

& GETAL | C & RUIMTE



Noordhoff

Getal & Ruimte

vwo C deel 3

Twaalfde editie, 2021

Noordhoff
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. M. M. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink
E. Terlaak

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het boek vwo C deel 3

Dit boek bevat een gedeelte van de leerstof van het vak wiskunde C van het vwo. Het boek sluit aan op de delen 1 en 2 van vwo A/C. In vwo C deel 4 komt de resterende leerstof van wiskunde C aan bod. De studielast voor het vak vwo wiskunde C is 480 uur.

Met het doorwerken van een hoofdstuk is ongeveer 25 studielasturen gemoeid. Een voor de hand liggende situatie is om in het vijfde leerjaar te beginnen met het afhandelen van vwo A/C deel 2 en de rest van het schooljaar te besteden aan het doorwerken van vwo C deel 3.

De leerstof die in de boeken vwo C deel 3 en vwo A deel 3 wordt aangeboden loopt zoveel mogelijk gelijk op, maar omdat de programma's nogal verschillen is het onmogelijk de leerlingen in het vijfde leerjaar hetzelfde traject te laten volgen. In situaties waarin de leerlingen die wiskunde C en wiskunde A volgen toch in dezelfde groep zitten, dient men goed bedacht te zijn op de verschillen. In het zesde leerjaar verschillen de aangeboden onderwerpen nog meer.

Bespreking van de hoofdstukken

In de vier hoofdstukken van dit boek komen de volgende (sub)domeinen aan de orde. C Verbanden (hoofdstuk 10), E5 Kansverdelingen (hoofdstuk 9), F Logisch redeneren (hoofdstuk 11) en G Vorm en Ruimte (hoofdstuk 8). De stof die in de hoofdstukken 8, 10 en 11 wordt aangeboden komt aan de orde in het CE. Dat is niet het geval bij de stof van hoofdstuk 9. Dit onderwerp moet in het SE worden getoetst.

In vwo C deel 4 komen alleen nog onderwerpen aan de orde die in het CE worden getoetst.

In hoofdstuk 8 Meetkunde wordt een begin gemaakt met de behandeling van domein G Vorm en Ruimte. De eerste paragraaf gaat over oppervlakte en gelijkvormigheid bij vlakke figuren. In de tweede paragraaf staan de ruimtefiguren met bijvoorbeeld inhoud en vergrotingsfactoren centraal. In paragraaf 8.3 komen de aanzichten aan de orde en in de laatste paragraaf wordt een begin gemaakt met het tekenen in perspectief. Dit krijgt een vervolg in vwo C deel 4 met bijvoorbeeld verdubbelen en halveren in perspectief.

De hoofdonderwerpen in hoofdstuk 9 zijn toevalsvariabelen en kansverdelingen. Met name de binomiale verdeling en de normale verdeling krijgen de nodige aandacht. Daarbij is ernaar gestreefd de notaties bij berekeningen met de GR zoveel mogelijk machine-onafhankelijk te maken. Het is uiteraard mogelijk om in een klassensituatie waarbij (grotendeels) één machine wordt gebruikt, de leerlingen wel een machine-specifieke uitwerking te laten noteren. Dit hoofdstuk komt vrijwel geheel overeen met het gelijknamige hoofdstuk in vwo A deel 3.

In het begin van hoofdstuk 10 staat exponentiële groei centraal met de begrippen groeipercentage, groefactor, verdubbelingstijd en halveringstijd. Ook het opstellen van exponentiële groeiformules komt aan de orde. Vervolgens wordt het begrip logaritme geïntroduceerd, waarbij ook wordt gewerkt met formules waarin logaritmen met grondtal 10 voorkomen. Daarna komt de logaritmische schaalverdeling aan de orde en worden variabelen vrijgemaakt bij formules met exponenten en logaritmen.

In hoofdstuk 11 wordt het domein F Logisch redeneren behandeld. Er is veel aandacht voor het werken met logische symbolen en het analyseren van logische redeneringen. Daarbij is het begrip logische geldigheid van belang en wordt er gewerkt met waarheidstabellen. In de laatste drie paragrafen wordt onderscheid gemaakt tussen de verschillende soorten voorwaarden, wordt gewerkt met venndiagrammen en komt het begrip paradox aan de orde.

Opbouw

De opbouw in deel 3 is dezelfde als in de delen 1 en 2. Elk hoofdstuk heeft een begin- en eindopdracht en een paragraaf Voorkennis. De oriëntatie-opgaven gaan vooraf aan nieuwe theorie en activeren het denken over een nieuw wiskundig begrip. Ook de reflectie-opgaven spelen een belangrijke rol bij het activeren van een wiskundige denkhouding. Naast de gewone opgaven en de afsluitende opgaven zijn er nog de extra opgaven. De afsluitende opgaven geven het beoogde eindniveau aan. De extra opgaven doorbreken de standaardaanpak en activeren zo het wiskundig denken. Elke paragraaf wordt afgesloten met een Terugblik, aan het eind van elk hoofdstuk staat een Diagnostische toets en achter in het boek staan de Gemengde opgaven.

Drie leerroutes

In deze editie wordt gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen.

De basisroute geeft de leerling voldoende oefening om zich alle vaardigheden die bij de eindtermen horen eigen te maken. In de middenroute worden enkele oefenopgaven overgeslagen en in plaats hiervan maakt de leerling opgaven die dieper op de stof ingaan. De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder oefenopgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.

Getal & Ruimte online

Alle opgaven kunnen ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.

Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant en klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

Zomer 2020

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

02 Oriëntatie-opgave

   Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 Gewone opgave

   Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 Reflectie-opgave

   In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 Afsluitende opgave

   De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 Extra opgave

   Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute



2 Middenroute



3 Uitdagende route



NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder route-aanduiding

In de Diagnostische toets en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▶GR] Verwijzing naar een module van de GR-handleiding.

[▶WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

8 Meetkunde 6

Beginopdracht De Mastaba van Christo 8

Voorkennis De stelling van Pythagoras 10

8.1 Vlakke figuren 12

8.2 Ruimtefiguren 20

8.3 Aanzichten 31

8.4 Perspectief 36

Eindopdracht Hoogte van De Mastaba 45

Diagnostische toets 46

9 Kansverdelingen 48

Beginopdracht Winfall loterij 50

Voorkennis Kansberekeningen 51

9.1 Toevalsvariabelen en verwachtingswaarde 53

9.2 De binomiale verdeling 62

9.3 Berekeningen bij normaalkrommen 72

9.4 Toepassingen van de normale verdeling 80

9.5 De wortel- n -wet 86

Eindopdracht Loterij-strategieën 92

Diagnostische toets 94

10 Exponenten en logaritmen 96

Beginopdracht Radioactief schilderij 98

Voorkennis Lineaire en exponentiële groei 99

10.1 Exponentiële groei 102

10.2 Groeipercentages en formules 110

10.3 Logaritmen 118

10.4 Werken met logaritmen 126

Eindopdracht Verborgene composities 135

Diagnostische toets 136

11 Logisch redeneren 138

Beginopdracht Cluedo 140

Voorkennis Conclusies en tegenvoorbeelden 141

11.1 Redeneren 142

11.2 Logische symbolen 148

11.3 Beweringen en voorwaarden 157

11.4 Redeneren met groepen 166

11.5 Paradoxen en leugens 176

Eindopdracht Een logisch moordraadsel 184

Diagnostische toets 186

Gemengde opgaven 188

Overzicht GR-modules 208

Overzicht routes 209

Trefwoordenregister 213

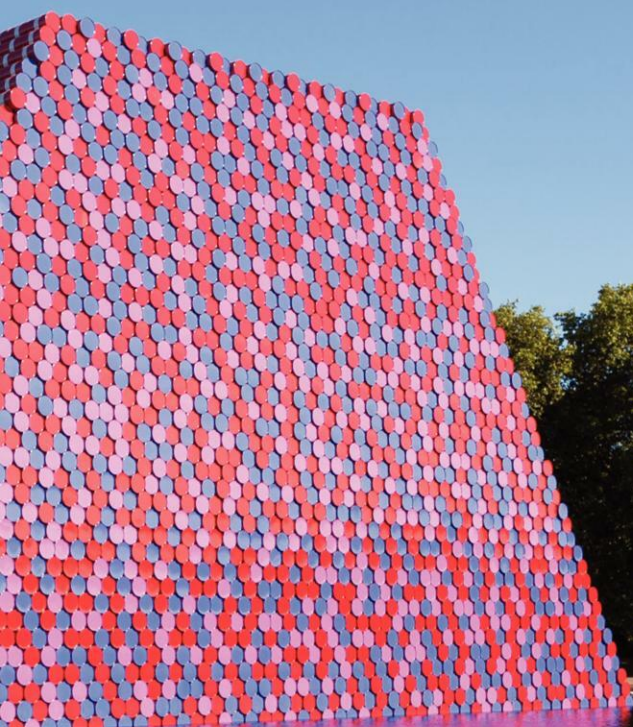
Verantwoording 215

8

Meetkunde

Wat leer je?

- Berekenen van oppervlakten van vlakke figuren.
- Werken met gelijkvormigheid.
- Berekenen van inhoud en oppervlakten van ruimtefiguren.
- Werken met vergrotingsfactoren.
- Teken en gebruiken van aanzichten.
- De eigenschappen van centrale projectie.
- Teken in perspectief.



Beginopdracht De Mastaba van Christo

[► WERKBLAD] Van juni tot september 2018 lag op het meer The Serpentine in Hyde Park in Londen het kunstwerk De Mastaba van Christo. Het kunstwerk bevat 7506 gestapelde olievaten en heeft bij benadering de vorm van een symmetrisch prisma.

Uitgaande van een prisma is het vlak dat op het water ligt een rechthoek met een lengte van 41,1 meter en een breedte van 29,9 meter. Het vlak dat hier evenwijdig aan is, ligt 21,2 meter boven het wateroppervlak en is een rechthoek met een lengte van 17,3 meter en een breedte van 29,9 meter.

Op de foto hiernaast is het kunstwerk recht van voren gefotografeerd. Op basis hiervan is het vooraanzicht van het kunstwerk op schaal getekend op het werkblad.

Er zijn ook foto's genomen recht van boven en van opzij.

- Teken op het werkblad de aanzichten die bij deze twee foto's horen. Gebruik dezelfde schaal als bij het vooraanzicht en maak gebruik van de stippellijnen.

De olievaten liggen allemaal met het cirkelvormige onder- of bovenvlak naar voren gericht. Het bonte vooraanzicht is ontstaan doordat deze vlakken in felle kleuren geschilderd zijn. Als je naar de voorkant van het kunstwerk kijkt, dan zie je dat de vaten zijn gestapeld in rijen die naar boven toe steeds smaller worden.

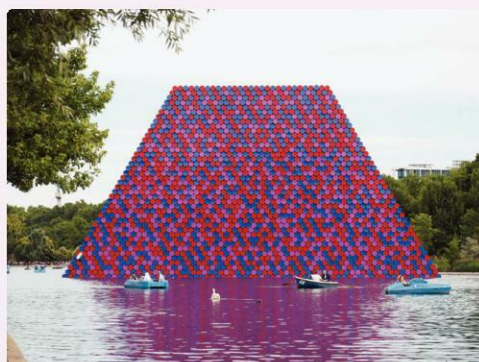
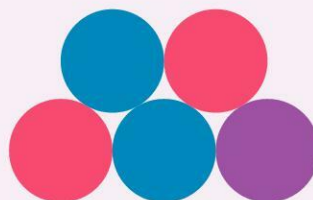
Hiernaast is een detail van het vooraanzicht van twee rijen vaten schematisch weergegeven.

De gebruikte olievaten zijn zogenaamde 'standard 55 gallon' vaten. Die hebben een diameter van 59,6 cm en een hoogte van 88,0 cm.

Otis wil weten hoeveel rijen het kunstwerk hoog is.

- Otis berekent dat er $\frac{21,2}{0,596} \approx 36$ rijen zijn.

Waarom klopt dit niet?

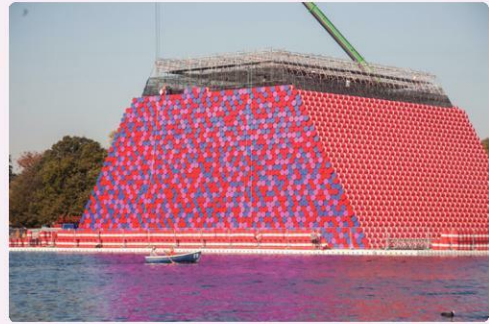


In werkelijkheid is het kunstwerk 41 rijen hoog. Het kunstwerk bestaat aan de binnenkant niet uit olievaten. De vaten zijn namelijk als een schil om een steigerconstructie gebouwd. Als je een vat zou weghalen, dan kijk je direct op de steigerconstructie. Het kunstwerk bevat dus alleen de vaten die je aan de buitenkant kunt zien. Het aantal vaten in het vooraanzicht kun je berekenen met de formule

aantal vaten = $\frac{1}{2} \times (\text{aantal vaten onderste rij} + \text{aantal vaten bovenste rij}) \times \text{aantal rijen}$.

De gegeven breedte van 41,1 meter is de breedte van de onderste rij vaten in het vooraanzicht. De bovenste rij in dit aanzicht heeft een breedte van 17,3 meter.

- Bereken het aantal vaten in de onderste rij en in de bovenste rij van het vooraanzicht. Toon hiermee aan dat er in het vooraanzicht 2009 vaten zijn.
- Controleer met een berekening dat het kunstwerk inderdaad 7506 vaten bevat.



Voorkennis De stelling van Pythagoras

Theorie A Berekeningen met de stelling van Pythagoras

Wanneer in een rechthoekige driehoek twee zijden bekend zijn, dan kun je de derde zijde berekenen met de stelling van Pythagoras. De schuine zijde van een rechthoekige driehoek heet ook wel hypotenusa.

De stelling van Pythagoras

In elke rechthoekige driehoek is

$$(\text{ene rechthoekszijde})^2 + (\text{andere rechthoekszijde})^2 = \text{hypotenusa}^2.$$

Voorbeeld

Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur 8.1.

Bereken BC in één decimaal.

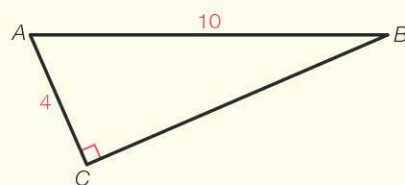
Uitwerking

$$\angle C = 90^\circ, \text{ dus } AC^2 + BC^2 = AB^2$$

$$4^2 + BC^2 = 10^2$$

$$BC^2 = 84$$

$$BC = \sqrt{84} \approx 9,2$$



figuur 8.1

Het berekenen van de lengte van de lichaamsdiagonaal BH in de balk van figuur 8.2 gaat in twee stappen.

- 1 Bereken BD^2 in de rechthoekige driehoek ABD .
- 2 Bereken BH in de rechthoekige driehoek BDH .

Je krijgt

$$1 \text{ in } \triangle ABD \text{ is } \angle A = 90^\circ, \text{ dus } AB^2 + AD^2 = BD^2$$

$$6^2 + 4^2 = BD^2$$

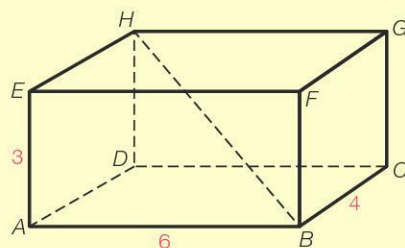
$$BD^2 = 52$$

$$2 \text{ in } \triangle BDH \text{ is } \angle D = 90^\circ, \text{ dus } BD^2 + DH^2 = BH^2$$

$$52 + 3^2 = BH^2$$

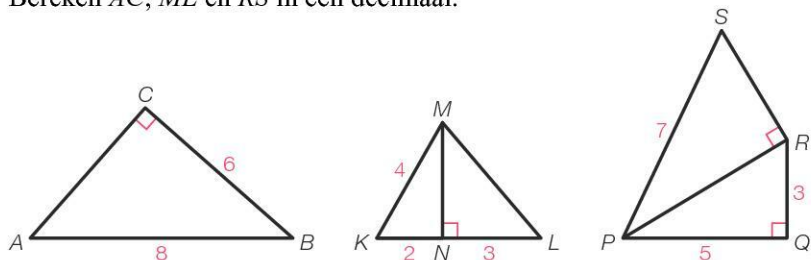
$$BH^2 = 61$$

$$BH = \sqrt{61} \approx 7,8$$



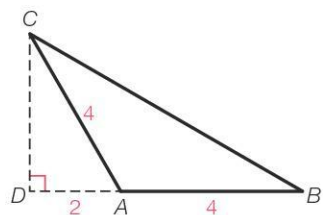
figuur 8.2 BD is een van de 12 zijvlaksdagonalen.

- 1** Zie figuur 8.3.
Bereken AC , ML en RS in één decimaal.



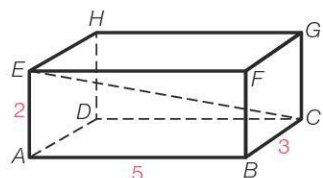
figuur 8.3

- 2** In figuur 8.4 zie je driehoek ABC met $AB = AC = 4$. Verder is de hoogtelijn CD getekend. Er geldt $AD = 2$. Bereken BC in één decimaal.



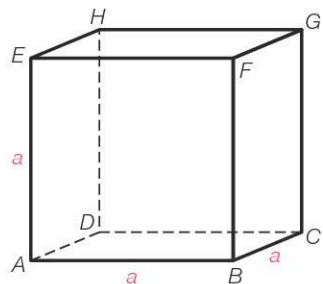
figuur 8.4

- 3** Gegeven is de balk $ABCD EFGH$ in figuur 8.5. Bereken de lengte van de lichaamsdiagonaal CE in één decimaal.



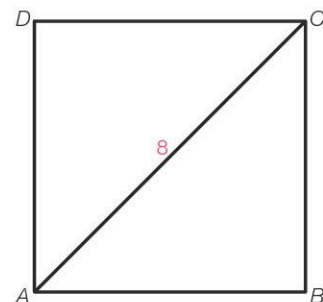
figuur 8.5

- 4** Gegeven is de kubus $ABCD EFGH$ met ribbe a . Toon aan dat de lengte van
a een zijvlaksdiaagonaal gelijk is aan $a\sqrt{2}$
b een lichaamsdiagonaal gelijk is aan $a\sqrt{3}$.



figuur 8.6

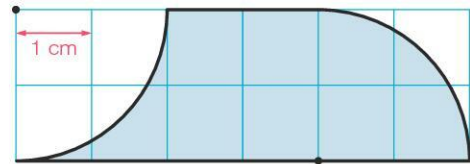
- 5** Van het vierkant $ABCD$ in figuur 8.7 hebben de diagonalen lengte 8. Bereken de zijde van het vierkant in twee decimalen.



figuur 8.7

8.1 Vlakke figuren

01 Bereken de oppervlakte van de figuur hiernaast.

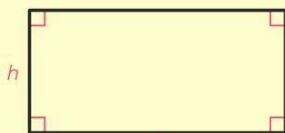


figuur 8.8 De middelpunten van de cirkelbogen zijn aangegeven met stippen.

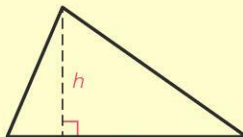
Theorie A Oppervlakte van vlakke figuren

Bij het berekenen van de oppervlakte van een vlakke figuur splits je de figuur soms op in basisfiguren. Ook komt het voor dat je de figuur kunt aanvullen tot een basisfiguur.

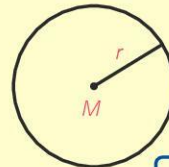
We herhalen de oppervlakteformules van de basisfiguren.



$$O = b \cdot h$$



$$O = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$



$$O = \pi \cdot r^2$$

omtrek is $2\pi \cdot r$

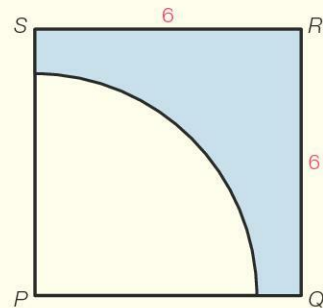
figuur 8.9

Voorbeeld

Gegeven is het vierkant $PQRS$ met zijde 6. Het punt P is het middelpunt van de cirkel met straal 5. Bereken de oppervlakte van het gebied dat binnen het vierkant en buiten de cirkel ligt. Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

$$\begin{aligned} O(\text{gebied}) &= O(PQRS) - \frac{1}{4} \cdot O(\text{cirkel}) \\ &= 6 \cdot 6 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 5^2 \approx 16,37 \end{aligned}$$



figuur 8.10

In figuur 8.11 van het voorbeeld op de volgende bladzijde zie je een gelijkbenig trapezium. Een **trapezium** is een vierhoek met twee evenwijdige zijden.

Voorbeeld

In figuur 8.11 is het gelijkbenig trapezium $ABCD$ getekend.
Bereken hiervan de oppervlakte. Rond af op één decimaal.

Aanpak

Teken de lijnen DE en CF loodrecht op AB .

Uitwerking

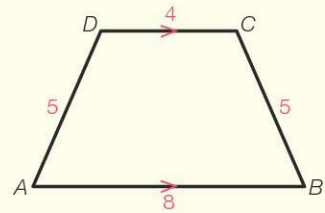
In $\triangle AED$ is $\angle E = 90^\circ$, dus $AE^2 + DE^2 = AD^2$

$$2^2 + DE^2 = 5^2$$

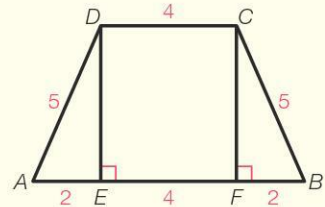
$$DE^2 = 21$$

$$DE = \sqrt{21}$$

$$\begin{aligned} O(ABCD) &= O(EFCD) + 2 \cdot O(\triangle AED) \\ &= 4 \cdot \sqrt{21} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{21} \approx 27,5 \end{aligned}$$



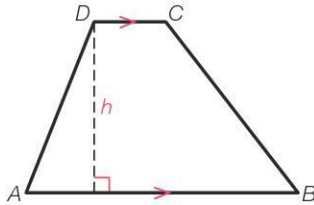
figuur 8.11



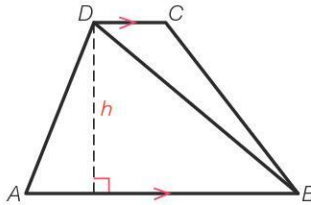
2 Voor de oppervlakte van een trapezium bestaat de volgende formule.

$$O(\text{trapezium}) = \frac{1}{2} \cdot (\text{som van de evenwijdige zijden}) \cdot (\text{bijbehorende hoogte})$$

Dus in figuur 8.12 is $O(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot (AB + CD) \cdot h$.



figuur 8.12



figuur 8.13

- Gebruik deze formule om de oppervlakte van het trapezium in het voorbeeld hierboven te berekenen. Kom je op hetzelfde antwoord uit?
- Toon aan dat de formule juist is. Gebruik figuur 8.13.



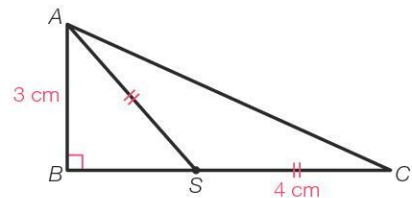
3 Gegeven is de rechthoekige driehoek

ABC in de figuur hiernaast.

In deze driehoek is $AB = 3$ cm en

$AS = CS = 4$ cm.

Bereken hoeveel cm^2 de oppervlakte van driehoek ABC is. Rond af op twee decimalen.



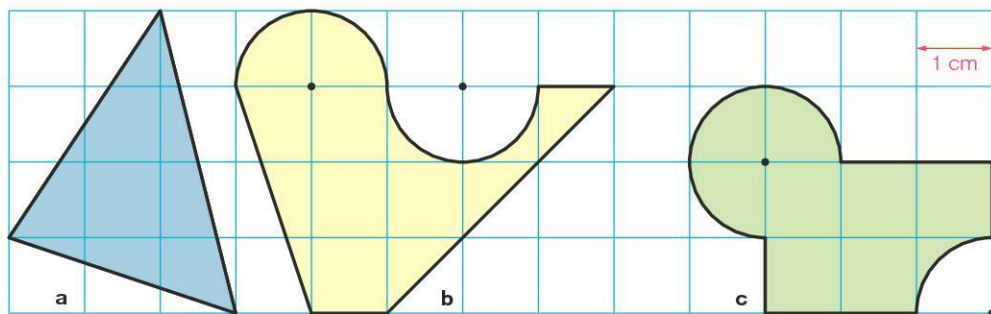
figuur 8.14

- 4** Een wandplank die je in de hoek tussen twee muren kunt hangen, heeft de vorm van een gelijkbenige rechthoekige driehoek. Zie de figuur hiernaast. De langste zijde van de wandplank is 70 cm. Bereken de oppervlakte van de bovenkant van de wandplank in dm^2 .



figuur 8.15

- 5** Bereken de oppervlakten van de onderstaande figuren. Rond zo nodig af op gehele mm^2 .

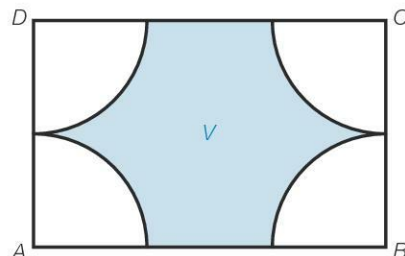


figuur 8.16 De middelpunten van de cirkelbogen zijn aangegeven met stippen.

- 6** In figuur 8.17 is de rechthoek $ABCD$ met $AB = 6$ en $AD = 4$ getekend. De punten A , B , C en D zijn middelpunten van cirkels met straal 2. Het gebied dat binnen de rechthoek en buiten de cirkels ligt noemen we V .

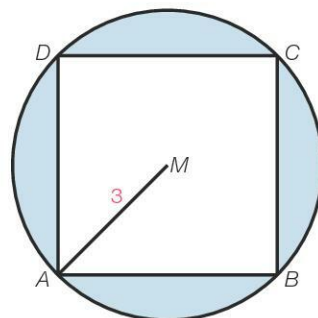
Bereken in één decimaal

- a** de oppervlakte van V
b de omtrek van V .



figuur 8.17

- 7** In figuur 8.18 is vierkant $ABCD$ getekend met zijn omschreven cirkel. De omschreven cirkel van een vierkant gaat door de vier hoekpunten. De straal van de cirkel is 3. Bereken de oppervlakte van het gebied dat binnen de cirkel maar buiten het vierkant ligt. Rond af op twee decimalen.

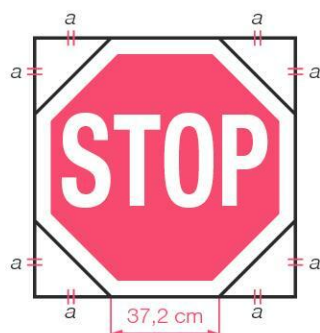


figuur 8.18

A8


Het stopbord hiernaast is een regelmatige achthoek met zijden van 37,2 cm. Ook is een vierkant getekend dat precies om het bord heen past. Je ziet dat aan de hoeken van het vierkant in totaal acht lijnstukken zijn getekend met gelijke lengte. De lengte van deze lijnstukken noemen we a .

Bereken de oppervlakte van het stopbord. Rond af op tientallen cm^2 .



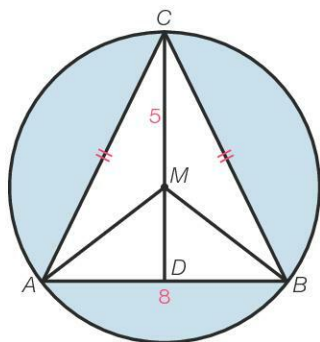
figuur 8.19

A9


Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC met $AB = 8$ en $AC = BC$. De omgeschreven cirkel van de driehoek heeft straal 5. Zie figuur 8.20.

Uit de gegevens volgt dat $CD = 8$.

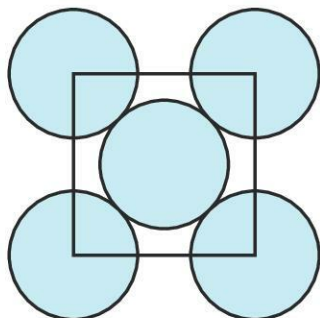
- Toon dit aan.
- Bereken de oppervlakte van het gebied dat binnen de cirkel maar buiten driehoek ABC ligt. Rond af op twee decimalen.



figuur 8.20

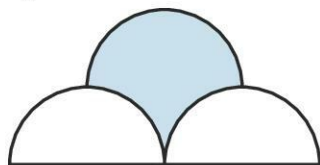
E10


- Vijf even grote cirkels raken elkaar zoals in figuur 8.21 is getekend. De middelpunten van de buitenste cirkels zijn de hoekpunten van een vierkant. Hoeveel procent van het blauwe gebied ligt binnen het vierkant?



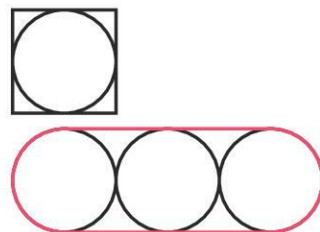
figuur 8.21

- De bovenste halve cirkel in figuur 8.22 loopt tussen de bovenste punten van de twee onderste halve cirkels. Elke halve cirkel heeft een straal van 2 cm. Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van het blauwe gebied?



figuur 8.22

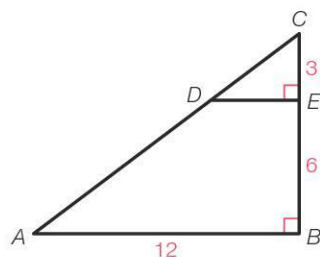
- De oppervlakte van het vierkant in figuur 8.23 is a en de oppervlakte van de cirkel is b . Druk de oppervlakte van het gebied binnen de rode lijn uit in a en b .



figuur 8.23

In figuur 8.24 is driehoek ABC een vergroting van driehoek DEC .

- Welk getal is de vergrotingsfactor?
- Bereken DE .
- Bereken AD .



figuur 8.24

Theorie B Gelijkvormige figuren

In figuur 8.25 is CD evenwijdig met AB .

Hieruit volgt dat de driehoeken ABS en DCS **gelijkvormig** zijn. Driehoek ABS is een vergroting van driehoek DCS .

Omdat $AB = 6$ en $CD = 4$ is de **vergrotingsfactor** $\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$.

Ook geldt dus dat $AS = 1\frac{1}{2} \cdot DS$ en $BS = 1\frac{1}{2} \cdot CS$. Als gegeven is dat $AD = 8$, dan kun je AS en DS berekenen.

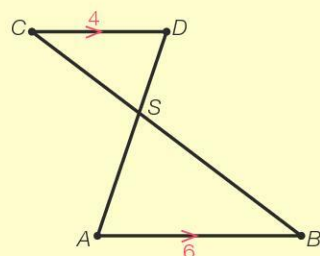
Stel $DS = x$, dan is $AS = 1\frac{1}{2}x$ en $AS = 8 - x$.

Hieruit volgt de vergelijking $1\frac{1}{2}x = 8 - x$

$$2\frac{1}{2}x = 8$$

$$x = 3\frac{1}{5}$$

Je weet nu dat $DS = 3\frac{1}{5}$ en dus is $AS = 8 - 3\frac{1}{5} = 4\frac{4}{5}$.



figuur 8.25

Voorbeeld

Gegeven is driehoek ABC met $AB = 5$. Het punt P ligt op AC en het punt Q ligt op BC waarbij PQ evenwijdig is met AB . Verder is gegeven dat $BQ = 4$ en $PQ = 2$. Zie figuur 8.26.

Bereken CQ .

Uitwerking

Driehoek ABC is een vergroting van driehoek PQC met vergrotingsfactor $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

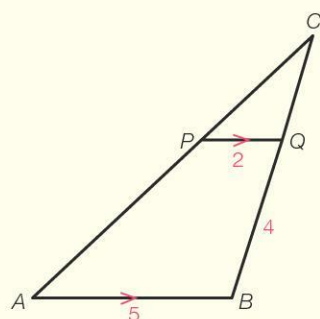
Stel $CQ = x$, dan is $CB = 2\frac{1}{2}x$ en $CB = x + 4$.

Hieruit volgt $2\frac{1}{2}x = x + 4$

$$1\frac{1}{2}x = 4$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

Dus $CQ = 2\frac{2}{3}$.



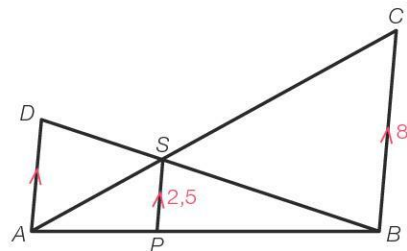
figuur 8.26

R12


- a** Zie de theorie met figuur 8.25.
 Gegeven is dat $BC = 10$.
 Bereken BS en CS .
- b** Zie het voorbeeld met figuur 8.26.
 Gegeven is dat $AC = 9$.
 Bereken AP .

13

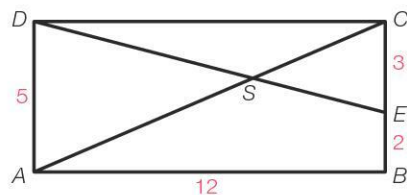

- In de figuur hiernaast zie je drie paren gelijkvormige driehoeken: de driehoeken ABC en APS , de driehoeken ABD en PBS en de driehoeken ASD en CSB .
 Gegeven is dat $AC = 16$, $BC = 8$ en $PS = 2,5$.
 Met deze gegevens kun je berekenen dat $AS = 5$.
- a** Laat deze berekening zien.
- b** Bereken AD . Rond af op twee decimalen.



figuur 8.27

14

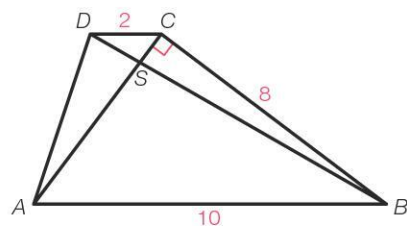

- Gegeven is de rechthoek $ABCD$ met $AB = 12$ en $AD = 5$. Het punt E ligt op BC waarbij $BE = 2$. De diagonaal AC snijdt DE in het punt S . Zo ontstaan de gelijkvormige driehoeken ASD en CSE . Zie figuur 8.28.
- a** Bereken AC .
- b** Bereken AS .



figuur 8.28

15

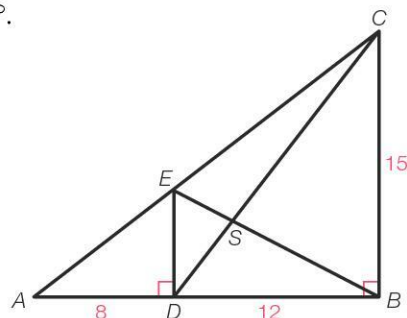

- Gegeven is het trapezium $ABCD$ met $AB = 10$, $BC = 8$ en $CD = 2$. De diagonaal AC staat loodrecht op de zijde BC . Zie figuur 8.29. De diagonalen snijden elkaar in het punt S . Zo ontstaan de gelijkvormige driehoeken ABS en CDS . Bereken AS .



figuur 8.29

16


- Van driehoek ABC is $AB = 20$, $BC = 15$ en $\angle B = 90^\circ$. Het punt D ligt op AB waarbij $AD = 8$. Het punt E ligt op AC waarbij $\angle ADE = 90^\circ$. BE en CD snijden elkaar in het punt S . Zo ontstaan de gelijkvormige driehoeken DES en CBS . Zie figuur 8.30. Bereken BS in twee decimalen.



figuur 8.30

17
□ ⊙ *

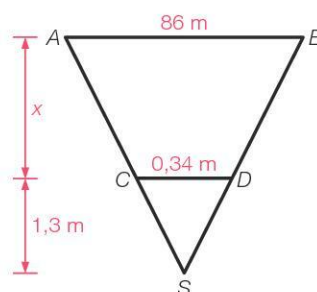
Sabine staat in het pannenkoekenrestaurant ‘De Oude Maas’ op een afstand van 130 cm van een raam dat 100 cm breed is. Ze kijkt naar buiten en ziet in de verte het tankschip Milagro evenwijdig aan het raam voorbijvaren. Ze maakt een foto van het schip op het moment dat ze precies recht voor het midden van het schip staat. Zie de foto in figuur 8.31. De lengte van de Milagro is 86 meter.



figuur 8.31

Opmeten van de foto levert de tekening op in figuur 8.32. Deze tekening is niet op schaal.

- Licht toe hoe je aan de afmeting 0,34 m in de tekening kunt komen en hoe uit de tekening volgt dat de vergrotingsfactor ongeveer 253 is.
- Bereken hoeveel meter het schip van het raam is verwijderd.



figuur 8.32

A18
□ ⊙ *

Op de foto hieronder zie je het Huis Verwolde in het Gelderse Laren.



figuur 8.33

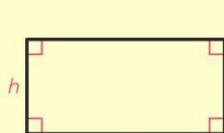
Geeke heeft de foto genomen door de spijlen van een hek. De ruimte tussen de spijlen is 12,5 cm en het huis staat op een afstand van 121 meter van het hek. Het huis is, zonder het torentje aan de rechterkant, 21 meter breed.

Op welke afstand van het hek nam Geeke de foto? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

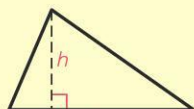
Terugblik

Oppervlakte van vlakke figuren

Bij oppervlakteberekeningen gebruik je de oppervlakteformules van de basisfiguren rechthoek, driehoek en cirkel.



$$O = b \cdot h$$



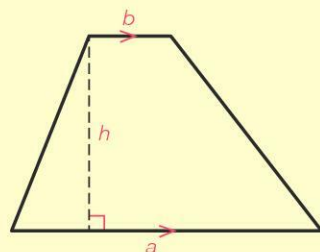
$$O = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$



$$O = \pi \cdot r^2$$

De omtrek van een cirkel is $2\pi \cdot r$.

Vaak kun je bij het berekenen van de oppervlakte een figuur opsplitsen in basisfiguren of aanvullen tot een basisfiguur. Op deze manier is aangetoond dat oppervlakte trapezium $= \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$.



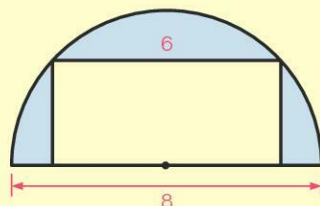
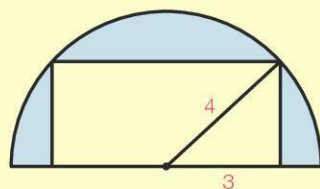
In de figuur hiernaast is een halve cirkel getekend met straal 4. Hierin is een rechthoek getekend met breedte 6. Je kunt als volgt berekenen wat de oppervlakte is van de blauwe gebieden.

Bereken eerst de hoogte van de rechthoek.

Met de stelling van Pythagoras krijg je $3^2 + \text{hoogte}^2 = 4^2$.

Hieruit volgt hoogte $= \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$.

$$\begin{aligned} O(\text{blauwe gebieden}) &= O(\text{halve cirkel}) - O(\text{rechthoek}) \\ &= \frac{1}{2} \pi \cdot 4^2 - 6 \cdot \sqrt{7} \approx 9,26 \end{aligned}$$



Gelijkvormige figuren

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee gelijke hoeken hebben. In de figuur hiernaast zijn de driehoeken ABC , ADE en AFG gelijkvormig. Om FG te berekenen, bedenk je dat $\triangle AFG$ een vergroting van $\triangle ADE$ is met

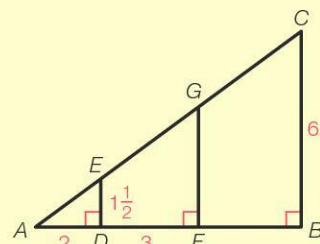
$$\text{vergrotingsfactor } \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

$$\text{Dus } FG = 2\frac{1}{2} \cdot DE = 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = 3\frac{3}{4}.$$

Om BF te berekenen, bedenk je dat $\triangle ABC$ een vergroting

is van $\triangle ADE$ met vergrotingsfactor $\frac{6}{1\frac{1}{2}} = 4$.

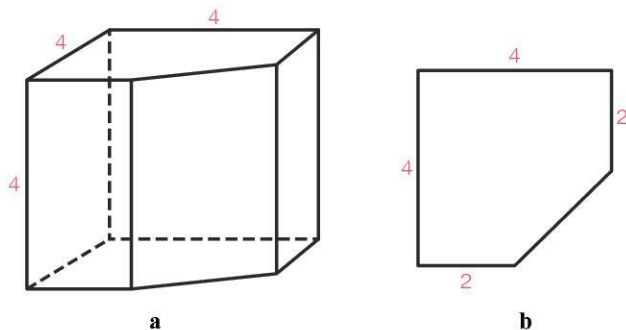
$$\text{Dus } AB = 4 \cdot AD = 4 \cdot 2 = 8 \text{ en dit geeft } BF = AB - AF = 8 - 5 = 3.$$



8.2 Ruimtefiguren

019


De ruimtefiguur in figuur 8.34a is ontstaan door van een kubus een stuk af te snijden. Het grondvlak en bovenvlak zijn na afsnijden gelijk. Zie figuur 8.34b.

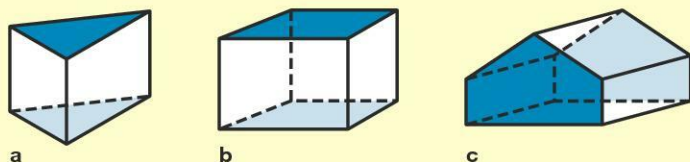


figuur 8.34

- Bereken de oppervlakte van het grondvlak.
- Bereken de inhoud van de ruimtefiguur.

Theorie A Inhoud van ruimtefiguren

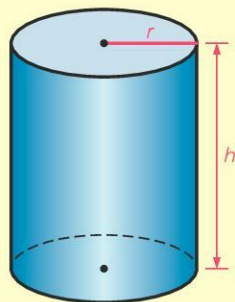
Een **prisma** is een ruimtefiguur die begrensd wordt door twee evenwijdige zijvlakken. De overige zijvlakken zijn rechthoeken. In figuur 8.35 zie je een driezijdig prisma, een vierzijdig prisma en een vijfzijdig prisma. Het grondvlak en het bovenvlak zijn blauw gekleurd.



figuur 8.35 Van het vierzijdig prisma in figuur b zijn alle zijvlakken rechthoeken.

Voor de inhoud I van een balk, prisma en cilinder geldt $I = G \cdot h$. Hierin is G de oppervlakte van het grondvlak en h de bijbehorende hoogte.

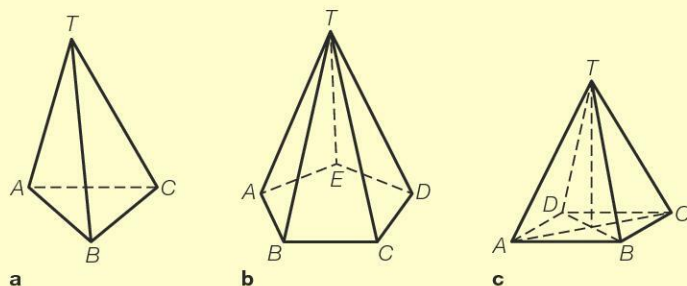
Bij een cilinder is het grondvlak een cirkel. Is de straal van deze cirkel r , dan krijg je $I = \pi r^2 \cdot h$.



figuur 8.36 Cilinder met straal grondvlak r en hoogte h .

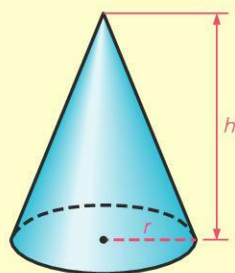
Een **piramide** is een ruimtefiguur waarvan alle hoekpunten op één na in één vlak liggen. Dat ene hoekpunt heet de top. De andere hoekpunten liggen in het grondvlak.

In figuur 8.37 zie je een driezijdige piramide, een vijfzijdige piramide en een regelmatige vierzijdige piramide. Bij een **regelmatige vierzijdige piramide** is het grondvlak een vierkant en zijn de vier opstaande ribben even lang. De top ligt dan recht boven het snijpunt van de diagonalen van het grondvlak.

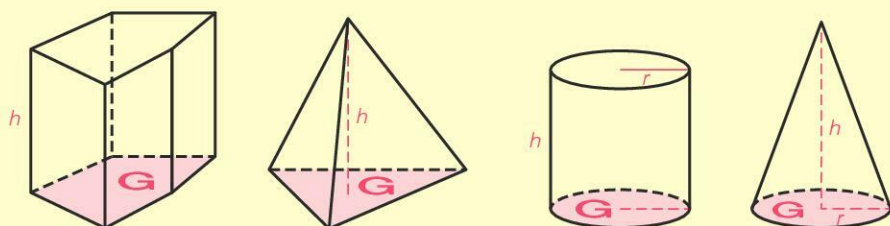


figuur 8.37

Voor de inhoud van een piramide en kegel geldt $I = \frac{1}{3} G \cdot h$. Hierin is G de oppervlakte van het grondvlak en h de bijbehorende hoogte. Bij een kegel is het grondvlak een cirkel. Is de straal van deze cirkel r , dan krijg je $I = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$.

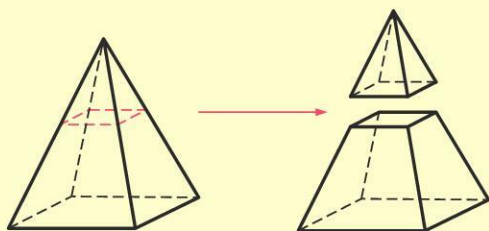


figuur 8.38 Kegel



$$I(\text{prisma}) = G \cdot h \quad I(\text{piramide}) = \frac{1}{3} G \cdot h \quad I(\text{cilinder}) = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h \quad I(\text{kegel}) = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

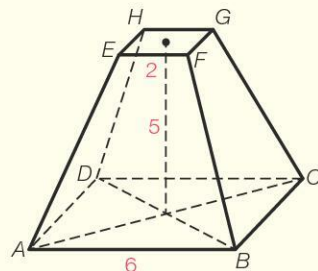
In het voorbeeld krijg je te maken met een afknotte regelmatige vierzijdige piramide. Bij een afgeknotte piramide is het bovenvlak evenwijdig met het grondvlak. Het gedeelte dat van de oorspronkelijke piramide is weggehaald, is ook een piramide. Zie de figuur hiernaast.



figuur 8.39

Voorbeeld

In figuur 8.40 zie je een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide. Het grondvlak $ABCD$ is een vierkant met zijde 6 en het bovenvlak is een vierkant met zijde 2. De hoogte van de afgeknotte piramide is 5. Bereken de inhoud van de afgeknotte piramide. Rond af op één decimaal.



figuur 8.40

Aanpak

Gebruik de figuur hiernaast.

Stel de hoogte van de piramide die is afgehaald van de oorspronkelijke piramide gelijk aan h .

Uitwerking

Stel de hele piramide heeft top T . De hoogte van $TEFGH$ is h .

$TABCD$ is een vergroting van $TEFGH$ met

vergrotingsfactor $\frac{6}{2} = 3$.

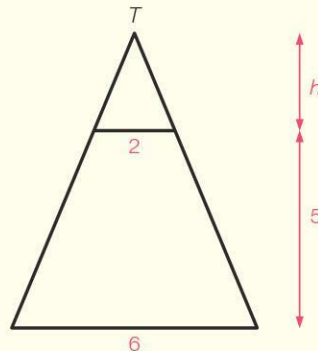
Er geldt $3 \cdot h = h + 5$

$$2h = 5$$

$$h = 2,5$$

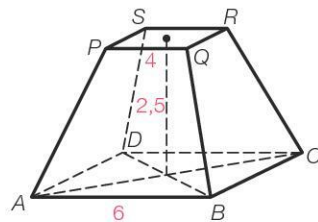
De hoogte van $TABCD$ is $5 + 2,5 = 7,5$.

$$I(\text{afgeknotte piramide}) = I(TABCD) - I(TEFGH) = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 7,5 - \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2,5 \approx 86,7$$



R20

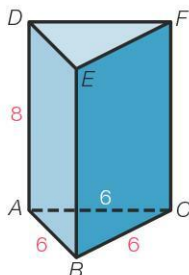
In de figuur hiernaast zie je een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide. Het grondvlak $ABCD$ is een vierkant met zijde 6 en het bovenvlak is een vierkant met zijde 4. De hoogte van de afgeknotte piramide is 2,5. Bereken de inhoud van de afgeknotte piramide. Rond af op één decimaal.



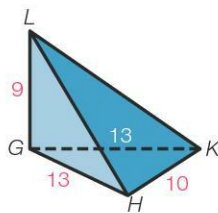
figuur 8.41

21

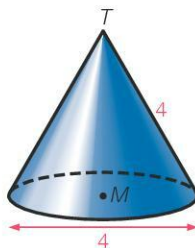
Bereken de inhoud van de ruimtefiguren in figuur 8.42. Rond zo nodig af op één decimaal.



a



b



c

figuur 8.42

22

De zandbak op de foto hiernaast is een prisma met als grondvlak een regelmatige zeshoek met zijde 1 meter.

- a Bereken hoeveel m^2 de oppervlakte van de zeshoek is. Rond af op drie decimalen. Gebruik dat de oppervlakte van de zeshoek gelijk is aan zes keer de oppervlakte van de gelijkzijdige driehoek ABM .
- b De zandbak is 30 cm hoog.
 Past er meer of minder dan 1 m^3 zand in de zandbak? Ga ervan uit dat het zand niet boven de rand uit mag komen.



figuur 8.43

23

Aan de Bredasingel in Arnhem staat het kunstwerk Afgeknotte piramide van Cornelius Rogge. Zie figuur 8.44. Het kunstwerk is maar liefst 523 cm hoog en is een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide.

Het grondvlak is 357,5 bij 357,5 cm en het bovenvlak is 87,5 bij 87,5 cm.

Bereken de inhoud van het kunstwerk. Geef het antwoord in m^3 en rond af op twee decimalen.



figuur 8.44

A24

In figuur 8.45 zie je een foto van een emmer. De binnenafmetingen in cm staan erbij. Bereken de inhoud van de emmer. Geef het antwoord in liter en rond af op één decimaal.



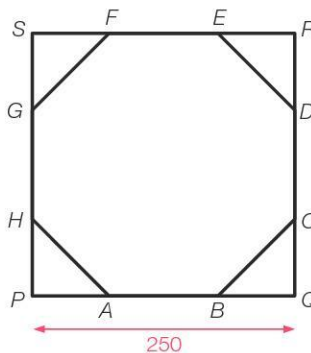
figuur 8.45

A25

Op de foto hieronder zie je een prieel van het model Lugarde Prima Vienna. Het grondoppervlak is een regelmatige achthoek. Deze regelmatige achthoek past precies in een vierkant waarvan de zijde 250 cm is. Zie figuur 8.47.



figuur 8.46



figuur 8.47

De hoogte van de verticale wanden is 210 cm en het prieel is 270 cm hoog. Uit de gegevens volgt dat AP in figuur 8.47 in mm nauwkeurig gelijk is aan 73,2 cm.

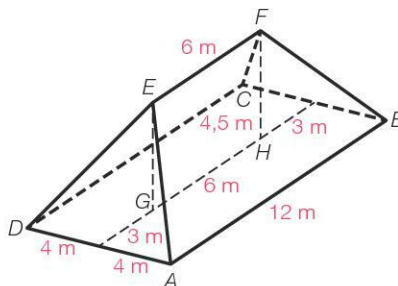
- Controleer met een berekening dat de genoemde 73,2 cm van AP juist is.
- Bereken de oppervlakte van de regelmatige achthoek in gehele dm^2 .
- Bereken de inhoud van het prieel. Geef het antwoord in m^3 en rond af op twee decimalen.

A26

Op de foto zie je een huis met een schilddak. De afmetingen van de zolder staan in figuur 8.49.



figuur 8.48



figuur 8.49

De nok van de zolder ligt 10,5 meter boven de begane grond. Uit de gegevens in figuur 8.49 volgt dat de inhoud van de zolder 180 m^3 is.

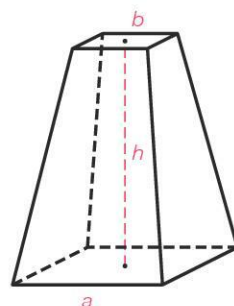
- Toon dit aan met een berekening.
- Bereken de totale inhoud van het huis.

Men verdeelt de zolder door twee evenwijdige wanden loodrecht op de nok in drie gedeelten die dezelfde inhoud hebben.

- Bereken in dm nauwkeurig waar men deze wanden moet plaatsen.

Er bestaat een algemene formule voor de inhoud van een afgeknotten regelmatige vierzijdige piramide. Deze formule is $I = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$. Hierin is h de hoogte van de afgeknotten piramide, a de zijde van het grondvlak en b de zijde van het bovenvlak. Zie figuur 8.50.

- Een regelmatige vierzijdige piramide met hoogte H en zijde grondvlak a wordt op halve hoogte afgeknut. Druk de inhoud van de afgeknotten piramide uit in H en a .
- Een regelmatige vierzijdige piramide met hoogte 18 wordt afgeknut op hoogte 9. De inhoud van de afgeknotten piramide is 84. Bereken de zijde van het grondvlak.
- Een regelmatige vierzijdige piramide met hoogte 24 wordt afgeknut op hoogte 8. De inhoud van de afgeknotten piramide is 456. Bereken de zijde van het bovenvlak van de afgeknotten piramide.

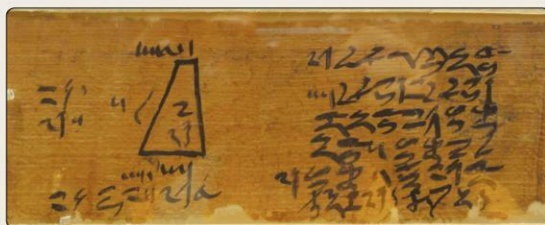


figuur 8.50

GESCHIEDENIS

De Moskou-papyrus

De Moskou-papyrus dateert van ca. 1850 v. Chr. Deze Egyptische papyrusrol bevat 25 wiskundige vraagstukken en de bijbehorende oplossingen. Na opgraving in de 19^e eeuw is deze rol via allerlei omzwervingen in Moskou terechtgekomen, vandaar de naam.



Een knappe vondst van de Egyptische wiskunde staat beschreven in het 14^e vraagstuk, dat een methode beschrijft voor het berekenen van de inhoud van een afgeknotten piramide.

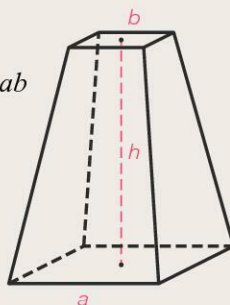
Een afgeknotten piramide is 6 (eenheden) hoog, het grondvlak is een vierkant met zijde 4 en het bovenvlak is een vierkant met zijde 2.

Vertaalde Egyptische uitwerking

- Kwadrateer 4. Resultaat 16.
- Kwadrateer 2. Resultaat 4.
Vermenigvuldig 4 met 2.
Resultaat 8.
- Tel de vorige drie resultaten op.
16 en 4 en 8 geeft resultaat 28.
- Neem $\frac{1}{3}$ van 6. Resultaat 2.
- Vermenigvuldig de vorige twee resultaten. Resultaat 56.
- Inhoud afgeknotten piramide is 56.

Uitwerking in huidige notatie

- $O_{\text{grondvlak}} = a^2$
- $O_{\text{bovenvlak}} = b^2$
product van a en b is ab
- som is $a^2 + ab + b^2$
- $\frac{1}{3}$ van de hoogte is $\frac{1}{3}h$
- $\frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$
- $I = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$

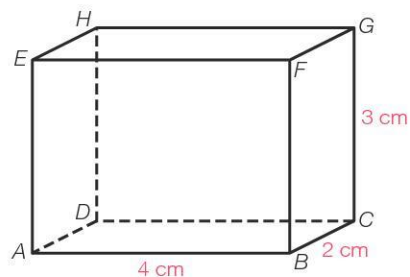


Gegeven is balk I met ribben van 4, 2 en 3 cm. Zie figuur 8.51.

- Bereken de oppervlakte van het voorvlak $ABFE$.
- Bereken de totale oppervlakte van de balk.
- Bereken de inhoud van de balk.

De balk wordt vergroot met vergrotingsfactor $k = 5$. Zo ontstaat balk II.

- Welke afmetingen heeft balk II?
- Bereken de oppervlakte van het voorvlak van balk II.
- Met welk getal is de oppervlakte van het voorvlak van balk II vermenigvuldigd ten opzichte van de oppervlakte van het voorvlak van balk I? Wat heeft dit getal met de vergrotingsfactor k te maken?
- Onderzoek of het verband van vraag f ook geldt voor de totale oppervlakte van balk II ten opzichte van de totale oppervlakte van balk I.
- Bereken de inhoud van balk II en onderzoek wat de inhoud van de balken I en II met de factor k te maken hebben.



figuur 8.51

Theorie B Vergrotingsfactoren

In opgave 28 heb je gezien dat bij een balk die je met een factor 5 vergroot, geldt dat elke afmeting 5 keer zo groot wordt, dat de oppervlakte van de vergroting 5^2 keer zo groot wordt en dat de inhoud van de vergroting 5^3 keer zo groot wordt.

In het algemeen geldt dat bij het vergroten van een ruimtefiguur met factor k elke afmeting met k wordt vermenigvuldigd. Daardoor worden oppervlakten met k^2 en inhoud met k^3 vermenigvuldigd.



Bij vergroten van een ruimtefiguur met factor k

- is elke afmeting van het beeld k keer de overeenkomstige afmeting van het origineel
- is de oppervlakte van het beeld k^2 keer de oppervlakte van het origineel
- is de inhoud van het beeld k^3 keer de inhoud van het origineel.

Voorbeeld

Van een voetbal is de inhoud 30 keer zo groot als de inhoud van een tennisbal.

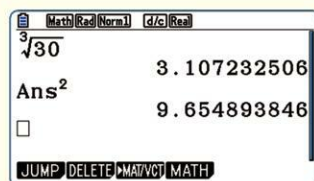
Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte? Rond af op één decimaal.

Uitwerking

Inhoud is 30 keer zo groot dus $k^3 = 30$.

Dit geeft $k = \sqrt[3]{30}$, dus $k^2 = (\sqrt[3]{30})^2 \approx 9,7$.

Dus de oppervlakte van de voetbal is 9,7 keer zo groot als de oppervlakte van de tennisbal.



Ook bij het omrekenen naar andere eenheden krijg je met vergrotingsfactoren te maken.

Omdat $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$ is $5,7 \text{ m}^3 = 5,7 \cdot 10^3 \text{ dm}^3$.

En omdat $1 \text{ m} \approx 3,28 \text{ ft}$, is $43 \text{ m}^2 \approx 43 \cdot 3,28^2 \approx 463 \text{ ft}^2$.

29



Van een basketbal is de oppervlakte 20 keer zo groot als die van een tennisbal.

De inhoud van de basketbal is groter dan de inhoud van de tennisbal. Hoeveel keer zo groot?

