

& GETAL & RUIMTE

B



Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen **vwo B** deel 4

Twaalfde editie, 2022

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

Inhoud

13	Limieten en asymptoten	4
14	Meetkunde toepassen	38
15	Afgeleiden en primitieven	75
16	Examentraining	112
	Gemengde opgaven	150

13 Limieten en asymptoten

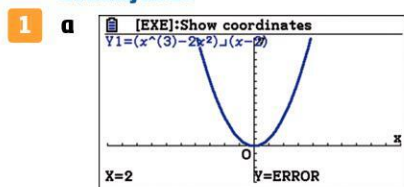
Voorkennis Limiet en afgeleide

Bladzijde 9

- 1 a $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) - ax}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax + ah - ax}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a = a$
- b $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x^2 + 2xh + h^2) - ax^2}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 - ax^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2axh + ah^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2ax + ah)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2ax + ah) = 2ax$
- 2 a $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{x+h} - g^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^x \cdot g^h - g^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^x \cdot (g^h - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^h - 1}{h} \cdot g^x$
- b Uit a volgt $f(x) = e^x$ geeft $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \cdot e^x$.
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, dus $f'(x) = 1 \cdot e^x = e^x$.

13.1 Limieten en perforaties

Bladzijde 10



- b $f(1) = 1, f(1,9) = 3,61, f(1,99) = 3,9601, f(2,01) = 4,0401$
- c $f(2) = \frac{2^3 - 2 \cdot 2^2}{2 - 2} = \frac{0}{0}$ en dat is onbepaald.

Bladzijde 11

- 2 a $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \frac{(-3)^2 - 3 - 6}{-3 - 2} = \frac{0}{-5} = 0$
- b $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 6} = \frac{0 + 0 + 12}{0 + 0 + 6} = \frac{12}{6} = 2$
- c $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 4}{x + 2} = \frac{2}{0}$ en dat is onbepaald, dus $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 6}$ bestaat niet.

Bladzijde 12

- 3 a $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 4$
- b $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-1)(x+3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-1) = -4$
- c $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+2} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$
- d $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x+2} = \frac{-3}{1} = -3$

4 a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = -1$
 b $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) = 8$
 c $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)^2}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x+4} = \frac{0}{8} = 0$
 d $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

5 a $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x+5) = 10$
 b $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x+1} = \frac{2}{1} = 2$
 c $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{1 - 3 + 2}{1 - 1 - 2} = \frac{0}{-2} = 0$
 d $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 + x - 6)}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x+3)}{x-3} = \frac{2 \cdot 5}{-1} = -10$

6 a $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)(x+6)}{x-6} = \lim_{x \rightarrow 6} (x+6) = 12$
 b $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+1)(x+4)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+1}{x-1} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$
 c $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 4x - 5} = \frac{25 + 30 + 5}{25 + 20 - 5} = \frac{60}{40} = 1\frac{1}{2}$
 d $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x - 2}{4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2(2x - 1)}{(2x - 1)(2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2}{2x + 1} = \frac{2}{2} = 1$

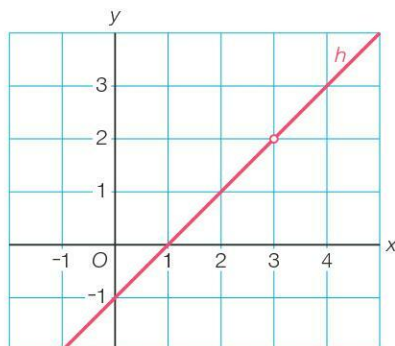
7 a $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{x+4} = \frac{-1}{7} = -\frac{1}{7}$
 De continuumakende waarde van f voor $x = 3$ is $-\frac{1}{7}$.
 b $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{16x^2 - 1}{16x - 4} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{(4x-1)(4x+1)}{4(4x-1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{4x+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 De continuumakende waarde van g voor $x = \frac{1}{4}$ is $\frac{1}{2}$.

8 a $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^2 + x\sqrt{2} - 4} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x+\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$
 b $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 7x - 4}{2x^2 + 15x - 8} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(x+4)}{(2x-1)(x+8)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x+4}{x+8} = \frac{4\frac{1}{2}}{8\frac{1}{2}} = \frac{9}{17}$

Bladzijde 13

9 $h(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \frac{(x-1)(x-3)}{x-3} = x - 1$ mits $x \neq 3$

$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 2$, dus de coördinaten van dit 'gaatje' zijn $(3, 2)$.



10 a $f_a(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + a} = \frac{(x-2)(x+3)}{x+a}$

Er is een perforatie als $a = -2$ en als $a = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = 5$$

Voor $a = -2$ is de perforatie $(2, 5)$.

$$\lim_{x \rightarrow -3} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-2)(x+3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-2) = -5$$

Voor $a = 3$ is de perforatie $(-3, -5)$.

b $f_a(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x + a} = \frac{(x-4)(x+5)}{x+a}$

Er is een perforatie als $a = -4$ en als $a = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+5)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+5) = 9$$

Voor $a = -4$ is de perforatie $(4, 9)$.

$$\lim_{x \rightarrow -5} f_5(x) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x-4)(x+5)}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5} (x-4) = -9$$

Voor $a = 5$ is de perforatie $(-5, -9)$.

c $f_a(x) = \frac{x^2 - 9}{x + a} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+a}$

Er is een perforatie als $a = -3$ en als $a = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

Voor $a = -3$ is de perforatie $(3, 6)$.

$$\lim_{x \rightarrow -3} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-3) = -6$$

Voor $a = 3$ is de perforatie $(-3, -6)$.

11 a $f_a(x) = \frac{x^2 - 4\frac{1}{2}x + 2}{x + a} = \frac{(x-4)(x-\frac{1}{2})}{x+a}$

Er is een perforatie als $a = -4$ en als $a = -\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x-\frac{1}{2})}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x-\frac{1}{2}) = 3\frac{1}{2}$$

Voor $a = -4$ is de perforatie $(4, 3\frac{1}{2})$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f_{-\frac{1}{2}}(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x-4)(x-\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x-4) = -3\frac{1}{2}$$

Voor $a = -\frac{1}{2}$ is de perforatie $(\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2})$.

b $f_a(x) = \frac{x^2 - 3x\sqrt{2} + 4}{x + a} = \frac{(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})}{x+a}$

Er is een perforatie als $a = -\sqrt{2}$ en als $a = -2\sqrt{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f_{-\sqrt{2}}(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x-2\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

Voor $a = -\sqrt{2}$ is de perforatie $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

$$\lim_{x \rightarrow 2\sqrt{2}} f_{-2\sqrt{2}}(x) = \lim_{x \rightarrow 2\sqrt{2}} \frac{(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})}{x-2\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2\sqrt{2}} (x-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

Voor $a = -2\sqrt{2}$ is de perforatie $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

$$c \quad f_a(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{2x + a} = \frac{(x+1)(2x-3)}{2x+a} = \frac{\frac{1}{2}(2x+2)(2x-3)}{2x+a}$$

Er is een perforatie als $a = 2$ en als $a = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{2}(2x+2)(2x-3)}{2x+2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2}(2x-3) = \frac{1}{2}(-2-3) = -2\frac{1}{2}$$

Voor $a = 2$ is de perforatie $(-1, -2\frac{1}{2})$.

$$\lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}} f_{-3}(x) = \lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}(2x+2)(2x-3)}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(2x+2) = \frac{1}{2}(3+2) = 2\frac{1}{2}$$

Voor $a = -3$ is de perforatie $(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.

$$12 \quad a \quad f_a(x) = \frac{9x^2 + 6x - 8}{3x + a} = \frac{(3x-2)(3x+4)}{3x+a}$$

Er is een perforatie als $a = -2$ en als $a = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} f_{-2}(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{(3x-2)(3x+4)}{3x-2} = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} (3x+4) = 2+4 = 6$$

Voor $a = -2$ is de perforatie $(\frac{2}{3}, 6)$.

$$\lim_{x \rightarrow -1\frac{1}{3}} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow -1\frac{1}{3}} \frac{(3x-2)(3x+4)}{3x+4} = \lim_{x \rightarrow -1\frac{1}{3}} (3x-2) = -4-2 = -6$$

Voor $a = 4$ is de perforatie $(-1\frac{1}{3}, -6)$.

$$b \quad f_a(x) = \frac{4x^2 - 4x - 15}{2x + a} = \frac{(2x+3)(2x-5)}{2x+a}$$

Er is een perforatie als $a = 3$ en als $a = -5$.

$$\lim_{x \rightarrow -1\frac{1}{2}} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow -1\frac{1}{2}} \frac{(2x+3)(2x-5)}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -1\frac{1}{2}} (2x-5) = -3-5 = -8$$

Voor $a = 3$ is de perforatie $(-1\frac{1}{2}, -8)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2\frac{1}{2}} f_{-5}(x) = \lim_{x \rightarrow 2\frac{1}{2}} \frac{(2x+3)(2x-5)}{2x-5} = \lim_{x \rightarrow 2\frac{1}{2}} (2x+3) = 5+3 = 8$$

Voor $a = -5$ is de perforatie $(2\frac{1}{2}, 8)$.

$$c \quad f_a(x) = \frac{2x^2 - 11x + 15}{2x + a} = \frac{(x-3)(2x-5)}{2x+a} = \frac{\frac{1}{2}(2x-6)(2x-5)}{2x+a}$$

Er is een perforatie als $a = -6$ en als $a = -5$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f_{-6}(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{2}(2x-6)(2x-5)}{2x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} (\frac{1}{2}(2x-5)) = \frac{1}{2}(6-5) = \frac{1}{2}$$

Voor $a = -6$ is de perforatie $(3, \frac{1}{2})$.

$$\lim_{x \rightarrow 2\frac{1}{2}} f_{-5}(x) = \lim_{x \rightarrow 2\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}(2x-6)(2x-5)}{2x-5} = \lim_{x \rightarrow 2\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}(2x-6)) = \frac{1}{2}(5-6) = -\frac{1}{2}$$

Voor $a = -5$ is de perforatie $(2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

- 13 Voor een perforatie mag de functiewaarde niet bestaan. Dat is alleen het geval als de noemer gelijk is aan nul. Maar als de teller voor een nulpunt van de noemer ongelijk is aan nul, dan bestaat de limiet van $f(x)$ niet. De enige mogelijkheden voor een perforatie is er dus als de teller hetzelfde nulpunt heeft als de noemer. Je moet nog wel controleren of de limiet van $f(x)$ bestaat.

$$14 \quad f_a(x) = \frac{x^2 - 4ax + 3a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x-3a)}{x-a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-3a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (x-3a) = -2a$$

De perforatie is $(a, -2a)$.

$(a, -2a)$ op de lijn $y = x - 3$ geeft $a - 3 = -2a$

$$3a = 3$$

$$a = 1$$

15 a $f_a(x) = \frac{2x^2 + x - 10}{2x + a} = \frac{(2x + 5)(x - 2)}{2x + a} = \frac{\frac{1}{2}(2x + 5)(2x - 4)}{2x + a}$

Er is een perforatie als $a = 5$ en als $a = -4$.

$$\lim_{x \rightarrow -2\frac{1}{2}} f_5(x) = \lim_{x \rightarrow -2\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}(2x + 5)(2x - 4)}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -2\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}(2x - 4)) = \frac{1}{2}(-5 - 4) = -4\frac{1}{2}$$

Dus voor $a = 5$ is de perforatie $(-2\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2})$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f_{-4}(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2}(2x + 5)(2x - 4)}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} (\frac{1}{2}(2x + 5)) = \frac{1}{2}(4 + 5) = 4\frac{1}{2}$$

Dus voor $a = -4$ is de perforatie $(2, 4\frac{1}{2})$.

b $f_a(x) = \frac{2x^2 + x - 10}{2x + a}$ geeft

$$f'_a(x) = \frac{(2x + a) \cdot (4x + 1) - (2x^2 + x - 10) \cdot 2}{(2x + a)^2} = \frac{8x^2 + 2x + 4ax + a - 4x^2 - 2x + 20}{(2x + a)^2} = \frac{4x^2 + 4ax + a + 20}{(2x + a)^2}$$

$$f'_a(-1) = 0 \text{ geeft } \frac{4 - 4a + a + 20}{(-2 + a)^2} = 0$$

$$4 - 4a + a + 20 = 0$$

$$-3a = -24$$

$$a = 8$$

$$f_8(x) = \frac{2x^2 + x - 10}{2x + 8} \text{ en } f'_8(x) = \frac{4x^2 + 32x + 28}{(2x + 8)^2}$$

$$f'_8(x) = 0 \text{ geeft } 4x^2 + 32x + 28 = 0$$

$$x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$(x + 1)(x + 7) = 0$$

$$x = -1 \vee x = -7$$

$$f_8(-7) = \frac{2 \cdot 49 - 7 - 10}{-14 + 8} = \frac{81}{-6} = -13\frac{1}{2}$$

De coördinaten van de andere top zijn $(-7, -13\frac{1}{2})$.

16 $f_a(x) = \frac{4x^2 - 14ax + 6a^2}{2x - a} = \frac{(2x - a)(2x - 6a)}{2x - a}$

Voor elke waarde van a is er een perforatie als $x = \frac{1}{2}a$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}a} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}a} \frac{(2x - a)(2x - 6a)}{2x - a} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}a} (2x - 6a) = a - 6a = -5a$$

De perforatie is $(\frac{1}{2}a, -5a)$.

$$(\frac{1}{2}a, -5a) \text{ op } y = -2x^2 + 12 \text{ geeft } -2 \cdot \frac{1}{4}a^2 + 12 = -5a$$

$$-\frac{1}{2}a^2 + 5a + 12 = 0$$

$$a^2 - 10a - 24 = 0$$

$$(a + 2)(a - 12) = 0$$

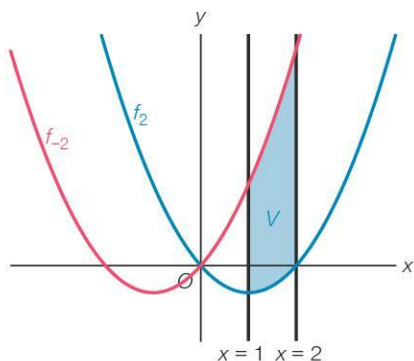
$$a = -2 \vee a = 12$$

17 $f_a(x) = \frac{x^3 - 4x}{x + a} = \frac{x(x^2 - 4)}{x + a} = \frac{x(x-2)(x+2)}{x + a}$

Er is een perforatie als $a = 0$ (vold. niet), $a = -2$ en $a = 2$.

$$f_{-2}(x) = \frac{x(x-2)(x+2)}{x-2} = x(x+2) = x^2 + 2x \text{ mits } x \neq 2$$

$$f_2(x) = \frac{x(x-2)(x+2)}{x+2} = x(x-2) = x^2 - 2x \text{ mits } x \neq -2$$

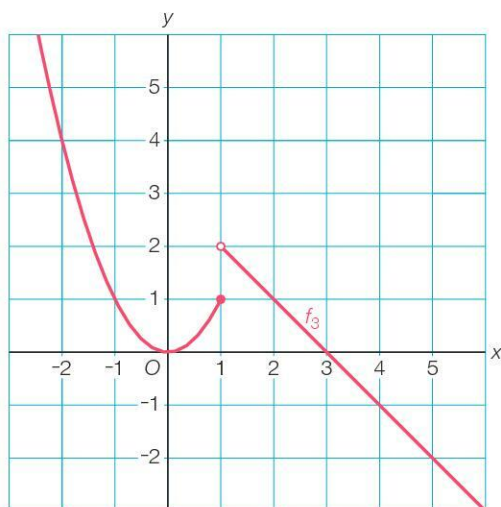


$$O(V) = \int_1^2 (f_{-2}(x) - f_2(x)) dx = \int_1^2 (x^2 + 2x - (x^2 - 2x)) dx = \int_1^2 4x dx = [2x^2]_1^2 = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 6$$

13.2 Sprongen en knikken in grafieken

Bladzijde 18

18 a $f_3(x) = \begin{cases} x^2 & \text{voor } x \leq 1 \\ -x + 3 & \text{voor } x > 1 \end{cases}$



- b** Nee, de grafiek van f_3 is geen ononderbroken kromme.
c Voor $p = 2$ is de grafiek van f_p een ononderbroken kromme.

Bladzijde 19

19 a $\lim_{x \uparrow 1} f_p(x) = \lim_{x \uparrow 1} 2^{x-p} = 2^{1-p}$
 $\lim_{x \downarrow 1} f_p(x) = \lim_{x \downarrow 1} (x^2 + 7) = 1 + 7 = 8$
 $\lim_{x \rightarrow 1} f_p(x)$ bestaat als $2^{1-p} = 8$
 $1 - p = 3$
 $p = -2$

b $\lim_{x \uparrow 1} f_p(x) = \lim_{x \uparrow 1} e^{x+p} = e^{1+p}$
 $\lim_{x \downarrow 1} f_p(x) = \lim_{x \downarrow 1} (x+3) = 1+3 = 4$
 $\lim_{x \rightarrow 1} f_p(x)$ bestaat als $e^{1+p} = 4$
 $1+p = \ln(4)$
 $p = -1 + \ln(4)$

c $\lim_{x \uparrow 1} f_p(x) = \lim_{x \uparrow 1} \ln(x+p) = \ln(1+p)$
 $\lim_{x \downarrow 1} f_p(x) = \lim_{x \downarrow 1} (x^2+1) = 1+1 = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 1} f_p(x)$ bestaat als $\ln(1+p) = 2$
 $1+p = e^2$
 $p = -1 + e^2$

d $\lim_{x \uparrow 1} f_p(x) = \lim_{x \uparrow 1} |px-2| = |p-2|$
 $\lim_{x \downarrow 1} f_p(x) = \lim_{x \downarrow 1} (x^2+3x) = 1+3 = 4$
 $\lim_{x \rightarrow 1} f_p(x)$ bestaat als $|p-2| = 4$
 $p-2 = 4 \vee p-2 = -4$
 $p = 6 \vee p = -2$

Bladzijde 20

20 $\lim_{x \uparrow 2} f_{p,q}(x) = \lim_{x \uparrow 2} (x^2+p) = 4+p$
 $\lim_{x \downarrow 2} f_{p,q}(x) = \lim_{x \downarrow 2} (3x+q) = 6+q$
 $\lim_{x \uparrow 4} f_{p,q}(x) = \lim_{x \uparrow 4} (3x+q) = 12+q$
 $\lim_{x \downarrow 4} f_{p,q}(x) = \lim_{x \downarrow 4} (-x^2-px+11) = -16-4p+11 = -4p-5$
 $\lim_{x \rightarrow 2} f_{p,q}(x)$ bestaat als $4+p = 6+q$
 $p-q = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 4} f_{p,q}(x)$ bestaat als $12+q = -4p-5$
 $4p+q = -17$

$$\begin{cases} p-q=2 \\ 4p+q=-17 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 5p = -15 \\ p = -3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} p-q=2 \\ p-q=2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} -3-q=2 \\ q = -5 \end{matrix}$$

Dus voor $p = -3$ en $q = -5$.

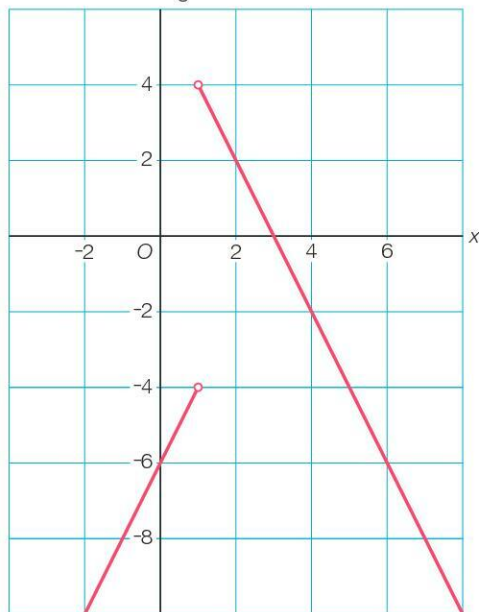
21 $\lim_{x \uparrow \frac{1}{4}} f_{p,q}(x) = \lim_{x \uparrow \frac{1}{4}} 4 \sin(p\pi x) = 4 \sin(\frac{1}{4} \pi p)$
 $\lim_{x \downarrow \frac{1}{4}} f_{p,q}(x) = \lim_{x \downarrow \frac{1}{4}} (8x^2+qx+2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}q + 2 = \frac{1}{4}q + 2\frac{1}{2}$
 $\lim_{x \uparrow 3} f_{p,q}(x) = \lim_{x \uparrow 3} (8x^2+qx+2) = 72+3q+2 = 3q+74$
 $\lim_{x \downarrow 3} f_{p,q}(x) = \lim_{x \downarrow 3} (x^4-4x-1) = 81-12-1 = 68$
 $\lim_{x \rightarrow 3} f_{p,q}(x)$ bestaat als $3q+74 = 68$
 $3q = -6$
 $q = -2$
 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f_{p,q}(x)$ bestaat als $4 \sin(\frac{1}{4} \pi p) = \frac{1}{4}q + 2\frac{1}{2}$
 $q = -2$ geeft $4 \sin(\frac{1}{4} \pi p) = -\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}$
 $4 \sin(\frac{1}{4} \pi p) = 2$
 $\sin(\frac{1}{4} \pi p) = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{4} \pi p = \frac{1}{6} \pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{4} \pi p = \frac{5}{6} \pi + k \cdot 2\pi$
 $p = \frac{2}{3} + k \cdot 8 \vee p = \frac{5}{3} + k \cdot 8$
 $0 < p < 5$ geeft $p = \frac{2}{3} \vee p = \frac{5}{3}$
Dus voor $(p = \frac{2}{3} \vee p = \frac{5}{3}) \wedge q = -2$.

- 22** a Voor $x < 2$ is $f(x) = x \cdot (-x + 2) = -x^2 + 2x$.
 b Voor $x \geq 2$ is $f(x) = x \cdot (x - 2) = x^2 - 2x$.
 c Voor $x > 2$ is $f'(x) = 2x - 2$.
 d $\lim_{x \uparrow 2} f'(x) = \lim_{x \uparrow 2} (-2x + 2) = -4 + 2 = -2$
 $\lim_{x \downarrow 2} f'(x) = \lim_{x \downarrow 2} (2x - 2) = 4 - 2 = 2$
 e $\lim_{x \uparrow 2} f'(x) \neq \lim_{x \downarrow 2} f'(x)$, dus $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x)$ bestaat niet.

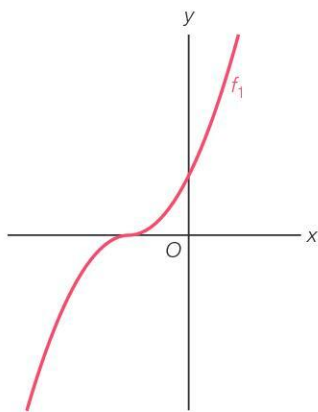
Bladzijde 21

- 23** a De notatie $f'(x) = \begin{cases} -2x + 6 & \text{voor } x > 1 \\ 2x - 6 & \text{voor } x < 1 \end{cases}$ is juist, want $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$ bestaat niet oftewel $f'(x)$ bestaat niet voor $x = 1$.

b helling



- 24** a $f_1(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{voor } x \geq -1 \\ -x^2 - 2x - 1 & \text{voor } x < -1 \end{cases}$



- b** $f_p(3) = 4$ geeft $(3 + 1) \cdot |3 + p| = 4$
 $|3 + p| = 1$
 $3 + p = 1 \vee 3 + p = -1$
 $p = -2 \vee p = -4$

25 a $f_1(x) = \begin{cases} (2x+1)(x-1) = 2x^2 - x - 1 & \text{voor } x \geq 1 \\ (2x+1)(-x+1) = -2x^2 + x + 1 & \text{voor } x < 1 \end{cases}$

Het knikpunt is $(1, 0)$.

$$\lim_{x \uparrow 1} f'(x) = \lim_{x \uparrow 1} (-4x + 1) = -4 + 1 = -3$$

Dus $k: y = -3x + 3$.

$$\lim_{x \downarrow 1} f'(x) = \lim_{x \downarrow 1} (4x - 1) = 4 - 1 = 3$$

Dus $l: y = 3x - 3$.

b $f_p(-1) = -3$ geeft $(-2+1) \cdot |-1-p| = -3$
 $|-1-p| = 3$
 $-1-p = 3 \vee -1-p = -3$
 $p = -4 \vee p = 2$

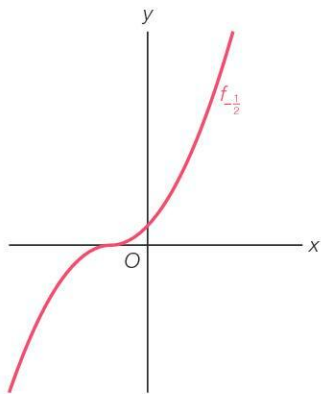
c $f_p(x) = \begin{cases} (2x+1)(x-p) = 2x^2 - 2px + x - p & \text{voor } x \geq p \\ (2x+1)(-x+p) = -2x^2 + 2px - x + p & \text{voor } x < p \end{cases}$

$$\lim_{x \uparrow p} f'_p(x) = \lim_{x \uparrow p} (-4x + 2p - 1) = -4p + 2p - 1 = -2p - 1$$

$$\lim_{x \downarrow p} f'_p(x) = \lim_{x \downarrow p} (4x - 2p + 1) = 4p - 2p + 1 = 2p + 1$$

Geen knik als $\lim_{x \uparrow p} f'_p(x) = \lim_{x \downarrow p} f'_p(x)$, dus als $-2p - 1 = 2p + 1$
 $-4p = 2$
 $p = -\frac{1}{2}$

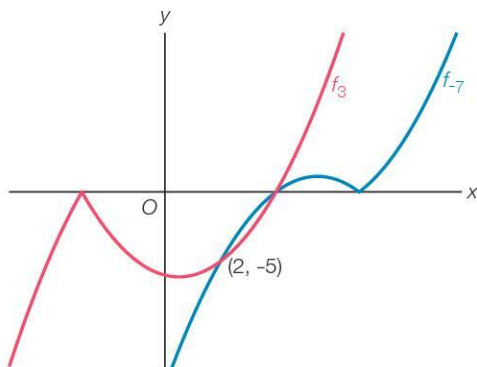
$$f_{-\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x + \frac{1}{2} & \text{voor } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x^2 - 2x - \frac{1}{2} & \text{voor } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$



26 a $f_p(2) = -5$ geeft $(1-2) \cdot |2+p| = -5$
 $|2+p| = 5$
 $2+p = 5 \vee 2+p = -5$
 $p = 3 \vee p = -7$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 6 & \text{voor } x \geq -3 \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 6 & \text{voor } x < -3 \end{cases}$$

$$f_{-7}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 5\frac{1}{2}x + 14 & \text{voor } x \geq 7 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 5\frac{1}{2}x - 14 & \text{voor } x < 7 \end{cases}$$



b $f_p(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2}x - 2)(x + p) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}px - 2x - 2p & \text{voor } x \geq -p \\ (\frac{1}{2}x - 2)(-x - p) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}px + 2x + 2p & \text{voor } x < -p \end{cases}$

$\lim_{x \uparrow -p} f'_p(x) = \lim_{x \uparrow -p} (-x - \frac{1}{2}p + 2) = p - \frac{1}{2}p + 2 = \frac{1}{2}p + 2$

$\lim_{x \downarrow -p} f'_p(x) = \lim_{x \downarrow -p} (x + \frac{1}{2}p - 2) = -p + \frac{1}{2}p - 2 = -\frac{1}{2}p - 2$

Geen knik als $\lim_{x \uparrow -p} f'_p(x) = \lim_{x \downarrow -p} f'_p(x)$, dus als $\frac{1}{2}p + 2 = -\frac{1}{2}p - 2$
 $p = -4$

c $f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 8 & \text{voor } x \geq -4 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 8 & \text{voor } x < -4 \end{cases}$

$\lim_{x \uparrow -4} f'_4(x) = \lim_{x \uparrow -4} -x = 4$, dus $rc_k = 4$.

$rc_k = \tan(\alpha) = 4$, dus $\alpha = 75,9...^\circ$.

$\lim_{x \downarrow -4} f'_4(x) = \lim_{x \downarrow -4} x = -4$, dus $rc_l = -4$.

$rc_l = \tan(\beta) = -4$, dus $\beta = -75,9...^\circ$.

$\alpha - \beta = 75,9...^\circ - (-75,9...^\circ) \approx 152^\circ$

Dus $\angle(k, l) \approx 180^\circ - 152^\circ = 28^\circ$.

d Zie b.

$rc_k = \frac{1}{2}p + 2$ en $rc_l = -\frac{1}{2}p - 2$

$k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2}p + 2)(-\frac{1}{2}p - 2) &= -1 \\ (\frac{1}{2}p + 2)(\frac{1}{2}p + 2) &= 1 \\ \frac{1}{4}p^2 + 2p + 4 &= 1 \\ \frac{1}{4}p^2 + 2p + 3 &= 0 \\ p^2 + 8p + 12 &= 0 \\ (p + 2)(p + 6) &= 0 \\ p &= -2 \vee p = -6 \end{aligned}$$

27 a $f_p(x) = \begin{cases} (x - p) \ln(x) & \text{voor } x \geq p \\ (-x + p) \ln(x) & \text{voor } x < p \end{cases}$

$[(x - p) \ln(x)]' = 1 \cdot \ln(x) + (x - p) \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 - \frac{p}{x}$

$[(-x + p) \ln(x)]' = -1 \cdot \ln(x) + (-x + p) \cdot \frac{1}{x} = -\ln(x) - 1 + \frac{p}{x}$

$\lim_{x \uparrow p} f'_p(x) = \lim_{x \uparrow p} \left(-\ln(x) - 1 + \frac{p}{x} \right) = -\ln(p) - 1 + \frac{p}{p} = -\ln(p) - 1 + 1 = -\ln(p)$

$\lim_{x \downarrow p} f'_p(x) = \lim_{x \downarrow p} \left(\ln(x) + 1 - \frac{p}{x} \right) = \ln(p) + 1 - \frac{p}{p} = \ln(p) + 1 - 1 = \ln(p)$

Geen knik als $\lim_{x \uparrow p} f'_p(x) = \lim_{x \downarrow p} f'_p(x)$, dus als $-\ln(p) = \ln(p)$
 $-2 \ln(p) = 0$
 $\ln(p) = 0$
 $p = 1$

b $\lim_{x \uparrow 2} f'_2(x) = \lim_{x \uparrow 2} \left(-\ln(x) - 1 + \frac{2}{x} \right) = -\ln(2)$, dus $rc_k = -\ln(2)$.

$rc_k = \tan(\alpha) = -\ln(2)$, dus $\alpha = -34,7...^\circ$.

$\lim_{x \downarrow 2} f'_2(x) = \lim_{x \downarrow 2} \left(\ln(x) + 1 - \frac{2}{x} \right) = \ln(2)$, dus $rc_l = \ln(2)$.

$rc_l = \tan(\beta) = \ln(2)$, dus $\beta = 34,7...^\circ$.

$\beta - \alpha = 34,7...^\circ - (-34,7...^\circ) \approx 69^\circ$

Dus $\angle(k, l) \approx 69^\circ$.

c Zie a.

$rc_k = -\ln(p)$ en $rc_l = \ln(p)$

$k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$

$$\begin{aligned} -\ln(p) \cdot \ln(p) &= -1 \\ \ln^2(p) &= 1 \\ \ln(p) &= 1 \vee \ln(p) = -1 \\ p &= e \vee p = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

13.3 Asymptoten bij gebroken functies

Bladzijde 24

- 28** a $f(1,1) \approx -4$
 $f(1,01) \approx -49$
 $f(1,001) \approx -499$
 b $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \infty$
 c $f(10) \approx 1,717$
 $f(100) \approx 1,970$
 $f(1000) \approx 1,997$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$
 d $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

Bladzijde 26

- 29** a $f(x) = 2$ geeft $\frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 1} = 2$
 $2x^2 - 3x = 2(x^2 - 1)$
 $2x^2 - 3x = 2x^2 - 2$
 $-3x = -2$
 $x = \frac{2}{3}$

Dus het snijpunt is $(\frac{2}{3}, 2)$.

- b $g(x) = \frac{x^2}{x} = x$ mits $x \neq 0$

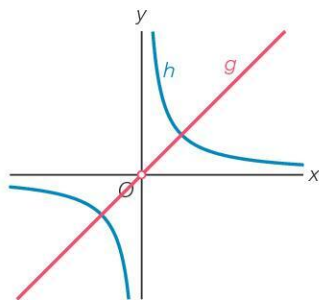
De grafiek van g is de lijn $y = x$ met perforatie $(0, 0)$.

$$h(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

noemer = 0 geeft $x = 0$, dus de lijn $x = 0$ is verticale asymptoot van de grafiek van h .

$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, dus de lijn $y = 0$ is horizontale asymptoot van de grafiek van h .

De grafiek van h is de hyperbool $y = \frac{1}{x}$.



- 30** a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x}{2 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2} - 1} = \frac{3 - 0}{0 - 1} = -3$

$$\text{b } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5}{x^3} - 1}{2} = \frac{0 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{c } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2}{2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x}}{\frac{2}{x^3} - 1} = \frac{0}{0 - 1} = 0$$

$$\text{d } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 12x + 9}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{4 - 0 + 0}{1 + 0} = 4$$

$$31 \quad a \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-1)^2}{(2x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 6x + 1}{4x^2 + 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{9-0+0}{4+0+0} = 2\frac{1}{4}$$

$$b \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|+1}{1-|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{-1+0}{0+1} = -1$$

$$c \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2-x^2|}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2+x^2}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{x^2}+1}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{0+1}{1+0+0} = 1$$

$$d \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$32 \quad a \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x-1)^2}{x^3+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x^2-8x+1}{x^3+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{16}{x}-\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{4}{x^3}} = \frac{0-0+0}{1+0} = 0$$

$$b \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2x+1)^2}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(4x^2+4x+1)}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3+4x^2+x}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{4+0+0}{1+0} = 4$$

$$c \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^3-8|}{2x^3+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3+8}{2x^3+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1+\frac{8}{x^3}}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{-1+0}{2+0} = -\frac{1}{2}$$

$$d \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|4x^3|-10}{|x^3-1|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3-10}{-x^3+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4-\frac{10}{x^3}}{-1+\frac{1}{x^3}} = \frac{-4-0}{-1+0} = 4$$

$$33 \quad a \quad x^2 - x - 6 = 0 \wedge 4x^2 - 1 \neq 0 \\ (x+2)(x-3) = 0 \wedge x^2 \neq \frac{1}{4} \\ x = -2 \vee x = 3$$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -2$ en $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-1}{x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}} = \frac{4-0}{1-0-0} = 4$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 4$.

$$b \quad f(x) = 4 \text{ geeft } \frac{4x^2-1}{x^2-x-6} = 4 \\ 4x^2-1 = 4x^2-4x-24 \\ 4x = -23 \\ x = -5\frac{3}{4}$$

Dus $A(-5\frac{3}{4}, 4)$.

$$c \quad f(x) = 4\frac{1}{2} \text{ geeft } \frac{4x^2-1}{x^2-x-6} = \frac{9}{2} \\ 9x^2-9x-54 = 8x^2-2 \\ x^2-9x-52 = 0 \\ (x+4)(x-13) = 0 \\ x = -4 \vee x = 13 \\ f(x) < 4\frac{1}{2} \text{ geeft } x < -4 \vee -2 < x < 3 \vee x > 13$$

34

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \quad & x^3 - 4x = 0 \wedge |x^3| \neq 0 \\ & x(x^2 - 4) = 0 \wedge x^3 \neq 0 \\ & (x = 0 \vee x^2 = 4) \wedge x \neq 0 \\ & x = 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^3|}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

Voor $x \rightarrow \infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^3|}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{-1}{1 - 0} = -1$$

Voor $x \rightarrow -\infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = -1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad f(x) = 1 \text{ geeft } & x > 0 \wedge \frac{x^3}{x^3 - 4x} = 1 \vee x < 0 \wedge \frac{-x^3}{x^3 - 4x} = 1 \\ & x > 0 \wedge x^3 = x^3 - 4x & x < 0 \wedge -x^3 = x^3 - 4x \\ & x > 0 \wedge 4x = 0 & x < 0 \wedge -2x^3 + 4x = 0 \\ & \text{geen opl.} & x < 0 \wedge -2x(x^2 - 2) = 0 \\ & & x < 0 \wedge (x = 0 \vee x^2 = 2) \\ & & x < 0 \wedge (x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}) \\ & & x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = -1 \text{ geeft } & x > 0 \wedge \frac{x^3}{x^3 - 4x} = -1 & \vee x < 0 \wedge \frac{-x^3}{x^3 - 4x} = -1 \\ & x > 0 \wedge x^3 = -x^3 + 4x & x < 0 \wedge -x^3 = -x^3 + 4x \\ & x > 0 \wedge 2x^3 - 4x = 0 & x < 0 \wedge 4x = 0 \\ & x > 0 \wedge 2x(x^2 - 2) = 0 & x < 0 \wedge x = 0 \\ & x > 0 \wedge (x = 0 \vee x^2 = 2) & \text{geen opl.} \\ & x > 0 \wedge (x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}) \\ & x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Dus $A(-\sqrt{2}, 1)$ en $B(\sqrt{2}, -1)$.

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = \frac{-1 - 1}{\sqrt{2} - (-\sqrt{2})} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} y = -\frac{1}{2}x\sqrt{2} + b \quad & \left. \begin{aligned} & \text{door } A(-\sqrt{2}, 1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & -\frac{1}{2} \cdot (-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} + b = 1 \\ & -\frac{1}{2} \cdot (-2) + b = 1 \\ & 1 + b = 1 \\ & b = 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Dus $k: y = -\frac{1}{2}x\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \quad f(x) = \frac{1}{3} \text{ geeft } & x > 0 \wedge \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \frac{4}{3} & \vee x < 0 \wedge \frac{-x^3}{x^3 - 4x} = \frac{4}{3} \\ & x > 0 \wedge 4x^3 - 16x = 3x^3 & x < 0 \wedge 4x^3 - 16x = -3x^3 \\ & x > 0 \wedge x^3 - 16x = 0 & x < 0 \wedge 7x^3 - 16x = 0 \\ & x > 0 \wedge x(x^2 - 16) = 0 & x < 0 \wedge x(7x^2 - 16) = 0 \\ & x > 0 \wedge (x = 0 \vee x^2 = 16) & x < 0 \wedge (x = 0 \vee x^2 = \frac{16}{7}) \\ & x > 0 \wedge (x = 0 \vee x = 4 \vee x = -4) & x < 0 \wedge (x = 0 \vee x = \sqrt{\frac{16}{7}} \vee x = -\sqrt{\frac{16}{7}}) \\ & x = 4 & x = -\sqrt{\frac{16}{7}} = -\frac{4}{\sqrt{7}}\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$f(x) > \frac{1}{3} \text{ geeft } -2 < x < -\frac{4}{\sqrt{7}}\sqrt{7} \vee 2 < x < 4$$

$$35 \quad \mathbf{a} \quad \left. \begin{array}{l} bx^2 - 18 = 0 \\ x = -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 9b - 18 = 0 \\ b = 2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} bx^2 - 18 = 0 \\ x = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 9b - 18 = 0 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $b = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + 5}{2x^2 - 18} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{18}{x^2}} = \frac{a + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 6 \text{ geeft } \frac{1}{2}a = 6, \text{ dus } a = 12.$$

Dus $a = 12$ en $b = 2$.

$$\mathbf{b} \quad \left. \begin{array}{l} ax^4 + bx^3 - 2 = 0 \\ x = -2 \end{array} \right\} 16a - 8b - 2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} ax^4 + bx^3 - 2 = 0 \\ x = 2 \end{array} \right\} 16a + 8b - 2 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 16a - 8b - 2 = 0 \\ 16a + 8b - 2 = 0 \end{array} \right. -$$

$$-16b = 0$$

$$b = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 16a - 8b - 2 = 0 \\ 16a - 2 = 0 \end{array} \right\} a = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{\frac{1}{8}x^4 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{\frac{1}{8} - \frac{2}{x^4}} = \frac{0 - 0 + 0}{\frac{1}{8} - 0} = 0, \text{ dus de lijn } y = 0 \text{ is}$$

horizontale asymptoot klopt.

Dus $a = \frac{1}{8}$ en $b = 0$.

Bladzijde 28

$$36 \quad f(x) = 0 \text{ geeft } x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = -3$$

vold. niet

Dus $A(-3, 0)$.

$$x^2 - 3x = 0 \wedge x^2 - 9 \neq 0$$

$$x(x - 3) = 0 \wedge x^2 \neq 9$$

$$(x = 0 \vee x = 3) \wedge x \neq 3 \wedge x \neq -3$$

$$x = 0$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{1 - \frac{9}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

Dus $B(0, 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{x} = \frac{3 + 3}{3} = 2$$

Dus de perforatie is $(3, 2)$.

$$\text{Stel } k: y = ax + 1 \text{ met } a = \frac{1 - 0}{0 - 3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{3}x + 1.$$

$$k: y = \frac{1}{3}x + 1 \left\{ \frac{1}{3} \cdot 3 + 1 = 2 \text{ klopt.} \right.$$

door $(3, 2)$?

Dus de lijn k gaat door de perforatie van de grafiek van f .

37 $2 \sin(x) + 1 = 0 \wedge \cos(x) \neq 0$

$$2 \sin(x) = -1 \wedge x \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2} \wedge x \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$(x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi) \wedge x \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$.

$$f(x) = 0 \text{ geeft } \cos(x) = 0, \text{ dus } x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi.$$

Dus $A(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{2 \sin(x) + 1} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = \frac{(2 \sin(x) + 1) \cdot -\sin(x) - \cos(x) \cdot 2 \cos(x)}{(2 \sin(x) + 1)^2} = \frac{-2 \sin^2(x) - \sin(x) - 2 \cos^2(x)}{(2 \sin(x) + 1)^2} = \frac{-2 - \sin(x)}{(2 \sin(x) + 1)^2}$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'(\frac{1}{2}\pi) = \frac{-2 - 1}{(2 + 1)^2} = -\frac{1}{3}.$$

$$y = -\frac{1}{3}x + b \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } A(\frac{1}{2}\pi, 0) \end{array} \right\} -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi + b = 0$$

$$b = \frac{1}{6}\pi$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\pi.$$

$$x = \frac{1}{6}\pi \text{ geeft } y = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi = -\frac{2}{9}\pi$$

$$x = \frac{5}{6}\pi \text{ geeft } y = -\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi = -\frac{4}{9}\pi$$

$$\text{Dus } B(\frac{1}{6}\pi, -\frac{2}{9}\pi) \text{ en } C(\frac{5}{6}\pi, -\frac{4}{9}\pi).$$

38 a $f(x) = \frac{\cos^2(x)}{\cos(x) + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(\cos(x) + 1) \cdot 2 \cos(x) \cdot -\sin(x) - \cos^2(x) \cdot -\sin(x)}{(\cos(x) + 1)^2}$

$$= \frac{-2 \sin(x) \cos^2(x) - 2 \sin(x) \cos(x) + \sin(x) \cos^2(x)}{(\cos(x) + 1)^2}$$

$$= \frac{-\sin(x) \cos^2(x) - 2 \sin(x) \cos(x)}{(\cos(x) + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } -\sin(x) \cos^2(x) - 2 \sin(x) \cos(x) = 0$$

$$-\sin(x) \cos(x)(\cos(x) + 2) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \vee \cos(x) = 0 \vee \cos(x) = -2$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 0 \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \pi \text{ (vold. niet)} \vee x = \frac{3}{2}\pi \vee x = 2\pi$$

$$\text{max. is } f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{min. is } f(\frac{1}{2}\pi) = 0$$

$$\text{min. is } f(\frac{3}{2}\pi) = 0$$

$$\text{max. is } f(2\pi) = \frac{1}{2}$$

b $\cos(x) + 1 = 0 \wedge \cos^2(x) \neq 0$ met x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \pi$.

De verticale asymptoot is de lijn $x = \pi$.

$$f(x) = \frac{1}{2} \text{ geeft } \frac{\cos^2(x)}{\cos(x) + 1} = \frac{1}{2}$$

$$2 \cos^2(x) = \cos(x) + 1$$

$$2 \cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$$

$$\text{Stel } \cos(x) = u.$$

$$2u^2 - u - 1 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$$

$$u = \frac{1 + 3}{4} = 1 \vee u = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(x) = 1 \vee \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = k \cdot 2\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 0 \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi \vee x = 2\pi$$

$$\text{Dus } A(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}) \text{ en de afstand van } A \text{ tot de lijn } x = \pi \text{ is } \frac{1}{3}\pi.$$

39 a $x = \pi$ geeft $\sqrt{3} - 2 \sin(a\pi) = 0 \wedge \cos(a\pi) \neq 0$

$$2 \sin(a\pi) = \sqrt{3} \wedge a\pi \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\sin(a\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \wedge a \neq \frac{1}{2} + k \cdot 1$$

$$(a\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee a\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi) \wedge a \neq \frac{1}{2} + k \cdot 1$$

$$(a = \frac{1}{3} + k \cdot 2 \vee a = \frac{2}{3} + k \cdot 2) \wedge a \neq \frac{1}{2} + k \cdot 1$$

$$a = \frac{1}{3} + k \cdot 2 \vee a = \frac{2}{3} + k \cdot 2$$

$$0 < a < 1 \text{ geeft } a = \frac{1}{3} \vee a = \frac{2}{3}$$

b Voor een perforatie moet gelden $\cos(ax) = 0 \wedge \sqrt{3} - 2 \sin(ax) = 0$

$$ax = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \wedge \sin(ax) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$ax = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \wedge (ax = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee ax = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi)$$

Er bestaat geen waarde van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.

40 teller = 0 geeft $4 \sin(x) - 2 = 0$

$$4 \sin(x) = 2$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$

noemer = 0 geeft $4 \cos^2(x) - 3 = 0$

$$4 \cos^2(x) = 3$$

$$\cos^2(x) = \frac{3}{4}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee \cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$.

$$f(x) = \frac{4 \sin(x) - 2}{4 \cos^2(x) - 3} = \frac{4 \sin(x) - 2}{4(1 - \sin^2(x)) - 3} = \frac{4 \sin(x) - 2}{1 - 4 \sin^2(x)} = \frac{-2(1 - 2 \sin(x))}{(1 + 2 \sin(x))(1 - 2 \sin(x))}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}\pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}\pi} \frac{-2(1 - 2 \sin(x))}{(1 + 2 \sin(x))(1 - 2 \sin(x))} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}\pi} \frac{-2}{1 + 2 \sin(x)} = \frac{-2}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{6}\pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{6}\pi} \frac{-2(1 - 2 \sin(x))}{(1 + 2 \sin(x))(1 - 2 \sin(x))} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{6}\pi} \frac{-2}{1 + 2 \sin(x)} = \frac{-2}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = -1$$

De perforaties zijn de punten $(\frac{1}{6}\pi, -1)$ en $(\frac{5}{6}\pi, -1)$.

Bladzijde 29

41 a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{0}{1+0} = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{0}{1+0} = 0$

Dus de grafiek van f nadert de lijn $y = x + 3$ onbepikt voor $x \rightarrow \infty$ en voor $x \rightarrow -\infty$.

b $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{0}{1+0} = 0$

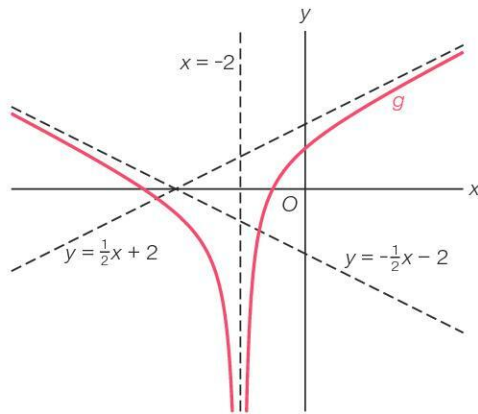
Dus de grafiek van s nadert de grafiek van g onbepikt voor $x \rightarrow \infty$.

Bladzijde 30

42 a Voor $x < 2$ is $g(x) = \frac{x^2 + 6x + 5}{-2x - 4} = \frac{-\frac{1}{2}x(-2x - 4) - 2x + 6x + 5}{-2x - 4} = -\frac{1}{2}x + \frac{4x + 5}{-2x - 4}$
 $= -\frac{1}{2}x + \frac{-2(-2x - 4) - 8 + 5}{-2x - 4} = -\frac{1}{2}x - 2 + \frac{3}{2x + 4}$

b De scheve asymptoten zijn de lijnen $y = \frac{1}{2}x + 2$ en $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

c



Bladzijde 31

43

a $x - 1 = 0 \wedge 2x^2 + 4x - 5 \neq 0$

$x = 1 \wedge 2x^2 + 4x - 5 \neq 0$

$x = 1$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 1$.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 5}{x - 1} = \frac{2x(x - 1) + 2x + 4x - 5}{x - 1} = 2x + \frac{6x - 5}{x - 1} = 2x + \frac{6(x - 1) + 6 - 5}{x - 1} = 2x + 6 + \frac{1}{x - 1}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - 1} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = 2x + 6$.

b $2x - 1 = 0 \wedge -x^2 + 3x - 2 \neq 0$

$2x = 1 \wedge -x^2 + 3x - 2 \neq 0$

$x = \frac{1}{2} \wedge -x^2 + 3x - 2 \neq 0$

$x = \frac{1}{2}$

De verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{1}{2}$.

$$g(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{2x - 1} = \frac{-\frac{1}{2}x(2x - 1) - \frac{1}{2}x + 3x - 2}{2x - 1} = -\frac{1}{2}x + \frac{2\frac{1}{2}x - 2}{2x - 1} = -\frac{1}{2}x + \frac{1\frac{1}{4}(2x - 1) + 1\frac{1}{4} - 2}{2x - 1}$$

$$= -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4} - \frac{\frac{3}{4}}{2x - 1}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4}}{2x - 1} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4}$.

c $x^2 - 9 = 0 \wedge x^3 + 3x^2 - 9x + 31 \neq 0$

$x^2 = 9 \wedge x^3 + 3x^2 - 9x + 31 \neq 0$

$(x = 3 \vee x = -3) \wedge x^3 + 3x^2 - 9x + 31 \neq 0$

$x = 3 \vee x = -3$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 3$ en $x = -3$.

$$h(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 31}{x^2 - 9} = \frac{x(x^2 - 9) + 9x + 3x^2 - 9x + 31}{x^2 - 9} = x + \frac{3x^2 + 31}{x^2 - 9} = x + \frac{3(x^2 - 9) + 27 + 31}{x^2 - 9}$$

$$= x + 3 + \frac{58}{x^2 - 9}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{58}{x^2 - 9} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x + 3$.

d $x^2 - 1 = 0 \wedge x^3 - 1 \neq 0$

$x^2 = 1 \wedge x^3 \neq 1$

$(x = 1 \vee x = -1) \wedge x \neq 1$

$x = -1$

De verticale asymptoot is de lijn $x = -1$.

$$j(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x(x^2 - 1) + x - 1}{x^2 - 1} = x + \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0 - 0}{1 - 0} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x$.

44 a $x + 2 = 0 \wedge x^2 - x - 2 \neq 0$

$x = -2$

De verticale asymptoot is de lijn $x = -2$.

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2} = \frac{x(x + 2) - 2x - x - 2}{x + 2} = x + \frac{-3x - 2}{x + 2} = x + \frac{-3(x + 2) + 6 - 2}{x + 2} = x - 3 + \frac{4}{x + 2}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x + 2} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x - 3$.

b $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x + 2} = x - 3 + 4(x + 2)^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4(x + 2)^{-2} = 1 - \frac{4}{(x + 2)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{4}{(x + 2)^2} = 0$

$$\frac{4}{(x + 2)^2} = 1$$

$$(x + 2)^2 = 4$$

$$x + 2 = 2 \vee x + 2 = -2$$

$$x = 0 \vee x = -4$$

max. is $f(-4) = -9$ en min. is $f(0) = -1$

c $f(x) = 0$ geeft $x^2 - x - 2 = 0$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

$f(x) \leq 0$ geeft $x < -2 \vee -1 \leq x \leq 2$

45 a $|x| = 0 \wedge x^2 + 3x + 2 \neq 0$

$x = 0$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.

Voor $x > 0$ is $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x} = x + 3 + \frac{2}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$, dus de lijn $y = x + 3$ is scheve asymptoot.

Voor $x < 0$ is $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{-x} = -x - 3 - \frac{2}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$, dus de lijn $y = -x - 3$ is scheve asymptoot.

b Voor $x > 0$ is $f(x) = x + 3 + \frac{2}{x} = x + 3 + 2x^{-1}$ en $f'(x) = 1 - 2x^{-2} = 1 - \frac{2}{x^2}$.

$f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{2}{x^2} = 0$

$$\frac{2}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

vold. niet

Voor $x < 0$ is $f(x) = -x - 3 - \frac{2}{x} = -x - 3 - 2x^{-1}$ en $f'(x) = -1 + 2x^{-2} = -1 + \frac{2}{x^2}$.

$f'(x) = 0$ geeft $-1 + \frac{2}{x^2} = 0$

$$\frac{2}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

vold. niet

min. is $f(-\sqrt{2}) = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 3$ en min. is $f(\sqrt{2}) = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 3$

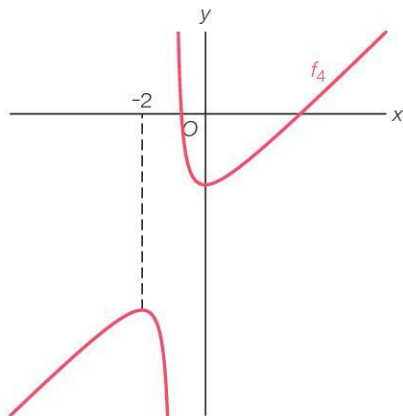
c Voor $x < 0$ geldt $f(x) = 6$ geeft $\frac{x^2 + 3x + 2}{-x} = 6$
 $x^2 + 3x + 2 = -6x$
 $x^2 + 9x + 2 = 0$
 $D = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 73$
 $x = \frac{-9 + \sqrt{73}}{2} = -4\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{73} \vee x = -4\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{73}$

Voor $x > 0$ geldt $f(x) = 6$ geeft $\frac{x^2 + 3x + 2}{x} = 6$
 $x^2 + 3x + 2 = 6x$
 $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $(x-1)(x-2) = 0$
 $x = 1 \vee x = 2$
 $f(x) \leq 6$ geeft $-4\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{73} \leq x \leq -4\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{73} \vee 1 \leq x \leq 2$

46 a $f_2(x) = \frac{4x^2 - 9x - 9}{4x + 2} = \frac{x(4x + 2) - 2x - 9x - 9}{4x + 2} = x + \frac{-11x - 9}{4x + 2} = x + \frac{-\frac{11}{4}(4x + 2) + 5\frac{1}{2} - 9}{4x + 2}$
 $= x - 2\frac{3}{4} - \frac{3\frac{1}{2}}{4x + 2}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\frac{1}{2}}{4x + 2} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x - 2\frac{3}{4}$.

b $f_4(x) = \frac{4x^2 - 9x - 9}{4x + 4}$ geeft
 $f_4'(x) = \frac{(4x + 4) \cdot (8x - 9) - (4x^2 - 9x - 9) \cdot 4}{(4x + 4)^2} = \frac{32x^2 - 36x + 32x - 36 - 16x^2 + 36x + 36}{(4x + 4)^2} = \frac{16x^2 + 32x}{(4x + 4)^2}$
 $f_4'(x) = 0$ geeft $16x^2 + 32x = 0$
 $16x(x + 2) = 0$
 $x = 0 \vee x = -2$



max. is $f_4(-2) = -6\frac{1}{4}$ en min. is $f_4(0) = -2\frac{1}{4}$

c $f_a(x) = \frac{4x^2 - 9x - 9}{4x + a} = \frac{(x-3)(4x+3)}{4x+a} = \frac{\frac{1}{4}(4x-12)(4x+3)}{4x+a}$

Er is een perforatie als $a = -12$ en als $a = 3$.

$\lim_{x \rightarrow 3} f_{12}(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{4}(4x-12)(4x+3)}{4x-12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{4}(4x+3) = 3\frac{3}{4}$

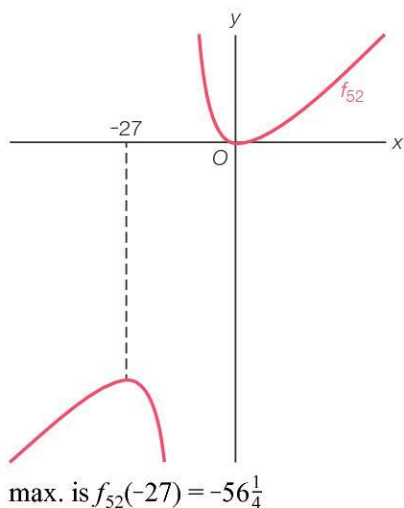
Dus voor $a = -12$ is de perforatie $(3, 3\frac{3}{4})$.

$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{4}} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{4}} \frac{\frac{1}{4}(4x-12)(4x+3)}{4x+3} = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{4}} \frac{1}{4}(4x-12) = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{4}} (x-3) = -3\frac{3}{4}$

Dus voor $a = 3$ is de perforatie $(-\frac{3}{4}, -3\frac{3}{4})$.

47 $f_a(x) = \frac{4x^2 - 9x - 9}{4x + a}$ geeft $f'_a(x) = \frac{(4x + a) \cdot (8x - 9) - (4x^2 - 9x - 9) \cdot 4}{(4x + a)^2}$
 $f'_a(1) = 0$ geeft $(4 + a) \cdot (8 - 9) - (4 - 9 - 9) \cdot 4 = 0$
 $-4 - a + 56 = 0$
 $a = 52$

$f_{52}(x) = \frac{(4x + 52) \cdot (8x - 9) - (4x^2 - 9x - 9) \cdot 4}{(4x + 52)^2}$
 $f'_{52}(x) = 0$ geeft $(4x + 52) \cdot (8x - 9) - (4x^2 - 9x - 9) \cdot 4 = 0$
 $32x^2 - 36x + 416x - 468 - 16x^2 + 36x + 36 = 0$
 $16x^2 + 416x - 432 = 0$
 $x^2 + 26x - 27 = 0$
 $(x - 1)(x + 27) = 0$
 $x = 1 \vee x = -27$



Bladzijde 32

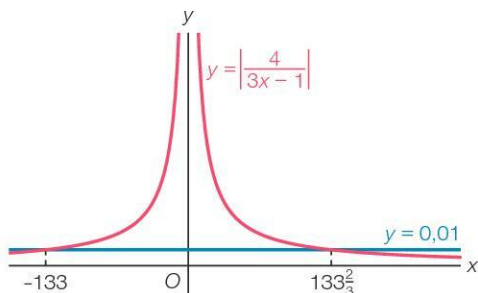
48 a $f_0(x) = \frac{3x^2 + 11x}{3x - 1} = \frac{x(3x - 1) + x + 11x}{3x - 1} = x + \frac{12x}{3x - 1} = x + \frac{4(3x - 1) + 4}{3x - 1} = x + 4 + \frac{4}{3x - 1}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{3x - 1} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $k: y = x + 4$.

$|f_0(x) - (x + 4)| < 0,01$ geeft $\left| x + 4 + \frac{4}{3x - 1} - x - 4 \right| < 0,01$ oftewel $\left| \frac{4}{3x - 1} \right| < 0,01$.

Voer in $y_1 = \left| \frac{4}{3x - 1} \right|$ en $y_2 = 0,01$.

De optie snijpunt geeft $x = -133$ en $x = 133\frac{2}{3}$.



$|f_0(x) - (x + 4)| < 0,01$ geeft $x < -133 \vee x > 133\frac{2}{3}$

$$\text{b } f_a(x) = \frac{(3x-1)(x-a)}{3x-1} = \frac{3x^2 - 3ax - x + a}{3x-1} = \frac{3x^2 + (-3a-1)x + a}{3x-1}$$

$$\text{Dus } -3a - 1 = 11$$

$$-3a = 12$$

$$a = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f_{-4}(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 + 11x - 4}{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{(3x-1)(x+4)}{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (x+4) = 4\frac{1}{3}$$

Dus de perforatie is het punt $(\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3})$.

$$\text{49 a } f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 + x - 6} = \frac{x(x^2 - 6x + 8)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-4)}{x+3} = \frac{2(2-4)}{2+3} = -\frac{4}{5}$$

Dus de perforatie is $A(2, -\frac{4}{5})$.

$$(x-2)(x+3) = 0 \wedge x(x-2)(x-4) \neq 0$$

$$(x=2 \vee x=-3) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 4$$

$$x = -3$$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -3$.

$$f(x) = \frac{x(x-4)}{x+3} = \frac{x^2 - 4x}{x+3} = \frac{x(x+3) - 3x - 4x}{x+3} = x - \frac{7x}{x+3} = x - \frac{7(x+3) - 21}{x+3} = x - 7 + \frac{21}{x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{21}{x+3} = 0, \text{ dus de scheve asymptoot is de lijn } y = x - 7.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 7 \\ x = -3 \end{array} \right\} y = -3 - 7 = -10$$

Dus $B(-3, -10)$.

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = \frac{-\frac{4}{5} - (-10)}{2 - (-3)} = \frac{46}{25}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{46}{25}x + b \\ \text{door } B(-3, -10) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{46}{25} \cdot (-3) + b = -10 \\ -\frac{138}{25} + b = -10 \\ b = -4\frac{12}{25} \end{array}$$

Dus $k: y = 1\frac{21}{25}x - 4\frac{12}{25}$ en het snijpunt met de y -as is $C(0, -4\frac{12}{25})$.

$$\text{b } g(x) = \frac{x(x-4)}{x+3} = \frac{x^2 - 4x}{x+3} \text{ geeft}$$

$$g'(x) = \frac{(x+3)(2x-4) - (x^2 - 4x) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 6x - 12 - x^2 + 4x}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x - 12}{(x+3)^2}$$

$$\text{De helling in } A \text{ is } g'(2) = \frac{4 + 12 - 12}{5^2} = \frac{4}{25}, \text{ dus } rc_l = -\frac{25}{4} = -6\frac{1}{4}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -6\frac{1}{4}x + b \\ \text{door } A(2, -\frac{4}{5}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -6\frac{1}{4} \cdot 2 + b = -\frac{4}{5} \\ -12\frac{1}{2} + b = -\frac{4}{5} \\ b = 11\frac{7}{10} \end{array}$$

Dus $l: y = -6\frac{1}{4}x + 11\frac{7}{10}$ en $D(0, 11\frac{7}{10})$.

13.4 Limieten bij exponentiële en logaritmische functies

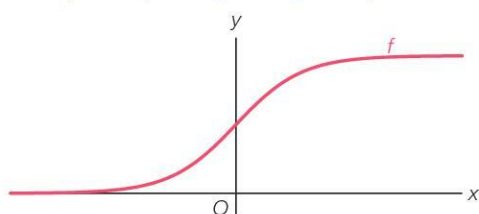
Bladzijde 34

50

a

x	-6	-3	0	3	6
$f(x)$	0,01	0,28	3	5,72	5,99

b

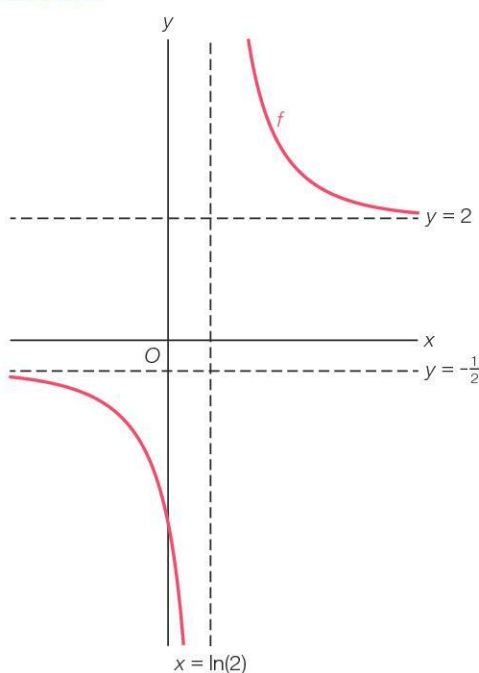


c De lijnen $y = 0$ en $y = 6$.

Bladzijde 35

51

a



b Voor $x \rightarrow \infty$ krijg je $y = 3x - 4 + 2$, dus $y = 3x - 2$.
Voor $x \rightarrow -\infty$ krijg je $y = 3x - 4 - \frac{1}{2}$, dus $y = 3x - 4\frac{1}{2}$.

52

a $\lim_{x \rightarrow \infty} (10 - 4 \cdot (\frac{1}{2})^x) = 10 - 4 \cdot 0 = 10$

b $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + 4e^{-x}) = 2 + 4 \cdot 0 = 2$

c $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 3}{e^x + 2} = \frac{0 - 3}{0 + 2} = -1\frac{1}{2}$

d $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 3^x + 1}{3 \cdot 2^x + 1} = \frac{2 \cdot 0 + 1}{3 \cdot 0 + 1} = 1$

e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^x - 3}{2 - e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{e^x}}{\frac{2}{e^x} - 1} = \frac{4 - 0}{0 - 1} = -4$

f $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 16}{4^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^x}{4^x} + \frac{16}{4^x}}{1 - \frac{1}{4^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{2})^x + \frac{16}{4^x}}{1 - \frac{1}{4^x}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0$

53 a $e^x - e = 0 \wedge 5e^x \neq 0$

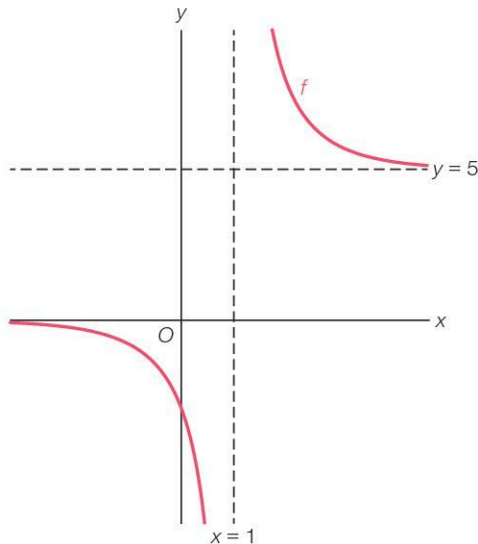
$$e^x = e^1$$

$$x = 1$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5e^x}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{1 - \frac{e}{e^x}} = \frac{5}{1 - 0} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5e^x}{e^x - e} = \frac{0}{0 - e} = 0$$

De horizontale asymptoten zijn de lijnen $y = 5$ en $y = 0$.b Voor $0 \leq p \leq 5$ heeft de vergelijking $f(x) = p$ geen oplossingen.

$$\text{c } f(x) = \frac{5e^x}{e^x - e} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(e^x - e) \cdot 5e^x - 5e^x \cdot e^x}{(e^x - e)^2} = \frac{5e^{2x} - 5e^{x+1} - 5e^{2x}}{(e^x - e)^2} = \frac{-5e^{x+1}}{(e^x - e)^2}$$

$$rc_k = f'(0) = \frac{-5e^1}{(e^0 - e)^2} = \frac{-5e}{(1 - e)^2}$$

54 a Geen verticale asymptoot als $e^x + q = 0 \wedge -e^x - 1 \neq 0$ geen oplossing heeft. Dat is het geval als $q \geq 0$.

b $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{p,q}(x) = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{pe^x - 1}{e^x + q} = -3$$

$$\frac{p \cdot 0 - 1}{0 + q} = -3$$

$$\frac{-1}{q} = -3$$

$$q = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{p,q}(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{pe^x - 1}{e^x + q} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{q}{e^x}} = 4$$

$$\frac{p - 0}{1 + 0} = 4$$

$$p = 4$$

Dus voor $p = 4$ en $q = \frac{1}{3}$.

c $e^2 + q = 0$

$$q = -e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{p,q}(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p e^x - 1}{e^x + q} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{q}{e^x}} = 2$$

$$\frac{p - 0}{1 + 0} = 2$$

$$p = 2$$

Dus voor $p = 2$ en $q = -e^2$.

$$\text{Dit geeft } f_{2,-e^2}(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - e^2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{2,-e^2}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x - e^2} = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 - e^2} = \frac{1}{e^2}$$

Dus in dit geval is voor $x \rightarrow -\infty$ de horizontale asymptoot de lijn $y = \frac{1}{e^2}$.

d Er moet voor $x = -\ln(2)$ gelden dat $p e^x - 1 = 0 \wedge e^x + q = 0$.

$$\text{Dit geeft } p e^{-\ln(2)} - 1 = 0 \wedge e^{-\ln(2)} + q = 0$$

$$p e^{\ln(\frac{1}{2})} - 1 = 0 \wedge e^{\ln(\frac{1}{2})} + q = 0$$

$$p \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0 \wedge \frac{1}{2} + q = 0$$

$$p = 2 \wedge q = -\frac{1}{2}$$

55 a $f(x) = \frac{2x e^x + 3}{e^{x+2}}$ geeft

$$f'(x) = \frac{e^{x+2} \cdot (2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x) - (2x e^x + 3) \cdot e^{x+2}}{(e^{x+2})^2} = \frac{2e^x + 2x e^x - 2x e^x - 3}{e^{x+2}} = \frac{2e^x - 3}{e^{x+2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 2e^x - 3 = 0$$

$$2e^x = 3$$

$$e^x = \frac{3}{2}$$

$$x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$f(\ln(\frac{3}{2})) = \frac{2 \ln(\frac{3}{2}) e^{\ln(\frac{3}{2})} + 3}{e^{\ln(\frac{3}{2})+2}} = \frac{2 \ln(\frac{3}{2}) \cdot \frac{3}{2} + 3}{e^{\ln(\frac{3}{2})} \cdot e^2} = \frac{3 \ln(\frac{3}{2}) + 3}{\frac{3}{2} e^2} = \frac{2 \ln(\frac{3}{2}) + 2}{e^2}$$

$$\text{Dus } A\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right), \frac{2 \ln(\frac{3}{2}) + 2}{e^2}\right).$$

b $f(x) = \frac{2x e^x + 3}{e^{x+2}} = \frac{2x e^x + 3}{e^x \cdot e^2} = \frac{2x e^x}{e^2 \cdot e^x} + \frac{3}{e^2 \cdot e^x} = \frac{2}{e^2} x + \frac{3}{e^2} \cdot \frac{1}{e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{e^2} \cdot \frac{1}{e^x} = \frac{3}{e^2} \cdot 0 = 0, \text{ dus de lijn } y = \frac{2}{e^2} x \text{ is scheve asymptoot.}$$

c $x = \ln(\frac{3}{2})$ invullen bij $y = \frac{2}{e^2} x$ geeft $y = \frac{2}{e^2} \cdot \ln(\frac{3}{2}) = \frac{2 \ln(\frac{3}{2})}{e^2}$, dus

$$p = \frac{2 \ln(\frac{3}{2}) + 2}{e^2} - \frac{2 \ln(\frac{3}{2})}{e^2} = \frac{2}{e^2}.$$

$$\text{Los op } \left| f(x) - \frac{2}{e^2} x \right| = 0,01 \cdot \frac{2}{e^2} \text{ oftewel } \left| \frac{2x e^x + 3}{e^{x+2}} - \frac{2}{e^2} x \right| = \frac{0,02}{e^2}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \left| \frac{2x e^x + 3}{e^{x+2}} - \frac{2}{e^2} x \right| \text{ en } y_2 = \frac{0,02}{e^2}.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 5,01$.

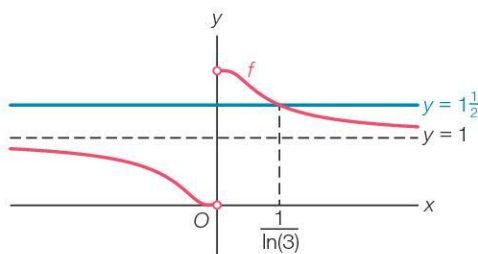
56 a $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow -\infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{0}{0+1} = 0$
 $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow \infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \lim_{e^{\frac{1}{x}} \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}} = \frac{2}{1+0} = 2$

b $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow 0} \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{2e^0}{e^0 + 1} = \frac{2}{1+1} = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow 0} \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{2e^0}{e^0 + 1} = \frac{2}{1+1} = 1$

Er is dus één horizontale asymptoot, en de formule ervan is $y = 1$.

c $f(x) = 1\frac{1}{2}$ geeft $\frac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{3}{2}$
 $4e^{\frac{1}{x}} = 3e^{\frac{1}{x}} + 3$
 $e^{\frac{1}{x}} = 3$
 $\frac{1}{x} = \ln(3)$
 $x = \frac{1}{\ln(3)}$



$f(x) \leq 1\frac{1}{2}$ geeft $x < 0 \vee x \geq \frac{1}{\ln(3)}$

d $f(x) = \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ geeft
 $f'(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + 1) \cdot 2e^{\frac{1}{x}} \cdot -\frac{1}{x^2} - 2e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot -\frac{1}{x^2}}{(e^{\frac{1}{x}} + 1)^2} = \frac{2e^{\frac{2}{x}} + 2e^{\frac{1}{x}} - 2e^{\frac{2}{x}}}{(e^{\frac{1}{x}} + 1)^2} \cdot -\frac{1}{x^2} = \frac{-2e^{\frac{1}{x}}}{x^2(e^{\frac{1}{x}} + 1)^2}$
 $rc_k = f'(1) = \frac{-2e^1}{1 \cdot (e^1 + 1)^2} = \frac{-2e}{(e+1)^2}$

Bladzijde 37

57 a $\ln(x) - 1 = 0 \wedge \ln(x) \neq 0$
 $\ln(x) = 1$
 $x = e$

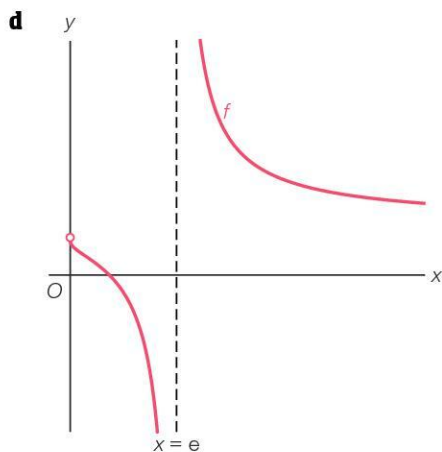
De verticale asymptoot is de lijn $x = e$.

b $f(x) = 0$ geeft $\ln(x) = 0$
 $x = 1$

Dus het nulpunt van f is 1.

c

x	0,00001	0,0001	10	100
$f(x)$	0,92	0,90	1,77	1,28



e $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1$

f ja

Bladzijde 38

58 a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \ln(x)}{1 + \ln(x)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{4 \ln(x)}{1 + \ln(x)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{1}{\ln(x)} + 1} = \frac{4}{0 + 1} = 4$

b $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2)}{1 + \ln(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln|x|}{1 + 2 \ln|x|} = \lim_{\ln|x| \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln|x|}{1 + 2 \ln|x|} = \lim_{\ln|x| \rightarrow -\infty} \frac{2}{\frac{1}{\ln|x|} + 2} = \frac{2}{0 + 2} = 1$

c $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln|x|}{4 + \ln(x^2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln|x|}{4 + 2 \ln|x|} = \lim_{\ln|x| \rightarrow -\infty} \frac{\ln|x|}{4 + 2 \ln|x|} = \lim_{\ln|x| \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{4}{\ln|x|} + 2} = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2}$

d $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2(x)}{2 - \ln^2(x)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{\ln^2(x)}{2 - \ln^2(x)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2}{\ln^2(x)} - 1} = \frac{1}{0 - 1} = -1$

59 a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \ln(x)}{\ln(\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \ln(x)}{\ln(x^{\frac{1}{2}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \ln(x)}{\frac{1}{2} \ln(x)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{3 + \ln(x)}{\frac{1}{2} \ln(x)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\ln(x)} + 1}{\frac{1}{2}} = \frac{0 + 1}{\frac{1}{2}} = 2$

b $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{{}^2\log(x)}{1 + {}^8\log(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{{}^2\log(x)}{1 + \frac{{}^2\log(x)}{{}^2\log(8)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{{}^2\log(x)}{1 + \frac{{}^2\log(x)}{3}} = \lim_{{}^2\log(x) \rightarrow \infty} \frac{{}^2\log(x)}{1 + \frac{{}^2\log(x)}{3}} = \lim_{{}^2\log(x) \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{{}^2\log(x)} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{0 + \frac{1}{3}} = 3$

c $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2)}{1 - 2 \ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln|x|}{1 - 2 \ln|x|} = \lim_{\ln|x| \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln|x|}{1 - 2 \ln|x|} = \lim_{\ln|x| \rightarrow -\infty} \frac{2}{\frac{1}{\ln|x|} - 2} = \frac{2}{0 - 2} = -1$

d $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \ln(x)}{2 + \log(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \ln(x)}{2 + \frac{\ln(x)}{\ln(10)}} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{2 + \ln(x)}{2 + \frac{\ln(x)}{\ln(10)}} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\ln(x)} + 1}{\frac{2}{\ln(x)} + \frac{1}{\ln(10)}} = \frac{0 + 1}{0 + \frac{1}{\ln(10)}} = \ln(10)$

60 a $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x) - 1}{2 \ln(x) - 3} = \lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x) - 1}{2 \ln(x) - 3} = \lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{\ln(x)}}{2 - \frac{3}{\ln(x)}} = \frac{1 - 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$

b $2 \ln(x) - 3 = 0 \wedge \ln(x) - 1 \neq 0$
 $2 \ln(x) = 3 \wedge \ln(x) \neq 1$
 $\ln(x) = \frac{3}{2} \wedge \ln(x) \neq 1$
 $x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$

De verticale asymptoot is de lijn $x = e\sqrt{e}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x) - 1}{2 \ln(x) - 3} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{\ln(x)}}{2 - \frac{3}{\ln(x)}} = \frac{1 - 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{1}{2}$.

Dus $B(e\sqrt{e}, \frac{1}{2})$.

$f(x) = 0$ geeft $\ln(x) - 1 = 0$
 $\ln(x) = 1$
 $x = e$

Dus $A(e, 0)$.

$f(x) = \frac{\ln(x) - 1}{2 \ln(x) - 3}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(2 \ln(x) - 3) \cdot \frac{1}{x} - (\ln(x) - 1) \cdot \frac{2}{x}}{(2 \ln(x) - 3)^2} = \frac{2 \ln(x) - 3 - 2 \ln(x) + 2}{x(2 \ln(x) - 3)^2} = \frac{-1}{x(2 \ln(x) - 3)^2}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(e) = \frac{-1}{e(2 \ln(e) - 3)^2} = \frac{-1}{e(2 - 3)^2} = -\frac{1}{e}$.

$$y = -\frac{1}{e}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{e} \cdot e + b = 0 \\ -1 + b = 0 \\ b = 1 \end{array} \right.$$

Dus $k: y = -\frac{1}{e}x + 1$.

k snijden met de horizontale asymptoot geeft $-\frac{1}{e}x + 1 = \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{e}x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}e$$

Dus $C(\frac{1}{2}e, \frac{1}{2})$.

k snijden met de verticale asymptoot geeft $y = -\frac{1}{e} \cdot e\sqrt{e} + 1 = 1 - \sqrt{e}$, dus $D(e\sqrt{e}, 1 - \sqrt{e})$.

$B(e\sqrt{e}, \frac{1}{2})$ en $C(\frac{1}{2}e, \frac{1}{2})$ geeft $BC = e\sqrt{e} - \frac{1}{2}e$

$B(e\sqrt{e}, \frac{1}{2})$ en $D(e\sqrt{e}, 1 - \sqrt{e})$ geeft $BD = \frac{1}{2} - (1 - \sqrt{e}) = \sqrt{e} - \frac{1}{2}$

$O(\triangle BCD) = \frac{1}{2} \cdot (e\sqrt{e} - \frac{1}{2}e) \cdot (\sqrt{e} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(e^2 - \frac{1}{2}e\sqrt{e} - \frac{1}{2}e\sqrt{e} + \frac{1}{4}e) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e\sqrt{e} + \frac{1}{8}e$

c Voor f geldt $y = \frac{\ln(x) - 1}{2 \ln(x) - 3}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{\ln(y) - 1}{2 \ln(y) - 3}$

$$2x \ln(y) - 3x = \ln(y) - 1$$

$$2x \ln(y) - \ln(y) = 3x - 1$$

$$(2x - 1) \ln(y) = 3x - 1$$

$$\ln(y) = \frac{3x - 1}{2x - 1}$$

$$y = e^{\frac{3x - 1}{2x - 1}}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = e^{\frac{3x - 1}{2x - 1}}$.

$f^{\text{inv}}(x) = g(x)$ geeft $e^{\frac{3x - 1}{2x - 1}} = e^{2x}$

$$\frac{3x - 1}{2x - 1} = 2x$$

$$2x(2x - 1) = 3x - 1$$

$$4x^2 - 2x = 3x - 1$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$(4x - 1)(x - 1) = 0$$

$$x = \frac{1}{4} \vee x = 1$$

$g(\frac{1}{4}) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ en $g(1) = e^2$

Dus $E(\frac{1}{4}, \sqrt{e})$ en $F(1, e^2)$.

