleiding zien.

31 2017-II

Op BBC Radio Nottingham geeft de weerman in de 'Stocking forecast' advies over de dikte van de te dragen panty's. De statisticus James Hind van de Nottingham Trent University heeft namelijk een formule ontwikkeld om te bepalen hoe dik je panty moet zijn om je er comfortabel bij te voelen. Bij zijn formule is de adviesdikte van de panty afhankelijk van de temperatuur en van de windsnelheid. De formule luidt

$$D = 110 - \frac{110}{1 + e^{0,159(\sqrt{w} - t)}}.$$

Hierbij is w de windsnelheid in kilometer per

uur en t de temperatuur in graden Celsius. De adviesdikte D wordt uitgedrukt in denier: hoe groter de waarde van D , hoe dikker de panty.

De windsnelheid heeft in de praktijk minder invloed op de adviesdikte van de panty dan de temperatuur. Bij een temperatuur van $3,5^\circ\text{C}$ en windstil weer ($w = 0$) is volgens de formule een bepaalde dikte van panty's nodig. Als de windsnelheid verandert van 0 naar 20 km/uur, hoeft de temperatuur maar een paar graden te veranderen om dezelfde dikte van panty's te adviseren.

a Bereken hoeveel graden het dan warmer of kouder moet zijn om op dezelfde adviesdikte van panty's uit te komen. Geef je antwoord in één decimaal.

Bij een vaste temperatuur hangt de adviesdikte D alleen af van de windsnelheid w .

b Leg alleen met behulp van de formule uit of de waarde van D toeneemt of afneemt als de windsnelheid w stijgt en de temperatuur gelijk blijft.

De waarde van D kan niet onbeperkt groot of onbeperkt klein worden.

c Onderzoek tussen welke twee theoretische grenswaarden de waarde van D volgens de formule kan liggen.

Carol volgde het advies van de weerman en koos bij windstil weer voor een dunne panty van 8 denier. Niet veel later begon het flink te waaien terwijl de temperatuur gelijk bleef. Ze had nu volgens de formule eigenlijk een panty van 17 denier aan moeten hebben.

d Bereken hoe warm het was en hoe hard het waaide. Geef je antwoorden in hele graden Celsius en in hele kilometers per uur.

32 2018-I

De bitcoin is een digitale munteenheid die alleen online bestaat. Hij bestaat sinds 1 januari 2009 en kan worden gebruikt om te betalen in webwinkels of voor andere online diensten.

Bitcoins worden niet, zoals normaal geld, door een centrale bank in omloop gebracht. In plaats daarvan zijn alle bitcoins die in omloop zijn, gecreëerd door computers mee te laten werken aan oplossingen van geselecteerde wiskundige problemen. Dat werkt als volgt:

Iedereen kan op zijn of haar computer speciale software laten draaien die meewerkt aan het oplossen van zo'n wiskundig probleem. De eigenaar van de computer die de oplossing voor een probleem vindt, krijgt daarvoor 25 (nieuw gecreëerde) bitcoins als beloning. Omdat er in 2014 iedere 10 minuten zo'n probleem werd opgelost, werden er op deze manier iedere 10 minuten 25 bitcoins in omloop gebracht.

Op 1 januari 2014 waren er (ongeveer) 12,2 miljoen bitcoins in omloop.

- a** Bereken uitgaande hiervan in welk jaar het aantal bitcoins in omloop boven de 18 miljoen uitstijgt als de snelheid waarmee bitcoins in omloop gebracht worden niet verandert.

In werkelijkheid blijft de snelheid waarmee bitcoins in omloop worden gebracht niet gelijk aan 25 bitcoins per 10 minuten. Deze snelheid neemt namelijk af. Gedurende de eerste vier jaar, van 1 januari 2009 tot 1 januari 2013, was de beloning per oplossing nog 50 bitcoins. De beloning voor het vinden van een oplossing wordt elke vier jaar gehalveerd: van 1 januari 2013 tot 1 januari 2017 is de beloning per oplossing 25 bitcoins, voor de vier jaar erna 12,5 bitcoins per oplossing enzovoorts.

- b** Bereken vanaf welk jaar de beloning per oplossing minder dan één bitcoin zal zijn.

Het totale aantal bitcoins dat in omloop gebracht kan worden, is begrensd. Dat is een gevolg van (onder andere) het feit dat de beloning per oplossing steeds gehalveerd wordt. Het *totale* aantal bitcoins dat in omloop is, kan worden benaderd met de formule $C = 21 - 21 \cdot 0,5^{0,25t}$. Hierin is C het totale aantal bitcoins in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2009.

- c** Bepaal met behulp van een redenering aan de hand van de formule de grenswaarde van het totale aantal bitcoins dat in omloop is.

Om het totale aantal bitcoins dat in omloop is te reguleren, wordt niet alleen het aantal bitcoins per oplossing kleiner gemaakt, maar wordt ook de moeilijkheidsgraad van de wiskundige problemen steeds groter gemaakt. Er zijn namelijk steeds meer mensen die hun computers mee laten rekenen.

De moeilijkheidsgraad van de problemen stijgt exponentieel volgens de formule $D = 3,65 \cdot e^{0,533t}$. Hierin is D een maat voor de moeilijkheidsgraad en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2013.

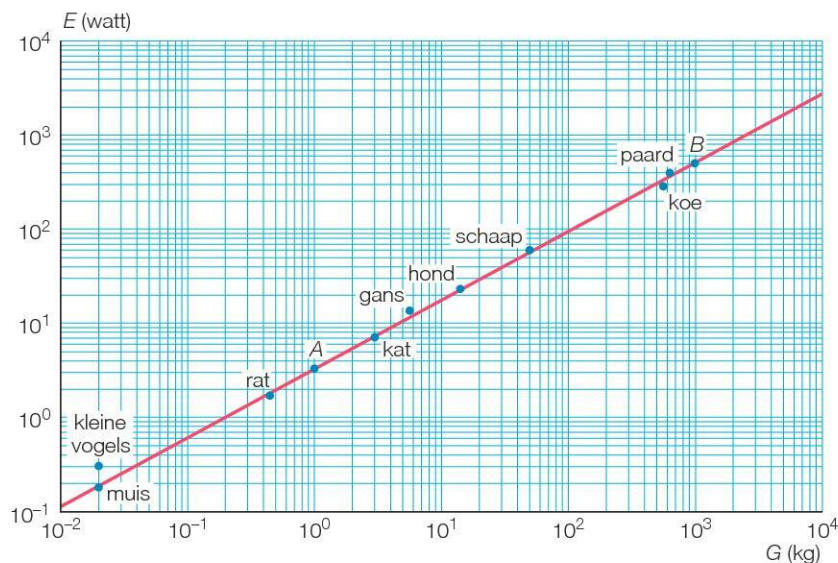
De formule van D kan zó worden herschreven dat je een moeilijkheidsgraad kunt invullen en zo de tijd in maanden kunt berekenen die nodig is om die moeilijkheidsgraad te bereiken.

d Herschrijf de formule $D = 3,65 \cdot e^{0,533t}$ zó dat t wordt uitgedrukt in D .

33 2017-II

Bij dieren is het energieverbruik afhankelijk van het gewicht.

In de figuur staat voor een aantal diersoorten het verband tussen het energieverbruik E en het gewicht G . Hierbij is E het energieverbruik in watt en G het gewicht in kg.



figuur 15.54

Zowel langs de horizontale as als langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. De punten die de verschillende dieren weergeven, liggen nagenoeg op de getekende rechte lijn door de punten $A(1; 3,27)$ en $B(1000; 520)$. Het verband tussen E en G is te schrijven als $E = a \cdot G^b$. Hierin is E het energieverbruik in watt en G het gewicht in kg. Afgerond zijn de waarden van a en b : $a = 3,3$ en $b = 0,73$.

a Bereken, uitgaande van de genoemde punten A en B , de waarde van a in twee decimalen en de waarde van b in drie decimalen.

Aan de hand van de figuur en de formule $E = 3,3 \cdot G^{0,73}$ kun je onderzoeken of de volgende stellingen waar zijn.

- I. Een tien keer zo zwaar dier verbruikt ook tien keer zo veel energie.
- II. Een kat verbruikt per kg gewicht minder energie dan een schaap.

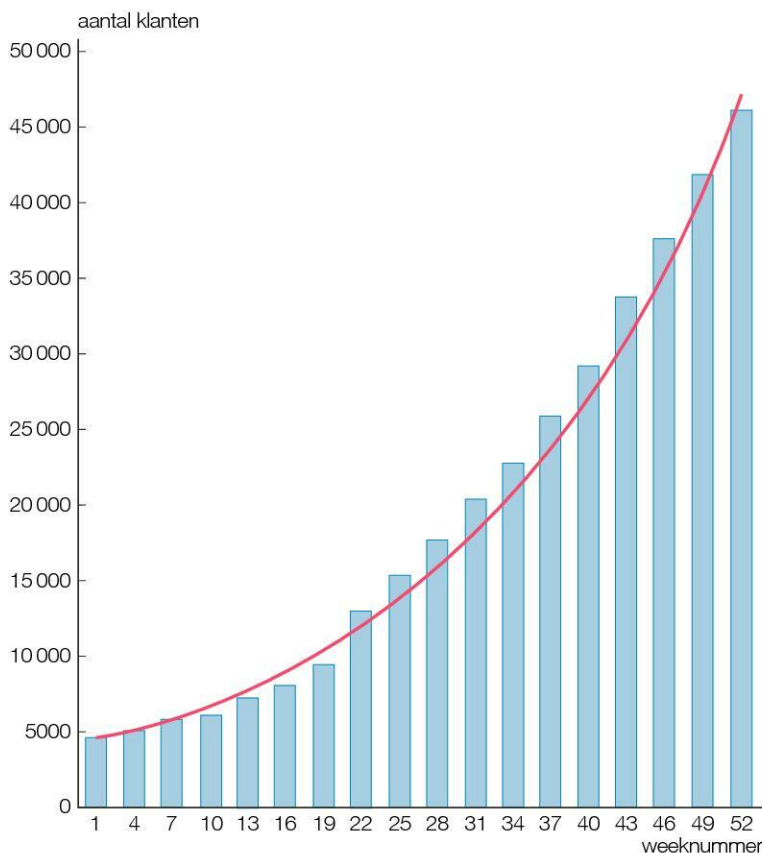
b Onderzoek voor beide stellingen of ze waar zijn.

Je kunt de formule $E = 3,3 \cdot G^{0,73}$ herleiden tot de vorm $\log(E) = p + q \cdot \log(G)$.

c Geef deze herleiding en geef de waarden van p en q in twee decimalen.

34 2018-II

[► WERKBLAD] Knab is een tamelijk nieuwe bank, gestart in 2012 als onderdeel van Aegon. In het begin groeide Knab maar langzaam: eind 2013 had de bank nog maar 4500 klanten. Daarom besloot de bank in 2014 de zaken anders aan te pakken. Dit leverde direct resultaat op, want het aantal klanten is in 2014 tien keer zo groot geworden. Zie de figuur. Deze figuur staat ook op het werkblad.



figuur 15.55

In de figuur zijn door middel van staven de aantallen klanten om de drie weken weergegeven. Bovendien is de grafiek getekend van een exponentieel model dat de werkelijke aantallen goed benadert. Het exponentiële model wordt gegeven door de formule $N = 4500 \cdot e^{0,0463 \cdot t}$. Hierin is t de tijd in weken sinds het begin van 2014 met $t = 0$ in week 1 en N het aantal klanten.

In week 43 lijkt het verschil tussen het aantal klanten volgens het model en het werkelijke aantal klanten het grootst.

- Bereken dit verschil in week 43. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op het werkblad. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Zoals gezegd is het aantal klanten in het jaar 2014 vertienvoudigd. Dat lijkt inderdaad precies een jaar geduurd te hebben.

- b** Bereken met behulp van de formule het gehele aantal weken dat in het model nodig is voor een vertienvoudiging.

De snelheid waarmee het aantal klanten per week groeit, kun je benaderen door de helling van de grafiek op het betreffende tijdstip te bepalen.

- c** Benader met behulp van de grafiek in de figuur op het werkblad de snelheid waarmee het aantal klanten per week groeit in week 31 van 2014. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Je kunt de formule $N = 4500 \cdot e^{0,0463 \cdot t}$ zó herschrijven, dat bij een gegeven aantal klanten berekend wordt in welke week dat aantal bereikt wordt. Dat verband is van de vorm $t = a \cdot \ln(b \cdot N)$.

- d** Bereken a en b . Rond de waarde van a af op twee decimalen en de waarde van b op vijf decimalen.

35 2018-I

De Shannon-index H is een maat voor de diversiteit (verscheidenheid) van een dieren- of plantenpopulatie in een gebied. Hoe hoger de Shannon-index, hoe groter de diversiteit.

We kijken naar een gebied met twee soorten bomen. De formule voor de Shannon-index is dan $H = -(p_1 \ln(p_1) + p_2 \ln(p_2))$ waarin p_1 en p_2 de aandelen van elke soort binnen het gebied zijn. Er geldt bijvoorbeeld dat $p_1 = 0,37$ als 37% van de bomen uit soort 1 bestaat.

Bos A bestaat voor 70% uit eiken en voor 30% uit beuken en bos B bestaat voor 90% uit eiken en voor 10% uit beuken.

- a** Onderzoek met de formule voor H van welk van beide bossen de Shannon-index het grootst is.

In een bos met twee soorten bomen, eiken en beuken, geldt: als p het aandeel eiken is, is het aandeel beuken gelijk aan $1 - p$. De formule voor de Shannon-index kan dan geschreven worden als

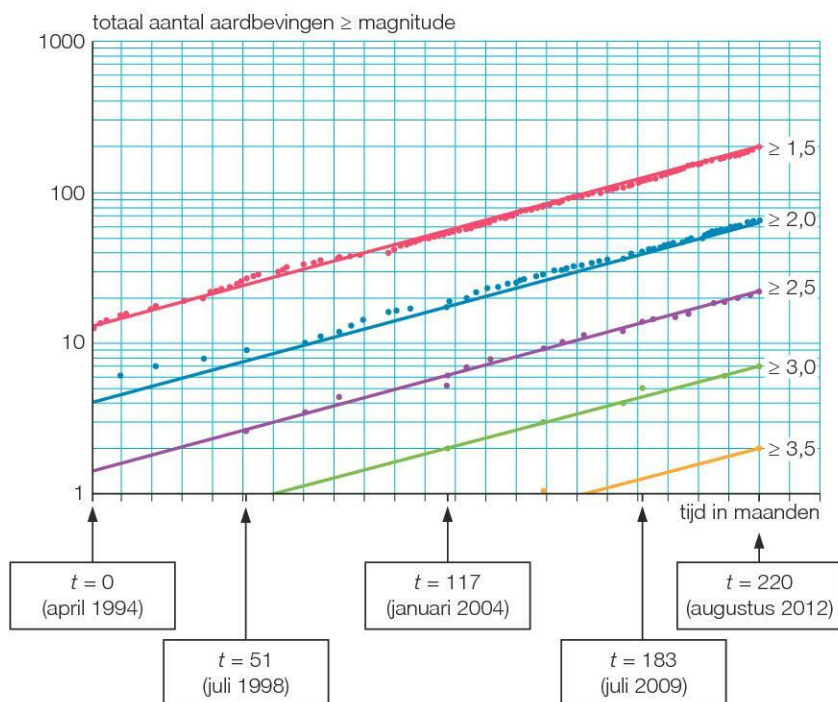
$$H = -(p \ln(p) + (1 - p) \ln(1 - p)).$$

- b** Onderzoek met de grafische rekenmachine tot welke waarde de Shannon-index nadert als het aandeel eiken in het bos steeds kleiner wordt.

In de provincie Groningen vinden, als gevolg van gasproductie, regelmatig aardbevingen plaats. In 2013 is daar grootschalig onderzoek naar gedaan. De *magnitude*, de kracht van een aardbeving, wordt uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter.

In figuur 15.56 zijn de Groningse aardbevingen vanaf 1994 verzameld en ingedeeld naar sterkte. Dat geeft bij een logaritmische schaalverdeling langs de verticale as een opvallend patroon: alle grafieken zijn bij benadering evenwijdige rechte lijnen.

Elke stip in deze figuur stelt een aardbeving van een zekere magnitude voor; zo kun je zien dat er vlak voor juli 2009 een aardbeving van magnitude $\geq 3,0$ heeft plaatsgevonden: die aardbeving zie je dus ook terug bij de aardbevingen van de klassen $\geq 2,5$; $\geq 2,0$ en $\geq 1,5$.



figuur 15.56

In het onderzoek werden alleen aardbevingen bekeken die schade zouden kunnen veroorzaken. Omdat aardbevingen met een magnitude van minder dan 1,5 geen schade aanrichten, zijn deze niet in figuur 15.56 opgenomen.

- a** Bereken voor augustus 2012 hoeveel procent van het aantal aardbevingen van magnitude $\geq 2,0$ een magnitude van 2,5 of hoger heeft. Geef je antwoord in gehele procenten.

Het feit dat de grafieken in figuur 15.56 evenwijdige rechte lijnen zijn, betekent dat het aantal aardbevingen van elke klasse exponentieel toeneemt met dezelfde groeifactor. Het totaal aantal aardbevingen A voor magnitudes $\geq 1,5$ is te beschrijven met de formule $A = 12 \cdot e^{0,013t}$ met $t = 0$ voor april 1994 en t in maanden.

