

& GETAL | C & RUIMTE



Noordhoff

Getal & Ruimte

Uitwerkingen **vwo C** deel 4

Twaalfde editie, 2022

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
E. Terlaak

Inhoud

12	Rijen	<i>4</i>
13	Meetkunde toepassen	<i>16</i>
14	Werken met formules	<i>39</i>
15	Examentraining	<i>63</i>
	Gemengde opgaven	<i>89</i>

12 Rijen

Voorkennis Lineaire en exponentiële groei

Bladzijde 10

- 1** Als n met 1 toeneemt, dan neemt y steeds met 35 toe.
Bij $n = 0$ hoort $y = 250$, dus de formule is $y = 35n + 250$.
- 2** Als n met 1 toeneemt, dan wordt y steeds met 1,6 vermenigvuldigd.
Bij $n = 0$ hoort $y = 250$, dus de formule is $y = 250 \cdot 1,6^n$.

3 $g^3 = \frac{2160}{1250}$, dus $g = \left(\frac{2160}{1250}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,2$

$$\left. \begin{array}{l} y = b \cdot 1,2^n \\ n = 2 \text{ en } y = 1250 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,2^2 = 1250 \\ b = \frac{1250}{1,2^2} \approx 868 \end{array}$$

Dus $b = 868$ en $g = 1,2$.

4 $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{212 - 293}{25 - 10} = -5,4$

$$\left. \begin{array}{l} y = -5,4n + b \\ n = 10 \text{ en } y = 293 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -5,4 \cdot 10 + b = 293 \\ -54 + b = 293 \\ b = 347 \end{array}$$

Dus $a = -5,4$ en $b = 347$.

- 5 a** Als n met 1 toeneemt, dan neemt y steeds met 8 af.
Bij $n = 0$ hoort $y = 256$, dus de formule is $y = -8n + 256$.
 $n = 13$ geeft $y = -8 \cdot 13 + 256 = 152$
- b** Los op $-8n + 256 = 0$
 $-8n = -256$
 $n = 32$
Dus bij $n = 32$ is $y = 0$.

6 a $g^4 = \frac{829,44}{576}$, dus $g = \left(\frac{829,44}{576}\right)^{\frac{1}{4}} = 1,2$.
Bij $n = 6$ hoort $y = 576 \cdot 1,2 = 691,2$.

b $y = b \cdot 1,2^n$
 $n = 3 \text{ en } y = 400$ $\left\{ \begin{array}{l} b \cdot 1,2^3 = 400 \\ b = \frac{400}{1,2^3} \end{array} \right.$

$$\text{Dus } y = \frac{400}{1,2^3} \cdot 1,2^n = 400 \cdot 1,2^{n-3}.$$

Voer in $y_1 = 400 \cdot 1,2^{x-3}$ en maak een tabel.

Uit de tabel volgt $n = 16$ geeft $y \approx 4280$ en $n = 17$ geeft $y \approx 5136$.

Dus vanaf $n = 17$ is $y > 5000$.

7 a $y = an + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20 - 320}{7 - 3} = -75$

$$\left. \begin{array}{l} y = -75n + b \\ n = 3 \text{ en } y = 320 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -75 \cdot 3 + b = 320 \\ -225 + b = 320 \\ b = 545 \end{array}$$

Dus $y = -75n + 545$.

b $y = b \cdot g^n$ met $g^4 = \frac{20}{320}$, dus $g = \left(\frac{20}{320}\right)^{\frac{1}{4}} = 0,5$.

$$\left. \begin{array}{l} y = b \cdot 0,5^n \\ n = 3 \text{ en } y = 320 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,5^3 = 320 \\ b = \frac{320}{0,5^3} = 2560 \end{array}$$

Dus $y = 2560 \cdot 0,5^n$.

12.1 Rijen en verbanden

Bladzijde 11

- 1** A Er komt steeds 7 bij. Het volgende getal is 46.
 B Steeds keer 2. Het volgende getal is 128.
 C Er gaat steeds 32 af. Het volgende getal is 78.
 D Steeds keer $\frac{2}{3}$. Het volgende getal is 16.
 E Het zijn kwadraten. Het volgende getal is 49.

Bladzijde 13

- 2** Je laat zien dat u_9 nog kleiner is dan 500 en dat u_{10} de eerste term is die groter is dan 500.
- 3** **a** De GR geeft de zevende term is $u_6 \approx 340,57$ en de achtste term is $u_7 \approx 356,51$.
b $u_{10} \approx 395,40$ en $u_{11} \approx 405,86$
 Dus vanaf de 12^e term is $u_n > 400$.
- 4** **a** De GR geeft de vierde term is $u_3 = 330,07$ en de vijfde term is $u_4 = 373,35$.
b $u_{11} \approx 419,44$ en $u_{12} \approx 419,60$
 Dus vanaf de 13^e term is $u_n > 419,5$.
c Nee, vanaf $n = 17$ is $u_n \approx 419,76$ en dus is er geen term waarvoor $u_n > 420$.
- 5** **a** Voer in $y_1 = 2x^2 + 7x - 3$.
 De tabel geeft de zesde term is $u_5 = 82$ en de zevende term is $u_6 = 111$.
b Uit de tabel volgt $u_{14} = 487$ en $u_{15} = 552$.
 Dus vanaf de 16^e term is $u_n > 500$.
- 6** **a** Voer in $y_1 = 3x + \frac{24}{x+2}$.
 De tabel geeft de vijfde term is $u_4 = 16$ en de zevende term is $u_6 = 21$.
b Uit de tabel volgt $u_{16} \approx 49,3$ en $u_{17} \approx 52,3$.
 Dus vanaf de 18^e term is $u_n > 50$.
c Geheel getal als 24 wordt gedeeld door 2, 3, 4, 6, 8, 12 of 24.
 Dat zijn de termen $u_0, u_1, u_2, u_4, u_6, u_{10}$ en u_{22} .
- 7** **a** De GR geeft $u_{10} \approx 34,67$ en $u_{11} \approx 35,64$.
 Dus vanaf de 12^e term is $u_n > 35$.
b Voer in $y_1 = -0,3x^2 + 5x - 10$.
 De tabel geeft $u_2 = -1,2$, $u_3 = 2,3$, $u_{14} = 1,2$ en $u_{15} = -2,5$.
 De termen u_3 tot en met u_{14} zijn positief. Dat zijn 12 termen.

Bladzijde 14

- 8** A Er komt steeds 3 bij.
 B Er komt steeds 20 bij.
 C Eerst +3, dan +5, dan +7, dan...
 D Er gaat steeds 5 af.
 E Er gaat steeds 1 af.
 F Er komt steeds 7 bij.
 Dus rij C heeft een afwijkende regelmaat.

Bladzijde 15

- 9** Bij het doorrekenen op het basisscherm van de GR met [ans] moet je dan heel ver doorgaan en kun je eenvoudig de tel kwijtraken.
- 10** **a** Rij bij lineair verband met $u_0 = 218$ en $v = 5$, dus $u_n = 218 + 5 \cdot n$.
b De 25^e term is $u_{24} = 218 + 5 \cdot 24 = 338$.
c Los op $218 + 5n = 498$
 $5n = 280$
 $n = 56$
Dus de 57^e term is 498.
- 11** **a** Het verschil van twee opeenvolgende termen is steeds hetzelfde getal, namelijk 5.
b $u_0 = 13$ en $v = 5$, dus de recursieve formule is $u_n = u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 13$.
De directe formule is $u_n = 13 + 5 \cdot n$.
c De 38^e term is $u_{37} = 13 + 5 \cdot 37 = 198$.
d Los op $13 + 5n = 650$
 $5n = 637$
 $n = 127,4$
Dus $u_{127} < 650$ en $u_{128} > 650$.
Er zijn 128 termen kleiner dan 650.
- 12** **a** Rij bij lineair verband met $u_0 = 1023$ en $v = -7$, dus de directe formule is
 $u_n = 1023 - 7 \cdot n$.
Los op $1023 - 7n = 246$
 $-7n = -777$
 $n = 111$
Dus de 112^e term is 246.
b Los op $1023 - 7n = 0$
 $-7n = -1023$
 $n \approx 146,1$
Dus $u_{146} > 0$ en $u_{147} < 0$.
De rij heeft 147 positieve termen.
- 13** Stel de rij is $u_n = u_0 + v \cdot n$.
De eerste term is u_0 , de tweede term is $u_0 + v$, de derde term is $u_0 + 2v$, de vierde term is $u_0 + 3v$ en de vijfde term is $u_0 + 4v$.
Er geldt $u_0 + u_0 + 3v = 10$, oftewel $2u_0 + 3v = 10$.
Ook geldt $u_0 + u_0 + v + u_0 + 2v + u_0 + 3v = u_0 + 4v$, oftewel $4u_0 + 6v = u_0 + 4v$, dus $3u_0 + 2v = 0$.
Uit $3u_0 + 2v = 0$ volgt $2v = -3u_0$, dus $v = -1\frac{1}{2}u_0$.
 $v = -1\frac{1}{2}u_0$ invullen bij $2u_0 + 3v = 10$ geeft
 $2u_0 + 3 \cdot -1\frac{1}{2}u_0 = 10$
 $2u_0 - 4\frac{1}{2}u_0 = 10$
 $-2\frac{1}{2}u_0 = 10$
 $u_0 = -4$
 $u_0 = -4$ en $v = -1\frac{1}{2}u_0$ geeft $v = -1\frac{1}{2} \cdot -4 = 6$.
De eerste vijf termen zijn -4, 2, 8, 14 en 20.
- 14** A Steeds keer 2.
B Steeds gedeeld door 2, oftewel keer $\frac{1}{2}$.
C Eerst +2, dan +3, dan +4, dan...
D Steeds keer $1\frac{1}{2}$.
Dus rij C heeft een afwijkende regelmaat.

Bladzijde 17

- 15** **a** Het quotiënt van twee opeenvolgende termen is steeds hetzelfde getal, namelijk 1,2.
b Rij bij exponentieel verband met $u_0 = 1250$ en $r = 1,2$, dus $u_n = 1250 \cdot 1,2^n$.
c De 13^e term is $u_{12} = 1250 \cdot 1,2^{12} \approx 11\,145$.
d Voer in $y_1 = 1250 \cdot 1,2^x$.
 Uit de tabel volgt $x = 13$ geeft $y \approx 13\,374$ en $x = 14$ geeft $y \approx 16\,049$.
 Dus vanaf de 15^e term is $u_n > 15\,000$.

- 16** **a** Rij bij exponentieel verband met $u_0 = 200$ en $r = 0,5$, dus $u_n = 200 \cdot 0,5^n$.
b Rij bij lineair verband met $u_0 = 50$ en $v = 3,5$, dus $u_n = 50 + 3,5 \cdot n$.
c Rij bij exponentieel verband met $u_0 = 14$ en $r = \frac{1}{0,4} = 2,5$, dus $u_n = 14 \cdot 2,5^n$.

- 17** **A** Rij bij lineair verband met $u_0 = 11$ en $v = 7$, dus $u_n = 11 + 7 \cdot n$.
 De tiende term is $u_9 = 11 + 7 \cdot 9 = 74$.
B Rij bij exponentieel verband met $u_0 = 2$ en $r = 2$, dus $u_n = 2 \cdot 2^n$.
 De tiende term is $u_9 = 2 \cdot 2^9 = 1024$.
C Rij bij lineair verband met $u_0 = 238$ en $v = -32$, dus $u_n = 238 - 32 \cdot n$.
 De tiende term is $u_9 = 238 - 32 \cdot 9 = -50$.
D Rij bij exponentieel verband met $u_0 = 121\frac{1}{2}$ en $r = \frac{2}{3}$, dus $u_n = 121\frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3})^n$.
 De tiende term is $u_9 = 121\frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3})^9 \approx 3,16$.

12.2 Notaties en rijen op de GR**Bladzijde 19**

- 18** Ook bij de rij $u_n = u_{n-1} + 3$ met beginterm $u_1 = 12$ horen de termen 12, 15, 18, 21, 24, ...
 Het voordeel van deze notatie is dat de eerste term u_1 is en bijvoorbeeld de tiende term u_{10} .
 Ook is u_2 de tweede term en bijvoorbeeld u_{15} de vijftiende term.

Bladzijde 20

- 19** **a** $u_n = 80 - 5 \cdot (n - 1) = 80 - 5n + 5 = 85 - 5 \cdot n$
b De fictieve term die voorafgaat aan 80 is $80 + 5 = 85$.
c $u_n = 80 \cdot 0,5^{n-1} = 80 \cdot 0,5^n \cdot 0,5^{-1} = 80 \cdot 0,5^n \cdot 2 = 160 \cdot 0,5^n$
d De fictieve term die voorafgaat aan 80 is $\frac{80}{0,5} = 160$.
- 20** **a** Rij bij exponentieel verband met $u_1 = 24$ en $r = 1,25$, dus $u_n = 24 \cdot 1,25^{n-1}$.
b Rij bij lineair verband met $u_1 = 63$ en $v = 7$, dus $u_n = 63 + 7 \cdot (n - 1)$.
c Rij bij lineair verband met $u_1 = 13,5$ en $v = -0,7$, dus $u_n = 13,5 - 0,7 \cdot (n - 1)$.
d Rij bij exponentieel verband met $u_1 = 1024$ en $r = \frac{1}{4}$, dus $u_n = 1024 \cdot (\frac{1}{4})^{n-1}$.
- 21** **a** Rij bij lineair verband met $u_1 = 12,6$ en $v = -0,8$, dus $u_n = 12,6 - 0,8 \cdot (n - 1)$.
b Rij bij exponentieel verband met $u_1 = 36$ en $r = \frac{2}{3}$, dus $u_n = 36 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$.
- 22** **a** $3v = 324 - 12 = 312$, dus $v = \frac{312}{3} = 104$.
b $r^3 = \frac{324}{12} = 27$, dus $r = 27^{\frac{1}{3}} = 3$.

Bladzijde 21

- 23 a** Bij het lineaire verband is dan $u_n = u_1 + 104 \cdot (n - 1)$.
 Met $u_2 = 12$ krijg je $u_1 + 104 \cdot (2 - 1) = 12$

$$u_1 + 104 = 12$$

$$u_1 = -92$$

 Dus $u_n = -92 + 104 \cdot (n - 1)$ en dit is te herleiden.
 Je krijgt $u_n = -92 + 104 \cdot n - 104 = -196 + 104 \cdot n$ en dat is dezelfde directe formule als in de theorie.
 Bij het exponentiële verband is dan $u_n = u_1 \cdot 3^{n-1}$.
 Met $u_2 = 12$ krijg je $u_1 \cdot 3^{2-1} = 12$

$$u_1 \cdot 3 = 12$$

$$u_1 = 4$$

 Dus $u_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ en dit is te herleiden.
 Je krijgt $u_n = 4 \cdot 3^n \cdot 3^{-1} = 4 \cdot 3^n \cdot \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3} \cdot 3^n$ en dat is dezelfde directe formule als in de theorie.

b *

- 24 a** Stel $u_n = u_0 + v \cdot n$.
 $10v = 90 - 130 = -40$, dus $v = -4$.
 $u_n = u_0 - 4 \cdot n$ en $u_5 = 130$ geeft $u_0 - 4 \cdot 5 = 130$, dus $u_0 = 150$.
 De directe formule is $u_n = 150 - 4 \cdot n$.
- b** Stel $u_n = u_0 \cdot r^n$.
 $r^7 = \frac{118098}{54} = 2187$, dus $r = 2187^{\frac{1}{7}} = 3$.
 $u_n = u_0 \cdot 3^n$ en $u_3 = 54$ geeft $u_0 \cdot 3^3 = 54$, dus $u_0 = 2$.
 De directe formule is $u_n = 2 \cdot 3^n$.

Bladzijde 22

- 25 a** $\frac{u_5}{u_3} = \frac{1024}{576}$ zou geven $r = \left(\frac{1024}{576}\right)^{\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{3}$.
 $\frac{u_8}{u_5} = \frac{1696}{1024}$ zou geven $r = \left(\frac{1696}{1024}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1,183$.
 Omdat $1\frac{1}{3} \neq 1,183$ kunnen deze termen niet bij een rij met constante factor horen.
- b** $u_5 - u_3 = 1024 - 576 = 448$ zou geven $v = \frac{448}{2} = 224$.
 $u_8 - u_5 = 1696 - 1024 = 672$ zou geven $v = \frac{672}{3} = 224$.
 Dus deze termen kunnen bij een rij met constant verschil horen.
- 26 a** Stel $u_n = u_0 + v \cdot n$.
 $5v = 16384 - 16 = 16368$, dus $v = 3273,6$.
 $u_n = u_0 + 3273,6 \cdot n$ en $u_3 = 16$ geeft $u_0 + 3273,6 \cdot 3 = 16$, dus $u_0 = -9804,8$.
 De directe formule is $u_n = -9804,8 + 3273,6 \cdot n$.
- b** Stel $u_n = u_0 \cdot r^n$.
 $r^5 = \frac{16384}{16} = 1024$, dus $r = 1024^{\frac{1}{5}} = 4$.
 $u_n = u_0 \cdot 4^n$ en $u_3 = 16$ geeft $u_0 \cdot 4^3 = 16$, dus $u_0 = \frac{1}{4}$.
 De directe formule is $u_n = \frac{1}{4} \cdot 4^n$.
 Dit is te herleiden tot $u_n = 4^{n-1}$.
- 27 a** De formule geeft $u_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = 4$, dus de eerste term is u_1 .
 De tiende term is $u_{10} = 2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 + 5 = 175$.
- b** Voer in $y_1 = 2x^2 - 3x + 5$.
 In de tabel zie je dat bij $x = 15$ hoort 410.
 Dus de 15^e term is 410.

- 28** **a** In beide gevallen krijg je de rij 100, 115, 130, 145, ...
b Vervang in de formule n door $n + 1$.
 Je krijgt $u_{n+1} = 100 + 15 \cdot (n + 1 - 1)$, dus $u_{n+1} = 100 + 15 \cdot n$.

Bladzijde 23

- 29** **a** $A_n = A_{n-1} + 15$ met $A_1 = 100$
b $A(n) = A(n-1) + 15$ met $A(1) = 100$
c $A_{n+1} = A_n + 15$ met $A_1 = 100$
- 30** **a** $u(n+1) = u(n) + 2 \cdot (n+1)$ met $u(0) = 32$
b $u_{n+1} = 3 \cdot 4^n$ met $u_0 = 8$
- 31** **a** $u(n+1) = u(n) + 5 \cdot (n+1)$ met $u(0) = 100$
b $a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3$ met $a_0 = 12$
- 32** **a** Het aantal glazen in de bovenste laag is $D_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$.
b $D_{20} = \frac{1}{2} \cdot 20^2 + \frac{1}{2} \cdot 20 = 210$ en $D_{21} = \frac{1}{2} \cdot 21^2 + \frac{1}{2} \cdot 21 = 231$, dus de 21^e laag bevat
 $231 - 210 = 21$ glazen meer dan de 20^e laag.
c Een toren van 40 lagen bestaat uit $P_{40} = \frac{1}{6} \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 = 11\,480$ glazen.
d Voer in $y_1 = \frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$ en maak een tabel.
 Uit de tabel volgt $P_{68} = 54\,740$, dus de toren bestond uit 68 lagen.
 De onderste laag bestond uit $D_{68} = \frac{1}{2} \cdot 68^2 + \frac{1}{2} \cdot 68 = 2346$ glazen.
e $P_{69} = \frac{1}{2} \cdot 69 \cdot 70 \cdot 71 = 57\,155$, dus er zijn $57\,155 - 54\,740 = 2415$ extra glazen nodig.

Bladzijde 24

- 33** **a** De GR geeft de achtste term is $u_7 \approx 42,2$.
b $u_{13} \approx 397$ en $u_{14} \approx 592$
 Dus de 15^e term is de eerste term die groter is dan 500.

Bladzijde 25

- 34** **a** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $L(7) \approx 1994$, $L(8) \approx 2114$, $L(11) \approx 2448$ en $L(12) \approx 2549$.
 Dus voor $n = 8$, $n = 9$, $n = 10$ en $n = 11$ ligt $L(n)$ tussen 2000 en 2500.
b $L(16) \approx 2918$ en $L(17) \approx 3002$
 Dus vanaf $n = 17$ is $L(n) > 3000$.
- 35** **a** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $P_9 \approx 996$, $P_{10} \approx 1145$, $P_{11} \approx 1331$ en $P_{12} \approx 1564$.
 Dus voor $n = 10$ en $n = 11$ ligt P_n tussen 1000 en 1500.
b $P_{18} \approx 4841$ en $P_{19} \approx 5951$
 Dus vanaf $n = 19$ is $P_n > 5000$.
- 36** **a** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $G(11) \approx -13$ als eerste negatieve term.
 Dus de elfde term is de eerste die negatief is.
b De tabel geeft de volgende termen tussen 500 en 700:
 $G(12) \approx 514$, $G(14) \approx 547$, $G(16) \approx 585$, $G(18) \approx 627$ en $G(20) \approx 675$.
 Dus er liggen vijf termen tussen 500 en 700.
- 37** **a** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tiende term is $u_9 \approx 797,75$.
b $u_{15} \approx 9562$ en $u_{16} \approx 14\,374$
 Dus vanaf de 17^e term is $u_n > 10\,000$.

- 38 a** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
In de tabel is te zien dat $H_8 \approx 274$ het dichtst bij 275 ligt. Dus de achtste term ligt het dichtst bij 275.
- b** $H_{17} \approx 968$ en $H_{18} \approx 1114$
Er zijn 17 termen kleiner dan 1000.
- c** $H_{20} - H_{19} \approx 1473 - 1281 = 192$
 $H_{21} - H_{20} \approx 1694 - 1473 = 221$
Dus voor $k = 21$ is $H_k - H_{k-1}$ voor het eerst groter dan 200.

Bladzijde 26

- 39 a** $A_1 = 10$ geeft $A_2 = 10 - 2 = 8$
 $A_2 = 8$ geeft $A_3 = 8 - 3 = 5$
 $A_3 = 5$ geeft $A_4 = 5 - 4 = 1$
Dit klopt met de toren in de figuur.
- b** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $A_{13} = 10$ en $A_{14} = -4$.
Deze toren bestaat uit 13 lagen en de bovenste laag van deze toren heeft 10 kubussen.
- c** Probeer $A_1 = 200$. Dit geeft $A_{19} = 11$ en $A_{20} = -9$.
Probeer $A_1 = 210$. Dit geeft $A_{20} = 1$ en $A_{21} = -20$.
Probeer $A_1 = 209$. Dit geeft $A_{20} = 0$ en $A_{21} = -21$.
Dus A_1 is minstens 210.
Probeer $A_1 = 230$. Dit geeft $A_{20} = 21$ en $A_{21} = 0$.
Probeer $A_1 = 231$. Dit geeft $A_{20} = 22$ en $A_{21} = 1$.
Dus A_1 is hoogstens 230.
Joop moet A_1 zo kiezen dat geldt $210 \leq A_1 \leq 230$.

- 40 a** De rij $A(n)$ heeft beginterm $A(1) = 6$ en verschil $v = 6$,
dus de directe formule is $A(n) = 6 + 6(n - 1) = 6 + 6n - 6 = 6n$
en de recursieve formule is $A(n) = A(n - 1) + 6$ met $A(1) = 6$.
- b** Los op $6n = 240$
 $n = 40$
De 40^e ring bevat 240 zeshoeken.
In de even ringen zitten blauwe zeshoeken, dus ook in de 40^e ring zijn de zeshoeken blauw.
- c** De rij $B(p)$ heeft beginterm $B(1) = 12$ en verschil $v = 12$,
dus de directe formule is $B(p) = 12 + 12(p - 1) = 12 + 12p - 12 = 12p$
en de recursieve formule is $B(p) = B(p - 1) + 12$ met $B(1) = 12$.
- d** De rij $G(q)$ heeft beginterm $G(1) = 6$ en verschil $v = 12$,
dus de directe formule is $G(q) = 6 + 12(q - 1) = 6 + 12q - 12 = 12q - 6$
en de recursieve formule is $G(q) = G(q - 1) + 12$ met $G(1) = 6$.

12.3 Rijen en meetkundige figuren

Bladzijde 28

- 41 a** Achtereenvolgens 1, 4, 9 en 16.
- b** $K_n = n^2$
- c** De verschillen zijn 3, 5 en 7.
Er komt steeds 2 bij, dus bij de verschillen hoort een lineair verband.

Bladzijde 29

- 42 a** Het twaalfde driehoeksgetal is $D_{12} = \frac{1}{2} \cdot 12^2 + \frac{1}{2} \cdot 12 = 78$.
- b** Voer in $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ en maak een tabel.
Uit de tabel volgt dat $D_{25} = 325$, dus het 25^e driehoeksgetal is 325.
- c** $D_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{2}(n-1)$
 $= \frac{1}{2}(n^2 - 2n + 1) + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2}n^2 - n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
 $D_n - D_{n-1} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\right) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = n$
Dus $D_n = D_{n-1} + n$ met $D_1 = 1$.

43 In figuur 12.5 is te zien dat $2 \cdot D_3 = 4 \cdot 3$.

En zo is $2 \cdot D_4 = 5 \cdot 4$.

Algemeen is $2 \cdot D_n = (n+1) \cdot n$.

Dus $D_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

44 a Uit de figuur volgt $R_1 = 2 \cdot 1$, $R_2 = 3 \cdot 2$ en $R_3 = 4 \cdot 3$.

Algemeen is $R_n = (n+1) \cdot n$, oftewel $R_n = n^2 + n$.

b Voer in $y = x^2 + x$ en maak een tabel.

Uit de tabel volgt dat $R_{12} = 156$, dus het 12^e rechthoeksgetal is 156.

c $R_{n-1} = (n-1)^2 + n - 1 = n^2 - 2n + 1 + n - 1 = n^2 - n$

$R_n - R_{n-1} = n^2 + n - (n^2 - n) = n^2 + n - n^2 + n = 2n$

Dus $R_n = R_{n-1} + 2n$ met $R_1 = 2$.

45 $V_{n-1} = 1\frac{1}{2}(n-1)^2 - \frac{1}{2}(n-1)$

$$= 1\frac{1}{2}(n^2 - 2n + 1) - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$$

$$= 1\frac{1}{2}n^2 - 3n + 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$$

$$= 1\frac{1}{2}n^2 - 3\frac{1}{2}n + 2$$

$$V_n - V_{n-1} = 1\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - (1\frac{1}{2}n^2 - 3\frac{1}{2}n + 2) = 1\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1\frac{1}{2}n^2 + 3\frac{1}{2}n - 2 = 3n - 2$$

Dus $V_n = V_{n-1} + 3n - 2$ met $V_1 = 1$.

Bladzijde 30

46 a De zijde van vierkant 11 is $z(11) = \frac{1}{2} \cdot 11 + \frac{1}{2} = 6$.

b Los op $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} = 10$

$$\frac{1}{2}n = 9\frac{1}{2}$$

$$n = 19$$

Vierkant 19 heeft zijde 10.

c Voer in $y_1 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

Uit de tabel volgt $O(21) = 121$, $O(22) = 132,25$, $O(23) = 144$ en $O(24) = 156,25$.

Van de vierkanten 22 en 23 ligt de oppervlakte tussen 125 en 150.

d $O(n-1) = \frac{1}{4}(n-1)^2 + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{4}$

$$= \frac{1}{4}(n^2 - 2n + 1) + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}n^2$$

$$O(n) - O(n-1) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$$

De recursieve formule is $O(n) = O(n-1) + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$ met $O(1) = 1$.

Bladzijde 32

47 a De vergrotingsfactor $k = 1\frac{1}{2}$ en de omtrek is een afmeting, dus ook de omtrek wordt met $1\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd.

b De oppervlakte O van een vierkant is gelijk aan de zijde Z in het kwadraat.

c $O_n = (Z_n)^2 = \left(\left(1\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2 = 1\frac{1}{2}^{2n-2} = \left(1\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^n = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^n = \frac{4}{9} \cdot \left(2\frac{1}{4}\right)^n$

48 a Zowel de korte als de lange zijde wordt steeds 0,5 langer.

Rechthoek 5 heeft dus lange zijde $3 + 0,5 = 3,5$ en korte zijde $2,5 + 0,5 = 3$.

b recursieve formule $L_n = L_{n-1} + 0,5$ met $L_1 = 1,5$

directe formule $L_n = 1,5 + 0,5 \cdot (n-1) = 1,5 + 0,5n - 0,5 = 0,5n + 1$

recursieve formule $K_n = K_{n-1} + 0,5$ met $K_1 = 1$

directe formule $K_n = 1 + 0,5 \cdot (n-1) = 1 + 0,5n - 0,5 = 0,5n + 0,5$

c Er geldt $P_1 = 5$, $P_2 = 7$, $P_3 = 9$ en $P_4 = 11$, dus de recursieve formule is

$P_n = P_{n-1} + 2$ met $P_1 = 5$.

directe formule $P_n = 5 + 2 \cdot (n-1) = 5 + 2n - 2 = 2n + 3$

d Los op $2n + 3 > 50$

$$2n > 47$$

$$n > 23,5$$

Dus vanaf $n = 24$ is $P_n > 50$.

e $O_n = L_n \cdot K_n = (0,5n + 1)(0,5n + 0,5) = 0,25n^2 + 0,25n + 0,5n + 0,5 = 0,25n^2 + 0,75n + 0,5$

f Voer in $y_1 = 0,25x^2 + 0,75x + 0,5$.

Uit de tabel volgt $O_{18} = 95$ en $O_{19} = 105$.

Dus vanaf $n = 19$ is $O_n > 100$.

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \quad O_{n-1} &= 0,25(n-1)^2 + 0,75(n-1) + 0,5 \\ &= 0,25(n^2 - 2n + 1) + 0,75n - 0,75 + 0,5 \\ &= 0,25n^2 - 0,5n + 0,25 + 0,75n - 0,25 \\ &= 0,25n^2 + 0,25n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_n - O_{n-1} &= 0,25n^2 + 0,75n + 0,5 - (0,25n^2 + 0,25n) \\ &= 0,5n + 0,5 \end{aligned}$$

Dus $O_n = O_{n-1} + 0,5n + 0,5$ met $O_1 = 1,5$.

$$\mathbf{h} \quad O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 1,5 + 3 + 5 + 7,5 = 17$$

Bladzijde 33

49 a Zowel de korte als de lange zijde wordt met $1\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd.

Driehoek 4 heeft dus lange zijde $9 \cdot 1\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2}$ en korte zijde $6\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{2} = 10\frac{1}{8}$.

b recursieve formule $L(n) = 1\frac{1}{2} \cdot L(n-1)$ met $L(1) = 4$

$$\text{directe formule } L(n) = 4 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

recursieve formule $K(n) = 1\frac{1}{2} \cdot K(n-1)$ met $K(1) = 3$

$$\text{directe formule } K(n) = 3 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

c Lengte zijden keer $1\frac{1}{2}$, dus omtrek ook keer $1\frac{1}{2}$.

De omtrek van driehoek 1 is $3 + 4 + 5 = 12$.

De recursieve formule is $P(n) = 1\frac{1}{2} \cdot P(n-1)$ met $P(1) = 12$.

De directe formule is $P(n) = 12 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 12 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{-1} = 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^n = 8 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^n$.

d Voer in $y_1 = 8 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^x$.

Uit de tabel volgt $P(11) \approx 692$ en $P(12) \approx 1038$.

Dus vanaf $n = 12$ is $P(n) > 1000$.

e Lengte zijden keer $1\frac{1}{2}$, dus oppervlakte keer $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$.

De oppervlakte van driehoek 1 is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

De directe formule is dus

$$O(n) = 6 \cdot \left(2\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 6 \cdot \left(2\frac{1}{4}\right)^n \cdot \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1} = 6 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(2\frac{1}{4}\right)^n = 2\frac{2}{3} \cdot \left(2\frac{1}{4}\right)^n$$

f Voer in $y_1 = 2\frac{2}{3} \cdot \left(2\frac{1}{4}\right)^x$.

Uit de tabel volgt $O(7) \approx 778$ en $O(8) \approx 1752$.

Dus vanaf $n = 8$ is $O(n) > 1000$.

$$\mathbf{g} \quad O(4) + O(5) + O(6) = 68,34... + 153,77... + 345,99... \approx 568,11$$

Bladzijde 34

50 a B_n is een rij bij een lineair verband met $B_1 = 7$ en $v = 2$, dus

$$B_n = 7 + 2 \cdot (n-1) = 7 + 2n - 2 = 2n + 5$$

L_n is een rij bij een lineair verband met $L_1 = 8$ en $v = 3$, dus

$$L_n = 8 + 3 \cdot (n-1) = 7 + 3n - 3 = 3n + 5$$

$$\text{Dus } u_n = \frac{B_n}{L_n} = \frac{2n+5}{3n+5}$$

$$\mathbf{b} \quad L_n - B_n = (3n+5) - (2n+5) = 3n+5-2n-5 = n$$

c $L_n = p \cdot B_n$ geeft $p = \frac{L_n}{B_n}$

$n = 100$ geeft $p = \frac{305}{205} = 1,48\dots$

$n = 1000$ geeft $p = \frac{3005}{2005} = 1,49\dots$

Dus $p = 1,5$.

d De oppervlakte van de n^e rechthoek is $O_n = L_n \cdot B_n = (3n + 5)(2n + 5)$.

Voer in $y_1 = (3x + 5)(2x + 5)$ en maak een tabel.

Uit de tabel volgt $O_{10} = 875$ en $O_{11} = 1026$.

Dus vanaf $n = 11$ is de oppervlakte van de rechthoek meer dan 1000.

51 a recursieve formule $Z_n = 0,8 \cdot Z_{n-1}$ met $Z_1 = 4$ cm
directe formule $Z_n = 4 \cdot 0,8^{n-1} = 4 \cdot 0,8^n \cdot 0,8^{-1} = 5 \cdot 0,8^n$

b Voer in $y_1 = 5 \cdot 0,8^x$.

Uit de tabel volgt $Z_7 \approx 1,05$ en $Z_8 \approx 0,84$.

Dus vanaf $n = 8$ is $Z_n < 1$ cm.

c Lengte zijden keer 0,8, dus de oppervlakte keer $0,8^2 = 0,64$.

De oppervlakte van vierkant 1 is $4^2 = 16$.

De recursieve formule is dus $O_n = 0,64 \cdot O_{n-1}$ met $O_1 = 16$.

d De directe formule is $O_n = 16 \cdot 0,64^{n-1} = 16 \cdot 0,64^n \cdot 0,64^{-1} = 16 \cdot 1,5625 \cdot 0,64^n = 25 \cdot 0,64^n$.

Dus $a = 25$ en $b = 0,64$.

e Voer in $y_1 = 25 \cdot 0,64^x$.

Uit de tabel volgt $O_{12} \approx 0,12$ en $O_{13} \approx 0,08$.

Dus vanaf $n = 13$ is $O_n < 0,1$ cm².

f $O_1 + O_2 + O_3 + O_4 + O_5 = 16 + 10,24 + 6,55\dots + 4,19\dots + 2,68\dots \approx 39,67$

Bladzijde 35

52 a $P(1) = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 9 = 30$, dus $P(n) = 30 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

b Voer in $y_1 = 30 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$ en maak een tabel.

Uit de tabel volgt $P(19) \approx 1,13$ en $P(20) \approx 0,94$.

Dus vanaf $n = 20$ is $P(n) < 1$ cm.

c $O(1) = 54$, dus $O(n) = 54 \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^{n-1}$.

$$O(n) = 54 \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} = 54 \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^n \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^{-1} = 77,76 \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^n$$

Dus $a = 77,76$ en $b = \frac{25}{36}$.

d Voer in $y_1 = 77,76 \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^x$ en maak een tabel.

Uit de tabel volgt $O(18) \approx 0,11$ en $O(19) \approx 0,08$.

Dus vanaf $n = 19$ is $O(n) < 0,1$ cm².

53 a De stelling van Pythagoras in driehoek APS geeft $PS^2 = AP^2 + AS^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, dus $PS = 5$ cm.
 PS is dus $\frac{5}{7} \cdot AB$. De constante factor is $\frac{5}{7}$.

b De omtrek van vierkant 1 is $4 \cdot 7 = 28$ cm.

De directe formule is dus $P(n) = 28 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}$.

Voer in $y_1 = 28 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{x-1}$.

Uit de tabel volgt $P(10) \approx 1,36$ en $P(11) \approx 0,97$.

Dus vanaf $n = 11$ is $P(n) < 1$ cm.

c Lengte zijde keer $\frac{5}{7}$, dus oppervlakte keer $\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$.

De oppervlakte van vierkant 1 is $7^2 = 49$.

De recursieve formule is $O(n) = \frac{25}{49} \cdot O(n-1)$ met $O(1) = 49$.

De directe formule is $O(n) = 49 \cdot \left(\frac{25}{49}\right)^{n-1}$.

d Voer in $y_1 = 49 \cdot \left(\frac{25}{49}\right)^{x-1}$.

Uit de tabel volgt $O(13) \approx 0,015$ en $O(14) \approx 0,008$.

Dus vanaf $n = 14$ is $O(n) < 0,01$ cm².

Bladzijde 36

- 54 a** $b_1 = 2 \cdot 1 + 2 = 4$ en $h_1 = 6 + (-1)^1 = 6 - 1 = 5$, dus $O_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$.
 $b_3 = 2 \cdot 3 + 2 = 8$ en $h_3 = 6 + (-1)^3 = 6 - 1 = 5$, dus $O_3 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$.
 $b_5 = 2 \cdot 5 + 2 = 12$ en $h_5 = 6 + (-1)^5 = 6 - 1 = 5$, dus $O_5 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$.
 Je hebt te maken met een rij bij een lineair verband waarbij $O_1 = 10$ en $v = 10$.

- b** $b_2 = 2 \cdot 2 + 2 = 6$ en $h_2 = 6 + (-1)^2 = 6 + 1 = 7$, dus $O_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 21$.
 $b_4 = 2 \cdot 4 + 2 = 10$ en $h_4 = 6 + (-1)^4 = 6 + 1 = 7$, dus $O_4 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 = 35$.
 $b_6 = 2 \cdot 6 + 2 = 14$ en $h_6 = 6 + (-1)^6 = 6 + 1 = 7$, dus $O_6 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 7 = 49$.
 Je hebt te maken met een rij bij een lineair verband waarbij $O_2 = 21$ en $v = 14$.

- c** De oppervlakte van de n^e driehoek is $O_n = \frac{1}{2}(2n + 2)(6 + (-1)^n)$.

Voer in $y_1 = \frac{1}{2}(2x + 2)(6 + (-1)^x)$ en maak een tabel.

De tabel geeft $O_{24} = 175$, dus van de 24^e driehoek is de oppervlakte 175.

- d** $O_{n+1} = \frac{1}{2}(2(n + 1) + 2)(6 + (-1)^{n+1})$

Voer in $y_1 = \frac{1}{2}(2(x + 1) + 2)(6 + (-1)^{x+1}) - \frac{1}{2}(2x + 2)(6 + (-1)^x)$ en maak een tabel.

De tabel geeft $O_{13} = 35$, dus $n = 13$.

- 55 a** $r^4 = \frac{1,5}{6} = \frac{1}{4}$, dus $r = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0,7071$.

- b** De ribbe van de n^e kubus is $R(n) = 6 \cdot 0,7071^{n-1}$.

De hoogte van de stapel is

$$R(1) + R(2) + R(3) + R(4) + R(5) + R(6) = 6 + 4,2426 + 3 + 2,1213 + 1,5 + 1,0508 \approx 16,9 \text{ cm.}$$

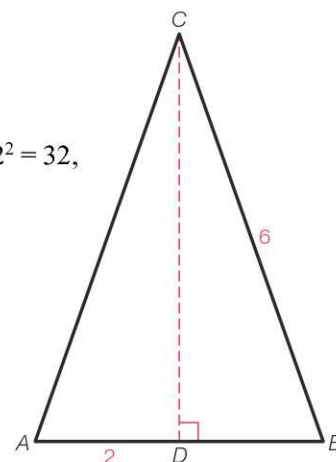
Diagnostische toets**Bladzijde 40**

- 1 a** Voer in $y_1 = x^2 + 0,5x + 5$.
 De tabel geeft de vijfde term is $u_4 = 23$ en de tiende term is $u_9 = 90,5$.
b $u_6 \approx 19,87$ en $u_7 \approx 24,65$
 Dus vanaf de achtste term is $u_n > 20$.
- 2 a** $u_0 = 3125$ en $v = -625$, dus de recursieve formule is $u_n = u_{n-1} - 625$ met $u_0 = 3125$.
 De directe formule is $u_n = 3125 - 625 \cdot n$.
b $u_n = 0$ geeft $3125 - 625n = 0$
 $-625n = -3125$
 $n = 5$
 Dus de rij heeft vijf positieve termen.
- 3 a** $u_0 = 2$ en $r = 1,3$, dus de recursieve formule is $u_n = 1,3 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 2$.
 De directe formule is $u_n = 2 \cdot 1,3^n$.
b De achtste term van de rij is $u_7 = 2 \cdot 1,3^7 \approx 12,55$.
- 4 a** Stel $w_n = w_1 + v \cdot (n - 1)$.
 $3v = 324 - 12 = 312$, dus $v = \frac{312}{3} = 104$.
 $w_n = w_1 + 104 \cdot (n - 1)$ en $w_4 = 12$ geeft $w_1 + 104 \cdot 3 = 12$, dus $w_1 = -300$.
 De directe formule is $w_n = -300 + 104 \cdot (n - 1)$, oftewel $w_n = -404 + 104 \cdot n$.
b Stel $w_n = w_0 \cdot r^n$.
 $r^3 = \frac{324}{12} = 27$, dus $r = 27^{\frac{1}{3}} = 3$.
 $w_n = w_0 \cdot 3^n$ en $w_4 = 12$ geeft $w_0 \cdot 3^4 = 12$, dus $w_0 = \frac{4}{27}$.
 De directe formule is $w_n = \frac{4}{27} \cdot 3^n$.

- 5 a** $u_{n+1} = u_n - 7 \cdot (n+1)$ met $u_0 = 12$
b $w(n) = 3 \cdot w(n-1) + 6$ met $w(1) = 10$
- 6 a** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft de vierde term is $A_3 = 10,125$.
b De tabel geeft $A_{10} \approx 29,35$, $A_{11} \approx 33,01$, $A_{15} \approx 48,32$ en $A_{16} \approx 52,24$.
 Dus A_n ligt tussen 30 en 50 voor $n = 11$ tot en met 15.

Bladzijde 41

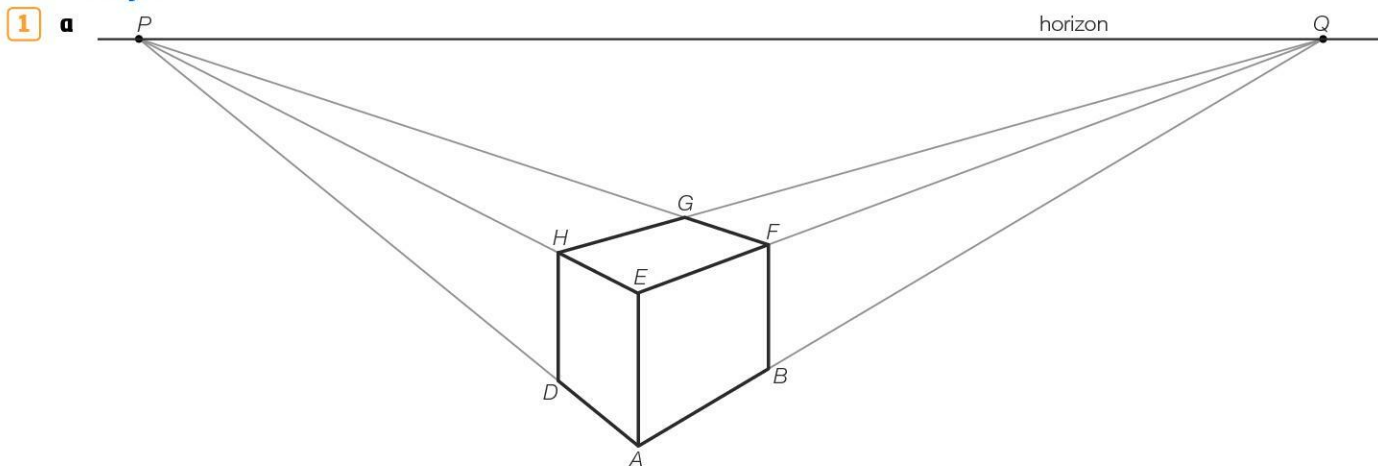
- 7 a** $K_{32} = (2 \cdot 32 - 1)^2 = 3969$ en $T_{32} = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 65 \cdot 63 = 43\,680$
 De toren bestaat uit 43 680 kratten en er zitten 3969 kratten in de onderste laag.
b Los op $\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1) = 105\,995$.
 Voer in $y_1 = \frac{1}{3}x(2x+1)(2x-1)$ en maak een tabel.
 De tabel geeft $T_{43} = 105\,995$, dus de stapel heeft 43 lagen.
 De hoogte was $43 \cdot 0,25 = 10,75$ meter.
 $K_{43} = (2 \cdot 43 - 1)^2 = 7225$, dus in de onderste laag zitten 7225 kratten.
 Van één krat is het grondvlak $0,4 \cdot 0,3 = 0,12 \text{ m}^2$.
 Dus het grondvlak van het bouwwerk was $7225 \cdot 0,12 = 867 \text{ m}^2$.
- 8** $V(n-1) = 2(n-1)^2 - 2(n-1) + 1 = 2(n^2 - 2n + 1) - 2n + 2 + 1 = 2n^2 - 4n + 2 - 2n + 3 = 2n^2 - 6n + 5$
 $V(n) - V(n-1) = 2n^2 - 2n + 1 - (2n^2 - 6n + 5) = 2n^2 - 2n + 1 - 2n^2 + 6n - 5 = 4n - 4$
 Dus $V(n) = V(n-1) + 4n - 4$ met $V(1) = 1$.
- 9 a** De lengte van de zijden wordt steeds met 1,5 vermenigvuldigd.
 recursieve formule $K(n) = 1,5 \cdot K(n-1)$ met $K(1) = 4$
 directe formule $K(n) = 4 \cdot 1,5^{n-1}$
b De gelijkbenige driehoek opdelen in twee rechthoekige driehoeken en
 gebruiken van de stelling van Pythagoras in driehoek ADC geeft $CD^2 = 6^2 - 2^2 = 32$,
 dus $CD = \sqrt{32} = 5,65\dots$
 De oppervlakte van driehoek 1 is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5,65\dots \approx 11,3137$.
c Lengte zijde keer 1,5, dus oppervlakte keer $1,5^2 = 2,25$.
 De directe formule is dus $O(n) = 11,3137 \cdot 2,25^{n-1}$.
d $O(1) + O(2) + O(3) + O(4) = 11,3137 + 25,45\dots + 57,27\dots + 128,87\dots \approx 222,9$



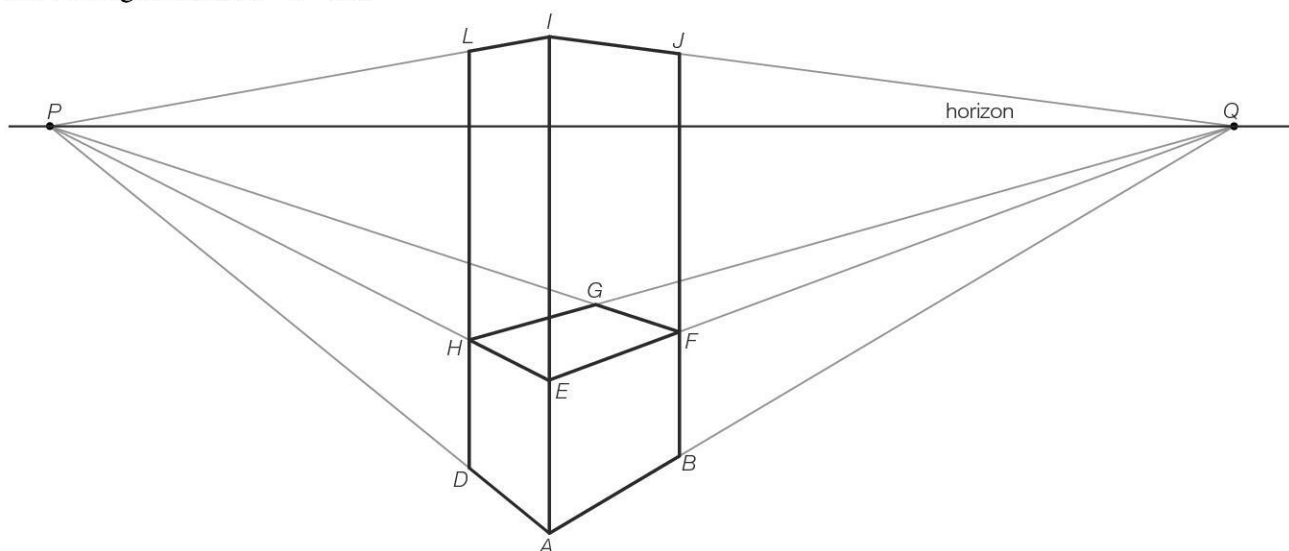
13 Meetkunde toepassen

Voorkennis Perspectief

Bladzijde 46



b AE verlengen zodat $EI = 2 \cdot AE$.



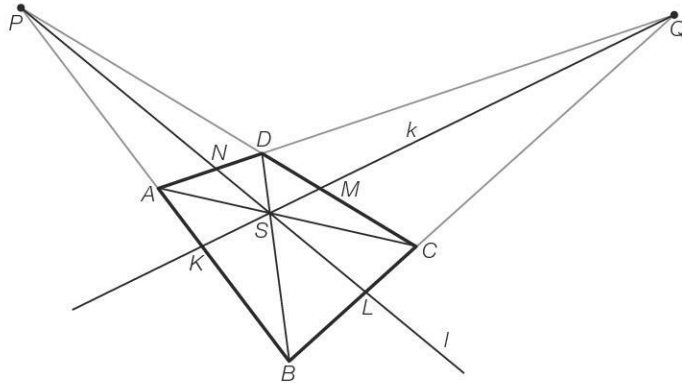
Opmeten geeft $OP = 7,0$ cm en $PQ = 3,3$ cm.

Het dak op deze hoek heeft een hoogte van $\frac{7,0}{3,3} \cdot 5,4 \approx 11,5$ m.