30



a In de Amerikaanse basketbalcompetitie NBA is de oppervlakte van een speelveld 4700 ft^2 .

Hoeveel m^2 is dit? Gebruik dat $1 \text{ m} = 3,28 \text{ ft}$. Rond af op gehele.

b De Noordzee heeft een inhoud van $54\,000 \text{ km}^3$. In Engeland gebruikt men de eenheid cubic mile (kubieke mijl).

Bereken de inhoud van de Noordzee in cubic miles. Gebruik dat $1 \text{ mile} = 1,609 \text{ km}$. Rond af op duizendtallen.

31



Bram heeft een ballon waarop de letter B staat.

In de ballon zit 3 liter lucht.

Met hoeveel liter moet deze inhoud toenemen om de afmetingen van de letter B twee keer zo groot te krijgen?



32

*

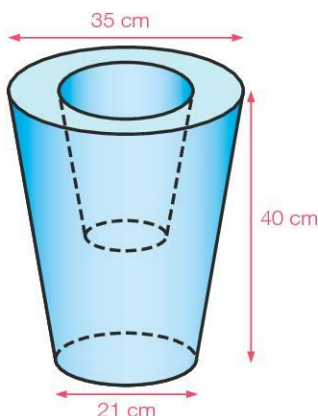
In figuur 8.52 zie je een bloemenvaas die de vorm heeft van een afgeknotte kegel. De buitenafmetingen staan in de figuur. Met deze gegevens kun je berekenen dat de inhoud van de afgeknotte kegel ongeveer 25 liter is.

- a** Bereken de inhoud van de afgeknotte kegel in deciliter nauwkeurig.

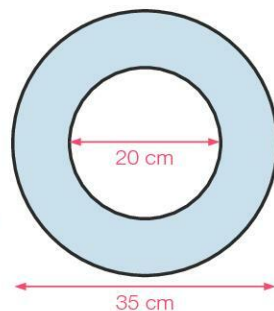
De binnenkant van de vaas is een exacte verkleining van de buitenkant. In figuur 8.53 zie je het bovenaanzicht van de vaas.

Joost beweert dat er 5 liter water in de vaas kan.

- b** Onderzoek met een berekening of Joost gelijk heeft.



figuur 8.52

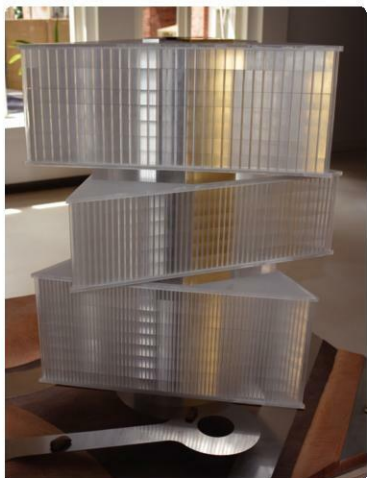


figuur 8.53

A33

In 2020 is Hotel nhow Amsterdam geopend. Het gebouw is ontworpen door de Nederlandse architect Rem Koolhaas en was bij de opening het grootste hotel van Amsterdam. In figuur 8.54 zie je een maquette van het hotel. De maquette is op schaal 1 : 100. Het hotel bestaat uit drie op elkaar gestapelde blokken. Elk blok is een driezijdig prisma. In de maquette is het grondvlak van elk prisma een gelijkzijdige driehoek met zijden van 66 cm. Het onderste prisma heeft een hoogte van 30 cm. Het middelste heeft een hoogte van 21 cm en het bovenste heeft een hoogte van 26 cm. We bekijken in deze opgave alleen de drie prisma's en laten de dragende constructie onder en tussen de prisma's buiten beschouwing.

- a** Bereken in cm^3 de inhoud van de maquette. Rond af op honderden cm^3 .
b Bereken de inhoud van het hotel. Rond af op honderden m^3 .



figuur 8.54



figuur 8.55

Lees de informatie hieronder over De Rotterdam.

Marjolein maakt een maquette van De Rotterdam. De maquette wordt 75 cm hoog.

- a Op welke hoogte in de maquette verspringen de torens in verschillende richtingen?
- b Hoeveel cm^2 kantooroppervlakte heeft de maquette van Marjolein?
- c Licht toe dat uit de informatie volgt dat de gemiddelde hoogte van een verdieping 3,4 meter is en gebruik dit om in dm^3 nauwkeurig de inhoud van de maquette te berekenen.

INFORMATIEF

De Rotterdam

De Rotterdam is een gebouw op de Wilhelminapier in Rotterdam dat in 1998 werd ontworpen door Rem Koolhaas. Het complex staat tussen de Toren op Zuid en Cruise Terminal Rotterdam en is eind 2013 voltooid. Het ontwerp biedt ruimte aan kantoren, een hotel en appartementen. De 44 verdiepingen hebben een totale oppervlakte van $160\,000 \text{ m}^2$, waarmee dit een van de grootste gebouwen van Nederland is. Het 149 meter hoge gebouw bestaat uit drie onderling verbonden torens op een gezamenlijke sokkel van dertig meter hoog die zes etages omvat. De onderste twee bouwlagen vormen een grotendeels glazen plint. De torens, aangeduid als West Tower, Mid Tower en East Tower, verspringen op circa



figuur 8.56

90 meter boven het maaiveld enkele meters in verschillende richtingen, wat de windstabiliteit ten goede komt en terrassen oplevert. In het oorspronkelijke ontwerp raakten de torens elkaar net niet, maar om het krachtenspel te vereenvoudigen en de constructie betaalbaar te houden zijn ze nu op enkele plaatsen verbonden.

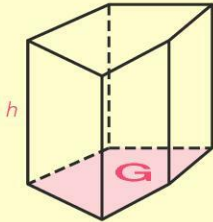
De Rotterdam is bedoeld om te wonen, te werken en te ontspannen. Het grootste deel is bestemd voor gebruik als kantoorruimte en woontoren. Het heeft 240 appartementen, $72\,000 \text{ m}^2$ aan kantoren, conferentieruimten en een ondergrondse parkeergarage van twee bouwlagen met ruim 670 parkeerplaatsen. Voorts is er een hotel met 285 kamers; voor cafés en restaurants is 1500 m^2 beschikbaar. Voor fitnessmogelijkheden is 2500 m^2 gereserveerd en voor winkels 5000 m^2 . De functies zijn in blokken gegroepeerd, maar de gebruikersgroepen ontmoeten elkaar op verschillende plaatsen in het gebouw, een concept dat wordt omschreven als verticale stad. De Rotterdam zal dagelijks door zo'n 5000 mensen gebruikt worden en met een FSI (floor space index) van 32 vormt De Rotterdam het dichtstbebouwde stukje Nederland.

Bron: Wikipedia

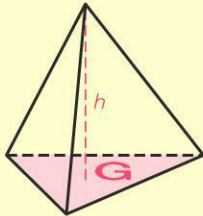
Terugblik

Inhoudformules

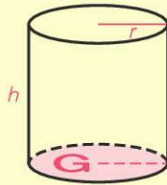
Voor de inhoud van ruimtefiguren ken je de volgende formules.



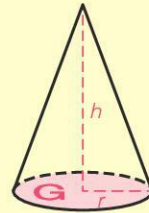
$$I(\text{prisma}) = G \cdot h$$



$$I(\text{piramide}) = \frac{1}{3} G \cdot h$$



$$I(\text{cilinder}) = G \cdot h \\ = \pi r^2 \cdot h$$



$$I(\text{kegel}) = \frac{1}{3} G \cdot h \\ = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Inhoud van afgeknotte kegel

Om de inhoud van de afgeknotte kegel hiernaast te berekenen, maak je gebruik van de inhoud van de niet-afgeknotte kegel. Stel de hoogte van de kegel die is afgehaald van de oorspronkelijke kegel gelijk aan h .

De vergrotingsfactor is $\frac{16}{10} = 1,6$, dus er geldt

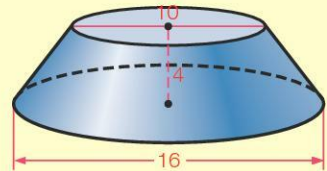
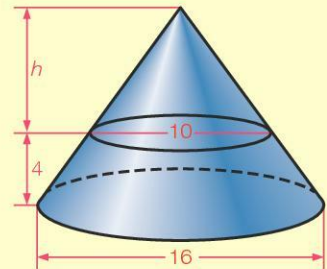
$$1,6h = h + 4 \text{ en dit geeft } h = 6\frac{2}{3}.$$

De hoogte van de oorspronkelijke kegel is dus $6\frac{2}{3} + 4 = 10\frac{2}{3}$.

I (afgeknotte kegel)

$$= I(\text{oorspronkelijke kegel}) - I(\text{afgehaalde kegel})$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 10\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 6\frac{2}{3} \approx 540,4$$



Vergrotingsfactoren

Worden de afmetingen van een ruimtefiguur met factor k vermenigvuldigd, dan wordt de oppervlakte met k^2 vermenigvuldigd en de inhoud met k^3 .

Is de oppervlakte van een grote bol dertig keer zo groot als de oppervlakte van een kleine bol, dan weet je dat $k^2 = 30$, dus $k = \sqrt{30}$. De inhoud van de grote bol is dan $(\sqrt{30})^3 \approx 164$ keer zo groot als die van de kleine bol.

Is de inhoud van een grote kubus 100 keer zo groot als de inhoud van een kleine kubus, dan weet je dat $k^3 = 100$, dus $k = \sqrt[3]{100}$.

De oppervlakte van de grote kubus is dan $(\sqrt[3]{100})^2 \approx 21,5$ keer zo groot als die van de kleine kubus.

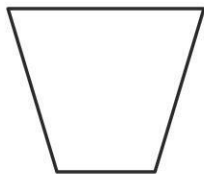


8.3 Aanzichten

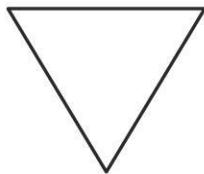


035 Op de foto hiernaast zie je een koffiefilter. Als je bovenop dit filter kijkt, zie je één van de aanzichten in figuur 8.57.

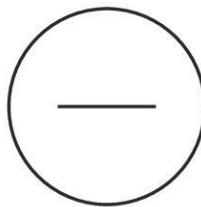
- Welk aanzicht zie je?
- Hoe moet je tegen het filter aankijken om de twee andere aanzichten te zien?



a



b



c



figuur 8.57

Theorie A Aanzichten tekenen

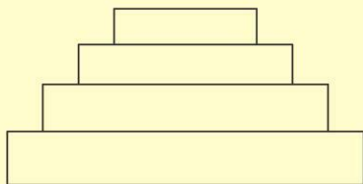
Van het kunstwerk van Carel Visser in figuur 8.58 zijn in figuur 8.59 drie **aanzichten** getekend.

Je ziet het **vooraanzicht**, het **zij aanzicht** en het **bovenaanzicht**.

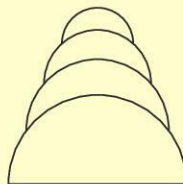
In Getal & Ruimte online staat het filmpje Vier halve cilinders. Hierin zijn de aanzichten van het kunstwerk te zien. Ook bij enkele opgaven in deze paragraaf is een filmpje beschikbaar. Je kunt de filmpjes gebruiken als je bij deze opgaven moeite hebt met het tekenen van de aanzichten.



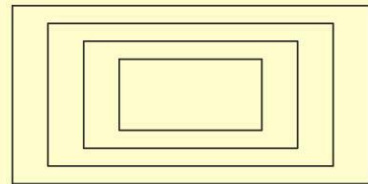
figuur 8.58



vooraanzicht



zij aanzicht



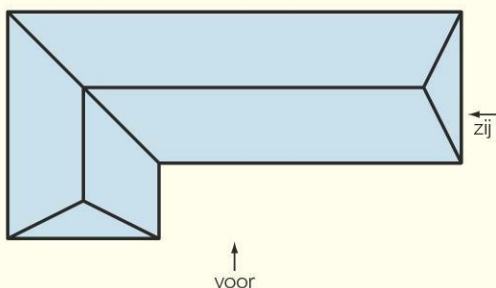
bovenaanzicht

figuur 8.59

Voorbeeld

In figuur 8.60 zie je het bovenaanzicht van een huis op schaal 1 : 250. De hoogte van de benedenverdieping is 3,0 m en de nok van het dak ligt 6,0 m boven de begane grond.

Teken het vooraanzicht en het zijaanzicht op schaal 1 : 250.



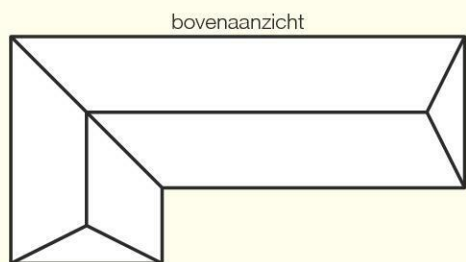
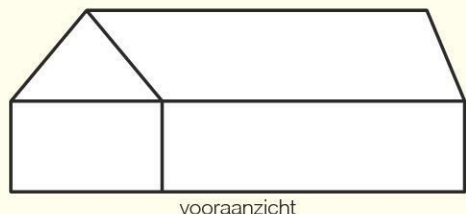
figuur 8.60

Aanpak

Gebruik 3,0 m op schaal 1 : 250 geeft

$300 : 250 = 1,2$ cm en 6,0 m op schaal 1 : 250 geeft $600 : 250 = 2,4$ cm.

Uitwerking

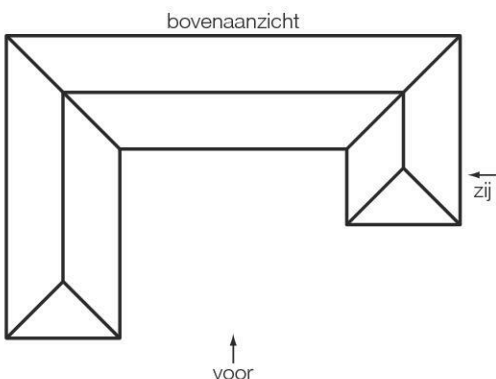


[> WERKBLAD] In figuur 8.61 zie je het bovenaanzicht van een huis op schaal 1 : 300.

De hoogte van de benedenverdieping is 3,0 m en de nok van het dak ligt 7,5 m boven de begane grond.

Teken het vooraanzicht en het zijaanzicht op schaal 1 : 300.

Gebruik zo nodig het filmpje Opgave36.



figuur 8.61

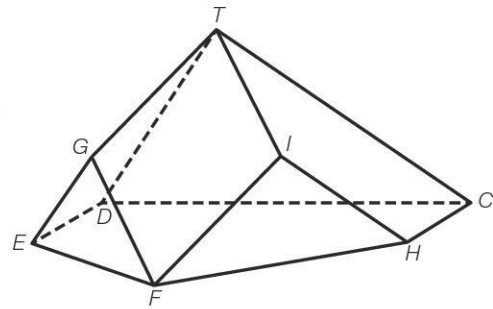
37



[► WERKBLAD] Bij het ontwerp van de woning in figuur 8.62 is de architect uitgegaan van de regelmatige vierzijdige piramide $TABCD$ met een grondvlak van 14 bij 14 m en hoogte 8 m. Van deze piramide zijn twee stukken afgesneden volgens de verticale vlakken EFG en FHI . Hierbij zijn E, F, G, H en I middens van ribben van de piramide.

Op het werkblad is een begin gemaakt met het bovenaanzicht van de woning op schaal 1 : 200.

Maak het bovenaanzicht af en teken het aanzicht in de kijkrichting ED (het vooraanzicht) en het aanzicht in de kijkrichting CD (het rechterzijaanzicht). Gebruik zo nodig het filmpje Opgave37.



figuur 8.62 De vlakken EFG en FHI zijn verticaal.

38



In het Kröller-Müller Museum staat het kunstwerk Philemon en Baucis van Carl Andre.

Op de foto hieronder zie je het kunstwerk dat bestaat uit twee gedeelten, links Baucis en rechts Philemon.



figuur 8.63

Elk gedeelte is opgebouwd uit 7 balken van rood cederhout die een afmeting hebben van 30 bij 30 bij 90 cm.

Teken op schaal 1 : 20 van beide gedeelten de drie aanzichten.

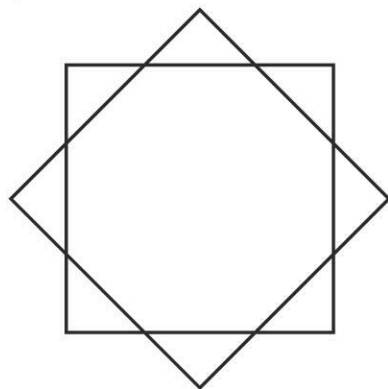
A39
☐ ⊙ *

[▶ WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je een kandelaar die is gemaakt van 16 stalen staven van staal en vier cilinders waar de kaarsen in staan. In deze opgave kijken we alleen naar de 16 staven. Het grondvlak is een vierkant met zijden van 14 cm. Het bovenvlak is ook een vierkant met zijden van 14 cm en ligt 18 cm boven het grondvlak. Dit vierkant is echter gedraaid ten opzichte van het grondvlak, zoals in figuur 8.65. Op het werkblad zie je een begin van het bovenaanzicht van de kandelaar op schaal 1 : 2.

- a Maak het bovenaanzicht af.
- b Teken op schaal 1 : 2 het aanzicht in de richting van de pijl.



figuur 8.64



figuur 8.65

A40
☐ ⊙ *

De tafel in figuur 8.66 is een ontwerp van de Italiaanse architect en ontwerper Paolo Piva. De bovenkant is van glas en het frame bestaat uit vier regelmatige vierzijdige piramides van metaal. De afmetingen van de tafel zijn 80 bij 80 bij 30 cm.

- a Teken het bovenaanzicht op schaal 1 : 10.
- b Teken op schaal 1 : 10 het aanzicht in de kijkrichting AB .
- c Teken op schaal 1 : 10 het aanzicht in de kijkrichting AC .
- d Bereken in cm nauwkeurig de totale lengte van de buizen van het frame.

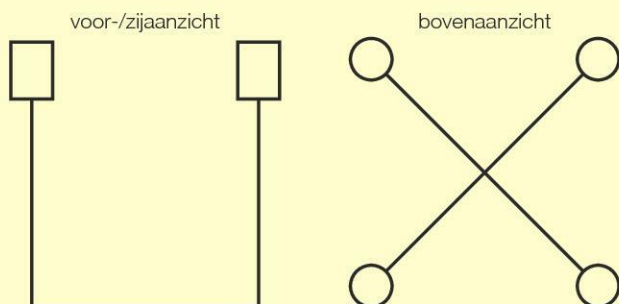
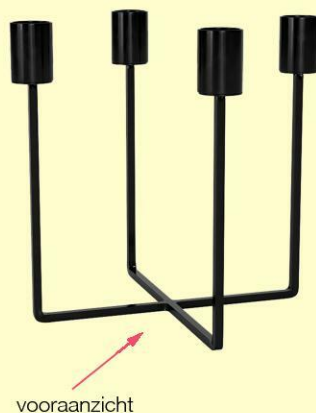


figuur 8.66

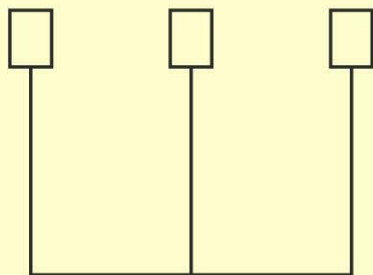
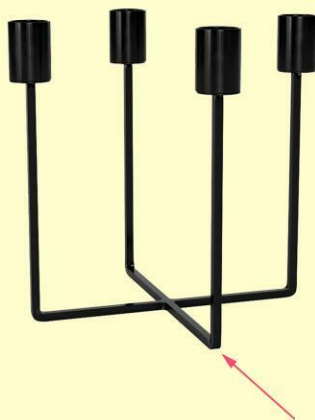
Terugblik

Aanzichten tekenen

Hiernaast zie je een foto van een kandelaar. Het grondvlak is een vierkant van 12 bij 12 cm. De totale hoogte is 14 cm. De kaarshouders zijn cilinders met een diameter van 2,2 cm en een hoogte van 3 cm. Het voor- en zijaanzicht van deze kandelaar zijn gelijk. Hieronder zie je het voor-/zijaanzicht en het bovenaanzicht van de kandelaar op schaal 1 : 4.



Je kunt ook een aanzicht in een andere kijkrichting tekenen. Hieronder zie je het aanzicht op schaal 1 : 3 van de kandelaar in de kijkrichting van de rode pijl. Je kunt de breedte van het aanzicht in deze kijkrichting berekenen met de stelling van Pythagoras. De breedte is de lengte van de diagonaal van het vierkante grondvlak. Je krijgt $\text{breedte} = \sqrt{12^2 + 12^2} \approx 17,0 \text{ cm}$. Op schaal 1 : 4 is dit ongeveer 4,2 cm. Je kunt dat ook nagaan door het op te meten in het bovenaanzicht.



8.4 Perspectief

041




[► WERKBLAD] Hiernaast zie je een foto van het Nederlands Instituut voor Beeld en Geluid te Hilversum. Bij enkele punten zijn letters gezet.

- Teken op het werkblad het snijpunt P van de lijnen AB en EF en het snijpunt Q van de lijnen BC en FG .
- Teken in het vlak $ABFE$ de lijn door de bovenkanten van de middelste ramen. Gaat deze lijn door het punt P ?
- Teken in het vlak $ABFE$ en in het vlak $BCGF$ de lijnen door de bovenkanten van de ramen op dezelfde verdieping. Wat valt je op?



figuur 8.67

042




[► WERKBLAD] Hiernaast zie je een foto van het Mövenpick Hotel in Amsterdam. Bij enkele punten zijn letters gezet. Teken het snijpunt P van de lijnen AB en CD . Teken ook het snijpunt Q van de lijnen BE en CF en het snijpunt S van de lijnen AD en BC . Twee van deze snijpunten liggen op de horizon. Welke snijpunten zijn dat?



figuur 8.68

Theorie A Perspectieftekenen

De meest realistische afbeeldingen krijg je door foto's te nemen. Als je ruimtelijke tekeningen wilt maken die net zo realistisch zijn als foto's, dan moet je nagaan welke eigenschappen zo'n foto heeft en vervolgens deze eigenschappen gebruiken bij het maken van tekeningen. Zo heb je bijvoorbeeld gezien dat lijnen die in werkelijkheid evenwijdig zijn, op de foto's vaak door één punt gaan.

Eén van de oudste tekenmethoden om ruimtelijke tekeningen te maken gaat van dit principe uit. Deze methode, die in de 15^e eeuw is ontwikkeld, heet **perspectieftekenen**.

De Duitser Albrecht Dürer schreef er in 1525 een boek over. Vóór die tijd tekende en schilderde men niet in perspectief. Ook kindertekeningen zijn vaak zonder perspectief.

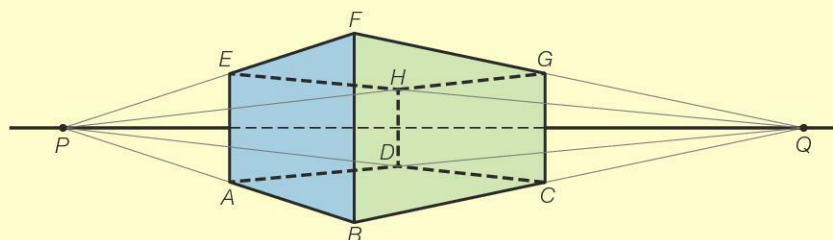


figuur 8.69 Detail van het schilderij Het Laatste Oordeel van Nardo di Cione (1357).



figuur 8.70 Kindertekening van Liv.

In figuur 8.71 zie je een perspectieftekening van een balk. Aan de hand van deze figuur gaan we na welke eigenschappen een perspectieftekening heeft.



figuur 8.71

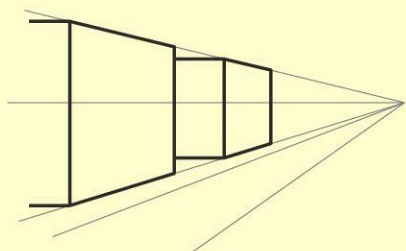
De balk staat op een horizontaal vlak en je kijkt er recht tegenaan, daarom zijn hier de lijnen die in werkelijkheid verticaal zijn ook verticaal getekend. De onderling evenwijdige lijnen in deze figuur die niet verticaal zijn, snijden elkaar in het plaatje in één punt: het **verdwijnpunt** van deze lijnen. Zo is het verdwijnpunt van de evenwijdige lijnen AB , EF , CD en GH het punt P .

De lijnen BC , FG , AD en EH hebben het verdwijnpunt Q .

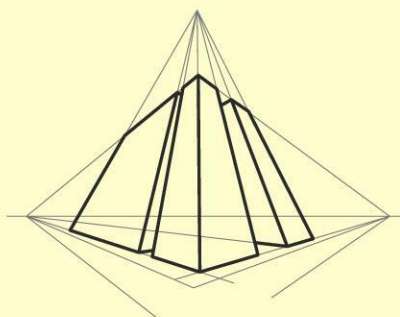
Alle bovengenoemde lijnen liggen in of zijn evenwijdig met het horizontale vlak waarop de balk staat. De verdwijnpunten van deze lijnen liggen op één lijn: de **horizon**. Zoals de naam als zegt is de horizon altijd horizontaal.

In figuur 8.71 heb je te maken met **tweepuntsperspectief**.

In de figuren hieronder zie je voorbeelden van **éénpuntperspectief** en **driepuntperspectief**.



figuur 8.72 Eénpuntperspectief



figuur 8.73 Driepuntperspectief

43
WERKBLAD

[► WERKBLAD] Geef bij de volgende foto's aan of er sprake is van éénpuntperspectief, tweepuntperspectief of driepuntperspectief en teken de verdwijnpunten.



I



II



III



IV



V



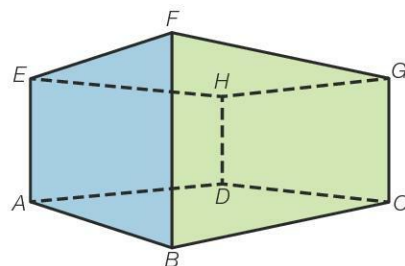
VI

figuur 8.74

44 Zoek zelf een aantal foto's met voorbeelden van éénpuntperspectief, tweepuntperspectief en driepuntperspectief en teken de verdwijnpunten.

45 [▶ WERKBLAD] Zie de perspectieftekening van de balk $ABCD EFGH$ in figuur 8.75.

- Teken de horizon.
- Op het werkblad is het punt P op het verlengde van ribbe BF getekend. Het punt Q ligt op het verlengde van ribbe CG zo, dat PQ evenwijdig is met BC . Teken Q .



figuur 8.75

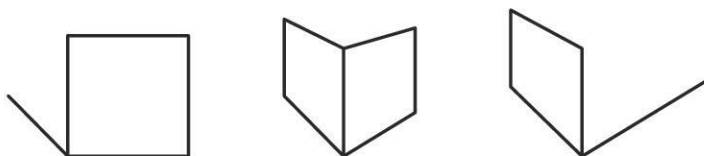
46 [▶ WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je de Grote Sint-Laurenskerk in Alkmaar. Teken de horizon.



figuur 8.76

A47 [▶ WERKBLAD] Maak de volgende drie perspectieftekeningen van balken af. Teken ook de niet-zichtbare ribben als stippellijnen.

horizon



figuur 8.77

A48 [▶ WERKBLAD] Jona heeft een perspectieftekening gemaakt van haar balkvormige kamer. Zie de figuur hiernaast. Ze heeft echter een fout gemaakt bij het tekenen. Gebruik de figuur op het werkblad om te laten zien dat de tekening niet juist in perspectief is getekend.



figuur 8.78

- a Mark heeft liggend op het strand een foto van Anne gemaakt.
 Welke foto hoort daarbij: I, II of III?



I



II



III

- b Vanaf welke hoogte zijn de andere foto's genomen?

Theorie B Centrale projectie

Meestal worden bij een perspectiefafbeelding lijnen die in werkelijkheid evenwijdig zijn, niet evenwijdig weergegeven.

Ze snijden elkaar in het plaatje in één punt, hun verdwijnpunt.

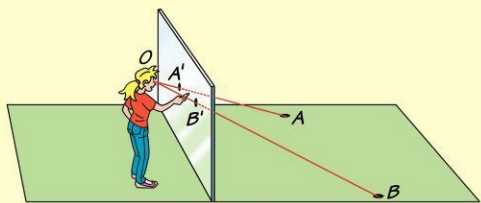
Soms worden evenwijdige lijnen wel evenwijdig weergegeven, zoals bijvoorbeeld de verticale lijnen hiernaast.

Perspectiefafbeeldingen geven de werkelijkheid weer zoals ons oog die ziet.

We lichten toe hoe een perspectiefafbeelding tot stand komt.

Stel je voor dat je met één oog dicht door een vensterruit naar de wereld daarachter kijkt en dat je op de ruit heel precies tekent wat je dan ziet.

De tekening op de ruit is dan een perspectiefafbeelding.



figuur 8.79

In figuur 8.79 staat een persoon op een horizontale vloer met daarop de punten A en B . Loodrecht op de vloer staat een ruit waar de persoon recht tegenaan kijkt. Deze ruit heet het **tafereel**. De kijklijn van het oog O naar A snijdt het tafereel in A' , de kijklijn OB snijdt het tafereel in B' . De persoon zal de punten A en B dus op het tafereel in A' en B' tekenen. Het punt A' is het beeld van het punt A en B' het beeld van B . We zeggen dat de punten A en B vanuit het centrum O op het tafereel worden geprojecteerd. Deze manier van projecteren heet **centrale projectie**.

Bij centrale projectie heb je te maken met de volgende eigenschappen.

- 1 De horizon in het tafereel ligt op ooghoogte en is evenwijdig met het horizontale vlak.
Hiervan heb je in opgave 49 een voorbeeld gezien.
- 2 Als twee horizontale lijnen niet evenwijdig met het tafereel zijn, dan snijden in het tafereel de beelden elkaar op de horizon.
Zie de verdwijnpunten en de horizon op de foto hieronder.



- 3 Alle onderling evenwijdige lijnen die evenwijdig met het tafereel zijn, worden als evenwijdige lijnen afgebeeld.
Zie de verticale lijnen AE , BF en CG op de foto hierboven.

Voorbeeld

Gebouw X van de Hogeschool Windesheim in Zwolle is 24 meter hoog.
Bereken op welke hoogte de foto hiernaast is genomen.

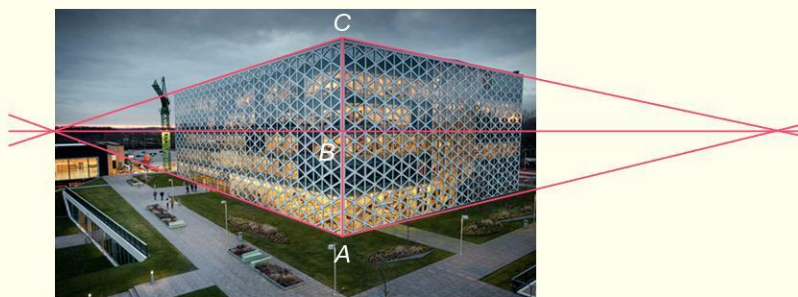
Aanpak

Teken de horizon en gebruik verhoudingen om de vraag te beantwoorden.



figuur 8.80

Uitwerking



Opmeten geeft $AB = 1,4$ cm en $AC = 2,6$ cm.

Dus de hoogte waarop de foto is genomen is $\frac{1,4}{2,6} \cdot 24 \approx 12,9$ meter.

50



[> WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je Le Cube Orange in Lyon. Le Cube Orange is 33 meter hoog. Bereken vanaf welke hoogte de foto is genomen.



figuur 8.81

51



[> WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je het Inntel Hotel Zaandam. Het hotel is ontworpen door de architect Wilfried van Winden. De in het oog springende gevel bestaat uit bijna zeventig losse Zaanse huisjes in vier kleuren Zaanse groen. Het enige blauwe huis is een blikvanger en is geïnspireerd op het schilderij 'Het Blauwe Huis' van Claude Monet. Het hotel is 39 meter hoog. Bereken vanaf welke hoogte de foto is genomen.



figuur 8.82

52



[► WERKBLAD] Op de foto hieronder zie je een boom aan de voet van de Lochemse Berg in Lochem. De persoon op de foto heeft een lengte van 1,75 meter. De foto is genomen vanaf een hoogte van 1,75 meter. Bereken de hoogte van de boom. Rond af op gehele dm.



figuur 8.83

A53



[► WERKBLAD] De stenen pilaren op de foto hieronder zijn 2,50 m hoog. Bereken de lengte van het kind in cm nauwkeurig.



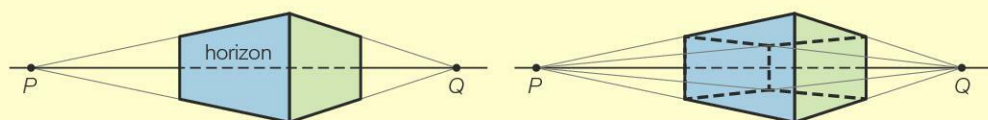
figuur 8.84

Terugblik

Perspectieftekenen en centrale projectie

Hieronder is een perspectiefafbeelding van een balk getekend.

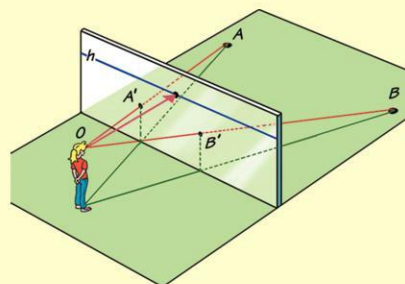
De verdwijnpunten P en Q van de horizontale ribben liggen op de horizon.



Een perspectiefafbeelding berust op centrale projectie vanuit één punt (het oog O) op het tafereel.

Bij centrale projectie heb je te maken met de volgende eigenschappen.

- 1 De horizon in het tafereel ligt op ooghoogte en is evenwijdig met het horizontale vlak.
- 2 Als twee horizontale lijnen niet evenwijdig met het tafereel zijn, dan snijden in het tafereel de beelden elkaar op de horizon.
- 3 Alle onderling evenwijdige lijnen die evenwijdig met het tafereel zijn, worden als evenwijdige lijnen afgebeeld.



Op de foto hiernaast zie je het kunstwerk Passi d'Oro van de Italiaanse kunstenaar Roberto Barni op de IJsselkade in Doesburg.

Als we weten dat de foto op een hoogte van 1,1 meter is genomen, dan kunnen we de hoogte van het kunstwerk berekenen.

We gebruiken dat de horizon op ooghoogte is.

Opmeten op de foto geeft $AB = 1,5$ cm en $AC = 5,8$ cm.

Hieruit volgt dat het kunstwerk

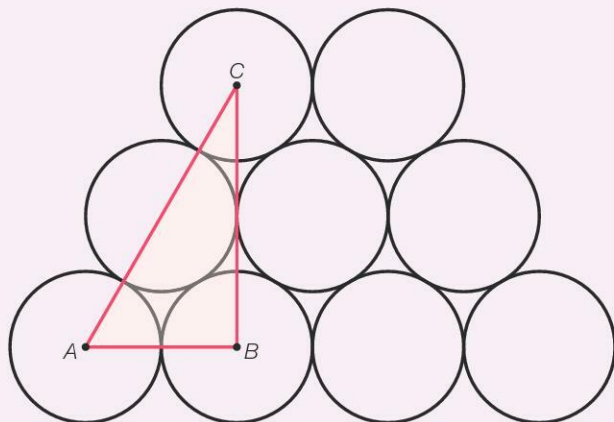
$$\frac{5,8}{1,5} \cdot 1,1 \approx 4,3 \text{ meter hoog is.}$$



Eindopdracht Hoogte van De Mastaba

[► WERKBLAD] In de beginopdracht heb je gerekend aan De Mastaba van Christo. Dit kunstwerk is opgebouwd uit 41 rijen gestapelde olievaten. Zo'n vat heeft een diameter van 59,6 cm.

In deze opgave gaan we deze gegevens gebruiken om met een berekening aan te tonen dat de hoogte 21,1 meter is. Hiervoor kijken we eerst naar een model van het kunstwerk dat uit veel minder vaten bestaat. Hieronder zie je het vooraanzicht van dit model.

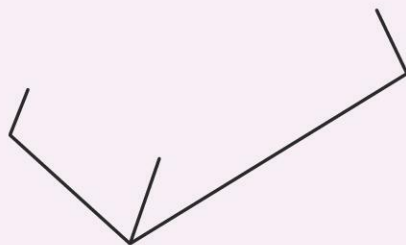


Je ziet dat het model is opgebouwd uit drie rijen gestapelde vaten. Hierin is driehoek ABC getekend, waarvan de hoekpunten de middelpunten van de cirkels zijn.

- Bereken BC en toon hiermee aan dat dit model ongeveer 1,63 meter hoog is.
- Toon aan dat de hoogte van De Mastaba 21,2 meter is. Hierbij is afgerond op dm.

Van het kunstwerk is met een computerprogramma een model in perspectief gemaakt. Een deel hiervan is te zien in de figuur hiernaast.

Er is in het programma een denkbeeldig punt aangegeven van waaruit het perspectief is getekend. Dat punt ligt 88 meter boven het wateroppervlak en kan worden gezien als ooghoogte. Het begin van de perspectieftekening staat ook op het werkblad. Op het werkblad is ook een van de verdwijnpunten aangegeven. De opstaande ribben hebben nog niet de juiste hoogte.

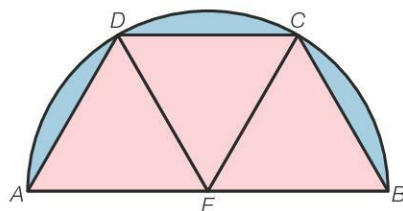


- Maak de perspectieftekening van het model af. Ga ervan uit dat de horizon horizontaal is.

Diagnostische toets

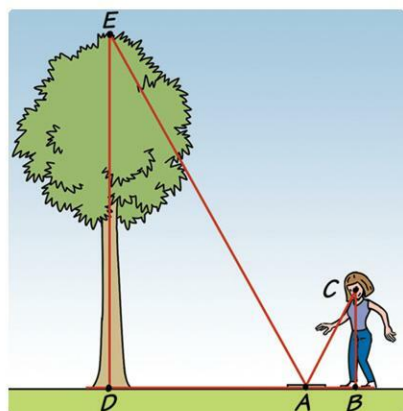
8.1 Vlakke figuren

- 1** Gegeven is het trapezium $ABCD$ in figuur 8.85. Het punt E is het middelpunt van een halve cirkel met straal 3 die door de hoekpunten van het trapezium gaat. Het trapezium is verdeeld in drie gelijkzijdige driehoeken. Bereken de oppervlakte van de blauwe vlakdelen. Rond af op twee decimalen.



figuur 8.85

- 2** Nina gebruikt een spiegeltje en meetlint om de hoogte van een boom te bepalen. Ze legt het spiegeltje op een afstand van 8,4 m van de boom op de grond. Ze gaat precies zo staan dat ze de top van de boom in het spiegeltje kan zien. Zie figuur 8.86. Op deze manier ontstaan de twee gelijkvormige driehoeken ABC en ADE . Nina meet op dat $AB = 1,3$ m en $BC = 1,6$ m. Bereken de hoogte van de boom. Rond af op dm.



figuur 8.86

8.2 Ruimtefiguren

- 3** In het stadje Lochem kun je bij de VVV een zogenaamd Lochemmertje kopen. De emmer is in twee maten verkrijgbaar. De emmers hebben de vorm van een afgeknotte kegel en zijn vergrotingen van elkaar. Van de grote emmer zijn de binnenafmetingen als volgt. De bodem heeft een diameter van 23 cm en de opening aan de bovenkant heeft een diameter van 30 cm. De opening ligt 24 cm boven de bodem. De inhoud van de grote emmer is, afgerond op één decimaal, 13,3 liter.



figuur 8.87

- a** Bereken deze inhoud in liter waarbij je afrondt op twee decimalen.

De oppervlakte van de bodem van de grote emmer is 1,86 keer zo groot als die van de kleine emmer.

- b** Bereken de inhoud van de kleine emmer. Geef je antwoord in liter en rond af op één decimaal.

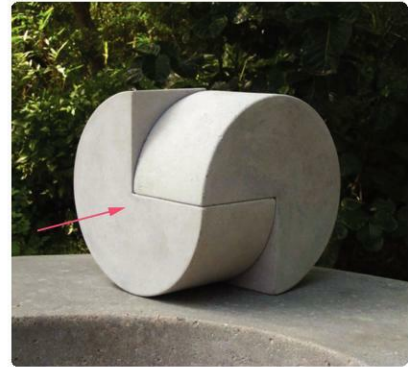
8.3 Aanzichten

- 4** Op de foto hiernaast zie je het kunstwerk Hoeksteen van Henk van Putten. Het bestaat uit twee betonnen cilinders waar een kwart uit is gehaald. Zowel de straal als de hoogte van de cilinders is 20 cm. In de foto is met een pijl het vooraanzicht aangegeven.

- a** Teken het voor-, het rechterzij- en het bovenaanzicht op schaal 1 : 10.

Om het kunstwerk te versturen naar een klant, stopt een galeriehouder het kunstwerk in een kubusvormig doosje met een ribbe van 45 cm.

- b** Bereken hoeveel procent van het doosje wordt opgevuld door het kunstwerk.



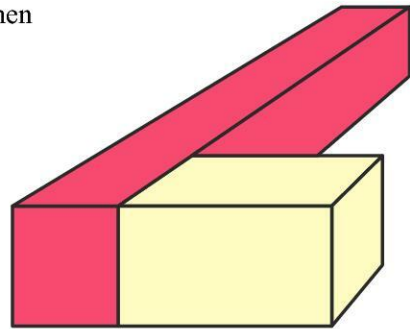
figuur 8.88

8.4 Perspectief

- 5** [► WERKBLAD] Lieve wil haar naam in hoofdletters tekenen in perspectief. In de figuur hiernaast zie je hoe ze de letter L heeft getekend. Daarbij heeft ze de stam van de letter L rood gekleurd. De letter L staat, niet in kleur, op het werkblad.

De letter I moet dezelfde afmetingen krijgen als de stam van de letter L.

Teken de letter I in perspectief op het werkblad. Zorg ervoor dat de ruimte tussen de letters gelijk is aan de breedte van de stam van de letter L.



figuur 8.89

- 6** [► WERKBLAD] In figuur 8.90 zie je een foto van de Seinwachterstraat in Amsterdam van Google Street View. De foto's voor Google Street View worden gemaakt met een camera die gemonteerd is op het dak van een auto. Zie figuur 8.91. De huizen links op de foto hebben een hoogte van 9,1 m.

Vanaf welke hoogte is de hoogte genomen? Geef je antwoord in gehele dm.



figuur 8.90



figuur 8.91

9

Kansverdelingen

Wat leer je?

- Wat de kansverdeling van een toevalsvariabele is.
- Het berekenen van de verwachtingswaarde van een toevalsvariabele.
- Berekeningen maken met de binomiale verdeling en de normale verdeling.
- Wat de wortel- n -wet is.



Beginopdracht Winfall loterij

Enkele jaren geleden verscheen er een opmerkelijk verhaal in de media. Een gepensioneerd stel in de Verenigde Staten won over een periode van acht jaar omgerekend bijna 7 miljoen euro in een loterij. Niet door vals spelen of veel geluk, maar door slim toepassen van wiskunde. In deze opdracht ga je uitzoeken hoe ze dat deden.

Bij de Winfall loterij in de Amerikaanse staat Michigan kost een lot 1 dollar. Op zo'n lot kun je zes verschillende getallen uit de serie 1 tot en met 49 aangeven. Bij een trekking worden willekeurig zes getallen gekozen. Heb je precies die zes getallen aangegeven, dan win je de jackpot: een groot geldbedrag. Heb je wel een aantal getallen goed, maar niet allemaal, dan win je een lager bedrag. Als na een aantal trekkingen de jackpot niet is gevallen, dan komt er een speciale trekking waarbij alle prijzen behalve de jackpot tien keer zo groot zijn.

Op een dag realiseerde de gepensioneerde wiskundige Jerry Selbee zich dat die speciale trekkingen bijzonder winstgevend kunnen zijn.

- Op hoeveel manieren kun je 6 verschillende getallen uit 49 getallen kiezen? Wat is dus de kans om de jackpot te winnen? Schrijf je antwoord als een breuk.

De kans op 4 of 5 van de 6 getallen goed kiezen is groter, maar nog steeds behoorlijk klein. Om je kansen te vergroten kun je veel loten kopen, en dat is precies wat Jerry en zijn vrouw Marge deden.

- Laat zien dat de kans om 4 van de 6 getallen goed te kiezen ongeveer gelijk is aan 0,00097.
- Laat zien dat als je meedoet met 1100 verschillende loten, je mag verwachten dat je ongeveer één keer 4 van de 6 getallen goed hebt.
- Hoeveel keer mag je verwachten 3 van de 6 getallen goed te hebben, als je 1100 verschillende loten koopt?

In de tabel hiernaast zie je hoeveel geld je kunt winnen bij een normale trekking en een speciale trekking. Om de berekeningen te vereenvoudigen, nemen we aan dat je nooit 5 of 6 getallen goed hebt.

- Laat zien dat als je 1100 verschillende loten koopt bij een normale trekking, je mag verwachten dat je ongeveer 195 dollar uitbetaald krijgt. Hoeveel verlies heb je dan, als je het kopen van de loten meerekent?
- En hoe zit dat bij een speciale trekking? Wat is je conclusie?

aantal goed	normale trekking	speciale trekking
6	jackpot	-
5	\$ 2500	\$ 25 000
4	\$ 100	\$ 1000
3	\$ 5	\$ 50

Voorkennis Kansberekeningen

Theorie A Kansen

Veelgebruikte regels bij kansberekeningen zijn de productregel, de somregel en de complementregel.

Productregel	Bij twee onafhankelijke kansexperimenten geldt $P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2)$.
Somregel	Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen G_1 en G_2 geldt $P(G_1 \text{ of } G_2) = P(G_1) + P(G_2)$.
Complementregel	$P(\text{gebeurtenis}) = 1 - P(\text{complement-gebeurtenis})$

Komt in de omschrijving van een gebeurtenis ‘minstens’, ‘hoogstens’, ‘niet’, ‘meer dan’ of ‘minder dan’ voor, dan kan de complementregel je rekenwerk besparen.

Bij het vier keer gooien met een dobbelsteen is

- $P(\text{geen enkele keer } 6) = P(6666) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 0,482$
- $P(\text{twee keer } 6) = \binom{4}{2} \cdot P(6666) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,116$
- $P(\text{minstens één keer } 6) = 1 - P(\text{geen enkele keer } 6) \approx 1 - 0,482 = 0,518$.

Je rondt kansen af op drie decimalen, tenzij anders gemeld.

- 1** Judith laat de schijf in figuur 9.1 acht keer draaien. Bereken de kans dat de pijl
- a één keer 2 aanwijst
 - b minstens één keer 1 aanwijst
 - c vijf keer een 1 en drie keer een 3 aanwijst
 - d vier keer een 1 en één keer een 3 aanwijst.



figuur 9.1

- 2** Rijschool R&S biedt allerlei rijopleidingen aan. Zo is er de mogelijkheid drie dagen achterelkaar les te krijgen. Bij deze opleidingsvorm is de kans om in één keer te slagen 0,22. Bij klanten die losse lessen over een langere periode boeken, is deze kans 0,53.
- Bereken de kans dat
- a van acht cursisten die de opleiding van drie dagen volgen er minstens twee in één keer slagen
 - b van twaalf cursisten die losse lessen volgen er zes of zeven in één keer slagen.

Theorie B Pakken met en zonder terugleggen

Pak je drie knikkers uit een vaas met 3 rode en 4 witte knikkers, dan kan dat met terugleggen, maar ook zonder terugleggen.

Voor $P(\text{één rode knikker})$ krijg je bij het pakken

met terugleggen	zonder terugleggen
$P(\text{één rode}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 \approx 0,420$	<ul style="list-style-type: none">• met de productregel (noemer telkens één kleiner)
Gebruik de productregel.	$P(\text{één rode}) = \binom{3}{1} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \approx 0,514$
	<ul style="list-style-type: none">• met de kansdefinitie van Laplace
	$P(\text{één rode}) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} \approx 0,514$

Wanneer er staat ‘pak drie knikkers’, dan wordt bedoeld zonder terugleggen, tenzij er staat dat het met terugleggen is.

Bij een kleine steekproef uit een grote populatie mag je pakken zonder terugleggen opvatten als pakken met terugleggen. Een toepassing van deze vuistregel zie je hieronder.

Van de Nederlanders heeft 12% contactlenzen. De kans dat van een willekeurige groep van 14 Nederlanders niemand contactlenzen heeft, is $0,88^{14} \approx 0,167$.

De kans dat er twee contactlenzen hebben, is

$$\binom{14}{2} \cdot P(\text{c c } \cancel{\text{c}} \dots \cancel{\text{c}}) = \binom{14}{2} \cdot 0,12^2 \cdot 0,88^{12} \approx 0,283.$$

- 3** Bij een loterij zijn 80 loten verkocht. Naast de hoofdprijs, een smartphone, zijn er drie tweede prijzen en zes derde prijzen. Sasha heeft vijf loten gekocht. Bereken de kans dat zij
- a** minstens één prijs wint
 - b** niet de smartphone, maar wel een tweede en derde prijs wint.
- 4** Felix gooit twaalf keer met een dobbelsteen. Bereken de kans dat hij
- a** drie keer 2 ogen gooit en één keer 3 ogen
 - b** elk aantal ogen twee keer gooit
 - c** bij de twaalfde worp evenveel gooit als bij de eerste worp.

9.1 Toevalsvariabelen en verwachtingswaarde



01 In een klas is gevraagd hoe vaak elke leerling per week aan sport doet. In de tabel zie je de resultaten onderverdeeld naar leeftijd. Er wordt willekeurig een leerling uit deze klas gekozen.

X = leeftijd van leerling

Y = aantal keer sporten per week

a Toon aan dat $P(X = 17) = 0,2$.

b Bereken $P(Y = 1)$.

c Bereken $P(X = 16 \text{ en } Y = 1)$.

Aantal keer sporten per week

	0	1	2	3	
16 jaar	3	7	7	3	20
17 jaar	2	1	2	0	5
	5	8	9	3	25

Theorie A Toevalsvariabelen

Bij het kansexperiment uit opgave 1 wordt aselekt (willekeurig) een leerling uit de klas gekozen.

De leeftijd geven we aan met X . Dus X = leeftijd van leerling.

Omdat bij het aselekt kiezen van een leerling de waarde van X afhangt van het toeval heet X een **toevalsvariabele**.

In opgave 1 is nog een toevalsvariabele gedefinieerd, namelijk

Y = aantal keer sporten per week.

Toevalsvariabelen noteren we met hoofdletters, vaak X en Y .

Je kunt toevalsvariabelen gebruiken om kansen kort te noteren.

Notatie zonder toevalsvariabele

$P(\text{leerling is 16 jaar})$

$P(\text{leerling sport één keer per week})$

$P(\text{leerling sport minstens één keer per week})$

Notatie met toevalsvariabele

$P(X = 16)$

$P(Y = 1)$

$P(Y \geq 1)$

Volgens de somregel is $P(Y < 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1)$.

Volgens de complementregel is $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$.

Uit een vaas met acht rode, vijf witte en twee blauwe knikkers pak je vijf knikkers.

X = aantal rode knikkers dat je pakt

Voor de berekening van $P(X = 2)$ bedenk je dat $X = 2$ inhoudt dat je 2 rode uit de 8 rode en 3 niet-rode uit de $5 + 2 = 7$ niet-rode pakt.

$$\text{Je krijgt } P(X = 2) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{15}{5}} \approx 0,326.$$

Voorbeeld

In een vaas zitten zeven rode, negen witte en vier blauwe knikkers.

Sasha pakt vier knikkers uit de vaas.

X = aantal witte knikkers dat Sasha pakt

Bereken $P(X \leq 3)$.

Uitwerking

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - \frac{\binom{9}{4}}{\binom{20}{4}} \approx 0,974$$

X kan de waarden 0, 1, 2, 3 en 4 aannemen

$X=0$ $X=1$ $X=2$ $X=3$ $X=4$

$X \leq 3$

het complement
van $X \leq 3$

2 Vul in voor de toevalsvariabele X uit het voorbeeld hierboven.

- a** $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq \dots)$
- b** $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(\dots) + P(\dots)$
- c** $P(X < 2) = P(X = 0) + \dots$
- d** $P(\text{minstens één witte}) = P(X \dots 1)$
- e** $P(\text{hoogstens drie witte}) = P(X \dots 3)$
- f** $P(\text{alleen maar witte}) = P(X = \dots)$



3 In een vaas zitten acht rode, vijf witte en twee blauwe knikkers.

Debby pakt vijf knikkers uit de vaas.

X = aantal witte knikkers dat Debby pakt

a Bereken $P(X = 2)$.

Lisette pakt met terugleggen vier knikkers uit de vaas.

Y = aantal rode knikkers dat Lisette pakt

b Bereken $P(Y = 0)$.

c Bereken $P(Y \leq 3)$.

4 In een vaas zitten vijf rode, drie witte en twee groene knikkers.

***** Elly pakt vier knikkers uit de vaas.

X = aantal rode knikkers dat Elly pakt

a Bereken $P(X = 2)$. **b** Bereken $P(X \geq 1)$.

5 Uit onderzoek van het Sociaal en Cultureel Planbureau blijkt dat 86% van de vaders kraamverlof opneemt, direct na de geboorte van hun kind. Voor een onderzoek worden tien kersverse vaders ondervraagd.

X = aantal vaders dat kraamverlof opneemt

a Bereken $P(X = 8)$. **b** Bereken $P(X < 9)$.

A6


Uit onderzoek van het Sociaal en Cultureel Planbureau blijkt dat bij werkende ouders van wie het jongste kind jonger dan 4 jaar is, 70% gebruikmaakt van formele opvang. Dat is kinderopvang op een kinderdagverblijf of bij een gastouder. Daarnaast wordt bij 23% uitsluitend opgepast door familie, vrienden of burens, de zogeheten informele opvang.

Bij een onderzoek zijn tien werkende ouders betrokken van wie het jongste kind jonger is dan 4 jaar.

X = aantal ouders dat gebruikmaakt van formele opvang

Y = aantal ouders dat uitsluitend gebruikmaakt van informele opvang

Bereken.

a $P(X = 6)$

c $P(Y \geq 2)$

b $P(Y = 3)$

d $P(X = 8 \text{ en } Y = 2)$

A7


In een doos zitten 20 enveloppen. In acht van deze enveloppen zit een briefje van 10 euro, de overige twaalf enveloppen zijn leeg.

Arjan pakt twee enveloppen uit de doos.

X = totale bedrag in de twee enveloppen die Arjan pakt

Bereken $P(X = 20)$ en $P(X > 0)$.

O8


In de 4 vwo afdeling van het Zuidpoort College zitten 83 leerlingen:

25 leerlingen zijn 16 jaar, 40 zijn 17 jaar en 18 zijn 18 jaar.

Er wordt aselekt een leerling gekozen.

X = leeftijd van leerling

a Bereken $P(X = 16)$.

b Wat weet je van $P(X = 16) + P(X = 17) + P(X = 18)$?

Theorie B Kansverdelingen

In opgave 8 neemt de toevalsvariabele X de waarden 16, 17 en 18 aan.

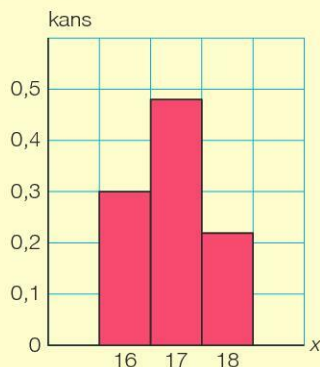
Deze waarden met de bijbehorende kansen vormen de **kansverdeling** van X . Hieronder is deze kansverdeling weergegeven in een tabel.

De letter x geeft een waarde van X aan.

x	16	17	18
$P(X = x)$	$\frac{25}{83}$	$\frac{40}{83}$	$\frac{18}{83}$

Omdat in een kansverdeling alle mogelijke waarden staan die X kan aannemen, is de som van de kansen gelijk aan 1.

In figuur 9.2 is het **kanshistogram** bij de kansverdeling getekend.



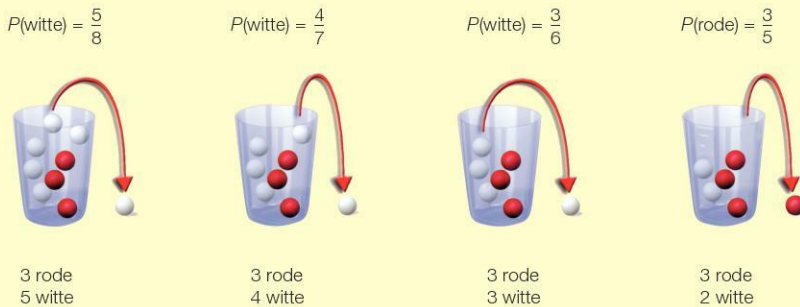
figuur 9.2

De kansverdeling van een toevalsvariabele bestaat uit alle mogelijke waarden van de toevalsvariabele en de bijbehorende kansen.

Hieronder zie je een probleem waarbij een experiment wordt herhaald, totdat een bepaalde gebeurtenis optreedt.

Tom pakt één voor één knikkers uit een vaas met drie rode en vijf witte knikkers. Hij gaat net zo lang door tot hij een rode knikker pakt. Elke keer pakt hij als het ware uit een nieuwe vaas. De kansen veranderen daardoor per keer.

In figuur 9.3 zie je de situatie dat Tom de vierde keer voor het eerst een rode knikker pakt.



figuur 9.3

Bij de situatie dat Tom de eerste drie keer een witte knikker pakt en de vierde keer een rode, hoort de kans $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5}$.

Dus $P(4 \text{ keer pakken}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \approx 0,107$.

Voorbeeld

In een vaas zitten twee rode knikkers, twee witte knikkers en een blauwe knikker. Collin pakt zonder terugleggen één voor één knikkers uit de vaas. Hij stopt hiermee zodra hij een witte knikker pakt.

X = aantal keer dat Collin een knikker pakt

Stel de kansverdeling van X op.

Uitwerking

$$P(X=1) = P(w) = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$P(X=2) = P(\overline{w}w) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,3$$

$$P(X=3) = P(\overline{w}\overline{w}w) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0,2$$

$$P(X=4) = P(\overline{w}\overline{w}\overline{w}w) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = 0,1$$

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	0,4	0,3	0,2	0,1



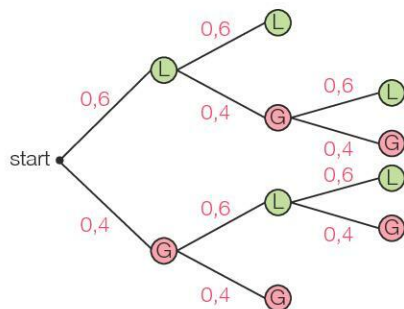
Zie het voorbeeld.