De formules van de overige lijnen in figuur 15.56 kunnen worden afgeleid van die voor de magnitudes $\geq 1,5$. Bekijk de grafiek voor de magnitudes $\geq 2,0$. Deze grafiek is 85 maanden later op dezelfde hoogte als de grafiek voor magnitudes $\geq 1,5$.

Hieronder staan vier formules. Een van de vier is juist voor de magnitudes $\geq 2,0$:

A $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013(t+85)}$ met $t = 0$ voor april 1994

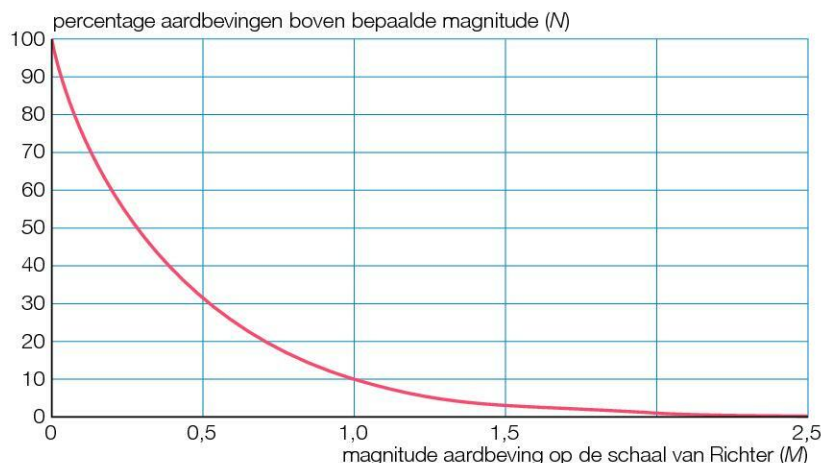
B $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013(t-85)}$ met $t = 0$ voor april 1994

C $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013t+85}$ met $t = 0$ voor april 1994

D $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013t-85}$ met $t = 0$ voor april 1994

b Beredeneer welke van de vier formules juist is.

In een rapport van het Staatstoezicht op de Mijnen wordt geconstateerd dat er een duidelijk verband is tussen de magnitude en het percentage aardbevingen boven die magnitude. In figuur 15.57 is dat verband weergegeven.



figuur 15.57

Zo is bijvoorbeeld af te lezen dat 10% van de aardbevingen een magnitude boven de 1,0 heeft.

Bij deze grafiek hoort de formule $N = 10^{a-M}$. Hierbij is M de magnitude en N het percentage van de aardbevingen boven magnitude M .

c Laat met een berekening zien dat geldt: $a = 2$.

Omgekeerd kun je je ook afvragen welke magnitude de (bijvoorbeeld) 20% zwaarste aardbevingen minstens hadden. Om vragen als deze te beantwoorden, is het handig de formule te herschrijven.

De formule $N = 10^{2-M}$ is te herleiden tot $M = p + q \cdot \log(N)$.

d Bereken p en q .

37 2019-II

Binnen de economie spelen rentepercentages en de bijbehorende verdubbelingstijden een grote rol. De verdubbelingstijd is de tijd die nodig is om een bedrag te verdubbelen.

In de praktijk wordt er binnen de economie vaak gebruikgemaakt van vuistregels om bij een gegeven rentepercentage de verdubbelingstijd te schatten.

Twee voorbeelden van zo'n vuistregel zijn de zogeheten *72-regel* en de zogeheten *bankenformule*:

- volgens de 72-regel geldt $T = \frac{72}{p}$;
- volgens de bankenformule geldt $T = \frac{70}{p}$.

In beide vuistregels is p het rentepercentage per jaar en is T de verdubbelingstijd in jaren.

Een bank biedt een spaarrekening met een rente van 1,00% per jaar aan. Met behulp van de bankenformule kan geschat worden welke verdubbelingstijd hierbij geldt. Om met de 72-regel tot dezelfde verdubbelingstijd te komen, zou er een iets hoger rentepercentage moeten gelden.

a Bereken dit percentage. Geef je antwoord in twee decimalen.

De schatting van de verdubbelingstijd volgens de 72-regel valt altijd hoger uit dan de schatting volgens de bankenformule. Hoe hoger het rentepercentage echter is, hoe kleiner het verschil in verdubbelingstijd wordt tussen beide vuistregels.

b Bereken vanaf welk rentepercentage de schattingen ten hoogste een maand van elkaar verschillen.

Het werkelijke verband tussen p en T is $(1 + 0,01p)^T = 2$.

Van de twee genoemde vuistregels wijkt de schatting volgens de bankenformule bij lage rentepercentages het minst af van de werkelijke verdubbelingstijd.

Bij een rentepercentage van 1,10% per jaar is het verschil tussen de schatting van de verdubbelingstijd volgens de bankenformule en de werkelijke verdubbelingstijd slechts enkele maanden.

c Bereken dit verschil. Geef je antwoord in gehele maanden.

De schatting volgens de 72-regel en de schatting volgens de bankenformule worden beide gegeven door een formule van de vorm met $p \cdot T = c$ met $c = 72$ bij de 72-regel en $c = 70$ bij de bankenformule. Deze waarden voor c zijn onder andere zo gekozen om het rekenwerk te vergemakkelijken. Door in de formule $p \cdot T = c$ met een andere waarde van c te rekenen, kan er een nauwkeurigere schatting van de verdubbelingstijd gegeven worden.

Hiervoor bekijken we nogmaals het werkelijke verband tussen p en T . Dit verband kan ook geschreven worden als $\ln((1 + 0,01p)^T) = \ln(2)$. Bij economen is bovendien bekend dat – voor de gangbare waarden van p die in de economie gelden – de volgende benadering gebruikt mag worden: $\ln(1 + 0,01p) \approx 0,01p$. Met behulp van het verband $\ln((1 + 0,01p)^T) = \ln(2)$ en de aanname $\ln(1 + 0,01p) \approx 0,01p$ kan nu een nauwkeurigere waarde van c berekend worden.

- d** Onderzoek met behulp van $\ln((1 + 0,01p)^T) = \ln(2)$ en $\ln(1 + 0,01p) \approx 0,01p$ of deze nauwkeurigere waarde hoger of lager is dan de gekozen waarde $c = 70$ in de bankenformule.

38 2018-II

In 1992 publiceerden de Amerikaanse wiskundigen Bayer en Diaconis een artikel over het schudden van kaarten. Voor dit artikel hadden zij de meest gebruikte manier van schudden onderzocht, de zogeheten *Riffle Shuffle* (zie de foto).



Zij kwamen tot de conclusie dat het met deze schudtechniek niet mogelijk is een stapel kaarten écht willekeurig te maken, zoals bijvoorbeeld een computer dat wel kan. Voor het spelen van een kaartspel is het goed genoeg als de kaarten “voldoende willekeurig” geschud zijn.

Bayer en Diaconis ontdekten tijdens hun onderzoek dat het aantal keren dat een stapel kaarten minstens geschud moet worden om als “voldoende willekeurig” bestempeld te worden, kan worden benaderd met de formule $A = 1,5 \cdot {}^2\log(n)$. In deze formule is A het aantal keren dat een stapel van n kaarten minstens geschud moet worden om als “voldoende willekeurig” bestempeld te worden. A wordt naar boven afgerond op een geheel getal.

Het kaartspel *jokeren* wordt gespeeld met twee sets van 52 speelkaarten, aangevuld met in totaal 4 zogeheten *jokers*.

- a** Bereken hoe vaak de kaarten bij *jokeren* minstens geschud moeten worden volgens de formule van Bayer en Diaconis.

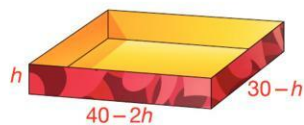
In de meeste casino's kun je het spel *blackjack* spelen. Dat wordt over het algemeen gespeeld met vier spellen kaarten (totaal 208 kaarten). Het aantal keer dat zo'n groot aantal kaarten minstens geschud moet worden is helemaal niet zo groot: volgens de formule van Bayer en Diaconis slechts 12 keer. Dat is maar drie keer schudden meer dan bij één spel kaarten.

Volgens de formule van Bayer en Diaconis geldt in het algemeen: als het aantal kaarten vier keer zo groot wordt, hoeft er maar drie keer extra geschud te worden.

- b** Toon dit aan met behulp van de formule voor A en de rekenregels voor logaritmen zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden.

15.5 Differentiaalrekening

- 39 a** In de figuur hiernaast zie je een balkvormige doos die van de bovenkant open is en waarvan de hoogte h cm is. De lengte van de doos is $40 - 2h$ cm en de breedte is $30 - h$ cm.
- Druk de inhoud I in cm^3 van de doos uit in h en bereken met behulp van differentiëren bij welke hoogte de inhoud maximaal is. Geef je antwoord in twee decimalen.



figuur 15.58

- b** Gegeven is de formule $P_n = 0,85 \cdot e^{1,4 \cdot n} \cdot n^{-1,6}$. Bereken de afgeleide P'_n .
- c** Gegeven is de formule $V = \frac{25x + 240}{18x}$ met $x > 0$.
Beredeneer met behulp van de formule van de afgeleide van V dat V daalt als x toeneemt.
- d** Gegeven is de formule $W = \frac{650}{K}$ met $K > 0$.
Stel de formule van de afgeleide van W op en beredeneer aan de hand van deze formule dat W afnemend dalend is.
- e** Gegeven is de formule $Q = \frac{4500 + 50t}{306 + 0,4t}$ met $t > 0$.
Stel de formule van de afgeleide van Q op en onderzoek daarmee wat voor soort stijgen of dalen bij Q hoort.
- f** Gegeven is de formule $k = \frac{5a}{5 - a}$ met $0 < a < 5$.
Stel de afgeleide $\frac{dk}{da}$ op en beredeneer aan de hand van de formule van deze afgeleide of k toeneemt of afneemt als a kleiner wordt.
- g** Gegeven is de formule $B(x) = 2,5x + 8000 \cdot \frac{600 - 4x}{500 + x}$ met x tussen 0 en 250.
Bepaal de afgeleide van $B(x)$ en laat met behulp van een schets van de afgeleide zien dat B dalend is.
- h** Gegeven is de formule $P = 7,5 \cdot Q^{0,96}$ met $Q > 0$.
Stel de formule op van de afgeleide van P en onderzoek met behulp hiervan of P toenemend stijgend of afnemend stijgend is.
- i** Gegeven is de formule $F = 4,88 \cdot e^{0,615 \cdot t}$. Hierin is t de tijd in jaren.
Stel de formule van de afgeleide van F op en beredeneer hoe je aan deze formule kunt zien dat de grafiek van F toenemend stijgend is.
- j** Gegeven is de formule $Q = 2,6 \cdot {}^2\log(p)$.
Stel de formule op van de afgeleide $\frac{dQ}{dp}$ en beredeneer aan de hand van deze formule, dus zonder getallen in te vullen of een schets te maken, dat Q afnemend stijgend is.

k Gegeven is de formule $H = 75 - 20 \cdot 0,83^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2020 en H de hoogte van een plant in cm. Bereken met behulp van de afgeleide de groeisnelheid van de plant halverwege 2022. Geef je antwoord in cm/jaar en rond af op twee decimalen.

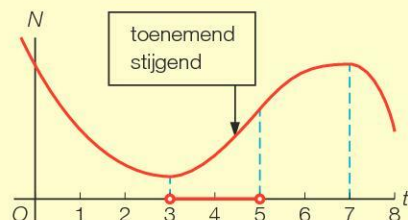
l Gegeven is de formule $L = \frac{125}{1 + e^{5-1,1t}}$. Hierin is t de tijd in jaren en L de lengte in cm. Bereken met behulp van de afgeleide de maximale groeisnelheid in cm/jaar. Rond af op één decimaal.

Soorten van stijgen en dalen

Zowel bij stijgen als dalen onderscheiden we drie soorten: constant, afnemend en toenemend.

De grafiek hiernaast is

- afnemend dalend op $\langle \leftarrow, 3 \rangle$
- toenemend stijgend op $\langle 3, 5 \rangle$
- afnemend stijgend op $\langle 5, 7 \rangle$
- toenemend dalend op $\langle 7, \rightarrow \rangle$.



figuur 15.59

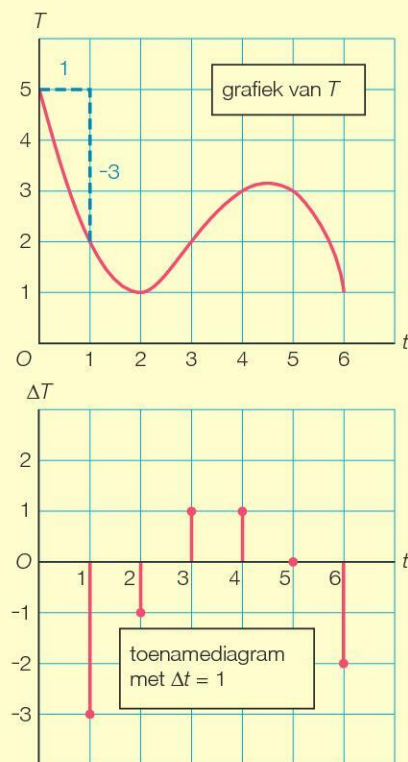
Toenamedigrammen

Om bij de grafiek hiernaast het toenamedigram op het interval $[0, 6]$ te tekenen met $\Delta t = 1$ gebruik je de volgende tabel.

interval	ΔT
$[0, 1]$	-3
$[1, 2]$	-1
$[2, 3]$	1
$[3, 4]$	1
$[4, 5]$	0
$[5, 6]$	-2

Op $[0, 1]$ ga je 3 omlaag.

Het eerste staafje in het toenamedigram zet je bij de rechtergrens van het interval $[0, 1]$.



figuur 15.60

Het differentiequotiënt

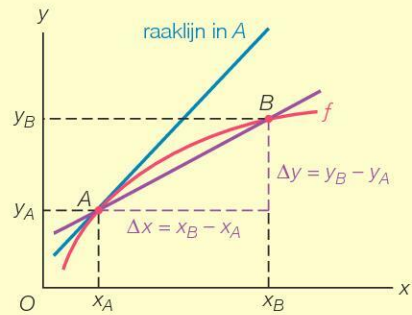
Het *differentiequotiënt* van y op $[x_A, x_B]$ is

- de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt (helling) van de lijn AB
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Helling en raaklijn

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ is

- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A
- de helling van de grafiek in het punt A
- de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.



figuur 15.61

Regels voor het differentiëren

$$f(x) = ax^n \text{ geeft } f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$$

$$g(x) = a \cdot f(x) \text{ geeft } g'(x) = a \cdot f'(x)$$

$$f(x) = e^x \text{ geeft } f'(x) = e^x$$

$$f(x) = g^x \text{ geeft } f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$$

$$f(x) = \ln(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = {}^g\log(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$$

Deze regels gebruik je vaak in combinatie met de kettingregel en soms in combinatie met de productregel of de quotiëntregel.

$$s(x) = f(x) + g(x) \text{ geeft } s'(x) = f'(x) + g'(x)$$

somregel

$$v(x) = f(x) - g(x) \text{ geeft } v'(x) = f'(x) - g'(x)$$

verschilregel

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ geeft } p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

productregel

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \text{ geeft } q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

quotiëntregel

$$k(x) = f(g(x)) \text{ geeft } k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

kettingregel

Voorbeelden

$$y = 6\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} = 6x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-2} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 3x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-3} = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3}$$

$$y = \frac{8-2x}{10x+7} \text{ geeft}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(10x+7) \cdot -2 - (8-2x) \cdot 10}{(10x+7)^2} = \frac{-20x-14-80+20x}{(10x+7)^2} = \frac{-94}{(10x+7)^2}$$

$$y = 5(2x-3)^4 \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 20(2x-3)^3 \cdot 2 = 40(2x-3)^3$$

$$y = 6x\sqrt{x-1} = 6x(x-1)^{\frac{1}{2}} \text{ geeft}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6 \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} + 6x \cdot \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} = 6\sqrt{x-1} + \frac{3x}{\sqrt{x-1}}$$

$$N = 28e^{0,12t} \text{ geeft } \frac{dN}{dt} = 28e^{0,12t} \cdot 0,12 = 3,36e^{0,12t}$$

$$P = 15 \cdot 0,6^x \text{ geeft } \frac{dP}{dt} = 15 \cdot 0,6^x \cdot \ln(0,6) = 15 \cdot \ln(0,6) \cdot 0,6^x \approx -7,66 \cdot 0,6^x$$

$$Q = \frac{p}{\ln(p)} \text{ geeft } \frac{dQ}{dp} = \frac{\ln(p) \cdot 1 - p \cdot \frac{1}{p}}{(\ln(p))^2} = \frac{\ln(p) - 1}{(\ln(p))^2}$$

$$R = 23,25 \cdot \log(x) \text{ geeft } \frac{dR}{dx} = 23,25 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln(10)} = \frac{23,25}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x} \approx \frac{10,1}{x}$$

Optimaliseren

Het berekenen van extreme waarden (maxima en minima) heet optimaliseren.

Bij optimaliseren krijg je met verschillende opdrachten te maken.

I *Bereken met de afgeleide* of *Bereken met behulp van differentiëren.*

Bij deze opdracht moet je de afgeleide berekenen. Daarna mag je de vergelijking 'afgeleide = 0' grafisch-numeriek oplossen.

II *Bereken het maximum* of *Bereken het minimum.*

Bij deze opdracht mag je helemaal grafisch-numeriek te werk gaan.

Bij I ga je bij het berekenen van een maximum of een minimum van y als volgt te werk.