13.1 Halveren en verdubbelen in perspectief

Bladzijde 47

1 a, b

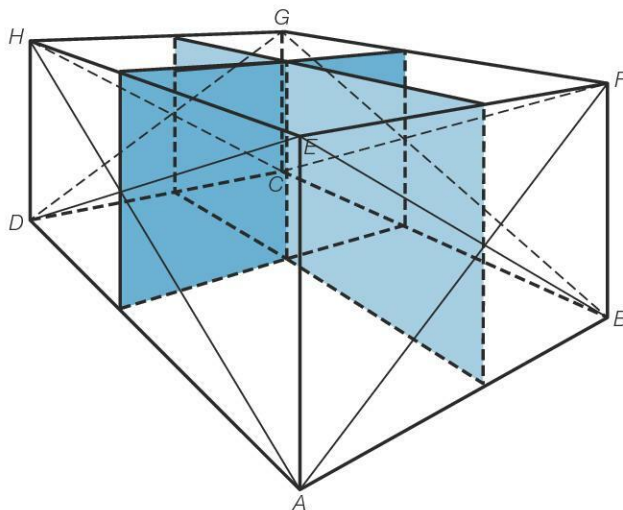


Bladzijde 49

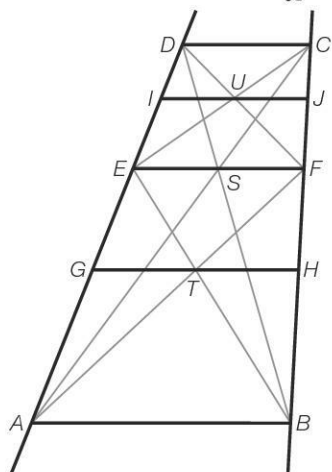
2 De twee diagonalen snijden op de plek van het hoofd. Het hoofd staat dus in het midden van het schilderij afgebeeld.



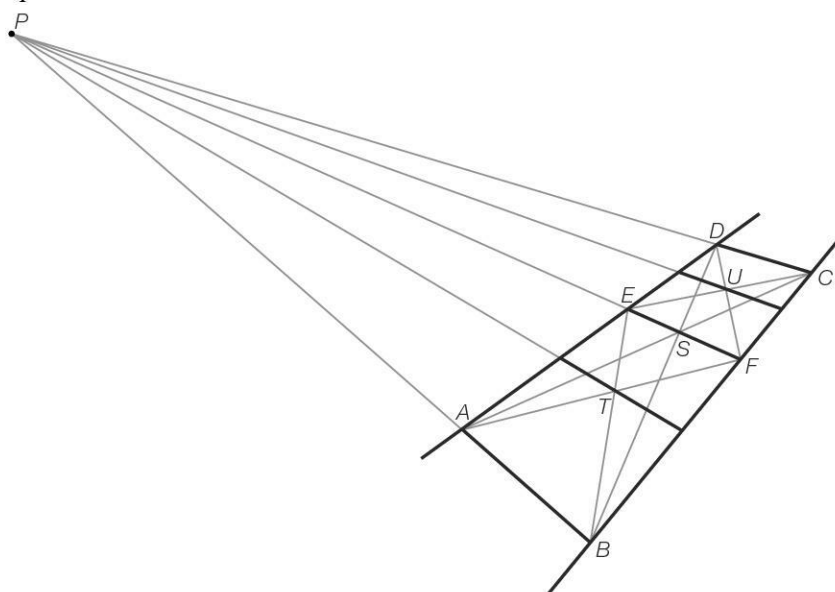
- 3
- de snijpunten van de diagonalen van de vier zijvlakken geven de middens van de zijvlakken
 - verticale lijnstukken door deze middens
 - afmaken van de vlakken



- 4 a**
- rechthoek $ABCD$ met snijpunt S van diagonalen geeft sport EF
 - rechthoek $ABFE$ met snijpunt T van diagonalen geeft sport GH
 - rechthoek $EFCD$ met snijpunt U van diagonalen geeft sport IJ

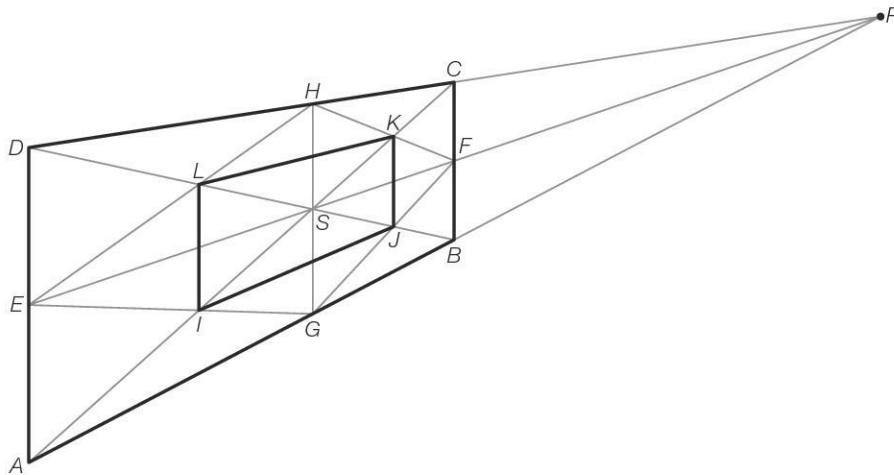


- b**
- verdwijnpunt P
 - rechthoek $ABCD$ met snijpunt S van diagonalen
 - sport door P en S
 - rechthoek $ABFE$ met snijpunt T van diagonalen
 - sport door P en T
 - rechthoek $EFCD$ met snijpunt U van diagonalen
 - sport door P en U

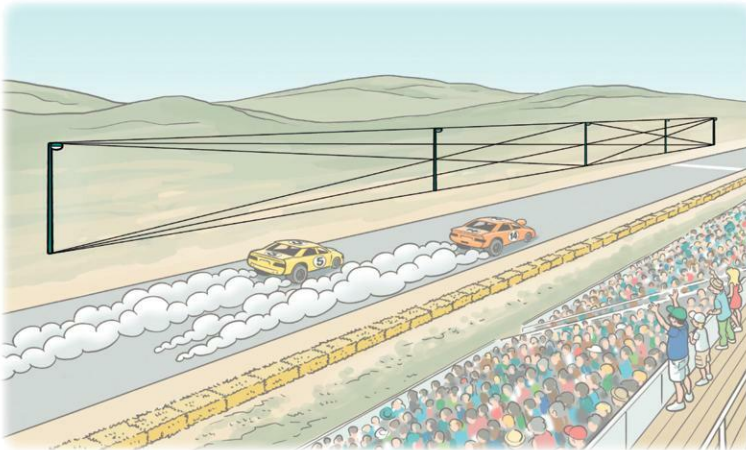


Bladzijde 50

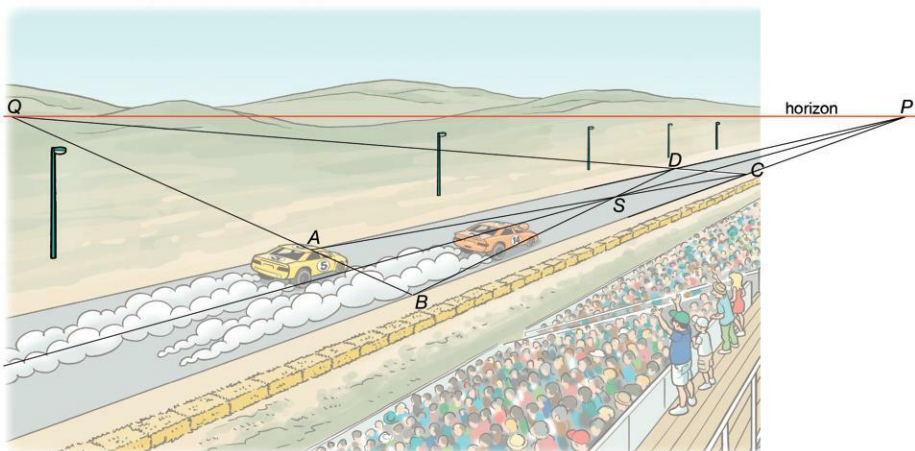
- 5**
- verdwijnpunt P
 - rechthoek $ABCD$ met snijpunt S van diagonalen
 - lijn door P en S geeft middens E en F
 - lijn door S evenwijdig met AD geeft middens G en H
 - diagonalen in ontstane rechthoeken geven het schilderij $IJKL$



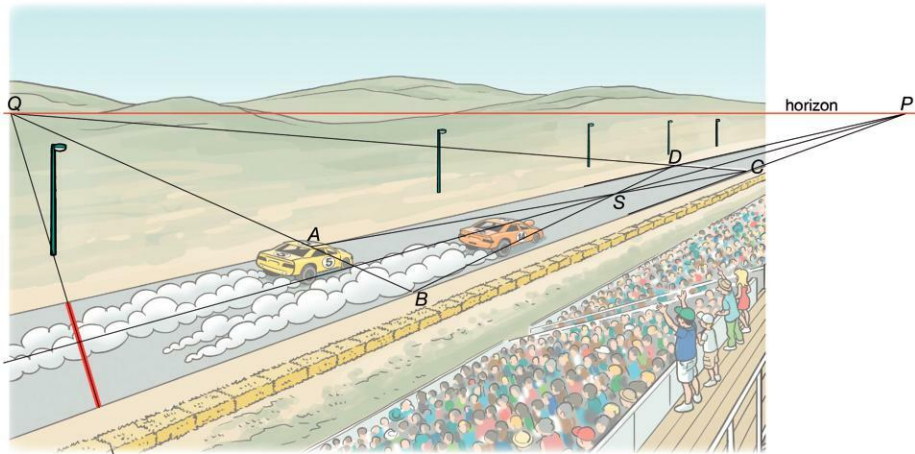
- 6 a** Teken eerst de middelste van de drie lantaarnpalen.



- b**
- verdwijnpunt P en de horizon
 - lijn door finishlijn geeft Q op de horizon
 - rechthoek $ABCD$ met snijpunt S van diagonalen
 - middenstreep door P en S

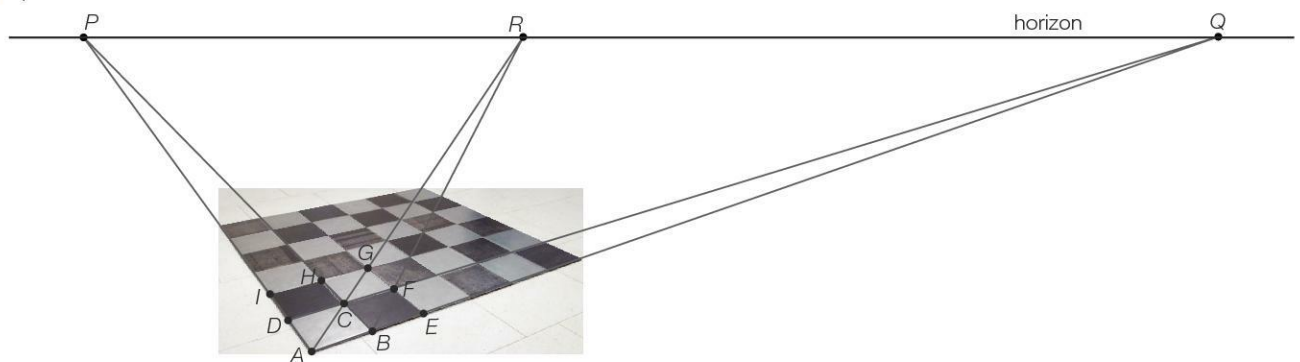


- c • lijn door Q en onderkant linker lichtmast geeft startstreep



Bladzijde 51

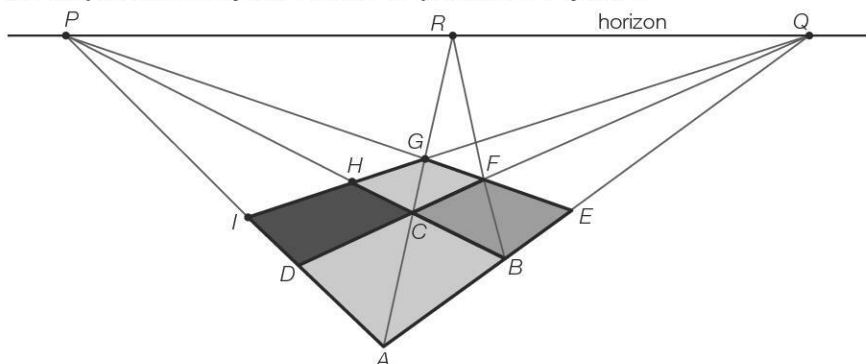
7 a, b



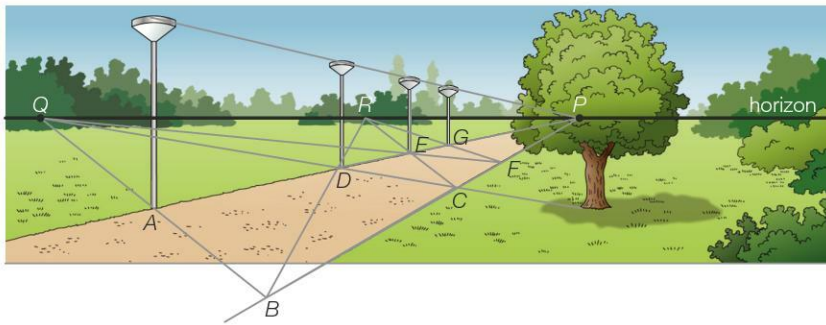
Bladzijde 52

8 AC en BF hebben hetzelfde verdwijnpunt, omdat dit evenwijdige lijnen zijn.

- 9 • PE snijden met AR geeft G
 • QG snijden met PA geeft I en QG snijden met PB geeft H

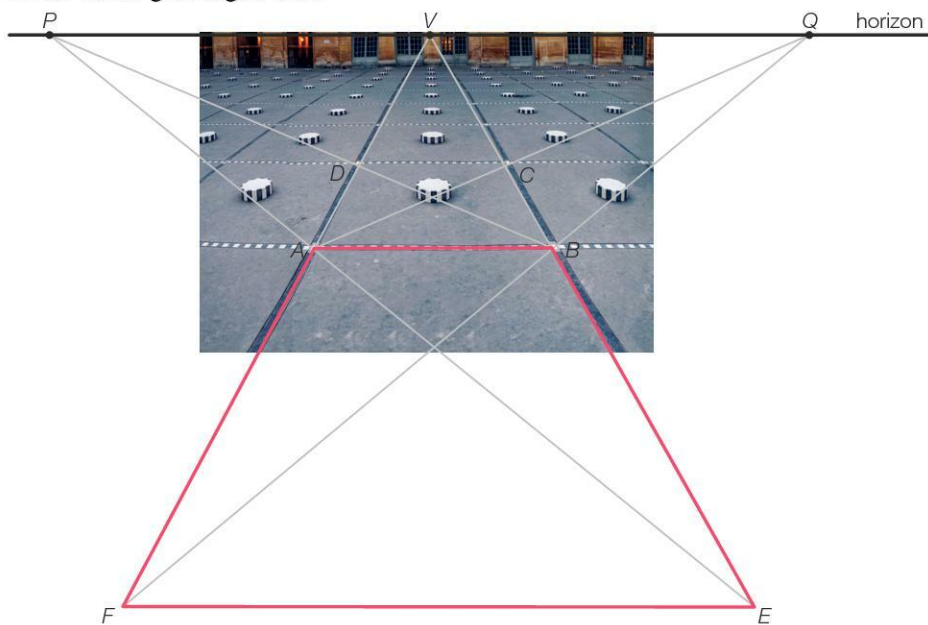


- 10 • verdwijnpunt P en de horizon
 • lijn van onderkant boom door onderkant rechter lantaarnpaal geeft Q op de horizon
 • lijn door Q en onderkant linker lantaarnpaal geeft rechthoek $ABCD$
 • lijn door B en D geeft R op de horizon
 • PA snijden met RC geeft onderkant E van derde lantaarnpaal
 • PB snijden met QE geeft F
 • PA snijden met RF geeft onderkant G van vierde lantaarnpaal
 • lijn door P en bovenkant eerste lantaarnpaal geeft hoogte van derde en vierde lantaarnpaal

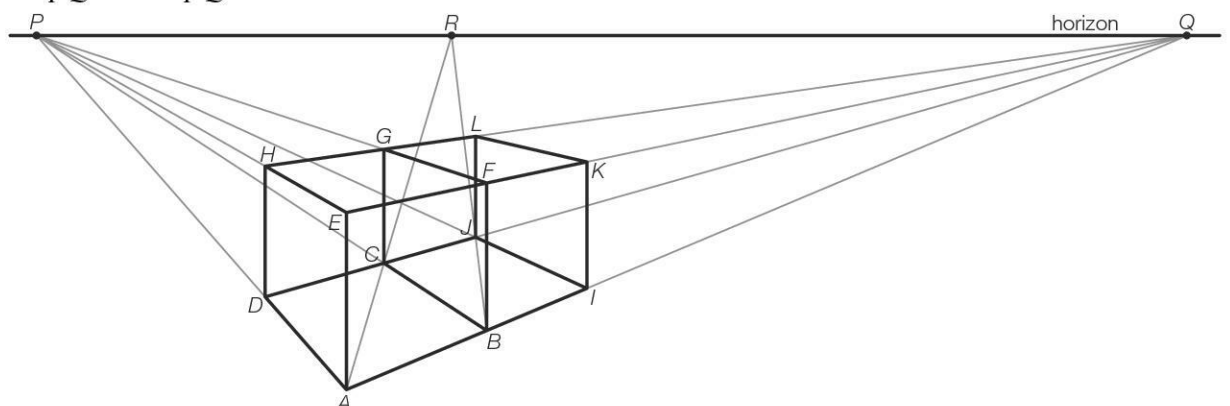


Bladzijde 53

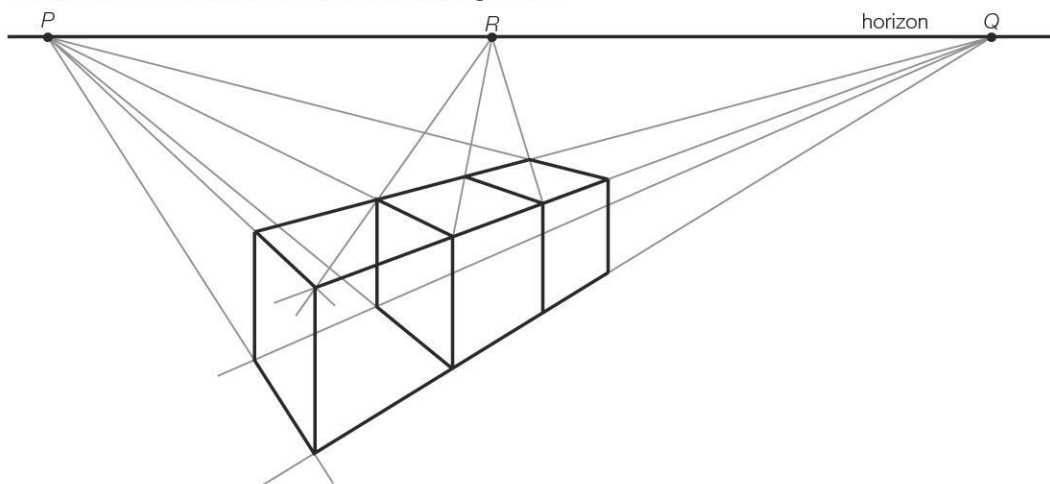
- 11**
- verdwijnpunt V en de horizon
 - BD snijden met de horizon geeft verdwijnpunt P
 - PA snijden met VB geeft E
 - AC snijden met de horizon geeft verdwijnpunt Q
 - QB snijden met VA geeft F
 - $ABEF$ is het gevraagde vlak



- 12 a**
- verdwijnpunt P en de horizon
 - AB verlengen geeft Q op de horizon
 - PB snijden met QD geeft C
 - F op QE en G op QH
- b**
- AC verlengen geeft R op de horizon
 - RB snijden met QD geeft J
 - PJ snijden met QA geeft I
 - K op QE en L op QH



- 13 • verdwijnpunten P en Q en de horizon
• verdubbel bovenzvlak twee keer met behulp van R



- 14 a • AD snijden met BC geeft verdwijnpunt V en de horizon
• AC snijden met de horizon geeft verdwijnpunt P
• PB snijden met VA geeft E
• punten F , G en H door gebruikt te maken van V
• de hoekpunten aan de bovenkant



b Zie de figuur.

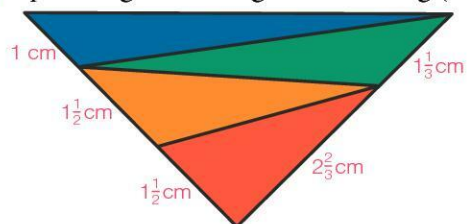
Opmeten geeft $EI = 3,9$ cm en $EJ = 6,3$ cm.

De hoogte van de doorgang onder de bogen is $\frac{6,3}{3,9} \cdot 1,8 \approx 2,9$ m.

13.2 Regelmatige veelhoeken

Bladzijde 55

- 15 Opmeten geeft de volgende verdeling (onderste helft vierkant).



Nu is:

$$O(\text{blauw}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2 \text{ cm}^2$$

$$O(\text{groen}) = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 3 = 2 \text{ cm}^2$$

$$O(\text{oranje}) = O(\text{rood}) = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3} = 2 \text{ cm}^2.$$

Dus het klopt met de eis dat er acht driehoeken zijn met gelijke oppervlakte.

Bladzijde 56

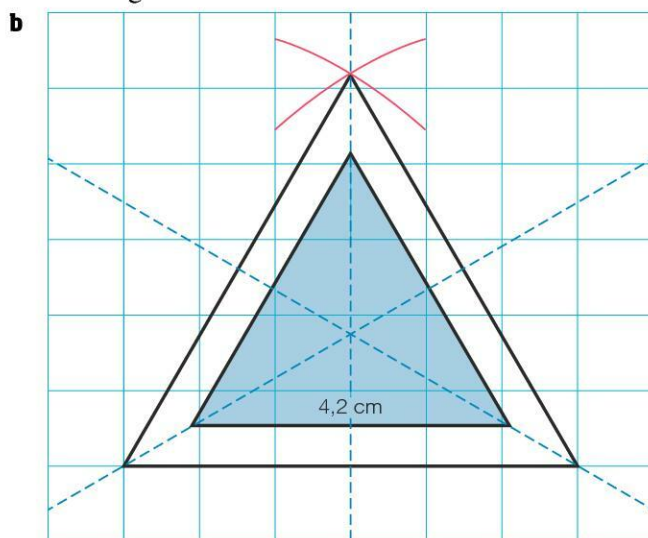
- 16 a** lengte zijde gele driehoek $= \frac{2,5}{6} \cdot \text{lengte zijde grote driehoek}$, dus $k = \frac{2,5}{6} = \frac{5}{12}$.

$$O(\text{gele driehoek}) = k^2 \cdot O(\text{grote driehoek})$$

$$k^2 = \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{144}, \text{ dus } O(\text{gele driehoek}) = \frac{25}{144} \cdot O(\text{grote driehoek}) \text{ en dus}$$

$$O(\text{rode gedeelte}) = \frac{119}{144} \cdot O(\text{grote driehoek}).$$

Dus de oppervlakte van het rode deel is $\frac{119}{25} = 4,76$ keer zo groot als de oppervlakte van de gele driehoek.



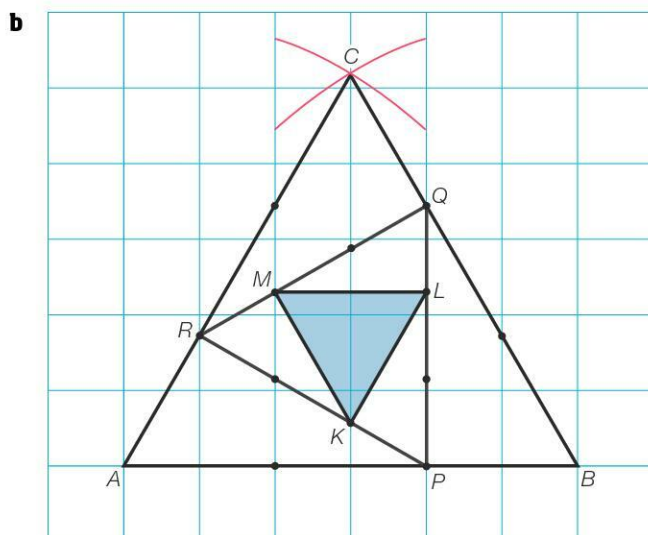
- 17 a** De stelling van Pythagoras in driehoek PBQ geeft $PQ^2 = BQ^2 - PB^2 = 4^2 - 2^2 = 12$, dus $PQ = \sqrt{12}$.

$$\text{lengte zijde } \triangle PQR = \frac{\sqrt{12}}{6} \times \text{lengte zijde } \triangle ABC, \text{ dus } k = \frac{1}{6}\sqrt{12}.$$

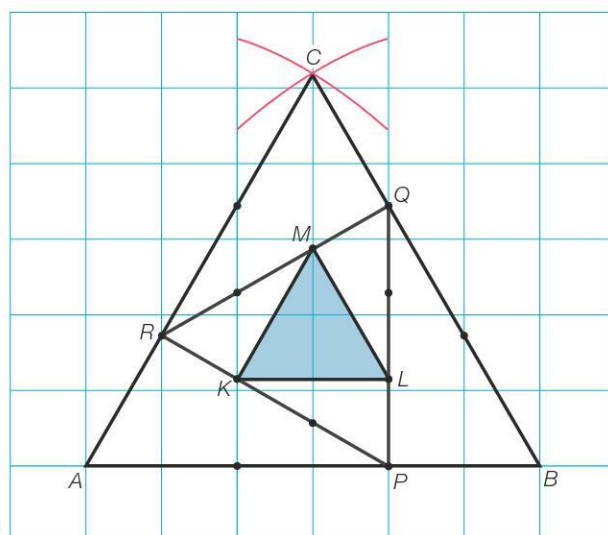
$$\text{oppervlakte } \triangle PQR = k^2 \cdot \text{oppervlakte } \triangle ABC$$

$$k^2 = \left(\frac{1}{6}\sqrt{12}\right)^2 = \frac{1}{3}, \text{ dus } O(\triangle PQR) = \frac{1}{3} \cdot O(\triangle ABC).$$

Dus $\frac{2}{3}$ e deel van de driehoek is rood.



of



$$O(\triangle KLM) = \frac{1}{3} \cdot O(\triangle PQR) \text{ en } O(\triangle PQR) = \frac{1}{3} \cdot O(\triangle ABC), \text{ dus is } O(\triangle KLM) = \frac{1}{9} \cdot O(\triangle ABC).$$

Dus $\frac{1}{9}$ deel van de driehoek ABC is blauw.

Bladzijde 57

- 18** Figuur a: Alle driehoeken hebben gelijke zijde en bijbehorende hoogte. Alle driehoeken hebben dus gelijke oppervlakten.

Figuur b: De twee driehoeken in de bovenste helft van het vierkant zijn even groot en hebben elk een oppervlakte die een kwart is van de oppervlakte van de bovenste helft. Omdat de twee parallellogrammen in de bovenste helft ook even groot zijn, wordt de bovenste helft verdeeld in vier stukken met gelijke oppervlakte. Voor de onderste helft geldt dit op gelijke wijze.

- 19 a** Er geldt $O(ABCD) = 5^2 = 25$, dus $O(\triangle ASC) = \frac{1}{10} \cdot 25 = 2\frac{1}{2}$.

$$O(\triangle ASC) = \frac{1}{2} \cdot SC \cdot AB$$

$$\frac{1}{2} \cdot SC \cdot 5 = 2\frac{1}{2}$$

$$CS = 1$$

- b** Driehoek QRS en driehoek QBR hebben dezelfde oppervlakte en dezelfde hoogte.

De zijden zijn dus ook gelijk. Er geldt dat $BR = RS = \frac{5-1}{2} = 2$.

- c** $O(\triangle QBR) = \frac{1}{2} \cdot BR \cdot BQ$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot BQ = 2\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } BQ = 2\frac{1}{2}.$$

Driehoek APS en driehoek PQS hebben dezelfde oppervlakte en dezelfde hoogte.

De zijden zijn dus ook gelijk. Er geldt dat $AP = PQ = \frac{5 - 2\frac{1}{2}}{2} = 1\frac{1}{4}$.

- 20 a** De stelling van Pythagoras in $\triangle ANM$ geeft $AN^2 + MN^2 = AM^2$

$$6^2 + MN^2 = 12^2$$

$$36 + MN^2 = 144$$

$$MN^2 = 108$$

$$MN = \sqrt{108}$$

$$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{108} \approx 62,354$$

- b** $O(ABCDEF) = 6 \cdot O(\triangle ABM) = 6 \cdot 6\sqrt{108} \approx 374,1$

- c** De stelling van Pythagoras in $\triangle GPM$ geeft $2^2 + MP^2 = 4^2$, dus $MP^2 = 12$ en $MP = \sqrt{12}$.

$$O(GHIJKL) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{12} \approx 41,57$$

Alternatieve uitwerking

Zeshoek $GHIJKL$ is een verkleining van zeshoek $ABCDEF$ met factor $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Dus } O(GHIJKL) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot O(ABCDEF) = \frac{1}{9} \cdot 36\sqrt{108} \approx 41,57.$$

- d** Zeshoek $GHIJKL$ is een verkleining van zeshoek $ABCDEF$ met factor $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

$$\text{Dus } O(GHIJKL) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot O(ABCDEF) = \frac{1}{16} \cdot O(ABCDEF).$$

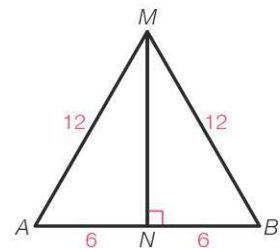
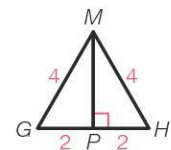
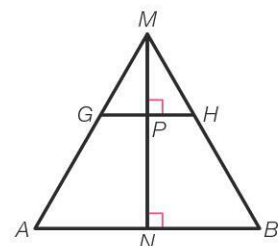
- e** $k^2 = \frac{1}{10}$, dus $k = \sqrt{\frac{1}{10}}$ en $GH = \sqrt{\frac{1}{10}} \cdot AB = \sqrt{\frac{1}{10}} \cdot 12 \approx 3,79$.

- f** $GH = 5$, dus $k = \frac{5}{12}$.

$$\text{Dus ook } MP = \frac{5}{12} \cdot MN = \frac{5}{12} \cdot \sqrt{108}.$$

De afstand tussen de evenwijdige zijden AB en GH is

$$PN = MN - MP = \sqrt{108} - \frac{5}{12} \cdot \sqrt{108} \approx 6,06.$$



- 21 a M is het midden van de grote zeshoek en AB is een zijde van de grote zeshoek.

De stelling van Pythagoras in $\triangle APM$ geeft $AP^2 + MP^2 = AM^2$

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 + MP^2 = 3^2$$

$$MP^2 = 6\frac{3}{4}$$

$$MP = \sqrt{6\frac{3}{4}}$$

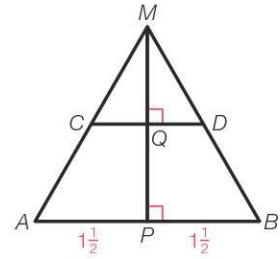
Driehoek CDM is een verkleining van driehoek ABM met factor $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, dus

$$MQ = \frac{1}{2} \sqrt{6\frac{3}{4}}.$$

$$\text{Dus } d = MP - MQ = \sqrt{6\frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \sqrt{6\frac{3}{4}} \approx 1,30.$$

- b Er geldt $k^2 = \frac{1}{2}$, dus $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ en $MQ = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{6\frac{3}{4}} = \sqrt{3\frac{3}{8}}$.

$$\text{Dus } d = MP - MQ = \sqrt{6\frac{3}{4}} - \sqrt{3\frac{3}{8}} \approx 0,76.$$



- 22 AB = 275 m, dus AM = 275 m en AP = 137,5 m.

De stelling van Pythagoras in $\triangle APM$ geeft $AP^2 + MP^2 = AM^2$

$$137,5^2 + MP^2 = 275^2$$

$$MP^2 = 56\,718,75$$

$$MP = 238,15\dots$$

Dus $MP = 238,15\dots$ m.

CD is een zijde van de blauwe zeshoek, dus $CD = 50$ m.

Driehoek CDM is een verkleining van driehoek ABM met factor $\frac{50}{275}$, dus

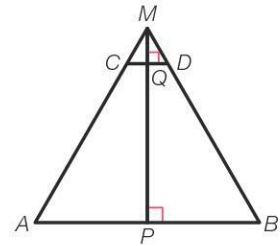
$$MQ = \frac{50}{275} \cdot 238,15\dots = 43,30\dots \text{ m.}$$

De lengte van de weg die met rood is aangegeven is $PQ = 238,15\dots - 43,30\dots \approx 194,86$ m.

Jonas legt een afstand af van $2 \cdot 194,86 + 6 \cdot 275 = 2039,72$ m.

Hij loopt met een snelheid van 4500 m/uur, dus hij doet $\frac{2039,72}{4500} = 0,453\dots$ uur ≈ 27 minuten

over de wandeling.



- 23 Er geldt $O(ABCD) = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$,

dus $O(\triangle DPB) = \frac{1}{8} \cdot 64 = 8 \text{ cm}^2$.

$$O(\triangle DPB) = \frac{1}{2} \cdot DP \cdot AB$$

$$\frac{1}{2} \cdot DP \cdot 8 = 8$$

$$DP = 2 \text{ cm}$$

Driehoek PQR en driehoek QAR hebben dezelfde

oppervlakte en dezelfde hoogte AR. De zijden

PQ en AQ zijn dus ook gelijk. Er geldt dat

$$PQ = AQ = \frac{8-2}{2} = 3 \text{ cm.}$$

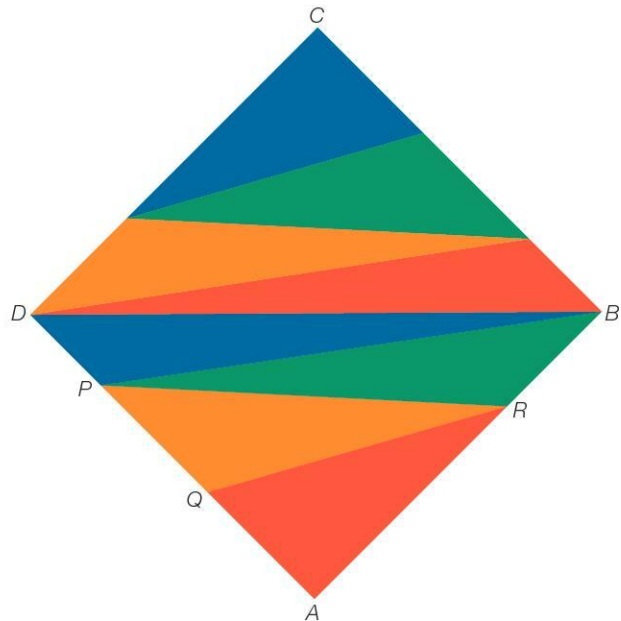
$$O(\triangle QAR) = \frac{1}{2} \cdot AQ \cdot AR$$

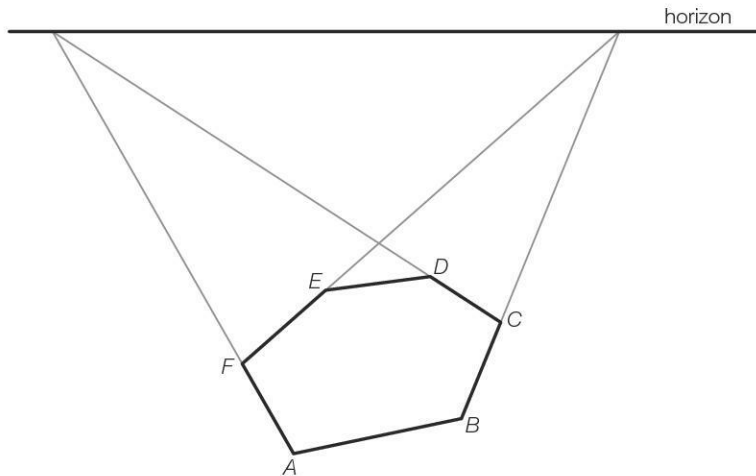
$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot AR = 8$$

$$AR = 5\frac{1}{3} \text{ cm}$$

Hieruit volgt dat $BR = 8 - 5\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ cm}$.

De zijden van de bovenste helft van het werk zijn op dezelfde manier verdeeld.



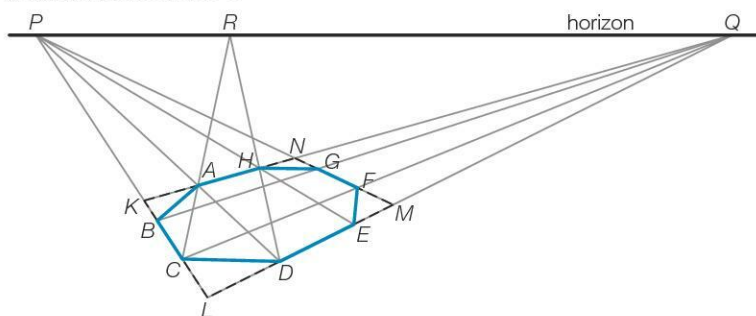


- b** De lijnen BC en EF snijden elkaar op de horizon. Dat is ook het geval met de lijnen AF en CD .
In een regelmatige zeshoek zijn de zijden BC en EF evenwijdig.
Dit is ook het geval met de zijden AF en CD .

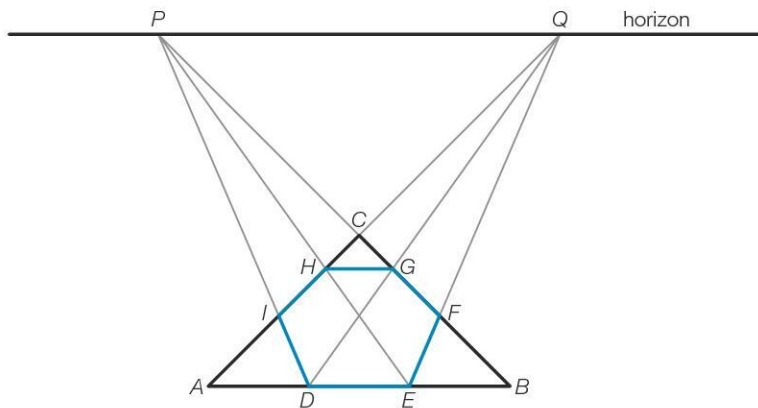
Bladzijde 60

- 25** Uit het gegeven dat KL , en dus BC , evenwijdig is met de horizon.

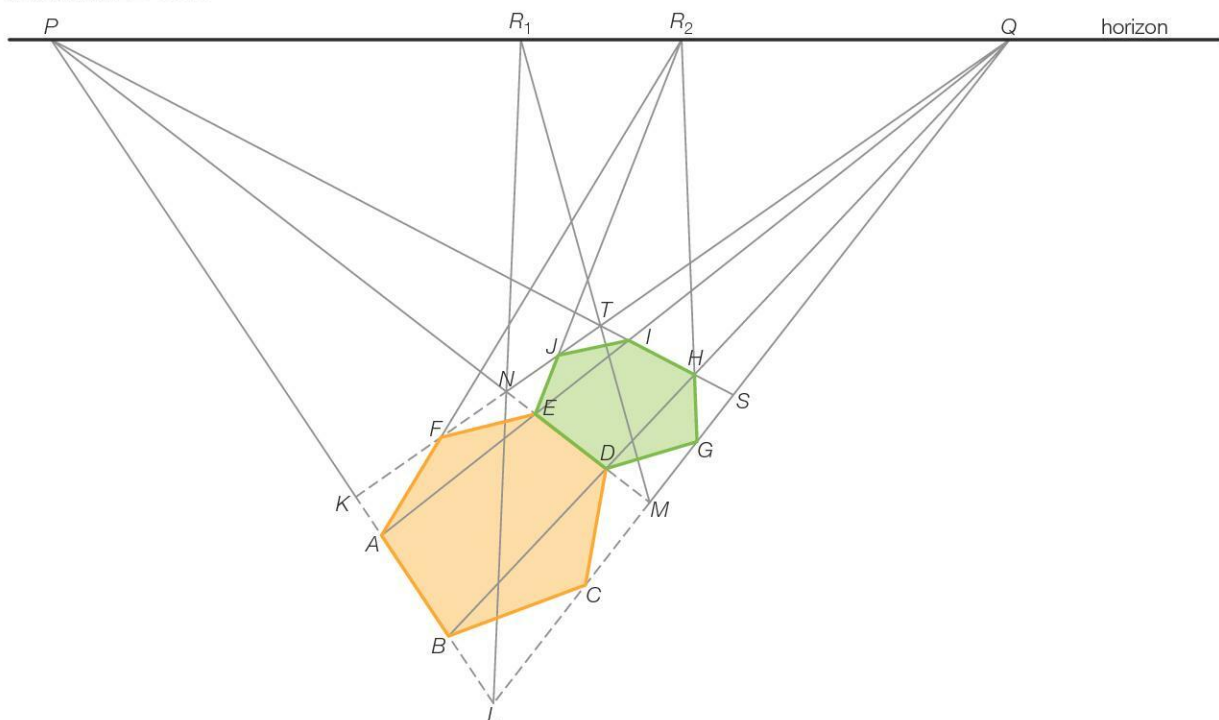
- 26**
- KL en MN verlengen geeft verdwijnpunt P
 - KN en LM verlengen geeft verdwijnpunt Q
 - horizon door P en Q
 - PA en LM snijden geeft D
 - CA heeft verdwijnpunt R
 - RD en KN snijden geeft H
 - PH en LM snijden geeft E
 - BQ en MN snijden geeft G
 - CQ en MN snijden geeft F
 - achthoek $ABCDEFGH$



- 27 a** $AD = DI$ (gelijkzijdige driehoek) en $DI = DE$ (regelmatige zeshoek), dus $AD = DE$.
Evenzo is $DE = BE$, dus $AD = DE = BE$
- b**
- D en E op AB zo, dat $AD = DE = BE$
 - BC verlengen geeft verdwijnpunt P
 - PD en AC snijden geeft I
 - PE en AC snijden geeft H
 - AC verlengen geeft verdwijnpunt Q
 - QE en BC snijden geeft F
 - QD en BC snijden geeft G
 - zeshoek $DEFGHI$



- 28**
- KL en MN verlengen geeft verdwijnpunt P
 - KN en LM verlengen geeft verdwijnpunt Q
 - horizon door P en Q
 - LN heeft verdwijnpunt R_1
 - R_1M en QK snijden geeft T
 - PT en QL snijden geeft S
 - QB en ST snijden geeft H
 - QA en ST snijden geeft I
 - AF heeft verdwijnpunt R_2
 - R_2E en TN snijden geeft J
 - R_2H en MS snijden geeft G
 - achthoek $EDGHIJ$



13.3 De gulden snede

Bladzijde 62

- 29**
- a** $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ en $b = 1$ en $a = \varphi$ geeft $\frac{\varphi}{1} = \frac{\varphi+1}{\varphi}$.
Kruislings vermenigvuldigen geeft $\varphi^2 = \varphi + 1$.
- b** Voer in $y_1 = x^2$ en $y_2 = x + 1$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 1,618$, dus $\varphi = 1,618$.

Bladzijde 63

- 30** $AD = 1$, dus ook $AE = 1$ en dus $BE = AB - AE = \varphi - 1$.

Er geldt dus dat $\frac{BC}{BE} = \frac{1}{\varphi - 1}$.

Gebruik dat $\varphi = \frac{\varphi + 1}{\varphi}$ (zie opgave 29).

$$\text{Dus } \frac{BC}{BE} = \frac{1}{\varphi - 1} = \frac{1}{\frac{\varphi + 1}{\varphi} - 1} \cdot \frac{\varphi}{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi + 1 - \varphi} = \varphi.$$

Uit $\frac{BC}{BE} = \varphi$ volgt $BC = \varphi \cdot BE$ en dus is $EBCF$ ook een gulden rechthoek.

- 31** I $\frac{5,5}{3,8} \approx 1,4$, dus geen gulden rechthoek.
 II $\frac{6,3}{3,8} \approx 1,7$, dus bij benadering een gulden rechthoek.
 III $\frac{5,1}{4,2} \approx 1,2$, dus geen gulden rechthoek.
 IV $\frac{5,1}{4,1} \approx 1,2$, dus geen gulden rechthoek.

- 32** Het schilderij heeft bij benadering de verhoudingen van een gulden rechthoek. De verticale lijn rechts naast de man met de trombone verdeelt het schilderij in een vierkant en een gulden rechthoek.

Bladzijde 64

- 33** a Er zijn 10 rechthoeken in de lengte en dus $\frac{80}{10} = 8$ rechthoeken in de breedte.
 De 20^e decimaal correspondeert met de 21^e rechthoek, dus met de eerste rechthoek op de derde rij.
 Deze rechthoek is blauw, dus de 20^e decimaal is even.
 b Elk van de rechthoeken heeft afmetingen $\frac{90}{10} = 9$ cm bij $\frac{44,5}{8} = 5,5625$ cm.
 $\frac{9}{5,5625} \approx 1,618$, dus bij benadering een gulden rechthoek.

- 34** a De stelling van Pythagoras in driehoek ABC geeft $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2^2 + 1^2 = 5$,
 dus $BC = \sqrt{5}$ en $BD = BC - CD = \sqrt{5} - 1$.
 b $AE = AB - EB = AB - BD = 2 - (\sqrt{5} - 1) = 3 - \sqrt{5}$
 c $\frac{BE}{AE} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} \approx 1,618$
 AB wordt door E verdeeld volgens de gulden snede.

- 35** De stelling van Pythagoras in driehoek EBC geeft $EC^2 = EB^2 + BC^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, dus
 $EC = EG = \sqrt{5}$.
 $BG = EG - EB = \sqrt{5} - 1$
 $\frac{AB}{BG} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \approx 1,618$
 AG wordt door B verdeeld volgens de gulden snede.

Bladzijde 65

- 36** a In $ABCS$ zijn AB en CS evenwijdig en ook zijn AS en BC evenwijdig. Dus $ABCS$ is een parallellogram en dus is $AB = BC = CS = AS$.
 b $ABCS$ is een parallellogram waarin de diagonalen AC en BS loodrecht op elkaar staan, dus $ABCS$ is een ruit en daaruit volgt dat $AB = CS = BC = AS$.
 c $AC = AD$ (diagonalen regelmatige vijfhoek) en $DE = AB$ (zijden regelmatige vijfhoek) en dus ook $DE = AS$ (want $ABCS$ is een ruit).
 Dus $k = \frac{AC}{DE} = \frac{AD}{AS}$.

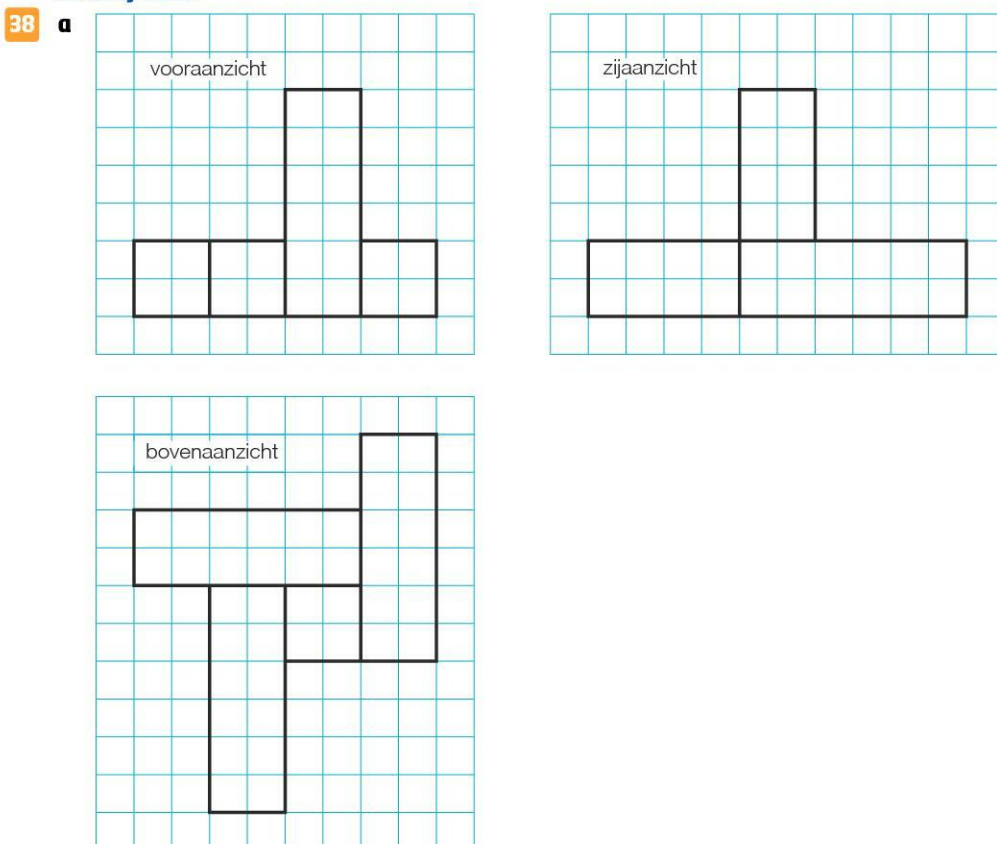
- d Er geldt dus $\frac{AS}{DS} = \frac{AD}{AS}$ en dit is de verhouding die bij de gulden snede hoort, dus $AS = \varphi \cdot DS$.
- e Uit $\frac{AS}{DS} = \frac{AD}{AS}$ volgt ook dat $AD = \varphi \cdot AS$. Omdat $AB = AS$ geldt dus ook dat $AD = \varphi \cdot AB$, of algemeen gezegd: in een regelmatige vijfhoek is een diagonaal φ keer zo lang als een zijde van de vijfhoek.

Bladzijde 66

- 37 a $PQ = EC$ en EC is een diagonaal van de vijfhoek, dus $EC = \varphi \cdot AB$ en dus ook $PQ = \varphi \cdot AB \approx 1,618 \cdot 280 \approx 453$ m.
- b $AP = BQ$, dus $2BQ \approx 453 - 280 = 173$ m.
 $BQ \approx 86,5$ m
 In $\triangle BQC$ is $BQ^2 + CQ^2 = BC^2$
 $86,5^2 + CQ^2 = 280^2$
 $CQ^2 = 280^2 - 86,5^2$
 $CQ \approx 266,3$ m
- c In $\triangle CDR$ is $CR^2 + DR^2 = CD^2$
 $CR^2 + 226,5^2 = 280^2$
 $CR^2 = 280^2 - 226,5^2$
 $CR \approx 164,6$ m
- d $O(ABCDE) = PQ \cdot QR - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BQ \cdot CQ - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot DR \cdot CR$
 $\approx 453 \cdot (266,3 + 164,6) - 86,5 \cdot 266,3 - 226,5 \cdot 164,6$
 $= 195\,197,7 - 23\,034,95 - 37\,281,9$
 $= 134\,880,85 \text{ m}^2 \approx 13,5 \text{ ha}$

13.4 Aanzichten en inhoud

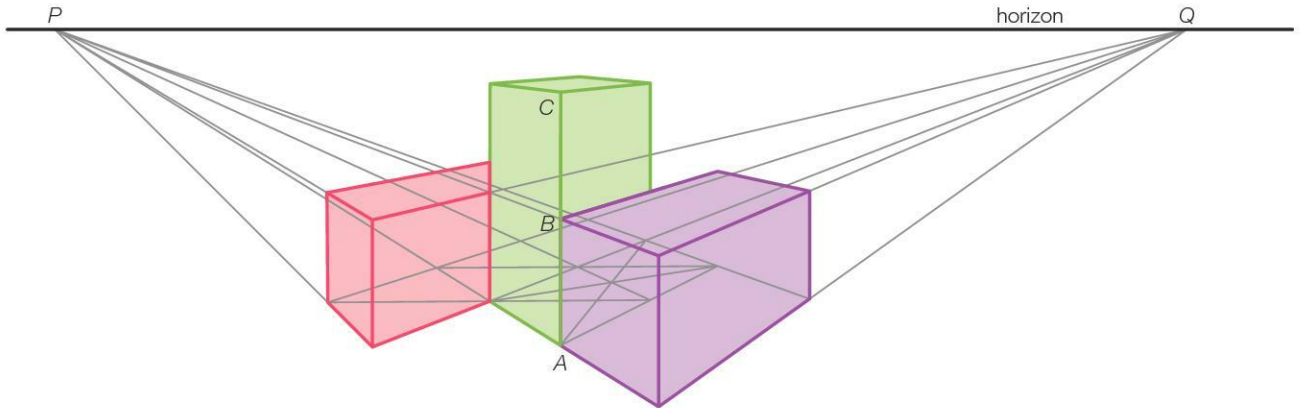
Bladzijde 68



- b De inhoud van een balk is $3 \cdot 3 \cdot 9 = 81 \text{ dm}^3$, dus de totale inhoud is $4 \cdot 81 = 324 \text{ dm}^3$.
 Het kunstwerk weegt $324 \cdot 0,55 = 178,2 \text{ kg}$.