- Waarom is $P(X=5)$ niet opgenomen in de tabel?
- Hoe kun je $P(X=4)$ berekenen met behulp van de andere drie kansen?

- 10** In een vaas zitten vier witte en zes rode knikkers.
 Thijs pakt zonder terugleggen één voor één knikkers uit de vaas, totdat hij een rode pakt. Hierbij is X het aantal keer dat Thijs een knikker pakt. Stel de kansverdeling van X op.

- 11** De kans dat Koen bij het basketballen een vrije worp raakschiet is 0,75. Hij mag tijdens een wedstrijd drie vrije worpen nemen. Hierbij is X het aantal vrije worpen dat hij raakschiet. Stel de kansverdeling van X op.

- 12** Lotte en Gijs spelen een tennispartij over maximaal drie sets. Degene die als eerste twee sets wint, is winnaar. De kans dat Lotte een set wint is 0,6, dus voor Gijs is die kans 0,4. Bij deze situatie hoort de kansboom van figuur 9.4.



figuur 9.4

- Bereken de kans dat
- Lotte de partij in twee sets wint
 - Gijs de eerste set wint en Lotte de volgende twee
 - de partij drie sets duurt.

- Y = aantal sets dat de partij duurt
 d Stel de kansverdeling van Y op.

- A13** Fred en Barney spelen een dartswedstrijd over maximaal drie sets. Degene die als eerste twee sets wint, is winnaar. De kans dat Barney een set wint is 0,65, dus voor Fred is die kans 0,35.
 Z = aantal sets dat de partij duurt
 Stel de kansverdeling van Z op.

- A14** Bij een opleidingsinstituut moet een toelatingsexamen worden afgelegd. De kans dat iemand voor dit examen slaagt is 0,6.
 Iemand die niet slaagt, mag herkansen. De kans om voor de herkansing te slagen is 0,3. In totaal mag je drie keer herkansen. Ben je ook voor de derde herkansing gezakt, dan ben je definitief afgewezen.
 A = aantal keer examen gedaan
 Stel de kansverdeling van A op.



- E15** In een doos zitten twee rode, twee witte en twee blauwe ballen. Jesse pakt één voor één ballen uit de doos totdat hij twee rode en twee blauwe ballen heeft gepakt.
 X = aantal keer dat Jesse een bal pakt
 Stel de kansverdeling van X op.

Sportvereniging Nikè organiseert wekelijks een loterij.

Elk lot kost 5 euro. Er is een eerste prijs van 2000 euro en er zijn 100 prijzen van 20 euro. Elke week worden 1000 loten verkocht. Hoeveel winst maakt Nikè wekelijks met deze loterij? Hoeveel is dat gemiddeld per lot?



Theorie C De verwachtingswaarde

De sportvereniging uit opgave 16 maakt gemiddeld per lot een winst van 1 euro. Omgekeerd kan dus een deelnemer aan de loterij gemiddeld per lot een verlies van 1 euro verwachten. We zeggen dat de **verwachtingswaarde** van de winst W per lot voor een deelnemer gelijk is aan -1 euro. Notatie $E(W) = -1$.

Je kunt de winstverwachting per lot ook berekenen met de kansverdeling van W . Per lot kan een deelnemer bij deze loterij een winst maken van -5 , 15 of 1995 euro, dus W neemt de waarden -5 , 15 en 1995 aan. Omdat 899 van de 1000 loten geen prijs geven, is $P(W = -5) = \frac{899}{1000} = 0,899$.

Zo ontstaat de volgende kansverdeling.

w	1995	15	-5
$P(W = w)$	0,001	0,1	0,899

Door elke mogelijke waarde van W te vermenigvuldigen met de bijbehorende kans en vervolgens de uitkomsten op te tellen, krijg je $E(W)$. Ga maar na: $E(W) = 1995 \cdot 0,001 + 15 \cdot 0,1 + -5 \cdot 0,899 = -1$.

Werkschema: berekenen van de verwachtingswaarde van de toevalsvariabele X

- 1 Stel de kansverdeling van X op.
- 2 Vermenigvuldig elke waarde van X met de bijbehorende kans.
- 3 Tel de uitkomsten op. De som is de verwachtingswaarde $E(X)$.

$$\text{Dus } E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n).$$

De verwachtingswaarde -1 suggereert dat een deelnemer per lot 1 euro verliest. Maar dat kan niet, want per lot kun je uitsluitend 5 euro verliezen of een winst maken van 15 euro, dan wel 1995 euro. De verwachtingswaarde geeft aan wat je gemiddeld per lot kunt verwachten. Zou je 50 loten kopen, dan verwacht je een verlies van $50 \cdot 1 = 50$ euro.

Voorbeeld

Bij een spel met een dobbelsteen gelden de volgende regels.

- Je gebruikt een dobbelsteen met op de zijvlakken de cijfers 1, 1, 1, 1, 5 en 5.
- Je gooit drie keer met de dobbelsteen.
- De uitbetaling is de som van de gegooide cijfers in euro's.
- De inleg is 8 euro.

Gooi je bijvoorbeeld 5 1 1, dan krijg je 7 euro uitbetaald. Je 'wint' dan -1 euro.

Bereken de verwachtingswaarde van de winst per spel.

Uitwerking

W = winst per spel, dus W = uitbetaling - 8.

W neemt de waarden 7, 3, -1 en -5 aan.

$$P(W=7) = P(5\ 5\ 5) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$P(W=3) = \binom{3}{2} \cdot P(5\ 5\ 1) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{27}$$

$$P(W=-1) = \binom{3}{1} \cdot P(5\ 1\ 1) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$

$$P(W=-5) = P(1\ 1\ 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

w	7	3	-1	-5
$P(W=w)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

Controle: $\frac{1}{27} + \frac{6}{27} + \frac{12}{27} + \frac{8}{27} = 1$

$$E(W) = 7 \cdot \frac{1}{27} + 3 \cdot \frac{6}{27} + (-1) \cdot \frac{12}{27} + (-5) \cdot \frac{8}{27} = -1$$

De verwachtingswaarde van de winst is -1 euro per spel.



Zie het voorbeeld. Om de winstverwachting per lot te berekenen, zou je ook eerst de verwachtingswaarde van de uitbetaling U per lot kunnen berekenen.

- Stel de kansverdeling van U op en bereken $E(U)$.
- Hoe volgt $E(W)$ hieruit?



Bij een loterij zijn 100 loten van 2 euro verkocht. Er is één prijs van 50 euro en er zijn drie tweede prijzen van 10 euro.

- Bereken de verwachtingswaarde van de winst per lot voor een deelnemer aan de loterij.
- We noemen een loterij eerlijk als de winstverwachting per lot gelijk is aan 0.
Wat moet bij deze loterij een lot kosten om van een eerlijke loterij te kunnen spreken?

Een spel is eerlijk als $E(W) = 0$.

- 19** Bij een spel met een dobbelsteen waarop vijf keer het cijfer 3 staat en één keer het cijfer 8 gelden de volgende regels.
- De inleg is 8 euro.
 - Je gooit twee keer met de dobbelsteen.
 - De uitbetaling is de som van de gegooide cijfers in euro's.
- Bereken in centen nauwkeurig de verwachtingswaarde van de winst per spel.

- A20** Chuck-a-Luck is een spel met dobbelstenen dat in de VS veel gespeeld wordt. Je zet voor één dollar in op een zeker aantal ogen, bijvoorbeeld op 5 ogen. Daarna gooi je met drie dobbelstenen. Het aantal keren dat je 5 ogen gooit, krijg je in dollars uitbetaald.
- a** Bereken exact de kans dat je bij een worp met drie dobbelstenen één keer 5 ogen gooit.
 - b** Bereken exact de kans dat je 2 dollar krijgt uitbetaald.
 - c** Bereken exact de kans dat je je inzet kwijt bent.
 - d** Hoeveel brengt het spel naar verwachting de organisatie op als 500 personen meedoen?

- A21** In een vaas zitten vier rode en zes witte knikkers. Monique pakt één voor één knikkers uit de vaas, totdat ze een witte pakt. Bereken de verwachtingswaarde van het aantal knikkers dat Monique pakt.

Terugblik

Toevalsvariabele

Bij het kansexperiment ‘gooien met twee dobbelstenen’ zijn vele toevalsvariabelen te definiëren, bijvoorbeeld X = verschil van de aantallen ogen.

Uit de figuur hiernaast volgt

$$P(X=0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ en } P(X=1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Bij een toevalsvariabele hangt de uitkomst van het toeval af.

Toevalsvariabelen kun je gebruiken om gebeurtenissen kort te noteren. In plaats van ‘het verschil van de aantallen ogen is minstens 1’ krijg je $X \geq 1$.

	VERSCHIL					
6	5	4	3	2	1	0
5	4	3	2	1	0	1
4	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5
	1	2	3	4	5	6

Het herhalen van kansexperimenten totdat succes optreedt

Frits pakt net zo lang knikkers uit een vaas met drie rode en vijf witte knikkers totdat hij een witte pakt.

Y = aantal knikkers dat Frits pakt

$$P(Y=3) = P(\text{ww}\bar{w}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$$

De kansverdeling en verwachtingswaarde van een toevalsvariabele

De kansverdeling van een toevalsvariabele Y bestaat uit alle waarden van Y en de bijbehorende kansen.

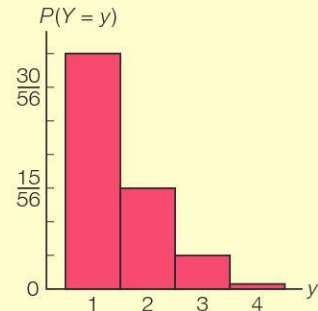
Bij de toevalsvariabele Y hierboven krijg je

y	1	2	3	4
$P(Y=y)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

Ter controle gebruik je dat de som van kansen in een kansverdeling 1 is.

In de figuur hiernaast is het bijbehorende kanshistogram getekend.

De verwachtingswaarde van het aantal knikkers dat Frits pakt is $E(Y) = 1 \cdot \frac{5}{8} + 2 \cdot \frac{15}{56} + 3 \cdot \frac{5}{56} + 4 \cdot \frac{1}{56} = 1,5$.



9.2 De binomiale verdeling



Jessica gooit acht keer met een dobbelsteen.

Bereken de kans op

- a drie keer 6 ogen
- b vijf keer meer dan 2 ogen.

Theorie A Het binomiaal kansexperiment

In opgave 22a zijn we bij elke worp met de dobbelsteen slechts geïnteresseerd in de gebeurtenis ‘6 ogen’. En in opgave 22b gaat het om de gebeurtenis ‘meer dan 2 ogen’. Het is gebruikelijk om de gebeurtenis waarin we geïnteresseerd zijn **succes** te noemen en de bijbehorende complement-gebeurtenis **mislukking**.

Een kansexperiment waarbij het uitsluitend om de gebeurtenissen succes en mislukking gaat, heet een **Bernoulli-experiment**.

Een kansexperiment waarbij je alleen op de gebeurtenissen succes en mislukking let, heet een Bernoulli-experiment.

De kans op succes wordt aangegeven met p .

Het op de gok beantwoorden van een vierkeuzevraag is een Bernoulli-experiment met $p = \frac{1}{4}$. Het op de gok beantwoorden van zeven vierkeuzevragen is een samengesteld kansexperiment dat bestaat uit zeven gelijke Bernoulli-experimenten die onafhankelijk van elkaar zijn. Bij elk van deze Bernoulli-experimenten is $p = \frac{1}{4}$.

Dit samengestelde kansexperiment is een voorbeeld van een **binomiaal kansexperiment**. Essentieel bij een binomiaal kansexperiment is dat je hetzelfde Bernoulli-experiment een aantal keren uitvoert. Dit aantal geven we aan met n . X is het aantal keer succes dat hierbij optreedt. We noemen X een **binomiale toevalsvariabele**. We zeggen ook dat X **binomiaal verdeeld** is.

Binomiaal kansexperiment

n = aantal keer dat het experiment wordt uitgevoerd
 X = aantal keer succes
 p = kans op succes per keer

Een binomiaal kansexperiment is een kansexperiment dat bestaat uit n gelijke Bernoulli-experimenten, waarbij p de kans is op succes per experiment.

Hierbij hoort de toevalsvariabele X = aantal keer succes.

Bij het op de gok beantwoorden van 20 vierkeuzevragen is X het aantal juiste antwoorden. Bij dit binomiale kansexperiment is $n = 20$ en $p = \frac{1}{4}$. De kans $P(X = 7)$ op 7 juiste antwoorden (en dus $20 - 7 = 13$ foute antwoorden) krijg je als volgt.

$$P(X = 7) = \binom{20}{7} \cdot \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{4}}_{7 \text{ keer}} \cdot \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4}}_{13 \text{ keer}} = \binom{20}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13}$$

Er zijn immers $\binom{20}{7}$ rijtjes met 7 juiste en 13 foute antwoorden.

Elk rijtje heeft dezelfde kans van $\left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13}$.

$$\text{Dus } P(X = 7) = \binom{20}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13}.$$

Bij een binomiaal kansexperiment is de kans op k keer succes gelijk aan $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$.

Hierin is n het aantal keer dat het Bernoulli-experiment wordt uitgevoerd en p de kans op succes per experiment.

Voorbeeld

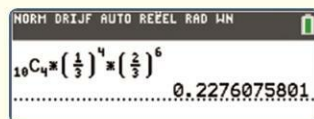
Bereken de kans dat je bij tien worpen met een dobbelsteen vier keer minstens vijf ogen gooit.

Uitwerking

X = aantal keer minstens vijf ogen

X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0,228$$



Stel dat je dezelfde kans wilt berekenen als in het voorbeeld, maar dan met behulp van de variabele Y = aantal keer hoogstens vier ogen.

- Wat zijn de waarden van n , p en k dan?
- Voer de berekening uit en vergelijk de antwoorden.

GESCHIEDENIS

De Bernoulli's

De familie Bernoulli heeft veel beroemde wetenschappers voortgebracht. Oorspronkelijk woonden de Bernoulli's in Antwerpen, maar in 1622 vestigden ze zich in Bazel.

Tot de familieleden die zich met de kansrekening hebben beziggehouden behoort Jacob Bernoulli (1654-1705). Hij was niet alleen geïnteresseerd in empirische kansen (sterftetabellen en juridische statistieken), maar hield zich ook bezig met theoretische kansen gebaseerd op permutaties en combinaties.

In 1690 formuleerde hij de wet van de grote aantallen.

24




In een vaas zitten acht rode, twee witte en tien groene knikkers.

- Carmen pakt met terugleggen zes keer een knikker uit de vaas.
 X = aantal rode knikkers dat Carmen pakt
 Geef n en p en bereken $P(X = 4)$.
- Coen pakt met terugleggen twaalf keer een knikker uit de vaas.
 Y = aantal niet-witte knikkers dat Coen pakt
 Geef n en p en bereken $P(Y = 10)$.
- Mariël pakt zonder terugleggen vier knikkers uit de vaas.
 Z = aantal groene knikkers dat Mariël pakt
 Is Z binomiaal verdeeld? Bereken $P(Z = 3)$.

25




Een honkbalster heeft een slaggemiddelde van 0,3.

- Bereken de kans dat zij in tien achtereenvolgende slagbeurten vijf keer slag heeft.
- Bereken de kans dat zij in vijf achtereenvolgende slagbeurten alleen bij de laatste beurt slag heeft.



026




De toevalsvariabele X is binomiaal verdeeld met $n = 3$ en $p = 0,2$.

Bij X hoort de kansverdeling hiernaast.

- Bereken $P(X \leq 2)$.
- Waarom kun je direct zeggen $P(X \leq 3) = 1$?
- Waarom is $P(X \leq 0) = P(X = 0)$?
- Vul de tabel hiernaast in.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,512	0,384	0,096	0,008

x	0	1	2	3
$P(X \leq x)$				

Theorie B De cumulatieve kansverdeling

In opgave 26 staat een tabel met kansen van het type $P(X \leq x)$. De tabel heet de **cumulatieve kansverdeling** van X .

Een kans als $P(X \leq 2)$ heet een **cumulatieve kans**. De GR heeft opties waarmee voor elke mogelijke n , p en k binomiale en cumulatieve binomiale kansen kunnen worden berekend.

cumuleren = opeenhopen, opstapelen, samenvoegen

[► GR] Neem de module **De binomiale verdeling** door.

Voorbeeld

De schijf in figuur 9.5 is verdeeld in vier even grote sectoren. Sandra laat de schijf zeven keer draaien.

Bereken de kans dat zij

- a drie keer een 1 krijgt
- b hoogstens vier keer een 2 krijgt
- c vier keer een 1 en drie keer een 3 krijgt.



figuur 9.5

Aanpak

- a • Op de TI kies je binompdf en vul je het volgende in.
pogingen: 7, $p: \frac{1}{2}$, x-waarde: 3
- Op de Casio kies je Bpd en zorg je dat je krijgt BinomialPD(3, 7, $\frac{1}{2}$).
- Op de HP kies je Kans-Dichtheid-Binomiaal en zorg je dat je krijgt BINOMIAL(7, $\frac{1}{2}$, 3).
- b • Op de TI kies je binomcdf.
- Op de Casio kies je Bcd.
- Op de HP kies je Kans-Cumulatief-Binomiaal.

Uitwerking

- a X = aantal keer 1

X is binomiaal verdeeld met $n = 7$ en $p = \frac{1}{2}$.

De GR geeft $P(X = 3) \approx 0,273$.

- b X = aantal keer 2

X is binomiaal verdeeld met $n = 7$ en $p = \frac{1}{4}$.

De GR geeft $P(X \leq 4) \approx 0,987$.

- c $P(\text{vier keer een 1 en drie keer een 3}) = \binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \approx 0,034$

R27 Zie het voorbeeld.



- a Bereken de kans van vraag a zoals in het voorbeeld op bladzijde 63.

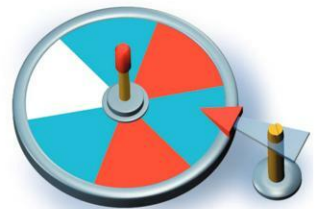
- b Leg uit waarom de kans bij c geen binomiale kans is.

28 De schijf in figuur 9.6 is verdeeld in zes even grote sectoren.



Bereken de kans dat de pijl bij

- a 10 keer draaien drie keer wit aanwijst
- b 12 keer draaien hoogstens vijf keer rood aanwijst
- c 9 keer draaien minstens één keer blauw aanwijst
- d 8 keer draaien vijf keer blauw en drie keer rood aanwijst
- e 16 keer draaien acht keer blauw, vijf keer rood en drie keer wit aanwijst.



figuur 9.6

29


Van een tennisspeelster is bekend dat van haar eerste opslagen 55% in is.
 Bereken de kans dat

- bij tien servicebeurten vijf keer de eerste opslag in is
- bij zes servicebeurten alleen de laatste vier keer de eerste opslag in is.



A30


Op een autosnelweg houdt 84% van de automobilisten zich aan de toegestane maximumsnelheid van 100 km/uur. Van de snelheidsovertreders rijdt een kwart zelfs 120 km/uur of meer.
 Bij een radarcontrole wordt van 60 auto's de snelheid gecontroleerd.
 Bereken de kans dat

- tien automobilisten te hard rijden
- hoogstens twee automobilisten 120 km/uur of meer rijden
- een kwart van de automobilisten een snelheid heeft tussen 100 en 120 km/uur.

A31


Van een zeer grote partij accu's is 20% ondeugdelijk. Een opkoper, die dit percentage niet kent, besluit de partij op te kopen als hij in een steekproef van 54 accu's niet meer dan 3 ondeugdelijke accu's aantreft.
 Bereken de kans dat de opkoper de partij koopt.

O32


X is een binomiale toevalsvariabele. De kans op meer dan acht keer succes noteer je als $P(X > 8)$.
 Noteer met behulp van X de kans op

- minstens vier keer succes
- minder dan acht keer succes.

Voor $P(X < 6)$ kun je schrijven $P(X \leq 5)$.

Voor $P(X > 4)$ kun je schrijven $1 - P(X \leq 4)$.

Voor $P(3 \leq X \leq 7)$ kun je schrijven

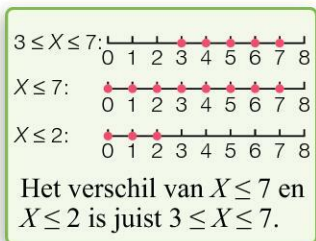
$P(X \leq 7) - P(X \leq 2)$.

Voor $P(3 < X < 7)$ kun je schrijven

$P(X \leq 6) - P(X \leq 3)$.

Herleid tot een vorm met één of meer kansen van het type $P(X \leq k)$.

- | | |
|---------------------------------|--|
| c $P(X > 5)$ | g $P(4 < X < 12)$ |
| d $P(X \geq 10)$ | h $P(2 \leq X < 5)$ |
| e $P(X < 7)$ | i $P(4 < X \leq 8)$ |
| f $P(12 \leq X \leq 20)$ | j $P(X \text{ tussen } 8 \text{ en } 20)$ |



Bij 'tussen' doen de grenzen niet mee.

Theorie C Binomiale kansen berekenen

Bij een binomiale toevalsvariabele X moet je kansen kunnen herleiden tot een vorm waarin $P(X = k)$ of $P(X \leq k)$ voorkomt.

Zo is $P(\text{meer dan vier keer succes}) = P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$ en $P(\text{tussen drie en tien keer succes}) = P(3 < X < 10) = P(X \leq 9) - P(X \leq 3)$.

Vervolgens kun je de kansen met de GR berekenen.

Gebruik bij opgaven over binomiale kansexperimenten het volgende werkschema.

Werkschema: binomiale kansen berekenen

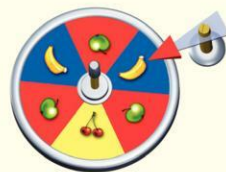
- 1 Omschrijf de betekenis van de toevalsvariabele X .
- 2 Noteer dat X binomiaal verdeeld is en vermeld n en p .
- 3 Noteer de gevraagde kans met X en herleid deze kans zo nodig tot een vorm waarin $P(X = k)$ of $P(X \leq k)$ voorkomt. Bereken deze kans met de GR.

Voorbeeld

De schijf in figuur 9.7 is verdeeld in zes even grote sectoren. Per beurt wijst de pijl één sector aan.

Bereken de kans dat in

- a 20 beurten meer dan acht keer een appel wordt aangewezen
- b 50 beurten minder dan zes keer kersen wordt aangewezen
- c 30 beurten negen of tien keer een banaan wordt aangewezen
- d 25 beurten tussen drie en negen keer kersen wordt aangewezen.



figuur 9.7

Uitwerking

- a X = aantal keer appel
 X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
 $P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8)$
De GR geeft $P(X > 8) \approx 0,748$.
- b X = aantal keer kersen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = \frac{1}{6}$.
 $P(X < 6) = P(X \leq 5)$
De GR geeft $P(X < 6) \approx 0,139$.
- c X = aantal keer banaan
 X is binomiaal verdeeld met $n = 30$ en $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
 $P(X = 9 \text{ of } X = 10) = P(X = 9) + P(X = 10)$
De GR geeft $P(X = 9 \text{ of } X = 10) \approx 0,299$.
- d X = aantal keer kersen
 X is binomiaal verdeeld met $n = 25$ en $p = \frac{1}{6}$.
 $P(3 < X < 9) = P(X \leq 8) - P(X \leq 3)$
De GR geeft $P(3 < X < 9) \approx 0,603$.

NORM DRIJF AUTO REEEL RAD WIN	
1-binomcdf(20,0.5,8)	0.7482776641
binomcdf(50,1/6,5)	0.1388156459
binompdf(30,1/3,9)+binompdf(30,1/3,10)	0.2987440462
binomcdf(25,1/6,8)-binomcdf(25,1/6,3)	0.6027261258

Functie	
1-BINOMIAL_CDF(20,0.5,8)	0.748277664185
BINOMIAL_CDF(50,1/6,5)	0.138815645925
BINOMIAL(30,1/3,9)+BINOMIAL(30,1/3,10)	0.298744046234
BINOMIAL_CDF(25,1/6,8)-BINOMIAL_CDF(25,1/6,3)	0.602726125027

Op zowel de Casio fx-CG20 en fx-CG50 als de NW en de HP hoeft je binomiale kansen niet altijd te herleiden tot een vorm waarin $P(X \leq k)$ voorkomt.

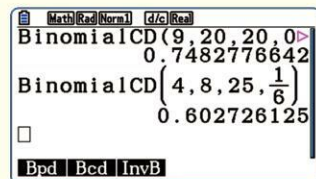
De kans $P(l \leq X \leq r)$ bereken je

- op de Casio fx-CG20 en fx-CG50 met $\text{BinomialCD}(l, r, n, p)$
- op de HP met $\text{BINOMIAL_CDF}(n, p, l, r)$.

Bij vraag a van het voorbeeld gebruik je dat

$P(X > 8) = P(9 \leq X \leq 20)$ en die kans bereken je

- op de Casio fx-CG20 en fx-CG50 met $\text{BinomialCD}(9, 20, 20, 0.5)$
- op de HP met $\text{BINOMIAL_CDF}(20, 0.5, 9, 20)$.



- 33** Bij een binomiaal kansexperiment met $n = 25$ en $p = 0,42$ is X het aantal keer succes.

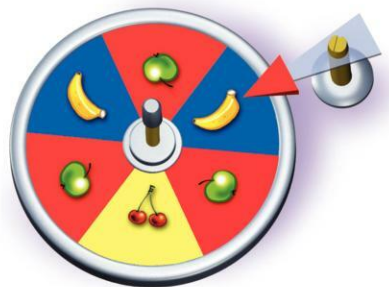
Bereken.

- a $P(X < 10)$
- b $P(X \geq 8)$
- c $P(\text{meer dan 12 keer succes})$
- d $P(\text{tussen 9 en 16 keer succes})$
- e $P(\text{minstens 6 keer succes})$
- f $P(9 \text{ of } 10 \text{ keer succes})$

- 34** Hiernaast zie je nog eens de schijf van het voorbeeld.

Bereken de kans dat de pijl in

- a 10 beurten minstens vijf keer een appel aanwijst
- b 25 beurten tussen de 10 en 20 keer een appel aanwijst
- c 100 beurten meer dan 60 keer een appel aanwijst
- d 35 beurten zeven keer kersen aanwijst.



figuur 9.8

- 35** In een vaas zitten 12 rode, 8 zwarte en 5 witte knikkers.

***** Mariëlle pakt twee knikkers uit de vaas en kijkt welke kleur deze knikkers hebben. Mariëlle voert dit experiment 15 keer uit. Elke keer legt ze de getrokken knikkers weer in de vaas terug.

Bereken de kans dat ze

- a drie keer twee rode knikkers pakt
- b minstens tien keer één zwarte knikker pakt
- c minder dan zes keer twee knikkers van dezelfde kleur pakt
- d minstens acht keer minstens één rode knikker pakt.

A36 Van de bijna drie miljoen kinderen tot 15 jaar die ons land telt, leeft 11% in een eenoudergezin.



Bereken de kans dat

- a in een voetbalelftal van de O13 geen enkele speler uit een eenoudergezin komt
- b in groep 8 van basisschool 'De Cirkel' van de 22 leerlingen er hoogstens twee uit een eenoudergezin komen.

Op muziekschool 'De Blokfluit' zitten 35 kinderen onder de 15 jaar van wie er vijf uit een eenoudergezin komen. Voor een concert worden willekeurig zes kinderen onder de 15 jaar aangewezen.

- c Bereken de kans dat hierbij twee kinderen uit een eenoudergezin zitten.

A37 Bij een vliegmaatschappij weet men uit ervaring dat de kans dat een passagier bij een vlucht naar Madrid niet komt opdagen 12% is. Voor de vlucht van 10:00 uur op 15 februari naar Madrid zijn 92 stoelen beschikbaar. Er zijn 100 boekingen.



Bereken de kans dat iedereen die komt opdagen een plaats heeft.

E38 Bij een verhuurbedrijf van strandstoelen weet men uit ervaring dat 8% van de badgasten die voor een dag een stoel hebben besproken niet komt opdagen. Het bedrijf heeft elke dag in totaal 190 strandstoelen beschikbaar. Hoeveel stoelen zullen dagelijks verhuurd worden als de kans dat iedereen die komt opdagen een stoel heeft minstens 95% moet zijn?



O39 Jan gooit 30 keer met een dobbelsteen. Hij verwacht vijf keer 6 ogen te gooien.



- a Licht toe waarom hij dit verwacht.

X = aantal keer dat Jan 6 ogen gooit

- b Vul de tabel hiernaast in. Rond af op drie decimalen.

x	3	4	5	6	7
$P(X=x)$					

Theorie D Verwachtingswaarde en standaardafwijking van een binomiale toevalsvariabele

Bij het 1200 keer gooien met een dobbelsteen verwacht je $1200 \cdot \frac{1}{6} = 200$ keer 5 ogen te gooien. Bij deze binomiale verdeling is de kans op het aantal dat je verwacht groter dan de kans op elk ander aantal. Hiervan heb je in opgave 39 een voorbeeld gezien. Algemeen geldt voor de verwachtingswaarde $E(X)$ van de binomiale toevalsvariabele X dat $E(X) = np$.

In hoofdstuk 2 heb je geleerd wat de standaardafwijking is bij een frequentieverdeling. Ook bij een binomiale toevalsvariabele hoort een standaardafwijking.

Voor de standaardafwijking van de binomiale toevalsvariabele X geldt de formule $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$.

De standaardafwijking van een toevalsvariabele geeft een indruk van de gemiddelde afwijking van de mogelijke uitkomsten tot de verwachtingswaarde.

Van de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X is $E(X) = np$ en $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$.

40



- a Van een binomiale toevalsvariabele X is $n = 140$ en $p = 0,4$. Bereken de kans dat het aantal successen minder dan één standaardafwijking van de verwachtingswaarde afligt.
- b Joep gooit 1000 keer met een dobbelsteen. Bereken de kans dat het aantal keer dat hij 6 ogen gooit meer dan twee keer de standaardafwijking van de verwachtingswaarde afligt.

E41



- Bewering: Bij een binomiale verdeling ligt bij grote waarden van n ongeveer 68,3% van de successen minder dan één standaardafwijking van de verwachtingswaarde af.
- Onderzoek of deze bewering waar is voor enkele waarden van n en p .

A42



- Autoverkoper Nico houdt al jaren bij hoeveel van de door hem opgestelde offertes daadwerkelijk tot verkoop leiden. Hij maakt daarbij onderscheid tussen offertes voor nieuwe auto's en offertes voor occasions. Voor beide soorten geldt dat het aantal offertes dat tot verkoop leidt binomiaal verdeeld is. De kans dat een offerte voor een occasion tot verkoop leidt is 0,28.
- a In het eerste kwartaal van 2020 leidden 21 offertes voor een occasion tot verkoop. Dat is precies zoveel als het verwachte aantal. Hoeveel offertes voor occasions heeft Nico in het eerste kwartaal van 2020 opgesteld?
 - b Nico spreekt van een slecht resultaat als het aantal offertes dat tot verkoop leidt meer dan twee standaardafwijkingen kleiner is dan verwacht. In het tweede kwartaal van 2020 stelde Nico 100 offertes voor occasions op en behaalde hij een slecht resultaat. Hoeveel offertes voor occasions leidden in het tweede kwartaal van 2020 tot verkoop?
 - c In 2020 heeft Nico in totaal 217 offertes voor nieuwe auto's opgesteld. Van deze offertes leidden er 90 tot verkoop. Dat is twee standaardafwijkingen meer dan het aantal dat Nico had verwacht. Bereken de kans dat een offerte voor een nieuwe auto tot verkoop leidt.

Terugblik

Bernoulli-experiment

Een Bernoulli-experiment is een kansexperiment waarbij je alleen op de gebeurtenis 'succes' en de complement-gebeurtenis 'mislukking' let. Het hangt af van de situatie welke gebeurtenis je succes noemt en welke mislukking.

$$P(\text{succes}) = p \text{ en } P(\text{mislukking}) = 1 - p$$

Binomiaal kansexperiment

Het herhaald uitvoeren van een kansexperiment waarbij je alleen op de gebeurtenissen 'succes' en 'mislukking' let, heet een binomiaal kansexperiment.

- n is het aantal keer dat het experiment wordt uitgevoerd
- p is de kans op succes per keer
- X is het aantal keer succes

De kans op k keer succes is $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$.

Berekenen van binomiale kansen

Bij het berekenen van binomiale kansen ga je als volgt te werk.

- 1 Omschrijf de betekenis van de toevalsvariabele X .
- 2 Noteer dat X binomiaal verdeeld is en vermeld n en p .
- 3 Noteer de gevraagde kans met X en herleid deze kans zo nodig tot een vorm waarin $P(X = k)$ of $P(X \leq k)$ voorkomt. Bereken deze kans met de GR.

$$\begin{aligned} P(X \text{ tussen } 3 \text{ en } 6) &= \\ P(X \leq 5) - P(X \leq 3), \\ \text{maar ook} \\ P(X \text{ tussen } 3 \text{ en } 6) &= \\ P(X = 4) + P(X = 5). \end{aligned}$$

Zo krijg je de kans op minstens vijf juiste antwoorden bij het op de gok beantwoorden van 20 vierkeuzevragen als volgt.

X = aantal juiste antwoorden

X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = \frac{1}{4}$.

Je berekent $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$ als volgt.

TI: $P(X \geq 5) = 1 - \text{binomcdf}(20, \frac{1}{4}, 4) \approx 0,585$

Casio: $P(X \geq 5) = 1 - \text{BinomialCD}(4, 20, \frac{1}{4}) \approx 0,585$
of $\text{BinomialCD}(5, 20, 20, \frac{1}{4})$

HP: $P(X \geq 5) = 1 - \text{BINOMIAL_CDF}(20, \frac{1}{4}, 4) \approx 0,585$
of $\text{BINOMIAL_CDF}(20, \frac{1}{4}, 5, 20)$

Verwachtingswaarde en standaardafwijking van een binomiale toevalsvariabele

Van de binomiale toevalsvariabele X is de verwachtingswaarde

$$E(X) = np \text{ en de standaardafwijking } \sigma_X = \sqrt{np(1-p)}.$$

De standaardafwijking van een toevalsvariabele geeft een indruk van de gemiddelde afwijking van de mogelijke uitkomsten tot de verwachtingswaarde.

Bij het op de gok beantwoorden van 20 vierkeuzevragen is

$$E(X) = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5 \text{ en } \sigma_X = \sqrt{20 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \approx 1,94.$$

9.3 Berekeningen bij normaalkrommen

043
  *

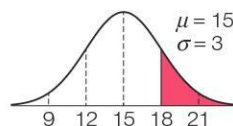
In hoofdstuk 2 heb je kennism gemaakt met de normale verdeling. Voor de oppervlakte onder de bijbehorende verdelingskromme, de zogeheten normaalkromme, heb je de vuistregels hiernaast geleerd. De totale oppervlakte onder de kromme komt overeen met 100%.

Vuistregels bij normale verdeling met gemiddelde μ en standaardafwijking σ :

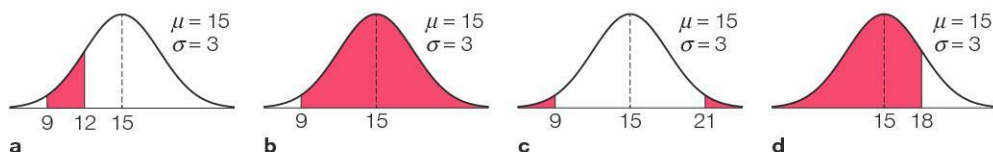
- 68% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- 95% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.

In figuur 9.9 zie je de normaalkromme met gemiddelde $\mu = 15$ en standaardafwijking $\sigma = 3$.

- a** Licht toe dat de oppervlakte van het rode gebied ongeveer 16% oftewel 0,16 is.
- b** De normaalkrommen in figuur 9.10 horen bij $\mu = 15$ en $\sigma = 3$. Geef van elk gebied de oppervlakte. Gebruik de vuistregels. Noteer de antwoorden met een getal tussen 0 en 1.



figuur 9.9



figuur 9.10

Theorie A Oppervlakten berekenen met de GR

Hierboven heb je van enkele gebieden onder een normaalkromme met de vuistregels de oppervlakte bepaald. Met de GR kun je elke oppervlakte onder een normaalkromme berekenen. Bij het berekenen van deze oppervlakten heb je te maken met de variabelen

l = linkergrens

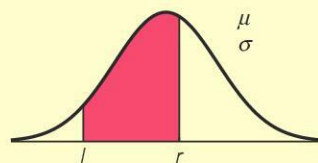
r = rechtergrens

μ = gemiddelde

σ = standaardafwijking.

Het rode gebied in figuur 9.10b heeft geen rechtergrens, terwijl je bij sommige typen GR's wel een grens moet invoeren. Om te voorkomen dat je in zo'n geval telkens moet bedenken wat een geschikte rechtergrens is, gebruik je altijd het grote getal 10^{99} .

Het rode gebied in figuur 9.10d heeft geen linkergrens. In zo'n geval gebruik je als linkergrens -10^{99} .



figuur 9.11

[► GR] Neem uit de module **De normale verdeling** het gedeelte *Oppervlakten berekenen door*.

Afspraak

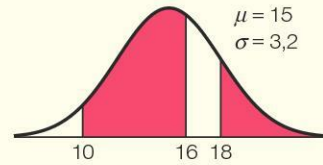
Rond oppervlakten onder normaalkrommen af op drie decimalen.

Voorbeeld

Gegeven is de normaalkromme in figuur 9.12.

Bereken de oppervlakte van het gebied

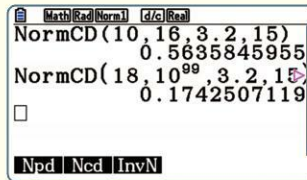
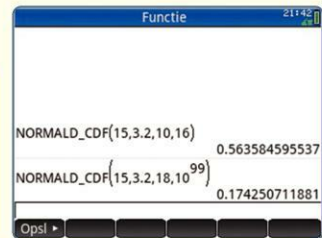
- tussen 10 en 16
- rechts van 18.



figuur 9.12

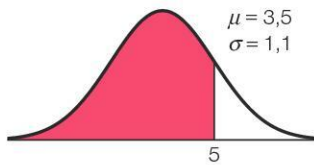
Uitwerking

- Normale verdeling met $\mu = 15$ en $\sigma = 3,2$.
Bij $l = 10$ en $r = 16$ geeft de GR opp $\approx 0,564$.

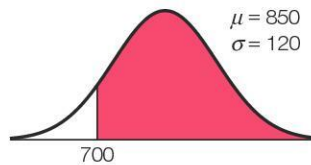


- Normale verdeling met $\mu = 15$ en $\sigma = 3,2$.
Bij $l = 18$ en $r = 10^{99}$ geeft de GR opp $\approx 0,174$.

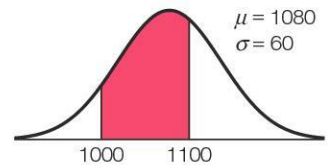
- 44** Bij de normaalkrommen in figuur 9.13 zijn steeds μ en σ vermeld. Bereken telkens de oppervlakte van het rode gebied.



a



b



c

figuur 9.13

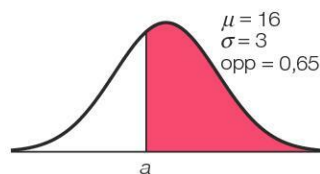
- 45** Bij een normale verdeling is $\mu = 520$ en $\sigma = 18$.

- Bereken de oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme links van 480. Maak eerst een schets en kleur het gebied.
- Bereken de oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme rechts van 510.

- 46** Bij een normale verdeling is $\mu = 5,8$ cm en $\sigma = 0,4$ cm.
 Hoeveel procent van de waarnemingsgetallen
 a is kleiner dan 5,1 cm
 b is groter dan 5,25 cm
 c ligt tussen 6,1 en 6,4 cm?

- E47** Volgens een van de vuistregels bij de normale verdeling ligt 68% van de waarnemingsgetallen binnen één standaardafwijking van het gemiddelde. Hierbij is het percentage afgerond op gehelen.
 a Zoek met de GR uit hoeveel dat percentage in twee decimalen is.
 b Bereken bij de andere vuistregel het percentage in twee decimalen.

- O48** Zie figuur 9.14.
 Gegeven is dat de oppervlakte van het gebied rechts van a gelijk is aan 0,65.
 Wat weet je van de oppervlakte van het gebied links van a ?

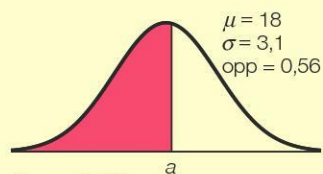


figuur 9.14

Theorie B Grenzen berekenen met de GR

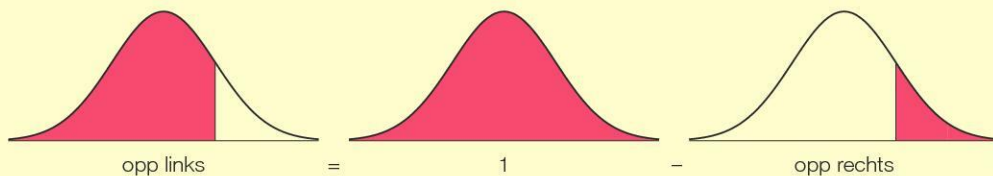
In figuur 9.15 is de oppervlakte van het rode gebied, dus de oppervlakte links van a , gelijk aan 0,56. Je kunt met de GR berekenen dat $a \approx 18,47$.

[> GR] Neem uit de module **De normale verdeling** het gedeelte *Grenzen berekenen door*.

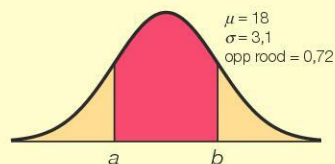


figuur 9.15

Is de oppervlakte rechts van a gegeven, dan is de oppervlakte links van a te berekenen met
 opp links = $1 - \text{opp rechts}$.
 Zie de figuur hieronder.



Is de oppervlakte van een gebied tussen twee verticale lijnen onder een normaalkromme gegeven, dan is het meestal niet mogelijk de bijbehorende grenzen te berekenen. Maar is het gebied symmetrisch, dan lukt het wel. Zo kun je bij het symmetrische gebied in figuur 9.16 de grenzen a en b als volgt berekenen.



figuur 9.16

De oppervlakte van de twee gele gebieden samen is $1 - 0,72 = 0,28$.

Dus de oppervlakte links van a is $\frac{1}{2} \cdot 0,28 = 0,14$.

De GR geeft $a \approx 14,65$.

De oppervlakte links van b is $\frac{1}{2} \cdot 0,28 + 0,72 = 0,86$.

De GR geeft $b \approx 21,35$.

Afspraak

Gebruik bij het berekenen van de grens a de volgende vuistregel.

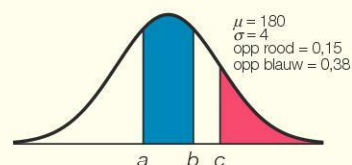
Rond a af op één decimaal meer dan de gegeven σ .

Voorbeeld

Bij een normale verdeling is $\mu = 180$ en $\sigma = 4$.

Zie figuur 9.17.

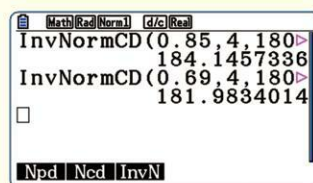
- De oppervlakte van het rode gebied is 0,15. Bereken c .
- De oppervlakte van het symmetrische blauwe gebied is 0,38. Bereken b .



figuur 9.17

Uitwerking

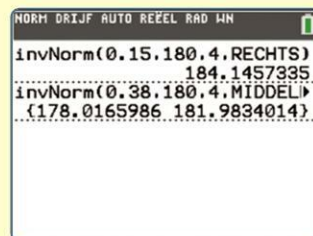
- Normale verdeling met $\mu = 180$ en $\sigma = 4$.
opp links van c is $1 - 0,15 = 0,85$
De GR geeft $c \approx 184,1$.
- Normale verdeling met $\mu = 180$ en $\sigma = 4$.
opp links van b is $\frac{1}{2}(1 - 0,38) + 0,38 = 0,69$
De GR geeft $b \approx 182,0$.



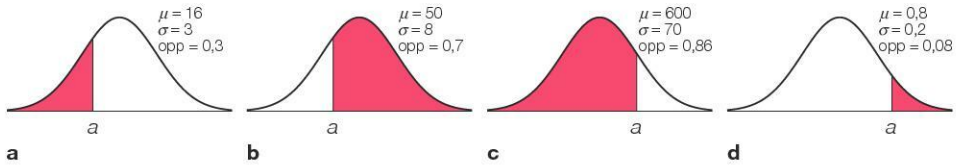
Op de TI kun je bij Staart kiezen uit links, midden en rechts.

In voorbeeld a gebruik je opp rechts van c is 0,15 en kies je bij Staart: RECHT.

In voorbeeld b gebruik je opp tussen a en b is 0,38 en kies je Staart: MIDD. Zie het GR-scherm hiernaast.

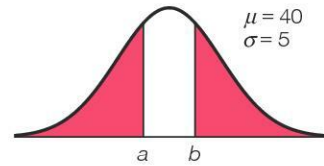


- 49** Bij de normaalkrommen in figuur 9.18 is bij gegeven μ en σ de oppervlakte van het rode gebied vermeld. Bereken telkens a .



figuur 9.18

- 50** Het gebied onder de normaalkromme in figuur 9.19 is in drie stukken met gelijke oppervlakte verdeeld. Bereken a en b .

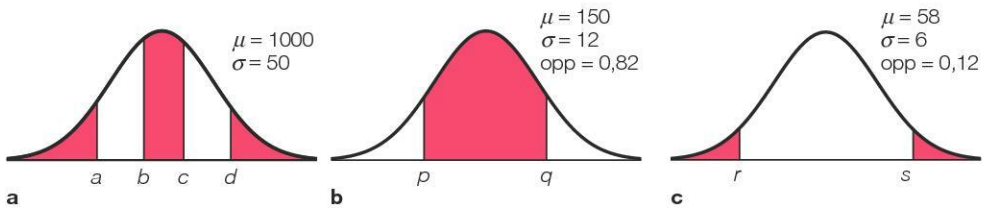


figuur 9.19

- A51** Het gebied onder de normaalkromme in figuur 9.20a is in vijf stukken met gelijke oppervlakte verdeeld.
- a** Bereken a , b , c en d .

De gebieden in de figuren 9.20b en 9.20c zijn symmetrisch.

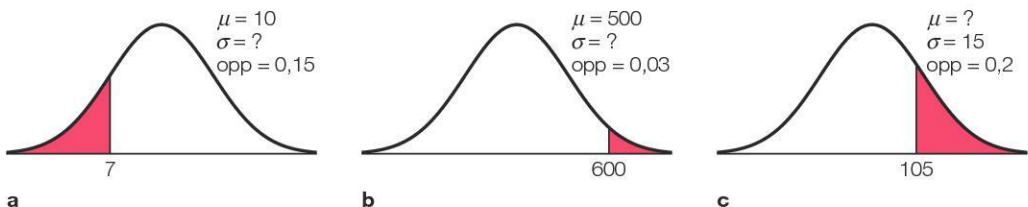
- b** Bereken p , q , r en s .



figuur 9.20

- A52** Van een normale verdeling is $\mu = 2,3$ en $\sigma = 0,08$. De verticale lijn bij a deelt het gebied onder de normaalkromme tussen 2,18 en 2,36 in twee stukken met gelijke oppervlakte. Bereken a .

- 053** Bij de normaalkrommen in figuur 9.21 is telkens σ of μ onbekend. Gebruik de vuistregels bij de normale verdeling om een schatting van σ of μ te geven.



figuur 9.21

Theorie C Het berekenen van μ of σ

In het voorbeeld is van een gebied onder een normaalkromme de oppervlakte gegeven. Verder is het gemiddelde μ gegeven, maar de standaardafwijking σ is onbekend.

Om σ te berekenen, ga je een vergelijking oplossen door twee formules in te voeren op de GR en de optie snijpunt te gebruiken.

Bij het kiezen van een geschikt venster gebruik je een schatting van σ om te bepalen tussen welke waarden je x neemt.

Je gebruikt de gegeven oppervlakte om te bepalen tussen welke waarden je y neemt. Je neemt y tussen 0 en ongeveer twee keer de gegeven oppervlakte. Hiermee komt de horizontale lijn die hoort bij de oppervlakte ongeveer halverwege het GR-scherf.

[► GR] Neem uit de module **De normale verdeling** het gedeelte *Het berekenen van μ en σ door*.

Voorbeeld

Bij een normale verdeling is $\mu = 28$. De oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme rechts van 23 is 0,83.

Bereken σ . Rond af op één decimaal.

Aanpak

Maak een schets van de situatie.

Op grond van de schets schat je $\sigma = 5$, dus neem x tussen 0 en 10.

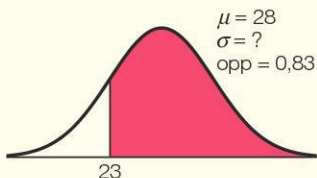
Omdat opp = 0,83 neem je y tussen 0 en bijvoorbeeld 1,6.

Om de vergelijking opp = 0,83 op te lossen, voer je in

- op de TI: $y_1 = \text{normalecdf}(23, 10^{99}, 28, x)$ en $y_2 = 0,83$
- op de Casio: $y_1 = \text{NormCD}(23, 10^{99}, x, 28)$ en $y_2 = 0,83$
- op de HP: $y_1 = \text{NORMALD_CDF}(28, x, 23, 10^{99})$ en $y_2 = 0,83$.

Bij de NW los je de vergelijking opp = 0,17 op. Je voert in $y_1 = \text{normcdf}(23, 28, x)$ en $y_2 = 0,17$.

Uitwerking



Normale verdeling met $\mu = 28$, $\sigma = x$, $l = 23$ en $r = 10^{99}$.

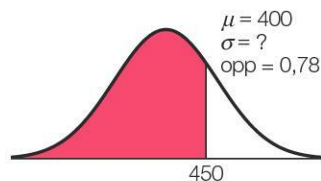
Los op opp = 0,83.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,83$.

De optie snijpunt geeft $x = 5,24\dots$, dus $\sigma \approx 5,2$.

54 Van de normaalkromme in figuur 9.22 is $\mu = 400$ en is σ onbekend. Verder is gegeven dat de oppervlakte van het gebied links van 450 gelijk is aan 0,78.

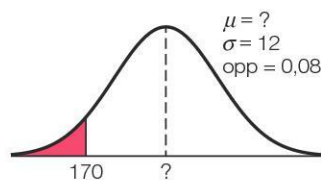
- Geef een schatting van σ op grond van figuur 9.22. Welk venster is dus een geschikte keuze?
- Bereken de standaardafwijking. Rond af op één decimaal.



figuur 9.22

55 Van de normaalkromme in figuur 9.23 is $\sigma = 12$ en is μ onbekend. De oppervlakte van het gebied links van 170 is 0,08.

- Geef een schatting van μ op grond van figuur 9.23. Welk venster is dus een geschikte keuze?
- Bereken μ . Rond af op gehele.



figuur 9.23

56 Bij een normale verdeling is $\sigma = 3,8$. De oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme rechts van 17 is 0,28. Maak een schets van de situatie en bereken μ . Rond af op één decimaal.

57 Bij een normale verdeling is $\mu = 2200$. Het gebied onder de normaalkromme tussen 2080 en 2320 heeft een oppervlakte van 0,62. Bereken σ . Rond af op tientallen.

A58 De oppervlakte van het gebied onder een normaalkromme rechts van 14,6 is gelijk aan 0,41.

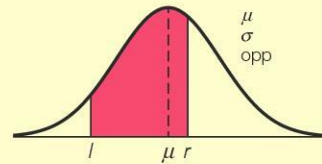
- Bereken μ als gegeven is dat $\sigma = 3,5$. Rond af op één decimaal.
- Bereken σ als gegeven is dat $\mu = 12,3$. Rond af op één decimaal.

R59 Zie het voorbeeld op bladzijde 77. Daar wordt met de GR een vergelijking opgelost waarbij $y_2 = 0,83$ is gebruikt. Je kunt ook een vergelijking oplossen waarbij je $y_2 = 23$ gebruikt. Wat voer je dan bij y_1 in? Controleer of je hetzelfde antwoord krijgt.

Terugblik

Oppervlakten en normaalkrommen

Bij opgaven over oppervlakten onder een normaalkromme spelen vijf getallen een rol: het gemiddelde μ , de standaardafwijking σ , de linkergrens l , de rechtergrens r en de oppervlakte van het gebied. Zijn er vier bekend, dan kun je het vijfde getal berekenen.



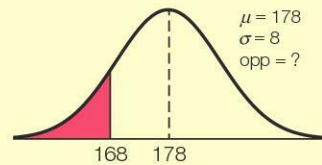
Oppervlakten berekenen

Bij de normale verdeling met $\mu = 178$ en $\sigma = 8$ bereken je de oppervlakte van het gebied links van 168 als volgt met de GR.

TI: $\text{normalcdf}(-10^{99}, 168, 178, 8) \approx 0,106$

Casio: $\text{NormCD}(-10^{99}, 168, 8, 178) \approx 0,106$

HP: $\text{NORMALD_CDF}(178, 8, -10^{99}, 168) \approx 0,106$



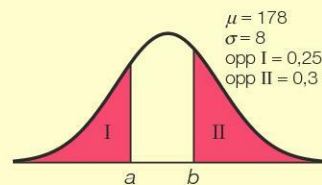
Grenzen berekenen

De oppervlakte van het gebied links van a is gelijk aan 0,25. Je berekent a als volgt.

TI: $a = \text{invNorm}(0,25, 178, 8, \text{LINKS}) \approx 172,6$

Casio: $a = \text{InvNormCD}(0,25, 8, 178) \approx 172,6$

HP: $a = \text{NORMALD_ICDF}(178, 8, 0,25) \approx 172,6$



De oppervlakte van het gebied rechts van b is gelijk aan 0,3.

De oppervlakte links van b is dus gelijk aan $1 - 0,3 = 0,7$.

Je berekent b als volgt.

TI: $b = \text{invNorm}(0,3, 178, 8, \text{RECHTS}) \approx 182,2$

Casio: $b = \text{InvNormCD}(0,7, 8, 178) \approx 182,2$

HP: $b = \text{NORMALD_ICDF}(178, 8, 0,7) \approx 182,2$

Het berekenen van μ of σ

De oppervlakte van het gebied rechts van 80 is gelijk aan 0,72 en $\sigma = 25$. Je berekent het gemiddelde als volgt.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,72$.

TI: $y_1 = \text{normalcdf}(80, 10^{99}, x, 25)$

Casio: $y_1 = \text{NormCD}(80, 10^{99}, 25, x)$

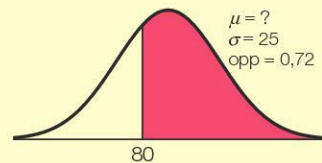
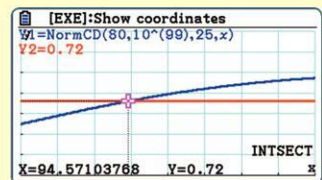
HP: $y_1 = \text{NORMALD_ICDF}(x, 25, 80, 10^{99})$

Op grond van de figuur schat je $\mu = 100$, dus neem je x bijvoorbeeld tussen 80 en 120.

Omdat $opp = 0,72$ neem je y tussen 0 en bijvoorbeeld 1,4.

De optie snijpunt geeft $x \approx 94,571$. Dus $\mu \approx 94,6$.

Op een soortgelijke manier kun je bij een gegeven μ een onbekende σ berekenen.



9.4 Toepassingen van de normale verdeling

O60
✂ ⊗ *

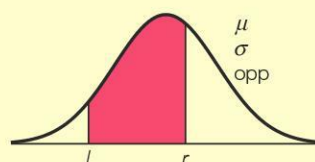
Van een groep jongens is de lengte normaal verdeeld met gemiddelde 178 cm en standaardafwijking 5,4 cm.

- Schets een normaalkromme en geef hierin het gebied aan dat hoort bij de jongens die langer zijn dan 182 cm. Bereken de oppervlakte van dit gebied.
- Hoeveel procent van de jongens is langer dan 182 cm?
- Wat is de kans dat een willekeurig gekozen jongen uit deze groep langer is dan 182 cm?

Theorie A Percentages en kansen bij de normale verdeling

Bij opgaven over de normale verdeling heb je te maken met l , r , μ , σ en opp die in figuur 9.24 zijn aangegeven. Van deze getallen zijn er vier bekend en moet je het vijfde berekenen.

Je gebruikt daarbij het volgende werkschema.



figuur 9.24

Werkschema: maken van opgaven over de normale verdeling

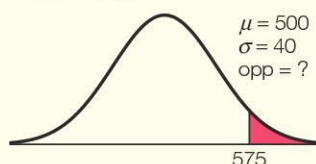
- Schets een normaalkromme en verwerk hierin l , r , μ , σ en opp. Kleur het gebied dat bij de vraag hoort.
- Bereken met de GR het ontbrekende getal.
- Beantwoord de gestelde vraag.

Voorbeeld

Bij een supermarkt is de op vrijdag verkochte hoeveelheid appels normaal verdeeld met $\mu = 500$ kg en $\sigma = 40$ kg.

Bereken de kans dat op een vrijdag meer dan 575 kg appels wordt verkocht.

Uitwerking



X = aantal kg verkochte appels

X is normaal verdeeld met $\mu = 500$ en $\sigma = 40$.

De GR geeft $P(X > 575) \approx 0,030$.

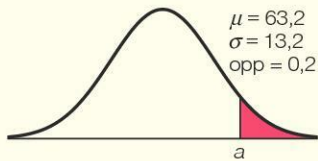
Voorbeeld

Bij een toelatingstest met gehele scores zijn de scores normaal verdeeld met een gemiddelde van 63,2 en een standaardafwijking van 13,2.

Op grond van deze test wil men hoogstens 20% van de deelnemers uitnodigen voor een vervolgtest.

Vanaf welke score mag je aan de vervolgtest meedoen?

Uitwerking



Normale verdeling met $\mu = 63,2$ en $\sigma = 13,2$.

opp links = $1 - 0,20 = 0,80$

De GR geeft $a \approx 74,31$.

Let op: naar boven afronden.

Vanaf een score van 75 mag je aan de vervolgtest meedoen.

R61
☐ ⊗ *

a Zou het antwoord bij het eerste voorbeeld anders zijn geweest als in de vraag ‘minstens 575 kg’ had gestaan? Licht toe.

b Waarom is in het tweede voorbeeld het eindantwoord naar boven afgerond?

62
☐

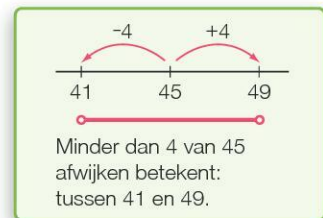
Uit onderzoek blijkt dat de lengte van volwassen forellen in een rivier normaal verdeeld is met $\mu = 45$ cm en $\sigma = 5$ cm.

a Hoeveel procent van de volwassen forellen heeft een lengte van minder dan 36 cm?

b Bereken de kans dat een volwassen forel een lengte heeft tussen 44 en 52 cm.

c In een week worden 240 volwassen forellen gevangen. Hoeveel daarvan, verwacht je, zijn langer dan 53 cm?

d Hoeveel procent van de volwassen forellen heeft een lengte die minder dan 4 cm van het gemiddelde afwijkt?