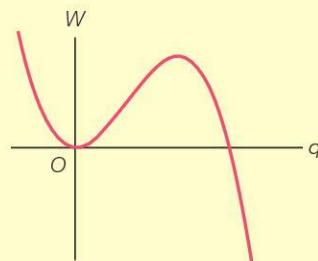
- 1 Bereken de afgeleide $\frac{dy}{dx}$.
- 2 Los de vergelijking $\frac{dy}{dx} = 0$ op.
- 3 Kijk in de grafiek van y of je met een maximum of een minimum te maken hebt.
- 4 Bereken de extreme waarde door de gevonden x -waarde in de formule van y in te vullen.

Vaak is de grafiek gegeven. Je kunt hierin zien of je met een maximum of een minimum te maken hebt. Is de grafiek niet gegeven, maak dan zelf een schets in je uitwerking. Gebruik bij het maken van de schets de GR.

Bij II ga je als volgt te werk.

- 1 Je noteert de formule die je invoert op de GR.
- 2 Je noteert de optie die je gebruikt en het resultaat.
- 3 Je beantwoordt de gestelde vraag.

Bij het aantonen dat $W = aq^2 - \frac{1}{2}q^3$ (met $a > 0$) maximaal is voor $q = \frac{1}{3}a$ en dat $W_{\max} = \frac{16}{27}a^3$, ga je als volgt te werk. Zie de figuur hiernaast.



- 1 Bereken de afgeleide $\frac{dW}{dq}$.

$$W = aq^2 - \frac{1}{2}q^3 \text{ geeft } \frac{dW}{dq} = 2aq - \frac{1}{2}q^2$$

- 2 Laat zien dat $\frac{dW}{dq} = 0$ voor $q = \frac{1}{3}a$.

$$q = \frac{1}{3}a \text{ invullen in } \frac{dW}{dq} \text{ geeft}$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dq} &= 2a \cdot \frac{1}{3}a - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}a\right)^2 \\ &= 2a \cdot \frac{4}{3}a - \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{9}a^2 = \frac{8}{3}a^2 - \frac{8}{3}a^2 = 0 \end{aligned}$$

- 3 Gebruik de grafiek.

Uit de grafiek volgt dat er een maximum is voor $q = \frac{1}{3}a$.

- 4 Vul $q = \frac{1}{3}a$ in bij de formule van W om $W_{\max}$ te berekenen.

$$\begin{aligned} W_{\max} &= a \cdot \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}a\right)^3 \\ &= a \cdot \frac{16}{9}a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{27}a^3 = \frac{16}{27}a^3 \end{aligned}$$

Conclusies trekken uit de afgeleide

Je kunt drie soorten opdrachten tegenkomen.

- I Toon met de formule van de afgeleide aan dat...

Bij deze opdracht redeneer je met de formule van de afgeleide om het gevraagde aan te tonen.

- II Toon met de grafiek van de afgeleide aan dat...

Bij deze opdracht bereken je de afgeleide, schets je hiervan de grafiek en trek je conclusies uit de grafiek.

- III Toon met de afgeleide aan dat...

Je berekent de afgeleide en daarna mag je kiezen of je te werk gaat volgens I of volgens II. Vaak is het in deze situatie het verstandigst om volgens II te werk te gaan.

We geven van deze drie situaties een voorbeeld.

I Toon met de formule van de afgeleide aan dat $y = \frac{20}{x+3}$ met $x > 0$ afnemend dalend is.

1 Bereken $\frac{dy}{dx}$ en beredeneer dat $\frac{dy}{dx} < 0$. Dat betekent dat y dalend is.

$$y = \frac{20}{x+3} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = \frac{(x+3) \cdot 0 - 20 \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{-20}{(x+3)^2}$$

Als $x > 0$ dan is $(x+3)^2$ positief. De teller is negatief en de noemer is positief, dus $\frac{dy}{dx}$ is negatief en dus is y dalend.

2 Beredeneer dat $\frac{dy}{dx}$ toeneemt als x toeneemt. Dat betekent dat y afnemend dalend is.

Als x toeneemt, dan neemt $(x+3)^2$ toe en dan neemt $\frac{20}{(x+3)^2}$ af,

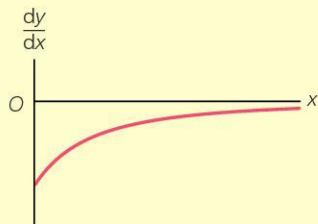
dus dan neemt $\frac{-20}{(x+3)^2}$ toe. Dus y is afnemend dalend.

De afgeleide wordt steeds minder negatief en daarom is y afnemend dalend.

II Toon met de grafiek van de afgeleide aan dat $y = \frac{20}{x+3}$ met $x > 0$ afnemend dalend is.

1 Bereken $\frac{dy}{dx}$ en schets de grafiek van $\frac{dy}{dx}$.

$$y = \frac{20}{x+3} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = \frac{(x+3) \cdot 0 - 20 \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{-20}{(x+3)^2}$$



2 Beredeneer met de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ dat y afnemend dalend is.

- Voor $x > 0$ ligt de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ onder de x -as, dus y is dalend.
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus y is afnemend dalend.

III Toon met de afgeleide aan dat $y = x^2 + \frac{x}{x+3}$ met $x > 0$ toenemend stijgend is.

1 Bereken $\frac{dy}{dx}$ en kijk of je volgens I of II te werk gaat.

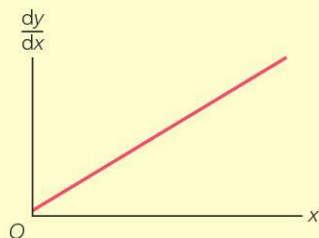
$$y = x^2 + \frac{x}{x+3} \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{(x+3) \cdot 1 - x \cdot 1}{(x+3)^2} = 2x + \frac{3}{(x+3)^2}$$

Deze afgeleide heeft twee termen, dus een redenering met de formule van de afgeleide is wellicht moeilijk.

Dus kies hier voor een redenering met de grafiek van de afgeleide.

2 Schets de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ en beredeneer hiermee dat y toenemend stijgend is.

- Voor $x > 0$ ligt de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ boven de x -as, dus y is stijgend.
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus y is toenemend stijgend.



Merk op dat je bij de vraag *Toon met behulp van de formule van*

$y = \frac{20}{x+3}$ met $x > 0$ aan dat y dalend is niet de afgeleide gebruikt. Dan ga je als volgt te werk.

Als x toeneemt, dan neemt $x+3$ toe, dus dan neemt $\frac{20}{x+3}$ af.

Dus y is dalend voor $x > 0$.

40 2017-I

Een veelgehoorde bewering is dat het hart van zoogdieren gedurende hun leven ongeveer een miljard keer slaat. Naar aanleiding van deze

bewering kan de formule $H = \frac{1900}{L}$ voor het verband tussen de hartslag

en de levensverwachting worden opgesteld. Hier is L de

levensverwachting (in jaren) en H de hartslag (in slagen per minuut).

Stel de formule van de afgeleide van H op en beredeneer aan de hand van deze formule dat H afnemend dalend is.

41 2017-I

Bij het zelf installeren van zonnepanelen bestaan de aanschafkosten uit de vaste kosten van € 1300 voor een systeem en € 325 per paneel. De elektriciteitsopbrengst is 2500 kWh per jaar bij 12 panelen en de elektriciteitsprijs is € 0,225 per kWh.

De *terugverdientijd* is de periode die het duurt tot het aankoopbedrag van het systeem is terugverdiend via besparing op de elektriciteitskosten.

Als je 10 of meer panelen koopt, is de overheidssubsidie € 650.

Voor T , de terugverdientijd in jaren, heeft de aanbieder de formule

$$T = \frac{650 + 325x}{46,9x} \text{ opgesteld met } x \text{ het aantal panelen dat aangeschaft}$$

wordt en $x \geq 10$.

- a** Beredeneer met behulp van de formule van de afgeleide van T voor $x \geq 10$ dat de terugverdientijd daalt als je meer panelen aanschaft.

Voor de aanschaf van 9 panelen of minder van een doe-het-zelfsysteem geldt een andere formule omdat de overheidssubsidie dan 15% van de aanschafprijs is. De aanschafprijs bestaat uit de vaste kosten plus de kosten per paneel.

- b** Stel een formule op voor de terugverdientijd T in jaren en x het aantal zonnepanelen voor $x \leq 9$.

42 2017-II

Bij dieren is het energieverbruik afhankelijk van het gewicht.

Het verband tussen het energieverbruik E en het gewicht G is te schrijven als $E = 3,3 \cdot G^{0,73}$. Hierin is E in watt en G in kg.

Stel een formule op voor de afgeleide van E en onderzoek met behulp hiervan of E toenemend stijgend of afnemend stijgend is.

43 2018-I

De Shannon-index H is een maat voor de diversiteit (verscheidenheid) van een dieren- of plantenpopulatie in een gebied. Hoe hoger de Shannon-index, hoe groter de diversiteit.

We kijken naar een bos met twee soorten bomen, eiken en beuken. De formule voor de Shannon-index is dan $H = -(p \ln(p) + (1 - p) \ln(1 - p))$ waarin p het aandeel eiken is en $1 - p$ het aandeel beuken.

Met behulp van de afgeleide van H kunnen we onderzoeken bij welke verhouding eiken en beuken de Shannon-index maximaal is.

Er geldt $\frac{dH}{dp} = -\ln(p) + \ln(1 - p)$.

Bereken met behulp van $\frac{dH}{dp}$ voor welke percentages eiken en beuken de Shannon-index H van het bos maximaal is.

44 2017-II

Veel moderne auto's tonen op het bedieningspaneel een schatting van het aantal kilometers dat je nog kunt rijden zonder te tanken. Dit noem je de *actieradius*.

Een automobilist zag bijvoorbeeld de informatie van figuur 15.49 op zijn bedieningspaneel.

Hier is 'Tot. afstand' de totale afstand die de auto tot dat moment heeft gereden.

De actieradius wordt berekend op basis van:

- de nog aanwezige hoeveelheid benzine in de tank;
- het rijgedrag tot op dat moment.

Toen dezelfde automobilist wat zuiniger ging rijden, kreeg hij de informatie van figuur 15.50 te zien. Zoals je ziet, heeft hij 20 km gereden. Toch is zijn actieradius niet met 20 km afgenomen, maar slechts met 17 km.

Hij is dus inderdaad iets zuiniger gaan rijden en hij heeft zodoende 3 kilometer '*gewonnen*'.

De automobilist neemt zich voor om op zekere dag zijn benzinetank volledig te vullen en dan zo zuinig mogelijk te gaan rijden. De afstand in km die hij rijdt vanaf het moment dat hij getankt heeft, noemen we x .

De automobilist houdt de eerste 200 km bij wat er gebeurt met de actieradius A (in km) op zijn bedieningspaneel. Zie de tabel.

x	0	50	100	150	200
$A(x)$	625	582	539	496	452

Tussen $x = 0$ en $x = 100$ neemt de actieradius met minder dan 100 km af.

De automobilist 'wint' dus kilometers op dit traject.

a Bereken hoeveel kilometer hij op dit traject wint door zuinig te rijden.

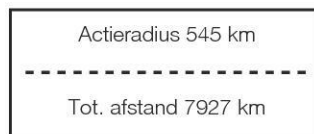
De automobilist maakt een wiskundig model bij de tabel. Hij stelt de

formule $A(x) = 5000 \cdot \frac{5000 - 7,2x}{40000 - 3x}$ op.

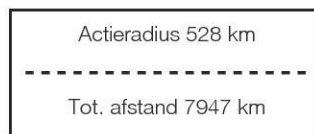
Op het moment dat hij begint te rijden met de volle tank, dus als $x = 0$, is de actieradius veel kleiner dan de afstand die hij in werkelijkheid zal rijden met deze tankinhoud.

Op het moment dat de tank leeg is, is de actieradius gelijk aan 0.

b Bereken hoeveel km de automobilist volgens het model met een volle tank in werkelijkheid méér kan rijden dan het bedieningspaneel bij vertrek aangaf.



figuur 15.49



figuur 15.50

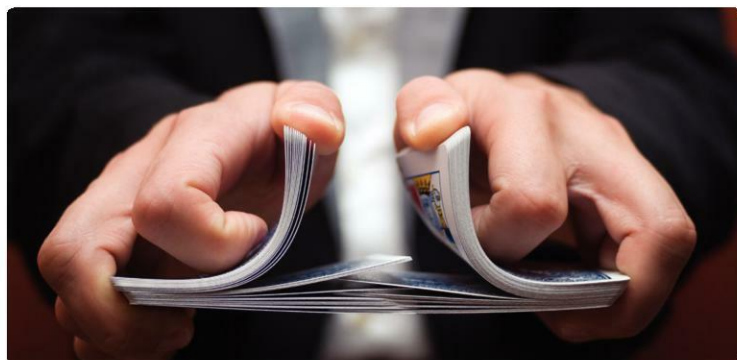
Dat de automobilist inderdaad kilometers wint, kun je ook nagaan door het verloop te bekijken van de som $S(x)$ van het aantal werkelijk gereden kilometers en de actieradius. Als de automobilist kilometers wint, zal $S(x)$ namelijk stijgend zijn. De formule voor $S(x)$ is

$$S(x) = x + A(x) = x + 5000 \cdot \frac{5000 - 7,2x}{40\,000 - 3x}.$$

- c Bepaal de afgeleide van $S(x)$ en laat met behulp van een schets van de afgeleide zien dat de automobilist op het traject van $x = 0$ tot $x = 500$ voortdurend kilometers wint.

45 2018-II

In 1992 publiceerden de Amerikaanse wiskundigen Bayer en Diaconis een artikel over het schudden van kaarten. Voor dit artikel hadden zij de meest gebruikte manier van schudden onderzocht, de zogeheten *Riffle Shuffle* (zie de foto).



Zij kwamen tot de conclusie dat het met deze schudtechniek niet mogelijk is een stapel kaarten écht willekeurig te maken, zoals bijvoorbeeld een computer dat wel kan.

Voor het spelen van een kaartspel is het goed genoeg als de kaarten “voldoende willekeurig” geschud zijn.

Bayer en Diaconis ontdekten tijdens hun onderzoek dat het aantal keren dat een stapel kaarten minstens geschud moet worden om als “voldoende willekeurig” bestempeld te worden, kan worden benaderd met de formule $A = 1,5 \cdot {}^2\log(n)$. In deze formule is A het aantal keren dat een stapel van n kaarten minstens geschud moet worden om als “voldoende willekeurig” bestempeld te worden.

Als het aantal te schudden kaarten toeneemt, neemt ook het aantal keren dat er minstens geschud moet worden toe. Dit aantal neemt echter steeds langzamer toe. Je kunt dit zien aan de afgeleide $\frac{dA}{dn}$.

Stel de formule op van de afgeleide $\frac{dA}{dn}$ en beredeneer aan de hand van deze formule, dus zonder getallen in te vullen of een schets te maken, dat A afnemend stijgend is.

46 2018-I

De bitcoin is een digitale munteenheid die alleen online bestaat. Hij bestaat sinds 1 januari 2009 en kan worden gebruikt om te betalen in webwinkels of voor andere online diensten.

Bitcoins worden niet, zoals normaal geld, door een centrale bank in omloop gebracht. In plaats daarvan zijn alle bitcoins die in omloop zijn, gecreëerd door computers mee te laten werken aan oplossingen van geselecteerde wiskundige problemen. Dat werkt als volgt:

Iedereen kan op zijn of haar computer speciale software laten draaien die meewerkt aan het oplossen van zo'n wiskundig probleem. De eigenaar van de computer die de oplossing voor een probleem vindt, krijgt daarvoor bitcoins als beloning.

Om het totale aantal bitcoins dat in omloop is te reguleren, wordt onder andere de moeilijkheidsgraad van de wiskundige problemen steeds groter gemaakt. Er zijn namelijk steeds meer mensen die hun computers mee laten rekenen.

De moeilijkheidsgraad van de problemen stijgt exponentieel volgens de formule $D = 3,65 \cdot e^{0,533 \cdot t}$. Hierin is D een maat voor de moeilijkheidsgraad en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2013. Hierbij geldt dat hoe groter D is, hoe moeilijker het op te lossen probleem is.

Stel de formule van de afgeleide van D op en beredeneer hoe je aan deze formule kunt zien dat de grafiek van D toenemend stijgend is.

47 2018-II

In figuur 15.62 zie je een blikstapel met zes blikken.

Er bestaat een formule waarmee het aantal mogelijke blikstapelings kan worden benaderd.

Deze formule is $B_n = 0,564 \cdot e^{1,386 \cdot n} \cdot n^{-1,5}$. Hierin is B_n een benadering van het aantal mogelijke stapelingen met n blikken op de onderste laag.

De getallen voor B_n worden snel groter. Hoe snel dit gaat, is te berekenen met behulp van de afgeleide van B_n . Er geldt (bij benadering)

$$B'_n = 0,782 \cdot e^{1,386 \cdot n} \cdot n^{-1,5} - 0,846 \cdot e^{1,386 \cdot n} \cdot n^{-2,5}.$$

a Toon dit aan.

Vanaf een bepaald aantal blikken zal het aantal mogelijke stapelingen met meer dan 500 000 toenemen als de onderste laag met één blik toeneemt.

b Onderzoek met behulp van de afgeleide van B_n vanaf welk aantal blikken op de onderste laag dit is.



figuur 15.62

48 2018-II

Op de foto zie je een *dubbele zeepbel*: twee bolvormige zeepbellen die aan elkaar vastzitten. Beide zeepbellen zijn een deel van een bol.