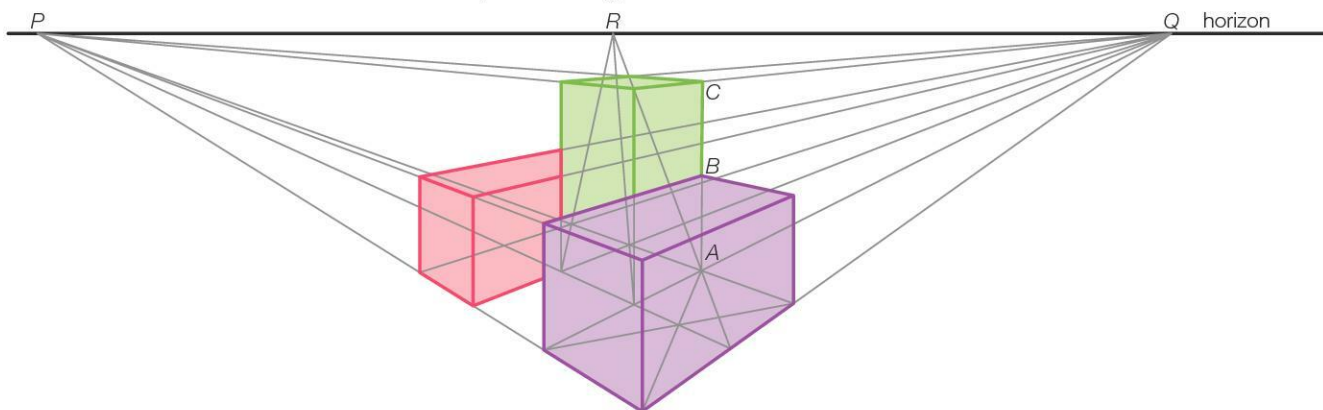
Bladzijde 69

- 39**
- a** De ribben AB en AC zijn evenwijdig met het tafereel, dus hier treedt geen vertekening op.
 - b** Snijden van de lijn PC met de verticale lijn door een hoekpunt van het grondvlak. Evenzo snijden van de lijn QC met de verticale lijn door een hoekpunt van het grondvlak. Daarna de gevonden punten verbinden met respectievelijk Q en P .
 - c**
 - verdwijnpunten P en Q en de horizon
 - verdubbel grondvlak middelste balk en verdubbel dit voor grondvlak linker balk
 - de lijn PB geeft de hoogte van de linker balk
 - teken bovenkant linker balk met behulp van P en Q



Bladzijde 70

- 40**
- a**
 - verdwijnpunten P en Q en de horizon
 - halveer grondvlak rechter balk en verdubbel dit voor grondvlak middelste balk
 - opmeten AB geeft AC , want $AC = 2 \cdot AB$
 - teken bovenkant middelste balk met behulp van P en Q
 - verdubbel grondvlak middelste balk en verdubbel dit voor grondvlak linker balk
 - teken bovenkant middelste balk met behulp van P en Q

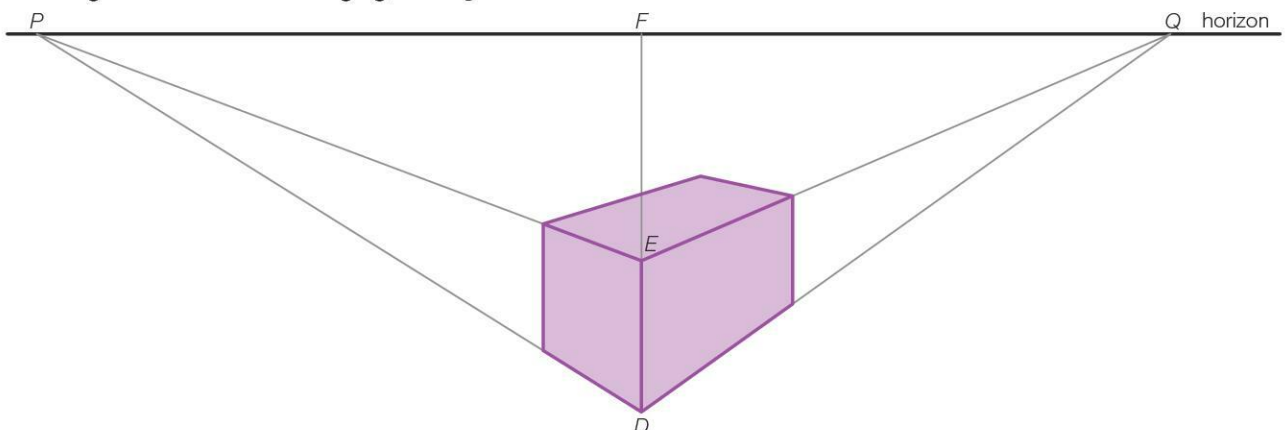


- b** Opmeten in figuur 13.61 geeft hoogte rechter balk = 1,5 cm, dus in werkelijkheid hoogte = $30 \cdot 1,5 = 45$ cm.

Opmeten in perspectieftekening geeft $DE = 2,0$ cm en $DF = 5,0$ cm.

Dus in werkelijkheid $DF = \frac{5,0}{2,0} \cdot 45 \approx 113$ cm.

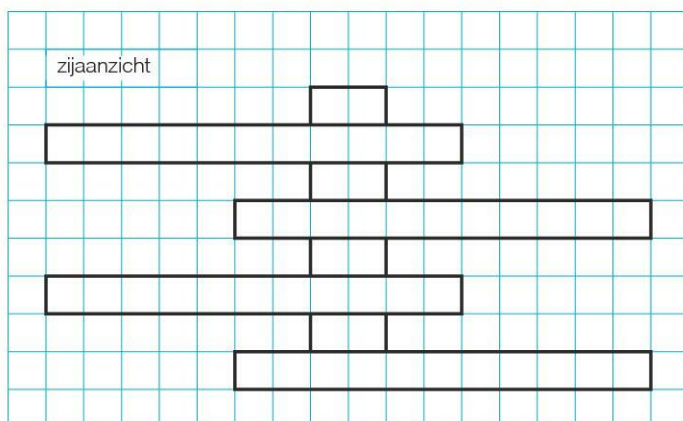
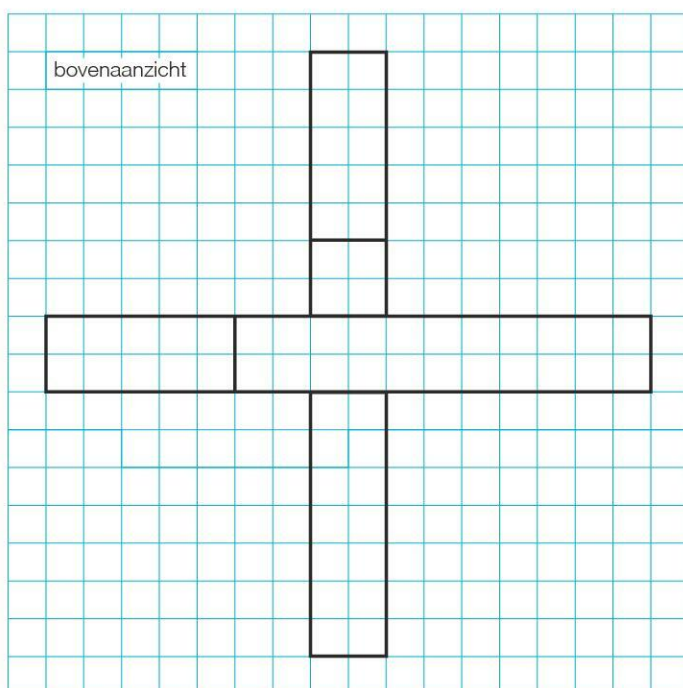
De hoogte van het denkbeeldige gezichtspunt is 113 cm.



- c** In figuur 13.61 zijn de afmetingen van een balk $1,5 \times 1,5 \times 3$ cm, dat komt in werkelijkheid dus overeen met $45 \times 45 \times 90$ cm. De inhoud van een balk is $4,5 \cdot 4,5 \cdot 9 = 182,25 \text{ dm}^3$, dus de totale inhoud is $3 \cdot 182,25 = 546,75 \text{ dm}^3$. Het kunstwerk weegt $546,75 \cdot 2,7 \approx 1476$ kg.

41

a



- b** In figuur 13.63b zijn de afmetingen van een balk $0,5 \times 1,0 \times 5,5$ cm, dat komt in werkelijkheid dus overeen met $12,5 \times 25 \times 137,5$ cm. De inhoud van een balk is $1,25 \cdot 2,5 \cdot 13,75 = 42,96... \text{ dm}^3$, dus de totale inhoud is $8 \cdot 42,96... \approx 344 \text{ dm}^3$.
- c** In de aanzichten kun je zien dat de totale lengte van de kist $8 \cdot 25 = 200$ cm moet zijn, dat de breedte ook $8 \cdot 25 = 200$ cm moet zijn en dat de hoogte $4 \cdot 25 = 100$ cm moet zijn.
De kist heeft dus een inhoud van $20 \cdot 20 \cdot 10 = 4000 \text{ dm}^3$.
Dus $\frac{344}{4000} \times 100\% = 8,6\%$ van de kist wordt door het kunstwerk in beslag genomen.

Bladzijde 71

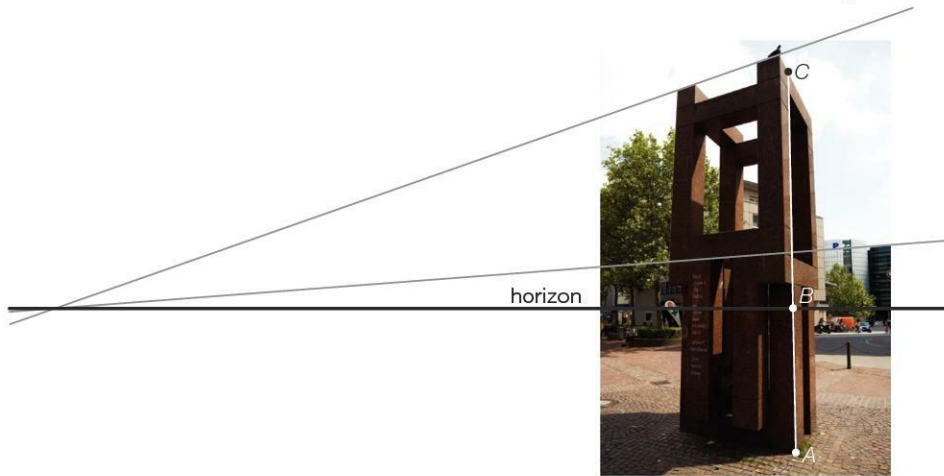
42

- a** De derde balk bestaat uit $6 \times 3 \times 6 = 108$ kubusjes.
- b** $8 \times 1 \times 8 = 64$; $7 \times 2 \times 7 = 98$; $6 \times 3 \times 6 = 108$; $5 \times 4 \times 5 = 100$
Het aantal kubusjes wordt kleiner na de derde balk. De derde balk bevat het grootste aantal kubusjes.
- c** De derde balk bestaat uit $3 \times 3 \times 6 = 54$ kubusjes.
- d** Het kunstwerk bestaat uit 8 balken.
In totaal zijn $1 \times 1 \times 8 + 2 \times 2 \times 7 + 3 \times 3 \times 6 + 4 \times 4 \times 5 + 5 \times 5 \times 4 + 6 \times 6 \times 3 + 7 \times 7 \times 2 + 8 \times 8 \times 1 = 540$ kubusjes gebruikt.

- e De eerste balk is opgebouwd uit $1 \times 1 \times 1$ kubus. De tweede balk is opgebouwd uit $2 \times 2 \times 1$ kubussen. De derde balk is opgebouwd uit $3 \times 3 \times 1$ kubussen. Enzovoort. In totaal zijn er
- $$1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 + 3 \times 3 \times 1 + 4 \times 4 \times 1 + 5 \times 5 \times 1 + 6 \times 6 \times 1 + 7 \times 7 \times 1 + 8 \times 8 \times 1 = 204 \text{ kubusjes.}$$

Bladzijde 72

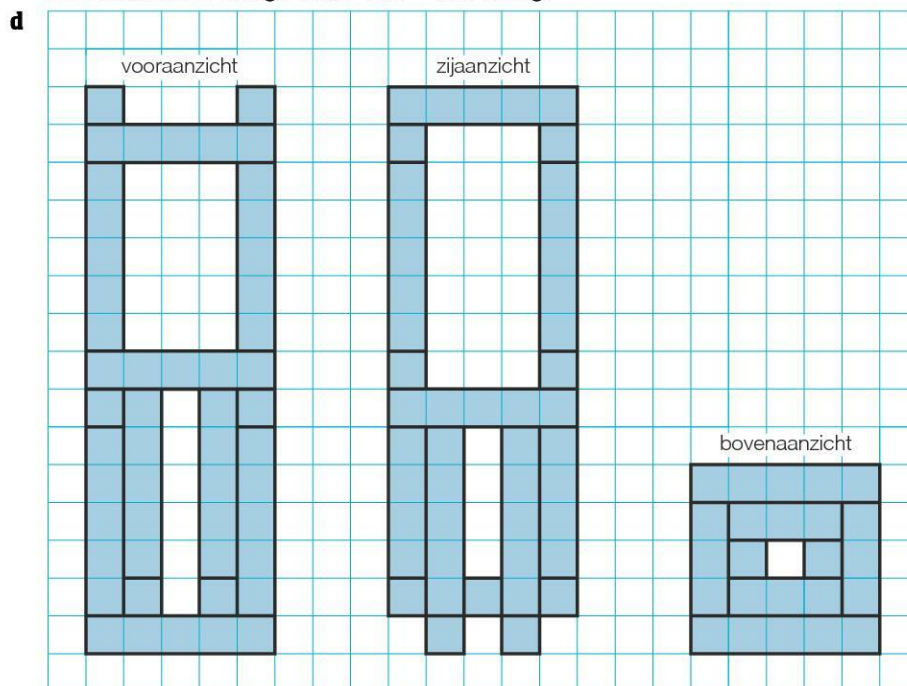
- 43 a Het kunstwerk is $40 + 200 + 40 + 40 + 200 + 40 + 40 = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m}$ hoog.
b



Opmeten geeft $AB = 1,9 \text{ cm}$ en $AC = 5,0 \text{ cm}$.

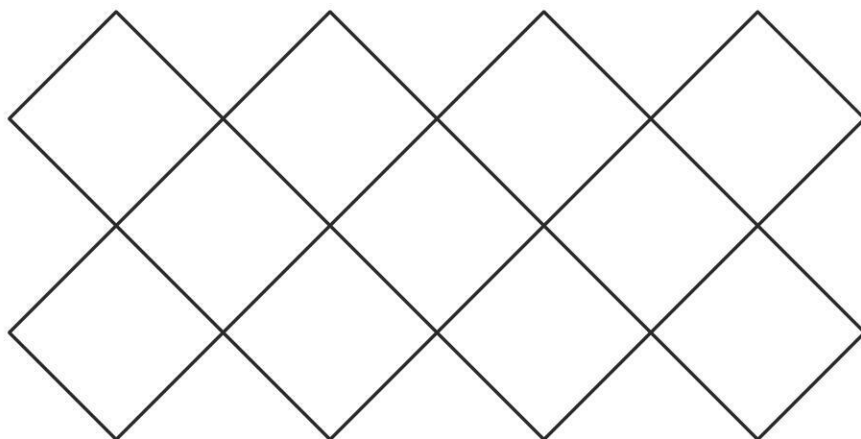
Dus de hoogte waarop de foto is genomen is $\frac{1,9}{5,0} \cdot 6 \approx 2,3 \text{ m}$.

- c De inhoud van een balk is $4 \cdot 4 \cdot 20 = 320 \text{ dm}^3$, dus de inhoud van het hele kunstwerk is $24 \cdot 320 = 7680 \text{ dm}^3$.
Het kunstwerk weegt $7680 \cdot 2,7 = 20736 \text{ kg}$.

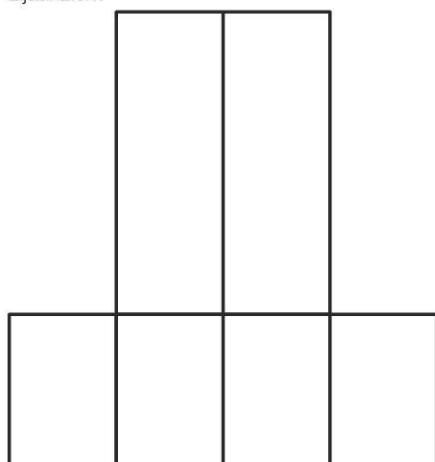


- 44 a** Teken eerst het bovenaanzicht. Hierin kun je de benodigde afmetingen van de andere aanzichten opmeten.

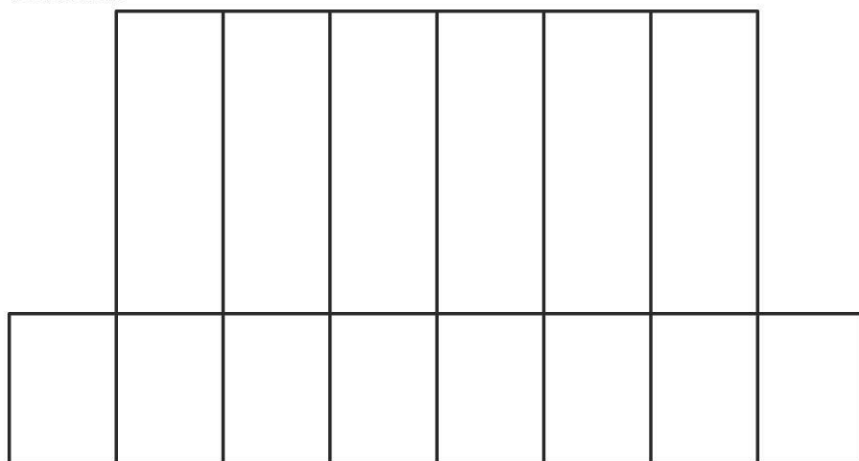
bovenaanzicht



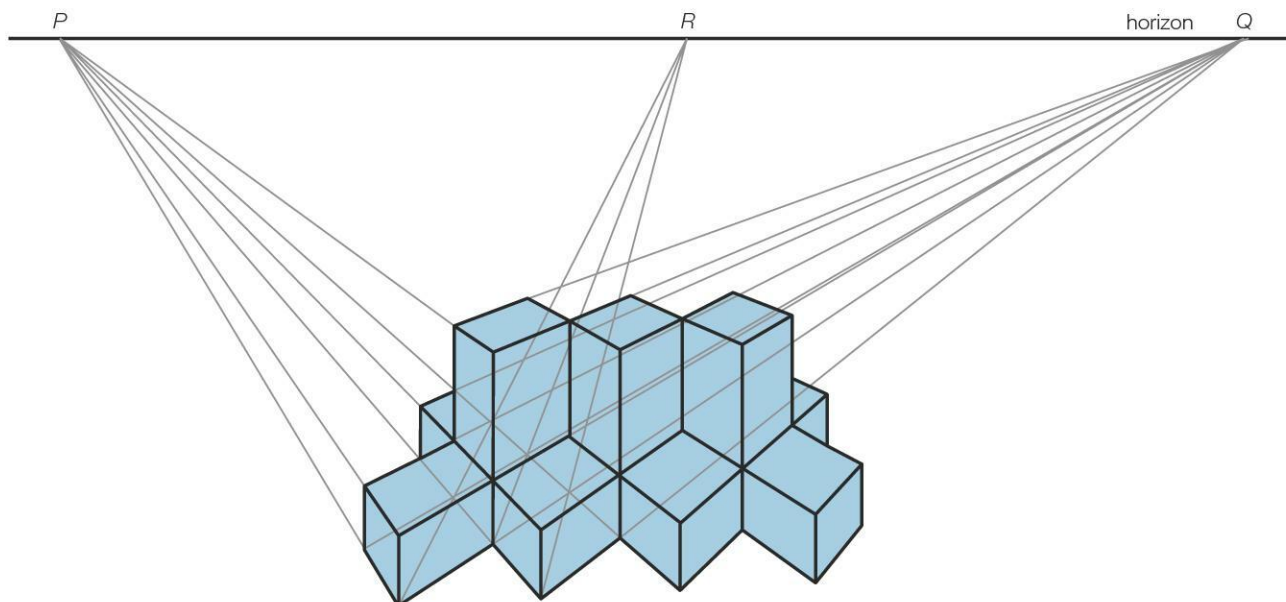
zijaanzicht



vooraanzicht



- b** De totale inhoud van het kunstwerk is $8 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 6 = 136 \text{ dm}^3$.
Het kunstwerk weegt $136 \cdot 2,8 = 380,8 \text{ kg}$.
- c**
- verdwijnpunten P en Q en de horizon
 - grondvlak kubus linksvoor met behulp van P en Q
 - verdubbel grondvlak kubus linksvoor met behulp van verdwijnpunt R
 - verdubbelen herhalen voor overige grondvlakken
 - teken bovenkanten bij gevonden grondvlakken met behulp van P en Q

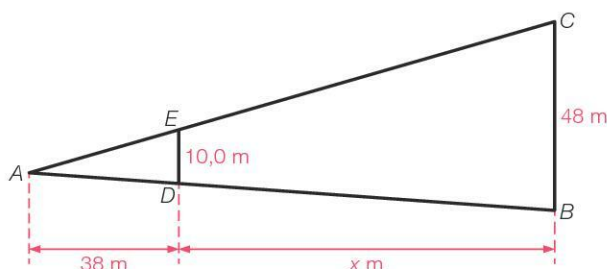


Bladzijde 73

- 45 a** De grootste hoogte van de maquette is $\frac{89}{125} = 0,712 \text{ m} = 71,2 \text{ cm}$.
- b** De maquette heeft $\frac{45\,000}{125^2} = 2,88 \text{ m}^2 = 288 \text{ dm}^2$ kantoorruimte.
- c** De maquette heeft een inhoud van $\frac{225\,000}{125^3} = 0,1152 \text{ m}^3 \approx 115 \text{ dm}^3$.

Bladzijde 74

- 46 a** Opmeten in figuur 13.73 geeft hoogte poort = 4,6 cm en hoogte zuil = 2,7 cm.
De hoogte van de zuil lijkt ter hoogte van de poort $\frac{2,7}{4,6} \cdot 17 \approx 10,0 \text{ m}$ te zijn.



Driehoek ABC is een vergroting van driehoek ADE met vergrotingsfactor $\frac{48}{10,0}$.

Er geldt $\frac{48}{10,0} \cdot 38 = 38 + x$.

Dit geeft $x \approx 144 \text{ m}$.

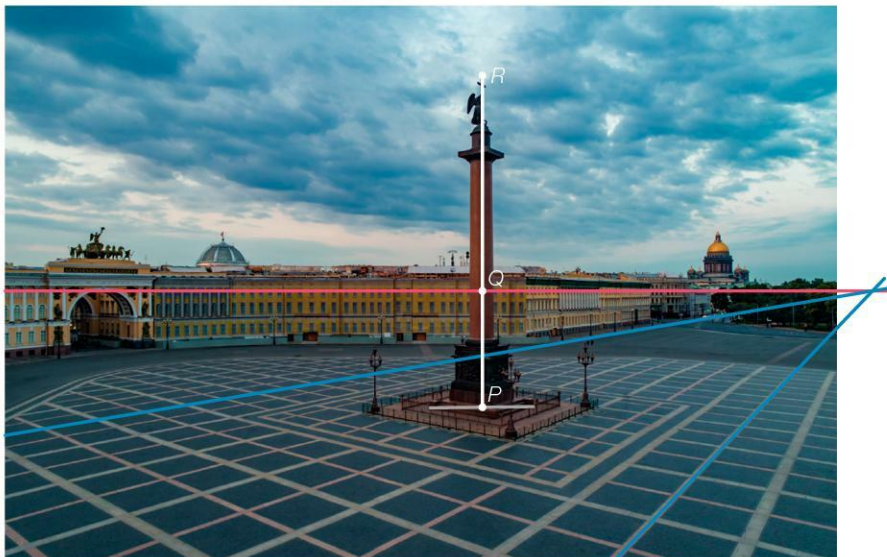
De fotograaf stond $38 + 144 = 182 \text{ m}$ van de zuil.

- b** $9\frac{1}{2} \text{ inch} = 9\frac{1}{2} \cdot 2,54 = 24,13 \text{ cm}$

De zuil is een vergroting van het model met vergrotingsfactor $\frac{4800}{24,13} \approx 199$.

Het model zou $\frac{700\,000}{199^3} = 0,0888... \text{ kg} \approx 89 \text{ gram}$ wegen.

c



Opmeten geeft $PQ = 1,5$ cm en $PR = 4,4$ cm.

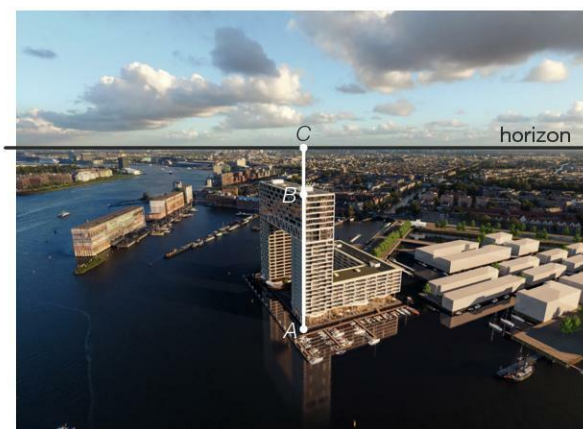
De foto is genomen vanaf een hoogte van $\frac{1,5}{4,4} \cdot 48 \approx 16,4$ m.

Bladzijde 75

- 47 a Voor de vergrotingsfactor k geldt $k^3 = \frac{200\,000\,000}{59}$, dus $k = \sqrt[3]{\frac{200\,000\,000}{59}} \approx 150$.

De grootste hoogte van de maquette is $\frac{90}{150} = 0,6$ m = 60 cm.

b



Opmeten geeft $AB = 1,8$ cm en $AC = 2,4$ cm.

De hoogte van dit denkbeeldige punt is $\frac{2,4}{1,8} \cdot 90 = 120$ m.

- 48 a 1 square foot = $0,3048^2$ m²

De oppervlakte van het grondvlak is $24\,192 \cdot 0,3048^2 \approx 2248$ m².

- b De oppervlakte van het dak is $63 \cdot 43 = 2709$ m².

Het dak is een vergroting van het grondvlak met $k = \sqrt{\frac{2709}{2248}} \approx 1,1$.

Dus de afmetingen van het grondvlak zijn $\frac{63}{1,1} \approx 57,3$ m bij $\frac{43}{1,1} \approx 39,1$ m.

(Je kunt ook op het werkblad de lengte van het dak en van het grondvlak meten om k te berekenen.)

Opmeten op het werkblad geeft hoogte gebouw = 3,3 cm.

Het zijaanzicht is een trapezium met zijden van 4,3 cm en 3,91 cm en een hoogte van 3,3 cm.

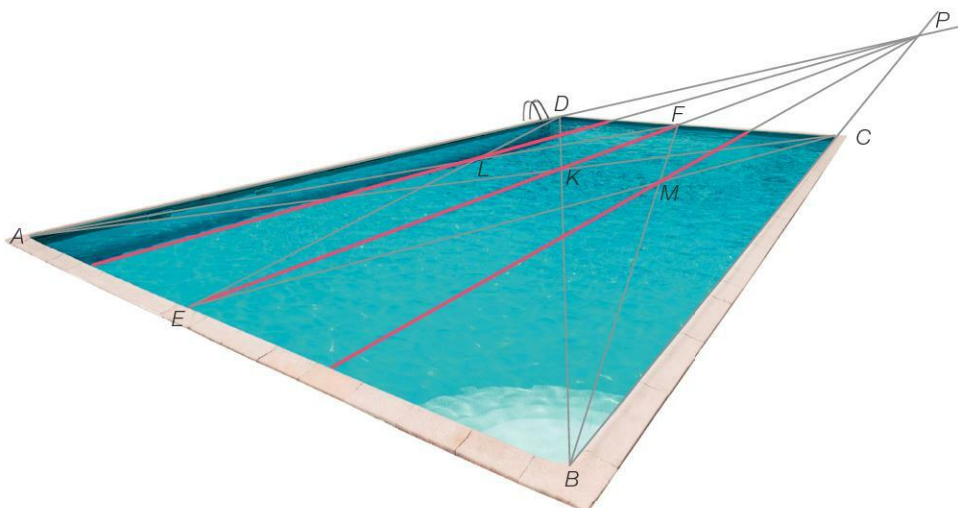


- c Het gewicht zou $\frac{75\,000}{160^3} = 0,0183... \text{ kg} \approx 18 \text{ gram}$ zijn.

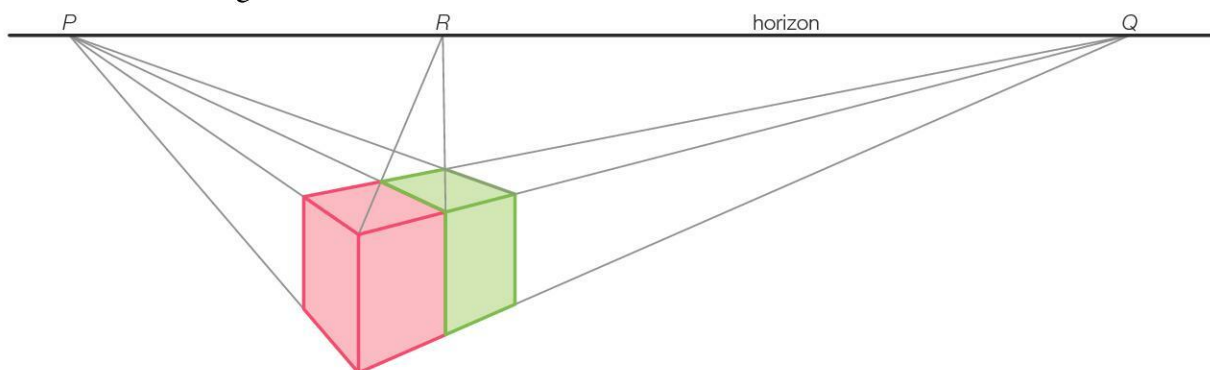
Diagnostische toets

Bladzijde 78

- 1
 - verdwijnpunt P
 - de diagonalen van $ABCD$ geven middelpunt K
 - PK verlengen geeft de middelste rode lijn
 - de diagonalen van $AEFD$ geven middelpunt L
 - PL verlengen geeft de linker rode lijn
 - de diagonalen van $EBCF$ geven middelpunt M
 - PM verlengen geeft de rechter rode lijn

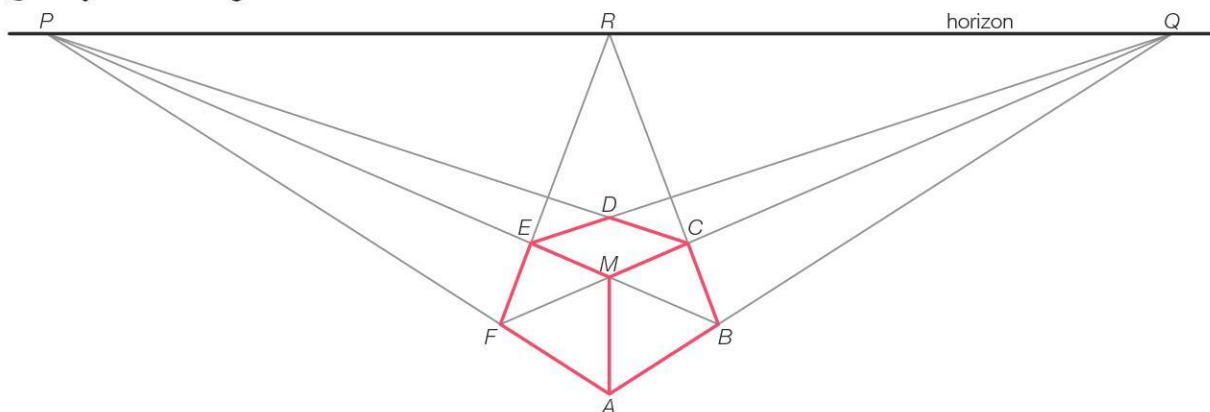


- 2
 - verdwijnpunten P en Q en de horizon
 - verdubbel het bovenzvlak van de rode kubus met behulp van verdwijnpunt R
 - het bovenzvlak van de groene kubus met behulp van P en Q
 - het voorvlak van de groene kubus



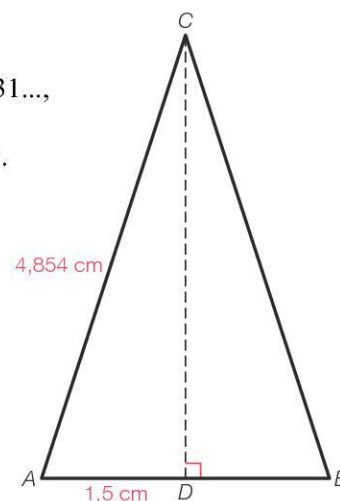
- 3 a** De zijde wordt verdeeld in vier stukken van 20 cm.
 De oppervlakte van een driehoek is $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 = 200 \text{ cm}^2$.
 De oppervlakte van een trapezium is $\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40 - 200 = 800 - 200 = 600 \text{ cm}^2$.
 Dus de oppervlakte van een trapezium is drie keer zo groot als de oppervlakte van een driehoek.
- b** De oppervlakte van de vier vierkanten samen is even groot als de oppervlakte van de vier driehoeken en de vier trapezia samen.
 De vier vierkanten hebben samen dus een oppervlakte van $4 \cdot 200 + 4 \cdot 600 = 3200 \text{ cm}^2$.
 Een vierkant heeft dus een oppervlakte van $\frac{3200}{4} = 800 \text{ cm}^2$.
 $4 \cdot 200 = 800$, dus er geldt $4 \cdot O(\text{driehoek}) = O(\text{vierkant})$.

- 4**
- AF en BE verlengen geeft verdwijnpunt P en de horizon
 - EF heeft verdwijnpunt R en AB heeft verdwijnpunt Q
 - QF snijden met BR geeft C
 - QE snijden met PC geeft D
 - QF snijden met PB geeft M

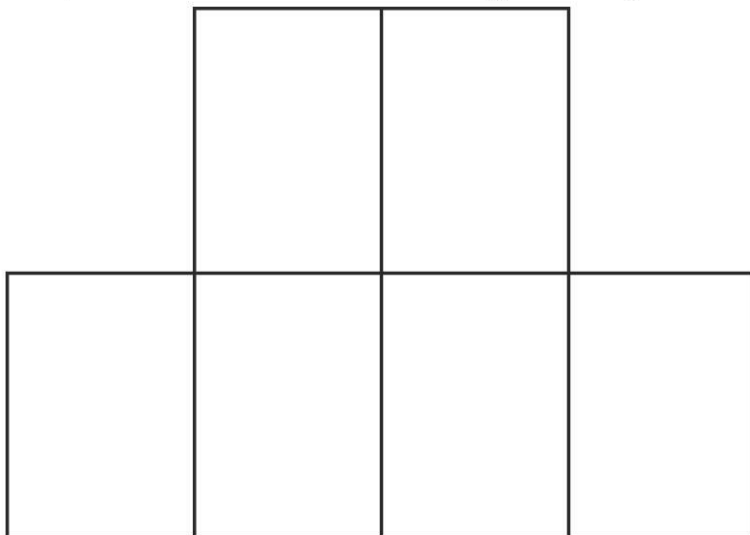


Bladzijde 79

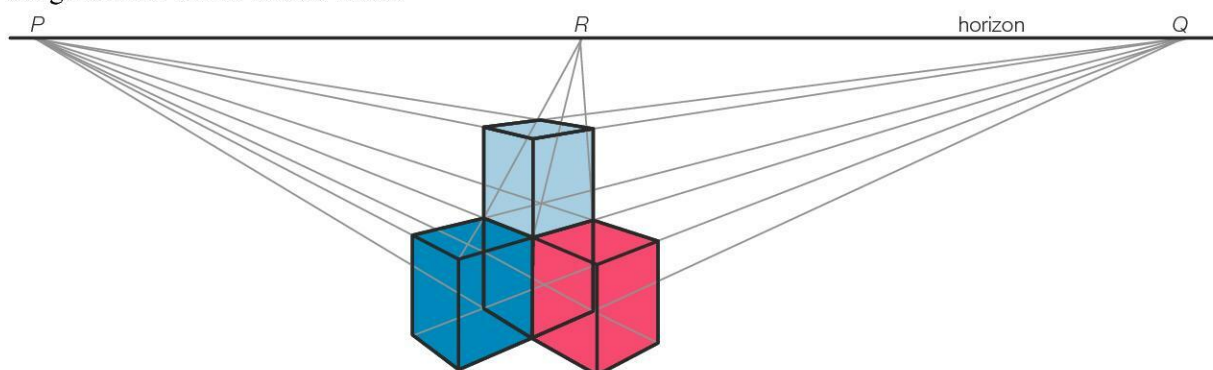
- 5** Er geldt dat de straal van de cirkel gelijk is aan $3 \cdot \varphi = 3 \cdot 1,618 = 4,854 \text{ cm}$.
 Elke driehoek van de tienhoek ziet er dus uit zoals de figuur hiernaast.
 De stelling van Pythagoras in driehoek ADC geeft $CD^2 = 4,854^2 - 1,5^2 = 21,31\dots$,
 dus $CD = \sqrt{21,31\dots} = 4,61\dots$
 De oppervlakte van de tienhoek is $10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4,61\dots \approx 69,25 \text{ cm}^2 = 6925 \text{ mm}^2$.



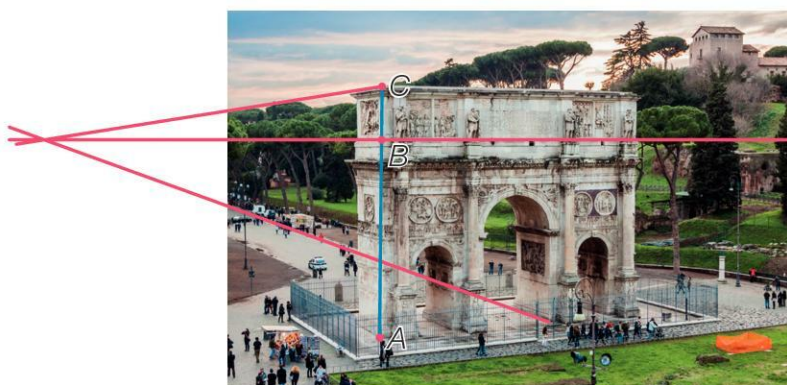
- 6 a** De zijvlakken van de kubus hebben een diagonaal van $\sqrt{35^2 + 35^2} \approx 49,5$ cm.



- b**
- verdwijnpunten P en Q en de horizon
 - verdubbel het bovenvlak met behulp van verdwijnpunt R voor het grondvlak van de bovenste kubus
 - bepaal de hoogte van de bovenste kubus door de hoogte van de kubus te verdubbelen
 - het bovenvlak van de bovenste kubus
 - verdubbel het grondvlak van de bovenste kubus voor het bovenvlak van de rechter kubus
 - het grondvlak van de rechter kubus



- 7 a**



Opmeten geeft $AB = 2,6$ cm en $AC = 3,3$ cm.

De foto is genomen vanaf een hoogte van $\frac{2,6}{3,3} \cdot 21 \approx 17$ m.

- b** 1 kubieke inch = $2,54^3$ cm³ en $10 \text{ dm}^3 = 10 \cdot 10^3$ cm³

Het volume van de miniatuurversie is $\frac{10 \cdot 10^3}{2,54^3} \approx 610$ kubieke inch.

- c** De echte boog is $\frac{21}{0,3} = 70$ keer zo groot, dus de inhoud van de echte boog is

$70^3 = 343\,000$ keer zo groot.

De echte boog heeft een inhoud van $10 \cdot 343\,000 = 3\,430\,000 \text{ dm}^3 = 3430 \text{ m}^3$.

14 Werken met formules

Voorkennis Intervallen en de delta-notatie

Bladzijde 83

- 1 a $0 < x < 6$
b $3,5 < x < 6,4$
c $x > 7$
d $x < 12,5$

- 2 a $1 < x < 4,5$
b $0,5 < x < 5$
c $x < 2$
d $x > 1,5$

Bladzijde 84

- 3 a Stijn lag halverwege voor.
b Bram heeft de wedstrijd gewonnen.
c In het tijdsinterval $0 < t < 60$ lag Stijn voor op Bram.

- 4 a $\Delta x = 7 - 2 = 5$
De bijbehorende Δy is $10 - 4 = 6$.
b $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{5} = 1,2$
$$\left. \begin{array}{l} y = 1,2x + b \\ \text{door } P(2, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,2 \cdot 2 + b = 4 \\ 2,4 + b = 4 \\ b = 1,6 \end{array}$$

Dus $l: y = 1,2x + 1,6$.

- 5 $N = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{10 - 4}{12 - 2} = 0,6$
$$\left. \begin{array}{l} N = 0,6t + b \\ \text{door } A(2, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,6 \cdot 2 + b = 4 \\ 1,2 + b = 4 \\ b = 2,8 \end{array}$$

Dus $k: N = 0,6t + 2,8$.

14.1 Stijgen en dalen van grafieken

Bladzijde 85

- 1 Tot en met 2017 neemt de stijging toe.
Vanaf 2018 neemt de stijging af.

Bladzijde 86

- 2 a toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$ en op $\langle 8, 10 \rangle$
afnemend stijgend op $\langle 4, 5 \rangle$ en op $\langle 10, 12 \rangle$
b afnemend dalend op $\langle 0, 2 \rangle$ en op $\langle 7, 8 \rangle$
toenemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$

Bladzijde 87

- 3 a constant stijgend op $\langle 0, 3 \rangle$
afnemend stijgend op $\langle 3, 4 \rangle$
toenemend dalend op $\langle 4, 5 \rangle$
afnemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$
toenemend stijgend op $\langle 7, 10 \rangle$
b Bij het klimmen neemt de snelheid van de fietser af. Dus op het interval $\langle 4, 7 \rangle$.

- 4 Stijn vergeet rekening te houden met de lengten van de perioden.

Bladzijde 88

- 5 a De gemiddelde verandering op $[2, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-5}{5-2} = \frac{1}{3}$.
 De gemiddelde verandering op $[3, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-8}{6-3} = -1$.
 De gemiddelde verandering op $[-1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-2}{5-(-1)} = \frac{2}{3}$.
- b Bijvoorbeeld $[2, 6]$.

Bladzijde 89

- 6 a In de periode 1980-1987 neemt N met $5,59 - 4,85 = 0,74$ toe.
 Hier is $\Delta t = 1987 - 1980 = 7$ en $\Delta N = 0,74$.
 De gemiddelde toename is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{0,74}{7} \approx 0,106$ miljoen per jaar.

b

periode	Δt	ΔN	$\frac{\Delta N}{\Delta t}$
1920-1947	27	0,75	0,028
1947-1964	17	1,03	0,061
1964-1970	6	0,60	0,100
1970-1980	10	1,10	0,110
1980-1987	7	0,74	0,106
1987-1995	8	0,71	0,089
1995-2000	5	0,29	0,058
2000-2019	19	1,23	0,065

- c De gemiddelde toename is het grootst in de periode 1970-1980.
 d De woningvoorraad nam steeds toe, maar de sterkste toename was in de periode tussen 1964 en 1987.

- 7 a Op $[0, 10]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{2250 - 250}{10 - 0} = \frac{2000}{10} = 200$.
 De gemiddelde toename gedurende de eerste 10 dagen is 200 vliegjes per dag.
 b Op $[2, 8]$ loopt de grafiek steiler dan op $[10, 14]$.
 c Het grootst op $[4, 8]$, het kleinst op $[0, 4]$.

Bladzijde 90

- 8 a Op $[9, 13]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 800}{13 - 9} = 200$.
 b Op $[12, 17]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 2000}{17 - 12} = -80$.
 $\frac{\Delta N}{\Delta t} < 0$, dus er is sprake van een afname.
 c Op $[9, 17]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1600 - 800}{17 - 9} = \frac{800}{8} = 100$, dus $[9, 17]$.
 d Op $[15, 18]$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1200 - 1800}{18 - 15} = \frac{-600}{3} = -200$, dus $[15, 18]$.
- 9 a Op elk interval is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5$.
 b Bij een lijn zijn alle gemiddelde veranderingen gelijk.

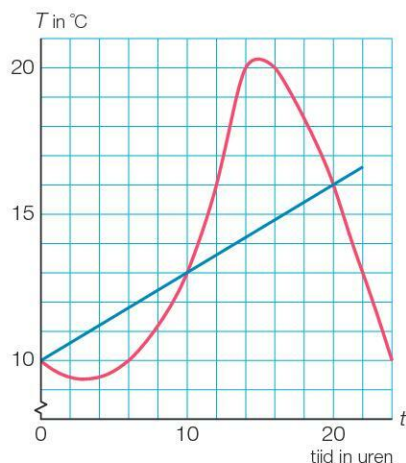
10 a Op $[6, 10]$ is $\Delta T = 13 - 10 = 3$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{3}{4} = 0,75^\circ\text{C}$ per uur.

Op $[9, 14]$ is $\Delta T = 20 - 12 = 8$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{8}{5} = 1,6^\circ\text{C}$ per uur.

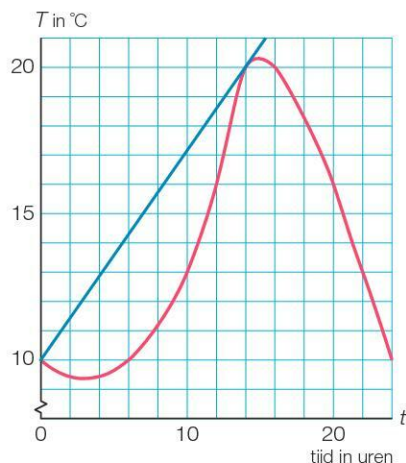
b Bijvoorbeeld op $[12, 22]$ is $\Delta T = 13 - 16 = -3$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{-3}{10} = -0,3$.

Dus op het interval $[12, 22]$ is de gemiddelde verandering $-0,3^\circ\text{C}$ per uur.

c Teken de lijn door $(0, 10)$ en $(10, 13)$. Deze lijn snijdt de grafiek ook in het punt $(20, 16)$. Dus voor $t = 20$.



d De gemiddelde toename is maximaal als de lijn het steilst is. Teken dus een lijn die zo steil mogelijk is door $(0, 10)$ en een ander punt van de grafiek. Dat is de lijn door $(14, 20)$. Dus voor $t = 14$.



11 a Teken de volgende punten. Begin met $(0, 2)$.

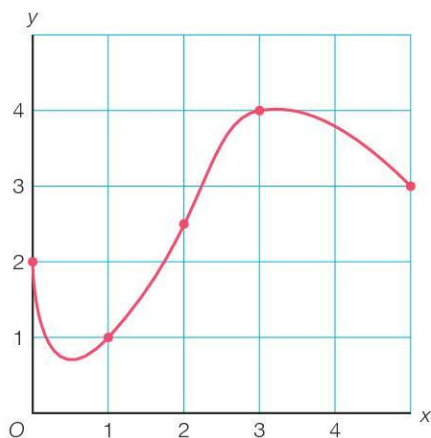
Op $[0, 2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$, dus door $(2, 2 + 2 \cdot \frac{1}{4}) = (2, 2\frac{1}{2})$.

Op $[0, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{5}$, dus door $(5, 2 + 5 \cdot \frac{1}{5}) = (5, 3)$.

Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$, dus door $(1, 3 - 4 \cdot \frac{1}{2}) = (1, 1)$.

Op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\frac{1}{2}$, dus door $(3, 1 + 2 \cdot 1\frac{1}{2}) = (3, 4)$.

Teken door deze punten een mogelijke grafiek.



De gemiddelde verandering op $[3, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 4}{5 - 3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

- b** Dat is mogelijk, want bij $x = 4$ is elke y -coördinaat mogelijk, dus ook $y = 5\frac{1}{2}$.

En op $[1, 4]$ geeft dit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\frac{1}{2} - 1}{4 - 1} = \frac{4\frac{1}{2}}{3} = 1\frac{1}{2}$.

Bladzijde 91

- 12** Van de vier lijnen komt de lijn AB_4 het dichtst bij de lijn die de grafiek in A raakt.

Bladzijde 93

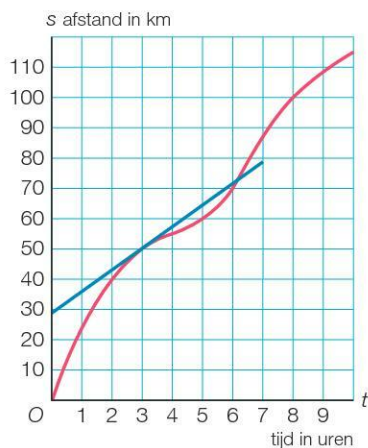
- 13 a** De raaklijn gaat door de punten $(5, 70)$ en $(10, 120)$.

De helling is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{120 - 70}{10 - 5} = 10$.

De snelheid op $t = 8$ is 10 km/uur.