61 a $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{\ln(x^2) - 4}{\ln(x^2) - 1} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{2 \ln|x| - 4}{2 \ln|x| - 1} = \lim_{\ln|x| \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln|x| - 4}{2 \ln|x| - 1} = \lim_{\ln|x| \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{4}{\ln|x|}}{2 - \frac{1}{\ln|x|}} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x^2) - 4}{\ln(x^2) - 1} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{2 \ln(x) - 4}{2 \ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln(x) - 4}{2 \ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{4}{\ln(x)}}{2 - \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

b $\ln(x^2) - 1 = 0 \wedge \ln(x^2) - 4 \neq 0$

$\ln(x^2) = 1 \wedge \ln(x^2) \neq 4$

$x^2 = e$

$x = \sqrt{e} \vee x = -\sqrt{e}$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = \sqrt{e}$ en $x = -\sqrt{e}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2) - 4}{\ln(x^2) - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(x) - 4}{2 \ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(x) - 4}{2 \ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{\ln(x)}}{2 - \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

c $f(x) = 10$ geeft $\frac{\ln(x^2) - 4}{\ln(x^2) - 1} = 10$

$10 \ln(x^2) - 10 = \ln(x^2) - 4$

$9 \ln(x^2) = 6$

$\ln(x^2) = \frac{2}{3}$

$x^2 = e^{\frac{2}{3}}$

$x = e^{\frac{1}{3}} \vee x = -e^{\frac{1}{3}}$

$x = \sqrt[3]{e} \vee x = -\sqrt[3]{e}$

$f(x) \leq 10$ geeft $x < -\sqrt[3]{e} \vee -\sqrt[3]{e} \leq x < 0 \vee 0 < x \leq \sqrt[3]{e} \vee x > \sqrt[3]{e}$

d $f(x) = 0$ geeft $\ln(x^2) - 4 = 0$

$$\ln(x^2) = 4$$

$$x^2 = e^4$$

$$x = e^2 \vee x = -e^2$$

Dus $A(e^2, 0)$.

$$f(x) = \frac{\ln(x^2) - 4}{\ln(x^2) - 1} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln(x^2) - 1) \cdot \frac{2}{x} - (\ln(x^2) - 4) \cdot \frac{2}{x}}{(\ln(x^2) - 1)^2} = \frac{2\ln(x^2) - 2 - 2\ln(x^2) + 8}{x(\ln(x^2) - 1)^2} = \frac{6}{x(\ln(x^2) - 1)^2}$$

$$rc_k = f'(e^2) = \frac{6}{e^2(\ln(e^4) - 1)^2} = \frac{6}{e^2(4 - 1)^2} = \frac{6}{9e^2} = \frac{2}{3e^2}$$

$$k \perp l, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1$$

$$\frac{2}{3e^2} \cdot rc_l = -1$$

$$rc_l = -1\frac{1}{2}e^2$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}e^2x + b \\ \text{door } A(e^2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2}e^2 \cdot e^2 + b = 0 \\ b = 1\frac{1}{2}e^4 \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = -1\frac{1}{2}e^2x + 1\frac{1}{2}e^4 \text{ en } B(0, 1\frac{1}{2}e^4).$$

62 $f(x) = \frac{\ln^2(x) - 1}{\ln(x) - 1} = \frac{(\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1)}{\ln(x) - 1}$

Voor de perforatie geldt $\ln(x) - 1 = 0$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} \frac{(\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1)}{\ln(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow e} (\ln(x) + 1) = \ln(e) + 1 = 1 + 1 = 2$$

De perforatie is $A(e, 2)$.

$$g(x) = \ln(x) + 1 \text{ geeft } g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(e) = \frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{e} \cdot rc_k = -1 \text{ geeft } rc_k = -e$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -ex + b \\ \text{door } A(e, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -e \cdot e + b = 2 \\ b = e^2 + 2 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -ex + e^2 + 2.$$

$$k \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } -ex + e^2 + 2 = 0$$

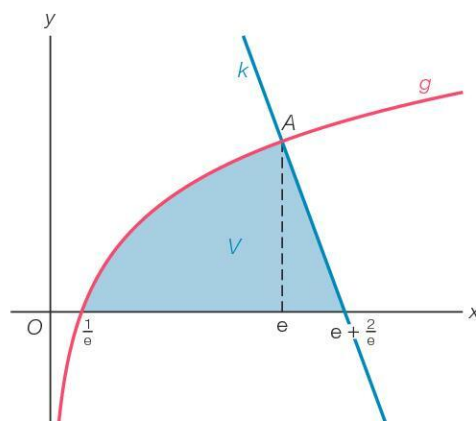
$$ex = e^2 + 2$$

$$x = e + \frac{2}{e}$$

$$g(x) = 0 \text{ geeft } \ln(x) + 1 = 0$$

$$\ln(x) = -1$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$



$$\begin{aligned} O(V) &= \int_{\frac{1}{e}}^e (\ln(x) + 1) dx + O(\text{driehoek}) = [x \ln(x) - x + x]_{\frac{1}{e}}^e + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{e} \cdot (\ln(e) + 1) = [x \ln(x)]_{\frac{1}{e}}^e + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{e} \cdot 2 \\ &= e \ln(e) - \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \frac{2}{e} = e + \frac{1}{e} + \frac{2}{e} = e + \frac{3}{e} \end{aligned}$$

Bladzijde 42

1 a $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) = -6$
 b $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 2}{x - 2} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$

2 a $f_a(x) = \frac{4x^2 + 2x - 12}{2x + a} = \frac{(2x + 4)(2x - 3)}{2x + a}$
 Er is een perforatie als $a = 4$ en als $a = -3$.
 $\lim_{x \rightarrow -2} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x + 4)(2x - 3)}{2x + 4} = \lim_{x \rightarrow -2} (2x - 3) = -4 - 3 = -7$
 Voor $a = 4$ is de perforatie $(-2, -7)$.
 $\lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}} f_{-3}(x) = \lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}} \frac{(2x + 4)(2x - 3)}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}} (2x + 4) = 3 + 4 = 7$
 Voor $a = -3$ is de perforatie $(1\frac{1}{2}, 7)$.

b $f_a(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{2x + a} = \frac{(x - 2)(2x + 3)}{2x + a} = \frac{\frac{1}{2}(2x - 4)(2x + 3)}{2x + a}$
 Er is een perforatie als $a = -4$ en als $a = 3$.
 $\lim_{x \rightarrow 2} f_{-4}(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2}(2x - 4)(2x + 3)}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} (\frac{1}{2}(2x + 3)) = \frac{1}{2}(4 + 3) = 3\frac{1}{2}$
 Voor $a = -4$ is de perforatie $(2, 3\frac{1}{2})$.
 $\lim_{x \rightarrow -1\frac{1}{2}} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow -1\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}(2x - 4)(2x + 3)}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -1\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}(2x - 4)) = \frac{1}{2}(-3 - 4) = -3\frac{1}{2}$
 Voor $a = 3$ is de perforatie $(-1\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2})$.

3 a $\lim_{x \uparrow 1} f_p(x) = \lim_{x \uparrow 1} 3^{x-p} = 3^{1-p}$
 $\lim_{x \downarrow 1} f_p(x) = \lim_{x \downarrow 1} (x^2 + 8) = 1^2 + 8 = 9$
 $\lim_{x \rightarrow 1} f_p(x)$ bestaat als $3^{1-p} = 9$
 $3^{1-p} = 3^2$
 $1 - p = 2$
 $p = -1$
 b $\lim_{x \uparrow 1} f_p(x) = \lim_{x \uparrow 1} |px - 3| = |p - 3|$
 $\lim_{x \downarrow 1} f_p(x) = \lim_{x \downarrow 1} (x^2 + 3x) = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$
 $\lim_{x \rightarrow 1} f_p(x)$ bestaat als $|p - 3| = 4$
 $p - 3 = 4 \vee p - 3 = -4$
 $p = 7 \vee p = -1$

4 a $f_p(x) = (2x-2)(x+p) = 2x^2 + 2px - 2x - 2p$ voor $x+p \geq 0$, dus $x \geq -p$
 $f_p(x) = (2x-2)(-x-p) = -2x^2 - 2px + 2x + 2p$ voor $x < -p$
 $\lim_{x \uparrow -p} f_p'(x) = \lim_{x \uparrow -p} (-4x - 2p + 2) = 4p - 2p + 2 = 2p + 2$
 $\lim_{x \downarrow -p} f_p'(x) = \lim_{x \downarrow -p} (4x + 2p - 2) = -4p + 2p - 2 = -2p - 2$
 Geen knik als $\lim_{x \uparrow -p} f_p'(x) = \lim_{x \downarrow -p} f_p'(x)$, dus als $2p + 2 = -2p - 2$
 $4p = -4$
 $p = -1$

b $f_4(x) = \begin{cases} 2x^2 + 8x - 2x - 8 = 2x^2 + 6x - 8 & \text{voor } x \geq -4 \\ -2x^2 - 8x + 2x + 8 = -2x^2 - 6x + 8 & \text{voor } x < -4 \end{cases}$
 $\lim_{x \uparrow -4} f_4'(x) = \lim_{x \uparrow -4} (-4x - 6) = 16 - 6 = 10$, dus $rc_k = 10$.
 $rc_k = \tan(\alpha) = 10$, dus $\alpha = 84,2...^\circ$.
 $\lim_{x \downarrow -4} f_4'(x) = \lim_{x \downarrow -4} (4x + 6) = -16 + 6 = -10$, dus $rc_l = -10$.
 $rc_l = \tan(\beta) = -10$, dus $\beta = -84,2...^\circ$.
 $\alpha - \beta = 84,2...^\circ - (-84,2...^\circ) \approx 169^\circ$
 Dus $\angle(k, l) \approx 180^\circ - 169^\circ = 11^\circ$.

c Zie a.
 $rc_k = 2p + 2$ en $rc_l = -2p - 2$
 $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$
 $(2p + 2)(-2p - 2) = -1$
 $(2p + 2)^2 = 1$
 $2p + 2 = 1 \vee 2p + 2 = -1$
 $2p = -1 \vee 2p = -3$
 $p = -\frac{1}{2} \vee p = -1\frac{1}{2}$

5 a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(5x+2)^2}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(25x^2+20x+4)}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{25x^3+20x^2+4x}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{25 + \frac{20}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \frac{25+0+0}{1+0} = 25$

b $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|8-3x^3|}{2x^3+50x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8+3x^3}{2x^3+50x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{8}{x^3}+3}{2+\frac{50}{x^2}} = \frac{0+3}{2+0} = 1\frac{1}{2}$

6 a $x^2 - x - 12 = 0 \wedge 2x^2 - 1 \neq 0$
 $(x+3)(x-4) = 0 \wedge 2x^2 \neq 1$
 $x = -3 \vee x = 4$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -3$ en $x = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2}} = \frac{2-0}{1-0-0} = 2$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.

b $f(x) = 2$ geeft $\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x - 12} = 2$
 $2x^2 - 1 = 2(x^2 - x - 12)$
 $2x^2 - 1 = 2x^2 - 2x - 24$
 $2x = -23$
 $x = -11\frac{1}{2}$

Dus $A(-11\frac{1}{2}, 2)$.

7 teller = 0 geeft $2 \cos(x) - 1 = 0$

$$2 \cos(x) = 1$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi$

noemer = 0 geeft $8 \sin^2(x) - 6 = 0$

$$8 \sin^2(x) = 6$$

$$\sin^2(x) = \frac{3}{4}$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = \frac{2}{3}\pi$ en $x = \frac{1}{3}\pi$.

$$f(x) = \frac{2 \cos(x) - 1}{8 \sin^2(x) - 6} = \frac{2 \cos(x) - 1}{8(1 - \cos^2(x)) - 6} = \frac{2 \cos(x) - 1}{2 - 8 \cos^2(x)} = \frac{2 \cos(x) - 1}{-2(4 \cos^2(x) - 1)} = \frac{2 \cos(x) - 1}{-2(2 \cos(x) + 1)(2 \cos(x) - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}\pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}\pi} \frac{2 \cos(x) - 1}{-2(2 \cos(x) + 1)(2 \cos(x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}\pi} \frac{1}{-2(2 \cos(x) + 1)} = \frac{1}{-2(2 \cdot \frac{1}{2} + 1)} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}\pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}\pi} \frac{2 \cos(x) - 1}{-2(2 \cos(x) + 1)(2 \cos(x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}\pi} \frac{1}{-2(2 \cos(x) + 1)} = \frac{1}{-2(2 \cdot \frac{1}{2} + 1)} = -\frac{1}{4}$$

De perforaties zijn de punten $(\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{4})$ en $(\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{4})$.

8 a $x - 1 = 0 \wedge 3x^2 + 5x - 2 \neq 0$

$$x = 1 \wedge 3x^2 + 5x - 2 \neq 0$$

$$x = 1$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 1$.

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 2}{x - 1} = \frac{3x(x - 1) + 3x + 5x - 2}{x - 1} = 3x + \frac{8x - 2}{x - 1} = 3x + \frac{8(x - 1) + 8 - 2}{x - 1} = 3x + 8 + \frac{6}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x - 1} = 0, \text{ dus de scheve asymptoot is de lijn } y = 3x + 8.$$

b $x^2 - 4 = 0 \wedge x^3 + 5x^2 - 4x - 19 \neq 0$

$$x^2 = 4 \wedge x^3 + 5x^2 - 4x - 19 \neq 0$$

$$(x = 2 \vee x = -2) \wedge x^3 + 5x^2 - 4x - 19 \neq 0$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $x = -2$.

$$g(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 19}{x^2 - 4} = \frac{x(x^2 - 4) + 4x + 5x^2 - 4x - 19}{x^2 - 4} = x + \frac{5x^2 - 19}{x^2 - 4} = x + \frac{5(x^2 - 4) + 20 - 19}{x^2 - 4} = x + 5 + \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0, \text{ dus de scheve asymptoot is de lijn } y = x + 5.$$

$$9 \quad f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 12x}{x^2 - 9} = \frac{x(x^2 + x - 12)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x(x+4)(x-3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+4)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+4)}{x+3} = \frac{3(3+4)}{3+3} = 3\frac{1}{2}$$

Dus de perforatie is $A(3, 3\frac{1}{2})$.

$$(x+3)(x-3) = 0 \wedge x(x+4)(x-3) \neq 0$$

$$(x=3 \vee x=-3) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -4 \wedge x \neq 3$$

$$x = -3$$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -3$.

$$f(x) = \frac{x(x+4)}{x+3} = \frac{x^2 + 4x}{x+3} = \frac{x(x+3) - 3x + 4x}{x+3} = x + \frac{x}{x+3} = x + \frac{x+3-3}{x+3} = x + 1 - \frac{3}{x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x+3} = 0, \text{ dus de scheve asymptoot is de lijn } y = x + 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x + 1 \\ x = -3 \end{array} \right\} y = -3 + 1 = -2$$

Dus $B(-3, -2)$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{3\frac{1}{2} - -2}{3 - -3} = \frac{11}{12}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{11}{12}x + b \\ \text{door } B(-3, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{11}{12} \cdot -3 + b = -2 \\ -2\frac{3}{4} + b = -2 \\ b = \frac{3}{4} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{11}{12}x + \frac{3}{4}$ en het snijpunt met de y -as is $C(0, \frac{3}{4})$.

10 a $\lim_{x \rightarrow \infty} (10 - 20 \cdot (\frac{9}{10})^x) = 10 - 20 \cdot 0 = 10$

b $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 5}{e^x + 20} = \frac{0 - 5}{0 + 20} = -\frac{1}{4}$

c $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x+2} + 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^2 \cdot e^x + 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^2}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0$

d $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 \cdot 3^x + 2}{4 \cdot 2^x + 1} = \frac{5 \cdot 0 + 2}{4 \cdot 0 + 1} = 2$

11 a $f_{3,4}(x) = \frac{3e^x}{2e^x - 4e}$

$$2e^x - 4e = 0 \wedge 3e^x \neq 0$$

$$2e^x = 4e \wedge e^x \neq 0$$

$$e^x = 2e \wedge e^x \neq 0$$

$$x = \ln(2e)$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = \ln(2e)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{3,4}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x}{2e^x - 4e} = \frac{3 \cdot 0}{2 \cdot 0 - 4e} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{3,4}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^x}{2e^x - 4e} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2 - \frac{4e}{e^x}} = \frac{3}{2 - 0} = 1\frac{1}{2}$$

De horizontale asymptoten zijn de lijnen $y = 0$ en $y = 1\frac{1}{2}$.

b De verticale asymptoot is de lijn $x = 3$, dus er geldt $2e^x - qe = 0$ voor $x = 3$. Dit geeft $qe = 2e^3$ oftewel $q = 2e^2$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{p,q}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{pe^x}{2e^x - qe} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p}{2 - \frac{qe}{e^x}} = \frac{p}{2 - 0} = \frac{1}{2}p$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{1}{2}p$.

$$\frac{1}{2}p = 4 \text{ geeft } p = 8$$

Dus voor $p = 8$ en $q = 2e^2$.

$$12 \quad \mathbf{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \log(x)}{1 + 16 \log(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \log(x)}{1 + \frac{2 \log(x)}{2 \log(16)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \log(x)}{1 + \frac{2 \log(x)}{4}} = \lim_{2 \log(x) \rightarrow \infty} \frac{2 \log(x)}{1 + \frac{1}{4} \cdot 2 \log(x)} =$$

$$\lim_{2 \log(x) \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{2 \log(x)} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{0 + \frac{1}{4}} = 4$$

$$\mathbf{b} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^3)}{1 - 3 \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \ln(x)}{1 - 3 \ln(x)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{3 \ln(x)}{1 - 3 \ln(x)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{3}{\frac{1}{\ln(x)} - 3} = \frac{3}{0 - 3} = -1$$

$$\mathbf{c} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \log(x)}{5 + \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{\ln(x)}{\ln(10)}}{5 + \ln(x)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{\ln(x)}{\ln(10)}}{5 + \ln(x)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\ln(x)} + \frac{1}{\ln(10)}}{\frac{5}{\ln(x)} + 1} = \frac{0 + \frac{1}{\ln(10)}}{0 + 1} = \frac{1}{\ln(10)}$$

$$13 \quad \mathbf{a} \quad \lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{4 \ln(x) - 1}{2 \ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{4 \ln(x) - 1}{2 \ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{4 - \frac{1}{\ln(x)}}{2 - \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2$$

$$\mathbf{b} \quad 2 \ln(x) - 1 = 0 \wedge 4 \ln(x) - 1 \neq 0$$

$$2 \ln(x) = 1 \wedge 4 \ln(x) \neq 1$$

$$\ln(x) = \frac{1}{2} \wedge \ln(x) \neq \frac{1}{4}$$

$$x = \sqrt{e}$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = \sqrt{e}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \ln(x) - 1}{2 \ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{4 \ln(x) - 1}{2 \ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{\ln(x)}}{2 - \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.

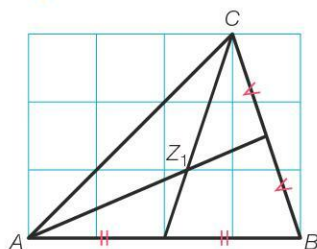
14 Meetkunde toepassen

Voorkennis Zwaartelijnen van een driehoek

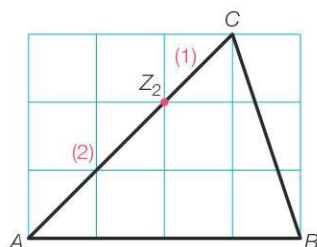
Bladzijde 48

1

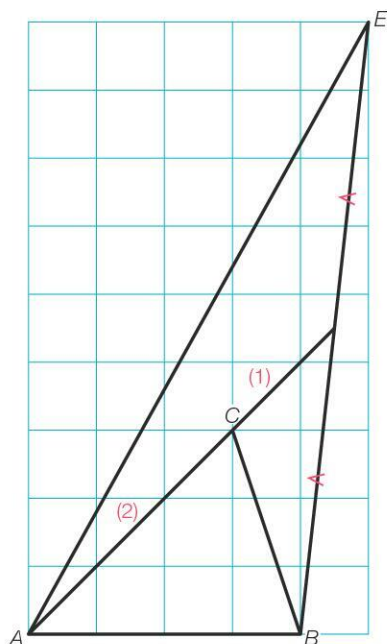
a



b



c



2

a $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{CM} = \vec{m} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b $CZ : MZ = 2 : 1$, dus $CZ = \frac{2}{3}CM$.

$$\text{Dus } \vec{z} = \vec{c} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ en } Z(1\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}).$$

3

a $\frac{1}{2}(\vec{e} + \vec{f}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Dus } Z(-1\frac{2}{3}, \frac{1}{3}).$$

- b** Voor het midden M van DG geldt

$$\vec{m} = \vec{f} + \frac{1}{2}\vec{EF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{DM} = \vec{m} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g} = \vec{d} + 2\vec{DM} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Dus $G(17, 7)$.

14.1 Zwaartepunten, middelloodlijnen en bissectrices

Bladzijde 49

- 1 a** $x > y$
b $5AZ = 7BZ$, $AZ = x$ en $BZ = 24 - x$ geeft
 $5x = 7(24 - x)$
 $5x = 168 - 7x$
 $12x = 168$
 $x = 14$
 De afstand van A tot Z is 14.

- 2 a** Er is ten opzichte van het zwaartepunt evenwicht van momenten, dus geldt $4AZ = 3BZ$.
 Dit geeft $BZ = \frac{4}{3}AZ$.
b Substitutie van $BZ = \frac{4}{3}AZ$ in $AB = AZ + BZ$ geeft $AB = AZ + \frac{4}{3}AZ = \frac{7}{3}AZ$, dus $AZ = \frac{3}{7}AB$.
c $\vec{z} = \vec{a} + \vec{AZ} = \vec{a} + \frac{3}{7}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{3}{7}(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} - \frac{3}{7}\vec{a} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} = \frac{1}{7}(4\vec{a} + 3\vec{b})$

Bladzijde 51

- 3** Voor het zwaartepunt Z van Z_1 met massa $m_1 + m_2$ en C met massa m_3 geldt

$$\vec{z} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot ((m_1 + m_2) \cdot \vec{z}_1 + m_3 \cdot \vec{c}) = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot ((m_1 + m_2) \cdot \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b}) + m_3 \cdot \vec{c})$$

$$= \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b} + m_3 \cdot \vec{c}) = \frac{1}{M}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b} + m_3 \cdot \vec{c}) \text{ met } M = m_1 + m_2 + m_3.$$

Bladzijde 52

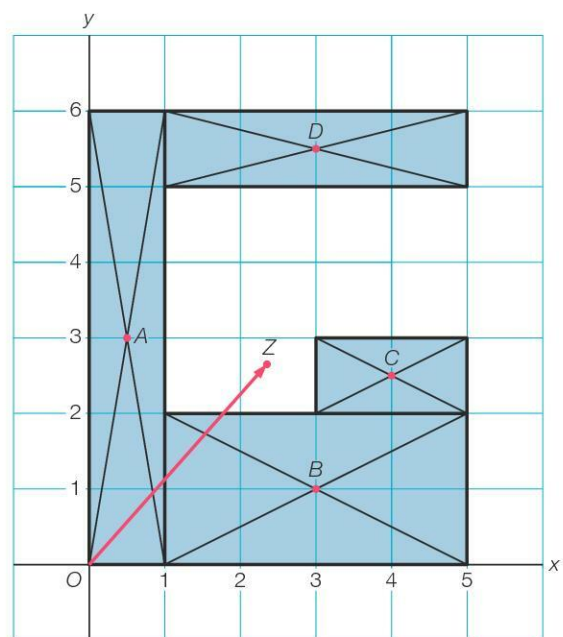
- 4** Zie de figuur hiernaast.
 A heeft massa 6.
 B heeft massa 8.
 C heeft massa 2.
 D heeft massa 4.
 De totale massa is $6 + 8 + 2 + 4 = 20$.

$$\vec{z} = \frac{1}{20}(6 \cdot \vec{a} + 8 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c} + 4 \cdot \vec{d})$$

$$= \frac{1}{20}\left(6 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{20}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 22 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 47 \\ 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{7}{20} \\ 2\frac{13}{20} \end{pmatrix}$$



5 a Zie de figuur hiernaast.

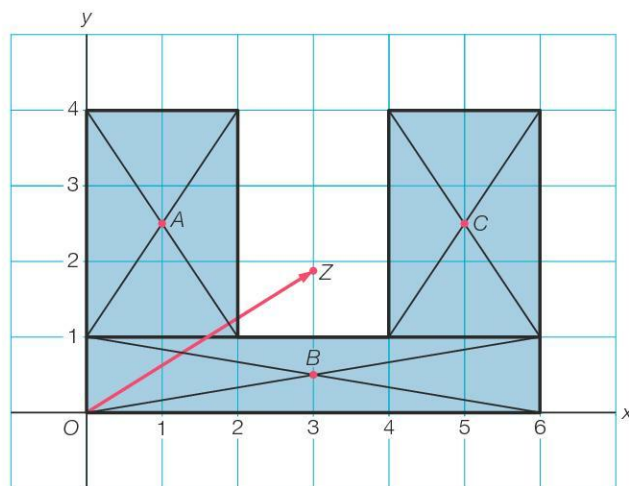
A heeft massa 6.

B heeft massa 6.

C heeft massa 6.

De totale massa is $6 + 6 + 6 = 18$.

$$\begin{aligned}\vec{z} &= \frac{1}{18} (6 \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{b} + 6 \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{18} \left(6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{18} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 54 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1\frac{5}{6} \end{pmatrix}\end{aligned}$$



Alternatieve uitwerking

Zie de figuur hiernaast.

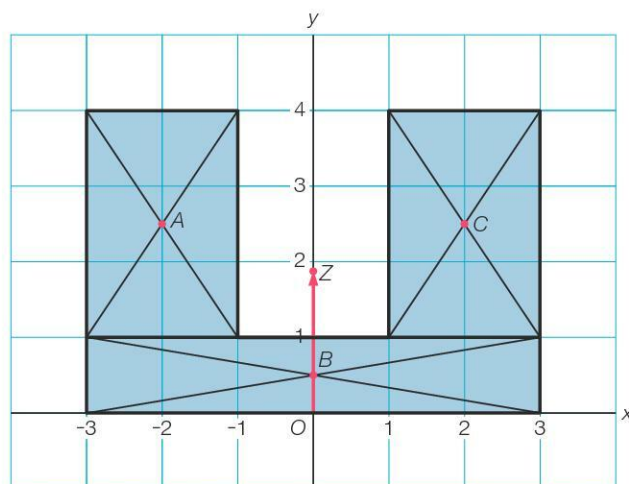
A heeft massa 6.

B heeft massa 6.

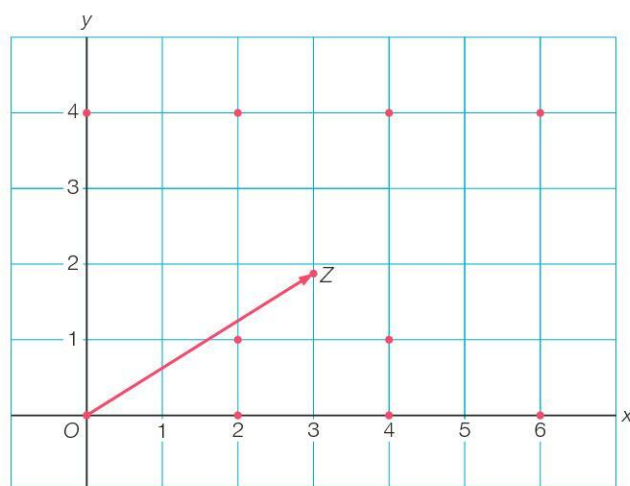
C heeft massa 6.

De totale massa is $6 + 6 + 6 = 18$.

$$\begin{aligned}\vec{z} &= \frac{1}{18} (6 \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{b} + 6 \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{18} \left(6 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{18} \left(\begin{pmatrix} -12 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\frac{5}{6} \end{pmatrix}\end{aligned}$$



b

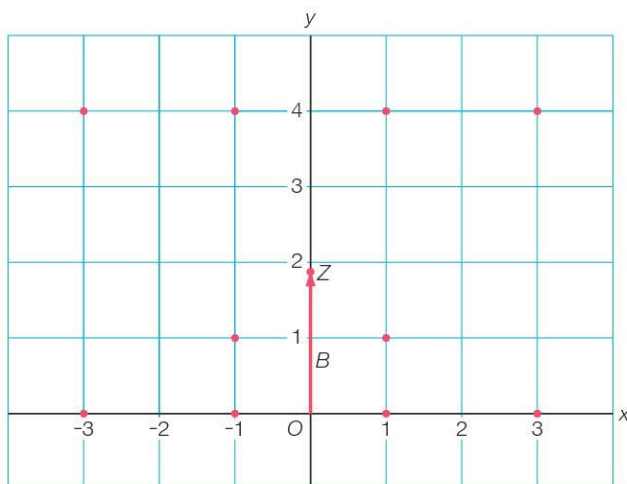


Zie de figuur.

Elke massa is 1 en de totale massa is 10.

$$\vec{z} = \frac{1}{10} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Alternatieve uitwerking



Zie de figuur.

Elke massa is 1 en de totale massa is 10.

$$\vec{z} = \frac{1}{10} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

6 $AZ : MZ = 2 : 1$, dus $AZ = \frac{2}{3}AM$.

Dus $\vec{z} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{AM} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{m} - \vec{a})$.

$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ en dit geeft $\vec{z} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Bladzijde 53

7 Zie de figuur hiernaast.

A heeft massa 6.

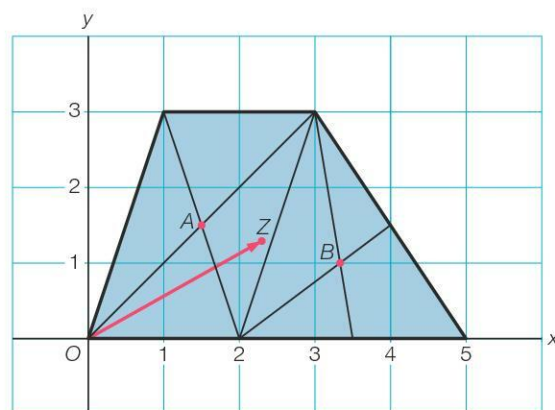
B heeft massa $4\frac{1}{2}$.

De totale massa is $10\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{10\frac{1}{2}} = \frac{2}{21}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{z} &= \frac{2}{21} \left(6 \cdot \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 4\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{2}{21} \left(\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{2}{21} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{7} \\ 1\frac{2}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



8 Zie de figuur hiernaast.

A heeft massa 4.

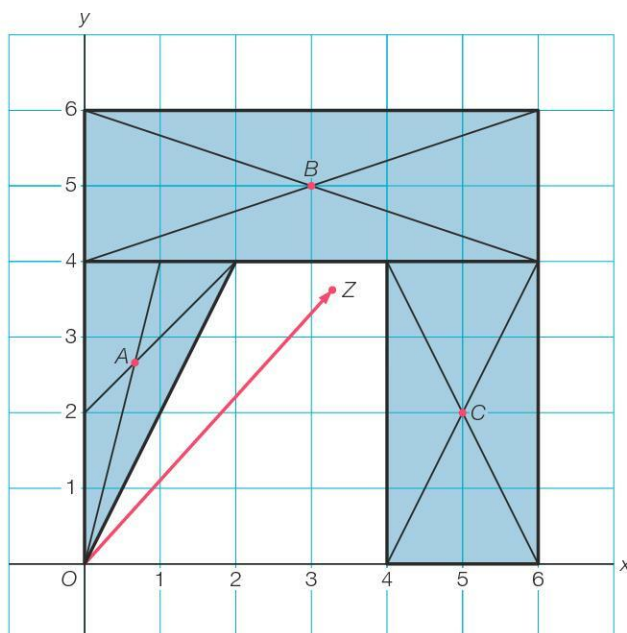
B heeft massa 12.

C heeft massa 8.

De totale massa is 24.

$$\vec{a} = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{z} &= \frac{1}{24} \left(4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2\frac{2}{3} \end{pmatrix} + 12 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{24} \left(\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 10\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 \\ 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 16 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 78\frac{2}{3} \\ 86\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{5}{18} \\ 3\frac{11}{18} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



- 9 De totale massa is $4 + 6 + 2 + 3 = 15$.

$$\vec{z} = \frac{1}{15} \left(4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{15} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3\frac{8}{15} \end{pmatrix}$$

Dus $Z(3, 3\frac{8}{15})$.

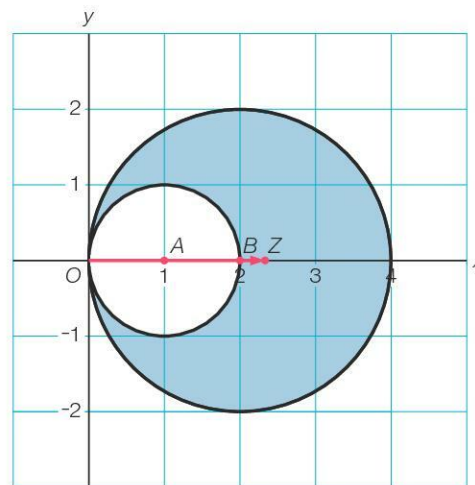
- 10 Zie de figuur hiernaast.

De massa van de cirkel met middelpunt A is $\pi \cdot 1^2 = \pi$.

De massa van de cirkel met middelpunt B is $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$.

De totale massa is $4\pi - \pi = 3\pi$.

$$\vec{z} = \frac{1}{3\pi} \left(4\pi \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \pi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$



Bladzijde 54

- 11 a $\left. \begin{array}{l} \angle AMP = 90^\circ, \text{ dus } AP^2 = AM^2 + MP^2 \\ AM = BM \end{array} \right\} AP^2 = BM^2 + MP^2$ $\left. \begin{array}{l} \angle BMP = 90^\circ, \text{ dus } BP^2 = BM^2 + MP^2 \end{array} \right\} AP^2 = BP^2, \text{ dus } AP = BP$
- b $\left. \begin{array}{l} \angle AQP = 90^\circ, \text{ dus } \sin(\angle PAQ) = \frac{PQ}{AP} \\ \angle ARP = 90^\circ, \text{ dus } \sin(\angle PAR) = \frac{PR}{AP} \end{array} \right\} \frac{PQ}{AP} = \frac{PR}{AP}, \text{ dus } PQ = PR$
 $\angle PAQ = \angle PAR$

Bladzijde 56

- 12 a In figuur 14.20 is $\times + \circ + \circ + \times = 180^\circ$

$$2\circ + 2\times = 180^\circ$$

$$2(\circ + \times) = 180^\circ$$

$$\circ + \times = 90^\circ$$

Dus b_1 en b_2 staan loodrecht op elkaar.

$$\text{b } \frac{|3x + 4y - 24|}{\sqrt{25}} = \frac{|12x + 5y - 60|}{\sqrt{169}}$$

$$\frac{|3x + 4y - 24|}{5} = \frac{|12x + 5y - 60|}{13}$$

$$5|12x + 5y - 60| = 13|3x + 4y - 24|$$

$$5(12x + 5y - 60) = 13(3x + 4y - 24) \vee 5(12x + 5y - 60) = 13(-3x - 4y + 24)$$

$$60x + 25y - 300 = 39x + 52y - 312 \vee 60x + 25y - 300 = -39x - 52y + 312$$

$$21x - 27y = -12 \vee 99x + 77y = 612$$

$$7x - 9y = -4 \vee 99x + 77y = 612$$

- c De lijn $x - 3y = -14$ oftewel $y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{1}{3}$ en is dus stijgend.
 De lijn $3x + y = 18$ oftewel $y = -3x + 18$ heeft richtingscoëfficiënt -3 en is dus dalend.
 In de figuur zie je dat k een dalende lijn is.
 Dus uit de figuur volgt dat $3x + y = 18$ een vergelijking van k is, en niet $x - 3y = -14$.

13 a Uit de eigenschap dat in een ruit de diagonalen de hoeken middendoor delen.

$$\mathbf{b} \quad AB = \sqrt{(5-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Omdat $AB = AC$ en p hoek BAD middendoor deelt, ligt er op p een punt D waarvoor $ABCD$ een ruit is met diagonaal AD .

Een ruit is een parallellogram, dus er geldt $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$$\text{Dus } \vec{r}_p = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_p = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } p: x - y = 1.$$

c q is de bissectrice van $\angle KLM$ en $\angle KLM = \angle(\overrightarrow{LK}, \overrightarrow{LM})$, dus q is de bissectrice van de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{LK}$ en $\overrightarrow{LM}$.

$$\mathbf{d} \quad \overrightarrow{LK} = \vec{k} - \vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ dus } |\overrightarrow{LK}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\overrightarrow{LM} = \vec{m} - \vec{l} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}, \text{ dus } |\overrightarrow{LM}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$$

e Nesrin heeft gelijk, want zij gaat uit van een ruit waarvan de zijden lengte $13 \cdot |\overrightarrow{LK}| = 5 \cdot |\overrightarrow{LM}| = 65$ hebben. Thomas gaat niet uit van een ruit.

$$\vec{r}_q = 13 \cdot \overrightarrow{LK} + 5 \cdot \overrightarrow{LM} = 13 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ -52 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -112 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{dus } \vec{n}_q = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } q: 8x - y = 18.$$

14 $P(x, y)$ op een bissectrice geeft $d(P, k) = d(P, l)$

$$\frac{|3x - 4y - 12|}{5} = \frac{|5x + 12y - 48|}{13}$$

$$13 \cdot |3x - 4y - 12| = 5 \cdot |5x + 12y - 48|$$

$$13(3x - 4y - 12) = 5(5x + 12y - 48) \vee 13(3x - 4y - 12) = 5(-5x - 12y + 48)$$

$$39x - 52y - 156 = 25x + 60y - 240 \vee 39x - 52y - 156 = -25x - 60y + 240$$

$$14x - 112y = -84 \vee 64x + 8y = 396$$

$$x - 8y = -6 \vee 8x + y = 49\frac{1}{2}$$

Dus $m: x - 8y = -6$ en $n: 8x + y = 49\frac{1}{2}$.

De snijpunten met de y -as zijn $A(0, \frac{3}{4})$ en $B(0, 49\frac{1}{2})$.

$$d(A, B) = 49\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 48\frac{3}{4}$$

Bladzijde 57

$$\mathbf{15} \quad \vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ en } AB: 15x + 8y = 180.$$

$$\vec{r}_{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ en } BC: 3x - 4y = -48.$$

$P(x, y)$ op k en $d(P, AB) = d(P, BC)$ geeft

$$\frac{|15x + 8y - 180|}{\sqrt{289}} = \frac{|3x - 4y + 48|}{\sqrt{25}}$$

$$\frac{|15x + 8y - 180|}{17} = \frac{|3x - 4y + 48|}{5}$$

$$17 \cdot |3x - 4y + 48| = 5 \cdot |15x + 8y - 180|$$

$$17(3x - 4y + 48) = 5(15x + 8y - 180) \vee 17(3x - 4y + 48) = 5(-15x - 8y + 180)$$

$$51x - 68y + 816 = 75x + 40y - 900 \vee 51x - 68y + 816 = -75x - 40y + 900$$

$$-24x - 108y = -1716 \vee 126x - 28y = 84$$

$$2x + 9y = 143 \vee 9x - 2y = 6$$

Uit de figuur volgt $k: 9x - 2y = 6$.

$$AC: \frac{x}{12} + \frac{y}{12} = 1 \text{ oftewel } AC: x + y = 12$$

$$k \text{ snijden met } AC \text{ geeft } \begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ x + y = 12 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right| \text{ oftewel } \begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ 2x + 2y = 24 \\ \hline 11x = 30 \\ x = 2\frac{8}{11} \end{cases} + \begin{cases} x = 2\frac{8}{11} \\ x + y = 12 \end{cases} \left\} y = 9\frac{3}{11}$$

Dus $D(2\frac{8}{11}, 9\frac{3}{11})$.

Alternatieve uitwerking

$$\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \end{pmatrix}, \text{ dus } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + (-15)^2} = 17.$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ dus } |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5.$$

$$\vec{r}_k = 5 \cdot \overrightarrow{BA} + 17 \cdot \overrightarrow{BC} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \end{pmatrix} + 17 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -68 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ -126 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

en $k: 9x - 2y = 6$.

$$AC: \frac{x}{12} + \frac{y}{12} = 1 \text{ oftewel } AC: x + y = 12$$

$$k \text{ snijden met } AC \text{ geeft } \begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ x + y = 12 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right| \text{ oftewel } \begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ 2x + 2y = 24 \\ \hline 11x = 30 \\ x = 2\frac{8}{11} \end{cases} + \begin{cases} x = 2\frac{8}{11} \\ x + y = 12 \end{cases} \left\} y = 9\frac{3}{11}$$

Dus $D(2\frac{8}{11}, 9\frac{3}{11})$.

- 16 a** $O(0, 0)$ en $A(8, 0)$, dus de middelloodlijn van OA is de lijn $x = 4$.

m is de middelloodlijn van OB .

Het midden van OB is het punt $(1, 3)$.

$$\vec{n}_m = \vec{r}_{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = c \\ \text{door } (1, 3) \end{array} \right\} c = 1 + 3 \cdot 3 = 10$$

Dus $m: x + 3y = 10$.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = 10 \\ x = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 + 3y = 10 \\ 3y = 6 \\ y = 2 \end{array}$$

Dus $M(4, 2)$.

- b** $r = d(M, O) = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

Dus een vergelijking van de omgeschreven cirkel is $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 20$.

- 17** M is het midden van het lijnstuk AB en k is de middelloodlijn van het lijnstuk AB .

N is het midden van het lijnstuk BC en l is de middelloodlijn van het lijnstuk BC .

$$A(3, 0) \text{ en } B(7, 4) \text{ geeft } M(\frac{1}{2}(3 + 7), \frac{1}{2}(0 + 4)) = M(5, 2) \text{ en } \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n}_k = \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dus } k: x + y = 7.$$

$$B(7, 4) \text{ en } C(5, 6) \text{ geeft } N(\frac{1}{2}(7 + 5), \frac{1}{2}(4 + 6)) = N(6, 5) \text{ en } \vec{r}_{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n}_l = \vec{r}_{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ dus } l: x - y = 1.$$

$$k \text{ snijden met } l \text{ geeft } \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \\ \hline 2y = 6 \\ y = 3 \\ x + y = 7 \end{cases} \left\} x = 4$$

Dus $(4, 3)$ is het middelpunt van de cirkel door A , B en C .

$$\left. \begin{array}{l} (x-4)^2 + (y-3)^2 = r^2 \\ \text{door } A(3, 0) \end{array} \right\} r^2 = (3-4)^2 + (0-3)^2 = 1 + 9 = 10$$

$$\left. \begin{array}{l} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 10 \\ D(1, 4) \text{ op de cirkel?} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1-4)^2 + (4-3)^2 = 10 \\ 9 + 1 = 10 \end{array}$$

klopt

Dus D ligt op de cirkel die door A , B en C gaat.

Dus de punten A , B , C en D liggen op één cirkel.

- 18 a** k snijden met de y -as geeft $4y = 12$, dus $y = 3$ en $A(0, 3)$.
 k snijden met l geeft $3x + 4 = 12$ oftewel $3x = 8$, dus $x = 2\frac{2}{3}$ en $S(2\frac{2}{3}, 1)$.

b $P(x, y)$ op een bissectrice geeft $d(P, k) = d(P, l)$

$$\frac{|3x + 4y - 12|}{5} = \frac{|y - 1|}{1}$$

$$|3x + 4y - 12| = 5|y - 1|$$

$$3x + 4y - 12 = 5(y - 1) \vee 3x + 4y - 12 = 5(-y + 1)$$

$$3x + 4y - 12 = 5y - 5 \vee 3x + 4y - 12 = -5y + 5$$

$$3x - y = 7 \vee 3x + 9y = 17$$

Uit de figuur volgt $m: 3x - y = 7$ oftewel $m: y = 3x - 7$.

c $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ 3p - 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 3p - 10 \end{pmatrix}$

d $\overrightarrow{AS} = \vec{s} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ -2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{AP}$ geeft $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ 3p - 10 \end{pmatrix} = 0$$

$$4p - 3(3p - 10) = 0$$

$$4p - 9p + 30 = 0$$

$$-5p = -30$$

$$p = 6$$

Dus $P(6, 11)$.

e $\overrightarrow{SP} = \vec{p} - \vec{s} = \begin{pmatrix} p \\ 3p - 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - 2\frac{2}{3} \\ 3p - 8 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{SP}$ geeft $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{SP} = 0$

$$\begin{pmatrix} p \\ 3p - 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p - 2\frac{2}{3} \\ 3p - 8 \end{pmatrix} = 0$$

$$p(p - 2\frac{2}{3}) + (3p - 10)(3p - 8) = 0$$

$$p^2 - 2\frac{2}{3}p + 9p^2 - 24p - 30p + 80 = 0$$

$$10p^2 - 56\frac{2}{3}p + 80 = 0$$

$$3p^2 - 17p + 24 = 0$$

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24 = 1$$

$$p = \frac{17 \pm 1}{6} = 3 \vee p = \frac{17 - 1}{6} = 2\frac{2}{3}$$

vold. niet

Dus $P(3, 2)$.

Alternatieve uitwerking

$n \perp m$, dus de lijn q door A evenwijdig met n snijdt m loodrecht in P .

Uit **b** volgt $n: 3x + 9y = 17$.

$q \parallel n$ en q door $A(0, 3)$ geeft $q: 3x + 9y = 27$ oftewel $q: x + 3y = 9$.

m snijden met q .

Substitutie van $y = 3x - 7$ in $x + 3y = 9$ geeft $x + 3(3x - 7) = 9$

$$x + 9x - 21 = 9$$

$$10x = 30$$

$$x = 3$$

$$x = 3 \text{ geeft } y = 9 - 7 = 2$$

Dus $P(3, 2)$.

19

a $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{SP}|$ oftewel $|\overrightarrow{AP}|^2 = |\overrightarrow{SP}|^2$ geeft $p^2 + (3p - 10)^2 = (p - 2\frac{2}{3})^2 + (3p - 8)^2$
 $p^2 + 9p^2 - 60p + 100 = p^2 - 5\frac{1}{3}p + 7\frac{1}{9} + 9p^2 - 48p + 64$
 $-6\frac{2}{3}p = -28\frac{8}{9}$
 $p = 4\frac{1}{3}$

Dus $P(4\frac{1}{3}, 6)$.

b **Mogelijkheid 1:** $\angle AQS = 90^\circ$.

$m \perp n$, dus de lijn q door A evenwijdig met m snijdt n loodrecht in Q .

$q \parallel m$ en q door $A(0, 3)$ geeft $q: y = 3x + 3$.

q snijden met n .

Substitutie van $y = 3x + 3$ in $3x + 9y = 17$ geeft $3x + 9(3x + 3) = 17$

$$3x + 27x + 27 = 17$$

$$30x = -10$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ geeft } y = -1 + 3 = 2$$

Dus $Q(-\frac{1}{3}, 2)$.

Mogelijkheid 2: $\angle SAQ = 90^\circ$.

$$n: 3x + 9y = 17 \text{ oftewel } n: y = -\frac{1}{3}x + 1\frac{8}{9}$$

Stel $Q(q, -\frac{1}{3}q + 1\frac{8}{9})$.

$$\overrightarrow{AQ} = \vec{q} - \vec{a} = \begin{pmatrix} q \\ -\frac{1}{3}q + 1\frac{8}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ -\frac{1}{3}q - 1\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0 \text{ geeft } \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ -\frac{1}{3}q - 1\frac{1}{9} \end{pmatrix} = 0$$

$$4q - 3(-\frac{1}{3}q - 1\frac{1}{9}) = 0$$

$$4q + q + 3\frac{1}{3} = 0$$

$$5q = -3\frac{1}{3}$$

$$q = -\frac{2}{3}$$

Dus $Q(-\frac{2}{3}, 2\frac{1}{9})$.

20

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_k = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } k: x + 2y = 6.$$

k snijden met de x -as geeft $D(6, 0)$.

$$\vec{n}_m = \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dus } m: 3x + y = 13.$$

m snijden met k geeft het punt E .

$$\begin{cases} x + 2y = 6 & |1| \\ 3x + y = 13 & |2| \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 6x + 2y = 26 \end{cases} \quad \begin{array}{l} -5x = -20 \\ x = 4 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 4 \\ x + 2y = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 + 2y = 6 \\ 2y = 2 \\ y = 1 \end{array}$$

Dus $E(4, 1)$.

Geval 1: $\angle DPE = 90^\circ$.

$m \perp AC$, dus de lijn p door D evenwijdig met AC snijdt m loodrecht in P .

$p \parallel AC$ en p door $D(6, 0)$ geeft $p: x - 3y = 6$.

m snijden met p geeft het punt P .

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 9x + 3y = 39 \\ x - 3y = 6 \end{cases} + \frac{10x = 45}{x = 4\frac{1}{2}} + \begin{cases} 4\frac{1}{2} - 3y = 6 \\ -3y = 1\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dus $P(4\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

$$DP^2 = (4\frac{1}{2} - 6)^2 + (-\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{2} \text{ en } EP^2 = (4\frac{1}{2} - 4)^2 + (-\frac{1}{2} - 1)^2 = 2\frac{1}{2}$$

Dus in dit geval is driehoek DEP een gelijkbenige driehoek.

Geval 2: $\angle EDP = 90^\circ$.

$$\vec{n}_{DP} = \vec{r}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ geeft } DP: 2x - y = 12$$

DP snijden met m geeft het punt P .

$$\begin{cases} 2x - y = 12 \\ 3x + y = 13 \end{cases} + \frac{5x = 25}{x = 5} + \begin{cases} 10 - y = 12 \\ y = -2 \end{cases}$$

Dus $P(5, -2)$.

$$DE^2 = (4 - 6)^2 + (1 - 0)^2 = 5 \text{ en } DP^2 = (5 - 6)^2 + (-2 - 0)^2 = 5$$

Dus in dit geval is driehoek DEP een gelijkbenige driehoek.

Conclusie: in beide gevallen is driehoek DEP een gelijkbenige driehoek.

14.2 Cirkels en raaklijnen

Bladzijde 60

- 21 a 1
b 2
c 2
d 2

Bladzijde 61

22 $r_1 = r_2 = d(M, k) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$M_1(-1, 0)$, dus $c_1: (x + 1)^2 + y^2 = 8$.

$M_2(4, 5)$, dus $c_2: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 8$.

23 a $b = -4a + \frac{2}{3}$ invullen in $|3a - 1 + b| = \sqrt{5a^2 + 5}$ geeft $|3a - 1 - 4a + \frac{2}{3}| = \sqrt{5a^2 + 5}$

$$|-a - \frac{1}{3}| = \sqrt{5a^2 + 5}$$

kwadrateren geeft

$$a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{9} = 5a^2 + 5$$

$$4a^2 - \frac{2}{3}a + 4\frac{8}{9} = 0$$

$$36a^2 - 6a + 44 = 0$$

$$18a^2 - 3a + 22 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 18 \cdot 22 = -1575$$

$D < 0$, dus $b = -4a + \frac{2}{3}$ voldoet niet.

- b Elke lijn $k: y = ax + b$ heeft een richtingscoëfficiënt, dus de verticale richting sluit je hiermee uit.

- 24 Stel $M(2p, p)$ is een punt op m .

$$d(M, k) = d(M, l) \text{ geeft } \frac{|2 \cdot 2p - p - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|2p - 2p - 5|}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{|4p - p - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}}$$

$$|3p - 1| = |-5|$$

$$3p - 1 = 5 \vee 3p - 1 = -5$$

$$3p = 6 \vee 3p = -4$$

$$p = 2 \vee p = -1\frac{1}{3}$$

$$r_1 = r_2 = d(M, k) = d(M, l) = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$p = 2$ geeft $M(4, 2)$, dus $c_1: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

$p = -1\frac{1}{3}$ geeft $M(-2\frac{2}{3}, -1\frac{1}{3})$, dus $c_2: (x + 2\frac{2}{3})^2 + (y + 1\frac{1}{3})^2 = 5$.

- 25 Voor het middelpunt M van de cirkels geldt $d(M, k) = d(M, l)$.

Dus M ligt op de bissectrices van de lijnen k en l .

Omdat M ook op m ligt, kun je de coördinaten van M_1 en M_2 vinden door de bissectrices van k en l te snijden met m .

- 26 a $M(5, 0)$ en $r_1 = 3$.

$N(14, 0)$ en $r_2 = 6$.

$$d(M, N) = 14 - 5 = 9$$

$$d(M, N) - r_1 - r_2 = 9 - 3 - 6 = 0$$

Dus de cirkels raken elkaar.

- b De cirkels raken elkaar op de x -as in het punt $(8, 0)$.

De verticale raaklijn in dat punt is de lijn $k_1: x = 8$.

Stel $k: y = ax + b$ oftewel $k: ax - y + b = 0$.

$$d(M, k) = 3 \text{ geeft } \frac{|5a - 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 3$$

$$|5a + b| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

$$d(N, k) = 6 \text{ geeft } \frac{|14a - 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 6$$

$$|14a + b| = 6\sqrt{a^2 + 1}$$

Hieruit volgt $2|5a + b| = |14a + b|$

$$2(5a + b) = 14a + b \vee 2(5a + b) = -14a - b$$

$$10a + 2b = 14a + b \vee 10a + 2b = -14a - b$$

$$b = 4a \vee 3b = -24a$$

$$b = 4a \vee b = -8a$$

$$b = 4a \text{ invullen in } |5a + b| = 3\sqrt{a^2 + 1} \text{ geeft } |5a + 4a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

$$|9a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

$$81a^2 = 9a^2 + 9$$

$$72a^2 = 9$$

$$a^2 = \frac{1}{8}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{2} \vee a = -\sqrt{\frac{1}{8}} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$a = \frac{1}{4}\sqrt{2} \text{ geeft } b = \sqrt{2} \text{ en } a = -\frac{1}{4}\sqrt{2} \text{ geeft } b = -\sqrt{2}.$$

$$\text{Dus } k_2: y = \frac{1}{4}x\sqrt{2} + \sqrt{2} \text{ en } k_3: y = -\frac{1}{4}x\sqrt{2} - \sqrt{2}.$$

Hiermee zijn de drie lijnen gevonden, dus $b = -8a$ voldoet niet.

27 $m: x - 2y = -4$ oftewel $m: y = \frac{1}{2}x + 2$

Stel $M(2p, p + 2)$ is een punt op m .

$$d(M, k) = d(M, l) \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 2p - (p + 2)|}{\sqrt{10}} = \frac{|2p - 3(p + 2) + 8|}{\sqrt{10}}$$

$$|6p - p - 2| = |2p - 3p - 6 + 8|$$

$$|5p - 2| = |-p + 2|$$

$$5p - 2 = -p + 2 \vee 5p - 2 = p - 2$$

$$6p = 4 \vee 4p = 0$$

$$p = \frac{2}{3} \vee p = 0$$

$$p = \frac{2}{3} \text{ geeft } M_1(1\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}) \text{ en } r_1 = d(M_1, k) = \frac{|3 \cdot 1\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3}|}{\sqrt{10}} = \frac{|1\frac{1}{3}|}{\sqrt{10}} = \frac{1\frac{1}{3}}{\sqrt{10}} = \frac{4}{3\sqrt{10}}, \text{ dus } r_1^2 = \frac{16}{90} = \frac{8}{45}.$$

$$\text{Dus } c_1: (x - 1\frac{1}{3})^2 + (y - 2\frac{2}{3})^2 = \frac{8}{45}.$$

$$p = 0 \text{ geeft } M_2(0, 2) \text{ en } r_2 = d(M_2, k) = \frac{|3 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{10}} = \frac{|-2|}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}, \text{ dus } r_2^2 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Dus } c_2: x^2 + (y - 2)^2 = \frac{2}{5}.$$

28 Stel $M(2 + 2p, 2 + p)$ is een punt op k .

$l: y = -4x + 8$ oftewel $l: 4x + y - 8 = 0$

$$d(M, l) = d(M, x\text{-as}) \text{ geeft } \frac{|4 \cdot (2 + 2p) + 2 + p - 8|}{\sqrt{17}} = |2 + p|$$

$$\frac{|8 + 8p + 2 + p - 8|}{\sqrt{17}} = |2 + p|$$

$$\frac{|9p + 2|}{\sqrt{17}} = |2 + p|$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{|9x + 2|}{\sqrt{17}} \text{ en } y_2 = |2 + x|.$$

De optie snijpunt geeft $x = -0,780...$ en $x = 1,280...$

Dus $M(0,438...; 1,219...)$ en $N(4,561...; 3,280...)$.

$$d(M, N) = \sqrt{(4,561... - 0,438...)^2 + (3,280... - 1,219...)^2} \approx 4,61$$

Bladzijde 63

29 M_1 en M_2 liggen op de bissectrices van k en l , en tevens op afstand $\sqrt{10}$ van k en l .

$$d(M, k) = d(M, l) \text{ geeft } \frac{|3x - y - 9|}{\sqrt{10}} = \frac{|x - 3y - 3|}{\sqrt{10}}$$

$$3x - y - 9 = x - 3y - 3 \vee 3x - y - 9 = -x + 3y + 3$$

$$2x + 2y = 6 \vee 4x - 4y = 12$$

$$x + y = 3 \vee x - y = 3$$

Uit de figuur volgt dat M_1 op $x + y = 3$ ligt.

M_1 op $x + y = 3$ en $x_{M_1} = p$ geeft $M_1(p, 3 - p)$.

$$d(M_1, k) = \sqrt{10} \text{ geeft } \frac{|3p - (3 - p) - 9|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|3p - 3 + p - 9| = 10$$

$$|4p - 12| = 10$$

$$4p - 12 = 10 \vee 4p - 12 = -10$$

$$4p = 22 \vee 4p = 2$$

$$p = 5\frac{1}{2} \vee p = \frac{1}{2}$$

$p = 5\frac{1}{2}$ geeft $M_1(5\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2})$ vold. niet

$p = \frac{1}{2}$ geeft $M_1(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$

Uit de figuur volgt dat M_2 op $x - y = 3$ ligt
 M_2 op $x - y = 3$ en $y_{M_2} = q$ geeft $M_2(q + 3, q)$.

$$d(M_2, k) = \sqrt{10} \text{ geeft } \frac{|3(q+3) - q - 9|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|3q + 9 - q - 9| = 10$$

$$|2q| = 10$$

$$2q = 10 \vee 2q = -10$$

$$q = 5 \vee q = -5$$

$q = 5$ geeft $M_2(8, 5)$

$q = -5$ geeft $M_2(-2, -5)$ vold. niet

- b** De staal r_3 van c_3 is $r_3 = d(M_1, M_2) = \sqrt{(8 - \frac{1}{2})^2 + (5 - 2\frac{1}{2})^2} = \sqrt{62\frac{1}{2}}$.

Om vergelijkingen van de gemeenschappelijke raaklijnen van c_2 en c_3 op te stellen,

gebruik je dat de afstand van M_1 tot deze raaklijnen gelijk is aan $\sqrt{62\frac{1}{2}}$ en de afstand van M_2 tot deze raaklijnen gelijk is aan $\sqrt{10}$.

Stel $m: y = ax + b$ oftewel $m: ax - y + b = 0$ is een gemeenschappelijke raaklijn van c_2 en c_3 .

$$d(M_1, m) = \sqrt{62\frac{1}{2}} \text{ geeft } \frac{|\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{62\frac{1}{2}}$$

$$|\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b| = \sqrt{62\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$$

$$d(M_2, m) = \sqrt{10} \text{ geeft } \frac{|8a - 5 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|8a - 5 + b| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\text{Hieruit volgt } |\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b| = \sqrt{6\frac{1}{4}} \cdot |8a - 5 + b|$$

$$|\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b| = 2\frac{1}{2} \cdot |8a - 5 + b|$$

$$\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b = 2\frac{1}{2}(8a - 5 + b) \vee \frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b = 2\frac{1}{2}(-8a + 5 - b)$$

$$\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b = 20a - 12\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}b \vee \frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2} + b = -20a + 12\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}b$$

$$-1\frac{1}{2}b = 19\frac{1}{2}a - 10 \vee 3\frac{1}{2}b = -20\frac{1}{2}a + 15$$

$$b = -13a + 6\frac{2}{3} \vee b = -5\frac{6}{7}a + 4\frac{2}{7}$$

$$\text{Substitutie van } b = -13a + 6\frac{2}{3} \text{ in } |8a - 5 + b| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 1} \text{ geeft } |8a - 5 - 13a + 6\frac{2}{3}| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$$

$$|-5a + 1\frac{2}{3}| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$$

$$25a^2 - 16\frac{2}{3}a + 2\frac{7}{9} = 10a^2 + 10$$

$$15a^2 - 16\frac{2}{3}a - 7\frac{2}{9} = 0$$

$$27a^2 - 30a - 13 = 0$$

$$D = (-30)^2 - 4 \cdot 27 \cdot -13 = 2304$$

$$a = \frac{30 \pm 48}{54} = 1\frac{4}{9} \vee a = \frac{30 - 48}{54} = -\frac{1}{3}$$

$$a = 1\frac{4}{9} \text{ geeft } b = -13 \cdot 1\frac{4}{9} + 6\frac{2}{3} = -12\frac{1}{9}, \text{ dus } m_1: y = 1\frac{4}{9}x - 12\frac{1}{9}.$$

$$a = -\frac{1}{3} \text{ geeft } b = -13 \cdot -\frac{1}{3} + 6\frac{2}{3} = 11, \text{ dus } m_2: y = -\frac{1}{3}x + 11.$$

Hiermee zijn de twee gemeenschappelijke raaklijnen gevonden, dus $b = -5\frac{6}{7}a + 4\frac{2}{7}$ voldoet niet.

30 $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_{x\text{-as}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ en l de bissectrice van $\angle(k, x\text{-as})$ geeft $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dus voor een punt P op l geldt $P(3p, p)$.

De straal van c_1 is 1, dus $M(3, 1)$ en $OM = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Zie de figuur hiernaast.

De straal van c_2 is gelijk aan r gesteld.

$\triangle OAM \sim \triangle MCN$ geeft

$$\frac{OM}{MN} = \frac{AM}{CN}$$

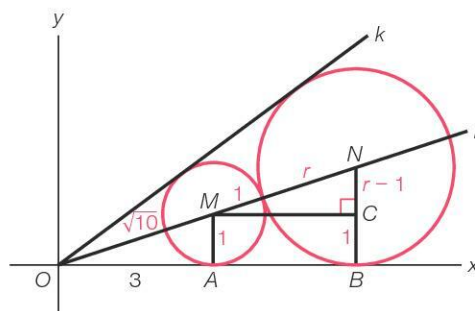
$$\frac{\sqrt{10}}{r+1} = \frac{1}{r-1}$$

$$r\sqrt{10} - \sqrt{10} = r + 1$$

$$r\sqrt{10} - r = \sqrt{10} + 1$$

$$r(\sqrt{10} - 1) = \sqrt{10} + 1$$

$$r = \frac{\sqrt{10} + 1}{\sqrt{10} - 1} = \frac{\sqrt{10} + 1}{\sqrt{10} - 1} \cdot \frac{\sqrt{10} + 1}{\sqrt{10} + 1} = \frac{10 + 2\sqrt{10} + 1}{10 - 1} = 1\frac{2}{9} + \frac{2}{9}\sqrt{10}$$



31 a $AM = 10$, $AN = 10 - r$ en $MN = r + 10$.

c raakt de positieve x -as in A , dus MA staat loodrecht op de x -as, dus $\angle MAN = 90^\circ$.

De stelling van Pythagoras in driehoek AMN geeft $AN^2 + AM^2 = MN^2$, dus

$$(10 - r)^2 + 10^2 = (r + 10)^2.$$

b Haakjes wegwerken geeft $100 - 20r + r^2 + 100 = r^2 + 20r + 100$

$$-40r = -100$$

$$r = 2\frac{1}{2}$$

Dus $d: (x - 2\frac{1}{2})^2 + y^2 = 6\frac{1}{4}$.

Bladzijde 64

32 a Stel de straal van d gelijk aan r .

Zie de figuur hiernaast.

$$MP = 8, NP = 6 - r \text{ en } MN = r + 8.$$

De stelling van Pythagoras in driehoek MNP geeft

$$MP^2 + NP^2 = MN^2$$

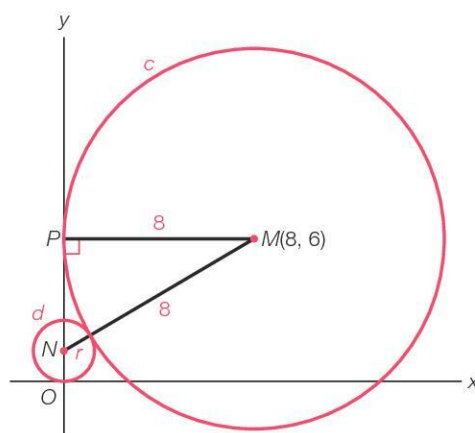
$$8^2 + (6 - r)^2 = (r + 8)^2$$

$$64 + 36 - 12r + r^2 = r^2 + 16r + 64$$

$$-28r = -36$$

$$r = 1\frac{2}{7}$$

Dus $d: x^2 + (y - 1\frac{2}{7})^2 = 1\frac{32}{49}$.



b Noem deze cirkel e en stel de straal van e gelijk aan r .

Zie de figuur hiernaast.

De stelling van Pythagoras in driehoek MQR geeft

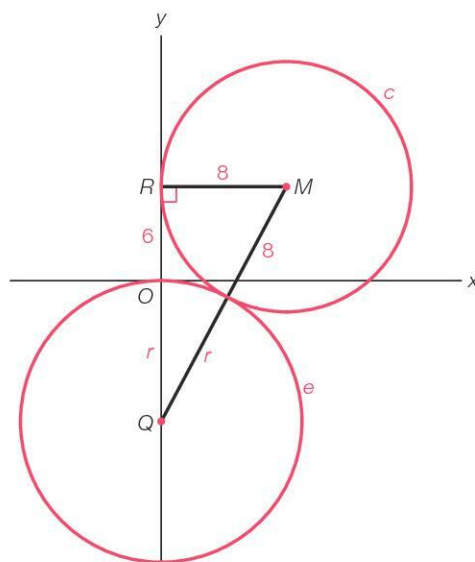
$$8^2 + (r + 6)^2 = (r + 8)^2$$

$$64 + r^2 + 12r + 36 = r^2 + 16r + 64$$

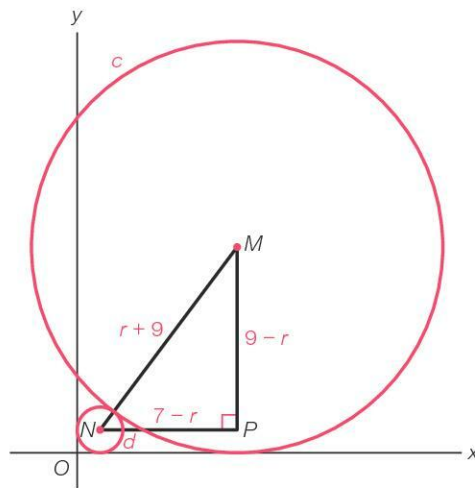
$$-4r = -36$$

$$r = 9$$

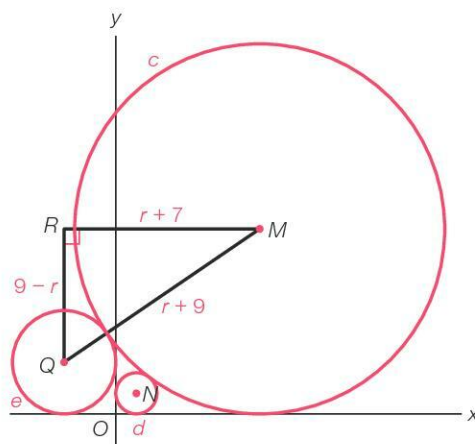
Dus $e: x^2 + (y + 9)^2 = 81$.



- 33 a** De straal van c is 9.
 Stel de straal van d gelijk aan r .
 Zie de figuur hiernaast.
 $MP = 9 - r$, $NP = 7 - r$ en $MN = r + 9$.
 De stelling van Pythagoras in driehoek MNP geeft
 $MP^2 + NP^2 = MN^2$
 $(9 - r)^2 + (7 - r)^2 = (r + 9)^2$
 $81 - 18r + r^2 + 49 - 14r + r^2 = r^2 + 18r + 81$
 $r^2 - 50r + 49 = 0$
 $(r - 1)(r - 49) = 0$
 $r = 1 \vee r = 49$
 vold. niet
 Dus $d: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

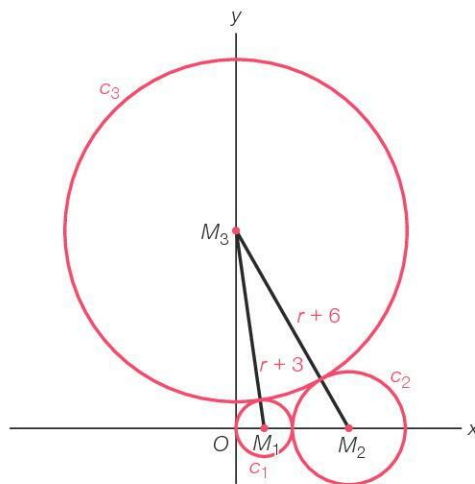


- b** Stel de straal van e gelijk aan r .
 Zie de figuur hiernaast.
 De stelling van Pythagoras in driehoek MQR geeft
 $QR^2 + MR^2 = QM^2$
 $(9 - r)^2 + (r + 7)^2 = (r + 9)^2$
 $81 - 18r + r^2 + r^2 + 14r + 49 = r^2 + 18r + 81$
 $r^2 - 22r + 49 = 0$
 $D = (-22)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49 = 288$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$
 $r = \frac{22 + 12\sqrt{2}}{2} = 11 + 6\sqrt{2} \vee r = 11 - 6\sqrt{2}$
 vold. niet

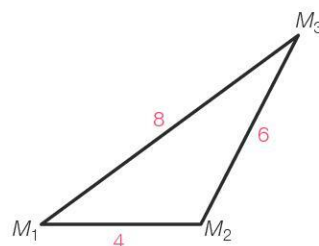


Bladzijde 65

- 34 a** Zie de figuur hiernaast.
 $OM_1 = 3$, $OM_2 = 12$, $OM_3 = p$, $M_1M_3 = r + 3$ en
 $M_2M_3 = r + 6$.
 De stelling van Pythagoras in driehoek OM_1M_3 geeft
 $OM_1^2 + OM_3^2 = M_1M_3^2$
 $3^2 + p^2 = (r + 3)^2$
 $p^2 + 9 = (r + 3)^2$
 De stelling van Pythagoras in driehoek OM_2M_3 geeft
 $OM_2^2 + OM_3^2 = M_2M_3^2$
 $12^2 + p^2 = (r + 6)^2$
 $p^2 + 144 = (r + 6)^2$
b $p^2 + 9 = (r + 3)^2$ oftewel $p^2 = (r + 3)^2 - 9$
 $p^2 + 144 = (r + 6)^2$ oftewel $p^2 = (r + 6)^2 - 144$
 Dit geeft $(r + 3)^2 - 9 = (r + 6)^2 - 144$
 $r^2 + 6r + 9 - 9 = r^2 + 12r + 36 - 144$
 $-6r = -108$
 $r = 18$
 $r = 18$ geeft $p^2 = (18 + 3)^2 - 9 = 432$, dus $p = \sqrt{432} = 12\sqrt{3} \vee p = -12\sqrt{3}$
 vold. niet
 Dus $p = 12\sqrt{3}$ en $r = 18$.



- 35 a** De cosinusregel in driehoek $M_1M_2M_3$ geeft
 $M_1M_3^2 = M_1M_2^2 + M_2M_3^2 - 2 \cdot M_1M_2 \cdot M_2M_3 \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$
 $8^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$
 $64 = 16 + 36 - 48 \cos(\angle M_1M_2M_3)$
 $48 \cos(\angle M_1M_2M_3) = -12$
 $\cos(\angle M_1M_2M_3) = -\frac{1}{4}$
 $\angle M_1M_2M_3 \approx 104,5^\circ$



- b** In driehoek $M_1M_2M_3$ is $M_1M_2 = 4$, $M_1M_3 = r + 3$ en $M_2M_3 = r + 1$.

De cosinusregel in driehoek $M_1M_2M_3$ geeft $(r + 3)^2 = 4^2 + (r + 1)^2 - 2 \cdot 4 \cdot (r + 1) \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$
 $r^2 + 6r + 9 = 16 + r^2 + 2r + 1 - 8(r + 1)\cos(\angle M_1M_2M_3)$
 $8(r + 1)\cos(\angle M_1M_2M_3) = -4r - 8$
 $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{-4r - 8}{8r + 8} = \frac{4(-r - 2)}{4(2r + 2)} = \frac{-r - 2}{2r + 2}$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-r - 2}{2r + 2} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{2}{r}}{2 + \frac{2}{r}} = \frac{-1 - 0}{2 + 0} = -\frac{1}{2}$$

$\cos(\angle M_1M_2M_3) = -\frac{1}{2}$ geeft $\angle M_1M_2M_3 = 120^\circ$

Zie a, voor $r = 5$ is $\angle M_1M_2M_3 \approx 104,5^\circ < 120^\circ$.

Dus er zijn geen waarden van r waarvoor $\angle M_1M_2M_3$ groter dan of gelijk aan 120° wordt.

- c** De straal van c_1 is 3 en $OM_2 = 1$.

Stel $x_{M_3} = p$.

Zie de figuur hiernaast.

De stelling van Pythagoras in driehoek PM_1M_3 geeft

$$M_1P^2 + PM_3^2 = M_1M_3^2$$

$$(p + 3)^2 + r^2 = (r + 3)^2$$

$$p^2 + 6p + 9 + r^2 = r^2 + 6r + 9$$

$$p^2 + 6p = 6r$$

$$p^2 = -6p + 6r$$

De stelling van Pythagoras in driehoek PM_2M_3 geeft

$$M_2P^2 + PM_3^2 = M_2M_3^2$$

$$(p - 1)^2 + r^2 = (r + 1)^2$$

$$p^2 - 2p + 1 + r^2 = r^2 + 2r + 1$$

$$p^2 - 2p = 2r$$

$$p^2 = 2p + 2r$$

$$\text{Hieruit volgt } -6p + 6r = 2p + 2r$$

$$4r = 8p$$

$$r = 2p$$

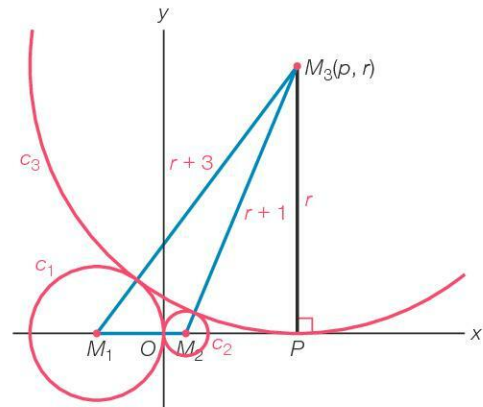
$$\left. \begin{array}{l} p^2 = 2p + 2r \\ r = 2p \end{array} \right\} \begin{array}{l} p^2 = 2p + 2 \cdot 2p \\ p^2 = 6p \end{array}$$

$$p = 0 \vee p = 6$$

vold. niet

$$p = 6 \text{ geeft } r = 12$$

Dus $M_3(6, 12)$.



Bladzijde 66

- 36** Zie de figuur hiernaast.

De straal van d is gelijk aan r_d gesteld.

De stelling van Pythagoras in driehoek MNP geeft

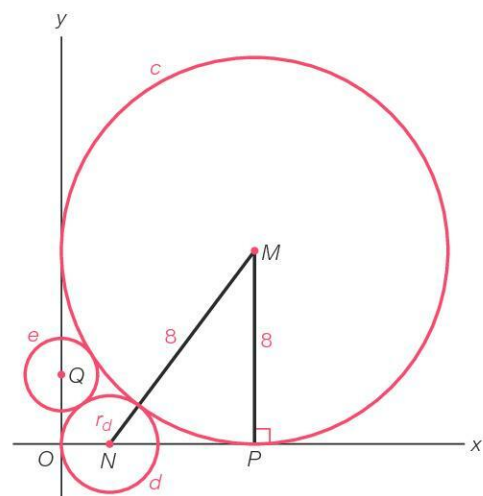
$$PM^2 + PN^2 = MN^2$$

$$8^2 + (8 - r_d)^2 = (r_d + 8)^2$$

$$64 + 64 - 16r_d + r_d^2 = r_d^2 + 16r_d + 64$$

$$-32r_d = -64$$

$$r_d = 2$$



Stel $Q(0, q)$ en de straal van e gelijk aan r_e .

Zie de figuur hiernaast.

De stelling van Pythagoras in driehoek ONQ geeft

$$ON^2 + OQ^2 = NQ^2$$

$$2^2 + q^2 = (r_e + 2)^2$$

$$4 + q^2 = r_e^2 + 4r_e + 4$$

$$q^2 - r_e^2 = 4r_e$$

De stelling van Pythagoras in driehoek MQR geeft

$$QR^2 + MR^2 = MQ^2$$

$$(8 - q)^2 + 8^2 = (r_e + 8)^2$$

$$64 - 16q + q^2 + 64 = r_e^2 + 16r_e + 64$$

$$q^2 - r_e^2 = 16r_e + 16q - 64$$

$$\text{Hieruit volgt } 16r_e + 16q - 64 = 4r_e$$

$$16q = -12r_e + 64$$

$$q = -\frac{3}{4}r_e + 4$$

$$\left. \begin{array}{l} q^2 - r_e^2 = 4r_e \\ q = -\frac{3}{4}r_e + 4 \end{array} \right\} \left(-\frac{3}{4}r_e + 4 \right)^2 - r_e^2 = 4r_e$$

$$\frac{9}{16}r_e^2 - 6r_e + 16 - r_e^2 = 4r_e$$

$$-\frac{7}{16}r_e^2 - 10r_e + 16 = 0$$

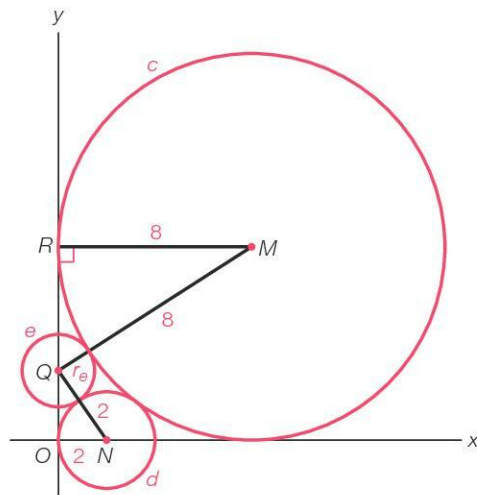
$$7r_e^2 + 160r_e - 256 = 0$$

$$D = 160^2 - 4 \cdot 7 \cdot -256 = 32768, \text{ dus } \sqrt{D} = \sqrt{32768} = 128\sqrt{2}$$

$$r_e = \frac{-160 + 128\sqrt{2}}{14} = -11\frac{3}{7} + 9\frac{1}{7}\sqrt{2} \vee r_e = \frac{-160 - 128\sqrt{2}}{14} = -11\frac{3}{7} - 9\frac{1}{7}\sqrt{2}$$

vold. niet

Dus de straal van e is $-11\frac{3}{7} + 9\frac{1}{7}\sqrt{2}$.



14.3 Cirkels en snijpunten

Bladzijde 68

- 37 a** Substitutie van $y = -x - 1$ in $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 3 = 0$ geeft $x^2 + (-x - 1)^2 - 10x - 4(-x - 1) - 3 = 0$
 $x^2 + x^2 + 2x + 1 - 10x + 4x + 4 - 3 = 0$
 $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$

$D = 0$, dus de k en c hebben één punt gemeenschappelijk.

Dus k raakt aan c .

- b** $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 3 = 0$
 $x^2 - 10x + y^2 - 4y - 3 = 0$
 $(x - 5)^2 - 25 + (y - 2)^2 - 4 - 3 = 0$
 $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 32$
Dus $M(5, 2)$ en $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

$$M(5, 2) \text{ en } k: x + y + 1 = 0 \text{ geeft } d(M, k) = \frac{|5 + 2 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|8|}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

$d(M, k) = r$, dus k raakt aan c .

Bladzijde 69

- 38 a** $D = 484$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{484} = 22$.
 $x = \frac{12 + 22}{10} = 3\frac{2}{5} \vee x = \frac{12 - 22}{10} = -1$
 $x = 3\frac{2}{5}$ geeft $y = 2 \cdot 3\frac{2}{5} - 3 = 3\frac{4}{5}$
 $x = -1$ geeft $y = 2 \cdot -1 - 3 = -5$
De snijpunten zijn $(3\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5})$ en $(-1, -5)$.
- b** $d(M, k) < r$ geeft $\frac{|4 \cdot 5 - 1 - q|}{\sqrt{17}} < \sqrt{17}$ en dit geeft $2 < q < 36$.

- 39 a** Van c_1 is het middelpunt $M(2, 1)$ en de straal $r = \sqrt{13}$.

$k: y = x - 3$ oftewel $k: x - y - 3 = 0$

$$d(M, k) = \frac{|2 - 1 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$d(M, k) < r$, dus k snijdt c_1 in twee punten.

- b** $l: 2x + y = 7$ oftewel $l: y = -2x + 7$

Substitutie van $y = -2x + 7$ in $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 18$ geeft $x^2 + (-2x + 7)^2 + 2x + 2(-2x + 7) = 18$

$$x^2 + 4x^2 - 28x + 49 + 2x - 4x + 14 = 18$$
$$5x^2 - 30x + 45 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

$D = 0$, dus l raakt c_2 .

- c** Van c_3 is het middelpunt $M(4, -1)$ en de straal $r = 3$.

$$d(M, m) = \frac{|4 - 3 \cdot -1 + 3|}{\sqrt{10}} = \frac{|10|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$d(M, m) > r$, dus m heeft geen punten gemeenschappelijk met c_3 .

- 40 a** $k: x - y + 1 = 0$ oftewel $k: y = x + 1$

Substitutie van $y = x + 1$ in $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$ geeft

$$x^2 + (x + 1)^2 - 10x - 2(x + 1) + 9 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 10x - 2x - 2 + 9 = 0$$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 4$$

$x = 1$ en $y = x + 1$ geeft het snijpunt $(1, 2)$.

$x = 4$ en $y = x + 1$ geeft het snijpunt $(4, 5)$.

- b** Substitutie van $x = t + 1 \wedge y = 2t + 1$ in $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$ geeft

$$(t + 1)^2 + (2t + 1)^2 - 8(t + 1) - 4(2t + 1) + 10 = 0$$

$$t^2 + 2t + 1 + 4t^2 + 4t + 1 - 8t - 8 - 8t - 4 + 10 = 0$$

$$5t^2 - 10t = 0$$

$$5t(t - 2) = 0$$

$$t = 0 \vee t = 2$$

$t = 0$ geeft het snijpunt $(1, 1)$.

$t = 2$ geeft het snijpunt $(3, 5)$.

Bladzijde 70

- 41 a** $2x - 3y + 4 = 0$ geeft $2x = 3y - 4$ oftewel $x = 1\frac{1}{2}y - 2$.

Substitutie van $x = 1\frac{1}{2}y - 2$ in $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 26$ geeft

$$(1\frac{1}{2}y - 2 - 6)^2 + (y - 1)^2 = 26.$$

Voer in $y_1 = (1\frac{1}{2}x - 8)^2 + (x - 1)^2$ en $y_2 = 26$.

De optie snijpunt geeft $x = 2$ en $x = 6$.

Dus $y = 2$ en $y = 6$.

$y = 2$ en $x = 1\frac{1}{2}y - 2$ geeft het snijpunt $(1, 2)$.

$y = 6$ en $x = 1\frac{1}{2}y - 2$ geeft het snijpunt $(7, 6)$.

- b** $3x + 4y = 19$ geeft $4y = -3x + 19$ oftewel $y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$.

Substitutie van $y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$ in $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ geeft

$$x^2 + (-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4})^2 - 4x + 6(-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}) - 12 = 0.$$

Voer in $y_1 = x^2 + (-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4})^2 - 4x + 6(-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}) - 12$.

De optie nulpunt geeft $x = 5$.

$x = 5$ geeft $y = 1$

Het gemeenschappelijke punt is $(5, 1)$.

- 42 a** Van c is het middelpunt $M(5, 1)$ en de straal $r = \sqrt{20}$.

$$k: y = ax + 1 \text{ oftewel } k: ax - y + 1 = 0$$

$$d(M, k) = \frac{|5a - 1 + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|5a|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$d(M, k) < r \text{ geeft } \frac{|5a|}{\sqrt{a^2 + 1}} < \sqrt{20}$$

$$|5a| < \sqrt{20a^2 + 20}$$

$$25a^2 < 20a^2 + 20$$

$$5a^2 < 20$$

$$a^2 < 4$$

$$-2 < a < 2$$

- b** $l: y = \frac{1}{2}x + b$ oftewel $l: \frac{1}{2}x - y + b = 0$

$$d(M, l) = \frac{|\frac{1}{2} \cdot 5 - 1 + b|}{\sqrt{1\frac{1}{4}}} = \frac{|1\frac{1}{2} + b|}{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$$

$$d(M, k) > r \text{ geeft } \frac{|1\frac{1}{2} + b|}{\sqrt{1\frac{1}{4}}} > \sqrt{20}$$

$$|1\frac{1}{2} + b| > \sqrt{25}$$

$$|1\frac{1}{2} + b| > 5$$

$$1\frac{1}{2} + b > 5 \vee 1\frac{1}{2} + b < -5$$

$$b < -6\frac{1}{2} \vee b > 3\frac{1}{2}$$

- 43 a** Het midden M van het lijnstuk AB is $M(\frac{1}{2}(-1 + 7), \frac{1}{2}(3 + -1))$ oftewel $M(3, 1)$.

$$r = d(A, M) = \sqrt{(3 - -1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \text{ en } M(3, 1) \text{ geeft } c: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 20.$$

$$\text{Substitutie van } x = -2 + 3t \wedge y = 6 - t \text{ in } (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 20 \text{ geeft } (-2 + 3t - 3)^2 + (6 - t - 1)^2 = 20$$

$$(3t - 5)^2 + (5 - t)^2 = 20$$

$$9t^2 - 30t + 25 + 25 - 10t + t^2 = 20$$

$$10t^2 - 40t + 30 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t - 1)(t - 3) = 0$$

$$t = 1 \vee t = 3$$

$t = 1$ geeft het snijpunt $(1, 5)$.

$t = 3$ geeft het snijpunt $(7, 3)$.

