

& GETAL RUIMTE

B



Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen
vwo B deel 2

Twaalfde editie, 2020

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

Inhoud

5	Machten, exponenten en logaritmen	4
6	Differentiaalrekening	38
7	Meetkunde met coördinaten	80
8	Goniometrische functies	115
	Gemengde opgaven	148

5 Machten, exponenten en logaritmen

Voorkennis Herleiden van machten

Bladzijde 10

- 1** a $x^2 \cdot x^3 = x^5$
b $2p^3 \cdot 3p^2 = 6p^5$
c $4a^2b \cdot 5a^3b^2 = 20a^5b^3$
- 2** a $(p^2q)^3 = p^6q^3$
b $(3x^2)^3 = 27x^6$
c $(-5x^2y^3)^2 = 25x^4y^6$
- 3** a $\frac{12x^6}{4x^2} = 3x^4$
b $\frac{5x^{10}}{15x^5} = \frac{x^5}{3} = \frac{1}{3}x^5$
c $\frac{24a^4b^2}{6ab} = 4a^3b$
- 4** a $\frac{-28a^6}{7a} = -4a^5$
b $-(3a^4)^2 = -9a^8$
c $(-2a^2)^5 = -32a^{10}$
- 5** a $(ab)^4 \cdot a = a^4b^4 \cdot a = a^5b^4$
b $(-2ab)^3 \cdot b = -8a^3b^3 \cdot b = -8a^3b^4$
c $(3a)^2 + (2b)^2 = 9a^2 + 4b^2$
- 6** a $a^{2n} \cdot a^{n-1} = a^{2n+n-1} = a^{3n-1}$
b $a^{n^2-1} \cdot a^{n-1} = a^{n^2-1+n-1} = a^{n^2+n-2}$
c $\frac{a^{n^2-n}}{a^{n-1}} = a^{n^2-n-(n-1)} = a^{n^2-n-n+1} = a^{n^2-2n+1}$
- d** $-2p^4q^3 \cdot -3pq = 6p^5q^4$
e $5x^2y \cdot 2x - 3x^3y = 10x^3y - 3x^3y = 7x^3y$
f $12a^4b \cdot \frac{1}{4}ab - 8ab = 3a^5b^2 - 8ab$
- d** $(-4ab^4)^2 = 16a^2b^8$
e $(3a)^2 \cdot (2a^2)^3 = 9a^2 \cdot 8a^6 = 72a^8$
f $(3a^3)^2 + (2a^2)^3 = 9a^6 + 8a^6 = 17a^6$
- d** $\frac{-15p^6q}{5p^2q} = -3p^4$
e $\frac{10x^3y^2}{5x^2y} = 2xy$
f $\frac{(2ab)^3}{(3ab)^2} = \frac{8a^3b^3}{9a^2b^2} = \frac{8}{9}ab$
- d** $(-a^3)^3 = -a^9$
e $(5a)^3 \cdot -3a = 125a^3 \cdot -3a = -375a^4$
f $\left(\frac{9a^4}{a}\right)^2 = (9a^3)^2 = 81a^6$
- d** $(3a)^3 - 8a^3 = 27a^3 - 8a^3 = 19a^3$
e $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (-a)^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2 = 1\frac{1}{4}a^2$
f $(5a^4)^2 + (-a^2)^4 = 25a^8 + a^8 = 26a^8$

5.1 Machten met negatieve en gebroken exponenten

Bladzijde 11

- 1** a De exponenten worden telkens 1 minder en de getallen worden steeds door 2 gedeeld,
dus $2^1 = \frac{4}{2} = 2$, $2^0 = \frac{2}{2} = 1$, $2^{-1} = \frac{1}{2}$ en $2^{-2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.
- b** $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
 $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$
- c** $x^0 = 1$
 $x^{-1} = \frac{1}{x}$
 $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

Bladzijde 12

2 a $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$ f $\frac{\left(\frac{1}{a^5}\right)}{a} = \frac{a^{-5}}{a^1} = a^{-5-1} = a^{-6}$
b $a^4 \cdot \frac{1}{a^6} = a^4 \cdot a^{-6} = a^{-2}$ g $\frac{a}{a^{12}} = \frac{a^1}{a^{12}} = a^{1-12} = a^{-11}$
c $\frac{a^n}{\left(\frac{1}{a^4}\right)} = \frac{a^n}{a^{-4}} = a^{n+4}$ h $\frac{1}{a^8} \cdot (a^3)^n = a^{-8} \cdot a^{3n} = a^{-8+3n}$
d $\frac{a^8}{a^0} = a^{8-0} = a^8$ i $\frac{\left(\frac{1}{a^n}\right)}{a^{-3}} = \frac{a^{-n}}{a^{-3}} = a^{-n-(-3)} = a^{-n+3}$
e $(a^3)^{-2} = a^{-6}$

Bladzijde 13

3 a $6a^{-5}b^3 = 6 \cdot \frac{1}{a^5} \cdot b^3 = \frac{6b^3}{a^5}$
b $\frac{1}{3}a^{-3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{3a^3}$
c $(5a^{-4}b^2)^{-1} = 5^{-1} \cdot (a^{-4})^{-1} \cdot (b^2)^{-1} = \frac{1}{5}a^4b^{-2} = \frac{a^4}{5b^2}$
d $\frac{3}{5}a^{-4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{a^4} = \frac{3}{5a^4}$
e $\left(\frac{1}{2}a\right)^{-3} = (2^{-1} \cdot a)^{-3} = 2^3 \cdot a^{-3} = 8 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{8}{a^3}$
f $\frac{1}{6}a^{-2}b^4 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot b^4 = \frac{b^4}{6a^2}$
g $-4 \cdot (3a)^{-2} = -4 \cdot \frac{1}{(3a)^2} = -4 \cdot \frac{1}{9a^2} = -\frac{4}{9a^2}$
h $(3a)^{-2}b^{-3} = \frac{1}{(3a)^2} \cdot \frac{1}{b^3} = \frac{1}{9a^2b^3}$
i $\left(\frac{3}{8}a^{-1}b\right)^{-2} = \left(\frac{3}{8}\right)^{-2} \cdot (a^{-1})^{-2} \cdot b^{-2} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{64}{9} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{64a^2}{9b^2}$

4 Uit $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ en $(x^{\frac{1}{3}})^3 = x$ volgt $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Bladzijde 14

5 a $a \cdot \sqrt[3]{a} = a^1 \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{1\frac{1}{3}}$ f $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} = \sqrt[3]{a^{-2}} = a^{-\frac{2}{3}}$
b $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}}$ g $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$
c $\frac{1}{a} = \frac{1}{a^1} = a^{-1}$ h $\frac{1}{a^4} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{-4} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{-4+\frac{1}{3}} = a^{-\frac{11}{3}}$
d $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$ i $\frac{a^3}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a^3}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{3-\frac{1}{3}} = a^{\frac{8}{3}}$
e $a^2 \cdot \sqrt{a} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{2\frac{1}{2}}$

6 a $8\sqrt{2} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3\frac{1}{2}}$
b $\frac{1}{3}\sqrt{3} = 3^{-1} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{-1+\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$
c $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{2\frac{1}{6}}$
d $\frac{1}{100}\sqrt{10} = 10^{-2} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{-2+\frac{1}{2}} = 10^{-1\frac{1}{2}}$
e $\frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^{-2}} = 2^{-3} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{-3-\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{11}{3}}$
f $10 \cdot \sqrt[3]{0,1} = 10^1 \cdot \sqrt[3]{10^{-1}} = 10^1 \cdot 10^{-\frac{1}{3}} = 10^{1-\frac{1}{3}} = 10^{\frac{2}{3}}$

7 a $5a^{3\frac{1}{2}} = 5a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 5a^3 \cdot \sqrt[3]{a}$

b $\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{4}}b = \frac{b}{2a^{\frac{1}{4}}} = \frac{b}{2 \cdot \sqrt[4]{a}}$

c $3a^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{a^2}}$

d $\frac{2}{3}a^{-3} \cdot b^{1\frac{1}{2}} = \frac{2b^{1\frac{1}{2}}}{3a^3} = \frac{2b\sqrt{b}}{3a^3}$

e $\frac{1}{5}a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{5a^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{5\sqrt{a}}$

f $(5a)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(5a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5a}}$

8 a $\frac{x^6}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^6}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^6}{x^{2\frac{1}{2}}} = x^{6-2\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$

b $x \cdot \sqrt[7]{x^3} = x^1 \cdot x^{\frac{3}{7}} = x^{1\frac{3}{7}}$

c $\frac{x}{\sqrt[5]{x}} = \frac{x^1}{x^{\frac{1}{5}}} = x^{1-\frac{1}{5}} = x^{\frac{4}{5}}$

d $x^4 \cdot \sqrt{x} = x^4 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{4\frac{1}{2}}$

e $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{6}}$

f $\frac{x^4 \cdot \sqrt[5]{x}}{x^5 \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{x^4 \cdot x^{\frac{1}{5}}}{x^5 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^{4\frac{1}{5}}}{x^{5\frac{1}{4}}} = x^{4\frac{1}{5}-5\frac{1}{4}} = x^{-1\frac{1}{20}}$

9 De getallen als macht van 2 geschreven zijn: $2^0, 2^1, 2^{-1}, 2^2, 2^{-3}, 2^5, 2^{-8}, 2^{13}, 2^{-21}, 2^{34}, \dots$
Het tiende getal is dus 2^{34} .

10 a $y = (2x^2)^3 \cdot \frac{2}{x^{10}} = 8x^6 \cdot 2x^{-10} = 16x^{-4}$
Dus $y = 16x^{-4}$.

b $y = \frac{3}{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} = 3x^{-1} \cdot x^{\frac{3}{4}} = 3x^{-1+\frac{3}{4}} = 3x^{-\frac{1}{4}}$
Dus $y = 3x^{-\frac{1}{4}}$.

c $y = 3(\frac{1}{3}x^2)^{-2} \cdot 6x^2 = 3 \cdot (\frac{1}{3})^{-2} \cdot (x^2)^{-2} \cdot 6x^2 = 3 \cdot 9 \cdot x^{-4} \cdot 6x^2 = 162x^{-2}$
Dus $y = 162x^{-2}$.

d $y = \frac{5}{3x\sqrt{x}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = \frac{5}{3}x^{-1\frac{1}{2}}$
Dus $y = \frac{5}{3}x^{-1\frac{1}{2}}$.

11 a $y = \frac{5}{x\sqrt{x}} = \frac{5}{x^{1\frac{1}{2}}} = 5x^{-1\frac{1}{2}}$
Dus $y = 5x^{-1\frac{1}{2}}$.

b $y = 5x\sqrt{x^3} = 5x^1 \cdot x^{\frac{3}{2}} = 5x^{1+\frac{3}{2}} = 5x^{2\frac{1}{2}}$
Dus $y = 5x^{2\frac{1}{2}}$.

c $y = \frac{5}{x^3} \cdot 2\sqrt{x} = 5 \cdot x^{-3} \cdot 2x^{\frac{1}{2}} = 10x^{-3+\frac{1}{2}} = 10x^{-2\frac{1}{2}}$
Dus $y = 10x^{-2\frac{1}{2}}$.

d $y = 72x(\frac{1}{4}x\sqrt{x})^3 = 72x \cdot (\frac{1}{4})^3 \cdot (x^{\frac{1}{2}})^3 = 72x \cdot \frac{1}{64} \cdot x^{4\frac{1}{2}} = \frac{9}{8}x^{5\frac{1}{2}}$
Dus $y = \frac{9}{8}x^{5\frac{1}{2}}$.

Bladzijde 15

12 a $(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 10^{\frac{3}{2}}$

b $(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 10^{\frac{3}{2}}$
 $x^1 = 10^1 \cdot 10^{\frac{1}{2}}$
 $x = 10\sqrt{10}$

$$\begin{aligned} 13 \quad \mathbf{a} \quad x^{\frac{2}{3}} &= 9 \\ x &= 9^{\frac{3}{2}} \\ x &= 9\sqrt{9} = 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad 8x^{-1\frac{1}{2}} &= 1 \\ x^{-1\frac{1}{2}} &= \frac{1}{8} \\ x &= \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \\ x &= (2^{-3})^{-\frac{2}{3}} \\ x &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \quad 5 - 2x^{-3} &= 4 \\ -2x^{-3} &= -1 \\ x^{-3} &= \frac{1}{2} \\ x &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \\ x &= (2^{-1})^{-\frac{1}{3}} \\ x &= 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \\ \mathbf{d} \quad \sqrt{(2x)^3} &= \frac{1}{8} \\ (2x)^3 &= \left(\frac{1}{8}\right)^2 \\ 8x^3 &= \frac{1}{8^2} \\ x^3 &= \frac{1}{8^3} \\ x &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Bladzijde 16

$$\begin{aligned} 14 \quad \mathbf{a} \quad \frac{1}{3}x^{1\frac{1}{2}} &= 2\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x^{1\frac{1}{2}} \\ \frac{2}{3}x^{1\frac{1}{2}} &= 2\frac{2}{3} \\ x^{\frac{3}{2}} &= 4 \\ x &= 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad 3 \cdot \sqrt[4]{(2x)^{-1}} &= 6 \\ \sqrt[4]{(2x)^{-1}} &= 2 \\ (2x)^{-\frac{1}{4}} &= 2 \\ 2x &= 2^{-4} \\ 2x &= \frac{1}{16} \\ x &= \frac{1}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \quad (x+9)^{-1\frac{1}{2}} &= \frac{8}{27} \\ x+9 &= \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \\ x+9 &= \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-\frac{2}{3}} \\ x+9 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} \\ x &= -6\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \quad \frac{1}{3}(x^2-3)^{2\frac{1}{2}} &= 81 \\ (x^2-3)^{2\frac{1}{2}} &= 243 \\ x^2-3 &= 243^{\frac{2}{3}} = (3^5)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9 \\ x^2 &= 12 \\ x &= \sqrt{12} \vee x = -\sqrt{12} \\ x &= 2\sqrt{3} \vee x = -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15 \quad (x^2+10)^{1\frac{1}{2}} &= 3x^2(x^2+10)^{\frac{1}{2}} \\ (x^2+10)^1 \cdot (x^2+10)^{\frac{1}{2}} &= 3x^2(x^2+10)^{\frac{1}{2}} \\ (x^2+10)^{\frac{1}{2}} &= 0 \vee x^2+10 = 3x^2 \\ x^2+10 &= 0 \vee 2x^2 = 10 \\ x^2 &= -10 \vee x^2 = 5 \\ x &= \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16 \quad y &= 27x^3 \\ 27x^3 &= y \\ x^3 &= \frac{1}{27}y \\ x &= \left(\frac{1}{27}y\right)^{\frac{1}{3}} \\ x &= \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} \\ x &= (3^{-3})^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} \\ x &= 3^{-1} \cdot y^{\frac{1}{3}} \\ x &= \frac{1}{3} \cdot y^{\frac{1}{3}} \\ \text{Dus } x &= \frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Bladzijde 17

17 a $y = 5x^{1\frac{1}{2}}$
 $5x^{1\frac{1}{2}} = y$
 $x^{\frac{3}{2}} = 0,2y$
 $x = (0,2y)^{\frac{2}{3}}$
 $x = 0,2^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}$
 $x \approx 0,34 \cdot y^{0,67}$
Dus $x = 0,34y^{0,67}$.

b $y = 0,1x^{-1\frac{2}{3}}$
 $0,1x^{-1\frac{2}{3}} = y$
 $x^{-\frac{5}{3}} = 10y$
 $x = (10y)^{-\frac{3}{5}}$
 $x = 10^{-\frac{3}{5}} \cdot y^{-\frac{3}{5}}$
 $x \approx 0,25 \cdot y^{-0,6}$
Dus $x = 0,25y^{-0,6}$.

c $y = 125x^{-2\frac{1}{2}}$
 $125x^{-2\frac{1}{2}} = y$
 $x^{-\frac{5}{2}} = 0,008y$
 $x = (0,008y)^{-\frac{2}{5}}$
 $x = 0,008^{-\frac{2}{5}} \cdot y^{-\frac{2}{5}}$
 $x \approx 6,90 \cdot y^{-0,4}$
Dus $x = 6,90y^{-0,4}$.

18 a $y = 15x \cdot \sqrt[3]{x} = 15x \cdot x^{\frac{1}{3}} = 15x^{1\frac{1}{3}}$
 $y = 15x^{1\frac{1}{3}}$ geeft $15x^{1\frac{1}{3}} = y$
 $x^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{15}y$
 $x = (\frac{1}{15}y)^{\frac{3}{4}}$
 $x = (\frac{1}{15})^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}}$
 $x \approx 0,13 \cdot y^{0,75}$
Dus $x = 0,13y^{0,75}$.

b $y = \frac{12}{x \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{12}{x \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \frac{12}{x^{1\frac{1}{4}}} = 12x^{-1\frac{1}{4}}$
 $y = 12x^{-1\frac{1}{4}}$ geeft $12x^{-1\frac{1}{4}} = y$
 $x^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{12}y$
 $x = (\frac{1}{12}y)^{-\frac{4}{5}}$
 $x = (\frac{1}{12})^{-\frac{4}{5}} \cdot y^{-\frac{4}{5}}$
 $x \approx 7,30 \cdot y^{-0,8}$
Dus $x = 7,30y^{-0,8}$.

$$\begin{aligned} \text{c } y &= \frac{6}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3}} = \frac{6}{x^2 \cdot x^{\frac{3}{5}}} = \frac{6}{x^{2\frac{3}{5}}} = 6x^{-2\frac{3}{5}} \\ y &= 6x^{-2\frac{3}{5}} \text{ geeft } 6x^{-2\frac{3}{5}} = y \\ x^{-\frac{13}{5}} &= \frac{1}{6}y \\ x &= \left(\frac{1}{6}y\right)^{-\frac{5}{13}} \\ x &= \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{5}{13}} \cdot y^{-\frac{5}{13}} \\ x &\approx 1,99 \cdot y^{-0,38} \end{aligned}$$

Dus $x = 1,99y^{-0,38}$.

$$\begin{aligned} \text{19 a } K &= 15q^{-1,6} \text{ geeft } 15q^{-1,6} = K \\ q^{-\frac{8}{5}} &= \frac{1}{15}K \\ q &= \left(\frac{1}{15}K\right)^{-\frac{5}{8}} \\ q &= \left(\frac{1}{15}\right)^{-\frac{5}{8}} \cdot K^{-\frac{5}{8}} \\ q &\approx 5,43 \cdot K^{-0,625} \end{aligned}$$

Dus $q = 5,43K^{-0,625}$.

$$\begin{aligned} \text{b } v &= 25t\sqrt{t} = 25t^{1\frac{1}{2}} \\ v &= 25t^{1\frac{1}{2}} \text{ geeft } 25t^{1\frac{1}{2}} = v \\ t^{\frac{3}{2}} &= 0,04v \\ t &= (0,04v)^{\frac{2}{3}} \\ t &= (0,04)^{\frac{2}{3}} \cdot v^{\frac{2}{3}} \\ t &\approx 0,12 \cdot v^{0,67} \end{aligned}$$

Dus $t = 0,12v^{0,67}$.

$$\begin{aligned} \text{20 } F &= \frac{m\sqrt{m}}{m\sqrt{m} - 1} \\ F(m\sqrt{m} - 1) &= m\sqrt{m} \\ m\sqrt{m} \cdot F - F &= m\sqrt{m} \\ m\sqrt{m} \cdot F - m\sqrt{m} &= F \\ m\sqrt{m}(F - 1) &= F \\ m\sqrt{m} &= \frac{F}{F - 1} \\ m^{\frac{3}{2}} &= \frac{F}{F - 1} \\ m &= \left(\frac{F}{F - 1}\right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Bladzijde 18

$$\begin{aligned} \text{21 a } h_0 &= 0,6 \text{ en } d_0 = 1000 \text{ geeft} \\ h &= 0,6 \cdot \left(\frac{1000}{d}\right)^{0,25} = 0,6 \cdot (1000d^{-1})^{0,25} = 0,6 \cdot 1000^{0,25} \cdot d^{-0,25} \approx 3,37 \cdot d^{-0,25} \\ \text{Dus } h &= 3,37d^{-0,25}. \\ \text{b } d &= 300 \text{ geeft } h = 3,37 \cdot 300^{-0,25} \approx 0,8 \end{aligned}$$

De waterhoogte bij een waterdiepte van 300 meter is 8 dm.

c $h = 3,37d^{-0,25}$ geeft $3,37d^{-0,25} = h$

$$d^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3,37}h$$

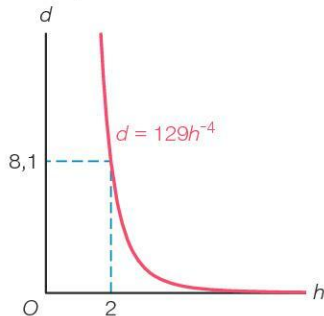
$$d = \left(\frac{1}{3,37}h\right)^{-4}$$

$$d = \left(\frac{1}{3,37}\right)^{-4} \cdot h^{-4}$$

$$d \approx 129 \cdot h^{-4}$$

Dus $d = 129h^{-4}$.

d $h = 2$ geeft $d = 129 \cdot 2^{-4} \approx 8,1$



$h > 2$ geeft $d < 8,1$

Dus bij waterdieptes minder dan 8,1 meter is de golf meer dan 2 meter hoog.

22 a $h = 1,5$ geeft $D = 1014(1 - 0,0226 \cdot 1,5)^{5,26} \approx 846$

Dus op een hoogte van 1,5 km is de luchtdruk 846 mbar.

b $D = 1014(1 - 0,0226h)^{5,26}$ geeft $1014(1 - 0,0226h)^{5,26} = D$

$$(1 - 0,0226h)^{5,26} = \frac{1}{1014}D$$

$$1 - 0,0226h = \left(\frac{1}{1014}D\right)^{\frac{1}{5,26}}$$

$$-0,0226h = \left(\frac{1}{1014}\right)^{\frac{1}{5,26}} \cdot D^{\frac{1}{5,26}} - 1$$

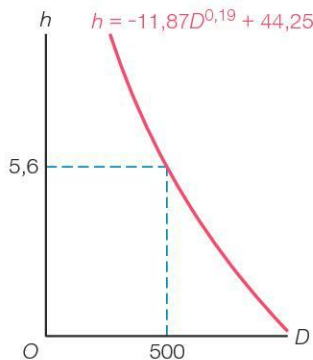
$$h = \frac{\left(\frac{1}{1014}\right)^{\frac{1}{5,26}}}{-0,0226} \cdot D^{\frac{1}{5,26}} - \frac{1}{-0,0226}$$

$$h \approx -11,87 \cdot D^{0,19} + 44,25$$

Dus $h = -11,87D^{0,19} + 44,25$.

c $0,5 \text{ bar} = 500 \text{ mbar}$

$D = 500$ geeft $h = -11,87 \cdot 500^{0,19} + 44,25 \approx 5,6$



$D < 500$ geeft $h > 5,6$

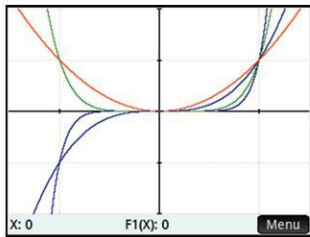
Bij hoogten hoger dan 5,6 km is de luchtdruk minder dan 500 mbar = 0,5 bar.

5.2 Machtsfuncties en wortelfuncties

Bladzijde 20

23

a



b $(0, 0)$ en $(1, 1)$

c Van de grafieken van f en h ligt geen enkel punt onder de x -as.

Bladzijde 22

24

a

$$y = -\frac{1}{2}x^3$$

↓ translatie $(-3, -5)$

$$y = -\frac{1}{2}(x+3)^3 - 5$$

↓ verm. x -as, -3

$$y = -3(-\frac{1}{2}(x+3)^3 - 5)$$

$$\text{oftewel } y = 1\frac{1}{2}(x+3)^3 + 15$$

b Het punt van symmetrie is $(-3, 15)$.

25

a

$$y = 0,3x^4$$

↓ translatie $(-5, 6)$

$$y = 0,3(x+5)^4 + 6$$

↓ verm. x -as, -4

$$y = -4(0,3(x+5)^4 + 6)$$

$$\text{oftewel } y = -1,2(x+5)^4 - 24$$

De top is $(-5, -24)$.

b

$$y = 0,3x^4$$

↓ verm. x -as, -4

$$y = -1,2x^4$$

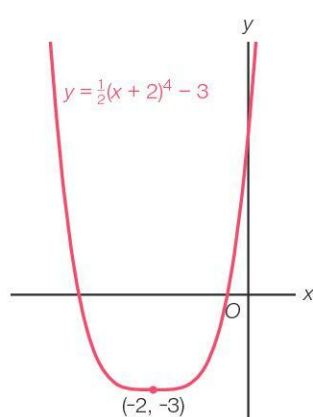
↓ translatie $(-5, 6)$

$$y = -1,2(x+5)^4 + 6$$

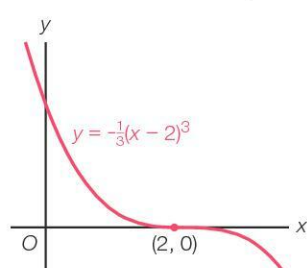
De top is $(-5, 6)$.

26

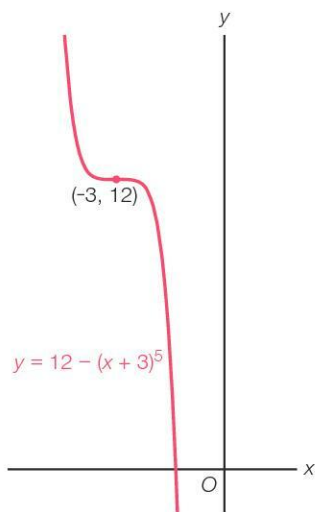
a



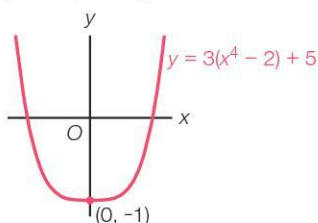
b



c



d $y = 3(x^4 - 2) + 5 = 3x^4 - 6 + 5 = 3x^4 - 1$



27 a $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^5 + 7$
 $\downarrow$ translatie (1, 2)
 $y = \frac{1}{2}(x - 1 - 3)^5 + 7 + 2$
 oftewel $y = \frac{1}{2}(x - 4)^5 + 9$
 $\downarrow$ verm. x-as, -1
 $y = -\frac{1}{2}(x - 4)^5 - 9$
 Het punt van symmetrie is (4, -9).

b $g(x) = -2\frac{1}{2}(x + 4)^6 - 1$
 $\downarrow$ verm. x-as, -4
 $y = 10(x + 4)^6 + 4$
 $\downarrow$ translatie (-5, -4)
 $h(x) = 10(x + 5 + 4)^6 + 4 - 4$
 oftewel $h(x) = 10(x + 9)^6$
 min. is $h(-9) = 0$

28 a Voor f geldt $y = (x - 5)^3 + 5$, dus voor f^{inv} geldt $x = (y - 5)^3 + 5$.
 $x = (y - 5)^3 + 5$ geeft $(y - 5)^3 + 5 = x$

$$(y - 5)^3 = x - 5$$

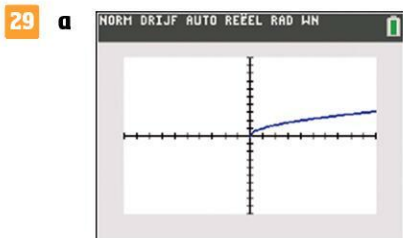
$$y - 5 = \sqrt[3]{x - 5}$$

$$y = \sqrt[3]{x - 5} + 5$$

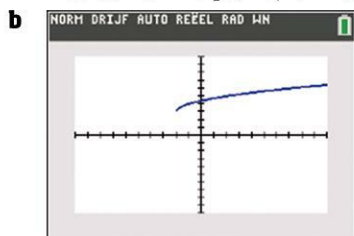
Dus $g(x) = \sqrt[3]{x - 5} + 5$ is de inverse van f .

b $f(x) = g(x)$ geeft $(x - 5)^3 + 5 = \sqrt[3]{x - 5} + 5$
 $(x - 5)^3 = \sqrt[3]{x - 5}$
 $(x - 5)^9 = x - 5$
 $(x - 5)^8 \cdot (x - 5) = x - 5$
 $x - 5 = 0 \vee (x - 5)^8 = 1$
 $x = 5 \vee x - 5 = 1 \vee x - 5 = -1$
 $x = 5 \vee x = 6 \vee x = 4$

De snijpunten zijn (4, 4), (5, 5) en (6, 6).



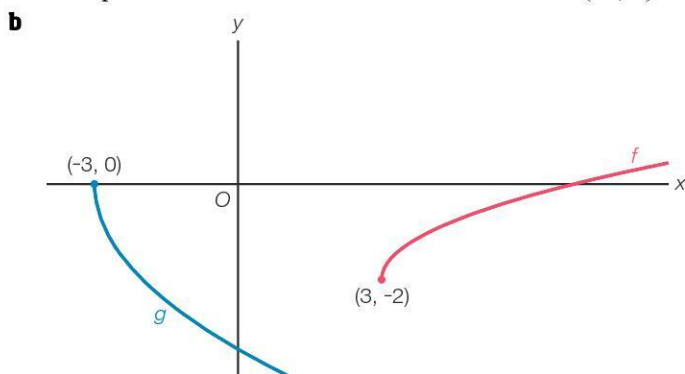
Het domein is $[0, \rightarrow)$ en het bereik is $[0, \rightarrow)$.



De grafiek van $y = \sqrt{x+2} + 3$ ontstaat uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$ bij de translatie $(-2, 3)$.

Bladzijde 23

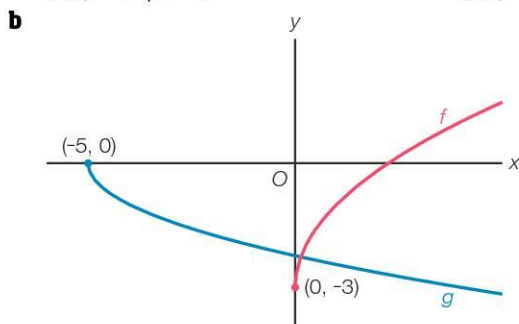
- 30 a** De grafiek van $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$ ontstaat uit die van $y = \sqrt{x}$ bij de translatie $(3, -2)$.
De grafiek van $g(x) = -2\sqrt{x+3}$ ontstaat uit die van $y = \sqrt{x}$ bij de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met -2 en de translatie $(-3, 0)$.



- c** $D_f = [3, \rightarrow)$, $B_f = [-2, \rightarrow)$, $D_g = [-3, \rightarrow)$ en $B_g = \langle \leftarrow, 0]$

Bladzijde 24

- 31 a**
- | | |
|------------------------|------------------------|
| $y = \sqrt{x}$ | $y = \sqrt{x}$ |
| ↓ verm. x -as, 2 | ↓ verm. x -as, -1 |
| $y = 2\sqrt{x}$ | $y = -\sqrt{x}$ |
| ↓ translatie $(0, -3)$ | ↓ translatie $(-5, 0)$ |
| $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$ | $g(x) = -\sqrt{x+5}$ |



- c** $D_f = [0, \rightarrow)$, $B_f = [-3, \rightarrow)$, $D_g = [-5, \rightarrow)$ en $B_g = \langle \leftarrow, 0]$

- 32** a randpunt $(-5, 3)$, $D_f = [-5, \rightarrow\rangle$ en $B_f = [3, \rightarrow\rangle$
 b randpunt $(-3, -7)$, $D_g = [-3, \rightarrow\rangle$ en $B_g = [-7, \rightarrow\rangle$
 c randpunt $(-1, 0)$, $D_h = [-1, \rightarrow\rangle$ en $B_h = \langle\leftarrow, 0]$
 d randpunt $(0, 1)$, $D_k = [0, \rightarrow\rangle$ en $B_k = [1, \rightarrow\rangle$
 e randpunt $(1, -1)$, $D_l = [1, \rightarrow\rangle$ en $B_l = \langle\leftarrow, -1]$
 f randpunt $(0, -3)$, $D_m = [0, \rightarrow\rangle$ en $B_m = [-3, \rightarrow\rangle$

- 33** a Voor het domein van $f(x) = 5 - \sqrt{2x - 6}$ moet gelden $2x - 6 \geq 0$
 $2x \geq 6$
 $x \geq 3$

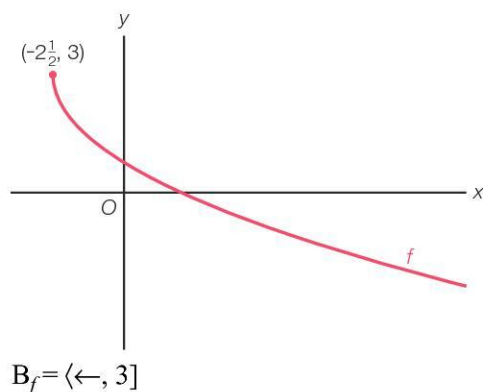
Dus het domein is $D_f = [3, \rightarrow\rangle$.

- b De uitkomst van een wortel is minstens 0, dus de uitkomst van $f(x)$ is hoogstens 5.
 Dus het bereik is $B_f = \langle\leftarrow, 5]$.

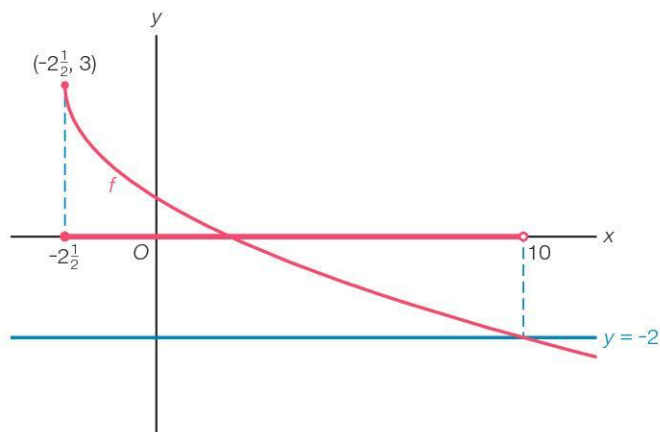
Bladzijde 26

- 34** a $8 - 4x \geq 0$
 $-4x \geq -8$
 $x \leq 2$
 Dus $D_f = \langle\leftarrow, 2]$, $B_f = [3, \rightarrow\rangle$ en randpunt $(2, 3)$.
 b $4x - 8 \geq 0$
 $4x \geq 8$
 $x \geq 2$
 Dus $D_g = [2, \rightarrow\rangle$, $B_g = [3, \rightarrow\rangle$ en randpunt $(2, 3)$.
 c $2x + 6 \geq 0$
 $2x \geq -6$
 $x \geq -3$
 Dus $D_h = [-3, \rightarrow\rangle$, $B_h = \langle\leftarrow, 5]$ en randpunt $(-3, 5)$.
 d $x \geq 0$
 Dus $D_k = [0, \rightarrow\rangle$, $B_k = \langle\leftarrow, 3]$ en randpunt $(0, 3)$.

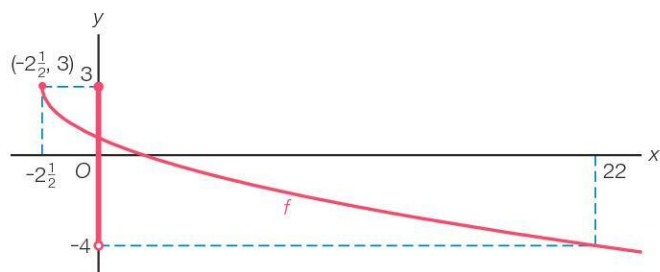
- 35** a $2x + 5 \geq 0$
 $2x \geq -5$
 $x \geq -2\frac{1}{2}$
 $D_f = [-2\frac{1}{2}, \rightarrow\rangle$
 randpunt $(-2\frac{1}{2}, 3)$



b $f(x) = -2$ geeft $3 - \sqrt{2x+5} = -2$
 $\sqrt{2x+5} = 5$
 $2x+5 = 25$
 $2x = 20$
 $x = 10$

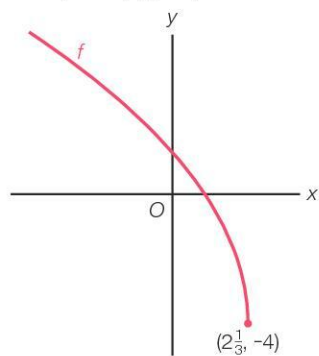


$f(x) > -2$ geeft $-2\frac{1}{2} \leq x < 10$
c $f(22) = -4$



$x < 22$ geeft $-4 < f(x) \leq 3$

36 a $7 - 3x \geq 0$
 $-3x \geq -7$
 $x \leq 2\frac{1}{3}$ dus $D_f = \langle \leftarrow, 2\frac{1}{3} \rangle]$
 randpunt $(2\frac{1}{3}, -4)$



$B_f = [-4, \rightarrow)$

b $f(x) = -2$ geeft $2\sqrt{7-3x} - 4 = -2$

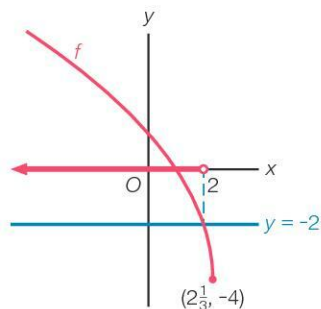
$$2\sqrt{7-3x} = 2$$

$$\sqrt{7-3x} = 1$$

$$7-3x = 1$$

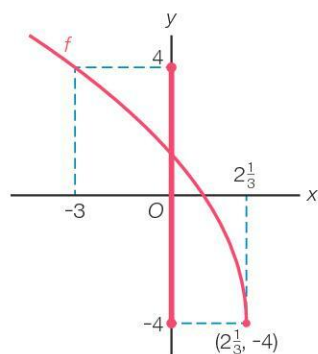
$$-3x = -6$$

$$x = 2$$



$f(x) > -2$ geeft $x < 2$

c $f(-3) = 4$



$x \geq -3$ geeft $-4 \leq f(x) \leq 4$

37 Stel $f(x) = 2 + \sqrt{7-2x}$ en $g(x) = x$.

$$7-2x \geq 0$$

$$-2x \geq -7$$

$$x \leq 3\frac{1}{2}$$

Dus $D_f = \langle \leftarrow, 3\frac{1}{2} \rangle$ en het randpunt van de grafiek van f is $(3\frac{1}{2}, 2)$.

$f(x) = g(x)$ geeft $2 + \sqrt{7-2x} = x$

$$\sqrt{7-2x} = x-2$$

kwadrateren geeft

$$7-2x = x^2 - 4x + 4$$

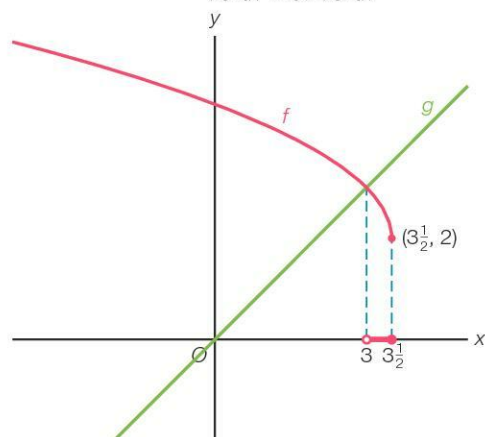
$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 3$$

vold. niet vold.



$2 + \sqrt{7-2x} < x$ geeft $3 < x \leq 3\frac{1}{2}$

38 Er geldt $D_f = [-8, \rightarrow)$, $B_f = \langle \leftarrow, 3 \rangle$ en $g = f^{\text{inv}}$, dus $D_g = B_f = \langle \leftarrow, 3 \rangle$ en $B_g = D_f = [-8, \rightarrow)$.

39 $5 + ax = 0$

$$ax = -5$$

$$x = -\frac{5}{a}$$

Dus het randpunt van de grafiek van f is $\left(-\frac{5}{a}, 4\right)$.

$$\left(-\frac{5}{a}, 4\right) \text{ op de lijn } y = 2x - 1 \text{ geeft } 2 \cdot -\frac{5}{a} - 1 = 4$$

$$-\frac{10}{a} = 5$$

$$a = -2$$

40 $(5, 3)$ op de grafiek van $f(x) = a\sqrt{x+b}$ geeft $a\sqrt{5+b} = 3$

$$a = \frac{3}{\sqrt{b+5}}$$

$(13, 9)$ op de grafiek van $f(x) = a\sqrt{x+b}$ geeft $a\sqrt{13+b} = 9$

$$a = \frac{9}{\sqrt{b+13}}$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{b+5}} \text{ en } a = \frac{9}{\sqrt{b+13}} \text{ geeft } \frac{3}{\sqrt{b+5}} = \frac{9}{\sqrt{b+13}}$$

$$3\sqrt{b+13} = 9\sqrt{b+5}$$

$$\sqrt{b+13} = 3\sqrt{b+5}$$

kwadrateren geeft

$$b+13 = 9(b+5)$$

$$b+13 = 9b+45$$

$$-8b = 32$$

$$b = -4 \text{ vold.}$$

$$b = -4 \text{ en } a = \frac{3}{\sqrt{b+5}} \text{ geeft } a = \frac{3}{\sqrt{-4+5}} = 3$$

Dus $a = 3$ en $b = -4$.

41 a $y = 2\sqrt{x}$ geeft $2\sqrt{x} = y$

kwadrateren geeft

$$4x = y^2$$

$$x = \frac{1}{4}y^2$$

b $y = \sqrt{x-2}$ geeft $\sqrt{x-2} = y$

kwadrateren geeft

$$x-2 = y^2$$

$$x = y^2 + 2$$

Uit $y = \sqrt{x-2}$ volgt $x = y^2 + 2$.

c $y = 2\sqrt{x-2}$ geeft $2\sqrt{x-2} = y$

kwadrateren geeft

$$4(x-2) = y^2$$

$$x-2 = \frac{1}{4}y^2$$

$$x = \frac{1}{4}y^2 + 2$$

Uit $y = 2\sqrt{x-2}$ volgt $x = \frac{1}{4}y^2 + 2$.

Bladzijde 27

- 42 a** $F = 3\sqrt{2t-1}$ geeft $3\sqrt{2t-1} = F$
kwadrateren geeft
 $9(2t-1) = F^2$
 $2t-1 = \frac{1}{9}F^2$
 $2t = \frac{1}{9}F^2 + 1$
 $t = \frac{1}{18}F^2 + \frac{1}{2}$
- b** $A = 5 + \sqrt{4-3B}$ geeft $5 + \sqrt{4-3B} = A$
 $\sqrt{4-3B} = A-5$
kwadrateren geeft
 $4-3B = (A-5)^2$
 $4-3B = A^2 - 10A + 25$
 $-3B = A^2 - 10A + 21$
 $B = -\frac{1}{3}A^2 + 3\frac{1}{3}A - 7$
- c** $2x\sqrt{y} - 5 = 0$ geeft $2x\sqrt{y} = 5$
kwadrateren geeft
 $4x^2y = 25$
 $y = \frac{25}{4x^2}$
- d** $R\sqrt{q} - \sqrt{R} = 6$ geeft $R\sqrt{q} = 6 + \sqrt{R}$
kwadrateren geeft
 $R^2q = (6 + \sqrt{R})^2$
 $R^2q = 36 + 12\sqrt{R} + R$
 $q = \frac{36 + 12\sqrt{R} + R}{R^2}$

Bladzijde 28

- 43 a** $T = -27,4$ geeft $v = 331\sqrt{1 - \frac{27,4}{273}} = 313,9\dots$
 $T = 38,6$ geeft $v = 331\sqrt{1 + \frac{38,6}{273}} = 353,6\dots$
Het verschil is $353,6\dots - 313,9\dots \approx 40$ m/s.
- b** $v = 340$ geeft $331\sqrt{1 + \frac{T}{273}} = 340$
 $\sqrt{1 + \frac{T}{273}} = \frac{340}{331}$
kwadrateren geeft
 $1 + \frac{T}{273} = \left(\frac{340}{331}\right)^2$
 $\frac{T}{273} = \left(\frac{340}{331}\right)^2 - 1$
 $T = 273 \cdot \left(\frac{340}{331}\right)^2 - 273 \approx 15$
- Bij een temperatuur van 15°C is de geluidssnelheid 340 m/s.
- c** $T_0 = 25$ en $h = 2,5$ geeft $T = 25 - 6,5 \cdot 2,5 = 8,75$
 $T = 8,75$ geeft $v = 331\sqrt{1 + \frac{8,75}{273}} = 336,2\dots$ m/s = 1210,5... km/uur
De snelheid is 1211 km/uur.

d $T = -1$ en $h = 2$ geeft $T_0 - 6,5 \cdot 2 = -1$

$$T_0 = 12$$

Dus $T = 12 - 6,5h$.

Dit geeft $v = 331 \sqrt{1 + \frac{12 - 6,5h}{273}} = 331 \sqrt{1 + \frac{12}{273} - \frac{6,5}{273}h} \approx 331 \sqrt{-0,0238h + 1,0440}$.

Dus $v = 331 \sqrt{-0,0238h + 1,0440}$.

e $v = 331 \sqrt{1 + \frac{T}{273}}$ geeft $331 \sqrt{1 + \frac{T}{273}} = v$

$$\sqrt{1 + \frac{T}{273}} = \frac{v}{331}$$

kwadrateren geeft

$$1 + \frac{T}{273} = \left(\frac{v}{331}\right)^2$$

$$\frac{T}{273} = \left(\frac{v}{331}\right)^2 - 1$$

$$T = 273 \cdot \left(\frac{v}{331}\right)^2 - 273$$

$$T = \frac{273}{109561}v^2 - 273$$

$T = T_0 - 6,5h$ en $T = \frac{273}{109561}v^2 - 273$ geeft $T_0 - 6,5h = \frac{273}{109561}v^2 - 273$

$$-6,5h = \frac{273}{109561}v^2 - T_0 - 273$$

$$h = -\frac{273}{109561 \cdot 6,5}v^2 + \frac{1}{6,5}T_0 + \frac{273}{6,5}$$

$$h \approx -0,0004v^2 + 0,1538T_0 + 42$$

Dus $h = -0,0004v^2 + 0,1538T_0 + 42$.

44 Voor f geldt $y = a + \sqrt{bx + c}$, dus voor f^{inv} geldt $x = a + \sqrt{by + c}$.

$x = a + \sqrt{by + c}$ geeft $a + \sqrt{by + c} = x$

$$\sqrt{by + c} = x - a$$

kwadrateren geeft

$$by + c = (x - a)^2$$

$$by + c = x^2 - 2ax + a^2$$

$$by = x^2 - 2ax + a^2 - c$$

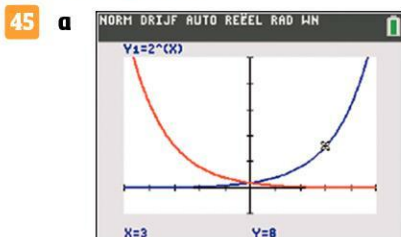
$$y = \frac{1}{b}x^2 - \frac{2a}{b}x + \frac{a^2 - c}{b}$$

$f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ geeft $\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \wedge -\frac{2a}{b} = -3 \wedge \frac{a^2 - c}{b} = 0$

Dus $b = 2 \wedge -a = -3 \wedge a^2 - c = 0$ oftewel $a = 3$, $b = 2$ en $c = 9$.

5.3 Exponentiële functies

Bladzijde 30



De grafieken zijn elkaars gespiegelde in de y -as.

- b** $f(-10) = 2^{-10} \approx 9,77 \cdot 10^{-4}$
 $f(-20) = 2^{-20} \approx 9,54 \cdot 10^{-7}$
 $f(-100) = 2^{-100} \approx 7,89 \cdot 10^{-31}$
- c** Voor elke x is $2^x > 0$, dus er is geen origineel te vinden waarvan het beeld 0 is.
- d** $B_f = B_g = \langle 0, \rightarrow \rangle$

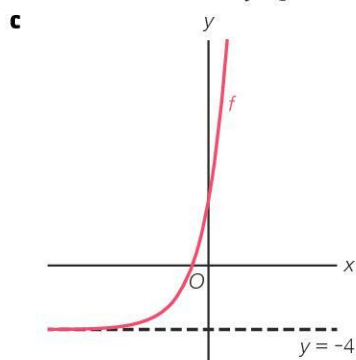
Bladzijde 32

- 46 a** $y = 3^x$
 $\downarrow$ translatie $(-2, -1)$
 $y = 3^{x+2} - 1$
De asymptoot is de lijn $y = -1$.
- b** $y = 0,5^x$
 $\downarrow$ verm. x -as, 2
 $y = 2 \cdot 0,5^x$
 $\downarrow$ translatie $(0, 3)$
 $y = 2 \cdot 0,5^x + 3$
De asymptoot is de lijn $y = 3$.
- c** $y = 2^x$
 $\downarrow$ verm. y -as, $\frac{1}{3}$
 $y = 2^{3x}$
 $\downarrow$ verm. x -as, 3
 $y = 3 \cdot 2^{3x}$
 $\downarrow$ translatie $(0, 4)$
 $y = 3 \cdot 2^{3x} + 4$
De asymptoot is de lijn $y = 4$.
- d** $y = 0,8^x$
 $\downarrow$ verm. x -as, -1
 $y = -0,8^x$
 $\downarrow$ translatie $(-1, 10)$
 $y = 10 - 0,8^{x+1}$
 $\downarrow$ verm. y -as, 2,5
 $y = 10 - 0,8^{0,4x+1}$
De asymptoot is de lijn $y = 10$.
- 47 a** Het bereik is $\langle -6, \rightarrow \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = -6$.
b Het bereik is $\langle \leftarrow, 5 \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 5$.
c Het bereik is $\langle \leftarrow, 1000 \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 1000$.
d Het bereik is $\langle \leftarrow, 1000 \rangle$ en de asymptoot is de lijn $y = 1000$.
- 48 a** $y = 3^x$
 $\downarrow$ spiegelen in de x -as
 $y = -3^x$
 $\downarrow$ translatie $(0, -1)$
 $y = -3^x - 1$
- b** $y = 3^x$
 $\downarrow$ translatie $(2, 5)$
 $y = 3^{x-2} + 5$
 $\downarrow$ verm. y -as, $\frac{1}{4}$
 $y = 3^{4x-2} + 5$
- c** $y = 3^x$
 $\downarrow$ translatie $(4, -5)$
 $y = 3^{x-4} - 5$
 $\downarrow$ verm. x -as, 3
 $y = 3(3^{x-4} - 5)$
oftewel $y = 3^{x-3} - 15$

- d** $y = 3^x$
 $\downarrow$ verm. x -as, 3
 $y = 3 \cdot 3^x$
 $\downarrow$ translatie (4, -5)
 $y = 3 \cdot 3^{x-4} - 5$
 oftewel $y = 3^{x-3} - 5$

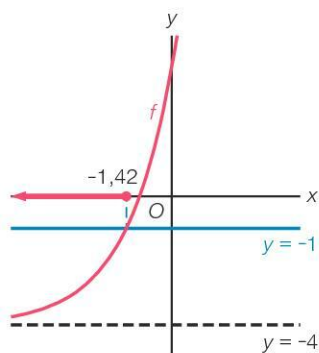
- 49 a** $y = 2^x$
 $\downarrow$ translatie (-3, -4)
 $f(x) = 2^{x+3} - 4$

- b** $B_f = \langle -4, \rightarrow \rangle$
 De horizontale asymptoot is de lijn $y = -4$.



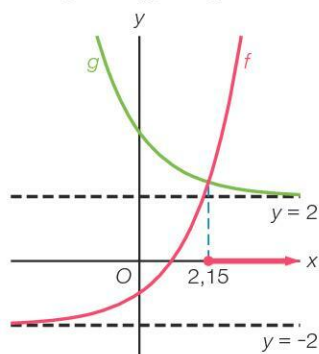
- d** $f(3) = 60$
 $x \leq 3$ geeft $-4 < f(x) \leq 60$

- e** Voer in $y_2 = -1$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx -1,42$.



$f(x) \leq -1$ geeft $x \leq -1,42$

- 50 a** Voer in $y_1 = 2^x - 2$ en $y_2 = (\frac{1}{2})^{x-1} + 2$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 2,15$.



$f(x) \geq g(x)$ geeft $x \geq 2,15$

- b** $B_f = \langle -2, \rightarrow \rangle$, dus $f(x) = p$ heeft geen oplossingen voor $p \leq -2$.

Bladzijde 33

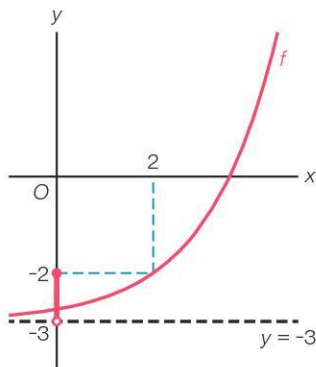
51

- a** $y = 2^x$
 $\downarrow$ translatie $(2, -3)$
 $f(x) = 2^{x-2} - 3$
 $B_f = \langle -3, \rightarrow \rangle$
- $y = 0,5^x$
 $\downarrow$ verm. x-as 4
 $y = 4 \cdot 0,5^x$
 $\downarrow$ translatie $(3, -1)$
 $g(x) = 4 \cdot 0,5^{x-3} - 1$
 $B_g = \langle -1, \rightarrow \rangle$

$B_f = \langle -3, \rightarrow \rangle$ en $B_g = \langle -1, \rightarrow \rangle$, dus $f(x) = p$ heeft één oplossing voor $p > -3$ en $g(x) = p$ heeft geen oplossingen voor $p \leq -1$.

Dus voor $-3 < p \leq -1$ heeft $f(x) = p$ één oplossing en $g(x) = p$ geen oplossingen.

- b** $f(2) = -2$



$x \leq 2$ geeft $-3 < f(x) \leq -2$

- c** $f(1) = -2\frac{1}{2}$ en $g(1) = 15$, dus $A(1, -2\frac{1}{2})$ en $B(1, 15)$.
 $AB = y_B - y_A = 15 - -2\frac{1}{2} = 17\frac{1}{2}$
- d** Voer in $y_1 = 2^{x-2} - 3$, $y_2 = 4 \cdot 0,5^{x-3} - 1$ en $y_3 = 5$.
 De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x = 5$, dus $P(5, 5)$.
 De optie snijpunt met y_2 en y_3 geeft $x = 2,415\dots$, dus $Q(2,415\dots; 5)$.
 $PQ = x_P - x_Q = 5 - 2,415\dots \approx 2,585$

52

- a** $8 \cdot 4^x = 2^3 \cdot (2^2)^x = 2^3 \cdot 2^{2x} = 2^{2x+3}$
- b** Bij de herleiding van $(2^2)^x$ tot 2^{2x} is de regel $(a^p)^q = a^{pq}$ gebruikt.
 Bij de herleiding van $2^3 \cdot 2^{2x}$ tot 2^{2x+3} is de regel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ gebruikt.

53

- a** $y = 15 \cdot 2^{3x+2} = 15 \cdot 2^{3x} \cdot 2^2 = 15 \cdot (2^3)^x \cdot 4 = 60 \cdot 8^x$
 Dus $y = 60 \cdot 8^x$.
- b** $y = 50 \cdot 2^{3x-1} = 50 \cdot 2^{3x} \cdot 2^{-1} = 50 \cdot (2^3)^x \cdot \frac{1}{2} = 25 \cdot 8^x$
 Dus $y = 25 \cdot 8^x$.
- c** $y = 260 \cdot 4^{1\frac{1}{2}x-1} = 260 \cdot (2^2)^{1\frac{1}{2}x-1} = 260 \cdot 2^{3x-2} = 260 \cdot (2^3)^x \cdot 2^{-2} = 260 \cdot 8^x \cdot \frac{1}{4} = 65 \cdot 8^x$
 Dus $y = 65 \cdot 8^x$.
- d** $y = 8 \cdot 4^{-2x-1} = 8 \cdot 4^{-2x} \cdot 4^{-1} = 8 \cdot (4^{-2})^x \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot (\frac{1}{16})^x$
 Dus $y = 2 \cdot (\frac{1}{16})^x$.

Bladzijde 34

54

- a** $y = 2^x \cdot 2^{2x-3} = 2^x \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-3} = 2^{3x} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot (2^3)^x = \frac{1}{8} \cdot 8^x$
 Dus $y = \frac{1}{8} \cdot 8^x$.
- b** $y = 63 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-2} = 63 \cdot 3^{\frac{1}{2}x} \cdot 3^{-2} = 63 \cdot (3^{\frac{1}{2}})^x \cdot \frac{1}{9} = 7 \cdot (\sqrt{3})^x$
 Dus $y = 7 \cdot (\sqrt{3})^x$.
- c** $y = 50\,000 \cdot 100^{-x-2\frac{1}{2}} = 50\,000 \cdot 100^{-x} \cdot 100^{-2\frac{1}{2}} = 50\,000 \cdot (100^{-1})^x \cdot 10^{-5} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{100})^x$
 Dus $y = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{100})^x$.
- d** $y = \frac{3}{4^{2x-1}} = 3 \cdot 4^{-2x+1} = 3 \cdot 4^{-2x} \cdot 4^1 = 3 \cdot (4^{-2})^x \cdot 4 = 12 \cdot (\frac{1}{16})^x$
 Dus $y = 12 \cdot (\frac{1}{16})^x$.

55 $f(x) = 5 - 2^{\frac{1}{2}x+4}$
 $\downarrow$ translatie (12, -8)
 $h(x) = 5 - 2^{\frac{1}{2}(x-12)+4} - 8 = -3 - 2^{\frac{1}{2}x-6+4} = -3 - 2^{\frac{1}{2}x-2} = -3 - 2^{\frac{1}{2}x} \cdot 2^{-2} = -3 - (2^{\frac{1}{2}})^x \cdot \frac{1}{4} = -3 - \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{2})^x$
Dus $a = -3$, $b = -\frac{1}{4}$ en $g = \sqrt{2}$.

56 $f(x) = 2^{x-3}$
 $\downarrow$ translatie (-5, 0)
 $g(x) = 2^{x+5-3} = 2^{x-3} \cdot 2^5 = 32 \cdot 2^{x-3}$
De vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 32 toepassen op de grafiek van f geeft de grafiek van g .
Dus $a = 32$.

57 $4\sqrt{2} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2\frac{1}{2}}$
 $2^{x-1} = 4\sqrt{2}$
 $2^{x-1} = 2^{2\frac{1}{2}}$
 $x-1 = 2\frac{1}{2}$
 $x = 3\frac{1}{2}$

Bladzijde 35

58 a $2^{x+1} = 64$
 $2^{x+1} = 2^6$
 $x+1 = 6$
 $x = 5$
b $2^{x-3} = \frac{1}{8}$
 $2^{x-3} = 2^{-3}$
 $x-3 = -3$
 $x = 0$
c $3^{2x} = 3$
 $3^{2x} = 3^1$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$

d $(\frac{1}{2})^x = 1$
 $(\frac{1}{2})^x = (\frac{1}{2})^0$
 $x = 0$
e $2^x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$
 $2^x = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
 $2^x = 2^{-1\frac{1}{2}}$
 $x = -1\frac{1}{2}$
f $5^{x+6} = (\frac{1}{5})^x$
 $5^{x+6} = (5^{-1})^x$
 $5^{x+6} = 5^{-x}$
 $x+6 = -x$
 $2x = -6$
 $x = -3$

59 a $3^{2x+1} = 27\sqrt{3}$
 $3^{2x+1} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$
 $3^{2x+1} = 3^{3\frac{1}{2}}$
 $2x+1 = 3\frac{1}{2}$
 $2x = 2\frac{1}{2}$
 $x = 1\frac{1}{4}$
b $10^{2x+1} = 0,01$
 $10^{2x+1} = 10^{-2}$
 $2x+1 = -2$
 $2x = -3$
 $x = -1\frac{1}{2}$
c $3^x - 2 = 25$
 $3^x = 27$
 $3^x = 3^3$
 $x = 3$

d $5 \cdot 2^x = 80$
 $2^x = 16$
 $2^x = 2^4$
 $x = 4$
e $10 \cdot 3^x = 270$
 $3^x = 27$
 $3^x = 3^3$
 $x = 3$
f $3 \cdot 8^{2-x} = 48$
 $8^{2-x} = 16$
 $(2^3)^{2-x} = 2^4$
 $2^{6-3x} = 2^4$
 $6-3x = 4$
 $-3x = -2$
 $x = \frac{2}{3}$

60 a $3 \cdot 2^x + 4 = 28$

$$3 \cdot 2^x = 24$$

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3$$

b $5^{2x-6} = 0,04$

$$5^{2x-6} = \frac{1}{25}$$

$$5^{2x-6} = 5^{-2}$$

$$2x - 6 = -2$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

c $3 \cdot 7^{3x+1} = 147$

$$7^{3x+1} = 49$$

$$7^{3x+1} = 7^2$$

$$3x + 1 = 2$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

d $32^{x-2} = \frac{1}{16}$

$$(2^5)^{x-2} = 2^{-4}$$

$$2^{5x-10} = 2^{-4}$$

$$5x - 10 = -4$$

$$5x = 6$$

$$x = 1\frac{1}{5}$$

e $5 \cdot 4^{x-1} = 2\frac{1}{2}$

$$4^{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$(2^2)^{x-1} = 2^{-1}$$

$$2^{2x-2} = 2^{-1}$$

$$2x - 2 = -1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

f $8 \cdot 2^x = 4^{x+1}$

$$2^3 \cdot 2^x = (2^2)^{x+1}$$

$$2^{3+x} = 2^{2x+2}$$

$$3 + x = 2x + 2$$

$$-x = -1$$

$$x = 1$$

61 $f(x) = 3^{x+2} - 5$

↓ translatie (3, 7)

$$y = 3^{x-1} + 2$$

↓ verm. y-as, b

$$g(x) = 3^{\frac{1}{b}x-1} + 2$$

$$g(x) = 3^{\frac{1}{b}x-1} + 2 \left\{ \begin{array}{l} 3^{\frac{-15}{b}-1} + 2 = 83 \\ \text{door } A(-15, 83) \end{array} \right.$$

$$3^{\frac{-15}{b}-1} = 81$$

$$3^{\frac{-15}{b}-1} = 3^4$$

$$\frac{-15}{b} - 1 = 4$$

$$\frac{-15}{b} = 5$$

$$b = -3$$

62 a $2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^x$, dus uit $2^{x+1} + 2^x = 48$ volgt $2 \cdot 2^x + 2^x = 48$.

b $2 \cdot 2^x + 2^x = 2 \cdot 2^x + 1 \cdot 2^x = 3 \cdot 2^x$, dus uit $2 \cdot 2^x + 2^x = 48$ volgt $3 \cdot 2^x = 48$.

$$3 \cdot 2^x = 48$$

$$2^x = 16$$

$$2^x = 2^4$$

$$x = 4$$

63 a $3^{x+2} + 3^x = 810$

$$3^x \cdot 3^2 + 3^x = 810$$

$$9 \cdot 3^x + 3^x = 810$$

$$10 \cdot 3^x = 810$$

$$3^x = 81$$

$$3^x = 3^4$$

$$x = 4$$

b $2^{x-1} + 2^{x+1} = 10$

$$2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^1 = 10$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x = 10$$

$$2\frac{1}{2} \cdot 2^x = 10$$

$$2^x = 4$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

c $2^{x+3} - 2^x = \frac{7}{8}$

$$2^x \cdot 2^3 - 2^x = \frac{7}{8}$$

$$8 \cdot 2^x - 2^x = \frac{7}{8}$$

$$7 \cdot 2^x = \frac{7}{8}$$

$$2^x = \frac{1}{8}$$

$$2^x = 2^{-3}$$

$$x = -3$$

d $3^{x+2} = 24 + 3^x$

$$3^x \cdot 3^2 = 24 + 3^x$$

$$9 \cdot 3^x - 3^x = 24$$

$$8 \cdot 3^x = 24$$

$$3^x = 3$$

$$3^x = 3^1$$

$$x = 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{e} \quad 3^x - 3^{x-1} &= 2\sqrt{3} \\
 3^x - 3^x \cdot 3^{-1} &= 2\sqrt{3} \\
 3^x - \frac{1}{3} \cdot 3^x &= 2\sqrt{3} \\
 \frac{2}{3} \cdot 3^x &= 2\sqrt{3} \\
 3^x &= 3\sqrt{3} \\
 3^x &= 3^{1\frac{1}{2}} \\
 x &= 1\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f} \quad 5^{x-1} + 5^{x-2} &= 6\sqrt{5} \\
 5^x \cdot 5^{-1} + 5^x \cdot 5^{-2} &= 6\sqrt{5} \\
 \frac{1}{5} \cdot 5^x + \frac{1}{25} \cdot 5^x &= 6\sqrt{5} \\
 \frac{6}{25} \cdot 5^x &= 6\sqrt{5} \\
 5^x &= 25\sqrt{5} \\
 5^x &= 5^{2\frac{1}{2}} \\
 x &= 2\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Bladzijde 36

$$\begin{aligned}
 \text{64 a} \quad 3^{x+1} &= 9^{x+2} \\
 3^{x+1} &= (3^2)^{x+2} \\
 3^{x+1} &= 3^{2x+4} \\
 x+1 &= 2x+4 \\
 -x &= 3 \\
 x &= -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad 3^{x+1} - 3^{x-1} &= 8\sqrt{3} \\
 3^x \cdot 3^1 - 3^x \cdot 3^{-1} &= 8\sqrt{3} \\
 3 \cdot 3^x - \frac{1}{3} \cdot 3^x &= 8\sqrt{3} \\
 \frac{2}{3} \cdot 3^x &= 8\sqrt{3} \\
 3^x &= 3\sqrt{3} \\
 3^x &= 3^{1\frac{1}{2}} \\
 x &= 1\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c} \quad 3^{x^2} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{x-6} \\
 3^{x^2} &= (3^{-1})^{x-6} \\
 3^{x^2} &= 3^{-x+6} \\
 x^2 &= -x+6 \\
 x^2 + x - 6 &= 0 \\
 (x-2)(x+3) &= 0 \\
 x &= 2 \vee x = -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d} \quad 5^{x^2+5} &= 125^{x+1} \\
 5^{x^2+5} &= (5^3)^{x+1} \\
 5^{x^2+5} &= 5^{3x+3} \\
 x^2+5 &= 3x+3 \\
 x^2-3x+2 &= 0 \\
 (x-1)(x-2) &= 0 \\
 x &= 1 \vee x = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e} \quad 2^{x+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} &= 28 \\
 2^x \cdot 2^2 - (2^{-1})^{-x+1} &= 28 \\
 4 \cdot 2^x - 2^{x-1} &= 28 \\
 4 \cdot 2^x - 2^x \cdot 2^{-1} &= 28 \\
 4 \cdot 2^x - \frac{1}{2} \cdot 2^x &= 28 \\
 3\frac{1}{2} \cdot 2^x &= 28 \\
 2^x &= 8 \\
 2^x &= 2^3 \\
 x &= 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f} \quad 4^{x^2+1} &= 8^{x^2-1} \\
 (2^2)^{x^2+1} &= (2^3)^{x^2-1} \\
 2^{2x^2+2} &= 2^{3x^2-3} \\
 2x^2+2 &= 3x^2-3 \\
 -x^2 &= -5 \\
 x^2 &= 5 \\
 x &= \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{65} \quad f(x) &= 2^x \\
 \downarrow \text{translatie } (3, 8) \\
 y &= 2^{x-3} + 8 \\
 \downarrow \text{verm. } x\text{-as, } 4 \\
 g(x) &= 4 \cdot 2^{x-3} + 32 \\
 f(x) = g(x) \text{ geeft } 2^x &= 4 \cdot 2^{x-3} + 32 \\
 2^x &= 4 \cdot 2^x \cdot 2^{-3} + 32 \\
 2^x &= \frac{1}{2} \cdot 2^x + 32 \\
 \frac{1}{2} \cdot 2^x &= 32 \\
 2^x &= 64 \\
 2^x &= 2^6 \\
 x &= 6
 \end{aligned}$$

Het snijpunt van de grafieken van f en g is het punt $(6, 64)$.

$$\begin{aligned}
 \text{66 a} \quad f(x) = g(x) \text{ geeft } 3^{x+1} - 4 &= 6 - 3^{x-1} \\
 3^x \cdot 3 - 4 &= 6 - 3^x \cdot 3^{-1} \\
 3 \cdot 3^x - 4 &= 6 - \frac{1}{3} \cdot 3^x \\
 \frac{3}{3} \cdot 3^x &= 10 \\
 3^x &= 3 \\
 x &= 1 \\
 f(x) \leq g(x) \text{ geeft } x &\leq 1
 \end{aligned}$$

- b** $f(2\frac{1}{2}) = 3^{3\frac{1}{2}} - 4 = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 4 = 27\sqrt{3} - 4$, dus $A(2\frac{1}{2}, 27\sqrt{3} - 4)$
 $g(2\frac{1}{2}) = 6 - 3^{1\frac{1}{2}} = 6 - 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 6 - 3\sqrt{3}$, dus $B(2\frac{1}{2}, 6 - 3\sqrt{3})$
 $AB = y_A - y_B = 27\sqrt{3} - 4 - (6 - 3\sqrt{3}) = 30\sqrt{3} - 10$
- c** $f(x) - g(x) = 80$ geeft $3^{x+1} - 4 - (6 - 3^{x-1}) = 80$
 $3^x \cdot 3 - 4 - 6 + 3^x \cdot 3^{-1} = 80$
 $3 \cdot 3^x - 10 + \frac{1}{3} \cdot 3^x = 80$
 $3\frac{1}{3} \cdot 3^x = 90$
 $3^x = 27$
 $3^x = 3^3$
 $x = 3$
- d** $g(x) - f(x) = 6 - 3^{x-1} - (3^{x+1} - 4) = 6 - 3^x \cdot 3^{-1} - 3^x \cdot 3 + 4 = 6 - \frac{1}{3} \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x + 4 = 10 - 3\frac{1}{3} \cdot 3^x$
Het bereik van $g(x) - f(x)$ is $\langle \leftarrow, 10 \rangle$.
Dus de vergelijking $g(x) - f(x) = p$ heeft geen oplossingen voor $p \geq 10$.

