

& GETAL RUIMTE

| B



Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen
vwo B deel 1

Twaalfde editie, 2020

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J.H. Dijkhuis
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.M.H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. van Haren
B.W. van Laarhoven
R. Meijerink

Inhoud

1	Functies en grafieken	4
2	De afgeleide functie	38
3	Meetkunde	66
4	Vergelijkingen en herleidingen	95
	Gemengde opgaven	129

1 Functies en grafieken

Voorkennis Lineaire vergelijkingen en ongelijkheden

Bladzijde 9

- 1** a $10 - 3(x + 1) = 5x - (2x - 1)$
 $10 - 3x - 3 = 5x - 2x + 1$
 $-6x = -6$
 $x = 1$
- b $\frac{4}{5}x - 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}x - 3$
 $12x - 20 = 35x - 45$
 $-23x = -25$
 $x = 1\frac{2}{23}$
- c $\frac{2t-3}{4} = t - 1\frac{1}{3}$
 $3(2t-3) = 12t - 16$
 $6t - 9 = 12t - 16$
 $-6t = -7$
 $t = 1\frac{1}{6}$
- d $1,6(2x - 1) = 1,4x - 2$
 $3,2x - 1,6 = 1,4x - 2$
 $1,8x = -0,4$
 $x = -\frac{2}{9}$
- e $\frac{2}{7}(4x - 1) = \frac{3}{4}(1 - 5x)$
 $8(4x - 1) = 21(1 - 5x)$
 $32x - 8 = 21 - 105x$
 $137x = 29$
 $x = \frac{29}{137}$
- f $5 - \frac{3t-1}{6} = \frac{5t+1}{4} - \frac{2t+3}{3}$
 $60 - 2(3t-1) = 3(5t+1) - 4(2t+3)$
 $60 - 6t + 2 = 15t + 3 - 8t - 12$
 $-13t = -71$
 $t = 5\frac{6}{13}$

Bladzijde 10

- 2** a $3x > 5x$
 $-2x > 0$
 $x < 0$
- b $\frac{1}{6}x + 3 < \frac{1}{2}x - 2$
 $x + 18 < 3x - 12$
 $-2x < -30$
 $x > 15$
- c $\frac{3p-4}{3} \leq 2p - 1\frac{1}{6}$
 $2(3p-4) \leq 12p - 7$
 $6p - 8 \leq 12p - 7$
 $-6p \leq 1$
 $p \geq -\frac{1}{6}$
- d $1,5(1,6x - 2) < 2,5(1,4x - 3)$
 $2,4x - 3 < 3,5x - 7,5$
 $-1,1x < -4,5$
 $-11x < -45$
 $x > 4\frac{1}{11}$
- e $\frac{3}{8}(5x - 2) > \frac{1}{4}(2x - 5)$
 $3(5x - 2) > 2(2x - 5)$
 $15x - 6 > 4x - 10$
 $11x > -4$
 $x > -\frac{4}{11}$
- f $10 - \frac{2a-3}{6} \geq \frac{4a-1}{5} - \frac{3a+2}{15}$
 $300 - 5(2a-3) \geq 6(4a-1) - 2(3a+2)$
 $300 - 10a + 15 \geq 24a - 6 - 6a - 4$
 $-28a \geq -325$
 $a \leq 11\frac{17}{28}$

1.1 Lineaire functies

Bladzijde 11

- 1** a Het getal 2 geeft aan dat als je vanaf de lijn 1 naar rechts gaat, je 2 omhoog moet gaan om weer op de lijn te komen.
Het getal 3 geeft aan dat de lijn de y -as in het punt $(0, 3)$ snijdt.
- b Stel $l: y = ax + b$.
Het snijpunt met de y -as is $(0, 2)$, dus $b = 2$.
 l gaat door $(0, 2)$ en $(2, 1)$, dus $a = \frac{\text{verticaal}}{\text{horizontaal}} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.
Je krijgt $l: y = -\frac{1}{2}x + 2$.
- c Stel $m: y = ax + b$.
Het snijpunt met de y -as is $(0, -1)$, dus $b = -1$.
 m is evenwijdig met l , dus $a = -\frac{1}{2}$.
Je krijgt $m: y = -\frac{1}{2}x - 1$.

Bladzijde 12

2 a Stel $l: y = ax + b$.
 $a = rc_l = -2$

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } A(-2, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot -2 + b = 3 \\ 4 + b = 3 \\ b = -1 \end{array}$$

Dus $l: y = -2x - 1$.

b Stel $k: y = ax + b$.
 $k \parallel m$, dus $a = rc_m = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 4x + b \\ \text{door } B(-5, 21) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot -5 + b = 21 \\ -20 + b = 21 \\ b = 41 \end{array}$$

Dus $k: y = 4x + 41$.

3 a Stel $p: y = ax + b$.
 $p \parallel q$, dus $a = rc_q = -\frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } C(-18, 30) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot -18 + b = 30 \\ 6 + b = 30 \\ b = 24 \end{array}$$

Dus $p: y = -\frac{1}{3}x + 24$.

b Snijpunt met de x -as: $y = 0$ geeft $-\frac{1}{3}x + 24 = 0$

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{3}x = -24 \\ x = 72 \end{array}$$

Dus het snijpunt met de x -as is $(72, 0)$.

Snijpunt met de y -as: $x = 0$ geeft $y = -\frac{1}{3} \cdot 0 + 24 = 24$.

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, 24)$.

4 a $k: y = ax + 10$

$$\left. \begin{array}{l} \text{door } P(-20, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot -20 + 10 = 0 \\ -20a = -10 \\ a = \frac{1}{2} \end{array}$$

b $k: y = ax + 10$

$$\left. \begin{array}{l} \text{door } Q(2, -4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 2 + 10 = -4 \\ 2a = -14 \\ a = -7 \end{array}$$

c $k: y = ax + 10$

$$\left. \begin{array}{l} \text{door } O(0, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 0 + 10 = 0 \\ 10 = 0 \text{ klopt niet} \end{array}$$

Er is dus geen a mogelijk.

5 a Stel $k: y = ax + b$.
 $k \parallel l$, dus $a = rc_l = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(4, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 3 \\ -2 + b = 3 \\ b = 5 \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{2}x + 5$.

b $m: y = ax + 3$

$$\left. \begin{array}{l} \text{door } B(-4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot -4 + 3 = 2 \\ -4a + 3 = 2 \\ -4a = -1 \\ a = \frac{1}{4} \end{array}$$

c p snijden met de x -as geeft $-1\frac{1}{2}x + 6 = 0$

$$\begin{aligned} -1\frac{1}{2}x &= -6 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Dus p snijdt de x -as in $(4, 0)$.

$$\begin{aligned} n: y = 2\frac{1}{2}x + b \bigg\} & \begin{aligned} 2\frac{1}{2} \cdot 4 + b &= 0 \\ 10 + b &= 0 \\ b &= -10 \end{aligned} \\ \text{door } (4, 0) \end{aligned}$$

6 a $m: y = -2x + b \bigg\} \begin{aligned} -2 \cdot -8 + b &= 0 \\ 16 + b &= 0 \\ b &= -16 \end{aligned}$
 door $P(-8, 0)$

b $m \parallel l$ geeft $rc_l = rc_m$, dus $a = -2$.
 $m: y = -2x + b \bigg\} \begin{aligned} -2 \cdot 10 + b &= 7 \\ -20 + b &= 7 \\ b &= 27 \end{aligned}$
 door $Q(10, 7)$

c k gaat door $R(8, 6)$ want $\frac{1}{2} \cdot 8 + 2 = 6$.

$$\begin{aligned} l: y = ax - 4 \bigg\} & \begin{aligned} a \cdot 8 - 4 &= 6 \\ 8a - 4 &= 6 \\ 8a &= 10 \\ a &= 1\frac{1}{4} \end{aligned} \\ \text{door } R(8, 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m: y = -2x + b \bigg\} & \begin{aligned} -2 \cdot 8 + b &= 6 \\ -16 + b &= 6 \\ b &= 22 \end{aligned} \\ \text{door } R(8, 6) \end{aligned}$$

d k snijden met de x -as geeft $\frac{1}{2}x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x &= -2 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Dus het snijpunt met de x -as is $(-4, 0)$.

$$\begin{aligned} l: y = ax - 4 \bigg\} & \begin{aligned} a \cdot -4 - 4 &= 0 \\ -4a &= 4 \\ a &= -1 \end{aligned} \\ \text{door } (-4, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m: y = -2x + b \bigg\} & \begin{aligned} -2 \cdot -4 + b &= 0 \\ 8 + b &= 0 \\ b &= -8 \end{aligned} \\ \text{door } (-4, 0) \end{aligned}$$

7 a Kies x zo dat de formule geen a meer bevat.

Voor $k: y = ax + 1$ geldt dat

$$x = 0 \text{ geeft } y = a \cdot 0 + 1 = 1, \text{ dus } A(0, 1).$$

Voor $l: y = 2ax - 2a$ geldt dat

$$y = 2ax - 2a = 2a(x - 1) \text{ en}$$

$$x = 1 \text{ geeft } y = 2a(1 - 1) = 0, \text{ dus } B(1, 0).$$

b k en l snijden in A , dus

$$\begin{aligned} l: y = 2ax - 2a \bigg\} & \begin{aligned} 2a \cdot 0 - 2a &= 1 \\ -2a &= 1 \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \\ \text{door } A(0, 1) \end{aligned}$$

k en l snijden in B , dus

$$\begin{aligned} k: y = ax + 1 \bigg\} & \begin{aligned} a \cdot 1 + 1 &= 0 \\ a + 1 &= 0 \\ a &= -1 \end{aligned} \\ \text{door } B(1, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad & \left. \begin{array}{l} k: y = ax + 1 \\ x_C = 10 \end{array} \right\} y = a \cdot 10 + 1 = 10a + 1 \\ & \left. \begin{array}{l} l: y = 2ax - 2a \\ x_C = 10 \end{array} \right\} y = 2a \cdot 10 - 2a = 18a \end{aligned}$$

Formules aan elkaar gelijkstellen geeft $10a + 1 = 18a$

$$\begin{aligned} -8a &= -1 \\ a &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } y_C = \frac{1}{8} \cdot 10 + 1 = 2\frac{1}{4}.$$

Bladzijde 13

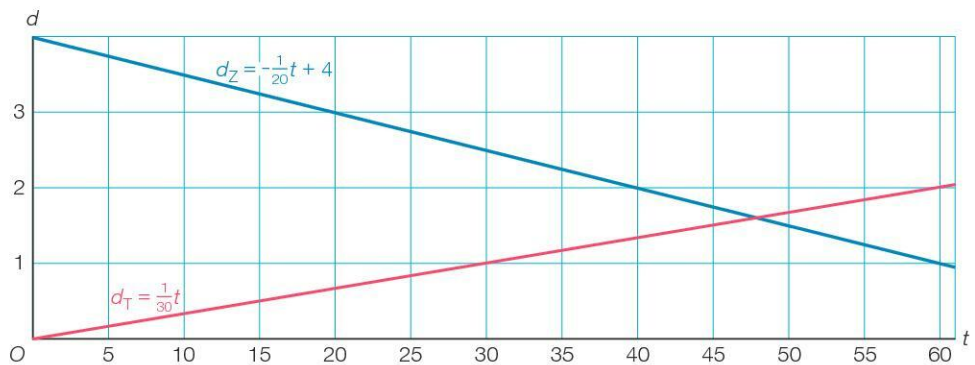
- 8 a Op $t = 0$ is $d_T = 0$.
Stel $d_T = at$.

Elke 3 dagen wordt de diepte 0,1 meter meer, dus $a = \frac{0,1}{3} = \frac{1}{30}$.

$$\text{Dus } d_T = \frac{1}{30}t.$$

- b Het meer heeft een diepte van 4 meter. Op de eerste dag kunnen de baarzen nog leven op deze 4 meter diepte. Elke dag kunnen de baarzen 0,05 meter ($= \frac{1}{20}$ meter) minder diep komen.
Dus $d_Z = -\frac{1}{20}t + 4$.

$$\begin{array}{l} \text{c} \quad d_T = \frac{1}{30}t \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & 30 \\ \hline d_T & 0 & 1 \end{array} \\ d_Z = -\frac{1}{20}t + 4 \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & 20 \\ \hline d_Z & 4 & 3 \end{array} \end{array}$$



Figuur, zie hiernaast.

$$\frac{1}{30}t = -\frac{1}{20}t + 4$$

$$2t = -3t + 240$$

$$5t = 240$$

$$t = 48$$

Op $t = 48$ is het 18 augustus, dus vanaf 18 augustus.

- 9 Stel dat ieder van de 20 mensen x euro betaalt, dan betalen ze in totaal $20x$ euro.
Het bedrag van de rekening is dus $20x - 3$ euro.
De 21 mensen betalen ieder $x - 3$ euro en dat is in totaal $21(x - 3)$ euro.
Het bedrag van de rekening is dus $21(x - 3) - 10$ euro.
Dit geeft de vergelijking $20x - 3 = 21(x - 3) - 10$

$$20x - 3 = 21x - 63 - 10$$

$$-x = -70$$

$$x = 70$$

Het bedrag van de rekening is dus $20 \cdot 70 - 3 = 1397$ euro.

Bladzijde 14

- 10 a Ga je 4 naar rechts, dan ga je 3 omhoog, dus ga je $\frac{3}{4}$ omhoog.
Dus $rc_l = \frac{3}{4}$.
b Deel $y_B - y_A$ door $x_B - x_A$. Dus $rc_l = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{4}$.

Bladzijde 16

- 11 a Daarbij hoort $\Delta x = 2 - 6 = -4$.
Nu is $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 5}{-4} = \frac{-6}{-4} = 1\frac{1}{2}$.
Ze krijgt dus ook $rc_l = 1\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{b } y = 1\frac{1}{2}x + b \bigg\} & 1\frac{1}{2} \cdot 6 + b = 5 \\ \text{door } B(6, 5) \bigg\} & 9 + b = 5 \\ & b = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } v = 0 \text{ geeft } -15t + 120 &= 0 \\ -15t &= -120 \\ t &= 8 \end{aligned}$$

Dus na 8 seconden.

12 a Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 1}{1 - -1} = 1\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} y = 1\frac{1}{2}x + b \bigg\} & 1\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 4 \\ \text{door } B(1, 4) \bigg\} & 1\frac{1}{2} + b = 4 \\ & b = 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus $l: y = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.

b Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 5}{2 - -3} = -1$.

$$\begin{aligned} y = -x + b \bigg\} & -1 \cdot 2 + b = 0 \\ \text{door } D(2, 0) \bigg\} & b = 2 \end{aligned}$$

Dus $k: y = -x + 2$.

c Stel $m: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 3}{-7 - 5} = 0$.

$$\begin{aligned} y = b \bigg\} & b = 3 \\ \text{door } E(5, 3) \bigg\} & \\ \text{Dus } m: y &= 3. \end{aligned}$$

d Stel $n: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{250 - 360}{160 - 180} = 5\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} y = 5\frac{1}{2}x + b \bigg\} & 5\frac{1}{2} \cdot 180 + b = 360 \\ \text{door } G(180, 360) \bigg\} & 990 + b = 360 \\ & b = -630 \end{aligned}$$

Dus $n: y = 5\frac{1}{2}x - 630$.

13 a Stel $K = am + b$.
 $m = 5 \text{ en } K = 10 \bigg\} a = \frac{\Delta K}{\Delta m} = \frac{115 - 10}{12 - 5} = 15$
 $m = 12 \text{ en } K = 115 \bigg\}$

$$\begin{aligned} K = 15m + b \bigg\} & 15 \cdot 5 + b = 10 \\ m = 5 \text{ en } K = 10 \bigg\} & 75 + b = 10 \\ & b = -65 \end{aligned}$$

Dus $K = 15m - 65$.

b Stel $F = aR + b$.
 $R = 15 \text{ en } F = 300 \bigg\} a = \frac{\Delta F}{\Delta R} = \frac{138 - 300}{42 - 15} = -6$
 $R = 42 \text{ en } F = 138 \bigg\}$

$$\begin{aligned} F = -6R + b \bigg\} & -6 \cdot 15 + b = 300 \\ R = 15 \text{ en } F = 300 \bigg\} & -90 + b = 300 \\ & b = 390 \end{aligned}$$

Dus $F = -6R + 390$.

c Stel $g = an + b$ met $a = \frac{\Delta g}{\Delta n} = \frac{49 - 35}{10 - 6} = 3\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} g = 3\frac{1}{2}n + b \bigg\} & 3\frac{1}{2} \cdot 6 + b = 35 \\ \text{door } (6, 35) \bigg\} & 21 + b = 35 \\ & b = 14 \end{aligned}$$

Dus $g = 3\frac{1}{2}n + 14$.

14 a Stel $p = aq + b$ met $a = \frac{\Delta p}{\Delta q}$
 bij $q = 150$ hoort $p = 7,75$
 bij $q = 425$ hoort $p = 2,25$ } $a = \frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{2,25 - 7,75}{425 - 150} = -0,02$
 $p = -0,02q + b$
 $q = 150$ en $p = 7,75$ } $-0,02 \cdot 150 + b = 7,75$
 $-3 + b = 7,75$
 $b = 10,75$

Dus $p = -0,02q + 10,75$ (I).

b 1 Uit $p = -0,02q + 10,75$ volgt $0,02q = -p + 10,75$ en dus $q = -50p + 537,5$ (II).

2 $q = ap + b$ met $a = \frac{\Delta q}{\Delta p}$.
 bij $q = 150$ hoort $p = 7,75$
 bij $q = 425$ hoort $p = 2,25$ } $a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{425 - 150}{2,25 - 7,75} = -50$
 $q = -50p + b$
 $q = 150$ en $p = 7,75$ } $-50 \cdot 7,75 + b = 150$
 $-387,5 + b = 150$
 $b = 537,5$

Dus $q = -50p + 537,5$ (II).

c Met I: $p = -0,02 \cdot 250 + 10,75 = 5,75$.

Dus bij $q = 250$ hoort $p = 5,75$.

Met II: $q = -50 \cdot 4,25 + 537,5 = 325$.

Dus bij $p = 4,25$ hoort $q = 325$.

15 a Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11 - 8}{20 - 8} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

$y = \frac{1}{4}x + b$
 door $A(8, 8)$ } $\frac{1}{4} \cdot 8 + b = 8$
 $2 + b = 8$
 $b = 6$

Dus $k: y = \frac{1}{4}x + 6$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-10 - 14}{50 - 2} = \frac{-24}{48} = -\frac{1}{2}$.

$y = -\frac{1}{2}x + b$
 door $C(2, 14)$ } $-\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 14$
 $-1 + b = 14$
 $b = 15$

Dus $l: y = -\frac{1}{2}x + 15$.

Snijpunt berekenen van k en l .

$\frac{1}{4}x + 6 = -\frac{1}{2}x + 15$

$x + 24 = -2x + 60$

$3x = 36$

$x = 12$
 $y = \frac{1}{4}x + 6$ } $y = \frac{1}{4} \cdot 12 + 6 = 3 + 6 = 9$

Dus $E(12, 9)$.

b Stel $N = aM + b$.

$M = 5$ en $N = 62$
 $M = 20$ en $N = 86$ } $a = \frac{\Delta N}{\Delta M} = \frac{86 - 62}{20 - 5} = \frac{24}{15} = 1\frac{3}{5}$

$N = 1\frac{3}{5}M + b$
 $M = 5$ en $N = 62$ } $1\frac{3}{5} \cdot 5 + b = 62$
 $8 + b = 62$
 $b = 54$

Dus $N = 1\frac{3}{5}M + 54$.

Omwerken van de formule geeft M uitgedrukt in N .

$1\frac{3}{5}M + 54 = N$

$8M + 270 = 5N$

$8M = 5N - 270$

$M = \frac{5}{8}N - 33\frac{3}{4}$

Alternatieve uitwerking

Stel $M = aN + b$.

$$\left. \begin{array}{l} N = 62 \text{ en } M = 5 \\ N = 86 \text{ en } M = 20 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta M}{\Delta N} = \frac{20 - 5}{86 - 62} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

$$\left. \begin{array}{l} M = \frac{5}{8}N + b \\ N = 62 \text{ en } M = 5 \end{array} \right\} \frac{5}{8} \cdot 62 + b = 5$$
$$38\frac{3}{4} + b = 5$$

$$b = -33\frac{3}{4}$$

$$\text{Dus } M = \frac{5}{8}N - 33\frac{3}{4}.$$

Bladzijde 17

16 a Stel $h = at + b$.

$$\left. \begin{array}{l} t = 12 \text{ en } h = 164,0 \\ t = 15\frac{1}{3} \text{ en } h = 158,0 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{158 - 164}{15\frac{1}{3} - 12} = \frac{-6}{\frac{10}{3}} = -1,8.$$

$$\left. \begin{array}{l} h = -1,8t + b \\ t = 12 \text{ en } h = 164 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,8 \cdot 12 + b = 164 \\ -21,6 + b = 164 \\ b = 185,6 \end{array}$$

$$\text{Dus } h = -1,8t + 185,6.$$

b $-1,8t + 185,6 = 149$

$$-1,8t = -36,6$$

$$t = 20\frac{1}{3}$$

Dus om 20 seconden na 14:20 uur.

17 Stel $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p + 2 - (p + 1)}{2p - p} = \frac{1}{p}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{p}x + b \\ \text{door } (p, p + 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{p} \cdot p + b = p + 1 \\ 1 + b = p + 1 \\ b = p \end{array}$$

$$\text{Dus } y = \frac{1}{p}x + p.$$

Snijden met de x -as: $y = 0$ geeft $\frac{1}{p}x + p = 0$

$$\frac{1}{p}x = -p$$

$$x = -p^2$$

Voor $p \neq 0$ geldt dat $-p^2 < 0$, dus $x < 0$.

Dus elke lijn snijdt de negatieve x -as.

18 Stel de inhoud van het vat is 1 liter.

De koudwaterkraan vult het vat dan met een snelheid van $\frac{1}{10}$ liter water per minuut.

Voor de warmwaterkraan geldt $\frac{1}{12}$ liter per minuut en voor het leeglopen $\frac{1}{20}$ liter per minuut.

Stel het duurt t minuten, dan geldt $(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20}) \cdot t = 1$

$$\frac{2}{15}t = 1$$

$$t = 7\frac{1}{2}$$

Dus het duurt 7,5 minuten.

1.2 Tweedegraadsfuncties en tweedegraadsvergelijkingen

Bladzijde 19

19 a $ax^2 + bx = 0$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \vee ax = -b$$

$$x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

x_{top} zit midden tussen de nulpunten, dus x_{top} is het gemiddelde van de nulpunten.

$$\text{Dit geeft } x_{\text{top}} = \frac{0 + (-\frac{b}{a})}{2} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{b}{a} = -\frac{b}{2a}.$$

b De grafiek van g krijg je uit de grafiek van f door de verschuiving b omhoog.

Hierbij verandert x_{top} niet, dus ook voor de grafiek van de functie g geldt $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$.

Bladzijde 20

- 20** max. is $g(1) = 4$
min. is $h(2) = 1$

21 a $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ geeft $y_{\text{top}} = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3$

$1 > 0$, dus dalparabool en min. is $f(2) = -3$.

b $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 2} = -1\frac{1}{2}$ geeft $y_{\text{top}} = g(-1\frac{1}{2}) = 2 \cdot (-1\frac{1}{2})^2 + 6 \cdot -1\frac{1}{2} + 3 = -1\frac{1}{2}$

$2 > 0$, dus dalparabool en min. is $g(-1\frac{1}{2}) = -1\frac{1}{2}$.

c $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot -0,3} = 10$ geeft $y_{\text{top}} = h(10) = -0,3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 - 2 = 28$

$-0,3 < 0$, dus bergparabool en max. is $h(10) = 28$.

d $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{14}{2 \cdot 4} = -1\frac{3}{4}$ geeft $y_{\text{top}} = k(-1\frac{3}{4}) = 4 \cdot (-1\frac{3}{4})^2 + 14 \cdot -1\frac{3}{4} = -12\frac{1}{4}$

$4 > 0$, dus dalparabool en min. is $k(-1\frac{3}{4}) = -12\frac{1}{4}$.

22 a $f(x) = 0,15x^2 - 1,2x + 5$ geeft $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = \frac{1,2}{0,3} = 4$ en dit geeft $y_{\text{top}} = 0,15 \cdot 4^2 - 1,2 \cdot 4 + 5 = 2,6$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + b \\ \text{door } (4; 2,6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 4 + b = 2,6 \\ 12 + b = 2,6 \\ b = -9,4 \end{array}$$

b $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x + c$ geeft $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-1} = 6$ en dit geeft $y_{\text{top}} = -\frac{1}{2} \cdot 6^2 + 6 \cdot 6 + c = 18 + c$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + 4 \\ \text{door } (6, 18 + c) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 6 + 4 = 18 + c \\ 9 + 4 = 18 + c \\ c = -5 \end{array}$$

- 23** De eerste auto rijdt gedurende 100 uur met een snelheid van 50 km/uur.
De tweede auto rijdt gedurende 99 uur met een snelheid van 51 km/uur.
De derde auto rijdt gedurende 98 uur met een snelheid van 52 km/uur.
De n -de auto rijdt gedurende $101 - n$ uur met een snelheid van $49 + n$ km/uur.
De afgelegde afstand s die 100 uur na de start is afgelegd door de n -de auto is
 $s = (101 - n)(49 + n) = -n^2 + 52n + 4949$ km.

s is maximaal voor $n = -\frac{b}{2a} = -\frac{52}{-2} = 26$.

De 26^{ste} auto heeft snelheid $49 + 26 = 75$ km/uur.

Bladzijde 21

24 a $f(3) = 3^2 - 8 \cdot 3 + 15 = 9 - 24 + 15 = 0$
 $f(5) = 5^2 - 8 \cdot 5 + 15 = 25 - 40 + 15 = 0$

- b** De oplossingen zijn $x = 3$ en $x = 5$.
Er zijn niet meer oplossingen omdat een parabool hoogstens twee snijpunten met de x -as heeft.

25 a Bij het oplossen van de vergelijking $4x^2 - 25x = 0$ breng je x buiten haakjes: $x(4x - 25) = 0$.
Bij het oplossen van de vergelijking $4x^2 - 25 = 0$ herleid je tot $x^2 = 6\frac{1}{4}$.

b $4x^2 + 25 = 0$

$$4x^2 = -25$$

$$x^2 = -6\frac{1}{4}$$

Er zijn geen oplossingen mogelijk.

c Bij het oplossen van de vergelijking $x(x + 2) = 0$ gebruik je direct $AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

Bij het oplossen van $x(x + 2) = 8$ werk je eerst de haakjes weg: $x(x + 2) = 8$

$$x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Bladzijde 23

26 a $2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$
b $x^2 - 3 = 4x$
 $x^2 - 4x - 3 = 0$
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 28$, dus $\sqrt{D} = 2\sqrt{7}$
 $x = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} = 2 + \sqrt{7} \vee x = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{2} = 2 - \sqrt{7}$

Bladzijde 24

27 a $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
 $\left(x + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$
 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$
b $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$
 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$
 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$
 $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{D}{4a^2}} \vee x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{D}{4a^2}}$
 $x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{D}{4a^2}} \vee x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{D}{4a^2}}$
 $x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \vee x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}$
 $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

28 a $(3x - 2)^2 = 36$
 $3x - 2 = 6 \vee 3x - 2 = -6$
 $3x = 8 \vee 3x = -4$
 $x = 2\frac{2}{3} \vee x = -1\frac{1}{3}$
b $(4 - \frac{1}{2}x)^2 = 9$
 $4 - \frac{1}{2}x = 3 \vee 4 - \frac{1}{2}x = -3$
 $-\frac{1}{2}x = -1 \vee -\frac{1}{2}x = -7$
 $x = 2 \vee x = 14$
c $x^2 + 6 = 5x$
 $x^2 - 5x + 6 = 0$
 $(x - 2)(x - 3) = 0$
 $x = 2 \vee x = 3$
d $x(x - 1) = 12$
 $x^2 - x = 12$
 $x^2 - x - 12 = 0$
 $(x + 3)(x - 4) = 0$
 $x = -3 \vee x = 4$
e $2x^2 = 5x$
 $2x^2 - 5x = 0$
 $x(2x - 5) = 0$
 $x = 0 \vee 2x - 5 = 0$
 $x = 0 \vee 2x = 5$
 $x = 0 \vee x = 2\frac{1}{2}$
f $x^2 + 4 = 1$
 $x^2 = -3$
 geen oplossingen

29 a $3x^2 - 6x = 24$
 $3x^2 - 6x - 24 = 0$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x+2)(x-4) = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$

b $3x^2 - 6x = -3(x-6)$
 $3x^2 - 6x = -3x + 18$
 $3x^2 - 3x - 18 = 0$
 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x+2)(x-3) = 0$
 $x = -2 \vee x = 3$

c $2x^2 - 3x = 2$
 $2x^2 - 3x - 2 = 0$
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$
 $x = \frac{3+5}{4} = 2 \vee x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$

d $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$
 $x^2 - 4x - 12 = 0$
 $(x+2)(x-6) = 0$
 $x = -2 \vee x = 6$

e $x^2 - 3x = 5(x-3)$
 $x^2 - 3x = 5x - 15$
 $x^2 - 8x + 15 = 0$
 $(x-3)(x-5) = 0$
 $x = 3 \vee x = 5$

f $2x^2 - 5x = 3x$
 $2x^2 - 8x = 0$
 $2x(x-4) = 0$
 $x = 0 \vee x = 4$

30 a $6 - x^2 = -2$
 $-x^2 = -8$
 $x^2 = 8$
 $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \vee x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$

b $2x^2 = 9x + 5$
 $2x^2 - 9x - 5 = 0$
 $D = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 121$
 $x = \frac{9+11}{4} = 5 \vee x = \frac{9-11}{4} = -\frac{1}{2}$

c $3(x+2)^2 + 5 = 80$
 $3(x+2)^2 = 75$
 $(x+2)^2 = 25$
 $x+2 = 5 \vee x+2 = -5$
 $x = 3 \vee x = -7$

d $\frac{1}{2}(x-3)^2 - 3 = 5$
 $\frac{1}{2}(x-3)^2 = 8$
 $(x-3)^2 = 16$
 $x-3 = 4 \vee x-3 = -4$
 $x = 7 \vee x = -1$

e $-(2x-1)^2 + 5 = 1$
 $-(2x-1)^2 = -4$
 $(2x-1)^2 = 4$
 $2x-1 = 2 \vee 2x-1 = -2$
 $2x = 3 \vee 2x = -1$
 $x = 1\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

f $8 - 3(4x-5)^2 = 5$
 $-3(4x-5)^2 = -3$
 $(4x-5)^2 = 1$
 $4x-5 = 1 \vee 4x-5 = -1$
 $4x = 6 \vee 4x = 4$
 $x = 1\frac{1}{2} \vee x = 1$

31 a $x^2 - 5x = 0$
 $x(x-5) = 0$
 $x = 0 \vee x = 5$

b $x^2 - 5x = 14$
 $x^2 - 5x - 14 = 0$
 $(x+2)(x-7) = 0$
 $x = -2 \vee x = 7$

c $x^2 - 5 = 14$
 $x^2 = 19$
 $x = \sqrt{19} \vee x = -\sqrt{19}$

d $x^2 - 5 = 14x$
 $x^2 - 14x - 5 = 0$
 $(x-7)^2 - 49 - 5 = 0$
 $(x-7)^2 = 54$
 $x-7 = \sqrt{54} \vee x-7 = -\sqrt{54}$
 $x-7 = 3\sqrt{6} \vee x-7 = -3\sqrt{6}$
 $x = 7+3\sqrt{6} \vee x = 7-3\sqrt{6}$

e $(2x-1)(3x+6) = 0$
 $2x-1 = 0 \vee 3x+6 = 0$
 $2x = 1 \vee 3x = -6$
 $x = \frac{1}{2} \vee x = -2$

f $(2x-1)(3x+6) = 9x$
 $6x^2 + 12x - 3x - 6 = 9x$
 $6x^2 = 6$
 $x^2 = 1$
 $x = 1 \vee x = -1$

g $3x(2x-1) = 6$
 $6x^2 - 3x = 6$
 $6x^2 - 3x - 6 = 0$
 $2x^2 - x - 2 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 17$
 $x = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \vee x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$
 $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17} \vee x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}$

h $3x(2x-1) = 6 - 9x$
 $6x^2 - 3x = 6 - 9x$
 $6x^2 + 6x - 6 = 0$
 $x^2 + x - 1 = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$
 $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
 $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

32 a $(x+3)^2 = 16x$
 $x^2 + 6x + 9 = 16x$
 $x^2 - 10x + 9 = 0$
 $(x-1)(x-9) = 0$
 $x = 1 \vee x = 9$

b $(2x+3)^2 = -16$
geen oplossingen

c $2(x+3)^2 = -4x$
 $2(x^2 + 6x + 9) = -4x$
 $2x^2 + 16x + 18 = 0$
 $x^2 + 8x + 9 = 0$
 $(x+4)^2 - 16 + 9 = 0$
 $(x+4)^2 = 7$
 $x+4 = \sqrt{7} \vee x+4 = -\sqrt{7}$
 $x = -4 + \sqrt{7} \vee x = -4 - \sqrt{7}$

d $(2x+3)(4-x) = 9$
 $8x - 2x^2 + 12 - 3x = 9$
 $-2x^2 + 5x + 3 = 0$
 $D = 5^2 - 4 \cdot -2 \cdot 3 = 49$
 $x = \frac{-5+7}{-4} = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{-5-7}{-4} = 3$

e $(-4x+3)^2 = 36$
 $-4x+3 = 6 \vee -4x+3 = -6$
 $-4x = 3 \vee -4x = -9$
 $x = -\frac{3}{4} \vee x = 2\frac{1}{4}$

f $-4(x+3)^2 = 4x$
 $(x+3)^2 = -x$
 $x^2 + 6x + 9 = -x$
 $x^2 + 7x + 9 = 0$
 $D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 13$
 $x = \frac{-7+\sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{-7-\sqrt{13}}{2}$
 $x = -3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} \vee x = -3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$

g $x^2 - (x+1)^2 = (x+3)^2$
 $x^2 - (x^2 + 2x + 1) = x^2 + 6x + 9$
 $x^2 - x^2 - 2x - 1 = x^2 + 6x + 9$
 $-x^2 - 8x - 10 = 0$
 $x^2 + 8x + 10 = 0$
 $(x+4)^2 - 16 + 10 = 0$
 $(x+4)^2 = 6$
 $x+4 = \sqrt{6} \vee x+4 = -\sqrt{6}$
 $x = -4 + \sqrt{6} \vee x = -4 - \sqrt{6}$

h $(x+3)^2 + (x+2)^2 = 25$
 $x^2 + 6x + 9 + x^2 + 4x + 4 = 25$
 $2x^2 + 10x - 12 = 0$
 $x^2 + 5x - 6 = 0$
 $(x-1)(x+6) = 0$
 $x = 1 \vee x = -6$

33 a $2x^2 - 13x = 3(x-10)$
 $2x^2 - 13x = 3x - 30$
 $2x^2 - 16x + 30 = 0$
 $x^2 - 8x + 15 = 0$
 $(x-3)(x-5) = 0$
 $x = 3 \vee x = 5$

b $3x^2 + 2x + 7 = 7(x+1)$
 $3x^2 + 2x + 7 = 7x + 7$
 $3x^2 - 5x = 0$
 $x(3x-5) = 0$
 $x = 0 \vee 3x-5 = 0$
 $x = 0 \vee 3x = 5$
 $x = 0 \vee x = 1\frac{2}{3}$

c $100(x^2 - 1) = 525$
 $100x^2 - 100 = 525$
 $100x^2 = 625$
 $x^2 = 6\frac{1}{4}$
 $x = 2\frac{1}{2} \vee x = -2\frac{1}{2}$

d $2(x-3)^2 = 3x - 10$
 $2(x^2 - 6x + 9) = 3x - 10$
 $2x^2 - 12x + 18 = 3x - 10$
 $2x^2 - 15x + 28 = 0$
 $D = (-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 28 = 1$
 $x = \frac{15+1}{4} = 4 \vee x = \frac{15-1}{4} = 3\frac{1}{2}$

e $5(4x-1)(6x-5) = 0$
 $4x-1 = 0 \vee 6x-5 = 0$
 $4x = 1 \vee 6x = 5$
 $x = \frac{1}{4} \vee x = \frac{5}{6}$

f $\frac{1}{4}(2x-3)^2 - 3 = 1$
 $\frac{1}{4}(2x-3)^2 = 4$
 $(2x-3)^2 = 16$
 $2x-3 = 4 \vee 2x-3 = -4$
 $2x = 7 \vee 2x = -1$
 $x = 3\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

34 a $f(x) = 0$ geeft $2x - 3 = 0$
 $2x = 3$
 $x = 1\frac{1}{2}$

Het nulpunt van f is $1\frac{1}{2}$.

$g(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{4}x + 2 = 0$
 $-\frac{1}{4}x = -2$
 $x = 8$

Het nulpunt van g is 8.

$h(x) = 0$ geeft $(2x - 3)(-\frac{1}{4}x + 2) = 0$
 $2x - 3 = 0 \vee -\frac{1}{4}x + 2 = 0$
 $2x = 3 \vee -\frac{1}{4}x = -2$
 $x = 1\frac{1}{2} \vee x = 8$

De nulpunten van h zijn $1\frac{1}{2}$ en 8.

b $x_{\text{top}} = \frac{1\frac{1}{2} + 8}{2} = 4\frac{3}{4}$ geeft $y_{\text{top}} = (2 \cdot 4\frac{3}{4} - 3)(-\frac{1}{4} \cdot 4\frac{3}{4} + 2) = 6\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{16} = 5\frac{9}{32}$

$f(4\frac{3}{4}) = 6\frac{1}{2} \neq 5\frac{9}{32}$, dus de top van de grafiek van h ligt niet op de grafiek van f .

c $k(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{4}x + b = 0$
 $-\frac{1}{4}x = -b$
 $x = 4b$

$l(x) = f(x) \cdot k(x)$ geeft $x_{\text{top}} = \frac{1\frac{1}{2} + 4b}{2} = \frac{3}{4} + 2b$

$l(\frac{3}{4} + 2b) = (2(\frac{3}{4} + 2b) - 3)(-\frac{1}{4}(\frac{3}{4} + 2b) + b) = (1\frac{1}{2} + 4b - 3)(-\frac{3}{16} - \frac{1}{2}b + b) = (4b - 1\frac{1}{2})(\frac{1}{2}b - \frac{3}{16})$
 $= 2b^2 - 1\frac{1}{2}b + \frac{9}{32}$

De top is $(2b + \frac{3}{4}, 2b^2 - 1\frac{1}{2}b + \frac{9}{32})$.

De top op de grafiek van k geeft

$y = -\frac{1}{4}x + b$
 door $(2b + \frac{3}{4}, 2b^2 - 1\frac{1}{2}b + \frac{9}{32})$ } $2b^2 - 1\frac{1}{2}b + \frac{9}{32} = -\frac{1}{4}(2b + \frac{3}{4}) + b$
 $2b^2 - 1\frac{1}{2}b + \frac{9}{32} = -\frac{1}{2}b - \frac{3}{16} + b$
 $2b^2 - 2b + \frac{15}{32} = 0$
 $b^2 - b + \frac{15}{64} = 0$
 $(b - \frac{3}{8})(b - \frac{5}{8}) = 0$
 $b = \frac{3}{8} \vee b = \frac{5}{8}$

35 a $x^2 + 8x = 20$ $x^2 + 18x = 20$
 $x(x + 8) = 20$ $x(x + 18) = 20$
 $(x + 4)^2 = 20 + 4^2$ $(x + 9)^2 = 20 + 9^2$
 $(x + 4)^2 = 36$ $(x + 9)^2 = 101$
 $x + 4 = 6$ $x + 9 = \sqrt{101}$
 $x = 2$ $x = \sqrt{101} - 9$

b $x^2 + bx = c$

$x^2 + bx - c = 0$

$D = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot -c = b^2 + 4c$

$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2} = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4c} = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{4(\frac{1}{4}b^2 + c)} = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{(\frac{1}{2}b)^2 + c}$

Dus $x = \sqrt{c + (\frac{1}{2}b)^2} - \frac{1}{2}b$.

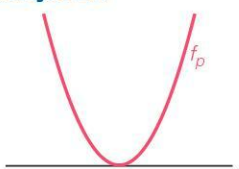
$$\begin{aligned}
 \text{c } x^2 + bx &= c \\
 (x + \frac{1}{2}b)^2 - (\frac{1}{2}b)^2 &= c \\
 (x + \frac{1}{2}b)^2 &= c + (\frac{1}{2}b)^2 \\
 x + \frac{1}{2}b &= \sqrt{c + (\frac{1}{2}b)^2} \\
 x &= \sqrt{c + (\frac{1}{2}b)^2} - \frac{1}{2}b
 \end{aligned}$$

1.3 Werken met parameters

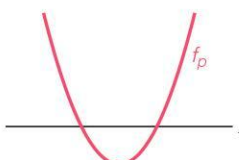
Bladzijde 27

- 36 a** $p = 1$ geeft $f(x) = -x^2 + 6x + 1$
 $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot -1} = 3$ en $y_{\text{top}} = -3^2 + 6 \cdot 3 + 1 = 10$
 De top is dus $(3, 10)$.
- b** $p = -9$ geeft $f(x) = -x^2 + 6x - 9$
 $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot -1} = 3$ en $y_{\text{top}} = -3^2 + 6 \cdot 3 - 9 = 0$
 De top is $(3, 0)$, dus de top ligt op de x -as.

Bladzijde 28

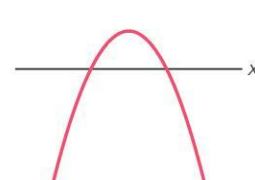
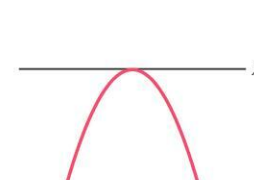
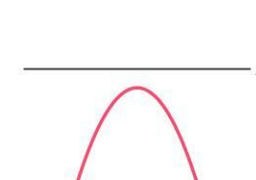
- 37 a**
- 
- er moet gelden $D = 0$
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 36 - 8p$

$$\begin{cases} 36 - 8p = 0 \\ -8p = -36 \\ p = 4\frac{1}{2} \end{cases}$$

- b**
- 
- er moet gelden $D > 0$
 $D = 36 - 8p$

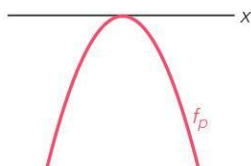
$$\begin{cases} 36 - 8p > 0 \\ -8p > -36 \\ p < 4\frac{1}{2} \end{cases}$$

38 De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ met $a < 0$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
twee snijpunten met de x -as	één snijpunt (raakpunt) met de x -as	geen snijpunt met de x -as
		

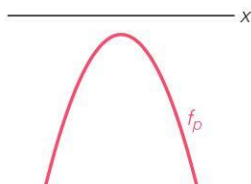
39

a



$$\left. \begin{array}{l} \text{er moet gelden } D = 0 \\ D = (-5)^2 - 4 \cdot -\frac{1}{2} \cdot p = 25 + 2p \end{array} \right\} \begin{array}{l} 25 + 2p = 0 \\ 2p = -25 \\ p = -12\frac{1}{2} \end{array}$$

b

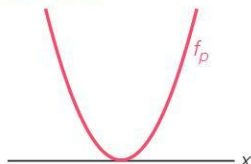


$$\left. \begin{array}{l} \text{er moet gelden } D < 0 \\ D = 25 + 2p \end{array} \right\} \begin{array}{l} 25 + 2p < 0 \\ 2p < -25 \\ p < -12\frac{1}{2} \end{array}$$

Bladzijde 29

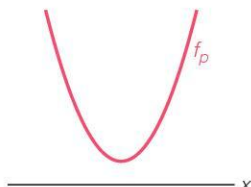
40

a



$$\left. \begin{array}{l} \text{er moet gelden } D = 0 \\ D = p^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = p^2 - 36 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p^2 - 36 = 0 \\ p^2 = 36 \\ p = 6 \vee p = -6 \end{array}$$

b



$$\left. \begin{array}{l} \text{er moet gelden } D < 0 \\ D = p^2 - 36 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p^2 - 36 < 0 \\ p^2 < 36 \\ -6 < p < 6 \end{array}$$

41

$$\begin{aligned} (x^2 - 17x + 71)^{x^2+4} &= 1 \\ x^2 - 17x + 71 &= 1 \vee (x^2 - 17x + 71 = -1 \text{ en } x^2 + 4 \text{ is even}) \\ x^2 - 17x + 70 &= 0 \vee (x^2 - 17x + 72 = 0 \text{ en } x^2 \text{ is even}) \\ (x-7)(x-10) &= 0 \vee ((x-8)(x-9) = 0 \text{ en } x^2 \text{ is even}) \\ x &= 7 \vee x = 10 \vee ((x=8 \vee x=9) \text{ en } x^2 \text{ is even}) \\ x &= 7 \vee x = 10 \vee x = 8 \end{aligned}$$

42

$$\begin{aligned} x_{\text{top}} &= -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{8} = -\frac{1}{8}p \\ y_{\text{top}} &= f_p\left(-\frac{1}{8}p\right) = 4\left(-\frac{1}{8}p\right)^2 + p \cdot -\frac{1}{8}p + 5 = \frac{1}{16}p^2 - \frac{1}{8}p^2 + 5 = -\frac{1}{16}p^2 + 5 \end{aligned}$$

Bladzijde 30

43 $x_{\text{top}} = -\frac{p}{2 \cdot -2} = \frac{1}{4}p$

$$y_{\text{top}} = f_p\left(\frac{1}{4}p\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{4}p\right)^2 + p \cdot \frac{1}{4}p + 1 = -\frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}p^2 + 1 = \frac{1}{8}p^2 + 1$$

Het maximum is 9 geeft $\frac{1}{8}p^2 + 1 = 9$

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}p^2 &= 8 \\ p^2 &= 64 \\ p &= 8 \vee p = -8\end{aligned}$$

44 $x_{\text{top}} = -\frac{p}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}p$

$$y_{\text{top}} = f_p\left(-\frac{1}{2}p\right) = \left(-\frac{1}{2}p\right)^2 + p \cdot \left(-\frac{1}{2}p\right) + 3 = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p^2 + 3 = -\frac{1}{4}p^2 + 3$$

De top $\left(-\frac{1}{2}p, -\frac{1}{4}p^2 + 3\right)$ invullen in $y = x + 1$ geeft $-\frac{1}{4}p^2 + 3 = -\frac{1}{2}p + 1$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + 2 &= 0 \\ p^2 - 2p - 8 &= 0 \\ (p+2)(p-4) &= 0 \\ p &= -2 \vee p = 4\end{aligned}$$

45 a $x_{\text{top}} = -\frac{6}{2 \cdot p} = -\frac{3}{p}$

$$y_{\text{top}} = f_p\left(-\frac{3}{p}\right) = p \cdot \left(-\frac{3}{p}\right)^2 + 6 \cdot -\frac{3}{p} + 1 = \frac{9}{p} - \frac{18}{p} + 1 = -\frac{9}{p} + 1$$

De extreme waarde is -2 geeft $-\frac{9}{p} + 1 = -2$

$$\begin{aligned}-\frac{9}{p} &= -3 \\ p &= 3\end{aligned}$$

b $p = 3$ geeft $f_3(x) = 3x^2 + 6x + 1$

De grafiek is een dalparabool, dus de externe waarde is een minimum.

46 a $f_{p,q}(x) = \frac{1}{2}x^2 + px + q$ geeft $x_{\text{top}} = -\frac{p}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -p$ en

$$y_{\text{top}} = f_{p,q}(-p) = \frac{1}{2} \cdot (-p)^2 + p \cdot -p + q = \frac{1}{2}p^2 - p^2 + q = -\frac{1}{2}p^2 + q.$$

$$\begin{aligned}y &= x^2 + x + 1 \\ \text{door } (-p, -\frac{1}{2}p^2 + q) &\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2}p^2 + q &= (-p)^2 + -p + 1 \\ -\frac{1}{2}p^2 + q &= p^2 - p + 1 \\ q &= 1\frac{1}{2}p^2 - p + 1 \end{aligned} \right.\end{aligned}$$

b $x_{\text{top}} = -p = 2$, dus $p = -2$ en $q = 1\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 2 + 1 = 9$.

47 a $p = -1$ geeft $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x+2)(x-3) = 0$
 $x = -2 \vee x = 3$

b $p = 2$ geeft $x^2 + 2x - 6 = 0$
 $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -6 = 28$

$D > 0$, dus er zijn twee oplossingen.

c $x^2 + px - 6 = 0$

$$D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot -6 = p^2 + 24$$

Voor elke p is $D \geq 24$, dus positief.

Daarom heeft de vergelijking $x^2 + px - 6 = 0$ voor elke p twee oplossingen.

Bladzijde 31

- 48 a** Als $p = 0$ is de vergelijking $3x + 1 = 0$.
Dit is een lineaire vergelijking, en die heeft geen discriminant.
b $-3 < p < 0 \vee p > 0$

- 49 a** twee oplossingen als $D > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} 49 - 4p > 0 \\ D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 49 - 4p \end{array} \right. \begin{array}{l} -4p > -49 \\ p < 12\frac{1}{4} \end{array}$
b twee oplossingen als $D > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} 25 + 8p > 0 \\ D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -p = 25 + 8p \end{array} \right. \begin{array}{l} 8p > -25 \\ p > -3\frac{1}{8} \end{array}$
c twee oplossingen als $D > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} 16 - 12p > 0 \\ D = 4^2 - 4 \cdot -3 \cdot -p = 16 - 12p \end{array} \right. \begin{array}{l} -12p > -16 \\ p < 1\frac{1}{3} \end{array}$
d twee oplossingen als $D > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} 9 - p > 0 \\ D = (-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot p = 9 - p \end{array} \right. \begin{array}{l} -p > -9 \\ p < 9 \end{array}$

- 50 a** twee oplossingen als $D > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} p^2 - 100 > 0 \\ D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = p^2 - 100 \end{array} \right. \begin{array}{l} p^2 > 100 \\ p < -10 \vee p > 10 \end{array}$
b geen oplossingen als $D < 0$ $\left\{ \begin{array}{l} p^2 - 16 < 0 \\ D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = p^2 - 16 \end{array} \right. \begin{array}{l} p^2 < 16 \\ -4 < p < 4 \end{array}$
c twee oplossingen als $D > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} p^2 + 24 > 0 \\ D = p^2 - 4 \cdot -2 \cdot 3 = p^2 + 24 \end{array} \right. \begin{array}{l} p^2 + 24 > 0 \\ \text{voor elke } p \end{array}$
De vergelijking heeft dus twee oplossingen voor elke p .

- 51 a** $x = 1$ is oplossing, dus $1^2 + 2 \cdot 1 + p = 0$
 $3 + p = 0$
 $p = -3$
 $p = -3$ geeft $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x - 1)(x + 3) = 0$
 $x = 1 \vee x = -3$
Dus $p = -3$ en de andere oplossing is $x = -3$
b $x = 2$ is een oplossing, dus $p \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 + 10 = 0$
 $4p = 12$
 $p = 3$
 $p = 3$ geeft $3x^2 - 11x + 10 = 0$
 $D = (-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 1$
 $x = \frac{11 \pm 1}{6} = 2 \vee x = \frac{11 - 1}{6} = 1\frac{2}{3}$
Dus $p = 3$ en de andere oplossing is $x = 1\frac{2}{3}$.

- 52 a** $p = 0$ geeft de vergelijking $5x + 2 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing
 $p \neq 0$ geeft $D = 5^2 - 4 \cdot p \cdot 2 = 25 - 8p$ $\left\{ \begin{array}{l} 25 - 8p > 0 \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} -8p > -25 \\ p < 3\frac{1}{8} \end{array}$
Dus twee oplossingen als $p < 0 \vee 0 < p < 3\frac{1}{8}$.

b $p = 0$ geeft de vergelijking $-3x - 4 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.

$$\left. \begin{array}{l} p \neq 0 \text{ geeft } D = (-3)^2 - 4 \cdot p \cdot -4 = 9 + 16p \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 9 + 16p > 0 \\ 16p > -9 \\ p > -\frac{9}{16} \end{array}$$

Dus twee oplossingen voor $-\frac{9}{16} < p < 0 \vee p > 0$.

53 a geen oplossingen als $D < 0$

$$\left. \begin{array}{l} D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 1 - 8p \\ 1 - 8p < 0 \\ -8p < -1 \\ p > \frac{1}{8} \end{array} \right\}$$

b $p = 0$ geeft de vergelijking $x = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.

$$\left. \begin{array}{l} p \neq 0 \text{ geeft } D = 1^2 - 4 \cdot p \cdot p = 1 - 4p^2 \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 - 4p^2 > 0 \\ -4p^2 > -1 \\ p^2 < \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2} \end{array}$$

Dus twee oplossingen voor $-\frac{1}{2} < p < 0 \vee 0 < p < \frac{1}{2}$.

c twee oplossingen als $D > 0$

$$\left. \begin{array}{l} D = p^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = p^2 - 8 \\ p^2 - 8 > 0 \\ p^2 > 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p^2 - 8 > 0 \\ p^2 > 8 \\ p < -2\sqrt{2} \vee p > 2\sqrt{2} \end{array}$$

Bladzijde 32

54 a $p = 0$ geeft de vergelijking $6x + 9 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.

$$6x = -9$$

$$x = -1\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} p \neq 0 \text{ geeft } D = 6^2 - 4 \cdot p \cdot 9 = 36 - 36p \\ \text{één oplossing, dus } D = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 36 - 36p = 0 \\ -36p = -36 \\ p = 1 \end{array}$$

$p = 1$ geeft de vergelijking $x^2 + 6x + 9 = 0$

$$(x + 3)^2 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Voor $p = 0$ is de oplossing $x = -1\frac{1}{2}$ en voor $p = 1$ is de oplossing $x = -3$.

b $D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = p^2 - 4$

$$\left. \begin{array}{l} \text{één oplossing als } D = 0 \\ p^2 - 4 = 0 \\ p^2 = 4 \end{array} \right\}$$

$$p = 2 \vee p = -2$$

$p = 2$ geeft de vergelijking $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$(x + 1)^2 = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$p = -2$ geeft de vergelijking $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Voor $p = 2$ is de oplossing $x = -1$ en voor $p = -2$ is de oplossing $x = 1$.

55 $-4 < p < 0 \vee p > 0$ oftewel $p > -4$ en $p \neq 0$.

$D > 0$ moet als oplossing hebben $p > -4$

$$p + 4 > 0$$

$$4 + p > 0$$

Neem $a = p$ en $b = 2$ in $ax^2 + bx + c = 0$.

Dit geeft $px^2 + 2x + c = 0$.

Er geldt nu $D = 4 - 4pc$ en dit moet gelijk zijn aan $4 + p$, dus $-4c = 1$ oftewel $c = -\frac{1}{4}$.

De vergelijking zou dus kunnen zijn $px^2 + 2x - \frac{1}{4} = 0$.

- 56 a** $f_p(x) = x^2 + px + 7$ geeft $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}p$
 Uit $x_{\text{top}} = -\frac{1}{2}p$ volgt $\frac{1}{2}p = -x_{\text{top}}$
 $p = -2x_{\text{top}}$
- b** $f_p(x) = 2x^2 + px - 3$ geeft $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{4} = -\frac{1}{4}p$
 Uit $x_{\text{top}} = -\frac{1}{4}p$ volgt $\frac{1}{4}p = -x_{\text{top}}$
 $p = -4x_{\text{top}}$
- c** $f_p(x) = -3x^2 + 4px + 4$ geeft $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4p}{-6} = \frac{2}{3}p$
 Uit $x_{\text{top}} = \frac{2}{3}p$ volgt $\frac{2}{3}p = x_{\text{top}}$
 $p = 1\frac{1}{2}x_{\text{top}}$
- d** $f_p(x) = px^2 + 6x - 1$ geeft $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2p} = -\frac{3}{p}$
 Uit $x_{\text{top}} = -\frac{3}{p}$ volgt $p \cdot x_{\text{top}} = -3$
 $p = -\frac{3}{x_{\text{top}}}$
- e** $f_p(x) = p^2x^2 + 4px + 2$ geeft $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4p}{2p^2} = -\frac{2}{p}$
 Uit $x_{\text{top}} = -\frac{2}{p}$ volgt $p \cdot x_{\text{top}} = -2$
 $p = -\frac{2}{x_{\text{top}}}$

Bladzijde 33

- 57 a** $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{-\frac{1}{4}} = 4p$, dus $p = \frac{1}{4}x_{\text{top}}$.
- $$p = \frac{1}{4}x_{\text{top}} \left\{ \begin{array}{l} y_{\text{top}} = -\frac{1}{8}x_{\text{top}}^2 + px_{\text{top}} - 6 \\ y_{\text{top}} = -\frac{1}{8}x_{\text{top}}^2 + \frac{1}{4}x_{\text{top}} \cdot x_{\text{top}} - 6 \\ y_{\text{top}} = -\frac{1}{8}x_{\text{top}}^2 + \frac{1}{4}x_{\text{top}}^2 - 6 \\ y_{\text{top}} = \frac{1}{8}x_{\text{top}}^2 - 6 \end{array} \right.$$
- Dus de formule van de kromme is $y = \frac{1}{8}x^2 - 6$.
- b** $x_{\text{top}} = -\frac{p}{2 \cdot -1} = \frac{1}{2}p$, dus $p = 2x_{\text{top}}$.
- $$p = 2x_{\text{top}} \left\{ \begin{array}{l} y_{\text{top}} = -x_{\text{top}}^2 + px_{\text{top}} + 2p \\ y_{\text{top}} = -x_{\text{top}}^2 + 2x_{\text{top}} \cdot x_{\text{top}} + 2 \cdot 2x_{\text{top}} \\ y_{\text{top}} = -x_{\text{top}}^2 + 2x_{\text{top}}^2 + 4x_{\text{top}} \\ y_{\text{top}} = x_{\text{top}}^2 + 4x_{\text{top}} \end{array} \right.$$
- Dus de formule van de kromme is $y = x^2 + 4x$.
- c** $x_{\text{top}} = -\frac{-2p}{2 \cdot p^2} = \frac{1}{p}$, dus $p = \frac{1}{x_{\text{top}}}$.
- $$p = \frac{1}{x_{\text{top}}} \left\{ \begin{array}{l} y_{\text{top}} = p^2x_{\text{top}}^2 - 2px_{\text{top}} + 3 \\ y_{\text{top}} = \left(\frac{1}{x_{\text{top}}}\right)^2 \cdot x_{\text{top}}^2 - 2 \cdot \frac{1}{x_{\text{top}}} \cdot x_{\text{top}} + 3 \\ y_{\text{top}} = 1 - 2 + 3 \\ y_{\text{top}} = 2 \end{array} \right.$$
- Dus de formule van de kromme is $y = 2$ voor $p \neq 0$.
- d** $x_{\text{top}} = -\frac{-p}{2 \cdot p} = \frac{1}{2}$
- $$x_{\text{top}} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} y_{\text{top}} = px_{\text{top}}^2 - px_{\text{top}} + 1 \\ y_{\text{top}} = p \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - p \cdot \frac{1}{2} + 1 \\ y_{\text{top}} = \frac{1}{4}p - \frac{1}{2}p + 1 \\ y_{\text{top}} = -\frac{1}{4}p + 1 \end{array} \right.$$
- Dus de coördinaten van de toppen van de grafiek van f_p zijn $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}p + 1)$.
 De formule van de kromme is $x = \frac{1}{2}$ voor $p \neq 0$.

$$58 \quad x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2p} = -\frac{3}{p}, \text{ dus } p = -\frac{3}{x_{\text{top}}}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y_{\text{top}} = px_{\text{top}}^2 + 6x_{\text{top}} + p \\ p = -\frac{3}{x_{\text{top}}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y_{\text{top}} = -\frac{3}{x_{\text{top}}} \cdot x_{\text{top}}^2 + 6x_{\text{top}} - \frac{3}{x_{\text{top}}} \\ y_{\text{top}} = -3x_{\text{top}} + 6x_{\text{top}} - \frac{3}{x_{\text{top}}} \\ y_{\text{top}} = 3x_{\text{top}} - \frac{3}{x_{\text{top}}} \end{array}$$

Dus de formule van de kromme is $y = 3x - \frac{3}{x}$ voor $p \neq 0$.

1.4 Domein, bereik en modulusfunctie

Bladzijde 35

$$59 \quad \text{a} \quad x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{0,4}{2 \cdot -0,01} = 20 \text{ geeft } h_{\text{top}} = -0,01 \cdot 20^2 + 0,4 \cdot 20 + 5 = 9$$

Dus de bal komt maximaal 9 meter hoog.

$$\text{b} \quad h = 0 \text{ geeft } -0,01x^2 + 0,4x + 5 = 0$$

$$x^2 - 40x - 500 = 0$$

$$(x + 10)(x - 50) = 0$$

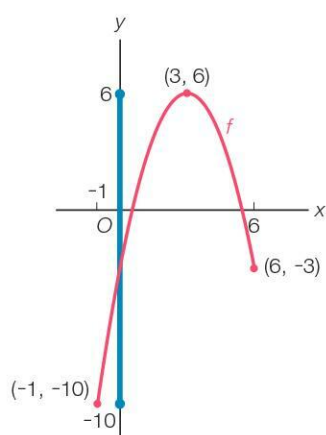
$$x = -10 \vee x = 50$$

De bal komt 50 meter verderop op de grond.

Bladzijde 36

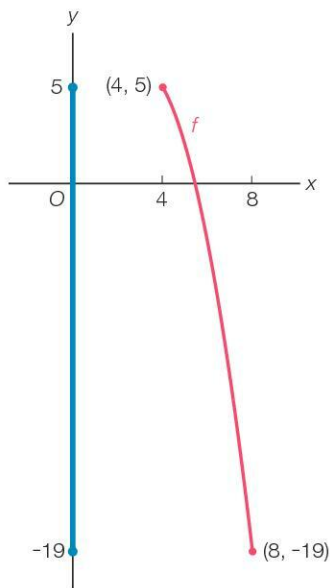
$$60 \quad \text{a} \quad f(-1) = -(-1)^2 + 6 \cdot -1 - 3 = -10 \text{ en } f(6) = -6^2 + 6 \cdot 6 - 3 = -3$$

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot -1} = 3 \text{ en } y_{\text{top}} = f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 3 = 6$$



Dus $B_f = [-10, 6]$.

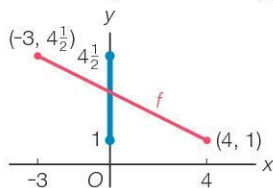
- b** $f(4) = -4^2 + 6 \cdot 4 - 3 = 5$ en $f(8) = -8^2 + 6 \cdot 8 - 3 = -19$
 $x_{\text{top}} = 3$ en $y_{\text{top}} = 6$ (zie vraag a)



Dus $B_f = [-19, 5]$.