Voor het geval de grootste zeepbel een straal heeft van 3 cm, geldt de

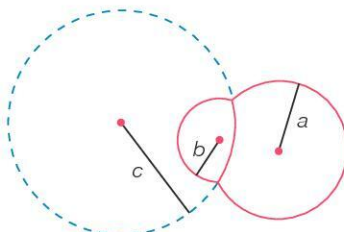
formule $c = \frac{3b}{3-b}$ met $0 < b < 3$. In deze formule is b de straal van de

kleinste zeepbel en c de straal van het bolvormige scheidingsvlies. In

figuur 15.64 is dit schematisch weergegeven.



figuur 15.63



figuur 15.64

Stel de afgeleide $\frac{dc}{db}$ van $c = \frac{3b}{3-b}$ op en beredeneer aan de hand van de formule van deze afgeleide of c toeneemt of afneemt als de straal van de kleinste zeepbel kleiner wordt.

49 2019-I

Het *vetpercentage* van een vogel is de hoeveelheid lichaamsvet als percentage van het totale gewicht van de vogel.

Voor het vetpercentage in het voorjaar van de goudplevier gaan we uit

van de formule $P_{\text{voorjaar}} = \frac{1600}{2,3 \cdot t + 198}$. Hierbij is P_{voorjaar} het

vetpercentage van de vogel in het voorjaar en t de tijd in dagen na het begin van de gewichtstoename.

- a** Beredeneer uitsluitend met behulp van de formule, zonder getallen in te vullen of een schets te maken, of het vetpercentage in het voorjaar toeneemt of juist afneemt.

Voor het vetpercentage in het najaar van de goudplevier gaan we uit van

de formule $P_{\text{najaar}} = \frac{2300 + 60t}{207 + 0,6t}$. Hierin is P_{najaar} het vetpercentage van

de vogel in het najaar en t de tijd in dagen na het begin van de gewichtstoename. Met behulp van de afgeleide van P_{najaar} kan men onderzoeken of het vetpercentage P_{najaar} afnemend stijgend is.

- b** Stel de formule van de afgeleide van P_{najaar} op en onderzoek daarmee of P_{najaar} afnemend stijgend is.

50 2019-I

In de provincie Groningen vinden, als gevolg van gasproductie, regelmatig aardbevingen plaats. In 2013 is daar grootschalig onderzoek naar gedaan.

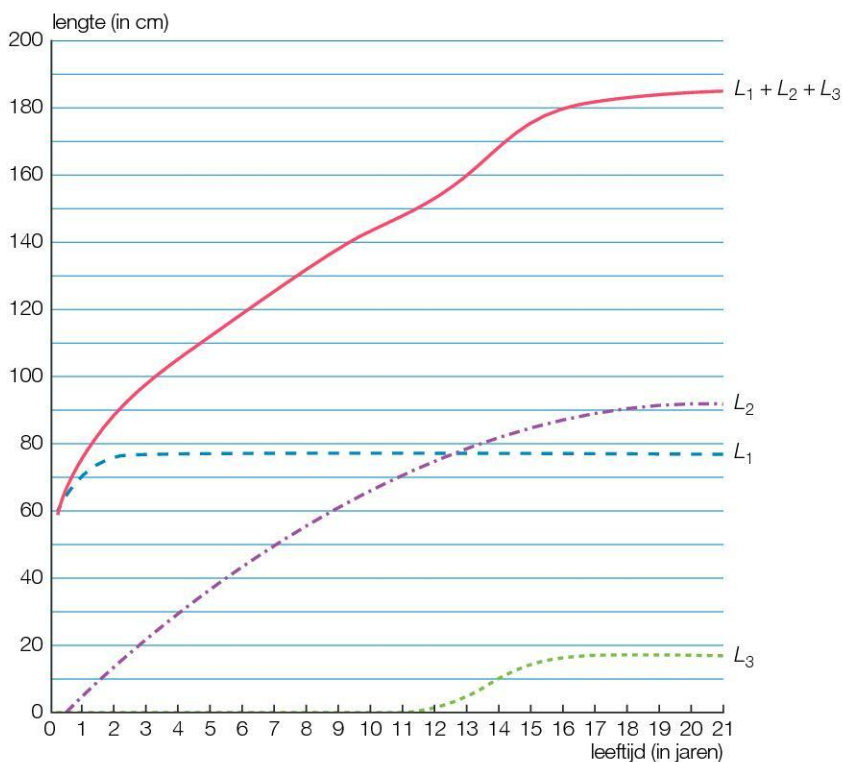
De *magnitude*, de kracht van een aardbeving, wordt uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter.

Het totaal aantal aardbevingen A voor magnitudes $\geq 1,5$ is te beschrijven met de formule $A = 12 \cdot e^{0,013t}$ met $t = 0$ voor april 1994 en t in maanden. Bereken door middel van differentiëren de waarde van de afgeleide van A voor $t = 117$ (dat is januari 2004). Geef je antwoord in één decimaal en leg uit wat de betekenis van deze waarde is in deze situatie.

51 2019-II

In deze opgave bekijken we de (gemiddelde) lengte van Nederlandse jongens tot 21 jaar. Met 'lengte' wordt in de hele opgave de gemiddelde lengte bedoeld.

We gebruiken in deze opgave een veelgebruikt model uit de kindergeneeskunde, het zogenaamde KKP-model. In dit model bestaat de lengte uit drie componenten L_1 , L_2 en L_3 . Bij elkaar opgeteld geven deze drie componenten de lengte van Nederlandse jongens. In figuur 15.65 staan de drie componenten L_1 , L_2 en L_3 en is ook de som van de drie getekend.



figuur 15.65

In het eerste half jaar is de bijdrage van de componenten L_2 en L_3 voor de lengte verwaarloosbaar en is L_1 alleen een goede benadering voor de lengte. De formule voor L_1 is $L_1 = 76,4 - 19,4 \cdot 0,9704^w$ met L_1 in cm en w de leeftijd in *weken*. De formule die hoort bij L_1 heeft een grenswaarde.

- a** Bereken na hoeveel weken de waarde van L_1 10 cm van deze grenswaarde verwijderd is. Geef je antwoord in gehele weken.
- b** Bereken met behulp van de afgeleide van L_1 de groeisnelheid in cm/week van een jongen een half jaar na zijn geboorte, dus als $w = 26$. Geef je antwoord in twee decimalen.

Na het eerste halfjaar is de bijdrage van de component L_2 niet meer te verwaarlozen. De formule voor L_2 is $L_2 = -0,235t^2 + 9,5t - 4,7$ met L_2 in cm en t de leeftijd in *jaren*. Deze formule speelt verderop in deze opgave nog een rol.

De component L_3 is de extra lengte als gevolg van de groeispuurt die jongens in de pubertijd ondergaan. De formule voor L_3 is $L_3 = \frac{16,1}{1 + e^{16,4 - 1,2t}}$ met L_3 in cm en t de leeftijd in *jaren*. Voor de afgeleide van L_3 geldt

$$L_3' = \frac{19,32 \cdot e^{16,4 - 1,2t}}{(1 + e^{16,4 - 1,2t})^2}.$$

- c** Toon aan dat de bovenstaande formule van de afgeleide juist is.

Met behulp van de afgeleide van L_3 kun je op elk moment in de pubertijd berekenen hoe groot de extra groeisnelheid als gevolg van die groeispuurt is.

- d** Bereken met behulp van die afgeleide hoe groot de extra groeisnelheid in cm/jaar maximaal is. Geef je antwoord in één decimaal.

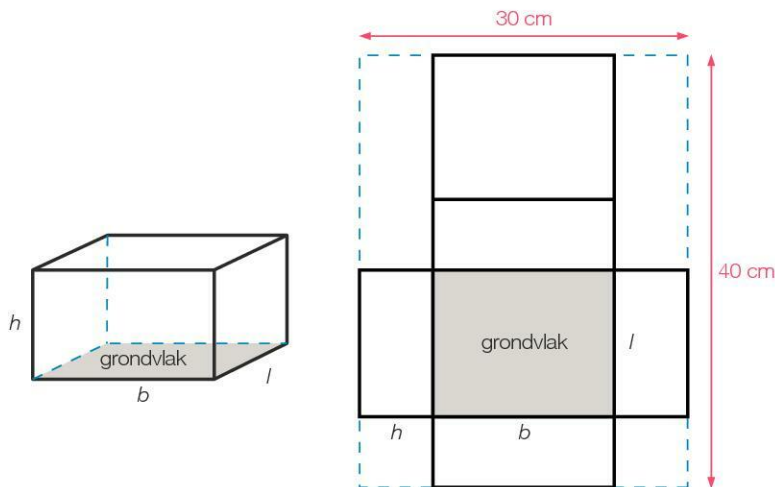
De som van L_1 , L_2 en L_3 levert de lengte L van een jongen. L kan met de formule $L = -19,4 \cdot 0,2096^t - 0,235t^2 + 9,5t + 71,7 + \frac{16,1}{1 + e^{16,4 - 1,2t}}$

beschreven worden. Hierbij is L in cm en t de leeftijd in jaren.

- e** Laat zien hoe deze formule met behulp van de drie genoemde componenten kan worden opgesteld.

52 2019-I

Om een verpakking in de vorm van een balk te maken, wordt een karton van 30×40 cm gebruikt. In de afbeeldingen hieronder zie je links een verpakking en rechts hoe de uitslag daarvan uit het karton geknipt wordt. Hierbij is h de hoogte, b de breedte en l de lengte van de verpakking in cm. De uitslag eindigt precies bij de randen van het karton. Zie de figuur.



figuur 15.66

Van een bepaalde verpakking is de hoogte gelijk aan 3 cm.

- a** Bepaal de lengte en breedte van deze verpakking en bereken daarmee vervolgens de inhoud van deze verpakking.

De formule voor de inhoud V in cm^3 van de verpakking uitgedrukt in de hoogte h in cm is $V = 2h^3 - 70h^2 + 600h$.

- b** Toon, zonder getallenvoorbeelden, aan dat deze formule juist is.

Met behulp van deze formule is vast te stellen voor welke hoogte h (met $h \leq 15$) de inhoud maximaal is.

- c** Bereken met behulp van differentiëren bij welke hoogte de inhoud maximaal is. Geef je antwoord in één decimaal.

15.6 Onderzoeksopgaven

De laatste opgave van het Centraal Examen is een zogenaamde onderzoeksopgave.

In een onderzoeksopgave wordt allerlei informatie gegeven die je moet combineren. Er wordt slechts één vraag gesteld die vaak begint met ‘Onderzoek ...’

Het is de bedoeling dat je zelf de nodige tussenstappen bedenkt.

Ook als je het eindantwoord niet kunt vinden, is het toch verstandig zoveel mogelijk tussenstappen op te schrijven. Ook dat kan nog veel punten opleveren.

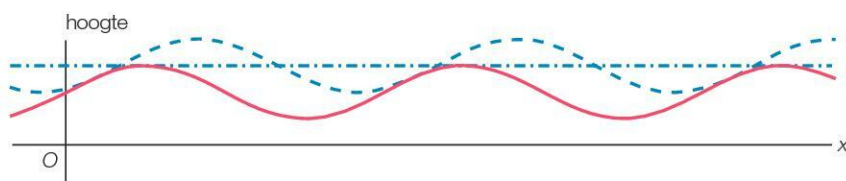
53 2019-I

Langs het Zandpad in Utrecht staat een hek dat bestaat uit twee sinusoiden, die elkaar raken. Zie de foto.



figuur 15.67

In de figuur hieronder zijn de twee sinusoiden in het hek schematisch weergegeven.



figuur 15.68

De formule die bij de onderste sinusoiden hoort, is $S_{\text{onderste}} = 100 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$.

Hierbij is S_{onderste} de hoogte in centimeters en x de afstand tot het beginpunt op de evenwichtsstand in meters.

De hoogste toppen van de onderste sinusoiden liggen op de evenwichtsstand van de bovenste sinusoiden. De amplitudes van beide sinusoiden zijn gelijk. Verder is gegeven dat de twee sinusoiden elkaar bij $x = \frac{1}{2}$ en ook bij $x = 6\frac{1}{2}$ raken.

Geef de formule voor de bovenste sinusoiden en licht toe hoe je je antwoord gevonden hebt.

54 2017-I

Peter is van plan binnenkort een andere auto aan te schaffen. Hij heeft zijn keuze laten vallen op een Volvo V70 uit 2015, maar twijfelt tussen twee uitvoeringen van deze auto, de *Nordic* en de *Nomadic*. Zie de tabel.

uitvoering	brandstof	gewicht (kg)	verbruik (liter per 100 km)
Nordic	benzine	1595	6,4
Nomadic	diesel	1655	4,5

De *Nordic* rijdt op benzine, terwijl de *Nomadic* op diesel rijdt. Het voordeel van een auto die op diesel rijdt, is dat die auto een stuk zuiniger is: niet alleen kan een dieselauto meer kilometers per liter brandstof rijden, diesel is ook nog eens een stuk goedkoper dan benzine. Zie de figuur.



figuur 15.69

In de figuur is duidelijk te zien dat de prijzen voor brandstof sinds 2012 redelijk stabiel zijn. Op het moment dat Peter over zijn auto-aanschaf nadenkt, is de verwachting dat dit in de toekomst zo zal blijven. Het nadeel van auto's op diesel is dat de wegenbelasting voor deze auto's veel hoger is dan die voor auto's die op benzine rijden. Zie onderstaande tabel.

WEGENBELASTING PER 3 MAANDEN

gewichtsklasse	benzine	diesel	aardgas
1451–1550	€ 218	€ 406	€ 318
1551–1650	€ 242	€ 442	€ 355
1651–1750	€ 265	€ 478	€ 393

Peter gaat ervan uit dat de overige kosten, zoals verzekering en onderhoud, bij beide uitvoeringen gelijk zullen zijn. Peter houdt in de vergelijking geen rekening met het eventuele verschil in aanschaffkosten tussen beide uitvoeringen.

Omdat rijden op diesel voordeliger is dan rijden op benzine, zal de dieseluitvoering vanaf een bepaald aantal kilometers per jaar voordeliger zijn dan de benzine-uitvoering.

Onderzoek met behulp van de gegevens vanaf welk aantal kilometers per jaar de dieseluitvoering voordeliger zal zijn dan de benzine-uitvoering.

Rond je antwoord af op honderden kilometers.

55 2019-II

Aan de rand van het dorp Olst in Overijssel is in 2008 het kunstwerk ‘Kantwerk’ geplaatst van de Belgische kunstenaar Marc de Roover. Zie de foto.



figuur 15.70

Het kunstwerk stelt de golvende rivier de IJssel voor. De voorkant van het kunstwerk kan door een sinusoïde benaderd worden.

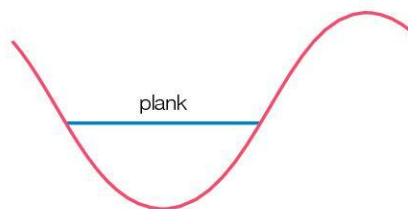
Op de website van de betreffende gemeente is te lezen dat er voor dit kunstwerk 3200 latten zijn gebruikt en dat het een lengte heeft van 100 meter. Telwerk leverde op dat iedere hele periode is opgebouwd uit 60 latten.

De uiteindes van de laagste en de hoogste latten liggen respectievelijk 17 cm en 70 cm boven het gras.

Annemarie en Floortje willen een paar mooie foto's voor hun profielwerkstuk maken. Hiervoor willen ze een soort bankje creëren door een plank horizontaal in de golf naar te leggen. Zie de schets in de figuur.

Annemarie neemt hiervoor een plank met een lengte van één meter mee. Floortje neemt een plank mee met een andere lengte. De zithoogte van het bankje van Floortje komt uit op 50 cm boven het gras.

Onderzoek of Annemarie hoger of lager dan Floortje zit.

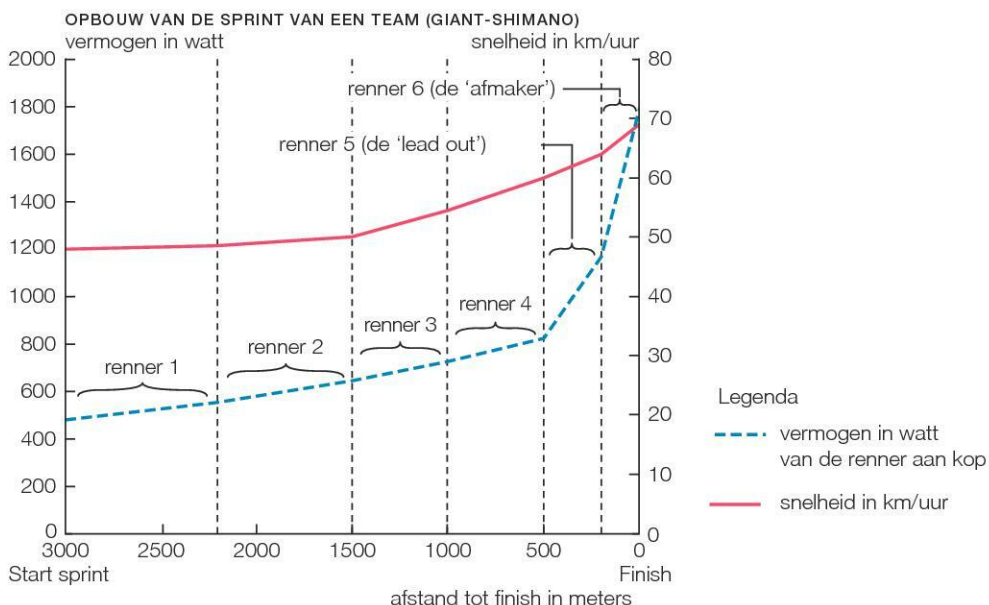


figuur 15.71

[► WERKBLAD] Veel wielervedstrijden worden beslist in een massasprint. Er zijn ploegen die zich hierin hebben gespecialiseerd. Zij stellen een zogenaamde sprinttrein van zes wielrenners samen, die ervoor moet zorgen dat hun ploeg de wedstrijd wint.