5.4 Logaritmen

Bladzijde 38

- 67** **a** $2^3 = 8$ **d** $3^2 = 9$
b $2^{-2} = \frac{1}{4}$ **e** $3^{-3} = \frac{1}{27}$
c $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ **f** $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$
- 68** **a** ${}^5\log(125) = {}^5\log(5^3) = 3$ **f** ${}^2\log(0,5) = {}^2\log(2^{-1}) = -1$
b ${}^{10}\log(0,1) = {}^{10}\log(10^{-1}) = -1$ **g** ${}^4\log(0,25) = {}^4\log(4^{-1}) = -1$
c ${}^2\log(4) = {}^2\log(2^2) = 2$ **h** ${}^4\log(4) = {}^4\log(4^1) = 1$
d ${}^7\log(49) = {}^7\log(7^2) = 2$ **i** ${}^4\log(1) = {}^4\log(4^0) = 0$
e ${}^2\log(\sqrt{2}) = {}^2\log(2^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$

Bladzijde 39

- 69** **a** ${}^2\log(64\sqrt{2}) = {}^2\log(2^6 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = {}^2\log(2^{6\frac{1}{2}}) = 6\frac{1}{2}$
b ${}^3\log(\frac{1}{9}\sqrt{3}) = {}^3\log(3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^3\log(3^{-1\frac{1}{2}}) = -1\frac{1}{2}$
c ${}^3\log(3^{21,5}) = 21,5$
d ${}^5\log(\frac{1}{125}) = {}^5\log(5^{-3}) = -3$
e $\frac{1}{3}\log(\frac{1}{27}) = \frac{1}{3}\log((\frac{1}{3})^3) = 3$
f $\frac{1}{2}\log(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\log((\frac{1}{2})^2) = 2$
g ${}^2\log(\frac{1}{32} \cdot \sqrt[3]{2}) = {}^2\log(2^{-5} \cdot 2^{\frac{1}{3}}) = {}^2\log(2^{-4\frac{2}{3}}) = -4\frac{2}{3}$
h ${}^5\log(1) = {}^5\log(5^0) = 0$
i ${}^3\log(81 \cdot \sqrt[5]{27}) = {}^3\log(3^4 \cdot \sqrt[5]{3^3}) = {}^3\log(3^4 \cdot 3^{\frac{3}{5}}) = {}^3\log(3^{4\frac{3}{5}}) = 4\frac{3}{5}$
- 70** **a** ${}^3\log(9) = {}^3\log(3^2) = 2$
Dus ${}^3\log(x) = 2$ geeft $x = 9$.
b ${}^5\log(\frac{1}{25}) = {}^5\log(5^{-2}) = -2$
Dus ${}^5\log(x) = -2$ geeft $x = \frac{1}{25}$.
- 71** **a** $x = {}^5\log(0,2) = {}^5\log(\frac{1}{5}) = {}^5\log(5^{-1}) = -1$
b ${}^9\log(x) = \frac{1}{2}$
 $x = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$
c ${}^x\log(1000) = 3$
 $x^3 = 1000$
 $x = 10$

72 a ${}^3\log(x+2) = 2$
 $x+2 = 3^2$
 $x+2 = 9$
 $x = 7$

b $1 + \frac{1}{2}\log(x) = 4$
 $\frac{1}{2}\log(x) = 3$
 $x = (\frac{1}{2})^3$
 $x = \frac{1}{8}$

c ${}^3\log(2x+1) = 4$
 $2x+1 = 3^4$
 $2x+1 = 81$
 $2x = 80$
 $x = 40$

d $5 + {}^4\log(x) = 3$
 ${}^4\log(x) = -2$
 $x = 4^{-2}$
 $x = \frac{1}{16}$

e $\frac{1}{2}\log(x-1) = 3$
 $x-1 = (\frac{1}{2})^3$
 $x-1 = \frac{1}{8}$
 $x = 1\frac{1}{8}$

f ${}^2\log(x^2-4) = 5$
 $x^2-4 = 2^5$
 $x^2-4 = 32$
 $x^2 = 36$
 $x = 6 \vee x = -6$

73 a $4 \cdot {}^3\log(x) = 2$
 ${}^3\log(x) = \frac{1}{2}$
 $x = 3^{\frac{1}{2}}$
 $x = \sqrt{3}$

b ${}^3\log(4x-1) = -2$
 $4x-1 = 3^{-2}$
 $4x-1 = \frac{1}{9}$
 $4x = 1\frac{1}{9}$
 $x = \frac{5}{18}$

c $3 + {}^2\log(x) = -1$
 ${}^2\log(x) = -4$
 $x = 2^{-4}$
 $x = \frac{1}{16}$

d ${}^5\log(3x+2) = 1$
 $3x+2 = 5^1$
 $3x+2 = 5$
 $3x = 3$
 $x = 1$

e ${}^3\log(0,4x-5) = 2$
 $0,4x-5 = 3^2$
 $0,4x-5 = 9$
 $0,4x = 14$
 $x = 35$

f $4 + 2 \cdot {}^2\log(x) = 7$
 $2 \cdot {}^2\log(x) = 3$
 ${}^2\log(x) = 1\frac{1}{2}$
 $x = 2^{1\frac{1}{2}}$
 $x = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
 $x = 2\sqrt{2}$

74 Voer in $y_1 = 2^x$ en $y_2 = 30$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 4,91$.

Bladzijde 40

75 a $2^{x-1} = 15$
 $x-1 = {}^2\log(15)$
 $x = 1 + {}^2\log(15)$

b $1 + 2^x = 15$
 $2^x = 14$
 $x = {}^2\log(14)$

c $4 + 3^{x+1} = 25$
 $3^{x+1} = 21$
 $x+1 = {}^3\log(21)$
 $x = -1 + {}^3\log(21)$

d $14 - 2^{x+3} = 2$
 $-2^{x+3} = -12$
 $2^{x+3} = 12$
 $x+3 = {}^2\log(12)$
 $x = -3 + {}^2\log(12)$

e $7 + 4^{2x} = 12$
 $4^{2x} = 5$

$2x = {}^4\log(5)$
 $x = \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(5)$

f $3 \cdot 5^{2x+1} = 60$
 $5^{2x+1} = 20$
 $2x+1 = {}^5\log(20)$
 $2x = -1 + {}^5\log(20)$
 $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(20)$

g $3^{x+2} + 3^x = 600$
 $3^x \cdot 3^2 + 3^x = 600$
 $9 \cdot 3^x + 3^x = 600$
 $10 \cdot 3^x = 600$
 $3^x = 60$
 $x = {}^3\log(60)$

h $2^{1+2x} = 4^x + 6$
 $2^1 \cdot 2^{2x} = 4^x + 6$
 $2 \cdot (2^2)^x = 4^x + 6$
 $2 \cdot 4^x = 4^x + 6$
 $4^x = 6$
 $x = {}^4\log(6)$

- 76 a** $4^x = 2^{x+2} - 3$
 $(2^2)^x = 2^x \cdot 2^2 - 3$
 $(2^x)^2 = 4 \cdot 2^x - 3$
- b** 2^x bij de vergelijking $(2^x)^2 = 4 \cdot 2^x - 3$ vervangen door u geeft $u^2 = 4u - 3$.
- c** $u^2 = 4u - 3$
 $u^2 - 4u + 3 = 0$
 $(u - 1)(u - 3) = 0$
 $u = 1 \vee u = 3$
- d** $u = 1$ geeft $2^x = 1$ oftewel $x = 0$.
 $u = 3$ geeft $2^x = 3$ oftewel $x = {}^2\log(3)$.

- 77 a** $9^x - 3^{x+1} = 4$
 $(3^2)^x - 3^x \cdot 3^1 = 4$
 $(3^x)^2 - 3 \cdot 3^x - 4 = 0$
Stel $3^x = u$.
 $u^2 - 3u - 4 = 0$
 $(u + 1)(u - 4) = 0$
 $u = -1 \vee u = 4$
 $3^x = -1 \vee 3^x = 4$
 $x = {}^3\log(4)$
- b** $4^x = 2^x + 42$
 $(2^2)^x = 2^x + 42$
 $(2^x)^2 - 2^x - 42 = 0$
Stel $2^x = u$.
 $u^2 - u - 42 = 0$
 $(u + 6)(u - 7) = 0$
 $u = -6 \vee u = 7$
 $2^x = -6 \vee 2^x = 7$
 $x = {}^2\log(7)$
- c** $2^x = 24 - 2^{2x-1}$
 $2^x = 24 - 2^{2x} \cdot 2^{-1}$
 $2^x = 24 - \frac{1}{2} \cdot (2^x)^2$
 $\frac{1}{2} \cdot (2^x)^2 + 2^x - 24 = 0$
 $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 48 = 0$
Stel $2^x = u$.
 $u^2 + 2u - 48 = 0$
 $(u - 6)(u + 8) = 0$
 $u = 6 \vee u = -8$
 $2^x = 6 \vee 2^x = -8$
 $x = {}^2\log(6)$
- d** $9^x = 5 \cdot 3^x + 6$
 $(3^2)^x = 5 \cdot 3^x + 6$
 $(3^x)^2 - 5 \cdot 3^x - 6 = 0$
Stel $3^x = u$.
 $u^2 - 5u - 6 = 0$
 $(u + 1)(u - 6) = 0$
 $u = -1 \vee u = 6$
 $3^x = -1 \vee 3^x = 6$
 $x = {}^3\log(6)$

- 78 a** $5^{x-1} + 5^{2x-1} = 4$
 $5^x \cdot 5^{-1} + 5^{2x} \cdot 5^{-1} = 4$
 $\frac{1}{5} \cdot 5^x + \frac{1}{5} \cdot (5^x)^2 = 4$
 $5^x + (5^x)^2 = 20$
 $(5^x)^2 + 5^x - 20 = 0$
Stel $5^x = u$.
 $u^2 + u - 20 = 0$
 $(u - 4)(u + 5) = 0$
 $u = 4 \vee u = -5$
 $5^x = 4 \vee 5^x = -5$
 $x = {}^5\log(4)$
- b** $3^x - 2 = 8 \cdot (\frac{1}{3})^x$
 $3^x - 2 = 8 \cdot \frac{1}{3^x}$
 $(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x = 8$
 $(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 8 = 0$
Stel $3^x = u$.
 $u^2 - 2u - 8 = 0$
 $(u + 2)(u - 4) = 0$
 $u = -2 \vee u = 4$
 $3^x = -2 \vee 3^x = 4$
 $x = {}^3\log(4)$
- c** $2^x = 6 - 5 \cdot (\frac{1}{2})^x$
 $2^x = 6 - 5 \cdot \frac{1}{2^x}$
 $(2^x)^2 = 6 \cdot 2^x - 5$
 $(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 5 = 0$
Stel $2^x = u$.
 $u^2 - 6u + 5 = 0$
 $(u - 1)(u - 5) = 0$
 $u = 1 \vee u = 5$
 $2^x = 1 \vee 2^x = 5$
 $x = 0 \vee x = {}^2\log(5)$
- d** $3^x + 2 \cdot (\frac{1}{3})^{x-2} = 9$
 $3^x + 2 \cdot (\frac{1}{3})^x \cdot (\frac{1}{3})^{-2} = 9$
 $3^x + 18 \cdot \frac{1}{3^x} = 9$
 $(3^x)^2 + 18 = 9 \cdot 3^x$
 $(3^x)^2 - 9 \cdot 3^x + 18 = 0$
Stel $3^x = u$.
 $u^2 - 9u + 18 = 0$
 $(u - 3)(u - 6) = 0$
 $u = 3 \vee u = 6$
 $3^x = 3 \vee 3^x = 6$
 $x = 1 \vee x = {}^3\log(6)$

Bladzijde 41

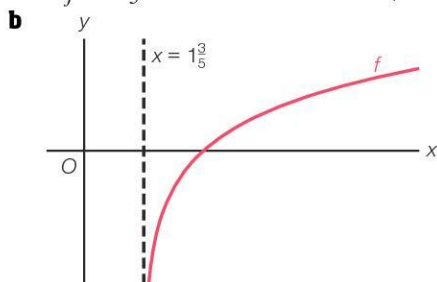
79 $3 \cdot 27^x + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 7 \cdot 3^x$
 $3 \cdot (3^3)^x + 2 \cdot \frac{1}{3^x} = 7 \cdot 3^x$
 $3 \cdot (3^x)^3 + 2 \cdot \frac{1}{3^x} = 7 \cdot 3^x$
 $3 \cdot (3^x)^4 + 2 = 7 \cdot (3^x)^2$
 $3 \cdot (3^x)^4 - 7 \cdot (3^x)^2 + 2 = 0$
 Stel $3^x = u$.
 $3u^4 - 7u^2 + 2 = 0$
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$
 $u^2 = \frac{7+5}{6} \vee u^2 = \frac{7-5}{6}$
 $u^2 = 2 \vee u^2 = \frac{1}{3}$
 $u = \sqrt{2} \vee u = -\sqrt{2} \vee u = \sqrt{\frac{1}{3}} \vee u = -\sqrt{\frac{1}{3}}$
 $3^x = \sqrt{2} \vee 3^x = -\sqrt{2} \vee 3^x = \sqrt{\frac{1}{3}} \vee 3^x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$
 $x = {}^3\log(\sqrt{2}) \vee 3^x = 3^{-\frac{1}{2}}$
 $x = {}^3\log(\sqrt{2}) \vee x = -\frac{1}{2}$

80 Voor f geldt $y = 2^x$, dus voor f^{inv} geldt $x = 2^y$.
 $x = 2^y$ geeft $2^y = x$
 $y = {}^2\log(x)$
 Dus $g(x) = {}^2\log(x)$ is de inverse van f .

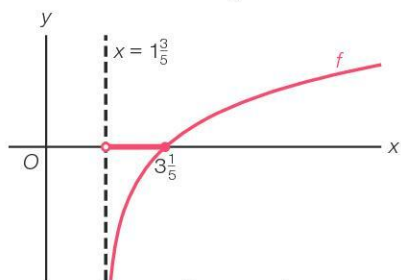
Bladzijde 42

81 a $ax + b = 0$ geeft $x = -\frac{b}{a}$.
 De verticale asymptoot van de grafiek is de lijn $x = -\frac{b}{a}$.
b ${}^3\log(2x + 5) = 2$
 $2x + 5 = 3^2$
 $2x = 4$
 $x = 2$
 ${}^3\log(2x + 5) \leq 2$ geeft $-2\frac{1}{2} < x \leq 2$

82 a $5x - 8 > 0$
 $5x > 8$
 $x > 1\frac{3}{5}$
 $D_f = \langle 1\frac{3}{5}, \rightarrow \rangle$ en de verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = 1\frac{3}{5}$.

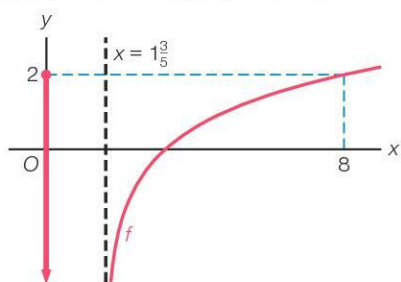


c $f(x) = 0$ geeft $-3 + {}^2\log(5x - 8) = 0$
 ${}^2\log(5x - 8) = 3$
 $5x - 8 = 2^3$
 $5x = 16$
 $x = 3\frac{1}{5}$



$f(x) \leq 0$ geeft $1\frac{3}{5} < x \leq 3\frac{1}{5}$

d $f(8) = -3 + {}^2\log(32) = -3 + 5 = 2$

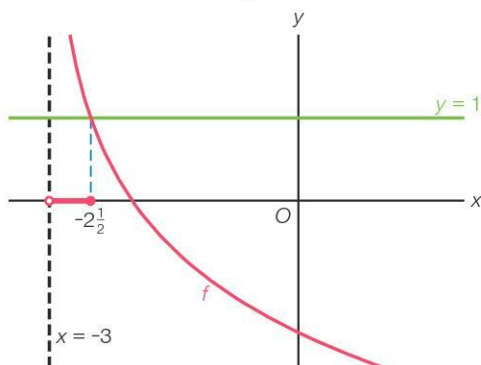


Voor $x \leq 8$ is $f(x) \leq 2$.

83 a $f(x) = 5$ geeft $\frac{1}{2}\log(x + 3) = 5$
 $x + 3 = (\frac{1}{2})^5$
 $x = -2\frac{31}{32}$

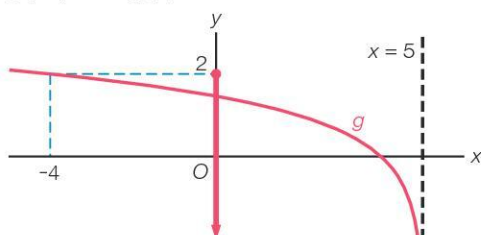
b $f(-1) = \frac{1}{2}\log(2) = -1$ en $g(-1) = {}^3\log(6)$
 $AB = {}^3\log(6) - (-1) = {}^3\log(6) + 1$

c $f(x) = 1$ geeft $\frac{1}{2}\log(x + 3) = 1$
 $x + 3 = (\frac{1}{2})^1$
 $x = -2\frac{1}{2}$



$f(x) \geq 1$ geeft $-3 < x \leq -2\frac{1}{2}$

d $g(-4) = {}^3\log(9) = 2$



Voor $x \geq -4$ is $g(x) \leq 2$.

84 $A(4, 1)$ op de grafiek van f geeft ${}^2\log(4+c) + d = 1$.

$B(7, 3)$ op de grafiek van f geeft ${}^2\log(7+c) + d = 3$.

${}^2\log(4+c) + d = 1$ geeft ${}^2\log(4+c) = 1-d$

$$4+c = 2^{1-d}$$

$$c = 2^{1-d} - 4$$

${}^2\log(7+c) + d = 3$ geeft ${}^2\log(7+c) = 3-d$

$$7+c = 2^{3-d}$$

$$c = 2^{3-d} - 7$$

$c = 2^{1-d} - 4$ en $c = 2^{3-d} - 7$ geeft $2^{1-d} - 4 = 2^{3-d} - 7$

$$2 \cdot 2^{-d} - 4 = 2^3 \cdot 2^{-d} - 7$$

$$2 \cdot 2^{-d} - 4 = 8 \cdot 2^{-d} - 7$$

$$-6 \cdot 2^{-d} = -3$$

$$2^{-d} = \frac{1}{2}$$

$$d = 1$$

$d = 1$ geeft $c = 2^{1-1} - 4 = 2^0 - 4 = 1 - 4 = -3$

Dus $c = -3$ en $d = 1$.

Diagnostische toets

Bladzijde 46

1 a $(3a^{-5}b^4)^{-2} = 3^{-2} \cdot a^{10} \cdot b^{-8} = \frac{1}{9} \cdot a^{10} \cdot \frac{1}{b^8} = \frac{a^{10}}{9b^8}$

b $(\frac{2}{3}a^{-2}b)^{-2} = (\frac{2}{3})^{-2} \cdot a^4 \cdot b^{-2} = \frac{1}{(\frac{2}{3})^2} \cdot a^4 \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} \cdot a^4 \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{9}{4} \cdot a^4 \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{9a^4}{4b^2}$

c $3a^{1\frac{1}{3}}b^{-3} = 3a \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{b^3} = \frac{3a \cdot \sqrt[3]{a}}{b^3}$

d $(a^{-\frac{1}{4}})^3 = a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

e $a^{-2}b^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{a^2} \cdot \sqrt[5]{b} = \frac{\sqrt[5]{b}}{a^2}$

f $7a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{5}} = 7 \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[5]{b^3} = \frac{7 \cdot \sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[3]{a}}$

2 a $\frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} = x^{\frac{1}{2}-2} = x^{-1\frac{1}{2}}$

b $x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{2\frac{1}{3}}$

c $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}$

3 a $y = 3x^{-3}(\frac{1}{2}x^2)^3 = 3 \cdot x^{-3} \cdot \frac{1}{8}x^6 = \frac{3}{8}x^3$

Dus $y = \frac{3}{8}x^3$.

b $y = \frac{1}{5x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{5}x^{-2\frac{1}{2}}$

Dus $y = \frac{1}{5}x^{-2\frac{1}{2}}$.

c $y = \frac{12}{5x^{-3}} \cdot \sqrt[5]{x^3} = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{x^{-3}} \cdot x^{\frac{3}{5}} = 2\frac{2}{5} \cdot x^3 \cdot x^{\frac{3}{5}} = 2\frac{2}{5}x^{3\frac{3}{5}}$

Dus $y = 2\frac{2}{5}x^{3\frac{3}{5}}$.

4 a $x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = 128$

$$x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 128$$

$$x^{2\frac{1}{3}} = 128$$

$$x = (2^7)^{\frac{3}{7}}$$

$$x = 2^3$$

$$x = 8$$

b $(2x + 3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}$

$$2x + 3 = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$2x + 3 = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$2x + 3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$$

$$2x + 3 = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$$

$$2x + 3 = \frac{1}{\frac{8}{27}}$$

$$2x + 3 = \frac{27}{8}$$

$$2x = \frac{3}{8}$$

$$x = \frac{3}{16}$$

c $112 - 2x^{-4} = 5x^{-4}$

$$-7x^{-4} = -112$$

$$x^{-4} = 16$$

$$x = 16^{-\frac{1}{4}}$$

$$x = (2^4)^{-\frac{1}{4}}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

5 a $y = 0,02x^{-1\frac{3}{5}}$

$$0,02x^{-1\frac{3}{5}} = y$$

$$x^{-\frac{8}{5}} = 50y$$

$$x = (50y)^{-\frac{5}{8}}$$

$$x = 50^{-\frac{5}{8}} \cdot y^{-\frac{5}{8}}$$

$$x \approx 0,09 \cdot y^{-0,63}$$

$$\text{Dus } x = 0,09y^{-0,63}.$$

b $y = \frac{1}{4}x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = \frac{1}{4}x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}x^{2\frac{1}{3}}$

$$\frac{1}{4}x^{2\frac{1}{3}} = y$$

$$x^{\frac{7}{3}} = 4y$$

$$x = (4y)^{\frac{3}{7}}$$

$$x = 4^{\frac{3}{7}} \cdot y^{\frac{3}{7}}$$

$$x \approx 1,81 \cdot y^{0,43}$$

$$\text{Dus } x = 1,81y^{0,43}.$$

c $y = \frac{20}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{20}{x^{2\frac{1}{2}}} = 20x^{-2\frac{1}{2}}$

$$20x^{-2\frac{1}{2}} = y$$

$$x^{-\frac{5}{2}} = 0,05y$$

$$x = (0,05y)^{-\frac{2}{5}}$$

$$x = 0,05^{-\frac{2}{5}} \cdot y^{-\frac{2}{5}}$$

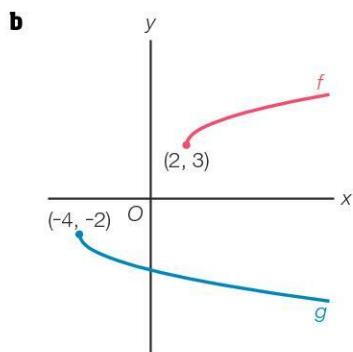
$$x \approx 3,31 \cdot y^{-0,4}$$

$$\text{Dus } x = 3,31y^{-0,4}.$$

6 $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)^4 - 6$
 $\downarrow$ verm. x-as, -4
 $y = -1\frac{1}{3}(x+2)^4 + 24$
 $\downarrow$ translatie (3, -15)
 $g(x) = -1\frac{1}{3}(x-3+2)^4 + 24 - 15$
 oftewel $g(x) = -1\frac{1}{3}(x-1)^4 + 9$
 max. is $g(1) = 9$

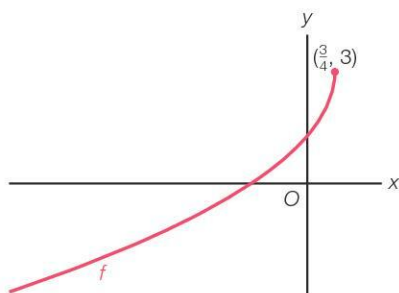
7 a $y = \sqrt{x}$
 $\downarrow$ translatie (2, 3)
 $f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$

$y = \sqrt{x}$
 $\downarrow$ verm. x-as, -1
 $y = -\sqrt{x}$
 $\downarrow$ translatie (-4, -2)
 $g(x) = -2 - \sqrt{x+4}$



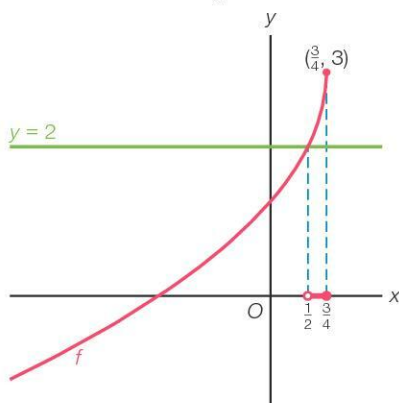
c $D_f = [2, \rightarrow)$, $B_f = [3, \rightarrow)$, $D_g = [-4, \rightarrow)$ en $B_g = \langle \leftarrow, -2]$

8 a $3 - 4x \geq 0$
 $-4x \geq -3$
 $x \leq \frac{3}{4}$
 $D_f = \langle \leftarrow, \frac{3}{4}]$ en het randpunt is $(\frac{3}{4}, 3)$.



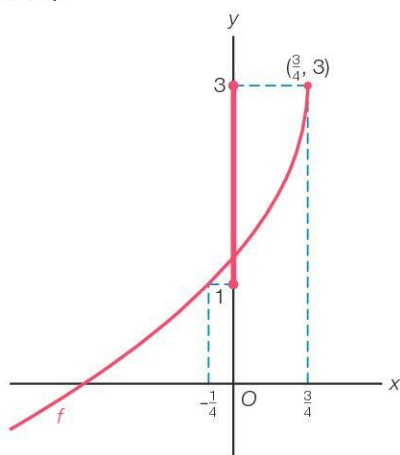
$B_f = \langle \leftarrow, 3]$

b $f(x) = 2$ geeft $3 - \sqrt{3-4x} = 2$
 $\sqrt{3-4x} = 1$
 $3 - 4x = 1$
 $-4x = -2$
 $x = \frac{1}{2}$



$f(x) > 2$ geeft $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}$

c $f(-\frac{1}{4}) = 1$



Voor $x \geq -\frac{1}{4}$ is $1 \leq f(x) \leq 3$.

9 a $N = 2\sqrt{-5t + 1}$
 $2\sqrt{-5t + 1} = N$
 kwadrateren geeft
 $4(-5t + 1) = N^2$
 $-20t + 4 = N^2$
 $-20t = N^2 - 4$
 $t = -\frac{1}{20}N^2 + \frac{1}{5}$

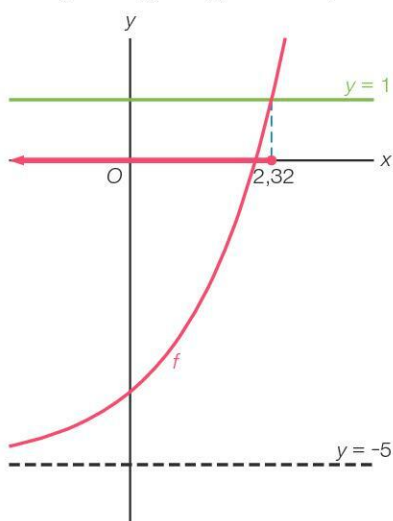
b $2x\sqrt{y} - 6\sqrt{x} = 1$
 $2x\sqrt{y} = 6\sqrt{x} + 1$
 kwadrateren geeft
 $4x^2y = (6\sqrt{x} + 1)^2$
 $4x^2y = 36x + 12\sqrt{x} + 1$
 $y = \frac{36x + 12\sqrt{x} + 1}{4x^2}$

Bladzijde 47

10 a $y = 2^x$
 $\downarrow$ verm. x-as, 0,3
 $y = 0,3 \cdot 2^x$
 $\downarrow$ translatie $(-2, -5)$
 $f(x) = 0,3 \cdot 2^{x+2} - 5$

b $B_f = \langle -5, \rightarrow \rangle$
 De horizontale asymptoot is de lijn $y = -5$.

c Voer in $y_1 = 0,3 \cdot 2^{x+2} - 5$ en $y_2 = 1$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 2,32$.



$f(x) \leq 1$ geeft $x \leq 2,32$

- 11 a** $y = 2^x \cdot 2^{-4x+3} = 2^x \cdot 2^{-4x} \cdot 2^3 = 2^{-3x} \cdot 8 = 8 \cdot (2^{-3})^x = 8 \cdot (\frac{1}{8})^x$
Dus $y = 8 \cdot (\frac{1}{8})^x$.
- b** $y = 108 \cdot 3^{4x-3} = 108 \cdot 3^{4x} \cdot 3^{-3} = 108 \cdot (3^4)^x \cdot \frac{1}{27} = 4 \cdot 81^x$
Dus $y = 4 \cdot 81^x$.
- c** $y = \frac{250}{5^{-2x+3}} = \frac{250}{5^{-2x} \cdot 5^3} = \frac{250}{5^{-2x} \cdot 125} = 2 \cdot 5^{2x} = 2 \cdot (5^2)^x = 2 \cdot 25^x$
Dus $y = 2 \cdot 25^x$.

- 12 a** $5^{x-1} = 125\sqrt{5}$
 $5^{x-1} = 5^3 \cdot 5^{\frac{1}{2}}$
 $5^{x-1} = 5^{3\frac{1}{2}}$
 $x-1 = 3\frac{1}{2}$
 $x = 4\frac{1}{2}$
- b** $3^{2x-5} = (\frac{1}{27})^x$
 $3^{2x-5} = (3^{-3})^x$
 $3^{2x-5} = 3^{-3x}$
 $2x-5 = -3x$
 $5x = 5$
 $x = 1$
- c** $2 \cdot 4^{2x-1} - 3 = 61$
 $2 \cdot 4^{2x-1} = 64$
 $4^{2x-1} = 32$
 $(2^2)^{2x-1} = 2^5$
 $2^{4x-2} = 2^5$
 $4x-2 = 5$
 $4x = 7$
 $x = 1\frac{3}{4}$
- d** $9^{x-1} = 27^{x+1}$
 $(3^2)^{x-1} = (3^3)^{x+1}$
 $3^{2x-2} = 3^{3x+3}$
 $2x-2 = 3x+3$
 $-x = 5$
 $x = -5$
- e** $2^{x+2} + 2^{x-1} = 36$
 $2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^{-1} = 36$
 $4 \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x = 36$
 $4\frac{1}{2} \cdot 2^x = 36$
 $2^x = 8$
 $2^x = 2^3$
 $x = 3$
- f** $2^{x^2} = (\frac{1}{8})^x$
 $2^{x^2} = (2^{-3})^x$
 $2^{x^2} = 2^{-3x}$
 $x^2 = -3x$
 $x^2 + 3x = 0$
 $x(x+3) = 0$
 $x = 0 \vee x = -3$

- 13 a** $f(x) = g(x)$ geeft $2^{x+2} - 3 = 6 - 2^{x-1}$
 $2^x \cdot 2^2 - 3 = 6 - 2^x \cdot 2^{-1}$
 $4 \cdot 2^x - 3 = 6 - \frac{1}{2} \cdot 2^x$
 $4\frac{1}{2} \cdot 2^x = 9$
 $2^x = 2$
 $x = 1$
 $f(x) \geq g(x)$ geeft $x \geq 1$
- b** $g(4) = 6 - 2^3 = 6 - 8 = -2$
Voor $x \leq 4$ is $-2 \leq g(x) < 6$.
- c** $f(x) + g(x) = 2^{x+2} - 3 + 6 - 2^{x-1} = 2^x \cdot 2^2 - 3 + 6 - 2^x \cdot 2^{-1} = 4 \cdot 2^x + 3 - \frac{1}{2} \cdot 2^x = 3\frac{1}{2} \cdot 2^x + 3$
Het bereik van $f(x) + g(x)$ is $\langle 3, \rightarrow \rangle$.
Dus de vergelijking $f(x) + g(x) = p$ heeft geen oplossing voor $p \leq 3$.

- 14 a** $^3\log(3\sqrt{3}) = ^3\log(3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = ^3\log(3^{1\frac{1}{2}}) = 1\frac{1}{2}$
- b** $^2\log(\frac{1}{4}\sqrt{8}) = ^2\log(2^{-2} \cdot \sqrt{2^3}) = ^2\log(2^{-2} \cdot 2^{\frac{3}{2}}) = ^2\log(2^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}$
- c** $^2\log(\frac{1}{16} \cdot \sqrt[3]{2}) = ^2\log(2^{-4} \cdot 2^{\frac{1}{3}}) = ^2\log(2^{-\frac{11}{3}}) = -3\frac{2}{3}$

- 15 a** $^4\log(2x-3) = 2$
 $2x-3 = 4^2$
 $2x-3 = 16$
 $2x = 19$
 $x = 9\frac{1}{2}$
- b** $^{\frac{1}{2}}\log(x-3) = -4$
 $x-3 = (\frac{1}{2})^{-4}$
 $x-3 = 16$
 $x = 19$

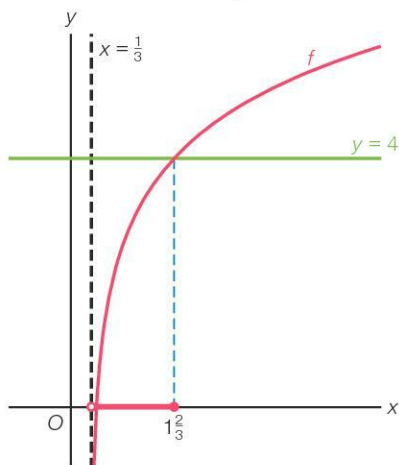
$$\begin{aligned}\text{c } 5 + 3 \cdot {}^2\log(x) &= 20 \\ 3 \cdot {}^2\log(x) &= 15 \\ {}^2\log(x) &= 5 \\ x &= 2^5 \\ x &= 32\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{16 a } 7^{x-3} &= 20 \\ x - 3 &= {}^7\log(20) \\ x &= 3 + {}^7\log(20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b } 4^x - 2^{x+4} &= 80 \\ (2^2)^x - 2^x \cdot 2^4 &= 80 \\ (2^x)^2 - 16 \cdot 2^x - 80 &= 0 \\ \text{Stel } 2^x &= u. \\ u^2 - 16u - 80 &= 0 \\ (u + 4)(u - 20) &= 0 \\ u &= -4 \vee u = 20 \\ 2^x &= -4 \vee 2^x = 20 \\ x &= {}^2\log(20)\end{aligned}$$

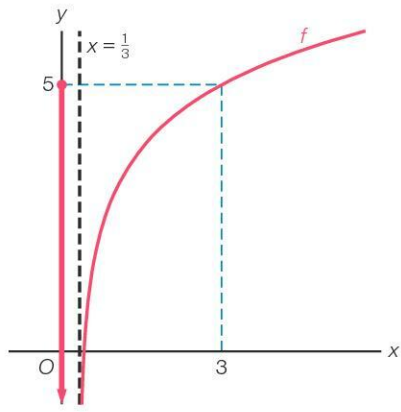
$$\begin{aligned}\text{c } 5^{x+1} - 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} &= 25 \\ 5^x \cdot 5 - 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} &= 25 \\ 5 \cdot 5^x - 30 \cdot \frac{1}{5^x} &= 25 \\ 5 \cdot (5^x)^2 - 30 &= 25 \cdot 5^x \\ (5^x)^2 - 5 \cdot 5^x - 6 &= 0 \\ \text{Stel } 5^x &= u. \\ u^2 - 5u - 6 &= 0 \\ (u + 1)(u - 6) &= 0 \\ u &= -1 \vee u = 6 \\ 5^x &= -1 \vee 5^x = 6 \\ x &= {}^5\log(6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{17 a } 3x - 1 > 0 &\text{ geeft } x > \frac{1}{3} \\ D_f = \left(\frac{1}{3}, \rightarrow\right) &\text{ en de verticale asymptoot van de grafiek is de lijn } x = \frac{1}{3}. \\ f(x) = 4 &\text{ geeft } {}^2\log(3x - 1) + 2 = 4 \\ {}^2\log(3x - 1) &= 2 \\ 3x - 1 &= 2^2 \\ 3x - 1 &= 4 \\ 3x &= 5 \\ x &= 1\frac{2}{3}\end{aligned}$$



$$f(x) \leq 4 \text{ geeft } \frac{1}{3} < x \leq 1\frac{2}{3}$$

b $f(3) = {}^2\log(8) + 2 = 5$



Voor $x \leq 3$ is $f(x) \leq 5$.

6 Differentiaalrekening

Voorkennis Afgeleide en raaklijn

Bladzijde 52

- 1 a** $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6x - 1$ geeft $f'(x) = 2x^3 - 6x + 6$
- b** $g(x) = (5x^2 - 2)^2 = 25x^4 - 20x^2 + 4$ geeft $g'(x) = 100x^3 - 40x$
- c** $h(x) = \frac{x-3}{x^2+4}$ geeft $h'(x) = \frac{(x^2+4) \cdot 1 - (x-3) \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2+6x}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+6x+4}{(x^2+4)^2}$
- d** $k(p) = -\frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{5}p^2 - 8$ geeft $k'(p) = -\frac{1}{2}p^2 + \frac{2}{5}p$
- e** $l(q) = 10 - 5q^2 + 9q^3 - a^4$ geeft $l'(q) = -10q + 27q^2$
- f** $m(x) = 2x^2 - \frac{6}{x+1}$ geeft $m'(x) = 4x - \frac{(x+1) \cdot 0 - 6 \cdot 1}{(x+1)^2} = 4x + \frac{6}{(x+1)^2}$

Bladzijde 53

- 2 a** $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 2$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$
Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(0) = -4$.
$$\left. \begin{array}{l} y = -4x + b \\ f(0) = 2, \text{ dus } A(0, 2) \end{array} \right\} b = 2$$

Dus $k: y = -4x + 2$.
- b** $f'(x) = 1$ geeft $3x^2 - 2x - 4 = 1$
$$\begin{aligned} 3x^2 - 2x - 5 &= 0 \\ D &= (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64 \\ x &= \frac{2 \pm 8}{6} = 1\frac{2}{3} \vee x = \frac{2-8}{6} = -1 \\ f(-1) &= 4 \text{ en } f(1\frac{2}{3}) = -2\frac{22}{27}, \text{ dus } B(-1, 4) \text{ en } C(1\frac{2}{3}, -2\frac{22}{27}). \end{aligned}$$

- 3 a** $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x+1) \cdot 2 - (2x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$
Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = \frac{3}{(2+1)^2} = \frac{1}{3}$.
$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + b \\ f(2) = 1, \text{ dus } A(2, 1) \end{array} \right\} \begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot 2 + b &= 1 \\ \frac{2}{3} + b &= 1 \\ b &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dus $k: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.
- b** $f'(x) = \frac{3}{4}$ geeft $\frac{3}{(x+1)^2} = \frac{3}{4}$
$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= 4 \\ x+1 &= 2 \vee x+1 = -2 \\ x &= 1 \vee x = -3 \\ f(-3) &= 3\frac{1}{2} \text{ en } f(1) = \frac{1}{2}, \text{ dus } B(-3, 3\frac{1}{2}) \text{ en } C(1, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

6.1 Toppen en buigpunten

Bladzijde 54

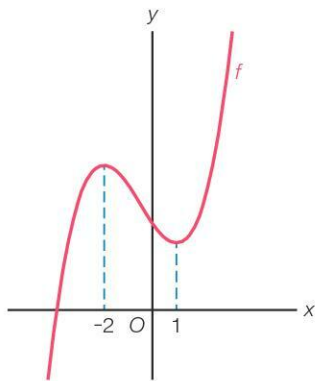
- 1** In toppen is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 0.
 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 18x + 50$ geeft $f'(x) = x^2 - 3x - 18$
 $f'(x) = 0$ geeft $x^2 - 3x - 18 = 0$
$$(x+3)(x-6) = 0$$

$$x = -3 \vee x = 6$$

Dus $x_A = -3$ en $x_B = 6$.

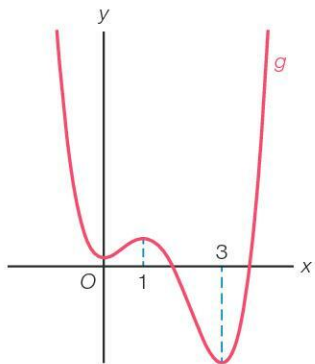
Bladzijde 55

- 2 a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ geeft $f'(x) = x^2 + x - 2$
 $f'(x) = 0$ geeft $x^2 + x - 2 = 0$
 $(x-1)(x+2) = 0$
 $x = 1 \vee x = -2$



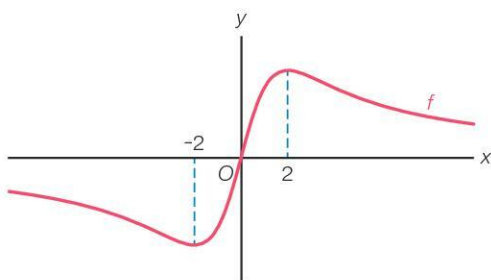
max. is $f(-2) = 8\frac{1}{3}$ en min. is $f(1) = 3\frac{5}{6}$.

- b** $g(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 2$ geeft $g'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x$
 $g'(x) = 0$ geeft $12x^3 - 48x^2 + 36x = 0$
 $12x(x^2 - 4x + 3) = 0$
 $12x(x-1)(x-3) = 0$
 $x = 0 \vee x = 1 \vee x = 3$



min. is $g(0) = 2$, max. is $g(1) = 7$ en min. is $g(3) = -25$.
 Het bereik is $B_g = [-25, \rightarrow)$.

- 3 a** $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 4}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2 + 4) \cdot 5 - 5x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{5x^2 + 20 - 10x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-5x^2 + 20}{(x^2 + 4)^2}$
 $f'(x) = 0$ geeft $\frac{-5x^2 + 20}{(x^2 + 4)^2} = 0$
 $-5x^2 + 20 = 0$
 $-5x^2 = -20$
 $x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$



min. is $f(-2) = -1\frac{1}{4}$ en max. is $f(2) = 1\frac{1}{4}$.
 $f(x) = 0$ geeft $5x = 0$
 $x = 0$

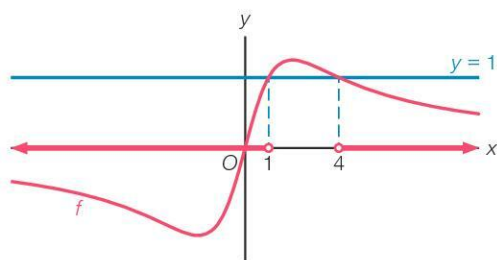
De grafiek snijdt de x -as alleen in $(0, 0)$, dus $B_f = [-1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}]$.

b Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(6) = \frac{-5 \cdot 6^2 + 20}{(6^2 + 4)^2} = -\frac{1}{10}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{10}x + b \\ f(6) = \frac{3}{4}, \text{ dus } A(6, \frac{3}{4}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{10} \cdot 6 + b = \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{5} + b = \frac{3}{4} \\ b = 1\frac{7}{20} \end{array}$$

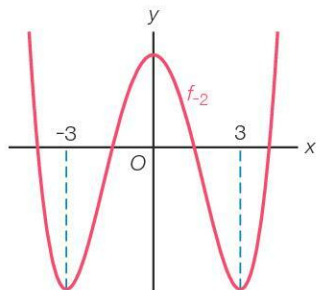
Dus $k: y = -\frac{1}{10}x + 1\frac{7}{20}$.

c $f(x) = 1$ geeft $\frac{5x}{x^2 + 4} = 1$
 $5x = x^2 + 4$
 $x^2 - 5x + 4 = 0$
 $(x - 1)(x - 4) = 0$
 $x = 1 \vee x = 4$



$f(x) < 1$ geeft $x < 1 \vee x > 4$

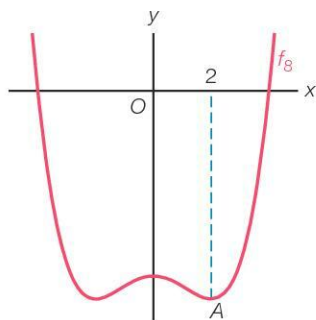
4 a $f_2(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 16) = x^4 - 18x^2 + 32$ geeft $f_2'(x) = 4x^3 - 36x$
 $f_2'(x) = 0$ geeft $4x^3 - 36x = 0$
 $4x(x^2 - 9) = 0$
 $4x = 0 \vee x^2 - 9 = 0$
 $x = 0 \vee x^2 = 9$
 $x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3$



min. is $f_2(-3) = -49$, max. is $f_2(0) = 32$ en min. is $f_2(3) = -49$.

$B_f = [-49, \rightarrow)$

b $f_p(x) = (x^2 + p)(x^2 - 16) = x^4 - 16x^2 + px^2 - 16p$ geeft $f_p'(x) = 4x^3 - 32x + 2px$
 $f_p'(2) = 0$ geeft $32 - 64 + 4p = 0$
 $4p = 32$
 $p = 8$



Dus voor $p = 8$.

5 $f_p(x) = (x^2 + p)(x^2 - 16) = x^4 - 16x^2 + px^2 - 16p$ geeft $f_p'(x) = 4x^3 - 32x + 2px$

Voor $x = x_B$ geldt $4x^3 - 32x + 2px = 0$

$$p = 14x \quad \left\{ \begin{array}{l} 4x^3 - 32x + 2 \cdot 14x \cdot x = 0 \\ 4x^3 + 28x^2 - 32x = 0 \\ 4x(x^2 + 7x - 8) = 0 \\ 4x(x-1)(x+8) = 0 \\ x = 0 \vee x = 1 \vee x = -8 \end{array} \right.$$

$x = 0$ geeft $p = 0$

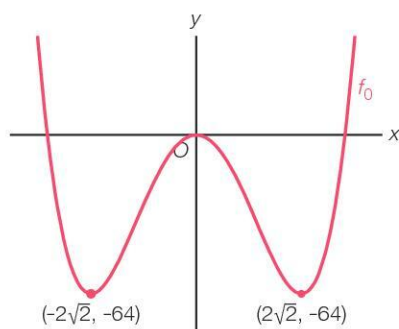
$f_0(x) = x^4 - 16x^2$ geeft $f_0'(x) = 4x^3 - 32x$

$f_0'(x) = 0$ geeft $4x^3 - 32x = 0$

$4x(x^2 - 8) = 0$

$4x = 0 \vee x^2 = 8$

$x = 0 \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$



$B_{f_0} = [-64, \rightarrow)$

$x = 1$ geeft $p = 14$

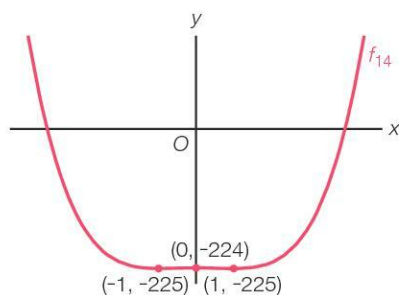
$f_{14}(x) = x^4 - 16x^2 + 14x^2 - 16 \cdot 14 = x^4 - 2x^2 - 224$ geeft $f_{14}'(x) = 4x^3 - 4x$

$f_{14}'(x) = 0$ geeft $4x^3 - 4x = 0$

$4x(x^2 - 1) = 0$

$4x = 0 \vee x^2 = 1$

$x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$



$B_{f_{14}} = [-225, \rightarrow)$

$x = -8$ geeft $p = -112$

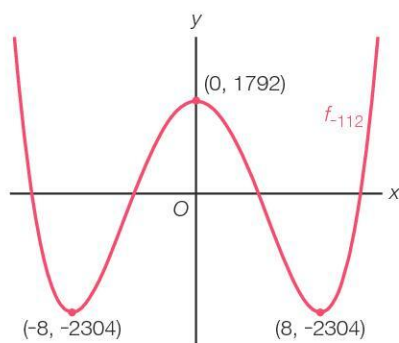
$f_{-112}(x) = x^4 - 16x^2 - 112x^2 - 16 \cdot -112 = x^4 - 128x^2 + 1792$ geeft $f_{-112}'(x) = 4x^3 - 256x$

$f_{-112}'(x) = 0$ geeft $4x^3 - 256x = 0$

$4x(x^2 - 64) = 0$

$4x = 0 \vee x^2 = 64$

$x = 0 \vee x = 8 \vee x = -8$

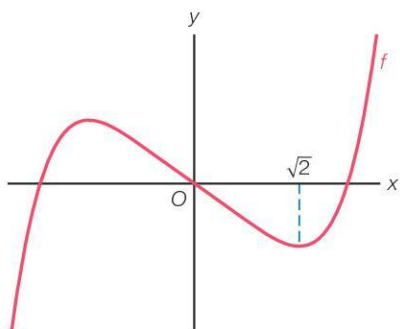


$B_{f_{-112}} = [-2304, \rightarrow)$

- 6 a** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 4x + 3$ geeft $f'(x) = x^3 - 2x - 4$
b $f'(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$
c In de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = 2$. Dus f heeft een extreme waarde voor $x = 2$.

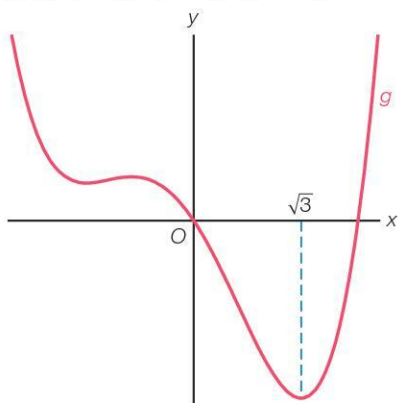
Bladzijde 57

- 7 a** $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 10$
 $f'(1) = 4 - 18 + 24 - 10 = 0$
 Uit de schets blijkt dat er geen extreme waarde is voor $x = 1$. Er is wel een horizontale raaklijn.
b $f(1) = 1 - 6 + 12 - 10 + 7 = 4$ en $f(2\frac{1}{2}) = 2\frac{5}{16}$.
 Dus de horizontale raaklijnen zijn $y = 4$ en $y = 2\frac{5}{16}$.
- 8 a** $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - 7x$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{2}x^4 - 1\frac{1}{2}x^2 - 7$
 $f'(\sqrt{2}) = 2\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^4 - 1\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 - 7 = 2\frac{1}{2} \cdot 4 - 1\frac{1}{2} \cdot 2 - 7 = 10 - 3 - 7 = 0$



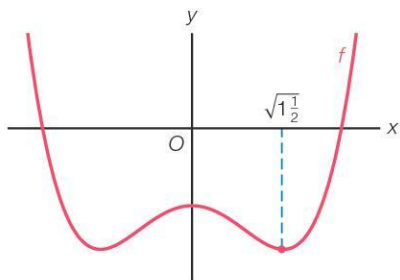
$f'(\sqrt{2}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{2}$.
 Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{2}$.

- b** $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 3x$ geeft $g'(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$
 $g'(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 - 3\sqrt{3} - 3 = 3\sqrt{3} + 3 - 3\sqrt{3} - 3 = 0$



$g'(\sqrt{3}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{3}$.
 Dus g heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{3}$.

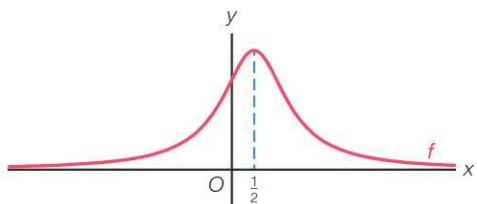
- 9 a** $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2 + x^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 6x$
 $f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 = 4 - 6 = -2$
 $f'(1)$ is niet gelijk aan 0, dus f heeft geen extreme waarde voor $x = 1$.
- b** $f'(\sqrt{1\frac{1}{2}}) = 4 \cdot (\sqrt{1\frac{1}{2}})^3 - 6 \cdot \sqrt{1\frac{1}{2}} = 4 \cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{1\frac{1}{2}} - 6\sqrt{1\frac{1}{2}} = 6\sqrt{1\frac{1}{2}} - 6\sqrt{1\frac{1}{2}} = 0$



$f'(\sqrt{1\frac{1}{2}}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

10 a $f(x) = \frac{x+1}{x^3+1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^3+1) \cdot 1 - (x+1) \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{x^3+1-3x^3-3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-2x^3-3x^2+1}{(x^3+1)^2}$
 $f'(\frac{1}{2}) = \frac{-2 \cdot (\frac{1}{2})^3 - 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 1}{((\frac{1}{2})^3 + 1)^2} = \frac{-2 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 1}{(\frac{1}{8} + 1)^2} = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1}{(\frac{9}{8})^2} = \frac{0}{\frac{81}{64}} = 0$



$f'(\frac{1}{2}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \frac{1}{2}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \frac{1}{2}$.

b $(x+1)(x^2-x+1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$

c $f(x) = \frac{x+1}{x^3+1} = \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{x^2-x+1}$ mits $x \neq -1$ geeft

$$f'(x) = \frac{(x^2-x+1) \cdot 0 - 1 \cdot (2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2} = 0$$

$$-2x+1=0$$

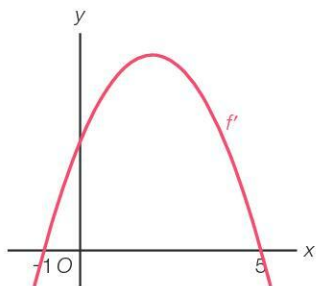
$$-2x=-1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

vold.

- 11 a** dalend op $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en $\langle 5, \rightarrow \rangle$
 stijgend op $\langle -1, 5 \rangle$
 toenemend stijgend op $\langle -1, 2 \rangle$
 afnemend stijgend op $\langle 2, 5 \rangle$

b $f'(x) = -3x^2 + 12x + 15$
 $f'(x) = 0$ geeft $-3x^2 + 12x + 15 = 0$
 $x^2 - 4x - 5 = 0$
 $(x+1)(x-5) = 0$
 $x = -1 \vee x = 5$



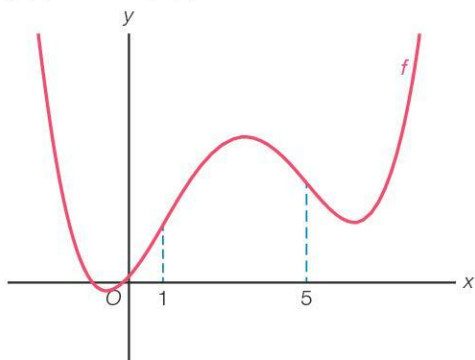
c $x_p = \frac{-1+5}{2} = 2$

d Bij $x = x_p$ gaat de grafiek over van toenemend stijgend in afnemend stijgend, want links van $x = x_p$ nemen de hellingen toe en rechts van $x = x_p$ nemen de hellingen af.

Bladzijde 59

12 a $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 48x + 5$
 $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 48$
 $f''(x) = 12x^2 - 72x + 60$
 $f''(x) = 0$ geeft $12x^2 - 72x + 60 = 0$
 $x^2 - 6x + 5 = 0$
 $(x-1)(x-5) = 0$
 $x = 1 \vee x = 5$

$f(1) = 72$ en $f(5) = 120$.



Uit de schets volgt dat de buigpunten $(1, 72)$ en $(5, 120)$ zijn.

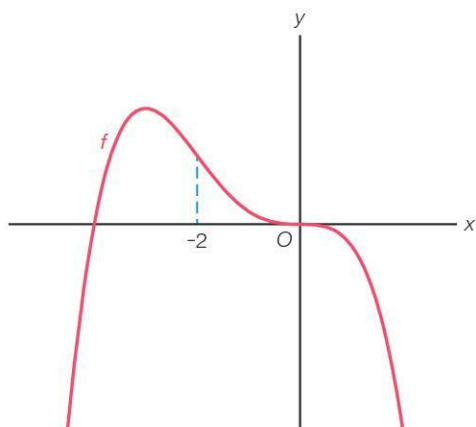
b $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x + 4$
 $g'(x) = x^2 - 6x + 6$
 $g''(x) = 2x - 6$
 $g''(x) = 0$ geeft $2x - 6 = 0$
 $2x = 6$
 $x = 3$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = g'(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 6 = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ g(3) = 4, \text{ dus buigpunt } (3, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 3 + b = 4 \\ -9 + b = 4 \\ b = 13 \end{array}$$

Dus $k: y = -3x + 13$.

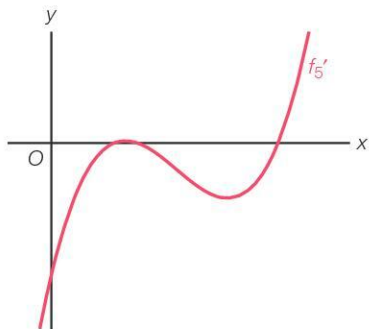
13 a $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3$
 $f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2$
 $f''(x) = -x^2 - 2x$
 $f''(x) = 0$ geeft $-x^2 - 2x = 0$
 $-x(x+2) = 0$
 $x = 0 \vee x = -2$
 $f(0) = 0$ en $f(-2) = 1\frac{1}{3}$.



Uit de schets volgt dat $(-2, 1\frac{1}{3})$ en $(0, 0)$ de buigpunten zijn.

- b** $f'''(0) = 0$ en $f'(0) = 0$, dus in het punt $(0, 0)$ is er sprake van een horizontale buigraaklijn.

14 a $f_5(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x - 5$
 $f_5'(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 5$
 $f_5''(x) = 3x^2 - 12x + 10$
 $f_5''(x) = 0$ geeft $3x^2 - 12x + 10 = 0$
 $D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 24 > 0$, dus twee oplossingen
Dus f_5' heeft twee extremen.

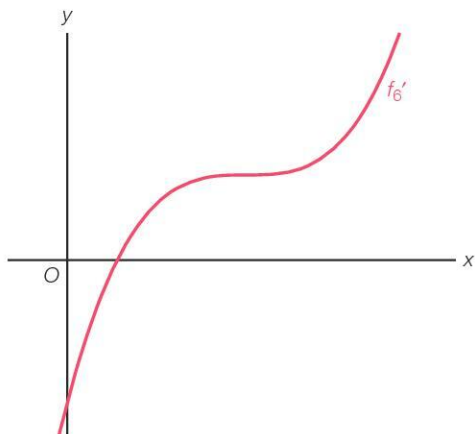


De grafiek van f_5 heeft twee buigpunten, omdat f_5' twee extremen heeft.

b $f_6(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x - 5$
 $f_6'(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$
 $f_6''(x) = 3x^2 - 12x + 12$
 $f_6''(x) = 0$ geeft $3x^2 - 12x + 12 = 0$
 $3(x^2 - 4x + 4) = 0$
 $3(x-2)^2 = 0$

De vergelijking $f_6''(x) = 0$ heeft één oplossing.

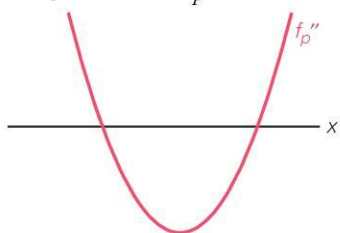
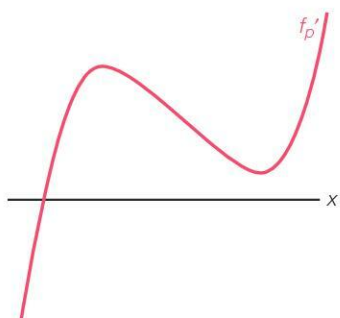
De grafiek van f_6' heeft dus één horizontale raaklijn.



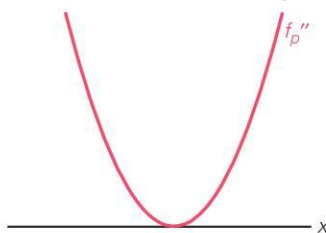
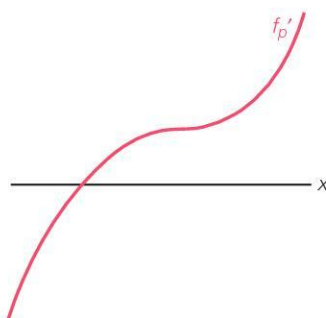
De grafiek van f_6 heeft geen buigpunten omdat f'_6 geen extremen heeft.

- c** $f_p(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + px^2 - 5x - 5$
 $f'_p(x) = x^3 - 6x^2 + 2px - 5$
 $f''_p(x) = 3x^2 - 12x + 2p$
 $f''(x) = 0$ mag geen of één oplossing hebben, oftewel $D \leq 0$.
 $(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2p \leq 0$
 $144 - 24p \leq 0$
 $-24p \leq -144$
 $p \geq 6$

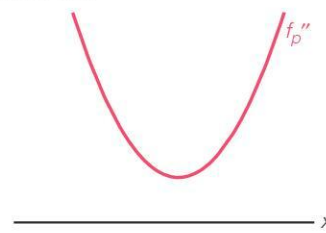
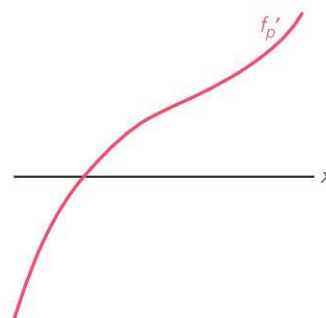
- d** $f''_p(x) = 3x^2 - 12x + 2p$
 De grafiek van f''_p is een dalparabool met twee, één of nul snijpunten met de x -as.



Heeft de grafiek van f''_p twee snijpunten met de x -as, dan is de grafiek van f'_p stijgend-dalend-stijgend, dus f'_p heeft twee extremen, dus de grafiek van f_p heeft twee buigpunten.



Heeft de grafiek van f''_p één raakpunt met de x -as, dan is de grafiek van f'_p stijgend-stijgend, dus f'_p heeft geen extremen, dus de grafiek van f_p heeft geen buigpunten.



Heeft de grafiek van f''_p geen snijpunten met de x -as, dan is de grafiek van f'_p stijgend, dus f'_p heeft geen extremen, dus de grafiek van f_p heeft geen buigpunten.

Dus de grafiek van f_p heeft óf twee óf geen buigpunten.

15 a $f(x) = (\frac{1}{2}x^3 - 4)^2 - 5 = \frac{1}{4}x^6 - 4x^3 + 16 - 5 = \frac{1}{4}x^6 - 4x^3 + 11$ geeft

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^5 - 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2}x^5 - 12x^2 = 0$$

$$3x^5 - 24x^2 = 0$$

$$3x^2(x^3 - 8) = 0$$

$$3x^2 = 0 \vee x^3 = 8$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

In de figuur in het leerboek is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = 2$.

$$f(2) = -5, \text{ dus top } (2, -5).$$

b $f'(x) = \frac{1}{2}x^5 - 12x^2$ geeft $f''(x) = \frac{5}{2}x^4 - 24x$

$f''(0) = 0$, in de figuur in het leerboek is te zien dat A een buigpunt is.

c $f''(x) = 0$ geeft $\frac{5}{2}x^4 - 24x = 0$

$$x(\frac{5}{2}x^3 - 24) = 0$$

$$x = 0 \vee \frac{5}{2}x^3 = 24$$

$$x = 0 \vee x^3 = 3\frac{1}{5}$$

$$x = 0 \vee x = \sqrt[3]{3\frac{1}{5}}$$

$$f(\sqrt[3]{3\frac{1}{5}}) = (\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{5} - 4)^2 - 5 = \frac{19}{25}$$

$$\text{Dus } B(\sqrt[3]{3\frac{1}{5}}, \frac{19}{25}).$$

16 $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{3}{4}x^2 + 10$

$$f_p'(x) = 4x^3 + 3px^2 + \frac{1}{2}x$$

$$f_p''(x) = 12x^2 + 6px + \frac{1}{2}$$

De grafiek van f_p heeft twee buigpunten als f_p' twee extremen heeft,

dus als $f_p''(x) = 0$ twee oplossingen heeft.

twee oplossingen, dus $D > 0$

$$D = (6p)^2 - 4 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 36p^2 - 72 \left\{ \begin{array}{l} 36p^2 - 72 > 0 \\ 36p^2 > 72 \end{array} \right.$$

$$p^2 > 2$$

$$p < -\sqrt{2} \vee p > \sqrt{2}.$$

Dus de grafiek van f_p heeft twee buigpunten voor $p < -\sqrt{2} \vee p > \sqrt{2}$.