Bladzijde 37

- 61 a** $f(-3) = -\frac{1}{2} \cdot -3 + 3 = 4\frac{1}{2}$ en $f(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = 1$



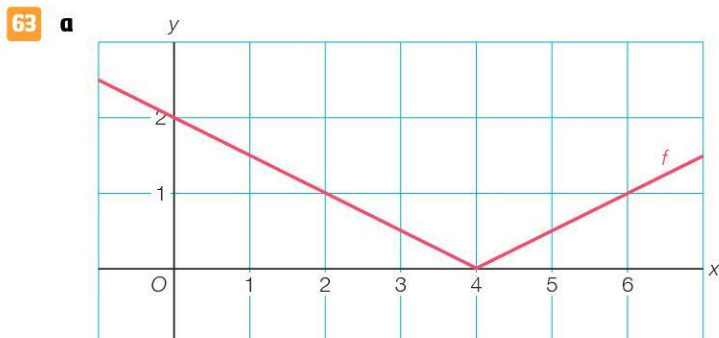
Dus $B_f = [1, 4\frac{1}{2}]$.

- b** Het minimum van g is $g(2) = 4$, dus $B_g = [4, \rightarrow]$.
c $D_h = [2, \rightarrow]$ en $B_h = [1, \rightarrow]$

- 62 a**
$$\begin{aligned} h &= -0,004x^2 + 0,62x \\ h &= 3 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} -0,004x^2 + 0,62x &= 3 \\ -0,004x^2 + 0,62x - 3 &= 0 \\ x^2 - 155x + 750 &= 0 \\ (x - 5)(x - 150) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = 150 \end{aligned} \right.$$

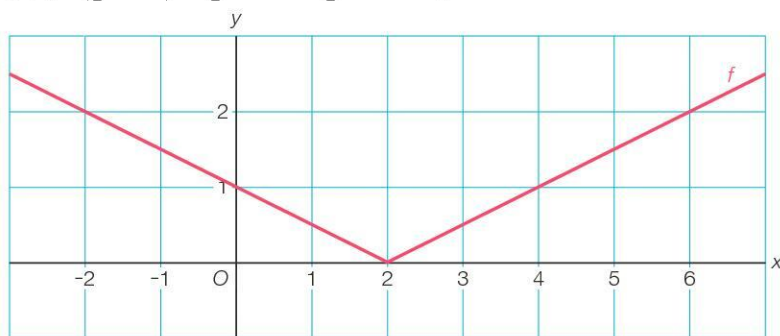
De golfbal komt neer na 150 m, dus $D_h = [0, 150]$.

- b** $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{0,62}{2 \cdot -0,004} = 77,5$ en $h_{\text{top}} = -0,004 \cdot 77,5^2 + 0,62 \cdot 77,5 = 24,025$
 De golfbal komt 24,025 m hoog, dus $B_h = [0; 24,025]$.

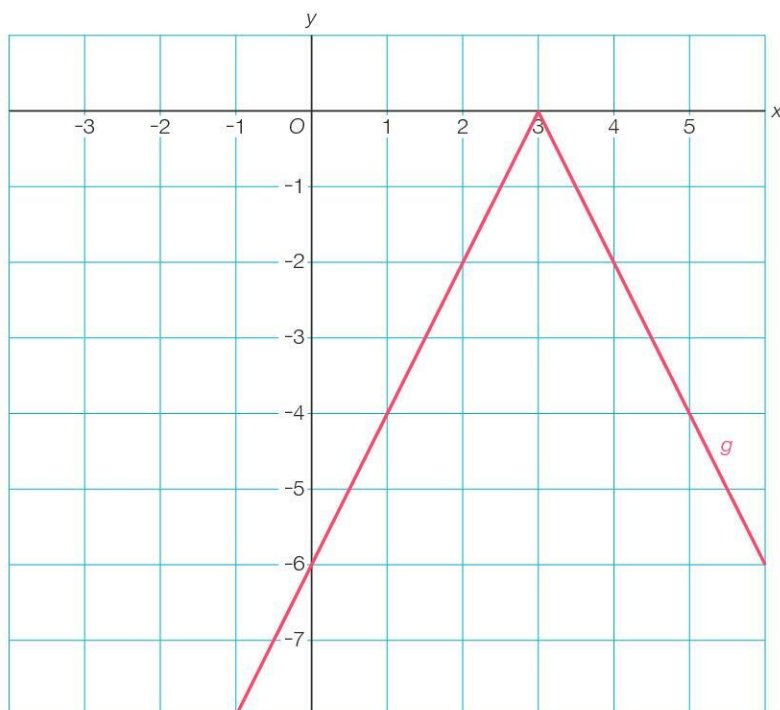


- b** $B_f = [0, \rightarrow]$

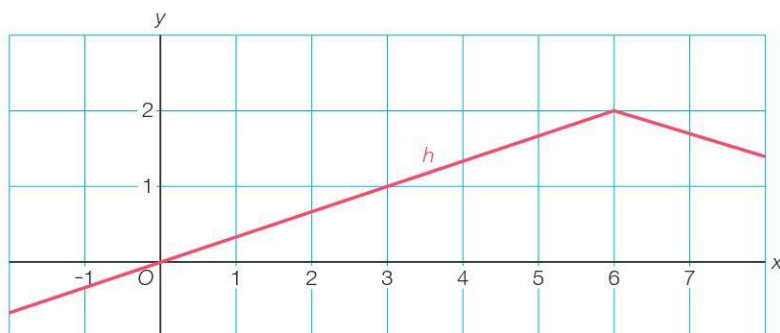
- 64 a** $f(x) = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right| = \frac{1}{2}x - 1$ als $\frac{1}{2}x - 1 \geq 0$, dus als $x \geq 2$.
 $f(x) = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right| = -\frac{1}{2}x + 1$ als $\frac{1}{2}x - 1 < 0$, dus als $x < 2$.



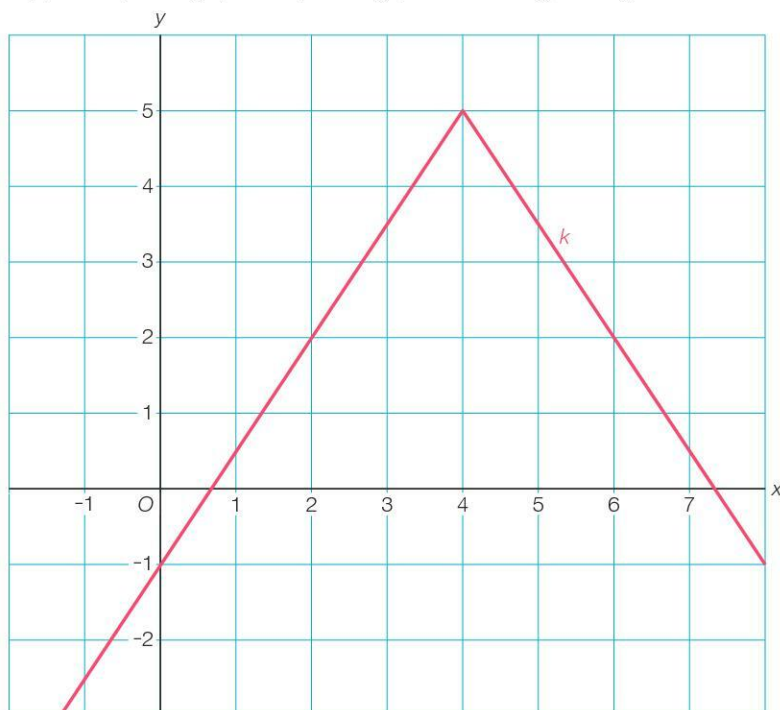
- b** $g(x) = -|2x - 6| = -2x + 6$ als $2x - 6 \geq 0$, dus als $x \geq 3$.
 $g(x) = -|2x - 6| = 2x - 6$ als $2x - 6 < 0$, dus als $x < 3$.



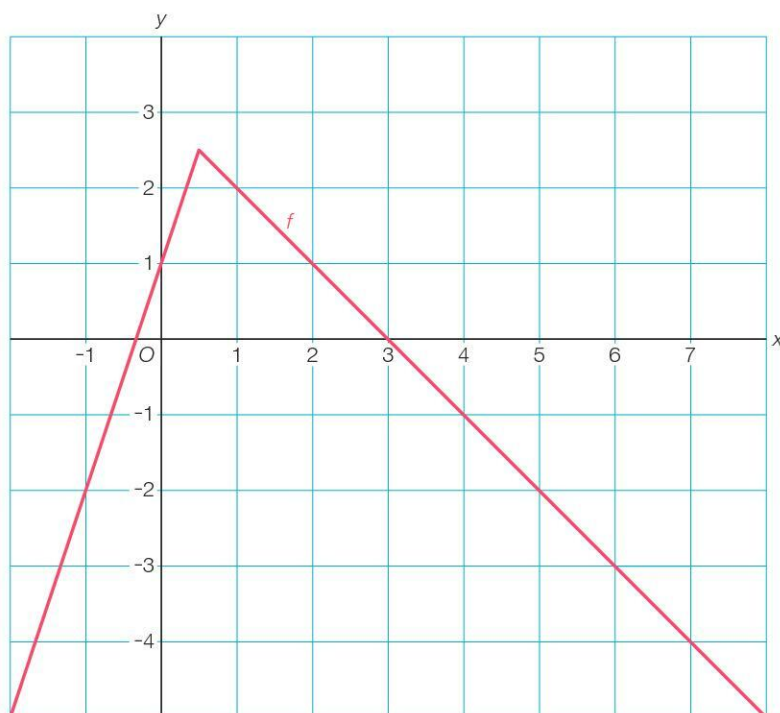
- c** $h(x) = 2 - \left| \frac{1}{3}x - 2 \right| = 2 - \left(\frac{1}{3}x - 2 \right) = 2 - \frac{1}{3}x + 2 = -\frac{1}{3}x + 4$ als $\frac{1}{3}x - 2 \geq 0$, dus als $x \geq 6$.
 $h(x) = 2 - \left| \frac{1}{3}x - 2 \right| = 2 - \left(-\frac{1}{3}x + 2 \right) = 2 + \frac{1}{3}x - 2 = \frac{1}{3}x$ als $\frac{1}{3}x - 2 < 0$, dus als $x < 6$.



- d** $k(x) = 5 - \left| 6 - 1\frac{1}{2}x \right| = 5 - (6 - 1\frac{1}{2}x) = 5 - 6 + 1\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}x - 1$ als $6 - 1\frac{1}{2}x \geq 0$, dus als $x \leq 4$.
 $k(x) = 5 - \left| 6 - 1\frac{1}{2}x \right| = 5 - (-6 + 1\frac{1}{2}x) = 5 + 6 - 1\frac{1}{2}x = -1\frac{1}{2}x + 11$ als $6 - 1\frac{1}{2}x < 0$, dus als $x > 4$.



- 65 a** $f(x) = x + 2 - |2x - 1| = x + 2 - (2x - 1) = x + 2 - 2x + 1 = -x + 3$ als $2x - 1 \geq 0$, dus als $x \geq \frac{1}{2}$.
 $f(x) = x + 2 - |2x - 1| = x + 2 - (-2x + 1) = x + 2 + 2x - 1 = 3x + 1$ als $2x - 1 < 0$, dus als $x < \frac{1}{2}$.



$f(\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2}$, dus $B_f = \langle \leftarrow, 2\frac{1}{2} \rangle$.

b $x \geq \frac{1}{2}$ geeft $-x + 3 = -x^2 + 4x + 3$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \vee x = 5 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{array} \right\} x = 5$$

$x < \frac{1}{2}$ geeft $3x + 1 = -x^2 + 4x + 3$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \vee x = 2 \\ x < \frac{1}{2} \end{array} \right\} x = -1$$

$f(5) = -2$ en $f(-1) = -2$

Dus de snijpunten zijn $(5, -2)$ en $(-1, -2)$.

66 a $f(x) = ax - 1 - |3x - 4| = ax - 1 - (3x - 4) = ax - 1 - 3x + 4 = (a - 3)x + 3$

als $3x - 4 \geq 0$, dus als $x \geq 1\frac{1}{3}$.

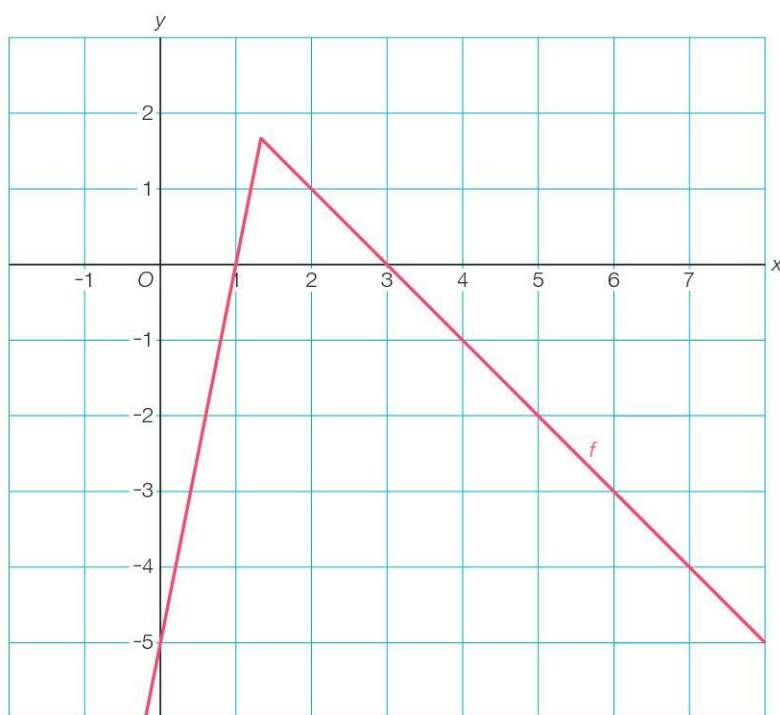
$$f(x) = ax - 1 - |3x - 4| = ax - 1 - (-3x + 4) = ax - 1 + 3x - 4 = (a + 3)x - 5$$

als $3x - 4 < 0$, dus als $x < 1\frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (a + 3)x - 5 \\ \text{door } (1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} (a + 3) \cdot 1 - 5 = 0 \\ a + 3 - 5 = 0 \\ a = 2 \end{array}$$

$$f(x) = -x + 3 \text{ als } x \geq 1\frac{1}{3}$$

$$f(x) = 5x - 5 \text{ als } x < 1\frac{1}{3}$$



$f(1\frac{1}{3}) = 1\frac{2}{3}$, dus $B_f = \langle \leftarrow, 1\frac{2}{3} \rangle$.

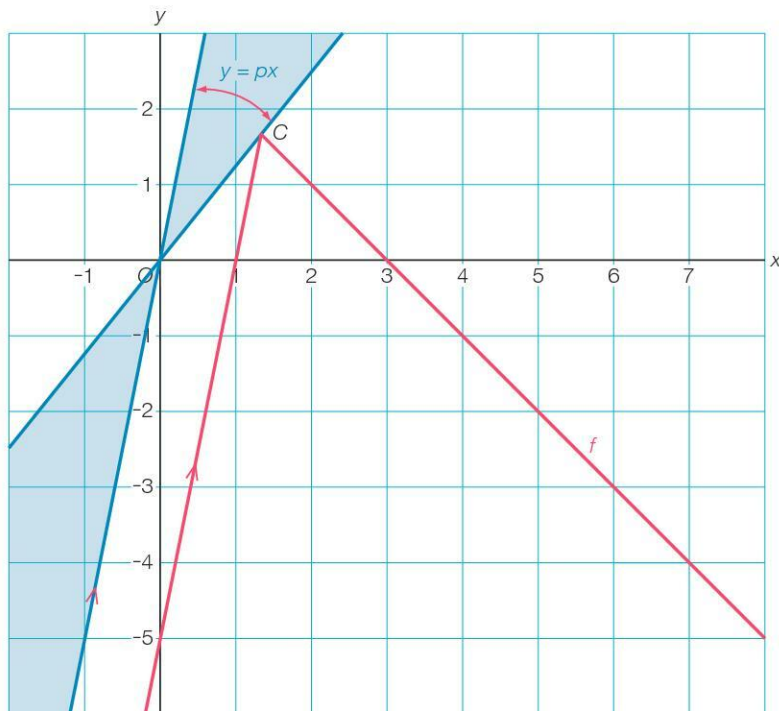
$$\mathbf{b} \quad \left. \begin{array}{l} f(x) = 5x - 5 \\ y = x \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5x - 5 = x \\ 4x = 5 \\ x = 1\frac{1}{4} \end{array}$$

A ligt op de lijn $y = x$, dus $A(1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4})$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x + 3 \\ y = x \end{array} \right\} \begin{array}{l} -x + 3 = x \\ -2x = -3 \\ x = 1\frac{1}{2} \end{array}$$

B ligt op de lijn $y = x$, dus $B(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.

c



$C(1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3})$ (zie a)

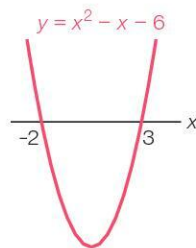
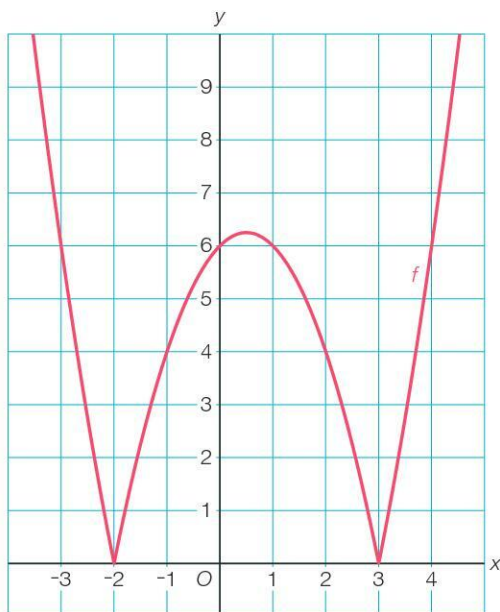
$$\left. \begin{array}{l} y = px \\ \text{door } C(1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{3}p = 1\frac{2}{3} \\ 4p = 5 \\ p = 1\frac{1}{4} \end{array}$$

Voor $p = 1\frac{1}{4}$ gaat de grafiek van $y = px$ door het punt C .

Voor $p = 5$ is de lijn $y = px$ evenwijdig met de grafiek van f .

Dus de lijn $y = px$ heeft geen enkel punt met de grafiek van f gemeen voor $1\frac{1}{4} < p \leq 5$.

67 a $f(x) = |x^2 - x - 6| = x^2 - x - 6$ als $x^2 - x - 6 \geq 0$
 $(x+2)(x-3) \geq 0$
 $x \leq -2 \vee x \geq 3$
 $f(x) = |x^2 - x - 6| = -x^2 + x + 6$ als $x^2 - x - 6 < 0$
 $(x+2)(x-3) < 0$
 $-2 < x < 3$



$$B_f = [0, \rightarrow)$$

b $x \leq -2 \vee x \geq 3$ geeft
 $x^2 - x - 6 = x + 5$
 $x^2 - 2x - 11 = 0$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -11 = 48$, dus $\sqrt{D} = 4\sqrt{3}$
 $x = \frac{2 + 4\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3} \vee x = \frac{2 - 4\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sqrt{3}$
 $-2 < x < 3$ geeft $-x^2 + x + 6 = x + 5$
 $-x^2 = -1$
 $x^2 = 1$
 $x = 1 \vee x = -1$

Dus de x-coördinaten van de snijpunten zijn $1 - 2\sqrt{3}$, -1 , 1 en $1 + 2\sqrt{3}$.

68 $f(x) = 4 - |3 - |2x - 6|| = 4 - |-2x + 9|$ als $2x - 6 \geq 0$, dus als $x \geq 3$.

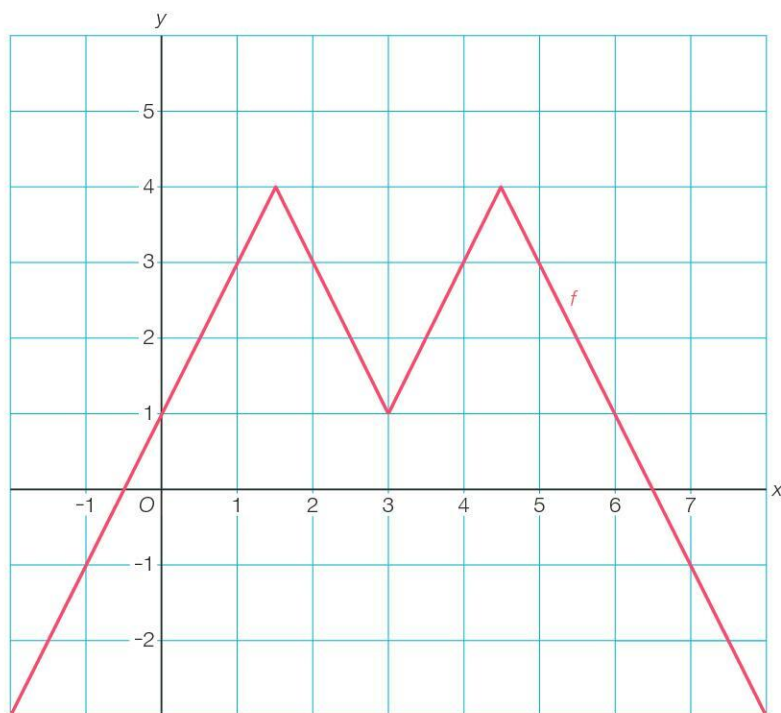
Dit geeft $f(x) = 4 - |-2x + 9| = 2x - 5$ als $9 - 2x \geq 0$, dus als $3 \leq x \leq 4\frac{1}{2}$

en $f(x) = 4 - |-2x + 9| = -2x + 13$ als $9 - 2x < 0$, dus als $x > 4\frac{1}{2}$.

$f(x) = 4 - |3 - |2x - 6|| = 4 - |2x - 3|$ als $2x - 6 < 0$, dus als $x < 3$.

Dit geeft $f(x) = 4 - |2x - 3| = -2x + 7$ als $2x - 3 \geq 0$, dus als $1\frac{1}{2} \leq x < 3$

en $f(x) = 4 - |2x - 3| = 2x + 1$ als $2x - 3 < 0$, dus als $x < 1\frac{1}{2}$.



- 69** $\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}|a-b| = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = a$ als $a-b \geq 0$, dus als $a \geq b$.
 $\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}|a-b| = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = b$ als $a-b < 0$, dus als $a < b$.
 Met $\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}|a-b|$ wordt dus het grootste van de twee getallen a en b berekend.

1.5 Grafisch-numeriek oplossen

Bladzijde 41

- 70** **a** De nulpunten zijn -1, 1, 2 en 3.
b $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ en $x = 3$

- 71** **a** De x -coördinaten zijn -2, 2 en 4.
b $x = -2$, $x = 2$ en $x = 4$

Bladzijde 43

- 72** **a** Voer in $y_1 = x^3 - 4x^2 + 3$.
 De optie nulpunt geeft de oplossingen $x \approx -0,79$, $x = 1$ en $x \approx 3,79$.
b Voer in $y_1 = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x - 1$.
 De optie nulpunt geeft de oplossingen $x \approx -0,58$ en $x \approx 3,34$.
c Voer in $y_1 = 0,4x^3 + 2x^2 + x - 2$ en $y_2 = x + 2$.
 De optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -4,51$, $x \approx -1,76$ en $x \approx 1,26$.
d Voer in $y_1 = 0,2x^5 - x^4 + 4x^2$ en $y_2 = 0,2x + 3$.
 De optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -1,45$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ en $x \approx 3,45$.
- 73** **a** Voer in $y_1 = 0,2x^4 - x^3 - x^2 + 8x + 2$.
 De optie minimum geeft $x \approx -1,62$ en $y \approx -7,96$ en geeft $x \approx 3,69$ en $y \approx 4,74$.
 De optie maximum geeft $x \approx 1,67$ en $y \approx 9,47$.
 Dus min. is $f(-1,62) \approx -7,96$, max. is $f(1,67) \approx 9,47$ en min. is $f(3,69) \approx 4,74$.
b Voer in $y_1 = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 40x - 28$.
 De optie minimum geeft $x = -2,5$ en $y \approx -88,42$.
 De optie maximum geeft $x = 4$ en $y \approx 94,67$.
 Dus min. is $g(-2,5) \approx -88,42$ en max. is $g(4) \approx 94,67$.

- 74 a** Voer in $y_1 = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + 4$.
De optie nulpunt geeft de nulpunten $-4,33$, $-0,77$ en $3,60$.
- b** De optie minimum geeft $x \approx -2,79$ en $y \approx -6,60$.
De optie maximum geeft $x \approx 1,79$ en $y \approx 9,44$.
Dus min. is $f(-2,79) \approx -6,60$ en max. is $f(1,79) \approx 9,44$.
- c** Voer in $y_2 = -x + 3$.
De optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -4,99$, $x \approx -0,16$ en $x \approx 3,65$.
- 75 a** Voer in $y_1 = |x^3 - 9x|$ en $y_2 = 5$.
De optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -3,25$, $x \approx -2,67$, $x \approx -0,58$, $x \approx 0,58$, $x \approx 2,67$ en $x \approx 3,25$.
- b** Voer in $y_3 = x + 5$.
De optie snijpunt met y_1 geeft de oplossingen $x \approx -3,10$, $x \approx -2,87$, $x \approx -0,51$, $x \approx 0,66$, $x \approx 2,44$ en $x \approx 3,39$.
- 76 a** Voer in $y_1 = 0,5x^3 - 5x^2 + 20$.
De optie nulpunt geeft de oplossingen $x \approx -1,84$, $x \approx 2,28$ en $x \approx 9,56$.
- b** Voer in $y_1 = 0,1x^4 + 0,1x^3 - 12x^2 + 50$ en $y_2 = 25x$.
De optie snijpunt geeft de oplossingen $x = -10$, $x \approx -3,53$, $x \approx 1,26$ en $x \approx 11,27$.
- c** Voer in $y_1 = |x^4 - x^3 + x - 5|$ en $y_2 = x + 3$.
De optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -1,48$, $x \approx -1,26$, $x = 1$ en $x = 2$.
- d** Voer in $y_1 = |x^3 - 5x^2 - 2x + 24|$ en $y_2 = 20$.
De optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -2,55$, $x = -1$, $x \approx 0,76$ en $x \approx 5,24$.

77
$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p^2}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}p^2 \text{ en}$$

$$y_{\text{top}} = f_p\left(-\frac{1}{4}p^2\right) = 2\left(-\frac{1}{4}p^2\right)^2 + p^2 \cdot -\frac{1}{4}p^2 + p = \frac{1}{8}p^4 - \frac{1}{4}p^4 + p = -\frac{1}{8}p^4 + p$$

$$\left. \begin{array}{l} \left(-\frac{1}{4}p^2, -\frac{1}{8}p^4 + p\right) \\ y = 8x + 4 \end{array} \right\} 8 \cdot -\frac{1}{4}p^2 + 4 = -\frac{1}{8}p^4 + p$$

$$-2p^2 + 4 = -\frac{1}{8}p^4 + p$$

$$\frac{1}{8}p^4 - 2p^2 - p + 4 = 0$$

Voer in $y_1 = \frac{1}{8}x^4 - 2x^2 - x + 4$.

De optie nulpunt geeft $x \approx -3,236 \vee x = -2 \vee x \approx 1,236 \vee x = 4$.

Dus $p \approx -3,236 \vee p = -2 \vee p \approx 1,236 \vee p = 4$.

$a > 0$, dus de grafiek van f_p is voor elke p een dalparabool.

Voor $p = -3,236...$ is $x_{\text{top}} = -\frac{1}{4} \cdot (-3,236...) ^2 \approx -2,618$ en $y_{\text{top}} = -\frac{1}{8} \cdot (-3,236...) ^4 + -3,236... \approx -16,944$,
dus min. is $f_{-3,236}(-2,618) \approx -16,944$.

Voor $p = -2$ is $x_{\text{top}} = -\frac{1}{4} \cdot (-2)^2 = -1$ en $y_{\text{top}} = -\frac{1}{8} \cdot (-2)^4 + -2 = -4$, dus min. is $f_{-2}(-1) = -4$.

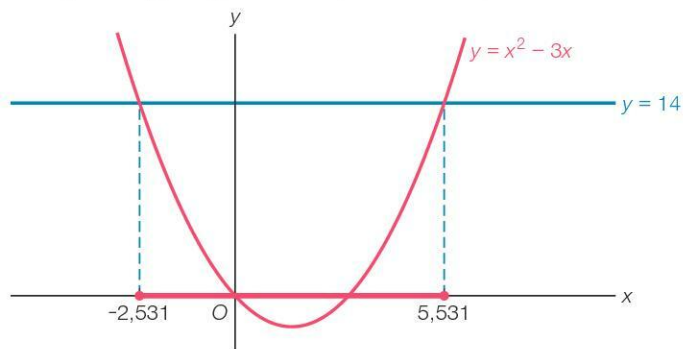
Voor $p = 1,236...$ is $x_{\text{top}} = -\frac{1}{4} \cdot 1,236... ^2 \approx -0,382$ en $y_{\text{top}} = -\frac{1}{8} \cdot 1,236... ^4 + 1,236... \approx 0,944$,
dus min. is $f_{1,236}(-0,382) \approx 0,944$.

Voor $p = 4$ is $x_{\text{top}} = -\frac{1}{4} \cdot 4^2 = -4$ en $y_{\text{top}} = -\frac{1}{8} \cdot 4^4 + 4 = -28$, dus min. is $f_4(-4) = -28$.

Bladzijde 44

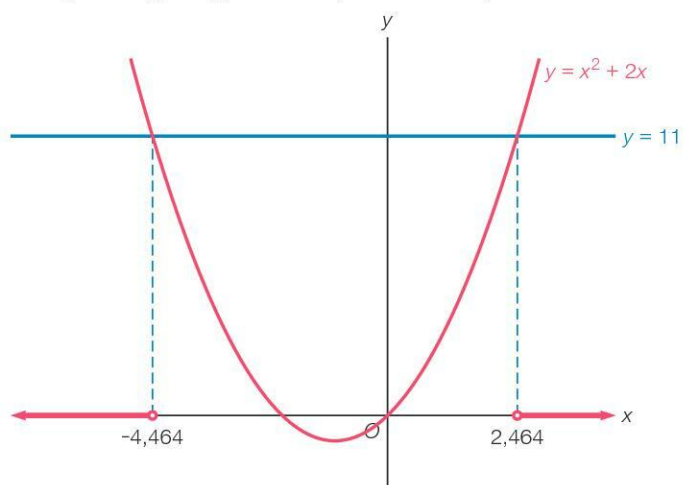
- 78 a** Voer in $y_1 = -x^2 + 6x$ en $y_2 = x + 4$.
De optie snijpunt geeft $x = 1 \vee x = 4$.
- b** Voor $1 < x < 4$.

- 79 a** Voer in $y_1 = x^2 - 3x$ en $y_2 = 14$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -2,531$ en $x \approx 5,531$.



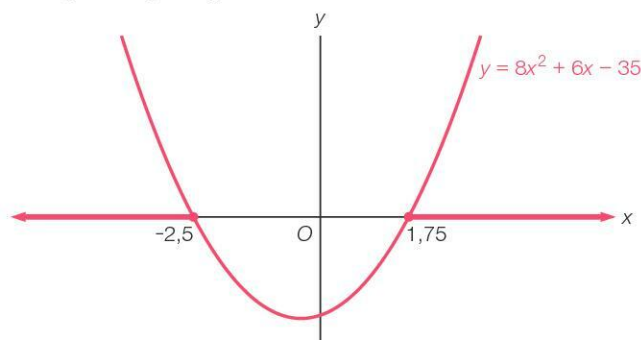
$x^2 - 3x \leq 14$ geeft $-2,531 \leq x \leq 5,531$

- b** Voer in $y_1 = x^2 + 2x$ en $y_2 = 11$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -4,464$ en $x \approx 2,464$.



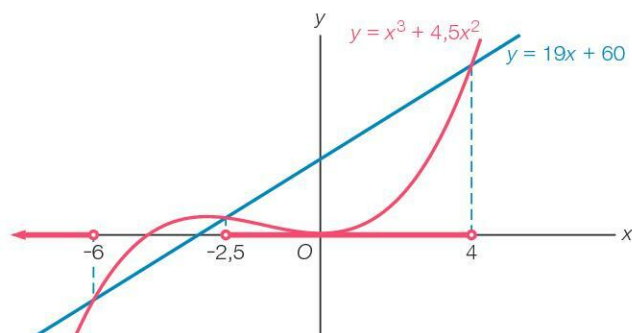
$x^2 + 2x > 11$ geeft $x < -4,464 \vee x > 2,464$

- c** Voer in $y_1 = 8x^2 + 6x - 35$.
De optie nulpunt geeft $x = -2,5$ en $x = 1,75$.



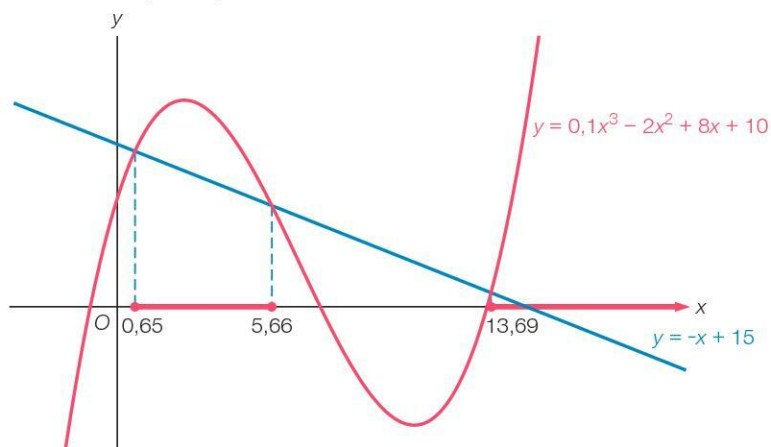
$8x^2 + 6x - 35 \geq 0$ geeft $x \leq -2,5 \vee x \geq 1,75$

- d** Voer in $y_1 = x^3 + 4,5x^2$ en $y_2 = 19x + 60$.
De optie snijpunt geeft $x = -6$, $x = -2,5$ en $x = 4$.



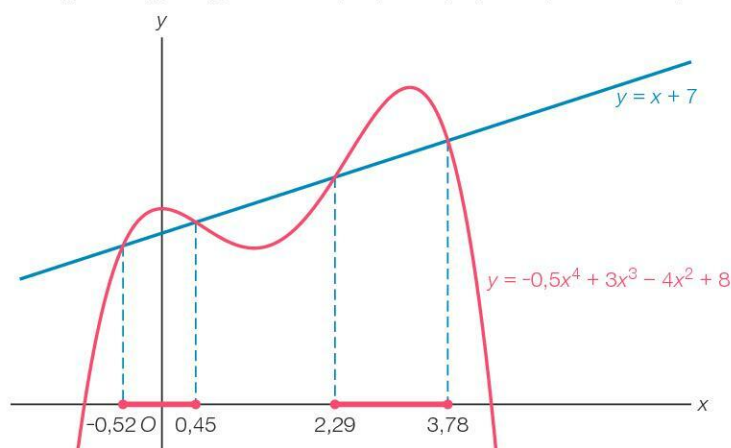
$x^3 + 4,5x^2 < 19x + 60$ geeft $x < -6 \vee -2,5 < x < 4$

- 80 a** Voer in $y_1 = 0,1x^3 - 2x^2 + 8x + 10$ en $y_2 = -x + 15$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 0,65$, $x \approx 5,66$ en $x \approx 13,69$.



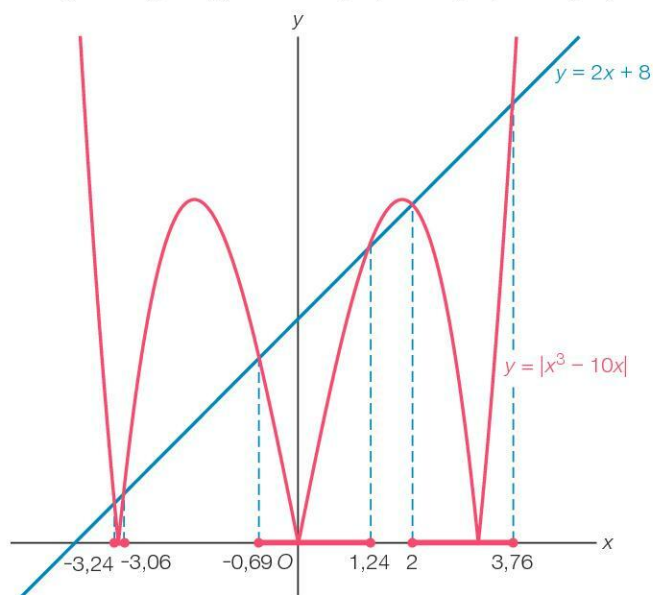
$$0,1x^3 - 2x^2 + 8x + 10 \geq -x + 15 \text{ geeft } 0,65 \leq x \leq 5,66 \vee x \geq 13,69$$

- b** Voer in $y_1 = -0,5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 8$ en $y_2 = x + 7$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -0,52$, $x \approx 0,45$, $x \approx 2,29$ en $x \approx 3,78$.



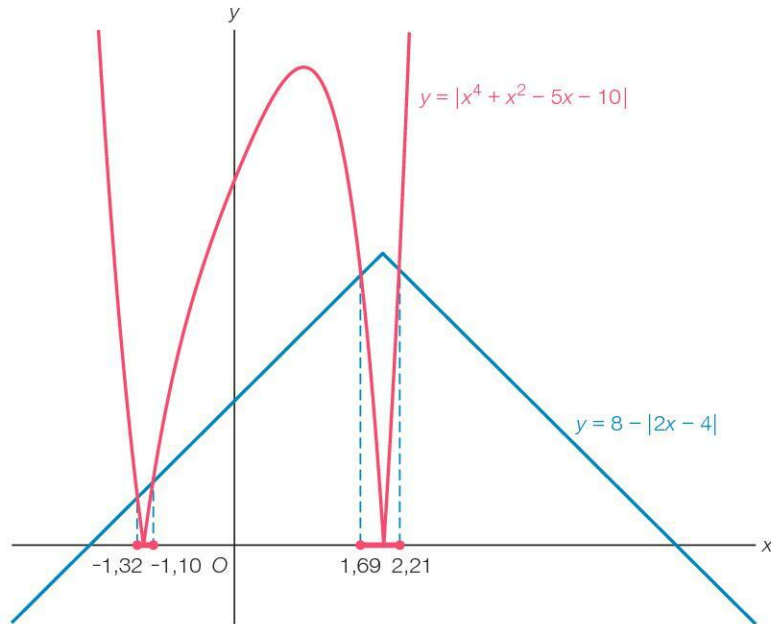
$$-0,5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 8 \geq x + 7 \text{ geeft } -0,52 \leq x \leq 0,45 \vee 2,29 \leq x \leq 3,78$$

- c** Voer in $y_1 = |x^3 - 10x|$ en $y_2 = 2x + 8$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -3,24$, $x \approx -3,06$, $x \approx -0,69$, $x \approx 1,24$, $x = 2$ en $x \approx 3,76$.



$$|x^3 - 10x| \leq 2x + 8 \text{ geeft } -3,24 \leq x \leq -3,06 \vee -0,69 \leq x \leq 1,24 \vee 2 \leq x \leq 3,76$$

- d Voer in $y_1 = |x^4 + x^2 - 5x - 10|$ en $y_2 = 8 - |2x - 4|$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -1,32$, $x \approx -1,10$, $x \approx 1,69$ en $x \approx 2,21$.



$$|x^4 + x^2 - 5x - 10| \leq 8 - |2x - 4| \text{ geeft } -1,32 \leq x \leq -1,10 \vee 1,69 \leq x \leq 2,21$$

Diagnostische toets

Bladzijde 48

- 1 a Stel $k: y = ax + b$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ \text{door } A(1, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 1 + b = 6 \\ 4 + b = 6 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $k: y = 4x + 2$.
- b Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 5}{3 - 1} = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } B(1, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 1 + b = 5 \\ -3 + b = 5 \\ b = 8 \end{array}$$

Dus $l: y = -3x + 8$.
- c
$$\left. \begin{array}{l} y = ax - 3 \\ \text{door } D(8, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \cdot 8 - 3 = 1 \\ 8a = 4 \\ a = \frac{1}{2} \end{array}$$
- 2 a Stel $N = at + b$.

$$\left. \begin{array}{l} t = 2 \text{ en } N = 100 \\ t = 5 \text{ en } N = 160 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{160 - 100}{5 - 2} = 20$$

$$\left. \begin{array}{l} N = 20t + b \\ t = 2 \text{ en } N = 100 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 20 \cdot 2 + b = 100 \\ 40 + b = 100 \\ b = 60 \end{array}$$

Dus $N = 20t + 60$.
- b $N = 20t + 60$
 $20t + 60 = N$
 $20t = N - 60$
 $t = \frac{1}{20}N - 3$
- c $N = 440$ geeft $t = \frac{1}{20} \cdot 440 - 3 = 19$

3 $f(x) = 0,45x^2 - 1,8x + 5$ geeft $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1,8}{0,9} = 2$ en dit geeft

$$y_{\text{top}} = 0,45 \cdot 2^2 - 1,8 \cdot 2 + 5 = 3,2.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } (2; 3,2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + b = 3,2 \\ 4 + b = 3,2 \\ b = -0,8 \end{array}$$

4 a $5x^2 = 3x$

$$5x^2 - 3x = 0$$

$$x(5x - 3) = 0$$

$$x = 0 \vee 5x = 3$$

$$x = 0 \vee x = \frac{3}{5}$$

b $2x^2 + 12x = 14$

$$x^2 + 6x = 7$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$(x - 1)(x + 7) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -7$$

c $(2x - 4)^2 = 144$

$$2x - 4 = 12 \vee 2x - 4 = -12$$

$$2x = 16 \vee 2x = -8$$

$$x = 8 \vee x = -4$$

d $3x^2 = 18x + 30$

$$x^2 = 6x + 10$$

$$x^2 - 6x - 10 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 - 10 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 19$$

$$x - 3 = \sqrt{19} \vee x - 3 = -\sqrt{19}$$

$$x = 3 + \sqrt{19} \vee x = 3 - \sqrt{19}$$

e $3x^2 - 6x = 2$

$$3x^2 - 6x - 2 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 60, \text{ dus } \sqrt{D} = 2\sqrt{15}$$

$$x = \frac{6 + 2\sqrt{15}}{6} = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{15} \vee x = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{15}$$

f $(2x + 1)^2 = 3x(x + 1) - x$

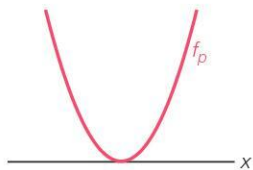
$$4x^2 + 4x + 1 = 3x^2 + 3x - x$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 = 0$$

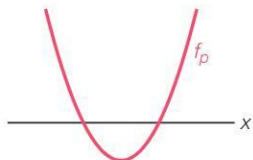
$$x = -1$$

5 a



$$\left. \begin{array}{l} \text{er moet gelden } D = 0 \\ D = p^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = p^2 - 36 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p^2 - 36 = 0 \\ p^2 = 36 \\ p = 6 \vee p = -6 \end{array}$$

b



$$\left. \begin{array}{l} \text{er moet gelden } D > 0 \\ D = p^2 - 36 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p^2 - 36 > 0 \\ p^2 > 36 \\ p < -6 \vee p > 6 \end{array}$$

6 $f_p(x) = x^2 + px + 1$ geeft $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}p$ en dit geeft

$$y_{\text{top}} = f_p(-\frac{1}{2}p) = (-\frac{1}{2}p)^2 + p \cdot (-\frac{1}{2}p) + 1 = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p^2 + 1 = -\frac{1}{4}p^2 + 1.$$

Het minimum is -3 geeft $-\frac{1}{4}p^2 + 1 = -3$

$$p^2 - 4 = 12$$

$$p^2 = 16$$

$$p = 4 \vee p = -4$$

7 a er zijn geen oplossingen als $D < 0$

$$\left. \begin{array}{l} D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 16 - 8p \\ 16 - 8p < 0 \\ -8p < -16 \\ p > 2 \end{array} \right\}$$

- b** er is één oplossing als $D = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} p^2 - 144 = 0 \\ p^2 = 144 \\ p = 12 \vee p = -12 \end{array} \right.$
- c** $p = 0$ geeft de vergelijking $2x + 5 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.
 $p \neq 0$ geeft $D = 2^2 - 4 \cdot p \cdot 5 = 4 - 20p$ $\left\{ \begin{array}{l} 4 - 20p > 0 \\ -20p > -4 \\ p < \frac{1}{5} \end{array} \right.$
er zijn twee oplossingen als $D > 0$

Dus twee oplossingen voor $p < 0 \vee 0 < p < \frac{1}{5}$.

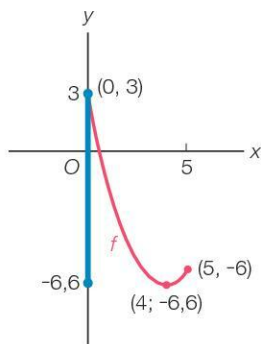
8 $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2p}{2} = -p$, dus $p = -x_{\text{top}}$.

$$\left. \begin{array}{l} y_{\text{top}} = x_{\text{top}}^2 + 2p \cdot x_{\text{top}} + p \\ p = -x_{\text{top}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y_{\text{top}} = x_{\text{top}}^2 + 2 \cdot (-x_{\text{top}}) \cdot x_{\text{top}} - x_{\text{top}} \\ y_{\text{top}} = x_{\text{top}}^2 - 2x_{\text{top}}^2 - x_{\text{top}} \\ y_{\text{top}} = -x_{\text{top}}^2 - x_{\text{top}} \end{array}$$

Dus de formule van de kromme is $y = -x^2 - x$.

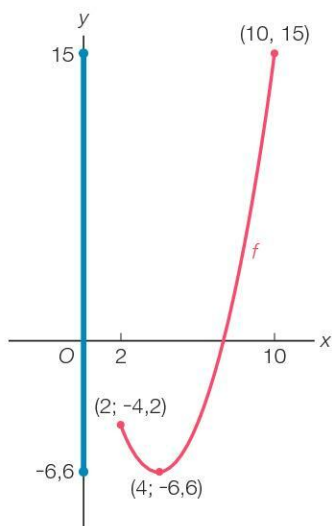
Bladzijde 49

9 a $f(0) = 3$ en $f(5) = -6$
 $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4,8}{1,2} = 4$ en $y_{\text{top}} = f(4) = -6,6$



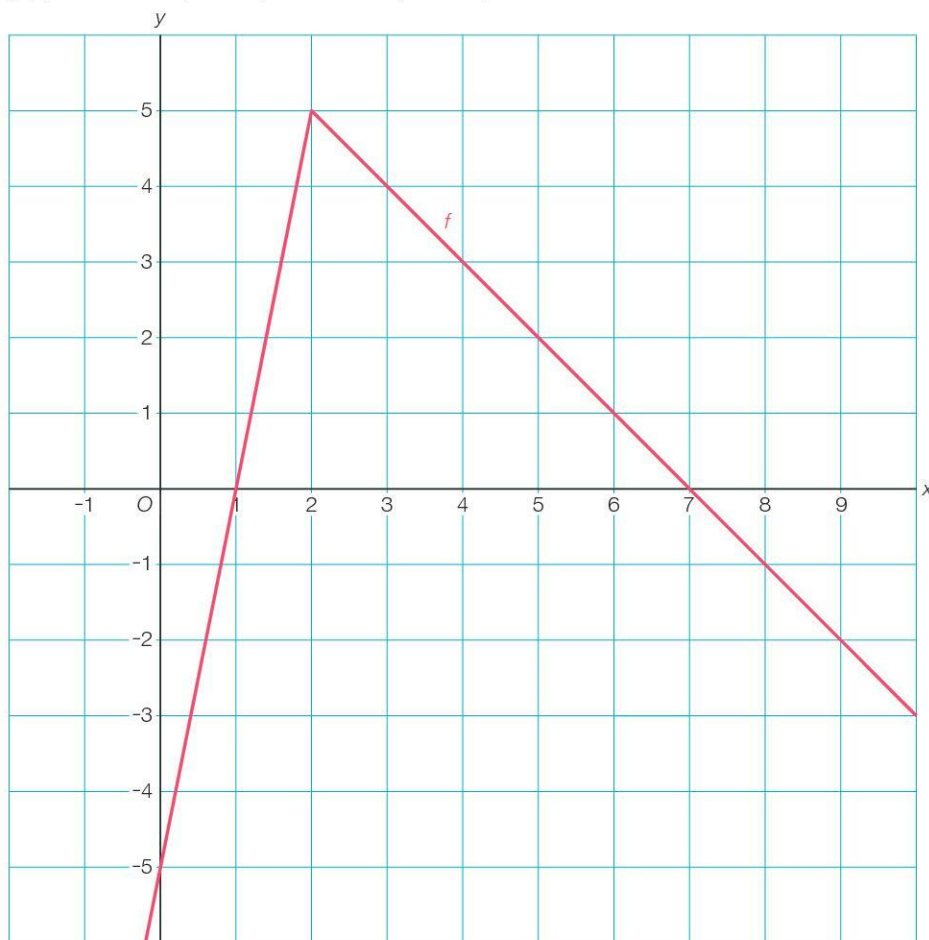
$$B_f = [-6,6; 3]$$

b $f(2) = -4,2$ en $f(10) = 15$



$$B_f = [-6,6; 15]$$

- 10 a** $f(x) = 2x + 1 - |3x - 6| = 2x + 1 - (3x - 6) = 2x + 1 - 3x + 6 = -x + 7$ als $3x - 6 \geq 0$, dus als $x \geq 2$.
 $f(x) = 2x + 1 - |3x - 6| = 2x + 1 - (-3x + 6) = 2x + 1 + 3x - 6 = 5x - 5$ als $3x - 6 < 0$, dus als $x < 2$.

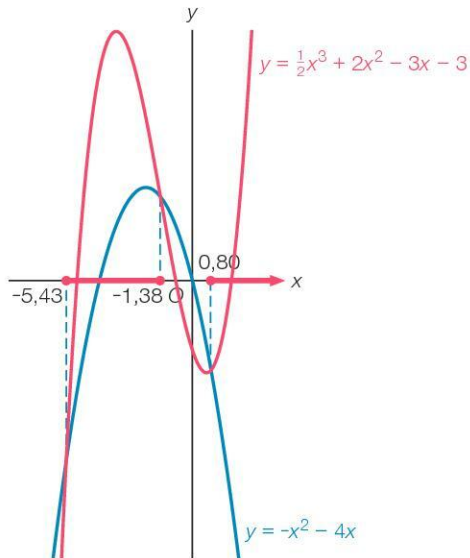


$$B_f = \langle \leftarrow, 5 \rangle$$

- b** $x \geq 2$ geeft $-x + 7 = -x^2 + 9x - 14$
 $x^2 - 10x + 21 = 0$
 $(x - 3)(x - 7) = 0$
 $x = 3 \vee x = 7$
 $x < 2$ geeft $5x - 5 = -x^2 + 9x - 14$
 $x^2 - 4x + 9 = 0$
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -20$
geen oplossingen
 $f(3) = 4$ en $f(7) = 0$, dus de snijpunten zijn $(3, 4)$ en $(7, 0)$.

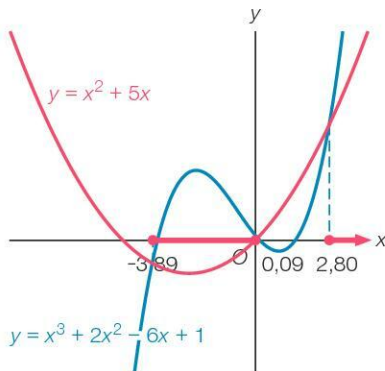
- 11 a** Voer in $y_1 = \frac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$.
De optie nulpunt geeft de nulpunten $-0,50$, $2,54$ en $7,96$.
b De optie maximum geeft $x \approx 0,86$ en $y \approx 3,23$.
De optie minimum geeft $x \approx 5,81$ en $y \approx -8,86$.
Dus max. is $f(0,86) \approx 3,23$ en min. is $f(5,81) \approx -8,86$.
c Voer in $y_2 = 2x - 3$.
De optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -1,28$, $x \approx 2,13$ en $x \approx 9,16$.

- 12 a** Voer in $y_1 = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 3x - 3$ en $y_2 = -x^2 - 4x$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -5,43$, $x \approx -1,38$ en $x \approx 0,80$.



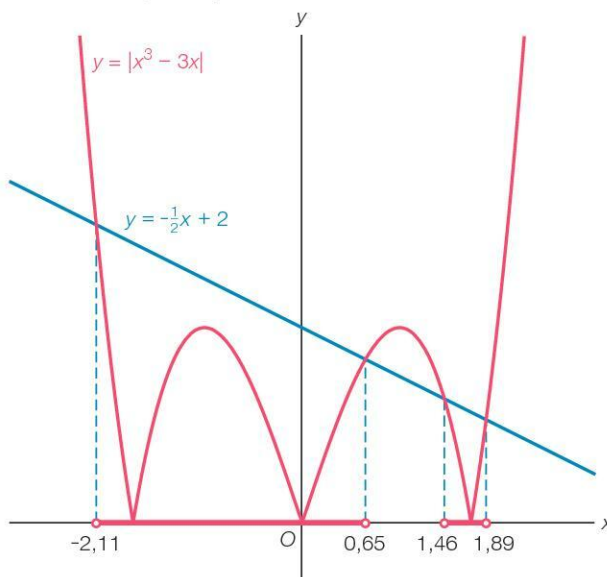
$$\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 3x - 3 \geq -x^2 - 4x \text{ geeft } -5,43 \leq x \leq -1,38 \vee x \geq 0,80$$

- b** Voer in $y_1 = x^2 + 5x$ en $y_2 = x^3 + 2x^2 - 6x + 1$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -3,89$, $x \approx 0,09$ en $x \approx 2,80$.



$$x^2 + 5x \leq x^3 + 2x^2 - 6x + 1 \text{ geeft } -3,89 \leq x \leq 0,09 \vee x \geq 2,80$$

- c** Voer in $y_1 = |x^3 - 3x|$ en $y_2 = -\frac{1}{2}x + 2$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -2,11$, $x \approx 0,65$, $x \approx 1,46$ en $x \approx 1,89$.



$$|x^3 - 3x| < -\frac{1}{2}x + 2 \text{ geeft } -2,11 < x < 0,65 \vee 1,46 < x < 1,89$$

2 De afgeleide functie

Voorkennis Snelheid

Bladzijde 53

- 1 18 minuten + 37 minuten = 55 minuten
37 seconden + 36 seconden = 73 seconden, oftewel 1 minuut en 13 seconden
Ramon deed 5 uur, 56 minuten en 13 seconden over de etappe.
Dat is $5 + \frac{56}{60} + \frac{13}{3600} = 5,9369...$ uur.

De gemiddelde snelheid is $\frac{175,5}{5,9369...} \approx 29,56$ km/uur.

Dat is $\frac{29,56...}{3,6} \approx 8,21$ m/s.

- 2 a De beklimming van 25 km in $1 + \frac{12}{60} = 1,2$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{25}{1,2} \approx 21$ km/uur.
De afdaling van 19 km in $\frac{17}{60} = 0,2833...$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{19}{0,2833...} \approx 67$ km/uur.
b De $25 + 19 = 44$ km van de beklimming en de afdaling samen in $1,2 + 0,2833... = 1,4833...$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{44}{1,4833...} \approx 30$ km/uur.

Bladzijde 54

- 3 a Bij elk van de drie gedeelten van de tocht neemt de afstand lineair toe in de tijd, dus bij elk van de drie gedeelten van de tocht is met een constante snelheid gereden.
b 12 km in $\frac{35}{60} = 0,5833...$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{12}{0,5833...} \approx 20,57$ km/uur.
 $23 - 12 = 11$ km in $\frac{58 - 35}{60} = 0,3833...$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{11}{0,3833...} \approx 28,70$ km/uur.
 $27 - 23 = 4$ km in $\frac{75 - 58}{60} = 0,2833...$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{4}{0,2833...} \approx 14,12$ km/uur.
c 27 km in $\frac{75}{60} = 1,25$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{27}{1,25} = 21,6$ km/uur.
Dat is $\frac{21,6}{3,6} = 6$ m/s.
- 4 a De afstand neemt niet lineair toe in de tijd, dus er is niet met een constante snelheid gereden.
b 35 km in $\frac{85}{60} = 1,4166...$ uur geeft gemiddelde snelheid $= \frac{35}{1,4166...} \approx 24,71$ km/uur.
c Aan het begin van de tocht heeft de wielrenner een snelheid die hoger is dan de gemiddelde snelheid. Gedurende de tocht neemt zijn snelheid af. Op het eind van de tocht is zijn snelheid lager dan de gemiddelde snelheid. Dus er zal een tijdstip zijn waarop de snelheid van de wielrenner gelijk is aan zijn gemiddelde snelheid.

2.1 Snelheden

Bladzijde 55

- 1 Tussen A en C neemt de daling steeds meer toe, tussen C en B neemt de daling steeds meer af.
- 2 Afnemend dalend op $\langle \leftarrow, 1 \rangle$.
Toenemend stijgend op $\langle 1, 2 \rangle$.
Afnemend stijgend op $\langle 2, 3 \rangle$.
Toenemend dalend op $\langle 3, \rightarrow \rangle$.

Bladzijde 56

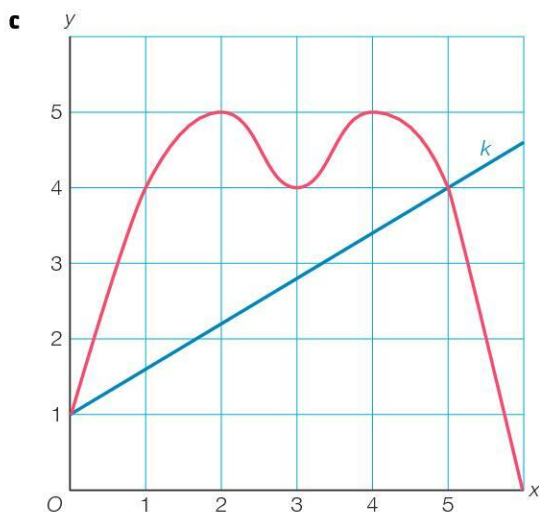
- 3** Afnemend dalend op $\langle \leftarrow, -4 \rangle$ en op $\langle 3, 5 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle -4, -2 \rangle$ en op $\langle 5, \rightarrow \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle -2, 1 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 1, 3 \rangle$.
- 4 a** Constant stijgend op $\langle 0, 3 \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle 3, 4 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 4, 5 \rangle$.
 Afnemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle 7, 10 \rangle$.
- b** Bij de steilste klim is de snelheid het laagst. Dus na 7 minuten.
- 5** De gevraagde gemiddelde snelheid is $\frac{90}{5} = 18$ m/s.

Bladzijde 57

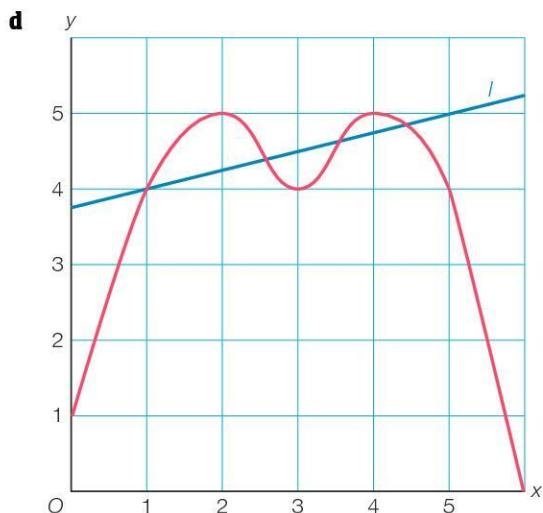
- 6 a** Op $[20, 40]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{12,5 - 5}{40 - 20} = \frac{7,5}{20} = 0,375$ km/minuut.
 De gevraagde gemiddelde snelheid is $0,375 \cdot 60 = 22,5$ km/uur.
 Op $[30, 60]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{15 - 10}{60 - 30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ km/minuut.
 De gevraagde gemiddelde snelheid is $\frac{1}{6} \cdot 60 = 10$ km/uur.
- b** De grafiek is niet overal even steil.
- c** Teken de lijn door de punten $(0, 0)$ en $(20, 5)$. Deze lijn snijdt de grafiek ook in het punt $(60, 15)$.
 Dus voor $p = 60$.
- 7** De gemiddelde snelheid op $[0, t]$ wordt steeds kleiner als je t steeds groter neemt.

Bladzijde 58

- 8 a** De gemiddelde verandering op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 1}{4 - 0} = \frac{4}{4} = 1$.
- b** Op $[2, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 5}{6 - 2} = \frac{-5}{4} = -1\frac{1}{4}$.



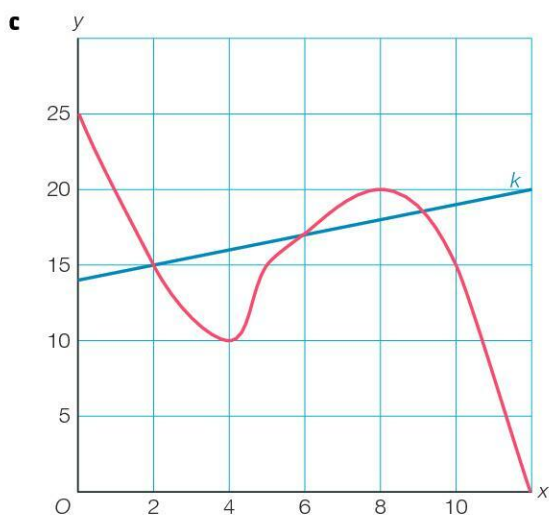
De lijn k door $(0, 1)$ met $rc_k = 0,6$ snijdt de grafiek in het punt $(5, 4)$.
 Dus voor $p = 5$.