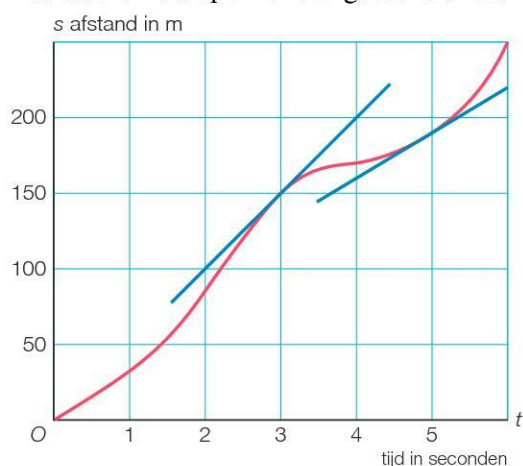
- b** Teken de raaklijn in het punt met $t = 3$. Deze gaat door de punten $(0, 29)$ en $(7, 79)$.

De helling is $\frac{79 - 29}{7 - 0} \approx 7,1$. De snelheid op $t = 3$ is 7,1 km/uur.

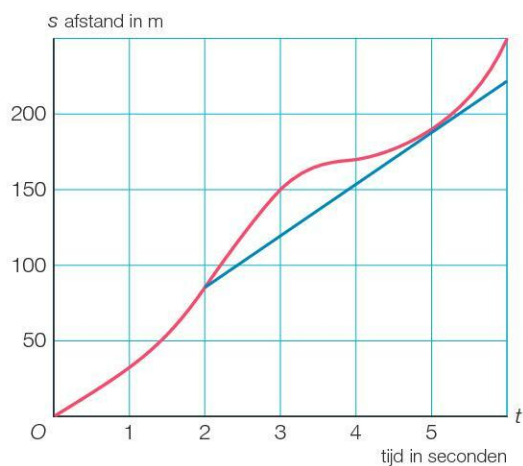


- c** Omdat de grafiek afnemend stijgend is op $[0, 4]$, neemt de snelheid af.
d De helling is het kleinst voor $t = 4$. Dus daar is de snelheid minimaal.

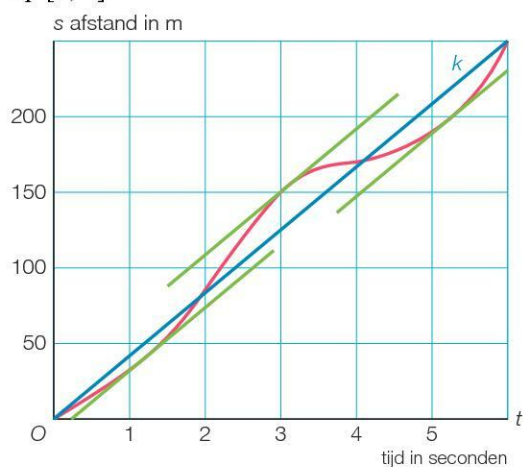
- 14 a** Teken de raaklijn in het punt $(3, 150)$. De helling van deze raaklijn is ongeveer 50. Dus de snelheid op $t = 3$ is ongeveer 50 m/s.
Teken de raaklijn in het punt $(5, 190)$. De helling van deze raaklijn is ongeveer 30. Dus de snelheid op $t = 5$ is ongeveer 30 m/s.



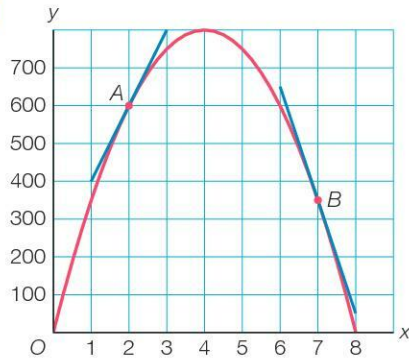
- b** De helling is het kleinst voor $t = 4$. Dus daar is de snelheid minimaal.
c De gemiddelde snelheid is minimaal als de lijn het minst steil is. Teken dus de minst steile lijn door $(2, 85)$ en een ander punt van de grafiek. Dat is de lijn door $(5, 180)$. Dus voor $t = 5$.



- d** Teken de lijn k door $(0, 0)$ en $(6, 250)$. De grafiek heeft drie raaklijnen die evenwijdig zijn met k .
Dus er zijn drie tijdstippen waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 6]$.



15

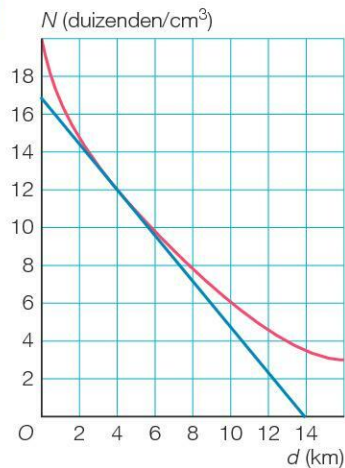


- a** Teken de raaklijn in het punt $A(2, 600)$.
De raaklijn gaat door het punt $(1, 400)$.
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{600 - 400}{2 - 1} = 200$$

Dus de snelheid van verandering in het punt A is 200.
- b** Teken de raaklijn in het punt $B(7, 350)$.
De raaklijn gaat door het punt $(8, 50)$.
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{50 - 350}{8 - 7} = -300$$

Dus de helling in het punt B is -300.

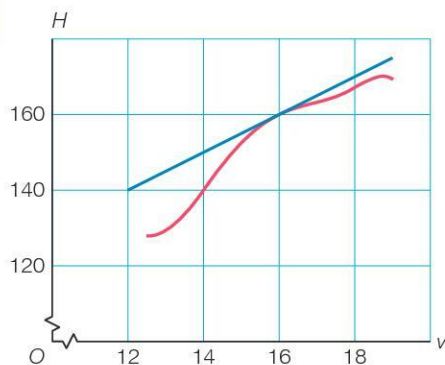
16



- Teken de raaklijn in het punt $(4, 12)$.
Deze raaklijn gaat door het punt $(14, 0)$.
$$\frac{\Delta N}{\Delta d} = \frac{0 - 12}{14 - 4} = -1,2$$

Dus de helling van de grafiek bij $d = 4$ is -1,2.
De betekenis is dat het aantal ultrafijnstofdeeltjes op een afstand van 4 km met 1200 per cm^3 vermindert bij elke km die je verder weggaat van het vliegveld.

17



Teken de raaklijn in het punt (16, 160).

Deze raaklijn gaat door het punt (12, 140).

$$\frac{\Delta H}{\Delta v} = \frac{160 - 140}{16 - 12} = 5$$

Dus de helling van de grafiek bij $v = 16$ is 5.

De betekenis is dat de hartslag bij een snelheid van 16 km/uur met 5 slagen per minuut toeneemt bij elke km/uur die Hans harder loopt.

Bladzijde 95

18

- a De periode is 11 jaar.
- b In 1988 en in 1992 zijn er 150 zonnevlekken. Dus 4 jaar achtereen.
- c Laatste maximum in de figuur is in 2012.
Dus in $2012 + 2 \cdot 11 = 2034$.
- d $2012 - 10 \cdot 11 = 1902$ en $2012 - 11 \cdot 11 = 1891$.
Dus in 1891.

Bladzijde 97

19

- a De periode is 20 uur.
- b Na 140 uur is de helderheid 70% en na 6 dagen = 144 uur is de helderheid 94%.
- c De overgang van maximale naar minimale helderheid duurt 16 uur en de overgang van minimale naar maximale helderheid duurt 4 uur.
- d De helderheid is gedurende 7 uren achter elkaar groter dan 80%.
- e Op 2 maart kan zij om 1:00 uur en om 21:00 uur maximale helderheid waarnemen.
Op 6 maart kan zij om 5:00 uur maximale helderheid waarnemen.

Bladzijde 98

20

- a De periode is 5 seconden.
- b Deze persoon ademt $\frac{60}{5} = 12$ keer per minuut in.
- c Na 48 seconden is het verschil in druk 1 mm kwikdruk.
Na 4 minuten en 26 seconden, dus na 266 seconden, is het verschil in druk -1 mm kwikdruk.
- d Per etmaal wordt er $0,5 \cdot 12 \cdot 60 \cdot 24 = 8640$ liter lucht ingeademd.
- e De periode is dan $\frac{5}{2} = 2,5$ seconde. Per kwartier wordt er dan $3 \cdot 24 \cdot 15 = 1080$ liter lucht ingeademd.

21

a $N = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{200 - 140}{3 - 0} = 20$

$$\left. \begin{array}{l} N = 20t + b \\ \text{door } (0, 140) \end{array} \right\} b = 140$$

Dus $N = 20t + 140$.

- b In het eerste kwartaal van 2022 worden naar verwachting $175 + 3 \cdot 20 = 235$ elektrische fietsen verkocht.

- c In 2016 zijn er in totaal $115 + 190 + 165 + 130 = 600$ elektrische fietsen verkocht.
 Per jaar worden er $4 \cdot 20 = 80$ meer verkocht.
 Dus in 2023 worden naar schatting $600 + 7 \cdot 80 = 1160$ elektrische fietsen verkocht.

14.2 Formules herschrijven

Bladzijde 100

- 22 a $\frac{5}{x} \cdot \frac{6}{y} = \frac{5 \cdot 6}{xy} = \frac{30}{xy}$, dus uitkomst I is juist.
 b $\frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{5y}{xy} + \frac{6x}{xy} = \frac{6x + 5y}{xy}$, dus uitkomst IV is juist.

Bladzijde 101

- 23 a $y = \frac{x}{\left(\frac{200}{x^2}\right)} = x \cdot \frac{x^2}{200} = \frac{x^3}{200}$
 b $y = \frac{x}{\left(\frac{200}{x^2}\right)} = \frac{x \cdot x^2}{\frac{200}{x^2} \cdot x^2} = \frac{x^3}{200}$
 c Omdat $\frac{x^2}{x^2} = 1$ is $\frac{\text{teller}}{\text{noemer}} \cdot \frac{x^2}{x^2}$ hetzelfde als $\frac{\text{teller}}{\text{noemer}} \cdot 1$.

Bladzijde 102

- 24 a $A = \frac{3}{x} \cdot \frac{5}{y} = \frac{15}{xy}$
 b $y = 5 + \frac{3}{x-2} = \frac{5}{1} + \frac{3}{x-2} = \frac{5(x-2)}{x-2} + \frac{3}{x-2} = \frac{5(x-2)+3}{x-2} = \frac{5x-10+3}{x-2} = \frac{5x-7}{x-2}$
 c $N = \frac{500}{a} - 70 = \frac{500}{a} - \frac{70}{1} = \frac{500}{a} - \frac{70a}{a} = \frac{500-70a}{a}$
 d $D = \frac{350}{x} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = \frac{350}{x} - \frac{350}{x} \cdot \frac{2}{x} = \frac{350}{x} - \frac{700}{x^2} = \frac{350x}{x^2} - \frac{700}{x^2} = \frac{350x-700}{x^2}$
 e $P = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} = \frac{t-1}{(t+1)(t-1)} - \frac{t+1}{(t+1)(t-1)} = \frac{t-1-(t+1)}{(t+1)(t-1)} = \frac{t-1-t-1}{(t+1)(t-1)} = \frac{-2}{(t+1)(t-1)}$
 f $C = \frac{6000}{\left(\frac{2x}{x-4}\right)} = \frac{6000(x-4)}{\frac{2x}{x-4}} = \frac{6000(x-4)}{2x} = \frac{3000(x-4)}{x} = \frac{3000x-12\,000}{x}$
- 25 a $N = \frac{100}{a} + \frac{200}{b} = \frac{100b}{ab} + \frac{200a}{ab} = \frac{200a+100b}{ab}$
 b $B = \frac{3}{2x} \cdot \frac{x^3}{5y} = \frac{3x^3}{10xy} = \frac{3x^2}{10y}$
 c $y = \frac{0,5}{x+3} - 0,2x = \frac{0,5}{x+3} - \frac{0,2x}{1} = \frac{0,5}{x+3} - \frac{0,2x(x+3)}{x+3} = \frac{0,5-0,2x(x+3)}{x+3} = \frac{0,5-0,2x^2-0,6x}{x+3}$
 d $P = \frac{380}{t^2} - \frac{40}{t} = \frac{380}{t^2} - \frac{40t}{t^2} = \frac{380-40t}{t^2}$
 e $E = \frac{150}{x} : \frac{x-4}{x} = \frac{150}{x} \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{150x}{x(x-4)} = \frac{150x}{x-4}$
 f $F = 8x \left(3 + \frac{5}{x^2}\right) = 24x + \frac{40x}{x^2} = \frac{24x}{1} + \frac{40}{x} = \frac{24x^2}{x} + \frac{40}{x} = \frac{24x^2+40}{x}$

$$26 \quad a \quad \frac{15 + \frac{3}{x}}{x} = \frac{\left(15 + \frac{3}{x}\right) \cdot x}{x^2} = \frac{15x + \frac{3}{x} \cdot x}{x^2} = \frac{15x + 3}{x^2}$$

$$b \quad \frac{20a}{b + \frac{a^2}{2b}} = \frac{20a \cdot 2b}{\left(b + \frac{a^2}{2b}\right) \cdot 2b} = \frac{40ab}{2b^2 + \frac{a^2}{2b} \cdot 2b} = \frac{40ab}{2b^2 + a^2}$$

$$c \quad \frac{\left(\frac{50}{x}\right)}{10} = \frac{\left(\frac{50}{x}\right) \cdot x}{10 \cdot x} = \frac{50}{10x} = \frac{5}{x}$$

$$d \quad \frac{50}{\left(\frac{10}{t}\right)} = 50 \cdot \frac{t}{10} = \frac{50t}{10} = 5t$$

$$e \quad p + 25 \cdot \frac{\left(\frac{100}{p}\right)}{5} = p + 25 \cdot \frac{\left(\frac{100}{p}\right) \cdot p}{5 \cdot p} = p + 25 \cdot \frac{100}{5p} = p + \frac{2500}{5p} = p + \frac{500}{p}$$

$$f \quad \frac{3 + \frac{2}{x}}{7 - \frac{1}{x}} = \frac{\left(3 + \frac{2}{x}\right) \cdot x}{\left(7 - \frac{1}{x}\right) \cdot x} = \frac{3x + \frac{2}{x} \cdot x}{7x - \frac{1}{x} \cdot x} = \frac{3x + 2}{7x - 1}$$

$$27 \quad a \quad A = \frac{5x^2 + 4x + 3}{x} = \frac{5x^2}{x} + \frac{4x}{x} + \frac{3}{x} = 5x + 4 + \frac{3}{x}$$

$$b \quad T = \frac{3x^2 + 6x + 180}{4x} = \frac{3x^2}{4x} + \frac{6x}{4x} + \frac{180}{4x} = \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2} + \frac{45}{x}$$

$$c \quad y = \frac{5a^2 + 10a}{2a^2} = \frac{5a^2}{2a^2} + \frac{10a}{2a^2} = 2\frac{1}{2} + \frac{5}{a}$$

$$28 \quad a \quad A = 18 \cdot \frac{\left(\frac{500}{x}\right)}{10} + 25x = 18 \cdot \frac{\left(\frac{500}{x}\right) \cdot x}{10 \cdot x} + 25x = 18 \cdot \frac{500}{10x} + 25x = \frac{9000}{10x} + 25x = \frac{900}{x} + 25x,$$

dus $A = \frac{900}{x} + 25x$.

$$b \quad T = \frac{50a}{\frac{a^2}{5b} + 2b} = \frac{50a \cdot 5b}{\left(\frac{a^2}{5b} + 2b\right) \cdot 5b} = \frac{250ab}{\frac{a^2}{5b} \cdot 5b + 10b^2} = \frac{250ab}{a^2 + 10b^2}, \text{ dus } T = \frac{250ab}{a^2 + 10b^2}.$$

$$c \quad N = \frac{2t^2 - 5t + 50}{2t} = \frac{2t^2}{2t} - \frac{5t}{2t} + \frac{50}{2t} = t - 2\frac{1}{2} + \frac{25}{t}$$

$$29 \quad a \quad A = 5 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{5p^2}{p^2} - \frac{2p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{5p^2 - 2p - 1}{p^2}$$

$$b \quad B = \frac{6}{x} \cdot \frac{5}{x+y} : \frac{4}{x+y} = \frac{30}{x(x+y)} \cdot \frac{x+y}{4} = \frac{30(x+y)}{4x(x+y)} = \frac{15}{2x}$$

$$c \quad C = \frac{12x^7 + 6x^5 + 18x^3}{36x^5} = \frac{12x^7}{36x^5} + \frac{6x^5}{36x^5} + \frac{18x^3}{36x^5} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{2x^2}$$

Bladzijde 103

$$30 \quad a \quad y = 4x - 15$$

$$4x = y + 15$$

$$x = \frac{1}{4}y + 3\frac{3}{4}$$

$$b \quad Q = 5\sqrt{2p-3}$$

$$\sqrt{2p-3} = \frac{1}{5}Q$$

$$2p-3 = \left(\frac{1}{5}Q\right)^2$$

$$2p-3 = \frac{1}{25}Q^2$$

$$2p = \frac{1}{25}Q^2 + 3$$

$$p = \frac{1}{50}Q^2 + 1\frac{1}{2}$$

$$c \quad y = 50x^{1,25}$$

$$x^{1,25} = \frac{1}{50}y$$

$$x = \left(\frac{1}{50}y\right)^{\frac{1}{1,25}}$$

$$x = \left(\frac{1}{50}\right)^{\frac{1}{1,25}} \cdot y^{\frac{1}{1,25}}$$

$$x \approx 0,044y^{0,8}$$

Dus $x = 0,044y^{0,8}$.

Bladzijde 104

31 a $y = 4(x - 1) + 6$

$$y = 4x - 4 + 6$$

$$y = 4x + 2$$

$$4x = y - 2$$

$$x = \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}$$

b $5x - 3y = 20$

$$5x = 3y + 20$$

$$x = \frac{3}{5}y + 4$$

c $y = \frac{1}{2}\sqrt{6x + 15}$

$$\sqrt{6x + 15} = 2y$$

$$6x + 15 = 4y^2$$

$$6x = 4y^2 - 15$$

$$x = \frac{2}{3}y^2 - 2\frac{1}{2}$$

d $y = 125(4x - 1)^3$

$$(4x - 1)^3 = \frac{1}{125}y$$

$$4x - 1 = \left(\frac{1}{125}y\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$4x - 1 = \left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$$

$$4x = \frac{1}{5}y^{\frac{1}{3}} + 1$$

$$x = \frac{1}{20}y^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}$$

e $y = 0,2x^{1,6}$

$$x^{1,6} = 5y$$

$$x = (5y)^{\frac{1}{1,6}}$$

$$x = 5^{\frac{1}{1,6}} \cdot y^{\frac{1}{1,6}}$$

$$x \approx 2,73y^{0,625}$$

Dus $x = 2,73y^{0,625}$.

f $y = 5x^{-1,25}$

$$x^{-1,25} = \frac{1}{5}y$$

$$x = \left(\frac{1}{5}y\right)^{\frac{1}{-1,25}}$$

$$x = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{-1,25}} \cdot y^{\frac{1}{-1,25}}$$

$$x \approx 3,62y^{-0,8}$$

Dus $x = 3,62y^{-0,8}$.

32 $A = 5 - \frac{12}{B+1}$

$$\frac{12}{B+1} = 5 - A$$

$$B+1 = \frac{12}{5-A}$$

$$B = \frac{12}{5-A} - 1$$

Bladzijde 105

33 $t = \frac{5}{2N-20} - 1\frac{1}{2}$

$$t = \frac{5}{2N-20} - \frac{1\frac{1}{2}(2N-20)}{2N-20}$$

$$t = \frac{5-3N+30}{2N-20}$$

$$t = \frac{-3N+35}{2N-20}$$

34 a $N = 6 - \frac{2}{t+1}$

$$\frac{2}{t+1} = 6 - N$$

$$t+1 = \frac{2}{6-N}$$

$$t = \frac{2}{6-N} - 1$$

$$t = \frac{2}{6-N} - \frac{6-N}{6-N}$$

$$t = \frac{2-6+N}{6-N}$$

$$t = \frac{N-4}{6-N}$$

Dus $a = -4$, $b = -1$ en $c = 6$.

b $\frac{4A}{A+B} = 3 - A$

$$A+B = \frac{4A}{3-A}$$

$$B = \frac{4A}{3-A} - A$$

$$B = \frac{4A}{3-A} - \frac{A(3-A)}{3-A}$$

$$B = \frac{4A}{3-A} - \frac{3A-A^2}{3-A}$$

$$B = \frac{A^2+A}{3-A}$$

c $\frac{3}{v-2} = \frac{5}{b-6}$

$$5 \cdot (v-2) = 3 \cdot (b-6)$$

$$5v - 10 = 3b - 18$$

$$5v = 3b - 8$$

$$v = \frac{3}{5}b - 1\frac{3}{5}$$

Bladzijde 106

35 a $q = 2p - 3$
 $2p = q + 3$
 $p = \frac{1}{2}q + 1\frac{1}{2}$

b
$$\left. \begin{array}{l} N = 3p + 4q - 5 \\ p = \frac{1}{2}q + 1\frac{1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} N = 3(\frac{1}{2}q + 1\frac{1}{2}) + 4q - 5 \\ N = 1\frac{1}{2}q + 4\frac{1}{2} + 4q - 5 \\ N = 5\frac{1}{2}q - \frac{1}{2} \end{array}$$

36 $A = 23t + 1010$, dus los op $23t + 1010 = 2321$.
 $23t = 1311$
 $t = 57$
 $t = 57$ geeft $s = 2\frac{1}{2} \cdot 57 + 20 = 162\frac{1}{2}$
Dus $t = 57$ en $s = 162\frac{1}{2}$.

37 a $r + 8s = 100$
 $r = -8s + 100$
 $T = 3r + 6s + 80$
$$\left. \begin{array}{l} r = -8s + 100 \\ T = 3r + 6s + 80 \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = 3(-8s + 100) + 6s + 80 \\ T = -24s + 300 + 6s + 80 \\ T = -18s + 380 \end{array}$$

b $5a - 8b = 160$
 $-8b = -5a + 160$

$$\left. \begin{array}{l} b = \frac{5}{8}a - 20 \\ C = 2a - 3b + 64 \end{array} \right\} \begin{array}{l} C = 2a - 3(\frac{5}{8}a - 20) + 64 \\ C = 2a - 1\frac{7}{8}a + 60 + 64 \\ C = \frac{1}{8}a + 124 \end{array}$$

Bladzijde 107

38 a $3m + 5n = 12$
 $5n = -3m + 12$
 $n = -\frac{3}{5}m + 2\frac{2}{5}$
$$\left. \begin{array}{l} n = -\frac{3}{5}m + 2\frac{2}{5} \\ Q = 5m - n + 125 \end{array} \right\} \begin{array}{l} Q = 5m - (-\frac{3}{5}m + 2\frac{2}{5}) + 125 \\ Q = 5m - n + 125 \\ Q = 5\frac{3}{5}m + 122\frac{3}{5} \end{array}$$

b $5\frac{3}{5}m + 122\frac{3}{5} = 201$
 $5\frac{3}{5}m = 78\frac{2}{5}$
 $m = 14$
 $m = 14$ geeft $n = 2\frac{2}{5} - \frac{3}{5} \cdot 14 = -6$
Dus $m = 14$ en $n = -6$.

39 a $t = -\frac{1}{3}p + 3\frac{2}{3}$
 $\frac{1}{3}p = -t + 3\frac{2}{3}$
 $p = -3t + 11$
 $A = 2t + 5p + 9$
$$\left. \begin{array}{l} p = -3t + 11 \\ A = 2t + 5p + 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 2t + 5(-3t + 11) + 9 \\ A = 2t - 15t + 55 + 9 \\ A = -13t + 64 \end{array}$$

Dus $a = -13$ en $b = 64$.

b $3x - 2y = 6$
 $-2y = -3x + 6$
 $y = 1,5x - 3$
$$\left. \begin{array}{l} y = 1,5x - 3 \\ B = 5xy + 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} B = 5x(1,5x - 3) + 20 \\ B = 7,5x^2 - 15x + 20 \end{array}$$

Dus $a = 7,5$, $b = -15$ en $c = 20$.

40 a $N = \frac{5x}{8} (16(2x-1) - 4\frac{4}{5}(6x-1))$

$$N = \frac{5x}{8} (32x - 16 - 28\frac{4}{5}x + 4\frac{4}{5})$$

$$N = \frac{5x}{8} (3\frac{1}{5}x - 11\frac{1}{5})$$

$$N = \frac{5x(3\frac{1}{5}x - 11\frac{1}{5})}{8}$$

$$N = \frac{16x^2 - 56x}{8}$$

$$N = 2x^2 - 7x$$

Dus $a = 2$ en $b = -7$.

b $xy = 2$ geeft $y = \frac{2}{x}$

$$P = \frac{18x^2 - 6}{3x} + \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 2}{2 \cdot \frac{2}{x}}$$

$$P = \frac{18x^2 - 6}{3x} + \frac{\frac{4}{x^2} + 2}{\frac{4}{x}}$$

$$P = \frac{6x^2 - 2}{x} + \frac{4 + 2x^2}{4x}$$

$$P = 6x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x$$

$$P = 6,5x - \frac{1}{x}$$

Dus $a = 6,5$ en $b = -1$.

41 a $x = 20$ geeft $K = \frac{1200}{20} + 2,5\sqrt{20} + 30 = 101,180\dots$

$$x = 40$$
 geeft $K = \frac{1200}{40} + 2,5\sqrt{40} + 30 = 75,811\dots$

$$\text{De relatieve verandering is } \frac{75,811\dots - 101,180\dots}{101,180\dots} \times 100\% \approx -25,1\%.$$

Dus afname met 25,1%.

b Voer in $y_1 = \frac{1200}{x} + 2,5\sqrt{x} + 30$.

De optie minimum geeft $x \approx 97$ en $y \approx 67$.

Dus bij 97 km² per deelgebied zijn de kosten minimaal.

c $n = \frac{6000}{x}$

$$x = \frac{6000}{n}$$

$$K = \frac{1200}{x} + 2,5\sqrt{x} + 30 \left\{ K = \frac{1200}{\left(\frac{6000}{n}\right)} + 2,5\sqrt{\frac{6000}{n}} + 30 \right.$$

$$K = 1200 \cdot \frac{n}{6000} + 2,5 \cdot \frac{\sqrt{6000}}{\sqrt{n}} + 30$$

$$K = 0,2n + \frac{193,649\dots}{\sqrt{n}} + 30$$

$$K \approx 0,2n + \frac{194}{\sqrt{n}} + 30$$

Dus $a = 0,2$ en $b = 194$.

14.3 Formules met exponenten en logaritmen

Bladzijde 109

- 42** a $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$, dus III is juist.
b $\frac{x^2}{x^3} = x^{2-3} = x^{-1}$, dus IV is juist.
c $\frac{3}{x} = \frac{3}{x^1} = 3x^{-1}$, dus II is juist.

Bladzijde 110

- 43** a $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$
Je gebruikt dus de rekenregel $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$.
b $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^1} = x^{-1}$
Je gebruikt dus de rekenregel $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.
- 44** a $a^5 \cdot \left(\frac{1}{a^3}\right)^2 = a^5 \cdot (a^{-3})^2 = a^5 \cdot a^{-6} = a^{-1}$
b $\frac{a}{a^{10}} \cdot (a^4)^n = a^{-9} \cdot a^{4n} = a^{4n-9}$
c $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{12}}$
- 45** a $\frac{2}{3} a^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{2\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{4}}} \cdot b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}} = \frac{2b^2 \cdot \sqrt{b}}{3 \cdot \sqrt[4]{a}}$
b $(6a^2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{(6a^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{6a^2}}$
c $\left(\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot (b^{-1\frac{1}{2}})^3 = (a^{-2})^{\frac{1}{4}} \cdot b^{-4\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{4\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{a}}{b^4 \cdot \sqrt{b}}$
- 46** a $16\sqrt{2} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{4\frac{1}{2}}$
b $\frac{1}{27} \cdot \sqrt[3]{3} = \frac{1}{3^3} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{-3} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{-2\frac{2}{3}}$
c $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{2} = 2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{3}{4}}$
d $9 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{9}} = 3^2 \cdot (3^{-2})^{\frac{1}{4}} = 3^2 \cdot 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{1\frac{1}{2}}$
e $32 \cdot 2^x = 2^5 \cdot 2^x = 2^{x+5}$
f $\frac{3^x}{81} = \frac{3^x}{3^4} = 3^{x-4}$
- 47** a $y = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (x^2)^3 = 20 \cdot \frac{1}{8} \cdot x^6 = 2\frac{1}{2}x^6$
Dus $y = 2\frac{1}{2}x^6$.
b $y = 153 \cdot 3^{3x-2} = 153 \cdot (3^3)^x \cdot 3^{-2} = 153 \cdot 27^x \cdot \frac{1}{9} = 17 \cdot 27^x$
Dus $y = 17 \cdot 27^x$.
c $y = \frac{10}{x^3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt[3]{x^2} = 10x^{-3} \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{2}{3}} = 4x^{-2\frac{1}{3}}$
Dus $y = 4x^{-2\frac{1}{3}}$.
d $y = 0,001 \cdot 4^{\frac{1}{2}x+6} = 0,001 \cdot (4^{\frac{1}{2}})^x \cdot 4^6 = 0,001 \cdot 2^x \cdot 4096 = 4,096 \cdot 2^x$
Dus $y = 4,096 \cdot 2^x$.
- 48** a $2^5 = 32$, dus $x = 5$.
b ${}^2\log(32) = 5$, want $2^5 = 32$.
c $g = 10$
d De GR geeft $\log(100) = 2$.
Omdat $\log(100) = \log(10^2)$ kun je ook zonder GR zeggen dat $\log(100) = 2$.
e ${}^2\log(5) = \frac{\log(5)}{\log(2)}$, dus $g = 2$ en $a = 5$.

Bladzijde 112

- 49** **a** De afspraak ${}^g\log(x) = a$ betekent $x = g^a$.
b De rekenregel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.
c De rekenregel $(a^p)^q = a^{pq}$.

- 50** **a** $N = 20 \cdot 1,3^{t-2}$
 $N = 20 \cdot 1,3^{-2} \cdot 1,3^t$
 $N \approx 12 \cdot 1,3^t$
Dus $N = 12 \cdot 1,3^t$.
b $P = 1500 \cdot 0,85^{3t+1}$
 $P = 1500 \cdot 0,85^1 \cdot 0,85^{3t}$
 $P = 1500 \cdot 0,85^1 \cdot (0,85^3)^t$
 $P \approx 1275 \cdot 0,614^t$
Dus $P = 1275 \cdot 0,614^t$.
c $\log(N) = 0,243t + 2,3$
 $N = 10^{0,243t+2,3}$
 $N = 10^{2,3} \cdot 10^{0,243t}$
 $N = 10^{2,3} \cdot (10^{0,243})^t$
 $N \approx 200 \cdot 1,75^t$
Dus $N = 200 \cdot 1,75^t$.
d $\log(T) = 3,93 - 0,086t$
 $T = 10^{3,93-0,086t}$
 $T = 10^{3,93} \cdot 10^{-0,086t}$
 $T = 10^{3,93} \cdot (10^{-0,086})^t$
 $T \approx 8511 \cdot 0,82^t$
Dus $T = 8511 \cdot 0,82^t$.
e $t = 5,7 \cdot \log(Q) - 12,4$
 $5,7 \cdot \log(Q) = t + 12,4$
 $\log(Q) = \frac{1}{5,7}t + \frac{12,4}{5,7}$
 $\log(Q) = 0,175...t + 2,175...$
 $Q = 10^{0,175...t+2,175...}$
 $Q = 10^{2,175...} \cdot 10^{0,175...t}$
 $Q = 10^{2,175...} \cdot (10^{0,175...})^t$
 $Q \approx 150 \cdot 1,50^t$
Dus $Q = 150 \cdot 1,50^t$.

Bladzijde 113

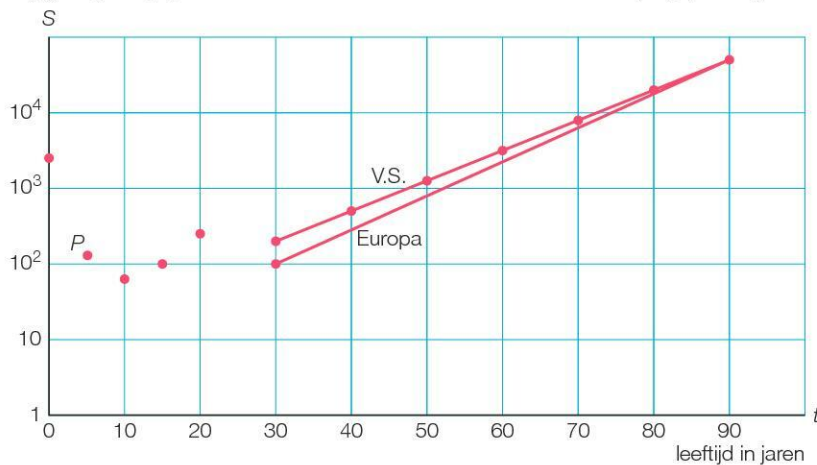
- 51** **a** $N = 50 \cdot 2^{4t-1}$
 $N = 50 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{4t}$
 $N = 50 \cdot 2^{-1} \cdot (2^4)^t$
 $N = 25 \cdot 16^t$
b $N = 50 \cdot 2^{4t-1}$
 $50 \cdot 2^{4t-1} = N$
 $2^{4t-1} = \frac{1}{50}N$
 $4t - 1 = {}^2\log\left(\frac{1}{50}N\right)$
 $4t = 1 + {}^2\log\left(\frac{1}{50}N\right)$
 $t = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot {}^2\log\left(\frac{1}{50}N\right)$
c $\log(N) = 0,54t + 3,12$
 $N = 10^{0,54t+3,12}$
 $N = 10^{3,12} \cdot 10^{0,54t}$
 $N = 10^{3,12} \cdot (10^{0,54})^t$
 $N \approx 1318 \cdot 3,47^t$
Dus $N = 1318 \cdot 3,47^t$.
d $K = 40 \cdot 10^{2t-0,8}$
 $40 \cdot 10^{2t-0,8} = K$
 $10^{2t-0,8} = 0,025K$
 $2t - 0,8 = \log(0,025K)$
 $2t = \log(0,025K) + 0,8$
 $t = 0,5 \cdot \log(0,025K) + 0,4$

- 52** **a** $\log(x) = 3 \cdot \log(y)$
 $x = 10^{3 \cdot \log(y)} = (10^{\log(y)})^3 = y^3$
Dus $y = x^3$.
b $\log(P) = 2 + 3 \cdot \log(Q)$
 $P = 10^{2+3 \cdot \log(Q)}$
 $P = 10^2 \cdot 10^{3 \cdot \log(Q)}$
 $P = 100 \cdot (10^{\log(Q)})^3$
 $P = 100 \cdot Q^3$
Dus $a = 100$ en $b = 3$.

- 53** **a** Bij 2021 hoort $t = 5$.
 $t = 5$ geeft $\log(N) = 0,0107 \cdot 5 + 1,518 = 1,5715$
 $\log(N) = 1,5715$ geeft $N = 10^{1,5715} \approx 37$
Dus 37 miljoen.
b Los op $0,0107t + 1,518 = \log(70)$
 $0,0107t = 0,327...$
 $t \approx 30,6$
Dus in $2016 + 31 = 2047$.
c $\log(N) = 0,0107t + 1,518$
 $N = 10^{0,0107t+1,518}$
 $N = 10^{1,518} \cdot 10^{0,0107t}$
 $N = 10^{1,518} \cdot (10^{0,0107})^t$
 $N \approx 33 \cdot 1,025^t$
Dus $N = 33 \cdot 1,025^t$.

Bladzijde 114

- 54 a** Bij $l = 20$ hoort $s = 10^{2+0,4} = 10^{2,4} \approx 251$, dus 251 sterfgevallen per 100 000 inwoners.
b Bij $l = 0$ hoort $s = 10^{3+0,4} = 10^{3,4} \approx 2512$.
 $\frac{2512}{100\,000} \times 100\% \approx 2,5\%$ van de pasgeboren baby's sterft binnen een jaar.
c $\log(126) \approx 2,1$, dus $10^{2,1} \approx 126$. De coördinaten van P zijn $(5, 10^{2,1})$. Zie de figuur.



- d** $s = 12\,600$ geeft $0,04l + 1,1 = \log(12\,600)$
 $0,04l = 3,00\dots$
 $l \approx 75$

Dus bij een leeftijd van ongeveer 75 jaar zijn er 12 600 sterfgevallen per 100 000 inwoners.

- e** $\log(s) = 0,04l + 1,1$
 $s = 10^{0,04l+1,1}$
 $s = 10^{1,1} \cdot 10^{0,04l}$
 $s = 10^{1,1} \cdot (10^{0,04})^l$
 $s \approx 12,6 \cdot 1,096^l$
Dus $s = 12,6 \cdot 1,096^l$.

- f** Neem $t = 30$ en $t = 90$ en bereken s en $\log(s)$.

l	30	90
s	107	53098
$\log(s)$	2,03	4,73

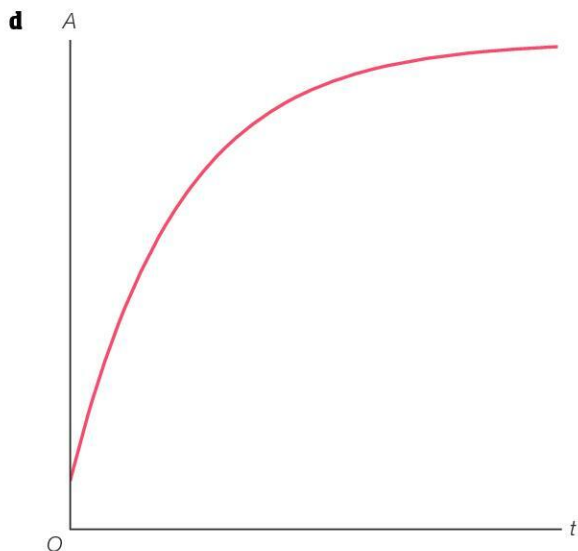
Gebruik de waarden van l en $\log(s)$ om de lijn te tekenen. Zie de figuur bij vraag c.

- g** Er geldt dan $12,6 \cdot 1,096^l = 4,8 \cdot 1,109^l$.
Voer in $y_1 = 12,6 \cdot 1,096^x$ en $y_2 = 4,8 \cdot 1,109^x$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 81,8$.
Dus bij een leeftijd van ongeveer 82 jaar.

14.4 Redeneren met formules

Bladzijde 116

- 55 a** Als t heel groot wordt, dan nadert $90 \cdot 0,8^t$ tot 0, dus dan wordt $A = 100 - 90 \cdot 0,8^t \approx 100 - 0 = 100$.
b Als t toeneemt, dan neemt $0,8^t$ af, dus dan neemt $90 \cdot 0,8^t$ af, dus dan neemt $100 - 90 \cdot 0,8^t$ toe.
c Als t toeneemt, dan neemt $A = 100 - 90 \cdot 0,8^t$ toe, dus de grafiek van A is stijgend.



De grafiek is inderdaad stijgend.

Bladzijde 118

- 56 a** Als t toeneemt, dan neemt $0,5^t$ af, dus ook $32 \cdot 0,5^t$ neemt af, dus ook $1 + 32 \cdot 0,5^t$ neemt af, dus $\frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t}$ neemt toe.
Dus de zonnebloem wordt voortdurend hoger.
- b** $t = 3$ geeft $h = \frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^3} = 52$
Dus 52 cm hoog.
- c** Als t heel groot wordt, dan nadert $0,5^t$ tot 0. Dan wordt $32 \cdot 0,5^t \approx 0$ en $1 + 32 \cdot 0,5^t \approx 1$.
Dus dan wordt $\frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t} \approx \frac{260}{1} = 260$, dus de grenswaarde is 260 cm.
- d** Los op $\frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^t} = 250$.
Voer in $y_1 = \frac{260}{1 + 32 \cdot 0,5^x}$ en $y_2 = 250$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 9,64$.
Dus vanaf $t = 9,7$.

- 57 a** Als t toeneemt, dan neemt $0,7^t$ af, dus $1 - 0,7^t$ neemt toe, dus ook $1200(1 - 0,7^t)$ neemt toe.
De grafiek van N is dus stijgend.
- b** Als t heel groot wordt, dan nadert $0,7^t$ tot 0. Dan wordt $1 - 0,7^t \approx 1$. Dus dan wordt $1200(1 - 0,7^t) \approx 1200 \cdot 1 = 1200$, dus het verzadigingsniveau is 1200 leerlingen.
De lijn is $N = 1200$.
De praktische betekenis van het verzadigingsniveau is dat op den duur 1200 leerlingen van het feit op de hoogte zijn.
- c** Los op $1200(1 - 0,7^t) = 950$.
Voer in $y_1 = 1200(1 - 0,7^x)$ en $y_2 = 950$.
De optie snijpunt geeft $x = 4,398...$
Dus na 4 uur en $0,398... \times 60 \approx 24$ minuten, dat is om 13:24 uur.

Bladzijde 119

- 58 a** Omdat $2^{-0,23t} = (2^{-0,23})^t \approx 0,85^t$ geldt: als t heel groot wordt, dan nadert $2^{-0,23t}$ tot 0. Dan wordt $13 \cdot 2^{-0,23t} \approx 0$ en $20 + 13 \cdot 2^{-0,23t} \approx 20$.
Dus dan wordt $\frac{500}{20 + 13 \cdot 2^{-0,23t}} \approx \frac{500}{20} = 25$, dus het verzadigingsniveau is 25.
- b** Als t toeneemt, dan neemt ook $1,8^t$ toe, dus ook $2,1 \cdot 1,8^t$ neemt toe, dus ook $8 + 2,1 \cdot 1,8^t$ neemt toe, dus $\frac{720}{8 + 2,1 \cdot 1,8^t}$ neemt af.
Dus de grafiek van N is dalend.

- c** Als t toeneemt, dan neemt $1,5^t$ toe, dus ook $1 + 1,5^t$ neemt toe, dus ook $8000(1 + 1,5^t)$ neemt toe.
Dus de grafiek van N is stijgend.
- d** Als t heel groot wordt, dan nadert $0,8^t$ tot 0. Dan wordt $50 \cdot 0,8^t \approx 0$.
Dus dan wordt $160 - 50 \cdot 0,8^t \approx 160 - 0 = 160$, dus de grenswaarde is 160.

- 59 a** De toename is $\frac{961 - 705}{705} \times 100\% \approx 36,3\%$.
- b** $g_{10 \text{ dagen}} = \frac{280}{63}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{280}{63}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 1,1609$.
Het groeipercentage per dag is 16,1%.
- c** Op 23 april om 0:00 uur is $t = 22$, dat is 7 dagen na $t = 15$.
Dit geeft $N = 63 \cdot 1,16^7 \approx 178$, dus 178 fruitvliegjes.
- d** Voor $t = 45$ is de telling 961 en geeft de formule $N = \frac{1035}{1 + 210 \cdot 0,84^{45}} \approx 956$.
De afwijking is $\frac{961 - 956}{961} \times 100\% \approx 0,5\%$.
- e** Als t heel groot wordt, dan nadert $0,84^t$ tot 0.
Dan wordt $210 \cdot 0,84^t \approx 0$ en $1 + 210 \cdot 0,84^t \approx 1$.
Dus dan wordt $\frac{1035}{1 + 210 \cdot 0,84^t} \approx \frac{1035}{1} = 1035$, dus het verzadigingsniveau is 1035.
Dat is in overeenstemming met de verwachting van de bioloog.

Bladzijde 120

- 60 a** Voor $t = 0,5$ geeft de formule $P = \frac{92}{2,39^{0,5}} + \frac{32}{1,04^{0,5}} + 10 \approx 100,9$. En het is niet mogelijk meer dan 100% van de woorden te herinneren.
- b** De helft is 50 procent, dus los op $\frac{92}{2,39^t} + \frac{32}{1,04^t} + 10 = 50$.
Voer in $y_1 = \frac{92}{2,39^x} + \frac{32}{1,04^x} + 10$ en $y_2 = 50$.
De optie snijpunt geeft $x = 2,445\dots$
Het duurt 2 minuten en $0,445\dots \times 60 \approx 27$ seconden.
- c** Als t heel groot wordt, dan nadert $\frac{92}{2,39^t}$ tot 0 en ook nadert $\frac{32}{1,04^t}$ tot 0.
Dus dan wordt $\frac{92}{2,39^t} + \frac{32}{1,04^t} + 10 \approx 0 + 0 + 10 = 10$, dus de grenswaarde is 10.
Dat betekent dat op den duur nog 10% van de woorden correct wordt herinnerd.
- d** $P = \frac{92}{2,39^t} + \frac{32}{1,04^t} + 10 = 92 \cdot 2,39^{-t} + 32 \cdot 1,04^{-t} + 10$
 $= 92 \cdot (2,39^{-1})^t + 32 \cdot (1,04^{-1})^t + 10 \approx 92 \cdot 0,418^t + 32 \cdot 0,962^t + 10$
Dus $a = 0,418$ en $b = 0,962$.

- 61 a** y neemt toe
b y neemt af
c y neemt af
d y neemt toe

Bladzijde 121

- 62 a** $y = 5x^{-3} = \frac{5}{x^3}$
Als x toeneemt, dan neemt x^3 toe, dus $\frac{5}{x^3}$ neemt af.
De grafiek van y is dalend.

- b** Als x heel groot wordt, dan wordt $3x$ heel groot en dan wordt $3x + 1$ heel groot, dus dan nadert $\frac{20}{3x+1}$ tot 0 en dan wordt $100 - \frac{20}{3x+1} \approx 100 - 0 = 100$.
Dus de grenswaarde is 100.

Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 heel groot en dan wordt $x^2 + 1$ heel groot, dus dan nadert $\frac{10}{x^2+1}$ tot 0 en dan wordt $\frac{10}{x^2+1} - 5 \approx 0 - 5 = -5$. Dus de grenswaarde is -5.

Als x heel groot wordt, dan nadert $0,8^x$ tot 0, dus dan is $50 \cdot 0,8^x \approx 0$.

Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot.

Als x heel groot wordt, dan wordt van $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}}$ de teller ongeveer nul en de noemer heel groot, dus dan wordt $\frac{50 \cdot 0,8^x}{\sqrt{x}} \approx 0$.

De grenswaarde is 0.

63 a stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $\frac{100}{x}$ af, dus dan neemt $250 - \frac{100}{x}$ toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan nadert $\frac{100}{x}$ tot 0, dus dan wordt $250 - \frac{100}{x} \approx 250 - 0 = 250$.

Dus de grenswaarde is 250.

b stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $0,98^x$ af en $100 \cdot 0,98^x$ neemt af.

Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe en $x^2 + 1$ neemt toe.

Van $\frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2+1}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2+1}$ neemt af.

Dus de grafiek van y is dalend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan nadert $0,98^x$ tot 0, dus dan wordt $100 \cdot 0,98^x \approx 0$.

Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 heel groot, dus dan wordt $x^2 + 1$ heel groot.

Als x heel groot wordt, dan wordt van $\frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2+1}$ de teller ongeveer nul en de

noemer heel groot, dus dan wordt $\frac{100 \cdot 0,98^x}{x^2+1} \approx 0$.

De grenswaarde is 0.

c stijgen of dalen

Als t toeneemt, dan neemt $0,75^t$ af, dus dan neemt $3 \cdot 0,75^t$ af en daarom neemt $2 - 3 \cdot 0,75^t$ toe.

Dus ook $1250(2 - 3 \cdot 0,75^t)$ neemt toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

grenswaarde

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,75^t$ tot 0, dus dan wordt $3 \cdot 0,75^t \approx 0$ en dan wordt $2 - 3 \cdot 0,75^t \approx 2 - 0 = 2$. Dus dan wordt $1250(2 - 3 \cdot 0,75^t) \approx 1250 \cdot 2 = 2500$.

De grenswaarde is 2500.

64 a stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe, dus dan neemt $\frac{12}{x^2}$ af en dan neemt $25 + \frac{12}{x^2}$ ook af.

Dus de grafiek van y is dalend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 heel groot, dus dan nadert $\frac{12}{x^2}$ tot 0 en dan wordt

$$25 + \frac{12}{x^2} \approx 25 + 0 = 25.$$

De grenswaarde is 25.

b stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe, dus dan neemt $2 + \sqrt{x}$ toe en dan neemt $\frac{80}{2 + \sqrt{x}}$ dus af. Daarom neemt $40 - \frac{80}{2 + \sqrt{x}}$ toe.

De grafiek van y is stijgend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot, dus dan wordt $2 + \sqrt{x}$ heel groot en dan nadert $\frac{80}{2 + \sqrt{x}}$ tot 0. Dus dan wordt $40 - \frac{80}{2 + \sqrt{x}} \approx 40 - 0 = 40$.

De grenswaarde is 40.

c stijgen of dalen

Als t toeneemt, dan neemt $0,65^t$ af, dus dan neemt $333 \cdot 0,65^t$ af, dus ook

$250 + 333 \cdot 0,65^t$ neemt af. Daarom neemt $\frac{18000}{250 + 333 \cdot 0,65^t}$ toe.

De grafiek van N is stijgend.

grenswaarde

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,65^t$ tot 0, dus dan wordt $333 \cdot 0,65^t \approx 0$ en dan wordt $250 + 333 \cdot 0,65^t \approx 250 + 0 = 250$.

$$\text{Dan wordt } \frac{18000}{250 + 333 \cdot 0,65^t} \approx \frac{18000}{250} = 72.$$

De grenswaarde is 72.

65 a Als x toeneemt, dan neemt $\frac{x}{22}$ toe, dus dan neemt $3 + \frac{x}{22}$ toe.

Daarom neemt $x\left(3 + \frac{x}{22}\right)$ ook toe.

De grafiek van A is stijgend.

b Als x toeneemt, dan neemt $x^{2,3}$ toe, dus dan neemt $x^{2,3} + 1$ toe.

Als x toeneemt, dan neemt $0,3^x$ af, dus dan neemt $20 \cdot 0,3^x$ af.

Van $\frac{x^{2,3} + 1}{20 \cdot 0,3^x}$ neemt de teller toe en de noemer af, dus $\frac{x^{2,3} + 1}{20 \cdot 0,3^x}$ neemt toe.

De grafiek van B is stijgend.

c Als x toeneemt, dan neemt 3^{2x} toe, dus dan neemt $3^{2x} + 1$ toe.

Omdat $3^{-x} = (3^{-1})^x \approx 0,4^x$ geldt: als x toeneemt, dan neemt 3^{-x} af, dus dan neemt $1 + 3^{-x}$ af.

Van $\frac{3^{2x} + 1}{1 + 3^{-x}}$ neemt de teller toe en de noemer af, dus $\frac{3^{2x} + 1}{1 + 3^{-x}}$ neemt toe.

De grafiek van C is stijgend.

66 a Als v toeneemt, dan neemt v^2 toe, dus dan neemt (bij gelijkblijvende f) ook $\frac{v^2}{25f}$ toe.

Dus als v toeneemt, neemt L toe, oftewel bij een hogere snelheid hoort een langere remweg.