17 a $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geeft $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Gegeven is dat f een derdegraadsfunctie is, dus $a \neq 0$.

Hieruit volgt dat de grafiek van f' een parabool is, dus f' heeft één extreem.

Dus de grafiek van elke derdegraadsfunctie heeft één buigpunt.

b Omdat de grafiek van f twee toppen heeft, heeft de grafiek van f' twee snijpunten met de x -as.

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

twee oplossingen, dus $D > 0$

$$D = (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c = 4b^2 - 12ac \left\{ \begin{array}{l} 4b^2 - 12ac > 0 \\ 4b^2 > 12ac \end{array} \right.$$

$$b^2 > 3ac$$

c $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ geeft $f''(x) = 6ax + 2b$

$$f''(x) = 0 \text{ geeft } 6ax + 2b = 0$$

$$6ax = -2b$$

$$x = -\frac{b}{3a}$$

$$\text{Dus } x_R = -\frac{b}{3a}.$$

Voor een derdegraadsfunctie geldt dat $a \neq 0$, dus er is precies één buigpunt.

De x -coördinaten van de toppen zijn de oplossingen van $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ geeft $3ax^2 + 2bx + c = 0$

$$D = 4b^2 - 12ac$$

$$x = \frac{-2b + \sqrt{D}}{6a} \vee x = \frac{-2b - \sqrt{D}}{6a}$$

$$x_P + x_Q = \frac{-2b + \sqrt{D}}{6a} + \frac{-2b - \sqrt{D}}{6a} = \frac{-2b + \sqrt{D} - 2b - \sqrt{D}}{6a} = \frac{-4b}{6a} = \frac{-2b}{3a} = 2 \cdot \frac{-b}{3a} = 2x_R$$

$$\text{Dus } 2x_R = x_P + x_Q \text{ oftewel } x_R = \frac{x_P + x_Q}{2}.$$

6.2 De afgeleide van machtsfuncties

Bladzijde 62

18

a $\frac{4}{x^2} = 4x^{-2}$ $\frac{6}{x^3} = 6x^{-3}$ $\frac{5}{x^4} = 5x^{-4}$ $\frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}x^{-2}$

b $x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ $3x^{-2} = \frac{3}{x^2}$ $-2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ $\frac{1}{7}x^{-6} = \frac{1}{7x^6}$

c $\frac{x^3 + 5x^2}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} = x^2 + 5x$
 $\frac{4x^2 + 7x}{x^3} = \frac{4x^2}{x^3} + \frac{7x}{x^3} = 4x^{-1} + 7x^{-2}$
 $\frac{2x^5 + 5x^2}{3x^4} = \frac{2x^5}{3x^4} + \frac{5x^2}{3x^4} = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}x^{-2}$

d $\frac{1}{2x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x}{2x^2} + \frac{4}{2x^2} = \frac{x+4}{2x^2}$
 $\frac{1}{2}x + \frac{3}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^3}{2x^2} + \frac{6}{2x^2} = \frac{x^3+6}{2x^2}$
 $\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4x} = \frac{2x^2}{3} - \frac{3}{4x} = \frac{8x^3}{12x} - \frac{9}{12x} = \frac{8x^3-9}{12x}$

19

a $f(x) = \frac{1}{x^2}$ geeft $f'(x) = \frac{x^2 \cdot [1]' - 1 \cdot [x^2]'}{(x^2)^2} = \frac{x^2 \cdot 0 - 1 \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$

b $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ geeft $f'(x) = -\frac{2}{x^3} = -2x^{-3}$

c $g(x) = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$ geeft $g'(x) = \frac{x^5 \cdot [1]' - 1 \cdot [x^5]'}{(x^5)^2} = \frac{x^5 \cdot 0 - 1 \cdot 5x^4}{x^{10}} = \frac{-5x^4}{x^{10}} = -5x^{-6}$

Bladzijde 63

20

a $n = 0$ geeft $f(x) = x^0 = 1$ en hieruit volgt $f'(x) = 0$.
 $n = 0$ geeft $f'(x) = 0 \cdot x^{0-1} = 0$
Dus $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ klopt voor $n = 0$.
 $n = 1$ geeft $f(x) = x^1 = x$ en hieruit volgt $f'(x) = 1$.
 $n = 1$ geeft $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$
Dus $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ klopt voor $n = 1$.

b Dat lukte omdat de noemers uit slechts één term bestaan.
De functies g en h zijn te differentiëren door uit te delen.

21 a $f(x) = \frac{1}{x^6} = x^{-6}$ geeft $f'(x) = -6x^{-7} = \frac{-6}{x^7}$

b $g(x) = 5 - \frac{3}{x^2} = 5 - 3x^{-2}$ geeft $g'(x) = 6x^{-3} = \frac{6}{x^3}$

c $h(x) = ax^4 - \frac{b}{x^4} = ax^4 - bx^{-4}$ geeft $h'(x) = 4ax^3 + 4bx^{-5} = 4ax^3 + \frac{4b}{x^5}$

22 a $f(x) = \frac{2x-1}{3x^2} = \frac{2x}{3x^2} - \frac{1}{3x^2} = \frac{2}{3}x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-2}$ geeft $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} + \frac{2}{3}x^{-3} = -\frac{2}{3x^2} + \frac{2}{3x^3} = -\frac{2x}{3x^3} + \frac{2}{3x^3} = \frac{2-2x}{3x^3}$

b $g(x) = \frac{3x^2}{2x-1}$ geeft $g'(x) = \frac{(2x-1) \cdot 6x - 3x^2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{12x^2 - 6x - 6x^2}{(2x-1)^2} = \frac{6x^2 - 6x}{(2x-1)^2}$

c $h(x) = \frac{3x^6-3}{x^3} = \frac{3x^6}{x^3} - \frac{3}{x^3} = 3x^3 - 3x^{-3}$ geeft $h'(x) = 9x^2 + 9x^{-4} = 9x^2 + \frac{9}{x^4} = \frac{9x^6}{x^4} + \frac{9}{x^4} = \frac{9x^6+9}{x^4}$

23 a $f(x) = 5x^2 - \frac{5}{x^2} = 5x^2 - 5x^{-2}$ geeft $f'(x) = 10x + 10x^{-3} = 10x + \frac{10}{x^3}$

b $g(x) = \frac{5}{2x^2} - \frac{2x^2}{5} = \frac{5}{2}x^{-2} - \frac{2}{5}x^2$ geeft $g'(x) = -5x^{-3} - \frac{4}{5}x = -\frac{5}{x^3} - \frac{4x}{5}$

c $h(x) = 6 - \frac{x^2-1}{x} = 6 - \left(\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}\right) = 6 - x + x^{-1}$ geeft $h'(x) = -1 - x^{-2} = -1 - \frac{1}{x^2}$

Bladzijde 64

24 a $f(x) = 0$ geeft $\frac{3x+3}{x} = 0$
 $3x+3=0$
 $3x=-3$
 $x=-1$

Dus $A(-1, 0)$.

$$f(x) = \frac{3x+3}{x} = \frac{3x}{x} + \frac{3}{x} = 3 + 3x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(-1) = -\frac{3}{(-1)^2} = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } A(-1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot -1 + b = 0 \\ 3 + b = 0 \\ b = -3 \end{array}$$

Dus $k: y = -3x - 3$.

b $\text{rc}_{\text{raaklijn}} = -\frac{3}{4}$, dus $f'(x) = -\frac{3}{4}$
 $-\frac{3}{x^2} = -\frac{3}{4}$
 $x^2 = 4$

$$x = 2 \vee x = -2$$

$f(2) = 4\frac{1}{2}$ en $f(-2) = 1\frac{1}{2}$, dus de raakpunten zijn $(2, 4\frac{1}{2})$ en $(-2, 1\frac{1}{2})$.

25 a $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2-1) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = \frac{-4-1}{(4-1)^2} = -\frac{5}{9}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{5}{9}x + b \\ f(2) = \frac{2}{3}, \text{ dus } A(2, \frac{2}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{5}{9} \cdot 2 + b = \frac{2}{3} \\ -1\frac{1}{9} + b = \frac{2}{3} \\ b = 1\frac{7}{9} \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{5}{9}x + 1\frac{7}{9}$.

$$\text{b } g(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - x^{-1} \text{ geeft } g'(x) = 1 + x^{-2} = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$\text{Stel } l: y = ax + b \text{ met } a = g'(2) = \frac{4 + 1}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{4}x + b \\ g(2) = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } B(2, 1\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{4} \cdot 2 + b = 1\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} + b = 1\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = 1\frac{1}{4}x - 1.$$

$$\text{c } g'(x) = 1 + x^{-2} \text{ geeft } g''(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

$$g''(x) = 0 \text{ geeft } \frac{-2}{x^3} = 0 \text{ en deze vergelijking heeft geen oplossingen.}$$

g' heeft geen extreme waarden, dus de grafiek van g heeft geen buigpunten.

$$\text{26 a } f(x) = \frac{x^2 + 4}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{4}{x} = x + 4x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

Zie de figuur in het leerboek.

max. is $f(-2) = -4$ en min. is $f(2) = 4$.

$$\text{b } r_{\text{raaklijn}} = -3 \text{ geeft } f'(x) = -3$$

$$\frac{x^2 - 4}{x^2} = -3$$

$$x^2 - 4 = -3x^2$$

$$4x^2 = 4$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

$f(1) = 5$ en $f(-1) = -5$, dus de raakpunten zijn $(1, 5)$ en $(-1, -5)$.

$$\text{c } f'(x) = 2 \text{ geeft } \frac{x^2 - 4}{x^2} = 2$$

$$x^2 - 4 = 2x^2$$

$$x^2 = -4$$

geen opl.

Dus er is geen raaklijn met richtingscoëfficiënt 2.

$$\text{d } f'(x) = \frac{5}{9} \text{ geeft } \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{5}{9}$$

$$9x^2 - 36 = 5x^2$$

$$4x^2 = 36$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{5}{9}x + b \\ f(3) = 4\frac{1}{3}, \text{ dus door } (3, 4\frac{1}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{5}{9} \cdot 3 + b = 4\frac{1}{3} \\ 1\frac{2}{3} + b = 4\frac{1}{3} \\ b = 2\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus de lijn $k: y = \frac{5}{9}x + 2\frac{2}{3}$ raakt de grafiek van f .

27 $f_a(x) = \frac{x^2}{a} + \frac{a}{x^2} = \frac{1}{a} \cdot x^2 + a \cdot x^{-2}$ geeft $f'_a(x) = \frac{1}{a} \cdot 2x + a \cdot -2x^{-3} = \frac{2x}{a} - \frac{2a}{x^3}$

$f''(x) = 0$ geeft $\frac{2x}{a} = \frac{2a}{x^3}$

$2x^4 = 2a^2$

$x^4 = a^2$

$x^2 = a \vee x^2 = -a$

vold. vold. niet

$y_{\text{toppen}} = \frac{a}{a} + \frac{a}{a} = 1 + 1 = 2$ en dus liggen de toppen op de lijn $y = 2$.

28 a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

b $x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2\frac{1}{2}}$

c $\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{-1\frac{1}{2}}$

d $x^3 \cdot \sqrt{x} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$

29 a $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b $2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$

c $-1\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

d $1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

Bladzijde 65

30 a $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x$

$[x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}]' = [x]'$

$[x^{\frac{1}{2}}]' \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$

$2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$

b $2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$

$x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}$

$[x^{\frac{1}{2}}]' = \frac{\frac{1}{2}}{x^{\frac{1}{2}}}$

$[x^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Bladzijde 66

31 a $f(x) = x + \sqrt{x} = x + x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x} = x \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{1\frac{1}{3}}$ geeft $g'(x) = 1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

c $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = -\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2x^{1\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

d $k(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3} = x^3 \cdot x^{\frac{3}{5}} = x^{3\frac{3}{5}}$ geeft $k'(x) = 3\frac{3}{5}x^{2\frac{3}{5}} = 3\frac{3}{5}x^2 \cdot x^{\frac{3}{5}} = 3\frac{3}{5}x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3}$

32 a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{2\frac{1}{4}}$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4}x \cdot x^{\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4}x \cdot \sqrt[4]{x}$

b $g(x) = \frac{4x^2 + 1}{x\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{4x^2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = 4x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$g'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{4x^2 - 1}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

c $h(x) = (x^2 + 1)(1 + \sqrt{x}) = x^2 + x^2 \cdot \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} = x^2 + x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{\frac{1}{2}} = x^2 + x^{2\frac{1}{2}} + 1 + x^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$h'(x) = 2x + 2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 2x + 2\frac{1}{2}x \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 2x + 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

d $k(x) = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{4}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{2}{3}} - 4x^{-\frac{1}{3}}$ geeft

$$k'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} + \frac{4}{3x \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{2x + 4}{3x \cdot \sqrt[3]{x}}$$

33 a $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}}$ geeft $f'(x) = -\frac{3}{2} \cdot x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3}{2 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

b $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

c $h(x) = \frac{x^2 - 2}{x\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^2 + 6}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

d $k(x) = x^2(x\sqrt{x} - 3) = x^3 \cdot \sqrt{x} - 3x^2 = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x^2 = x^{3\frac{1}{2}} - 3x^2$ geeft

$$k'(x) = 3\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6x = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6x = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x} - 6x$$

34 a $f(x) = (x\sqrt{x} - 3)^2 = x^3 - 6x\sqrt{x} + 9 = x^3 - 6x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 9 = x^3 - 6x^{\frac{3}{2}} + 9$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 9x^{\frac{1}{2}} = 3x^2 - 9\sqrt{x}$

b $g(x) = \frac{2x-3}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{2x}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x}{x^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{x^{\frac{5}{2}}} = 2x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{5}{2}}$ geeft

$$g'(x) = -3x^{-\frac{3}{2}} + \frac{15}{2}x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{7}{2}}} = -\frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} + \frac{15}{2x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{x^2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{15}{2x^3 \cdot \sqrt{x}} = \frac{-6x + 15}{2x^3 \cdot \sqrt{x}}$$

c $h(x) = (x - \sqrt[3]{x})^2 = (x - x^{\frac{1}{3}})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}} + (x^{\frac{1}{3}})^2 = x^2 - 2x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$ geeft

$$h'(x) = 2x - 2\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 2x - 2\frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 2x - 2\frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

d $k(x) = \frac{x^2+4}{\sqrt[4]{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}$ geeft

$$k'(x) = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}} = \frac{7}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}} = \frac{7}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \frac{7}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{x \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{1\frac{3}{4}x^2 - 1}{x \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{7x^2 - 4}{4x \cdot \sqrt[4]{x}}$$

35 $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} = 3x^{\frac{2}{3}}$ geeft $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{8}) = \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(\frac{1}{8}) = \frac{3}{4}, \text{ dus } A(\frac{1}{8}, \frac{3}{4}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot \frac{1}{8} + b = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} + b = \frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $k: y = 4x + \frac{1}{4}$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(8) = \frac{2}{\sqrt[3]{8}} = \frac{2}{2} = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} y = x + b \\ f(8) = 12, \text{ dus } B(8, 12) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 + b = 12 \\ b = 4 \end{array}$$

Dus $l: y = x + 4$.

Snijden van k en l geeft $4x + \frac{1}{4} = x + 4$

$$3x = 3\frac{3}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1\frac{1}{4} \\ y = x + 4 \end{array} \right\} y = 1\frac{1}{4} + 4 = 5\frac{1}{4}$$

Dus $C(1\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4})$.

36 a $f(x) = x\sqrt{x} - 3x = x^{\frac{3}{2}} - 3x$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{1}{2}\sqrt{x} - 3$

$f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$$

$$\sqrt{x} = 6$$

$$x = 36$$

$f(36) = 4\sqrt{36} - 3 \cdot 36 = -48$

min. is $f(36) = -48$.

b Stel $k: y = ax$ met $a = f'(0) = \frac{1}{2}\sqrt{0} - 3 = -3$.

Dus $k: y = -3x$.

c $rc_f = 3$, dus $f'(x) = 3$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 3$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} = 6$$

$$\sqrt{x} = 12$$

$$x = 144$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = 3x + b \\ f(144) = 16, \text{ dus } A(144, 16) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 144 + b = 16 \\ 432 + b = 16 \\ b = -416 \end{array}$$

Dus $A(144, 16)$ en $l: y = 3x - 416$.

Bladzijde 67

37 a $f(x) = \frac{x^3 + 2}{\sqrt{x}} = \frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{5}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}x \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{2\frac{1}{2}x^3 - 1}{x\sqrt{x}}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = \frac{2\frac{1}{2} \cdot 1^3 - 1}{1\sqrt{1}} = 1\frac{1}{2}$.

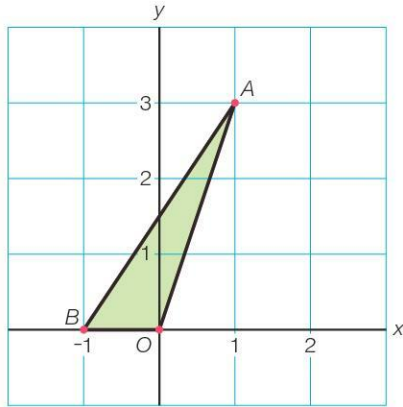
$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ f(1) = 3, \text{ dus } A(1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 3 \\ 1\frac{1}{2} + b = 3 \\ b = 1\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = 1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.

Snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = 0$

$$1\frac{1}{2}x = -1\frac{1}{2}$$

$$x = -1, \text{ dus } B(-1, 0)$$



$$O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 1\frac{1}{2}$$

b $f'(x) = 0$ geeft $\frac{2\frac{1}{2}x^3 - 1}{x\sqrt{x}} = 0$

$$2\frac{1}{2}x^3 - 1 = 0$$

$$2\frac{1}{2}x^3 = 1$$

$$x^3 = \frac{2}{5}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

Dus $p = \frac{2}{5}$.

38 a $s(t) = 10t\sqrt{t} = 10t^{1\frac{1}{2}}$ geeft $s'(t) = 15t^{\frac{1}{2}} = 15\sqrt{t}$

$$s'(8) = 15\sqrt{8} = 15 \cdot 2\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

Dus de snelheid na 8 seconden is $30\sqrt{2}$ m/s.

b $108 \text{ km/uur} = \frac{108}{3,6} = 30 \text{ m/s}$

$$s'(t) = 30 \text{ geeft } 15\sqrt{t} = 30$$

$$\sqrt{t} = 2$$

$$t = 4$$

Dus na 4 seconden is de snelheid 108 km/uur.

c $s(9) = 10 \cdot 9\sqrt{9} = 270$ en $s'(9) = 15 \cdot \sqrt{9} = 45$

Dus in de eerste 9 seconden legt de trein 270 meter af en in de volgende 51 seconden $51 \cdot 45 = 2295$ meter.

Dus in de eerste minuut legt de trein $270 + 2295 = 2565$ meter af.

39 $f_p(x) = (2x - p\sqrt{x})^2 = 4x^2 - 4px\sqrt{x} + p^2x = 4x^2 - 4px^{1\frac{1}{2}} + p^2x$ geeft

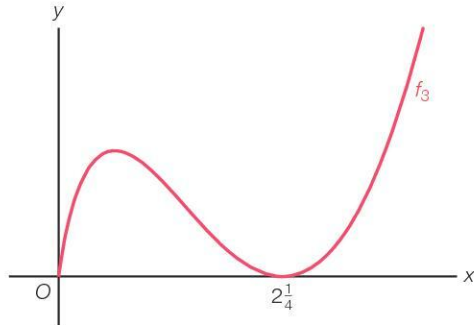
$$f_p'(x) = 8x - 6px^{\frac{1}{2}} + p^2 = 8x - 6p\sqrt{x} + p^2$$

$$f_p'(2\frac{1}{4}) = 0 \text{ geeft } 18 - 6p \cdot 1\frac{1}{2} + p^2 = 0$$

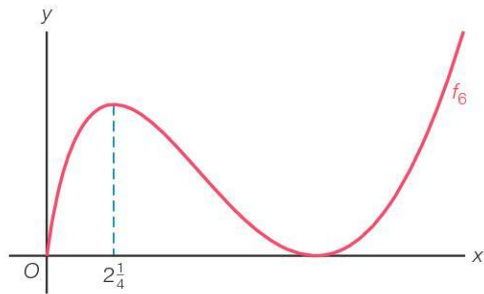
$$p^2 - 9p + 18 = 0$$

$$(p-3)(p-6) = 0$$

$$p = 3 \vee p = 6$$



$p = 3$ geeft min. is $f_3(2\frac{1}{4}) = 0$. Dus $p = 3$ voldoet niet.



$p = 6$ geeft max. is $f_6(2\frac{1}{4}) = 20\frac{1}{4}$.

6.3 De kettingregel

Bladzijde 69

40 a $v(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 = 9 - 15 = -6$

$$u(v(3)) = u(-6) = (-6)^4 = 1296$$

b $v(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 = 16 - 20 = -4$

$$u(v(4)) = u(-4) = (-4)^4 = 256$$

41 a $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = v^6$ en $v(x) = 3 - x^5$.

b $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = \sqrt{v}$ en $v(x) = x^2 + 1$.

c $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = \frac{2}{v^3}$ en $v(x) = x + 8$.

Bladzijde 71

42 a $f(x) = (4x + 3)^3$ geeft $f'(x) = 3(4x + 3)^2 \cdot 4 = 12(4x + 3)^2$

b $g(x) = 6(\frac{1}{2}x - 4)^5$ geeft $g'(x) = 30(\frac{1}{2}x - 4)^4 \cdot \frac{1}{2} = 15(\frac{1}{2}x - 4)^4$

c $h(x) = 3x^2 - (\frac{1}{4}x - 2)^3$ geeft $h'(x) = 6x - 3(\frac{1}{4}x - 2)^2 \cdot \frac{1}{4} = 6x - \frac{3}{4}(\frac{1}{4}x - 2)^2$

d $j(x) = (4x^2 - 3)^4$ geeft $j'(x) = 4(4x^2 - 3)^3 \cdot 8x = 32x(4x^2 - 3)^3$

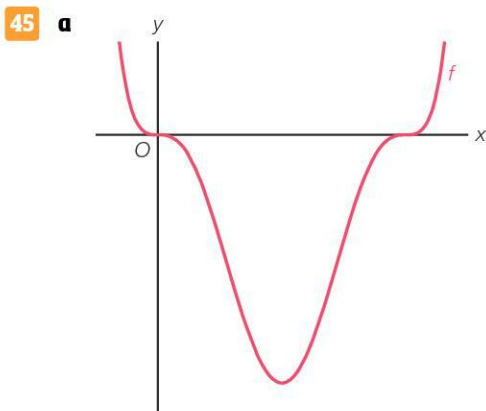
e $k(x) = 5x - \frac{4}{(3x + 2)^3} = 5x - 4(3x + 2)^{-3}$ geeft

$$k'(x) = 5 + 12(3x + 2)^{-4} \cdot 3 = 5 + 36(3x + 2)^{-4} = 5 + \frac{36}{(3x + 2)^4}$$

f $l(x) = \sqrt{4x + 1}$ geeft $l'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x + 1}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x + 1}}$

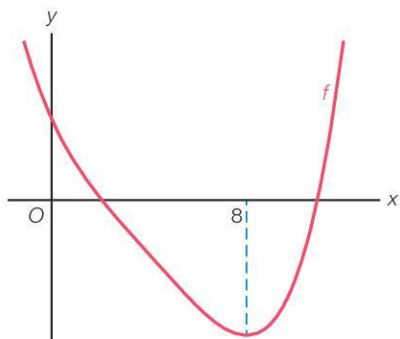
43 a $f(x) = -2(2x+1)^4$ geeft $f'(x) = -8(2x+1)^3 \cdot 2 = -16(2x+1)^3$
b $g(x) = \frac{1}{(3x-2)^2} = (3x-2)^{-2}$ geeft $g'(x) = -2(3x-2)^{-3} \cdot 3 = \frac{-6}{(3x-2)^3}$
c $h(x) = \sqrt{2x^2+4x}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2+4x}} \cdot (4x+4) = \frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+4x}}$
d $j(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-1}} = (4x-1)^{-\frac{1}{2}}$ geeft $j'(x) = -\frac{1}{2}(4x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{-2}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}$
e $k(x) = (x^2+3)\sqrt{x^2+3} = (x^2+3)^{\frac{3}{2}}$ geeft $k'(x) = \frac{3}{2}(x^2+3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2+3}$
f $l(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = (x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}}$ geeft
 $l'(x) = -\frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+2) = \frac{-x-1}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}}$

44 a $f(x) = 4(x^3+7x-2)^2$ geeft $f'(x) = 8(x^3+7x-2) \cdot (3x^2+7) = 8(3x^2+7)(x^3+7x-2)$
b $g(x) = -\frac{6}{(x^2+3x)^3} = -6(x^2+3x)^{-3}$ geeft $g'(x) = 18(x^2+3x)^{-4} \cdot (2x+3) = \frac{18(2x+3)}{(x^2+3x)^4}$
c $h(x) = \sqrt[3]{x^3+3x} = (x^3+3x)^{\frac{1}{3}}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{3}(x^3+3x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2+3) = \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+3x)^2}}$
d $j(x) = \frac{1}{(4-x)\sqrt{4-x}} = (4-x)^{-\frac{3}{2}}$ geeft $j'(x) = -\frac{3}{2}(4-x)^{-\frac{5}{2}} \cdot -1 = \frac{3}{2(4-x)^2 \cdot \sqrt{4-x}}$
e $k(x) = 5\sqrt{2x^4+x^2} + 4x^2$ geeft $k'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x^4+x^2}} \cdot (8x^3+2x) + 8x = \frac{5(4x^3+x)}{\sqrt{2x^4+x^2}} + 8x$
f $l(x) = \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4}$ geeft $l'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$



b Raaklijn horizontaal dus $f'(x) = 0$.
 $f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - 2x)^3$ geeft $f'(x) = 3(\frac{1}{2}x^2 - 2x)^2 \cdot (x-2)$
 $f'(x) = 0$ geeft $3(\frac{1}{2}x^2 - 2x)^2 \cdot (x-2) = 0$
 $\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0 \vee x-2 = 0$
 $x^2 - 4x = 0 \vee x = 2$
 $x(x-4) = 0 \vee x = 2$
 $x = 0 \vee x = 4 \vee x = 2$
c Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(3) = 3(\frac{1}{2} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3) \cdot (3-2) = 6\frac{3}{4}$
 $y = 6\frac{3}{4}x + b$
 $f(3) = -3\frac{3}{8}$, dus $A(3, -3\frac{3}{8})$ } $6\frac{3}{4} \cdot 3 + b = -3\frac{3}{8}$
 $20\frac{1}{4} + b = -3\frac{3}{8}$
 $b = -23\frac{5}{8}$
Dus $k: y = 6\frac{3}{4}x - 23\frac{5}{8}$ en $y_B = -23\frac{5}{8}$.

46 a $f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2$ geeft $f'(x) = 4(\frac{1}{4}x - 1)^3 \cdot \frac{1}{4} - 1 = (\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1$
 $f'(x) = 0$ geeft $(\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = 0$
 $(\frac{1}{4}x - 1)^3 = 1$
 $\frac{1}{4}x - 1 = 1$
 $\frac{1}{4}x = 2$
 $x = 8$



min. is $f(8) = -5$ en $B_f = [-5, \rightarrow)$.

b Stel $k: y = ax + b$ met $a = rc_k = rc_l = -2$.

$f'(x) = -2$ geeft $(\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = -2$
 $(\frac{1}{4}x - 1)^3 = -1$
 $\frac{1}{4}x - 1 = -1$
 $\frac{1}{4}x = 0$
 $x = 0$

$y = -2x + b$
 $f(0) = 3$, dus door $(0, 3)$ } $b = 3$
Dus $k: y = -2x + 3$.

47 a $g(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^2 + ax + b = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 + ax + b = \frac{1}{16}x^2 + (a - \frac{1}{2})x + b + 1$
Ook geldt $g(x) = \frac{1}{16}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 15$.

Dus $a - \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$ oftewel $a = -1$ en $b + 1 = 15$ oftewel $b = 14$.

b $f(x) = g(x)$ geeft $(\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2 = (\frac{1}{4}x - 1)^2 - x + 14$

$(\frac{1}{4}x - 1)^4 - (\frac{1}{4}x - 1)^2 - 12 = 0$

Stel $(\frac{1}{4}x - 1)^2 = u$.

$u^2 - u - 12 = 0$

$(u + 3)(u - 4) = 0$

$u = -3 \vee x = 4$

$(\frac{1}{4}x - 1)^2 = -3 \vee (\frac{1}{4}x - 1)^2 = 4$

geen oplossing $\frac{1}{4}x - 1 = 2 \vee \frac{1}{4}x - 1 = -2$

$\frac{1}{4}x = 3 \vee \frac{1}{4}x = -1$

$x = 12 \vee x = -4$

Bladzijde 72

48 a $f(3) = \frac{1}{4}(2 \cdot 3 - 5)^3 + 2 = \frac{1}{4} \cdot 1^3 + 2 = 2\frac{1}{4}$

$g(3) = -\frac{1}{4}(3 \cdot 3 - 10)^4 + 2\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot 1 + 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$

$f(3) = g(3)$, dus A ligt zowel op de grafiek van f als op die van g .

- b** $f(x) = \frac{1}{4}(2x-5)^3 + 2$ geeft $f'(x) = \frac{3}{4}(2x-5)^2 \cdot 2 = \frac{3}{2}(2x-5)^2$
 $f'(3) = \frac{3}{2}(2 \cdot 3 - 5)^2 = \frac{3}{2}$
 $g(x) = -\frac{1}{4}(3x-10)^4 + 2\frac{1}{2}$ geeft $g'(x) = -(3x-10)^3 \cdot 3 = -3(3x-10)^3$
 $g'(3) = -3(3 \cdot 3 - 10)^3 = 3$
 $f'(3) \neq g'(3)$, dus de raaklijnen in A hebben niet dezelfde richting.
 Emma heeft dus geen gelijk.

- c** $rc_{\text{raaklijn}} = 13\frac{1}{2}$, dus $f'(x) = 13\frac{1}{2}$ geeft $\frac{1}{2}(2x-5)^2 = 13\frac{1}{2}$
 $(2x-5)^2 = 9$
 $2x-5 = 3 \vee 2x-5 = -3$
 $2x = 8 \vee 2x = 2$
 $x = 4 \vee x = 1$

$$f(4) = 8\frac{3}{4} \text{ en } f(1) = -4\frac{3}{4}$$

Dus de punten zijn $(4, 8\frac{3}{4})$ en $(1, -4\frac{3}{4})$.

- 49 a** $f(x) = \sqrt{x^2+9} - x^2 + 5x$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+9}} \cdot 2x - 2x + 5 = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 2x + 5$

$$f'(\sqrt{7}) = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7+9}} - 2 \cdot \sqrt{7} + 5 = \frac{1}{4}\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 5 = 5 - 1\frac{3}{4}\sqrt{7} \neq 0$$

Dus f heeft geen extreme waarde voor $x = \sqrt{7}$.

- b** Stel $k: y = ax + b$ met $a = rc_k = rc_l = 5$.

$$f'(x) = 5 \text{ geeft } \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 2x + 5 = 5$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 2x$$

kwadrateren geeft

$$\frac{x^2}{x^2+9} = 4x^2$$

$$4x^2(x^2+9) = x^2$$

$$4x^4 + 36x^2 = x^2$$

$$4x^4 + 35x^2 = 0$$

$$x^2(4x^2 + 35) = 0$$

$$x^2 = 0 \vee 4x^2 = -35$$

$$x = 0 \quad \text{geen opl.}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 5x + b \\ f(0) = 3, \text{ dus door } (0, 3) \end{array} \right\} b = 3$$

Dus $k: y = 5x + 3$.

- c** $f(0) = 3$, dus $A(0, 3)$.

$$\text{Stel } m: y = ax + b \text{ met } a = f'(4) = \frac{4}{\sqrt{4^2+9}} - 8 + 5 = \frac{4}{\sqrt{25}} - 3 = \frac{4}{5} - 3 = -2\frac{1}{5}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -2\frac{1}{5}x + b \\ f(4) = 9, \text{ dus } B(4, 9) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2\frac{1}{5} \cdot 4 + b = 9 \\ -8\frac{4}{5} + b = 9 \\ b = 17\frac{4}{5} \end{array}$$

Dus $m: y = -2\frac{1}{5}x + 17\frac{4}{5}$ en $C(0, 17\frac{4}{5})$.

$$AC = 17\frac{4}{5} - 3 = 14\frac{4}{5}$$

50 a $f(x) = \frac{5x^3 + 10}{\sqrt{x}} = 5x^{2\frac{1}{2}} + 10x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 12\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 5x^{-\frac{1}{2}} = 12\frac{1}{2}x\sqrt{x} - \frac{5}{x\sqrt{x}} = \frac{12\frac{1}{2}x^3 - 5}{x\sqrt{x}}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{12\frac{1}{2}x^3 - 5}{x\sqrt{x}} = 0$$

$$12\frac{1}{2}x^3 - 5 = 0$$

$$12\frac{1}{2}x^3 = 5$$

$$x^3 = \frac{5}{12\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

$$f(\sqrt[3]{\frac{2}{5}}) = \frac{5 \cdot \frac{2}{5} + 10}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{2}{5}}}} = \frac{12}{((\frac{2}{5})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{12}{(\frac{2}{5})^{\frac{1}{6}}} = \frac{12}{\sqrt[6]{\frac{2}{5}}}$$

Dus $a = 12$, $b = 6$ en $c = \frac{2}{5}$.

b k raakt de grafiek van $g(x) = \frac{5x^3 + 10}{\sqrt{x}} + d$.

$$g(x) = \frac{5x^3 + 10}{\sqrt{x}} + d \text{ geeft } g'(x) = \frac{12\frac{1}{2}x^3 - 5}{x\sqrt{x}}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = g'(1) = \frac{12\frac{1}{2} - 5}{1} = 7\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 7\frac{1}{2}x + b \\ g(1) = 15 + d, \text{ dus } A(1, 15 + d) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 15 + d \\ b = 7\frac{1}{2} + d \end{array}$$

k door de oorsprong, dus $7\frac{1}{2} + d = 0$

$$d = -7\frac{1}{2}$$

Bladzijde 73

51 a De tijd nodig van A naar B via C is $\frac{2}{80} + \frac{10}{100} = \frac{1}{8}$ uur = 450 seconden.

De afstand AB is $\sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104}$ km.

De tijd nodig van A direct naar B is $\frac{\sqrt{104}}{80}$ uur = 458,9... seconden.

Het verschil is $458,9... - 450 \approx 9$ seconden.

b $t = \frac{AD}{80} + \frac{BD}{100} = \frac{\sqrt{x^2 + 2^2}}{80} + \frac{10 - x}{100} = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + \frac{10}{100} - \frac{x}{100} = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + 0,1 - 0,01x$

Dus $t = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + 0,1 - 0,01x$.

c $t(x) = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + 0,1 - 0,01x$ geeft $t'(x) = \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} \cdot 2x - 0,01 = \frac{x}{80\sqrt{x^2 + 4}} - 0,01$

$t'(x) = 0$ geeft $\frac{x}{80\sqrt{x^2 + 4}} - 0,01 = 0$

$$\frac{x}{80\sqrt{x^2 + 4}} = 0,01$$

$$x = 0,8\sqrt{x^2 + 4}$$

kwadrateren geeft

$$x^2 = 0,64(x^2 + 4)$$

$$x^2 = 0,64x^2 + 2,56$$

$$0,36x^2 = 2,56$$

$$x^2 = \frac{64}{9}$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

$$t(2\frac{2}{3}) = \frac{1}{80}\sqrt{(2\frac{2}{3})^2 + 4} + 0,1 - 0,01 \cdot 2\frac{2}{3} = 0,115 \text{ uur} = 414 \text{ seconden}$$

De snelste route is $450 - 414 = 36$ seconden sneller dan via C naar B .

52 $f(x) = (ax - 2)^4 + \frac{1}{2}ax$ geeft $f'(x) = 4(ax - 2)^3 \cdot a + \frac{1}{2}a = 4a(ax - 2)^3 + \frac{1}{2}a$

Een extreme waarde voor $x = 3$, dus $f'(3) = 0$.

Dit geeft $4a(a \cdot 3 - 2)^3 + \frac{1}{2}a = 0$

$$4a(3a - 2)^3 + \frac{1}{2}a = 0$$

$$a(4(3a - 2)^3 + \frac{1}{2}) = 0$$

$$a = 0 \vee 4(3a - 2)^3 + \frac{1}{2} = 0$$

$$a = 0 \vee 4(3a - 2)^3 = -\frac{1}{2}$$

$$a = 0 \vee (3a - 2)^3 = -\frac{1}{8}$$

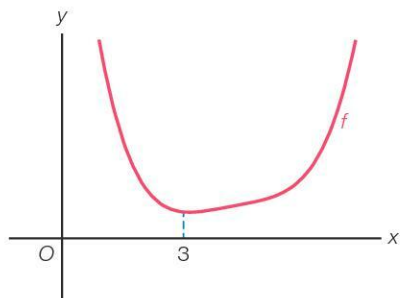
$$a = 0 \vee 3a - 2 = -\frac{1}{2}$$

$$a = 0 \vee 3a = 1\frac{1}{2}$$

$$a = 0 \vee a = \frac{1}{2}$$

$a = 0$ geeft $f(x) = (-2)^4 + 0 = 16$ en deze functie heeft geen extreme waarde voor $x = 3$.

$a = \frac{1}{2}$ geeft $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^4 + \frac{1}{4}x$



f heeft een extreme waarde voor $x = 3$ als $a = \frac{1}{2}$.

53 $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ is het product van de factoren x en $\sqrt{2x+1}$.

Dus volgens de productregel is $f'(x) = [x]' \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot [\sqrt{2x+1}]'$.

De afgeleide van $\sqrt{2x+1}$ bereken je met de kettingregel.

Bladzijde 74

54 a $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2 = \sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$$

b $g(x) = \frac{x+6}{\sqrt{8x+9}}$ geeft

$$g'(x) = \frac{\sqrt{8x+9} \cdot 1 - (x+6) \cdot \frac{1}{2\sqrt{8x+9}} \cdot 8}{(\sqrt{8x+9})^2} = \frac{\sqrt{8x+9} - \frac{4(x+6)}{\sqrt{8x+9}}}{8x+9} = \frac{\frac{8x+9 - 4x - 24}{\sqrt{8x+9}}}{(8x+9)\sqrt{8x+9}} = \frac{4x-15}{(8x+9)\sqrt{8x+9}}$$

55 a $f(x) = x\sqrt{3x+4}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{3x+4} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+4}} \cdot 3 = \sqrt{3x+4} + \frac{3x}{2\sqrt{3x+4}} = \frac{2(3x+4)}{2\sqrt{3x+4}} + \frac{3x}{2\sqrt{3x+4}} = \frac{6x+8+3x}{2\sqrt{3x+4}} = \frac{9x+8}{2\sqrt{3x+4}}$$

b $g(x) = x(3x+1)^3$ geeft
 $g'(x) = 1 \cdot (3x+1)^3 + x \cdot 3(3x+1)^2 \cdot 3 = (3x+1)^3 + 9x(3x+1)^2$
 $= (3x+1)^2(3x+1+9x) = (3x+1)^2(12x+1)$

c $h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$ geeft
 $h'(x) = \frac{(2x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x - \sqrt{x^2+1} \cdot 2 \cdot \frac{(2x+1) \cdot x}{\sqrt{x^2+1}} - 2\sqrt{x^2+1}}{(2x+1)^2} = \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 2\sqrt{x^2+1} - \frac{2x(2x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{(2x+1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$
 $= \frac{(2x+1) \cdot x - 2(x^2+1)}{(2x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+x-2x^2-2}{(2x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{x-2}{(2x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1}}$

56 Voor $-\frac{4}{3} < x < 0$ is $x\sqrt{3x+4} < 0$ en $\sqrt{3x^3+4x^2} > 0$, dus $x\sqrt{3x+4} \neq \sqrt{3x^3+4x^2}$. Dit is de eerste fout.

$2\sqrt{3x^3+4x^2} = 2 \cdot |x| \cdot \sqrt{3x+4} \neq 2x\sqrt{3x+4}$, dus $\frac{1}{2\sqrt{3x^3+4x^2}} \cdot (9x^2+8x) \neq \frac{9x^2+8x}{2x\sqrt{3x+4}}$.

Dit is de tweede fout.

$\frac{9x^2+8x}{2x\sqrt{3x+4}}$ is niet gedefinieerd voor $x=0$ en $\frac{9x+8}{2\sqrt{3x+4}}$ wel, dus $\frac{9x^2+8x}{2x\sqrt{3x+4}} \neq \frac{9x+8}{2\sqrt{3x+4}}$.

Dit is de derde fout.

57 a $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{3x+1}$ geeft

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3x+1} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3 = \frac{1}{2}\sqrt{3x+1} + \frac{3x}{4\sqrt{3x+1}} = \frac{2(3x+1)}{4\sqrt{3x+1}} + \frac{3x}{4\sqrt{3x+1}}$
 $= \frac{6x+2+3x}{4\sqrt{3x+1}} = \frac{9x+2}{4\sqrt{3x+1}}$

b Het randpunt is $(-\frac{1}{3}, 0)$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = rc_f = f'(0) = \frac{0+2}{4\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}$.

$y = \frac{1}{2}x + b$
 door $(-\frac{1}{3}, 0)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{3} + b = 0 \\ b = \frac{1}{6} \end{array} \right.$

Dus $k: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$.

c $f'(x) = 1\frac{3}{8}$ geeft

$\frac{9x+2}{4\sqrt{3x+1}} = \frac{11}{8}$

$72x+16 = 44\sqrt{3x+1}$

$18x+4 = 11\sqrt{3x+1}$

kwadrateren geeft

$324x^2 + 144x + 16 = 121(3x+1)$

$324x^2 + 144x + 16 = 363x + 121$

$324x^2 - 219x - 105 = 0$

$D = (-219)^2 - 4 \cdot 324 \cdot -105 = 184041$

$x = \frac{219 \pm 429}{648} = 1 \vee x = \frac{219 - 429}{648} = -0,324...$

vold.

vold. niet

$f(1) = 1$, dus $A(1, 1)$.

58 a $8 - 2x \geq 0$

$$-2x \geq -8$$

$$x \leq 4$$

$$\text{Dus } D_f = \langle \leftarrow, 4 \rangle.$$

b $f(x) = x\sqrt{8-2x}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{8-2x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{8-2x}} \cdot -2 = \sqrt{8-2x} - \frac{x}{\sqrt{8-2x}} = \frac{8-2x}{\sqrt{8-2x}} - \frac{x}{\sqrt{8-2x}} = \frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}}$$

c $f'(x) = 0$ geeft $\frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}} = 0$

$$8 - 3x = 0$$

$$3x = 8$$

$$x = \frac{8}{3}$$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{16}{9}\sqrt{6} = 1\frac{7}{9}\sqrt{6}$$

Dus de top is $(2\frac{2}{3}, 1\frac{7}{9}\sqrt{6})$ en $B_f = \langle \leftarrow, 1\frac{7}{9}\sqrt{6} \rangle$.

d $f'(x) = 1$ geeft $\frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}} = 1$

$$8 - 3x = \sqrt{8-2x}$$

kwadrateren geeft

$$64 - 48x + 9x^2 = 8 - 2x$$

$$9x^2 - 46x + 56 = 0$$

$$D = (-46)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 56 = 100$$

$$x = \frac{46 \pm 10}{18} = 3\frac{1}{9} \vee x = \frac{46 - 10}{18} = 2$$

vold. niet

vold.

$$f(2) = 4, \text{ dus } A(2, 4).$$

59 a $f(x) = \frac{4x+4}{\sqrt{x^2+4}}$ geeft

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} \cdot 4 - (4x+4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x}{x^2+4} = \frac{4\sqrt{x^2+4} - \frac{x(4x+4)}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{4(x^2+4) - x(4x+4)}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$$

$$= \frac{4x^2 + 16 - 4x^2 - 4x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = \frac{16-4x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{16-4x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = 0$$

$$16 - 4x = 0$$

$$-4x = -16$$

$$x = 4$$

$$f(4) = \frac{16+4}{\sqrt{4^2+4}} = \frac{20}{\sqrt{20}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

De coördinaten van de top zijn $(4, 2\sqrt{5})$.

b $f(x) = 0$ geeft $4x + 4 = 0$

$$4x = -4$$

$$x = -1$$

Dus $A(-1, 0)$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(-1) = \frac{16 + 4}{((-1)^2 + 4)\sqrt{(-1)^2 + 4}} = \frac{20}{5\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{4}{5}\sqrt{5} \cdot x + b \\ \text{door } A(-1, 0) \end{array} \right\} \frac{4}{5}\sqrt{5} \cdot (-1) + b = 0$$

$$b = \frac{4}{5}\sqrt{5}$$

Dus $k: y = \frac{4}{5}\sqrt{5} \cdot x + \frac{4}{5}\sqrt{5}$ en het snijpunt met de y -as is $(0, \frac{4}{5}\sqrt{5})$.

$$f(0) = \frac{0 + 4}{\sqrt{0^2 + 4}} = 2, \text{ dus } B(0, 2).$$

Dus bewering I is niet waar, de lijn k gaat niet door B .

Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(0) = \frac{16 - 0}{(0^2 + 4)\sqrt{0^2 + 4}} = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } B(0, 2) \end{array} \right\} b = 2$$

Dus $l: y = 2x + 2$.

l snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $2x + 2 = 0$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

Dus het snijpunt met de x -as is $(-1, 0)$.

Dus bewering II is waar, de lijn l gaat door A .

60 a $f(x) = 2x\sqrt{9 - 2x} - 3$ geeft

$$f'(x) = 2 \cdot \sqrt{9 - 2x} + 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{9 - 2x}} \cdot -2 = 2\sqrt{9 - 2x} - \frac{2x}{\sqrt{9 - 2x}} = \frac{2(9 - 2x)}{\sqrt{9 - 2x}} - \frac{2x}{\sqrt{9 - 2x}}$$

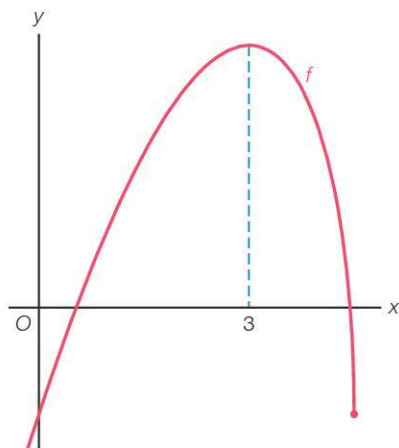
$$= \frac{18 - 4x - 2x}{\sqrt{9 - 2x}} = \frac{18 - 6x}{\sqrt{9 - 2x}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{18 - 6x}{\sqrt{9 - 2x}} = 0$$

$$18 - 6x = 0$$

$$-6x = -18$$

$$x = 3$$



max. is $f(3) = 6\sqrt{3} - 3$.

b $9 - 2x \geq 0$

$-2x \geq -9$

$x \leq 4\frac{1}{2}$

Dus $D_f = \langle \leftarrow, 4\frac{1}{2} \rangle$ en $B_f = \langle \leftarrow, 6\sqrt{3} - 3 \rangle$.

c Raaklijn evenwijdig met $y = 1\frac{1}{2}x$, dus $f'(x) = 1\frac{1}{2}$.

$f'(x) = 1\frac{1}{2}$ geeft $\frac{18 - 6x}{\sqrt{9 - 2x}} = \frac{3}{2}$

$36 - 12x = 3\sqrt{9 - 2x}$

$12 - 4x = \sqrt{9 - 2x}$

kwadrateren geeft

$144 - 96x + 16x^2 = 9 - 2x$

$16x^2 - 94x + 135 = 0$

$D = (-94)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 135 = 196$

$x = \frac{94 \pm 14}{32} = 3\frac{3}{8} \vee x = \frac{94 - 14}{32} = 2\frac{1}{2}$

vold. niet

vold.

$f(2\frac{1}{2}) = 7$, dus $A(2\frac{1}{2}, 7)$.

61 $f_p(x) = \frac{px}{\sqrt{x^2 + 9}}$ geeft $f'_p(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9} \cdot p - px \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} \cdot 2x}{x^2 + 9} = \frac{p(x^2 + 9) - px^2}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{9p}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$

$f'_p(0) = \frac{9p}{9\sqrt{9}} = \frac{1}{3}p$

$f'_p(0) = 1$ geeft $\frac{1}{3}p = 1$
 $p = 3$

$f_3(0) = 0$, dus voor $p = 3$ raakt de lijn $y = x$ de grafiek van f_p in de oorsprong.

6.4 Functies met parameters

Bladzijde 77

62 Raaklijn k heeft richtingscoëfficiënt $2\frac{1}{2}$, dus $f'_p(x) = 2\frac{1}{2}$.

Raken in het punt A met $x_A = 3$, dus $f'_p(3) = 2\frac{1}{2}$.

$f_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + px + 2$ geeft $f'_p(x) = \frac{1}{2}x + p$

$f'_p(3) = 2\frac{1}{2}$ geeft $\frac{1}{2} \cdot 3 + p = 2\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2} + p = 2\frac{1}{2}$

$p = 1$

63 a $f_p(x) = (x^2 + p) \cdot \sqrt{x} = x^{2\frac{1}{2}} + p\sqrt{x}$ geeft $f'_p(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} + \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{5x\sqrt{x}}{2} + \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + p}{2\sqrt{x}}$

b $f'_p(4) = rc_k$

$\frac{5 \cdot 4^2 + p}{2\sqrt{4}} = 18$

$\frac{80 + p}{4} = 18$

$80 + p = 72$

$p = -8$

c $f_{-8}(4) = (16 - 8) \cdot \sqrt{4} = 16$, dus $A(4, 16)$.

$\left. \begin{array}{l} y = 18x + q \\ \text{door } A(4, 16) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 18 \cdot 4 + q = 16 \\ 72 + q = 16 \\ q = -56 \end{array}$

$$64 \quad f_p(x) = \sqrt{2x^2 + p} \text{ geeft } f_p'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + p}} \cdot 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + p}}$$

$$f_p'(1) = \frac{2}{3} \text{ geeft } \frac{2}{\sqrt{2+p}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{2+p} = 3$$

$$2+p = 9$$

$$p = 7$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + q \\ f_7(1) = 3, \text{ dus } A(1, 3) \end{array} \right\} \frac{2}{3} + q = 3$$

$$q = 2\frac{1}{3}$$

Dus $p = 7$ en $q = 2\frac{1}{3}$.

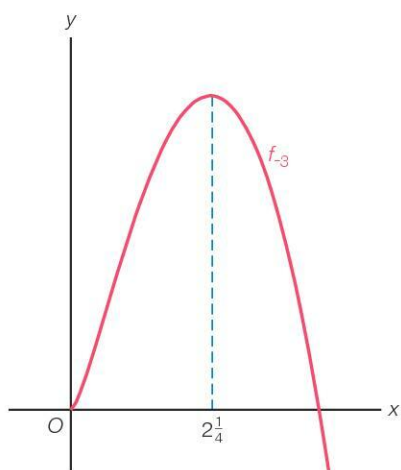
$$65 \quad a \quad f_p(x) = 6x\sqrt{x} + px^2 = 6x^{1\frac{1}{2}} + px^2 \text{ geeft } f_p'(x) = 9x^{\frac{1}{2}} + 2px = 9\sqrt{x} + 2px$$

$$f_p'(2\frac{1}{4}) = 0 \text{ geeft } 9 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} + 2p \cdot 2\frac{1}{4} = 0$$

$$9 \cdot 1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}p = 0$$

$$4\frac{1}{2}p = -13\frac{1}{2}$$

$$p = -3$$



Dus f_p heeft een maximum voor $x = 2\frac{1}{4}$ als $p = -3$.

$$b \quad k: y = 5x + q \text{ raakt de grafiek van } f_p \text{ in } A \text{ met } x_A = 1 \text{ geeft } f_p'(1) = r_{c_k}$$

$$9 \cdot \sqrt{1} + 2p \cdot 1 = 5$$

$$9 + 2p = 5$$

$$2p = -4$$

$$p = -2$$

$$f_{-2}(x) = 6x\sqrt{x} - 2x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 5x + q \\ f_{-2}(1) = 4, \text{ dus } A(1, 4) \end{array} \right\} 5 \cdot 1 + q = 4$$

$$q = -1$$

Dus $p = -2$ en $q = -1$.

66 a $f_p(x) = \frac{4x+p}{x^2+1}$ geeft

$$f_p'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 4 - (4x+p) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2+4-8x^2-2px}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2-2px+4}{(x^2+1)^2}$$

$$a = f_p'(0) = \frac{-4 \cdot 0^2 - 2p \cdot 0 + 4}{(0^2+1)^2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 4x + 4 \text{ snijdt de } y\text{-as in } (0, 4) \\ f_p(0) = p, \text{ dus door } (0, p) \end{array} \right\} p = 4$$

Dus $a = 4$ en $p = 4$.

b $l: y = -x + b$ raakt de grafiek in A met $x_A = -1$, dus $f_p'(-1) = \text{rc}_l$.

$$f_p'(-1) = -1 \text{ geeft } \frac{-4 \cdot (-1)^2 - 2p \cdot (-1) + 4}{((-1)^2 + 1)^2} = -1$$

$$\frac{-4 + 2p + 4}{(1+1)^2} = -1$$

$$\frac{2p}{4} = -1$$

$$2p = -4$$

$$p = -2$$

$$f_{-2}(x) = \frac{4x-2}{x^2+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -x + b \\ f_{-2}(-1) = \frac{4 \cdot (-1) - 2}{(-1)^2 + 1} = -3, \text{ dus } A(-1, -3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 + b = -3 \\ b = -4 \end{array}$$

Dus $l: y = -x - 4$.

c Een extreme waarde voor $x = 2$ geeft $f_p'(2) = 0$

$$\frac{-4 \cdot 2^2 - 2p \cdot 2 + 4}{(2^2+1)^2} = 0$$

$$-12 - 4p = 0$$

$$-4p = 12$$

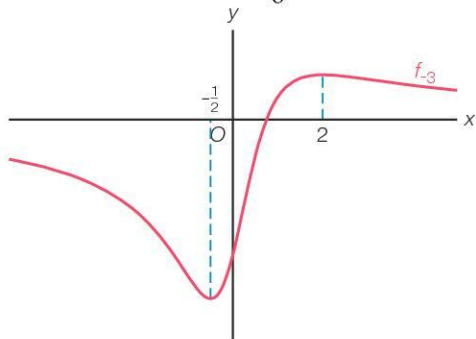
$$p = -3$$

$$f_{-3}'(x) = \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2+1)^2}$$

$$f_{-3}'(x) = 0 \text{ geeft } -4x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 4 = 100$$

$$x = \frac{-6 \pm 10}{-8} = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{-6 \pm 10}{-8} = 2$$



$$\text{min. is } f_{-3}\left(-\frac{1}{2}\right) = -4.$$

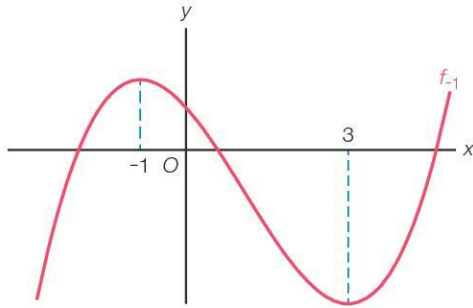
- 67 a** $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 - 3x - p$ geeft $f_p'(x) = x^2 + 2px - 3$
 f_p heeft twee extremen als $f_p'(x) = 0$ twee oplossingen heeft.
 $D = (2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 4p^2 + 12$
 $4p^2 + 12$ is voor elke p groter dan nul, dus $f_p'(x) = 0$ heeft voor elke p twee oplossingen.
- b** f_p heeft een extreme waarde voor $x = 3$, dus $f_p'(3) = 0$
 $3^2 + 2p \cdot 3 - 3 = 0$
 $9 + 6p - 3 = 0$
 $6p = -6$
 $p = -1$

$$f_{-1}(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1 \text{ en } f_{-1}'(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$f_{-1}'(x) = 0 \text{ geeft } x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 3$$



max. is $f_{-1}(-1) = 2\frac{2}{3}$.

- c** $l: y = -x + q$ raakt de grafiek van f_p in B met $x_B = -2$, dus $f_p'(-2) = \text{rc}_l$
 $(-2)^2 + 2p \cdot -2 - 3 = -1$
 $-4p = -2$
 $p = \frac{1}{2}$

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -x + q \\ f_{\frac{1}{2}}(-2) = 4\frac{5}{6}, \text{ dus } B(-2, 4\frac{5}{6}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 + q = 4\frac{5}{6} \\ q = 2\frac{5}{6} \end{array}$$

Dus $p = \frac{1}{2}$ en $q = 2\frac{5}{6}$.

68 $f_{p,q}(2) = 2$ geeft $\frac{2+p}{\sqrt{4+q}} = 2$
 $2+p = 2\sqrt{4+q}$
 $p = -2 + 2\sqrt{4+q}$

$$f_{p,q}(x) = \frac{x+p}{\sqrt{x^2+q}} \text{ geeft}$$

$$f_{p,q}'(x) = \frac{\sqrt{x^2+q} \cdot 1 - (x+p) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+q}} \cdot 2x}{x^2+q} = \frac{\sqrt{x^2+q} - \frac{x(x+p)}{\sqrt{x^2+q}}}{x^2+q} = \frac{x^2+q - x(x+p)}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}} = \frac{q-px}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}}$$

$$f_{p,q}'(2) = -\frac{1}{9} \text{ geeft } \frac{q-2p}{(4+q)\sqrt{4+q}} = -\frac{1}{9}$$

$$q-2p = -\frac{1}{9}(4+q)\sqrt{4+q}$$

$$-2p = -q - \frac{1}{9}(4+q)\sqrt{4+q}$$

$$p = \frac{1}{2}q + \frac{1}{18}(4+q)\sqrt{4+q}$$

Voer in $y_1 = -2 + 2\sqrt{4+x}$ en $y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{18}(4+x)\sqrt{4+x}$.

De optie snijpunt geeft $x = -4$ en $y = -2$ en ook $x = 5$ en $y = 4$.

$p = -2$ en $q = -4$ voldoet niet, want $A(2, 2)$ ligt niet op de grafiek van $f_{-2,-4}(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$.

Dus $p = 4$ en $q = 5$.

69 $f_p'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + px + 3$ geeft $f_p'(x) = -\frac{1}{2}x + p$
 $f_p'(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x + p = 0$
 $p = \frac{1}{2}x$

Bladzijde 80

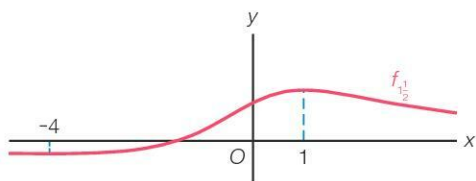
- 70 a Je hoeft alleen de formule op te stellen van de kromme waarop alle toppen liggen. Je hoeft niet aan te tonen dat alle punten van die kromme een top zijn.
 b $f_p'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2p \cdot 0 + 2 = 2 \neq 0$, dus voor elke waarde van p geldt dat $f_p'(0) \neq 0$, dus $(0, 3)$ is geen top van een van de grafieken van f_p .
 c De formule van de kromme waarop alle toppen liggen, wil niet zeggen dat elk punt op de kromme per se een top is. Het punt $(0, 3)$ ligt dus wel op de kromme, maar hoeft dus geen top te zijn.

Bladzijde 81

71 $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x + 5$ geeft $f_p'(x) = x^2 + 2px + 3$
 $f_p'(x) = 0$ geeft $x^2 + 2px + 3 = 0$
 $2px = -x^2 - 3$
 voor $x \neq 0$ geldt $p = \frac{-x^2 - 3}{2x}$
 $y = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x + 5$ $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{-x^2 - 3}{2x} \cdot x^2 + 3x + 5 \\ y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + 3x + 5 \\ y = -\frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{2}x + 5 \end{array} \right.$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = -\frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{2}x + 5$.

72 a Extreme waarde voor $x = 1$, dus $f_p'(1) = 0$.
 $f_p(x) = \frac{x+p}{x^2+4}$ geeft $f_p'(x) = \frac{(x^2+4) \cdot 1 - (x+p) \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2-2px}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2-2px+4}{(x^2+4)^2}$
 $f_p'(1) = 0$ geeft $\frac{-1^2-2p \cdot 1+4}{(1^2+4)^2} = 0$
 $-1-2p+4=0$
 $-2p=-3$
 $p=1\frac{1}{2}$
 $f_{1\frac{1}{2}}'(x) = \frac{-x^2-3x+4}{(x^2+4)^2}$
 $f_{1\frac{1}{2}}'(x) = 0$ geeft $\frac{-x^2-3x+4}{(x^2+4)^2} = 0$
 $-x^2-3x+4=0$
 $x^2+3x-4=0$
 $(x-1)(x+4)=0$
 $x=1 \vee x=-4$
 $f_{1\frac{1}{2}}(-4) = \frac{-4+1\frac{1}{2}}{(-4)^2+4} = \frac{-2\frac{1}{2}}{20} = -\frac{1}{8}$



Dus $p = 1\frac{1}{2}$ en min. is $f_{1\frac{1}{2}}(-4) = -\frac{1}{8}$.

$$\begin{aligned}
 \text{b } f_p'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{-x^2 - 2px + 4}{(x^2 + 4)^2} &= 0 \\
 -x^2 - 2px + 4 &= 0 \\
 -2px &= x^2 - 4 \\
 \text{voor } x \neq 0 \text{ geldt } p &= \frac{-x^2 + 4}{2x} \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{x + \frac{-x^2 + 4}{2x}}{x^2 + 4} \\ y &= \frac{2x^2 - x^2 + 4}{2x(x^2 + 4)} \\ y &= \frac{x^2 + 4}{2x(x^2 + 4)} \\ y &= \frac{1}{2x} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dus alle toppen liggen op de kromme $y = \frac{1}{2x}$.

$$\begin{aligned}
 \text{73 a } f_p(x) &= (p - x^2) \cdot \sqrt{x} = p\sqrt{x} - x^{2\frac{1}{2}} \text{ geeft } f_p'(x) = \frac{p}{2\sqrt{x}} - 2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{p}{2\sqrt{x}} - \frac{5x\sqrt{x}}{2} = \frac{p - 5x^2}{2\sqrt{x}} \\
 f_p'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{p - 5x^2}{2\sqrt{x}} &= 0 \\
 p - 5x^2 &= 0 \\
 p &= 5x^2 \\
 y &= (p - x^2) \cdot \sqrt{x} \left\{ \begin{aligned} y &= (5x^2 - x^2) \cdot \sqrt{x} \\ y &= 4x^2 \cdot \sqrt{x} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = 4x^2 \cdot \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
 \text{b } y &= 8 \\
 4x^2 \cdot \sqrt{x} &= 8 \\
 x^2 \sqrt{x} &= 2 \\
 x^5 &= 4 \\
 x &= 4^{\frac{1}{5}} \left\{ \begin{aligned} p &= 5x^2 \\ p &= 5 \cdot (4^{\frac{1}{5}})^2 = 5 \cdot 4^{\frac{2}{5}} = 5 \cdot \sqrt[5]{16} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{74 a } f(1) &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 + 1\frac{1}{2} = 3 \text{ en } g(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 = 3 \\
 \text{Dus } A(1, 3) &\text{ ligt op de grafiek van } f \text{ en op de grafiek van } g.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } f(x) &= \frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2} \text{ geeft } f'(x) = x + 1 \\
 \text{Stel } k: y &= ax + b \text{ met } a = f'(1) = 2. \\
 k: y &= 2x + b \left\{ \begin{aligned} 2 + b &= 3 \\ \text{door } A(1, 3) \end{aligned} \right. \\
 b &= 1 \\
 \text{Dus } k: y &= 2x + 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(x) &= -x^2 + 4x \text{ geeft } g'(x) = -2x + 4 \\
 \text{Stel } l: y &= ax + b \text{ met } a = g'(1) = 2. \\
 l: y &= 2x + b \left\{ \begin{aligned} 2 + b &= 3 \\ \text{door } A(1, 3) \end{aligned} \right. \\
 b &= 1
 \end{aligned}$$

Dus $l: y = 2x + 1$.

c A is het punt waar de raaklijnen van de grafieken van f en g samenvallen.

- 75** De grafieken hebben voor $x = -3$ geen punt gemeenschappelijk, dus ze raken elkaar niet. Wel geldt dat voor $x = -3$ de raaklijn van de grafiek van f en de raaklijn van de grafiek van g evenwijdig zijn.

- 76 a** $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 8x + 2$
 $g(x) = x^2 + 11x + 28$ geeft $g'(x) = 2x + 11$
 $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$
 $x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = x^2 + 11x + 28 \wedge 3x^2 + 8x + 2 = 2x + 11$
 $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0 \wedge 3x^2 + 6x - 9 = 0$
 $3x^2 + 6x - 9 = 0$ geeft $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x - 1)(x + 3) = 0$
 $x = 1 \vee x = -3$
 Substitutie van $x = 1$ in $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$ geeft
 $1 + 3 - 9 - 27 = 0$ klopt niet.
 Substitutie van $x = -3$ in $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$ geeft
 $-27 + 27 + 27 - 27 = 0$ klopt, dus de grafieken raken elkaar voor $x = -3$.
 $f(-3) = 4$, dus het raakpunt is $(-3, 4)$.
- b** $g'(-3) = -6 + 11 = 5$
 $y = 5x + b$
 door $(-3, 4)$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \cdot -3 + b = 4 \\ b = 19 \end{array}$
 Dus de gemeenschappelijke raaklijn is $y = 5x + 19$.

- 77 a** $f(x) = \sqrt{2x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}}$
 $g_1(x) = x^2 + 1$ geeft $g_1'(x) = 2x$
 $f(x) = g_1(x) \wedge f'(x) = g_1'(x)$
 $\sqrt{2x} = x^2 + 1 \wedge \frac{1}{\sqrt{2x}} = 2x$
 $\sqrt{2x} = x^2 + 1 \wedge 2x\sqrt{2x} = 1$
 $2x\sqrt{2x} = 1$ kwadrateren geeft $(2x)^3 = 1$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$
 Substitutie van $x = \frac{1}{2}$ in $\sqrt{2x} = x^2 + 1$ geeft
 $\sqrt{1} = \frac{1}{4} + 1$ klopt niet.
 Dus de grafieken van f en g_1 raken elkaar niet.
- b** $f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) = g_p'(x)$
 $\sqrt{2x} = x^2 + p \wedge \frac{1}{\sqrt{2x}} = 2x$
 $x = \frac{1}{2}$
 Substitutie van $x = \frac{1}{2}$ in $\sqrt{2x} = x^2 + p$ geeft $\sqrt{1} = \frac{1}{4} + p$
 $p = \frac{3}{4}$
 Dus de grafieken raken elkaar voor $p = \frac{3}{4}$.