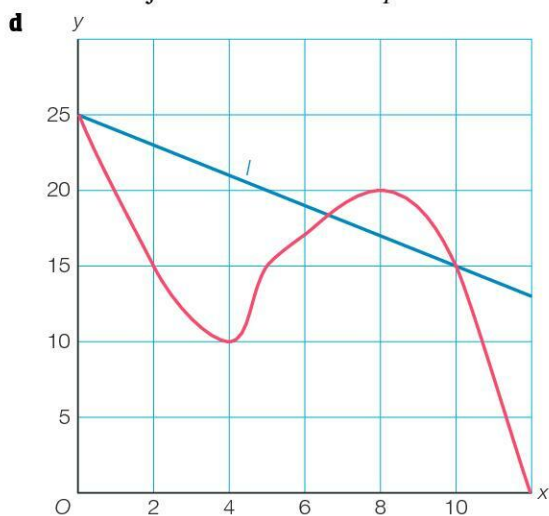
De lijn l door $(1, 4)$ met $rc_l = \frac{1}{4}$ snijdt de grafiek rechts van $x = 1$ in drie punten.
Dus er zijn drie waarden van q waarvoor het differentiequotiënt van y op $[1, q]$ gelijk is aan $\frac{1}{4}$.

9 a De gemiddelde verandering op $[2, 8]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20 - 15}{8 - 2} = \frac{5}{6}$.

b Op $[4, 12]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 10}{12 - 4} = \frac{-10}{8} = -1\frac{1}{4}$.



De lijn k door $(2, 15)$ met $rc_k = 0,5$ snijdt de grafiek rechts van $x = 2$ in twee punten.
Dus er zijn twee waarden van p waarvoor het differentiequotiënt van y op $[2, p]$ gelijk is aan $0,5$.



De lijn l door $(0, 25)$ met $rc_l = -1$ snijdt de grafiek bij $x = 6,5$ en bij $x = 10$.
Dus voor $q = 6,5$ en voor $q = 10$ is het differentiequotiënt van y op $[0, q]$ gelijk aan -1 .

10 $f(0) = -3$

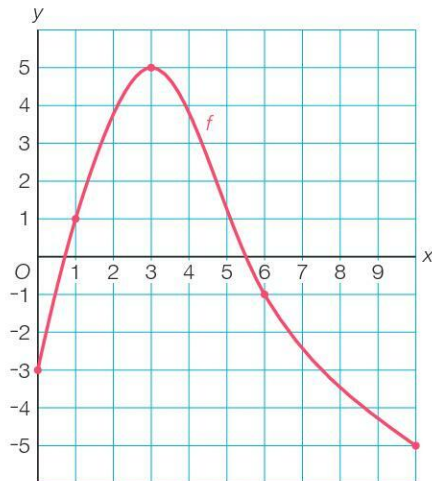
Op $[0, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$, dus $f(1) = -3 + 4 = 1$.

Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$, dus $f(3) = 1 + 2 \cdot 2 = 5$.

Op $[3, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2$, dus $f(6) = 5 + 3 \cdot -2 = -1$

Op $[6, 10]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, dus $f(10) = -1 + 4 \cdot -1 = -5$

Hieronder zie je een mogelijke grafiek.



Elke grafiek die door de punten $(0, -3)$, $(1, 1)$, $(3, 5)$, $(6, -1)$ en $(10, -5)$ gaat is goed.

11 a Door $(0, 2)$.

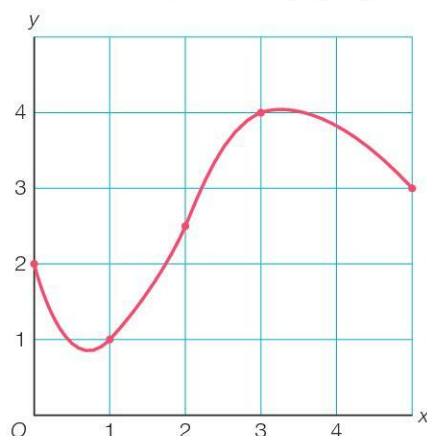
Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$, dus door $(2, 2 + 2 \cdot \frac{1}{4}) = (2, 2\frac{1}{2})$.

Op $[0, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{5}$, dus door $(5, 2 + 5 \cdot \frac{1}{5}) = (5, 3)$.

Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$, dus door $(1, 3 - 4 \cdot \frac{1}{2}) = (1, 1)$.

Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\frac{1}{2}$, dus door $(3, 1 + 2 \cdot 1\frac{1}{2}) = (3, 4)$.

Hieronder zie je een mogelijke grafiek.



b Op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-4}{5-3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

c Dat is mogelijk, want bij $x = 4$ is elke y -coördinaat mogelijk, dus ook $y = 5\frac{1}{2}$.

En op $[1, 4]$ geeft dit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\frac{1}{2} - 1}{4 - 1} = \frac{4\frac{1}{2}}{3} = 1\frac{1}{2}$.

- 12 a** $f(1) = -2$ en $f(5) = 6$, dus op de grafiek liggen de punten $(1, -2)$ en $(5, 6)$.

Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - (-2)}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$.

- b** $f(0) = 1$ en $f(4) = 1$, dus op de grafiek liggen de punten $(0, 1)$ en $(4, 1)$.

Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 1}{4 - 0} = 0$.

Bladzijde 60

- 13 a** Stel $k: y = ax + b$ met $a = rc_k = -\frac{1}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{4}x + b \\ f(4) = 2, \text{ dus } B(4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \cdot 4 + b = 2 \\ -1 + b = 2 \\ b = 3 \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{4}x + 3$.

- b** Op $[-2, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(6) - f(-2)}{6 - (-2)} = \frac{-26 - (-10)}{8} = -2$.

- 14 a** Op $[-1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-2 - 10}{4} = -3$.

- b** Op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{0 - 0}{3} = \frac{0}{3} = 0$.

- c** Op $[-5, -1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-1) - f(-5)}{-1 - (-5)} = \frac{10 - 54}{4} = \frac{-44}{4} = -11$.

- d** Op $[-5, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-5)}{4 - (-5)} = \frac{0 - 54}{9} = \frac{-54}{9} = -6$.

- 15** Bij een lineaire functie is ieder differentiequotiënt gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende lijn.

- 16 a** Voer in $y_1 = x^3 - 3x + 5$.

Schets, zie hiernaast.

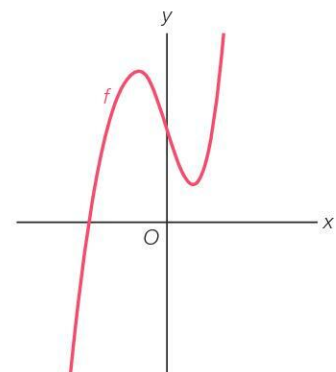
- b** Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{23 - 3}{2} = 10$.

- c** Op $[-2, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{57 - 3}{6} = 9$.

- d** Stel $l: y = ax + b$ met $a = rc_l = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{3 - (-13)}{4} = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(1) = 3, \text{ dus } B(1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 1 + b = 3 \\ b = -1 \end{array}$$

Dus $l: y = 4x - 1$.



- 17 a** Op $[-1, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{0,4 - (-7,6)}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

- b** Op $[-2, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{1,4 - 9,4}{4} = \frac{-8}{4} = -2$.

- c** $f(0) = -5$, dus $A(0, -5)$.

$f(3) = 0,4$, dus $B(3; 0,4)$.

De helling van de lijn AB is $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0,4 - (-5)}{3 - 0} = \frac{5,4}{3} = 1,8$.

- d** De helling van de lijn CD is gelijk aan de helling van de lijn $y = 2x$.

Dus de helling van de lijn CD is 2.

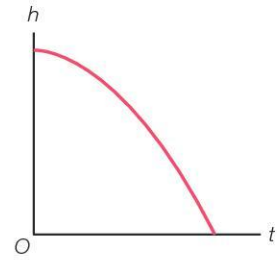
Bladzijde 61

- 18 a** $t = 0$ geeft $h = 276$, dus Berry gooit de steen vanaf een hoogte van 276 meter.
b Voer in $y_1 = -4,9x^2 - 4x + 276$.
 Schets, zie hiernaast.
c De optie nulpunt geeft $x = 7,108...$
 Dus na 7,1 seconden komt de steen op de grond terecht.
d $t = 2$ geeft $h = 248,4$
 $t = 3$ geeft $h = 219,9$
 In de derde seconde daalt de steen $248,4 - 219,9 = 28,5$ meter.
e $t = 4$ geeft $h = 181,6$
 De gemiddelde snelheid van de steen gedurende de eerste vier seconden is

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{276 - 181,6}{4} = \frac{94,4}{4} = 23,6 \text{ m/s.}$$

f Gebruik het resultaat van vraag c.
 $t = 7,108... - 1 = 6,108...$ geeft $h = 68,758...$
 De gemiddelde snelheid van de steen gedurende de laatste seconde van de val is

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{68,758...}{1} \approx 68,8 \text{ m/s.}$$



- 19** Op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ en
 op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{16a + 16 - 3 - (a + 4 - 3)}{3} = \frac{16a + 16 - 3 - a - 4 + 3}{3} = \frac{15a + 12}{3}$.
 Dus $\frac{15a + 12}{3} = 2$
 $15a + 12 = 6$
 $15a = -6$
 $a = -\frac{2}{5}$

Dit geeft $f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 4x - 3$.

Het differentiequotient van $f(x)$ op $[0, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\frac{3}{5} - -3}{1} = 3\frac{3}{5}$.

- 20 a** De gemiddelde snelheid op $[2, 3]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(3^3 + 3) - (2^3 + 2)}{3 - 2} = \frac{30 - 10}{1} = 20 \text{ m/s.}$
b De gemiddelde snelheid op $[2; 2,1]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,1^3 + 2,1) - (2^3 + 2)}{2,1 - 2} = \frac{11,361 - 10}{0,1} = 13,61 \text{ m/s.}$
 De gemiddelde snelheid op $[2; 2,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,01^3 + 2,01) - (2^3 + 2)}{2,01 - 2} = \frac{10,130601 - 10}{0,01} = 13,0601 \text{ m/s.}$
 De gemiddelde snelheid op $[2; 2,001]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,001^3 + 2,001) - (2^3 + 2)}{2,001 - 2} = \frac{10,013006001 - 10}{0,001} = 13,006001 \text{ m/s.}$
c Op een kleiner wordend interval komt de gemiddelde snelheid steeds dichterbij 13 m/s.
 De gemiddelde snelheid op $[2; 2,0001]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,0001^3 + 2,0001) - (2^3 + 2)}{2,0001 - 2} = \frac{10,001300060001 - 10}{0,0001} = 13,00060001 \text{ m/s.}$$

d Dit gaat mis omdat dan de noemer 0 wordt bij $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, en delen door 0 kan niet.

Bladzijde 63

- 21** Op $[3; 3,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,4 \cdot 3,01^2 - 0,4 \cdot 3^2}{0,01} = 2,404$.

De snelheid op $t = 3$ is bij benadering 2,40 m/s.

Op $[5; 5,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,4 \cdot 5,01^2 - 0,4 \cdot 5^2}{0,01} = 4,004$.

De snelheid op $t = 5$ is bij benadering 4,00 m/s.

22 Op $[4; 4,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3,5 \cdot 4,01^2 - 3,5 \cdot 4^2}{0,01} = 28,035$.

De snelheid op $t = 4$ is bij benadering $28,035 \cdot 3,6 = 100,926$ km/uur.
Dus Roel heeft gelijk.

23 Op $[1; 1,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(8 - \frac{5}{1,01 + 2}\right) - \left(8 - \frac{5}{1 + 2}\right)}{0,01} = 0,553\dots$

De snelheid op $t = 1$ is bij benadering $0,55$ m/s.

Op $[2; 2,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(8 - \frac{5}{2,01 + 2}\right) - \left(8 - \frac{5}{2 + 2}\right)}{0,01} = 0,311\dots$

De snelheid op $t = 2$ is bij benadering $0,31$ m/s.

24 a Op $[2; 2,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(10\sqrt{8,04 + 1} - 10) - (10\sqrt{8 + 1} - 10)}{0,01} = 6,659\dots$

De snelheid op $t = 2$ is bij benadering $6,66$ m/s.

Op $[20; 20,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(10\sqrt{80,04 + 1} - 10) - (10\sqrt{80 + 1} - 10)}{0,01} = 2,221\dots$

De snelheid op $t = 20$ is bij benadering $2,22$ m/s.

b Op $[11; 11,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(10\sqrt{44,04 + 1} - 10) - (10\sqrt{44 + 1} - 10)}{0,01} = 2,980\dots$

De snelheid op $t = 11$ is bij benadering $2,98$ m/s.

Het gemiddelde van de snelheden op $t = 2$ en op $t = 20$ is $\frac{6,659\dots + 2,221\dots}{2} = 4,440\dots$

Dit is niet gelijk aan de snelheid op $t = 11$.

25 De gemiddelde snelheid op $[0, 6]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(-\frac{1}{3} \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 5 \cdot 0^2\right)}{6 - 0} = 18$ m/s.

Benader de snelheid op $t = 0$. Neem bijvoorbeeld $\Delta t = 0,001$.

De snelheid op $t = 0$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(-\frac{1}{3} \cdot 0,001^3 + 5 \cdot 60,001^2\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 5 \cdot 0^2\right)}{0,001} = 0,004\dots$ m/s.

Benader de snelheid op $t = 6$. Neem bijvoorbeeld $\Delta t = 0,001$.

De snelheid op $t = 6$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(-\frac{1}{3} \cdot 6,001^3 + 5 \cdot 6,001^2\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2\right)}{0,001} = 23,99\dots$ m/s.

Op $t = 0$ is de snelheid minder dan de gemiddelde snelheid en op $t = 6$ is de snelheid meer dan de gemiddelde snelheid. Dus moet er op $[0, 6]$ een tijdstip zijn waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 6]$.

2.2 Raaklijnen en hellinggrafieken

Bladzijde 65

26 a De gemiddelde snelheid op $[2, 5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-5^2 + 10 \cdot 5) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{5 - 2} = \frac{25 - 16}{3} = 3$ m/s.

De gemiddelde snelheid op $[2, 4]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-4^2 + 10 \cdot 4) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{4 - 2} = \frac{24 - 16}{2} = 4$ m/s.

De gemiddelde snelheid op $[2, 3]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-3^2 + 10 \cdot 3) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{3 - 2} = \frac{21 - 16}{1} = 5$ m/s.

De gemiddelde snelheid op $[2; 2,5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-2,5^2 + 10 \cdot 2,5) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{2,5 - 2} = \frac{18,75 - 16}{0,5} = 5,5$ m/s.

b De richtingscoëfficiënt van de lijn AB_4 komt het dichtst in de buurt bij die van k .

- 27 a** Voer in $y_1 = x^2 + x - 2$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-1} = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x + b \\ f(-1) = -2, \text{ dus } A(-1, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 + b = -2 \\ 1 + b = -2 \\ b = -3 \end{array}$$

Dus $k: y = -x - 3$.

- b** Voer in $y_1 = \frac{2}{x-1} + 3$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = -0,5$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -0,5x + b \\ g(3) = 4, \text{ dus } B(3, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,5 \cdot 3 + b = 4 \\ -1,5 + b = 4 \\ b = 5,5 \end{array}$$

Dus $l: y = -0,5x + 5,5$.

- 28** Voer in $y_1 = 1 + \frac{5x^2}{x^2 + 1}$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-2} = -0,8$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -0,8x + b \\ f(-2) = 5, \text{ dus } A(-2, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,8 \cdot -2 + b = 5 \\ 1,6 + b = 5 \\ b = 3,4 \end{array}$$

Dus $k: y = -0,8x + 3,4$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1} = 2,5$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2,5x + b \\ f(1) = 3,5, \text{ dus } B(1; 3,5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2,5 \cdot 1 + b = 3,5 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $l: y = 2,5x + 1$.

Snijpunt berekenen van $k: y = -0,8x + 3,4$ en $l: y = 2,5x + 1$.

$$-0,8x + 3,4 = 2,5x + 1$$

$$-3,3x = -2,4$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0,727... \\ y = 2,5x + 1 \end{array} \right\} y = 2,818...$$

Dus snijpunt $(0,73; 2,82)$.

- 29** $t = 5$ geeft $s = 1,5 \cdot 5^2 = 37,5$

Voer in $y_1 = 1,5x^2$.

$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=5} = 15$, dus op $t = 5$ is de snelheid 15 m/s.

Na 10 seconden heeft de auto $37,5 + (10 - 5) \cdot 15 = 112,5$ meter afgelegd.

30 Voer in $y_1 = \frac{2x+4}{x-1}$ en $y_2 = \sqrt{9x-2}$.

De optie snijpunt geeft $x = 3$ en $y = 5$.

Zet y_2 uit.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = -1,5$.

$$\begin{aligned} y = -1,5x + b \\ S(3, 5) \quad \left. \begin{aligned} -1,5 \cdot 3 + b &= 5 \\ -4,5 + b &= 5 \\ b &= 9,5 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Dus $k: y = -1,5x + 9,5$.

Zet y_1 uit en y_2 aan.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = 0,9$.

$$\begin{aligned} y = 0,9x + b \\ S(3, 5) \quad \left. \begin{aligned} 0,9 \cdot 3 + b &= 5 \\ 2,7 + b &= 5 \\ b &= 2,3 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Dus $l: y = 0,9x + 2,3$.

31 Voer in $y_1 = \frac{600x}{4^x}$.

Op $t = 2$ is er nog $\frac{600 \cdot 2}{4^2} = \frac{1200}{16} = 75$ mg aanwezig.

$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=2} = -66,47\dots$, dus de hoeveelheid neemt vanaf $t = 2$ af met $66,47\dots$ mg/uur.

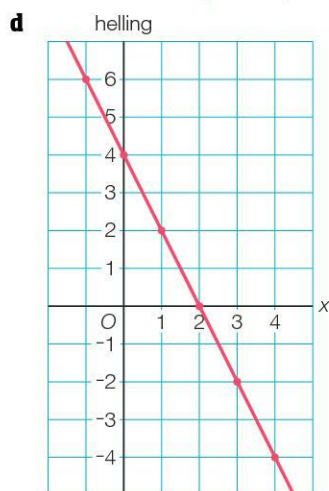
Het duurt dan nog $\frac{75}{66,47\dots} \approx 1,1$ uur.

Dus op $t \approx 2 + 1,1 = 3,1$.

Bladzijde 69

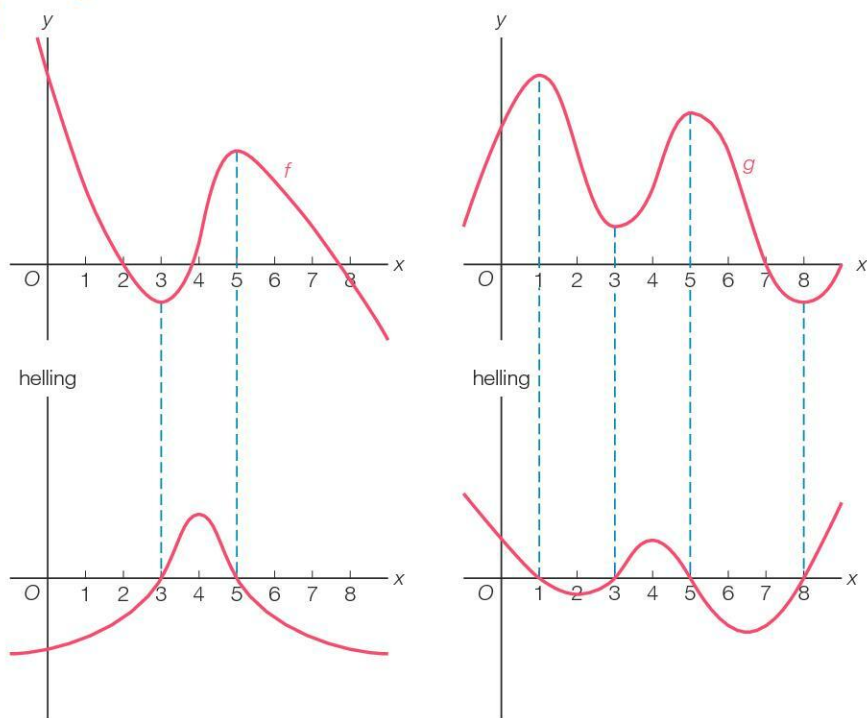
- 32 a positief
negatief
b In de top T is de helling 0.
c Voer in $y_1 = -x^2 + 4x$ en bereken de hellingen met de optie $\frac{dy}{dx}$.

x-coördinaat	-1	0	1	2	3	4
helling	6	4	2	0	-2	-4



- e De lijn geeft voor elke x de helling van de grafiek van f .

33



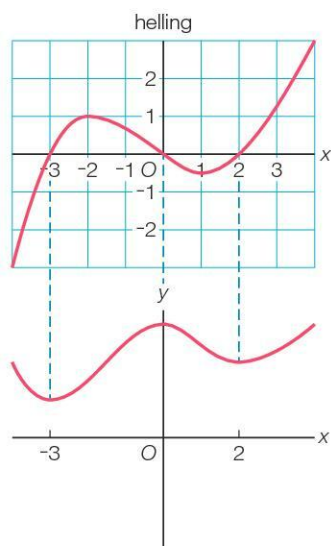
34

- a De hellinggrafiek ligt op het interval $\langle a, b \rangle$ boven de x -as en is daar stijgend.
- b De hellinggrafiek ligt op het interval $\langle c, d \rangle$ onder de x -as en is daar stijgend.
- c De hellinggrafiek gaat dalend door de x -as bij $x = p$.
- d De hellinggrafiek heeft een negatief minimum bij $x = q$.

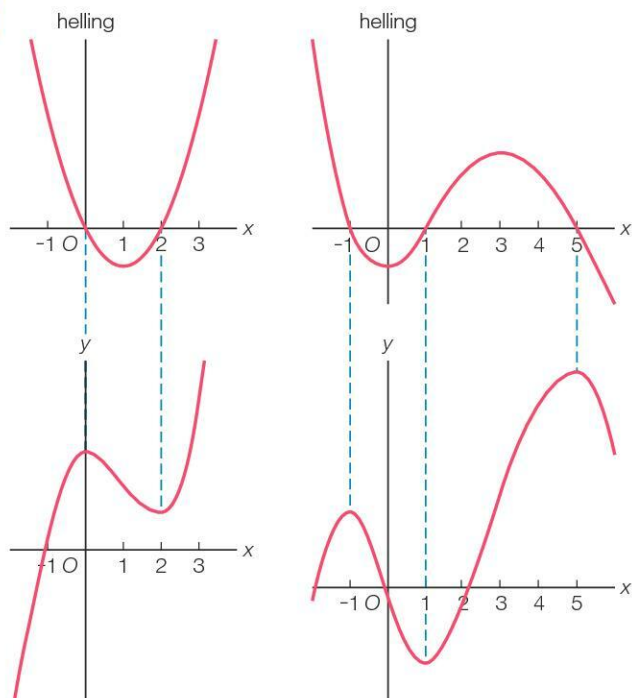
35

	hellinggrafiek van f	grafiek van f
$\langle \leftarrow, -3 \rangle$	onder de x -as	dalend
$x = -3$	snijdt de x -as	top
$\langle -3, 0 \rangle$	boven de x -as	stijgend
$x = 0$	snijdt de x -as	top
$\langle 0, 2 \rangle$	onder de x -as	dalend
$x = 2$	snijdt de x -as	top
$\langle 2, \rightarrow \rangle$	boven de x -as	stijgend

b

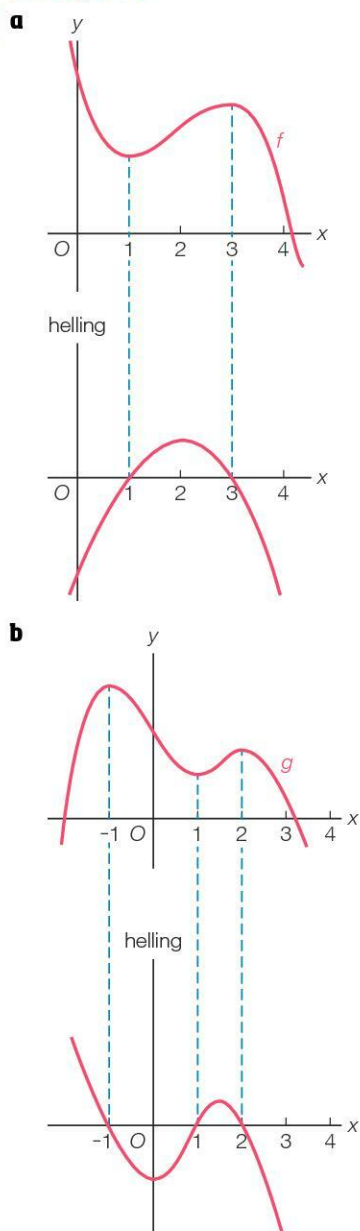


36

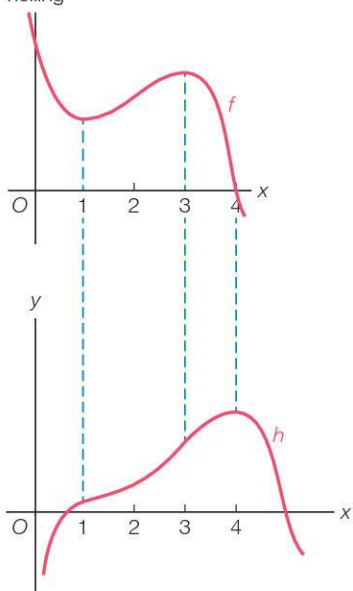


Bladzijde 72

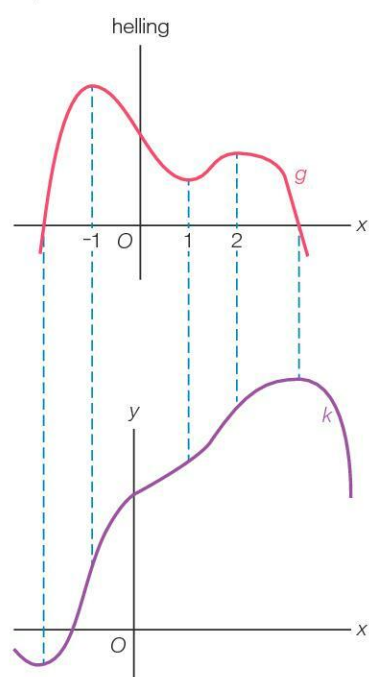
37



c helling

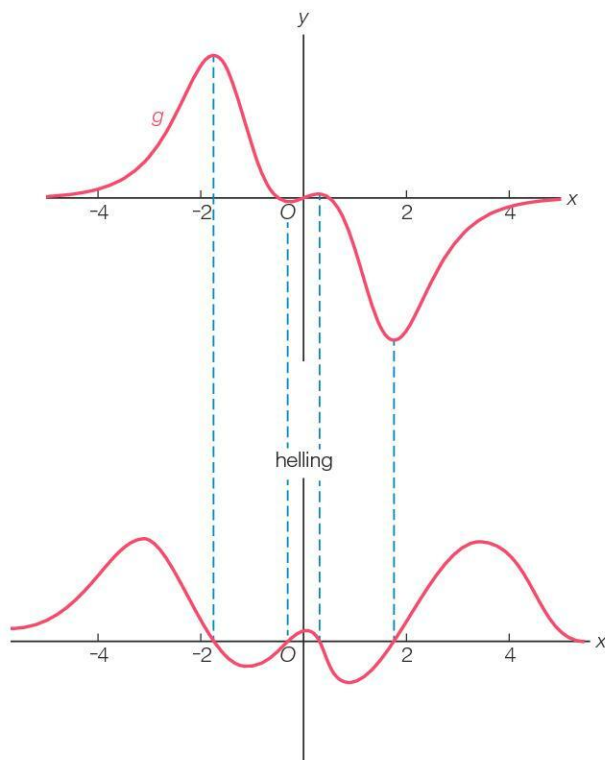


d



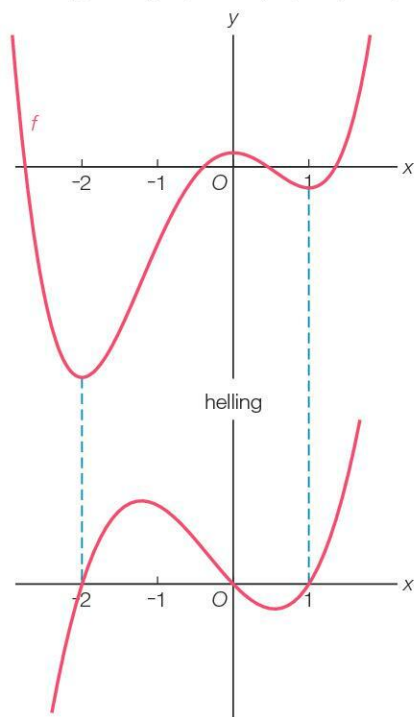
- 38 a** De grafiek van g heeft vier toppen.
De hellinggrafiek van g moet de x -as vier keer snijden.
Dus de grafiek van f kan niet de hellinggrafiek van g zijn.
De grafiek van f heeft drie toppen.
De grafiek van g snijdt de x -as drie keer.
Dus de grafiek van g is de hellinggrafiek van f .
Lars heeft gelijk.

b



- 39 a** Voer in $y_1 = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$.
 De optie minimum geeft $x = -2$ en $y = -30$ en $x = 1$ en $y = -3$.
 De optie maximum geeft $x = 0$ en $y = 2$.
 De toppen zijn $(-2, -30)$, $(0, 2)$ en $(1, -3)$.

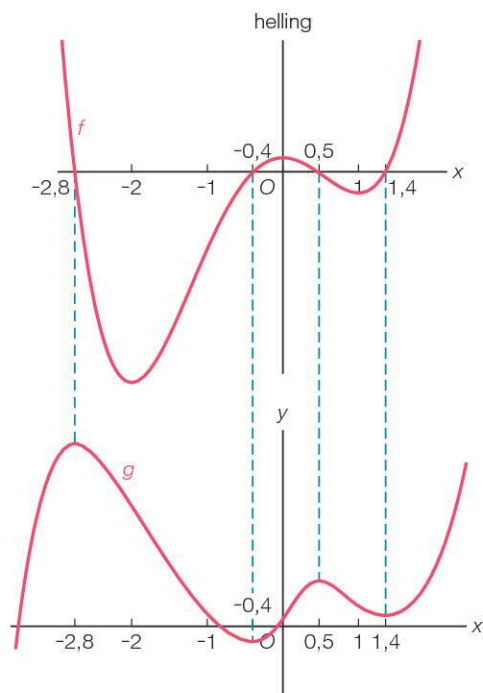
b



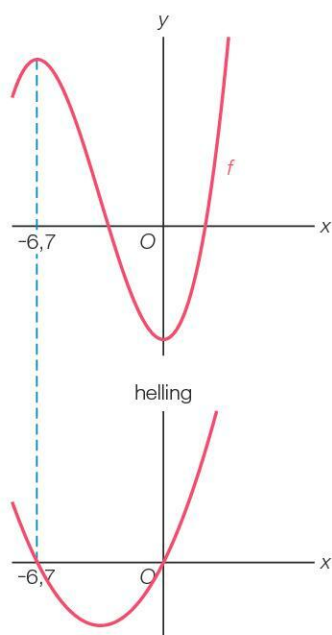
c $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-1} = 24$

- d** De optie nulpunt geeft $x \approx -2,8$, $x \approx -0,4$, $x \approx 0,5$ en $x \approx 1,4$.

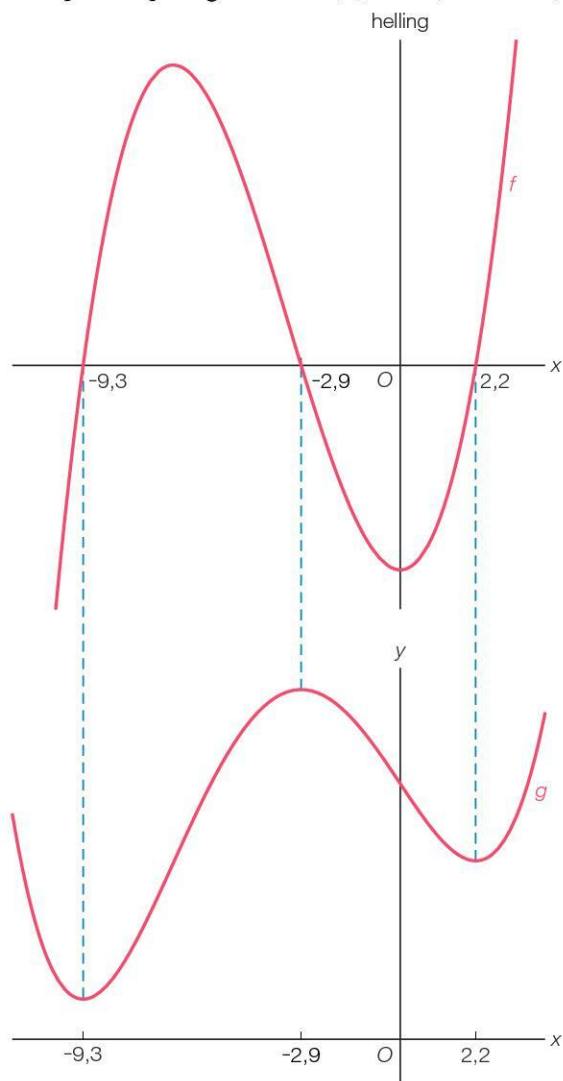
e



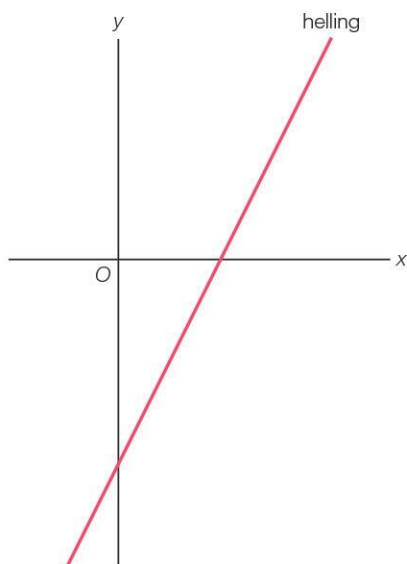
- 40 a** Voer in $y_1 = 0,1x^3 + x^2 - 6$.
 De optie maximum geeft $x \approx -6,7$ en $y \approx 8,8$.
 De optie minimum geeft $x = 0$ en $y = -6$.



b De optie nulpunt geeft $x \approx -9,3$, $x \approx -2,9$ en $x \approx 2,2$.



41 a



De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door een verticale verschuiving. Dus hebben f en g voor elke waarde van x dezelfde helling. De hellinggrafieken van f en g vallen dus samen.

$$\begin{aligned} \text{b} \quad \text{Stel } h(x) &= x^2 - 4x + c \\ \text{door } A(3, 4) \quad &\left\{ \begin{array}{l} 3^2 - 4 \cdot 3 + c = 4 \\ 9 - 12 + c = 4 \\ c = 7 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } h(x) = x^2 - 4x + 7.$$

2.3 Limiet en afgeleide

Bladzijde 74

- 42 a** In elk punt van de grafiek van f is de helling 3, want de grafiek van f is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt 3. Dus de hellinggrafiek is de horizontale lijn op hoogte 3. Dus de formule van de hellingfunctie van f is $y = 3$.
- b** $y = 0$

43 a

x	-2	-1	0	1	2
helling	-4	-2	0	2	4

- b** Bij elke toename van x met 1 hoort een toename van y met 2, dus de hellinggrafiek is een lijn met richtingscoëfficiënt 2. De hellinggrafiek gaat door het punt $(0, 0)$. Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = 2x$.

*

Bladzijde 75

- 44 a** Invullen van $h = 0$ in $\frac{3,6h + 0,6h^2}{h}$ geeft dat de noemer gelijk is aan nul. Delen door nul is niet toegestaan.

b $\lim_{h \rightarrow 0} (3,6 + 0,6h) = 3,6 + 0,6 \cdot 0 = 3,6$

45 a
$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1\frac{1}{2}(4+h)^2 - 1\frac{1}{2} \cdot 4^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1\frac{1}{2}(16 + 8h + h^2) - 1\frac{1}{2} \cdot 16}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{24 + 12h + 1\frac{1}{2}h^2 - 24}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 1\frac{1}{2}h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12 + 1\frac{1}{2}h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 1\frac{1}{2}h) = 12$$

b
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1\frac{1}{2}(x+h)^2 - 1\frac{1}{2}x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1\frac{1}{2}(x^2 + 2xh + h^2) - 1\frac{1}{2}x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1\frac{1}{2}x^2 + 3xh + 1\frac{1}{2}h^2 - 1\frac{1}{2}x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3xh + 1\frac{1}{2}h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x + 1\frac{1}{2}h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x + 1\frac{1}{2}h) = 3x$$

Bladzijde 76

46 a
$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 4(3+h) - (3^2 - 4 \cdot 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 12 - 4h - -3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$$

b
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 4(x+h) - (x^2 - 4x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h - x^2 + 4x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 4) = 2x - 4$$

47 a
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) - ax}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax + ah - ax}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (a) = a$$

b
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (0) = 0$$

48 a $(x+h)^3 = (x+h)(x+h)^2 = (x+h)(x^2 + 2xh + h^2) = x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

b
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

49 a $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot g(x+h) - c \cdot g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot (g(x+h) - g(x))}{h}$$

$$= c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = c \cdot g'(x)$$

b $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft

$$s'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

Bladzijde 77

50 a $\left. \begin{array}{l} h(x) = c \cdot f(x) \text{ met } c = 10 \text{ en } f(x) = x^2 \\ f(x) = c \cdot g(x) \text{ geeft } f'(x) = c \cdot g'(x) \\ f(x) = x^2 \text{ geeft } f'(x) = 2x \end{array} \right\} h'(x) = c \cdot f'(x) = 10 \cdot 2x = 20x$

b Dit volgt uit de regels

- $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$
- $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$
- $f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$
- $f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$
- $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Bladzijde 78

51 $v(x) = f(x) - g(x) = f(x) + (-1) \cdot g(x) = f(x) + h(x)$ met $h(x) = -1 \cdot g(x)$.

Uit $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$ volgt $h'(x) = -1 \cdot g'(x)$.

Uit $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ volgt

$$v'(x) = f'(x) + h'(x) = f'(x) - 1 \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Dus de verschilregel $v(x) = f(x) - g(x)$ geeft $v'(x) = f'(x) - g'(x)$ volgt uit de regels

$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$ en $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$.

52 a $f(x) = 5x^6 - 3x^5 + 2x - 7$ geeft $f'(x) = 30x^5 - 15x^4 + 2$

b $g(x) = -2x^8 - 4x^4 + 7,2$ geeft $g'(x) = -16x^7 - 16x^3$

c $h(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ geeft $h'(x) = -x^2 - x - 1$

d $k(q) = 1 + 3q - 3q^2 - 5q^7$ geeft $k'(q) = 3 - 6q - 35q^6$

53 a $f(x) = (5x+7)(4-3x) = 20x - 15x^2 + 28 - 21x = -15x^2 - x + 28$ geeft $f'(x) = -30x - 1$

b $g(x) = (3x+6)^2 - 8x = 9x^2 + 36x + 36 - 8x = 9x^2 + 28x + 36$ geeft $g'(x) = 18x + 28$

c $h(x) = 5(x-3)^2 + 5(2x-1) = 5(x^2 - 6x + 9) + 10x - 5 = 5x^2 - 30x + 45 + 10x - 5$
 $= 5x^2 - 20x + 40$ geeft $h'(x) = 10x - 20$

d $k(x) = -3(x-1)(5-9x) - 8(x-7) = -3(5x - 9x^2 - 5 + 9x) - 8x + 56$
 $= -15x + 27x^2 + 15 - 27x - 8x + 56 = 27x^2 - 50x + 71$ geeft $k'(x) = 54x - 50$

- 54 a $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x) = 3x^3 + 15x^2 - x^2 - 5x = 3x^3 + 14x^2 - 5x$ geeft $f'(x) = 9x^2 + 28x - 5$
 b $g(x) = (3x^3 - 1)^2 = 9x^6 - 6x^3 + 1$ geeft $g'(x) = 54x^5 - 18x^2$
 c $h(x) = (5x^5 - 3)(3x - 2) = 15x^6 - 10x^5 - 9x + 6$ geeft $h'(x) = 90x^5 - 50x^4 - 9$
 d $k(x) = 5 - 3(x^4 - x)(x + 1) = 5 - 3(x^5 + x^4 - x^2 - x) = 5 - 3x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 3x$ geeft
 $k'(x) = -15x^4 - 12x^3 + 6x + 3$
 e $l(t) = (5t^3 - t)(3t^5 + t) = 15t^8 + 5t^4 - 3t^6 - t^2$ geeft $l'(t) = 120t^7 + 20t^3 - 18t^5 - 2t$
 f $m(q) = 1 - (3q^2 - 2)^2 = 1 - (9q^4 - 12q^2 + 4) = 1 - 9q^4 + 12q^2 - 4 = -9q^4 + 12q^2 - 3$ geeft
 $m'(q) = -36q^3 + 24q$

Bladzijde 79

- 55 a $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 5$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$
 Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.
 b $x = 4$ geeft helling $= -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = -24 + 8 + 1 = -15$
 c helling $= -1$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -1$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -4 = 64$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{6} = 2 \vee x = \frac{4 - 8}{6} = -\frac{2}{3}$$

- 56 $f(x) = ax^4 - 3x^2 + 2ax$ geeft $f'(x) = 4ax^3 - 6x + 2a$
 $f'(2) = 5$ geeft $4a \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 + 2a = 5$
 $32a - 12 + 2a = 5$
 $34a = 17$
 $a = \frac{1}{2}$

- 57 $k(x) = \frac{4x - 2}{3x + 3} = \frac{2(2x - 1)}{3(x + 1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{2}{3} \left(\frac{2x - 1}{x + 1} \right) = \frac{2}{3} \cdot h(x)$ geeft $k'(x) = \frac{2}{3} \cdot h'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(x + 1)^2} = \frac{2}{(x + 1)^2}$

- 58 Stel $h(x) = ax^2 + bx + c$, dan is $h'(x) = 2ax + b$.

$$\begin{cases} h'(x) = 2ax + b \\ g(x) = 6x + 12 \end{cases} a = 3 \text{ en } b = 12$$

 Dus $h(x) = 3x^2 + 12x + c$.
 $h(-3) = -4$ geeft $3 \cdot (-3)^2 + 12 \cdot -3 + c = -4$
 $27 - 36 + c = -4$
 $c = 5$
 Dus $h(x) = 3x^2 + 12x + 5$.

2.4 Toepassingen van de afgeleide

Bladzijde 81

- 59 a $p(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot (3x - 7) = 3x^3 - 7x^2$ geeft $p'(x) = 9x^2 - 14x$
 $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$
 $g(x) = 3x - 7$ geeft $g'(x) = 3$
 b $f'(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot 3 = 6x$ en $p'(x) = 9x^2 - 14x$, dus $p'(x) \neq f'(x) \cdot g'(x)$.
 c $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot (3x - 7) + x^2 \cdot 3 = 6x^2 - 14x + 3x^2 = 9x^2 - 14x$
 en $p'(x) = 9x^2 - 14x$, dus $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- 60 a $f(x) = (2 - 3x^2)(2 + 7x)$ geeft
 $f'(x) = [2 - 3x^2]' \cdot (2 + 7x) + (2 - 3x^2) \cdot [2 + 7x]'$
 $= -6x(2 + 7x) + (2 - 3x^2) \cdot 7 = 7(2 - 3x^2) - 6x(2 + 7x)$
 b $g(x) = (2x - 5)^2 = (2x - 5)(2x - 5)$ geeft
 $g'(x) = [2x - 5]' \cdot (2x - 5) + (2x - 5) \cdot [2x - 5]' = 2 \cdot (2x - 5) + (2x - 5) \cdot 2 = 4(2x - 5)$
 c $h(x) = (x^2 - 3x)(x^3 + x^2 + x)$ geeft
 $h'(x) = [x^2 - 3x]' \cdot (x^3 + x^2 + x) + (x^2 - 3x) \cdot [x^3 + x^2 + x]'$
 $= (2x - 3)(x^3 + x^2 + x) + (x^2 - 3x)(3x^2 + 2x + 1)$

d $j(x) = (3x^2 - 4)^2 = (3x^2 - 4)(3x^2 - 4)$ geeft
 $j'(x) = [3x^2 - 4]' \cdot (3x^2 - 4) + (3x^2 - 4) \cdot [3x^2 - 4]'$
 $= 6x(3x^2 - 4) + (3x^2 - 4) \cdot 6x = 12x(3x^2 - 4)$

Bladzijde 82

61 a $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$  Neem van het linker- en het rechterlid de afgeleide.
 $[\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}]' = [x]'$
 $[\sqrt{x}]' \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot [\sqrt{x}]' = 1$
 $2\sqrt{x} \cdot [\sqrt{x}]' = 1$  $: 2\sqrt{x}$
 $[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Dus $f(x) = \sqrt{x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

b $\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{2x-1} = 2x-1$
 $[\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{2x-1}]' = [2x-1]'$
 $[\sqrt{2x-1}]' \cdot \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x-1} \cdot [\sqrt{2x-1}]' = 2$
 $2\sqrt{2x-1} \cdot [\sqrt{2x-1}]' = 2$
 $[\sqrt{2x-1}]' = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$
Dus $g(x) = \sqrt{2x-1}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.
 $\sqrt{x^2-x} \cdot \sqrt{x^2-x} = x^2-x$
 $[\sqrt{x^2-x} \cdot \sqrt{x^2-x}]' = [x^2-x]'$
 $[\sqrt{x^2-x}]' \cdot \sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2-x} \cdot [\sqrt{x^2-x}]' = 2x-1$
 $2\sqrt{x^2-x} \cdot [\sqrt{x^2-x}]' = 2x-1$
 $[\sqrt{x^2-x}]' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$
Dus $h(x) = \sqrt{x^2-x}$ geeft $h'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$.

62 a $p = fgh = fg \cdot h = fh$ geeft $p' = j'h + jh'$
 $j = fg$ geeft $j' = f'g + fg'$
Dus $p' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$.

b $p = fghj$ geeft $p' = [fgh]' \cdot j + fgh \cdot [j]'$
 $= (f'gh + fg'h + fgh') \cdot j + fgh \cdot j'$
 $= f'ghj + fg'hj + fgh'j + fghj'$

63 a $q(x) \cdot n(x) = t(x)$
Differentiëren van beide leden geeft $q'(x) \cdot n(x) + q(x) \cdot n'(x) = t'(x)$.

b $q'(x) \cdot n(x) + q(x) \cdot n'(x) = t'(x)$
 $q'(x) \cdot n(x) = t'(x) - q(x) \cdot n'(x)$

$$q'(x) = \frac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$$

c Invullen van $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ in $q'(x) = \frac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \frac{t'(x) - \frac{t(x)}{n(x)} \cdot n'(x)}{n(x)}$.

Teller en noemer vermenigvuldigen met $n(x)$ geeft $q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$.

Bladzijde 84

- 64 a** $f(x) = \frac{x-2}{x+5}$ geeft $f'(x) = \frac{(x+5) \cdot 1 - (x-2) \cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{x+5-x+2}{(x+5)^2} = \frac{7}{(x+5)^2}$
- b** $f(x) = \frac{2}{2x-1}$ geeft $f'(x) = \frac{(2x-1) \cdot 0 - 2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{-4}{(2x-1)^2}$
- c** $f(x) = \frac{x^3}{2x^2+1}$ geeft $f'(x) = \frac{(2x^2+1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{6x^4+3x^2-4x^4}{(2x^2+1)^2} = \frac{2x^4+3x^2}{(2x^2+1)^2}$
- d** $f(x) = \frac{x-2}{3-x^2}$ geeft $f'(x) = \frac{(3-x^2) \cdot 1 - (x-2) \cdot (-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{3-x^2+2x^2-4x}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(3-x^2)^2}$
- e** $f(x) = \frac{3-x^2}{x-2} + x^3$ geeft
 $f'(x) = \frac{(x-2) \cdot (-2x) - (3-x^2) \cdot 1}{(x-2)^2} + 3x^2 = \frac{-2x^2+4x-3+x^2}{(x-2)^2} + 3x^2 = \frac{-x^2+4x-3}{(x-2)^2} + 3x^2$
- f** $f(x) = x - \frac{2}{x+4}$ geeft $f'(x) = 1 - \frac{(x+4) \cdot 0 - 2 \cdot 1}{(x+4)^2} = 1 - \frac{-2}{(x+4)^2} = 1 + \frac{2}{(x+4)^2}$

- 65 a** $f(x) = x^2 - 3x - 1$ geeft $f'(x) = 2x - 3$
 $f'(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$
 $f(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 - 1 = 3$
- b** $y_A = f(4)$
- c** De helling in A is $f'(4)$.

Bladzijde 85

- 66 a** $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 = 8$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 8x + b \\ f(4) = 2, \text{ dus } A(4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 \cdot 4 + b = 2 \\ 32 + b = 2 \\ b = -30 \end{array}$$

 Dus $k: y = 8x - 30$.
- b** Stel $m: y = ax + b$ met $a = f'(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) = 14$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 14x + b \\ f(-2) = -10, \text{ dus } B(-2, -10) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 14 \cdot (-2) + b = -10 \\ -28 + b = -10 \\ b = 18 \end{array}$$

 Dus $m: y = 14x + 18$.
- 67 a** $g(x) = 2x^2 - 6x$ geeft $g'(x) = 4x - 6$
 Stel $l: y = ax + b$ met $a = g'(-3) = 4 \cdot (-3) - 6 = -18$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -18x + b \\ g(-3) = 36, \text{ dus } A(-3, 36) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -18 \cdot (-3) + b = 36 \\ 54 + b = 36 \\ b = -18 \end{array}$$

 Dus $l: y = -18x - 18$.
- b** $g(x) = 0$ geeft $2x^2 - 6x = 0$
 $2x(x-3) = 0$
 $x = 0 \vee x = 3$
 Dus $P(3, 0)$.
 Stel $n: y = ax + b$ met $a = g'(3) = 4 \cdot 3 - 6 = 6$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 6x + b \\ P(3, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6 \cdot 3 + b = 0 \\ b = -18 \end{array}$$

 Dus $n: y = 6x - 18$.

$$68 \quad a \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x + 5} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(2x + 5) \cdot 2x - (x^2 - 4) \cdot 2}{(2x + 5)^2} = \frac{4x^2 + 10x - 2x^2 + 8}{(2x + 5)^2} = \frac{2x^2 + 10x + 8}{(2x + 5)^2}$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'(-2) = \frac{2 \cdot (-2)^2 + 10 \cdot (-2) + 8}{(2 \cdot (-2) + 5)^2} = -4.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -4x + b \\ A(-2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 \cdot (-2) + b = 0 \\ b = -8 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -4x - 8.$$

$$\text{Stel } l: y = ax + b \text{ met } a = f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 + 8}{(2 \cdot 2 + 5)^2} = \frac{4}{9}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{4}{9}x + b \\ B(2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{4}{9} \cdot 2 + b = 0 \\ b = -\frac{8}{9} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}.$$

$$b \quad \text{Stel } m: y = ax + b \text{ met } a = f'(0) = \frac{8}{25}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{8}{25}x + b \\ f(0) = -\frac{4}{5}, \text{ dus } C(0, -\frac{4}{5}) \end{array} \right\} \text{dus } m: y = \frac{8}{25}x - \frac{4}{5}.$$

$$69 \quad f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 4} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(x^2 - 4) \cdot 2 - (2x - 5) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^2 - 8 - 4x^2 + 10x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{(x^2 - 4)^2}$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'(0) = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ f(0) = 1\frac{1}{4}, \text{ dus } A(0, 1\frac{1}{4}) \end{array} \right\} b = 1\frac{1}{4}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} y_B = 0 \text{ geeft } \frac{2x - 5}{x^2 - 4} &= 0 \\ 2x - 5 &= 0 \\ 2x &= 5 \\ x &= 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4} \\ B(2\frac{1}{2}, 0) \end{array} \right\} -\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = 0 \text{ klopt.}$$

Dus B ligt op lijn k, dus de bewering is waar.

Bladzijde 86

$$70 \quad a \quad f(x) = (x^2 - 4)(x + 1) = x^3 + x^2 - 4x - 4 \text{ geeft } f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 4 = 17.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 17x + b \\ f(-3) = -10, \text{ dus } A(-3, -10) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 17 \cdot (-3) + b = -10 \\ -51 + b = -10 \\ b = 41 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 17x + 41.$$

$$b \quad \text{Stel } l: y = ax + b \text{ met } a = f'(0) = -4.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -4x + b \\ f(0) = -4, \text{ dus } B(0, -4) \end{array} \right\} b = -4$$

$$\text{Dus } l: y = -4x - 4.$$

$$c \quad f(x) = 0 \text{ geeft } (x^2 - 4)(x + 1) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \vee x + 1 = 0$$

$$x^2 = 4 \vee x = -1$$

$$x = 2 \vee x = -2 \vee x = -1$$

$$\text{Dus } C(2, 0).$$

$$\text{Stel } m: y = ax + b \text{ met } a = f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 4 = 12.$$

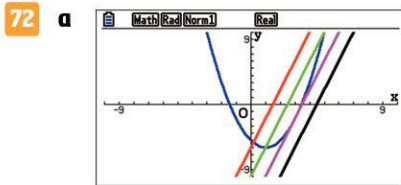
$$\left. \begin{array}{l} y = 12x + b \\ C(2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 12 \cdot 2 + b = 0 \\ b = -24 \end{array}$$

$$\text{Dus } m: y = 12x - 24.$$

71 $f(x) = x^3 + ax^2 + a^2x$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a^2$
 Stel $k: y = mx + n$ met $m = f'(a) = 3 \cdot a^2 + 2a \cdot a + a^2 = 6a^2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 6a^2x + n \\ f(a) = 3a^3, \text{ dus } A(a, 3a^3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6a^2 \cdot a + n = 3a^3 \\ 6a^3 + n = 3a^3 \\ n = -3a^3 \end{array}$$

Dus $k: y = 6a^2x - 3a^3$.



b De lijn $y = 4x - 14$ raakt de grafiek van f .

c Er geldt $f'(x_R) = 4$.

Bladzijde 87

73 a $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ geeft $f'(x) = -2x + 2$
 $f'(x) = 4$ geeft $-2x + 2 = 4$
 $-2x = 2$
 $x = -1$

$x_A = -1$ en $y_A = f(-1) = 0$, dus $A(-1, 0)$.

b $k \parallel l$, dus $f'(x_B) = rc_k = rc_l = -6$.

$f'(x) = -6$ geeft $-2x + 2 = -6$
 $-2x = -8$
 $x = 4$

$x_B = 4$ en $y_B = f(4) = -5$, dus $B(4, -5)$.

74 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10x + 6$ geeft $f'(x) = x^2 + x - 10$
 $f'(x) = 2$ geeft $x^2 + x - 10 = 2$
 $x^2 + x - 12 = 0$
 $(x - 3)(x + 4) = 0$
 $x = 3 \vee x = -4$

$x_A = -4$ en $y_A = f(-4) = 32\frac{2}{3}$, dus $A(-4, 32\frac{2}{3})$.

$x_B = 3$ en $y_B = f(3) = -10\frac{1}{2}$, dus $B(3, -10\frac{1}{2})$.

b Raaklijn is evenwijdig met k , dus $f'(x_C) = f'(x_D) = rc_k = 10$.

$f'(x) = 10$ geeft $x^2 + x - 10 = 10$
 $x^2 + x - 20 = 0$
 $(x - 4)(x + 5) = 0$
 $x = 4 \vee x = -5$

Dus $x_C = -5$ en $x_D = 4$.

75 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$ geeft $f'(x) = x^2 - 2x$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$.

$y = 8x + b$
 $f(4) = 4\frac{1}{3}$, dus $P(4, 4\frac{1}{3})$ $\left\{ \begin{array}{l} 8 \cdot 4 + b = 4\frac{1}{3} \\ 32 + b = 4\frac{1}{3} \\ b = -27\frac{2}{3} \end{array} \right.$

Dus $k: y = 8x - 27\frac{2}{3}$.

b $f'(x) = 3$ geeft $x^2 - 2x = 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x + 1)(x - 3) = 0$

$x = -1 \vee x = 3$

$x_Q = -1$ en $y_Q = f(-1) = -2\frac{1}{3}$, dus $Q(-1, -2\frac{1}{3})$.

$x_R = 3$ en $y_R = f(3) = -1$, dus $R(3, -1)$.

76 $f_p(x) = x^3 + px^2 + 2x - 3$ geeft $f_p'(x) = 3x^2 + 2px + 2$

$f_p'(x) = -1$ geeft $3x^2 + 2px + 2 = -1$

$3x^2 + 2px + 3 = 0$

Twee raaklijnen betekent twee oplossingen, dus $D > 0$.

$D = (2p)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4p^2 - 36$

$$\left. \begin{aligned} 4p^2 - 36 &> 0 \\ 4p^2 &> 36 \\ p^2 &> 9 \\ p &< -3 \vee p > 3 \end{aligned} \right\}$$

Bladzijde 88

77 a $s = 0,8t^2$ geeft $v = 1,6t$

$t = 3$ geeft $v = 1,6 \cdot 3 = 4,8$, dus na 3 seconden is de snelheid 4,8 m/s.

$t = 6$ geeft $v = 1,6 \cdot 6 = 9,6$, dus na 6 seconden is de snelheid 9,6 m/s.

b $30 \text{ km/uur} = \frac{30}{3,6} \text{ m/s}$

$1,6t = \frac{30}{3,6}$ geeft $t = \frac{30}{3,6 \cdot 1,6} \approx 5,21$

Dus na 5,21 seconden is de snelheid 30 km/uur.

c $t = 6$ geeft $s = 0,8 \cdot 6^2 = 28,8$

Op $t = 6$ is $v = 9,6$ (zie a).

De auto legt in de eerste tien seconden $28,8 + (10 - 6) \cdot 9,6 = 67,2$ meter af.

78 a De vergelijking $h = 0$ moet worden opgelost.

Voer in $y_1 = -5x^2 + 28x + 0,6$.

De optie nulpunt geeft $x = 5,62...$

Dus het duurt 5,6 seconden voordat de bal op de grond komt.

b $h = -5t^2 + 28t + 0,6$ geeft $v = -10t + 28$

$t = 5,62...$ geeft $v = -10 \cdot 5,62... + 28 = -28,21...$

De snelheid waarmee de bal op de grond komt is $28,21... \cdot 3,6... \approx 102 \text{ km/uur}$.

c Als de bal het hoogste punt heeft bereikt, is de snelheid nul.

$v = 0$ geeft $-10t + 28 = 0$

$-10t = -28$

$t = 2,8$

Dat is na 2,8 seconden het geval.

Diagnostische toets

Bladzijde 92

1 a Afnemend dalend op $\langle \leftarrow, 1 \rangle$.

Toenemend stijgend op $\langle 1, 2\frac{1}{2} \rangle$.

Afnemend stijgend op $\langle 2\frac{1}{2}, 4 \rangle$

Toenemend dalend op $\langle 4, 6 \rangle$.

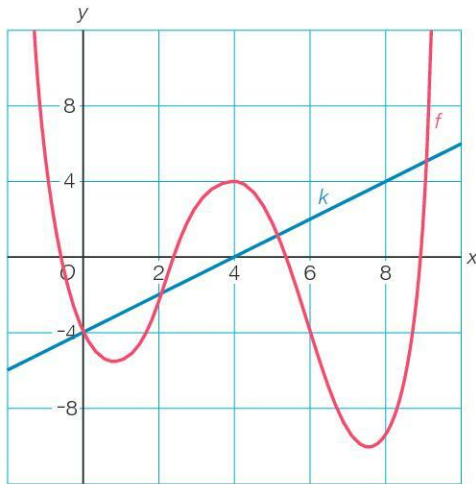
Afnemend dalend op $\langle 6, 7\frac{1}{2} \rangle$.

Toenemend stijgend op $\langle 7\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.

b Op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 5\frac{1}{2}}{4 - 1} = \frac{9\frac{1}{2}}{3} = 3\frac{1}{6}$.

c Op $[2, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4 - -2}{6 - 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

- d** Teken de lijn k door $(0, -4)$ met $rc_k = 1$.

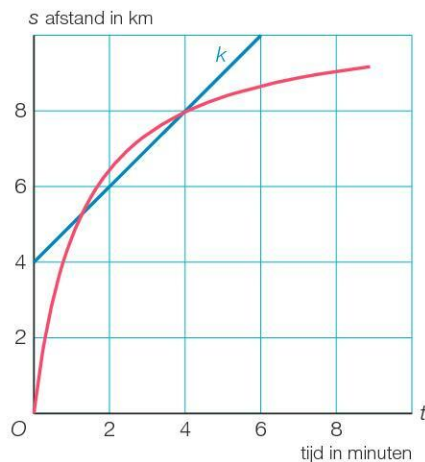


k snijdt de grafiek rechts van $(0, -4)$ in drie punten.

Dus er zijn drie waarden van p waarvoor het differentiequotiënt van y op $[0, p]$ gelijk is aan 1.

- 2 a** Op $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{8 - -2\frac{1}{2}}{3} = 3\frac{1}{2}$.
- b** Op $[-1, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - -1} = \frac{-2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2} = -1\frac{1}{2}$.
- c** Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - -2} = \frac{-1\frac{1}{2} - -4}{5} = \frac{1}{2}$.
- $$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ f(-2) = -4, \text{ dus } A(-2, -4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot -2 + b = -4 \\ -1 + b = -4 \\ b = -3 \end{array}$$
- Dus $l: y = \frac{1}{2}x - 3$.

- 3 a** Op $[1, 9]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{9 - 5}{9 - 1} = \frac{4}{8} = 0,5$ km/minuut.
- Dus de gevraagde gemiddelde snelheid is 30 km/uur.
- b** Op $[0, 9]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{9 - 0}{9 - 0} = 1$ km/minuut.
- Teken door het punt $(1, 5)$ van de grafiek de lijn k met $rc_k = 1$.



k snijdt de grafiek rechts van $(1, 5)$ in het punt $(4, 8)$.

Dus voor $p = 4$.

- c** Op $[1; 1,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10 - \frac{10}{1,01 + 1} - \left(10 - \frac{10}{1 + 1}\right)}{0,01} = 2,48... \text{ km/minuut}$.

De snelheid op $t = 1$ is bij benadering $60 \cdot 2,48... \approx 149$ km/uur.

4 Voer in $y_1 = \sqrt{10 - x^2}$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-3} = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + b \\ f(-3) = 1, \text{ dus } A(-3, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot (-3) + b = 1 \\ -9 + b = 1 \\ b = 10 \end{array}$$

Dus $k: y = 3x + 10$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ f(3) = 1, \text{ dus } B(3, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 3 + b = 1 \\ -9 + b = 1 \\ b = 10 \end{array}$$

Dus $l: y = -3x + 10$.

Het snijpunt van k en l is $S(0, 10)$.