- b** $k: y = -2x + p$ oftewel $k: 2x + y - p = 0$

$$d(M, k) = \frac{|2 \cdot 3 + 1 - p|}{\sqrt{5}} = \frac{|7 - p|}{\sqrt{5}}$$

$$d(M, k) = r \text{ geeft } \frac{|7 - p|}{\sqrt{5}} = \sqrt{20}$$

$$|7 - p| = \sqrt{100}$$

$$|7 - p| = 10$$

$$7 - p = 10 \vee 7 - p = -10$$

$$p = -3 \vee p = 17$$

c $l: y = qx - 5\frac{1}{2}$ oftewel $l: qx - y - 5\frac{1}{2} = 0$

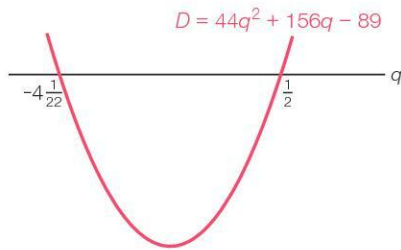
$$d(M, l) = \frac{|3q - 1 - 5\frac{1}{2}|}{\sqrt{q^2 + 1}} = \frac{|3q - 6\frac{1}{2}|}{\sqrt{q^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned} d(M, l) > r \text{ geeft } \frac{|3q - 6\frac{1}{2}|}{\sqrt{q^2 + 1}} &> \sqrt{20} \\ |3q - 6\frac{1}{2}| &> \sqrt{20q^2 + 20} \\ 9q^2 - 39q + 42\frac{1}{4} &> 20q^2 + 20 \\ -11q^2 - 39q + 22\frac{1}{4} &> 0 \\ 44q^2 + 156q - 89 &< 0 \end{aligned}$$

$$44q^2 + 156q - 89 = 0$$

$$D = 156^2 - 4 \cdot 44 \cdot -89 = 40000$$

$$q = \frac{-156 \pm 200}{88} = \frac{1}{2} \vee q = \frac{-156 - 200}{88} = -4\frac{1}{22}$$



$$44q^2 + 156q - 89 < 0 \text{ geeft } -4\frac{1}{22} < q < \frac{1}{2}$$

44 $\left. \begin{aligned} x^2 + (y-2)^2 &= r^2 \\ \text{door } (0, 0) \end{aligned} \right\} r^2 = 0^2 + (-2)^2 = 4$

Dus c: $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

Substitutie van $y = ax^2$ in $x^2 + (y-2)^2 = 4$ geeft $x^2 + (ax^2 - 2)^2 = 4$

$$x^2 + a^2x^4 - 4ax^2 + 4 = 4$$

$$a^2x^4 + x^2 - 4ax^2 = 0$$

$$x^2(a^2x^2 + 1 - 4a) = 0$$

$$x^2 = 0 \vee a^2x^2 + 1 - 4a = 0$$

$$x = 0 \vee a^2x^2 + 1 - 4a = 0$$

Drie gemeenschappelijke punten in het geval $a^2x^2 + 1 - 4a = 0$ twee oplossingen heeft.

$$a^2x^2 + 1 - 4a = 0$$

$$a^2x^2 = 4a - 1$$

$$x^2 = \frac{4a - 1}{a^2}$$

Deze vergelijking heeft twee oplossingen als $\frac{4a - 1}{a^2} > 0$

$$4a - 1 > 0$$

$$4a > 1$$

$$a > \frac{1}{4}$$

Dus voor $a > \frac{1}{4}$ hebben de parabool en de cirkel drie gemeenschappelijke punten.

45 a $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x-3)^2 + y^2 = 16 \end{cases} \rightarrow x^2 - (x-3)^2 = 9$

Oplossen geeft $x^2 - (x^2 - 6x + 9) = 9$

$$x^2 - x^2 + 6x - 9 = 9$$

$$6x = 18$$

$$x = 3$$

b De lijn $x = 3$ gaat door de snijpunten A en B van de cirkels.

46

$$\begin{aligned}
 \text{a } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0 \end{cases} \\
 \hline
 12x - 4y - 24 = 0 \\
 3x - y - 6 = 0 \\
 y = 3x - 6 \\
 \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ y = 3x - 6 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x^2 + (3x - 6)^2 - 2x - 4(3x - 6) &= 0 \\ x^2 + 9x^2 - 36x + 36 - 2x - 12x + 24 &= 0 \\ 10x^2 - 50x + 60 &= 0 \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ (x - 2)(x - 3) &= 0 \\ x = 2 \vee x = 3 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$x = 2$ en $y = 3x - 6$ geeft het snijpunt $B(2, 0)$.

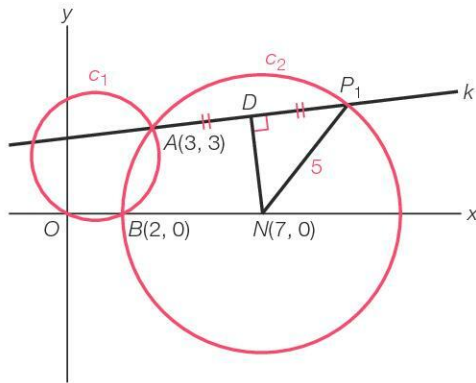
$x = 3$ en $y = 3x - 6$ geeft het snijpunt $A(3, 3)$.

$$\text{b } \begin{cases} y = ax + b \\ \text{door } A(3, 3) \end{cases} \begin{cases} 3a + b = 3 \\ b = 3 - 3a \end{cases}$$

Dus $k: y = ax + 3 - 3a$.

$$\begin{aligned}
 \text{c } c_2: x^2 + y^2 - 14x + 24 &= 0 \\
 x^2 - 14x + y^2 + 24 &= 0 \\
 (x - 7)^2 - 49 + y^2 + 24 &= 0 \\
 (x - 7)^2 + y^2 &= 25
 \end{aligned}$$

Dus middelpunt $N(7, 0)$ en straal 5.



De loodlijn ND op AP_1 deelt AP_1 middendoor, dus $DP_1 = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

De stelling van Pythagoras in driehoek DNP_1 geeft $DN = \sqrt{5^2 - (2\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{12\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dus $d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{d } d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ geeft } \frac{|7a - 0 + 3 - 3a|}{\sqrt{a^2 + 1}} &= 2\frac{1}{2}\sqrt{2} \\
 |4a + 3| &= 2\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2} \\
 16a^2 + 24a + 9 &= 6\frac{1}{4}(2a^2 + 2) \\
 16a^2 + 24a + 9 &= 12\frac{1}{2}a^2 + 12\frac{1}{2} \\
 3\frac{1}{2}a^2 + 24a - 3\frac{1}{2} &= 0 \\
 D = 24^2 - 4 \cdot 3\frac{1}{2} \cdot -3\frac{1}{2} &= 625 \\
 a = \frac{-24 \pm 25}{7} &= \frac{1}{7} \vee a = \frac{-24 - 25}{7} = -7
 \end{aligned}$$

$$\text{e } a = \frac{1}{7} \text{ geeft } k_1: y = \frac{1}{7}x + 3 - \frac{3}{7}$$

$$a = -7 \text{ geeft } k_2: y = -7x + 3 + 21$$

Dus $k_1: y = \frac{1}{7}x + 2\frac{4}{7}$ en $k_2: y = -7x + 24$.

Bladzijde 72

47 $AP = 5\sqrt{2}$ geeft dat P op de cirkel met middelpunt A en straal $5\sqrt{2}$ ligt.

Dus $c_3: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 50$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 50$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 32 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y - 32 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{-8x + 6y + 56 = 0}$$

$$8x = 6y + 56$$

$$x = \frac{3}{4}y + 7$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0 \left\{ \begin{aligned} &(\frac{3}{4}y + 7)^2 + y^2 - 14(\frac{3}{4}y + 7) + 24 = 0 \\ &\frac{9}{16}y^2 + 10\frac{1}{2}y + 49 + y^2 - 10\frac{1}{2}y - 98 + 24 = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\frac{9}{16}y^2 + 10\frac{1}{2}y + 49 + y^2 - 10\frac{1}{2}y - 98 + 24 = 0$$

$$1\frac{9}{16}y^2 = 25$$

$$y^2 = 16$$

$$y = 4 \vee y = -4$$

$y = 4$ en $x = \frac{3}{4}y + 7$ geeft $P_1(10, 4)$.

$y = -4$ en $x = \frac{3}{4}y + 7$ geeft $P_2(4, -4)$.

48 $\begin{cases} y = ax + b \\ \text{door } B(2, 0) \end{cases} \left\{ \begin{aligned} &2a + b = 0 \\ &b = -2a \end{aligned} \right.$

Dus $l: y = ax - 2a$ oftewel $l: ax - y - 2a = 0$.

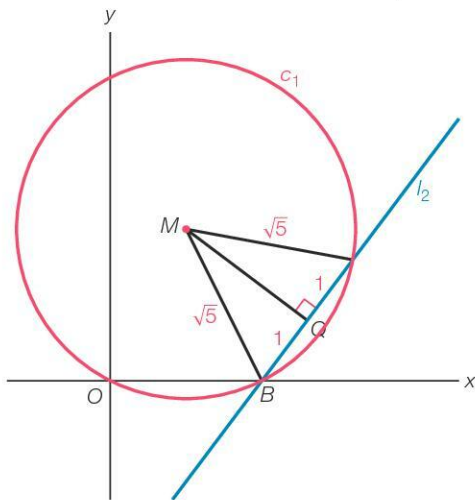
$c_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

Dus middelpunt $M(1, 2)$ en straal $\sqrt{5}$.



$$MQ = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2, \text{ dus } d(M, l) = 2$$

$$\frac{|a - 2 - 2a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2$$

$$|-a - 2| = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$a^2 + 4a + 4 = 4(a^2 + 1)$$

$$a^2 + 4a + 4 = 4a^2 + 4$$

$$3a^2 - 4a = 0$$

$$a(3a - 4) = 0$$

$$a = 0 \vee a = 1\frac{1}{3}$$

$a = 0$ geeft $l_1: y = 0$ en $a = 1\frac{1}{3}$ geeft $l_2: y = 1\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$.

49 a $M(\frac{1}{2}(4+5), \frac{1}{2}(0+5)) = M(4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$

$$\left. \begin{aligned} (x - 4\frac{1}{2})^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 &= r^2 \\ \text{door } A(4, 0) \end{aligned} \right\} r^2 &= (4 - 4\frac{1}{2})^2 + (0 - 2\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } c: (x - 4\frac{1}{2})^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 &= 6\frac{1}{2} \\ x^2 - 9x + 20\frac{1}{4} + y^2 - 5y + 6\frac{1}{4} &= 6\frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 - 9x - 5y + 20 &= 0 \end{aligned}$$

De lijn door A evenwijdig met OB : $y = x$ heeft vergelijking $y = x - 4$.

$$\begin{aligned} \text{Deze lijn snijden met } c \text{ geeft } x^2 + (x - 4)^2 - 9x - 5(x - 4) + 20 &= 0 \\ x^2 + x^2 - 8x + 16 - 9x - 5x + 20 + 20 &= 0 \\ 2x^2 - 22x + 56 &= 0 \\ x^2 - 11x + 28 &= 0 \\ (x - 4)(x - 7) &= 0 \\ x = 4 \vee x = 7 \end{aligned}$$

$x = 7$ en $y = x - 4$ geeft het punt $E(7, 3)$.

b OB : $y = x$ snijden met c geeft $x^2 + x^2 - 9x - 5x + 20 = 0$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 14x + 20 &= 0 \\ x^2 - 7x + 10 &= 0 \\ (x - 2)(x - 5) &= 0 \\ x = 2 \vee x = 5 \end{aligned}$$

Dus $D(2, 2)$.

d is de cirkel met middelpunt A die door D gaat.

$$\left. \begin{aligned} (x - 4)^2 + y^2 &= r^2 \\ \text{door } D(2, 2) \end{aligned} \right\} r^2 &= (2 - 4)^2 + 2^2 = 8$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } d: (x - 4)^2 + y^2 &= 8 \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 &= 8 \\ x^2 + y^2 - 8x + 8 &= 0 \end{aligned}$$

d snijden met c geeft punt E .

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 - 9x - 5y + 20 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 8 &= 0 \end{aligned} \right. \\ \hline -x - 5y + 12 &= 0 \\ x = -5y + 12 & \\ x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0 & \left\{ \begin{aligned} (-5y + 12)^2 + y^2 - 8(-5y + 12) + 8 &= 0 \\ 25y^2 - 120y + 144 + y^2 + 40y - 96 + 8 &= 0 \\ 26y^2 - 80y + 56 &= 0 \\ 13y^2 - 40y + 28 &= 0 \\ D = (-40)^2 - 4 \cdot 13 \cdot 28 &= 144 \\ y = \frac{40 \pm 12}{26} = 2 \vee y = \frac{40 - 12}{26} &= 1\frac{1}{13} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$y = 1\frac{1}{13}$ en $x = -5y + 12$ geeft het punt $E(6\frac{8}{13}, 1\frac{1}{13})$.

c $\vec{n}_k = \vec{r}_{DM} = \vec{m} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

BC : $y = 5$ snijden met c geeft het punt F .

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 9x - 5y + 20 &= 0 \\ y = 5 & \left\{ \begin{aligned} x^2 + 25 - 9x - 25 + 20 &= 0 \\ x^2 - 9x + 20 &= 0 \\ (x - 4)(x - 5) &= 0 \\ x = 4 \vee x = 5 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dus $F(4, 5)$.

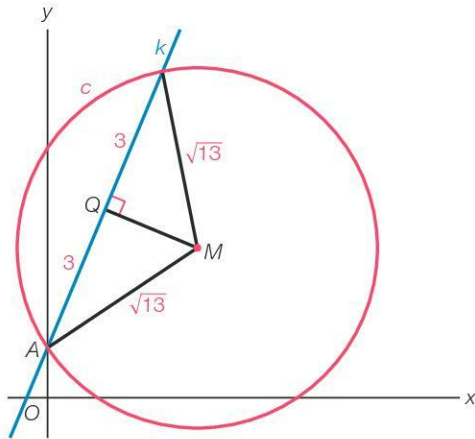
$$\vec{n}_l = \vec{r}_{FM} = \vec{m} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{2} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_k \cdot \vec{n}_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 - 5 = 0, \text{ dus } k \perp l, \text{ dus } \angle DGF = 90^\circ.$$

Uit de omgekeerde stelling van Thales volgt dat DF een middellijn is van de cirkel door D , F en G , dus G ligt op de cirkel met middellijn DF .

50

- a $r_c = d(A, M) = \sqrt{(3-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
 $k: y = ax + 1$ oftewel $k: ax - y + 1 = 0$



$$MQ = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 3^2} = 2$$

$$M(3, 3) \text{ en } d(M, k) = 2 \text{ geeft } \frac{|3a - 3 + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2$$

$$|3a - 2| = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$9a^2 - 12a + 4 = 4(a^2 + 1)$$

$$9a^2 - 12a + 4 = 4a^2 + 4$$

$$5a^2 - 12a = 0$$

$$a(5a - 12) = 0$$

$$a = 0 \vee 5a - 12 = 0$$

$$a = 0 \vee a = 2\frac{2}{5}$$

Dus $k_1: y = 1$ en $k_2: y = 2\frac{2}{5}x + 1$.

- b $O(OAMB) = 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$

$A(0, 1)$ en $B(1, 0)$ geeft $AB = \sqrt{2}$.

$$\sin(\frac{1}{2} \angle AMB) = \frac{\frac{1}{2}AB}{r_c} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{1}{2} \angle AMB = 11,30\dots^\circ$$

$$\angle AMB = 22,61\dots^\circ$$

De oppervlakte van cirkelsector ABM is $\frac{22,61\dots}{360} \cdot \pi \cdot (\sqrt{13})^2 = 2,566\dots$

Dus $O(V) = 3 - 2,566\dots \approx 0,43$.

- c De middelloodlijn m van lijnstuk CD is de lijn $m: x = 5\frac{1}{2}$.

n is de middelloodlijn van lijnstuk CM .

Het midden van lijnstuk CM is $(\frac{1}{2}(5+3), \frac{1}{2}(0+3)) = (4, 1\frac{1}{2})$.

$$\vec{n}_n = \vec{r}_{CM} = \vec{m} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } n \text{ door } (4, 1\frac{1}{2}) \text{ geeft } n: -2x + 3y = -3\frac{1}{2}.$$

n snijden met m geeft het punt N .

$$\left. \begin{array}{l} -2x + 3y = -3\frac{1}{2} \\ x = 5\frac{1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} -11 + 3y = -3\frac{1}{2} \\ 3y = 7\frac{1}{2} \\ y = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $N(5\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.

$$r_d = d(M, N) = \sqrt{(5\frac{1}{2} - 3)^2 + (2\frac{1}{2} - 3)^2} = \sqrt{6\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{6\frac{1}{2}}, \text{ dus } d: (x - 5\frac{1}{2})^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{2}$$

$$x^2 - 11x + 30\frac{1}{4} + y^2 - 5y + 6\frac{1}{4} = 6\frac{1}{2}$$

$$x^2 + y^2 - 11x - 5y + 30 = 0$$

$$c: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 13$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 13$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 5 = 0$$

$$c \text{ snijden met } d \text{ geeft } \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 11x - 5y + 30 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \hline 5x - y - 25 = 0 \\ y = 5x - 25 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y + 5 = 0 \end{array} \quad \begin{cases} x^2 + (5x-25)^2 - 6x - 6(5x-25) + 5 = 0 \\ x^2 + 25x^2 - 250x + 625 - 6x - 30x + 150 + 5 = 0 \\ 26x^2 - 286x + 780 = 0 \\ x^2 - 11x + 30 = 0 \\ (x-5)(x-6) = 0 \\ x = 5 \vee x = 6 \end{cases}$$

$x = 6$ geeft $y = 5 \cdot 6 - 25 = 5$, dus $E(6, 5)$.

De totale massa is $3 + 4 + 5 + 8 = 20$.

$$\begin{aligned} \vec{z} &= \frac{1}{20} (3 \cdot \vec{c} + 4 \cdot \vec{d} + 5 \cdot \vec{e} + 8 \cdot \vec{m}) \\ &= \frac{1}{20} \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{20} \left(\begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 93 \\ 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\frac{13}{20} \\ 2\frac{9}{20} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dus $Z(4\frac{13}{20}, 2\frac{9}{20})$.

14.4 Werken met parametervoorstellingen en bewegingsvergelijkingen

Bladzijde 75

- 51 a** $x = 3 \cos(t) \wedge y = 3 \sin(t)$
b $x = 3 \cos(t) \xrightarrow{\text{translatie } (2, 0)} x - 2 = 3 \cos(t)$ oftewel $x = 2 + 3 \cos(t)$
 $y = 3 \sin(t) \xrightarrow{\text{translatie } (0, 4)} y - 4 = 3 \sin(t)$ oftewel $y = 4 + 3 \sin(t)$
 Straal 3 en middelpunt $(2, 4)$.

Bladzijde 76

- 52 a** $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 4$
 $x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 4$
 $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$
b $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$
 $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 1$
 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$
c $(x-2\frac{1}{2})^2 + (y-3\frac{1}{2})^2 = 16$
 $x^2 - 5x + 6\frac{1}{4} + y^2 - 7y + 12\frac{1}{4} = 16$
 $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 2\frac{1}{2} = 0$
d $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$
 $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9$
 $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$
- 53 a** $x = -3 + \sqrt{10} \cos(t) \wedge y = -4 + \sqrt{10} \sin(t)$
b $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 - 10y + 13 = 0$
 $(x-2)^2 - 4 + (y-5)^2 - 25 + 13 = 0$
 $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 16$
 Dus $x = 2 + 4 \cos(t) \wedge y = 5 + 4 \sin(t)$.
c $x^2 + y^2 + 2y = 0$
 $x^2 + (y+1)^2 - 1 = 0$
 $x^2 + (y+1)^2 = 1$
 Dus $x = \cos(t) \wedge y = -1 + \sin(t)$.

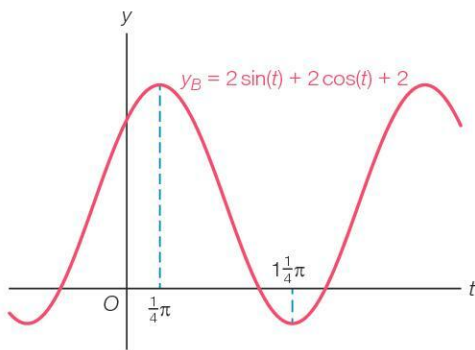
- 54** Een parametervoorstelling van c is $x = 3 + 5 \cos(t) \wedge y = 4 + 5 \sin(t)$.
 Het midden Q van $P(3 + 5 \cos(t), 4 + 5 \sin(t))$ en $A(-5, 2)$ is
 $Q(\frac{1}{2}(3 + 5 \cos(t) - 5), \frac{1}{2}(4 + 5 \sin(t) + 2)) = Q(-1 + 2\frac{1}{2} \cos(t), 3 + 2\frac{1}{2} \sin(t))$.
 Dus Q ligt op de cirkel $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 6\frac{1}{4}$.

Bladzijde 77

- 55** $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 32 = 0$
 $x^2 - 12x + y^2 - 4y + 32 = 0$
 $(x - 6)^2 - 36 + (y - 2)^2 - 4 + 32 = 0$
 $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 8$
 Een parametervoorstelling van c_1 is $x = 6 + 2\sqrt{2} \cos(t) \wedge y = 2 + 2\sqrt{2} \sin(t)$.
 Het midden van $P(6 + 2\sqrt{2} \cos(t), 2 + 2\sqrt{2} \sin(t))$ en $A(2, 0)$ is
 $Q(\frac{1}{2}(6 + 2\sqrt{2} \cos(t) + 2), \frac{1}{2}(2 + 2\sqrt{2} \sin(t) + 0)) = Q(4 + \sqrt{2} \cos(t), 1 + \sqrt{2} \sin(t))$.
 Het midden van $P(6 + 2\sqrt{2} \cos(t), 2 + 2\sqrt{2} \sin(t))$ en $B(-2, 4)$ is
 $R(\frac{1}{2}(6 + 2\sqrt{2} \cos(t) - 2), \frac{1}{2}(2 + 2\sqrt{2} \sin(t) + 4)) = R(2 + \sqrt{2} \cos(t), 3 + \sqrt{2} \sin(t))$.
 Het midden van Q en R is
 $S(\frac{1}{2}(4 + \sqrt{2} \cos(t) + 2 + \sqrt{2} \cos(t)), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} \sin(t) + 3 + \sqrt{2} \sin(t))) = (3 + \sqrt{2} \cos(t), 2 + \sqrt{2} \sin(t))$.
 Dus S doorloopt de cirkel $c_2: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$ oftewel $c_2: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$.

- 56 a** $\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} -2 \cos(t) \\ -2 - 2 \sin(t) \end{pmatrix}$ geeft $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO}_R = \begin{pmatrix} -2 - 2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ 2 + 2 \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 - 2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \sin(t) + 2 \cos(t) - 2 \\ 2 \sin(t) + 2 \cos(t) + 2 \end{pmatrix}$
 Dus $x_B = -2 \sin(t) + 2 \cos(t) - 2 \wedge y_B = 2 \sin(t) + 2 \cos(t) + 2$.

- b** $\frac{dy_B}{dt} = 2 \cos(t) - 2 \sin(t)$
 $\frac{dy_B}{dt} = 0$ geeft $2 \cos(t) - 2 \sin(t) = 0$
 $\sin(t) = \cos(t)$
 $\tan(t) = 1$
 $t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$



- y_B is minimaal voor $t = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.
 $t = 1\frac{1}{4}\pi$ geeft $A(2 \cos(1\frac{1}{4}\pi), 2 + 2 \sin(1\frac{1}{4}\pi)) = A(-\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$
 $A(-\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$ op $y = ax$ geeft $-a\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$, dus $a = 1 - \sqrt{2}$.
c $x_B = -2 \sin(t) + 2 \cos(t) - 2 \wedge y_B = 2 \sin(t) + 2 \cos(t) + 2$ oftewel
 $x_B + 2 = -2 \sin(t) + 2 \cos(t) \wedge y_B - 2 = 2 \sin(t) + 2 \cos(t)$
 $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = (-2 \sin(t) + 2 \cos(t))^2 + (2 \sin(t) + 2 \cos(t))^2$
 $= 4 \sin^2(t) - 8 \sin(t) \cos(t) + 4 \cos^2(t) + 4 \sin^2(t) + 8 \sin(t) \cos(t) + 4 \cos^2(t)$
 $= 8 \sin^2(t) + 8 \cos^2(t)$
 $= 8(\sin^2(t) + \cos^2(t))$
 $= 8$

Dus B doorloopt de cirkel met vergelijking $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

- 57 a** $x(3) = 3$ en $y(3) = -4$, dus $P(3, -4)$.
b $y = -1$ geeft $t^2 - 4t - 1 = -1$
 $t^2 - 4t = 0$
 $t(t - 4) = 0$
 $t = 0 \vee t = 4$
 $t = 0$ geeft het punt $(6, -1)$ en $t = 4$ geeft het punt $(-\frac{2}{3}, -1)$.
 De lengte van het lijnstuk is $6 - (-\frac{2}{3}) = 6\frac{2}{3}$.
c $x = 6$ geeft $\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 6 = 6$
 $\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t = 0$
 $\frac{1}{3}t(t^2 - 9t + 15) = 0$
 $\frac{1}{3}t = 0 \vee t^2 - 9t + 15 = 0$
 $t = 0 \quad D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 21$
 $t = 0 \vee t = \frac{9 + \sqrt{21}}{2} \vee t = \frac{9 - \sqrt{21}}{2}$

Bladzijde 79

- 58 a** $(t^2 - 6t + 5)^2 = (t^2 - 6t + 5)(t^2 - 6t + 5) = t^4 - 6t^3 + 5t^2 - 6t^3 + 36t^2 - 30t + 5t^2 - 30t + 25 =$
 $t^4 - 12t^3 + 46t^2 - 60t + 25$
 $(2t - 4)^2 = 4t^2 - 16t + 16$
 Dus $v(t) = \sqrt{(t^2 - 6t + 5)^2 + (2t - 4)^2} = \sqrt{t^4 - 12t^3 + 46t^2 - 60t + 25 + 4t^2 - 16t + 16} = \sqrt{t^4 - 12t^3 + 50t^2 - 76t + 41}$.
 $a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^4 - 12t^3 + 50t^2 - 76t + 41}} \cdot (4t^3 - 36t^2 + 100t - 76) = \frac{2t^3 - 18t^2 + 50t - 38}{\sqrt{t^4 - 12t^3 + 50t^2 - 76t + 41}}$
b $x(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 6 = -2\frac{1}{3}$ en $y(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 1 = 4$
 $x(5) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + 6 = -2\frac{1}{3}$ en $y(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 - 1 = 4$
 Dus de baan van P snijdt zichzelf in het punt $(-2\frac{1}{3}, 4)$.

Bladzijde 80

- 59 a** De verdubbelingsformule $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$.
b $\cos(2t) + \sin(t) = 0$
 $\cos(2t) = -\sin(t)$
 $\cos(2t) = \sin(t + \pi)$
 $\cos(2t) = \cos(t + \pi - \frac{1}{2}\pi)$
 $\cos(2t) = \cos(t + \frac{1}{2}\pi)$
 $2t = t + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = -(t + \frac{1}{2}\pi) + k \cdot 2\pi$
 $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
 t in $[0, 2\pi]$ geeft $t = \frac{1}{2}\pi \vee t = 1\frac{1}{6}\pi \vee t = 1\frac{5}{6}\pi$
c $y(\frac{1}{2}\pi) = \sin(2 \cdot \frac{1}{2}\pi) = \sin(\pi) = 0$, dus het punt dat hierbij hoort ligt niet op de positieve y -as.
 $y(1\frac{5}{6}\pi) = \sin(2 \cdot 1\frac{5}{6}\pi) = \sin(3\frac{2}{3}\pi) = \sin(1\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus het punt dat hierbij hoort ligt niet op de positieve y -as.
d $x'(\frac{1}{4}\pi) = -2\sin(\frac{1}{2}\pi) + \cos(\frac{1}{4}\pi) = -2 \cdot 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = -2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \neq 0$
 $x'(\frac{3}{4}\pi) = -2\sin(1\frac{1}{2}\pi) + \cos(\frac{3}{4}\pi) = -2 \cdot (-1) - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \neq 0$
 $x'(1\frac{1}{4}\pi) = -2\sin(2\frac{1}{2}\pi) + \cos(1\frac{1}{4}\pi) = -2 \cdot 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \neq 0$
 $x'(1\frac{3}{4}\pi) = -2\sin(3\frac{1}{2}\pi) + \cos(1\frac{3}{4}\pi) = -2 \cdot (-1) + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \neq 0$
60 a Raaklijn verticaal, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$.
 $x'(t) = 0$ geeft $-2\sin(2t) + \cos(t) = 0$
 $-4\sin(t)\cos(t) + \cos(t) = 0$
 $\cos(t)(-4\sin(t) + 1) = 0$
 $\cos(t) = 0 \vee 4\sin(t) = 1$
 $\cos(t) = 0 \vee \sin(t) = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \text{b } \left. \begin{aligned} \sin(t) &= \frac{1}{4} \\ \sin^2(t) + \cos^2(t) &= 1 \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2(t) &= 1 \\ \frac{1}{16} + \cos^2(t) &= 1 \\ \cos^2(t) &= \frac{15}{16} \\ \cos(t) &= \frac{1}{4}\sqrt{15} \vee \cos(t) = -\frac{1}{4}\sqrt{15} \end{aligned} \end{aligned}$$

c Met de verdubbelingsformules $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$ en $\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$ krijg je

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) + \sin(t) = 1 - 2\sin^2(t) + \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) \end{cases}$$

d $\cos(t) = 0$ met $0 \leq t \leq 2\pi$ geeft $t = \frac{1}{2}\pi \vee t = 1\frac{1}{2}\pi$.

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, 0)$

$t = 1\frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(-2, 0)$

$\sin(t) = \frac{1}{4}$ en $\cos(t) = \frac{1}{4}\sqrt{15}$ geeft $x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{8}$ en $y = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{15} = \frac{1}{8}\sqrt{15}$.

$\sin(t) = \frac{1}{4}$ en $\cos(t) = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$ geeft $x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{8}$ en $y = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{4}\sqrt{15} = -\frac{1}{8}\sqrt{15}$.

De punten zijn $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(1\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\sqrt{15})$ en $(1\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\sqrt{15})$.

61

a $\begin{cases} x(t) = t^2 - 3t + 2 \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t - 1 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2t - 3 \\ y'(t) = t^2 - 4t + 3 \end{cases}$

Raaklijn horizontaal, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.

$y'(t) = 0$ geeft $t^2 - 4t + 3 = 0$

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$$t = 1 \vee t = 3$$

$t = 1$ geeft het punt $(0, \frac{1}{3})$

$t = 3$ geeft het punt $(2, -1)$

b $x(t) = 0$ geeft $t^2 - 3t + 2 = 0$

$$(t-1)(t-2) = 0$$

$$t = 1 \vee t = 2$$

$y(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = -\frac{1}{3}$, dus raakpunt $(0, -\frac{1}{3})$.

$$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 3 \\ 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$k: x + y = c$ door $(0, -\frac{1}{3})$ geeft $k: x + y = -\frac{1}{3}$ oftewel $k: 3x + 3y = -1$.

c $x(t) = 2$ geeft $t^2 - 3t + 2 = 2$

$$t^2 - 3t = 0$$

$$t(t-3) = 0$$

$$t = 0 \vee t = 3$$

$x(0) = 2$ en $y(0) = -1$

$x(3) = 2$ en $y(3) = -1$ (zie a)

Dus de baan snijdt zichzelf in het punt $(2, -1)$.

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 3 \\ 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ dus in het punt waarvoor } t = 0 \text{ heeft de raaklijn}$$

richtingscoëfficiënt -1 .

In het punt waarvoor $t = 3$ is de raaklijn horizontaal (zie a).

Dus de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt, is 45° .

d Voor het snijpunt met de positieve y -as geldt $t = 1$ (zie b).

$$\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \\ 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft } v(1) = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

De gevraagde baansnelheid is 1 cm/s.

$$v(t) = \sqrt{(2t-3)^2 + (t^2-4t+3)^2} \text{ geeft}$$

$$a(t) = \frac{1}{2\sqrt{(2t-3)^2 + (t^2-4t+3)^2}} \cdot (2(2t-3) \cdot 2 + 2(t^2-4t+3) \cdot (2t-4)) = \frac{2(2t-3) + (t^2-4t+3)(2t-4)}{\sqrt{(2t-3)^2 + (t^2-4t+3)^2}}$$

$$a(1) = \frac{2(2-3) + (1-4+3)(2-4)}{\sqrt{(2-3)^2 + (1-4+3)^2}} = \frac{2 \cdot -1 + 0 \cdot -2}{\sqrt{1+0}} = -2$$

De gevraagde baanversnelling is -2 cm/s^2 .

a $x(t) = 0$ geeft $\cos(t) + \sin(2t) = 0$

$$\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t) = 0$$

$$\cos(t)(1 + 2\sin(t)) = 0$$

$$\cos(t) = 0 \vee \sin(t) = -\frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } t = \frac{1}{2}\pi \vee t = \frac{1}{2}\pi \vee t = \frac{1}{6}\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi$$

$$y(\frac{1}{2}\pi) = \sin(\frac{1}{2}\pi) - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2$$

$$y(\frac{1}{2}\pi) = \sin(\frac{1}{2}\pi) - \cos(3\pi) = -1 - (-1) = 0$$

$$y(\frac{1}{6}\pi) = \sin(\frac{1}{6}\pi) - \cos(2\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$y(\frac{5}{6}\pi) = \sin(\frac{5}{6}\pi) - \cos(3\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

Er zit $\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$ seconden tussen deze twee tijdstippen.

b $x(p) = \cos(p) + \sin(2p)$

$$x(\pi - p) = \cos(\pi - p) + \sin(2(\pi - p)) = -\cos(p) + \sin(2\pi - 2p) = -\cos(p) - \sin(2p)$$

$$\text{Dus } x(p) = -x(\pi - p).$$

$$y(p) = \sin(p) - \cos(2p)$$

$$y(\pi - p) = \sin(\pi - p) - \cos(2(\pi - p)) = \sin(p) - \cos(2\pi - 2p) = \sin(p) - \cos(2p)$$

$$\text{Dus } y(p) = y(\pi - p).$$

Dus de baan van P is symmetrisch in de y -as.

c $\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t) - \cos(2t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = -\sin(t) + 2\cos(2t) \\ y'(t) = \cos(t) + 2\sin(2t) \end{cases}$

Raaklijn horizontaal, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.

$$y'(t) = 0 \text{ geeft } \cos(t) + 2\sin(2t)$$

$$\cos(t) + 4\sin(t)\cos(t) = 0$$

$$\cos(t)(1 + 4\sin(t)) = 0$$

$$\cos(t) = 0 \vee \sin(t) = -\frac{1}{4}$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee \sin(t) = -\frac{1}{4}$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ en } t \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } t = \frac{1}{2}\pi \vee t = \frac{3}{2}\pi.$$

$$t = \frac{1}{2}\pi \text{ geeft het punt } (0, 2)$$

$$t = \frac{3}{2}\pi \text{ geeft het punt } (0, 0)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(t) &= -\frac{1}{4} \\ \sin^2(t) + \cos^2(t) &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (-\frac{1}{4})^2 + \cos^2(t) &= 1 \\ \frac{1}{16} + \cos^2(t) &= 1 \end{aligned}$$

$$\cos^2(t) = \frac{15}{16}$$

$$\cos(t) = \frac{1}{4}\sqrt{15} \vee \cos(t) = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sin(2t) = \cos(t) + 2\sin(t)\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) - \cos(2t) = \sin(t) - 2\cos^2(t) + 1 \end{cases}$$

$$\text{Je krijgt } \begin{cases} x = \frac{1}{4}\sqrt{15} + 2 \cdot -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{15} = \frac{1}{8}\sqrt{15} \\ y = -\frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{15}{16} + 1 = -\frac{1}{8} \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x = -\frac{1}{4}\sqrt{15} + 2 \cdot -\frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{4}\sqrt{15} = -\frac{1}{8}\sqrt{15} \\ y = -\frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{15}{16} + 1 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Dus horizontale raaklijn in $(0, 0)$, $(\frac{1}{8}\sqrt{15}, -\frac{1}{8})$ en $(-\frac{1}{8}\sqrt{15}, -\frac{1}{8})$.

d $(x'(t))^2 = (-\sin(t) + 2\cos(2t))^2 = \sin^2(t) - 4\sin(t)\cos(2t) + 4\cos^2(2t)$

$$(y'(t))^2 = (\cos(t) + 2\sin(2t))^2 = \cos^2(t) + 4\cos(t)\sin(2t) + 4\sin^2(2t)$$

$$\begin{aligned} (x'(t))^2 + (y'(t))^2 &= \sin^2(t) - 4\sin(t)\cos(2t) + 4\cos^2(2t) + \cos^2(t) + 4\cos(t)\sin(2t) + 4\sin^2(2t) \\ &= \sin^2(t) + \cos^2(t) + 4\sin^2(2t) + 4\cos^2(2t) + 4\sin(2t)\cos(t) - 4\cos(2t)\sin(t) \\ &= \sin^2(t) + \cos^2(t) + 4(\sin^2(2t) + \cos^2(2t)) + 4(\sin(2t)\cos(t) - \cos(2t)\sin(t)) \\ &= 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot \sin(t) \\ &= 5 + 4\sin(t) \end{aligned}$$

$$\text{Dus } v(t) = \sqrt{5 + 4\sin(t)}.$$

e $\sin(t)$ is maximaal 1 en minimaal -1.

$$\text{De maximale baansnelheid is } \sqrt{5 + 4 \cdot 1} = \sqrt{9} = 3 \text{ m/s.}$$

$$\text{De minimale baansnelheid is } \sqrt{5 + 4 \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1 \text{ m/s.}$$

$$\mathbf{f} \quad v(t) = \sqrt{5 + 4 \sin(t)} \text{ geeft } a(t) = \frac{1}{2\sqrt{5 + 4 \sin(t)}} \cdot 4 \cos(t) = \frac{2 \cos(t)}{\sqrt{5 + 4 \sin(t)}}$$

$$a(\pi) = \frac{2 \cos(\pi)}{\sqrt{5 + 4 \sin(\pi)}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}\sqrt{5} \text{ m/s}^2$$

63 a $t = 1$ geeft $P(-4, -4)$ en $Q(2, 5)$.

$$PQ = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (5 - (-4))^2} = \sqrt{117} \text{ cm}$$

b $x = -t + 3$ oftewel $t = -x + 3$

$$\text{Dit geeft } y = 3(-x + 3) + 2 = -3x + 9 + 2 = -3x + 11.$$

Een vergelijking van de baan van Q is $y = -3x + 11$.

c $x_P(t) = x_Q(t) \wedge y_P(t) = y_Q(t)$

$$t^2 - 2t - 3 = -t + 3 \wedge t^2 + t - 6 = 3t + 2$$

$$t^2 - t - 6 = 0 \wedge t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$(t + 2)(t - 3) = 0 \wedge (t + 2)(t - 4) = 0$$

$$(t = -2 \vee t = 3) \wedge (t = -2 \vee t = 4)$$

$$t = -2$$

$$\begin{cases} x'_P(t) = 2t - 2 \\ y'_P(t) = 2t + 1 \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x'_Q(t) = -1 \\ y'_Q(t) = 3 \end{cases}$$

$$\text{Voor de baan van } P \text{ geldt } \left[\frac{dy}{dx} \right]_{t=-2} = \frac{2 \cdot -2 + 1}{2 \cdot -2 - 2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Voor de baan van } Q \text{ geldt } \left[\frac{dy}{dx} \right]_{t=-2} = \frac{3}{-1} = -3.$$

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = 26,56...^\circ$$

$$\tan(\beta) = -3 \text{ geeft } \beta = -71,56...^\circ$$

$$\alpha - \beta = 98,13...^\circ$$

Dus de hoek tussen de banen is ongeveer $180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$.

d $\left[\frac{dy}{dx} \right]_P = \left[\frac{dy}{dx} \right]_Q$ geeft $\frac{2t+1}{2t-2} = \frac{3}{-1}$

$$6t - 6 = -2t - 1$$

$$8t = 5$$

$$t = \frac{5}{8}$$

$$t = \frac{5}{8} \text{ geeft het punt } (-3\frac{55}{64}, -4\frac{63}{64}).$$

e $\vec{v}_P(t) = \begin{pmatrix} 2t-2 \\ 2t+1 \end{pmatrix}$ geeft $\vec{a}_P(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{v}_P(t) \perp \vec{a}_P(t) \text{ geeft } \begin{pmatrix} 2t-2 \\ 2t+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$4t - 4 + 4t + 2 = 0$$

$$8t = 2$$

$$t = \frac{1}{4}$$

$$t = \frac{1}{4} \text{ geeft het punt } (-3\frac{7}{16}, -5\frac{11}{16}).$$

f $y_P(t) = 0$ geeft $t^2 + t - 6 = 0$

$$(t - 2)(t + 3) = 0$$

$$t = 2 \vee t = -3$$

$t = 2$ geeft het punt $(-3, 0)$.

$$\vec{v}_P(2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 2 \\ 2 \cdot 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ en } v_P(2) = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \text{ cm/s}$$

$$v_P(t) = \sqrt{(2t-2)^2 + (2t+1)^2} = \sqrt{4t^2 - 8t + 4 + 4t^2 + 4t + 1} = \sqrt{8t^2 - 4t + 5} \text{ geeft}$$

$$a_P(t) = \frac{1}{2\sqrt{8t^2 - 4t + 5}} \cdot (16t - 4) = \frac{8t - 2}{\sqrt{8t^2 - 4t + 5}}$$

$$a_P(2) = \frac{16 - 2}{\sqrt{32 - 8 + 5}} = \frac{14}{\sqrt{29}} = \frac{14}{29}\sqrt{29} \text{ cm/s}^2$$

64

a $y(t) = 0$ geeft $\cos(2t) - \sin(t) = 0$
 $1 - 2\sin^2(t) - \sin(t) = 0$
 $\sin^2(t) + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2} = 0$
 $(\sin(t) + 1)(\sin(t) - \frac{1}{2}) = 0$
 $\sin(t) = -1 \vee \sin(t) = \frac{1}{2}$
 $t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $0 \leq t \leq 2\pi$ geeft $t = \frac{1}{2}\pi \vee t = \frac{1}{6}\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi$

$$t = \frac{1}{2}\pi \text{ geeft } x = -1$$

$$t = \frac{1}{6}\pi \text{ geeft } x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$t = \frac{5}{6}\pi \text{ geeft } x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Dus op dit tijdstip is } x_P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

b $x(t) = y(t)$ geeft $\sin(2t) + \cos(2t) = \cos(2t) - \sin(t)$
 $\sin(2t) = -\sin(t)$
 $2\sin(t)\cos(t) = -\sin(t)$
 $\sin(t) = 0 \vee 2\cos(t) = -1$
 $t = k \cdot \pi \vee \cos(t) = -\frac{1}{2}$
 $t = k \cdot \pi \vee t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $0 < t < 2\pi$ geeft $t = \pi \vee t = \frac{2}{3}\pi \vee t = \frac{4}{3}\pi$

$$t = \frac{2}{3}\pi \text{ geeft het punt } (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3})$$

$$t = \pi \text{ geeft het punt } (1, 1)$$

$$t = \frac{4}{3}\pi \text{ geeft het punt } (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3})$$

c $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) + \cos(2t) \\ y(t) = \cos(2t) - \sin(t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2\cos(2t) - 2\sin(2t) \\ y'(t) = -2\sin(2t) - \cos(t) \end{cases}$

$$v(t) = \sqrt{(2\cos(2t) - 2\sin(2t))^2 + (-2\sin(2t) - \cos(t))^2}$$

$$\text{Voer in } y_1 = \sqrt{(2\cos(2x) - 2\sin(2x))^2 + (-2\sin(2x) - \cos(x))^2}.$$

De optie maximum geeft $x \approx 2,62$ en $y \approx 3,77$.

De maximale snelheid van P is ongeveer 3,77.

d $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 2\cos(0) - 2\sin(0) \\ -2\sin(0) - \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{v}(\pi) = \begin{pmatrix} 2\cos(2\pi) - 2\sin(2\pi) \\ -2\sin(2\pi) - \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

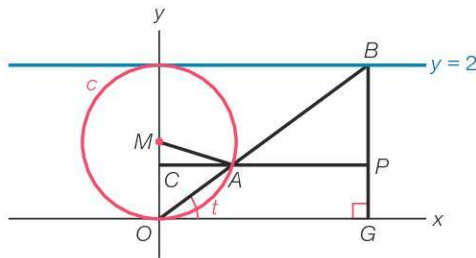
$$\cos(\angle(\vec{v}(0), \vec{v}(\pi))) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Dus } \angle(\vec{v}(0), \vec{v}(\pi)) \approx 53,1^\circ.$$

65

a $\left. \begin{aligned} \sin(t) = \frac{2}{OB} \text{ geeft } OB &= \frac{2}{\sin(t)} \\ \cos(t) = \frac{x_P}{OB} \text{ geeft } x_P &= OB \cos(t) \end{aligned} \right\} x_P = \frac{2}{\sin(t)} \cdot \cos(t) = \frac{2\cos(t)}{\sin(t)}$

b



$\angle GOB = t$ geeft $\angle MOA = \frac{1}{2}\pi - t$

$\triangle OAM$ is gelijkbenig, dus $\angle MAO = \angle MOA = \frac{1}{2}\pi - t$.

Hoekensom driehoek in $\triangle OAM$ geeft $\angle OMA = \pi - (\frac{1}{2}\pi - t) - (\frac{1}{2}\pi - t) = 2t$.

$$\cos(\angle OMA) = \frac{CM}{AM} = \frac{1 - y_P}{1} = 1 - y_P \text{ geeft } y_P = 1 - \cos(\angle OMA)$$

Dus $y_P = 1 - \cos(2t)$.

c $y = \frac{1}{2}$ geeft $1 - \cos(2t) = \frac{1}{2}$

$$\cos(2t) = \frac{1}{2}$$

$$2t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$0 < t < \pi \text{ geeft } t = \frac{1}{6}\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi$$

$$t = \frac{1}{6}\pi \text{ geeft } x = \frac{2 \cos(\frac{1}{6}\pi)}{\sin(\frac{1}{6}\pi)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$t = \frac{5}{6}\pi \text{ geeft } x = \frac{2 \cos(\frac{5}{6}\pi)}{\sin(\frac{5}{6}\pi)} = \frac{2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{3}$$

$$CD = 2\sqrt{3} - (-2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

$$\mathbf{d} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{2 \cos(t)}{\sin(t)} \\ y(t) = 1 - \cos(2t) \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} x'(t) = \frac{\sin(t) \cdot -2 \sin(t) - 2 \cos(t) \cdot \cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{-2}{\sin^2(t)} \\ y'(t) = 2 \sin(2t) \end{cases}$$

$$t = \frac{1}{6}\pi \text{ geeft } v(\frac{1}{6}\pi) = \begin{pmatrix} \frac{-2}{(\frac{1}{2})^2} \\ 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_k = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$x(\frac{1}{6}\pi) = 2\sqrt{3} \text{ (zie c) en } y(\frac{1}{6}\pi) = 1 - \cos(\frac{1}{3}\pi) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} x\sqrt{3} + 8y &= c \\ \text{door } (2\sqrt{3}, \frac{1}{2}) \end{aligned} \right\} c = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 8 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

Dus $k: x\sqrt{3} + 8y = 10$.

$$\mathbf{e} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{2 \cos(t)}{\sin(t)} \\ y(t) = 1 - \cos(2t) \end{cases} \text{ invullen in } y = \frac{8}{x^2 + 4} \text{ geeft } 1 - \cos(2t) = \frac{8}{\left(\frac{2 \cos(t)}{\sin(t)}\right)^2 + 4}$$

$$1 - (1 - 2 \sin^2(t)) = \frac{8}{\frac{4 \cos^2(t)}{\sin^2(t)} + 4}$$

$$2 \sin^2(t) = \frac{2}{\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)} + 1}$$

$$2 \cos^2(t) + 2 \sin^2(t) = 2$$

$$2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 2$$

$$2 \cdot 1 = 2$$

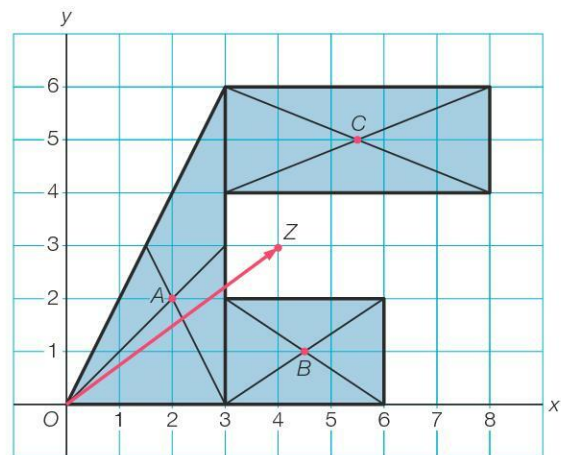
Dit klopt voor elke t , dus voor de baan van P geldt $y(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$.

$$\begin{aligned}
 \text{f } y(x) &= \frac{8}{x^2 + 4} \text{ geeft } y'(x) = \frac{0 - 8 \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 + 4)^2} \text{ en} \\
 y''(x) &= \frac{(x^2 + 4)^2 \cdot (-16) - (-16x) \cdot 2(x^2 + 4) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^4} = \frac{-16(x^2 + 4) + 64x^2}{(x^2 + 4)^3} = \frac{48x^2 - 64}{(x^2 + 4)^3} \\
 y''(x) &= 0 \text{ geeft } 48x^2 - 64 = 0 \\
 48x^2 &= 64 \\
 x^2 &= \frac{4}{3} \\
 x &= \frac{2}{3}\sqrt{3} \vee x = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \\
 x = \frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ geeft } y &= \frac{8}{\frac{4}{3} + 4} = \frac{24}{4 + 12} = \frac{24}{16} = 1\frac{1}{2} \text{ en } x = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ geeft } y = 1\frac{1}{2}. \\
 \text{Dus de buigpunten zijn } &(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 1\frac{1}{2}) \text{ en } (-\frac{2}{3}\sqrt{3}, 1\frac{1}{2}).
 \end{aligned}$$

Diagnostische toets

Bladzijde 86

- 1 Zie de figuur hiernaast.
 A heeft massa 9.
 B heeft massa 6.
 C heeft massa 10.
 De totale massa is $9 + 6 + 10 = 25$.
 $\vec{z} = \frac{1}{25}(9 \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{b} + 10 \cdot \vec{c})$
 $= \frac{1}{25}\left(9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 5\frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix}\right)$
 $= \frac{1}{25}\left(\begin{pmatrix} 18 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 55 \\ 50 \end{pmatrix}\right)$
 $= \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\frac{24}{25} \end{pmatrix}$



- 2 $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, dus $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.
 $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.
 $\vec{r}_b = 5 \cdot \overrightarrow{AB} + 13 \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} + 13 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -39 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 77 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$
 $b: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$
 $\vec{n}_m = \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, dus $m: 12x + 5y = c$
 m door $(\frac{1}{2}(-1 + 11), \frac{1}{2}(-2 + 3)) = (5, \frac{1}{2})$ } $m: 12x + 5y = 62\frac{1}{2}$
 m snijden met b geeft $12(-1 + 3t) + 5(-2 + 11t) = 62\frac{1}{2}$
 $-12 + 36t - 10 + 55t = 62\frac{1}{2}$
 $91t = 84\frac{1}{2}$
 $t = \frac{13}{14}$
 $t = \frac{13}{14}$ geeft $x = -1 + \frac{13}{14} \cdot 3 = 1\frac{11}{14}$ en $y = -2 + \frac{13}{14} \cdot 11 = 8\frac{3}{14}$.
 Dus $S(1\frac{11}{14}, 8\frac{3}{14})$.

Alternatieve uitwerking

$$\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ en } AB: 5x - 12y = 19.$$

$$\vec{r}_{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } AC: 4x + 3y = -10.$$

$P(x, y)$ op b en $d(P, AB) = d(P, AC)$ geeft

$$\frac{|5x - 12y - 19|}{\sqrt{169}} = \frac{|4x + 3y + 10|}{\sqrt{25}}$$

$$\frac{|5x - 12y - 19|}{13} = \frac{|4x + 3y + 10|}{5}$$

$$13 \cdot |4x + 3y + 10| = 5 \cdot |5x - 12y - 19|$$

$$13(4x + 3y + 10) = 5(5x - 12y - 19) \vee 13(4x + 3y + 10) = 5(-5x + 12y + 19)$$

$$52x + 39y + 130 = 25x - 60y - 95 \vee 52x + 39y + 130 = -25x + 60y + 95$$

$$27x + 99y = -225 \vee 77x - 21y = -35$$

$$3x + 11y = -25 \vee 11x - 3y = -5.$$

Uit de figuur die bij de situatie hoort, volgt $b: 11x - 3y = -5$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_m = \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ dus } m: 12x + 5y = c \\ m \text{ door } (\frac{1}{2}(-1 + 11), \frac{1}{2}(-2 + 3)) = (5, \frac{1}{2}) \end{array} \right\} m: 12x + 5y = 62\frac{1}{2}$$

m snijden met b geeft het punt S .

$$\begin{cases} 12x + 5y = 62\frac{1}{2} \\ 11x - 3y = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ oftewel } \begin{cases} 36x + 15y = 187\frac{1}{2} \\ 55x - 15y = -25 \end{cases} +$$

$$91x = 162\frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{11}{14}$$

$$12x + 5y = 62\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 12 \cdot 1\frac{11}{14} + 5y = 62\frac{1}{2} \\ 21\frac{3}{7} + 5y = 62\frac{1}{2} \\ 5y = 41\frac{1}{14} \\ y = 8\frac{3}{14} \end{array} \right.$$

Dus $S(1\frac{11}{14}, 8\frac{3}{14})$.

- 3 Stel $M(3p, p)$ is een punt op m .

$$d(M, k) = d(M, l) \text{ geeft } \frac{|2 \cdot 3p - p|}{\sqrt{5}} = \frac{|3p - 2 \cdot p + 8|}{\sqrt{5}}$$

$$|5p| = |p + 8|$$

$$5p = p + 8 \vee 5p = -p - 8$$

$$4p = 8 \vee 6p = -8$$

$$p = 2 \vee p = -1\frac{1}{3}$$

$$p = 2 \text{ geeft } M_1(6, 2) \text{ en } r_1 = d(M_1, k) = \frac{|5 \cdot 2|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Dus } c_1: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 20.$$

$$p = -1\frac{1}{3} \text{ geeft } M_2(-4, -1\frac{1}{3}) \text{ en } r_2 = d(M_2, k) = \frac{|5 \cdot -1\frac{1}{3}|}{\sqrt{5}} = \frac{6\frac{2}{3}}{\sqrt{5}} = 1\frac{1}{3}\sqrt{5}.$$

$$\text{Dus } c_2: (x + 4)^2 + (y + 1\frac{1}{3})^2 = 8\frac{8}{9}.$$

- 4 a Zie de figuur hiernaast.

Stel de straal van d is gelijk aan r .

Dan is $NP = 5 - r$, $MP = 4 - r$ en $MN = r + 4$.

De stelling van Pythagoras geeft

$$NP^2 + MP^2 = MN^2$$

$$(5 - r)^2 + (4 - r)^2 = (r + 4)^2$$

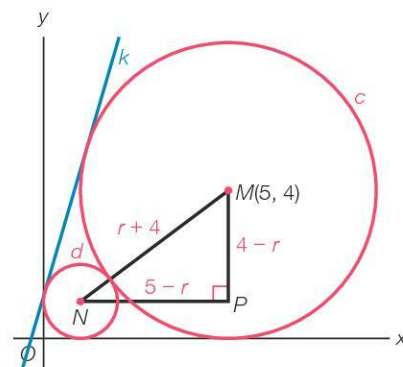
$$25 - 10r + r^2 + 16 - 8r + r^2 = r^2 + 8r + 16$$

$$r^2 - 26r + 25 = 0$$

$$(r - 1)(r - 25) = 0$$

$$r = 1 \vee r = 25 \text{ (vold. niet)}$$

$$\text{Dus } N(1, 1) \text{ en } d: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$



- b** Stel het middelpunt van cirkel e is Q .

Stel $l: y = ax + b$ oftewel $l: ax - y + b = 0$.

$$d(Q, l) = 3 \text{ geeft } \frac{|3a - 3 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 3 \text{ oftewel } |3a - 3 + b| = 3\sqrt{a^2 + 1}.$$

$$d(M, l) = 4 \text{ geeft } \frac{|5a - 4 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 4 \text{ oftewel } |5a - 4 + b| = 4\sqrt{a^2 + 1}.$$

Hieruit volgt $3 \cdot |5a - 4 + b| = 4 \cdot |3a - 3 + b|$

$$|15a - 12 + 3b| = |12a - 12 + 4b|$$

$$15a - 12 + 3b = 12a - 12 + 4b \vee 15a - 12 + 3b = -12a + 12 - 4b$$

$$3a - b = 0 \vee 27a - 24 + 7b = 0$$

$$b = 3a \vee 27a - 24 + 7b = 0$$

$$b = 3a \text{ invullen in } |3a - 3 + b| = 3\sqrt{a^2 + 1} \text{ geeft } |3a - 3 + 3a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

$$|6a - 3| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

$$|2a - 1| = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$4a^2 - 4a + 1 = a^2 + 1$$

$$3a^2 - 4a = 0$$

$$a(3a - 4) = 0$$

$$a = 0 \vee a = \frac{4}{3}$$

$a = 0$ geeft de raaklijn $y = 0$.

$a = \frac{4}{3}$ geeft $b = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$ en dit geeft de raaklijn $y = \frac{4}{3}x + 4$.

Dus $l_1: y = 0$ en $l_2: y = \frac{4}{3}x + 4$.

- 5 a** $y = ax + 2$ substitueren in $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ geeft

$$(x - 3)^2 + (ax)^2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 + a^2x^2 = 4$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 5 = 36 - 20a^2 - 20 = -20a^2 + 16$$

$$D > 0 \text{ geeft } -20a^2 + 16 > 0$$

$$-20a^2 > -16$$

$$a^2 < \frac{4}{5}$$

$$-\sqrt{\frac{4}{5}} < a < \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$-\frac{2}{5}\sqrt{5} < a < \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

- b** $l: y = \frac{1}{2}x + b$ oftewel $l: x - 2y + 2b = 0$

Van c is het middelpunt $M(3, 2)$ en de straal $r = 2$.

$$d(M, l) > 2 \text{ geeft } \frac{|3 - 4 + 2b|}{\sqrt{5}} > 2$$

$$|-1 + 2b| > 2\sqrt{5}$$

$$-1 + 2b < -2\sqrt{5} \vee -1 + 2b > 2\sqrt{5}$$

$$2b < 1 - 2\sqrt{5} \vee 2b > 1 + 2\sqrt{5}$$

$$b < \frac{1}{2} - \sqrt{5} \vee b > \frac{1}{2} + \sqrt{5}$$

Bladzijde 87

- 6 a** $c_2: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 25$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 12x - 4y = -15$$

c_1 en c_2 snijden geeft de punten A en B .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 - 12x - 4y = -15 \end{cases}$$

$$\underline{x^2 + y^2 - 12x - 4y = -15}$$

$$12x + 4y = 20$$

$$3x + y = 5$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} y &= -3x + 5 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} x^2 + (-3x + 5)^2 &= 5 \\ x^2 + 9x^2 - 30x + 25 &= 5 \\ 10x^2 - 30x + 20 &= 0 \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ (x-1)(x-2) &= 0 \\ x &= 1 \vee x = 2 \end{aligned} \end{aligned}$$

$x = 2$ en $y = -3x + 5$ geeft het punt $B(2, -1)$.

- b** Zie de figuur hiernaast met Q het midden van lijnstuk AP en NQ loodrecht op k .

De stelling van Pythagoras in driehoek ANQ geeft

$$NQ = \sqrt{5^2 - (2\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{25 - 12\frac{1}{2}} = \sqrt{12\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$\text{Dus } d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$k: y = ax + b$ door $A(1, 2)$ geeft $a + b = 2$ oftewel $b = 2 - a$.

Dus $k: y = ax + 2 - a$ oftewel $k: ax - y + 2 - a$.

$$d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ geeft } \frac{|6a - 2 + 2 - a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$|5a| = 2\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2}$$

$$25a^2 = 6\frac{1}{4}(2a^2 + 2)$$

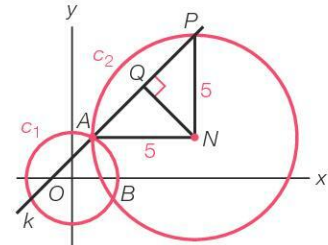
$$25a^2 = 12\frac{1}{2}a^2 + 12\frac{1}{2}$$

$$12\frac{1}{2}a^2 = 12\frac{1}{2}$$

$$a^2 = 1$$

$$a = 1 \vee a = -1$$

$a = 1$ geeft $k_1: y = x + 1$ en $a = -1$ geeft $k_2: y = -x + 3$.



- 7** Een parametervoorstelling van c is $x = 6 + 4 \cos(t) \wedge y = 4 + 4 \sin(t)$.

Het midden Q van $P(6 + 4 \cos(t), 4 + 4 \sin(t))$ en $A(-4, 2)$ is

$$Q(\frac{1}{2}(6 + 4 \cos(t) - 4), \frac{1}{2}(4 + 4 \sin(t) + 2)) = Q(1 + 2 \cos(t), 3 + 2 \sin(t)).$$

Dus Q ligt op de cirkel $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

- 8 a** $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2t \\ y'(t) = -3t^2 + 6t + 9 \end{cases}$

Raaklijn evenwijdig met de x -as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$

$$-3t^2 + 6t + 9 = 0 \wedge 2t \neq 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \wedge t \neq 0$$

$$(t + 1)(t - 3) = 0 \wedge t \neq 0$$

$$(t = -1 \vee t = 3) \wedge t \neq 0$$

$$t = -1 \vee t = 3$$

$t = -1$ geeft het punt $(1, -5)$ en $t = 3$ geeft het punt $(9, 27)$.

Dus de raaklijn is evenwijdig met de x -as in de punten $(1, -5)$ en $(9, 27)$.

Raaklijn evenwijdig met de y -as, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$$t = 0 \wedge t \neq -1 \wedge t \neq 3$$

$$t = 0$$

$t = 0$ geeft het punt $(0, 0)$.

Dus de raaklijn is evenwijdig met de y -as in het punt $(0, 0)$.

- b** $t = 2$ geeft $\begin{pmatrix} x'(2) \\ y'(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ -3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$t = 2$ geeft $A(4, 22)$

$$\begin{cases} 9x - 4y = c \\ A(4, 22) \end{cases} \Rightarrow c = 9 \cdot 4 - 4 \cdot 22 = -52$$

Dus $k: 9x - 4y = -52$.

- c** $x = 9$ geeft $t^2 = 9$

$$t = -3 \vee t = 3$$

Zie vraag a, $t = 3$ geeft een horizontale raaklijn.

$$t = -3 \text{ geeft } r_{\text{raaklijn}} = \frac{y'(-3)}{x'(-3)} = \frac{-36}{-6} = 6$$

$\tan(\varphi) = 6$ geeft $\varphi \approx 80,5^\circ$

Dus de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt, is $\varphi \approx 80,5^\circ$.

d $\vec{v}(-1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot -1 \\ -3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot -1 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ geeft $v(1) = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

De baansnelheid in C is 2 cm/s.

$$v(t) = \sqrt{(2t)^2 + (-3t^2 + 6t + 9)^2} = \sqrt{4t^2 + (-3t^2 + 6t + 9)^2} \text{ en}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{4t^2 + (-3t^2 + 6t + 9)^2}} \cdot (8t + 2 \cdot (-3t^2 + 6t + 9) \cdot (-6t + 6))$$

$$a(-1) = \frac{1}{2\sqrt{4 + (-3 - 6 + 9)^2}} \cdot (-8 + 2 \cdot (-3 - 6 + 9) \cdot (6 + 6)) = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (-8 + 2 \cdot 0 \cdot 12) = \frac{-8}{4} = -2$$

Dus de baanversnelling is -2 cm/s^2 .

9 a $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = t + \cos(t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2 \cos(2t) \\ y'(t) = 1 - \sin(t) \end{cases}$

Raaklijn evenwijdig met de x -as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$

$$1 - \sin(t) = 0 \wedge 2 \cos(2t) \neq 0$$

$$\sin(t) = 1 \wedge 2t \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \wedge t \neq \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$t \text{ in } [-\pi, \pi] \text{ geeft } t = \frac{1}{2}\pi$$

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

Dus de raaklijn is evenwijdig met de x -as in het punt $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

Raaklijn evenwijdig met de y -as, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \wedge t \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t \text{ in } [-\pi, \pi] \text{ geeft } t = -\frac{3}{4}\pi \vee t = -\frac{1}{4}\pi \vee t = \frac{1}{4}\pi \vee t = \frac{3}{4}\pi$$

$$t = -\frac{3}{4}\pi \text{ geeft } (1, -\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$t = -\frac{1}{4}\pi \text{ geeft } (-1, -\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$t = \frac{1}{4}\pi \text{ geeft } (1, \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$t = \frac{3}{4}\pi \text{ geeft } (-1, \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

Dus de raaklijn is evenwijdig met de y -as in de punten $(1, -\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(-1, -\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(1, \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(-1, \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

b $v(t) = \sqrt{(2 \cos(2t))^2 + (1 - \sin(t))^2}$

$$\text{Voer in } y_1 = \sqrt{(2 \cos(2x))^2 + (1 - \sin(x))^2}.$$

De optie maximum geeft $x = -1,57079...$ en $y = 2,828...$

$$x(-1,57079...) = 0 \text{ en } y(-1,57079...) = -1,57079... = -\frac{1}{2}\pi$$

Dus de baansnelheid is maximaal in A .

Marijke heeft dus gelijk.

15 Afgeleiden en primitieven

Voorkennis Lengten van lijnstukken

Bladzijde 91

$$\begin{aligned}
 \text{1 } f(x) = 7\frac{1}{2} \text{ geeft } 8\sqrt{x} - 2x &= 7\frac{1}{2} \\
 8\sqrt{x} &= 2x + 7\frac{1}{2} \\
 16\sqrt{x} &= 4x + 15 \\
 256x &= 16x^2 + 120x + 225 \\
 16x^2 - 136x + 225 &= 0 \\
 D &= (-136)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 225 = 4096 \\
 x &= \frac{136 \pm 64}{32} = 6\frac{1}{4} \vee x = \frac{136 - 64}{32} = 2\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } EF = 6\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} = 4.$$

Bladzijde 92

- 2 Rechts van het snijpunt van de grafieken ligt de grafiek van g boven de grafiek van f , dus geldt dan $CD = g(p) - f(p)$.

$$\begin{aligned}
 CD = 8 \text{ geeft } p - 3 - (8\sqrt{p} - 2p) &= 8 \\
 p - 3 - 8\sqrt{p} + 2p &= 8 \\
 3p - 11 &= 8\sqrt{p} \\
 9p^2 - 66p + 121 &= 64p \\
 9p^2 - 130p + 121 &= 0 \\
 D &= (-130)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 121 = 12544 \\
 p &= \frac{130 \pm 112}{18} = 13\frac{4}{9} \vee p = \frac{130 - 112}{18} = 1
 \end{aligned}$$

$$p = 1 \text{ voldoet niet, dus } p = 13\frac{4}{9}.$$

- 3 a $A(0, -4)$ en $k: y = -4$
 $f(x) = -4$ geeft $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 4 = -4$
 $\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$
 $\frac{1}{2}x(x - 4) = 0$
 $x = 0 \vee x = 4$

Dus $B(4, -4)$.

$$\begin{aligned}
 g(x) = -4 \text{ geeft } -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 4 &= -4 \\
 -\frac{1}{4}x^2 + 3x &= 0 \\
 \frac{1}{4}x(-x + 12) &= 0 \\
 x = 0 \vee x &= 12
 \end{aligned}$$

Dus $C(12, -4)$.

$$A(0, -4) \text{ en } B(4, -4) \text{ geeft } AB = 4 - 0 = 4$$

$$B(4, -4) \text{ en } C(12, -4) \text{ geeft } BC = 12 - 4 = 8$$

$$\text{Dus } AB : BC = 4 : 8 = 1 : 2.$$

- b $DE = 8$, dus $|f(p) - g(p)| = 8$
 $|\frac{1}{2}p^2 - 2p - 4 - (-\frac{1}{4}p^2 + 3p - 4)| = 8$
 $|\frac{1}{2}p^2 - 2p - 4 + \frac{1}{4}p^2 - 3p + 4| = 8$
 $|\frac{3}{4}p^2 - 5p| = 8$
 $\frac{3}{4}p^2 - 5p = 8 \vee \frac{3}{4}p^2 - 5p = -8$
 $\frac{3}{4}p^2 - 5p - 8 = 0 \quad \vee \quad \frac{3}{4}p^2 - 5p + 8 = 0$
 $D = (-5)^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot -8 = 49 \quad D = (-5)^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 8 = 1$
 $p = \frac{5 \pm 7}{1\frac{1}{2}} = 8 \vee p = \frac{5 - 7}{1\frac{1}{2}} = -1\frac{1}{3} \vee p = \frac{5 \pm 1}{1\frac{1}{2}} = 4 \vee p = \frac{5 - 1}{1\frac{1}{2}} = 2\frac{2}{3}$

$$\text{Dus } DE = 8 \text{ voor } p = -1\frac{1}{3} \vee p = 2\frac{2}{3} \vee p = 4 \vee p = 8.$$

- 4 a** $f(x) = x e^x$ geeft $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x + x e^x$
b $f'(x) = 0$ geeft $e^x + x e^x = 0$

$$e^x(1 + x) = 0$$

$$x = -1$$

 $f(-1) = -\frac{1}{e}$, dus $A\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ en $k: y = -\frac{1}{e}$.
 $g(x) = -\frac{1}{e}$ geeft $2x - 1 = -\frac{1}{e}$

$$2x = 1 - \frac{1}{e}$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

Dus $B\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e}, -\frac{1}{e}\right)$.
 $A\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ en $B\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e}, -\frac{1}{e}\right)$ geeft $AB = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} - (-1) = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$.
c $f(p) - g(p) = 1$ geeft $p e^p - (2p - 1) = 1$

$$p e^p - 2p + 1 = 1$$

$$p e^p - 2p = 0$$

$$p(e^p - 2) = 0$$

$$p = 0 \vee e^p = 2$$

$$p = 0 \vee p = \ln(2)$$

15.1 Lijnstukproblemen

Bladzijde 93

- 1 a** $AB : BC = 1 : 2$, dus $BC = 2AB$.
 $AB = x_B = p$
 $x_C = AC = AB + BC = AB + 2AB = 3AB = 3p$
b $y_B = f(p) = e^p$
 $y_C = g(p) = e^{3p-3}$
 $y_B = y_C$, dus $e^p = e^{3p-3}$.
Dit geeft $p = 3p - 3$

$$-2p = -3$$

$$p = 1\frac{1}{2}$$

c $q = f(p) = f(1\frac{1}{2}) = e^{1\frac{1}{2}} = e\sqrt{e}$
- 2 a** Vermenigvuldigen van beide leden van $e^{-p} = 3 e^{-3p}$ met e^{3p} geeft $e^{2p} = 3$.
b $e^{-\frac{1}{2} \cdot \ln(3)} = (e^{\ln(3)})^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

Bladzijde 94

- 3** Stel $x_B = p$, dan is $x_C = 2p$.
 $f(p) = f(2p)$ geeft $6p e^{-p} = 12p e^{-2p}$

$$6p = 0 \vee e^{-p} = 2 e^{-2p}$$

$$p = 0 \vee e^p = 2$$

vold. niet $p = \ln(2)$
 $q = f(p) = f(\ln(2)) = 6 \ln(2) \cdot e^{-\ln(2)} = 6 \ln(2) \cdot 2^{-1} = 3 \ln(2)$
- 4 a** Stel $x_B = p$, dan is $x_C = 3p$.
 $f(p) = g(3p)$ geeft $\ln(p) = \ln(3p - 3)$

$$p = 3p - 3$$

$$-2p = -3$$

$$p = 1\frac{1}{2}$$

 $q = f(p) = f(1\frac{1}{2}) = \ln(1\frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} \text{b } & \left. \begin{aligned} y_F &= f(r) \\ y_E &= g(r) \\ y_F &= 2 \cdot y_E \end{aligned} \right\} f(r) = 2 \cdot g(r) \\ f(r) &= 2 \cdot g(r) \text{ geeft } \ln(r) = 2 \cdot \ln(r-3) \\ \ln(r) &= \ln((r-3)^2) \\ r &= (r-3)^2 \\ r &= r^2 - 6r + 9 \\ r^2 - 7r + 9 &= 0 \\ D &= (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 13 \\ r &= \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \vee r = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \\ & \text{vold. niet} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } r = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

- 5 a** $q = f(p) = g(p+3)$ geeft $\ln(p) = 2 \ln(p+3) - 3$
 Voer in $y_1 = \ln(x)$ en $y_2 = 2 \ln(x+3) - 3$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 0,67$ en $y \approx -0,40$ en ook $x \approx 13,41$ en $y \approx 2,60$.
 Dus $q \approx -0,40 \vee q \approx 2,60$.

$$\begin{aligned} \text{b } f(x) &= g(x) \text{ geeft } \ln(x) = 2 \ln(x) - 3 \\ \ln(x) &= 3 \\ x &= e^3 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } S(e^3, 3).$$

$$\begin{aligned} \text{c } CD &= g(r) - f(r) = 2 \ln(r) - 3 - \ln(r) = \ln(r) - 3 \\ CE &= f(r) = \ln(r) \\ \frac{CD}{CE} &= \frac{\ln(r) - 3}{\ln(r)} \end{aligned}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(r) - 3}{\ln(r)} = \lim_{\ln(r) \rightarrow \infty} \frac{\ln(r) - 3}{\ln(r)} = \lim_{\ln(r) \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{\ln(r)}}{1} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

Dus deze grenswaarde is 1.

Bladzijde 95

$$\begin{aligned} \text{6 a } f(x) &= \sin^2(x) - \frac{1}{2} \cos(x) \text{ geeft } f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \\ f'(x) &= 0 \text{ geeft } 2 \sin(x) \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\sin(x)(2 \cos(x) + \frac{1}{2}) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \vee \cos(x) = -\frac{1}{4}$$

$$x = k \cdot \pi \vee \cos(x) = -\frac{1}{4}$$

$$x = k \cdot \pi \text{ met } x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$$

$$f(\pi) = \frac{1}{2}, \text{ dus } T(\pi, \frac{1}{2}) \text{ en } k: x = \pi.$$

Voor symmetrie in k moet gelden $f(\pi - p) = f(\pi + p)$.

$$f(\pi - p) = \sin^2(\pi - p) - \frac{1}{2} \cos(\pi - p) = (\sin(p))^2 + \frac{1}{2} \cos(p) = \sin^2(p) + \frac{1}{2} \cos(p)$$

$$f(\pi + p) = \sin^2(\pi + p) - \frac{1}{2} \cos(\pi + p) = (-\sin(p))^2 + \frac{1}{2} \cos(p) = \sin^2(p) + \frac{1}{2} \cos(p)$$

$f(\pi - p) = f(\pi + p)$, dus de grafiek van f is symmetrisch in k .

$$\text{b } d(T, AB) = f(x_T + \frac{1}{2}) - y_T = f(\pi + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = \sin^2(\pi + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \cos(\pi + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \approx 0,17$$

$$\begin{aligned} \text{7 a } & \text{Stel } x_B = p, \text{ dan is } x_C = p + 2. \\ f(p) &= g(p+2) \text{ geeft } 3^p = 10 - 3^p \\ 2 \cdot 3^p &= 10 \\ 3^p &= 5 \\ q = f(p) &= 3^p = 5 \end{aligned}$$

b Stel $x_B = p$, dan is $x_C = 2p$.

$$\begin{aligned} f(p) = g(2p) \text{ geeft } 3^p &= 10 - 3^{2p-2} \\ 3^{2p-2} + 3^p - 10 &= 0 \\ 3^{-2} \cdot 3^{2p} + 3^p - 10 &= 0 \\ \frac{1}{9} \cdot 3^{2p} + 3^p - 10 &= 0 \\ \frac{1}{9} \cdot (3^p)^2 + 3^p - 10 &= 0 \\ \text{Stel } 3^p &= u. \\ \frac{1}{9}u^2 + u - 10 &= 0 \\ u^2 + 9u - 90 &= 0 \\ (u-6)(u+15) &= 0 \\ u = 6 \vee u = -15 \\ 3^p = 6 \vee 3^p &= -15 \end{aligned}$$

$$q = f(p) = 3^p = 6$$

c $g(r) = 2 \cdot f(r)$ geeft $10 - 3^{r-2} = 2 \cdot 3^r$

$$\begin{aligned} 10 - 3^{-2} \cdot 3^r &= 2 \cdot 3^r \\ 10 - \frac{1}{9} \cdot 3^r &= 2 \cdot 3^r \\ 2\frac{1}{9} \cdot 3^r &= 10 \\ 3^r &= 4\frac{14}{19} \\ r &= {}^3\log(4\frac{14}{19}) \end{aligned}$$

8 $rc_k = \frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B}$

Stel $x_A = p$. Dan is $y_A = p^2 - 5p + 6$.

Uit $OA : AB = 1 : 5$ volgt $x_B = 6x_A$.

Dit geeft $x_B = 6p$ en $y_B = 36p^2 - 30p + 6$.

$$\begin{aligned} \frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B} \text{ geeft } \frac{p^2 - 5p + 6}{p} &= \frac{36p^2 - 30p + 6}{6p} \\ \frac{6p^2 - 30p + 36}{6p} &= \frac{36p^2 - 30p + 6}{6p} \\ 6p^2 - 30p + 36 &= 36p^2 - 30p + 6 \\ 30p^2 &= 30 \\ p^2 &= 1 \\ p &= 1 \vee p = -1 \\ p = 1 \text{ geeft } rc_k &= \frac{y_A}{x_A} = \frac{1^2 - 5 \cdot 1 + 6}{1} = 2 \\ p = -1 \text{ geeft } rc_k &= \frac{y_A}{x_A} = \frac{(-1)^2 - 5 \cdot -1 + 6}{-1} = -12 \end{aligned}$$

Bladzijde 96

9 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ geeft $f'(x) = x^2 - 4x + 3$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \text{ geeft } x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x-1)(x-3) &= 0 \\ x &= 1 \vee x = 3 \end{aligned}$$

$$f(1) = 5\frac{1}{3} \text{ en } f(3) = 4$$

Dus $A(1, 5\frac{1}{3})$ en $B(3, 4)$.

b $OA = \sqrt{1^2 + (5\frac{1}{3})^2} \approx 5,43$

$$OB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

10 $p = 2\frac{1}{3}$ geeft $y_A = 1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} = 3\frac{2}{3}$ en $y_B = 2\frac{1}{3}$

$$A(1, 3\frac{2}{3}) \text{ en } B(3, 2\frac{1}{3}) \text{ geeft } AB = \sqrt{(3-1)^2 + (2\frac{1}{3} - 3\frac{2}{3})^2} \approx 2,40$$

11 $f_p(x) = p + \sin(x)$ geeft $f_p'(x) = \cos(x)$

$f_p'(x) = 0$ geeft $\cos(x) = 0$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

Dus $A(\frac{1}{2}\pi, p+1)$ en $B(\frac{1}{2}\pi, p-1)$.

$OA = OB$ geeft $OA^2 = OB^2$

$$(\frac{1}{2}\pi)^2 + (p+1)^2 = (\frac{1}{2}\pi)^2 + (p-1)^2$$

$$\frac{1}{4}\pi^2 + p^2 + 2p + 1 = \frac{1}{4}\pi^2 + p^2 - 2p + 1$$

$$4p = 2\pi^2$$

$$p = \frac{1}{2}\pi^2$$

Bladzijde 97

12 $g_p(x) = \frac{3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 4} - p$ geeft

$$g_p'(x) = \frac{(x^2 + 4) \cdot (6x + 10) - (3x^2 + 10x - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{6x^3 + 10x^2 + 24x + 40 - 6x^3 - 20x^2 + 6x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-10x^2 + 30x + 40}{(x^2 + 4)^2}$$

$g_p'(x) = 0$ geeft $-10x^2 + 30x + 40 = 0$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 4$$

$g_p(-1) = -2 - p$ en $g_p(4) = 4\frac{1}{4} - p$, dus $C(-1, -2 - p)$ en $D(4, 4\frac{1}{4} - p)$.

$OC = OD$ geeft $OC^2 = OD^2$

$$(-1)^2 + (-2 - p)^2 = 4^2 + (4\frac{1}{4} - p)^2$$

$$1 + 4 + 4p + p^2 = 16 + 18\frac{1}{16} - 8\frac{1}{2}p + p^2$$

$$12\frac{1}{2}p = 29\frac{1}{16}$$

$$p = 2\frac{13}{40}$$

13 $f_p(x) = -0,03x^4 + 0,08x^3 + 0,48x^2 + p$ geeft $f_p'(x) = -0,12x^3 + 0,24x^2 + 0,96x$

$f_p'(x) = 0$ geeft $-0,12x^3 + 0,24x^2 + 0,96x = 0$

$$x^3 - 2x^2 - 8x = 0$$

$$x(x^2 - 2x - 8) = 0$$

$$x(x+2)(x-4) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 4$$

$f_p(-2) = 0,8 + p$ en $f_p(4) = 5,12 + p$, dus $A(-2; 0,8 + p)$ en $B(4; 5,12 + p)$.

$OB = 2OA$ geeft $OB^2 = 4OA^2$

$$4^2 + (5,12 + p)^2 = 4((-2)^2 + (0,8 + p)^2)$$

$$16 + 26,2144 + 10,24p + p^2 = 4(4 + 0,64 + 1,6p + p^2)$$

$$16 + 26,2144 + 10,24p + p^2 = 16 + 2,56 + 6,4p + 4p^2$$

$$-3p^2 + 3,84p + 23,6544 = 0$$

$$p^2 - 1,28p - 7,8848 = 0$$

$$D = (-1,28)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -7,8848 = 33,1776$$

$$p = \frac{1,28 + 5,76}{2} = 3,52 \vee p = \frac{1,28 - 5,76}{2} = -2,24$$

vold. niet

Dus $p = 3,52$.

14 a $f_1(x) = \frac{\sin(x)}{1 - \cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin(x)} = (\sin(x))^{-1}$ geeft $f_1'(x) = -(\sin(x))^{-2} \cdot \cos(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$

$f_1'(x) = 0$ geeft $\cos(x) = 0$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

Dus $x_A = \frac{1}{2}\pi$ en $x_B = \frac{3}{2}\pi$.

$$f_1\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{1}{1} = 1, \text{ dus } A\left(\frac{1}{2}\pi, 1\right).$$

$$f_1\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)} = \frac{1}{-1} = -1, \text{ dus } B\left(\frac{3}{2}\pi, -1\right).$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\right)^2 + (-1 - 1)^2} \approx 3,72$$

b $f_p(x) = \frac{\sin(x)}{p - \cos^2(x)}$ geeft

$$f_p'(x) = \frac{(p - \cos^2(x)) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot -2\cos(x) \cdot -\sin(x)}{(p - \cos^2(x))^2} = \frac{p\cos(x) - \cos^3(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)}{(p - \cos^2(x))^2}$$

$$f_p'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{p\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \cos^3\left(\frac{1}{2}\pi\right) - 2\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{(p - \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\right))^2} = \frac{p \cdot 0 - 0^3 - 2 \cdot 1^2 \cdot 0}{(p - 0^2)^2} = \frac{0}{p^2} = 0$$

Dus de raaklijn van de grafiek van f_p is horizontaal in het punt E .

c $f_p\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{p - 0^2} = \frac{1}{p}$, dus $E\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{p}\right)$.

$OC = \pi$ geeft $OC^2 = \pi^2$

$$OE^2 = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 + \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{p^2}$$

Uit $O(0, 0)$, $C(\pi, 0)$ en $x_E = \frac{1}{2}\pi$ volgt $OE = CE$.