- 78 a** De grafieken van $f(x) = x^3 - 2x^2$ en $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3}$ raken elkaar als

$$f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$$

$$x^3 - 2x^2 = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3} \wedge 3x^2 - 4x = x^2$$

$$3x^2 - 4x = x^2 \text{ geeft } 2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

$$x = 0 \wedge x^3 - 2x^2 = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3} \text{ geeft } 0 = -2\frac{2}{3}, \text{ dus voldoet niet.}$$

$$x = 2 \wedge x^3 - 2x^2 = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3} \text{ geeft } 8 - 8 = \frac{1}{3} \cdot 8 - 2\frac{2}{3} \text{ klopt.}$$

Dus de grafieken raken elkaar voor $x = 2$.

$$f(2) = 0, \text{ dus het raakpunt is } (2, 0).$$

- b** $h(x) = -x^2 + 8x - 12$ geeft $h'(x) = -2x + 8$

$$k_p(x) = x^2 + px \text{ geeft } k_p'(x) = 2x + p$$

$$h(x) = k_p(x) \wedge h'(x) = k_p'(x)$$

$$-x^2 + 8x - 12 = x^2 + px \wedge -2x + 8 = 2x + p$$

$$-2x^2 + (8 - p)x - 12 = 0 \wedge -4x + 8 = p$$

$$\text{Substitutie van } p = -4x + 8 \text{ in } -2x^2 + (8 - p)x - 12 = 0 \text{ geeft } -2x^2 + (8 - (-4x + 8))x - 12 = 0$$

$$-2x^2 + (8 + 4x - 8)x - 12 = 0$$

$$-2x^2 + 4x^2 - 12 = 0$$

$$2x^2 = 12$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \sqrt{6} \\ p = -4x + 8 \end{array} \right\} p = -4\sqrt{6} + 8$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -\sqrt{6} \\ p = -4x + 8 \end{array} \right\} p = 4\sqrt{6} + 8$$

$$\text{Dus } p = -4\sqrt{6} + 8 \vee p = 4\sqrt{6} + 8.$$

- 79** $f_{p,q}(x) = \frac{x+p}{\sqrt{x^2+q}}$ geeft

$$f'_{p,q}(x) = \frac{\sqrt{x^2+q} \cdot 1 - (x+p) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+q}} \cdot 2x}{x^2+q} = \frac{\sqrt{x^2+q} - \frac{x(x+p)}{\sqrt{x^2+q}}}{x^2+q} = \frac{x^2+q - x(x+p)}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}} = \frac{q-px}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}}$$

$$g(x) = -1\frac{3}{8}x^2 + 2\frac{7}{8}x \text{ geeft } g'(x) = -2\frac{3}{4}x + 2\frac{7}{8}$$

De grafieken van $f_{p,q}$ en g raken elkaar voor $x = 1$, dus

$$f_{p,q}(1) = g(1) \wedge f'_{p,q}(1) = g'(1)$$

$$\frac{1+p}{\sqrt{1+q}} = -1\frac{3}{8} + 2\frac{7}{8} \wedge \frac{q-p}{(1+q)\sqrt{1+q}} = -2\frac{3}{4} + 2\frac{7}{8}$$

$$\frac{1+p}{\sqrt{1+q}} = \frac{3}{2} \wedge \frac{q-p}{(1+q)\sqrt{1+q}} = \frac{1}{8}$$

$$2 + 2p = 3\sqrt{1+q} \wedge 8q - 8p = (1+q)\sqrt{1+q}$$

$$2p = -2 + 3\sqrt{1+q} \wedge -8p = -8q + (1+q)\sqrt{1+q}$$

$$p = -1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{1+q} \wedge p = q - \frac{1}{8}(1+q)\sqrt{1+q}$$

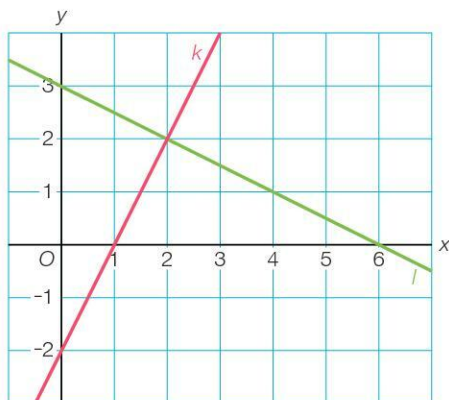
$$\text{Hieruit volgt } -1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{1+q} = q - \frac{1}{8}(1+q)\sqrt{1+q}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = -1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{1+x} \text{ en } y_2 = x - \frac{1}{8}(1+x)\sqrt{1+x}.$$

De optie snijpunt geeft $x = -1$ en $y = -1$, $x = 3$ en $y = 2$, en $x = 35$ en $y = 8$.

$$p = -1 \text{ en } q = -1 \text{ voldoet niet, want het punt } A \text{ met } x_A = 1 \text{ ligt niet op de grafiek van } f_{-1,-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Dus $p = 2$ en $q = 3$ of $p = 8$ en $q = 35$.



b Ja, bij de lijn k ga je 1 naar rechts en 2 omhoog, bij de lijn l ga je 2 naar rechts en 1 omlaag.

c m loodrecht op k , oftewel m evenwijdig met l .

Stel $m: y = ax + b$ met $a = rc_m = rc_l = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 0 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $m: y = -\frac{1}{2}x + 2$.

d $rc_p = \frac{1}{4}$, dus bij p ga je 4 naar rechts en 1 omhoog.

Dus bij n ga je 1 naar rechts en 4 omlaag.

Stel $n: y = ax + b$ met $a = rc_n = -4$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -4x + b \\ \text{door } B(1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 \cdot 1 + b = 3 \\ b = 7 \end{array}$$

Dus $n: y = -4x + 7$.

Bladzijde 84

81 a $f(x) = \sqrt{x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10$ geeft $g'(x) = -x$.

$$f(x) = g(x) \wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$$

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x^2 + 10 \wedge \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot -x = -1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot -x = -1 \text{ geeft } \frac{x}{2\sqrt{x}} = 1$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} = 1$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

$$\text{Substitutie van } x = 4 \text{ in } \sqrt{x} = -\frac{1}{2}x^2 + 10 \text{ geeft } \sqrt{4} = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 10$$

$$2 = -8 + 10$$

$$2 = 2$$

Dit klopt, dus de grafieken snijden elkaar loodrecht.

b $h_p(x) = p\sqrt{x}$ geeft $h_p'(x) = \frac{p}{2\sqrt{x}}$ en $k(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3}$ geeft $k'(x) = -\frac{1}{3}x$.

$$h_p'(x) = k(x) \wedge h_p'(x) \cdot k'(x) = -1$$

$$p\sqrt{x} = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3} \wedge \frac{p}{2\sqrt{x}} \cdot -\frac{1}{3}x = -1$$

$$p\sqrt{x} = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3} \wedge -\frac{1}{6}p\sqrt{x} = -1$$

$$p\sqrt{x} = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3} \wedge p\sqrt{x} = 6$$

Hieruit volgt $6 = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3}$

$$\frac{1}{6}x^2 = 2\frac{2}{3}$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

$x = 4$ geeft $p\sqrt{4} = 6$

$$2p = 6$$

$$p = 3$$

$x = -4$ voldoet niet.

$$k(4) = 6$$

Dus $p = 3$ en het snijpunt is $(4, 6)$.

Bladzijde 85

82 a $f(x) = x^2 - 4x$ geeft $f'(x) = 2x - 4$

$$f'(5) = 10 - 4 = 6$$

$$\text{rc}_k \cdot 6 = -1, \text{ dus } \text{rc}_k = -\frac{1}{6}.$$

$$k: y = -\frac{1}{6}x + b \left\{ \begin{array}{l} -\frac{5}{6} + b = 5 \\ \text{door } A(5, 5) \end{array} \right.$$

$$b = 5\frac{5}{6}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{6}x + 5\frac{5}{6}$.

b $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ geeft $g'(x) = \frac{(x+2) \cdot 2 - (2x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$

$$g(x) = -5x + p \wedge g'(x) \cdot \text{rc}_l = -1$$

$$\frac{2x-1}{x+2} = -5x + p \wedge \frac{5}{(x+2)^2} \cdot -5 = -1$$

$$p = 5x + \frac{2x-1}{x+2} \wedge \frac{25}{(x+2)^2} = 1$$

$$\frac{25}{(x+2)^2} = 1 \text{ geeft } (x+2)^2 = 25$$

$$x+2 = 5 \vee x+2 = -5$$

$$x = 3 \vee x = -7$$

$$x = 3 \left\{ \begin{array}{l} p = 5x + \frac{2x-1}{x+2} \\ p = 15 + \frac{5}{5} = 16 \end{array} \right.$$

$$x = -7 \left\{ \begin{array}{l} p = 5x + \frac{2x-1}{x+2} \\ p = -35 + \frac{-15}{-5} = -32 \end{array} \right.$$

Dus $p = 16 \vee p = -32$.

83 a $f(x) = x^2 - x$ geeft $f'(x) = 2x - 1$ en $g_p(x) = \frac{p}{x} = px^{-1}$ geeft $g_p'(x) = -px^{-2} = \frac{-p}{x^2}$.

$$f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) = g_p'(x)$$

$$x^2 - x = \frac{p}{x} \wedge (2x - 1) = \frac{-p}{x^2}$$

$$x^3 - x^2 = p \wedge 2x^3 - x^2 = -p$$

$$p = x^3 - x^2 \wedge p = -2x^3 + x^2$$

$$x^3 - x^2 = -2x^3 + x^2$$

$$3x^3 - 2x^2 = 0$$

$$x^2(3x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$$

vold. niet vold.

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ p = x^3 - x^2 \end{array} \right\} p = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{9}$$

Dus $p = -\frac{4}{27}$ en $A\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}\right)$.

b $f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$

$$x^2 - x = \frac{p}{x} \wedge (2x - 1) \cdot \frac{-p}{x^2} = -1$$

$$x^3 - x^2 = p \wedge p(2x - 1) = x^2$$

$$(x^3 - x^2)(2x - 1) = x^2$$

$$x^2(x - 1)(2x - 1) = x^2$$

$$x \neq 0, \text{ dus } (x - 1)(2x - 1) = 1$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 1$$

$$2x^2 - 3x = 0$$

$$x(2x - 3) = 0$$

$$x = 0 \vee x = \frac{3}{2}$$

vold. niet vold.

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ p = x^3 - x^2 \end{array} \right\} p = \frac{27}{8} - \frac{9}{4} = \frac{9}{8}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

Dus $p = \frac{9}{8}$ en $B\left(1\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

84 $f_{p,q}(x) = \frac{x+p}{\sqrt{x^2+q}}$ geeft $f_{p,q}'(x) = \frac{\sqrt{x^2+q} \cdot 1 - (x+p) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+q}} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2+q})^2} = \frac{x^2+q - x(x+p)}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}} = \frac{q-px}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}}$

$g(x) = x^2 - 3x - 1\frac{1}{2}$ geeft $g'(x) = 2x - 3$
 De grafieken van $f_{p,q}$ en g snijden elkaar loodrecht voor $x = 4$, dus
 $f_{p,q}(4) = g(4) \wedge f_{p,q}'(4) \cdot g'(4) = -1$

$$\frac{4+p}{\sqrt{16+q}} = 2\frac{1}{2} \wedge \frac{q-4p}{(16+q)\sqrt{16+q}} \cdot 5 = -1$$

$$4+p = 2\frac{1}{2}\sqrt{16+q} \wedge 5q - 20p = -(16+q)\sqrt{16+q}$$

$$p = -4 + 2\frac{1}{2}\sqrt{16+q} \wedge -20p = -5q - (16+q)\sqrt{16+q}$$

$$p = -4 + 2\frac{1}{2}\sqrt{16+q} \wedge p = \frac{1}{4}q + \frac{1}{20}(16+q)\sqrt{16+q}$$

Hieruit volgt $-4 + 2\frac{1}{2}\sqrt{16+q} = \frac{1}{4}q + \frac{1}{20}(16+q)\sqrt{16+q}$.

Voer in $y_1 = -4 + 2\frac{1}{2}\sqrt{16+x}$ en $y_2 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{20}(16+x)\sqrt{16+x}$.

De optie snijpunt geeft $x = -16$ en $y = -4$, en $x = 9$ en $y = 8\frac{1}{2}$.

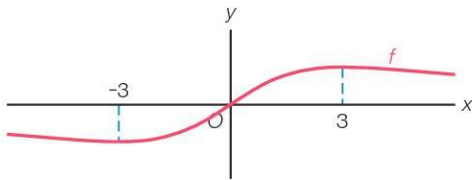
$p = -4$ en $q = -16$ voldoet niet, want het punt A met $x_A = 4$ ligt niet op de grafiek van $f_{-4,-16}(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-16}}$.

Dus $p = 8\frac{1}{2}$ en $q = 9$.

Diagnostische toets

Bladzijde 88

1 $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 9}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2 + 9) \cdot 6 - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{6x^2 + 54 - 12x^2}{(x^2 + 9)^2} = \frac{-6x^2 + 54}{(x^2 + 9)^2}$
 $f'(x) = 0$ geeft $-6x^2 + 54 = 0$
 $-6x^2 = -54$
 $x^2 = 9$
 $x = 3 \vee x = -3$

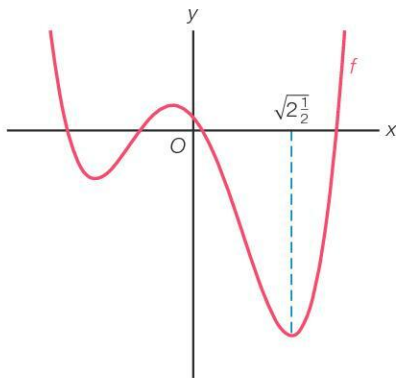


min. is $f(-3) = -1$ en max. is $f(3) = 1$.

$f(x) = 0$ geeft $6x = 0$, dus $x = 0$.

De grafiek snijdt de x -as alleen in $(0, 0)$, dus $B_f = [-1, 1]$.

2 $f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 45x^2 - 30x + 5$ geeft $f'(x) = 36x^3 + 12x^2 - 90x - 30$
 $f'(\sqrt{2\frac{1}{2}}) = 36 \cdot 2\frac{1}{2}\sqrt{2\frac{1}{2}} + 12 \cdot 2\frac{1}{2} - 90\sqrt{2\frac{1}{2}} - 30 = 90\sqrt{2\frac{1}{2}} + 30 - 90\sqrt{2\frac{1}{2}} - 30 = 0$



$f'(\sqrt{2\frac{1}{2}}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{2\frac{1}{2}}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{2\frac{1}{2}}$.

3 a $f(x) = 4 - (x^3 + 1)^2 = 4 - (x^6 + 2x^3 + 1) = -x^6 - 2x^3 + 3$ geeft $f'(x) = -6x^5 - 6x^2$
 $f'(x) = 0$ geeft $-6x^5 - 6x^2 = 0$
 $-6x^2(x^3 + 1) = 0$
 $-6x^2 = 0 \vee x^3 = -1$
 $x = 0 \vee x = -1$

$f(-1) = 4$, dus de top is $(-1, 4)$.

b $f'(x) = -6x^5 - 6x^2$ geeft $f''(x) = -30x^4 - 12x$
 $f''(x) = 0$ geeft $-30x^4 - 12x = 0$
 $-6x(5x^3 + 2) = 0$
 $-6x = 0 \vee 5x^3 = -2$
 $x = 0 \vee x^3 = -\frac{2}{5}$
 $x = 0 \vee x = \sqrt[3]{-\frac{2}{5}}$

$f(0) = 3$ en $f(\sqrt[3]{-\frac{2}{5}}) = 4 - (-\frac{2}{5} + 1)^2 = 4 - \frac{9}{25} = 3\frac{16}{25}$

Dus de buigpunten zijn $(0, 3)$ en $(\sqrt[3]{-\frac{2}{5}}, 3\frac{16}{25})$.

4 a $f(x) = \frac{5}{x^6} = 5x^{-6}$ geeft $f'(x) = -30x^{-7} = -\frac{30}{x^7}$

b $g(x) = \frac{x^6 - 2x^4}{x^5} = x - 2x^{-1}$ geeft $g'(x) = 1 + 2x^{-2} = 1 + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + 2}{x^2}$

c $h(x) = 4x^3 - \frac{3x-2}{x^3} = 4x^3 - 3x^{-2} + 2x^{-3}$ geeft

$$h'(x) = 12x^2 + 6x^{-3} - 6x^{-4} = 12x^2 + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} = 12x^2 + \frac{6x-6}{x^4}$$

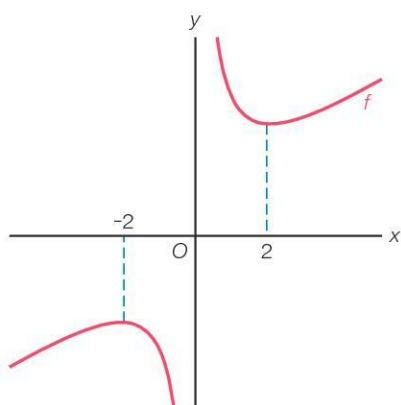
5 a $f(x) = 2x + \frac{8}{x} + 1 = 2x + 8x^{-1} + 1$ geeft $f'(x) = 2 - 8x^{-2} = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $2x^2 - 8 = 0$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$



max. is $f(-2) = -7$ en min. is $f(2) = 9$.

b $f'(x) = -6$ geeft $\frac{2x^2 - 8}{x^2} = -6$

$$2x^2 - 8 = -6x^2$$

$$8x^2 = 8$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

$$f(1) = 11 \text{ en } f(-1) = -9$$

Dus de raakpunten zijn (1, 11) en (-1, -9).

c $f'(x) = 3$ geeft $\frac{2x^2 - 8}{x^2} = 3$

$$2x^2 - 8 = 3x^2$$

$$-x^2 = 8$$

$$x^2 = -8$$

geen oplossingen

Er is dus geen raaklijn met richtingscoëfficiënt 3.

6 a $f(x) = \frac{8x^6 - x^4}{x\sqrt{x}} = \frac{8x^6 - x^4}{x^{1\frac{1}{2}}} = 8x^{4\frac{1}{2}} - x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 36x^{3\frac{1}{2}} - 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} = 36x^3 \cdot \sqrt{x} - 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$

b $g(x) = \frac{6x - x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{x^3} = \frac{6x - x^{2\frac{1}{3}}}{x^3} = 6x^{-2} - x^{-\frac{2}{3}}$ geeft $g'(x) = -12x^{-3} + \frac{2}{3}x^{-1\frac{2}{3}} = \frac{-12}{x^3} + \frac{2x^{\frac{1}{3}}}{3x^3} = \frac{-36 + 2x \cdot \sqrt[3]{x}}{3x^3}$

c $h(x) = (x^2 + 2\sqrt{x})^2 = x^4 + 4x^2 \cdot \sqrt{x} + 4x = x^4 + 4x^{2\frac{1}{2}} + 4x$ geeft

$$h'(x) = 4x^3 + 10x^{\frac{1}{2}} + 4 = 4x^3 + 10x\sqrt{x} + 4$$

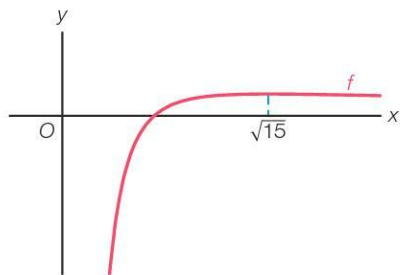
$$7 \quad f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^2 - 3}{x^{2\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-2\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 7\frac{1}{2}x^{-3\frac{1}{2}} = \frac{-x^2}{2x^{3\frac{1}{2}}} + \frac{15}{2x^{3\frac{1}{2}}} = \frac{-x^2 + 15}{2x^3 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } -x^2 + 15 = 0$$

$$x^2 = 15$$

$$x = \sqrt{15} \vee x = -\sqrt{15}$$

vold. vold. niet



$$y_{\text{top}} = f(\sqrt{15}) = \frac{15 - 3}{15 \cdot \sqrt{\sqrt{15}}} = \frac{12}{15 \cdot \sqrt[4]{15}} = \frac{4}{5 \cdot \sqrt[4]{15}}$$

Dus $a = 4$, $b = 5$ en $c = 15$ zijn mogelijke waarden.

Bladzijde 89

$$8 \quad a \quad f(x) = x^3 - \frac{5}{(2x^2 - x)^4} = x^3 - 5(2x^2 - x)^{-4} \text{ geeft } f'(x) = 3x^2 + 20(2x^2 - x)^{-5} \cdot (4x - 1) = 3x^2 + \frac{80x - 20}{(2x^2 - x)^5}$$

$$b \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 15} \text{ geeft } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 6x + 15}} \cdot (2x - 6) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 15}}$$

$$c \quad h(x) = (x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2} = (x^2 + 2)^{1\frac{1}{2}} \text{ geeft } h'(x) = 1\frac{1}{2}(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2 + 2}$$

$$9 \quad a \quad f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 2)^3 - x^2 \text{ geeft } f'(x) = (x^2 - 2)^2 \cdot 2x - 2x = 2x(x^2 - 2)^2 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 2x(x^2 - 2)^2 - 2x = 0$$

$$2x((x^2 - 2)^2 - 1) = 0$$

$$2x = 0 \vee (x^2 - 2)^2 = 1$$

$$x = 0 \vee x^2 - 2 = 1 \vee x^2 - 2 = -1$$

$$x = 0 \vee x^2 = 3 \vee x^2 = 1$$

$$x = 0 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \vee x = 1 \vee x = -1$$

$$b \quad \text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'(2) = 4 \cdot 2^2 - 4 = 12.$$

$$y = 12x + b$$

$$f(2) = -1\frac{1}{3}, \text{ dus } A(2, -1\frac{1}{3}) \left\{ \begin{array}{l} 12 \cdot 2 + b = -1\frac{1}{3} \\ 24 + b = -1\frac{1}{3} \\ b = -25\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = 12x - 25\frac{1}{3}.$$

$$y = 0 \text{ geeft } 12x - 25\frac{1}{3} = 0$$

$$12x = \frac{76}{3}$$

$$x = \frac{76}{36} = 2\frac{1}{9}$$

$$\text{Dus } x_B = 2\frac{1}{9}.$$

10 a $f(x) = x\sqrt{50-x^2}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{50-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{50-x^2}} \cdot -2x = \sqrt{50-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{50-x^2}} = \frac{50-x^2-x^2}{\sqrt{50-x^2}} = \frac{50-2x^2}{\sqrt{50-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 50 - 2x^2 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \vee x = -5$$

min. is $f(-5) = -25$ en max. is $f(5) = 25$.

Dus $B_f = [-25, 25]$.

b Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = \frac{50-2}{\sqrt{50-1}} = \frac{48}{\sqrt{49}} = 6\frac{6}{7}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 6\frac{6}{7}x + b \\ f(1) = 7, \text{ dus } A(1, 7) \end{array} \right\} 6\frac{6}{7} \cdot 1 + b = 7$$

$$b = \frac{1}{7}$$

Dus $k: y = 6\frac{6}{7}x + \frac{1}{7}$.

11 a $f_p(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + px + 2$ geeft $f_p'(x) = 2x^2 - 8x + p$

$$f_p'(3) = 0 \text{ geeft } 18 - 24 + p = 0$$

$$p = 6$$

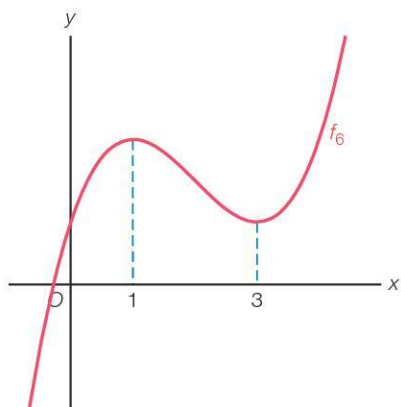
$$f_6(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + 2 \text{ en } f_6'(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

$$f_6'(x) = 0 \text{ geeft } 2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 3$$



$$f_6(1) = \frac{2}{3} - 4 + 6 + 2 = 4\frac{2}{3}$$

Dus max. is $f_6(1) = 4\frac{2}{3}$.

b Voor raken geldt $f_p(-1) = 12 + q \wedge f_p'(-1) = 12$

$$f_p'(-1) = 12 \text{ geeft } 2 + 8 + p = 12$$

$$p = 2$$

$$f_2(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 2x + 2$$

$$f_2(-1) = -12 + q \text{ geeft } -\frac{2}{3} - 4 - 2 + 2 = -12 + q$$

$$q = 7\frac{1}{3}$$

Dus $p = 2$ en $q = 7\frac{1}{3}$.

12 $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x - 4$ geeft $f'_p(x) = -x^2 + 2px + 3$

$f'_p(x) = 0$ geeft $-x^2 + 2px + 3 = 0$

$2px = x^2 - 3$

$$\left. \begin{array}{l} \text{voor } x \neq 0 \text{ geldt } p = \frac{x^2 - 3}{2x} \\ y = -\frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x - 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2 - 3}{2x} \cdot x^2 + 3x - 4 \\ y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + 3x - 4 \\ y = \frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{2}x - 4 \end{array}$$

De formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = \frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{2}x - 4$.

13 a $f(x) = x^3 - 3x$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 3$

$g_p(x) = px + 16$ geeft $g'_p(x) = p$

$f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) = g'_p(x)$

$x^3 - 3x = px + 16 \wedge 3x^2 - 3 = p$

Substitutie van $p = 3x^2 - 3$ in $x^3 - 3x = px + 16$ geeft $x^3 - 3x = (3x^2 - 3)x + 16$

$x^3 - 3x = 3x^3 - 3x + 16$

$-2x^3 = 16$

$x^3 = -8$

$\left. \begin{array}{l} x = -2 \\ p = 3x^2 - 3 \end{array} \right\} p = 12 - 3 = 9$

Dus voor $p = 9$ raken de grafieken elkaar.

b $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$g_p(x) = px + 4$ geeft $g'_p(x) = p$

$f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) = g'_p(x)$

$\sqrt{x^2 + 1} = px + 4 \wedge \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot p = -1$

$\sqrt{x^2 + 1} = px + 4 \wedge p = \frac{-\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

Dit geeft $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{-\sqrt{x^2 + 1}}{x} \cdot x + 4$

$\sqrt{x^2 + 1} = -\sqrt{x^2 + 1} + 4$

$2\sqrt{x^2 + 1} = 4$

$\sqrt{x^2 + 1} = 2$

$x^2 + 1 = 4$

$x^2 = 3$

$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3}$ geeft $p = -\frac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$x = -\sqrt{3}$ geeft $p = -\frac{\sqrt{3+1}}{-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Dus voor $p = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ en voor $p = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ snijden de grafieken elkaar loodrecht.

7 Meetkunde met coördinaten

Voorkennis Stelsels vergelijkingen

Bladzijde 93

1 a $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 20x - 28y = 4 \\ 20x - 15y = 30 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -13y = -26 \\ y = 2 \\ 5x - 7y = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} -13y = -26 \\ y = 2 \\ 5x - 7y = 1 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 5x - 7 \cdot 2 = 1 \\ 5x - 14 = 1 \\ 5x = 15 \\ x = 3 \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (3, 2)$.

b $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x + 9y = 45 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases} +$

$$\begin{array}{r} 16x = 40 \\ x = 2\frac{1}{2} \\ 2x + 3y = 15 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 16x = 40 \\ x = 2\frac{1}{2} \\ 2x + 3y = 15 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2\frac{1}{2} + 3y = 15 \\ 5 + 3y = 15 \\ 3y = 10 \\ y = 3\frac{1}{3} \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3})$.

c $\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x - 15y = 48 \\ 6x + 8y = 20 \end{cases} -$

$$\begin{array}{r} -23y = 28 \\ y = -1\frac{5}{23} \\ 2x - 5y = 16 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} -23y = 28 \\ y = -1\frac{5}{23} \\ 2x - 5y = 16 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 2x - 5 \cdot -1\frac{5}{23} = 16 \\ 2x + 6\frac{2}{23} = 16 \\ 2x = 9\frac{21}{23} \\ x = 4\frac{22}{23} \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (4\frac{22}{23}, -1\frac{5}{23})$.

2 a $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 4y = 11 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x + 4y = 10 \\ x - 4y = 11 \end{cases} +$

$$\begin{array}{r} 7x = 21 \\ x = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 7x = 21 \\ x = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 9 + 2y = 5 \\ 2y = -4 \\ y = -2 \end{array}$$

Dus $P(3, -2)$.

b $\begin{cases} 4x - 5y = 6 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 12x - 15y = 18 \\ 12x - 8y = 4 \end{cases} -$

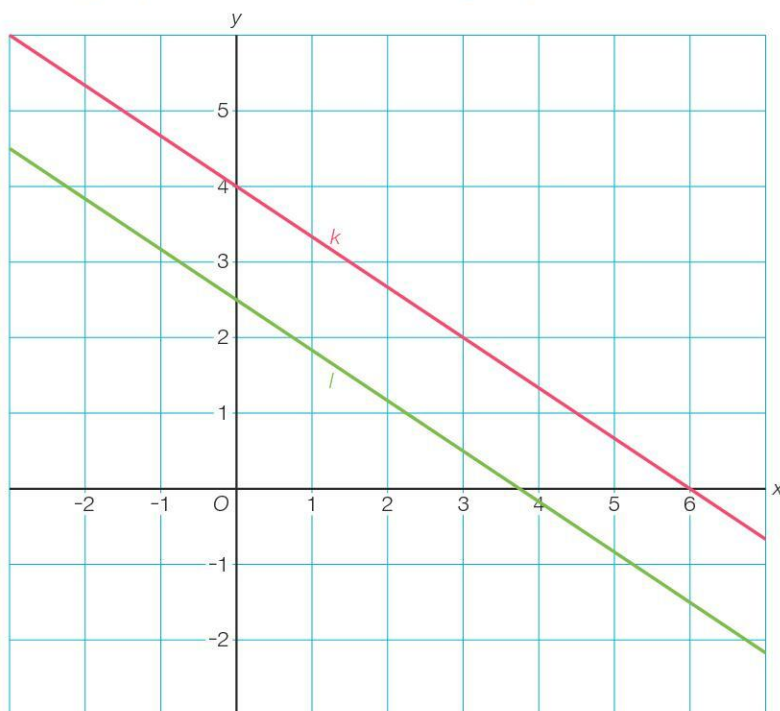
$$\begin{array}{r} -7y = 14 \\ y = -2 \\ 4x - 5y = 6 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} -7y = 14 \\ y = -2 \\ 4x - 5y = 6 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 4x + 10 = 6 \\ 4x = -4 \\ x = -1 \end{array}$$

Dus $Q(-1, -2)$.

7.1 Lijnen en hoeken

Bladzijde 94

1 a $k: \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 6 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array}$ $l: \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3\frac{3}{4} \\ \hline y & 2\frac{1}{2} & 0 \end{array}$



- b De lijnen k en l zijn evenwijdig en vallen niet samen, dus hebben geen punt gemeenschappelijk.

Dus het stelsel heeft geen oplossing.

c $k: 2x + 3y = 12$ $l: 4x + 6y = 15$
 $3y = -2x + 12$ $6y = -4x + 15$
 $y = -\frac{2}{3}x + 4$ $y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{1}{2}$
Je ziet $rc_k = rc_l$, dus $k \parallel l$.

Bladzijde 95

- 2 a Voor $p = \frac{1}{3}$ en $q \neq -10$ zijn de lijnen evenwijdig.
b Voor $p \neq \frac{1}{3}$ en q elk getal van $\mathbb{R}$ hebben de lijnen een snijpunt.
c $(2, -3)$ op k_p geeft $2p - 3(p + 1) = 5$
 $2p - 3p - 3 = 5$
 $-p = 8$
 $p = -8$
 $p = -8$ geeft $l_q: -9x - 11y = q$
 $(2, -3)$ op l_q geeft $q = -9 \cdot 2 - 11 \cdot -3 = 15$.
Dus voor $p = -8$ en $q = 15$ snijden de lijnen elkaar in het punt $(2, -3)$.

3 a Samenvallen, dus $\frac{3}{p-1} = \frac{p}{p+4} = \frac{5}{q}$.

$$\frac{3}{p-1} = \frac{p}{p+4} \text{ geeft } p(p-1) = 3(p+4)$$

$$p^2 - p = 3p + 12$$

$$p^2 - 4p - 12 = 0$$

$$(p+2)(p-6) = 0$$

$$p = -2 \vee p = 6$$

$p = -2$ geeft $\frac{3}{-3} = \frac{-2}{2} = \frac{5}{q}$ oftewel $-1 = \frac{5}{q}$, dus $q = -5$.

$p = 6$ geeft $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{5}{q}$ oftewel $3q = 25$, dus $q = 8\frac{1}{3}$.

Dus voor $p = -2$ en $q = -5$ en voor $p = 6$ en $q = 8\frac{1}{3}$ vallen de lijnen samen.

- b** Voor $p = -2$ en q elk getal van $\mathbb{R}$ en voor $p = 6$ en q elk getal van $\mathbb{R}$ zijn de lijnen evenwijdig.

4 Samenvallen, dus $\frac{p}{q+3} = \frac{q}{p-1} = \frac{4}{1}$.

Uit $\frac{p}{q+3} = \frac{4}{1}$ volgt $p = 4(q+3)$ oftewel $p = 4q + 12$.

Uit $\frac{q}{p-1} = \frac{4}{1}$ volgt $q = 4(p-1)$ oftewel $q = 4p - 4$.

Substitutie van $p = 4q + 12$ in $q = 4p - 4$ geeft $q = 4(4q + 12) - 4$

$$q = 16q + 48 - 4$$

$$-15q = 44$$

$$q = -2\frac{14}{15}$$

$q = -2\frac{14}{15}$ geeft $p = 4 \cdot -2\frac{14}{15} + 12 = \frac{4}{15}$

Dus voor $p = \frac{4}{15}$ en $q = -2\frac{14}{15}$ vallen de lijnen samen.

5 a $y = 0$ geeft $2x = 18$
 $x = 9$

Dus het snijpunt met de x -as is $(9, 0)$.

$x = 0$ geeft $3y = 18$
 $y = 6$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, 6)$.

- b** Bij $2x + 3y = 18$ het linker- en rechterlid delen door 18 geeft $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$.

- c** In de noemer van de breuk $\frac{x}{9}$ staat de x -coördinaat van het snijpunt met de x -as.

In de noemer van de breuk $\frac{y}{6}$ staat de y -coördinaat van het snijpunt met de y -as.

6 a $\left. \begin{array}{l} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{x}{a} + 0 = 1 \\ \frac{x}{a} = 1 \\ x = a \end{array}$

Dus het snijpunt met de x -as is $(a, 0)$.

b $\left. \begin{array}{l} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{y}{b} = 1 \\ y = b \end{array}$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, b)$.

Bladzijde 96

7 a $l: \frac{x}{p} + \frac{y}{5} = 1$

$l: 5x + py = 5p$

b $m: \frac{x}{4} + \frac{y}{q} = 1$

$m: qx + 4y = 4q$

c $n: \frac{x}{3r} + \frac{y}{r} = 1$

$n: x + 3y = 3r$

- 8 a** $k: \frac{x}{p} + \frac{y}{8} = 1$
 $k: 8x + py = 8p$
- b** $k: 8x + py = 8p$
 door $(1, 2)$ $\left\{ \begin{array}{l} 8 \cdot 1 + p \cdot 2 = 8p \\ 8 + 2p = 8p \\ -6p = -8 \\ p = 1\frac{1}{3} \end{array} \right.$
- c** $k: 8x + py = 8p$ en $l: 2x - y = -3$
 $k \parallel l$ geeft $\frac{8}{2} = \frac{p}{-1} \neq \frac{8p}{-3}$
 $\frac{8}{2} = \frac{p}{-1}$ geeft $p = -4$ en $p = -4$ geeft $\frac{8}{2} = \frac{-4}{-1} \neq \frac{-32}{-3}$.
 Dus voor $p = -4$ is $k \parallel l$.

Bladzijde 97

- 9 a** $k: \frac{x}{3} + \frac{y}{p} = 1$
 $k: px + 3y = 3p$
 $l: \frac{x}{2p} + \frac{y}{5} = 1$
 $l: 5x + 2py = 10p$
- b** $k: px + 3y = 3p$
 door $A(1, 2)$ $\left\{ \begin{array}{l} p \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 3p \\ p + 6 = 3p \\ -2p = -6 \\ p = 3 \end{array} \right.$
- $l: 5x + 2py = 10p$
 door $A(1, 2)$ $\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot 1 + 2p \cdot 2 = 10p \\ 5 + 4p = 10p \\ -6p = -5 \\ p = \frac{5}{6} \end{array} \right.$
- c** $k: px + 3y = 3p$ en $m: 4x - y = -5$
 $k \parallel m$ geeft $\frac{p}{4} = \frac{3}{-1} \neq \frac{3p}{-5}$
 $\frac{p}{4} = \frac{3}{-1}$ geeft $p = -12$ en $p = -12$ geeft $\frac{-12}{4} = \frac{3}{-1} \neq \frac{-36}{-5}$.
 Dus voor $p = -12$ is $k \parallel m$.
- d** $l: 5x + 2py = 10p$ en $n: 2x + 3y = 10$
 $l \parallel n$ geeft $\frac{5}{2} = \frac{2p}{3} \neq \frac{10p}{10}$
 $\frac{5}{2} = \frac{2p}{3}$ geeft $4p = 15$ oftewel $p = 3\frac{3}{4}$ en $p = 3\frac{3}{4}$ geeft $\frac{5}{2} = \frac{7\frac{1}{2}}{3} \neq \frac{37\frac{1}{2}}{10}$.
 Dus voor $p = 3\frac{3}{4}$ is $l \parallel n$.

- 10 a** $l_p: \frac{x}{p} + \frac{y}{p+2} = 1$
 door $(3, 4)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{p} + \frac{4}{p+2} = 1 \\ 3(p+2) + 4p = p(p+2) \\ 3p + 6 + 4p = p^2 + 2p \\ p^2 - 5p - 6 = 0 \\ (p+1)(p-6) = 0 \\ p = -1 \vee p = 6 \\ \text{vold.} \quad \text{vold.} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad & \frac{x}{p} + \frac{y}{p+2} = 1 \\
 & (p+2)x + py = p(p+2) \\
 & py = -(p+2)x + p(p+2) \\
 & y = -\frac{p+2}{p} \cdot x + p+2 \\
 \text{rc} = 2 \text{ geeft } & -\frac{p+2}{p} = 2 \\
 & p+2 = -2p \\
 & 3p = -2 \\
 & p = -\frac{2}{3} \text{ vold.}
 \end{aligned}$$

$$11 \quad \text{a} \quad \tan(\angle CAB) = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\angle CAB = 63,4349\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle CAB \approx 63,435^\circ.$$

$$\text{b} \quad \text{De tangens van de hoek tussen } l \text{ en de } x\text{-as is } \frac{1}{4}.$$

$$\text{Dit geeft dat de hoek gelijk is aan } 14,0362\dots^\circ.$$

$$\text{c} \quad \text{Dus de hoek tussen } k \text{ en } l \text{ is } 63,4349\dots^\circ + 14,0362\dots^\circ \approx 77,5^\circ.$$

Bladzijde 99

$$12 \quad \text{Als de eenheden langs de assen verschillend zijn, dan maakt bijvoorbeeld de lijn } y = x \text{ geen hoek van } 45^\circ \text{ met de } x\text{-as, maar is elke hoek mogelijk.}$$

$$13 \quad \text{a} \quad k: y = 3x + 4$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 3 \text{ geeft } \alpha = 71,56\dots^\circ$$

$$l: y = 2x - 1$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = 2 \text{ geeft } \beta = 63,43\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 71,56\dots^\circ - 63,43\dots^\circ \approx 8^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(k, l) \approx 8^\circ.$$

$$\text{b} \quad m: y = 1\frac{1}{2}x + 2$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_m = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = 56,30\dots^\circ$$

$$n: y = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_n = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = -26,56\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 56,30\dots^\circ - (-26,56\dots^\circ) \approx 83^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(m, n) \approx 83^\circ.$$

$$\text{c} \quad p: y = 3\frac{1}{2}x - 1$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_p = 3\frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = 74,05\dots^\circ$$

$$q: y = -1\frac{1}{4}x + 5$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_q = -1\frac{1}{4} \text{ geeft } \beta = -51,34\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 74,05\dots^\circ - (-51,34\dots^\circ) \approx 125^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(p, q) \approx 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ.$$

$$14 \quad \text{a} \quad k: 3x - 2y = 5$$

$$-2y = -3x + 5$$

$$y = 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = 56,30\dots^\circ$$

$$l: 4x - 3y = 6$$

$$-3y = -4x + 6$$

$$y = 1\frac{1}{3}x - 2$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = 1\frac{1}{3} \text{ geeft } \beta = 53,13\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 56,30\dots^\circ - 53,13\dots^\circ \approx 3,2^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(k, l) \approx 3,2^\circ.$$

b $m: 4x + y = 1$
 $y = -4x + 1$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_m = -4$ geeft $\alpha = -75,96...^\circ$
 $n: 3x + 4y = 2$
 $4y = -3x + 2$
 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_n = -\frac{3}{4}$ geeft $\beta = -36,86...^\circ$
 $\beta - \alpha = -36,86...^\circ - (-75,96...^\circ) \approx 39,1^\circ$
Dus $\angle(m, n) \approx 39,1^\circ$.

c $p: 5x + 3y = 4$
 $3y = -5x + 4$
 $y = -1\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_p = -1\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = -59,03...^\circ$
 $q: 6x - 5y = 1$
 $-5y = -6x + 1$
 $y = 1\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_q = 1\frac{1}{5}$ geeft $\beta = 50,19...^\circ$
 $\beta - \alpha = 50,19...^\circ - (-59,03...^\circ) \approx 109,2^\circ$
Dus $\angle(p, q) \approx 180^\circ - 109,2^\circ = 70,8^\circ$.

15 a $k: y = \frac{2}{3}x + 4$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33,69...^\circ$
 $l: 6x - 5y = 3$
 $-5y = -6x + 3$
 $y = 1\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_l = 1\frac{1}{5}$ geeft $\beta = 50,19...^\circ$
 $\beta - \alpha = 50,19...^\circ - 33,69...^\circ \approx 16,5^\circ$
Dus $\angle(k, l) \approx 16,5^\circ$.

b $\text{rc}_m = \frac{0-5}{4-0} = -1\frac{1}{4}$
 $\tan(\alpha) = -1\frac{1}{4}$ geeft $\alpha = -51,34...^\circ$
 $\text{rc}_n = \frac{1-0}{0-2} = \frac{1}{2}$
 $\tan(\beta) = \frac{1}{2}$ geeft $\beta = 26,56...^\circ$
 $\beta - \alpha = 26,56...^\circ - (-51,34...^\circ) \approx 77,9^\circ$
Dus $\angle(m, n) \approx 77,9^\circ$.

c $\text{rc}_p = \frac{6-1}{5-2} = 1\frac{2}{3}$
 $\tan(\alpha) = 1\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 59,03...^\circ$
 $\text{rc}_q = \frac{-6-1}{2-3} = -1\frac{2}{5}$
 $\tan(\beta) = -1\frac{2}{5}$ geeft $\beta = -54,46...^\circ$
 $\alpha - \beta = 59,03...^\circ - (-54,46...^\circ) \approx 113,5^\circ$
Dus $\angle(p, q) \approx 180^\circ - 113,5^\circ = 66,5^\circ$.

16 De richtingshoek van k is α en de richtingshoek van l is β .

$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 2$ geeft $\alpha = 63,43...^\circ$
 $\beta = \alpha + 20^\circ = 63,43...^\circ + 20^\circ = 83,43...^\circ$ en dit geeft $\text{rc}_l = \tan(83,43...^\circ) \approx 8,69$.
 $\beta = \alpha - 20^\circ = 63,43...^\circ - 20^\circ = 43,43...^\circ$ en dit geeft $\text{rc}_l = \tan(43,43...^\circ) \approx 0,95$.

- 17** De richtingshoek van k is α en de richtingshoek van l is β .

$$k: 2x - 5y = 9$$

$$-5y = -2x + 9$$

$$y = \frac{2}{5}x - 1\frac{4}{5}$$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = \frac{2}{5} \text{ geeft } \alpha = 21,80\dots^\circ$$

$$\beta = 21,80\dots^\circ + 60^\circ = 81,80\dots^\circ \text{ geeft } \text{rc}_l = \tan(81,80\dots^\circ) = 6,94\dots$$

$$\beta = 21,80\dots^\circ - 60^\circ = -38,19\dots^\circ \text{ geeft } \text{rc}_l = \tan(-38,19\dots^\circ) = -0,78\dots$$

$$S(2, -1) \text{ op } l \text{ geeft } 2a - b = 3, \text{ dus } b = 2a - 3.$$

$$l: ax + (2a - 3)y = 3$$

$$(2a - 3)y = -ax + 3$$

$$y = \frac{-a}{2a - 3}x + \frac{3}{2a - 3}, \text{ dus } \text{rc}_l = \frac{-a}{2a - 3}.$$

$$\frac{-a}{2a - 3} = 6,94\dots$$

$$6,94\dots(2a - 3) = -a$$

$$13,88\dots a - 20,82\dots = -a$$

$$14,88\dots a = 20,82\dots$$

$$a = 1,39\dots$$

$$a = 1,39\dots \text{ geeft } b = 2 \cdot 1,39\dots - 3 \approx -0,20$$

$$a = 4,11\dots \text{ geeft } b = 2 \cdot 4,11\dots - 3 \approx 5,23$$

$$\text{Dus } a \approx 1,40 \text{ en } b \approx -0,20 \text{ of } a \approx 4,11 \text{ en } b \approx 5,23.$$

$$\frac{-a}{2a - 3} = -0,78\dots$$

$$-0,78(2a - 3) = -a$$

$$-1,57\dots a + 2,36\dots = -a$$

$$-0,57\dots a = -2,36\dots$$

$$a = 4,11\dots$$

7.2 Afstanden bij punten en lijnen

Bladzijde 101

- 18 a** In $\triangle ABC$ geeft de stelling van Pythagoras

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 2^2 + 3^2$$

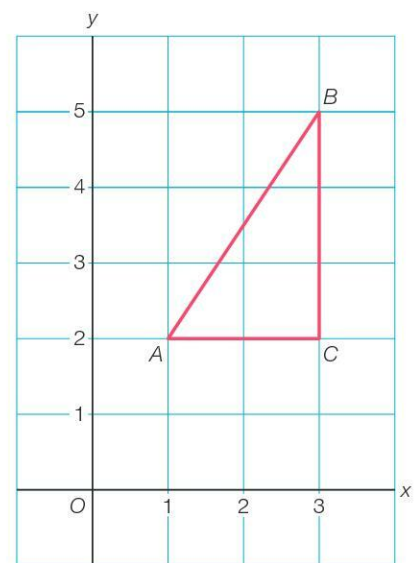
$$AB^2 = 13$$

$$AB = \sqrt{13}$$

b $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$

$$M(2, 3\frac{1}{2})$$

c $x_N = \frac{1}{2}(83 + 89) = 86$ en $y_N = \frac{1}{2}(61 + 69) = 65$, dus $N(86, 65)$.



Bladzijde 102

19 a $d(A, B) = \sqrt{(12 - 0)^2 + (7 - 12)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

b $M_1(\frac{1}{2}(0 + -2), \frac{1}{2}(-2 + 7)) = M_1(-1, 2\frac{1}{2})$

c $d(A, B) = \sqrt{(4 - 0)^2 + (7 - 4)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$$d(A, M_2) = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2\frac{1}{2}$$

d $M_3(\frac{1}{2}(0 + p), \frac{1}{2}(p + 7)) = M_3(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2})$

e $d(A, B) = \sqrt{(p - 0)^2 + (7 - p)^2} = \sqrt{p^2 + 49 - 14p + p^2} = \sqrt{2p^2 - 14p + 49}$

20 a $M(\frac{1}{2}(p + p + 2), \frac{1}{2}(3 + 2p)) = M(p + 1, p + 1\frac{1}{2})$

b $d(A, B) = \sqrt{(p + 2 - p)^2 + (2p - 3)^2} = \sqrt{2^2 + 4p^2 - 12p + 9} = \sqrt{4p^2 - 12p + 13}$

c Voer in $y_1 = \sqrt{4x^2 - 12x + 13}$ en $y_2 = 5$.

$$\text{De optie snijpunt geeft } x \approx 3,79$$

$$\text{Dus } p \approx 3,79.$$

21 a $x_M = 10$

$$\frac{1}{2}(3 + p + 5) = 10$$

$$\frac{1}{2}p + 4 = 10$$

$$\frac{1}{2}p = 6$$

$$p = 12$$

$$y_M = \frac{1}{2}(4 + 14) = 9$$

b $M(\frac{1}{2}(3 + p + 5), \frac{1}{2}(4 + p + 2))$

$$\left. \begin{array}{l} M(\frac{1}{2}p + 4, \frac{1}{2}p + 3) \\ M \text{ op } k: y = 2x - 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2(\frac{1}{2}p + 4) - 3 = \frac{1}{2}p + 3 \\ p + 8 - 3 = \frac{1}{2}p + 3 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}p = -2$$

$$p = -4$$

c $d = \sqrt{(p + 5 - 3)^2 + (p + 2 - 4)^2} = \sqrt{(p + 2)^2 + (p - 2)^2} = \sqrt{p^2 + 4p + 4 + p^2 - 4p + 4} = \sqrt{2p^2 + 8}$
Dus $a = 2$ en $b = 8$.

22 a $k: 2x - y = 2$

$$-y = -2x + 2$$

$$y = 2x - 2$$

$$\text{rc}_k = 2$$

$$l: x + 2y = 3$$

$$2y = -x + 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$$

$$\text{rc}_l = -\frac{1}{2}$$

b Er geldt $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = 2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$, dus $k \perp l$.

Bladzijde 104

23 In de theorie gaat het over de breuken $-\frac{a}{b}$ en $\frac{b}{a}$, dus $b \neq 0$ en $a \neq 0$.

Als in de kernzin

- $b = 0$, dan is k een verticale lijn en l een horizontale lijn, dus staan k en l loodrecht op elkaar;
- $a = 0$, dan is k een horizontale lijn en l een verticale lijn, dus staan k en l loodrecht op elkaar.

Dus in de kernzin zijn de voorwaarden $b \neq 0$ en $a \neq 0$ niet nodig.

24 a $k \perp l$, dus $k: 3x + 2y = c$ } $c = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14$
door $A(4, 1)$

Dus $k: 3x + 2y = 14$.

b $m \perp n$, dus $m: 5x - 4y = c$ } $c = 5 \cdot 3 - 4 \cdot -1 = 19$
door $B(3, -1)$

Dus $m: 5x - 4y = 19$.

c $p \perp q$, dus $p: x + 2y = c$ } $c = -4 + 2 \cdot 3 = 2$
door $C(-4, 3)$

$$x + 2y = 2$$

$$2y = -x + 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Dus $p: y = -\frac{1}{2}x + 1$.

25 a $rc_k = \frac{5-3}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$l \perp k$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$

$$\frac{1}{2} \cdot rc_l = -1$$

$$rc_l = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -2x + b \\ \text{door } C(4, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 4 + b = 6 \\ -8 + b = 6 \end{array}$$

$$b = 14$$

Dus $l: y = -2x + 14$.

b $rc_m = \frac{-6-4}{2-3} = \frac{-10}{-1} = 10$

$n \perp m$, dus $rc_m \cdot rc_n = -1$.

$$10 \cdot rc_n = -1$$

$$rc_n = -\frac{1}{10}$$

$$\left. \begin{array}{l} n: y = \frac{1}{10}x + b \\ \text{door } F(3, 7) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{10} \cdot 3 + b = 7 \\ \frac{1}{10} + b = 7 \end{array}$$

$$b = 6\frac{9}{10}$$

$$y = \frac{1}{10}x + 6\frac{9}{10}$$

$$2y = x + 13\frac{8}{10}$$

$$-x + 2y = 13\frac{8}{10}$$

Dus $n: x - 2y = -13\frac{8}{10}$.

26 a De lijn p gaat door A en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} p: x - 2y = c \\ \text{door } A(6, 0) \end{array} \right\} c = 6 - 2 \cdot 0 = 6$$

Dus $p: x - 2y = 6$.

k en p snijden geeft het punt A' .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right. \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{array} \right. +$$

$$5x = 10$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ 2x + y = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + y = 2 \\ 4 + y = 2 \end{array}$$

$$y = -2$$

Dus $A'(2, -2)$.

$$d(A, k) = d(A, A') = \sqrt{(2-6)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

b De lijn q gaat door B en staat loodrecht op l .

$$rc_l \cdot rc_q = -1 \text{ geeft } \frac{1}{2} \cdot rc_q = -1, \text{ dus } rc_q = -2.$$

$$\left. \begin{array}{l} q: y = -2x + b \\ \text{door } B(3, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 3 + b = 0 \\ -6 + b = 0 \end{array}$$

$$b = 6$$

Dus $q: y = -2x + 6$.

l en q snijden geeft het punt B' .

$$\frac{1}{2}x + 1 = -2x + 6$$

$$2\frac{1}{2}x = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{array} \right\} y = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$$

Dus $B'(2, 2)$.

$$d(B, l) = d(B, B') = \sqrt{(2-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

- c De lijn r gaat door O en staat loodrecht op m .

$$\left. \begin{array}{l} r: x - 3y = c \\ \text{door } O(0, 0) \end{array} \right\} c = 0$$

Dus $r: x - 3y = 0$ oftewel $r: x = 3y$.

m en r snijden geeft het punt C .

Substitutie van $x = 3y$ in $3x + y = 10$ geeft $3 \cdot 3y + y = 10$

$$10y = 10$$

$$y = 1$$

$y = 1$ geeft $x = 3$

Dus $C(3, 1)$.

$$d(O, m) = d(O, C) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

Bladzijde 105

- 27 De lijn k door de punten $A(-5, -3)$ en $B(-2, 6)$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{6 - (-3)}{-2 - (-5)} = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 3x + b \\ \text{door } B(-2, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot (-2) + b = 6 \\ -6 + b = 6 \\ b = 12 \end{array}$$

Dus $k: y = 3x + 12$.

De lijn l gaat door C en staat loodrecht op k .

$rc_k \cdot rc_l = -1$ geeft $3 \cdot rc_l = -1$ dus $rc_l = -\frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } C(2, -12) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 2 + b = -12 \\ -\frac{2}{3} + b = -12 \\ b = -11\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{3}x - 11\frac{1}{3}$.

k en l snijden geeft het punt D .

$$3x + 12 = -\frac{1}{3}x - 11\frac{1}{3}$$

$$3\frac{1}{3}x = -23\frac{1}{3}$$

$$10x = -70$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -7 \\ y = 3x + 12 \end{array} \right\} y = 3 \cdot (-7) + 12 = -9$$

Dus $D(-7, -9)$.

$$d(C, k) = d(C, D) = \sqrt{(-7-2)^2 + (-9-12)^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

- 28 a De lijn k door $A(1, 0)$ en $B(7, 4)$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{4-0}{7-1} = \frac{2}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot 1 + b = 0 \\ b = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

De lijn l gaat door C en staat loodrecht op k .

$rc_k \cdot rc_l = -1$ geeft $\frac{2}{3} \cdot rc_l = -1$, dus $rc_l = -\frac{3}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{3}{2}x + b \\ \text{door } C(3\frac{1}{2}, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} + b = 6 \\ -\frac{21}{4} + b = 6 \\ b = 11\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{3}{2}x + 11\frac{1}{4}$.

k en l snijden geeft het punt D .

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} &= -\frac{3}{2}x + 11\frac{1}{4} \\ 8x - 8 &= -18x + 135 \\ 26x &= 143\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}x &= 5\frac{1}{2} \\ y &= \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\end{aligned} \right\} y = \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{2} - \frac{2}{3} = 3$$

Dus $D(5\frac{1}{2}, 3)$.

$$d(C, k) = d(C, D) = \sqrt{(5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2})^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

b $d(A, B) = \sqrt{(7 - 1)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot d(A, B) \cdot d(C, AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$$

29 De lijnen k en l zijn evenwijdig, dus de afstand tussen k en l is gelijk aan de afstand van een punt van k tot l .

Neem het punt $A(1, 0)$ op k .

De lijn m gaat door A en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{aligned}m \perp k, \text{ dus } m: 3x + y = c \\ \text{door } A(1, 0)\end{aligned} \right\} c = 3 + 0 = 3$$

Dus $m: 3x + y = 3$.

l en m snijden geeft het punt B .

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} x - 3y = 6 \\ 3x + y = 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \right\} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} x - 3y = 6 \\ 9x + 3y = 9 \end{array} \right. + \\ \quad \quad \quad \begin{array}{r} 10x \quad = 15 \\ x = 1\frac{1}{2} \\ 3x + y = 3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot 1\frac{1}{2} + y = 3 \\ 4\frac{1}{2} + y = 3 \\ y = -1\frac{1}{2} \end{array} \right.\end{aligned}$$

Dus $B(1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$.

$$d(k, l) = d(A, l) = d(A, B) = \sqrt{(1\frac{1}{2} - 1)^2 + (-1\frac{1}{2} - 0)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

30 a $m \perp k: ax + by = c$, dus $m: bx - ay = c$.

$$\left. \begin{aligned}m: bx - ay = c \\ \text{door } O(0, 0)\end{aligned} \right\} c = 0$$

Dus $m: bx - ay = 0$

$$-ay = -bx$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

b $k: ax + by = c$

$$by = -ax + c$$

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

$$\begin{aligned}m \text{ snijden met } k \text{ geeft } \frac{b}{a}x &= -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \\ b^2x &= -a^2x + ac \\ (a^2 + b^2)x &= ac \\ x &= \frac{ac}{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

$$x = \frac{ac}{a^2 + b^2} \text{ geeft } y = \frac{b}{a} \cdot \frac{ac}{a^2 + b^2} = \frac{bc}{a^2 + b^2}$$

$$\text{Dus } R\left(\frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2}\right).$$

In $l: ax + by = ax_P + by_P$ is $c = ax_P + by_P$.

Gebruik het resultaat hierboven.

$$\text{Zo krijg je } S\left(\frac{a(ax_P + by_P)}{a^2 + b^2}, \frac{b(ax_P + by_P)}{a^2 + b^2}\right) = S\left(\frac{a^2x_P + aby_P}{a^2 + b^2}, \frac{abx_P + b^2y_P}{a^2 + b^2}\right).$$

c $d(S, R) = \sqrt{(x_S - x_R)^2 + (y_S - y_R)^2}$ en dit geeft

$$d(S, R) = \sqrt{\left(\frac{a^2x_P + aby_P - ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{abx_P + b^2y_P - bc}{a^2 + b^2}\right)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Herleiden geeft } d(S, R) &= \sqrt{\frac{(a^2x_P + aby_P - ac)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{(abx_P + b^2y_P - bc)^2}{(a^2 + b^2)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(a^2x_P + aby_P - ac)^2 + (abx_P + b^2y_P - bc)^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(a(ax_P + by_P - c))^2 + (b(ax_P + by_P - c))^2}}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

d $d(S, R) = \frac{\sqrt{(aE)^2 + (bE)^2}}{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{a^2E^2 + b^2E^2}}{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)E^2}}{a^2 + b^2}$

e $d(S, R) = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)E^2}}{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{E^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{E^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|E|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\left. \begin{aligned} d(P, k) &= d(S, R) \\ d(S, R) &= \frac{|E|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ E &= ax_P + by_P - c \end{aligned} \right\} d(P, k) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Bladzijde 107

31 a $k: ax + by = c$ door $B(5, 0)$ geeft $5a = c$, dus $k: ax + by = 5a$ oftewel $k: ax + by - 5a = 0$.
Je krijgt één vergelijking met twee onbekenden.

b $k: x + by = c$ door $B(5, 0)$ geeft $5 = c$, dus $k: x + by = 5$ oftewel $k: x + by - 5 = 0$.
Je had dus ook uit kunnen gaan van $k: x + by = c$.

$k: ax + by = 1$ door $B(5, 0)$ geeft $5a = 1$ oftewel $a = \frac{1}{5}$, dus $k: \frac{1}{5}x + by = 1$ oftewel
 $k: \frac{1}{5}x + by - 1 = 0$.

Je had dus ook uit kunnen gaan van $k: ax + by = 1$.

32 $d(A, k) = \frac{|1 - 4 \cdot -1 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{17}} = \frac{9}{17}\sqrt{17}$

$$d(B, k) = \frac{|2 - 4 \cdot 3\frac{1}{2} + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{17}} = \frac{8}{\sqrt{17}} = \frac{8}{17}\sqrt{17}$$

$$d(C, k) = \frac{|6 - 4 \cdot 5 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{17}} = \frac{10}{17}\sqrt{17}$$

Het punt B ligt het dichtst bij de lijn k .

33 a $d(A, k) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|16|}{5} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$

b $l: y = -2x + 5$ oftewel $l: 2x + y - 5 = 0$ geeft $d(B, l) = \frac{|2 \cdot 4 + -1 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

c $m: \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$ oftewel $m: x + 3y - 6 = 0$ geeft $d(C, m) = \frac{|5 + 3 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|8|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{8}{10}\sqrt{10} = \frac{4}{5}\sqrt{10}$.

- 34 a** Stel $k: y = ax + b$.
 k door $(0, 4)$ geeft $b = 4$, dus $k: y = ax + 4$ oftewel $k: ax - y + 4 = 0$.

$$d(B, k) = 5 \text{ geeft } \frac{|5\frac{1}{2}a - 5 + 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 5$$

$$|5\frac{1}{2}a - 1| = 5\sqrt{a^2 + 1}$$

$$30\frac{1}{4}a^2 - 11a + 1 = 25(a^2 + 1)$$

$$30\frac{1}{4}a^2 - 11a + 1 = 25a^2 + 25$$

$$5\frac{1}{4}a^2 - 11a - 24 = 0$$

$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 5\frac{1}{4} \cdot -24 = 625$$

$$a = \frac{11 + 25}{10\frac{1}{2}} = 3\frac{3}{7} \vee a = \frac{11 - 25}{10\frac{1}{2}} = -1\frac{1}{3}$$

Dus $k_1: y = 3\frac{3}{7}x + 4$ en $k_2: y = -1\frac{1}{3}x + 4$.

- b** Stel $l: y = ax + b$.
 $(3, 0)$ op l geeft $3a + b = 0$, dus $b = -3a$.
 $k: y = ax - 3a$ oftewel $ax - y - 3a = 0$

$$d(D, l) = \sqrt{5} \text{ geeft } \frac{|6a - 4 - 3a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$|3a - 4| = \sqrt{5a^2 + 5}$$

$$9a^2 - 24a + 16 = 5a^2 + 5$$

$$4a^2 - 24a + 11 = 0$$

$$D = (-24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 11 = 400$$

$$a = \frac{24 + 20}{8} = 5\frac{1}{2} \vee a = \frac{24 - 20}{8} = \frac{1}{2}$$

$a = 5\frac{1}{2}$ geeft $b = -16\frac{1}{2}$, dus $l_1: y = 5\frac{1}{2}x - 16\frac{1}{2}$.

$a = \frac{1}{2}$ geeft $b = -1\frac{1}{2}$, dus $l_2: y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$.

- 35** $P(-2, 3)$ is een punt op k .

$$d(P, l) = 3 \text{ geeft } \frac{|5 \cdot -2 + 12 \cdot 3 - c|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 3$$

$$\frac{|26 - c|}{\sqrt{169}} = 3$$

$$\frac{|26 - c|}{13} = 3$$

$$|26 - c| = 39$$

$$26 - c = 39 \vee 26 - c = -39$$

$$c = -13 \vee c = 65$$

Dus $l_1: 5x + 12y = -13$ en $l_2: 5x + 12y = 65$.

- 36 a** Stel $l: 3x + 4y = c$.

$P(4, 0)$ is een punt op k .

$$d(P, l) = 2 \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 - c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\frac{|12 - c|}{\sqrt{25}} = 2$$

$$\frac{|12 - c|}{5} = 2$$

$$|12 - c| = 10$$

$$12 - c = 10 \vee 12 - c = -10$$

$$c = 2 \vee c = 22$$

Dus $l_1: 3x + 4y = 2$ en $l_2: 3x + 4y = 22$.

b Stel $P(p, 0)$.

$$d(P, k) = 3 \text{ geeft } \frac{|3 \cdot p + 4 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

$$\frac{|3p - 12|}{\sqrt{25}} = 3$$

$$\frac{|3p - 12|}{5} = 3$$

$$|3p - 12| = 15$$

$$3p - 12 = 15 \vee 3p - 12 = -15$$

$$3p = 27 \vee 3p = -3$$

$$p = 9 \vee p = -1$$

Dus $P_1(9, 0)$ en $P_2(-1, 0)$.

37 Stel een punt op de parabool is $P(p, 2p^2)$.

$$d(P, k) = \sqrt{5} \text{ geeft } \frac{|p - 2 \cdot 2p^2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|p - 4p^2 - 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|-4p^2 + p - 2| = 5$$

$$-4p^2 + p - 2 = 5 \quad \vee \quad -4p^2 + p - 2 = -5$$

$$-4p^2 + p - 7 = 0 \quad \vee \quad -4p^2 + p + 3 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot -4 \cdot -7 = -111 \quad D = 1^2 - 4 \cdot -4 \cdot 3 = 49$$

$$\text{geen opl.} \quad p = \frac{-1 + 7}{-8} = -\frac{3}{4} \vee p = \frac{-1 - 7}{-8} = 1$$

Dus $P_1(-\frac{3}{4}, 1\frac{1}{8})$ en $P_2(1, 2)$.

38 Stel $k: ax + by = 1$.

$$d(A, k) = \sqrt{2} \wedge d(B, k) = 2\sqrt{2} \text{ geeft } \frac{|4a + 0 - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2} \wedge \frac{|6a + 0 - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$|4a - 1| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \wedge |6a - 1| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

Substitutie van $\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |4a - 1|$ in $|6a - 1| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ geeft

$$|6a - 1| = 2 \cdot |4a - 1|$$

$$|6a - 1| = |8a - 2|$$

$$6a - 1 = 8a - 2 \vee 6a - 1 = -8a + 2$$

$$-2a = -1 \vee 14a = 3$$

$$a = \frac{1}{2} \vee a = \frac{3}{14}$$

Substitutie van $a = \frac{1}{2}$ in $\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |4a - 1|$ geeft $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + b^2} = |2 - 1|$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + 2b^2} = 1$$

$$\frac{1}{2} + 2b^2 = 1$$

$$2b^2 = \frac{1}{2}$$

$$b^2 = \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{1}{2} \vee b = -\frac{1}{2}$$

Substitutie van $a = \frac{3}{14}$ in $\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |4a - 1|$ geeft $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{196} + b^2} = |\frac{6}{7} - 1|$

$$\sqrt{\frac{9}{98} + 2b^2} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{9}{98} + 2b^2 = \frac{1}{49}$$

$$2b^2 = -\frac{7}{98}$$

$$b^2 = -\frac{7}{196}$$

geen opl.