- b** Als f afneemt, dan neemt $25f$ af, dus dan neemt (bij gelijkblijvende v) $\frac{v^2}{25f}$ toe.
Dus als f afneemt, neemt L toe, oftewel bij minder grip hoort een langere remweg.
- c** $L = 38$ geeft $\frac{v^2}{25f} = 38$, dus $25f \cdot 38 = v^2$

$$f = \frac{v^2}{25 \cdot 38} = \frac{v^2}{950}$$

Dus $f = \frac{1}{950} v^2$.
- d** Bij een snelheid van a km/uur is $L = \frac{a^2}{25f}$.
Bij een 20% hogere snelheid, dus bij $v = 1,2a$ is $L = \frac{(1,2a)^2}{25f} = \frac{1,44a^2}{25f} = 1,44 \cdot \frac{a^2}{25f}$
Dus de lengte van de remweg neemt met 44% toe bij een 20% hogere snelheid.
- e** $L = 40$ geeft $\frac{v^2}{25f} = 40$, dus $v^2 = 1000f$ en $v = \sqrt{1000f}$.
8,4% toename van f , dus vul in de formule $1,084f$ in voor f .
Je krijgt $v = \sqrt{1000 \cdot 1,084f} = \sqrt{1,084} \cdot \sqrt{1000f}$.
Dus $\sqrt{1,084} \approx 1,041$ keer zo hoge snelheid, dat is 4,1% hoger.

67 Voor de grote schildpad geldt $\frac{g}{l^3} = 0,17$.

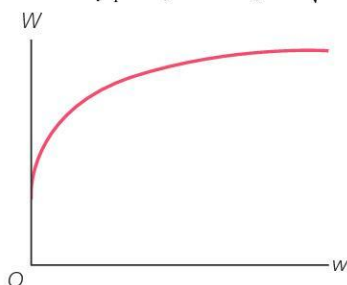
Voor de kleine schildpad is l kleiner dan bij de grote, terwijl g gelijk is.

Dus de teller is gelijk en de noemer is kleiner, dus de breuk $\frac{g}{l^3}$ is groter.

Dus voor de kleine schildpad is $\frac{g}{l^3} > 0,17$, dus deze verkeert in voldoende conditie.

Bladzijde 123

- 68 a** $T = 33$ en $G = 33 + (T - 33) \cdot W$ geeft $G = 33 + (33 - 33)W = 33 + 0W = 33$.
Dus bij een luchttemperatuur van 33°C is de gevoelstemperatuur 33°C ongeacht de windsnelheid.
- b** Voer in $y_1 = 0,474 + 0,454\sqrt{x} \cdot (1 - 0,1\sqrt{x})$



De grafiek van W is afnemend stijgend.

- c** Voor temperaturen rond het vriespunt geldt $T \approx 0$, dus dan is $T - 33$ negatief. De grafiek van G daalt dus als W toeneemt. Uit de schets blijkt dat W toeneemt als w toeneemt.
Dus de gevoelstemperatuur neemt af als de windsnelheid toeneemt.

Diagnostische toets

Bladzijde 126

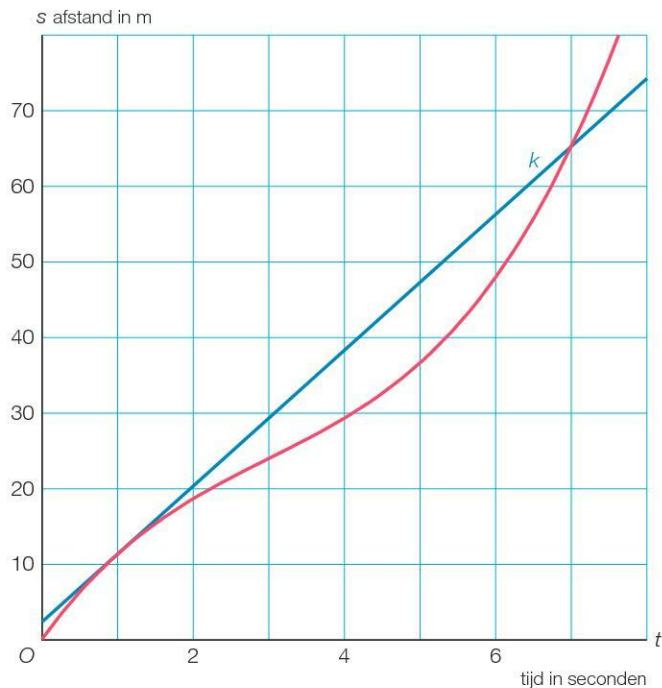
- 1 a** afnemend stijgend op $\langle 0, 4 \rangle$ en op $\langle 9, 10 \rangle$
toenemend dalend op $\langle 4, 6 \rangle$ en op $\langle 10, 12 \rangle$
afnemend dalend op $\langle 6, 7 \rangle$
toenemend stijgend op $\langle 7, 9 \rangle$

b De gemiddelde verandering op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-4}{4-0} = 1,25$.

De gemiddelde verandering op $[2, 12]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-8}{12-2} = -0,4$.

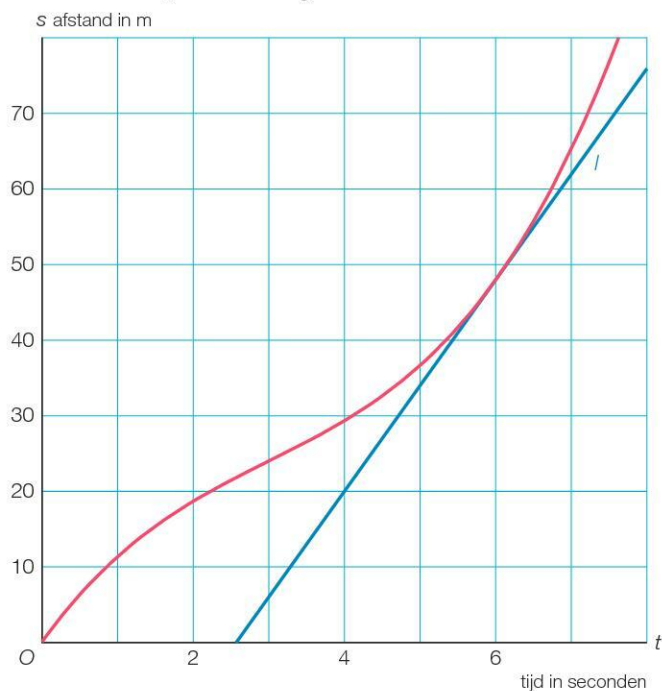
2

a



Raaklijn k door $(0, 2)$ en $(8, 74)$, dus $rc_k = \frac{74-2}{8-0} = 9$.

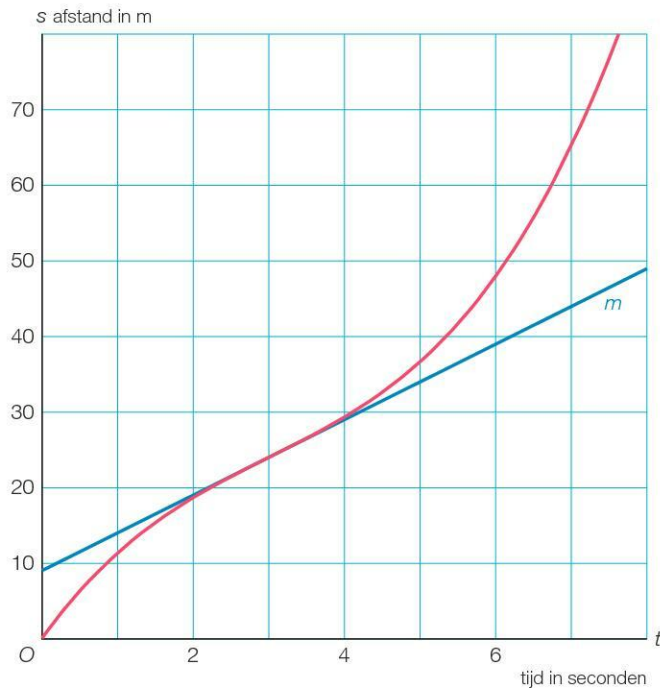
De snelheid op $t = 1$ is ongeveer 9 m/s.



Raaklijn l door $(4, 20)$ en $(8, 76)$, dus $rc_l = \frac{76-20}{8-4} = 14$.

De snelheid op $t = 6$ is ongeveer 14 m/s.

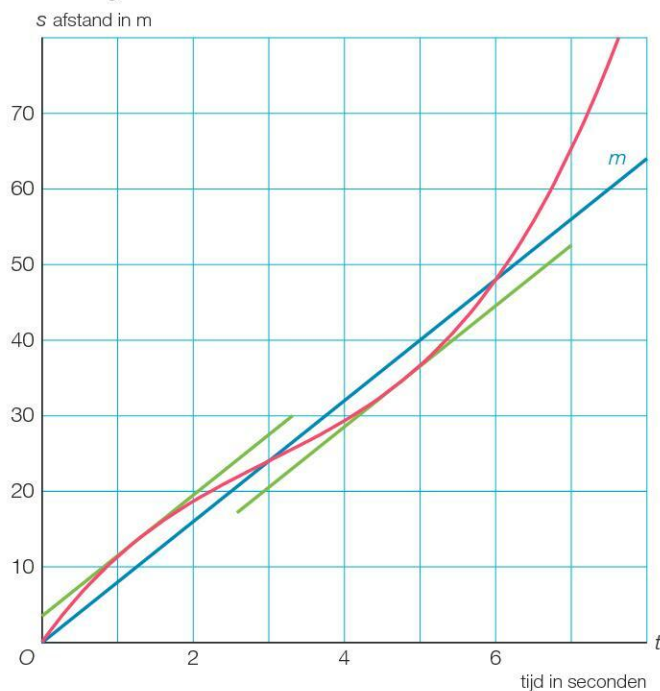
- b** Voor $t = 3$ krijg je de raaklijn met de kleinste richtingscoëfficiënt.
Dus voor $t = 3$ is de snelheid minimaal.



Raaklijn m door $(0, 9)$ en $(8, 49)$, dus $rc_m = \frac{49 - 9}{8 - 0} = 5$.

Dus de minimale snelheid is ongeveer 5 m/s.

- c** Teken de lijn door $(0, 0)$ en $(6, 48)$.
Er zijn twee lijnen die raken aan de grafiek en evenwijdig zijn met deze lijn.
Zie de figuur.



Er zijn dus twee tijdstippen tussen $t = 0$ en $t = 6$ waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op $[0, 6]$.

3 periode = 30

$$\text{evenwichtswaarde} = \frac{25 + 10}{2} = 7,5$$

$$\text{amplitude} = 10 - (-10) = 20$$

$$4 \quad a \quad y = \frac{25}{2x} \left(3 + \frac{5}{x} \right) = \frac{75}{2x} + \frac{125}{2x^2} = \frac{75x}{2x^2} + \frac{125}{2x^2} = \frac{75x + 125}{2x^2}$$

$$b \quad H = \frac{120x}{\frac{x}{4y} + 3xy} = \frac{120x \cdot 4y}{\left(\frac{x}{4y} + 3xy \right) \cdot 4y} = \frac{480xy}{x + 12xy^2} = \frac{480y}{1 + 12y^2}$$

$$\text{Dus } H = \frac{480y}{1 + 12y^2}.$$

$$c \quad P = \frac{3f^2 + 120f + 6}{6f} = \frac{3f^2}{6f} + \frac{120f}{6f} + \frac{6}{6f} = \frac{1}{2}f + 20 + \frac{1}{f}$$

$$5 \quad a \quad q = \frac{3-p}{2p+1}$$

$$q(2p+1) = 3-p$$

$$2pq + q = 3-p$$

$$2pq + p = 3-q$$

$$p(2q+1) = 3-q$$

$$p = \frac{3-q}{2q+1}$$

$$b \quad y = 2\sqrt{2x-5}$$

$$2\sqrt{2x-5} = y$$

$$\sqrt{2x-5} = \frac{1}{2}y$$

$$2x-5 = \left(\frac{1}{2}y\right)^2$$

$$2x-5 = \frac{1}{4}y^2$$

$$2x = \frac{1}{4}y^2 + 5$$

$$x = \frac{1}{8}y^2 + 2\frac{1}{2}$$

$$c \quad \frac{2}{s+3} = \frac{6}{t+2}$$

$$6 \cdot (s+3) = 2 \cdot (t+2)$$

$$6s + 18 = 2t + 4$$

$$6s = 2t - 14$$

$$s = \frac{1}{3}t - 2\frac{1}{3}$$

$$6 \quad a \quad \left. \begin{array}{l} A = 3s - 4t + 8 \\ s - 2t = 5 \text{ geeft } s = 2t + 5 \end{array} \right\} A = 3(2t + 5) - 4t + 8 = 6t + 15 - 4t + 8 = 2t + 23$$

Dus $A = 2t + 23$.

$$b \quad y = x - 3 \text{ en } z = 2x + 5 \text{ invullen bij } A = \frac{3x}{2}(12y - 3z) \text{ geeft}$$

$$A = \frac{3x}{2}(12(x-3) - 3(2x+5))$$

$$A = \frac{3x}{2}(12x - 36 - 6x - 15)$$

$$A = \frac{3x}{2}(6x - 51)$$

$$A = \frac{3x}{2} \cdot 6x - \frac{3x}{2} \cdot 51$$

$$A = 9x^2 - 76\frac{1}{2}x$$

$$\text{Dus } p = 9 \text{ en } q = -76\frac{1}{2}.$$

$$7 \quad a \quad N = 80 \cdot \left(\frac{1}{4}x^3\right)^2 = 80 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot (x^3)^2 = 80 \cdot \frac{1}{16} \cdot x^6 = 5x^6$$

$$\text{Dus } N = 5x^6.$$

$$b \quad N = 12 \cdot 1,25^{2t+1} = 12 \cdot 1,25^1 \cdot 1,25^{2t} = 12 \cdot 1,25^1 \cdot (1,25^2)^t = 15 \cdot 1,5625^t$$

Dus $N = 15 \cdot 1,5625^t$.

8 a $N = \frac{1}{4} \cdot 10^{3-2t}$
 $\frac{1}{4} \cdot 10^{3-2t} = N$
 $10^{3-2t} = 4N$
 $3 - 2t = \log(4N)$
 $-2t = \log(4N) - 3$
 $t = -\frac{1}{2} \cdot \log(4N) + 1\frac{1}{2}$
Dus $t = -\frac{1}{2} \cdot \log(4N) + 1\frac{1}{2}$.

b $1,3 \cdot \log(N) = 0,65t + 3,38$
 $\log(N) = 0,5t + 2,6$
 $N = 10^{0,5t+2,6}$
 $N = 10^{0,5t} \cdot 10^{2,6}$
 $N = 10^{2,6} \cdot (10^{0,5})^t$
 $N \approx 398 \cdot 3,162^t$
Dus $N = 398 \cdot 3,162^t$.

- 9 a** Als t toeneemt, dan neemt $0,78^t$ af, dus dan neemt $12 \cdot 0,78^t$ af, dus ook $200 + 12 \cdot 0,78^t$ neemt af. Daarom neemt $\frac{5000}{200 + 12 \cdot 0,78^t}$ toe.
De grafiek van N is stijgend.
- b** Als t heel groot wordt, dan nadert $0,78^t$ tot 0, dus dan wordt $12 \cdot 0,78^t \approx 0$ en dan wordt $200 + 12 \cdot 0,78^t \approx 200 + 0 = 200$. Dan wordt $\frac{5000}{200 + 12 \cdot 0,78^t} \approx \frac{5000}{200} = 25$.
Het verzadigingsniveau is 25.

- 10 a** stijgen of dalen
Als t toeneemt, dan neemt $2t$ toe, dus dan neemt $2t + 1$ toe en dan neemt $\frac{7}{2t+1}$ af.
Daarom neemt $4 - \frac{7}{2t+1}$ toe.
De grafiek van K is stijgend.
- grenswaarde
Als t heel groot wordt, dan wordt $2t$ heel groot, dus dan wordt $2t + 1$ heel groot en dan nadert $\frac{7}{2t+1}$ tot 0. Dus dan wordt $4 - \frac{7}{2t+1} \approx 4 - 0 = 4$.
De grenswaarde is 4.

- b** stijgen of dalen
Als x toeneemt, dan neemt $0,3^x$ af, dus dan neemt $50 \cdot 0,3^x$ af.
Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe, dus dan neemt $\sqrt{x} + 2$ toe.
Van $\frac{50 \cdot x^{0,3}}{\sqrt{x} + 2}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{50 \cdot x^{0,3}}{\sqrt{x} + 2}$ neemt af en dus neemt ook $\frac{50 \cdot x^{0,3}}{\sqrt{x} + 2} + 1200$ af.
De grafiek van y is dalend.
- grenswaarde
Als x heel groot wordt, dan nadert $0,3^x$ tot 0, dus dan wordt $50 \cdot 0,3^x \approx 0$.
Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot, dus dan wordt $\sqrt{x} + 2$ heel groot.
Dan nadert $\frac{50 \cdot x^{0,3}}{\sqrt{x} + 2}$ tot nul en wordt $\frac{50 \cdot x^{0,3}}{\sqrt{x} + 2} + 1200 \approx 0 + 1200 = 1200$.
De grenswaarde is 1200.

15 Examentraining

15.1 Algemene vaardigheden

Bladzijde 130

- 1 a** $1,32 \cdot 1,04 \cdot 1,16 \approx 1,592$
Dus de populatie is gegroeid met 59,2%.
- b** $g_{2\text{ jaar}} = 1,32 \cdot 1,04 = 1,3728$, dus $g_{\text{jaar}} = 1,3728^{\frac{1}{2}} = 1,171\dots$
Dus de gemiddelde jaarlijkse toename is 17,1% en niet 18%.
- c** Los op $380 \cdot 1,08^t = 750$.
Voer in $y_1 = 380 \cdot 1,08^x$ en $y_2 = 750$.
De optie snijpunt geeft $x = 8,83\dots$
Dus in het jaar $2021 + 8 = 2029$.
- d** In 2015 is de winst $\frac{25\,000}{0,32} = 78\,125$ euro.
In 2020 is de winst $\frac{42\,000}{0,35} = 120\,000$ euro.
Dus de toename is $\frac{120\,000 - 78\,125}{78\,125} \times 100\% = 53,6\%$.
- e** In 2018 is de gemiddelde verblijfsduur $\frac{350}{280} = 1,25$ uur = 1 uur en 15 minuten.
In 2020 is de gemiddelde verblijfsduur $\frac{1,8 \cdot 350}{340} = 1,85\dots$ uur $\approx$ 1 uur en 51 minuten.
Dus de gemiddelde verblijfsduur is $51 - 15 = 36$ minuten langer.
- f** $T = at + b$ met $a = \frac{\Delta T}{\Delta t}$
Bij $t = 15$ hoort $T = 9,9$.
Bij $t = 45$ hoort $T = 11,1$.
$$\left. \begin{array}{l} T = 9,9 \\ T = 11,1 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{11,1 - 9,9}{45 - 15} = \frac{1,2}{30} = 0,04$$

$$\left. \begin{array}{l} T = 0,04t + b \\ t = 15 \text{ en } T = 9,9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,04 \cdot 15 + b = 9,9 \\ 0,6 + b = 9,9 \\ b = 9,3 \end{array}$$

Dus $T = 0,04t + 9,3$.
Los op $0,04t + 9,3 = 12,1$
$$\begin{array}{l} 0,04t = 2,8 \\ t = 70 \end{array}$$

Dus in het jaar $1975 + 70 = 2045$.

Bladzijde 131

- g** In 14 jaar 2335 minder, dus in 1 jaar $\frac{2335}{14} \approx 167$ minder.
 $3515 - 2500 = 1015$, dus de afname tot 2500 duurt $\frac{1015}{167} = 6,0\dots$ jaar.
Dus in het jaar $2019 + 6 = 2025$.
- h** 1 Ja, de tijd tussen de tweede en vijfde melding is $3 + 14 + 5 = 22$ uur, dus die kunnen op dezelfde dag zijn geweest.
2 Nee, want als bijvoorbeeld de eerste melding van april op 1 april om 22:00 uur was, dan was de laatste melding van maart op 31 maart om 20:00 uur.

Bladzijde 135

- 2** 15% van € 6299 is € 944,85.
De subsidie is dan € 650, dus de aanschafprijs is $6299 - 650 = 5649$ euro.
De jaarlijkse opbrengst in euro's is $2500 \cdot 0,225 = 562,50$.
De terugverdientijd is $\frac{5649}{562,50} \approx 10,04$ jaar, dus in 2023 is het volledige aankoopbedrag terugverdiend.

Bladzijde 136

- 3 a** Er zijn minstens 80 bokken, 105 hinds, 40 jonge bokken en 50 jonge hinds.
Dus er zijn minstens $80 + 105 + 40 + 50 = 275$ damherten aanwezig in dit telgebied.
- b** De verhouding in 2005 is $\frac{1401}{512} = 2,74... \approx 2,7$.
De verhouding in 2006 is $\frac{1742}{654} = 2,66... \approx 2,7$.
De verhouding in 2007 is $\frac{1802}{660} = 2,73... \approx 2,7$.
De verhoudingen waren dus telkens ongeveer gelijk.
De gemiddelde verhouding is $\frac{2,74... + 2,66... + 2,73...}{3} \approx 2,71$.
De totaalschatting in 2008 is $726 \cdot 2,71 \approx 2000$.
De totaalschatting in 2009 is $1084 \cdot 2,71 \approx 2900$.
De totaalschatting in 2010 is $1178 \cdot 2,71 \approx 3200$.

Bladzijde 137

- c** Lees af: de toename in 1999 is 76% en de toename in 2000 is 14%.
Over de periode 1997-2000 is de groeifactor $1,39 \cdot 1,76 \cdot 1,14 \approx 2,79$.
Dus de populatie damherten is gegroeid met 179%.
- d** Neem twee groeipercentsages die gemiddeld 29% zijn, bijvoorbeeld 5% en 53%.
Dan is $g_{2 \text{ jaar}} = 1,05 \cdot 1,53 = 1,6065$ en $g_{\text{jaar}} = 1,6065^{\frac{1}{2}} \approx 1,267$.
Dus de groei per jaar is dan 26,7% en niet 29%.

Bladzijde 138

- e** In de AWD is ruimte voor $34 \cdot 200 = 6800$ damherten.
Los op $1802 \cdot 1,15^x = 6800$.
Voer in $y_1 = 1802 \cdot 1,15^x$ en $y_2 = 6800$.
De optie snijpunt geeft $x = 9,502...$
Dus in het jaar $2007 + 10 = 2017$.

- 4** Het minimale gemiddeld aantal tekens is $\frac{10}{7} \approx 1,4$.
Het maximale gemiddeld aantal tekens is $\frac{11}{5} = 2,2$.
Dus het gemiddeld aantal tekens per woord op een tablet ligt tussen de 1,4 en 2,2.
- 5** In 30 jaar 115 gram minder, dus in 1 jaar $\frac{115}{30} = 3,83...$ gram minder.
 $135 - 50 = 85$ gram, dus de afname tot 50 gram duurt $\frac{85}{3,83...} = 22,1...$ jaar.
Dus in het jaar $2010 + 23 = 2033$.

Bladzijde 139

- 6 1** De toename van de gasproductie is $\frac{47-22}{22} \times 100\% \approx 114\%$.
De toename van het aantal aardbevingen is $\frac{31-3}{3} \times 100\% \approx 933\%$.
Dus bewering 1 is niet waar.
- 2** In 2003 daalde gasproductie, maar in 2004 steeg het aantal aardbevingen.
Dus bewering 2 is niet waar.
- 3** In de periode 2005-2011 is de gemiddelde toename $\frac{31-17}{6} \approx 2,3$ per jaar.
In de periode 1998-2004 is de gemiddelde toename $\frac{11-6}{6} \approx 0,8$ per jaar.
Dus bewering 3 is waar.

Bladzijde 140

- 7 a** In 2012 is het aantal bezochte pagina's $2\,861\,948 \cdot 5,62 \approx 16\,084\,148$.
 In 2013 is het aantal bezochte pagina's $6\,091\,312 \cdot 7,35 \approx 44\,771\,143$.
 Dus de toename is $\frac{44\,771\,143 - 16\,084\,148}{16\,084\,148} \times 100\% \approx 178\%$.
- b** In 2012 is de gemiddelde verblijfsduur $\frac{15\,025\,248}{2\,861\,948} \approx 5,25$ minuten.
 In 2013 is de gemiddelde verblijfsduur $\frac{15\,025\,248 \cdot 3,75}{6\,091\,312} \approx 9,25$ minuten.
 Dus de gemiddelde verblijfsduur per bezoek is $9,25 - 5,25 = 4$ minuten langer.
- c** Los op $110 \cdot (x - 1,5) = 200$
 $110x - 165 = 200$
 $110x = 365$
 $x = 3,318\dots$
 Dus bij 3 320 000 bezoekers.

Bladzijde 141

- d** Het aantal voetgangers per dag op een drukke dag is $3 \cdot 15\,100 = 45\,300$.
 Het aantal voetgangers in een piekuur op een drukke dag is $\frac{1}{5} \cdot 45\,300 = 9060$.
 Het aantal voetgangers in een minuut tijdens een piekuur op een drukke dag is $\frac{1}{60} \cdot 9060 = 151$.
 $k = \frac{151}{60 \times 0,75 \times 6} = 0,5\dots$
 Dus de voetgangersdichtheid blijft onder de 0,71.

Bladzijde 142

- 8 a** $k_z = at + 18$ met $a = \frac{\Delta k_z}{\Delta t} = \frac{8 - 18}{21 - 9} = -\frac{5}{6}$
 Dus $k_z = -\frac{5}{6}t + 18$.
 Los op $-0,31t + 10 = -\frac{5}{6}t + 18$
 $0,52\dots t = 8$
 $t \approx 15,3$
 Dus in het jaar $2009 + 15 = 2024$.

Bladzijde 143

- b** Los op $k_m = 2 \cdot k_l$
 $0,28t + 4,3 = 2(-0,31t + 10)$
 $0,28t + 4,3 = -0,62t + 20$
 $0,9t = 15,7$
 $t \approx 17,4$
 Dus in het jaar $2009 + 17 = 2026$.
- c** $k_g = \frac{1}{2}(k_l + k_m) = \frac{1}{2}(-0,31 \cdot t + 10,0 + 0,28 \cdot t + 4,3) = \frac{1}{2}(-0,03 \cdot t + 14,3) \approx -0,02 \cdot t + 7,15$
 Dus $a = -0,02$ en $b = 7,15$.
- d** In 2013 wordt $228\,000 \cdot 365 \cdot 5 = 416\,100\,000$ kWh opgewekt.
 Daarmee kunnen $\frac{416\,100\,000}{3500} \approx 118\,900$ huishoudens van energie worden voorzien.
- e** In 2013 is de totale energiebehoefte $\frac{5,95}{0,05} = 119$ miljard kWh.
 In 2023 is de totale energiebehoefte $\frac{23}{0,15} = 153,3\dots$ miljard kWh.
 Dus de toename is $\frac{153,3\dots - 119}{119} \times 100\% \approx 29\%$.

Bladzijde 144

- 9 a** Aflezen (2005, 30 000) en (2012, 27 000).

In 7 jaar 3000 minder, dus in 1 jaar $\frac{3000}{7}$ minder.

2020 is 8 jaar na 2012, dus in 2020 is het aantal $27\,000 - 8 \cdot \frac{3000}{7} \approx 24\,000$.

Bladzijde 145

- b** In het voorjaar neemt het gewicht in 20 dagen ongeveer 46 gram toe, dat is gemiddeld 2,3 gram per dag.
In het najaar neemt het gewicht gemiddeld 0,6 gram per dag toe (zie de tekst bij de lijn).
Dus de gemiddelde toename in het voorjaar is $\frac{2,3}{0,6} \approx 3,8$ keer zo groot als in het najaar. Dus stelling I is niet waar.
Uit de onderste figuur blijkt dat er in het voorjaar geen toename is van de hoeveelheid vet. Dus stelling II is waar.
- c** Het lichaamsgewicht G in gram in het voorjaar is $G = at + 198$ met

$$a = \frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{244 - 198}{20} = 2,3.$$
Dus $G = 2,3t + 198$.
De hoeveelheid vet in het voorjaar is steeds 16 gram.
Dus het vetpercentage is $P_{\text{voorjaar}} = \frac{16}{2,3t + 198} \times 100 = \frac{1600}{2,3t + 198}$.

Bladzijde 146

- 10 a** De metingen in de figuur beslaan heel 2015, heel 2016 en de eerste vijf maanden van 2017.
aantal dagen = $365 + 366 + 31 + 28 + 31 + 30 + 31 = 882$
aantal metingen = $882 \cdot 24 = 21\,168$
- b** Lees af: op 01-01-15 was de hoogte 47,092 meter en op 29-12-16 was de hoogte 47,083 meter.
In $4 \cdot 26 = 104$ weken 0,009 meter minder, dus in 1 week $\frac{0,009}{104}$ meter minder.
 $47,083 - 47 = 0,083$ meter, dus de afname tot 47 meter duurt

$$\frac{0,083}{\frac{0,009}{104}} = 959,1... \text{ weken} \approx 18,4 \text{ jaar}.$$
Dus in het jaar $2017 + 18 = 2035$.

Bladzijde 147

- c** 1 Tussen de tweede en vierde beving zitten $7 + 14 = 21$ dagen. Elke kalendermaand heeft ten minste 28 dagen, dus ze zouden in één kalendermaand kunnen hebben plaatsgevonden.
- 2 Twee opeenvolgende kalendermaanden hebben samen maximaal 62 dagen. Dat is minder dan 63, dus zelfs als de voorgaande aardbeving op de eerste dag van een kalendermaand plaats zou hebben gevonden, dan zou de eerste aardbeving in 1993 minstens twee kalendermaanden later kunnen zijn.
- 11** Voor 12 cupcakes heb je 135 gram suiker nodig, dus $\frac{135}{12} = 11,25$ gram suiker per cupcake.
Met 300 gram suiker kun je dan $\frac{300}{11,25} = 26,6... \text{ cupcakes}$ maken.
Dus Carmen kan maximaal 26 cupcakes bakken.

Bladzijde 148

- 12 a** 4 minuten en 12 seconden = 4,2 minuten
 Dus in totaal $2,2 \cdot 10^9 \cdot 4,2$ minuten = $\frac{2,2 \cdot 10^9 \cdot 4,2}{60 \cdot 24 \cdot 365} \approx 17\,600$ jaar.
- b** Eerst komen er dagelijks meer views bij, dus de totaalgrafiek is toenemend stijgend. Daarna komen er dagelijks steeds minder views bij, dus de totaalgrafiek is afnemend stijgend.
 Dus bewering III is juist.

15.2 Combinatoriek en rijen**Bladzijde 149**

- 13 a** aantal = $\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} = 9216$
- b** De rechthoekjes kunnen verticaal OF horizontaal worden geplaatst.
 Met twee vierkantjes kun je kiezen uit 6 kolommen en 3 rijen OF 4 rijen en 5 kolommen.
 aantal = $6 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 38$
 Met drie vierkantjes kun je kiezen uit 6 kolommen en 2 rijen OF 4 rijen en 4 kolommen.
 aantal = $6 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 28$
 Totaal aantal manieren is $38 + 28 = 66$.
- c** aantal = $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 72\,072\,000$
- d** aantal = $\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} \approx 1,17 \cdot 10^{10}$

Alternatieve uitwerking

- aantal = $\frac{20!}{(5!)^4} \approx 1,17 \cdot 10^{10}$
- e** aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 7\,741\,440$
- f** Formule I geeft $u_1 = \frac{1}{-5}$ en $u_2 = \frac{4}{25}$; dus I hoort niet bij de gegeven rij.
 Formule II geeft $u_1 = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$; dus II hoort niet bij de gegeven rij.
 Formule III geeft $u_1 = \frac{-1}{5}$, $u_2 = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$, ...; dus III hoort bij de gegeven rij.
- g** $u_0 = \sqrt{115} \cdot \frac{(-2)^0}{1 \cdot 5^0} = \sqrt{115}$
 $u_1 = \sqrt{115} \cdot \frac{(-2)^1}{5 \cdot 5^1} = \sqrt{115} \cdot \frac{-2}{25}$
 $u_2 = \sqrt{115} \cdot \frac{(-2)^2}{9 \cdot 5^2} = \sqrt{115} \cdot \frac{4}{225}$
 $u_3 = \sqrt{115} \cdot \frac{(-2)^3}{13 \cdot 5^3} = \sqrt{115} \cdot \frac{-8}{1625}$
 $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = \sqrt{115} \left(1 - \frac{2}{25} + \frac{4}{225} - \frac{8}{1625} \right) \approx 10,004$
- h** $A_n = 7 + 12 \cdot (n - 1) = 7 + 12n - 12 = 12n - 5$
 $A_n = 200$ geeft $12n - 5 = 200$, dus $n = 17,08...$
 Dus vanaf de 18^e laag zitten er meer dan 200 blokken in een laag.

Bladzijde 150

- i** $a^9 = \frac{1}{20}$, dus $a = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 0,717$
 $b = \frac{20-1}{10-1} = \frac{19}{9}$
 Dus $l_n = 20 \cdot 0,717^{n-1}$ en $L_n = 20 - \frac{19}{9}(n-1)$.
 Voer in $y_1 = 20 - \frac{19}{9}(x-1) - 20 \cdot 0,717^{x-1}$.
 Tabel geeft bij $x = 3$ geldt $y = 5,4959...$, bij $x = 4$ geldt $y = 6,2946...$ en bij $x = 5$ geldt $y = 6,2698...$
 Dus bij het 4^e vierkant is het verschil maximaal en dat verschil is ongeveer 6,29.

j $B_1 + B_2 + \dots + B_7 = 44 + B_5 + B_6 + B_7 = 44 + 29 + 45 + 70 = 188$

k $C_n = r \cdot C_{n-1}$ met $C_0 = 10$

$$r^{15} = \frac{19,8}{10} = 1,98, \text{ dus } r = 1,98^{\frac{1}{15}} \approx 1,0466$$

Dus $C_n = 1,0466 \cdot C_{n-1}$ met $C_0 = 10$.

l $K_0 = 2$ geeft $\frac{a(1-g^2)}{1-g^2} = 2$, dus $a = 2$.

$$K_n = \frac{2(1-g^{n+2})}{1-g^2} \text{ en } K_1 = 6,5 \text{ geeft } \frac{2(1-g^3)}{1-g^2} = 6,5.$$

Voer in $y_1 = \frac{2(1-x^3)}{1-x^2}$ en $y_2 = 6,5$.

De optie snijpunt geeft $x = 3$, dus $g = 3$.

$$\text{Dus } K_n = \frac{2(1-3^{n+2})}{1-3^2} = -\frac{1}{4}(1-3^{n+2}).$$

Voer in $y_1 = -\frac{1}{4}(1-3^{x-2})$ en maak een tabel.

Uit de tabel volgt $K_9 = 44286,5$ en $K_{10} = 132860$.

Dus vanaf $n = 10$ is $K_n > 100000$.

m $B_n = 2000 \cdot g^{n-1}$

$$g^2 = \frac{1000}{2000} = 0,5, \text{ dus } g = 0,5^{\frac{1}{2}} \approx 0,7071$$

Dus $B_n = 2000 \cdot 0,7071^{n-1}$.

Voer in $y_1 = 2000 \cdot 0,7071^{x-1}$ en maak een tabel.

Uit de tabel volgt $B_{16} \approx 11,05$ en $B_{17} \approx 7,81$.

Dus 16 personen ontvangen een bedrag.

Bladzijde 154

- 14 a** Voor de eerste, vijfde en negende kolom is er steeds 1 mogelijkheid, voor de tweede en achtste kolom zijn er 4 mogelijkheden, voor de derde en zevende zijn er $\binom{4}{2}$ mogelijkheden, en voor de vierde en zesde zijn er $\binom{4}{3}$ mogelijkheden.

$$\text{aantal} = 4 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4 = 9216$$

Bladzijde 155

- b** Het aantal zwarte vakjes in kolom 42 tot en met 82 is precies gelijk aan het aantal witte vakjes in kolom 1 tot en met 41. Als je deze zwarte vakjes en witte vakjes omruilt, dan krijg je als eindresultaat een vierkant van 41 bij 41 zwarte vakjes.
aantal = $41^2 = 1681$

- 15 a** aantal = $10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 = 17\,576\,000 \approx 17\,600\,000$
b aantal = $99 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 10 - 99 \cdot 82 \cdot 10 = 3\,849\,120 - 81\,180 = 3\,767\,940$
 Dat is $\frac{3\,767\,940}{17\,576\,000} \times 100\% \approx 21,4\%$, dus de verslaggever heeft geen gelijk.

Bladzijde 156

- 16 a** Voor de klinkers zijn er $5 \cdot 4$ mogelijkheden en voor de medeklinkers zijn er $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$ mogelijkheden.
aantal = $5 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 37\,209\,600$

Bladzijde 157

- b** Uit het teken so volgt dat medeklinker 2 een s is en klinker 2 een o. Hieruit volgen de tekens voor to en no.
 Woord 1 eindigt op no-so en dat moet dus wel Ko-no-so zijn.
 Woord 2 en 3 eindigen allebei op to, dus dat kunnen Pa-i-to of Ru-ki-to zijn. De andere tekens in deze woorden zijn echter onbekend, dus deze woorden kun je met de uitgangspunten niet aan een plaatsnaam koppelen.

Bladzijde 158

- 17** 1 vierkant van 1 bij 1, 1 vierkant van 3 bij 3 en 4 vierkanten van 2 bij 2, dus totaal $1 + 1 + 4 = 6$ vierkanten.
 4 rechthoeken van 2 bij 1
 2 rechthoeken van 3 bij 1
 4 rechthoeken van 3 bij 2
 Totaal $6 + 4 + 2 + 4 = 16$ verschillende vormen.

18 $A_n = r \cdot A_{n-1}$ met $A_0 = 12$

$$r^{220} = \frac{200}{12} = \frac{50}{3}, \text{ dus } r = \left(\frac{50}{3}\right)^{\frac{1}{220}} \approx 1,0129$$

Dus $A_n = 1,0129 \cdot A_{n-1}$ met $A_0 = 12$.

Bladzijde 159

19 a aantal $= \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} = 1680$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{9!}{6^3} = 1680$$

b $r^9 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ geeft $r = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 0,836$

c $u_n = u_0 + v \cdot n = 20 + v \cdot n$, want $u_0 = 20$

$$u_9 = 4 \text{ geeft } 20 + 9v = 4$$

$$9v = -16$$

$$v \approx -1,78$$

d De directe formule van een rij die hoort bij een exponentieel verband is $u_n = 20 \cdot 0,84^n$.

Voor het verschil geldt $V = 20 - 1,78n - 20 \cdot 0,84^n$.

Voer in $y_1 = 20 - 1,78x - 20 \cdot 0,84^x$.

De tabel geeft dat het maximale verschil is bij $x = 4$.

Dus bij achthoek 4 is het verschil maximaal.

Het maximale verschil is ongeveer 2,9 cm.

Bladzijde 160

20 a omtrek cirkel $= (100 + 4) \cdot 8 + 62\,000 = 62\,832$

$$\pi = \frac{\text{omtrek cirkel}}{\text{diameter cirkel}} = \frac{62\,832}{20\,000} \approx 3,1416$$

b Bij 9 termen geeft de rij $4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} = 3,252\dots$

$$3,252\dots - \pi = 0,110\dots > 0,1$$

Bij 10 termen geeft de rij $3,252\dots - \frac{4}{19} = 3,0418\dots$

$$\pi - 3,0418\dots = 0,09975\dots < 0,1$$

Dus je hebt minimaal 10 termen nodig.

c Formule II geeft $u_1 = \frac{4 \cdot (-1)^0}{2 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{1} = 1$, dus II hoort niet bij de gegeven rij.

Dus formule I is juist.

Bladzijde 161

d $\sqrt{12} \left(\frac{(-1)^0}{(2 \cdot 0 + 1) \cdot 3^0} \right) + \sqrt{12} \left(\frac{(-1)^1}{(2 \cdot 1 + 1) \cdot 3^1} \right) + \sqrt{12} \left(\frac{(-1)^2}{(2 \cdot 2 + 1) \cdot 3^2} \right) = 3,156\dots$

$$\pi - 3,156\dots \approx -0,01$$

Dus het verschil is 0,01.

- 21 a** $A_4 = 1,4 \cdot 11,76 = 16,464$
 $A_5 = 1,4 \cdot 16,464 = 23,049\dots$
 $A_6 = 1,4 \cdot 23,049\dots = 32,269\dots$, dus 32 cupcakes.
 $A_7 = 1,4 \cdot 32,269\dots = 45,177\dots$, dus 45 cupcakes.
 $A_8 = 1,4 \cdot 45,177\dots = 63,248\dots$, dus 63 cupcakes.
 $A_9 = 1,4 \cdot 63,248\dots = 88,547$, dus 89 cupcakes.
Totaal aantal cupcakes is $32 + 45 + 63 + 89 = 294$.
Dus het model wijkt 6 cupcakes af van de werkelijkheid.
- b** $A_n = 6 + 18 \cdot (n - 1) = 6 + 18n - 18 = 18n - 12$
 $A_n = 160$ geeft $18n - 12 = 160$, dus $n = 9,55\dots$
Dus vanaf de 10^e laag staan er meer dan 160 cupcakes op een laag.

Bladzijde 162

- 22 a** De vaste factor is $\sqrt{0,5}$, dus de lengte van de zijde van een vierkant in cm na n stappen is gelijk aan $u_n = 13 \cdot (\sqrt{0,5})^n$.
Voer in $y_1 = 13 \cdot (\sqrt{0,5})^x$ en maak een tabel.
Uit de tabel volgt $u_{14} \approx 0,102$ en $u_{15} \approx 0,072$.
Dus Fleur stopt na stap 14.
- b** $r = 2$ en $b = 1$ geeft $S_n = \frac{1 \cdot (1 - 2^{n+1})}{1 - 2}$, oftewel $S_n = 2^{n+1} - 1$.
Voer in $y_1 = 2^{x+1} - 1$ en maak een tabel.
Uit de tabel volgt $S_9 = 1023$ en $S_{10} = 2047$.
Dus bij stap 10 is het totale aantal vierkantjes voor het eerst meer dan 2000.

15.3 Werken met formules en grafieken

Bladzijde 163

- 23 a** $G = 500$ en $x = 2y$ geeft $F = 500 \cdot \left(\frac{2y}{y}\right)^{1,3} = 500 \cdot 2^{1,3} \approx 1231$.
- b** $A = 4$ invullen in de formule geeft $B = 50 \cdot 4^{0,1} = 57,43\dots$
Bij $A = 4$ aflezen in de grafiek geeft $B = 60$.
Dus de meetwaarde ligt $\frac{60 - 57,43\dots}{57,43\dots} \times 100\% \approx 4,5\%$ boven de berekende waarde.
- c** $P = (4x - 3 + 3y - 4) \cdot 5 + (15 - 2x)(10 - y)$
 $= 20x - 15 + 15y - 20 + 150 - 15y - 20x + 2xy$
 $= 2xy + 115$
- d** De teller is constant en positief.
Als q toeneemt, dan neemt de noemer toe en dus neemt de breuk af.
Dus H wordt kleiner.
- e** Bij $g = 1$ hoort $G = 0,453$, dus $g = \frac{1}{0,453} G$.
1 foot = 30,48 cm = 0,3048 m, dus bij $l = 1$ hoort $L = 0,3048$ en $l = \frac{1}{0,3048} L$.
In de formule invullen geeft $S = \frac{12 \cdot \frac{1}{0,453} G}{\left(\frac{1}{0,3048} L\right)^2} = \frac{\frac{12}{0,453} G}{\left(\frac{1}{0,3048}\right)^2 L^2} \approx 2,46 \cdot \frac{G}{L^2}$.
- Dus $c = 2,46$.

f Maak een tabel, bijvoorbeeld:

x	10	20	30	40
y	48,837	56,522	63,265	69,231

$+ 7,68$ $+ 6,74$ $+ 5,97$

De toename van y bij stapgrootte 10 wordt steeds kleiner, dus de grafiek van y is afnemend stijgend.

g $y = ax^2 + b$ door $(0, 5)$ geeft $b = 5$.

$y = ax^2 + 5$ door $A(3, -1)$ geeft $9a + 5 = -1$, dus $a = -\frac{2}{3}$.

Bladzijde 164

h $y_2 = -\frac{1}{2}x^2 + 7$

Oplossen $-\frac{1}{2}x^2 + 4 = 0$ geeft $x^2 = 8$, dus $x_A = -\sqrt{8}$ en $x_B = \sqrt{8}$, oftewel $AB = 2\sqrt{8}$.

Oplossen $-\frac{1}{2}x^2 + 7 = -3$ geeft $x^2 = 20$, dus $x_C = -\sqrt{20}$ en $x_D = \sqrt{20}$, oftewel $CD = 2\sqrt{20}$.

Dus CD is $\frac{2\sqrt{20}}{2\sqrt{8}} \approx 1,58$ keer zo lang als AB .

Bladzijde 170

24 a 4 minuten en 52 seconden is 292 seconden, dus $T_1 = 292$.

$$T_2 = 292 \cdot \left(\frac{10000}{1500}\right)^{1,07} \approx 2223$$

Dus de te verwachten tijd is 37 minuten en 3 seconden.

b $d_1 = 3000$, $T_1 = 509$ en $d_2 = 2 \cdot 3000 = 6000$ geeft $T_2 = 509 \cdot \left(\frac{6000}{3000}\right)^{1,07} = 1068,61\dots$

De gemiddelde snelheid over 3000 meter is $\frac{3000}{509} = 5,893\dots$ m/s.

De gemiddelde snelheid over 6000 meter is $\frac{6000}{1068,61\dots} = 5,614\dots$ m/s.

$$\frac{5,614\dots - 5,893\dots}{5,893\dots} \times 100\% \approx -4,7\%$$

Dus de gemiddelde snelheid neemt af met 4,7%.

Bladzijde 171

c $T = 206$ en $d = 1,5$ geeft $K = \frac{T}{d} = \frac{206}{1,5}$.

$$a \cdot 1,5^{0,07} = \frac{206}{1,5}, \text{ dus } a = \frac{\left(\frac{206}{1,5}\right)}{1,5^{0,07}} \approx 133,49.$$

d $d = 30$ invullen in de formule geeft $K = 133 \cdot 30^{0,07} = 168,75\dots$

Bij 30 km aflezen in de grafiek geeft 175 seconden.

Dus de kilometertijd is $\frac{175 - 168,75\dots}{168,75\dots} \times 100\% \approx 3,7\%$ hoger dan de formule voorspelt.

25 a De teller is constant en positief.

Als t toeneemt, dan neemt de noemer toe en dus neemt de breuk af.

Dus P_{voorjaar} wordt kleiner en dus neemt het vetpercentage af.

b Maak een tabel, bijvoorbeeld:

t	0	20	40	60
P_{najaar}	11,1	16,0	20,4	24,4

$+ 4,9$ $+ 4,4$ $+ 4,0$

De toename van P_{najaar} bij stapgrootte 20 wordt steeds kleiner, dus de grafiek van P_{najaar} is afnemend stijgend.

Bladzijde 172

- 26 a** Aan beide handen moeten $5 - 5 = 0$ vingers omgebogen worden.
De optelsom van de omgebogen vingers is 0, vermenigvuldigd met 10 geeft 0.
De vermenigvuldiging van de opgestoken vingers is $5 \cdot 5 = 25$.
Het antwoord is $0 + 25 = 25$ en dat is het goede antwoord.
- b** Het aantal omgebogen vingers is $x - 5$.
Het aantal omgebogen en opgestoken vingers op één hand samen is 5.
Het aantal opgestoken vingers is $5 - (x - 5) = 5 - x + 5 = 10 - x$.
- c** Eerste deel: $(x - 5 + y - 5) \cdot 10 = (x + y - 10) \cdot 10 = 10x + 10y - 100$.
Tweede deel: $(10 - x)(10 - y) = 100 - 10x - 10y + x \cdot y$.
Verder herleiden: $10x + 10y - 100 + 100 - 10x - 10y + x \cdot y = x \cdot y$.

Bladzijde 173

- 27 a** $L = 15$ en $R = 0,18$ geeft $\frac{G}{15^3} = 0,18$, dus $G = 607,5$.
 $L = 15$ en $R = 0,22$ geeft $\frac{G}{15^3} = 0,22$, dus $G = 742,5$.
Dus tussen 607 en 743 gram.
- b** Bij meten over het schild heen is L groter.
Als L groter is, dan is L^3 groter, dus dan is $\frac{G}{L^3}$ kleiner.
Dus de Jackson Ratio is dan kleiner dan in werkelijkheid.
- c** Bij $W = 1$ hoort $G = 454$, dus $G = 454W$.
Bij $l = 1$ hoort $L = 2,54$, dus $L = 2,54l$.
In de formule invullen geeft $R = \frac{454W}{(2,54l)^3} = \frac{454}{2,54^3} \cdot \frac{W}{L^3}$.
Dus $c = \frac{454}{2,54^3} \approx 27,7$.

Bladzijde 174

- 28 a** $h = ax^2 + b$ door $(0, -32)$ geeft $b = -32$.
 $h = ax^2 - 32$ door $(4, -30)$ geeft $16a - 32 = -30$, dus $a = \frac{1}{8}$.

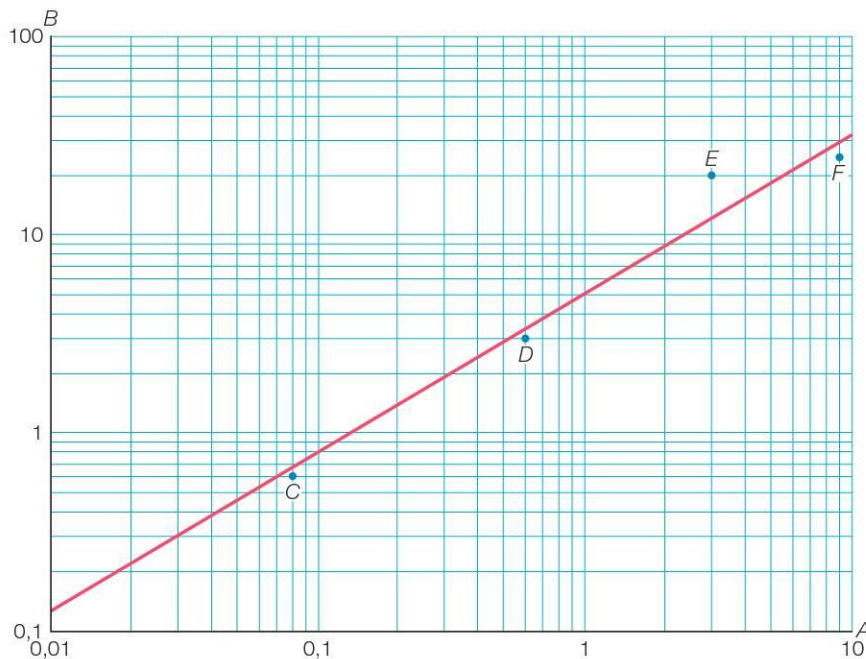
Bladzijde 175

- b** De oppervlakte van het gebied in 2013 is $\pi \cdot 4^2 = 50,2... \text{ km}^2$.
Oplossen $0,084x^2 - 47 = -30$ geeft $x^2 = \frac{17}{0,084}$, dus $x \approx 14,2...$ of $x \approx -14,2...$
Dus de straal van het gebied in 2080 is $14,22... \text{ km}$ en de oppervlakte is $\pi \cdot 14,22...^2 = 635,7... \text{ km}^2$.
Dus de oppervlakte is $\frac{635,7...}{50,2...} \approx 13$ keer zo groot.