$OC = OE$ geeft $OC^2 = OE^2$

$$\pi^2 = \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{p^2}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{3}{4}\pi^2$$

$$p^2 = \frac{4}{3\pi^2}$$

$$p = \frac{2}{3\pi}\sqrt{3} \vee p = -\frac{2}{3\pi}\sqrt{3}$$

vold. niet

d $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{p} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi \\ -\frac{1}{p} \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \text{ geeft } \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi \\ -\frac{1}{p} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{4}\pi^2 - \frac{1}{p^2} = 0$$

$$\frac{1}{4}\pi^2 = \frac{1}{p^2}$$

$$p^2 = \frac{4}{\pi^2}$$

$$p = \frac{2}{\pi} \vee p = -\frac{2}{\pi}$$

vold. niet

Alternatieve uitwerking

Uit $OE = CE$ (zie c) en $\angle(OE, CE) = 90^\circ$ volgt $\angle COE = \angle OCE = 45^\circ$ (gelijkbenige rechthoekige driehoek), dus $rc_{OE} = 1$. Hieruit volgt $x_E = y_E$

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{p}$$
$$p = \frac{2}{\pi}$$

15.2 Optimaliseringsproblemen

Bladzijde 99

15 a $L = y_A - y_B = f(p) - g(p) = \sqrt{2p} - \frac{1}{2}p$

b Voer in $y_1 = \sqrt{2x} - \frac{1}{2}x$.

De optie maximum geeft $x = 2$.

Voor $p = 2$ is de lengte van lijnstuk AB maximaal.

Bladzijde 100

16 a $L = 2 \cos^2(p) - \sin(2p) + 1 = \cos(2p) + 1 - \sin(2p) + 1 = 2 + \cos(2p) - \sin(2p)$
 $p = \frac{7}{8}\pi$ geeft $L = 2 + \cos(\frac{7}{4}\pi) - \sin(\frac{7}{4}\pi) = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} - -\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$

Het maximum van L is $2 + \sqrt{2}$.

b Manier 1: $\sin(2p) = -\cos(2p)$
 $\sin(2p) = \cos(2p + \pi)$
 $\sin(2p) = \sin(2p + \frac{1}{2}\pi)$
enzovoort

Manier 2: $\sin(2p) = -\cos(2p)$
 $\sin(2p) = \cos(2p + \pi)$
 $\cos(2p - \frac{1}{2}\pi) = \cos(2p + \pi)$
enzovoort

Bladzijde 101

17 a $L = f(p) - g(p) = \sqrt{6p + 12} - (p + 2) = \sqrt{6p + 12} - p - 2$

b $\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{6p+12}} \cdot 6 - 1 = \frac{3}{\sqrt{6p+12}} - 1$

$\frac{dL}{dp} = 0$ geeft $\frac{3}{\sqrt{6p+12}} - 1 = 0$

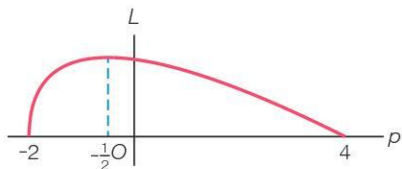
$$\frac{3}{\sqrt{6p+12}} = 1$$

$$\sqrt{6p+12} = 3$$

$$6p+12 = 9$$

$$6p = -3$$

$$p = -\frac{1}{2}$$



De maximale waarde van L is $\sqrt{6 \cdot -\frac{1}{2} + 12} - -\frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}$.

18 $L = AB = f(p) - g(p) = \frac{1}{2} \sin(2p) - (\cos(p) - 1\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \sin(2p) - \cos(p) + 1\frac{1}{2}$

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2} \cdot \cos(2p) \cdot 2 + \sin(p) = \cos(2p) + \sin(p)$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \cos(2p) + \sin(p) = 0$$

$$\cos(2p) = -\sin(p)$$

$$\cos(2p) = \sin(p + \pi)$$

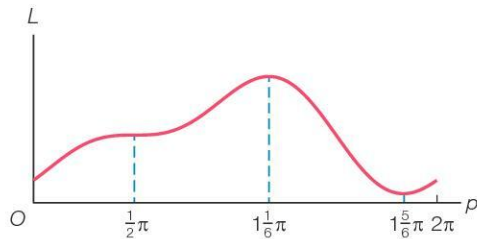
$$\cos(2p) = \cos(p + \frac{1}{2}\pi)$$

$$2p = p + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2p = -p - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$p = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3p = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$p = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee p = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

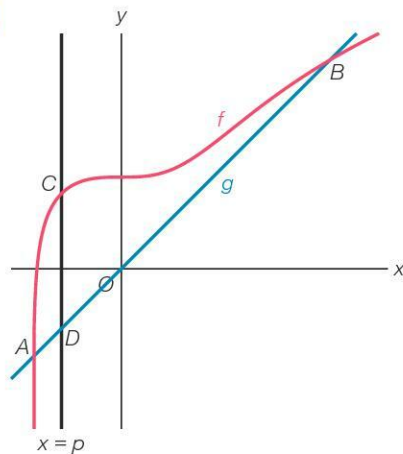
$$p \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } p = \frac{1}{2}\pi \vee p = 1\frac{1}{6}\pi \vee p = 1\frac{5}{6}\pi$$



De maximale lengte van AB is

$$\frac{1}{2} \sin(2 \cdot 1\frac{1}{6}\pi) - \cos(1\frac{1}{6}\pi) + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin(2\frac{1}{3}\pi) - \cos(1\frac{1}{6}\pi) + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{3} + 1\frac{1}{2}.$$

19

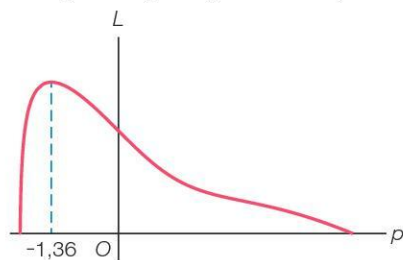


$$L = CD = f(p) - g(p) = \ln(p^3 + 8) - p$$

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{p^3 + 8} \cdot 3p^2 - 1 = \frac{3p^2}{p^3 + 8} - 1$$

Voer in $y_1 = \frac{3x^2}{x^3 + 8} - 1$.

De optie nulpunt geeft $x \approx -1,36$.



Dus de lengte van lijnstuk CD is maximaal voor $p \approx -1,36$.

- 20 a** Voor f geldt $y = e^{\frac{1}{2}x}$, dus voor f^{inv} geldt $x = e^{\frac{1}{2}y}$.

$$x = e^{\frac{1}{2}y} \text{ geeft } e^{\frac{1}{2}y} = x$$

$$\frac{1}{2}y = \ln(x)$$

$$y = 2 \ln(x)$$

- b** $y = 2 \ln(x) \xrightarrow{\text{verm. } y=3} y = 2 \ln(\frac{1}{3}x)$, dus $g(x) = 2 \ln(\frac{1}{3}x)$.

$$L = AB = f(p) - g(p) = e^{\frac{1}{2}p} - 2 \ln(\frac{1}{3}p)$$

$$\text{Voer in } y_1 = e^{\frac{1}{2}x} - 2 \ln(\frac{1}{3}x).$$

De optie minimum geeft $x \approx 1,71$ en $y \approx 3,48$.

Dus de minimale lengte van het lijnstuk AB is ongeveer 3,48.

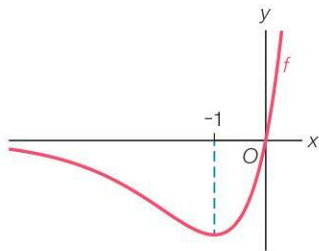
Bladzijde 102

- 21 a** $f(x) = 5xe^x$ geeft $f'(x) = 5 \cdot e^x + 5x \cdot e^x = (5x + 5)e^x$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 5x + 5 = 0$$

$$5x = -5$$

$$x = -1$$



$$\text{min. is } f(-1) = 5 \cdot -1 \cdot e^{-1} = -\frac{5}{e}$$

$$\text{Dus } B_f = \left[-\frac{5}{e}, \rightarrow \right).$$

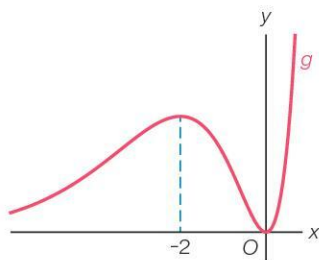
- b** $g(x) = 5x^2e^x$ geeft $g'(x) = 10x \cdot e^x + 5x^2 \cdot e^x = (5x^2 + 10x)e^x$

$$g'(x) = 0 \text{ geeft } (5x^2 + 10x)e^x = 0$$

$$5x^2 + 10x = 0$$

$$5x(x + 2) = 0$$

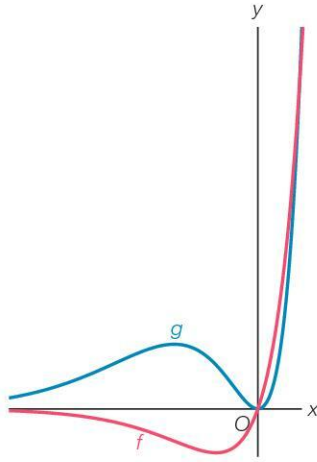
$$x = 0 \vee x = -2$$



$$\text{max. is } g(-2) = 5 \cdot (-2)^2 \cdot e^{-2} = \frac{20}{e^2}$$

$$\text{min. is } g(0) = 5 \cdot 0^2 \cdot e^0 = 0$$

c



$$L = AB = g(p) - f(p) = 5p^2 e^p - 5p e^p = (5p^2 - 5p) e^p$$

$$\frac{dL}{dp} = (10p - 5) \cdot e^p + (5p^2 - 5p) \cdot e^p = (5p^2 + 5p - 5) e^p$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } (5p^2 + 5p - 5) e^p = 0$$

$$5p^2 + 5p - 5 = 0$$

$$p^2 + p - 1 = 0$$

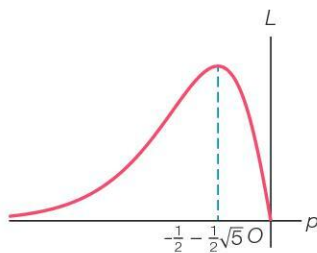
$$(p + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$$

$$(p + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$$

$$p + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee p + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$p = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee p = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

vold. niet



Dus de lengte van het lijnstuk AB is maximaal voor $p = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

d $L = CD = f(q) - g(q) = 5q e^q - 5q^2 e^q$

Voer in $y_1 = 5x e^x - 5x^2 e^x$.

De optie maximum geeft $x \approx 0,618$ en $y \approx 2,190$.

De maximale lengte van het lijnstuk CD is ongeveer 2,190.

22 a De kettingboog door $(0, 10)$ geeft $\frac{1}{2}a(e^0 + e^0) + b = 10$

$$\frac{1}{2}a(1 + 1) + b = 10$$

$$a + b = 10$$

$$b = 10 - a$$

De kettingboog door $(10, 0)$ geeft $\frac{1}{2}a(e^{\frac{10}{a}} + e^{-\frac{10}{a}}) + b = 0$

$$b = -\frac{1}{2}a(e^{\frac{10}{a}} + e^{-\frac{10}{a}})$$

Voer in $y_1 = 10 - x$ en $y_2 = -\frac{1}{2}x(e^{\frac{10}{x}} + e^{-\frac{10}{x}})$.

De optie snijpunt geeft $x = -6,1875...$ en $y = 16,1875...$

Dus $a \approx -6,188$ en $b \approx 16,188$.

$$\begin{aligned} \text{b } y_p &= mx^2 + n \Bigg\} n = 10 \\ \text{door } (0, 10) \\ y_p &= mx^2 + 10 \Bigg\} m \cdot 10^2 + 10 = 0 \\ \text{door } (10, 0) \Bigg\} 100m &= -10 \\ m &= -0,1 \end{aligned}$$

Dus $y_p = -0,1x^2 + 10$.

Het verschil tussen y_k en y_p is

$$|y_k - y_p| = |-3,0937... \cdot (e^{\frac{x}{-6,1875...}} + e^{-\frac{x}{-6,1875...}}) + 16,1875... - (-0,1x^2 + 10)|.$$

$$\text{Voer in } y_1 = |-3,0937... \cdot (e^{\frac{x}{-6,1875...}} + e^{-\frac{x}{-6,1875...}}) + 16,1875... - (-0,1x^2 + 10)|.$$

De optie maximum geeft $x = 7,1448...$ en $y = 0,5005...$

Dus het maximale verschil tussen y_k en y_p is ongeveer 50 cm.

23 a $y_Q = f(2) = \sqrt{5-4} = 1$

$$OQ = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

b $y_Q = f(p) = \sqrt{5-2p}$

$$L = OQ = \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2} = \sqrt{q^2 + (\sqrt{5-2q})^2} = \sqrt{q^2 - 2q + 5}$$

c Voer in $y_1 = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

De optie minimum geeft $x = 1$ en $y = 2$.

De minimale lengte van het lijnstuk OQ is 2.

Bladzijde 103

24 a $A = p\sqrt{5-2p}$ geeft

$$\frac{dA}{dp} = 1 \cdot \sqrt{5-2p} + p \cdot \frac{1}{2\sqrt{5-2p}} \cdot -2 = \sqrt{5-2p} - \frac{p}{\sqrt{5-2p}} = \frac{5-2p}{\sqrt{5-2p}} - \frac{p}{\sqrt{5-2p}} = \frac{5-3p}{\sqrt{5-2p}}$$

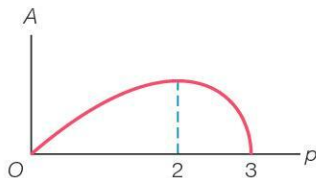
b $\frac{5}{3}\sqrt{5-2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}\sqrt{5-\frac{10}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{5}{9}\sqrt{15}$

25 a $OQ = x_p = p$ en $PQ = y_p = f(p) = \sqrt{3-p}$

$$A = O(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot p \cdot \sqrt{3-p} = \frac{1}{2}p\sqrt{3-p}$$

b $\frac{dA}{dp} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3-p} + \frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{2\sqrt{3-p}} \cdot -1 = \frac{\sqrt{3-p}}{2} - \frac{p}{4\sqrt{3-p}} = \frac{2(3-p)-p}{4\sqrt{3-p}} = \frac{6-3p}{4\sqrt{3-p}}$

c $\frac{dA}{dp} = 0$ geeft $6-3p=0$
 $-3p = -6$
 $p = 2$



De maximale oppervlakte van driehoek OPQ is $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3-2} = 1$.

d $OQ = x_p = p$ en $PQ = y_p = f(p) = \sqrt{3-p}$

In $\triangle OPQ$ is $OP^2 = OQ^2 + PQ^2$

$$OP^2 = p^2 + (\sqrt{3-p})^2$$

$$OP^2 = p^2 + 3 - p$$

$$OP^2 = p^2 - p + 3$$

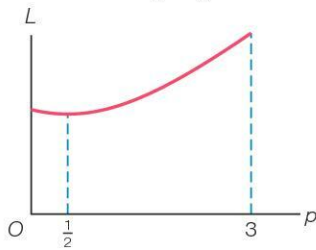
$$L = OP = \sqrt{p^2 - p + 3}$$

$$\text{e } L = \sqrt{p^2 - p + 3} \text{ geeft } \frac{dL}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{p^2 - p + 3}} \cdot (2p - 1) = \frac{2p - 1}{2\sqrt{p^2 - p + 3}}$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } 2p - 1 = 0$$

$$2p = 1$$

$$p = \frac{1}{2}$$



De minimale lengte van OP is $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 3} = \sqrt{2\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{11}$.

Bladzijde 104

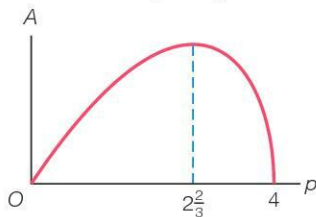
$$26 \text{ a } A = O(\triangle OSP) = \frac{1}{2} \cdot OS \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot p\sqrt{8-2p} = 2p\sqrt{8-2p}$$

$$\frac{dA}{dp} = 2 \cdot \sqrt{8-2p} + 2p \cdot \frac{1}{2\sqrt{8-2p}} \cdot -2 = 2\sqrt{8-2p} - \frac{2p}{\sqrt{8-2p}} = \frac{2(8-2p) - 2p}{\sqrt{8-2p}} = \frac{16-6p}{\sqrt{8-2p}}$$

$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } 16 - 6p = 0$$

$$-6p = -16$$

$$p = 2\frac{2}{3}$$



De maximale oppervlakte van driehoek OSP is

$$2 \cdot 2\frac{2}{3} \sqrt{8 - 2 \cdot 2\frac{2}{3}} = 5\frac{1}{3} \sqrt{2\frac{2}{3}} = 5\frac{1}{3} \sqrt{\frac{8}{3}} = 5\frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 5\frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = 3\frac{5}{9}\sqrt{6}.$$

Opmerking

Je krijgt de maximale oppervlakte als P de top is. Je kunt dus ook eerst y_{top} berekenen.

$$\text{b } QS = x_S - x_Q = 4 - p \text{ en } PQ = y_P = f(p) = p\sqrt{8-2p}$$

$$O = O(\triangle QSP) = \frac{1}{2} \cdot QS \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot (4-p) \cdot p\sqrt{8-2p} = (2p - \frac{1}{2}p^2)\sqrt{8-2p}$$

$$\text{c } \frac{dO}{dp} = (2-p) \cdot \sqrt{8-2p} + (2p - \frac{1}{2}p^2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{8-2p}} \cdot -2 = (2-p)\sqrt{8-2p} - \frac{2p - \frac{1}{2}p^2}{\sqrt{8-2p}}$$

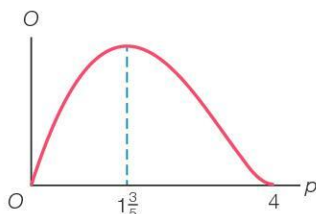
$$= \frac{(2-p)(8-2p)}{\sqrt{8-2p}} - \frac{2p - \frac{1}{2}p^2}{\sqrt{8-2p}} = \frac{16-4p-8p+2p^2-2p+\frac{1}{2}p^2}{\sqrt{8-2p}} = \frac{2\frac{1}{2}p^2-14p+16}{\sqrt{8-2p}}$$

$$= \frac{5p^2-28p+32}{2\sqrt{8-2p}}$$

$$\frac{dO}{dp} = 0 \text{ geeft } 5p^2 - 28p + 32 = 0$$

$$D = (-28)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 32 = 144$$

$$p = \frac{28 \pm 12}{10} = 4 \vee p = \frac{28-12}{10} = 1\frac{3}{5}$$



De maximale oppervlakte van driehoek QSP is $(2 \cdot 1\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot (1\frac{3}{5})^2) \sqrt{8 - 2 \cdot 1\frac{3}{5}} \approx 4,21$.

- 27** Stel $x_P = p$.
 Dan is $y_P = p\sqrt{p}$.

$$A(4, 0) \text{ en } P(p, p\sqrt{p}) \text{ geeft } AP = \sqrt{(p-4)^2 + (p\sqrt{p}-0)^2} = \sqrt{p^2 - 8p + 16 + p^3}$$

$$\text{Voer in } y_1 = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + x^3}.$$

De optie minimum geeft $x \approx 1,33$ en $y \approx 3,08$.

Dus deze minimale lengte is ongeveer 3,08.

- 28 a** Stel $x_P = p$.

$$PQ = x_P - x_Q = p - -p = 2p \text{ en } y_P = 3 - \frac{1}{2}p^2$$

$$A = O(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot (3 - \frac{1}{2}p^2) = 3p - \frac{1}{2}p^3$$

$$\frac{dA}{dp} = 3 - \frac{1}{2}p^2$$

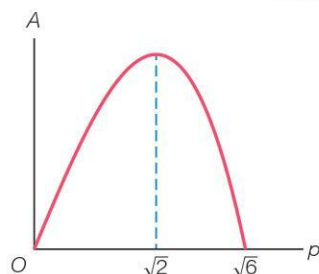
$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } 3 - \frac{1}{2}p^2 = 0$$

$$-\frac{1}{2}p^2 = -3$$

$$p^2 = 2$$

$$p = \sqrt{2} \vee p = -\sqrt{2}$$

vold. niet



Dus de maximale oppervlakte van driehoek OPQ is $3\sqrt{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{2})^3 = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

- b** $OP^2 = x_P^2 + y_P^2 = p^2 + (3 - \frac{1}{2}p^2)^2 = p^2 + 9 - 3p^2 + \frac{1}{4}p^4 = \frac{1}{4}p^4 - 2p^2 + 9$

Stel de lengte van OP is L .

$$L = \sqrt{\frac{1}{4}p^4 - 2p^2 + 9} \text{ geeft } \frac{dL}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}p^4 - 2p^2 + 9}} \cdot (p^3 - 4p) = \frac{p^3 - 4p}{2\sqrt{\frac{1}{4}p^4 - 2p^2 + 9}}$$

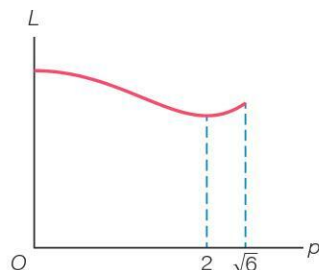
$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } p^3 - 4p = 0$$

$$p(p^2 - 4) = 0$$

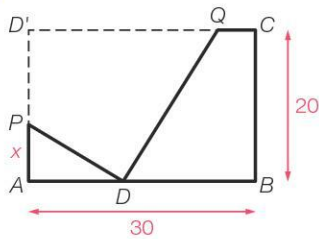
$$p = 0 \vee p^2 = 4$$

$$p = 0 \vee p = 2 \vee p = -2$$

vold. niet



De minimale lengte van het lijnstuk OP is $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 9} = \sqrt{5}$.

29 Stel $AP = x$.

$$\left. \begin{array}{l} AP + PD' = 20 \\ AP = x \\ PD' = PD \end{array} \right\} x + PD = 20, \text{ dus } PD = 20 - x$$

In $\triangle ADP$ is $AP^2 + AD^2 = PD^2$

$$x^2 + AD^2 = (20 - x)^2$$

$$x^2 + AD^2 = 400 - 40x + x^2$$

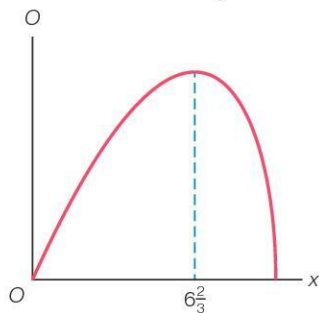
$$AD^2 = 400 - 40x$$

$$AD = \sqrt{400 - 40x}$$

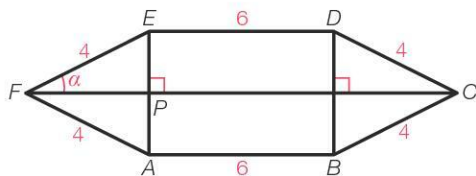
$$O = O(\triangle ADP) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AP = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{400 - 40x} \cdot x = \frac{1}{2} x \sqrt{400 - 40x}$$

$$\frac{dO}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{400 - 40x} + \frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{2\sqrt{400 - 40x}} \cdot -40 = \frac{\frac{1}{2}(400 - 40x)}{\sqrt{400 - 40x}} - \frac{10x}{\sqrt{400 - 40x}} = \frac{200 - 20x - 10x}{\sqrt{400 - 40x}} = \frac{200 - 30x}{\sqrt{400 - 40x}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dO}{dx} = 0 \text{ geeft } 200 - 30x &= 0 \\ -30x &= -200 \\ x &= 6\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dus O is maximaal voor $x = 6\frac{2}{3}$.De maximale oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot 6\frac{2}{3} \cdot \sqrt{400 - 40 \cdot 6\frac{2}{3}} \approx 38,49 \text{ cm}^2$.

30 a

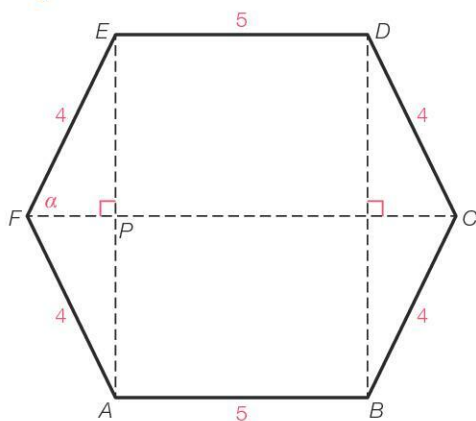
In $\triangle FPE$ is $\sin(\alpha) = \frac{EP}{4}$, dus $EP = 4 \sin(\alpha)$.

$$AE = 2EP = 8 \sin(\alpha)$$

b In $\triangle FPE$ is $\cos(\alpha) = \frac{FP}{4}$, dus $FP = 4 \cos(\alpha)$.

$$O(\triangle AEF) = \frac{1}{2} \cdot FP \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 4 \cos(\alpha) \cdot 8 \sin(\alpha) = 16 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

c $O(ABDE) = AB \cdot AE = 6 \cdot 8 \sin(\alpha) = 48 \sin(\alpha)$ d $O(ABCDEF) = 2 \cdot O(\triangle AEF) + O(ABDE) = 32 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + 48 \sin(\alpha) = 16 \sin(2\alpha) + 48 \sin(\alpha)$



$$\cos(\alpha) = \frac{FP}{4} \text{ geeft } FP = 4 \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{EP}{4} \text{ geeft } EP = 4 \sin(\alpha)$$

$$AE = 2EP = 8 \sin(\alpha)$$

$$A = O(ABCDEF) = 2 \cdot O(\triangle AEF) + O(ABDE) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \sin(\alpha) \cdot 4 \cos(\alpha) + 5 \cdot 8 \sin(\alpha) \\ = 32 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + 40 \sin(\alpha) = 16 \sin(2\alpha) + 40 \sin(\alpha)$$

$$\text{b } \frac{dA}{d\alpha} = 16 \cdot \cos(2\alpha) \cdot 2 + 40 \cos(\alpha) = 32 \cos(2\alpha) + 40 \cos(\alpha)$$

$$\frac{dA}{d\alpha} = 0 \text{ geeft } 32 \cos(2\alpha) + 40 \cos(\alpha) = 0$$

$$32(2 \cos^2(\alpha) - 1) + 40 \cos(\alpha) = 0$$

$$64 \cos^2(\alpha) - 32 + 40 \cos(\alpha) = 0$$

$$8 \cos^2(\alpha) + 5 \cos(\alpha) - 4 = 0$$

$$\text{Stel } \cos(\alpha) = u.$$

$$8u^2 + 5u - 4 = 0$$

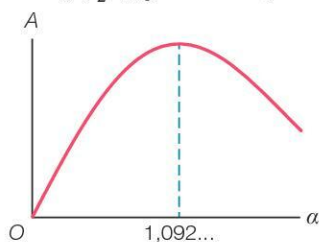
$$D = 5^2 - 4 \cdot 8 \cdot -4 = 153$$

$$u = \frac{-5 + \sqrt{153}}{16} = 0,460... \vee u = \frac{-5 - \sqrt{153}}{16} = -1,085...$$

$$\cos(\alpha) = 0,460... \vee \cos(\alpha) = -1,085...$$

$$\alpha = 1,092... + k \cdot 2\pi \vee \alpha = -1,092... + k \cdot 2\pi$$

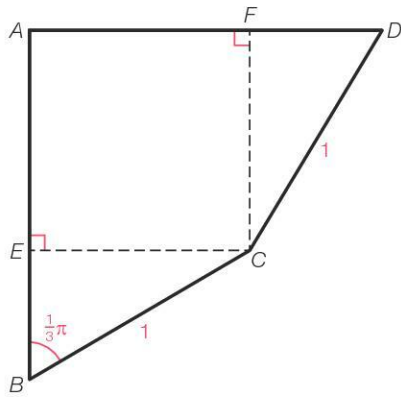
$$\alpha \text{ in } [0, \frac{1}{2}\pi] \text{ geeft } \alpha = 1,092...$$



$$\text{De oppervlakte is maximaal bij } \alpha = 1,092... \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 63^\circ.$$

- 32 a** Bij $\angle B = \frac{1}{2}\pi$ is $O(ABCD) = 1^2 = 1$.

Zie voor $\angle B = \frac{1}{3}\pi$ de figuur.



In $\triangle BCE$ is $CE = \sin(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $DE = \cos(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$.

$$O(ABCD) = 2 \cdot O(\triangle BCE) + O(AECF) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 \approx 1,18$$

- b** $CE = \sin(x)$ en $DE = \cos(x)$

$$O(ABCD) = 2 \cdot O(\triangle BCE) + O(AECF) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + \sin^2(x) = \sin^2(x) + \sin(x)\cos(x)$$

- c** $A = O(ABCD) = \sin^2(x) + \sin(x)\cos(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$ geeft

$$\frac{dA}{dx} = 2\sin(x) \cdot \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) \cdot 2 = \sin(2x) + \cos(2x)$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \text{ geeft } \sin(2x) + \cos(2x) = 0$$

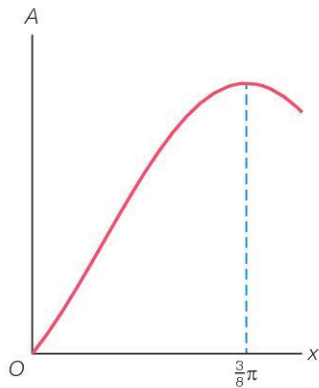
$$\sin(2x) = -\cos(2x)$$

$$\tan(2x) = -1$$

$$2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$0 < x < \frac{1}{2}\pi \text{ geeft } x = \frac{3}{8}\pi$$



Dus de oppervlakte van de vierhoek is maximaal voor $x = \frac{3}{8}\pi$.

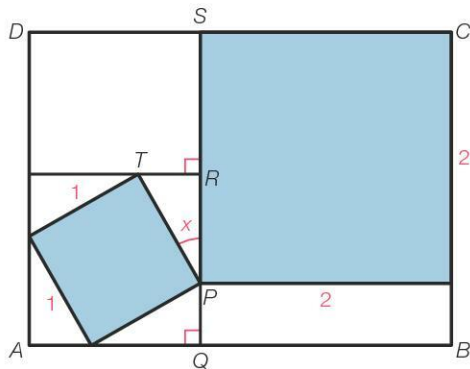
$$A = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$$

De maximale oppervlakte is

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\frac{3}{4}\pi) + \frac{1}{2}\sin(\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ m}^2.$$

33

a



In $\triangle PRT$ is $PR = \cos(x)$ en $RT = \sin(x)$.

$QP = RT = \sin(x)$, dus $QS = \sin(x) + 2$ en $O(BCSQ) = BQ \cdot QS = 2 \cdot (\sin(x) + 2) = 2 \sin(x) + 4$.

$AQ = QR = \sin(x) + \cos(x)$ geeft

$O(AQSD) = AQ \cdot QS = (\sin(x) + \cos(x))(\sin(x) + 2) = \sin^2(x) + 2 \sin(x) + \sin(x) \cos(x) + 2 \cos(x)$

$O = O(BCSQ) + O(AQSD) = 2 \sin(x) + 4 + \sin^2(x) + 2 \sin(x) + \sin(x) \cos(x) + 2 \cos(x)$
 $= \sin^2(x) + \sin(x) \cos(x) + 4 \sin(x) + 2 \cos(x) + 4$

b Voer in $y_1 = \sin^2(x) + \sin(x) \cos(x) + 4 \sin(x) + 2 \cos(x) + 4$ en stel de GR in op graden.

De optie maximum geeft $x \approx 65$.

Dus de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ is maximaal voor $x \approx 65^\circ$.

Bladzijde 108

34

a $AB = 1$, dus in $\triangle ABP$ is $AP = \cos(\alpha)$ en $BP = \sin(\alpha)$.

$\angle OAC = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$ (gestrekte hoek) geeft

$\angle OCA = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$ (hoekensom driehoek)

$AC = 1$, dus in $\triangle OAC$ is $OC = \cos(\alpha)$ en $OA = \sin(\alpha)$.

$O(OPQC) = OP \cdot OC = (\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) \cdot \cos(\alpha) = \sin(\alpha) \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha) + \cos^2(\alpha)$

b $V = O(OPQC) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha) + \cos^2(\alpha)$ geeft

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{1}{2} \cos(2\alpha) \cdot 2 + 2 \cos(\alpha) \cdot -\sin(\alpha) = \cos(2\alpha) - 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0 \text{ geeft } \cos(2\alpha) - 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 0$$

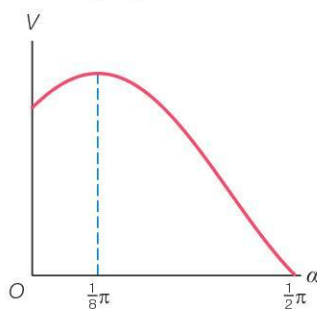
$$-\sin(2\alpha) = -\cos(2\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = 1$$

$$2\alpha = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$\alpha = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi \text{ geeft } \alpha = \frac{1}{8}\pi$$



Dus de oppervlakte van rechthoek $OPQC$ is maximaal voor $\alpha = \frac{1}{8}\pi$.

35

a $MN = 7 + 5 = 12$

In $\triangle MNP$ is $\cos(x) = \frac{MP}{12}$, dus $MP = 12 \cos(x)$ en $\sin(x) = \frac{NP}{12}$, dus $NP = 12 \sin(x)$.

$$AP = AM + MP = 7 + 12 \cos(x)$$

$$BP = BN + NP = 5 + 12 \sin(x)$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= AP^2 + BP^2 = (7 + 12 \cos(x))^2 + (5 + 12 \sin(x))^2 \\ &= 49 + 168 \cos(x) + 144 \cos^2(x) + 25 + 120 \sin(x) + 144 \sin^2(x) \\ &= 120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 144(\sin^2(x) + \cos^2(x)) + 49 + 25 \\ &= 120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 144 + 49 + 25 \\ &= 120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218 \end{aligned}$$

$$L = AB = \sqrt{120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218}$$

b $L = 20$ geeft $\sqrt{120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218} = 20$ oftewel $120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218 = 400$

Voer in $y_1 = 120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218$ en $y_2 = 400$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,128\dots$ en $x = 1,111\dots$

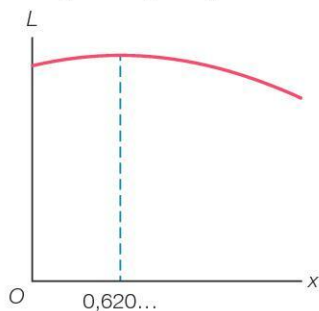
Dus $\angle PMN = 0,128\dots \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 7^\circ$ of $\angle PMN = 1,111\dots \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 64^\circ$.

c $L = \sqrt{120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218}$ geeft

$$\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218}} \cdot (120 \cos(x) - 168 \sin(x)) = \frac{60 \cos(x) - 84 \sin(x)}{\sqrt{120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218}}$$

Voer in $y_1 = \frac{60 \cos(x) - 84 \sin(x)}{\sqrt{120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218}}$.

De optie nulpunt geeft $x = 0,620\dots$



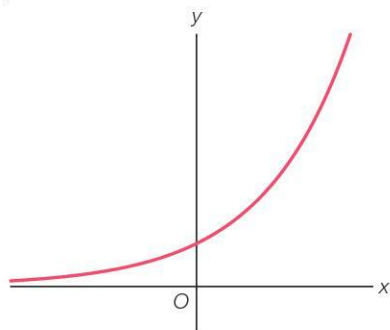
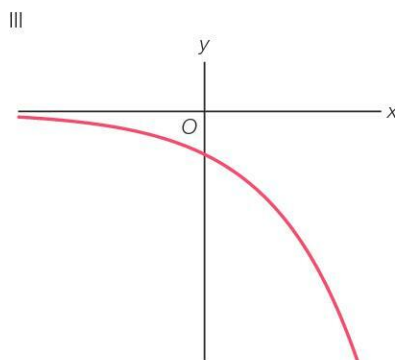
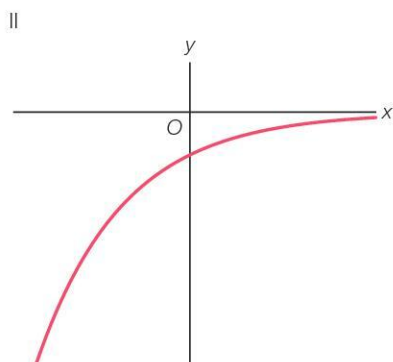
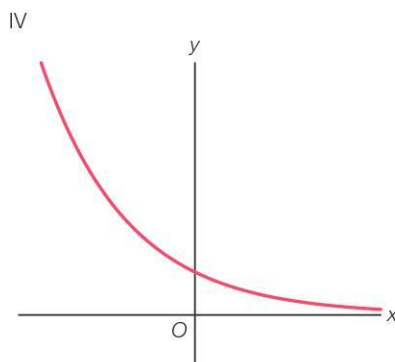
$x = 0,620\dots$ geeft $L = \sqrt{120 \sin(0,620\dots) + 168 \cos(0,620\dots) + 218} = 20,60\dots$

De maximale afstand tussen A en B is ongeveer 206 cm.

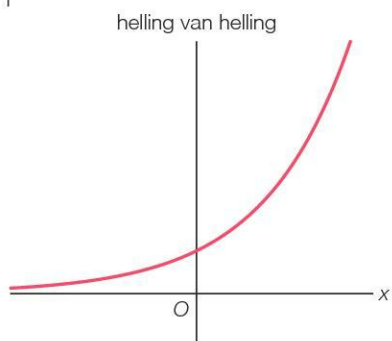
15.3 Hellingen en buigpunten

Bladzijde 110

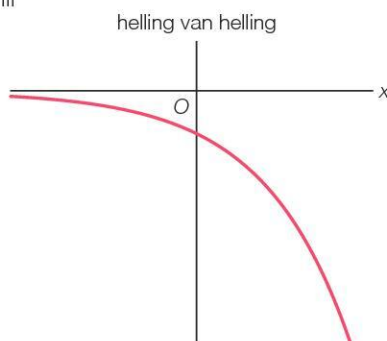
36 a |



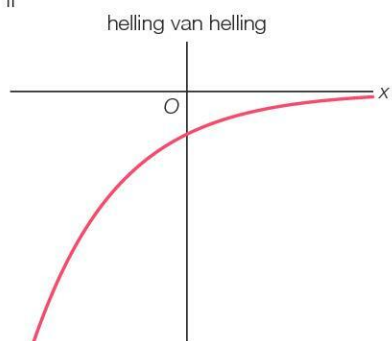
b I



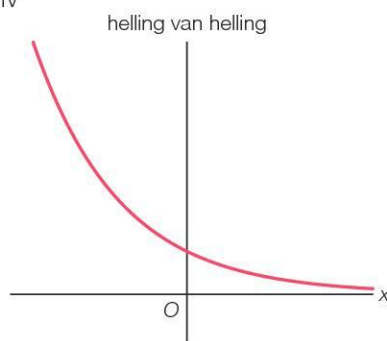
III



II

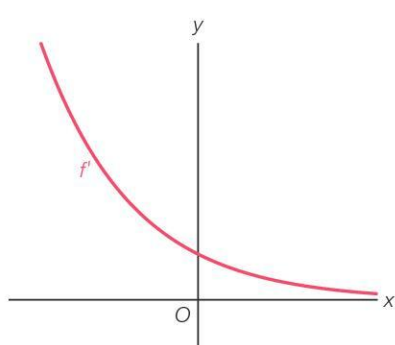
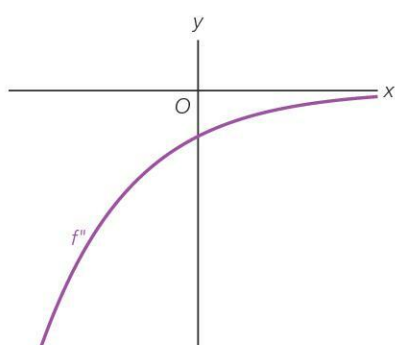


IV

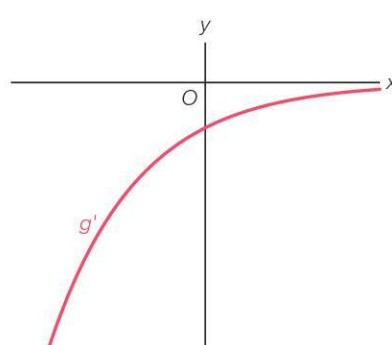
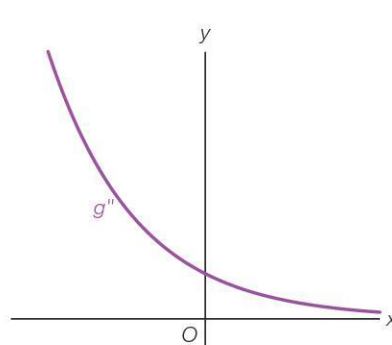


37

a



b



38

$f(x) = x + \frac{1}{2}e^x$ geeft $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^x > 0$ voor elke x , dus f is stijgend.

$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^x$ geeft $f''(x) = \frac{1}{2}e^x > 0$ voor elke x , dus f' is stijgend oftewel f is toenemend stijgend.

Bladzijde 112

39

$f(x) = x + \sqrt{x} = x + x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

Omdat voor elke $x > 0$ geldt $x^{-\frac{1}{2}} > 0$ en $x^{-\frac{3}{2}} > 0$, is $f'(x) > 0$ en $f''(x) < 0$.

Dus f is een afnemend stijgende functie.

$$40 \quad T = 20 + 80e^{-0,2t} \text{ geeft } \frac{dT}{dt} = 80e^{-0,2t} \cdot -0,2 = -16e^{-0,2t}$$

$$\frac{dT}{dt} = -16e^{-0,2t} \text{ geeft } \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dt}\right) = -16e^{-0,2t} \cdot -0,2 = 3,2e^{-0,2t}$$

Omdat voor elke t geldt $e^{-0,2t} > 0$, is $\frac{dT}{dt} < 0$ en $\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dt}\right) > 0$.

Dus T is een afnemend dalende functie van t .

Het afkoelingsproces verloopt dus steeds langzamer.

$$41 \quad f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 5) = x^4 - 8x^2 + 15$$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$$f'(1) = 4 - 16 = -12 < 0$$

$$f''(1) = 12 - 16 = -4 < 0$$

Dus toenemende daling.

$$42 \quad f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 2 - (2x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-2x+2}{(x^2+1)^2} \text{ en}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot (-4x-2) - (-2x^2-2x+2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{(x^2+1)(-4x-2) - 4x(-2x^2-2x+2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-4x^3-2x^2-4x-2+8x^3+8x^2-8x}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{4x^3+6x^2-12x-2}{(x^2+1)^3}$$

$$f'(-3) = \frac{-18+6+2}{10^2} < 0 \text{ en } f''(-3) = \frac{-108+54+36-2}{10^3} < 0, \text{ dus in } A \text{ toenemend dalend.}$$

$$f'(0) = \frac{0+0+2}{1^2} > 0 \text{ en } f''(0) = \frac{0+0+0-2}{1^3} < 0, \text{ dus in } B \text{ afnemend stijgend.}$$

$$f'(1) = \frac{-2-2+2}{2^2} < 0 \text{ en } f''(1) = \frac{4+6-12-2}{2^3} < 0, \text{ dus in } C \text{ toenemend dalend.}$$

Bladzijde 113

$$43 \quad a \quad 100e^{-0,01t^2} = 50$$

$$e^{-0,01t^2} = \frac{1}{2}$$

$$-0,01t^2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-0,01t^2 = -\ln(2)$$

$$t^2 = 100\ln(2)$$

$$t = \sqrt{100\ln(2)} = 8,325...$$

Na 8,325... · 60 ≈ 500 seconden is de helft weggestroomd.

$$b \quad \frac{dV}{dt} = 100e^{-0,01t^2} \cdot -0,02t = -2te^{-0,01t^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right) = -2 \cdot e^{-0,01t^2} - 2t \cdot e^{-0,01t^2} \cdot -0,02t = -2e^{-0,01t^2} + 0,04t^2e^{-0,01t^2} = (0,04t^2 - 2)e^{-0,01t^2}$$

$$t = 7 \text{ geeft } \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right) \approx -0,02 < 0$$

Op $t = 7$ is V , de resterende hoeveelheid water, toenemend dalend.

Dus is $100 - V$, de hoeveelheid water die uitstroomt, toenemend stijgend.

De uitstroomsnelheid neemt dus toe.

Alternatieve uitwerking

Noem de hoeveelheid water die het vat uitstroomt H .

Op $t = 0$ is $V = 100$, dus $H = 100 - V = 100 - 100e^{-0,01t^2}$.

$$\frac{dH}{dt} = -100e^{-0,01t^2} \cdot -0,02t = 2te^{-0,01t^2}$$

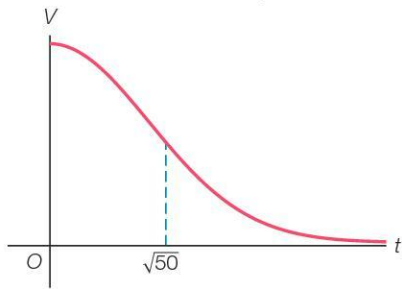
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dH}{dt}\right) = 2 \cdot e^{-0,01t^2} + 2t \cdot e^{-0,01t^2} \cdot -0,02t = 2e^{-0,01t^2} - 0,04t^2 e^{-0,01t^2} = (2 - 0,04t^2)e^{-0,01t^2}$$

$$t = 7 \text{ geeft } \frac{d}{dt}\left(\frac{dH}{dt}\right) \approx 0,02 > 0$$

Op $t = 7$ is de uitstroom dus toenemend stijgend.

De uitstroomsnelheid neemt dus toe.

c $\frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right) = 0$ geeft $(0,04t^2 - 2)e^{-0,01t^2} = 0$
 $0,04t^2 - 2 = 0$
 $0,04t^2 = 2$
 $t^2 = 50$
 $t = \sqrt{50}$



De uitstroomsnelheid is maximaal na $\sqrt{50} \cdot 60 \approx 424$ seconden.

d $\left[\frac{dV}{dt}\right]_{t=\sqrt{50}} = 8,577\dots$

De maximale uitstroomsnelheid is dus $8,577\dots$ L/minuut.

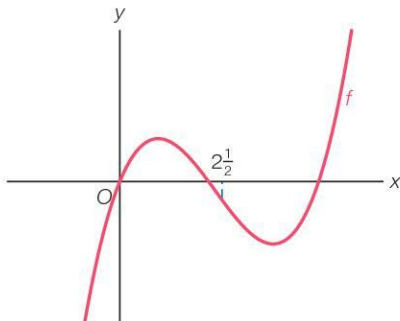
De helft van de maximale snelheid is $4,288\dots$ L/minuut.

Voer in $y_1 = -2xe^{-0,01x^2}$ en $y_2 = -4,288\dots$

Voor $x > \sqrt{50}$ geeft de optie snijpunt $x = 13,587\dots$

$(13,587\dots - \sqrt{50}) \cdot 60 \approx 391$ seconden na het in c berekende tijdstip is de uitstroomsnelheid afgenomen tot de helft van de maximale snelheid.

44 $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$
 $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$
 $f''(x) = 12x - 30$
 $f''(2\frac{1}{2}) = 0$ en $f'(2\frac{1}{2}) = -13\frac{1}{2} < 0$



Dus de grafiek van f gaat bij $x = 2\frac{1}{2}$ over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

- 45 De schets is nodig om te laten zien dat de grafiek overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend, en niet bijvoorbeeld overgaat van toenemend dalend naar afnemend dalend.

46 a $f(x) = ax^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + b$

$$f'(x) = 4ax^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4$$

$$f''(x) = 12ax^2 - x - 6$$

$$f''(3) = 0 \text{ geeft } 12a \cdot 3^2 - 3 - 6 = 0$$

$$108a = 9$$

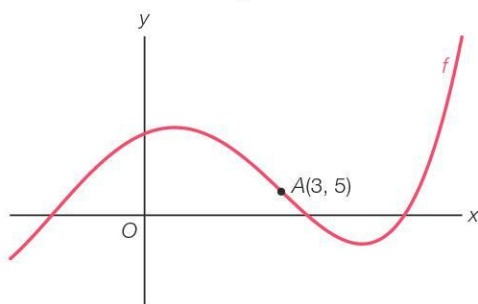
$$a = \frac{1}{12}$$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + b$$

$$f(3) = 5 \text{ geeft } \frac{1}{12} \cdot 3^4 - \frac{1}{6} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + b = 5$$

$$6\frac{3}{4} - 4\frac{1}{2} - 27 + 12 + b = 5$$

$$b = 17\frac{3}{4}$$



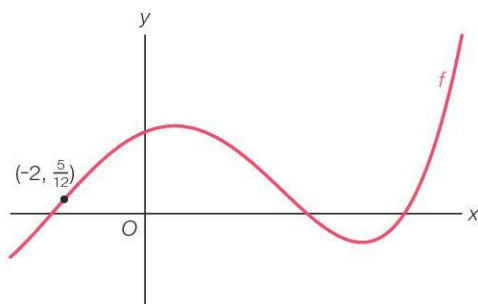
De grafiek van f gaat voor $a = \frac{1}{12}$ en $b = 17\frac{3}{4}$ in $A(3, 5)$ over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

b $a = \frac{1}{12}$ geeft $f''(x) = x^2 - x - 6$

$$f''(x) = 0 \text{ geeft } x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 3$$



$f(-2) = \frac{5}{12}$, dus in het punt $(-2, \frac{5}{12})$ gaat de grafiek van f over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

47 $f_p(x) = \frac{10}{x^2 + p}$

$$f_p'(x) = \frac{(x^2 + p) \cdot 0 - 10 \cdot 2x}{(x^2 + p)^2} = \frac{-20x}{(x^2 + p)^2}$$

$$f_p''(x) = \frac{(x^2 + p)^2 \cdot -20 - (-20x) \cdot 2(x^2 + p) \cdot 2x}{(x^2 + p)^4} = \frac{(x^2 + p) \cdot -20 + 20x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2 + p)^3}$$

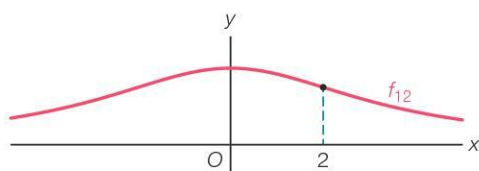
$$= \frac{-20x^2 - 20p + 80x^2}{(x^2 + p)^3} = \frac{60x^2 - 20p}{(x^2 + p)^3}$$

$$f_p''(2) = 0 \text{ geeft } \frac{60 \cdot 4 - 20p}{(4 + p)^3} = 0$$

$$240 - 20p = 0$$

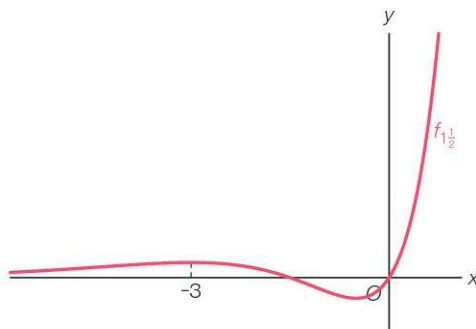
$$-20p = -240$$

$$p = 12$$



Dus voor $p = 12$ gaat de grafiek van f_p bij $x = 2$ over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

48 a $f_a(x) = (x^2 + ax)e^x$ geeft $f'_a(x) = (2x + a) \cdot e^x + (x^2 + ax) \cdot e^x = (x^2 + (a+2)x + a)e^x$
 $f'_a(-3) = 0$ geeft $(9 - 3(a+2) + a)e^{-3} = 0$
 $9 - 3a - 6 + a = 0$
 $-2a = -3$
 $a = 1\frac{1}{2}$



Dus voor $a = 1\frac{1}{2}$ heeft f_a een maximum voor $x = -3$.

$$f_{1\frac{1}{2}}'(x) = (x^2 + 3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2})e^x$$

$$f_{1\frac{1}{2}}'(x) = 0 \text{ geeft } (x^2 + 3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2})e^x = 0$$

$$x^2 + 3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = 0$$

$$(x+3)(x+\frac{1}{2}) = 0$$

$$x = -3 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{min. is } f_{1\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}) = ((-\frac{1}{2})^2 + 1\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{e}}$$

b $f'_a(x) = (x^2 + (a+2)x + a)e^x$ geeft

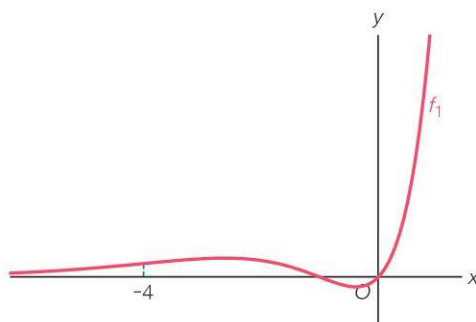
$$f''_a(x) = (2x + a + 2)e^x + (x^2 + (a+2)x + a)e^x = (x^2 + (a+4)x + 2a + 2)e^x$$

$$f''_a(-4) = 0 \text{ geeft } ((-4)^2 - 4(a+4) + 2a + 2)e^{-4} = 0$$

$$16 - 4a - 16 + 2a + 2 = 0$$

$$-2a = -2$$

$$a = 1$$



Dus voor $a = 1$ gaat de grafiek van f_a bij $x = -4$ over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

49 $f(-2) = -\frac{4}{e}$ geeft $-2ae^{-2b} = -\frac{4}{e}$

$$f(x) = axe^{bx} \text{ geeft } f'(x) = a \cdot e^{bx} + ax \cdot e^{bx} \cdot b = (abx + a)e^{bx}$$

$$f'(-2) = 0 \text{ geeft } (-2ab + a)e^{-2b} = 0$$

$$-2ab + a = 0$$

$$a(-2b + 1) = 0$$

$$a = 0 \vee 2b = 1$$

$$\text{vold. niet } b = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{2} \text{ en } -2ae^{-2b} = -\frac{4}{e} \text{ geeft } -2ae^{-1} = -\frac{4}{e}$$

$$-2a = -4$$

$$a = 2$$

$$f(x) = 2xe^{\frac{1}{2}x} \text{ en } f'(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x} \text{ geeft}$$

$$f''(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (x+2) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = e^{\frac{1}{2}x} + (\frac{1}{2}x + 1)e^{\frac{1}{2}x} = (\frac{1}{2}x + 2)e^{\frac{1}{2}x}$$

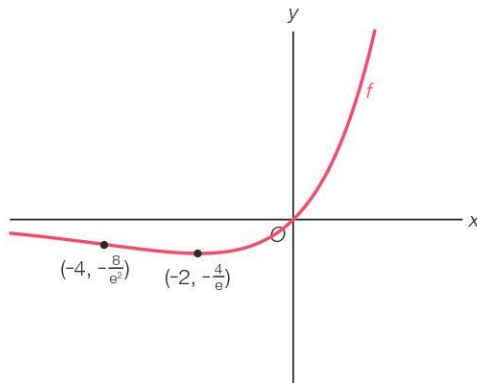
$$f''(x) = 0 \text{ geeft } \left(\frac{1}{2}x + 2\right)e^{\frac{1}{2}x} = 0$$

$$\frac{1}{2}x + 2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x = -2$$

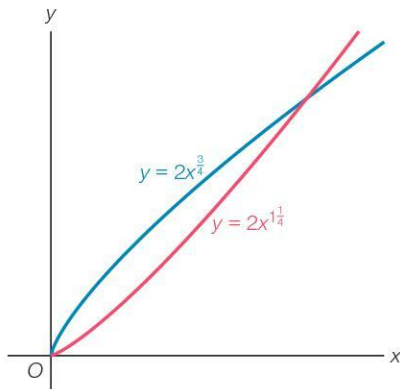
$$x = -4$$

$$f(-4) = -8e^{-2} = -\frac{8}{e^2}$$



Dus grafiek van $f_{a,b}$ met top $\left(-2, -\frac{4}{e}\right)$ gaat in het punt $\left(-4, -\frac{8}{e^2}\right)$ over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

50 a



b $y = 2x^p$ geeft $y' = 2px^{p-1}$ en $y'' = 2p(p-1)x^{p-2}$

Afnemend stijgend als $y' > 0$ en $y'' < 0$.

$$y' > 0 \text{ geeft } p > 0$$

$$y'' < 0 \text{ geeft } 0 < p < 1$$

Dus de grafiek van $y = 2x^p$ is afnemend stijgend voor $0 < p < 1$.

Bladzijde 115

51 $y = \frac{375}{x\sqrt{x}} = \frac{375}{x^{1\frac{1}{2}}} = 375x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $y' = -562,5x^{-2\frac{1}{2}}$ en $y'' = 1406,25x^{-3\frac{1}{2}}$

Omdat voor $x > 0$ geldt $x^{-2\frac{1}{2}} > 0$ en $x^{-3\frac{1}{2}} > 0$, is $y' < 0$ en $y'' > 0$.

Dus y is afnemend dalend.

52
$$\left. \begin{array}{l} y = ax\sqrt{x} \\ x = 25 \text{ en } y = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 25a \cdot \sqrt{25} = 3 \\ 25a \cdot 5 = 3 \\ 125a = 3 \\ a = 0,024 \end{array}$$

Dus $y = 0,024x\sqrt{x}$.

$$y = 0,024x^{1\frac{1}{2}} \text{ geeft } y' = 0,036x^{\frac{1}{2}} \text{ en } y'' = 0,018x^{-\frac{1}{2}}$$

Omdat voor $x > 0$ geldt $x^{\frac{1}{2}} > 0$ en $x^{-\frac{1}{2}} > 0$, is $y' > 0$ en $y'' > 0$.

Dus y is toenemend stijgend.

$$53 \quad a \quad \left. \begin{aligned} H &= \frac{a}{W^{0,25}} \text{ oftewel } a = H \cdot W^{0,25} \\ W &= 750 \text{ en } H = 40 \end{aligned} \right\} a = 40 \cdot 750^{0,25} \approx 209$$

$$\text{Dus } H = \frac{209}{W^{0,25}}.$$

$$b \quad H = 200 \text{ geeft } \frac{210}{W^{0,25}} = 200$$

$$W^{0,25} = \frac{210}{200}$$

$$W = \left(\frac{210}{200} \right)^4 \approx 1,2$$

Het gevraagde gewicht is 1,2 kg.

$$c \quad H = \frac{210}{W^{0,25}} = 210W^{-0,25} \text{ geeft } \frac{dH}{dW} = -52,5W^{-1,25} \text{ en } \frac{d}{dW} \left(\frac{dH}{dW} \right) = 65,625W^{-2,25}$$

Omdat voor elke $W > 0$ geldt $W^{-1,25} > 0$ en $W^{-2,25} > 0$, is $\frac{dH}{dW} < 0$ en $\frac{d}{dW} \left(\frac{dH}{dW} \right) > 0$.

Dus H is een afnemend dalende functie van W .

$$54 \quad E = aG^{-0,4} \text{ geeft } \frac{dE}{dG} = -0,4aG^{-1,4} \text{ en } \frac{d}{dG} \left(\frac{dE}{dG} \right) = 0,56aG^{-2,4}$$

Omdat voor elke $a > 0$ en $G > 0$ geldt $aG^{-1,4} > 0$ en $aG^{-2,4} > 0$, is $\frac{dE}{dG} < 0$ en $\frac{d}{dG} \left(\frac{dE}{dG} \right) > 0$.

Dus E is een afnemend dalende functie van G .

$$55 \quad a \quad \text{Neem } 3d \text{ voor } d \text{ in de formule } L = \frac{a}{d^2}.$$

$$\text{Je krijgt } L = \frac{a}{(3d)^2} = \frac{a}{9d^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{a}{d^2}.$$

Dus de geluidssterkte wordt 9 keer zo klein.

$$b \quad L = \frac{a}{d^2} = ad^{-2} \text{ geeft } \frac{dL}{dd} = -2ad^{-3} \text{ en } \frac{d}{dd} \left(\frac{dL}{dd} \right) = 6ad^{-4}$$

Omdat voor elke $a > 0$ en $d > 0$ geldt $ad^{-3} > 0$ en $ad^{-4} > 0$, is $\frac{dL}{dd} < 0$ en $\frac{d}{dd} \left(\frac{dL}{dd} \right) > 0$.

Dus L is een afnemend dalende functie van d .

Dus als de afstand tot een geluidsbron toeneemt, neemt de afname van de geluidssterkte af.

$$56 \quad a \quad \left. \begin{aligned} A &= aT^b \\ A &= 108 \text{ en } T = 225 \end{aligned} \right\} a \cdot 225^b = 108$$

$$a = \frac{108}{225^b}$$

$$\left. \begin{aligned} A &= aT^b \\ A &= 1427 \text{ en } T = 10753 \end{aligned} \right\} a \cdot 10753^b = 1427$$

$$a = \frac{1427}{10753^b}$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{108}{225^x} \text{ en } y_2 = \frac{1427}{10753^x}.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,668$ en $y \approx 2,906$.

$$b \approx 0,668 \text{ en } a \approx 2,906 \text{ geeft } A = 2,906T^{0,668}$$

$$b \quad A = 2,91T^{\frac{2}{3}} \text{ geeft } \frac{dA}{dT} = 1,94T^{-\frac{1}{3}} \text{ en } \frac{d}{dT} \left(\frac{dA}{dT} \right) \approx -0,647T^{-\frac{4}{3}}$$

Omdat voor $T > 0$ geldt $T^{-\frac{1}{3}} > 0$ en $T^{-\frac{4}{3}} > 0$, is $\frac{dA}{dT} > 0$ en $\frac{d}{dT} \left(\frac{dA}{dT} \right) < 0$.

Dus A is een afnemend stijgende functie van T .

$$c \quad 19,3030 \text{ AE} = 2887728800 \text{ km}$$

$$A = 2887,7288 \text{ geeft } 2,91T^{\frac{2}{3}} = 2887,7288$$

$$T^{\frac{2}{3}} = \frac{2887,7288}{2,91}$$

$$T = \left(\frac{2887,7288}{2,91} \right)^{\frac{3}{2}} = 31260,4...$$

Dus de omwentelingstijd is $\frac{31260,4...}{365} \approx 85,6$ jaar.

57 $720 \text{ km/uur is } \frac{720}{3,6} = 200 \text{ m/s.}$

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= av^2 \\ v &= 200 \text{ en } W_1 = 120\,000 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a \cdot 200^2 &= 120\,000 \\ a &= \frac{120\,000}{200^2} = 3 \end{aligned}$$

Dus $W_1 = 3v^2$.

$$\left. \begin{aligned} W_i &= \frac{b}{v^2} \\ v &= 200 \text{ en } W_i = 300\,000 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{b}{200^2} &= 300\,000 \\ b &= 300\,000 \cdot 200^2 = 1,2 \cdot 10^{10} \end{aligned}$$

Dus $W_i = \frac{1,2 \cdot 10^{10}}{v^2}$.

$$W = W_1 + W_i = 3v^2 + \frac{1,2 \cdot 10^{10}}{v^2} = 3v^2 + 1,2 \cdot 10^{10} \cdot v^{-2} \text{ geeft } \frac{dW}{dv} = 6v - 2,4 \cdot 10^{10} \cdot v^{-3} = 6v - \frac{2,4 \cdot 10^{10}}{v^3}$$

$$\frac{dW}{dv} = 0 \text{ geeft } 6v - \frac{2,4 \cdot 10^{10}}{v^3} = 0$$

$$6v = \frac{2,4 \cdot 10^{10}}{v^3}$$

$$6v^4 = 2,4 \cdot 10^{10}$$

$$v^4 = 4 \cdot 10^9$$

$$v = 251,48\dots$$

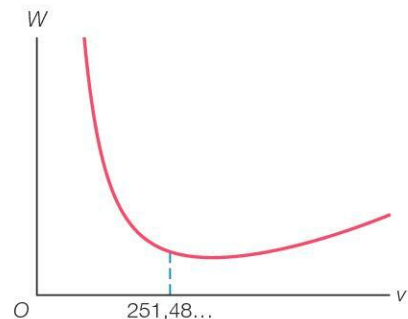
Schets van W , zie hiernaast.

Dus voor $v = 251,48\dots$ is W minimaal.

$$v = 251,48\dots \text{ geeft } W_1 = 3 \cdot 251,48\dots^2 \approx 189\,737 \text{ N}$$

$$v = 251,48\dots \text{ geeft } W_i = \frac{1,2 \cdot 10^{10}}{251,48\dots^2} \approx 189\,737 \text{ N}$$

Dus bij minimale totale weerstand geldt $W_1 = W_i$.



58 a $H = a \cdot \frac{\ln(2t+1)}{2t+1} \text{ geeft } \frac{dH}{dt} = a \cdot \frac{(2t+1) \cdot \frac{1}{2t+1} \cdot 2 - \ln(2t+1) \cdot 2}{(2t+1)^2} = a \cdot \frac{2 - 2\ln(2t+1)}{(2t+1)^2}$

$$\frac{dH}{dt} = 0 \text{ geeft } a \cdot \frac{2 - 2\ln(2t+1)}{(2t+1)^2} = 0$$

$$2 - 2\ln(2t+1) = 0$$

$$\ln(2t+1) = 1$$

$$2t+1 = e$$

$$2t = e - 1$$

$$t = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

Voor $t = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$ is $H = 10\,000$.

Dit geeft $a \cdot \frac{\ln(2 \cdot (\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}) + 1)}{2 \cdot (\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}) + 1} = 10\,000$

$$a \cdot \frac{\ln(e - 1 + 1)}{e - 1 + 1} = 10\,000$$

$$a \cdot \frac{\ln(e)}{e} = 10\,000$$

$$a \cdot \frac{1}{e} = 10\,000$$

$$a = 10\,000e$$

Dus $H = 10\,000e \cdot \frac{\ln(2t+1)}{2t+1}$.

b $a = 10\,000e \text{ geeft } \frac{dH}{dt} = 10\,000e \cdot \frac{2 - 2\ln(2t+1)}{(2t+1)^2} \text{ (zie a)}$

$$\left[\frac{dH}{dt} \right]_{t=2} = 10\,000e \cdot \frac{2 - 2\ln(4+1)}{(4+1)^2} \approx -1325$$

Op $t = 2$ neemt de hoeveelheid water die per uur wegstroomt af met 1325 m^3 per uur.

15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud

Bladzijde 118

59 $y = \frac{1}{3}(2x-3)\sqrt{2x-3} = \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{1}{2}}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(2x-3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = (2x-3)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2x-3}$

Dus $y = \frac{1}{3}(2x-3)\sqrt{2x-3}$ is een primitieve van $y = \sqrt{2x-3}$.

Dus bewering II is juist.

Bladzijde 119

60 $f(x) = g(x)$ geeft $\sqrt{2x-3} = \frac{1}{2}x$

$$2x-3 = \frac{1}{4}x^2$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x-2)(x-6) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 6$$

$$\begin{aligned} O(V) &= \int_2^6 (f(x) - g(x)) dx = \int_2^6 (\sqrt{2x-3} - \frac{1}{2}x) dx = \int_2^6 ((2x-3)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x) dx = \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^2 \right]_2^6 \\ &= \left[\frac{2}{3}(2x-3)\sqrt{2x-3} - \frac{1}{4}x^2 \right]_2^6 = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{9} - \frac{1}{4} \cdot 36 - \left(\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{1} - \frac{1}{4} \cdot 4 \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

61 $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{5}{4x-2} = -\frac{1}{2}x + 3$

$$(-\frac{1}{2}x + 3)(4x - 2) = 5$$

$$-2x^2 + x + 12x - 6 = 5$$

$$-2x^2 + 13x - 11 = 0$$

$$D = 13^2 - 4 \cdot -2 \cdot -11 = 81$$

$$x = \frac{-13 \pm 9}{-4} = 1 \vee x = \frac{-13 - 9}{-4} = 5\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} O(V) &= \int_1^{5\frac{1}{2}} (g(x) - f(x)) dx = \int_1^{5\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}x + 3 - \frac{5}{4x-2} \right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5 \cdot \frac{1}{4} \ln|4x-2| \right]_1^{5\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot (5\frac{1}{2})^2 + 3 \cdot 5\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4} \ln(4 \cdot 5\frac{1}{2} - 2) - \left(-\frac{1}{4} + 3 - 1\frac{1}{4} \ln(2) \right) = -7\frac{9}{16} + 16\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4} \ln(20) + \frac{1}{4} - 3 + 1\frac{1}{4} \ln(2) \\ &= 6\frac{3}{16} - 1\frac{1}{4} \ln(10) \end{aligned}$$

Bladzijde 120

62 $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{x+8}{x+1} = \frac{4x-4}{x+1}$

$$x+8 = 4x-4 \wedge x+1 \neq 0$$

$$-3x = -12 \wedge x \neq -1$$

$$x = 4 \wedge x \neq -1$$

$$x = 4$$

$g(x) = 0$ geeft $4x-4 = 0$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

$$f(x) = \frac{x+8}{x+1} = \frac{x+1-1+8}{x+1} = 1 + \frac{7}{x+1}$$

$$g(x) = \frac{4x-4}{x+1} = \frac{4(x+1)-4-4}{x+1} = 4 - \frac{8}{x+1}$$

$$\begin{aligned} O(V) &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{7}{x+1} \right) dx + \int_1^4 \left(1 + \frac{7}{x+1} - 4 + \frac{8}{x+1} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{7}{x+1} \right) dx + \int_1^4 \left(-3 + \frac{15}{x+1} \right) dx = [x + 7 \ln|x+1|]_0^1 + [-3x + 15 \ln|x+1|]_1^4 \\ &= 1 + 7 \ln(2) - (0 + 7 \ln(1)) + -12 + 15 \ln(5) - (-3 + 15 \ln(2)) \\ &= 1 + 7 \ln(2) - 12 + 15 \ln(5) + 3 - 15 \ln(2) = 15 \ln(5) - 8 \ln(2) - 8 \end{aligned}$$

63 $f_a(x) = \frac{ax+4}{2x-3} = \frac{\frac{1}{2}a(2x-3) + \frac{1}{2}a + 4}{2x-3} = \frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{2}a + 4}{2x-3}$

$$O(V) = \int_2^4 \left(\frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{2}a + 4}{2x-3} \right) dx = \left[\frac{1}{2}ax + \left(\frac{1}{2}a + 4 \right) \cdot \frac{1}{2} \ln|2x-3| \right]_2^4$$

$$= 2a + \left(\frac{1}{2}a + 4 \right) \cdot \frac{1}{2} \ln(5) - \left(a + \left(\frac{1}{2}a + 4 \right) \cdot \frac{1}{2} \ln(1) \right) = 2a + \left(\frac{1}{2}a + 4 \right) \cdot \frac{1}{2} \ln(5) - a - 0$$

$$= a + \frac{3}{4}a \ln(5) + 2 \ln(5)$$

$$O(V) = 10 \text{ geeft } a + \frac{3}{4}a \ln(5) + 2 \ln(5) = 10$$

$$a \left(1 + \frac{3}{4} \ln(5) \right) = 10 - 2 \ln(5)$$

$$a = \frac{10 - 2 \ln(5)}{1 + \frac{3}{4} \ln(5)} \approx 3,07$$

64 $f(x) = g(x)$ geeft $\sin^2(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$
 $\sin^2(x) = \sin(x) \cos(x)$
 $\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = \cos(x)$
 $\sin(x) = \cos(x)$ geeft $\tan(x) = 1$
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

Dus $x_A = \frac{1}{4}\pi$.

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, dus $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$ oftewel $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

Dus $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

$$O(V) = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (g(x) - f(x)) dx = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \left(\frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx = \left[-\frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^{\frac{1}{4}\pi}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4} \cdot 1 - \left(-\frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\pi$$

$$O(W) = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\pi} (f(x) - g(x)) dx = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) \right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 - \left(\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 \right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\pi$$

$$O(V) + O(W) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\pi = 1 + \frac{1}{4}\pi$$

Bladzijde 121

65 a $O(V + W) = \int_0^p \sqrt{x} dx = \int_0^p x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^p = \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_0^p = \frac{2}{3} p \sqrt{p} - 0 = \frac{2}{3} p \sqrt{p}$

b $O(W) = \frac{1}{2} \cdot p \cdot f(p) = \frac{1}{2} p \sqrt{p}$

c $O(V) = O(V + W) - O(W) = \frac{2}{3} p \sqrt{p} - \frac{1}{2} p \sqrt{p} = \frac{1}{6} p \sqrt{p}$

d $O(V) : O(W) = \frac{1}{6} p \sqrt{p} : \frac{1}{2} p \sqrt{p} = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = 1 : 3$

Bladzijde 122

66 $O(V) = O(W)$

$$1 + 2 \ln(p) = p^2 - (1 + 2 \ln(p))$$

$$1 + 2 \ln(p) = p^2 - 1 - 2 \ln(p)$$

$$2 + 4 \ln(p) = p^2$$

Voer in $y_1 = 2 + 4 \ln(x)$ en $y_2 = x^2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,68$ en $x \approx 2,31$.

$x \approx 0,68$ voldoet niet, dus $p \approx 2,31$.

$$67 \quad O(V+W) = \int_{-3}^3 f(x) dx = \int_{-3}^3 (9-x^2) dx = \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-3}^3 = 27 - 9 - (-27 + 9) = 36$$

$$g_a(x) = 0 \text{ geeft } a - x^2 = 0$$

$$x^2 = a$$

$$x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}$$

$$O(W) = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} g_a(x) dx = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \left[ax - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = a\sqrt{a} - \frac{1}{3}a\sqrt{a} - (-a\sqrt{a} + \frac{1}{3}a\sqrt{a}) = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

$$O(V) = O(W) \text{ geeft } O(W) = \frac{1}{2} O(V+W)$$

$$\frac{4}{3}a\sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot 36$$

$$a\sqrt{a} = 13\frac{1}{2}$$

$$a^3 = 182\frac{1}{4}$$

$$a = \sqrt[3]{182\frac{1}{4}} \approx 5,67$$

$$68 \quad \mathbf{a} \quad f_{3\frac{1}{3}}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3\frac{1}{3}x \text{ geeft } f_{3\frac{1}{3}}'(x) = -x^2 + 2x + 3\frac{1}{3}$$

$$f_{3\frac{1}{3}}'(0) = 3\frac{1}{3}, \text{ dus } k: y = 3\frac{1}{3}x.$$

$$k \text{ snijden met de grafiek van } f_{3\frac{1}{3}} \text{ geeft } -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3\frac{1}{3}x = 3\frac{1}{3}x$$

$$-\frac{1}{3}x^3 + x^2 = 0$$

$$-\frac{1}{3}x^2(x-3) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

$$f_{3\frac{1}{3}}(x) = 0 \text{ geeft } -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3\frac{1}{3}x = 0$$

$$-\frac{1}{3}x(x^2 - 3x - 10) = 0$$

$$-\frac{1}{3}x(x+2)(x-5) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 5$$

$$O(W) = \int_0^3 \frac{1}{3}x dx + \int_3^5 (-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3\frac{1}{3}x) dx = \left[\frac{1}{6}x^2 \right]_0^3 + \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 \right]_3^5$$

$$= 15 - 0 - \frac{625}{12} + \frac{125}{3} + \frac{125}{3} - (-\frac{27}{4} + 9 + 15) = 29$$

$$\mathbf{b} \quad f_a(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax \text{ geeft } f_a'(x) = -x^2 + 2x + a$$

$$f_a'(0) = a, \text{ dus } k: y = ax.$$

$$k \text{ snijden met de grafiek van } f_a \text{ geeft } -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax = ax$$

$$-\frac{1}{3}x^3 + x^2 = 0$$

$$-\frac{1}{3}x^2(x-3) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

$$O(V) = \int_0^3 (-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax - ax) dx = \int_0^3 (-\frac{1}{3}x^3 + x^2) dx \text{ en dit is onafhankelijk van } a.$$

$$69 \quad f_a(x) = \frac{1}{4}x^2(x-a)^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2 - 2ax + a^2) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^3 + \frac{1}{4}a^2x^2 \text{ geeft } f_a'(x) = x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + \frac{1}{2}a^2x$$

$$f_a'(x) = 0 \text{ geeft } x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + \frac{1}{2}a^2x = 0$$

$$x(x^2 - \frac{3}{2}ax + \frac{1}{2}a^2) = 0$$

$$x(x - \frac{1}{2}a)(x - a) = 0$$

$$x = 0 \vee x = \frac{1}{2}a \vee x = a$$

$$f_a(\frac{1}{2}a) = \frac{1}{16}a^2(\frac{1}{2}a - a)^2 = \frac{1}{64}a^4, \text{ dus } T(\frac{1}{2}a, \frac{1}{64}a^4).$$

$$O(OABC) = a \cdot \frac{1}{64}a^4 = \frac{1}{64}a^5$$

$$O(V) = \int_0^a (\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^3 + \frac{1}{4}a^2x^2) dx = \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{8}ax^4 + \frac{1}{12}a^2x^3 \right]_0^a = \frac{1}{20}a^5 - \frac{1}{8}a^5 + \frac{1}{12}a^5 - 0 = \frac{1}{120}a^5$$

$$\text{De gevraagde verhouding is } \frac{1}{120}a^5 : \frac{1}{64}a^5 = 64 : 120 = 8 : 15.$$

70 $f_a(x) = 0$ geeft $x = a$

$f_a(x) = 2\sqrt{x}$ geeft $\sqrt{a-x} = 2\sqrt{x}$

$$a - x = 4x$$

$$-5x = -a$$

$$x = \frac{1}{5}a$$

$f_a(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ geeft $\sqrt{a-x} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

$$a - x = \frac{1}{4}x$$

$$-\frac{5}{4}x = -a$$

$$x = \frac{4}{5}a$$

$$\begin{aligned} O(V+W) &= \int_0^{\frac{1}{5}a} 2\sqrt{x} dx + \int_{\frac{1}{5}a}^a \sqrt{a-x} dx = \int_0^{\frac{1}{5}a} 2x^{\frac{1}{2}} dx + \int_{\frac{1}{5}a}^a (a-x)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{5}a} + \left[-\frac{2}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{5}a}^a \\ &= \left[\frac{4}{3}x\sqrt{x} \right]_0^{\frac{1}{5}a} + \left[-\frac{2}{3}(a-x)\sqrt{a-x} \right]_{\frac{1}{5}a}^a = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5}a\sqrt{\frac{1}{5}a} - 0 + 0 - \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}a\sqrt{\frac{4}{5}a} \right) = \frac{4}{15}a\sqrt{\frac{1}{5}a} + \frac{16}{15}a\sqrt{\frac{1}{5}a} = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{5}a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O(W) &= \int_0^{\frac{4}{5}a} \frac{1}{2}\sqrt{x} dx + \int_{\frac{4}{5}a}^a \sqrt{a-x} dx = \int_0^{\frac{4}{5}a} \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} dx + \int_{\frac{4}{5}a}^a (a-x)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{4}{5}a} + \left[-\frac{2}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{4}{5}a}^a \\ &= \left[\frac{1}{3}x\sqrt{x} \right]_0^{\frac{4}{5}a} + \left[-\frac{2}{3}(a-x)\sqrt{a-x} \right]_{\frac{4}{5}a}^a = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}a\sqrt{\frac{4}{5}a} - 0 + 0 - \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}a\sqrt{\frac{1}{5}a} \right) = \frac{8}{15}a\sqrt{\frac{1}{5}a} + \frac{2}{15}a\sqrt{\frac{1}{5}a} = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{1}{5}a} \end{aligned}$$

$O(W) = \frac{1}{2}O(V+W)$, dus $O(V) = O(W)$.

Bladzijde 123

71 a $f(x) = 2\sqrt{x}$ geeft $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$k: y = ax + b$ met $a = f'(p^2) = \frac{1}{\sqrt{p^2}} = \frac{1}{p}$

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{p} \cdot x + b \\ \text{door } P(p^2, 2p) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{1}{p} \cdot p^2 + b &= 2p \\ p + b &= 2p \\ b &= p \end{aligned}$$

Dus $k: y = \frac{1}{p} \cdot x + p$.

b $rc_l = \frac{y_p}{x_p} = \frac{2p}{p^2} = \frac{2}{p}$ geeft $l: y = \frac{2}{p}x$

$$O(V) = \int_0^{p^2} \left(2\sqrt{x} - \frac{2}{p} \cdot x \right) dx = \int_0^{p^2} \left(2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{p} \cdot x \right) dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{p} \cdot x^2 \right]_0^{p^2} = \left[\frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{p} \cdot x^2 \right]_0^{p^2} = \frac{4}{3}p^3 - p^3 = \frac{1}{3}p^3$$

$$O(W) = \int_0^{p^2} \left(\frac{1}{p} \cdot x + p - 2\sqrt{x} \right) dx = \left[\frac{1}{2p} \cdot x^2 + px - \frac{4}{3}x\sqrt{x} \right]_0^{p^2} = \frac{1}{2}p^3 + p^3 - \frac{4}{3}p^3 = \frac{1}{6}p^3$$

$O(W) : O(V) = \frac{1}{6}p^3 : \frac{1}{3}p^3 = 1 : 2$

72 $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$, dus $f(x) = \ln^2(x) + \ln(x^2) = \ln^2(x) + 2 \ln(x)$.

$$\int_q^{2q} g(x) dx = 0$$

$$\int_q^{2q} f'(x) dx = 0$$

$$[f(x)]_q^{2q} = 0$$

$$f(2q) - f(q) = 0$$

$$\ln^2(2q) + 2 \ln(2q) - (\ln^2(q) + 2 \ln(q)) = 0$$

$$\ln^2(2q) - \ln^2(q) + 2 \ln(2q) - 2 \ln(q) = 0$$

$$(\ln(2q) - \ln(q))(\ln(2q) + \ln(q)) + 2(\ln(2q) - \ln(q)) = 0$$

$$\ln(2) \cdot \ln(2q^2) + 2 \ln(2) = 0$$

$$\ln(2q^2) + 2 = 0$$

$$\ln(2q^2) = -2$$

$$2q^2 = e^{-2}$$

$$q^2 = \frac{1}{2e^2}$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2e^2}} \vee q = -\sqrt{\frac{1}{2e^2}}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot e} \quad \text{vold. niet}$$

$$\text{Dus } q = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot e}.$$

73 a $I(L) = \pi \int_0^p (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^p x dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^p = \frac{1}{2} \pi p^2$

b $y = \sqrt{x}$ geeft $y^2 = x$ oftewel $x = y^2$

$$I(M) = \pi \int_0^{\sqrt{p}} x^2 dy = \pi \int_0^{\sqrt{p}} y^4 dy = \pi \left[\frac{1}{5} y^5 \right]_0^{\sqrt{p}} = \frac{1}{5} \pi p^2 \cdot \sqrt{p}$$

c $I(L) = I(M)$ geeft $\frac{1}{2} \pi p^2 = \frac{1}{5} \pi p^2 \cdot \sqrt{p}$
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{5} \sqrt{p}$
 $\sqrt{p} = \frac{5}{2}$
 $p = 6\frac{1}{4}$

Bladzijde 125

74 a $I(M) = 1\frac{2}{5} I(L)$ geeft $\left(21 - \frac{21}{a^2} \right) \pi = \frac{7}{5} \cdot 15\frac{3}{4} \pi$

$$21 - \frac{21}{a^2} = 22\frac{1}{20}$$

$$\frac{21}{a^2} = -\frac{21}{20}$$

$$a^2 = -20$$

$a^2 = -20$ heeft geen oplossingen, dus $I(M) = 1\frac{2}{5} I(L)$ lukt niet.

b $I(M) = 1\frac{3}{10} I(L)$ geeft $\left(21 - \frac{21}{a^2} \right) \pi = \frac{13}{10} \cdot 15\frac{3}{4} \pi$

$$21 - \frac{21}{a^2} = 20\frac{19}{40}$$

$$\frac{21}{a^2} = \frac{21}{40}$$

$$a^2 = 40$$

$a^2 = 40$ heeft twee oplossingen, dus $I(M) = 1\frac{3}{10} I(L)$ lukt wel.