Dus $k_1: \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 1$ en $k_2: \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 1$ oftewel $k_1: x + y = 2$ en $k_2: x - y = 2$.

7.3 Cirkelvergelijkingen

Bladzijde 109

- 39** **a** Dit volgt rechtstreeks uit de formule van de afstand tussen twee punten.
b Als de afstand van $P(x, y)$ tot $M(1, 4)$ gelijk is aan 5, dan ligt P op de cirkel met middelpunt M en straal 5.
c Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal 10 is $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 10^2$, oftewel $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 100$.
d Middelpunt $(-2, 3)$ en straal $\sqrt{16} = 4$.

Bladzijde 110

- 40** **a** $c_1: (x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$
b $c_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$ } $r^2 = (0-3)^2 + (0-4)^2 = 9 + 16 = 25$
 door $O(0, 0)$
 Dus $c_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.
c $c_3: (x+3)^2 + (y-5)^2 = r^2$ } $r^2 = (-1+3)^2 + (2-5)^2 = 4 + 9 = 13$
 door $A(-1, 2)$
 Dus $c_3: (x+3)^2 + (y-5)^2 = 13$.
d c_4 raakt de x -as, dus $r = d(M_4, x\text{-as}) = 1$.
 $c_4: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$
e c_5 raakt de y -as, dus $r = d(M_5, y\text{-as}) = 4$.
 $c_5: (x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$

- 41** De cirkels raken de x -as en de straal is 2, dus $y_M = -2$ of $y_M = 2$.
 M op k , dus $M_1(-6, -2)$ en $M_2(6, 2)$.
 $c_1: (x+6)^2 + (y+2)^2 = 4$ en $c_2: (x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$

Bladzijde 111

- 42** De cirkels raken de y -as en de straal is 10, dus $x_M = -10$ of $x_M = 10$.
 M op k , dus $M_1(-10, 6)$ en $M_2(10, -6)$.
 $c_1: (x+10)^2 + (y-6)^2 = 100$ en $c_2: (x-10)^2 + (y+6)^2 = 100$
- 43** **a** Middelpunt A en c_1 raakt de x -as, dus $r = d(A, x\text{-as}) = 7$.
 $c_1: (x-3)^2 + (y-7)^2 = 49$
b Middelpunt B en c_2 door A , dus straal is $d(A, B) = \sqrt{(9-3)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$.
 $c_2: (x-9)^2 + (y-1)^2 = 72$
c Middellijn AB , dus middelpunt is het midden van AB , dus $M_3(6, 4)$.
 De straal is $d(A, M_3) = \sqrt{(6-3)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$.
 $c_3: (x-6)^2 + (y-4)^2 = 18$
d De cirkels raken de y -as en de straal is 2, dus $x_M = -2$ of $x_M = 2$.
 $x_M = -2$ en M op k geeft $5 \cdot -2 + 2y_M = 12$
 $-10 + 2y_M = 12$
 $2y_M = 22$
 $y_M = 11$
 Dus $M_4(-2, 11)$ en $c_4: (x+2)^2 + (y-11)^2 = 4$.
 $x_M = 2$ en M op k geeft $5 \cdot 2 + 2y_M = 12$
 $10 + 2y_M = 12$
 $2y_M = 2$
 $y_M = 1$
 Dus $M_5(2, 1)$ en $c_5: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$.

- 44 a** Middellijn QR , dus middelpunt is het midden van QR , dus $M(1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$.

$$\text{De straal is } d(Q, M) = \sqrt{(1\frac{1}{2} - 2)^2 + (6\frac{1}{2} - 6)^2} = \sqrt{12\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{12\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Dus } c: (x - 1\frac{1}{2})^2 + (y - 6\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{2}.$$

$$c \text{ door } P(-1, p) \text{ geeft } (-2\frac{1}{2})^2 + (p - 6\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{2}$$

$$6\frac{1}{4} + (p - 6\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{2}$$

$$(p - 6\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{4}$$

$$p - 6\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} \vee p - 6\frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}$$

$$p = 9 \vee p = 4$$

- b** Middellijn PR , dus middelpunt is het midden van PR , dus $M(2, \frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2})$.

De straal is

$$d(R, M) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (\frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2} - 7)^2} = \sqrt{9 + (\frac{1}{2}p - 3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{9 + \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 12\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}}.$$

$$\text{Dus } c: (x - 2)^2 + (y - \frac{1}{2}p - 3\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}.$$

$$c \text{ door } Q(-2, 6) \text{ geeft } (-4)^2 + (2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}$$

$$16 + 6\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}$$

$$p = -1$$

- 45** $c: (x - p)^2 + (y - q)^2 = 13$

$$A(4, -1) \text{ op } c \text{ geeft } (4 - p)^2 + (-1 - q)^2 = 13.$$

$$B(-1, -2) \text{ op } c \text{ geeft } (-1 - p)^2 + (-2 - q)^2 = 13.$$

$$\text{Hieruit volgt } (4 - p)^2 + (-1 - q)^2 = (-1 - p)^2 + (-2 - q)^2$$

$$16 - 8p + p^2 + 1 + 2q + q^2 = 1 + 2p + p^2 + 4 + 4q + q^2$$

$$-2q = 10p - 12$$

$$q = -5p + 6$$

$$q = -5p + 6 \text{ substitueren in } (4 - p)^2 + (-1 - q)^2 = 13 \text{ geeft } (4 - p)^2 + (5p - 7)^2 = 13$$

$$16 - 8p + p^2 + 25p^2 - 70p + 49 = 13$$

$$26p^2 - 78p + 52 = 0$$

$$p^2 - 3p + 2 = 0$$

$$(p - 1)(p - 2) = 0$$

$$p = 1 \vee p = 2$$

$$p = 1 \text{ geeft } q = -5 \cdot 1 + 6 = 1 \text{ en } p = 2 \text{ geeft } q = -5 \cdot 2 + 6 = -4.$$

$$\text{Dus } (p = 1 \wedge q = 1) \vee (p = 2 \wedge q = -4).$$

- 46 a** Omdat een raaklijn van een cirkel loodrecht staat op de straal naar het raakpunt, is de straal van de cirkel gelijk aan de afstand van M tot k , dus $r = d(M, k)$.

$$\text{b } d(M, k) = \frac{|3 - 2 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\text{Dus } c: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5.$$

- 47 a** $k: y = x$ oftewel $k: x - y = 0$

$$r = d(M_1, k) = \frac{|5 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{Dus } c_1: (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 2.$$

$$\text{b } r = d(M_2, m) = \frac{|-1 + 2 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\text{Dus } c_2: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5.$$

$$48 \quad a \quad r = d(M_1, k) = \frac{|2 \cdot 8 + 3 \cdot 3 - 12|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|13|}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

Dus $c_1: (x-8)^2 + (y-3)^2 = 13$.

b De cirkels raken de x -as en straal = 8, dus $y_M = -8$ of $y_M = 8$.

$y_M = -8$ en M op k geeft $2x_M + 3 \cdot -8 = 12$

$$2x_M - 24 = 12$$

$$2x_M = 36$$

$$x_M = 18$$

Dus $M_2(18, -8)$ en $c_2: (x-18)^2 + (y+8)^2 = 64$.

$y_M = 8$ en M op k geeft $2x_M + 3 \cdot 8 = 12$

$$2x_M + 24 = 12$$

$$2x_M = -12$$

$$x_M = -6$$

Dus $M_3(-6, 8)$ en $c_3: (x+6)^2 + (y-8)^2 = 64$.

c k snijden met de x -as geeft $A(6, 0)$.

k snijden met de y -as geeft $B(0, 4)$.

M_4 is het midden van AB , dus $M_4(3, 2)$.

$$r = d(A, M_4) = \sqrt{(3-6)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Dus $c_4: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 13$.

$$49 \quad a \quad r_1 = d(M, k) = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

Dus $c_1: (x+1)^2 + (y-2)^2 = (3\sqrt{5})^2$ oftewel $c_1: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 45$.

k snijden met de x -as geeft $A(10, 0)$.

k raakt c_1 , dus $MB \perp k$.

$$\left. \begin{array}{l} MB: 2x + y = c \\ \text{door } M(-1, 2) \end{array} \right\} c = 2 \cdot -1 + 2 = 0$$

Dus $MB: 2x + y = 0$ oftewel $MB: y = -2x$.

MB snijden met k geeft $x - 2 \cdot -2x = 10$

$$x + 4x = 10$$

$$5x = 10$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -2x \end{array} \right\} y = -4$$

Dus $B(2, -4)$.

$$r_2 = d(A, B) = \sqrt{(2-10)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$$

Dus $c_2: (x-10)^2 + y^2 = 80$.

b Het midden van AM is $M_3(4\frac{1}{2}, 1)$.

$$r_3 = d(A, M_3) = \sqrt{(4\frac{1}{2}-10)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{30\frac{1}{4}+1} = \sqrt{31\frac{1}{4}}$$

Dus $c_3: (x-4\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = 31\frac{1}{4}$.

$x = 2$ en $y = -4$ invullen in de vergelijking van c_3 geeft $(-2\frac{1}{2})^2 + (-5)^2 = 31\frac{1}{4}$

$$6\frac{1}{4} + 25 = 31\frac{1}{4}$$

Dit klopt, dus c_3 gaat door B .

50 Lijnen l evenwijdig met k op afstand 5 van k .

Stel $l: 3x - 4y = c$.

$P(0, -2\frac{1}{2})$ is een punt op k .

$$d(P, l) = 5 \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot -2\frac{1}{2} - c|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$$

$$\frac{|10 - c|}{\sqrt{25}} = 5$$

$$\frac{|10 - c|}{5} = 5$$

$$|10 - c| = 25$$

$$10 - c = 25 \vee 10 - c = -25$$

$$c = -15 \vee c = 35$$

Dus $l_1: 3x - 4y = -15$ en $l_2: 3x - 4y = 35$.

De middelpunten van de cirkels zijn de snijpunten van l_1 en l_2 met de lijn m door A die loodrecht staat op k .

$$m \perp k, \text{ dus } m: 4x + 3y = c \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{door } A(2, -1) \end{array} \right\} c = 4 \cdot 2 + 3 \cdot -1 = 5$$

Dus $m: 4x + 3y = 5$.

$$l_1 \text{ en } m \text{ snijden geeft } \left\{ \begin{array}{l} 3x - 4y = -15 \\ 4x + 3y = 5 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \right| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 9x - 12y = -45 \\ 16x + 12y = 20 \end{array} \right. +$$
$$\frac{25x}{25x} = -25$$
$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \\ 4x + 3y = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot -1 + 3y = 5 \\ y = 3 \end{array}$$

Dus snijpunt $(-1, 3)$.

$$l_2 \text{ en } m \text{ snijden geeft } \left\{ \begin{array}{l} 3x - 4y = 35 \\ 4x + 3y = 5 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \right| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 9x - 12y = 105 \\ 16x + 12y = 20 \end{array} \right. +$$
$$\frac{25x}{25x} = 125$$
$$\left. \begin{array}{l} x = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 5 + 3y = 5 \\ y = -5 \end{array}$$

Dus snijpunt $(5, -5)$.

Dus de vergelijkingen van deze cirkels zijn $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$ en $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

51 $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 36$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 19 = 0$$

Bladzijde 113

52 a $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

$$x^2 + 6x + y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 4 = 0$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

Dus van c_1 is het middelpunt $(-3, 2)$ en de straal 3.

b $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$

$$x^2 - 8x + y^2 + 10y + 31 = 0$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y + 5)^2 - 25 + 31 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 10$$

Dus van c_2 is het middelpunt $(4, -5)$ en de straal $\sqrt{10}$.

- c** $x^2 + y^2 + 5x + 3y + 3 = 0$
 $x^2 + 5x + y^2 + 3y + 3 = 0$
 $(x + 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y + 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 3 = 0$
 $(x + 2\frac{1}{2})^2 + (y + 1\frac{1}{2})^2 = 5\frac{1}{2}$
Dus van c_3 is het middelpunt $(-2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$ en de straal $\sqrt{5\frac{1}{2}}$.
- d** $x^2 + y^2 - 7x + 8y = 0$
 $x^2 - 7x + y^2 + 8y = 0$
 $(x - 3\frac{1}{2})^2 - 12\frac{1}{4} + (y + 4)^2 - 16 = 0$
 $(x - 3\frac{1}{2})^2 + (y + 4)^2 = 28\frac{1}{4}$
Dus van c_4 is het middelpunt $(3\frac{1}{2}, -4)$ en de straal $\sqrt{28\frac{1}{4}}$.

- 53 a** $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$
 $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 15 = 0$
 $(x + 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 + 15 = 0$
 $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$
Dus $M(-3, 4)$ en $r = \sqrt{10}$.
- b** $d(A, M) = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{9 + 0} = 3$
 A ligt binnen c want $d(A, M) < r$.
- c** $d(B, M) = \sqrt{(-3 - -3)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{0 + 16} = 4$
 B ligt buiten c want $d(B, M) > r$.
- d** $d(C, M) = \sqrt{(-3 - -2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$
 C ligt op c want $d(C, M) = r$.

- 54 a** $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 = 0$
 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
Dus $r = 5$ en $M(3, 4)$.
 $d(A, M) = \sqrt{(3 - -1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$
 $d(A, M) < r$, dus A ligt binnen c_1 .
- b** $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 4y + 2 = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y - 2)^2 - 4 + 2 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 18$
Dus $r = \sqrt{18}$ en $M(4, 2)$.
 $d(O, M) = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$
 $d(O, M) > r$, dus O ligt buiten c_2 .
- c** $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 3 = 0$
 $(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 3 = 0$
 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$
Dus $r = \sqrt{10}$ en $M(-2, 3)$.
 $d(B, M) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$
 $d(B, M) = r$, dus B ligt op c_3 .

55

a $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 - 12 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Dus $r = 5$ en $M(-2, 3)$.

$$d(P, M) = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-p)^2} = \sqrt{9 + (p-3)^2}$$

$$d(P, M) = r \text{ geeft } \sqrt{9 + (3-p)^2} = 5$$

$$\sqrt{9 + 9 - 6p + p^2} = 5$$

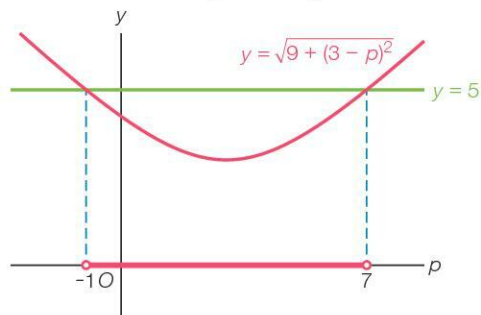
$$\sqrt{p^2 - 6p + 18} = 5$$

$$p^2 - 6p + 18 = 25$$

$$p^2 - 6p - 7 = 0$$

$$(p+1)(p-7) = 0$$

$$p = -1 \vee p = 7$$



$$d(P, M) < 5 \text{ geeft } -1 < p < 7$$

Dus voor $-1 < p < 7$ ligt P binnen c_1 .

b $x^2 + y^2 - 8x - 2y + q = 0$

$$x^2 - 8x + y^2 - 2y + q = 0$$

$$(x-4)^2 - 16 + (y-1)^2 - 1 + q = 0$$

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 17 - q$$

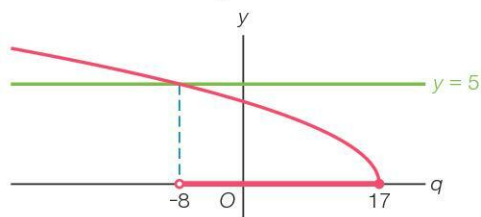
Dus $r = \sqrt{17 - q}$ en $M(4, 1)$.

$$d(Q, M) = \sqrt{(4-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$d(Q, M) = r \text{ geeft } 5 = \sqrt{17 - q}$$

$$25 = 17 - q$$

$$q = -8$$



$$d(Q, M) > r \text{ oftewel } 5 > \sqrt{17 - q} \text{ geeft } -8 < q \leq 17.$$

Dus voor $-8 < q \leq 17$ ligt Q buiten c_2 .

56

$$x^2 + y^2 + ax + by = 71$$

$$x^2 + ax + y^2 + by = 71$$

$$(x + \frac{1}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 + (y + \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}b^2 = 71$$

$$(x + \frac{1}{2}a)^2 + (y + \frac{1}{2}b)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71$$

Van c is het middelpunt $M(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b)$ en de straal $r = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71}$.

$M(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b)$ op $k: x + 2y = 1$ geeft $-\frac{1}{2}a - b = 1$ oftewel $b = -\frac{1}{2}a - 1$.

De straal is 10 geeft $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71} = 10$ oftewel $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71 = 100$.

$b = -\frac{1}{2}a - 1$ substitueren in $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71 = 100$ geeft $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}a - 1)^2 + 71 = 100$

$$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}(\frac{1}{4}a^2 + a + 1) + 71 = 100$$

$$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4} + 71 = 100$$

$$\frac{5}{16}a^2 + \frac{1}{4}a - 28\frac{3}{4} = 0$$

$$5a^2 + 4a - 460 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot -460 = 9216$$

$$a = \frac{-4 \pm 96}{10} = 9\frac{1}{5} \vee a = \frac{-4 - 96}{10} = -10$$

$a = 9\frac{1}{5}$ geeft $b = -\frac{1}{2} \cdot 9\frac{1}{5} - 1 = -5\frac{3}{5}$ en $a = -10$ geeft $b = -\frac{1}{2} \cdot -10 - 1 = 4$.

Dus $(a = 9\frac{1}{5} \wedge b = -5\frac{3}{5}) \vee (a = -10 \wedge b = 4)$.

7.4 Afstanden en raaklijnen bij cirkels

Bladzijde 115

57

a $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$

$$x^2 - 10x + y^2 - 6y + 18 = 0$$

$$(x - 5)^2 - 25 + (y - 3)^2 - 9 + 18 = 0$$

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

Dus $M(5, 3)$ en $r = \sqrt{16} = 4$.

b $d(P, M) = \sqrt{(5 - 1)^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$d(P, M) > r$, dus P ligt buiten c .

$$d(Q, M) = \sqrt{(5 - 6)^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$d(Q, M) > r$, dus Q ligt buiten c .

c $5 < \sqrt{26}$, dus P ligt dichterbij het middelpunt M dan Q .

Dus $d(P, c) < d(Q, c)$.

Bladzijde 116

58

a $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$$

Dus $M(3, 2)$ en $r = \sqrt{10}$.

$$d(A, M) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$d(A, c) = r - d(A, M) = \sqrt{10} - \sqrt{2}$$

b $d(B, M) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$$d(B, c) = d(B, M) - r = 5 - \sqrt{10}$$

c $d(C, M) = \sqrt{(3 - 9)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$$d(C, c) = d(C, M) - r = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$$

59 M op k , dus $2 + 4y_M = 16$ en dit geeft $y_M = 3\frac{1}{2}$.

Dus de straal r_1 van c_1 is $3\frac{1}{2}$ en $M(2, 3\frac{1}{2})$.

N op k , dus $8 + 4y_N = 16$ en dit geeft $y_N = 2$.

Dus de straal r_2 van c_2 is 2 en $N(8, 2)$.

$$d(M, N) = \sqrt{(8-2)^2 + (2-3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{36 + 2\frac{1}{4}} = \sqrt{38\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{17}$$

$$\text{Dus } d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = 1\frac{1}{2}\sqrt{17} - 3\frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}\sqrt{17} - 5\frac{1}{2}.$$

Bladzijde 117

60 a $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$$

Dus $M(3, 1)$ en $r_1 = 1$.

$$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$$

$$x^2 - 12x + y^2 - 4y + 36 = 0$$

$$(x-6)^2 - 36 + (y-2)^2 - 4 + 36 = 0$$

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Dus $N(6, 2)$ en $r_2 = 2$.

$$d(M, N) = \sqrt{(6-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\text{Dus } d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = \sqrt{10} - 1 - 2 = \sqrt{10} - 3.$$

b $d(M, l) = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$, dus $d(M, l) = r_1$, dus l raakt c_1 .

$$d(N, l) = \frac{|3 \cdot 6 - 4 \cdot 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$
, dus $d(N, l) = r_2$, dus l raakt c_2 .

c $r_3 = d(P, l) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{25}} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$

$$\text{Dus } c_3: (x-2)^2 + (y-5)^2 = (2\frac{4}{5})^2 \text{ oftewel } c_3: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 7\frac{21}{25}.$$

61 $d(M, N) = \sqrt{(9-4)^2 + (-10-2)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$$\text{De straal van } c_1 \text{ heeft lengte } d(M, k) = \frac{|4 \cdot 4 - 3 \cdot 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2.$$

$$\text{Er geldt } d(M, N) = 2 + 2r + r, \text{ dus } 2 + 2r + r = 13$$

$$3r = 11$$

$$r = 3\frac{2}{3}$$

$$\text{Dus } c_2: (x-9)^2 + (y+10)^2 = (3\frac{2}{3})^2 \text{ oftewel } c_2: (x-9)^2 + (y+10)^2 = 13\frac{4}{9}.$$

62 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

$$x^2 + 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 4 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

Dus $r = 3$ en $M(-2, 1)$.

$$d(M, k) = \frac{|2 \cdot -2 + 1 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Dus } d(k, c) = d(M, k) - r = 2\sqrt{5} - 3.$$

63 $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$
 $x^2 + 8x + y^2 + 2y - 8 = 0$
 $(x+4)^2 - 16 + (y+1)^2 - 1 - 8 = 0$
 $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$
Dus $r = 5$ en $M(-4, -1)$.
 $l: y = -3x + 17$ oftewel $l: 3x + y - 17 = 0$
 $d(M, l) = \frac{|3 \cdot -4 - 1 - 17|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|-30|}{\sqrt{10}} = \frac{30}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{10}$
 $d(l, c) = d(M, l) - r = 3\sqrt{10} - 5$
Is $3\sqrt{10} - 5 < 5$ oftewel $\sqrt{90} < 10$?
Ja, dit klopt, dus $d(l, c) < r$.

Bladzijde 118

64 Stel $r_1 = x$, dan is $r_2 = 2x$, $r_3 = 3\frac{1}{2}x$ en $d(c_1, c_2) = 2r_3 - 2r_1 - 2r_2 = 7x - 2x - 4x = x$.
opp $c_1 = \pi x^2$
opp $c_2 = \pi(2x)^2 = 4\pi x^2$
opp $c_3 = \pi(3\frac{1}{2}x)^2 = 12\frac{1}{4}\pi x^2$
opp gekleurde gebied = opp c_3 - opp c_1 - opp $c_2 = 12\frac{1}{4}\pi x^2 - \pi x^2 - 4\pi x^2 = 7\frac{1}{4}\pi x^2$
opp gekleurde gebied = π geeft $7\frac{1}{4}\pi x^2 = \pi$

$$x^2 = \frac{1}{7\frac{1}{4}} = \frac{4}{29}$$

$$x = \sqrt{\frac{4}{29}} = \frac{2}{29}\sqrt{29}$$

Dus $d(c_1, c_2) = \frac{2}{29}\sqrt{29}$.

65 a $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$
 $A(5, 2)$ $\left. \begin{array}{l} (5-2)^2 + (2-1)^2 = 10 \\ 3^2 + 1^2 = 10 \\ 10 = 10 \end{array} \right\}$
klopt

Dus A op c .

b $M(2, 1)$ en $A(5, 2)$, dus $rc_l = \frac{2-1}{5-2} = \frac{1}{3}$.
c k staat loodrecht op l geeft $\frac{1}{3} \cdot rc_k = -1$, dus $rc_k = -3$.
 $k: y = -3x + b$
door $A(5, 2)$ $\left. \begin{array}{l} -3 \cdot 5 + b = 2 \\ -15 + b = 2 \\ b = 17 \end{array} \right\}$
Dus $k: y = -3x + 17$.

Bladzijde 119

66 a Stel $l: y = ax + b$.
Lijn m door M en B heeft $rc_m = \frac{1-1}{3-2} = 2$, dus $a = rc_l = -\frac{1}{2}$.
 $l: y = -\frac{1}{2}x + b$
door $B(2, -1)$ $\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1 \\ -1 + b = -1 \\ b = 0 \end{array} \right\}$
Dus $l: y = -\frac{1}{2}x$.
b De straal van c is $r = \sqrt{5}$.
 $n: y = 2x$ oftewel $n: 2x - y = 0$
 $d(M, n) = \frac{|2 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
 $d(M, n) = r$, dus $n: y = 2x$ raakt aan c .

c De x-as snijden, dus $y = 0$ geeft $(x - 3)^2 + (-1)^2 = 5$
 $(x - 3)^2 + 1 = 5$
 $(x - 3)^2 = 4$
 $x - 3 = 2 \vee x - 3 = -2$
 $x = 5 \vee x = 1$

Dus $x_C = 1$.

Stel $p: y = ax + b$.

Lijn m door M en C heeft $rc_m = \frac{1 - 0}{3 - 1} = \frac{1}{2}$, dus $a = rc_p = -2$.

$$p: y = -2x + b \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + b = 0 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

Dus $p: y = -2x + 2$.

Bladzijde 120

67 a Substitutie van $x = 3$ in de vergelijking van c geeft $9 + y^2 - 36 + 11 = 0$
 $y^2 = 16$
 $y = 4 \vee y = -4$

$y_A > y_B$, dus $A(3, 4)$ en $B(3, -4)$.

$$x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$x^2 - 12x + y^2 + 11 = 0$$

$$(x - 6)^2 - 36 + y^2 + 11 = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 25$$

Dus $M(6, 0)$ en $r = 5$.

Lijn m door M en A heeft $rc_m = \frac{0 - 4}{6 - 3} = -\frac{4}{3}$, dus $rc_k = \frac{3}{4}$.

$$k: y = \frac{3}{4}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 3 + b = 4 \\ 2\frac{1}{4} + b = 4 \\ b = 1\frac{3}{4} \end{array} \right.$$

Dus $k: y = \frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$.

Lijn n door M en B heeft $rc_n = \frac{0 - 4}{6 - 3} = -\frac{4}{3}$, dus $rc_l = -\frac{3}{4}$.

$$l: y = -\frac{3}{4}x + b \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 3 + b = -4 \\ -2\frac{1}{4} + b = -4 \\ b = -1\frac{3}{4} \end{array} \right.$$

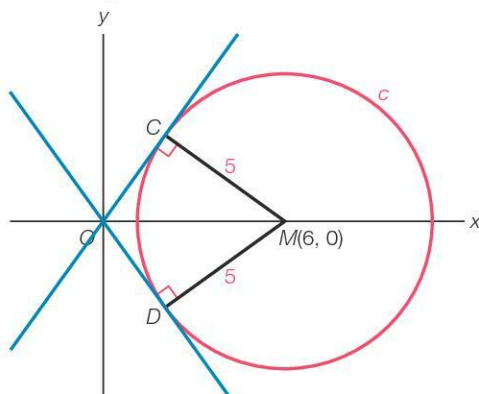
Dus $l: y = -\frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4}$.

b $\tan(\alpha) = rc_k = \frac{3}{4}$ geeft $\alpha = 36,86...^\circ$

$\tan(\beta) = rc_l = -\frac{3}{4}$ geeft $\beta = -36,86...^\circ$

Dus $\angle(k, l) = 36,86...^\circ - (-36,86...^\circ) \approx 74^\circ$.

c De raaklijnen door O raken c in de punten C en D .



In $\triangle OMC$ is $\angle C = 90^\circ$, $OM = 6$ en $CM = 5$.

$$\sin(\angle MOC) = \frac{5}{6} \text{ geeft } \angle MOC = 56,4...^\circ$$

$$\angle DOC = 2 \cdot \angle MOC = 2 \cdot 56,4...^\circ \approx 113^\circ$$

De hoek tussen de raaklijnen door O is ongeveer $180^\circ - 113^\circ = 67^\circ$.

a $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 7 = 0$
 $x^2 + 6x + y^2 - 6y - 7 = 0$
 $(x+3)^2 - 9 + (y-3)^2 - 9 - 7 = 0$
 $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 25$
Dus $M(-3, 3)$ en $r = 5$.
 $y = 0$ geeft $x^2 + 6x - 7 = 0$
 $(x-1)(x+7) = 0$
 $x = 1 \vee x = -7$

Dus $A(-7, 0)$ en $B(1, 0)$.

$$\text{rc}_{MA} = \frac{3-0}{-3--7} = \frac{3}{4}$$

$k \perp MA$, dus $\text{rc}_k = -\frac{4}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -\frac{4}{3}x + b \\ \text{door } A(-7, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{4}{3} \cdot -7 + b = 0 \\ \frac{28}{3} + b = 0 \\ b = -9\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $k: y = -1\frac{1}{3}x - 9\frac{1}{3}$.

$$\text{rc}_{MB} = \frac{0-3}{1--3} = -\frac{3}{4}$$

$l \perp MB$, dus $\text{rc}_l = \frac{4}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = \frac{4}{3}x + b \\ \text{door } B(1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{4}{3} \cdot 1 + b = 0 \\ b = -1\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $l: y = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$.

b $x = 0$ geeft $y^2 - 6y - 7 = 0$
 $(y+1)(y-7) = 0$
 $y = -1 \vee y = 7$

Dus $C(0, -1)$ en $D(0, 7)$.

$$\text{rc}_{MC} = \frac{-1-3}{0--3} = -\frac{4}{3}$$

$p \perp MC$, dus $\text{rc}_p = \frac{3}{4}$.

$p: y = \frac{3}{4}x + b$ door $C(0, -1)$, dus $p: y = \frac{3}{4}x - 1$.

$$\text{rc}_{MD} = \frac{7-3}{0--3} = \frac{4}{3}$$

$q \perp MD$, dus $\text{rc}_q = -\frac{3}{4}$.

$q: y = -\frac{3}{4}x + b$ door $D(0, 7)$, dus $q: y = -\frac{3}{4}x + 7$.

c $\text{rc}_k = -1\frac{1}{3}$ geeft richtingshoek $\alpha_k = -53,13\dots^\circ$

$\text{rc}_l = 1\frac{1}{3}$ geeft richtingshoek $\alpha_l = 53,13\dots^\circ$

$\alpha_l - \alpha_k = 53,13\dots^\circ - -53,13\dots^\circ = 106,26\dots^\circ$

$\angle(k, l) = 180^\circ - 106,26\dots^\circ = 73,73\dots^\circ$

$\text{rc}_p = \frac{3}{4}$ geeft richtingshoek $\alpha_p = 36,86\dots^\circ$

$\text{rc}_q = -\frac{3}{4}$ geeft richtingshoek $\alpha_q = -36,86\dots^\circ$

$\alpha_p - \alpha_q = 36,86\dots^\circ - -36,86\dots^\circ = 73,73\dots^\circ$

$\angle(p, q) = 73,73\dots^\circ$

Dus de hoek tussen k en l is gelijk aan de hoek tussen p en q .

69 a $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 12 = 0$
 $(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 - 12 = 0$
 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 17$
Dus $M(2, -1)$ en $r = \sqrt{17}$.
 $y = 0$ geeft $x^2 - 4x - 12 = 0$
 $(x + 2)(x - 6) = 0$
 $x = -2 \vee x = 6$
Dus $A(-2, 0)$ en $B(6, 0)$.
 $rc_{MA} = \frac{-1 - 0}{2 - -2} = -\frac{1}{4}$
 $k \perp MA$, dus $rc_k = 4$ en dit geeft richtingshoek $\alpha = 75,96...^\circ$
 $rc_{MC} = \frac{-1 - 3}{2 - 1} = -4$
 $m \perp MC$, dus $rc_m = \frac{1}{4}$ en dit geeft richtingshoek $\beta = 14,03...^\circ$
 $\alpha - \beta = 75,96...^\circ - 14,03...^\circ \approx 62^\circ$
Dus $\angle(k, m) \approx 62^\circ$.

b $rc_{MA} = -\frac{1}{4}$ geeft $\angle BAM = 14,03...^\circ$
Ook $\angle ABM = 14,03...^\circ$.
Dus $\angle AMB = 180^\circ - 2 \cdot 14,03...^\circ \approx 152^\circ$.

c $m: y = \frac{1}{4}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} + b = 3 \\ b = 2\frac{3}{4} \end{array} \right.$
door $C(1, 3)$
Dus $m: y = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$.
 $rc_{MB} = \frac{0 - -1}{6 - 2} = \frac{1}{4}$
 $l \perp MB$, dus $rc_l = -4$.
 $l: y = -4x + b \left\{ \begin{array}{l} -4 \cdot 6 + b = 0 \\ b = 24 \end{array} \right.$
door $B(6, 0)$
Dus $l: y = -4x + 24$.
 l en m snijden geeft $-4x + 24 = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$
 $-4\frac{1}{4}x = -21\frac{1}{4}$
 $\left. \begin{array}{l} x = 5 \\ y = -4x + 24 \end{array} \right\} y = -4 \cdot 5 + 24 = 4$
Dus $D(5, 4)$.
 $d(D, M) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$
 $d(D, c) = d(D, M) - r = \sqrt{34} - \sqrt{17}$

70 a De straal van c is $r = \sqrt{5}$.
 k raakt c , dus geldt $d(M, k) = r = \sqrt{5}$.

b $k: y = \frac{1}{2}x + b$
 $-\frac{1}{2}x + y - b = 0$
 $x - 2y + 2b = 0$

c Het middelpunt van c is $M(2, 3)$.
 $d(M, k) = \frac{|2 - 2 \cdot 3 + 2b|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2b - 4|}{\sqrt{5}}$
 $d(M, k) = \sqrt{5}$ geeft $\frac{|2b - 4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ en hieruit volgt $|2b - 4| = 5$.

d $|2b - 4| = 5$ geeft $2b - 4 = 5 \vee 2b - 4 = -5$
 $2b = 9 \vee 2b = -1$
 $b = 4\frac{1}{2} \vee b = -\frac{1}{2}$
Dus $k_1: y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ en $k_2: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

- 71 a** Van c is $M(0, 0)$ en $r = \sqrt{10}$.
 Stel $l: y = 3x + b$ oftewel $l: 3x - y + b = 0$.

$$d(M, l) = r \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 0 - 0 + b|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|b| = 10 \\ b = 10 \vee b = -10$$

Dus $l_1: y = 3x + 10$ en $l_2: y = 3x - 10$.

- b** Stel $m: y = ax + b$.
 $A(10, 0)$ op m geeft $10a + b = 0$, dus $b = -10a$.
 $m: y = ax - 10a$ oftewel $m: ax - y - 10a = 0$

$$d(M, m) = r \text{ geeft } \frac{|a \cdot 0 - 0 - 10a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|-10a| = \sqrt{10a^2 + 10} \\ 100a^2 = 10a^2 + 10 \\ 90a^2 = 10 \\ a^2 = \frac{1}{9} \\ a = \frac{1}{3} \vee a = -\frac{1}{3}$$

$a = \frac{1}{3}$ geeft $b = -10 \cdot \frac{1}{3} = -3\frac{1}{3}$, dus $m_1: y = \frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}$.

$a = -\frac{1}{3}$ geeft $b = -10 \cdot -\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$, dus $m_2: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$.

- 72 a** Stel $k: y = ax + b$.
 $O(0, 0)$ is het middelpunt van c .
 Lijn p door O en A heeft $rc_p = \frac{0 - -1}{0 - -4} = \frac{1}{4}$, dus $a = rc_k = -4$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -4x + b \\ \text{door } A(-4, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 \cdot -4 + b = -1 \\ 16 + b = -1 \\ b = -17 \end{array}$$

Dus $k: y = -4x - 17$.

- b** Loodrecht op $l: 4x - y = 3$, dus $m: x + 4y = c$.

$$d(O, m) = r \text{ geeft } \frac{|0 + 4 \cdot 0 - c|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \sqrt{17}$$

$$\frac{|-c|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \\ |-c| = 17 \\ -c = 17 \vee -c = -17 \\ c = -17 \vee c = 17$$

Dus $m_1: x + 4y = -17$ en $m_2: x + 4y = 17$.

- c** Door $(0, 17)$, dus $n: y = ax + 17$ oftewel $n: ax - y + 17 = 0$.

$$d(M, n) = r \text{ geeft } \frac{|a \cdot 0 - 0 + 17|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{17}$$

$$\frac{17}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{17} \\ \sqrt{17a^2 + 17} = 17 \\ 17a^2 + 17 = 289 \\ 17a^2 = 272 \\ a^2 = 16 \\ a = 4 \vee a = -4$$

Dus $n_1: y = 4x + 17$ en $n_2: y = -4x + 17$.

73 a $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$
 $x^2 - 10x + y^2 - 4y + 19 = 0$
 $(x-5)^2 - 25 + (y-2)^2 - 4 + 19 = 0$
 $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 10$
 $M(5, 2)$ is het middelpunt van c .
 Stel $k: y = ax + b$.
 Lijn n door M en A heeft $rc_n = \frac{2-5}{5-4} = -3$, dus $a = rc_k = \frac{1}{3}$.

$$k: y = \frac{1}{3}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot 4 + b = 5 \\ 1\frac{1}{3} + b = 5 \\ b = 3\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Dus $k: y = \frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$.

b Stel $l: y = 3x + b$ oftewel $l: 3x - y + b = 0$.

$$d(M, l) = r \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 5 - 2 + b|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|13 + b| = 10$$

$$13 + b = 10 \vee 13 + b = -10$$

$$b = -3 \vee b = -23$$

Dus $l_1: y = 3x - 3$ en $l_2: y = 3x - 23$.

c Stel $m: y = ax + b$.

$B(9, 0)$ op m geeft $9a + b = 0$, dus $b = -9a$.

$m: y = ax - 9a$ oftewel $m: ax - y - 9a = 0$

$$d(M, m) = r \text{ geeft } \frac{|5a - 2 - 9a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|-4a - 2| = \sqrt{10a^2 + 10}$$

$$16a^2 + 16a + 4 = 10a^2 + 10$$

$$6a^2 + 16a - 6 = 0$$

$$3a^2 + 8a - 3 = 0$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$

$$a = \frac{-8 \pm 10}{6} = \frac{1}{3} \vee a = \frac{-8 - 10}{6} = -3$$

$a = \frac{1}{3}$ geeft $b = -9 \cdot \frac{1}{3} = -3$, dus $m_1: y = \frac{1}{3}x - 3$.

$a = -3$ geeft $b = -9 \cdot -3 = 27$, dus $m_2: y = -3x + 27$.

74 a $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$
 $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 12 = 0$
 $(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 - 12 = 0$
 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 17$
 $M(1, 2)$ is het middelpunt van c .
 Stel $k: y = ax + b$.

Lijn p door M en A heeft $rc_p = \frac{2-1}{1-3} = \frac{1}{2}$, dus $a = rc_k = -4$.

$$k: y = -4x + b \left\{ \begin{array}{l} -4 \cdot -3 + b = 1 \\ 12 + b = 1 \\ b = -11 \end{array} \right.$$

Dus $k: y = -4x - 11$.

b Loodrecht op $m: 4x - y = 1$, dus $l: x + 4y = c$.

$$d(M, l) = r \text{ geeft } \frac{|1 + 4 \cdot 2 - c|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

$$|9 - c| = 17$$

$$9 - c = 17 \vee 9 - c = -17$$

$$-c = 8 \vee -c = -26$$

$$c = -8 \vee c = 26$$

Dus $l_1: x + 4y = -8$ en $l_2: x + 4y = 26$.

c Stel $n: y = ax + b$.

$B(6, -1)$ op n geeft $6a + b = -1$, dus $b = -6a - 1$.

$n: y = ax - 6a - 1$ oftewel $n: ax - y - 6a - 1 = 0$

$$d(M, n) = r \text{ geeft } \frac{|a - 2 - 6a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{17}$$

$$|-5a - 3| = \sqrt{17a^2 + 17}$$

$$25a^2 + 30a + 9 = 17a^2 + 17$$

$$8a^2 + 30a - 8 = 0$$

$$4a^2 + 15a - 4 = 0$$

$$D = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot -4 = 289$$

$$a = \frac{-15 \pm 17}{8} = \frac{1}{4} \vee a = \frac{-15 - 17}{8} = -4$$

$a = \frac{1}{4}$ geeft $b = -6 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -2\frac{1}{2}$, dus $n_1: y = \frac{1}{4}x - 2\frac{1}{2}$.

$a = -4$ geeft $b = -6 \cdot -4 - 1 = 23$, dus $n_2: y = -4x + 23$.

75 $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 9 = 0$

$$x^2 - 10x + y^2 + 4y + 9 = 0$$

$$(x - 5)^2 - 25 + (y + 2)^2 - 4 + 9 = 0$$

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 20$$

Dus $M(5, -2)$ en $r = \sqrt{20}$.

Stel $k: y = ax + b$.

$P(-1, -4)$ op k geeft $-a + b = -4$, dus $b = a - 4$.

$k: y = ax + a - 4$ oftewel $k: ax - y + a - 4 = 0$

$$d(M, k) = r \text{ geeft } \frac{|5a + 2 + a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{20}$$

$$|6a - 2| = \sqrt{20a^2 + 20}$$

$$36a^2 - 24a + 4 = 20a^2 + 20$$

$$16a^2 - 24a - 16 = 0$$

$$2a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$

$$a = \frac{3 \pm 5}{4} = 2 \vee a = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2}$$

Dus $rc_{k_1} = -\frac{1}{2}$ en $rc_{k_2} = 2$.

$rc_{k_1} \cdot rc_{k_2} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$, dus $k_1 \perp k_2$, dus $\angle APB = 90^\circ$.

k_1 raakt c in A , dus $\angle PAM = 90^\circ$ en $d(A, M) = d(M, k_1) = r = \sqrt{20}$.

k_2 raakt c in B , dus $\angle PBM = 90^\circ$ en $d(B, M) = d(M, k_2) = r = \sqrt{20}$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle APB = 90^\circ \\ \angle PAM = 90^\circ \\ \angle PBM = 90^\circ \\ d(A, M) = d(B, M) \end{array} \right\} AMBP \text{ is een vierkant.}$$

Bladzijde 123

76 $x^2 + y^2 - 14x - 8y + 55 = 0$

$$x^2 - 14x + y^2 - 8y + 55 = 0$$

$$(x - 7)^2 - 49 + (y - 4)^2 - 16 + 55 = 0$$

$$(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 10$$

Dus $M(7, 4)$ en $r = \sqrt{10}$.

Stel $k: y = ax + b$.

$P(2, -1)$ op k geeft $2a + b = -1$, dus $b = -2a - 1$.

$k: y = ax - 2a - 1$ oftewel $k: ax - y - 2a - 1 = 0$

$$d(M, k) = r \text{ geeft } \frac{|7a - 4 - 2a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|5a - 5| = \sqrt{10a^2 + 10}$$

$$25a^2 - 50a + 25 = 10a^2 + 10$$

$$15a^2 - 50a + 15 = 0$$

$$3a^2 - 10a + 3 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$$

$$a = \frac{10 + 8}{6} = 3 \vee a = \frac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3}$$

$a = 3$ geeft $b = -2 \cdot 3 - 1 = -7$, dus $k_1: y = 3x - 7$.
 $a = \frac{1}{3}$ geeft $b = -2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{7}{3}$, dus $k_2: y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$.

$AM \perp k_1$, dus $rc_{AM} = -\frac{1}{3}$.

$$AM: y = -\frac{1}{3}x + b \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 7 + b = 4 \\ -2\frac{1}{3} + b = 4 \end{array} \right.$$

$$b = 6\frac{1}{3}$$

Dus $AM: y = -\frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}$.
 k_1 snijden met AM geeft

$$3x - 7 = -\frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}$$

$$3\frac{1}{3}x = 13\frac{1}{3}$$

$$x = 4$$

$$x = 4 \text{ geeft } y = 3 \cdot 4 - 7 = 5$$

Dus $A(4, 5)$.

N is het midden van AB , dus $N(6, 3)$.

$$\text{De straal van } c_2 \text{ is } r_2 = d(A, N) = \sqrt{(6-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Dus } d(S, N) = 2\sqrt{2}.$$

$$d(P, N) = \sqrt{(6-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$d(P, N) = 2 \cdot d(S, N)$, dus S is het midden van NP .

$BM \perp k_2$, dus $rc_{BM} = -3$.

$$BM: y = -3x + b \left\{ \begin{array}{l} -3 \cdot 7 + b = 4 \\ -21 + b = 4 \end{array} \right.$$

$$b = 25$$

Dus $BM: y = -3x + 25$.

k_2 snijden met BM geeft

$$\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3} = -3x + 25$$

$$3\frac{1}{3}x = 26\frac{2}{3}$$

$$x = 8$$

$$x = 8 \text{ geeft } y = -3 \cdot 8 + 25 = 1$$

Dus $B(8, 1)$.

Diagnostische toets

Bladzijde 126

1 a Snijden, dus $\frac{p}{-4} \neq \frac{-3}{p}$

$$p^2 \neq 12$$

$$p \neq \sqrt{12} \wedge p \neq -\sqrt{12}$$

$$p \neq 2\sqrt{3} \wedge p \neq -2\sqrt{3}$$

Dus voor $p \neq 2\sqrt{3} \wedge p \neq -2\sqrt{3}$ en q elk getal van $\mathbb{R}$ hebben de lijnen een snijpunt.

b Evenwijdig, dus $\frac{p}{-4} = \frac{-3}{p} \neq \frac{q}{8}$.

Uit $\frac{p}{-4} = \frac{-3}{p}$ volgt $p = 2\sqrt{3} \vee p = -2\sqrt{3}$.

$$p = 2\sqrt{3} \text{ geeft } \frac{2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} \neq \frac{q}{8} \text{ oftewel } \frac{\sqrt{3}}{-2} \neq \frac{q}{8}, \text{ dus } q \neq \frac{8\sqrt{3}}{-2} = -4\sqrt{3}.$$

$$p = -2\sqrt{3} \text{ geeft } \frac{-2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-3}{-2\sqrt{3}} \neq \frac{q}{8} \text{ oftewel } \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{q}{8}, \text{ dus } q \neq \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Dus voor $p = 2\sqrt{3} \wedge q \neq -4\sqrt{3}$ en voor $p = -2\sqrt{3} \wedge q \neq 4\sqrt{3}$ zijn de lijnen evenwijdig.

c (2, 8) op $k_{p,q}$ geeft $2p - 3 \cdot 8 = q$ oftewel $q = 2p - 24$.

(2, 8) op l_p geeft $-4 \cdot 2 + 8p = 8$

$$-8 + 8p = 8$$

$$8p = 16$$

$$p = 2$$

$p = 2$ geeft $q = 2 \cdot 2 - 24 = -20$

Dus voor $p = 2$ en $q = -20$ snijden de lijnen elkaar in het punt (2, 8).

2 a $k: \frac{x}{2p} + \frac{y}{p+1} = 1$

$$A(8, -3) \text{ op } k \left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{2p} + \frac{-3}{p+1} = 1 \\ 8(p+1) - 3 \cdot 2p = 2p(p+1) \\ 8p + 8 - 6p = 2p^2 + 2p \\ 2p^2 = 8 \\ p^2 = 4 \\ p = 2 \vee p = -2 \\ \text{vold.} \quad \text{vold.} \end{array} \right.$$

b $rc_l = \frac{2p+3-0}{0-5} = \frac{2p+3}{-5}$

Van de lijn door (2, 0) en (0, 3) is $rc = \frac{3-0}{0-2} = \frac{3}{-2} = -1\frac{1}{2}$.

De lijnen zijn evenwijdig, dus $\frac{2p+3}{-5} = -1\frac{1}{2}$

$$2p+3 = 7\frac{1}{2}$$

$$2p = 4\frac{1}{2}$$

$$p = 2\frac{1}{4}$$

c $rc_k = \frac{p+1-0}{0-2p} = \frac{p+1}{-2p}$

k en l zijn evenwijdig, dus $\frac{p+1}{-2p} = \frac{2p+3}{-5}$

$$-2p(2p+3) = -5(p+1)$$

$$-4p^2 - 6p = -5p - 5$$

$$4p^2 + p - 5 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot -5 = 81$$

$$p = \frac{-1 \pm 9}{8} = 1 \vee p = \frac{-1 - 9}{8} = -1\frac{1}{4}$$

vold. vold.

3 a $k: y = 4x + 2$

$\tan(\alpha) = rc_k = 4$ geeft $\alpha = 75,96...^\circ$

$$l: y = -\frac{1}{2}x + 6$$

$\tan(\beta) = rc_l = -\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -26,56...^\circ$

$$\alpha - \beta = 75,96...^\circ - (-26,56...^\circ) \approx 102,5^\circ$$

Dus $\angle(k, l) \approx 180^\circ - 102,5^\circ = 77,5^\circ$.

b $rc_m = \frac{0-2}{3-0} = \frac{2}{3}$

$\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33,69...^\circ$

$$rc_n = \frac{0-5}{2-0} = -2\frac{1}{2}$$

$\tan(\beta) = -2\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -68,19...^\circ$

$$\alpha - \beta = 33,69...^\circ - (-68,19...^\circ) \approx 101,9^\circ$$

Dus $\angle(m, n) \approx 180^\circ - 101,9^\circ = 78,1^\circ$.

c $p: 2x + 3y = 6$ geeft $3y = -2x + 6$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

$\tan(\alpha) = rc_p = -\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = -33,69...^\circ$

$$q: y = 8x - 6$$

$\tan(\beta) = rc_q = 8$ geeft $\beta = 82,87...^\circ$

$$\beta - \alpha = 82,87...^\circ - (-33,69...^\circ) \approx 116,6^\circ$$

Dus $\angle(p, q) \approx 180^\circ - 116,6^\circ = 63,4^\circ$.

4 a $d(A, B) = \sqrt{(3-2p)^2 + (p+1-0)^2} = \sqrt{9-12p+4p^2+p^2+2p+1} = \sqrt{5p^2-10p+10}$

b $d(A, B) = 5$ geeft $\sqrt{5p^2-10p+10} = 5$

$$5p^2 - 10p + 10 = 25$$

$$5p^2 - 10p - 15 = 0$$

$$p^2 - 2p - 3 = 0$$

$$(p+1)(p-3) = 0$$

$$p = -1 \vee p = 3$$

c Het midden van het lijnstuk AB is $M(\frac{1}{2}(2p+3), \frac{1}{2}(0+p+1)) = M(p+1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}p+\frac{1}{2})$.

M op $x+y=6$ geeft $p+1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}=6$

$$1\frac{1}{2}p = 4$$

$$p = 2\frac{2}{3}$$

5 a $k \perp l$, dus $2x-3y=c$ } $c = 2 \cdot 2 - 3 \cdot -4 = 16$
door $A(2, -4)$

Dus $k: 2x-3y=16$.

b $m \perp n$, dus $rc_m = 3$.

$m: y=3x+b$ } $3 \cdot 2 + b = 3$
door $B(2, 3)$ } $6 + b = 3$

$$b = -3$$

Dus $m: y=3x-3$ oftewel $m: 3x-y=3$.

6 a $k: y=\frac{1}{3}x+10$ oftewel $k: \frac{1}{3}x-y+10=0$ oftewel $k: x-3y+30=0$

$$d(A, k) = \frac{|2-3 \cdot -6+30|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{50}{\sqrt{10}} = 5\sqrt{10}$$

b Stel $l: y=ax+b$.

l door $B(4, 0)$ geeft $4a+b=0$, dus $b=-4a$.

$l: y=ax-4a$ oftewel $l: ax-y-4a=0$

$d(C, l) = \sqrt{5}$ geeft $\frac{|a-1-4a|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{5}$

$$|-3a-1| = \sqrt{5a^2+5}$$

$$9a^2+6a+1 = 5a^2+5$$

$$4a^2+6a-4=0$$

$$2a^2+3a-2=0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$

$$a = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \vee a = \frac{-3-5}{4} = -2$$

$a = \frac{1}{2}$ geeft $b = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2$, dus $l_1: y = \frac{1}{2}x - 2$.

$a = -2$ geeft $b = -4 \cdot -2 = 8$, dus $l_2: y = -2x + 8$.

7 a Stel $l: x+2y=c$.

$A(6, 0)$ is een punt op k .

$d(A, l) = 2\sqrt{5}$ geeft $\frac{|6+2 \cdot 0-c|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 2\sqrt{5}$

$$\frac{|6-c|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$|6-c| = 10$$

$$6-c = 10 \vee 6-c = -10$$

$$c = -4 \vee c = 16$$

Dus $l_1: x+2y=-4$ en $l_2: x+2y=16$.

b Stel $P(p, p)$.

$$d(P, k) = \sqrt{5} \text{ geeft } \frac{|p + 2 \cdot p - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|3p - 6|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|3p - 6| = 5$$

$$3p - 6 = 5 \vee 3p - 6 = -5$$

$$3p = 11 \vee 3p = 1$$

$$p = 3\frac{2}{3} \vee p = \frac{1}{3}$$

Dus $P_1(3\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3})$ en $P_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Bladzijde 127

- 8 a** De straal is gelijk aan $d(A, B)$, dus $r = \sqrt{(8-2)^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$
Dus $c_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 61$.
- b** De cirkel heeft middelpunt B en raakt de y -as, dus $r = d(B, y\text{-as}) = 8$.
Dus $c_2: (x-8)^2 + (y-2)^2 = 64$.
- c** Het middelpunt M van c_3 is het midden van het lijnstuk AB , dus
 $M(\frac{1}{2}(2+8), \frac{1}{2}(-3+2)) = M(5, -\frac{1}{2})$.
De straal van c_3 is de helft van $d(A, B)$, dus $r = \frac{1}{2}\sqrt{61}$. Dit geeft $r^2 = \frac{1}{4} \cdot 61 = 15\frac{1}{4}$.
Dus $c_3: (x-5)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 15\frac{1}{4}$.
- d** De cirkel raakt de x -as in $C(5, 0)$, dus $x_M = 5$ en $M(5, r)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x - 6 \\ \text{door } M(5, r) \end{array} \right\} r = 3 \cdot 5 - 6 = 9$$

Dus $c_4: (x-5)^2 + (y-9)^2 = 81$.

- 9** $M(7, 8)$ geeft $c_1: (x-7)^2 + (y-8)^2 = r_1^2$

$$r_1 = d(M, k) = \frac{|2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 - 12|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|26|}{\sqrt{13}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$$

Dus $c_1: (x-7)^2 + (y-8)^2 = (2\sqrt{13})^2$ oftewel $c_1: (x-7)^2 + (y-8)^2 = 52$.
De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} l: 3x - 2y = c \\ \text{door } M(7, 8) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 8 = 5$$

Dus $l: 3x - 2y = 5$.
 k en l snijden geeft het punt A .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 5 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x + 6y = 24 \\ 9x - 6y = 15 \end{array} \right. +$$

$$13x = 39$$

$$x = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 2 \cdot 3 + 3y = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6 + 3y = 12 \\ 3y = 6 \\ y = 2 \end{array}$$

Dus $A(3, 2)$.

Het midden van het lijnstuk AM is $N(5, 5)$ geeft $c_2: (x-5)^2 + (y-5)^2 = r_2^2$.

$$r_2 = d(A, N) = \sqrt{(5-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Dus $c_2: (x-5)^2 + (y-5)^2 = 13$.

10 $x^2 + y^2 - 16x + 8y - 1 = 0$
 $x^2 - 16x + y^2 + 8y - 1 = 0$
 $(x - 8)^2 - 64 + (y + 4)^2 - 16 - 1 = 0$
 $(x - 8)^2 + (y + 4)^2 = 81$
Dus $M(8, -4)$ en $r = 9$.

$$d(A, M) = \sqrt{(8 - 3)^2 + (-4 - -4)^2} = \sqrt{25 + 0} = 5 < r$$

Dus A ligt binnen c .

$$d(B, M) = \sqrt{(8 - 2)^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} > r$$

Dus B ligt buiten c .

$$d(C, M) = \sqrt{(8 - 8)^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{0 + 81} = 9 = r$$

Dus C ligt op c .

11
$$d(M, k) = \frac{|3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 - 18|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|25|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5$$

Uit $d(k, c_2) = d(k, M) - r_2$, $d(k, c_2) = 3$ en $d(k, M) = 5$ volgt $r_2 = 2$.

Dus $c_2: (x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 4$.

$$x^2 + y^2 + 10y = 0$$

$$x^2 + (y + 5)^2 - 25 = 0$$

$$x^2 + (y + 5)^2 = 25$$

Van c_1 is het middelpunt $N(0, -5)$ en de straal $r_1 = 5$.

$$d(M, N) = \sqrt{(0 - 5)^2 + (-5 - 7)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = 13 - 5 - 2 = 6$$

12 a
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^2 + y^2 - 4 \cdot 4 + 6y = 0 \\ 16 + y^2 - 16 + 6y = 0 \\ y^2 + 6y = 0 \\ y(y + 6) = 0 \\ y = 0 \vee y = -6 \end{cases}$$

$y_A > y_B$, dus $A(4, 0)$ en $B(4, -6)$.

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$$

Dus $M(2, -3)$ en $r = \sqrt{13}$.

$$rc_{MA} = \frac{0 - -3}{4 - 2} = \frac{3}{2}, \text{ dus } rc_k = -\frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} k: y = -\frac{2}{3}x + b & \left\{ \begin{aligned} -\frac{2}{3} \cdot 4 + b &= 0 \\ -2\frac{2}{3} + b &= 0 \end{aligned} \right. \\ b &= 2\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dus $k: y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$.

$$rc_{MB} = \frac{-6 - -3}{4 - 2} = -\frac{3}{2}, \text{ dus } rc_l = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} l: y = \frac{2}{3}x + b & \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot 4 + b &= -6 \\ 2\frac{2}{3} + b &= -6 \end{aligned} \right. \\ b &= -8\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dus $l: y = \frac{2}{3}x - 8\frac{2}{3}$.

- b** $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = -\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = -33,69\dots^\circ$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_l = \frac{2}{3}$ geeft $\beta = 33,69\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = 33,69\dots^\circ - (-33,69\dots^\circ) \approx 67,4^\circ$
Dus $\angle(k, l) \approx 67,4^\circ$.

- 13 a** $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$
 $(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = 0$
 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$
 $M(-2, 1)$ is het middelpunt van c .
Stel $k: y = ax + b$.

Lijn n door M en A heeft $\text{rc}_n = \frac{3-1}{-1-(-2)} = 2$, dus $a = \text{rc}_k = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(-1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot (-1) + b = 3 \\ \frac{1}{2} + b = 3 \\ b = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.

- b** Loodrecht op $p: 2x + y = 10$, dus $l: x - 2y = c$.

$$\begin{aligned} d(M, l) = r \text{ geeft } \frac{|-2 - 2 \cdot 1 - c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} &= \sqrt{5} \\ \frac{|-4 - c|}{\sqrt{5}} &= \sqrt{5} \\ |-4 - c| &= 5 \\ -4 - c &= 5 \vee -4 - c = -5 \\ c &= -9 \vee c = 1 \end{aligned}$$

Dus $l_1: x - 2y = -9$ en $l_2: x - 2y = 1$.

- c** Stel $m: y = ax + b$.
 $B(-1, -2)$ op m geeft $-a + b = -2$, dus $b = a - 2$.
 $m: y = ax + a - 2$ oftewel $m: ax - y + a - 2 = 0$

$$\begin{aligned} d(M, m) = r \text{ geeft } \frac{|-2a - 1 + a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} &= \sqrt{5} \\ |-a - 3| &= \sqrt{5a^2 + 5} \\ a^2 + 6a + 9 &= 5a^2 + 5 \\ 4a^2 - 6a - 4 &= 0 \\ 2a^2 - 3a - 2 &= 0 \\ D &= (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25 \\ a &= \frac{3+5}{4} = 2 \vee a = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$a = 2$ geeft $b = 2 - 2 = 0$, dus $m_1: y = 2x$.

$a = -\frac{1}{2}$ geeft $b = -\frac{1}{2} - 2 = -2\frac{1}{2}$, dus $m_2: y = -\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$.

8 Goniometrische functies

Voorkennis Exacte waarden van goniometrische verhoudingen

Bladzijde 132

- 1** a $2 \sin(45^\circ) + \sqrt{6} \cdot \sin(60^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{18} = \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} = \sqrt{2} + 1\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$
b $4 \sin(30^\circ) \tan(30^\circ) + 2 \cos(30^\circ) \cos(60^\circ) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{4}{6}\sqrt{3} + \frac{3}{6}\sqrt{3} = 1\frac{1}{6}\sqrt{3}$
- 2** a $4 \cos(30^\circ) + 9 \tan(30^\circ) = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 9 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
b $3 \sin(30^\circ) - \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ) = 3 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$
c $6 \tan(30^\circ) - 3 \tan(60^\circ) = 6 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -\sqrt{3}$
d $\sqrt{2} \cdot \sin(60^\circ) + 3\sqrt{3} \cdot \sin(45^\circ) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6} + 1\frac{1}{2}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$
- 3** a $8 \sin(45^\circ) \cos(30^\circ) = 8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$
b $2\sqrt{3} \cdot \sin(60^\circ) \cos(30^\circ) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$
c $\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ) \sin(60^\circ) - 2 \tan(60^\circ) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -1\frac{1}{2}\sqrt{3}$
d $(\sin(30^\circ) + \cos(30^\circ))^2 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- 4** a $\frac{\cos(30^\circ)}{1 + \sin(60^\circ)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{1} = 2\sqrt{3} - 3$
b $\frac{\sin(30^\circ) + \sin(60^\circ)}{\sin(30^\circ) - \sin(60^\circ)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{-2} = -2 - \sqrt{3}$
- 5** a $\sin(15^\circ) = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin(60^\circ) \cos(45^\circ) - \cos(60^\circ) \sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$
b $\sin(75^\circ) = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin(45^\circ) \cos(30^\circ) + \cos(45^\circ) \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$

8.1 Eenheidscirkel en radiaal

Bladzijde 133

- 1** a $\sin(\alpha) = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{1} = PQ$, dus $PQ = \sin(65^\circ) \approx 0,91$.
 $\cos(\alpha) = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = OQ$, dus $OQ = \cos(65^\circ) \approx 0,42$.
- b $P(0,42; 0,91)$
- c $\angle POQ = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$
 $PQ \approx 0,91$, $OQ \approx 0,42$ en $P(-0,42; 0,91)$.
- d $\cos(115^\circ) \approx -0,42$ en $\sin(115^\circ) \approx 0,91$
Dezelfde y -coördinaat en tegengestelde x -coördinaat, oftewel $x_P = \cos(115^\circ)$ en $y_P = \sin(115^\circ)$.
- e $\angle POQ = 245^\circ - 180^\circ = 65^\circ$
 $P(-0,42; -0,91)$
De GR geeft $\cos(245^\circ) \approx -0,42$ en $\sin(245^\circ) \approx -0,91$, oftewel $x_P = \cos(245^\circ)$ en $y_P = \sin(245^\circ)$.

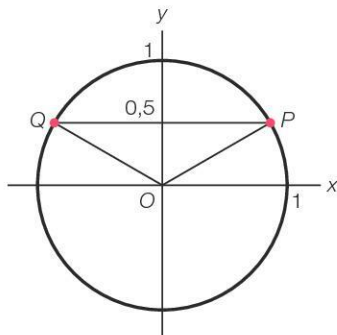
Bladzijde 134

- 2 **a** $\sin(0^\circ) = 0$ **g** $\sin(360^\circ) = 0$
b $\cos(0^\circ) = 1$ **h** $\tan(360^\circ) = 0$
c $\sin(90^\circ) = 1$ **i** $\sin(450^\circ) = 1$
d $\cos(90^\circ) = 0$ **j** $\cos(-90^\circ) = 0$
e $\sin(270^\circ) = -1$ **k** $\tan(-360^\circ) = 0$
f $\cos(270^\circ) = 0$ **l** $\cos(-180^\circ) = -1$
- 3 **a** $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 180^\circ$ en $\alpha = 360^\circ$ **d** $\alpha = 0^\circ$ en $\alpha = 360^\circ$
b $\alpha = 90^\circ$ en $\alpha = 270^\circ$ **e** $\alpha = 45^\circ$ en $\alpha = 225^\circ$
c $\alpha = 90^\circ$ **f** $\alpha = 135^\circ$ en $\alpha = 315^\circ$

Bladzijde 135

- 4 **a** *
b $P(\cos(110^\circ), \sin(110^\circ)) \approx P(-0,34; 0,94)$
 $Q(\cos(200^\circ), \sin(200^\circ)) \approx Q(-0,94; -0,34)$
 $R(\cos(-102^\circ), \sin(-102^\circ)) \approx R(-0,21; -0,98)$
 $S(\cos(-50^\circ), \sin(-50^\circ)) \approx S(0,64; -0,77)$
- 5 $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ $2 \cdot 72^\circ = 144^\circ$ $3 \cdot 72^\circ = 216^\circ$ $4 \cdot 72^\circ = 288^\circ$
 $B(2 \cos(72^\circ), 2 \sin(72^\circ)) \approx B(0,62; 1,90)$
 $C(2 \cos(144^\circ), 2 \sin(144^\circ)) \approx C(-1,62; 1,18)$
 $D(2 \cos(216^\circ), 2 \sin(216^\circ)) \approx D(-1,62; -1,18)$
 $E(2 \cos(288^\circ), 2 \sin(288^\circ)) \approx E(0,62; -1,90)$

6 **a**

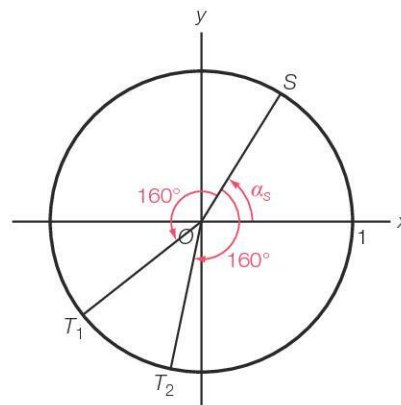


b $\beta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

Bladzijde 136

- 7 **a** $x_P = 0,81$, dus $\cos(\alpha) = 0,81$.
De GR geeft $35,90\dots^\circ$.
Dus $\alpha \approx 35,9^\circ$.
b $y_P = 0,94$, dus $\sin(\alpha) = 0,94$.
De GR geeft $70,05\dots^\circ$.
Dus $\alpha = 180^\circ - 70,05\dots^\circ \approx 109,9^\circ$.
c $x_P = 0,26$, dus $\cos(\alpha) = 0,26$.
De GR geeft $74,92\dots^\circ$.
Dus $\alpha \approx -74,9^\circ$.
d $y_P = -0,22$, dus $\sin(\alpha) = -0,22$.
De GR geeft $-12,70\dots^\circ$.
Dus $\alpha = 180^\circ + 12,70\dots^\circ \approx 192,7^\circ$.
- 8 $y_P = 0,92$, dus $\sin(\alpha_P) = 0,92$.
De GR geeft $66,92\dots^\circ$, dus $\alpha_P = 66,92\dots^\circ$.
 $x_Q = -0,87$, dus $\cos(\alpha_Q) = -0,87$.
De GR geeft $150,45\dots^\circ$, dus $\alpha_Q = 360^\circ - 150,45\dots^\circ = 209,54\dots^\circ$.
 $\angle POQ = \alpha_Q - \alpha_P = 209,54\dots^\circ - 66,92\dots^\circ \approx 142,6^\circ$

- 9** Zie de figuur hiernaast.
 $x_S = 0,527$, dus $\cos(\alpha_S) = 0,527$.
 De GR geeft $58,197\dots^\circ$, dus $\alpha_S = 58,197\dots^\circ$.
 $\cos(58,197\dots^\circ + 160^\circ) = -0,785\dots$
 $\sin(58,197\dots^\circ + 160^\circ) = -0,618\dots$
 Dus $T_1(-0,79; -0,62)$.
 $\cos(58,197\dots^\circ - 160^\circ) = -0,204\dots$
 $\sin(58,197\dots^\circ - 160^\circ) = -0,978\dots$
 Dus $T_2(-0,20; -0,98)$.