5 a Voer in $y_1 = -\frac{1}{4}x^3 + 3x^2$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=2} = 9, \text{ dus op } t = 2 \text{ is de snelheid } 9 \text{ m/s}$$

b $t = 6$ geeft $s = -\frac{1}{4} \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 = 54$

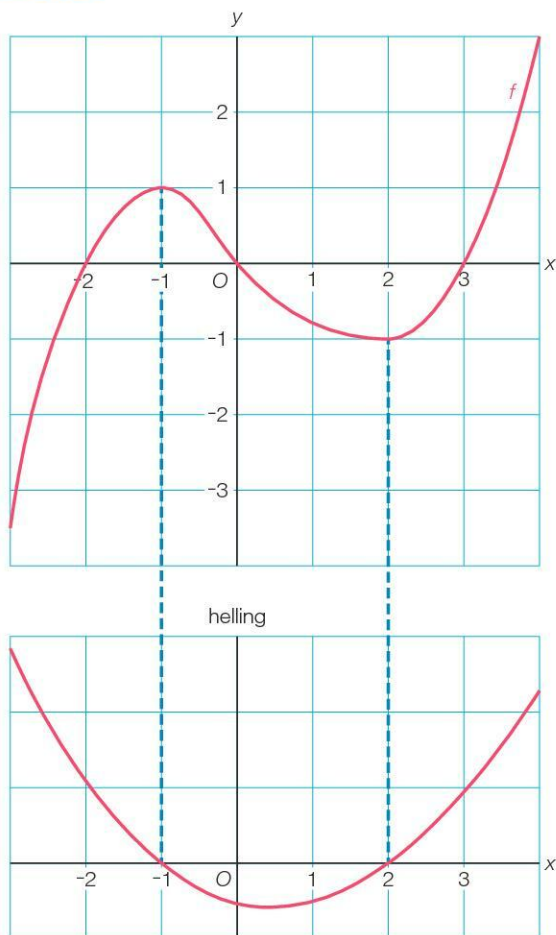
$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=6} = 9$$

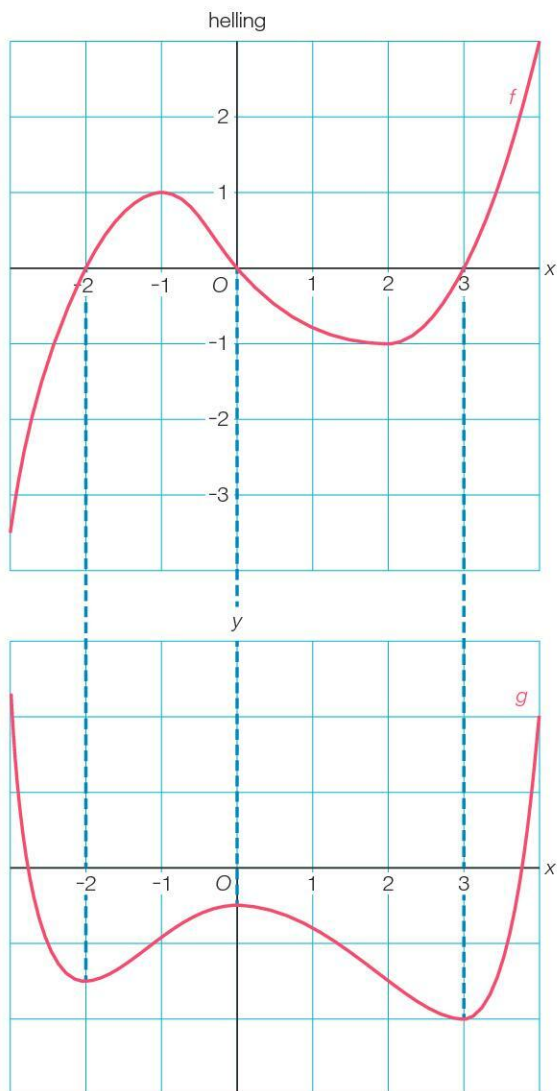
Tussen $t = 6$ en $t = 10$ wordt $4 \cdot 9 = 36$ meter afgelegd.

Dus na tien seconden heeft de auto $54 + 36 = 90$ meter afgelegd.

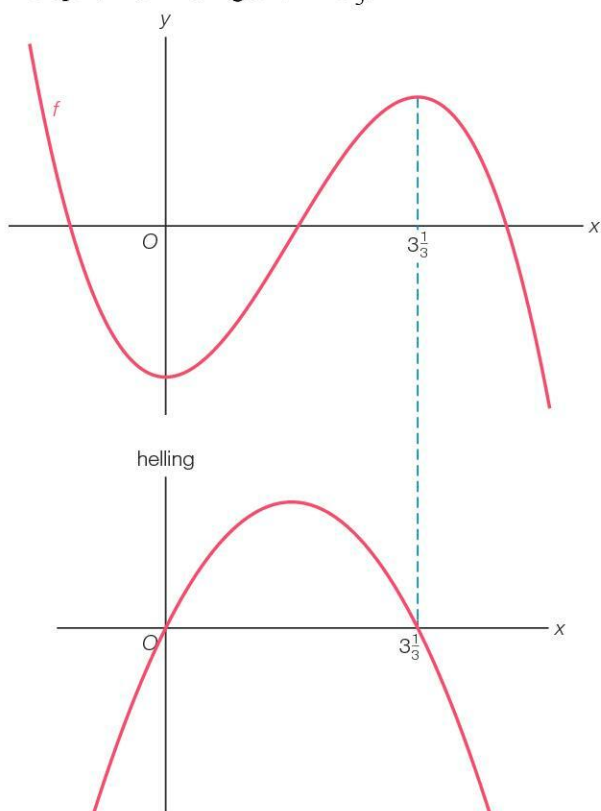
Bladzijde 93

6 a

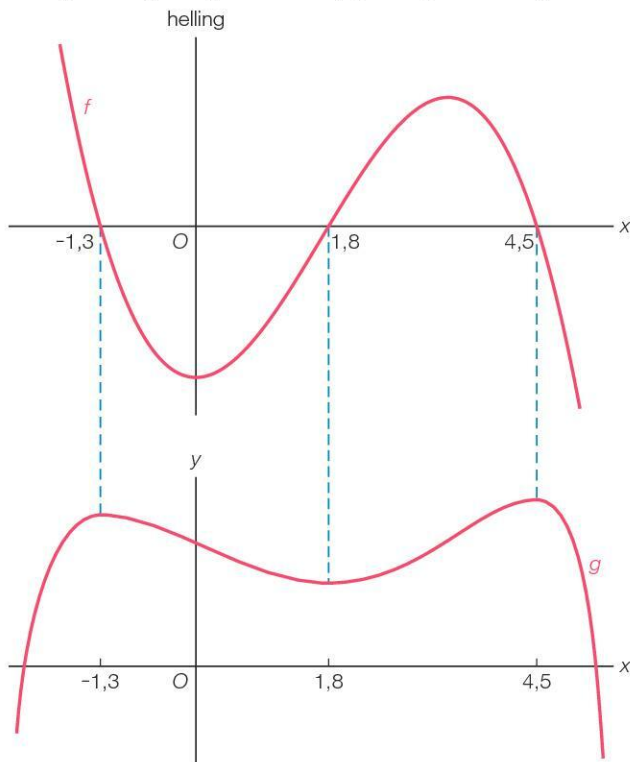


b

- 7 a** Voer in $y_1 = -0,2x^3 + x^2 - 2$.
 De optie minimum geeft $x = 0$.
 De optie maximum geeft $x = 3\frac{1}{3}$.



- b** De optie nulpunt geeft $x \approx -1,3$, $x \approx 1,8$ en $x \approx 4,5$.



- 8 a**
$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(3+h)^2 + 4 - (5 \cdot 3^2 + 4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(9 + 6h + h^2) + 4 - 49}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{45 + 30h + 5h^2 + 4 - 49}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{30h + 5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(30 + 5h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (30 + 5h) = 30$$
- b**
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h)^2 + 4 - (5x^2 + 4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x^2 + 2xh + h^2) + 4 - 5x^2 - 4}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 + 4 - 5x^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10xh + 5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(10x + 5h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10x + 5h) = 10x$$
- 9 a** $f(x) = 0,6x^3 - 1,3x^2 + 7$ geeft $f'(x) = 1,8x^2 - 2,6x$
b $g(p) = 4p^3 + p^2 - 11p + 20$ geeft $g'(p) = 12p^2 + 2p - 11$
c $h(x) = x(2x - 1)^2 = x(4x^2 - 4x + 1) = 4x^3 - 4x^2 + x$ geeft $h'(x) = 12x^2 - 8x + 1$
d $k(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2(x - 4) + 6 = \frac{1}{3}x^3 + 2x^3 - 8x^2 + 6 = 2\frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 6$ geeft $k'(x) = 7x^2 - 16x$
- 10** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3px + 1$ geeft $f'(x) = x + 3p$
 De helling in A is $f'(x_A) = f'(2) = 2 + 3p$.
 Dus $2 + 3p = p$
 $2p = -2$
 $p = -1$
- 11 a** $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 7x + 2)$ geeft
 $f'(x) = [x^3 - 1]' \cdot (x^2 + 7x + 2) + (x^3 - 1) \cdot [x^2 + 7x + 2]' = 3x^2(x^2 + 7x + 2) + (x^3 - 1)(2x + 7)$
b $g(x) = (x^3 + 2x + 1)^2 = (x^3 + 2x + 1)(x^3 + 2x + 1)$ geeft
 $g'(x) = [x^3 + 2x + 1]' \cdot (x^3 + 2x + 1) + (x^3 + 2x + 1) \cdot [x^3 + 2x + 1]'$
 $= (3x^2 + 2)(x^3 + 2x + 1) + (x^3 + 2x + 1)(3x^2 + 2) = 2(3x^2 + 2)(x^3 + 2x + 1)$

12 a $f(x) = \frac{2x-3}{3x-1}$ geeft $f'(x) = \frac{(3x-1) \cdot 2 - (2x-3) \cdot 3}{(3x-1)^2} = \frac{6x-2-6x+9}{(3x-1)^2} = \frac{7}{(3x-1)^2}$

b $g(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$ geeft $g'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 4x^3 - x^4 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^5+4x^3-2x^5}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^5+4x^3}{(x^2+1)^2}$

c $h(x) = x^2 - \frac{3}{x+1}$ geeft $h'(x) = 2x - \frac{(x+1) \cdot 0 - 3 \cdot 1}{(x+1)^2} = 2x - \frac{-3}{(x+1)^2} = 2x + \frac{3}{(x+1)^2}$

13 a $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 + 4 = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(2) = 9\frac{2}{3}, \text{ dus } A(2, 9\frac{2}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 2 + b = 9\frac{2}{3} \\ 8 + b = 9\frac{2}{3} \\ b = 1\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $k: y = 4x + 1\frac{2}{3}$.

b Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(0) = 0 + 0 + 4 = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(0) = 1, \text{ dus door } (0, 1) \end{array} \right\} b = 1$$

 Dus $l: y = 4x + 1$.

14 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 2$ geeft $f'(x) = x^2 - 2x - 1$
 Raaklijn evenwijdig met k , dus $f'(x_A) = f'(x_B) = \text{rc}_k = 2$.
 $f'(x) = 2$ geeft $x^2 - 2x - 1 = 2$

$$\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ (x+1)(x-3) = 0 \\ x = -1 \vee x = 3 \end{array}$$

 $x_A = -1$ en $y_A = f(-1) = 1\frac{2}{3}$, dus $A(-1, 1\frac{2}{3})$.
 $x_B = 3$ en $y_B = f(3) = -1$, dus $B(3, -1)$.

3 Meetkunde

Voorkennis Goniometrische verhoudingen

Bladzijde 98

1 $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$ geeft $\angle A \approx 31,0^\circ$
 $\sin(\angle D) = \frac{EF}{DE} = \frac{8}{11}$ geeft $\angle D \approx 46,7^\circ$
 $\cos(\angle I) = \frac{HI}{GI} = \frac{4}{10}$ geeft $\angle I \approx 66,4^\circ$
 $\tan(\angle K) = \frac{LM}{KL} = \frac{7}{10}$ geeft $\angle K \approx 35,0^\circ$
 $\cos(\angle P) = \frac{\frac{1}{2}PQ}{PR} = \frac{7,5}{10}$ geeft $\angle P \approx 41,4^\circ$

Bladzijde 99

2 $\cos(\angle C) = \frac{AC}{BC}$
 $\cos(38^\circ) = \frac{AC}{17}$
 $AC = 17 \cos(38^\circ) \approx 13,4$
 $\tan(\angle E) = \frac{DF}{DE}$
 $\tan(55^\circ) = \frac{DF}{5}$
 $DF = 5 \tan(55^\circ) \approx 7,1$
 $\sin(\angle G) = \frac{HI}{GH}$
 $\sin(40^\circ) = \frac{7}{GH}$
 $GH = \frac{7}{\sin(40^\circ)} \approx 10,9$
 $\sin(\angle MLN) = \frac{MN}{LN}$
 $\sin(60^\circ) = \frac{MN}{17}$
 $KL = MN = 17 \sin(60^\circ) \approx 14,7$
 $PS = QS = 3$
 $\tan(\angle P) = \frac{RS}{PS}$
 $\tan(75^\circ) = \frac{RS}{3}$
 $RS = 3 \tan(75^\circ) \approx 11,2$

3 $\cos(\angle BAC) = \frac{AB}{AC}$ $\sin(\angle BAC) = \frac{BC}{AC}$
 $\cos(35^\circ) = \frac{AB}{10}$ $\sin(35^\circ) = \frac{BC}{10}$
 $AB = 10 \cos(35^\circ) = 8,191...$ $BC = 10 \sin(35^\circ) = 5,735...$
omtrek rechthoek $= 2 \cdot 8,191... + 2 \cdot 5,735... \approx 27,85$

- 4 CD is de bij zijde AB horende hoogte.

$$\tan(\angle A) = \frac{CD}{\frac{1}{2}AB}$$

$$\tan(65^\circ) = \frac{CD}{4}$$

$$CD = 4 \tan(65^\circ) = 8,578...$$

$$\text{opp } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8,578... \approx 34,31$$

- 5 RS is de bij zijde PQ horende hoogte.

$$\left. \begin{array}{l} \text{opp } \triangle PQR = 20 \\ \text{opp } \triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot RS \end{array} \right\} \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot RS = 20$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot RS = 20$$

$$RS = 6\frac{2}{3}$$

$$\tan(\angle P) = \frac{RS}{\frac{1}{2}PQ} = \frac{6\frac{2}{3}}{3} \text{ geeft } \angle P = 65,77...^\circ \approx 65,8^\circ$$

$$\angle Q = \angle P \approx 65,8^\circ$$

$$\angle R = 180^\circ - \angle P - \angle Q = 180^\circ - 2 \cdot 65,77...^\circ \approx 48,5^\circ$$

3.1 Berekeningen in driehoeken

Bladzijde 100

- 1 a In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB}$.

$$\angle A = 30^\circ \text{ en } AB = 6, \text{ dus je krijgt } \tan(30^\circ) = \frac{BC}{6} \text{ en hieruit volgt}$$

$$BC = 6 \tan(30^\circ) = 3,4641... \approx 3,464.$$

b $\tan(\angle BDC) = \frac{BC}{BD}$

$$\tan(40^\circ) = \frac{3,4641...}{BD}$$

$$BD = \frac{3,4641...}{\tan(40^\circ)} \approx 4,13$$

Bladzijde 101

- 2 In $\triangle ABC$ is $\tan(28^\circ) = \frac{4}{AB}$

$$AB = \frac{4}{\tan(28^\circ)} = 7,52...$$

$$BM = \frac{1}{2}AB = 3,76...$$

$$\text{In } \triangle BCM \text{ is } \tan(\angle BMC) = \frac{BC}{BM} = \frac{4}{3,76...}$$

$$\angle BMC \approx 46,8^\circ$$

- 3 In $\triangle BCD$ is $\sin(70^\circ) = \frac{BC}{5}$

$$BC = 5 \sin(70^\circ) = 4,69...$$

$$\text{In } \triangle ABC \text{ is } \sin(\angle BAC) = \frac{BC}{AC} = \frac{4,69...}{10}$$

$$\angle BAC \approx 28,0^\circ$$

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle BDC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\angle ACD = 180^\circ - \angle ADC - \angle DAC \approx 180^\circ - 110^\circ - 28,0^\circ = 42,0^\circ$$

4 In $\triangle ABC$ is $\sin(40^\circ) = \frac{BC}{10}$
 $BC = 10 \sin(40^\circ) = 6,42\dots$
 $BM = \frac{1}{2} BC = 3,21\dots$
 In $\triangle ABC$ is $\cos(40^\circ) = \frac{AB}{10}$
 $AB = 10 \cos(40^\circ) = 7,66\dots$
 In $\triangle ABM$ is $\tan(\angle BAM) = \frac{BM}{AB} = \frac{3,21\dots}{7,66\dots}$
 $\angle BAM \approx 22,8^\circ$

Bladzijde 102

5 Stel $BM = x$, dan is $AB = 2x$.
 In $\triangle ABC$ is $\tan(40^\circ) = \frac{BC}{2x}$
 $BC = 2x \tan(40^\circ)$
 In $\triangle BCM$ is $\tan(\angle BMC) = \frac{BC}{x}$
 $BC = x \tan(\angle BMC)$
 Dus $x \tan(\angle BMC) = 2x \tan(40^\circ)$
 $\tan(\angle BMC) = 2 \tan(40^\circ)$
 $\angle BMC \approx 59,2^\circ$

6 $\angle EAD = 90^\circ - \angle EAB = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$
 Stel $DE = x$, dan is $CE = px$.
 In $\triangle ADE$ is $\tan(20^\circ) = \frac{x}{AD}$
 $AD = \frac{x}{\tan(20^\circ)}$
 $\angle EBC = 90^\circ - \angle EBA = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$
 In $\triangle BCE$ is $\tan(40^\circ) = \frac{px}{BC}$
 $BC = \frac{px}{\tan(40^\circ)}$
 $BC = AD$, dus $\frac{px}{\tan(40^\circ)} = \frac{x}{\tan(20^\circ)}$
 $\frac{p}{\tan(40^\circ)} = \frac{1}{\tan(20^\circ)}$
 $p = \frac{\tan(40^\circ)}{\tan(20^\circ)} \approx 2,31$

7 Stel $BN = x$, dan is $BM = 2x$ en $AB = 4x$.
 In $\triangle BCN$ is $\tan(25^\circ) = \frac{BN}{BC} = \frac{x}{BC}$, dus $x = BC \tan(25^\circ)$.
 In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle ACB) = \frac{AB}{BC} = \frac{4x}{BC} = \frac{4BC \tan(25^\circ)}{BC} = 4 \tan(25^\circ)$.
 Dus $\angle ACB = 61,80\dots^\circ$
 In $\triangle BCM$ is $\tan(\angle MCB) = \frac{BM}{BC} = \frac{2x}{BC} = \frac{2BC \tan(25^\circ)}{BC} = 2 \tan(25^\circ)$.
 Dus $\angle MCB = 43,00\dots^\circ$
 $\angle ACM = \angle ACB - \angle MCB = 61,80^\circ - 43,00\dots^\circ \approx 18,8^\circ$

8 De driehoeken ABC en DEC zijn gelijkvormig.

Bladzijde 104

9 $\left. \begin{array}{l} \angle DAC = \angle BAC \\ \angle AED = \angle ABC \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \triangle ADE \sim \triangle ACB$

$\frac{AD}{AC}$	$\frac{AE}{AB}$	$\frac{DE}{BC}$	geeft	$\frac{3}{AC}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{DE}{7}$
-----------------	-----------------	-----------------	-------	----------------	---------------	----------------

$$DE = \frac{5 \cdot 7}{9} = 3\frac{8}{9}$$

$$AC = \frac{3 \cdot 9}{5} = 5\frac{2}{5}, \text{ dus } CE = AC - AE = 5\frac{2}{5} - 5 = \frac{2}{5}.$$

10 $\left. \begin{array}{l} \angle ADE = \angle AEB \text{ (rechte hoek)} \\ \angle DEA = \angle BAE \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ADE \sim \triangle BEA$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABE$ geeft $BE = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

$\frac{AD}{BE}$	$\frac{AE}{AB}$	$\frac{DE}{AE}$	geeft	$\frac{AD}{8}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{DE}{6}$
-----------------	-----------------	-----------------	-------	----------------	----------------	----------------

$$AD = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4\frac{4}{5} \text{ en } DE = \frac{6 \cdot 6}{10} = 3\frac{3}{5}.$$

Bladzijde 105

11 $\left. \begin{array}{l} \angle BAC = \angle DAE \\ \angle ABC = \angle ADE \text{ (rechte hoek)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle ADE$

$\frac{AB}{AD}$	$\frac{BC}{DE}$	geeft	$\frac{20}{8}$	$\frac{16}{DE}$	dus $DE = \frac{8 \cdot 16}{20} = 6\frac{2}{5}$.
-----------------	-----------------	-------	----------------	-----------------	---

De stelling van Pythagoras in $\triangle BCD$ geeft $CD = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle EDC = \angle BCD \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle DEB = \angle CBE \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle DES \sim \triangle CBS \text{ dus } \frac{DE}{BC} = \frac{DS}{CS}$$

Stel $DS = x$, dan is $CS = 20 - x$.

Dit geeft $\frac{6\frac{2}{5}}{20} = \frac{x}{20-x}$

$$16x = 6\frac{2}{5}(20-x)$$

$$16x = 128 - 6\frac{2}{5}x$$

$$22\frac{2}{5}x = 128$$

$$x = 5\frac{5}{7}$$

Dus $DS = 5\frac{5}{7}$.

12 Zie de figuur hiernaast met hoogtelijn CF .

$$\left. \begin{array}{l} \angle FBC = \angle EBA \\ \angle BFC = \angle BEA \text{ (rechte hoek)} \end{array} \right\} \triangle BCF \sim \triangle BAE$$

$\frac{BC}{AB}$	$\frac{BF}{BE}$	geeft	$\frac{15}{10}$	$\frac{5}{BE}$
-----------------	-----------------	-------	-----------------	----------------

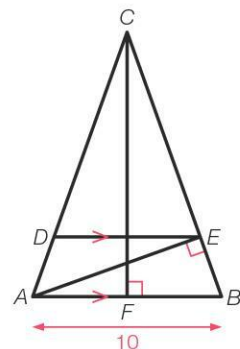
$$BE = \frac{5 \cdot 10}{15} = 3\frac{1}{3}$$

$$CE = BC - BE = 15 - 3\frac{1}{3} = 11\frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACB = \angle DCE \\ \angle CAB = \angle CDE \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DEC$$

$\frac{AB}{DE}$	$\frac{BC}{CE}$	geeft	$\frac{10}{DE}$	$\frac{15}{11\frac{2}{3}}$
-----------------	-----------------	-------	-----------------	----------------------------

$$DE = \frac{10 \cdot 11\frac{2}{3}}{15} = 7\frac{7}{9}$$



13 a $\left. \begin{array}{l} \angle ABC = \angle DBE \\ \angle ACB = \angle DEB \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DBE \text{ dus } \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$
 Stel $BD = x$, dan is $AB = x + 7$.
 Dit geeft $\frac{x+7}{x} = \frac{10}{4}$
 $10x = 4(x+7)$
 $10x = 4x + 28$
 $6x = 28$
 $x = 4\frac{2}{3}$

Dus $BD = 4\frac{2}{3}$ en $AB = 11\frac{2}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} AC^2 + BC^2 = 6^2 + 10^2 = 136 \\ AB^2 = (11\frac{2}{3})^2 = 136\frac{1}{9} \end{array} \right\} AB^2 > AC^2 + BC^2, \text{ dus } \angle ACB > 90^\circ.$$

Dus bewering III is waar.

b Uit $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ volgt $\frac{AC}{DE} = \frac{BC}{BE}$ oftewel $\frac{6}{DE} = \frac{10}{4}$.

Dit geeft $DE = \frac{4 \cdot 6}{10} = 2\frac{2}{5}$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle CAE = \angle DEA \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle ACD = \angle EDC \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ACS \sim \triangle EDS$$

$$\frac{AC}{DE} = \frac{AS}{ES} \text{ geeft } \frac{6}{2\frac{2}{5}} = \frac{AS}{ES}$$

Hieruit volgt $AS : ES = 6 : 2\frac{2}{5} = 30 : 12 = 5 : 2$.

Dus AS is $\frac{5}{7}$ deel van AE .

14 Zie de figuur hiernaast met $MQ \perp CN$ en $MP = MN = 2$ (straal cirkel).

$$\left. \begin{array}{l} \angle DCN = \angle MNC \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle CDN = \angle MQN \text{ (rechte hoek)} \end{array} \right\} \triangle CDN \sim \triangle NQM$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle CDN$ geeft

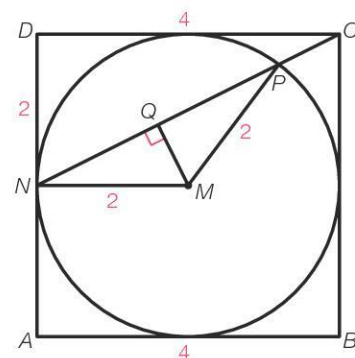
$$CN = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

$$\frac{CN}{MN} = \frac{CD}{NQ} \text{ geeft } \frac{2\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{NQ}$$

$$NQ = \frac{4 \cdot 2}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

MQ is hoogtelijn van de gelijkbenige driehoek MNP , en dus is MQ symmetrieas van $\triangle MNP$.

$$\text{Dus } NP = 2NQ = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$



Bladzijde 106

15 a De som van de hoeken in een driehoek is 180° , dus in $\triangle ABC$ is $\angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180^\circ$.

b In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.

$AM = CM$, dus $\triangle ACM$ is een gelijkbenige driehoek, dus $\angle A = \angle C_1$.

$BM = CM$, dus $\triangle BCM$ is een gelijkbenige driehoek, dus $\angle B = \angle C_2$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180^\circ \\ \angle A = \angle C_1 \\ \angle B = \angle C_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_{12} = 180^\circ \\ \angle C_{12} + \angle C_{12} = 180^\circ \\ 2 \cdot \angle C_{12} = 180^\circ \\ \angle C_{12} = 90^\circ \end{array}$$

Dus $\angle ACB = \angle C_{12} = 90^\circ$.

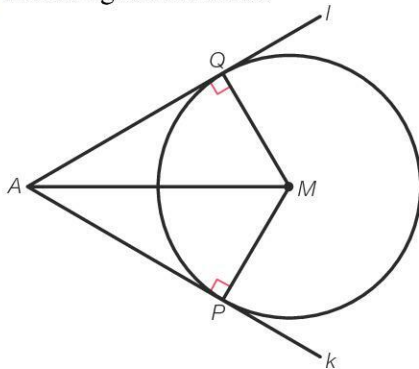
Bladzijde 108

- 16** a $\left. \begin{array}{l} \angle ACB = \angle MNB \text{ (rechte hoek)} \\ \angle ABC = \angle MBN \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle MBN$
- b $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BN}$ geeft $\frac{2}{1} = \frac{BC}{BN}$, dus $BC = 2BN$.
- $$\left. \begin{array}{l} BC = 2BN \\ BC = BN + CN \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2BN = BN + CN \\ BN = CN \end{array}$$
- c De stelling van Pythagoras in $\triangle BMN$ geeft $BM^2 = BN^2 + MN^2$.
Invullen van $BN = CN$ geeft $BM^2 = CN^2 + MN^2$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle CMN$ geeft $CM^2 = CN^2 + MN^2$.
 $BM^2 = CM^2$, dus $BM = CM$.
- d $\left. \begin{array}{l} AM = BM \text{ (gegeven)} \\ BM = CM \text{ (zie c)} \end{array} \right\} A, B \text{ en } C \text{ liggen op de cirkel met middelpunt } M, \text{ straal } AM \text{ en middellijn } AB.$
Hiermee is de stelling bewezen.

Bladzijde 109

- 17** a De definitie zegt dat een raaklijn één punt met de cirkel gemeen heeft.
Dus elk ander punt op de raaklijn ligt niet op de cirkel.
Dit kan alleen als voor elk punt P van de raaklijn geldt $MP > MA$.
- b Voor elk punt P waarvoor $P \neq A$ geldt dat $MP > MA$. Dus MA is de kortste verbinding van punt M tot raaklijn l . Uit de definitie van de afstand van een punt tot een lijn volgt dat $MA \perp l$.
- 18** $\left. \begin{array}{l} l \text{ raakt de cirkel met middelpunt } M \text{ in } A, \text{ dus } AM \perp l \\ l \text{ raakt de cirkel met middelpunt } N \text{ in } A, \text{ dus } AN \perp l \end{array} \right\} \angle MAN = 180^\circ, \text{ dus } MN \perp l.$

- 19** Zie de figuur hieronder.



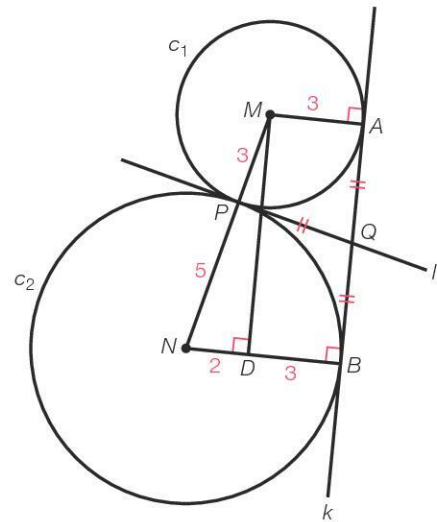
$MP \perp k$ en $MQ \perp l$, dus $\angle APM = \angle AQM = 90^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{In } \triangle APM \text{ is } AP^2 + MP^2 = AM^2. \\ \text{In } \triangle AQM \text{ is } AQ^2 + MQ^2 = AM^2. \end{array} \right\} \begin{array}{l} AP^2 + MP^2 = AQ^2 + MQ^2 \\ MP = MQ \text{ (straal cirkel)} \end{array} \left\} \begin{array}{l} AP^2 + MQ^2 = AQ^2 + MQ^2 \\ AP^2 = AQ^2 \\ AP = AQ \end{array}$$

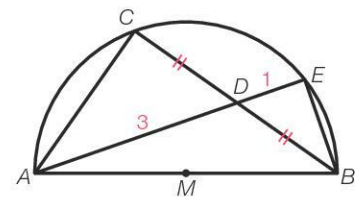
- 20** a $\angle ACB = 90^\circ$ (stelling van Thales)
De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $BC = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.
 $\angle ADB = 90^\circ$ (stelling van Thales)
De stelling van Pythagoras in $\triangle ABD$ geeft $BD = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.
- b In $\triangle ABC$ is $\sin(\angle ABC) = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{6}$, dus $\angle ABC = 30^\circ$.
In $\triangle ABD$ is $\sin(\angle ABD) = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{6}$, dus $\angle ABD = 41,81\dots^\circ$.
 $\angle CBD = \angle ABC + \angle ABD = 30^\circ + 41,81\dots^\circ = 71,81\dots^\circ \neq 90^\circ$, dus B ligt niet op de cirkel met middellijn CD (omgekeerde stelling van Thales).

Bladzijde 110

- 21** Zie de figuur hiernaast.
 $PQ = AQ$ (stelling afstand punt tot raakpunten)
 $PQ = BQ$ (stelling afstand punt tot raakpunten)
 Dus ook $AQ = BQ$.
 Teken DM loodrecht op BN .
 De stelling van Pythagoras in $\triangle DMN$ geeft
 $DM = \sqrt{(5+3)^2 - 2^2} = \sqrt{60} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$.
 $\angle MAB = 90^\circ$ (stelling raaklijn aan cirkel),
 $\angle NBA = 90^\circ$ (stelling raaklijn aan cirkel) en $\angle MDB = 90^\circ$,
 dus $ABDM$ is een rechthoek, dus $DM = AB$.
 $DM = AB = AQ + BQ = PQ + PQ = 2PQ$,
 dus $PQ = \frac{1}{2} DM = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{15} = \sqrt{15}$.



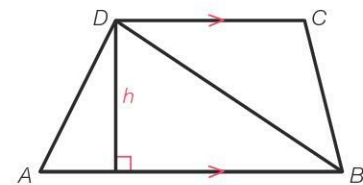
- 22** Zie de figuur hiernaast.
 $\angle ACB = 90^\circ$ (stelling van Thales) en $\angle BEA = 90^\circ$ (stelling van Thales)
 $\angle ACD = \angle BED$ (rechte hoek)
 $\angle ADC = \angle BDE$ (overstaande hoeken) } $\triangle ACD \sim \triangle BED$
 $\frac{AC}{BE} \mid \frac{AD}{BD} \mid \frac{CD}{DE}$ geeft $\frac{AC}{BE} \mid \frac{3}{BD} \mid \frac{CD}{1}$
 $BD = CD$, dus $\frac{AC}{BE} \mid \frac{3}{BD} \mid \frac{BD}{1}$ en hieruit volgt $BD^2 = 3$.
 Dus $BD = CD = \sqrt{3}$ en $BC = 2\sqrt{3}$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$.
 In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle BAC) = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$.



3.2 Lengte, omtrek en oppervlakte

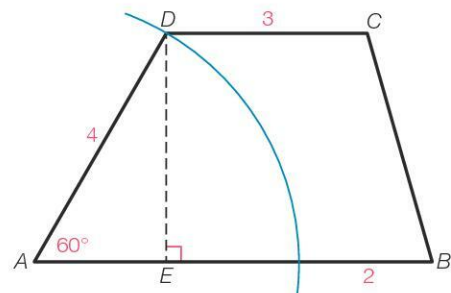
Bladzijde 112

- 23** Zie de figuur hiernaast met diagonaal BD .
 $O(\triangle ABD) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h$
 $O(\triangle BCD) = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot h$
 $O(ABCD) = O(\triangle ABD) + O(\triangle BCD)$
 $O(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h + \frac{1}{2} \cdot CD \cdot h = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h$



Bladzijde 113

- 24** Zie de figuur hiernaast.
 In $\triangle ADE$ is $\sin(60^\circ) = \frac{DE}{4}$, dus $DE = 4 \sin(60^\circ) = 3,46...$
 $O(ABCD) = \frac{1}{2} (6 + 3) \cdot 3,46... = 15,58...$
 De oppervlakte van het gevraagde gebied is
 $15,58... - \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 \approx 7,21$.



25 a Zie de figuur hiernaast.

$$AM = BM = CM = 5$$

$$\text{In } \triangle ADM \text{ is } DM = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (5 + 3) = 32$$

De oppervlakte van het gevraagde gebied is

$$\pi \cdot 5^2 - 32 = 25\pi - 32.$$

b $O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$

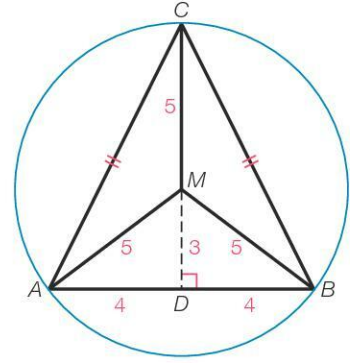
$$\text{In } \triangle ADM \text{ is } \sin(\angle AMD) = \frac{AD}{AM} = \frac{4}{5}$$

$$\angle AMD = 53,13...^\circ$$

$$\angle AMB = 2 \cdot \angle AMD = 2 \cdot 53,13...^\circ = 106,26...^\circ$$

$$\text{De gevraagde oppervlakte is } \frac{106,26...}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 - 12 \approx 11,18.$$

$$\text{De gevraagde omtrek is } 8 + \frac{106,26...}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 \approx 17,27.$$



26 $\angle ACB = 90^\circ$ (stelling van Thales), dus in $\triangle ABC$ is

$$BC = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84} = \sqrt{4 \cdot 21} = 2\sqrt{21}.$$

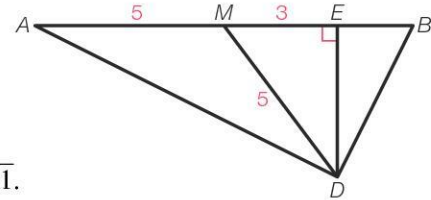
$$O(\text{blauwe gebied}) = O(\text{halve cirkel}) - O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{21} = 12\frac{1}{2}\pi - 4\sqrt{21}$$

$$DM = 5 \text{ (straal cirkel)}, \text{ dus in } \triangle DEM \text{ is } DE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

$$O(\text{gele gebied}) = O(\text{halve cirkel}) - O(\triangle ABC) = 12\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 12\frac{1}{2}\pi - 20$$

Het gevraagde verschil is

$$12\frac{1}{2}\pi - 4\sqrt{21} - (12\frac{1}{2}\pi - 20) = 12\frac{1}{2}\pi - 4\sqrt{21} - 12\frac{1}{2}\pi + 20 = 20 - 4\sqrt{21}.$$

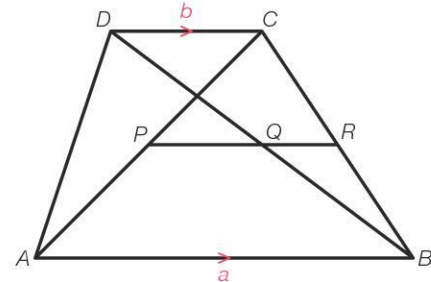


27 Zie de figuur hiernaast.

$$PR \text{ is een middenparallel van } \triangle ABC, \text{ dus } PR = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a.$$

$$QR \text{ is een middenparallel van } \triangle BCD, \text{ dus } QR = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}b.$$

$$PQ = PR - QR = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a - b)$$



28 Zie de figuur hiernaast.

$$\angle AMB = \frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\angle CMB = 180^\circ - \angle AMB = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

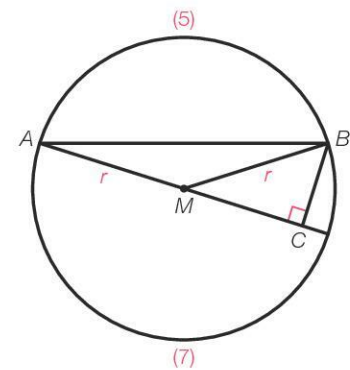
$$\text{In } \triangle BCM \text{ is } \sin(\angle BMC) = \frac{BC}{BM}$$

$$\sin(30^\circ) = \frac{BC}{r}$$

$$BC = r \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}r$$

$$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{1}{2}r = \frac{1}{4}r^2$$

$$\text{De oppervlakte van het kleinste gebied is } \frac{5}{12}\pi r^2 - \frac{1}{4}r^2.$$

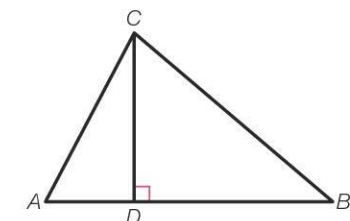


Bladzijde 114

29 Zie de figuur hiernaast.

$$\text{In } \triangle ACD \text{ is } \sin(\angle A) = \frac{CD}{AC}, \text{ dus } CD = AC \cdot \sin(\angle A).$$

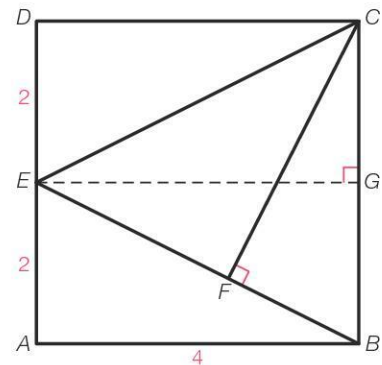
$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$$



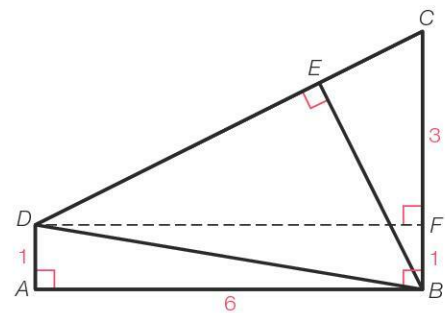
- 30 a $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CE$
 b $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$
 c Uit a en b volgt $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$.
 Vermenigvuldigen van het linker- en rechterlid met 2 geeft $AB \cdot CE = BC \cdot AD$.

Bladzijde 116

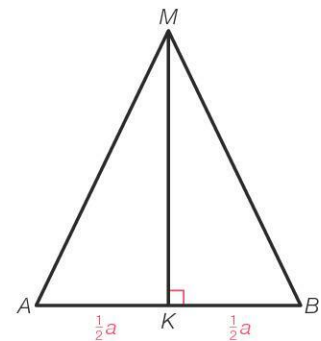
- 31 Zie de figuur hiernaast.
 $BE = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
 De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle BCE$ geeft
 $BE \cdot CF = BC \cdot EG$
 $2\sqrt{5} \cdot CF = 4 \cdot 4$
 $CF = \frac{4 \cdot 4}{2\sqrt{5}} = \frac{16}{2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$



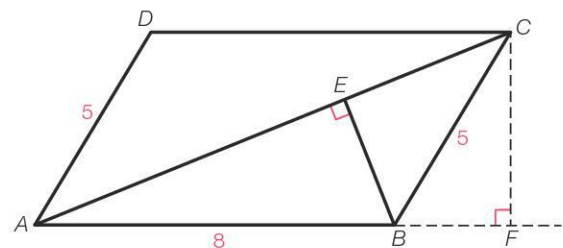
- 32 Zie de figuur hiernaast.
 $CD = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
 De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle BCD$ geeft
 $CD \cdot BE = BC \cdot DF$
 $3\sqrt{5} \cdot BE = 4 \cdot 6$
 $BE = \frac{4 \cdot 6}{3\sqrt{5}} = \frac{24}{3\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$



- 33 $\angle AMB = \frac{360^\circ}{7}$, dus $\angle AMK = \frac{360^\circ}{14}$.
 In $\triangle AKM$ is $\tan\left(\frac{360^\circ}{14}\right) = \frac{\frac{1}{2}a}{MK}$, dus $MK = \frac{\frac{1}{2}a}{\tan\left(\frac{360^\circ}{14}\right)} = 1,038...a$.
 $O(ABCDEFG) = 7 \cdot O(\triangle ABM) = 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1,038...a \approx 3,634a^2$



- 34 Zie de figuur hiernaast.
 $O(ABCD) = AB \cdot CF = 8CF$
 $O(ABCD) = 32$ } $CF = 4$
 $BF = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$
 $AC = \sqrt{(8+3)^2 + 4^2} = \sqrt{137}$
 De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle ABC$ geeft
 $AC \cdot BE = AB \cdot CF$
 $\sqrt{137} \cdot BE = 8 \cdot 4$
 $BE = \frac{8 \cdot 4}{\sqrt{137}} = \frac{32}{\sqrt{137}}$



35 Zie de figuur hiernaast.

$$O(\triangle ABN) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin(80^\circ) = 0,4924...r^2$$

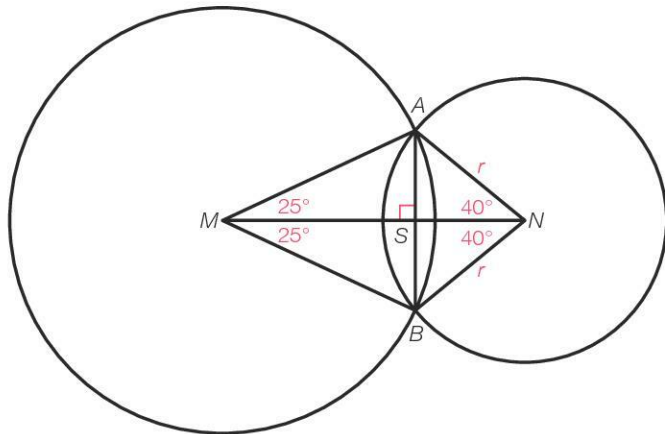
$$\text{In } \triangle ANS \text{ is } \sin(40^\circ) = \frac{AS}{r}, \text{ dus } AS = r \sin(40^\circ).$$

$$\text{In } \triangle AMS \text{ is } \sin(25^\circ) = \frac{AS}{AM} = \frac{r \sin(40^\circ)}{AM},$$

$$\text{dus } AM = \frac{r \sin(40^\circ)}{\sin(25^\circ)}.$$

$$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot \frac{r \sin(40^\circ)}{\sin(25^\circ)} \cdot \frac{r \sin(40^\circ)}{\sin(25^\circ)} \cdot \sin(50^\circ) \\ = 0,8860...r^2$$

$$O(AMBN) = O(\triangle ABN) + O(\triangle ABM) \\ = 0,4924...r^2 + 0,8860...r^2 \approx 1,378r^2$$



3.3 Rekenen met wortels

Bladzijde 118

36 II, III, VI

Bladzijde 120

37 a $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{15}$

b $\frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{2}$

c $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

d $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

e $\sqrt{24} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6} + \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

f $\sqrt{80} - \frac{10}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} - \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} - \frac{10\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

38 a $\sqrt{4\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $a\sqrt{8} - a\sqrt{2} = 2a\sqrt{2} - a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

c $(3\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 18 - 6\sqrt{10} + 5 = 23 - 6\sqrt{10}$

d $(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} + (3\sqrt{3})^2 = 8 + 12\sqrt{6} + 27 = 35 + 12\sqrt{6}$

e $(a - a\sqrt{2})^2 = a^2 - 2a^2 \cdot \sqrt{2} + 2a^2 = 3a^2 - 2a^2\sqrt{2}$

f $(\frac{1}{2}\sqrt{5})^2 = \frac{1}{4} \cdot 5 = 1\frac{1}{4}$

39 a $3a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{7} = 3a^2\sqrt{14}$

b $\frac{2\sqrt{14}}{3\sqrt{7}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

c $\sqrt{12\frac{1}{2}} + \sqrt{24\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} + \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

d $(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{3})^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{3} + (\frac{3}{4}\sqrt{3})^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{6} + \frac{27}{16} = 2\frac{3}{16} + \frac{3}{4}\sqrt{6}$

e $\sqrt{18a} - \sqrt{8a} = 3\sqrt{2a} - 2\sqrt{2a} = \sqrt{2a}$

f $\frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{6}$

40 a $\sqrt{2a} + \sqrt{\frac{1}{2}a} = \sqrt{2a} + \sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2a} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2a} + \frac{\sqrt{2a}}{2} = \sqrt{2a} + \frac{1}{2}\sqrt{2a} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2a}$

b $(\frac{2}{3}a\sqrt{3})^2 + a^2\sqrt{7\frac{1}{9}} = (\frac{2}{3}a)^2 \cdot (\sqrt{3})^2 + a^2\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{4}{9}a^2 \cdot 3 + \frac{8}{3}a^2 = 1\frac{1}{3}a^2 + 2\frac{2}{3}a^2 = 4a^2$

c $(5\sqrt{3} + 2)(5\sqrt{3} - 2) = (5\sqrt{3})^2 - 2^2 = 75 - 4 = 71$

d $(a - \sqrt{3})^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = a^2 - 2a\sqrt{3} + 3$

e $(2 - \sqrt{2})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$

f $(1\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = (1\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = 4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{3}{4} = 5\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}\sqrt{6}$

41 a $\sqrt{12a} + \sqrt{\frac{3}{4}a} = 2\sqrt{3a} + \frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{4}} = 2\sqrt{3a} + \frac{\sqrt{3a}}{2} = 2\sqrt{3a} + \frac{1}{2}\sqrt{3a} = 2\frac{1}{2}\sqrt{3a}$

b $\sqrt{5\frac{1}{3}} - \sqrt{1\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} - \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

c $\frac{9}{4\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{9}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{8} - \sqrt{2} = 1\frac{1}{8}\sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$

d $(\frac{1}{4}a\sqrt{2})^2 + (\frac{3}{4}a\sqrt{2})^2 = (\frac{1}{4}a)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 + (\frac{3}{4}a)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{16}a^2 \cdot 2 + \frac{9}{16}a^2 \cdot 2 = \frac{1}{8}a^2 + 1\frac{1}{8}a^2 = 1\frac{1}{4}a^2$

e $(2a\sqrt{2} - a\sqrt{3})^2 = (2a\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} + (a\sqrt{3})^2 = 8a^2 - 4a^2\sqrt{6} + 3a^2 = 11a^2 - 4a^2\sqrt{6}$

f $(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}})^2 = (\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{6}{2\sqrt{2}})^2 = (\frac{7}{2\sqrt{2}})^2 = \frac{49}{8} = 6\frac{1}{8}$

42 a $\frac{14}{3 - \sqrt{2}} = \frac{14}{3 - \sqrt{2}} \cdot \frac{3 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{14(3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = 2(3 + \sqrt{2}) = 6 + 2\sqrt{2}$

b $\frac{4}{\sqrt{3} - 1} = \frac{4}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{4(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = 2(\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{3} + 2$

c $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{2 - 5} = -\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{10}$

d $\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{10} - \sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}(\sqrt{10} + \sqrt{2})}{10 - 2}$
 $= 1\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{10} + \sqrt{2}) = 1\frac{1}{2}\sqrt{20} + 1\frac{1}{2} \cdot 2 = 1\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} + 3 = 3\sqrt{5} + 3$

e $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{6 - 2} = \frac{6 + 2\sqrt{12} + 2}{4} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}$

f $\frac{6 - 5\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{6 - 5\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{(6 - 5\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}{1 - 2} = \frac{6 + 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 10}{-1}$
 $= \frac{-4 + \sqrt{2}}{-1} = 4 - \sqrt{2}$

43 a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$ oftewel $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5\sqrt{2}$

Mogelijkheid 1

$$\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{32} = 5\sqrt{2}$$

Hieruit volgt $x = 2$ en $y = 32$.

Mogelijkheid 2

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = 5\sqrt{2}$$

Hieruit volgt $x = 8$ en $y = 18$.

Dus $(x, y) = (2, 32)$ en $(x, y) = (8, 18)$ zijn oplossing van $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$.

- b** Stel $(\sqrt{2} + 1)^7 = a$ en $(\sqrt{2} - 1)^7 = b$.
 Zo krijg je $(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$.
 $4ab = 4(\sqrt{2} + 1)^7(\sqrt{2} - 1)^7 = 4((\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1))^7 = 4(2 - 1)^7 = 4 \cdot 1^7 = 4$

44 a $2x = 16 - 8\sqrt{3}$
 $x = 8 - 4\sqrt{3}$

b $5x - 10\sqrt{2} = 50$
 $5x = 50 + 10\sqrt{2}$
 $x = 10 + 2\sqrt{2}$

Bladzijde 121

45 a $x\sqrt{5} + 2 = \sqrt{10}$
 $x\sqrt{5} = -2 + \sqrt{10}$
 $x = \frac{-2}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$
 $x = \frac{-2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \sqrt{2}$
 $x = \frac{-2\sqrt{5}}{5} + \sqrt{2}$
 $x = -\frac{2}{5}\sqrt{5} + \sqrt{2}$

b $7 - x\sqrt{3} = \sqrt{2}$
 $x\sqrt{3} = 7 - \sqrt{2}$
 $x = \frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
 $x = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
 $x = \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}$
 $x = 2\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{6}$

c $\frac{1}{2}x\sqrt{2} + \sqrt{10} = 0$
 $\frac{1}{2}x\sqrt{2} = -\sqrt{10}$
 $x\sqrt{2} = -2\sqrt{10}$
 $x = \frac{-2\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$
 $x = -2\sqrt{5}$

d $x\sqrt{8} + x\sqrt{2} = 12$
 $x \cdot 2\sqrt{2} + x\sqrt{2} = 12$
 $2x\sqrt{2} + x\sqrt{2} = 12$
 $3x\sqrt{2} = 12$
 $x = \frac{12}{3\sqrt{2}}$
 $x = \frac{12}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
 $x = \frac{12\sqrt{2}}{6}$
 $x = 2\sqrt{2}$

46 a $4x - 2x\sqrt{3} = \sqrt{6}$
 $x(4 - 2\sqrt{3}) = \sqrt{6}$
 $x = \frac{\sqrt{6}}{4 - 2\sqrt{3}}$
 $x = \frac{\sqrt{6}}{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}}$
 $x = \frac{\sqrt{6}(4 + 2\sqrt{3})}{16 - 12}$
 $x = \frac{4\sqrt{6} + 2\sqrt{18}}{4}$
 $x = \frac{4\sqrt{6} + 2 \cdot 3\sqrt{2}}{4}$
 $x = \frac{4\sqrt{6} + 6\sqrt{2}}{4}$
 $x = \sqrt{6} + 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $2x\sqrt{2} + x\sqrt{3} = 10$
 $x(2\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 10$
 $x = \frac{10}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}$
 $x = \frac{10}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}$
 $x = \frac{10(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{8 - 3}$
 $x = 2(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$
 $x = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

$$\text{c } x\sqrt{5} + x\sqrt{2} = \sqrt{10}$$

$$x(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \sqrt{10}$$

$$x = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{10}(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2}$$

$$x = \frac{\sqrt{50} - \sqrt{20}}{3}$$

$$x = \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{3}$$

$$x = 1\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{5}$$

$$\text{d } x - \sqrt{2} = x\sqrt{3}$$

$$x - x\sqrt{3} = \sqrt{2}$$

$$x(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{1 - 3}$$

$$x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{-2}$$

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$\text{47 a } 2x\sqrt{6} - 6 = 4\sqrt{6}$$

$$2x\sqrt{6} = 6 + 4\sqrt{6}$$

$$x = \frac{6}{2\sqrt{6}} + \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$$

$$x = \frac{6}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} + 2$$

$$x = \frac{6\sqrt{6}}{12} + 2$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{6} + 2$$

$$\text{b } x\sqrt{3} + 6 = 2x$$

$$2x - x\sqrt{3} = 6$$

$$x(2 - \sqrt{3}) = 6$$

$$x = \frac{6}{2 - \sqrt{3}}$$

$$x = \frac{6}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$x = \frac{6(2 + \sqrt{3})}{4 - 3}$$

$$x = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$\text{c } 3\sqrt{2} + x\sqrt{2} = 4\sqrt{10}$$

$$x\sqrt{2} = 4\sqrt{10} - 3\sqrt{2}$$

$$x = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$x = 4\sqrt{5} - 3$$

$$\text{d } 3x\sqrt{2} - 2x = 6$$

$$x(3\sqrt{2} - 2) = 6$$

$$x = \frac{6}{3\sqrt{2} - 2}$$

$$x = \frac{6}{3\sqrt{2} - 2} \cdot \frac{3\sqrt{2} + 2}{3\sqrt{2} + 2}$$

$$x = \frac{6(3\sqrt{2} + 2)}{18 - 4}$$

$$x = \frac{18\sqrt{2} + 12}{14}$$

$$x = 1\frac{2}{7}\sqrt{2} + \frac{6}{7}$$

3.4 Vergelijkingen in de meetkunde

Bladzijde 123

$$\text{48 a } \text{In } \triangle ACD \text{ is } CD^2 = AC^2 - AD^2$$

$$CD^2 = (2a)^2 - a^2$$

$$CD^2 = 4a^2 - a^2$$

$$CD^2 = 3a^2$$

$$CD = \sqrt{3a^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{3}$$

$$\text{b } \left. \begin{array}{l} CD = a\sqrt{3} \\ CD = 7\sqrt{3} \end{array} \right\} a\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

$$a = 7$$

$$AC = 2a = 2 \cdot 7 = 14$$

Bladzijde 124

49 $AC = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

$DF = \frac{EF}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ en $DE = \sqrt{3} \cdot DF = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 3 \cdot 3 = 9$

$MN = \frac{KM}{2} = \frac{10}{2} = 5$ en $KN = \sqrt{3} \cdot MN = 5\sqrt{3}$ $\left. \begin{array}{l} \\ NL = MN = 5 \end{array} \right\} KL = KN + NL = 5\sqrt{3} + 5$

$QS = RS \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ en $PQ = QS \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{6}$

- 50 Noem het middelpunt van de omgeschreven cirkel G .

$\triangle ABG$ is gelijkbenig en $\angle AGB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$,

dus $\angle A = \angle B = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.

Hieruit volgt dat $\triangle ABG$ een gelijkzijdige driehoek is.

Uit $AK = 4$ en $\angle A = 60^\circ$ volgt $GK = \sqrt{3} \cdot AK = 4\sqrt{3}$.

$O(ABCDEF) = 6 \cdot O(\triangle ABG) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$

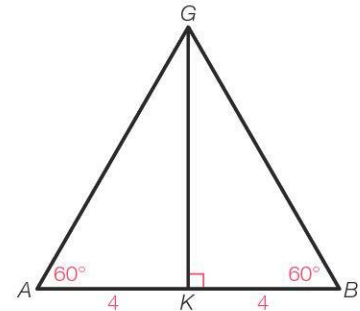
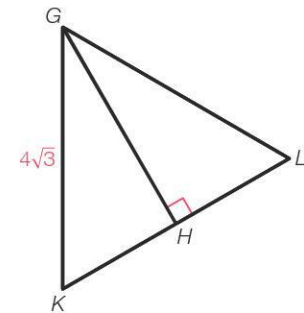
$\triangle GKL$ is een gelijkzijdige driehoek met zijde $4\sqrt{3}$, dus

$KL = 4\sqrt{3}$, $KH = 2\sqrt{3}$ en $GH = \sqrt{3} \cdot KH = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6$.

$O(KLMNOP) = 6 \cdot O(\triangle GKL) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 72\sqrt{3}$

De oppervlakte van het gekleurde gebied is

$O(ABCDEF) - O(KLMNOP) = 96\sqrt{3} - 72\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$.



Bladzijde 125

51 In $\triangle BCD$ is $BD = CD = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

In $\triangle ACD$ is $AD = \sqrt{3} \cdot CD = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} = 3\sqrt{6}$.

$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot (AD + BD) \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}) \cdot 3\sqrt{2}$
 $= 4\frac{1}{2}\sqrt{12} + 9 = 4\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} + 9 = 9\sqrt{3} + 9$

- 52 a In $\triangle ABE$ is $AB = \sqrt{2}$ en $AE = 1$.

In $\triangle BDE$ is $DE = \sqrt{3}$ en $BD = 2$.

$AD = AE + DE = 1 + \sqrt{3}$

In $\triangle ACD$ is $AC = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

$CD = AC = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$

$BC = AC - AB = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

In $\triangle BCD$ is $\sin(15^\circ) = \frac{BC}{BD} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

b $\cos(15^\circ) = \frac{CD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$

- 53 a** In $\triangle BCD$ is $CD = BD = x$.
 In $\triangle ACD$ is $AD = \sqrt{3} \cdot CD = \sqrt{3} \cdot x = x\sqrt{3}$.
b $\left. \begin{array}{l} AB = AD + BD = x\sqrt{3} + x \\ AB = 10 \end{array} \right\} x\sqrt{3} + x = 10$

$$x\sqrt{3} + x = 10$$

$$x(\sqrt{3} + 1) = 10$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3} + 1}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$x = \frac{10(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1}$$

$$x = 5(\sqrt{3} - 1)$$

$$x = 5\sqrt{3} - 5$$

$$\mathbf{c} \quad O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (5\sqrt{3} - 5) = 25\sqrt{3} - 25$$

- 54** Zie de figuur hiernaast.

Stel $AD = x$.

In $\triangle ACD$ is $CD = \sqrt{3} \cdot AD = x\sqrt{3}$.

In $\triangle BCD$ is $BD = CD = x\sqrt{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} AB = AD + BD = x + x\sqrt{3} \\ AB = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + x\sqrt{3} = 12 \\ x(1 + \sqrt{3}) = 12 \end{array}$$

$$x = \frac{12}{1 + \sqrt{3}}$$

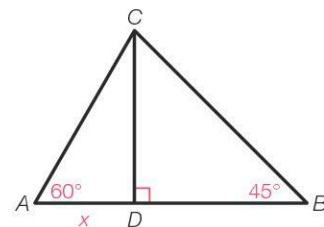
$$x = \frac{12}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$x = \frac{12(1 - \sqrt{3})}{1 - 3}$$

$$x = -6(1 - \sqrt{3})$$

$$x = -6 + 6\sqrt{3}$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (-6 + 6\sqrt{3})\sqrt{3} = 108 - 36\sqrt{3}$$



- 55** Zie de figuur hiernaast.

Stel $AP = x$.

In $\triangle APR$ is $PR = \sqrt{2} \cdot AP = x\sqrt{2}$.

Het is een regelmatige achthoek, dus $PQ = PR = x\sqrt{2}$.

$$AB = AP + PQ + BQ = x + x\sqrt{2} + x = 2x + x\sqrt{2}$$

$$2x + x\sqrt{2} = 6$$

$$x(2 + \sqrt{2}) = 6$$

$$x = \frac{6}{2 + \sqrt{2}}$$

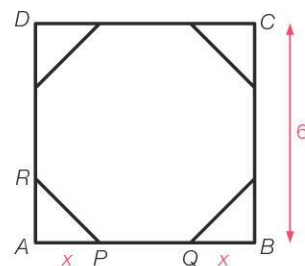
$$x = \frac{6}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

$$x = \frac{6(2 - \sqrt{2})}{4 - 2}$$

$$x = 3(2 - \sqrt{2})$$

$$x = 6 - 3\sqrt{2}$$

De zijde van de achthoek is $x\sqrt{2} = (6 - 3\sqrt{2})\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 6$.



56

Stel $AP = x$, dan is ook $BQ = x$.In $\triangle APS$ is $PS = \sqrt{3} \cdot AP = x\sqrt{3}$. $PQRS$ is een vierkant, dus $PQ = PS = x\sqrt{3}$.

$$\left. \begin{aligned} AB &= AP + PQ + BQ = x + x\sqrt{3} + x = 2x + x\sqrt{3} \\ AB &= 8 \end{aligned} \right\} 2x + x\sqrt{3} = 8$$

$$x(2 + \sqrt{3}) = 8$$

$$x = \frac{8}{2 + \sqrt{3}}$$

$$x = \frac{8}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$x = \frac{8(2 - \sqrt{3})}{4 - 3}$$

$$x = 8(2 - \sqrt{3})$$

$$x = 16 - 8\sqrt{3}$$

$$PQ = x\sqrt{3} = (16 - 8\sqrt{3})\sqrt{3} = 16\sqrt{3} - 24$$

57

Zie de figuur hiernaast.

Stel $BP = BQ = CQ = CR = x$.Dan is $AB = x + 1$ en $BC = 2x$.In $\triangle ABC$ is $BC = \sqrt{2} \cdot AB = (x + 1) \cdot \sqrt{2}$.

$$\text{Dus } 2x = (x + 1) \cdot \sqrt{2}$$

$$2x = x\sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$2x - x\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$x(2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

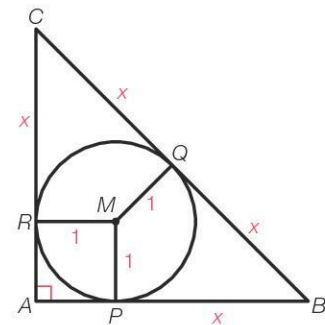
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{4 - 2}$$

$$x = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2}$$

$$x = \sqrt{2} + 1$$

$$\text{De omtrek is } 4x + 2 = 4(\sqrt{2} + 1) + 2 = 6 + 4\sqrt{2}.$$



58

Zie de figuur hiernaast.