75 a $f(x) = g_a(x)$ geeft $x^2 = a\sqrt{x}$

$$x^{1\frac{1}{2}} = a$$

$$x = a^{\frac{2}{3}}$$

$$x = \sqrt[3]{a^2}$$

$$O(V) = \int_0^{\sqrt[3]{a^2}} (a\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^{\sqrt[3]{a^2}} (ax^{\frac{1}{2}} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} ax^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{2}{3} a^2 - \frac{1}{3} a^2 = \frac{1}{3} a^2$$

$$O(V) = 10 \text{ geeft } \frac{1}{3} a^2 = 10$$

$$a^2 = 30$$

$$a = \sqrt{30} \vee a = -\sqrt{30}$$

vold. niet

$$\text{Dus } a = \sqrt{30}.$$

b $I(L) = \pi \int_0^{\sqrt[3]{a^2}} (a^2x - x^4) dx = \pi \left[\frac{1}{2} a^2 x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^{\sqrt[3]{a^2}} = \pi \left(\frac{1}{2} a^2 \cdot a^{1\frac{1}{3}} - \frac{1}{5} a^{3\frac{1}{3}} \right) = \frac{3}{10} \pi a^{3\frac{1}{3}}$

$$I(L) = 30\pi \text{ geeft } \frac{3}{10} \pi a^{3\frac{1}{3}} = 30\pi$$

$$a^{3\frac{1}{3}} = 100$$

$$a = 100^{\frac{3}{10}}$$

$$a = \sqrt[10]{1\,000\,000}$$

Bladzijde 126

76 a Is de top van p_2 het punt $T(t, t^2)$, dan is $(2t, 0)$ het andere snijpunt van p_2 met de x -as.
Dus $p_2: y = ax(x - 2t)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = ax(x - 2t) \\ \text{door } (t, t^2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} at(t - 2t) = t^2 \\ at \cdot -t = t^2 \\ a = -1 \end{array}$$

$$\text{Dus } p_2: y = -x(x - 2t) \text{ oftewel } p_2: y = -x^2 + 2tx.$$

b $O(V) = \int_0^t (-x^2 + 2tx - x^2) dx = \int_0^t (-2x^2 + 2tx) dx = \left[-\frac{2}{3} x^3 + tx^2 \right]_0^t = -\frac{2}{3} t^3 + t^3 = \frac{1}{3} t^3$

$$O(V) = 10 \text{ geeft } \frac{1}{3} t^3 = 10$$

$$t^3 = 30$$

$$t = \sqrt[3]{30}$$

c $I(L) = \pi \int_0^t ((-x^2 + 2tx)^2 - (x^2)^2) dx = \pi \int_0^t (x^4 - 4tx^3 + 4t^2x^2 - x^4) dx = \pi \int_0^t (-4tx^3 + 4t^2x^2) dx$
 $= \pi \left[-tx^4 + \frac{4}{3} t^2 x^3 \right]_0^t = \pi (-t^5 + \frac{4}{3} t^5) = \frac{1}{3} \pi t^5$

$$I(L) = 100\pi \text{ geeft } \frac{1}{3} \pi t^5 = 100\pi$$

$$t^5 = 300$$

$$t = \sqrt[5]{300}$$

77 a $e^x = a$ geeft $x = \ln(a)$, dus $k: x = \ln(a)$.

$$O(V) = \int_0^{\ln(a)} e^x dx = [e^x]_0^{\ln(a)} = e^{\ln(a)} - e^0 = a - 1$$

$$O(W) = a \cdot \ln(a) - O(V) = a \ln(a) - (a - 1) = a \ln(a) - a + 1$$

$$O(V) = O(W) \text{ geeft } a - 1 = a \ln(a) - a + 1$$

$$2a - 2 = a \ln(a)$$

$$\text{Voer in } y_1 = 2x - 2 \text{ en } y_2 = x \ln(x).$$

$$\text{De optie snijpunt geeft } x = 1 \text{ en } x \approx 4,92.$$

$$\text{Dus } a \approx 4,92.$$

$$\mathbf{b} \quad I(L) = \pi \int_0^{\ln(a)} (e^x)^2 dx = \pi \int_0^{\ln(a)} e^{2x} dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\ln(a)} = \pi \left(\frac{1}{2} e^{2 \ln(a)} - \frac{1}{2} e^0 \right) = \pi \left(\frac{1}{2} (e^{\ln(a)})^2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \pi a^2 - \frac{1}{2} \pi$$

$$I(M) = \pi \cdot a^2 \cdot \ln(a) - I(L) = \pi a^2 \ln(a) - \left(\frac{1}{2} \pi a^2 - \frac{1}{2} \pi \right) = \pi a^2 \ln(a) - \frac{1}{2} \pi a^2 + \frac{1}{2} \pi$$

$$I(L) = I(M) \text{ geeft } \frac{1}{2} \pi a^2 - \frac{1}{2} \pi = \pi a^2 \ln(a) - \frac{1}{2} \pi a^2 + \frac{1}{2} \pi$$

$$\pi a^2 - \pi = \pi a^2 \ln(a)$$

$$a^2 - 1 = a^2 \ln(a)$$

Voer in $y_1 = x^2 - 1$ en $y_2 = x^2 \ln(x)$.

De optie snijpunt geeft $x = 1$ en $x \approx 2,22$.

Dus $a \approx 2,22$.

$$\mathbf{c} \quad G(x) = x \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x \text{ geeft}$$

$$G'(x) = 1 \cdot \ln^2(x) + x \cdot 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} - \left(2 \cdot \ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x} \right) + 2 = \ln^2(x) + 2 \ln(x) - 2 \ln(x) - 2 + 2 = \ln^2(x)$$

$G'(x) = g(x)$, dus G is een primitieve van g .

$$\mathbf{d} \quad y = e^x \text{ geeft } x = \ln(y)$$

$$I(N) = \pi \int_1^a x^2 dy = \pi \int_1^a \ln^2(y) dy = \pi [y \ln^2(y) - 2y \ln(y) + 2y]_1^a$$

$$= \pi(a \ln^2(a) - 2a \ln(a) + 2a - (\ln^2(1) - 2 \ln(1) + 2)) = \pi(a \ln^2(a) - 2a \ln(a) + 2a - 2)$$

$$I(L) = 6 \cdot I(N) \text{ geeft } \frac{1}{2} \pi a^2 - \frac{1}{2} \pi = 6\pi(a \ln^2(a) - 2a \ln(a) + 2a - 2)$$

$$a^2 - 1 = 12(a \ln^2(a) - 2a \ln(a) + 2a - 2)$$

Voer in $y_1 = x^2 - 1$ en $y_2 = 12(x \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x - 2)$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 0,51$, $x = 1$ en $x \approx 2,28$.

Dus $a \approx 2,28$.

Bladzijde 127

$$\mathbf{78} \quad \mathbf{a} \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2 \text{ geeft } \frac{1}{2}x^2 = y + 2, \text{ dus } x^2 = 2y + 4.$$

$$\text{De inhoud van de afgeknotten paraboloiden is } I = \pi \int_0^p x^2 dy = \pi \int_0^p (2y + 4) dy = \pi [y^2 + 4y]_0^p = \pi(p^2 + 4p).$$

$$f(x) = \frac{1}{2}p \text{ geeft } \frac{1}{2}x^2 - 2 = \frac{1}{2}p$$

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}p + 2$$

$$x^2 = p + 4$$

Dus $A = \pi(p + 4)$.

Samen met hoogte p geeft dit $p \cdot A = p \cdot \pi(p + 4) = \pi(p^2 + 4p)$, en dit is gelijk aan I .

Dus voor de inhoud I van de afgeknotten paraboloiden geldt $I = p \cdot A$.

$$\mathbf{b} \quad PQ \text{ is een middellijn van de cirkel, dus de straal van de cirkel en dus van de bol is } \sqrt{p + 4} \text{ (zie a).}$$

$$\text{Dus } I(\text{bol}) = \frac{4}{3} \pi(p + 4) \sqrt{p + 4}.$$

$$I(\text{bol}) = I(\text{afgeknotten paraboloiden}) \text{ geeft } \frac{4}{3} \pi(p + 4) \sqrt{p + 4} = \pi(p^2 + 4p)$$

$$\frac{4}{3} (p + 4) \sqrt{p + 4} = p(p + 4)$$

$$p + 4 = 0 \vee \frac{4}{3} \sqrt{p + 4} = p$$

$$p = -4 \vee 4 \sqrt{p + 4} = 3p$$

$$\text{vold. niet } 16(p + 4) = 9p^2$$

$$16p + 64 = 9p^2$$

$$9p^2 - 16p - 64 = 0$$

$$D = (-16)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -64 = 2560$$

$$p = \frac{16 + \sqrt{2560}}{18} \vee p = \frac{16 - \sqrt{2560}}{18}$$

vold. niet

$$p = \frac{16 + \sqrt{2560}}{18} \text{ geeft straal bol} = \sqrt{\frac{16 + \sqrt{2560}}{18} + 4} \approx 2,77$$

- 79** Stel de straal van de bol is R .
 Dan is de inhoud van de bol $\frac{4}{3}\pi R^3$.
 Uit de bol zijn een cilinder en twee 'kapjes' geboord.
 Zie de figuur hiernaast met een dwarsdoorsnede van de situatie in een assenstelsel.

$$\angle A = 90^\circ, \text{ dus } OA = \sqrt{R^2 - 9}.$$

$$\text{De inhoud van de cilinder is } \pi \cdot (R^2 - 9) \cdot 6 = 6\pi R^2 - 54\pi.$$

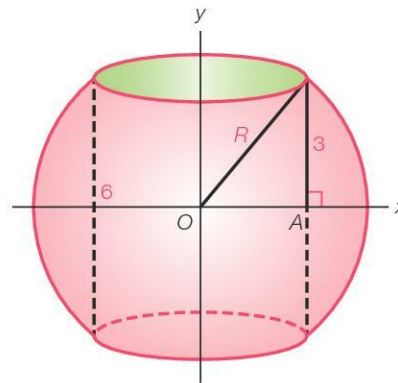
De dwarsdoorsnede van de bol is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = R^2$. Hieruit volgt $x^2 = R^2 - y^2$.

De inhoud van een kapje is

$$\begin{aligned} \pi \int_3^R x^2 dy &= \pi \int_3^R (R^2 - y^2) dy = \pi \left[R^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_3^R = \pi \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 - (3R^2 - 9) \right) \\ &= \frac{2}{3} \pi R^3 - 3\pi R^2 + 9\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(\text{bol}) - I(\text{cilinder}) - 2 \cdot I(\text{kapje}) &= \frac{4}{3} \pi R^3 - (6\pi R^2 - 54\pi) - 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \pi R^3 - 3\pi R^2 + 9\pi \right) \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 - 6\pi R^2 + 54\pi - \frac{4}{3} \pi R^3 + 6\pi R^2 - 18\pi \\ &= 36\pi \end{aligned}$$

De inhoud van het deel dat er overblijft, is dus 36π .



Diagnostische toets

Bladzijde 130

- 1** Stel $x_C = a$, dan is $x_B = 2a$.

$$f(2a) = g(a) \text{ geeft } \ln\left(\frac{1}{2} \cdot 2a\right) = \ln\left(\frac{2}{3-a}\right)$$

$$\ln(a) = \ln\left(\frac{2}{3-a}\right)$$

$$a = \frac{2}{3-a}$$

$$3a - a^2 = 2$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$(a-1)(a-2) = 0$$

$$a = 1 \vee a = 2$$

$$p = f(2a) = f(2) = \ln(1) = 0 \text{ vold. niet}$$

$$p = f(2a) = f(4) = \ln(2)$$

- 2** $f_p(x) = \frac{10x-15}{x^2+4} + p$ geeft $f_p'(x) = \frac{(x^2+4) \cdot 10 - (10x-15) \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{10x^2+40-20x^2+30x}{(x^2+4)^2} = \frac{-10x^2+30x+40}{(x^2+4)^2}$

$$f_p'(x) = 0 \text{ geeft } -10x^2 + 30x + 40 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 4$$

$$y_A = f_p(-1) = \frac{-10-15}{1+4} + p = -5 + p \text{ en } OA^2 = (-1)^2 + (-5+p)^2 = 1 + 25 - 10p + p^2 = p^2 - 10p + 26.$$

$$y_B = f_p(4) = \frac{40-15}{16+4} + p = 1\frac{1}{4} + p \text{ en } OB^2 = 4^2 + (1\frac{1}{4}+p)^2 = 16 + 1\frac{9}{16} + 2\frac{1}{2}p + p^2 = p^2 + 2\frac{1}{2}p + 17\frac{9}{16}.$$

$$OA = OB \text{ oftewel } OA^2 = OB^2 \text{ geeft } p^2 - 10p + 26 = p^2 + 2\frac{1}{2}p + 17\frac{9}{16}$$

$$-12\frac{1}{2}p = -8\frac{7}{16}$$

$$p = \frac{27}{40}$$

3 $L = g(p) - f(p) = 3\frac{1}{2} - p - (2 - \sqrt{2p}) = 1\frac{1}{2} - p + \sqrt{2p}$ geeft

$$\frac{dL}{dp} = -1 + \frac{1}{2\sqrt{2p}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2p}} - 1$$

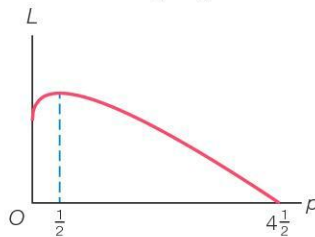
$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{1}{\sqrt{2p}} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2p}} = 1$$

$$\sqrt{2p} = 1$$

$$2p = 1$$

$$p = \frac{1}{2}$$



Dus voor $p = \frac{1}{2}$ is L maximaal.

4 a $A = O(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (2\sqrt{p} - p) = p\sqrt{p} - \frac{1}{2}p^2 = p^{1\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}p^2$ geeft $\frac{dA}{dp} = 1\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}} - p = 1\frac{1}{2}\sqrt{p} - p$

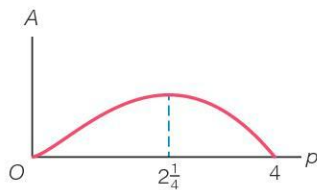
$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } 1\frac{1}{2}\sqrt{p} - p = 0$$

$$p = 1\frac{1}{2}\sqrt{p}$$

$$p^2 = 2\frac{1}{4}p$$

$$p = 0 \quad \vee \quad p = 2\frac{1}{4}$$

vold. niet



Dus voor $p = 2\frac{1}{4}$ is de oppervlakte van driehoek OPQ maximaal.

$$A_{\max} = 2\frac{1}{4}\sqrt{2\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \cdot (2\frac{1}{4})^2 = 2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{16} = 3\frac{3}{8} - 2\frac{17}{32} = \frac{27}{32}$$

b $L = BP = \sqrt{(x_p - x_B)^2 + (y_p - y_B)^2} = \sqrt{(p-3)^2 + (2\sqrt{p}-p-0)^2} = \sqrt{(p-3)^2 + (2\sqrt{p}-p)^2}$
 $= \sqrt{p^2 - 6p + 9 + 4p - 4p\sqrt{p} + p^2} = \sqrt{2p^2 - 4p\sqrt{p} - 2p + 9}$

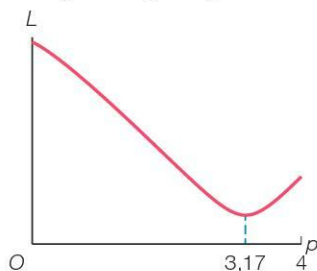
c $L = \sqrt{2p^2 - 4p\sqrt{p} - 2p + 9} = (2p^2 - 4p^{1\frac{1}{2}} - 2p + 9)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2}(2p^2 - 4p^{1\frac{1}{2}} - 2p + 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4p - 6p^{\frac{1}{2}} - 2) = \frac{4p - 6\sqrt{p} - 2}{2\sqrt{2p^2 - 4p\sqrt{p} - 2p + 9}} = \frac{2p - 3\sqrt{p} - 1}{\sqrt{2p^2 - 4p\sqrt{p} - 2p + 9}}$$

Er moet gelden $\frac{dL}{dp} = 0$ oftewel $2p - 3\sqrt{p} - 1 = 0$.

Voer in $y_1 = 2x - 3\sqrt{x} - 1$.

De optie nulpunt geeft $x \approx 3,17$.



Dus voor $p \approx 3,17$ is L minimaal.

5 a $\sin(\alpha) = \frac{AS}{5}$ geeft $AS = 5 \sin(\alpha)$

$\cos(\alpha) = \frac{BS}{5}$ geeft $BS = 5 \cos(\alpha)$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ADS$ geeft $DS = \sqrt{6^2 - (5 \sin(\alpha))^2} = \sqrt{36 - 25 \sin^2(\alpha)}$.

$BD = BS + DS = 5 \cos(\alpha) + \sqrt{36 - 25 \sin^2(\alpha)}$

b $O(ABCD) = 2 \cdot O(\triangle ABD) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5 \cos(\alpha) + \sqrt{36 - 25 \sin^2(\alpha)}) \cdot 5 \sin(\alpha)$

Voer in $y_1 = (5 \cos(x) + \sqrt{36 - 25 \sin^2(x)}) \cdot 5 \sin(x)$.

De optie maximum geeft $x = 50,19\dots$

Dus de oppervlakte van $ABCD$ is maximaal voor $\alpha \approx 50^\circ$.

Alternatieve uitwerking

De oppervlakte van vierhoek $ABCD$ is maximaal als de oppervlakte van $\triangle ABD$ maximaal is.

Dat is het geval als de hoogte die bij de zijde AB hoort maximaal is. En dat is het geval als $\angle A = 90^\circ$.

Dit geeft $\tan(\alpha) = \frac{AD}{AB} = \frac{6}{5}$ en hieruit volgt $\alpha \approx 50^\circ$.

6 $f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - 5x$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 18x - 5$

$f''(x) = 12x^2 - 6x - 18$

$f'(1) = -22 < 0$, dus de grafiek van f is dalend voor $x = 1$.

$f''(1) = -12 < 0$, dus de grafiek van f is toenemend dalend voor $x = 1$.

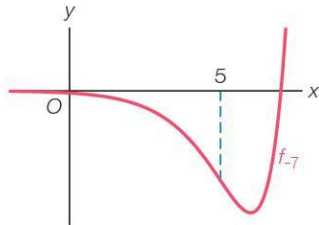
7 $f_a(x) = (x+a)e^x$ geeft $f'_a(x) = 1 \cdot e^x + (x+a) \cdot e^x = (x+a+1)e^x$

$f'_a(x) = (x+a+1)e^x$ geeft $f''_a(x) = 1 \cdot e^x + (x+a+1) \cdot e^x = (x+a+2)e^x$

$f''_a(5) = 0$ geeft $(a+7)e^5 = 0$

$a+7=0$

$a=-7$



Dus voor $a = -7$ gaat de grafiek van f_a bij $x = 5$ over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

8 a y is evenredig is met $x \cdot \sqrt[3]{x}$, dus $y = ax \cdot \sqrt[3]{x}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = ax \cdot \sqrt[3]{x} \\ x = 8 \text{ en } y = 40 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8a \cdot \sqrt[3]{8} = 40 \\ 8a \cdot 2 = 40 \\ 16a = 40 \\ a = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $y = 2\frac{1}{2}x \cdot \sqrt[3]{x} = \frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}}$ en dit geeft $y' = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}$ en $y'' = \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}$.

Omdat voor $x > 0$ geldt $x^{\frac{1}{3}} > 0$ en $x^{-\frac{2}{3}} > 0$, is $y' > 0$ en $y'' > 0$.

Dus y is toenemend stijgend voor $x > 0$.

b y is omgekeerd evenredig met $e^{0,1x}$, dus $y = \frac{a}{e^{0,1x}}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{a}{e^{0,1x}} \\ x = 10 \text{ en } y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{a}{e^1} = 4 \\ a = 4e \end{array}$$

Dus $y = \frac{4e}{e^{0,1x}} = 4e^{1-0,1x}$ en dit geeft $y' = 4e^{1-0,1x} \cdot -0,1 = -0,4e^{1-0,1x}$ en

$y'' = -0,4e^{1-0,1x} \cdot -0,1 = 0,04e^{1-0,1x}$.

Omdat geldt $e^{1-0,1x} > 0$, is $y' < 0$ en $y'' > 0$.

Dus y is afnemend dalend.

9 $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{-2x+4}{2x-1} = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$
 $-2x+4 = (2x-1)(-\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3})$
 $-2x+4 = -1\frac{1}{3}x^2 + 5\frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3}$
 $1\frac{1}{3}x^2 - 8x + 6\frac{2}{3} = 0$
 $x^2 - 6x + 5 = 0$
 $(x-1)(x-5) = 0$
 $x = 1 \vee x = 5$

$$f(x) = \frac{-2x+4}{2x-1} = \frac{-(2x-1)-1+4}{2x-1} = -1 + \frac{3}{2x-1}$$

$$O(V) = \int_1^5 \left(-\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3} - \left(-1 + \frac{3}{2x-1} \right) \right) dx = \int_1^5 \left(-\frac{2}{3}x + 3\frac{2}{3} - \frac{3}{2x-1} \right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^2 + 3\frac{2}{3}x - 1\frac{1}{2}\ln|2x-1| \right]_1^5$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 25 + 3\frac{2}{3} \cdot 5 - 1\frac{1}{2}\ln(9) - \left(-\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2}\ln(1) \right) = -8\frac{1}{3} + 18\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2}\ln(3^2) - 3\frac{1}{3} = 6\frac{2}{3} - 3\ln(3)$$

10 a $y = 4 \ln(x)$ geeft $\ln(x) = \frac{1}{4}y$
 $x = e^{\frac{1}{4}y}$

$$O(V) = \int_0^p e^{\frac{1}{4}y} dy = \left[4e^{\frac{1}{4}y} \right]_0^p = 4e^{\frac{1}{4}p} - 4$$

$$O(V) = O(W) \text{ oftewel } O(V) = \frac{1}{2}p^2 \text{ geeft } 4e^{\frac{1}{4}p} - 4 = \frac{1}{2}p^2.$$

Voer in $y_1 = 4e^{\frac{1}{4}x} - 4$ en $y_2 = \frac{1}{2}x^2$.

De optie snijpunt geeft $x = 2,963\dots$, dus $p \approx 2,96$.

b $y = 4 \ln(x)$ geeft $\ln(x) = \frac{1}{4}y$

$$x = e^{\frac{1}{4}y}$$

$$x^2 = e^{\frac{1}{2}y}$$

$$I(L) = \pi \int_0^p x^2 dy = \pi \int_0^p e^{\frac{1}{2}y} dy = \pi \left[2e^{\frac{1}{2}y} \right]_0^p = \pi(2e^{\frac{1}{2}p} - 2)$$

$$I(L) = I(M) \text{ oftewel } I(L) = \frac{1}{2} \cdot I(\text{cilinder}) \text{ geeft } \pi(2e^{\frac{1}{2}p} - 2) = \frac{1}{2}\pi p^2 \cdot p$$

$$2e^{\frac{1}{2}p} - 2 = \frac{1}{2}p^3$$

Voer in $y_1 = 2e^{\frac{1}{2}x} - 2$ en $y_2 = \frac{1}{2}x^3$.

De optie snijpunt met $1\frac{1}{2} < x < 8$ geeft $x = 1,801\dots$

Dus $p \approx 1,80$.

16 Examentraining

16.1 Algemene vaardigheden

Bladzijde 134

1 a $Q = 50$ geeft $36x^3 = 50$, dus $x = \sqrt[3]{\frac{25}{18}}$.

$$\frac{P}{Q} = \frac{23x^2}{36x^3} = \frac{23}{36x} = \frac{23}{36 \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{18}}} \approx 0,57$$

b $\frac{10}{3x-5} = 3x-8$

$$(3x-5)(3x-8) = 10$$

$$9x^2 - 24x - 15x + 40 = 10$$

$$9x^2 - 39x + 30 = 0$$

$$3x^2 - 13x + 10 = 0$$

$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 49$$

$$x = \frac{13 \pm 7}{6} = 3\frac{1}{3} \vee x = \frac{13-7}{6} = 1$$

c $\cos(\alpha) = \frac{AD}{3}$, dus $AD = 3 \cos(\alpha)$.

$$\sin(\alpha) = \frac{CD}{3}$$
, dus $CD = 3 \sin(\alpha)$.

$$BD = \sqrt{10^2 - (3 \sin(\alpha))^2} = \sqrt{100 - 9 \sin^2(\alpha)}$$

$$AB = AD + BD = 3 \cos(\alpha) + \sqrt{100 - 9 \sin^2(\alpha)}$$

d
$$\left. \begin{array}{l} F = \frac{10a}{b^2} \\ a = \frac{c}{2b} \end{array} \right\} F = \frac{10}{b^2} \cdot \frac{c}{2b} = \frac{10c}{2b^3} = \frac{5c}{b^3} \left. \vphantom{\begin{array}{l} F = \frac{10a}{b^2} \\ a = \frac{c}{2b} \end{array}} \right\} F = \frac{5c}{((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}})^3} = \frac{5c}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e
$$\left. \begin{array}{l} y^2 = \frac{A^2x}{p}, \text{ dus } y^4 = \frac{A^4x^2}{p^2} \\ p^2 = A+B \end{array} \right\} y^4 = \frac{A^4x^2}{A+B}$$

$$y = \sqrt[4]{\frac{A^4x^2}{A+B}} = A \cdot \sqrt[4]{\frac{x^2}{A+B}}$$

f
$$g(x) = \frac{5}{2 + \sqrt{x+4}} \cdot \frac{2 - \sqrt{x+4}}{2 - \sqrt{x+4}} = \frac{10 - 5\sqrt{x+4}}{4 - (x+4)} = \frac{10 - 5\sqrt{x+4}}{-x} = \frac{5\sqrt{x+4} - 10}{x} = f(x)$$

g $N = at + b$

$$P(5) = 100, \text{ dus } 16N^3 = 100 \text{ en dit geeft } N = \sqrt[3]{\frac{100}{16}} = \sqrt[3]{6,25}.$$

$$P(8) = 200, \text{ dus } 16N^3 = 200 \text{ en dit geeft } N = \sqrt[3]{\frac{200}{16}} = \sqrt[3]{12,5}.$$

$$a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\sqrt[3]{12,5} - \sqrt[3]{6,25}}{8 - 5} = 0,159...$$

$$\left. \begin{array}{l} N = 0,159...t + b \\ t = 5 \text{ en } N = \sqrt[3]{6,25} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,159... \cdot 5 + b = \sqrt[3]{6,25} \\ b = 1,044... \end{array}$$

$$\text{Dus } N = 0,16t + 1,04.$$

$$\text{h } \left. \begin{array}{l} P = aQ \\ Q = 30 \text{ en } P = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 30a = 12 \\ a = 0,4 \end{array}$$

Dus $P = 0,4Q$.

$$Q \cdot R^{\frac{1}{3}} = 10, \text{ dus } R^{\frac{1}{3}} = \frac{10}{Q} \text{ en } R = \frac{1000}{Q^3}.$$

$$S = \frac{R}{R+1} = \frac{\frac{1000}{Q^3}}{\frac{1000}{Q^3} + 1} = \frac{1000}{1000 + Q^3}$$

$$T = 50PS = 50 \cdot 0,4Q \cdot \frac{1000}{1000 + Q^3} = \frac{20000Q}{Q^3 + 1000}$$

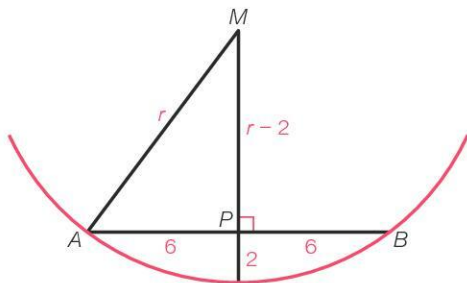
$$\text{i } \text{Voer in } y_1 = \frac{100}{\sqrt{x^2 + 17^2}} + \frac{100}{\sqrt{17^2 + (30-x)^2}}.$$

De optie minimum geeft $x = 15$ en $y = 8,821...$

De optie maximum geeft $x = 5,062...$ en $y = 8,951...$ en ook $x = 24,937...$ en $y = 8,951...$

$$\text{Dus } \frac{8,951... - 8,821...}{8,821...} \times 100\% \approx 1,47\%.$$

j



$$MP^2 + AP^2 = AM^2$$

$$(r-2)^2 + 6^2 = r^2$$

$$r^2 - 4r + 4 + 36 = r^2$$

$$-4r = -40$$

$$r = 10$$

Dus de straal van de cirkel is 10.

Bladzijde 142

$$\text{2 a } AB = 1 + 4 = 5$$

$$\cos(\alpha) = \frac{AE}{1} \text{ geeft } AE = \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{CE}{1} \text{ geeft } CE = \sin(\alpha)$$

$$\text{In } \triangle CDE \text{ is } DE^2 = 16 - \sin^2(\alpha)$$

$$DE = \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$$

$$s = AB - AD = 5 - AE - DE = 5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$$

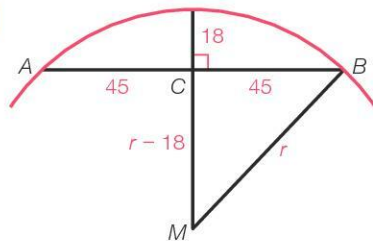
$$\text{b } \text{Voer in } y_1 = |5 - \cos(x) - \sqrt{16 - \sin^2(x)} - (1 - \cos(x) + \frac{1}{8}\sin^2(x))|.$$

De optie maximum geeft $x = 1,5707...$ en $y = 0,0020...$

Dus het maximale verschil is ongeveer 0,002.

Bladzijde 143

3



$$\begin{aligned}\text{In } \triangle BCM \text{ is } r^2 &= (r - 18)^2 + 45^2 \\ r^2 &= r^2 - 36r + 324 + 2025 \\ 36r &= 2349 \\ r &= 65\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Dus de straal is ongeveer 65 cm.

4

$$\begin{aligned}\frac{5}{4x-6} &= x - 3\frac{1}{2} \\ (4x-6)(x-3\frac{1}{2}) &= 5 \\ 4x^2 - 20x + 21 &= 5 \\ 4x^2 - 20x + 16 &= 0 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ (x-1)(x-4) &= 0 \\ x &= 1 \vee x = 4 \\ x = 1 &\text{ geeft } A(1, -2\frac{1}{2}) \\ x = 4 &\text{ geeft } B(4, \frac{1}{2})\end{aligned}$$

Bladzijde 144

5

$$\left. \begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{x}{r} \\ E &= \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi r^2} \cdot \cos(\alpha) \end{aligned} \right\} E = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi} \cdot \frac{x}{r^3}$$

$$r^2 = x^2 + d^2, \text{ dus } r = (x^2 + d^2)^{\frac{1}{2}} \text{ en } r^3 = (x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Dit geeft } E = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi} \cdot \frac{x}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{b } E_{\text{totaal}} = \frac{500}{4\pi} \cdot \frac{25}{(25^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{500}{4\pi} \cdot \frac{25}{(25^2 + (40-d)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{500}{4\pi} \cdot \frac{25}{(25^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{500}{4\pi} \cdot \frac{25}{(25^2 + (40-x)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

De optie minimum geeft $x = 20$ en $y = 0,0606...$

De optie maximum geeft $x = 1,924...$ en $y = 0,0736...$ en ook $x = 38,075...$ en $y = 0,0736...$

$$\frac{0,0606...}{0,0736...} \times 100\% = 82,34...\%$$

Dus het werkoppervlak wordt voldoende gelijkmatig verlicht.

Bladzijde 145

6

$$\left. \begin{aligned} (1) \text{ geeft } v^2 &= v_0^2 + 2g(h_0 - h) = v_0^2 + 2gx, \text{ dus } v = \sqrt{v_0^2 + 2gx} \\ (2) \text{ geeft } r^2 &= r_0^2 \cdot \frac{v_0}{v} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r^2 &= r_0^2 \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gx}} \\ r^4 &= r_0^4 \cdot \frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gx} \\ r &= r_0 \cdot \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gx}} \end{aligned}$$

7

$$h(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{x+1}} \cdot \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}} = \frac{2 - 2\sqrt{x+1}}{1 - (x+1)} = \frac{-2 + 2\sqrt{x+1}}{x} = f(x) \text{ voor } x \neq 0$$

Bladzijde 146

8 a $\frac{4}{3}\pi r^3 = 3^3$ geeft $r = \sqrt[3]{\frac{81}{4\pi}}$

$$\frac{A}{V} = \frac{4\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{81}{4\pi}}\right)^2}{27} \approx 1,61$$

b $r(t) = at + 1,5$

$$V(0) = \frac{4}{3}\pi \cdot 1,5^3 = 14,137\dots, \text{ dus } V(10) = \frac{1}{2} \cdot 14,137\dots = 7,068\dots$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 7,068\dots \text{ geeft } r = 1,190\dots$$

$$r(10) = 1,190\dots \text{ geeft } 10a + 1,5 = 1,190\dots$$

$$a = -0,030\dots$$

$$\text{Dus } r(t) = -0,030\dots t + 1,5.$$

$$r(t) = 0 \text{ geeft } -0,030\dots t + 1,5 = 0$$

$$t = 48,47\dots$$

Dus vanaf 49 minuten.

Bladzijde 147

9 $N = aV$
 $V = 20$ en $N = 6$ $\left. \begin{array}{l} a \cdot 20 = 6 \\ a = 0,3, \text{ dus } N = 0,3V \end{array} \right\}$

$$V \cdot T^{0,25} = 150 \text{ geeft } T^{0,25} = \frac{150}{V}, \text{ dus } T = \left(\frac{150}{V}\right)^4.$$

$$d = \frac{T}{T+2} = \frac{\frac{150^4}{V^4}}{\frac{150^4}{V^4} + 2} = \frac{150^4}{150^4 + 2V^4} = \frac{1}{1 + \frac{2}{150^4} \cdot V^4}$$

$$A = 1440 \cdot N \cdot d = 1440 \cdot 0,3V \cdot \frac{1}{\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1} = \frac{432V}{\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1}$$

16.2 Functies en grafieken**Bladzijde 148**

10 a Stel de lengte van het vierkant is p .

$$\text{Dan geldt } f(1+p) = p, \text{ dus } (1+p-4)^2 = p$$

$$(p-3)^2 = p$$

$$p^2 - 6p + 9 - p = 0$$

$$p^2 - 7p + 9 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 13$$

$$p = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \vee p = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}$$

vold. niet

$$\text{Dus de lengte van het vierkant is } \frac{7 - \sqrt{13}}{2} = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

b Er moet gelden $f_a(4+p) + f_a(4-p) = 2 \cdot y_p$.

$$f_a(4+p) + f_a(4-p) = \frac{16+4p+a}{4+p-4} + \frac{16-4p+a}{4-p-4} = \frac{16+4p+a}{p} - \frac{16-4p+a}{p} = \frac{8p}{p} = 8 = 2 \cdot y_p$$

Dus voor elke waarde van a is de grafiek van f_a puntsymmetrisch in $P(4, 4)$.

c Voor f geldt $y = \frac{1}{2}(x-4)^3 + 3$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{1}{2}(y-4)^3 + 3$

$$2x = (y-4)^3 + 6$$

$$(y-4)^3 = 2x - 6$$

$$y-4 = \sqrt[3]{2x-6}$$

$$y = 4 + \sqrt[3]{2x-6}$$

$$\text{Dus } f^{\text{inv}}(x) = 4 + \sqrt[3]{2x-6}.$$

d Voor f_b geldt $y = \frac{3}{x-2} + b$, dus voor f_b^{inv} geldt $x = \frac{3}{y-2} + b$

$$\frac{3}{y-2} = x - b$$

$$y - 2 = \frac{3}{x - b}$$

$$y = \frac{3}{x - b} + 2$$

$f_b^{\text{inv}} = f_b$ voor $b = 2$.

e $f(x) = \frac{6}{2x-5}$

↓ translatie $(-3, 2)$

$$g(x) = \frac{6}{2(x+3)-5} + 2 = \frac{6}{2x+1} + 2$$

Voor g geldt $y = \frac{6}{2x+1} + 2$, dus voor g^{inv} geldt $x = \frac{6}{2y+1} + 2$

$$\frac{6}{2y+1} = x - 2$$

$$2y + 1 = \frac{6}{x - 2}$$

$$2y = \frac{6}{x-2} - 1 = \frac{6 - (x-2)}{x-2} = \frac{-x+8}{x-2}$$

$$y = \frac{-x+8}{2x-4}$$

Dus $g^{\text{inv}}(x) = \frac{-x+8}{2x-4}$.

f Los op $\sqrt[3]{2x-2} + 1 = x$

$$\sqrt[3]{2x-2} = x - 1$$

$$2x - 2 = (x - 1)^3$$

$$2(x - 1) = (x - 1)^3$$

$$x - 1 = 0 \vee 2 = (x - 1)^2$$

$$x = 1 \vee x - 1 = \sqrt{2} \vee x - 1 = -\sqrt{2}$$

$$x = 1 \vee x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}$$

Dus $(1, 1)$, $(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ en $(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$.

Alternatieve uitwerking

Voor f geldt $y = \sqrt[3]{2x-2} + 1$, dus voor f^{inv} geldt $x = \sqrt[3]{2y-2} + 1$

$$\sqrt[3]{2y-2} = x - 1$$

$$2y - 2 = (x - 1)^3$$

$$2y = 2 + (x - 1)^3$$

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1)^3$$

Los op $\frac{1}{2}(x - 1)^3 + 1 = \sqrt[3]{2x-2} + 1$

$$(x - 1)^3 = 2 \cdot \sqrt[3]{2x-2}$$

$$(x - 1)^9 = 8(2x - 2)$$

$$(x - 1)^9 = 16(x - 1)$$

$$x - 1 = 0 \vee (x - 1)^8 = 2^4$$

$$x = 1 \vee x - 1 = 2^{\frac{1}{2}} \vee x - 1 = -2^{\frac{1}{2}}$$

$$x = 1 \vee x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}$$

Dus $(1, 1)$, $(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ en $(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$.

$$\text{g} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-5}{3x+6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{3 + \frac{6}{x}} = \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

Dus de horizontale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = \frac{2}{3}$.

$3x + 6 = 0$ geeft $x = -2$, dus de verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = -2$,

dus de horizontale asymptoot van de grafiek van f^{inv} is de lijn $y = -2$.

De gevraagde afstand is $\frac{2}{3} - (-2) = 2\frac{2}{3}$.

$$\text{h} \quad \text{Los op } \frac{5}{p(x-3)} + 6 = 2x$$

$$\frac{5}{p(x-3)} = 2x - 6$$

$$\frac{5}{p(x-3)} = 2(x-3)$$

$$2p(x-3)^2 = 5$$

$$(x-3)^2 = \frac{5}{2p}$$

$$x = 3 + \sqrt{\frac{5}{2p}} \vee x = 3 - \sqrt{\frac{5}{2p}}$$

$$\text{Dus } x_A = 3 + \sqrt{\frac{5}{2p}} \vee x_A = 3 - \sqrt{\frac{5}{2p}}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(3 + \sqrt{\frac{5}{2p}} \right) = 3 + 0 = 3$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(3 - \sqrt{\frac{5}{2p}} \right) = 3 - 0 = 3$$

$$\text{Dus } \lim_{p \rightarrow \infty} x_A = 3.$$

- i** De teller moet een factor $(2x-1)$ bevatten. De andere factor van de teller is dan $(2x-3)$, want $2x \cdot 2x = 4x^2$ en $-1 \cdot -3 = 3$.

Dus de teller is $(2x-1)(2x-3) = 4x^2 - 6x - 2x + 3 = 4x^2 - 8x + 3$.

$$\text{Dus } f_8(x) = \frac{4x^2 - 8x + 3}{(x^2 + 4)(2x-1)} = \frac{(2x-1)(2x-3)}{(x^2 + 4)(2x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f_8(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-3)(2x-1)}{(x^2 + 4)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-3}{x^2 + 4} = \frac{1-3}{\frac{1}{4} + 4} = -\frac{8}{17}$$

De coördinaten van de perforatie zijn $(\frac{1}{2}, -\frac{8}{17})$.

- j** Voor $x < 4$ is $|\frac{1}{4}x - 1| = -\frac{1}{4}x + 1$,

dus voor $x < 4$ is $f(x) = (-\frac{1}{4}x + 1)(\frac{1}{2}x + 3) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + 3$ en $f'(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

$$\lim_{x \uparrow 4} f'(x) = \lim_{x \uparrow 4} (-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}) = -1 - \frac{1}{4} = -1\frac{1}{4}$$

Bladzijde 152

11 a Voor f_c geldt $y = \frac{1}{c(x-1)} + 1$, dus voor f_c^{inv} geldt $x = \frac{1}{c(y-1)} + 1$

$$\frac{1}{c(y-1)} = x - 1$$

$$c(y-1) = \frac{1}{x-1}$$

$$y-1 = \frac{1}{c(x-1)}$$

$$y = \frac{1}{c(x-1)} + 1 = f_c(x)$$

b $f_c(1+p) + f_c(1-p) = \frac{1}{cp} + 1 - \frac{1}{cp} + 1 = 2$

$$\text{Dus } \frac{f_c(1+p) + f_c(1-p)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

c Los op $\frac{1}{c(x-1)} + 1 = x$

$$\frac{1}{c(x-1)} = x - 1$$

$$c(x-1)^2 = 1$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{c}$$

$$x-1 = \sqrt{\frac{1}{c}} \vee x-1 = -\sqrt{\frac{1}{c}}$$

$$x = 1 + \sqrt{\frac{1}{c}} \vee x = 1 - \sqrt{\frac{1}{c}}$$

$$\text{Dus } x_A = 1 - \sqrt{\frac{1}{c}}.$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} x_A = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{c}}\right) = 1 - 0 = 1$$

A ligt op de lijn $y = x$, dus ook $\lim_{c \rightarrow \infty} y_A = 1$.

Dus het punt $S(1, 1)$ is het limietpunt van A .

12 a Voor f geldt $y = (x+1)^3 - 1$, dus voor f^{inv} geldt $x = (y+1)^3 - 1$

$$(y+1)^3 = x+1$$

$$y+1 = \sqrt[3]{x+1}$$

$$y = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

Dus g is de inverse van f .

b De grafieken van f en $g = f^{\text{inv}}$ snijden elkaar op de lijn $y = x$.

Dus los op $f(x) = x$.

Dit geeft $(x+1)^3 - 1 = x$

$$(x+1)^3 = x+1$$

$$x+1 = 0 \vee (x+1)^2 = 1$$

$$x = -1 \vee x+1 = 1 \vee x+1 = -1$$

$$x = -1 \vee x = 0 \vee x = -2$$

De gemeenschappelijke punten zijn $(-1, -1)$, $(0, 0)$ en $(-2, -2)$.

Bladzijde 153

13 Van de noemer is alleen 2 een nulpunt.

Voor een perforatie moet dus 2 ook een nulpunt van de teller zijn.

$$\text{Dus } px^2 + 4px + 6 = (x-2)(px-3)$$

$$px^2 + 4px + 6 = px^2 - 3x - 2px + 6$$

$$px^2 + 4px + 6 = px^2 - (2p+3)x + 6$$

$$\text{Hieruit volgt } 4p = -(2p+3)$$

$$4p = -2p - 3$$

$$6p = -3$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f_{-\frac{1}{2}}(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(-\frac{1}{2}x-3)}{(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{1}{2}x-3}{x^2+1} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

Dus de perforatie is $(2, -\frac{4}{5})$.

14 De grafiek van f heeft de verticale asymptoot $x = 1\frac{1}{2}$, dus ook de grafiek van g heeft de verticale asymptoot $x = 1\frac{1}{2}$.

De grafiek van f heeft de horizontale asymptoot $y = 0$, dus de grafiek van g heeft de horizontale asymptoot $y = a$.

Dus de verticale asymptoot van de inverse van g is de lijn $x = a$.

$$\text{Dus } |a - 1\frac{1}{2}| = 4$$

$$a - 1\frac{1}{2} = 4 \vee a - 1\frac{1}{2} = -4$$

$$a = 5\frac{1}{2} \vee a = -2\frac{1}{2}$$

- 15 Stel de zijde van het vierkant is p .

$$\begin{aligned}\text{Er geldt } f(1+p) &= p, \text{ dus } \frac{1}{1+p} = p \\ p(1+p) &= 1 \\ p^2 + p - 1 &= 0 \\ D &= 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5 \\ p &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vee p = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

De lengte van de zijde is $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

- 16 $x_A = 2$, dus $A(2, 1)$.

$$\begin{aligned}\text{Voor } x < 2 \text{ geldt } f(x) &= (-x+2)\left(\frac{1}{2}x+2\right)+1 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - 2x + x + 4 + 1 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - x + 5\end{aligned}$$

Voor $x < 2$ geldt $f'(x) = -x - 1$.

$$l: y = ax + b \text{ met } a = \lim_{x \uparrow 2} f'(x) = \lim_{x \uparrow 2} (-x - 1) = -3$$

$$\left. \begin{aligned} y &= -3x + b \\ \text{door } A(2, 1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -3 \cdot 2 + b &= 1 \\ -6 + b &= 1 \\ b &= 7 \end{aligned}$$

Dus $l: y = -3x + 7$.

16.3 Differentiaal- en integraalrekening

Bladzijde 154

- 17 a $f(x) = \frac{5x}{0,1x^4 + 3}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(0,1x^4 + 3) \cdot 5 - 5x \cdot 0,4x^3}{(0,1x^4 + 3)^2} = \frac{0,5x^4 + 15 - 2x^4}{(0,1x^4 + 3)^2} = \frac{-1,5x^4 + 15}{(0,1x^4 + 3)^2}$$

$$\begin{aligned}f'(x) = 0 \text{ geeft } -1,5x^4 + 15 &= 0 \\ x^4 &= 10 \\ x &= \sqrt[4]{10} \quad (x > 0)\end{aligned}$$

Dus de functie is maximaal voor $x = \sqrt[4]{10}$.

- b $H = \frac{2x}{(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}}$ geeft

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dx} &= \frac{(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 - 2x \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2 + 4)^3} = \frac{(x^2 + 4) \cdot 2 - 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x}{(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2x^2 + 8 - 6x^2}{(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dx} = 0 \text{ geeft } 8 - 4x^2 &= 0 \\ 4x^2 &= 8 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \sqrt{2} \quad (x > 0)\end{aligned}$$

Dus H is maximaal voor $x = \sqrt{2}$.

- c $b = OA + AB = OA + AD = a + f(a) = a + \frac{64}{3a\sqrt{a}} = a + \frac{64}{3} a^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{db}{da} = 1 - 32a^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{32}{a^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{db}{da} = 0 \text{ geeft } 1 - \frac{32}{a^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\begin{aligned}a^{\frac{1}{2}} &= 32 \\ a^{\frac{1}{2}} &= 2^5 \\ a &= 2^2 = 4\end{aligned}$$

$$a = 4 \text{ geeft } b = 4 + \frac{64}{3 \cdot 4 \cdot 2} = 6\frac{2}{3}$$

De minimale waarde van b is $6\frac{2}{3}$.

d $f(0) = \frac{8}{1 + \sqrt{9}} = \frac{8}{4} = 2$ en $g(0) = 0 + 2 = 2$, dus $(0, 2)$ is snijpunt.

$$f(x) = \frac{8}{1 + \sqrt{2x+9}} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \sqrt{2x+9}) \cdot 0 - 8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+9}} \cdot 2}{(1 + \sqrt{2x+9})^2} = \frac{-8}{(1 + \sqrt{2x+9})^2 \cdot \sqrt{2x+9}}$$

$$f'(0) = \frac{-8}{(1 + \sqrt{9})^2 \cdot \sqrt{9}} = \frac{-8}{16 \cdot 3} = -\frac{1}{6}$$

$$g'(x) = 6, \text{ dus } g'(0) = 6.$$

Er geldt $f'(0) \cdot g'(0) = -\frac{1}{6} \cdot 6 = -1$, dus de grafieken van f en g snijden elkaar loodrecht in het punt $(0, 2)$.

e Voor raken moet gelden $f_p(x) = g(x) \wedge f'_p(x) = g'(x)$.

$$f'_p(x) = g'(x) \text{ geeft } 2x + p = 1, \text{ dus } p = 1 - 2x.$$

$$p = 1 - 2x \text{ invullen bij } f_p(x) = g(x) \text{ geeft } x^2 + (1 - 2x) \cdot x + 2(1 - 2x) = x + 5$$

$$x^2 + x - 2x^2 + 2 - 4x = x + 5$$

$$-x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x + 1)(x + 3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = -3$$

$$x = -1 \text{ geeft } p = 1 - 2 \cdot -1 = 3$$

$$x = -3 \text{ geeft } p = 1 - 2 \cdot -3 = 7$$

18 a $f(x) = x\sqrt{x} = x^{1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = f'(p) = 1\frac{1}{2}\sqrt{p}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= 1\frac{1}{2}\sqrt{p} \cdot x + b \\ \text{door } P(p, p\sqrt{p}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 1\frac{1}{2}\sqrt{p} \cdot p + b &= p\sqrt{p} \\ b &= -\frac{1}{2}p\sqrt{p} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } k: y = 1\frac{1}{2}\sqrt{p} \cdot x - \frac{1}{2}p\sqrt{p}.$$

$$k \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } 1\frac{1}{2}\sqrt{p} \cdot x = \frac{1}{2}p\sqrt{p} \\ x = \frac{1}{3}p, \text{ dus } A(\frac{1}{3}p, 0).$$

Punt B is $(p, 0)$.

$$O(V) = \int_0^p x\sqrt{x} \, dx - O(\triangle ABP) = \int_0^p x^{1\frac{1}{2}} \, dx - O(\triangle ABP) = \left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} \right]_0^p - \frac{1}{2} \cdot (p - \frac{1}{3}p) \cdot p\sqrt{p} \\ = \frac{2}{5}p^2\sqrt{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}p \cdot p\sqrt{p} = \frac{2}{5}p^2\sqrt{p} - \frac{1}{3}p^2\sqrt{p} = \frac{1}{15}p^2\sqrt{p}$$

$$\frac{1}{15}p^2\sqrt{p} = 4$$

$$p^2\sqrt{p} = 60$$

$$p^5 = 3600$$

$$p = \sqrt[5]{3600}$$

Bladzijde 155

b $I(L) = \pi \int_0^1 \left(\frac{6}{2x-5} \right)^2 dx + \pi \int_1^3 (x-3)^2 dx$

$$= \pi \int_0^1 36(2x-5)^{-2} dx + \pi \int_1^3 (x-3)^2 dx$$

$$= \pi \left[36 \cdot \frac{1}{2} \cdot -(2x-5)^{-1} \right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{3}(x-3)^3 \right]_1^3$$

$$= \pi \left[\frac{-18}{2x-5} \right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{3}(x-3)^3 \right]_1^3$$

$$= \pi(6 - 3\frac{3}{5}) + \pi(0 + 2\frac{2}{3}) = 5\frac{1}{15}\pi$$

$$\begin{aligned} \text{c } I(L) &= \pi \int_1^b (4\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^b x^{\frac{1}{2}} dx = \pi \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^b = \pi \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_1^b = \pi \left(\frac{2}{3} b \sqrt{b} - \frac{2}{3} \right) \\ \text{Los op } \frac{2}{3} b \sqrt{b} - \frac{2}{3} &= 17 \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} b \sqrt{b} &= 18 \\ b \sqrt{b} &= 27 \\ b^{\frac{3}{2}} &= 3^3 \\ b &= 3^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\text{d } I(L) = \pi \int_0^5 \left(0,05 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,6}{0,8 + 25x}} \right)^2 dx$$

De optie integraal geeft $\pi \int_0^5 \left(0,05 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,6}{0,8 + 25x}} \right)^2 dx = 0,00502\dots$

Dus $I(L) \approx 0,0050$.

$$\begin{aligned} \text{e } f(x) = 6 \text{ geeft } x + \sqrt{x} &= 6 \\ \sqrt{x} &= 6 - x \\ x &= 36 - 12x + x^2 \\ x^2 - 13x + 36 &= 0 \\ (x - 4)(x - 9) &= 0 \\ x = 4 \vee x = 9 \\ \text{vold. niet} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(L) &= \pi \int_0^4 (6^2 - (x + \sqrt{x})^2) dx = \pi \int_0^4 (36 - x^2 - 2x\sqrt{x} - x) dx = \pi \int_0^4 (36 - x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} - x) dx \\ &= \pi \left[36x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = \pi \left(144 - 21\frac{1}{3} - 25\frac{3}{5} - 8 \right) = 89\frac{1}{15}\pi \end{aligned}$$

$$\text{f } I(B) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi, \text{ dus } 10\% \text{ hiervan is } 3,6\pi.$$

$$I(L) = \pi \int_p^3 x^2 dy = \pi \int_p^3 (9 - y^2) dy = \pi \left[9y - \frac{1}{3}y^3 \right]_p^3 = \pi \left(27 - 9 - 9p + \frac{1}{3}p^3 \right) = \pi \left(\frac{1}{3}p^3 - 9p + 18 \right)$$

$$\text{Los op } \frac{1}{3}p^3 - 9p + 18 = 3,6.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 18 \text{ en } y_2 = 3,6$$

De optie snijpunt geeft $x = 1,8251\dots$

Dus $p \approx 1,825$.

$$\text{g } I(L) = \pi \int_1^p x^2 dy = \pi \int_1^p y dy = \pi \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_1^p = \pi \left(\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$I(M) = \pi \int_1^p (y^2 - y) dy = \pi \left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 \right]_1^p = \pi \left(\frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Los op } \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{6} \text{ oftewel } p^2 - \frac{1}{3}p^3 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = x^2 - \frac{1}{3}x^3 \text{ en } y_2 = \frac{2}{3}.$$

De optie snijpunt geeft $x = 2,7320\dots$

Dus $p \approx 2,732$.

Bladzijde 160

$$\text{19 a } a = 1 \text{ geeft } b = 1 + 16 = 17$$

$$\begin{aligned} \text{inhoud} &= \pi \cdot \int_1^{17} \left(16^2 - \left(\frac{16}{\sqrt{x}} \right)^2 \right) dx = \pi \cdot \int_1^{17} \left(256 - \frac{256}{x} \right) dx = \pi \cdot \left[256x - 256 \ln |x| \right]_1^{17} \\ &= \pi (256 \cdot 17 - 256 \ln(17)) - (256 \cdot 1 - 256 \ln(1)) = \pi (4096 - 256 \ln(17)) \end{aligned}$$

$$\mathbf{b} \quad b = a + AB = a + AD = a + \frac{16}{\sqrt{a}} = a + 16a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{db}{da} = 1 - 8a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{db}{da} = 0 \text{ geeft } 1 - 8a^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = 8$$

$$a^3 = 64$$

$$a = 4$$

$$a = 4 \text{ geeft } b = 4 + \frac{16}{\sqrt{4}} = 12$$

Dus de minimale waarde van b is 12.

Bladzijde 161

$$\mathbf{20} \quad r_0 = 0,01, v_0 = 0,5 \text{ en } g = 9,81 \text{ geeft } r = 0,01 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,5^2}{0,5^2 + 2 \cdot 9,81x}}$$

$$I = \pi \int_0^{0,3} \left(0,01 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,5^2}{0,5^2 + 2 \cdot 9,81x}} \right)^2 dx$$

$$\text{De optie integraal geeft } \pi \int_0^{0,3} \left(0,01 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,5^2}{0,5^2 + 2 \cdot 9,81x}} \right)^2 dx = 3,165... \cdot 10^{-5}.$$

Dus de inhoud is $3,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 32 \text{ cm}^3$.

Bladzijde 162

$$\begin{aligned} \mathbf{21} \quad \text{inhoud} &= \pi \int_0^1 \left(\frac{5}{4x-6} \right)^2 dx + \pi \int_1^{3\frac{1}{2}} (x - 3\frac{1}{2})^2 dx = \pi \int_0^1 25(4x-6)^{-2} dx + \pi \int_1^{3\frac{1}{2}} (x - 3\frac{1}{2})^2 dx \\ &= \pi \left[25 \cdot \frac{1}{4} \cdot -(4x-6)^{-1} \right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{3} (x - 3\frac{1}{2})^3 \right]_1^{3\frac{1}{2}} = \pi \left[\frac{-25}{4(4x-6)} \right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{3} (x - 3\frac{1}{2})^3 \right]_1^{3\frac{1}{2}} \\ &= \pi \left(\frac{-25}{4 \cdot -2} - \frac{-25}{4 \cdot -6} \right) + \pi \left(0 - \frac{1}{3} (-2\frac{1}{2})^3 \right) = \pi \left(\frac{25}{8} - \frac{25}{24} \right) + \pi \cdot \frac{125}{24} = 7\frac{7}{24} \pi \end{aligned}$$

Dus de inhoud van het omwentelingslichaam is $7\frac{7}{24}\pi$.

$$\mathbf{22} \quad f(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{x+1}} = 2(1 + \sqrt{x+1})^{-1} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = -2(1 + \sqrt{x+1})^{-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{-1}{(1 + \sqrt{x+1})^2 \cdot \sqrt{x+1}}$$

$$f'(0) = \frac{-1}{2^2 \cdot 1} = -\frac{1}{4}$$

$$g(x) = \frac{4x^2 + x}{x} = 4x + 1 \text{ voor } x \neq 0$$

Dus $k: y = 4x + 1$.

$$f'(0) \cdot \text{rc}_k = -\frac{1}{4} \cdot 4 = -1$$

Dus de lijn k snijdt de grafiek van f loodrecht.

$$\begin{aligned} \mathbf{23} \quad \int_{-1,5}^p x^2 dy &= \pi \int_{-1,5}^p (2,25 - y^2) dy = \pi \left[2,25y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-1,5}^p = \pi \left(2,25p - \frac{1}{3}p^3 - (2,25 \cdot -1,5 - \frac{1}{3} \cdot (-1,5)^3) \right) \\ &= \pi \left(2,25p - \frac{1}{3}p^3 + 2,25 \right) \end{aligned}$$

Inhoud ijs is 92% van 14,137 geeft $\pi(2,25p - \frac{1}{3}p^3 + 2,25) = 0,92 \cdot 14,137$.

Voer in $y_1 = \pi(2,25x - \frac{1}{3}x^3 + 2,25)$ en $y_2 = 0,92 \cdot 14,137$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,978...$

Dus de bol steekt ongeveer $1,5 - 0,98 = 0,52 \text{ cm}$ boven het water uit.

Bladzijde 163

24 $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$, dus $f'(p) = 2p$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{raaklijn } k: y = 2px + b \\ \text{door } P(p, p^2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2p \cdot p + b = p^2 \\ b = -p^2 \end{array}$$

Dus $k: y = 2px - p^2$.

k snijden met de x -as geeft $2px - p^2 = 0$

$$2px = p^2$$

$$x = \frac{1}{2}p$$

$$O(\triangle OAP) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot p^2 = \frac{1}{4}p^3$$

$$OP: y = \frac{p^2}{p}x, \text{ dus } OP: y = px.$$

$$O(V) = \int_0^p (px - x^2) dx = \left[\frac{1}{2}px^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^p = \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{3}p^3 = \frac{1}{6}p^3$$

$$\frac{O(\triangle OAP)}{O(V)} = \frac{\frac{1}{4}p^3}{\frac{1}{6}p^3} = 1\frac{1}{2}$$

25 a $f_p(x) = p + \sqrt{x-p}$ geeft $f'_p(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-p}}$

Voor raken geldt $f_p(x) = x + \frac{1}{4} \wedge f'_p(x) = 1$

$$p + \sqrt{x-p} = x + \frac{1}{4} \wedge \frac{1}{2\sqrt{x-p}} = 1$$

$$\text{Uit } \frac{1}{2\sqrt{x-p}} = 1 \text{ volgt } \sqrt{x-p} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} p + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{4} \\ p + \sqrt{x-p} = x + \frac{1}{4} \end{array} \right. \quad x - p = \frac{1}{4}$$

Ook uit $\sqrt{x-p} = \frac{1}{2}$ volgt $x - p = \frac{1}{4}$, dus de lijn k raakt de grafiek van f_p voor elke $p \geq 1$.

b Het randpunt van de grafiek van f_p is (p, p) .

$$f_{p-1}(x) = p - 1 + \sqrt{x - (p-1)} = p - 1 + \sqrt{x - p + 1}$$

$$f_{p-1}(p) = p - 1 + \sqrt{p - p + 1} = p - 1 + \sqrt{1} = p$$

Dus het punt (p, p) ligt ook op de grafiek van f_{p-1} .

c l door $A(1, 1)$ en $B(2, 2)$, dus $l: y = x$.

$$\begin{aligned} O(V) &= \int_1^2 (f_1(x) - x) dx = \int_1^2 (1 + \sqrt{x-1} - x) dx = \int_1^2 (1 + (x-1)^{\frac{1}{2}} - x) dx \\ &= \left[x + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 \\ &= \left[x + \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = 2 + \frac{2}{3} - 2 - (1 + 0 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Bladzijde 164

26 $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b x dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_a^b = \pi \left(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 \right) = \frac{1}{2}\pi \cdot (b^2 - a^2)$

$$m = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$A = \pi \cdot (\sqrt{m})^2 = \pi \cdot m = \pi \cdot \frac{1}{2}(a+b)$$

$$h \cdot A = (b-a) \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}(a+b) = \pi \cdot \frac{1}{2}(b-a)(b+a) = \frac{1}{2}\pi \cdot (b^2 - a^2)$$

Dus $V = h \cdot A$.

$$27 \quad A = \frac{432V}{\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1} \text{ geeft } \frac{dA}{dV} = \frac{\left(\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1\right) \cdot 432 - 432V \cdot \frac{8}{150^4} \cdot V^3}{\left(\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1\right)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dV} = 0 \text{ geeft } \frac{864}{150^4} \cdot V^4 + 432 - \frac{3456}{150^4} \cdot V^4 &= 0 \\ 864V^4 + 432 \cdot 150^4 - 3456V^4 &= 0 \\ 2592V^4 &= 432 \cdot 150^4 \\ V^4 &= \frac{432 \cdot 150^4}{2592} \\ V &\approx 95,8 \end{aligned}$$

Bladzijde 165

28 Als V wentelt om de y -as ontstaat het lichaam K .

Als W wentelt om de y -as ontstaat het lichaam L .

$$I(L) = \frac{1}{2}I(\text{bol}) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$I(K) = \pi \int_0^r x^2 dy - \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi \int_0^r y dy - \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^r - \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi \cdot \frac{1}{2}r^2 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\begin{aligned} I(L) = I(K) \text{ geeft } \frac{2}{3}\pi r^3 &= \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{2}{3}\pi r^3 \\ \frac{4}{3}\pi r^3 &= \frac{1}{2}\pi r^2 \\ \frac{4}{3}r &= \frac{1}{2} \\ r &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

16.4 Exponenten en logaritmen

Bladzijde 166

$$29 \quad \mathbf{a} \quad 50 + 415 \cdot \log(4x + 3) = 382$$

$$415 \cdot \log(4x + 3) = 332$$

$$\log(4x + 3) = 0,8$$

$$4x + 3 = 10^{0,8}$$

$$4x = -3 + 10^{0,8}$$

$$x = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot 10^{0,8}$$

$$x \approx 0,827$$

$$\mathbf{b} \quad \left. \begin{array}{l} x = 40 \text{ en } y = 27 \text{ geeft } 40 \cdot 27^b = c \\ x = 60 \text{ en } y = 10 \text{ geeft } 60 \cdot 10^b = c \end{array} \right\} \begin{array}{l} 40 \cdot 27^b = 60 \cdot 10^b \\ \left(\frac{27}{10}\right)^b = 1\frac{1}{2} \end{array}$$

$$b = {}^{2,7}\log(1,5) = 0,408\dots$$

$$c = 60 \cdot 10^{0,408\dots} = 153,5\dots$$

$$\text{Dus } b \approx 0,41 \text{ en } c \approx 154.$$

$$\mathbf{c} \quad F = b \cdot e^{-\frac{5G}{H}}, \text{ dus } e^{-\frac{5G}{H}} = \frac{F}{b}$$

$$-\frac{5G}{H} = \ln\left(\frac{F}{b}\right)$$

$$\frac{5G}{H} = -\ln\left(\frac{F}{b}\right) = \ln\left(\frac{b}{F}\right)$$

$$G = 0,2H \cdot \ln\left(\frac{b}{F}\right)$$

d $f(x) = \frac{1}{4}e^x + e^{-x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{4}e^x - e^{-x}$

$f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{4}e^x = e^{-x}$

$$\frac{1}{4}(e^x)^2 = 1$$

$$(e^x)^2 = 4$$

$$e^x = 2$$

$$x = \ln(2)$$

$f(\ln(2)) = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} = 1$, dus $T(\ln(2), 1)$ en $p = \ln(2)$ en $q = 1$.

$$\left. \begin{aligned} y &= a(x - (\ln(2))^2) + 1 \\ f(0) &= \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4}, \text{ dus } A(0, 1\frac{1}{4}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a \cdot \ln^2(2) + 1 &= 1\frac{1}{4} \\ a \cdot \ln^2(2) &= \frac{1}{4} \\ a &= \frac{1}{4\ln^2(2)} \end{aligned}$$

e $f(x) = \ln(x^2 + x)$

↓ translatie (3, 0)

$$g(x) = \ln((x-3)^2 + x - 3) = \ln(x^2 - 6x + 9 + x - 3) = \ln(x^2 - 5x + 6)$$

$f(x) = g(x)$ geeft $\ln(x^2 + x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

$$x^2 + x = x^2 - 5x + 6$$

$$6x = 6$$

$$x = 1$$

Dus $x_A = 1$.

$f(x) = \ln(x^2 + x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{x^2 + x}$, dus $f'(1) = \frac{3}{2}$.

$g(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ geeft $g'(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \cdot (2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}$, dus $g'(1) = -\frac{3}{2}$.

$$f'(1) \cdot g'(1) = \frac{3}{2} \cdot -\frac{3}{2} = -\frac{9}{4} \neq -1$$

Dus de grafieken snijden elkaar niet loodrecht in A .

f $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$ en $g(0) = \ln(1) = 0$, dus de grafieken snijden elkaar in de oorsprong.

$f(x) = x e^{\frac{1}{2}x}$ geeft $f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + x \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = (1 + \frac{1}{2}x)e^{\frac{1}{2}x}$, dus $f'(0) = 1 \cdot e^0 = 1$.

$g(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = \ln(x+1)^{-1} = -\ln(x+1)$ geeft $g'(x) = -\frac{1}{x+1}$, dus $g'(0) = -\frac{1}{1} = -1$.

$$f'(0) \cdot g'(0) = 1 \cdot -1 = -1$$

Dus de grafieken snijden elkaar loodrecht in de oorsprong.

g Voor f geldt $y = \ln(x\sqrt{x})$, dus voor f^{inv} geldt $x = \ln(y\sqrt{y})$

$$y\sqrt{y} = e^x$$

$$y^3 = e^{2x}$$

$$y = e^{\frac{2}{3}x}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = e^{\frac{2}{3}x}$

↓ translatie (2, 1)

$$g(x) = e^{\frac{2}{3}(x-2)} + 1$$

De lengte van AB is $L = g(p) - f(p) = e^{\frac{2}{3}(p-2)} + 1 - \ln(p\sqrt{p})$.

Voer in $y_1 = e^{\frac{2}{3}(x-2)} + 1 - \ln(x\sqrt{x})$.

De optie minimum geeft $x = 2,1020\dots$ en $y = 0,9560\dots$

De minimale lengte van het lijnstuk AB is ongeveer 0,956.

h $\ln(x) = 0$ geeft $x = 1$

$\ln(x\sqrt{x}) = 0$ geeft $x\sqrt{x} = 1$ oftewel $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x\sqrt{x})}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^{1\frac{1}{2}})}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}\ln(x)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

De perforatie heeft de coördinaten $(1, \frac{1}{2})$.

30 a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{20 - e^{4x}}{e^{2x} - 10} = \frac{20 - 0}{0 - 10} = -2$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = -2$.

Los op $f(x) = -2$, dus $\frac{20 - e^{4x}}{e^{2x} - 10} = -2$
 $20 - e^{4x} = -2 \cdot e^{2x} + 20$
 $e^{4x} = 2 \cdot e^{2x}$
 $e^{2x} = 2$
 $2x = \ln(2)$
 $x = \frac{1}{2} \ln(2)$

Dus $x_A = \frac{1}{2} \ln(2)$.

b $\frac{BC}{BD} = \frac{f(p) - g(p)}{f(p)} = \frac{\ln(p) - (\ln(\sqrt[3]{p}) + 1)}{\ln(p)} = \frac{\ln(p) - \frac{1}{3} \ln(p) - 1}{\ln(p)} = \frac{\frac{2}{3} \ln(p) - 1}{\ln(p)} = \frac{2 \ln(p) - 3}{3 \ln(p)}$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(p) - 3}{3 \ln(p)} = \lim_{\ln(p) \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(p) - 3}{3 \ln(p)} = \lim_{\ln(p) \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{\ln(p)}}{3} = \frac{2 - 0}{3} = \frac{2}{3}$$

Dus de grenswaarde van $\frac{BC}{BD}$ is $\frac{2}{3}$.

c $f(x) = 2^x + 2^{3-4x}$ geeft $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) + 2^{3-4x} \cdot \ln(2) \cdot -4$
 $f'(x) = 0$ geeft $\ln(2)(2^x - 4 \cdot 2^{3-4x}) = 0$

$$2^x = 4 \cdot 2^{3-4x}$$

$$2^x = 2^2 \cdot 2^{3-4x}$$

$$2^x = 2^{5-4x}$$

$$x = 5 - 4x$$

$$5x = 5$$

$$x = 1, \text{ dus } x_{\text{top}} = 1$$

$$O(V) = \int_0^1 (2^x + 2^{3-4x}) dx = \left[\frac{2^x}{\ln(2)} + \frac{1}{-4} \cdot \frac{2^{3-4x}}{\ln(2)} \right]_0^1 = \frac{2}{\ln(2)} - \frac{2^{-1}}{4 \ln(2)} - \left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{2^3}{4 \ln(2)} \right)$$

$$= \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{8 \ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} + \frac{2}{\ln(2)} = \frac{16 - 1 - 8 + 16}{8 \ln(2)} = \frac{23}{8 \ln(2)}$$

d $F(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$ geeft $F'(x) = (2x + 1) \cdot e^{-x} + (x^2 + x + 1) \cdot e^{-x} \cdot -1$
 $= (2x + 1 - x^2 - x - 1)e^{-x}$
 $= (x - x^2)e^{-x}$

Dus $F(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$ in een primitieve van $f(x) = (x - x^2)e^{-x}$.

$f(x) = g(x)$ geeft $(x - x^2)e^{-x} = x^2 - x$
 $(x^2 - x) \cdot -e^{-x} = (x^2 - x) \cdot 1$
 $x^2 - x = 0 \vee -e^{-x} = 1$
 $x(x - 1) = 0$
 $x = 0 \vee x = 1$

$$O(V) = \int_0^1 (x - x^2)e^{-x} - (x^2 - x) dx = \left[(x^2 + x + 1)e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= 3e^{-1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - (e^0 - 0) = \frac{3}{e} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{e} - \frac{5}{6}$$

e $f(0) = \ln(0 + e) = 1$

$$y = \ln(x^2 + e)$$

$$x^2 + e = e^y$$

$$x^2 = e^y - e$$

$$I(L) = \pi \int_1^2 x^2 dy = \pi \int_1^2 (e^y - e) dy = \pi [e^y - ey]_1^2 = \pi(e^2 - 2e - (e - e)) = \pi(e^2 - 2e)$$

Bladzijde 173

31 a $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} + 2e^{-\frac{1}{2}x} \cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}$
 $f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x} = 0$
 $e^{\frac{1}{2}x} = 4e^{-\frac{1}{2}x}$
 $e^x = 4$
 $x = \ln(4)$

Dus $x_T = \ln(4)$.

b $e^x = 4$, dus $e^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{4} = 2$ en $e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}} = \frac{1}{2}$.
 $f(\ln(4)) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$, dus $T(\ln(4), 3\frac{1}{2})$.
 $f(0) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1\frac{1}{2} = 4$, dus $A(0, 4)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = a(x - b)^2 + c \\ \text{top}(\ln(4), 3\frac{1}{2}) \end{array} \right\} y = a(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = a(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2} \\ \text{door } A(0, 4) \end{array} \right\} a(0 - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2} = 4$$

$$a \cdot \ln^2(4) = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2\ln^2(4)}$$

$$y = \frac{1}{2\ln^2(4)}(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}$$

Los op $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2\ln^2(4)}(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2} \right) = 1$.

Voer in $y_1 = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2\ln^2(4)}(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2} \right)$ en $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 5,1$.

32 a Voor f geldt $y = \ln(\sqrt{x})$, dus voor f^{inv} geldt $x = \ln(\sqrt{y})$
 $\sqrt{y} = e^x$
 $y = (e^x)^2 = e^{2x}$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = e^{2x}$.

b $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$
 $l(x) = g(x) - f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \ln(\sqrt{x})$
 Voer in $y_1 = \frac{1}{2}e^{2x} - \ln(\sqrt{x})$.

De optie minimum geeft $x = 0,2835\dots$ en $y = 1,5117\dots$

De gevraagde minimale lengte is 1,512.

c $\ln(x) = 0$ geeft $x = 1$
 $\ln(\sqrt{x}) = 0$ geeft $\sqrt{x} = 1$ oftewel $x = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}\ln(x)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Dus de perforatie is $(1, \frac{1}{2})$.

Bladzijde 174

33 a $AP = f(p) - 1 = \ln(p^2 + 1) - 1$ en

$$BP = 1 - g(p) = 1 - \ln\left(\frac{e^2}{p^2 + 1}\right) = 1 - \ln(e^2) + \ln(p^2 + 1) = 1 - 2 + \ln(p^2 + 1) = \ln(p^2 + 1) - 1$$

Dus $AP = BP$.

b $y = \ln(x^2 + 1)$
 $x^2 + 1 = e^y$
 $x^2 = e^y - 1$

$$\text{inhoud} = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^1 (e^y - 1) dy = 2\pi \cdot [e^y - y]_0^1 = 2\pi(e - 1 - (1 - 0)) = 2\pi(e - 2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } y &= \ln(x^2 + 1) \\
 &\downarrow \text{translatie } (2, 0) \\
 y &= \ln((x-2)^2 + 1) = \ln(x^2 - 4x + 5) \\
 \text{Voor het snijpunt geldt } \ln(x^2 + 1) &= \ln(x^2 - 4x + 5) \\
 x^2 + 1 &= x^2 - 4x + 5 \\
 4x &= 4 \\
 x &= 1
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$f'(1) = \frac{2}{1+1} = 1$$

De afgeleide van de verschoven grafiek voor $x = 1$ is $f'(1-2) = f'(-1) = \frac{-2}{1+1} = -1$.

$1 \cdot -1 = -1$, dus de grafieken snijden elkaar loodrecht.

34 Voor raken geldt $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$.

$$f(x) = \ln(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{x} \text{ en } g(x) = \frac{1}{2e} \cdot x^2 \text{ geeft } g'(x) = \frac{1}{e} \cdot x$$

$$f'(x) = g'(x) \text{ geeft } \frac{1}{x} = \frac{1}{e} \cdot x$$

$$x^2 = e$$

$$x = \sqrt{e} \vee x = -\sqrt{e}$$

$$f(\sqrt{e}) = \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2} \text{ en } g(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e} \cdot e = \frac{1}{2}$$

Dus de grafieken van f en g raken elkaar.

Bladzijde 175

35 a $T_{\text{nat}}'(t) = 1050 \cdot e^{-\ln^2(t) + 6 \ln(t) - 9} \cdot \left(-2 \ln(t) \cdot \frac{1}{t} + 6 \cdot \frac{1}{t} \right)$

$$\begin{aligned}
 T_{\text{nat}}'(t) = 0 \text{ geeft } \frac{-2 \ln(t) + 6}{t} &= 0 \\
 \ln(t) &= 3
 \end{aligned}$$

De maximale temperatuur is $20 + 1050 \cdot e^{-9 + 18 - 9} = 20 + 1050 \cdot e^0 = 1070^\circ\text{C}$.

b Los op $20 + 345 \cdot \log(8t + 1) = 300$

$$345 \cdot \log(8t + 1) = 280$$

$$\log(8t + 1) = \frac{280}{345}$$

$$8t + 1 = 10^{\frac{280}{345}}$$

$$8t = -1 + 10^{\frac{280}{345}}$$

$$t = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot 10^{\frac{280}{345}} \approx 0,685$$

c $O(\text{bij } T_{\text{lab}}) = \int_{0,69}^{30} (T_{\text{lab}} - 300) dt$

De optie integraal van de GR geeft $\int_{0,69}^{30} (T_{\text{lab}} - 300) dt \approx 11\,929$.

Oplossen van de vergelijking $T_{\text{nat}} = 300$ met de optie snijpunt van de GR geeft $t = 6,36\dots$ en $t = 63,41\dots$

Bereken $\int_{6,36\dots}^{30} (T_{\text{nat}} - 300) dt$.

De optie integraal van de GR geeft $\int_{6,36\dots}^{30} (T_{\text{nat}} - 300) dt \approx 14\,242$.

Omdat $14\,242 > 11\,929$ zal gelden $t_b < 30$, dus de deur houdt tijdens de natuurlijke brand geen 30 minuten stand.

Bladzijde 176

36 a $k = A \cdot e^{-\frac{E}{8,314T}}$

$$e^{-\frac{E}{8,314T}} = \frac{k}{A}$$

$$-\frac{E}{8,314T} = \ln\left(\frac{k}{A}\right)$$

$$\frac{E}{8,314T} = -\ln\left(\frac{k}{A}\right) = \ln\left(\frac{k}{A}\right)^{-1} = \ln\left(\frac{A}{k}\right)$$

$$\text{Dus } E = 8,314T \cdot \ln\left(\frac{A}{k}\right).$$

b $k = 2,7 \cdot 10^{-2}$ en $T = 500$ geeft $E = 8,314 \cdot 500 \cdot \ln\left(\frac{A}{0,027}\right) = 4157 \cdot \ln\left(\frac{A}{0,027}\right).$

$$k = 2,4 \cdot 10^{-1}$$
 en $T = 550$ geeft $E = 8,314 \cdot 550 \cdot \ln\left(\frac{A}{0,24}\right) = 4572,7 \cdot \ln\left(\frac{A}{0,24}\right).$

$$\text{Voer in } y_1 = 4157 \cdot \ln\left(\frac{x}{0,027}\right) \text{ en } y_2 = 4572,7 \cdot \ln\left(\frac{x}{0,24}\right).$$

De optie snijpunt geeft $x \approx 7,4 \cdot 10^8$ en $y \approx 9,99 \cdot 10^4$.

$$\text{Dus } E = 1,0 \cdot 10^5.$$

37 a $f(x) = 2^x + 2^{-2x}$ geeft $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) + 2^{-2x} \cdot \ln(2) \cdot -2$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 2^x \cdot \ln(2) = 2 \cdot 2^{-2x} \cdot \ln(2)$$

$$2^x = 2^{-2x+1}$$

$$x = -2x + 1$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Bladzijde 177

b $O(V) = \int_{-1}^1 (2^x + 2^{-2x}) dx = \left[\frac{2^x}{\ln(2)} + \frac{1}{-2} \cdot \frac{2^{-2x}}{\ln(2)} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{-2}}{\ln(2)} - \left(\frac{2^{-1}}{\ln(2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2}{\ln(2)} \right)$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \cdot \left(2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{3\frac{3}{8}}{\ln(2)} = \frac{27}{8 \ln(2)}$$

$$O(W) = 2k, \text{ dus } 2k = \frac{27}{8 \ln(2)}$$

$$k = \frac{27}{16 \ln(2)} \approx 2,43$$

38 a $f_a'(x) + f_{\frac{1}{a}}'(x) = x - x \ln(ax) + x - x \ln\left(\frac{1}{a}x\right) = 2x - x \left(\ln(ax) + \ln\left(\frac{1}{a}x\right) \right)$

$$= 2x - x \left(\ln\left(ax \cdot \frac{1}{a}x\right) \right) = 2x - x \ln(x^2) = 2x - 2x \ln(x)$$

$$\frac{f_a'(x) + f_{\frac{1}{a}}'(x)}{2} = \frac{2x - 2x \ln(x)}{2} = x - x \ln(x) = f_1(x)$$

b $f_a'(x) = 0$ geeft $x - x \ln(ax) = 0$

$$x(1 - \ln(ax)) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad \ln(ax) = 1$$

$$\text{vold. niet } ax = e, \text{ dus } x_S = \frac{e}{a}$$

$$f_a'(x) = x - x \ln(ax) \text{ geeft } f_a''(x) = 1 - 1 \cdot \ln(ax) - x \cdot \frac{1}{ax} \cdot a = 1 - \ln(ax) - 1 = -\ln(ax)$$

$$f_a''(x) = 0 \text{ geeft } -\ln(ax) = 0$$

$$ax = 1, \text{ dus } x_T = \frac{1}{a}$$

$$\frac{x_S}{x_T} = \frac{\frac{e}{a}}{\frac{1}{a}} = e, \text{ dus de verhouding is constant.}$$

Bladzijde 178

- 39 a** $8 - 4x = 0$ geeft $x = 2$, dus de x -coördinaat van de knik is 2.
 Voor $x < 2$ is $f(x) = 4e^{2-x} + 8 - 4x$ en $f'(x) = 4e^{2-x} \cdot -1 - 4 = -4e^{2-x} - 4$.
 Voor $x > 2$ is $f(x) = 4e^{2-x} + 8 + 4x$ en $f'(x) = -4e^{2-x} + 4$.
 $rc_m = \lim_{x \uparrow 2} f'(x) = -4e^0 - 4 = -8$ en $rc_k = \lim_{x \downarrow 2} f'(x) = -4e^0 + 4 = 0$.
b $\lim_{x \rightarrow \infty} 4e^{2-x} = 0$
 De vergelijking van de asymptoot is $y = 4x - 8$.

- 40 a** $g(x) = f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$
 Los op $x \ln(x) - x + 1 = \ln(x)$
 $(x - 1) \ln(x) = x - 1$
 $x - 1 = 0 \vee \ln(x) = 1$
 $x = 1 \vee x = e$
b Een primitieve van g is f .

$$\begin{aligned} \int_p^{2p} g(x) dx &= [f(x)]_p^{2p} = f(2p) - f(p) = 2p \ln(2p) - 2p + 1 - (p \ln(p) - p + 1) \\ &= 2p \ln(2p) - p \ln(p) - p \\ \int_p^{2p} g(x) dx &= 0 \text{ geeft } 2p \ln(2p) - p \ln(p) - p = 0 \\ p(2 \ln(2p) - \ln(p) - 1) &= 0 \\ p = 0 \vee \ln(4p^2) - \ln(p) &= 1 \\ \text{vold. niet } \ln\left(\frac{4p^2}{p}\right) &= 1 \\ \ln(4p) &= 1 \\ 4p &= e \\ p &= \frac{1}{4}e \end{aligned}$$

Bladzijde 179

- 41 a** $f_a'(x) = 0$ geeft $e^{ax} + ax e^{ax} = 0$
 $e^{ax}(1 + ax) = 0$
 $1 + ax = 0$
 $a = -\frac{1}{x}$
 $a = -\frac{1}{x}$ invullen bij de formule van f_a geeft
 $y = x e^{-\frac{1}{x} \cdot x} = x e^{-1}$ oftewel $y = \frac{1}{e}x$, dus de top ligt op lijn l .
b $F_a'(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + \frac{1}{a}x \cdot e^{ax} \cdot a - \frac{1}{a^2} e^{ax} \cdot a = \frac{1}{a} e^{ax} + x e^{ax} - \frac{1}{a} e^{ax} = x e^{ax} = f_a(x)$, dus F_a is een primitieve van f_a .
c $f_1(x) = \frac{1}{e}x$ geeft $x e^x = \frac{1}{e}x$
 $x = 0 \vee e^x = \frac{1}{e}$
 $x = 0 \vee x = -1$
 $O(V) = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{e}x - f_1(x) \right) dx = \left[\frac{1}{2e}x^2 - F_1(x) \right]_{-1}^0 = \left[\frac{1}{2e}x^2 - x e^x + e^x \right]_{-1}^0 = 0 - 0 + 1 - \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \right) = 1 - \frac{5}{2e}$

$$\begin{aligned}
 42 \quad & \left. \begin{aligned} V=20 \text{ en } T=116 \text{ geeft } 20 \cdot 116^m &= C \\ V=30 \text{ en } T=40 \text{ geeft } 30 \cdot 40^m &= C \end{aligned} \right\} 20 \cdot 116^m = 30 \cdot 40^m \\
 & \frac{116^m}{40^m} = \frac{30}{20} \\
 & \left(\frac{116}{40}\right)^m = 1,5 \\
 & 2,9^m = 1,5 \\
 & m = {}^{2,9}\log(1,5) = 0,380...
 \end{aligned}$$

$$C = 20 \cdot 116^{0,380...} = 122,24...$$

Dus $m \approx 0,38$ en $C \approx 122$.