15.4 Formules met exponenten en logaritmen**Bladzijde 176**

- 29 a** Er geldt $g^{15} = 2$, met g de groeifactor per jaar.
 $g^{15} = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{15}} \approx 1,047$
Het groeipcentage per jaar is 4,7%.
- b** Stel g is de groeifactor per jaar in de tweede situatie.
Er geldt dan dat $600 \cdot 1,045^{10} = 500 \cdot g^{12}$.
Dit geeft $g^{12} = \frac{600 \cdot 1,045^{10}}{500} = 1,863...$, dus $g = 1,863...^{\frac{1}{12}} \approx 1,053$.
Dus $x = 5,3$.
- c** Aflezen in de grafiek geeft $P(0,04; 0,5)$, dus $B = 0,5$.
 $A = 0,04$ invullen in de formule geeft $B = 5 \cdot 0,04^{0,8} = 0,380...$
Dus de afgelezen waarde is $\frac{0,5 - 0,380...}{0,380...} \times 100\% \approx 31,3\%$ groter dan de berekende waarde.

- d** $A = 0,08$ geeft $B = 5 \cdot 0,08^{0,8} = 0,66\dots$ C ligt er onder
 $A = 0,6$ geeft $B = 5 \cdot 0,6^{0,8} = 3,32\dots$ D ligt er onder
 $A = 3$ geeft $B = 5 \cdot 3^{0,8} = 12,04\dots$ E ligt er boven
 $A = 9$ geeft $B = 5 \cdot 9^{0,8} = 28,99\dots$ F ligt er onder



- e** Neem $2A$ voor A in de formule $B = 5 \cdot A^{0,8}$.
Dit geeft $B = 5 \cdot (2A)^{0,8} = 5 \cdot 2^{0,8} \cdot A^{0,8} = 2^{0,8} \cdot 5 \cdot A^{0,8} \approx 1,74 \cdot 5 \cdot A^{0,8}$.
Dus B wordt 1,74 keer zo groot.
- f** $F = a \cdot g^p$ met $g^{18} = \frac{1}{2}$, dus $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{18}} \approx 0,962$.
- g** Bij $t = 5$ lees je af $N = 10^{3,5} \approx 3200$.
- h** Bij $t = 1$ lees je af $N = 100$. Bij $t = 5$ hoort $N = 3200$ (zie vraag g).
 $N = b \cdot g^t$ met $g^4 = \frac{3200}{100} = 32$, dus $g = 32^{\frac{1}{4}} = 2,3784\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 2,3784\dots^t \\ t = 1 \text{ en } N = 100 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 2,3784\dots = 100 \\ b = \frac{100}{2,3784\dots} \approx 42 \end{array}$$

Dus de formule is $N = 42 \cdot 2,378^t$.
 $t = 8$ geeft $N = 42 \cdot 2,378^8 \approx 43\,000$
- i** $k = 2,5$ en $F = 80$ geeft $a \cdot \log(2,5) = 80$, dus $a = \frac{80}{\log(2,5)} \approx 201$.

Bladzijde 177

- j** $H_1 = at + b$ met $a = \frac{\Delta H_1}{\Delta t} = \frac{1770 - 300}{21} = 70$ en $b = 300$, dus $H_1 = 70t + 300$.
 $H_e = b \cdot g^t$ met $b = 300$ en $g_{21 \text{ dagen}} = \frac{1770}{300} = 5,9$, dus $g_{\text{dag}} = 5,9^{\frac{1}{21}} \approx 1,088$.
Dus $H_e = 300 \cdot 1,088^t$.
 $t = 15$ geeft $H_1 = 70 \cdot 15 + 300 = 1350$ en $H_e = 300 \cdot 1,088^{15} \approx 1063$.
Dus het exponentiële model past het beste.
- k** $\frac{p}{q} = \frac{7}{4}$ geeft $R = 350 \cdot \log\left(\frac{7}{4}\right) = 85,063\dots$
 $\frac{p}{q} = \frac{87}{50}$ geeft $R = 350 \cdot \log\left(\frac{87}{50}\right) = 84,192\dots$
Dus het verschil is $85,063\dots - 84,192\dots \approx 0,87$.

Bladzijde 183

- 30 a** Bij 1973 lees je af aantal = $10^{1,5} \approx 32$.
- b** $g_{15 \text{ jaar}} = \frac{5000}{220}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{5000}{220}\right)^{\frac{1}{15}} = 1,231\dots$
 Het aantal in 2012 is dan $5000 \cdot 1,231\dots^{14} \approx 92\,000$.
 Dat is niet gelijk aan 83 000, dus dat aantal past niet bij gelijkblijvende exponentiële groei.
- c** In de winter van 2009/2010 zijn er $0,85 \cdot 190\,000 = 161\,500$ zomerganzen.
 In de winter van 2009/2010 zijn er in totaal $161\,500 + 301\,800 = 463\,300$ ganzen.
 In de winter van 2017/2018 zijn er $161\,500 \cdot 1,19^4 \approx 649\,453$ zomerganzen.
 In de winter van 2017/2018 zijn er $301\,800 \cdot 1,04^8 \approx 413\,034$ winterganzen.
 In de winter van 2017/2018 zijn er in totaal $649\,453 + 413\,034 = 1\,062\,487$ ganzen.
 De schade in de winter van 2017/2018 is $\frac{1\,062\,487}{463\,300} \cdot 2\,690\,000 \approx 6\,169\,000$ euro.
- d** In 2013 waren er $190\,000 \cdot 1,19^4 \approx 381\,000$ zomerganzen.
 Het aantal zomerganzen N na t jaar met $t = 0$ in 2013 is gelijk aan $N = 381\,000 \cdot 0,86^t$.
 Los op $381\,000 \cdot 0,86^t = 100\,000$.
 Voer in $y_1 = 381\,000 \cdot 0,86^x$.
 De optie snijpunt geeft $x = 8,868\dots$
 Dus in de zomer van $2013 + 9 = 2022$.

Bladzijde 184

- 31 a** $A_6 = L - 20$ invullen in $A_n = L \cdot 0,9439^n$ geeft
 $L - 20 = L \cdot 0,9439^6$
 $L - L \cdot 0,9439^6 = 20$
 $L(1 - 0,9439^6) = 20$
 $L = \frac{20}{1 - 0,9439^6} \approx 68$
 Dus de lengte van een snaar is 68 cm.
 Opmerking: de vergelijking $L - 20 = L \cdot 0,9439^6$ mag je ook grafisch-numeriek oplossen.
- b** Bij $n = 12$ hoort groeifactor $\frac{1}{2}$, dus $g^{12} = \frac{1}{2}$.
 Dit geeft $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}} \approx 0,94387$.

Bladzijde 185

- c** $A_n = 0,9439 \cdot A_{n-1}$ met $A_0 = L$
- d** Voor d_3 geldt: volgens de vuistregel $\frac{1}{6} \cdot 65 \approx 10,83$ cm en volgens de formule $65 - 65 \cdot 0,9439^3 \approx 10,34$ cm.
 Voor d_5 geldt: volgens de vuistregel $\frac{1}{4} \cdot 65 = 16,25$ cm en volgens de formule $65 - 65 \cdot 0,9439^5 \approx 16,30$ cm.
 Voor d_7 geldt: volgens de vuistregel $\frac{1}{3} \cdot 65 \approx 21,67$ cm en volgens de formule $65 - 65 \cdot 0,9439^7 \approx 21,61$ cm.
 Voor d_{12} geldt: volgens de vuistregel $\frac{1}{2} \cdot 65 = 32,5$ cm en volgens de formule $65 - 65 \cdot 0,9439^{12} \approx 32,49$ cm.
 Dus alleen bij de derde fret is het verschil groter dan 1 mm = 0,1 cm.
- e** Los op $1 - 0,9439^n = \frac{2}{3}$.
 Voer in $y_1 = 1 - 0,9439^x$ en $y_2 = \frac{2}{3}$.
 De optie snijpunt geeft $x = 19,02\dots$
 Dus de 19e fret.

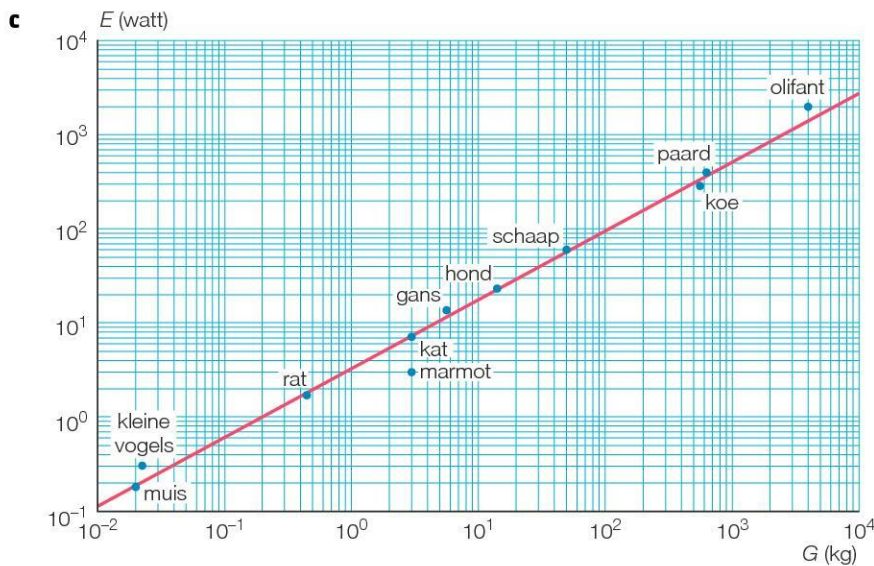
- 32 a** $g_{20 \text{ minuten}} = \frac{95}{20}$ geeft $g_{1 \text{ minuut}} = \left(\frac{95}{20}\right)^{\frac{1}{20}} \approx 1,08102$
- b** Lineaire model: $K = at + b$ met $a = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{95 - 20}{20} = 3,75$ en $b = 20$, dus
 $K = 3,75t + 20$.
 $t = 15$ geeft bij het lineaire model $K = 3,75 \cdot 12 + 20 = 65$ en bij het exponentiële model $K = 20 \cdot 1,081^{12} \approx 50,9$.
 Dus het exponentiële model past het beste.

Bladzijde 186

- 33 a** Bij een stijging van 5% hoort een groeifactor van 1,05.
De opbrengst in jaar 1 is $1750 \cdot 0,225 = 393,75$ euro.
Dat is de opbrengst in jaar 1, en niet jaar 0, dus in de exponent moet $t - 1$ worden gebruikt.
- b** $g_{12 \text{ jaar}} = \frac{0,22}{0,11} = 2$ geeft $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{12}} \approx 1,059$
Het groeipercentage per jaar is 5,9%.
- c** Stel g is de groeifactor per jaar in die situatie.
Er geldt dan dat $393,75 \cdot g^{19} = 500$.
Dit geeft $g^{19} = \frac{500}{393,75} = 1,269\dots$, dus $g = 1,269\dots^{\frac{1}{19}} \approx 1,0127$.
Dus de prijs moet per jaar minstens met 1,3% toenemen.

Bladzijde 187

- 34 a** Los op $3,27 \cdot G^{0,73} = 100$.
Voer in $y_1 = 3,27 \cdot x^{0,73}$ en $y_2 = 100$.
De optie snijpunt geeft $x = 108,35\dots$
Dus 108 kg.
- b** Aflezen in de grafiek geeft $E = 0,3$ watt.
 $G = 0,022$ invullen in de formule geeft $E = 3,27 \cdot 0,022^{0,73} = 0,201\dots$ watt.
Dus het energieverbruik is $\frac{0,3 - 0,201\dots}{0,201\dots} \times 100\% \approx 50\%$ groter dan je zou verwachten.



- d** Bij $G = 1000$ lees je af $E = 500$ en bij $G = 2000$ lees je af $E = 850$.
Als G twee keer zo groot is, dan is E minder dan twee keer zo groot. Het vermoeden is dus niet juist.

Bladzijde 188

- 35 a** Lees af: in augustus 2012 ($t = 220$) is het aantal aardbevingen met magnitude $\geq 2,0$ ongeveer 65 en het aantal aardbevingen met magnitude $\geq 2,5$ ongeveer 22.
Dat is dus $\frac{22}{65} \times 100\% \approx 34\%$.

Bladzijde 189

- b** $M = 1,0$ en $N = 10$ geeft $10^{a-1} = 10$ oftewel $10^{a-1} = 10^1$ en dit geeft $a - 1 = 1$, dus $a = 2$.

36 a $g_{64 \text{ weken}} = \frac{0,77}{10,4}$ geeft $g_{\text{week}} = \left(\frac{0,77}{10,4}\right)^{\frac{1}{64}} \approx 0,960$

b $100\,000 = 0,1 \text{ miljoen}$

Los op $10,4 \cdot 0,96^t = 0,1$.

Voer in $y_1 = 10,4 \cdot 0,96^x$ en $y_2 = 0,1$.

De optie snijpunt geeft $x = 113,77\dots$

Dat is 114 weken, oftewel 2 jaar en 9 weken, na 10 oktober 2012. Dus in december 2014.

Bladzijde 190

37 a De snaar trilt 440 keer per seconde.

Dus de duur van één trilling is $\frac{1}{440} \approx 0,0023$ seconde.

b De toonhoogtes van alle A's vormen een rij met constante factor 2.

Stel n het aantal octaven. Los op $27,5 \cdot 2^n = 3520$.

Voer in $y_1 = 27,5 \cdot 2^x$ en $y_2 = 3520$.

De optie snijpunt geeft $x = 7$.

Dus 7 octaven.

c Er zitten 12 stappen tussen de twee C's.

Dus de verhouding tussen twee opeenvolgende toetsen is $2^{\frac{1}{12}} : 1 \approx 1,0595 : 1$.

Bladzijde 191

d Los op $a \cdot \log(1,0595) = 100$.

$$a = \frac{100}{\log(1,0595)} \approx 3983,911$$

e De toonafstand van de samengestelde klank op een gestemde piano is 400 cent.

Volgens de muziektheorie geldt $TA = 3983,9 \cdot \log\left(\frac{5}{4}\right) = 386,07\dots$

Dus de afwijking is $400 - 386,07\dots \approx 14$ cent.

Bladzijde 192

38 a In 1980 was de uitstoot 250, dus $a = 250 - 40 = 210$.

In 2010 was de uitstoot 135, dus los op $40 + 210 \cdot b^{30} = 135$.

Voer in $y_1 = 40 + 210 \cdot x^{30}$ en $y_2 = 135$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,9739\dots$

Dus $b \approx 0,974$.

b Bij 1980 lees je af 1000 miljard vliegtuigkilometers en bij 2015 lees je af 6000 miljard.

$$g_{35 \text{ jaar}} = \frac{6000}{1000} = 6 \text{ geeft } g_{\text{jaar}} = 6^{\frac{1}{35}} = 1,052\dots$$

Een afname van 2,7% komt overeen met een groeifactor van 0,973.

De totale uitstoot stijgt met een groeifactor van $0,973 \cdot 1,052\dots = 1,024\dots$

Dus de totale jaarlijkse CO₂-uitstoot stijgt met 2,4%.

15.5 Logisch redeneren

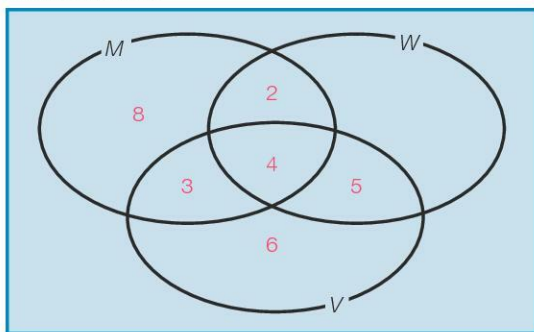
Bladzijde 193

39 a Als het wel regent, hoeft dat nog niet te betekenen dat je een paraplu nodig hebt, omdat je ook bijvoorbeeld een regenjas kunt gebruiken. Uit de gegeven zin volgt dus niet dat $R \Rightarrow P$.

b $\neg D \Rightarrow \neg K$

De bewering in de eerste zin geeft alleen informatie over dappere mensen en zegt niets over hoe niet-dappere mensen zich afdouchen (niet-dappere mensen kunnen dus wel of niet koud afdouchen).

c Als je een slappeling bent, dan volgt uit de tweede bewering dat je niet koud afdoucht. Als je niet koud afdoucht, dan volgt uit de eerste bewering dat je niet dapper bent. Dus ja, de genoemde conclusie kun je trekken.

d 35 DEELNEMERS

$8 + 2 + 4 + 3 + 5 + 6 = 28$, dus $35 - 28 = 7$ behoren uitsluitend tot W .

Op woensdag komen er $7 + 2 + 4 + 5 = 18$ deelnemers.

- e** Als je op maandag komt en op woensdag en niet op alle drie de dagen, dan kom je niet op vrijdag.

De bewering is waar, want als een deelnemer op twee dagen komt en niet op alle drie de dagen, komt hij dus niet op de derde dag.

Bladzijde 194

f $E_{13} \Rightarrow (B_{12} \vee K_{22})$

- g** • In vak 23 komt een kastanje en in vak 32 komt een eik, dus in de vakken 22 en 33 komt een beuk.

- $(E_{13} \wedge B_{22}) \Rightarrow K_{12}$
- $(B_{22} \wedge K_{31}) \Rightarrow E_{21}$
- $(K_{12} \wedge E_{21}) \Rightarrow B_{11}$

Bladzijde 196

- 40 a** $\neg S \Rightarrow \neg L$

De bewering in de eerste zin geeft alleen informatie over stoere mensen en zegt niets over het slaapgedrag van niet-stoere mensen (niet-stoere mensen kunnen dus wel of niet laat naar bed gaan).

- b** Als je een watje bent, dan volgt uit de tweede bewering dat je niet laat naar bed gaat. Als je niet laat naar bed gaat, dan volgt uit de eerste bewering dat je niet stoer bent. Dus ja, de genoemde conclusie kun je trekken.

Bladzijde 197

- 41 a** Als een schrift een karakterschrift is, dan heeft het duizend of meer tekens. Als een schrift een alfabet is, dan heeft het veertig of minder tekens.

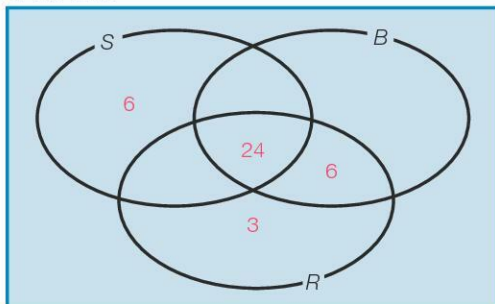
b $\neg D \Rightarrow \neg K$

$\neg V \Rightarrow \neg A$

$(\neg K \wedge \neg A) \Rightarrow L$

Bladzijde 198

- 42 a** 39 LETTERS



$30 - 24 = 6$ letters behoren zowel tot B als R , maar niet tot S .

$6 + 24 + 6 + 3 = 39$, dus er zijn geen letters die wel tot S en R behoren, maar niet tot B .

Dus het Servische alfabet heeft $6 + 24 = 30$ letters.

- b** Het gaat om de letters die in het Griekse én Latijnse alfabet zitten, maar niet in alle alfabetten voorkomen. Dat zijn de letters N, Z en I.

- c Als een letter in het Russische en het Griekse alfabet voorkomt, en niet in alle alfabetten voorkomt, dan komt die letter voor in het Latijnse alfabet.
De bewering is niet waar, want voor de letters Φ , Π , Γ klopt deze niet.

Bladzijde 199

- 43 a Het aantal nieuwe eerstejaars in 2014 is $\frac{1820}{0,32} \approx 5690$.
b $(A \wedge S) \Rightarrow D$
c Als afschaffing van de studiebeurs zorgt voor een daling van het aantal nieuwe eerstejaars, dan wordt het collegegeld verlaagd.
d De bewering volgt niet uit de tekst, want als ze wel slagen, hoeft dat nog niet te betekenen dat ze naar het tweede jaar mogen.

Bladzijde 200

- 44 a Als Carina op 20 september jarig is, dan zegt ze tegen Amir dat ze in september jarig is en tegen Bob dat ze op de 20e jarig is.
b Als Carina aan Bob had verteld dat ze op de 23e of op de 24e jarig is, dan zou Bob direct hebben geweten wanneer ze jarig is, omdat voor beide dagen maar één maand mogelijk is.
Amir weet niet welk getal Carina tegen Bob gezegd heeft, maar weet wel zeker dat het niet 23 of 24 is.
Kennelijk heeft Carina dus niet 'september' of 'oktober' tegen Amir gezegd.
Dus Carina is in november of december jarig.

Bladzijde 201

- c $B(19) \Rightarrow (C(19 \text{ november}) \vee C(19 \text{ december}))$
 $B(21) \Rightarrow C(21 \text{ november})$
 $B(22) \Rightarrow C(22 \text{ december})$
Alleen bij $B(19)$ is er meer dan één mogelijkheid, dus op basis van dat gegeven zou Bob niet kunnen weten wanneer Carina jarig. Hij weet het wel, dus Carina kan niet op de 19e jarig zijn.
d Als Amir december doorgekregen zou hebben van Carina, dan zouden er twee mogelijkheden zijn geweest (20e en 22e), en zou hij niet hebben geweten wanneer ze jarig is.
Carina heeft Amir dus verteld dat ze in november jarig is.
Dus Carina is jarig op 21 november.

- 45 a Er moet dan gelden $3^V > 5\,000\,000$.
Los op $3^V = 5\,000\,000$.
Voer in $y_1 = 3^x$ en maak een tabel.
Uit de tabel volgt $x = 14$ geeft $y_1 = 4\,782\,969$ en $x = 15$ geeft $y_1 = 14\,348\,907$.
Dus minstens 15 vlakken.
b $V = 2$ geeft $M = 3^2 = 9$
 $V = 4$ geeft $M = 3^4 = 81$
Dat is veel meer dan een verdubbeling, dus de bewering is niet juist.

Bladzijde 202

- c $R_1 \Rightarrow (B_4 \vee W_4)$
d Vlak nummer 1 is rood en vlak nummer 4 is wit, dus vlak nummer 3 is blauw.
Vlak nummer 3 is blauw, dus vlak nummer 5 is niet blauw en vlak nummer 2 is niet blauw.
Vlak nummer 1 is rood en vlak nummer 2 is niet blauw, dus vlak nummer 2 is wit.
Vlak nummer 2 is wit en vlak nummer 3 is blauw, dus vlak nummer 6 is rood.
e $(B_3 \wedge W_4) \Rightarrow R_5$
 $R_6 \Rightarrow \neg R_5$
Dit is een tegenspraak, dus er is geen kleur mogelijk voor vlak nummer 5.

f

1 R	4 W	7 R	11 W	15 B
		8 B	12 R	
2 W	3 B	5 G	9 W	13 B
		6 R	10 B	14 R
				16 W
				17 B

15.6 Meetkunde

Bladzijde 203

- 46 a** In $\triangle CDE$ is $CE = DE$, $CD = AB = a$ en $\angle E = 90^\circ$, dus $CE^2 + DE^2 = CD^2$
 $CE^2 + CE^2 = a^2$
 $2CE^2 = a^2$
 $CE^2 = \frac{1}{2}a^2$

In $\triangle CEF$ is $CE = EF$ en $\angle E = 90^\circ$, dus $CF^2 = CE^2 + EF^2$
 $CF^2 = CE^2 + CE^2$
 $CF^2 = 2CE^2$
 $CF^2 = a^2$
 $CF = a$

Dus F ligt $a + a = 2a$ boven de lijn door A en B .

- b** Zie de figuur hiernaast.

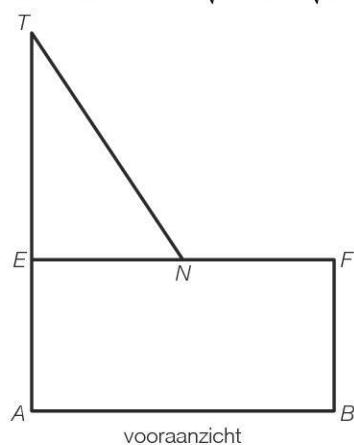
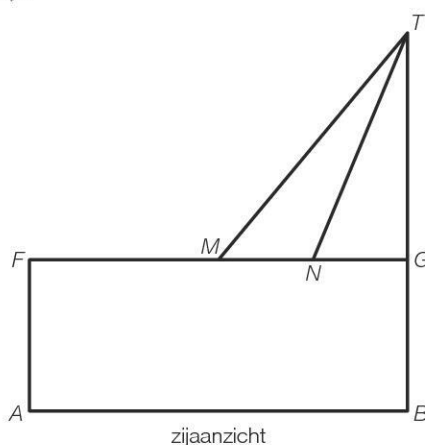
In $\triangle BCE$ is $\angle C = 90^\circ$, dus $BE^2 = 40^2 + 40^2$
 $BE^2 = 3200$
 $BE = \sqrt{3200}$

$BF = \frac{1}{2}BE$ en in $\triangle BFC$ is $\angle F = 90^\circ$, dus $40^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3200}\right)^2 + CF^2$
 $1600 = 800 + CF^2$
 $CF^2 = 800$
 $CF = \sqrt{800}$

$AD = CF$ en in $\triangle DAE$ is $\angle A = 90^\circ$, dus $60^2 = (\sqrt{800})^2 + AE^2$
 $3600 = 800 + AE^2$
 $AE^2 = 2800$
 $AE = \sqrt{2800}$

$AB = AE + BE = \sqrt{2800} + \sqrt{3200} \approx 109,5$

- c**



- d** $O(HMN) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 40 = 1000 \text{ cm}^2$
 $I(THMN) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot O(HMN) \cdot HT = \frac{1}{3} \cdot 1000 \cdot 60 = 20000 \text{ cm}^3 = 20 \text{ dm}^3$
inhoud schaalmodel = $\frac{20000}{8^3} = 39,0625 \approx 39 \text{ cm}^3$

e $a = 40$ en $b = 24$ geeft $\frac{b}{a} = \frac{24}{40} = 0,6$ en $\frac{a}{a+b} = \frac{40}{64} = 0,625$.

$0,6 \neq 0,625$, dus de rechthoek heeft niet de gulden-snedeverhouding.

Bladzijde 204

f Alle gelijke rechthoeken hebben hoogte $\frac{24}{3} = 8$ cm.

Stel de breedte x cm, dan moet gelden dat $\frac{8}{x} = \varphi$, oftewel $x = \frac{8}{\varphi} \approx \frac{8}{1,618} \approx 4,94$.

Dus de rechthoek moet in $\frac{40}{4,94} \approx 8$ kolommen worden verdeeld.

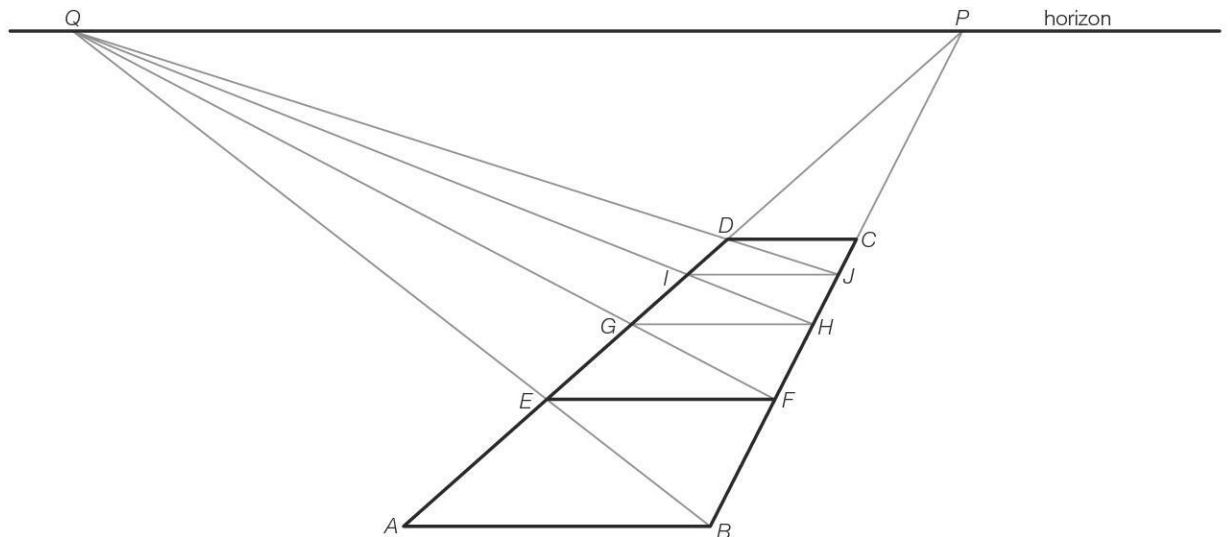
g



Opmeten geeft $AB = 1,1$ cm en $AC = 3,5$ cm.

Dus de hoogte van de blokhut is $\frac{3,5}{1,1} \cdot 120 \approx 382$ cm.

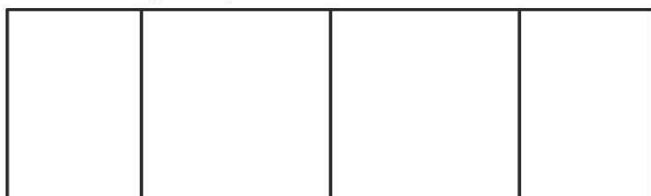
- h
- verdwijnpunt P en horizon
 - BE heeft verdwijnpunt Q
 - FQ snijden met AP geeft G
 - horizontale lijn door G snijden met BP geeft H
 - op soortgelijke wijze zijn achtereenvolgens I, J, D en C te vinden



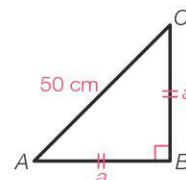
- i
- verdwijnpunt P en horizon
 - snijpunt S van diagonalen rechthoek $ABCD$
 - horizontale lijn door S snijden met BC geeft G
 - DG heeft verdwijnpunt Q
 - QC snijden met PD geeft H
 - horizontale lijn door H snijden met PC geeft I
 - snijpunt T van diagonalen rechthoek $CDHI$
 - horizontale lijn door T snijden met PD geeft J
 - JC heeft verdwijnpunt R
 - RI snijden met PD geeft F
 - horizontale lijn door F snijden met PC geeft E

49

- a** Meet de benodigde afstanden op in het bovenaanzicht.
 Teken een rechthoek van 85,5 mm bij 25 mm.
 Teken een lijn in het midden van deze rechthoek.
 Teken twee lijnen op een afstand van 18 mm vanaf de buitenkanten van de rechthoek.

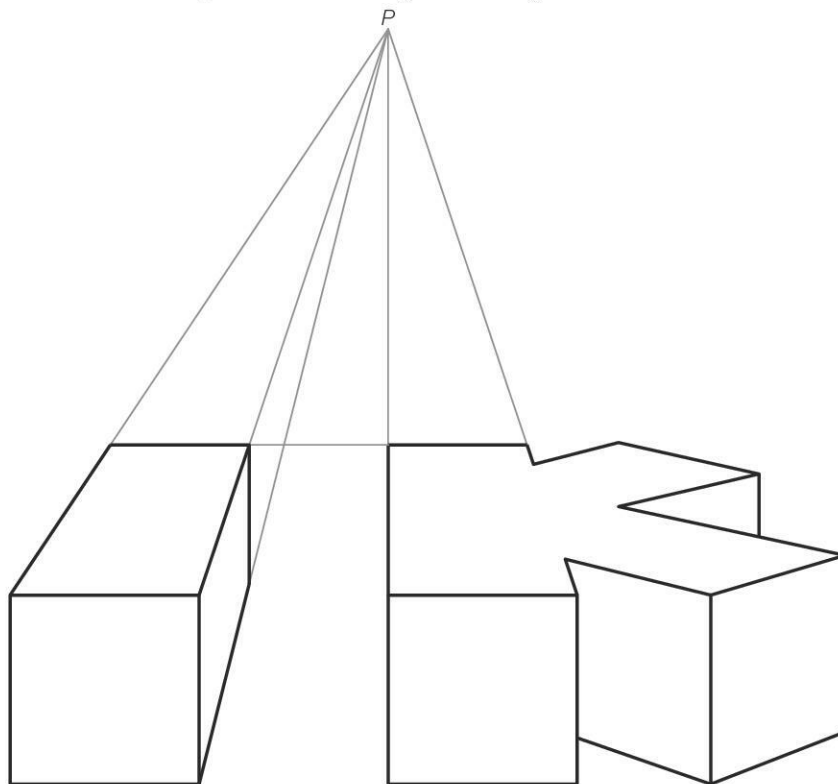


- b** In $\triangle ABC$ is $AB = BC = a$ en $\angle B = 90^\circ$, dus $AB^2 + BC^2 = AC^2$
 $a^2 + a^2 = 50^2$
 $2a^2 = 2500$
 $a^2 = 1250$
 $a = \sqrt{1250} \approx 35,4 \text{ cm}$



De breedte van de letter K is $2a + 50 = 2 \cdot 35,4 + 50 \approx 121 \text{ cm}$.

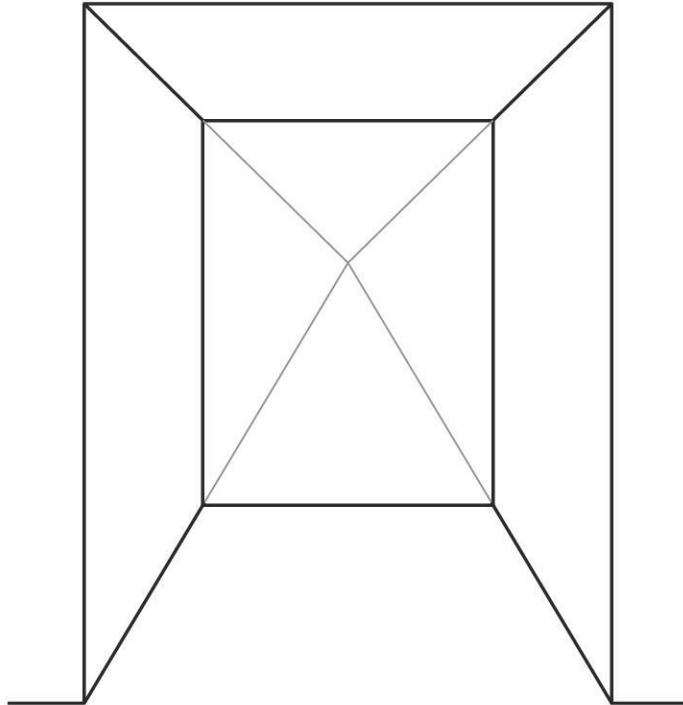
- c**
- verdwijnpunt P
 - opmeten zijden voorzijde letter K geeft 25 mm
 - vierkant met zijden van 25 mm op afstand van 25 mm links van letter K
 - letter I met behulp van P en verlengde bovenzijde van letter K



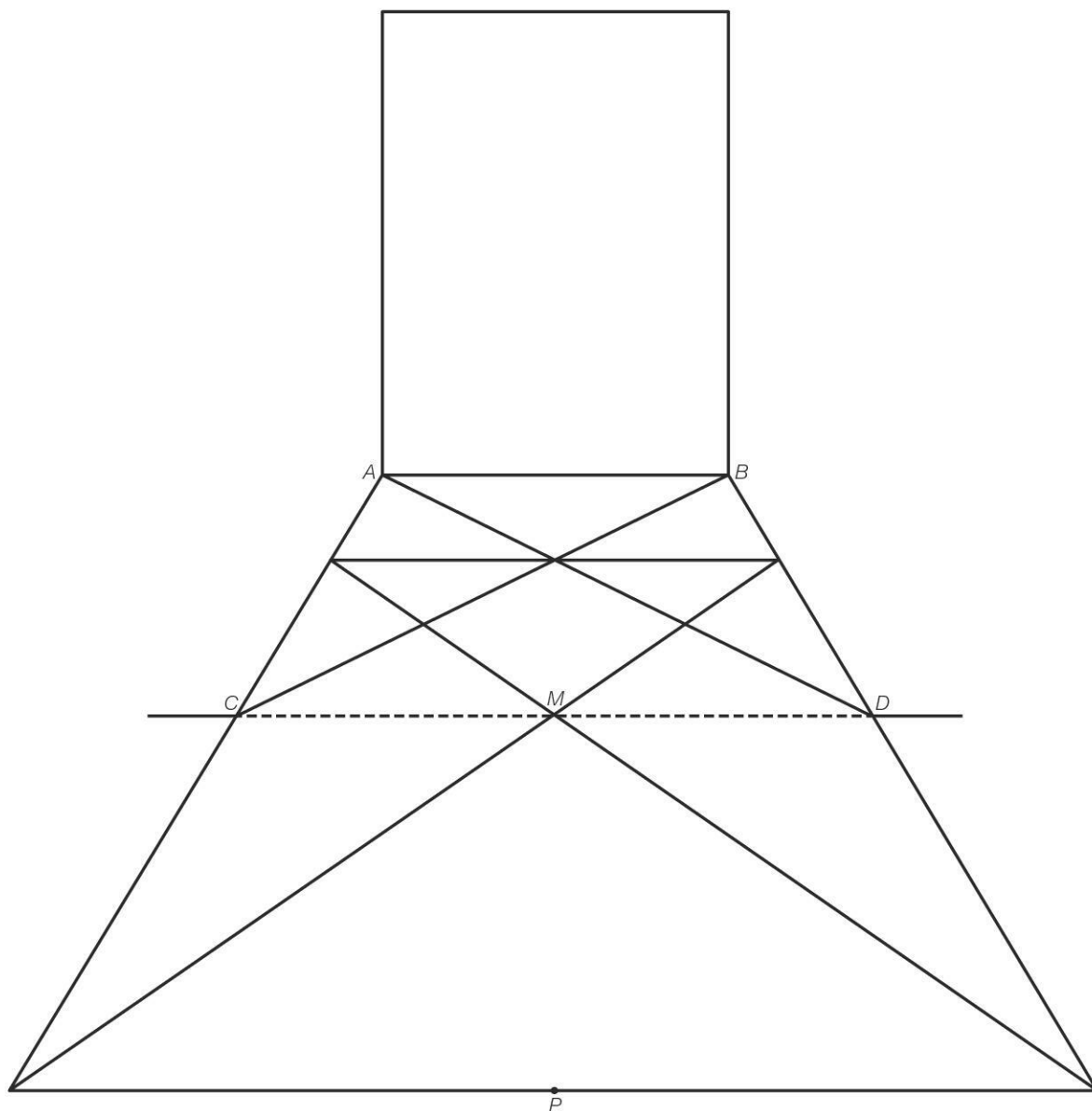
- d** De zijden van het I-paviljoen zijn $171 \cdot 8 = 1368 \text{ cm} = 13,68 \text{ m}$ en $5 \cdot 8 = 40 \text{ cm} = 4 \text{ m}$.
 Dus de oppervlakte van het I-paviljoen is $13,68 \cdot 4 \approx 55 \text{ m}^2$.

50

- a** Teken zowel het verdwijnpunt van de linker- en rechterkant van het plafond als het verdwijnpunt van de linker- en rechterkant van de vloer.
Deze verdwijnpunten zijn niet hetzelfde, en bij een balk zou dat volgens de regels van het perspectief wel zo moeten zijn.
- b** Teken het verdwijnpunt met behulp van de linker- en rechterkant van de vloer.
Teken met behulp van dit verdwijnpunt de linker- en rechterkant van het plafond.
Maak de tekening af.



- c**
- diagonalen AD en BC
 - middens AC en BD
 - lijnen vanuit middens door M
 - punt P met behulp van deze lijnen en verlengde AC en BD



Bladzijde 213

51

- a** breedte bouwblok = $3 \cdot 4 \cdot 26 = 312 \text{ cm} = 3,12 \text{ m}$
 lengte bouwblok = $21 \cdot 4 \cdot 26 = 2184 \text{ cm} = 21,84 \text{ m}$
 inhoud bouwblok = $3,12 \cdot 3,12 \cdot 21,84 = 212,59... \text{ m}^3$
 inhoud paviljoen = $2 \cdot 212,59... \text{ m}^3 \approx 425 \text{ m}^3$
- b** Teken een verdwijnpunt met behulp van het bovenste bouwblok.

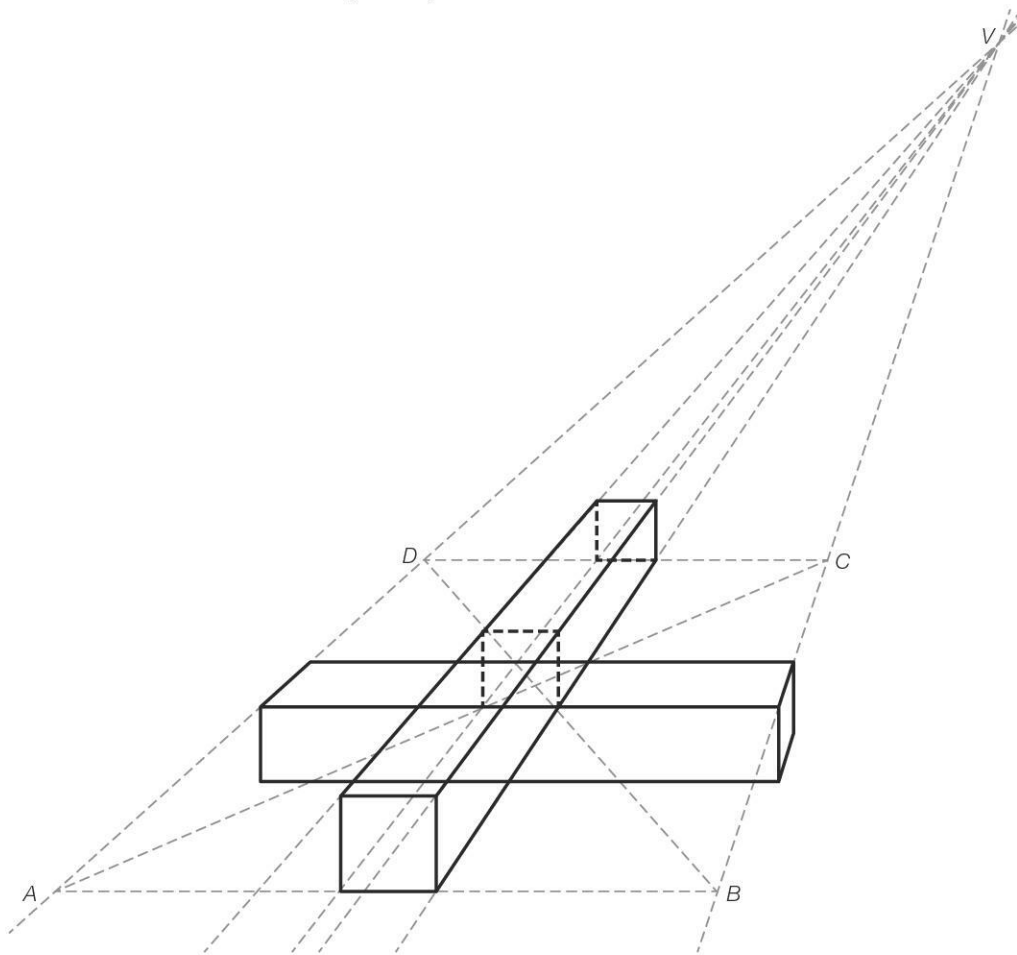


Opmeten geeft $AB = 0,5$ cm en $AC = 1,6$ cm.

De hoogte van het onderste bouwblok is in werkelijkheid $3 \cdot 5 \cdot 26 = 390$ cm = 39 dm.

Dus de hoogte waarop de foto is genomen is $\frac{0,5}{1,6} \cdot 39 \approx 12$ dm.

- c**
- lijnen van gegeven punten naar V geven vierkant waar bovenste bouwblok op ligt
 - verlengde diagonalen van dit vierkant
 - vierkant $ABCD$
 - opmeten afstand tussen gegeven punten geeft 10 mm
 - vierkante dwarsdoorsnede met zijden 10 mm, met gegeven punten als onderste hoekpunten
 - bovenste bouwblok met behulp van V , dwarsdoorsnede en $ABCD$

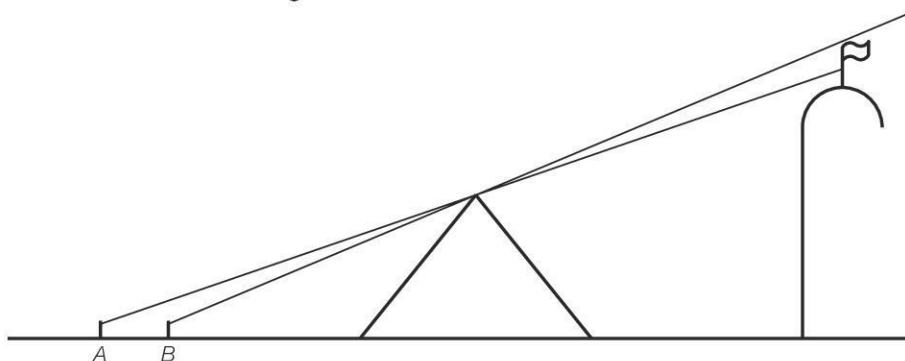


Bladzijde 214

- 52 a** Een zijvlak zonder ingang heeft $18 + 17 + 16 + \dots + 1 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot (1 + 18) = 171$ panelen.
 Het zijvlak met ingang heeft $2 + 9 = 11$ panelen minder, dus $171 - 11 = 160$ panelen.
 Dus in totaal zijn er $3 \cdot 171 + 160 = 673$ panelen.

Bladzijde 215

- b** In de schets hieronder is te zien dat de maker B van de foto in figuur 15.98, waarop de vlag achter de piramide niet zichtbaar is, dichterbij de piramide stond dan de maker A van de foto in figuur 15.97.



Bladzijde 216

- c** Vierhoek $ABCD$ is een trapezium met hoogte h waarvoor geldt $165^2 + 130^2 = h^2$

$$h^2 = 44\,125$$

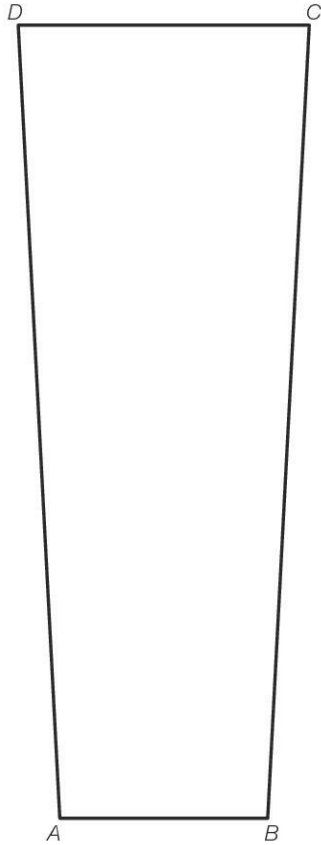
$$h = 210,0... \text{ cm}$$

Driehoek OCD is een vergroting van driehoek $OC'D'$ met vergrotingsfactor $\frac{325 + 130}{325} = 1,4$.

$$CD = 1,4 \cdot CD' = 1,4 \cdot 55 = 77 \text{ cm}$$

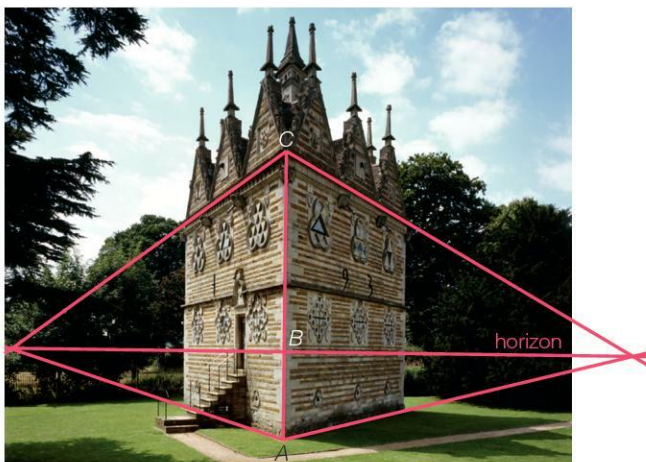
$ABCD$ heeft hoogte $\frac{210,0...}{20} \approx 10,5 \text{ cm}$, breedte $CD = \frac{77}{20} \approx 3,9 \text{ cm}$ en

$$\text{breedte } AB = \frac{55}{20} \approx 2,8 \text{ cm}.$$

**Bladzijde 217**

- 53 a** 1 foot = 0,3048 m, dus 1 square foot = $0,3048^2 \text{ m}^2$.
De oppervlakte is $471,55 \cdot 0,3048^2 \approx 43,8 \text{ m}^2$.

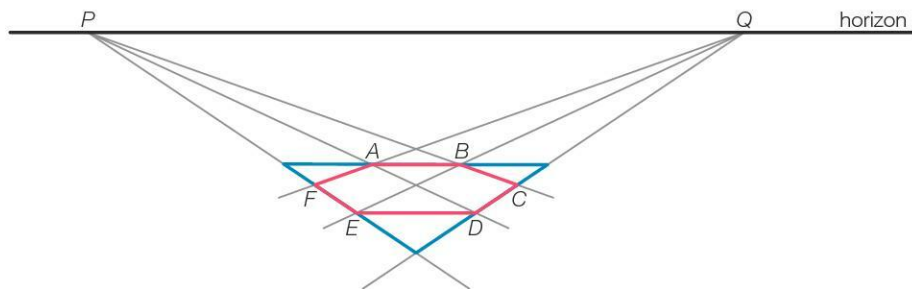
b



Opmeten geeft $AB = 1,2 \text{ cm}$ en $AC = 3,8 \text{ cm}$.

Dus de hoogte waarop de foto is genomen is $\frac{1,2}{3,8} \cdot 8,22 \approx 2,60 \text{ m} = 260 \text{ cm}$.