De ploeg Giant-Shimano, met de Duitse sprinter Marcel Kittel, heeft op deze wijze een aantal etappes gewonnen in de Tour de France van 2014. Een sprinttrein werkt als volgt: vanaf drie kilometer voor de finish gaan zes renners van de ploeg om beurten aan kop rijden. Daarbij voeren ze geleidelijk de snelheid op, waarna de zesde renner de taak heeft de massasprint te winnen.

In een krant stond de volgende figuur (deze figuur staat ook vergroot op het werkblad). Hierin is weergegeven welk vermogen en welke snelheid de renners bereiken wanneer zij aan kop rijden.



figuur 15.72

Met de gegevens uit de figuur is voor iedere renner de geleverde arbeid te berekenen. De arbeid van een renner is gelijk aan het vermogen vermenigvuldigd met de tijdsduur in seconden.

Een wielervliefhebber wil onderzoeken of een renner aan kop aan het eind van de sprint meer, dezelfde of minder arbeid levert dan een renner aan kop aan het begin van de sprint.

Voer dit onderzoek uit door vermogens en snelheden te kiezen bij de door jou gekozen renners en maak daarbij gebruik van het werkblad.

57 2018-II

Met behulp van windmolens wordt windenergie omgezet in elektriciteit. De afgelopen tientallen jaren zijn steeds grotere windmolens geplaatst, want hoe groter een windmolen, hoe groter de elektriciteitsproductie door die windmolen. In deze opgave kijken we naar de toenemende opbrengst van windmolens bij toenemende grootte.

In de figuur zie je een schematische tekening van een windmolen met hierin aangegeven de ashoogte h en de 'rotordiameter' D .

De maximale hoeveelheid elektriciteit die men met een windmolen kan produceren, noemt men het *vermogen* van de windmolen. Dit vermogen P wordt uitgedrukt in MW (megawatt).

Het vermogen van een windmolen hangt onder andere af van de ashoogte. Doordat er op grotere hoogte meer wind is en doordat de wind daar constanter is, neemt het vermogen voor elke meter extra ashoogte met een bepaald percentage toe.

Er geldt: bij gelijkblijvende rotordiameter neemt voor elke meter extra ashoogte het vermogen met 0,68% toe.

Het vermogen van een windmolen hangt naast de ashoogte ook af van de rotordiameter. Deze twee factoren spelen tegelijkertijd een rol. Dat komt tot uiting in de formule voor het vermogen $P = 2,21 \cdot 10^{-4} \cdot g^h \cdot D^2$.

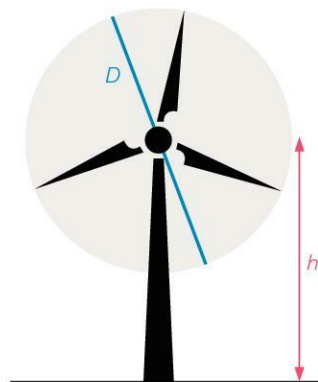
Hierin is P het vermogen in MW, g de groeifactor per extra meter ashoogte, h de ashoogte in meter en D de rotordiameter in meter.

In een windmolenpark staan 40 windmolens met elk een vermogen van 0,75 MW. De molens hebben een rotordiameter van 50 meter en een ashoogte van 45 meter. De windmolens in dit park zijn aan vervanging toe. Men wil deze windmolens vervangen door tien gelijke windmolens van een groter type. Men hanteert als vuistregel dat een windmolen van dit type € 25 000,- per meter ashoogte kost. Bij de huidige windmolens is

de verhouding tussen ashoogte en rotordiameter gelijk aan $\frac{45}{50} = 0,9$.

Deze verhouding zal ook gelden voor het grotere type windmolen, dus voor dit type geldt $h = 0,9D$.

Het totale vermogen van het park moet met de nieuwe windmolens minstens even groot worden als het met de huidige windmolens is. Bereken de minimale investering die gedaan zal moeten worden voor de bouw van de nieuwe windmolens. Rond je antwoord af op miljoenen euro's.



figuur 15.73

Gemengde opgaven

12 Rijen

- 1** Gegeven zijn de rijen A_n , $v(n)$ en $a(t)$.

A_n : 1000, 977, 954, 931, 908, ...

$v(n)$: 1000; 960; 921,6; 884,73; 849,34656; ...

$a(t) = -t^2 + 18t - 45$

- a** Bereken de som van de positieve termen van de rij A_n .
- b** Bereken de som van de termen van de rij $v(n)$ die groter zijn dan 500. Rond af op gehele.
- c** Bereken de som van de termen van de rij $a(t)$ die groter zijn dan nul.

- 2** Gegeven zijn de rijen u_n en v_n .

u_n : 300, 306, 312, 318, 324, ...

v_n : 0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 1,6; ...

- a** Stel van beide rijen zowel de directe als de recursieve formule op. Neem als begintermen u_1 en v_1 .
- b** Vanaf welke n is $v_n > u_n$?
- c** Vanaf welke n is $\sum_{k=1}^n u_k > 5000$?

- 3** Tijdens een lange droogteperiode verdampt dagelijks 10% van het water in een vijver. Om het waterpeil niet te ver te laten zakken, voert men elke dag 500 m³ water toe. Aan het begin van de droogteperiode zit er 10000 m³ water in de vijver.

- a** Stel de recursieve formule op voor het volume $V(t)$ van het water in de vijver in m³, met t in dagen.
- b** Na hoeveel dagen zit er voor het eerst minder dan 7000 m³ water in de vijver?
- c** De hoeveelheid water in de vijver komt niet beneden een grenswaarde. Onderzoek welke grenswaarde dat is.

- 4** Nova heeft op 1 januari 2020 een flexibel spaardepósito geopend met een inleg van 500 euro. Ze krijgt jaarlijks 0,75% rente. Met ingang van 1 januari 2021 stort ze jaarlijks een bedrag van 500 euro op het depósito. $B(n)$ is het saldo in euro's, n jaar na 1 januari 2020, direct na het storten van de 500 euro.

- a** Stel de recursieve formule op van $B(n)$.
- b** Wat is het saldo direct na de storting op 1 januari 2030?
- c** In welk jaar is het saldo op 1 januari voor het eerst meer dan 10000 euro, direct na het storten van de 500 euro? Hoeveel heeft Nova dan in totaal op het depósito gestort?

- 5** Stijn doet mee aan een hardloophwedstrijd over 15 km. Hij gebruikt een app op zijn telefoon die na elke kilometer meldt hoelang hij over die kilometer heeft gedaan. De eerste kilometer liep hij in 3 minuten en 55 seconden. Elke kilometer daarna liep hij drie seconden langzamer dan de kilometer daarvoor.

a Bereken de eindtijd van Stijn.

Stijn bedenkt dat hij misschien beter langzamer had kunnen beginnen, om vervolgens sneller te kunnen eindigen. Tijdens een trainingsloop van 15 kilometer loopt hij een tijd van 4 minuten en 20 seconden over de eerste kilometer. Vervolgens loopt hij elke volgende kilometer twee seconden sneller dan de kilometer daarvoor.

b Ligt Stijn tijdens deze trainingsloop na 10 kilometer voor of achter op de tijd die hij liep tijdens de wedstrijd? Hoeveel scheelt het?

- 6** Hiernaast zie je de eerste vier rijen van een kaartenhuis. Het aantal kaarten in een kaartenhuis met n rijen is te berekenen met de formule $u_n = 1,5n^2 + 0,5n$.

- a** Uit hoeveel kaarten bestaat een kaartenhuis met zes rijen?
- b** Een pak kaarten bestaat uit 54 kaarten. Hoeveel rijen kan een kaartenhuis maximaal hebben als daarvoor vijf pakjes kaarten worden gebruikt?
- c** Uit hoeveel kaarten bestaat de tiende rij van een kaartenhuis?
- d** Uit hoeveel kaarten bestaat het kaartenhuis waarvan de onderste rij uit 38 kaarten bestaat?



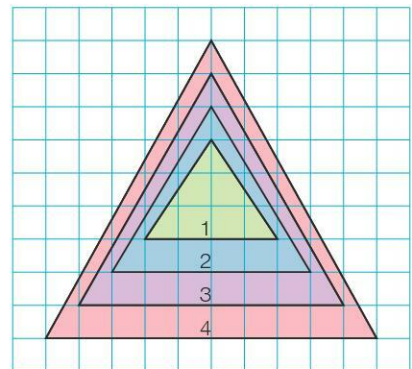
figuur G.1

- 7** In de figuur hiernaast zie je steeds groter wordende gelijkbenige driehoeken. Driehoek 1 heeft een basis van 4 cm en een hoogte van 3 cm. De basis van de n^e driehoek is B_n . De hoogte van de n^e driehoek is H_n .

a Stel zowel van B_n als van H_n een recursieve en een directe formule op.

De oppervlakte van een driehoek is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte}$. De oppervlakte van de n^e driehoek is O_n . Voor O_n geldt de directe formule $O_n = 2n^2 + 3n + 1$.

- b** Laat zien hoe deze formule uit de directe formules van B_n en H_n volgt.
- c** Vanaf welke n is $O_n > 250$?
- d** Leid de recursieve formule van O_n af met behulp van de directe formule.



figuur G.2

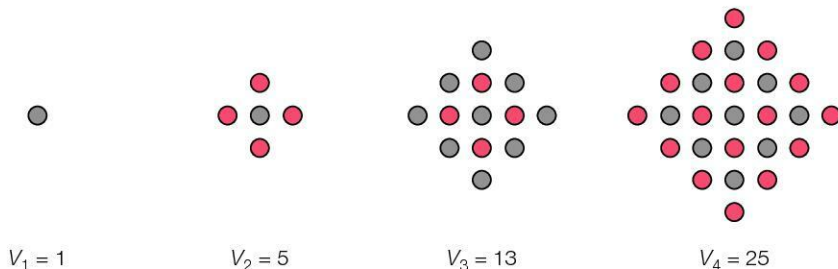
- 8** Maya heeft op 1 januari 2020 een bedrag van 10 000 euro op de bank gezet tegen 0,25% rente per jaar. Vanaf 1 januari 2021 stort zij jaarlijks 1000 euro op haar rekening. Ze gaat hiermee door totdat er 25 000 euro op haar rekening staat. B_n is het saldo van Maya's rekening in euro's, direct na het storten van de 1000 euro, n jaar na 1 januari 2020.

- Stel de recursieve formule op van B_n .
- Hoeveel is het saldo op 1 januari 2025, direct na het storten van de 1000 euro?
- In welk jaar is het saldo op 1 januari voor het eerst meer dan 20 000 euro, direct na het storten van de 1000 euro?

Op 1 januari 2036 heeft Maya voor de storting 25 711 euro op haar rekening staan. Met ingang van die dag stort ze geen geld meer, maar neemt ze jaarlijks op 1 januari 2500 euro op. Ze begint hiermee op 1 januari 2037.

- Stel voor deze situatie de recursieve formule op van het saldo. Hierbij is B_0 het saldo in euro's op 1 januari 2036.
- Hoeveel keer kan Maya 2500 euro opnemen?
- Het jaar dat ze voor het eerst geen 2500 euro meer kan opnemen, neemt ze op 1 januari het resterende bedrag op. Hoeveel euro kan Maya uiteindelijk meer opnemen dan dat ze heeft gestort?

- 9** In figuur G.3 staan de eerste vier *gecentreerde vierkantsgetallen*.



figuur G.3

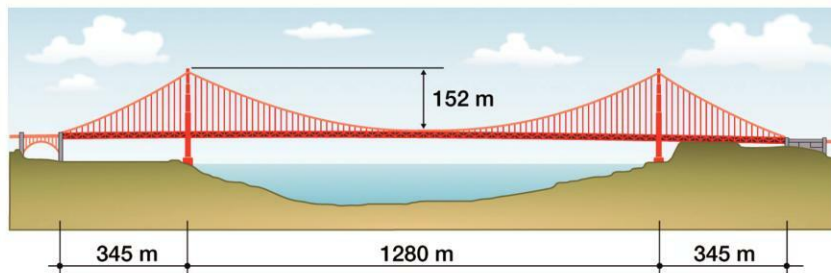
Het n^e gecentreerde vierkantsgetal V_n is te berekenen met de directe formule $V_n = 2n^2 - 2n + 1$.

- Bereken het twaalfde gecentreerde vierkantsgetal.
- Het hoeveelste gecentreerde vierkantsgetal is 1985?
- Leid de recursieve formule van V_n af met behulp van de directe formule.

De recursieve formule van V_n is ook af te leiden met behulp van de figuur. Te zien is dat de afbeelding van het n^e gecentreerde vierkantsgetal wordt gevormd door die van het voorafgaande vierkantsgetal, uitgebreid met een vierkante rand van n bij n stippen.

- Leid de recursieve formule van V_n af met behulp van de figuur.

- 10** De Golden Gate Bridge is een wereldberoemde hangbrug in San Francisco. In de figuur hieronder zie je een schematische weergave met een aantal afmetingen van de brug in meters.



figuur G.4

De brug bestaat uit twee grote torens waartussen kabels gespannen zijn. Aan deze kabels hangt het wegdek met behulp van hangers, in de figuur weergegeven door verticale lijnen. Elke verticale lijn staat voor vier hangers, aan beide kanten van het wegdek een set van twee. De hangers zijn in horizontale richting gelijkmatig verdeeld tussen de punten waar de kabels vastzitten aan het wegdek en aan de torens.

We bekijken eerst het deel van de brug tussen de twee torens. De lengte in meters L_n van de n^e hanger wordt benaderd door de directe formule

$L_n = 0,08447n^2 - 7,095n + 152$ met beginterm L_1 . Aan de torens zitten geen hangers.

De horizontale afstand tussen de hangers is 15,24 m.

a Toon dat aan.

De totale lengte van alle hangers in het deel tussen de torens is ruim 17 km.

b Bereken de totale lengte in meters nauwkeurig.

Vervolgens kijken we naar de delen van de brug bij de oevers. De lengte van de hangers is bij beide oevers en aan beide zijden gelijk. De lengte in meters L_m van de m^e hanger kan worden benaderd door een rekenkundige rij, waarbij L_1 de lengte van de langste hanger is en $L_{22} = 0$.

c Stel de directe en de recursieve formule op van de rij L_m . Rond in je antwoord indien nodig af op twee decimalen.

d Alle hangers van de hele brug worden één keer geverfd. Bereken hoeveel procent van de verf nodig is voor de hangers die zich in het deel tussen de twee torens bevinden.



figuur G.5



13 Allerlei formules

11 a Schrijf $10 + \frac{6}{a} - \frac{5}{b-1}$ als één breuk.

b De formule $B = 20 + \frac{10x}{x + \frac{x^2}{y}}$ is te schrijven in de vorm $B = \frac{ax + by}{x + y}$.

Bereken a en b .

c De formule $C = \frac{2p^2 + 6}{p} - \frac{3}{2p}$ is te schrijven in de vorm $C = ap + \frac{b}{2p}$.

Bereken a en b .

d Deel $5x^2y$ uit bij de formule $D = \frac{3x^2 + xy + 10y}{5x^2y}$.

12 a Gegeven zijn de formules $P = 3t - 4s + 35$ en $5s - 2t = 10$.

Schrijf de formule van P in de vorm $P = at + b$.

b De formules $B = 3xy - 2x + 4$ en $2x - y = 1$ zijn te combineren tot de vorm $B = ax^2 + bx + c$.

Bereken a , b en c .

13 a Druk T uit in p als gegeven is dat $p = \frac{3 - 2T}{3T + 5}$.

b Druk x uit in y als gegeven is dat $y = 3\sqrt{5 - 2x}$.

c Schrijf de formule $N = 10 \cdot \ln(t) - 22,5$ in de vorm $t = a \cdot b^N$. Rond a af op één decimaal en b op drie decimalen.

d Schrijf de formule $N = 40 \cdot 1,06^t$ in de vorm $t = a \cdot \log(bN)$. Rond a af één decimaal.

e Schrijf de formule $N = 54 \cdot e^{0,55t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond g af op twee decimalen.

f Schrijf de formule $N = 720 \cdot 1,28^t$ in de vorm $N = b \cdot e^{ct}$. Rond c af op twee decimalen.

14 a Schrijf de formule $t = 2 \cdot \ln(V) - 15,2$ in de vorm $V = b \cdot g^t$. Rond b af op gehele en g op drie decimalen.

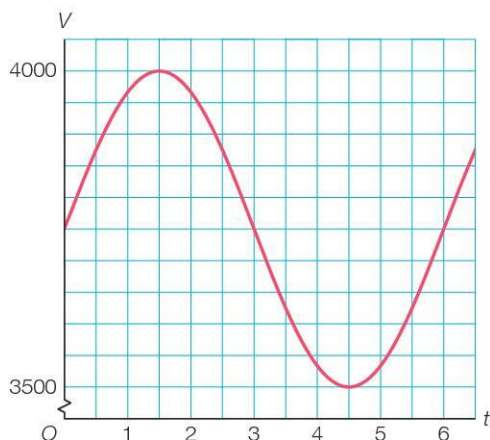
b Schrijf de formule $p^2 = \frac{15}{q^{3,5}}$ in de vorm ${}^2\log(p) = a + b \cdot {}^2\log(q)$.