Bladzijde 180

$$43 \quad a \quad d = f_{0,7}(3) - f_{0,7}(0) = 5,920... - 1,428... = 4,491...$$

$$\text{Los op } \frac{8 \cdot 4,491...}{l^2 - 4 \cdot 4,491...^2} = 0,7.$$

$$\text{Invoeren van } y_1 = \frac{8 \cdot 4,491...}{x^2 - 4 \cdot 4,491...^2} \text{ en } y_2 = 0,7 \text{ en de optie snijpunt geeft } x = 11,491...$$

$$\text{Dus } l \approx 11,49.$$

$$b \quad l = 49,63 \text{ en } d = 20,51 \text{ geeft } k = \frac{8 \cdot 20,51}{49,63 - 4 \cdot 20,51^2} = 0,210..., \text{ dus } \frac{1}{2k} \approx 2,38.$$

$$y_T = f_k(0) = \frac{1}{2k}(e^0 + e^0) = \frac{1}{2k}(1 + 1) = \frac{1}{k}$$

$$y = 2,38(e^{0,21x} + e^{-0,21x})$$

↓ spiegelen in de x-as

$$y = -2,38(e^{0,21x} + e^{-0,21x})$$

$$\downarrow \text{translatie } \left(0; 20,51 + \frac{1}{0,210...}\right) = \text{translatie } (0; 25,66...)$$

$$h(x) = -2,38(e^{0,21x} + e^{-0,21x}) + 25,27$$

Bladzijde 181

$$44 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1000}{e^x - 10} = \frac{0 - 1000}{0 - 10} = 100, \text{ dus de horizontale asymptoot is de lijn } y = 100.$$

$e^x - 10 = 0$ geeft $e^x = 10$, dus de lijn $x = \ln(10)$ is verticale asymptoot.

Dus $A(0, 100)$ en $B(\ln(10), 100)$.

$$\text{Los op } \frac{e^{2x} - 1000}{e^x - 10} = 100$$

$$e^{2x} - 1000 = 100e^x - 1000$$

$$e^{2x} - 100e^x = 0$$

$$e^x(e^x - 100) = 0$$

$$e^x = 100$$

Dus $x_C = \ln(100) = \ln(10^2) = 2\ln(10) = 2x_B$ en dus is B het midden van lijnstuk AC .

$$45 \quad a \quad \text{Stel } x_A = p.$$

Er geldt $q = f(p) = g(p + 3)$.

$$f(p) = g(p + 3) \text{ geeft } \log(\sqrt{p}) = \log((p + 3)\sqrt{p + 3}) - 1$$

$$\text{Voer in } y_1 = \log(\sqrt{x}) \text{ en } y_2 = \log((x + 3)\sqrt{x + 3}) - 1.$$

De optie snijpunt geeft $x = 0,389...$ en $y = -0,204...$ en ook $x = 4,864...$ en $y = 0,343...$

Dus $q \approx -0,20$ en $q \approx 0,34$.

$$b \quad CD = g(p) - f(p) = \log(p\sqrt{p}) - 1 - \log(\sqrt{p}) = \log\left(\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{p}}\right) - 1 = \log(p) - 1$$

$$CE = f(p) = \log(\sqrt{p}) = \log(p^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\log(p)$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{\log(p) - 1}{\frac{1}{2}\log(p)} = \frac{2\log(p) - 2}{\log(p)}$$

$$c \quad \text{De grenswaarde is } \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2\log(p) - 2}{\log(p)} = \lim_{\log(p) \rightarrow \infty} \frac{2\log(p) - 2}{\log(p)} = \lim_{\log(p) \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{\log(p)}}{1} = \frac{2 - 0}{1} = 2.$$

16.5 Meetkunde

Bladzijde 182

46

- a** De stelling van Pythagoras in $\triangle BCD$ geeft $BD^2 + x^2 = (x+1)^2$

$$BD^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2$$

$$BD^2 = 2x + 1$$

$$BD = \sqrt{2x+1}$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AB^2 + x^2 = (x+3)^2$

$$(\sqrt{2x+1} + 4)^2 + x^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$2x + 1 + 8\sqrt{2x+1} + 16 = 6x + 9$$

$$8\sqrt{2x+1} = 4x - 8$$

$$2\sqrt{2x+1} = x - 2$$

$$4(2x+1) = (x-2)^2$$

$$8x + 4 = x^2 - 4x + 4$$

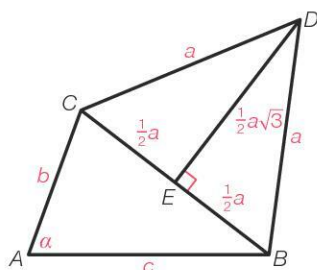
$$x^2 - 12x = 0$$

$$x(x-12) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 12$$

Dus $BC = 12$.

- b** De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$.



$$O(\triangle BCD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{3} = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = \frac{1}{4} \sqrt{3} \cdot (b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha))$$

- c** De cosinusregel geeft $(x+5)^2 = x^2 + 10^2 - 2 \cdot x \cdot 10 \cdot \cos(\angle A)$

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 100 - 20x \cos(\angle A)$$

$$20x \cos(\angle A) = 75 - 10x$$

$$\cos(\angle A) = \frac{75 - 10x}{20x} = \frac{15 - 2x}{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15 - 2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{15}{x} - 2}{4} = \frac{0 - 2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$\cos(\angle A) = -\frac{1}{2}$ geeft $\angle A = 120^\circ$, dus de gevraagde limiet is 120° .

- d** $c: x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$

$$x^2 - 8x + y^2 - 2y + 8 = 0$$

$$(x-4)^2 - 16 + (y-1)^2 - 1 + 8 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$$

Dus $M(4, 1)$ en $r_c = 3$.

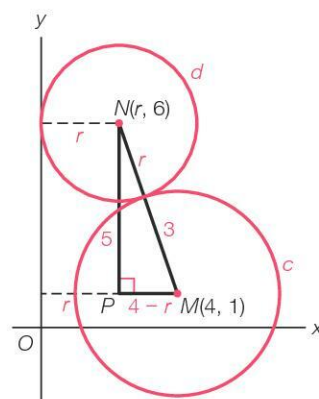
Stel $r_d = r$, dan is $MN = r + 3$, $PM = 4 - r$ en $NP = 6 - 1 = 5$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle MNP$ geeft $(4-r)^2 + 5^2 = (r+3)^2$

$$16 - 8r + r^2 + 25 = r^2 + 6r + 9$$

$$-14r = -32$$

$$r = \frac{32}{14} = 2\frac{2}{7}$$



$$\begin{aligned} \text{e } \left. \begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 &= 7 \\ y &= x^2 \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} y + (y-1)^2 &= 7 \\ y + y^2 - 2y + 1 - 7 &= 0 \\ y^2 - y - 6 &= 0 \\ (y+2)(y-3) &= 0 \\ y &= -2 \vee y = 3 \end{aligned} \\ & \text{vold. niet} \end{aligned}$$

$y = 3$ geeft $x^2 = 3$, dus $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$.

De snijpunten zijn $(\sqrt{3}, 3)$ en $(-\sqrt{3}, 3)$.

f m is de middelloodlijn van het lijnstuk AB .

$$\text{rc}_{AB} = \frac{-2 - (-1)}{4 - (-1)} = -\frac{1}{5}, \text{ dus } \text{rc}_m = 5.$$

$$\left. \begin{aligned} m: y &= 5x + b \\ \text{midden van } AB \text{ is } (1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 5 \cdot 1\frac{1}{2} + b &= -1\frac{1}{2} \\ b &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m: y &= 5x - 9 \text{ snijden met } c \text{ geeft } x^2 + (5x-9)^2 - 4x - 2(5x-9) - 8 = 0 \\ & x^2 + 25x^2 - 90x + 81 - 4x - 10x + 18 - 8 = 0 \\ & 26x^2 - 104x + 91 = 0 \\ & 2x^2 - 8x + 7 = 0 \\ & D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 8 \\ & x = \frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{4} = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Bladzijde 186

47 a $\text{rc}_{AB} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$, dus $\text{rc}_{AC} = -2$.

$AC: y = -2x + b$ door $A(4, 0)$ geeft $AC: y = -2x + 8$.

$$\begin{aligned} y &= -2x + 8 \text{ snijden met } x^2 + (y-3)^2 = 25 \text{ geeft } x^2 + (-2x+5)^2 = 25 \\ & x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 25 \\ & 5x^2 - 20x = 0 \\ & 5x(x-4) = 0 \\ & x = 0 \vee x = 4 \end{aligned}$$

Dus $C(0, 8)$.

In het geval je bent uitgegaan van $\angle B = 90^\circ$, dan krijg je $C(-4, 6)$.

b C is het snijpunt van de cirkel c met de cirkel d met middelpunt A en straal AB .

$$\left. \begin{aligned} d: (x-4)^2 + y^2 &= r^2 \\ \text{door } B(0, -2) \end{aligned} \right\} r^2 = (0-4)^2 + (-2)^2 = 20$$

Dus $d: x^2 - 8x + 16 + y^2 = 20$ oftewel $d: x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0$.

$$c: x^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$$

$$\begin{aligned} d \text{ snijden met } c \text{ geeft } & \begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0 \end{cases} \\ & \underline{-8x + 6y + 12 = 0} \\ & 6y = 8x - 12 \\ & y = \frac{4}{3}x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{3}x - 2 \text{ snijden met } d \text{ geeft } x^2 + (\frac{4}{3}x - 2)^2 - 8x - 4 = 0 \\ & x^2 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{16}{3}x + 4 - 8x - 4 = 0 \\ & \frac{25}{9}x^2 - \frac{40}{3}x = 0 \\ & x(\frac{25}{9}x - \frac{40}{3}) = 0 \\ & x = 0 \vee x = \frac{\frac{40}{3}}{\frac{25}{9}} = \frac{24}{5} \end{aligned}$$

$$x = \frac{24}{5} \text{ geeft } y = \frac{4}{3} \cdot \frac{24}{5} - 2 = 4\frac{2}{5}$$

Dus $C(4\frac{4}{5}, 4\frac{2}{5})$.

Bladzijde 187

48 $\alpha + \beta + 2 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ (volle hoek), dus $\beta = 180^\circ - \alpha$.

De oppervlakte van de lichte delen is $p^2 + q^2$.

De cosinusregel in de driehoek met hoek α geeft

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos(\alpha).$$

De cosinusregel in de driehoek met hoek β geeft

$$s^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos(\beta) = p^2 + q^2 - 2pq \cos(180^\circ - \alpha) = p^2 + q^2 + 2pq \cos(\alpha).$$

$$\text{Hieruit volgt } \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - 2pq \cos(\alpha)) + \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + 2pq \cos(\alpha)) = p^2 + q^2.$$

Dus de oppervlakte van de donkere delen is gelijk aan de oppervlakte van de lichte delen.

Bladzijde 188

49 a In $\triangle ADN$ is $AD^2 + DN^2 = r^2$.

In $\triangle ADM$ is $AD^2 + (DN - 1)^2 = 1^2$.

$$\begin{cases} AD^2 + DN^2 = r^2 \\ AD^2 + (DN - 1)^2 = 1^2 \end{cases}$$

$$\frac{DN^2 - (DN - 1)^2 = r^2 - 1}{DN^2 - (DN^2 - 2DN + 1) = r^2 - 1}$$

$$DN^2 - DN^2 + 2DN - 1 = r^2 - 1$$

$$2DN - 1 = r^2 - 1$$

$$2DN = r^2$$

$$DN = \frac{1}{2}r^2$$

b $DM = DN - 1 = \frac{1}{2}r^2 - 1$

$$CD = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}(r - 1)$$

$$DM = CD \text{ geeft } \frac{1}{2}r^2 - 1 = \frac{1}{2}(r - 1)$$

$$r^2 - 2 = r - 1$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$D = \frac{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1}{2} = 5$$

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee r = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ vold. niet}$$

$$\text{Dus } r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

50 Stel de straal van d is gelijk aan r .

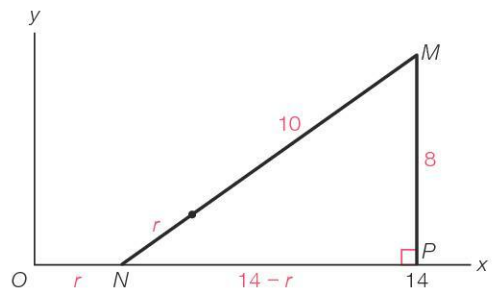
Zie de figuur hiernaast.

In $\triangle NPM$ is $(14 - r)^2 + 8^2 = (r + 10)^2$

$$196 - 28r + r^2 + 64 = r^2 + 20r + 100$$

$$-48r = -160$$

$$r = 3\frac{1}{3}$$



Bladzijde 189

51 a In $\triangle M_1M_2M_3$ geeft de cosinusregel

$$(r+2)^2 = 8^2 + (r+6)^2 - 2 \cdot 8 \cdot (r+6) \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$$

$$r^2 + 4r + 4 = 64 + r^2 + 12r + 36 - (16r + 96) \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$$

$$(16r + 96) \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3) = 8r + 96$$

$$\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{8r + 96}{16r + 96} = \frac{8(r+12)}{8(2r+12)} = \frac{r+12}{2r+12}$$

b $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r+12}{2r+12} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{12}{r}}{2 + \frac{12}{r}} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$

Dus $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{1}{2}$ en dit geeft $\angle M_1M_2M_3 = 60^\circ$.

c Stel $M_1P = p$.

In $\triangle PM_1M_3$ is $r^2 + p^2 = (r+2)^2$

$$r^2 + p^2 = r^2 + 4r + 4$$

$$p^2 = 4r + 4 \dots (1)$$

In $\triangle PM_2M_3$ is $r^2 + (p+8)^2 = (r+6)^2$

$$r^2 + p^2 + 16p + 64 = r^2 + 12r + 36$$

$$p^2 = 12r - 16p - 28 \dots (2)$$

Uit (1) en (2) volgt $4r + 4 = 12r - 16p - 28$

$$16p = 8r - 32$$

$$p = \frac{1}{2}r - 2 \dots (3)$$

Uit (1) en (3) volgt $(\frac{1}{2}r - 2)^2 = 4r + 4$

$$\frac{1}{4}r^2 - 2r + 4 = 4r + 4$$

$$\frac{1}{4}r^2 - 6r = 0$$

$$\frac{1}{4}r(r - 24) = 0$$

$$r = 0 \vee r = 24$$

vold. niet

Dus $r = 24$.

Bladzijde 190

52 Snijden van de cirkel $x^2 + (y-r)^2 = r^2$ met de parabool $y = x^2$ geeft $y + (y-r)^2 = r^2$

$$y + y^2 - 2yr + r^2 = r^2$$

$$y^2 + (1-2r)y = 0$$

$$y(y+1-2r) = 0$$

$$y = 0 \vee y = 2r-1$$

Omdat $y = x^2$ is $x^2 = 2r-1$ en deze vergelijking moet twee oplossingen hebben.

Dus $2r-1 > 0$ oftewel $r > \frac{1}{2}$.

53 $P(p, p(p-3)^2 + 2)$ en $A(7, 0)$ geeft $AP = \sqrt{(p-7)^2 + (p(p-3)^2 + 2)^2}$

Voer in $y_1 = \sqrt{(x-7)^2 + (x(x-3)^2 + 2)^2}$.

De optie minimum geeft $y = 4,349\dots$

Dus de minimale lengte is 4,35.

16.6 Vectoren en bewegingsvergelijkingen**Bladzijde 191**

54 a $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y - 12 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 - 12 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

Dus $M(3, 2)$ en $r = 5$.

$$y = 6 \text{ geeft } (x - 3)^2 + 16 = 25$$

$$(x - 3)^2 = 9$$

$$x - 3 = 3 \vee x - 3 = -3$$

$$x = 6 \vee x = 0$$

Dus $A(0, 6)$ en $B(6, 6)$.

$$y = -1 \text{ geeft } (x - 3)^2 + 9 = 25$$

$$(x - 3)^2 = 16$$

$$x - 3 = 4 \vee x - 3 = -4$$

$$x = 7 \vee x = -1$$

Dus $C(-1, -1)$ en $D(7, -1)$.

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle BMC) = \cos(\angle(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{-12 - 12}{5 \cdot 5} = -\frac{24}{25},$$

dus $\angle BMC \approx 163,7^\circ$.

b $P(2 - t, \frac{1}{2} + 3t)$

$$AP^2 = (2 - t)^2 + (3t - \frac{1}{2})^2 = 4 - 4t + t^2 + 9t^2 - 3t + \frac{1}{4} = 10t^2 - 7t + 4\frac{1}{4}$$

$$BP^2 = (-t - 2)^2 + (3t - 2\frac{1}{2})^2 = t^2 + 4t + 4 + 9t^2 - 15t + 6\frac{1}{4} = 10t^2 - 11t + 10\frac{1}{4}$$

$$AP^2 = BP^2 \text{ geeft } 10t^2 - 7t + 4\frac{1}{4} = 10t^2 - 11t + 10\frac{1}{4}$$

$$4t = 6$$

$$t = 1\frac{1}{2}$$

$$t = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } P(\frac{1}{2}, 5)$$

c $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P(p, \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1)$ op de grafiek van f .

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p \\ \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - 1 \\ \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1 \end{pmatrix}$$

Er moet gelden $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p - 1 \\ \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$4(p - 1) + \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1 = 0$$

$$4p - 4 + \frac{1}{4}p^2 - 1\frac{1}{4}p + 1 = 0$$

$$\frac{1}{4}p^2 + 2\frac{3}{4}p - 3 = 0$$

$$p^2 + 11p - 12 = 0$$

$$(p - 1)(p + 12) = 0$$

$$p = 1 \vee p = -12$$

$p = 1$ geeft $A(1, 0)$ en $p = -12$ geeft $P(-12, 52)$.

d $P(1 + 2t, 1 + t)$

$$d(P, x\text{-as}) = |1 + t|$$

$$d(P, k) = \frac{|3(1 + 2t) + 4(1 + t) - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|3 + 6t + 4 + 4t - 12|}{5} = \frac{|10t - 5|}{5} = |2t - 1|$$

$$d(P, x\text{-as}) = d(P, k) \text{ geeft } |1 + t| = |2t - 1|$$

$$1 + t = 2t - 1 \vee 1 + t = -2t + 1$$

$$-t = -2 \vee 3t = 0$$

$$t = 2 \vee t = 0$$

$t = 2$ geeft straal = 3 en $t = 0$ geeft straal = 1.

e Lijn l door $A(-1, 1)$ loodrecht op k : $4x + 3y = 12$.

$$\left. \begin{array}{l} l: 3x - 4y = c \\ \text{door } A(-1, 1) \end{array} \right\} c = -3 - 4 = -7$$

Dus l : $3x - 4y = -7$.

k snijden met l geeft het punt P .

$$\begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ 3x - 4y = -7 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 16x + 12y = 48 \\ 9x - 12y = -21 \end{cases} +$$

$$\frac{25x = 27}{x = \frac{27}{25}}$$

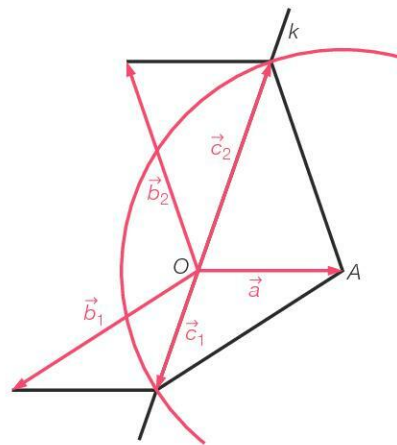
$$x = \frac{27}{25} \text{ en } 4x + 3y = 12 \text{ geeft } 4 \cdot \frac{27}{25} + 3y = 12$$

$$3y = \frac{192}{25}$$

$$y = \frac{64}{25}$$

Dus $P(1\frac{2}{25}, 2\frac{14}{25})$.

- f** Cirkel met middelpunt A en straal 5.
Dit geeft de vectoren $\vec{c}_1$ en $\vec{c}_2$ op k .
Met de parallelogramconstructie vind je $\vec{b}_1$ en $\vec{b}_2$.
Zie de figuur hiernaast.



Bladzijde 192

55 a $a\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$ geeft $a^2x = \frac{1}{4}x^2$
 $x = 0 \vee \frac{1}{4}x = a^2$
 $x = 0 \vee x = 4a^2$

Dus $S(4a^2, 2a^2)$.

$$\overrightarrow{SO} = \begin{pmatrix} -4a^2 \\ -2a^2 \end{pmatrix}, \text{ dus } \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SO}_L = \begin{pmatrix} 2a^2 \\ -4a^2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 4a^2 \\ 2a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a^2 \\ -4a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a^2 \\ -2a^2 \end{pmatrix}, \text{ dus } P(6a^2, -2a^2).$$

- b** Stel $y_P = p$, dan is $x_P = 3p - 3$ en $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3p-3 \\ p \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP}_R = \begin{pmatrix} p \\ -3p+3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3p-3 \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ -3p+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4p-3 \\ -2p+3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 4p-3 \\ y = -2p+3 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} x = 4p-3 \\ 2y = -4p+6 \end{cases} +$$

$$x + 2y = 3$$

Dus $l: x + 2y = 3$.

- c** $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t - 3$ geeft $x'(t) = t + 2$

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3 \text{ geeft } y'(t) = t - 2$$

$$v(t) = \sqrt{(t+2)^2 + (t-2)^2} = \sqrt{t^2 + 4t + 4 + t^2 - 4t + 4} = \sqrt{2t^2 + 8}$$

De minimale snelheid is $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ voor $t = 0$.

- d** $x(t) = 0$ geeft $t^2 - 4 = 0$, dus $t = 2 \vee t = -2$.

$t = -2$ geeft het punt $A(0, 16)$.

$$x(t) = t^2 - 4 \text{ geeft } x'(t) = 2t, \text{ dus } x'(-2) = -4.$$

$$y(t) = (t-2)^2 \text{ geeft } y'(t) = 2(t-2), \text{ dus } y'(-2) = -8.$$

$$\text{De gevraagde snelheid is } v(-2) = \sqrt{(x'(-2))^2 + (y'(-2))^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

e $P(1+3t, 5+t)$, dus $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1+3t \\ 5+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t-5 \\ t+5 \end{pmatrix}$.

$AP \perp l$, dus $\begin{pmatrix} 3t-5 \\ t+5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$3(3t-5) + t + 5 = 0$$

$$9t - 15 + t + 5 = 0$$

$$10t = 10$$

$$t = 1$$

$t = 1$ geeft $P(4, 6)$ en $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\cos(\angle ABP) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \frac{6-2}{\sqrt{65}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$, dus $\angle ABP \approx 60,3^\circ$.

Bladzijde 196

56 a $y = ax$ substitueren in $(x-1)^2 + y^2 = 1$ geeft $(x-1)^2 + (ax)^2 = 1$

$$x^2 - 2x + 1 + a^2x^2 = 1$$

$$(a^2 + 1)x^2 = 2x$$

$$x = 0 \vee (a^2 + 1)x = 2$$

$$x = 0 \vee x = \frac{2}{a^2 + 1}$$

Dus $S\left(\frac{2}{a^2 + 1}, \frac{2a}{a^2 + 1}\right)$ en $\overrightarrow{SO} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{a^2 + 1} \\ \frac{2a}{a^2 + 1} \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SO} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2 + 1} \\ \frac{2a}{a^2 + 1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{a^2 + 1} \\ \frac{2a}{a^2 + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a+2}{a^2 + 1} \\ \frac{2a-2}{a^2 + 1} \end{pmatrix}$$

Dus $x_P = \frac{2a+2}{a^2 + 1}$ en $y_P = \frac{2a-2}{a^2 + 1}$.

b De cirkel gaat door $O(0, 0)$ en heeft dus een vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + mx + ny = 0$.

$a = 1$ geeft $P(2, 0)$ en dit geeft $4 + 0 + 2m + 0 = 0$, dus $m = -2$.

$a = -1$ geeft $P(0, -2)$ en dit geeft $0 + 4 + 0 - 2n + 0 = 0$, dus $n = 2$.

Dus $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

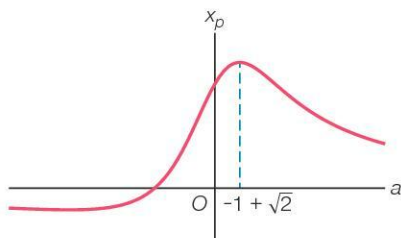
c $x_P = \frac{2a+2}{a^2 + 1}$ geeft $x_P' = \frac{(a^2 + 1) \cdot 2 - (2a+2) \cdot 2a}{(a^2 + 1)^2} = \frac{2a^2 + 2 - 4a^2 - 4a}{(a^2 + 1)^2} = \frac{-2a^2 - 4a + 2}{(a^2 + 1)^2}$

$x_P' = 0$ geeft $-2a^2 - 4a + 2 = 0$

$$a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 8$$

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \vee a = -1 - \sqrt{2}$$



Dus x_P is maximaal voor $a = -1 + \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
 & 57 \quad P(p, 2^p + 2^{-2p}) \\
 & \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p \\ 2^p + 2^{-2p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ 2^p + 2^{-2p} - 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
 & \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4\frac{1}{16} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{13}{16} \end{pmatrix} \\
 & \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}, \text{ dus } \begin{pmatrix} p-1 \\ 2^p + 2^{-2p} - 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{13}{16} \end{pmatrix} = 0 \\
 & \quad p-1 + 1\frac{13}{16}(2^p + 2^{-2p} - 2\frac{1}{4}) = 0
 \end{aligned}$$

Voer in $y_1 = x - 1 + 1\frac{13}{16}(2^x + 2^{-2x} - 2\frac{1}{4})$ en gebruik de optie nulpunt.
Je krijgt $x = -0,674\dots$, dus de x -coördinaat van P is ongeveer $-0,67$.

Bladzijde 197

$$58 \quad \mathbf{a} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ dus een normaalvector van de middelloodlijn van } AB \text{ is } \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Het midden van AB is $(3, 1)$.

$$\left. \begin{aligned} 3x - y &= c \\ \text{door } (3, 1) \end{aligned} \right\} c = 3 \cdot 3 - 1 = 8$$

$$\begin{aligned}
 3x - y &= 8 \text{ snijden met } k \text{ geeft } 3(2 + 4t) - (1 + 5t) = 8 \\
 6 + 12t - 1 - 5t &= 8
 \end{aligned}$$

$$7t = 3$$

$$t = \frac{3}{7}$$

$$t = \frac{3}{7} \text{ geeft } P(2 + \frac{3}{7} \cdot 4, 1 + \frac{3}{7} \cdot 5) = P(3\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7})$$

$$\mathbf{b} \quad P(2 + 4t, 1 + 5t)$$

$$d(P, y\text{-as}) = 2 + 4t$$

$$rc_m = \frac{0-2}{6-0} = -\frac{1}{3} \text{ en } m \text{ door } A(0, 2), \text{ dus } m: y = -\frac{1}{3}x + 2 \text{ oftewel } m: x + 3y = 6.$$

$$d(P, m) = \frac{|2 + 4t + 3(1 + 5t) - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|19t - 1|}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Voer in } y_1 = 2 + 4x \text{ en } y_2 = \frac{|19x - 1|}{\sqrt{10}}.$$

De optie snijpunt geeft $x = -0,168\dots$ en $x = 1,153\dots$

Invullen in $2 + 4t$ geeft $1,327\dots$ en $6,613\dots$

Dus de stralen zijn $1,33$ en $6,61$.

$$59 \quad P(p, -\frac{1}{2}p + 3) \text{ geeft } \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p \\ -\frac{1}{2}p + 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP}_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - 3 \\ p \end{pmatrix}$$

$$\vec{q} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP}_L = \begin{pmatrix} p \\ -\frac{1}{2}p + 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - 3 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p \\ \frac{1}{2}p \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}p - 3 \\ y &= \frac{1}{2}p + 3 \end{aligned} \right. \Bigg| \begin{aligned} 1 \\ 3 \end{aligned} \text{ geeft } \begin{cases} x = \frac{1}{2}p - 3 \\ 3y = \frac{1}{2}p + 9 \end{cases} \\
 x - 3y &= -12 \\
 -3y &= -x - 12 \\
 y &= \frac{1}{3}x + 4
 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } m: y = \frac{1}{3}x + 4.$$

$$60 \quad c: (x - 14)^2 + (y - 8)^2 = 100$$

$$c \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } (x - 14)^2 + (-8)^2 = 100$$

$$(x - 14)^2 = 36$$

$$x - 14 = 6 \vee x - 14 = -6$$

$$x = 20 \vee x = 8$$

Dus $A(8, 0)$ en $B(20, 0)$.

$$\vec{z} = \frac{1}{3 + 1 + 2} \cdot \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 24 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 28 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 72 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Dus $Z(12, \frac{2}{3})$.

Bladzijde 198

- 61 a** $x(t) = 3t^2 + t + 1$ geeft $x'(t) = 6t + 1$
 $y(t) = 3t^2 - t + 1$ geeft $y'(t) = 6t - 1$
 $v(t) = \sqrt{(6t+1)^2 + (6t-1)^2} = \sqrt{36t^2 + 12t + 1 + 36t^2 - 12t + 1} = \sqrt{72t^2 + 2}$
 De minimale snelheid is $\sqrt{2}$ voor $t = 0$.
- b** De vergelijking $v(t) = 0$ heeft één oplossing,
 dus de discriminant van $at^2 - t + 1 = 0$ is gelijk aan nul.
 $D = 1 - 4a$
 $D = 0$ geeft $1 - 4a = 0$, dus $a = \frac{1}{4}$.
- 62 a** $x(t) = 0$ geeft $1 - t^2 = 0$, dus $t = 1 \vee t = -1$.
 $t = -1$ geeft $O(0, 0)$ en $t = 1$ geeft $A(0, 4)$.
 $x'(t) = -2t$ en $y'(t) = 2(1 + t)$
 $x'(1) = -2$ en $y'(1) = 4$
 De gevraagde snelheid is $v(1) = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
- b** $x + y = 1 - t^2 + (1 + t)^2 = 1 - t^2 + 1 + 2t + t^2 = 2 + 2t = 2(1 + t)$
 $\left. \begin{aligned} (x + y)^2 &= (2(1 + t))^2 = 4(1 + t)^2 \\ y &= (1 + t)^2 \end{aligned} \right\} (x + y)^2 = 4y$

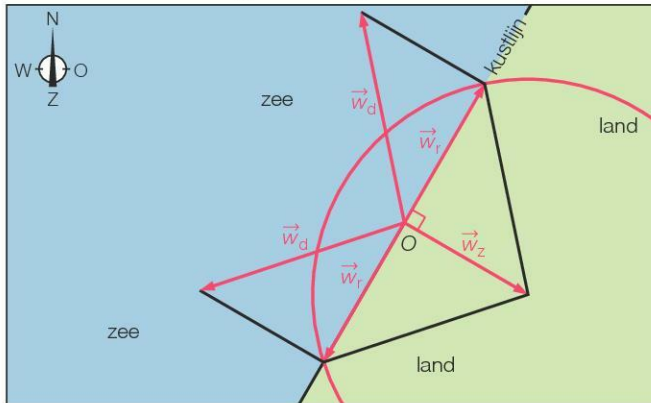
Bladzijde 199

- 63 a** $\angle CBP = 90^\circ$, dus B op de cirkel met middellijn CP .
 Dus middelpunt $M(\frac{1}{2}(-4 + 2), \frac{1}{2}(-4 + 3)) = M(-1, -\frac{1}{2})$ en
 $MP^2 = (2 - (-1))^2 + (3 - (-\frac{1}{2}))^2 = 9 + 12\frac{1}{4} = 21\frac{1}{4}$.
 Dit geeft van de cirkel de vergelijking $(x + 1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$.
- b** $D(4, -8)$ en $P(2, 3)$ geeft $\overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$
 $DP: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$
 $Q(4 - 2t, -8 + 11t)$ en $C(-4, -4)$ geeft $\overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} 4 - 2t \\ -8 + 11t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 2t \\ -4 + 11t \end{pmatrix}$
 $CQ \perp DP$ geeft $\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 - 2t \\ -4 + 11t \end{pmatrix} = 0$
 $-2(8 - 2t) + 11(-4 + 11t) = 0$
 $-16 + 4t - 44 + 121t = 0$
 $125t = 60$
 $t = \frac{12}{25}$
 $t = \frac{12}{25}$ geeft $Q(4 - \frac{24}{25}, -8 + \frac{132}{25})$ oftewel $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$.
- c** Noem de bij zijde CD horende hoogte h .
 $\left. \begin{aligned} O(ABCD) &= CD \cdot DA \\ O(\triangle CDQ) &= \frac{1}{2} CD \cdot h \\ O(\triangle CDQ) &= \frac{1}{3} O(ABCD) \end{aligned} \right\} h = \frac{2}{3} \cdot DA$
 Dus $DQ = \frac{2}{3} \cdot DP$.
 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{OD} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$
 Dus $Q(2\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.
- 64 c:** $\left. \begin{aligned} (x - 1)^2 + (y - 7)^2 &= 25 \\ x = t \text{ en } y = 2t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (t - 1)^2 + (2t - 7)^2 &= 25 \\ t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 28t + 49 &= 25 \\ 5t^2 - 30t + 25 &= 0 \\ t^2 - 6t + 5 &= 0 \\ (t - 1)(t - 5) &= 0 \\ t &= 1 \vee t = 5 \end{aligned}$

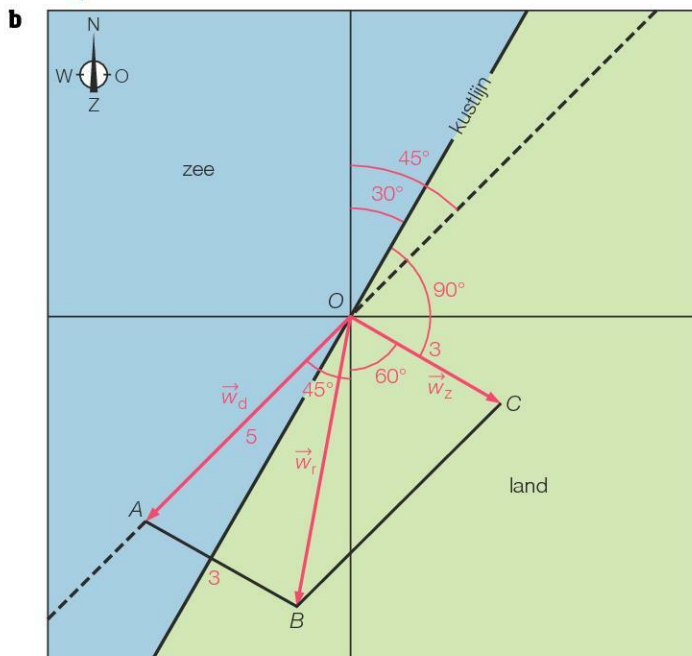
De snijpunten zijn $(1, 2)$ en $(5, 10)$.

Bladzijde 200

- 65 a** Teken de cirkel met middelpunt het eindpunt van $\vec{w}_z$ en straal 6.
De snijpunten van de cirkel en de kustlijn zijn de eindpunten van de vectoren $\vec{w}_r$.
Teken parallellogrammen met zijde $\vec{w}_z$ waarvan de vectoren $\vec{w}_r$ diagonalen zijn.
Teken de vectoren $\vec{w}_d$, zie de figuur.



Bladzijde 201



$\angle AOC = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$, dus $\angle OAB = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

De cosinusregel in $\triangle OAB$ geeft $OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2 \cdot OA \cdot AB \cdot \cos(\angle OAB)$

$$OB^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos(75^\circ)$$

$$OB^2 = 26,23\dots$$

$$OB = 5,12\dots$$

Dus de gevraagde snelheid is 5,1 m/s.

Bladzijde 202

- 66 a** Het midden van CS is $(\frac{1}{2}(0+2), \frac{1}{2}(4+2)) = (1, 3)$.
 $c: (x-3)^2 + (y-2)^2 = r^2$ door $A(4, 0)$ geeft
 $r^2 = 1^2 + (-2)^2 = 5$, dus $c: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$
 $AC: y = -x + 4$ snijden met c geeft $(x-3)^2 + (-x+2)^2 = 5$
 $x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 = 5$
 $2x^2 - 10x + 8 = 0$
 $x^2 - 5x + 4 = 0$
 $(x-1)(x-4) = 0$
 $x = 1 \vee x = 4$

$x_F = 1$ geeft $y_F = -1 + 4 = 3$, dus $F(1, 3)$.

Dus F is het midden van CS .

$$\begin{aligned} \text{b } \overrightarrow{MF} &= \vec{f} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{MB} &= \vec{b} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MB} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0, \text{ dus } \angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) = 90^\circ. \\ \overrightarrow{MG} &= \vec{g} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{MA} &= \vec{a} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MA} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0, \text{ dus } \angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90^\circ. \\ \angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) + \angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) &= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$

Dus de oppervlakte van de twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel.

- 67 a** Als P op k ligt, vormen A , B en P niet de hoekpunten van een driehoek.

$$k: \frac{x}{40} + \frac{y}{10} = 1 \text{ oftewel } x + 4y = 40$$

$$k \text{ snijden met } m \text{ geeft } 18 + 5t + 4(30 - 3t) = 40$$

$$18 + 5t + 120 - 12t = 40$$

$$-7t = -98$$

$$t = 14$$

Dus $P(88, -12)$.

$$\begin{aligned} \text{b } \overrightarrow{AP} &= \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 18 + 5t \\ 30 - 3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 + 5t \\ 20 - 3t \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BP} &= \vec{p} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 18 + 5t \\ 30 - 3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 + 5t \\ 30 - 3t \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP} &\text{ geeft } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \\ &\begin{pmatrix} 18 + 5t \\ 20 - 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -22 + 5t \\ 30 - 3t \end{pmatrix} = 0 \\ &(18 + 5t)(-22 + 5t) + (20 - 3t)(30 - 3t) = 0 \\ &-396 + 90t - 110t + 25t^2 + 600 - 60t - 90t + 9t^2 = 0 \\ &34t^2 - 170t + 204 = 0 \\ &t^2 - 5t + 6 = 0 \\ &(t - 2)(t - 3) = 0 \\ &t = 2 \vee t = 3 \end{aligned}$$

$$t = 2 \text{ geeft } P(28, 24) \text{ en } AP = \sqrt{980} \text{ en } BP = \sqrt{720}, \text{ dus } AP \neq BP.$$

$$t = 3 \text{ geeft } P(33, 21) \text{ en } AP = \sqrt{1210} \text{ en } BP = \sqrt{490}, \text{ dus } AP \neq BP.$$

Dus driehoek ABP is niet gelijkbenig, dus zo'n positie is er niet.

16.7 Goniometrie

Bladzijde 203

$$\begin{aligned} \text{68 a } \cos^2(x) + 1\frac{1}{4} &= \sqrt{3} \cdot \sin(x) \\ 1 - \sin^2(x) + 1\frac{1}{4} &= \sqrt{3} \cdot \sin(x) \\ \sin^2(x) + \sqrt{3} \cdot \sin(x) - 2\frac{1}{4} &= 0 \\ \text{Stel } \sin(x) &= u. \\ u^2 + \sqrt{3} \cdot u - 2\frac{1}{4} &= 0 \\ D = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot -2\frac{1}{4} &= 12 \\ u = \frac{-\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee u = \frac{-\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} &= -1\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \\ x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

- b** De omtrek, dus ook de straal, van c is drie keer zo groot als de straal van de eenheidscirkel.

Dus $r = 3$, $M(4, 0)$ en $a = 4$.

De amplitude is 3, dus $b = 3$.

De omlooptijd is 30 seconden, dus $c = \frac{2\pi}{30} = \frac{1}{15}\pi$.

Q gaat stijgend door de evenwichtsstand op $t = \frac{30}{4} = 7\frac{1}{2}$, dus $d = 7\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{c } N &= \frac{\sin(t + \frac{1}{4}\pi) + \sin(t - \frac{1}{4}\pi)}{\cos(t + \frac{1}{6}\pi) + \cos(t - \frac{1}{6}\pi)} \\ &= \frac{\sin(t)\cos(\frac{1}{4}\pi) + \cos(t)\sin(\frac{1}{4}\pi) + \sin(t)\cos(\frac{1}{4}\pi) - \cos(t)\sin(\frac{1}{4}\pi)}{\cos(t)\cos(\frac{1}{6}\pi) - \sin(t)\sin(\frac{1}{6}\pi) + \cos(t)\cos(\frac{1}{6}\pi) + \sin(t)\sin(\frac{1}{6}\pi)} \\ &= \frac{2\sin(t)\cos(\frac{1}{4}\pi)}{2\cos(t)\cos(\frac{1}{6}\pi)} = \frac{2\sin(t) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}{2\cos(t) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \tan(t) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6} \cdot \tan(t) \end{aligned}$$

Dus $a = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

$$\begin{aligned} \text{d } s &= 1\frac{1}{4} - \cos(\frac{1}{2}t) - \frac{1}{4}\cos^2(t) \text{ geeft} \\ s' &= v = \sin(\frac{1}{2}t) \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(t) \cdot -\sin(t) = \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}t) + \frac{1}{2}\cos(t)\sin(t) \end{aligned}$$

Voer in $y_1 = \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}x) + \frac{1}{2}\cos(x)\sin(x)$.

De optie maximum geeft $x = 3,8409\dots$ en $y = 0,7160\dots$

Dus de maximale snelheid is ongeveer 0,716 m/s.

$$\begin{aligned} \text{e } f(x) &= 2 + \sin(x) - \cos^2(x) \text{ geeft} \\ f'(x) &= \cos(x) - 2\cos(x) \cdot -\sin(x) = \cos(x) + 2\cos(x)\sin(x) \\ f'(x) &= 0 \text{ geeft } \cos(x)(1 + 2\sin(x)) = 0 \\ \cos(x) &= 0 \vee \sin(x) = -\frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \end{aligned}$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$

De toppen zijn $(\frac{1}{2}\pi, 3)$, $(1\frac{1}{2}\pi, 1)$, $(1\frac{1}{6}\pi, \frac{3}{4})$ en $(1\frac{5}{6}\pi, \frac{3}{4})$.

$$\begin{aligned} \text{f } 1 - \sin^2(x) &= 0 \text{ geeft } \sin^2(x) = 1 \\ \sin(x) &= 1 \vee \sin(x) = -1 \\ x &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \\ x &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \\ \cos(x) \cdot (\cos(2x) + 1) &= 0 \text{ geeft } \cos(x) = 0 \vee \cos(2x) = -1 \\ x &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee 2x = \pi + k \cdot 2\pi \\ x &= \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \end{aligned}$$

Dus voor $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ krijg je $\frac{0}{0}$.

$$f(x) = \frac{1 - \sin^2(x)}{\cos(x) \cdot (\cos(2x) + 1)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos(x) \cdot (2\cos^2(x) - 1 + 1)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos(x) \cdot 2\cos^2(x)} = \frac{1}{2\cos(x)}$$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{1}{2\cos(x)}$ bestaat niet, dus de grafiek van f heeft geen perforatie.

$$\text{g } f(x) = \frac{\cos^2(x) - 1}{\sin(2x)} = \frac{-\sin^2(x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \frac{-\sin(x)}{2\cos(x)} \wedge \sin(x) \neq 0$$

$\sin(x) \neq 0$ en x tussen $\frac{1}{2}\pi$ en $1\frac{1}{2}\pi$ geeft $x \neq \pi$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin(x)}{2\cos(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

Dus de perforatie is $A(\pi, 0)$ en $g(x) = \frac{-\sin(x)}{2\cos(x)}$.

$$g'(x) = \frac{2\cos(x) \cdot -\cos(x) + \sin(x) \cdot -2\sin(x)}{4\cos^2(x)} = \frac{-2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)}{4\cos^2(x)} = \frac{-2}{4\cos^2(x)} = \frac{-1}{2\cos^2(x)}$$

$$g'(\pi) = \frac{-1}{2 \cdot (-1)^2} = -\frac{1}{2}, \text{ dus } \text{rc}_k = 2.$$

$$\left. \begin{aligned} k: y &= 2x + b \\ \text{door } A(\pi, 0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2\pi + b &= 0 \\ b &= -2\pi \end{aligned}$$

Dus $k: y = 2x - 2\pi$.

h $f_p(x) = \frac{1}{2}p$ geeft $\cos(x) = \frac{1}{2}$, dus $x = \frac{1}{3}\pi$.

$$O(V) = \int_0^{\frac{1}{3}\pi} (p \cos(x) - \frac{1}{2}p) dx = \left[p \sin(x) - \frac{1}{2}px \right]_0^{\frac{1}{3}\pi} = p \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \frac{1}{6}\pi p - 0$$

$$O(V) = 2 \text{ geeft } p(\sin(\frac{1}{3}\pi) - \frac{1}{6}\pi) = 2$$

$$p(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi) = 2$$

$$p = \frac{2}{\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi} \approx 5,84$$

Bladzijde 204

69 a $A(2 \cos(t), 2 \sin(t))$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{b} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{BA_R} \\ \overrightarrow{BA} &= \begin{pmatrix} 2 \cos(t) - 4 \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix}, \text{ dus } \overrightarrow{BA_R} = \begin{pmatrix} 2 \sin(t) \\ 4 - 2 \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \left\} \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \sin(t) \\ 4 - 2 \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2 \sin(t) \\ 4 - 2 \cos(t) \end{pmatrix}$$

b Los op $|\sin(2t)| = |\sin(t)|$

$$\sin(2t) = \sin(t) \vee \sin(2t) = -\sin(t)$$

$$\sin(2t) = \sin(t) \vee \sin(2t) = \sin(-t)$$

$$2t = t + k \cdot 2\pi \vee 2t = \pi - t + k \cdot 2\pi \vee 2t = -t + k \cdot 2\pi \vee 2t = \pi + t + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot 2\pi \vee 3t = \pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = k \cdot 2\pi \vee t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee t = k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } t = 0 \vee t = \pi \vee t = 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \frac{2}{3}\pi \vee t = \frac{5}{3}\pi \vee t = \frac{4}{3}\pi$$

Het vierde tijdstip is $t = \frac{2}{3}\pi$.

c $y(t) = 0$ geeft $\sin(t) + \cos(2t) = 0$

$$\sin(t) = -\cos(2t)$$

$$\cos(t - \frac{1}{2}\pi) = \cos(2t + \pi)$$

$$t - \frac{1}{2}\pi = 2t + \pi + k \cdot 2\pi \vee t - \frac{1}{2}\pi = -2t - \pi + k \cdot 2\pi$$

$$-t = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = -1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$t \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } t = \frac{1}{2}\pi \vee t = 1\frac{1}{6}\pi \vee t = 1\frac{5}{6}\pi$$

$$t_A = 1\frac{1}{6}\pi \text{ en } t_B = 1\frac{5}{6}\pi, \text{ dus het duurt } 1\frac{5}{6}\pi - 1\frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi \text{ seconden.}$$

d $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -3 \sin(t) \\ \cos(t) - 2 \sin(2t) \end{pmatrix}$

$$t_A = 1\frac{1}{6}\pi, \text{ zie vraag c.}$$

$$\vec{v}(1\frac{1}{6}\pi) = \begin{pmatrix} -3 \sin(1\frac{1}{6}\pi) \\ \cos(1\frac{1}{6}\pi) - 2 \sin(2\frac{1}{6}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{De snelheid in A is } v(1\frac{1}{6}\pi) = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{9} = 3 \text{ m/s.}$$

e $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin(2t - \pi) \\ 2 \sin(t) \cos(t) + 4 \cos(4t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin(2t) \\ \sin(2t) + 4 \cos(4t) \end{pmatrix}$

$$\vec{v}(\frac{1}{4}\pi) = \begin{pmatrix} 2 \sin(\frac{1}{2}\pi) \\ \sin(\frac{1}{2}\pi) + 4 \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 1 + 4 \cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(\frac{3}{4}\pi) = \begin{pmatrix} 2 \sin(\frac{3}{2}\pi) \\ \sin(\frac{3}{2}\pi) + 4 \cos(3\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -1 \\ -1 + 4 \cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(\vec{v}(\frac{1}{4}\pi), \vec{v}(\frac{3}{4}\pi))) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}} = \frac{-4 + 15}{\sqrt{377}} = \frac{11}{\sqrt{377}}$$

De gevraagde hoek is $\varphi \approx 55,5^\circ$.

Bladzijde 209

70 $z = 1 - \cos(t) + \frac{1}{8} \sin^2(t)$ geeft $\frac{dz}{dt} = \sin(t) + \frac{1}{4} \sin(t) \cos(t)$

Voer in $y_1 = \sin(x) + \frac{1}{4} \sin(x) \cos(x)$.

De optie maximum geeft $x = 1,344...$ en $y = 1,029...$

Dus de maximale snelheid is 1,03.

71 $x(t) = 0$ geeft $\sin(2t) + \sin(t) = 0$

$$\sin(2t) = -\sin(t)$$

$$\sin(2t) = \sin(-t)$$

$$2t = -t + k \cdot 2\pi \vee 2t = \pi - t + k \cdot 2\pi$$

$$3t = k \cdot 2\pi \vee t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$0 < t < \pi \text{ geeft } t = \frac{2}{3}\pi$$

$$x'(t) = \cos(2t) \cdot 2 + \cos(t) \text{ en } y'(t) = -\sin(t) \text{ geeft } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) + \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \\ -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Dus de snelheid in B is } \sqrt{\left(-1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$$

72 Er is een perforatie als $1 + \cos(2x) = 0 \wedge \cos(x) = 0$

$$\cos(2x) = -1 \wedge x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = \pi + k \cdot 2\pi \wedge x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \wedge x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1 + 2\cos^2(x) - 1}{\cos(x)} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \left(\frac{2\cos^2(x)}{\cos(x)} + 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} (2\cos(x) + 1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} (2\cos(x) + 1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

Dus de perforaties zijn $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(\frac{3}{2}\pi, 1)$.

73 a $f(x) = 6\sin(x) - \cos(2x)$ geeft $f'(x) = 6\cos(x) + 2\sin(2x)$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 6\cos(x) + 4\sin(x)\cos(x) = 0$$

$$2\cos(x)(3 + 2\sin(x)) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \vee \sin(x) = -1\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ geen opl.}$$

b $f(\frac{1}{2}\pi - 1) = -3,6579\dots$

De gevraagde afstand is $5 - 3,6579\dots \approx 1,34$.

Bladzijde 210

74 a Voer in $y_1 = 125 \cos\left(\frac{2\pi}{745}x\right)$ en $y_2 = 40$.

De optie snijpunt geeft $x = 147,62\dots$ en $x = 596,37\dots$

De droogligtijd is $596,37\dots - 147,62\dots \approx 450$ minuten.

b De grafiek van h is symmetrisch in de lijn $t = \frac{745}{2}$.

$$\text{Dus } \begin{cases} t_2 + t_1 = 745 \\ t_2 - t_1 = D \end{cases}$$

$$2t_1 = 745 - D$$

$$t_1 = \frac{745}{2} - \frac{1}{2}D$$

$$z = h(t_1) = 125 \cos\left(\frac{2\pi}{745}\left(\frac{745}{2} - \frac{1}{2}D\right)\right) = 125 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{745}D\right)$$

Bladzijde 211

$$\text{c } z = 125 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{745}D\right) \text{ geeft } \frac{dz}{dD} = -125 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{745}D\right) \cdot -\frac{\pi}{745} = \frac{125\pi}{745} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{745}D\right)$$

$$\left[\frac{dz}{dD}\right]_{D=372,5} = \frac{125\pi}{745} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{745} \cdot 372,5\right) = \frac{125\pi}{745} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{125\pi}{745}$$

Dus de helling bij figuur 16.137 is $\frac{745}{125\pi} \approx 1,9$

$$D = 8 \cdot 10^{-5}z^3 + 1,7z + 372,5 \text{ geeft } \frac{dD}{dz} = 2,4 \cdot 10^{-4}z^2 + 1,7$$

$$\left[\frac{dD}{dz}\right]_{z=0} = 1,7$$

Dus de helling bij figuur 16.138 is 1,7.

75 $g(x) = 0$ geeft $3 - \sqrt{2x} = 0$
 $\sqrt{2x} = 3$
 $2x = 9$
 $x = 4\frac{1}{2}$, dus $x_A = 4\frac{1}{2}$

$$f(x) = 3 \cos(2x) - \sqrt{2x} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = -3 \sin(2x) \cdot 2 - \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = -6 \sin(2x) - \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

Los op $f'(x) = 0$.

$$\text{Voer in } y_1 = -6 \sin(2x) - \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

De optie nulpunt geeft $x = 1,617\dots$, $x = 3,108\dots$ en $x = 4,739\dots$

Dus $x_B = 4,739\dots$ en dit is groter dan $x_A = 4,5$, dus B ligt rechts van A .

Bladzijde 212

76 **a** $x(t) = \cos(t) + \sin(2t)$ geeft $x'(t) = -\sin(t) + 2 \cos(2t)$
 $y(t) = 2 \cos(t)$ geeft $y'(t) = -2 \sin(t)$
 $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(-\sin(t) + 2 \cos(2t))^2 + (-2 \sin(t))^2}$
 Voer in $y_1 = \sqrt{(-\sin(x) + 2 \cos(2x))^2 + (-2 \sin(x))^2}$.
 De optie maximum geeft $x = 1,57\dots$ en $y = 3,60\dots$
 De maximale snelheid is 3,6 m/s.

b $y(t) = x(t)$ geeft $2 \cos(t) = \cos(t) + \sin(2t)$
 $\cos(t) = 2 \sin(t) \cos(t)$
 $\cos(t) = 0 \vee 2 \sin(t) = 1$

$\cos(t) = 0$ geeft O

$$\sin(t) = \frac{1}{2} \text{ geeft } t_A = \frac{1}{6}\pi \text{ en } t_B = \frac{5}{6}\pi$$

De beweging van A naar B duurt $\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$ seconden.

c helling = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos(t + \pi) - 2 \cos(t)}{\cos(t + \pi) + \sin(2(t + \pi)) - (\cos(t) + \sin(2t))}$
 $= \frac{-2 \cos(t) - 2 \cos(t)}{-\cos(t) + \sin(2t) - \cos(t) - \sin(2t)} = \frac{-4 \cos(t)}{-2 \cos(t)}$

Dit is voor elke t met $\cos(t) \neq 0$ gelijk aan 2 en dus onafhankelijk van t .

Bladzijde 213

77 De omtrek van c_1 is $2\pi r = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$, dus de omtrek van c_2 is 4π en dus is de straal van c_2 gelijk aan 2.
 Dus $l = 2$.

Het middelpunt van c_2 is $(0, \frac{1}{2})$ en de evenwichtsstand van y_Q is $\frac{1}{2}$, dus $k = \frac{1}{2}$.

$$\text{Een rondgang van } Q \text{ duurt 12 seconden, dus } m = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi.$$

Het punt Q gaat een kwart periode na $t = 0$ omhoog door de evenwichtsstand, dus $n = 3$.

78 **a** Er moet bewezen worden dat $\cos(\pi - a) \sin(2(\pi - a)) = \cos(a) \sin(2a)$.
 $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
 $\sin(2(\pi - a)) = \sin(2\pi - 2a) = -\sin(2a)$
 Dus $\cos(\pi - a) \sin(2(\pi - a)) = -\cos(a) \cdot -\sin(2a) = \cos(a) \sin(2a)$.
 Dus beide punten bevinden zich recht boven elkaar en dus is de lijn door de punten verticaal.

b Er moet gelden $|y(t)| = 2 \cdot |x(t)|$.

$$|\cos(t)| = 2 \cdot |\cos(t) \sin(2t)|$$

$$\cos(t) = 0 \vee 2 \cdot |\sin(2t)| = 1$$

$\cos(t) = 0$ geeft $t = \frac{1}{2}\pi \vee t = 1\frac{1}{2}\pi$ en deze laten we buiten beschouwing.

$$|\sin(2t)| = \frac{1}{2}$$

$$2t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee 2t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee t = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$0 \leq t \leq 2\pi \text{ geeft } t = \frac{1}{12}\pi \vee t = \frac{7}{12}\pi \vee t = 1\frac{1}{12}\pi \vee t = 1\frac{7}{12}\pi \vee t = \frac{5}{12}\pi \vee t = 1\frac{11}{12}\pi \vee t = 1\frac{1}{12}\pi$$

Het vierde tijdstip is $t = 1\frac{11}{12}\pi$.

c $\overrightarrow{OP}_t = \begin{pmatrix} \cos(t) \sin(2t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{OP}_{\frac{3}{4}\pi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$x'(t) = -\sin(t) \cdot \sin(2t) + \cos(t) \cdot 2 \cos(2t)$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \cos(2t) - \sin(t) \sin(2t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(\frac{3}{4}\pi) = \begin{pmatrix} 2 \cos(\frac{3}{4}\pi) \cos(1\frac{1}{2}\pi) - \sin(\frac{3}{4}\pi) \sin(1\frac{1}{2}\pi) \\ -\sin(\frac{3}{4}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dus voor $t = \frac{3}{4}\pi$ geldt $\overrightarrow{OP}_t = \vec{v}$.

Bladzijde 214

79 a $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)}$

Delen van teller en noemer door $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ geeft

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}{1 + \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$$

b $\tan(\varphi) = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} = \frac{\frac{75}{x} - \frac{27}{x}}{1 + \frac{75}{x} \cdot \frac{27}{x}} = \frac{75x - 27x}{x^2 + 75 \cdot 27} = \frac{48x}{x^2 + 2025}$

c $g(x) = \frac{48x}{x^2 + 2025}$ geeft

$$g'(x) = \frac{(x^2 + 2025) \cdot 48 - 48x \cdot 2x}{(x^2 + 2025)^2} = \frac{48x^2 + 97200 - 96x^2}{(x^2 + 2025)^2} = \frac{97200 - 48x^2}{(x^2 + 2025)^2}$$

$$g'(x) = 0 \text{ geeft } 97200 - 48x^2 = 0$$

$$48x^2 = 97200$$

$$x^2 = 2025$$

$$x = 45 \text{ (} x = -45 \text{ voldoet niet)}$$

De afstand is 45 meter.

Bladzijde 215

80 a $f(x) = \sqrt{2}$ geeft $\frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)} = \sqrt{2}$

$$\cos(x) = -\sin^2(x) \cdot \sqrt{2}$$

$$\cos(x) = -(1 - \cos^2(x)) \cdot \sqrt{2}$$

$$\cos(x) = \cos^2(x) \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$\cos^2(x) \cdot \sqrt{2} - \cos(x) - \sqrt{2} = 0$$

$$\text{Stel } \cos(x) = u.$$

$$u^2 \cdot \sqrt{2} - u - \sqrt{2} = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot -\sqrt{2} = 9$$

$$u = \frac{1+3}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \vee u = \frac{1-3}{2\sqrt{2}} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(x) = \sqrt{2} \text{ vold. niet} \vee \cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

Dus $x_A = \frac{3}{4}\pi$ en $x_B = 1\frac{1}{4}\pi$.

- b** Er moet een waarde van x zijn waarvoor $\cos(x) = 0 \wedge p - \sin^2(x) = 0$.

$$\cos(x) = 0 \text{ geeft } x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\text{Voor } x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ is } \sin^2(x) = 1.$$

Dus de noemer wordt dan 0 als $p = 1$.

$$f_1(x) = \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{1}{\cos(x)}$$

Deze limiet bestaat niet, dus er is geen waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft.

c $f_p'(0) = \frac{1}{p-0} = \frac{1}{p}$, dus $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$

$$f_p'(\pi) = \frac{-1}{p-0} = -\frac{1}{p}, \text{ dus } Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$$

$$f_p'(2\pi) = \frac{1}{p-0} = \frac{1}{p}, \text{ dus } R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$$

$$\text{rc}_{PQ} = \frac{-\frac{1}{p} - \frac{1}{p}}{\pi} = -\frac{2}{p\pi}$$

$$\text{rc}_{QR} = \frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{p}}{2\pi - \pi} = \frac{2}{p\pi}$$

$$PQ \perp QR, \text{ dus } \text{rc}_{PQ} \cdot \text{rc}_{QR} = -1$$

$$-\frac{2}{p\pi} \cdot \frac{2}{p\pi} = -1$$

$$\frac{4}{p^2\pi^2} = 1$$

$$p^2\pi^2 = 4$$

$$p^2 = \frac{4}{\pi^2}$$

$$p = \frac{2}{\pi} \vee p = -\frac{2}{\pi}$$

Bladzijde 216

- 81 a** Er moet gelden $AC^2 = 2 \cdot BC^2$.

$$AC^2 = (\cos(t) - 1)^2 + \sin^2(t)$$

$$BC^2 = \cos^2(t) + (\sin(t) - 1)^2$$

$$\text{Voer in } y_1 = (\cos(x) - 1)^2 + \sin^2(x) \text{ en } y_2 = 2(\cos^2(x) + (\sin(x) - 1)^2).$$

De optie snijpunt geeft $x = 0,927\dots$ en $y = 0,8$, dus $t \approx 0,93$.

- b** $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}_R$

$$\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ 1 - \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB}_R = \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$$

- 82 a** $y(t) = 0$ geeft $\sin(2t) = \sin(t)$

$$2t = t + k \cdot 2\pi \vee 2t = \pi - t + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot 2\pi \vee 3t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$0 \leq t \leq 2\pi \text{ geeft } t = 0 \vee t = 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \pi \vee t = \frac{5}{3}\pi$$

$$x(0) = x(2\pi) = 1 - 0 = 1$$

$$x\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x(\pi) = 1 - 0 = 1$$

$$x\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Dus } x_p = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Bladzijde 217

- b** $x(t) = \cos(2t) - \sin(2t)$ geeft $x'(t) = -2\sin(2t) - 2\cos(2t)$
 $y(t) = \sin(2t) - \sin(t)$ geeft $y'(t) = 2\cos(2t) - \cos(t)$
 $x'(0) = -2, y'(0) = 1, x'(\pi) = -2, y'(\pi) = 3$

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{4+3}{\sqrt{65}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$\varphi \approx 29,7^\circ$$

83 a $A(p) = \int_p^{\pi-p} 2\sin(x) dx = [-2\cos(x)]_p^{\pi-p} = -2\cos(\pi-p) + 2\cos(p)$
 $= 2\cos(p) + 2\cos(p) = 4\cos(p)$

- b** $O(W) = \frac{1}{2}A(p) = 2\cos(p)$
 $O(W) = (\pi - p - p) \cdot f(p) = (\pi - 2p) \cdot 2\sin(p)$
Dus $2\cos(p) = (\pi - 2p) \cdot 2\sin(p)$.
Voer in $y_1 = 2\cos(x)$ en $y_2 = (\pi - 2x) \cdot 2\sin(x)$.
De optie snijpunt geeft $x = 0,405\dots$
Dus $p \approx 0,41$.

Gemengde opgaven

13 Limieten en asymptoten

Bladzijde 218

- 1 a $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2 - 9)}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} x = 3$
- b $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2a - x^2}{(x+a)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2a - x^2}{x^2 - a^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2a}{x^2} - 1}{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{0 - 1}{1 - 0} = -1$
- c $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{3 + \ln(x^4)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \ln(x)}{3 + 4 \ln(x)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{\ln(x)} + 4} = \frac{\frac{1}{2}}{0 + 4} = \frac{1}{8}$
- d $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{2x} - e^6}{e^3 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(e^x - e^3)(e^x + e^3)}{-(e^x - e^3)} = \lim_{x \rightarrow 3} -(e^x + e^3) = -(e^3 + e^3) = -2e^3$
- e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x+2}}{e^{2x} + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x+2}}{e^{2x} \left(1 + \frac{2}{e^{2x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^2}{1 + \frac{2}{e^{2x}}} = \frac{e^2}{1 + 0} = e^2$
- f $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{2 + \ln(x^3)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^{-1})}{2 + 3 \ln(x)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{-\ln(x)}{2 + 3 \ln(x)} = \lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\frac{2}{\ln(x)} + 3} = \frac{-1}{0 + 3} = -\frac{1}{3}$

- 2 a $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)}$
Er is een perforatie als $x = -1$.
 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x-1} = \frac{-1+2}{-1-1} = -\frac{1}{2}$
Dus de perforatie is $A(-1, -\frac{1}{2})$.
 $g(x) = \frac{x-3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{x-3}{(x+1)(x-3)}$
Er is een perforatie als $x = 3$.
 $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$
Dus de perforatie is $B(3, \frac{1}{4})$.
Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{4} - (-\frac{1}{2})}{3 - (-1)} = \frac{\frac{3}{4}}{4} = \frac{3}{16}$.
 $y = \frac{3}{16}x + b$
door $A(-1, -\frac{1}{2})$ $\left. \begin{array}{l} -\frac{3}{16} + b = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{5}{16} \end{array} \right\}$
Dus $k: y = \frac{3}{16}x - \frac{5}{16}$
 $16y = 3x - 5$
 $3x - 16y = 5$

$$\text{b } f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1} \text{ mits } x \neq -1 \text{ geeft}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1) \cdot 1 - (x+2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rc}_l = f'(0) &= \frac{-3}{(-1)^2} = -3 \\ f(0) &= -2, \text{ dus } C(0, -2) \end{aligned} \right\} l: y = -3x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Dus de horizontale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = 1$.

$$g(x) = \frac{x-3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{x+1} \text{ mits } x \neq 3$$

$$x+1 = 0 \text{ geeft } x = -1$$

Dus de verticale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $x = -1$.

Dus $D(-1, 1)$.

$$x = -1 \text{ en } y = -3x - 2 \text{ geeft } y = 1$$

Dus D ligt op l .

$$\text{3 a } f_3(x) = \frac{4x^2 + 4x - 15}{2x + 3} = \frac{2x(2x + 3) - 6x + 4x - 15}{2x + 3} = 2x + \frac{-2x - 15}{2x + 3} = 2x + \frac{-(2x + 3) + 3 - 15}{2x + 3}$$

$$= 2x - 1 - \frac{12}{2x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{2x + 3} = 0, \text{ dus de scheve asymptoot is de lijn } y = 2x - 1.$$

$$2x + 3 = 0 \wedge 4x^2 + 4x - 15 \neq 0 \text{ geeft } x = -1\frac{1}{2}, \text{ dus de verticale asymptoot is de lijn } x = -1\frac{1}{2}.$$

$$\text{b } f_a(x) = \frac{4x^2 + 4x - 15}{2x + a} = \frac{2x(2x + a) - 2ax + 4x - 15}{2x + a} = 2x + \frac{-2ax + 4x - 15}{2x + a}$$

Voor scheve asymptoot $y = 2x$ moet gelden dat $-2a = -4$, dus $a = 2$.

$$\text{Want dan is } f_a(x) = 2x - \frac{15}{2x + a} \text{ en } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15}{2x + a} = 0.$$

$$\text{c } f_a(x) = \frac{4x^2 + 4x - 15}{2x + a} = \frac{(2x - 3)(2x + 5)}{2x + a}$$

Er is een perforatie als $a = -3$ en als $a = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}} f_{-3}(x) = \lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}} \frac{(2x - 3)(2x + 5)}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}} (2x + 5) = 3 + 5 = 8$$

Voor $a = -3$ is de perforatie $(1\frac{1}{2}, 8)$.

$$\lim_{x \rightarrow -2\frac{1}{2}} f_5(x) = \lim_{x \rightarrow -2\frac{1}{2}} \frac{(2x - 3)(2x + 5)}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -2\frac{1}{2}} (2x - 3) = -5 - 3 = -8$$

Voor $a = 5$ is de perforatie $(-2\frac{1}{2}, -8)$.

$$\text{4 a } 2e^{-x} - 4 = 0 \wedge e^x + 1 \neq 0$$

$$2e^{-x} = 4 \wedge e^x \neq -1$$

$$e^{-x} = 2$$

$$-x = \ln(2)$$

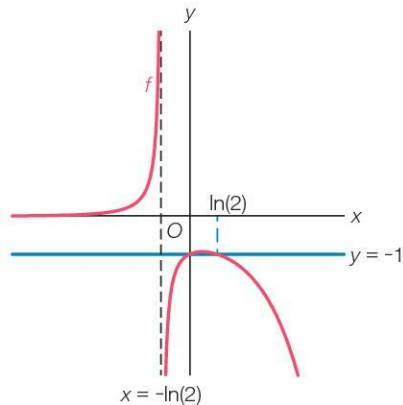
$$x = -\ln(2)$$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -\ln(2)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{2e^{-x} - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + e^x}{2 - 4e^x} = \frac{0 + 0}{2 - 0} = 0$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{b } f(x) = -1 \text{ geeft } \frac{e^x + 1}{2e^{-x} - 4} &= -1 \\
 e^x + 1 &= -2e^{-x} + 4 \\
 e^x - 3 + 2e^{-x} &= 0 \\
 e^{2x} - 3e^x + 2 &= 0 \\
 (e^x - 1)(e^x - 2) &= 0 \\
 e^x = 1 \vee e^x &= 2 \\
 x = 0 \vee x &= \ln(2)
 \end{aligned}$$



$$f(x) \geq -1 \text{ geeft } x < -\ln(2) \vee 0 \leq x \leq \ln(2)$$

Bladzijde 219

- 5 a** $\lim_{x \rightarrow 2} f_{p,q}(x)$ bestaat als $\lim_{x \uparrow 2} (x^2 + 4px) = \lim_{x \downarrow 2} (2x + q)$
- $$\begin{aligned}
 4 + 8p &= 4 + q \\
 q &= 8p
 \end{aligned}$$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f_{p,q}(x)$ bestaat als $\lim_{x \uparrow 3} (2x + q) = \lim_{x \downarrow 3} (x^3 - 4x + p)$
- $$\begin{aligned}
 6 + q &= 27 - 12 + p \\
 q &= p + 9
 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
 8p &= p + 9 \\
 7p &= 9 \\
 p &= 1\frac{2}{7} \\
 q &= 1\frac{2}{7} + 9 = 10\frac{2}{7}
 \end{aligned}$$
- b** $A(3, 10)$ is een perforatie als $\lim_{x \uparrow 3} (2x + q) = 10 \wedge \lim_{x \downarrow 3} (x^3 - 4x + p) = 10$
- $$\begin{aligned}
 6 + q &= 10 \wedge 27 - 12 + p = 10 \\
 q &= 4 \wedge p = -5
 \end{aligned}$$
- c** $f_{p,q}$ heeft een extreme waarde voor $x = -1$ als $\frac{-4p}{2} = -1$
- $$p = \frac{1}{2}$$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f_{p,q}(x)$ bestaat als $q = p + 9$, dus $q = \frac{1}{2} + 9 = 9\frac{1}{2}$.
- 6 a** De grafiek heeft een knik voor $x = p$.
 De top met horizontale raaklijn ligt rechts van de knik.
 Rechts van de knik is $x > p$, dus $f'_p(x) = (x - p)(e^x - 3)$ en
 $f'_p(x) = 1 \cdot (e^x - 3) + (x - p) \cdot e^x = (x - p + 1)e^x - 3$.
 $f'_p(-1) = 0$ geeft $(-1 - p + 1)e^{-1} - 3 = 0$
- $$\begin{aligned}
 -pe^{-1} &= 3 \\
 p &= -3e
 \end{aligned}$$

b $f_p'(x) = \begin{cases} (x-p+1)e^x - 3 & \text{voor } x > p \\ -(x-p+1)e^x + 3 & \text{voor } x < p \end{cases}$
 $\lim_{x \uparrow p} f_p'(x) = \lim_{x \uparrow p} (-(x-p+1)e^x + 3) = -e^p + 3$
 $\lim_{x \downarrow p} f_p'(x) = \lim_{x \downarrow p} ((x-p+1)e^x - 3) = e^p - 3$
 Geen knik als $\lim_{x \uparrow p} f_p'(x) = \lim_{x \downarrow p} f_p'(x)$, dus als $-e^p + 3 = e^p - 3$
 $2e^p = 6$
 $e^p = 3$
 $p = \ln(3)$

c $f_2(x) = |x-2|(e^x - 3) = \begin{cases} (x-2)(e^x - 3) & \text{voor } x \geq 2 \\ -(x-2)(e^x - 3) & \text{voor } x < 2 \end{cases}$

$f_2'(x) = \begin{cases} (x-1)e^x - 3 & \text{voor } x > 2 \\ -(x-1)e^x + 3 & \text{voor } x < 2 \end{cases}$
 $\lim_{x \uparrow 2} f_2'(x) = \lim_{x \uparrow 2} (-(x-1)e^x + 3) = -e^2 + 3$

$\lim_{x \downarrow 2} f_2'(x) = \lim_{x \downarrow 2} ((x-1)e^x - 3) = e^2 - 3$

$\text{rc}_k = \tan(\alpha) = -e^2 + 3$ geeft $\alpha = -77,1...^\circ$

$\text{rc}_l = \tan(\beta) = e^2 - 3$ geeft $\beta = 77,1...^\circ$

$\beta - \alpha \approx 154^\circ$

$\angle(k, l) \approx 180^\circ - 154^\circ = 26^\circ$

d $\angle(k, l) = 90^\circ$ geeft $\lim_{x \uparrow p} f_p'(x) \cdot \lim_{x \downarrow p} f_p'(x) = -1$
 $(-e^p + 3) \cdot (e^p - 3) = -1$
 $(e^p - 3)^2 = 1$
 $e^p - 3 = 1 \vee e^p - 3 = -1$
 $e^p = 4 \vee e^p = 2$
 $p = \ln(4) \vee p = \ln(2)$

7 a $e^{\frac{1}{x}} - a = 0 \wedge 2e^{\frac{1}{x}} \neq 0$
 $e^{\frac{1}{x}} = a$

$\frac{1}{x} = \ln(a)$

$x = \frac{1}{\ln(a)}$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{1}{\ln(a)}$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - a} = \frac{2e^0}{e^0 - a} = \frac{2}{1-a}$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{2}{1-a}$.

Het snijpunt van de asymptoten is het punt $\left(\frac{1}{\ln(a)}, \frac{2}{1-a}\right)$.

Dit punt ligt op de lijn $y = x - 1$ geeft $\frac{2}{1-a} = \frac{1}{\ln(a)} - 1$.

Voer in $y_1 = \frac{2}{1-x}$ en $y_2 = \frac{1}{\ln(x)} - 1$.

De optie snijpunt geeft $x = 5,700...$

Dus $a \approx 5,70$.

$$\text{b } f_a(x) = \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - a} \text{ geeft } f_a'(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} - a) \cdot 2e^{\frac{1}{x}} \cdot -\frac{1}{x^2} - 2e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot -\frac{1}{x^2}}{(e^{\frac{1}{x}} - a)^2} = \frac{2e^{\frac{2}{x}} - 2ae^{\frac{1}{x}} - 2e^{\frac{2}{x}}}{-x^2 \cdot (e^{\frac{1}{x}} - a)^2} = \frac{2ae^{\frac{1}{x}}}{x^2 \cdot (e^{\frac{1}{x}} - a)^2}$$

$$\begin{aligned} f_a'(1) = 4 \text{ geeft } \frac{2ae}{(e-a)^2} &= 4 \\ 2(e-a)^2 &= ae \\ 2(e^2 - 2ae + a^2) &= ae \\ 2e^2 - 4ae + 2a^2 &= ae \\ 2a^2 - 5ae + 2e^2 &= 0 \\ D &= (-5e)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2e^2 = 9e^2 \\ a &= \frac{5e \pm 3e}{4} = 2e \vee a = \frac{5e - 3e}{4} = \frac{1}{2}e \end{aligned}$$

$$\text{c } \text{Voor } f_a \text{ geldt } y = \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - a}, \text{ dus voor } f_a^{\text{inv}} \text{ geldt } x = \frac{2e^{\frac{1}{y}}}{e^{\frac{1}{y}} - a}.$$

$$\begin{aligned} x = \frac{2e^{\frac{1}{y}}}{e^{\frac{1}{y}} - a} \text{ geeft } x(e^{\frac{1}{y}} - a) &= 2e^{\frac{1}{y}} \\ xe^{\frac{1}{y}} - 2e^{\frac{1}{y}} &= ax \\ e^{\frac{1}{y}}(x - 2) &= ax \\ e^{\frac{1}{y}} &= \frac{ax}{x - 2} \\ \frac{1}{y} &= \ln\left(\frac{ax}{x - 2}\right) \\ y &= \frac{1}{\ln\left(\frac{ax}{x - 2}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } f_a^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{ax}{x - 2}\right)}.$$

Bladzijde 220

$$\text{8 a } \text{De grafiek van } f_a(x) = \frac{ax + 4}{2x - 3} \text{ heeft een perforatie als } 2x - 3 = 0 \wedge ax + 4 = 0.$$

$$2x - 3 = 0 \text{ geeft } x = 1\frac{1}{2}$$

$$ax + 4 = 0 \text{ en } x = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } 1\frac{1}{2}a + 4 = 0$$

$$1\frac{1}{2}a = -4$$

$$a = -2\frac{2}{3}$$

$$\text{b } \text{De grafieken van } f_a \text{ en } f_a^{\text{inv}} \text{ snijden elkaar op de lijn } y = x, \text{ dus } f_a(4) = 4$$

$$\frac{4a + 4}{8 - 3} = 4$$

$$4a + 4 = 20$$

$$4a = 16$$

$$a = 4$$

$$\text{c } \lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + 4}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{4}{x}}{2 - \frac{3}{x}} = \frac{a + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}a, \text{ dus de horizontale asymptoot is de lijn } y = \frac{1}{2}a.$$

$$2x - 3 = 0 \wedge ax + 4 \neq 0 \text{ geeft } x = 1\frac{1}{2} \wedge a \neq -2\frac{2}{3}, \text{ dus de verticale asymptoot is de lijn } x = 1\frac{1}{2}.$$

$$\text{Het snijpunt } (1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a) \text{ ligt op de parabool } y = x^2 \text{ als } \frac{1}{2}a = (1\frac{1}{2})^2$$

$$\frac{1}{2}a = 2\frac{1}{4}$$

$$a = 4\frac{1}{2}$$

9 a $f(x) = \frac{x^2 - x}{2 - |x - 1|} = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{2 - (x - 1)} = \frac{x^2 - x}{3 - x} & \text{voor } x \geq 1 \\ \frac{x^2 - x}{2 - (-x + 1)} = \frac{x^2 - x}{x + 1} & \text{voor } x < 1 \end{cases}$

noemer = 0 voor $x \geq 1$ geeft $3 - x = 0$, dus $x = 3$.

noemer = 0 voor $x < 1$ geeft $x + 1 = 0$, dus $x = -1$.

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 3$ en $x = -1$.

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{3 - x} = \frac{-x(3 - x) + 3x - x}{3 - x} = -x + \frac{2x}{3 - x} = -x + \frac{-2(3 - x) + 6}{3 - x} = -x - 2 + \frac{6}{3 - x}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{3 - x} = 0$, dus de lijn $y = -x - 2$ is scheve asymptoot.

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{x(x + 1) - x - x}{x + 1} = x - \frac{2x}{x + 1} = x - \frac{2(x + 1) - 2}{x + 1} = x - 2 + \frac{2}{x + 1}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x + 1} = 0$, dus de lijn $y = x - 2$ is scheve asymptoot.

b $f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x + 1) \cdot (2x - 1) - (x^2 - x) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 - x + 2x - 1 - x^2 + x}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $x^2 + 2x - 1 = 0$

$$(x + 1)^2 - 1 - 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 = 2$$

$$x + 1 = \sqrt{2} \vee x + 1 = -\sqrt{2}$$

$$x = -1 + \sqrt{2} \vee x = -1 - \sqrt{2}$$

vold. niet

$$y_A = f(-1 - \sqrt{2}) = \frac{(-1 - \sqrt{2})^2 - (-1 - \sqrt{2})}{-1 - \sqrt{2} + 1} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 + \sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 3$$

c Voer in $y_1 = \frac{x^2 - x}{2 - |x - 1|}$.

De optie maximum geeft $x \approx -2,41$ en $y \approx -5,83$ en ook $x \approx 5,45$ en $y \approx -9,90$.

De optie minimum geeft $x \approx 0,41$ en $y \approx -0,17$.

$f(x) = p$ heeft twee oplossingen voor $-9,90 < p < -5,83 \vee p > -0,17$.

d $x < 1$ en $f(x) = 2$ geeft $\frac{x^2 - x}{x + 1} = 2$

$$x^2 - x = 2x + 2$$

$$x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -2 = 17$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$$

vold. niet

$x \geq 1$ en $f(x) = 2$ geeft $\frac{x^2 - x}{3 - x} = 2$

$$x^2 - x = 6 - 2x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x - 2)(x + 3) = 0$$

$$x = 2 \vee x = -3$$

vold. niet

$f(x) \leq 2$ geeft $x < -1 \vee \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \leq x \leq 2 \vee x > 3$

10

$$\begin{aligned} \text{a } f_a(x) &= \frac{x^3 + ax^2 + 4}{x^2 - 2x} = \frac{x(x^2 - 2x) + 2x^2 + ax^2 + 4}{x^2 - 2x} = x + \frac{(a+2)x^2 + 4}{x^2 - 2x} = \\ &= x + \frac{(a+2)(x^2 - 2x) + 2ax + 4x + 4}{x^2 - 2x} = x + a + 2 + \frac{2ax + 4x + 4}{x^2 - 2x} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax + 4x + 4}{x^2 - 2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2a}{x} + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{0 + 0 + 0}{1 - 0} = 0 \end{aligned}$$

Dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x + a + 2$.

$A(2, 3)$ op de scheve asymptoot geeft $2 + a + 2 = 3$

$$a = -1$$

$$\text{b } f_a(x) = \frac{x^3 + ax^2 + 4}{x^2 - 2x} \text{ geeft } f'_a(x) = \frac{(x^2 - 2x) \cdot (3x^2 + 2ax) - (x^3 + ax^2 + 4) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2}$$

Top op de lijn $x = 1$ geeft $f'_a(1) = 0$

$$\frac{(1-2)(3+2a) - (1+a+4)(2-2)}{(1-2)^2} = 0$$

$$-3 - 2a - 0 = 0$$

$$-2a = 3$$

$$a = -1\frac{1}{2}$$

$$\text{c } \text{De grafiek van } f_a(x) = \frac{x^3 + ax^2 + 4}{x^2 - 2x} \text{ heeft een perforatie als } x^2 - 2x = 0 \wedge x^3 + ax^2 + 4 = 0.$$

$$x^2 - 2x = 0 \text{ geeft } x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

$$x = 0 \text{ en } x^3 + ax^2 + 4 = 0 \text{ geeft } 4 = 0, \text{ dus voldoet niet.}$$

$$x = 2 \text{ en } x^3 + ax^2 + 4 = 0 \text{ geeft } 8 + 4a + 4 = 0$$

$$4a = -12$$

$$a = -3$$

Dus voor $a = -3$ heeft de grafiek van f_a een perforatie.

$$\text{Echter } f_{-3}(x) = x - 3 + 2 + \frac{2 \cdot -3x + 4x + 4}{x^2 - 2x} = x - 1 + \frac{-2x + 4}{x^2 - 2x}.$$

Dus de grafiek van f_{-3} is geen rechte lijn.

Dus voor geen enkele waarde van a is de grafiek een rechte lijn met een perforatie.