Bladzijde 137

- 10 a** omtrek cirkel $= 2\pi r$
 In de eenheidscirkel is $r = 1$, dus omtrek $= 2\pi \cdot 1 = 2\pi$.
b Bij $\alpha = 90^\circ$ hoort een kwart cirkelboog, dus lengte cirkelboog $= \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}\pi$.
c
- | draaiingshoek α | 0° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|------------------------|-----------|------------------|-------------|-------------------|-------------|
| lengte cirkelboog b | 0 | $\frac{1}{2}\pi$ | π | $1\frac{1}{2}\pi$ | 2π |

Bladzijde 138

- 11 a** $\frac{1}{6}\pi \text{ rad} = \frac{1}{6} \cdot 180^\circ = 30^\circ$
b $\frac{1}{4}\pi \text{ rad} = \frac{1}{4} \cdot 180^\circ = 45^\circ$
c $2\pi \text{ rad} = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$
d $2 \text{ rad} = 2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 114,6^\circ$
e $1\frac{1}{4}\pi \text{ rad} = 1\frac{1}{4} \cdot 180^\circ = 225^\circ$
f $1\frac{1}{4} \text{ rad} = 1\frac{1}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 71,6^\circ$
g $-2\frac{1}{3}\pi \text{ rad} = -2\frac{1}{3} \cdot 180^\circ = -420^\circ$
h $-2\frac{1}{3} \text{ rad} = -2\frac{1}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx -133,7^\circ$

Bladzijde 139

- 12 a** $360^\circ = 360 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 2\pi \text{ rad}$
b $30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{1}{6}\pi \text{ rad}$
c $45^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{1}{4}\pi \text{ rad}$
d $60^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{1}{3}\pi \text{ rad}$
e $90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{1}{2}\pi \text{ rad}$
f $135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{3}{4}\pi \text{ rad}$
g $300^\circ = 300 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 1\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$
h $210^\circ = 210 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 1\frac{1}{6}\pi \text{ rad}$
13 a $10^\circ = 10 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,17 \text{ rad}$
b $57,3^\circ = 57,3 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 1,00 \text{ rad}$
c $1030^\circ = 1030 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 17,98 \text{ rad}$
d $90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 1,57 \text{ rad}$

14	hoek in graden	40°	72°	100°	135°	145°	150°
	hoek in radialen	$\frac{2}{9}\pi$	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{5}{9}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{29}{36}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$

- 15 a** $\cos(\frac{5}{8}\pi) \approx -0,38$
b $\cos(\frac{5}{8}) \approx 0,81$
c $\sin(\frac{4}{5}\pi) \approx 0,59$
d $\sin(\frac{4}{5}) \approx 0,72$
e $\cos(7,6\pi) \approx 0,31$
f $\cos(7,6) \approx 0,25$
16 a $\alpha \approx 1,17$
b $\alpha \approx 0,55$
c $\alpha \approx 0,43$
d $\alpha \approx 1,39$
e $\alpha \approx 0,84$
f $\alpha \approx 1,21$

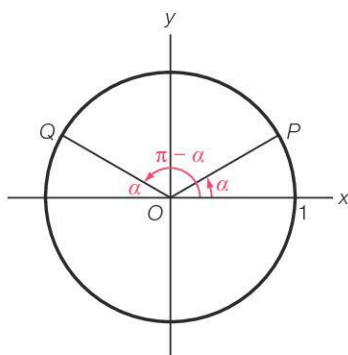
- 17 a** $\sin(\frac{1}{5}\pi) + \cos(\frac{2}{5}\pi) - \sin(\frac{3}{5}\pi) \approx 0,33$
b $\cos(2\alpha) = 0,6$ geeft $2\alpha = 0,927\dots$, dus $\alpha \approx 0,46$.

- 18 a** $y_P = 0,35$, dus $\sin(\alpha) = 0,35$.
 De GR geeft $0,357\dots$
 Dus $\alpha = \pi - 0,357\dots \approx 2,78$.
b $x_P = -0,35$, dus $\cos(\alpha) = -0,35$.
 De GR geeft $1,928\dots$
 Dus $\alpha = 2\pi - 1,928\dots \approx 4,35$.

Bladzijde 140

- 19** $x_P = -0,32$, dus $\cos(\alpha_P) = -0,32$.
 De GR geeft $1,896\dots$
 Dus $\alpha_P = 1,896\dots$
 $y_Q = -0,88$, dus $\sin(\alpha_Q) = -0,88$.
 De GR geeft $-1,075\dots$
 Dus $\alpha_Q = \pi + 1,075\dots = 4,217\dots$
 $\angle POQ = \alpha_Q - \alpha_P = 4,217\dots - 1,896\dots \approx 2,32$

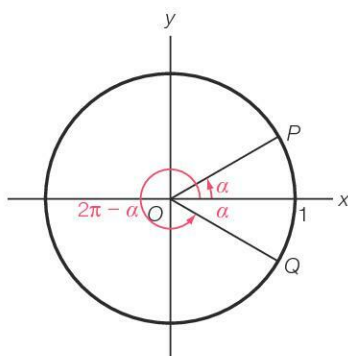
- 20 a**



In de figuur zie je dat $y_Q = y_P$.
 Dus $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$.

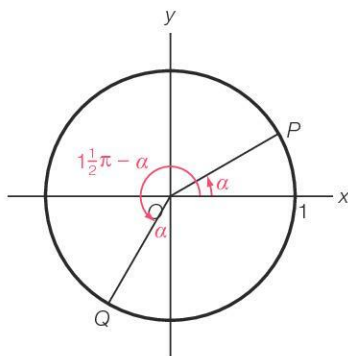
- b** In de figuur van vraag a zie je dat $x_Q = -x_P$.
 Dus $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

c

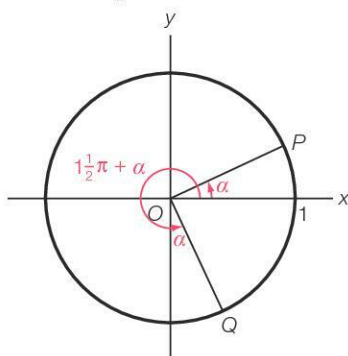


In de figuur zie je dat $y_Q = -y_P$.
 Dus $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin(\alpha)$.

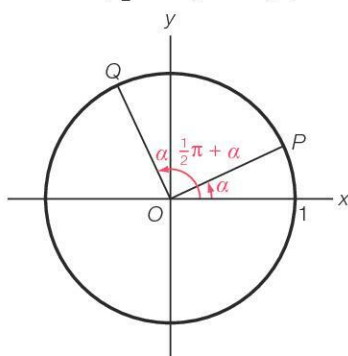
- d** In de figuur van vraag c zie je dat $x_Q = x_P$.
 Dus $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$.

e

In de figuur zie je dat $y_Q = -x_P$.
Dus $\sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

f

In de figuur zie je dat $x_Q = y_P$.
Dus $\cos(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$.

g

In de figuur zie je dat $y_Q = x_P$.
Dus $\sin(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$.

h In de figuur van vraag g zie je dat $x_Q = -y_P$.
Dus $\cos(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$.

21 a $\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6} \cdot 180^\circ = 30^\circ$, dus $\cos(\frac{1}{6}\pi) = \cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

b $\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4} \cdot 180^\circ = 45^\circ$, dus $\sin(\frac{1}{4}\pi) = \sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Bladzijde 141

22 a $\sin(\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

d $\cos(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$

b $\cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e $\cos(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$

c $\sin(\frac{1}{3}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f $\sin(-\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

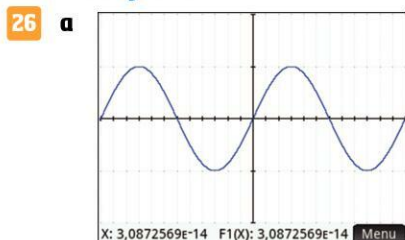
23 $\tan(\frac{5}{6}\pi) - \tan(\frac{2}{3}\pi) = \frac{\sin(\frac{5}{6}\pi)}{\cos(\frac{5}{6}\pi)} - \frac{\sin(\frac{2}{3}\pi)}{\cos(\frac{2}{3}\pi)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} + \sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

- 24** a $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $\alpha = \frac{1}{3}\pi \vee \alpha = \frac{2}{3}\pi$
 b $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = \frac{2}{3}\pi \vee \alpha = \frac{4}{3}\pi$
 c $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $\alpha = \frac{5}{4}\pi \vee \alpha = \frac{3}{4}\pi$
 d $\cos(\alpha) = 0$ geeft $\alpha = \frac{1}{2}\pi \vee \alpha = \frac{3}{2}\pi$
 e $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $\alpha = \frac{1}{6}\pi \vee \alpha = \frac{5}{6}\pi$
 f $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $\alpha = \frac{1}{4}\pi \vee \alpha = \frac{3}{4}\pi$

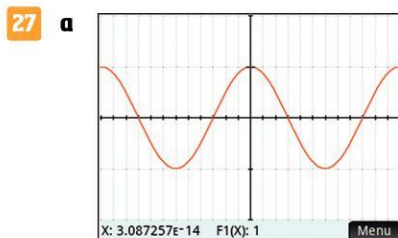
- 25** a $x = \sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$
 b $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ met $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi$
 c $x = \cos(\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 d $\cos(x) = \frac{1}{2}$ met $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$ geeft $x = \frac{2}{3}\pi$

8.2 Sinusoïden

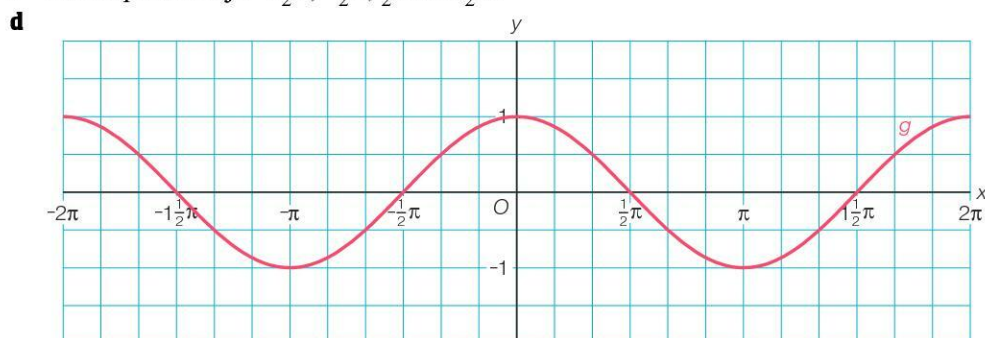
Bladzijde 143



- b De toppen zijn $(-\frac{1}{2}\pi, 1)$, $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(\frac{5}{2}\pi, 1)$.
 c De snijpunten met de x-as zijn $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ en $(2\pi, 0)$.



- b De toppen zijn $(-2\pi, 1)$, $(-\pi, -1)$, $(0, 1)$, $(\pi, -1)$ en $(2\pi, 1)$.
 c De nulpunten zijn $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$ en $\frac{5}{2}\pi$.



Bladzijde 144

- 28 a** $f(x) = \sin(x)$
 $\downarrow$ translatie $(0, 2)$
 $g(x) = 2 + \sin(x)$
 evenwichtsstand $= 2$
- b** $f(x) = \sin(x)$
 $\downarrow$ translatie $(\frac{1}{3}\pi, 0)$
 $h(x) = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$
 De nulpunten van h zijn $\dots, -2\frac{2}{3}\pi, -1\frac{2}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi, 1\frac{1}{3}\pi, 2\frac{1}{3}\pi, \dots$
- c** $f(x) = \sin(x)$
 $\downarrow$ verm. x -as, 4
 $k(x) = 4 \sin(x)$
 amplitude $= 4$
- d** $f(x) = \sin(x)$
 $\downarrow$ verm. y -as, $\frac{1}{5}$
 $l(x) = \sin(5x)$
 periode $= \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$

Bladzijde 145

- 29 a** Ja, ik ben het met José eens.
- b** $(\frac{1}{3}\pi, 1\frac{1}{2})$

Bladzijde 146**30 Effect van transformaties op de standaardgrafiek $y = \cos(x)$**

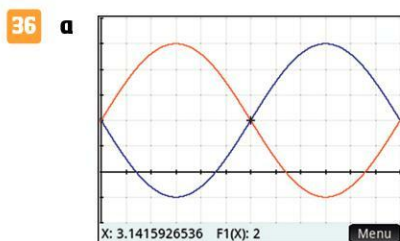
transformatie	beeldgrafiek	kenmerk
translatie $(0, a)$	$y = a + \cos(x)$	evenwichtsstand a
verm. x -as, b	$y = b \cos(x)$	amplitude b ($b > 0$)
verm. y -as, $\frac{1}{c}$	$y = \cos(cx)$	periode $\frac{2\pi}{c}$ ($c > 0$)
translatie $(d, 0)$	$y = \cos(x - d)$	beginpunt $(d, 1)$

- 31 a** De evenwichtsstand is 0 , de amplitude is 2 , de periode is 2π en een beginpunt is $(-3, 0)$.
- b** De evenwichtsstand is $\frac{1}{5}$, de amplitude is $\frac{1}{3}$, de periode is 2π en een beginpunt is $(0, \frac{1}{5})$.
- c** De evenwichtsstand is 0 , de amplitude is 1 , de periode is $\frac{2}{3}\pi$ en een beginpunt is $(4, 1)$.
- d** De evenwichtsstand is 0 , de amplitude is $1\frac{1}{2}$, de periode is 8π en een beginpunt is $(0, 1\frac{1}{2})$.
- 32 a** De evenwichtsstand is 5 , de amplitude is $1,2$, de periode is 2π en een beginpunt is $(\frac{1}{6}\pi; 6,2)$.
- b** De evenwichtsstand is $0,4$, de amplitude is 1 , de periode is 10π en een beginpunt is $(-\frac{1}{3}\pi; 0,4)$.
- c** De evenwichtsstand is 0 , de amplitude is $0,29$, de periode is $\frac{2}{3}\pi$ en een beginpunt is $(-1,4; 0,29)$.
- d** De evenwichtsstand is $-0,8$, de amplitude is 2 , de periode is $\frac{2}{3}\pi$ en een beginpunt is $(\frac{1}{2}\pi; -0,8)$.
- 33 a** $y = \cos(x)$
 $\downarrow$ translatie $(\frac{1}{4}\pi, 4)$
 $y = 4 + \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$
 $\downarrow$ verm. x -as, 3
 $y = 3(4 + \cos(x - \frac{1}{4}\pi))$
 oftewel $y = 12 + 3 \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$
 Dus $f(x) = 12 + 3 \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$.

b $y = \cos(x)$
 $\downarrow$ verm. x -as, 3
 $y = 3 \cos(x)$
 $\downarrow$ translatie $(\frac{1}{4}\pi, 4)$
 $y = 4 + 3 \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$
Dus $g(x) = 4 + 3 \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$.

- 34 a** De evenwichtsstand is $-\frac{1}{2}$, de amplitude is 1, de periode is 2π en een beginpunt is $(\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2})$.
b De grafiek van f snijdt de lijn van de evenwichtsstand in de punten $(\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2})$, $(1\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2})$ en $(2\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2})$.
c De toppen van de grafiek van f zijn $(\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2})$, $(1\frac{3}{4}\pi, -1\frac{1}{2})$ en $(2\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2})$.
d De afstand tussen A en C is gelijk aan de periode, dus $AC = 2\pi$.

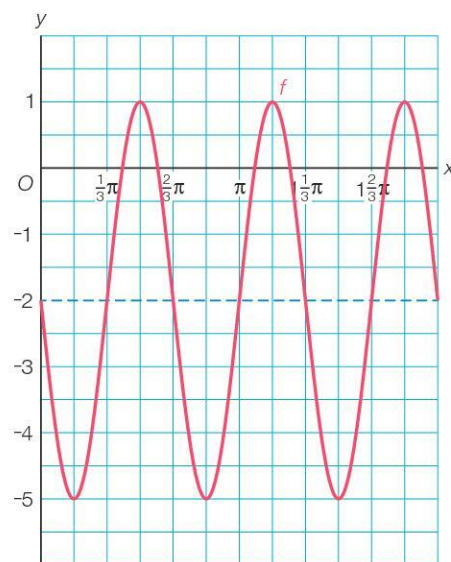
35 $f(x) = 3 + 4 \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$
 $\downarrow$ translatie $(-\frac{3}{4}\pi, -5)$
 $y = -5 + 3 + 4 \sin(x + \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi)$
oftewel $y = -2 + 4 \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$
Dus $m = -\frac{3}{4}\pi$ en $n = -5$ zijn mogelijke waarden van m en n .



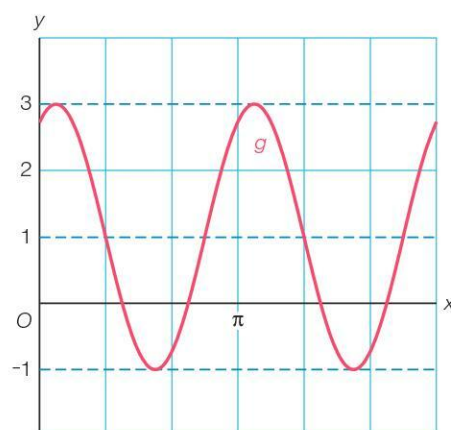
- b** Van de grafiek van $f(x) = 2 + 3 \sin(x)$ is de amplitude 3 en van de grafiek van $g(x) = 2 - 3 \sin(x)$ is de amplitude 3.

Bladzijde 149

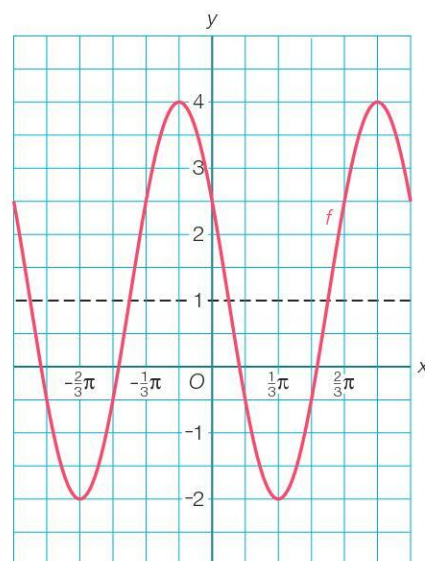
- 37 a** $f(x) = -2 + 3 \sin(3x + \pi) = -2 + 3 \sin(3(x + \frac{1}{3}\pi))$
evenwichtsstand -2
amplitude 3
periode $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$
 $3 > 0$, dus grafiek stijgend door het punt $(-\frac{1}{3}\pi, -2)$ en dus ook stijgend door het punt $(\frac{1}{3}\pi, -2)$.



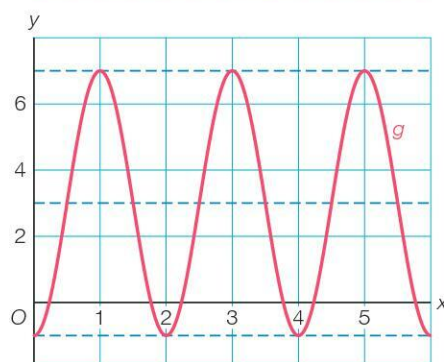
- b** $g(x) = 1 - 2 \sin(2x - \frac{2}{3}\pi) = 1 - 2 \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$
 evenwichtsstand 1
 amplitude 2
 periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
 $-2 < 0$, dus grafiek dalend door het punt $(\frac{1}{3}\pi, 1)$.



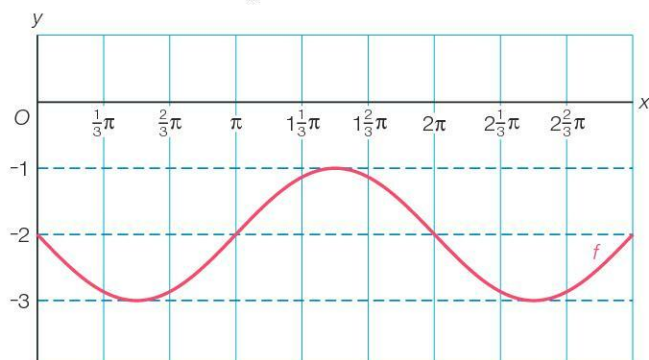
- 38 a** $f(x) = 1 + 3 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 1 + 3 \cos(2(x + \frac{1}{6}\pi))$
 evenwichtsstand 1
 amplitude 3
 periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
 $3 > 0$, dus $(-\frac{1}{6}\pi, 4)$ is een hoogste punt van de grafiek.



- b** $g(x) = 3 - 4 \cos(\pi x)$
 evenwichtsstand 3
 amplitude 4
 periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
 $-4 < 0$, dus het punt $(0, -1)$ is een laagste punt van de grafiek.



- 39 a** $f(x) = -2 - \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$
 evenwichtsstand -2
 amplitude 1
 periode 2π
 $-1 < 0$, dus het punt $(\frac{1}{2}\pi, -3)$ is een laagste punt van de grafiek.



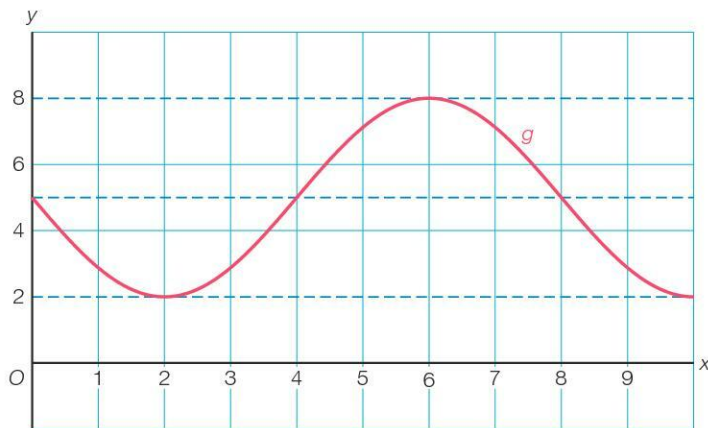
b $g(x) = 5 - 3 \sin(\frac{1}{4}\pi x)$

evenwichtsstand 5

amplitude 3

periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$

$-3 < 0$, dus de grafiek gaat dalend door het punt $(0, 5)$.



40 $y = 2 - 3 \sin(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi)$ oftewel $y = 2 - 3 \sin(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{3}\pi))$

evenwichtsstand 2

amplitude 3

Dalend door de evenwichtsstand bij $x = -\frac{1}{3}\pi$.

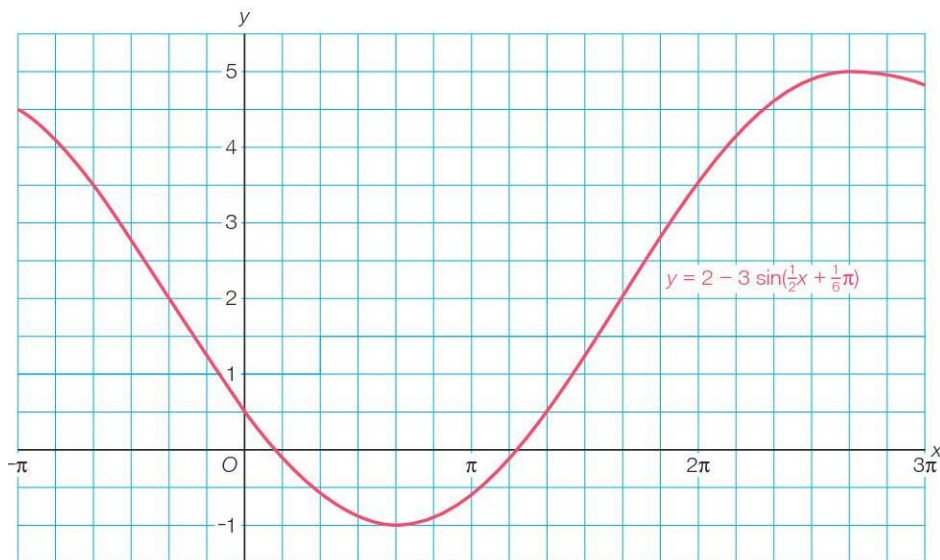
periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

Tussen het laagste en het hoogste punt zitten horizontaal 12 roosterhokjes, dus $\frac{1}{2}$ periode $= 2\pi$ komt overeen met 12 roosterhokjes, dus horizontaal komt 1 roosterhokje overeen met $\frac{1}{6}\pi$.

Tussen het laagste en het hoogste punt zitten verticaal 12 roosterhokjes, dus $2 \cdot \text{amplitude} = 6$ komt overeen met 12 roosterhokjes, dus verticaal komt 1 roosterhokje overeen met $\frac{1}{2}$.

Het laagste punt is $(-\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4} \cdot 4\pi, 2 - 3) = (\frac{2}{3}\pi, -1)$.

Teken de verticale as 4 roosterhokjes links van het laagste punt en teken de horizontale as 2 roosterhokjes boven het laagste punt. Je krijgt de figuur hieronder.



41 **a** evenwichtsstand 3

amplitude 2

periode π

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad a &= 3 \\ b &= 2 \\ c &= \frac{2\pi}{\pi} = 2 \\ d &= \frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

Bladzijde 150

- 42 a** De grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand bij $x = \pi$, dus $y = 1 - 2\frac{1}{2} \sin(1\frac{1}{2}(x - \pi))$.
- b** Het punt $(0, -1\frac{1}{2})$ is een laagste punt, dus $y = 1 - 2\frac{1}{2} \cos(1\frac{1}{2}x)$.
- 43 a** De grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand bij $x = 3$, dus $y = 1 - 2\frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2}\pi(x - 3))$.
- b** Het punt $(0, -1\frac{1}{2})$ is een laagste punt, dus $y = 1 - 2\frac{1}{2} \cos(\frac{1}{2}\pi x)$.

- 44 a** $a = \frac{3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = 2$
 $b = 3\frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}$ periode $= \pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$, dus periode $= \pi$, dus $c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{2}\pi$, dus $d = \frac{1}{2}\pi$.
 Dus $y = 2 + 1\frac{1}{2} \sin(2(x - \frac{1}{2}\pi))$.
- b** Een hoogste punt is $(\frac{3}{4}\pi, 3\frac{1}{2})$, dus $y = 2 + 1\frac{1}{2} \cos(2(x - \frac{3}{4}\pi))$.

Bladzijde 151

- 45 a** $a = \frac{4 + -2}{2} = 1$
 $b = 4 - 1 = 3$
 $\frac{1}{2}$ periode $= 2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$, dus periode $= 3$, dus $c = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1\frac{1}{4} + 2\frac{3}{4}}{2} = 2$, dus $d = 2$.
 Dus $y = 1 + 3 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - 2))$.
- b** De grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand bij $x = 2 - \frac{1}{2} \cdot \text{periode} = 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2}$, dus $y = 1 - 3 \sin(\frac{2}{3}\pi(x - \frac{1}{2}))$.
- 46 a** $a = \frac{175 + 25}{2} = 100$
 $b = 175 - 100 = 75$
 $\frac{1}{2}$ periode $= 9 - 4 = 5$, dus periode $= 10$, dus $c = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 4$, dus $d = 4$.
 Dus $N = 100 + 75 \sin(\frac{1}{5}\pi(t - 4))$.
- b** Er is een hoogste punt bij $t = 4 + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 4 + \frac{1}{4} \cdot 10 = 6\frac{1}{2}$.
 Dus $N = 100 + 75 \cos(\frac{1}{5}\pi(t - 6\frac{1}{2}))$.
- 47 a** Stel $y = a + b \cos(c(x - d))$.
 $a = 12 - 4 = 8$
 $b = 4$
 De periode is $18 - 3 = 15$, dus $c = \frac{2\pi}{15} = \frac{2}{15}\pi$.
 Het punt $(3, 12)$ is een hoogste punt, dus $d = 3$.
 Dus $y = 8 + 4 \cos(\frac{2}{15}\pi(x - 3))$.

- b** Stel $y = a + b \cos(c(x - d))$.

$$a = 650$$

$$b = 812 - 650 = 162$$

De periode is 48, dus $c = \frac{2\pi}{48} = \frac{1}{24}\pi$.

Het punt (16, 812) is een hoogste punt, dus $d = 16$.

$$\text{Dus } y = 650 + 162 \cos\left(\frac{1}{24}\pi(x - 16)\right).$$

- c** Stel $y = a + b \cos(c(x - d))$.

$$a = \frac{250 + 110}{2} = 180$$

$$b = 250 - 180 = 70$$

$\frac{1}{2}$ periode = $26 - 2 = 24$, dus periode = 48, dus $c = \frac{2\pi}{48} = \frac{1}{24}\pi$.

Het punt (2, 250) is een hoogste punt, dus $d = 2$.

$$\text{Dus } y = 180 + 70 \cos\left(\frac{1}{24}\pi(x - 2)\right).$$

8.3 Goniometrische vergelijkingen

Bladzijde 153

48 ..., $-3\frac{1}{2}\pi$, $-2\frac{1}{2}\pi$, $-1\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$, $2\frac{1}{2}\pi$, $3\frac{1}{2}\pi$, ...

Bladzijde 154

49 a $\sin(3x - \frac{1}{2}\pi) = 0$

$$3x - \frac{1}{2}\pi = k \cdot \pi$$

$$3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

b $\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi) = 0$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

c $\sin^2(x) - \sin(x) = 0$

$$\sin(x)(\sin(x) - 1) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = 1$$

$$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

d $\cos^2(2x) + \cos(2x) = 0$

$$\cos(2x)(\cos(2x) + 1) = 0$$

$$\cos(2x) = 0 \vee \cos(2x) = -1$$

$$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee 2x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

Bladzijde 155

50 a $\cos^2(x - \frac{1}{5}\pi) = 1$

$$\cos(x - \frac{1}{5}\pi) = 1 \vee \cos(x - \frac{1}{5}\pi) = -1$$

$$x - \frac{1}{5}\pi = k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{5}\pi = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{5}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{6}{5}\pi + k \cdot 2\pi$$

Deze rijtjes oplossingen kunnen (dit is niet verplicht) samengenomen worden tot $x = \frac{1}{5}\pi + k \cdot \pi$.

b $\sin^2(2x - \frac{1}{4}\pi) = 1$

$$\sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = 1 \vee \sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = -1$$

$$2x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{7}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{7}{8}\pi + k \cdot \pi$$

Deze rijtjes oplossingen kunnen (dit is niet verplicht) samengenomen worden tot $x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

c $\sin^3(x) - \sin(x) = 0$

$$\sin(x)(\sin^2(x) - 1) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \vee \sin^2(x) = 1$$

$$\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = 1 \vee \sin(x) = -1$$

$$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

Deze rijtjes oplossingen kunnen (dit is niet verplicht) samengenomen worden tot $x = k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

$$\begin{aligned}
\text{d} \quad & \cos^3(2x) - \cos(2x) = 0 \\
& \cos(2x)(\cos^2(2x) - 1) = 0 \\
& \cos(2x) = 0 \vee \cos^2(2x) = 1 \\
& \cos(2x) = 0 \vee \cos(2x) = 1 \vee \cos(2x) = -1 \\
& 2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee 2x = k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi + k \cdot 2\pi \\
& x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi
\end{aligned}$$

Deze rijtjes oplossingen kunnen (dit is niet verplicht) samengenomen worden tot $x = k \cdot \frac{1}{4}\pi$.

$$\begin{aligned}
\text{51 a} \quad & \sin(4x - \frac{1}{3}\pi) = 1 \\
& 4x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\
& 4x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \\
& x = \frac{5}{24}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b} \quad & \cos(4\pi x) = -1 \\
& 4\pi x = \pi + k \cdot 2\pi \\
& x = \frac{1}{4} + k \cdot \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c} \quad & \sin^2(\frac{1}{4}\pi x) = 1 \\
& \sin(\frac{1}{4}\pi x) = 1 \vee \sin(\frac{1}{4}\pi x) = -1 \\
& \frac{1}{4}\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{4}\pi x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\
& x = 2 + k \cdot 8 \vee x = 6 + k \cdot 8
\end{aligned}$$

Deze rijtjes oplossingen kunnen (dit is niet verplicht) samengenomen worden tot $x = 2 + k \cdot 4$.

$$\begin{aligned}
\text{d} \quad & \sin(2x) \cos(2x) + \sin(2x) = 0 \\
& \sin(2x)(\cos(2x) + 1) = 0 \\
& \sin(2x) = 0 \vee \cos(2x) = -1 \\
& 2x = k \cdot \pi \vee 2x = \pi + k \cdot 2\pi \\
& x = k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi
\end{aligned}$$

Deze rijtjes oplossingen kunnen (dit is niet verplicht) samengenomen worden tot $x = k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

$$\begin{aligned}
\text{52 a} \quad & 2 \sin(x) \cos(2x) = 0 \\
& \sin(x) = 0 \vee \cos(2x) = 0 \\
& x = k \cdot \pi \vee 2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \\
& x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi
\end{aligned}$$

Het domein van f is $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = 1\frac{3}{4}\pi$.

De nulpunten zijn $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi, 1\frac{1}{4}\pi, 1\frac{3}{4}\pi$ en 2π .

$$\begin{aligned}
\text{b} \quad & r_{AB} = \frac{2 - -2}{1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{\pi} \\
& \left. \begin{aligned} y &= \frac{4}{\pi}x + b \\ \text{door } A(\frac{1}{2}\pi, -2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\pi + b &= -2 \\ 2 + b &= -2 \\ b &= -4 \end{aligned}
\end{aligned}$$

$$\text{Dus } AB: y = \frac{4}{\pi}x - 4.$$

$$\begin{aligned}
& \text{Snijden met de } x\text{-as geeft } \frac{4}{\pi}x - 4 = 0 \\
& \frac{4}{\pi}x = 4 \\
& x = \pi
\end{aligned}$$

Dus de lijn door A en B snijdt de x -as in $(\pi, 0)$, een van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.

- c** $f(\frac{1}{6}\pi) = 2 \sin(\frac{1}{6}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{3}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, dus C ligt op de grafiek van f .
 $f(\frac{1}{6}\pi) = 2 \sin(\frac{1}{6}\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, dus D ligt op de grafiek van f .

d
$$\text{rc}_{CD} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi} = \frac{-1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}$$

$$y = -\frac{1}{\pi}x + b \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } C(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}) \\ \text{door } D(\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{6}\pi + b = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} + b = \frac{1}{2} \\ b = \frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $CD: y = -\frac{1}{\pi}x + \frac{2}{3}$.

Snijden met de x -as geeft $-\frac{1}{\pi}x + \frac{2}{3} = 0$

$$-\frac{1}{\pi}x = -\frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}\pi$$

Dus de lijn door C en D snijdt de x -as in $(\frac{2}{3}\pi, 0)$, dat is geen snijpunt van de grafiek van f met de x -as.

- 53 a** $x = \frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, dus $x = \frac{1}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
b $x = 2\frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin(2\frac{1}{6}\pi) = \sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, dus $x = 2\frac{1}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
 $x = 4\frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin(4\frac{1}{6}\pi) = \sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, dus $x = 4\frac{1}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
c $x = \frac{5}{6}\pi$ geeft $\sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, dus $x = \frac{5}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
d $x = 2\frac{5}{6}\pi$ geeft $\sin(2\frac{5}{6}\pi) = \sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, dus $x = 2\frac{5}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
 $x = -1\frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin(-1\frac{1}{6}\pi) = \sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, dus $x = -1\frac{1}{6}\pi$ is een oplossing van $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

Bladzijde 157

- 54 a** $2 \sin(\frac{1}{2}x) = 1$
 $\sin(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$
- b** $2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 1$
 $\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$
 $x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = k \cdot 2\pi$
- c** $2 \sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{3}$
 $\sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $2x - \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = 1\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{19}{24}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{24}\pi + k \cdot \pi$
- d** $2 \cos(3x - \pi) = -1$
 $\cos(3x - \pi) = -\frac{1}{2}$
 $3x - \pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x - \pi = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $3x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

55 a $2 \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \sqrt{2}$
 $\sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{24}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{11}{24}\pi + k \cdot \pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{5}{24}\pi \vee x = \frac{11}{24}\pi \vee x = \frac{11}{24}\pi \vee x = \frac{11}{24}\pi$

b $2 \cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = \sqrt{3}$
 $\cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $3x - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x - \frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $3x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{2}{9}\pi \vee x = \frac{8}{9}\pi \vee x = \frac{5}{9}\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi \vee x = \frac{7}{9}\pi \vee x = \frac{4}{9}\pi$

c $\sin(\frac{2}{3}x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{2}{3}x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot 3\pi \vee x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot 3\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{3}{8}\pi \vee x = \frac{1}{8}\pi$

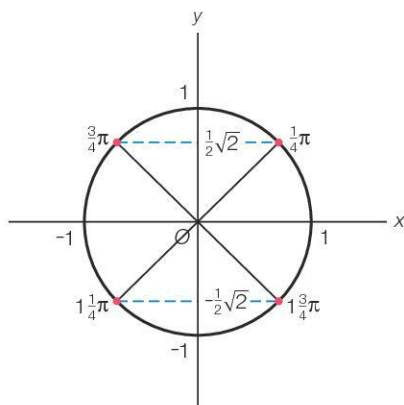
d $\cos(\frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $\frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 4\pi \vee x = -\frac{5}{3}\pi + k \cdot 4\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{5}{3}\pi$

56 a $2 \sin^2(x) = 1$
 $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$
 $\sin(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee \sin(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$
 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
Dus uit $2 \sin^2(x) = 1$ volgt $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b Uit $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ volgt $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.
Uit $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ volgt $x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.
Dus uit $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ volgt
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

c $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$: ..., $-\frac{3}{4}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $2\frac{1}{4}\pi$, ...
 $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$: ..., $-\frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $2\frac{3}{4}\pi$, ...
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$: ..., $-\frac{3}{4}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $3\frac{1}{4}\pi$, ...
 $x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$: ..., $-\frac{1}{4}\pi$, $1\frac{3}{4}\pi$, $3\frac{3}{4}\pi$, ...
Dus $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

d



Uit de cirkel is af te lezen dat $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.

Bladzijde 158

57

a $2 \cos^2(\frac{1}{2}x) = 1$

$$\cos^2(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\frac{1}{2}x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee \cos(\frac{1}{2}x) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \cos(\frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

b $4 \sin^2(x - \frac{1}{6}\pi) = 1$

$$\sin^2(x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{4}$$

$$\sin(x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2} \vee \sin(x - \frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi \vee x = k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

Deze rijtjes oplossingen kunnen (dit is niet verplicht) samengenomen worden tot

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \vee x = k \cdot \pi.$$

c $4 \cos^2(x + \frac{1}{4}\pi) = 3$

$$\cos^2(x + \frac{1}{4}\pi) = \frac{3}{4}$$

$$\cos(x + \frac{1}{4}\pi) = \sqrt{\frac{3}{4}} \vee \cos(x + \frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\cos(x + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee \cos(x + \frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{4}\pi = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{13}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

Deze rijtjes oplossingen kunnen (dit is niet verplicht) samengenomen worden tot

$$x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi.$$

d $4 \sin^3(x) - \sin(x) = 0$

$$\sin(x)(4 \sin^2(x) - 1) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \vee 4 \sin^2(x) = 1$$

$$\sin(x) = 0 \vee \sin^2(x) = \frac{1}{4}$$

$$\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = \frac{1}{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

Deze rijtjes oplossingen kunnen (dit is niet verplicht) samengenomen worden tot

$$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi.$$

58

a $\sin(\frac{1}{2}\pi x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2}{3} + k \cdot 4 \vee x = 1\frac{1}{3} + k \cdot 4$$

$$x \text{ in } [0, 10] \text{ geeft } x = \frac{2}{3} \vee x = 4\frac{2}{3} \vee x = 8\frac{2}{3} \vee x = 1\frac{1}{3} \vee x = 5\frac{1}{3} \vee x = 9\frac{1}{3}$$

$$\text{b } \cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{3}\pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{3}\pi x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 2\frac{1}{2} + k \cdot 6 \vee x = -2\frac{1}{2} + k \cdot 6$$

$$x \text{ in } [0, 10] \text{ geeft } x = 2\frac{1}{2} \vee x = 8\frac{1}{2} \vee x = 3\frac{1}{2} \vee x = 9\frac{1}{2}$$

$$\text{c } 4\sin^2\left(\frac{1}{5}\pi x\right) = 1$$

$$\sin^2\left(\frac{1}{5}\pi x\right) = \frac{1}{4}$$

$$\sin\left(\frac{1}{5}\pi x\right) = \frac{1}{2} \vee \sin\left(\frac{1}{5}\pi x\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{5}\pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{5}\pi x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{5}\pi x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5}{6} + k \cdot 10 \vee x = 4\frac{1}{6} + k \cdot 10 \vee x = -\frac{5}{6} + k \cdot 10 \vee x = 5\frac{5}{6} + k \cdot 10$$

$$x \text{ in } [0, 10] \text{ geeft } x = \frac{5}{6} \vee x = 4\frac{1}{6} \vee x = 9\frac{1}{6} \vee x = 5\frac{5}{6}$$

$$\text{d } 2\cos^2(0,1\pi x) + \cos(0,1\pi x) = 0$$

$$\cos(0,1\pi x)(2\cos(0,1\pi x) + 1) = 0$$

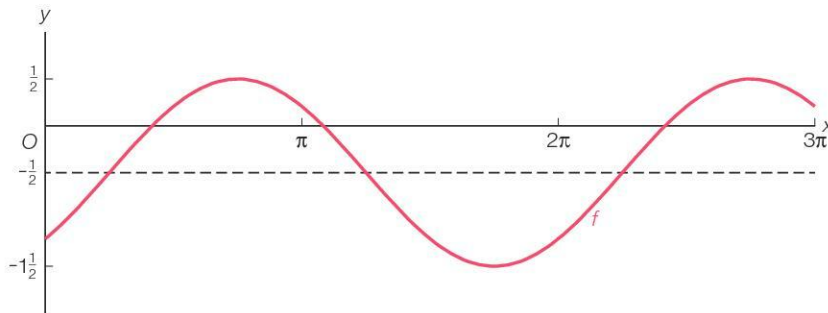
$$\cos(0,1\pi x) = 0 \vee \cos(0,1\pi x) = -\frac{1}{2}$$

$$0,1\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee 0,1\pi x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 0,1\pi x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 5 + k \cdot 10 \vee x = 6\frac{2}{3} + k \cdot 20 \vee x = -6\frac{2}{3} + k \cdot 20$$

$$x \text{ in } [0, 10] \text{ geeft } x = 5 \vee x = 6\frac{2}{3}$$

59 a Voer in $y_1 = -\frac{1}{2} + \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$.



$$\text{b } f(x) = -\frac{1}{2} \text{ geeft } -\frac{1}{2} + \sin(x - \frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = 0$$

$$x - \frac{1}{4}\pi = k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [0, 3\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{4}\pi \vee x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = 2\frac{1}{4}\pi$$

De grafiek van f snijdt de lijn van de evenwichtsstand in de punten

$$(\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2}), (1\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2}) \text{ en } (2\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2}).$$

$$\text{c } f(x) = \frac{1}{2} \text{ geeft } -\frac{1}{2} + \sin(x - \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = 1$$

$$x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 3\pi] \text{ geeft } x = \frac{3}{4}\pi \vee x = 2\frac{3}{4}\pi$$

$$f(x) = -1\frac{1}{2} \text{ geeft } -\frac{1}{2} + \sin(x - \frac{1}{4}\pi) = -1\frac{1}{2}$$

$$\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = -1$$

$$x - \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 3\pi] \text{ geeft } x = 1\frac{3}{4}\pi$$

De toppen van de grafiek van f zijn $(\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2})$, $(1\frac{3}{4}\pi, -1\frac{1}{2})$ en $(2\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2})$.

d $f(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2} + \sin(x - \frac{1}{4}\pi) = 0$

$$\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$$

$$x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 3\pi] \text{ geeft } x = \frac{5}{12}\pi \vee x = 2\frac{5}{12}\pi \vee x = 1\frac{1}{12}\pi$$

$$\text{Dus } x_A = \frac{5}{12}\pi, x_B = 1\frac{1}{12}\pi \text{ en } x_C = 2\frac{5}{12}\pi.$$

$$AB = x_B - x_A = 1\frac{1}{12}\pi - \frac{5}{12}\pi = \frac{8}{12}\pi = \frac{2}{3}\pi$$

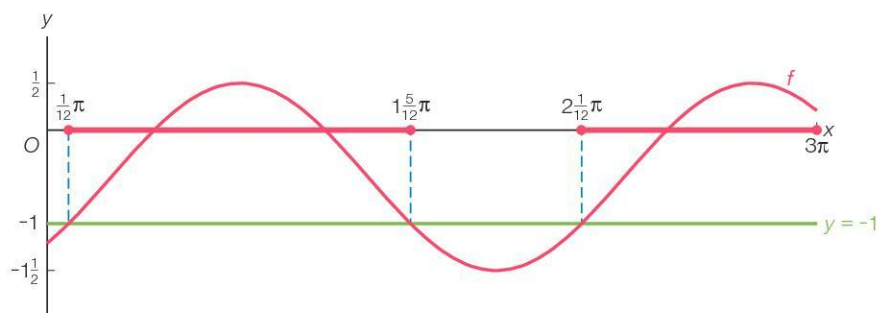
e $f(x) = -1$ geeft $-\frac{1}{2} + \sin(x - \frac{1}{4}\pi) = -1$

$$\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$x - \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 3\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{12}\pi \vee x = 2\frac{1}{12}\pi \vee x = 1\frac{5}{12}\pi$$



$$f(x) \geq -1 \text{ geeft } \frac{1}{12}\pi \leq x \leq 1\frac{5}{12}\pi \vee 2\frac{1}{12}\pi \leq x \leq 3\pi$$

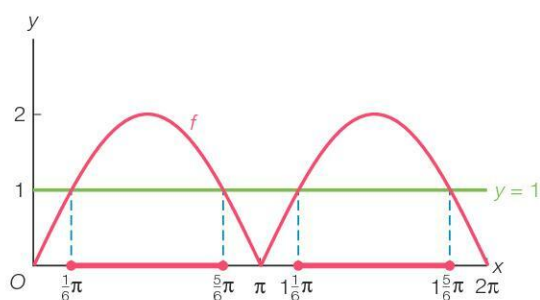
60 $f(x) = 1$ geeft $|2 \sin(x)| = 1$

$$2 \sin(x) = 1 \vee 2 \sin(x) = -1$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$$



$$f(x) \geq 1 \text{ geeft } \frac{1}{6}\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \vee 1\frac{1}{6}\pi \leq x \leq 1\frac{5}{6}\pi$$

61 a $\sin(3x) = \sin(\frac{1}{6}\pi)$

$$\sin(3x) = \frac{1}{2}$$

$$3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{5}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

b $\cos(3x) = \cos(\frac{1}{6}\pi)$

$$\cos(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = -\frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

62

a $\sin(x+1) = \sin(2x+3)$

$$x+1 = 2x+3 + k \cdot 2\pi \vee x+1 = \pi - (2x+3) + k \cdot 2\pi$$

$$-x = 2 + k \cdot 2\pi \vee x+1 = \pi - 2x - 3 + k \cdot 2\pi$$

$$x = -2 + k \cdot 2\pi \vee 3x = -4 + \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -2 + k \cdot 2\pi \vee x = -1\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

b $\cos(2x-1) = \cos(x+1)$

$$2x-1 = x+1 + k \cdot 2\pi \vee 2x-1 = -(x+1) + k \cdot 2\pi$$

$$x = 2 + k \cdot 2\pi \vee 2x-1 = -x-1 + k \cdot 2\pi$$

$$x = 2 + k \cdot 2\pi \vee 3x = k \cdot 2\pi$$

$$x = 2 + k \cdot 2\pi \vee x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

c $\sin(2x - \frac{1}{2}\pi) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$

$$2x - \frac{1}{2}\pi = x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{2}\pi = \pi - (x + \frac{1}{3}\pi) + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{2}\pi = \pi - x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{7}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

d $\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = \cos(2x)$

$$x - \frac{1}{3}\pi = 2x + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{3}\pi = -2x + k \cdot 2\pi$$

$$-x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

e $\sin(2\pi x) = \sin(\pi(x-1))$

$$\sin(2\pi x) = \sin(\pi x - \pi)$$

$$2\pi x = \pi x - \pi + k \cdot 2\pi \vee 2\pi x = \pi - (\pi x - \pi) + k \cdot 2\pi$$

$$\pi x = -\pi + k \cdot 2\pi \vee 2\pi x = \pi - \pi x + \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -1 + k \cdot 2 \vee 3\pi x = 2\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -1 + k \cdot 2 \vee x = \frac{2}{3} + k \cdot \frac{2}{3}$$

$$x = -1 + k \cdot 2 \vee x = k \cdot \frac{2}{3}$$

f $\cos(\frac{1}{2}\pi x) = \cos(\pi(x-2))$

$$\cos(\frac{1}{2}\pi x) = \cos(\pi x - 2\pi)$$

$$\frac{1}{2}\pi x = \pi x - 2\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = -(\pi x - 2\pi) + k \cdot 2\pi$$

$$-\frac{1}{2}\pi x = -2\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = -\pi x + 2\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 4 + k \cdot 4 \vee 1\frac{1}{2}\pi x = 2\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot 4 \vee x = 1\frac{1}{3} + k \cdot 1\frac{1}{3}$$

$$x = k \cdot 4 \vee x = k \cdot 1\frac{1}{3}$$

Deze rijtjes oplossingen kunnen (dit is niet verplicht) samengenomen worden tot $x = k \cdot 1\frac{1}{3}$.

63

a $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = \pi - (x + \frac{1}{4}\pi) + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = \pi - x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = 1\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{13}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{7}{12}\pi \vee x = \frac{13}{36}\pi \vee x = 1\frac{1}{36}\pi \vee x = 1\frac{25}{36}\pi$$

b $\cos(3x + \frac{1}{2}\pi) = \cos(2x - \frac{1}{4}\pi)$

$$3x + \frac{1}{2}\pi = 2x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x + \frac{1}{2}\pi = -(2x - \frac{1}{4}\pi) + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x + \frac{1}{2}\pi = -2x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 5x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{20}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 1\frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{7}{20}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi \vee x = 1\frac{3}{20}\pi \vee x = 1\frac{11}{20}\pi \vee x = 1\frac{19}{20}\pi$$

64 $f(x) = g(x)$ geeft $\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$

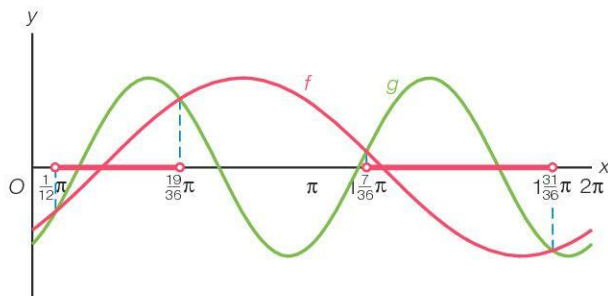
$$x - \frac{1}{4}\pi = 2x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{4}\pi = \pi - (2x - \frac{1}{3}\pi) + k \cdot 2\pi$$

$$-x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{4}\pi = \pi - 2x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

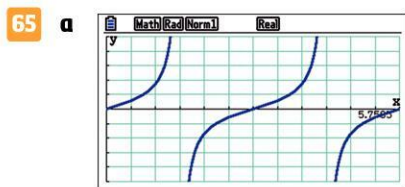
$$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = 1\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{19}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{12}\pi \vee x = \frac{19}{36}\pi \vee x = 1\frac{7}{36}\pi \vee x = 1\frac{31}{36}\pi$$



$$f(x) < g(x) \text{ geeft } \frac{1}{12}\pi < x < \frac{19}{36}\pi \vee 1\frac{7}{36}\pi < x < 1\frac{31}{36}\pi$$



b Dat zijn de lijnen $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

66 a $\left. \begin{aligned} \tan(A) &= \frac{\sin(A)}{\cos(A)} \\ \tan(A) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \sin(A) &= 0 \wedge \cos(A) \neq 0 \\ A &= k \cdot \pi \end{aligned}$

b $\tan(2x - \frac{1}{6}\pi) = 0$

$$2x - \frac{1}{6}\pi = k \cdot \pi$$

$$2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Bladzijde 161

67 a $\tan(3x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$$3x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

b $1 - \tan(\frac{3}{4}x) = 2$

$$\tan(\frac{3}{4}x) = -1$$

$$\frac{3}{4}x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi$$

c $\tan(\frac{1}{2}x) = \tan(2x - \frac{1}{6}\pi)$

$$\frac{1}{2}x = 2x - \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$-1\frac{1}{2}x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

d $3 \tan(\frac{1}{2}\pi x) = \sqrt{3}$

$$\tan(\frac{1}{2}\pi x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{3} + k \cdot 2$$

e $2 + \sqrt{3} \cdot \tan(\frac{1}{8}\pi x) = 5$

$$\sqrt{3} \cdot \tan(\frac{1}{8}\pi x) = 3$$

$$\tan(\frac{1}{8}\pi x) = \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{8}\pi x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = 2\frac{2}{3} + k \cdot 8$$

f $\tan(\frac{1}{3}\pi x) = \tan(\frac{1}{4}\pi(x - 1))$

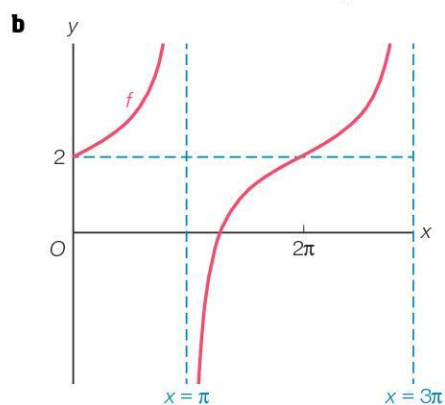
$$\frac{1}{3}\pi x = \frac{1}{4}\pi(x - 1) + k \cdot \pi$$

$$\frac{1}{3}\pi x = \frac{1}{4}\pi x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$\frac{1}{12}\pi x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = -3 + k \cdot 12$$

- 68 a** Beginpunt $(0, 2)$, periode $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ en asymptoten zijn de lijnen $x = \pi$ en $x = 3\pi$.



- c** Voer in $y_1 = 2 + \tan(\frac{1}{2}x)$.
De optie nulpunt geeft $x \approx 4,07$.
Dus het nulpunt is 4,07.

- d** $f(x) = 3$ geeft $2 + \tan(\frac{1}{2}x) = 3$

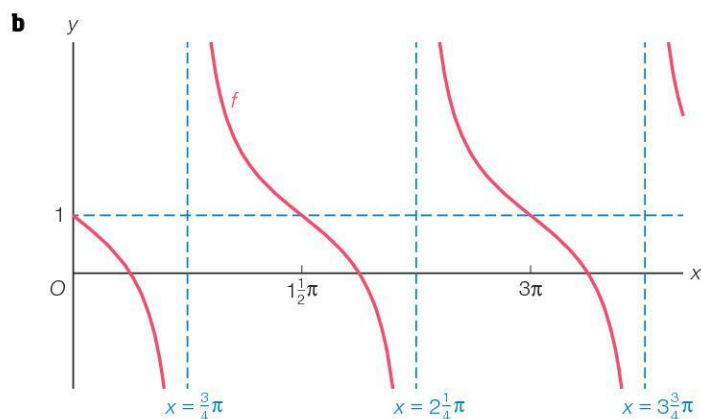
$$\tan(\frac{1}{2}x) = 1$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, 3\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 2\frac{1}{2}\pi$, dus de snijpunten zijn $(\frac{1}{2}\pi, 3)$ en $(2\frac{1}{2}\pi, 3)$.

- 69 a** Beginpunt $(0, 1)$, periode $\frac{\pi}{\frac{2}{3}} = 1\frac{1}{2}\pi$ en asymptoten zijn de lijnen $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = 2\frac{1}{4}\pi$ en $x = 3\frac{3}{4}\pi$.



- c** $f(x) = 0$ geeft $1 - \tan(\frac{2}{3}x) = 0$

$$\tan(\frac{2}{3}x) = 1$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot 1\frac{1}{2}\pi$$

x in $[0, 4\pi]$ geeft $x = \frac{3}{8}\pi \vee x = 1\frac{7}{8}\pi \vee x = 3\frac{3}{8}\pi$

Dus de nulpunten zijn $\frac{3}{8}\pi$, $1\frac{7}{8}\pi$ en $3\frac{3}{8}\pi$.

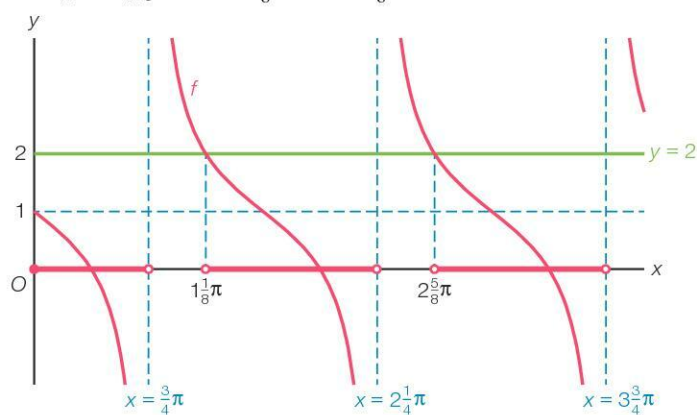
d $f(x) = 2$ geeft $1 - \tan(\frac{2}{3}x) = 2$

$$\tan(\frac{2}{3}x) = -1$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

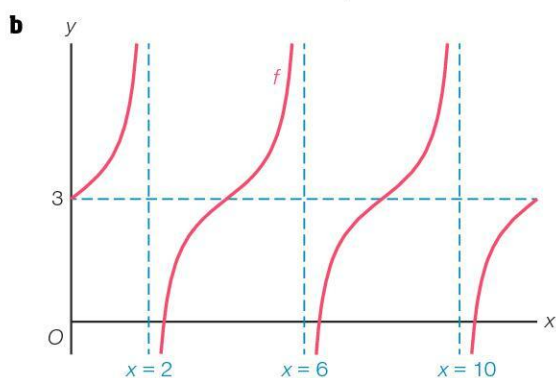
$$x = 1\frac{1}{8}\pi + k \cdot 1\frac{1}{2}\pi$$

x in $[0, 4\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{8}\pi \vee x = 2\frac{5}{8}\pi$



$f(x) < 2$ geeft $0 \leq x < \frac{3}{4}\pi \vee 1\frac{1}{8}\pi < x < 2\frac{1}{4}\pi \vee 2\frac{5}{8}\pi < x < 3\frac{3}{4}\pi$

- 70 a** Beginpunt $(0, 3)$, periode $\frac{\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 4$ en asymptoten zijn de lijnen $x = 2$, $x = 6$ en $x = 10$.



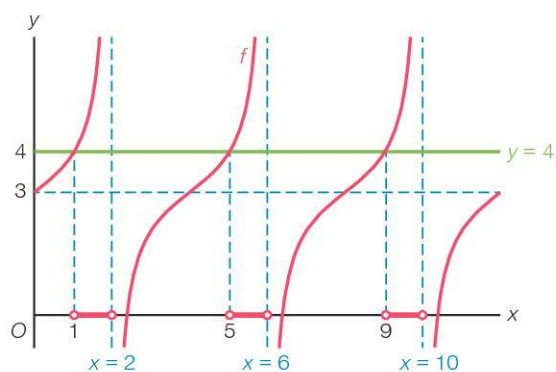
c $f(x) = 4$ geeft $3 + \tan(\frac{1}{4}\pi x) = 4$

$$\tan(\frac{1}{4}\pi x) = 1$$

$$\frac{1}{4}\pi x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

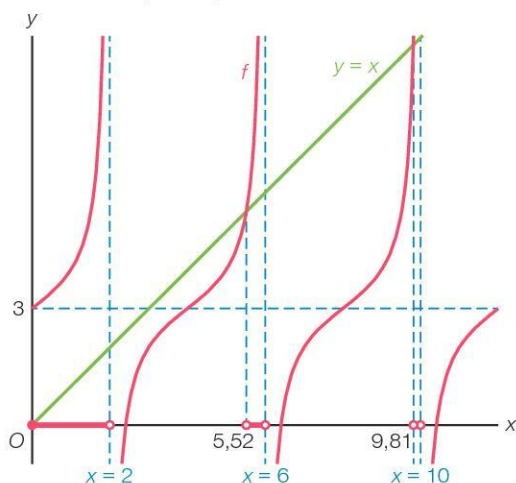
$$x = 1 + k \cdot 4$$

x in $[0, 12]$ geeft $x = 1 \vee x = 5 \vee x = 9$



$f(x) > 4$ geeft $1 < x < 2 \vee 5 < x < 6 \vee 9 < x < 10$

- d Voer in $y_1 = 3 + \tan(\frac{1}{4}\pi x)$ en $y_2 = x$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 5,52$ en $x \approx 9,81$.



$f(x) > x$ geeft $0 \leq x < 2 \vee 5,52 < x < 6 \vee 9,81 < x < 10$

71 $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\cos(2x - \frac{1}{3}\pi)$

$$\frac{\sin(2x - \frac{1}{3}\pi)}{\cos(2x - \frac{1}{3}\pi)} = -1$$

$$\tan(2x - \frac{1}{3}\pi) = -1$$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = 1\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{13}{24}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

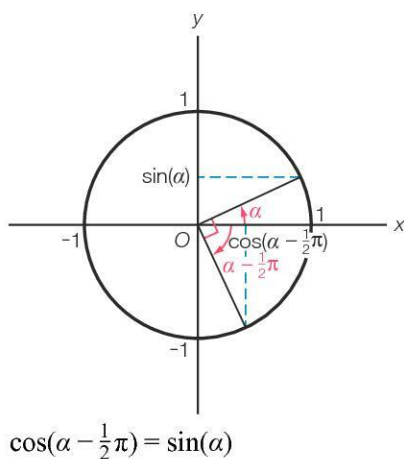
8.4 Herleiden en differentiëren

Bladzijde 163

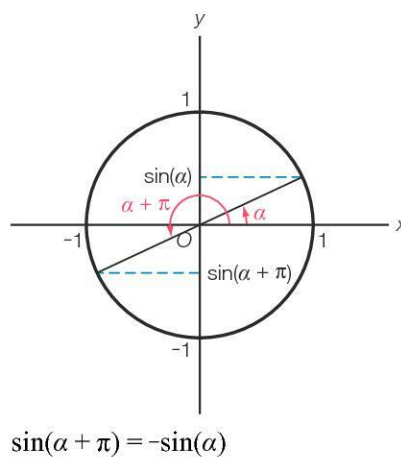
72 $\sin(-\alpha) = y_Q = -y_P = -\sin(\alpha)$
 $\cos(-\alpha) = x_Q = x_P = \cos(\alpha)$

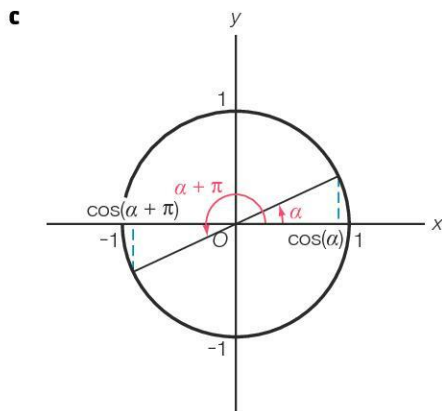
Bladzijde 164

73 a

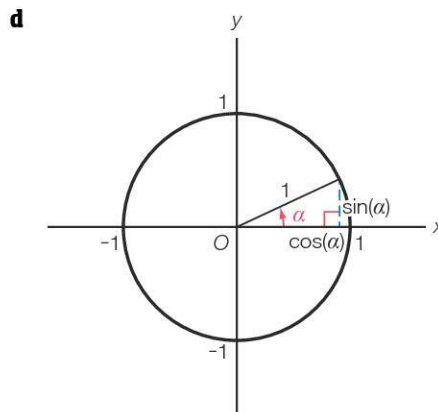


b





$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$$



De stelling van Pythagoras geeft $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

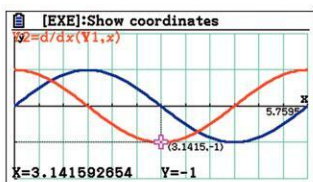
- 74**
- a** $\sin(x + \frac{1}{6}\pi) = \cos(x + \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi) = \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$
 - b** $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = \sin(2x + \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(2x + \frac{5}{6}\pi)$
 - c** $-\sin(3x - \frac{2}{3}\pi) = \sin(3x - \frac{2}{3}\pi + \pi) = \sin(3x + \frac{1}{3}\pi) = \cos(3x + \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi) = \cos(3x - \frac{1}{6}\pi)$
 - d** $-\cos(4x + \frac{1}{6}\pi) = \cos(4x + \frac{1}{6}\pi + \pi) = \cos(4x + \frac{7}{6}\pi) = \sin(4x + \frac{7}{6}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(4x + \frac{5}{3}\pi) = \sin(4x + \frac{2}{3}\pi)$

75 **a** $(\sin(x) - \cos(x))^2 = \sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 1 - 2\sin(x)\cos(x)$

b $\frac{2\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{2\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = 2\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 + 1 = 2\tan^2(x) + 1$

- 76**
- a** $\sin^2(x) + 4\cos(x) = 1 - \cos^2(x) + 4\cos(x)$
 - b** $2\cos^2(x) + \sin(x) - 2 = 2(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2 = 2 - 2\sin^2(x) + \sin(x) - 2 = -2\sin^2(x) + \sin(x)$
 - c** $2\sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) = 2(1 - \cos^2(x)) + \cos^2(x) + \cos(x) = 2 - 2\cos^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) = -\cos^2(x) + \cos(x) + 2$

- 77** **a** Voer in $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) \Big|_{x=x}$.

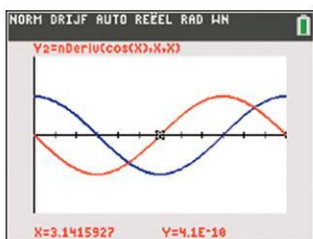


- b** Waarschijnlijk is $y = \cos(x)$ de afgeleide van $y = \sin(x)$.