Het frame is gelijkzijdig, dus $\angle BAC = 60^\circ$.De benen van hoek A raken de cirkel met middelpunt M en straal r ,dus de cirkel met middelpunt M en straal r is ingeschreven cirkel

van een driehoek waarvan hoek A een hoekpunt is.

Hieruit volgt dat AM de bissectrice van hoek A is.

$$\text{Dus } \angle BAM = 60^\circ : 2 = 30^\circ.$$

$$\angle ABM = 90^\circ \text{ (stelling raaklijn aan cirkel)}$$

$$\text{Dus in } \triangle ABM \text{ is } AB = \sqrt{3} \cdot BM = r\sqrt{3}.$$

De lengte van de zijde van het frame is

$$r\sqrt{3} + r + 2r + 2r + 2r + r + r\sqrt{3} = 8r + 2r\sqrt{3}.$$

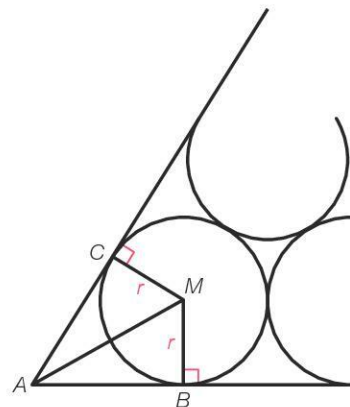
$$\text{Dus } 8r + 2r\sqrt{3} = 30$$

$$r(8 + 2\sqrt{3}) = 30$$

$$r = \frac{30}{8 + 2\sqrt{3}}$$

De diameter van één bal is

$$\frac{30}{4 + \sqrt{3}} = \frac{30}{4 + \sqrt{3}} \cdot \frac{4 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} = \frac{30(4 - \sqrt{3})}{16 - 3} = \frac{30}{13}(4 - \sqrt{3}) = \frac{120}{13} - \frac{30}{13}\sqrt{3} = 9\frac{3}{13} - 2\frac{4}{13}\sqrt{3}.$$



Bladzijde 128

62 Zie de figuur hiernaast.

M is het middelpunt van de cirkel met straal r .

$MR \perp BC$ en $MS \perp CD$ (stelling raaklijn aan cirkel).

Er geldt $PQ = 11 - 2 - r = 9 - r$ en $QM = 11 - 3 - r = 8 - r$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle MPQ$ geeft

$$PQ^2 + MQ^2 = MP^2$$

$$(9 - r)^2 + (8 - r)^2 = r^2$$

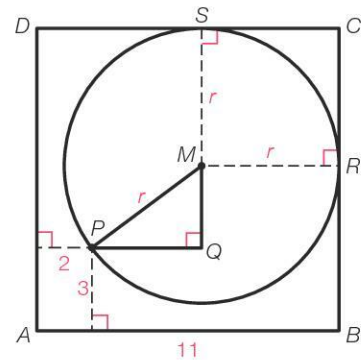
$$81 - 18r + r^2 + 64 - 16r + r^2 = r^2$$

$$r^2 - 34r + 145 = 0$$

$$(r - 5)(r - 29) = 0$$

$$r = 5 \vee r = 29 \text{ (kan niet)}$$

Dus de straal van de cirkel die door P gaat en de zijden BC en CD raakt is 5.



63 Zie de figuur hiernaast.

M is het middelpunt van de cirkels.

Stel de breedte van het vlot is x , dan is de breedte van de gracht $2x$.

Er geldt $MR = x + 37$ en $MP = 2x + 37$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle MPR$ geeft

$$PR^2 + MR^2 = MP^2$$

$$28^2 + (x + 37)^2 = (2x + 37)^2$$

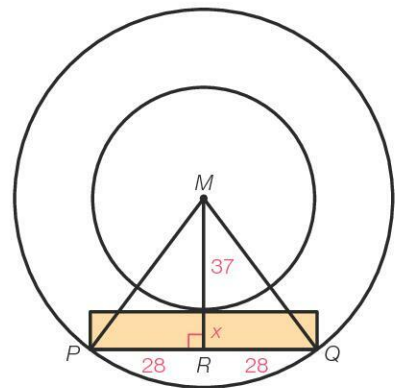
$$784 + x^2 + 74x + 1369 = 4x^2 + 148x + 1369$$

$$-3x^2 - 74x + 784 = 0$$

$$D = (-74)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 784 = 14884, \text{ dus } \sqrt{D} = 122$$

$$x = \frac{74 + 122}{-6} = -32\frac{2}{3} \text{ (kan niet)} \vee x = \frac{74 - 122}{-6} = 8$$

Dus de gracht is $2x = 2 \cdot 8 = 16$ meter breed.



64 Zie de figuur hiernaast waarin de grootste cirkel die nog in het overgebleven stuk past is getekend. Deze cirkel heeft middelpunt M en straal r .

MB en MC staan loodrecht op de zijden van het vierkant (stelling raaklijn aan cirkel).

Er geldt $BM = r$, $AB = 2 - r$ en $AM = r + 1$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABM$ geeft

$$AB^2 + BM^2 = AM^2$$

$$(2 - r)^2 + r^2 = (r + 1)^2$$

$$4 - 4r + r^2 + r^2 = r^2 + 2r + 1$$

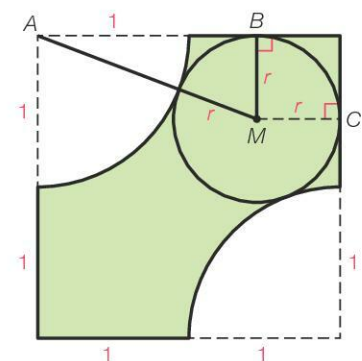
$$r^2 - 6r + 3 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 24, \text{ dus } \sqrt{D} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$r = \frac{6 + 2\sqrt{6}}{2} \vee r = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{2}$$

$$r = 3 + \sqrt{6} \text{ (kan niet)} \vee r = 3 - \sqrt{6}$$

Dus de straal van de grootste cirkel die nog in het overgebleven stuk past is $3 - \sqrt{6}$.



- 65 Zie de figuur hiernaast.
 $O(ABCD) = 1^2 = 1$, dus $O(TUVW) = \frac{1}{2}$, dus $TU = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Stel $AT = BU = x$, dan is $AU = x + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$$O(ABCD) = O(TUVW) + 4 \cdot O(\triangle ABU)$$

$$1 = \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot x$$

$$1 = \frac{1}{2} + 2x^2 + x\sqrt{2}$$

$$2x^2 + x\sqrt{2} - \frac{1}{2} = 0$$

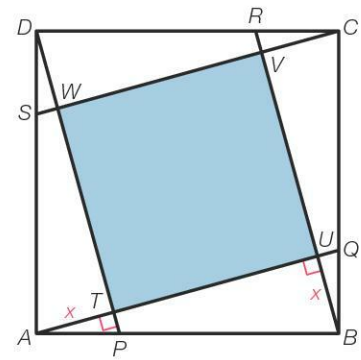
$$D = (\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot -\frac{1}{2} = 6$$

$$x = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6} \vee x = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} \text{ (kan niet)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle PAT = \angle BAU \\ \angle PTA = \angle BUA \text{ (rechte hoek)} \end{array} \right\} \triangle APT \sim \triangle ABU$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AT}{AU} \text{ geeft } \frac{AP}{1} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}}{\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}}$$

$$AP = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}}{\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{6 - 2} = \frac{8 - 2 \cdot 2\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$



3.5 De sinusregel en de cosinusregel

Bladzijde 130

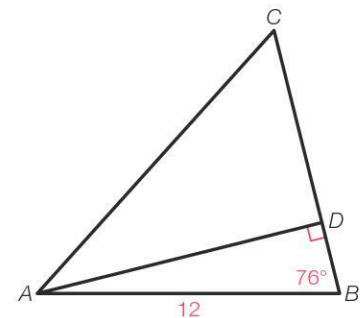
- 66 $\angle C = 180^\circ - 48^\circ - 76^\circ = 56^\circ$
 Zie de figuur hiernaast met hoogtelijn AD .

$$\text{In } \triangle ABD \text{ is } \sin(76^\circ) = \frac{AD}{12}$$

$$AD = 12 \sin(76^\circ) = 11,64\dots$$

$$\text{In } \triangle ACD \text{ is } \sin(56^\circ) = \frac{AD}{AC}$$

$$AC = \frac{11,64\dots}{\sin(56^\circ)} \approx 14,04$$



Bladzijde 131

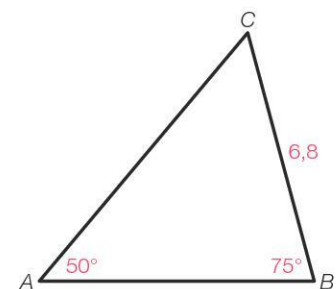
- 67 a $\angle C = 180^\circ - 50^\circ - 75^\circ = 55^\circ$
 b De sinusregel geeft $\frac{6,8}{\sin(50^\circ)} = \frac{AB}{\sin(55^\circ)}$

$$AB = \frac{6,8 \sin(55^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 7,3$$

en ook

$$\frac{6,8}{\sin(50^\circ)} = \frac{AC}{\sin(75^\circ)}$$

$$AC = \frac{6,8 \sin(75^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 8,6$$



- 68 a In $\triangle ACD$ is $\sin(\alpha) = \frac{CD}{b}$, dus $CD = b \sin(\alpha)$.

$$\text{In } \triangle BCD \text{ is } \sin(\beta) = \frac{CD}{a}, \text{ dus } CD = a \sin(\beta).$$

- b Uit a volgt $a \sin(\beta) = b \sin(\alpha)$.

$$\text{Linker- en rechterlid delen door } \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \text{ geeft } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}.$$

c In $\triangle ABE$ is $\sin(\beta) = \frac{AE}{c}$, dus $AE = c \sin(\beta)$.

In $\triangle ACE$ is $\sin(\gamma) = \frac{AE}{b}$, dus $AE = b \sin(\gamma)$.

d Uit c volgt $b \sin(\gamma) = c \sin(\beta)$.

Linker- en rechterlid delen door $\sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)$ geeft $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \\ \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \end{array} \right\} \text{dus } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

69 a In $\triangle ACD$ is $\sin(\angle DAC) = \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{CD}{b}$, dus $CD = b \sin(180^\circ - \alpha)$.

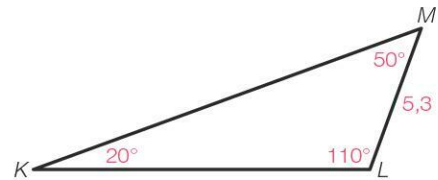
b In $\triangle BCD$ is $\sin(\beta) = \frac{CD}{a}$, dus $CD = a \sin(\beta)$.

c Uit a en b volgt $b \sin(180^\circ - \alpha) = a \sin(\beta)$.

Linker- en rechterlid delen door $\sin(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(\beta)$ geeft $\frac{a}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.

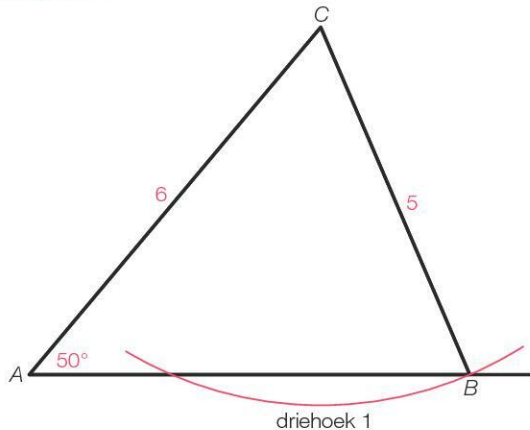
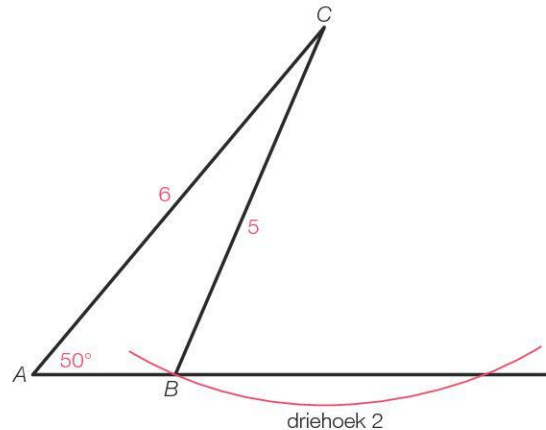
70 $\angle M = 180^\circ - 20^\circ - 110^\circ = 50^\circ$

De sinusregel geeft $\frac{5,3}{\sin(20^\circ)} = \frac{KL}{\sin(50^\circ)}$
 $KL = \frac{5,3 \sin(50^\circ)}{\sin(20^\circ)} \approx 11,9$
 en ook $\frac{5,3}{\sin(20^\circ)} = \frac{KM}{\sin(110^\circ)}$
 $KM = \frac{5,3 \sin(110^\circ)}{\sin(20^\circ)} \approx 14,6$



Bladzijde 132

71 a



b De sinusregel in driehoek 1 geeft $\frac{5}{\sin(50^\circ)} = \frac{6}{\sin(\beta)}$
 $\sin(\beta) = \frac{6 \sin(50^\circ)}{5} = 0,91...$
 $\beta \approx 66,8^\circ$

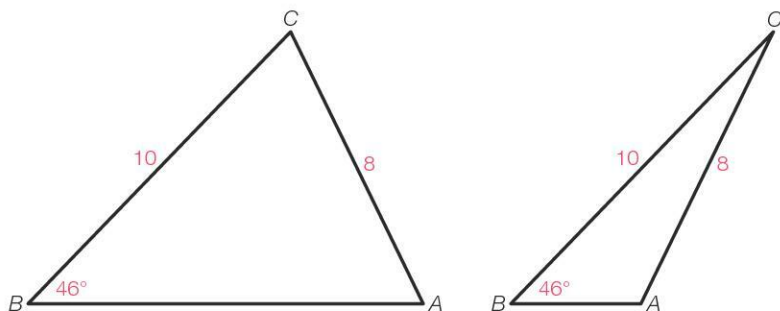
$$\gamma \approx 180^\circ - 50^\circ - 66,8^\circ = 63,2^\circ$$

De sinusregel in driehoek 1 geeft $\frac{5}{\sin(50^\circ)} = \frac{c}{\sin(63,1...^\circ)}$
 $c = \frac{5 \sin(63,1...^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 5,8$

- c $\beta \approx 180^\circ - 66,8^\circ = 113,2^\circ$
 $\gamma \approx 180^\circ - 50^\circ - 113,2^\circ = 16,8^\circ$

De sinusregel in driehoek 2 geeft $\frac{5}{\sin(50^\circ)} = \frac{c}{\sin(16,8\dots^\circ)}$
 $c = \frac{5 \sin(16,8\dots^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 1,9$

72 a



De sinusregel in de scherphoekige driehoek geeft $\frac{8}{\sin(46^\circ)} = \frac{10}{\sin(\angle A)}$
 $\sin(\angle A) = \frac{10 \sin(46^\circ)}{8}$
 $\angle A \approx 64,0^\circ$

In de stomphoekige driehoek is $\angle A \approx 180^\circ - 64,0^\circ = 116,0^\circ$.

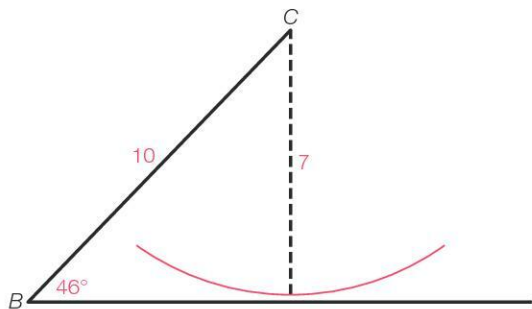
- b In de scherphoekige driehoek is $\angle C = 180^\circ - 46^\circ - 64,04\dots^\circ = 69,95\dots^\circ$.

De sinusregel in de scherphoekige driehoek geeft $\frac{8}{\sin(46^\circ)} = \frac{AB}{\sin(69,95\dots^\circ)}$
 $AB = \frac{8 \sin(69,95\dots^\circ)}{\sin(46^\circ)} \approx 10,4$

In de stomphoekige driehoek is $\angle C = 180^\circ - 46^\circ - 115,95\dots^\circ = 18,04\dots^\circ$.

De sinusregel in de stomphoekige driehoek geeft $\frac{8}{\sin(46^\circ)} = \frac{AB}{\sin(18,04\dots^\circ)}$
 $AB = \frac{8 \sin(18,04\dots^\circ)}{\sin(46^\circ)} \approx 3,4$

c



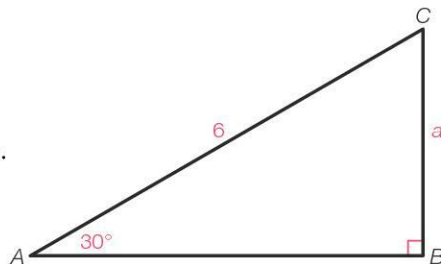
De cirkel met middelpunt C en straal 7 snijdt het andere been van hoek B niet.

73 a Zie de figuur hiernaast.

$$\sin(30^\circ) = \frac{a}{6}, \text{ dus } a = 6 \sin(30^\circ) = 3.$$

Als er geen driehoek ABC mogelijk is, dan is $a < 3$.

- b Als er precies één driehoek ABC mogelijk is, dan is $a = 3 \vee a \geq 6$.
c Als er twee driehoeken ABC mogelijk zijn, dan is $3 < a < 6$.



74 $\angle ADC = 180^\circ - 62^\circ - 48^\circ = 70^\circ$

De sinusregel in $\triangle ACD$ geeft $\frac{6}{\sin(62^\circ)} = \frac{AD}{\sin(48^\circ)}$
 $AD = \frac{6 \sin(48^\circ)}{\sin(62^\circ)} = 5,04...$
 en ook $\frac{6}{\sin(62^\circ)} = \frac{AC}{\sin(70^\circ)}$
 $AC = \frac{6 \sin(70^\circ)}{\sin(62^\circ)} = 6,38...$

$\angle BDC = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

$\angle DBC = 180^\circ - 110^\circ - 25^\circ = 45^\circ$

De sinusregel in $\triangle BCD$ geeft $\frac{6}{\sin(45^\circ)} = \frac{BD}{\sin(25^\circ)}$
 $BD = \frac{6 \sin(25^\circ)}{\sin(45^\circ)} = 3,58...$
 en ook $\frac{6}{\sin(45^\circ)} = \frac{BC}{\sin(110^\circ)}$
 $BC = \frac{6 \sin(110^\circ)}{\sin(45^\circ)} = 7,97...$

omtrek $\triangle ABC = AD + BD + BC + AC = 5,04... + 3,58... + 7,97... + 6,38... \approx 23,0$

75 $\angle BCD = 180^\circ - 110^\circ - 40^\circ = 30^\circ$

De sinusregel in $\triangle BCD$ geeft $\frac{CD}{\sin(40^\circ)} = \frac{4}{\sin(30^\circ)}$
 $CD = \frac{4 \sin(40^\circ)}{\sin(30^\circ)} = 5,14...$

$\angle ACD = \angle ACB - \angle BCD = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$

De sinusregel in $\triangle ACD$ geeft $\frac{5,14...}{\sin(\angle CAD)} = \frac{5}{\sin(20^\circ)}$
 $\sin(\angle CAD) = \frac{5,14... \cdot \sin(20^\circ)}{5} = 0,35...$
 $\angle CAD = 20,59...^\circ$

$\angle ADC = 180^\circ - 20,59...^\circ - 20^\circ = 139,40...^\circ$

De sinusregel in $\triangle ACD$ geeft $\frac{AC}{\sin(139,40...^\circ)} = \frac{5}{\sin(20^\circ)}$
 $AC = \frac{5 \sin(139,40...^\circ)}{\sin(20^\circ)} \approx 9,51$

Bladzijde 133

76 a De sinusregel geeft $\frac{4}{\sin(\angle A)} = \frac{5}{\sin(\angle B)} = \frac{6}{\sin(\angle C)}$.

Bij elke combinatie van twee breuken zijn er twee onbekenden.
 Je kunt de sinusregel dus niet gebruiken.

b De sinusregel geeft $\frac{QR}{\sin(50^\circ)} = \frac{5}{\sin(\angle Q)} = \frac{6}{\sin(\angle R)}$.

Bij elke combinatie van twee breuken zijn er twee onbekenden.
 Je kunt de sinusregel dus niet gebruiken.

77 a De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft $AD^2 + CD^2 = AC^2$
 $x^2 + h^2 = b^2$

b De stelling van Pythagoras in $\triangle BCD$ geeft $BC^2 = BD^2 + CD^2$
 $a^2 = (c - x)^2 + h^2$
 $a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$

- c Vervangen van $x^2 + h^2$ door b^2 in $a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$ geeft $a^2 = c^2 - 2cx + b^2$, oftewel $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$.
- d In $\triangle ACD$ is $\cos(\alpha) = \frac{x}{b}$, dus $x = b \cos(\alpha)$.
- e Vervangen van x door $b \cos(\alpha)$ in $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ geeft $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos(\alpha)$, oftewel $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.

Bladzijde 134

- 78 a De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft $AD^2 + CD^2 = AC^2$

$$x^2 + h^2 = b^2$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle BCD$ geeft $BC^2 = BD^2 + CD^2$

$$a^2 = (c + x)^2 + h^2$$

$$a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2$$

- b Vervangen van $x^2 + h^2$ door b^2 in $a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2$ geeft $a^2 = c^2 + 2cx + b^2$, oftewel $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$.

- c In $\triangle ACD$ is $\angle CAD = 180^\circ - \alpha$ en $\cos(\angle CAD) = \frac{AD}{AC}$.

Dus $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x}{b}$ oftewel $x = b \cos(180^\circ - \alpha)$.

- d $\left. \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 + 2cx \\ x = -b \cos(\alpha) \end{array} \right\} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$

Dus de cosinusregel geldt ook voor stomphoekige driehoeken.

- 79 a De cosinusregel geeft

$$5^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos(\angle A)$$

$$25 = 49 + 36 - 84 \cos(\angle A)$$

$$84 \cos(\angle A) = 60$$

$$\cos(\angle A) = \frac{60}{84}$$

$$\angle A = 44,41\dots^\circ \approx 44,4^\circ$$

en ook

$$6^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos(\angle B)$$

$$36 = 49 + 25 - 70 \cos(\angle B)$$

$$70 \cos(\angle B) = 38$$

$$\cos(\angle B) = \frac{38}{70}$$

$$\angle B = 57,12\dots^\circ \approx 57,1^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 44,41\dots^\circ - 57,12\dots^\circ \approx 78,5^\circ$$

- b De cosinusregel geeft

$$4^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(\angle D)$$

$$16 = 25 + 49 - 70 \cos(\angle D)$$

$$70 \cos(\angle D) = 58$$

$$\cos(\angle D) = \frac{58}{70}$$

$$\angle D = 34,04\dots^\circ \approx 34,0^\circ$$

en ook

$$7^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos(\angle E)$$

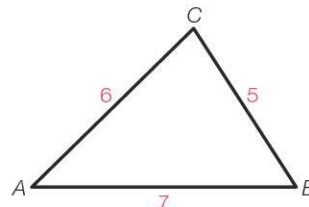
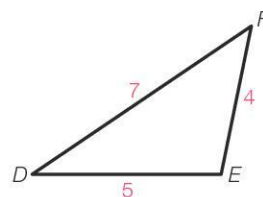
$$49 = 25 + 16 - 40 \cos(\angle E)$$

$$40 \cos(\angle E) = -8$$

$$\cos(\angle E) = \frac{-8}{40}$$

$$\angle E = 101,53\dots^\circ \approx 101,5^\circ$$

$$\angle F = 180^\circ - 101,53\dots^\circ - 34,04\dots^\circ \approx 44,4^\circ$$

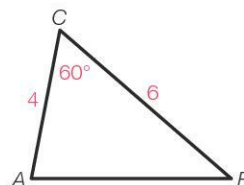


Bladzijde 135

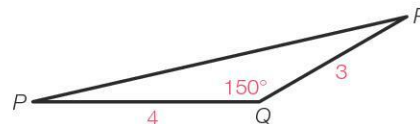
- 80 a De cosinusregel geeft $AB^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(60^\circ)$

$$AB^2 = 28$$

$$AB = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$



- b** De cosinusregel geeft $PR^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(150^\circ)$
 $PR^2 = 45,78...$
 $PR \approx 6,77$



- 81 a** Zie de figuur hiernaast.
 De diagonalen AC en BD snijden elkaar in het punt S met S het midden van AC en van BD .

De cosinusregel in $\triangle ABS$ geeft
 $4,5^2 = 10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cos(\angle SAB)$
 $20,25 = 100 + 49 - 140 \cos(\angle SAB)$
 $140 \cos(\angle SAB) = 128,75$
 $\cos(\angle SAB) = \frac{128,75}{140}$

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft

$$BC^2 = 10^2 + 14^2 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \frac{128,75}{140}$$

$$BC^2 = 38,5$$

$$BC \approx 6,2$$

- b** Zie de figuur hiernaast.

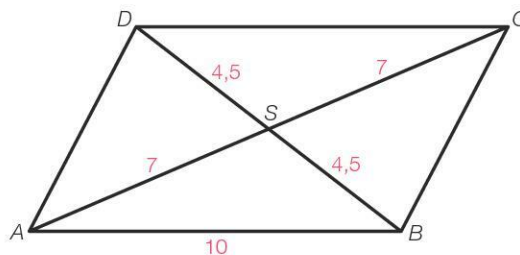
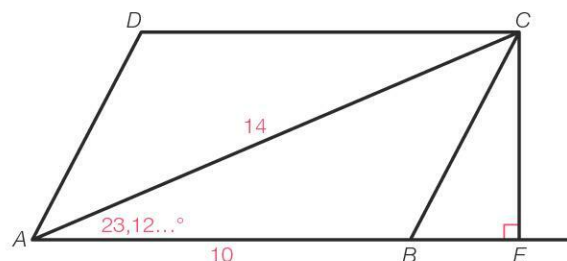
$$\cos(\angle SAB) = \frac{128,75}{140} \text{ geeft } \angle SAB = 23,12...^\circ$$

$$\text{In } \triangle ACE \text{ is } \sin(\angle CAE) = \frac{CE}{AC}$$

$$\sin(23,12...^\circ) = \frac{CE}{14}$$

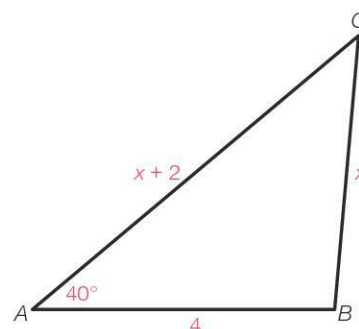
$$CE = 14 \sin(23,12...^\circ) = 5,49...$$

$$O(ABCD) = AB \cdot CE = 10 \cdot 5,49... \approx 55,0$$



- 82** De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $4^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \cos(\angle B)$
 $16 = 25 + 4 - 20 \cos(\angle B)$
 $20 \cos(\angle B) = 13$
 $\cos(\angle B) = \frac{13}{20}$
 De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $AC^2 = 5^2 + (6\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{20}$
 $AC^2 = 25$
 $AC = 5$

- 83** Zie de figuur hiernaast.
 De cosinusregel geeft $x^2 = 4^2 + (x+2)^2 - 2 \cdot 4 \cdot (x+2) \cdot \cos(40^\circ)$
 oftewel $x^2 = 16 + (x+2)^2 - 8(x+2)\cos(40^\circ)$.
 Voer in $y_1 = x^2$ en $y_2 = 16 + (x+2)^2 - 8(x+2)\cos(40^\circ)$.
 De optie snijpunt geeft $x = 3,6381...$
 Dus $BC \approx 3,638$ en $AC \approx 5,638$.



Diagnostische toets

Bladzijde 138

- 1** Zie de figuur hiernaast.

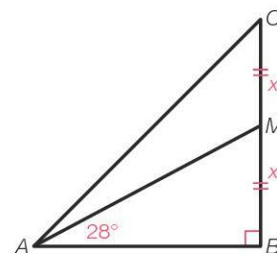
Stel $BM = x$, dan is $BC = 2x$.

$$\text{In } \triangle ABM \text{ is } \tan(28^\circ) = \frac{BM}{AB} = \frac{x}{AB}, \text{ dus } AB = \frac{x}{\tan(28^\circ)}.$$

$$\text{In } \triangle ABC \text{ is } \tan(\angle BAC) = \frac{BC}{AB} = \frac{2x}{\left(\frac{x}{\tan(28^\circ)}\right)} = 2 \tan(28^\circ)$$

$$\angle BAC = 46,76...^\circ$$

$$\angle CAM = \angle BAC - \angle BAM = 46,76...^\circ - 28^\circ \approx 18,8^\circ$$



- 2 De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AC = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.

$$CD = AC - AD = 9 - 5 = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACB = \angle DCE \\ \angle CAB = \angle CDE \text{ (rechte hoek)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DEC$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CD} \text{ geeft } \frac{12}{DE} = \frac{9}{4}, \text{ dus } DE = \frac{4 \cdot 12}{9} = 5\frac{1}{3}.$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABD$ geeft $BD = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

Stel $BS = x$, dan is $DS = 13 - x$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle EAB = \angle AED \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle DBA = \angle BDE \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABS \sim \triangle EDS \text{ dus } \frac{AB}{DE} = \frac{BS}{DS}$$

$$\text{Dit geeft } \frac{12}{5\frac{1}{3}} = \frac{x}{13-x}$$

$$5\frac{1}{3}x = 12(13-x)$$

$$5\frac{1}{3}x = 156 - 12x$$

$$17\frac{1}{3}x = 156$$

$$x = 9$$

Dus $BS = 9$.

- 3 Zie de figuur hiernaast.

$$\left. \begin{array}{l} \angle APM = \angle BPN \\ \angle MAP = \angle NBP \text{ (rechte hoek)} \end{array} \right\} \triangle AMP \sim \triangle BNP$$

Stel $NP = x$, dan is $MP = x + 8$.

$$\frac{AM}{BN} = \frac{MP}{NP} \text{ geeft } \frac{5}{3} = \frac{x+8}{x}$$

$$5x = 3(x+8)$$

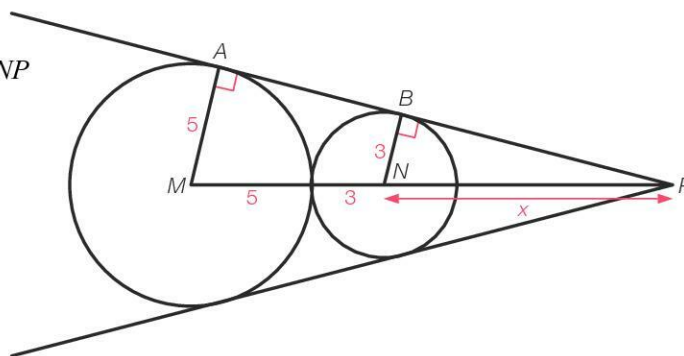
$$5x = 3x + 24$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

Dus $NP = 12$ en $MP = 12 + 8 = 20$.

In $\triangle AMP$ is $AP = \sqrt{20^2 - 5^2} = \sqrt{375} = 5\sqrt{15}$.



- 4 a Zie de figuur hiernaast.

AC is raaklijn aan de cirkel met raakpunt E , dus

$\angle CEM = 90^\circ$ (stelling raaklijn aan cirkel).

CD is symmetrieas van $\triangle ABC$, dus D is het midden van AB , CD staat loodrecht op AB , en CD is de bissectrice van $\angle ACB$ en gaat dus door M .

$$\left. \begin{array}{l} \angle ADC = \angle CEM \text{ (rechte hoek)} \\ \angle ACD = \angle ECM \end{array} \right\} \triangle ACD \sim \triangle MCE \text{ dus } \frac{AC}{CM} = \frac{AD}{EM}$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft $CD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Stel $DM = EM = r$, dan is $CM = 8 - r$.

$$\text{Dit geeft } \frac{10}{8-r} = \frac{6}{r}$$

$$10r = 6(8-r)$$

$$10r = 48 - 6r$$

$$16r = 48$$

$$r = 3$$

De straal van de ingeschreven cirkel is 3.

- b Zie de figuur hiernaast.

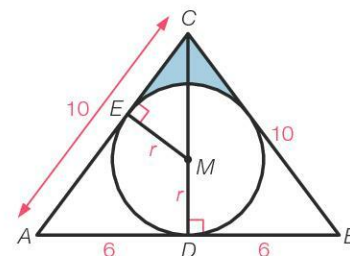
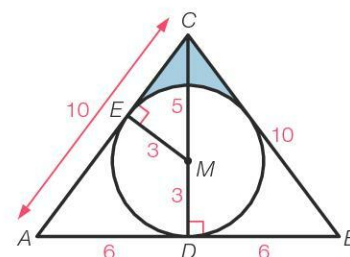
$$CM = CD - DM = 8 - 3 = 5$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle CEM$ geeft $CE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

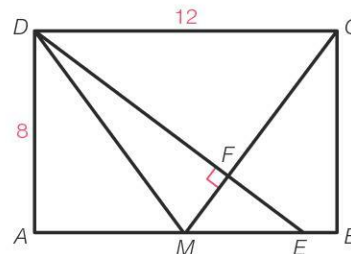
$$O(\triangle CEM) = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EM = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$$

In $\triangle CEM$ is $\cos(\angle CME) = \frac{3}{5}$, dus $\angle CME = 53,13\dots^\circ$

De gevraagde oppervlakte is $2 \cdot \left(6 - \frac{53,13\dots}{360} \cdot \pi \cdot 3^2\right) \approx 3,65$.



- 5 a** De stelling van Pythagoras in $\triangle BCM$ geeft $CM = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
 Teken DM . Zie de figuur hiernaast.
 De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle CDM$ geeft $CM \cdot DF = CD \cdot AD$
 $10 \cdot DF = 12 \cdot 8$
 $DF = \frac{12 \cdot 8}{10} = 9\frac{3}{5}$



- b** De stelling van Pythagoras in $\triangle CDF$ geeft $CF = \sqrt{12^2 - (9\frac{3}{5})^2} = 7\frac{1}{5}$.
 $FM = CM - CF = 10 - 7\frac{1}{5} = 2\frac{4}{5}$

$$\left. \begin{array}{l} \angle CME = \angle MCD \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle DEM = \angle EDC \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle EMF \sim \triangle DCF$$

$$\frac{EM}{CD} \Big| \frac{FM}{CF} \text{ geeft } \frac{EM}{12} \Big| \frac{2\frac{4}{5}}{7\frac{1}{5}}, \text{ dus } EM = \frac{12 \cdot 2\frac{4}{5}}{7\frac{1}{5}} = 4\frac{2}{3}.$$

Bladzijde 139

- 6 a** $\sqrt{45} - \frac{8}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} - \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} - \frac{8\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5} - 1\frac{3}{5}\sqrt{5} = 1\frac{2}{5}\sqrt{5}$
b $\sqrt{18a} + \sqrt{\frac{2}{9}a} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2a} + \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{2a} = 3\sqrt{2a} + \frac{1}{3}\sqrt{2a} = 3\frac{1}{3}\sqrt{2a}$
c $\sqrt{12\frac{1}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} - \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
d $\frac{3\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} \cdot \frac{2 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}(2 + \sqrt{5})}{4 - 5} = -3\sqrt{5}(2 + \sqrt{5}) = -6\sqrt{5} - 15$
e $(2a\sqrt{5} - 3)(2a\sqrt{5} + 3) = (2a\sqrt{5})^2 - 3^2 = 20a^2 - 9$
f $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{6 - 3} = \frac{2\sqrt{18} + 6}{3} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{2} + 6}{3} = 2\sqrt{2} + 2$

- 7 a** $x\sqrt{3} + 4 = \sqrt{6}$
 $x\sqrt{3} = \sqrt{6} - 4$
 $x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}}$
 $x = \sqrt{2} - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
 $x = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{3}}{3}$
 $x = \sqrt{2} - 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$
b $2x\sqrt{3} + 3x - 12 = 0$
 $x(2\sqrt{3} + 3) = 12$
 $x = \frac{12}{2\sqrt{3} + 3}$
 $x = \frac{12}{2\sqrt{3} + 3} \cdot \frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} - 3}$
 $x = \frac{12(2\sqrt{3} - 3)}{12 - 9}$
 $x = 4(2\sqrt{3} - 3)$
 $x = 8\sqrt{3} - 12$

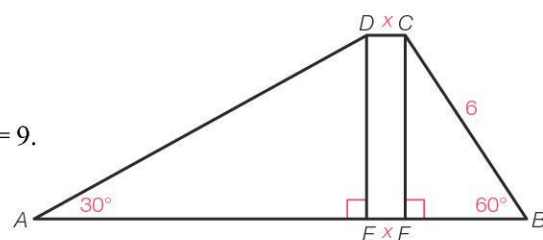
$$\begin{aligned}
\text{c } 2x\sqrt{2} + x\sqrt{6} &= \sqrt{3} \\
x(2\sqrt{2} + \sqrt{6}) &= \sqrt{3} \\
x &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}} \\
x &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}} \cdot \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{2} - \sqrt{6}} \\
x &= \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{2} - \sqrt{6})}{8 - 6} \\
x &= \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{18}}{2} \\
x &= \frac{2\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2} \\
x &= \sqrt{6} - 1\frac{1}{2}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

8 Zie de figuur hiernaast.

In $\triangle BCF$ is $BF = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ en $CF = \sqrt{3} \cdot BF = 3\sqrt{3}$.

In $\triangle ADE$ is $DE = CF = 3\sqrt{3}$ en $AE = \sqrt{3} \cdot DE = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 9$.

Stel $CD = EF = x$.



$$\begin{aligned}
O(ABCD) &= \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DE = \frac{1}{2}(9 + x + 3 + x) \cdot 3\sqrt{3} = (x + 6) \cdot 3\sqrt{3} \\
O(ABCD) &= 36
\end{aligned}$$

$$(x + 6) \cdot 3\sqrt{3} = 36$$

$$x + 6 = \frac{36}{3\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{36}{3\sqrt{3}} - 6$$

$$x = \frac{36}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - 6$$

$$x = \frac{36\sqrt{3}}{9} - 6$$

$$x = 4\sqrt{3} - 6$$

$$\text{Dus } AB = 9 + 4\sqrt{3} - 6 + 3 = 6 + 4\sqrt{3}.$$

9 $\triangle ABM$ is gelijkzijdig, dus $\angle MAB = \angle MBA = \angle AMB = 60^\circ$.

$\angle DAM = 90^\circ - \angle MAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ en $\angle D = 90^\circ$

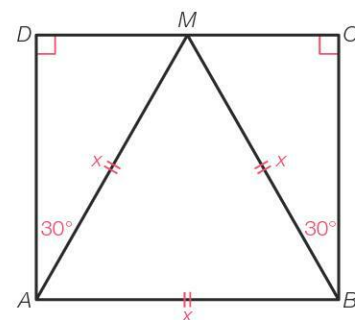
Stel $AB = BM = AM = x$.

Dan geldt in $\triangle ADM$ dat $DM = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$ en $AD = \frac{1}{2}x\sqrt{3}$.

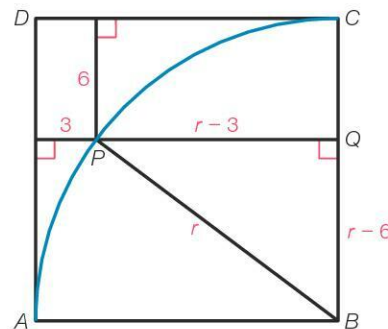
$$\begin{aligned}
\text{omtrek } ABCD &= AB + BC + CD + AD \\
&= 2 \cdot x + 2 \cdot \frac{1}{2}x\sqrt{3} = 2x + x\sqrt{3} \\
\text{omtrek } ABCD &= 10
\end{aligned}
\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{aligned} 2x + x\sqrt{3} &= 10 \\ x(2 + \sqrt{3}) &= 10 \\ x &= \frac{10}{2 + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

Dus de omtrek van driehoek ABM is

$$3 \cdot \frac{10}{2 + \sqrt{3}} = \frac{30}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{30(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 60 - 30\sqrt{3}.$$

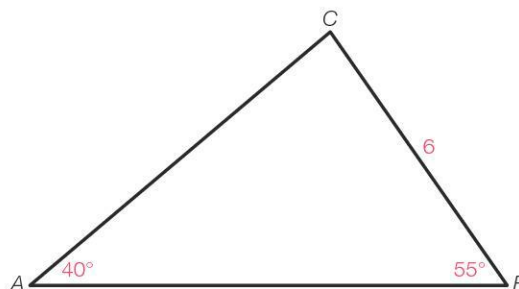


- 10** Zie de figuur hiernaast.
 Stel de straal van de cirkel r .
 Dan is $BP = r$, $BQ = r - 6$ en $PQ = r - 3$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle BPQ$ geeft
 $PQ^2 + BQ^2 = BP^2$
 $(r - 3)^2 + (r - 6)^2 = r^2$
 $r^2 - 6r + 9 + r^2 - 12r + 36 = r^2$
 $r^2 - 18r + 45 = 0$
 $(r - 3)(r - 15) = 0$
 $r = 3 \vee r = 15$
 $r = 3$ kan niet.

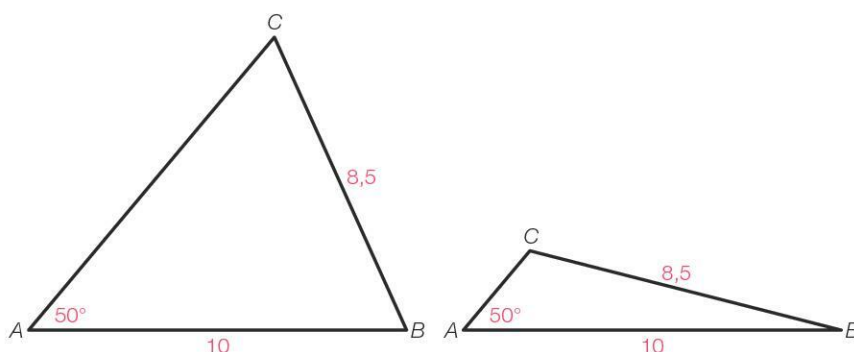


De oppervlakte van het vierkant is $AB \cdot BC = r \cdot r = 15 \cdot 15 = 225$.

- 11** Zie de figuur hiernaast.
 $\angle C = 180^\circ - 40^\circ - 55^\circ = 85^\circ$
 De sinusregel geeft $\frac{6}{\sin(40^\circ)} = \frac{AC}{\sin(55^\circ)}$
 $AC = \frac{6 \sin(55^\circ)}{\sin(40^\circ)} = 7,64\dots$
 $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin(\angle C)$
 $= \frac{1}{2} \cdot 7,64\dots \cdot 6 \cdot \sin(85^\circ) \approx 22,85$



- 12 a**



De sinusregel in de scherphoekige driehoek geeft $\frac{8,5}{\sin(50^\circ)} = \frac{10}{\sin(\angle C)}$
 $\sin(\angle C) = \frac{10 \sin(50^\circ)}{8,5}$
 $\angle C \approx 64,3^\circ$

Dus in de scherphoekige driehoek is $\angle B \approx 180^\circ - 50^\circ - 64,3^\circ = 65,7^\circ$.

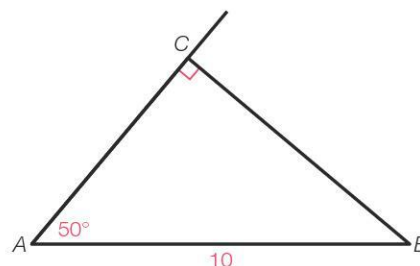
In de stomphoekige driehoek is $\angle C \approx 180^\circ - 64,3^\circ = 115,7^\circ$ en

$\angle B \approx 180^\circ - 50^\circ - 115,7^\circ = 14,3^\circ$.

- b** Zie de figuur hiernaast.

$\sin(50^\circ) = \frac{BC}{10}$, dus $BC = 10 \sin(50^\circ) = 7,660\dots$

Als er precies één driehoek ABC mogelijk is, dan is
 $BC \approx 7,66 \vee BC \geq 10$.

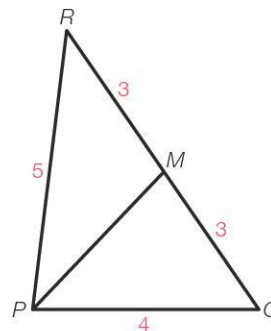


13 Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle PQR$ geeft $4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(\angle R)$
 $16 = 25 + 36 - 60 \cos(\angle R)$
 $60 \cos(\angle R) = 45$
 $\cos(\angle R) = \frac{3}{4}$

De cosinusregel in $\triangle MPR$ geeft $PM^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4}$
 $PM^2 = 11\frac{1}{2}$

De cosinusregel in $\triangle MPR$ geeft $5^2 = 11\frac{1}{2} + 3^2 - 2 \cdot \sqrt{11\frac{1}{2}} \cdot 3 \cdot \cos(\angle PMR)$
 $6\sqrt{11\frac{1}{2}} \cdot \cos(\angle PMR) = -4\frac{1}{2}$
 $\cos(\angle PMR) = \frac{-4\frac{1}{2}}{6\sqrt{11\frac{1}{2}}}$
 $\angle PMR \approx 102,8^\circ$



14 a Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft
 $10^2 = 8^2 + 15^2 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \cos(\angle BAD)$
 $100 = 64 + 225 - 240 \cos(\angle BAD)$
 $240 \cos(\angle BAD) = 189$
 $\cos(\angle BAD) = \frac{189}{240}$
 $\angle BAD = 38,04\dots^\circ$

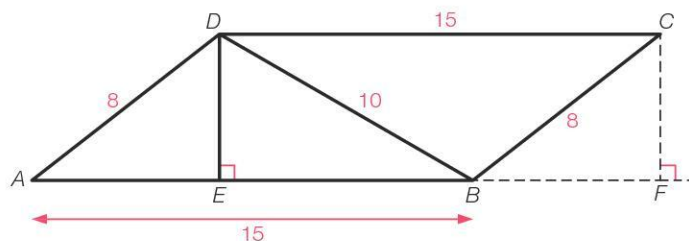
In $\triangle ADE$ is $\sin(38,04\dots^\circ) = \frac{DE}{8}$, dus $DE = 8 \sin(38,04\dots^\circ) = 4,93\dots$

$O(ABCD) = AB \cdot DE = 15 \cdot 4,93\dots \approx 73,96$

b $CF = DE = 4,93\dots$

De stelling van Pythagoras in $\triangle BCF$ geeft $BF = \sqrt{8^2 - 4,93\dots^2} = 6,3$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ACF$ geeft $AC = \sqrt{(15 + 6,3)^2 + 4,93\dots^2} \approx 21,9$.



4 Vergelijkingen en herleidingen

Voorkennis Stelsels lineaire vergelijkingen

Bladzijde 143

1

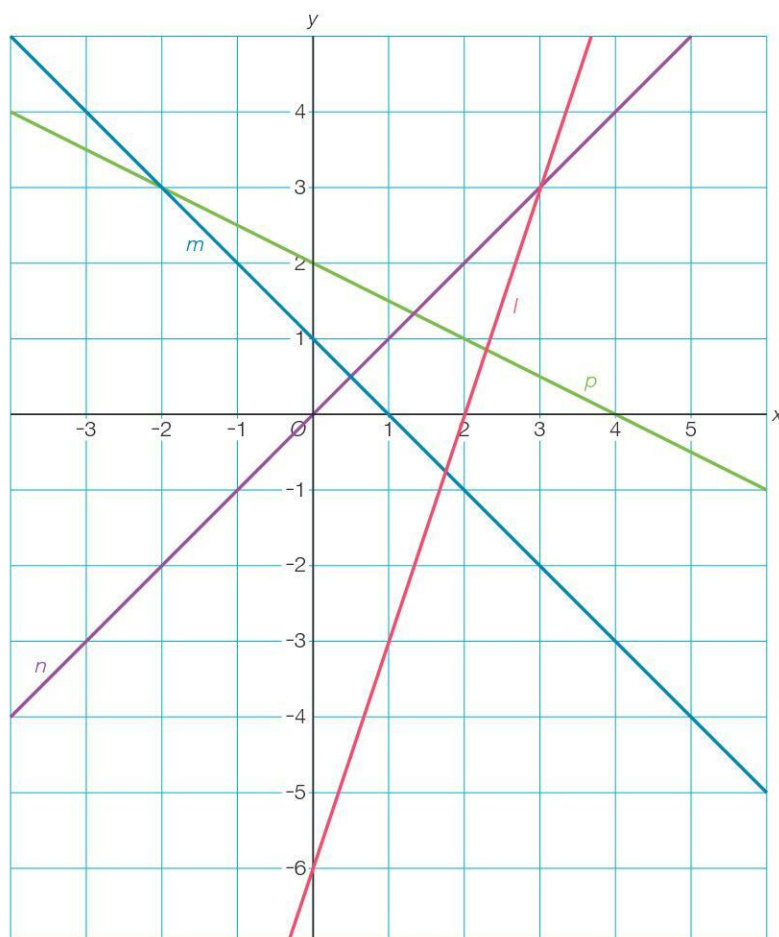
a

lijn l			
x	0	2	
y	-6	0	

lijn m			
x	0	1	
y	1	0	

lijn n			
x	0	2	
y	0	2	

lijn p			
x	0	4	
y	2	0	



- b** $3x - y = 6$ $x + y = 1$ $x - y = 0$ $x + 2y = 4$
 $-y = -3x + 6$ $y = -x + 1$ $-y = -x$ $2y = -x + 4$
 $y = 3x - 6$ Dus $rc_m = -1$. $y = x$ $y = -\frac{1}{2}x + 2$
Dus $rc_l = 3$. Dus $rc_n = 1$. Dus $rc_p = -\frac{1}{2}$.

2

- a** $y = 0$ invullen in $4x - 3y = 24$ geeft $4x = 24$ oftewel $x = 6$, dus het snijpunt met de x -as is $(6, 0)$.
 $x = 0$ invullen in $4x - 3y = 24$ geeft $-3y = 24$ oftewel $y = -8$, dus het snijpunt met de y -as is $(0, -8)$.
- b** $x = 8$ en $y = 3$ invullen in $4x - 3y = 24$ geeft $\underbrace{4 \cdot 8 - 3 \cdot 3}_{= 23} = 24$ en dat klopt niet, dus $A(8, 3)$ ligt niet op l .
 $x = 18$ en $y = 16$ invullen in $4x - 3y = 24$ geeft $\underbrace{4 \cdot 18 - 3 \cdot 16}_{= 24} = 24$ en dat klopt, dus $B(18, 16)$ ligt op l .
 $x = -30$ en $y = -48$ invullen in $4x - 3y = 24$ geeft $\underbrace{4 \cdot -30 - 3 \cdot -48}_{= 24} = 24$ en dat klopt, dus $C(-30, -48)$ ligt op l .

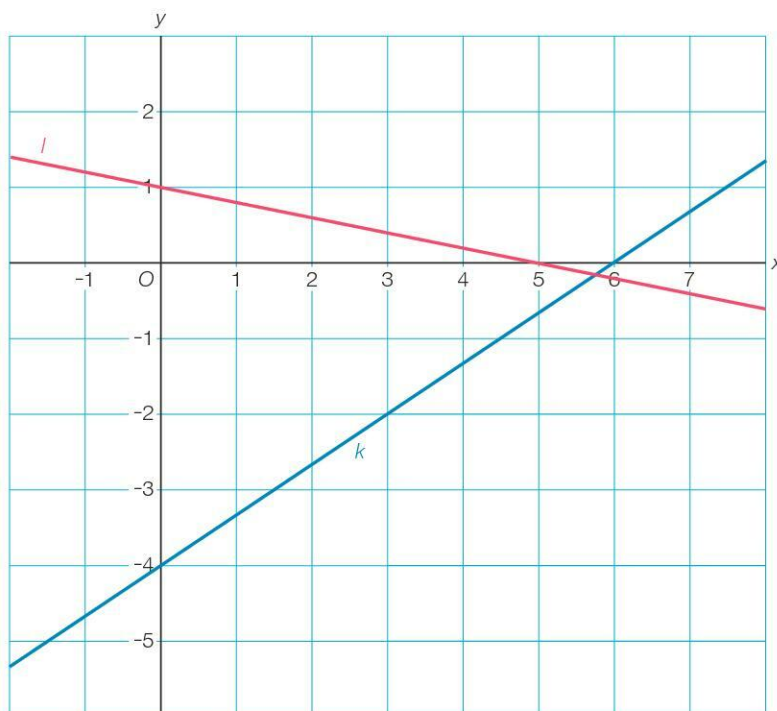
- c $x = 16$ en $y = p$ invullen in $4x - 3y = 24$ geeft $4 \cdot 16 - 3 \cdot p = 24$
 $64 - 3p = 24$
 $-3p = -40$
 $p = 13\frac{1}{3}$
- d $x = q$ en $y = 48$ invullen in $4x - 3y = 24$ geeft $4 \cdot q - 3 \cdot 48 = 24$
 $4q - 144 = 24$
 $4q = 168$
 $q = 42$

Dus voor $q = 42$.

Bladzijde 144

- 3 a Uit $x - 4y = 11$ volgt $x = 4y + 11$.
 $x = 4y + 11$ en $3x + y = 7$ geeft $3(4y + 11) + y = 7$
 $12y + 33 + y = 7$
 $13y = -26$
 $y = -2$
 $y = -2$ en $x = 4y + 11$ geeft $x = 4 \cdot -2 + 11 = 3$
De oplossing is $(x, y) = (3, -2)$.
- b Uit $x + 2y = -3$ volgt $x = -2y - 3$.
 $x = -2y - 3$ en $4x - 3y = 10$ geeft $4(-2y - 3) - 3y = 10$
 $-8y - 12 - 3y = 10$
 $-11y = 22$
 $y = -2$
 $y = -2$ en $x = -2y - 3$ geeft $x = -2 \cdot -2 - 3 = 1$
De oplossing is $(x, y) = (1, -2)$.
- c Uit $x - 6y = 1$ volgt $x = 6y + 1$.
 $x = 6y + 1$ en $5x + 4y = 56$ geeft $5(6y + 1) + 4y = 56$
 $30y + 5 + 4y = 56$
 $34y = 51$
 $y = 1\frac{1}{2}$
 $y = 1\frac{1}{2}$ en $x = 6y + 1$ geeft $x = 6 \cdot 1\frac{1}{2} + 1 = 10$
De oplossing is $(x, y) = (10, 1\frac{1}{2})$.

- 4 a
- | lijn k | | |
|--------|----|---|
| x | 0 | 6 |
| y | -4 | 0 |
- | lijn l | | |
|--------|---|---|
| x | 0 | 5 |
| y | 1 | 0 |



b Uit $x + 5y = 5$ volgt $x = -5y + 5$.
 $x = -5y + 5$ en $2x - 3y = 12$ geeft $2(-5y + 5) - 3y = 12$
 $-10y + 10 - 3y = 12$
 $-13y = 2$
 $y = -\frac{2}{13}$
 $y = -\frac{2}{13}$ en $x = -5y + 5$ geeft $x = -5 \cdot -\frac{2}{13} + 5 = 5\frac{10}{13}$
Dus $S(5\frac{10}{13}, -\frac{2}{13})$.

4.1 Stelsels vergelijkingen

Bladzijde 145

1 x vrijmaken bij $7x + 4y = 1$ geeft $7x + 4y = 1$
 $7x = 1 - 4y$
 $x = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}y$
Substitutie van $x = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}y$ in $5x - 4y = 11$ geeft $5(\frac{1}{7} - \frac{4}{7}y) - 4y = 11$
 $\frac{5}{7} - 2\frac{6}{7}y - 4y = 11$
 $5 - 20y - 28y = 77$
 $-48y = 72$
 $y = -1\frac{1}{2}$
 $y = -1\frac{1}{2}$ geeft $x = \frac{1}{7} - \frac{4}{7} \cdot -1\frac{1}{2} = 1$
De oplossing is $(x, y) = (1, -1\frac{1}{2})$.

Bladzijde 146

2 a $\begin{cases} 5x - 4y = -8 \\ -x + 4y = -12 \end{cases} +$
 $\frac{4x}{4x} = -20$
 $\begin{cases} x = -5 \\ -x + 4y = -12 \end{cases} \begin{cases} 5 + 4y = -12 \\ 4y = -17 \\ y = -4\frac{1}{4} \end{cases}$
De oplossing is $(x, y) = (-5, -4\frac{1}{4})$.
b $\begin{cases} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} -$
 $\frac{-2y}{-2y} = 8$
 $\begin{cases} y = -4 \\ -2x + y = 7 \end{cases} \begin{cases} -2x - 4 = 7 \\ -2x = 11 \\ x = -5\frac{1}{2} \end{cases}$
De oplossing is $(x, y) = (-5\frac{1}{2}, -4)$.
c $\begin{cases} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} +$
 $\frac{-3x}{-3x} = -9$
 $\begin{cases} x = 3 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases} \begin{cases} -6 + 3y = -1 \\ 3y = 5 \\ y = 1\frac{2}{3} \end{cases}$
De oplossing is $(x, y) = (3, 1\frac{2}{3})$.

Bladzijde 147

3 Stel van elke driehoek de lengte van de basis x en de lengte van de benen y .
Omtrek driehoek is 14 geeft $x + 2y = 14$.
Omtrek figuur is 30 geeft $5x + 2y = 30$.
 $\begin{cases} x + 2y = 14 \\ 5x + 2y = 30 \end{cases} -$
 $\frac{-4x}{-4x} = -16$
 $\begin{cases} x = 4 \\ x + 2y = 14 \end{cases} \begin{cases} 4 + 2y = 14 \\ 2y = 10 \\ y = 5 \end{cases}$
De zijden zijn 4 (basis) en 5 (benen).

$$\begin{array}{lcl}
 \text{4} & \begin{cases} a+b+c=20 \\ a+b+d=24 \\ \hline c-d=-4 \\ c=d-4 \end{cases} & \begin{cases} a+b+c=20 \\ a+c+d=25 \\ \hline b-d=-5 \\ b=d-5 \end{cases} & \begin{cases} a+b+c=20 \\ b+c+d=27 \\ \hline a-d=-7 \\ a=d-7 \end{cases}
 \end{array}$$

Substitutie van $c = d - 4$, $b = d - 5$ en $a = d - 7$ in $a + b + c = 20$ geeft

$$d - 7 + d - 5 + d - 4 = 20$$

$$3d - 16 = 20$$

$$3d = 36$$

$$d = 12$$

$d = 12$ geeft $a = d - 7 = 12 - 7 = 5$, $b = d - 5 = 12 - 5 = 7$ en $c = d - 4 = 12 - 4 = 8$.

De oplossing is $(a, b, c, d) = (5, 7, 8, 12)$.

$$\text{5 a } \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \\ \hline 5x - y = 23 \end{cases} +$$

Er is geen variabele geëlimineerd.

$$\text{b } \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \\ \hline x - 7y = -9 \end{cases} -$$

Er is geen variabele geëlimineerd.

c Als je linker- en rechterlid van de bovenste vergelijking met 3 vermenigvuldigt en van de onderste vergelijking met 4, dan krijg je een stelsel waarmee je wel door optellen een variabele elimineert.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 9x - 12y = 21 \\ 8x + 12y = 64 \end{cases}$$

Bladzijde 148

$$\text{6 a } \begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 1 \\ 5 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 10x + 5y = 0 \\ \hline -7x = -7 \\ x = 1 \end{cases} \left. \begin{array}{l} 2 \cdot 1 + y = 0 \\ 2 + y = 0 \\ y = -2 \end{array} \right\}$$

De oplossing is $(x, y) = (1, -2)$.

$$\text{b } \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - y = 19 \end{cases} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 6x - 2y = 38 \\ \hline -5x = -35 \\ x = 7 \end{cases} \left. \begin{array}{l} 3 \cdot 7 - y = 19 \\ 21 - y = 19 \\ -y = -2 \\ y = 2 \end{array} \right\}$$

De oplossing is $(x, y) = (7, 2)$.

$$\text{c } \begin{cases} 4x + y = 13 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 8x + 2y = 26 \\ x - 2y = 1 \\ \hline 9x = 27 \\ x = 3 \end{cases} \left. \begin{array}{l} 4 \cdot 3 + y = 13 \\ 12 + y = 13 \\ y = 1 \end{array} \right\}$$

De oplossing is $(x, y) = (3, 1)$.

$$\text{7 a } \begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ x + 3y = -7 \end{cases} \begin{array}{l} 1 \\ 5 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ 5x + 15y = -35 \\ \hline -13y = 104 \\ y = -8 \end{cases} \left. \begin{array}{l} x + 3 \cdot -8 = -7 \\ x - 24 = -7 \\ x = 17 \end{array} \right\}$$

De oplossing is $(x, y) = (17, -8)$.

$$\text{b } \begin{cases} 2x - 5y = -19 \\ 5x + 4y = 35 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 8x - 20y = -76 \\ 25x + 20y = 175 \end{cases} +$$

$$\begin{matrix} 33x & = & 99 \\ x & = & 3 \end{matrix} \left. \begin{matrix} 2x - 5y = -19 \\ x = 3 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 2 \cdot 3 - 5y = -19 \\ 6 - 5y = -19 \\ -5y = -25 \\ y = 5 \end{matrix}$$

De oplossing is $(x, y) = (3, 5)$.

$$\text{c } \begin{cases} 0,8x + 0,2y = 1 \\ 0,3x - 0,3y = 1,5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 2,4x + 0,6y = 3 \\ 0,6x - 0,6y = 3 \end{cases} +$$

$$\begin{matrix} 3x & = & 6 \\ x & = & 2 \end{matrix} \left. \begin{matrix} 0,8x + 0,2y = 1 \\ x = 2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 0,8 \cdot 2 + 0,2y = 1 \\ 1,6 + 0,2y = 1 \\ 0,2y = -0,6 \\ y = -3 \end{matrix}$$

De oplossing is $(x, y) = (2, -3)$.

$$\text{8 a } \begin{cases} 5x - y = 3\sqrt{2} \\ 3x + 2y = 7\sqrt{2} \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 10x - 2y = 6\sqrt{2} \\ 3x + 2y = 7\sqrt{2} \end{cases} +$$

$$\begin{matrix} 13x & = & 13\sqrt{2} \\ x & = & \sqrt{2} \end{matrix} \left. \begin{matrix} 3x + 2y = 7\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 3\sqrt{2} + 2y = 7\sqrt{2} \\ 2y = 4\sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{2} \end{matrix}$$

De oplossing is $(x, y) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

$$\text{b } \begin{cases} x\sqrt{2} + y = \sqrt{2} \\ x + y\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \begin{vmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 2x + y\sqrt{2} = 2 \\ x + y\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \end{cases} -$$

$$\begin{matrix} x = 1 - \sqrt{2} \\ x + y\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \end{matrix} \left. \begin{matrix} x = 1 - \sqrt{2} \\ x + y\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 1 - \sqrt{2} + y\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \\ y\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \\ y = 2 \end{matrix}$$

De oplossing is $(x, y) = (1 - \sqrt{2}, 2)$.

$$\text{c } \begin{cases} 4x\sqrt{3} - 5y\sqrt{2} = 2\sqrt{6} \\ x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 12 \end{cases} \begin{vmatrix} \sqrt{2} \\ 4\sqrt{3} \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x\sqrt{6} - 10y = 4\sqrt{3} \\ 4x\sqrt{6} + 12y = 48\sqrt{3} \end{cases} -$$

$$\begin{matrix} -22y = -44\sqrt{3} \\ y = 2\sqrt{3} \end{matrix} \left. \begin{matrix} x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 12 \\ y = 2\sqrt{3} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x\sqrt{2} + 6 = 12 \\ x\sqrt{2} = 6 \\ x = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \end{matrix}$$

De oplossing is $(x, y) = (3\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$.

$$\text{9 a } \begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ x + 4y = 38 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 4y = -24 \\ x + 4y = 38 \end{cases} +$$

$$\begin{matrix} 7x & = & 14 \\ x & = & 2 \end{matrix} \left. \begin{matrix} x + 4y = 38 \\ x = 2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 2 + 4y = 38 \\ 4y = 36 \\ y = 9 \end{matrix}$$

Het snijpunt is $(2, 9)$.

$$\begin{aligned} \text{b } \begin{cases} 2x + 5y = 26 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 10y = 52 \\ 15x - 10y = 5 \end{cases} \\ \hline 19x = 57 \\ x = 3 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases} \begin{cases} 2 \cdot 3 + 5y = 26 \\ 6 + 5y = 26 \\ 5y = 20 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Het snijpunt is (3, 4).