11

$$\text{a } \ln(x^2) + 1 = 0 \wedge \ln(x^2) - 1 \neq 0$$

$$\ln(x^2) = -1 \wedge \ln(x^2) \neq 1$$

$$x^2 = e^{-1} \wedge x^2 \neq e$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}} \vee x = -e^{-\frac{1}{2}}$$

Dus de verticale asymptoten zijn de lijnen $x = e^{-\frac{1}{2}}$ en $x = -e^{-\frac{1}{2}}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2) - 1}{\ln(x^2) + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(x) - 1}{2 \ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(x) - 1}{2 \ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{\ln(x)}}{2 + \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{2 - 0}{2 + 0} = 1$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

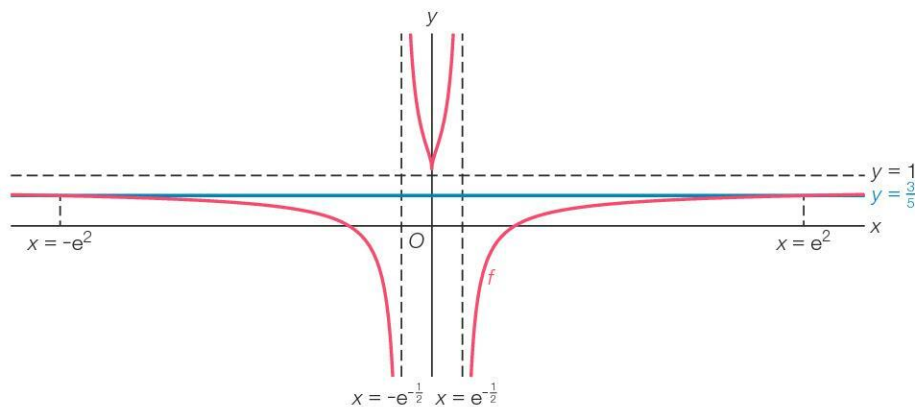
$$\text{b } \text{Voor } x > 0 \text{ is } f(x) = \frac{2 \ln(x) - 1}{2 \ln(x) + 1} \text{ en voor } x < 0 \text{ is } f(x) = \frac{2 \ln(-x) - 1}{2 \ln(-x) + 1}.$$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{2 \ln(x) - 1}{2 \ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln(x) - 1}{2 \ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{\ln(x)}}{2 + \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{2 - 0}{2 + 0} = 1$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{2 \ln(-x) - 1}{2 \ln(-x) + 1} = \lim_{\ln(-x) \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln(-x) - 1}{2 \ln(-x) + 1} = \lim_{\ln(-x) \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{\ln(-x)}}{2 + \frac{1}{\ln(-x)}} = \frac{2 - 0}{2 + 0} = 1$$

Dus de perforatie is het punt $(0, 1)$.

$$\begin{aligned}
 \text{c } f(x) = \frac{3}{5} \text{ geeft } \frac{\ln(x^2) - 1}{\ln(x^2) + 1} &= \frac{3}{5} \\
 3 \ln(x^2) + 3 &= 5 \ln(x^2) - 5 \\
 -2 \ln(x^2) &= -8 \\
 \ln(x^2) &= 4 \\
 x^2 &= e^4 \\
 x &= e^2 \vee x = -e^2
 \end{aligned}$$



$$f(x) \geq \frac{3}{5} \text{ geeft } x \leq -e^2 \vee -e^{\frac{1}{2}} < x < e^{\frac{1}{2}} \vee x \geq e^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{d } f(x) = \frac{\ln(x^2) - 1}{\ln(x^2) + 1} \text{ geeft } f'(x) &= \frac{(\ln(x^2) + 1) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x - (\ln(x^2) - 1) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x}{(\ln(x^2) + 1)^2} = \frac{(\ln(x^2) + 1) \cdot 2 - (\ln(x^2) - 1) \cdot 2}{x(\ln(x^2) + 1)^2} \\
 &= \frac{2 \ln(x^2) + 2 - 2 \ln(x^2) + 2}{x(\ln(x^2) + 1)^2} = \frac{4}{x(\ln(x^2) + 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Stel } y = ax + b \text{ met } a = f'(e) = \frac{4}{e(\ln(e^2) + 1)^2} = \frac{4}{e(2 + 1)^2} = \frac{4}{9e}.$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{4}{9e}x + b \\ f(e) &= \frac{1}{3}, \text{ dus } A(e, \frac{1}{3}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{4}{9e} \cdot e + b &= \frac{1}{3} \\ \frac{4}{9} + b &= \frac{1}{3} \\ b &= -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y = \frac{4}{9e}x - \frac{1}{9} \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } \frac{4}{9e}x - \frac{1}{9} &= 0 \\
 4x - e &= 0 \\
 4x &= e \\
 x &= \frac{1}{4}e
 \end{aligned}$$

Dus $B(\frac{1}{4}e, 0)$.

14 Meetkunde toepassen

Bladzijde 221

- 12 a Een parametervoorstelling van c is $x = 3 \cos(t) \wedge y = 6 + 3 \sin(t)$ met $-\pi \leq t \leq 0$.

Het midden Q van $B(3, 0)$ en $P(3 \cos(t), 6 + 3 \sin(t))$ is

$$Q(\frac{1}{2}(3 + 3 \cos(t), \frac{1}{2}(0 + 6 + 3 \sin(t))) = Q(1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} \cos(t), 3 + 1\frac{1}{2} \sin(t)).$$

$$-\pi \leq t \leq 0 \text{ geeft } -1 \leq \sin(t) \leq 0, \text{ dus } 1\frac{1}{2} \leq 3 + 1\frac{1}{2} \sin(t) \leq 3, \text{ dus } 1\frac{1}{2} \leq y_Q \leq 3.$$

De baan van Q is de kromme met vergelijking $(x - 1\frac{1}{2})^2 + (y - 3)^2 = 2\frac{1}{4} \wedge 1\frac{1}{2} \leq y \leq 3$

$$x^2 - 3x + 2\frac{1}{4} + y^2 - 6y + 9 = 2\frac{1}{4} \wedge 1\frac{1}{2} \leq y \leq 3$$

$$x^2 + y^2 - 3x - 6y + 9 = 0 \wedge 1\frac{1}{2} \leq y \leq 3$$

Dus $a = -3, b = -6, c = 9, d = 1\frac{1}{2}$ en $e = 3$.

- b De totale massa is $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 10$.

$$\begin{aligned}
 y_{Z_1} &= \frac{1}{10} \cdot (1 \cdot y_O + 1 \cdot y_A + 1 \cdot y_B + 2 \cdot y_C + 2 \cdot y_D + 3 \cdot y_E) \\
 &= \frac{1}{10} \cdot (1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3) = \frac{1}{10} \cdot 33 = 3\frac{3}{10}
 \end{aligned}$$

- c Het zwaartepunt $(0, 3)$ van het vierkant heeft massa 36.

De y -coördinaat van het zwaartepunt van de halve cirkel is $6 - \frac{4}{3\pi} \cdot 3 = 6 - \frac{4}{\pi}$.

De massa van het zwaartepunt van de halve cirkel is $\frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = 4\frac{1}{2}\pi$.

De totale massa is $36 - 4\frac{1}{2}\pi$.

$$y_{Z_2} = \frac{1}{36 - 4\frac{1}{2}\pi} \cdot \left(36 \cdot 3 - 4\frac{1}{2}\pi \cdot \left(6 - \frac{4}{\pi} \right) \right) \approx 1,88$$

13 a $\vec{z} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ en $Z(1\frac{2}{3}, 1\frac{2}{3})$.

Dus het zwaartepunt Z van driehoek ABC ligt op de lijn $y = x$.

b $M(\frac{1}{2}(-1+4), \frac{1}{2}(-1+1)) = M(1\frac{1}{2}, 0)$, dus $c: (x - 1\frac{1}{2})^2 + y^2 = r^2$.

c door $A(-1, -1)$ geeft $c: (x - 1\frac{1}{2})^2 + y^2 = 7\frac{1}{4}$.

$$\vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{s}_{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ geeft } AC: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

AC snijden met c geeft $(-1 + t - 1\frac{1}{2})^2 + (-1 + 2t)^2 = 7\frac{1}{4}$

$$(t - 2\frac{1}{2})^2 + (-1 + 2t)^2 = 7\frac{1}{4}$$

$$t^2 - 5t + 6\frac{1}{4} + 1 - 4t + 4t^2 = 7\frac{1}{4}$$

$$5t^2 - 9t = 0$$

$$t(5t - 9) = 0$$

$$t = 0 \vee 5t - 9 = 0$$

$$t = 0 \vee t = 1\frac{4}{5}$$

$t = 0$ geeft punt A

$$t = 1\frac{4}{5} \text{ geeft } x = -1 + 1\frac{4}{5} \cdot 1 = \frac{4}{5} \text{ en } y = -1 + 1\frac{4}{5} \cdot 2 = 2\frac{3}{5}$$

Dus $D(\frac{4}{5}, 2\frac{3}{5})$.

- c Noem in driehoek ABC de hoogte die bij de zijde AB hoort h_1 .

Noem in driehoek BMP de hoogte die bij de zijde BM hoort h_2 .

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_1$$

$$O(\triangle BMP) = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot h_2 = \frac{1}{4} AB \cdot h_2$$

$$O(\triangle ABC) = 5 \cdot O(\triangle BMP) \text{ geeft } \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_1 = 5 \cdot \frac{1}{4} AB \cdot h_2$$

$$h_1 = \frac{5}{2} h_2$$

$$h_2 = \frac{2}{5} h_1$$

Dus ook $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{5} \overrightarrow{BC}$.

$$\vec{p} = \vec{b} + \overrightarrow{BP} = \vec{b} + \frac{2}{5} \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{5} (\vec{c} - \vec{b}) = \frac{3}{5} \vec{b} + \frac{2}{5} \vec{c} = \frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{5} \\ 2\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Dus $P(3\frac{1}{5}, 2\frac{3}{5})$.

Bladzijde 222

14 a $y = 0$ geeft $x^2 - 10x + 9 = 0$

$$(x - 1)(x - 9) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 9$$

Dus $A(1, 0)$ en $B(9, 0)$.

$$y = 7 \text{ geeft } x^2 + 49 - 10x - 42 + 9 = 0$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x - 2)(x - 8) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 8$$

Dus $C(2, 7)$ en $D(8, 7)$.

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$$

$$x^2 - 10x + y^2 - 6y + 9 = 0$$

$$(x - 5)^2 - 25 + (y - 3)^2 - 9 + 9 = 0$$

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

Dus $M(5, 3)$.

De totale massa is $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$.

$$\begin{aligned}\vec{z} &= \frac{1}{16}(1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} + 3 \cdot \vec{c} + 4 \cdot \vec{d} + 6 \cdot \vec{m}) \\ &= \frac{1}{16}\left(1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 18 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 87 \\ 67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\frac{7}{16} \\ 4\frac{3}{16} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dus $Z(5\frac{7}{16}, 4\frac{3}{16})$.

- b** $x_M = 5$ en $r_c = 5$, dus de cirkel raakt de y -as.

Dus een van de raaklijnen heeft vergelijking $x = 0$.

De andere raaklijn heeft een vergelijking van de vorm $y = ax$ oftewel $ax - y = 0$.

$$\begin{aligned}d(M, \text{raaklijn}) = r_c \text{ geeft } \frac{|5a - 3|}{\sqrt{a^2 + 1}} &= 5 \\ |5a - 3| &= 5\sqrt{a^2 + 1} \\ 25a^2 - 30a + 9 &= 25a^2 + 25 \\ -30a &= 16 \\ a &= -\frac{8}{15}\end{aligned}$$

Dus de andere raaklijn heeft vergelijking $y = -\frac{8}{15}x$.

- c** Stel van deze cirkel de straal gelijk aan r .

Dan is $N(r, r)$.

Zie de figuur hiernaast.

De stelling van Pythagoras geeft

$$(5 - r)^2 + (3 - r)^2 = (r + 5)^2$$

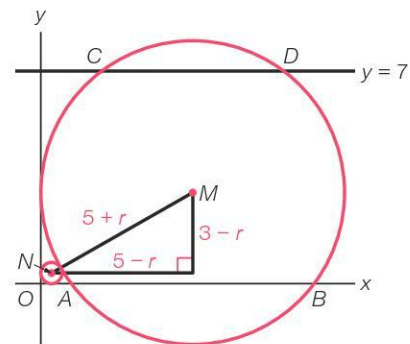
$$25 - 10r + r^2 + 9 - 6r + r^2 = r^2 + 10r + 25$$

$$r^2 - 26r + 9 = 0$$

$$D = (-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 640, \text{ dus } \sqrt{D} = \sqrt{640} = 8\sqrt{10}$$

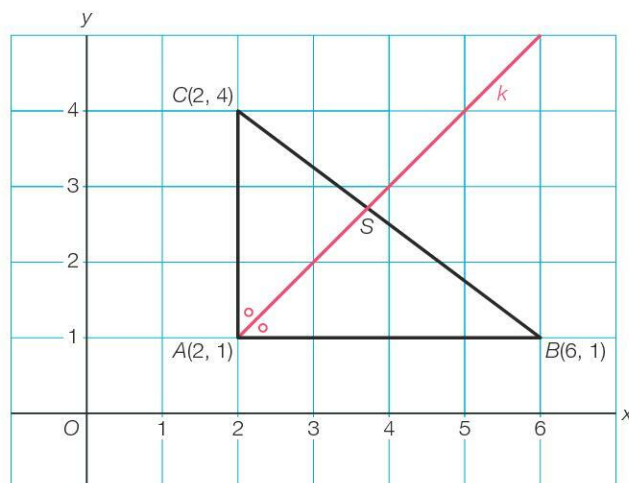
$$r = \frac{26 + 8\sqrt{10}}{2} = 13 + 4\sqrt{10} \vee r = 13 - 4\sqrt{10}$$

De straal is $13 - 4\sqrt{10}$.



15

a



$$k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$rc_{BC} = \frac{1 - 4}{6 - 2} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} BC: y &= -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } B(6, 1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -\frac{3}{4} \cdot 6 + b &= 1 \\ -4\frac{1}{2} + b &= 1 \end{aligned}$$

$$b = 5\frac{1}{2}$$

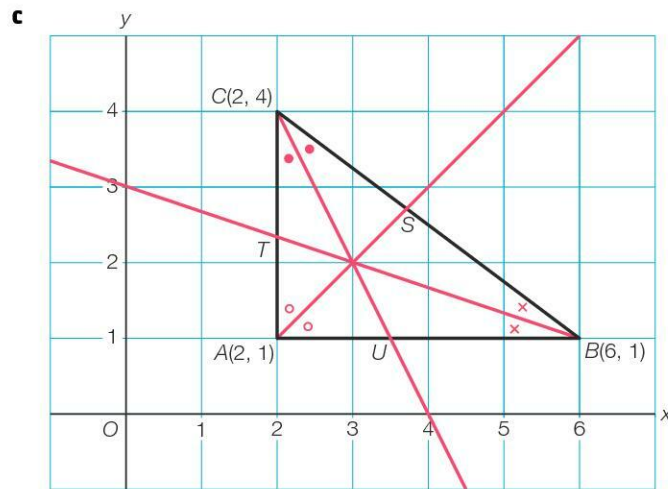
$$\text{Dus } BC: y = -\frac{3}{4}x + 5\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 k \text{ snijden met } BC \text{ geeft } 1+t &= -\frac{3}{4}(2+t) + 5\frac{1}{2} \\
 4+4t &= -3(2+t) + 22 \\
 4+4t &= -6-3t+22 \\
 7t &= 12 \\
 t &= 1\frac{5}{7}
 \end{aligned}$$

$$t = 1\frac{5}{7} \text{ geeft } x = 2 + 1\frac{5}{7} = 3\frac{5}{7} \text{ en } y = 1 + 1\frac{5}{7} = 2\frac{5}{7}.$$

$$\text{Dus } S(3\frac{5}{7}, 2\frac{5}{7}).$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} \quad BC &= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \\
 BS &= \sqrt{(3\frac{5}{7} - 6)^2 + (2\frac{5}{7} - 1)^2} = \sqrt{(-\frac{16}{7})^2 + (\frac{12}{7})^2} = \sqrt{\frac{256}{49} + \frac{144}{49}} = \sqrt{\frac{400}{49}} = \frac{20}{7} \\
 CS &= 5 - \frac{20}{7} = \frac{15}{7} \\
 \left. \begin{aligned} \frac{BS}{CS} &= \frac{\frac{20}{7}}{\frac{15}{7}} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \\ \frac{AB}{AC} &= \frac{4}{3} \end{aligned} \right\} \frac{BS}{CS} &= \frac{AB}{AC}
 \end{aligned}$$



$$p = 4 \text{ en } q = 5 \text{ geeft } \vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{9} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Dus } T(2, 2\frac{1}{3}).$$

$$\mathbf{d} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dus } U(3\frac{1}{2}, 1).$$

Bladzijde 223

$$\mathbf{16} \quad \mathbf{a} \quad \vec{BA} = \begin{pmatrix} -4\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ en } |\vec{BA}| = \sqrt{22\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } |\vec{BC}| = \sqrt{10}$$

$$\vec{r}_b = \vec{BA} + 1\frac{1}{2}\vec{BC} = \begin{pmatrix} -4\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 1\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } b: x + y = 4.$$

$$\vec{z} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6\frac{1}{2} \\ 6\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{6} \\ 2\frac{1}{6} \end{pmatrix} \text{ en } Z(2\frac{1}{6}, 2\frac{1}{6}).$$

$$2\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} = 4 \text{ klopt niet, dus } Z \text{ ligt niet op } b.$$

$$\mathbf{b} \quad b \text{ snijden met de } y\text{-as geeft het punt } D(0, 4).$$

$$\vec{n}_m = \vec{r}_{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ dus } m: -x + 3y = c.$$

$$m \text{ door het punt } (\frac{1}{2}(4+3), \frac{1}{2}(0+3)) = (3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}) \text{ geeft } c = -3\frac{1}{2} + 3 \cdot 1\frac{1}{2} = 1.$$

$$\text{Dus } m: -x + 3y = 1.$$

$$m \text{ snijden met de } y\text{-as geeft het punt } E(0, \frac{1}{3}).$$

$$\text{Dus } DE = 4 - \frac{1}{3} = 3\frac{2}{3}.$$

- c De straal van de cirkel is $r = d(O, A) = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{2\frac{1}{2}}$.

Stel $y = ax + b$.

Door $F(3, 1)$ geeft $3a + b = 1$ oftewel $b = 1 - 3a$, dus $y = ax + 1 - 3a$ oftewel $ax - y + 1 - 3a = 0$.

$$\begin{aligned} d(A, \text{raaklijn}) = r \text{ geeft } \frac{|-\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{2} + 1 - 3a|}{\sqrt{a^2 + 1}} &= \sqrt{2\frac{1}{2}} \\ |-\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}| &= \sqrt{2\frac{1}{2}a^2 + 2\frac{1}{2}} \\ |-7a - 1| &= \sqrt{10a^2 + 10} \\ 49a^2 + 14a + 1 &= 10a^2 + 10 \\ 39a^2 + 14a - 9 &= 0 \\ D &= 14^2 - 4 \cdot 39 \cdot -9 = 1600 \\ a &= \frac{-14 \pm 40}{78} = \frac{1}{3} \vee a = \frac{-14 - 40}{78} = -\frac{9}{13} \end{aligned}$$

$a = \frac{1}{3}$ geeft de raaklijn $y = \frac{1}{3}x + 1 - 3 \cdot \frac{1}{3}$ oftewel $y = \frac{1}{3}x$.

$a = -\frac{9}{13}$ geeft de raaklijn $y = -\frac{9}{13}x + 1 - 3 \cdot -\frac{9}{13}$ oftewel $y = -\frac{9}{13}x + 3\frac{1}{13}$.

17

a
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 2y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5x - 15 &= 0 \\ 5x &= 15 \\ x &= 3 \\ x^2 + y^2 - 5x - 2y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 9 + y^2 - 15 - 2y + 6 &= 0 \\ y^2 - 2y &= 0 \\ y(y - 2) &= 0 \\ y &= 0 \vee y = 2 \end{aligned} \right\}$$

Dus $A(3, 0)$ en $B(3, 2)$.

b
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 5x - 2y + 6 &= 0 \\ x^2 - 5x + y^2 - 2y + 6 &= 0 \\ (x - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y - 1)^2 - 1 + 6 &= 0 \\ (x - 2\frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 &= 1\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dus $M(2\frac{1}{2}, 1)$ en $r_c = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

De punten Q en R zijn raakpunten.

Zie de figuur hiernaast.

$\triangle PMQ \sim \triangle PNR$ en $NR = 2MQ$, dus

$PN = 2PM$ geeft $PM = 2\frac{1}{2}$.

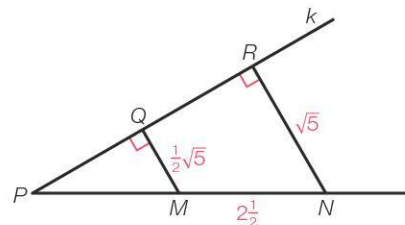
Dus $P(0, 1)$.

- c Stel $k: y = ax + 1$ oftewel $k: ax - y + 1 = 0$.

$$\begin{aligned} d(N, k) = r_d \text{ geeft } \frac{|5a - 1 + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} &= \sqrt{5} \\ |5a| &= \sqrt{5a^2 + 5} \\ 25a^2 &= 5a^2 + 5 \\ 20a^2 &= 5 \\ a^2 &= \frac{1}{4} \\ a &= \frac{1}{2} \vee a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus $k_1: y = \frac{1}{2}x + 1$ en $k_2: y = -\frac{1}{2}x + 1$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 &= 0 \\ x^2 - 10x + y^2 - 2y + 21 &= 0 \\ (x - 5)^2 - 25 + (y - 1)^2 - 1 + 21 &= 0 \\ (x - 5)^2 + (y - 1)^2 &= 5 \\ \text{Dus } N(5, 1) \text{ en } r_d &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$



- d** Het middelpunt van deze cirkel is C en de straal is r .

De punten Q en D zijn raakpunten.

Zie de figuur hiernaast.

$\triangle PMQ \sim \triangle PCD$ geeft

$$\frac{PM}{PC} = \frac{MQ}{CD}$$

$$\frac{2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2} + r + \frac{1}{2}\sqrt{5}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{5}}{r}$$

$$\frac{5}{5 + 2r + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2r}$$

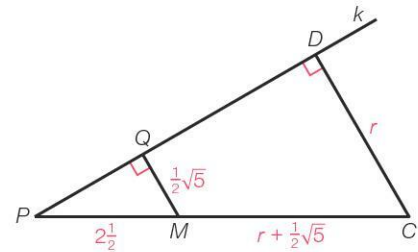
$$10r = 5\sqrt{5} + 2r\sqrt{5} + 5$$

$$10r - 2r\sqrt{5} = 5\sqrt{5} + 5$$

$$(10 - 2\sqrt{5})r = 5\sqrt{5} + 5$$

$$r = \frac{5\sqrt{5} + 5}{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \frac{10 + 2\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{50\sqrt{5} + 50 + 50 + 10\sqrt{5}}{100 - 20} = \frac{100 + 60\sqrt{5}}{80} = 1\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{5}$$

De gevraagde straal is $1\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{5}$.



18 a $(t-2)^4 = ((t-2)^2)^2 = (t^2 - 4t + 4)^2 = t^4 - 4t^3 + 4t^2 - 4t^3 + 16t^2 - 16t + 4t^2 - 16t + 16 = t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16$

- b** Substitutie van $x = t^2 - 4$ en $y = (t-2)^2$ in de cirkelvergelijking geeft

$$(t^2 - 4)^2 + ((t-2)^2)^2 - 2(t^2 - 4) - 8(t-2)^2 - 8 = 0$$

$$t^4 - 8t^2 + 16 + t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16 - 2t^2 + 8 - 8(t^2 - 4t + 4) - 8 = 0$$

$$t^4 - 8t^2 + 16 + t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16 - 2t^2 + 8 - 8t^2 + 32t - 32 - 8 = 0$$

$$2t^4 - 8t^3 + 6t^2 = 0$$

$$2t^2(t^2 - 4t + 3) = 0$$

$$2t^2(t-1)(t-3) = 0$$

$$t = 0 \vee t = 1 \vee t = 3$$

$$t = 0 \text{ geeft } (-4, 4)$$

$$t = 1 \text{ geeft } (-3, 1)$$

$$t = 3 \text{ geeft } (5, 1)$$

- c** $(-3, 1)$ op K geeft $9 + 1 = -3a + b$ oftewel $-3a + b = 10$.

$$(5, 1) \text{ op } K \text{ geeft } 25 + 1 = 5a + b \text{ oftewel } 5a + b = 26.$$

$$\begin{cases} -3a + b = 10 \\ 5a + b = 26 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -3a + b = 10 \\ 5a + b = 26 \\ \hline -8a = -16 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = 2 \\ 5a + b = 26 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a = 2 \\ 5a + b = 26 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 10 + b = 26 \\ b = 16 \end{array}$$

Dus $a = 2$ en $b = 16$.

- d** Voor het midden Q van $A(4, -4)$ en $P(t^2 - 4, (t-2)^2)$ geldt $Q(\frac{1}{2}(4 + t^2 - 4), \frac{1}{2}(-4 + (t-2)^2))$

$$Q(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}(-4 + t^2 - 4t + 4))$$

$$Q(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t^2 - 2t)$$

Substitutie van $x = \frac{1}{2}t^2$ en $y = \frac{1}{2}t^2 - 2t$ in $x^2 + y^2 = 2xy + 8x$ geeft

$$(\frac{1}{2}t^2)^2 + (\frac{1}{2}t^2 - 2t)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}t^2 \cdot (\frac{1}{2}t^2 - 2t) + 8 \cdot \frac{1}{2}t^2$$

$$\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{4}t^4 - 2t^3 + 4t^2 = \frac{1}{2}t^4 - 2t^3 + 4t^2$$

$$\frac{1}{2}t^4 - 2t^3 + 4t^2 = \frac{1}{2}t^4 - 2t^3 + 4t^2$$

Dit klopt voor elke waarde van t .

Dus Q ligt op de kromme met vergelijking $x^2 + y^2 = 2xy + 8x$.

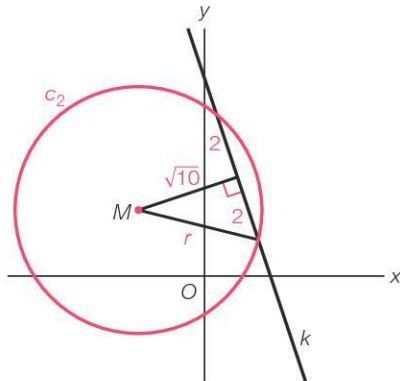
19

a $k: 3x + y - 6 = 0$

$$d(M, k) = \frac{|3 \cdot -2 + 2 - 6|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Dus $c_1: (x+2)^2 + (y-2)^2 = 10$.

b $d(M, k) = \sqrt{10}$



$$r^2 = (\sqrt{10})^2 + 2^2 = 14$$

Dus $c_2: (x+2)^2 + (y-2)^2 = 14$.

c m loodrecht op k geeft $m: x - 3y = c$.

$$d(M, m) = \sqrt{10}$$

$$\frac{|-2 - 3 \cdot 2 - c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|-8 - c| = 10$$

$$-8 - c = 10 \vee -8 - c = -10$$

$$c = -18 \vee c = 2$$

Dus $m_1: x - 3y = -18$ en $m_2: x - 3y = 2$.

d Stel $n: y = ax - 2$ oftewel $n: ax - y - 2 = 0$.

$$d(M, n) = \sqrt{10}$$

$$\frac{|-2a - 2 - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|-2a - 4| = \sqrt{10a^2 + 10}$$

$$4a^2 + 16a + 16 = 10a^2 + 10$$

$$-6a^2 + 16a + 6 = 0$$

$$3a^2 - 8a - 3 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$

$$a = \frac{8 + 10}{6} = 3 \vee a = \frac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$$

Dus $n_1: y = 3x - 2$ en $n_2: y = -\frac{1}{3}x - 2$.

20

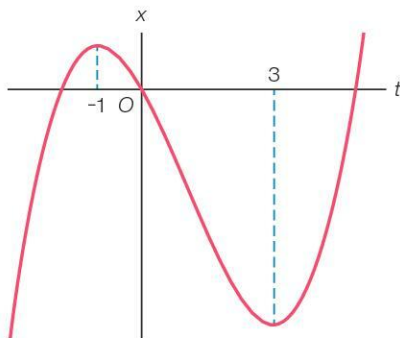
a $x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ geeft $x'(t) = 3t^2 - 6t - 9$

$x'(t) = 0$ geeft $3t^2 - 6t - 9 = 0$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0$$

$$t = -1 \vee t = 3$$



max. is $x(-1) = 5$ en min. is $x(3) = -27$.

Dus $x = p$ snijdt de baan in drie punten voor $-27 < p < 5$.

b $y(t) = 0$ geeft $t^2 - 1 = 0$

$$t^2 = 1$$

$$t = 1 \vee t = -1$$

$t = 1$ geeft het punt $(-11, 0)$

$$x'(t) = 3t^2 - 6t - 9 \text{ en } y'(t) = 2t \text{ geeft}$$

$$v(t) = \sqrt{(3t^2 - 6t - 9)^2 + (2t)^2}$$

$$= \sqrt{9t^4 - 18t^3 - 27t^2 - 18t^3 + 36t^2 + 54t - 27t^2 + 54t + 81 + 4t^2}$$

$$= \sqrt{9t^4 - 36t^3 - 14t^2 + 108t + 81}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{9t^4 - 36t^3 - 14t^2 + 108t + 81}} \cdot (36t^3 - 108t^2 - 28t + 108)$$

$$v(1) = \sqrt{9 - 36 - 14 + 108 + 81} = \sqrt{148} \approx 12,17 \text{ cm/s}$$

$$a(1) = \frac{1}{2\sqrt{9 - 36 - 14 + 108 + 81}} \cdot (36 - 108 - 28 + 108) = \frac{4}{\sqrt{148}} \approx 0,33 \text{ cm/s}^2$$

c $y = 3$ geeft $t^2 - 1 = 3$

$$t^2 = 4$$

$$t = 2 \vee t = -2$$

$t = 2$ geeft het punt $A(-22, 3)$ en $t = -2$ geeft het punt $B(-2, 3)$.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 - 6t - 9 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ dus } rc_k = -\frac{4}{9}.$$

$$k: y = -\frac{4}{9}x + b \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } A(-22, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{4}{9} \cdot -22 + b = 3 \\ 9\frac{7}{9} + b = 3 \end{array}$$

$$b = -6\frac{7}{9}$$

Dus $k: y = -\frac{4}{9}x - 6\frac{7}{9}$.

$$\vec{v}(-2) = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ dus } rc_l = -\frac{4}{15}.$$

$$l: y = -\frac{4}{15}x + b \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } B(-2, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{4}{15} \cdot -2 + b = 3 \\ \frac{8}{15} + b = 3 \end{array}$$

$$b = 2\frac{7}{15}$$

Dus $l: y = -\frac{4}{15}x + 2\frac{7}{15}$.

$$k \text{ en } l \text{ snijden geeft } \begin{array}{l} -\frac{4}{9}x - 6\frac{7}{9} = -\frac{4}{15}x + 2\frac{7}{15} \\ -20x - 305 = -12x + 111 \\ -8x = 416 \end{array}$$

$$x = -52$$

$x = -52$ en $y = -\frac{4}{9}x - 6\frac{7}{9}$ geeft $y = 16\frac{1}{3}$

Dus $S(-52, 16\frac{1}{3})$.

21 a $x(t) = \cos^2(t) - \cos(t)$ geeft $x'(t) = 2 \cos(t) \cdot -\sin(t) + \sin(t) = -\sin(2t) + \sin(t)$

$y(t) = \sin(t)$ geeft $y'(t) = \cos(t)$

Raaklijn horizontaal, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.

$y'(t) = 0$ geeft $\cos(t) = 0$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$-\pi \leq t \leq \pi \text{ geeft } t = -\frac{1}{2}\pi \vee t = \frac{1}{2}\pi$$

$t = -\frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, -1)$.

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, 1)$.

Dus de raaklijn is horizontaal in de punten $(0, -1)$ en $(0, 1)$.

Raaklijn verticaal, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$.

$x'(t) = 0$ geeft $-\sin(2t) + \sin(t) = 0$

$$\sin(2t) = \sin(t)$$

$$2t = t + k \cdot 2\pi \vee 2t = \pi - t + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot 2\pi \vee 3t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$-\pi \leq t \leq \pi \text{ geeft } t = -\pi \vee t = -\frac{1}{3}\pi \vee t = 0 \vee t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \pi$$

$t = -\pi$ en $t = \pi$ geven het punt $(2, 0)$.

$t = -\frac{1}{3}\pi$ geeft het punt $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

$t = \frac{1}{3}\pi$ geeft het punt $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

$t = 0$ geeft het punt $(0, 0)$.

Dus de raaklijn is verticaal in de punten $(2, 0)$, $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$, $(0, 0)$ en $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

b $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) + \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

P gaat door de oorsprong voor $t = 0$ (zie a).

$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus de gevraagde baansnelheid is 1 cm/s.

c $x(t) = 0$ geeft $\cos^2(t) - \cos(t) = 0$

$$\cos(t)(\cos(t) - 1) = 0$$

$$\cos(t) = 0 \vee \cos(t) = 1$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee t = k \cdot 2\pi$$

$$-\pi \leq t \leq \pi \text{ geeft } t = -\frac{1}{2}\pi \vee t = 0 \vee t = \frac{1}{2}\pi$$

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, 1)$.

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$= \sqrt{(-\sin(2t) + \sin(t))^2 + (\cos(t))^2}$$

$$= \sqrt{\sin^2(2t) - 2\sin(t)\sin(2t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)}$$

$$= \sqrt{\sin^2(2t) - 2\sin(t)\sin(2t) + 1}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(2t) - 2\sin(t)\sin(2t) + 1}} \cdot (2\sin(2t) \cdot \cos(2t) \cdot 2 - 2\cos(t) \cdot \sin(2t) - 2\sin(t) \cdot \cos(2t) \cdot 2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(2t) - 2\sin(t)\sin(2t) + 1}} \cdot (4\sin(2t)\cos(2t) - 2\cos(t)\sin(2t) - 4\sin(t)\cos(2t))$$

$$a(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2\sqrt{0-0+1}} \cdot (0-0+4) = 2$$

De gevraagde baanversnelling is 2 cm/s².

d $x(-p) = \cos^2(-p) - \cos(-p) = \cos^2(p) - \cos(p) = x(p)$

$$y(-p) = \sin(-p) = -\sin(p) = -y(p)$$

Dus de baan van P is symmetrisch in de x -as.

e $x = \frac{3}{4}$ geeft $\cos^2(t) - \cos(t) = \frac{3}{4}$

$$\cos^2(t) - \cos(t) - \frac{3}{4} = 0$$

$$(\cos(t) - \frac{1}{2})(\cos(t) + \frac{3}{2}) = 0$$

$$\cos(t) = \frac{1}{2} \vee \cos(t) = -\frac{3}{2}$$

$$t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$-\pi \leq t \leq \pi \text{ geeft } t = \frac{2}{3}\pi \vee t = -\frac{2}{3}\pi$$

$t = \frac{2}{3}\pi$ geeft het punt $C(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

$t = -\frac{2}{3}\pi$ geeft het punt $D(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

f $x = \cos^2(t) - \cos(t)$ en $y = \sin(t)$ substitueren in $y = x^2$ geeft $\sin(t) = (\cos^2(t) - \cos(t))^2$.

$$\text{Voer in } y_1 = \sin(x) \text{ en } y_2 = (\cos^2(x) - \cos(x))^2.$$

De optie snijpunt geeft $x = 0$ en $y = 0$ en ook $x = 2,182...$ en $y = 0,818...$

Dus $E(2,18; 0,82)$.

15 Afgeleiden en primitieven

Bladzijde 225

- 22 a** Stel $x_A = a$, dan is $x_B = -a$.

$$f(a) = g(-a) \text{ geeft } e^{\frac{1}{2}a} = e^{-a-1}$$

$$\frac{1}{2}a = -a - 1$$

$$1\frac{1}{2}a = -1$$

$$a = -\frac{2}{3}$$

$$p = f(-\frac{2}{3}) = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

- b** Stel $x_E = 3b$, dan is $x_D = 4b$.

$$g(3b) = f(4b) \text{ geeft } e^{3b-1} = e^{2b}$$

$$3b - 1 = 2b$$

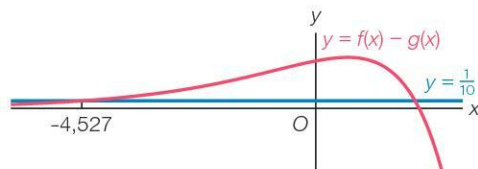
$$b = 1$$

$$q = f(4) = e^2$$

- c** $PQ = f(r) - g(r) = e^{\frac{1}{2}r} - e^{r-1}$

$$\text{Voer in } y_1 = e^{\frac{1}{2}x} - e^{x-1} \text{ en } y_2 = \frac{1}{10}.$$

De optie snijpunt geeft $x \approx -4,527$.



$$PQ < \frac{1}{10} \text{ geeft } r < -4,527$$

- d** $f(x) = g(x)$ geeft $e^{\frac{1}{2}x} = e^{x-1}$

$$\frac{1}{2}x = x - 1$$

$$-\frac{1}{2}x = -1$$

$$x = 2$$

$$O(V) = \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 (e^{\frac{1}{2}x} - e^{x-1}) dx = [2e^{\frac{1}{2}x} - e^{x-1}]_0^2 = 2e - e - (2 - e^{-1}) = e - 2 + \frac{1}{e}$$

- e** $I(L) = \pi \int_0^2 ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx = \pi \int_0^2 ((e^{\frac{1}{2}x})^2 - (e^{x-1})^2) dx = \pi \int_0^2 (e^x - e^{2x-2}) dx$

$$= \pi [e^x - \frac{1}{2}e^{2x-2}]_0^2 = \pi(e^2 - \frac{1}{2}e^2 - (e^0 - \frac{1}{2}e^{-2})) = \pi(\frac{1}{2}e^2 - 1 + \frac{1}{2e^2})$$

- 23 a** $f_p(x) = \frac{px^2 + px + 1}{x^2 + 1}$ geeft

$$f_p'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot (2px + p) - (px^2 + px + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2px^3 + px^2 + 2px + p - 2px^3 - 2px^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{-px^2 + (2p - 2)x + p}{(x^2 + 1)^2}$$

- b** $f_2(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ geeft $f_2'(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$$f_2'(x) = 0 \text{ geeft } -2x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$x_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ en } x_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ geeft } x_A + x_B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1$$

Dus $x_A + x_B = 1$.

$$\begin{aligned} \text{c } f_4(x) &= \frac{4x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1} \text{ geeft } f_4'(x) = \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2} \\ f_4'(x) &= 0 \text{ geeft } -4x^2 + 6x + 4 = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 &= 0 \\ D &= (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25 \\ x &= \frac{3 \pm 5}{4} = 2 \vee x = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f_4(-\frac{1}{2}) = \frac{1 - 2 + 1}{\frac{1}{4} + 1} = 0, \text{ dus } A(-\frac{1}{2}, 0).$$

$$f_4(2) = \frac{16 + 8 + 1}{4 + 1} = 5, \text{ dus } B(2, 5).$$

$$AB = \sqrt{(2 - (-\frac{1}{2}))^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{6\frac{1}{4} + 25} = \sqrt{31\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{d } f_1(x) &= \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \text{ geeft } f_1'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \\ f_1'(x) &= 0 \text{ geeft } -x^2 + 1 = 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$f_1(-1) = \frac{1 - 1 + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}, \text{ dus } A(-1, \frac{1}{2}).$$

$$f_1(1) = \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } B(1, 1\frac{1}{2}).$$

$$\text{Dus } y_B = 1\frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot y_A.$$

$$\begin{aligned} \text{e } f_{-3}(x) &= \frac{-3x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1} \text{ geeft } f_{-3}'(x) = \frac{3x^2 - 8x - 3}{(x^2 + 1)^2} \\ f_{-3}'(x) &= 0 \text{ geeft } 3x^2 - 8x - 3 = 0 \\ D &= (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100 \\ x &= \frac{8 \pm 10}{6} = 3 \vee x = \frac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$f_{-3}(-\frac{1}{3}) = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } A(-\frac{1}{3}, 1\frac{1}{2}) \text{ en } OA = \sqrt{(-\frac{1}{3})^2 + (1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{85}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{85}$$

$$f_{-3}(3) = -3\frac{1}{2}, \text{ dus } B(3, -3\frac{1}{2}) \text{ en } OB = \sqrt{3^2 + (-3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{85}$$

$$\text{Dus } OB = \frac{1}{2}\sqrt{85} = 3 \cdot \frac{1}{6}\sqrt{85} = 3 \cdot OA.$$

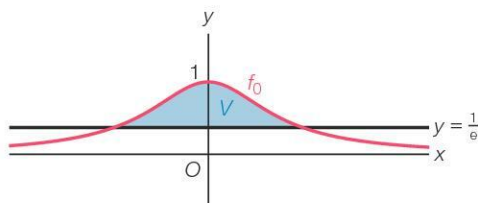
$$\text{f } \lim_{x \rightarrow \infty} f_p(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{px^2 + px + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p + \frac{p}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{p + 0 + 0}{1 + 0} = p$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = p$.

$$\begin{aligned} f_p(2) &= p \text{ geeft } \frac{4p + 2p + 1}{5} = p \\ 6p + 1 &= 5p \\ p &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{g } f_0(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x^2 + 1} \text{ geeft } x^2 + 1 = \frac{1}{y} \\ x^2 &= \frac{1}{y} - 1 \end{aligned}$$



$$I(L) = \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 x^2 dy = \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy = \pi [\ln(y) - y]_{\frac{1}{e}}^1 = \pi \left(0 - 1 - \left(-1 - \frac{1}{e} \right) \right) = \pi \left(-1 + 1 + \frac{1}{e} \right) = \frac{\pi}{e}$$

24

a $f_{p+1}(x) = (x - (p+1))^2 + p + 1 - 2 = (x - (p+1))^2 + p - 1$

De top van de grafiek van f_{p+1} is het punt $(p+1, p-1)$.

$$x = p+1 \text{ geeft } f_p(p+1) = (p+1-p)^2 + p - 2 = 1^2 + p - 2 = p - 1$$

Dus voor elke p ligt de top van de grafiek van f_{p+1} op de grafiek van f_p .

b De top $(p, p-2)$ van de grafiek van f_p ligt op $k: y = ax + b$.

$$x = p \text{ en } y = p - 2 \text{ geeft } k: y = x - 2, \text{ dus } rc_k = 1.$$

$$l \parallel k, \text{ dus } rc_l = rc_k = 1.$$

Er is gegeven dat l evenwijdig is met k , en dat l de grafieken van f_p raakt.

Dus l raakt de grafiek van f_0 .

$$f_0(x) = x^2 - 2 \text{ geeft } f_0'(x) = 2x$$

$$f_0'(x) = 1 \text{ geeft } 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$f_0\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = -1\frac{3}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = x + b \\ \text{door } \left(\frac{1}{2}, -1\frac{3}{4}\right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} + b = -1\frac{3}{4} \\ b = -2\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = x - 2\frac{1}{4}.$$

c $f_1(x) = (x-1)^2 + 1 - 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 - 2 = x^2 - 2x$

$$f_2(x) = (x-2)^2 + 2 - 2 = x^2 - 4x + 4$$

$$f_3(x) = (x-3)^2 + 3 - 2 = x^2 - 6x + 9 + 3 - 2 = x^2 - 6x + 10$$

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ geeft } x^2 - 2x = x^2 - 4x + 4$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$f_1(x) = f_3(x) \text{ geeft } x^2 - 2x = x^2 - 6x + 10$$

$$4x = 10$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$f_2(x) = f_3(x) \text{ geeft } x^2 - 4x + 4 = x^2 - 6x + 10$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$O(V) = \int_2^{2\frac{1}{2}} (f_1(x) - f_2(x)) dx + \int_{2\frac{1}{2}}^3 (f_3(x) - f_2(x)) dx$$

$$= \int_2^{2\frac{1}{2}} (x^2 - 2x - (x^2 - 4x + 4)) dx + \int_{2\frac{1}{2}}^3 (x^2 - 6x + 10 - (x^2 - 4x + 4)) dx = \int_2^{2\frac{1}{2}} (2x - 4) dx + \int_{2\frac{1}{2}}^3 (-2x + 6) dx$$

$$= [x^2 - 4x]_2^{2\frac{1}{2}} + [-x^2 + 6x]_{2\frac{1}{2}}^3 = 6\frac{1}{4} - 10 - (4 - 8) + (-9 + 18 - (-6\frac{1}{4} + 15)) = \frac{1}{2}$$

25

a $L = AB = f(p) - g(p) = (p^2 + 2p) \cdot 2^{-p} - (p^2 - p) \cdot 2^{-p} = (p^2 + 2p - p^2 + p) \cdot 2^{-p} = 3p \cdot 2^{-p}$

$$\frac{dL}{dp} = 3 \cdot 2^{-p} + 3p \cdot 2^{-p} \cdot \ln(2) \cdot -1 = (3 - 3p \ln(2)) \cdot 2^{-p}$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } (3 - 3p \ln(2)) \cdot 2^{-p} = 0$$

$$3 - 3p \ln(2) = 0$$

$$3p \ln(2) = 3$$

$$p = \frac{1}{\ln(2)}$$

Dus de lengte van het lijnstuk AB is maximaal voor $p = \frac{1}{\ln(2)}$.

- b** Stel $x_C = r$, dan is $x_D = r + 3$.

$$\begin{aligned} f(r) = f(r+3) \text{ geeft } (r^2 + 2r) \cdot 2^{-r} &= ((r+3)^2 + 2(r+3)) \cdot 2^{-(r+3)} \\ (r^2 + 2r) \cdot 2^{-r} &= (r^2 + 6r + 9 + 2r + 6) \cdot 2^{-r} \cdot \frac{1}{8} \\ 8(r^2 + 2r) &= r^2 + 8r + 15 \\ 8r^2 + 16r &= r^2 + 8r + 15 \\ 7r^2 + 8r - 15 &= 0 \\ D &= 8^2 - 4 \cdot 7 \cdot -15 = 484 \\ r &= \frac{-8 + 22}{14} = 1 \vee r = \frac{-8 - 22}{14} = -2\frac{1}{7} \end{aligned}$$

vold. niet

$$q = f(1) = (1 + 2) \cdot 2^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Bladzijde 227

26 a $L = AB = f(p) - g(p) = \sqrt{25 - p^2} - (\frac{3}{4}p - 4) = \sqrt{25 - p^2} - \frac{3}{4}p + 4$

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{25 - p^2}} \cdot -2p - \frac{3}{4} = -\frac{p}{\sqrt{25 - p^2}} - \frac{3}{4}$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{p}{\sqrt{25 - p^2}} = -\frac{3}{4}$$

$$4p = -3\sqrt{25 - p^2}$$

kwadrateren geeft

$$16p^2 = 9(25 - p^2)$$

$$16p^2 = 225 - 9p^2$$

$$25p^2 = 225$$

$$p^2 = 9$$

$$p = 3 \vee p = -3$$

vold. niet

De maximale lengte van het lijnstuk AB is $\sqrt{25 - (-3)^2} - \frac{3}{4} \cdot -3 + 4 = 10\frac{1}{4}$.

b $L = AC = h(p) - f(p) = -\frac{4}{3}p + 10 - \sqrt{25 - p^2}$

$$\frac{dL}{dp} = -\frac{4}{3} - \frac{1}{2\sqrt{25 - p^2}} \cdot -2p = -\frac{4}{3} + \frac{p}{\sqrt{25 - p^2}}$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{p}{\sqrt{25 - p^2}} = \frac{4}{3}$$

$$3p = 4\sqrt{25 - p^2}$$

kwadrateren geeft

$$9p^2 = 16(25 - p^2)$$

$$9p^2 = 400 - 16p^2$$

$$25p^2 = 400$$

$$p^2 = 16$$

$$p = 4 \vee p = -4$$

vold. niet

De minimale lengte van het lijnstuk AC is $-\frac{4}{3} \cdot 4 + 10 - \sqrt{25 - 4^2} = 1\frac{2}{3}$.

27 a $f(x) = (x^2 + x)e^x$ geeft $f'(x) = (2x + 1) \cdot e^x + (x^2 + x) \cdot e^x = (x^2 + 3x + 1)e^x$

$$g(x) = (x^2 - x)e^x \text{ geeft } g'(x) = (2x - 1) \cdot e^x + (x^2 - x) \cdot e^x = (x^2 + x - 1)e^x$$

$$rc_k = f'(0) = 1 \cdot e^0 = 1$$

$$rc_l = g'(0) = -1 \cdot e^0 = -1$$

$$rc_k \cdot rc_l = 1 \cdot -1 = -1$$

Dus k en l snijden elkaar loodrecht.

b $g'(x) = (x^2 + x - 1)e^x$ geeft $g''(x) = (2x + 1) \cdot e^x + (x^2 + x - 1) \cdot e^x = (x^2 + 3x)e^x$

$$g'(-2) = (4 - 2 - 1)e^{-2} = e^{-2} > 0$$

$$g''(-2) = (4 - 6)e^{-2} = -2e^{-2} < 0$$

Dus in A is sprake van afnemende stijging.

$$\begin{aligned} \text{c } f'(x) &= (x^2 + 3x + 1)e^x \text{ geeft } f''(x) = (2x + 3) \cdot e^x + (x^2 + 3x + 1) \cdot e^x = (x^2 + 5x + 4)e^x \\ f''(x) &= 0 \text{ geeft } x^2 + 5x + 4 = 0 \\ (x + 1)(x + 4) &= 0 \\ x &= -1 \vee x = -4 \end{aligned}$$

Dus $x_B = -4$ en $x_C = -1$.

$$\begin{aligned} g''(x) &= 0 \text{ geeft } x^2 + 3x = 0 \\ x(x + 3) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = -3 \end{aligned}$$

Dus $x_D = -3$ en $x_E = 0$.

$$x_C - x_B = -1 - (-4) = 3$$

$$x_E - x_D = 0 - (-3) = 3$$

Dus $x_C - x_B = x_E - x_D$.

$$\text{d } L = FG = g(p) - f(p) = (p^2 - p)e^p - (p^2 + p)e^p = (p^2 - p - p^2 - p)e^p = -2pe^p$$

$$\frac{dL}{dp} = -2 \cdot e^p - 2p \cdot e^p = (-2p - 2)e^p$$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dp} &= 0 \text{ geeft } -2p - 2 = 0 \\ -2p &= 2 \\ p &= -1 \end{aligned}$$

De maximale lengte van het lijnstuk FG is $-2 \cdot -1 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e}$.

$$\text{e } H'(x) = a \cdot e^x + (ax + b) \cdot e^x = (ax + a + b)e^x$$

Dus de primitieven van de functies $h(x) = (px + q)e^x$ zijn van de vorm

$H(x) = (ax + b)e^x + c$ met $p = a$ en $q = a + b$.

$$\text{f } O(V) = \int_{-3}^0 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-3}^0 ((x^2 - x)e^x - (x^2 + x)e^x) dx = \int_{-3}^0 (x^2 - x - x^2 - x)e^x dx = \int_{-3}^0 -2xe^x dx$$

$h(x) = (px + q)e^x$ met $p = -2$ en $q = 0$ geeft $h(x) = -2e^x$.

Uit e volgt dat $H(x) = (ax + b)e^x + c$ met $a = p = -2$ en $b = q - a = 0 - (-2) = 2$.

$$\text{Dus } O(V) = \int_{-3}^0 -2xe^x dx = [(-2x + 2)e^x]_{-3}^0 = 2e^0 - (6 + 2)e^{-3} = 2 - \frac{8}{e^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{28 a } f(x) &= 0 \text{ geeft } 4 - \sqrt{2x} = 0 \\ \sqrt{2x} &= 4 \\ 2x &= 16 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

$$O(V) = \int_0^8 (4 - \sqrt{2x}) dx = \int_0^8 (4 - (2x)^{\frac{1}{2}}) dx = \left[4x - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (2x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^8 = \left[4x - \frac{2}{3} x \sqrt{2x} \right]_0^8 = 32 - \frac{16}{3} \sqrt{16} = 32 - \frac{64}{3} = 10\frac{2}{3}$$

$$\text{b } A = p \cdot f(p) = p(4 - \sqrt{2p}) = 4p - p\sqrt{2p}$$

$$\frac{dA}{dp} = 4 - 1 \cdot \sqrt{2p} - p \cdot \frac{1}{2\sqrt{2p}} \cdot 2 = 4 - \sqrt{2p} - \frac{p}{\sqrt{2p}}$$

$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } 4 - \sqrt{2p} - \frac{p}{\sqrt{2p}} = 0$$

$$4\sqrt{2p} - 2p - p = 0$$

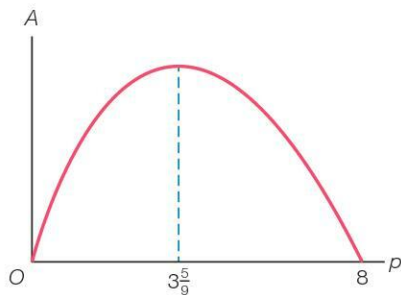
$$4\sqrt{2p} = 3p$$

kwadrateren geeft

$$32p = 9p^2$$

$$p = 0 \vee 32 = 9p$$

vold. niet $p = 3\frac{5}{9}$



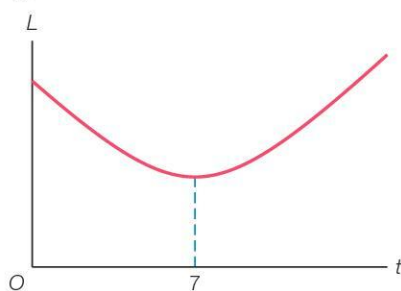
Dus voor $p = 3\frac{5}{9}$ is de oppervlakte van rechthoek $OPQR$ maximaal.

- c $S(8, 4)$ en $T(t, 4 - \sqrt{2t})$ geeft

$$L = \sqrt{(t-8)^2 + (4 - \sqrt{2t} - 4)^2} = \sqrt{t^2 - 16t + 64 + 2t} = \sqrt{t^2 - 14t + 64}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t^2 - 14t + 64}} \cdot (2t - 14) = \frac{t-7}{\sqrt{t^2 - 14t + 64}}$$

$$\frac{dL}{dt} = 0 \text{ geeft } t - 7 = 0, \text{ dus } t = 7.$$



Het minimum van L is $\sqrt{49 - 98 + 64} = \sqrt{15}$.

Bladzijde 228

- 29 a $f_p(x) = p\sqrt{x} - \ln(x)$ geeft

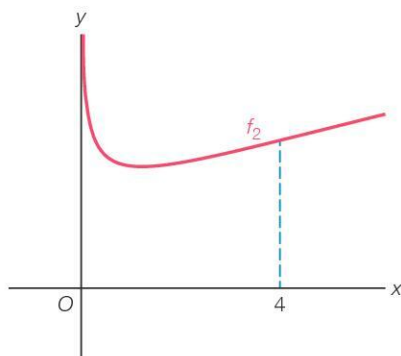
$$f_p'(x) = \frac{p}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}px^{-\frac{1}{2}} - x^{-1} \text{ en}$$

$$f_p''(x) = -\frac{1}{4}px^{-\frac{3}{2}} + x^{-2} = -\frac{p}{4x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

$$f_p''(4) = 0 \text{ geeft } -\frac{p}{16\sqrt{4}} + \frac{1}{16} = 0$$

$$-\frac{p}{32} = -\frac{1}{16}$$

$$p = 2$$



Dus voor $p = 2$ gaat de grafiek van f_p bij $x = 4$ over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

$$\text{b } f_p'(x) = \frac{p}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{p\sqrt{x}}{2x} - \frac{2}{2x} = \frac{p\sqrt{x} - 2}{2x}$$

$$f_p'(x) = 0 \text{ geeft } p\sqrt{x} - 2 = 0$$

$$p\sqrt{x} = 2$$

$$\sqrt{x} = \frac{2}{p}$$

$$x = \frac{4}{p^2} \text{ (met } p > 0)$$

$$f_p\left(\frac{4}{p^2}\right) = 2 - \ln\left(\frac{4}{p^2}\right)$$

Het punt $\left(\frac{4}{p^2}, 2 - \ln\left(\frac{4}{p^2}\right)\right)$ ligt op de grafiek van $g(x) = 2 \ln(x) - 4$ geeft

$$2 \ln\left(\frac{4}{p^2}\right) - 4 = 2 - \ln\left(\frac{4}{p^2}\right)$$

$$3 \ln\left(\frac{4}{p^2}\right) = 6$$

$$\ln\left(\frac{4}{p^2}\right) = 2$$

$$\frac{4}{p^2} = e^2$$

$$p^2 = \frac{4}{e^2}$$

$$p = \frac{2}{e} \vee p = -\frac{2}{e}$$

vold. niet

$$\text{Dus voor } p = \frac{2}{e}.$$

$$\text{30 a } f(x) = \frac{4x-3}{2x+1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(2x+1) \cdot 4 - (4x-3) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{8x+4-8x+6}{(2x+1)^2} = \frac{10}{(2x+1)^2}$$

$$rc_k = f'(-3) = \frac{10}{(-6+1)^2} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$$rc_l = f'(2) = \frac{10}{(4+1)^2} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$rc_k = rc_l$, dus k en l zijn evenwijdig.

$$\begin{aligned} l: y &= \frac{2}{5}x + b \\ \text{door } B(2, 1) &\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{5} \cdot 2 + b &= 1 \\ \frac{4}{5} + b &= 1 \\ b &= \frac{1}{5} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dus $l: y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$ oftewel $l: 2x - 5y + 1 = 0$.

$$d(k, l) = d(A, l) = \frac{|2 \cdot -3 - 5 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{29}} = \frac{20}{\sqrt{29}} = \frac{20}{29} \sqrt{29}$$

$$\text{b } f(x) = 0 \text{ geeft } 4x - 3 = 0$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

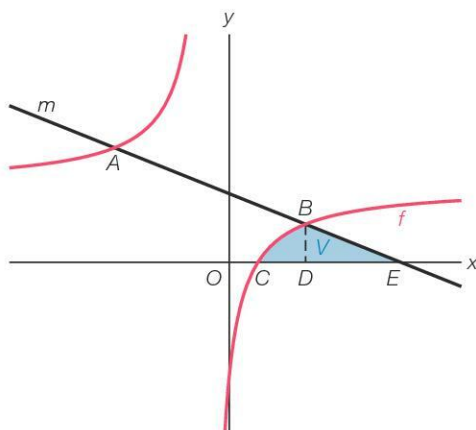
Dus het snijpunt van de grafiek van f met de x -as is $C(\frac{3}{4}, 0)$.

$$\text{Stel } m: y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-3}{2-3} = -\frac{2}{5}.$$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{5}x + b \\ \text{door } B(2, 1) &\left\{ \begin{aligned} -\frac{2}{5} \cdot 2 + b &= 1 \\ -\frac{4}{5} + b &= 1 \\ b &= 1\frac{4}{5} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m: y &= -\frac{2}{5}x + 1\frac{4}{5} \text{ snijden met de } x\text{-as geeft } -\frac{2}{5}x + 1\frac{4}{5} = 0 \\ -\frac{2}{5}x &= -1\frac{4}{5} \\ x &= 4\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus het snijpunt van m met de x -as is $E(4\frac{1}{2}, 0)$.



$$f(x) = \frac{4x-3}{2x+1} = \frac{2(2x+1)-2-3}{2x+1} = 2 - \frac{5}{2x+1}$$

$$\begin{aligned} O(V) &= \int_{\frac{3}{4}}^2 f(x) dx + O(\triangle DEB) = \int_{\frac{3}{4}}^2 \left(2 - \frac{5}{2x+1}\right) dx + \frac{1}{2} \cdot DE \cdot BD \\ &= \left[2x - 5 \cdot \frac{1}{2} \ln|2x+1|\right]_{\frac{3}{4}}^2 + \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 1 = 4 - 2\frac{1}{2} \ln(5) - \left(1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} \ln(2\frac{1}{2})\right) + 1\frac{1}{4} \\ &= 4 - 2\frac{1}{2} \ln(5) - 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} \ln(2\frac{1}{2}) + 1\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\frac{1}{2}}{5}\right) = 3\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &= 3\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

31 a $f(x) = g_a(x)$ geeft $\frac{4}{\sqrt{x}} = a\sqrt{x}$
 $ax = 4$
 $x = \frac{4}{a}$

$f(x) = h_a(x)$ geeft $\frac{4}{\sqrt{x}} = 4a\sqrt{x}$
 $4ax = 4$
 $x = \frac{1}{a}$

$$\begin{aligned} O(V) &= \int_0^{\frac{1}{a}} (h_a(x) - g_a(x)) dx + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}} (f(x) - g_a(x)) dx = \int_0^{\frac{1}{a}} (4a\sqrt{x} - a\sqrt{x}) dx + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}} \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - a\sqrt{x}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{a}} 3ax^{\frac{1}{2}} dx + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}} (4x^{-\frac{1}{2}} - ax^{\frac{1}{2}}) dx = \left[2ax^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{a}} + \left[8x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}} \\ &= \left[2ax\sqrt{x}\right]_0^{\frac{1}{a}} + \left[8\sqrt{x} - \frac{2}{3}ax\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}} = 2a \cdot \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}} - 0 + 8\sqrt{\frac{4}{a}} - \frac{2}{3}a \cdot \frac{4}{a}\sqrt{\frac{4}{a}} - \left(8\sqrt{\frac{1}{a}} - \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}\right) \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{a}} + 16\sqrt{\frac{1}{a}} - \frac{16}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} - \left(8\sqrt{\frac{1}{a}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = 12\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} - 7\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} = 5\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O(V) &= 4 \text{ geeft } \frac{16}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} = 4 \\ \sqrt{\frac{1}{a}} &= 4 \cdot \frac{3}{16} \\ \sqrt{\frac{1}{a}} &= \frac{3}{4} \\ \frac{1}{a} &= \frac{9}{16} \\ a &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

Dus voor $a = 1\frac{7}{9}$.

$$\begin{aligned} \text{b } O(V_1) &= \int_0^{\frac{1}{a}} (h_a(x) - g_a(x)) dx = \int_0^{\frac{1}{a}} 3ax^{\frac{1}{2}} dx = [2ax^{\frac{3}{2}}]_0^{\frac{1}{a}} = 2a \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1}{a}} = 2\sqrt{\frac{1}{a}} \\ O(V_2) &= O(V) - O(V_1) = 5\sqrt{\frac{1}{a}} - 2\sqrt{\frac{1}{a}} = 3\sqrt{\frac{1}{a}} \\ O(V_1) : O(V_2) &= 2\sqrt{\frac{1}{a}} : 3\sqrt{\frac{1}{a}} = 2 : 3 = 2 : 3 \end{aligned}$$

32 a $f(x) = g_a(x)$ geeft $e^{\frac{1}{2}x} = a - e^{\frac{1}{2}x}$
 $2e^{\frac{1}{2}x} = a$
 $e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}a$
 $\frac{1}{2}x = \ln(\frac{1}{2}a)$
 $x = 2\ln(\frac{1}{2}a)$

$$\begin{aligned} O(V) &= \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (g_a(x) - f(x)) dx = \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (a - e^{\frac{1}{2}x} - e^{\frac{1}{2}x}) dx = \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (a - 2e^{\frac{1}{2}x}) dx \\ &= [ax - 4e^{\frac{1}{2}x}]_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} = 2a\ln(\frac{1}{2}a) - 4e^{\ln(\frac{1}{2}a)} - (0 - 4) \\ &= 2a\ln(\frac{1}{2}a) - 4 \cdot \frac{1}{2}a + 4 = 2a\ln(\frac{1}{2}a) - 2a + 4 \end{aligned}$$

$$O(V) = 10 \text{ geeft } 2a\ln(\frac{1}{2}a) - 2a + 4 = 10$$

Voer in $y_1 = 2x\ln(\frac{1}{2}x) - 2x + 4$ en $y_2 = 10$.

De optie snijpunt geeft $x = 7,9346\dots$

Dus $a \approx 7,935$.

$$\begin{aligned} \text{b } I(L) &= \pi \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} ((g_a(x))^2 - (f(x))^2) dx = \\ &= \pi \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} ((a - e^{\frac{1}{2}x})^2 - (e^{\frac{1}{2}x})^2) dx = \pi \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (a^2 - 2ae^{\frac{1}{2}x} + e^x - e^x) dx \\ &= \pi \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (a^2 - 2ae^{\frac{1}{2}x}) dx = \pi [a^2x - 4ae^{\frac{1}{2}x}]_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} \\ &= \pi(2a^2\ln(\frac{1}{2}a) - 4ae^{\ln(\frac{1}{2}a)} - (0 - 4a)) = \pi(2a^2\ln(\frac{1}{2}a) - 4a \cdot \frac{1}{2}a + 4a) \\ &= \pi(2a^2\ln(\frac{1}{2}a) - 2a^2 + 4a) \end{aligned}$$

Voer in $y_1 = \pi(2x^2\ln(\frac{1}{2}x) - 2x^2 + 4x)$ en $y_2 = 400$.

De optie snijpunt geeft $x = 9,2351\dots$

Dus $a \approx 9,235$.

Bladzijde 229

33 $AQ + BR = 2,5$, dus $BR = 2,5 - AQ = 2,5 - x$

In $\triangle ARB$ is $AR^2 + BR^2 = AB^2$

$$(a+x)^2 + (2,5-x)^2 = 2,5^2$$

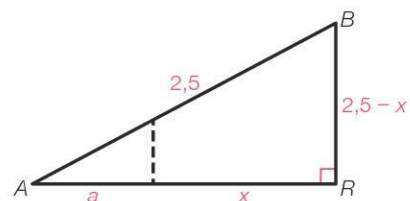
$$(a+x)^2 + 6,25 - 5x + x^2 = 6,25$$

$$(a+x)^2 = 5x - x^2$$

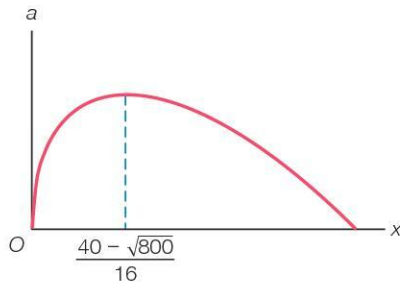
$$a+x = \sqrt{5x-x^2}$$

$$a = -x + \sqrt{5x-x^2}$$

$$\frac{da}{dx} = -1 + \frac{1}{2\sqrt{5x-x^2}} \cdot (5-2x) = -1 + \frac{5-2x}{2\sqrt{5x-x^2}}$$



$$\begin{aligned}\frac{da}{dx} = 0 \text{ geeft } -1 + \frac{5-2x}{2\sqrt{5x-x^2}} &= 0 \\ \frac{5-2x}{2\sqrt{5x-x^2}} &= 1 \\ 2\sqrt{5x-x^2} &= 5-2x \\ \text{kwadrateren geeft} \\ 4(5x-x^2) &= 25-20x+4x^2 \\ 20x-4x^2 &= 25-20x+4x^2 \\ 8x^2-40x+25 &= 0 \\ D &= (-40)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 25 = 800 \\ x &= \frac{40 + \sqrt{800}}{16} \vee x = \frac{40 - \sqrt{800}}{16} \\ \text{vold. niet}\end{aligned}$$



De onderkant van de garagedeur komt maximaal

$$-\frac{40 - \sqrt{800}}{16} + \sqrt{5 \cdot \frac{40 - \sqrt{800}}{16} - \left(\frac{40 - \sqrt{800}}{16}\right)^2} \approx 1,04 \text{ meter naar buiten.}$$

34 a $\cos(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}AP}{0,3}$

$$\frac{1}{2}AP = 0,3 \cos(\alpha)$$

$$AP = 0,6 \cos(\alpha)$$

$$AB = 0,6 + 0,6 \cos(\alpha)$$

De cosinusregel in $\triangle ABR$ geeft

$$BR^2 = AR^2 + AB^2 - 2 \cdot AR \cdot AB \cdot \cos(\angle BAR)$$

$$BR^2 = 1,2^2 + (0,6 + 0,6 \cos(\alpha))^2 - 2 \cdot 1,2 \cdot (0,6 + 0,6 \cos(\alpha)) \cdot \cos(\alpha)$$

$$BR^2 = 1,44 + 0,36 + 0,72 \cos(\alpha) + 0,36 \cos^2(\alpha) - 1,44 \cos(\alpha) - 1,44 \cos^2(\alpha)$$

$$BR^2 = 1,8 - 0,72 \cos(\alpha) - 1,08 \cos^2(\alpha)$$

$$BR = \sqrt{1,8 - 0,72 \cos(\alpha) - 1,08 \cos^2(\alpha)}$$

b $BR > 1$ geeft $\sqrt{1,8 - 0,72 \cos(\alpha) - 1,08 \cos^2(\alpha)} > 1$

Voer in $y_1 = \sqrt{1,8 - 0,72 \cos(x) - 1,08 \cos^2(x)}$ en $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,940\dots$

Dus de lengte van het uitgerolde doek is meer dan 1 meter bij een hoek α die groter is dan 0,94 rad.

c $L = BR = \sqrt{1,8 - 0,72 \cos(\alpha) - 1,08 \cos^2(\alpha)}$ geeft

$$\frac{dL}{d\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{1,8 - 0,72 \cos(\alpha) - 1,08 \cos^2(\alpha)}} \cdot (0,72 \sin(\alpha) - 2,16 \cos(\alpha) \cdot -\sin(\alpha))$$

$$= \frac{0,36 \sin(\alpha) + 1,08 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\sqrt{1,8 - 0,72 \cos(\alpha) - 1,08 \cos^2(\alpha)}}$$

$$\frac{dL}{d\alpha} = 0 \text{ geeft } 0,36 \sin(\alpha) + 1,08 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 0$$

$$0,36 \sin(\alpha)(1 + 3 \cos(\alpha)) = 0$$

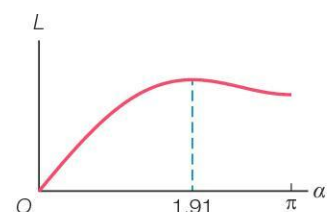
$$0,36 \sin(\alpha) = 0 \vee 1 + 3 \cos(\alpha) = 0$$

$$\sin(\alpha) = 0 \vee \cos(\alpha) = -\frac{1}{3}$$

$$\alpha = k \cdot \pi \vee \alpha \approx 1,91 + k \cdot 2\pi \vee \alpha \approx -1,91 + k \cdot 2\pi$$

Schets van L , zie hiernaast.

Dus de lengte BR is maximaal bij $\alpha \approx 1,91$ rad.



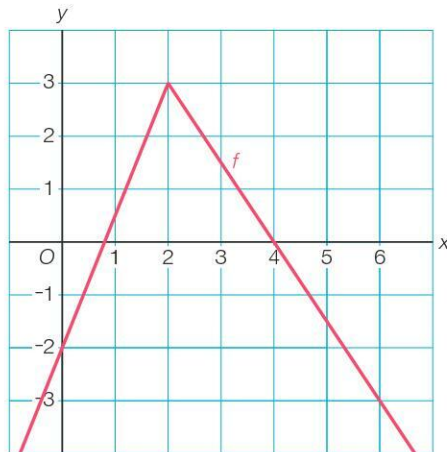
Bladzijde 230

- 35 a** E_v is evenredig met $M_v^{-0,13}$, dus $E_v = aM_v^{-0,13}$.
 $M_v = 0,2$ en $E_v = 3,3$ geeft $a \cdot 0,2^{-0,13} = 3,3$
 $a = 3,3 \cdot 0,2^{0,13} \approx 2,68$
- b** Uit de gegevens van het konijn volgt $a \cdot 2^b = 2,5$ oftewel $a = 2,5 \cdot 2^{-b}$.
 Uit de gegevens van de neushoorn volgt $a \cdot 2500^b = 0,24$ oftewel $a = 0,24 \cdot 2500^{-b}$.
 Voer in $y_1 = 2,5 \cdot 2^{-x}$ en $y_2 = 0,24 \cdot 2500^{-x}$.
 De optie snijpunt geeft $x = -0,328...$ en $y = 3,139...$
 Dus $a \approx 3,14$ en $b \approx -0,33$.
- c** $E_v = E_l$ geeft $2,7M_v^{-0,13} = 3,2M_l^{-0,33}$
 Voer in $y_1 = 2,7x^{-0,13}$ en $y_2 = 3,2x^{-0,33}$.
 De optie snijpunt geeft $x = 2,33...$
 Dus bij ongeveer 2,3 kg.
- d** Neem in de formule van de vogels $2M_v$ voor M_v .
 $E_v = 2,7(2M_v)^{-0,13} = 2,7 \cdot 2^{-0,13} \cdot M_v^{-0,13} = 2^{-0,13} \cdot 2,7M_v^{-0,13}$
 Dus $p = 2^{-0,13}$.
 Neem in de formule van de landdieren $2M_l$ voor M_l .
 $E_l = 3,2(2M_l)^{-0,33} = 3,2 \cdot 2^{-0,33} \cdot M_l^{-0,33} = 2^{-0,33} \cdot 3,2M_l^{-0,33}$
 Dus $q = 2^{-0,33}$.
 $p : q = 2^{-0,13} : 2^{-0,33}$
 $p : q = (2^{-0,13} : 2^{-0,33}) : 1$
 $p : q = 2^{0,2} : 1$
 $p : q = 2^{\frac{1}{5}} : 1$
 $p : q = \sqrt[5]{2} : 1$

16 Examentraining

Bladzijde 231

- 36** $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - |4 - 2x| = \frac{1}{2}x + 2 - 4 + 2x = 2\frac{1}{2}x - 2$ als $4 - 2x \geq 0$, dus als $x \leq 2$.
 $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - |4 - 2x| = \frac{1}{2}x + 2 + 4 - 2x = -1\frac{1}{2}x + 6$ als $4 - 2x < 0$, dus als $x > 2$.



- 37** $f(x) = \cos(\pi(x - 3))$ geeft $F(x) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi(x - 3)) + c$

38 $x^3 + 10x = 7x^2$
 $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$
 $x(x^2 - 7x + 10) = 0$
 $x(x - 2)(x - 5) = 0$
 $x = 0 \vee x = 2 \vee x = 5$

39 $f(x) = \frac{x^3 + 2\sqrt{x}}{x^2} = x + 2x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1 - 3x^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{x^2\sqrt{x}}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = 1 - \frac{3}{1} = -2$.

$y = -2x + b$
 $f(1) = 3$, dus $A(1, 3) \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + b = 3 \\ b = 5 \end{array} \right.$

Dus $k: y = -2x + 5$.

40 $y = a + b \sin(c(x - d))$
 $a = \frac{5 + -1}{2} = 2$

$5 - 2 = 3$, dus $b = -3$.

periode $= 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$, dus $c = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}\pi} = 1\frac{1}{2}$.

Dalend door de evenwichtsstand voor $x = \pi$, dus $d = \pi$.

Dus $y = 2 - 3 \sin(1\frac{1}{2}(x - \pi))$.

$y = a + b \cos(c(x - d))$

$a = 2$, $b = 3$ en $c = 1\frac{1}{2}$.

$(\frac{2}{3}\pi, 5)$ is een hoogste punt, dus $d = \frac{2}{3}\pi$.

Dus $y = 2 + 3 \cos(1\frac{1}{2}(x - \frac{2}{3}\pi))$.

41 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 8 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 + 8 = 0$
 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$

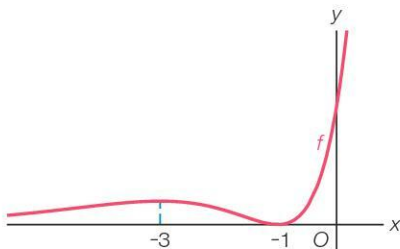
Een parametervoorstelling van c is $x = 3 + \sqrt{5} \cdot \cos(t) \wedge y = -2 + \sqrt{5} \cdot \sin(t)$.

Het midden Q van $P(3 + \sqrt{5} \cdot \cos(t), -2 + \sqrt{5} \cdot \sin(t))$ en $A(10, 0)$ is

$Q(\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5} \cdot \cos(t) + 10), \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{5} \cdot \sin(t) + 0)) = Q(6\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \cos(t), -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \sin(t))$.

Dus Q ligt op de kromme met vergelijking $(x - 6\frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 = 1\frac{1}{4}$.

42 $f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^x$ geeft $f'(x) = (2x + 2) \cdot e^x + (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 3)e^x$
 $f'(x) = 0$ geeft $x^2 + 4x + 3 = 0$
 $(x + 1)(x + 3) = 0$
 $x = -1 \vee x = -3$



max. is $f(-3) = (9 - 6 + 1)e^{-3} = \frac{4}{e^3}$

min. is $f(-1) = (1 - 2 + 1)e^{-1} = 0$

43 $x(t) = 0$ geeft $4 - t^2 = 0$

$$t^2 = 4$$

$$t = 2 \vee t = -2$$

$t = -2$ geeft het punt $(0, -2)$, dus voldoet niet.

$t = 2$ geeft het punt $(0, 2)$, dus voldoet.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 3t^2 - 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}, \text{ dus de gevraagde baansnelheid is } v(2) = \sqrt{(-4)^2 + 9^2} = \sqrt{97}.$$

$$v(t) = \sqrt{(-2t)^2 + (3t^2 - 3)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^4 - 18t^2 + 9} = \sqrt{9t^4 - 14t^2 + 9} \text{ geeft}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{9t^4 - 14t^2 + 9}} \cdot (36t^3 - 28t) = \frac{18t^3 - 14t}{\sqrt{9t^4 - 14t^2 + 9}}$$

$$\text{De gevraagde baanversnelling is } a(2) = \frac{18 \cdot 2^3 - 14 \cdot 2}{\sqrt{9 \cdot 2^4 - 14 \cdot 2^2 + 9}} = \frac{116}{\sqrt{97}}.$$

44 twee oplossingen als $D > 0$

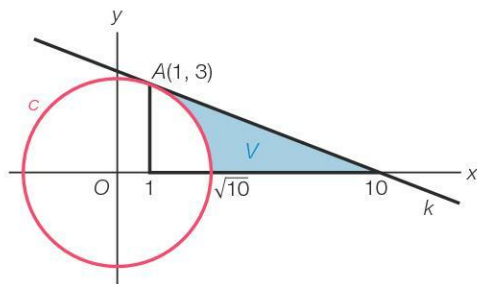
$$D = (-5)^2 - 4 \cdot p \cdot 3 = 25 - 12p \begin{cases} 25 - 12p > 0 \\ -12p > -25 \\ p < 2\frac{1}{12} \end{cases}$$

45 $\vec{n}_k = \vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus $k: x + 3y = c$.

k door $A(1, 3)$ geeft $c = 1 + 3 \cdot 3 = 10$.

Dus $k: x + 3y = 10$.

k snijden met de x -as geeft $x = 10$.



$$x^2 + y^2 = 10 \text{ oftewel } y^2 = 10 - x^2$$

$$I(L) = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 9 - \pi \int_1^{\sqrt{10}} y^2 dx = 27\pi - \pi \int_1^{\sqrt{10}} (10 - x^2) dx = 27\pi - \pi \left[10x - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^{\sqrt{10}}$$

$$= 27\pi - \pi(10\sqrt{10} - \frac{1}{3} \cdot 10\sqrt{10}) + \pi(10 - \frac{1}{3}) = 27\pi - \pi \cdot 6\frac{2}{3}\sqrt{10} + \pi \cdot 9\frac{2}{3} = \pi(36\frac{2}{3} - 6\frac{2}{3}\sqrt{10})$$

Bladzijde 232

46 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 11x - 7y + 24 = 0 \end{cases}$

$$9x + 9y - 27 = 0$$

$$x + y = 3$$

$$y = 3 - x$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \begin{cases} x^2 + (3-x)^2 - 2x + 2(3-x) - 3 = 0 \\ x^2 + 9 - 6x + x^2 - 2x + 6 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 3$$

$x = 2$ en $y = 3 - x$ geeft het snijpunt $(2, 1)$.

$x = 3$ en $y = 3 - x$ geeft het snijpunt $(3, 0)$.

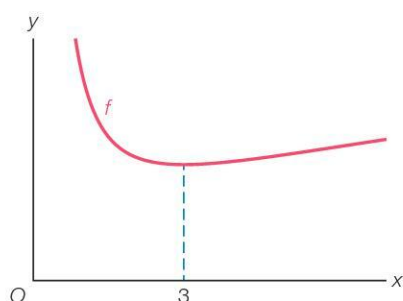
Dus $A(2, 1)$ en $B(3, 0)$.

47 $f_p(x) = \frac{2x}{x^2+p}$ geeft $f'_p(x) = \frac{(x^2+p) \cdot 2 - 2x \cdot 2x}{(x^2+p)^2} = \frac{2x^2+2p-4x^2}{(x^2+p)^2} = \frac{-2x^2+2p}{(x^2+p)^2}$
 $f'_p(x) = 0$ geeft $-2x^2+2p=0$
 $x^2=p$
 $x = \sqrt{p} \vee x = -\sqrt{p}$
 $f(\sqrt{p}) = \frac{2\sqrt{p}}{p+p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$ en $f(-\sqrt{p}) = \frac{-2\sqrt{p}}{p+p} = -\frac{1}{\sqrt{p}}$
Dus $A\left(\sqrt{p}, \frac{1}{\sqrt{p}}\right)$ en $B\left(-\sqrt{p}, -\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$.
 $AB = \sqrt{(2\sqrt{p})^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right)^2} = \sqrt{4p + \frac{4}{p}}$
 $AB = \sqrt{10}$ geeft $4p + \frac{4}{p} = 10$
 $4p^2 + 4 = 10p$
 $4p^2 - 10p + 4 = 0$
 $2p^2 - 5p + 2 = 0$
 $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$
 $p = \frac{5+3}{4} = 2 \vee p = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

48 $x^4 + 9 = 6\frac{1}{4}x^2$
 $x^4 - 6\frac{1}{4}x^2 + 9 = 0$
Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 6\frac{1}{4}u + 9 = 0$
 $4u^2 - 25u + 36 = 0$
 $D = (-25)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 49$
 $u = \frac{25+7}{8} = 4 \vee u = \frac{25-7}{8} = 2\frac{1}{4}$
 $x^2 = 4 \vee x^2 = 2\frac{1}{4}$
 $x = 2 \vee x = -2 \vee x = 1\frac{1}{2} \vee x = -1\frac{1}{2}$

49 $y = \frac{1}{4} \cdot (3x)^{-2} \cdot \frac{8}{x^{-5}} = \frac{1}{4} \cdot 3^{-2} \cdot x^{-2} \cdot 8 \cdot x^5 = \frac{2}{9}x^3$

50 $f(x) = \frac{x^2+3}{x\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{9}{2x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^2-9}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$
 $f'(x) = 0$ geeft $x^2-9=0$
 $x^2=9$
 $x=3 \vee x=-3$
vold. niet



min. is $f(3) = \frac{9+3}{3\sqrt{3}} = \frac{12}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

51 $f(x) = 2$ geeft $1 + \tan(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi) = 2$

$$\tan(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi) = 1$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{6}\pi$

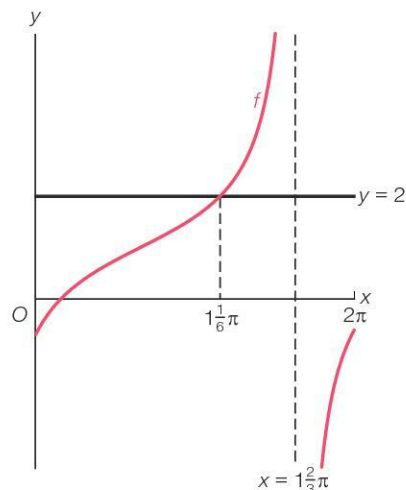
$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{2}{3}\pi$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 1\frac{2}{3}\pi$.



$$f(x) > 2 \text{ geeft } 1\frac{1}{6}\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$$

52 Snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $x^2 - 6x + 5 = 0$
 $(x - 1)(x - 5) = 0$
 $x = 1 \vee x = 5$

Dus $A(1, 0)$ en $B(5, 0)$.

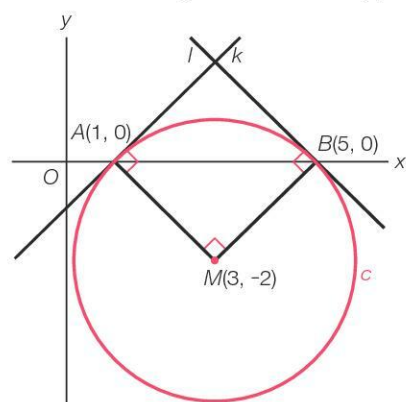
$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 5 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 + 5 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$$

Dus het middelpunt van c is $M(3, -2)$.