NORM DRIJF AUTO REEL RAD W/N DRUK OP ENTER VOOR BEWERKEN				
X	Y1	Y2		
0	1	0.5403		
1	0.8415	-0.416		
2	-0.917	-0.416		
3	-0.141	-0.999		
4	0.7568	-0.654		
5	0.9596	0.2837		
6	0.9866	0.9602		
7	0.7539	0.7539		
8	-0.141	0.146		
9	-0.911	-0.911		
10	-0.839	-0.839		

Y2 = $\frac{d}{dx}(\sin(X)) \Big|_{x=x}$

- c** Voer in $y_1 = \cos(x)$ en $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) \Big|_{x=x}$.



Waarschijnlijk is $y = -\sin(x)$ de afgeleide van $y = \cos(x)$.

NORM DRIJF AUTO REËL RAD MM				
DRUK OP ENTER VOOR BEWERKEN				
X	Y1	Y2		
0	0	0		
1	-0.841	-0.841		
2	-0.909	-0.909		
3	-0.141	-0.141		
4	0.7568	0.7568		
5	0.9589	0.9589		
6	0.2794	0.2794		
7	-0.657	-0.657		
8	-0.989	-0.989		
9	-0.412	-0.412		
10	0.544	0.544		

Y1 = -sin(X)

- d $g(x) = \cos(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$ geeft $g'(x) = \cos(x + \frac{1}{2}\pi) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin(x)$
Dus $g(x) = \cos(x)$ geeft $g'(x) = -\sin(x)$.

Bladzijde 166

- 78 a $f(x) = 3 + 4\sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ geeft $f'(x) = 4\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) \cdot 2 = 8\cos(2x - \frac{1}{3}\pi)$
b $g(x) = x\cos(x)$ geeft $g'(x) = 1 \cdot \cos(x) + x \cdot -\sin(x) = \cos(x) - x\sin(x)$
c $h(x) = \frac{x^2 + \sin(x)}{\cos(x)}$ geeft $h'(x) = \frac{\cos(x) \cdot (2x + \cos(x)) - (x^2 + \sin(x)) \cdot -\sin(x)}{\cos^2(x)}$
$$= \frac{2x\cos(x) + \cos^2(x) + x^2\sin(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{2x\cos(x) + x^2\sin(x) + 1}{\cos^2(x)}$$

d $k(x) = \cos^2(x)$ geeft $k'(x) = 2\cos(x) \cdot -\sin(x) = -2\sin(x)\cos(x)$
e $l(x) = x + 3\sin^2(x)$ geeft $l'(x) = 1 + 6\sin(x)\cos(x)$
f $j(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ geeft $j'(x) = \frac{\sin(x) \cdot -\sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$
- 79 a $f(x) = 10 + 16\cos(\frac{1}{2}(x-1))$ geeft $f'(x) = -16\sin(\frac{1}{2}(x-1)) \cdot \frac{1}{2} = -8\sin(\frac{1}{2}(x-1))$
b $g(x) = x^2\sin(3x)$ geeft $g'(x) = 2x \cdot \sin(3x) + x^2 \cdot \cos(3x) \cdot 3 = 2x\sin(3x) + 3x^2\cos(3x)$
c $h(x) = \frac{\sin(x)}{x^2 + \cos(x)}$ geeft $h'(x) = \frac{(x^2 + \cos(x)) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (2x - \sin(x))}{(x^2 + \cos(x))^2}$
$$= \frac{x^2\cos(x) + \cos^2(x) - 2x\sin(x) + \sin^2(x)}{(x^2 + \cos(x))^2} = \frac{x^2\cos(x) - 2x\sin(x) + 1}{(x^2 + \cos(x))^2}$$

d $j(x) = 2\sin^2(x)$ geeft $j'(x) = 4\sin(x)\cos(x)$
- 80 a $f(x) = x\cos(2x)$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \cos(2x) + x \cdot -\sin(2x) \cdot 2 = \cos(2x) - 2x\sin(2x)$
b $g(x) = 2x\sin(3x-1)$ geeft $g'(x) = 2 \cdot \sin(3x-1) + 2x \cdot \cos(3x-1) \cdot 3 = 2\sin(3x-1) + 6x\cos(3x-1)$
c $h(x) = \frac{x\sin(x)}{x + \sin(x)}$ geeft $h'(x) = \frac{(x + \sin(x)) \cdot (1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)) - x\sin(x) \cdot (1 + \cos(x))}{(x + \sin(x))^2}$
$$= \frac{x\sin(x) + x^2\cos(x) + \sin^2(x) + x\sin(x)\cos(x) - x\sin(x) - x\sin(x)\cos(x)}{(x + \sin(x))^2}$$

$$= \frac{x^2\cos(x) + \sin^2(x)}{(x + \sin(x))^2}$$

d $j(x) = 1 + 2\cos^2(x)$ geeft $j'(x) = 4\cos(x) \cdot -\sin(x) = -4\sin(x)\cos(x)$

Bladzijde 167

- 81 a $f(x) = 3\tan(2x)$ geeft $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{\cos^2(2x)} \cdot 2 = \frac{6}{\cos^2(2x)}$
b $g(x) = \tan^2(x)$ geeft $g'(x) = 2\tan(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = 2 \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}$

- 82** a $f(x) = \cos^3(x)$ geeft $f'(x) = 3 \cos^2(x) \cdot -\sin(x) = -3 \sin(x) \cos^2(x)$
 b $g(x) = \cos(x^3)$ geeft $g'(x) = -\sin(x^3) \cdot 3x^2 = -3x^2 \sin(x^3)$
 c $h(x) = \sqrt{\sin(x)}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$
 d $j(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ geeft $j'(x) = 2 \cos(x) \cdot -\sin(x) - 2 \sin(x) \cdot \cos(x) = -4 \sin(x) \cos(x)$

- 83** a $f(x) = \sin^3(x) + \sin(x)$ geeft $f'(x) = 3 \sin^2(x) \cos(x) + \cos(x)$
 $= 3(1 - \cos^2(x)) \cos(x) + \cos(x)$
 $= 3 \cos(x) - 3 \cos^3(x) + \cos(x)$
 $= 4 \cos(x) - 3 \cos^3(x)$
 b $g(x) = \sin^2(x) \cos(x)$ geeft $g'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin^2(x) \cdot -\sin(x)$
 $= 2 \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x)$
 $= 2 \sin(x) (1 - \sin^2(x)) - \sin^3(x)$
 $= 2 \sin(x) - 2 \sin^3(x) - \sin^3(x)$
 $= 2 \sin(x) - 3 \sin^3(x)$
 c $h(x) = \frac{\tan(x)}{\sin(x)} = \frac{\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)}{\sin(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$ geeft $h'(x) = \frac{\cos(x) \cdot 0 - 1 \cdot -\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

- 84** a $f(x) = \frac{3 \cos(x)}{2 - \sin(x)}$ geeft $f'(x) = \frac{(2 - \sin(x)) \cdot -3 \sin(x) - 3 \cos(x) \cdot -\cos(x)}{(2 - \sin(x))^2}$
 $= \frac{-6 \sin(x) + 3 \sin^2(x) + 3 \cos^2(x)}{(2 - \sin(x))^2} = \frac{-6 \sin(x) + 3}{(2 - \sin(x))^2}$

- b $f(x) = 0$ geeft $\frac{3 \cos(x)}{2 - \sin(x)} = 0$
 $\cos(x) = 0$
 $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{Dus } A\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right).$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{-6 \cdot 1 + 3}{(2 - 1)^2} = \frac{-3}{1} = -3.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } A\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot \frac{1}{2}\pi + b = 0 \\ b = 1\frac{1}{2}\pi \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -3x + 1\frac{1}{2}\pi.$$

- c $f'(x) = 0$ geeft $\frac{-6 \sin(x) + 3}{(2 - \sin(x))^2} = 0$
 $-6 \sin(x) + 3 = 0$
 $\sin(x) = \frac{1}{2}$
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{max. is } f\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{3 \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)}{2 - \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{min. is } f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{3 \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{2 - \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)} = \frac{3 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 - \frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\text{Dus } B_f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

85 $f_p(x) = \cos^2(x) + \cos(x) + p$ geeft $f_p'(x) = 2 \cos(x) \cdot -\sin(x) - \sin(x) = -2 \sin(x) \cos(x) - \sin(x)$

$f_p'(x) = 0$ geeft $-2 \sin(x) \cos(x) - \sin(x) = 0$

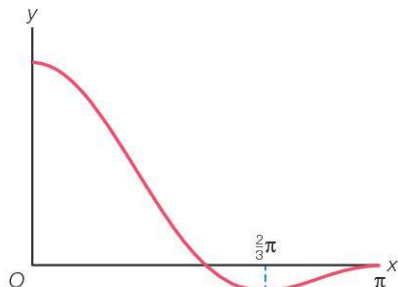
$-\sin(x)(2 \cos(x) + 1) = 0$

$\sin(x) = 0 \vee \cos(x) = -\frac{1}{2}$

$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

x in $[0, \pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \pi \vee x = \frac{2}{3}\pi$

Hieronder zie je een schets van de grafiek van $y = \cos^2(x) + \cos(x)$.



De grafiek van $y = \cos^2(x) + \cos(x)$ heeft een minimum voor $x = \frac{2}{3}\pi$, dus ook de grafiek van $f_p(x) = \cos^2(x) + \cos(x) + p$ heeft een minimum voor $x = \frac{2}{3}\pi$.

$f_p(\frac{2}{3}\pi) = 1$ geeft $\cos^2(\frac{2}{3}\pi) + \cos(\frac{2}{3}\pi) + p = 1$

$(-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + p = 1$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + p = 1$

$p = 1\frac{1}{4}$

Diagnostische toets

Bladzijde 170

1 $A(\cos(40^\circ), \sin(40^\circ)) \approx A(0,77; 0,64)$

De draaiingshoek die bij het punt B hoort is $40^\circ + 120^\circ = 160^\circ$.

$B(\cos(160^\circ), \sin(160^\circ)) \approx B(-0,94; 0,34)$

De draaiingshoek die bij het punt C hoort is $40^\circ + 240^\circ = 280^\circ$.

$C(\cos(280^\circ), \sin(280^\circ)) \approx C(0,17; -0,98)$

2 Mogelijkheid 1, zie de figuur hiernaast.

$x_P = -0,33$, dus $\cos(\alpha_P) = -0,33$.

De GR geeft 1,907...

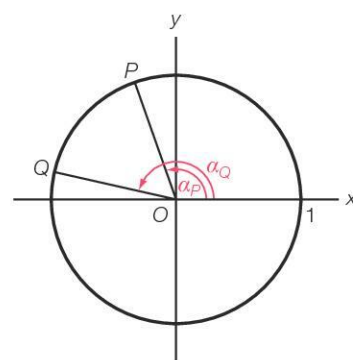
Dus $\alpha_P = 1,907...$

$y_Q = 0,22$, dus $\sin(\alpha_Q) = 0,22$.

De GR geeft 0,221...

Dus $\alpha_Q = \pi - 0,221... = 2,919...$

Dus $\angle POQ = 2,919... - 1,907... \approx 1,01$.

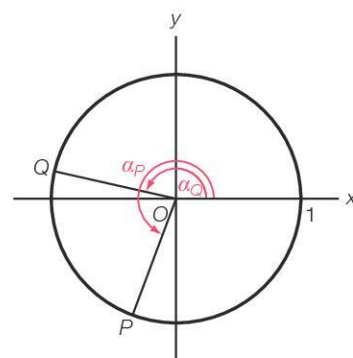


Mogelijkheid 2, zie de figuur hiernaast.

$\alpha_P = 2\pi - 1,907... = 4,376...$

$\alpha_Q = 2,919...$

Dus $\angle POQ = 4,376... - 2,919... \approx 1,46$.



3 a $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ met $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ geeft $x = -\frac{1}{6}\pi$

b $x = \cos(\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c $\cos(x) = \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$ geeft $x = \frac{2}{3}\pi$

d $x = \sin(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

e $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ geeft $x = \frac{2}{3}\pi$

f $x = \cos(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}$

4 a De evenwichtsstand is -4 , de amplitude is $3,1$, de periode is 2π en een beginpunt is $(-\frac{2}{3}\pi, -4)$.

b De evenwichtsstand is $3,4$, de amplitude is 4 , de periode is $\frac{2}{5}\pi$ en een beginpunt is $(0,4; -0,6)$.

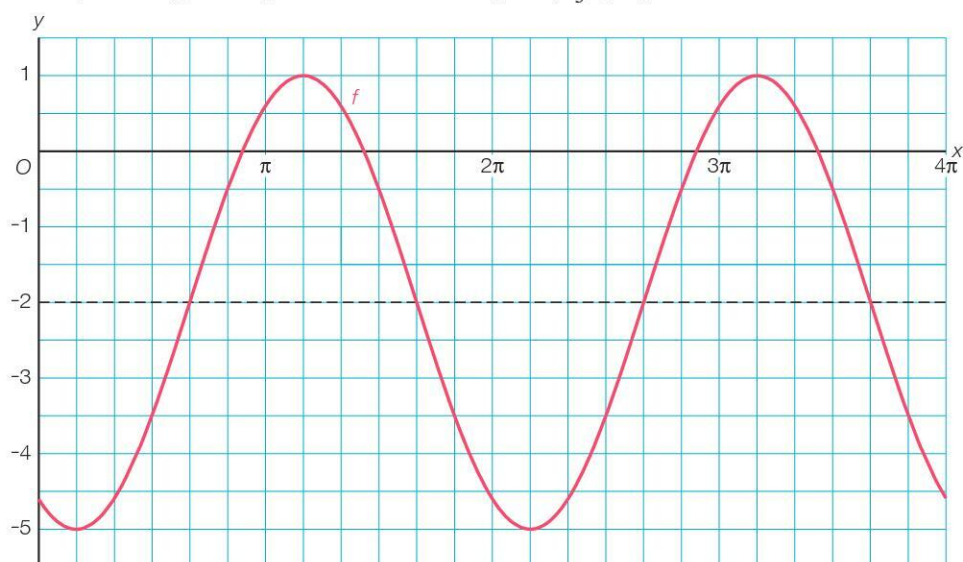
5 a $f(x) = -2 - 3\sin(x + \frac{1}{3}\pi)$

evenwichtsstand -2

amplitude 3

periode 2π

$-3 < 0$, dus de grafiek gaat dalend door het punt $(\frac{2}{3}\pi, -2)$.



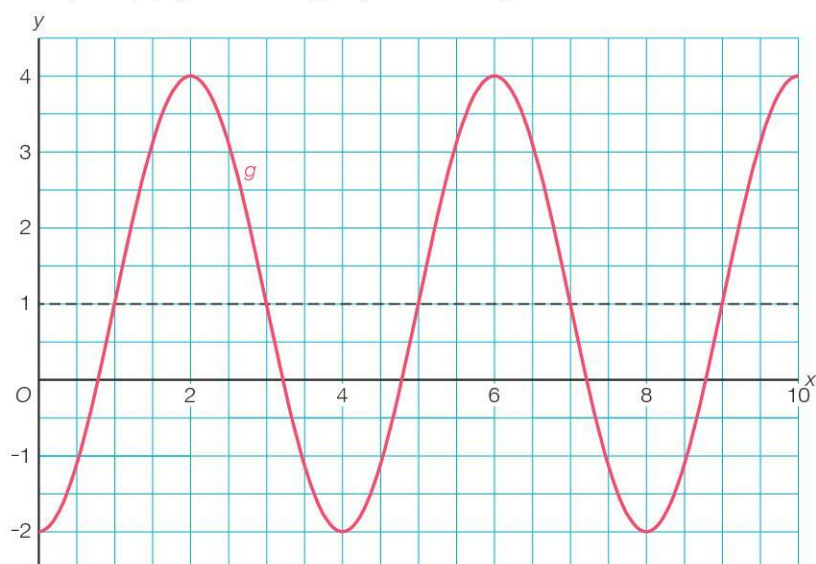
b $g(x) = 1 + 3\cos(\frac{1}{2}\pi x - \pi) = 1 + 3\cos(\frac{1}{2}\pi(x - 2))$

evenwichtsstand 1

amplitude 3

periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$

$3 > 0$, dus $(2, 4)$ is een hoogste punt van de grafiek.



- 6 a** $a = \frac{10 + -30}{2} = -10$
 $b = 10 - -10 = 20$
 $c = \frac{2\pi}{30} = \frac{1}{15}\pi$
 $y = a + b \sin(c(x - d))$ met $b > 0$
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 10$, dus $d = 10$.
 $y = -10 + 20 \sin(\frac{1}{15}\pi(x - 10))$
- b** $y = a + b \cos(c(x - d))$ met $b > 0$
 Hoogste punt is $(17\frac{1}{2}, 10)$, dus $d = 17\frac{1}{2}$.
 $y = -10 + 20 \cos(\frac{1}{15}\pi(x - 17\frac{1}{2}))$
- c** $y = a + b \sin(c(x - d))$ met $b < 0$
 Dalend door de evenwichtsstand bij $x = 25$, dus $d = 25$.
 $y = -10 - 20 \sin(\frac{1}{15}\pi(x - 25))$
- d** $y = a + b \cos(c(x - d))$ met $b < 0$
 Laagste punt is $(2\frac{1}{2}, -30)$, dus $d = 2\frac{1}{2}$.
 $y = -10 - 20 \cos(\frac{1}{15}\pi(x - 2\frac{1}{2}))$

Bladzijde 171

- 7 a** $\sin(2x - \frac{1}{2}\pi) = -1$
 $2x - \frac{1}{2}\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = 2\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \pi + k \cdot \pi$
 $x = k \cdot \pi$
- b** $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 0$
 $2x + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
 $2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$
 $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
- c** $\cos(\frac{1}{2}\pi x) \cdot (\cos(2\pi x) + 1) = 0$
 $\cos(\frac{1}{2}\pi x) = 0 \vee \cos(2\pi x) = -1$
 $\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee 2\pi x = \pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{3} + k \cdot \frac{2}{3} \vee x = \frac{1}{2} + k \cdot 1$
- d** $\sin^3(\frac{1}{3}\pi x) + \sin^2(\frac{1}{3}\pi x) = 0$
 $\sin^2(\frac{1}{3}\pi x) (\sin(\frac{1}{3}\pi x) + 1) = 0$
 $\sin(\frac{1}{3}\pi x) = 0 \vee \sin(\frac{1}{3}\pi x) = -1$
 $\frac{1}{3}\pi x = k \cdot \pi \vee \frac{1}{3}\pi x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = k \cdot 3 \vee x = 4\frac{1}{2} + k \cdot 6$
- 8 a** $4 \sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = 2\sqrt{2}$
 $\sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $2x + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{7}{8}\pi \vee x = 1\frac{7}{8}\pi \vee x = \frac{1}{8}\pi \vee x = 1\frac{1}{8}\pi$
- b** $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $x - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi$

c $4 \cos^2(\frac{1}{2}x) = 2$

$$\cos^2(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \cos(\frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi \vee x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi \vee x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi$$

d $\sin^2(\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}\pi) = \frac{3}{4}$

$$\sin(\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin(\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}\pi = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{3}{4}x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{3}{4}x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{3}{4}x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{3}{4}x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{9}\pi + k \cdot 2\frac{2}{3}\pi \vee x = -\frac{1}{9}\pi + k \cdot 2\frac{2}{3}\pi \vee x = -\frac{2}{9}\pi + k \cdot 2\frac{2}{3}\pi \vee x = -\frac{2}{9}\pi + k \cdot 2\frac{2}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{9}\pi \vee x = \frac{5}{9}\pi \vee x = \frac{7}{9}\pi \vee x = \frac{11}{9}\pi$$

9 a $f(x) = -1$ geeft $-1 + 2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = -1$

$$2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 0$$

$$\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 0$$

$$x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [-\pi, 3\pi] \text{ geeft } x = -\frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi$$

Dus de grafiek van f snijdt de lijn van de evenwichtsstand in de punten

$$(-\frac{1}{6}\pi, -1), (\frac{5}{6}\pi, -1), (\frac{7}{6}\pi, -1) \text{ en } (\frac{11}{6}\pi, -1).$$

b $f(x) = 1$ geeft $-1 + 2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 1$

$$2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 2$$

$$\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 1$$

$$x - \frac{1}{3}\pi = k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [-\pi, 3\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi$$

$$f(x) = -3 \text{ geeft } -1 + 2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = -3$$

$$2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = -2$$

$$\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = -1$$

$$x - \frac{1}{3}\pi = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{10}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [-\pi, 3\pi] \text{ geeft } x = \frac{4}{3}\pi \vee x = \frac{8}{3}\pi$$

De toppen van de grafiek van f zijn $(-\frac{2}{3}\pi, -3)$, $(\frac{1}{3}\pi, 1)$, $(\frac{5}{3}\pi, -3)$ en $(\frac{7}{3}\pi, 1)$.

c $f(x) = 0$ geeft $-1 + 2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 0$

$$2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 1$$

$$\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$$

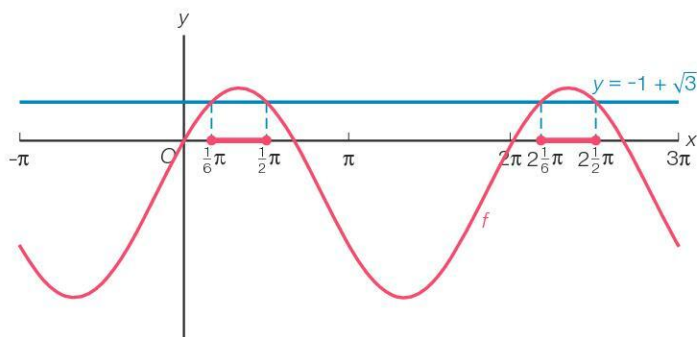
$$x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [-\pi, 3\pi] \text{ geeft } x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi \vee x = 0 \vee x = 2\pi$$

Dus de afstand tussen B en C is $2\pi - \frac{2}{3}\pi = 1\frac{2}{3}\pi$.

d $f(x) = -1 + \sqrt{3}$ geeft $-1 + 2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = -1 + \sqrt{3}$
 $2 \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = \sqrt{3}$
 $\cos(x - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 x in $[-\pi, 3\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 2\frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi \vee x = 2\frac{1}{6}\pi$



$f(x) \geq -1 + \sqrt{3}$ geeft $\frac{1}{6}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi \vee 2\frac{1}{6}\pi \leq x \leq 2\frac{1}{2}\pi$

10 a $\sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$
 $2x + \frac{1}{2}\pi = x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \frac{1}{2}\pi = \pi - (x - \frac{1}{3}\pi) + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \frac{1}{2}\pi = \pi - x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

b $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = \cos(4x + \frac{1}{4}\pi)$
 $x - \frac{1}{6}\pi = 4x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = -(4x + \frac{1}{4}\pi) + k \cdot 2\pi$
 $-3x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = -4x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{5}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee 5x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{5}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = -\frac{1}{60}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

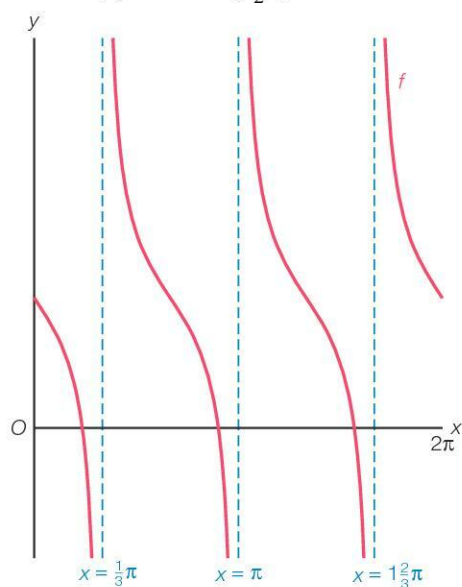
c $\tan(\frac{2}{3}\pi x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$
 $\frac{2}{3}\pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$
 $x = 1\frac{1}{4} + k \cdot 1\frac{1}{2}$

d $\tan(2x - \frac{1}{3}\pi) = \tan(x + \frac{1}{2}\pi)$
 $2x - \frac{1}{3}\pi = x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
 $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$

11 a $f(x) = 2 - \tan(1\frac{1}{2}x)$
 Een beginpunt is $(0, 2)$.
 De periode is $\frac{\pi}{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\pi$.

De asymptoten zijn de lijnen $x = \frac{1}{3}\pi$, $x = \pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

b Voer in $y_1 = 2 - \tan(1\frac{1}{2}x)$.



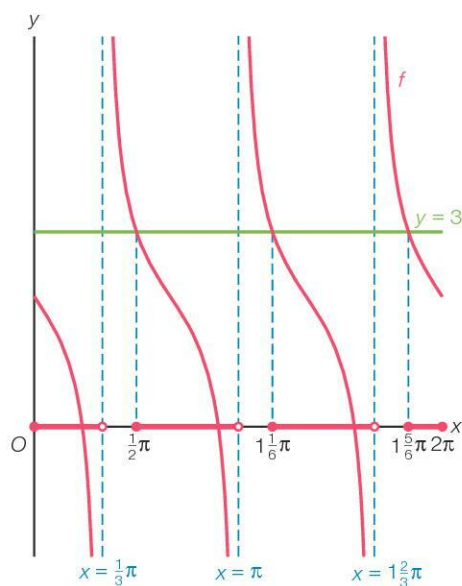
c $f(x) = 3$ geeft $2 - \tan(1\frac{1}{2}x) = 3$

$$\tan(1\frac{1}{2}x) = -1$$

$$1\frac{1}{2}x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$



$f(x) \leq 3$ geeft $0 \leq x < \frac{1}{3}\pi \vee \frac{1}{2}\pi \leq x < \pi \vee 1\frac{1}{6}\pi \leq x < 1\frac{2}{3}\pi \vee 1\frac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\pi$

12 a $\sin(2x - \frac{2}{3}\pi) = \cos(2x - \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi) = \cos(2x - 1\frac{1}{6}\pi)$

b $-\cos(5x + 1\frac{1}{4}\pi) = \cos(5x + 1\frac{1}{4}\pi + \pi) = \cos(5x + 2\frac{1}{4}\pi) = \sin(5x + 2\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(5x + 2\frac{3}{4}\pi) = \sin(5x + \frac{3}{4}\pi)$

c $(\sin(x) - \cos(x)) \cdot (\sin(x) + \cos(x)) \cdot \cos(x) = (\sin^2(x) - \cos^2(x)) \cdot \cos(x) =$
 $(1 - \cos^2(x) - \cos^2(x)) \cdot \cos(x) = (1 - 2\cos^2(x)) \cdot \cos(x) = \cos(x) - 2\cos^3(x)$

13 a $f(x) = x^3 \sin(4x)$ geeft $f'(x) = 3x^2 \cdot \sin(4x) + x^3 \cdot \cos(4x) \cdot 4 = 3x^2 \sin(4x) + 4x^3 \cos(4x)$

b $g(x) = \frac{\sin(2x)}{2 + \cos(x)}$ geeft

$$g'(x) = \frac{(2 + \cos(x)) \cdot \cos(2x) \cdot 2 - \sin(2x) \cdot (-\sin(x))}{(2 + \cos(x))^2} = \frac{4 \cos(2x) + 2 \cos(x) \cos(2x) + \sin(x) \sin(2x)}{(2 + \cos(x))^2}$$

c $h(x) = 5 \sin^2(x)$ geeft $h'(x) = 10 \sin(x) \cos(x)$

d $j(x) = \tan(x^3)$ geeft $j'(x) = \frac{1}{\cos^2(x^3)} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\cos^2(x^3)}$

14 $f(x) = \frac{\sin(2x)}{2 + \sin(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(2 + \sin(x)) \cdot \cos(2x) \cdot 2 - \sin(2x) \cdot \cos(x)}{(2 + \sin(x))^2} = \frac{4 \cos(2x) + 2 \sin(x) \cos(2x) - \sin(2x) \cos(x)}{(2 + \sin(x))^2}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{2}\pi) = \frac{4 \cos(\pi) + 2 \sin(\frac{1}{2}\pi) \cos(\pi) - \sin(\pi) \cos(\frac{1}{2}\pi)}{(2 + \sin(\frac{1}{2}\pi))^2} = \frac{-4 - 2 - 0}{(2 + 1)^2} = -\frac{2}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + b \\ f(\frac{1}{2}\pi) = 0, \text{ dus } A(\frac{1}{2}\pi, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi + b = 0 \\ b = \frac{1}{3}\pi \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\pi$.

Gemengde opgaven

5 Machten, exponenten en logaritmen

Bladzijde 172

- 1 a** $a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[4]{b^3} = \frac{\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[3]{a}}$
 $(81p^2)^{-\frac{3}{4}} = 81^{-\frac{3}{4}} \cdot (p^2)^{-\frac{3}{4}} = (3^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot p^{-1\frac{1}{2}} = 3^{-3} \cdot \frac{1}{p^{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{p\sqrt{p}} = \frac{1}{27p\sqrt{p}}$
 $\frac{10a^{-5}}{(4a)^{-1\frac{1}{2}}} = \frac{10a^{-5}}{4^{-1\frac{1}{2}} \cdot a^{-1\frac{1}{2}}} = \frac{10a^{-5}}{(2^2)^{-1\frac{1}{2}} \cdot a^{-1\frac{1}{2}}} = \frac{10a^{-5}}{2^{-3} \cdot a^{-1\frac{1}{2}}} = \frac{10}{\frac{1}{8}} \cdot a^{-3\frac{1}{2}} = 80 \cdot \frac{1}{a^{3\frac{1}{2}}} = \frac{80}{a^3 \cdot \sqrt{a}}$
- b** $x^4 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} = x^4 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{4+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}} = x^{5\frac{1}{12}}$
 $\frac{x^2}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^2}{x \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^2}{x^{1\frac{2}{3}}} = x^{2-1\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$
 $\frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{x^{2\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{2\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = x^{1\frac{1}{4}}$
- 2 a** $y = \frac{6x^4}{(2\sqrt{x})^3} = \frac{6x^4}{2^3 \cdot (\sqrt{x})^3} = \frac{6x^4}{8 \cdot (x^{\frac{1}{2}})^3} = \frac{6x^4}{8 \cdot x^{1\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4}x^{4-1\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}x^{2\frac{1}{2}}$
Dus $y = \frac{3}{4}x^{2\frac{1}{2}}$.
- b** $y = (\frac{1}{4})^{2-\frac{1}{2}x} = (\frac{1}{4})^2 \cdot (\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{16} \cdot (2^{-2})^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{16} \cdot 2^x$
Dus $y = \frac{1}{16} \cdot 2^x$.
- c** $y = 4x^{-1\frac{2}{3}} \cdot (3x^4)^2 = 4x^{-1\frac{2}{3}} \cdot 3^2 \cdot (x^4)^2 = 36x^{-1\frac{2}{3}} \cdot x^8 = 36x^{6\frac{1}{3}}$
 $36x^{6\frac{1}{3}} = y$
 $x^{\frac{19}{3}} = \frac{1}{36}y$
 $x = (\frac{1}{36}y)^{\frac{3}{19}}$
 $x = (\frac{1}{36})^{\frac{3}{19}} \cdot y^{\frac{3}{19}}$
 $x \approx 0,57 \cdot y^{0,16}$
Dus $x = 0,57y^{0,16}$.
- d** $A = 6 + 2\sqrt{3B+2}$
 $6 + 2\sqrt{3B+2} = A$
 $2\sqrt{3B+2} = A - 6$
kwadrateren geeft
 $4(3B+2) = A^2 - 12A + 36$
 $3B+2 = \frac{1}{4}A^2 - 3A + 9$
 $3B = \frac{1}{4}A^2 - 3A + 7$
 $B = \frac{1}{12}A^2 - A + 2\frac{1}{3}$

3 a $(x^{\frac{1}{2}} - 4)(2x^{\frac{2}{3}} - 16) = 0$
 $x^{\frac{1}{2}} - 4 = 0 \vee 2x^{\frac{2}{3}} - 16 = 0$
 $\sqrt{x} = 4 \vee 2x^{\frac{2}{3}} = 16$
 $x = 16 \vee x^{\frac{2}{3}} = 8$
 $x = 16 \vee x = 8^{\frac{3}{2}}$
 $x = 16 \vee x = (2^3)^{\frac{3}{2}}$
 $x = 16 \vee x = 2^{4\frac{1}{2}}$
 $x = 16 \vee x = 16\sqrt{2}$

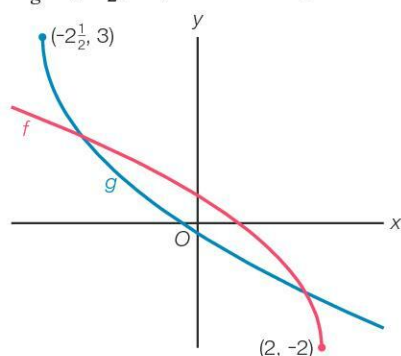
b $\frac{1}{2}(2x^2 - 5)^{\frac{1}{2}} = 4$
 $(2x^2 - 5)^{\frac{1}{2}} = 8$
 $2x^2 - 5 = 8^{\frac{2}{3}}$
 $2x^2 - 5 = (2^3)^{\frac{2}{3}}$
 $2x^2 - 5 = 4$
 $2x^2 = 9$
 $x^2 = 4\frac{1}{2}$
 $x = \sqrt{4\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{4\frac{1}{2}}$
 $x = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = -1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c $2^{x+4} - 2^{x+3} = 16\sqrt{2}$
 $2^x \cdot 2^4 - 2^x \cdot 2^3 = 16\sqrt{2}$
 $16 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x = 16\sqrt{2}$
 $8 \cdot 2^x = 16\sqrt{2}$
 $2^x = 2\sqrt{2}$
 $2^x = 2^{1\frac{1}{2}}$
 $x = 1\frac{1}{2}$

4 a $y = \sqrt{x}$
 $\downarrow$ verm. y-as, $-\frac{1}{3}$
 $y = \sqrt{-3x}$
 $\downarrow$ translatie $(2, -2)$
 $f(x) = -2 + \sqrt{-3(x-2)} = -2 + \sqrt{6-3x}$

b $6 - 3x \geq 0$
 $-3x \geq -6$
 $x \leq 2$
 $D_f = \langle \leftarrow, 2 \rangle$ en het randpunt van de grafiek van f is $(2, -2)$.

$4x + 10 \geq 0$
 $4x \geq -10$
 $x \geq -2\frac{1}{2}$
 $D_g = [-2\frac{1}{2}, \rightarrow)$ en het randpunt van de grafiek van g is $(-2\frac{1}{2}, 3)$.

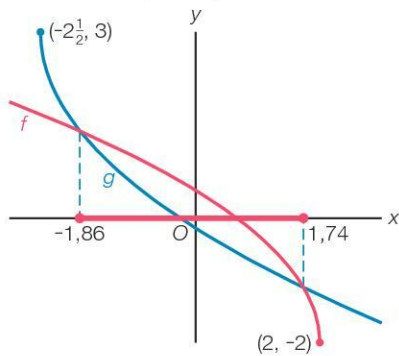


d $5 \cdot 2^{5x-1} + 6 = 56$
 $5 \cdot 2^{5x-1} = 50$
 $2^{5x-1} = 10$
 $5x - 1 = {}^2\log(10)$
 $5x = 1 + {}^2\log(10)$
 $x = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot {}^2\log(10)$

e ${}^3\log(3^{x-1} + 5) = 2$
 $3^{x-1} + 5 = 3^2$
 $3^{x-1} + 5 = 9$
 $3^{x-1} = 4$
 $x - 1 = {}^3\log(4)$
 $x = 1 + {}^3\log(4)$

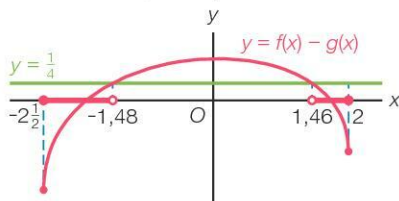
f $2^{2x+3} + 2^{x+5} = 168$
 $2^{2x} \cdot 2^3 + 2^x \cdot 2^5 = 168$
 $8 \cdot 2^{2x} + 32 \cdot 2^x - 168 = 0$
 $(2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 21 = 0$
 Stel $2^x = u$.
 $u^2 + 4u - 21 = 0$
 $(u - 3)(u + 7) = 0$
 $u = 3 \vee u = -7$
 $2^x = 3 \vee 2^x = -7$
 $x = {}^2\log(3)$

- c Voer in $y_1 = -2 + \sqrt{6 - 3x}$ en $y_2 = 3 - \sqrt{4x + 10}$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -1,86$ en $x \approx 1,74$.



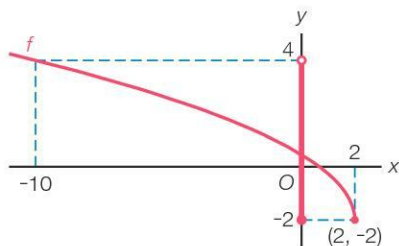
$f(x) \geq g(x)$ geeft $-1,86 \leq x \leq 1,74$

- d Zet y_1 en y_2 uit en voer in $y_3 = y_1 - y_2$ en $y_4 = \frac{1}{4}$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -1,48$ en $x \approx 1,46$.



$f(x) - g(x) < \frac{1}{4}$ geeft $-2\frac{1}{2} \leq x < -1,48 \vee 1,46 < x \leq 2$

- e $f(-10) = -2 + \sqrt{36} = 4$



Voor $x > -10$ is $-2 \leq f(x) < 4$.

5 a $(2x - 5)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$

$$2x - 5 = \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$$

$$2x - 5 = (3^{-3})^{-\frac{4}{3}}$$

$$2x - 5 = 3^4$$

$$2x - 5 = 81$$

$$2x = 86$$

$$x = 43$$

b $\left(\frac{1}{2}x^2 + 9\right) \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2 + 9} = 81$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + 9\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + 9\right)^{\frac{1}{3}} = 81$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + 9\right)^{\frac{4}{3}} = 81$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 9 = 81^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 9 = (3^4)^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 9 = 3^3$$

$$\frac{1}{2}x^2 = 18$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6 \vee x = -6$$

c $(\sqrt{3})^{x+2} = 9\sqrt{3}$

$$(3^{\frac{1}{2}})^{x+2} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{\frac{1}{2}x+1} = 3^{2\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}x + 1 = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 3$$

d $4^x + 48 = 2^{x+4}$

$$(2^2)^x + 48 = 2^x \cdot 2^4$$

$$(2^x)^2 + 48 = 16 \cdot 2^x$$

$$(2^x)^2 - 16 \cdot 2^x + 48 = 0$$

$$\text{Stel } 2^x = u.$$

$$u^2 - 16u + 48 = 0$$

$$(u - 4)(u - 12) = 0$$

$$u = 4 \vee u = 12$$

$$2^x = 4 \vee 2^x = 12$$

$$x = 2 \vee x = {}^2\log(12)$$

$$\begin{aligned} \text{e } & {}^5\log(x^2 \cdot \sqrt{x} - 7) = 2 \\ & x^2 \cdot \sqrt{x} - 7 = 5^2 \\ & x^2 \cdot \sqrt{x} = 32 \\ & x^{2\frac{1}{2}} = 32 \\ & x = 32^{\frac{2}{5}} \\ & x = (2^5)^{\frac{2}{5}} \\ & x = 2^2 \\ & x = 4 \end{aligned}$$

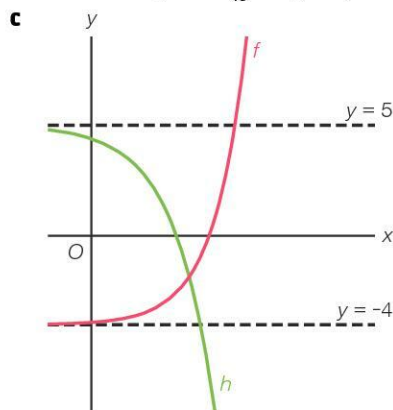
$$\begin{aligned} \text{f } & 5^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x = 5 \\ & 5^x - 6 \cdot \frac{1}{5^x} = 5 \\ & (5^x)^2 - 6 = 5 \cdot 5^x \\ & \text{Stel } 5^x = u, \\ & u^2 - 6 = 5u \\ & u^2 - 5u - 6 = 0 \\ & (u+1)(u-6) = 0 \\ & u = -1 \vee u = 6 \\ & 5^x = -1 \vee 5^x = 6 \\ & x = {}^5\log(6) \end{aligned}$$

Bladzijde 173

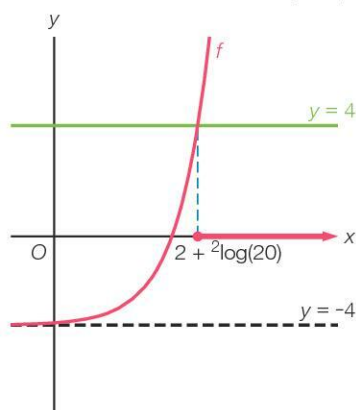
6

$$\begin{aligned} \text{a } & y = 2^x \\ & \downarrow \text{verm. } x\text{-as, } 0,4 \\ & y = 0,4 \cdot 2^x \\ & \downarrow \text{translatie } (2, -4) \\ & f(x) = 0,4 \cdot 2^{x-2} - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } & k(x) = 5 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}(x-6)+1} - 4 = 1 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-2} = 1 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x} \cdot 3^{-2} = 1 - 0,2 \cdot (3^{\frac{1}{2}})^x \cdot \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{45} \cdot (\sqrt{3})^x \\ & \text{Dus } a = 1, b = -\frac{1}{45} \text{ en } g = \sqrt{3}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{d } & f(x) = 4 \text{ geeft } 0,4 \cdot 2^{x-2} - 4 = 4 \\ & 0,4 \cdot 2^{x-2} = 8 \\ & 2^{x-2} = 20 \\ & x - 2 = {}^2\log(20) \\ & x = 2 + {}^2\log(20) \end{aligned}$$



$$f(x) \geq 4 \text{ geeft } x \geq 2 + {}^2\log(20)$$

$$\begin{aligned} \text{e } & \text{De lengte van } AB \text{ is } 3 \text{ geeft } f(p) - h(p) = 3 \vee f(p) - h(p) = -3. \\ & f(p) - h(p) = 0,4 \cdot 2^{p-2} - 4 - (5 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}p+1}) = 0,4 \cdot 2^{p-2} + 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}p+1} - 9 \\ & \text{Voer in } y_1 = 0,4 \cdot 2^{x-2} + 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x+1} - 9, y_2 = 3 \text{ en } y_3 = -3. \\ & \text{De optie snijpunt met } y_1 \text{ en } y_2 \text{ geeft } x \approx 4,92. \\ & \text{De optie snijpunt met } y_1 \text{ en } y_3 \text{ geeft } x \approx 3,74. \\ & \text{Dus voor } p \approx 4,92 \text{ en voor } p \approx 3,74. \end{aligned}$$

- f** $B_f = \langle -4, \rightarrow \rangle$, dus de vergelijking $f(x) = q$ heeft één oplossing voor $q > -4$.
 $B_h = \langle \leftarrow, 5 \rangle$, dus de vergelijking $h(x) = q$ heeft geen oplossing voor $q \geq 5$.
Dus $f(x) = q$ heeft één en $h(x) = q$ heeft geen oplossing voor $q \geq 5$.

7 De beeldgrafiek van de grafiek van f is $y = \sqrt{\frac{2}{a}x - 4} + b$.

De beeldgrafiek van de grafiek van g is $y = \sqrt{\frac{1}{a}x + 1} + b$.

De beeldgrafieken gaan door $A(4, 5)$ geeft $\sqrt{\frac{8}{a} - 4} + b = 5 \wedge \sqrt{\frac{4}{a} + 1} + b = 5$.

Hieruit volgt $\sqrt{\frac{8}{a} - 4} = 5 - b \wedge \sqrt{\frac{4}{a} + 1} = 5 - b$.

$$\sqrt{\frac{8}{a} - 4} = \sqrt{\frac{4}{a} + 1}$$

kwadrateren geeft

$$\frac{8}{a} - 4 = \frac{4}{a} + 1$$

$$\frac{4}{a} = 5$$

$$a = \frac{4}{5}$$

$a = \frac{4}{5}$ en $\sqrt{\frac{4}{a} + 1} + b = 5$ geeft $\sqrt{5 + 1} + b = 5$, dus $b = 5 - \sqrt{6}$.

8 a $T = a \cdot R^{1,5}$ geeft $a = \frac{T}{R^{1,5}}$

$R = 5,28$ en $T = 4,5$ geeft $a = \frac{4,5}{5,28^{1,5}} \approx 0,37$

$R = 3,78$ en $T = 2,7$ geeft $a = \frac{2,7}{3,78^{1,5}} \approx 0,37$

$R = 2,95$ en $T = 1,9$ geeft $a = \frac{1,9}{2,95^{1,5}} \approx 0,37$

Dus $a \approx 0,37$.

- b** Straal is $3,56 \cdot 10^6$ km = $35,6 \cdot 10^5$ km, dus $R = 35,6$.

$R = 35,6$ geeft $T = 0,37 \cdot 35,6^{1,5} \approx 78,6$

Dus de omlooptijd is ongeveer 78,6 dagen.

- c** $R_{\text{Rhea}} = 5,28$ geeft $R_{\text{Titan}} = 2,3 \cdot 5,28 = 12,144$

$T_{\text{Titan}} = 0,37 \cdot 12,144^{1,5} = 15,65\dots$

De omlooptijd is $\frac{15,65\dots}{4,5} \approx 3,5$ keer zo groot.

- d** $T = 0,37R^{1,5}$

$0,37R^{1,5} = T$

$R^{1,5} = \frac{1}{0,37} \cdot T$

$R = \left(\frac{1}{0,37} \cdot T\right)^{\frac{2}{3}}$

$R = \left(\frac{1}{0,37}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot T^{\frac{2}{3}}$

$R \approx 1,94 \cdot T^{0,67}$

Dus $R = 1,94 \cdot T^{0,67}$.

- e** Omlooptijd 15 uur geeft $T = \frac{15}{24}$.

$R = 1,94 \cdot \left(\frac{15}{24}\right)^{0,67} \approx 1,42$

De straal is ongeveer $1,42 \cdot 10^5$ km.

9 a $2x + 4 > 0$

$$2x > -4$$

$$x > -2$$

$D_f = \langle -2, \rightarrow \rangle$ en de verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = -2$.

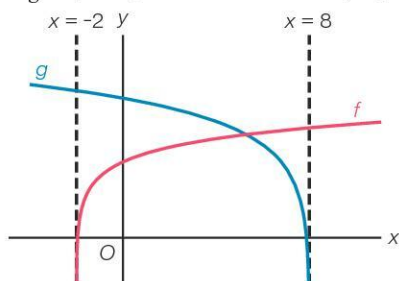
$$8 - x > 0$$

$$-x > -8$$

$$x < 8$$

$D_g = \langle \leftarrow, 8 \rangle$ en de verticale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $x = 8$.

b



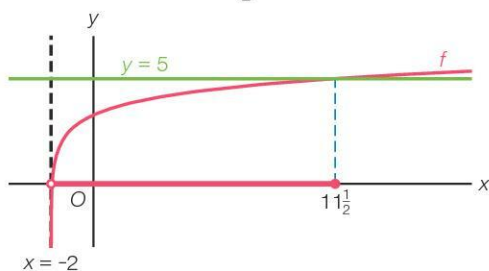
c $f(x) = 5$ geeft $2 + {}^3\log(2x + 4) = 5$

$${}^3\log(2x + 4) = 3$$

$$2x + 4 = 3^3$$

$$2x = 23$$

$$x = 11\frac{1}{2}$$



$f(x) \leq 5$ geeft $-2 < x \leq 11\frac{1}{2}$

d $f(x) = 2$ geeft $2 + {}^3\log(2x + 4) = 2$

$${}^3\log(2x + 4) = 0$$

$$2x + 4 = 1$$

$$2x = -3$$

$$x = -1\frac{1}{2}$$

Dus $x_A = -1\frac{1}{2}$.

$g(x) = 2$ geeft $3 - \frac{1}{2}\log(8 - x) = 2$

$$\frac{1}{2}\log(8 - x) = 1$$

$$8 - x = \frac{1}{2}$$

$$x = 7\frac{1}{2}$$

Dus $x_B = 7\frac{1}{2}$.

$AB = x_B - x_A = 7\frac{1}{2} - (-1\frac{1}{2}) = 9$

10 a $L = 34$ geeft $7,5G^{0,25} = 34$

$$G^{0,25} = \frac{34}{7,5}$$

$$G = \left(\frac{34}{7,5}\right)^4 \approx 422$$

Het gemiddelde gewicht is 422 kg.

b $H = 900$ geeft $280G^{-0,25} = 900$

$$G^{-0,25} = \frac{900}{280}$$

$$G = \left(\frac{900}{280}\right)^{-4} = 0,009...$$

$G = 0,009...$ geeft $L = 7,5 \cdot 0,009...^{0,25} = 2,33...$

Het aantal hartslagen is $900 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 2,33... \approx 1,1 \cdot 10^9$.

Dus ongeveer 1,1 miljard hartslagen.

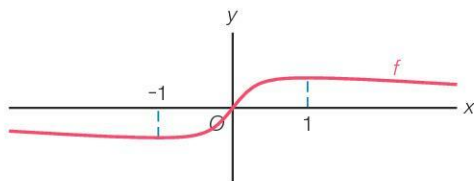
- c L is de levensverwachting in jaren, dus $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot L = 525\,600L$ is de levensverwachting in minuten.
 H is het aantal hartslagen per minuut, dus $525\,600L \cdot H$ is het aantal hartslagen in het gehele leven.
 Als $L \cdot H$ voor elk zoogdier gelijk is, dan moet $L \cdot H$ voor elk zoogdier hetzelfde getal zijn.
 $L \cdot H = 7,5G^{0,25} \cdot 280G^{-0,25} = 2100G^0 = 2100$
 Dus $L \cdot H = 2100$.

6 Differentiaalrekening

- 11 a $f(x) = \frac{x^5 - 5x^2}{x^6} = x^{-1} - 5x^{-4}$ geeft $f'(x) = -x^{-2} + 20x^{-5} = -\frac{1}{x^2} + \frac{20}{x^5} = \frac{-x^3 + 20}{x^5}$
- b $g(x) = 4x^3 \cdot \sqrt{x} - \frac{4}{x^3 \cdot \sqrt{x}} = 4x^{3\frac{1}{2}} - 4x^{-3\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = 14x^{2\frac{1}{2}} + 14x^{-4\frac{1}{2}} = 14x^2 \cdot \sqrt{x} + \frac{14}{x^4 \cdot \sqrt{x}}$
- c $h(x) = (x\sqrt{x} + 2)^4$ geeft $h'(x) = 4(x\sqrt{x} + 2)^3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x} = 6\sqrt{x} \cdot (x\sqrt{x} + 2)^3$
- 12 a $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$
 $f_p'(x) = 4x^3 + 3px^2 + x + 4$
 $f_p''(x) = 12x^2 + 6px + 1$
 $f_p''(x) = 0$ geeft $12x^2 + 6px + 1 = 0$
 $D = (6p)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 36p^2 - 48$
 $D > 0$ geeft $36p^2 > 48$
 $p^2 > \frac{4}{3}$
 $p < -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee p > \frac{2}{3}\sqrt{3}$
 Dus de grafiek van f_p heeft twee buigpunten voor $p < -\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee p > \frac{2}{3}\sqrt{3}$.
- b $f_p'(x) = 4$ geeft $4x^3 + 3px^2 + x + 4 = 4$
 $4x^3 + 3px^2 + x = 0$
 $x(4x^2 + 3px + 1) = 0$
 $x = 0 \vee 4x^2 + 3px + 1 = 0$
 Van $4x^2 + 3px + 1 = 0$ is $D = (3p)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9p^2 - 16$
 $D > 0$ geeft $9p^2 > 16$
 $p^2 > \frac{16}{9}$
 $p < -\frac{4}{3} \vee p > \frac{4}{3}$
 Dus $4x^2 + 3px + 1 = 0$ heeft twee (van 0 verschillende) oplossingen voor $p < -\frac{4}{3} \vee p > \frac{4}{3}$.
 Dus de grafiek van f_p heeft voor $p < -1\frac{1}{3} \vee p > 1\frac{1}{3}$ drie raaklijnen die evenwijdig zijn met k .

Bladzijde 175

- 13 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{x}{4x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2 + 4) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} + \frac{(4x^2 + 1) \cdot 1 - x \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2}$
 $= \frac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} + \frac{4x^2 + 1 - 8x^2}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2} + \frac{-4x^2 + 1}{(4x^2 + 1)^2}$
 $f'(1) = f'(-1) = \frac{-1 + 4}{(1 + 4)^2} + \frac{-4 + 1}{(4 + 1)^2} = \frac{3}{25} - \frac{3}{25} = 0$



- $f'(1) = 0$ en $f'(-1) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek toppen heeft voor $x = 1$ en $x = -1$.
 Dus f heeft extremen voor $x = 1$ en $x = -1$.

14 a $f(x) = \frac{3x^2 - 9}{x^3} = 3x^{-1} - 9x^{-3}$ geeft $f'(x) = -3x^{-2} + 27x^{-4} = -\frac{3}{x^2} + \frac{27}{x^4} = \frac{-3x^2 + 27}{x^4}$
 $f'(x) = 0$ geeft $-3x^2 + 27 = 0$
 $3x^2 = 27$
 $x^2 = 9$
 $x = 3 \vee x = -3$

Zie figuur G.2 in het leerboek.

min. is $f(-3) = -\frac{2}{3}$ en max. is $f(3) = \frac{2}{3}$.

b $f'(x) = 24$ geeft $\frac{-3x^2 + 27}{x^4} = 24$
 $-3x^2 + 27 = 24x^4$
 $24x^4 + 3x^2 - 27 = 0$
 $8x^4 + x^2 - 9 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $8u^2 + u - 9 = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 8 \cdot -9 = 289$
 $u = \frac{-1 \pm 17}{16} = 1 \vee u = \frac{-1 - 17}{16} = -1\frac{1}{8}$
 $x^2 = 1 \vee x^2 = -1\frac{1}{8}$
 $x = 1 \vee x = -1$

De raakpunten zijn $(1, -6)$ en $(-1, 6)$.

c Voor raken geldt $f(x) = ax^2 \wedge f'(x) = 2ax$
 $\frac{3x^2 - 9}{x^3} = ax^2 \wedge \frac{-3x^2 + 27}{x^4} = 2ax$
 $a = \frac{3x^2 - 9}{x^5} \wedge a = \frac{-3x^2 + 27}{2x^5}$

Hieruit volgt $\frac{3x^2 - 9}{x^5} = \frac{-3x^2 + 27}{2x^5}$

$$\frac{6x^2 - 18}{2x^5} = \frac{-3x^2 + 27}{2x^5}$$

$$6x^2 - 18 = -3x^2 + 27$$

$$9x^2 = 45$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$

$$x = \sqrt{5} \text{ geeft } a = \frac{3 \cdot 5 - 9}{25\sqrt{5}} = \frac{6}{125}\sqrt{5}$$

$$x = -\sqrt{5} \text{ geeft } a = \frac{3 \cdot 5 - 9}{-25\sqrt{5}} = -\frac{6}{125}\sqrt{5}$$

$$\text{Dus voor } a = \frac{6}{125}\sqrt{5} \vee a = -\frac{6}{125}\sqrt{5}.$$

15 a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 4x}$ geeft $f'(x) = 2x \cdot \sqrt{x^2 + 4x} + x^2 \cdot \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}} = \frac{2x(x^2 + 4x) + x^2(x + 2)}{\sqrt{x^2 + 4x}}$
 $= \frac{2x^3 + 8x^2 + x^3 + 2x^2}{\sqrt{x^2 + 4x}} = \frac{3x^3 + 10x^2}{\sqrt{x^2 + 4x}}$

b $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4x}}$ geeft $g'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x} \cdot 2x - x^2 \cdot \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}}}{x^2 + 4x} = \frac{2x(x^2 + 4x) - x^2(x + 2)}{(x^2 + 4x)\sqrt{x^2 + 4x}}$
 $= \frac{2x^3 + 8x^2 - x^3 - 2x^2}{(x^2 + 4x)\sqrt{x^2 + 4x}} = \frac{x^3 + 6x^2}{(x^2 + 4x)\sqrt{x^2 + 4x}} = \frac{x^2 + 6x}{(x + 4)\sqrt{x^2 + 4x}}$

c $h(x) = \frac{5x}{(x^2 - 2x)^3}$ geeft $h'(x) = \frac{(x^2 - 2x)^3 \cdot 5 - 5x \cdot 3(x^2 - 2x)^2 \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^6} = \frac{(x^2 - 2x) \cdot 5 - 5x \cdot 3 \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^4}$
 $= \frac{5x^2 - 10x - 30x^2 + 30x}{(x^2 - 2x)^4} = \frac{-25x^2 + 20x}{(x^2 - 2x)^4} = \frac{5x(4 - 5x)}{(x^2 - 2x)^4}$

16 a $f_p(x) = x^3 + px^2 - 3x + 8$ geeft $f_p'(x) = 3x^2 + 2px - 3$

$$f_p'(-\frac{1}{3}) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{3} - \frac{2}{3}p - 3 = 0$$

$$-\frac{2}{3}p = \frac{8}{3}$$

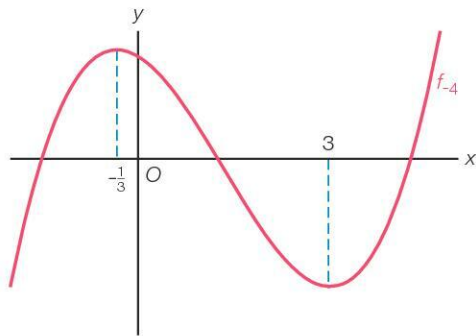
$$p = -4$$

$$f_{-4}(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 8 \text{ geeft } f_{-4}'(x) = 3x^2 - 8x - 3$$

$$f_{-4}'(x) = 0 \text{ geeft } 3x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$

$$x = \frac{8+10}{6} = 3 \vee x = \frac{8-10}{6} = -\frac{1}{3}$$



$$\text{min. is } f_{-4}(3) = 27 - 36 - 9 + 8 = -10.$$

b $f_p'(x) = 3x^2 + 2px - 3$ geeft $f_p''(x) = 6x + 2p$

$$f_p''(1) = 0 \text{ geeft } 6 + 2p = 0$$

$$2p = -6$$

$$p = -3$$

$$y_A = f_{-3}(1) = 1 - 3 - 3 + 8 = 3$$

c Er moet gelden $f_p(x) = -3x + 12 \wedge f_p'(x) = -3$.

$$f_p'(x) = -3 \text{ geeft } 3x^2 + 2px - 3 = -3$$

$$3x^2 + 2px = 0$$

$$x(3x + 2p) = 0$$

$$x = 0 \vee 3x + 2p = 0$$

$$x = 0 \vee x = -\frac{2}{3}p$$

$x = 0$ geeft het punt $(0, 8)$ op de grafiek van f_p en dit punt ligt niet op de lijn $y = -3x + 12$, dus $x = 0$ voldoet niet.

$$x = -\frac{2}{3}p \text{ substitueren in } f_p(x) = -3x + 12 \text{ geeft } f_p(-\frac{2}{3}p) = -3 \cdot -\frac{2}{3}p + 12$$

$$(-\frac{2}{3}p)^3 + p \cdot (-\frac{2}{3}p)^2 - 3 \cdot -\frac{2}{3}p + 8 = -3 \cdot -\frac{2}{3}p + 12$$

$$-\frac{8}{27}p^3 + \frac{4}{9}p^3 = 4$$

$$\frac{4}{27}p^3 = 4$$

$$p^3 = 27$$

$$p = 3$$

d $f_p'(x) = 0$ geeft $3x^2 + 2px - 3 = 0$

$$2px = -3x^2 + 3$$

$$p = \frac{-3x^2 + 3}{2x}$$

$$\text{Substitutie van } p = \frac{-3x^2 + 3}{2x} \text{ in } y = f_p(x) \text{ geeft } y = x^3 + \frac{-3x^2 + 3}{2x} \cdot x^2 - 3x + 8$$

$$y = x^3 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x - 3x + 8$$

$$y = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + 8$$

Dus alle toppen liggen op de kromme $y = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + 8$.

17 a $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{\sqrt{x}} = x^{2\frac{1}{2}} - x^{1\frac{1}{2}} - 2\sqrt{x}$ geeft

$$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x\sqrt{x}}{2} - \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}}$$

b $f'(x) = 0$ geeft $5x^2 - 3x - 2 = 0$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -2 = 49$$

$$x = \frac{3+7}{10} = 1 \vee x = \frac{3-7}{10} = -\frac{2}{5}$$

vold. vold. niet

Zie figuur G.3 in het leerboek.

min. is $f(1) = -2$.

c $f(x) = 0$ geeft $x^3 - x^2 - 2x = 0$

$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x(x+1)(x-2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$$

vold. niet vold. niet vold.

Dus $A(2, 0)$.

De lijn l raakt de grafiek van f in A .

$$rc_l = f'(2) = \frac{20 - 6 - 2}{2\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$rc_k \cdot rc_l = -1, \text{ dus } rc_k = -\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

$$k: y = -\frac{1}{3\sqrt{2}}x + b \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot 2 + b = 0 \\ \text{door } A(2, 0) \end{array} \right.$$

$$b = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$k: y = -\frac{1}{3\sqrt{2}}x + \frac{2}{3\sqrt{2}} \text{ oftewel } k: 3y\sqrt{2} = -x + 2$$

$$\text{Dus } k: x + 3y\sqrt{2} = 2.$$

d $f'(x) = 16\frac{1}{2}$ geeft $\frac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}} = \frac{33}{2}$

$$5x^2 - 3x - 2 = 33\sqrt{x}$$

Voer in $y_1 = 5x^2 - 3x - 2$ en $y_2 = 33\sqrt{x}$.

De optie snijpunt geeft $x = 4$.

$f(4) = 20$, dus $B(4, 20)$.

$$y = 16\frac{1}{2}x + b \left\{ \begin{array}{l} 66 + b = 20 \\ \text{door } B(4, 20) \end{array} \right. \quad b = -46$$

$$\text{Dus } m: y = 16\frac{1}{2}x - 46.$$

18 $9 - x^2 \geq 0$

$$-x^2 \geq -9$$

$$x^2 \leq 9$$

$$-3 \leq x \leq 3$$

Dus $D_f = [-3, 3]$.

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \frac{1}{2}x^2 - 2 \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9 - x^2}} \cdot -2x + x = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} + x$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} + x = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = x$$

$$x = 0 \vee \sqrt{9-x^2} = 1$$

$$x = 0 \vee 9 - x^2 = 1$$

$$x = 0 \vee x^2 = 8$$

$$x = 0 \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$$

max. is $f(-2\sqrt{2}) = f(2\sqrt{2}) = \sqrt{9-8} + \frac{1}{2} \cdot 8 - 2 = 3$ en min. is $f(0) = \sqrt{9} + 0 - 2 = 1$.

$$f(-3) = f(3) = \sqrt{9-9} + \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 2 = 2\frac{1}{2}$$

Dus $B_f = [1, 3]$.

19 a $f_p(x) = x\sqrt{x} + p\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} + p\sqrt{x}$ geeft $f'_p(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+p}{2\sqrt{x}}$

$$f'_p(4) = 5 \text{ geeft } \frac{12+p}{2\sqrt{4}} = 5$$

$$12+p = 20$$

$$p = 8$$

$$f_8(x) = x\sqrt{x} + 8\sqrt{x} \text{ geeft } f_8(4) = 8 + 16 = 24$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 5x + q \\ \text{door } A(4, 24) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 20 + q = 24 \\ q = 4 \end{array}$$

b $f'_p(x) = 0$ geeft $3x + p = 0$

$$\left. \begin{array}{l} p = -3x \\ y = x\sqrt{x} + p\sqrt{x} \end{array} \right\} y = x\sqrt{x} - 3x\sqrt{x} = -2x\sqrt{x}$$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = -2x\sqrt{x}$.

c $-2x\sqrt{x} = -2$

$$x\sqrt{x} = 1$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1 \text{ vold.}$$

$$f'_p(1) = 0 \text{ geeft } 3 + p = 0, \text{ dus } p = -3.$$

20 a $f(x) = (x+1)\sqrt{4x^2+1}$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{4x^2+1} + (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}} \cdot 8x = \sqrt{4x^2+1} + \frac{4x(x+1)}{\sqrt{4x^2+1}}$

$$rc_k = f'(0) = 1$$

$$g_a(x) = 4 + \frac{8}{(ax-2)^2} = 4 + 8(ax-2)^{-2} \text{ geeft } g'_a(x) = -16(ax-2)^{-3} \cdot a = \frac{-16a}{(ax-2)^3}$$

$$rc_l = g'_a(0) = \frac{-16a}{-8} = 2a$$

$$k \perp l \text{ geeft } rc_k \cdot rc_l = -1$$

$$1 \cdot 2a = -1$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

b $f(0) = 1$, dus $A(0, 1)$ en $k: y = x + 1$.

$$g_a(0) = 4 + \frac{8}{(0-2)^2} = 4 + \frac{8}{4} = 4 + 2 = 6, \text{ dus } l: y = 2ax + 6.$$

$$k \text{ snijdt de } x\text{-as in } (-1, 0).$$

$$(-1, 0) \text{ op } l \text{ geeft } -2a + 6 = 0$$

$$-2a = -6$$

$$a = 3$$

21 a $f(p) = \frac{4}{p}$, dus $P\left(p, \frac{4}{p}\right)$.

$$L(p) = d(O, P) = \sqrt{(p-0)^2 + \left(\frac{4}{p}-0\right)^2} = \sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}$$

b $L(p) = \sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}} = \sqrt{p^2 + 16p^{-2}}$ geeft

$$L'(p) = \frac{1}{2\sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}} \cdot (2p - 32p^{-3}) = \frac{p - 16p^{-3}}{\sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}} = \frac{p^4 - 16}{p^3 \cdot \sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}}$$

$$L'(p) = 0 \text{ geeft } p^4 - 16 = 0$$

$$p^4 = 16$$

$$p = 2 \vee p = -2$$

vold. vold. niet

$$f(2) = \frac{4}{2} = 2, \text{ dus } P(2, 2).$$

$$f(x) = \frac{4}{x} = 4x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rc}_k = f'(2) = -\frac{4}{2^2} = -1 \\ \text{rc}_{OP} = \frac{2-0}{2-0} = 1 \end{array} \right\} \text{rc}_k \cdot \text{rc}_{OP} = -1 \cdot 1 = -1$$

Dus k en OP staan loodrecht op elkaar.

22 $f(x) = \frac{x^3 + 6}{x\sqrt{x}} = \frac{x^3 + 6}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{1\frac{1}{2}} + 6x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 9x^{-2\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{9}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{3x^3 - 18}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3x^3 - 18 = 0$$

$$3x^3 = 18$$

$$x^3 = 6$$

$$x = \sqrt[3]{6}$$

$$f(\sqrt[3]{6}) = \frac{6+6}{(\sqrt[3]{6})^{1\frac{1}{2}}} = \frac{12}{6^{\frac{1}{2}}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

Dus $a = 6$ en $b = 2$.