63
☐ ⊗

Van de 1600 mannelijke werknemers van een bedrijf is het gewicht normaal verdeeld met $\mu = 78$ kg en $\sigma = 12$ kg.

a Hoeveel van deze mannen zijn naar verwachting zwaarder dan 60 kg? En hoeveel lichter dan 65 kg?

b Bereken de kans dat het gewicht van een man uit deze groep meer dan 5 kg van het gemiddelde afwijkt.

c Hoeveel van deze werknemers, verwacht je, wegen meer dan 105 kg?

d De 10% zwaarste mannen worden door de bedrijfsarts opgeroepen voor controle.

Vanaf welk gewicht in gehele kg kun je een oproep verwachten?

64
☐ ⊙ *

Van een bepaald type batterij is de levensduur normaal verdeeld met $\mu = 85$ uur en $\sigma = 280$ minuten.

- a De fabrikant garandeert een levensduur van 78 uur.
Hoeveel procent van de batterijen voldoet niet aan deze garantie?
- b Door een verandering in het fabricageproces weet de fabrikant de standaardafwijking terug te brengen tot 170 minuten.
Hoeveel procent voldoet nu niet aan de garantie?

65
☐ ⊙

Op een visafslag wordt een partij sardientjes aangeboden met een gemiddelde lengte van 11,5 cm en een standaardafwijking van 18 mm. Ga ervan uit dat de lengte normaal verdeeld is.

De vissen worden verdeeld in vier klassen.

klasse I: minder dan 9 cm

klasse II: van 9 cm tot 11 cm

klasse III: van 11 cm tot 13 cm

klasse IV: meer dan 13 cm

- a Bereken van elke klasse hoeveel procent van de sardientjes ertoe behoort.

Er wordt besloten over te gaan op een verdeling in drie klassen zo, dat elke klasse evenveel sardientjes bevat.

- b Bereken de grenzen van de middelste klasse. Rond af op mm.



66
*

Op een visafslag wordt een partij sardientjes aangeboden met een gemiddelde lengte van 11,5 cm en een standaardafwijking van 18 mm. Ga ervan uit dat de lengte normaal verdeeld is.

Neem aan dat de sardientjes met een lengte van minstens 12 cm worden verdeeld in twee klassen die evenveel sardientjes bevatten.

Bereken in mm nauwkeurig de grens tussen deze klassen.

67
☐◎*

In een groep sollicitanten is het IQ normaal verdeeld met $\mu = 115,2$ en $\sigma = 13,1$.

De sollicitanten van wie het IQ tot de hoogste 10% behoort, komen in aanmerking voor een vervolgttest. De sollicitanten met de volgende 25% van de IQ-waarden krijgen een herkansing.

- a Vanaf welk IQ mag je deelnemen aan de vervolgttest? Rond af op gehele.
- b Bij welk IQ krijg je een herkansing? Rond af op gehele.

68
☐◎*

Een machine vult pakken groente met een gemiddeld gewicht van 250 gram. De fabrikant wil dat 90% van de pakken een gewicht heeft dat maximaal 5 gram afwijkt van deze 250 gram.

- a Welke standaardafwijking accepteert hij? Neem aan dat het vulgewicht normaal verdeeld is en rond af op twee decimalen.

Een andere vulmachine van pakken groente heeft een standaardafwijking van 4 gram. De fabrikant wil het gemiddelde zo instellen dat niet meer dan 10% van de pakken minder dan 250 gram bevat.

- b Op welk gemiddelde moet hij de machine instellen? Ga weer uit van een normale verdeling en rond af op gehele.

A69
☐◎*

Op een pak wasmiddel van het merk Bright staat dat de inhoud 2,5 kg is. De inhoud van de pakken is normaal verdeeld met $\sigma = 0,12$ kg.

- a Neem aan dat de vulmachine is ingesteld op een gemiddeld gewicht van 2,52 kg.
Bereken de kans dat een willekeurig pak Bright minder dan 2,5 kg weegt.
- b Neem aan dat de vulmachine is ingesteld op een gemiddeld gewicht van 2,56 kg.
Hoeveel procent van de pakken wijkt meer dan 0,3 kg af van het gemiddelde gewicht?
- c De fabrikant wil dat maximaal 4% van de pakken Bright minder dan 2,5 kg bevat.
Op welk gemiddelde moet hij de vulmachine instellen?
- d Bij een controle blijkt 1 op de 50 pakken wasmiddel meer dan 2,72 kg te bevatten.
Op welk gemiddelde is de vulmachine ingesteld? Rond af op twee decimalen.
- e Neem aan dat de vulmachine is ingesteld op een gemiddelde van 2,53 kg. De fabrikant besluit de pakken met een inhoud tussen 2,50 kg en 2,60 kg in twee partijen te verdelen die beide evenveel pakken bevatten.
Bereken bij welk gewicht hij de grens moet leggen.

A70
☐ ⊙ *

De productietijd van een zeker artikel bij de firma Driessen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1 uur en 3 minuten.

- a** Bereken de kans dat de productietijd van zo'n artikel minder dan 4 minuten afwijkt van het gemiddelde in het geval de standaardafwijking 125 seconden is.
- b** Bereken de standaardafwijking in seconden nauwkeurig als de productietijd van 30% van deze artikelen meer dan 2,5 minuut afwijkt van het gemiddelde.
- c** Op een dag produceert Driessen 7000 van deze artikelen. Van 1 op de 5 exemplaren is de productietijd meer dan 66 minuten. Bereken de standaardafwijking in seconden nauwkeurig.

A71
*

Uit onderzoek is bekend dat het kopergehalte van de messing sierkannetjes van fabrikant Zomerhuis normaal verdeeld is met een gemiddelde van 68%.
Per 100 kannetjes zijn er 9 met een kopergehalte van meer dan 70%.
De kannetjes met een kopergehalte van minder dan 65,5% worden uit de handel genomen.
Hoeveel zijn dat er naar verwachting bij een productie van 500 stuks?

Terugblik

Oppervlakten en kansen

Van een groep mannen is de lengte normaal verdeeld met $\mu = 178$ cm en $\sigma = 8$ cm.

De volgende vragen komen op hetzelfde neer.

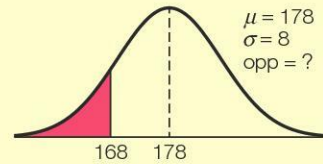
- 1 Wat is de oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme links van 168?
- 2 Hoeveel procent van de mannen is kleiner dan 168 cm?
- 3 Wat is de kans dat een willekeurig gekozen man van deze groep kleiner is dan 168 cm?

Bij $l = -10^{99}$ en $r = 168$ geeft de GR opp $\approx 0,106$.

De oppervlakte is 0,106.

Dat is dus 10,6%.

De kans is 0,106.



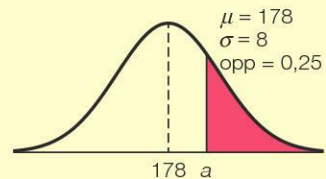
$X = \text{lengte man in cm}$
 $P(X < 168) \approx 0,106$

Grenzen en percentages

Bij de vraag 'Welke lengten horen bij de 25% langste mannen?' gebruik je de figuur hiernaast.

De oppervlakte links van a is $1 - 0,25 = 0,75$.

De GR geeft $a \approx 183,4$, dus 183,4 cm en langer.



Aantallen en de normale verdeling

De hierboven genoemde groep omvat 18 760 mannen.

- Het aantal mannen dat naar verwachting kleiner is dan 173 cm bereken je als volgt.

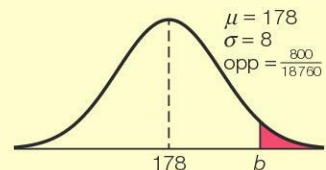
Bij $l = -10^{99}$ en $r = 173$ geeft de GR opp $= 0,265\dots$

Dus aantal $= 0,265\dots \cdot 18\,760 \approx 4990$.

- De 800 mannen met de grootste lengte worden geselecteerd. Om te bepalen vanaf welke lengte een man tot de selectie behoort, ga je als volgt te werk.

De oppervlakte links van b is $1 - \frac{800}{18\,760} = 0,957\dots$

De GR geeft $b \approx 191,8$, dus vanaf 191,8 cm.



Berekenen van onbekende standaardafwijking

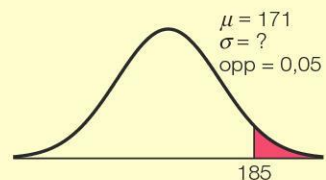
Van een groep vrouwen is de lengte normaal verdeeld met $\mu = 171$ cm. Gegeven is dat 5% een lengte heeft van meer dan 185 cm.

Normale verdeling met $\mu = 171$, $\sigma = x$, $l = 185$ en $r = 10^{99}$.

Om σ te berekenen, los je op opp $= 0,05$.

Voer bij y_1 de normale verdeling in en $y_2 = 0,05$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 8,5$, dus $\sigma = 8,5$ cm.



9.5 De wortel- n -wet

072
☐ ⊗ *

Van een grote groep mensen geldt voor het gewicht X van de mannen $\mu_X = 82$ kg en $\sigma_X = 10$ kg. Voor het gewicht Y van de vrouwen geldt $\mu_Y = 68$ kg en $\sigma_Y = 10$ kg. Ga ervan uit dat X en Y normaal verdeeld zijn.

Een willekeurige man en vrouw uit deze groep willen samen op een supboard met een maximaal draaggewicht van 150 kg.

Paul berekent de kans dat de man en de vrouw samen op het supboard kunnen met $P(X \leq 82) \cdot P(Y \leq 68)$.

- a Licht Paul zijn denkwijze toe en bereken deze kans.
- b Wat ziet Paul over het hoofd?
- c Sara zegt dat de kans dat de man en vrouw samen op het supboard kunnen gelijk is aan 0,5.
Ben je het met Sara eens? Licht toe.



Theorie A De som van normaal verdeelde toevalsvariabelen

In praktijksituaties komt het voor dat je te maken hebt met de som van twee of meer normaal verdeelde toevalsvariabelen. Zo is bij het vullen van een pak wasmiddel het brutogewicht $S = X + Y$, waarbij X het gewicht van de verpakking is en Y het gewicht van de inhoud. Men heeft bewezen dat de som $S = X + Y$ ook weer normaal verdeeld is.

De som van normaal verdeelde toevalsvariabelen is normaal verdeeld.

Voor het gemiddelde μ_S en de standaardafwijking σ_S van $S = X + Y$ gelden de formules $\mu_S = \mu_X + \mu_Y$ en $\sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$. De enige voorwaarde voor de tweede formule is dat X en Y onafhankelijke toevalsvariabelen zijn, dat wil zeggen dat de uitkomsten van X en Y niet van elkaar afhangen.

**Voor elk tweetal toevalsvariabelen X en Y geldt $\mu_S = \mu_X + \mu_Y$.
Voor elk tweetal onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt $\sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$.**

Zoals voor twee onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt dat $\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y$ en $\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$, zo geldt voor de som S van n onafhankelijke toevalsvariabelen $X_1, X_2, \dots, X_n$ dat $\mu_S = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \dots + \mu_{X_n}$ en $\sigma_S = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2}$.

Voorbeeld

Op een montageafdeling worden drie typen buizen A, B en C aan elkaar gezet. De lengtes van de verschillende typen zijn normaal verdeeld.

Bereken de kans dat de totale lengte van een buis minder dan 16 meter is.

Uitwerking

De totale lengte L is normaal verdeeld met

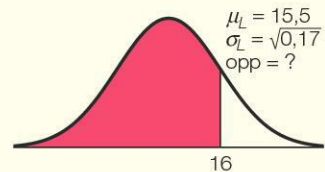
$$\mu_L = 6,5 + 3,2 + 5,8 = 15,5 \text{ meter en}$$

$$\sigma_L = \sqrt{0,2^2 + 0,2^2 + 0,3^2} = \sqrt{0,17} \text{ meter.}$$

De GR geeft $P(L < 16) \approx 0,887$.

LENGTE VAN BUIZEN

type	μ	σ
A	6,5 m	0,2 m
B	3,2 m	0,2 m
C	5,8 m	0,3 m



73



Bij pakken rijst is het gewicht X van de verpakking normaal verdeeld met gemiddelde 5 gram en standaardafwijking 0,3 gram. De hoeveelheid rijst Y in een pak is normaal verdeeld met gemiddelde 248 gram en standaardafwijking 12 gram.

In hoeveel procent van de gevallen is het brutogewicht meer dan 250 gram?

74



Bij de fabricage van een artikel zijn vier fasen te onderscheiden. De tijdsduur van elke fase is normaal verdeeld. Zie de tabel.

In hoeveel procent van de gevallen duurt het produceren van één artikel langer dan één minuut?

TIJDSDUUR IN SECONDEN

fase	μ	σ
A	12	0,5
B	8	0,3
C	20	0,8
D	18	1,6

075



Het gewicht X van een sinaasappel uit een grote partij is normaal verdeeld met $\mu_X = 77$ gram en $\sigma_X = 6$ gram.

De sinaasappels worden verpakt in netjes van acht stuks.

Het totale gewicht S van de sinaasappels in een netje is te noteren als $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8$. Hierbij zijn $X_1, X_2, \dots, X_8$ de gewichten van de afzonderlijke sinaasappels.

Is $\mu_S = 8 \cdot \mu_X$? En is $\sigma_S = 8 \cdot \sigma_X$?

Theorie B Steekproef van lengte n

Van een appel uit een partij goudrenetten is het gewicht X normaal verdeeld met $\mu_X = 150$ gram en $\sigma_X = 18$ gram.

Bij een steekproef van 20 goudrenetten uit deze partij is het totale gewicht S te schrijven als

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{20}.$$

Dus $\mu_S = \mu_X + \mu_X + \mu_X + \dots + \mu_X = 20 \cdot \mu_X = 20 \cdot 150 = 3000$ gram en

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_X^2 + \sigma_X^2 + \dots + \sigma_X^2} = \sqrt{20 \cdot 18^2} = \sqrt{20} \cdot 18 \approx 80,50 \text{ gram.} \leftarrow$$

Je ziet dat bij een steekproef van lengte 20 de som S een normaal verdeelde toevalsvariabele is met $\mu_S = 20 \cdot \mu_X$ en $\sigma_S = \sqrt{20} \cdot \sigma_X$.

$$\sqrt{20 \cdot 18^2} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{18^2} = \sqrt{20} \cdot 18$$

Bij een steekproef van lengte n uit een populatie met een normaal verdeelde toevalsvariabele X is $S = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ normaal verdeeld met $\mu_S = n \cdot \mu_X$ en $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$.

Dit is de **wortel- n -wet voor een steekproef van lengte n** .

Voorbeeld

Het gewicht X van een sinaasappel uit een grote partij is normaal verdeeld met $\mu_X = 77$ gram en $\sigma_X = 6$ gram. In een netje zitten acht sinaasappels. Bereken de kans dat het gewicht van de sinaasappels in een netje meer dan 640 gram is.

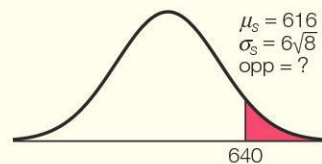
Uitwerking

S is het gewicht van de sinaasappels in een netje.

S is normaal verdeeld met $\mu_S = 8 \cdot 77 = 616$ gram en

$$\sigma_S = \sqrt{8} \cdot 6 = 6\sqrt{8} \text{ gram.}$$

De GR geeft $P(S > 640) \approx 0,079$.



76
📊🔍*

In een magazijn ligt een grote partij tegels waarvan de dikte X normaal verdeeld is met een gemiddelde van 5 cm en een standaardafwijking van 0,5 cm. De tegels worden verpakt in kratten met een hoogte van 105 cm. Telkens worden er stapels van 20 tegels gemaakt, die in zo'n krat geplaatst worden.

- Bereken de kans dat een stapel van 20 tegels niet in een krat past.
- Bereken de kans dat van 12 stapels van 20 tegels er minstens twee niet in een krat passen.

A77
📊🔍*

Bakker Dick ten Broeke verkoopt gevulde koeken in pakken van zes stuks. Het gewicht X van een koek is normaal verdeeld met $\mu_X = 25$ gram en $\sigma_X = 3$ gram.

Bereken de kans dat in een pak minder dan 140 gram zit.

Theorie C Het steekproefgemiddelde

We bekijken nog eens de steekproef van bladzijde 88 van 20 goudrenetten uit een grote partij, waarbij het gewicht X van een appel normaal verdeeld is met $\mu_X = 150$ gram en $\sigma_X = 18$ gram.

Je weet dat $\mu_S = 20 \cdot \mu_X$ en $\sigma_S = \sqrt{20} \cdot \sigma_X$.

Je kunt bij zo'n steekproef ook het gemiddelde gewicht per appel berekenen. Je moet dan het totale gewicht door 20 delen. Elke steekproef levert een ander totaal gewicht op en dus ook een ander steekproefgemiddelde.

Het steekproefgemiddelde is dus ook weer een toevalsvariabele.

We noteren deze met $\bar{X}$.

Omdat $\bar{X} = \frac{S}{20}$ is $\mu_{\bar{X}} = \frac{\mu_S}{20} = \frac{20 \cdot \mu_X}{20} = \mu_X$

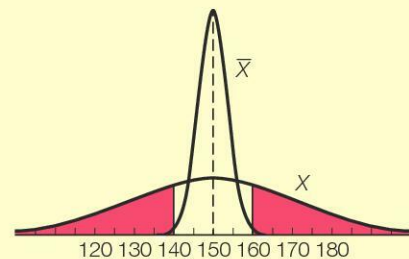
en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_S}{20} = \frac{\sqrt{20} \cdot \sigma_X}{20} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{20}}$

$$\frac{\sqrt{20}}{20} = \frac{\sqrt{20}}{(\sqrt{20})^2} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

$X = \text{gewicht appel}$	$\bar{X} = \text{gemiddelde gewicht in een steekproef van 20 appels}$
$\mu_X = 150 \text{ gram}$	$\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 150 \text{ gram}$
$\sigma_X = 18 \text{ gram}$	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{18}{\sqrt{20}} \approx 4,02 \text{ gram}$

Je ziet dat het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ met een veel kleinere spreiding om het gemiddelde van 150 gram ligt dan het gewicht X van een enkele appel. Zie figuur 9.25.

De spreiding van $\bar{X}$ is kleiner naarmate de steekproef groter is.



figuur 9.25

Je hebt een voorbeeld gezien van de **wortel- n -wet voor het steekproefgemiddelde**.

Bij een normaal verdeelde toevalsvariabele X met gemiddelde μ_X en standaardafwijking σ_X is bij steekproeflengte n het

steekproefgemiddelde $\bar{X}$ normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

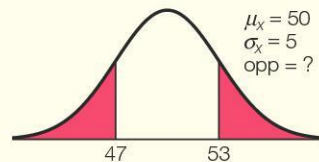
Voorbeeld

Van een normaal verdeelde toevalsvariabele X is $\mu_X = 50$ en $\sigma_X = 5$.

- a Bereken de kans dat een waarneming meer dan 3 van μ_X afwijkt.
- b We doen 30 waarnemingen en berekenen het gemiddelde $\bar{X}$. Bereken de kans dat $\bar{X}$ meer dan 3 van μ_X afwijkt.

Uitwerking

- a $P(X < 47 \text{ of } X > 53) = 2 \cdot P(X < 47)$
De GR geeft $P(X < 47 \text{ of } X > 53) \approx 0,549$.

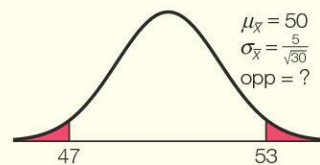


- b $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 50$ en

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{30}}.$$

$$P(\bar{X} < 47 \text{ of } \bar{X} > 53) = 2 \cdot P(\bar{X} < 47)$$

De GR geeft $P(\bar{X} < 47 \text{ of } \bar{X} > 53) \approx 0,001$.



Bij een grote steekproef, bijvoorbeeld een steekproef met $n > 1000$, zal

de spreiding $\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ om $\bar{X}$ heel klein worden. Het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ zal dan heel dicht bij het theoretische gemiddelde μ_X liggen.

Je krijgt dus een goede schatting van μ_X door $\bar{X}$ te berekenen voor grote waarden van n .

Om de gemiddelde lengte van de volwassen Nederlandse vrouwen te weten te komen, hoef je ze niet allemaal op te meten. Een steekproef van 1500 vrouwen zal nagenoeg hetzelfde gemiddelde opleveren.

78 In een fabriek worden kaasbroodjes verpakt in dozen van 16 stuks.

☐⊗* Op de doos staat: gemiddeld gewicht per kaasbroodje minstens 100 gram.

Neem aan dat het gewicht van de kaasbroodjes normaal verdeeld is met een gemiddelde van 104,5 gram en een standaardafwijking van 10 gram. Hoeveel procent van de dozen zal voldoen aan de mededeling op de doos?

A79 Een theefabrikant verpakt 20 theezakjes in een pakje. Het gewicht van een theezakje is normaal verdeeld met een gemiddelde van 5,3 gram en een standaardafwijking van 0,5 gram.

- a Bereken de kans dat een theezakje minder dan 5 gram weegt.
- b Bereken de kans dat een pakje minder dan 100 gram bevat.
- c Van hoeveel procent van de pakjes wijkt het gemiddelde gewicht per theezakje meer dan 0,1 gram af van 5,3 gram?

Terugblik

Som van normaal verdeelde toevalsvariabelen

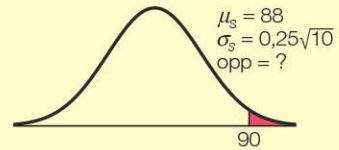
Voor de som $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ van n onafhankelijke toevalsvariabelen $X_1, X_2, \dots, X_n$ geldt $\mu_S = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \dots + \mu_{X_n}$ en $\sigma_S = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2}$.

De wortel- n -wet voor een steekproef van lengte n

Neem je een steekproef van lengte n uit een populatie waarop een normaal verdeelde toevalsvariabele X gedefinieerd is, dan is $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ normaal verdeeld met $\mu_S = n \cdot \mu_X$ en $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$. Dit is de wortel- n -wet voor een steekproef van lengte n .

Een farmaceutisch bedrijf verpakt tabletten in buisjes met een lengte van 9 cm. In elk buisje zitten tien tabletten. De dikte X van een tablet is normaal verdeeld met $\mu_X = 8,8$ mm en $\sigma_X = 0,25$ mm. Om de kans te berekenen dat de tien tabletten niet in een buisje passen, ga je als volgt te werk.

S is normaal verdeeld met $\mu_S = 10 \cdot 8,8 = 88$ mm en $\sigma_S = \sqrt{10} \cdot 0,25 = 0,25\sqrt{10}$ mm. De GR geeft $P(S > 90) \approx 0,006$.



De wortel- n -wet voor het steekproefgemiddelde

Bij een normaal verdeelde toevalsvariabele X is het

steekproefgemiddelde $\bar{X}$ normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

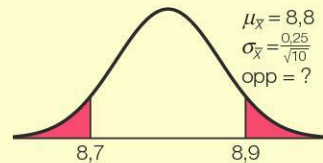
Dit is de wortel- n -wet voor het steekproefgemiddelde.

De kans dat de gemiddelde dikte van een tablet in een buisje meer dan 0,1 mm afwijkt van het gemiddelde, bereken je als volgt.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 8,8$ mm en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0,25}{\sqrt{10}}$ mm.

$$P(\bar{X} < 8,7 \text{ of } \bar{X} > 8,9) = 2 \cdot P(\bar{X} < 8,7)$$

De GR geeft $P(\bar{X} < 8,7 \text{ of } \bar{X} > 8,9) \approx 0,206$.



Eindopdracht Loterij-strategieën

Bij een loterij is de verwachtingswaarde van de winst per lot normaal gesproken negatief.

Stel je een loterij voor met 1000 loten die elk 1 euro kosten. Er is één eerste prijs van 500 euro en er zijn tien tweede prijzen van elk 40 euro. De kans op de eerste prijs is 0,001 en de kans op een tweede prijs is 0,01. De verwachtingswaarde van de winst per lot is dan 10 cent verlies. Zou je alle 1000 loten kopen, dan heb je dus 100 euro verlies.

- Laat met een berekening zien dat de genoemde verwachtingswaarde juist is.

Koop je bij deze loterij één lot, dan verlies je 1 euro, of je wint 39 euro, of je wint 499 euro. De kans dat je iets wint met één lot is niet zo groot en de verwachtingswaarde van de winst per lot is negatief.

Stel je voor dat deze loterij de regels zou veranderen. Er zijn nog steeds 1000 loten die per stuk 1 euro kosten. De eerste prijs is nog steeds 500 euro en de kans hierop is 0,001. Er zijn nog steeds tien tweede prijzen en de kans op een tweede prijs is nog steeds 0,01. Maar een tweede prijs is nu 80 euro in plaats van 40 euro. Alhoewel de kansen op de eerste prijs en op een tweede prijs niet zijn veranderd, is de verwachtingswaarde van de winst per lot nu positief. Het wordt dan lucratief om veel loten te kopen. Zou je in dit laatste geval alle 1000 loten kopen, dan maak je gegarandeerd winst.

- Bereken de verwachtingswaarde die bij deze situatie hoort.

Een voorbeeld van een situatie waarbij de verwachtingswaarde van de winst per lot positief is, heb je gezien in de beginopdracht. Dat was bij de speciale trekking van de Winfall loterij. Jerry en Marge maakten daar gebruik van en wonnen zo in enkele jaren omgerekend bijna 7 miljoen euro. In eerste instantie deden ze dat in hun thuisstaat Michigan, maar toen de loterij daar na een aantal jaren stopte, moesten ze op zoek naar een alternatief. Dat alternatief vonden ze honderden kilometers verderop, in de staat Massachusetts, waar een soortgelijke loterij was.

Na verloop van tijd bleken ze daar echter niet de enige slimmeriken te zijn. Een groep studenten en professoren van de gerenommeerde universiteit MIT speelde op nóg grotere schaal mee, met een net iets andere strategie. Zij lieten hun getallen niet automatisch door de verkoopmachine kiezen en printen, zoals Jerry en Marge, maar hadden een bijzondere lijst van combinaties van getallen die ze met de hand invulden. Een hoop meer werk, maar er zat ook een voordeel aan. In deze opdracht bekijk je de strategie van de MIT-groep met behulp van een eenvoudige versie van de loterij en ontdek je wat het voordeel was.

In de eenvoudige versie staan op een lot de getallen 1 tot en met 7, waarvan je er drie aankruist. Vervolgens worden bij de trekking drie van de getallen 1 tot en met 7 aangewezen.

Je wint een hoofdprijs als je alle drie de getallen goed hebt, en je wint een tweede prijs als je twee van de drie getallen goed hebt. Verder zijn er geen prijzen. Er zijn 1000 loten en de prijs per lot is 1 euro. De hoofdprijs is 18 euro en de tweede prijs is 2 euro.

Je kunt berekenen dat bij deze loterij de kans op een hoofdprijs $\frac{1}{35}$ is en de kans op een tweede prijs $\frac{12}{35}$. Hiermee komt de verwachtingswaarde van de winst per lot op 20 cent.

- Laat met berekeningen zien dat deze kansen kloppen en dat ook de verwachtingswaarde klopt.

Hierboven heb je gezien dat een positieve verwachtingswaarde van de winst per lot niet betekent dat je met één lot een prijs wint. Zelfs als je met meerdere loten meespeelt, dan hoeft je nog geen prijs te hebben. Stel dat Jerry en Marge aan deze loterij meedoen en dat ze 14 loten kopen. Ze laten hun getallen willekeurig door de verkoopmachine kiezen en printen. Hun verwachtingswaarde van de winst per lot is dus gelijk aan 20 cent. Het blijkt dat ze de volgende 14 loten hebben.

123 124 125 126 127 134 135 234 235 245 256 257 345 456

Bij de trekking komt de combinatie 367 tevoorschijn.

- Licht toe dat Jerry en Marge bij deze trekking geen prijs hebben gewonnen.

De MIT-groep had een bijzondere lijst met combinaties van getallen. Bij de eenvoudige versie van de loterij zouden ze een lijst gebruiken zoals hiernaast. Deze lijst bestaat uit zeven combinaties van getallen. Ook de MIT-groep koopt 14 loten. Ze vullen op deze loten twee keer de lijst hiernaast met de hand in.

- Onderzoek hoeveel prijzen de MIT-groep bij de trekking wint in het geval de combinatie 367 tevoorschijn komt.

124
135
167
257
236
347
456

Vervolgens gaan we een simulatie uitvoeren.

- Laat elke leerling in de klas uit de getallen 1 tot en met 7 er drie kiezen. Elke leerling heeft nu een trekking van de loterij gesimuleerd. Doe dit nog een keer. Zorg dat er in totaal minstens 40 trekkingen zijn gesimuleerd. Ga voor elke trekking na met hoeveel van de 14 loten de MIT-groep de hoofdprijs wint, en met hoeveel loten een tweede prijs.
- Bereken voor elke trekking de winst per lot. Laat zien dat in de klas de gemiddelde winst over alle trekkingen ongeveer gelijk is aan 20 cent.

De verwachtingswaarde van de winst per lot is voor de MIT-groep blijkbaar hetzelfde als die voor Jerry en Marge. Toch heeft de strategie van de MIT-groep een voordeel.

- Wat is het voordeel van de strategie van de MIT-groep?

Diagnostische toets

9.1 Toevalsvariabelen en verwachtingswaarde

- 1** Robert laat de schijf in figuur 9.26 twee keer draaien.

X = som van de aangegeven getallen

Y = verschil van de aangewezen getallen

Z = grootste van de twee aangewezen getallen

Bereken.

a $P(X \leq 8)$

b $P(Y > 0)$

c $P(Z = 5)$



figuur 9.26

- 2** Racing Rotterdam en Utrecht United spelen een volleybalwedstrijd over maximaal vijf sets. Het team dat als eerste drie sets wint, is winnaar. De kans dat Racing een set wint is 0,65.

A = aantal sets dat de partij duurt

Stel de kansverdeling van A op.

- 3** Bij een spel met drie dobbelstenen is de inzet 1 euro. Je mag één keer met de drie dobbelstenen gooien. Is de som van de ogen 18, dan krijg je 100 euro. Is de som van de ogen 17, dan krijg je 15 euro en is de som 16, dan krijg je 5 euro. In alle andere gevallen krijg je niets. Bereken voor een speler de winstverwachting per spel.

9.2 De binomiale verdeling

- 4** Van de bovenbouwleerlingen op het vwo kiest 9% wiskunde C, 45% wiskunde A en 46% wiskunde B.

Bereken de kans dat van 15 willekeurige bovenbouwleerlingen op het vwo

a er hoogstens tien wiskunde A of wiskunde C hebben

b niemand wiskunde C heeft.

- 5** Van de Nederlandse vakantiegangers gaat 51% met de auto en 42% met het vliegtuig naar de vakantiebestemming.

Bereken de kans dat van 20 Nederlandse vakantiegangers

a meer dan de helft met het vliegtuig op vakantie gaat

b de ene helft met de auto en de andere helft met het vliegtuig gaat.

- 6** **a** Van een binomiale toevalsvariabele X is $n = 40$ en $E(X) = 22,4$.

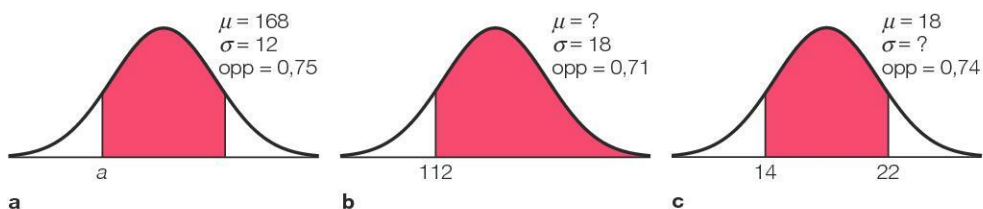
Bereken σ_X . Rond af op twee decimalen.

b Van een binomiale toevalsvariabele Y is $E(Y) = 45$ en $\sigma_Y = 6$.

Bereken n en p .

9.3 Berekeningen bij normaalkrommen

- 7** Bij een normale verdeling is $\mu = 201$ en $\sigma = 44$.
Hoeveel procent van de waarnemingsgetallen
a is kleiner dan 256
b ligt tussen 188 en 241?
- 8** **a** Het rode gebied onder de normaalkromme in figuur 9.27a is symmetrisch.
Bereken a .
b Bereken μ bij de gegeven oppervlakte in figuur 9.27b. Rond af op gehelen.
c Bereken σ bij de gegeven oppervlakte in figuur 9.27c. Rond af op twee decimalen.



figuur 9.27

9.4 Toepassingen van de normale verdeling

- 9** De tijd die atleet Ruben over de 15 km loopt is normaal verdeeld met een gemiddelde van 47 minuten en 30 seconden en een standaardafwijking van 50 seconden.
- a** Bereken in seconden nauwkeurig de tijd die Ruben in slechts 2% van de gevallen overschrijdt.
 - b** In hoeveel procent van de gevallen is de gemiddelde snelheid van Ruben meer dan 20 km per uur?

De tijd die Nadine over de 15 km loopt is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 38 seconden. In 30% van de gevallen loopt ze de 15 km binnen 50 minuten.

- c** Bereken in seconden nauwkeurig de gemiddelde tijd die Nadine over de 15 km loopt.

9.5 De wortel-n-wet

- 10** Potten appelmoes, waarvan de inhoud normaal verdeeld is met een gemiddelde van 720 gram en een standaardafwijking van 14 gram, worden verpakt in dozen van 16 stuks.
- a** Bereken de kans dat een aselekt gekozen doos meer dan 11 600 gram appelmoes bevat.
 - b** Hoeveel procent van de dozen heeft een gemiddelde inhoud per pot van minder dan 710 gram?

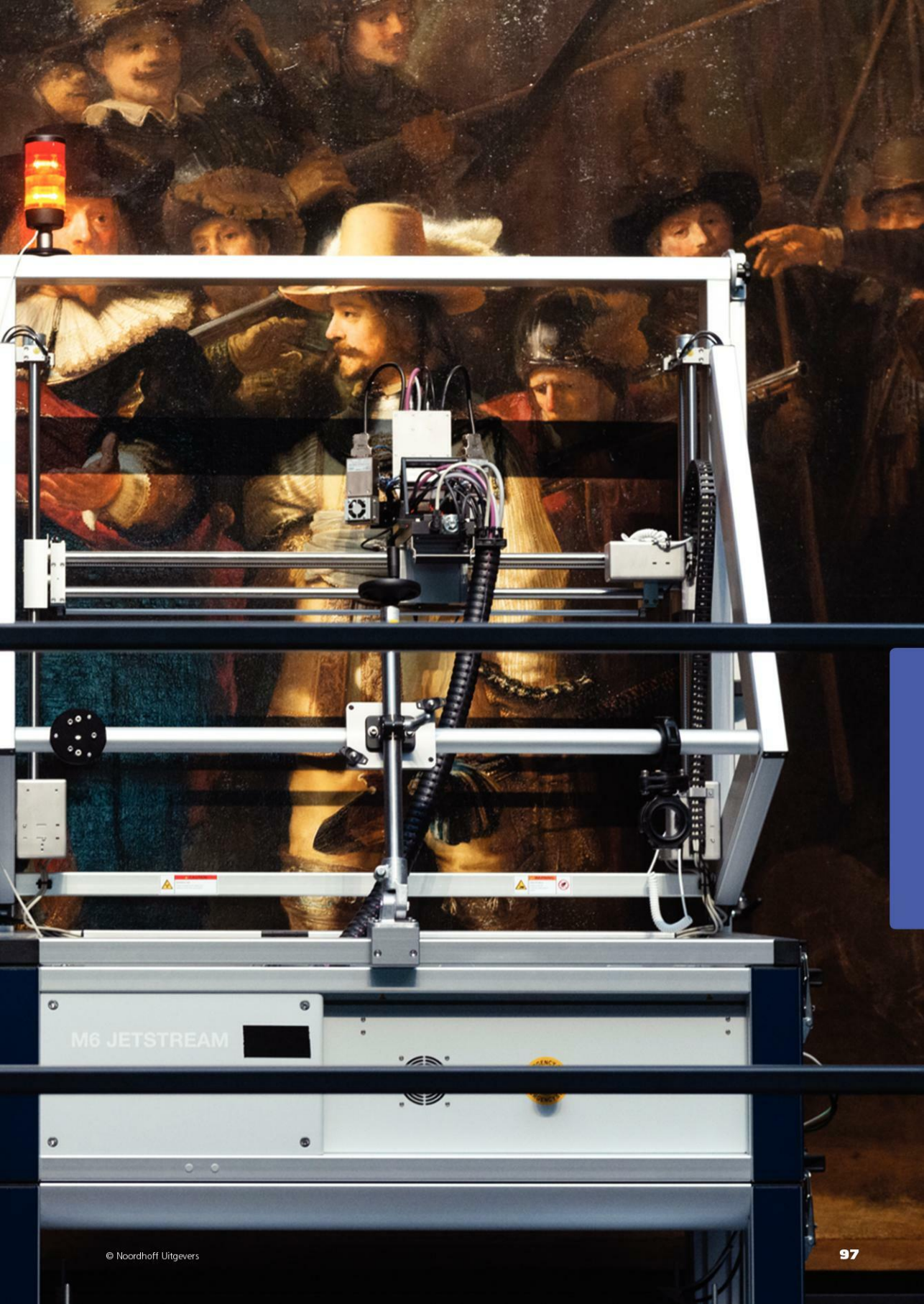


10

Exponenten en logaritmen

Wat leer je?

- Rekenen met groeifactoren en groeipercents bij exponentiële groei.
- Wat verdubbelingstijd en halveringstijd is.
- Formules opstellen bij exponentiële groei.
- Rekenen met logaritmen en werken met logaritmisch papier.
- Omvormen van exponentiële en logaritmische functies.



M6 JETSTREAM

Beginopdracht Radioactief schilderij

Bij het onderzoeken van oude schilderijen kan gebruik worden gemaakt van radioactiviteit. Zo kan men de oorspronkelijke kleurstelling, de opbouw van de verflagen en de eventuele aanwezigheid van onderschilderingen bestuderen. Onderzoekers maken een schilderij radioactief en vangen de straling die het uitzendt op met enkele fotografische platen, die boven op het schilderij worden geplaatst. Door de fotografische platen op bepaalde momenten te verwijderen, zijn de oorspronkelijke kleuren te achterhalen. Dat dit zo kan, heeft te maken met de verschillende halfwaardetijden van de chemische stoffen die in de verven met verschillende kleuren zijn gebruikt.

Zo bevat het basale omber, een bruinige verf, mangaan-56 dat een halfwaardetijd van 2,6 uur heeft. Dat betekent dat elke 2,6 uur de hoeveelheid uitgezonden straling halveert. Dus 5,2 uur na het begin van het onderzoek wordt nog maar 25% van de oorspronkelijke hoeveelheid straling uitgezonden, en na 7,8 uur nog maar 12,5%. Men kan berekenen dat na 6 uur al 80% van de straling die uiteindelijk wordt uitgezonden door mangaan-56 zichtbaar is gemaakt op de fotografische platen.

Arseen-72, dat voorkomt in lichtblauwe verf, heeft daarentegen een halfwaardetijd van 26 uur.

- Stel dat men de eerste fotografische plaat verwijdert 6 uur nadat het schilderij radioactief is gemaakt.

Welke verf kan men daar het beste op onderscheiden:

mangaanhoudende verf of arseenhoudende verf? Licht toe.

In 1621 schilderde Hendrick ter Brugghen de vier evangelisten, ieder met een mantel in een heldere kleur. De mantel van Mattheus is geel, die van Johannes is groen en die van Marcus is rood. Deze drie topstukken, die in het bezit zijn van Museum De Waag in Deventer, zijn wat kleurstelling betreft in uitstekende staat. De kleurpigmenten hebben de tand des tijds dus goed doorstaan.

De mantel van de evangelist Lucas op het vierde schilderij ziet er echter vaal en groezelig bruin uit. Kunsthistorici vermoeden dat deze mantel oorspronkelijk diepblauw is geweest. Daarbij zou dan kobalthoudende verf zijn gebruikt, die kobalt-60 bevat. De halfwaardetijd van kobalt-60 is 5,2 jaar.

Het is bij kunsthistorici bekend dat kobalthoudende kleurpigmenten in oude meesterwerken drastisch kunnen verkleuren door chemische reacties. Daarbij gaat de kleur verloren, maar blijft het kobalt-60 grotendeels behouden.

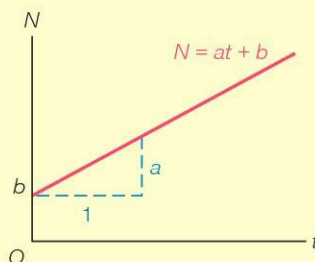
- Beschrijf hoe men te werk moet gaan om het vermoeden te bevestigen dat de mantel is geschilderd met verf die kobalt-60 bevat.

Voorkennis Lineaire en exponentiële groei

Theorie A Formules bij lineaire en exponentiële groei

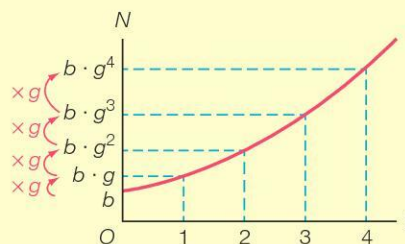
Bij *lineaire groei*

- neemt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal toe
- hoort een formule van de vorm $N = at + b$, waarin a de toename per tijdseenheid is en b de beginwaarde (of beginhoeveelheid)
- is de grafiek een rechte lijn.



Bij *exponentiële groei*

- wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal (de groeifactor) vermenigvuldigd
- hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, waarin b de beginwaarde (of beginhoeveelheid) is en g de groeifactor per tijdseenheid
- neemt de hoeveelheid toe als $g > 1$ en neemt de hoeveelheid af als $0 < g < 1$.



Voorbeeld

Een hoeveelheid N neemt exponentieel toe. Op 1 april is deze hoeveelheid 850 en de groeifactor per maand is 1,15.

Een hoeveelheid M is op 1 april gelijk aan 1600 en deze hoeveelheid neemt maandelijks met 75 toe.

- Stel de formules op van N en M . Neem de tijd t in maanden en $t = 0$ op 1 april.
- Met hoeveel neemt N toe in juni? Rond af op gehelen.
- In welke maand zijn N en M even groot?

Uitwerking

- $N = b \cdot g^t$ met $b = 850$ en $g = 1,15$ geeft $N = 850 \cdot 1,15^t$.
 $M = at + b$ met $a = 75$ en $b = 1600$ geeft $M = 75t + 1600$.
- Op 1 juni is $N = 850 \cdot 1,15^2 = 1124,12\dots$ en op 1 juli is $N = 850 \cdot 1,15^3 = 1292,74\dots$
De toename in juni is $1292,74\dots - 1124,12\dots \approx 169$.
- Los op $850 \cdot 1,15^t = 75t + 1600$.
Voer in $y_1 = 850 \cdot 1,15^x$ en $y_2 = 75x + 1600$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 6,4$.
Bij $t = 6$ hoort 1 oktober, dus N en M zijn even groot in oktober.

- 1** Bolivia is een land in Zuid-Amerika. Op 1 januari 2018 had Bolivia 11,14 miljoen inwoners en dit aantal wordt jaarlijks met 1,015 vermenigvuldigd.
- a** Stel de formule op van het aantal inwoners N van Bolivia in miljoenen. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2018.
 - b** Bereken het aantal inwoners op 1 januari 2024.
 - c** In welk jaar zal het aantal inwoners voor het eerst meer zijn dan 13 miljoen?
 - d** Hoeveel inwoners had Bolivia op 1 januari 2010?
 - e** Met hoeveel neemt het aantal inwoners volgens de formule in 2025 toe?



- 2** Een patiënt krijgt aan het begin van een dag 100 mg van een medicijn in de bloedbaan toegediend. Per uur wordt de hoeveelheid medicijn in het bloed met 0,8 vermenigvuldigd. Het aantal mg van het medicijn dat t uur na toediening nog in het bloed zit, is N .
- a** Stel de formule op van N .
 - b** Na hoeveel uur is er nog 25 mg van het medicijn in het bloed aanwezig? Rond af op één decimaal.
- 3** De productie van zonne-energie in Nederland neemt toe. Op 1 januari 2012 was het totale vermogen zonne-energie in Nederland 290 megawatt (MW). Per jaar neemt dat exponentieel toe met groeifactor 1,4. Het totale vermogen windenergie in Nederland op 1 januari 2012 was 2430 MW. Dat vermogen neemt jaarlijks met 310 MW toe.
- a** Stel de formules op van het vermogen zonne-energie V_z en het vermogen windenergie V_w . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2012 en V_z en V_w in MW.
 - b** Bereken in welk jaar het totale vermogen aan zonne-energie voor het eerst meer dan twee keer zo groot is als het totale vermogen aan windenergie.

Theorie B Tabellen bij exponentiële groei

Nederland is een echt fietsland. Lag er in Nederland in 2000 nog ongeveer 20 000 km fietspad, in 2020 was dat toegenomen tot ongeveer 42 000 km. Zie de tabel.

LENGTE FIETSPADEN IN NEDERLAND

jaar	2000	2005	2010	2015	2020
lengte in km	20 000	24 000	29 000	35 000	42 000



Om te weten te komen of hier bij benadering sprake is van exponentiële groei, bereken je bij de tabel vier quotiënten.

$$\frac{24\,000}{20\,000} = 1,2; \quad \frac{29\,000}{24\,000} \approx 1,21; \quad \frac{35\,000}{29\,000} \approx 1,21 \text{ en } \frac{42\,000}{35\,000} = 1,2$$

Elke vijf jaar is de lengte met ongeveer 1,2 vermenigvuldigd. Er is dus sprake van exponentiële groei. De bijbehorende formule is $L = 20\,000 \cdot 1,2^t$ met L de lengte van de fietspaden in km en t de tijd in vijftallen jaren met $t = 0$ in 2000.

Werkschema: aantonen van exponentiële groei bij een tabel

- 1 Bereken voor even brede intervallen de quotiënten $\frac{\text{hoeveelheid aan het eind van het interval}}{\text{hoeveelheid aan het begin van het interval}}$.
- 2 Zijn de quotiënten bij benadering gelijk, dan mag je uitgaan van exponentiële groei.

- 4 De omzet van de webwinkels in Nederland maakt een stormachtige groei door. Zie de tabel.

OMZET NEDERLANDSE WEBWINKELS IN MILJARDEN EURO'S

jaar	2014	2015	2016	2017	2018
omzet O	13,84	16,07	18,72	21,65	25,02

- a Toon aan dat bij de tabel exponentiële groei hoort.
- b Stel de formule op van O . Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2014 en rond de groeifactor af op twee decimalen.
- c In 2023 heeft Nederland naar verwachting 17,6 miljoen inwoners. Hoeveel zal in dat jaar de omzet van de webwinkels per Nederlander zijn, aangenomen dat de groei van de omzet zich op dezelfde wijze voortzet?

10.1 Exponentiële groei



Op 1 januari 2015 had de dartsvereniging Tops 540 leden. Dit aantal neemt jaarlijks met 5% toe. Uitgaande van een jaarlijkse toename van 5% groeit het aantal leden van Tops exponentieel. Welke groeifactor hoort bij deze toename?

Theorie A Groeifactor en groeipercentage

Neemt een hoeveelheid per jaar met 18% toe, dan wordt de hoeveelheid met 1,18 per jaar vermenigvuldigd. Je hebt dus te maken met exponentiële groei met groeifactor 1,18 per jaar.

Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 1,26 is, dan heb je te maken met een toename van 26% per jaar.

We zeggen dat het **groeipercentage** 26% is.

Bij een jaarlijkse afname van 12% hoort een exponentiële afname met groeifactor 0,88.

Weet je omgekeerd dat de groeifactor per jaar 0,982 is, dan heb je te maken met een afname van 1,8% per jaar.

18% erbij geeft
 $100\% + 18\% = 118\%$
dus $\times 1,18$

12% eraf geeft
 $100\% - 12\% = 88\%$
dus $\times 0,88$

Voorbeeld

Door verdwenen broedgebieden en intensivering van de landbouw zijn er steeds minder kieviten in Nederland. Nesten lopen gevaar door maaien, bemesten, ploegen en zaaien.

In maart 2000 waren er nog 250 000 broedparen kieviten in Nederland. Sindsdien neemt dat aantal jaarlijks met 4,5% af.

- a Stel de formule op van het aantal broedparen kieviten in

Nederland. Neem het aantal broedparen N in duizendtallen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in maart 2000.

- b In maart van welk jaar waren er voor het eerst minder dan 100 000 broedparen kieviten in Nederland?



Uitwerking

- a $N = b \cdot g^t$ met $b = 250$ en $g = 0,955$ geeft

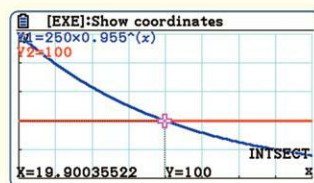
$$N = 250 \cdot 0,955^t.$$

- b Los op $250 \cdot 0,955^t = 100$.

Voer in $y_1 = 250 \cdot 0,955^x$ en $y_2 = 100$.

De optie snijpunt geeft $x = 19,90$...

Dus in maart 2020.



R2 Zie het voorbeeld.



- Bij de uitwerking van het voorbeeld zie je een scherm van de GR. Tussen welke waarden van x en y is het venster genomen?
- In welk jaar was het aantal broedparen gehalveerd ten opzichte van het aantal in 2000?

3



Vul in.

groeipercantage	13%	3,3%	120%	0,7%				
groeifactor					1,12	1,06	2,5	1,237

4



Vul in.

afname in procenten	13%	41,8%	6,2%	0,3%			
groeifactor					0,98	0,999	0,246

5



De populariteit van de OV-fiets groeit al jaren. In juni 2016 werden er 215 000 ritten met de OV-fiets gemaakt. Dit aantal neemt sindsdien elke maand met 2% toe. Neem aan dat deze groei nog een tijdje aanhoudt.

- Stel de formule op van het aantal ritten met de OV-fiets per maand. Neem het aantal ritten R in duizendtallen en de tijd t in maanden waarbij $t = 0$ hoort bij juni 2016.
- In welke maand van welk jaar was het aantal ritten voor het eerst meer dan 400 000?
- Volgens de formule zal het aantal ritten in december 2023 meer zijn dan in januari 2023. Hoeveel meer?

6



De halsbandparkiet komt van oorsprong niet in Nederland voor. De populatie in Nederland ontstond doordat vrijgelaten of ontsnapte dieren zich gingen voortplanten. In 1990 waren er naar schatting 400 halsbandparkieten in het wild in Nederland. Sindsdien is dit aantal elk jaar met 12% toegenomen. Halsbandparkieten veroorzaken veel schade bij fruittelers, doordat ze appels en peren in boomgaarden stukpikken. Volgens fruitteiler Jan Boer uit Barendrecht kost hem dat jaarlijks tienduizend euro aan omzet.



- Stel de formule op van het aantal in het wild voorkomende halsbandparkieten N in Nederland. Neem de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1990.
- In welk jaar zijn er naar verwachting voor het eerst meer dan 15 000 halsbandparkieten in Nederland?
- Neem aan dat in 2015 de totale omzetschade bij fruittelers veroorzaakt door de halsbandparkiet 2 miljoen euro was en dat deze omzetschade elk jaar met 10% toeneemt. Bereken de gemiddelde omzetschade die één halsbandparkiet aanbrengt in 2025.

7

Het gebruik van kunstmest neemt wereldwijd toe met 1,8% per jaar.

In 2015 was het gebruik 190 miljoen ton. In Europa wordt juist steeds minder kunstmest gebruikt. In 2015 werd in Europa nog 15,65 miljoen ton gebruikt en sindsdien neemt deze hoeveelheid elk jaar met 20000 ton af.

- a Hoeveel procent van de wereldwijd gebruikte hoeveelheid kunstmest in 2015 werd in Europa gebruikt?
- b Stel de formule op van de hoeveelheid kunstmest die jaarlijks wereldwijd wordt gebruikt. Neem de hoeveelheid K_W in miljoenen ton en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2015.
- c Stel de formule op van de hoeveelheid kunstmest die jaarlijks in Europa wordt gebruikt. Neem de hoeveelheid K_E in miljoenen ton en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2015.
- d Bereken hoeveel procent van de wereldwijd gebruikte hoeveelheid kunstmest in 2025 in Europa wordt gebruikt.

A8

Op 1 januari 2020 hadden de Verenigde Staten 333,5 miljoen inwoners.

Dit aantal neemt naar verwachting jaarlijks met 1,8 miljoen toe.

De bevolking van Rusland neemt juist af. Op 1 januari 2020 had Rusland 142,9 miljoen inwoners en dit aantal neemt naar verwachting jaarlijks met 0,4% af.

Bereken op basis van deze gegevens in welk jaar naar verwachting de Verenigde Staten drie keer zoveel inwoners hebben als Rusland.

A9

In Nederland neemt het aandeel hernieuwbare energie gestaag toe.

In 2015 nam het gebruik van biomassa 3,89% van het totale energieverbruik voor zijn rekening. Dit aandeel neemt jaarlijks met 0,21 procentpunten toe, dus in 2016 was het aandeel 4,10%.

In 2015 was het aandeel van zonne-energie 0,25% van het totale energieverbruik. Dit percentage neemt exponentieel toe met 35% per jaar.

Bereken het percentage van het totale energieverbruik dat in 2023 afkomstig is van biomassa en zonne-energie.

A10

Zie opgave 9. In Nederland was in 2015 het aandeel van hernieuwbare energie 5,74% van het totale energieverbruik. Behalve uit biomassa en zonne-energie komt hernieuwbare energie voornamelijk uit windenergie. Er is ook nog een klein gedeelte overig. Neem aan dat het aandeel dat afkomstig is uit windenergie en overig vanaf 2015 exponentieel groeit met 13% per jaar. De overheid heeft als doel dat 37% van het energieverbruik in 2030 uit hernieuwbare bronnen komt. Onderzoek met deze gegevens en de gegevens van opgave 9 of dit doel gehaald wordt.

De wereldwijd opgeslagen hoeveelheid digitale data wordt gegeven door de formule $D = 500 \cdot 1,0175^t$. Hierin is D in exabytes (1 exabyte = 10^{18} bytes) en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2009.

- Na hoeveel maanden is de wereldwijd opgeslagen hoeveelheid digitale data verdubbeld ten opzichte van 1 januari 2009?
- Op 1 januari 2015 was er wereldwijd 1740 exabyte aan digitale data opgeslagen. Hoeveel maanden na 1 januari 2015 is deze hoeveelheid verdubbeld?
- Vergelijk de antwoorden op de vragen a en b. Wat valt je op?



Theorie B Verdubbelingstijd en halveringstijd

In opgave 11 is de toename van de wereldwijd opgeslagen hoeveelheid digitale data 1,75% per maand.

De sterkte van de groei is hiermee niet voor iedereen goed in te schatten.

Met de **verdubbelingstijd** krijg je een betere indruk van de groei.

De verdubbelingstijd bij exponentiële groei is de tijd waarin de hoeveelheid verdubbelt.

Bij een groei van 3,5% per jaar bereken je de verdubbelingstijd t door de vergelijking $1,035^t = 2$ op te lossen.

Voer in $y_1 = 1,035^x$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 20,15$.

Dus de verdubbelingstijd bij een groei van 3,5% per jaar is ruim 20 jaar.

$$\begin{aligned} b \cdot g^t &= 2b \\ g^t &= 2 \end{aligned} \quad \text{↗ : } b$$

Dus de verdubbelingstijd is onafhankelijk van b .

Bij groeifactor g bereken je de verdubbelingstijd t door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen.

Bij exponentiële afname is het begrip **halveringstijd** van belang.

De halveringstijd bij exponentiële afname is de tijd waarin de hoeveelheid gehalveerd wordt.

Bij groeifactor g bereken je de halveringstijd t door de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$ op te lossen.

Voorbeeld

- a Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 12% af.
Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.
- b Van een hoeveelheid is de halveringstijd 15 jaar.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per jaar afneemt.

Uitwerking

- a $g_{\text{jaar}} = 0,88$, dus los op $0,88^t = \frac{1}{2}$.
Voer in $y_1 = 0,88^x$ en $y_2 = \frac{1}{2}$.
De optie snijpunt geeft $x = 5,42...$
De halveringstijd is 5 jaar en
 $0,42... \times 12 \approx 5$ maanden.
- b Er geldt $g^{15} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.
 $g^{15} = \frac{1}{2}$ geeft $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{15}} \approx 0,955$
De afname is 4,5% per jaar.

5,42... jaar
 $= 5,42... \times 12$ maanden
 ≈ 65 maanden
is ook goed.

$$g^p = c \text{ geeft } g = c^{\frac{1}{p}}$$

- 12** a Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 13,1% toe.
Bereken de verdubbelingstijd in maanden nauwkeurig.
- b Een hoeveelheid verdubbelt elke week.
Bereken het groeipercentage per dag.

- 13** De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie.
De hoeveelheid radioactieve stof neemt met 8,3% per dag af.
- a Bereken de halveringstijd.
 - b Na hoeveel dagen is nog 10% van de beginhoeveelheid over?

- 14** a Voor het aantal inwoners van Ghana geldt de formule $N = 18,7 \cdot 1,025^t$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2000 en N het aantal inwoners in miljoenen.
Bereken de verdubbelingstijd van het aantal inwoners van Ghana.

- b De bevolking van Gambia neemt elk jaar met 3,2% toe. De bevolking van Gabon neemt elk jaar met 2,2% toe.
Beredeneer zonder verdubbelingstijden te berekenen, bij welk land de bevolking een langere verdubbelingstijd heeft.
- c Karachi is de grootste stad van Pakistan. Tussen 1998 en 2011 is de bevolking van Karachi meer dan verdubbeld. Neem aan dat het aantal inwoners in deze periode exponentieel is gegroeid en dat de verdubbelingstijd 11,5 jaar was.
Bereken met hoeveel procent per jaar de bevolking van Karachi in de genoemde periode is toegenomen.



- A15**    Uit een onderzoek in opdracht van Natuurmonumenten uit 2018 blijkt dat het aantal loopkevers in een natuurgebied in Drenthe dramatisch is afgenomen. De onderzoekers vonden een halveringstijd van 12 jaar. Uit een onderzoek in Duitsland uit 2017 blijkt dat in 27 jaar 76% van de insecten is verdwenen. Onderzoek of deze twee resultaten met elkaar in lijn zijn. Ga uit van een exponentiële afname.



- A16**    In Nederland werd in 1999 bijna 44 miljard euro aan zorg en welzijn uitgegeven. Sindsdien zijn deze kosten enorm toegenomen, maar niet in elke periode was de groei even groot. Zie de tabel.

periode	jaren	jaarlijkse groei
I	2000 t/m 2003	9,7%
II	2004 en 2005	3,8%
III	2006 en 2007	5,0%
IV	2008 t/m 2012	3,9%

Een nadeel van het geven van groeipercentages is dat je de groei mogelijk onderschat. Verdubbelingstijden geven dan een beter beeld van de sterkte van de groei.