- 10 a** Telkens worden de laatste twee getallen bij elkaar opgeteld om het volgende getal te krijgen.
Het zevende getal is dus $2a + 3b + 3a + 5b = 5a + 8b$.

Het achtste getal is $3a + 5b + 5a + 8b = 8a + 13b$.

$$\begin{aligned} \text{b } \begin{cases} 5a + 8b = 34 \\ 8a + 13b = 55 \end{cases} \begin{vmatrix} 8 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 40a + 64b = 272 \\ 40a + 65b = 275 \end{cases} \\ \hline -b = -3 \\ b = 3 \\ 5a + 8b = 34 \end{cases} \begin{cases} 5a + 8 \cdot 3 = 34 \\ 5a + 24 = 34 \\ 5a = 10 \\ a = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Dus $a = 2$ en $b = 3$.

$$\begin{aligned} \text{11 } \begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases} \begin{vmatrix} q \\ b \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} aqx + bqy = cq \\ bpx + bqy = br \end{cases} \\ \hline aqx - bpx = cq - br \\ (aq - bp)x = cq - br \\ x = \frac{cq - br}{aq - bp} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } x = \frac{cq - br}{aq - bp}.$$

Bladzijde 149

- 12** Stel in het bad kan T liter water.

Stel uit de kranen A en B stroomt per minuut $a + b$ liter water, dan geldt $a + b = \frac{1}{4}T$.

Stel uit de kranen A en C stroomt per minuut $a + c$ liter water, dan geldt $a + c = \frac{1}{5}T$.

Stel uit de kranen B en C stroomt per minuut $b + c$ liter water, dan geldt $b + c = \frac{1}{6}T$.

$$a + b + a + c + b + c = \frac{1}{4}T + \frac{1}{5}T + \frac{1}{6}T \text{ liter per minuut}$$

$$2a + 2b + 2c = \frac{37}{60}T \text{ liter per minuut}$$

$$a + b + c = \frac{37}{120}T \text{ liter per minuut}$$

Dus als alle drie de kranen tegelijk worden opengedraaid, is het bad vol in $\frac{120}{37}$ oftewel $3\frac{9}{37}$ minuten.

- 13 a** $x = 1$ en $y = -2$ invullen in $y = x^2 + bx + c$ geeft $-2 = 1^2 + b + c$, dus $b + c = -3$.

- b** $x = 2$ en $y = 3$ invullen in $y = x^2 + bx + c$ geeft $3 = 2^2 + 2b + c$, dus $2b + c = -1$.

$$\begin{aligned} \text{c } \begin{cases} b + c = -3 \\ 2b + c = -1 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} b + c = -3 \\ 2b + c = -1 \end{cases} \\ \hline -b = -2 \\ b = 2 \\ b + c = -3 \end{cases} \begin{cases} 2 + c = -3 \\ c = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

Dus $b = 2$ en $c = -5$.

14 a (1, 5) op $y = ax^2 + bx$ geeft $a + b = 5$.
 (2, 14) op $y = ax^2 + bx$ geeft $4a + 2b = 14$ oftewel $2a + b = 7$.

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ -a = -2 \end{array}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} b = 3 \\ 2 + b = 5 \end{array}$$

De formule is $y = 2x^2 + 3x$.

b (1, 8) op $y = ax^2 + c$ geeft $a + c = 8$.
 (2, 17) op $y = ax^2 + c$ geeft $4a + c = 17$.

$$\begin{cases} a + c = 8 \\ 4a + c = 17 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ -3a = -9 \end{array}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a + c = 8 \end{cases} \quad \begin{array}{l} c = 5 \\ 3 + c = 8 \end{array}$$

De formule is $y = 3x^2 + 5$.

15 a (2, -1) op $y = x^2 + px + q$ geeft $4 + 2p + q = -1$ oftewel $2p + q = -5$.
 (2, -1) op $y = 2px - q$ geeft $4p - q = -1$.

$$\begin{cases} 2p + q = -5 \\ 4p - q = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} + \\ 6p = -6 \end{array}$$

$$\begin{cases} p = -1 \\ 2p + q = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} -2 + q = -5 \\ q = -3 \end{array}$$

b $p = -1$ en $q = -3$ geeft $y = x^2 - x - 3$ en $y = -2x + 3$.
 $x^2 - x - 3 = -2x + 3$
 $x^2 + x - 6 = 0$
 $(x - 2)(x + 3) = 0$
 $x = 2 \vee x = -3$
 $x = -3$ geeft $y = -2 \cdot -3 + 3 = 9$
 Het andere snijpunt is $(-3, 9)$.

16 (0, 4) op $y = ax^2 + bx + c$ geeft $0 + 0 + c = 4$, dus $c = 4$.
 (-2, -10) op $y = ax^2 + bx + 4$ geeft $4a - 2b + 4 = -10$ oftewel $4a - 2b = -14$, dus $2a - b = -7$.
 (3, 5) op $y = ax^2 + bx + 4$ geeft $9a + 3b + 4 = 5$ oftewel $9a + 3b = 1$.

$$\begin{cases} 2a - b = -7 \\ 9a + 3b = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} |3| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 6a - 3b = -21 \\ 9a + 3b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ 15a = -20 \end{array}$$

$$\begin{cases} a = -1\frac{1}{3} \\ 2a - b = -7 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 2 \cdot -1\frac{1}{3} - b = -7 \\ -2\frac{2}{3} - b = -7 \\ -b = -4\frac{1}{3} \\ b = 4\frac{1}{3} \end{array}$$

De formule is $y = -1\frac{1}{3}x^2 + 4\frac{1}{3}x + 4$.

17 $f(x) = ax^2 + bx + c$ geeft $f'(x) = 2ax + b$
 $f'(2) = rc_k$ geeft $4a + b = 1$.
 $f'(8) = rc_l$ geeft $16a + b = -2$.

$$\begin{cases} 4a + b = 1 \\ 16a + b = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{r} - \\ -12a = 3 \end{array}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ 4a + b = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 4 \cdot -\frac{1}{4} + b = 1 \\ -1 + b = 1 \\ b = 2 \end{array}$$

$a = -\frac{1}{4}$ en $b = 2$ geeft $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + c$.

$$f(2) = 6 \text{ geeft } -\frac{1}{4} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + c = 6$$

$$-1 + 4 + c = 6$$

$$c = 3$$

Dit geeft $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$.

$$f(8) = -\frac{1}{4} \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 3 = 3, \text{ dus } (8, 3) \text{ ook op de grafiek van } f.$$

Dus $a = -\frac{1}{4}$, $b = 2$ en $c = 3$.

- 18 a** Je kunt de vergelijking $x + y = 3$ niet met een getal vermenigvuldigen zodat na optellen of aftrekken van de vergelijking $x^2 + y^2 = 5$ een variabele wordt geëlimineerd. Ook kun je de vergelijking $x^2 + y^2 = 5$ niet met een getal vermenigvuldigen zodat na optellen of aftrekken van de vergelijking $x + y = 3$ een variabele wordt geëlimineerd. Dus je kunt het gegeven stelsel niet oplossen met behulp van elimineren door optellen of aftrekken.
- b** $x = 1$ en $y = 2$ invullen in $x + y = 3$ geeft $1 + 2 = 3$ en dat klopt.
 $x = 1$ en $y = 2$ invullen in $x^2 + y^2 = 5$ geeft $1 + 4 = 5$ en dat klopt.
Dus $(x, y) = (1, 2)$ is een oplossing van het stelsel.
 $x = 2$ en $y = 1$ invullen in $x + y = 3$ geeft $2 + 1 = 3$ en dat klopt.
 $x = 2$ en $y = 1$ invullen in $x^2 + y^2 = 5$ geeft $4 + 1 = 5$ en dat klopt.
Dus $(x, y) = (2, 1)$ is een oplossing van het stelsel.

Bladzijde 150

- 19 a** Substitutie van $y = x^2 - 18$ in $x + y = 2$ geeft $x + x^2 - 18 = 2$
 $x^2 + x - 20 = 0$
 $(x - 4)(x + 5) = 0$
 $x = 4 \vee x = -5$
 $x = 4$ invullen in $y = x^2 - 18$ geeft $y = 4^2 - 18 = -2$.
 $x = -5$ invullen in $y = x^2 - 18$ geeft $y = (-5)^2 - 18 = 7$.
Dus $(x, y) = (4, -2) \vee (x, y) = (-5, 7)$.
- b** Substitutie van $y = x^2 - 3$ in $x - y = -3$ geeft $x - (x^2 - 3) = -3$
 $x - x^2 + 3 = -3$
 $-x^2 + x + 6 = 0$
 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x + 2)(x - 3) = 0$
 $x = -2 \vee x = 3$
 $x = -2$ invullen in $y = x^2 - 3$ geeft $y = (-2)^2 - 3 = 1$.
 $x = 3$ invullen in $y = x^2 - 3$ geeft $y = 3^2 - 3 = 6$.
Dus $(x, y) = (-2, 1) \vee (x, y) = (3, 6)$.
- c** $3x + y = 5$ oftewel $y = 5 - 3x$
Substitutie van $y = 5 - 3x$ in $x^2 + y^2 = 25$ geeft $x^2 + (5 - 3x)^2 = 25$
 $x^2 + 25 - 30x + 9x^2 = 25$
 $10x^2 - 30x = 0$
 $10x(x - 3) = 0$
 $x = 0 \vee x = 3$
 $x = 0$ invullen in $y = 5 - 3x$ geeft $y = 5 - 0 = 5$.
 $x = 3$ invullen in $y = 5 - 3x$ geeft $y = 5 - 9 = -4$.
Dus $(x, y) = (0, 5) \vee (x, y) = (3, -4)$.

- 20 a** $2x + y = 4$ oftewel $y = 4 - 2x$
Substitutie van $y = 4 - 2x$ in $(x - 3)^2 + y^2 = 8$ geeft $(x - 3)^2 + (4 - 2x)^2 = 8$
 $x^2 - 6x + 9 + 16 - 16x + 4x^2 = 8$
 $5x^2 - 22x + 17 = 0$
 $D = (-22)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 17 = 144$
 $x = \frac{22 \pm 12}{10} = 3\frac{2}{5} \vee x = \frac{22 - 12}{10} = 1$
 $x = 3\frac{2}{5}$ invullen in $y = 4 - 2x$ geeft $y = 4 - 2 \cdot 3\frac{2}{5} = -2\frac{4}{5}$.
 $x = 1$ invullen in $y = 4 - 2x$ geeft $y = 4 - 2 = 2$.
Dus $(x, y) = (3\frac{2}{5}, -2\frac{4}{5}) \vee (x, y) = (1, 2)$.

b $x + y = 9$ oftewel $y = 9 - x$

Substitutie van $y = 9 - x$ in $xy = 20$ geeft $x(9 - x) = 20$
 $9x - x^2 = 20$
 $x^2 - 9x + 20 = 0$
 $(x - 4)(x - 5) = 0$
 $x = 4 \vee x = 5$

$x = 4$ invullen in $y = 9 - x$ geeft $y = 9 - 4 = 5$.

$x = 5$ invullen in $y = 9 - x$ geeft $y = 9 - 5 = 4$.

Dus $(x, y) = (4, 5) \vee (x, y) = (5, 4)$.

c $4x + y = 16$ oftewel $y = 16 - 4x$

Substitutie van $y = 16 - 4x$ in $xy = 15$ geeft $x(16 - 4x) = 15$
 $16x - 4x^2 = 15$
 $4x^2 - 16x + 15 = 0$
 $D = (-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16$
 $x = \frac{16 \pm 4}{8} = 2\frac{1}{2} \vee x = \frac{16 - 4}{8} = 1\frac{1}{2}$

$x = 1\frac{1}{2}$ invullen in $y = 16 - 4x$ geeft $y = 16 - 6 = 10$.

$x = 2\frac{1}{2}$ invullen in $y = 16 - 4x$ geeft $y = 16 - 10 = 6$.

Dus $(x, y) = (1\frac{1}{2}, 10) \vee (x, y) = (2\frac{1}{2}, 6)$.

21 Zie de figuur hiernaast met ruit $ABCD$.

S is het snijpunt de diagonalen AC en BD .

Stel $AS = x$ en $BS = y$.

In een ruit delen de diagonalen elkaar middendoor, dus $AC + BD = 2x + 2y$.

$2x + 2y = 34$ oftewel $x + y = 17$

In een ruit staan de diagonalen loodrecht op elkaar, dus $\angle ASB = 90^\circ$

en $O(ABCD) = 4 \cdot O(\triangle ABS) = 4 \cdot \frac{1}{2}xy = 2xy$.

$2xy = 120$ oftewel $xy = 60$

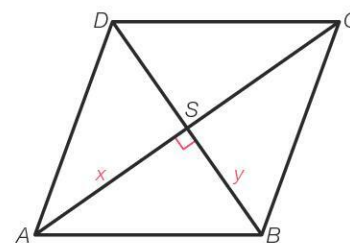
$x + y = 17$ geeft $y = 17 - x$

Substitutie van $y = 17 - x$ in $xy = 60$ geeft $x(17 - x) = 60$

$17x - x^2 = 60$
 $x^2 - 17x + 60 = 0$
 $(x - 5)(x - 12) = 0$
 $x = 5 \vee x = 12$

$x = 5$ geeft $y = 17 - 5 = 12$ en $x = 12$ geeft $y = 17 - 12 = 5$

Dus de lengte van de zijde van de ruit is $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.



22 Zie de figuur hiernaast.

$ABCD$ is gelijkbenig met $AD = BC$, dus FG is symmetrieas.

M is het middelpunt van de cirkel die door A, B, C en D gaat.

Stel $AM = BM = CM = DM = r$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ADE$ geeft $DE = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$.

$FG = DE = \sqrt{15}$

Stel $FM = x$, dan is $GM = \sqrt{15} - x$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle AFM$ geeft $AM^2 = AF^2 + FM^2$

$r^2 = 2^2 + x^2$
 $r^2 = 4 + x^2$

De stelling van Pythagoras in $\triangle DGM$ geeft $DM^2 = DG^2 + GM^2$

$r^2 = 1^2 + (\sqrt{15} - x)^2$
 $r^2 = 1 + 15 - 2x\sqrt{15} + x^2$
 $r^2 = 16 - 2x\sqrt{15} + x^2$

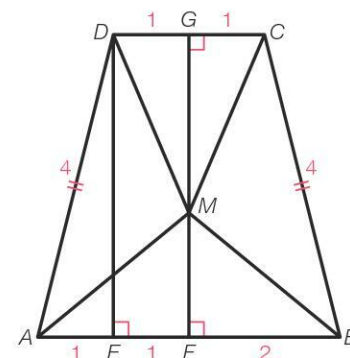
Dus $4 + x^2 = 16 - 2x\sqrt{15} + x^2$

$2x\sqrt{15} = 12$

$x = \frac{12}{2\sqrt{15}} = \frac{6}{\sqrt{15}}$

$x = \frac{6}{\sqrt{15}}$ geeft $r^2 = 4 + \left(\frac{6}{\sqrt{15}}\right)^2 = 4 + \frac{36}{15} = \frac{32}{5}$

De oppervlakte van de cirkel die door de punten A, B, C en D gaat, is $\pi \cdot \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}\pi$.



4.2 Hogeregraadsvergelijkingen

Bladzijde 152

- 23 a** De vergelijking $x^3 = 10$ heeft één oplossing.
De vergelijking $x^3 = -10$ heeft één oplossing.
b De vergelijking $x^4 = 10$ heeft twee oplossingen.
De vergelijking $x^4 = -10$ heeft nul oplossingen.

Bladzijde 153

24 a

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	
5	25	125	625		
6	36	216			

b *

Bladzijde 154

- 25 a** $5x^3 = 135$
 $x^3 = 27$
 $x = 3$
b $1 - 3x^5 = 97$
 $-3x^5 = 96$
 $x^5 = -32$
 $x = -2$
c $\frac{1}{4}x^8 + 3 = 10$
 $\frac{1}{4}x^8 = 7$
 $x^8 = 28$
 $x = \sqrt[8]{28} \vee x = -\sqrt[8]{28}$
d $5x^3 - 1 = 9$
 $5x^3 = 10$
 $x^3 = 2$
 $x = \sqrt[3]{2}$
e $8x^3 + 2 = 1$
 $8x^3 = -1$
 $x^3 = -\frac{1}{8}$
 $x = -\frac{1}{2}$
f $5x^6 + 7 = 97$
 $5x^6 = 90$
 $x^6 = 18$
 $x = \sqrt[6]{18} \vee x = -\sqrt[6]{18}$
- 26 a** $5x^4 - 3 = 17$
 $5x^4 = 20$
 $x^4 = 4$
 $x = \sqrt[4]{4} \vee x = -\sqrt[4]{4}$
b $4x^3 - 5 = 1367$
 $4x^3 = 1372$
 $x^3 = 343$
 $x = 7$
c $3(4x - 5)^3 = 15$
 $(4x - 5)^3 = 5$
 $4x - 5 = \sqrt[3]{5}$
 $4x = 5 + \sqrt[3]{5}$
 $x = 1\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{5}$
d $13 - 2(1 - x)^4 = 1$
 $-2(1 - x)^4 = -12$
 $(1 - x)^4 = 6$
 $1 - x = \sqrt[4]{6} \vee 1 - x = -\sqrt[4]{6}$
 $-x = -1 + \sqrt[4]{6} \vee -x = -1 - \sqrt[4]{6}$
 $x = 1 - \sqrt[4]{6} \vee x = 1 + \sqrt[4]{6}$
- 27 a** $\frac{1}{4}x^3 + 60 = 6$
 $\frac{1}{4}x^3 = -54$
 $x^3 = -216$
 $x = -6$
b $100 - 3x^4 = 55$
 $-3x^4 = -45$
 $x^4 = 15$
 $x = \sqrt[4]{15} \vee x = -\sqrt[4]{15}$
c $\frac{1}{2}(4x - 1)^5 + 3 = 19$
 $\frac{1}{2}(4x - 1)^5 = 16$
 $(4x - 1)^5 = 32$
 $4x - 1 = 2$
 $4x = 3$
 $x = \frac{3}{4}$
d $2\frac{1}{2}(1 - 2x)^6 - 6 = 14$
 $2\frac{1}{2}(1 - 2x)^6 = 20$
 $(1 - 2x)^6 = 8$
 $1 - 2x = \sqrt[6]{8} \vee 1 - 2x = -\sqrt[6]{8}$
 $-2x = -1 + \sqrt[6]{8} \vee -2x = -1 - \sqrt[6]{8}$
 $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[6]{8} \vee x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[6]{8}$

28 $f(x) = px^4 + 3x^2$ geeft $f'(x) = 4px^3 + 6x$
 $rc = 0$, dus $f'(x) = 0$ geeft $4px^3 + 6x = 0$
 $2x(2px^2 + 3) = 0$
 $x = 0 \vee 2px^2 = -3$
 $x = 0 \vee x^2 = -\frac{3}{2p}$
 $x = 0 \vee x = \sqrt{-\frac{3}{2p}} \vee x = -\sqrt{-\frac{3}{2p}}$
Dus $x_A = -\sqrt{-\frac{3}{2p}}$ en $x_B = \sqrt{-\frac{3}{2p}}$.

29 a $2x^4 + 2a = a^2 + 4$
 $2x^4 = a^2 - 2a + 4$
 $x^4 = \frac{1}{2}a^2 - a + 2$
 $x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}a^2 - a + 2} \vee x = -\sqrt[4]{\frac{1}{2}a^2 - a + 2}$

b $2x^4 + 2a = a^2 + 4$
 $a^2 - 2a + 4 - 2x^4 = 0$
 $(a-1)^2 - 1 + 4 - 2x^4 = 0$
 $(a-1)^2 = 2x^4 - 3$
 $a-1 = \sqrt{2x^4 - 3} \vee a-1 = -\sqrt{2x^4 - 3}$
 $a = 1 + \sqrt{2x^4 - 3} \vee a = 1 - \sqrt{2x^4 - 3}$

30 a $x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x+2)(x-3)$
b $x = 0 \vee x = -2 \vee x = 3$

31 a Het linker- en rechterlid van $x^2 = u$ kwadrateren geeft $(x^2)^2 = u^2$ oftewel $x^4 = u^2$.
Substitutie van $x^4 = u^2$ en $x^2 = u$ in $x^4 - x^2 - 6 = 0$ geeft $u^2 - u - 6 = 0$
b $u^2 - u - 6 = 0$
 $(u+2)(u-3) = 0$
 $u = -2 \vee u = 3$
c $\left. \begin{matrix} u = -2 \\ x^2 = u \end{matrix} \right\} x^2 = -2$
geen oplossingen
 $\left. \begin{matrix} u = 3 \\ x^2 = u \end{matrix} \right\} x^2 = 3$
 $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

Bladzijde 155

32 a $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$
 $x(x^2 - 5x + 6) = 0$
 $x(x-2)(x-3) = 0$
 $x = 0 \vee x = 2 \vee x = 3$
b $x^3 - 5x^2 = 6x$
 $x^3 - 5x^2 - 6x = 0$
 $x(x^2 - 5x - 6) = 0$
 $x(x+1)(x-6) = 0$
 $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 6$
c $x^3 = 4x^2 + 12x$
 $x^3 - 4x^2 - 12x = 0$
 $x(x^2 - 4x - 12) = 0$
 $x(x+2)(x-6) = 0$
 $x = 0 \vee x = -2 \vee x = 6$
d $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 13u + 36 = 0$
 $(u-4)(u-9) = 0$
 $u = 4 \vee u = 9$
 $x^2 = 4 \vee x^2 = 9$
 $x = 2 \vee x = -2 \vee x = 3 \vee x = -3$

33 a $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 10u + 9 = 0$
 $(u-1)(u-9) = 0$
 $u = 1 \vee u = 9$
 $x^2 = 1 \vee x^2 = 9$
 $x = 1 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = -3$
b $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 8u - 9 = 0$
 $(u+1)(u-9) = 0$
 $u = -1 \vee u = 9$
 $x^2 = -1 \vee x^2 = 9$
 $x = 3 \vee x = -3$

$$\begin{aligned}
\text{c } x^4 + 16 &= 10x^2 \\
x^4 - 10x^2 + 16 &= 0 \\
\text{Stel } x^2 &= u. \\
u^2 - 10u + 16 &= 0 \\
(u-2)(u-8) &= 0 \\
u = 2 \vee u = 8 \\
x^2 = 2 \vee x^2 = 8 \\
x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8} \\
x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d } x^3 + 25x &= 10x^2 \\
x^3 - 10x^2 + 25x &= 0 \\
x(x^2 - 10x + 25) &= 0 \\
x(x-5)^2 &= 0 \\
x = 0 \vee x = 5
\end{aligned}$$

34 a

$$\begin{aligned}
4x^4 + 153 &= 53x^2 \\
4x^4 - 53x^2 + 153 &= 0 \\
\text{Stel } x^2 &= u. \\
4u^2 - 53u + 153 &= 0 \\
D = (-53)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 153 &= 361 \\
u = \frac{53 \pm 19}{8} = 9 \vee u = \frac{53 - 19}{8} = 4\frac{1}{4} \\
x^2 = 9 \vee x^2 = 4\frac{1}{4} \\
x = 3 \vee x = -3 \vee x = \sqrt{4\frac{1}{4}} \vee x = -\sqrt{4\frac{1}{4}} \\
\text{b } 4x^4 + 21x^2 &= 148 \\
4x^4 + 21x^2 - 148 &= 0 \\
\text{Stel } x^2 &= u. \\
4u^2 + 21u - 148 &= 0 \\
D = 21^2 - 4 \cdot 4 \cdot -148 &= 2809 \\
u = \frac{-21 \pm 53}{8} = 4 \vee u = \frac{-21 - 53}{8} = -9\frac{1}{4} \\
x^2 = 4 \vee x^2 = -9\frac{1}{4} \\
x = 2 \vee x = -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c } 4x^6 + 35 &= 24x^3 \\
4x^6 - 24x^3 + 35 &= 0 \\
\text{Stel } x^3 &= u. \\
4u^2 - 24u + 35 &= 0 \\
D = (-24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 35 &= 16 \\
u = \frac{24 \pm 4}{8} = 3\frac{1}{2} \vee u = \frac{24 - 4}{8} = 2\frac{1}{2} \\
x^3 = 3\frac{1}{2} \vee x^3 = 2\frac{1}{2} \\
x = \sqrt[3]{3\frac{1}{2}} \vee x = \sqrt[3]{2\frac{1}{2}} \\
\text{d } 64x^5 + 27x &= 224x^3 \\
64x^5 - 224x^3 + 27x &= 0 \\
x(64x^4 - 224x^2 + 27) &= 0 \\
x = 0 \vee 64x^4 - 224x^2 + 27 &= 0 \\
\text{Stel } x^2 &= u. \\
64u^2 - 224u + 27 &= 0 \\
D = (-224)^2 - 4 \cdot 64 \cdot 27 &= 43\,264 \\
u = \frac{224 \pm 208}{128} = 3\frac{3}{8} \vee u = \frac{224 - 208}{128} = \frac{1}{8} \\
x^2 = 3\frac{3}{8} \vee x^2 = \frac{1}{8} \\
x = \sqrt{3\frac{3}{8}} \vee x = -\sqrt{3\frac{3}{8}} \vee x = \sqrt{\frac{1}{8}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{8}}
\end{aligned}$$

35 Stel de lengte x en de breedte y .
 Dan geldt $xy = 90$ en $x^2 + y^2 = 15^2$.
 Uit $xy = 90$ volgt $y = \frac{90}{x}$.
 Substitutie van $y = \frac{90}{x}$ in $x^2 + y^2 = 15^2$ geeft

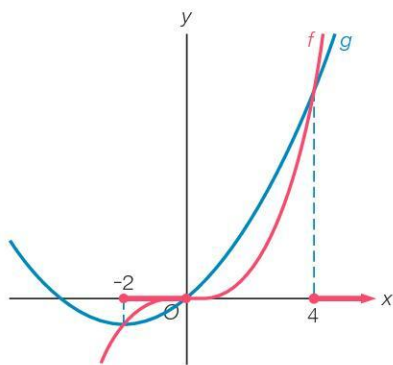
$$\begin{aligned}
x^2 + \left(\frac{90}{x}\right)^2 &= 15^2 \\
x^2 + \frac{8100}{x^2} &= 225 \\
x^4 + 8100 &= 225x^2 \\
x^4 - 225x^2 + 8100 &= 0 \\
\text{Stel } x^2 &= u. \\
u^2 - 225u + 8100 &= 0 \\
D = (-225)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8100 &= 18\,225 \\
u = \frac{225 \pm 135}{2} = 180 \vee u = \frac{225 - 135}{2} = 45 \\
x^2 = 180 \vee x^2 = 45 \\
x = \sqrt{180} \vee x = -\sqrt{180} \vee x = \sqrt{45} \vee x = -\sqrt{45} \\
x = 6\sqrt{5} \vee x = -6\sqrt{5} \text{ (kan niet)} \vee x = 3\sqrt{5} \vee x = -3\sqrt{5} \text{ (kan niet)} \\
x = 6\sqrt{5} \text{ geeft } y = \frac{90}{6\sqrt{5}} = \frac{90}{6\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{90\sqrt{5}}{30} = 3\sqrt{5} \\
x = 3\sqrt{5} \text{ geeft } y = \frac{90}{3\sqrt{5}} = \frac{90}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{90\sqrt{5}}{15} = 6\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Dus de lengtes van de zijden van de rechthoek zijn $6\sqrt{5}$ en $3\sqrt{5}$.

36 a $f(x) = g(x)$ geeft $x^4 = 2x^2 + 3$
 $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 2u - 3 = 0$
 $(u + 1)(u - 3) = 0$
 $u = -1 \vee u = 3$
 $x^2 = -1 \vee x^2 = 3$
 $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

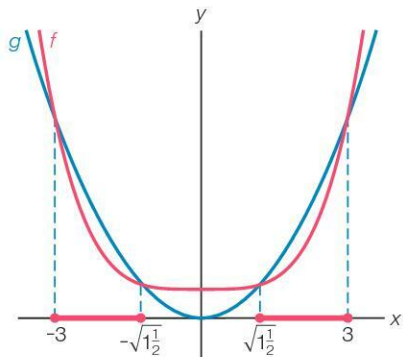
b $x^4 \leq 2x^2 + 3$ geeft $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

37 a Stel $f(x) = x^3$ en $g(x) = 2x^2 + 8x$.
 $f(x) = g(x)$ geeft $x^3 = 2x^2 + 8x$
 $x^3 - 2x^2 - 8x = 0$
 $x(x^2 - 2x - 8) = 0$
 $x(x + 2)(x - 4) = 0$
 $x = 0 \vee x = -2 \vee x = 4$



$x^3 \geq 2x^2 + 8x$ geeft $-2 \leq x \leq 0 \vee x \geq 4$

b Stel $f(x) = \frac{2}{3}x^4 + 9$ en $g(x) = 7x^2$.
 $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{2}{3}x^4 + 9 = 7x^2$
 $2x^4 + 27 = 21x^2$
 $2x^4 - 21x^2 + 27 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $2u^2 - 21u + 27 = 0$
 $D = (-21)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 27 = 225$
 $u = \frac{21 + 15}{4} = 9 \vee u = \frac{21 - 15}{4} = 1\frac{1}{2}$
 $x^2 = 9 \vee x^2 = 1\frac{1}{2}$
 $x = 3 \vee x = -3 \vee x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$



$\frac{2}{3}x^4 + 9 \leq 7x^2$ geeft $-3 \leq x \leq -\sqrt{1\frac{1}{2}} \vee \sqrt{1\frac{1}{2}} \leq x \leq 3$

$$38 \quad x = -1 \text{ geeft } \begin{cases} 4 \cdot -1 - 5 = 9 \\ -4 - 5 = 9 \\ -9 = 9 \end{cases} \quad x = 3\frac{1}{2} \text{ geeft } \begin{cases} 4 \cdot 3\frac{1}{2} - 5 = 9 \\ 14 - 5 = 9 \\ 9 = 9 \end{cases}$$

en dat klopt.

en dat klopt.

Dus zowel $x = -1$ als $x = 3\frac{1}{2}$ is een oplossing.

$$39 \quad \text{a} \quad \begin{aligned} |2x - 1| &= 8 \\ 2x - 1 &= 8 \vee 2x - 1 = -8 \\ 2x &= 9 \vee 2x = -7 \end{aligned}$$

$$x = 4\frac{1}{2} \vee x = -3\frac{1}{2}$$

$$\text{b} \quad \begin{aligned} |x^2 - 3| &= 1 \\ x^2 - 3 &= 1 \vee x^2 - 3 = -1 \\ x^2 &= 4 \vee x^2 = 2 \end{aligned}$$

$$x = 2 \vee x = -2 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

$$\text{c} \quad \begin{aligned} |2x^2 - 5| &= 11 \\ 2x^2 - 5 &= 11 \vee 2x^2 - 5 = -11 \\ 2x^2 &= 16 \vee 2x^2 = -6 \end{aligned}$$

$$x^2 = 8 \vee x^2 = -3$$

$$x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \vee x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

$$\text{d} \quad \begin{aligned} |5 - x^2| &= 11 \\ 5 - x^2 &= 11 \vee 5 - x^2 = -11 \end{aligned}$$

$$-x^2 = 6 \vee -x^2 = -16$$

$$x^2 = -6 \vee x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

$$40 \quad \text{a} \quad \begin{aligned} |2x^4 - 5| &= 15 \\ 2x^4 - 5 &= 15 \vee 2x^4 - 5 = -15 \\ 2x^4 &= 20 \vee 2x^4 = -10 \end{aligned}$$

$$x^4 = 10 \vee x^4 = -5$$

$$x = \sqrt[4]{10} \vee x = -\sqrt[4]{10}$$

$$\text{b} \quad \begin{aligned} |2x^3 - 5| &= 15 \\ 2x^3 - 5 &= 15 \vee 2x^3 - 5 = -15 \\ 2x^3 &= 20 \vee 2x^3 = -10 \end{aligned}$$

$$x^3 = 10 \vee x^3 = -5$$

$$x = \sqrt[3]{10} \vee x = \sqrt[3]{-5}$$

$$\text{c} \quad \text{Stel } f(x) = |x^4 - 5x^2| \text{ en } g(x) = 6.$$

$$f(x) = g(x) \text{ geeft } |x^4 - 5x^2| = 6$$

$$x^4 - 5x^2 = 6 \vee x^4 - 5x^2 = -6$$

$$x^4 - 5x^2 - 6 = 0 \vee x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$\text{Stel } x^2 = u.$$

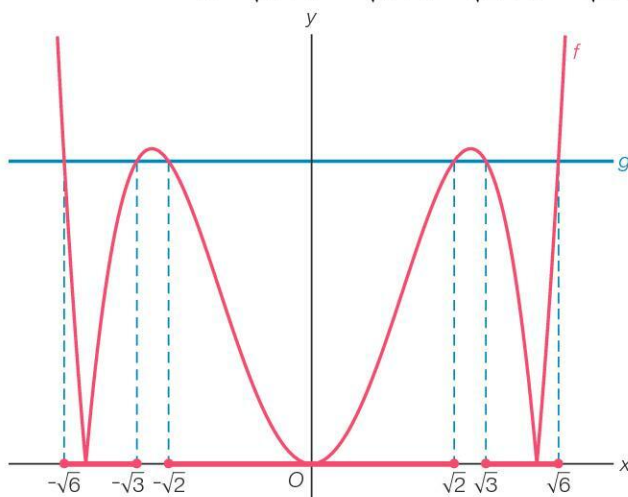
$$u^2 - 5u - 6 = 0 \vee u^2 - 5u + 6 = 0$$

$$(u + 1)(u - 6) = 0 \vee (u - 2)(u - 3) = 0$$

$$u = -1 \vee u = 6 \vee u = 2 \vee u = 3$$

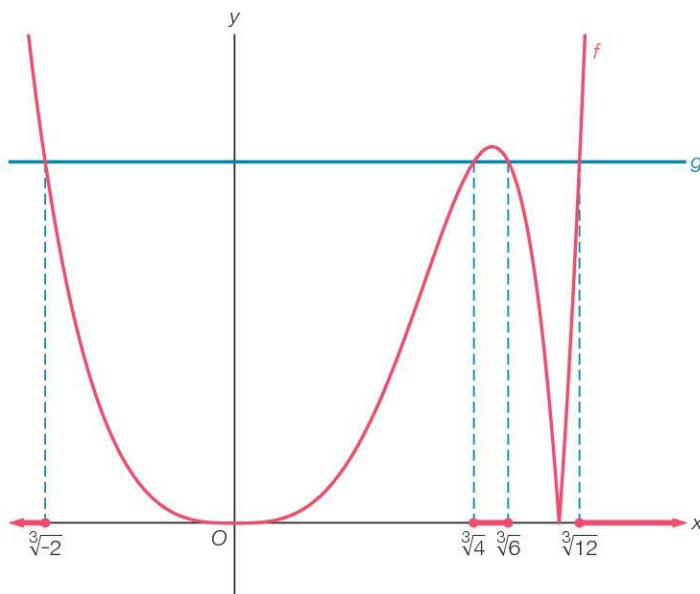
$$x^2 = -1 \vee x^2 = 6 \vee x^2 = 2 \vee x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6} \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$



$$|x^4 - 5x^2| \leq 6 \text{ geeft } -\sqrt{6} \leq x \leq -\sqrt{3} \vee -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \vee \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{6}$$

- d** Stel $f(x) = |x^6 - 10x^3|$ en $g(x) = 24$.
 $f(x) = g(x)$ geeft $|x^6 - 10x^3| = 24$
 $x^6 - 10x^3 = 24 \vee x^6 - 10x^3 = -24$
 $x^6 - 10x^3 - 24 = 0 \vee x^6 - 10x^3 + 24 = 0$
 Stel $x^3 = u$.
 $u^2 - 10u - 24 = 0 \vee u^2 - 10u + 24 = 0$
 $(u + 2)(u - 12) = 0 \vee (u - 4)(u - 6) = 0$
 $u = -2 \vee u = 12 \vee u = 4 \vee u = 6$
 $x^3 = -2 \vee x^3 = 12 \vee x^3 = 4 \vee x^3 = 6$
 $x = \sqrt[3]{-2} \vee x = \sqrt[3]{12} \vee x = \sqrt[3]{4} \vee x = \sqrt[3]{6}$



$$|x^6 - 10x^3| \geq 24 \text{ geeft } x \leq \sqrt[3]{-2} \vee \sqrt[3]{4} \leq x \leq \sqrt[3]{6} \vee x \geq \sqrt[3]{12}$$

4.3 Regels voor het oplossen van vergelijkingen

Bladzijde 159

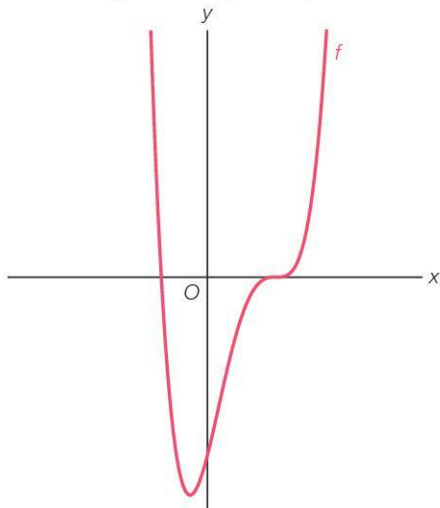
- 41 a** $5x(x^2 - 4) = 15(x^2 - 4)$
 $5x^3 - 20x = 15x^2 - 60$
 $5x^3 - 15x^2 - 20x + 60 = 0$
 Dit is geen goede aanpak omdat je geen methode kent om deze derdegraadsvergelijking algebraïsch op te lossen.
- b** $x = 2$ invullen in $5x(x^2 - 4) = 15(x^2 - 4)$ geeft $5 \cdot 2(2^2 - 4) = 15(2^2 - 4)$
 $10(4 - 4) = 15(4 - 4)$
 $10 \cdot 0 = 15 \cdot 0$
 $0 = 0$
- en dat klopt.
 Dus ik ben het daarmee eens.
- c** $5x = 15$ geeft de oplossing $x = 3$.
 Maar ook $x = 2$ en $x = -2$ zijn oplossingen.
 Door het linker- en rechterlid door $x^2 - 4$ te delen, zijn deze oplossingen echter verloren gegaan.

Bladzijde 161

- 42 a** $(4x - 1)^2 = (3x - 2)^2$
 $4x - 1 = 3x - 2 \vee 4x - 1 = -3x + 2$
 $x = -1 \vee 7x = 3$
 $x = -1 \vee x = \frac{3}{7}$

- b** $(3x^2 - 5)^2 = 4x^2$
 $3x^2 - 5 = 2x \quad \vee \quad 3x^2 - 5 = -2x$
 $3x^2 - 2x - 5 = 0 \quad \vee \quad 3x^2 + 2x - 5 = 0$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64 \quad \vee \quad D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64$
 $x = \frac{2+8}{6} = 1\frac{2}{3} \vee x = \frac{2-8}{6} = -1 \vee x = \frac{-2+8}{6} = 1 \vee x = \frac{-2-8}{6} = -1\frac{2}{3}$
- c** $(x^2 - 4x)(x^2 - 8) = 0$
 $x^2 - 4x = 0 \vee x^2 - 8 = 0$
 $x(x - 4) = 0 \vee x^2 = 8$
 $x = 0 \vee x = 4 \vee x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}$
 $x = 0 \vee x = 4 \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$
- d** $x^3(x - 3) = 8(x - 3)$
 $x - 3 = 0 \vee x^3 = 8$
 $x = 3 \vee x = 2$
- e** $(3x - 2)^4 = 3x - 2$
 $(3x - 2)(3x - 2)^3 = 3x - 2$
 $3x - 2 = 0 \vee (3x - 2)^3 = 1$
 $3x = 2 \vee 3x - 2 = 1$
 $x = \frac{2}{3} \vee 3x = 3$
 $x = \frac{2}{3} \vee x = 1$
- f** $2x(x^2 - 4) = 6(x - 2)$
 $2x(x + 2)(x - 2) = 6(x - 2)$
 $x - 2 = 0 \vee 2x(x + 2) = 6$
 $x = 2 \vee 2x^2 + 4x - 6 = 0$
 $x = 2 \vee x^2 + 2x - 3 = 0$
 $x = 2 \vee (x - 1)(x + 3) = 0$
 $x = 2 \vee x = 1 \vee x = -3$

43 a Voer in $y_1 = (3x + 4)(x - 2)^3$.



De optie minimum geeft $x \approx -0,5$ en $y \approx -39,1$, dus $B_f = [-39, 1; \rightarrow)$.

- b** $(3x + 4)(x - 2)^3 = 0$
 $3x + 4 = 0 \vee (x - 2)^3 = 0$
 $3x = -4 \vee x - 2 = 0$
 $x = -1\frac{1}{3} \vee x = 2$
Dus de nulpunten zijn $-1\frac{1}{3}$ en 2.
- c** $(3x + 4)(x - 2)^3 = 3x + 4$
 $3x + 4 = 0 \vee (x - 2)^3 = 1$
 $3x = -4 \vee x - 2 = 1$
 $x = -1\frac{1}{3} \vee x = 3$
 $x = -1\frac{1}{3}$ geeft $y = 0$ (zie a), dus $A(-1\frac{1}{3}, 0)$.
 $x = 3$ geeft $y = 3 \cdot 3 + 4 = 13$, dus $B(3, 13)$.

d $(3x+4)(x-2)^3 = (3x+4)(x-2)$
 $(3x+4)(x-2)(x-2)^2 = (3x+4)(x-2)$
 $(3x+4)(x-2) = 0 \vee (x-2)^2 = 1$
 $3x = -4 \vee x = 2 \vee x - 2 = 1 \vee x - 2 = -1$
 $x = -1\frac{1}{3} \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = 1$
 $x = -1\frac{1}{3}$ geeft $y = 0$ (zie a)
 $x = 1$ geeft $y = (3 \cdot 1 + 4)(1 - 2) = -7$
 $x = 2$ geeft $y = 0$ (zie a)
 $x = 3$ geeft $y = 13$ (zie c)
Dus de snijpunten zijn $(-1\frac{1}{3}, 0)$, $(1, -7)$, $(2, 0)$ en $(3, 13)$.

44 $x = 1$ geeft $(4+p)^3 = 4+p$
 $(4+p)(4+p)^2 = 4+p$
 $4+p = 0 \vee (4+p)^2 = 1$
 $p = -4 \vee 4+p = 1 \vee 4+p = -1$
 $p = -4 \vee p = -3 \vee p = -5$
 $(4x+p)^3 = 4x+p$
 $(4x+p)(4x+p)^2 = 4x+p$
 $4x+p = 0 \vee (4x+p)^2 = 1$
 $4x = -p \vee 4x+p = 1 \vee 4x+p = -1$
 $x = -\frac{1}{4}p \vee 4x = 1-p \vee 4x = -1-p$
 $x = -\frac{1}{4}p \vee x = \frac{1-p}{4} \vee x = \frac{-1-p}{4}$
 $p = -4$ geeft $x = 1 \vee x = 1\frac{1}{4} \vee x = \frac{3}{4}$
 $p = -3$ geeft $x = \frac{3}{4} \vee x = 1 \vee x = \frac{1}{2}$
 $p = -5$ geeft $x = 1\frac{1}{4} \vee x = 1\frac{1}{2} \vee x = 1$
Dus de andere oplossingen zijn $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$, $x = 1\frac{1}{4}$ en $x = 1\frac{1}{2}$.

45 a De wortel van 9 is 3, dus $2x - 5 = 9$
 $2x = 14$
 $x = 7$
b Een wortel kan niet negatief zijn, dus $\sqrt{2x-5}$ is voor geen enkele x gelijk aan -3 .
Dus de vergelijking $\sqrt{2x-5} = -3$ heeft geen oplossing.

Bladzijde 163

46 a $x = \sqrt{5x+14}$
kwadrateren geeft
 $x^2 = 5x + 14$
 $x^2 - 5x - 14 = 0$
 $(x+2)(x-7) = 0$
 $x = -2 \vee x = 7$
 $x = -2$ geeft $-2 = \sqrt{-10+14}$ vold. niet
 $x = 7$ geeft $7 = \sqrt{35+14}$ vold.
b $3x = \sqrt{8x+20}$
kwadrateren geeft
 $9x^2 = 8x + 20$
 $9x^2 - 8x - 20 = 0$
 $D = (-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -20 = 784$
 $x = \frac{8+28}{18} = 2 \vee x = \frac{8-28}{18} = -1\frac{1}{9}$
 $x = 2$ geeft $6 = \sqrt{16+20}$ vold.
 $x = -1\frac{1}{9}$ geeft $-3\frac{1}{3} = \sqrt{-8\frac{8}{9}+20}$ vold. niet

c $5\sqrt{x} = x$
kwadrateren geeft
 $25x = x^2$
 $x^2 - 25x = 0$
 $x(x-25) = 0$
 $x = 0 \vee x = 25$
 $x = 0$ geeft $5\sqrt{0} = 0$ vold.
 $x = 25$ geeft $5\sqrt{25} = 25$ vold.
d $3x = \sqrt{18x+72}$
kwadrateren geeft
 $9x^2 = 18x + 72$
 $9x^2 - 18x - 72 = 0$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x+2)(x-4) = 0$
 $x = -2 \vee x = 4$
 $x = -2$ geeft $-6 = \sqrt{-36+72}$ vold. niet
 $x = 4$ geeft $12 = \sqrt{72+72}$ vold.

47 a $4 - 3\sqrt{x} = 2$
 $-3\sqrt{x} = -2$
 $\sqrt{x} = \frac{2}{3}$
 $x = \frac{4}{9}$

b $5\sqrt{x} - 2x = 0$
 $5\sqrt{x} = 2x$
kwadrateren geeft
 $25x = 4x^2$
 $4x^2 - 25x = 0$
 $x(4x - 25) = 0$
 $x = 0 \vee 4x = 25$
 $x = 0 \vee x = 6\frac{1}{4}$
 $x = 0$ geeft $5\sqrt{0} - 0 = 0$ vold.
 $x = 6\frac{1}{4}$ geeft $5\sqrt{6\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2} = 0$ vold.

48 a $2x + \sqrt{x} = 10$
 $\sqrt{x} = 10 - 2x$
kwadrateren geeft
 $x = (10 - 2x)^2$
 $x = 100 - 40x + 4x^2$
 $4x^2 - 41x + 100 = 0$
 $D = (-41)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 100 = 81$
 $x = \frac{41 \pm 9}{8} = 6\frac{1}{4} \vee x = \frac{41 - 9}{8} = 4$
 $x = 6\frac{1}{4}$ geeft $12\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{4}} = 10$ vold. niet
 $x = 4$ geeft $8 + \sqrt{4} = 10$ vold.

b $\sqrt{x+12} = x$
kwadrateren geeft
 $x + 12 = x^2$
 $x^2 - x - 12 = 0$
 $(x+3)(x-4) = 0$
 $x = -3 \vee x = 4$
 $x = -3$ geeft $\sqrt{-3+12} = -3$ vold. niet
 $x = 4$ geeft $\sqrt{4+12} = 4$ vold.

49 a $\sqrt{x} = u$, dus $(\sqrt{x})^2 = u^2$ oftewel $x = u^2$.
Dit geeft $u^2 - u = 12$
 $u^2 - u - 12 = 0$
 $(u+3)(u-4) = 0$
 $u = -3 \vee u = 4$
 $\sqrt{x} = -3 \vee \sqrt{x} = 4$
 $x = 16$

b $x\sqrt{x} = u$, dus $(x\sqrt{x})^2 = u^2$ oftewel $x^3 = u^2$.
Dit geeft $u^2 - 9u + 8 = 0$
 $(u-1)(u-8) = 0$
 $u = 1 \vee u = 8$
 $x\sqrt{x} = 1 \vee x\sqrt{x} = 8$
 $x^3 = 1 \vee x^3 = 64$
 $x = 1 \vee x = 4$
 $x = 1$ geeft $1^3 - 9 \cdot 1 \cdot \sqrt{1} + 8 = 0$ vold.
 $x = 4$ geeft $4^3 - 9 \cdot 4 \cdot \sqrt{4} + 8 = 0$ vold.

c $2x - 5\sqrt{x} = 3$
 $2x - 3 = 5\sqrt{x}$
kwadrateren geeft
 $(2x - 3)^2 = 25x$
 $4x^2 - 12x + 9 = 25x$
 $4x^2 - 37x + 9 = 0$
 $D = (-37)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 1225$
 $x = \frac{37 \pm 35}{8} = 9 \vee x = \frac{37 - 35}{8} = \frac{1}{4}$
 $x = 9$ geeft $18 - 5\sqrt{9} = 3$ vold.
 $x = \frac{1}{4}$ geeft $\frac{1}{2} - 5\sqrt{\frac{1}{4}} = 3$ vold. niet

d $5 - 2\sqrt{x} = 3$
 $-2\sqrt{x} = -2$
 $\sqrt{x} = 1$
 $x = 1$

c $2x + \sqrt{x} = 6$
 $\sqrt{x} = 6 - 2x$
kwadrateren geeft
 $x = (6 - 2x)^2$
 $x = 36 - 24x + 4x^2$
 $4x^2 - 25x + 36 = 0$
 $D = (-25)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 49$
 $x = \frac{25 \pm 7}{8} = 4 \vee x = \frac{25 - 7}{8} = 2\frac{1}{4}$
 $x = 4$ geeft $8 + \sqrt{4} = 6$ vold. niet
 $x = 2\frac{1}{4}$ geeft $4\frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{1}{4}} = 6$ vold.

d $10 - x\sqrt{x} = 2$
 $-x\sqrt{x} = -8$
kwadrateren geeft
 $x^3 = 64$
 $x = 4$
 $x = 4$ geeft $10 - 4\sqrt{4} = 2$ vold.

- c Stel $x^2\sqrt{x} = u$, dan is $(x^2\sqrt{x})^2 = u^2$ oftewel $x^5 = u^2$.

Dit geeft $u^2 + 10 = 7u$

$$u^2 - 7u + 10 = 0$$

$$(u - 2)(u - 5) = 0$$

$$u = 2 \vee u = 5$$

$$x^2\sqrt{x} = 2 \vee x^2\sqrt{x} = 5$$

$$x^5 = 4 \vee x^5 = 25$$

$$x = \sqrt[5]{4} \vee x = \sqrt[5]{25}$$

$$x = \sqrt[5]{4} \text{ geeft } (\sqrt[5]{4})^5 + 10 = 7 \cdot (\sqrt[5]{4})^2 \cdot \sqrt[5]{4} \text{ vold.}$$

$$x = \sqrt[5]{25} \text{ geeft } (\sqrt[5]{25})^5 + 10 = 7 \cdot (\sqrt[5]{25})^2 \cdot \sqrt[5]{25} \text{ vold.}$$

Bladzijde 164

- 50 a Bij een verhoudingstabel zijn de kruisproducten gelijk.

$$\text{Dus } \begin{array}{c|c} x & x+4 \\ \hline 2 & x \end{array} \text{ geeft } x \cdot x = 2 \cdot (x+4)$$

$$x^2 = 2x + 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

- b Oplossen van $x^2 - 2x - 8 = 0$ geeft $(x+2)(x-4) = 0$

$$x = -2 \vee x = 4$$

Bladzijde 166

51 a $\frac{x-3}{x+1} = 1\frac{1}{2}$

$$(x-3) = 1\frac{1}{2}(x+1)$$

$$2(x-3) = 3(x+1)$$

$$2x-6 = 3x+3$$

$$-x = 9$$

$$x = -9$$

vold.

b $\frac{x-1}{x} + 1 = 3$

$$\frac{x-1}{x} = 2$$

$$x-1 = 2x$$

$$-x = 1$$

$$x = -1$$

vold.

c $\frac{3x+4}{x-1} = \frac{x+18}{x}$

$$x(3x+4) = (x-1)(x+18)$$

$$3x^2 + 4x = x^2 + 18x - x - 18$$

$$2x^2 - 13x + 18 = 0$$

$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 25$$

$$x = \frac{13 \pm 5}{4} = 4\frac{1}{2} \vee x = \frac{13-5}{4} = 2$$

vold.

vold.

d $\frac{2x-5}{4-x} = \frac{x+2}{3x-4}$

$$(2x-5)(3x-4) = (4-x)(x+2)$$

$$6x^2 - 8x - 15x + 20 = 4x + 8 - x^2 - 2x$$

$$7x^2 - 25x + 12 = 0$$

$$D = (-25)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 12 = 289$$

$$x = \frac{25 \pm 17}{14} = 3 \vee x = \frac{25-17}{14} = \frac{4}{7}$$

vold.

vold.

52 a $\frac{5x^2-15}{x^2+5} = 0$

$$5x^2 - 15 = 0$$

$$5x^2 = 15$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

vold. vold.

b $\frac{x^2-3}{x^2+1} = \frac{x-1}{x^2+1}$

$$x^2 - 3 = x - 1$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

vold. vold.

c $\frac{x^2-4}{2x+5} = \frac{x^2-4}{x+4}$

$$x^2 - 4 = 0 \vee 2x + 5 = x + 4$$

$$x^2 = 4 \vee x = -1$$

$$x = 2 \vee x = -2 \vee x = -1$$

vold. vold. vold.

d $\frac{x^2+1}{x+1} = \frac{x+3}{x+1}$

$$x^2 + 1 = x + 3$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

vold. niet vold.

53

a $\frac{3x^2 - 10}{x^2 + 1} = 2$
 $3x^2 - 10 = 2(x^2 + 1)$
 $3x^2 - 10 = 2x^2 + 2$
 $x^2 = 12$
 $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \vee x = -2\sqrt{3}$
 vold. vold.

b $\frac{x^3 - 8}{x^2 + 2} = \frac{x^3 - 8}{x + 8}$
 $x^3 - 8 = 0 \vee x^2 + 2 = x + 8$
 $x^3 - 8 = 0 \vee x^2 - x - 6 = 0$
 $x = 2 \vee (x + 2)(x - 3) = 0$
 $x = 2 \vee x = -2 \vee x = 3$
 vold. vold. vold.

c $\frac{3x^2 - 10}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2}{25}$
 $2(x^2 + 1)^2 = 25(3x^2 - 10)$
 $2(x^4 + 2x^2 + 1) = 75x^2 - 250$
 $2x^4 + 4x^2 + 2 = 75x^2 - 250$
 $2x^4 - 71x^2 + 252 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $2u^2 - 71u + 252 = 0$
 $D = (-71)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 252 = 3025$
 $u = \frac{71 \pm 55}{4} = 31\frac{1}{2} \vee u = \frac{71 - 55}{4} = 4$
 $x^2 = 31\frac{1}{2} \vee x^2 = 4$
 $x = \sqrt{31\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{31\frac{1}{2}} \vee x = 2 \vee x = -2$
 vold. vold. vold. vold.

d $\frac{6x^2 - 12}{(x^2 - 1)^2} = 1\frac{1}{3}$
 $\frac{6x^2 - 12}{(x^2 - 1)^2} = \frac{4}{3}$
 $4(x^2 - 1)^2 = 3(6x^2 - 12)$
 $4(x^4 - 2x^2 + 1) = 18x^2 - 36$
 $4x^4 - 8x^2 + 4 = 18x^2 - 36$
 $4x^4 - 26x^2 + 40 = 0$
 $2x^4 - 13x^2 + 20 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $2u^2 - 13u + 20 = 0$
 $D = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 20 = 9$
 $u = \frac{13 \pm 3}{4} = 4 \vee u = \frac{13 - 3}{4} = 2\frac{1}{2}$
 $x^2 = 4 \vee x^2 = 2\frac{1}{2}$
 $x = 2 \vee x = -2 \vee x = \sqrt{2\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{2\frac{1}{2}}$
 vold. vold. vold. vold.

54

$f(x) = \frac{-10x}{x^2 + 2}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2 + 2) \cdot -10 + 10x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-10x^2 - 20 + 20x^2}{(x^2 + 2)^2} = \frac{10x^2 - 20}{(x^2 + 2)^2}$

$f'(x) = \frac{5}{9}$ geeft $\frac{10x^2 - 20}{(x^2 + 2)^2} = \frac{5}{9}$
 $5(x^2 + 2)^2 = 9(10x^2 - 20)$
 $5(x^4 + 4x^2 + 4) = 90x^2 - 180$
 $5x^4 + 20x^2 + 20 = 90x^2 - 180$
 $5x^4 - 70x^2 + 200 = 0$
 $x^4 - 14x^2 + 40 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 14u + 40 = 0$
 $(u - 4)(u - 10) = 0$
 $u = 4 \vee u = 10$
 $x^2 = 4 \vee x^2 = 10$
 $x = 2 \vee x = -2 \vee x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$
 vold. vold. vold. vold.

- 55** Stel dat Wouter na 1 km te hebben gelopen zich x km van de sportclub bevindt.
 Stel dat hij loopt met een snelheid van l km/uur, dan fietst hij met een snelheid van $7l$ km/uur.
 Als hij doorloopt, legt hij $1 + x$ km lopend af in $\frac{1+x}{l}$ uur.
 Als hij terugloopt en de fiets pakt, legt hij 2 km lopend en $1 + x$ km fietsend af in $\frac{2}{l} + \frac{1+x}{7l}$ uur.
- $$\frac{1+x}{l} = \frac{2}{l} + \frac{1+x}{7l}$$
- $$7l \cdot \frac{1+x}{l} = 7l \cdot \frac{2}{l} + 7l \cdot \frac{1+x}{7l}$$
- $$7(1+x) = 7 \cdot 2 + 1+x$$
- $$7+7x = 14+1+x$$
- $$6x = 8$$
- $$x = 1\frac{1}{3}$$
- Dus hij is op dat moment $1\frac{1}{3}$ km van zijn sportclub verwijderd.

4.4 Herleidingen en inverse functies

Bladzijde 168

- 56** $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ en $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, dus $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)^2}$.
 Teller en noemer delen door $x+1$ geeft $\frac{x+2}{x+1}$.
 Dus $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{x+1}$.

Bladzijde 169

- 57 a** $\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 2x} = \frac{x^2(x-2)}{x(x+2)} = \frac{x(x-2)}{x+2}$ mits $x \neq 0$
b $\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16} = \frac{x(x-4)}{(x+4)(x-4)} = \frac{x}{x+4}$ mits $x \neq 4$
c $\frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 1} = \frac{(x^2+1)(x^2-4)}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{x^2-4}{x^2-1}$
- 58 a** $\frac{2x^5 - 32x}{x^2 - 4} = \frac{2x(x^4 - 16)}{x^2 - 4} = \frac{2x(x^2+4)(x^2-4)}{x^2-4} = 2x(x^2+4)$ mits $x \neq 2 \wedge x \neq -2$
b $\frac{x^4 + 4x^2 + 4}{x^4 - 4} = \frac{(x^2+2)(x^2+2)}{(x^2+2)(x^2-2)} = \frac{x^2+2}{x^2-2}$
c $\frac{x^4 - 9x^2}{x^2 - 3x} = \frac{x^2(x^2-9)}{x(x-3)} = \frac{x^2(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = x(x+3)$ mits $x \neq 0 \wedge x \neq 3$
- 59 a** $x_P = p$ geeft $y_P = p^2$, dus $P(p, p^2)$.
 $x_Q = q$ geeft $y_Q = q^2$, dus $Q(q, q^2)$.
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{q^2 - p^2}{q - p} = \frac{(q+p)(q-p)}{q-p} = q+p$.

$$\left. \begin{array}{l} y = (p+q)x + b \\ P(p, p^2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} (p+q) \cdot p + b = p^2 \\ p^2 + pq + b = p^2 \\ b = -pq \end{array}$$

 Dus $k: y = (p+q)x - pq$.

b $f(a) = a^4$, dus $A(a, a^4)$.

$f(b) = b^4$, dus $B(b, b^4)$.

Stel $l: y = mx + n$ met

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^4 - a^4}{b - a} = \frac{(b^2 + a^2)(b^2 - a^2)}{b - a} = \frac{(b^2 + a^2)(b + a)(b - a)}{b - a} = (b^2 + a^2)(b + a) = b^3 + ab^2 + a^2b + a^3.$$

$$y = (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)x + n \quad \left\{ \begin{array}{l} (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \cdot a + n = a^4 \\ a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + n = a^4 \\ n = -a^3b - a^2b^2 - ab^3 \\ n = -ab(a^2 + ab + b^2) \end{array} \right.$$

Dus $l: y = (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)x - ab(a^2 + ab + b^2)$.