23 $f_p(x) = \frac{10x+p}{x^2+1}$ geeft $f_p'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 10 - (10x+p) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{10x^2+10-20x^2-2px}{(x^2+1)^2} = \frac{-10x^2-2px+10}{(x^2+1)^2}$

$$f_p'(1) = \frac{-10-2p+10}{(1+1)^2} = \frac{-2p}{4} = -\frac{1}{2}p$$

Loodrecht snijden, dus $f_p'(1) \cdot \text{rc}_k = -1$

$$-\frac{1}{2}p \cdot \frac{2}{3} = -1$$

$$-\frac{1}{3}p = -1$$

$$p = 3$$

$$f_3(x) = \frac{10x+3}{x^2+1}$$

$$f_3(1) = \frac{10+3}{1+1} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}, \text{ dus } A(1, 6\frac{1}{2}).$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + q \\ \text{door } A(1, 6\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \frac{2}{3} \cdot 1 + q = 6\frac{1}{2}$$

$$q = 5\frac{5}{6}$$

Dus $p = 3$ en $q = 5\frac{5}{6}$.

7 Meetkunde met coördinaten

24 a $k: \frac{x}{2p+1} + \frac{y}{5} = 1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{2p+1} + \frac{3}{5} = 1 \\ \frac{2}{2p+1} = \frac{2}{5} \\ 2p+1 = 5 \\ 2p = 4 \\ p = 2 \\ \text{vold.} \end{array} \right.$
 $A(2, 3)$ op k

b $rc_k = \frac{0-5}{2p+1-0} = \frac{-5}{2p+1}$
 $k \parallel m$, dus $rc_k = rc_m$
 $\frac{-5}{2p+1} = -2$
 $-2(2p+1) = -5$
 $-4p-2 = -5$
 $-4p = -3$
 $p = \frac{3}{4}$

$$rc_l = \frac{q+2-0}{0-2} = \frac{q+2}{-2}$$

$l \parallel m$, dus $rc_l = rc_m$
 $\frac{q+2}{-2} = -2$
 $q+2 = 4$
 $q = 2$

Dus voor $p = \frac{3}{4} \wedge q = 2$ zijn de lijnen k , l en m evenwijdig.

- c** De lijnen k en l vallen samen als k door het punt $(2, 0)$ en l door het punt $(0, 5)$ gaat.
Dus er moet gelden $2p+1 = 2$ en $q+2 = 5$. Hieruit volgt $p = \frac{1}{2}$ en $q = 3$.
Dus voor $p = \frac{1}{2} \wedge q = 3$ vallen de lijnen k en l samen.

- 25 a** Stel $k: y = ax + b$.
 $B(1, 6)$ op k geeft $a + b = 6$, dus $b = -a + 6$.
 $k: y = ax - a + 6$ oftewel $k: ax - y - a + 6 = 0$

$$d(A, k) = 2 \text{ geeft } \frac{|-3a - 4 - a + 6|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2$$

$$|-4a + 2| = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$16a^2 - 16a + 4 = 4a^2 + 4$$

$$12a^2 - 16a = 0$$

$$4a(3a - 4) = 0$$

$$4a = 0 \vee 3a = 4$$

$$a = 0 \vee a = 1\frac{1}{3}$$

$a = 0$ geeft $b = 6$, dus $k_1: y = 6$.

$a = 1\frac{1}{3}$ geeft $b = -1\frac{1}{3} + 6 = 4\frac{2}{3}$, dus $k_2: y = 1\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3}$.

- b** Stel $AB: y = ax + b$ met $a = \frac{6-4}{1-3} = \frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(1, 6) \end{array} \right\} \frac{1}{2} \cdot 1 + b = 6$$

$$b = 5\frac{1}{2}$$

Dus $AB: y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$ oftewel $AB: x - 2y = -11$.

$l \parallel AB$, dus $l: x - 2y = c$.

$$d(B, l) = 2\sqrt{5} \text{ geeft } \frac{|1 - 2 \cdot 6 - c|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{|-11 - c|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$|-11 - c| = 10$$

$$-11 - c = 10 \vee -11 - c = -10$$

$$c = -21 \vee c = -1$$

Dus $l_1: x - 2y = -21$ en $l_2: x - 2y = -1$.

- c Lijnen n evenwijdig m en op afstand 5 van m .

$$n: 3x + 4y = c$$

$D(0, 2)$ is een punt op m .

$$d(D, n) = 5 \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$$

$$\frac{|8 - c|}{\sqrt{25}} = 5$$

$$\frac{|8 - c|}{5} = 5$$

$$|8 - c| = 25$$

$$8 - c = 25 \vee 8 - c = -25$$

$$c = -17 \vee c = 33$$

$$n_1: 3x + 4y = -17 \text{ snijden met } AB: y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \text{ geeft } 3x + 4(\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}) = -17$$

$$3x + 2x + 22 = -17$$

$$5x = -39$$

$$x = -7\frac{4}{5}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \left. \vphantom{\begin{matrix} x = -7\frac{4}{5} \\ y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \end{matrix}} \right\} y = \frac{1}{2} \cdot -7\frac{4}{5} + 5\frac{1}{2} = 1\frac{3}{5}$$

$$n_2: 3x + 4y = 33 \text{ snijden met } AB: y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \text{ geeft } 3x + 4(\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}) = 33$$

$$3x + 2x + 22 = 33$$

$$5x = 11$$

$$x = 2\frac{1}{5}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \left. \vphantom{\begin{matrix} x = 2\frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \end{matrix}} \right\} y = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{5} + 5\frac{1}{2} = 6\frac{3}{5}$$

De punten zijn $(-7\frac{4}{5}, 1\frac{3}{5})$ en $(2\frac{1}{5}, 6\frac{3}{5})$.

d $\text{rc}_{AC} = \frac{-1 - 4}{0 - -3} = -1\frac{2}{3}$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_{AB} = \frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = 26,56\dots^\circ$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_{AC} = -1\frac{2}{3} \text{ geeft } \beta = -59,03\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 26,56\dots^\circ - -59,03\dots^\circ \approx 85,6^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(AB, AC) \approx 85,6^\circ.$$

26 a $p = -3$ geeft $k: y = -3x + 1$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = -3 \text{ geeft } \alpha = -71,56\dots^\circ$$

$$l: 2x + y = 3 \text{ oftewel } l: y = -2x + 3$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = -2 \text{ geeft } \beta = -63,43\dots^\circ$$

$$\beta - \alpha = -63,43\dots^\circ - -71,56\dots^\circ \approx 8,1^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(k, l) \approx 8,1^\circ.$$

b $-63,43\dots^\circ + 15^\circ = -48,43\dots^\circ$

$$p = \text{rc}_k = \tan(-48,43\dots^\circ) \approx -1,128$$

$$-63,43\dots^\circ - 15^\circ = -78,43\dots^\circ$$

$$p = \text{rc}_k = \tan(-78,43\dots^\circ) \approx -4,887$$

Bladzijde 178

27 a $d(A, B) = \sqrt{(5p - p)^2 + (2p + 3 - 5)^2} = \sqrt{(4p)^2 + (2p - 2)^2} = \sqrt{16p^2 + 4p^2 - 8p + 4} = \sqrt{20p^2 - 8p + 4}$

b $d(A, B) = 4\sqrt{29}$ geeft $\sqrt{20p^2 - 8p + 4} = 4\sqrt{29}$

$$20p^2 - 8p + 4 = 464$$

$$20p^2 - 8p - 460 = 0$$

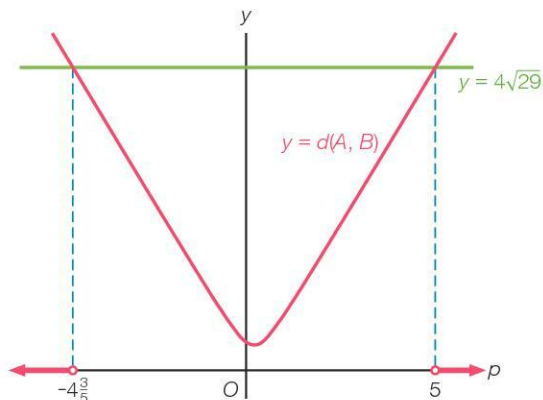
$$5p^2 - 2p - 115 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -115 = 2304$$

$$p = \frac{2 + 48}{10} = 5 \vee p = \frac{2 - 48}{10} = -4\frac{3}{5}$$

vold.

vold.



$d(A, B) > 4\sqrt{29}$ geeft $p < -4\frac{3}{5} \vee p > 5$

c $M(\frac{1}{2}(p+5p), \frac{1}{2}(5+2p+3)) = M(3p, p+4)$

Van $c: x^2 + y^2 = 16$ is het middelpunt $O(0, 0)$ en $r = 4$.

M op afstand 8 van c , dus M op de cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 12.

M op $x^2 + y^2 = 144$ geeft $(3p)^2 + (p+4)^2 = 144$

$$9p^2 + p^2 + 8p + 16 = 144$$

$$10p^2 + 8p - 128 = 0$$

$$5p^2 + 4p - 64 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot -64 = 1296$$

$$p = \frac{-4 \pm 36}{10} \vee p = \frac{-4 \pm 36}{10}$$

$$p = 3\frac{1}{5} \vee p = -4$$

d AB is een middellijn, dus van d is het middelpunt $M(3p, p+4)$.

De straal is $d(A, M) = \sqrt{(3p-p)^2 + (p+4-5)^2} = \sqrt{(2p)^2 + (p-1)^2} = \sqrt{4p^2 + p^2 - 2p + 1} = \sqrt{5p^2 - 2p + 1}$.

Dus $d: (x-3p)^2 + (y-p-4)^2 = 5p^2 - 2p + 1$.

d door de oorsprong geeft $(-3p)^2 + (-p-4)^2 = 5p^2 - 2p + 1$

$$9p^2 + p^2 + 8p + 16 = 5p^2 - 2p + 1$$

$$5p^2 + 10p + 15 = 0$$

$$p^2 + 2p + 3 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$$

geen opl.

Dus er is geen waarde van p waarvoor d door de oorsprong gaat.

28 a $r = d(M, k) = \frac{|3 \cdot 8 - 4 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$

Dus $c: (x-8)^2 + (y-2)^2 = 4$.

b Stel $l: 3x - 4y = c$.

$P(2, 0)$ is een punt op k .

$$d(P, l) = 3 \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 - c|}{5} = 3$$

$$|6 - c| = 15$$

$$6 - c = 15 \vee 6 - c = -15$$

$$c = -9 \vee c = 21$$

Dus $l_1: 3x - 4y = -9$ en $l_2: 3x - 4y = 21$.

c Stel een punt op m is $A(a, a)$.

$$d(A, k) = 4 \text{ geeft } \frac{|3a - 4a - 6|}{5} = 4$$

$$|-a - 6| = 20$$

$$-a - 6 = 20 \vee -a - 6 = -20$$

$$a = -26 \vee a = 14$$

Dus $A(-26, -26)$ en $B(14, 14)$.

29 a Met dit werkschema wordt het middelpunt M van de cirkel gevonden door het snijpunt van twee middelloodlijnen van driehoek ABC te berekenen. Daarna geeft $d(M, A)$ de straal van de cirkel.

b $rc_{AB} = \frac{1-8}{7-6} = -7$, dus $rc_k = \frac{1}{7}$.

Het midden van AB is $(\frac{1}{2}(6+7), \frac{1}{2}(8+1)) = (6\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \frac{1}{7}x + b \\ \text{door } (6\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{7} \cdot 6\frac{1}{2} + b = 4\frac{1}{2} \\ \frac{13}{14} + b = 4\frac{1}{2} \\ b = 3\frac{4}{7} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{1}{7}x + 3\frac{4}{7}$.

$rc_{AC} = \frac{4-8}{-2-6} = \frac{1}{2}$, dus $rc_l = -2$.

Het midden van AC is $(\frac{1}{2}(6+(-2)), \frac{1}{2}(8+4)) = (2, 6)$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -2x + b \\ \text{door } (2, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 2 + b = 6 \\ -4 + b = 6 \\ b = 10 \end{array}$$

Dus $l: y = -2x + 10$.

k en l snijden geeft

$$\frac{1}{7}x + 3\frac{4}{7} = -2x + 10$$

$$2\frac{1}{7}x = 6\frac{3}{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2x + 10 \end{array} \right\} y = -2 \cdot 3 + 10 = 4$$

Dus $M(3, 4)$.

$$d(M, A) = \sqrt{(6-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Dus $c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

30 a $c: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

$$x^2 - 2x + y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 5 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$$

Dus $M(1, 3)$ en $r = \sqrt{5}$.

Stel $y = ax + b$.

Door $A(5, 0)$ geeft $5a + b = 0$, dus $b = -5a$.

$$y = ax - 5a \text{ oftewel } ax - y - 5a = 0$$

$$d(M, ax - y - 5a = 0) = r \text{ geeft } \frac{|a - 3 - 5a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$|-4a - 3| = \sqrt{5a^2 + 5}$$

$$16a^2 + 24a + 9 = 5a^2 + 5$$

$$11a^2 + 24a + 4 = 0$$

$$D = 24^2 - 4 \cdot 11 \cdot 4 = 400$$

$$a = \frac{-24 \pm 20}{22} = -\frac{2}{11} \vee a = \frac{-24 - 20}{22} = -2$$

$a = -\frac{2}{11}$ geeft $b = -5 \cdot -\frac{2}{11} = \frac{10}{11}$, dus $l: y = -\frac{2}{11}x + \frac{10}{11}$.

$a = -2$ geeft $b = -5 \cdot -2 = 10$, dus $k: y = -2x + 10$.

b $\tan(\alpha) = rc_k = -2$ geeft $\alpha = -63,43\dots^\circ$

$\tan(\beta) = rc_l = -\frac{2}{11}$ geeft $\beta = -10,30\dots^\circ$

$\beta - \alpha = -10,30\dots^\circ - (-63,43\dots^\circ) \approx 53,1^\circ$

Dus $\angle(k, l) \approx 53,1^\circ$.

- c d raakt de x -as in het punt $A(5, 0)$, dus het middelpunt van d is N met $x_N = 5$.
 Stel $N(5, p)$. Dit geeft $d: (x-5)^2 + (y-p)^2 = p^2$.
 d door $M(1, 3)$ geeft $(-4)^2 + (3-p)^2 = p^2$
 $16 + 9 - 6p + p^2 = p^2$
 $-6p = -25$
 $p = 4\frac{1}{6}$
 Dus $d: (x-5)^2 + (y-4\frac{1}{6})^2 = (4\frac{1}{6})^2$ oftewel $d: (x-5)^2 + (y-4\frac{1}{6})^2 = 17\frac{13}{36}$.

Bladzijde 179

- 31 a $c_1: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 4y + 15 = 0$
 $(x-4)^2 - 16 + (y-2)^2 - 4 + 15 = 0$
 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 5$
 Dus van c_1 is het middelpunt $M(4, 2)$ en de straal $r_1 = \sqrt{5}$.
 $l \perp k$ geeft $l: x + 2y = c$.

$$d(M, l) = r \text{ geeft } \frac{|4 + 2 \cdot 2 - c|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|8 - c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|8 - c| = 5$$

$$8 - c = 5 \vee 8 - c = -5$$

$$c = 3 \vee c = 13$$

- Dus $l_1: x + 2y = 3$ en $l_2: x + 2y = 13$.
 b $d(A, M) = \sqrt{(4-15)^2 + (2-9)^2} = \sqrt{121 + 49} = \sqrt{170}$
 $d(A, c_1) = d(A, M) - r_1 = \sqrt{170} - \sqrt{5}$
 $d(M, k) = \frac{|2 \cdot 4 - 2 - 21|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$
 $d(k, c_1) = d(M, k) - r_1 = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
 $2\frac{1}{2} \cdot d(k, c_1) = 2\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
 Is $\sqrt{170} - \sqrt{5} > 5\sqrt{5}$ oftewel is $\sqrt{170} > 6\sqrt{5}$?
 $6\sqrt{5} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{180}$
 Er geldt dus niet dat $\sqrt{170} > 6\sqrt{5}$ en dus geldt niet dat $d(A, c_1) > 2\frac{1}{2} \cdot d(k, c_1)$.
 c Van lijnstuk AB met $A(15, 9)$ en $B(1, -1)$ is het midden $N(8, 4)$.
 N is tevens het middelpunt van c_2 en de straal van c_2 is
 $r_2 = d(A, N) = \sqrt{(8-15)^2 + (4-9)^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$.
 $d(M, N) = \sqrt{(8-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 $d(c_1, c_2) = r_2 - d(M, N) - r_1 = \sqrt{74} - 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{74} - 3\sqrt{5}$

- 32 a Stel $k: y = 3x + b$ oftewel $k: 3x - y + b = 0$
 Van c is het middelpunt $O(0, 0)$ en de straal $r = \sqrt{10}$.

$$d(O, k) = r \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 0 - 0 + b|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$$

$$\frac{|b|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|b| = 10$$

$$b = 10 \vee b = -10$$

Dus $k_1: y = 3x + 10$ en $k_2: y = 3x - 10$.

b Stel $l: y = ax + b$.

$A(4, 2)$ op l geeft $4a + b = 2$, dus $b = -4a + 2$.

$l: y = ax - 4a + 2$ oftewel $ax - y - 4a + 2 = 0$

$$d(O, l) = r \text{ geeft } \frac{|0 - 0 - 4a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} |-4a + 2| &= \sqrt{10a^2 + 10} \\ 16a^2 - 16a + 4 &= 10a^2 + 10 \end{aligned}$$

$$6a^2 - 16a - 6 = 0$$

$$3a^2 - 8a - 3 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$

$$a = \frac{8 + 10}{6} = 3 \vee a = \frac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$$

$a = 3$ geeft $b = -4 \cdot 3 + 2 = -10$, dus $l_1: y = 3x - 10$.

$a = -\frac{1}{3}$ geeft $b = -4 \cdot -\frac{1}{3} + 2 = 3\frac{1}{3}$, dus $l_2: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$.

c Noem de raakpunten P en Q .

$$\sin(\angle OBQ) = \frac{r}{OB} = \frac{\sqrt{10}}{4} \text{ geeft } \angle OBQ = 52,23\dots^\circ$$

$$\angle PBQ = 2 \cdot 52,23\dots^\circ \approx 104,5^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(m_1, m_2) \approx 180^\circ - 104,5^\circ = 75,5^\circ.$$

33

a $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$$

Dus $M(3, 2)$ en $r = \sqrt{13}$.

$$x = 5 \text{ geeft } (5 - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$$

$$4 + (y - 2)^2 = 13$$

$$(y - 2)^2 = 9$$

$$y - 2 = 3 \vee y - 2 = -3$$

$$y = 5 \vee y = -1$$

Dus $A(5, 5)$ en $B(5, -1)$.

$$rc_{AM} = \frac{5 - 2}{5 - 3} = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } rc_k = -\frac{2}{3}.$$

$$k: y = -\frac{2}{3}x + b \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } A(5, 5) \end{array} \right\} -\frac{2}{3} \cdot 5 + b = 5$$

$$-3\frac{1}{3} + b = 5$$

$$b = 8\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{2}{3}x + 8\frac{1}{3}.$$

$$rc_{BM} = \frac{-1 - 2}{5 - 3} = -1\frac{1}{2}, \text{ dus } rc_l = \frac{2}{3}.$$

$$l: y = \frac{2}{3}x + b \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } B(5, -1) \end{array} \right\} \frac{2}{3} \cdot 5 + b = -1$$

$$3\frac{1}{3} + b = -1$$

$$b = -4\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } l: y = \frac{2}{3}x - 4\frac{1}{3}.$$

b m evenwijdig met $n: 3x + 2y = 10$ geeft $m: 3x + 2y = c$.

$$d(M, m) = r \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - c|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \sqrt{13}$$

$$\frac{|13 - c|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$|13 - c| = 13$$

$$13 - c = 13 \vee 13 - c = -13$$

$$c = 0 \vee c = 26$$

Dus $m_1: 3x + 2y = 0$ en $m_2: 3x + 2y = 26$.

$$\begin{aligned}
 34 \quad c: x^2 + y^2 + 8x &= 0 \\
 x^2 + 8x + y^2 &= 0 \\
 (x+4)^2 - 16 + y^2 &= 0 \\
 (x+4)^2 + y^2 &= 16
 \end{aligned}$$

Dus middelpunt $M(-4, 0)$ en straal $r_c = 4$.

Lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{aligned} l: 3x - 4y &= c \\ \text{door } M(-4, 0) \end{aligned} \right\} c = 3 \cdot -4 - 4 \cdot 0 = -12$$

Dus $l: 3x - 4y = -12$.

k en l snijden geeft het punt S , dat het middelpunt van cirkel d is.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 4x + 3y = 9 \\ 3x - 4y = -12 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{r} 4 \\ 3 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 16x + 12y = 36 \\ 9x - 12y = -36 \end{cases} \\
 \hline 25x = 0 \\
 x = 0 \\
 4x + 3y = 9 \quad \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3 \end{array} \right\} 4 \cdot 0 + 3y = 9 \\
 y = 3
 \end{aligned}$$

Dus $S(0, 3)$.

$$d(M, S) = \sqrt{(0 - (-4))^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

De straal van d is $r_d = d(k, c) = d(M, S) - r_c = 5 - 4 = 1$.

Dus $d: x^2 + (y - 3)^2 = 1$.

$$35 \quad k: \frac{x}{2r} + \frac{y}{4} = 1 \text{ oftewel } k: 2x + ry = 4r$$

$$\begin{aligned}
 d(O, k) = r \text{ geeft } \frac{|2 \cdot 0 + r \cdot 0 - 4r|}{\sqrt{4 + r^2}} &= r \\
 |-4r| &= r\sqrt{4 + r^2} \\
 16r^2 &= r^2(4 + r^2) \\
 16 &= 4 + r^2 \\
 r^2 &= 12 \\
 r &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Bladzijde 180

36 a De loodlijn uit N op de y -as snijdt de y -as in het punt $Q(0, 4)$.

In driehoek MNQ geeft de stelling van Pythagoras $QN^2 + QM^2 = MN^2$

$$QN^2 + 5^2 = 13^2$$

$$QN^2 = 169 - 25 = 144$$

$$QN = 12$$

Vierhoek $OPNM$ is een trapezium.

De oppervlakte van $OPNM$ is $\frac{1}{2}(9 + 4) \cdot 12 = 78$.

b De loodlijn uit N op de y -as snijdt de y -as in het punt $Q(0, s)$.

In driehoek MNQ geeft de stelling van Pythagoras $QN^2 + QM^2 = MN^2$

$$QN^2 + (r - s)^2 = (r + s)^2$$

$$QN^2 + r^2 - 2rs + s^2 = r^2 + 2rs + s^2$$

$$QN^2 = 4rs$$

$$QN = \sqrt{4rs} = 2\sqrt{rs}$$

De oppervlakte van $OPNM$ is $\frac{1}{2}(r + s) \cdot 2\sqrt{rs} = (r + s)\sqrt{rs}$.

c De stelling van Pythagoras in driehoek QNM geeft $QM^2 + QN^2 = MN^2$

$$(r - s)^2 + QN^2 = MN^2$$

$$(r - s)^2 + 15^2 = 25^2$$

$$(r - s)^2 = 625 - 225$$

$$(r - s)^2 = 400$$

$$r - s = 20$$

$$MN = 25 \text{ geeft } r + s = 25$$

$$\begin{cases} r + s = 25 \\ r - s = 20 \end{cases} +$$

$$2r = 45$$

$$\begin{cases} r = 22\frac{1}{2} \\ r + s = 25 \end{cases} \Rightarrow 22\frac{1}{2} + s = 25$$

$$s = 2\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } r = 22\frac{1}{2} \text{ en } s = 2\frac{1}{2}.$$

37 M op k en $x_M = -3$ geeft $y_M = -1\frac{1}{3} \cdot -3 + 4 = 8$.
Dus $M(-3, 8)$.

N op k en $y_N = -4$ geeft $-1\frac{1}{3}x_N + 4 = -4$

$$-1\frac{1}{3}x_N = -8$$

$$x_N = 6$$

Dus $N(6, -4)$.

$$d(M, N) = \sqrt{(6 - (-3))^2 + (-4 - 8)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15, r_1 = 3 \text{ en } r_2 = 4.$$

$$d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = 15 - 3 - 4 = 8$$

$$d(c_1, l) = d(c_2, l) = 4$$

$$d(M, l) = r_1 + d(c_1, l) = 3 + 4 = 7$$

$$d(N, l) = r_2 + d(c_2, l) = 4 + 4 = 8$$

$k: y = -1\frac{1}{3}x + 4$ oftewel $k: 1\frac{1}{3}x + y = 4$ oftewel $k: 4x + 3y = 12$

$l \perp k$ geeft $l: 3x - 4y = c$

$$d(M, l) = 7 \text{ geeft } \frac{|3 \cdot -3 - 4 \cdot 8 - c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 7$$

$$\frac{|-41 - c|}{\sqrt{25}} = 7$$

$$\frac{|-41 - c|}{5} = 7$$

$$|-41 - c| = 35$$

$$-41 - c = 35 \vee -41 - c = -35$$

$$c = -76 \vee c = -6$$

Dus $l_1: 3x - 4y = -76$ en $l_2: 3x - 4y = -6$.

$$d(N, l_1) = \frac{|3 \cdot 6 - 4 \cdot -4 + 76|}{5} = \frac{|110|}{5} = \frac{110}{5} = 22, \text{ dus } l_1 \text{ voldoet niet.}$$

$$d(N, l_2) = \frac{|3 \cdot 6 - 4 \cdot -4 + 6|}{5} = \frac{|40|}{5} = \frac{40}{5} = 8, \text{ dus } l_2 \text{ voldoet.}$$

Een vergelijking van l is dus $3x - 4y = -6$.

8 Goniometrische functies

38 De draaiingshoek van A is $30^\circ = \frac{1}{6}\pi$ rad.

De draaiingshoek van B is $\frac{1}{6}\pi + 2$ rad.

De draaiingshoek van C is $\frac{1}{6}\pi + 4$ rad.

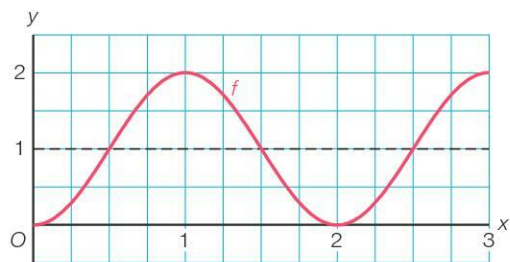
$$A(\cos(\frac{1}{6}\pi), \sin(\frac{1}{6}\pi)) \approx A(0,87; 0,5)$$

$$B(\cos(\frac{1}{6}\pi + 2), \sin(\frac{1}{6}\pi + 2)) \approx B(-0,82; 0,58)$$

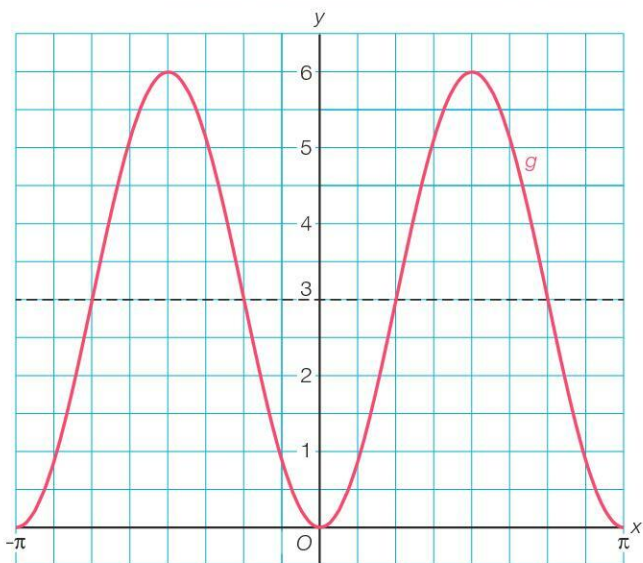
$$C(\cos(\frac{1}{6}\pi + 4), \sin(\frac{1}{6}\pi + 4)) \approx C(-0,19; -0,98)$$

- 39** a $A(\cos(\frac{2}{3}\pi), \sin(\frac{2}{3}\pi)) = A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$
 b $C(\cos(-\frac{1}{6}\pi), \sin(-\frac{1}{6}\pi)) = C(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$
 c $\cos(\beta) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $\beta = -\frac{3}{4}\pi$
 d De lengte van de langste cirkelboog BC is $1\frac{1}{4}\pi - -\frac{1}{6}\pi = 1\frac{5}{12}\pi$.

- 40** a $f(x) = 1 - \sin(\pi x + \frac{1}{2}\pi) = 1 - \sin(\pi(x + \frac{1}{2}))$
 evenwichtsstand 1
 amplitude 1
 periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
 $-1 < 0$, dus grafiek dalend door het punt $(1\frac{1}{2}, 1)$.



- b $g(x) = 3 + 3\cos(2x - \pi) = 3 + 3\cos(2(x - \frac{1}{2}\pi))$
 evenwichtsstand 3
 amplitude 3
 periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
 $3 > 0$, dus $(\frac{1}{2}\pi, 6)$ is een hoogste punt.



- 41** a $a = \frac{20 + -10}{2} = 5$
 $b = 20 - 5 = 15$

Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 3$ en bij $t = 8$, dus periode $= 8 - 3 = 5$,

$$\text{dus } c = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi.$$

Dalend door de evenwichtsstand bij $t = 3 - \frac{1}{2} \cdot \text{periode} = 3 - \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{1}{2}$, dus $d = \frac{1}{2}$.

$$\text{Dus } N = 5 - 15 \sin(\frac{2}{5}\pi(t - \frac{1}{2})).$$

- b Er is een hoogste punt bij $t = 3 + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 3 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 4\frac{1}{4}$.

$$\text{Dus } N = 5 + 15 \cos(\frac{2}{5}\pi(t - 4\frac{1}{4})).$$

- 42** a Stel $y = a + b \sin(c(x - d))$.

$$a = \frac{5 + -1}{2} = 2$$

$$b = 5 - 2 = 3$$

$$\text{periode} = 4\pi, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}.$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{2}\pi$, dus $d = \frac{1}{2}\pi$.

$$\text{Dus } y = 2 + 3 \sin(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\pi)).$$

Bijvoorbeeld:

$$y = \sin(x) \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 3} y = 3 \sin(x) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 2} y = 3 \sin(\frac{1}{2}x) \xrightarrow{\text{translatie } (\frac{1}{2}\pi, 2)} y = 2 + 3 \sin(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\pi))$$

- b** Een hoogste punt is $(\frac{1}{2}\pi, 5)$, dus $y = 2 + 3 \cos(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\pi))$.

Bijvoorbeeld:

$$y = \cos(x) \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 3} y = 3 \cos(x) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 2} y = 3 \cos(\frac{1}{2}x) \xrightarrow{\text{translatie } (\frac{1}{2}\pi, 2)} y = 2 + 3 \cos(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\pi))$$

43

a $\sin^2(x + \frac{1}{3}\pi) = 1$

$$\sin(x + \frac{1}{3}\pi) = 1 \vee \sin(x + \frac{1}{3}\pi) = -1$$

$$x + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

b $\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) \cdot \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 0$

$$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = 0 \vee \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 0$$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = k \cdot \pi$$

$$2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi \vee 2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

c $\tan(2x - \frac{1}{4}\pi) = \tan(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\pi)$

$$2x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

d $\sin(\frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{4}\pi) \cdot (\cos(\pi x) - 1) = 0$

$$\sin(\frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{4}\pi) = 0 \vee \cos(\pi x) - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{4}\pi = k \cdot \pi \vee \cos(\pi x) = 1$$

$$\frac{1}{2}\pi x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee \pi x = k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{2} + k \cdot 2 \vee x = k \cdot 2$$

e $\tan^2(\pi x) = \tan(\pi x)$

$$\tan(\pi x) = 0 \vee \tan(\pi x) = 1$$

$$\pi x = k \cdot \pi \vee \pi x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = k \cdot 1 \vee x = \frac{1}{4} + k \cdot 1$$

f $\sin(2x + \frac{1}{4}\pi) = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$

$$2x + \frac{1}{4}\pi = x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \frac{1}{4}\pi = \pi - (x - \frac{1}{3}\pi) + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \frac{1}{4}\pi = \pi - x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{13}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Bladzijde 182

44

a $\sin^2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$

$$\sin(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee \sin(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}x = k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot 4\pi \vee x = \pi + k \cdot 4\pi \vee x = 2\pi + k \cdot 4\pi \vee x = 3\pi + k \cdot 4\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$$

b $\tan^2(x) = 3$

$$\tan(x) = \sqrt{3} \vee \tan(x) = -\sqrt{3}$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi$$

c $\cos^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x) = 0$

$$\cos(x)(\cos(x) - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \vee \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi$$

d $\cos(2x) - \cos(\frac{1}{2}x) = 0$

$$\cos(2x) = \cos(\frac{1}{2}x)$$

$$2x = \frac{1}{2}x + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{1}{2}x + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}x = k \cdot 2\pi \vee \frac{5}{2}x = k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot 1 \vee x = k \cdot \frac{4}{5}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 0 \vee x = \frac{4}{5}\pi \vee x = \frac{8}{5}\pi \vee x = \frac{12}{5}\pi$$

45 a $\cos(\frac{2}{3}\pi(x-1)) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $\frac{2}{3}\pi(x-1) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{2}{3}\pi(x-1) = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $\frac{2}{3}\pi x - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{2}{3}\pi x - \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $\frac{2}{3}\pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{2}{3}\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = 1\frac{1}{4} + k \cdot 3 \vee x = \frac{3}{4} + k \cdot 3$
 $x \text{ in } [0, 5] \text{ geeft } x = 1\frac{1}{4} \vee x = 4\frac{1}{4} \vee x = \frac{3}{4} \vee x = 3\frac{3}{4}$

b $\sin(\frac{1}{2}\pi x) = \sin(\frac{1}{2}\pi(x-1))$
 $\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}\pi(x-1) + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = \pi - \frac{1}{2}\pi(x-1) + k \cdot 2\pi$
 $\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = \pi - \frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $0 = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee \pi x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 geen opl. $x = 1\frac{1}{2} + k \cdot 2$
 $x \text{ in } [0, 5] \text{ geeft } x = 1\frac{1}{2} \vee x = 3\frac{1}{2}$

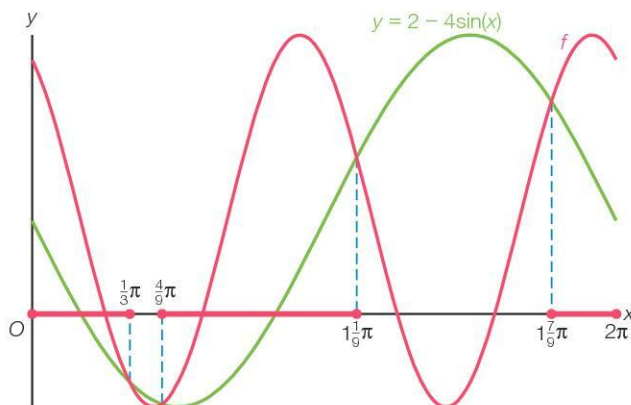
c $\tan(\frac{1}{3}\pi x) + \sqrt{3} = 0$
 $\tan(\frac{1}{3}\pi x) = -\sqrt{3}$
 $\frac{1}{3}\pi x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$
 $x = 2 + k \cdot 3$
 $x \text{ in } [0, 5] \text{ geeft } x = 2 \vee x = 5$

d $\sin^2(\frac{1}{3}\pi x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin(\frac{1}{3}\pi x)$
 $\sin(\frac{1}{3}\pi x) = 0 \vee \sin(\frac{1}{3}\pi x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $\frac{1}{3}\pi x = k \cdot \pi \vee \frac{1}{3}\pi x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{3}\pi x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = k \cdot 3 \vee x = 1 + k \cdot 6 \vee x = 2 + k \cdot 6$
 $x \text{ in } [0, 5] \text{ geeft } x = 0 \vee x = 3 \vee x = 1 \vee x = 2$

46 a $f(x) = 2$ geeft $2 - 4\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 2$
 $4\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 0$
 $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 0$
 $2x - \frac{1}{3}\pi = k \cdot \pi$
 $2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
 $x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$
 De grafiek van f snijdt de lijn van de evenwichtsstand in de punten $(\frac{1}{6}\pi, 2)$, $(\frac{2}{3}\pi, 2)$, $(1\frac{1}{6}\pi, 2)$ en $(1\frac{2}{3}\pi, 2)$.

b Toppen als $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1 \vee \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -1$
 $2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi$
 $x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{5}{12}\pi \vee x = 1\frac{5}{12}\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi \vee x = 1\frac{11}{12}\pi$
 De toppen van de grafiek zijn $(\frac{5}{12}\pi, -2)$, $(1\frac{5}{12}\pi, -2)$, $(\frac{11}{12}\pi, 6)$ en $(1\frac{11}{12}\pi, 6)$.

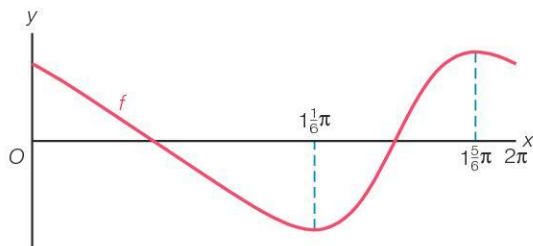
c $f(x) = 2 - 4\sin(x)$ geeft $2 - 4\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 2 - 4\sin(x)$
 $4\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 4\sin(x)$
 $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = \sin(x)$
 $2x - \frac{1}{3}\pi = x + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = \pi - x + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{4}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
 $x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{4}{9}\pi \vee x = 1\frac{1}{9}\pi \vee x = 1\frac{7}{9}\pi$



$f(x) \geq 2 - 4\sin(x)$ geeft $0 \leq x \leq \frac{1}{3}\pi \vee \frac{4}{9}\pi \leq x \leq \frac{10}{9}\pi \vee \frac{17}{9}\pi \leq x \leq 2\pi$

- 47** a $-\cos(2\pi x - \frac{1}{4}\pi) = \cos(2\pi x - \frac{1}{4}\pi + \pi) = \sin(2\pi x - \frac{1}{4}\pi + \pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(2\pi x + 1\frac{1}{4}\pi)$
b $-\sin(2(x + 1\frac{1}{4}\pi)) = -\sin(2x + 2\frac{1}{2}\pi) = \sin(2x + 2\frac{1}{2}\pi + \pi) = \cos(2x + 2\frac{1}{2}\pi + \pi - \frac{1}{2}\pi) = \cos(2x + 3\pi) = \cos(2x + \pi)$
c $\sin(2x + \frac{2}{3}\pi) - 2\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = \cos(2x + \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi) - 2\cos(2x - \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi) = \cos(2x + \frac{1}{6}\pi) + 2\cos(2x - \frac{5}{6}\pi + \pi) = \cos(2x + \frac{1}{6}\pi) + 2\cos(2x + \frac{1}{6}\pi) = 3\cos(2x + \frac{1}{6}\pi)$
d $\frac{\cos(2x - \frac{1}{3}\pi)}{\sin(2x + \frac{2}{3}\pi)} = \frac{\sin(2x - \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi)}{\cos(2x + \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi)} = \frac{\sin(2x + \frac{1}{6}\pi)}{\cos(2x + \frac{1}{6}\pi)} = \tan(2x + \frac{1}{6}\pi)$
- 48** a $f(x) = x^2 \cdot \sin(3x - \frac{1}{2}\pi)$ geeft $f'(x) = 2x \cdot \sin(3x - \frac{1}{2}\pi) + x^2 \cdot \cos(3x - \frac{1}{2}\pi) \cdot 3$
 $= 2x \sin(3x - \frac{1}{2}\pi) + 3x^2 \cos(3x - \frac{1}{2}\pi)$
b $f(x) = \frac{x}{2 + \cos(x)}$ geeft $f'(x) = \frac{(2 + \cos(x)) \cdot 1 - x \cdot -\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2} = \frac{2 + \cos(x) + x \sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}$
c $f(x) = x^2 \cdot \cos^3(x)$ geeft $f'(x) = 2x \cdot \cos^3(x) + x^2 \cdot 3\cos^2(x) \cdot -\sin(x) = 2x \cos^3(x) - 3x^2 \sin(x) \cos^2(x)$
d $f(x) = x^2 - \frac{1}{\tan^2(x)} = x^2 - \tan^{-2}(x)$ geeft $f'(x) = 2x + 2\tan^{-3}(x) \cdot (1 + \tan^2(x)) = 2x + \frac{2 + 2\tan^2(x)}{\tan^3(x)}$
e $f(x) = \sqrt{2\sin(x) + 3\cos(x)}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\sin(x) + 3\cos(x)}} \cdot (2\cos(x) - 3\sin(x)) = \frac{2\cos(x) - 3\sin(x)}{2\sqrt{2\sin(x) + 3\cos(x)}}$
f $f(x) = \frac{5}{4\sin(x) + 3\cos(x)}$ geeft $f'(x) = \frac{(4\sin(x) + 3\cos(x)) \cdot 0 - 5 \cdot (4\cos(x) - 3\sin(x))}{(4\sin(x) + 3\cos(x))^2} = \frac{15\sin(x) - 20\cos(x)}{(4\sin(x) + 3\cos(x))^2}$
- 49** a $f(x) = \frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)}$ geeft $f'(x) = \frac{(2 + \sin(x)) \cdot -\sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{(2 + \sin(x))^2}$
 $= \frac{-2\sin(x) - \sin^2(x) - \cos^2(x)}{(2 + \sin(x))^2}$
 $= \frac{-2\sin(x) - (\sin^2(x) + \cos^2(x))}{(2 + \sin(x))^2}$
 $= \frac{-1 - 2\sin(x)}{(2 + \sin(x))^2}$
b Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{2}\pi) = \frac{-1 - 2 \cdot 1}{(2 + 1)^2} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$.
 $y = -\frac{1}{3}x + b$
 $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$, dus $A(\frac{1}{2}\pi, 0)$ } $-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi + b = 0$
 $b = \frac{1}{6}\pi$
Dus $k: y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\pi$.

$$\begin{aligned}
 \text{c } f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{-1 - 2 \sin(x)}{(2 + \sin(x))^2} &= 0 \\
 -1 - 2 \sin(x) &= 0 \\
 2 \sin(x) &= -1 \\
 \sin(x) &= -\frac{1}{2} \\
 x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \\
 x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{6}\pi \text{ (vold.)} \vee x = \frac{5}{6}\pi \text{ (vold.)}
 \end{aligned}$$



$$\text{min. is } f\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

$$\text{max. is } f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

$$\text{Dus } B_f = \left[-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right].$$

Verantwoording

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie.
Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom
hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89594-5

Uitwerkingen begin- en eindopdrachten

Hoofdstuk 5 Newton en Kepler

Bladzijde 8

- Substitutie van $v = \frac{2\pi r}{T}$ in $F_{\text{mpz}} = \frac{mv^2}{r}$ geeft $F_{\text{mpz}} = \frac{m \cdot \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{m \cdot \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}}{r} = \frac{m \cdot 4\pi^2 r^2}{r T^2} = \frac{4\pi^2 m r}{T^2}$.

- Stel de afstand tussen de aarde en de zon d_1 .

$$\text{Dan geldt } \frac{365^2}{d_1^3} \approx \frac{T_{\text{Venus}}^2}{(0,75d_1)^3} \approx \frac{T_{\text{Mars}}^2}{(1,5d_1)^3}.$$

$$\text{Uit } \frac{365^2}{d_1^3} \approx \frac{T_{\text{Venus}}^2}{(0,75d_1)^3} \text{ volgt } T_{\text{Venus}}^2 \approx 365^2 \cdot 0,75^3 \text{ en dit geeft } T_{\text{Venus}} \approx 237 \text{ dagen.}$$

$$\text{Uit } \frac{365^2}{d_1^3} \approx \frac{T_{\text{Mars}}^2}{(1,5d_1)^3} \text{ volgt } T_{\text{Mars}}^2 \approx 365^2 \cdot 1,5^3 \text{ en dit geeft } T_{\text{Mars}} \approx 671 \text{ dagen.}$$

- Stel de afstand tussen Jupiter en de zon d_2 .

$$\text{Er moet gelden } \frac{365^2}{d_1^3} \approx \frac{(12 \cdot 365)^2}{d_2^3}$$

$$\frac{d_2^3}{d_1^3} \approx \frac{(12 \cdot 365)^2}{365^2}$$

$$\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3 \approx 12^2$$

$$\frac{d_2}{d_1} \approx \sqrt[3]{12^2} \approx 5,24$$

Dus de afstand tussen Jupiter en de zon is ongeveer 5,24 keer zo groot als die tussen de aarde en de zon.

$$\text{Gebruik } v = \frac{2\pi r}{T}.$$

r ongeveer 5,24 keer zo groot en T ongeveer 12 keer zo groot, dus v ongeveer $\frac{5,24}{12} \approx 0,44$ keer zo groot.

Dus de baansnelheid van Jupiter om de zon is ongeveer 0,44 keer zo groot als die van de aarde om de zon.

- Substitutie van $v = \frac{2\pi r}{T}$ in $a_{\text{mpz}} = \frac{v^2}{r}$ geeft $a_{\text{mpz}} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$.

$$\text{Voor de maan geldt } a_{\text{mpz}} = \frac{4\pi^2 \cdot 384\,000\,000}{(27,3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2} \approx 0,002725 \text{ m/s}^2.$$

$$\frac{g}{3600} = \frac{9,81}{3600} = 0,002725 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Dus van de maan is } a_{\text{mpz}} \approx \frac{g}{3600} \text{ m/s}^2.$$

- $\frac{384\,000}{6378} \approx 60$

Dus de straal van de cirkelvormige baan waarin de maan om de aarde beweegt, is 60 keer de straal van de aarde. Omdat $60^2 = 3600$ hoort dus bij een 60 keer zo grote afstand een 3600 keer zo kleine versnelling (aantrekkingskracht).

- $F_G = F_Z$ geeft $G \frac{m \cdot m_A}{r^2} = m \cdot g$

$$G \frac{m_A}{r^2} = g$$

$$G m_A = r^2 g$$

$$m_A = \frac{r^2 g}{G}$$

$$r = 6\,378\,000 \text{ m}, g = 9,81 \text{ m/s}^2 \text{ en } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \text{ geeft}$$

$$m_A = \frac{6\,378\,000^2 \cdot 9,81}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,98... \cdot 10^{24} \approx 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

- De inhoud van de aarde is $\frac{4}{3}\pi \cdot 63\,780\,000^3 \text{ dm}^3$.

$$\text{De gemiddelde massadichtheid van de aarde is } \frac{5,98... \cdot 10^{24}}{\frac{4}{3}\pi \cdot 63\,780\,000^3} \approx 5,5 \text{ kg/dm}^3.$$

- Voor de top van de Mount Everest geldt $5,98... \cdot 10^{24} = \frac{6\,387\,000^2 \cdot g}{6,67 \cdot 10^{-11}}$, en hieruit volgt

$$g = 5,98... \cdot 10^{24} \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11}}{6\,387\,000^2} \approx 9,78 \text{ m/s}^2.$$

- m_A = massa aarde en m_s = massa satelliet

$$F_{\text{mpz}} = \frac{m_s \cdot v^2}{r} \text{ en } F_G = G \cdot \frac{m_s \cdot m_A}{r^2}, \text{ dus } F_{\text{mpz}} = F_G \text{ geeft } \frac{m_s \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m_s \cdot m_A}{r^2} \text{ oftewel } v^2 = G \cdot \frac{m_A}{r}.$$

$$v = \frac{2\pi r}{24 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{\pi}{43\,200} r \text{ substitueren in } v^2 = G \cdot \frac{m_A}{r} \text{ geeft}$$

$$\left(\frac{\pi}{43\,200} r\right)^2 = G \cdot \frac{m_A}{r}$$

$$\left(\frac{\pi}{43\,200}\right)^2 \cdot r^3 = G \cdot m_A$$

$$r^3 = \frac{G \cdot m_A}{\left(\frac{\pi}{43\,200}\right)^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98... \cdot 10^{24}}{\left(\frac{\pi}{43\,200}\right)^2} = 7,567... \cdot 10^{22}$$

$$r = \sqrt[3]{7,567... \cdot 10^{22}} \approx 42\,297\,524 \text{ m}$$

De hoogte boven het aardoppervlak is $42\,298 - 6378 \approx 35\,900 \text{ km}$.

$$v \approx \frac{\pi}{43\,200} \cdot 42\,297\,524 \approx 3076 \text{ m/s}$$

De baansnelheid is $11\,070 \text{ km/uur}$.

Hoofdstuk 6 De helling van een fietsbrug

Bladzijde 50

- $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}abx^2$ geeft $f'(x) = ax^2 - abx$

$$f'(0) = a \cdot 0^2 - ab \cdot 0 = 0 - 0 = 0$$

$$f'(b) = a \cdot b^2 - ab \cdot b = ab^2 - ab^2 = 0$$

- $f(b) = 6$ geeft $\frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{2}ab \cdot b^2 = 6$

$$\frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{2}ab^3 = 6$$

$$-\frac{1}{6}ab^3 = 6$$

$$a = -\frac{36}{b^3}$$

$$\text{Dit geeft } f(x) = \frac{1}{3} \cdot -\frac{36}{b^3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot -\frac{36}{b^3} \cdot bx^2 = -\frac{12}{b^3}x^3 + \frac{18}{b^2}x^2.$$

- $f(x) = -\frac{12}{b^3}x^3 + \frac{18}{b^2}x^2$ geeft $f'(x) = -\frac{36}{b^3}x^2 + \frac{36}{b^2}x$

$$f'(\frac{1}{2}b) = 0,03 \text{ geeft } -\frac{36}{b^3} \cdot (\frac{1}{2}b)^2 + \frac{36}{b^2} \cdot \frac{1}{2}b = 0,03$$

$$-\frac{9}{b} + \frac{18}{b} = 0,03$$

$$\frac{9}{b} = 0,03$$

$$b = \frac{9}{0,03} = 300$$

- $b = 300$ geeft $f'(x) = -\frac{36}{300^3}x^2 + \frac{36}{300^2}x = -1\frac{1}{3} \cdot 10^{-6}x^2 + 4 \cdot 10^{-4}x$

$$f'(100) = -1\frac{1}{3} \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 + 4 \cdot 10^{-4} \cdot 100 = 0,0266...$$

Dus bij $x = 100$ is het hellingspercentage van de oprit 2,7%.

- $f(b) = 3,5$ geeft $a = -\frac{21}{b^3}$ en $f(x) = -\frac{7}{b^3}x^3 + \frac{10,5}{b^2}x^2$.

$$f(x) = -\frac{7}{b^3}x^3 + \frac{10,5}{b^2}x^2 \text{ geeft } f'(x) = -\frac{21}{b^3}x^2 + \frac{21}{b^2}x$$

$$f'(\frac{1}{2}b) = 0,2 \text{ geeft } -\frac{21}{b^3} \cdot (\frac{1}{2}b)^2 + \frac{21}{b^2} \cdot \frac{1}{2}b = 0,2$$

$$-\frac{21}{4b} + \frac{21}{2b} = 0,2$$

$$-\frac{21}{4b} + \frac{42}{4b} = 0,2$$

$$\frac{21}{4b} = 0,2$$

$$b = \frac{21}{0,2 \cdot 4} = 26\frac{1}{4}$$

De gevraagde horizontale lengte is 26 meter.

Hoofdstuk 6 Kromming en kromtestraal

Bladzijde 87

- $f(x) = x^3$ geeft $f'(x) = 3x^2$
 $f'(x) = 3x^2$ geeft $f''(x) = 6x$

$$\text{In } (2, 8) \text{ is } f'(2) = 12, f''(2) = 12 \text{ en } k = \frac{|f''(2)|}{(1 + (f'(2))^2)^{1/2}} = \frac{12}{(1 + 12^2)^{1/2}} \approx 0,007.$$

$$\text{In } (\frac{1}{2}, \frac{1}{8}) \text{ is } f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}, f''(\frac{1}{2}) = 3 \text{ en } k = \frac{|f''(\frac{1}{2})|}{(1 + (f'(\frac{1}{2}))^2)^{1/2}} = \frac{3}{(1 + (\frac{3}{4})^2)^{1/2}} = 1,536.$$

- $k = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{1/2}} = \frac{|6x|}{(1 + (3x^2)^2)^{1/2}} = \frac{|6x|}{(1 + 9x^4)^{1/2}}$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{|6x|}{(1 + 9x^4)^{1/2}} \text{ en } y_2 = 1.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx -0,63$, $x \approx -0,17$, $x \approx 0,17$ en $x \approx 0,63$.

- De optie maximum bij y_1 geeft de maximale kromming 1,762.

- $y = \sqrt{x+1} - 1$ geeft $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$$x = 0 \text{ geeft } y = \sqrt{0+1} - 1 = 0 \text{ en } y' = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}$$

Dus de kromme sluit vloeiend aan bij het punt O .

$$x = 3 \text{ geeft } y = \sqrt{3+1} - 1 = 1 \text{ en } y' = \frac{1}{2\sqrt{3+1}} = \frac{1}{4}$$

Dus de kromme sluit vloeiend aan bij het punt A .

- $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$ geeft $y'' = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}$

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{1/2}} = \frac{|-\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}|}{(1 + (\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2})^2)^{1/2}} = \frac{\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}}{(1 + \frac{1}{4}(x+1)^{-1})^{1/2}}$$

Plot de grafiek van k . Neem x tussen 0 en 3.

Je ziet: k is maximaal voor $x = 0$.

$$x = 0 \text{ geeft } k = 1,7888...$$

Als k maximaal is, is $R = \frac{1}{k}$ minimaal.

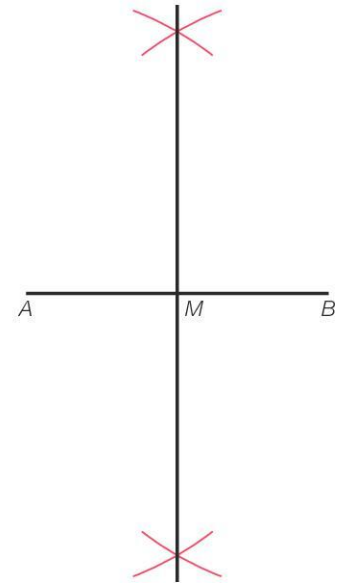
$$k = 1,7888... \text{ geeft } R \approx 5,59$$

De minimale waarde van R is 5,59, dus dit ontwerp voldoet ook aan de eis voor de kromtestraal.

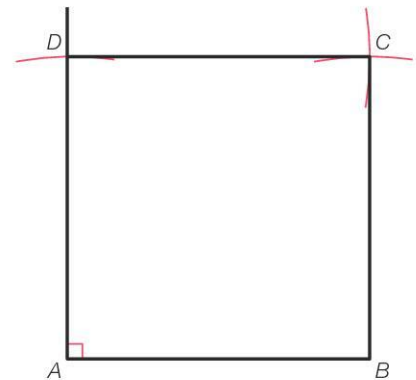
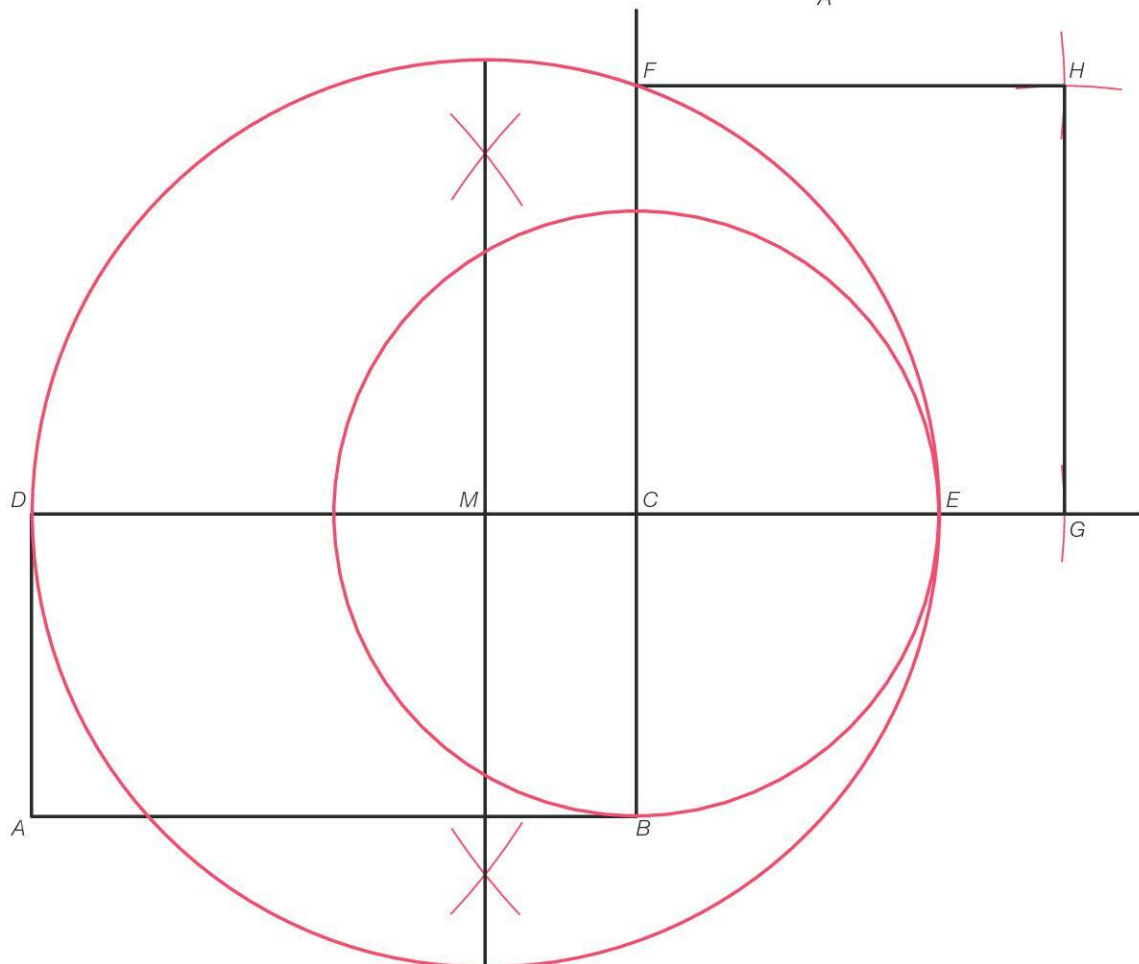
Hoofdstuk 7 De kwadratuur van een rechthoek

Bladzijde 92

- *Aanpak*
 - Teken een lijnstuk AB .
 - Teken cirkelboogjes van cirkels met middelpunten A en B zo, dat de cirkelboogjes elkaar snijden.
 - Teken de lijn door de snijpunten van de cirkelboogjes, dat is de middelloodlijn van lijnstuk AB .
 - Het snijpunt van deze middelloodlijn met lijnstuk AB is het midden van AB .



- *Aanpak*
 - Teken een cirkelboogje van de cirkel met middelpunt A en straal AB . Het snijpunt van dit cirkelboogje met de halve lijn met eindpunt A die loodrecht op AB staat, is punt D .
 - Teken cirkelboogjes van cirkels met middelpunten B en D en straal AB . Het snijpunt van deze cirkelboogjes is punt C .
 - Teken de lijnstukken BC en DC . Je krijgt vierkant $ABCD$.



- $DE = a + b$, dus $MD = \frac{1}{2}(a + b)$ en ook $MF = \frac{1}{2}(a + b)$.
 $MC = ME - CE = \frac{1}{2}(a + b) - b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a - b)$
 $\angle C = 90^\circ$, dus $CF^2 = MF^2 - MC^2$

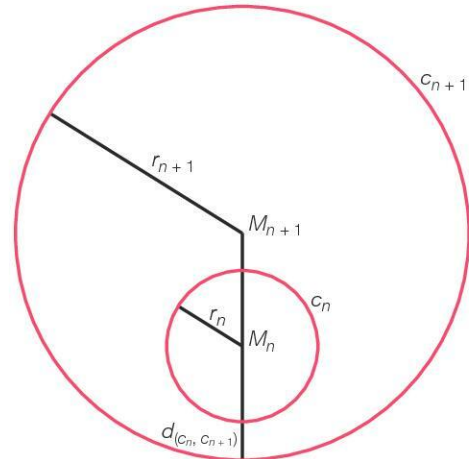
$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{2}(a + b)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(a - b)\right)^2 \\
 &= \frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2) - \frac{1}{4}(a^2 - 2ab + b^2) \\
 &= \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}b^2 \\
 &= ab
 \end{aligned}$$

Dus $CGHF$ is een vierkant met oppervlakte ab , en dat is gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek $ABCD$.

Hoofdstuk 7 Cirkels en vierkanten met gelijke oppervlakte

Bladzijde 125

- Stel n is een natuurlijk getal.
 Vierkant met zijde n heeft oppervlakte n^2 . Voor de bijbehorende cirkel c_n met middelpunt M_n en straal r_n geldt $\pi r_n^2 = n^2$, en dit geeft $r_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}}$.
 Voor de straal r_{n+1} van de cirkel c_{n+1} met middelpunt M_{n+1} die hoort bij het volgende vierkant geldt $r_{n+1} = \frac{n+1}{\sqrt{\pi}}$.
 Zie de figuur hiernaast.
 $d(c_n, c_{n+1}) = r_{n+1} - d(M_n, M_{n+1}) - r_n$

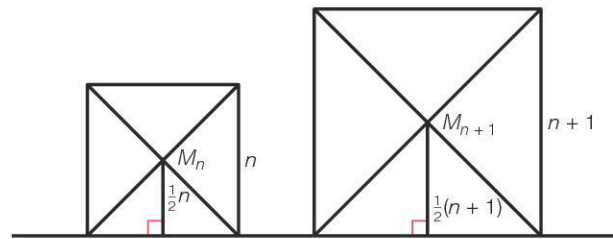


Zie de figuur hiernaast met de vierkanten met de zijden n en $n+1$ en de middelpunten M_n en M_{n+1} van de bijbehorende cirkels.

Teken je deze vierkanten in elkaar zoals in de eindopdracht in het leerboek is gedaan, dan

geldt $d(M_n, M_{n+1}) = \frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}$.

Dus $d(c_n, c_{n+1}) = r_{n+1} - d(M_n, M_{n+1}) - r_n$
 $= \frac{n+1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} - \frac{n}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} \approx 0,064$.

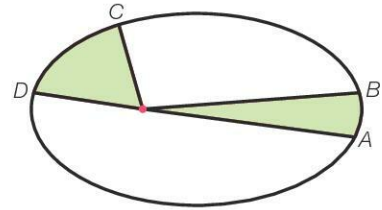
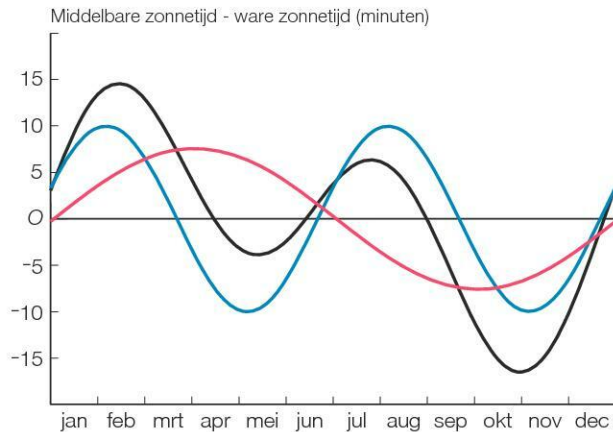


- Voor de cirkel c_n met middelpunt M_n en straal r_n geldt $\pi r_n^2 = \pi n$, en dit geeft $r_n = \sqrt{n}$.
 Voor de straal r_{n+1} van de volgende cirkel c_{n+1} met middelpunt M_{n+1} geldt $r_{n+1} = \sqrt{n+1}$.
 Het bij cirkel c_n horende vierkant heeft zijde $\sqrt{n\pi}$ en het bij cirkel c_{n+1} horende vierkant heeft zijde $\sqrt{(n+1)\pi}$, dus $d(M_n, M_{n+1}) = \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)\pi} - \frac{1}{2}\sqrt{n\pi}$.
 Dus $d(c_n, c_{n+1}) = r_{n+1} - d(M_n, M_{n+1}) - r_n = \sqrt{n+1} - \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)\pi} + \frac{1}{2}\sqrt{n\pi} - \sqrt{n}$.
 Voer in $y_1 = \sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\sqrt{(x+1)\pi} + \frac{1}{2}\sqrt{x\pi} - \sqrt{x}$ en maak een tabel.
 $x = 31$ geeft $y = 0,0101...$
 $x = 32$ geeft $y = 0,0099...$
 Dus tussen de cirkels 32 en 33 is de afstand voor het eerst kleiner dan 0,01.

Hoofdstuk 8 Tijdvereffening

Bladzijde 130

- Volgens de tweede wet van Kepler (de Perkenwet) verandert de snelheid van een planeet in haar omloopbaan zodanig, dat in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakten (gevormd door de verbindingslijn tussen de zon en de planeet) worden bestreken. Omdat begin januari de aarde het dichtst bij de zon staat, is de hoeksnelheid dan het grootst en is de zonnedag het langst. Begin juli is de aarde het verst van de zon verwijderd, dus dan is de hoeksnelheid het kleinst en de zonnedag het kortst. De periode van dit verschijnsel is een jaar.
- De helling van de aardas ten opzichte van de baan van de zon aan de hemel veroorzaakt de seizoenen, maar beïnvloedt ook de lengte van de zonnedag. Aan het begin van de zomer en aan het begin van de winter is de aardas naar de zon toe gekanteld en is de baan van de zon vrijwel van oost naar west gericht. Het duurt dan relatief lang voordat de aardrotatie deze beweging inhaalt. Aan het begin van de lente en aan het begin van de herfst staat de aardas scheef voor de zon. Nu wordt de baanbeweging sneller ingelopen door de draaiing van de aarde om zijn as. De periode van dit verschijnsel is een half jaar.



Het maximum is ongeveer 15 minuten en wordt bereikt in de maand februari.

Het minimum is ongeveer -17 minuten en wordt bereikt eind oktober of begin november.

Hoofdstuk 8 Formules bij tijdvereffening

Bladzijde 169

- De formule is $E = 7,6 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-2)\right)$.
- De formule is $A = 10,0 \sin\left(\frac{4\pi}{365}(t+10)\right)$.
- $S = 7,6 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-2)\right) + 10,0 \sin\left(\frac{4\pi}{365}(t+10)\right)$

Voer in $y_1 = 7,6 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(x-2)\right) + 10,0 \sin\left(\frac{4\pi}{365}(x+10)\right)$.

De optie maximum geeft $x = 44,015...$ en $y = 14,615...$

De optie minimum geeft $x = 304,161...$ en $y = -16,548...$

De tijdvereffening is maximaal ongeveer 15 minuten. Dat is op 14 februari.

De tijdvereffening is minimaal ongeveer -17 minuten. Dat is op 1 november.



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.