- Bereken voor elke periode de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.
- Onderzoek of in de periode 2000 t/m 2012 de uitgaven aan zorg en welzijn in Nederland zijn verdubbeld.

In de jaren 2013 en 2014 namen de uitgaven minder sterk toe, maar in de periode 2015 t/m 2019 trad er weer een sterkere stijging op. De verdubbelingstijd voor de periode 2015 t/m 2019 was 26 jaar.

- Bereken voor de periode 2015 t/m 2019 het groeipercentage per jaar.
- In 2018 waren de uitgaven aan zorg en welzijn 100 miljard euro. Bereken de uitgaven aan zorg en welzijn in 2015. Rond af op miljarden euro's.

- R17**  Onderzoek of bij exponentiële groei een verdubbeling van het groeipercentage een halvering van de verdubbelingstijd tot gevolg heeft.

- E18**  Een hoeveelheid neemt eerst drie jaar lang met 12% per jaar toe en neemt daarna nog twee jaar met een vast percentage per jaar toe. Na deze vijf jaar is de hoeveelheid verdubbeld. Bereken voor de laatste twee jaar het jaarlijkse toenamepercentage.

Invasieve exoten

Halsbandparkieten, roodwangschildpadden, Amerikaanse vogelkers: grote kans dat u deze soorten regelmatig ziet. Het zijn exoten: soorten die niet op eigen kracht maar door de mens in Nederland terecht zijn gekomen. Deze soorten kunnen zich permanent vestigen in onze natuur en zich snel vermeerderen. Dan spreken we van invasieve exoten.



Amerikaanse vogelkers

‘Niks mis met wat extra soorten in de natuur’, zullen veel mensen denken. Maar sommige exoten veroorzaken veel schade. Wie last heeft van hooikoorts ondervindt dat aan den lijve: de oprukkende hooikoortsplant Ambrosia verlengt het hooikoortsseizoen. Behalve gezondheidsproblemen kan er schade ontstaan voor de economie. Bijvoorbeeld door aantasting van oogsten door exotische insecten. Ook onze eigen flora en fauna ondervindt veel last van de indringers. Ze worden verdreven uit hun leefgebied en hun nest, lopen nieuwe ziektes op of worden domweg opgevreten. Als een invasieve exoot in de natuur gevestigd is, zijn vaak aanzienlijke uitgaven nodig om de schade te herstellen en de invasieve exoot te verwijderen of om verdere verspreiding te voorkomen. Geschat wordt dat de kosten alleen al in de lidstaten van de Europese Unie ten minste € 12 miljard per jaar bedragen!

Bron: invasieve-exoten.nl

A19


In deze opgave bekijken we een invasieve exoot waarvan het aantal exemplaren gedurende een periode exponentieel toeneemt met een verdubbelingstijd van T jaar.

- a** Hoeveel keer zoveel exemplaren zijn er na drie keer T jaar? En na vier keer T jaar?

Op $t = 0$ zijn er van deze exoot 10 000 exemplaren in Nederland. De verdubbelingstijd is 1,5 jaar. Onderzoekers waarschuwen dat een kritische grens wordt bereikt als er nog eens 30 000 exemplaren bijkomen.

- b** Bereken hoeveel jaar het nog duurt voordat de kritische grens wordt bereikt als er geen maatregelen worden getroffen.
- c** Op $t = 0$ is men begonnen met de bestrijding van de soort. Daardoor wordt de verdubbelingstijd 5 jaar. Bereken hoeveel jaar het dan duurt voordat de kritische grens wordt bereikt.

Terugblik

Groeipercentage en groeifactor

Bij een groeipercentage van 5,8% hoort de groeifactor 1,058.

Bij een afname van 3,2% hoort de groeifactor 0,968.

Bij de groeifactor 2,42 hoort een groeipercentage van 142%.

Bij de groeifactor 0,42 hoort een afname van 58%.

Neemt een hoeveelheid M vanaf 2010 jaarlijks met 12,5% toe en is M in 2010 gelijk aan 860, dan hoort hierbij de formule $M = 860 \cdot 1,125^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2010.

Neemt een hoeveelheid N vanaf 2015 jaarlijks met 1,8% af en is N in 2015 gelijk aan 1640, dan hoort hierbij de formule $N = 1640 \cdot 0,982^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 2015.

Verdubbelingstijd en halveringstijd

De verdubbelingstijd bij exponentiële groei met groeifactor g (met g groter dan 1)

- is de tijd die verloopt totdat de hoeveelheid is verdubbeld
- is onafhankelijk van de beginhoeveelheid
- vind je door de vergelijking $g^t = 2$ op te lossen.

$$\text{verdubbelingstijd} \\ g^t = 2$$

Bij een groeipercentage van 11,7% per jaar bereken je de verdubbelingstijd per jaar door de vergelijking $1,117^t = 2$ op te lossen.

Voer in $y_1 = 1,117^x$ en $y_2 = 2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 6,3$.

Dus de verdubbelingstijd is ongeveer 6,3 jaar.

Om bij een verdubbelingstijd van 8 jaar het groeipercentage per jaar te berekenen, los je de vergelijking $g^8 = 2$ op.

$g^8 = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{8}} \approx 1,091$.

Dus het groeipercentage per jaar is 9,1%.

De halveringstijd bij exponentiële groei met groeifactor g (met g tussen 0 en 1)

- is de tijd die verloopt totdat de hoeveelheid is gehalveerd
- is onafhankelijk van de beginhoeveelheid
- vind je door de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$ op te lossen.

$$\text{halveringstijd} \\ g^t = \frac{1}{2}$$

10.2 Groeipercentages en formules



Bij een exponentiële groei is de groeifactor per jaar gelijk aan 9.
De beginwaarde is 2.

a Vul de tabel in.

tijd in jaren	0	1	2	3	4	5
hoeveelheid N	2	18	162			

b Met welk getal wordt N per twee jaar vermenigvuldigd?

c Wordt N per half jaar met meer of minder dan 4,5 vermenigvuldigd?

Theorie A Groeipercentages omzetten naar een andere tijdseenheid

Een hoeveelheid groeit exponentieel met beginwaarde 100 en groeifactor 3 per uur.

EXPONENTIËLE GROEI

t	0	1	2	3	4	5	6
N	100	$100 \cdot 3^1$ = 300	$100 \cdot 3^2$ = 900	$100 \cdot 3^3$ = 2700	$100 \cdot 3^4$ = 8100	$100 \cdot 3^5$ = 24 300	$100 \cdot 3^6$ = 72 900

Je ziet

- per 2 uur is de groeifactor 3^2
- per 3 uur is de groeifactor 3^3 .

Algemeen

- per n uur is de groeifactor 3^n .

Deze regel geldt ook voor niet-gehele waarden van n .

Zo geldt

- per half uur is de groeifactor $3^{\frac{1}{2}} \approx 1,732$
- per kwartier is de groeifactor $3^{\frac{1}{4}} \approx 1,316$
- per minuut is de groeifactor $3^{\frac{1}{60}} \approx 1,018$.

NORM DRIJF AUTO REEEL RAD MM	
$3^{1/2}$	1.732050808
$3^{1/4}$	1.316074013
$3^{1/60}$	1.018478864

Bij exponentiële groei met groeifactor g per tijdseenheid is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Heb je te maken met een exponentiële groei met een groeifactor van 0,6 per dag, dan is

- de groeifactor per week $0,6^7 \approx 0,028$
- de groeifactor per uur $0,6^{\frac{1}{24}} \approx 0,979$
- de groeifactor per acht uur $0,6^{\frac{1}{3}} \approx 0,843$.

Om te berekenen wat het groeipercentage per dag is bij een toename van 70% per week, gebruik je $g_{\text{week}} = 1,70$ geeft $g_{\text{dag}} = 1,70^{\frac{1}{7}} \approx 1,079$. Het groeipercentage per dag is 7,9%.

Bij exponentiële groei gaat het omzetten van een groeipercentage naar een andere tijdseenheid via groeifactoren.

Voorbeeld

Een hoeveelheid neemt per zes uur met 18% toe.

- a Hoeveel procent is de toename per dag?
- b Hoeveel procent is de toename per uur?

Uitwerking

- a $g_{6 \text{ uur}} = 1,18$
 $g_{\text{dag}} = 1,18^4 \approx 1,939$
De toename per dag is 93,9%.
- b $g_{6 \text{ uur}} = 1,18$
 $g_{\text{uur}} = 1,18^{\frac{1}{6}} \approx 1,028$
De toename per uur is 2,8%.

- 1 Eerst de groeifactor per 6 uur.
- 2 Dan de groeifactor per dag.
- 3 Ten slotte het groeipercentage per dag.

21 Een hoeveelheid neemt per kwartier met 12% toe.

- a Hoeveel procent is de toename per uur?
- b Hoeveel is de procentuele toename per vijf minuten?
- c Hoeveel procent is de toename per vijf uur?
Rond af op gehele.

Geef percentages in één decimaal en rond groeifactoren af op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

22 Een hoeveelheid neemt per dag met 16% af.

- a Bereken de groeifactor per week.
- b Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per uur af?
- c Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per kwartier af?
Rond af op twee decimalen.

23

- a** Een hoeveelheid neemt per jaar met 6,6% toe.
Hoeveel procent is de toename per 10 jaar?
- b** Een hoeveelheid neemt per uur met 19,5% af.
Hoeveel procent is de afname per kwartier?
- c** Een hoeveelheid neemt per jaar met 0,08% toe.
Hoeveel procent is de toename per eeuw?
- d** Een hoeveelheid neemt per week met 180% toe.
Hoeveel procent is de toename per dag?

24

- a** Een hoeveelheid heeft een verdubbelingstijd van 4 jaar.
Lotte vraagt zich af wat het groeipercentage per maand is. Ze bedenkt dat vier jaar gelijk is aan 48 maanden en schrijft op $g_{48 \text{ maanden}} = 2$.
Bereken g_{maand} en geef het groeipercentage per maand.
- b** Een hoeveelheid heeft een verdubbelingstijd van 1,5 jaar.
Bereken het groeipercentage per week.
- c** Een hoeveelheid heeft een halveringstijd van 15 seconden.
Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid per minuut afneemt.

R25

De volgende uitspraken zijn onjuist. Verbeter ze.

- a** Bij een toename van 5% per dag hoort een toename van $7 \times 5\%$ per week.
- b** Bij een afname van 20% per uur hoort een afname van $\frac{1}{4} \times 20\%$ per kwartier.

A26

Ga bij de volgende vragen uit van exponentiële groei.

- a** Het beleid van de regering is erop gericht om de hoeveelheid opgewekte energie door particulieren met zonnecellen elke drie jaar met een factor 2,5 te vermenigvuldigen.
Bereken het groeipercentage per jaar.
- b** In 2020 werd in Nederland twee keer zoveel elektriciteit door windmolens op land geleverd als in 2015.
Bereken het groeipercentage per jaar.
- c** Het aantal muziekwinkels in Nederland is in 12 jaar tijd met 22% afgenomen.
Hoeveel procent is de afname per jaar?



A27
☐ ⊙ *

In de wereld wordt steeds meer plastic geproduceerd. De hoeveelheid jaarlijks geproduceerd plastic neemt al vanaf de jaren 70 van de vorige eeuw exponentieel toe. In 1970 werd 44 miljard kg geproduceerd en in 2009 was dat toegenomen tot 250 miljard kg.

Een deel van het plastic komt als afval in de oceaan terecht, waar het mede onder invloed van de zon uiteenvalt in zeer kleine deeltjes, het zogenaamde microplastic.

Onderzoekers bestuderen hoeveel van dit microplastic neerdaalt op de bodem van de oceaan. In deze bodem kan men lagen onderscheiden.

Elke laag hoort bij een jaar. In de bodem nabij de kust van Californië vond men in de laag die bij 1972 hoort 6 deeltjes microplastic per 100 cm². In de laag van 1994 vond men 17 deeltjes per 100 cm².

Neem aan dat de toename exponentieel is.

Onderzoek of de hoeveelheid microplastic in de lagen van de bodem met ongeveer hetzelfde percentage per jaar toeneemt als de wereldwijde productie van plastic.

A28
☐ *

Bij zonnepanelen is het begrip piekvermogen van belang. Dit geeft aan hoeveel vermogen een zonnepaneel kan leveren. De eenheid van piekvermogen is wattpiek. Tussen eind 2012 en eind 2018 is het totaal piekvermogen van zonnepanelen in Nederland 12 keer zo groot geworden. Ga hierbij uit van exponentiële groei.

Eind 2018 was het totaal piekvermogen 4400 megawattpiek.

Eind 2017 kwam van het totaal piekvermogen 58% van zonnepanelen op daken van particulieren.

Bereken het piekvermogen eind 2017 van zonnepanelen op daken van particulieren.



O29
☐ ⊙ *

Een bacteriecultuur groeit exponentieel. Op $t = 5$ zijn er 50 000 bacteriën. Op $t = 9$ zijn er 300 000 bacteriën. Hierbij is t in uren. Uit de gegevens volgt dat de groeifactor per uur gelijk is aan 1,565.

a Toon dit aan.

Bij deze situatie hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$ met N het aantal bacteriën en g de groeifactor per uur. Om b te berekenen kun je de vergelijking $b \cdot 1,565^5 = 50\,000$ gebruiken.

b Licht dit toe.

Theorie B Een formule opstellen bij exponentiële groei

Is bij een exponentiële groei de hoeveelheid op twee tijdstippen bekend, dan kun je de bijbehorende formule opstellen. Je berekent hiertoe eerst de groeifactor per tijdseenheid en vervolgens de beginhoeveelheid. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Met name door de verspreiding van klamboes die zijn geïmpregneerd met insecticide, is het aantal dodelijke slachtoffers van malaria sinds 2009 exponentieel afgenomen. In 2012 waren er nog 640 duizend dodelijke slachtoffers. In 2017 was dat aantal afgenomen tot 435 duizend.

Stel de formule op van het aantal dodelijke slachtoffers van malaria. Neem het aantal N in duizendtallen en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2009.

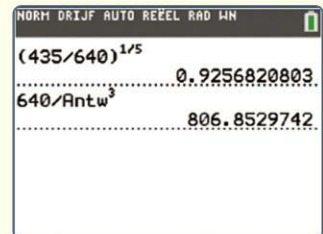


Uitwerking

$$N = b \cdot g^t \text{ met } g_{5 \text{ jaar}} = \frac{435}{640}, \text{ dus } g_{\text{jaar}} = \left(\frac{435}{640}\right)^{\frac{1}{5}} = 0,9256\dots$$

$$\left. \begin{aligned} N &= b \cdot 0,9256\dots^t \\ t = 3 \text{ en } N &= 640 \end{aligned} \right\} b \cdot 0,9256\dots^3 = 640$$
$$b = \frac{640}{0,9256\dots^3} \approx 807$$

$$\text{Dus } N = 807 \cdot 0,926^t.$$



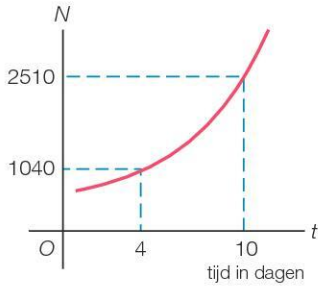
30
📌

- Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. Op $t = 3$ is $N = 1600$ en op $t = 10$ is $N = 4100$. Hierbij is t in uren. Stel de formule op van N .
- Een bacteriesoort groeit exponentieel. Op $t = 3$ zijn er 150 000 bacteriën en op $t = 8$ zijn dat er 1 250 000. Hierbij is t in uren. Stel de formule op van het aantal bacteriën B . Rond de beginhoeveelheid af op duizendtallen.
- Een hoeveelheid radioactieve stof neemt exponentieel af. Op $t = 5$ is er 0,60 gram en op $t = 8$ is er 0,47 gram. Hierbij is t in dagen. Stel de formule op van de hoeveelheid radioactieve stof H in gram.

Geef de beginwaarde in dezelfde nauwkeurigheid als de gegevens, tenzij anders wordt gevraagd.

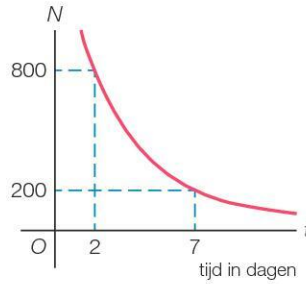


- a** Stel de formule op die bij de exponentiële groei in figuur 10.1a hoort.



a

figuur 10.1



b

- b** Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Zie figuur 10.1b. Stel de formule op van N .



Een projectontwikkelaar is gespecialiseerd in het bouwen van woontorens met op de begane grond winkels en vanaf de eerste verdieping appartementen. Zij rekent voor de bouwlaag op de begane grond 4,89 miljoen euro. Hoeveel ze rekent voor de totale kosten K in miljoenen euro's is afhankelijk van het aantal verdiepingen. Zie de tabel. Hierin is n het aantal verdiepingen met appartementen.

n	0	8	16	24	32
K	4,89	6,05	7,49	9,27	11,47

Tussen n en K bestaat een exponentieel verband.

- Toon dit aan.
- Bereken de totale bouwkosten in het geval de woontoren bestaat uit 20 verdiepingen met appartementen.
- De projectontwikkelaar wil dat de totale bouwkosten maximaal 10,3 miljoen euro bedragen. Hoeveel verdiepingen met appartementen kan zij voor dit bedrag bouwen?



A33
☐ ⊙ *

In de jaren 80 van de vorige eeuw was de ooievaar vrijwel uit Nederland verdwenen. Door herintroductie van ooievaars uit dierentuinen en beschermingsprogramma's is het aantal ooievaars sinds 1995 exponentieel toegenomen. In 2008 waren er alweer 700 broedparen in Nederland en in 2016 waren dat er al 1000.



- a Bereken het aantal broedparen ooievaars in Nederland in 1995.
- b In welk jaar zullen er voor het eerst meer dan 1500 broedparen ooievaars in Nederland zijn, als de genoemde groei doorzet?

A34
⊙ *

Door een bloedvatpropje heeft een patiënt tijdelijk verminderd zicht in één oog. Bij het onderzoek van de orthoptist 10 dagen nadat de patiënt last kreeg, is het verlies van het zicht nog 56%. Bij het vervolgonderzoek 39 dagen na het eerste onderzoek is het verlies van het zicht nog slechts 9%. Ga ervan uit dat het verlies van het zicht exponentieel afneemt.

- a Hoe groot was het verlies van het zicht op het moment dat de patiënt last kreeg?
- b Hoeveel weken nadat de patiënt last kreeg, zal hij naar verwachting 99% van zijn oorspronkelijk zicht terug hebben?

A35
*

Op 1 januari 2015 telde ons land 2425 honderdplussers. Dat waren er 1327 meer dan op 1 januari 2000. Het merendeel van de honderdplussers was vrouw: in 2000 waren er 928 vrouwen en 170 mannen honderdplus en in 2015 waren er 2112 vrouwen en 313 mannen honderdplus. Naar verwachting zal het aantal vrouwelijke honderdplussers de komende jaren blijven toenemen met hetzelfde jaarlijkse groeipercentage als in de periode 2000-2015 het geval was. Het aantal mannelijke honderdplussers zal echter naar verwachting sterker groeien, namelijk met 9,5% per jaar. 'Een verklaring hiervoor is dat mannen steeds minder zijn gaan roken en vrouwen juist meer', aldus het CBS. Onderzoek hoeveel procent van de honderdplussers in 2025 naar verwachting man is.

E36
*

Als je een bal van een hoogte laat vallen, dan komt deze na elke keer stuiten minder hoog. De maximale hoogte na elke keer stuiten neemt exponentieel af.

Een bal die van een hoogte van vijf meter wordt losgelaten, komt na de derde keer stuiten nog 2,56 m hoog.

Hoeveel cm heeft de bal in totaal afgelegd als deze voor de vierde keer de grond raakt?

Terugblik

Groefactoren omzetten naar andere tijdseenheden

Is g de groefactor per tijdseenheid, dan is de

- groefactor per 3 tijdseenheden gelijk aan g^3
- groefactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

Deze regel geldt ook voor niet-gehele getallen n .

Is de groefactor per uur gelijk aan 1,8, dan is de

- groefactor per half uur gelijk aan $1,8^{\frac{1}{2}} \approx 1,342$
- groefactor per kwartier gelijk aan $1,8^{\frac{1}{4}} \approx 1,158$.

(Groei)percentages omzetten naar andere eenheden

Is de toename per dag 30%, dan is de

- groefactor per dag 1,3
- groefactor per week $1,3^7 \approx 6,27$ en de toename per week dus 527%
- groefactor per uur $1,3^{\frac{1}{24}} \approx 1,011$ en de toename per uur dus 1,1%.

Het omzetten van een groeipcentage naar een andere eenheid gaat via groefactoren.

Is de afname per uur 8,2%, dan is de

- groefactor per uur 0,918
- groefactor per dag $0,918^{24} \approx 0,128$, dus de afname per dag is 87,2%
- groefactor per kwartier $0,918^{\frac{1}{4}} \approx 0,979$, dus de afname per kwartier is 2,1%.

De formule opstellen bij exponentiële groei

Weet je bij een exponentiële groei op twee tijdstippen de hoeveelheid, dan kun je de formule opstellen.

Is $N = 82$ voor $t = 5$ uur en is $N = 246$ voor $t = 12$ uur,

dan is $g_{\text{uur}} = \frac{246}{82} = 3$, dus $g_{\text{uur}} = 3^{\frac{1}{7}} \approx 1,1699...$

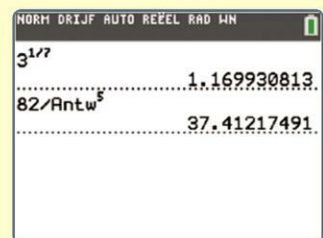
$$\left. \begin{aligned} N &= b \cdot 1,1699...^t \\ \text{bij } t = 5 \text{ hoort } N &= 82 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} b \cdot 1,1699...^5 &= 82 \\ b &= \frac{82}{1,1699...^5} \approx 37 \end{aligned}$$

Dus $N = 37 \cdot 1,170^t$.

Met deze formule kun je bijvoorbeeld berekenen voor welke t de hoeveelheid gelijk is aan 500. Los hiertoe de vergelijking $37 \cdot 1,170^t = 500$ op.

Invoeren van $y_1 = 37 \cdot 1,170^x$ en $y_2 = 500$ en gebruiken van de optie snijpunt geeft $x = 16,58...$

Dus voor $t \approx 16,6$ is $N = 500$.



10.3 Logaritmen



Geef de waarde van x zonder de optie snijpunt van de GR te gebruiken.

a $2^x = 8$

c $2^x = 64$

e $3^x = \sqrt{3}$

b $3^x = 9$

d $3^x = 81$

f $3^x = \frac{1}{3}$

Theorie A De logaritme

In opgave 37a heb je de exponent x gegeven waarvoor geldt $2^x = 8$.

Je kreeg $x = 3$.

Zoek je de exponent bij $2^x = 13$, dan komt het niet mooi uit.

Deze exponent noteren we als ${}^2\log(13)$. Dus $2^{^2\log(13)} = 13$.

Je kunt controleren dat ${}^2\log(13) \approx 3,70044$, want $2^{3,70044} \approx 13$.

$$2^{^2\log(13)} = 13$$

Je weet: $2^3 = 8$. Je kunt ook noteren $2^{^2\log(8)} = 8$. Conclusie: ${}^2\log(8) = 3$.

- De notatie log komt van **logaritme**.
- In ${}^2\log(8)$ is 2 het **grondtal van de logaritme**.
- ${}^2\log(8)$ spreek je uit als de tweede logaritme van acht of kortweg twee log acht.

Bij 2^x is 2 het grondtal en x de exponent. Wil je weten voor welke x geldt dat $2^x = 8$, dan is het antwoord $x = {}^2\log(8)$.

Dus ${}^2\log(8)$ is de exponent van de macht met grondtal 2 waarbij de macht gelijk is aan 8. Deze exponent is 3, dus ${}^2\log(8) = 3$.

En zo is ${}^3\log(81)$ gelijk aan 4, want $3^4 = 81$.

${}^3\log(81)$ is de exponent van een macht met grondtal 3 waarmee de macht gelijk is aan 81.

Zoek je de uitkomst van ${}^2\log(64)$, dan zoek je dus de exponent bij het grondtal 2 waarmee je 64 krijgt.

Bedenk daartoe dat $64 = 2^6$, dus ${}^2\log(64) = {}^2\log(2^6) = 6$.

En zo is ${}^3\log(\frac{1}{9}) = {}^3\log(\frac{1}{3^2}) = {}^3\log(3^{-2}) = -2$.

$${}^g\log(g^a) = a$$

En ook ${}^5\log(\sqrt{5}) = {}^5\log(5^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$.

${}^g\log(x)$ is bij een macht met grondtal g de exponent waarmee de macht gelijk is aan x . Dus $g^{^g\log(x)} = x$.

In ${}^g\log(x)$ heet g het grondtal van de logaritme.

Er geldt ${}^g\log(g^a) = a$.

R38 Je hebt gezien dat $2^{\log(13)} = 13$.
□ ⊗ * Algemeen geldt dat $g^{\log(x)} = x$.

Ook heb je gezien dat $3^{\log(81)} = 4$, want $3^4 = 81$.
 Algemeen geldt $g^{\log(x)} = a$ betekent $x = g^a$.

Ook heb je gezien dat $g^{\log(g^a)} = a$.

Deze drie afspraken over logaritmen zijn gelijkwaardig, maar je gebruikt ze in verschillende situaties.

- a** Welke afspraak gebruik je om $3^{\log(\frac{1}{27})}$ te berekenen?
- b** Welke afspraak gebruik je om $3^{3^{\log(50)}}$ te berekenen?
- c** Welke afspraak gebruik je om de vergelijking $3^{\log(x)} = 5$ op te lossen?

Afspraken logaritmen

$$g^{\log(x)} = x$$

$$g^{\log(g^a)} = a$$

$$g^{\log(x)} = a \text{ betekent } x = g^a$$

39 Vul in.

- ⊗**
- a** $2^{\log(32)} = \dots$, want $2^{\dots} = 32$
 - b** $2^{\log(4)} = \dots$, want $2^{\dots} = 4$
 - c** $2^{\log(1)} = \dots$, want $2^{\dots} = 1$
 - d** $3^{\log(27)} = \dots$, want $3^{\dots} = 27$
 - e** $3^{\log(\frac{1}{3})} = \dots$, want $3^{\dots} = \frac{1}{3}$
 - f** $5^{\log(25)} = \dots$, want $5^{\dots} = 25$

40 $2^{\log(128)} = 2^{\log(2^7)} = 7$
□ ⊗ * Bereken op dezelfde manier.

- | | | |
|-------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| a $4^{\log(16)}$ | d $5^{\log(\frac{1}{5})}$ | g $2^{\log(2)}$ |
| b $10^{\log(1000)}$ | e $6^{\log(1)}$ | h $2^{\log(\frac{1}{4})}$ |
| c $3^{\log(\sqrt{3})}$ | f $10^{\log(\frac{1}{10})}$ | i $4^{\log(0,25)}$ |

41 $2^{\log(\frac{1}{8}\sqrt{2})} = 2^{\log(\frac{1}{2^3} \cdot 2^{\frac{1}{2}})} = 2^{\log(2^{-2\frac{1}{2}})} = -2\frac{1}{2}$

Bereken op dezelfde manier.

- a** $2^{\log(256\sqrt{2})}$ **b** $3^{\log(\frac{1}{9}\sqrt{3})}$ **c** $\frac{1}{2}^{\log(4 \cdot \sqrt[3]{2})}$

- O42** **a** Kate beweert dat $2^{\log(-4)} = -2$. Waarom is dit fout?
□ ⊗ * **b** Xinly beweert dat $1^{\log(8)} = 8$. Waarom is dit onzin?
c Volgens Elze-Noor is $1^{\log(1)} = 8$. Wat vind je hiervan?
d Samir beweert dat $2^{\log(8)} = -3$. Klopt dit?

O43 Gegeven is de formule $y = 2^{\log(x)}$.

- ⊗ *** **a** Neem de tabel over en vul hem in.
b Teken de punten van de tabel en teken door deze punten een vloeiende kromme. Let op: de kromme snijdt de y -as niet.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = 2^{\log(x)}$							

Theorie B Formules met logaritmen

Bij de formule $y = {}^2\log(x)$ is 2 het grondtal van de logaritme.

Bij de formule $y = {}^g\log(x)$ beperken we ons tot positieve grondtallen ongelijk aan 1, dus tot grondtallen waarvoor geldt $0 < g < 1$ of $g > 1$.

Dus ${}^1\log(5)$ en ${}^{-2}\log(4)$ hebben geen betekenis.

Merk op dat ${}^2\log(-4)$ niet bestaat. Om de uitkomst van deze logaritme te bepalen, zou je -4 als macht van 2 moeten schrijven, dus $-4 = 2^{\dots}$.

Maar dat kan niet, want elke macht van 2 is positief.

${}^g\log(x)$ heeft alleen betekenis voor $g > 0$ en $g \neq 1$ en $x > 0$.

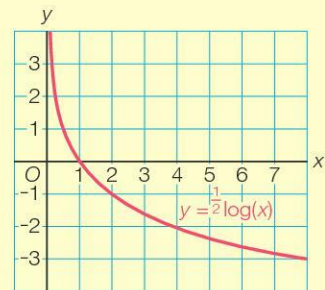
Hiernaast is de grafiek getekend van $y = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

Daarbij is de volgende tabel gebruikt.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3

De grafiek van $y = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ is *dalend*.

Omdat je voor x alleen positieve getallen mag invullen, blijft de grafiek rechts van de y -as. Wel nadert de grafiek onbeperkt dicht tot de y -as.

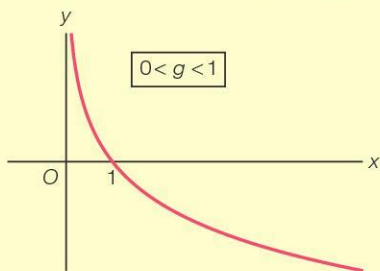


figuur 10.2

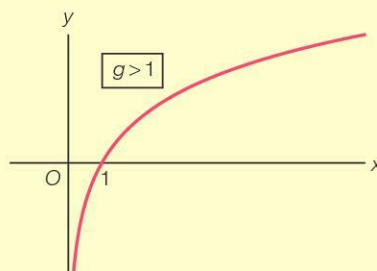
De grafiek van $y = {}^g\log(x)$ is een standaardgrafiek.

Bij de grafiek van $y = {}^g\log(x)$ onderscheiden we twee situaties, namelijk $0 < g < 1$ en $g > 1$.

De standaardgrafiek $y = {}^g\log(x)$



De grafiek is dalend en nadert onbeperkt dicht de positieve y -as.



De grafiek is stijgend en nadert onbeperkt dicht de negatieve y -as.

De log-toets op de GR staat voor $^{10}\log$, dus $\log(100) = 2$, $\log(1000) = 3$ en $\log(\frac{1}{10}) = -1$. Met de GR krijg je $\log(500) \approx 2,699$.

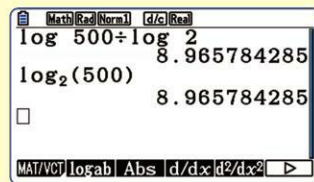
Om $^2\log(500)$ te berekenen, kun je de rekenregel $^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ gebruiken.

Je krijgt $^2\log(500) = \frac{\log(500)}{\log(2)} \approx 8,966$.

Op de TI, de NW en de HP kun je ook intikken $\log(500, 2)$.

Op de Casio kun je ook de optie logab uit het OPTN-CALC menu gebruiken.

Je kunt het bovenstaande ook gebruiken bij het invoeren van een formule met logaritmen op de GR.



Je kunt de rekenregel $^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ ook gebruiken om formules in een andere vorm te schrijven. Zo kun je de formule $N = 40 \cdot ^3\log(t)$ schrijven in de vorm $N = a \cdot \log(t)$. Dit gaat als volgt.

$$N = 40 \cdot ^3\log(t) = 40 \cdot \frac{\log(t)}{\log(3)} = \frac{40}{\log(3)} \cdot \log(t) \approx 83,8 \cdot \log(t).$$

Dus $N = 83,8 \cdot \log(t)$.

44 Bereken. Rond af op twee decimalen.



a $^3\log(5)$

c $^2\log(20) - ^2\log(6)$

e $3 \cdot ^2\log(7)$

b $^{\frac{1}{2}}\log(18)$

d $^{\frac{1}{3}}\log(10) + \log(\frac{1}{3})$

f $\frac{5}{^4\log(12)}$

45 Rond in deze opgave zo nodig af op één decimaal.



a Schrijf de formule $N = 50 \cdot ^5\log(t)$ in de vorm $N = a \cdot \log(t)$.

b Schrijf de formule $P = 100 - ^{\frac{1}{2}}\log(q)$ in de vorm $P = a + b \cdot \log(q)$.

46



Volgens een veelgebruikte vuistregel geldt dat de hondenleeftijd keer zeven gelijk is aan de mensenleeftijd. Uit deze vuistregel volgt bijvoorbeeld dat een hondenleeftijd van 2 jaar vergelijkbaar is met een mensenleeftijd van 14 jaar. Uit onderzoek naar het DNA van honden en mensen blijkt dat deze regel niet klopt. Een betere benadering van de mensenleeftijd van een hond krijg je met de formule $m = 37 \cdot \log(h) + 31$ met $h > 0,5$. Hierin is h de hondenleeftijd en m de mensenleeftijd, beide in jaren.

a De oudste hond ooit was 29 jaar oud.

Bereken met de formule de mensenleeftijd die hierbij hoort.

b Welke hondenleeftijd correspondeert volgens de formule met een mensenleeftijd van 75 jaar? Rond af op gehelen.

c Bereken vanaf welke waarde van h de formule lagere mensenleeftijden geeft dan de vuistregel. Rond af op gehelen.

47 Gebruik in deze opgave dat voor kinderen tussen drie maanden en zes jaar de formule $h = 70,2 + 5,1t + 21,2 \cdot \log(t)$ een goede benadering geeft van de lengte h in cm. Hierbij is t de leeftijd in jaren.

- a** Een kind is twee jaar en drie maanden.
Bereken zijn lengte in cm nauwkeurig.
- b** Met hoeveel procent neemt de lengte van een kind toe in zijn vijfde levensjaar?
- c** Donald is op 1 maart 2020 geboren.
Hoeveel mm is hij in de maand december van het jaar 2020 gegroeid?
- d** Bereken in maanden nauwkeurig de leeftijd van een kind met een lengte van één meter.

Het vijfde levensjaar loopt van $t = 4$ tot $t = 5$.
Dus bereken bij vraag b $\frac{h(5) - h(4)}{h(4)} \times 100\%$.

48 Gegeven is de formule $N = 40 + 9,97 \cdot \log(x)$.
a Vul de volgende tabel in. Rond zo nodig af op één decimaal.

x	1	2	4	8	16
N					

- b** Vul in. Uit de tabel bij vraag a volgt: als x verdubbelt, dan neemt N steeds met ... toe.

Ook bij de volgende formules geldt: als x verdubbelt, dan neemt N steeds met hetzelfde getal toe of af.

- c** Bereken dit getal bij beide formules.
 - I $N = 100 + 16,6 \cdot \log(x)$
 - II $N = 653 - 33,2 \cdot \log(x)$

49 Bedrijven met een website hebben behoefte aan objectieve informatie over het aantal bezoekers van de website en de effectiviteit van de site. Een instelling die dit soort gegevens verzamelt, rekent het volgende tarief per maand:

- vast bedrag van 50 euro per site
- variabel bedrag afhankelijk van het aantal bezoekers n per maand.

Voor het variabele bedrag in euro's gebruikt men de formule $V = 59,27 \cdot \log(n) - 191,40$. De formule geldt alleen voor die waarden van n waarvoor V positief is.

- a** Onderzoek vanaf welke n de formule geldt. Rond af op honderdtallen.
- b** Een site had in februari 158 000 bezoekers en in maart waren dat er 56 000 meer.
Hoeveel betaalt de eigenaar van deze site in maart meer dan in februari?
- c** Een site heeft elke maand (vrijwel) evenveel bezoekers. In een jaar betaalt de eigenaar van deze site 2200 euro.
Bereken het aantal bezoekers per maand. Rond af op honderdtallen.
- d** Bij een verdubbeling van het aantal bezoekers per maand neemt het variabele bedrag steeds met hetzelfde aantal euro's toe.
Bereken dit bedrag in centen nauwkeurig.

Bij netwerkbeheerder Liander krijg je een vergoeding voor het ongemak als je langer dan vier uur zonder gas of stroom hebt gezeten. Op de site van Liander staat het volgende.

U ontvangt:

- € 35 wanneer u langer dan 4 uur zonder gas of stroom heeft gezeten
- € 20 extra voor elke 4 uur erbij (na 8 uur, 12 uur, etc).

- a** Bereken de vergoeding bij een storing van 3 uur, van 7,5 uur en van 10 uur en 15 minuten.

Uit een onderzoek onder huishoudens die een aansluiting hebben bij Liander blijkt dat men vooral voor kortere onderbrekingen een hoger compensatiebedrag verwacht.

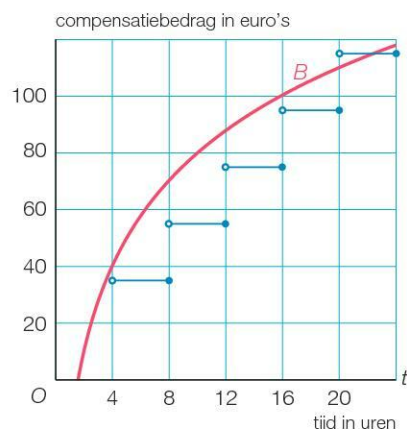
Dit onderzoek leverde het model

$$B = -20 + 100 \cdot \log(t) \text{ op.}$$

Hierin is B het compensatiebedrag in euro's en t de tijdsduur van de onderbreking in uren.

De grafiek van B is, samen met de vergoeding die Liander geeft, getekend in de figuur hiernaast.

- b** Voor een korte onderbreking wordt volgens de formule van B geen compensatie gegeven. Bereken tot hoeveel minuten onderbreking geen compensatie wordt gegeven. Rond af op gehele.
- c** Je kunt in de figuur zien dat bij een onderbreking van minder dan 20 uur er een groot verschil is tussen B en de vergoeding die Liander geeft. Dit verschil is bij $t = 7,5$ groter dan bij $t = 11,5$. Hoeveel groter?
- d** De familie Keil kreeg van Liander bij een onderbreking een vergoeding die precies gelijk was aan de vergoeding die ze zouden krijgen bij toepassing van de formule van B . Hoe lang duurde deze onderbreking? Geef het antwoord in gehele minuten.
- e** Bij de formule van B geldt: als de tijdsduur van de onderbreking verdubbelt, dan neemt de compensatie steeds met hetzelfde bedrag toe. Bereken dit bedrag in gehele centen.



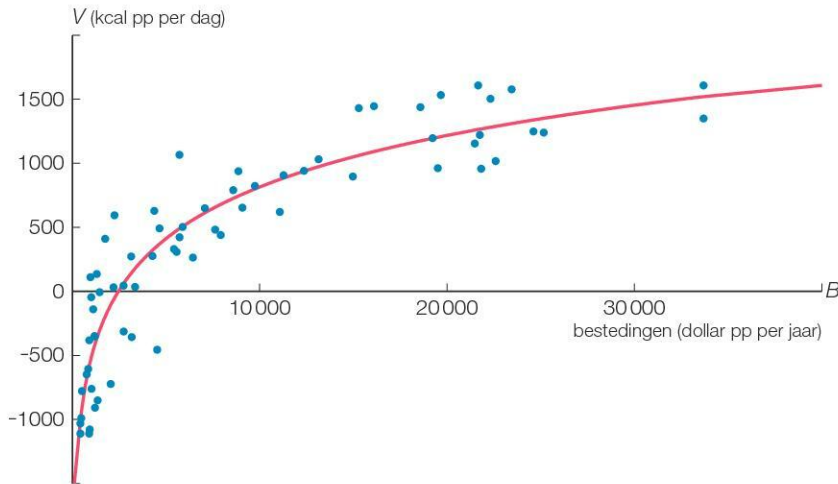
figuur 10.9

Hoe meer mensen te besteden hebben in een land, hoe meer voedsel ze verspillen.

In de figuur hieronder zie je voor een aantal landen wat de bestedingen zijn en wat de voedselverspilling is. Elk punt stelt een land voor.

In de figuur is ook de grafiek getekend die zo goed mogelijk bij de punten past. De formule bij deze grafiek is $V = 1339 \cdot \log(B) - 4539$.

Hierin is V de voedselverspilling in kcal per persoon per dag in een land en B de bestedingen in dollar per persoon per jaar in het land.



figuur 10.3 Bron: PLOS ONE (2020)

- a** In Estland zijn de bestedingen per persoon per jaar 11 275 dollar, terwijl er per persoon per dag 907 kcal voedsel verspild wordt. Hoeveel meer verspilling is dit dan volgens de formule verwacht mag worden?
- b** In Nederland zijn de bestedingen 22 591 dollar per persoon per jaar en is de voedselverspilling 1017 kcal per persoon per dag. Bereken of Nederland zuiniger met voedsel omgaat dan op basis van de formule verwacht mag worden.

Neem aan dat een mens per dag gemiddeld 2600 kcal energie nodig heeft. Als mensen meer voedsel kopen dan ze op basis van deze aanname nodig hebben, dan noemen we dat verspilling.

- c** In Zimbabwe is de voedselverspilling -1000 kcal per persoon per dag. Leg uit wat de betekenis is van deze waarde.
- d** Bereken bij welke bestedingen in een land de voedselverspilling gelijk is aan 0.
- e** Voor India is V gelijk aan 0. Leg uit waarom dit niet betekent dat niemand in India voedsel verspilt.

Terugblik

De logaritme

Wil je weten voor welke x geldt dat $2^x = 30$, dan is het antwoord $x = {}^2\log(30)$. Dus ${}^2\log(30)$ is de exponent van de macht met grondtal 2, waarmee de macht gelijk is aan 30. In ${}^2\log(30)$ is 2 het grondtal van de logaritme.

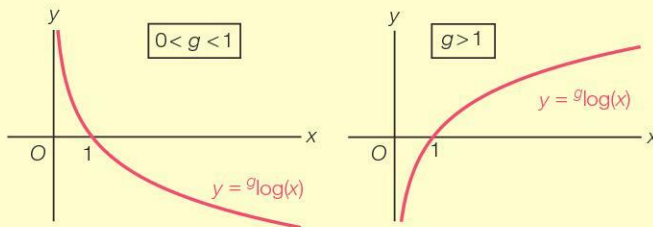
Voor logaritmen gelden de volgende afspraken:

- $g^{{}^g\log(a)} = a$, dus $2^{{}^2\log(30)} = 30$
- ${}^g\log(g^a) = a$, dus ${}^5\log(\frac{1}{125}) = {}^5\log(\frac{1}{5^3}) = {}^5\log(5^{-3}) = -3$
- ${}^g\log(x) = a$ betekent $x = g^a$, dus als ${}^2\log(x) = 7$ dan is $x = 2^7 = 128$.

Logaritmische formules

De grafiek van $y = {}^g\log(x)$ is een standaardgrafiek.

We onderscheiden de situaties $0 < g < 1$ en $g > 1$.



Met log wordt ${}^{10}\log$ bedoeld, dus $\log(1000) = 3$ en $\log(\frac{1}{100}) = -2$.

De GR heeft een toets log (TI, NW en Casio) of LOG (HP) waarmee je logaritmen met grondtal 10 kunt berekenen. Bijvoorbeeld $\log(75) \approx 1,875$ en $\log(0,043) \approx -1,367$.

Je kunt met de GR ook logaritmen met een ander grondtal berekenen.

Voor het berekenen van ${}^5\log(40)$ tik je op de TI, de NW en de HP in $\log(40, 5)$.

Bij de Casio gebruik je de optie logab uit het OPTN-CALC menu.

Je krijgt ${}^5\log(40) \approx 2,292$.

Om ${}^5\log(40)$ te kunnen berekenen, kun je ook gebruikmaken van de

rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$. Je krijgt ${}^5\log(40) = \frac{\log(40)}{\log(5)} \approx 2,292$.

Je kunt deze rekenregel tevens gebruiken om de formule $N = 7 \cdot {}^3\log(x)$ in de vorm $N = b \cdot \log(x)$ te schrijven.

Je krijgt $N = 7 \cdot {}^3\log(x) = 7 \cdot \frac{\log(x)}{\log(3)} = \frac{7}{\log(3)} \cdot \log(x) \approx 14,7 \cdot \log(x)$, dus $N = 14,7 \cdot \log(x)$.

Bij de formule $N = 20 + 26,6 \cdot \log(x)$ geldt: als x verdubbelt, dan neemt N steeds met hetzelfde getal toe. Neem bijvoorbeeld $x = 10$ en $x = 20$.

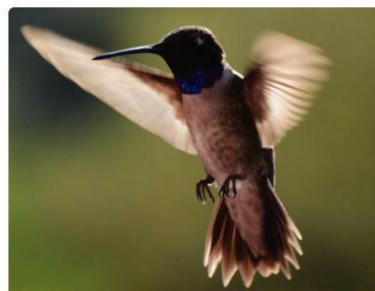
$x = 10$ geeft $N = 46,6$ en $x = 20$ geeft $N \approx 54,6$, dus het getal is 8.

10.4 Werken met logaritmen

052
☐ ⊗ *

Van een aantal dieren is een indicatie gegeven van het gewicht van een volwassen exemplaar.

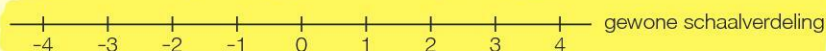
kolibrie	0,002 kg
muis	0,02 kg
egel	0,9 kg
wasbeer	10 kg
zeehond	100 kg
paard	600 kg
olifant	5500 kg
walvis	100 000 kg



- Hoeveel keer zo zwaar is de walvis als de wasbeer?
En hoeveel keer zo zwaar als de kolibrie?
- We willen de acht gewichten op een getallenlijn zetten.
Stel dat we de eenheid zo kiezen, dat 1 mm overeenkomt met 1 gram.
Hoe lang moet de getallenlijn dan worden?
- Neem aan dat op de getallenlijn 1 mm overeenkomt met 1000 kg.
Hoe lang moet de getallenlijn dan worden? Welk bezwaar is tegen deze eenheid in te brengen?

Theorie A Logaritmische schaalverdeling

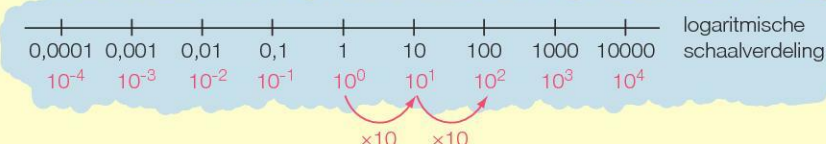
In opgave 52 heb je gezien dat je de waarnemingsgetallen niet goed kunt uitzetten op de getallenlijn met een gewone schaalverdeling. Daarom gebruiken we hiervoor een **logaritmische schaalverdeling**. Bij een gewone schaalverdeling zit er tussen de getallen 0 en 1 evenveel afstand als tussen de getallen 1 en 2, enzovoort.



Bij een logaritmische schaalverdeling zit er tussen de getallen $10^0 = 1$ en $10^1 = 10$ evenveel afstand als tussen de getallen $10^1 = 10$ en $10^2 = 100$.

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

Bij een vaste stapgrootte hoort bij een logaritmische schaalverdeling dus een vaste factor.



In figuur 10.3 zie je een gedeelte van een vel **logaritmisch papier**. Op de y -as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Op deze as staat het getal 1 bij het snijpunt met de x -as. Op de x -as is een gewone schaalverdeling gekozen.

Met de getallen langs de y -as kun je bij elke horizontale lijn te weten komen welke y -waarde erbij hoort.

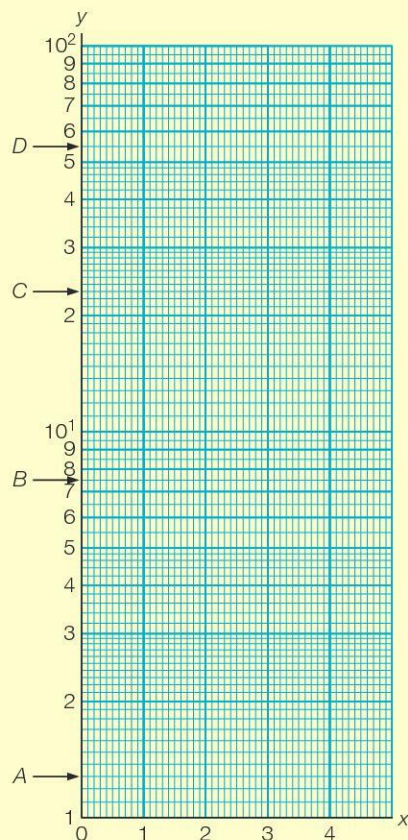
Van onder naar boven zie je eerst de getallen 1, 2, 3, ..., 9 en $10^1 = 10$.

De lijn direct boven de lijn $y = 10$ hoort bij $y = 11$, dan $y = 12$, ... tot en met $y = 20$. Bij de lijn $y = 20$ staat 2, want $2 \cdot 10^1 = 20$.

Verder naar boven krijg je vervolgens lijnen bij de waarden 21, 22, 23, ..., 29 en 30.

Tussen 30 en 40 staan alleen nog maar lijnen bij 32, 34, 36 en 38.

Tussen 50 en 60 staat alleen nog maar een lijn bij 55.



figuur 10.3

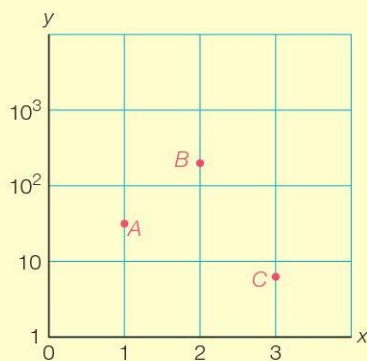
Soms krijg je te maken met logaritmisch papier zoals in figuur 10.4.

Om de y -waarde van het punt A te berekenen, bedenk je dat de afstand tussen 1 en 10 op de verticale as 1 cm is.

Het punt A ligt tussen de lijnen $y = 10^1$ en $y = 10^2$. Opmeten geeft $y_A = 10^{1,5} \approx 32$.

Het punt B ligt tussen de lijnen $y = 10^2$ en $y = 10^3$. Opmeten geeft $y_B = 10^{2,3} \approx 200$.

Het punt C ligt tussen de lijnen $y = 10^0$ en $y = 10^1$. Opmeten geeft $y_C = 10^{0,8} \approx 6,3$.



figuur 10.4

Voorbeeld

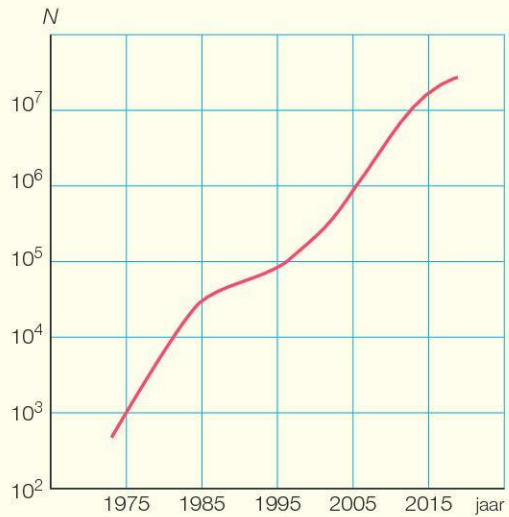
Gegeven is de grafiek in figuur 10.5.
Bereken met welke factor N is
toegenomen in de periode 1985-2015.
Rond af op tientallen.

Uitwerking

In 1985 is $N = 10^{4,5} \approx 31\,600$.

In 2015 is $N = 10^{7,25} \approx 17\,800\,000$.

De factor is $\frac{17\,800\,000}{31\,600} \approx 560$.



figuur 10.5

53 Zie figuur 10.3.



- a Welke y -waarden horen bij de letters A tot en met D ?
- b Je ziet in de figuur wel een lijn bij 13, maar niet bij 33.
Bij welke van de volgende y -waarden is een lijn getekend?
49 9,5 2,4 1,25 0
- c Bij een onderzoek variëren de meetresultaten van 10^3 tot 10^5 .
Om deze gegevens op het logaritmisch papier van figuur 10.3 te kunnen uitzetten, zet men op de verticale as 10^3 op de hoogte van de horizontale as en 10^5 bij de bovenste horizontale lijn.
Bij letter A hoort dan het getal 1300.
Welke getallen horen in dit geval bij de letters B , C en D ?

54 [▶ WERKBLAD] Bij desinfectie worden schadelijke micro-organismen



op oppervlakken en voorwerpen verminderd. In de tabel zie je hoe het aantal micro-organismen N tijdens het uitkoken van een medisch instrument afneemt. In deze tabel is t de tijd in minuten dat het uitkoken duurt.

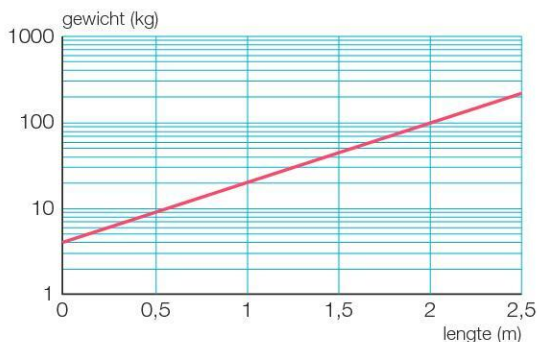
- a Teken de punten die uit de tabel volgen op het logaritmisch papier en verbind de getekende punten door lijnstukken.
- b Gebruik de grafiek die je in vraag a hebt getekend om het aantal micro-organismen te schatten op $t = 1,5$ en $t = 2,5$.
- c Na hoeveel minuten ongeveer is het aantal micro-organismen teruggebracht tot 100? Geef het antwoord in één decimaal.

t	N
0	100 000
1	15 000
2	2000
3	400
4	50

55




In 2016 werd de app Pokémon GO van het Japanse bedrijf Nintendo een wereldwijde rage. In dit spel worden animaties geprojecteerd op beelden van de camera van je smartphone. Spelers moeten in de echte wereld denkbeeldige wezens zoeken, vangen en trainen: de zogeheten Pokémon. Bij bepaalde wezens bestaat er een verband tussen gewicht en lengte. Dit verband is weergegeven in figuur 10.6.



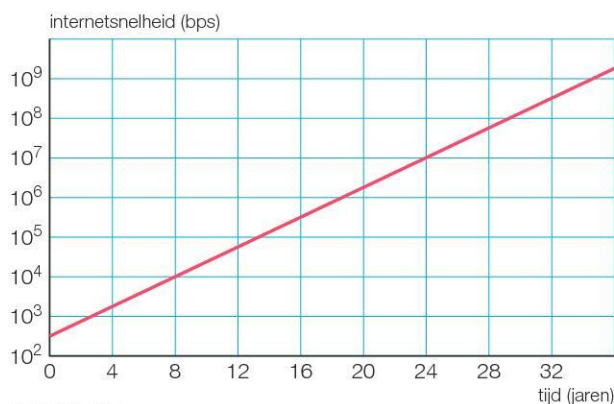
figuur 10.6

- De Pokémon *Squirtle* heeft een lengte van 0,5 meter. Welk gewicht hoort daarbij?
- De Pokémon *Poliwhirl* weegt 20 kg. Wat is zijn lengte?
- Als een Pokémon vijf keer zo zwaar is als een andere Pokémon, dan is het verschil in lengte altijd hetzelfde. Zoek uit hoeveel cm dat verschil is.

56




Internetverbindingen worden steeds sneller. In 1998 ontdekte de Deense consultant Jakob Nielsen dat de snelheid van de internetverbinding voor zijn bedrijf sinds 1984 elk jaar met ongeveer 50% was toegenomen. Hij voorspelde dat deze exponentiële toename zich zou voortzetten voor alle grootverbruikers, zoals bedrijven en scholen. Deze voorspelling staat bekend als de wet van Nielsen. In figuur 10.7 is de snelheid van de interverbinding van Nielsen's bedrijf weergegeven in bps (bits per seconde), waarbij t de tijd in jaren is met $t = 0$ in 1984.



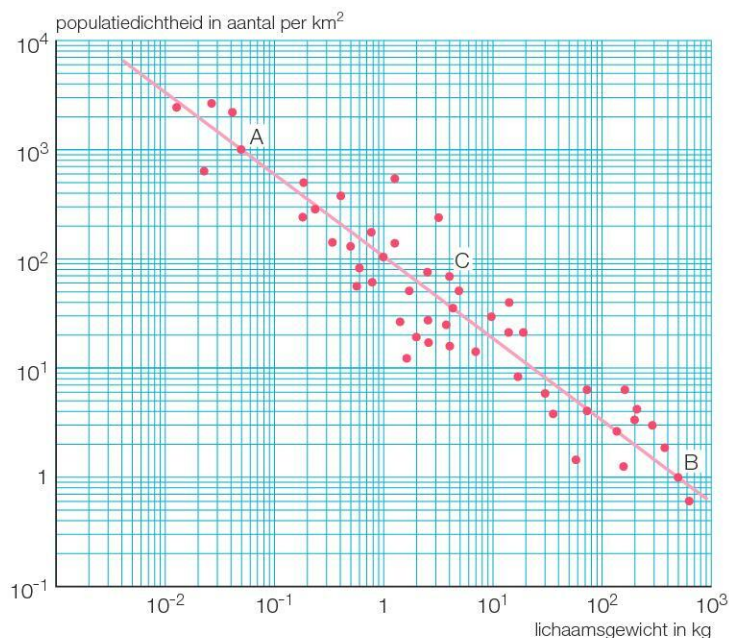
figuur 10.7

- Wat was de snelheid in bps van de internetverbinding in 2000? Rond af op tienduizendtallen.
- In hoeveel jaar tijd nam de snelheid toe van 10000 bps tot 10 Mbps? Gebruik dat $1 \text{ Mbps} = 10^6 \text{ bps}$.
- Bereken met hoeveel procent per jaar de snelheid toenam in de periode 1984-2016. Rond af op één decimaal.

A57




In figuur 10.8 zie je **dubbellogaritmisch papier**: zowel op de verticale als op de horizontale as is een logaritmische schaal aangebracht. Van verschillende soorten zoogdieren is de populatiedichtheid uitgezet tegen het gewicht van een volwassen exemplaar.



figuur 10.8

- Geef het gewicht en de populatiedichtheid van soort A. Doe dat ook voor de soorten B en C.
- Een soort heeft een gewicht van 1 kg. Geef de populatiedichtheid van deze soort.
- In een natuurpark met een oppervlakte van 25 km² leven 150 bavianen. Hoeveel is het gewicht van deze soort?



O58




Gegeven is de formule $N = 2^{\log(x-3)}$.

Hieruit volgt dat $x - 3 = 2^N$.