60 a $2x - \frac{1}{x} = \frac{2x}{1} - \frac{1}{x} = \frac{2x^2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$

b $(x+1) \cdot \frac{x+2}{x+3} = \frac{(x+1)(x+2)}{x+3} = \frac{x^2 + 2x + x + 2}{x+3} = \frac{x^2 + 3x + 2}{x+3}$

c $\frac{x}{\left(\frac{2}{x}\right)} = x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$ mits $x \neq 0$

Dus de herleiding is niet juist voor $x = 0$.

d $y = \frac{2x + \frac{1}{3}}{x+1} = \frac{2x + \frac{1}{3}}{x+1} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3(2x + \frac{1}{3})}{3(x+1)} = \frac{6x+1}{3x+3}$

Bladzijde 171

61 a $y = \frac{20}{x} - \frac{5}{2x} = \frac{40}{2x} - \frac{5}{2x} = \frac{35}{2x}$

b $y = \frac{10}{x-1} - x^2 = \frac{10}{x-1} - \frac{x^2(x-1)}{x-1} = \frac{10 - x^2(x-1)}{x-1} = \frac{10 - x^3 + x^2}{x-1}$

c $y = \frac{2x^2}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = 2x^2 \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x^2(x-1)}{x+1} = \frac{2x^3 - 2x^2}{x+1}$ mits $x \neq 1$

d $y = \frac{x}{x-1} \left(x + \frac{1}{x-1} \right) = \frac{x}{x-1} \left(\frac{x(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} \right) = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{x-1} = \frac{x^3 - x^2 + x}{(x-1)^2}$

e $y = \frac{5}{x-2} \cdot \frac{6}{x+2} = \frac{30}{(x-2)(x+2)}$

f $y = \frac{\left(\frac{x+1}{2x}\right)}{x-1} = \frac{x+1}{2x(x-1)}$

62 a $y = \frac{x + \frac{3}{x+1}}{x} = \frac{\left(x + \frac{3}{x+1}\right) \cdot (x+1)}{x \cdot (x+1)} = \frac{x(x+1) + 3}{x(x+1)} = \frac{x^2 + x + 3}{x(x+1)}$

b $y = \frac{10 + \frac{5}{x-1}}{6 - \frac{3}{x-1}} = \frac{\left(10 + \frac{5}{x-1}\right) \cdot (x-1)}{\left(6 - \frac{3}{x-1}\right) \cdot (x-1)} = \frac{10(x-1) + 5}{6(x-1) - 3} = \frac{10x-5}{6x-9}$ mits $x \neq 1$

c $Q = \frac{10}{p + \frac{5}{2p}} = \frac{10 \cdot 2p}{\left(p + \frac{5}{2p}\right) \cdot 2p} = \frac{20p}{2p^2 + 5}$ mits $p \neq 0$

63 a $y = \frac{5x^2 + 1000}{x} = 5x + \frac{1000}{x}$

b $K = \frac{6t^2 + 12t + 1500}{3t} = 2t + 4 + \frac{500}{t}$

$$\text{c } F = \frac{5a^2 + 8a}{2a^2} = 2\frac{1}{2} + \frac{4}{a}$$

$$\text{d } N = \frac{6p^2 - 3p - 1}{2p} = 3p - 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$$

64 a $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{4x}{x+1} = \frac{4}{x-1}$
 $4x(x-1) = 4(x+1)$
 $4x^2 - 4x = 4x + 4$
 $4x^2 - 8x - 4 = 0$
 $x^2 - 2x - 1 = 0$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 8$, dus $\sqrt{D} = 2\sqrt{2}$
 $x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}$
vold. vold.

b $f(x) \cdot g(x) = 6$ geeft $\frac{4x}{x+1} \cdot \frac{4}{x-1} = 6$
 $\frac{16x}{x^2 - 1} = 6$
 $16x = 6(x^2 - 1)$
 $16x = 6x^2 - 6$
 $6x^2 - 16x - 6 = 0$
 $3x^2 - 8x - 3 = 0$
 $D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$
 $x = \frac{8 \pm 10}{6} = 3 \vee x = \frac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$
vold. vold.

c $f(x) - g(x) = 7$ geeft $\frac{4x}{x+1} - \frac{4}{x-1} = 7$
 $\frac{4x(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{4(x+1)}{(x+1)(x-1)} = 7$
 $\frac{4x^2 - 4x - 4x - 4}{(x+1)(x-1)} = 7$
 $\frac{4x^2 - 8x - 4}{x^2 - 1} = 7$
 $4x^2 - 8x - 4 = 7(x^2 - 1)$
 $4x^2 - 8x - 4 = 7x^2 - 7$
 $-3x^2 - 8x + 3 = 0$
 $D = (-8)^2 - 4 \cdot -3 \cdot 3 = 100$
 $x = \frac{8 \pm 10}{-6} = -3 \vee x = \frac{8 - 10}{-6} = \frac{1}{3}$
vold. vold.

d $f(x) = \frac{4x}{x+1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x+1) \cdot 4 - 4x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{4x + 4 - 4x}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$

$g(x) = \frac{4}{x-1}$ geeft $g'(x) = \frac{(x-1) \cdot 0 - 4 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2}$

$f'(x) + 2 \cdot g'(x) = 0$ geeft $\frac{4}{(x+1)^2} + 2 \cdot \frac{-4}{(x-1)^2} = 0$

$$\frac{4}{(x+1)^2} = \frac{8}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$2(x+1)^2 = (x-1)^2$$

$$2(x^2 + 2x + 1) = x^2 - 2x + 1$$

$$2x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 32$$
, dus $\sqrt{D} = 4\sqrt{2}$

$$x = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2} \vee x = -3 - 2\sqrt{2}$$

vold. vold.

65 a $p = \frac{3x}{x+5}$ substitueren in $N = \frac{4p-1}{2p+3}$ geeft

$$N = \frac{4 \cdot \frac{3x}{x+5} - 1}{2 \cdot \frac{3x}{x+5} + 3} = \frac{\left(\frac{12x}{x+5} - 1\right) \cdot (x+5)}{\left(\frac{6x}{x+5} + 3\right) \cdot (x+5)} = \frac{12x - (x+5)}{6x + 3(x+5)} = \frac{12x - x - 5}{6x + 3x + 15} = \frac{11x - 5}{9x + 15} \text{ mits } x \neq -5$$

b $N = 9$ geeft $\frac{11x-5}{9x+15} = 9$
 $11x - 5 = 9(9x + 15)$
 $11x - 5 = 81x + 135$
 $-70x = 140$
 $x = -2$

Bladzijde 172

66 a tijd heenreis = $\frac{d}{12}$ uur en tijd terugreis = $\frac{d}{48}$ uur, dus $t = \frac{d}{12} + \frac{d}{48}$.

b gemiddelde snelheid = $\frac{\text{afstand}}{\text{tijd}}$ en afstand = $2d$, dus $\bar{v} = \frac{2d}{\frac{d}{12} + \frac{d}{48}}$.

Teller en noemer delen door d geeft $\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{48}}$.

De gemiddelde snelheid is $\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{48}} = 19,2$ km/uur.

c $h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \cdot \frac{ab}{ab} = \frac{2ab}{b+a} = \frac{2ab}{a+b}$

d $h = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a}} \cdot \frac{6a}{6a} = \frac{18a}{6+3+2} = \frac{18a}{11} = \frac{18}{11} \cdot a$, dus $p = 1\frac{7}{11}$.

Bladzijde 173

67 $y = \frac{2}{x}$
 $xy = 2$
 $x = \frac{2}{y}$

68 $x = 3$ invullen in $x = \frac{3y}{y-1}$ geeft $3 = \frac{3y}{y-1}$
 $3(y-1) = 3y$
 $3y - 3 = 3y$
 $0y = 3$

Er is geen y die aan deze vergelijking voldoet.

Dus in de formule $x = \frac{3y}{y-1}$ is $x = 3$ niet mogelijk.

69 a $y = \frac{x}{x+2}$
 $y(x+2) = x$
 $xy + 2y = x$
 $xy - x = -2y$
 $x(y-1) = -2y$
 $x = \frac{-2y}{y-1}$

b $y = \frac{x-5}{x}$
 $xy = x-5$
 $xy - x = -5$
 $x(y-1) = -5$
 $x = \frac{-5}{y-1}$

70 a $y = \frac{3x+2}{x-4}$
 $y(x-4) = 3x+2$
 $xy - 4y = 3x+2$
 $xy - 3x = 4y+2$
 $x(y-3) = 4y+2$
 $x = \frac{4y+2}{y-3}$

b $y = 20 - \frac{15}{x+1}$
 $y(x+1) = 20(x+1) - 15$
 $xy + y = 20x + 20 - 15$
 $xy - 20x = 5 - y$
 $x(y-20) = 5 - y$
 $x = \frac{5-y}{y-20}$

71 a $y = \frac{ax+4}{x+1}$
 $y(x+1) = ax+4$
 $xy + y = ax+4$
 $xy - ax = 4 - y$
 $x(y-a) = 4 - y$
 $x = \frac{4-y}{y-a}$
 $x = \frac{1}{y-3} - 1 = \frac{1}{y-3} - \frac{y-3}{y-3} = \frac{4-y}{y-3}$
 Dus $a = 3$.

b $y = 2 - \frac{3x+b}{x-1}$
 $y(x-1) = 2(x-1) - (3x+b)$
 $xy - y = 2x - 2 - 3x - b$
 $xy + x = y - 2 - b$
 $x(y+1) = y - 2 - b$
 $x = \frac{y-2-b}{y+1}$

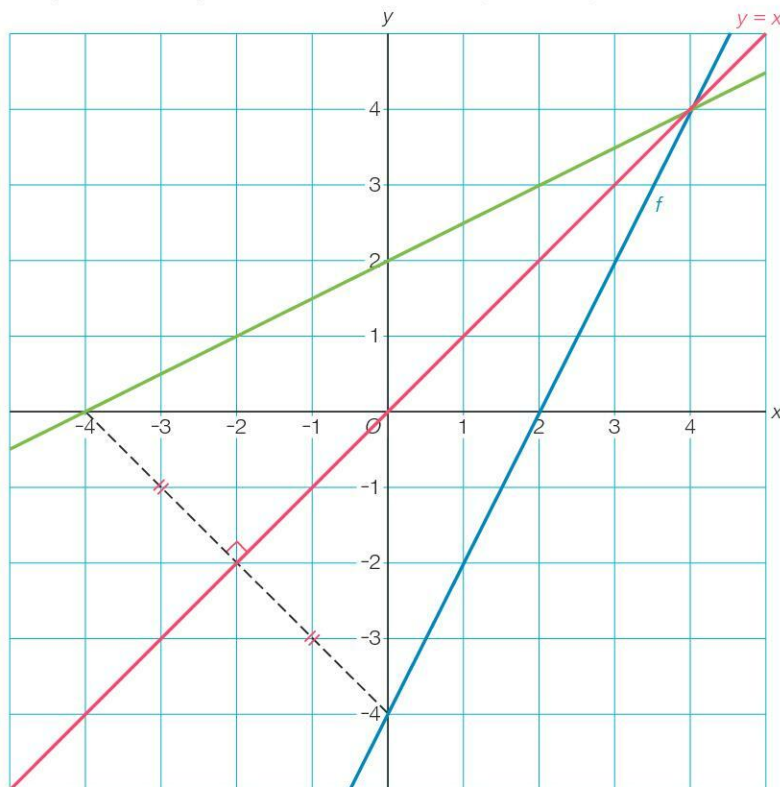
Er moet gelden $y - 2 - b = y - 3$, dus $b = 1$.

c $y = \frac{x-2}{x-1}$
 $y(x-1) = x-2$
 $xy - y = x-2$
 $xy - x = y-2$
 $x(y-1) = y-2$
 $x = \frac{y-2}{y-1}$

d $y = 320 - \frac{18}{x-1}$
 $y(x-1) = 320(x-1) - 18$
 $xy - y = 320x - 320 - 18$
 $xy - 320x = y - 338$
 $x(y-320) = y - 338$
 $x = \frac{y-338}{y-320}$

c $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{2x} + 4$
 $y - 4 = \frac{2}{2x} + \frac{3}{2x}$
 $y - 4 = \frac{5}{2x}$
 $2x(y-4) = 5$
 $2x = \frac{5}{y-4}$
 $x = \frac{5}{2(y-4)}$

- 72 a,b** De lijn $y = x$ gaat door de punten $(0, 0)$ en $(4, 4)$.
De grafiek van f gaat door de punten $(0, -4)$ en $(2, 0)$.



- b** Spiegelen van $(0, -4)$ geeft $(-4, 0)$.
Spiegelen van $(2, 0)$ geeft $(0, 2)$.
- c** Stel $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 0}{0 - -4} = \frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ (0, 2) \end{array} \right\} b = 2$$

 De formule is $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Bladzijde 176

- 73 a** Voor f geldt $y = \frac{2x}{x+3}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{2y}{y+3}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{2y}{y+3} \text{ geeft } x(y+3) &= 2y \\ xy + 3x &= 2y \\ xy - 2y &= -3x \\ y(x-2) &= -3x \\ y &= \frac{-3x}{x-2} \\ y &= \frac{3x}{2-x} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = \frac{3x}{2-x}.$$

b Voor f geldt $y = \frac{3x-1}{4x+5}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{3y-1}{4y+5}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{3y-1}{4y+5} \text{ geeft } x(4y+5) &= 3y-1 \\ 4xy+5x &= 3y-1 \\ 4xy-3y &= -5x-1 \\ y(4x-3) &= -5x-1 \\ y &= \frac{-5x-1}{4x-3} \\ y &= \frac{5x+1}{3-4x} \end{aligned}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = \frac{5x+1}{3-4x}$.

c Voor f geldt $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{ay+b}{cy+d}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{ay+b}{cy+d} \text{ geeft } x(cy+d) &= ay+b \\ cxy+dx &= ay+b \\ cxy-ay &= -dx+b \\ y(cx-a) &= -dx+b \\ y &= \frac{-dx+b}{cx-a} \end{aligned}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$.

74 a Voor f geldt $y = 3 - \frac{4}{x+2}$, dus voor f^{inv} geldt $x = 3 - \frac{4}{y+2}$.

$$\begin{aligned} x = 3 - \frac{4}{y+2} \text{ geeft } x(y+2) &= 3(y+2) - 4 \\ xy+2x &= 3y+6-4 \\ xy-3y &= 2-2x \\ y(x-3) &= 2-2x \\ y &= \frac{2-2x}{x-3} \end{aligned}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = \frac{2-2x}{x-3}$ en er geldt inderdaad dat $g(x) = f^{\text{inv}}(x)$.

b Voor h geldt $y = \frac{5-x}{x-6}$, dus voor h^{inv} geldt $x = \frac{5-y}{y-6}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{5-y}{y-6} \text{ geeft } x(y-6) &= 5-y \\ xy-6x &= 5-y \\ xy+y &= 6x+5 \\ y(x+1) &= 6x+5 \\ y &= \frac{6x+5}{x+1} \end{aligned}$$

Dus $h^{\text{inv}}(x) = \frac{6x+5}{x+1}$.

$$k(x) = 5 + \frac{x}{x+1} = \frac{5(x+1)}{x+1} + \frac{x}{x+1} = \frac{5x+5+x}{x+1} = \frac{6x+5}{x+1}$$

Dus er geldt inderdaad dat $k(x) = h^{\text{inv}}(x)$.

Bladzijde 177

75 Als (p, q) op de grafiek van f ligt, dan ligt (q, p) op de grafiek van f^{inv} .

En als (q, p) ook op de grafiek van f ligt, dan is (q, p) dus een snijpunt van de grafieken van f en f^{inv} .

Als (q, p) op de grafiek van f ligt, dan ligt (p, q) op de grafiek van f^{inv} .

En als (p, q) ook op de grafiek van f ligt, dan is (p, q) dus een snijpunt van de grafieken van f en f^{inv} .

Dus bewering 1 is waar, en dus is bewering 2 niet waar.

76 Voor f geldt $y = \frac{2x+1}{3x+4}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{2y+1}{3y+4}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{2y+1}{3y+4} \text{ geeft } x(3y+4) &= 2y+1 \\ 3xy+4x &= 2y+1 \\ 3xy-2y &= 1-4x \\ y(3x-2) &= 1-4x \\ y &= \frac{1-4x}{3x-2} \end{aligned}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = \frac{1-4x}{3x-2}$.

$$\begin{aligned} f(x) = f^{\text{inv}}(x) \text{ geeft } \frac{2x+1}{3x+4} &= \frac{1-4x}{3x-2} \\ (2x+1)(3x-2) &= (3x+4)(1-4x) \\ 6x^2-4x+3x-2 &= 3x-12x^2+4-16x \\ 18x^2+12x-6 &= 0 \\ 3x^2+2x-1 &= 0 \\ D = 2^2-4 \cdot 3 \cdot -1 &= 16 \\ x = \frac{-2 \pm 4}{6} = \frac{1}{3} \vee x = \frac{-2-4}{6} &= -1 \\ \text{vold.} \quad \quad \quad \text{vold.} \end{aligned}$$

$f(-1) = \frac{-2+1}{-3+4} = -1$, dus $A(-1, -1)$.

$f(\frac{1}{3}) = \frac{\frac{2}{3}+1}{1+4} = \frac{1}{3}$, dus $B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Opmerking

Je kunt deze opgave ook maken door de vergelijking $f(x) = x$ op te lossen. Je vindt dan twee oplossingen. Omdat is gegeven dat de grafieken van f en f^{inv} elkaar snijden in twee punten, zijn deze oplossingen de x -coördinaten van deze snijpunten.

77 a Voor f geldt $y = \frac{ax-2}{2x-5}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{ay-2}{2y-5}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{ay-2}{2y-5} \text{ geeft } x(2y-5) &= ay-2 \\ 2xy-5x &= ay-2 \\ 2xy-ay &= 5x-2 \\ y(2x-a) &= 5x-2 \\ y &= \frac{5x-2}{2x-a} \end{aligned}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = \frac{5x-2}{2x-a}$.

$$g(x) = 2\frac{1}{2} + \frac{4}{x-2} = \frac{5}{2} + \frac{4}{x-2} = \frac{5(x-2)}{2(x-2)} + \frac{8}{2(x-2)} = \frac{5x-10+8}{2(x-2)} = \frac{5x-2}{2x-4}$$

Er moet gelden $2x-a = 2x-4$, dus $a = 4$.

b Als de grafieken van f en f^{inv} geen gemeenschappelijke punten hebben op de lijn $y = x$, dan heeft de vergelijking $f(x) = x$ geen oplossingen.

$$\begin{aligned} f(x) = x \text{ geeft } \frac{ax-2}{2x-5} &= x \\ ax-2 &= x(2x-5) \\ ax-2 &= 2x^2-5x \\ 2x^2-ax-5x+2 &= 0 \\ 2x^2-(a+5)x+2 &= 0 \\ D &= -(a+5)^2-4 \cdot 2 \cdot 2 = (a+5)^2-16 \end{aligned}$$

Geen oplossingen voor $D < 0$, dus voor $(a+5)^2-16 < 0$

$$\begin{aligned} (a+5)^2 &< 16 \\ -9 &< a < -1 \end{aligned}$$

De grafieken van f en f^{inv} hebben geen gemeenschappelijke punten op de lijn $y = x$ voor $-9 < a < -1$.

78 Voor f geldt $y = \frac{ax+b}{x+1}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{ay+b}{y+1}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{ay+b}{y+1} \text{ geeft } x(y+1) &= ay+b \\ xy+x &= ay+b \\ xy-ay &= b-x \\ y(x-a) &= b-x \\ y &= \frac{b-x}{x-a} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = \frac{b-x}{x-a}.$$

$$\begin{aligned} f(3) = f^{\text{inv}}(3) \text{ geeft } \frac{3a+b}{4} &= \frac{b-3}{3-a} \\ (3a+b)(3-a) &= 4(b-3) \\ 9a-3a^2+3b-ab &= 4b-12 \\ -ab-b &= 3a^2-9a-12 \\ b(-a-1) &= 3a^2-9a-12 \\ b &= \frac{3a^2-9a-12}{-a-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5) = f^{\text{inv}}(5) \text{ geeft } \frac{5a+b}{6} &= \frac{b-5}{5-a} \\ (5a+b)(5-a) &= 6(b-5) \\ 25a-5a^2+5b-ab &= 6b-30 \\ -ab-b &= 5a^2-25a-30 \\ b(-a-1) &= 5a^2-25a-30 \\ b &= \frac{5a^2-25a-30}{-a-1} \end{aligned}$$

$$\frac{3a^2-9a-12}{-a-1} = \frac{5a^2-25a-30}{-a-1}$$

$$3a^2-9a-12 = 5a^2-25a-30$$

$$-2a^2+16a+18=0$$

$$a^2-8a-9=0$$

$$(a-9)(a+1)=0$$

$$a=9 \vee a=-1$$

vold. vold. niet

$$a=9 \text{ geeft } b = \frac{3 \cdot 9^2 - 9 \cdot 9 - 12}{-9-1} = -15$$

Dus voor $a=9$ en $b=-15$ snijden de grafieken van f en f^{inv} elkaar in de punten A en B met $x_A=3$ en $x_B=5$.

Opmerking

Omdat is gegeven dat de grafieken van f en f^{inv} elkaar snijden in twee punten, mag je in deze opgave ook uitgaan van $f(x_A) = x_A$ en $f(x_B) = x_B$, oftewel $f(3) = 3$ en $f(5) = 5$.

Diagnostische toets

Bladzijde 180

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \quad \mathbf{a} \quad & \begin{cases} 2x-3y=7 \\ 4x+3y=23 \end{cases} + \\ & \frac{6x}{6x} = 30 + \\ & \left. \begin{matrix} x=5 \\ 2x-3y=7 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 10-3y=7 \\ -3y=-3 \end{matrix} \\ & y=1 \end{aligned}$$

De oplossing is $(x, y) = (5, 1)$.

$$\text{b } \begin{cases} 4x + 5y = 27 \\ -2x + 3y = 25 \end{cases} \begin{array}{l} |1 \\ |2 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 5y = 27 \\ -4x + 6y = 50 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 11y = 77 \\ y = 7 \\ 4x + 5y = 27 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 11y = 77 \\ y = 7 \\ 4x + 5y = 27 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 4x + 35 = 27 \\ 4x = -8 \\ x = -2 \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (-2, 7)$.

$$\text{c } \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases} \begin{array}{l} |2 \\ |3 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 15x - 6y = 24 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 19x = 38 \\ x = 2 \\ 2x + 3y = 7 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 19x = 38 \\ x = 2 \\ 2x + 3y = 7 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 4 + 3y = 7 \\ 3y = 3 \\ y = 1 \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (2, 1)$.

$$\text{2 } \begin{cases} 3x - 2y = 14 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases} \begin{array}{l} |2 \\ |3 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 4y = 28 \\ 6x + 15y = 9 \end{cases} -$$

$$\begin{array}{r} -19y = 19 \\ y = -1 \\ 2x + 5y = 3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} -19y = 19 \\ y = -1 \\ 2x + 5y = 3 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 2x - 5 = 3 \\ 2x = 8 \\ x = 4 \end{array}$$

Dus $S(4, -1)$.

$$\text{3 } (-6, 18) \text{ op } y = ax^2 + bx \text{ geeft } 36a - 6b = 18 \text{ oftewel } 6a - b = 3.$$

$$(30, -450) \text{ op } y = ax^2 + bx \text{ geeft } 900a + 30b = -450 \text{ oftewel } 30a + b = -15.$$

$$\begin{cases} 6a - b = 3 \\ 30a + b = -15 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 36a = -12 \\ a = -\frac{1}{3} \\ 30a + b = -15 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 36a = -12 \\ a = -\frac{1}{3} \\ 30a + b = -15 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} -10 + b = -15 \\ b = -5 \end{array}$$

De formule is $y = -\frac{1}{3}x^2 - 5x$.

$$\text{4 a } 3x - y = 7 \text{ oftewel } y = 3x - 7$$

$$\text{Substitutie van } y = 3x - 7 \text{ in } (x - 4)^2 + y^2 = 5 \text{ geeft } (x - 4)^2 + (3x - 7)^2 = 5$$

$$x^2 - 8x + 16 + 9x^2 - 42x + 49 = 5$$

$$10x^2 - 50x + 60 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 3$$

$x = 2$ invullen in $y = 3x - 7$ geeft $y = 6 - 7 = -1$.

$x = 3$ invullen in $y = 3x - 7$ geeft $y = 9 - 7 = 2$.

Dus $(x, y) = (2, -1) \vee (x, y) = (3, 2)$.

$$\text{b } x + 4y = 2 \text{ oftewel } x = 2 - 4y$$

Substitutie van $x = 2 - 4y$ in $xy = -6$ geeft $(2 - 4y)y = -6$

$$2y - 4y^2 = -6$$

$$-4y^2 + 2y + 6 = 0$$

$$2y^2 - y - 3 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 25$$

$$y = \frac{1 \pm 5}{4} = 1\frac{1}{2} \vee y = \frac{1 - 5}{4} = -1$$

$y = 1\frac{1}{2}$ invullen in $x = 2 - 4y$ geeft $x = 2 - 6 = -4$.

$y = -1$ invullen in $x = 2 - 4y$ geeft $x = 2 + 4 = 6$.

Dus $(x, y) = (-4, 1\frac{1}{2}) \vee (x, y) = (6, -1)$.

5 a $3x^3 + 5 = 86$

$$3x^3 = 81$$

$$x^3 = 27$$

$$x = 3$$

b $5x^4 - 6 = 9$

$$5x^4 = 15$$

$$x^4 = 3$$

$$x = \sqrt[4]{3} \vee x = -\sqrt[4]{3}$$

c $2x^3 + 19 = 5$

$$2x^3 = -14$$

$$x^3 = -7$$

$$x = \sqrt[3]{-7}$$

d $\frac{1}{2}(x+2)^4 = \frac{1}{32}$

$$(x+2)^4 = \frac{1}{16}$$

$$x+2 = \frac{1}{2} \vee x+2 = -\frac{1}{2}$$

$$x = -1\frac{1}{2} \vee x = -2\frac{1}{2}$$

e $100 - (2x+1)^5 = 68$

$$-(2x+1)^5 = -32$$

$$(2x+1)^5 = 32$$

$$2x+1 = 2$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

f $(2x+4)^3 = 10$

$$2x+4 = \sqrt[3]{10}$$

$$2x = -4 + \sqrt[3]{10}$$

$$x = -2 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{10}$$

6 a $x^3 = x^2 + 20x$

$$x^3 - x^2 - 20x = 0$$

$$x(x^2 - x - 20) = 0$$

$$x(x+4)(x-5) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -4 \vee x = 5$$

b $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$

$$\text{Stel } x^2 = u.$$

$$u^2 - 6u + 5 = 0$$

$$(u-1)(u-5) = 0$$

$$u = 1 \vee u = 5$$

$$x^2 = 1 \vee x^2 = 5$$

$$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$

c $x^8 + x^4 = 42$

$$x^8 + x^4 - 42 = 0$$

$$\text{Stel } x^4 = u.$$

$$u^2 + u - 42 = 0$$

$$(u-6)(u+7) = 0$$

$$u = 6 \vee u = -7$$

$$x^4 = 6 \vee x^4 = -7$$

$$x = \sqrt[4]{6} \vee x = -\sqrt[4]{6}$$

d $5x^4 + 1 = 6x^2$

$$5x^4 - 6x^2 + 1 = 0$$

$$\text{Stel } x^2 = u.$$

$$5u^2 - 6u + 1 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 16$$

$$u = \frac{6+4}{10} = 1 \vee u = \frac{6-4}{10} = \frac{1}{5}$$

$$x^2 = 1 \vee x^2 = \frac{1}{5}$$

$$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{\frac{1}{5}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{5}}$$

7 a $|2x^3 - 5| = 49$

$$2x^3 - 5 = 49 \vee 2x^3 - 5 = -49$$

$$2x^3 = 54 \vee 2x^3 = -44$$

$$x^3 = 27 \vee x^3 = -22$$

$$x = 3 \vee x = \sqrt[3]{-22}$$

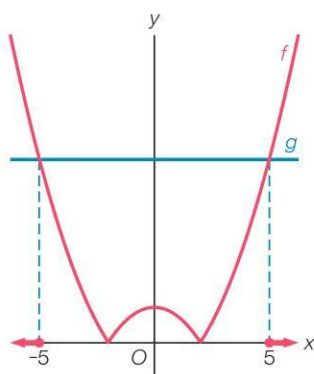
b $f(x) = |x^2 - 4|$ en $g(x) = 21$

$$f(x) = g(x) \text{ geeft } |x^2 - 4| = 21$$

$$x^2 - 4 = 21 \vee x^2 - 4 = -21$$

$$x^2 = 25 \vee x^2 = -17$$

$$x = 5 \vee x = -5$$



$$|x^2 - 4| \geq 21 \text{ geeft } x \leq -5 \vee x \geq 5$$

8 a $(x^2 - 6)(x^2 - 2x) = 0$
 $x^2 - 6 = 0 \vee x^2 - 2x = 0$
 $x^2 = 6 \vee x(x - 2) = 0$
 $x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6} \vee x = 0 \vee x = 2$

b $(2x^2 - 1)^2 = (6x + 1)^2$
 $2x^2 - 1 = 6x + 1 \quad \vee 2x^2 - 1 = -6x - 1$
 $2x^2 - 6x - 2 = 0 \quad \vee 2x^2 + 6x = 0$
 $x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \vee 2x(x + 3) = 0$
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 13$
 $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \quad \vee x = 0 \vee x = -3$
 $x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} \vee x = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \vee x = 0 \vee x = -3$

c $x(x^2 - 1) = 4(x^2 - 1)$
 $x^2 - 1 = 0 \vee x = 4$
 $x^2 = 1 \vee x = 4$
 $x = 1 \vee x = -1 \vee x = 4$

d $(x^3 - 9x)(x^2 - 3) = x^3 - 9x$
 $x^3 - 9x = 0 \vee x^2 - 3 = 1$
 $x(x^2 - 9) = 0 \vee x^2 = 4$
 $x = 0 \vee x^2 = 9 \vee x = 2 \vee x = -2$
 $x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3 \vee x = 2 \vee x = -2$

9 a $\sqrt{3x + 5} + 1 = 5$
 $\sqrt{3x + 5} = 4$
 $3x + 5 = 16$
 $3x = 11$
 $x = 3\frac{2}{3}$

b $3x = 5\sqrt{x + 4}$
kwadrateren geeft
 $9x^2 = 25(x + 4)$
 $9x^2 = 25x + 100$
 $9x^2 - 25x - 100 = 0$
 $D = (-25)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -100 = 4225$
 $x = \frac{25 + 65}{18} = 5 \vee x = \frac{25 - 65}{18} = -2\frac{2}{9}$
 $x = 5$ geeft $15 = 5\sqrt{5 + 4}$ vold.
 $x = -2\frac{2}{9}$ geeft $-6\frac{2}{3} = 5\sqrt{-2\frac{2}{9} + 4}$ vold. niet

c $x = \sqrt{x} + 6$
 $x - 6 = \sqrt{x}$
kwadrateren geeft
 $(x - 6)^2 = x$
 $x^2 - 12x + 36 = x$
 $x^2 - 13x + 36 = 0$
 $(x - 4)(x - 9) = 0$
 $x = 4 \vee x = 9$
 $x = 4$ geeft $4 = \sqrt{4} + 6$ vold. niet
 $x = 9$ geeft $9 = \sqrt{9} + 6$ vold.

d $2x + 3\sqrt{x} = 2$
 $3\sqrt{x} = 2 - 2x$
kwadrateren geeft
 $9x = (2 - 2x)^2$
 $9x = 4 - 8x + 4x^2$
 $-4x^2 + 17x - 4 = 0$
 $D = 17^2 - 4 \cdot -4 \cdot -4 = 225$
 $x = \frac{-17 + 15}{-8} = \frac{1}{4} \vee x = \frac{-17 - 15}{-8} = 4$
 $x = \frac{1}{4}$ geeft $\frac{1}{2} + 3\sqrt{\frac{1}{4}} = 2$ vold.
 $x = 4$ geeft $8 + 3\sqrt{4} = 2$ vold. niet

Bladzijde 181

10 a $\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 4} = 0$
 $x^2 - 5x + 6 = 0$
 $(x - 2)(x - 3) = 0$
 $x = 2 \vee x = 3$
vold. vold.

b $\frac{x^2 - 4}{2x + 1} = \frac{x^2 - 4}{x - 4}$
 $x^2 - 4 = 0 \vee 2x + 1 = x - 4$
 $x^2 = 4 \vee x = -5$
 $x = 2 \vee x = -2 \vee x = -5$
vold. vold. vold.

$$\begin{aligned} \text{c} \quad \frac{2x-1}{x+1} &= \frac{4x+1}{5x-1} \\ (2x-1)(5x-1) &= (x+1)(4x+1) \\ 10x^2 - 2x - 5x + 1 &= 4x^2 + x + 4x + 1 \\ 6x^2 - 12x &= 0 \\ 6x(x-2) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = 2 \\ \text{vold.} \quad \text{vold.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad \frac{2x^2-4}{x+5} &= 1\frac{3}{4} \\ \frac{2x^2-4}{x+5} &= \frac{7}{4} \\ 4(2x^2-4) &= 7(x+5) \\ 8x^2 - 16 &= 7x + 35 \\ 8x^2 - 7x - 51 &= 0 \\ D &= (-7)^2 - 4 \cdot 8 \cdot -51 = 1681 \\ x &= \frac{7+41}{16} = 3 \vee x = \frac{7-41}{16} = -2\frac{1}{8} \\ \text{vold.} \quad \text{vold.} \end{aligned}$$

$$11 \quad \text{a} \quad \frac{x^4-16}{x^3-4x} = \frac{(x^2+4)(x^2-4)}{x(x^2-4)} = \frac{x^2+4}{x} \text{ mits } x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

$$\text{b} \quad \frac{x^4-5x^2+4}{x^4-1} = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{x^2-4}{x^2+1} \text{ mits } x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

$$12 \quad \text{a} \quad y = 2x - \frac{x-1}{x-2} = \frac{2x(x-2)}{x-2} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{2x^2-4x-x+1}{x-2} = \frac{2x^2-5x+1}{x-2}$$

$$\text{b} \quad y = \frac{3}{x} \left(2 - \frac{x}{x-1} \right) = \frac{3}{x} \left(\frac{2(x-1)}{x-1} - \frac{x}{x-1} \right) = \frac{3}{x} \left(\frac{2x-2-x}{x-1} \right) = \frac{3}{x} \left(\frac{x-2}{x-1} \right) = \frac{3x-6}{x(x-1)}$$

$$\text{c} \quad y = \frac{2x + \frac{x}{x-1}}{x+1} = \frac{\left(2x + \frac{x}{x-1} \right) \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{2x(x-1) + x}{x^2-1} = \frac{2x^2-2x+x}{x^2-1} = \frac{2x^2-x}{x^2-1}$$

$$\text{d} \quad y = \frac{\frac{2}{x+1} - 3}{4 - \frac{x}{x+1}} = \frac{\left(\frac{2}{x+1} - 3 \right) \cdot (x+1)}{\left(4 - \frac{x}{x+1} \right) \cdot (x+1)} = \frac{2-3(x+1)}{4(x+1)-x} = \frac{2-3x-3}{4x+4-x} = \frac{-3x-1}{3x+4} \text{ mits } x \neq -1$$

$$13 \quad \text{a} \quad N = \frac{4x^2-50}{2x} = 2x - \frac{25}{x}$$

$$\text{b} \quad B = \frac{6p^2-3p+4}{3p} = 2p - 1 + \frac{4}{3p}$$

$$\begin{aligned} 14 \quad \text{a} \quad y &= \frac{2x-3}{x+5} \\ y(x+5) &= 2x-3 \\ xy+5y &= 2x-3 \\ xy-2x &= -5y-3 \\ x(y-2) &= -5y-3 \\ x &= \frac{-5y-3}{y-2} \\ x &= \frac{5y+3}{2-y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad y &= 3 + \frac{2x}{x-1} \\ y(x-1) &= 3(x-1) + 2x \\ xy-y &= 3x-3+2x \\ xy-5x &= y-3 \\ x(y-5) &= y-3 \\ x &= \frac{y-3}{y-5} \end{aligned}$$

$$15 \quad \text{a} \quad \text{Voor } f \text{ geldt } y = \frac{2x-1}{5-x}, \text{ dus voor } f^{\text{inv}} \text{ geldt } x = \frac{2y-1}{5-y}.$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2y-1}{5-y} \text{ geeft } x(5-y) = 2y-1 \\ 5x-xy &= 2y-1 \\ -xy-2y &= -5x-1 \\ xy+2y &= 5x+1 \\ y(x+2) &= 5x+1 \\ y &= \frac{5x+1}{x+2} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = \frac{5x+1}{x+2}.$$

b Voor g geldt $y = 2 - \frac{3}{x-4}$, dus voor g^{inv} geldt $x = 2 - \frac{3}{y-4}$.

$$x = 2 - \frac{3}{y-4} \text{ geeft } x(y-4) = 2(y-4) - 3$$

$$xy - 4x = 2y - 8 - 3$$

$$xy - 2y = 4x - 11$$

$$y(x-2) = 4x - 11$$

$$y = \frac{4x-11}{x-2}$$

$$\text{Dus } g^{\text{inv}}(x) = \frac{4x-11}{x-2}.$$

Gemengde opgaven

1 Functies en grafieken

Bladzijde 182

1 a
$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + 2b \\ \text{door } A(-1, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot -1 + 2b = 2 \\ 3 + 2b = 2 \\ 2b = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{1}{3}ax - \frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}ax - \frac{1}{2} \\ \text{door } A(-1, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3}a \cdot -1 - \frac{1}{2} = 2 \\ -\frac{1}{3}a = 2\frac{1}{2} \\ a = -7\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $a = -7\frac{1}{2}$ en $b = -\frac{1}{2}$.

b
$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + 2b \\ \text{door } C(0, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 + 2b = 4 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{1}{3}ax + 2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}ax + 2 \\ \text{door } B(2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3}a \cdot 2 + 2 = 0 \\ \frac{2}{3}a = -2 \\ a = -3 \end{array}$$

$k: y = -x + 2$ en $l: y = -3x + 4$ snijden geeft $-x + 2 = -3x + 4$

$$\left. \begin{array}{l} 2x = 2 \\ x = 1 \\ y = -x + 2 \end{array} \right\} y = 1$$

Dus $S(1, 1)$.

c $k \parallel l$ geeft $rc_k = rc_l$
$$\frac{1}{3}a = -3$$

$$a = -9$$

Dus $k: y = -3x + b$ en $l: y = -3x + 2b$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3x + b = 0 \\ -3x = -b \\ x = \frac{1}{3}b \end{array}$$

Dus snijpunt van k met de x -as is $P(\frac{1}{3}b, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + 2b \\ y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3x + 2b = 0 \\ -3x = -2b \\ x = \frac{2}{3}b \end{array}$$

Dus snijpunt van l met de x -as is $Q(\frac{2}{3}b, 0)$.

$PQ = 2$ geeft $\frac{1}{3}b - \frac{2}{3}b = 2 \vee \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}b = 2$

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{3}b = 2 \vee \frac{1}{3}b = 2 \\ b = -6 \vee b = 6 \end{array}$$

Dus $a = -9$ en $b = -6$ of $b = 6$.

- 2 a** 33 km/uur geeft $\frac{33}{60} = \frac{11}{20}$ km/minuut.

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{11}{20}t + b \\ t = 5 \text{ en } s = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{11}{20} \cdot 5 + b = 0 \\ \frac{11}{4} + b = 0 \\ b = -2\frac{3}{4} \end{array}$$

Dus voor Marc geldt de formule $s = \frac{11}{20}t - 2\frac{3}{4}$.

Los op $\frac{11}{20}t - 2\frac{3}{4} = \frac{1}{2}t$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{20}t = 2\frac{3}{4} \\ t = 55 \end{array}$$

Dus Marc haalt Harm in om 8:55 uur.

- b** 42 km/uur geeft $\frac{42}{60} = \frac{7}{10}$ km/minuut.

$$\left. \begin{array}{l} s = -\frac{7}{10}t + b \\ t = 0 \text{ en } s = 30 \end{array} \right\} b = 30$$

Dus voor Gerrit geldt de formule $s = -\frac{7}{10}t + 30$.

Los op $\frac{1}{2}t = -\frac{7}{10}t + 30$

$$\begin{array}{l} \frac{12}{10}t = 30 \\ t = 25 \end{array}$$

Dus Harm en Gerrit komen elkaar om 8:25 uur tegen.

- 3 a** $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3$

$$y_{\text{top}} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + a = a - 4\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = ax - 3 \\ \text{door } (3, a - 4\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3a - 3 = a - 4\frac{1}{2} \\ 2a = -1\frac{1}{2} \\ a = -\frac{3}{4} \end{array}$$

- b** $\frac{1}{2}x^2 - bx = 0$

$$\frac{1}{2}x(x - 2b) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2b$$

Dus de snijpunten met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(2b, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = bx - 18 \\ \text{door } (0, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 - 18 = 0 \\ \text{geen opl.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = bx - 18 \\ \text{door } (2b, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 2b - 18 = 0 \\ 2b^2 = 18 \\ b^2 = 9 \\ b = 3 \vee b = -3 \end{array}$$

- c** $2x + c = 0$

$$2x = -c$$

$$x = -\frac{1}{2}c$$

Dus snijpunt met de x -as is $(-\frac{1}{2}c, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x^2 - cx - 10 \\ \text{door } (-\frac{1}{2}c, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot (-\frac{1}{2}c)^2 - c \cdot (-\frac{1}{2}c) - 10 = 0 \\ 3 \cdot \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}c^2 = 10 \end{array}$$

$$1\frac{1}{4}c^2 = 10$$

$$c^2 = 8$$

$$c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \vee c = -2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{4 a } 7x^2 &= 5x \\
 7x^2 - 5x &= 0 \\
 x(7x - 5) &= 0 \\
 x = 0 \vee 7x &= 5 \\
 x = 0 \vee x &= \frac{5}{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } 2x^2 + x &= 3 \\
 2x^2 + x - 3 &= 0 \\
 D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) &= 25, \text{ dus } \sqrt{D} = 5 \\
 x = \frac{-1 \pm 5}{4} = 1 \vee x &= \frac{-1 - 5}{4} = -1\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

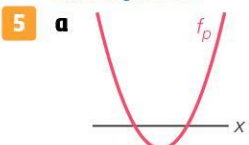
$$\begin{aligned}
 \text{c } (x+2)(x-6) &= 9 \\
 x^2 - 6x + 2x - 12 &= 9 \\
 x^2 - 4x - 21 &= 0 \\
 (x+3)(x-7) &= 0 \\
 x = -3 \vee x &= 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d } (x-3)^2 - (x+1) &= x^2 - 1 \\
 x^2 - 6x + 9 - x - 1 &= x^2 - 1 \\
 -7x &= -9 \\
 x &= 1\frac{2}{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e } (2x-3)^2 &= 36 \\
 2x-3 = 6 \vee 2x-3 &= -6 \\
 2x = 9 \vee 2x &= -3 \\
 x = 4\frac{1}{2} \vee x &= -1\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f } 4 - (x-2)^2 &= 7x - 3 \\
 4 - (x^2 - 4x + 4) &= 7x - 3 \\
 4 - x^2 + 4x - 4 &= 7x - 3 \\
 -x^2 - 3x + 3 &= 0 \\
 x^2 + 3x - 3 &= 0 \\
 D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) &= 21 \\
 x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \vee x &= \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \\
 x = -1\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21} \vee x &= -1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}
 \end{aligned}$$

Bladzijde 183



$$\begin{aligned}
 \text{er moet gelden } D > 0 \\
 D = (-p)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 9 = p^2 - 9 &\left. \begin{array}{l} p^2 - 9 > 0 \\ p^2 > 9 \\ p < -3 \vee p > 3 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } x_{\text{top}} &= -\frac{b}{2a} = -\frac{-p}{\frac{1}{2}} = 2p \\
 y_{\text{top}} &= \frac{1}{4} \cdot (2p)^2 - p \cdot 2p + 9 = p^2 - 2p^2 + 9 = -p^2 + 9 \\
 y &= -3x + 2 \\
 \text{door } (2p, -p^2 + 9) &\left. \begin{array}{l} -3 \cdot 2p + 2 = -p^2 + 9 \\ p^2 - 6p - 7 = 0 \\ (p+1)(p-7) = 0 \\ p = -1 \vee p = 7 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } x_{\text{top}} = 2p \text{ geeft } p &= \frac{1}{2}x_{\text{top}} \\
 y_{\text{top}} &= \frac{1}{4}x_{\text{top}}^2 - \frac{1}{2}x_{\text{top}} \cdot x_{\text{top}} + 9 = -\frac{1}{4}x_{\text{top}}^2 + 9 \\
 \text{Dus alle toppen liggen op de kromme } y &= -\frac{1}{4}x^2 + 9.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{6 a één oplossing als } D &= 0 \\
 D = (-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 4p^2 - 64 &\left. \begin{array}{l} 4p^2 - 64 = 0 \\ 4p^2 = 64 \\ p^2 = 16 \\ p = 4 \vee p = -4 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

b $p = 0$ geeft de vergelijking $3 = 0$ en die heeft geen oplossingen.

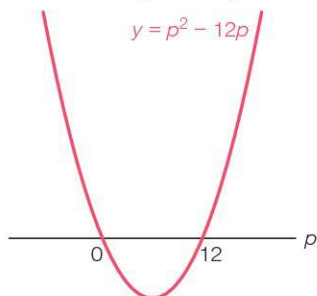
Voor $p \neq 0$ is $D = (-p)^2 - 4 \cdot p \cdot 3 = p^2 - 12p$.

Geen oplossingen als $D < 0$.

$D = 0$ geeft $p^2 - 12p = 0$

$$p(p - 12) = 0$$

$$p = 0 \vee p = 12$$



$D < 0$ geeft $0 < p < 12$

Dus de vergelijking heeft geen oplossingen als $0 \leq p < 12$.

c $p = 0$ geeft de vergelijking $6x = 0$ en die heeft één oplossing, dus $p \neq 0$.

twee oplossingen als $D > 0$
 $D = 6^2 - 4 \cdot p \cdot 3p = 36 - 12p^2$

$$\left. \begin{array}{l} 36 - 12p^2 > 0 \\ -12p^2 > -36 \end{array} \right\}$$

$$p^2 < 3$$

$$-\sqrt{3} < p < \sqrt{3}$$

Dus twee oplossingen als $-\sqrt{3} < p < 0 \vee 0 < p < \sqrt{3}$.

d $x = 6$ geeft $6^2 + p \cdot 6 - 6p^2 = 0$

$$36 + 6p - 6p^2 = 0$$

$$p^2 - p - 6 = 0$$

$$(p + 2)(p - 3) = 0$$

$$p = -2 \vee p = 3$$

$p = -2$ geeft $x^2 - 2x - 6 \cdot (-2)^2 = 0$

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$(x + 4)(x - 6) = 0$$

$$x = -4 \vee x = 6$$

$p = 3$ geeft $x^2 + 3x - 6 \cdot 3^2 = 0$

$$x^2 + 3x - 54 = 0$$

$$(x - 6)(x + 9) = 0$$

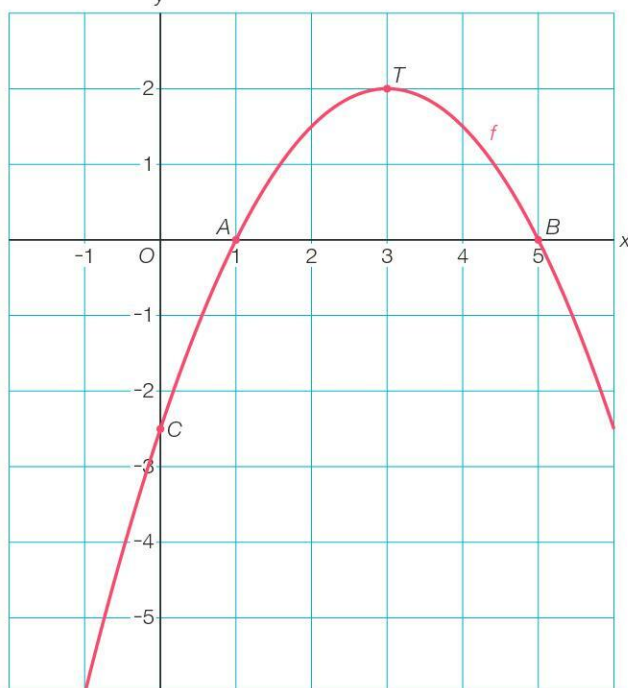
$$x = 6 \vee x = -9$$

Voor $p = -2$ is de andere oplossing $x = -4$

en voor $p = 3$ is de andere oplossing $x = -9$.

7 a

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-6	$-2\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	2	$1\frac{1}{2}$	0	$-2\frac{1}{2}$



b $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = 3$ en $y_{\text{top}} = f(3) = 2$, dus max. is $f(3) = 2$.

$B_f = \langle \leftarrow, 2 \rangle$

c $T(3, 2)$ en $y_C = f(0) = -2\frac{1}{2}$, dus $C(0, -2\frac{1}{2})$.

Stel $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - -2\frac{1}{2}}{3 - 0} = 1\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } C(0, -2\frac{1}{2}) \end{array} \right\} b = -2\frac{1}{2}$$

Dus $y = 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$.

d Zie vraag a: $A(1, 0)$, $B(5, 0)$ en $T(3, 2)$.

$O(\triangle ABT) = \frac{1}{2} \cdot (5 - 1) \cdot 2 = 4$

e $f(x) = -4$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\frac{1}{2} = -4$
 $x^2 - 6x + 5 = 8$
 $x^2 - 6x - 3 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 - 3 = 0$
 $(x - 3)^2 = 12$
 $x - 3 = \sqrt{12} \vee x - 3 = -\sqrt{12}$
 $x = 3 + \sqrt{12} \vee x = 3 - \sqrt{12}$
 $x = 3 + 2\sqrt{3} \vee x = 3 - 2\sqrt{3}$

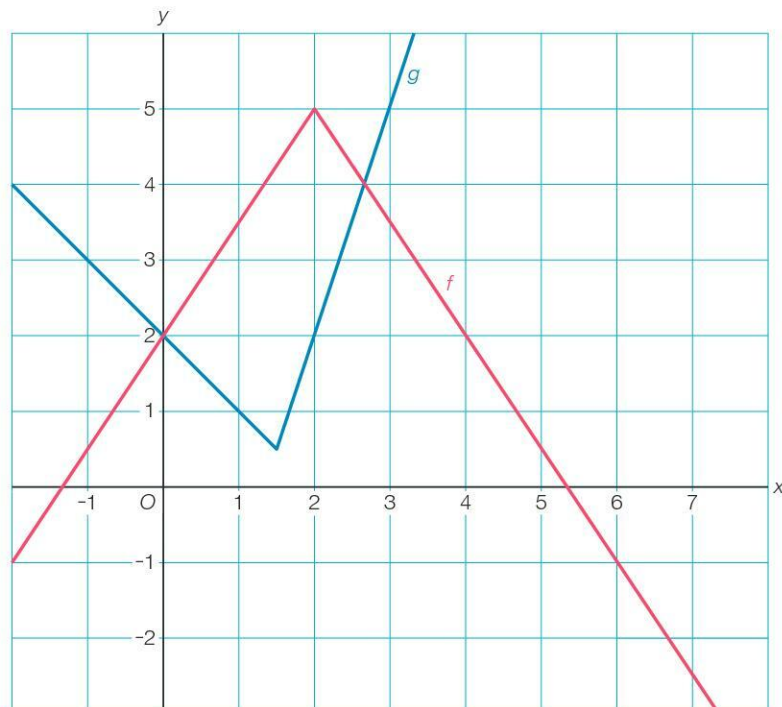
$3 + 2\sqrt{3} > 5$ kan niet, dus $a = 3 - 2\sqrt{3}$.

8 a $f(x) = 5 - (1\frac{1}{2}x - 3) = 5 - 1\frac{1}{2}x + 3 = -1\frac{1}{2}x + 8$ als $1\frac{1}{2}x - 3 \geq 0$, dus als $x \geq 2$ en

$f(x) = 5 - (-1\frac{1}{2}x + 3) = 5 + 1\frac{1}{2}x - 3 = 1\frac{1}{2}x + 2$ als $1\frac{1}{2}x - 3 < 0$, dus als $x < 2$.

$g(x) = x - 1 + 2x - 3 = 3x - 4$ als $2x - 3 \geq 0$, dus als $x \geq 1\frac{1}{2}$ en

$g(x) = x - 1 - 2x + 3 = -x + 2$ als $2x - 3 < 0$, dus als $x < 1\frac{1}{2}$.



b $x < 1\frac{1}{2}$ geeft $1\frac{1}{2}x + 2 = -x + 2$

$$2\frac{1}{2}x = 0$$

$$x = 0$$

$x = 0$ geeft $g(0) = 0 + 2 = 2$

$x \geq 2$ geeft $-1\frac{1}{2}x + 8 = 3x - 4$

$$-4\frac{1}{2}x = -12$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

$x = 2\frac{2}{3}$ geeft $g(2\frac{2}{3}) = 3 \cdot 2\frac{2}{3} - 4 = 4$

Dus de snijpunten zijn $(0, 2)$ en $(2\frac{2}{3}, 4)$.

c $g(x) = -x + 2$
 $A(x_A, 3)$ $\begin{cases} -x_A + 2 = 3 \\ -x_A = 1 \\ x_A = -1 \end{cases}$

$f(x) = 1\frac{1}{2}x + 2$
 $B(x_B, 3)$ $\begin{cases} 1\frac{1}{2}x_B + 2 = 3 \\ 1\frac{1}{2}x_B = 1 \\ x_B = \frac{2}{3} \end{cases}$

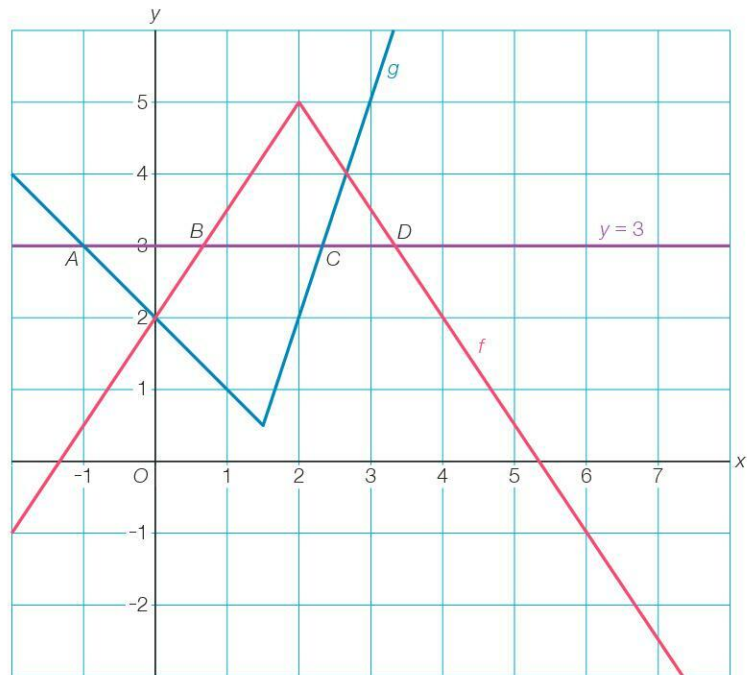
$g(x) = 3x - 4$
 $C(x_C, 3)$ $\begin{cases} 3x_C - 4 = 3 \\ 3x_C = 7 \\ x_C = 2\frac{1}{3} \end{cases}$

$f(x) = -1\frac{1}{2}x + 8$
 $D(x_D, 3)$ $\begin{cases} -1\frac{1}{2}x_D + 8 = 3 \\ -1\frac{1}{2}x_D = -5 \\ x_D = 3\frac{1}{3} \end{cases}$

$AB = \frac{2}{3} - (-1) = 1\frac{2}{3}$, $BC = 2\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$

en $CD = 3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3} = 1$.

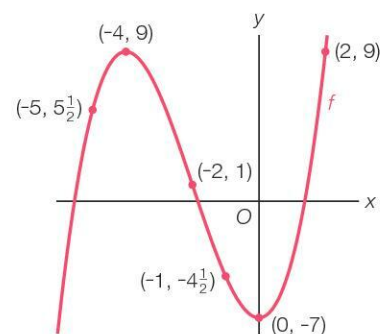
Dus CD heeft de kleinste lengte.



- 9 a** Voer in $y_1 = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 7$.
 De optie maximum geeft de top $(-4, 9)$.
 De optie minimum geeft de top $(0, -7)$.
 $f(-1) = -4\frac{1}{2}$ en $f(2) = 9$
 Zie de figuur.

$D_f = [-1, 2]$ geeft $B_f = [-7, 9]$

- b** $f(-5) = 5\frac{1}{2}$ en $f(-2) = 1$
 Zie de figuur bij a.
 $D_f = [-5, -2]$ geeft $B_f = [1, 9]$



- 10 a** Voer in $y_1 = \frac{3}{4}x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 24x - 10$.
 De optie minimum geeft de toppen $A(-1; -25,25)$ en $C(4, 6)$.
 De optie maximum geeft de top $B(2, 22)$.

- b** Er zijn drie oplossingen als de lijn $y = a$ door de top B of de top C gaat.
 Dus $a = 6 \vee a = 22$.

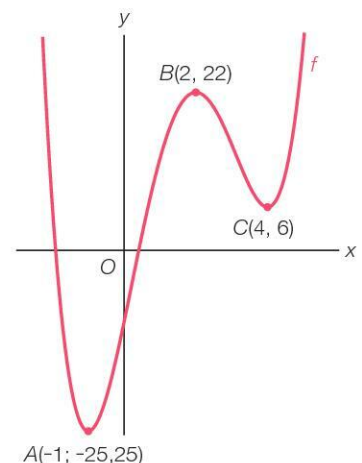
- c** Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 22}{4 - 2} = -8$.

$y = -8x + b$
 door $C(4, 6)$ $\begin{cases} -8 \cdot 4 + b = 6 \\ -32 + b = 6 \\ b = 38 \end{cases}$

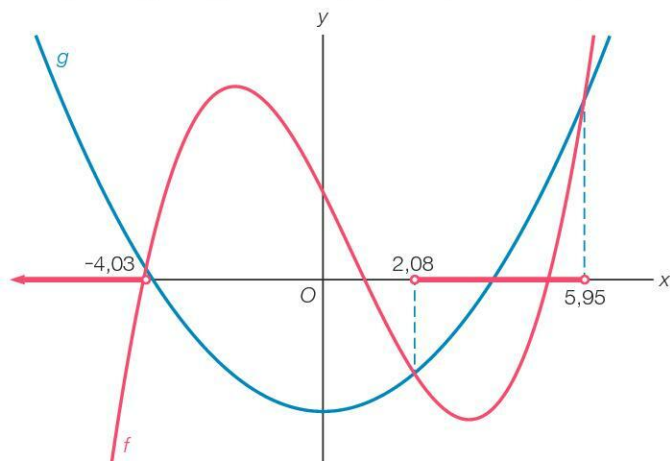
Dus $k: y = -8x + 38$.

Voer in $y_2 = -8x + 38$.

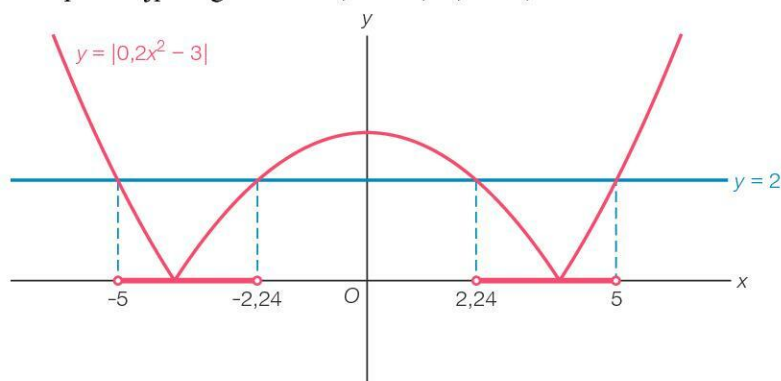
De optie snijpunt geeft de punten $D(-2,51; 58,12)$ en $E(3,18; 12,55)$.



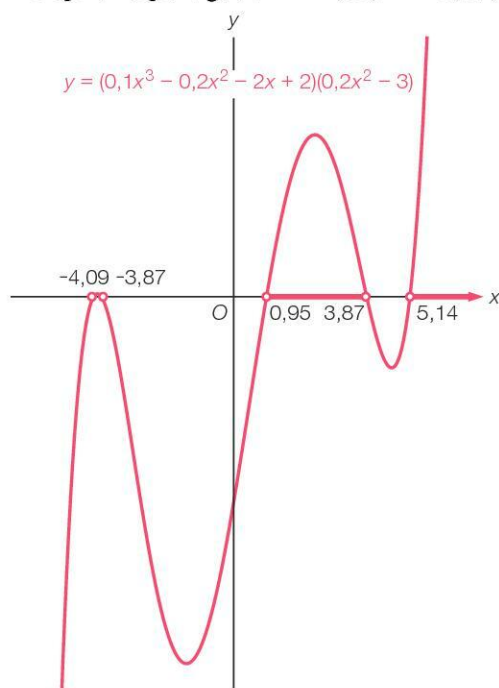
- 11 a** Voer in $y_1 = 0,1x^3 - 0,2x^2 - 2x + 2$ en $y_2 = 0,2x^2 - 3$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -4,03$, $x \approx 2,08$ en $x \approx 5,95$.



- $f(x) < g(x)$ geeft $x < -4,03 \vee 2,08 < x < 5,95$
b De optie nulpunt bij y_1 geeft $x \approx -4,09$, $x \approx 0,95$ en $x \approx 5,14$.
 $f(x) > 0$ geeft $-4,09 < x < 0,95 \vee x > 5,14$
c Voer in $y_1 = |0,2x^2 - 3|$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = -5$, $x \approx -2,24$, $x \approx 2,24$ en $x = 5$.



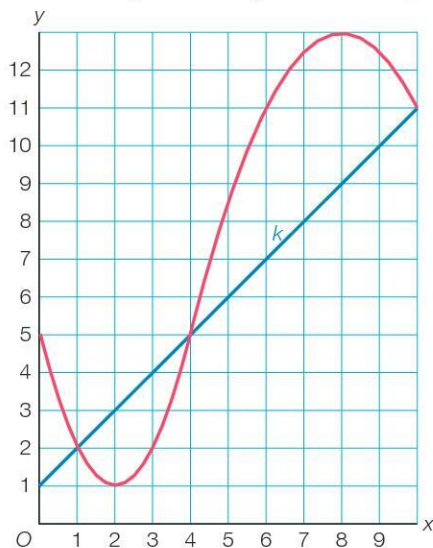
- $|g(x)| < 2$ geeft $-5 < x < -2,24 \vee 2,24 < x < 5$
d Voer in $y_1 = (0,1x^3 - 0,2x^2 - 2x + 2)(0,2x^2 - 3)$.
 De optie nulpunt geeft $x \approx -4,09$, $x \approx -3,87$, $x \approx 0,95$, $x \approx 3,87$ en $x \approx 5,14$



$f(x) \cdot g(x) > 0$ geeft $-4,09 < x < -3,87 \vee 0,95 < x < 3,87 \vee x > 5,14$

2 De afgeleide functie

- 12 a** Afnemend dalend op $\langle \leftarrow, 2 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle 4, 8 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 8, \rightarrow \rangle$.
- b** Teken de lijn k met $rc_k = 1$ door het punt $(10, 11)$ van de grafiek.