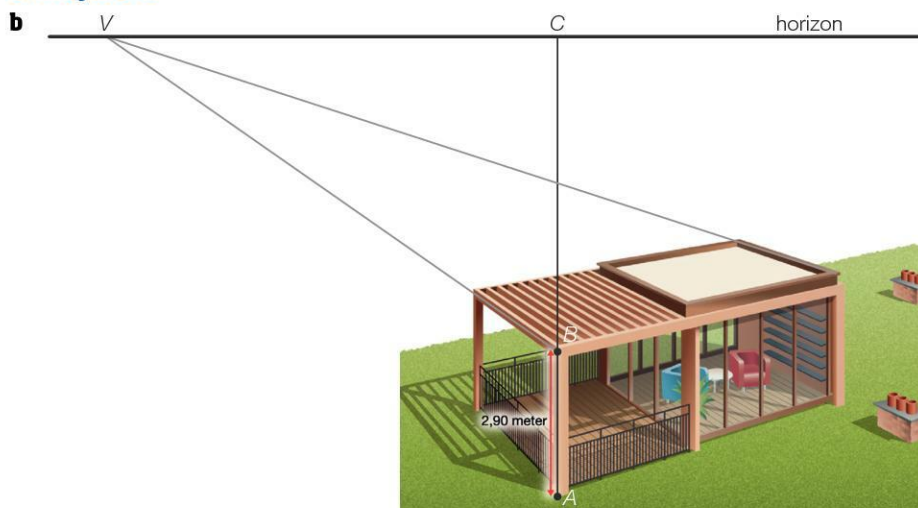
- c
- verdwijnpunten P en Q met behulp van niet-horizontale zijden van de driehoek en horizon
 - hoekpunten A en B door horizontale zijde van de driehoek in drie gelijke delen te verdelen
 - hoekpunten C, D, E en F met behulp P, Q, A en B
 - zeshoek $ABCDEF$



Bladzijde 218

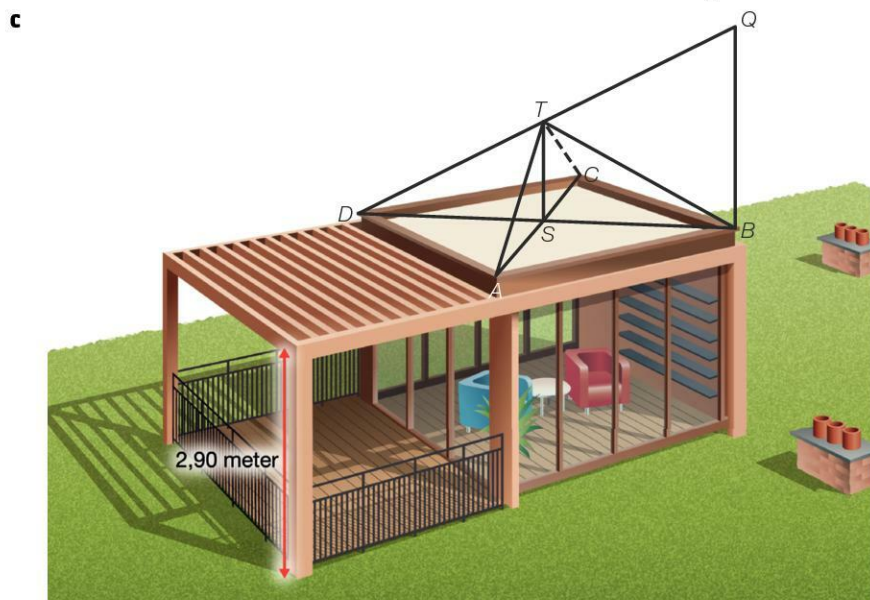
- 54 a
- oppervlakte slaapkamer en tuinkamer voor uitbreiding = $11 + 8,5 = 19,5 \text{ m}^2$
 oppervlakte slaapkamers en tuinkamer na uitbreiding = $9 + 8,5 + 17 = 34,5 \text{ m}^2$
 De oppervlakte van het binnengedeelte is met $34,5 - 19,5 = 15 \text{ m}^2$ toegenomen.
 Dus de inhoud van het binnengedeelte is met $15 \cdot 2,6 = 39 \text{ m}^3$ toegenomen.

Bladzijde 219



Opmeten geeft $AB = 2,0 \text{ cm}$ en $AC = 6,1 \text{ cm}$.

Dus het denkbeeldige punt is gekozen op een hoogte van $\frac{6,1}{2,0} \cdot 2,9 \approx 9 \text{ m}$.



- verdubbelen staander rechtsvoor geeft $\underline{Q}$
- diagonalen AC en BD snijden geeft S
- DQ en verticale lijn door S snijden geeft T
- piramide $TABCD$

Bladzijde 220

- 55 a** Als a^2 de oppervlakte van een vierkant is, dan is de zijde van het vierkant a .
 Als x de zijde van het volgende vierkant is, dan geldt voor de gelijkbenige rechthoekige driehoek ertussen $x^2 + x^2 = a^2$.
 Hieruit volgt $2x^2 = a^2$, oftewel $x^2 = \frac{1}{2}a^2$.

Bladzijde 221

- b** Zowel hoogte vierkant 0 als diagonaallengte vierkant 1 is 10 cm.
 Zowel hoogte vierkant 2 als diagonaallengte vierkant 3 is 5 cm.
 Zowel hoogte vierkant 4 als diagonaallengte vierkant 4 is 2,5 cm.
 totale hoogte = $10 + 10 + 5 + 5 + 2,5 + 2,5 = 35 \text{ cm} = 350 \text{ mm}$
 $350 \text{ mm} < 420 \text{ mm}$, dus het past.

Gemengde opgaven

12 Rijen

Bladzijde 222

- 1 a** Rij bij lineair verband met $A_0 = 1000$ en $v = -23$, dus $A_n = 1000 - 23 \cdot n$.
Los op $1000 - 23n = 0$
 $-23n = -1000$
 $n = 43,4\dots$
 $A_{43} = 11$ en $A_{44} = -12$
Dus de rij heeft 44 positieve termen.
- b** Rij bij exponentieel verband met $v(0) = 1000$ en $r = 0,96$, dus $v(n) = 1000 \cdot 0,96^n$.
Voer in $y_1 = 1000 \cdot 0,96^x$ en maak een tabel.
Uit de tabel volgt $v(16) \approx 520,4$ en $v(17) \approx 499,6$.
Dus de 18^e term is de eerste term die kleiner is dan 500.
- c** Voer in $y_1 = -x^2 + 18x - 45$ en maak een tabel.
De tabel geeft $a(6) = 27$, $a(7) = 32$, $a(8) = 35$, $a(9) = 36$, $a(10) = 35$, $a(11) = 32$, $a(12) = 27$.
Dus vijf termen zijn groter dan 30.
- 2 a** u_n is een rij bij een lineair verband met $u_1 = 300$ en $v = 6$,
dus de directe formule is $u_n = 300 + 6 \cdot (n - 1) = 300 + 6 \cdot n - 6 = 294 + 6 \cdot n$
en de recursieve formule is $u_n = u_{n-1} + 6$ met $u_1 = 300$.
 v_n is een rij bij een exponentieel verband met $v_1 = 0,1$ en $r = 2$,
dus de directe formule is $v_n = 0,1 \cdot 2^{n-1}$
en de recursieve formule is $v_n = 2 \cdot v_{n-1}$ met $v_1 = 0,1$.
- b** Voer in $y_1 = 294 + 6x$ en $y_2 = 0,1 \cdot 2^{x-1}$ en maak een tabel.
Uit de tabel volgt $u_{12} = 366$, $v_{12} = 204,8$, $u_{13} = 372$ en $v_{13} = 409,6$.
Dus vanaf $n = 13$ is $v_n > u_n$.
- 3 a** Stel $u_n = u_0 + v \cdot n$.
 $5v = 2916 - 12 = 2904$, dus $v = 580,8$.
 $u_n = u_0 + 580,8 \cdot n$ en $u_2 = 12$ geeft $u_0 + 580,8 \cdot 2 = 12$, dus $u_0 = -1149,6$.
De directe formule is $u_n = -1149,6 + 580,8 \cdot n$.
- b** Stel $u_n = u_0 \cdot r^n$.
 $r^5 = \frac{2916}{12} = 243$, dus $r = \sqrt[5]{243} = 3$.
 $u_n = u_0 \cdot 3^n$ en $u_2 = 12$ geeft $u_0 \cdot 3^2 = 12$, dus $u_0 = 1\frac{1}{3}$.
De directe formule is $u_n = 1\frac{1}{3} \cdot 3^n$.
- 4 a** 3 minuten en 55 seconden is 235 seconden.
Rij bij lineair verband met $t(1) = 235$ en $v = 3$,
dus de recursieve formule is $t(n) = t(n-1) + 3$ met $t(1) = 235$
en de directe formule is $t(n) = 235 + 3 \cdot (n - 1) = 235 + 3 \cdot n - 3 = 232 + 3 \cdot n$.
- b** $t(7) = 232 + 3 \cdot 7 = 253$
Dus Stijn doet over de zevende kilometer 253 seconden = 4 minuten en 13 seconden.
- c** 4 minuten en 20 seconden is 260 seconden.
 $T(n)$ is de tijd in de n^e kilometer tijdens de trainingsloop.
 $T(n)$ is een rij bij een lineair verband met $T(1) = 260$ en $v = -2$, dus
 $T(n) = 260 - 2 \cdot (n - 1) = 260 - 2 \cdot n + 2 = 262 - 2 \cdot n$.
Los op $232 + 3n = 262 - 2n$
 $5n = 30$
 $n = 6$
Dus de eerste kilometer die Stijn sneller loopt tijdens de trainingsloop dan tijdens de wedstrijd is de zevende kilometer.

Bladzijde 223

- 5 a** Rij bij exponentieel verband met $B_0 = 10000$ en $r = 1,0025$, dus
 $B_n = 1,0025 \cdot B_{n-1} + 1000$ met $B_0 = 10000$.
- b** Bij 1 januari 2030 hoort $n = 10$.
 Het saldo is $B_{10} = 10000 \cdot 1,0025^{10} \approx 10\,252,83$ euro.
- c** Voer in $y_1 = 10000 \cdot 1,0025^x$ en maak een tabel.
 Uit de tabel volgt $B_{19} \approx 10\,485$ en $B_{20} \approx 10\,512$.
 Dus eind 2039 staat er voor het eerst meer dan 10 500 euro op de rekening.
- 6 a** $u_6 = 1,5 \cdot 6^2 + 0,5 \cdot 6 = 57$, dus een kaartenhuis met zes rijen bestaat uit 57 kaarten.
- b** $5 \cdot 54 = 270$ kaarten
 Voer in $y_1 = 1,5x^2 + 0,5x$ en maak een tabel.
 Uit de tabel volgt $x = 13$ geeft $y = 260$ en $x = 14$ geeft $y = 301$.
 Dus maximaal 13 rijen.
- c** $u_{10} = 155$ en $u_9 = 126$, dus de tiende rij bestaat uit $155 - 126 = 29$ kaarten.
- 7 a** Van B_n is
 de recursieve formule $B_n = B_{n-1} + 2$ met $B_1 = 4$
 en de directe formule $B_n = 4 + 2 \cdot (n - 1)$, oftewel $B_n = 2n + 2$.
 Van H_n is
 de recursieve formule $H_n = H_{n-1} + 2$ met $H_1 = 3$
 en de directe formule $H_n = 3 + 2 \cdot (n - 1)$, oftewel $H_n = 2n + 1$.
- b** $O_n = \frac{1}{2} \cdot B_n \cdot H_n$
 $= \frac{1}{2} \cdot (2n + 2) \cdot (2n + 1)$
 $= \frac{1}{2} \cdot (4n^2 + 2n + 4n + 2)$
 $= 2n^2 + 3n + 1$
- c** Voer in $y_1 = 2x^2 + 3x + 1$ en maak een tabel.
 Uit de tabel volgt $O_{10} = 231$ en $O_{11} = 276$.
 Vanaf $n = 11$ is $O_n > 250$.
- d** $O_{n-1} = 2(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$
 $= 2(n^2 - 2n + 1) + 3n - 3 + 1$
 $= 2n^2 - 4n + 2 + 3n - 2$
 $= 2n^2 - n$
 $O_n - O_{n-1} = 2n^2 + 3n + 1 - (2n^2 - n)$
 $= 2n^2 + 3n + 1 - 2n^2 + n$
 $= 4n + 1$
 Dus $O_n = O_{n-1} + 4n + 1$ met $O_1 = 6$.
- e** $O_{15} = 496$ en $O_{16} = 561$, dus het verschil in oppervlakte is $561 - 496 = 65 \text{ cm}^2$.

Bladzijde 224

- 8 a** Het twaalfde gecentreerde vierkantsgetal is $V_{12} = 2 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12 + 1 = 265$.
- b** Voer in $y_1 = 2x^2 - 2x + 1$ en maak een tabel.
 Uit de tabel volgt $V_{32} = 1985$, dus het 32^e gecentreerde vierkantsgetal is 1985.
- c** $V_{n-1} = 2(n-1)^2 - 2(n-1) + 1$
 $= 2(n^2 - 2n + 1) - 2n + 2 + 1$
 $= 2n^2 - 4n + 2 - 2n + 3$
 $= 2n^2 - 6n + 5$
 $V_n - V_{n-1} = 2n^2 - 2n + 1 - (2n^2 - 6n + 5)$
 $= 2n^2 - 2n + 1 - 2n^2 + 6n - 5$
 $= 4n - 4$
 Dus $V_n = V_{n-1} + 4n - 4$ met $V_1 = 1$.

- 9 a** De recursieve formule is $O(n) = (3n)^2 - O(n-1) = 9n^2 - O(n-1)$ met $O(1) = 9$.
De directe formule is
 $O(n) = (3n)^2 - (3(n-1))^2 = (3n)^2 - (3n-3)^2 = 9n^2 - (9n^2 - 18n + 9) = 9n^2 - 9n^2 + 18n - 9 = 18n - 9$.
- b** $10 \text{ L} = 10000 \text{ cm}^3$
Voer in $y_1 = 81x^2 - 81x + 27$ en maak een tabel.
De tabel geeft $I(11) = 8937$ en $I(12) = 10719$.
Dus het twaalfde element is het eerste met een inhoud van meer dan 10 L.
- c** $I(n-1) = 81(n-1)^2 - 81(n-1) + 27$
 $= 81(n^2 - 2n + 1) - 81n + 81 + 27$
 $= 81n^2 - 162n - 81n + 81 + 81 + 27$
 $= 81n^2 - 243n + 189$
 $I(n) - I(n-1) = 81n^2 - 81n + 27 - (81n^2 - 243n + 189)$
 $= 81n^2 - 81n + 27 - 81n^2 + 243n - 189$
 $= 162n - 162$
Dus $I(n) = I(n-1) + 162n - 162$ met $I(1) = 27$.
- d** $T(n) = (3n)^3 = 27n^3$
- e** $I(6) = 2457 \text{ cm}^2 = 2,457 \text{ dm}^3$
Het gewicht is $2,457 \cdot 2,3 \approx 5,651 \text{ kg} = 5651 \text{ gram}$.
- f** We zoeken het eerste element met een inhoud die groter is dan de inhoud van de eerste tien elementen samen.
 $T(10) = 27000$
De tabel geeft $I(18) = 24813$ en $I(19) = 27729$.
Dus het 19^e element is het eerste dat zwaarder is dan de eerste tien samen.

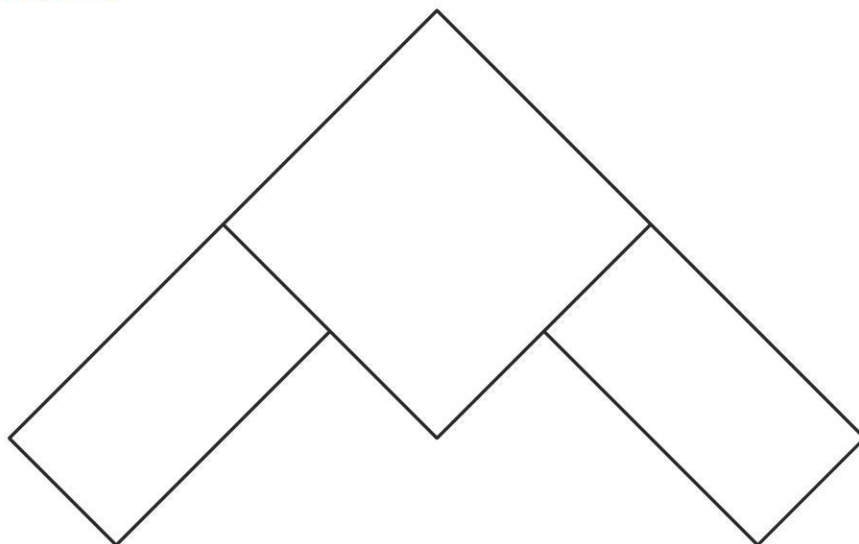
Bladzijde 225

- 10 a** De directe formule is $U_n = 50 \cdot 0,8^{n-1} = 50 \cdot 0,8^{-1} \cdot 0,8^n = 62,5 \cdot 0,8^n$.
- b** De binnendiameter van ring n is gelijk aan de buitendiameter van ring $n+1$.
De directe formule van de binnendiameter is dus $I_n = 50 \cdot 0,8^n$.
- c** $B_4 = 62,5 \cdot 0,8^4 = 25,6 \text{ cm}$ en $I_4 = 50 \cdot 0,8^4 = 20,48 \text{ cm}$.
De oppervlakte van ring 4 is dus $\pi \cdot \left(\frac{25,6}{2}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{20,48}{2}\right)^2 = 185,29... \text{ cm}^2$.
De inhoud van ring 4 is $185,29... \cdot 6 = 1111,79... \text{ cm}^3 = 1,111... \text{ dm}^3$.
De 4^e ring weegt dus $1,111... \cdot 7,8 \approx 8,672 \text{ kg} = 8672 \text{ gram}$.
- d** De directe formule is $b_n = \frac{U_n - I_n}{2} = \frac{62,5 \cdot 0,8^n - 50 \cdot 0,8^n}{2} = 6,25 \cdot 0,8^n$.
Dus $a = 6,25$ en $r = 0,8$.

13 Meetkundige figuren

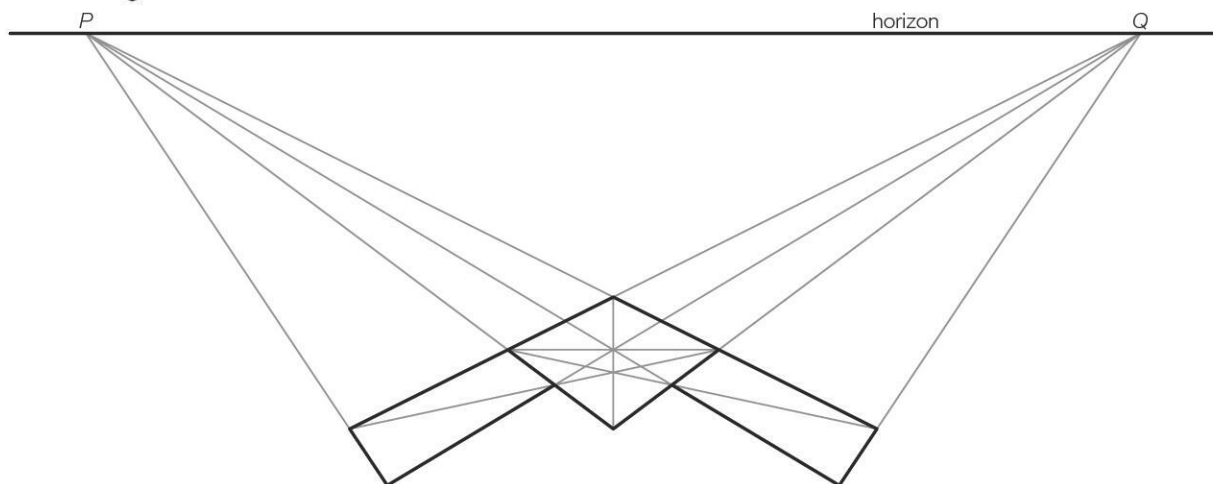
Bladzijde 226

11 a



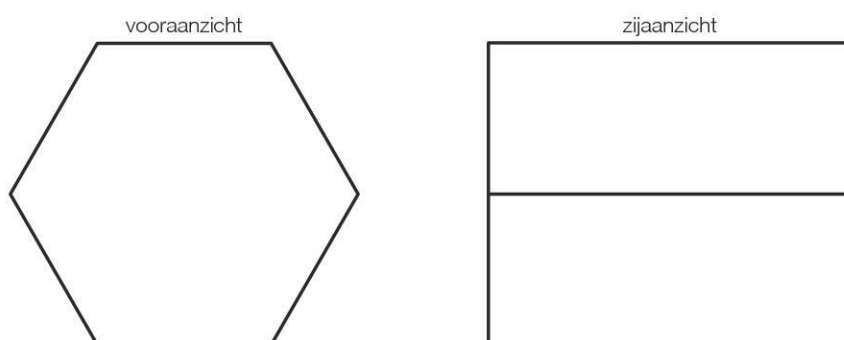
- b** De totale oppervlakte van het zitvlak is $80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 40 = 12800 \text{ cm}^2$.
De inhoud van het zitvlak is $12800 \cdot 5 = 64000 \text{ cm}^3$.
Het gewicht is dus $64000 \cdot 2,8 = 179200 \text{ gram} = 179,2 \text{ kg}$.

- c
- verdwijnpunten P en Q en de horizon
 - halveer het vierkant in de lengte en in de breedte en verdubbel deze helften om de rechthoekige stukken van het zitvlak te tekenen



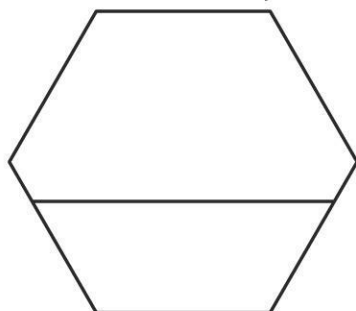
12

a



- b De schaal is 1 : 50, dus in het vooraanzicht heeft het bed een lengte van $\frac{200}{50} = 4$ cm.

Teken in het vooraanzicht, onder het midden, een horizontale lijn met lengte 4 cm, die precies tussen de zijden van de rechthoek past.



- c Deel de zeshoek op in zes gelijkzijdige driehoeken met zijde 115 cm. Zie de figuur hiernaast.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ANM$ geeft $AN^2 + MN^2 = AM^2$

$$57,5^2 + MN^2 = 115^2$$

$$3306,25 + MN^2 = 13225$$

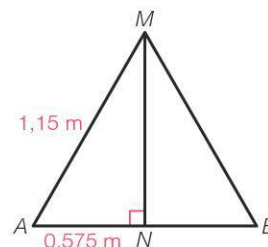
$$MN^2 = 9918,75$$

$$MN = \sqrt{9918,75}$$

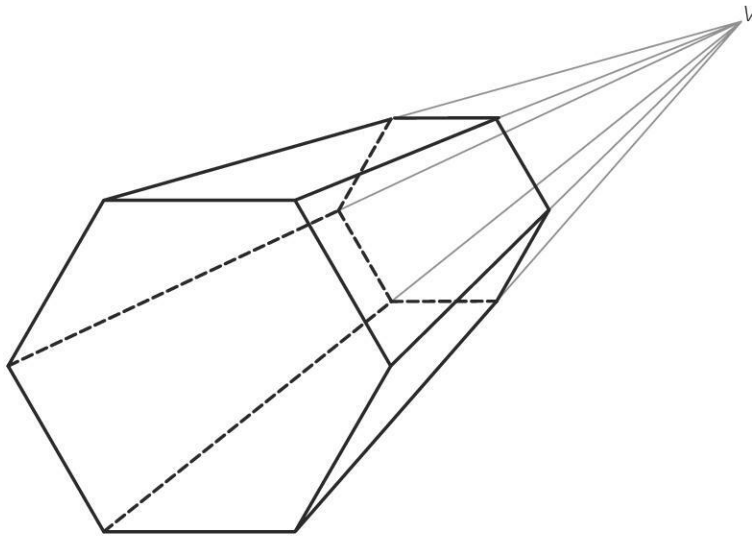
$$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 115 \cdot \sqrt{9918,75} = 5726,59... \text{ cm}^2$$

$$O(\text{zeshoek}) = 6 \cdot 5726,59... \text{ cm}^2 = 34359,55... \text{ cm}^2 \approx 3,436 \text{ m}^2$$

Dus de inhoud van de slaapcabine is $3,436 \cdot 2,4 \approx 8,2 \text{ m}^3$.

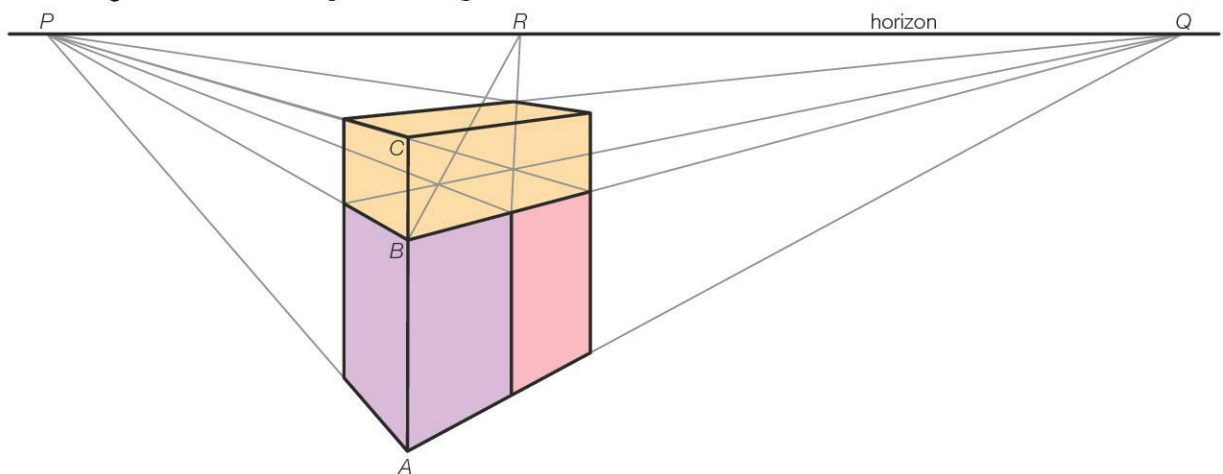


- d**
- verdwijnpunt V
 - gebruik V en de gegeven zijde om de achterste zeshoek te tekenen
 - de overige lijnen van de slaapcabine

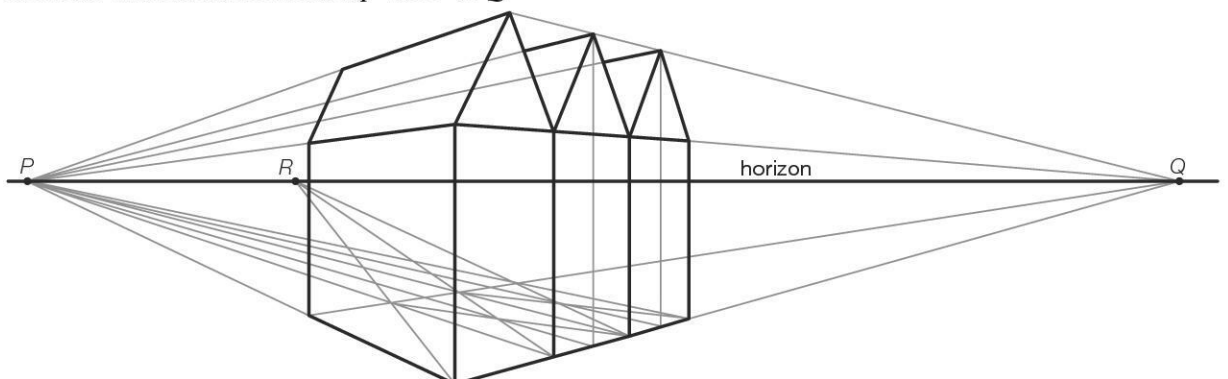


Bladzijde 227

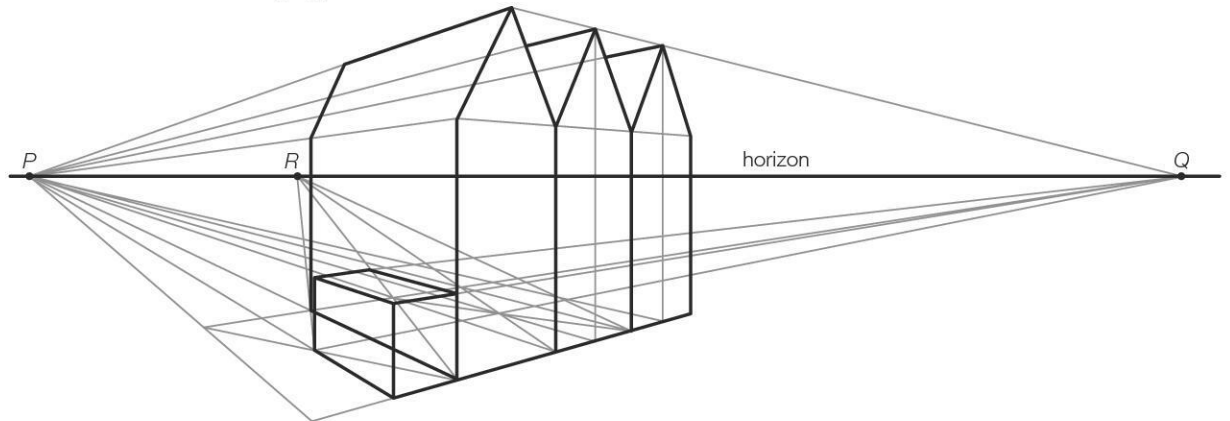
- 13**
- verdwijnpunten P en Q en de horizon
 - verdubbel bovenzvlak paarse balk voor bovenzvlak rode balk
 - teken de rest van de rode balk
 - opmeten AB geeft AC , want $AC = 1,5 \cdot AB$
 - teken de gele balk met behulp van P en Q



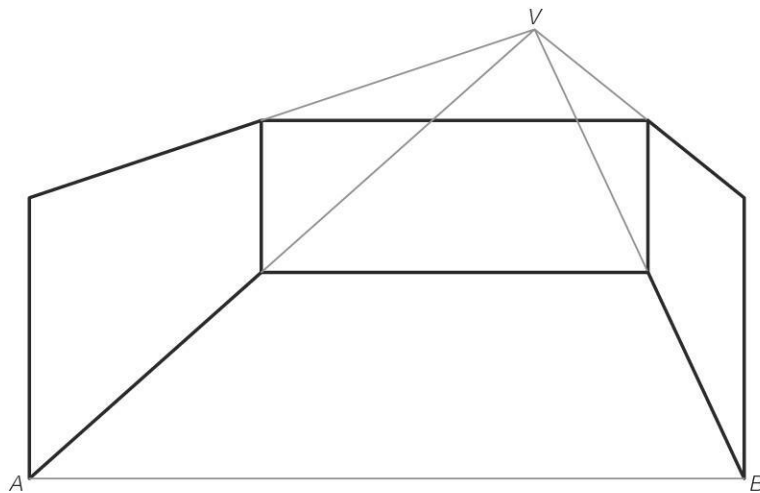
- 14 a**
- verdwijnpunten P en Q en de horizon
 - verdubbel vloer twee keer voor vloeren van de andere twee huizen
 - gebruik diagonalen van deze vloeren om verticale lijnen in het midden van de huizen te tekenen
 - teken de twee huizen met behulp van P en Q



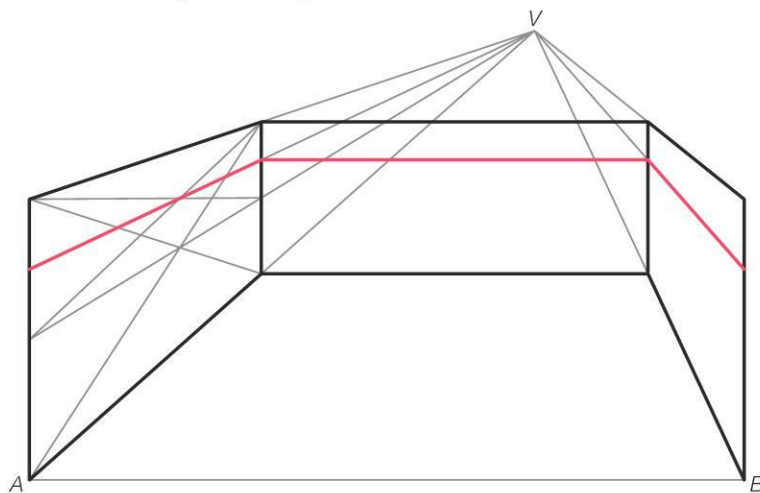
- b**
- verdubbel de vloer van het linker huis
 - halveer de verdubbelde vloer zowel in de lengte als de breedte voor de vloer van de berging
 - teken de hoogte van de berging zo, dat geldt $\text{hoogte berging} = \frac{1}{4} \cdot \text{hoogte huis}$
 - teken de rest van de berging



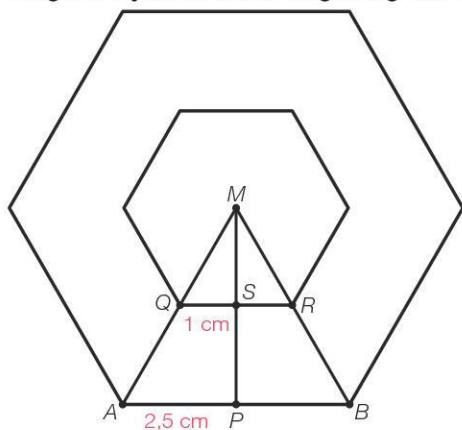
- c**
- verdwijnpunt V
 - gebruik V en de lijn AB om de rechtermuur te tekenen



- d**
- halveer de linker muur twee keer
 - gebruik V om de rode lijn op driekwart hoogte van de linker muur te tekenen
 - teken de rode lijnen ook op andere muren



- 15 a De grote vijfhoek is een vergroting van de kleine vijfhoek met $k = 2,5$.

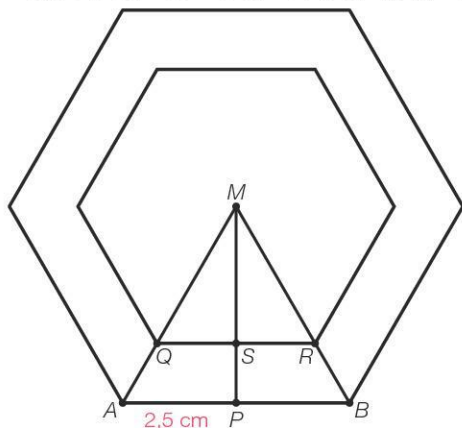


De stelling van Pythagoras in driehoek APM geeft
 $PM^2 = AM^2 - AP^2 = 4,25^2 - 2,5^2 = 11,8125$, dus $PM = \sqrt{11,8125}$.

$$SM = \frac{PM}{k} = \frac{\sqrt{11,8125}}{2,5}$$

$$\text{Dus } d = \sqrt{11,8125} - \frac{\sqrt{11,8125}}{2,5} \approx 2,06 \text{ cm.}$$

- b De grote vijfhoek is een vergroting van de kleine vijfhoek met $k^2 = 3$, dus $k = \sqrt{3}$.



$$SM = \frac{PM}{k} = \frac{\sqrt{11,8125}}{\sqrt{3}} = 1,984...$$

$$\text{Dus } d = \sqrt{11,8125} - 1,984... \approx 1,45 \text{ cm.}$$

- 16 a

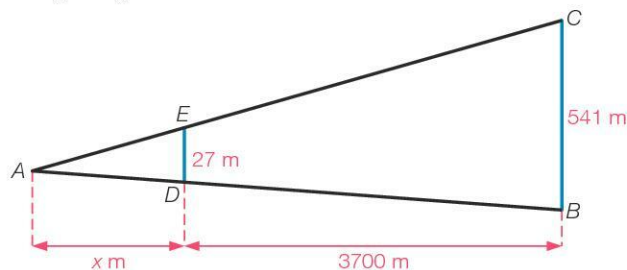


Opmeten geeft $AB = 2,4 \text{ cm}$ en $AC = 3,5 \text{ cm}$.

Dus de foto is genomen vanaf een hoogte van $\frac{3,5}{2,4} \cdot 93 \approx 136 \text{ m}$.

- b** Opmeten in figuur G.11 geeft hoogte standbeeld (zonder sokkel) = 1,9 cm en hoogte One World Trade Center = 1,1 cm.

Het One World Trade Center lijkt ter hoogte van het Vrijheidsbeeld $\frac{1,1}{1,9} \cdot 46 \approx 27$ m hoog te zijn.



Driehoek ABC is een vergroting van driehoek ADE met vergrotingsfactor $\frac{541}{27}$.

Er geldt $\frac{541}{27} \cdot x = x + 3700$.

Dit geeft $x \approx 194$.

De fotograaf stond 194 m van het Vrijheidsbeeld.

- c** Het echte Vrijheidsbeeld is een vergroting van het beeldje met factor $k = \frac{46}{0,3} = 153,33\dots$

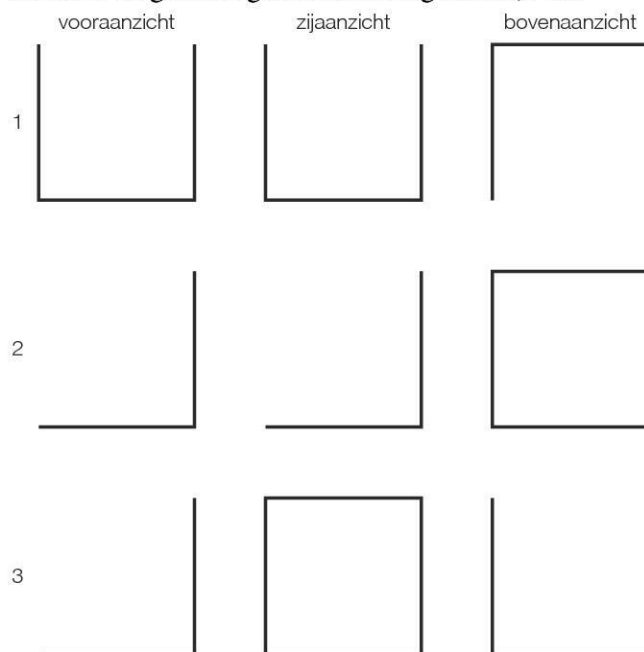
Als het beeldje van hetzelfde materiaal zou zijn, dan was het gewicht $\frac{225\,000}{153,33\dots^3} = 0,062\dots$ kg

Het zou dan $\frac{1,5}{0,062\dots} \approx 24$ keer zo licht zijn.

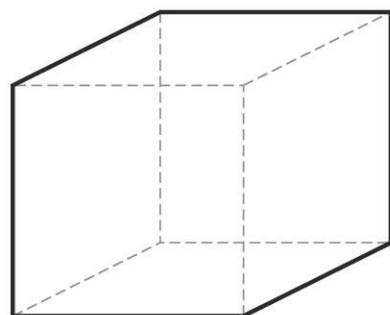
Bladzijde 229

- 17 a** $1\frac{5}{8}$ inch = $1\frac{5}{8} \cdot 2,54 = 4,1275$ cm

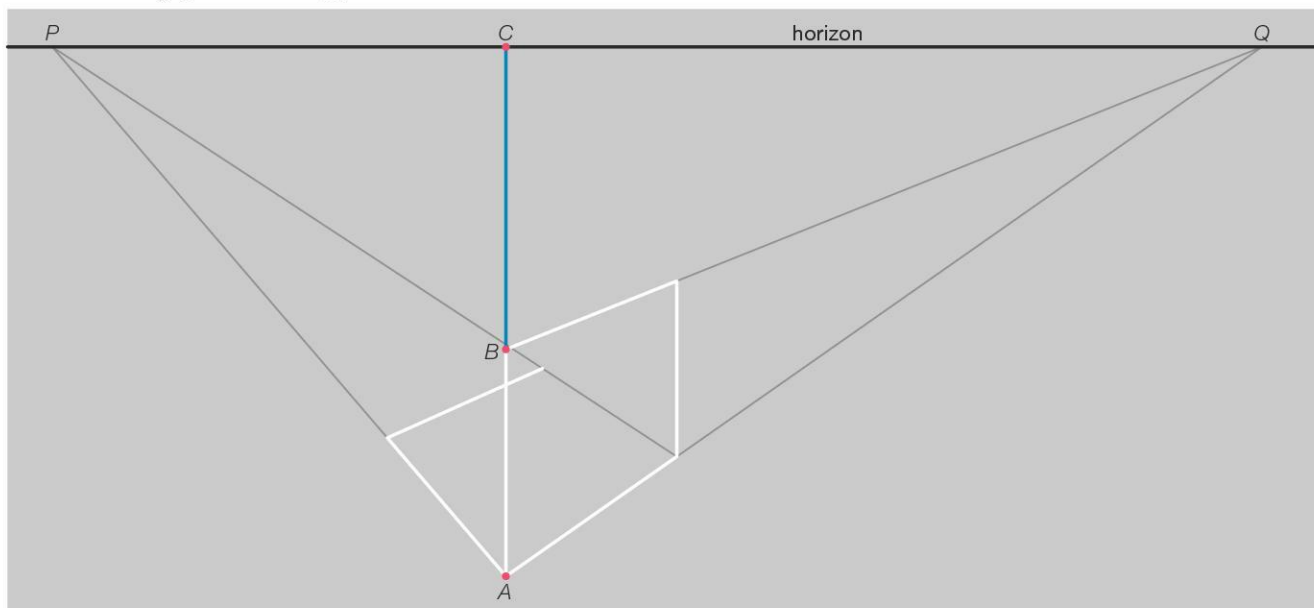
Schaal 1 : 2 geeft lengte ribben is ongeveer 2,1 cm.



- b**



- c • verdwijnpunten P en Q en de horizon



Opmeten op het werkblad geeft $AB = 3,0$ cm en $AC = 7,0$ cm.

Dus de hoogte van het punt is $\frac{7,0}{3,0} \cdot 1\frac{5}{8} \approx 3,8$ inch.

- 18 a** Er geldt $\frac{AC}{AB} = \varphi$, dus $AC = AB \cdot \varphi = 5 \cdot 1,618 = 8,09$ cm.
 Er geldt $\frac{AB}{BD} = \varphi$, dus $BD = \frac{AB}{\varphi} = \frac{5}{1,618} \approx 3,09$ cm.
- b** Een zijde van een driehoek is φ keer zo klein als overeenkomstige zijde van de voorafgaande driehoek, dus $\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{1,618} \approx 0,618$ keer zo groot.
- c** De stelling van Pythagoras in driehoek APC met punt P recht onder C geeft
 $AP^2 + PC^2 = AC^2$
 $2,5^2 + PC^2 = 8,09^2$
 $PC^2 = 59,1981$
 $PC = 7,694... \text{ cm}$
 De oppervlakte van de eerste driehoek is dus $O(1) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7,694... = 19,235 \text{ cm}^2$.
- d** De zijde wordt met $\frac{1}{\varphi}$ vermenigvuldigd, dus de oppervlakte met $\left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 = 0,3819...$
 De directe formule is $O(n) = 19,235 \cdot 0,3819...^{n-1} = 19,235 \cdot 0,3819...^n \cdot 0,3819...^{-1} \approx 50,36 \cdot 0,382^n$.
- e** Voer in $y_1 = 50,36 \cdot 0,382^x$.
 Aflezen in de tabel geeft $O(8) \approx 0,023$ en $O(9) \approx 0,009$.
 Dus vanaf de 9^e driehoek is de oppervlakte kleiner dan $0,01 \text{ cm}^2$.

14 Werken met formules

Bladzijde 230

- 19 a** $10 + \frac{6}{a} - \frac{5}{b-1} = \frac{10a(b-1)}{a(b-1)} + \frac{6(b-1)}{a(b-1)} - \frac{5a}{a(b-1)} = \frac{10ab - 10a + 6b - 6 - 5a}{a(b-1)} = \frac{10ab - 15a + 6b - 6}{a(b-1)}$
- b** $B = 20 + \frac{10x}{x + \frac{x^2}{y}} = 20 + \frac{10xy}{\left(x + \frac{x^2}{y}\right)y} = \frac{20}{1} + \frac{10xy}{xy + x^2} = \frac{20(y+x)}{y+x} + \frac{10y}{y+x} = \frac{20(y+x) + 10y}{y+x}$
 $= \frac{20y + 20x + 10y}{y+x} = \frac{20x + 30y}{x+y}$
 Dus $a = 20$ en $b = 30$.

$$\text{c } C = \frac{2p^2 + 6}{p} - \frac{3}{2p} = \frac{2p^2}{p} + \frac{6}{p} - \frac{3}{2p} = 2p + \frac{12}{2p} - \frac{3}{2p} = 2p + \frac{9}{2p}$$

Dus $a = 2$ en $b = 9$.

$$\text{d } D = \frac{3x^2 + xy + 10y}{5x^2y} = \frac{3x^2}{5x^2y} + \frac{xy}{5x^2y} + \frac{10y}{5x^2y} = \frac{3}{5y} + \frac{1}{5x} + \frac{2}{x^2}$$

20

$$\text{a } 5s - 2t = 10$$

$$5s = 2t + 10$$

$$s = \frac{2}{5}t + 2$$

$$P = 3t - 4s + 35 \left\{ \begin{array}{l} P = 3t - 4\left(\frac{2}{5}t + 2\right) + 35 \\ P = 3t - 1\frac{3}{5}t - 8 + 35 \\ P = 1\frac{2}{5}t + 27 \end{array} \right.$$

$$\text{b } 2x - y = 1$$

$$-y = -2x + 1$$

$$y = 2x - 1$$

$$B = 3xy - 2x + 4 \left\{ \begin{array}{l} B = 3x(2x - 1) - 2x + 4 \\ B = 6x^2 - 3x - 2x + 4 \\ B = 6x^2 - 5x + 4 \end{array} \right.$$

Dus $a = 6$, $b = -5$ en $c = 4$.

21

$$\text{a } p = \frac{3 - 2T}{3T + 5}$$

$$p(3T + 5) = 3 - 2T$$

$$3pT + 5p = 3 - 2T$$

$$3pT + 2T = 3 - 5p$$

$$T(3p + 2) = 3 - 5p$$

$$T = \frac{3 - 5p}{3p + 2}$$

$$\text{b } y = 3\sqrt{5 - 2x}$$

$$\sqrt{5 - 2x} = \frac{1}{3}y$$

$$5 - 2x = \left(\frac{1}{3}y\right)^2$$

$$-2x = \frac{1}{9}y^2 - 5$$

$$x = -\frac{1}{18}y^2 + 2\frac{1}{2}$$

$$\text{c } N = 10 \cdot \log(t) - 22,5$$

$$10 \cdot \log(t) = N + 22,5$$

$$\log(t) = 0,1N + 2,25$$

$$t = 10^{0,1N + 2,25}$$

$$t = 10^{0,1N} \cdot 10^{2,25}$$

$$t = 10^{2,25} \cdot (10^{0,1})^N$$

$$t \approx 178 \cdot 1,259^N$$

$$\text{Dus } t = 178 \cdot 1,259^N.$$

22

a stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt x^2 toe, dus dan neemt $x^2 + 1$ toe, dan neemt $\frac{3}{x^2 + 1}$ af en dan neemt $100 - \frac{3}{x^2 + 1}$ toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 heel groot, dus dan wordt $x^2 + 1$ heel groot.

Dan nadert $\frac{3}{x^2 + 1}$ tot 0 en dan wordt $100 - \frac{3}{x^2 + 1} \approx 100 - 0 = 100$.

De grenswaarde is 100.

b stijgen of dalen

Als x toeneemt, dan neemt $0,77^x$ af, dus dan neemt $10 \cdot 0,77^x$ af.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe, dus dan neemt $\sqrt{x} + 5$ toe.

Van $\frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$ neemt af en dan neemt $55 - \frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$ toe.

De grafiek van y is stijgend.

grenswaarde

Als x heel groot wordt, dan nadert $0,77^x$ tot 0, dus dan nadert $10 \cdot 0,77^x$ tot 0.

Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot, dus dan wordt $\sqrt{x} + 5$ heel groot.

Als van $\frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$ de teller nadert tot 0 en de noemer heel groot wordt, dan nadert

$\frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5}$ tot 0 en dan wordt $55 - \frac{10 \cdot 0,77^x}{\sqrt{x} + 5} \approx 55 - 0 = 55$.

De grenswaarde is 55.

c stijgen of dalen

Als t toeneemt, dan neemt $0,56^t$ af, dus dan neemt $16 \cdot 0,56^t$ af en dan neemt

$24 - 16 \cdot 0,56^t$ toe. Daarom neemt $\frac{78}{24 - 16 \cdot 0,56^t}$ af.

De grafiek van y is dalend.

grenswaarde

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,56^t$ tot 0, dus dan nadert $16 \cdot 0,56^t$ tot 0 en dan

wordt $24 - 16 \cdot 0,56^t \approx 24 - 0 = 24$. Dan wordt $\frac{78}{24 - 16 \cdot 0,56^t} \approx \frac{78}{24} = 3,25$.

De grenswaarde is 3,25.

23**a** De gemiddelde verandering op $[4, 8]$ is

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(8) - T(4)}{8 - 4} = \frac{14,152 - 10,824}{4} = 0,832 \text{ } ^\circ\text{C/uur.}$$

b De gemiddelde snelheid waarmee de temperatuur toeneemt op $[0, 3]$ is

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(3) - T(0)}{3 - 0} = \frac{9,617 - 5}{3} = 1,539 \text{ } ^\circ\text{C/uur.}$$

c De gemiddelde snelheid waarmee de temperatuur verandert op $[15; 17,5]$ is

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(17,5) - T(15)}{17,5 - 15} \approx \frac{14,297 - 15,125}{2,5} \approx -0,33 \text{ } ^\circ\text{C/uur.}$$

Bladzijde 231**24****a** $t = 10$ geeft $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3 \cdot 10}} \approx 0,5$

Dus 0,5% is besmet (geweest).

b Los op $\frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}} = 25$.

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3x}} \text{ en } y_2 = 25.$$

De optie snijpunt geeft $x = 29,72 \dots$

Dus na 30 dagen.

c $2^{-0,3t} = (2^{-0,3})^t \approx 0,812^t$, dus als t toeneemt, dan neemt $2^{-0,3t}$ af, dus ook $1450 \cdot 2^{-0,3t}$ neemt af en $1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}$ neemt af. Dus $\frac{100}{1 + 1450 \cdot 2^{-0,3t}}$ neemt toe.

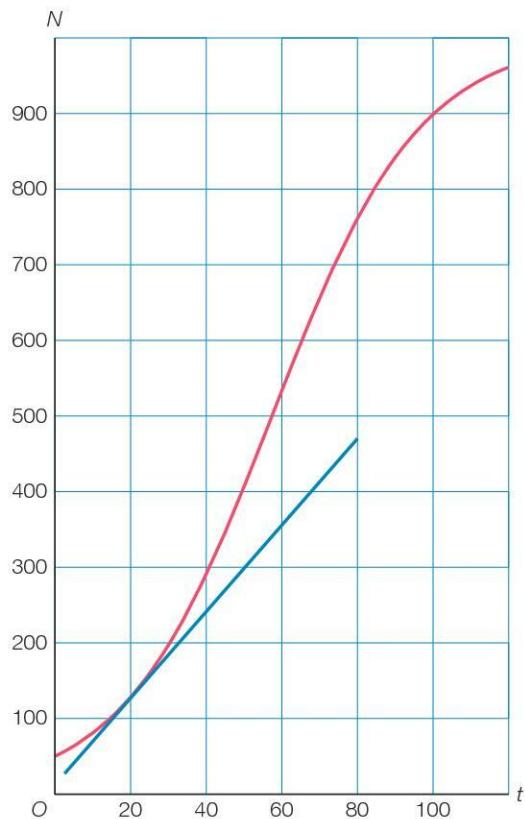
De grafiek van P is dus stijgend.

d De formule is te schrijven als $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 0,812^t}$.