- Uit welke afspraak over logaritmen volgt dit?

Gegeven is de formule $y = 4 + 3^x$.

Je kunt x uitdrukken in y . Je krijgt $x = 3^{\log(y-4)}$.

- Laat zien hoe dat gaat.

Theorie B Variabelen vrijmaken bij formules met exponenten en logaritmen

Je kunt bij de formule $P = 5 + {}^2\log(x)$ de variabele x vrijmaken.

Je gebruik daarbij dat ${}^g\log(x) = a$ betekent $x = g^a$. Je krijgt

$$P = 5 + {}^2\log(x)$$

$${}^2\log(x) = P - 5$$

$$x = 2^{P-5}$$

$${}^2\log(x) = y \text{ geeft } x = 2^y$$

Je kunt bij de formule $Q = 6 - 2^y$ de variabele y vrijmaken.

Je gebruikt daarbij dat $g^a = x$ geeft $a = {}^g\log(x)$. Je krijgt

$$Q = 6 - 2^y$$

$$2^y = 6 - Q$$

$$y = {}^2\log(6 - Q)$$

$$2^y = x \text{ geeft } y = {}^2\log(x)$$

Voorbeeld

- a** De formule $N = \log(x - 5) - 2$ is te schrijven in de vorm

$$x = a + b \cdot 10^N.$$

Bereken a en b .

- b** Gegeven is de formule $y = 5 + 3^{x-1}$.

Druk x uit in y .

Uitwerking

- a** $N = \log(x - 5) - 2$

$$\log(x - 5) = N + 2$$

$$x - 5 = 10^{N+2}$$

$$x = 5 + 10^N \cdot 10^2$$

$$x = 5 + 100 \cdot 10^N$$

Dus $a = 5$ en $b = 100$.

- b** $y = 5 + 3^{x-1}$

$$3^{x-1} = y - 5$$

$$x - 1 = {}^3\log(y - 5)$$

$$x = 1 + {}^3\log(y - 5)$$

Gebruik de rekenregel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ van rechts naar links.

59



- a** De formule $N = \log(x - 4) - 3$ is te schrijven in de vorm

$$x = a + b \cdot 10^N.$$

Bereken a en b .

- b** Gegeven is de formule $y = 2 + 4^{x-3}$.

Druk x uit in y .

- c** Schrijf de formule $P = 2 \cdot {}^3\log(x) - 4$ in de vorm $x = a \cdot g^P$.

Rond g af op drie decimalen.

- d** Maak de variabele x vrij bij de formule $K = 10 - 2 \cdot 4^x$.

60



- a** De formule $M = {}^2\log(2t - 6)$ is te herleiden tot $t = 3 + 2^{M-1}$.
Laat deze herleiding zien.
- b** Maak de variabele N vrij bij de formule $F = 16 - 2^{2N-1}$.
- c** De formule $x = 3^{0,25y-0,6}$ is te schrijven in de vorm $y = a + b \cdot {}^3\log(x)$.
Bereken a en b .
- d** De formule $y = \log(2x + 3) - 0,8$ is te schrijven in de vorm
 $x = a + b \cdot 10^y$
Bereken a en b . Rond zo nodig af op twee decimalen.

61



- a** Herleid de formule $Z = {}^3\log(4n + 1) - 6$ tot de vorm $n = a + b \cdot 3^Z$.
- * b** De formule $y = 3 + 2^{2x-3}$ is te schrijven in de vorm
 $x = a + b \cdot \log(y - 3)$.
Bereken a en b . Rond zo nodig af op twee decimalen.
- c** Schrijf de formule $D = \log(\sqrt{E}) - 1\frac{1}{2}$ in de vorm $E = 10^{aD+b}$.

62



- De formule $\log(W) = 0,38 + 0,008h$ geeft voor kinderen tussen 5 en 13 jaar het verband tussen het gewicht W in kg en de lengte h in cm. Deze zogenaamde *Ehrenberg-relatie* blijkt in veel landen in de westerse wereld op te gaan.
- a** Robert heeft een lengte van 1,30 meter.
Bereken zijn gewicht in gehele kg.
- b** Chantal weegt 23,5 kg.
Bereken haar lengte in cm nauwkeurig.
- c** Schrijf de formule in de vorm $W = b \cdot g^h$. Rond b af op één decimaal en g op vier decimalen.

A63



- Stijn haalt een pak melk uit de koelkast. Voor de temperatuur van de melk heeft Stijn de formule $t = 25 - k \cdot \log(20 - T)$ opgesteld. Hierin is t de tijd in minuten vanaf het moment dat hij de melk uit de koelkast heeft gehaald en is T de temperatuur van de melk in $^{\circ}\text{C}$. De temperatuur in de koelkast is 5°C .
- a** Bereken k . Rond af op twee decimalen.

Neem in het vervolg van deze opgave $k = 21$.

- b** De formule is te schrijven in de vorm $T = a + b \cdot g^t$.
Bereken a , b en g . Rond b af op één decimaal en g op drie decimalen.
- c** Bereken de temperatuur van de melk na 45 seconden. Rond af op één decimaal.

A64
  

Met de formule $S = 290 \cdot \log(g + 100) - 550$ kun je de schouderhoogte S in cm berekenen van een eland waarvan het gewei een spanwijdte heeft van g cm.

- Een eland heeft een gewei met een spanwijdte van 1,85 meter. Bereken de schouderhoogte in cm nauwkeurig.
- Schrijf de formule in de vorm $g = a \cdot b^S + c$. Rond a af op gehelen en b op drie decimalen.
- De schouderhoogte van een eland is 2,05 meter. Bereken de spanwijdte van het gewei in cm nauwkeurig.



A65
  

Het geluidsniveau dat door motorvoertuigen op dicht asfaltbeton (DAB) wordt veroorzaakt, is te berekenen met de formule $L = a + b \cdot \log\left(\frac{v}{v_0}\right)$.

Hierin is L het geluidsniveau in decibel (dB), v de snelheid van het motorvoertuig in km/uur en v_0 een referentiesnelheid.

Een onderzoek levert de volgende gegevens op.

	a	b	v_0
personenauto	74,8	33,0	80 km/uur
vrachtauto	83,5	22,8	70 km/uur

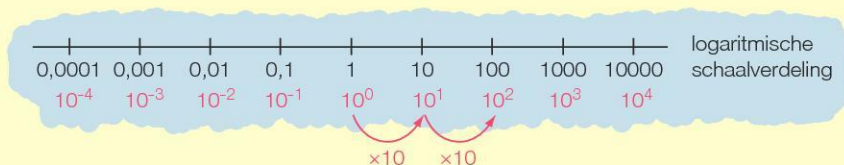
- Bij een snelheid van 90 km/uur is het geluidsniveau van een vrachtauto hoger dan het geluidsniveau van een personenauto. Hoeveel procent hoger?
- Licht toe dat uit de formule volgt dat het geluidsniveau daalt, naarmate de snelheid van een personenauto verder onder 80 km/uur ligt.
- Een personenauto produceert een geluidsniveau van 82 dB. Bereken de snelheid van de auto. Rond af op gehelen.
- Schrijf voor vrachtauto's de formule in de vorm $v = c \cdot g^L$. Rond a en g af op drie decimalen.

Terugblik

Logaritmische schaalverdeling en logaritmisch papier

Bij een logaritmische schaalverdeling zit er tussen de getallen $10^0 = 1$ en $10^1 = 10$ evenveel afstand als tussen de getallen $10^1 = 10$ en $10^2 = 100$.

Bij een vaste stapgrootte hoort bij een logaritmische schaalverdeling dus een vaste factor.



Een voordeel van een logaritmische schaalverdeling is dat je waarnemingen kunt uitzetten die sterk in grootte verschillen.

Bij logaritmisch papier is op de verticale as een logaritmische schaalverdeling aangebracht. Op de horizontale as staat een gewone schaalverdeling.

In de figuur hiernaast staat op de verticale as een logaritmische schaalverdeling.

Voor $t = 2,5$ ligt N tussen 10^2 en 10^3 . Opmeten geeft $N = 10^{2,5} \approx 316$.

Voor $t = 1,5$ is $N = 10^{0,75} \approx 5,6$.



Variabelen vrijmaken

Je kunt de formule $N = -3 + {}^2\log(x - 4)$ schrijven in de vorm $x = a + b \cdot 2^N$.

Je krijgt ${}^2\log(x - 4) = N + 3$

$$x - 4 = 2^{N+3}$$

$$x = 4 + 2^N \cdot 2^3$$

$$x = 4 + 8 \cdot 2^N$$

Je kunt bij de formule $y = 5 + 2^{x-3}$ de variabele x vrijmaken.

Je krijgt $2^{x-3} = y - 5$

$$x - 3 = {}^2\log(y - 5)$$

$$x = 3 + {}^2\log(y - 5)$$

Eindopdracht Verborgen composities

In de beginopdracht heb je gelezen hoe radioactiviteit kan worden gebruikt bij het onderzoeken van oude schilderijen. Een schilderij wordt radioactief gemaakt en onderzoekers meten vervolgens de straling die verfstoffen in het schilderij uitzenden. Van belang daarbij is de (radio)activiteit van de verschillende radioactieve stoffen. Dat is de hoeveelheid straling die per seconde wordt uitgezonden. De eenheid die gebruikt wordt voor de activiteit is becquerel (Bq). De activiteit A van een stof na t uur wordt gegeven door $A = b \cdot g^t$. Zowel b als g zijn afhankelijk van de halfwaardetijd T van een stof in uren, dat is de tijd waarin de activiteit halveert. Gebruik in deze opdracht dat $b = \frac{2,6 \cdot 10^9}{T}$.

Elke stof heeft zijn eigen halfwaardetijd. Die van mangaan-56, arseen-72 en kobalt-60 zijn achtereenvolgens 2,6 uur, 26 uur en 5,2 jaar.

De formule voor de activiteit van mangaan-56 is $A_m = 1 \cdot 10^9 \cdot 0,76598^t$ en die van kobalt-60 is $A_k = 5,7 \cdot 10^4 \cdot 0,99998^t$.

- Toon aan dat de formule voor de activiteit van mangaan-56 juist is.
- Stel een formule op voor de activiteit A_a van arseen-72. Rond g af op vijf decimalen.

Een schilderij wordt onderzocht door er fotografische platen op te leggen. Op de plekken van het schilderij waar de verfstoffen met radioactieve stoffen zitten, wordt de plaat zwart. Door de fotografische platen na enige tijd te vervangen, kan men onderscheid maken tussen de straling van de verschillende stoffen. Het is belangrijk deze vervanging op het juiste tijdstip te doen. De eerste plaat wordt verwijderd als de activiteit van mangaan-56 is gedaald tot 90 MBq.

- Op welk tijdstip wordt de eerste plaat verwijderd? Rond af op één decimaal. Wat is dan de activiteit van arseen-72 en kobalt-60?

De tweede en derde plaat worden verwijderd als de activiteit van arseen-72 en kobalt-60 is gedaald tot achtereenvolgens 185 kBq en 54 kBq.

- Neem de tabel hiernaast over en vul in.

Het is bekend dat sommige schilders bij het maken van een schilderij eerst de compositie schetsten met mangaanhoudende verf. Deze werd later overschilderd, waarbij soms onderdelen werden toegevoegd of weggelaten.

- Leg uit hoe onderzoekers deze veranderingen zichtbaar kunnen maken. Gebruik daarbij de ingevulde tabel.

t	$t_1 = \dots$	$t_2 = \dots$	$t_3 = \dots$
A_m	$90 \cdot 10^6$	...	...
A_a	...	$185 \cdot 10^3$	...
A_k	...	...	$54 \cdot 10^3$

Diagnostische toets

10.1 Exponentiële groei

- 1** De kosten voor het opwekken van energie met behulp van zonnecellen zijn de laatste jaren enorm afgenomen. Vanaf 2009 nam de kostprijs per megawattuur (MWh) geleverde energie door een zonnecel met ongeveer 22% per jaar af. In 2009 waren de kosten 375 euro per MWh geleverde energie.

Een zonnepark levert jaarlijks 500 MWh aan energie.

Bereken de jaarlijkse kosten die gepaard gaan met het opwekken van deze hoeveelheid energie in 2021.

- 2** De halveringstijd van de radioactieve stof jodium-128 is 25,0 minuten. Bereken met welk percentage de hoeveelheid radioactieve stof per minuut afneemt.

10.2 Groeipercentages en formules

- 3** Bij een exponentieel groeiproces neemt de hoeveelheid per dag met 36% toe.

- a** Bereken het groeipercentage per week. Rond af op gehele.
- b** Bereken het groeipercentage per uur.

Bij een exponentiële toename wordt een hoeveelheid in tien jaar verdrievoudigd.

- c** Hoeveel procent is de toename per maand?

- 4** Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 4$ is $N = 1500$ en op $t = 7$ is $N = 1200$. Hierbij is t de tijd in dagen. Stel de formule op van N . Rond de groeifactor af op drie decimalen en de beginhoeveelheid op tientallen.

- 5** Een bepaald soort plastic absorbeert een deel van het licht dat erop valt. Elke laag van 1 mm dikte absorbeert 30% van het licht.

- a** Hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid licht komt door een plastic plaat van 5 mm?
- b** Hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid licht wordt geabsorbeerd door een plaat van 1 cm?
- c** Het plastic is alleen leverbaar in diktes van een geheel aantal mm. Hoe dik moet de plastic plaat zijn opdat niet meer dan 1% van het licht erdoorheen gaat?

10.3 Logaritmen

- 6** Bereken zonder gebruik te maken van de GR.

a ${}^5\log(625)$

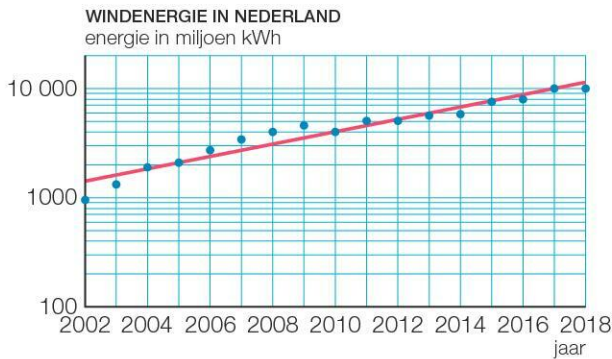
b ${}^2\log(\frac{1}{8})$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log(\frac{1}{4})$

- 7** a Schrijf de formule $N = 5 \cdot {}^3\log(t)$ in de vorm $N = a \cdot \log(t)$. Rond af op één decimaal.
- b Gegeven is de formule $N = 50 + 119,6 \cdot \log(x)$.
Bij een verdubbeling van x neemt N steeds met hetzelfde getal toe.
Bereken dit getal. Rond af op gehele.

10.4 Werken met logaritmen

- 8** [►WERKBLAD] In figuur 10.9 zie je voor de jaren 2002 tot en met 2018 hoeveel windenergie er in Nederland is geproduceerd. Verder geeft de lijn een indruk van de ontwikkeling in deze periode. Op de verticale as is een logaritmische schaal gebruikt.



figuur 10.9

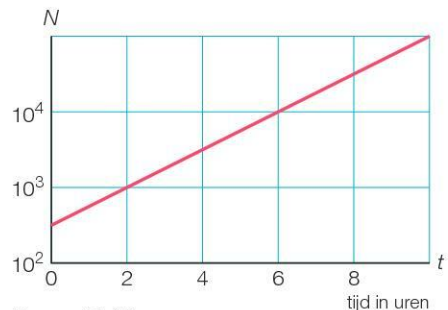
- a** In 2016 werd er meer windenergie geproduceerd dan in 2008.
Hoeveel keer zoveel?

Bij de lijn hoort de formule $\log(W) = 3,146 + 0,057t$. Hierin is W de hoeveelheid windenergie in miljoenen kWh en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2002.

- b** Gebruik de formule om te voorspellen hoeveel kWh windenergie er in Nederland in 2030 geproduceerd zal worden. Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.
- c** Schrijf de formule in de vorm $W = b \cdot g^t$. Rond b af op gehele en g op twee decimalen.

- 9** In de figuur hiernaast zie je hoe het aantal bacteriën N op een zojuist schoongemaakte deurklink zich ontwikkelt. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ om 7:00 uur.

- a** Op welk tijdstip zitten er 10 000 bacteriën op de deurklink?
- b** Hoeveel bacteriën zitten er om 11:00 uur op de deurklink? Rond af op honderdtallen.



figuur 10.10

- 10** a Schrijf de formule $y = {}^3\log(5x - 1) - 2$ in de vorm $x = a + b \cdot g^y$.
- b Maak de variabele p vrij bij de formule $q = 3 - 2^{p-2}$.

11

Logisch redeneren

Wat leer je?

- Wanneer een redenering logisch geldig is.
- Wat een propositie en wat een als-dan-bewering is.
- Logische symbolen en waarheidstabellen gebruiken.
- Hoe een redenering is opgebouwd.
- Wat noodzakelijke en wat voldoende voorwaarden zijn.
- Venndiagrammen gebruiken bij logische problemen.
- Wat een contradictie en wat een paradox is.



Beginopdracht Cluedo

Cluedo is een bekend bordspel. Al meer dan zeventig jaar geleden werd de eerste versie uitgebracht en nog steeds verschijnen er nieuwe versies.

Het doel van het spel is om een moord in een villa op te lossen. Je moet uitvinden wie de dader is, waar de moord is gepleegd (de locatie) en welk wapen er is gebruikt. Op verschillende momenten in het spel hebben de spelers niet dezelfde kennis over deze feiten.



Aiden, Bo en Chaima spelen een potje Cluedo. Geïnspireerd door het spel geeft Aiden na afloop het volgende raadsel aan Bo en Chaima. Hij zegt tegen Bo wie de dader is en tegen Chaima wat de locatie is. Aan beiden geeft hij verder het volgende overzicht met mogelijkheden. Hiermee moeten Bo en Chaima de moord proberen op te lossen, zonder dat Bo de dader noemt en zonder dat Chaima de locatie noemt.

Het was Professor Pimpel in de tuin.
Het was Professor Pimpel in de studeerkamer.
Het was Professor Pimpel in de bibliotheek.
Het was Kolonel van Geelen in de hal.
Het was Kolonel van Geelen in de biljartkamer.
Het was Mevrouw Blauw van Draet in de zitkamer.
Het was Mevrouw Blauw van Draet in de bibliotheek.
Het was Rosa Roodhart in de zitkamer.
Het was Rosa Roodhart in de tuin.
Het was Rosa Roodhart in de hal.

- Geef al deze mogelijkheden weer in een overzichtelijk schema.

Bo zegt: 'Ik kan de moord nog niet oplossen, maar ik weet dat Chaima dat ook nog niet kan.'

- Leg uit dat de moord niet in de studeerkamer gepleegd is. Waarom valt Professor Pimpel af als dader?
- Welke dader valt nog meer af? Licht toe.

Chaima zegt: 'Eerst kon ik de moord nog niet oplossen, maar nu wel.'

- Welke locatie valt af? Licht toe.

Bo zegt: 'Nu kan ik de moord ook oplossen.'

- Wie is de dader en wat is de locatie? Licht toe.

Voorkennis Conclusies en tegenvoorbeelden

Theorie A Conclusies trekken

Als je weet dat Ad ouder is dan Ben en dat Ben ouder is dan Cor, dan kun je de conclusie trekken dat Ad ouder is dan Cor.

- 1** a Anja is jonger dan Bo, Bo is jonger dan Cato en Cato is jonger dan Dionne.
Wie is ouder, Anja of Dionne?
- b Ad en Ben zijn samen 40 jaar en Ad is 10 jaar ouder dan Ben.
Hoe oud is Ad?
- c Ad is even zwaar als Ben, Dirk is lichter dan Ad en Cor is even zwaar als Ben.
Wie is zwaarder, Cor of Dirk?
- d Arie verdient per uur twee keer zo veel als Bert. Samen verdienen Arie en Bert 21 euro per uur.
Hoeveel euro per uur verdient Arie?

Theorie B Tegenvoorbeelden

Er is gegeven dat Kees minder dan twee keer zo oud is als Leo en dat Mark ouder is dan Leo. Het vermoeden bestaat dat hieruit volgt dat Kees jonger is dan Mark.

Door slechts één tegenvoorbeeld te geven, kun je laten zien dat het vermoeden niet juist is.

Stel dat bijvoorbeeld Kees 30 jaar is, Leo 20 jaar en Mark 25 jaar.

Hiermee is aan de gegevens voldaan, maar is Kees ouder dan Mark. Dus het vermoeden is niet juist.

- 2** Geef bij elke van de volgende vermoedens een tegenvoorbeeld.
- a Ad verdient minder dan vier keer zoveel als Ben. Cor verdient meer dan twee keer zoveel als Ben. Het vermoeden bestaat dat hieruit volgt dat Ad meer verdient dan Cor.
- b Een fruitsnoepje weegt minder dan een pepermuntje. Een zuurtje weegt minder dan een pepermuntje. Een dropje weegt minder dan een fruitsnoepje. Het vermoeden bestaat dat hieruit volgt dat een zuurtje meer weegt dan een dropje.
- c In A wonen anderhalf keer zoveel mensen als in B. Verder heeft A 20 000 meer inwoners dan C. Het vermoeden bestaat dat hieruit volgt dat C meer inwoners heeft dan B.

11.1 Redeneren



01 In het voetbal wordt wel eens gezegd: ‘De bal is rond en hij kan dus alle kanten op.’

- a** Vind je deze uitspraak logisch klinken?
- b** Waarom kan volgens deze uitspraak een bal alle kanten op?

Theorie A Logische geldigheid

De **logica** is de kunst van het redeneren. Daarbij gaat het over de formele regels bij het redeneren. Hierbij is feitenkennis niet van belang, maar alleen of een redenering logisch geldig is.

De uitspraak in opgave 1 is een *onvolledige redenering*. Wat men eigenlijk bedoelt te zeggen, is het volgende.

Iets dat rond is, kan alle kanten op.

Een bal is rond.

Een bal kan dus alle kanten op.

Dit is een **volledige redenering**. De **conclusie** in de derde zin volgt volledig logisch uit de **uitgangspunten** in de eerste en de tweede zin. Dat wil niet zeggen dat de conclusie waar is, alleen dat de regels van de logica juist zijn gevolgd. Als je aanneemt dat iets dat rond is alle kanten op kan en dat een bal rond is, dan is de conclusie gerechtvaardigd dat een bal dus alle kanten op kan. De redenering is dan **logisch geldig**.

Ook betekenisloze of onzinnige redeneringen kunnen logisch geldig en volledig zijn. Bekijk de volgende redenering die bestaat uit twee uitgangspunten en een conclusie.

Ieder blubje is een kwakeldier.

Plonsje is een blubje.

Plonsje is dus een kwakeldier.

Ook al hebben we geen idee wat een blubje of een kwakeldier is, deze redenering is wel logisch geldig en volledig.

Bekijk nu de volgende redenering.

Ieder antwoord is goed of dom.

Het antwoord van Nordin is niet goed.

Het antwoord van Nordin is dus dom.

Deze redenering is logisch geldig, ook al is deze onzinnig. In het dagelijks leven kan een antwoord dat niet goed is, wel degelijk verstandig of slim zijn. In de logica gaat het echter alleen om het geven van een geldige conclusie op basis van de uitgangspunten.



R2 Geef zelf een voorbeeld van een redenering die betekenisloos of onzinnig is, maar wel logisch geldig en volledig.

- 3** Onderzoek bij de volgende redeneringen of ze logisch geldig zijn. Geef duidelijk aan wat er niet klopt als de redenering niet logisch geldig is.
- a** Wasmachines van Miele gaan minstens tien jaar mee. Thuis hebben we een wasmachine van AEG. Onze wasmachine gaat dus niet minstens tien jaar mee.
 - b** Alle mannen zijn goed in breien. Bill is een man. Dus Bill is goed in breien.
 - c** Als je niet goed bent in taal, dan ben je goed in rekenen. Cara is goed in taal. Dus Cara is niet goed in rekenen.

- 4** Sjeng uit Maastricht zit met zijn vriend Jack in een café. Jack is een zanger uit het Noord-Limburgse America. Hij zingt liedjes in zijn eigen dialect. Sjeng zegt altijd dat alleen mensen uit Zuid-Limburg de ware Limburgse taal spreken.
Tot welke conclusie over het dialect van zanger Jack zal Sjeng komen? Geef de volledige redenering die door Sjeng wordt gevolgd.

- 05** Ad, Ben en Cor staan achter elkaar en hebben elk een rode of blauwe pet op. Niemand kan zijn eigen pet zien. Ad kan de petten van Ben en Cor zien en Ben kan de pet van Cor zien. Ze weten bovendien dat er minstens één blauwe pet is.
Aan Ad wordt gevraagd: 'Welke kleur pet heb jij op?'
Ad zegt: 'Ik weet het niet.' Daarna wordt aan Ben gevraagd: 'Welke kleur pet heb jij op?' Ben zegt: 'Ik weet het niet.' Daarna zegt Cor: 'Ik weet nu wel de kleur van mijn pet.'
Welke kleur is dat? Licht toe.



figuur 11.1

Theorie B Logische problemen

Het probleem van opgave 5 kun je oplossen door logisch te redeneren. Daarbij kan het helpen alle mogelijke beginsituaties schematisch weer te geven zoals hiernaast. Omdat Ad het niet weet valt situatie 5 af, want als Ad twee rode petten ziet, dan weet hij dat hij een blauwe pet op heeft. Als Ben een rode pet bij Cor ziet, dan weet hij dat hij een blauwe pet op heeft, want Ben weet dat Ad minstens één blauwe pet heeft gezien. Ben weet het niet, dus daarom vallen de situaties 2 en 6 af. Nadat Ben heeft gezegd 'Ik weet het niet' zijn dus de situaties 1, 3, 4 en 7 overgebleven. Zie hiernaast. Bij elk van deze situaties heeft Cor een blauwe pet op, dus Cor trekt de conclusie dat hij een blauwe pet op heeft.

3 blauwe	①	b	b	b
2 blauwe	②	b	b	r
	③	b	r	b
	④	r	b	b
1 blauwe	⑤	b	r	r
	⑥	r	b	r
	⑦	r	r	b
		Ad	Ben	Cor

figuur 11.2

①	b	b	b
③	b	r	b
④	r	b	b
⑦	r	r	b
	Ad	Ben	Cor

figuur 11.3

We vatten het voorgaande samen in het volgende werkschema.

Werkschema: een aanpak van logische problemen

- 1 Schrijf alle mogelijke beginsituaties op.
- 2 Streep bij elke nieuwe informatie de situatie(s) weg die afvallen.
- 3 Trek een conclusie uit de overgebleven situatie(s).

In de volgende opgaven kun je het werkschema gebruiken. Maar het is ook mogelijk een redenering te geven die uit een aantal **redeneerstappen** bestaat. In opgave 6d zie je daar een voorbeeld van.

6


Ad, Ben en Cor hebben elk een rode of een blauwe pet op. Ze kunnen de kleur van de pet van de anderen wel zien, naar die van zichzelf niet. Ze weten dat er minstens één rode pet is.

Ad zegt: 'Ik weet niet welke kleur pet ik op heb.'

Ben zegt: 'Ik weet ook niet welke kleur pet ik op heb.'

Dan zegt Cor: 'Maar dan weet ik het wel!'

In de figuur hiernaast zijn alle mogelijke beginsituaties weergegeven.

- a** Welke situatie valt af nadat Ad heeft gezegd dat hij de kleur van zijn pet niet weet? Licht toe.

1 rood	①	r	b	b
	②	b	r	b
	③	b	b	r
2 rood	④	r	r	b
	⑤	r	b	r
	⑥	b	r	r
3 rood	⑦	r	r	r
		Ad	Ben	Cor

figuur 11.4

Omdat Ben ook niet weet welke kleur pet hij op heeft, vallen ook de situaties 2 en 4 af.

- b** Licht dit toe voor zowel situatie 2 als 4.
- c** Licht toe dat Cor na de uitspraak van Ad en Ben wel weet welke kleur pet hij op heeft. Welke kleur is dat?
- d** Het is ook mogelijk te weten te komen welke kleur pet Cor op heeft door de volgende redenering te houden. Vul daartoe op de puntjes 'rode' of 'blauwe' in.

Als Ad twee ... petten ziet, dan weet hij dat hij zelf een ... pet op heeft. Hij weet het echter niet, dus hij ziet bij Ben en/of Cor een ... pet. Ben weet nu ook dat in ieder geval hij of Cor een ... pet op heeft. Als hij bij Cor een ... pet ziet, dan weet hij dat hijzelf een ... pet op heeft. Hij weet het echter niet, dus hij ziet bij Cor een ... pet. Cor weet dit ook, dus hij weet nu dat hij een ... pet op heeft.

7


Geef bij het probleem van opgave 5 een redenering met redeneerstappen zoals in opgave 6d.



R8 Hiervoor heb je twee mogelijke aanpakken gezien bij het oplossen van logische problemen.

- 1 Maak een schematisch overzicht.
 - 2 Houd een redenering met redeneerstappen.
- Werk beide aanpakken uit bij het volgende probleem.

Ad, Ben, Cor en Daan zitten op een rij zoals hiernaast is getekend. Ad kijkt naar links. Ben, Cor en Daan kijken naar rechts. Ze hebben elk een pet op en ze weten dat er twee rode en twee blauwe petten zijn. Op de tekening is te zien dat Ad en Daan een blauwe pet op hebben en Ben en Cor een rode pet. Ze kunnen hun eigen pet niet zien, maar Ben kan wel de petten zien van Cor en Daan, en Cor kan de pet van Daan zien.



Aan Ad wordt gevraagd: 'Welke kleur pet heb jij op?'

Ad zegt: 'Ik weet het niet.'

Daarna wordt aan Ben gevraagd: 'Welke kleur pet heb jij op?'

Ben zegt: 'Ik weet het niet.'

Daarna zegt Cor: 'Ik weet nu wel de kleur van mijn pet.'

Hoe kan Cor weten dat hij een rode pet op heeft?



9 Ad, Ben, Cor, Daan en Ed trekken lootjes voor Sinterklaas. Ben trekt het lootje van Ad. Cor trekt het lootje van Daan en Daan trekt het lootje van Ed. Verder trekt Ed niet het lootje van Cor. Van wie trekt Ad het lootje?



10 Daan heeft drie dozen met batterijen. In één doos zitten volle batterijen, in één doos zitten lege batterijen en in één doos zitten zowel volle als lege batterijen. Op de dozen zitten de etiketten 'volle batterijen', 'lege batterijen' en 'volle en lege batterijen', maar alle etiketten zitten verkeerd.

Hoe kun je door één batterij uit één doos te proberen, te weten komen wat er in elke doos zit?



A11 Acht personen, we noemen ze A, B, C, D, E, F, G en H, worden achter elkaar gezet. A achteraan, B daarvoor, enzovoort. Ze krijgen elk een rode of een blauwe pet op. Niemand kan zijn eigen pet zien, maar wel alle petten voor zich. Dus A ziet zeven petten, B ziet zes petten, enzovoort. Er wordt aan A gevraagd: 'Welke kleur pet heb je op?'

Daarna mag A voor iedereen hoorbaar 'rood' of 'blauw' zeggen. Daarna wordt dit aan B gevraagd, dan aan C, enzovoort. Er mag maximaal één persoon een verkeerde kleur zeggen.

Ze mogen vooraf een strategie afspreken hoe ze te werk zullen gaan. Ze spreken de volgende strategie af.

- A zegt 'rood' als hij een even aantal rode petten ziet.
- A zegt 'blauw' als hij een oneven aantal rode petten ziet.

Leg uit dat deze strategie werkt.

Vijf kinderen zijn buiten in de modder aan het spelen tot ze naar binnen worden geroepen voor het eten. Ze gaan aan tafel zitten en kunnen alle gezichten zien, behalve hun eigen gezicht. Hun vader deelt mee dat minstens één van hen modder op het gezicht heeft en vraagt: ‘Wil iedereen die modder op het gezicht heeft zich gaan wassen?’

De kinderen kijken elkaar allemaal aan en blijven zitten. Hun vader vraagt een tweede keer: ‘Wil iedereen die modder op het gezicht heeft zich gaan wassen?’

Zonder te communiceren staan de enige twee kinderen met modder op hun gezicht op om zich te gaan wassen.

Beredeneer hoe deze twee kinderen door de mededeling en de vragen van hun vader en het niet reageren van de overige kinderen wisten dat zij modder op het gezicht hadden.



Terugblik

Logische geldigheid

In de logica gaat het erom of een redenering logisch geldig is. Het maakt niet uit of deze betekenisloos of onzinnig is.

Hieronder zie je een voorbeeld van een volledige redenering. Deze redenering bestaat uit twee uitgangspunten en een conclusie.

Alle mensen houden van hondjes.

Trudy is een mens.

Trudy houdt dus van hondjes.

Ook al is het eerste uitgangspunt in deze redenering twijfelachtig, de redenering is wel logisch geldig omdat de conclusie volgt uit de uitgangspunten.

Logische problemen

Logische problemen kun je vaak oplossen door een redenering te houden of door een schematisch overzicht te maken.

Bij een televisiequiz mag de winnaar uit drie koffers, een rode, een groene en een blauwe, er één kiezen. In één van deze koffers zit een grote geldprijs en in de andere koffers zit niets.

Op de rode koffer staat: 'De prijs zit in de blauwe koffer.'

Op de groene koffer staat: 'De prijs zit in de rode koffer.'

Op de blauwe koffer staat: 'Precies één van de drie opschriften is waar.'

In welke koffer zit de prijs?

In de tabel hiernaast betekent o o o dat alle drie de opschriften onwaar zijn en w o o dat alleen het opschrift van de rode koffer waar is.

Omdat de opschriften op de rode en de groene koffer elkaar tegenspreken, vallen de situaties 5 en 8 af.

Ook de situaties 6 en 7 vallen af, want als het opschrift op de blauwe koffer waar is, dan kan het opschrift op de rode of op de groene koffer niet ook waar zijn.

Bij de situaties 2, 3 en 4 is één van de opschriften waar. Dat moet dan het opschrift van de blauwe koffer zijn. Dus vallen ook de situaties 2 en 3 af.

Zo blijven de situaties 1 en 4 over. Bij beide situaties zijn de opschriften van de rode en de groene koffer niet waar.

Conclusie: de prijs zit in de groene koffer.

Je zou ook een redenering met redeneerstappen kunnen houden zonder alle situaties uit te schrijven.

①	o	o	o
②	w	o	o
③	o	w	o
④	o	o	w
⑤	w	w	o
⑥	w	o	w
⑦	o	w	w
⑧	w	w	w
	r	g	b

①	o	o	o
④	o	o	w
	r	g	b

11.2 Logische symbolen



013 Gegeven is de bewering:

Als je in Emmen woont, dan woon je in Drenthe.

Deze bewering is waar.

Geldt dit ook voor de volgende bewering?

Als je in Drenthe woont, dan woon je in Emmen.

Theorie A De logische symbolen $\Rightarrow$ en $\neg$

In opgave 13 staat de **als-dan-bewering**: als je in Emmen woont, dan woon je in Drenthe.

Deze bewering is opgebouwd uit de volgende twee proposities.

E : Je woont in Emmen.

D : Je woont in Drenthe.

Een **propositie** is een zin waarin iets wordt beweerd.

We noteren de als-dan-bewering met het **implicatieteken** $\Rightarrow$.

Met de proposities E en D krijg je zo $E \Rightarrow D$.

Spreek uit: ' E impliceert D ', of 'uit E volgt D ', of 'als E dan D '.

In opgave 13 heb je gezien dat als $E \Rightarrow D$ waar is, dat $D \Rightarrow E$ niet waar hoeft te zijn. Wel geldt: als je niet in Drenthe woont, dan woon je niet in Emmen.

We noteren 'Je woont niet in Emmen' met $\neg E$. Hierbij is $\neg$ het **ontkenningsteken**. Er geldt dus $\neg D \Rightarrow \neg E$.

In de logica wordt gewoonlijk de enkele implicatiepijl $\rightarrow$ gebruikt. Bij het vak wiskunde C gebruikt men in plaats daarvan de dubbele implicatiepijl $\Rightarrow$.

Het logische symbool $\Rightarrow$ is het implicatieteken.

Het logische symbool $\neg$ is het ontkenningsteken.

Voor de proposities A en B komt $A \Rightarrow B$ op hetzelfde neer als $\neg B \Rightarrow \neg A$.



14 Zie de twee proposities E en D in de theorie.

a Schrijf de bewering $\neg E \Rightarrow \neg D$ als een gewone zin.

b Kun je concluderen dat $\neg E \Rightarrow \neg D$ volgt uit $E \Rightarrow D$? Licht toe.



15 Gegeven zijn de volgende proposities over leerlingen.

A : De leerling zit in vwo 6.

B : De leerling volgt wiskunde C.

C : De leerling doet dit schooljaar eindexamen.

Vertaal de volgende logische uitdrukkingen in een gewone zin.

a $A \Rightarrow C$

c $\neg A \Rightarrow \neg C$

b $B \Rightarrow A$

d $\neg B \Rightarrow \neg A$

16



Gegeven is de volgende bewering:

Als het mistig is, dan vertrekt het vliegtuig niet.

We gebruiken in deze opgave de volgende proposities.

M : Het is mistig.

V : Het vliegtuig vertrekt.

a Noteer de bewering met M en V en logische symbolen.

b Vertaal de volgende logische uitdrukkingen in een gewone zin. Geef bij elke uitdrukking aan of deze volgt uit de gegeven bewering

$$1 \quad \neg M \Rightarrow V$$

$$3 \quad V \Rightarrow \neg M$$

$$2 \quad \neg V \Rightarrow \neg M$$

$$4 \quad \neg V \Rightarrow M$$

17



In een artikel over duurzame energie zegt de heer Kuiper het volgende.

Als je mensen vraagt of ze voor duurzame energie zijn, zeggen ze: 'Ja natuurlijk.' Maar als er windmolens in hun buurt moeten komen, zijn ze ineens tegen.

We onderzoeken in deze opgave de logica achter deze gedachtegang.

Daartoe gebruiken we de volgende afkortingen.

D : De ondervraagde is voor duurzame energie.

W : De ondervraagde is voor windmolens in de buurt.

Uit het artikel kun je opmaken dat de heer Kuiper uitgaat van $D \Rightarrow W$.

Je zou ook het volgende kunnen beweren: als de ondervraagde niet voor windmolens in de buurt is, dan is de ondervraagde niet voor duurzame energie.

a Schrijf deze bewering met behulp van logische symbolen en onderzoek of deze bewering volgt uit $D \Rightarrow W$.

Uit de uitspraken van de heer Kuiper blijkt dat $D \Rightarrow W$ in de praktijk niet klopt, want iemand die voor duurzame energie is, is er nog niet voor dat in de buurt windmolens worden gebouwd.

b Schrijf de bewering $\neg W \Rightarrow D$ als een gewone zin. Volgt deze uitspraak uit het artikel?

Hieronder staat nog een citaat uit het artikel over duurzame energie.

Als er in een buurt windmolens worden gebouwd, dan is de buurt ervoor.

Met de afkortingen

B : In de buurt worden windmolens gebouwd;

V : De buurt is voor het bouwen van windmolens;

wordt dit citaat $B \Rightarrow V$.

c In een buurt worden geen windmolens gebouwd.

Volgt hieruit en uit het citaat of de buurt tegen het bouwen van windmolens is? Licht toe.

d Beschrijf in een gewone zin een als-dan-bewering die volgt uit $B \Rightarrow V$.



Niet zo lang geleden kwam de Wereldgezondheidsorganisatie (WHO) met een rapport waarin stond dat bewerkt vlees bewezen kankerverwekkend is. Bewerkt vlees zit onder andere in worst, salami en ham. De volgende dag stond in een tweet:

Ik eet al mijn hele leven zes knakworsten per dag en heb nog steeds geen kanker, dus wat de WHO zegt is flauwekul.

We gebruiken in deze opgave de volgende afkortingen.

B: Je eet veel bewerkt vlees.

K: Je hebt een verhoogde kans op darmkanker.

De bewering van de WHO kan worden genoteerd als $B \Rightarrow K$.

- a** Is de bewering in de tweet in tegenspraak met de bewering $B \Rightarrow K$? Licht toe.

Een andere twitteraar beweert dat als je een verhoogde kans op darmkanker hebt, je veel bewerkt vlees hebt gegeten, oftewel $K \Rightarrow B$.

- b** Volgt deze bewering uit de bewering van de WHO? Licht toe.

Een derde twitteraar beweert dat als je niet veel bewerkt vlees eet, je geen verhoogde kans op darmkanker hebt.

- c** Noteer deze bewering met de afkortingen *B* en *K* en onderzoek of deze bewering overeenkomt met de bewering van de WHO.

In het rapport van de WHO staat dat wie dagelijks 50 gram bewerkt vlees eet zijn kans op darmkanker met 18% verhoogt. Verder is bekend dat wie minder dan 50 gram vlees per dag eet een kans heeft van 5% op darmkanker.

Hieronder staan vier mogelijke conclusies.

- I Als je dagelijks 50 gram bewerkt vlees eet, dan krijg je darmkanker.
 - II Mensen die dagelijks 50 gram bewerkt vlees eten, hebben een grotere kans op darmkanker dan mensen die dat niet doen.
 - III De meeste mensen die darmkanker krijgen, hebben dagelijks 50 gram bewerkt vlees gegeten.
 - IV De mensen die dagelijks 50 gram bewerkt vlees eten, hebben ongeveer 6 procent kans op darmkanker.
- d** Geef van elk van deze conclusies aan of deze volgen uit de gegevens die erboven staan. Licht toe.



E19

Enkele jaren geleden werd vitamine D door duizenden stemmers verkozen tot Supplement van het Jaar. Een voedingsdeskundige van het Voedingscentrum gaf vervolgens op een nieuwssite een kritische reactie over het gebruik van voedingssupplementen. Zij deed de volgende bewering: ‘In principe krijg je voldoende voedingsstoffen binnen uit je eten, wanneer je eet volgens de Schijf van Vijf.’

- a** Geef met letters aan uit welke proposities deze bewering is opgebouwd en schrijf de bewering vervolgens op met behulp van deze letters en logische symbolen.

Op een gezondheidssite wordt de reactie van het Voedingscentrum genoemd. Volgens een expert die op de site wordt aangehaald, eet namelijk slechts twee procent van de bevolking elke dag volgens de Schijf van Vijf.

- b** Kun je daarmee de bewering van de voedingsdeskundige in twijfel trekken? Licht toe.

O20

We gebruiken in deze opgave de volgende afkortingen.

A: Jack is moe.

B: Jack gaat naar bed.

Gegeven zijn de volgende twee beweringen.

$$1 \quad A \Rightarrow B$$

$$2 \quad \neg B$$

Welke conclusie kun je trekken uit de combinatie van deze twee beweringen?

Theorie B Samengestelde beweringen

In opgave 20 heb je te maken met de volgende afkortingen.

A: Jack is moe.

B: Jack gaat naar bed.

Hiermee kun je **samengestelde beweringen** maken, bijvoorbeeld

Jack is moe en gaat naar bed.

We noteren dit als $A \wedge B$.

Het teken $\wedge$ tussen *A* en *B* betekent EN.

Een andere samengestelde bewering is

Jack is moe of gaat naar bed.

We noteren dit als $A \vee B$.

Het teken $\vee$ tussen *A* en *B* betekent OF.

Met $A \vee B$ wordt bedoeld *A* of *B* of beide.

Het teken $\vee$ is het teken voor het **inclusieve of**. Dit in tegenstelling tot het exclusieve of, waarmee wordt bedoeld het ene of het andere, maar niet beide.

Het logische symbool $\wedge$ betekent EN.

Het logische symbool $\vee$ betekent OF, het inclusieve of.

De combinatie van de zinnen

Als Jack moe is, dan gaat hij naar bed.

Jack gaat niet naar bed.

kunnen we noteren als $A \Rightarrow B, \neg B$.

Uit deze combinatie van zinnen kunnen we een conclusie trekken, namelijk: Jack is niet moe.

Een combinatie van zinnen samen met de conclusie die uit deze zinnen getrokken kan worden, heet een redenering.

De bovenstaande redenering kunnen we noteren als

$A \Rightarrow B, \neg B$ conclusie $\neg A$.

Hierbij zijn $A \Rightarrow B$ en $\neg B$ de uitgangspunten en is $\neg A$ de conclusie.

Hieronder zie je de betekenis van de logische symbolen terug in een **waarheidstabel**. In een waarheidstabel worden enen en nullen gebruikt om aan te geven of beweringen waar of niet waar zijn. De kleuren groen en rood zijn slechts ter verduidelijking toegevoegd.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1

De meeste enen en nullen in de tabel zijn goed te verklaren. Zo is de bewering $A \wedge B$ alleen waar als A en B beide waar zijn. De laatste kolom komt aan de orde in opgave 21.

Voorbeeld

Gegeven is de volgende tekst.

Max wil een overhemd of een trui aandoen.

Uiteindelijk besluit hij om geen trui aan te doen.

- Welke conclusie trek je uit de uitgangspunten hierboven over het kledingstuk dat Max aandoet?
- Gebruik de afkortingen
 O : Max doet een overhemd aan;
 T : Max doet een trui aan;
om de redenering met logische symbolen te noteren.

Uitwerking

- De conclusie is dat Max een overhemd aandoet.
- $O \vee T, \neg T$ conclusie O



R21 Zie de waarheidstabel in de theorie.

a Waar in de tabel kun je zien dat je te maken hebt met een inclusieve of?

Zowel in de laatste als in de een-na-laatste regel bij $A \Rightarrow B$ staat een 1.

b Licht voor beide situaties met een voorbeeld toe dat er geen reden is om aan te nemen dat $A \Rightarrow B$ niet waar is.

c Voeg een kolom toe met enen en nullen die hoort bij $\neg A \vee B$ en vergelijk deze kolom met de andere kolommen. Wat valt je op?

d Voeg kolommen toe die horen bij $\neg(A \wedge B)$ en $\neg A \vee \neg B$. Vergelijk deze kolommen. Wat valt je op aan de ingevulde nullen en enen?



R22 Zie het voorbeeld. Uit de beweringen $O \vee T$, $\neg O$ volgt een conclusie.

a Welke conclusie?

b Noteer de beweringen en de conclusie in gewone zinnen.



23 Hieronder staan vier beweringen.

Zeg bij elke bewering of je te maken hebt met het inclusieve of dan wel het exclusieve of.

a Je mag door de douane als je een paspoort of een identiteitskaart hebt.

b Bij een driegangenmenu hoort als dessert tiramisu of chocolademousse.

c Dit jaar wordt Ajax of PSV kampioen.

d De betekenis van het woord propositie kun je opzoeken op je smartphone of op je tablet.



24 Meneer Rommens spreekt met de leerlingen uit klas 5vA af dat wanneer ze goed meedoen met de les en ze allemaal hun huiswerk hebben gemaakt, ze dan wat leuks gaan doen in de volgende les.

We gebruiken in deze opgave de volgende afkortingen.

M: De leerlingen van klas 5vA doen goed mee met de les.

H: De leerlingen van klas 5vA hebben allemaal hun huiswerk gemaakt.

L: Er wordt iets leuks gedaan in de volgende les.

De afspraak van meneer Rommens kan als volgt worden genoteerd:

$(M \wedge H) \Rightarrow L$.

a Licht dit toe.

We bekijken in deze opgave een aantal mogelijke situaties. Noteer de afspraak van meneer Rommens met behulp van de afkortingen in combinatie met deze situatie en trek zo mogelijk een conclusie.

b Tijdens de les blijkt dat de leerlingen goed meedoen, maar Joep en Kaat hebben hun huiswerk niet gemaakt.

c In de volgende les wordt niet iets leuks gedaan.

d In de volgende les wordt iets leuks gedaan.

25



In een recept voor het maken van koekjes staat dat deze na 30 minuten uit de oven kunnen, of als ze van boven mooi bruin zijn. We gebruiken in deze opgave de volgende afkortingen.

T: De koekjes staan 30 minuten in de oven.

B: De koekjes zijn van boven mooi bruin.

U: De koekjes kunnen uit de oven.

a Gegeven is de volgende redenering:

$(T \vee B) \Rightarrow U$, *B* conclusie *U*.

Schrijf deze redenering in gewone zinnen en geef aan of deze logisch geldig is.

b Ciske bakt koekjes en haalt deze na 25 minuten niet uit de oven.

Noteer deze situatie met behulp van de afkortingen en trek zo mogelijk een conclusie.



26



Mevrouw Donders heeft met haar dochter Sanne een afspraak gemaakt over roken. Als Sanne voor haar achttiende verjaardag niet rookt, dan betaalt mevrouw Donders de autorijlessen van Sanne.

We gebruiken in deze opgave de volgende afkortingen.

A: Sanne rookt voor haar achttiende verjaardag.

B: Mevrouw Donders betaalt de autorijlessen van Sanne.

Noteer de afspraak van mevrouw Donders met deze letters en logische symbolen in de volgende situaties. Trek zo mogelijk een conclusie.

a Na haar achttiende verjaardag betaalt mevrouw Donders de autorijlessen van Sanne niet.

b Sanne rookt voor haar achttiende verjaardag.

A27



Gegeven is de ware bewering

Als er in een uur meer dan 20 mm regen valt, dan staan de straten blank.

We gebruiken de volgende afkortingen.

R: In een uur valt meer dan 20 mm regen.

B: De straten staan blank.

Hieronder is steeds een situatie gegeven.

Geef telkens aan of je samen met de gegeven ware bewering een conclusie kunt trekken. Noteer in dat geval de redenering met behulp van de letters *R* en *B*. Licht in het geval je geen conclusie kunt trekken toe waarom dit niet mogelijk is.

a Er valt in een uur 25 mm regen.

b De straten staan blank.

c De straten staan niet blank.

d Er valt 30 mm regen in twee uur tijd.

Modus ponens, modus tollens en modus nonsens

Gegeven zijn de proposities

A : je woont in Arnhem;

G : je woont in Gelderland;

en de ware bewering $A \Rightarrow G$.

De volgende redenering is logisch geldig: $A \Rightarrow G$, A conclusie G .

Deze redenering heet ook wel *modus ponens* (poneren = neerzetten, bevestigen).

Ook de redenering $A \Rightarrow G$, $\neg G$ conclusie $\neg A$ is logisch geldig.

Deze redenering heet ook wel *modus tollens* (de ontkennende modus).

De redenering $A \Rightarrow G$ conclusie $G \Rightarrow A$ is echter niet logisch geldig.

Zo'n bewering wordt ook wel een *modus nonsens* genoemd.

E28



Zie het informatief hierboven.

- a Schrijf de modus ponens, de modus tollens en de modus nonsens met de gegeven proposities in een gewone zin.
- b Waarom is de modus nonsens in de gegeven situatie niet logisch geldig?
- c Er zijn twee modi tollens: de modus tollendo tollens die hierboven is besproken en de modus ponendo tollens. Een voorbeeld van de modus ponendo tollens is:
 - Ajax en PSV kunnen niet beide kampioen worden.
 - Ajax wordt kampioen.
 - Dus PSV wordt geen kampioen.
 Noteer het voorbeeld van de modus ponendo tollens met de volgende afkortingen.
 - A : Ajax wordt kampioen.
 - P : PSV wordt kampioen.

Terugblik

De logische symbolen $\Rightarrow$ en $\neg$

De als-dan-bewering

Als je door rood licht bent gereden, dan krijg je een bekeuring.
is opgebouwd uit de volgende twee proposities.

R : Je bent door rood licht gereden.

B : Je krijgt een bekeuring.

Een propositie is een zin waarin iets wordt beweerd.

De als-dan-bewering kan worden genoteerd als $R \Rightarrow B$. Hierin is $\Rightarrow$ het implicatieteken. Uit $R \Rightarrow B$ volgt niet dat $B \Rightarrow R$. Dus er geldt niet: als je een bekeuring krijgt, dan ben je door rood licht gereden.

Je kunt immers ook een bekeuring krijgen voor een andere overtreding.

Wel volgt uit $R \Rightarrow B$ dat $\neg B \Rightarrow \neg R$. In een gewone zin: als je geen bekeuring krijgt, dan ben je niet door rood licht gereden.

In $\neg B \Rightarrow \neg R$ is $\neg$ het ontkenningsteken.

Uitgangspunten en conclusie

Een redenering is opgebouwd uit een aantal uitgangspunten en een conclusie. Bij de notatie van een redenering kunnen behalve de symbolen $\Rightarrow$ en $\neg$ ook de logische symbolen $\wedge$ en $\vee$ gebruikt worden. Het symbool $\wedge$ betekent en. Het symbool $\vee$ betekent of, het inclusieve of, dus het ene of het andere of beide.

De leider van een politieke partij belooft voor de verkiezingen dat wanneer zijn partij in de regering komt en de economie jaarlijks met minstens 3% groeit, de huishoudens er jaarlijks 1000 euro op vooruitgaan. We gebruiken de volgende afkortingen.

R : Deze partij komt in de regering.

E : De economie groeit jaarlijks met minstens 3%.

D : De huishoudens gaan er jaarlijks 1000 euro op vooruit.

We kunnen nu de situatie dat de huishoudens er niet jaarlijks 1000 euro op vooruitgaan als volgt noteren met de afkortingen en een conclusie trekken.

$(R \wedge E) \Rightarrow D$, $\neg D$ conclusie $\neg(R \wedge E)$

$\neg(R \wedge E)$ komt op hetzelfde neer als $\neg R \vee \neg E$.

Het kan in de praktijk ook zijn dat de huishoudens er niet jaarlijks met 1000 euro op vooruit zijn gegaan, terwijl wel aan de uitgangspunten is voldaan. De politieke partij heeft zich dan niet aan de verkiezingsbelofte gehouden, maar dat is op grond van de logica niet te verklaren.

11.3 Beweringen en voorwaarden



Gegeven is de volgende bewering.

Als je niet gebeld wilt worden, dan communiceren we - als je een smartphone of een tablet hebt - via WhatsApp.

Deze bewering is opgebouwd uit de volgende vier proposities.

A : Je wilt gebeld worden.

B : Je hebt een smartphone.

C : Je hebt een tablet.

D : We communiceren via WhatsApp.

De bewering is met de letters A , B , C en D en logische symbolen te noteren. Hieronder staan twee notaties.

Welke van deze twee is in overeenstemming met de bewering, denk je? Licht toe.

$$(\neg A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow D$$

$$((\neg A \wedge B) \vee C) \Rightarrow D$$

Theorie A Haakjes in beweringen

Bij de proposities A , B en C heeft de bewering $A \wedge (B \vee C)$ een andere betekenis dan de bewering $(A \wedge B) \vee C$. Door haakjes te gebruiken, kun je aangeven hoe de bewering moet worden gelezen.

Uitgaande van de proposities

A : Ad heeft een rode pet op;

B : Ben heeft een rode pet op;

C : Cor heeft een rode pet op;

staat hieronder voor elk van de beweringen $A \wedge (B \vee C)$ en $(A \wedge B) \vee C$ in welke situaties de betreffende bewering waar is.

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge B$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee C$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0

Bij de bewering $A \wedge (B \vee C)$ is het nodig dat Ad een rode pet op heeft en daarnaast Ben of Cor (of allebei) ook. Bij de bewering $(A \wedge B) \vee C$ is het genoeg dat Cor een rode pet op heeft óf Ad en Ben allebei.

Voorbeeld

Gegeven is de volgende bewering.

Als je niet gebeld wilt worden, dan communiceren we - als je een smartphone of een tablet hebt - via WhatsApp.

Deze bewering bestaat uit vier proposities.

A: Je wilt gebeld worden.

B: Je hebt een smartphone.

C: Je hebt een tablet.

D: We communiceren via WhatsApp.

Je kunt ook het volgende beweren.

Als we niet communiceren via WhatsApp, dan wil je gebeld worden of je hebt geen smartphone en geen tablet.

Schrijf deze bewering met de letters *A*, *B*, *C* en *D* en logische symbolen zo, dat dit in overeenstemming is met de gegeven bewering. Licht toe.

Uitwerking

Volgens de bewering zijn er twee voorwaarden om via WhatsApp te communiceren:

- je wilt niet gebeld worden;
- je hebt een smartphone of tablet.

Niet communiceren via WhatsApp betekent dat aan één of aan beide voorwaarden niet is voldaan. Dat betekent dat

- je gebeld wilt worden, oftewel *A*, of dat
- je geen smartphone en geen tablet hebt, oftewel $\neg B \wedge \neg C$.

Dus $\neg D \Rightarrow (A \vee (\neg B \wedge \neg C))$.

R30 Zie het voorbeeld.



a Daan heeft als uitwerking genoteerd $\neg D \Rightarrow ((A \vee \neg B) \wedge \neg C)$.

Licht toe waarom dit niet in overeenstemming is met de gegeven bewering.

b Nassim heeft als uitwerking $\neg D \Rightarrow (A \vee \neg(B \wedge C))$ genoteerd.

Leg uit of dit juist is.

31 Een dierenactivist doet de volgende bewering.



Als je dierenliefhebber bent en je bent geen vegetariër of veganist, dan ben je hypocriet.

We gebruiken de volgende afkortingen.

A: Je bent dierenliefhebber.

B: Je bent vegetariër.

C: Je bent veganist.

D: Je bent hypocriet.

a Schrijf de bewering van de dierenactivist met de letters *A*, *B*, *C* en *D* en logische symbolen.

Een bevriende dierenactiviste formuleert de bewering net iets anders. Zij doet een bewering die genoteerd kan worden als $(A \wedge \neg D) \Rightarrow (B \vee C)$.

b Schrijf de bewering van deze dierenactiviste in een gewone zin.

32



Meneer Brok zegt tegen zijn leerlingen het volgende.

Als je niet kletst in de les, je huiswerk bijhoudt en vragen stelt, dan haal je een voldoende voor de toets.

Deze bewering bestaat uit de volgende vier proposities.

A: Je kletst in de les.

B: Je houdt je huiswerk bij.

C: Je stelt vragen.

D: Je haalt een voldoende voor de toets.

a Schrijf de bewering van meneer Brok met de letters *A*, *B*, *C* en *D* en logische symbolen.

b Jasmijn is het niet helemaal met meneer Brok eens. Haar bewering kan worden genoteerd als $((\neg A \vee C) \wedge B) \Rightarrow D$.

Leg uit wat het verschil is met de bewering van meneer Brok.

33



Gegeven is de volgende bewering.

Als ik geen lange buitenlandse reis maak, dan ben ik niet geslaagd voor mijn vwo-examen of ik ben geplaatst op het conservatorium en heb geen flink bedrag gekregen van mijn oma.

Met de proposities

A: Ik slaag voor mijn vwo-examen;

B: Ik word geplaatst op het conservatorium;

C: Ik krijg een flink bedrag van mijn oma;

D: Ik maak een lange buitenlandse reis;

is deze bewering op de volgende twee manieren te noteren met de letters *A*, *B*, *C* en *D* en logische symbolen.

$$\neg D \Rightarrow (\neg A \vee (B \wedge \neg C))$$

$$\neg D \Rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge \neg C)$$

a Geef aan wat het verschil is in interpretatie bij deze notaties van de gegeven bewering.

Je kunt ook het volgende beweren.