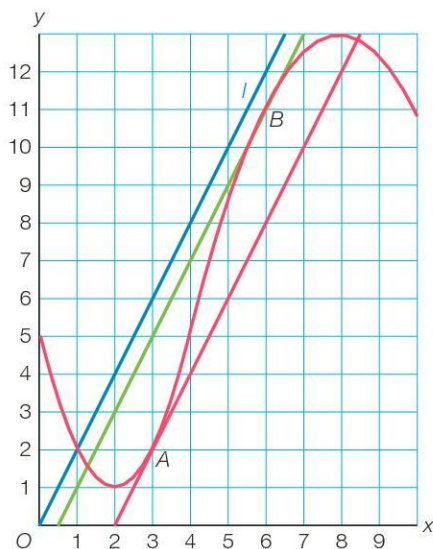


k snijdt de grafiek links van $(10, 11)$ in de punten $(1, 2)$ en $(4, 5)$.

Dus op $[1, 10]$ en op $[4, 10]$ is de gemiddelde verandering gelijk aan 1.

- c** De intervallen $[0, 4]$, $[1, 3]$ en $[6, 10]$ zijn de intervallen waarvan de grenzen gehele getallen zijn en waarop het differentiequotiënt gelijk is aan 0.
 Dus $[1, 3]$ is het gevraagde interval.

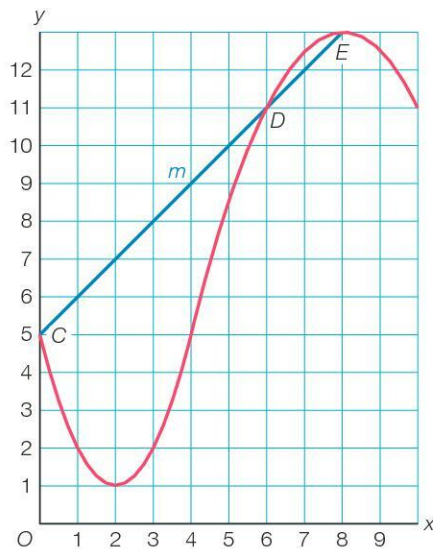
- d** Teken een lijn met richtingscoëfficiënt 2, bijvoorbeeld lijn l met $rc_l = 2$ door O in de figuur hieronder.
 Teken lijnen evenwijdig met l die de grafiek raken.



In de raakpunten $A(3, 2)$ en $B(6, 11)$ is de helling van de grafiek gelijk aan 2.

- e** Er zijn geen lijnen met richtingscoëfficiënt -7 die de grafiek raken.
 Dus er ligt geen punt op de grafiek waarin de helling van de grafiek gelijk is aan -7 .

- f** In een top is de helling van de grafiek gelijk aan 0.
 Dus E is het hoogste punt van de grafiek, oftewel $E(8, 13)$.
 Teken de lijn m met $rc_m = 1$ door E .



Dit geeft $C(0, 5)$ en $D(6, 11)$.

13 a Op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{16a + 4b + c - (0 + 0 + c)}{4} = \frac{16a + 4b}{4}$.

Dus $\frac{16a + 4b}{4} = 2$ oftewel $16a + 4b = 8$, dus $4a + b = 2$ oftewel $b = 2 - 4a$.

Op $[2, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9a + 3b + c - (4a + 2b + c)}{1} = \frac{5a + b}{1} = 5a + b$.

Dus $5a + b = 4$ oftewel $b = 4 - 5a$.

$b = 2 - 4a$ en $b = 4 - 5a$ geeft $2 - 4a = 4 - 5a$
 $a = 2$

$a = 2$ geeft $b = 2 - 4 \cdot 2 = -6$

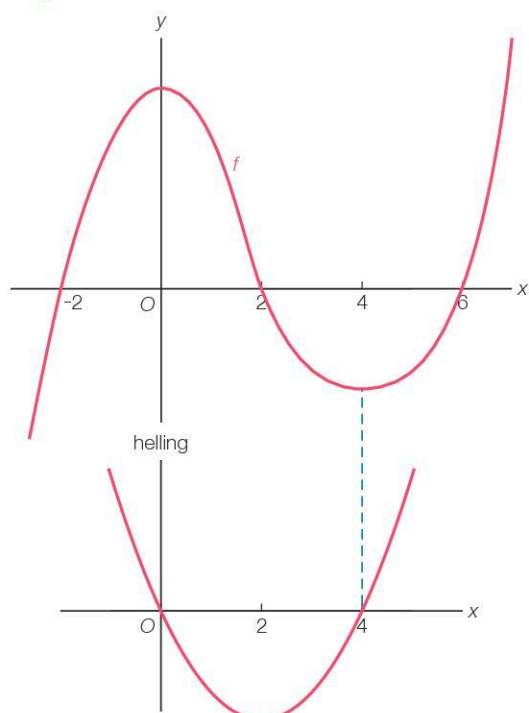
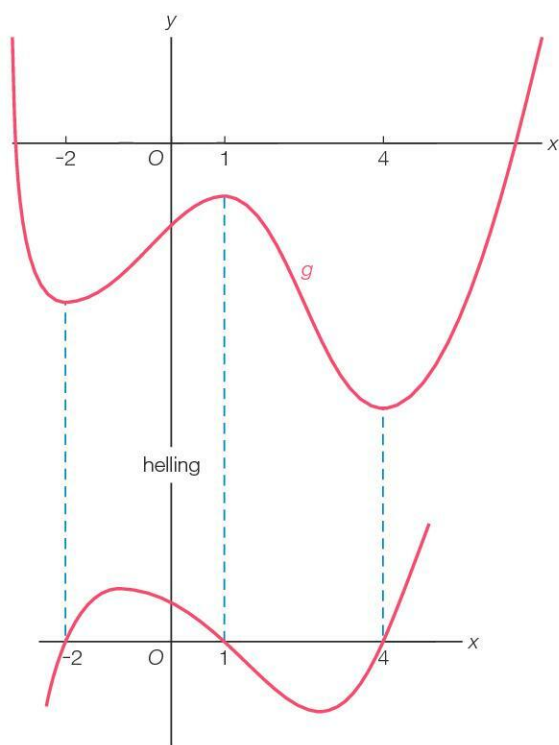
Dus $f(x) = 2x^2 - 6x + c$.

Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{50 - 30 + c - (2 - 6 + c)}{4} = \frac{24}{4} = 6$.

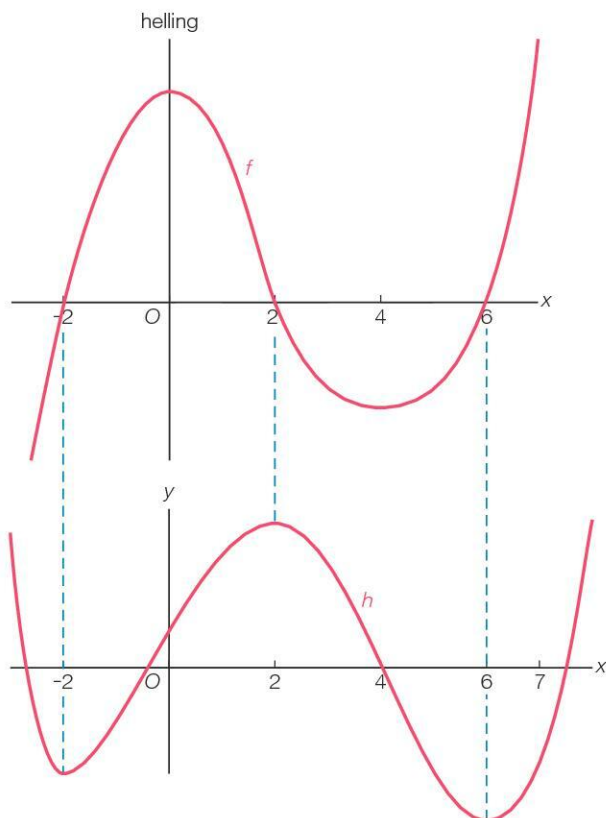
b Op $[0, c]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{2c^2 - 6c + c - (0 - 0 + c)}{c} = \frac{2c^2 - 6c}{c} = \frac{c(2c - 6)}{c} = 2c - 6$.

Er moet dus gelden $2c - 6 = c$ en dit geeft $c = 6$.

14 a



b



15 a Voer in $y_1 = \frac{500x^2}{x^2 + 400}$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=15} = 15,36$$

Op $t = 15$ is de snelheid $15,36 \cdot 3,6 \approx 55$ km/uur.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=30} = 7,10\dots$$

Op $t = 30$ is de snelheid $7,10\dots \cdot 3,6 \approx 26$ km/uur.

b $t = 50$ geeft $s = \frac{500 \cdot 50^2}{50^2 + 400} = 431,03\dots$

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=50} = 2,37\dots$$

Dus na 1 minuut heeft de mountainbiker $431,03\dots + 10 \cdot 2,37\dots \approx 455$ meter afgelegd.

16 a Voer in $y_1 = \frac{5x+6}{\sqrt{2x+9}}$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-4} = 19$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 19x + b \\ f(-4) = -14, \text{ dus } A(-4, -14) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 19 \cdot -4 + b = -14 \\ -76 + b = -14 \\ b = 62 \end{array}$$

Dus $l: y = 19x + 62$.

b Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} \approx 1,44$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1,44x + b \\ f(0) = 2, \text{ dus } B(0, 2) \end{array} \right\} b = 2$$

Dus $k: y = 1,44x + 2$.

c Stel $m: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=8} = 0,632$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 0,632x + b \\ f(8) = 9,2, \text{ dus } C(8; 9,2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,632 \cdot 8 + b = 9,2 \\ 5,056 + b = 9,2 \\ b = 4,144 \end{array}$$

Dus $m: y = 0,632x + 4,144$.

m snijden met de x -as geeft $0,632x + 4,144 = 0$

$$\begin{array}{l} 0,632x = -4,144 \\ x \approx -6,56 \end{array}$$

17 a $f(x) = -x(2x - 7) = -2x^2 + 7x$ geeft $f'(x) = -4x + 7$

b $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1) = x^3 - x^2 - x + 1$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

c $f(x) = \frac{2x-1}{5-2x}$ geeft $f'(x) = \frac{(5-2x) \cdot 2 - (2x-1) \cdot (-2)}{(5-2x)^2} = \frac{10-4x+4x-2}{(5-2x)^2} = \frac{8}{(5-2x)^2}$

d $f(x) = 7 - \frac{x^2+8x}{16} = 7 - \frac{1}{16}(x^2+8x) = 7 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{2}$

e $f(x) = x(3x+2)^2 = x(9x^2+12x+4) = 9x^3+12x^2+4x$ geeft $f'(x) = 27x^2+24x+4$

f $f(x) = 8 - (x-1)^2 = 8 - (x^2-2x+1) = 8 - x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 2x + 7$ geeft $f'(x) = -2x + 2$

g $f(x) = \frac{x^2-2x}{x+1} + x^4$ geeft

$$f'(x) = \frac{(x+1) \cdot (2x-2) - (x^2-2x) \cdot 1}{(x+1)^2} + 4x^3 = \frac{2x^2-2x+2x-2-x^2+2x}{(x+1)^2} + 4x^3 = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2} + 4x^3$$

h $f(x) = 3x^2 - \frac{4x+3}{2x-1}$ geeft

$$f'(x) = 6x - \frac{(2x-1) \cdot 4 - (4x+3) \cdot 2}{(2x-1)^2} = 6x - \frac{8x-4-8x-6}{(2x-1)^2} = 6x + \frac{10}{(2x-1)^2}$$

Bladzijde 186

18 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ geeft $f'(x) = x^2 - x - 2$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(0) = 0 - 0 - 2 = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(0) = 1, \text{ dus } A(0, 1) \end{array} \right\} b = 1$$

Dus $k: y = -2x + 1$.

b Raaklijn horizontaal, dus $rc = 0$, dus $f'(x) = 0$.

Dit geeft $x^2 - x - 2 = 0$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

$$f(-1) = 2\frac{1}{6} \text{ en } f(2) = -2\frac{1}{3}$$

De gevraagde punten zijn $(-1, 2\frac{1}{6})$ en $(2, -2\frac{1}{3})$.

c Raaklijnen evenwijdig met $l: y = 4x + 10$, dus $rc_{\text{raaklijn}} = rc_l = 4$, dus $f'(x) = 4$.

Dit geeft $x^2 - x - 2 = 4$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 3$$

$$f(-2) = \frac{1}{3} \text{ en } f(3) = -\frac{1}{2}$$

Dus $B(-2, \frac{1}{3})$ en $C(3, -\frac{1}{2})$.

19 a $f(x) = (x^2+2)(1-x) = x^2 - x^3 + 2 - 2x = -x^3 + x^2 - 2x + 2$ geeft $f'(x) = -3x^2 + 2x - 2$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = -12 + 4 - 2 = -10$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -10x + b \\ f(2) = -6, \text{ dus } A(2, -6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -10 \cdot 2 + b = -6 \\ -20 + b = -6 \\ b = 14 \end{array}$$

Dus $k: y = -10x + 14$.

- b** $rc_k = -10$ en de raaklijn is evenwijdig met k , dus $f'(x) = -10$.

Dit geeft $-3x^2 + 2x - 2 = -10$

$$-3x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot -3 \cdot 8 = 100$$

$$x = \frac{-2 + 10}{-6} = -1\frac{1}{3} \vee x = \frac{-2 - 10}{-6} = 2$$

Dus $x_B = -1\frac{1}{3}$.

- 20** $f(x) = (x^2 - 9)(x + p) = x^3 + px^2 - 9x - 9p$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 2px - 9$

Voor de helling in A geldt $f'(-2) = 7$.

Dit geeft $3 \cdot (-2)^2 + 2p \cdot -2 - 9 = 7$

$$12 - 4p - 9 = 7$$

$$-4p = 4$$

$$p = -1$$

Dus $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = rc_k = rc_l = 7$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 7x + b \\ f(-2) = 15, \text{ dus } A(-2, 15) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7 \cdot -2 + b = 15 \\ -14 + b = 15 \\ b = 29 \end{array}$$

Dus $k: y = 7x + 29$.

k snijden met de grafiek van f geeft $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 7x + 29$.

Voer in $y_1 = x^3 - x^2 - 9x + 9$ en $y_2 = 7x + 29$.

De optie snijpunt geeft $x = -2$ en $y = 15$, en $x = 5$ en $y = 64$.

Dus $B(5, 64)$.

- 21** **a** $s = 0,06t^3 + 1,2t^2$ geeft $v = 0,18t^2 + 2,4t$

Na vier seconden is de snelheid $v = 0,18 \cdot 4^2 + 2,4 \cdot 4 = 12,48$ m/s.

Na zes seconden is de snelheid $v = 0,18 \cdot 6^2 + 2,4 \cdot 6 = 20,88$ m/s.

- b** $100 \text{ km/uur} = \frac{100}{3,6} \text{ m/s}$

Voer in $y_1 = 0,18x^2 + 2,4x$ en $y_2 = \frac{100}{3,6}$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 7,43$.

Dus na ongeveer 7,43 seconden is de snelheid 100 km/uur.

- c** Na acht seconden is $s = 0,06 \cdot 8^3 + 1,2 \cdot 8^2 = 107,52$ m

en $v = 0,18 \cdot 8^2 + 2,4 \cdot 8 = 30,72$ m/s.

$$\frac{300 - 107,52}{30,72} \approx 6,3, \text{ dus na ongeveer } 8 + 6,3 = 14,3 \text{ seconden}$$

heeft de motor 300 meter afgelegd.

- 22** **a** $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+3}$ geeft $f'(x) = 1 + \frac{(x+3) \cdot 0 - 4 \cdot 1}{(x+3)^2} = 1 - \frac{4}{(x+3)^2}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(0) = 1 - \frac{4}{(0+3)^2} = \frac{5}{9}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{5}{9}x + b \\ f(0) = -\frac{2}{3}, \text{ dus } A(0, -\frac{2}{3}) \end{array} \right\} b = -\frac{2}{3}$$

Dus $k: y = \frac{5}{9}x - \frac{2}{3}$.

b Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(-2) = 1 - \frac{4}{(-2+3)^2} = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ B(-2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot -2 + b = 0 \\ b = -6 \end{array}$$

Dus $l: y = -3x - 6$.

Stel $m: y = ax + b$ met $a = f'(1) = 1 - \frac{4}{(1+3)^2} = \frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ C(1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 1 + b = 0 \\ b = -\frac{3}{4} \end{array}$$

Dus $m: y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.

l en m snijden geeft $-3x - 6 = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

$$-3\frac{3}{4}x = 5\frac{1}{4}$$

$$-15x = 21$$

$$x = -1\frac{2}{5}$$

$x = -1\frac{2}{5}$ geeft $y = -3 \cdot -1\frac{2}{5} - 6 = -1\frac{4}{5}$

Dus het snijpunt is $(-1\frac{2}{5}, -1\frac{4}{5})$.

23 a $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(x-1)(2x-2) - (x^2-2x+2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x-2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(-2) = \frac{4+4}{(-2-1)^2} = \frac{8}{9}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{8}{9}x + b \\ f(-2) = -3\frac{1}{3}, \text{ dus } A(-2, -3\frac{1}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{8}{9} \cdot -2 + b = -3\frac{1}{3} \\ -\frac{16}{9} + b = -\frac{30}{9} \\ b = -\frac{14}{9} = -1\frac{5}{9} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{8}{9}x - 1\frac{5}{9}$.

b $rc_l = f'(-1) = \frac{1+2}{(-1-1)^2} = \frac{3}{4}$

$$rc_m = f'(3) = \frac{9-6}{(3-1)^2} = \frac{3}{4}$$

$rc_l = rc_m$, dus l en m zijn evenwijdig.

3 Meetkunde

Bladzijde 187

24 Stel $AD = x$, dan is $BD = x + 2$.

$$BC = AB = AD + BD = x + x + 2 = 2x + 2$$

In $\triangle BCD$ is $\tan(55^\circ) = \frac{2x+2}{x+2}$.

Voer in $y_1 = \tan(55^\circ)$ en $y_2 = \frac{2x+2}{x+2}$.

De optie snijpunt geeft $x = 1,497...$

Dus $AB = 2 \cdot 1,497... + 2 \approx 4,99$.

In $\triangle BCD$ is $\cos(55^\circ) = \frac{x+2}{CD} = \frac{1,497... + 2}{CD}$.

Dus $CD = \frac{1,497... + 2}{\cos(55^\circ)} \approx 6,10$.

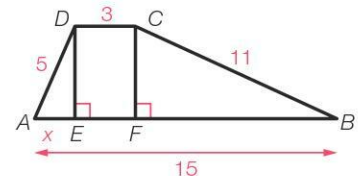
25 $\left. \begin{array}{l} \angle ACB = \angle DCE \\ \angle ABC = \angle CED \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DEC \text{ dus } \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE}$
 Stel $CD = x$, dan is $BC = x + 1$.
 Dit geeft $\frac{7}{x} = \frac{x+1}{4}$
 $x(x+1) = 28$
 $x^2 + x = 28$
 $x^2 + x - 28 = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -28 = 113$
 $x = \frac{-1 + \sqrt{113}}{2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{113}}{2}$
 $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{113} \vee x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{113} \text{ (kan niet)}$
 Dus $CD = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{113}$.

26 a De stelling van Pythagoras in $\triangle ABD$ geeft $BD = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$.
 De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle BCD$ geeft $BD \cdot CE = CD \cdot AD$
 $26 \cdot CE = 15 \cdot 10$
 $CE = \frac{15 \cdot 10}{26} = 5\frac{10}{13}$

b $\left. \begin{array}{l} \angle ABS = \angle CDS \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle BAS = \angle DCS \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABS \sim \triangle CDS \text{ dus } \frac{AB}{CD} = \frac{BS}{DS}$
 Stel $DS = x$, dan is $BS = 26 - x$.
 Dit geeft $\frac{24}{15} = \frac{26-x}{x}$
 $24x = 15(26 - x)$
 $24x = 390 - 15x$
 $39x = 390$
 $x = 10$, dus $DS = 10$
 $DS = AD$, dus $\angle SAD = \angle ASD$ (basishoeken gelijkbenige driehoek).
 En omdat $\angle CAD = \angle SAD$ is $\angle CAD = \angle ASD$.

27 Teken DE en CF loodrecht op AB , en stel $AE = x$.
 Zie de figuur hiernaast.
 Nu is $BF = 15 - 3 - x = 12 - x$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle ADE$ geeft $DE^2 = 5^2 - x^2$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle BCF$ geeft $CF^2 = 11^2 - (12 - x)^2$.
 $DE = CF$, dus $DE^2 = CF^2$, dus $25 - x^2 = 121 - (144 - 24x + x^2)$
 $25 - x^2 = 121 - 144 + 24x - x^2$
 $24x = 48$
 $x = 2$

Dus $DE^2 = 5^2 - 2^2 = 21$, dus $DE = \sqrt{21}$.
 $O(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DE = \frac{1}{2}(15 + 3) \cdot \sqrt{21} = 9\sqrt{21}$



28 $O(\triangle ADE) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin(\angle A) = 15 \sin(\angle A)$
 $O(\triangle ABC) = 2 \cdot O(\triangle ADE) = 30 \sin(\angle A)$
 $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$
 $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot AC \cdot \sin(\angle A) = 30 \sin(\angle A) \\ 4AC = 30 \end{array} \right\} AC = 7\frac{1}{2}$
 Dus $CE = AC - AE = 7\frac{1}{2} - 5 = 2\frac{1}{2}$.

- 29** De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
 $BM = \frac{1}{2}BC = 2,5$
 Zie de figuur hiernaast.
 $AM = BM = 2,5$ (straal cirkel)

In $\triangle AMN$ is $\sin(\angle AMN) = \frac{2}{2,5}$

$$\angle AMN = 53,13\dots^\circ$$

$$\angle AMB = 2 \cdot \angle AMN = 2 \cdot 53,13\dots^\circ = 106,26\dots^\circ$$

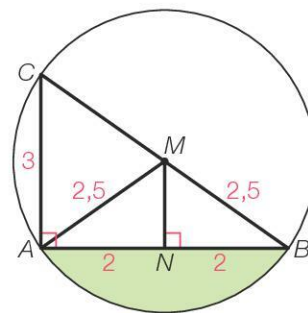
De oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door AM ,

$$BM \text{ en de kortste cirkelboog } AB \text{ is } \frac{106,26\dots}{360} \cdot \pi \cdot 2,5^2 = 5,795\dots$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle AMN$ geeft $MN = \sqrt{2,5^2 - 2^2} = 1,5$.

$$\text{opp } \triangle ABM = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,5 = 3$$

De oppervlakte van het groene gebied is $5,795\dots - 3 \approx 2,80$.



- 30** Teken AC . Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft

$$AC^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos(50^\circ)$$

$$AC^2 = 38,861\dots$$

$$AC = 6,233\dots$$

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft

$$\frac{6,233\dots}{\sin(50^\circ)} = \frac{4}{\sin(\angle BAC)}$$

$$\sin(\angle BAC) = \frac{4 \sin(50^\circ)}{6,233\dots} = 0,491\dots$$

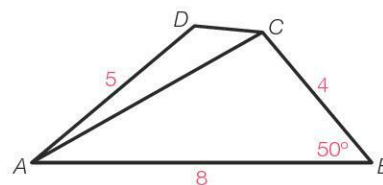
$$\angle BAC = 29,44\dots^\circ$$

$$\angle CAD = 40^\circ - \angle BAC = 40^\circ - 29,44\dots^\circ = 10,55\dots^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle CAD$ geeft $CD^2 = 38,861\dots + 5^2 - 2 \cdot 6,233\dots \cdot 5 \cdot \cos(10,55\dots^\circ)$

$$CD^2 = 2,578\dots$$

$$CD \approx 1,61$$



- 31 a** Stel de straal van een grote cirkel is r .

Zie de figuur hiernaast.

$$\text{In } \triangle ABC \text{ is } AC = 2r \text{ en } AB = \frac{2r}{\sqrt{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}.$$

Ook is $AB = r + 1$.

$$\text{Dit geeft } r\sqrt{2} = r + 1$$

$$r\sqrt{2} - r = 1$$

$$r(\sqrt{2} - 1) = 1$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Dus de straal van de grote cirkels is $\sqrt{2} + 1$.

- b** In $\triangle ABD$ is $BD = \sqrt{2}$.

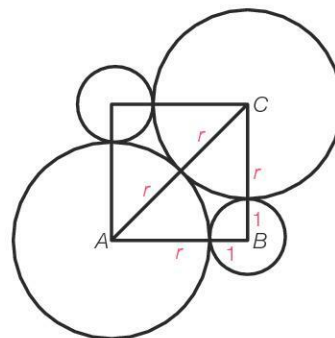
$$DE = 1, \text{ dus } BE = \sqrt{2} - 1.$$

$\triangle BEH$ is een gelijkbenige rechthoekige driehoek.

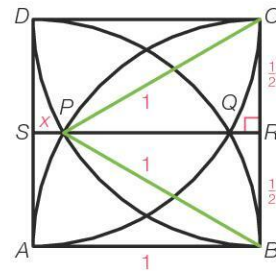
$$\text{In } \triangle BEH \text{ is } EH = BE = \sqrt{2} - 1.$$

$$O(\triangle BEH) = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2} (2 - 2\sqrt{2} + 1) = 1\frac{1}{2} - \sqrt{2}$$

$$\text{Dus } O(\triangle DEHC) = O(\triangle BCD) - O(\triangle BEH) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - (1\frac{1}{2} - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1.$$

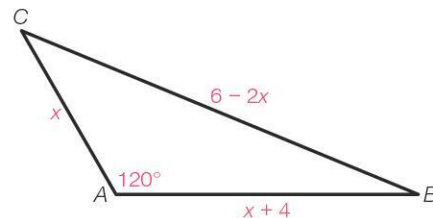


- c Zie de figuur hiernaast met R op BC en S op AD waarbij R en S op het verlengde van PQ liggen.
 $BC = BP = CP = 1$ (straal cirkel)
 $\angle BCP = 60^\circ$ (gelijkzijdige driehoek)
 Stel $PS = x$, dan is $PR = 1 - x$.
 In $\triangle CPR$ is $PR = \sqrt{3} \cdot CR = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
 Dus $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1 - x$ oftewel $x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
 $PQ = 1 - 2x = 1 - 2(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$



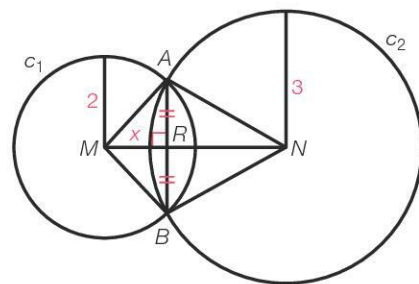
Bladzijde 189

- 32 Stel $AC = x$, dan is $AB = x + 4$ en $BC = 10 - x - (x + 4) = 6 - 2x$.
 Zie de figuur hiernaast.
 De cosinusregel geeft
 $(6 - 2x)^2 = x^2 + (x + 4)^2 - 2 \cdot x \cdot (x + 4) \cdot \cos(120^\circ)$.
 Voer in $y_1 = (6 - 2x)^2$ en $y_2 = x^2 + (x + 4)^2 - 2x(x + 4)\cos(120^\circ)$.
 De optie snijpunt geeft $x = 0,564...$
 Dus $AB = 4,564...$ en $AC = 0,564...$
 $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 4,564... \cdot 0,564... \cdot \sin(120^\circ) \approx 1,12$



- 33 $\angle ADE = \angle AED = \frac{180^\circ - \angle DAE}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$
 $\angle CDE = \angle ADC - \angle ADE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$
 $\angle DEC = \angle DCE = \frac{180^\circ - \angle CDE}{2} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67\frac{1}{2}^\circ$
 $\angle BCE = \angle BCD - \angle DCE = 90^\circ - 67\frac{1}{2}^\circ = 22\frac{1}{2}^\circ$
 Stel $AD = BC = x$.
 In $\triangle ADE$ is $AE = AD = x$ en $DE = \sqrt{2} \cdot AD = x\sqrt{2}$.
 In $\triangle CDE$ is $CD = DE = x\sqrt{2}$.
 $BE = AB - AE = CD - AE = x\sqrt{2} - x$
 In $\triangle BCE$ is $\tan(22\frac{1}{2}^\circ) = \frac{BE}{BC} = \frac{x\sqrt{2} - x}{x} = \frac{x(\sqrt{2} - 1)}{x} = \sqrt{2} - 1$.

- 34 a Zie de figuur hiernaast met $AM = BM = 2$ en $AN = BN = 3$.
 $AMBN$ is een vlieger met MN als symmetrieas, dus MN gaat door het midden R van AB en staat loodrecht op AB .
 Stel $MR = x$, dan is $NR = 4 - x$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle AMR$ geeft $AR^2 = 2^2 - x^2$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle ANR$ geeft $AR^2 = 3^2 - (4 - x)^2$.
 Dus $4 - x^2 = 9 - (16 - 8x + x^2)$
 $4 - x^2 = 9 - 16 + 8x - x^2$
 $8x = 11$
 $x = 1\frac{3}{8}$
 $AR^2 = 2^2 - x^2 = 2^2 - (1\frac{3}{8})^2 = \frac{135}{64}$ geeft $AR = \sqrt{\frac{135}{64}} = \frac{\sqrt{135}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{8} = \frac{3}{8}\sqrt{15}$
 Dus $AB = 2AR = \frac{3}{4}\sqrt{15}$.



b Zie de figuur hiernaast.

$\angle NDS = 90^\circ$ en $\angle MCS = 90^\circ$ (stelling raaklijn aan cirkel)

$$\left. \begin{array}{l} \angle NDS = \angle MCS \text{ (rechte hoek)} \\ \angle NSD = \angle MSC \end{array} \right\} \Delta DNS \sim \Delta CMS \text{ dus } \frac{DN}{CM} = \frac{NS}{MS}$$

Stel $MS = x$, dan is $NS = x + 4$.

$$\text{Dit geeft } \frac{3}{2} = \frac{x+4}{x}$$

$$3x = 2(x+4)$$

$$3x = 2x + 8$$

$$x = 8, \text{ dus } MS = 8$$

Zie de figuur hiernaast.

$\angle PQS = 90^\circ$ (stelling raaklijn aan cirkel)

$$\left. \begin{array}{l} \angle MCS = \angle PQS \text{ (rechte hoek)} \\ \angle MSC = \angle PSQ \end{array} \right\} \Delta CMS \sim \Delta QPS \text{ dus } \frac{CM}{PQ} = \frac{MS}{PS}$$

Stel de straal van c_3 is r .

Dan is $PQ = r$ en $PS = 8 - 2 - r = 6 - r$.

$$\text{Dit geeft } \frac{2}{r} = \frac{8}{6-r}$$

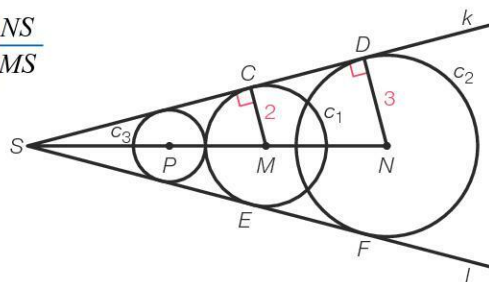
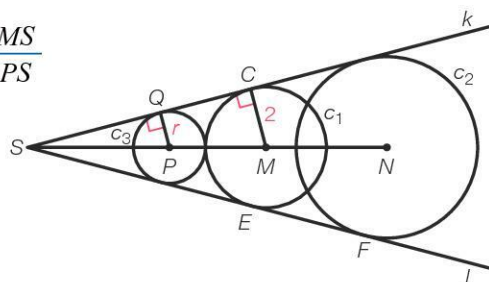
$$8r = 2(6-r)$$

$$8r = 12 - 2r$$

$$10r = 12$$

$$r = 1\frac{1}{5}$$

De straal van c_3 is $1\frac{1}{5}$.



35 Stel $AM = BM = r$. Zie de figuur hiernaast.

AB is een middellijn van c_1 , dus $\angle AMB = 90^\circ$ (stelling van Thales).

$\triangle ABM$ is een gelijkbenige rechthoekige driehoek, dus $AB = r\sqrt{2}$.

De straal van c_1 is $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$ en de oppervlakte van c_1 is $\pi \cdot (\frac{1}{2}r\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$.

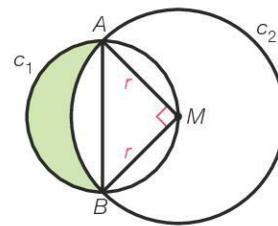
$$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BM = \frac{1}{2}r^2$$

De oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door lijnstuk AB

en cirkel c_2 is $\frac{90}{360} \cdot \pi r^2 - O(\triangle ABM) = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2$.

De oppervlakte van het groene gebied is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 - (\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2) = \frac{1}{2}r^2$.

Dus de oppervlakte van het groene gebied is gelijk aan de oppervlakte van driehoek ABM .



36 Zie de figuur hiernaast.

Stel $BE = x$, dan is $AE = x + 11$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle BCE$ geeft $CE^2 = 13^2 - x^2$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ACE$ geeft $CE^2 = 20^2 - (x + 11)^2$.

$$\text{Dus } 169 - x^2 = 400 - (x^2 + 22x + 121)$$

$$169 - x^2 = 400 - x^2 - 22x - 121$$

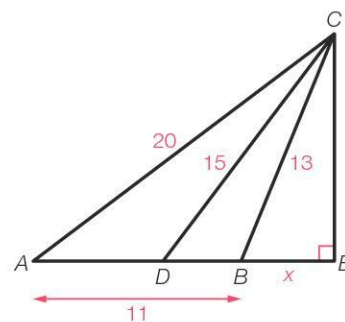
$$22x = 110$$

$$x = 5$$

Dus $BE = 5$, $AE = 11 + 5 = 16$ en $CE^2 = 13^2 - 5^2 = 144$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle CDE$ geeft $DE = \sqrt{15^2 - 144} = 9$.

Dus $AD = AE - DE = 16 - 9 = 7$.



4 Vergelijkingen en herleidingen

Bladzijde 190

37 a $\begin{cases} 2x + 3y = 58 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases} \begin{matrix} |2 \\ |3 \end{matrix}$ geeft $\begin{cases} 4x + 6y = 116 \\ 15x - 6y = 36 \end{cases} +$
 $\frac{19x}{19} = 152 +$
 $x = 8$
 $5x - 2y = 12 \Rightarrow 5 \cdot 8 - 2y = 12$
 $40 - 2y = 12$
 $-2y = -28$
 $y = 14$

Dus $(x, y) = (8, 14)$.

b $2x + y = 13$ geeft $y = -2x + 13$

Substitutie van $y = -2x + 13$ in $x^2 + y^2 = 58$ geeft $x^2 + (-2x + 13)^2 = 58$

$$x^2 + 4x^2 - 52x + 169 = 58$$

$$5x^2 - 52x + 111 = 0$$

$$D = (-52)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 111 = 484$$

$$x = \frac{52 \pm 22}{10} = 7\frac{2}{5} \vee x = \frac{52 - 22}{10} = 3$$

$$x = 3 \text{ geeft } y = -2 \cdot 3 + 13 = 7$$

$$x = 7\frac{2}{5} \text{ geeft } y = -2 \cdot 7\frac{2}{5} + 13 = -1\frac{4}{5}$$

Dus $(x, y) = (3, 7) \vee (x, y) = (7\frac{2}{5}, -1\frac{4}{5})$.

c $\begin{cases} 0,4x - 0,32y = 2 \\ 0,6x - 0,28y = 5 \end{cases} \begin{matrix} |6 \\ |4 \end{matrix}$ geeft $\begin{cases} 2,4x - 1,92y = 12 \\ 2,4x - 1,12y = 20 \end{cases} -$
 $-0,8y = -8$
 $y = 10$
 $0,4x - 0,32y = 2 \Rightarrow \begin{cases} 0,4x - 0,32 \cdot 10 = 2 \\ 0,4x - 3,2 = 2 \\ 0,4x = 5,2 \\ x = 13 \end{cases}$

Dus $(x, y) = (13, 10)$.

d $x + 5y = 17$ geeft $x = -5y + 17$

Substitutie van $x = -5y + 17$ in $(2x - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 73$ geeft

$$(2(-5y + 17) - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 73$$

$$(-10y + 34 - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 73$$

$$(-10y + 33)^2 + (3y - 1)^2 = 73$$

$$100y^2 - 660y + 1089 + 9y^2 - 6y + 1 = 73$$

$$109y^2 - 666y + 1017 = 0$$

$$D = (-666)^2 - 4 \cdot 109 \cdot 1017 = 144$$

$$y = \frac{666 \pm 12}{218} = 3\frac{12}{109} \vee y = \frac{666 - 12}{218} = 3$$

$$y = 3 \text{ geeft } x = -5 \cdot 3 + 17 = 2$$

$$y = 3\frac{12}{109} \text{ geeft } x = -5 \cdot 3\frac{12}{109} + 17 = 1\frac{49}{109}$$

Dus $(x, y) = (2, 3) \vee (x, y) = (1\frac{49}{109}, 3\frac{12}{109})$.

38 a De grafiek gaat door $(0, 0)$.

$$f(0) = 0 \text{ geeft } 0 + 0 + 0 + d = 0, \text{ dus } d = 0.$$

b $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ geeft $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f'(0) = 0 \text{ geeft } 0 + 0 + c = 0, \text{ dus } c = 0.$$

c $f(x) = ax^3 + bx^2$

De grafiek gaat door de punten $(6, 4)$ en $(12, 0)$.

$$f(6) = 4 \text{ geeft } 216a + 36b = 4 \text{ oftewel } 54a + 9b = 1.$$

$$f(12) = 0 \text{ geeft } 1728a + 144b = 0 \text{ oftewel } b = -12a.$$

Substitutie van $b = -12a$ in $54a + 9b = 1$ geeft $54a + 9 \cdot -12a = 1$

$$54a - 108a = 1$$

$$-54a = 1$$

$$a = -\frac{1}{54}$$

$$a = -\frac{1}{54} \text{ geeft } b = -12 \cdot -\frac{1}{54} = \frac{2}{9}$$

- 39** Stel a is het aantal rails van 7 cm, b is het aantal rails van 15 cm, en c is het aantal rails van 22 cm.

Dan geldt $7a + 15b = 95$, $7a + 22c = 189$ en $15b + 22c = 214$.

$$\begin{cases} 7a + 15b = 95 \\ 7a + 22c = 189 \end{cases} \quad \underline{-}$$

$$15b - 22c = -94$$

$$\begin{cases} 15b - 22c = -94 \\ 15b + 22c = 214 \end{cases} \quad \underline{+}$$

$$30b = 120$$

$$b = 4$$

$$15b - 22c = -94 \quad \left. \begin{array}{l} 15 \cdot 4 - 22c = -94 \\ 60 - 22c = -94 \end{array} \right\}$$

$$-22c = -154$$

$$c = 7$$

Dus Finn heeft zeven stukken rail van 22 cm.

40 a $17 - (2x - 1)^4 = 1$

$$(2x - 1)^4 = 16$$

$$2x - 1 = 2 \vee 2x - 1 = -2$$

$$2x = 3 \vee 2x = -1$$

$$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

b $x^6 - 6x^3 + 5 = 0$

$$\text{Stel } x^3 = u.$$

$$u^2 - 6u + 5 = 0$$

$$(u - 1)(u - 5) = 0$$

$$u = 1 \vee u = 5$$

$$x^3 = 1 \vee x^3 = 5$$

$$x = 1 \vee x = \sqrt[3]{5}$$

c $10x^4 = 17x^2 + 657$

$$10x^4 - 17x^2 - 657 = 0$$

$$\text{Stel } x^2 = u.$$

$$10u^2 - 17u - 657 = 0$$

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot 10 \cdot -657 = 26569$$

$$u = \frac{17 + 163}{20} = 9 \vee u = \frac{17 - 163}{20} = -7\frac{3}{10}$$

$$x^2 = 9 \vee x^2 = -7\frac{3}{10}$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

d Stel $f(x) = x^3 + 5x$ en $g(x) = 6x^2$.

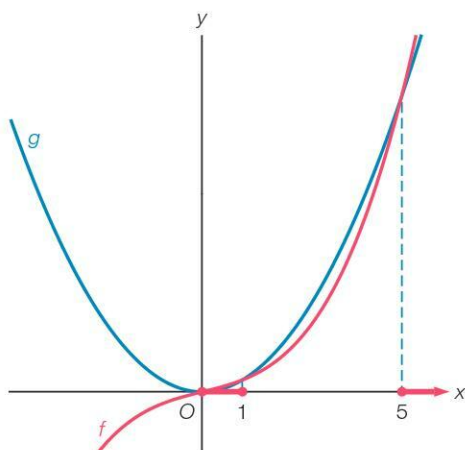
$$f(x) = g(x) \text{ geeft } x^3 + 5x = 6x^2$$

$$x^3 - 6x^2 + 5x = 0$$

$$x(x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$x(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 5$$



$$x^3 + 5x \geq 6x^2 \text{ geeft } 0 \leq x \leq 1 \vee x \geq 5$$

e $(2x - 1)^4 - 5(2x - 1)^2 + 4 = 0$

Stel $(2x - 1)^2 = u$.

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

$$(u - 1)(u - 4) = 0$$

$$u = 1 \vee u = 4$$

$$(2x - 1)^2 = 1 \vee (2x - 1)^2 = 4$$

$$2x - 1 = 1 \vee 2x - 1 = -1 \vee 2x - 1 = 2 \vee 2x - 1 = -2$$

$$2x = 2 \vee 2x = 0 \vee 2x = 3 \vee 2x = -1$$

$$x = 1 \vee x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

f $x^3 - 3x\sqrt{x} - 108 = 0$

Stel $x\sqrt{x} = u$.

$$u^2 - 3u - 108 = 0$$

$$(u + 9)(u - 12) = 0$$

$$u = -9 \vee u = 12$$

$$x\sqrt{x} = -9 \vee x\sqrt{x} = 12$$

$$x\sqrt{x} = -9 \text{ heeft geen oplossingen.}$$

$$x\sqrt{x} = 12 \text{ kwadrateren geeft } x^3 = 144$$

$$x = \sqrt[3]{144}$$

$$x = \sqrt[3]{144} \text{ geeft } \sqrt[3]{144} \cdot \sqrt[3]{144} = 12 \text{ vold.}$$

Bladzijde 191

41 a $x^5 - 16x^3 + 28x = 0$

$$x(x^4 - 16x^2 + 28) = 0$$

$$x = 0 \vee x^4 - 16x^2 + 28 = 0$$

Stel $x^2 = u$.

$$x = 0 \vee u^2 - 16u + 28 = 0$$

$$x = 0 \vee (u - 2)(u - 14) = 0$$

$$x = 0 \vee u = 2 \vee u = 14$$

$$x = 0 \vee x^2 = 2 \vee x^2 = 14$$

$$x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{14} \vee x = -\sqrt{14}$$

b Stel $f(x) = x^4$ en $g(x) = x^2 + 12$.

$$f(x) = g(x) \text{ geeft } x^4 = x^2 + 12$$

$$x^4 - x^2 - 12 = 0$$

Stel $x^2 = u$.

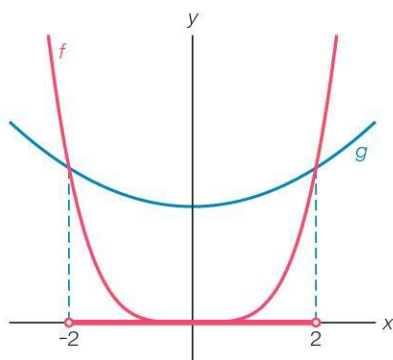
$$u^2 - u - 12 = 0$$

$$(u + 3)(u - 4) = 0$$

$$u = -3 \vee u = 4$$

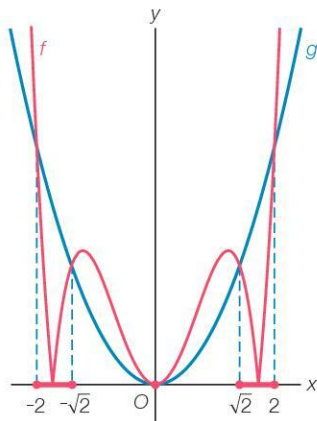
$$x^2 = -3 \vee x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$



$$x^4 < x^2 + 12 \text{ geeft } -2 < x < 2$$

- c Stel $f(x) = |x^4 - 3x^2|$ en $g(x) = x^2$.
 $f(x) = g(x)$ geeft $x^4 - 3x^2 = x^2 \vee x^4 - 3x^2 = -x^2$
 $x^4 - 4x^2 = 0 \vee x^4 - 2x^2 = 0$
 $x^2(x^2 - 4) = 0 \vee x^2(x^2 - 2) = 0$
 $x^2 = 0 \vee x^2 = 4 \vee x^2 = 2$
 $x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$



$$|x^4 - 3x^2| \leq x^2 \text{ geeft } -2 \leq x \leq -\sqrt{2} \vee x = 0 \vee \sqrt{2} \leq x \leq 2$$

- d $6x^5 + 10x^2 \cdot \sqrt{x} - 464 = 0$
 $3x^5 + 5x^2 \cdot \sqrt{x} - 232 = 0$
 Stel $x^2 \cdot \sqrt{x} = u$.
 $3u^2 + 5u - 232 = 0$
 $D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot -232 = 2809$
 $u = \frac{-5 \pm 53}{6} = 8 \vee u = \frac{-5 - 53}{6} = -9\frac{2}{3}$
 $x^2 \cdot \sqrt{x} = 8 \vee x^2 \cdot \sqrt{x} = -9\frac{2}{3}$
 $x^2 \cdot \sqrt{x} = -9\frac{2}{3}$ heeft geen oplossingen.
 $x^2 \cdot \sqrt{x} = 8$ kwadrateren geeft $x^5 = 64$

$$x = \sqrt[5]{64}$$

$$x = \sqrt[5]{64} \text{ geeft } (\sqrt[5]{64})^2 \cdot \sqrt[5]{64} = 8 \text{ vold.}$$

- 42 a inhoud kubus $= 2^3 = 8$
 oppervlakte kubus $= 6 \cdot 2^2 = 24$
 lengte ribben $= 12 \cdot 2 = 24$
 Zo krijg je som $= 8 + 24 + 24 = 56$.

- b Stel de ribbe x .
 inhoud kubus $= x^3$
 oppervlakte kubus $= 6x^2$
 lengte ribben $= 12x$
 Er geldt $x^3 + 3 \cdot 6x^2 = 144x$
 $x^3 + 18x^2 - 144x = 0$
 $x(x^2 + 18x - 144) = 0$
 $x(x - 6)(x + 24) = 0$
 $x = 0 \vee x = 6 \vee x = -24$

Dus de ribbe is 6.

- c Stel de ribbe x .
 Er geldt $x^3 \cdot (6x^2 + 12x) = (6x^2)^2$
 $6x^5 + 12x^4 = 36x^4$
 $6x^5 - 24x^4 = 0$
 $6x^4(x - 4) = 0$
 $x = 0 \vee x = 4$

Dus de ribbe is 4.

43 a $(2x^2 - 1)^2 = x^2$
 $2x^2 - 1 = x \vee 2x^2 - 1 = -x$
 $2x^2 - x - 1 = 0 \quad \vee \quad 2x^2 + x - 1 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9 \quad D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$
 $x = \frac{1+3}{4} = 1 \vee x = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \vee x = \frac{-1-3}{4} = -1$

b $\sqrt{2-2x} + 2x = 0$
 $\sqrt{2-2x} = -2x$
kwadrateren geeft
 $2 - 2x = 4x^2$
 $-4x^2 - 2x + 2 = 0$
 $2x^2 + x - 1 = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$
 $x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \vee x = \frac{-1-3}{4} = -1$
 $x = \frac{1}{2}$ geeft $\sqrt{2 - 2 \cdot \frac{1}{2}} = -1$ vold. niet
 $x = -1$ geeft $\sqrt{2 - 2 \cdot -1} = 2$ vold.

c $\frac{2x+4}{x} = \frac{12}{x+1}$
 $(2x+4)(x+1) = 12x$
 $2x^2 + 2x + 4x + 4 = 12x$
 $2x^2 - 6x + 4 = 0$
 $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $(x-1)(x-2) = 0$
 $x = 1 \vee x = 2$
vold. vold.

d $\sqrt{3x-2} + 2 = x$
 $\sqrt{3x-2} = x-2$
kwadrateren geeft
 $3x-2 = (x-2)^2$
 $3x-2 = x^2 - 4x + 4$
 $-x^2 + 7x - 6 = 0$
 $x^2 - 7x + 6 = 0$
 $(x-1)(x-6) = 0$
 $x = 1 \vee x = 6$
 $x = 1$ geeft $\sqrt{3 \cdot 1 - 2} = -1$ vold. niet
 $x = 6$ geeft $\sqrt{3 \cdot 6 - 2} = 4$ vold.

e $(2x-3)(x^2-3) + 3 = 2x$
 $(2x-3)(x^2-3) = 2x-3$
 $2x-3 = 0 \vee x^2-3 = 1$
 $2x = 3 \vee x^2 = 4$
 $x = 1\frac{1}{2} \vee x = 2 \vee x = -2$

f $\frac{x^2-9}{2x+3} = \frac{x^2-9}{x+4}$
 $x^2-9 = 0 \vee 2x+3 = x+4$
 $x^2 = 9 \vee x = 1$
 $x = 3 \vee x = -3 \vee x = 1$
vold. vold. vold.

44 a $(x^3 - 2x + 1)(2x + 1) = 2x + 1$
 $2x + 1 = 0 \vee x^3 - 2x + 1 = 1$
 $2x = -1 \vee x^3 - 2x = 0$
 $x = -\frac{1}{2} \vee x(x^2 - 2) = 0$
 $x = -\frac{1}{2} \vee x = 0 \vee x^2 = 2$
 $x = -\frac{1}{2} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad & \frac{x^3}{x+2} = \frac{4x}{x+2} \\ & x^3 = 4x \\ & x^3 - 4x = 0 \\ & x(x^2 - 4) = 0 \\ & x = 0 \vee x^2 = 4 \\ & x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2 \\ & \text{vold.} \quad \text{vold.} \quad \text{vold. niet} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad & \frac{3(x^3 - 5) + 21}{x^3 + 1} = 0 \\ & 3(x^3 - 5) + 21 = 0 \\ & 3(x^3 - 5) = -21 \\ & x^3 - 5 = -7 \\ & x^3 = -2 \\ & x = \sqrt[3]{-2} \text{ vold.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad & \sqrt{x^2 + 2x} + x = 6 \\ & \sqrt{x^2 + 2x} = 6 - x \\ & \text{kwadrateren geeft} \\ & x^2 + 2x = (6 - x)^2 \\ & x^2 + 2x = 36 - 12x + x^2 \\ & 14x = 36 \\ & x = 2\frac{4}{7} \\ & x = 2\frac{4}{7} \text{ geeft } \sqrt{(2\frac{4}{7})^2 + 2 \cdot 2\frac{4}{7}} + 2\frac{4}{7} = 6 \text{ vold.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad & x^3 - 26x\sqrt{x} = 27 \\ & x^3 - 26x\sqrt{x} - 27 = 0 \\ & \text{Stel } x\sqrt{x} = u. \\ & u^2 - 26u - 27 = 0 \\ & (u + 1)(u - 27) = 0 \\ & u = -1 \vee u = 27 \\ & x\sqrt{x} = -1 \vee x\sqrt{x} = 27 \\ & x\sqrt{x} = -1 \text{ heeft geen oplossingen.} \\ & x\sqrt{x} = 27 \text{ kwadrateren geeft } x^3 = 729 \\ & \quad \quad \quad x = 9 \\ & \quad \quad \quad x = 9 \text{ geeft } 9\sqrt{9} = 27 \text{ vold.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f} \quad & \frac{x^2 - 1}{2x + 2} = 5x \\ & x^2 - 1 = 5x(2x + 2) \\ & x^2 - 1 = 10x^2 + 10x \\ & 9x^2 + 10x + 1 = 0 \\ & D = 10^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 64 \\ & x = \frac{-10 \pm 8}{18} = -\frac{1}{9} \vee x = \frac{-10 - 8}{18} = -1 \\ & \text{vold.} \quad \quad \quad \text{vold. niet} \end{aligned}$$

$$45 \quad \text{a} \quad y = \frac{x^4 - x^2}{x - 1} = \frac{x^2(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{x^2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x^2(x + 1) \text{ mits } x \neq 1$$

$$\text{b} \quad y = \frac{15x}{x + 2} - 2x = \frac{15x}{x + 2} - \frac{2x(x + 2)}{x + 2} = \frac{15x - 2x^2 - 4x}{x + 2} = \frac{-2x^2 + 11x}{x + 2}$$

$$\text{c} \quad y = \frac{10 - \frac{2x}{x + 3}}{5 + \frac{2}{x + 3}} = \frac{\left(10 - \frac{2x}{x + 3}\right) \cdot (x + 3)}{\left(5 + \frac{2}{x + 3}\right) \cdot (x + 3)} = \frac{10(x + 3) - 2x}{5(x + 3) + 2} = \frac{8x + 30}{5x + 17} \text{ mits } x \neq -3$$

$$\text{d} \quad N = \frac{3t^3 + 3t^2 - 6t}{t^2 + 2t} = \frac{3t(t^2 + t - 2)}{t(t + 2)} = \frac{3t(t - 1)(t + 2)}{t(t + 2)} = 3t - 3 \text{ mits } t \neq 0 \wedge t \neq -2$$

$$\begin{aligned} \text{e } K &= \frac{2a}{a+2} \left(\frac{a-1}{2a} - \frac{a+2}{a^2} \right) = \frac{2a}{a+2} \cdot \frac{a(a-1) - 2(a+2)}{2a^2} = \frac{2a}{a+2} \cdot \frac{a^2 - a - 2a - 4}{2a^2} \\ &= \frac{2a(a^2 - 3a - 4)}{2a^2(a+2)} = \frac{a^2 - 3a - 4}{a(a+2)} \\ \text{f } P &= \frac{\frac{q^2}{q^2+1} - 2}{\frac{q}{q^2+1} - 2q} = \frac{\left(\frac{q^2}{q^2+1} - 2 \right) \cdot (q^2+1)}{\left(\frac{q}{q^2+1} - 2q \right) \cdot (q^2+1)} = \frac{q^2 - 2(q^2+1)}{q - 2q(q^2+1)} = \frac{-q^2 - 2}{-2q^3 - q} = \frac{q^2 + 2}{2q^3 + q} \end{aligned}$$

Bladzijde 192

$$\begin{aligned} 46 \text{ a } T &= \frac{(2t-1)(t+2)}{2t^2} = \frac{2t^2 + 4t - t - 2}{2t^2} = \frac{2t^2 + 3t - 2}{2t^2} = 1 + \frac{3}{2t} - \frac{1}{t^2} \\ \text{b } B &= 12a - 6 \cdot \frac{\frac{a}{a^2+1} - 2}{5a} = 12a - 6 \cdot \frac{\left(\frac{a}{a^2+1} - 2 \right) \cdot (a^2+1)}{5a \cdot (a^2+1)} = 12a - 6 \cdot \frac{a - 2(a^2+1)}{5a(a^2+1)} \\ &= 12a - 6 \cdot \frac{a - 2a^2 - 2}{5a(a^2+1)} = 12a + \frac{12a^2 - 6a + 12}{5a(a^2+1)} \\ \text{c } &\text{Substitutie van } y = \frac{4x}{x-1} \text{ in } K = \frac{3y-2}{2y-1} \text{ geeft} \\ K &= \frac{3\left(\frac{4x}{x-1}\right) - 2}{2\left(\frac{4x}{x-1}\right) - 1} = \frac{\left(3\left(\frac{4x}{x-1}\right) - 2\right) \cdot (x-1)}{\left(2\left(\frac{4x}{x-1}\right) - 1\right) \cdot (x-1)} = \frac{3 \cdot 4x - 2(x-1)}{2 \cdot 4x - (x-1)} = \frac{10x+2}{7x+1} \text{ mits } x \neq 1. \end{aligned}$$

$$47 \text{ a } f^{\text{inv}}(x) = 3 \text{ geeft } x = f(3) = \frac{3 \cdot 3 + 1}{3 - 2} = 10$$

$$\text{b } g^{\text{inv}}(x) = x^2 \text{ geeft } x = g(x^2)$$

$$x = 1 + \frac{3}{x^2 - 3}$$

$$x - 1 = \frac{3}{x^2 - 3}$$

$$(x^2 - 3)(x - 1) = 3$$

$$x^3 - x^2 - 3x + 3 = 3$$

$$x^3 - x^2 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - x - 3) = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 - x - 3 = 0$$

vold.

$$\text{Van } x^2 - x - 3 = 0 \text{ is } D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 13, \text{ dus } x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} \vee x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

vold.

vold.

$$\text{c } \text{Voor } h \text{ geldt } y = a + \frac{3x-1}{2x+1}, \text{ dus voor } h^{\text{inv}} \text{ geldt } x = a + \frac{3y-1}{2y+1}.$$

$$x = a + \frac{3y-1}{2y+1} \text{ geeft } x(2y+1) = a(2y+1) + 3y-1$$

$$2xy + x = 2ay + a + 3y - 1$$

$$2xy - 2ay - 3y = -x + a - 1$$

$$y(2x - 2a - 3) = -x + a - 1$$

$$y = \frac{-x + a - 1}{2x - 2a - 3} = \frac{-x + a - 1}{2x - (2a + 3)}$$

$$\text{Dus } h^{\text{inv}}(x) = \frac{-x + a - 1}{2x - (2a + 3)}.$$

$$k(x) = 2 - \frac{5x-25}{2x-11} = \frac{2(2x-11)}{2x-11} - \frac{5x-25}{2x-11} = \frac{4x-22-(5x-25)}{2x-11} = \frac{-x+3}{2x-11}$$

Dus er moet gelden $a - 1 = 3$ en $2a + 3 = 11$.

Hieruit volgt $a = 4$.

48 a $px^3 + 2px^2 + x^2 + 2\frac{1}{4}x = 0$

$$x(px^2 + 2px + x + 2\frac{1}{4}) = 0$$

$$x = 0 \vee px^2 + 2px + x + 2\frac{1}{4} = 0$$

$$x = 0 \vee px^2 + (2p + 1)x + 2\frac{1}{4} = 0$$

De vergelijking heeft drie oplossingen als $px^2 + (2p + 1)x + 2\frac{1}{4} = 0$ twee oplossingen heeft.

$p = 0$ geeft $x + 2\frac{1}{4} = 0$, dus één oplossing.

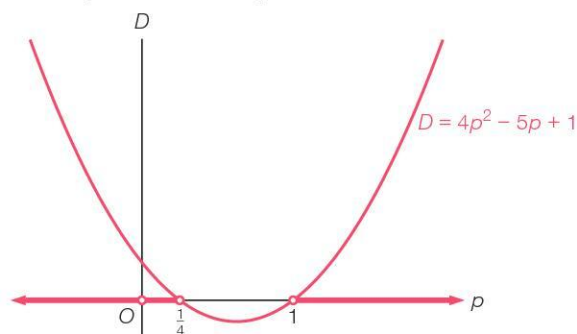
$$\text{Voor } p \neq 0 \text{ is } D = (2p + 1)^2 - 4 \cdot p \cdot 2\frac{1}{4} = 4p^2 + 4p + 1 - 9p = 4p^2 - 5p + 1.$$

Twee oplossingen als $D > 0$, dus als $4p^2 - 5p + 1 > 0$.

$$4p^2 - 5p + 1 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$$

$$p = \frac{5+3}{8} = 1 \vee p = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$



De vergelijking heeft drie oplossingen voor $p < 0 \vee 0 < p < \frac{1}{4} \vee p > 1$.

b $2px^4 - px^3 + 5x^3 + 2x^2 = 0$

$$x^2(2px^2 - px + 5x + 2) = 0$$

$$x^2 = 0 \vee 2px^2 - px + 5x + 2 = 0$$

$$x = 0 \vee 2px^2 + (-p + 5)x + 2 = 0$$

De vergelijking heeft precies één oplossing als $2px^2 + (-p + 5)x + 2 = 0$ geen oplossingen heeft.

$p = 0$ geeft $5x + 2 = 0$, dus één oplossing.

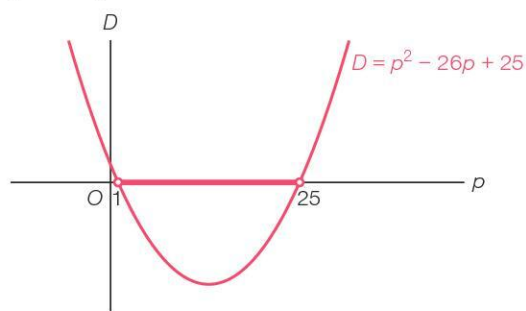
$$\text{Voor } p \neq 0 \text{ is } D = (-p + 5)^2 - 4 \cdot 2p \cdot 2 = p^2 - 10p + 25 - 16p = p^2 - 26p + 25.$$

Geen oplossingen als $D < 0$, dus als $p^2 - 26p + 25 < 0$.

$$p^2 - 26p + 25 = 0$$

$$(p - 1)(p - 25) = 0$$

$$p = 1 \vee p = 25$$



De vergelijking heeft precies één oplossing voor $1 < p < 25$.

49 $f(x) = \frac{10x}{x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 10 - 10x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{10x^2 + 10 - 20x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$

rc_{raaklijn} = $-\frac{4}{5}$ geeft $\frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4}{5}$

$$-4(x^2 + 1)^2 = 5(-10x^2 + 10)$$

$$-4(x^4 + 2x^2 + 1) = -50x^2 + 50$$

$$-4x^4 - 8x^2 - 4 = -50x^2 + 50$$

$$-4x^4 + 42x^2 - 54 = 0$$

$$2x^4 - 21x^2 + 27 = 0$$

$$\text{Stel } x^2 = u.$$

$$2u^2 - 21u + 27 = 0$$

$$D = (-21)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 27 = 225$$

$$u = \frac{21 \pm 15}{4} = 9 \vee u = \frac{21 - 15}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 9 \vee x^2 = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 3 \vee x = -3 \vee x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$$

$$\text{vold.} \quad \text{vold.} \quad \text{vold.} \quad \text{vold.}$$

Verantwoording

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

*De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie.
Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontleen.*

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73535-7



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.