Als t heel groot wordt, nadert $0,812^t$ tot 0. Dan wordt $1450 \cdot 0,812^t \approx 0$ en

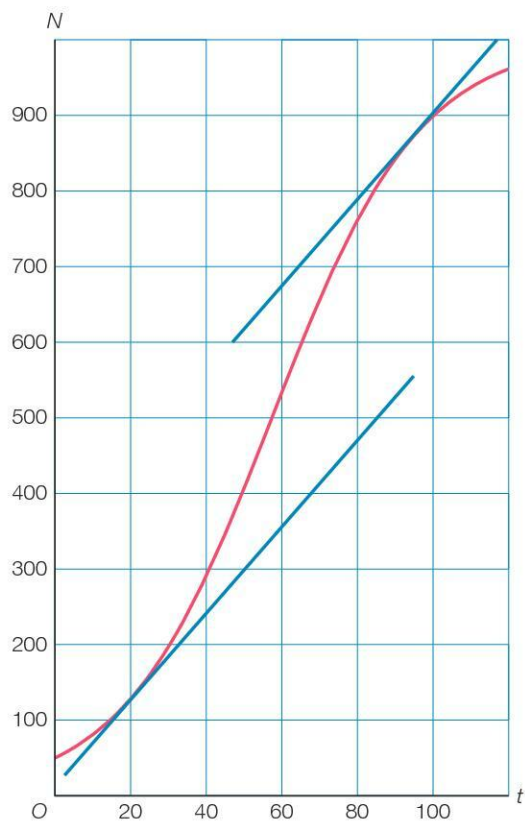
$1 + 1450 \cdot 0,812^t \approx 1$. Dus dan wordt $P = \frac{100}{1 + 1450 \cdot 0,812^t} \approx \frac{100}{1} = 100$.

De grenswaarde is 100%, dus uiteindelijk zal de gehele bevolking besmet zijn (geweest).

25 a

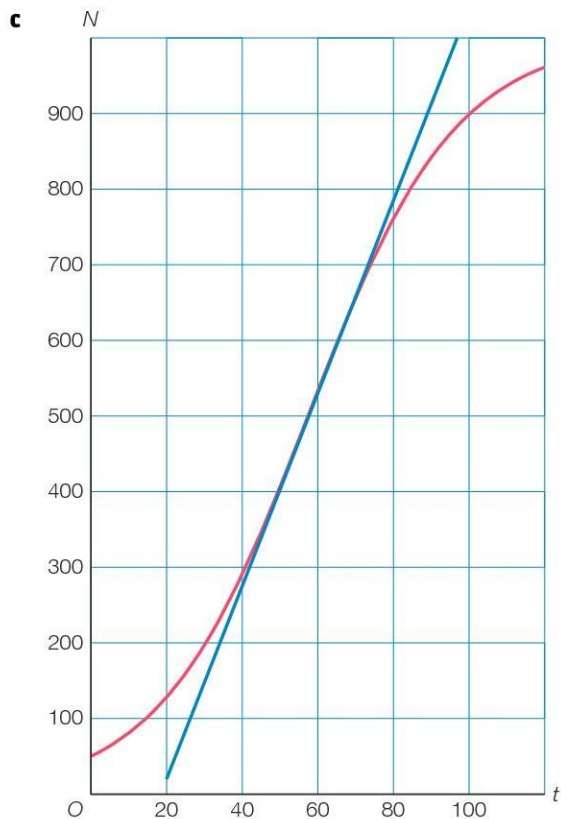
De raaklijn bij $t = 20$ gaat door de punten $(20, 130)$ en $(80, 470)$.

De groeisnelheid op $t = 20$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{470 - 130}{80 - 20} = \frac{340}{60} \approx 5,7$ miljoen gistcellen per minuut.

b

Ongeveer bij $t = 95$ is de raaklijn evenwijdig aan die bij $t = 20$.

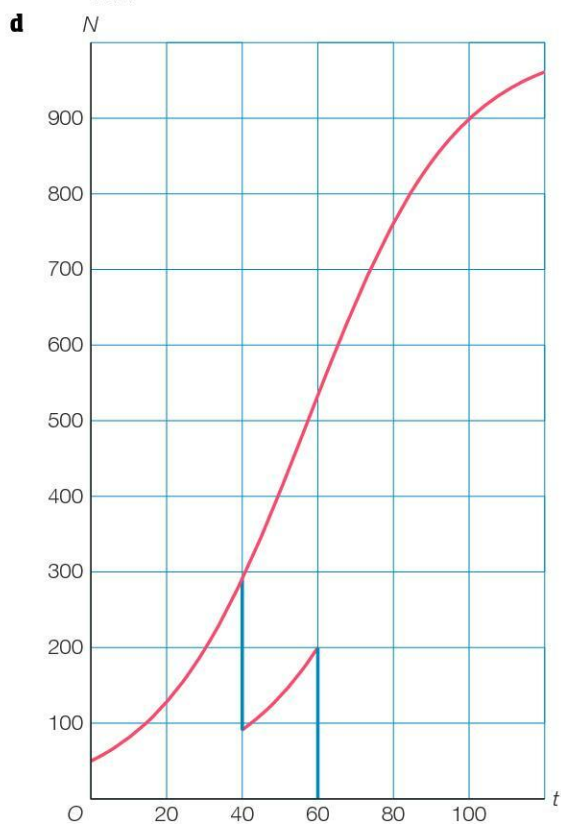
Na 95 minuten is de groeisnelheid gelijk aan die op $t = 20$.



De grafiek is het steilst bij ongeveer $t = 60$.

De bijbehorende raaklijn gaat door de punten $(60, 530)$ en $(20, 20)$.

De groeisnelheid op $t = 60$ is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{530 - 20}{60 - 20} = \frac{510}{40} \approx 12,8$ miljoen gistcellen per minuut.



Na 40 minuten zijn er ongeveer 290 miljoen gistcellen. Verwijdert hij er 200 miljoen, dan kan de populatie van 90 miljoen gistcellen niet voldoende aangroeien om voortdurend elke 20 minuten 200 miljoen gistcellen te kunnen verwijderen. Al na twee keer is er geen gistcel over.

Bladzijde 232

- 26 a** Op de horizontale as lees je bij de olifant een generatietijd van $10^{1,3} \approx 20$ jaar af.
Op de verticale as lees je bij de olifant een lengte van $10^{0,75} \approx 5,6$ meter af.
- b** Als T toeneemt, dan neemt $\log(T)$ toe, dus dan neemt $1,2 \cdot \log(T)$ toe en dan neemt ook $-0,8 + 1,2 \cdot \log(T)$ toe.
Dus $\log(L)$ neemt toe en dan neemt ook L toe.

Bladzijde 233

- c** Op de horizontale as lees je bij de mossel een generatietijd van $10^{0,45} = 2,81...$ jaar af.
Op de verticale as lees je bij de mossel een lengte van $10^{-2,25} = 0,0056...$ m meter af.
 $L = 10^{-2,25}$ invullen in de formule geeft $\log(10^{-2,25}) = -0,8 + 1,2 \cdot \log(T)$.
Voer in $y_1 = \log(10^{-2,25})$ en $y_2 = -0,8 + 1,2 \cdot \log(x)$.
De optie snijpunt geeft $x = 0,061...$
Dus de generatietijd is $x = \frac{2,81...}{0,061...} \approx 46$ keer zo lang.
- d** Vergelijk bijvoorbeeld de waarde van L bij $T = 1$ met de waarde van L bij $T = 2$.
 $T = 1$ invullen in de formule geeft $\log(L) = -0,8 + 1,2 \cdot \log(1)$
 $\log(L) = -0,8$
 $L = 10^{-0,8} = 0,158...$
 $T = 2$ invullen in de formule geeft $\log(L) = -0,8 + 1,2 \cdot \log(2)$
 $\log(L) = -0,438...$
 $L = 10^{-0,438...} = 0,364...$
Dus als T twee keer zo groot wordt, dan neemt L met $\frac{0,364... - 0,158...}{0,158...} \times 100\% \approx 130\%$ toe.
- e** $\log(L) = -0,8 + 1,2 \cdot \log(T)$
 $L = 10^{-0,8 + 1,2 \cdot \log(T)}$
 $L = 10^{-0,8} \cdot 10^{1,2 \cdot \log(T)}$
 $L = 10^{-0,8} \cdot (10^{\log(T)})^{1,2}$
 $L \approx 0,16 \cdot T^{1,2}$
Dus $a = 0,16$.

- 27 a** Dat was in 1964. De gemiddelde jaartemperatuur was toen $14 - 0,2 = 13,8$ graden Celsius.
- b** In 1950, 1951, 1954, 1955, 1956, 1960, 1964, 1965, 1966, 1967, 1968, 1971, 1974, 1975 en 1976.
Dus gedurende 15 jaar.
- c** In 1964 is de afwijking iets minder dan 0,2, in 1976 is de afwijking iets meer dan 0,25 en in 1998 is de afwijking iets minder dan 0,2.
De afwijking is dus het grootst in 1976.
- d** De lijn gaat door $(0; 0,20)$ en $(76; 0,70)$.
Stel $V = at + b$, met $a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{0,70 - 0,2}{66} \approx 0,0136$ en $b = -0,2$.
Dus $V = 0,0136t - 0,2$.
- e** $15,0^\circ\text{C}$ is $1,0^\circ\text{C}$ meer dan $14,0^\circ\text{C}$, dus opgelost moet worden de vergelijking $V = 1$.
 $0,0136t - 0,2 = 1$
 $0,0136t = 1,2$
 $t = \frac{1,2}{0,0136} \approx 88,2$
Dus in het jaar 2038 (of 2039) is de gemiddelde jaartemperatuur dan voor het eerst $15,0^\circ\text{C}$.

Bladzijde 234

- 28 a** $\text{hoogte} = \frac{100 + 40}{2} = 70 \text{ m}$
- b** $\text{lengte} = 100 - 70 = 30 \text{ m}$
- c** De rotortip gaat in 5 seconden twee keer rond, dus één keer rond in 2,5 seconden.
- d** De afstand die de rotortip in één rondgang aflegt is $2\pi r = 2\pi \cdot 30 = 60\pi \text{ m}$.
De snelheid is $\frac{60\pi}{2,5} \approx 75 \text{ m/s}$.
- e** $t = 35$ is 14 perioden na $t = 0$. De rotortip bevindt zich dan op een hoogte van 70 m.
 $t = 64,375$ is 25,75 perioden na $t = 0$. De rotortip bevindt zich dan op een hoogte van 40 m.

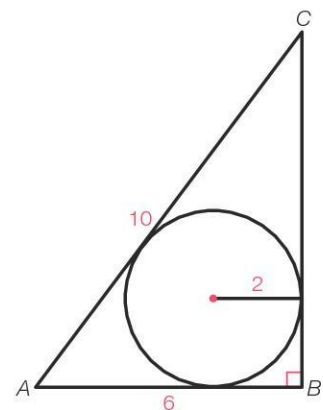
- 29 a** Tijdens het opwarmen stijgt de temperatuur in 100 seconden van 82°C naar 105°C .
De gemiddelde snelheid waarmee de temperatuur toeneemt is $\frac{105 - 82}{100} = 0,23^\circ\text{C}$ per seconde.
- b** Tijdens het afkoelen gaat de temperatuur in 800 seconden van 105°C naar 82°C .
De gemiddelde verandering van de temperatuur is $\frac{82 - 105}{800} \approx -0,04^\circ\text{C}$ per seconde.
- c** In een uur zitten 3600 seconden.
De periode is $100 + 800 = 900$ seconden.
Per uur zal het espressoapparaat het water dus $\frac{3600}{900} = 4$ keer opwarmen.
- d** Aflezen in de figuur tijdens het afkoelen geeft $t = 350$ bij 96°C en $t = 520$ bij 90°C .
Dus $\frac{170}{900} \times 100\% \approx 19\%$ van de tijd.

Bladzijde 235

- 30 a** $t = 24$ geeft $A = \frac{3000}{1 + 100 \cdot 0,97^{24}} \approx 61$. Dus ongeveer 61 klanten hadden een account.
- b** Los op $\frac{3000}{1 + 100 \cdot 0,97^t} = 2000$.
Voer in $y_1 = \frac{3000}{1 + 100 \cdot 0,97^x}$ en $y_2 = 2000$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 173,9$, dus na 174 dagen.
- c** Als t toeneemt, dan neemt $0,97^t$ af. Dus ook $1 + 100 \cdot 0,97^t$ neemt af, maar blijft positief, dus $\frac{3000}{1 + 100 \cdot 0,97^t}$ neemt toe.
Het aantal klanten met een account neemt dus voortdurend toe.
- d** Als t heel groot is, is $0,97^t \approx 0$. Dan is $100 \cdot 0,97^t \approx 0$ en $1 + 100 \cdot 0,97^t \approx 1$. Dus dan is $A \approx \frac{3000}{1} = 3000$, dus de grenswaarde is 3000.

15 Examentraining

- 31** $E = 15 \cdot (2N)^{-1,5}$
 $(2N)^{-1,5} = \frac{1}{15}E$
 $2N = \left(\frac{1}{15}E\right)^{\frac{1}{-1,5}}$
 $N = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{1}{-1,5}} \cdot E^{\frac{1}{-1,5}}$
 $N \approx 3,04E^{-0,67}$
 Dus $N = 3,04E^{-0,67}$.
- 32** Voer in $y_1 = -0,005x^2 + 23x$.
De optie maximum geeft $x = 2300$ en $y = 26450$.
De maximale waarde van P is 26450.
- 33** totaal = $\frac{649}{0,0564} \approx 11507$
- 34** In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $10^2 = 6^2 + BC^2$
 $100 = 36 + BC^2$
 $BC^2 = 64$
 $BC = 8$
 $O(V) = O(\text{driehoek}) - O(\text{cirkel}) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 - \pi \cdot 2^2 \approx 11,43$
- 35** $3(P - 5) + 4(3Q + 1) = 61$
 $3P - 15 + 12Q + 4 = 61$
 $3P = -12Q + 72$
 $P = -4Q + 24$
- 36** aantal = $5! = 120$



37 Stel $u_n = u_0 \cdot r^n$.

$$r^5 = \frac{u_7}{u_2} = \frac{45,5625}{6}, \text{ dus } r = \left(\frac{45,5625}{6}\right)^{\frac{1}{5}} = 1,5.$$

$$u_n = u_0 \cdot 1,5^n \text{ en } u_2 = 6 \text{ geeft } u_0 \cdot 1,5^2 = 6, \text{ dus } u_0 = 2\frac{2}{3}.$$

$$\text{De directe formule is } u_n = 2\frac{2}{3} \cdot 1,5^n.$$

38 $\frac{2}{p} + 3p \cdot \frac{5q}{2p^2} = \frac{2}{p} + \frac{15pq}{2p^2} = \frac{2}{p} + \frac{15q}{2p} = \frac{4}{2p} + \frac{15q}{2p} = \frac{15q+4}{2p}$

Bladzijde 236

39 $30\,689 \text{ km}^2 = 30\,689 \cdot 10^6 \text{ m}^2$

$$\text{De oppervlakte per inwoner is } \frac{30\,689 \cdot 10^6}{11,46 \cdot 10^6} \approx 2678 \text{ m}^2.$$

40 $A = 0,18 \cdot (2x - 3) \cdot \frac{x}{0,06} = \frac{0,18}{0,06} \cdot x(2x - 3) = 3x(2x - 3) = 6x^2 - 9x$

$$\text{Dus } a = 6 \text{ en } b = -9.$$

41 y is evenredig met x , dus $y = ax$.

$$x = 12 \text{ en } y = 69 \text{ geeft } 12a = 69, \text{ dus } a = 5,75.$$

$$x = 42 \text{ invullen in } y = 5,75x \text{ geeft } y = 5,75 \cdot 42 = 241,5.$$

42 $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30 - 18}{10 - 2} = 1\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, 18) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 18 \\ 3 + b = 18 \end{array}$$

$$b = 15$$

$$\text{Dus } k: y = 1\frac{1}{2}x + 15.$$

43 $5p \cdot \frac{3}{q} \cdot \frac{1-q}{q} = \frac{5p \cdot 3 \cdot (1-q)}{q^2} = \frac{15p - 15pq}{q^2}$

44 Dat is $45\,486 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \approx 3,9 \cdot 10^9$ dollar per dag.

45 $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg C$

46 $\frac{750 - 820}{820} \times 100\% \approx -8,5\%$, dus de afname is 8,5%.

47 Dat is $1167 \cdot 1,61^2 \approx 3025 \text{ km}^2$.

48 De winst in 2020 was $31,25 \cdot 1,085 \cdot 0,847 \approx 28,72$ miljoen euro.

49 $(2a - 1)^2 - 4(3a - 1) = 4a^2 - 4a + 1 - 12a + 4 = 4a^2 - 16a + 5$

50 E is midden van BC .

$$\text{In } \triangle AEB \text{ is } \angle E = 90^\circ, \text{ dus } 12^2 = AE^2 + 6^2$$

$$144 = AE^2 + 36$$

$$AE^2 = 108$$

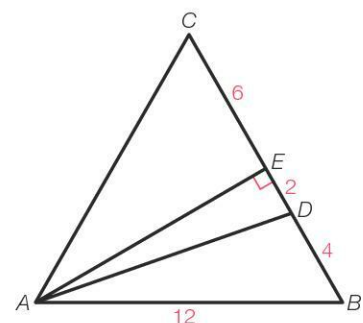
$$AE = \sqrt{108}$$

$$\text{In } \triangle AED \text{ is } \angle E = 90^\circ, \text{ dus } AD^2 = 2^2 + (\sqrt{108})^2$$

$$AD^2 = 4 + 108$$

$$AD^2 = 112$$

$$AD = \sqrt{112} \approx 10,58$$



Bladzijde 237

51 aantal = $7^5 = 16\,807$

52 $z = 20 + 4^{x-2}$
 $20 + 4^{x-2} = z$
 $4^{x-2} = z - 20$
 $x - 2 = {}^4\log(z - 20)$
 $x = {}^4\log(z - 20) + 2$

53 4 delen is gelijk aan 25 euro, dus 1 deel is gelijk aan 6,25 euro.
 In totaal werden $2 + 3 + 7 = 12$ delen verdeeld.
 Er werd dus $12 \cdot 6,25 = 75$ euro verdeeld.

54 a In 11 jaar $1165 - 840 = 325$ erbij, dus per jaar $\frac{325}{11}$ erbij.

In 2010 was het aantal $840 + 7 \cdot \frac{325}{11} \approx 1047$.

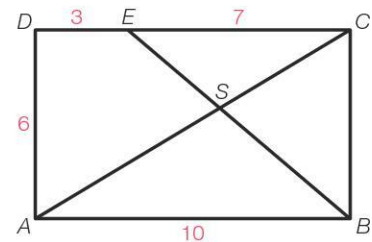
b In 6 jaar $1390 - 1165 = 225$ erbij, dus per jaar $\frac{225}{6} = 37,5$ erbij.

In 2025 is het aantal $1390 + 5 \cdot 37,5 \approx 1578$.

c $840 - 520 = 320$ erbij in 8 jaar, dus 1 erbij in $\frac{8}{320}$ jaar.

$760 - 520 = 240$, dus bij 760 hoort het jaar $1995 + 240 \cdot \frac{8}{320} = 2001$.

55 In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $AC^2 = 10^2 + 6^2$
 $AC^2 = 100 + 36$
 $AC^2 = 136$
 $AC = \sqrt{136}$
 $\triangle ABS$ is een vergroting van $\triangle CES$ met vergrotingsfactor $\frac{AB}{EC} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$.
 Stel $AS = x$, dan $CS = \sqrt{136} - x$.
 Er geldt $AS = 1\frac{3}{7} \cdot CS$, dus $x = 1\frac{3}{7}(\sqrt{136} - x)$
 $x = 16,659... - 1,428...x$
 $2,428...x = 16,659...$
 $x \approx 6,86$



Dus $AS = 6,86$.

56 $\frac{6x+10}{x+3} - 2x = \frac{6x+10}{x+3} - \frac{2x(x+3)}{x+3} = \frac{6x+10-2x^2-6x}{x+3} = \frac{-2x^2+10}{x+3}$

57 De procentuele toename is $\frac{145-115}{115} \times 100\% \approx 26,1\%$.

58 $6a - 5b = 18$
 $-5b = -6a + 18$
 $b = 1\frac{1}{5}a - 3\frac{3}{5}$

59 a Als x toeneemt, dan neemt $3x$ toe, dus $3x + 1$ neemt toe, dus $\frac{10}{3x+1}$ neemt af en $75 - \frac{10}{3x+1}$ neemt toe.

Dus de grafiek van y is stijgend.

Als x heel groot wordt, dan wordt $3x$ heel groot, dus dan wordt $3x + 1$ heel groot en

dan nadert $\frac{10}{3x+1}$ tot 0. Dus dan wordt $75 - \frac{10}{3x+1} \approx 75 - 0 = 75$.

Dus de grenswaarde is 75.

- b** Als x toeneemt, dan neemt $2x^2$ toe, dus $2x^2 + 1$ neemt toe, dus $\frac{50}{2x^2 + 1}$ neemt af en $\frac{50}{2x^2 + 1} + 30$ neemt af.

Dus de grafiek van y is dalend.

Als x heel groot wordt, dan wordt $2x^2$ heel groot, dus dan wordt $2x^2 + 1$ heel groot en dan nadert $\frac{50}{2x^2 + 1}$ tot 0. Dus dan wordt $\frac{50}{2x^2 + 1} + 30 \approx 0 + 30 = 30$.

Dus de grenswaarde is 30.

- c** Als x toeneemt, dan neemt $0,75^x$ af en $100 \cdot 0,75^x$ neemt af.

Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ toe en $3\sqrt{x}$ neemt toe.

Van $\frac{100 \cdot 0,75^x}{3\sqrt{x}}$ neemt de teller af en de noemer toe, dus $\frac{100 \cdot 0,75^x}{3\sqrt{x}}$ neemt af.

Dus de grafiek van y is dalend.

Als x heel groot wordt, dan nadert $0,75^x$ tot 0. Dan wordt $100 \cdot 0,75^x \approx 0$.

Als x heel groot wordt, dan wordt $\sqrt{x}$ heel groot en $3\sqrt{x}$ wordt heel groot.

Van $\frac{100 \cdot 0,75^x}{3\sqrt{x}}$ nadert de teller tot 0 en de noemer wordt heel groot, dus $\frac{100 \cdot 0,75^x}{3\sqrt{x}}$ nadert tot 0.

Dus de grenswaarde is 0.

60 $\frac{2}{3}a^{-4}b^2 = \frac{2b^2}{3a^4}$

Bladzijde 238

- 61 a** $q = 400$ geeft $W = -0,01 \cdot 400^2 + 7,5 \cdot 400 - 650 = 750$

De winst per artikel is $\frac{75000}{400} = 187,50$ euro.

- b** Voer in $y_1 = -0,01x^2 + 7,5x - 650$.

De optie maximum geeft $x = 375$ en $y = 756,25$.

De maximale winst is 75 625 euro per jaar.

62 $A = at + b$ met $a = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{22 - 78}{28 - 12} = -3\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} A = -3\frac{1}{2}t + b \\ t = 12 \text{ en } A = 78 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3\frac{1}{2} \cdot 12 + b = 78 \\ -42 + b = 78 \\ b = 120 \end{array}$$

Dus $A = -3\frac{1}{2}t + 120$.

63 a $\neg A \wedge (B \vee C) \Rightarrow D$

b $\neg D \Rightarrow A \vee (\neg B \wedge \neg C)$

64 $(a^{-2})^4 \cdot a^5 = a^{-8} \cdot a^5 = a^{-3}$

- 65** Bij codes met vijf letters 3, 4 of 5 A's.

$$\text{aantal} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 10 + 5 + 1 = 16$$

Bij codes met zes letters 4, 5 of 6 A's.

$$\text{aantal} = \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 15 + 6 + 1 = 22$$

Bij codes met zeven letters 4, 5, 6 of 7 A's.

$$\text{aantal} = \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 35 + 21 + 7 + 1 = 64$$

Het totale aantal codes met meer A's dan B's is $16 + 22 + 64 = 102$.

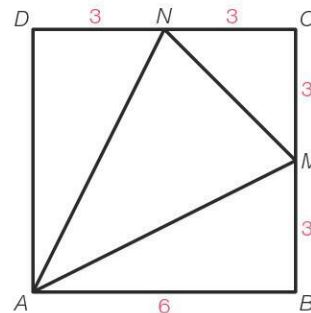
66 $67,13 \text{ km}^2 = 67,13 \cdot 10^8 \text{ dm}^2$

$$55 \text{ mm} = 55 \cdot 10^{-2} \text{ dm}$$

Dus er viel die dag $67,13 \cdot 10^8 \cdot 55 \cdot 10^{-2} \approx 3,69 \cdot 10^9$ liter regen.

$$67 \quad O(\triangle AMN) = O(ABCD) - O(\triangle ABM) - O(\triangle MCN) - O(\triangle AND) \\ = 6^2 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 13\frac{1}{2}$$

- 68 $g_{\text{jaar}} = 0,942$
 Los op $0,942^t = \frac{1}{2}$.
 Voer in $y_1 = 0,942^x$ en $y_2 = \frac{1}{2}$.
 De optie snijpunt geeft $x = 11,60\dots$
 De halveringstijd is ongeveer 11 jaar en 7 maanden (139 maanden).



Bladzijde 239

- 69 a Rij bij exponentieel verband met $u_0 = 800$ en $r = 1,05$, dus recursieve formule $u_n = 1,05 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 800$ en directe formule $u_n = 800 \cdot 1,05^n$.
 b Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $u_{12} \approx 1436,7$ en $u_{13} \approx 1508,5$.
 Er zijn 13 termen kleiner dan 1500.

$$70 \quad (4a - 1) \cdot \frac{2b}{4a - 1} = 2b$$

$$71 \quad \text{De oorspronkelijke hoeveelheid was } \frac{3015}{1,184} \approx 2546.$$

$$72 \quad \text{aantal} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$$

$$73 \quad y = 0,4 \cdot \sqrt[3]{x} + 2 \\ 0,4 \cdot \sqrt[3]{x} = y - 2 \\ \sqrt[3]{x} = \frac{y - 2}{0,4} = 2,5y - 5 \\ x = (2,5y - 5)^3$$

$$74 \quad \left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(6, 9) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 6 + b = 9 \\ -2 + b = 9 \\ b = 11 \end{array} \\ \text{Dus } l: y = -\frac{1}{3}x + 11.$$

$$75 \quad y = \frac{108}{(3x^2)^3} = \frac{108}{3^3 \cdot (x^2)^3} = \frac{108}{27x^6} = 4x^{-6} \\ \text{Dus } y = 4x^{-6}.$$

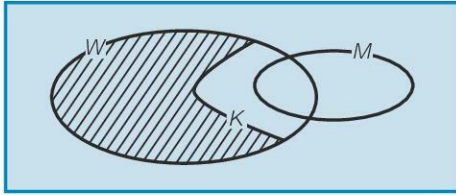
$$76 \quad I(TABCD) = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 12 = 100 \\ \text{Hoogte piramide die eraf gehaald wordt is } 12 - 7 = 5, \text{ dus } k = \frac{5}{12}. \\ I(TPQRS) = \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot 100 \approx 7,2 \\ \text{Dus } I(\text{afgeknotte piramide}) \approx 100 - 7,2 = 92,8.$$

$$77 \quad q \text{ neemt toe van 100 tot 200.} \\ \text{De gemiddelde toename is } \frac{K(200) - K(100)}{100} = \frac{129,6 - 117,2}{100} = 0,124 \text{ euro per stuk.}$$

$$78 \quad \text{Neem } 2x \text{ voor } x \text{ in de formule } A = 20x^{1,7}. \\ \text{Je krijgt } A = 20(2x)^{1,7} = 20 \cdot 2^{1,7} \cdot x^{1,7} = 2^{1,7} \cdot 20x^{1,7} \approx 3,25 \cdot 20x^{1,7}. \\ \text{Dus } A \text{ wordt ongeveer 3,25 keer zo groot.}$$

$$79 \quad \frac{5}{6}a^{-4}b^{\frac{2}{3}} = \frac{5b^{\frac{2}{3}}}{6a^4} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{b^2}}{6a^4}$$

- 80 W : dieren in de wei
 K : koeien
 M : dieren die melk geven



In het venndiagram zijn de uitgangspunten waar, maar het gearceerde gebied geeft aan dat er geen dieren zijn die in de wei lopen, geen koe zijn en melk geven. De conclusie volgt dus niet uit de uitgangspunten.

Bladzijde 240

81 aantal = $\binom{16}{3} \cdot \binom{13}{2} = 43\,680$

82 a $g_{\text{dag}} = 1,086$, dus $g_{\text{week}} = 1,086^7 \approx 1,782$
 De toename is 78,2% per week.

b $g_{\text{dag}} = 1,086$, dus $g_{10 \text{ uur}} = 1,086^{\frac{10}{24}} \approx 1,035$
 Dus de toename is 3,5% per tien uur.

83 $x = 10$ geeft $N = 84 + 43,2 \cdot \log(10) = 127,2$ en $x = 20$ geeft $N = 84 + 43,2 \cdot \log(20) \approx 140,2$.
 Als x verdubbelt, dan neemt N met (ongeveer) 13 toe.

84 $y = \frac{6\sqrt{x}}{2x \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{2x \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{4}{3}}} = 3x^{-\frac{5}{6}}$

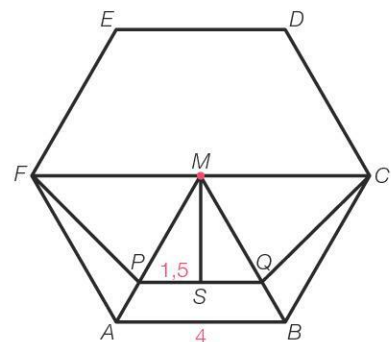
Dus $y = 3x^{-\frac{5}{6}}$.

85 2 micrometer = $2 \cdot 10^{-3} \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ meter}$
 De diameter van het virusdeeltje is $\frac{2 \cdot 10^{-6}}{50} \text{ m} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ m}$.

86 Regelmatige zeshoek, dus $AB = AM = BM = 4$ en dus ook $PQ = PM = QM = 3$.
 S is het midden van PQ .

In $\triangle PSM$ is $\angle S = 90^\circ$, dus $3^2 = 1,5^2 + MS^2$
 $9 = 2,25 + MS^2$
 $MS^2 = 6,75$
 $MS = \sqrt{6,75} \approx 2,598...$

MS is de hoogte van parallellogram $PQCF$, dus
 $O(PQCF) = \frac{1}{2}(8 + 3) \cdot 2,598... \approx 14,3$.



- 87 A: Ad spreekt de waarheid.
 B: Ben spreekt de waarheid.
 C: Cor spreekt de waarheid.

situatie	wie heeft gespiekt
$\neg A$	Ben
B	Cor
C	Ad of Ben

Tegenspraak, dus Ad spreekt de waarheid.

Omdat Ad de waarheid spreekt (en dus niet heeft gespiekt) en zegt dat Ben niet heeft gespiekt, moet het wel zo zijn dat Cor heeft gespiekt.

- 88 a** $g_{8 \text{ uur}} = 0,891$, dus $g_{50 \text{ uur}} = (0,891)^{\frac{50}{8}} \approx 0,486$.
De afname is 51,4% per 50 uur.
- b** $g_{8 \text{ uur}} = 0,891$, dus $g_{\text{uur}} = (0,891)^{\frac{1}{8}} \approx 0,986$.
De afname is 1,4% per uur.

89
$$\frac{x^5}{x^3 \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{x^5}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^5}{x^{3\frac{1}{4}}} = x^{1\frac{3}{4}}$$

Bladzijde 241

- 90** Ze doet er $\frac{6,5}{14,6} = 0,445\dots$ uur = 26,71... minuten $\approx$ 26 minuten en 43 seconden over.

- 91** $k = 50$, dus $k^3 = 50^3 = 125\,000$.
De inhoud van het gebouw is $3520 \cdot 125\,000 = 440 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 = 440 \text{ m}^3$.

- 92** In de formule h vervangen door $100H$ en m vervangen door $12j$ geeft
 $100H = 0,02 \cdot (12j)^3 + 0,4 \cdot (12j)^2$
 $100H = 0,02 \cdot 1728j^3 + 0,4 \cdot 144j^2$
 $100H = 34,56j^3 + 57,6j^2$
 $H = 0,3456j^3 + 0,576j^2$
Dus $H = 0,3456j^3 + 0,576j^2$.

- 93**
$$\left. \begin{array}{l} M = 25t^b \\ t = 5 \text{ en } M = 70 \end{array} \right\} 25 \cdot 5^b = 70$$

Voer in $y_1 = 25 \cdot 5^x$ en $y_2 = 70$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 0,64$, dus $b = 0,64$.

- 94** $N = 75 \cdot {}^2\log(t) = 75 \cdot \frac{\log(t)}{\log(2)} = \frac{75}{\log(2)} \cdot \log(t) \approx 249 \cdot \log(t)$
Dus $N = 249 \cdot \log(t)$.

- 95** $N = b \cdot g^t$ met $g_{8 \text{ jaar}} = \frac{77}{326}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{77}{326}\right)^{\frac{1}{8}} = 0,8349\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 0,8349\dots^t \\ t = 3 \text{ en } N = 326 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 0,8349\dots^3 = 326 \\ b = \frac{326}{0,8349\dots^3} \approx 560 \end{array}$$

Dus $N = 560 \cdot 0,835^t$.

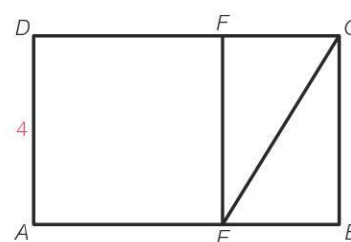
- 96** $N = 4\sqrt{2a-3}$
 $\sqrt{2a-3} = \frac{1}{4}N$
 $2a-3 = \left(\frac{1}{4}N\right)^2$
 $2a = \frac{1}{16}N^2 + 3$
 $a = \frac{1}{32}N^2 + 1\frac{1}{2}$

- 97** Voor de prijs p in euro's en de verkoop q in stuks geldt $p \cdot q = 0,80 \cdot 135 = 108$.
Bij een prijs van € 1,10 geldt $1,10 \cdot q = 108$, dus $q = \frac{108}{1,10} \approx 98$.
Dus hij verkoopt 98 meloenen.

$$\begin{aligned}
 98 \quad N &= 12 - \frac{150}{2S-1} \\
 N-12 &= -\frac{150}{2S-1} \\
 12-N &= \frac{150}{2S-1} \\
 2S-1 &= \frac{150}{12-N} \\
 2S &= \frac{150}{12-N} + 1 \\
 S &= \frac{75}{12-N} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

- 99 In 1960 is $N = 10^{7,5} \approx 31\,623\,000$.
 In 2020 is $N = 10^{5,75} \approx 562\,000$.
 De factor is $\frac{31\,623\,000}{562\,000} \approx 56$.

- 100 $AB = \varphi \cdot AD \approx 1,618 \cdot 4 = 6,472$, dus $EB \approx 6,472 - 4 = 2,472$.
 In $\triangle EBC$ is $\angle B = 90^\circ$, dus $EC^2 = 2,472^2 + 4^2$
 $EC^2 = 6,110784 + 16$
 $EC^2 = 22,110784$
 $EC = \sqrt{22,110784} \approx 4,7$



Bladzijde 242

101 aantal $= \binom{11}{1} \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 1\,663\,200$

Alternatieve uitwerking

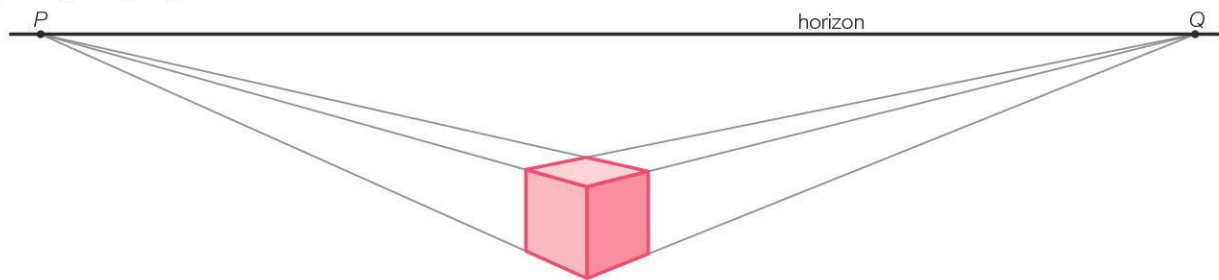
$$\text{aantal} = \frac{11!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 1\,663\,200$$

- 102 $A = 20 \cdot \sqrt[3]{30x} = 20 \cdot \sqrt[3]{30} \cdot \sqrt[3]{x} \approx 62,1 \cdot \sqrt[3]{x}$
 Dus $A = 62,1 \cdot \sqrt[3]{x}$.

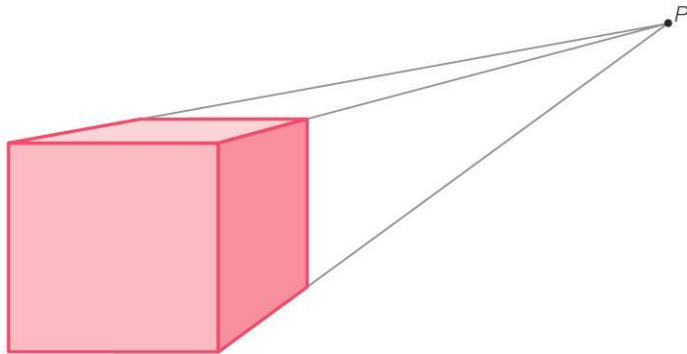
- 103 a Rij bij lineair verband met $u_0 = 980$ en $v = -17$,
 dus recursieve formule $u_n = u_{n-1} - 17$ met $u_0 = 980$
 en directe formule $u_n = 980 - 17n$.
 b $u_n = 0$ geeft $980 - 17n = 0$
 $17n = 980$
 $n \approx 57,6$
 $u_{57} = 11$ en $u_{58} = -6$, dus de rij heeft 58 positieve termen.

- 104 a Als t heel groot wordt, dan nadert $0,96^t$ tot 0. Dan wordt $14 \cdot 0,96^t \approx 0$ en $3 + 14 \cdot 0,96^t \approx 3$.
 Dus dan wordt $\frac{600}{3 + 14 \cdot 0,96^t} \approx \frac{600}{3} = 200$, dus het verzadigingsniveau is 200.
 b Als t heel groot wordt, dan nadert $0,81^t$ tot 0. Dan wordt $3 - 0,81^t \approx 3$, dus dan wordt $450(3 - 0,81^t) \approx 450 \cdot 3 = 1350$, dus het verzadigingsniveau is 1350.
 c Als t heel groot wordt, dan nadert $\frac{30}{t+2}$ tot 0, dus dan wordt $50 - \frac{30}{t+2} \approx 50 - 0 = 50$,
 dus het verzadigingsniveau is 50.

105 tweepuntsperspectief:



éénpuntsperspectief:



- 106** $y = 0,3x^4$
 $\downarrow$ verschuiving $(0,16; 2,2)$
 $y = 0,3(x - 0,16)^4 + 2,2$
 De top is $(0,16; 2,2)$.

- 107** $N = b \cdot g^t$ met $g_{8 \text{ dagen}} = \frac{161}{101}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{161}{101}\right)^{\frac{1}{8}} = 1,0600\dots$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 1,0600\dots^t \\ t = 4 \text{ en } N = 101 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 1,0600\dots^4 = 101 \\ b = \frac{101}{1,0600\dots^4} \approx 79,996 \end{array}$$

Dus $N = 80 \cdot 1,060^t$.

- 108** $N = 40 + {}^3\log(t) = 40 + \frac{\log(t)}{\log(3)} = 40 + \frac{1}{\log(3)} \cdot \log(t) \approx 40 + 2,10 \cdot \log(t)$
 Dus $N = 40 + 2,10 \cdot \log(t)$.

- 109** $K = 16(p - 4)^2$
 $(p - 4)^2 = \frac{1}{16}K$
 $p - 4 = \sqrt{\frac{1}{16}K}$
 $p = \frac{1}{4}\sqrt{K} + 4$

- 110** $P = \frac{2a + 1}{3a - 1}$
 $P(3a - 1) = 2a + 1$
 $3aP - P = 2a + 1$
 $3aP - 2a = P + 1$
 $a(3P - 2) = P + 1$
 $a = \frac{P + 1}{3P - 2}$

- 111** $y = 16 \cdot 3^{4-x} = 16 \cdot 3^4 \cdot 3^{-x} = 16 \cdot 81 \cdot (3^{-1})^x = 1296 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$
 Dus $y = 1296 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

- 112** $k = 10$ geeft $N = 12,5 + 10,48 \cdot \log(10) = 22,98$ en
 $k = 30$ geeft $N = 12,5 + 10,48 \cdot \log(30) \approx 27,98$.
 Als k drie keer zo groot wordt, dan neemt N met (ongeveer) 5 toe.

- 113** Er geldt $g^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.

$$g^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \text{ geeft } g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0,878.$$

De afname per jaar is 12,2%.

Bladzijde 243

- 114** Na de eerste uitspraak van elke speler blijven de volgende mogelijke kaartjes per speler over:

Ad: 11, 13, 15, 17, 19

Ben: 13, 15

Cor: 11, 13, 17, 19

Daan: 12, 14, 16, 18

Na de tweede uitspraak van de Ad en Ben blijven de volgende mogelijke kaartjes van deze spelers over:

Ad: 13, 17

Ben: 13

Dan zegt Daan stop. Hij weet dat Ben 13 heeft en Ad dus 17 moet hebben. Van de mogelijkheden van Cor zijn echter nog 11 en 19 over. Daan kan niet weten welk kaartje Cor heeft.

Daan kan dus niet de getallen van alle andere kaartjes weten.

- 115 a** Als t toeneemt, dan neemt $0,91^t$ af, dus ook $20 \cdot 0,91^t$ neemt af, dus ook $1 + 20 \cdot 0,91^t$ neemt af, dus neemt $\frac{1500}{1 + 20 \cdot 0,91^t}$ toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

- b** Als t toeneemt, dan neemt $0,98^t$ af, dus $1 - 0,98^t$ neemt toe, dus $20(1 - 0,98^t)$ neemt toe, dus $10 + 20(1 - 0,98^t)$ neemt toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

- c** Als t toeneemt, dan neemt $0,75^t$ af, dus dan neemt $3 - 0,75^t$ toe, dus $\frac{10}{3 - 0,75^t}$ neemt

af, dus $25 - \frac{10}{3 - 0,75^t}$ neemt toe.

Dus de grafiek van N is stijgend.

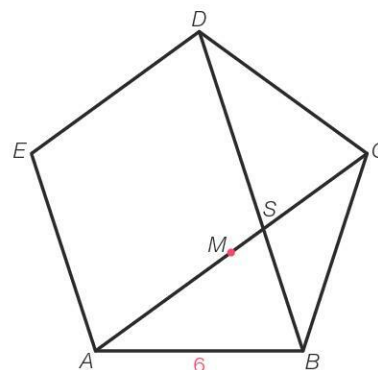
- 116** $AC = \varphi \cdot AB \approx 1,618 \cdot 6 = 9,708$ en $AS = AB = 6$.
 Dus $MS = 6 - \frac{1}{2} \cdot 9,708 \approx 1,1$.

- 117** $y = ax + b$ met $a = \frac{55 - 70}{20 - 8} = -1,25$

$$\left. \begin{array}{l} y = -1,25x + b \\ \text{door } A(8, 70) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,25 \cdot 8 + b = 70 \\ b = 70 + 10 = 80 \end{array}$$

Dus $l: y = -1,25x + 80$.

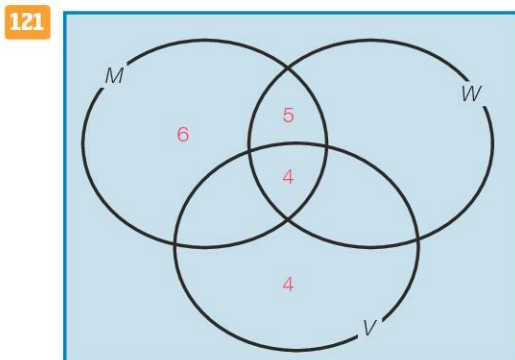
- 118** $N = 25 \cdot 1,85^{t-2}$
 $1,85^{t-2} = 0,04N$
 $t - 2 = {}^{1,85}\log(0,04N)$
 $t = 2 + {}^{1,85}\log(0,04N)$



119 $2p + 3q = 60$
 $3q = -2p + 60$
 $q = -\frac{2}{3}p + 20$
 $K = 5p + 4q + 120$ } $K = 5p + 4(-\frac{2}{3}p + 20) + 120$
 $K = 5p - \frac{8}{3}p + 80 + 120$
 $K = 2\frac{1}{3}p + 200$
Dus $K = 2\frac{1}{3}p + 200$.

Bladzijde 244

- 120 $A(n)$ is een rij bij een lineair verband met $A(0) = 750$ en $v = 12$, dus de directe formule is $A(n) = 750 + 12n$.
 $B(n)$ is een rij bij een exponentieel verband met $B(0) = 100$ en $r = 1,2$, dus de directe formule is $B(n) = 100 \cdot 1,2^n$.
Voer in $y_1 = 750 + 12x$ en $y_2 = 100 \cdot 1,2^x$ en maak een tabel.
Uit de tabel volgt $A(12) = 894$ en $B(12) \approx 891,6$ en $A(13) = 906$ en $B(13) \approx 1069,9$.
Dus vanaf $n = 13$, dat is de 14^e term, is $B(n) > A(n)$.



Op maandag 20 mensen, dus $20 - 6 - 5 - 4 = 5$ mensen alleen op maandag en vrijdag.
Op vrijdag 15 mensen, dus $15 - 4 - 4 - 5 = 2$ mensen alleen op woensdag en vrijdag.
Op woensdag 17 mensen, dus $17 - 5 - 4 - 2 = 6$ mensen alleen op woensdag.

122 $5a^2 - \frac{3}{a^2} = \frac{5a^4}{a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{5a^4 - 3}{a^2}$

- 123 $g_{\text{jaar}} = 1,073$, dus los op $1,073^t = 2$.
Voer in $y_1 = 1,073^x$ en $y_2 = 2$.
De optie snijpunt geeft $x = 9,83...$
De verdubbelingstijd is ongeveer 9 jaar en $0,83... \times 12 \approx 10$ maanden.

124 a $K = aq^{1,15}$
 $q = 60$ en $K = 499$ } $a \cdot 60^{1,15} = 499$
 $a = \frac{499}{60^{1,15}} = 4,500...$
 $q = 100$ geeft $K = 4,500... \cdot 100^{1,15} \approx 898$
b $K = 4,5q^{1,15}$
 $q^{1,15} = \frac{1}{4,5}K$
 $q = (\frac{1}{4,5}K)^{\frac{1}{1,15}}$
 $q = (\frac{1}{4,5})^{\frac{1}{1,15}} \cdot K^{\frac{1}{1,15}}$
 $q \approx 0,27K^{0,87}$
Dus $q = 0,27K^{0,87}$.

- 125 6663 4 keer
6654 $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ keer
6555 4 keer
Dus het aantal mogelijkheden is $4 + 12 + 4 = 20$.

126 $N = 4 \cdot 10^{0,4t}$
 $10^{0,4t} = 0,25N$
 $0,4t = \log(0,25N)$
 $t = 2,5 \cdot \log(0,25N)$

127 49 minuten en 40 seconden is $\frac{49\frac{2}{3}}{60}$ uur.
 De gemiddelde snelheid is $\frac{9,8}{\left(\frac{49\frac{2}{3}}{60}\right)} \approx 11,84$ km/uur.

128 Er geldt $g^3 = 2$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^3 = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{3}} \approx 1,260$.
 Het groeipercentage per jaar is 26,0%.

129 a Als t heel groot wordt, dan nadert $\frac{40}{t}$ tot 0. Dan wordt $\frac{40}{t} + 6 \approx 0 + 6 = 6$.
 Dus de grenswaarde is 6.
b Als t toeneemt, dan neemt $\frac{40}{t}$ af, dus $\frac{40}{t} + 6$ neemt af.
 Dus de grafiek van N is dalend.

130 $5 \cdot \log(N) = 1,215t + 13,7$
 $\log(N) = 0,243t + 2,74$
 $N = 10^{0,243t + 2,74}$
 $N = 10^{2,74} \cdot (10^{0,243})^t$
 $N \approx 550 \cdot 1,75^t$
 Dus $N = 550 \cdot 1,75^t$.

Bladzijde 245

131 evenwichtswaarde $= \frac{2,5 + -0,5}{2} = 1$
 amplitude $= 2,5 - 1 = 1,5$
 periode $= 6,5 - 2,5 = 4$

132 $T = \frac{t^2 - 2}{t} + \frac{10}{\left(\frac{3}{t}\right)} + \frac{7}{2t} = t - \frac{2}{t} + \frac{10t}{3} + \frac{7}{2t} = t + 3\frac{1}{3}t - \frac{4}{2t} + \frac{7}{2t} = 4\frac{1}{3}t + \frac{3}{2t}$
 Dus $T = 4\frac{1}{3}t + \frac{3}{2t}$.

133 a Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.
 De tabel geeft $u(10) = 516$.
b De tabel geeft $u(17) = 65\,540$ en $u(18) = 131\,076$, dus vanaf $n = 18$ is $u(n)$ meer dan 100 000.

134 $2p - 5q = 40$
 $-5q = -2p + 40$
 $\left. \begin{array}{l} q = \frac{2}{5}p - 8 \\ F = 3pq + 40 \end{array} \right\} \begin{array}{l} F = 3p\left(\frac{2}{5}p - 8\right) + 40 \\ F = 1\frac{1}{5}p^2 - 24p + 40 \end{array}$
 Dus $a = 1\frac{1}{5}$, $b = -24$ en $c = 40$.

135 $\frac{7}{2x} - \frac{5}{3x} = \frac{21}{6x} - \frac{10}{6x} = \frac{11}{6x}$

136 $P = \log(2x - 500) - 3$
 $\log(2x - 500) = P + 3$
 $2x - 500 = 10^{P+3}$
 $2x = 500 + 10^3 \cdot 10^P$
 $x = 250 + 500 \cdot 10^P$
Dus $a = 250$ en $b = 500$.

137 aantal $= \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{4} = 105$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{7!}{2! \cdot 4!} = 105$$

138 $N = 25 \cdot 1,85^{t-2} = 25 \cdot 1,85^t \cdot 1,85^{-2} = 25 \cdot 1,85^{-2} \cdot 1,85^t \approx 7,3 \cdot 1,85^t$
Dus $N = 7,3 \cdot 1,85^t$.

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Richard van de Pol, Tilburg

Technisch tekenwerk: Integra Software Services

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer
13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie.
Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom
hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 22

© 2022 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73719-1



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.