Als ik slaag voor mijn vwo-examen, dan ga ik - als ik niet geplaatst word op het conservatorium of als ik een flink bedrag krijg van mijn oma - een lange buitenlandse reis maken.

b Noteer deze bewering met de letters *A*, *B*, *C* en *D* en logische symbolen.

A34

Gegeven is de volgende bewering.

Als bij de komende Tweede Kamerverkiezingen niet een van de partijen een absolute meerderheid behaalt, dan komt er - als de middenpartijen verliezen of de partijen links en rechts van het midden allebei winnen - een moeizame kabinetsformatie.

Deze bewering bestaat uit vijf proposities.

A: Een van de partijen behaalt een absolute meerderheid.

B: De middenpartijen verliezen.

C: De partijen links van het midden winnen.

D: De partijen rechts van het midden winnen.

E: Er komt een moeizame kabinetsformatie.

- a** Schrijf de bewering met de letters *A*, *B*, *C*, *D* en *E* en logische symbolen.

Je kunt ook het volgende beweren.

Als er geen moeizame kabinetsformatie komt, dan heeft een van de partijen een absolute meerderheid behaald of de middenpartijen hebben niet verloren en de partijen links en rechts van het midden hebben niet allebei gewonnen.

- b** Schrijf deze bewering met de letters *A*, *B*, *C*, *D* en *E* en logische symbolen zo, dat dit in overeenstemming is met de gegeven bewering.



A35

In de Tweede Kamer vond een heftig debat plaats over bezuinigingen in de zorg. Als reactie op het debat deed de minister een bewering van de vorm $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$.

In deze bewering zijn de volgende proposities gebruikt.

A: Er wordt bezuinigd in de zorg.

B: Er ontstaan problemen in de zorg.

C: De toekenning van gelden wordt heroverwogen.

- a** Vertaal de bewering $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ naar een gewone zin.
b Op bladzijde 152 heb je gezien hoe de waarheidstabel van $A \Rightarrow B$ eruit ziet.

Leg met behulp van die tabel uit dat de bewering $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ waar is als *A* waar is en *B* niet waar is, ongeacht of *C* waar is. Wat is hiervan in deze situatie de praktische betekenis?

E36

Meneer Savelberg zegt tegen zijn leerlingen het volgende.

Als je niet bijzonder veel talent hebt, dan haal je geen voldoende voor de toets, als je niet oplet in de les, je huiswerk niet bijhoudt of geen vragen stelt.

In deze opgave gebruiken we de volgende vijf afkortingen.

A: Je let op in de les.

B: Je houdt je huiswerk bij.

C: Je stelt vragen.

D: Je haalt een voldoende voor de toets.

E: Je hebt bijzonder veel talent.

De bewering van meneer Savelberg kan met de genoemde afkortingen en logische symbolen worden genoteerd als

$\neg E \Rightarrow ((\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \Rightarrow \neg D)$.

Drie leerlingen hebben de bewering van meneer Savelberg anders genoteerd.

I $(\neg E \vee (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)) \Rightarrow \neg D$

II $D \Rightarrow (E \vee (A \vee B \vee C))$

III $D \Rightarrow (E \vee (A \wedge B \wedge C))$

Eén van de drie is niet in overeenstemming met $\neg E \Rightarrow ((\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \Rightarrow \neg D)$.

Welke? Licht toe.

O37

Gegeven is de volgende bewering. ‘Alleen als Nederland zich plaatst voor het eindtoernooi, kan het kampioen worden.’

We gebruiken de volgende afkortingen.

A: Nederland plaatst zich voor het eindtoernooi.

B: Nederland wordt kampioen.

Zeg van elk van de volgende uitspraken of deze waar is of niet waar.

a $A \Rightarrow B$

b $B \Rightarrow A$

c $\neg A \Rightarrow B$

d $A \Rightarrow \neg B$

e $\neg A \Rightarrow \neg B$

Theorie B Noodzakelijke en voldoende voorwaarden

In opgave 37 is het zich plaatsen voor het eindtoernooi een

noodzakelijke voorwaarde om kampioen te worden.

Immers als Nederland zich niet plaatst, wordt het zeker geen kampioen.

Het is echter geen voldoende voorwaarde, want het feit dat Nederland zich plaatst, wil nog niet zeggen dat het kampioen wordt.

In de situatie

Als je in Arnhem woont, dan woon je in Gelderland.

heb je wel met een **voldoende voorwaarde** te maken.

Het is immers voldoende om in Arnhem te wonen om in Gelderland te wonen. Het is echter geen noodzakelijke voorwaarde. Je kunt bijvoorbeeld ook in Nijmegen wonen om in Gelderland te wonen.

Bij de bewering

Mits Nederland de finale wint, wordt het kampioen.
heb je te maken met een **noodzakelijke en voldoende voorwaarde**.

Mits betekent dan en slechts dan als.

Bij een noodzakelijke en voldoende voorwaarde geldt voor de proposities A en B dat $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Dit wordt ook genoteerd als $A \Leftrightarrow B$.

We zeggen dat A en B **equivalent** zijn, of dat A equivalent is met B .

In het schema hieronder kun je zien welke Nederlandse woorden kunnen worden gebruikt om een voorwaarde aan te duiden.

<i>als</i>	voldoende voorwaarde
<i>alleen als</i>	noodzakelijke voorwaarde
<i>mits</i>	noodzakelijke en voldoende voorwaarde
<i>tenzij</i>	omgekeerde noodzakelijke en voldoende voorwaarde

Voorbeeld

Vermeld of je in onderstaande gevallen met een noodzakelijke voorwaarde, een voldoende voorwaarde of een noodzakelijke en voldoende voorwaarde te maken hebt en noteer de uitspraak met logische symbolen.

- a** Als het drukker wordt op straat, dan is de kans op ongelukken groter.
- b** Alleen als je hard studeert, kun je een goed cijfer voor de toets halen.
- c** Mits je jonger dan 18 jaar bent, heb je recht op kinderbijslag.

Uitwerking

- a** voldoende voorwaarde

A : Het wordt drukker op straat.

B : De kans op ongelukken wordt groter.

$A \Rightarrow B$

- b** noodzakelijke voorwaarde

A : Je studeert hard.

B : Je haalt een goed cijfer voor de toets.

$B \Rightarrow A$

- c** noodzakelijke en voldoende voorwaarde

A : Je bent jonger dan 18 jaar.

B : Je hebt recht op kinderbijslag.

$A \Leftrightarrow B$

Bij een voldoende voorwaarde zal het gevolg zeker optreden.

R38
☐ ⊙ *

- a** De voldoende voorwaarde bij voorbeeld a kun je ook noteren als $\neg B \Rightarrow \neg A$.
Formuleer een gewone zin die hierbij hoort.
- b** De noodzakelijke voorwaarde bij voorbeeld b kun je ook noteren als $\neg A \Rightarrow \neg B$.
Formuleer een gewone zin die hierbij hoort.

39
☐ ⊙

Vermeld of je in onderstaande gevallen met een noodzakelijke voorwaarde, een voldoende voorwaarde of een noodzakelijke en voldoende voorwaarde te maken hebt en noteer de uitspraak met logische symbolen.

- a** Als je in Leeuwarden woont, dan woon je in Friesland.
- b** Mits je lid bent van de Elfstedenvereniging, mag je met de Elfstedentocht meedoen.
- c** Alleen als op het hele traject het ijs minstens 15 cm dik is, kan de Elfstedentocht worden gehouden.



40
☐ ⊙ *

We gaan nog eens in op het probleem van opgave 5.

Ad, Ben en Cor staan achter elkaar en hebben elk een rode of blauwe pet op. Niemand kan zijn eigen pet zien. Ad kan de petten van Ben en Cor zien en Ben kan de pet van Cor zien.

Ze weten bovendien dat er minstens één blauwe pet is.

Aan Ad wordt gevraagd: 'Welke kleur pet heb jij op?'

Ad zegt: 'Ik weet het niet.'

Daarna wordt aan Ben gevraagd: 'Welke kleur pet heb jij op?'

Ben zegt: 'Ik weet het niet.'

Daarna zegt Cor: 'Ik weet nu wel de kleur van mijn pet.'

Welke kleur is dat?

We gebruiken de volgende afkortingen.

P: Ad ziet twee rode petten.

Q: Ad weet welke kleur pet hij op heeft.

R: Ben ziet een rode pet.

S: Ben weet welke kleur pet hij op heeft.

Hiermee is de redenering van Ad als volgt te noteren:

$P \Leftrightarrow Q, \neg P$ conclusie $\neg Q$.

- a** Licht dit toe.
- b** Noteer met de letters *R* en *S* de redenering die Cor houdt op basis van de uitspraak van Ben

A41
☐ ⊙ *

Zie nog eens het probleem van opgave 6.

Ad, Ben en Cor hebben elk een rode of een blauwe pet op. Ze kunnen de kleur van de pet van de anderen wel zien, naar die van zichzelf niet. Ze weten bovendien dat er minstens één rode pet is.

Ad zegt: 'Ik weet niet welke kleur pet ik op heb.'

Ben zegt: 'Ik weet ook niet welke kleur pet ik op heb.'

Dan zegt Cor: 'Maar dan weet ik het wel!'

Voer de afkortingen P , Q , R en S in en noteer hiermee de redeneringen van Ben en Cor.

E42
*

Een ploegleider in het wielrennen beweert het volgende.

Een wielrenner kan alleen koersen winnen als hij hard traint, tenzij hij extreem getalenteerd is.

We gebruiken de volgende afkortingen.

A : Een wielrenner wint koersen.

B : Een wielrenner traint hard.

C : Een wielrenner is extreem getalenteerd.

Schrijf de bewering van de ploegleider met de letters A , B en C en logische symbolen, waarbij je geen gebruik maakt van $\wedge$ en $\vee$.



Terugblik

Haakjes in beweringen

De bewering

Als er geen nieuwe landbouwtechnieken worden ontwikkeld dan zullen er, als de groei van de wereldbevolking zo doorgaat of als de welvaart niet eerlijker wordt verdeeld, op den duur voedseltekorten ontstaan.

bestaat uit de volgende vier proposities.

A: Er worden nieuwe landbouwtechnieken ontwikkeld.

B: De groei van de wereldbevolking gaat zo door.

C: De welvaart wordt eerlijker verdeeld.

D: Er ontstaan op den duur voedseltekorten.

De bewering is hiermee als volgt te noteren $(\neg A \wedge (B \vee \neg C)) \Rightarrow D$.

Niet juist genoteerd is $((\neg A \wedge B) \vee \neg C) \Rightarrow D$, want dit zou kunnen betekenen dat alleen $\neg C$ tot gevolg zou hebben dat er op den duur voedseltekorten ontstaan, ook bijvoorbeeld als er wel nieuwe landbouwtechnieken worden ontwikkeld.

Noodzakelijke en voldoende voorwaarden

Bij een sollicitatieprocedure zijn zes kandidaten overgebleven. Er volgen nog drie rondes: na de eerste ronde blijven nog vier kandidaten over en na de tweede ronde nog twee. In de derde ronde wordt beslist wie van de twee overgebleven kandidaten de baan krijgt.

We gebruiken de volgende afkortingen.

A: Je komt door de eerste ronde.

B: Je komt door de tweede ronde.

C: Je komt door de derde ronde.

D: Je krijgt de baan.

Bij de bewering ‘Alleen als je door de eerste ronde komt, kun je de baan krijgen’ heb je met een noodzakelijke voorwaarde te maken. Het is echter geen voldoende voorwaarde, want je kunt nog afvallen in de tweede of de derde ronde. We noteren $D \Rightarrow A$.

Bij de bewering ‘Als je in de tweede ronde afvalt, krijg je de baan niet’ heb je met een voldoende voorwaarde te maken. Het is echter geen noodzakelijk voorwaarde, want je kunt nog afvallen in de derde ronde.

Bij een voldoende voorwaarde zal het gevolg zeker optreden.

We noteren $\neg B \Rightarrow \neg D$.

Bij de bewering ‘Mits je door de derde ronde komt, krijg je de baan’ heb je met een noodzakelijke en voldoende voorwaarde te maken.

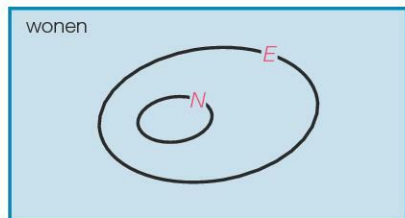
Hierbij hoort de equivalentie $C \Leftrightarrow D$, wat betekent dat *C* equivalent is met *D*.

11.4 Redeneren met groepen

043
☐ ⊙ *

In de figuur hieronder is in beeld gebracht:

Als een persoon in Nederland woont, dan woont die persoon in Europa.



figuur 11.5

Hierbij is

N : Personen die in Nederland wonen;

E : Personen die in Europa wonen.

Neem de figuur over en teken hierin

a persoon a die in Nederland woont

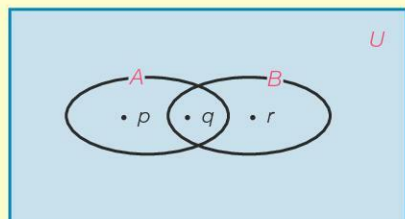
b persoon b die niet in Nederland woont, maar wel in Europa

c persoon c die niet in Europa woont.

Theorie A Venndiagrammen

De figuur in opgave 43 heet een venndiagram. In een **venndiagram** worden groepen op basis van kenmerken in beeld gebracht. Je kunt echter ook een venndiagram maken waarbij de groepen proposities zijn.

In het venndiagram hieronder zijn de groepen A en B en de personen p , q en r getekend. Beschouw je A en B als proposities, dan geldt A voor p en geldt B niet voor p , dus voor p geldt $A \wedge \neg B$. Voor q geldt $A \wedge B$. Voor p , q en r geldt $A \vee B$.



figuur 11.6 De rechthoek U geeft alle mogelijke groepen weer.

Je kunt venndiagrammen ook gebruiken bij telproblemen. Zie het voorbeeld.

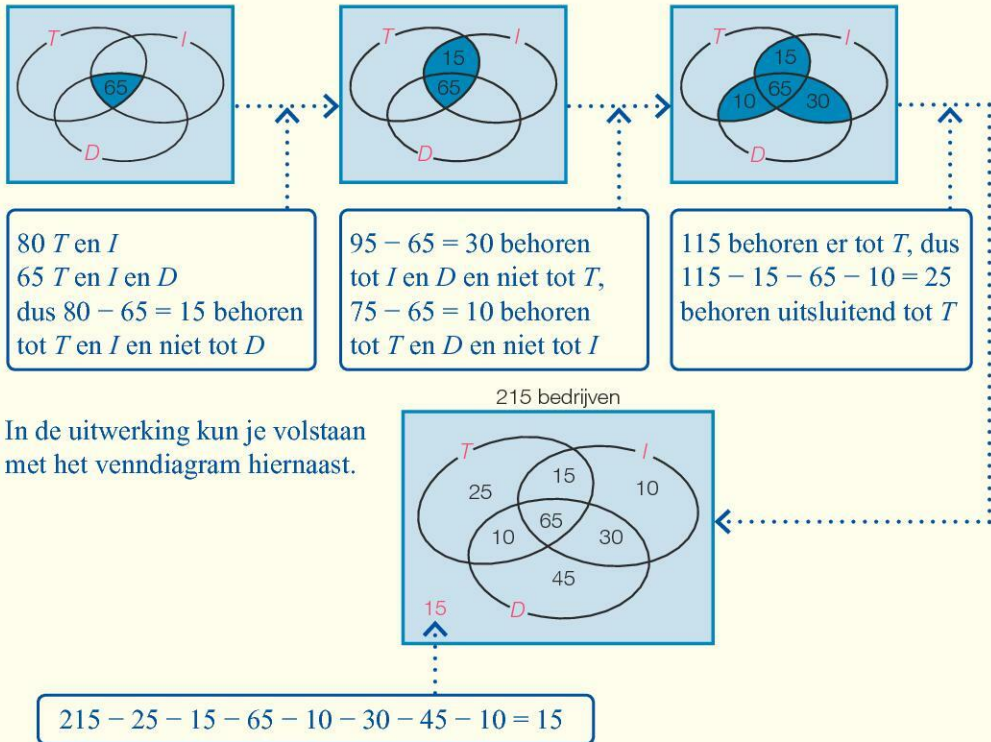
Voorbeeld

Een reclamebureau verzorgt reclamecampagnes voor 215 bedrijven. Daarvan adverteren 115 bedrijven via tv&radio, 120 via internet en 150 via dagbladen. Verder blijkt dat 80 bedrijven zowel tv&radio als internet gebruiken, 95 internet en dagbladen, 75 tv&radio en dagbladen en 65 bedrijven gebruiken alle genoemde media.

- Verwerk deze gegevens in een venndiagram.
- Hoeveel bedrijven gebruiken geen van de genoemde media?

Uitwerking

- T : bedrijven die reclame via tv&radio maken.
 I : bedrijven die reclame via internet maken.
 D : bedrijven die reclame in dagbladen maken.



In de uitwerking kun je volstaan met het venndiagram hiernaast.

- Dus 15 bedrijven gebruiken geen van de drie genoemde media.



Zie het voorbeeld.

Voor hoeveel bedrijven geldt

- $T \wedge I \wedge D$
- $T \wedge I \wedge \neg D$
- $T \wedge I$
- $T \vee I$?



ARTIKEL

Politie bekeurt tientallen automobilisten

Alkmaar - De intensieve controle op het rijden onder invloed van alcohol heeft gisteren op de wegen rond Alkmaar tientallen automobilisten een bekeuring opgeleverd. Er werd gecontroleerd buiten de bebouwde kom tussen 17:00 uur en 22:30 uur. Van de 512 gecontroleerde bestuurders hadden er maar liefst 76 te diep in het glaasje gekeken.

Het onderzoek naar de technische staat van het voertuig dat gelijktijdig plaatsvond, leverde 32 bekeuringen op. Onder de bestuurders waarvan de auto te veel gebreken vertoonde, bevonden zich zes personen die ook al bekeurd waren voor het rijden onder invloed. Van twee van hen werd het rijbewijs ingenomen.

De politie kondigt aan met de controles nog geruime tijd door te gaan.

Hoeveel van de gecontroleerde bestuurders kregen geen bekeuring?



Op het celmembraan van rode bloedcellen van mensen komen eiwitten voor. Deze eiwitten zijn niet bij iedereen hetzelfde. Bij een bloedtransfusie kan dat problemen geven, want als de eiwitten verschillen, wordt het bloed als lichaamsvreemd opgevat. Ons afweersysteem pakt de indringers aan en antistoffen zorgen voor klontering.

Men onderscheidt de eiwitten A, B en Rh, die al dan niet aanwezig kunnen zijn.

Bloedgroep AB+ geeft aan: wel eiwit A, wel eiwit B en wel eiwit Rh.

Bloedgroep A+ geeft aan: wel eiwit A, niet eiwit B en wel eiwit Rh.

Bloedgroep B- geeft aan: niet eiwit A, wel eiwit B en niet eiwit Rh.

Bloedgroep 0- geeft aan: niet eiwit A, niet eiwit B en niet eiwit Rh.

Een bloedonderzoek onder 410 mensen levert het volgende resultaat op.

- 140 hebben eiwit A
 - 100 hebben eiwit B
 - 340 hebben eiwit Rh
 - 17 hebben alle drie de eiwitten
 - 20 hebben zowel A als B
 - 119 hebben zowel A als Rh
 - 85 hebben zowel B als Rh
- a** Onderzoek hoeveel procent van de steekproef bloedgroep B- heeft.
- b** Hoeveel procent van de steekproef heeft bloedgroep 0-?

A47


Op een internationaal congres zijn 82 wetenschappers aanwezig. Daarvan spreken er 64 Engels, 33 Frans en 24 Duits. Van die wetenschappers kunnen er 25 zowel Frans als Engels spreken, 14 zowel Frans als Duits en 23 zowel Engels als Duits. En 14 aanwezigen spreken alle drie de talen.

Hoeveel aanwezigen spreken

- a geen van de drie talen
- b zowel Duits als Frans, maar geen Engels
- c wel Duits, maar geen Engels of Frans?

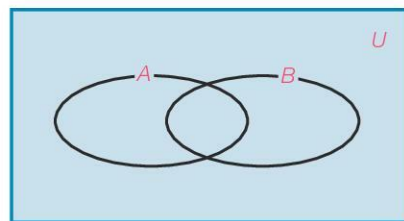


48


Gegeven is het venndiagram hiernaast met de gebieden A en B .

Neem de figuur vier keer over en arceer in deze figuren alle punten van het gebied waarvoor geldt

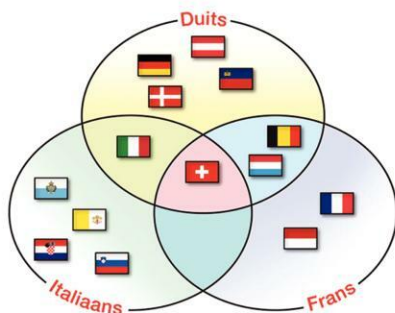
- a $A \vee B$
- b $\neg(A \vee B)$
- c $\neg(A \wedge B)$
- d $\neg A \wedge B$.



figuur 11.7

A49


Sommige talen zijn in meerdere landen een officiële taal. En in sommige landen heb je meerdere officiële talen. In het venndiagram is voor de talen Duits, Frans en Italiaans weergegeven in welke zelfstandige Europese landen het officiële talen zijn.



figuur 11.8

We gebruiken de volgende afkortingen.

I : Italiaans is een officiële taal in het land.

D : Duits is een officiële taal in het land.

F : Frans is een officiële taal in het land.

a Hoeveel landen zijn er waarvoor geldt D ?

b Voor hoeveel landen geldt $D \wedge F \wedge I$?

c Voor hoeveel landen geldt $(D \vee I) \wedge \neg F$?

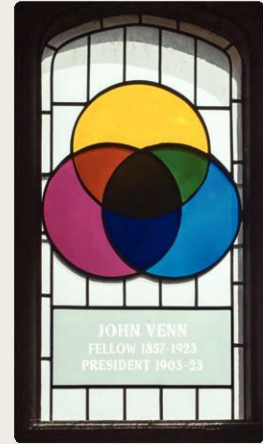
d Iemand schrijft de volgende bewering op: $(I \wedge F) \Rightarrow D$.

Vertaal deze logische symbolen in een gewone zin en onderzoek of de bewering waar is.

John Venn

Venndiagrammen zijn genoemd naar de Engelse wiskundige John Venn (1834-1923). Een gebrandschilderd raam in de hal van het Gonville en Caius College in Cambridge herinnert aan zijn vinding. In het raam is een venndiagram te zien waarin een verdeling op grond van drie kenmerken is verwerkt.

John Venn had zijn verdiensten in meerdere gebieden van de wiskunde, waaronder de verzamelingenleer en de kansrekening. Een belangrijk werk van Venn was *The Logic of Chance*, waarin hij stappen zette op het gebied van kanstheorie. In een ander werk van hem, *Symbolic Logic*, spelen venndiagrammen een belangrijke rol. Deze bleken later in meerdere vakgebieden van de wiskunde inzetbaar.



050
☐ ⊗ *

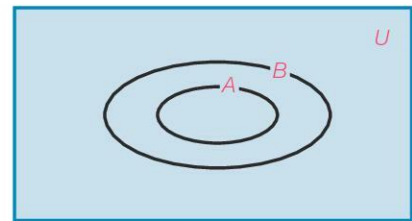
Gegeven is het venndiagram hiernaast met de proposities A en B .

A : Je woont in Leeuwarden.

B : Je woont in Friesland.

Het venndiagram hoort bij de bewering $A \Rightarrow B$.

- a Licht dit toe.
- b Licht toe dat in dit venndiagram geldt dat $\neg B \Rightarrow \neg A$.
- c Toon met het venndiagram aan dat niet geldt $\neg A \Rightarrow \neg B$.



figuur 11.9

Theorie B Venndiagrammen bij tegenvoorbeelden

Je hebt gezien dat een redenering is opgebouwd uit een of meer uitgangspunten en een conclusie. Een redenering is logisch geldig als de conclusie logisch volgt uit de uitgangspunten.

Om aan te tonen dat een redenering niet logisch geldig is, hoef je slechts één **tegenvoorbeeld** te geven. Een tegenvoorbeeld is in dit verband een voorbeeld waarbij de uitgangspunten wel waar zijn, maar de conclusie niet.

Om zo'n tegenvoorbeeld te vinden, kan een venndiagram worden gebruikt. Daarbij is het zaak om het venndiagram zo te tekenen dat de uitgangspunten waar zijn en de conclusie niet. Dit betekent vaak dat je het venndiagram niet op de meest voor de hand liggende manier moet tekenen.

Voorbeeld

Gegeven zijn de volgende uitgangspunten.

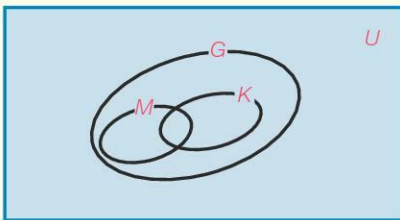
- 1 Alle mariniers zijn getraind.
- 2 Sommige mariniers hebben kinderen.

Toon aan dat de volgende conclusies niet volgen uit de uitgangspunten. Geef hiertoe een tegenvoorbeeld met behulp van een venndiagram.

- a Er zijn ongetrainde mensen met kinderen.
- b Sommige getrainde mensen, die geen marinier zijn, hebben kinderen.

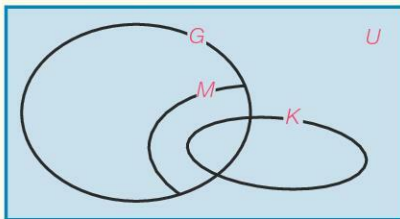
Uitwerking

- a *M*: mariniers
G: getrainde mensen
K: mensen met kinderen



In het venndiagram hiernaast zijn de uitgangspunten waar, maar er zijn geen ongetrainde mensen met kinderen. Dus de conclusie volgt niet uit de uitgangspunten.

b



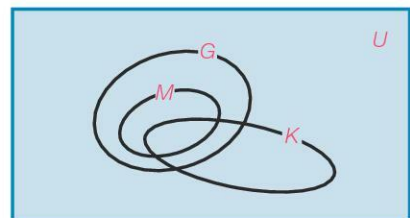
In het venndiagram hiernaast zijn de uitgangspunten waar, maar er zijn geen getrainde mensen die geen marinier zijn en wel kinderen hebben. Dus de conclusie volgt niet uit de uitgangspunten.

R51
☐ ⊗ *

Zie de theorie en het voorbeeld.

Hiernaast is het meest voor de hand liggende venndiagram getekend.

Licht toe dat dit venndiagram niet een tegenvoorbeeld is bij de conclusies van vraag a en b van het voorbeeld.



figuur 11.10

52
☐ ⊗ *

Gegeven zijn de volgende uitgangspunten.

- 1 Alle wiskundesommen zijn een probleem.
- 2 Sommige problemen zijn op te lossen.

Toon aan dat de conclusie 'Sommige wiskundesommen zijn op te lossen' niet volgt uit de uitgangspunten. Geef hiertoe een tegenvoorbeeld met behulp van een venndiagram.

53
□ ⊙ *

Onderzoek of de conclusie volgt uit de uitgangspunten. Zo niet, geef dan een tegenvoorbeeld met behulp van een venndiagram.

- a** Alle panda's eten bamboe.
Wu Wen is een panda.
Conclusie: Wu Wen eet bamboe.
- b** Alle huizen die na 2000 gebouwd zijn, hebben dubbelglas.
Ons huis heeft dubbelglas.
Conclusie: Ons huis is na 2000 gebouwd.
- c** Alle knoeten zijn leep.
Alle lepen zijn plok.
Conclusie: Alle knoeten zijn plok.
- d** Alle plokken zijn koeft.
Sommige koeften zijn snaak.
Conclusie: Geen enkele plok is snaak.

54
□ ⊙ *

Gegeven zijn de volgende uitgangspunten.

- 1 Er zijn zowel lichte als zware plokken.
- 2 Alle knoeten zijn licht.

Onderzoek of de volgende conclusies volgen uit de uitgangspunten. Zo niet, geef dan een tegenvoorbeeld met behulp van een venndiagram.

- a** Er zijn knoeten die plok zijn.
- b** Alle plokken zijn knoet.
- c** Er zijn geen zware knoeten.
- d** Niet alle knoeten zijn plok.

55
*

Gegeven zijn de volgende uitgangspunten.

- 1 Alle docenten hebben gestudeerd.
- 2 Sommige docenten geven wiskunde.

Toon aan dat de volgende conclusies niet volgen uit de uitgangspunten. Geef hiertoe een tegenvoorbeeld met behulp van een venndiagram.

- a** Sommige mensen die gestudeerd hebben en geen docent zijn, geven wiskunde.
- b** Er zijn mensen die niet gestudeerd hebben en toch wiskunde geven.

A56
□ ⊙ *

Gegeven zijn de volgende uitgangspunten.

- 1 Alle olihorens zijn plezierant.
- 2 Sommige kakelvissen zijn niet plezierant.

Onderzoek of de volgende conclusies volgen uit de uitgangspunten. Zo niet, geef dan een tegenvoorbeeld met behulp van een venndiagram.

- a** Sommige kakelvissen zijn olihorens.
- b** Alle olihorens zijn geen kakelvissen.

057
□ ⊙ *

Bij modezaak ZIJ is 90% van het klanten vrouw en 60% jonger dan 35 jaar.

Volgens Eveline volgt hieruit dat minstens de helft van de klanten vrouw is én jonger dan 35 jaar.

Laat zien dat Eveline gelijk heeft.

Theorie C Logisch redeneren met getallen

Bij modezaak ZIJ is 90% van de klanten vrouw.

Verder blijkt dat 40% van de klanten regelmatig kleding bij ZIJ koopt.

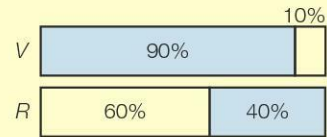
Je kunt je afvragen welk percentage van de klanten vrouw is én regelmatig bij ZIJ koopt. Om te berekenen hoe groot dit percentage minimaal is, kun je figuur 11.11 gebruiken. Hierin is

V : Klant is vrouw;

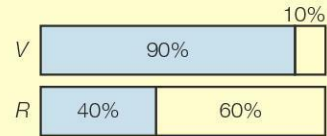
R : Klant koopt regelmatig bij Zij.

Je ziet dat de minimale overlap 30% is, dus het gevraagde percentage is 30%.

Het maximale percentage van de klanten dat vrouw is én regelmatig bij ZIJ koopt is natuurlijk 40%. Dit is in beeld gebracht in figuur 11.12.



figuur 11.11



figuur 11.12

Voorbeeld

Onderzoek van het klantenbestand van modezaak HIJ levert het volgende op.

- 85% van de klanten is man.
- 40% van de klanten is ouder dan 50 jaar.
- 80% van de klanten koopt regelmatig kleding bij HIJ.

Met deze gegevens kan een uitspraak worden gedaan over het percentage van de klanten dat én man is én ouder dan 50 jaar is én regelmatig kleding koopt bij HIJ.

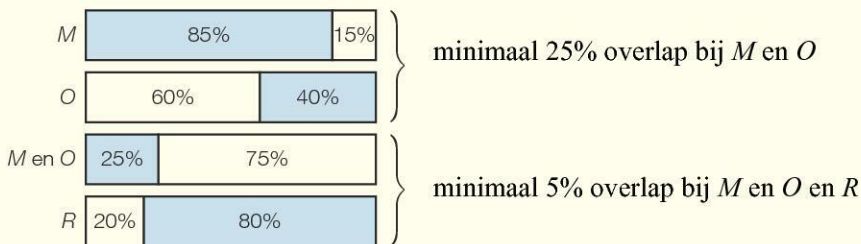
Bereken hoe groot dit percentage minimaal is.

Uitwerking

M : Klant is man.

O : Klant is ouder dan 50 jaar.

R : Klant koopt regelmatig bij HIJ.



Dus het percentage is minimaal 5%.



Zie het voorbeeld.

Bereken hoe groot het percentage van de klanten dat én man is én ouder is dan 50 jaar én regelmatig kleding koopt bij HIJ maximaal is.

59

Er is onderzoek gedaan naar de seizoenkaarthouders van Ajax.

Het bleek dat

- 78% van de kaarthouders in de regio Amsterdam woont;
- 94% van de kaarthouders man is;
- 67% van de kaarthouders jonger is dan 40 jaar.

Met deze gegevens kan een uitspraak worden gedaan over het percentage van de seizoenkaarthouders dat in de regio Amsterdam woont, man is en jonger is dan 40 jaar.

Bereken hoe groot dit percentage

- a** maximaal is
b minimaal is.

60

Anne, Bo, Cato en Dione spelen een kaartspel met 12 kaarten: van harten, ruiten, schoppen en klaveren de 7, 8 en 9. Na het schudden en uitdelen hebben ze elk drie kaarten in handen.

Anne zegt: 'Ik heb 21 punten.'

Bo zegt: 'Ik heb drie klaveren.'

Cato zegt: 'Ik heb één negen en geen schoppen.'

Om te achterhalen hoeveel punten Dione in handen heeft, kun je met een schema werken zoals in figuur 11.13a.

Nadat Anne en Bo hun uitspraak hebben gedaan, is het schema van figuur 11.13b ontstaan.

- a** Neem het schema van figuur 11.13b twee keer over en voeg letters C toe die je kunt zetten nadat Cato haar uitspraak heeft gedaan. Er zijn twee mogelijkheden, geef er in elk schema één.
- b** Gebruik de schema's die je in vraag a hebt gekregen om te berekenen hoeveel punten Dione in handen heeft. Geven de twee schema's hetzelfde aantal punten?

7				
8				
9				

a

7	A	A	A	B
8				B
9				B

b

figuur 11.13

61

Adin, Bea, Cas en Delia spelen een kaartspel met 12 kaarten: van harten, ruiten, schoppen en klaveren de 7, 8 en 9. Na het schudden en uitdelen hebben ze elk drie kaarten in handen.

Adin zegt: 'Ik heb 22 punten.'

Bea zegt: 'Ik heb twee klaveren en een schoppen, maar geen enkele negen.'

Cas zegt: 'Ik heb twee schoppen en ruiten 9.'

Hoeveel punten heeft Delia in handen?

A62

Abe, Ben en Collin doen mee aan een poule waarbij ze van 12 wedstrijden de uitslag moeten voorspellen. Na afloop blijkt dat ze samen minder dan 19 goede voorspellingen hebben gedaan. Abe heeft meer dan vijf wedstrijden goed voorspeld. Collin heeft meer goed dan Ben. Wie heeft het kleinste aantal goede voorspellingen?

Terugblik

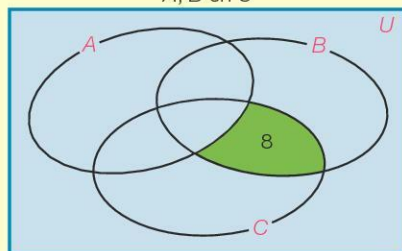
Venndiagrammen bij telproblemen

In een venndiagram worden groepen op basis van kenmerken in beeld gebracht.

Je kunt venndiagrammen gebruiken om telproblemen op te lossen. Zo behoren tot het groene gebied in het venndiagram hiernaast de acht personen die wel kenmerken B en C bezitten, maar niet kenmerk A .

Als je gebruik maakt van logische symbolen, dan kun je het groene gebied noteren als $\neg A \wedge B \wedge C$.

personen verdeeld naar kenmerken
 A, B en C



Venndiagrammen bij tegenvoorbeelden

Bij logische problemen kunnen venndiagrammen gebruikt worden om een tegenvoorbeeld te geven. Bij een tegenvoorbeeld zijn de uitgangspunten wel waar, maar de conclusie niet.

Bij de uitgangspunten

1 Alle taarten zijn calorierijke producten;

2 Sommige taarten zijn ongezonder;

kun je een venndiagram gebruiken om aan te tonen dat de conclusie ‘Alle calorierijke producten zijn ongezonder’ niet volgt uit de uitgangspunten.

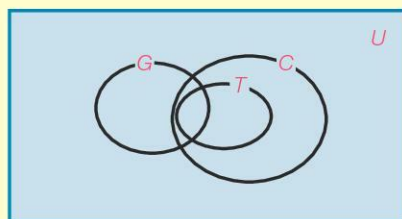
Gebruik

T : taarten;

C : calorierijke producten;

G : gezonde producten.

In het venndiagram hiernaast zijn de uitgangspunten waar, maar zijn er wel calorierijke producten die gezond zijn. Dus de conclusie volgt niet uit de uitgangspunten.



Logisch redeneren met getallen

Ad, Ben, Cor en Daan hebben een memoryspel gedaan met 30 paren kaarten.

Ad zegt: ‘Ik heb meer dan 7 paren, maar minder dan 11 paren.’

Ben zegt: ‘Ik heb hoogstens 6 paren.’

Cor zegt: ‘Ik heb meer paren dan Ben, maar minder dan Ad.’

Hoeveel paren heeft Daan minstens?

Ad heeft hoogstens 10 paren, Ben heeft hoogstens 6 paren en Cor heeft hoogstens 9 paren.

Daan heeft dus minstens $30 - 10 - 6 - 9 = 5$ paren.

11.5 Paradoxen en leugens

063
□ ⊗ *

Lees het volgende krantenartikel.

In het krantenartikel is sprake van ‘vierkante wielen’.

Licht toe dat er een tegenspraak is tussen het bijvoeglijke en het zelfstandige naamwoord.

ARTIKEL

NS gebruikt laser tegen vierkante wielen

Leiden- De NS gaat deze herfst een laser inzetten tegen aangekoekte bladeren op het spoor. In Engeland is de anti-bladerlaser al een groot succes.

‘De techniek is inmiddels verder gevorderd’, zegt een woordvoerder van ProRail in het *Noordhollands Dagblad*. Hij wijst erop dat de laser niet alle problemen gaat oplossen: ‘We weten dat er hoe dan ook in het seizoen extra overlast zal blijven.’ Een tweede middel dat ingezet gaat worden tegen de bladeren, is een watersproeier. Die maakt de blaadjes nat, zodat ze niet aan het spoor blijven plakken.

Bladeren op de rails zorgen elk najaar voor veel problemen. Wielen van treinen verliezen grip bij het afremmen en slijten daardoor ongelijk af. Het gevolg daarvan is ‘vierkante’ wielen die op hun beurt weer de rails beschadigen als ze niet eerst bijgeslepen worden.

Bron: *De Telegraaf*

064
□ ⊗ *

Gegeven zijn de proposities

A: Je hebt 0 euro;

B: Je bent rijk;

C: Je krijgt een euro;

en de beweringen $A \Rightarrow \neg B$ en $(\neg B \wedge C) \Rightarrow \neg B$.

a Beschrijf in een gewone zin de bewering $A \Rightarrow \neg B$.

Ben je het met deze bewering eens?

b Beschrijf in een gewone zin de bewering $(\neg B \wedge C) \Rightarrow \neg B$.

Ben je het met deze bewering eens?

Joost heeft 0 euro en krijgt er elke seconde een euro bij.

c Hoe volgt uit de gegeven beweringen dat Joost nooit rijk wordt?

Theorie A Paradoxen

De uitspraak ‘vierkante wielen’ is een tegenspraak.

Een ander woord voor tegenspraak is contradictie.

In de logica is een **contradictie** een bewering die nooit waar is.

De bekendste contradictie is $A \wedge \neg A$.

In opgave 64 heb je te maken met de volgende twee beweringen.

- Als iemand 0 euro heeft, is hij niet rijk.
 - Als iemand niet rijk is en een euro krijgt, dan is hij niet rijk.
- Hieruit volgt -logisch gesproken- dat iemand, hoeveel euro's hij ook krijgt, nooit rijk kan worden.

Je hebt hier te maken met een paradox. Een **paradox** is een schijncontradictie, een schijnbare tegenspraak.

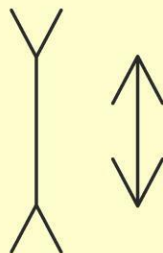
Een contradictie is een bewering die nooit waar is.

Een paradox is een schijncontradictie.

Hiernaast zie je een zogenaamde visuele paradox. Het lijkt of het linker verticale lijnstuk langer is dan het rechter verticale lijnstuk. Bij nameten blijken ze echter even lang.

In deze paragraaf zullen we ons bezighouden met logische paradoxen. Hiervan heb je in opgave 64 een voorbeeld gezien. Je hebt met een logische paradox te maken als twee of meer ware beweringen een onware conclusie opleveren.

Bekend zijn de paradoxen van Zeno van Elea, een Griekse wijsgeer (ca. 490 v. Christus - ca. 430 v. Christus). Deze paradoxen gaan over de mogelijkheid van beweging, zoals *Achilles en de schildpad* (zie opgave 69) en de *vliegende pijl*.



65

Lees het volgende krantenartikel.

ARTIKEL

De calciumparadox

In landen waar veel calcium wordt geconsumeerd komt vaker botontkalking voor dan in landen waar de calciumconsumptie laag is. Er is sprake van een paradox, legt emeritus hoogleraar Schaafsma uit. Wie veel calcium eet, heeft niet per se sterkere botten, er spelen meer factoren een rol. In landen waar veel zuivel wordt geconsumeerd, schijnt de zon bijvoorbeeld minder vaak, zegt hij, en zijn de inwoners minder actief. 'Vitamine D en beweging zijn misschien nog wel belangrijker voor de botten dan kalk.' Andere verklaringen voor de calciumparadox: roken en te veel zout doen het effect van extra calcium teniet. Bij iedere 4 gram extra zout gaat er 40 milligram calcium verloren.

Bron: *De Volkskrant*

We gebruiken de volgende afkortingen.

A: In Nederland wordt veel calcium geconsumeerd.

B: In Nederland komt weinig botontkalking voor.

Je zou verwachten dat geldt $A \Rightarrow B$. De paradox is echter dat niet geldt $A \Rightarrow B$.

- Geldt volgens het krantenartikel $A \Rightarrow \neg B$? En $\neg A \Rightarrow B$?
- Noem minstens drie verklaringen voor de calciumparadox.

Lees het volgende informatief.
Leg uit wat hier de paradox is.

INFORMATIEF

De vleeseetparadox

Het runderras Gasconne is een Race Rustique, een ras dat nooit gekruist is voor betere prestaties en daarom een zogenaamd slow food-ras is.

Omdat tegenwoordig om financiële redenen de voorkeur wordt gegeven aan runderen met een hogere vleesproductie, wordt dit ras met uitsterven bedreigd.

Topchef Joris Bijdendijk kookt vanwege de volgens hem betere smaak graag met runderen van het ras Gasconne. Hij zei in de documentaire *Vleesverlangen* dat er hier sprake is van een paradox: 'Eet hem op om hem in leven te houden.'



Lees de volgende tekst.

TEKST

De paradox van de krokodil

Een krokodil heeft een baby gegrepen die aan de oevers van de Nijl speelde. De moeder smeekt de krokodil haar kind terug te geven.

'Oké', zegt de krokodil, 'als je kunt raden wat ik zal doen, dan krijg je je kind terug. Als je echter verkeerd raadt, dan eet ik hem op.'

'O, je zult mijn kind verslinden!' roept de radeloze moeder. 'Tja,' zei de krokodil, 'nu kan ik je kind niet teruggeven, want als ik hem teruggeef, dan heb je verkeerd geraden, en ik waarschuwde je dat als je verkeerd zou raden, ik hem zou opeten.'

'Helemaal niet,' zei de slimme moeder, 'je kunt hem niet opeten, want als je dat doet, dan heb ik goed geraden en je beloofde dat als ik goed zou raden, je mijn kind zou teruggeven.'

- a** Wat zal er, volgens jou, logisch gesproken, gebeuren?

We voeren de volgende proposities in.

A: De moeder raadt wat de krokodil gaat doen.

B: De krokodil geeft de baby terug.

- b** Geef, met behulp van deze proposities, de redenering van de krokodil.
c Geef, met behulp van deze proposities, de redenering van de moeder.
d Omschrijf met eigen woorden waar in dit verhaal de paradox zit.

A68
☐ ◎ *

Wat gebeurt er als een tijdreiziger terug in de tijd gaat en (per ongeluk of opzettelijk) zijn grootvader om het leven brengt, voordat deze de vader of moeder van de tijdreiziger heeft kunnen verwekken?

Deze vraag staat bekend als de grootvaderparadox.

- a Bedenk welke paradox ontstaat.
- b Er zijn drie oplossingen voor deze paradox.
Zoek op internet welke drie oplossingen dat zijn. Welke van de drie spreekt je het meest aan?

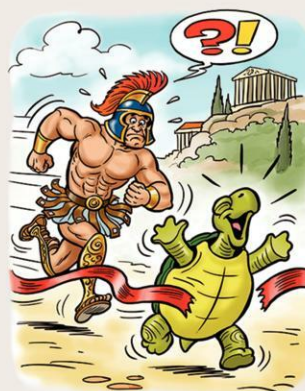
E69
*

Lees de tekst over Achilles en de schildpad.

TEKST

Achilles en de schildpad

Achilles en de schildpad gaan een wedstrijd hardlopen. Achilles is een snelle atleet, dus de schildpad krijgt een voorsprong. De slimme schildpad zegt: 'Als je me wilt inhalen, dan moet je naar mijn startpunt lopen. Dat kost tijd. In die tijd ben ik naar een punt iets verderop gelopen. In de tijd dat jij vervolgens naar dat punt loopt, ben ik alweer wat verder gekomen. Je gaat me dus nooit inhalen.' Achilles gaf op, voordat de wedstrijd begonnen was.



- a Waarom is hier sprake van een paradox?

Stel dat Achilles met een snelheid van 5 m/s loopt en de schildpad met een snelheid van 5 cm/s. De voorsprong van de schildpad is 10 meter en ze beginnen allebei op $t = 0$ met t in seconden.

- b Wat is de afstand tussen Achilles en de schildpad op $t = 1$ en op $t = 2$?
- c Licht toe dat Achilles de schildpad op $t = 3$ voorbij is gerend.

De formule voor de afgelegde afstand s van Achilles is $s = 5t$ en van de schildpad $s = 0,05t + 10$. Hierin is s de afstand in meters vanaf het startpunt van Achilles die na t seconden is afgelegd.

- d Licht de formules toe.
- e Bereken in twee decimalen na hoeveel seconden Achilles de schildpad heeft ingehaald.

Er is op woensdag 28 oktober een inbraak gepleegd in het plaatsje P. De politie heeft drie verdachten aangehouden: Ad, Ben en Cor. We nemen aan dat één van hen de inbraak heeft gepleegd, dat degene die dat heeft gedaan liegt en dat de andere twee de waarheid spreken. Ad beweert dat hij Ben op woensdag 28 oktober in P heeft gezien. Ben beweert dat hij die woensdag niet in P is geweest. Cor beweert dat hij zowel Ad als Ben op woensdag 28 oktober in P heeft gezien.

We gebruiken in deze opgave de volgende afkortingen.

A: Ad spreekt de waarheid.

B: Ben spreekt de waarheid.

C: Cor spreekt de waarheid.

Uit de beweringen van Ad en Ben volgt dat $A \Rightarrow \neg B$ en ook $B \Rightarrow \neg A$.

- a Hoe volgt uit het bovenstaande dat Ad of Ben de inbraak heeft gepleegd?
- b Kunnen Ad en Cor beiden de waarheid spreken? Kunnen Ben en Cor beiden de waarheid spreken?
- c Licht toe dat uit de vragen a en b volgt dat $(A \wedge C) \Rightarrow \neg B$.

Theorie B Waarheid en leugens

Het probleem van opgave 70 kan met de volgende redeneerstappen worden aangepakt.

$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C), \neg(A \wedge B), \neg(B \wedge C)$
conclusie $A \wedge \neg B \wedge C$.

Het kan ook korter, namelijk

$(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C), \neg(A \wedge B), \neg(B \wedge C)$ conclusie $A \wedge C$.

Dus: Als twee de waarheid spreken en Ad en Ben kunnen dat niet allebei (omdat ze elkaar tegenspreken) en ook Ben en Cor kunnen dat niet allebei doen, dan moeten Ad en Cor dat wel zijn. Hieruit volgt dat Ben liegt en de dader is.

Voorbeeld

Een van de vrienden Ad, Ben, Cor en Daan heeft een vel papier met ‘Weg met logica’ op het bord geplakt. Ze weten allemaal wie het heeft gedaan, maar ze spreken niet allemaal de waarheid. Ad, Ben, Cor en Daan doen in deze volgorde onderstaande uitspraken waarbij ze om en om de waarheid spreken.

Ad: ‘Cor en ik hebben het niet gedaan.’

Ben: ‘Cor of Daan heeft het gedaan.’

Cor: ‘Ik heb het niet gedaan.’

Daan: ‘Ad heeft het gedaan.’

- a Neem aan dat Ad liegt.
Welke conclusie trek je hieruit?
- b Onderzoek wie het heeft gedaan.

Uitwerking

- a** A : Ad spreekt de waarheid.
 B : Ben spreekt de waarheid.
 C : Cor spreekt de waarheid.
 D : Daan spreekt de waarheid.
 Er geldt $\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg C \wedge D)$.
 Uit $\neg A$ volgt dat Ad of Cor het heeft gedaan.
 Uit B volgt dat Cor of Daan het heeft gedaan.
 Uit $\neg C$ volgt dat Cor het heeft gedaan.
 Uit D volgt dat Ad het heeft gedaan.
 Zowel uit B en D als uit $\neg C$ en D volgt een tegenspraak.
 Conclusie: Ad liegt niet.
- b** Uit vraag a volgt dat Ad de waarheid spreekt.
 Er geldt $A \Rightarrow (\neg B \wedge C \wedge \neg D)$.
 Uit A volgt dat Ad en Cor het niet hebben gedaan.
 Uit $\neg B$ volgt dat Cor en Daan het beide niet hebben gedaan.
 Conclusie: Ben heeft het gedaan.



R71



Zie het voorbeeld.

- a** In de uitwerking van vraag b is de conclusie getrokken uit A en $\neg B$.
 Waarom is het hier niet nodig C en $\neg D$ te onderzoeken?

- b** Bij vraag a van het voorbeeld kun je het schema hiernaast maken.
 Maak een soortgelijk schema voor vraag b van het voorbeeld. Hoe volgt uit de schema's dat Ben het heeft gedaan?

situatie	Wie heeft het gedaan?
$\neg A$	Ad of Cor
B	Cor of Daan
$\neg C$	Cor
D	Ad

72
☐ ⊙

Floor ligt op maandag en op donderdag en spreekt op de andere dagen de waarheid. Vandaag heeft zij vier van de volgende vijf zinnen uitgesproken.

Welke kan ze vandaag zeker niet uitgesproken hebben?

- I Ik heb twee broers en een zus.
- II Ik ben het middelste kind.
- III Ik heet Floor.
- IV Ik spreek altijd de waarheid.
- V Ik zit op volleybal.

73
☐ ⊙ *

Er is een misdrijf gepleegd en de verdachten zijn Ad, Ben en Cor.

Gegeven zijn de volgende drie uitspraken, waarvan er één gelogen is.

Ad: 'Ben of Cor heeft het gedaan.'

Ben: 'Ad heeft het niet gedaan.'

Cor: 'Ben heeft het gedaan.'

Gebruik in deze opgave de volgende afkortingen.

A: Ad spreekt de waarheid.

B: Ben spreekt de waarheid.

C: Cor spreekt de waarheid.

a Neem aan dat Ad liegt.

Welke conclusie trek je hieruit?

b Onderzoek wie het heeft gedaan.

A74
☐ ⊙ *

Er is een misdrijf gepleegd en de verdachten zijn Ad, Ben en Cor. Het is bekend dat één van deze drie verdachten altijd de waarheid spreekt, één altijd liegt en dat één soms de waarheid spreekt en soms liegt. Je weet echter niet wie de waarheidspreeker (W) is, wie de leugenaar (L) en wie soms de waarheid spreekt en soms liegt (W/L). Ze worden alle drie ondervraagd en eerst ontkennen ze alle drie dat ze het misdrijf hebben gepleegd. Daarna wordt gevraagd de dader aan te wijzen.

Ad zegt: 'Cor heeft het gedaan.'

Ben zegt: 'Ik heb het gedaan.'

Cor zegt: 'Ben heeft het gedaan.'

Zoek uit wie het misdrijf heeft gepleegd.

E75
*

Een bekend logisch raadsel is het volgende.

Er staan twee broers op een splitsing en jij wil weten welke kant je op moet. Je weet dat één van de broers altijd liegt, de andere spreekt altijd de waarheid. Je mag maar één vraag stellen. Welke vraag stel je? Probeer de oplossing te bedenken en leg uit waarom de oplossing klopt.

Terugblik

Contradictie en paradox

Een contradictie is een bewering die nooit waar is.

Heb je te maken met de propositie A , dan is de bewering $A \wedge \neg A$ een contradictie.

Een paradox is een schijnbare tegenspraak, oftewel een schijncontradictie.

Logische paradoxen

Formuleer je bij het artikel hiernaast de proposities

A : Het gemiddeld inkomen ligt lager;

B : De mensen zijn minder gelukkig; dan is normaal gesproken een logische bewering $A \Rightarrow B$.

Maar uit het artikel blijkt dat in Friesland geldt $A \wedge \neg B$.

Vandaar dat er over een paradox wordt gesproken.

ARTIKEL

De Friese paradox

Economisch gezien doet Friesland het minder goed dan landelijk. Friesland heeft bijvoorbeeld een lager gemiddeld inkomen en bruto binnenlands product. In zulke ranglijstjes bungelt Friesland vaak ergens onderaan. Maar kijk je hoe het met de mensen zelf gaat, dan zijn Friezen gelukkig en gezond. In dit soort lijstjes staat Friesland juist aan de top. Dit lijkt paradoxaal, want in veel onderzoek zie je juist een verband tussen sociaal-economische indicatoren en welzijns-indicatoren. Hoe kan Friesland zowel een lagere welvaart hebben als een hoog welzijn?

Bron: *Fries Sociaal Planbureau*

Waarheid en leugens

Bij een vechtpartij in een café is Daan ernstig gewond geraakt. De verdachten zijn Ad, Ben en Cor. We gaan ervan uit dat één van deze drie het heeft gedaan en dat degene die het heeft gedaan niet de waarheid vertelt.

De andere twee vertellen wel de waarheid. Bij het verhoor ontkennen ze alle drie de dader te zijn. Verder noteren we de volgende uitspraken.

Ad: 'Ben en Cor kennen Daan heel goed.'

Ben: 'Ik ken Daan niet en ik heb het niet gedaan.'

Cor: 'Ik heb Ad, Ben en Daan samen het café zien binnengaan, dus Ad of Ben is de dader.'

We gebruiken de volgende afkortingen.

A : Ad spreekt de waarheid.

B : Ben spreekt de waarheid.

C : Cor spreekt de waarheid.

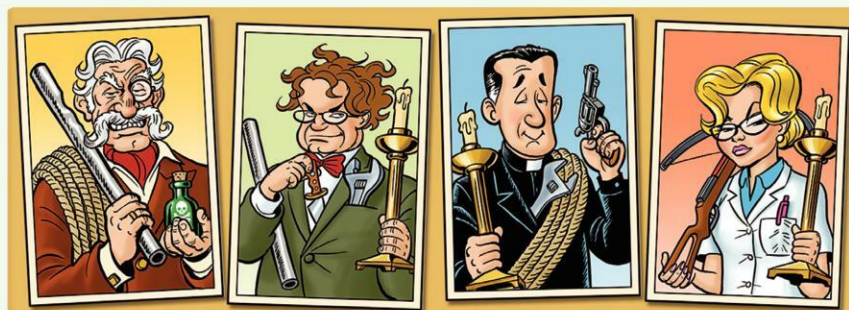
Uit de uitspraken volgt $A \Rightarrow \neg B$ waaruit volgt dat Ad of Ben de dader is.

Omdat geldt $B \Rightarrow (\neg A \wedge \neg C)$ en er aangenomen is dat er maar één liegt, is de conclusie dat Ben het heeft gedaan.

Eindopdracht Een logisch moordraadsel

[► WERKBLAD] De vrienden Laurene, Mo, Daan en Nadie hebben een potje Cluedo gespeeld. Nadie besluit hierop geïnspireerd een raadsel voor te leggen aan de rest. Ze maakt het volgende schema, waarin twintig mogelijke moordscenario's staan met een dader, een plaats waar de moord is gepleegd (de locatie) en een moordwapen. Dit schema staat ook op het werkblad.

	kolonel	professor	dominee	dokter
balzaal			touw	kruisboog
biljartkamer	gif		Engelse sleutel	balpen
eetkamer	touw	Engelse sleutel	kandelaar	
hal	touw	loden pijp	revolver	
keuken	loden pijp	kandelaar		kruisboog
serre	gif	dolk		
studeerkamer			Engelse sleutel	kandelaar
zitkamer		Engelse sleutel		balpen



Nadie vertelt aan Laurene de locatie. Aan Mo vertelt ze wat het moordwapen is. Daan krijgt te horen wie de dader is.

Laurene, Mo en Daan weten welke soort informatie aan de anderen is verteld. Dus Laurene weet dat Mo weet wat het moordwapen is en dat Daan weet wie de dader is, enzovoort.

De drie vrienden moeten het juiste moordscenario ontdekken zonder elkaar hun eigen informatie te verklappen.

Met het moordscenario wordt bedoeld: wie is de dader, wat is de locatie van de moord en wat is het moordwapen.

Ze doen achtereenvolgens de volgende uitspraken.

- 1 Laurene zegt: 'Ik weet niet wat het moordscenario is, maar ik weet dat Mo het ook niet weet.'
- 2 Mo zegt: 'Ik weet nog steeds niet wat het moordscenario is, maar ik weet dat Daan het ook nog steeds niet weet.'
- 3 Daan zegt: 'Ik weet nog steeds niet wat het moordscenario is, maar ik weet dat Laurene het ook nog steeds niet weet.'
- 4 Laurene zegt: 'Nu weet ik wel wat het moordscenario is!'
- 5 Mo zegt: 'Nu weet ik het ook!'
- 6 Daan zegt: 'Dan weet ik het ook!'

Op basis hiervan kun je met logisch redeneren het moordscenario te weten komen.

We gebruiken de volgende notaties.

$L(\text{balzaal})$ betekent dat de balzaal de locatie is.

$M(\text{gif})$ betekent dat gif het moordwapen is.

$D(\text{kolonel})$ betekent dat de kolonel de dader is.

In deze notatie kun je op basis van het schema schrijven

$M(\text{dolk}) \Rightarrow (L(\text{serre}) \wedge D(\text{professor}))$.

- Vertaal bovenstaande logische uitdrukking in een gewone zin.

In uitspraak 1 is het vanzelfsprekend dat Laurene nog niet weet wat het moordscenario is, want er zijn geen locaties waar maar één scenario bij hoort. Dat is niet zo voor het moordwapen, waarvan Mo weet wat het is.

- Leg uit dat je uit het tweede gedeelte van uitspraak 1 kunt concluderen dat de moord niet in de hal en niet in de serre gepleegd is en streep de bijbehorende scenario's in het schema op het werkblad door.
- Leg uit dat je nu uit het eerste gedeelte van uitspraak 2 kunt concluderen dat $M(\text{gif})$ en $M(\text{loden pijp})$ niet waar zijn en streep de bijbehorende scenario's op het werkblad door.