Rond zo nodig af op twee decimalen.

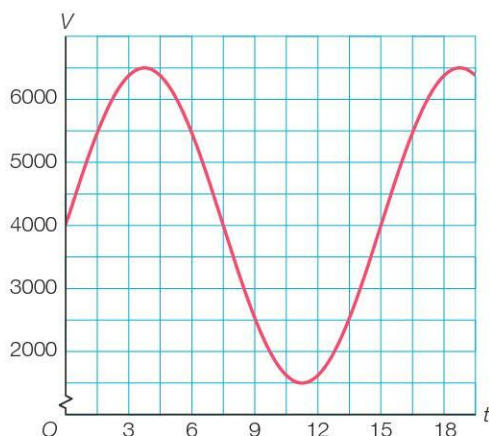
c Schrijf de formule $\ln(R) - 8,3 \cdot \ln(S) = 2,07$ in de vorm $R = aS^b$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

d Schrijf de formule $N = 1200 \cdot 3^{0,2t+1}$ in de vorm $\log(N) = at + b$. Rond a en b af op drie decimalen.

- 15** Bij het ademen verandert de hoeveelheid lucht in de longen. Het is van belang of een persoon in rust is of dat een inspanning wordt verricht. In figuur G.6 zie je de ademhaling van iemand in rust, in figuur G.7 ademt deze persoon zo diep mogelijk in en uit. Hierbij is V de hoeveelheid lucht in de longen in cm^3 en t de tijd in seconden.



figuur G.6



figuur G.7

- a** In rusttoestand wordt per ademhaling 500 cm^3 lucht in- en uitgeademd.
Hoeveel is dit in de situatie van figuur G.7?

Het *minuutvolume* is de totale hoeveelheid lucht die per minuut wordt in- en uitgeademd.

- b** Bereken de verhouding van de minuutvolumes bij de ademritmes van figuur G.6 en G.7.
c Stel bij de sinusöide in figuur G.6 een formule op.
d Stel bij de sinusöide in figuur G.7 een formule op.

Bij een inspanning van deze persoon is de hoeveelheid in- en uitgeademde lucht per ademhaling zoals in figuur G.7, maar het aantal ademhalingen gaat naar 40 per minuut. Verder is de gemiddelde hoeveelheid lucht in de longen 4200 cm^3 .

- e** Stel een formule op die bij deze inspanning hoort. Neem aan dat op $t = 0$ helemaal uitgeademd is.
f Hoeveel seconden per minuut is bij deze inspanning meer dan 6000 cm^3 lucht in de longen? Rond af op één decimaal.



- 16** Het getijde is de dagelijkse op- en neergaande beweging van de zee. De periode tussen hoogwater en laagwater heet eb. Vloed is de periode tussen laagwater en hoogwater. Het verschil tussen hoog- en laagwater is in elke kustplaats anders.

Voor de waterhoogte V in cm ten opzichte van het Normaal Amsterdams Peil (NAP) in de jachthaven van Vlieland geldt bij benadering

$V = 110 \sin(0,506(t - 6,74))$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ op 1 september 2016 om 0:00 uur.

- a** Bereken de periode in minuten nauwkeurig.
- b** Hoeveel cm is het verschil tussen hoog- en laagwater in de jachthaven van Vlieland?
- c** Op 2 september was het twee keer hoogwater.
Bereken in minuten nauwkeurig op welke tijdstippen dit het geval was.

Het grootste verschil tussen hoog- en laagwater in Europa vind je in de Franse baai van Saint-Malo. De waterhoogte S in deze baai is te benaderen door een sinusoidale met dezelfde periode en evenwichtsstand als de waterhoogte V in de jachthaven van Vlieland. Het verschil tussen hoog- en laagwater in de baai van Saint-Malo is 12 meter en het was laagwater op 1 mei 2016 om 0:00 uur.

- d** Stel bij de waterhoogte S in m een formule op van de vorm $S = a + b \sin(c(t - d))$. Neem t in uren met $t = 0$ op 1 mei 2016 om 0:00 uur. Rond zo nodig af op drie decimalen.
- e** Bereken de maximale snelheid waarmee de waterhoogte S stijgt.
Geef het antwoord in gehele cm per minuut.

- 17** Uit een onderzoek naar het verband tussen het gewicht en de lengte van forellen volgt het verband $\log(g) = -2,37 + 3,38 \cdot \log(l)$. Hierin is g het gewicht van een forel in grammen en l de lengte van de forel in centimeters.

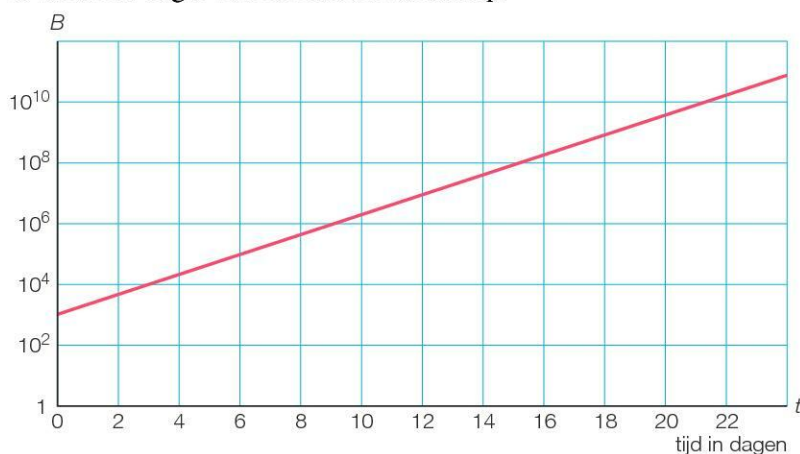
- a** Hoeveel gram weegt volgens dit verband een forel van 60 centimeter?
Rond af op tientallen.

Het verband $\log(g) = -2,37 + 3,38 \cdot \log(l)$ kan geschreven worden in de vorm $g = a \cdot l^b$. Afgerond op drie decimalen geldt $a = 0,004$ en afgerond op één decimaal geldt $b = 3,4$.

- b** Bereken a in vier decimalen en b in twee decimalen.
- c** Uit de formule $g = 0,004 \cdot l^{3,4}$ volgt in het algemeen: als de lengte van een forel drie keer zo groot wordt, dan wordt het gewicht met een vast getal vermenigvuldigd.
Toon dit aan zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden en geef dit getal in gehele.
- d** Het verband $\log(g) = -2,37 + 3,38 \cdot \log(l)$ kan ook worden geschreven als $\log(G) = r + s \cdot \log(L)$, waarbij G het gewicht van de forel in kilogrammen is en L de lengte van de forel in meters.
Doe dit.

18 Omdat de consument steeds vaker verse producten wenst, wordt er veel onderzoek gedaan naar de houdbaarheid van producten die kunnen bederven. Bij één van de onderzoeken wordt gekeken naar het aantal pseudomonas-bacteriën per kilogram verse kip.

In figuur G.8 zijn de resultaten van een proef verwerkt, waarbij 1 kg verse kip werd bewaard in een koelkast die op 0°C was ingesteld. Er werd bijgehouden hoe het aantal bacteriën B per kg verse kip zich ontwikkelde. In de figuur is B uitgezet tegen t , waarbij t de tijd in dagen is vanaf het begin van het koelen van de kip.



figuur G.8

Volgens de Warenwet mogen er ten hoogste 50 miljoen bacteriën per kg kip aanwezig zijn. Zijn er meer bacteriën aanwezig, dan wordt het kippenvlees afgekeurd en mag het niet gegeten worden.

- a** Na negen dagen waren er meer bacteriën dan aan het begin van het koelen.

Hoeveel keer zoveel?

- b** Mag de kip volgens de Warenwet na 12 dagen nog gegeten worden? Licht toe.

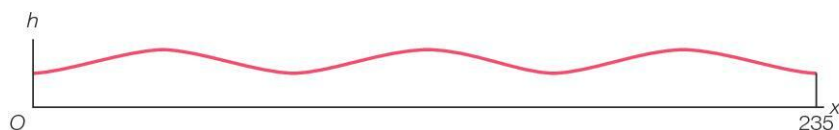
Bij de lijn hoort de formule $\log(B) = \frac{1}{3}t + 3$.

- c** Bereken met behulp van de formule na hoeveel dagen de kip volgens de Warenwet niet meer gegeten mag worden. Rond af op één decimaal.
- d** Schrijf de formule $\log(B) = \frac{1}{3}t + 3$ in de vorm $B = b \cdot g^t$. Rond g af op drie decimalen.

19 Bij de grootscheepse verbouwing van station Utrecht Centraal werd een nieuw dak geplaatst. In deze opgave bekijken we een model van een doorsnede van het dak. Het dak bestaat uit drie golven en de totale lengte is 235 meter. De hoogste punten bevinden zich 9,53 meter boven de vloer van de centrale hal van het station. De laagste punten bevinden zich 5,85 meter boven de vloer van de centrale hal. Het dak begint en eindigt met een laagste punt.



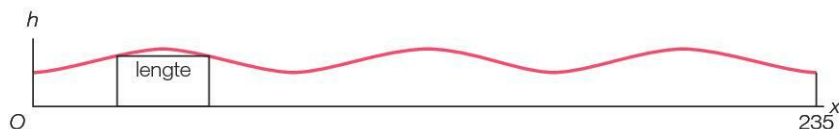
Bij deze gegevens kan een formule van de vorm $h = a + b \sin(c(x - d))$ worden opgesteld. Hierin is h de hoogte in meters boven de vloer van de centrale hal en x de afstand in meters vanaf het meest linkse punt van het dak in het vooraanzicht. Zie ook figuur G.9.



figuur G.9

a Bereken a , b , c en d . Rond zo nodig af op twee decimalen.

Voor een publiciteitsstunt wil men tijdelijk een balkvormig bouwwerk onder de meest linkse golf plaatsen. Zie figuur G.10. Het bouwwerk moet minstens een meter onder het dak van het gebouw blijven.



figuur G.10

- b** Hoe lang kan het bouwwerk maximaal worden als het 8 meter hoog is? Rond af op gehele dm.
- c** Hoe hoog kan het bouwwerk maximaal worden als het 20 meter lang is? Rond af op gehele dm.

14 Toepassingen van de differentiaalrekening

20 Differentieer.

a $y = 2x + 21,6 \cdot \ln(x + 10)$

b $y = {}^3\log(5x - 2)$

c $y = \frac{3x}{15 - \ln(5x)}$

d $y = 0,3^x \cdot \log(0,6x)$

e $y = \frac{e^{2x}}{x^2 + 2} + 8x$

f $y = x \cdot \ln(x + 3)$

21 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en beredeneer wat de grenswaarde is.

a $y = 100 - \frac{3}{x^2 + 1}$

b $y = 55 - \frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$

c $N = \frac{78}{24 - 16 \cdot e^{-t}}$

22 Onderzoek met de grafiek van de afgeleide welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek hoort.

a $y = 3x \cdot \ln(x + 4)$ met $x \geq 0$

b $P = \frac{q + 20}{q - q^2}$ met $q > 1$

Onderzoek met de formule van de afgeleide welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek hoort.

c $y = 7e^{-0,3x}$

d $N = 100(1 - 0,5^t)$

23 In figuur G.11 zie je een literpak melk en de bijbehorende uitslag. Het grondvlak is x bij x cm en de hoogte is h cm. De plakranden zijn 0,7 cm breed.

In de uitslag herken je vier rechthoeken van x bij h cm, vier rechthoeken van x bij $0,5x$ cm en vier rechthoeken van x bij $0,6x$ cm. De melk vult precies het balkvormige deel van het pak. Voor de oppervlakte van het karton dat voor een literpak melk wordt gebruikt, geldt

$$O(x) = (4x + 0,7) \left(1,4 + 1,1x + \frac{1000}{x^2} \right).$$

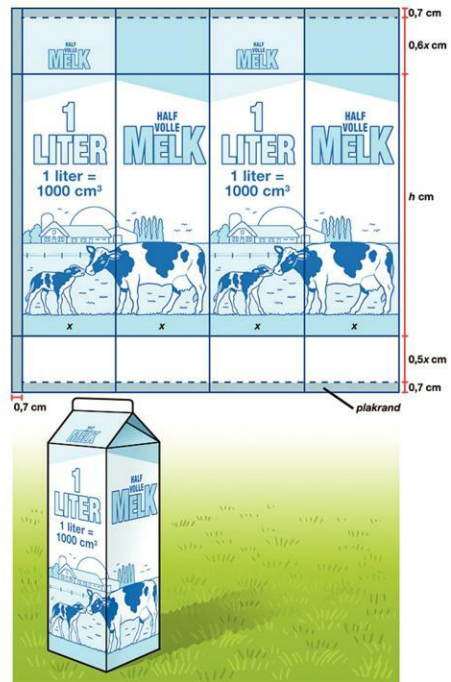
a Toon dit aan.

Er geldt $O'(x) = 8,8x + 6,37 - \frac{4000}{x^2} - \frac{1400}{x^3}$.

b Toon dit aan.

De fabrikant wil zo weinig mogelijk karton gebruiken voor de productie van de literpakken.

c Bereken in cm^2 nauwkeurig hoeveel karton gebruikt wordt voor een literpak melk.

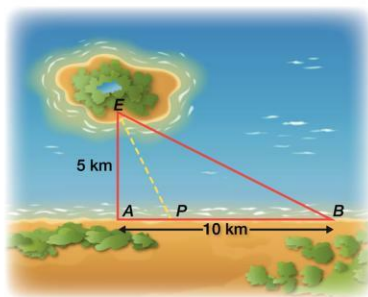


figuur G.11

- 24** De bewoners van een eiland dat 5 km voor de kust ligt, zijn voor de drinkwatervoorziening aangewezen op het vasteland.

De hoofdaansluiting bevindt zich in het punt B . Zie de situatieschets in figuur G.12.

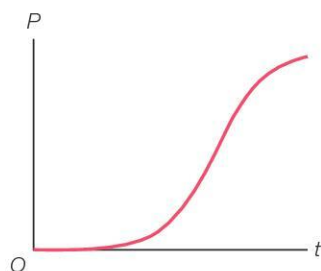
Voor de aanleg van een waterleiding zijn verschillende tracés mogelijk. Men kan rechtstreeks van B naar het eiland E . Ook kan men de afstand onder water zo kort mogelijk houden door de waterleiding via punt A te laten lopen. Men kan ook via een tussen A en B gelegen punt P schuin oversteken naar E .



figuur G.12

De aanleg van de waterleiding over land kost, inclusief het materiaal, 100 euro per meter; onder water zijn de kosten 140 euro per meter. We vragen ons af welk tracé de minste kosten met zich meebrengt. Tussen A en B kiezen we een punt P zo, dat $AP = x$ km. Je kunt dan met de stelling van Pythagoras berekenen dat $EP = \sqrt{x^2 + 25}$. Bereken met behulp van de afgeleide de minimale aanlegkosten van de waterleiding.

- 25** In het jaar 2020 werden wereldwijd miljoenen mensen besmet met het coronavirus (SARS-CoV-2). Wiskundigen hebben voor dit soort uitbraken vele modellen ontwikkeld. In deze opgave bekijken we het logistische groeimodel. Dit model is geschikt om de ontwikkeling van het aantal mensen dat besmet is of ooit besmet is geweest met het virus in beeld te brengen. We gaan er hierbij van uit dat er geen maatregelen worden genomen om verspreiding van het virus tegen te gaan en dat uiteindelijk iedereen besmet zal worden.



figuur G.13

Voor het percentage van de bewoners van een dichtbevolkt gebied dat besmet is (geweest) geldt $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot e^{-0,21t}}$ met t de tijd in dagen en $t = 0$ aan het begin van de eerste dag van de uitbraak.

- Hoeveel procent van de bewoners is besmet (geweest) na 10 dagen?
- Na hoeveel dagen is een kwart van de bewoners besmet (geweest)?
- Beredeneer met behulp van de formule van P dat de grafiek van P stijgend is.
- Beredeneer met de formule van P dat uiteindelijk alle bewoners besmet zullen zijn (geweest).
- Bereken met behulp van de afgeleide voor welke t de toename van het percentage van de bewoners dat besmet is (geweest) maximaal is. Rond af op gehele.

26 De levensduur van het betonnen rijdek van een viaduct wordt door het binnendringen van chloriden aangetast. Daarom wordt regelmatig op verschillende diepten het chloridgehalte gemeten. Aan de hand van de meetresultaten wordt voor het betreffende viaduct dan een formule van het verouderingsproces afgeleid.

Bij een viaduct vindt men de formule $C = 100 - 21,6t^{0,35}$. Hierin is C de conditie in procenten t jaar na de bouw van het viaduct.

Als de conditie gelijk is aan 10%, is de levensduur van het viaduct bereikt.

- a** Bereken de levensduur van het viaduct. Rond af op gehele jaren.
- b** Toon met behulp van de grafiek van de afgeleide aan dat het de conditie steeds minder snel afneemt.