$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ staat loodrecht op } \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Omdat ook $AM \perp k$ en $BM \perp l$, is $k \perp l$.

Dus de gevraagde hoek is 90° .

53 $\ln^2(x) - 8 \ln(x) + 12 = 0$

Stel $\ln(x) = u$.

$u^2 - 8u + 12 = 0$

$(u - 2)(u - 6) = 0$

$u = 2 \vee u = 6$

$\ln(x) = 2 \vee \ln(x) = 6$

$x = e^2 \vee x = e^6$

54 $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - \frac{1}{2} \\ 2t - 2 \end{pmatrix}$, dus $v(t) = \sqrt{(2t - \frac{1}{2})^2 + (2t - 2)^2} = \sqrt{4t^2 - 2t + \frac{1}{4} + 4t^2 - 8t + 4} = \sqrt{8t^2 - 10t + 4\frac{1}{4}}$

en $v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{8t^2 - 10t + 4\frac{1}{4}}} \cdot (16t - 10) = \frac{8t - 5}{\sqrt{8t^2 - 10t + 4\frac{1}{4}}}$.

$v'(t) = 0$ geeft $8t - 5 = 0$, dus $t = \frac{5}{8}$.

$t = \frac{5}{8}$ geeft het punt $(1\frac{5}{64}, -\frac{55}{64})$.

Dus de baansnelheid is minimaal in het punt $(1\frac{5}{64}, -\frac{55}{64})$.

55 $a(t) = 0,12t^2$ geeft $v(t) = 0,04t^3 + v(0)$

$v(0) = 0$ geeft $v(t) = 0,04t^3$

$v(t) = 0,04t^3$ geeft $s(t) = 0,01t^4 + s(0)$

$s(0) = 0$ geeft $s(t) = 0,01t^4$

$v(5) = 0,04 \cdot 5^3 = 5$

$s(5) = 0,01 \cdot 5^4 = 6,25$

De eerste vijf seconden wordt 6,25 meter afgelegd.

De tweede vijf seconden wordt $5 \cdot 5 = 25$ meter afgelegd.

Dus in de eerste tien seconden wordt 31,25 meter afgelegd.

56 Stel $x_B = p$, dan is $x_C = 4p$.

$f(p) = f(4p)$ geeft $4\sqrt{p} - p = 4\sqrt{4p} - 4p$

$4\sqrt{p} - p = 8\sqrt{p} - 4p$

$3p = 4\sqrt{p}$

kwadrateren geeft

$9p^2 = 16p$

$p = 0 \vee 9p = 16$

$p = 0 \vee p = \frac{16}{9}$

vold. niet

$q = f(\frac{16}{9}) = 4\sqrt{\frac{16}{9}} - \frac{16}{9} = 4 \cdot \frac{4}{3} - \frac{16}{9} = 3\frac{5}{9}$

Bladzijde 233

57 $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2p} = \frac{3}{p}$

$y_{\text{top}} = f_p\left(\frac{3}{p}\right) = p \cdot \left(\frac{3}{p}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{p} + 2 = \frac{9}{p} - \frac{18}{p} + 2 = 2 - \frac{9}{p}$

$\text{top}\left(\frac{3}{p}, 2 - \frac{9}{p}\right)$ op de lijn $y = x$ geeft $2 - \frac{9}{p} = \frac{3}{p}$

$\frac{12}{p} = 2$

$p = 6$

58 $(-2, -3)$ op $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ geeft $-2 - 2b + c = -3$ oftewel $2b - c = 1$.

$(6, 5)$ op $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ geeft $-18 + 6b + c = 5$ oftewel $6b + c = 23$.

$\begin{cases} 2b - c = 1 \\ 6b + c = 23 \end{cases} +$

$\begin{cases} 8b = 24 \\ b = 3 \\ 6b + c = 23 \end{cases} \begin{cases} \\ \\ c = 5 \end{cases} \begin{cases} \\ \\ 18 + c = 23 \end{cases}$

Dus $b = 3$ en $c = 5$.

$$59 \quad \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^4}{\sqrt[5]{a^2}} = a^{-2} \cdot \frac{a^4}{a^{\frac{2}{5}}} = a^{-2} \cdot a^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{1}{5}}$$

$$60 \quad f(x) = \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x} + 1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(\sqrt{x} + 1) \cdot 3x^2 - (x^3 + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{2\sqrt{x} \cdot 3x^2 \cdot (\sqrt{x} + 1) - (x^3 + 1)}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^3 + 6x^2 \cdot \sqrt{x} - x^3 - 1}{2(\sqrt{x} + 1)^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{5x^3 + 6x^2 \cdot \sqrt{x} - 1}{2(\sqrt{x} + 1)^2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$61 \quad f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{x^2} \text{ geeft } f'(x) = \frac{x^2 \cdot (\cos(x) + \sin(x)) - (\sin(x) - \cos(x)) \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{x(\cos(x) + \sin(x)) - 2(\sin(x) - \cos(x))}{x^3} = \frac{(x + 2)\cos(x) + (x - 2)\sin(x)}{x^3}$$

62 Substitutie van $x = 3t + p$ en $y = t + 1$ in $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0$ geeft

$$(3t + p)^2 + (t + 1)^2 + 4(3t + p) - 8(t + 1) + 10 = 0$$

$$9t^2 + 6pt + p^2 + t^2 + 2t + 1 + 12t + 4p - 8t - 8 + 10 = 0$$

$$10t^2 + (6p + 6)t + p^2 + 4p + 3 = 0$$

$$D = (6p + 6)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (p^2 + 4p + 3) = 36p^2 + 72p + 36 - 40p^2 - 160p - 120 = -4p^2 - 88p - 84$$

$$D = 0 \text{ geeft } -4p^2 - 88p - 84 = 0$$

$$p^2 + 22p + 21 = 0$$

$$(p + 1)(p + 21) = 0$$

$$p = -1 \vee p = -21$$

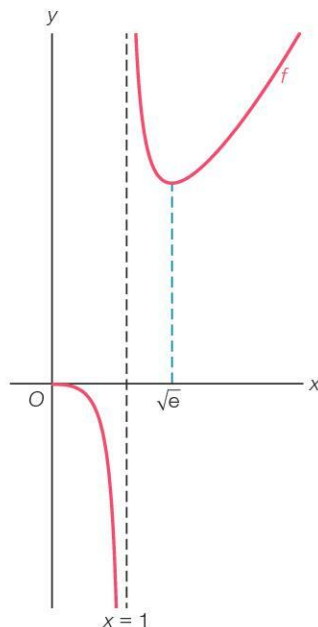
$$63 \quad f(x) = \frac{x^2}{\ln(x)} \text{ geeft } f'(x) = \frac{\ln(x) \cdot 2x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{2x \ln(x) - x}{\ln^2(x)}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 2x \ln(x) - x = 0$$

$$x(2 \ln(x) - 1) = 0$$

$$x = 0 \vee \ln(x) = \frac{1}{2}$$

$$\text{vold. niet } x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$



$$\text{min. is } f(\sqrt{e}) = \frac{e}{\frac{1}{2}} = 2e$$

64 $f(x) = (2x + 4)^3 + e^{2x+4}$ geeft
 $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(2x + 4)^4 + \frac{1}{2}e^{2x+4} + c = \frac{1}{8}(2x + 4)^4 + \frac{1}{2}e^{2x+4} + c$

65 $2\cos^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$
 $2(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2 = 0$
 $2 - 2\sin^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$
 $-2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$
 $\sin(x)(-2\sin(x) + 1) = 0$
 $\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = \frac{1}{2}$
 $x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$

66 Stel $M(p, p - 1)$.
 $l: y = 2x - 1$ oftewel $l: 2x - y - 1 = 0$
 $d(M, l) = \sqrt{5}$ geeft $\frac{|2p - p + 1 - 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
 $|p| = 5$
 $p = 5 \vee p = -5$
 $p = 5$ geeft $M_1(5, 4)$ en $c_1: (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 5$.
 $p = -5$ geeft $M_2(-5, -6)$ $c_2: (x + 5)^2 + (y + 6)^2 = 5$.

67 Stel $x_A = p$. Dan is $x_B = p + 4$.
 $f(p) = f(p + 4)$ geeft $4\sqrt{p} - p = 4\sqrt{p + 4} - p - 4$
 $4\sqrt{p} = 4\sqrt{p + 4} - 4$
 $\sqrt{p} = \sqrt{p + 4} - 1$
kwadrateren geeft
 $p = p + 4 - 2\sqrt{p + 4} + 1$
 $2\sqrt{p + 4} = 5$
 $\sqrt{p + 4} = 2\frac{1}{2}$
 $p + 4 = 6\frac{1}{4}$
 $p = 2\frac{1}{4}$
 $q = f(2\frac{1}{4}) = 4\sqrt{2\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{4} = 4 \cdot 1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$

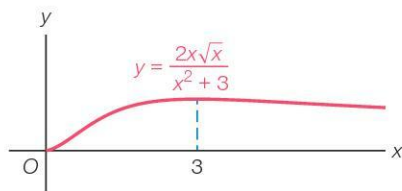
68 $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-p}{2 \cdot \frac{1}{2}} = p$, dus $p = x_{\text{top}}$.
 $y_{\text{top}} = \frac{1}{2}x_{\text{top}}^2 - x_{\text{top}} \cdot x_{\text{top}} + 2 = \frac{1}{2}x_{\text{top}}^2 - x_{\text{top}}^2 + 2 = -\frac{1}{2}x_{\text{top}}^2 + 2$
Dus de formule van de kromme is $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Bladzijde 234

69 $(x^2 - 4)\sqrt{x} = x^3 - 4x$
 $(x^2 - 4)\sqrt{x} = x(x^2 - 4)$
 $x^2 - 4 = 0 \vee \sqrt{x} = x$
 $x^2 = 4 \vee x = x^2$
 $x = 2 \vee x = -2 \vee x = 0 \vee x = 1$
vold. niet

70 $y = \frac{1}{4} \cdot (3x)^{-2} \cdot \frac{8}{x^{-5}} = \frac{1}{4} \cdot 3^{-2} \cdot x^{-2} \cdot 8 \cdot x^5 = \frac{2}{9}x^3$
 $\frac{2}{9}x^3 = y$
 $x^3 = \frac{9}{2}y$
 $x = (\frac{9}{2}y)^{\frac{1}{3}} = (\frac{9}{2})^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = 1,650...y^{\frac{1}{3}}$
Dus $x = 1,65y^{\frac{1}{3}}$.

71 $y = \frac{2x\sqrt{x}}{x^2+3} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x^2+3}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+3) \cdot 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{3x^{\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}}}{(x^2+3)^2} = \frac{9\sqrt{x} - x^2 \cdot \sqrt{x}}{(x^2+3)^2}$
 $\frac{dy}{dx} = 0$ geeft $9\sqrt{x} - x^2 \cdot \sqrt{x} = 0$
 $(9 - x^2) \cdot \sqrt{x} = 0$
 $x^2 = 9 \vee \sqrt{x} = 0$
 $x = 3 \vee x = -3 \vee x = 0$
 vold. niet



min. is $f(0) = 0$ en max. is $f(3) = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x\sqrt{x}}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x\sqrt{x}}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

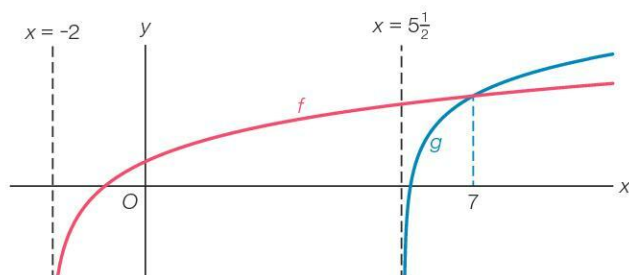
Dus de vergelijking $\frac{2x\sqrt{x}}{x^2+3} = p$ heeft twee oplossingen als $0 < p < \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

72 $f(x) = x \cdot \tan^3(3x - \frac{1}{2}\pi)$ geeft
 $f'(x) = 1 \cdot \tan^3(3x - \frac{1}{2}\pi) + x \cdot 3 \tan^2(3x - \frac{1}{2}\pi) \cdot 3 \cdot (1 + \tan^2(3x - \frac{1}{2}\pi))$
 $= \tan^3(3x - \frac{1}{2}\pi) + 9x \tan^2(3x - \frac{1}{2}\pi) \cdot (1 + \tan^2(3x - \frac{1}{2}\pi))$

73 $f(x) = g(x)$ geeft ${}^3\log(x+2) = 1 + {}^3\log(2x-11)$
 ${}^3\log(x+2) = {}^3\log(3) + {}^3\log(2x-11)$
 ${}^3\log(x+2) = {}^3\log(6x-33)$
 $x+2 = 6x-33$
 $-5x = -35$
 $x = 7$

$x+2 > 0$ geeft $x > -2$, dus $D_f = \langle -2, \rightarrow \rangle$.

$2x-11 > 0$ geeft $x > 5\frac{1}{2}$, dus $D_g = \langle 5\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.



$f(x) \geq g(x)$ geeft $5\frac{1}{2} < x \leq 7$

74 Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{-25 - (-43)}{3 - (-3)} = \frac{18}{6} = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + b \\ \text{door } A(-3, -43) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -9 + b = -43 \\ b = -34 \end{array}$$

Dus $k: y = 3x - 34$.

k snijden met l geeft $-4 + 2t = 3(3 + 3t) - 34$

$$-4 + 2t = 9 + 9t - 34$$

$$-7t = -21$$

$$t = 3$$

$t = 3$ geeft het snijpunt $(12, 2)$.

$$75 \quad \triangle ABC \sim \triangle AED \text{ geeft } \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED}$$

$$\frac{47}{26} = \frac{AC}{18} = \frac{21}{ED}$$

$$\text{Uit } \frac{47}{26} = \frac{AC}{18} \text{ volgt } AC = \frac{18 \cdot 47}{26} = 32,53\dots$$

$$CE = AC - AE = 32,53\dots - 26 \approx 6,5$$

$$\text{Uit } \frac{47}{26} = \frac{21}{ED} \text{ volgt } DE = \frac{21 \cdot 26}{47} \approx 11,6.$$

$$76 \quad \text{Voor } g \text{ geldt } y = \frac{x-4}{x-6}, \text{ dus voor } g^{\text{inv}} \text{ geldt } x = \frac{y-4}{y-6}$$

$$xy - 6x = y - 4$$

$$xy - y = 6x - 4$$

$$y(x-1) = 6x - 4$$

$$y = \frac{6x-4}{x-1} = \frac{5(x-1) + 5 + x - 4}{x-1} = 5 + \frac{x+1}{x-1}$$

Dus g is de inverse van f voor $a = 5$.

$$77 \quad m: 3x + 7y = 13 \text{ oftewel } m: 3x = -7y + 13, \text{ dus } m: x = -\frac{7}{3}y + \frac{13}{3}.$$

$$\text{Stel } y_M = p, \text{ dan is } x_M = -\frac{7}{3}p + \frac{13}{3}.$$

$$d(M, k) = d(M, l) \text{ geeft } \frac{|2(-\frac{7}{3}p + \frac{13}{3}) - p - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-\frac{7}{3}p + \frac{13}{3} - 2p - 2|}{\sqrt{5}}$$

$$|-\frac{14}{3}p + \frac{26}{3} - p - 1| = |-\frac{13}{3}p + \frac{7}{3}|$$

$$|-\frac{17}{3}p + \frac{23}{3}| = |-\frac{13}{3}p + \frac{7}{3}|$$

$$-\frac{17}{3}p + \frac{23}{3} = -\frac{13}{3}p + \frac{7}{3} \vee -\frac{17}{3}p + \frac{23}{3} = \frac{13}{3}p - \frac{7}{3}$$

$$-\frac{4}{3}p = -\frac{16}{3} \vee -10p = -10$$

$$p = 4 \vee p = 1$$

$$p = 1 \text{ geeft } M(2, 1) \text{ en } p = 4 \text{ geeft } N(-5, 4).$$

$$\text{Dus } d(M, N) = \sqrt{(-5-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}.$$

$$78 \quad \text{Raken, dus } f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$$

$$\sqrt{5-x^2} = ax + 5 \wedge \frac{1}{2\sqrt{5-x^2}} \cdot -2x = a$$

$$\sqrt{5-x^2} = ax + 5 \wedge \frac{-x}{\sqrt{5-x^2}} = a$$

$$\text{Substitutie van } a = \frac{-x}{\sqrt{5-x^2}} \text{ in } \sqrt{5-x^2} = ax + 5 \text{ geeft } \sqrt{5-x^2} = \frac{-x}{\sqrt{5-x^2}} \cdot x + 5$$

$$5-x^2 = -x^2 + 5\sqrt{5-x^2}$$

$$5 = 5\sqrt{5-x^2}$$

$$1 = \sqrt{5-x^2}$$

$$1 = 5-x^2$$

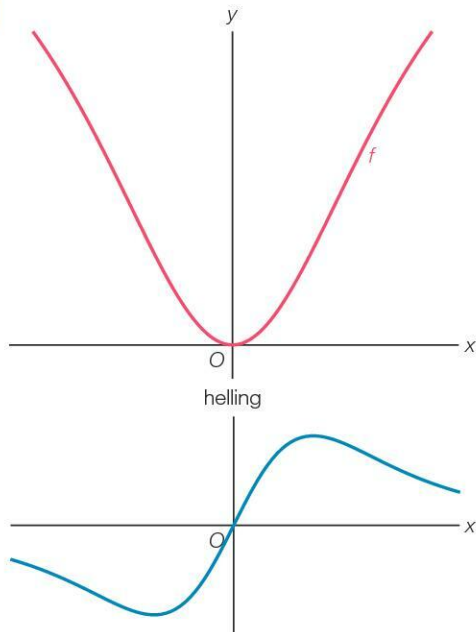
$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

$$x = 2 \text{ geeft } a = \frac{-2}{\sqrt{5-4}} = -2 \text{ en } x = -2 \text{ geeft } a = \frac{2}{\sqrt{5-4}} = 2.$$

Dus de grafieken van f en g raken elkaar voor $a = 2$ en voor $a = -2$.

79



80

$$\frac{3x-5}{x^2+4} = \frac{6x-10}{x+36}$$

$$\frac{3x-5}{x^2+4} = \frac{2(3x-5)}{x+36}$$

$$3x-5=0 \vee \frac{1}{x^2+4} = \frac{2}{x+36}$$

$$3x=5 \vee 2x^2+8=x+36$$

$$x=1\frac{2}{3} \vee 2x^2-x-28=0$$

$$D=(-1)^2-4 \cdot 2 \cdot -28=225$$

$$x=1\frac{2}{3} \vee x=\frac{1+15}{4}=4 \vee x=\frac{1-15}{4}=-3\frac{1}{2}$$

81

$$4 \cdot 2^x = 4^{2x-1}$$

$$2^2 \cdot 2^x = (2^2)^{2x-1}$$

$$2^{2+x} = 2^{4x-2}$$

$$2+x=4x-2$$

$$-3x=-4$$

$$x=1\frac{1}{3}$$

82

$$f_p(x) = \frac{x^2+5}{x+p} \text{ geeft } f'_p(x) = \frac{(x+p) \cdot 2x - (x^2+5) \cdot 1}{(x+p)^2} = \frac{2x^2+2px-x^2-5}{(x+p)^2} = \frac{x^2+2px-5}{(x+p)^2}$$

$$f'_p(2)=0 \text{ geeft } \frac{4+4p-5}{(2+p)^2}=0$$

$$4p-1=0$$

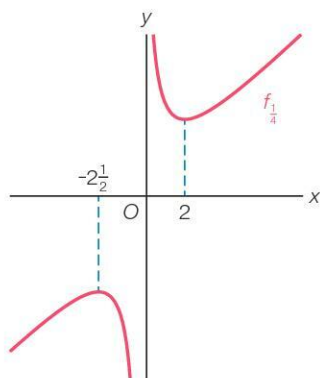
$$p=\frac{1}{4}$$

$$p=\frac{1}{4} \text{ geeft } f_{\frac{1}{4}}(x) = \frac{x^2+5}{x+\frac{1}{4}} \text{ en } f'_{\frac{1}{4}}(x) = \frac{x^2+\frac{1}{2}x-5}{(x+\frac{1}{4})^2}$$

$$f'_{\frac{1}{4}}(x)=0 \text{ geeft } x^2+\frac{1}{2}x-5=0$$

$$(x-2)(x+2\frac{1}{2})=0$$

$$x=2 \vee x=-2\frac{1}{2}$$



Dus $p = \frac{1}{4}$ en max. is $f_{\frac{1}{4}}(-2\frac{1}{2}) = \frac{6\frac{1}{4} + 5}{-2\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = -5$.

83 $l: \begin{cases} x = 3t - 3 \\ y = 2t + b \end{cases}$ oftewel $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ geeft } \vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ dus } l: 2x - 3y = c \left\{ c = 2 \cdot -3 - 3 \cdot b = -6 - 3b \right.$$

door $(-3, b)$

Dus $l: 2x - 3y = -6 - 3b$.

$k: 2x + ay = 12$ en $l: 2x - 3y = -6 - 3b$ vallen samen als $a = -3 \wedge 12 = -6 - 3b$

$$a = -3 \wedge 3b = -18$$

$$a = -3 \wedge b = -6$$

84 $\cos(2A) = 2 \cos^2(A) - 1$

$$2 \cos^2(A) = 1 + \cos(2A)$$

$$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2A)$$

$$\cos^4(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)\right)^2$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \cos^2(2x)$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4x)\right)$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos(4x)$$

$$\cos^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$$

Dus $y = \cos^4(x)$ is te herleiden tot $y = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$.

85 $x^2 - 1 = 0$ geeft $x^2 = 1$

$$x = 1 \vee x = -1$$

Dus de verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 1$ en $x = -1$.

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 8}{x^2 - 1} = \frac{x(x^2 - 1) + x + 3x^2 - 5x + 8}{x^2 - 1} = x + \frac{3x^2 - 4x + 8}{x^2 - 1}$$

$$= x + \frac{3(x^2 - 1) + 3 - 4x + 8}{x^2 - 1} = x + 3 + \frac{-4x + 11}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 11}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-4}{x} + \frac{11}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0$$

Dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x + 3$.

- 86 Loodrecht snijden, dus $f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$

$$\ln(x) = x^2 + px \wedge \frac{1}{x} \cdot (2x + p) = -1$$

$$\ln(x) = x^2 + px \wedge 2x + p = -x$$

$$\ln(x) = x^2 + px \wedge p = -3x$$

Substitutie van $p = -3x$ in $\ln(x) = x^2 + px$ geeft $\ln(x) = x^2 + -3x \cdot x$
 $\ln(x) = -2x^2$

Voer in $y_1 = \ln(x)$ en $y_2 = -2x^2$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,548...$

Dus $p = -3 \cdot 0,548... \approx -1,64$.

- 87 $k: 2x + y = 8$ oftewel $k: y = 8 - 2x$

Stel $M(p, 8 - 2p)$.

$l: 3x - 4y = 8$ oftewel $l: 3x - 4y - 8 = 0$

$$d(M, l) = d(M, y\text{-as}) \text{ geeft } \frac{|3p - 4(8 - 2p) - 8|}{\sqrt{25}} = |p|$$

$$\frac{|3p - 32 + 8p - 8|}{5} = |p|$$

$$|11p - 40| = 5|p|$$

$$11p - 40 = 5p \vee 11p - 40 = -5p$$

$$6p = 40 \vee 16p = 40$$

$$p = \frac{20}{3} \vee p = \frac{5}{2}$$

$p = \frac{20}{3}$ geeft $N(\frac{20}{3}, -5\frac{1}{3})$ en $p = \frac{5}{2}$ geeft $M(2\frac{1}{2}, 3)$.

Bladzijde 236

$$\begin{aligned} 88 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4)(x^2 - 4)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4)(x + 2)}{x - 3} = \frac{(2^2 + 4)(2 + 2)}{2 - 3} = -32 \end{aligned}$$

$$89 \quad f(x) = x^3 + \frac{5x^2 + 1}{2x - 3} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{(2x - 3) \cdot 10x - (5x^2 + 1) \cdot 2}{(2x - 3)^2} = 3x^2 + \frac{20x^2 - 30x - 10x^2 - 2}{(2x - 3)^2} = 3x^2 + \frac{10x^2 - 30x - 2}{(2x - 3)^2}$$

$$90 \quad x^5 + 9 = 10x^2 \sqrt{x}$$

Stel $x^2 \sqrt{x} = u$.

$$u^2 + 9 = 10u$$

$$u^2 - 10u + 9 = 0$$

$$(u - 1)(u - 9) = 0$$

$$u = 1 \vee u = 9$$

$$x^2 \sqrt{x} = 1 \vee x^2 \sqrt{x} = 9$$

$$x^5 = 1 \vee x^5 = 81$$

$$x = 1 \vee x = \sqrt[5]{81}$$

$$91 \quad \text{Stel } H = b \cdot g^t.$$

$$g_{3 \text{ dagen}} = \frac{795}{942}$$

$$g_{\text{dag}} = \left(\frac{795}{942}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,9450...$$

$$\left. \begin{aligned} H &= b \cdot 0,9450...^t \\ t &= 5 \text{ en } H = 942 \end{aligned} \right\} b \cdot 0,9450...^5 = 942$$

$$b = \frac{942}{0,9450...^5} = 1249,8...$$

Dus $H = 1250 \cdot 0,945^t$.

92 $f_p(x) = \frac{x^2 + 1}{x + p}$ geeft $f'_p(x) = \frac{(x + p) \cdot 2x - (x^2 + 1) \cdot 1}{(x + p)^2} = \frac{2x^2 + 2px - x^2 - 1}{(x + p)^2} = \frac{x^2 + 2px - 1}{(x + p)^2}$
 $f'_p(x) = 0$ geeft $x^2 + 2px - 1 = 0$
 $2px = -x^2 + 1$
 $p = \frac{-x^2 + 1}{2x}$
 $y = \frac{x^2 + 1}{x + \frac{-x^2 + 1}{2x}} = \frac{2x(x^2 + 1)}{2x^2 - x^2 + 1} = \frac{2x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = 2x$

Dus alle toppen liggen op de lijn $k: y = 2x$.

93 $k: \frac{x}{2p} + \frac{y}{p} = 1$ oftewel $k: x + 2y = 2p$

Door $(6, 1)$ geeft $6 + 2 = 2p$

$$8 = 2p$$

$$p = 4$$

94 $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 6x + 4 + \sqrt{x}}{x^2} = x + 5 + \frac{6}{x} + 4x^{-2} + x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 6\ln|x| - 4x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 6\ln|x| - \frac{4}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

95 Er moet gelden $f(\frac{1}{2}\pi - p) = f(\frac{1}{2}\pi + p)$.

$$f(\frac{1}{2}\pi - p) = 2 + (\frac{1}{2}\pi - p - \frac{1}{2}\pi)\cos(\frac{1}{2}\pi - p) = 2 - p\cos(\frac{1}{2}\pi - p) = 2 - p\cos(p - \frac{1}{2}\pi)$$

$$f(\frac{1}{2}\pi + p) = 2 + (\frac{1}{2}\pi + p - \frac{1}{2}\pi)\cos(\frac{1}{2}\pi + p) = 2 + p\cos(\frac{1}{2}\pi + p) = 2 - p\cos(p - \frac{1}{2}\pi)$$

Voor elke p is $f(\frac{1}{2}\pi - p) = f(\frac{1}{2}\pi + p)$.

Dus de grafiek van f is lijnsymmetrisch in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.

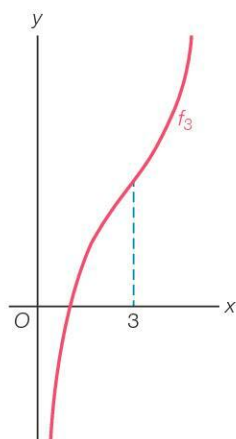
96 $f_a(x) = (x + a)\ln(x)$

$$f'_a(x) = 1 \cdot \ln(x) + (x + a) \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 + \frac{a}{x} = \ln(x) + 1 + ax^{-1}$$

$$f''_a(x) = \frac{1}{x} - ax^{-2} = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}$$

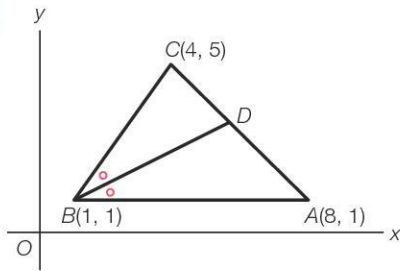
$$f''_a(3) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{3} - \frac{a}{9} = 0$$

$$a = 3$$



De grafiek van f_a gaat voor $a = 3$ bij $x = 3$ over van afnemend stijgend naar toenemend stijgend.

97



$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{BA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ en } \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 5, \text{ dus } \vec{r}_{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } BD: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } AC: x + y = 9.$$

BD snijden met AC geeft $1 + 2t + 1 + t = 9$

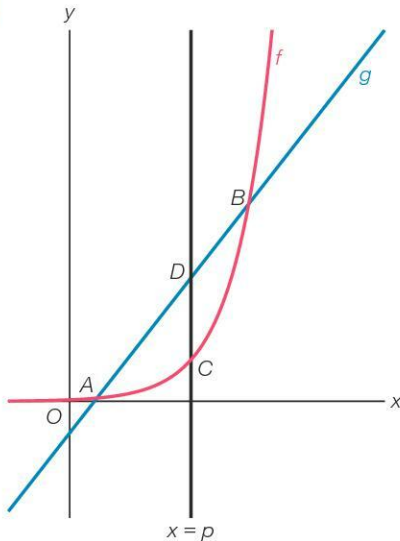
$$3t = 7$$

$$t = 2\frac{1}{3}$$

$$t = 2\frac{1}{3} \text{ geeft } x_D = 1 + 2 \cdot 2\frac{1}{3} = 5\frac{2}{3} \text{ en } y_D = 1 + 2\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

Dus $D(5\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3})$.

98



$$L = g(p) - f(p) = 3p - 1 - e^{2p-3}$$

$$\frac{dL}{dp} = 3 - e^{2p-3} \cdot 2 = 3 - 2e^{2p-3}$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } 2e^{2p-3} = 3$$

$$e^{2p-3} = 1\frac{1}{2}$$

$$2p - 3 = \ln(1\frac{1}{2})$$

$$2p = 3 + \ln(1\frac{1}{2})$$

$$p = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{2})$$

Dus voor $p = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{2})$ is de lengte van CD maximaal.

Deze maximale lengte is $3(1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{2})) - 1 - 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{2}) - 2\frac{1}{2} = 2 + 1\frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{2})$.

99

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x+5)(x-5)}$$

Er is een perforatie als $x = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1)(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1}{x+5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Dus de perforatie is $(5, \frac{2}{5})$.

$$100 \quad \frac{x^4 - x^2 - 20}{x^4 - 2x^2 - 24} = \frac{(x^2 + 4)(x^2 - 5)}{(x^2 + 4)(x^2 - 6)} = \frac{x^2 - 5}{x^2 - 6}$$

Bladzijde 237

$$101 \quad \begin{aligned} 2^{x-4} + 2^{x+1} &= 66 \\ 2^x \cdot 2^{-4} + 2^x \cdot 2^1 &= 66 \\ \frac{1}{16} \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x &= 66 \\ 2^{\frac{1}{16}} \cdot 2^x &= 66 \\ 2^x &= 32 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$102 \quad \begin{aligned} \text{De draaiingshoek van } A &\text{ is } \frac{1}{3}\pi. \\ \text{Dus de draaiingshoeken van } B, C \text{ en } D &\text{ zijn respectievelijk } \frac{5}{6}\pi, 1\frac{1}{3}\pi \text{ en } 1\frac{5}{6}\pi. \\ \text{Dit geeft } B(\cos(\frac{5}{6}\pi), \sin(\frac{5}{6}\pi)) &= B(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}), C(\cos(1\frac{1}{3}\pi), \sin(1\frac{1}{3}\pi)) = C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}) \text{ en} \\ D(\cos(1\frac{5}{6}\pi), \sin(1\frac{5}{6}\pi)) &= D(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

$$103 \quad \text{De lijnen } l_1 \text{ en } l_2 \text{ zijn evenwijdig met } k, \text{ op afstand } \sqrt{2} \text{ van } k.$$

$$\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } k: x + y = 4.$$

$$l // k \text{ geeft } l: x + y = c \text{ oftewel } l: x + y - c = 0.$$

$$\text{Het punt } (4, 0) \text{ ligt op } k.$$

$$\begin{aligned} d(k, l) = d((4, 0), l) &= \sqrt{2} \text{ geeft } \frac{|4 + 0 - c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ |4 - c| &= 2 \\ 4 - c &= 2 \vee 4 - c = -2 \\ c &= 2 \vee c = 6 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } l_1: x + y = 2 \text{ en } l_2: x + y = 6.$$

$$\begin{aligned} l_1: x + y = 2 \text{ oftewel } l_1: y = 2 - x \text{ snijden met } c \text{ geeft } x^2 + (2 - x)^2 - 2x + 6(2 - x) &= 0 \\ x^2 + 4 - 4x + x^2 - 2x + 12 - 6x &= 0 \\ 2x^2 - 12x + 16 &= 0 \\ x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ (x - 2)(x - 4) &= 0 \\ x &= 2 \vee x = 4 \end{aligned}$$

$$x = 2 \text{ en } y = 2 - x \text{ geeft het punt } (2, 0).$$

$$x = 4 \text{ en } y = 2 - x \text{ geeft het punt } (4, -2).$$

$$\begin{aligned} l_2: x + y = 6 \text{ oftewel } l_2: y = 6 - x \text{ snijden met } c \text{ geeft } x^2 + (6 - x)^2 - 2x + 6(6 - x) &= 0 \\ x^2 + 36 - 12x + x^2 - 2x + 36 - 6x &= 0 \\ 2x^2 - 20x + 72 &= 0 \\ x^2 - 10x + 36 &= 0 \\ D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 &= -44 \\ D < 0, \text{ dus geen oplossingen.} \end{aligned}$$

$$\text{De gevraagde punten zijn } (2, 0) \text{ en } (4, -2).$$

$$104 \quad \begin{aligned} O(V) &= \int_0^p x^2 \sqrt{x} \, dx = \int_0^p x^{2\frac{1}{2}} \, dx = \left[\frac{2}{7} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^p = \frac{2}{7} p^{\frac{5}{2}} - 0 = \frac{2}{7} p^{\frac{5}{2}} \\ O(V) &= 10 \text{ geeft } \frac{2}{7} p^{\frac{5}{2}} = 10 \\ p^{\frac{5}{2}} &= 35 \\ p &= 35^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{35^2} = \sqrt[5]{1225} \end{aligned}$$

$$105 \quad \begin{aligned} \cos(2A) &= 2 \cos^2(A) - 1 & \cos(2A) &= 1 - 2 \sin^2(A) \\ 2 \cos^2(A) &= 1 + \cos(2A) & 2 \sin^2(A) &= 1 - \cos(2A) \\ \cos^2(A) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2A) & \sin^2(A) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2A) \end{aligned}$$

$$f(x) = \cos^2(4x) + \sin^2(6x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(8x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(12x) = 1 + \frac{1}{2} \cos(8x) - \frac{1}{2} \cos(12x) \text{ geeft}$$

$$F(x) = x + \frac{1}{16} \sin(8x) - \frac{1}{24} \sin(12x) + c$$

- 106** De grafiek van f_a heeft een perforatie als $\sin^2(x) - a \cos(x) = 0 \wedge \sin(x) + \frac{1}{2} = 0$.
 $\sin(x) + \frac{1}{2} = 0$ geeft $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi \text{ geeft } \sin^2(\frac{1}{6}\pi) - a \cos(\frac{1}{6}\pi) = 0$$

$$(-\frac{1}{2})^2 - a \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}a\sqrt{3} = 0$$

$$\frac{1}{2}a\sqrt{3} = -\frac{1}{4}$$

$$a = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{-\frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

$$x = \frac{5}{6}\pi \text{ geeft } \sin^2(\frac{5}{6}\pi) - a \cos(\frac{5}{6}\pi) = 0$$

$$(-\frac{1}{2})^2 - a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}a\sqrt{3} = 0$$

$$\frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{4}$$

$$a = \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

Er is een perforatie als $a = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$ en als $a = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

- 107** Van c is het middelpunt $M(-4, 5)$ en de straal $r = \sqrt{5}$.
 $k: y = ax + b$ door $A(-1, 4)$ geeft $-a + b = 4$, dus $b = a + 4$.
Dit geeft $k: y = ax + a + 4$ oftewel $k: ax - y + a + 4 = 0$.

$$d(M, k) = r \text{ geeft } \frac{|-4a - 5 + a + 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$|-3a - 1| = \sqrt{5a^2 + 5}$$

$$9a^2 + 6a + 1 = 5a^2 + 5$$

$$4a^2 + 6a - 4 = 0$$

$$2a^2 + 3a - 2 = 0$$

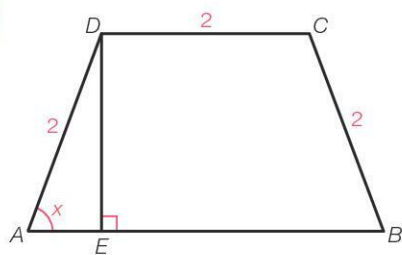
$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$

$$a = \frac{-3 \pm 5}{4} = \frac{1}{2} \vee a = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ geeft } b = 4\frac{1}{2} \text{ en } k_1: y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}.$$

$$a = -2 \text{ geeft } b = 2 \text{ en } k_2: y = -2x + 2.$$

108



$$\sin(x) = \frac{DE}{2} \text{ geeft } DE = 2 \sin(x)$$

$$\cos(x) = \frac{AE}{2} \text{ geeft } AE = 2 \cos(x)$$

$$AB = 2 + 2 \cdot AE = 2 + 2 \cdot 2 \cos(x) = 2 + 4 \cos(x)$$

$$O = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DE = \frac{1}{2}(2 + 4 \cos(x) + 2) \cdot 2 \sin(x) = \sin(x)(4 + 4 \cos(x))$$

$$\frac{dO}{dx} = \cos(x) \cdot (4 + 4 \cos(x)) + \sin(x) \cdot -4 \sin(x) = 4 \cos(x) + 4 \cos^2(x) - 4 \sin^2(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dO}{dx} = 0 & \text{ geeft } 4 \cos(x) + 4 \cos^2(x) - 4 \sin^2(x) = 0 \\
& 4 \cos(x) + 4(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 0 \\
& 4 \cos(x) + 4 \cos(2x) = 0 \\
& 4 \cos(2x) = -4 \cos(x) \\
& \cos(2x) = -\cos(x) \\
& \cos(2x) = \cos(x + \pi) \\
2x &= x + \pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -x - \pi + k \cdot 2\pi \\
x &= \pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\pi + k \cdot 2\pi \\
x &= \pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \\
0 < x < \frac{1}{2}\pi & \text{ geeft } x = \frac{1}{3}\pi
\end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{3}\pi \text{ geeft } O_{\max} = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)(4 + 4 \cos(\frac{1}{3}\pi)) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (4 + 4 \cdot \frac{1}{2}) = 3\sqrt{3}$$

109 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$

Stel k : $y = ax + b$ met $a = f'(1) = 3 - 8 + 3 = -2$.

$$\left. \begin{aligned} y &= -2x + b \\ f(1) &= 1, \text{ dus } A(1, 1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -2 + b &= 1 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

Dus k : $y = -2x + 3$.

Bladzijde 238

110 $F = 10 - \frac{K}{K+1}$

$$F(K+1) = 10(K+1) - K$$

$$FK + F = 10K + 10 - K$$

$$FK - 9K = 10 - F$$

$$K(F - 9) = 10 - F$$

$$K = \frac{10 - F}{F - 9}$$

111 $9^x + 54 = 15 \cdot 3^x$

$$(3^x)^2 - 15 \cdot 3^x + 54 = 0$$

Stel $3^x = u$.

$$u^2 - 15u + 54 = 0$$

$$(u - 6)(u - 9) = 0$$

$$u = 6 \vee u = 9$$

$$3^x = 6 \vee 3^x = 9$$

$$x = {}^3\log(6) \vee x = 2$$

112 $\cos^2(\frac{1}{2}x) - \cos(\frac{1}{2}x) - 2 = 0$

$$(\cos(\frac{1}{2}x) + 1)(\cos(\frac{1}{2}x) - 2) = 0$$

$$\cos(\frac{1}{2}x) = -1 \vee \cos(\frac{1}{2}x) = 2$$

$$\frac{1}{2}x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 2\pi + k \cdot 4\pi$$

113 $y = 2 + 3^{0,2x-1}$

$$3^{0,2x-1} = y - 2$$

$$0,2x - 1 = {}^3\log(y - 2)$$

$$0,2x = 1 + {}^3\log(y - 2)$$

$$x = 5 + 5 \cdot {}^3\log(y - 2)$$

114 Stel $k: y = 2x + b$.

Substitutie van $y = 2x + b$ in de cirkelvergelijking geeft

$$x^2 + (2x + b)^2 + 2x - 6(2x + b) + 5 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + 4bx + b^2 + 2x - 12x - 6b + 5 = 0$$

$$5x^2 + 4bx - 10x + b^2 - 6b + 5 = 0$$

$$5x^2 + (4b - 10)x + b^2 - 6b + 5 = 0$$

$$D = (4b - 10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (b^2 - 6b + 5) = 16b^2 - 80b + 100 - 20b^2 + 120b - 100 = -4b^2 + 40b$$

$$D = 0 \text{ geeft } -4b^2 + 40b = 0$$

$$4b(-b + 10) = 0$$

$$b = 0 \vee b = 10$$

Dus de gevraagde raaklijnen zijn $y = 2x$ en $y = 2x + 10$.

Alternatieve uitwerking

Stel $k: y = 2x + b$ oftewel $k: 2x - y + b = 0$

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 + 5 = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$$

Dus van de cirkel is het middelpunt $M(-1, 3)$ en de straal $r = \sqrt{5}$.

$$d(M, k) = r \text{ geeft } \frac{|-2 - 3 + b|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|-5 + b| = 5$$

$$-5 + b = 5 \vee -5 + b = -5$$

$$b = 10 \vee b = 0$$

Dus de gevraagde raaklijnen zijn $y = 2x + 10$ en $y = 2x$.

115 $f(x) = \frac{16}{(4x + 10)^5} = 16(4x + 10)^{-5}$ geeft $F(x) = 16 \cdot \frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{4}(4x + 10)^{-4} + c = \frac{-1}{(4x + 10)^4} + c$

116 $x = 0$ geeft $2 + 4 \cos(2t) = 0$

$$4 \cos(2t) = -2$$

$$\cos(2t) = -\frac{1}{2}$$

$$2t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \vee t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$t \text{ in } [0, \pi] \text{ geeft } t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \frac{2}{3}\pi$$

$$x < 0 \text{ geeft } \frac{1}{3}\pi < t < \frac{2}{3}\pi$$

$$x < 0 \wedge y > 1 \text{ geeft } \frac{1}{3}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$$

Dus P bevindt zich $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi$ seconden links van de y -as en boven de lijn $y = 1$.

$$y = 1 \text{ geeft } 1 + 4 \sin(2t) = 1$$

$$4 \sin(2t) = 0$$

$$\sin(2t) = 0$$

$$2t = k \cdot \pi$$

$$t = k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$t \text{ in } [0, \pi] \text{ geeft } t = 0 \vee t = \frac{1}{2}\pi$$

$$y > 1 \text{ geeft } 0 < t < \frac{1}{2}\pi$$

117 $f_a(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{2x + a} = \frac{(x - 1)(x + 5)}{2x + a} = \frac{\frac{1}{4}(2x - 2)(2x + 10)}{2x + a}$

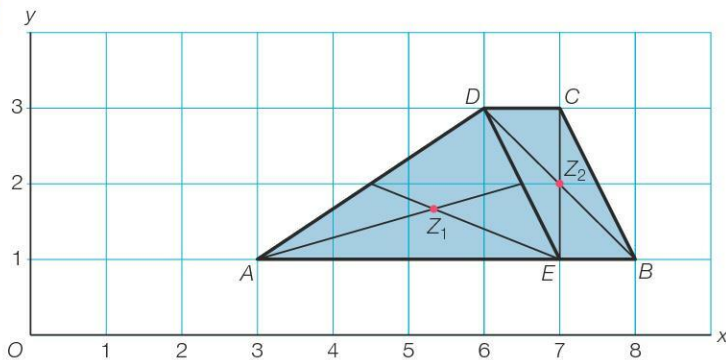
De grafiek van f_a heeft een perforatie als $a = -2$ en als $a = 10$.

$$a = -2 \text{ geeft } \lim_{x \rightarrow 1} f_{-2}(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{4}(2x - 2)(2x + 10)}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4}(2x + 10) = 3$$

$$a = 10 \text{ geeft } \lim_{x \rightarrow -5} f_{10}(x) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\frac{1}{4}(2x - 2)(2x + 10)}{2x + 10} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{4}(2x - 2) = -3$$

Dus voor $a = -2$ is de perforatie het punt $(1, 3)$ en voor $a = 10$ is de perforatie het punt $(-5, -3)$.

118



$$\vec{z}_1 = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{d} + \vec{e}) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 16 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\frac{1}{3} \\ 1\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

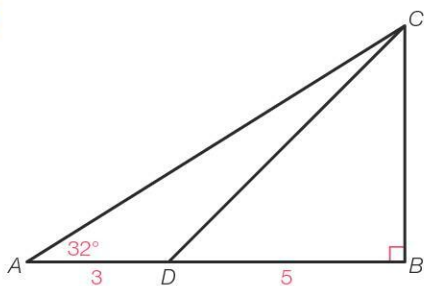
$m_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$, $m_2 = 1 \cdot 2 = 2$ en de totale massa is 6.

$$\vec{z} = \frac{1}{6}\left(4 \cdot \begin{pmatrix} 5\frac{1}{3} \\ 1\frac{2}{3} \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 21\frac{1}{3} \\ 6\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 35\frac{1}{3} \\ 10\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\frac{8}{9} \\ 1\frac{7}{9} \end{pmatrix}, \text{ dus } Z(5\frac{8}{9}, 1\frac{7}{9}).$$

119

$$f(x) = \frac{6x-5}{2x+1} = \frac{3(2x+1)-3-5}{2x+1} = 3 - \frac{8}{2x+1} \text{ geeft } F(x) = 3x - 8 \cdot \frac{1}{2} \ln|2x+1| + c = 3x - 4 \ln|2x+1| + c$$

120



$$\angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$$

$$\tan(32^\circ) = \frac{BC}{8} \text{ geeft } BC = 8 \tan(32^\circ) = 4,99...$$

$$\tan(\angle BCD) = \frac{BD}{BC} = \frac{5}{4,99...} = 1,00... \text{ geeft } \angle BCD = 45,00...^\circ$$

$$\angle ACD = \angle ACB - \angle BCD = 58^\circ - 45,00...^\circ \approx 13,0^\circ$$

121

$$\text{Voor } f \text{ geldt } y = \frac{1}{2} - \frac{5}{4x-6}, \text{ dus voor } f^{\text{inv}} \text{ geldt } x = \frac{1}{2} - \frac{5}{4y-6}$$

$$x(4y-6) = \frac{1}{2}(4y-6) - 5$$

$$4xy - 6x = 2y - 3 - 5$$

$$4xy - 2y = 6x - 8$$

$$y(4x-2) = 6x-8$$

$$y = \frac{6x-8}{4x-2} = \frac{2(3x-4)}{2(2x-1)} = \frac{3x-4}{2x-1}$$

$$\text{Dus } g(x) = \frac{3x-4}{2x-1} \text{ is de inverse van } f(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{4x-6}.$$

122

$$\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{r}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{r}_l = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\cos(\angle(k, l)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-9-14|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{58}} = \frac{23}{\sqrt{754}}$$

$$\angle(k, l) \approx 33,1^\circ$$

123 $\begin{aligned} {}^3\log(x+1) &= 4 + \frac{1}{3}\log(x-1) \\ {}^3\log(x+1) &= 4 - {}^3\log(x-1) \\ {}^3\log(x+1) + {}^3\log(x-1) &= 4 \\ {}^3\log((x+1)(x-1)) &= 4 \\ {}^3\log(x^2-1) &= 4 \\ x^2-1 &= 81 \\ x^2 &= 82 \\ x &= \sqrt{82} \vee x = -\sqrt{82} \text{ (vold. niet)} \end{aligned}$

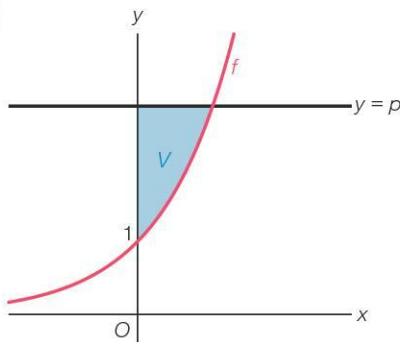
124 Van c is het middelpunt $M(3, -1)$ en de straal $r = \sqrt{10}$.
 $k: y = ax + b$ door $A(-1, -3)$ geeft $-a + b = -3$, dus $b = a - 3$.
 Dit geeft $k: y = ax + a - 3$ oftewel $k: ax - y + a - 3 = 0$.

$$\begin{aligned} d(M, k) = r \text{ geeft } \frac{|3a + 1 + a - 3|}{\sqrt{a^2 + 1}} &= \sqrt{10} \\ |4a - 2| &= \sqrt{10a^2 + 10} \\ 16a^2 - 16a + 4 &= 10a^2 + 10 \\ 6a^2 - 16a - 6 &= 0 \\ 3a^2 - 8a - 3 &= 0 \\ D &= (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 \\ a &= \frac{8 \pm 10}{6} = 3 \vee a = \frac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$a = 3$ geeft $b = 0$ en $k_1: y = 3x$.

$a = -\frac{1}{3}$ geeft $b = -3\frac{1}{3}$ en $k_2: y = -\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}$.

125



$f(x) = p$ geeft $e^x = p$ oftewel $x = \ln(p)$

$$O(V) = \int_0^{\ln(p)} (p - e^x) dx = [px - e^x]_0^{\ln(p)} = p \ln(p) - p - (0 - 1) = p \ln(p) - p + 1$$

$O(V) = 1$ geeft $p \ln(p) - p + 1 = 1$

$$p \ln(p) - p = 0$$

$$p(\ln(p) - 1) = 0$$

$$p = 0 \vee \ln(p) = 1$$

vold. niet $p = e$

Dus voor $p = e$.

126 $1 - 2e^x = 0$

$$e^x = \frac{1}{2}$$

$$x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

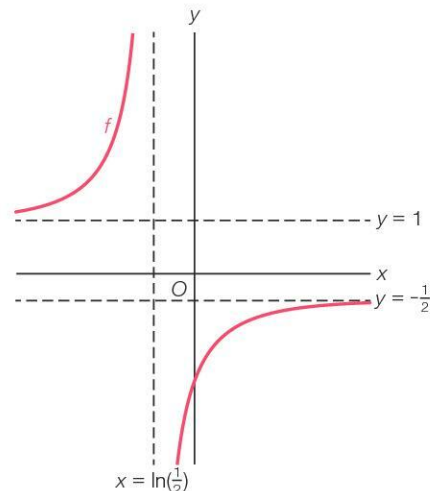
De verticale asymptoot is de lijn $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 1}{1 - 2e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} - 2} = \frac{1 + 0}{0 - 2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{1 - 2e^x} = \frac{0 + 1}{1 - 2 \cdot 0} = \frac{1}{1} = 1$$

De horizontale asymptoten zijn de lijnen $y = -\frac{1}{2}$ en $y = 1$.

Zie de figuur hiernaast.



127 $y(t) = 0$ geeft $\cos(2t) = 0$

$$2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

De eerste keer is voor $t = \frac{1}{4}\pi$.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \sin(3t) \\ -2 \sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \begin{pmatrix} -3 \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \\ -2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$v\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{\left(-1\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{34}$$

Dus de gevraagde baansnelheid is $\frac{1}{2}\sqrt{34}$.

128 $y(t) = 0$ geeft $t^2 - 2t + 1 = 0$

$$(t - 1)^2 = 0$$

$$t = 1$$

Het raakpunt is $(1, 0)$.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 + 2t + 3 \\ 2t - 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} -1 + 2 + 3 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dus } v(1) = 4.$$

De gevraagde baansnelheid is 4.

$$v(t) = \sqrt{(-t^2 + 2t + 3)^2 + (2t - 2)^2} \text{ geeft}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{(-t^2 + 2t + 3)^2 + (2t - 2)^2}} \cdot (2(-t^2 + 2t + 3) \cdot (-2t + 2) + 2(2t - 2) \cdot 2)$$

$$a(1) = \frac{1}{2\sqrt{(-1 + 2 + 3)^2 + (2 - 2)^2}} \cdot (2(-1 + 2 + 3) \cdot (-2 + 2) + 2(2 - 2) \cdot 2) = \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 2) = 0$$

De gevraagde baanversnelling is 0.

129 $y = \sqrt{x - 1}$

$$y^2 = x - 1$$

$$x = y^2 + 1$$

$$I(L) = \pi \int_0^q x^2 dy = \pi \int_0^q (y^2 + 1)^2 dy = \pi \int_0^q (y^4 + 2y^2 + 1) dy = \pi \left[\frac{1}{5}y^5 + \frac{2}{3}y^3 + y \right]_0^q = \pi \left(\frac{1}{5}q^5 + \frac{2}{3}q^3 + q \right)$$

$$q = \sqrt{p - 1} \text{ geeft } I(L) = \pi \left(\frac{1}{5}(\sqrt{p - 1})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{p - 1})^3 + \sqrt{p - 1} \right)$$

$$I(M) = \pi \int_1^p y^2 dx = \pi \int_1^p (x - 1) dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^p = \pi \left(\frac{1}{2}p^2 - p - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right) = \pi \left(\frac{1}{2}p^2 - p + \frac{1}{2} \right)$$

$$I(L) = 2 \cdot I(M) \text{ geeft } \pi \left(\frac{1}{5}(\sqrt{p - 1})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{p - 1})^3 + \sqrt{p - 1} \right) = 2 \cdot \pi \left(\frac{1}{2}p^2 - p + \frac{1}{2} \right) \text{ oftewel}$$

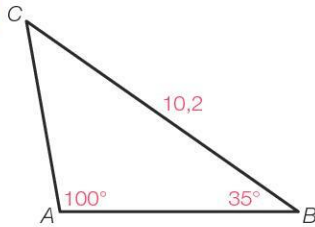
$$\frac{1}{5}(\sqrt{p - 1})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{p - 1})^3 + \sqrt{p - 1} = p^2 - 2p + 1.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{1}{5}(\sqrt{x - 1})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{x - 1})^3 + \sqrt{x - 1} \text{ en } y_2 = x^2 - 2x + 1.$$

De optie snijpunt geeft $x = 3,448\dots$

Dus $p \approx 3,45$.

130



$$\angle C = 180^\circ - 100^\circ - 35^\circ = 45^\circ$$

$$\text{De sinusregel geeft } \frac{10,2}{\sin(100^\circ)} = \frac{AB}{\sin(45^\circ)} \quad \text{en} \quad \frac{10,2}{\sin(100^\circ)} = \frac{AC}{\sin(35^\circ)}$$

$$AB = \frac{10,2 \sin(45^\circ)}{\sin(100^\circ)} = 7,32... \quad AC = \frac{10,2 \sin(35^\circ)}{\sin(100^\circ)} = 5,94...$$

Dus $AB \approx 7,3$ en $AC \approx 5,9$.

131

$$2 \sin(2x) = -\sqrt{3}$$

$$\sin(2x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$$

132

$$d(A, B) = \sqrt{(2-2p)^2 + (p+1-3)^2} = \sqrt{(2-2p)^2 + (p-2)^2} = \sqrt{4-8p+4p^2+p^2-4p+4} = \sqrt{5p^2-12p+8}$$

$$\sqrt{5p^2-12p+8} \text{ is minimaal als } 5p^2-12p+8 \text{ minimaal is. Dus als } p = -\frac{-12}{2 \cdot 5} = \frac{6}{5}.$$

$$\text{De minimale afstand is } \sqrt{5 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 12 \cdot \frac{6}{5} + 8} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

133

$$25^x + 6 = 5^{x+1}$$

$$(5^2)^x - 5^{x+1} + 6 = 0$$

$$(5^x)^2 - 5 \cdot 5^x + 6 = 0$$

$$\text{Stel } 5^x = u.$$

$$u^2 - 5u + 6 = 0$$

$$(u-2)(u-3) = 0$$

$$u = 2 \vee u = 3$$

$$5^x = 2 \vee 5^x = 3$$

$$x = {}^5\log(2) \vee x = {}^5\log(3)$$

134

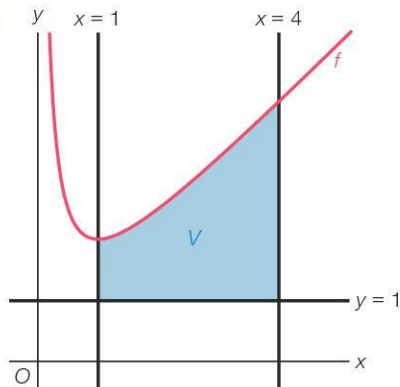
$$\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(AB, AC)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-3+12|}{5 \cdot \sqrt{10}} = \frac{9}{5\sqrt{10}}$$

$$\angle(AB, AC) \approx 55,3^\circ$$

135



$$\begin{aligned}
 I(L) &= \pi \int_1^4 \left(\frac{x^2+1}{x} \right)^2 dx - \pi \cdot 1^2 \cdot 3 = \pi \int_1^4 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx - 3\pi = \pi \int_1^4 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \right) dx - 3\pi \\
 &= \pi \int_1^4 (x^2 + 2 + x^{-2}) dx - 3\pi = \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x - x^{-1} \right]_1^4 - 3\pi \\
 &= \pi \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^{-1} - \left(\frac{1}{3} + 2 - 1 \right) \right) - 3\pi = 27\frac{3}{4}\pi - 3\pi = 24\frac{3}{4}\pi
 \end{aligned}$$

136

$$y(t) = 0 \text{ geeft } \sin(2t) = 0$$

$$2t = k \cdot \pi$$

$$t = k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ snijdt de baan de positieve x -as.

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t - \frac{1}{4}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} x'(t) = \cos(t - \frac{1}{4}\pi) \\ y'(t) = 2\cos(2t) \end{cases}$$

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=\frac{1}{2}\pi} = \frac{2\cos(\pi)}{\cos(\frac{1}{4}\pi)} = \frac{-2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

$$\tan(\alpha) = -2\sqrt{2} \text{ geeft } \alpha = -70,5\dots^\circ$$

Dus de gevraagde hoek is 71° .

137

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 3} \text{ geeft}$$

$$f'(x) = \frac{(e^{2x} - 3) \cdot e^x - (e^x - 2) \cdot e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x} - 3)^2} = \frac{e^{3x} - 3e^x - 2e^{3x} + 4e^{2x}}{(e^{2x} - 3)^2} = \frac{-e^{3x} + 4e^{2x} - 3e^x}{(e^{2x} - 3)^2} = \frac{-e^x(e^{2x} - 4e^x + 3)}{(e^{2x} - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } -e^x(e^{2x} - 4e^x + 3) = 0$$

$$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$$

$$(e^x - 1)(e^x - 3) = 0$$

$$e^x = 1 \vee e^x = 3$$

$$x = 0 \vee x = \ln(3)$$

$$f(0) = \frac{1-2}{1-3} = \frac{1}{2} \text{ en } f(\ln(3)) = \frac{3-2}{9-3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^x} - \frac{2}{e^{2x}}}{1 - \frac{3}{e^{2x}}} = \frac{0-0}{1-0} = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 3} = \frac{0-2}{0-3} = \frac{2}{3}$$

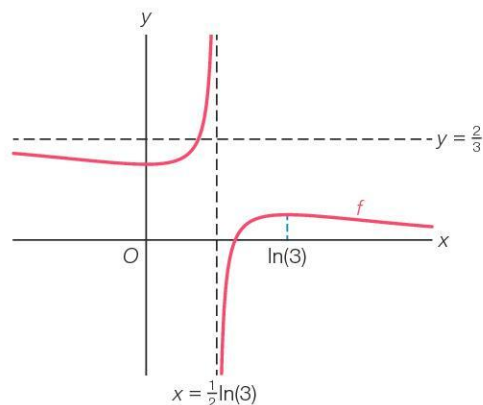
$$e^{2x} - 3 = 0 \text{ geeft } e^{2x} = 3$$

$$2x = \ln(3)$$

$$x = \frac{1}{2}\ln(3)$$

Schets, zie hiernaast.

Het bereik van f bestaat uit de intervallen $\langle -\infty, \frac{1}{6} \rangle$ en $[\frac{1}{2}, \infty)$.



138 $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = 2t^2 + 4t \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2t - 4 \\ y'(t) = 4t + 4 \end{cases}$
 Evenwijdig met de x -as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$
 $4t + 4 = 0 \wedge 2t - 4 \neq 0$
 $4t = -4 \wedge 2t \neq 4$
 $t = -1 \wedge t \neq 2$

$t = -1$ geeft het punt $(5, -2)$.

Evenwijdig met de y -as, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$
 $2t - 4 = 0 \wedge 4t + 4 \neq 0$
 $t = 2 \wedge t \neq -1$

$t = 2$ geeft het punt $(-4, 16)$.

139 Er geldt $-1 \leq \cos(t) \leq 1$, dus $-1 \leq x \leq 1$.

Substitutie van $x = \cos(t)$ en $y = 2 \sin(2t - \frac{1}{2}\pi)$ in $y = 2 - 4x^2$ geeft $2 \sin(2t - \frac{1}{2}\pi) = 2 - 4 \cos^2(t)$

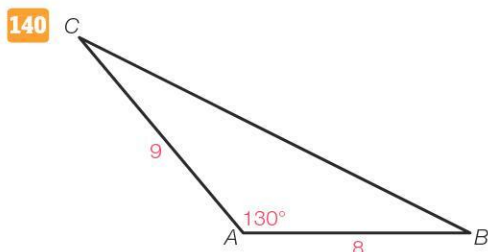
$$\sin(2t - \frac{1}{2}\pi) = 1 - 2 \cos^2(t)$$

$$\cos(2t - \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \cos(2t)$$

$$\cos(2t) = \cos(2t)$$

Dit klopt voor elke waarde van t .

Dus bij de grafiek met de gegeven parametervoorstelling hoort de parabool $y = 2 - 4x^2$ met $-1 \leq x \leq 1$.



De cosinusregel geeft $BC^2 = 8^2 + 9^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \cos(130^\circ) = 237,56...$

$$BC = \sqrt{237,56...} \approx 15,4$$

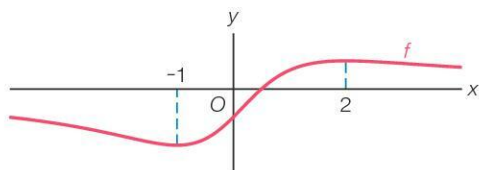
141 $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2+2) \cdot 2 - (2x-1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^2+4-4x^2+2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2)^2}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } -2x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$



min. is $f(-1) = -1$, max. is $f(2) = \frac{1}{2}$ en $B_f = [-1, \frac{1}{2}]$.

142 $\cos(2x - \frac{1}{2}\pi) = \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$

$$2x - \frac{1}{2}\pi = x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{2}\pi = -x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

143 Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{1-2}{0-1} = -1$.

$k: y = -x + b$ door $C(0, 1)$ geeft $k: y = -x + 1$ oftewel $k: x + y - 1 = 0$.

$$d(A, k) = \frac{|9+2-1|}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

144 $g_{103 \text{ jaar}} = \frac{1}{2}$
 $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{103}} \approx 0,9933$
Dus per jaar is de afname 0,67%.

145 $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\angle(k, l)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|15 + 4|}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{13}} = \frac{19}{\sqrt{377}}$$

$$\angle(k, l) \approx 11,9^\circ$$

Bladzijde 241

146 Schuif de grafiek van f 1 omlaag, dit geeft de grafiek van $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x} - 1$.

$$I(L) = \pi \int_1^4 (g(x))^2 dx = \pi \int_1^4 \left(\frac{x^2 + 1}{x} - 1 \right)^2 dx = \pi \int_1^4 \left(\left(\frac{x^2 + 1}{x} \right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2 + 1}{x} \cdot 1 + 1 \right) dx$$

$$= \pi \int_1^4 \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2} - 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 1 \right) dx = \pi \int_1^4 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2x - \frac{2}{x} + 1 \right) dx$$

$$= \pi \int_1^4 \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + x^{-2} \right) dx = \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 2 \ln|x| - x^{-1} \right]_1^4$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 4^2 + 3 \cdot 4 - 2 \ln(4) - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3} - 1 + 3 - 2 \ln(1) - 1 \right) \right)$$

$$= \pi \left(21\frac{1}{3} - 16 + 12 - 2 \ln(2^2) - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3} - 1 + 3 - 0 - 1 \right) \right) = 15\frac{3}{4}\pi - 4\pi \ln(2)$$

147 $y = {}^5\log(x)$
 $\downarrow$ translatie (3, -2)
 $y = -2 + {}^5\log(x - 3)$
 $\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$
 $f(x) = -2 + {}^5\log(2x - 3)$

148 c heeft middelpunt $M(1, 0)$ en straal $\sqrt{2}$.
 d heeft middelpunt $N(4, 1)$ en straal $2\sqrt{2}$.
Stel $k: y = ax + b$ oftewel $k: ax - y + b = 0$.
 $d(M, k) = \sqrt{2}$ geeft $\frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{2}$ oftewel $|a + b| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$.
 $d(N, k) = 2\sqrt{2}$ geeft $\frac{|4a - 1 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2\sqrt{2}$ oftewel $|4a - 1 + b| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$.
Hieruit volgt $2|a + b| = |4a - 1 + b|$
 $2(a + b) = 4a - 1 + b \vee 2(a + b) = -4a + 1 - b$
 $2a + 2b = 4a - 1 + b \vee 2a + 2b = -4a + 1 - b$
 $b = 2a - 1 \vee 3b = -6a + 1$
 $b = 2a - 1 \vee b = -2a + \frac{1}{3}$
 $b = 2a - 1$ invullen bij $|a + b| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$ geeft $|a + 2a - 1| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$
 $|3a - 1| = \sqrt{2a^2 + 2}$
 $9a^2 - 6a + 1 = 2a^2 + 2$
 $7a^2 - 6a - 1 = 0$
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-1) = 64$
 $a = \frac{6 + 8}{14} = 1 \vee a = \frac{6 - 8}{14} = -\frac{1}{7}$

$a = 1$ geeft $b = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ en $k_1: y = x + 1$.

$a = -\frac{1}{7}$ geeft $b = 2 \cdot -\frac{1}{7} - 1 = -1\frac{2}{7}$ en $k_2: y = -\frac{1}{7}x - 1\frac{2}{7}$.

Hiermee zijn de twee lijnen gevonden, dus $b = -2a + \frac{1}{3}$ voldoet niet.

149 $\ln(x) + 1 = 0$

$$\ln(x) = -1$$

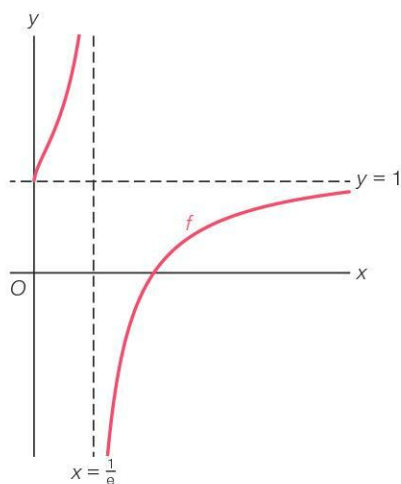
$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{1}{e}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2x) - 1}{\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{\ln(2) + \ln(x) - 1}{\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(x)} + 1 - \frac{1}{\ln(x)}}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{0 + 1 - 0}{1 + 0} = 1$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(2x) - 1}{\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2) + \ln(x) - 1}{\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(x)} + 1 - \frac{1}{\ln(x)}}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{0 + 1 - 0}{1 + 0} = 1$$



150 $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t \\ y(t) = t^2 - 4t + 4 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = -t^2 + 2t + 3 \\ y'(t) = 2t - 4 \end{cases}$

Raaklijn verticaal, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$$-t^2 + 2t + 3 = 0 \wedge 2t - 4 \neq 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \wedge 2t \neq 4$$

$$(t+1)(t-3) = 0 \wedge t \neq 2$$

$$t = -1 \vee t = 3$$

$t = -1$ geeft het punt $(-1\frac{2}{3}, 9)$ en $t = 3$ geeft het punt $(9, 1)$.

$$y = 9 \text{ geeft } t^2 - 4t + 4 = 9$$

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$(t+1)(t-5) = 0$$

$$t = -1 \vee t = 5$$

$t = 5$ geeft het punt $(-1\frac{2}{3}, 9)$.

Dus de baan snijdt zichzelf op $t = 5$ in een punt waarin de raaklijn aan de baan verticaal is.

$$t = 5 \text{ geeft } \left[\frac{dy}{dx} \right]_{t=5} = \frac{10 - 4}{-25 + 10 + 3} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha) = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = -26,5...^\circ$$

De gevraagde hoek is $180^\circ - 90^\circ - 26,5...^\circ \approx 63^\circ$.

151 $f(x) = -\frac{1}{5}(x-3)^4 - 2$
 $\downarrow$ verm. x-as, -10
 $y = 2(x-3)^4 + 20$
 $\downarrow$ translatie (5, -15)
 $g(x) = 2(x-8)^4 + 5$
 min. is $g(8) = 5$

152 $2 + \frac{3}{x+4}$ is omgekeerd evenredig met y , dus $2 + \frac{3}{x+4} = \frac{c}{y}$.

$x = 2$ en $y = 4$ geeft $2 + \frac{3}{2+4} = \frac{c}{4}$

$$2\frac{1}{2} = \frac{c}{4}$$

$$c = 10$$

Dit geeft $2 + \frac{3}{x+4} = \frac{10}{y}$

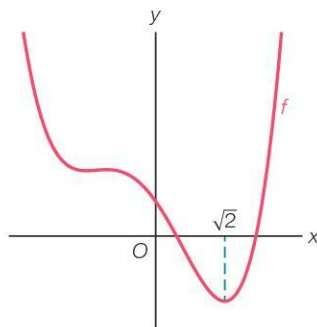
$$\frac{2x+11}{x+4} = \frac{10}{y}$$

$$y = \frac{10(x+4)}{2x+11}$$

$$y = \frac{10x+40}{2x+11}$$

153 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 1$ geeft $f'(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$

$$f'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} - 2 = 0$$



Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{2}$.

Bladzijde 242

154 De vergelijking van c is van de vorm $(x-8)^2 + (y-5)^2 = r^2$.

Substitutie van $x = t + 2$ en $y = 3t + 1$ geeft

$$(t-6)^2 + (3t-4)^2 = r^2$$

$$t^2 - 12t + 36 + 9t^2 - 24t + 16 = r^2$$

$$10t^2 - 36t + 52 - r^2 = 0$$

$$D = (-36)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (52 - r^2) = 1296 - 2080 + 40r^2 = 40r^2 - 784$$

$$D = 0 \text{ geeft } 40r^2 - 784 = 0$$

$$40r^2 = 784$$

$$r^2 = 19,6$$

Dus $c: (x-8)^2 + (y-5)^2 = 19,6$.

155 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ geeft $f'(x) = x^2 - x$

$$f'(x) = 6 \text{ geeft } x^2 - x = 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 3$$

$$f(-2) = -2\frac{2}{3} \text{ en } f(3) = 6\frac{1}{2}$$

Dus $A(-2, -2\frac{2}{3})$ en $B(3, 6\frac{1}{2})$.

$$156 \quad \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{AB}_L = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ b-a \end{pmatrix}$$

D op de y -as geeft $a - c = 0$ oftewel $c = a$.

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} a-b \\ -c \end{pmatrix} \text{ en } \vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{BA}_R = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-c \\ -a+b+c \end{pmatrix}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} b-c \\ -a+b+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-c \\ b-a \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+b-2c \\ -2a+2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - c \\ -a + b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$$

BM is horizontaal als geldt $-a + b + \frac{1}{2}c = c$ oftewel $-a + b - \frac{1}{2}c = 0$.

Substitutie van $c = a$ in $-a + b - \frac{1}{2}c = 0$ geeft $-a + b - \frac{1}{2}a = 0$ oftewel $b = 1\frac{1}{2}a$.

$$c = a \text{ en } b = 1\frac{1}{2}a \text{ geeft } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2}a \\ a \end{pmatrix} \text{ en } \vec{m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}a - a \\ -a + 1\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a \\ a \end{pmatrix}.$$

$$BM = 3 \text{ geeft } |1\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a| = 3$$

$$|1\frac{1}{4}a| = 3$$

$$1\frac{1}{4}a = 3$$

$$a = 2\frac{2}{5}$$

$$\text{Dus } a = 2\frac{2}{5}, b = 3\frac{3}{5} \text{ en } c = 2\frac{2}{5}.$$

$$157 \quad f(x) = 0 \text{ geeft } 4x - x^2 = 0$$

$$x(4-x) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 4$$

$$f(x) = g(x) \text{ geeft } 4x - x^2 = 5 - 2x$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

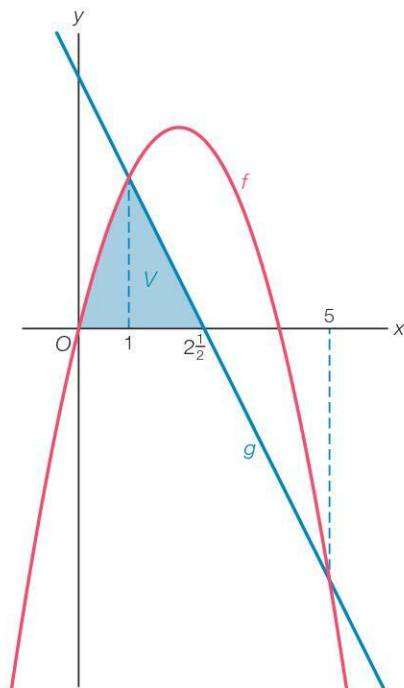
$$(x-1)(x-5) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 5$$

$$g(x) = 0 \text{ geeft } 5 - 2x = 0$$

$$2x = 5$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$



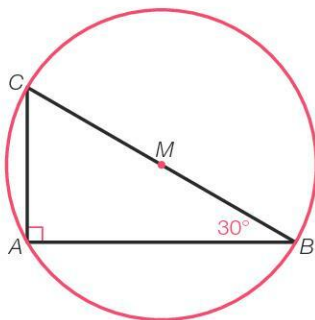
$$\begin{aligned} I(L) &= \pi \int_0^1 (4x - x^2)^2 dx + \pi \int_1^{2\frac{1}{2}} (5 - 2x)^2 dx = \pi \int_0^1 (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx + \pi \int_1^{2\frac{1}{2}} (25 - 20x + 4x^2) dx \\ &= \pi \left[\frac{16}{3}x^3 - 2x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 + \pi \left[25x - 10x^2 + \frac{4}{3}x^3 \right]_1^{2\frac{1}{2}} \\ &= \pi \left(\frac{16}{3} - 2 + \frac{1}{5} \right) - \pi(0 - 0 + 0) + \pi \left(25 \cdot 2\frac{1}{2} - 10 \cdot (2\frac{1}{2})^2 + \frac{4}{3} \cdot (2\frac{1}{2})^3 \right) - \pi \left(25 - 10 + \frac{4}{3} \right) \\ &= \frac{53}{15}\pi + \frac{125}{6}\pi - \frac{49}{3}\pi = 8\frac{1}{30}\pi \end{aligned}$$

158 $y = \sqrt{x}$
 $\downarrow$ translatie (4, -2)
 $y = -2 + \sqrt{x-4}$
 $\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$
 $f(x) = -2 + \sqrt{2x-4}$
 $D_f = [2, \rightarrow)$, $B_f = [-2, \rightarrow)$ en randpunt (2, -2).

159 De grafiek van f_a heeft een perforatie als $\ln(ax^2) + 2 = 0 \wedge \ln(x) + 4 = 0$
 $\ln(ax^2) = -2 \wedge \ln(x) = -4$
 $ax^2 = e^{-2} \wedge x = e^{-4}$
 Substitutie van $x = e^{-4}$ in $ax^2 = e^{-2}$ geeft $a(e^{-4})^2 = e^{-2}$
 $a e^{-8} = e^{-2}$
 $a = e^6$

160 $f(x) = \frac{1-3x}{(x+1)^2}$
 $f'(x) = \frac{(x+1)^2 \cdot -3 - (1-3x) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-3(x+1) - 2(1-3x)}{(x+1)^3} = \frac{-3x-3-2+6x}{(x+1)^3} = \frac{3x-5}{(x+1)^3}$
 $f''(x) = \frac{(x+1)^3 \cdot 3 - (3x-5) \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{3(x+1) - 3(3x-5)}{(x+1)^4} = \frac{3x+3-9x+15}{(x+1)^4} = \frac{-6x+18}{(x+1)^4}$
 $f'(-3) = \frac{-14}{(-2)^3} > 0$ en $f''(-3) = \frac{36}{(-2)^4} > 0$
 Dus in A toenemend stijgend.
 $f'(1) = \frac{-2}{2^3} < 0$ en $f''(1) = \frac{12}{2^4} > 0$
 Dus in B afnemend dalend.
 $f'(4) = \frac{7}{5^3} > 0$ en $f''(4) = \frac{-6}{5^4} < 0$
 Dus in C afnemend stijgend.

161 Volgens de omgekeerde stelling van Thales is het middelpunt van de omgeschreven cirkel het midden van BC.



Noem de straal van de cirkel r .
 Dan moet gelden $\pi r^2 = 36\pi$
 $r^2 = 36$
 $r = 6$

Dus $BC = 12$.

$\sin(30^\circ) = \frac{AC}{12}$ geeft $AC = 12 \sin(30^\circ) = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$

$\cos(30^\circ) = \frac{AB}{12}$ geeft $AB = 12 \cos(30^\circ) = 12 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

De omtrek van driehoek ABC is $12 + 6 + 6\sqrt{3} = 18 + 6\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
 162 \quad & y = \sin(x) \\
 & \downarrow \text{verm. } y\text{-as, } 2 \\
 & y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \\
 & \downarrow \text{translatie } \left(\frac{1}{4}\pi, -2\right) \\
 & y = -2 + \sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right) \\
 & \text{Dus } f(x) = -2 + \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi\right).
 \end{aligned}$$

Bladzijde 243

$$\begin{aligned}
 163 \quad & A = 12 - 3\sqrt{1 - 2B} \\
 & 3\sqrt{1 - 2B} = 12 - A \\
 & \text{kwadrateren geeft} \\
 & 9(1 - 2B) = 144 - 24A + A^2 \\
 & 9 - 18B = 144 - 24A + A^2 \\
 & -18B = A^2 - 24A + 135 \\
 & B = -\frac{1}{18}A^2 + \frac{4}{3}A - 7\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 164 \quad & f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 4x + b \text{ geeft } f'(x) = x^2 - 2ax + 4 \text{ en } f''(x) = 2x - 2a. \\
 & f''(x) = 0 \text{ geeft } 2x - 2a = 0 \\
 & \quad 2x = 2a \\
 & \quad x = a
 \end{aligned}$$

Er moet gelden $f'(a) = r_{c_k}$.

$$\begin{aligned}
 f'(a) = -5 \text{ geeft } & a^2 - 2a \cdot a + 4 = -5 \\
 & a^2 - 2a^2 = -9 \\
 & -a^2 = -9 \\
 & a^2 = 9 \\
 & a = 3 \vee a = -3
 \end{aligned}$$

$$f_3(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + b = b - 6$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -5x + 2 \\ \text{door } (3, b - 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} b - 6 = -5 \cdot 3 + 2 \\ b = -15 + 2 + 6 = -7 \end{array}$$

$$f_{-3}(-3) = \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot -3 + b = b + 6$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -5x + 2 \\ \text{door } (-3, b + 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} b + 6 = -5 \cdot -3 + 2 \\ b = 15 + 2 - 6 = 11 \end{array}$$

Dus $a = 3$ en $b = -7$ of $a = -3$ en $b = 11$.

$$165 \quad -\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(2x + 1\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(2x + 1\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(2x + 1\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$\begin{aligned}
 166 \quad & x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0 \\
 & x^2 + 4x + y^2 - 6y + 8 = 0 \\
 & (x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 8 = 0 \\
 & (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5 \\
 & \text{Dus middelpunt } M(-2, 3) \text{ en straal } r = \sqrt{5}. \\
 & d(A, M) = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (11 - 3)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \\
 & d(A, c) = d(A, M) - r = 4\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 167 \quad & e^{2x} - 6e^{x+1} + 5e^2 = 0 \\
 & (e^x)^2 - 6e \cdot e^x + 5e^2 = 0 \\
 & (e^x - e)(e^x - 5e) = 0 \\
 & e^x = e \vee e^x = 5e \\
 & x = 1 \vee x = \ln(5e) \\
 & x = 1 \vee x = 1 + \ln(5)
 \end{aligned}$$

168 $\begin{cases} x(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 - 6t \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2t^2 - 4t - 6 \\ y'(t) = 2t \end{cases}$
 Evenwijdig met de x -as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$
 $2t = 0 \wedge 2t^2 - 4t - 6 \neq 0$
 $t = 0$

$t = 0$ geeft het punt $(0, -4)$.

Evenwijdig met de y -as, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$
 $2t^2 - 4t - 6 = 0 \wedge 2t \neq 0$
 $t^2 - 2t - 3 = 0 \wedge t \neq 0$
 $(t+1)(t-3) = 0 \wedge t \neq 0$
 $t = -1 \vee t = 3$

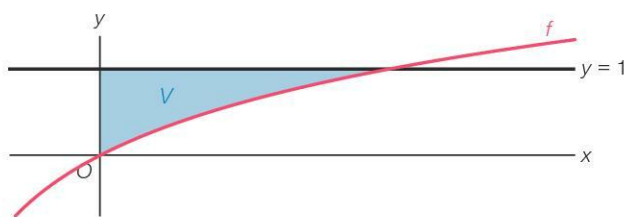
$t = -1$ geeft het punt $(3\frac{1}{3}, -3)$ en $t = 3$ geeft het punt $(-18, 5)$.

169 $y = \ln(\frac{1}{2}x + 1)$ geeft $\ln(\frac{1}{2}x + 1) = y$

$$\frac{1}{2}x + 1 = e^y$$

$$\frac{1}{2}x = e^y - 1$$

$$x = 2e^y - 2$$



$$I(L) = \pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_0^1 (2e^y - 2)^2 dy = \pi \int_0^1 (4e^{2y} - 8e^y + 4) dy = \pi [2e^{2y} - 8e^y + 4y]_0^1$$

$$= \pi(2e^2 - 8e + 4) - \pi(2 - 8 + 0) = (2e^2 - 8e + 10)\pi$$

170 $k: x + 7y = 21$ oftewel $k: x = 21 - 7y$

Stel $M(21 - 7p, p)$.

$$d(M, l) = d(M, m) \text{ geeft } \frac{|21 - 7p + 2p - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|2(21 - 7p) - p - 2|}{\sqrt{5}}$$

$$|20 - 5p| = |42 - 14p - p - 2|$$

$$|20 - 5p| = |40 - 15p|$$

$$20 - 5p = 40 - 15p \vee 20 - 5p = -40 + 15p$$

$$10p = 20 \vee -20p = -60$$

$$p = 2 \vee p = 3$$

$$p = 2 \text{ geeft } M_1(7, 2) \text{ en } r_1 = d(M_1, l) = \frac{|7 + 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$p = 3 \text{ geeft } M_2(0, 3) \text{ en } r_2 = d(M_2, l) = \frac{|0 + 2 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Dus $c_1: (x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 20$ en $c_2: x^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Verantwoording

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

*De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie.
Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontleen.*

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 22

© 2022 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73725-2



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.