Uit het tweede gedeelte van uitspraak 2 volgt dat de kolonel als dader afvalt. Dan valt het touw ook af als moordwapen.

- Leg dat uit.
- Licht toe dat er geldt $\neg M(\text{touw}) \Rightarrow \neg(L(\text{balzaal}) \wedge D(\text{dominee}))$.

Door zo stap voor stap verder te redeneren kun je tot het juiste moordscenario komen.

- Los het raadsel verder op. Geef het moordscenario weer op twee manieren: zowel met een gewone zin, als met logische symbolen en de eerder ingevoerde notaties L , M en D .

Diagnostische toets

11.1 Redeneren

- 1** Onderzoek bij de volgende redeneringen of ze logisch geldig zijn. Geef duidelijk aan wat er niet klopt als de redenering niet logisch geldig is.
- a** Als je een huisdier hebt, dan houd je van dieren. Teun heeft geen huisdier. Teun houdt dus niet van dieren.
 - b** Iedereen komt graag in pretparken of dierentuinen. Lynn komt niet graag in pretparken. Dus Lynn komt graag in dierentuinen.

11.2 Logische symbolen

- 2** Gegeven zijn de volgende proposities over steden.
A: De stad ligt in Nederland.
B: De stad ligt in Zeeland.
Vertaal de volgende logische uitdrukkingen in een gewone zin.
- a** $B \Rightarrow A$ **b** $\neg B \Rightarrow \neg A$
- 3** Mevrouw Middelman heeft haar zoon Jens een belofte gedaan. Als ze een grote prijs wint in de loterij, dan krijgt Jens een auto. We gebruiken de volgende afkortingen.
A: Mevrouw Middelman wint een grote prijs in de loterij.
Z: Jens krijgt een auto.
Noteer de afspraak van mevrouw Middelman met deze letters en logische symbolen in de volgende situaties. Trek zo mogelijk een conclusie.
- a** Jens krijgt geen auto.
 - b** Mevrouw Middelman wint de loterij.

11.3 Beweringen en voorwaarden

- 4** Gegeven is de volgende bewering die bestaat uit vier proposities.
Als het wegdek van de brug nat is, dan heeft het net geregend of is het heel warm en heeft de gemeente het wegdek nat laten spuiten tegen het uitzetten.
Deze bewering kun je op twee manieren interpreteren.
- a** Noteer de proposities uit de bewering met *A*, *B*, *C* en *D* en schrijf de twee interpretaties met deze letters.
 - b** Welke interpretatie wordt waarschijnlijk bedoeld? Licht toe.
- 5** Vermeld of je in onderstaande gevallen met een noodzakelijke voorwaarde, een voldoende voorwaarde of een noodzakelijke en voldoende voorwaarde te maken hebt en noteer de uitspraak met logische symbolen.
- a** Als je een rijbewijs hebt, dan mag je autorijden.
 - b** Mits je 18 jaar of ouder bent, ben je meerderjarig.
 - c** Alleen als je genoeg groente en fruit eet, heb je een gezonde eetgewoonte.

11.4 Redeneren met groepen

- 6** Bij een onderzoek is aan 120 personen gevraagd welke roddelbladen ze wel eens lezen. We gebruiken de volgende afkortingen.

P : Leest wel eens Privé.

S : Leest wel eens Story.

W : Leest wel eens Weekend.

Voor 35 personen geldt P , voor 31 personen S en voor 33 personen W .

Voor 22 personen geldt $P \wedge S$, voor 20 personen $P \wedge W$ en voor 19

personen $S \wedge W$. Voor 15 personen geldt $P \wedge S \wedge W$.

Voor hoeveel personen geldt $\neg(P \vee S \vee W)$?

- 7** Onderzoek of de volgende conclusies volgen uit de uitgangspunten. Zo niet, geef dan een tegenvoorbeeld met behulp van een venndiagram.

- a** Sommige kinderen gaan niet naar school.
Iedereen die naar school gaat heeft stress.
Conclusie: Sommige kinderen hebben geen stress.
- b** Alle brieven zijn nuiten.
Puck is geen brief.
Conclusie: Puck is geen nuit.

11.5 Paradoxen en leugens

- 8** Lees het krantenartikel hiernaast.
We gebruiken de volgende proposities.

A : Je sport veel.

B : Je verbrandt calorieën.

C : Je valt af.

- a** Beschrijf de paradox met de proposities A en C en logische symbolen. Waarom is hier sprake van een paradox?
- b** Geef van elk van de volgende beweringen aan of deze volgt uit het artikel.

I: $B \Rightarrow C$ III: $\neg B \Rightarrow \neg A$

II: $B \Rightarrow \neg C$ IV: $B \Rightarrow A$

ARTIKEL

Meer bewegen en toch meer wegen

Verontrustend: sporten, ook al verbrand je er calorieën mee, helpt waarschijnlijk weinig bij het afvallen. Terwijl de afgelopen twintig jaar het aantal fitnesscentra verdubbelde, steeg het aandeel mensen met overgewicht mee, van een derde naar ruim de helft van Nederland. Tien jaar bevolkingsonderzoek onder miljoenen Amerikanen laat dezelfde paradox zien. Er wordt heel wat bewogen in de VS, maar overgewicht gaat gewoon door met zijn opmars.

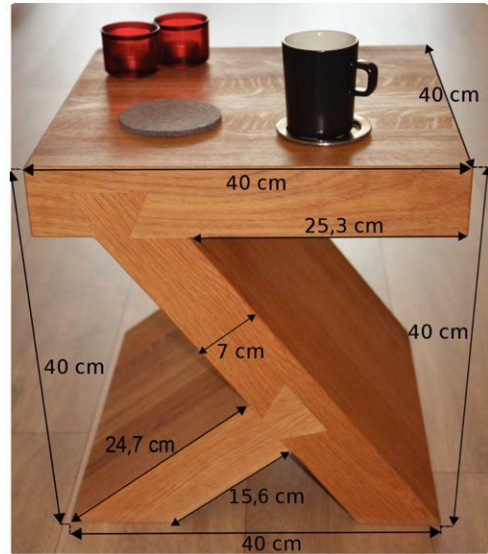
Bron: *De Volkskrant*

- 9** Gegeven zijn de volgende vier beweringen.
- I Precies één van deze beweringen is onwaar.
- II Precies twee van deze beweringen zijn onwaar.
- III Precies drie van deze beweringen zijn onwaar.
- IV Precies vier van deze beweringen zijn onwaar.
- a** Neem aan dat bewering I waar is.
Welke conclusie trek je hieruit?
- b** Onderzoek welke bewering waar is.

Gemengde opgaven

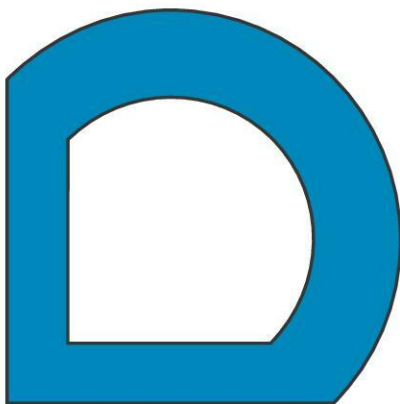
8 Meetkunde

- 1** Op de foto in figuur G.1 zie je een bijzettafel die gemaakt is van eikenhouten delen met een dikte van 7 cm.
- a** Teken op schaal 1: 8 het vooraanzicht en het linkerzijaanzicht van de tafel. Begin bij het vooraanzicht met het tekenen van een vierkant van 40 bij 40 cm op schaal. Teken daarna het bovenblad en maak het aanzicht af.
 - b** Bereken het gewicht van de tafel in kg in één decimaal. Gebruik dat 1 dm^3 eikenhout 700 gram weegt.

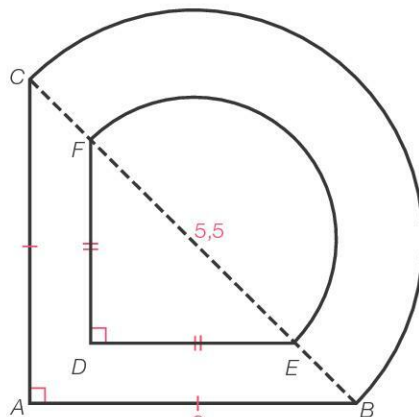


figuur G.1

- 2** In figuur G.2a zie je het blauwe logo van een bedrijf. Dit logo is onder andere opgebouwd uit twee halve cirkels die hetzelfde middelpunt hebben. In figuur G.2b zie je de verdere opbouw. Er geldt $AB = 6$ en $EF = 5,5$. Bereken de oppervlakte van het logo. Rond af op één decimaal.



a



b

figuur G.2

- 3** Zie figuur G.3. Deze foto is genomen door de spijlen van een hek. De fotograaf hield de camera precies midden tussen de twee spijlen. De ruimte tussen de spijlen is 10 cm en de foto is genomen op een afstand van 70 cm van het hek. De boot heeft een lengte van 7 m.

Op welke afstand van het hek vaart de boot? Geef je antwoord in gehele meters.



figuur G.3

- 4** In figuur G.4 zie je het kunstwerk ‘Perpendicular Cylinders III’ van de Nederlandse kunstenaar Lucien den Arend. Het bestaat uit vier halve cilinders van staal. Elke halve cilinder heeft een lengte van 1,5 m en een diameter van 75 cm.

a Teken de drie aanzichten van het kunstwerk op schaal 1 : 25.

Een cilinder heeft een grondvlak, een bovenvlak en een cilindermantel. Voor de oppervlakte van de cilindermantel geldt de formule $\text{opp} = 2\pi r \cdot h$. Hierin is r de straal van het grondcirkel en h de hoogte van de cilinder.

b Bereken de oppervlakte van het kunstwerk in gehele dm^2 .

Van het kunstwerk bestaat ook een variant van massief marmer. Zie figuur G.5. Dit werk is iets kleiner dan de stalen versie. De halve cilinders hebben een lengte van 80 cm en een diameter van 40 cm. In verband met het transport van het kunstwerk moest Lucien den Arend het gewicht van het kunstwerk opgeven aan de transporteur.

c Bereken het gewicht van het marmeren kunstwerk. Rond af op gehele kg. Gebruik dat 1 dm^3 marmer 2,75 kg weegt.



figuur G.4



figuur G.5

5

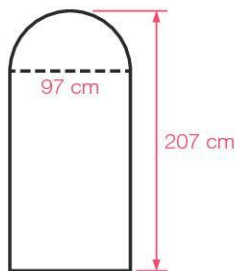
[▶ WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je het Torentje van Drienerlo, een kunstwerk gemaakt door Wim T. Schippers, dat op de campus van de Universiteit Twente staat. De foto staat ook op het werkblad.

- Met wat voor soort perspectief heb je hier te maken?
- De hoogte van het torentje zonder de windhaan, gemeten vanaf het waterniveau, is 9,50 m. Op welke hoogte is de foto genomen? Geef je antwoord in gehele dm.
- De ramen die je aan de linkerkant van de toren ziet, zijn rechthoeken met daarop een halve cirkel. In figuur G.7 zie je een tekening van een raam met de bijbehorende afmetingen. Bereken de oppervlakte van een raam in gehele dm^2 .

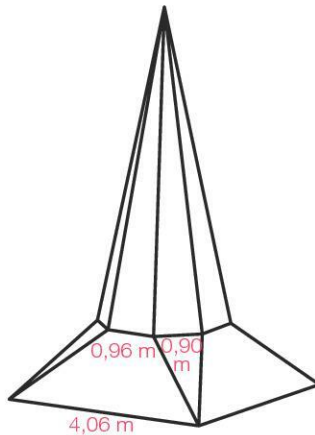


figuur G.6

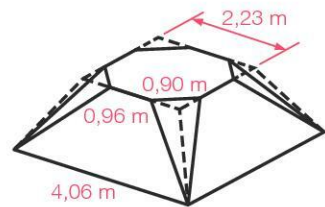
In figuur G.8 zie je een tekening van het dak van het torentje. Het dak bestaat uit twee delen. Het bovenste deel is een piramide met een zeshoekig grondvlak. De top van deze piramide ligt 4,95 m boven het grondvlak van deze piramide. Het onderste deel is een afgeknotte piramide met een vierkant grondvlak met zijde 4,06 m, waarvan bij elke hoek een piramide is weggesneden.



figuur G.7



figuur G.8



figuur G.9

Zie figuur G.9. Het (denkbeeldige) vierkante bovenvlak van de afgeknotte piramide heeft zijde 2,23 m. Door het wegsnijden van de vier piramides ontstaat een zeshoekig bovenvlak met zijden die om en om 0,96 m en 0,90 m zijn. Het bovenvlak van de afgeknotte piramide ligt op een hoogte van 1,10 m boven het grondvlak van de afgeknotte piramide.

- Teken op schaal 1: 100 het vooraanzicht en het bovenaanzicht van het dak.
- Gebruik de aanzichten om de inhoud van de piramide (dus het bovenste deel van het dak) te berekenen. Geef het antwoord in gehele dm^3 .

- 6** Op de foto hiernaast zie je een paddenstoel van de ANWB. Deze bestaat uit een grijze kunststof sokkel en een rood met wit gekleurde hoed. De hoed is opgebouwd uit een balk met daarboven een afgeknotte regelmatige piramide. De balk heeft een vierkant grondvlak van 40 bij 40 cm en een hoogte van 5 cm. Het bovenzvlak van de afgeknotte piramide is een vierkant met zijde 21 cm. Deze afgeknotte piramide heeft een hoogte van 17 cm.

- a** Bereken de inhoud van de hoed in dm^3 . Rond af op één decimaal.

De inhoud van de sokkel en hoed samen is 54 dm^3 .

Van de paddenstoel wordt een kunststof miniatuurversie op schaal 1: 12 gemaakt die je kunt gebruiken als sleutelhanger.

De producent van de sleutelhangers gebruikt voor de inhoud de eenheid cubic inch (kubieke inch).

- b** Bereken de inhoud van de miniatuurversie in cubic inch. Gebruik dat $1 \text{ inch} = 2,54 \text{ cm}$ en rond af op één decimaal.



figuur G.10

- 7** [▶ WERKBLAD] Op de foto hiernaast zie je een overdekte brug voor fietsers en voetgangers in Glasgow. De foto is genomen vanaf een hoogte van 1,35 m.

- a** Met wat voor soort perspectief heb je hier te maken?

Over de hele lengte van de tunnel zijn op het hoogste punt



figuur G.11

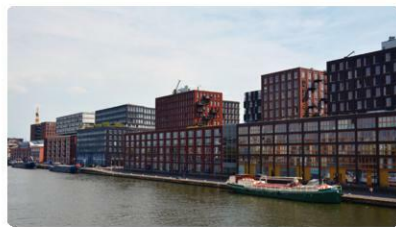
lampen bevestigd. Peter wil een van de lampen vervangen. Hij heeft een trapje bij zich waarmee hij kan reiken tot een hoogte van 3,5 meter.

- b** Is de trap hoog genoeg om de lamp vervangen? Licht toe.

8

[► WERKBLAD]

- a De huizenrij op de voorgrond van de foto in figuur G.12 is 12,5 m hoog. Op welke hoogte is de foto genomen?



figuur G.12

- b In figuur G.13 zie je een foto van het Scheepvaart en Transport College in Rotterdam. De foto is genomen vanaf een hoogte van 5 meter. Bereken de hoogte van het gebouw.



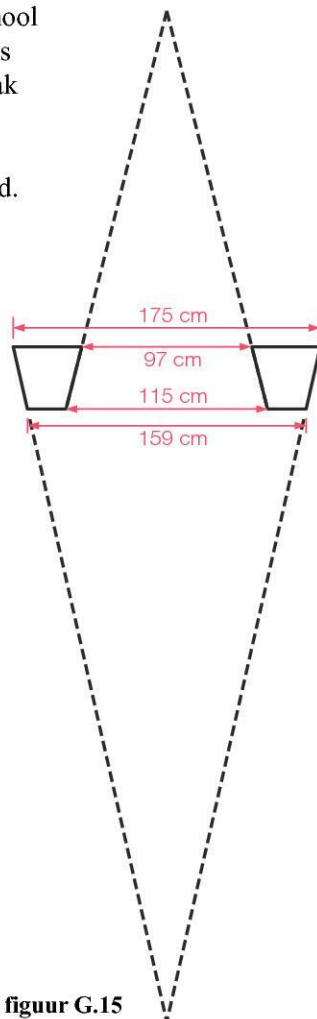
figuur G.13

9

- Op de foto zie je twee bankjes die in de kantine van een school staan. Zowel de binnenkant als de buitenkant van de bankjes hebben de vorm van een afgeknotte kegel. Van het grondvlak is de binnendiameter 115 cm en de buitendiameter 159 cm. Van het bovenzvlak is de binnendiameter 97 cm en de buitendiameter 175 cm. Het zitvlak is 37 cm boven de grond. Zie ook een schets van de doorsnede van het bankje in figuur G.15. Bereken in gehele dm^3 de inhoud van een bankje.



figuur G.14



figuur G.15

- 10** [**► WERKBLAD**] De foto hieronder van het St. Nicolaaslyceum in Amsterdam staat ook op het werkblad. Het dak van de verdieping die aan de voorkant uit de school steekt, bevindt zich op een hoogte van 13,7 m boven het schoolplein. Zie het werkblad.



figuur G.16



figuur G.17

- a** Vanaf welke hoogte boven het schoolplein is de foto genomen? Geef je antwoord in gehele dm.

Van de school is een maquette gemaakt. Zie figuur G.17. De schaal van de maquette is 1 : 75.

- b** De twee pilaren die bovenaan de trap staan zijn in werkelijkheid 8,2 m hoog.
Wat is de hoogte van deze pilaren in de maquette? Geef je antwoord in gehele mm.

Vooraan op de foto van de maquette zie je een sportveld van de sporthal die gedeeltelijk onder de grond ligt. Het veld heeft op de maquette een oppervlakte van 1422 cm^2 .

- c** Bereken de oppervlakte van het echte sportveld in gehele m^2 .

Op de foto van de maquette staat een pijl die wijst naar een lichtkoepel, waarvan je er enkele op het dak van de school kunt zien. Deze lichtkoepels steken van binnenuit het gebouw door het dak heen naar buiten. De lichtkoepels hebben de vorm van een uitgeholde afgeknotte kegel. De lichtkoepels zijn gemaakt van beton en hebben een gewicht van 2900 kg.

- d** Hoeveel m^3 beton is er gebruikt voor een lichtkoepel? Rond af op twee decimalen. Gebruik dat 1 dm^3 beton 2,4 kg weegt.
e In de maquette zijn de lichtkoepels gegoten in plastic. Hoeveel mL plastic is daar per lichtkoepel voor gebruikt? Rond af op één decimaal.

9 Kansverdelingen

- 11** a Bereken de kans dat je bij tien worpen met een dobbelsteen meer dan twee keer 6 ogen gooit.
b Bereken de kans dat je bij twaalf worpen met twee dobbelstenen minstens vier keer meer dan 9 ogen gooit.
c Bereken de kans dat je bij twintig worpen met drie dobbelstenen hoogstens twee keer hoogstens 5 ogen in totaal gooit.
d Eva gooit net zo lang met twee dobbelstenen totdat ze minstens één keer 6 ogen heeft gegooit.
Bereken de kans dat ze vier keer moet gooien.

- 12** In figuur G.18 zie je drie schijven die onafhankelijk van elkaar draaien. Nadat de schijven zijn uitgedraaid, wijst elke pijl een sector aan. Je winst de hoofdprijs van 100 euro als elk van de pijlen het cijfer 3 aanwijst. Bij drie keer het cijfer 4 win je 20 euro en bij drie keer het cijfer 5 win je 5 euro. Mariska speelt het spel één keer.

X = bedrag dat Mariska wint

Y = som van de drie aangewezen getallen

- a Bereken $P(X = 100)$.
b Stel de kansverdeling van X op. Schrijf de kansen als breuken met noemer 120.
c Bereken $P(Y = 10)$.
d Coby speelt het spel vier keer. Bij elk spel heeft ze twee keer het cijfer 3.
Bereken de kans op deze situatie.
e Anne speelt het spel net zo lang, totdat ze de hoofdprijs wint.
Bereken de kans dat ze acht of negen keer moet spelen.



figuur G.18

- 13** Bij een reisorganisatie weet men uit ervaring dat de kans dat een volledig verzorgde reis naar Malta wordt geannuleerd, gelijk is aan 0,08. De reisorganisatie speelt hierop in door meer van deze reizen te verkopen dan de 1250 beschikbare reizen.
- a Neem aan dat er 1350 reizen naar Malta verkocht zijn.
Bereken de kans dat het aantal ingekochte reizen toch voldoende is.
- b Neem aan dat er 1300 reizen naar Malta verkocht zijn.
Bereken de kans dat het aantal annuleringen minder dan één standaardafwijking van het verwachte aantal annuleringen afligt.
- c De eigenaar van de reisorganisatie wil de kans dat iemand teleurgesteld moet worden beperken tot maximaal 5%.
Hoeveel reizen naar Malta zal men maximaal verkopen?

- 14** Pluimveehouder Wegdam heeft 6000 legkippen. Het gewicht van de door deze kippen gelegde eieren is normaal verdeeld met een gemiddelde van 60 gram en een standaardafwijking van 4 gram.
Per dag heeft Wegdam 300 euro vaste kosten. De variabele kosten zijn 1,5 cent per ei.
Voor de eieren onderscheidt Wegdam drie klassen.

VERDELING EIEREN OVER DE KLASSEN

klasse K	klasse M	klasse G
gewicht tot 56 gram verkoopprijs 9 cent per ei	gewicht tussen 56 en 64 gram verkoopprijs 10 cent per ei	gewicht vanaf 64 gram verkoopprijs 11 cent per ei

Neem aan dat de kippen op een dag 5000 eieren leggen.

- Hoeveel van deze eieren zullen naar verwachting tot klasse K behoren? En hoeveel tot klasse M?
- Bereken de verwachte winst die Wegdam deze dag maakt.

- 15** Een bijzondere wijn van Goettelmann is zijn Gewurtztraminer. Deze is gemaakt volgens het principe van de 'Grains Nobles'. Bij wijnen die volgens dit principe zijn gemaakt, laat men de druiven langer hangen dan gebruikelijk. Daarmee worden druiven met een zeer hoog suikergehalte verkregen. Het suikergehalte wordt gemeten in graden Oechsle ($^{\circ}\text{Oe}$). Niet elke druif bevat precies evenveel suiker. Het suikergehalte is normaal verdeeld. Op 28 november hebben de druiven een gemiddeld suikergehalte van 131°Oe en een standaardafwijking van $2,7^{\circ}\text{Oe}$.
- Van hoeveel procent van de druiven wijkt het suikergehalte minder dan $3,5^{\circ}\text{Oe}$ af van het gemiddelde?
 - Bereken de kans dat van vijf willekeurig gekozen druiven er minstens één een suikergehalte heeft van meer dan 138°Oe .

Eén van de druiven heeft op 28 november een suikergehalte van $136,5^{\circ}\text{Oe}$. Volgens Goettelmann behoort deze druif tot de twee procent druiven met het hoogste suikergehalte.

- Onderzoek met een berekening of Goettelmann gelijk heeft.

Wijn met het keurmerk 'Grains Nobles' moet voldoen aan strenge overheidsseisen. Minimaal 98,5% van de druiven moet een hoger suikergehalte hebben dan een wettelijk vastgestelde ondergrens. Goettelmann constateert dat hij op 28 november nog niet aan de eis voldoet.

- Wat weet je van de wettelijk vastgestelde ondergrens?

Om wel aan de overheidsseisen te voldoen, wacht Goettelmann nog even met plukken. Op 4 december blijkt van de geteste druiven 1 op de 11 een suikergehalte van $137,2^{\circ}\text{Oe}$ of meer te hebben. De standaardafwijking is onveranderd $2,7^{\circ}\text{Oe}$.

- Hoeveel suiker bevatten de druiven op 4 december gemiddeld? Rond af op één decimaal.

16 Barbut is een dobbelspel dat oorspronkelijk uit het Midden-Oosten komt en dat je tegen elkaar of met een groep kunt spelen. Er wordt met twee dobbelstenen gegooid op een tafel met een rood vlak en een geel vlak. Voor het gooien kies je een vlak en zet je een bedrag in. In deze opgave gaan we uit van een inzet van 10 euro.

Bij twee keer een 1, twee keer een 2, twee keer een 4 of (in willekeurige volgorde) een 1 en een 2 winnen spelers die hebben gekozen voor het rode vlak. Wordt er twee keer een 3, twee keer een 5, twee keer een 6 of (in willekeurige volgorde) een 5 en een 6 gegooid, dan winnen spelers die hebben ingezet op het gele vlak. Bij alle andere combinaties is er geen winnaar en wordt er opnieuw gegooid, net zolang totdat er een winnende combinatie is.

a De kans dat je bij dit spelletje wint is 0,5.

Licht toe.

Bij de meeste combinaties krijg je als winnaar twee keer zoveel terug als dat je hebt ingezet, dat wil zeggen 20 euro. Alleen bij de combinaties dubbel 1 en dubbel 6 krijg je minder terug. In die gevallen krijg je anderhalf keer je inzet, dus 15 euro. Als je verliest, dan krijg je niets, en als er opnieuw wordt gegooid, dan blijft de inzet staan.

b Toon aan dat de kans dat je 5 euro wint gelijk is aan 0,1.

c Bereken de verwachtingswaarde van de winst per spel.

17 De hartslag is de frequentie waarmee het hart slaat. Voor de meeste mensen ligt deze waarde in rust tussen de 60 en 100 slagen per minuut. Sporters in topconditie bereiken in rust veel lagere waarden, terwijl personen die stress ervaren of een zware inspanning leveren met veel hogere waarden te maken krijgen. Een hele lage of juist hoge hartslag kan echter ook een indicatie zijn van een medisch probleem.

Een verpleegkundige onderzoekt bij een grote groep mensen de hartslag in rust. Deze blijkt normaal verdeeld te zijn met een gemiddelde van 70 en een standaardafwijking van 9,2 slagen per minuut. Hij verdeelt de personen in drie groepen, die hij nader wil onderzoeken.

I hartslag lager dan 60

II hartslag van 60 tot 90

III hartslag van 90 of meer

a Bereken van elke groep hoeveel procent van de personen er toe behoort. Rond af op één decimaal.

De verpleegkundige wil de personen in de middelste groep nader onderzoeken. Daarom verdeelt hij deze personen in oplopende hartslag in de groepen IIA en IIB, die elk 50% van de personen van groep II bevat.

b Bereken de grens tussen de groepen IIA en IIB. Rond af op gehelen.

- 18** De Britse natuurkundige Lord Rayleigh deed in de tweede helft van de 19^e eeuw onderzoek naar de windsnelheden die op een bepaalde plaats voorkwamen. Hij ontdekte daarbij dat de in een jaar voorkomende windsnelheden bij benadering normaal verdeeld zijn. Voor Amersfoort is de gemiddelde windsnelheid 3,8 m/s en de standaardafwijking 1,3 m/s.
- a** Hoeveel uur per jaar is de windsnelheid in Amersfoort meer dan 5 m/s?
 - b** Men spreekt van matige wind als de windsnelheid tussen 3,4 en 7,5 m/s ligt.
Hoeveel uur per jaar is er in Amersfoort matige wind?
 - c** In Zandvoort is de gemiddelde windsnelheid 7,2 m/s. In deze plaats is de windsnelheid gedurende 30,8% van de tijd meer dan 7,9 m/s. Bereken de standaardafwijking van de windsnelheid in Zandvoort. Rond af op één decimaal.
 - d** De standaardafwijking van de windsnelheid in Delfzijl is 1,5 m/s. Gedurende 14,3% van de tijd is de windsnelheid minder dan 5,5 m/s. Bereken de gemiddelde windsnelheid in Delfzijl. Rond af op één decimaal.

- 19** Bij bakker Bolhuis kun je gewone olieballen en olieballen met krenten kopen. Door een goede balans tussen baktijd en baktemperatuur bakt Bolhuis ballen die niet al te vet zijn. Het vetpercentage van de gewone olieballen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 7,3% en een standaardafwijking van 2,2%.
- Victor koopt bij Bolhuis een zak met tien gewone olieballen.
- a** Bereken de kans dat hij meer dan vier ballen met een vetpercentage van meer dan 8% krijgt.
- Ook het vetpercentage van de olieballen met krenten is normaal verdeeld. Het gemiddelde vetpercentage is 6,9%. Van elke 50 olieballen met krenten hebben er twaalf een vetpercentage boven 8%.
- b** Bereken de standaardafwijking. Rond af op één decimaal.

- 20** Een pakketbezorger weet dat de tijd die hij nodig heeft om een adres te bezoeken voor het afleveren van één of meer pakjes normaal verdeeld is met een gemiddelde van 8 minuten en 24 seconden en een standaardafwijking van 2 minuten en 3 seconden.
- a** Bereken de kans dat hij bij het bezoeken van tien adressen gemiddeld minder dan 8 minuten per adres nodig heeft.
- Op dinsdagavond moet hij zijn bestelbus om 20:00 uur inleveren bij het sorteercentrum. Hij moet daarom om 19:50 uur stoppen met bezorgen, om voldoende tijd te hebben om naar het sorteercentrum te rijden. Adressen die hij dan nog niet heeft bezocht, moet hij de volgende dag bezoeken. Om 18:37 uur begint hij met het bezorgen van de pakjes voor de laatste tien adressen die nog in de auto liggen.
- b** Bereken de kans dat hij woensdag nog naar een adres van dinsdag moet.

10 Exponenten en logaritmen

- 21** Een hoeveelheid neemt jaarlijks met 9,6% toe.
- a Hoeveel procent is de toename per 10 jaar?
 - b Hoeveel procent is de toename per maand?
 - c Na hoeveel maanden is de hoeveelheid verdubbeld?
 - d Na hoeveel jaar is de hoeveelheid vertienvoudigd?
- 22** Een hoeveelheid neemt per dag met 17% af.
- a Hoeveel procent is de afname per week?
 - b Hoeveel procent is de afname per uur?
 - c Na hoeveel uren is de hoeveelheid gehalveerd?
 - d Na hoeveel dagen is er nog een kwart van de beginhoeveelheid over?
- 23** a Schrijf de formule $\log(N) = 0,6t - 0,2$ in de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b en g af op twee decimalen.
- b Schrijf de formule $P = 6 \cdot 3^{2t+1}$ in de vorm $t = a + b \cdot {}^3\log(cP)$.
- c Maak bij de formule $Q = 3 + {}^4\log(2x + 1)$ de variabele x vrij.
- d Maak bij de formule $P = 3 - 2^{3t+1}$ de variabele t vrij.
- 24** In een meer groeit een waterplant die het wateroppervlak bedekt. Op 1 mei om 0:00 uur wordt 20 m² van het wateroppervlak bedekt en deze oppervlakte verdubbelt elke vijf dagen. Precies zes weken na 1 mei bedekt de waterplant het gehele meer.
- a Bereken in m² nauwkeurig de oppervlakte van het meer.
 - b Op welke datum is 30% van het meer met de waterplant bedekt?
- 25** a Een hoeveelheid neemt exponentieel toe. Op $t = 4$ is $N = 160$ en op $t = 8$ is $N = 272$. Hierbij is t in dagen. Stel de formule op van N .
- b Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 12$ is er nog 84% over van de oorspronkelijke hoeveelheid. Hierbij is t in dagen. We noemen P het percentage dat nog over is. Stel de formule op van P .
- c Een hoeveelheid is in tien jaar tijd met 85% toegenomen. De eerste zes jaar nam de hoeveelheid met 9,2% per jaar toe. Bereken voor de laatste vier jaar het jaarlijkse toenamepercentage.

- 26** De wereldbevolking consumeert steeds meer vis. Tot omstreeks 2010 werd het grootste gedeelte daarvan door de visserijsector gevangen. Tegenwoordig is het grootste gedeelte echter afkomstig uit viskwekerijen.

In 1970 werd er wereldwijd 3,4 miljoen ton vis gekweekt. In 2015 was die hoeveelheid exponentieel toegenomen tot 109,5 miljoen ton. Uit deze gegevens volgt de formule $N = 3,4 \cdot 1,080^t$ met N de hoeveelheid wereldwijd gekweekte vis in miljoen ton en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1970.

- a** Toon aan dat deze formule volgt uit de gegevens.
- b** Bereken de verdubbelingstijd voor de hoeveelheid wereldwijd gekweekte vis. Rond af op gehele jaren.

Voor de hoeveelheid wereldwijd gevangen vis kun je gebruikmaken van het model $N = 42,8 \cdot \log(t + 10) + 19,1$. Hierin is N de hoeveelheid wereldwijd gevangen vis in miljoenen tonnen en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1970.

- c** In welk jaar werd er wereldwijd evenveel vis gekweekt als gevangen?
- d** In de periode 1970-2015 is de wereldbevolking verdubbeld. De gemiddelde wereldburger is in dezelfde periode meer vis gaan eten. Hoeveel keer zoveel? Rond af op één decimaal.

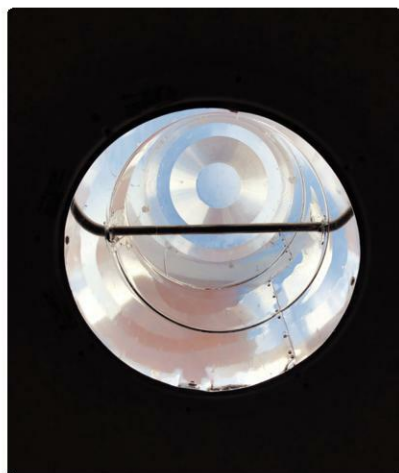


- 27** Daglicht bevordert het gevoel van welzijn, het veraangenaamt de sfeer en verhoogt de arbeidsproductiviteit. Daglicht bespaart bovendien energie en geeft de omgeving in de ware kleuren weer.

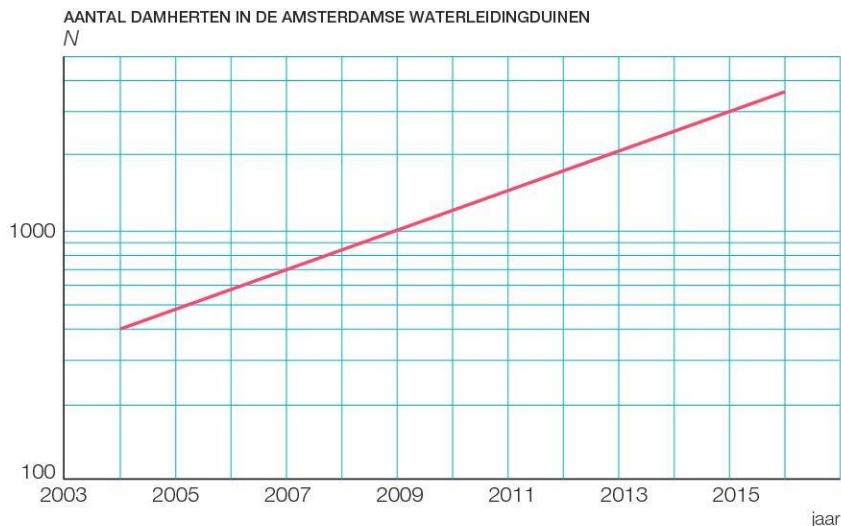
Solatube is een bedrijf dat via een reflecterende buis het daglicht vanuit een lichtkoepel in de leefruimte van een huis of een kantoor laat vallen. De buizen zijn voorzien van reflectiemateriaal waarbij per weerkaatsing steeds hetzelfde percentage van het weerkaatste licht verloren gaat. De hoeveelheid daglicht die in de woonruimte valt, neemt dus exponentieel af met het aantal weerkaatsingen.

Na 35 weerkaatsingen valt nog altijd 90% van de oorspronkelijke hoeveelheid daglicht in de woonruimte.

- a** Stel de formule op van het percentage P van het daglicht dat na n weerkaatsingen in de woonruimte valt.
- b** Hoeveel procent van het daglicht valt na 15 weerkaatsingen in de woonruimte?
- c** Hoeveel procent van het daglicht is na 20 weerkaatsingen geabsorbeerd?



- 28** In de jaren 2004 tot en met 2016 werd jaarlijks in april geteld hoeveel damherten er leefden in de Amsterdamse Waterleidingduinen (AWD). Op de verticale as is een logaritmische schaal gebruikt.



figuur G.19

- Hoeveel damherten waren er in april 2007 in de AWD?
- Bereken met hoeveel procent per jaar het aantal damherten toenam in de periode april 2004-april 2015. Rond af op één decimaal.

Er ontstaat onherstelbare schade door overbegrazing als het aantal damherten per km^2 te groot is. In een artikel van Duinbehoud dat in de periode 2004-2016 verscheen, werd aangegeven dat de grens van de natuurlijke draagkracht zojuist bereikt was. Er waren toen 40 damherten per km^2 .

- Bereken in welk jaar het artikel van Duinbehoud verscheen. Gebruik dat bij het aantal damherten in de AWD de formule $N = 400 \cdot 1,20^t$ hoort met t in jaren en $t = 0$ in april 2004 en dat de AWD 3319 ha beslaan.



29 De schaal van Richter is een meetschaal waarmee de waargenomen sterkte van een aardbeving wordt uitgedrukt in een getal. Dat getal wordt ook wel de magnitude van een aardbeving genoemd. De magnitude M is afhankelijk van de hoeveelheid energie E in joule die gepaard gaat met een aardbeving. Daarbij hoort de formule $M = 0,67 \cdot \log(0,5E) - 3$. De formule geldt alleen voor waarden van M die groter zijn dan 0.

- a** Bereken voor welke waarden van E de formule geldt. Rond af op duizendtallen.
- b** Aan de allesverwoestende tsunami in Japan op 11 maart 2011 gingen meerdere aardbevingen vooraf. De zwaarste was de zeebeving bij Sendai, die gepaard ging met een hoeveelheid energie van $2 \cdot 10^{18}$ joule.

Bereken de magnitude van deze aardbeving op de schaal van Richter. Rond af op één decimaal.

- c** Op 8 januari 2018 vond in Groningen een aardbeving plaats met een kracht van 3,4 op de schaal van Richter. Bereken de hoeveelheid energie die gepaard ging met deze aardbeving. Geef het antwoord in de wetenschappelijke notatie en rond af op één decimaal.



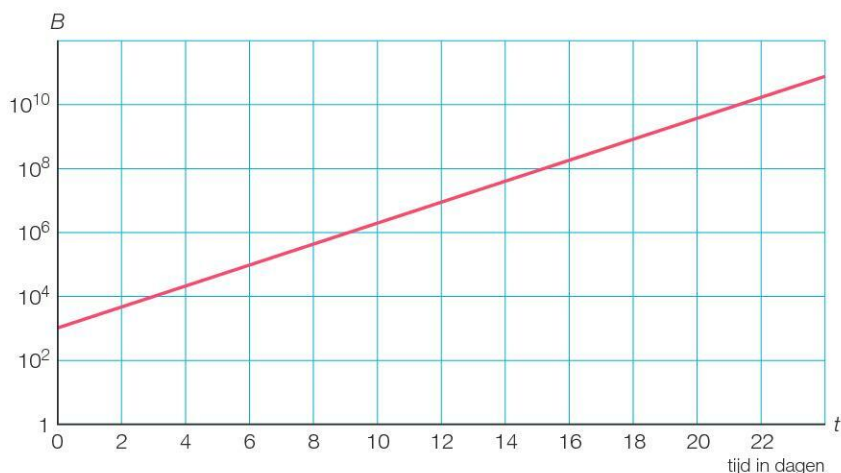
- d** Als de hoeveelheid energie verdubbelt, neemt M steeds met hetzelfde getal toe. Bereken dit getal in twee decimalen.
- e** De formule van M is ook te schrijven in de vorm $E = b \cdot g^M$. Bereken b en g . Rond b af op duizendtallen en g op gehele.
- f** Elke keer als M met 1 toeneemt, wordt E met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Bereken dit getal in gehele nauwkeurig.

30 Wit licht is een mengsel van de kleuren van de regenboog. Gaat wit licht door water, dan worden de verschillende kleuren licht met verschillende percentages per meter geabsorbeerd, waardoor het licht van kleur lijkt te veranderen. Van rood licht wordt per meter 60% geabsorbeerd en van blauw licht 10%.



- a** Bereken voor rood en voor blauw licht op welke diepte nog 50% van de oorspronkelijke hoeveelheid licht zichtbaar is. Rond af op gehele cm.
- b** Bereken op welke diepte de hoeveelheid blauw licht tien keer zo groot is als de hoeveelheid rood licht. Neem aan dat de hoeveelheden boven water gelijk zijn en rond af op gehele cm.

- 31** Omdat de consument steeds vaker verse producten wenst, wordt er veel onderzoek gedaan naar de houdbaarheid van producten die kunnen bederven. Bij één van de onderzoeken wordt gekeken naar het aantal pseudomonas-bacteriën per kilogram verse kip.



figuur G.20

In figuur G.20 zijn de resultaten van een proef verwerkt, waarbij 1 kg verse kip werd bewaard in een koelkast die op 0°C was ingesteld. Er werd bijgehouden hoe het aantal bacteriën B per kg verse kip zich ontwikkelde. In de figuur is B uitgezet tegen t , waarbij t de tijd in dagen is vanaf het begin van het koelen van de kip.

Volgens de Warenwet mogen er ten hoogste 50 miljoen bacteriën per kg kip aanwezig zijn. Zijn er meer bacteriën aanwezig, dan wordt het kippenvlees afgekeurd en mag het niet gegeten worden.

- a** Na negen dagen waren er meer bacteriën dan aan het begin van het koelen.

Hoeveel keer zoveel?

- b** Mag de kip volgens de Warenwet na 12 dagen nog gegeten worden? Licht toe.

Bij de lijn hoort de formule $\log(B) = \frac{1}{3}t + 3$.

- c** Bereken met behulp van de formule na hoeveel dagen de kip volgens de Warenwet niet meer gegeten mag worden. Rond af op één decimaal.
- d** Schrijf de formule $\log(B) = \frac{1}{3}t + 3$ in de vorm $B = b \cdot g^t$. Rond g af op drie decimalen.

11 Logisch redeneren

- 32** Gegeven is de volgende redenering.
Iedereen is hoogopgeleid of handig.
Roelien is niet handig.
Dus Roelien is hoogopgeleid.
- a** Is deze redenering logisch geldig?
 - b** Voer afkortingen in en noteer de beweringen in de redenering met behulp van die afkortingen en logische symbolen.
- 33** Aan 95 personen die sporten in clubverband is gevraagd van welk soort club zij lid zijn. We gebruiken de volgende afkortingen.
 V : Persoon is lid van een voetbalclub.
 H : Persoon is lid van een hockeyclub.
 T : Persoon is lid van een tennisclub.
Voor 40 personen geldt V , voor 20 personen geldt H en voor 25 personen geldt T .
Voor geen van de personen geldt $V \wedge H \wedge T$.
Voor 3 personen geldt $V \wedge T$, voor 3 personen geldt $V \wedge H$ en voor 5 personen geldt $H \wedge T$.
Gegeven is de bewering $H \wedge T \Rightarrow \neg V$.
- a** Beschrijf deze bewering in een gewone zin. Is deze bewering waar voor deze groep?
 - b** Voor hoeveel van deze 95 personen geldt $\neg(V \vee H \vee T)$?
- 34** Er zijn broodjes uit de kantine gestolen en de kantinebeheerder probeert erachter te komen wie schuldig is. Hij krijgt tegenstrijdige berichten.
Ad zegt dat Ben liegt. Ben zegt dat Cor of Daan liegt. Cor zegt dat Ad en Ben liegen. Daan zegt dat Cor de waarheid spreekt.
We gebruiken in deze opgave de volgende afkortingen.
 A : Ad spreekt de waarheid.
 B : Ben spreekt de waarheid.
 C : Cor spreekt de waarheid.
 D : Daan spreekt de waarheid.
De eerste bewering 'Ad zegt dat Ben liegt' noteren we dan als $A \Leftrightarrow \neg B$.
- a** Noteer de overige beweringen met de letters A , B , C en D en logische symbolen.
 - b** Wie liegen er?

35 Voor een bruggenbouwproject heeft Eddy 20 wc-rollen nodig. Sam zegt dat hij er zeker zes meeneemt en misschien nog twee extra. Joke zegt dat ze er hoogstens vier kan meenemen. Anja zegt dat ze meer wc-rollen meeneemt dan Joke, maar minder dan Sam.

- a** Als Eddy er zeker van wil zijn dat hij genoeg wc-rollen heeft, hoeveel moet hij er dan zelf nog meenemen?
- b** Als Eddy erop vertrouwt dat zijn vrienden allemaal het hoogst mogelijke aantal wc-rollen meenemen, hoeveel moet hij er dan zelf nog meenemen?

36 In deze opgave bekijken we de volgende twee uitspraken.

I Alles wat ik niet wil, heb ik ook niet.

II Alles wat ik niet heb, wil ik ook niet.

- a** Teken een venndiagram waarin uitspraak I waar is, maar uitspraak II niet.
- b** Geef van de beweringen A en B hieronder aan of ze uit uitspraak I, uitspraak II, beide uitspraken of geen van deze twee uitspraken volgen.
 - A Alles wat ik wil, heb ik ook.
 - B Er is iets wat ik heb, maar niet wil hebben.
- c** Als je zou moeten kiezen tussen uitspraak I of uitspraak II, welke zou je dan willen dat op jou van toepassing is? Geef argumenten waaruit blijkt dat je het verschil tussen de uitspraken snapt.

37 Nelleke begint met nieuwe schoenen te trainen voor de Nijmeegse Vierdaagse en doet de volgende uitspraak.

Als het zo is dat je van knellende schoenen blaren krijgt, dan krijg ik blaren.

We gebruiken de volgende afkortingen.

A : Je hebt knellende schoenen.

B : Je krijgt blaren.

Schrijf de uitspraak van Nelleke met de letters A en B en logische symbolen.



TEKST

De verrassingsparadox

Een docent kondigt aan dat de leerlingen volgende week een onverwachte overhoring krijgen. Een van de leerlingen geeft het volgende commentaar. 'Maar meneer, u zegt dat het een onverwachte overhoring wordt, maar dat betekent dat de overhoring niet op vrijdag plaats kan vinden, want als u de overhoring op donderdag nog niet heeft gegeven dan weet iedereen dat u het vrijdag zal geven en is het dus niet meer onverwacht. Nu we weten dat de overhoring op zijn laatst op donderdag plaats zal vinden valt donderdag ook af, want dan weet iedereen op woensdagmiddag het al en is de overhoring dus niet meer onverwacht. Zo verder redenerend vallen woensdag, dinsdag en maandag ook af. De onverwachte overhoring kan dus niet plaatsvinden.'

De docent geeft tot ieders verrassing de overhoring op woensdag en dat is volledig onverwacht.

- a** Waarom is hier sprake van een paradox?

De wiskundige en filosoof Willard Van Orman Quine maakt onderscheid tussen drie soorten paradoxen.

- 1 Een paradox waarvan de conclusie klopt, maar indruist tegen je intuïtie.
 - 2 Een paradox waarvan de conclusie onjuist is, maar de fout in de denkstap niet direct aanwijsbaar is.
 - 3 Een paradox waarin onze taal tekortschiet, bijvoorbeeld als de uitspraak naar zichzelf verwijst.
- b** In deze opgave is er sprake van een paradox van soort 2.
Wat is volgens jou de fout in de denkstap in de verrassingsparadox?
- c** Ga bij de opgaven 65 tot en met 69 in hoofdstuk 11 na met welke soort paradox je te maken hebt.

- 39** Ad, Ben en Cor hebben elk een rode, blauwe of witte pet op. Ze kunnen de kleur van de pet van de anderen wel zien, maar die van zichzelf niet. Ze weten dat er één rode pet en hoogstens één blauwe pet is.
Ad zegt: 'Ik weet niet welke kleur pet ik op heb.'
Licht toe dat Ben en Cor na de uitspraak van Ad beiden wel weten welke kleur pet ze op hebben. Welke kleur pet is dat? Onderscheid verschillende situaties.

40 Bij voetbal geldt de buitenspelregel.

Je staat in buitenspelpositie als je op de speelhelft van je tegenstander staat en je dichterbij de achterlijn van de tegenstander staat dan de bal en de voorlaatste speler van de tegenstander (inclusief de doelman).

Deze regel bestaat uit de volgende vier proposities.

A: Je staat in buitenspelpositie.

B: Je staat op de speelhelft van de tegenstander.

C: Je staat dichterbij de achterlijn van de tegenstander dan de bal.

D: Je staat dichterbij de achterlijn van de tegenstander dan de voorlaatste speler van de tegenstander (inclusief de doelman).

a Schrijf de regel met de letters *A*, *B*, *C* en *D* en logische symbolen.

In buitenspelpositie staan is op zich niet strafbaar. Hiervoor geldt de volgende regel.

Je wordt alleen voor buitenspelpositie bestraft indien je, op het moment dat de bal wordt geraakt of gespeeld door een medespeler, actief bij het spel bent betrokken door:

- in te grijpen in het spel, of
- een speler van de tegenstander in diens spel te beïnvloeden, of
- voordeel te trekken uit je buitenspelpositie.

Deze regel bestaat uit de volgende vier proposities.

E: Je wordt voor buitenspelpositie bestraft.

F: Op het moment dat de bal wordt geraakt of gespeeld door een medespeler grijp je in het spel in.

G: Op het moment dat de bal wordt geraakt of gespeeld door een medespeler beïnvloed je een speler van de tegenstander in diens spel.

H: Op het moment dat de bal wordt geraakt of gespeeld door een medespeler trek je voordeel uit de buitenspelpositie.

b Schrijf deze regel met de letters *E*, *F*, *G* en *H* en logische symbolen.

c Vermeld voor beide bovenstaande regels of je met een noodzakelijke voorwaarde, een voldoende voorwaarde of een noodzakelijke en voldoende voorwaarde te maken hebt.



41 In 1960 introduceerde Peter Wason een test voor logisch redeneren: *the Wason selection task*.

De proefpersonen kregen de vier kaarten in de figuur hiernaast te zien. Op elke kaart staat aan de ene kant een letter en op de andere kant een cijfer. Verder geldt de volgende regel voor deze vier kaarten:



figuur G.21

Als er op de ene kant een klinker staat, dan staat er op de andere kant een even getal. Aan de proefpersonen werd gevraagd welke van de vier kaarten ze minimaal om moesten draaien om zeker te zijn dat de regel inderdaad geldt voor deze vier kaarten.

a Welke kaarten zou jij omdraaien?

In deze opgave gebruiken we de volgende afkortingen.

K: Er staat een klinker op een kant van de kaart.

E: Er staat een even getal op een kant van de kaart.

De situatie dat je een kaart met een A ziet, kun je als volgt noteren:

$K \Rightarrow E$, *K* conclusie *E*.

b Noteer op dezelfde manier de volgende situaties.

I: Je ziet een kaart met een D.

II: Je ziet een kaart met een 4.

III: Je ziet een kaart met een 7.

c Welke kaarten moeten minimaal omgedraaid worden om de regel te controleren voor deze vier kaarten? Geef een redenering met behulp van je antwoorden bij vraag b.

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm

- Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen.
- De toets Ans en fouten verbeteren.
- Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen.
- Decimaal getal omzetten in breuk.

vwo A/C deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 19

Formules en grafieken

- Formules invoeren en grafieken plotten.
- Tabellen maken.
- De opties snijpunt, nulpunt, maximum en minimum.

vwo A/C deel 1
hoofdstuk 1
bladzijde 37

De binomiale verdeling

- Binomiale kansen berekenen.
- Cumulatieve binomiale kansen berekenen.

vwo C deel 3
hoofdstuk 9
bladzijde 64

De normale verdeling

- Oppervlakten berekenen.
- Grenzen berekenen.
- Het berekenen van μ en σ .

vwo C deel 3
hoofdstuk 9
bladzijde 73,
74 en 77

Allerlei

- Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR.

Overzicht routes

8 Meetkunde

8.1 Vlakke figuren

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
□ basis										
⊙ midden										
* uitdagend										

11	12	13	14	15	16	17	18

8.2 Ruimtefiguren

opgave	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
□ basis																
⊙ midden																
* uitdagend																

8.3 Aanzichten

opgave	35	36	37	38	39	40
□ basis						
⊙ midden						
* uitdagend						

8.4 Perspectief

opgave	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

9 Kansverdelingen

9.1 Toevalsvariabelen en verwachtingswaarde

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

16	17	18	19	20	21

9.2 De binomiale verdeling

opgave	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
□ basis										
⊙ midden										
* uitdagend										

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42

9.3 Berekeningen bij normaalkrommen

opgave	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

9.4 Toepassingen van de normale verdeling

opgave	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

9.5 De wortel- n -wet

opgave	72	73	74	75	76	77	78	79
□ basis								
⊙ midden								
* uitdagend								

10 Exponenten en logaritmen

10.1 Exponentiële groei

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
□ basis										
⊙ midden										
* uitdagend										

11	12	13	14	15	16	17	18	19

10.2 Groeipercentages en formules

opgave	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
□ basis																	
⊙ midden																	
* uitdagend																	

10.3 Logaritmen

opgave	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
□ basis															
⊙ midden															
* uitdagend															

10.4 Werken met logaritmen

opgave	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

11 Logisch redeneren

11.1 Redeneren

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
□ basis												
⊙ midden												
* uitdagend												

11.2 Logische symbolen

opgave	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
□ basis																
⊙ midden																
* uitdagend																

11.3 Beweringen en voorwaarden

opgave	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

11.4 Redeneren met groepen

opgave	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
□ basis														
⊙ midden														
* uitdagend														

57	58	59	60	61	62

11.5 Paradoxen en leugens

opgave	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
□ basis													
⊙ midden													
* uitdagend													

Trefwoordenregister

A

aanzicht 31
afgeknotte piramide 21
als-dan-bewering 148

B

Bernoulli, Jacob 63
Bernoulli-experiment 62
binomiaal
 kansexperiment 62
binomiale
 toevalsvariabele 62
binomiale verdeling 62
bovenaanzicht 31

C

centrale projectie 40
conclusie 142
contradictie 176
cumulatieve kans 64
cumulatieve
 kansverdeling 64

D

driepuntsperspectief 38
dubbellogaritmisch
 papier 130

E

éénpuntsperspectief 38
equivalent 162
exclusieve of 151

G

gelijkvormig 16
groeifactor 96
groeipercantage 102
grondtal van de
 logaritme 118

H

halveringstijd 105
horizon 37

I

implicatieteken 148
inclusieve of 151

K

kanshistogram 55
kansverdeling 55

L

logaritme 118
 grondtal van - 118
logaritmische
 schaalverdeling 126
logaritmisch papier 127
logica 142
logisch geldig 142
logische symbolen 148

M

mislukking 62
Moskou-papyrus 25

N

noodzakelijke
 voorwaarde 161
noodzakelijke en
 voldoende
 voorwaarde 162
normaalkromme 72
normale verdeling 72

O

ontkenningsteken 148

P

paradox 177
perspectieftekenen 37
piramide 21
regelmatige vierzijdige
 - 21
prisma 20

propositie 148

Pythagoras, stelling van
 - 10

R

redeneerstappen 144
ruimtefiguren 20

S

samengestelde
 beweringen 151
standaardafwijking van
 binomiale
 toevalsvariabele 69
stelling van
 Pythagoras 10
succes 62

T

tafereel 40
tegenvoorbeeld 170
toevalsvariabele 53
 binomiale - 62
trapezium 12
tweepuntsperspectief 37

U

uitgangspunten 142

V

Venn, John 170
venndiagram 166
verdubbelingstijd 105
verdwijnpunt 37
vergrotingsfactor 16, 26
verwachtingswaarde 58,
 69
vlakke figuren 12
voldoende voorwaarde 161
volledige redenering 142
vooraanzicht 31

voorwaarde

noodzakelijke - 161

noodzakelijke en

voldoende - 162

voldoende - 161

W

waarheidstabel 152

wortel- n -wet

voor het

steekproefgemiddelde

89

voor steekproef van

lengte n 88

Z

zijaanzicht 31

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Richard van de Pol, Tilburg; Haasart, Wim de Haas, Rhenen

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Shutterstock: p. 6-7, 29, 47 o, 66, 82, 106, 116, 133, 140, 154, 178, 191 o, 199 b

Alamy / Imageselect: p. 8 (b, o), 9, 37, 38 (V), 192 m

Sabine de Waal, Hendrik Ido Ambacht: p. 18 b, 34, 35, 47, 115, 38 (IV), 143,

Mark Haneveld, Lochem: p. 18 o, 28 l, 36 o, 40 (lb, rb, mb), 43 (b, o), 46, 126, 188, 189 (b, m, o), 191 b, 192 (b, o), 193 (l, r), 199 o

Roeland van Santbrink, Laren: p. 23 o, 27

Jan Dijkhuis, Rozendaal: 23 m

Lugarde, Laren: p. 24 b

Gerrit de Jong, Middelburg: p. 24 o, 30, 31 b

Mark Haneveld, Lochem: p. 23

Henk van Putten,

History of science / Heritage-Images /

Imageselect: p. 25

iStockphoto: p. 26, 69, 100, 102, 103, 105, 108, 112, 130, 201 o

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Ramon van Flymen: p. 28 r

Jannes Linders, Rotterdam / Boymans: p. 31 o

Lida Goede: p. 33

Artofvintage.nl: p. 34 o

Scagliola / Brakkee © Neutelings Riedijk

Architecten: p. 36 b, 41 b

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Marco van Middelkoop: p. 38 (I)

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Rob Huibers: p. 38 (II)

Nationale Beeldbank: p. 38 (III), 44, 101

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Herman Wouters: p. 38 (VI)

Robbiedoes / Wikipedia: p. 39

Robert Harding / Imageselect: p. 40 o

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Herman Engbers: p. 41 (m, o)

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Bart Koetsier: p. 42 b

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Berlinda van Dam: p. 42 o, 86

Kaartgegevens ©2015 Google Street View: p. 47 m

Boston Globe via Getty Images: p. 48-49

Getty Images: p. 64

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Sabine Joosten: p. 96-97

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Jan Luit: p. 107

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Harold Versteeg: p. 113

ANP Foto / Hollandse Hoogte / EPA / Legnan Koula: p. 114

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Paul van Riel: p. 138-139

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Lex van Lieshout: p. 149

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Bart Maat: p. 160

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Rene Bouwman: p. 163

By permission of the Master and Fellows of Gonville & Caius College, Cambridge: p. 170
ANP Foto / Hollandse Hoogte / Kees van de Veen: p. 190

Imageselect: p. 200

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Robin Utrecht: p. 201 b

ANP Foto / Hollandse Hoogte / Flip Franssen: p. 204

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie.
Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s),
redactie of uitgever ontlenen.

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom
hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 21

© 2021 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u
(her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf
schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv.
Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op
www.onderwijsenauteursrecht.nl.

*This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff
Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.*

ISBN 978-90-01-73706-1



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je **krijgt** daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. **Dus** wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig **hebt**.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



Noordhoff



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-73706-1