27 De laatste jaren is er steeds meer aandacht voor goede gehoorbescherming. Het geluid tijdens concerten en in uitgaansgelegenheden is vaak zo hard dat het verstandig is om oordoppen te dragen. Doe je dat niet, dan bestaat de kans dat je blijvende gehoorschade oploopt. Je kunt dan bijvoorbeeld een constante pieptoon horen.

Een fabrikant van gehoorbeschermers biedt oordoppen op maat aan die speciaal voor jouw oren worden gemaakt. Je kunt vervolgens zelf kiezen in welke mate je omgevingsgeluid wilt dempen. Dit doe je door een geschikt filter te kiezen. Elk filter heeft zijn eigen dempingskarakteristieken, dat wil zeggen dat niet elke toonhoogte door het filter in dezelfde mate wordt gedempt.

Voor een bepaald filter van de fabrikant geldt voor de demping D in

decibel (dB) het model $D = \frac{a}{1 + b e^{-0,0015f}}$. Hierin is f de frequentie van de

te dempen toon in hertz (Hz). De formule geldt voor frequenties tussen 20 en 20000 Hz.

De maximale demping die het filter biedt is 44 dB en die vindt plaats bij tonen met de hoogste frequenties. Tonen met een frequentie van 250 Hz worden met 12,5 dB gedempt.

Uit deze gegevens volgt dat a gelijk is aan 44 en, in één decimaal, b gelijk is aan 3,7.

- a** Licht toe dat $a = 44$ en bereken b in twee decimalen.

Gebruik in het vervolg van deze opgave de formule $D = \frac{44}{1 + 3,7 e^{-0,0015f}}$.

- b** In werkelijkheid wordt een toon van 1000 Hz door het filter met 25 dB gedempt.
Hoeveel procent wijkt het model af van deze werkelijke demping?
- c** Welke toonhoogte wordt volgens het model gedempt met 30 dB?
- d** Beredeneer aan de hand van de formule dat de grafiek van D stijgend is.
- e** Bereken met behulp van de afgeleide de toename van de demping in dB per 1000 Hz bij een toonhoogte van 2500 Hz. Rond af op één decimaal.
- f** Bereken met behulp van de afgeleide bij welke toonhoogte de toename van de demping volgens het model maximaal is.

28 De Amerikaanse zeearend is een vogel die broedt in de Verenigde Staten en Canada. Sinds 1872 is deze vogel het nationale symbool van de Verenigde Staten. Omdat het in de jaren '60 van de vorige eeuw erg slecht ging met de Amerikaanse zeearend is men het aantal broedparen structureel gaan tellen. Door de extra aandacht en het nemen van allerlei maatregelen is sindsdien het aantal Amerikaanse zeearenden



enorm toegenomen. Voor de jaren 1963 tot en met 2007 is het aantal broedparen N van de Amerikaanse zeearend te benaderen met de formule $N = 487 \cdot 2^{0,10t}$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1963. In 2007 is men gestopt met het tellen van het aantal broedparen.

- a** Ergens in de jaren '90 was het aantal broedparen 4000. In welk jaar was dat?
- b** Bereken met behulp van de afgeleide met welke snelheid het aantal broedparen van de Amerikaanse zeearend toenam in 2005. Rond af op gehele.
- c** Toon met de formule van de afgeleide aan dat de grafiek van N toenemend stijgend is.

Ondanks het feit dat overheidsinstanties van de Verenigde Staten beweren dat de groei van het aantal Amerikaanse zeearenden onverminderd doorgaat, is dat volgens de fanatieke vogelteller Joe niet heel waarschijnlijk. Hij denkt dat er in 2016 niet meer dan 13 000 broedparen waren.

- d** Als je de formule gebruikt om het aantal broedparen in 2016 te berekenen, dan kom je op een veel hoger aantal uit dan 13 000. Hoeveel procent is de schatting van Joe lager dan het aantal dat volgt uit het model?

Joe denkt dat je vanaf 2000 beter het model $N = \frac{11\,200}{0,76 + e^{-0,18t}}$ met $t = 0$ in 2000 kunt gebruiken.

- e** Beredeneer aan de hand van de formule van het model van Joe dat het aantal broedparen van de Amerikaanse zeearend voortdurend toeneemt.
- f** Op een gegeven moment bereikt het aantal broedparen volgens het model van Joe een grenswaarde. Beredeneer wat deze grenswaarde is.
- g** Toon met behulp van de afgeleide aan dat de grafiek van het model van Joe vanaf 2002 afnemend stijgend is.

29 Een gezonde volwassene is 's morgens langer dan aan het einde van de dag. De Australische wetenschapper D. Burgess heeft dit verschijnsel onderzocht en publiceerde in 1999 de formule voor de lengtefractie $S = \ln(-0,00216t + 2,7183)$. Hierin is t het aantal uren nadat een persoon is opgestaan en S de verhouding tussen de lengte L van die persoon ten opzichte van zijn lengte L_0 bij het opstaan. Dus $S = \frac{L}{L_0}$.

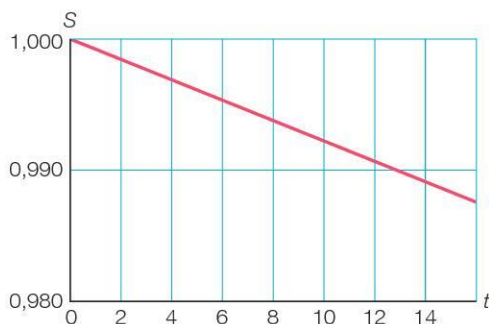
Meneer Jansen heeft als hij uit bed komt een lengte van 170,0 cm.

- a** Bereken na hoeveel tijd meneer Jansen volgens de formule 2,0 cm korter is geworden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

We gaan er in het vervolg van de opgave van uit dat een persoon na het opstaan 16 uur actief is, dus na 16 uur weer gaat slapen.

In figuur G.14 is de grafiek van S als functie van t getekend. Deze grafiek lijkt zo op het eerste gezicht een rechte lijn, maar door de formule weten wij dat dit niet zo is.

- b** Onderzoek met behulp van de afgeleide of er voor $0 \leq t \leq 16$ sprake is van toenemende of afnemende daling.



figuur G.14

De grafiek van S valt nagenoeg samen met de rechte lijn door de punten $(0; 1,0000)$ en $(16; 0,9872)$. Is de formule van S met de natuurlijke logaritme, zoals gepubliceerd door de Australische wetenschapper, niet onnodig ingewikkeld? We zouden voor S ook gewoon een lineaire functie van t kunnen nemen.

We vergelijken daarom de formule $S = \ln(-0,00216t + 2,7183)$ met de formule $S = -0,0008t + 1,0000$ die hoort bij de rechte lijn door de punten $(0; 1,0000)$ en $(16; 0,9872)$.

We nemen weer meneer Jansen, met een lengte van 170,0 cm bij het opstaan, als voorbeeld. Met behulp van beide formules kun je op elk tijdstip t (met $0 \leq t \leq 16$) de lengte van meneer Jansen in de loop van de dag uitrekenen. Ook kun je op elk tijdstip t het verschil tussen de uitkomsten van beide formules bekijken.

- c** Bereken het maximale verschil voor de lengte van meneer Jansen dat de twee formules kunnen opleveren.

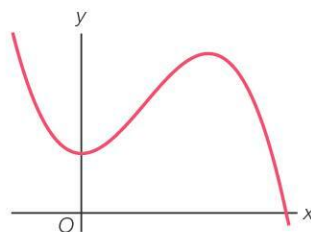
15 Examentraining

- 30 Herleid $(4a - 1) \cdot \frac{2b}{4a - 1}$.
- 31 Schrijf de formule $E = 15 \cdot (2N)^{-1,5}$ in de vorm $N = bE^c$. Rond b en c af op twee decimalen.
- 32 Gegeven is de formule $P = -0,005q^2 + 23q$.
Bereken de maximale waarde van P .
- 33 Een hoeveelheid van 649 is 5,64% van het totaal.
Hoeveel is het totaal?
- 34 Het aantal leden N van een sportvereniging is gegeven door de formule $N = \frac{500}{1 + 2 \cdot e^{-0,2t}}$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2010.
Bereken met de afgeleide in welk jaar de toename van het aantal leden het grootst was.
- 35 Gegeven is $3(P - 5) + 4(3Q + 1) = 61$.
Maak P vrij.
- 36 Hoeveel codes van vijf cijfers zijn er met de cijfers 0, 2, 4, 6 en 8?
- 37 Gegeven zijn de termen $u_2 = 6$ en $u_7 = 45,5625$. Deze termen horen bij de meetkundige rij u_n .
Stel de directe formule op van u_n .
- 38 Herleid $\frac{2}{p} + 3p \cdot \frac{5q}{2p^2}$ tot één breuk.
- 39 België heeft een oppervlakte van 30 689 km² en 11,46 miljoen inwoners.
Hoeveel m² is de oppervlakte per Belg? Rond af op gehelen.
- 40 De formule $A = 0,18 \cdot (2x - 3) \cdot \frac{x}{0,06}$ is te herleiden tot de vorm $A = ax^2 + bx$.
Bereken a en b .
- 41 Gegeven is dat y evenredig is met x . Voor $x = 12$ is $y = 69$.
Bereken y voor $x = 42$.
- 42 Stel de formule op van de lijn k door de punten $A(2, 18)$ en $B(10, 30)$.

43 Herleid $5p \cdot \frac{3}{q} \cdot \frac{1-q}{q}$.

44 De staatsschuld van de VS neemt per seconde met 45 486 dollar toe. Hoeveel dollar is dat per dag? Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.

45 Gegeven is de formule $y = 2ax^2 - 3x^3 + 5$ met $a > 0$. In figuur G.15 zie je de grafiek van y . Toon met de afgeleide aan dat y maximaal is voor $x = \frac{4}{9}a$ en druk $y_{\max}$ uit in a .



figuur G.15

46 Een hoeveelheid neemt af van 820 tot 750. Hoeveel procent is de afname?

47 Het Yosemite National Park in Californië heeft een oppervlakte van 1167 square miles. Hoeveel km^2 is dat? Rond af op gehelen. Gebruik dat 1 mile = 1,61 km.

48 De winst van een bedrijf was 31,25 miljoen euro in 2018. In 2019 was de winst 8,5% meer dan in 2018 en in 2020 was de winst 15,3% minder dan in 2019. Hoeveel was de winst in 2020?

49 Werk de haakjes weg en herleid $(2a - 1)^2 - 4(3a - 1)$.

50 Geef de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.

a $y = 5 + 3 \sin(x)$

b $y = 3 \sin(2x) + 1$

c $y = 5 \sin(\frac{1}{4}\pi x)$

51 Hoeveel getallen van vijf cijfers zijn er te maken met de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7 als elk cijfer vaker gebruikt mag worden?

52 Gegeven is de formule $z = 20 + 4^{x-2}$. Druk x uit in z .

53 Een bedrag wordt verdeeld onder A, B en C in de verhouding $A : B : C = 2 : 3 : 7$. Zo krijgt C 25 euro meer dan B. Welk bedrag werd verdeeld?

54 Gegeven is de volgende tabel.

jaar	1995	2003	2014	2020
aantal	520	840	1165	1390

- a** Bereken het aantal in 2010 met lineair interpoleren. Rond af op gehele.
- b** Bereken het aantal in 2025 met lineair extrapoleren. Rond af op gehele.
- c** Bereken met lineair interpoleren in welk jaar het aantal 760 was.

55 Bereken de afgeleide.

- a** $y = \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x}$
- b** $y = 6x^2 \cdot \sqrt{x}$
- c** $y = \frac{4}{6x} + \frac{6x}{4}$

56 Schrijf $\frac{6x+10}{x+3} - 2x$ als één breuk.

57 Een hoeveelheid neemt toe van 115 tot 145.
Hoeveel procent is de toename?

58 Maak b vrij bij $6a - 5b = 18$.

59 Beredeneer of bij de formule een stijgende of dalende grafiek hoort en wat de grenswaarde is.

- a** $y = 75 - \frac{10}{3x+1}$ met $x > 0$
- b** $y = \frac{50}{2x^2+1} + 30$ met $x > 0$
- c** $y = \frac{100 \cdot 0,75^x}{3\sqrt{x}}$ met $x > 0$

60 Een bedrijf verkoopt per jaar tussen de 150 en 550 van zijn artikelen.

De jaarlijkse winst wordt gegeven door de formule

$W = -0,01q^2 + 7,5q - 650$. Hierin is q het aantal verkochte artikelen en W de winst in honderden euro's.

- a** Bereken hoeveel winst per artikel het bedrijf maakt als de jaarverkoop 400 stuks is.
- b** Bereken de maximale winst.

61 Schrijf $\frac{2}{3}a^{-4}b^2$ zonder negatieve exponenten.

- 62** Tussen t en A bestaat een lineair verband. Voor $t = 12$ is $A = 78$ en voor $t = 28$ is $A = 22$.
Stel de formule op van A .
- 63** Bereken de afgeleide.
a $y = x^2 \cdot e^{3x+1}$
b $y = \frac{2x-1}{3x+4}$
- 64** Schrijf $(a^{-2})^4 \cdot a^5$ als macht van a .
- 65** Een bedrijf maakt codes van vijf, zes en zeven letters met de letters A en B.
Hoeveel van deze codes zijn er met meer A's dan B's?
- 66** Op een dag met zware neerslag viel er in De Bilt 55 mm regen.
Hoeveel liter regen viel er die dag in de gemeente De Bilt? Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op twee decimalen.
Gebruik dat de oppervlakte van de gemeente De Bilt $67,13 \text{ km}^2$ is.
- 67** Gegeven is de formule $y = 5 - \frac{6}{3-2x}$ met $x > 1\frac{1}{2}$.
Toon met behulp van de afgeleide aan dat de grafiek van y dalend is.
- 68** Gegeven is de rij $u_n : 800, 840, 882, 926, 1, \dots$
a Stel de recursieve en de directe formule op van de rij. Neem als beginterm u_0 .
b Hoeveel termen van de rij zijn kleiner dan 1500?
- 69** Een hoeveelheid neemt per jaar met 5,8% af.
Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.
- 70** Op de grafiek van $y = 0,08(x-5)^2 + 1$ wordt eerst de verschuiving $(2, 4)$ toegepast en vervolgens herschaling in verticale richting met factor 3.
Stel van de beeldgrafiek de formule op en vermeld de coördinaten van de top.
- 71** Een hoeveelheid neemt met 18,4% toe tot 3015.
Hoeveel was de oorspronkelijke hoeveelheid?
- 72** Hoeveel getallen van vijf cijfers zijn er te maken met de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7 als elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden?
- 73** Maak x vrij bij de formule $y = 0,4 \cdot \sqrt[3]{x} + 2$.
- 74** De lijn l gaat door het punt $A(6, 9)$ en $\text{rc}_l = -\frac{1}{3}$.
Stel de formule op van l .

75 Schrijf de formule $y = \frac{108}{(3x^2)^3}$ in de vorm $y = ax^n$.

76 Differentieer.

a $f(x) = (x^2 - 2)(2x + 5)$

b $K(q) = \frac{1}{3}q^3 + 2q(q - 2) + 5$

c $L(p) = 2p^5 - 3a^2p^2 + 2a - 3p + 4$

77 Gegeven is de formule $K = 2 \cdot 10^{-7}q^3 - 3 \cdot 10^{-4}q^2 + 0,2q + 100$.

Hierin is q de dagproductie in honderdtallen en K de kosten per dag in honderden euro's.

Bereken de gemiddelde toename van de kosten als de dagproductie toeneemt van 10 000 tot 20 000 stuks.

78 Gegeven is de formule $A = 20x^{1,7}$.

Bereken hoeveel keer zo groot A wordt als x verdubbelt. Rond af op twee decimalen.

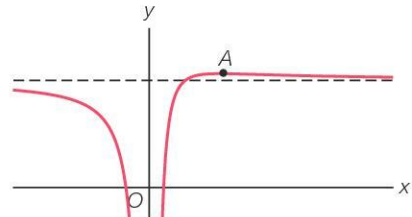
79 Schrijf $\frac{5}{6}a^{-4}b^{\frac{2}{3}}$ zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

80 Op hoeveel manieren kun je een feestcommissie van 3 jongens en 2 meisjes kiezen uit een klas met 16 jongens en 13 meisjes?

81 Hiernaast zie je de grafiek van $y = 5 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x}$.

a Bereken met de afgeleide de coördinaten van de top A .

b Met welke snelheid verandert y voor $x = 1$?



figuur G.16

82 Een hoeveelheid neemt per dag met 8,6% toe.

a Hoeveel procent is de toename per week?

b Hoeveel procent is de toename per tien uur?

83 Bij de formule $N(x) = 84 + 43,2 \cdot \log(x)$ geldt:

als x verdubbelt, dan neemt N steeds met hetzelfde getal toe.

Toon dit aan en bereken dit getal.

84 Schrijf de formule $y = \frac{6\sqrt{x}}{2x \cdot \sqrt[3]{x}}$ in de vorm $y = ax^p$.

85 De diameter van een virusdeeltje is 50 keer zo klein als de diameter van een bacterie. De bacterie heeft een diameter van 2 micrometer.

Wat is de diameter van het virusdeeltje? Geef het antwoord in meters in

de wetenschappelijke notatie. Gebruik dat 1 micrometer = $\frac{1}{1000}$ mm.

- 86** Gegeven is de formule $y = 3 + 15 \sin(2\pi(x - 0,1))$ met $0 \leq x \leq 1$.
- Bereken zonder GR de maximale waarde van y en de bijbehorende x .
 - Bereken zonder GR de minimale waarde van y en de bijbehorende x .
 - Bereken in twee decimalen de helling van de grafiek voor $x = 0,5$.
- 87** Differentieer.
- $y = 5(x^2 - 4x)^{0,6}$
 - $y = 10\sqrt{3 - x}$
- 88** Een hoeveelheid neemt per 8 uur met 10,9% af.
- Hoeveel procent is de afname per 50 uur?
 - Hoeveel procent is de afname per uur?
- 89** Schrijf $\frac{x^5}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}$ als macht van x .
- 90** Sandra loopt een afstand van 6,5 km met een gemiddelde snelheid van 14,6 km/uur.
Hoeveel minuten en seconden doet zij hierover?
- 91** Het aantal bezoekers N van een winkel is gegeven door de formule $N = -t^3 + 10t^2 + 3t$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 9:00 uur.
Bereken met de afgeleide hoe laat de toename van het aantal bezoekers het grootst was. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.
- 92** Bereken de afgeleide.
- $y = 250 e^{4x}$
 - $P = 16 e^{0,3q^2}$
 - $y = 12 \cdot 3^{2x-4}$
- 93** Gegeven is de formule $h = 0,02m^3 + 0,4m^2$. Hierin is h de hoogte in cm en m de tijd in maanden.
Zet de formule om naar de vorm $H = aj^3 + bj^2$ met H de hoogte in meters en j de tijd in jaren.
- 94** Gegeven is de formule $M = 25t^b$. Voor $t = 5$ is $M = 70$.
Bereken b . Rond af op twee decimalen.
- 95** Schrijf de formule $N = 75 \cdot {}^2\log(t)$ in de vorm $N = a \cdot \log(t)$. Rond a af op gehele.
- 96** Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 3$ is $N = 326$ en op $t = 11$ is $N = 77$. Hierbij is t in jaren.
Stel de formule op van N .
- 97** Maak a vrij bij de formule $N = 4\sqrt{2a - 3}$.

- 98** Het aantal meloenen dat een marktkoopman op een dag verkoopt, is omgekeerd evenredig met de prijs. Bij een prijs van 80 cent per stuk verkoopt hij 135 meloenen op een dag.
Hoeveel meloenen verkoopt hij op een dag bij een prijs van € 1,10 per stuk?

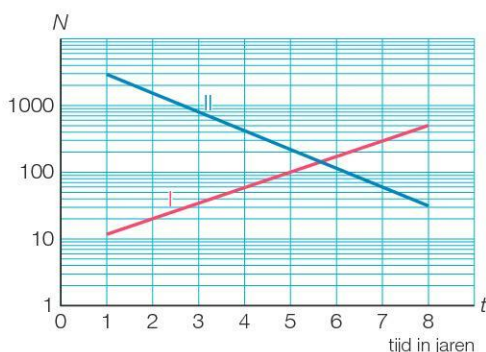
99 Maak S vrij bij de formule $N = 12 - \frac{150}{2S - 1}$.

- 100** Hiernaast zie je de grafieken I en II op logaritmisch papier.

- a** Stel de formule op van grafiek I.
b Stel de formule op van grafiek II.

- 101** Gegeven is de formule $y = 2x - 4\sqrt{x}$.

- a** Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee y verandert voor $x = 4$.
b Toon met de afgeleide aan dat de raaklijn in het punt $A(1, -2)$ horizontaal is.



figuur G.17

- 102** Bereken het aantal rangschikkingen van de letters van het woord KNOOPPUNTEN.
- 103** Herleid de formule $A = 20 \cdot \sqrt[3]{30x}$ tot de vorm $A = c \cdot \sqrt[3]{x}$. Rond c af op één decimaal.
- 104** Gegeven is de rij u_n : 980, 963, 946, 929, 912, ...
a Stel de recursieve en de directe formule op van de rij. Neem als beginterm u_0 .
b Hoeveel positieve termen heeft de rij?
- 105** Beredeneer bij de volgende formules wat het verzadigingsniveau is.
a $N = \frac{600}{3 + 14 \cdot 0,96^t}$
b $N = 450(3 - 0,81^t)$
c $N = 50 - \frac{30}{t + 2}$
- 106** Schrijf de formule $N = 15 \cdot 1,15^{2t-1}$ in de vorm $N = b \cdot e^{ct}$. Rond b af op één decimaal en c op drie decimalen.
- 107** Geef van de grafiek van $y = 0,3(x - 0,16)^4 + 2,2$ de coördinaten van de top.
- 108** Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. Op $t = 4$ is $N = 101$ en op $t = 12$ is $N = 161$. Hierbij is t in dagen.
Stel de formule op van N .

109 Schrijf de formule $N = 40 + {}^3\log(2t)$ in de vorm $N = a + b \cdot \ln(t)$. Rond a af op één decimaal en b op twee decimalen.

110 Onderzoek met de grafiek van de afgeleide welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek van y hoort.

a $y = 0,5(1 + 2e^{0,6x})$

b $y = \frac{15}{1 + e^{0,2x}}$ met $x \geq 0$

111 Maak p vrij bij de formule $K = 16(p - 4)^2$ met $p \geq 4$.

112 De wekelijkse winst van een bedrijf is gegeven door de formule $W = -0,2q^3 + 9q^2 - 250$. Hierin is W de wekelijkse winst in euro's en q de weekproductie.

Bereken met de afgeleide de maximale winst per week.

113 Schrijf de formule $N = 35 \cdot e^{0,15t-3}$ in de vorm $\ln(N) = at + b$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

114 De totale lengte van de drie zijden van de dwarsdoorsnede van een rechthoekige goot is 100 cm.

Bereken met de afgeleide de maximale oppervlakte van de dwarsdoorsnede van de goot.



figuur G.18

115 Maak a vrij bij de formule $P = \frac{2a + 1}{3a - 1}$.

116 Schrijf de formule $y = 16 \cdot 3^{4-x}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$.

117 Gegeven is de formule $N(k) = 12,5 + 4,55 \cdot \ln(k)$. Als k drie keer zo groot wordt, dan neem N steeds met hetzelfde getal toe.

Toon dit aan en geef dit getal. Rond af op gehele.

118 Een hoeveelheid halveert elke vijf jaar en vier maanden.

Bereken hoeveel procent de afname per jaar is.

119 Beredeneer aan de hand van de formules of de grafieken van de volgende formules voor $t \geq 0$ stijgend of dalend zijn.

a $N = \frac{1500}{1 + 20 \cdot 0,91^t}$

b $N = 10 + 20(1 - 0,98^t)$

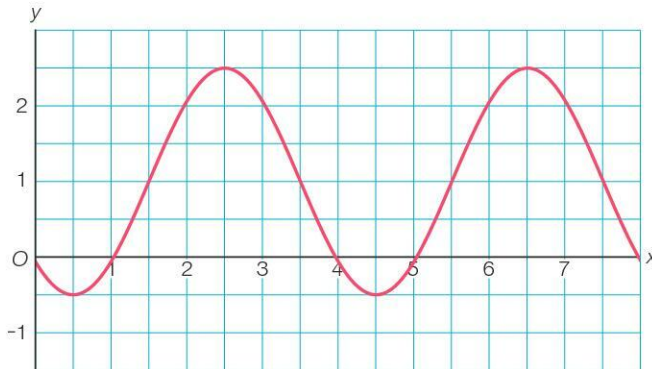
c $N = 25 - \frac{10}{3 - 0,75^t}$

- 120** Gegeven is de formule $y = -x^2 + 2x - 3$.
Bereken met de afgeleide de helling van de grafiek in het punt A met $x_A = -3$.
- 121** Stel de formule op van de beeldgrafiek van $y = -\frac{1}{2}(x + 4)^3 + 5$ bij de verschuiving $(6, 2)$.
- 122** Teken op $[0, 4]$ de grafiek van $y = -2 + 5 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - \frac{3}{4}))$.
- 123** Schrijf de formule $N = 25 \cdot 1,85^{t-2}$ in de vorm $t = a + s \log(bN)$.
- 124** Gegeven zijn de rijen
 $A(n)$: 750, 762, 774, 786, ...
 $B(n)$: 100, 120, 144, 172, 8, ...
 Bereken vanaf de hoeveelste term geldt $B(n) > A(n)$.
- 125** Gegeven is de formule $N = 110e^{2t} - 55t$ met $t \geq 0$.
Toon met behulp van de afgeleide aan dat de grafiek van N stijgend is.
- 126** Herleid $5a^2 - \frac{3}{a^2}$ tot één breuk.
- 127** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 7,3% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- 128** Schrijf de formule $\log(N) = 2,36 + 1,5 \cdot \log(t)$ in de vorm $N = at^b$. Rond a af op gehelen.
- 129** Combineer de formules $K = 5p + 4q + 120$ en $2p + 3q = 60$ tot de vorm $K = ap + b$.
- 130** Bereken $\sum_{k=1}^{15} (k^2 + 3k)$.
- 131** Gegeven is de formule $K = aq^{1,15}$. Voor $q = 60$ is $K = 499$.
a Bereken K voor $q = 100$. Rond af op gehelen.
b Schrijf de formule in de vorm $q = b \cdot K^c$. Rond b en c af op twee decimalen.
- 132** Hoeveel mogelijkheden zijn er om met vier dobbelstenen in totaal 21 ogen te gooien?
- 133** Maak t vrij bij de formule $N = 4 \cdot e^{0,4t}$.

134 Ronald loopt 9,8 km in 49 minuten en 40 seconden.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in km/uur. Rond af op twee decimalen.

135 Een hoeveelheid verdubbelt elke drie jaar.
Bereken het groeipercentage per jaar.

136 Hieronder is een sinusöide getekend.
Stel bij de sinusöide een formule op van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$.



figuur G.19

137 Gegeven is de formule $N = \frac{40}{t} + 6$ met $t > 0$.

- a Berekeneer wat de grenswaarde is.
- b Berekeneer hoe uit de formule van N volgt dat de grafiek van N dalend is.

138 Schrijf de formule $5 \cdot \log(N) = 1,215t + 13,7$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op gehele en g op twee decimalen.

139 Schrijf de formule $T = \frac{t^2 - 2}{t} + \frac{10}{\left(\frac{3}{t}\right)} + \frac{7}{2t}$ in de vorm $T = at + \frac{b}{2t}$.

140 Gegeven is de recursieve formule $u(n) = 3 \cdot u(n - 1) - 2 \cdot u(n - 2)$ met $u(1) = 5$ en $u(2) = 6$.

- a Bereken $u(10)$.
- b Vanaf welke n is $u(n)$ meer dan 100 000?

141 De formules $F = 3pq + 40$ en $2p - 5q = 40$ zijn te combineren tot de vorm $F = ap^2 + bp + c$.
Bereken a , b en c .

142 Differentieer.

a $y = \ln(3x - 7)$

b $y = 2x - 4 \cdot \ln(x^2 + 2x)$

c $y = 2x - {}^3\log(4x)$

143 Herleid $\frac{7}{2x} - \frac{5}{3x}$ tot één breuk.

144 De formule $P = \log(2x - 500) - 3$ is te schrijven in de vorm
 $x = a + b \cdot 10^P$.
Bereken a en b .

145 Gegeven is de formule $P = n \cdot \ln(2n + 1)$ met $n > 0$.
Toon met behulp van de afgeleide aan dat de grafiek van P stijgend is.

146 In een code van 9 letters staan 2 A's, 3 B's en 4 C's.
Hoeveel van deze codes zijn er waarbij de 3 B's naast elkaar staan?

147 Schrijf de formule $N = 25 \cdot 1,85^{t-2}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op één decimaal.

148 Onderzoek met de formule van de afgeleide welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek van y hoort.

a $y = \frac{-5}{2x+4}$ met $x \geq 0$

b $y = 7,5 - 1,15^x$

149 Gegeven is de formule $N = 500 + 150 \sin(0,01\pi t)$ met $0 \leq t \leq 200$.
a Bereken zonder GR de maximale waarde van N en de bijbehorende t .
b Bereken zonder GR de minimale waarde van N en de bijbehorende t .
c Bereken de maximale helling van de grafiek.

150 Gegeven is de rij $u(n)$: 150, 156, 162, 168, ...
Bereken de som van de eerste 20 termen.

Formuleblad

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
verschilregel	$v(x) = f(x) - g(x)$	$v'(x) = f'(x) - g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$	$g > 0, g \neq 1, a > 0$
${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0, p \neq 1$

Examenwerkwoorden

In onderstaande lijst staan de relevante examenwerkwoorden voor wiskunde A. Als in een wiskunde-examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, geldt de betekenis die hiervan in deze lijst is gegeven. Deze lijst met examenwerkwoorden is niet uitputtend.

Aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Afleiden van bijvoorbeeld een formule of een eenheid	Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
Berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.
Noemen, (aan) geven wat, welke, wanneer, hoeveel	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist tenzij anders is aangegeven.
Onderzoeken of	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen.
- De toets Ans en fouten verbeteren.
- Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen.
- Decimaal getal omzetten in breuk.

vwo A/C deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 19

Formules en grafieken

- Formules invoeren en grafieken plotten.
- Tabellen maken.
- De opties snijpunt, nulpunt, maximum en minimum.

vwo A/C deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 37

Helling

- De richtingscoëfficiënt van een raaklijn.

vwo A deel 3
hoofdstuk 8
bladzijde 27

De binomiale verdeling

- Binomiale kansen berekenen.
- Cumulatieve binomiale kansen berekenen.
- Grenzen aanvaardingsgebied berekenen.

vwo A deel 3
hoofdstuk 9
bladzijde 76
hoofdstuk 11
bladzijde 191

De normale verdeling

- Oppervlakten berekenen.
- Grenzen berekenen.
- Het berekenen van μ en σ .

vwo A deel 3
hoofdstuk 9
bladzijde 85,
86 en 89

Het rijen-invoerscherm

- Rijen invoeren.
- Tabel maken bij een rij.

vwo A deel 4
hoofdstuk 12
bladzijde 23

Allerlei

- Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR.
-

Overzicht routes

12 Rijen

12.1 Rekenkundige en meetkundige rijen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

12.2 Notaties en rijen op de GR

opgave	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

32	33	34	35	36	37	38	39	40

12.3 Toepassingen van rijen

opgave	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

12.4 Somrijen

opgave	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

66	67	68	69	70	71	72	73

13 Allerlei formules

13.1 Sinusoïden

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
☐ basis														
☐ midden														
☒ uitdagend														

13.2 Toepassingen van sinusoiden

opgave	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
☐ basis										
☐ midden										
☒ uitdagend										

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34

13.3 Formules herschrijven

opgave	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
☐ basis													
☐ midden													
☒ uitdagend													

	48	49	50	51	52	53

13.4 Omvormen van formules met exponenten en logaritmen

opgave	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
☐ basis										
☐ midden										
☒ uitdagend										

	64	65	66	67	68	69	70	71

14 Toepassingen van de differentiaalrekening

14.1 Optimaliseren

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

14.2 Regels voor de afgeleide

opgave	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

14.3 Redeneren met formules

opgave	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

14.4 Redeneren met de afgeleide

opgave	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
□ basis											
⊙ midden											
* uitdagend											

14.5 De afgeleide en soorten van stijgen en dalen

opgave	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

Trefwoordenregister

A

amplitude 51

B

beginterm 12

C

constant verschil 14

constante factor 16

D

directe formule 12

E

evenwichtsstand 51

F

factor 16

Fibonacci 25

formule

directe - 12

recursieve - 12

formules combineren 74

G

gelijknamige breuken 67

grenswaarde 111

K

kruislings

vermenigvuldigen 71

M

meetkundige rij 16

N

notaties bij rijen 22

numerieke afgeleide 104

O

optimaliseren 98

P

periode 51, 53

periodiek verschijnsel 49

Pisa, Leonardo van 25

productregel voor het
differentiëren 106

Q

quotiëntregel voor het
differentiëren 107

R

radiaal 51, 52

recursieve formule 12

redeneren 110, 114

rekenkundige rij 14

rij 11

meetkundige - 16

rekenkundige - 14

S

sigmanotatie 33

sinusoïde 53

somrij 34

T

termen van een rij 11

U

uitdelen 68

V

verzadigingsniveau 111

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Richard van de Pol, Tilburg; Haasart, Wim de Haas, Rhenen

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Shutterstock: p. 6-7, 28 b, 38, 46-47, 48 (b, o), 79, 87 b, 90-91, 113, 116, 117, 122, 131, 178 r, 225, 236

Getty Images: p. 25, 161

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Kim van Dam: p. 28 o

ANP Foto / Novum RegioFoto / Rein van Zanen: p. 39

Dreamstime: p. 63

CITO: p. 64 o

Patrick Nadeau, Designer Architecte dplg, Parijs: p. 64 b

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Robin van Lonkhuijsen: p. 78

Klaus-Peter Wolf / Imagebroker / Alamy Stock Photo: p. 85

Kotsy / Wikimedia Commons (CC BY-SA 3.0): p. 87 o

ANP Foto / Robin Utrecht: p. 128

iStockphoto: p. 136-137, 180, 203, 213, 227 b, o
ANP Foto / Hollandse Hoogte / Vincent Jannink: p. 145, 229

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Buiten-Beeld / Astrid Kant: p. 146

Florian.Arnd / Wikimedia Commons (CC BY-SA 3.0): p. 178 l

Cito 2018-2: p. 179, 215

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Patricia Rehe: p. 181

Cito 2019-1: p. 219, 221

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Marco van Middelkoop lucht fotografie: p. 232

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:

Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 22

© 2022 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/
Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73704-7



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



Noordhoff



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-73704-7



9 789001 737047